HAL
open science

Modélisation stochastique pour l'analyse d'images texturées : Approches Bayésiennes pour la caractérisation dans le domaine des transformées

Nour-Eddine Lasmar

▶ **To cite this version:**

Nour-Eddine Lasmar. Modélisation stochastique pour l'analyse d'images texturées : Approches Bayésiennes pour la caractérisation dans le domaine des transformées. Traitement des images [eess.IV]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2012. Français. NNT : . tel-00809279

HAL Id: tel-00809279

https://theses.hal.science/tel-00809279v1

Submitted on 8 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4639

Thèse

présentée à

L'Université Bordeaux I

École Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

par

Nour-Eddine LASMAR

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : Signal et Image

Modélisation stochastique pour l'analyse d'images texturées : Approches Bayésiennes pour la caractérisation dans le domaine des transformées

---

Soutenue le : 07 décembre 2012

Après avis des rapporteurs :

Olivier ALATA	Professeur, Université de Saint-Étienne
Christine FERNANDEZ-MALOIGNE	Professeur, Université de Poitiers

Devant la commission d'examen composée de :

Mohamed NAJIM	Professeur, Institut Polytechnique de Bordeaux	Président
Olivier ALATA	Professeur, Université de Saint-Étienne	Rapporteur
Christine FERNANDEZ-MALOIGNE	Professeur, Université de Poitiers	Rapporteur
Jean-François AUJOL	Professeur, Université de Bordeaux 1	Examinateur
Marie CHABERT	Professeur, Institut Polytechnique de Toulouse	Examinateur
Yannick BERTHOUMIEU	Professeur, Institut Polytechnique de Bordeaux	Directeur de thèse

– 2012 –

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation d'images texturées à l'aide des représentations multi-échelles et multi-orientations. Partant des résultats d'études en neurosciences assimilant le mécanisme de la perception humaine à un schéma sélectif spatio-fréquentiel, nous proposons de caractériser les images texturées par des modèles probabilistes associés aux coefficients des sous-bandes. Nos contributions dans ce contexte concernent dans un premier temps la proposition de différents modèles probabilistes permettant de prendre en compte le caractère leptokurtique ainsi que l'éventuelle asymétrie des distributions marginales associées à un contenu texturée. Premièrement, afin de modéliser analytiquement les statistiques marginales des sous-bandes, nous introduisons le modèle Gaussien généralisé asymétrique. Deuxièmement, nous proposons deux familles de modèles multivariés afin de prendre en compte les dépendances entre coefficients des sous-bandes. La première famille regroupe les processus à invariance sphérique pour laquelle nous montrons qu'il est pertinent d'associer une distribution caractéristique de type Weibull. Concernant la seconde famille, il s'agit des lois multivariées à copules. Après détermination de la copule caractérisant la structure de la dépendance adaptée à la texture, nous proposons une extension multivariée de la distribution Gaussienne généralisée asymétrique à l'aide de la copule Gaussienne. L'ensemble des modèles proposés est comparé quantitativement en terme de qualité d'ajustement à l'aide de tests statistiques d'adéquation dans un cadre univarié et multivarié. Enfin, une dernière partie de notre étude concerne la validation expérimentale des performances de nos modèles à travers une application de recherche d'images par le contenu textural. Pour ce faire, nous dérivons des expressions analytiques de métriques probabilistes mesurant la similarité entre les modèles introduits, ce qui constitue selon nous une troisième contribution de ce travail. Finalement, une étude comparative est menée visant à confronter les modèles probabilistes proposés à ceux de l'état de l'art.

Mots-clés Analyse des textures, modélisation univariée, modélisation multivariée, transformées en ondelettes, recherche d'images par le contenu, classification.

Abstract

In this thesis we study the statistical modeling of textured images using multi-scale and multi-orientation representations. Based on the results of studies in neuroscience assimilating the human perception mechanism to a selective spatial frequency scheme, we propose to characterize textures by probabilistic models of subband coefficients. Our contributions in this context consist firstly in the proposition of probabilistic models taking into account the leptokurtic nature and the asymmetry of the marginal distributions associated with a textured content. First, to model analytically the marginal statistics of subbands, we introduce the asymmetric generalized Gaussian model. Second, we propose two families of multivariate models to take into account the dependencies between subbands coefficients. The first family includes the spherically invariant processes that we characterize using Weibull distribution. The second family is this of copula based multivariate models. After determination of the copula characterizing the dependence structure adapted to the texture, we propose a multivariate extension of the asymmetric generalized Gaussian distribution using Gaussian copula. All proposed models are compared quantitatively using both univariate and multivariate statistical goodness of fit tests. Finally, the last part of our study concerns the experimental validation of the performance of proposed models through texture based image retrieval. To do this, we derive closed-form metrics measuring the similarity between probabilistic models introduced, which we believe is the third contribution of this work. A comparative study is conducted to compare the proposed probabilistic models to those of the state-of-the-art.

Keywords Texture analysis, univariate modeling, multivariate modeling, wavelet transforms, content based image retrieval, classification.

À ma mère, mon père,
à mes chers frères Mohammed, Khadir et Abdelhadi
à mes très chères sœurs Aicha, Bouchra et Khadija
à ma bien aimée épouse Ibtissam.

"Dis :« En vérité, ma prière, mes actes de dévotion, ma vie et ma mort appartiennent à Allah, Seigneur de l'Univers. À Lui nul associé ! Et voilà ce qu'il m'a été ordonné, et je suis le premier à me soumettre. »"
(Coran 6 : 162-163)

Remerciements

Ce mémoire est le fruit de travail au sein de l'équipe Signal et Image du laboratoire de l'intégration du Matériau au Système. Je remercie vivement Mohamed NAJIM, Professeur à l'Institut Polytechnique de Bordeaux, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe et fait l'honneur de présider le jury réuni pour ma soutenance de thèse.

Je tiens à remercier Yannick BERTHOUMIEU, Professeur à l'Institut Polytechnique de Bordeaux, le directeur de cette thèse, pour m'avoir guidé, conseillé, encouragé tout en me laissant travaillé très librement.

Je remercie sincèrement Christine FERNANDEZ-MALOIGNE, Professeur à l'Université de Poitiers et Olivier ALATA, Professeur à l'Université de Saint-Étienne, pour m'avoir fait l'honneur de rapporter sur ce mémoire.

Je remercie également Jean-François AUJOL, Professeur à l'Université de Bordeaux 1 et Marie CHABERT, Professeur à l'Institut Polytechnique de Toulouse pour avoir accepté de juger ces quelques années de travail en participant au jury de ma thèse.

Je tiens à témoigner à Driss ABOUTAJDINE, Professeur à l'Université Mohammed V Agdal, toute la reconnaissance que je lui dois pour m'avoir donné l'occasion de faire mes premiers pas dans le domaine de la recherche. Également, je remercie tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant mes années d'études en DESA Informatique et Télécommunications à la faculté des sciences de Rabat.

Je remercie également Youssef STITOU, Abdourrahmane ATTO et Lionel BOMBRUN qui se sont toujours montré disponibles pour des discussions et pour leurs conseils qui m'ont été précieux.

Je remercie bien sûr l'ensemble des permanents, doctorants et personnel administratif de l'équipe Signal et Image. Je remercie particulièrement Dominique JEANTET, qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin et mes collègues de bureau : Jacques DANIEL, Guillaume ZINCK et Vincent TOUJAS. Je n'omettrai pas de remercier Céline Goutteux, secrétaire de l'équipe, pour son aide précieuse avant et après ma soutenance de thèse.

Je voudrai aussi exprimer mes remerciements à mes amis sans exception. En particulier, Ahmed ABDOU, Firas KHEMANE, Ahmed DRISSI, Ah-

mad DARWICHE, Mustapha TAOUFIK, Othmane BENHMAMMOUCH et Amine RAJI.

Enfin, j'adresse ma profonde gratitude et ma reconnaissance à ma défunte mère qu'Allah l'accueille dans son vaste paradis et à mon cher père qu'Allah le bénisse. À mes chers frères Mohammed, Khadir et Abdelhadi. À mes chères sœurs Aicha, Bouchra et Khadija. À mon beau-frère Jawad. À mon épouse bien aimée Ibtissam et à ma belle-famille.

Table des matières

Glossaire **xxvii**

Introduction **1**

1 Méthodes d'analyse de textures : état de l'art **11**
1.1 Introduction 12
1.2 Notion de Texture 12
1.2.1 Types de texture 13
1.2.2 Perception visuelle des textures 16
1.3 Analyse de textures 19
1.3.1 Méthodes géométriques 19
1.3.2 Méthodes statistiques basées sur l'analyse spatiale . . . 20
1.3.3 Méthodes fréquentielles par filtrage 22
1.3.4 Méthodes basées sur la modélisation probabiliste . . . 23
1.4 Comparaison des méthodes usuelles d'analyse de textures . . . 25
1.4.1 Ondelettes *versus* filtres de Gabor 25
1.4.2 Descripteurs fondées sur les motifs binaires locaux et les matrices de cooccurrence 26
1.4.3 Modélisation probabiliste des coefficients d'ondelettes . 26
1.5 Conclusion 28

2 Modèles univariés des lois marginales **31**
2.1 La densité Gaussienne généralisée 32
2.1.1 Définition 32
2.1.2 Propriétés 33
2.1.3 Estimation des paramètres 37
2.1.3.1 Estimateur MM 37
2.1.3.2 Estimateur ML 38
2.2 La densité Gaussienne généralisée asymétrique 43
2.2.1 Définition 43
2.2.2 Propriétés 50

2.2.3 Estimation des paramètres 54
2.2.3.1 Méthode des moments 56
2.2.3.2 Méthode HOS 57
2.2.3.3 Estimateur ML 59
2.2.4 Performance des estimateurs 62
2.3 Qualité de l'ajustement des statistiques marginales 68
2.3.1 Test d'adéquation χ^2 68
2.3.2 Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov 73
2.3.3 Ajustement des statistiques d'ordre supérieur : HOS fitting 74
2.4 Conclusion 75

3 Modèles multivariés des lois jointes 77
3.1 Mesure de la dépendance des coefficients d'ondelettes 78
3.1.1 Outils qualitatifs 79
3.1.1.1 Densité conditionnelle empirique 79
3.1.1.2 Chi-plots 84
3.1.2 Mesures quantitatives 85
3.1.2.1 Coefficients de corrélation 85
3.1.2.2 Information mutuelle 87
3.1.2.3 Choix d'un modèle de dépendance 87
3.2 Modèle SIRV 89
3.2.1 Définition 89
3.2.2 Propriétés 89
3.2.3 Estimation des paramètres 91
3.2.4 Sélection du modèle *a posteriori* pour la densité de probabilité caractéristique du SIRV 95
3.3 Modèles à copule Gaussienne 96
3.3.1 Définitions 97
3.3.2 Propriétés 97
3.3.3 Choix de copule 98
3.3.3.1 Copule Gaussienne 99
3.3.3.2 Copule de Student-t 99
3.3.3.3 Copules Archimédiennes : de Frank, de Clayton et de Gumbel 100
3.3.3.4 Sélection du modèle 101
3.3.4 Estimation des paramètres 105
3.4 Qualité de l'ajustement des statistiques jointes 107
3.4.1 Modèle SIRV 109
3.4.2 Modèle multivarié de la Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne 115

3.4.3 Bilan 119
3.5 Conclusion 123

4 Recherche d'images par le contenu texture 125
4.1 Principe général 127
4.2 Cadre Bayésien pour la recherche d'images 128
4.3 Approches probabilistes 132
4.3.1 Modèles univariés 132
4.3.2 Modèles multivariés 134
4.4 Mesures de similarité 135
4.4.1 Modèle de la Gaussienne généralisée asymétrique . . . 136
4.4.2 Modèle SIRV à densité caractéristique Weibull 138
4.4.3 Modèle multivarié à copule Gaussienne 141
4.5 Expérimentation et résultats 145
4.5.1 Protocole expérimental 145
4.5.2 Critères d'évaluation 146
4.5.2.1 Taux moyen de bonne détection 148
4.5.2.2 Critères graphiques : courbe de précision/rappel et courbe de rappel/taille de la requête 149
4.5.3 Modèles univariés 150
4.5.4 Modèles multivariés 158
4.6 Conclusion et discussion 170

Conclusions et perspectives 171

Annexes 181

A Approximation de la fonction *Ratio Gaussien généralisée* 181

B Génération d'échantillons de distribution AGGD 185

C Estimateur IFM et fonction d'autocorrélation 189

D Tests de la *Gaussianité* multivariée 191
D.1 Test de Royston 191
D.2 Test de Doornik-Hansen 193

E Comparaison entre la règle de sélection MAP et l'emploi de l'expression analytique de la JD 195

Bibliographie 199

Table des figures

1 Les 40 classes de la base VisTex. 6
2 Les 111 classes de l'album de Brodatz. 7
3 Image D18 de l'album de Brodatz. 8
4 (a) Les sous-bandes des détails horizontal, vertical et diagonal de la décomposition en OWT de l'image de la Figure 3. (b) Les supports du spectre leur correspondant. 8
5 De Gauche à droite et de haut en bas, (a) Les sous-bandes d'orientations $+15°$, $+75°$, $+45°$, $-15°$, $-75°$ et $-45°$ résultantes de la décomposition DT-CWT de l'image de la Figure 3. (b) Les supports du spectre leur correspondant. 9

1.1 Exemples de textures naturelles. 14
1.2 Exemples de textures d'artéfact. 14
1.3 Exemples de textures déterministes. 15
1.4 Exemples de textures stochastiques. 15
1.5 Image isodipôle contenant deux textures de statistiques d'ordre deux identiques (spectres d'énergie identiques). 17
1.6 Image isotrigone contenant deux textures de statistiques d'ordre trois identiques (bispectres identiques). 17
1.7 Exemples de textures ayant les mêmes quadruples corrélations (trispectres identiques). 18
1.8 Construction d'un motif binaire et calcul du code LBP pour un pixel central. 21

2.1 (a) PDFs des lois GGD de paramètres $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 8$ et de variance $= 1$.(b) L'effet du paramètre d'échelle α, pour des GGD avec un paramètre de forme $\beta = 1.5$ 34
2.2 Le coefficient d'aplatissement (kurtosis) en fonction du paramètre de forme β. 35
2.3 Évolution de la queue de distribution pour des paramètres de forme $\beta \in 0.5, 0.7, 1, 1.7, 2$ de GGD de variance $= 1$. 36
2.4 Image test Fabric.0009 41

2.5 Comparaison entre la PDF empirique et la PDF estimée par l'*a priori* GGD pour les détails (Horizontal, Vertical et Diagonal) des coefficients d'ondelettes de l'image test Fabric.0009 (Figure 2.4) résultant d'une décomposition en ondelette de Daubechies 'db4' à 3 échelles. 42

2.6 Répartition du skewness des sous-bandes résultantes de la décomposition des images de la base VisTex en 3 échelles en utilisant l'ondelette de Daubechies 'db4'. 44

2.7 Exemples de sous-bandes d'ondelettes dont les lois marginales sont asymétriques. Première ligne : détail vertical à la première échelle de décomposition en ondelette de Daubechies 'db4'. Deuxième et Troisième ligne : détail vertical à la deuxième échelle. 45

2.8 PDFs des lois AGGD de paramètres $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 8$, (a) d'écart type à gauche = 1 et d'écart type à droite = 2. (b) d'écart type à gauche = 2 et d'écart type à droite = 1. 48

2.9 L'effet des paramètres d'échelle à gauche et à droite pour des lois AGGD de paramètres de forme $\beta = 1.5$, (a) Le rapport d'asymétrie $\gamma = \alpha_L/\alpha_R = 0.5$, l'écart type à droite est le double de l'écart type à gauche. (b) Le rapport d'asymétrie $\gamma = \alpha_L/\alpha_R = 2$, l'écart type à gauche est le double de l'écart type à droite. 49

2.10 (a) Skewness en fonction du rapport d'asymétrie pour des lois AGGD de paramètre de forme $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 5$.(b) Kurtosis en fonction du rapport d'asymétrie pour des lois AGGD de paramètre de forme $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 5$. 55

2.11 Comparaison entre l'estimation du paramètre de forme β par la méthode des moments (MME), la méthode HOS et la méthode ML pour différentes valeurs d'échelle à gauche et à droite α_L et α_R. 64

2.12 Erreur quadratique moyenne de l'estimation du paramètre de forme β par la méthode des moments (MME), la méthode HOS et la méthode ML pour différentes valeurs d'échelle à gauche et à droite α_L et α_R. 65

2.13 Comparaison entre l'estimation du paramètre d'échelle à gauche α_L (colonne gauche) et du paramètre d'échelle à droite α_R (colonne droite) pour des valeurs de paramètre de forme $\beta \in \{0.5, 1, 1.5, 3\}$. 66

2.14 Erreur quadratique moyenne de l'estimation du paramètre d'échelle à gauche α_L (colonne gauche) et du paramètre d'échelle à droite α_R (colonne droite) pour des valeurs de paramètre de forme $\beta \in \{0.5, 1, 1.5, 3\}$. 67
2.15 L'écart entre la statistique χ^2 calculée en supposant l'*a priori* GGD ou AGGD pour les sous-bandes résultantes de la décomposition en ondelette de Daubechies 'db4' de la base VisTex. 71
2.16 L'écart entre la statistique χ^2 calculée avec l'*a priori* GGD ou AGGD pour les sous-bandes résultantes de la décomposition en ondelette DT-CWT de la base VisTex. 72
2.17 HOS fitting des sous-bandes résultantes de la décomposition de la base d'images VisTex en ondelettes de Daubechies 'db4', en utilisant (a) l'*a priori* GGD et (b) l'*a priori* AGGD. 76

3.1 Les trois types de dépendances entre coefficients d'ondelettes : intra-bande, inter-orientations et inter-échelles. 79
3.2 Image test Fabric.0009.01 80
3.3 Les densités conditionnelles $f_{X|VX}$ intra-bande des coefficients du détail horizontal issus de la décomposition de l'image test Fabric.0009.01 en considérant différentes formes de voisinages. La géométrie du voisinage considéré est affichée au-dessus de chaque image. 81
3.4 Les densités conditionnelles $f_{X|CX}$ inter-orientations des coefficients issus de la décomposition de l'image test Fabric.0009.01. 82
3.5 Les densités conditionnelles $f_{X|FX}$ inter-échelles (entre échelle 1 et 2) des coefficients issus de la décomposition de l'image test Fabric.0009.01. 83
3.6 Chi-plots (colonne de gauche) et scatterplots (colonne de droite) de (X, Y) : (a) X coefficient de détail horizontal, $Y = VX$ son voisin de dessous. (b) X coefficient de détail vertical, $Y = CX$ son cousin de détail diagonal. (c) X coefficient de détail horizontal d'échelle 1, $Y = PX$ son fils d'échelle 2. 86
3.7 Le schéma de construction de la matrice d'observation pour la modélisation intra-bande. 88
3.8 La décomposition à l'aide de la modélisation SIRV, des sous-bandes de l'échelle 1 de l'image test Fabric.0009 (Figure 2.4) transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' ; première colonne les sous-bandes, deuxième colonne le multiplicateur $\sqrt{\tau}$ et troisième colonne la partie Gaussienne : (a) le détail horizontal (b) le détail vertical et (c) le détail diagonal. 93

3.9 Première colonne : ajustement de la loi caractéristique de la densité caractéristique du modèle SIRV $p_\tau(\tau)$ par la loi de Weibull et Gamma. Deuxième colonne : ajustement de la partie Gaussienne par une densité Gaussienne multivariée. 94
3.10 Scatterplots de 10000 échantillons de (X_1, X_2) de même loi marginale normale $N(0,1)$ pour X_1 et X_2, et de différentes copules. 102
3.11 Scatterplots de 10000 échantillons de (X_1, X_2) de même loi marginale normale $N(0,1)$ pour X_1 et X_2, et de copule Gaussienne ou de Frank. 103
3.12 Comparaisons aux différentes densités de copules estimées, de la densité de copule empirique observée en utilisant le détail horizontal de l'échelle 1 de l'image test Fabric.0009. 104
3.13 Critère de sélection de la copule Gaussienne en utilisant le cofficient de correlation de Kendall τ de (X_1, X_2) en fonction du coefficient de correlation de Pearson ρ_G de $(\phi^{-1}(F_1(X_1))\phi^{-1}(F_1(X_2)))$. 106
3.14 Images de textures pour tester l'ajustement des modèles proposés aux PDFs jointes observées. 108
3.15 Ajustement de la loi Weibull à la PDF empirique du multiplicateur τ de la modélisation SIRV (2ème colonne), et de la loi Gaussienne multivariée à la PDF jointe empirique du noyau Gaussien (3ème colonne), en considérant la géometrie du voisinage de la 1ère colonne : (a) détail horizontal à l'échelle 1 de Bark.0000 (b) détail diagonal à l'échelle 1 de Fabric.0000 (c) détail diagonal à l'échelle 1 de Metal.0000 et (d) détail horizontal à l'échelle 1 de Brick.0000 110
3.16 Ajustement de la loi Gaussienne (surface rouge) à la PDF jointe empirique (surface verte) du noyau Gaussien dans le cas trivarié ($d = 3$), en considérant le voisinage de la 1ère colonne. Les sous-bandes sont les mêmes que dans la Figure 3.15 pour (a), (b), (c) et (d). 111
3.17 Ajustement de la loi Gaussienne bivariée à la PDF empirique de deux composantes du noyau Gaussien, et de la loi Gaussienne trivariée à la PDF empirique de trois composantes du noyau Gaussien. Le voisinage considéré est de taille $d = 4\times4 = 16$, la sous-bande employée est la même que celle de la Figure 3.15 (a) et Figure 3.16 (a). 112
3.18 Voisinage de taille réduite $d = 2\times2$ à l'intérieur d'un voisinage plus grand de taille $d = 4 \times 4$. 114

3.19 Ajustement de la distribution GC-MAGG bivariée (trait pointillé) à la PDF empirique jointe bivariée (trait continu) des coefficients d'ondelettes intra-bande ; en 2ème colonne une vue 3D, en 3ème colonne l'ajustement en utilisant des iso-lignes et en 1ère colonne la géométrie du voisinage considéré. Les sous-bandes employées sont les mêmes que dans la Figure 3.15 respectivement pour (a), (b), (c) et (d). 117
3.20 Ajustement de la distribution GC-MAGG trivariée (surface rouge) à la PDF empirique jointe trivariée (surface verte) des coeffcients d'ondelettes intra-bande. Les sous-bandes employées sont les mêmes que dans la Figure 3.15 respectivement pour (a), (b), (c) et (d). 118
3.21 Exemples de classes de texture dont le taux de rejet par le test d'adéquation de Royston des modèles SIRV ou GC-MAGG aux statistiques jointes est faible (inférieur à 5%). 120
3.22 Exemples de classes de texture dont le taux de rejet par le test d'adéquation de Royston du modèle SIRV de densité caractéristique Weibull aux statistiques jointes est faible (inférieur à 5%). 121
3.23 Exemples de classes de texture dont le taux de rejet par le test d'adéquation de Royston du modèle GC-MAGG aux statistiques jointes est faible (inférieur à 5%). 121
3.24 Exemples de classes de texture dont le taux de rejet par le test d'adéquation de Royston des modèles SIRV ou GC-MAGG aux statistiques jointes est grand (supérieur à 50%). 122

4.1 Schéma du principe général de recherche d'images par le contenu 128
4.2 Les 40 classes de l'album de Brodatz utilisées pour la construction du benchmark B2 : 'D6', 'D8', 'D11', 'D16', 'D17', 'D18', 'D20', 'D21', 'D24', 'D26', 'D28', 'D32', 'D33', 'D34', 'D47', 'D49', 'D51', 'D53', 'D55', 'D56', 'D57', 'D64', 'D65', 'D66', 'D75', 'D76', 'D77', 'D78', 'D82', 'D83', 'D84', 'D85', 'D87', 'D92', 'D95', 'D101', 'D102', 'D103', 'D104' et 'D110' 147
4.3 la répartition du skewness des sous-bandes résultantes de la décomposition des images du benchmark B2 en 3 échelles en utilisant l'ondelette de Daubechies 'db2'. 148
4.4 Comparaison des courbes précision/rappel 150
4.5 Représentations graphiques des performances des modèles univariés en TBIR en utilisant le benchmark B1, 1ère colonne la transformée employée est OWT, 2ème colonne DT-CWT. . . 155

4.6 Représentations graphiques des performances des modèles univariés en TBIR en utilisant le benchmark B2, 1ère colonne la transformée employée est OWT, 2ème colonne DT-CWT. . . 156

4.7 Exemples de classes de texture dont les taux moyens de détection en utilisant le modèle GGD sont supérieurs à ceux obtenus en utilisant l'AGGD. 157

4.8 Exemples de classes de texture dont les taux moyens de détection en utilisant le modèle AGGD sont inférieurs à 50% alors que le pourcentage du rejet de l'*a priori* est nulle. 157

4.9 Comparaison des taux moyens de détection entre les modèles GC-MAGG & OWT et GC-MWbl & DT-CWT à nombre égal de sous-bandes. 162

4.10 Représentations graphiques des performances des modèles mulitvariés en TBIR en utilisant le benchmark B1 (première ligne) et B2 (deuxième ligne). 165

4.11 Exemples de classes de texture dont les taux moyens de détection en utilisant les modèles SIRV à densité caractéristique Weibull ou GC-MAGG sont supérieurs à 95% ; la transformée employée est OWT, db5 à deux échelles. 166

4.12 Exemples de classes de texture dont les taux moyens de détection en utilisant le modèle GC-MAGG est supérieur à 90% et supérieur à celui obtenu en utilisant le modèle SIRV à densité caractéristique Weibull ; la transformée employée est OWT, db5 à deux échelles. 167

4.13 Exemple de classe de texture dont les taux moyens de détection en utilisant le modèle SIRV à densité caractéristique Weibull est supérieur à 90% et supérieur à celui obtenu en utilisant le modèle GC-MAGG ; la transformée employée est OWT, db5 à deux échelles. 167

4.14 Les 20 classes de textures structurées de l'album de Brodatz, utilisées pour tester les performances des modèles probabilistes multivariés en TBIR. 169

A.1 Comparaison des courbes de la fonction GGR et de son approximation. 182

A.2 L'erreur quadratique entre la fonction GGR et son approximation. 183

B.1 Distributions empiriques des échantillons de lois AGGD de paramètres $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 8$, (a) d'écart type à gauche = 1 et d'écart type à droite = 2. (b) d'écart type à gauche = 2 et d'écart type à droite = 1. 186
B.2 Distributions empiriques des échantillons de lois AGGD de paramètres de forme $\beta = 1.5$, (a) Le rapport d'asymétrie $\gamma = \alpha_L/\alpha_R = 0.5$, l'écart type à droite est le double de l'écart type à gauche. (b) Le rapport d'asymétrie $\gamma = \alpha_L/\alpha_R = 2$, l'écart type à gauche est le double de l'écart type à droite. 187

C.1 La sous-bande *Gaussianisée* est obtenue à partir de la sous-bande initiale en vue d'estimer la matrice de covariance à l'aide de la FFT. 190

Liste des tableaux

2.1 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests χ^2 appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelette de Daubechies 'db4'. 70

2.2 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests χ^2 appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelette DT-CWT. 70

2.3 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests Kolmogorov-Smirnov appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4'. 74

2.4 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests Kolmogorov-Smirnov appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelettes DT-CWT. 75

3.1 Les coefficients de corrélation : linéaire r de Pearson, τ de Kendall et ρ de Spearman, moyennés par échelle, calculés en utilisant les sous-bandes résultantes de la décomposition de la base d'images VisTex en ondelette de Daubechies 'db4' sur 3 échelles. 87

3.2 L'information mutuelle moyennée par échelle, calculée en utilisant les sous-bandes résultantes de la décomposition de la base d'images VisTex en ondelette de Daubechies 'db4' sur 3 échelles. 88

3.3 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests Kolmogorov-Smirnov appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4'. 96

3.4 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests Kolmogorov-Smirnov appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée DT-CWT. 96

3.5 La moyenne (et écart-type) de la divergence de Jeffreys entre la copule empirique observée et les copules Gaussienne et de Student-t estimées en considérant un *a priori* AGGD pour les lois marginales. 105
3.6 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse d'*a posteriori* Weibull en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov, et de l'hypothèse de Gaussianité jointe. Les sous-bandes employées sont résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' (tableau en dessus) et de la transformée DT-CWT (tableau en dessous), en 3 échelles de décomposition ; le voisinage considéré est de taille $d = 2 \times 2 = 4$. 113
3.7 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse d'*a posteriori* Weibull en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov, et de l'hypothèse de Gaussianité jointe. Les sous-bandes employées sont résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' (tableau en dessus) et de la transformée DT-CWT (tableau en dessous), en 3 échelles de décomposition ; le voisinage considéré est de taille $d = 4 \times 4 = 16$ et la dimension pour tester la multi-*Gaussianité* est $2 \times 2 = 4$. . 114
3.8 Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse d'*a priori* GC-MAGG en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov pour la loi marginale conjointement avec les tests de Royston ou Doornik-Hansen pour la *Gaussianité* multivariée. Les sous-bandes employées sont résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' (tableau en dessus) et de la transformée DT-CWT (tableau en dessous) sur la base VisTex ou Brodatz ; le voisinage considéré est de taille $d = 2 \times 2 = 4$. 119

4.1 Comparaison des performances des modèles univariés en TBIR en considérant le benchmark B1, en utilisant le taux moyen de détection. 152
4.2 Comparaison des performances des modèles univariés en TBIR en considérant le benchmark B2, en utilisant le taux moyen de détection. 152
4.3 Comparaison des performances des modèles univariés en TBIR en considérant le benchmark B3 et des transformées en 3 échelles, en utilisant le taux moyen de détection (en %). . . . 153
4.4 Amélioration des performances en TBIR en employant les modèles multivariés à copule Gaussienne GC-MAGG et GC-MWbl ; Le benchmark testé est B3 et le nombre d'échelles de décomposition est 1. 160

4.5 Amélioration des performances en TBIR en employant les modèles multivariés à copule Gaussienne GC-MAGG et GC-MWbl ; Le benchmark testé est B3 et le nombre d'échelles de décomposition est 2. 161
4.6 Comparaison des performances entre les modèles GC-MAGG & OWT et GC-MWbl & DT-CWT, à nombre égal de sous-bandes. 161
4.7 Comparaison des performances des modèles multivariés en TBIR en considérant les benchmark B1 et B2, en utilisant le taux moyen de détection. 163
4.8 Comparaison des taux moyens de détection en TBIR en utilisant 1280 textures déterministes issues des 20 classes de textures de la Figure 4.14. 168
4.9 Pourcentages de rejet de l'hypothèse d'adéquation du modèle SIRV à densité caractéristique Weibull ou du modèle GC-MAGG, aux statistiques jointes des sous-bandes de 1280 textures structurées. 168

E.1 Le taux moyen de détection (ARR) et le temps consommé pour l'expérimentation en TBIR sur le benchmark B1, en utilisant l'expression analytique de la JD ou la règle de sélection MAP avec ou sans sous-échantillonnage. 197

Glossaire

Abréviations

AGGD	Distribution Gaussienne généralisée asymétrique
AR	Auto-régressif
ARR	Taux moyen de bonne détection (de l'anglais Average Retrieval Rate)
BKF	Forme K de Bessel
CBIR	Recherche d'images par le contenu (de l'anglais Content Based Image Retrieval)
DT-CWT	Transformée en ondelettes complexes à arbre dual
ECD	Distribution à contours elliptiques
FFT	Transformée de Fourier rapide
FP	Méthode du point fixe
GC-MAGG	Distribution multivariée Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne
GC-MWbl	Distribution multivariée Weibull à copule Gaussienne
GGD	Distribution Gaussienne généralisée
GGR	Ratio Gaussien généralisé
GLCM	Matrices de cooccurrence (de l'anglais Grey Level Co-occurrence Matrix)
GLDM	Matrices des différences de niveaux de gris
GLOH	Histogramme d'orientation de localisation de gradient (de l'anglais Gradient Location and Orientation Histogram)
GMRF	Champs de Markov Gaussiens (de l'anglais Gaussian Markov Random Fields)
GoF	Goodness of Fit
GSM	Mélange d'échelle de Gaussiennes (de l'anglais Gaussian Scale Mixture)
HOS	Statistique d'ordre supérieur (de l'anglais High Order Statistic)
IFM	Méthode d'inférence des fonctions marginales (de l'anglais Inference Function for Margins)
JD	Divergence de Jeffreys

KLD	Divergence de Kullback-Leibler
KNN	K proches voisins
LBP	Motifs binaires locaux (de l'anglais Local binary patterns)
MAP	Maximum a posteriori
MG	Distribution Gaussienne multivariée
MGG	Distribution Gaussienne généralisée multivariée
MGmix	Mélange de Gaussiennes multivariées
ML	Maximum de vraisemblance
MM	Méthode des moments
MPE	Distribution de puissance exponentielle multivariée
PDF	fonction de densité de probabilité
OWT	Transformée en ondelettes orthogonales
RMSE	Racine carré de l'erreur quadratique moyenne
SIFT	Transformation de caractéristiques visuelles invariante à l'échelle (de l'anglais Scale Invariant Feature Transform)
SIRV	Vecteurs aléatoires à invariance sphérique (de l'anglais Spherically Invariant Random Vectors)
SURF	Descripteur des caractéristiques robustes accélérées (de l'anglais Speeded Up Robust Feature)
SVH	Système visuel humain
TBIR	Recherche d'images par le contenu textural (de l'anglais Texture Based Image Retrieval)
VA	Variable aléatoire

Symboles et notations

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{E}$	espérance
$\Gamma()$	fonction Gamma
$\Psi()$	fonction digamma, dérivée de la fonction $\ln \Gamma()$
$\gamma(,)$	fonction Gamma incomplète
ϕ	fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$
$X \propto f$	signifie que X est de fonction de densité de probabilité f
VX	Voisins de X
CX	Cousin de X
FX	Fils de X
C	Une copule
c	Densité d'une copule
Gam	loi Gamma
Wbl	loi Weibull

Introduction

Contexte et problématique

Depuis l'avènement du numérique et la multiplication des moyens d'imagerie optique, infrarouge, sonar ou radar, la texture a toujours été au centre de nombreux travaux scientifiques. Que ce soit pour traiter des problèmes d'analyse, de compression ou de synthèse d'images, le thème « texture » a toujours connu un intérêt soutenu, illustré par une production scientifique régulière. Cela s'explique sûrement par la difficulté à définir des modèles mathématiques suffisamment génériques pour couvrir toute la diversité texturale observable dans les images naturelles. Par nature multi-disciplinaire, le thème de la texture concerne différentes communautés de chercheurs en vision par ordinateur, traitement d'image, statistiques, ou en modélisation psychovisuelle. Toutefois, malgré les nombreux travaux existants consacrés à la description de texture, il nous semble que des améliorations peuvent encore être obtenues en considérant les avancées récentes en représentations multi-résolutions d'image et en modélisation stochastique. En effet, d'une part, de nombreuses études montrent que les représentations comme la transformée en ondelettes s'apparentent au mécanisme de la perception visuelle humaine ; d'autre part, les modèles probabilistes sont largement acceptés et ont fait leurs preuves dans différentes applications de traitement d'images comme le débruitage [Moulin et Liu, 1999, Portilla *et al.*, 2003, Tan et Jiao, 2007], la compression [Buccigrossi et Simoncelli, 1999, Chang *et al.*, 2000], le tatouage numérique [Ng et Garg, 2005, Briassouli *et al.*, 2005], la segmentation [Kim et Kang, 2007] ou la recherche d'images par le contenu [Vasconcelos et Lippman, 2000a, Do et Vetterli, 2002b, Vasconcelos, 2004, Kwitt et Uhl, 2010].

Notre travail vise à introduire de nouveaux modèles probabilistes en vue de décrire les statistiques marginales et jointes des sous-bandes d'ondelettes pour les textures. Pour évaluer et comparer les performances de ces modèles avec les méthodes existantes, nous avons choisi le contexte de recherche d'images par le contenu texture. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser des mesures de similarité correspondant à chaque modèle afin de pouvoir les ex-

ploiter dans un système de recherche d'images. Même si nous nous sommes concentrés sur l'application de recherche par le contenu, il est évident que le travail présenté dans ce mémoire trouve un prolongement naturel dans d'autres applications nécessitant la modélisation et le calcul de similarités comme la classification ou la segmentation.

Organisation et contributions

La modélisation de texture reste un problème ouvert et essentiel à de nombreuses applications malgré la diversité des techniques d'analyse proposées dans la littérature. Nous nous intéressons dans le **premier chapitre** aux méthodes classiques d'analyse de texture en les classifiant selon quatre grandes familles : les méthodes géométriques basées sur l'extraction des motifs de base de texture ; les méthodes permettant d'extraire des descripteurs par une analyse spatiale de l'intensité lumineuse ; les méthodes basées sur une analyse fréquentielle (filtrage) ou spatio-fréquentielle (ondelettes) et enfin les méthodes employant les modèles stochastiques nécessitant l'implication de connaissances *a priori* sur les observations. En présentant les résultats de différentes études comparatives sur les méthodes d'analyse de textures, nous mettons en avant notre choix de caractériser la texture à l'aide de modèles probabilistes dans le domaine des ondelettes tout en le justifiant au moyen de la perception visuelle.

Partant de l'hypothèse qu'il est plus pertinent de décrire une texture dans un espace multi-échelles et multi-orientations, un premier niveau de modélisation revient à choisir un *a priori* pour décrire les statistiques marginales des sous-bandes d'ondelettes. Dans le **deuxième chapitre**, après avoir rappelé le modèle Gaussien généralisé qui est l'*a priori* le plus fréquemment considéré dans différentes applications impliquant les statistiques marginales des sous-bandes, nous mettons en évidence l'éventuelle asymétrie des distributions empiriques. Nous introduisons la distribution Gaussienne généralisée asymétrique qui tient compte de l'asymétrie que peut présenter une distribution marginale dans les représentations spatio-fréquentielles. Enfin, nous validons notre choix d'introduire ce modèle univarié à l'aide de différents tests statistiques d'adéquation afin de valider le potentiel du modèle proposé par rapport à l'*a priori* usuel Gaussien généralisée.

Dans l'étude présentée au deuxième chapitre focalisé sur la modélisation univariée, les coefficients dans l'espace des transformées sont supposés indépendants. Dans le **troisième chapitre**, nous prenons en considération la dépendance entre coefficients de sous-bandes et nous proposons différents modèles multivariés associés. Dans un premier temps, à l'aide d'outils quali-

tatifs et quantitatifs, nous montrons la prédominance de la dépendance intra-bande par rapport aux dépendances inter-orientations et inter-échelles. Ensuite, nous proposons de modéliser une sous-bande qui est considérée comme réalisation d'un vecteur aléatoire, à l'aide de différents modèles dont nous évaluons la pertinence à l'aide de tests statistiques d'adéquation. Une première contribution consiste à étudier le modèle dit « de vecteurs aléatoires à invariance sphérique (SIRV) ». Ce modèle étant générique, nous réalisons des tests d'adéquation afin de sélectionner la densité caractéristique. Notre deuxième contribution en modélisation multivariée est la détermination de la copule caractérisant la structure de la dépendance intra-bande. À l'aide de critères de sélection, nous justifions notre choix de la copule Gaussienne. Enfin, nous évaluons qualitativement l'ajustement des modèles multivariés proposés aux statistiques jointes des sous-bandes.

Le **quatrième chapitre** est consacré à la validation des performances des modèles proposés. D'abord, nous présentons le principe général de la recherche d'images par le contenu. Ensuite nous rappelons le cadre Bayésien pour la recherche d'images en montrant le lien entre la minimisation de l'erreur de classification et l'emploi de la divergence de Kullback-Leibler entre modèles probabilistes pour mesurer la similarité. Un état de l'art détaillant les principaux modèles stochastiques univariés et multivariés est ensuite dressé. Enfin, nous calculons les formes analytiques des métriques probabilistes correspondant aux modèles proposés afin de les employer dans un système de recherche d'images par le contenu texture et d'en évaluer les performances.

Bases d'images et transformées en ondelettes employées

Tout au long du document, les expérimentations réalisées utiliseront principalement deux bases de données largement utilisées par la communauté. De même, nos résultats comparatifs sont fondés sur l'utilisation de deux types de transformée, les ondelettes orthogonales et les ondelettes à arbre dual.
Ainsi, des bases d'images texturées sont employées dans le deuxième et troisième chapitre afin d'étudier la qualité d'ajustement des modèles proposés aux statistiques marginales et jointes observées. Dans le travail présenté dans ce mémoire, nous nous sommes focalisés sur la modélisation du contenu textural d'images en niveaux de gris. Nous employons dans les tests du deuxième et troisième chapitres la base d'images VisTex [url VisTex,] et l'album de Brodatz [url Brodatz,].

– Nous considérons les 40 images de texture de taille 512x512 de VisTex

(Figure 1) qui ont été fréquemment utilisées dans des travaux antérieurs (dans [Do et Vetterli, 2002b, Kwitt et Uhl, 2010, Verdoolaege et Scheunders, 2011] par exemple). Chaque image est divisée en 16 imagettes de taille 128x128 non chevauchées, ce qui génère 640 images de textures.

– L'album de Brodatz est constitué de 111 images de textures de taille 640x640 (Figure 2). En divisant chaque image en 16 imagettes de taille 160x160, nous obtenons une base de 1776 textures.

Les deux bases d'images contiennent des textures stochastiques (micro-textures) et des textures régulières (macro-textures).

Nous considérons la transformée en ondelettes orthogonales (OWT) avec des filtres de Daubechies [Daubechies, 1992] et la transformée en ondelettes complexes à arbre dual (DT-CWT) de Kingsbury [Kingsbury, 2001]. Contrairement à la transformée OWT qui est abondamment employée dans la littérature, la transformée DT-CWT est invariante par translation et présente une meilleure sélectivité directionnelle que la OWT [Selesnick *et al.*, 2005].
La décomposition en ondelettes consiste généralement à décomposer le signal discret $f(x, y)$ à l'aide de deux filtres, un passe-bas $l(x)$ et un passe-haut $h(y)$. On emploie des filtres miroirs en quadrature, leurs fonctions de transfert L et H sont créées à partir de l'ondelette mère.
En utilisant le produit tensoriel des deux filtres $l(x)$ et $l(y)$, nous définissons les quatre filtres bidimensionnels :

– $LH(x, y) = L(x)H(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation horizontale.
– $HL(x, y) = H(x)L(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation verticale.
– $HH(x, y) = H(x)H(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation diagonale.
– $LL(x, y) = L(x)L(y)$ (passe-bas), permet de calculer l'approximation qui peut à son tour être décomposée pour calculer les détails d'échelles les plus grossières.

Tandis que la transformée OWT ne permet de sélectionner que trois directions (Figure 4), la transformée DT-CWT peut en sélectionner six ($\pm 15°$, $\pm 45°$ et $\pm 75°$ Figure 5). En effet, en considérant une ondelette mère complexe, on définit deux filtres complexes $l(x) = l_1(x) + jl_2(x)$ et $h(y) = h_1(y) + jh_2(y)$; en plus du filtre passe-bas calculant l'approximation, les six filtres orientés calculant les détails sont définis par :

– $lh_1(x, y) = l_1(x)h_1(y) - l_2(x)h_2(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation $-15°$.
– $lh_2(x, y) = l_1(x)h_1(y) + l_2(x)h_2(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation $+15°$.

- $hl_1(x,y) = h_1(x)l_1(y) - h_2(x)l_2(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation $-75°$.
- $hl_2(x,y) = h_1(x)l_1(y) + h_2(x)l_2(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation $+75°$.
- $hh_1(x,y) = h_1(x)h_1(y) - h_2(x)h_2(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation $-45°$.
- $hh_2(x,y) = h_1(x)h_1(y) + h_2(x)h_2(y)$ calcule les coefficients de détail d'orientation $+45°$.

Dans nos tests, nous proposons d'employer une variante à coefficients réels du DT-CWT dont nous venons d'expliquer le fonctionnement. Dans [Selesnick *et al.*, 2005], cette variante est appelée transformée DT-CWT réelle orientée (real oriented DT-CWT) ; dans la suite, sauf mention contraire, nous employons le mot DT-CWT pour désigner la variante à coefficients réels.

FIGURE 1 – Les 40 classes de la base VisTex.

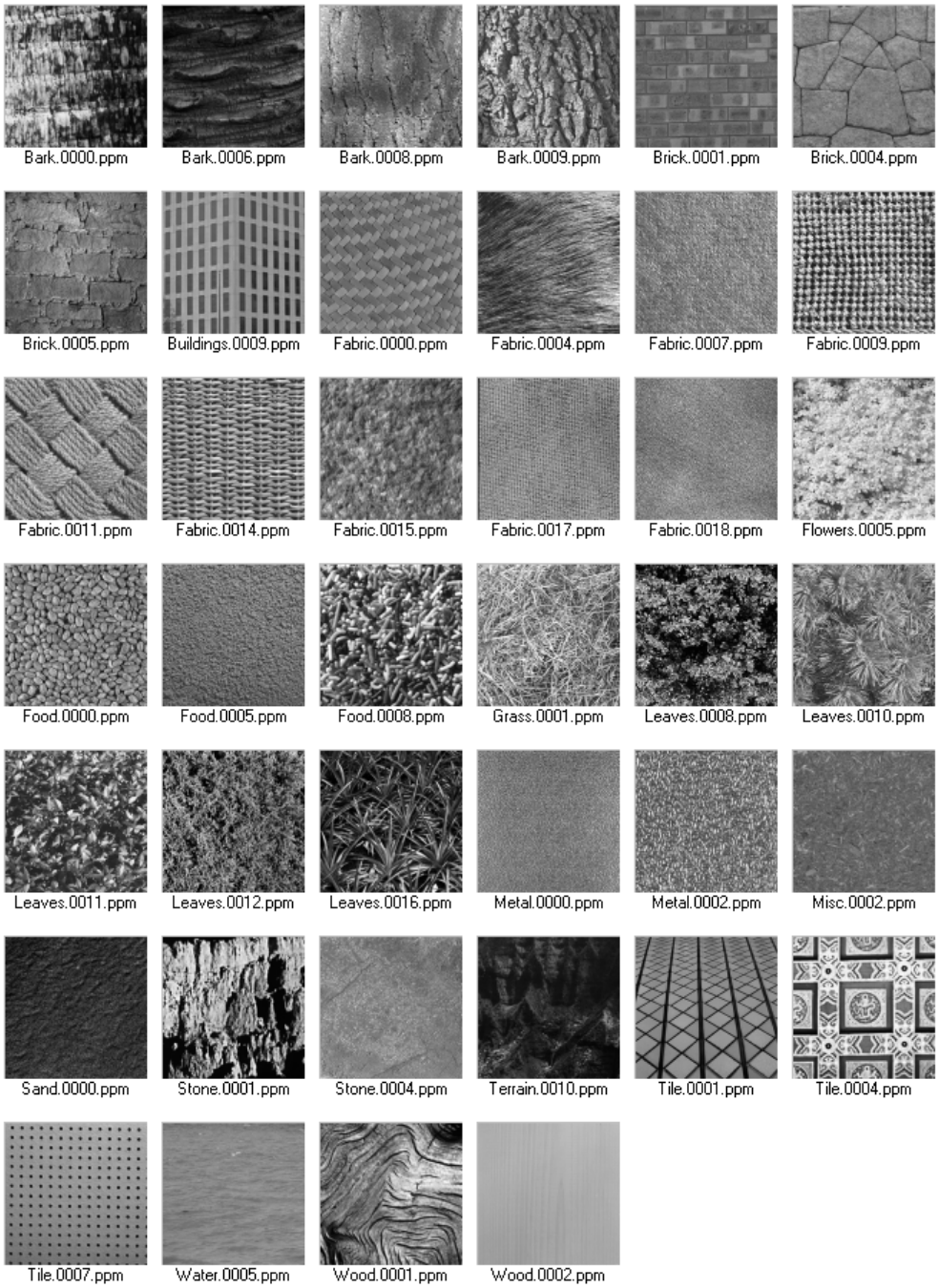


FIGURE 2 – Les 111 classes de l'album de Brodatz.

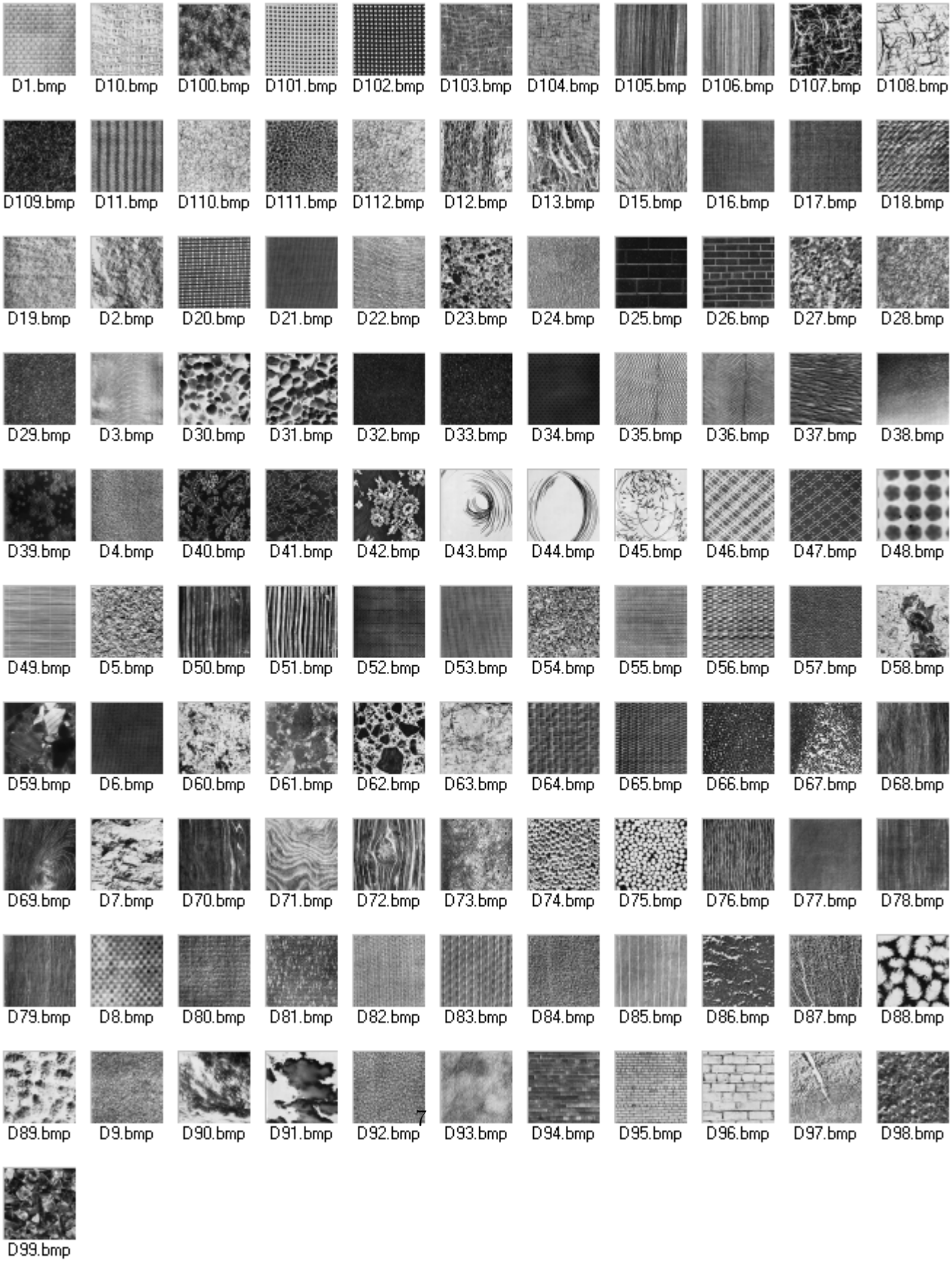
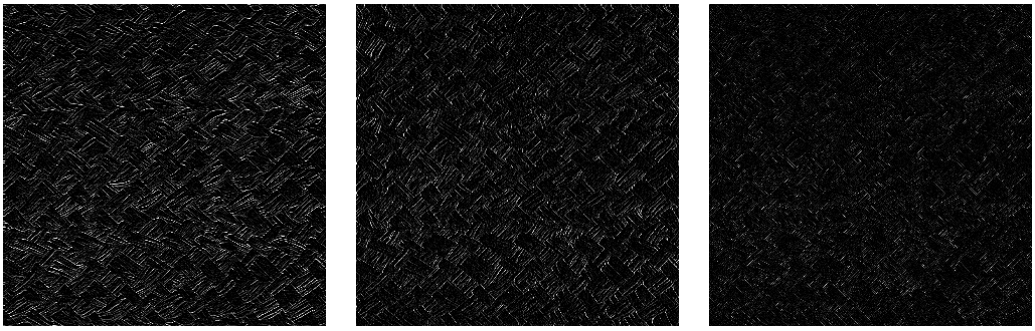


FIGURE 3 – Image D18 de l'album de Brodatz.

FIGURE 4 – (a) Les sous-bandes des détails horizontal, vertical et diagonal de la décomposition en OWT de l'image de la Figure 3. (b) Les supports du spectre leur correspondant.

(a)



(b)

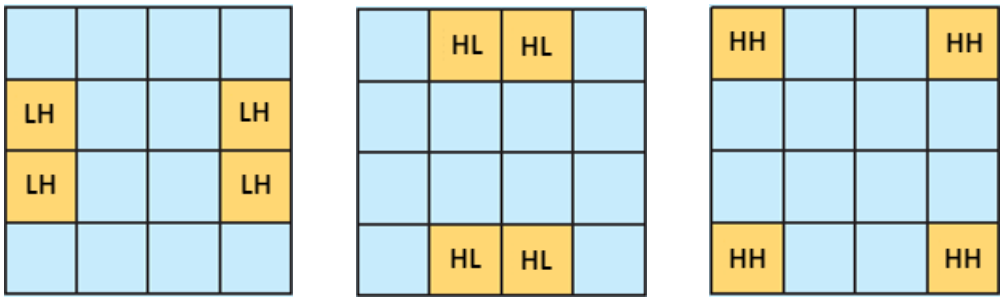
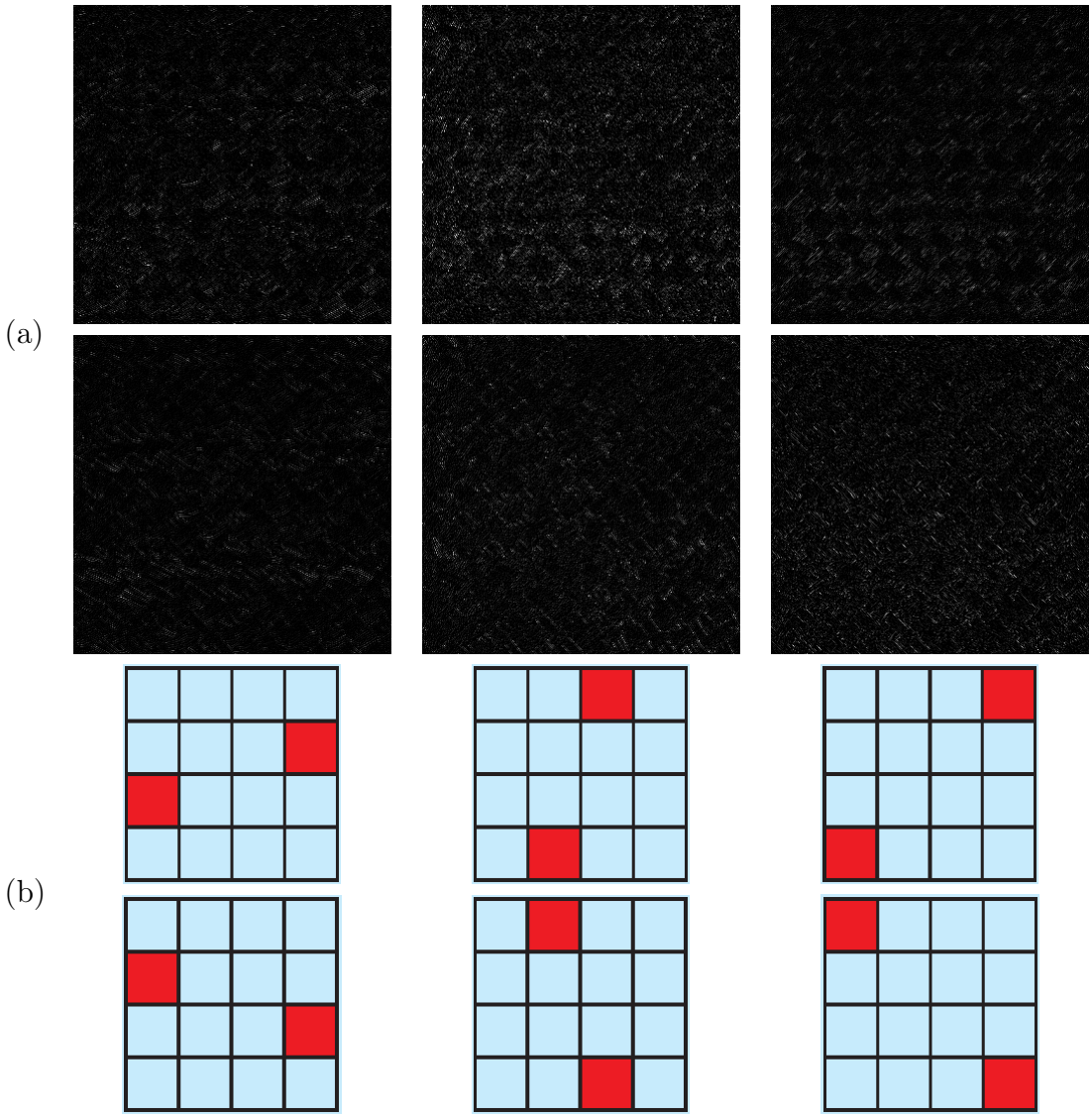


FIGURE 5 – De Gauche à droite et de haut en bas, (a) Les sous-bandes d'orientations $+15°$, $+75°$, $+45°$, $-15°$, $-75°$ et $-45°$ résultantes de la décomposition DT-CWT de l'image de la Figure 3. (b) Les supports du spectre leur correspondant.



Chapitre 1

Méthodes d'analyse de textures : état de l'art

Sommaire

1.1 Introduction 12
1.2 Notion de Texture 12
1.2.1 Types de texture 13
1.2.2 Perception visuelle des textures 16
1.3 Analyse de textures 19
1.3.1 Méthodes géométriques 19
1.3.2 Méthodes statistiques basées sur l'analyse spatiale 20
1.3.3 Méthodes fréquentielles par filtrage 22
1.3.4 Méthodes basées sur la modélisation probabiliste . 23
1.4 Comparaison des méthodes usuelles d'analyse de textures 25
1.4.1 Ondelettes *versus* filtres de Gabor 25
1.4.2 Descripteurs fondées sur les motifs binaires locaux et les matrices de cooccurrence 26
1.4.3 Modélisation probabiliste des coefficients d'ondelettes 26
1.5 Conclusion 28

1.1 Introduction

La texture est une composante visuelle riche d'information pour la description des scènes naturelles. Son analyse est un sujet ancien pour la vision par ordinateur et l'analyse d'image. Depuis l'apparition de l'image comme support numérique, de très nombreuses techniques ont été proposées pour caractériser une texture ou localiser des zones homogènes de l'image en se basant sur la texture comme critère. L'analyse de la texture vise à sa caractérisation afin de résoudre un large panel de problème en vision par ordinateur comme la classification, la recherche d'images par le contenu, la segmentation, la synthèse de textures et la compression d'images. Les techniques d'analyse de textures peuvent varier selon la nature des images (images en niveaux de gris, images radar, sonar, images en couleurs vraies etc.) et selon l'information supplémentaire qui peut être considérée pour analyser une image (par ex. la forme ou la couleur).

Un objectif fondamental des travaux concernant l'analyse de texture en vision par ordinateur est le développement de méthodes automatisées pour extraire l'information visuelle et décrire le contenu d'une image en utilisant le contenu textural. Nous dressons dans ce chapitre un état de l'art des différents types de méthodes d'analyse de textures.

1.2 Notion de Texture

Il est difficile de produire une définition précise et consensuelle du terme « texture ». Il en existe plusieurs, ici nous en donnons quelques exemples :

> C'est un ensemble d'images de mêmes valeurs statistiques d'ordre un et deux [Julesz, 1962]. Cette conjecture a été réfutée par Julesz lui même dans [Julesz *et al.*, 1978] où les auteurs ont synthétisé des textures difficilement distinguables ayant les mêmes statistiques d'ordre deux.
>
> Une texture est une région de l'image dont l'ensemble des statistiques locales sont constantes, varient peu ou sont approximativement périodiques [Sklansky, 1978].
>
> Une image texturée est décrite par le nombre et le type de ses primitives ainsi que leur organisation spatiale ou agencement. Elle a deux dimensions pour sa description : la première concerne les primitives dont elle est composée, la deuxième permet de décrire la dépendance spatiale ou l'interaction entre primitives. Cette

> dépendance peut être structurelle, probabiliste ou fonctionnelle [Haralick, 1979].
>
> Une texture est un champ bidimensionnel stochastique, éventuellement périodique [Cross et Jain, 1983].
>
> Une texture est une région de l'image pour laquelle il est possible de définir une fenêtre de dimensions minimales, telle qu'une observation au travers de celle-ci se traduit par une perception (impression) visuelle identique pour toutes les translations possibles de cette fenêtre à l'intérieur de la région considérée. [Unser, 1984]

Toutes ces définitions ont en commun la notion d'une région d'image à caractère homogène et qui se manifeste par une perception visuelle qui peut être décrite qualitativement selon des critères tels que la régularité, l'orientation, la granularité, la rugosité etc.

1.2.1 Types de texture

Le monde naturel est très riche en textures. Un contenu textural peut être observé sur des objets d'artéfact [1] ou naturels comme le bois, les plantes, les matériaux, les peaux etc. Nous pouvons donc dans un premier temps classer la texture selon l'origine de l'image : texture naturelle (Figure 1.1) ou texture d'artéfact (Figure 1.2). Dans la littérature, la classification en familles de textures est souvent liée à la définition utilisée pour la texture. Deux grandes familles s'imposent : les textures déterministes et les textures stochastiques. Une texture est dite déterministe [2] si elle est formée par un agencement régulier d'un motif géométrique. Ce type de texture est entièrement caractérisé par un motif et sa règle déterministe d'agencement.
À l'opposé, les textures dites stochastiques [3] se caractérisent par un contenu irrégulier dont il est parfois difficile d'en extraire une primitive de base (motif non localisable). Elles sont décrites par des lois ou des modèles statistiques et sont considérées comme une réalisation d'un champ aléatoire bidimensionnel homogène.
Si pour ces deux familles la propriété d'homogénéité est souvent admise, certaines textures stochastiques peuvent présenter une inhomogénéité locale

1. Effet (lat. factum) artificiel (lat. ars, artis), produit ayant subi une transformation, même minime, par l'homme et qui se distingue ainsi d'un autre provoqué par un phénomène naturel
2. Certains auteurs emploient aussi le qualificatif texture structurée ou macro-texture.
3. Appelées aussi textures probabilistes, aléatoires ou micro-textures.

tout en ayant une uniformité spatiale qui leurs confère une homogénéité globale.

FIGURE 1.1 – Exemples de textures naturelles.

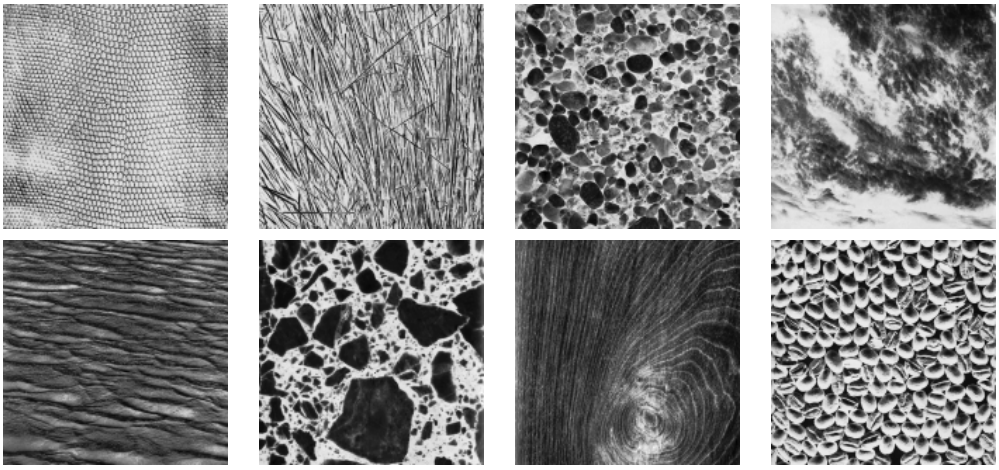


FIGURE 1.2 – Exemples de textures d'artéfact.

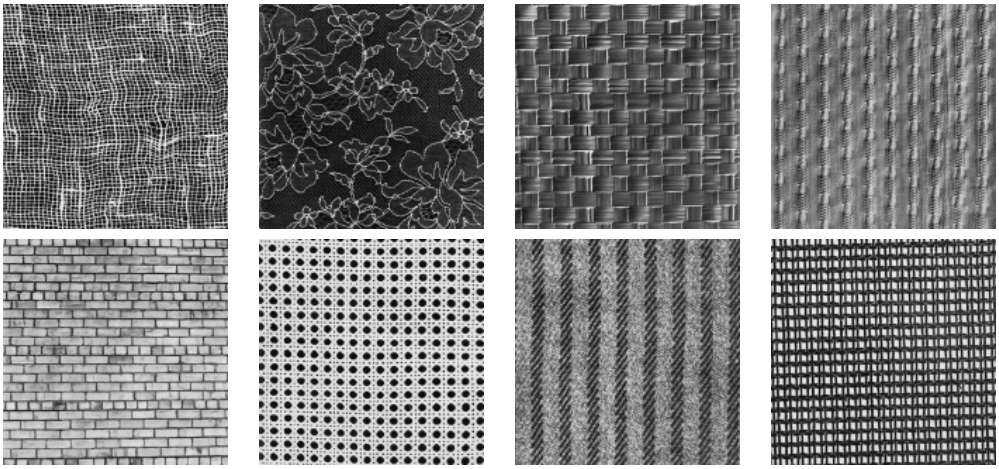


FIGURE 1.3 – Exemples de textures déterministes.

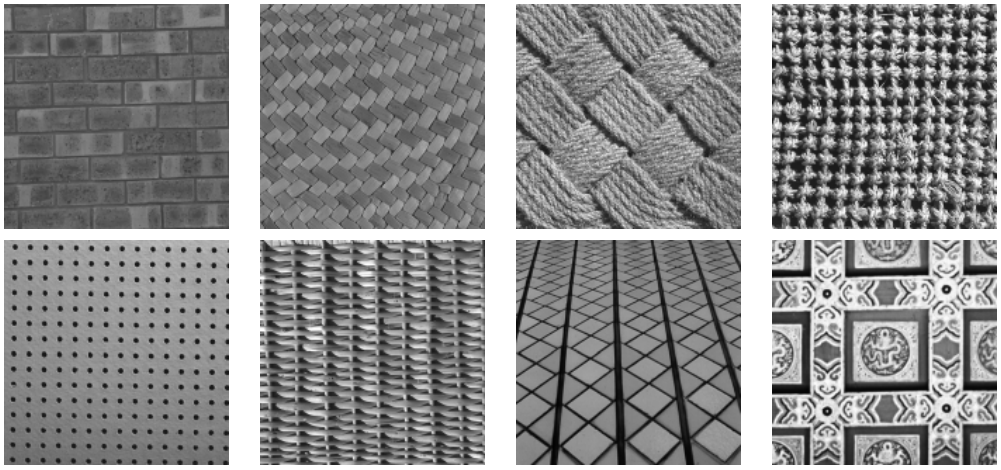
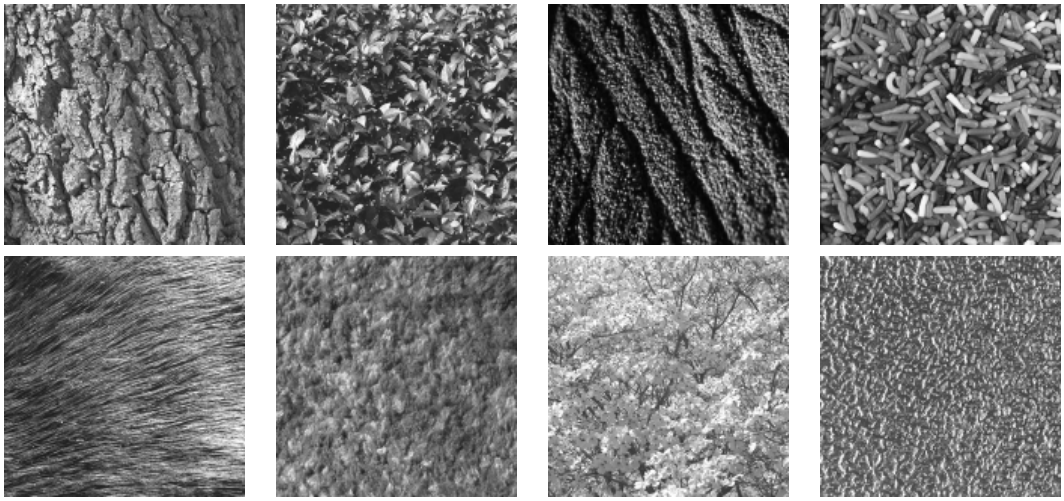


FIGURE 1.4 – Exemples de textures stochastiques.



1.2.2 Perception visuelle des textures

Beaucoup de travaux ont été menés pour étudier la perception visuelle humaine de la texture. En neurosciences, les études s'intéressent au processus neuronal impliqué dans la perception visuelle afin de comprendre le mécanisme de la détection et de la ségrégation de texture par le système visuel humain (SVH). En vision par ordinateur, le but est de simuler la perception de la texture par le SVH via la proposition de représentations mathématiques permettant un traitement informatisé dans des applications comme la classification, la segmentation ou la synthèse des textures.

Julesz a proposé de définir mathématiquement une texture et a affirmé dans un premier temps qu'il est difficile de distinguer deux textures si leurs statistiques d'ordre un et deux sont identiques [Julesz, 1962]. Le modèle sous-jacent utilise uniquement des statistiques spatiales (d'ordre un et deux) des niveaux de gris d'une image texturée. En effet, les statistiques d'ordre un déterminent la probabilité d'observer une valeur à un emplacement quelconque tandis que les statistiques d'ordre deux mesurent l'homogénéité de la texture à l'aide de la probabilité d'observer une paire de valeurs selon une orientation et une distance (à l'aide de la fonction d'autocorrélation). On appelle *isodipôle* toute paire de textures ayant les mêmes statistiques d'ordre deux identiques mais des statistiques d'ordre trois différentes, et plus généralement une *iso-n-gone* une paire de textures ayant les mêmes statistiques d'ordre n et des statistiques d'ordre $n+1$ différentes [Julesz *et al.*, 1978]. La conjecture initiale de Julesz stipulait que toutes les parties des textures isodipôles ne peuvent être distinguées (sans effort). Ce qui a été réfuté par Julesz lui même dans [Julesz *et al.*, 1978] en synthétisant des images isodipôles dont on peut facilement différentier les textures (voir Figure 1.5) et en affirmant qu'il est difficile de distinguer deux textures si leurs statistiques d'ordre trois sont identiques (isotrigones). Cela a été aussi contredit par Gagalowicz dans [Gagalowicz, 1981] en proposant des contre-exemples de textures isotrigones qu'on peut facilement distinguer (voir Figure 1.6). Yellott a proposé l'emploi des statistiques d'ordre trois en affirmant que deux textures sont non distinguables si leurs fonctions de triple corrélation sont identiques (bispectres identiques) [Yellott, 1993]. Il a aussi proposé une méthode simple pour synthétiser des textures isodipôles contre exemples à la conjoncture de Julesz. Cependant Victor dans [Victor, 1994] a prouvé les limites de la caractérisation de la texture à l'aide du bispectre (transformée de Fourier de la triple corrélation) et a proposé des contre-exemples de textures isotrigones et isotétragones Figure 1.7.

FIGURE 1.5 – Image isodipôle contenant deux textures de statistiques d'ordre deux identiques (spectres d'énergie identiques).

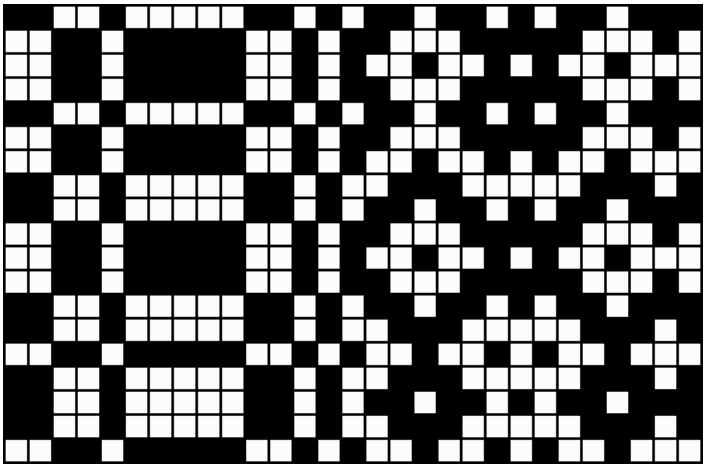


FIGURE 1.6 – Image isotrigone contenant deux textures de statistiques d'ordre trois identiques (bispectres identiques).

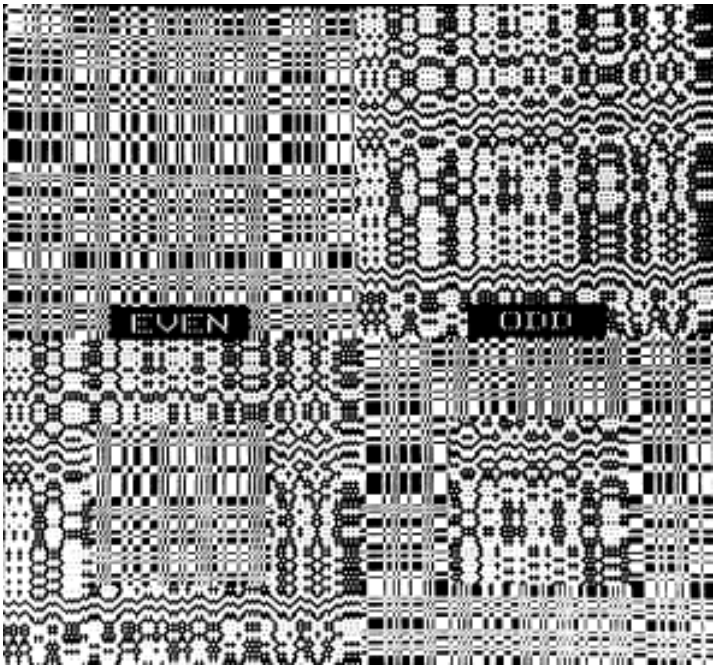
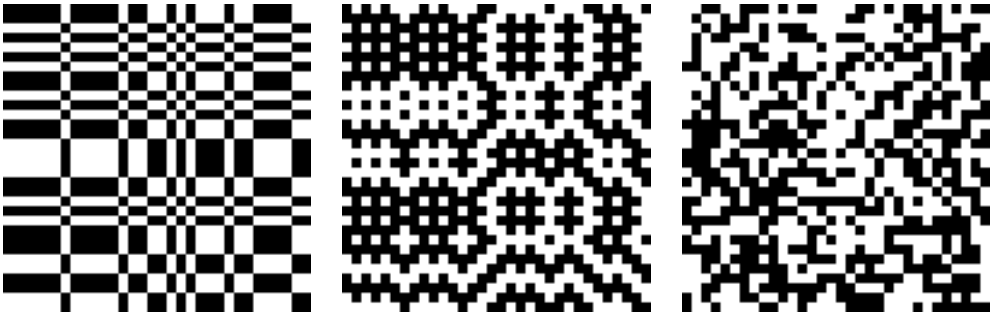


FIGURE 1.7 – Exemples de textures ayant les mêmes quadruples corrélations (trispectres identiques).



Une autre approche essayant d'expliquer la perception visuelle des textures est la théorie des textons de Julesz [Julesz, 1981a, Julesz, 1981b]. Ce sont des primitives de base liées aux caractéristiques locales de la texture et qui sont décrites par les terminaisons, longueurs, largeurs et orientations des tâches (*blobs*). Julesz considère que la perception humaine de la texture peut être modélisée par les densités d'ordre un des textons [Julesz, 1981b].

Cependant, toutes ces approches suggérant que le SVH distingue les textures en employant des statistiques globales, ne sont pas les seules à avoir été proposées dans la littérature pour la perception des textures. Harvey et Gervais assimilent la perception visuelle de la texture au calcul de la transformée de Fourier et proposent une modélisation spatio-fréquentielle de la perception [Harvey et Gervais, 1978]. Cependant, des études plus récentes ont été menées sur des mammifères en montrant les limites de cette modélisation spatio-fréquentielle de la perception. Ces dernières proposent une représentation multi-échelles et multi-orientations de la perception humaine ([De Valois *et al.*, 1982, Kulikowski *et al.*, 1982, Webster et De Valois, 1985]). D'autres travaux vont dans le même sens et proposent des méthodes de synthèse de filtres orientés assimilant le SVH (voir [Caelli, 1982] par exemple). Tous ces travaux ont motivé l'utilisation des transformées multi-échelles et multi-orientations qui permettent une bonne représentation de la réponse des neurones dans le cortex visuel humain ; nous citons par exemple les filtres de Gabor [Turner, 1986, Fogel et Sagi, 1989], la transformée Cortex [Watson, 1987] ou la transformée en ondelettes [Mallat, 1989].

Finalement, l'étude de la perception visuelle de la texture a conduit au développement de différentes théories pour l'interprétation de la vision humaine. À travers ces différentes théories, nous retrouvons tous les ingrédients méthodologiques utilisés dans les différentes méthodes visant l'analyse du contenu textural. La conjecture de Julesz a été à l'origine des méthodes sta-

tistiques pour l'analyse des textures en les caractérisant à l'aide des descripteurs statistiques (autocorrélations, matrices de cooccurrence, etc.). La théorie des textons a inspiré les approches géométriques qui se proposent d'extraire des descripteurs pour la caractérisation de la texture. L'assimilation de la perception aux transformées multi-échelles et multi-orientations a permis le développement des méthodes de filtrage pour l'analyse des textures.

1.3 Analyse de textures

Les différentes définitions de la texture et les différentes représentations issues de la perception visuelle conduisent à diverses approches. Ainsi, il est possible de classer grossièrement les méthodes d'analyse de textures selon quatre grandes catégories de méthodes :

- Géométriques dites aussi structurelles,
- Statistiques basées sur l'analyse spatiale,
- Fréquentielles par filtrage,
- Par modélisation probabiliste.

Cette classification n'est évidemment pas figée, des méthodes d'analyse peuvent appartenir à plus qu'une famille d'approche. En outre, des liens peuvent exister entre descripteurs issus de méthodes de catégories distinctes.

1.3.1 Méthodes géométriques

Ces méthodes dites aussi structurelles considèrent la texture comme un agencement d'éléments de base (primitives selon Haralick [Haralick, 1979] ou textons selon Julesz [Julesz, 1981a]) qu'il faut extraire puis en déterminer la règle d'arrangement.
Les dépendances entre les primitives de la texture peuvent être représentées par des graphes ce qui permet de synthétiser une texture très régulière [Zucker, 1976].
La méthode de spectre de textures consiste à décomposer une image en entités appelées « unités de textures » [He et Wang, 1990]. L'image est divisée en matrices de 3x3 pixels, ensuite en considérant l'ensemble de voisinage $V = \{V_0, V_1, \ldots, V_8\}$ où V_0 est le pixel central, les unités de textures sont représentées par l'ensemble $TU = \{E_1, \ldots, E_8\}$ avec

$$E_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad V_i < V_0 \\ 1 & \text{si} \quad V_i = V_0 \\ 2 & \text{si} \quad V_i > V_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Le spectre de la texture $S(i), i = 0, \ldots, 6560$ (il est possible d'obtenir $3^8 = 6561$ TU différentes), est la fréquence d'occurrence des unités de textures. À partir du spectre de la texture, des caractéristiques comme la symétrie « noir et blanc », la symétrie géométrique, le degré d'orientation ou la symétrie centrale sont calculés pour caractériser la texture. Les formules permettant d'obtenir ces descripteurs sont proposées dans [He et Wang, 1991].
La partition de Voronoï a été proposée dans [Tuceryan et Jain, 1990] pour la caractérisation et la segmentation des textures. Il s'agit d'extraire les primitives constituant la texture (appelées jetons) et d'en construire une mosaïque de polygones Voronoï et de calculer des descripteurs sur chaque maillage de Voronoï en utilisant les moments des surfaces des polygones.
La méthode des motifs binaires locaux (LBP) introduite dans [Ojala *et al.*, 1996] a été inspirée par la méthode de spectre de He et Wang [He et Wang, 1990]. Il s'agit de générer un nombre d'unités de textures plus restreint [4]. En considérant un ensemble de voisinage $V = \{V_0, V_1, \ldots, V_8\}$, on compare les pixels voisins au pixel central afin de générer un motif binaire. L'affectation binaire est réalisée comme suit, pour $i = 1, \ldots, 8$ si $V_i < V_0$ on assigne au pixel voisin i la valeur 0, sinon on lui assigne la valeur 1. Ensuite, les valeurs binaires de ce motif sont multipliées par des poids et sommées pour calculer le code LBP du pixel central (voir Figure 1.8). L'histogramme des codes LBP constitue le descripteur caractérisant la texture. Cette méthode d'analyse présente une complexité calculatoire faible et permet de différentier des contenus texturaux ; elle est aussi considérée comme une approche unifiant l'approche statistique et d'autres modèles géométriques pour l'analyse de texture. C'est une méthode devenue très populaire et employée jusqu'à nos jours pour différentes applications en vision par ordinateur [5]. Pour plus de détails sur cette approche et ses différentes applications on peut se rapporter à cet ouvrage [Pietikäinen *et al.*, 2011].

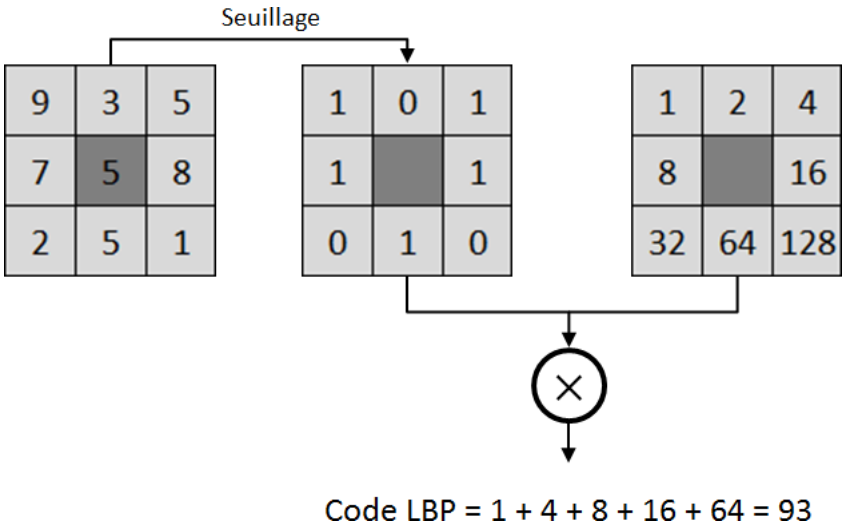
1.3.2 Méthodes statistiques basées sur l'analyse spatiale

À l'aide de mesures statistiques, ces méthodes évaluent quantitativement la distribution des niveaux de gris d'une texture. Les matrices de cooccurrence introduites par Haralick [Haralick *et al.*, 1973, Haralick, 1979] caractérisent les dépendances spatiales entre niveaux de gris. Elles permettent de

4. Il est possible d'obtenir $2^8 = 256$ unités de textures différentes tandis qu'avec la méthode du spectre de texture ce nombre est de $3^8 = 6561$.

5. On peut recenser plus que 700 références de travaux de recherche employant la méthode LBP en segmentation, recherche d'images et vidéos par le contenu, télédétection, imagerie médicale, analyse de textures 3D ou l'analyse de mouvement (voir `http://www.cse.oulu.fi/CMV/LBP_Bibliography` pour plus de détails).

FIGURE 1.8 – Construction d'un motif binaire et calcul du code LBP pour un pixel central.



déterminer la fréquence d'observation d'un motif formé de deux pixels séparés par une distance d dans une orientation particulière θ. Plusieurs mesures statistiques sont ensuite calculées à partir des matrices de cooccurrences pour constituer un descripteur de texture. Les plus fréquemment utilisées sont : la moyenne, la variance, le contraste, l'énergie, l'entropie, le contraste et l'homogénéité (les formules de calcul de ces caractéristiques peuvent être retrouvées dans [Haralick, 1979]).
Des statistiques d'ordre un [6] ont aussi été employées. Elles mesurent la probabilité d'apparition d'un niveau de gris à un emplacement aléatoire sans prendre en considération la dépendance spatiale entre pixels. Ces statistiques sont calculées à partir de la distribution de probabilité (histogramme) de l'intensité lumineuse. Le descripteur de la texture est constitué de la moyenne (moment d'ordre un), la variance (moment d'ordre deux), skewness (cumulant d'ordre trois), kurtosis (moment d'ordre quatre) etc. [Pinamonti *et al.*, 1989, Schistad Solberg et Jain, 1997]. Dans le domaine des ondelettes, des statistiques d'ordre un associées à la fonction d'autocorrélation ont été utilisées avec succès pour la synthèse des textures [Portilla et Simoncelli, 2000].
La fonction d'autocorrélation $R(p, q)$ qui utilise des statistiques d'ordre deux permet de déterminer la fréquence d'observation de la même valeur de pixel

6. Il ne faut pas confondre les statistiques d'ordre supérieur aux moments d'ordre supérieur, ces derniers étant des statistiques d'ordre un puisque calculés à partir de la distribution de probabilité caractérisant les statistiques d'ordre un.

avec un déplacement (p, q). La fonction d'autocorrélation figure parmi les premiers descripteurs employés pour la reconnaissance de forme [McLaughlin et Raviv, 1968]. Son utilisation pour l'analyse de la texture résulte de la conjoncture de Julesz [Julesz, 1962]. Malgré la réfutation de cette conjoncture, elle a été utilisée avec succès pour la synthèse des textures en considérant la dépendance spatiale de l'intensité lumineuse [Gagalowicz, 1981] ou des coefficients d'ondelettes [Portilla *et al.*, 2003].
Des extensions de la fonction d'autocorrélation aux ordres supérieurs ont été aussi proposées dans la littérature [Coroyer, 1996, Coroyer *et al.*, 1997]. Ces approches ont démontré le caractère non-Gaussien du problème d'analyse de texture, et sont en conformité avec les différentes études sur l'ordre des statistiques que distingue le système visuel humain [Victor, 1994].

1.3.3 Méthodes fréquentielles par filtrage

Les différentes méthodes d'analyse de texture (géométriques, statistiques ou probabilistes) peuvent être exploitées dans un espace transformé dans lequel la texture est projetée. L'objectif est d'identifier les différentes fréquences composant la texture avec ou sans sélection en échelle ou/et en orientation. Ces méthodes sont qualifiées de fréquentielle ou dites « par filtrage [7] ». Elles sont motivées par l'assimilation de la perception à un mécanisme de filtrage sélectif, multi-échelles et multi-orientations (voir page 18).
Parmi ces méthodes, les premières à être proposées employaient des filtres de Gabor [Turner, 1986, Fogel et Sagi, 1989] pour accomplir une résolution simultanée en espace et en fréquence. Un filtrage similaire multi-canal a été proposé dans [Bovik *et al.*, 1990] pour une analyse spectrale de la texture permettant la localisation spatiale des fréquences qui la composent. Ces bancs de filtres ont été très utilisés pour la caractérisation et la segmentation des textures [Dunn *et al.*, 1994].
La pyramide Laplacienne (non orientée) a été employée pour la synthèse multirésolution des textures [De Bonet, 1997]. Une autre représentation pyramidale et orientée (steerable pyramid) a été introduite dans [Heeger et Bergen, 1995] et a montré des résultats remarquables en synthèse [Portilla et Simoncelli, 2000] et en classification des textures [Do et Vetterli, 2002a, Tzagkarakis *et al.*, 2006].
Les ondelettes sont considérées comme une meilleure représentation de la perception humaine en comparaison avec les filtres de Gabor [Mallat, 1989]. Cette transformée incarne un pouvoir discriminant en accord avec la théorie

7. Dans l'état de l'art présenté dans [Tuceryan et Jain, 1998], ces méthodes sont dites empruntées au traitement du signal.

des textons de Julesz [Julesz, 1981a] qui présentent des orientations spatiales locales ainsi que des fréquences d'ondulation. De ce fait, les ondelettes sont un outil puissant pour la localisation spatio-fréquentielle et sont très utilisées pour la caractérisation des textures. Les méthodes caractérisant la texture dans le domaine des ondelettes affichent des résultats remarquables en segmentation [Unser, 1995, Laine et Fan, 1996, Kim et Kang, 2007], en classification [Laine et Fan, 1993, Van de Wouwer *et al.*, 1999, Randen et Husoy, 1999] ou en recherche d'image par le contenu texture [De Rivaz et Kingsbury, 1999, Do et Vetterli, 2002b, Kwitt et Uhl, 2010]. Plus récemment, des extensions en ondelettes géométriques adaptatives ont été introduites pour l'analyse des textures orientées ou ayant des singularités non prises en considération par les transformées en ondelettes usuelles. Parmi ces extensions, nous citons les bandelettes [Peyré, 2005], les contourlettes [Po et Do, 2006], les ridgelettes [Arivazhagan *et al.*, 2006], les curvelettes [Dettori et Semler, 2007], les groupelettes [Peyré, 2010] ou les tetrolettes [Krommweh, 2010].

1.3.4 Méthodes basées sur la modélisation probabiliste

Ces approches caractérisent statistiquement la texture à l'aide de modèles probabilistes en la considérant comme une réalisation d'un processus aléatoire qui peut être décrit par une loi de probabilité. Ces modèles souvent paramétriques permettent une représentation compacte de la texture. Dans le cas où un modèle est estimé sur des sous-bandes issues d'une transformation permettant la localisation spatio-fréquentielle (filtres de Gabor, *lettes etc.), ces approches ont un lien étroit avec la théorie des textons de Julesz [Julesz, 1981a]. En effet, d'un coté, les coefficients de sortie des filtres représentent les fréquences d'oscillation des textons à une position donnée selon une orientation donnée, d'un autre coté, leurs distributions peuvent totalement décrire les statistiques du premier ordre des textons ; ce qui est en accord avec le postulat de Julesz [Julesz, 1981b].
Dans le contexte des modèles probabilistes, les modèles Markoviens sont parmi les plus utilisés pour l'analyse des textures. Leur emploi permet la caractérisation de la dépendance entre pixels en définissant une structure de voisinage et des fonctions de potentiel associées. Parmi les différents modèles Markoviens pour la texture, nous retrouvons le modèle binomial qui est plus adapté à la synthèse des micro-textures que les macro-textures [Cross et Jain, 1983]. Le modèle de Gibbs a été proposé pour la segmentation des textures [Derin et Elliott, 1987], et le lien entre les matrices de cooccurrences et des mesures calculées via ce modèle a été démontré dans [Elfadel et Picard, 1994]. Une amélioration de cette modélisation a été proposée dans [Gimel'farb, 1999] en considérant une structure de voisinage variable

qui est estimée conjointement aux fonctions de potentiel. D'autres auteurs ont proposé le modèle Markovien Gaussien qui a été utilisé avec succès pour la classification [Chellappa et Chatterjee, 1985] et la segmentation des textures [Manjunath et Chellappa, 1991, Krishnamachari et Chellappa, 1997]. Plus récemment, avec l'avènement des ondelettes, les modèles de Markov cachés ont été employés pour la caractérisation des statistiques jointes des sous-bandes [Do et Vetterli, 2002a, Fan et Xia, 2003, Dasgupta et Carin, 2006, Rallabandi et Subramanyam, 2008].
Dans le contexte des modèles Makoviens Gaussiens, le modèle auto-régressif (AR) caractérise les interactions locales entre pixels en considérant chaque pixel central dans un voisinage comme une somme pondérée des voisins et d'un bruit additif indépendant et identiquement distribué. Ce modèle paramétrique est simple à exploiter et a été utilisé pour la synthèse de textures [Chellappa et Kashyap, 1985] ou la classification et la segmentation [Mao et Jain, 1992]. Le modèle auto-régressif multirésolution en est une dérivée et a été employé pour la caractérisation de la texture dans une représentation multi-échelles à l'aide d'une pyramide Gaussienne [Comer et Delp, 1999]. Plus récemment, les avancées en estimation des paramètres du modèle AR en se basant sur des critères d'information [Alata et Olivier, 2003] ont permis le développement de nouvelles méthodes de segmentation des textures [Alata et Ramananjarasoa, 2005] ou des textures couleur [Qazi *et al.*, 2011].
Les modèles probabilistes caractérisant les distributions marginales ou jointes des coefficients de sous-bandes issus d'une représentation multirésolution [8], ont pris beaucoup d'importance. De par le lien avec les études sur la perception visuelle de la texture, ces approches sont très utilisées pour la classification et la recherche d'images par le contenu texture. Deux classes de modèles sont envisageables :

- Les modèles univariés décrivant les statistiques marginales des sous-bandes qui sont considérées comme la réalisation d'une variable aléatoire (scalaire). Ces modèles sont une paramétrisation de la méthode d'histogrammes de sous-bandes qui a été employée avec efficacité en indexation d'images [Mandal *et al.*, 1999] , en classification [Liu et Wang, 2003, Hadjidemetriou *et al.*, 2004] et segmentation des textures [Liu et Wang, 2006]. Le modèle univarié le plus utilisé dans ce cadre est la distribution Gaussienne généralisée (GGD) depuis son introduction par Stéphane Mallat dans [Mallat, 1989].

8. À notre connaissance, la majorité des méthodes d'analyse de texture employant des lois de probabilité univariées ou multivariées, caractérisent la texture dans un domaine de projection et non dans le domaine spatial.

– Les modèles multivariés qui généralisent les précédents en décrivant les statistiques jointes des sous-bandes qui sont considérées comme la réalisation d'un champ aléatoire (vecteur). Ces modèles sont une paramétrisation des histogrammes multi-dimensionnels des sous-bandes et permettent de capter la dépendance entre coefficients. Dans ce cadre, nous citons, sans être exhaustif, les travaux de Kim et Kang, Tzagkarakis et al. et de Verdoolaege et Scheunders [Kim et Kang, 2007, Tzagkarakis *et al.*, 2006, Verdoolaege et Scheunders, 2011].

Les différentes lois de probabilité employées pour la caractérisation de la texture dans les représentations multirésolution seront décrites avec plus de détails dans la section 4.3 du chapitre 4.

1.4 Comparaison des méthodes usuelles d'analyse de textures

Les méthodes d'analyse de textures ont fait l'objet de nombreuses études comparatives. Cependant, il est difficile de proposer une hiérarchisation des approches car les comparaisons dépendent de l'application considérée, des données traitées et des transformées employées (dans le cas des méthodes spatio-fréquentielles).

1.4.1 Ondelettes *versus* filtres de Gabor

Les premières études comparatives prétendaient que l'énergie (moyenne et écart type) des sorties de filtres de Gabor est un très bon descripteur pour caractériser la texture. Par exemple, dans [Manjunath et Ma, 1996], les auteurs comparent trois méthodes : l'énergie des sorties de filtres de Gabor [Fogel et Sagi, 1989, Bovik *et al.*, 1990], l'énergie des sous-bandes d'ondelettes orthogonales et le modèle auto-régressif multirésolution de [Mao et Jain, 1992]. Les meilleurs résultats en classification ont été obtenus avec le descripteur d'énergies des filtres de Gabor. L'étude proposée dans [Pichler *et al.*, 1996] va dans le même sens que l'étude de [Manjunath et Ma, 1996] en affichant de bonnes performances en segmentation pour les filtres de Gabor par rapport aux ondelettes. De manière similaire à l'étude dans [Manjunath et Ma, 1996], cette étude n'a pas pris en considération la non-*Gaussianité* des sous-bandes d'ondelettes et s'est contentée d'employer l'énergie comme descripteur. En effet, il est évident que l'énergie des sous-bandes d'ondelettes n'est pas un bon descripteur suite à leur aspect non Gaussien.

Dans une étude ultérieure [Randen et Husoy, 1999], les auteurs ont montré

à partir des tests de segmentation de textures que l'emploi des ondelettes orthogonales engendre un taux d'erreurs de bonne classification moindre par rapport à l'utilisation du banc de filtres de Gabor. Il faut aussi signaler que les filtres de Gabor ne sont pas inversibles, ce qui empêche leur emploi pour d'autres applications comme la synthèse des textures.

1.4.2 Descripteurs fondées sur les motifs binaires locaux et les matrices de cooccurrence

Dans l'étude de [Randen et Husoy, 1999], les résultats obtenus avec les ondelettes surclassaient ceux obtenus en segmentation sur la base des descripteurs de matrices de cooccurrence (GLCM) ou en employant le modèle autorégressif (AR) de [Mao et Jain, 1992].
Dans [Clausi et Yue, 2004], les auteurs ont comparé les performances de la méthode GLCM et le modèle markovien gaussien (GMRF) en segmentation de textures synthétiques et d'images satellitaires. Le modèle GMRF s'est avéré plus sensible à la taille de la fenêtre considérée pour la segmentation tandis que la méthode GLCM a affiché des performances meilleurs même avec des fenêtres de taille réduite.
Les auteurs dans [Ojala *et al.*, 1996], étudient et comparent le modèle LBP, les matrices des différences de niveaux de gris GLDM [Unser, 1986] (une alternative au modèle GLCM), les descripteurs de filtres de Laws et les coefficients d'autocorrélation (descripteur statistique). Le modèle LBP présente de très bonnes performances pour une faible complexité par rapport aux autres méthodes.
Les deux méthodes (GLCM et LBP) sont faciles à mettre en œuvre. La méthode GLCM est plus adaptée au traitement des micro-textures tandis que les LBP sont plus performant pour modéliser les textures régulières constituées de motifs répétitifs. Dans des études comme [Stachowiak *et al.*, 2005], même si dans l'ensemble, c'est le descripteur de texture basé sur les ondelettes qui est le plus performant, la modélisation LBP est meilleure par rapport à la méthode GLCM.

1.4.3 Modélisation probabiliste des coefficients d'ondelettes

Plus récemment, Arivazhagan et Ganesan ont démontré l'intérêt d'employer les descripteurs issus d'ondelettes en classification [Arivazhagan et Ganesan, 2003a] et en segmentation [Arivazhagan et Ganesan, 2003b] des textures. Dans les résultats en classification dans [Arivazhagan et Ganesan,

2003a], les descripteurs d'ondelettes affichent des meilleurs résultats par rapport à la méthode GLCM mais la combinaison de tous les descripteurs améliore les performances. Le même comportement a été constaté en segmentation des textures [Arivazhagan et Ganesan, 2003b],car en comparaison à la méthode de spectre des textures [He et Wang, 1990], les meilleurs résultats ont été obtenus en employant les ondelettes en combinaison avec les matrices de cooccurrence (calculées sur les sous-bandes et sur l'image).
Unser a été parmi les premiers chercheurs à préconiser l'emploi des descripteurs issus d'ondelettes en affirmant leur supériorité par rapport aux méthodes d'analyse de la texture à échelle unique (domaine spatiale) comme la GLCM, GMRF, modèle AR etc. [Unser, 1995].
D'autres études comparatives plus récentes ont également confirmé la préconisation d'Unser d'employer les descripteurs de textures dans le domaine des ondelettes. Ces études ont été réalisées dans des domaines applicatifs comme la classification des surfaces d'acier selon leur qualité [Bharati *et al.*, 2004] ou la tribologie [9] [Stachowiak *et al.*, 2005]. Dans [Bharati *et al.*, 2004], l'analyse des textures à l'aide d'ondelettes permet de mieux classifier les surfaces d'acier selon quatre qualités (excellente, bonne, moyenne et mauvaise) que la méthode GLCM. L'étude de [Stachowiak *et al.*, 2005] compare les performances des méthodes d'analyse de textures en employant les ondelettes, les filtres de Gabor, la méthode GLCM, GMRF et LBP. Pour évaluer les performances en classification, les auteurs ont utilisé quatre ensembles d'images comprenant des textures de l'album de Brodatz [url Brodatz,], des micro-textures synthétiques de type fractal, des surfaces décapées et des surfaces érodées. Sur les 20 classes de textures de Brodatz, à l'aide du classificateur k plus proches voisins (KNN), l'analyse de texture basée sur les ondelettes affiche des meilleures performances en comparaison à l'emploi des filtres de Gabor, de la méthode GLCM ou de GMRF. La méthode GLCM a été plus efficace sur les textures fractales qui sont des micro-textures. Cependant, sur le même ensemble de textures, lorsque la taille de l'image est réduite (32x32), c'est la méthode d'analyse en ondelettes qui présente les meilleurs performances par rapport à la méthode GLCM qui est en outre sensible à la taille de l'image analysée. La méthode d'analyse en ondelettes affiche des meilleurs résultats par rapport aux méthodes usuelles GLCM, GMRF et LBP pour la classification des textures des surfaces décapées et des surfaces érodées.

Nous notons que ces études qui montrent la supériorité des descripteurs d'ondelettes pour la caractérisation de la texture, n'ont pas pris en considéra-

9. La tribologie est la science qui étudie les phénomènes susceptibles de se produire entre deux systèmes matériels en contact, immobiles ou animés de mouvements relatifs. Il recouvre, entre autres, tous les domaines du frottement, de l'usure et de la lubrification.

tion le caractère non-Gaussien des sous-bandes. En se limitant à la moyenne et à l'écart type comme descripteurs, les auteurs font implicitement l'hypothèse de *Gaussianité*. Cependant, Do et Vetterli ont montré dans [Do et Vetterli, 2002b] que le pouvoir discriminant obtenu en employant des ondelettes peut s'accroître en adoptant un *a priori* Gaussien généralisé pour les lois marginales des sous-bandes et en mesurant la similarité à l'aide de la divergence de Kullback-Leibler. D'autres travaux s'en sont suivi en proposant d'autres *a priori* univariés non-*Gaussiens* tels que les lois Gamma ou Weibull, pour la caractérisation de la texture dans le domaine d'ondelettes [Mathiassen *et al.*, 2002, Kwitt et Uhl, 2010]. Afin de généraliser l'approche probabiliste univariée, des auteurs recommandent l'emploi de modèles multivariés pour la description des statistiques jointes des sous-bandes. Le modèle de mixture de Gaussiennes multivariées [Kim et Kang, 2007], qui est un approximateur universel, est le plus efficace en comparaison au modèle Gaussien multivarié qui peut être considéré après un post-traitement de *Gaussianisation* sur les sous-bandes [Tzagkarakis *et al.*, 2006].
Les différentes études comparatives de l'état de l'art, ainsi que les travaux récents sur la modélisation statistique des lois marginales des sous-bandes d'ondelettes ([Do et Vetterli, 2002b, Mathiassen *et al.*, 2002, Kwitt et Uhl, 2010]) ou leurs lois jointes ([Kim et Kang, 2007, Tzagkarakis *et al.*, 2006, Verdoolaege et Scheunders, 2011]), nous ont conforté dans notre choix d'adopter l'approche de caractérisation de la texture dans le domaine des ondelettes à l'aide de modèles probabilistes.

1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans cet état de l'art différentes techniques d'analyse de textures. Même s'il est difficile d'affirmer qu'une méthode d'analyse de texture est indiscutablement la plus performante, l'emploi des ondelettes peut améliorer considérablement la qualité de caractérisation d'une image texturée. Des études comparatives les plus récentes, il en ressort une préférence pour la caractérisation de la texture dans le domaine des ondelettes [Randen et Husoy, 1999, Arivazhagan et Ganesan, 2003a, Arivazhagan et Ganesan, 2003b, Bharati *et al.*, 2004, Stachowiak *et al.*, 2005]. Cela peut être interprété à l'aide de la ressemblance entre le mécanisme de la perception visuelle humaine et l'analyse spatio-fréquentielle qui est une propriété intrinsèque des ondelettes. L'emploi des modèles probabilistes non-Gaussiens (univariés et multivariés) pour décrire les statistiques des sous-bandes d'ondelettes, procure des bonnes performances en classification ou segmentation de texture. Dans les chapitres qui suivent, nous présenterons les différentes contribu-

tions que nous avons apportées, couvrant à la fois la recherche de modèles probabilistes ainsi que l'identification de mesures de similarité adaptées à la caractérisation et la description des contenus texturaux.

Chapitre 2

Modèles univariés des lois marginales

Sommaire

2.1 La densité Gaussienne généralisée 32

2.1.1 Définition 32

2.1.2 Propriétés 33

2.1.3 Estimation des paramètres 37

2.1.3.1 Estimateur MM 37

2.1.3.2 Estimateur ML 38

2.2 La densité Gaussienne généralisée asymétrique . 43

2.2.1 Définition 43

2.2.2 Propriétés 50

2.2.3 Estimation des paramètres 54

2.2.3.1 Méthode des moments 56

2.2.3.2 Méthode HOS 57

2.2.3.3 Estimateur ML 59

2.2.4 Performance des estimateurs 62

2.3 Qualité de l'ajustement des statistiques marginales 68

2.3.1 Test d'adéquation χ^2 68

2.3.2 Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov 73

2.3.3 Ajustement des statistiques d'ordre supérieur : HOS fitting 74

2.4 Conclusion 75

L'image texturée est projetée dans un sous-espace dans lequel le comportement statistique des coefficients peut être caractérisé par la modélisation des lois marginales. Le caractère non Gaussien des coefficients d'ondelettes a été initialement souligné par Mallat [Mallat, 1989]. En effet, Les lois marginales des coefficients d'ondelettes se révèlent souvent leptokurtiques avec un comportement non Gaussien.
Dans ce chapitre nous rappelons les principaux modèles univariés pour la description des statistiques des coefficients d'ondelettes. Nous présentons tout d'abord la densité Gaussienne généralisée (GGD) qui a été largement employée comme *a priori* adéquat pour la modélisation statistique des coefficients d'ondelettes. Ensuite, nous présentons notre contribution qui consiste en l'introduction de la distribution Gaussienne généralisée asymétrique (AGGD). Il s'agit d'un nouveau modèle qui prend en considération l'asymétrie éventuelle des distributions des coefficients d'ondelettes et qui généralise le modèle GGD.

2.1 La densité Gaussienne généralisée

La densité Gaussienne généralisée est de loin la distribution la plus utilisée pour la modélisation des coefficients d'ondelettes dans différentes applications. Stéphane Mallat a proposé la GGD pour modéliser les coefficients d'ondelettes dans son travail pionnier introduisant la représentation multirésolution en ondelettes orthogonales [Mallat, 1989], avec application en compression et en caractérisation de la texture. Depuis, la GGD a été largement employée conduisant à de bons résultats en codage vidéo [Sharifi et Leon-Garcia, 1995], en débruitage d'image [Moulin et Liu, 1999, Chang *et al.*, 2000], en compression d'image [Kasaei *et al.*, 2002], pour la détection du changement dans les images SAR [Bazi *et al.*, 2005] ou pour la reconnaissance de visage [Gonzalez-Jimenez *et al.*, 2007]. En outre, la GGD étant un bon modèle pour décrire les statistiques des coefficients d'ondelettes, elle a été utilisée dans différents travaux nécessitant la caractérisation de la texture. Elle a conduit à de bonnes performances en classification d'images [Van de Wouwer *et al.*, 1999, Choy et Tong, 2007], en segmentation [Figueiredo, 2005] et en recherche d'images texturées [Do et Vetterli, 2002b, Qu *et al.*, 2007].

2.1.1 Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si X suit une loi GGD, sa PDF est donnée par,

$$f_X(x) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} \exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$ est la fonction Gamma usuelle. α est le *paramètre d'échelle* qui est lié à la largeur du pic de la distribution, il traduit la dispersion autour de zéro. Le *paramètre de forme* β décrit la décroissance de la distribution et modélise ainsi sa forme. La GDD généralise plusieurs distributions usuelles. Par exemple, on retrouve la loi Gaussienne si $\beta = 2$; si $\beta = 1$, la PDF est une distribution Laplacienne et si β est très grand la PDF tend vers une loi uniforme sur $\left[-\alpha\sqrt{\frac{3\Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)}}, \alpha\sqrt{\frac{3\Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)}}\right]$.
Les PDFs de la GGD pour différentes valeurs du paramètre α et β sont illustrées dans la Figure 2.1. La Figure 2.1(a) montre les diverses formes de la GGD de variance unitaire pour différentes valeurs β. La Figure 2.1(b) illustre l'effet du paramètre d'échelle α sur la dispersion autour de zéro pour une GGD de paramètre de forme β fixé.

2.1.2 Propriétés

Nous présentons ici quelques propriétés utiles dans la pratique, caractérisant la loi GGD.

- La fonction caractéristique de X est donnée par [Pogány et Nadarajah, 2010] :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{jtX}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/\beta)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1+2n}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)} \frac{\left[\frac{-(\alpha t)^2}{4}\right]^n}{n!} \tag{2.2}$$

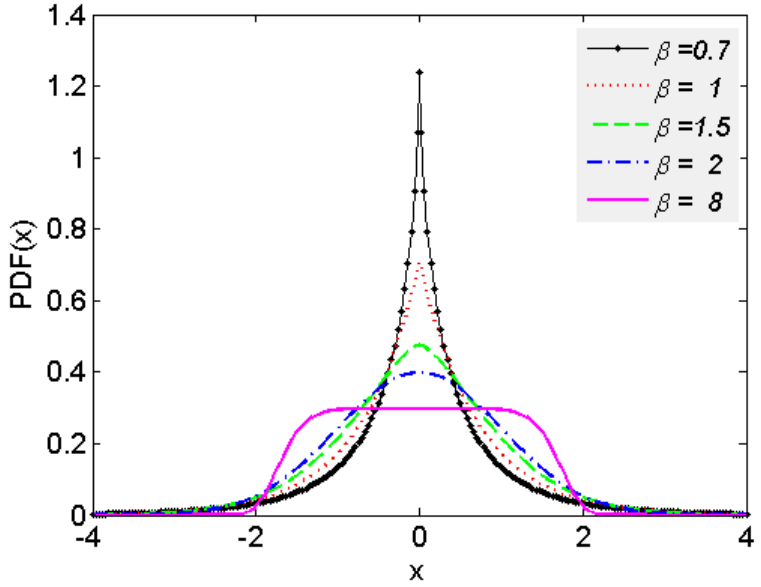
- La fonction de répartition de X est exprimée comme suit,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0.5\left(1 - \gamma\left(1/\beta, (-x/\alpha)^{\beta}\right)\right) & x < 0 \\ 0.5\left(1 + \gamma\left(1/\beta, (x/\alpha)^{\beta}\right)\right) & x \geq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

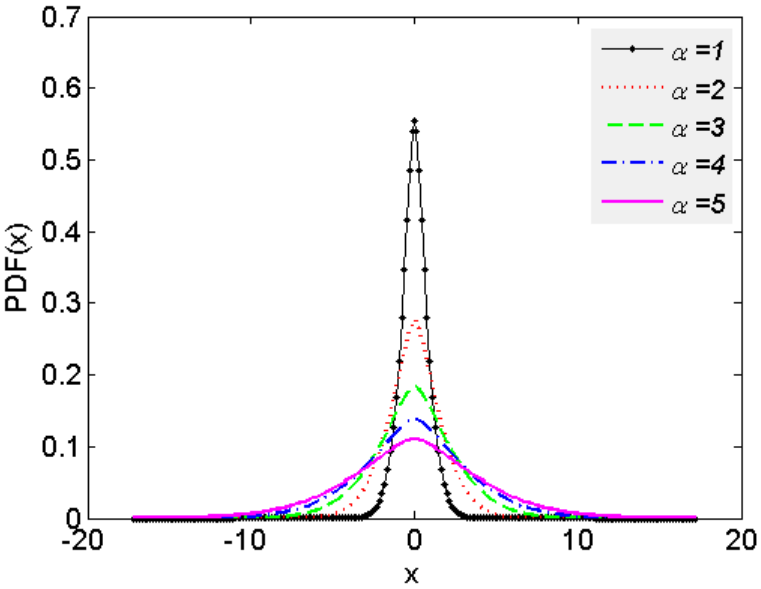
  où $\gamma(a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^b t^{a-1}e^{-t}dt$ est la fonction Gamma incomplète [Abramowitz et Stegun, 1965].
- Tous les moments impairs sont nuls : $\mathbb{E}[X^r] = 0 \quad r = 1, 3, 5, \ldots$
- Les moments pairs sont donnés par,

$$M_X(r) = \frac{\alpha^r \Gamma\left(\frac{r+1}{\beta}\right)}{\Gamma(1/\beta)} \qquad r = 2, 4, 6, \ldots \tag{2.4}$$

FIGURE 2.1 – (a) PDFs des lois GGD de paramètres $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 8$ et de variance $= 1$.(b) L'effet du paramètre d'échelle α, pour des GGD avec un paramètre de forme $\beta = 1.5$.



(a)



(b)

En particulier la variance est,

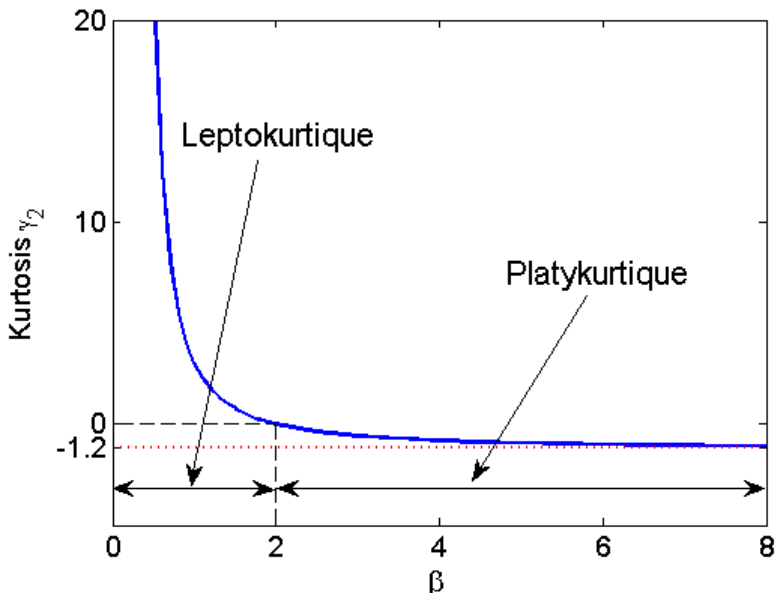
$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2 \Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} \tag{2.5}$$

- La PDF est symétrique, le coefficient d'asymétrie ou skewness est nul.
- Le coefficient d'aplatissement ou kurtosis d'une GGD est,

$$\gamma_2 = \frac{M_X(4)}{\sigma^4} - 3 = \frac{\Gamma(5/\beta)\,\Gamma(1/\beta)}{(\Gamma(3/\beta))^2} - 3 \tag{2.6}$$

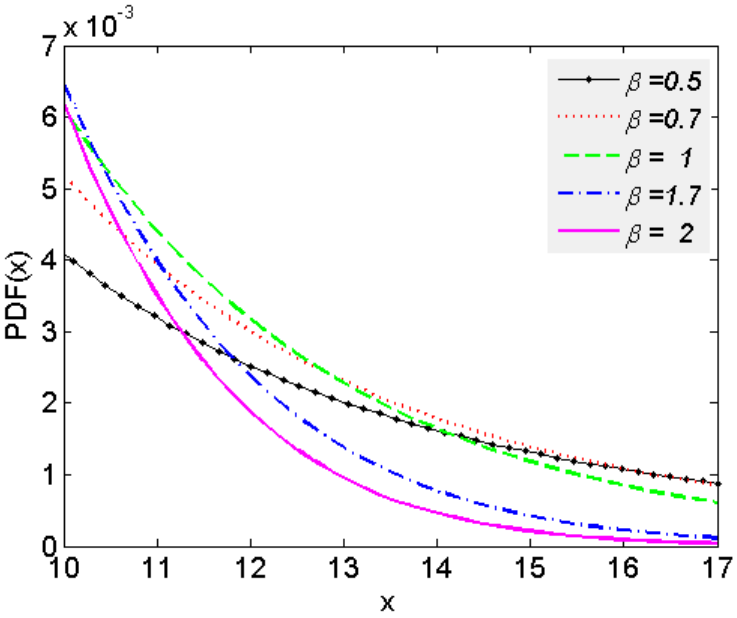
Nous présentons dans la Figure 2.2, le kurtosis en fonction du paramètre de forme β. Si $\beta < 2$ le kurtosis γ_2 est strictement positif, ce qui correspond à des distributions leptokurtiques, i.e la PDF aura un pic plus prononcé avec des queues lourdes ; dans ce cas la distribution est dite *super-Gaussienne*. En outre, $\lim_{\beta\to 0} \gamma_2 = +\infty$, et la « leptokurticité » de la distribution est de plus en plus prononcée quand la valeur de β est faible. Pour $\beta = 2$, la distribution est Gaussienne et le kurtosis est nul. La distribution est platykurtique (aussi dite *sub-Gaussienne*) si $\beta > 2$, et $\lim_{\beta\to+\infty} \gamma_2 = -1.2$ qui correspond au kurtosis d'une loi uniforme.

FIGURE 2.2 – Le coefficient d'aplatissement (kurtosis) en fonction du paramètre de forme β.



– **Comportement asymptotique des queues de distribution**
On a $f_X(x) \underset{x\to\infty}{=} O(e^{-x^\beta})$, donc pour un paramètre de forme $\beta < 2$, la queue de distribution d'une loi GGD présente une décroissance asymptotique plus lente que celle d'une loi Gaussienne. Des exemples de ce comportement asymptotique sont illustrés par la Figure 2.3. Nous remarquons que les queues sont très lourdes (par rapport à la Gaussienne où $\beta = 2$) quand $\beta < 2$. Ce qui fait de la GGD un modèle adéquat pour caractériser les coefficients d'ondelettes dont la distribution est centrée en zéro et possède des queues relevées comme cela a déjà été montré dans plusieurs travaux, comme [Mallat, 1989, Wainwright et Simoncelli, 2000]. Cependant, comme nous le verrons par la suite, même si souvent les distributions des coefficients d'ondelettes sont leptokurtiques, des distributions platykurtiques peuvent aussi surgir dans certains cas. L'avantage d'utiliser la GGD est de permettre la modélisation des distributions platykurtiques, contrairement à d'autres modèles univariés qui ont été proposés dans la littérature comme la loi α-stable [Achim *et al.*, 2001, Boubchir et Fadili, 2006] ou la Forme K de Bessel (BKF) [Srivastava *et al.*, 2002, Fadili et Boubchir, 2005] qui sont exclusivement leptokurtiques.

FIGURE 2.3 – Évolution de la queue de distribution pour des paramètres de forme $\beta \in 0.5, 0.7, 1, 1.7, 2$ de GGD de variance $= 1$.



2.1.3 Estimation des paramètres

Plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer les paramètres du modèle GGD. Elles peuvent être classées principalement en trois familles d'estimateurs : i) L'estimateur de maximum de vraisemblance (ML) ii) Les estimateurs basés sur les moments (Moments Matching (MM)) et iii) Les estimateurs utilisant l'entropie (Entropy Matching). Westernik et al. appliquent une série de test de Kolomogorv-Smirnov ou de Chi Square en vue d'estimer la meilleure valeur du paramètre de forme β [Westerink *et al.*, 1991]. L'estimation MM et l'estimateur ML ont été exhaustivement étudiés par Varanasi et Aazhang [Varanasi et Aazhang, 1989]. Mallat a proposé une méthode MM [Mallat, 1989] qui nécessite de résoudre un problème d'inversion de fonction pour estimer le paramètre de forme. C'est la même méthode qu'on retrouve par exemple dans [Sharifi et Leon-Garcia, 1995], mais en l'absence d'une solution analytique à ce problème d'inversion de fonction, des tables de correspondance sont utilisées et l'estimation est obtenue par interpolation. Un autre estimateur MM basé sur le kurtosis a été proposé dans [Pun et Jeffs, 1995]. Des estimateurs basés sur l'entropie peuvent être employés de la même façon que pour les estimateurs MM. Il s'agit d'écrire d'abord l'entropie [Aiazzi *et al.*, 1999, Prasad *et al.*, 2005] ou l'entropie généralisée [Kokkinakis et Nandi, 2005] comme fonction du paramètre de forme, et ensuite estimer ce paramètre en calculant l'inverse de cette fonction à l'aide de tables de correspondance et d'interpolation de la même façon que pour l'estimation MM.
Soit $X \propto GGD\,(\alpha, \beta)$ une VA de loi Gaussienne généralisée et $x_1, \ldots, x_N$ une réalisation d'échantillons i.i.d de X. Nous rappelons ici l'estimateur MM et l'estimateur ML.

2.1.3.1 Estimateur MM

On considère les moments absolus d'ordre r de X,

$$M_{|X|}\,(r) = \mathbb{E}[|X|^r] = \frac{\alpha^r \Gamma\left(\dfrac{r+1}{\beta}\right)}{\Gamma\,(1/\beta)} \qquad r > 0 \tag{2.7}$$

On a,

$$\frac{M_{|X|}^{r_2}\,(r_1)}{M_{|X|}^{r_1}\,(r_2)} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{r_1+1}{\beta}\right)^{r_2}}{\Gamma\,(1/\beta)^{r_2-r_1}\,\Gamma\left(\dfrac{r_2+1}{\beta}\right)^{r_1}} \tag{2.8}$$

En particulier, pour $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\hat{\beta}}\right)^2}{\Gamma\left(1/\hat{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\hat{\beta}}\right)} = \frac{\hat{M}^2_{|X|}(1)}{\hat{M}_{|X|}(2)} = \frac{(N-1)\left(\sum_{i=0}^{N}|x_i|\right)^2}{N^2\sum_{i=0}^{N}|x_i|^2} \tag{2.9}$$

Á partir de l'Équation 2.9 le paramètre β peut être estimé selon,

$$\hat{\beta} = GGR^{-1}\left(\frac{(N-1)\left(\sum_{i=0}^{N}|x_i|\right)^2}{N^2\sum_{i=0}^{N}|x_i|^2}\right) \tag{2.10}$$

où

$$GGR : x \longmapsto \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma\left(\frac{3}{x}\right)} \tag{2.11}$$

est appelé le *Ratio Gaussien généralisé* (*generalized Gaussian Ratio*) [Sharifi et Leon-Garcia, 1995].
Une forme analytique pour l'inverse de la fonction GGR n'est malheureusement pas connue, mais le paramètre $\hat{\beta}$ peut être obtenu par interpolation [1].
Enfin, en utilisant l'Équation 2.7, le paramètre α est estimé par,

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{\hat{M}_{|X|}(2)\,\Gamma\left(1/\hat{\beta}\right)}{\Gamma\left(3/\hat{\beta}\right)}} = \sqrt{\frac{\Gamma\left(1/\hat{\beta}\right)\sum_{i=0}^{N}|x_i|^2}{(N-1)\Gamma\left(3/\hat{\beta}\right)}} \tag{2.12}$$

Cette méthode d'estimation MM est facile à implémenter et elle est très efficace en temps de calcul mais sensible au nombre d'échantillons.

2.1.3.2 Estimateur ML

On peut trouver une étude détaillée sur l'estimation ML de la GGD dans [Varanasi et Aazhang, 1989]. Nous présentons ici une solution numérique pour les equations ML en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson, introduite par

1. Sur Matlab par exemple, $GGR^{-1}(x)$ peut être estimé avec une précision de 10^{-2} en considérant une table de correspondance pré-calculée `GGRtable` pour 800 valeurs de `beta=0.01:0.01:8`, à l'aide de la fonction d'interpolation rapide `interp1q(GGRtable,beta,x)`.

Do et Vetterli [Do et Vetterli, 2002b].
La fonction log-vraisemblance pour un échantillon i.i.d $x_1, \ldots, x_N$ est,

$$ll\left(x;\alpha,\beta\right) = \ln \prod_{i=1}^{N} f_X\left(x_i;\alpha,\beta\right) \tag{2.13}$$

Les paramètres à estimer α et β maximisent la fonction de l'Équation 2.13, donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial ll\left(x;\alpha,\beta\right)}{\partial \alpha} = -\dfrac{N}{\alpha} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\beta |x_i|^{\beta} \alpha^{-\beta}}{\alpha} = 0 & (2.14a) \\ \dfrac{\partial ll\left(x;\alpha,\beta\right)}{\partial \beta} = \dfrac{N}{\beta} + \dfrac{N\Psi\left(1/\beta\right)}{\beta^2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left(\dfrac{|x_i|}{\alpha}\right)^{\beta} \ln\left(\dfrac{|x_i|}{\alpha}\right) = 0 & (2.14b) \end{cases}$$

où $\Psi : x \longmapsto \dfrac{\Gamma'\left(x\right)}{\Gamma\left(x\right)}$ est la fonction digamma [Abramowitz et Stegun, 1965].
La solution de l'Équation 2.14a est unique et donnée par,

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\hat{\beta}}{N} \sum_{i=1}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}}\right)^{1/\hat{\beta}} \tag{2.15}$$

En remplaçant cette solution dans l'Équation 2.14b on obtient,

$$g\left(\hat{\beta}\right) = 1 + \frac{\Psi\left(1/\hat{\beta}\right)}{\hat{\beta}} - \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}} \ln |x_i|}{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}}} + \frac{ln\left(\frac{\hat{\beta}}{N} \sum_{i=1}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}}\right)}{\hat{\beta}} = 0 \tag{2.16}$$

Cette équation transcendante admet une solution unique mais il n'y a pas de forme analytique pour établir la racine de la fonction g. Parmi les méthodes numériques pour résoudre l'Équation 2.16, la méthode de Newton-Raphson est efficace et permet de calculer la racine après quelques itérations. Nous résumons cette méthode dans l'algorithme 1 (page 40).
Dans la pratique, cet algorithme converge en moins de 10 itérations si on part d'une estimation initiale obtenue par la méthode MM. Après avoir estimé le paramètre de forme β, le paramètre d'échelle α est estimé à l'aide de l'Équation 2.15.

Dans la Figure 2.5 nous comparons les PDFs estimées par l'*a priori* GGD avec les PDFs empiriques des sous-bandes résultantes de la décomposition de l'image test Fabric.0009 (Figure 2.4). Nous constatons que les PDFs estimées sont très proches des PDFs observées. Nous revenons dans la section 2.3 à

la question de la qualité de l'ajustement des statistiques marginales d'un *a priori* aux statistiques observées. La simple observation de l'ajustement de la PDF estimée à la PDF empirique n'est pas suffisante pour décider de la qualité d'un *a priori*. Nous présenterons une étude quantitative en utilisant différents tests statistiques d'adéquation et d'autres mesures pour quantifier la qualité de l'ajustement des PDFs estimées aux PDFs empiriques.

Algorithme 1 Méthode de Newton-Raphson pour l'estimation du paramètre β

Entrées : une estimation initiale $\hat{\beta}_0$ du paramètre β en utilisant la méthode MM par exemple.

Sorties : le paramètre de forme estimé $\hat{\beta}$, qui est la racine de l'Équation 2.16

$NiterMax \leftarrow 10$ {le nombre maximal d'itérations}

$\epsilon \leftarrow 10^{-6}$ {la précision de l'algorithme}

$k \leftarrow 0$

Répéter

$$\hat{\beta}_{k+1} = \hat{\beta}_k - \frac{g\left(\hat{\beta}_k\right)}{g'\left(\hat{\beta}_k\right)}$$

où

$$g'(\beta) = -\frac{\Psi(1/\beta)}{\beta^2} - \frac{\Psi'(1/\beta)}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^\beta (\ln|x_i|)^2}{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^\beta} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^\beta \ln|x_i|\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^\beta\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^\beta \ln|x_i|}{\beta \sum_{i=1}^{N} |x_i|^\beta} - \frac{\ln\left(\frac{\beta}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i|^\beta\right)}{\beta^2}$$

$k \leftarrow k + 1$

Jusqu'à $|\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{k-1}| \leqslant \epsilon$ ou $|g\left(\hat{\beta}_k\right)| \leqslant \epsilon$ ou $k = NiterMax$

Retourner $\hat{\beta}_k$

FIGURE 2.4 – Image test Fabric.0009

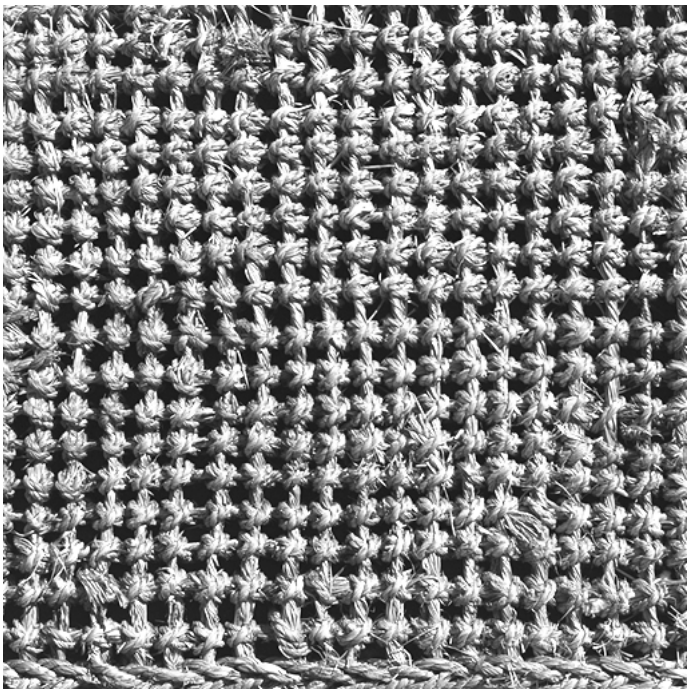
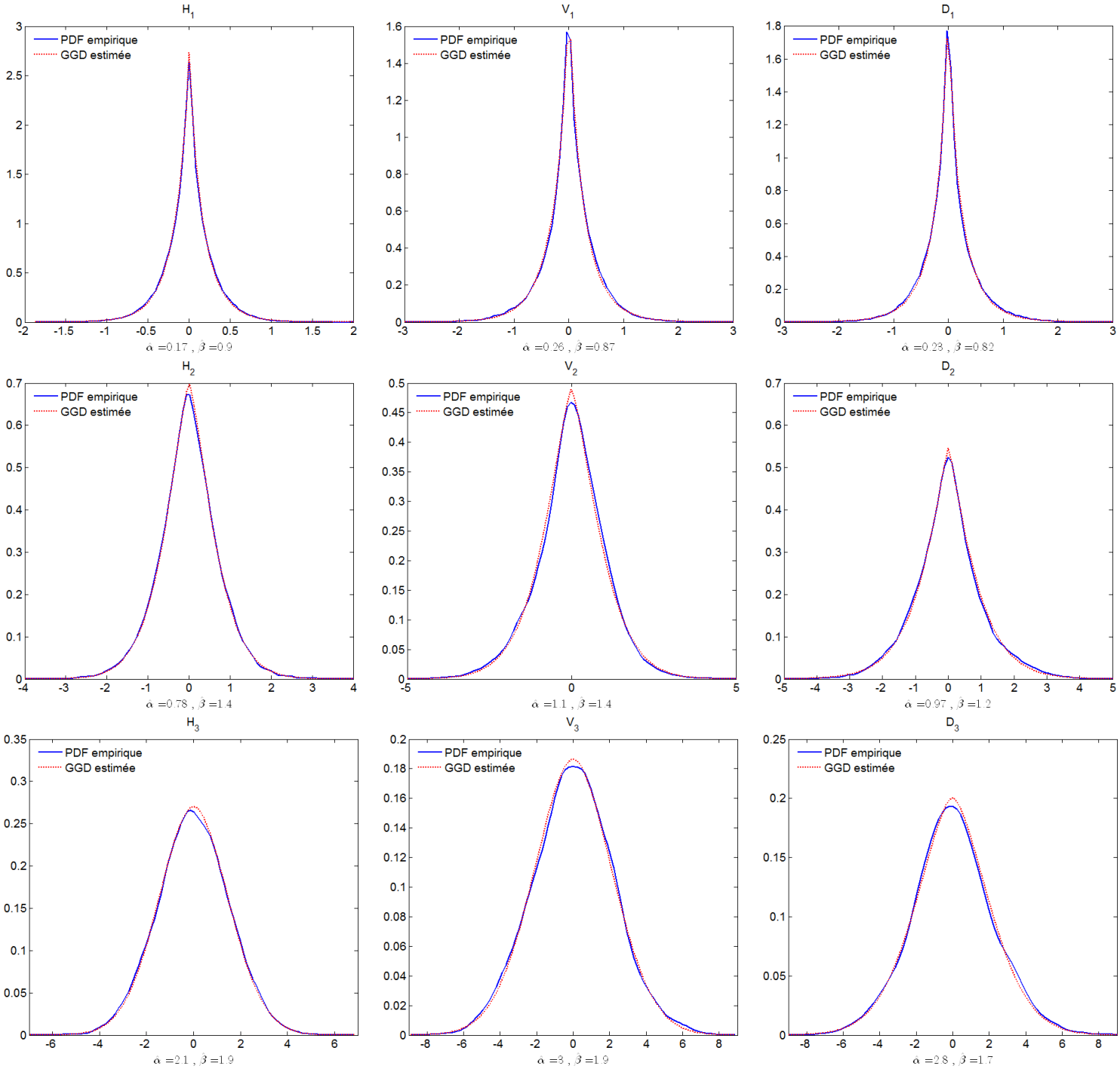


FIGURE 2.5 – Comparaison entre la PDF empirique et la PDF estimée par l'*a priori* GGD pour les détails (Horizontal, Vertical et Diagonal) des coefficients d'ondelettes de l'image test Fabric.0009 (Figure 2.4) résultant d'une décomposition en ondelette de Daubechies 'db4' à 3 échelles.



2.2 La densité Gaussienne généralisée asymétrique

Hormis la version asymétrique de la loi α-stable [Kuruoglu et Zerubia, 2003], la majorité des modèles univariés employés en traitement d'image sont symétriques. À notre connaissance, tous les modèles univariés qui ont été proposés comme *a priori* pour la modélisation des coefficients d'ondelettes, considèrent un skewness nul. Cependant, les résultats empiriques montrent que le skewness qui est la troisième statistique d'ordre supérieur (HOS) peut être non nul. Par exemple, sur toutes les sous-bandes résultantes de la décomposition en 3 échelles de la base VisTex, seulement 22% ont un skewness nul tandis que les 78% restantes ont un coefficient d'asymétrie non nul, Figure 2.6. Nous observons dans la Figure 2.7 des exemples de sous-bandes d'ondelettes dont le skewness est non nul et qui affichent une asymétrie prononcée. L'*a priori* GGD n'est donc pas toujours adéquat pour décrire les statistiques marginales quand les sous-bandes affichent une asymétrie. Pour prendre en considération l'aspect asymétrique des distributions marginales de certaines sous-bandes, Van de Wouwer et al. ont proposé une mesure d'asymétrie pour caractériser les textures dans le domaine des ondelettes [Van de Wouver *et al.*, 2004]. Néanmoins, il ne s'agit pas d'un modèle probabiliste asymétrique mais d'une simple mesure d'asymétrie qu'on ajoute à un descripteur de texture classique pour prendre en compte l'asymétrie éventuelle des distributions des sous-bandes.

Dans notre travail, nous proposons un modèle probabiliste plus général pour décrire les statistiques marginales des distributions : la distribution Gaussienne généralisée asymétrique (AGGD). C'est une distribution dont la GGD est un cas particulier et qui peut modéliser l'asymétrie éventuelle de la distribution empirique des coefficients d'ondelettes.

2.2.1 Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si X suit une loi AGGD, sa PDF est donnée par,

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(\alpha_L + \alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)} \exp\left(-\left(\dfrac{|x|}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right) & x < 0 \\ \dfrac{\beta}{(\alpha_L + \alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)} \exp\left(-\left(\dfrac{|x|}{\alpha_R}\right)^{\beta}\right) & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

où $\alpha_L > 0$, $\alpha_R > 0$ sont le *paramètre d'échelle à gauche*, *le paramètre d'échelle à droite* respectivement et $\beta > 0$ est le *paramètre de forme*. Le paramètre β

FIGURE 2.6 – Répartition du skewness des sous-bandes résultantes de la décomposition des images de la base VisTex en 3 échelles en utilisant l'ondelette de Daubechies 'db4'.

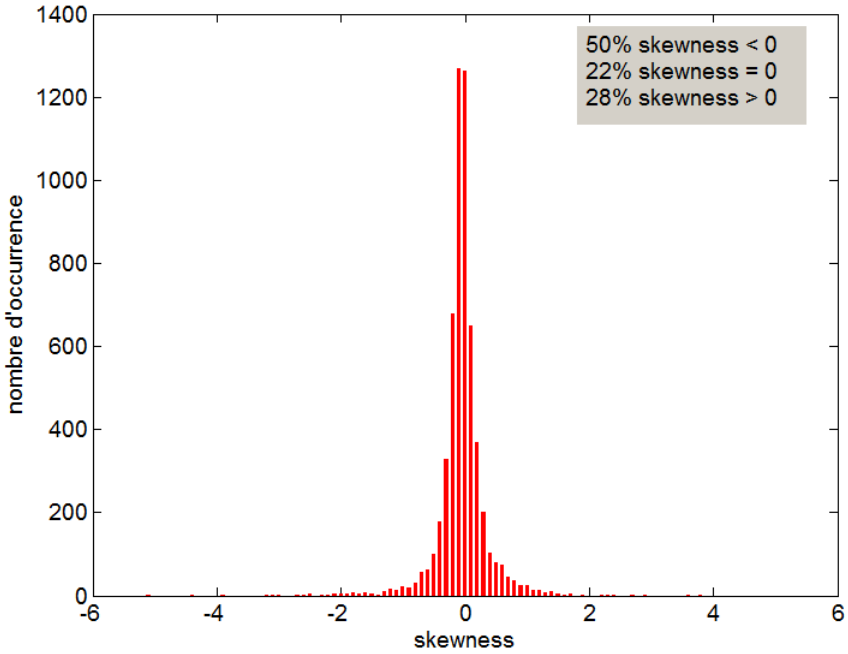
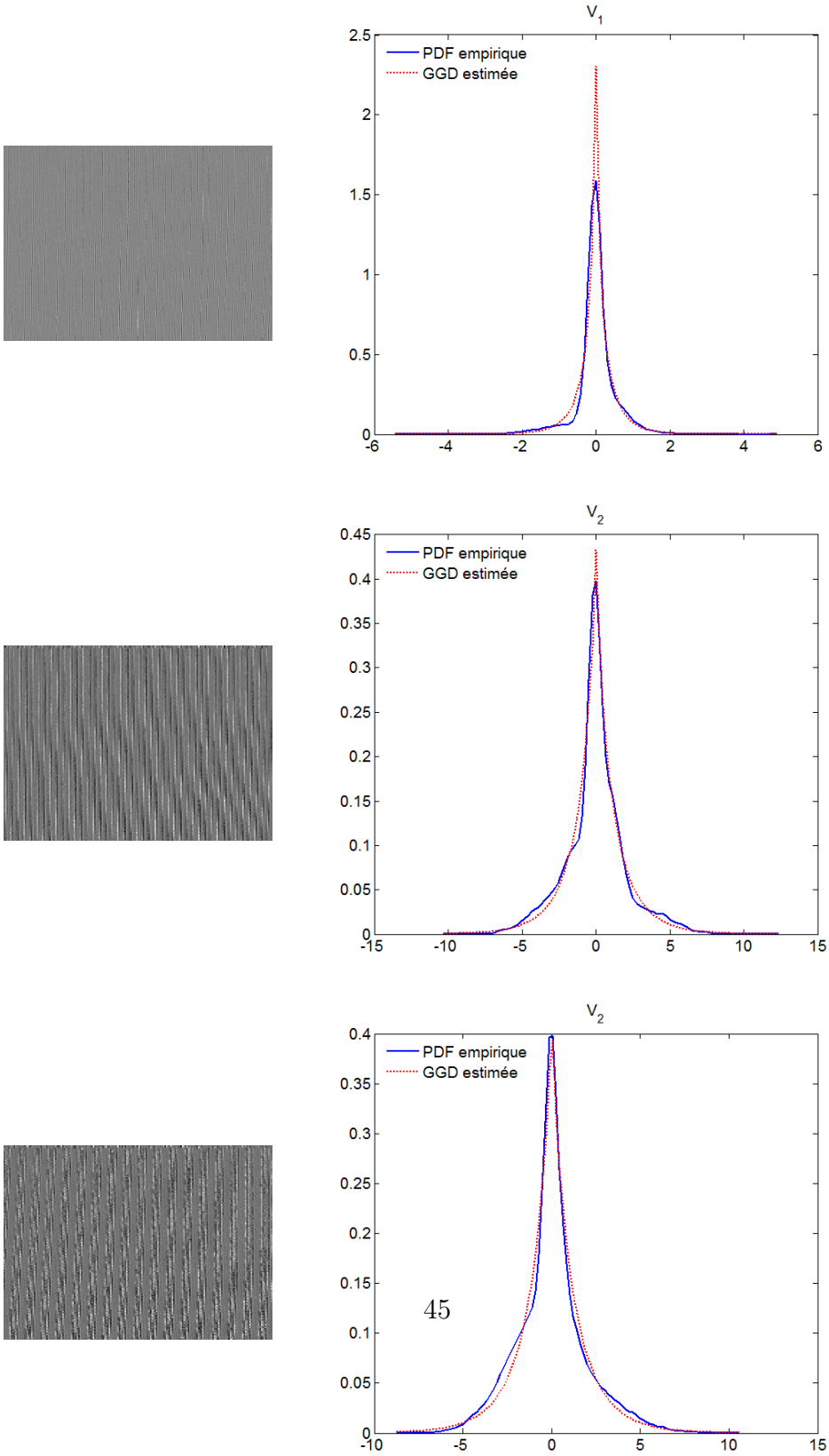


FIGURE 2.7 – Exemples de sous-bandes d'ondelettes dont les lois marginales sont asymétriques. Première ligne : détail vertical à la première échelle de décomposition en ondelette de Daubechies 'db4'. Deuxième et Troisième ligne : détail vertical à la deuxième échelle.



modélise le comportement asymptotique des queues (comme la GGD), tandis que $\alpha_L > 0$ décrit la dispersion des coefficients négatifs et $\alpha_R > 0$ celle des coefficients positifs ou nuls. La GGD est un cas particulier de l'AGGD quand $\alpha_L = \alpha_R$. On retrouve la loi Gaussienne asymétrique si $\beta = 2$ et la loi Laplacienne asymétrique si $\beta = 1$.

Nous définissons $\gamma = \dfrac{\alpha_L}{\alpha_R}$ et nous l'appelons rapport d'asymétrie d'une loi AGGD (à ne pas confondre avec le coefficient d'asymétrie qui est le skewness).

Proposition 2.1. *Le rapport d'asymétrie d'une loi AGGD est donné par*

$$\gamma = \frac{\sigma_L}{\sigma_R} \tag{2.18}$$

où $\sigma_L^2 = \mathbb{E}\left[|X|^2 | X < 0\right]$ *est la variance à gauche et* $\sigma_R^2 = \mathbb{E}\left[|X|^2 | X \geqslant 0\right]$ *est la variance à droite. Dans ce cas,* σ_L *est appelé écart type à gauche et* σ_R *est appelé écart type à droite.*

Démonstration. On a,

$$\mathbb{E}\left[|X|^2 | X < 0\right] = \frac{\mathbb{E}\left[|X|^2, X < 0\right]}{P\left(X < 0\right)} \tag{2.19}$$

et

$$\begin{aligned} P\left(X < 0\right) &= \frac{\beta}{\left(\alpha_L + \alpha_R\right)\Gamma(1/\beta)} \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right) dx \\ &= \frac{\beta}{\left(\alpha_L + \alpha_R\right)\Gamma(1/\beta)} \int_{0}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right) dx \end{aligned}$$

Or $\int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right) dx = \dfrac{\alpha_L \Gamma(1/\beta)}{\beta}$ [Abramowitz et Stegun, 1965], donc

$$P\left(X < 0\right) = \frac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_R} \tag{2.20}$$

et l'Équation 2.19 devient,

$$\mathbb{E}\left[|X|^2 | X < 0\right] = \frac{\left(\alpha_L + \alpha_R\right)\mathbb{E}\left[|X|^2, X < 0\right]}{\alpha_L} \tag{2.21}$$

D'un autre coté,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X|^2, X < 0\right] &= \frac{\beta}{\left(\alpha_L + \alpha_R\right)\Gamma(1/\beta)} \int_{-\infty}^{0} x^2 \exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right) dx \\ &= \frac{\beta}{\left(\alpha_L + \alpha_R\right)\Gamma(1/\beta)} \int_{0}^{\infty} x^2 \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right) dx \end{aligned}$$

Or $\int_0^\infty x^2 \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha_L}\right)^\beta\right) dx = \frac{\alpha_L^3 \Gamma(3/\beta)}{\beta}$ [Abramowitz et Stegun, 1965], donc

$$\mathbb{E}\left[|X|^2, X < 0\right] = \frac{\alpha_L^3 \Gamma(3/\beta)}{(\alpha_L + \alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)}$$

l'Équation 2.21 devient,

$$\mathbb{E}\left[|X|^2 | X < 0\right] = \frac{\alpha_L^2 \Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} \tag{2.22}$$

Et de la même façon on peut montrer que,

$$\mathbb{E}\left[|X|^2 | X \geqslant 0\right] = \frac{\alpha_R^2 \Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} \tag{2.23}$$

En notant, $\sigma_L^2 = \mathbb{E}\left[|X|^2 | X < 0\right]$ appelée variance à gauche, et $\sigma_R^2 = \mathbb{E}\left[|X|^2 |\, X \geqslant 0\right]$ appelée variance à droite, on a

$$\begin{cases} \sigma_L^2 = \dfrac{\alpha_L^2 \Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} & \text{(2.24a)} \\ \sigma_R^2 = \dfrac{\alpha_R^2 \Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} & \text{(2.24b)} \end{cases}$$

Finalement,

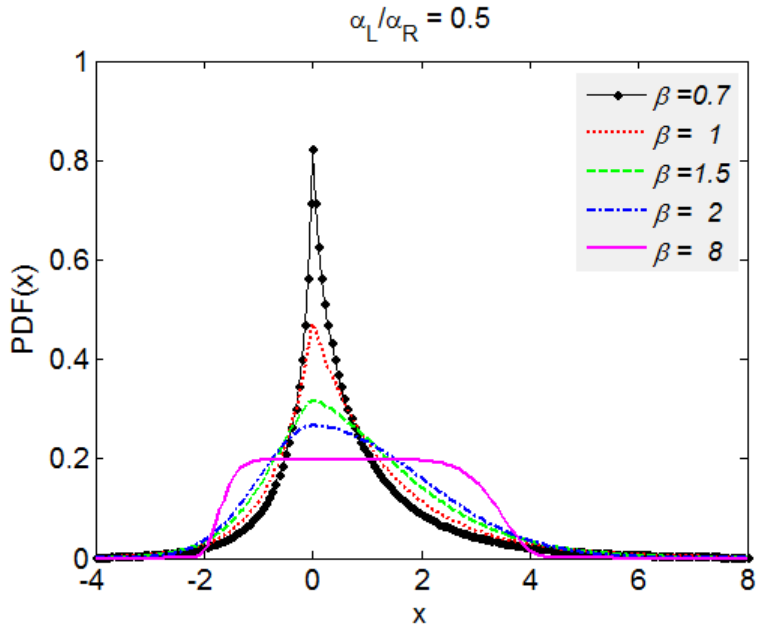
$$\gamma = \frac{\alpha_L}{\alpha_R} = \frac{\sigma_L}{\sigma_R}$$

□

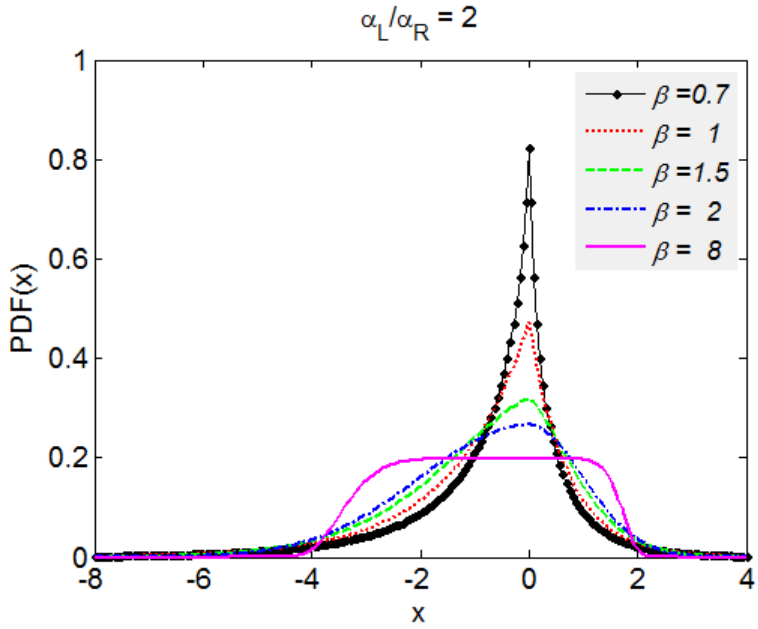
Nous présentons dans les Figure 2.8 et Figure 2.9 des PDFs du modèle AGGD avec différents paramètres de forme et d'échelle à gauche et à droite. Nous observons, comme c'était le cas du modèle GGD, que pour un écart type à gauche et à droite fixés, le paramètre de forme contrôle le pic et la lourdeur des queues gauche et droite de la distribution Figure 2.8. Pour un paramètre de forme fixé, les paramètres d'échelle à gauche et à droite contrôlent le pic de la distribution ainsi que sa symétrie. Si $\alpha_L < \alpha_R$, le skewness est positif et la queue droite est plus longue que la queue gauche Figure 2.9 (a). Si $\alpha_L \geqslant \alpha_R$, le skewness est négatif et la queue gauche est plus longue que la queue droite Figure 2.9 (b).

Nous présentons maintenant des propriétés de la loi AGGD qui seront utiles par la suite.

FIGURE 2.8 – PDFs des lois AGGD de paramètres $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 8$, (a) d'écart type à gauche = 1 et d'écart type à droite = 2. (b) d'écart type à gauche = 2 et d'écart type à droite = 1.

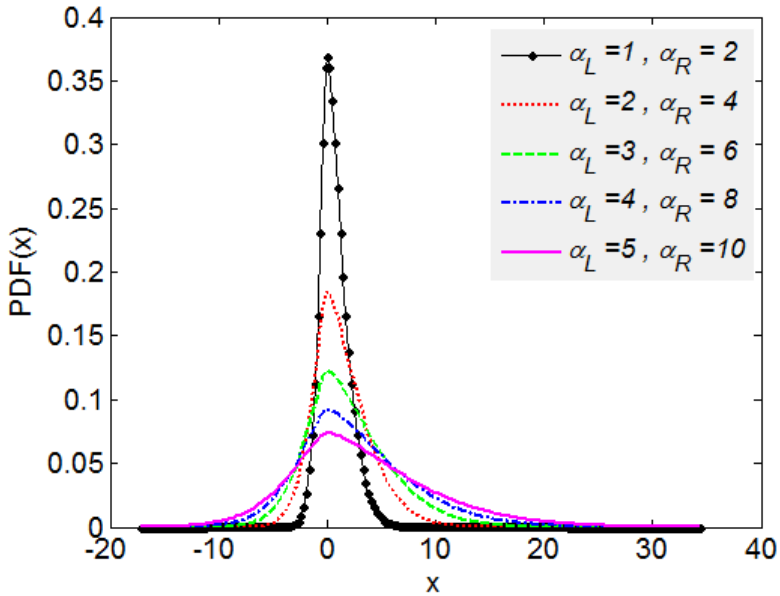


(a)

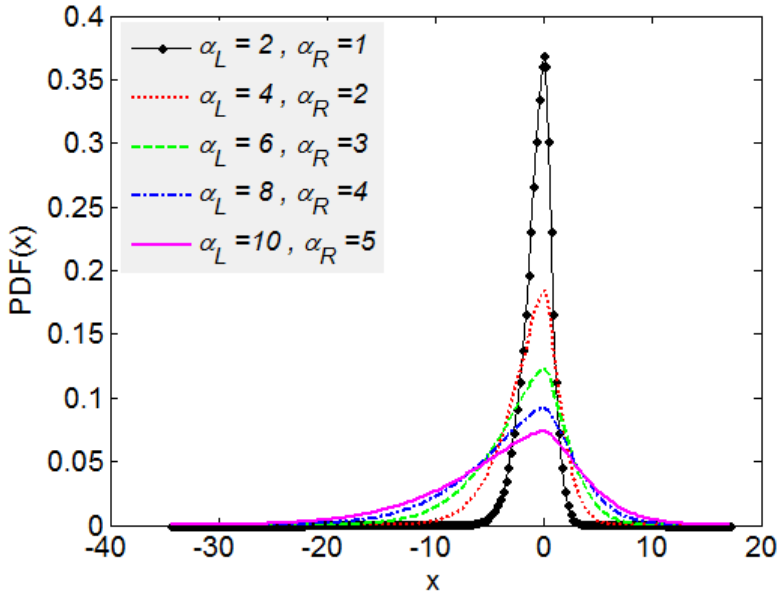


(b)

FIGURE 2.9 – L'effet des paramètres d'échelle à gauche et à droite pour des lois AGGD de paramètres de forme $\beta = 1.5$, (a) Le rapport d'asymétrie $\gamma = \alpha_L/\alpha_R = 0.5$, l'écart type à droite est le double de l'écart type à gauche. (b) Le rapport d'asymétrie $\gamma = \alpha_L/\alpha_R = 2$, l'écart type à gauche est le double de l'écart type à droite.



(a)



(b)

2.2.2 Propriétés

– La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de PDF AGGD est,

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_R}\left(1 - \gamma\left(1/\beta, (-x/\alpha_L)^\beta\right)\right) & x < 0 \\ \dfrac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_R} + \dfrac{\alpha_R}{\alpha_L + \alpha_R}\gamma\left(1/\beta, (x/\alpha_R)^\beta\right) & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

où $\gamma(a, b) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^b t^{a-1}e^{-t}dt$ est la fonction Gamma incomplète.

Plusieurs résultats pour le calcul des moments de la loi AGGD sont basés sur ce calcul intégral [Abramowitz et Stegun, 1965],

$$I(\nu, \mu, \xi) = \int_0^\infty x^{\nu-1}\exp\left(-\mu x^\xi\right)\ dx = \frac{\mu^{\frac{-\nu}{\xi}}\Gamma\left(\dfrac{\nu}{\xi}\right)}{\xi} \tag{2.26}$$

Proposition 2.2. *Les moments absolus conditionnels à gauche et à droite sont donnés par,*
$\forall\, s > -1$

$$\begin{cases} m_L(s) = \mathbb{E}\left[|X|^s | X < 0\right] = \dfrac{\alpha_L^s\Gamma((s+1)/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} & \text{(2.27a)} \\ m_R(s) = \mathbb{E}\left[|X|^s | X \geqslant 0\right] = \dfrac{\alpha_R^s\Gamma((s+1)/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} & \text{(2.27b)} \end{cases}$$

Démonstration. On a,

$$\mathbb{E}\left[|X|^s | X < 0\right] = \frac{\mathbb{E}\left[|X|^s, X < 0\right]}{P(X < 0)} \tag{2.28}$$

Or, $P(X < 0) = \frac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_R}$ (voir Équation 2.20), l'Équation 2.28 devient,

$$\mathbb{E}\left[|X|^s | X < 0\right] = \frac{(\alpha_L + \alpha_R)\mathbb{E}\left[|X|^s, X < 0\right]}{\alpha_L} \tag{2.29}$$

D'un autre coté,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X|^s, X<0\right] &= \frac{\beta}{(\alpha_L+\alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)}\int_{-\infty}^{0} x^s \exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right)\,dx \\
&= \frac{\beta}{(\alpha_L+\alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)}\int_{0}^{\infty} x^s \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right)\,dx \\
&= \frac{\beta}{(\alpha_L+\alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)} I(s+1, \frac{1}{\alpha_L^{\beta}}, \beta) \\
&= \frac{\beta}{(\alpha_L+\alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)} \frac{(\alpha_L^{\beta})^{\frac{s+1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{s+1}{\beta}\right)}{\beta} \\
&= \frac{\alpha_L^{s+1}\Gamma\left(\frac{s+1}{\beta}\right)}{(\alpha_L+\alpha_R)\Gamma(1/\beta)}
\end{aligned}$$

En remplaçant ce dernier terme dans l'Équation 2.29, on obtient le résultat de l'Équation 2.27a.
De la même manière on peut montrer que,

$$\mathbb{E}\left[|X|^s | X \geqslant 0\right] = \frac{\mathbb{E}\left[|X|^s, X \geqslant 0\right]}{P(X \geqslant 0)} \tag{2.30}$$

$$P(X \geqslant 0) = \frac{\alpha_R}{\alpha_L+\alpha_R} \tag{2.31}$$

$$\mathbb{E}\left[|X|^s, X \geqslant 0\right] = \frac{\alpha_R^{s+1}\Gamma\left(\frac{s+1}{\beta}\right)}{(\alpha_L+\alpha_R)\Gamma(1/\beta)} \tag{2.32}$$

En substituant les différents termes, on obtient le résultat de l'Équation 2.27b.

□

Corollaire 2.1. *Les moments absolus d'une variable aléatoire de distribution AGGD sont donnés par,*
$\forall\, s > -1$

$$m(s) = \mathbb{E}\left[|X|^s\right] = \frac{(\alpha_L^{s+1}+\alpha_R^{s+1})\Gamma((s+1)/\beta)}{(\alpha_L+\alpha_R)\Gamma(1/\beta)} \tag{2.33}$$

Proposition 2.3. *Les moments d'ordre $k, k = 1, 2, \ldots$ sont donnés par,*

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[X^k\right] = \frac{\left(\alpha_R^{k+1} + (-1)^k\alpha_L^{k+1}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{\beta}\right)}{(\alpha_L+\alpha_R)\Gamma(1/\beta)} \tag{2.34}$$

Démonstration. On a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^k\right] &= P(X<0)\mathbb{E}\left[X^k|X<0\right] + P(X\geqslant 0)\mathbb{E}\left[X^k|X\geqslant 0\right] \\
&= \frac{\alpha_L}{\alpha_L+\alpha_R}(-1)^k m_L(k) + \frac{\alpha_R}{\alpha_L+\alpha_R} m_R(k) \\
&= \frac{\left(\alpha_R^{k+1} + (-1)^k \alpha_L^{k+1}\right)\Gamma\left(\dfrac{k+1}{\beta}\right)}{(\alpha_L+\alpha_R)\Gamma(1/\beta)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *Les statistiques d'ordre supérieur skewness et kurtosis sont donnés par,*

- *Coefficient d'asymétrie ou skewness :*

$$\gamma_1 = \frac{\begin{array}{r}(1-\gamma^4)(1+\gamma)^2\Gamma(4/\beta)\Gamma^2(1/\beta) - 3(1+\gamma^3)\times\ldots \\ (1-\gamma^2)(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma(2/\beta)\Gamma(1/\beta) + 2(1-\gamma^2)^3\Gamma^3(2/\beta)\end{array}}{\left[(1+\gamma^3)(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma(1/\beta) - (1-\gamma^2)^2\Gamma^2(2/\beta)\right]^{3/2}} \tag{2.35}$$

- *Coefficient d'aplatissement :*

$$\gamma_2 = \frac{\begin{array}{r}(1+\gamma^5)(1+\gamma)^3\Gamma(5/\beta)\Gamma^3(1/\beta) - 4(1-\gamma^4)(1-\gamma^2)(1+\gamma)^2\times\ldots \\ \Gamma(4/\beta)\Gamma(2/\beta)\Gamma^2(1/\beta) + 6(1+\gamma^3)(1-\gamma^2)^2(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma^2(2/\beta)\Gamma(1/\beta) \\ -3(1-\gamma^2)^4\Gamma^4(2/\beta)\end{array}}{\left[(1+\gamma^3)(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma(1/\beta) - (1-\gamma^2)^2\Gamma^2(2/\beta)\right]^2} - 3 \tag{2.36}$$

  où $\gamma = \dfrac{\alpha_L}{\alpha_R}$ *est le* rapport d'asymétrie.

Démonstration.

- La définition du skewness est donnée par

$$\gamma_1 = \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mu_1)^3\right]}{\sigma^3}$$

  où $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}\left[(X-\mu_1)^2\right]}$ est l'écart type.
  On a, $\mathbb{E}\left[(X-\mu_1)^3\right] = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$ et en utilisant l'Équation 2.34

nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{(\alpha_R^2 - \alpha_L^2)\,\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{(\alpha_L + \alpha_R)\Gamma(1/\beta)} \\
\mu_2 &= \frac{(\alpha_R^3 + \alpha_L^3)\,\Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right)}{(\alpha_L + \alpha_R)\Gamma(1/\beta)} \\
\mu_3 &= \frac{(\alpha_R^4 - \alpha_L^4)\,\Gamma\left(\frac{4}{\beta}\right)}{(\alpha_L + \alpha_R)\Gamma(1/\beta)}
\end{aligned}$$

Après la substitution de ces termes, on a,

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu_1)^3\right] = \frac{\begin{array}{r}\alpha_R^3\left[(1-\gamma^4)(1+\gamma)^2\Gamma(4/\beta)\Gamma^2(1/\beta) - 3(1+\gamma^3)\times\ldots\right.\\ \left.(1-\gamma^2)(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma(2/\beta)\Gamma(1/\beta) + 2(1-\gamma^2)^3\Gamma^3(2/\beta)\right]\end{array}}{(1+\gamma)^3\Gamma^3(1/\beta)} \tag{2.37}$$

où $\gamma = \dfrac{\alpha_L}{\alpha_R}$ est le *rapport d'asymétrie.*
De même, on a

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \mathbb{E}\left[(X-\mu_1)^2\right] &= \mu_2 - \mu_1^2 \\
&= \frac{\begin{array}{r}\alpha_R^2\left[(1+\gamma^3)(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\times\ldots\right.\\ \left.\Gamma(1/\beta) - (1-\gamma^2)^2\Gamma^2(2/\beta\right]\end{array}}{(1+\gamma)^2\Gamma^2(1/\beta)}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Finalement, en divisant le terme de l'Équation 2.37 par σ^3 on obtient,

$$\gamma_1 = \frac{\begin{array}{r}(1-\gamma^4)(1+\gamma)^2\Gamma(4/\beta)\Gamma^2(1/\beta) - 3(1+\gamma^3)\times\ldots\\ (1-\gamma^2)(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma(2/\beta)\Gamma(1/\beta) + 2(1-\gamma^2)^3\Gamma^3(2/\beta)\end{array}}{\left[(1+\gamma^3)(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma(1/\beta)\ -(1-\gamma^2)^2\Gamma^2(2/\beta)\right]^{3/2}}$$

– La définition du kurtosis est donnée par

$$\gamma_2 = \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mu_1)^4\right]}{\sigma^4} - 3 \tag{2.39}$$

On a $\mu_4 = \dfrac{(\alpha_R^5 + \alpha_L^5)\,\Gamma\left(\dfrac{5}{\beta}\right)}{(\alpha_L + \alpha_R)\Gamma(1/\beta)}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-\mu_1)^4\right] &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4 \\
&= \frac{\begin{array}{r}\alpha_R^4\left[(1+\gamma^5)(1+\gamma)^3\Gamma(5/\beta)\Gamma^3(1/\beta)\right.\\ -4(1-\gamma^4)(1-\gamma^2)(1+\gamma)^2\times\ldots\\ \Gamma(4/\beta)\Gamma(2/\beta)\Gamma^2(1/\beta)\\ +6(1+\gamma^3)(1-\gamma^2)^2\times\ldots\\ (1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma^2(2/\beta)\Gamma(1/\beta)\\ \left.-3(1-\gamma^2)^4\Gamma^4(2/\beta)\right]\end{array}}{(1+\gamma)^4\Gamma^4(1/\beta)} \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

En substituant le terme de $\mathbb{E}\left[(X-\mu_1)^4\right]$ et de σ^4 dans l'Équation 2.39 on obtient,

$$\gamma_2 = \frac{\begin{array}{r}(1+\gamma^5)(1+\gamma)^3\Gamma(5/\beta)\Gamma^3(1/\beta) - 4(1-\gamma^4)(1-\gamma^2)(1+\gamma)^2\times\ldots\\ \Gamma(4/\beta)\Gamma(2/\beta)\Gamma^2(1/\beta) + 6(1+\gamma^3)(1-\gamma^2)^2(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma^2(2/\beta)\Gamma(1/\beta)\\ -3(1-\gamma^2)^4\Gamma^4(2/\beta)\end{array}}{\left[(1+\gamma^3)(1+\gamma)\Gamma(3/\beta)\Gamma(1/\beta)\ -(1-\gamma^2)^2\Gamma^2(2/\beta)\right]^2} - 3$$

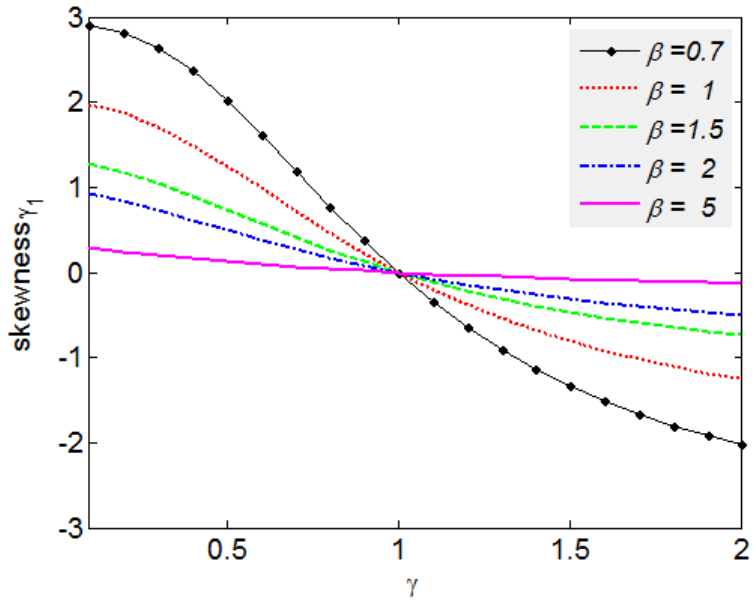
□

Nous représentons dans la Figure 2.10 le skewness et le kurtosis d'une loi AGGD en fonction du rapport d'asymétrie pour différentes valeurs de paramètre de forme. Nous observons que l'asymétrie peut être négative ou positive et qu'elle est plus prononcée quand $\beta \longrightarrow 0$. Une autre particularité de l'AGGD est son aptitude à modéliser des queues plus lourdes que ce que peut modéliser la GGD. En effet, pour un paramètre de forme β fixé, le minimum du kurtosis est obtenu pour un rapport d'asymétrie $\gamma = 1$ (le cas symétrique) et donc toutes les PDFs AGGD du même paramètre β ont un kurtosis plus grand et donc des queues plus lourdes que celle de la PDF GGD.

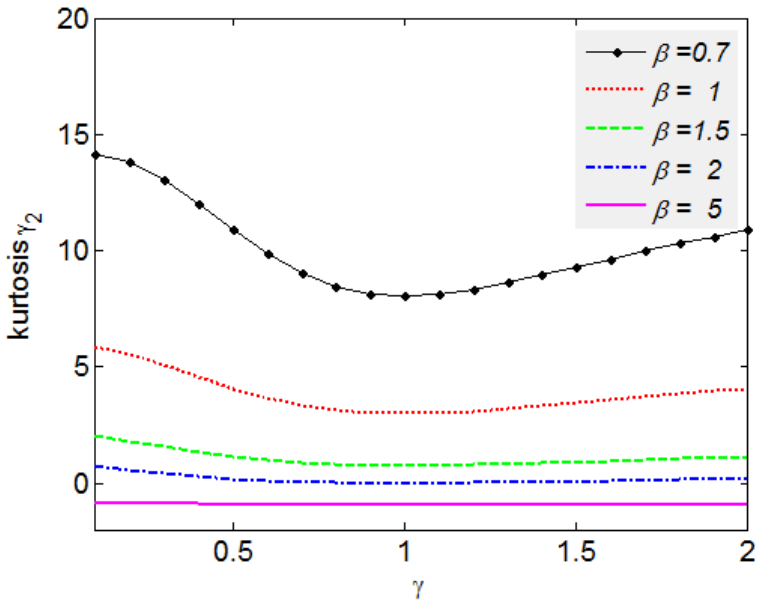
2.2.3 Estimation des paramètres

Quelques travaux ont proposé des méthodes d'estimation des paramètres de la loi AGGD. Dans [Lee et Nandi, 1999b] les auteurs proposent une méthode d'estimation en utilisant le moment d'ordre 4 (HOS). On peut aussi

FIGURE 2.10 – (a) Skewness en fonction du rapport d'asymétrie pour des lois AGGD de paramètre de forme $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 5$.(b) Kurtosis en fonction du rapport d'asymétrie pour des lois AGGD de paramètre de forme $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 5$.



(a)



(b)

utiliser la méthode des moments ou l'estimateur ML [Lee et Nandi, 1999a, Tesei et Regazzoni, 1998]. Nous présentons dans cette partie ces trois estimateurs et nous en comparons les performances.
Dans toute la suite nous considérons $X \propto AGGD\,(\alpha_L, \alpha_R, \beta)$ une VA de loi Gaussienne généralisée asymétrique et $x_1, \ldots, x_N$ une réalisation d'échantillons i.i.d. de X.

2.2.3.1 Méthode des moments

D'après la Proposition 2.1, le *rapport d'asymétrie* peut être estimé par,

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\sigma}_L}{\hat{\sigma}_R} = \sqrt{\frac{\frac{1}{N_L}\sum\limits_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^2}{\frac{1}{N_R}\sum\limits_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^2}} \tag{2.41}$$

où $N_L = card(x_i, x_i < 0)$ et $N_R = card(x_i, x_i \geqslant 0)$.

Ensuite, en utilisant le Corollaire 2.1 nous avons,

$$\begin{aligned}\frac{m^2(1)}{m(2)} &= \frac{\dfrac{(\alpha_L^2+\alpha_R^2)^2\Gamma^2(2/\beta)}{(\alpha_L+\alpha_R)^2\Gamma^2(1/\beta)}}{\dfrac{(\alpha_L^3+\alpha_R^3)\Gamma(3/\beta)}{(\alpha_L+\alpha_R)\Gamma(1/\beta)}}\\ &= \frac{(1+\gamma^2)^2\Gamma^2(2/\beta)}{(1+\gamma)(1+\gamma^3)\Gamma(3/\beta)\Gamma(1/\beta)}\end{aligned} \tag{2.42}$$

Or,

$$\begin{cases}\hat{m}(1) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i|\\ \hat{m}(2) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i|^2\end{cases}$$

Donc,

$$\frac{\Gamma^2(2/\hat{\beta})}{\Gamma(3/\hat{\beta})\Gamma(1/\hat{\beta})} = \frac{(1+\hat{\gamma})(1+\hat{\gamma}^3)\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|\right)^2}{N(1+\hat{\gamma}^2)^2\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2} \tag{2.44}$$

et

$$\hat{\beta} = GGR^{-1}\left(\frac{(1+\hat{\gamma})(1+\hat{\gamma}^3)\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|\right)^2}{N(1+\hat{\gamma}^2)^2\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2}\right) \tag{2.45}$$

où GGR est le *Ratio Gaussien généralisé* (voir Équation 2.11). Le paramètre $\hat{\beta}$ peut être obtenu par interpolation à l'aide de tables de correspondance ou en proposant une approximation de la fonction GGR qui permet d'obtenir une forme analytique (approximative) de GGR^{-1} (cf. l'annexe A).
Finalement, en utilisant $m_L(2)$ et $m_R(2)$ (cf. Proposition 2.2) les paramètres d'échelle à gauche et à droite α_L et α_R sont estimés par,

$$\begin{cases} \hat{\alpha_L} = \sqrt{\dfrac{\Gamma(1/\hat{\beta})\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^2}{N_L\Gamma(3/\hat{\beta})}} \\ \\ \hat{\alpha_R} = \sqrt{\dfrac{\Gamma(1/\hat{\beta})\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^2}{N_R\Gamma(3/\hat{\beta})}} \end{cases} \tag{2.46}$$

2.2.3.2 Méthode HOS

La méthode précédente ne fait intervenir que des moments d'ordre 1 et 2. Dans [Tesei et Regazzoni, 1998], les auteurs proposent d'utiliser le moment d'ordre 4 qui est un moment d'ordre supérieur d'où la dénomination HOS pour cette méthode.

En utilisant la Proposition 2.2, nous avons,

$$\forall\, s > -1, s \neq 0 \qquad \gamma = \left(\frac{m_L(s)}{m_R(s)}\right)^{1/s} \tag{2.47}$$

Donc pour $s = 4$,

$$\hat{\gamma} = \left(\frac{\frac{1}{N_L}\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^4}{\frac{1}{N_R}\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^4}\right)^{1/4} \tag{2.48}$$

Ensuite, nous avons,

$$\begin{aligned}\frac{m(4)}{m^2(2)} &= \frac{\dfrac{(\alpha_L^5+\alpha_R^5)\Gamma(5/\beta)}{(\alpha_L+\alpha_R)\Gamma(1/\beta)}}{\dfrac{(\alpha_L^3+\alpha_R^3)^2\Gamma^2(3/\beta)}{(\alpha_L+\alpha_R)^2\Gamma^2(1/\beta)}} \\ &= \frac{(1+\gamma)(1+\gamma^5)\Gamma(5/\beta)\Gamma(1/\beta)}{(1+\gamma^3)^2\Gamma^2(3/\beta)} \qquad (2.49)\end{aligned}$$

Donc,

$$\hat{\beta} = GGK^{-1}\left(\frac{N(1+\gamma^3)^2\sum_{i=1}^N |x_i|^4}{(1+\gamma)(1+\gamma^5)\left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\right)^2}\right) \qquad (2.50)$$

où

$$GGK : x \longmapsto \frac{\Gamma\left(\dfrac{5}{x}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{3}{x}\right)} \qquad (2.51)$$

est appelée fonction *Kurtosis Gaussien généralisé* (*generalized Gaussian Kurtosis*).
Le paramètre $\hat{\beta}$ peut être estimé par interpolation à l'aide d'une table de correspondance de la fonction GGK. Finalement, on estime les paramètres d'échelle à gauche et à droite par,

$$\begin{cases} \hat{\alpha_L} = \left(\dfrac{\Gamma(1/\hat{\beta})\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^N |x_i|^4}{N_L\Gamma(5/\hat{\beta})}\right)^{0.25} \\ \\ \hat{\alpha_R} = \left(\dfrac{\Gamma(1/\hat{\beta})\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^N |x_i|^4}{N_R\Gamma(5/\hat{\beta})}\right)^{0.25} \end{cases} \qquad (2.52)$$

2.2.3.3 Estimateur ML

La fonction log-vraisemblance pour un échantillon i.i.d $x_1, \ldots, x_N$ d'une VA X de distribution AGGD est,

$$ll(x_1, \ldots, x_N) = N \ln \frac{\beta}{(\alpha_L + \alpha_R)\Gamma(1/\beta)} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_i<0}}^{N} \left(\frac{|x_i|}{\alpha_L}\right)^{\beta} + \sum_{\substack{i=1 \\ x_i\geqslant 0}}^{N} \left(\frac{|x_i|}{\alpha_R}\right)^{\beta} \quad (2.53)$$

Les paramètres d'échelle α_L et α_R maximisant la vraisemblance vérifient,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial ll\,(x; \alpha_L, \alpha_R, \beta)}{\partial \alpha_L} = -\dfrac{N}{\alpha_L + \alpha_R} + \beta \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ x_i<0}}^{N} \dfrac{|x_i|^{\beta}}{\alpha^{\beta+1}} = 0 & (2.54a) \\ \dfrac{\partial ll\,(x; \alpha_L, \alpha_R, \beta)}{\partial \alpha_R} = -\dfrac{N}{\alpha_L + \alpha_R} + \beta \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ x_i\geqslant 0}}^{N} \dfrac{|x_i|^{\beta}}{\alpha^{\beta+1}} = 0 & (2.54b) \end{cases}$$

Il s'en suit que,

$$\begin{cases} \hat{\gamma} = \left(\dfrac{\sum_{\substack{i=1 \\ x_i<0}}^{N_L} |x_i|^{\hat{\beta}}}{\sum_{\substack{i=1 \\ x_i\geqslant 0}}^{N_R} |x_i|^{\hat{\beta}}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}+1}} & (2.55a) \\ \hat{\alpha}_L = \left[\dfrac{\hat{\beta}}{N} \left(1 + \dfrac{1}{\hat{\gamma}}\right) \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ x_i<0}}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}} \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} & (2.55b) \\ \hat{\alpha}_R = \left[\dfrac{\hat{\beta}}{N} (1 + \hat{\gamma}) \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ x_i\geqslant 0}}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}} \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} & (2.55c) \end{cases}$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial ll\,(x;\alpha_L,\alpha_R,\beta)}{\partial\beta} &= N\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\Psi(1/\beta)}{\beta^2}\right)-\frac{\gamma N\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\beta}\ln|x_i|}{\beta(1+\gamma)\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\beta}}\\ &+\frac{\gamma N}{\beta^2(1+\gamma)}\ln\left[\frac{\beta(1+\gamma)}{\gamma N}\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\beta}\right]-\frac{N\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\beta}\ln|x_i|}{\beta(1+\gamma)\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\beta}}\\ &+\frac{N}{\beta^2(1+\gamma)}\ln\left[\frac{\beta(1+\gamma)}{N}\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\beta}\right]\end{aligned} \tag{2.56}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial ll\,(x;\alpha_L,\alpha_R,\beta)}{\partial\beta}=0\Longleftrightarrow h(\hat\beta)=&1+\frac{\Psi(1/\hat\beta)}{\hat\beta}-\frac{\hat\gamma\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\hat\beta}\ln|x_i|}{(1+\hat\gamma)\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\hat\beta}}-\frac{\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\hat\beta}\ln|x_i|}{(1+\hat\gamma)\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\hat\beta}}\\ &+\frac{\hat\gamma}{\hat\beta(1+\hat\gamma)}\ln\left[\frac{\hat\beta(1+\hat\gamma)}{\hat\gamma N}\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\hat\beta}\right]\\ &+\frac{1}{\hat\beta(1+\hat\gamma)}\ln\left[\frac{\hat\beta(1+\hat\gamma)}{N}\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\hat\beta}\right]=0\end{aligned} \tag{2.57}$$

La racine de la fonction h n'ayant pas de forme analytique, nous proposons la méthode de Newton-Raphson pour résoudre l'Équation 2.57 qui nécessite le calcul de $h'(\beta)$. Plusieurs termes de calcul sont communs à $h(\beta)$ et $h'(\beta)$ et que nous notons,

$$\begin{aligned}S_{0L}(\beta)&=\textstyle\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\beta} & S_{0R}(\beta)&=\textstyle\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\beta}\\ S_{1L}(\beta)&=\textstyle\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\beta}\ln|x_i| & S_{1R}(\beta)&=\textstyle\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\beta}\ln|x_i|\\ S_{2L}(\beta)&=\textstyle\sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N}|x_i|^{\beta}\ln^2|x_i| & S_{2R}(\beta)&=\textstyle\sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N}|x_i|^{\beta}\ln^2|x_i|\end{aligned}$$

Donc, le rapport d'asymétrie de l'Équation 2.55a peut être écrit en fonction de β par,

$$\hat{\gamma}(\hat{\beta}) = \left(\frac{S_{0L}(\hat{\beta})}{S_{0R}(\hat{\beta})}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}+1}} \tag{2.58}$$

Et on retrouve,

$$\hat{\gamma}'(\hat{\beta}) = \frac{\gamma(\hat{\beta})}{1+\hat{\beta}}\left(\frac{S_{1L}(\hat{\beta})}{S_{0L}(\hat{\beta})} - \frac{S_{1R}(\hat{\beta})}{S_{0R}(\hat{\beta})} - \ln\gamma(\hat{\beta})\right) \tag{2.59}$$

En récrivant h en fonction de $S_{0L}, S_{0R}, S_{1L}, S_{1R}$,

$$\begin{aligned} h(\hat{\beta}) =& 1 + \frac{\Psi(1/\hat{\beta})}{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\gamma}S_{1L}(\hat{\beta})}{(1+\hat{\gamma})S_{0L}(\hat{\beta})} - \frac{S_{1R}(\hat{\beta})}{(1+\hat{\gamma})S_{0R}(\hat{\beta})} + \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}(1+\hat{\gamma})}\ln\left[\frac{\hat{\beta}(1+\hat{\gamma})}{\hat{\gamma}N}S_{0L}(\hat{\beta})\right] \\ &+ \frac{1}{\hat{\beta}(1+\hat{\gamma})}\ln\left[\frac{\hat{\beta}(1+\hat{\gamma})}{N}S_{0L}(\hat{\beta})\right] \end{aligned} \tag{2.60}$$

et puisque,

$$S'_{0L}(\beta) = \sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N} |x_i|^\beta \ln|x_i| = S_{1L}(\beta)$$

$$S'_{0R}(\beta) = \sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N} |x_i|^\beta \ln|x_i| = S_{1R}(\beta)$$

$$S'_{1L}(\beta) = \sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N} |x_i|^\beta \ln^2|x_i| = S_{2L}(\beta)$$

$$S'_{1R}(\beta) = \sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N} |x_i|^\beta \ln^2|x_i| = S_{2R}(\beta)$$

nous avons,

$$\begin{aligned} h'(\hat{\beta}) =& -\frac{\Psi(1/\hat{\beta})}{\hat{\beta}^2} - \frac{\Psi'(1/\hat{\beta})}{\hat{\beta}^3} - \frac{\hat{\gamma}'}{(1+\hat{\gamma})^2}\left\{\frac{S_{1L}(\hat{\beta})}{S_{0L}(\hat{\beta})} - \frac{S_{1R}(\hat{\beta})}{S_{0R}(\hat{\beta})}\right. \\ &\left. -\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{\hat{\beta}(1+\hat{\gamma})}{\hat{\gamma}N}S_{0L}(\hat{\beta})\right] + \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{\hat{\beta}(1+\hat{\gamma})}{N}S_{0L}(\hat{\beta})\right]\right\} \\ &- \frac{\hat{\gamma}}{1+\hat{\gamma}}\left[\frac{S_{2L}(\hat{\beta})}{S_{0L}(\hat{\beta})} - \frac{S_{1L}^2(\hat{\beta})}{S_{0L}^2(\hat{\beta})} + \frac{1}{\hat{\beta}^2}\ln\left(1+\frac{1}{\hat{\gamma}}\right) - \frac{S_{1L}(\hat{\beta})}{\hat{\beta}S_{0L}(\hat{\beta})}\right. \\ &\left. +\frac{1}{\hat{\beta}^2}\ln\frac{\hat{\beta}}{NS_{0L}(\hat{\beta})}\right] - \frac{1}{1+\hat{\gamma}}\left[\frac{S_{2R}(\hat{\beta})}{S_{0R}(\hat{\beta})} - \frac{S_{1R}^2(\hat{\beta})}{S_{0R}^2(\hat{\beta})}\right. \\ &\left. +\frac{1}{\hat{\beta}^2}\ln(1+\hat{\gamma}) - \frac{S_{1R}(\hat{\beta})}{\hat{\beta}S_{0R}(\hat{\beta})} + \frac{1}{\hat{\beta}^2}\ln\frac{\hat{\beta}}{NS_{0R}(\hat{\beta})}\right] \end{aligned} \tag{2.61}$$

La méthode de Newton-Raphson pour estimer le paramètre de forme β est présentée dans l'algorithme 2. Les paramètres d'échelle à gauche et à droite sont ensuite estimés en utilisant les Équation 2.55b et Équation 2.55c.

Algorithme 2 Méthode de Newton-Raphson pour l'estimation du paramètre β d'une loi AGGD.

Entrées : une estimation initiale $\hat{\beta}_0$ du paramètre β en utilisant la méthode des moments par exemple.

Sorties : le paramètre de forme estimé $\hat{\beta}$, qui est la racine de la fonction h (Équation 2.60)

$NiterMax \leftarrow 10$ {le nombre maximal d'itérations}

$\epsilon \leftarrow 10^{-6}$ {la précision de l'algorithme}

$k \leftarrow 0$

Répéter

Calculer

$$S_{0L}(\hat{\beta}_k) = \sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}_k} \qquad S_{0R}(\hat{\beta}_k) = \sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}_k}$$

$$S_{1L}(\hat{\beta}_k) = \sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}_k} \ln|x_i| \qquad S_{1R}(\beta) = \sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}_k} \ln|x_i|$$

$$S_{2L}(\hat{\beta}_k) = \sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}_k} \ln^2|x_i| \qquad S_{2R}(\hat{\beta}_k) = \sum_{\substack{i=1\\x_i\geqslant 0}}^{N} |x_i|^{\hat{\beta}_k} \ln^2|x_i|$$

$$\hat{\gamma}_k = \left(\frac{S_{0L}(\hat{\beta}_k)}{S_{0R}(\hat{\beta}_k)}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}_k+1}} \qquad \hat{\gamma}'_k = \frac{\gamma_k}{1+\hat{\beta}_k}\left(\frac{S_{1L}(\hat{\beta}_k)}{S_{0L}(\hat{\beta}_k)} - \frac{S_{1R}(\hat{\beta}_k)}{S_{0R}(\hat{\beta}_k)} - \ln\gamma_k\right)$$

Calculer $h(\hat{\beta}_k)$ en utilisant l'Équation 2.60.

Calculer $h'(\hat{\beta}_k)$ en utilisant l'Équation 2.61.

$$\hat{\beta}_{k+1} = \hat{\beta}_k - \frac{h\left(\hat{\beta}_k\right)}{h'\left(\hat{\beta}_k\right)}$$

$k \leftarrow k+1$

Jusqu'à $|\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{k-1}| \leqslant \epsilon$ ou $|g\left(\hat{\beta}_k\right)| \leqslant \epsilon$ ou $k = NiterMax$

Retourner $\hat{\beta}_k$

2.2.4 Performance des estimateurs

Nous proposons d'étudier la performance des trois méthodes d'estimation ci-dessus. Nous employons la méthode de la transformée inverse pour

générer un échantillon de distribution AGGD (voir annexe B). Nous employons des échantillons de taille $N = 1000$ et nous répétons 100 tests de génération/estimation pour un même jeu de paramètres à estimer. Dans la Figure 2.11 nous comparons les performances des trois méthodes d'estimation du paramètre de forme β pour différentes valeurs du paramètre d'échelle à droite et à gauche. Nous remarquons qu'en moyenne l'estimateur ML est plus précis que les deux estimateurs MM et HOS, et que l'écart type de la dispersion autour de cette moyenne est aussi plus faible en utilisant l'estimateur ML qu'avec les estimateurs MM et HOS. En outre, la performance et le comportement des trois méthodes pour estimer le paramètre de forme β est indépendant de la valeur des paramètres d'échelle et donc de la variance des échantillons. Nous représentons aussi la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) des trois estimateurs Figure 2.12. Nous observons que cette erreur est plus faible pour des valeurs de $\beta < 2$. L'estimateur HOS peut être plus précis que l'estimateur MM pour des valeurs de $\beta > 2$ mais l'estimateur ML engendre moins d'erreur que les estimateurs MM et HOS pour toutes les valeurs de β. En comparant les performances des trois méthodes à estimer les paramètres d'échelle à gauche α_L et à droite α_R, nous observons qu'en moyenne les valeurs estimées par l'estimateur ML sont plus proches des valeurs réelles et moins dispersées que celles estimées en utilisant les estimateurs MM ou HOS (Figure 2.13). Nous notons que la RMSE est une fonction croissante des valeurs à estimer α_L et α_R : l'erreur d'estimation est plus importante quand les paramètres d'échelles à droite et à gauche sont grands et donc la variance est importante (Figure 2.14). Même si l'estimateur HOS engendre des erreurs sur l'estimation des paramètres α_L et α_R quand le paramètre de forme $\beta < 2$, il est plus performant que l'estimateur MM quand $\beta > 2$ (par exemple, le cas $\beta = 3$ de la Figure 2.14). Néanmoins, c'est toujours l'estimateur ML qui engendre le moins d'erreur quel que soit le paramètre de forme ou les paramètres d'échelle à gauche et à droite.
Au vue de ces résultats, dans toute la suite nous utiliserons la méthode ML pour estimer les paramètres de la loi AGGD.

FIGURE 2.11 – Comparaison entre l'estimation du paramètre de forme β par la méthode des moments (MME), la méthode HOS et la méthode ML pour différentes valeurs d'échelle à gauche et à droite α_L et α_R.

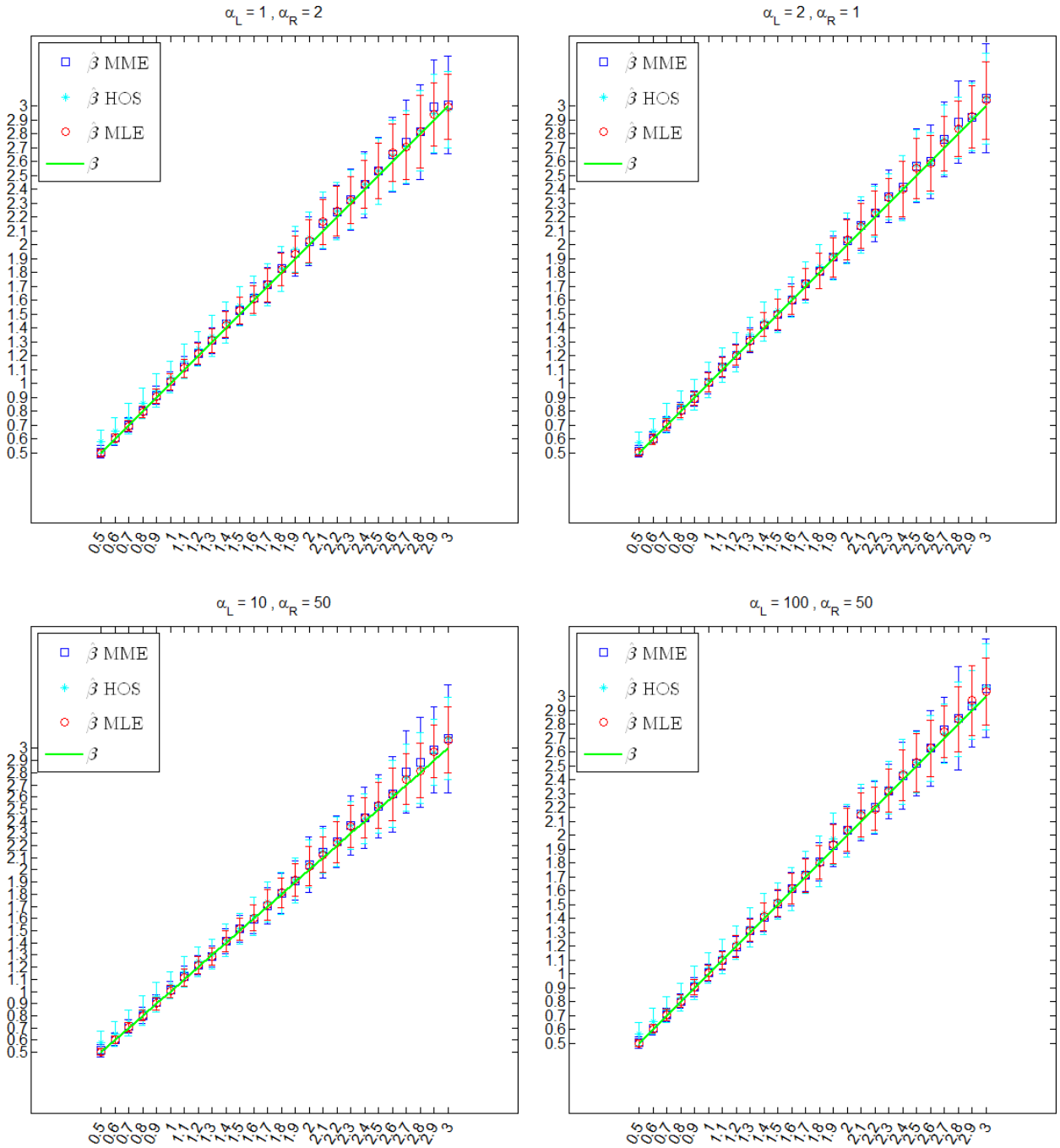


FIGURE 2.12 – Erreur quadratique moyenne de l'estimation du paramètre de forme β par la méthode des moments (MME), la méthode HOS et la méthode ML pour différentes valeurs d'échelle à gauche et à droite α_L et α_R.

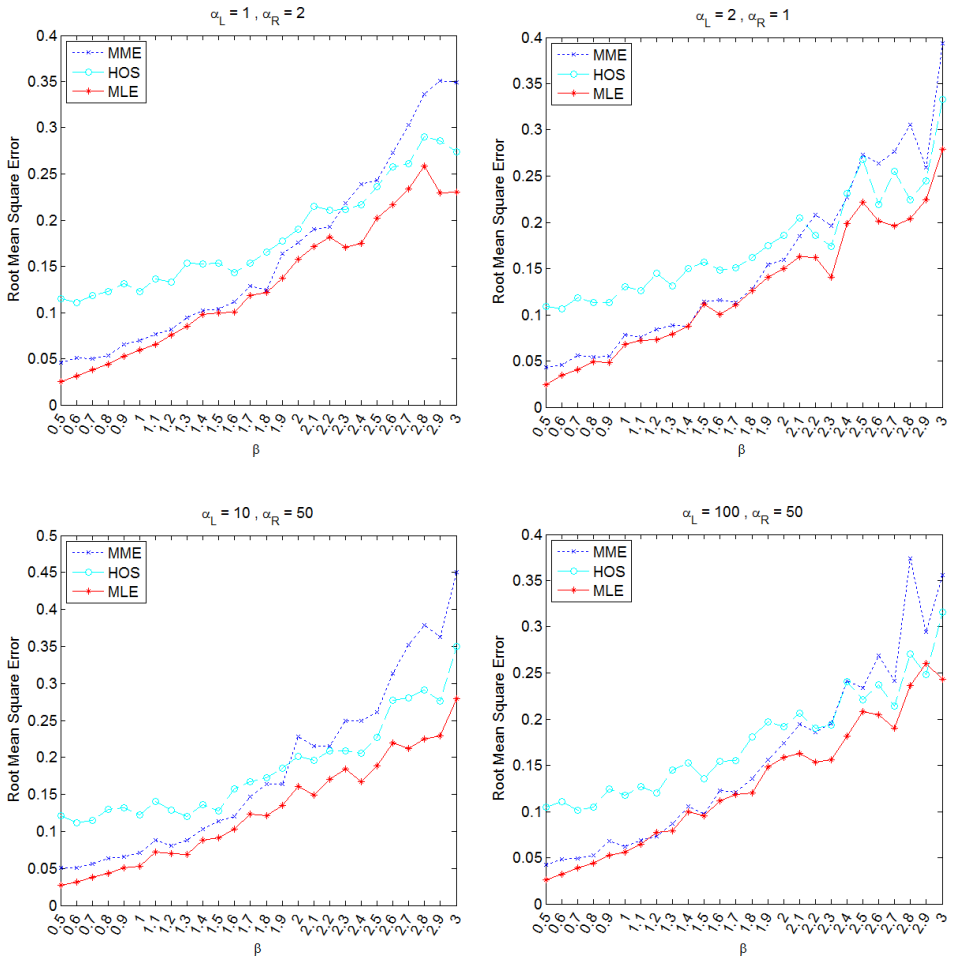


FIGURE 2.13 – Comparaison entre l'estimation du paramètre d'échelle à gauche α_L (colonne gauche) et du paramètre d'échelle à droite α_R (colonne droite) pour des valeurs de paramètre de forme $\beta \in \{0.5, 1, 1.5, 3\}$.

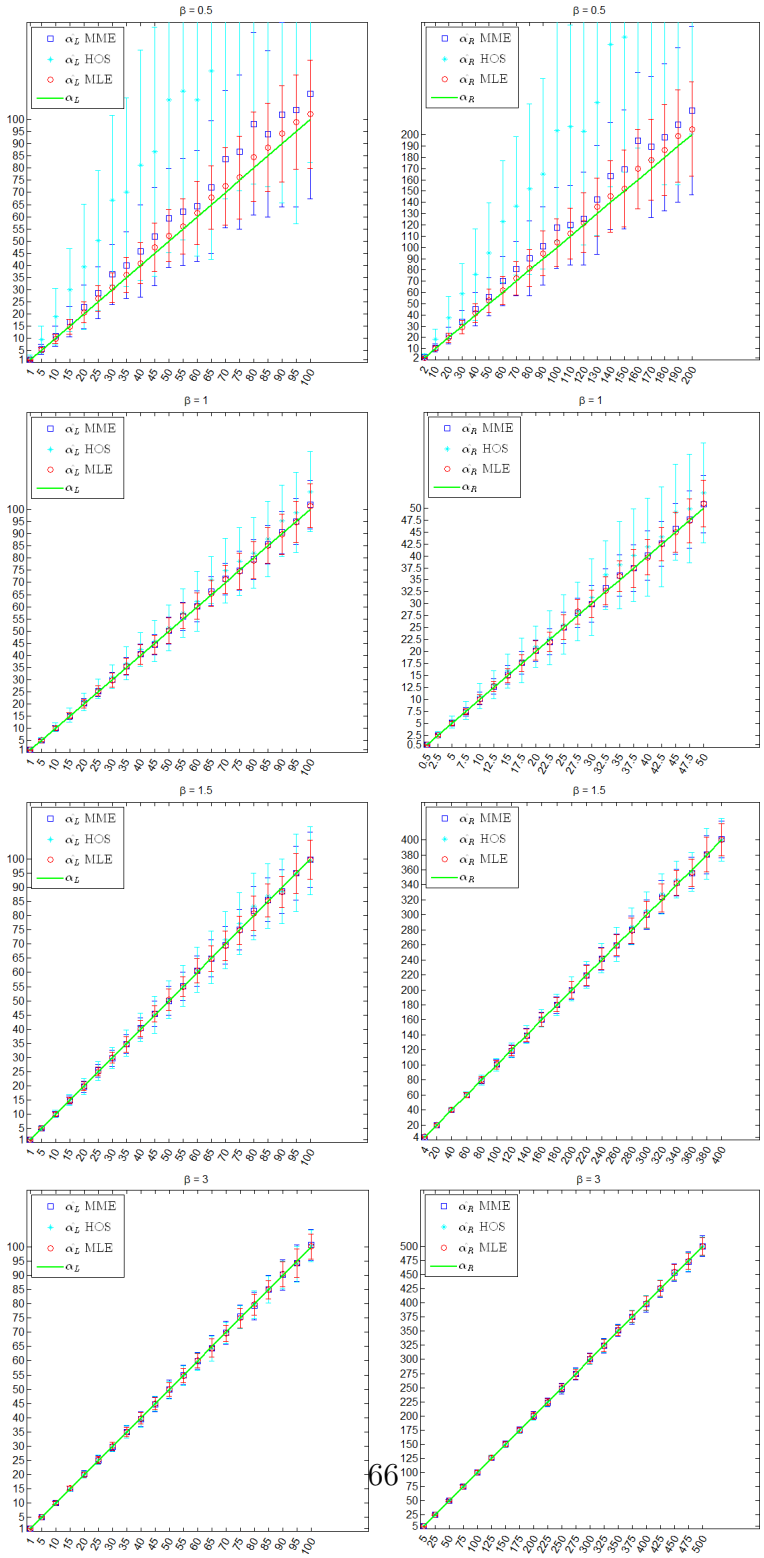
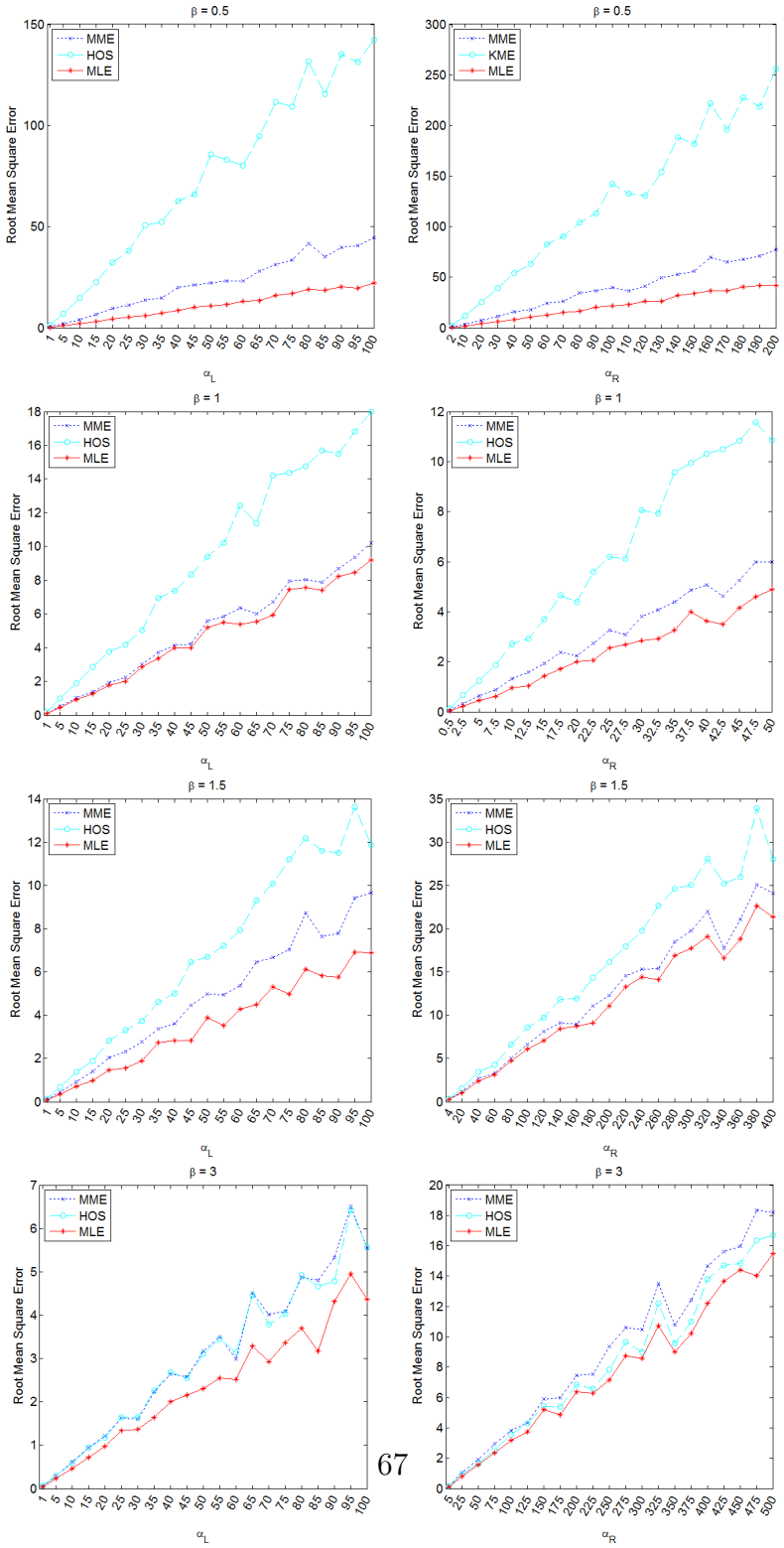


FIGURE 2.14 – Erreur quadratique moyenne de l'estimation du paramètre d'échelle à gauche α_L (colonne gauche) et du paramètre d'échelle à droite α_R (colonne droite) pour des valeurs de paramètre de forme $\beta \in \{0.5, 1, 1.5, 3\}$.



2.3 Qualité de l'ajustement des statistiques marginales

L'ajustement de la PDF empirique à une PDF d'un *a priori* (comme dans la Figure 2.5) n'est pas suffisant pour étudier quantitativement la qualité de l'adéquation de cet *a priori* pour décrire les statistiques marginales des sous-bandes d'ondelettes. Nous proposons d'employer deux tests d'adéquation à une loi (test GoF : Goodness of Fit) afin d'étudier quantitativement l'adéquation/inadéquation des deux *a priori* GGD et AGGD pour modéliser les sous-bandes.

2.3.1 Test d'adéquation χ^2

Ce test est le plus utilisé pour vérifier la compatibilité d'une distribution théorique (loi *a priori*) avec la distribution empirique (observée). Différents tests de type χ^2 (test d'ajustement, d'indépendance et d'homogénéité) ont été introduits par Karl Pearson [Pearson, 1900] qui a proposé la statistique χ^2. Pour plus de détails sur les différents tests de type χ^2 et les contraintes liées à leurs usages, on peut par exemple se rapporter à [Greenwood et Nikulin, 1996]. Nous présentons ici une description simplifiée du test GoF χ^2 pour l'ajustement.
L'objectif étant de décider de la compatibilité de la distribution théorique *a priori* avec la distribution empirique, le principe de ce test est d'employer une mesure qui quantifie l'écart entre les deux distributions. Après estimation des paramètres de la PDF de l'*a priori*, on subdivise les N valeurs observées d'une VA X en K intervalles de regroupement $\{\Delta_k, k = 1, \ldots, K\}$(la largeur des intervalles n'est pas nécessairement constante) et on calcul l'effectif théorique associé à Δ_k : $t_k = N \times p_k$, où $p_k = P(X \in \Delta_k)$ est calculée en utilisant la fonction de répartition théorique. La mesure quantifiant l'écart entre la ditribution empirique et théorique est la statistique χ^2,

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(o_k - t_k)^2}{t_k} \tag{2.62}$$

où $o_k, k = 1, \ldots, K$ sont les effectifs observés dans chaque intervalle Δ_k. On remarque que si $\chi^2 = 0$ la distribution théorique s'ajuste parfaitement avec la distribution empirique.
En notant

$$\nu = K - r - 1 \tag{2.63}$$

appelé nombre de *degrés de liberté* où r est le nombre de paramètres estimés de la distribution théorique, la statistique χ^2 suit une loi khi-deux.

Remarque 2.1. *Pour que le test χ^2 soit valide, il faut que*

1. *Les effectifs théoriques dans chaque intervalle soient assez élevés ($t_k \geqslant 5$). Si cette condition n'est pas remplie il faut procéder à des réunions d'intervalles jusqu'à ce que la condition soit vérifiée.*
2. *Le nombre d'intervalles doit vérifier $K \geqslant 8$.*

Nous définissons l'hypothèse nulle H_0 : la distribution des données observées est conforme à la distribution théorique, et $H_1 = \rceil H_0$: l'hypothèse alternative, la loi théorique n'est pas compatible avec les données. Le *risque de première espèce* est défini par $\alpha = P\,(\text{décider } H_1 \mid H_0 \text{ est vraie})$: C'est la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse H_0. Dans la pratique, on utilise des valeurs de $\alpha = 0.01, 0.05, \ldots$ ce qui permet de spécifier le niveau d'exigence par rapport à la décision.
La p-value est définie par $\alpha' = P\,(\chi^2(\nu) > \chi^2)$ où $\chi^2(\nu)$ est une VA de loi khi-deux de degrés de liberté ν (Équation 2.63). La p-value α' est calculée en utilisant les tables statistiques ou bien directement en utilisant la fonction *Gamma incomplète* par,

$$\alpha' = 1 - \frac{\gamma(\nu/2, \chi^2/2)}{\Gamma(\nu/2)} \tag{2.64}$$

Finalement, on compare la p-value α' au risque du test α,

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha' \leqslant \alpha & H_0 \text{ est rejetée : incompatibilité entre les données observées et la loi théorique.} \\ \text{Sinon} & H_0 \text{ est acceptée : on ne peut pas rejeter la compatibilité entre les deux distributions.} \end{cases}$$

Nous appliquons le test d'adéquation χ^2 sur les images de la base VisTex et celles de l'album de Brodatz. Les pourcentages de rejet (non adéquation de l'*a priori* par rapport aux coefficients d'ondelettes observés) pour chaque échelle de décomposition sont regroupés dans les Tableau 2.1 et Tableau 2.2. Nous observons que l'emploi de l'AGGD conduit à moins de rejets qu'en utilisant l'*a priori* GGD. Cependant, nous remarquons que la différence entre les pourcentages des rejets n'est pas assez tranchée. Afin d'approfondir les résultats des tests, nous nous intéressons aux sous-bandes où les deux *a priori* GGD et AGGD sont acceptés. Nous proposons de comparer la statistique χ^2 (Équation 2.62) calculée pour réaliser les tests : cette mesure permet de décider qui des deux modèles est le *mieux accepté*. Dans les Figure 2.15 et Figure 2.16, nous représentons l'écart entre la statistique χ^2_{AGG} calculée avec le modèle AGGD et la statistique χ^2_{GG} calculée avec le modèle GGD. Dans plus de 60 % des cas d'acceptation nous avons $\chi^2_{AGG} < \chi^2_{GG}$. Par conséquent, quand les deux *a priori* GGD et AGGD sont acceptés, le modèle AGGD est le *mieux accepté* dans la majorité des cas.

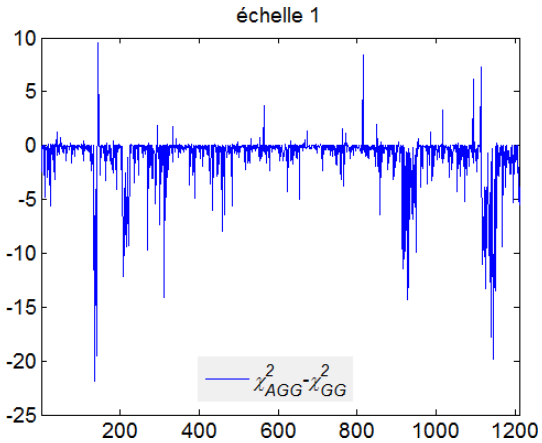
		a priori	
	échelle	GGD	AGGD
VisTex	1	3.49	2.34
	2	4.22	2.66
	3	3.28	2.14
	1,2,3	3.66	**2.41**
Brodatz	1	9.87	7.94
	2	11.36	8.60
	3	10.68	8.69
	1,2,3	10.64	**8.41**

TABLE 2.1 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests χ^2 appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelette de Daubechies 'db4'.

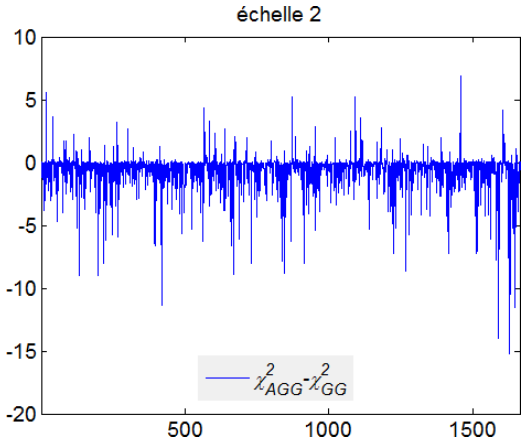
		a priori	
	échelle	GGD	AGGD
VisTex	1	3.70	2.79
	2	5.00	3.23
	3	3.91	2.94
	1,2,3	4.20	**2.99**
Brodatz	1	8.71	7.15
	2	11.55	9.02
	3	11.12	9.38
	1,2,3	10.46	**8.51**

TABLE 2.2 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests χ^2 appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelette DT-CWT.

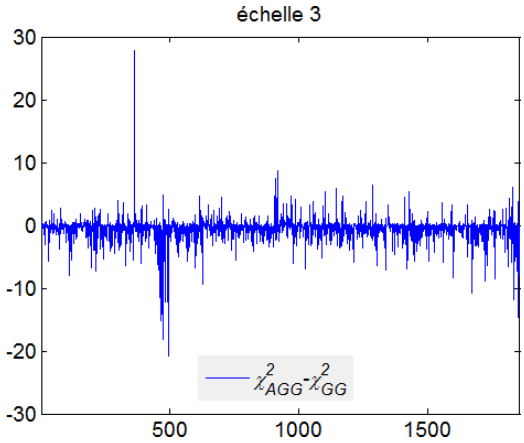
FIGURE 2.15 – L'écart entre la statistique χ^2 calculée en supposant l'*a priori* GGD ou AGGD pour les sous-bandes résultantes de la décomposition en ondelette de Daubechies 'db4' de la base VisTex.



Dans 80.17 % des cas, $\chi^2_{AGG} < \chi^2_{GG}$

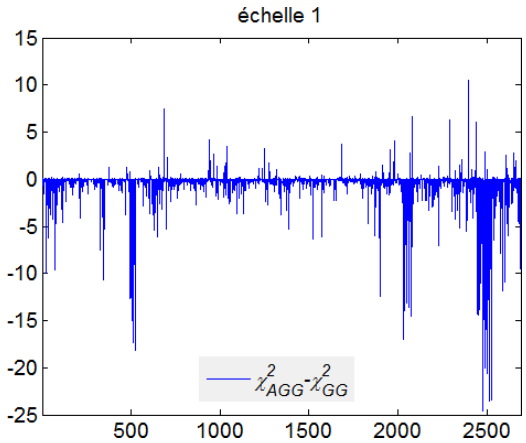


Dans 79.19 % des cas, $\chi^2_{AGG} < \chi^2_{GG}$

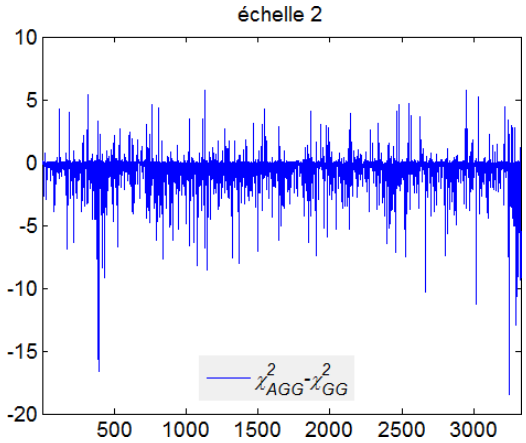


Dans 66.36 % des cas, $\chi^2_{AGG} < \chi^2_{GG}$

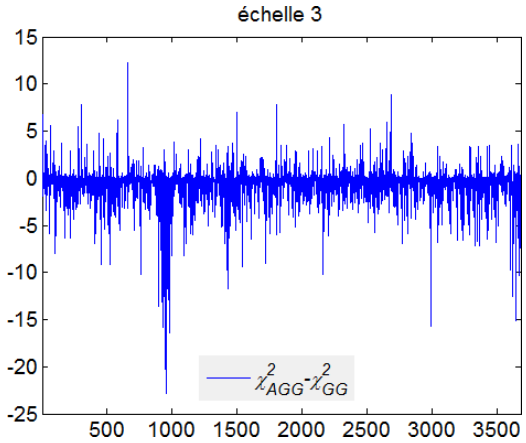
FIGURE 2.16 – L'écart entre la statistique χ^2 calculée avec l'*a priori* GGD ou AGGD pour les sous-bandes résultantes de la décomposition en ondelette DT-CWT de la base VisTex.



Dans 71.06 % des cas, $\chi^2_{AGG} < \chi^2_{GG}$



Dans 76.97 % des cas, $\chi^2_{AGG} < \chi^2_{GG}$



Dans 69.24 % des cas, $\chi^2_{AGG} < \chi^2_{GG}$

2.3.2 Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov

Afin d'approfondir l'étude de la qualité d'ajustement des modèles GGD et AGGD aux statistiques marginales des sous-bandes d'ondelettes, nous proposons l'utilisation du test GoF de Kolmogorov-Smirnov [Massey, 1951]. Nous notons $F_N(x)$ la fonction de répartition empirique de N observations et $F(x)$ la fonction de répartition théorique, la statistique de Kolmogorov-Smirnov est définie par,

$$K_N = \sup_x |F_N(x) - F(x)| \tag{2.65}$$

La distribution de Kolmogorov (qui est une fonction de répartition) est définie par,

$$F_K(a) = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}e^{-2k^2a^2} \tag{2.66}$$

Kolmogorov a montré (dans [Kolmogorov, 1933]), que sous l'hypothèse nulle (H_0 : conformité de la distribution théorique à celle observée), la statistique K_N suit asymptotiquement la distribution F_K,

$$P\left(\sqrt{N}K_N < a\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} F_K(a) \tag{2.67}$$

Donc, l'hypothèse nulle H_0 peut être rejetée avec un risque de première espèce $\alpha = 1 - F_K(a)$ si $\sqrt{N}K_N \geqslant a$. Les tables de la distribution de Kolmogorov ont été publiées par Smirnov [Smirnov, 1948] d'où le nom de Kolmogorov-Smirnov pour ce test GoF. Cependant, pour des valeurs de $\alpha \leqslant 0.2$ cette approximation peut être employée,

$$a(\alpha) = F_K^{-1}(1-\alpha) = \sqrt{-0.5\ln\frac{\alpha}{2}}$$

Après calcul de la statistique K_N et détermination du seuil de rejet $a(\alpha)$ (en utilisant les tables ou bien l'approximation pour $\alpha \leqslant 0.2$), le test de Kolmogorv-Smirnov se déroule ainsi :

$$\begin{cases} \text{Si } K_N \geqslant \dfrac{a(\alpha)}{\sqrt{N}} & H_0 \text{ est rejetée : incompatibilité entre les données observées} \\ & \text{et la loi théorique.} \\ \text{Sinon} & H_0 \text{ est acceptée : compatibilité entre les deux distributions.} \end{cases}$$

Notons que le test de Kolmogorov-Smirnov ne dépend pas de la subdivision des observations en intervalles comme c'est le cas pour le test χ^2. C'est une

alternative plus puissante au test χ^2 en détectant mieux l'hypothèse alternative : Si H_0 est acceptée en utilisant le test χ^2 alors qu'elle est rejetée en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov, c'est la décision de ce dernier qui prévaut.
Les pourcentages de rejet de l'hypothèse nulle sont présentés dans les Tableau 2.3 et Tableau 2.4. Nous remarquons que pour les différents niveaux de décomposition c'est le modèle AGGD qui est le plus adapté pour ajuster les coefficients de sous-bandes. Cela confirme les résultats obtenus en utilisant le test χ^2 comme attendu puisque le modèle AGGD prend en compte l'éventuelle asymétrie des distributions contrairement au modèle GGD qui est toujours symétrique.

		a priori	
	échelle	GGD	AGGD
VisTex	1	1.82	0.16
	2	2.97	0.42
	3	1.93	1.04
	1,2,3	2.24	**0.54**
Brodatz	1	3.25	0.92
	2	5.48	1.65
	3	4.52	4.28
	1,2,3	4.42	**2.28**

TABLE 2.3 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests Kolmogorov-Smirnov appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4'.

2.3.3 Ajustement des statistiques d'ordre supérieur : HOS fitting

Nous proposons d'employer un test de conformité des *a priori* GGD et AGGD aux skewness et kurtosis observés et qui sont respectivement des moments d'ordre 3 et 4, d'où l'appellation HOS fitting pour ce test. Nous représentons le nuage de points (skewness,kurtosis) observés sur les sous-bandes et on superpose avec le nuage de points (skewness,kurtosis) estimés en utilisant l'*a priori* considéré Figure 2.17. Nous remarquons que les deux modèles sont adaptés pour caractériser la *leptokurticité* ($\gamma_2 > 0$) mais seul le modèle AGGD caractérise en plus l'asymétrie. Néanmoins, il y a des cas où même le modèle AGGD n'est pas adéquat pour ajuster à la fois le skewness et le kurtosis. Il s'agit surtout des sous-bandes dont les distributions sont

		a priori	
	échelle	GGD	AGGD
VisTex	1	1.69	0.05
	2	3.44	0.31
	3	2.08	0.81
	1,2,3	2.4	**0.39**
Brodatz	1	3.50	0.88
	2	6.66	2.46
	3	4.63	3.58
	1,2,3	4.93	**2.31**

TABLE 2.4 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests Kolmogorov-Smirnov appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelettes DT-CWT.

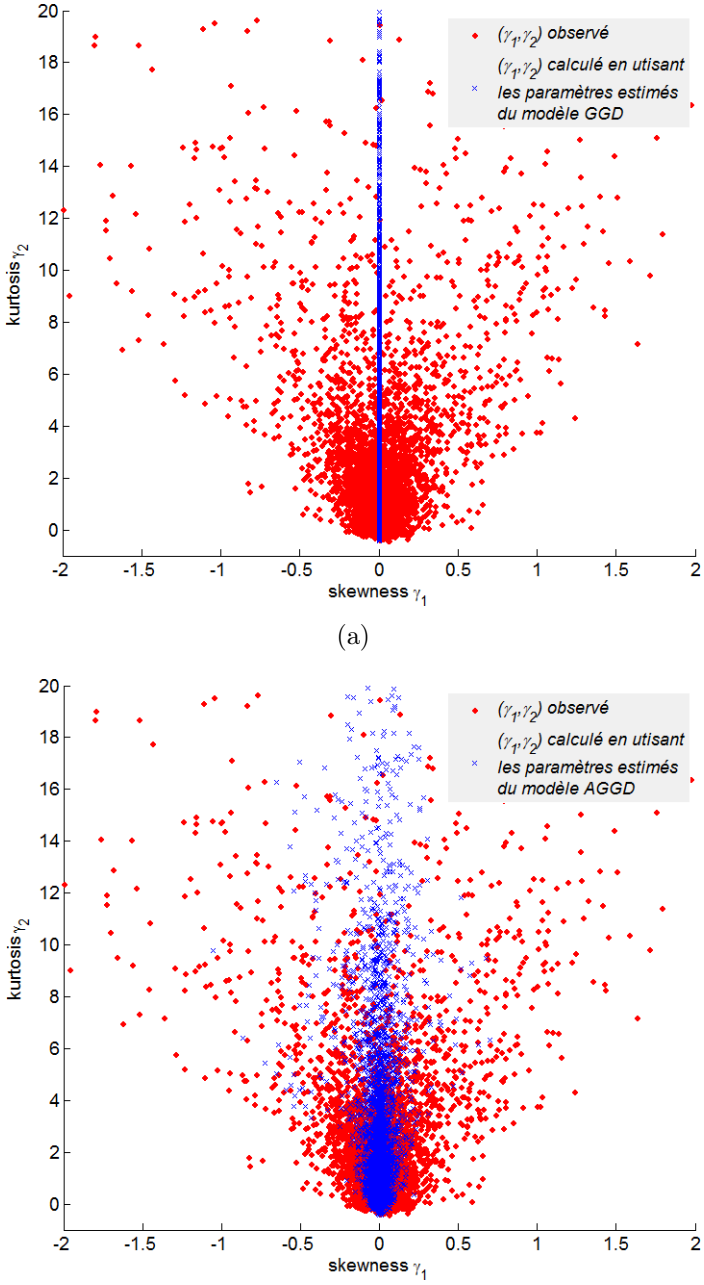
multimodales et par conséquent aucun des deux modèles n'est adapté pour les modéliser.

2.4 Conclusion

Nous avons proposé un nouveau modèle univarié pour caractériser la loi marginale des coefficients d'ondelettes : la distribution Gaussienne généralisée asymétrique AGGD. En plus de modéliser le caractère leptokurtique des distributions de sous-bandes d'ondelettes, nous avons montré que le modèle AGGD est plus adapté que le modèle GGD usuel lorsque la distribution affiche une asymétrie. Nous avons comparé trois méthodes d'estimation des paramètres du modèle AGGD et les expériences ont montré la bonne performance de l'estimateur ML par rapport à la méthode des moments et à l'estimateur HOS. Ensuite, nous avons appliqué des tests statistiques d'adéquation (tests GoF) afin de quantifier la qualité d'ajustement des modèles GGD et AGGD aux statistiques marginales des sous-bandes. Les résultats expérimentaux obtenus sur la base d'images de VisTex et l'album de Brodatz ont montré que le modèle AGGD est plus adéquat que le modèle GGD, pour modéliser la loi marginale des coefficients d'ondelettes. Dans les tests, nous avons employé une transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' et la transformée DT-CWT, néanmoins le modèle AGGD peut s'appliquer à d'autres transformées multi-échelles et multi-orientations. Sachant que le modèle GGD a été abondamment utilisé comme *a priori* pour les coefficients d'ondelettes dans différentes applications en traitement d'images (débruitage, compression, modélisation de la texture, etc.), nous pensons que l'emploi de

l'AGGD peut améliorer sensiblement leurs performances.

FIGURE 2.17 – HOS fitting des sous-bandes résultantes de la décomposition de la base d'images VisTex en ondelettes de Daubechies 'db4', en utilisant (a) l'*a priori* GGD et (b) l'*a priori* AGGD.



Chapitre 3

Modèles multivariés des lois jointes

Sommaire

3.1 Mesure de la dépendance des coefficients d'ondelettes 78

3.1.1 Outils qualitatifs 79

3.1.1.1 Densité conditionnelle empirique 79

3.1.1.2 Chi-plots 84

3.1.2 Mesures quantitatives 85

3.1.2.1 Coefficients de corrélation 85

3.1.2.2 Information mutuelle 87

3.1.2.3 Choix d'un modèle de dépendance 87

3.2 Modèle SIRV 89

3.2.1 Définition 89

3.2.2 Propriétés 89

3.2.3 Estimation des paramètres 91

3.2.4 Sélection du modèle *a posteriori* pour la densité de probabilité caractéristique du SIRV 95

3.3 Modèles à copule Gaussienne 96

3.3.1 Définitions 97

3.3.2 Propriétés 97

3.3.3 Choix de copule 98

3.3.3.1 Copule Gaussienne 99

3.3.3.2 Copule de Student-t 99

3.3.3.3 Copules Archimédiennes : de Frank, de Clayton et de Gumbel 100

3.3.3.4 Sélection du modèle 101
3.3.4 Estimation des paramètres 105
3.4 Qualité de l'ajustement des statistiques jointes . . 107
3.4.1 Modèle SIRV 109
3.4.2 Modèle multivarié de la Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne 115
3.4.3 Bilan 119
3.5 Conclusion 123

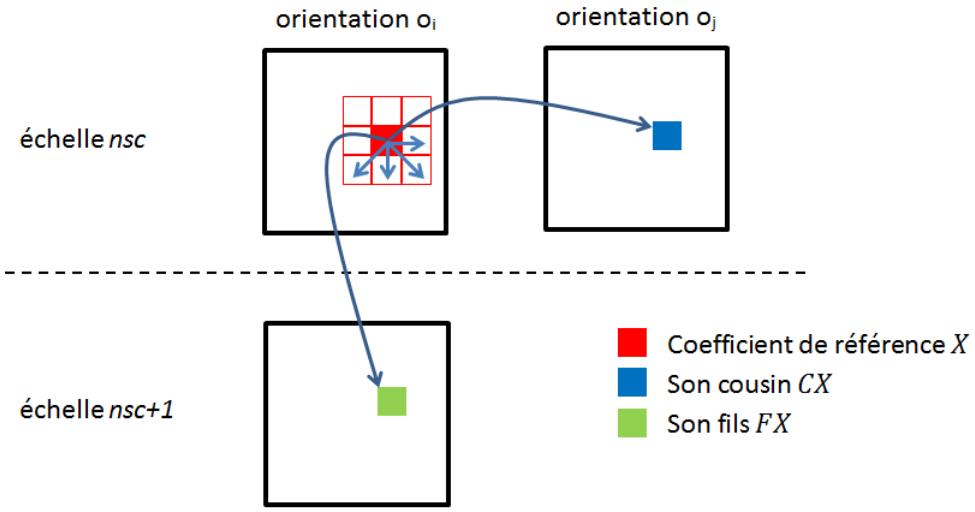
Dans le chapitre précédant, nous avons étudié différents modèles paramètriques univariés pour les lois marginales des coefficients d'ondelettes en supposant l'indépendance statistique intra-bande, inter-orientations et inter-échelles. Dans ce chapitre, nous prendrons en considération la dépendance entre coefficients d'ondelettes afin de proposer des modèles multivariés pour leurs lois jointes. Dans un premier temps, nous présentons une étude qualitative et quantitative pour mesurer l'importance des trois types de dépendance dans le domaine des ondelettes : intra-bande, inter-orientations et inter-échelles. Par la suite, nous introduisons deux modèles multivariés comme *a priori* pour la loi jointe des sous-bandes d'ondelettes. Nous clôturons ce chapitre par une évaluation quantitative de la qualité d'ajustement pour mettre en avant un modèle par rapport à l'autre.

3.1 Mesure de la dépendance des coefficients d'ondelettes

Trois types de dépendance entre coefficients d'ondelettes peuvent être caractérisés. Soit X un coefficient d'ondelette, la dépendance intra-bande est l'association entre X et ses plus proches voisins VX, c'est une dépendance spatiale. La dépendance inter-orientations est celle entre X et son *cousin* CX qui est le coefficient qui lui correspond dans une autre orientation de même échelle. La dépendance entre X et le coefficient *fils* FX à la même position spatiale et la même orientation à l'échelle au dessous est la dépendance inter-échelles. Nous représentons à la Figure 3.1 les trois types de dépendance auxquels nous nous intéressons dans notre étude.
Afin de mesurer le degré de dépendance entre coefficients d'ondelettes, plusieurs outils permettant une évaluation qualitative et quantitative peuvent être employés. Le plus simple des outils est le nuage de points (scatterplot) qui permet de mettre en évidence le degré de dépendance entre deux variables. Nous présentons d'abord une étude qualitative et ensuite une autre

quantitative pour comparer le degré des différents types de dépendance des coefficients d'ondelettes.

FIGURE 3.1 – Les trois types de dépendances entre coefficients d'ondelettes : intra-bande, inter-orientations et inter-échelles.



3.1.1 Outils qualitatifs

Nous présentons ici une étude qualitative pour mettre en évidence les trois types de dépendance. Principalement graphiques, les méthodes abordées généralisent la visualisation par nuage de points classique.

3.1.1.1 Densité conditionnelle empirique

Nous proposons d'étudier les densités conditionnelles des coefficients d'ondelettes car c'est un outil qui permet en général une meilleure appréciation qualitative du degré de dépendance par rapport à la visualisation de densité jointe. Soit X un coefficient d'ondelette et $Y \in \{VX, CX, FX\}$ son *voisin*, *cousin* ou *fils*. La densité conditionnelle de X sachant Y est,

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

où $f_{XY}(x, y)$ est la densité jointe de (X, Y) et $f_Y(y)$ est la densité marginale de Y.
On estime la densité marginale $f_Y(y)$ en utilisant la méthode de Parzen-Rozenblatt et un noyau Gaussien [Silverman, 1986]. De même, la loi jointe

$f_{XY}(x, y)$ est estimée en utilisant un noyau Gaussien bivarié [Wand et Jones, 1993]. Nous avons représenté des densités conditionnelles intra-bande Figure 3.3, inter-orientations Figure 3.4 et inter-échelles Figure 3.5 de l'image test Fabric.0009.01 Figure 3.2. Nous remarquons que les distributions conditionnelles, lorsqu'il y a dépendance, (dans la Figure 3.3) revêtent une forme en nœud de papillon (forme *bowtie*) ; cette caractéristique est l'équivalent dans le cas bivarié de la propriété des queues lourdes des distributions marginales dans le cas univarié [Wainwright et Simoncelli, 2000]. Dans le cas de la quasi-indépendance (Figure 3.3 et Figure 3.5) $f_{X|Y}(x, y) \sim f_X(x)$, l'allure est quasi verticale. Nous remarquons que la dépendance entre un coefficient de référence et ses voisins est plus importante que les dépendances entre lui et ses *cousins* ou son *fils*.
Nous notons que si la dépendance était linéaire, nous devrions obtenir des densités conditionnelles qui ont l'allure d'une droite dont la pente est le coefficient de corrélation linéaire (ce sont les droites de dépendance linéaire superposées sur les densités conditionnelles des Figure 3.3, Figure 3.4 et Figure 3.5). Quand la corrélation linéaire est faible, cette droite est quasi-verticale.

FIGURE 3.2 – Image test Fabric.0009.01

FIGURE 3.3 – Les densités conditionnelles $f_{X|VX}$ intra-bande des coefficients du détail horizontal issus de la décomposition de l'image test Fabric.0009.01 en considérant différentes formes de voisinages. La géométrie du voisinage considéré est affichée au-dessus de chaque image.

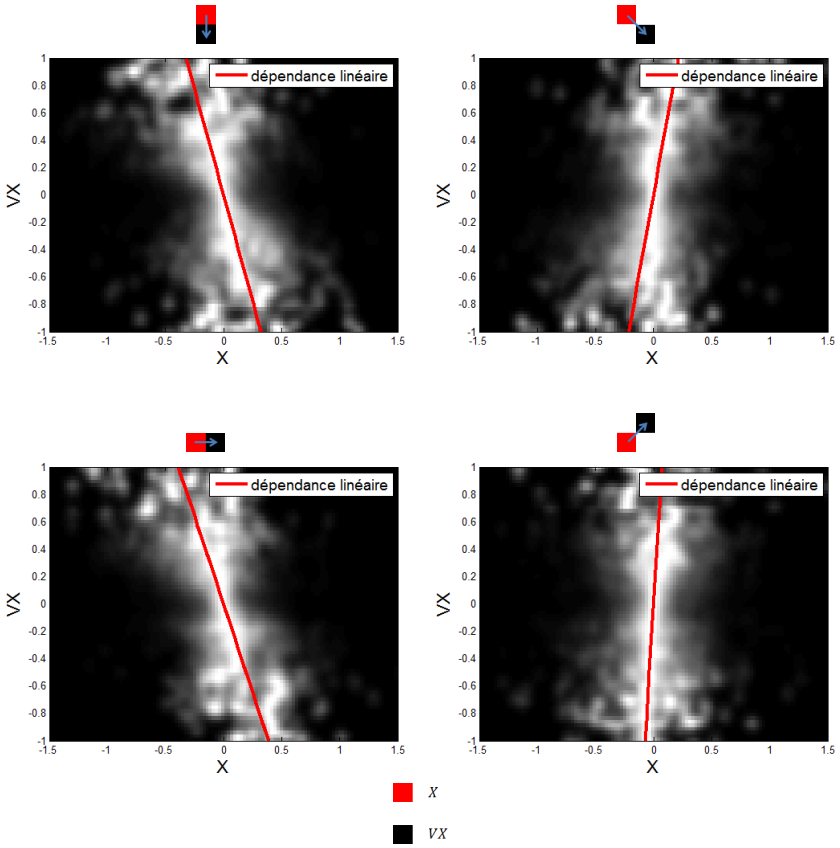
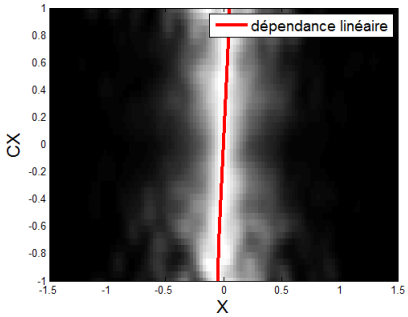
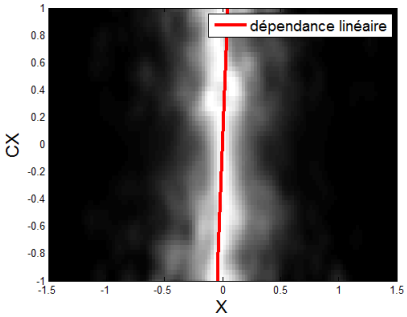


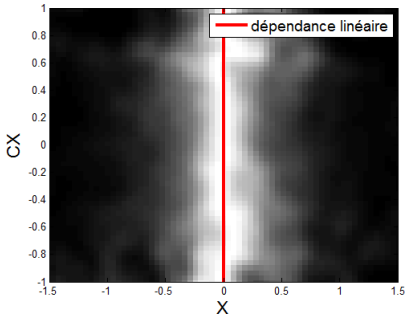
FIGURE 3.4 – Les densités conditionnelles $f_{X|CX}$ inter-orientations des coefficients issus de la décomposition de l'image test Fabric.0009.01.



X : détail horizontal
CX : détail vertical

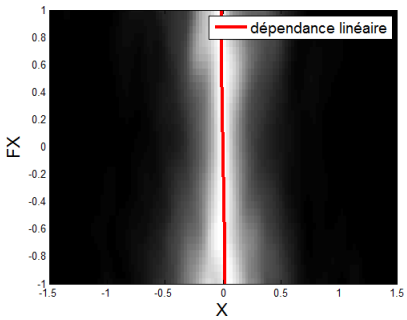


X : détail horizontal
CX : détail diagonal

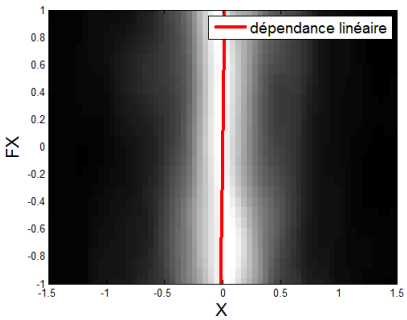


X : détail vertical
CX : détail diagonal

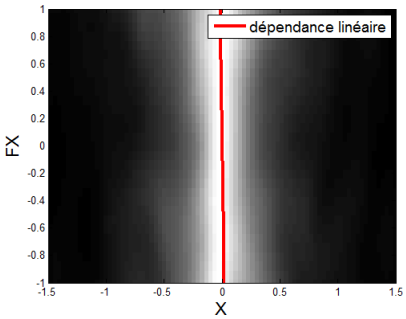
FIGURE 3.5 – Les densités conditionnelles $f_{X|FX}$ inter-échelles (entre échelle 1 et 2) des coefficients issus de la décomposition de l'image test Fabric.0009.01.



X : détail horizontal



X : détail vertical



X : détail diagonal

3.1.1.2 Chi-plots

Après avoir mis en évidence les dépendances entre coefficients d'ondelettes, nous utilisons par la suite un autre test graphique pour comparer le degré de ces dépendances : le chi-plot. C'est une méthode graphique qui peut être utilisée pour détecter et analyser la nature de dépendance entre deux variables [Fisher et Switzer, 1985]. Contrairement au scatterplot basique, la dépendance et l'indépendance sont mieux illustrées en utilisant le chi-plot [Fisher et Switzer, 2001]. Nous donnons une brève description de l'algorithme pour construire un chi-plot. Si $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ sont les réalisations du vecteur aléatoire (X, Y), nous calculons d'abord,

$$\begin{aligned}
H_i &= \textstyle\sum_{j \neq i} \dfrac{I(x_j \leqslant x_i, y_j \leqslant y_i)}{N-1} \\
F_i &= \textstyle\sum_{j \neq i} \dfrac{I(x_j \leqslant x_i)}{N-1} \\
G_i &= \textstyle\sum_{j \neq i} \dfrac{I(y_j \leqslant y_i)}{N-1} \\
S_i &= \operatorname{sign}\left((F_i - 0.5)(Gi - 0.5)\right)
\end{aligned}$$

où $I = \begin{cases} I(A) = 1 & \text{Si } A \text{ est vrai} \\ I(A) = 0 & \text{Si } A \text{ est faux} \end{cases}$ est la fonction caractéristique.
Ensuite, nous calculons,

$$\chi_i = \frac{H_i - F_i G_i}{\sqrt{F_i(1-F_i)G_i(1-G_i)}}$$

$$\lambda_i = 4 S_i \max\left((F_i - 0.5)^2, (G_i - 0.5)^2\right)$$

Enfin, le chi-plot est un scatterplot (affichage en nuage de points) des points (λ_i, χ_i) où $|\lambda_i| < 4\left(\frac{1}{N-1} - 0.5\right)^2$ et $|\chi| < 1$. Nous définissons aussi la bande de tolérance par les deux lignes horizontales $\chi = -c_p/\sqrt{N}$ et $\chi = c_p/\sqrt{N}$, avec $c_p = 1.54, 1.78$ et 2.18 respectivement pour $p = 0.90, 0.95$ et 0.99 où la quantité $100p\%$ est le pourcentage des points qui se situeraient dans cette bande si X et Y étaient indépendants. Plus le nuage des points est éloigné de la bande de tolérance, plus la dépendance est importante. Dans le cas de l'indépendance (ou faible dépendance), le nuage de points est horizontal et $100p\%$ des points se situent dans la bande de tolérance. Sur la Figure 3.6, nous représentons les chi-plots et les scatterplots des coefficients d'ondelettes de l'image test Fabric.0009.01 (Figure 3.2). La première remarque est que le chi-plot est beaucoup plus facile à interpréter par rapport au scatterplot. Nous remarquons que la dépendance intra-bande (Figure 3.6 (a)) de l'exemple choisi est beaucoup plus importante que la dépendance inter-orientations et

inter-échelles (Figure 3.6 (b) et (c) respectivement). Même si on ne peut affirmer l'indépendance inter-orientations et inter-échelles, la dépendance est très faible devant la dépendance intra-bande qui est prédominante.
Afin de mettre en évidence la prédominance de la dépendance intra-bande, nous proposons d'effectuer une étude quantitative sur la base d'images Vis-Tex.

3.1.2 Mesures quantitatives

Nous avons réalisé une étude quantitative pour mesurer l'importance des différents types de dépendance des coefficients d'ondelettes.

3.1.2.1 Coefficients de corrélation

Nous employons trois types de coefficients de corrélation comme mesure de degré de dépendance :

– Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson :

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]}{\sqrt{\mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right]\mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^2\right]}}$$

où $\mu_X = \mathbb{E}\left[X\right]$ et $\mu_Y = \mathbb{E}\left[Y\right]$.

– Le coefficient de corrélation de Kendall [Kendall, 1938] :

$$\tau(X,Y) = \frac{\text{Nombre de paires concordantes} - \text{Nombre de paires discordantes}}{\frac{1}{2}N(N-1)}$$

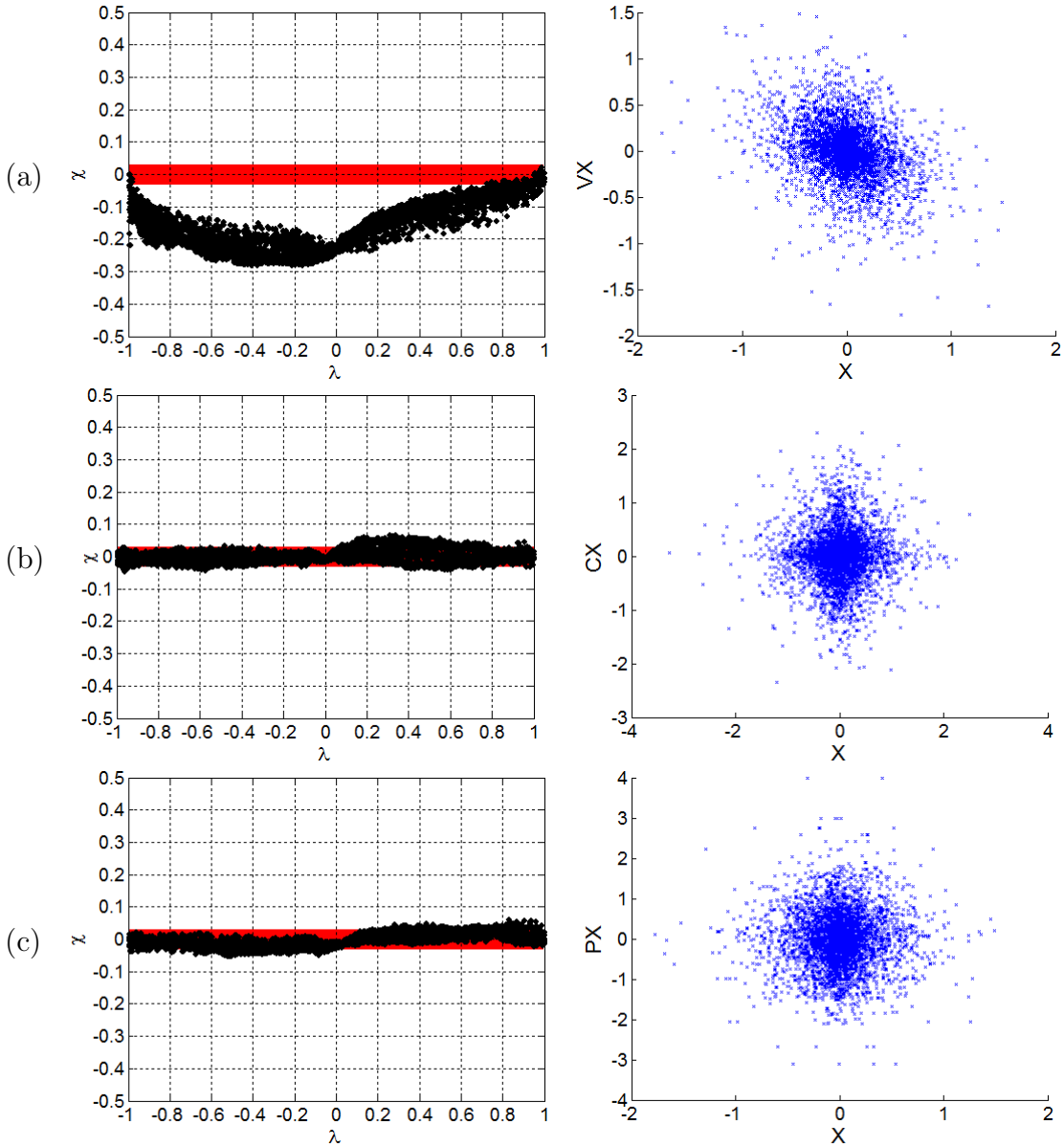
– Le coefficient de corrélation de Spearman [Spearman, 1987] :

$$\rho(X,Y) = \frac{\sum_i (r_{x_i} - \bar{r}_x)(r_{y_i} - \bar{r}_y)}{\sum_i (r_x - \bar{r}_x)^2 \sum_i (r_{y_i} - \bar{r}_y)}$$

où r_{x_i} et r_{y_i} sont les rangs de x_i et y_i obtenus après leurs tri.

Les valeurs moyennes par échelle de r, τ et ρ en considérant les trois types de dépendance sont représentées dans le Tableau 3.1. Nous remarquons que la dépendance intra-bande est prédominante et beaucoup plus importante que celles inter-orientations et inter-échelles. Ces résultats sont concordants avec ceux obtenues par Liu et Moulin [Liu et Moulin, 2001] où l'information mutuelle est utilisée pour mesurer la dépendance.

FIGURE 3.6 – Chi-plots (colonne de gauche) et scatterplots (colonne de droite) de (X, Y) : (a) X coefficient de détail horizontal, $Y = VX$ son voisin de dessous. (b) X coefficient de détail vertical, $Y = CX$ son cousin de détail diagonal. (c) X coefficient de détail horizontal d'échelle 1, $Y = PX$ son fils d'échelle 2.



	échelle		
corrélation	1	2	3
$\lvert r(X,VX)\rvert$	0.3933	0.2893	0.2386
$\lvert r(X,CX)\rvert$	0.0687	0.0537	0.0643
$\lvert r(X,FX)\rvert$	0.0326	0.0328	
$\lvert \tau(X,VX)\rvert$	0.2571	0.1852	0.1578
$\lvert \tau(X,CX)\rvert$	0.0446	0.0359	0.0433
$\lvert \tau(X,FX)\rvert$	0.0135	0.0192	
$\lvert \rho(X,VX)\rvert$	0.3631	0.2630	0.2251
$\lvert \rho(X,CX)\rvert$	0.0660	0.0532	0.0646
$\lvert \rho(X,FX)\rvert$	0.0197	0.0282	

TABLE 3.1 – Les coefficients de corrélation : linéaire r de Pearson, τ de Kendall et ρ de Spearman, moyennés par échelle, calculés en utilisant les sous-bandes résultantes de la décomposition de la base d'images VisTex en ondelette de Daubechies 'db4' sur 3 échelles.

3.1.2.2 Information mutuelle

L'information mutuelle est une mesure de dépendance très utile dans les cas non-Gaussiens [Liu et Moulin, 2001]. Si X et Y sont deux variables aléatoires, l'information mutuelle entre X et Y est définie par,

$$IM(X,Y) = \int\int f_{XY}(x,y) \ln \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)f_Y(y)}\, dxdy \tag{3.1}$$

où $f_{XY}(x,y)$ est la loi jointe du vecteur aléatoire (X,Y), $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ sont les lois marginales de X et Y respectivement.
C'est une mesure symétrique, positive et elle est nulle si et seulement si X et Y sont indépendants. En revanche, si par exemple Y est fonction de X alors $IM(X,Y) = \infty$.
Les résultats de notre étude sont regroupés dans le Tableau 3.2. Ces résultats confirment ceux obtenus en utilisant les coefficients de corrélation. C'est la dépendance intra-bande qui est la plus significative suivie de celle relative à l'inter-orientations et enfin la dépendance inter-échelles.

3.1.2.3 Choix d'un modèle de dépendance

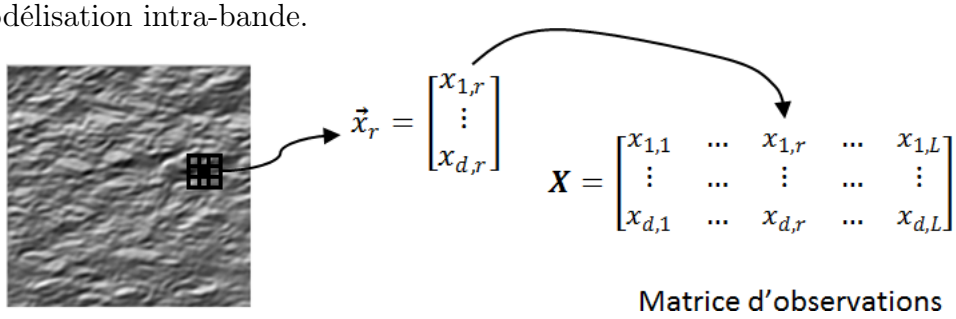
Les différentes études expérimentales menées précédemment nous ont permis de mettre en évidence l'existence de dépendances entre coefficients d'on-

	échelle		
	1	2	3
$IM(X, VX)$	0.2891	0.0977	0.0411
$IM(X, CX)$	0.0275	0.0117	0.0081
$IM(X, FX)$	0.0085	0.0041	

TABLE 3.2 – L'information mutuelle moyennée par échelle, calculée en utilisant les sous-bandes résultantes de la décomposition de la base d'images VisTex en ondelette de Daubechies 'db4' sur 3 échelles.

delettes. Ce constat justifie donc l'intérêt d'employer une modélisation paramétrique intégrant un terme de dépendance. Même si on ne peut pas catégoriquement affirmer l'indépendance inter-orientations et inter-échelles, nous allons dans toute la suite considérer uniquement la dépendance intra-bande. Nous considérons par conséquent chaque sous-bande d'ondelette comme une réalisation d'un vecteur aléatoire $\vec{X}$: les voisins d'un coefficient de référence sont rassemblés dans un vecteur colonne $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_d)^t$ où d est la dimension du voisinage. En considérant une fenêtre glissante de taille $d = p \times q$, les réalisations du vecteur $\vec{X}$ sont notées $\vec{x}_r = (x_{1,r}, \ldots, x_{d,r})^t, r = 1, \ldots, L$ où L est la taille de la sous-bande. L'ensemble de données à modéliser est regroupé dans la matrice d'observation $\mathbf{X} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_L]$ (Figure 3.7). La description des statistiques jointes du vecteur $\vec{X}$ permet de caractériser la dépendance intra-bande.
Afin de modéliser la loi jointe de $\vec{X}$, nous introduisons deux modèles multivariés : le modèle de vecteurs aléatoires à invariance sphérique SIRV (Spherically Invariant Random Vectors) et les modèles à copule Gaussienne.

FIGURE 3.7 – Le schéma de construction de la matrice d'observation pour la modélisation intra-bande.



3.2 Modèle SIRV

Les statistiques jointes des coefficients d'ondelettes affichent des propriétés de non-*Gaussianité* prononcée. Le modèle des vecteurs aléatoires à invariance sphérique (SIRV) peut être employé pour caractériser ces propriétés. C'est un modèle qui a été utilisé avec succès pour la modélisation de problèmes non-Gaussiens comme la modélisation du fouillis radar [Conte *et al.*, 2002, Vasile *et al.*, 2010], les interférences sonars [Barnard et Khan, 2004] ou la caractérisation de la texture [Lasmar et Berthoumieu, 2010].

3.2.1 Définition

Nous utilisons la représentation de Yao pour définir un vecteur aléatoire à invariance sphérique (SIRV) [Yao, 1973].
Soit $\vec{X}$ un vecteur aléatoire. $\vec{X}$ est un vecteur SIRV si et seulement si

$$\vec{X} = \sqrt{\tau}\ \vec{G} \tag{3.2}$$

où τ est une VA positive et $\vec{G}$ est un vecteur Gaussien centré indépendant de τ et de matrice de covariance M.
Il est évident que l'écriture de l'Équation 3.2 n'est pas unique, nous ajoutons la condition trace(M) $= d$ où d est la dimension de $\vec{X}$ pour la rendre unique. En d'autres termes, le vecteur $\vec{X}$ est un SIRV si il existe une variable aléatoire positive τ telle que la densité de probabilité de $\vec{X}$ sachant τ est une densité de probabilité Gaussienne multivariée.

3.2.2 Propriétés

Soit $\vec{X}$ un vecteur SIRV, nous avons les propriétés suivantes :
– La densité jointe de $\vec{X}$ est donnée par,

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|M|^{1/2}} \int_0^{+\infty} \tau^{-d/2} \exp\left(-\frac{\vec{x}^t M^{-1}\vec{x}}{2\tau}\right) p_\tau(\tau)\ d\tau \tag{3.3}$$

où $p_\tau(\tau)$ est la loi du multiplicateur τ.
La loi jointe est caractérisée par la loi du multiplicateur τ (en plus de la matrice de covariance M), appelée aussi densité de probabilité caractéristique du SIRV.

Démonstration. Nous avons, $f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \int_0^{+\infty} f_{\vec{X}|\tau}(\vec{x}|\tau)p_\tau(\tau)\ d\tau$, or sachant τ, $\vec{X} = \sqrt{\tau}\ \vec{G}$ est Gaussien de matrice de covariance τM, donc

$f_{\vec{X}|\tau}(\vec{x}|\tau)$ est une Gaussienne multivariée de matrice de covariance τM,

$$f_{\vec{X}|\tau}(\vec{x}|\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\tau M|^{1/2}} \exp\left(\frac{\vec{x}^t M^{-1}\vec{x}}{2\tau}\right)$$

et le résultat de l'Équation 3.2 en découle. □

- La matrice de covariance de $\vec{X}$ est $\mathrm{cov}(\vec{X}) = \mathbb{E}\left[\vec{X}\vec{X}^t\right] = \mathbb{E}[\tau]\, M$. En particulier, si le multiplicateur τ est de moyenne égale à 1 alors $\mathrm{cov}(\vec{X}) = M$.

  Démonstration. $\mathbb{E}\left[\vec{X}\vec{X}^t\right] = \mathbb{E}\left[\tau\vec{G}\vec{G}^t\right] = \mathbb{E}[\tau]\,\mathbb{E}\left[\vec{G}\vec{G}^t\right]$ car $\vec{G}$ et τ sont indépendants (voir définition). □

- La densité Gaussienne multivariée est un modèle SIRV, il suffit pour cela de prendre $p_\tau(\tau) = \delta(\tau - 1)$ où δ est une impulsion de Dirac.
- Plusieurs lois univariées sont des modèles SIRV à une dimension ($d = 1$) :
  - La loi de Laplace

    $$\frac{a}{2}\exp(-a|x|)$$

    si $p_\tau(\tau) = \dfrac{a^2}{2}\exp\left(-\dfrac{a^2\tau}{2}\right)$.
  - La loi de Cauchy

    $$\frac{a\pi}{(a^2 + x^2)}$$

    si $p_\tau(\tau) = \dfrac{a^2}{2\tau^2}\exp\left(-\dfrac{a^2}{2\tau}\right)$.
  - La loi de Student-t

    $$\frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{a\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\nu-1/2}$$

    si $p_\tau(\tau) = \left(\dfrac{a^2}{2}\right)^{\nu}\dfrac{\tau^{-\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\exp\left(-\dfrac{a^2}{2\tau}\right)$.

  Démonstration. Le calcul des densités caractéristiques $p_\tau(\tau)$ pour ces lois univariées est entièrement détaillé dans [Rangaswamy *et al.*, 1993]. □

- D'autres lois univariées sont aussi des SIRV mais sans expression explicite pour $p_\tau(\tau)$, c'est le cas des lois Chi2, Rayleigh et Weibull par exemple [Rangaswamy *et al.*, 1993].

3.2.3 Estimation des paramètres

Un modèle SIRV est entièrement caractérisé par la matrice de covariance du vecteur Gaussien M, et sa densité de probabilité caractéristique $p_\tau(\tau)$. Plusieurs méthodes d'estimation des paramètres peuvent être employées selon l'*a priori* qu'on considère pour $p_\tau(\tau)$. Dans notre travail, nous proposons d'employer une avancée récente dans le domaine d'estimation des paramètres des SIRV : l'estimateur du Point Fixe (FP) [Pascal *et al.*, 2008].
Soit $\mathbf{X} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_L]$ une matrice d'observation de vecteurs SIRV de dimension d (dans notre cas, c'est la matrice d'observation intra-bande de la Figure 3.7). Pascal et al. ont prouvé dans [Pascal *et al.*, 2008] l'existence et l'unicité de l'estimée de la matrice de covariance $\hat{M}$, proposé par Conte et al. [Conte *et al.*, 2002] comme solution de l'équation :

$$\hat{M} = \frac{d}{L} \sum_{i=1}^{L} \frac{\vec{x}_i \vec{x}_i^t}{\vec{x}_i^t \hat{M}^{-1} \vec{x}_i} \tag{3.4}$$

Cet estimateur est appelé du Point Fixe (FP), il a l'avantage de ne pas dépendre de la densité de probabilité caractéristique du SIRV $p_\tau(\tau)$. L'Équation 3.4 peut être résolue par une procédure itérative en prenant pour valeur de départ $\hat{M}_0 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \vec{x}_i \vec{x}_i^t$. Dans la pratique moins de 10 itérations sont suffisantes pour atteindre la convergence.
Ensuite, les valeurs cachées du multiplicateur τ sont données par,

$$\hat{\tau}_i = \frac{\vec{x}_i^t \hat{M}^{-1} \vec{x}_i}{d}, i = 1, \ldots, L \tag{3.5}$$

et la densité de probabilité caractéristique du SIRV est estimée *a posteriori*. Dans notre cas, nous proposons d'employer la loi Gamma ou la loi de Weibull pour $p_\tau(\tau)$. Nous avons récapitulé la méthode d'estimation FP dans l'algorithme 3.

Algorithme 3 Estimateur FP pour l'estimation de la matrice de covariance du modèle SIRV et des valeurs cachées du multiplicateur

Entrées : $\hat{M}_0 = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \vec{x}_i\vec{x}_i^t$

Sorties : la matrice de covariance du modèle SIRV $\hat{M}$ solution de l'Équation 3.4, les valeurs cachées du multiplicateur $\hat{\tau}_i, i = 1, \ldots, L$

$NiterMax \leftarrow 10$ {le nombre maximal d'itérations}

$\epsilon \leftarrow 10^{-6}$ {la précision du résultat}

$k \leftarrow 0$

Répéter

calculer $\hat{M}_{k+1} = \frac{d}{L}\sum_{i=1}^{L} \frac{\vec{x}_i\vec{x}_i^t}{\vec{x}_i^t\hat{M}_k^{-1}\vec{x}_i}$

$k \leftarrow k+1$

Jusqu'à $0.5\left(\text{trace}(\hat{M}_{k+1}^{-1}\hat{M}_k) + \ln\frac{|\hat{M}_{k+1}|}{|\hat{M}_k|} - d\right) \leqslant \epsilon$ ou $k = NiterMax$

calculer $\hat{\tau}_i = \frac{\vec{x}_i^t\hat{M}^{-1}\vec{x}_i}{d}, i = 1, \ldots, L$

Retourner $\hat{M}_k$ et $\{\hat{\tau}_i, i = 1, \ldots, L\}$

Nous représentons dans la Figure 3.8 un exemple de décomposition de sous-bandes montrant la composante liée au multiplicateur τ et la partie Gaussienne à l'aide de la modélisation SIRV. La partie multiplicateur contient de l'information sur la texture (le multiplicateur τ est appelé dans le jargon des radaristes *texture*) tandis que l'information sur la dépendance est contenue dans la partie Gaussienne. L'ajustement par la loi Gaussienne multivariée (pour $d = 2$) de la distribution jointe empirique de la partie Gaussienne des sous-bandes de la Figure 3.8, est représenté sur la Figure 3.9. Nous avons ajusté la loi caractéristique du modèle SIRV $p_\tau(\tau)$ par la loi de Weibull et la loi Gamma. Nous remarquons que les deux modèles Weibull et Gamma peuvent être employés comme *a posteriori* pour la densité caractéristique $p_\tau(\tau)$. Afin d'étudier la qualité d'ajustement des deux modèles à la densité caractéristique empirique, nous proposons d'employer le test de Kolmogorov-Smirnov pour sélectionner un modèle pour l'*a posteriori* caractérisant le modèle SIRV dans le cas de la modélisation intra-bande des coeffcients d'ondelettes.

FIGURE 3.8 – La décomposition à l'aide de la modélisation SIRV, des sous-bandes de l'échelle 1 de l'image test Fabric.0009 (Figure 2.4) transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' ; première colonne les sous-bandes, deuxième colonne le multiplicateur $\sqrt{\tau}$ et troisième colonne la partie Gaussienne : (a) le détail horizontal (b) le détail vertical et (c) le détail diagonal.

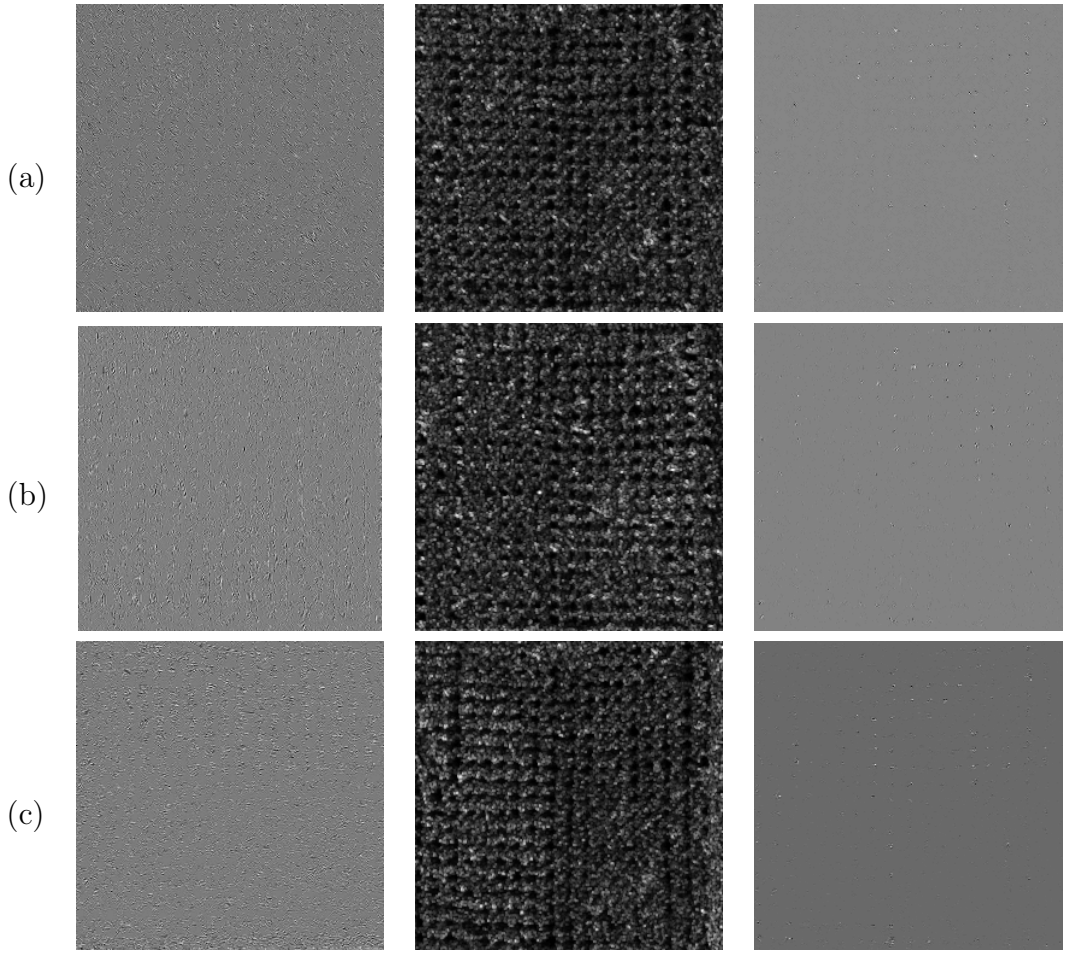
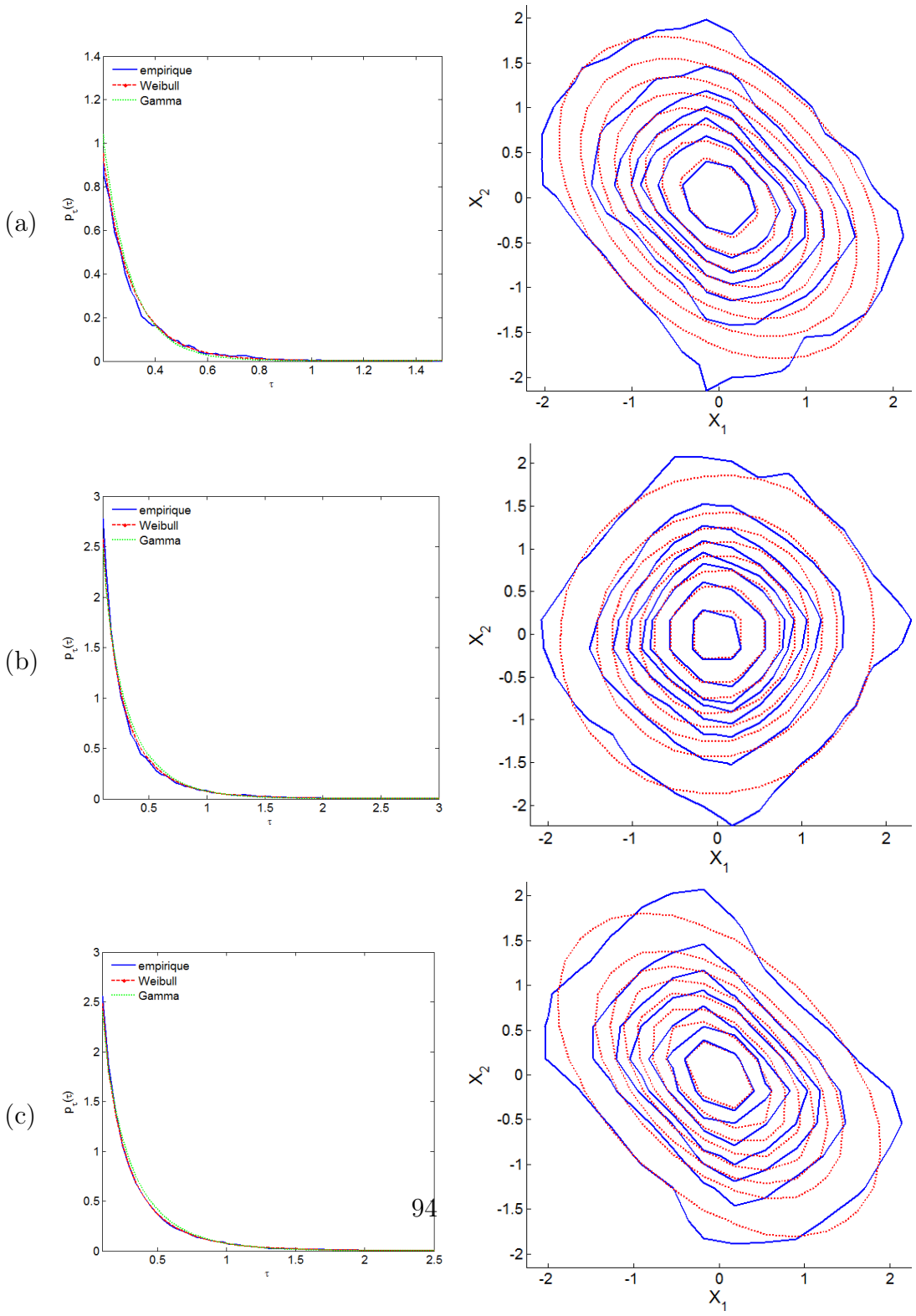


FIGURE 3.9 – Première colonne : ajustement de la loi caractéristique de la densité caractéristique du modèle SIRV $p_\tau(\tau)$ par la loi de Weibull et Gamma. Deuxième colonne : ajustement de la partie Gaussienne par une densité Gaussienne multivariée.



3.2.4 Sélection du modèle *a posteriori* pour la densité de probabilité caractéristique du SIRV

Nous proposons de réaliser une étude quantitative en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov dans le but de choisir un modèle pour l'*a posteriori* $p_\tau(\tau)$. Nous considérons un voisinage de taille $d = 2 \times 2 = 4$, les résultats des pourcentages de rejet en considérant la loi Weibull et la loi Gamma pour l'*a posteriori* sont rapportés dans les Tableau 3.3 et Tableau 3.4. Pour les deux bases d'images considérées, l'*a posteriori* Weibull est moins rejeté que la loi Gamma. Le modèle Weibull semble être plus adéquat pour caractériser le modèle SIRV employé à la modélisation multivariée intra-bande. Dans toute la suite, nous proposons d'employer la loi Weibull comme densité caractéristique du modèle SIRV. Dans ce cas, la loi jointe résultante de la modélisation SIRV est obtenue en utilisant l'(Équation 3.3) :

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{b}{a^b (2\pi)^{d/2} |M|^{1/2}} \int_0^{+\infty} \tau^{-d/2+b-1} \exp\left(-\frac{\vec{x}^t M^{-1} \vec{x}}{2\tau} - \frac{\tau^b}{a^b}\right) d\tau \quad (3.6)$$

Après estimation de la matrice de covariance M et les valeurs cachées du multiplicateur $\tau_i, i = 1, \ldots, L$ à l'aide de l'estimateur FP (algorithme 3), nous estimons les paramètres (a, b) de la loi Weibull par ([Krishnamoorthy, 2006]),

$$\begin{cases} \hat{a} = \left(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \hat{\tau}_i^{\hat{b}}\right)^{1/\hat{b}} & (3.7a) \\ \hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \hat{\tau}_i^{\hat{b}} - \frac{1}{N} \ln \hat{\tau}_i}{\sum_{i=1}^{N} \hat{\tau}_i^{\hat{b}} \ln \hat{\tau}_i} & (3.7b) \end{cases}$$

L'Équation 3.7b peut être facilement résolue à l'aide de la méthode de Newton-Raphson.

Remarque 3.1.

- *L'*a posteriori *Gamma (à moyenne unitaire) a déjà été proposé pour caractériser les dépendances des coefficients d'ondelettes [Boubchir* et al.*, 2010]. Dans ce cas, la loi jointe est la distribution Forme K de Bessel multivariée qui est la généralisation multidimensionnelle de la distribution univariée BKF proposée dans [Srivastava* et al.*, 2002] et [Fadili et Boubchir, 2005].*

– *Même si dans le cas d'*a posteriori *Weibull, la densité jointe de l'Équation 3.6 n'a pas de forme explicite connue, le modèle est entièrement caractérisé par les hyperparamètres* $\{a, b, M\}$.

		$p_\tau(\tau)$	
	échelle	Weibull	Gamma
VisTex	1	3.75	22.86
	2	3.80	17.66
	3	1.98	11.15
	1,2,3	**3.18**	17.22
Brodatz	1	16.99	51.33
	2	12.80	35.57
	3	8.56	22.5
	1,2,3	**12.78**	36.47

TABLE 3.3 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests Kolmogorov-Smirnov appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4'.

		$p_\tau(\tau)$	
	échelle	Weibull	Gamma
VisTex	1	2.97	21.56
	2	5.52	22.45
	3	3.85	15.96
	1,2,3	**4.11**	19.99
Brodatz	1	15.12	46.47
	2	12.70	38.98
	3	10.11	28.08
	1,2,3	**12.64**	37.84

TABLE 3.4 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse nulle H_0 des tests Kolmogorov-Smirnov appliqués sur les sous-bandes résultantes de la transformée DT-CWT.

3.3 Modèles à copule Gaussienne

Comme alternative au modèle SIRV, nous considérons ici un modèle multivarié à copule Gaussienne pour caractériser la dépendance intra-bande tout en prenant en considération l'information des lois marginales. Contrairement

à la modélisation SIRV qui ne permet pas de générer une loi jointe avec des lois marginales convenables (GGD ou AGGD), l'utilisation d'une copule permet de construire des distributions multivariées à marginales connues.

3.3.1 Définitions

- Une copule C à d-dimension est une fonction $C : [0,1]^d \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :
  1. $\forall (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$, si $\exists u_i = 0$ alors $C(u_1, \ldots, u_d) = 0$
  2. $\forall (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$, $C(1, \ldots, 1, u_i, 1, \ldots, 1) = u_i$
  3. C est d-croissante, i.e. $\forall (a_1, \ldots, a_d), (b_1, \ldots, b_d) \in [0,1]^d$ tel que $a_i \leqslant b_i, i = 1, \ldots, d$,

     $$\sum_s \text{signe}(s) C(s) \geqslant 0$$

     où $s = (s_1, \ldots, s_d)$ est un sommet de l'hyper-rectangle défini par le produit cartésien des intervalles $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, et $\text{signe}(s) = \text{Card}\{k : s_k = a_k\}$
- Une copule C est une fonction de répartition multivariée définie sur $[0,1]^d$ et dont les marginales sont uniformes sur $[0,1]$.
- Soit $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire dont les fonctions de répartition marginales $F_i, i = 1, \ldots, d$ sont continues, la copule de $\vec{X}$ est la fonction de répartition jointe du vecteur $\vec{U} = (F_1(X_1), \ldots, F_d(X_d))$.

3.3.2 Propriétés

Théorème 3.1 (de Sklar [Sklar, 1959]). *Si $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur aléatoire de fonction de répartition jointe $F_{\vec{X}}$ et de marginales $F_i, i = 1, \ldots, d$, alors il existe une copule C telle que :*

$$F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \tag{3.8}$$

Si en plus, les fonctions de répartition marginales sont continues, alors la copule C est unique.

Nous présentons deux corolaires qui découlent du théorème de Sklar :

Corollaire 3.1. *Inversement, si C est une copule et $F_i, i = 1, \ldots, d$ des fonctions de répartition, alors la fonction définie par $C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d))$ est une fonction de répartition jointe de marginales $F_i, i = 1, \ldots, d$.*

Corollaire 3.2. *Si $F_{\vec{X}}$ est la fonction de répartition jointe de $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ de marginales $F_i, i = 1, \ldots, d$, alors la copule de $\vec{X}$ est :*

$$C(u_1, \ldots, u_d) = F_{\vec{X}}\left(F_1^{-1}(u_1), \ldots F_d^{-1}(u_d)\right) \tag{3.9}$$

Dans notre étude, les fonctions de répartition marginales sont continues et par conséquence la copule caractérisant la dépendance intra-bande est unique. Plusieurs copules ont été définies dans la littérature pour décrire les différents type de dépendance entre les composantes d'un vecteur aléatoire [Mikosch, 2006, Nelsen, 2006]. Les copules Archimédiennes sont celles qui s'écrivent sous la forme $C(u_1, \ldots, u_d) = \varphi^{-1}\left(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_d)\right)$, où φ est appelé générateur de la copule. Parmi les copules Archimédiennes nous citons, la copule indépendante ($C(u_1, \ldots, u_d) = \prod_{i=1}^{d} u_i$), les copules de Clayton, de Gumbel et de Frank. Chaque type de copule est adéquat pour un type d'association et de dépendance données entre composantes. Dans le cas des distributions elliptiques [Cambanis *et al.*, 1981], la copule Gaussienne et la copule de Student-t peuvent être employées pour décrire les associations entre les composantes d'un vecteur aléatoire elliptiquement distribué [Mikosch, 2006].
Dans le but de proposer un modèle multivarié pour caractériser les statistiques jointes des coefficients d'ondelettes, il faut choisir une copule qui décrit au mieux le type des liaisons entre les composantes du vecteur des coefficients.

3.3.3 Choix de copule

Une copule étant une fonction de répartition jointe, la fonction de densité de probabilité qui lui correspond est (appelé densité de copule) :

$$c(u_1, \ldots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \ldots, u_d)}{\partial u_1, \ldots, \partial u_d}$$

Donc, la densité de probabilité jointe d'un vecteur aléatoire $\vec{X}$ à copule C s'écrit :

$$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_d) = c\left(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right) \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i) \tag{3.10}$$

où $f_i, i = 1, \ldots, d$ et $F_i, i = 1, \ldots, d$ sont les lois marginales et les fonctions de répartition marginales respectivement, des composantes du vecteur $\vec{X}$.
L'Équation 3.10 permet de construire une distribution multivariée à marginales données *copulées* par la copule de densité c. Une autre utilité de l'Équation 3.10 est la construction de copules à partir des lois jointes prédéfinies. À partir des distributions multivariées Gaussienne et de Student-t, nous définissons les copules Gaussienne et de Student-t.

3.3.3.1 Copule Gaussienne

La densité normale multivariée de marginales normales $N(0,1)$ est définie par :

$$N(x_1,\ldots,x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{\vec{x}^t\Sigma^{-1}\vec{x}}{2}\right) \tag{3.11}$$

où Σ est la matrice de covariance à diagonale unité.
En ré-écrivant l'Équation 3.11 sous la forme de l'Équation 3.10, la densité de la copule Gaussienne est [Zezula, 2009] :

$$c(u_1,\ldots,u_d) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{\vec{y}^t(\Sigma^{-1}-I_d)\vec{y}}{2}\right) \tag{3.12}$$

où I_d est la matrice identité, et $\vec{y} = (y_1,\ldots,y_d)^t$ est le vecteur normal tel que $y_i = \phi^{-1}(u_i), i = 1,\ldots,d$, ϕ est la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$.
À partir des lois marginales données $f_i, i = 1,\ldots,d$, nous définissons une distribution multivariée à copule Gaussienne et de marginales $f_i, i = 1,\ldots,d$ par :

$$f_{\vec{X}}(x_1,\ldots,x_d) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{\vec{y}^t(\Sigma^{-1}-I_d)\vec{y}}{2}\right) \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i) \tag{3.13}$$

où $\vec{y}^t = (\phi^{-1}(F_1(x_1)),\ldots,\phi^{-1}(F_d(x_d)))$ et $F_i, i = 1,\ldots,d$ sont les fonctions de répartition marginales.
Dans ce cas, si nous notons $\theta_i, i = 1,\ldots,d$ les paramètres des lois marginales, les hyperparamètres de loi jointe sont $\{\theta_1,\ldots,\theta_d;\Sigma\}$. La construction de la distribution multivariée à copule Gaussienne à partir de marginales données est connue aussi sous la nomination de transformation de Nataf [Nataf, 1962].

3.3.3.2 Copule de Student-t

La densité de Student-t multivariée est :

$$t(x_1,\ldots,x_d) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma(\nu/2)(\nu\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \left(1+\frac{\vec{x}^t\Sigma^{-1}\vec{x}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} \tag{3.14}$$

où Σ est la matrice de covariance et $\nu \in \mathbb{R}^{+*}$ le nombre de degrés de liberté.
Les lois marginales de Student-t sont données par :

$$f_t(x;\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\nu\pi}} \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

En ré-écrivant la densité de Student-t multivariée sous la forme de l'Équation 3.10, nous trouvons l'expression de la densité de la copule de Student-t :

$$c(u_1,\dots,u_d) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^d\left(1+\frac{\vec{y}^t\Sigma^{-1}\vec{y}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}}{|\Sigma|^{1/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\prod_{i=1}^d\left(1+\frac{y_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} \tag{3.15}$$

où $\vec{y} = (y_1,\dots,y_d)^t = (F_t^{-1}(u_i;\nu),\dots,F_t^{-1}(u_d;\nu))^t$, $F_t(.;\nu)$ est la fonction de répartition de Student-t de degré de liberté ν.
Connaissant les lois marginales $f_i, i = 1,\dots,d$, nous pouvons construire une distribution multivariée à copule de Student-t par :

$$f_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_d) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^d\left(1+\frac{\vec{y}^t\Sigma^{-1}\vec{y}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}}{|\Sigma|^{1/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\prod_{i=1}^d\left(1+\frac{y_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}\prod_{i=1}^d f_i(x_i) \tag{3.16}$$

où $\vec{y} = (y_1,\dots,y_d)^t = (F_t^{-1}(F_i(x_i);\nu),\dots,F_t^{-1}(F_d(x_d);\nu))^t$ et $F_i, i = 1,\dots,d$ sont les fonctions de répartition marginales.
Dans ce cas, les hyperparamètres de la loi jointe sont $\{\theta_1,\dots,\theta_d;\nu,\Sigma\}$ où les $\theta_i, i = 1,\dots,d$ sont les paramètres des lois marginales.

3.3.3.3 Copules Archimédiennes : de Frank, de Clayton et de Gumbel

Les copules Gaussienne et de Student-t n'ont d'expression explicite que pour leur densité. Les copules Archimédiennes ont une forme explicite et s'écrivent sous la forme $C(u_1,\dots,u_d) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1)+\dots+\varphi(u_d))$. Nous présentons trois copules Archimédiennes parmi les plus connues :

1. Copule de Frank, définie par :

$$C(u_1,\dots,u_d) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha u_1}-1)\cdots(e^{-\alpha u_d}-1)}{e^{-\alpha}-1}\right) \tag{3.17}$$

   avec $\alpha \in]-\infty,+\infty[\setminus\{0\}$
   Le générateur de la copule de Frank est $\varphi : t \longrightarrow \dfrac{t^{-\alpha}-1}{\alpha}$.

2. Copule de Clayton, définie par :

$$C(u_1,\dots,u_d) = \max\left((u_1^{-\alpha}+\dots+u_d^{-\alpha}-1)^{-1/\alpha}),0\right) \tag{3.18}$$

avec $\alpha \in [-1, +\infty[\setminus \{0\}$
Le générateur de la copule de Clayton est $\varphi : t \longrightarrow -\ln \dfrac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$.

3. Copule de Gumbel, définie par :

$$C(u_1, \ldots, u_d) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\alpha + \cdot + (-\ln u_d)^\alpha\right]^{1/\alpha}\right) \tag{3.19}$$

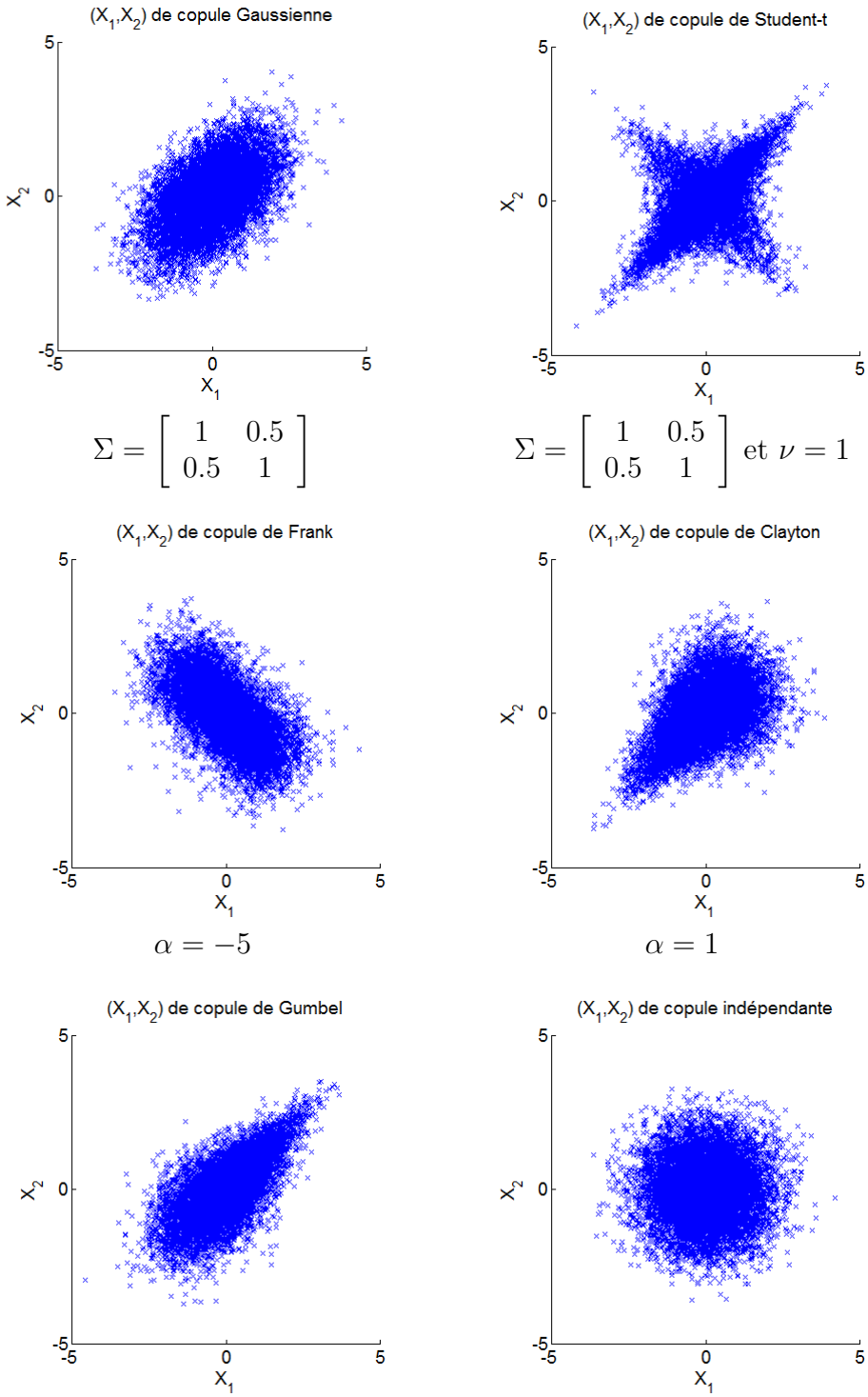
avec $\alpha \in [1, +\infty[$
Le générateur de la copule est $\varphi : t \longrightarrow (-\ln(t))^\alpha$.

Nous présentons sur la Figure 3.10 des nuages de points (Scatterplots) d'un vecteur aléatoire $(X_1, X_2)^t$ de loi marginale normale $N(0, 1)$ pour ses deux composantes ayant différentes structures de dépendance à l'aide des copules. Chaque copule caractérise un type d'association (non linéaire) entre composantes. S'il est toujours facile de détecter l'absence de dépendance (copule indépendante), il est parfois difficile de détecter le type de copule d'un vecteur bivarié à l'aide du Scatterplot uniquement. Un exemple est illustré sur la Figure 3.11 où on remarque une très grande ressemblance entre deux Scatterplots de deux vecteurs aléatoires ayant les mêmes lois marginales et de copule Gaussienne et de Frank respectivement. Le Scatterplot est un moyen simple à implémenter et peut être employé comme première étape pour sélectionner la bonne copule caractérisant la structure de dépendance [Genest et Favre, 2007]. Cependant, il n'est pas toujours suffisant et une étude plus approfondie est nécessaire pour choisir la copule adéquate qui modélise la structure de dépendance intra-bande des coefficients d'ondelettes.

3.3.3.4 Sélection du modèle

Les dépendances entre composantes d'un vecteur aléatoire peuvent être de différents types. Il faut déterminer la bonne copule qui caractérise cette association en s'ajustant au mieux aux données observées. Dans le cas bivarié ($d = 2$), nous représentons sur la Figure 3.12 (en haut à gauche) la densité de copule empirique observée de la sous-bande du détail horizontal à l'échelle 1 de l'image test Fabric.0009. En considérant l'*a priori* AGGD (cf. section 2.2) pour les lois marginales, nous comparons cinq densités de copule estimées à la densité empirique observée. Nous observons que la densité de copule Gaussienne est la plus adéquate pour approximer la densité de copule empirique. Tandis qu'aucune des copules de Frank, Clayton et Gumbel ne peut être considérée comme proche de la copule empirique, la copule de Student-t peut être une alternative à la copule Gaussienne.

FIGURE 3.10 – Scatterplots de 10000 échantillons de (X_1, X_2) de même loi marginale normale $N(0,1)$ pour X_1 et X_2, et de différentes copules.



$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

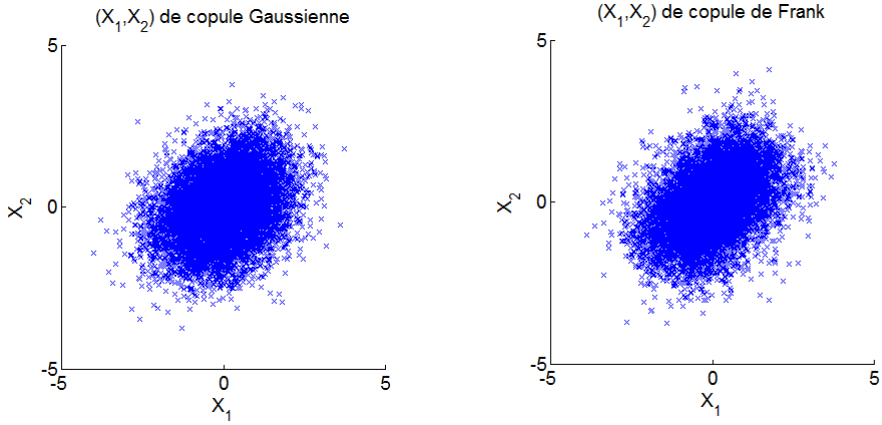
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \nu = 1$$

$\alpha = -5$

$\alpha = 1$

$\alpha = 2$

FIGURE 3.11 – Scatterplots de 10000 échantillons de (X_1, X_2) de même loi marginale normale $N(0,1)$ pour X_1 et X_2, et de copule Gaussienne ou de Frank.



$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha = 3$$

Dans ce paragraphe, nous proposons une étude quantitative afin de déterminer laquelle des deux copule Gaussienne et de Student-t est la plus appropriée. Nous employons comme dans [Nikoloulopoulos et Karlis, 2008] la divergence de Jeffreys pour mesurer la similarité entre la densité de copule empirique et la densité de copule à sélectionner. La divergence de Jeffreys entre deux densités de copule à comparer c_1 et c_2 est donnée par la relation suivante :

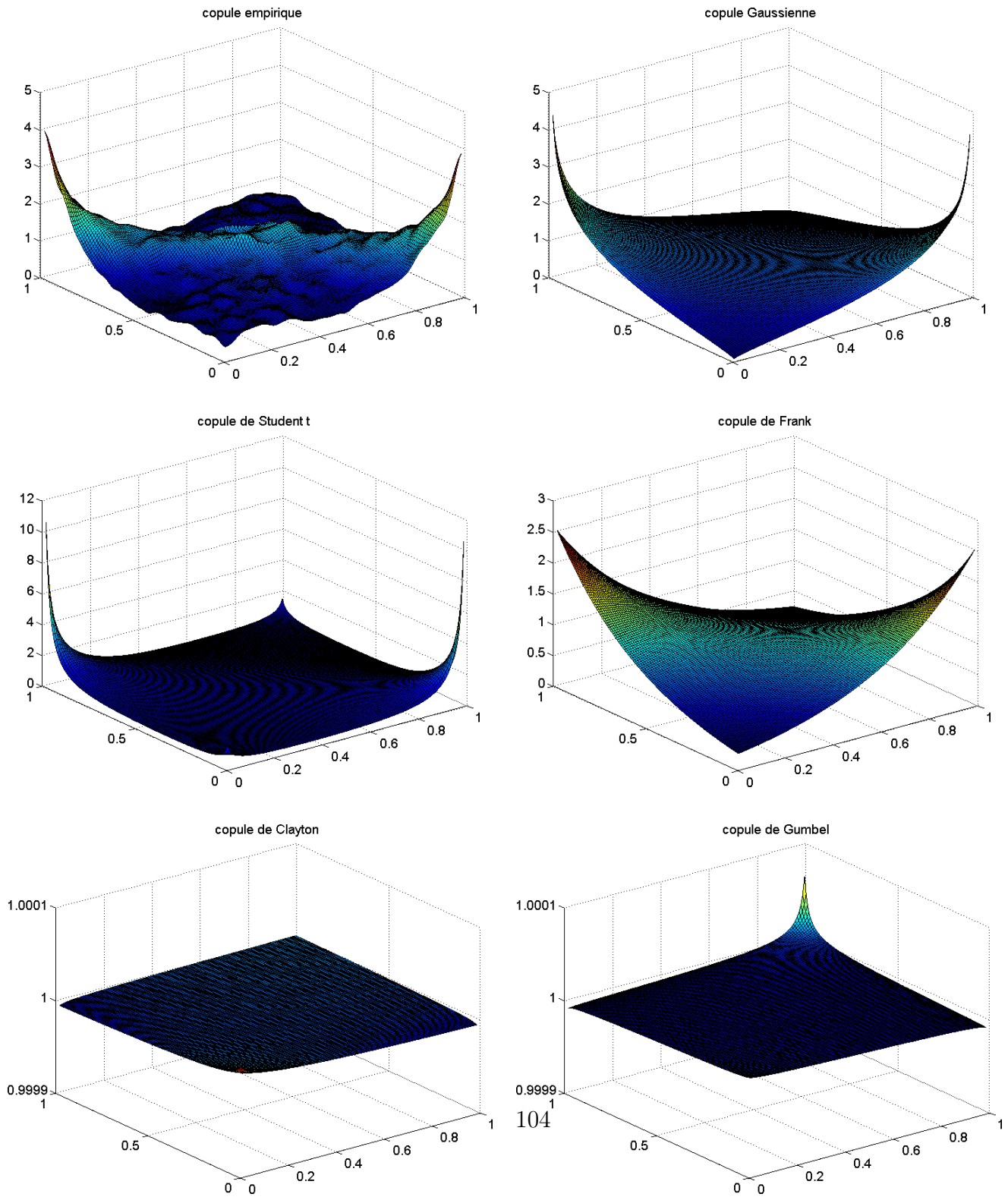
$$JD(c_1, c_2) = \int_0^1 \int_0^1 (c_1(u_1, u_2) - c_2(u_1, u_2)) \ln \frac{c_1(u_1, u_2)}{c_2(u_1, u_2)} \, du_1 du_2 \tag{3.20}$$

Nous rapportons dans la Tableau 3.5 les résultats obtenus en comparant les densités des copules empiriques observées sur les sous-bandes des images de la base VisTex, aux densités des copules Gaussienne et de Student-t estimées. La divergence de Jeffreys entre les densités de copule empirique et Gaussienne étant la plus faible, nous sélectionnons la copule Gaussienne comme la plus adéquate pour décrire la structure de dépendance intra-bande.

Un autre critère que nous pouvons employer pour sélectionner la copule Gaussienne est la mesure tau de Kendall qui s'écrit pour un vecteur aléatoire $\vec{X} = (X_1, X_2)^t$ de copule C par :

$$\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \tag{3.21}$$

FIGURE 3.12 – Comparaisons aux différentes densités de copules estimées, de la densité de copule empirique observée en utilisant le détail horizontal de l'échelle 1 de l'image test Fabric.0009.



	Copule	
échelle	Student-t	Gaussienne
1	0.4710 (± 0.2757)	0.3464 (± 0.2111)
2	0.6586 (± 0.2351)	0.5595 (± 0.2097)
3	0.7883 (± 0.1926)	0.7377 (± 0.1910)
1,2,3	0.6358 (± 0.2709)	0.5434 (± 0.2590)

TABLE 3.5 – La moyenne (et écart-type) de la divergence de Jeffreys entre la copule empirique observée et les copules Gaussienne et de Student-t estimées en considérant un *a priori* AGGD pour les lois marginales.

Si la copule C est Gaussienne, le tau de Kendall est fonction du coefficient de corrélation de Pearson du vecteur Gaussien $\vec{Y} = (\phi^{-1}(F_1(X_1))\phi^{-1}(F_1(X_2)))$ [Huard *et al.*, 2006] :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_G \tag{3.22}$$

où $\rho_G = \dfrac{\mathbb{E}\left[\phi^{-1}(F_1(X_1))\phi^{-1}(F_1(X_2))\right]}{\sqrt{\mathbb{E}\left[\phi^{-1}(F_1(X_1))^2\right]\mathbb{E}\left[\phi^{-1}(F_1(X_2))^2\right]}}$.
Nous représentons sur la Figure 3.13 les valeurs du tau de Kendall estimées sur les sous-bandes des images de VisTex, ainsi que les coefficients de Pearson ρ_G estimés en considérant l'*a priori* AGGD pour *Gaussianiser* les données. La majorité des coefficients τ de Kendall estimés vérifient $\hat{\tau} \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \hat{\rho}_G$ ce qui justifie notre choix de copule Gaussienne.

3.3.4 Estimation des paramètres

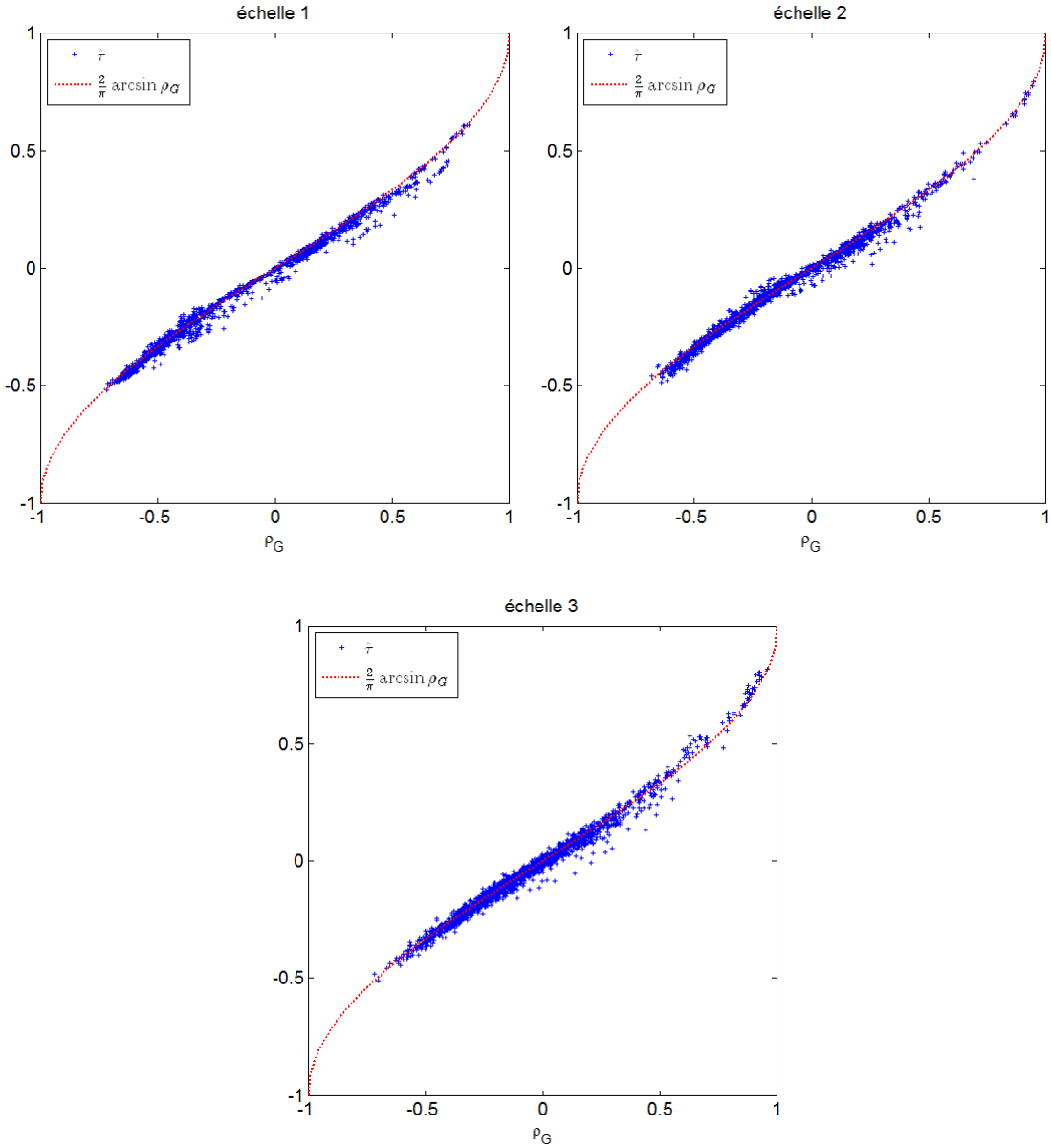
En utilisant l'expression d'une distribution multivariée à copule Gaussienne (Équation 3.13), et en considérant la matrice d'observation $\mathbf{X} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_L]$ (Figure 3.7) où les échantillons sont i.i.d, la vraisemblance est :

$$l(\theta) = \prod_{r=1}^{L} \left(c\left(F_1(x_{1,r}), \ldots, F_d(x_{d,r}); \Sigma\right) \prod_{i=1}^{d} f_i(x_{i,r}; \theta_i) \right) \tag{3.23}$$

où c est la densité d'une copule Gaussienne et $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_d; \Sigma\}$ sont les hyperparamètres à estimer.
Le log-vraisemblance s'écrit :

$$ll(\theta) = \sum_{r=1}^{L} \ln c(F_1(x_{1,r}), \ldots, F_d(x_{d,r}); \Sigma) + \sum_{r=1}^{L} \sum_{i=1}^{d} \ln f_i(x_{i,r}; \theta_i) \tag{3.24}$$

FIGURE 3.13 – Critère de sélection de la copule Gaussienne en utilisant le cofficient de correlation de Kendall τ de (X_1, X_2) en fonction du coefficient de correlation de Pearson ρ_G de $(\phi^{-1}(F_1(X_1))\phi^{-1}(F_1(X_2)))$.



Les hyperparamètres calculés par l'estimateur ML vérfient :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}\ ll(\theta) \tag{3.25}$$

Cette méthode est très complexe à implémenter car elle nécessite d'estimer conjointement les paramètres des lois marginales et la matrice de covariance de la densité de la copule Gaussienne. Nous proposons d'employer la méthode d'*inférence des fonctions marginales* (IFM) [Joe et Xu, 1996] comme alternative pratique et facile à implémenter. La méthode d'estimation IFM se résume en deux étapes :

1. Estimer les paramètres des lois marginales $\theta_i, i = 1, \ldots, d$ à l'aide de l'estimateur ML correspondant à l'*a priori* considéré pour les lois marginales :

$$\hat{\theta}_i = \underset{\theta_i}{\operatorname{argmax}} \sum_{r=1}^{L} f_i(x_{i,r}), i = 1, \ldots, d \tag{3.26}$$

2. Transformer chaque échantillon $\vec{x}_r = (x_{1,r}, \ldots, x_{1,d})^t, r = 1, \ldots, L$ de la matrice d'observation $\mathbf{X} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_L]$ en un vecteur Gaussien $\vec{y}_r$:

$$\vec{y}_r = \left(\phi^{-1}\left(F_1(x_{1,r}; \hat{\theta}_1)\right), \ldots, \phi^{-1}\left(F_d(x_{d,r}; \hat{\theta}_d)\right)\right)^t \tag{3.27}$$

   où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$ et $F_i, i = 1, \ldots, d$ sont les fonctions de répartitions marginales.
   La matrice de covariance est finalement estimée par :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \vec{y}_r \vec{y}_r^t \tag{3.28}$$

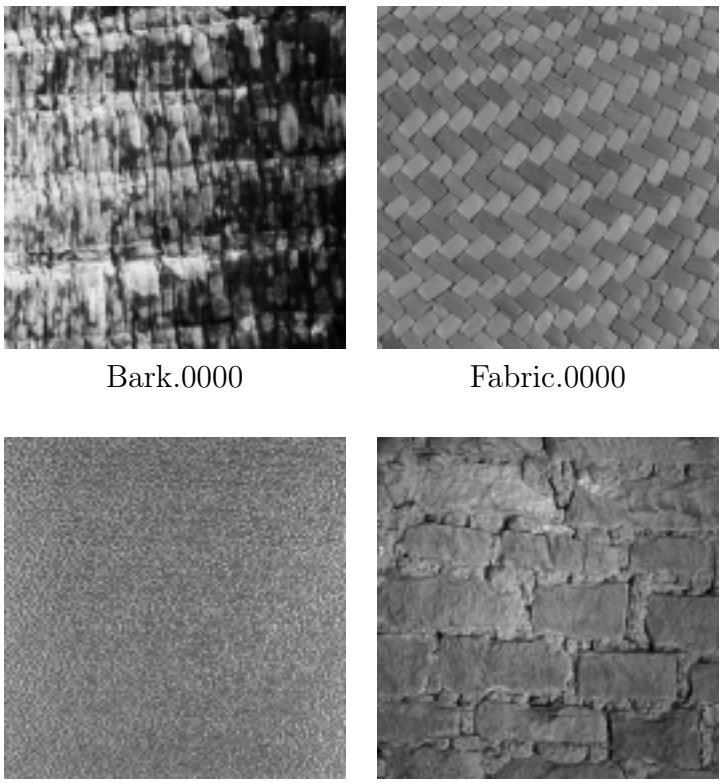
L'estimateur IFM réduit considérablement la complexité calculatoire. En particulier, dans le cas de la modélisation intra-bande, le modèle à copule Gaussienne proposé est isotrope et la matrice de covariance est estimée en calculant les coefficients d'autocorrélation à l'aide de la transformée de Fourier rapide (FFT) (cf. Appendice C).
Une étude détaillée sur l'efficacité asymptotique de l'estimation IFM est proposée dans [Joe, 2005].

3.4 Qualité de l'ajustement des statistiques jointes

Nous proposons d'évaluer la qualité d'ajustement des modèles proposés aux statistiques jointes observées (intra-bande). Nous employons les 4 images

de texture de la Figure 3.14 pour tester graphiquement l'adéquation aux PDFs jointes observées, des distributions jointes estimées en considérant la modélisation SIRV et celle de la copule Gaussienne. Pour étudier quantitativement la qualité d'ajustement aux statistiques jointes, nous employons des tests de *Gaussianité* multivariée (cf. Appendice D). En effet, le noyau du modèle SIRV est Gaussien et la copule proposée est Gaussienne, le test d'adéquation se ramène donc à un test de *Gaussianité* multivariée. Plusieurs méthodes ont été développées pour tester la *Gaussianité* jointe [Romeu et Ozturk, 1993, Mecklin et Mundfrom, 2004]. Dans notre étude, nous proposons d'employer les tests de Royston [Royston, 1983, Royston, 1992] et de Doornik-Hansen [Doornik et Hansen, 2008].

FIGURE 3.14 – Images de textures pour tester l'ajustement des modèles proposés aux PDFs jointes observées.



3.4.1 Modèle SIRV

Le modèle SIRV proposé est de densité de probabilité caractéristique Weibull (cf. sous-section 3.2.4). Malheureusement, la distribution jointe issue de cette modélisation n'a pas une forme explicite. Cependant, le modèle est entièrement caractérisé par la densité Weibull du multiplicateur et la densité jointe Gaussienne du noyau Gaussien.

Nous illustrons sur Figure 3.15 un exemple d'ajustement aux PDFs empiriques résultantes de la modélisation SIRV de densité caractéristique Weibull dans le cas bivarié ($d = 2$). Nous observons le bon ajustement de la loi Weibull à la PDF empirique du multiplicateur, en revanche l'ajustement de la loi Gaussienne à la PDF jointe du noyau Gaussien n'est pas satisfaisant.
Nous comparons deux iso-surfaces de la PDF empirique trivariée à celles de la loi Gaussienne Figure 3.16. Nous remarquons que l'ajustement est encore moins bon.

Sur le plan quantitatif, nous avons étudié la qualité d'ajustement de la loi Weibull et testé la *Gaussianité* multivariée en considérant un voisinage de taille $d = 2 \times 2 = 4$. Nous rapportons sur Tableau 3.6 les pourcentages de rejet de l'hypothèse Weibull en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov, et de la *Gaussianité* en utilisant les tests de Royston et de Doornik-Hansen. Même si l'*a posteriori* Weibull a pu être validé, nous n'avons pas pu confirmer la *Gaussianité* du noyau Gaussien du modèle SIRV proposé dans la majorité des cas. Ceci est dû à la taille réduite du voisinage considéré ($d = 4$).

Nous avons remarqué qu'en augmentant la taille du voisinage d, la *Gaussianité* partielle du noyau est de plus en plus valide, c.à.d pour une partie des composantes du vecteur du noyau et qui constituent un nouveau vecteur de dimension $< d$. Cependant, quand d croît le modèle devient plus complexe et plus lourd à estimer. Par exemple, nous remarquons sur la Figure 3.17 qu'en considérant un voisinage de taille $d = 4 \times 4 = 16$, la loi Gaussienne bivariée ou trivariée pour une partie du noyau Gaussien est mieux ajustée en augmentant le voisinage en comparaison avec l'ajustement obtenu à voisinage réduit (Figure 3.15 (a) et Figure 3.16 (a)).
Le choix de la taille du voisinage doit donc être un compromis entre la complexité du modèle et la qualité de l'ajustement à la fois de l'*a posteriori* de la loi du multiplicateur et et de la loi Gaussienne multivariée pour le noyau Gaussien.

Pour mettre en évidence l'effet du voisinage, nous reprenons les mêmes tests dont les résultats sont rapportés sur Tableau 3.6 mais en considérant cette fois un voisinage de taille $d = 4 \times 4 = 16$ au lieu de $d = 2 \times 2 = 4$. Les résultats des tests sont rapportés sur le Tableau 3.7 ; nous remarquons, d'un coté l'hypothèse Weibull est davantage accepté en comparant avec les

FIGURE 3.15 – Ajustement de la loi Weibull à la PDF empirique du multiplicateur τ de la modélisation SIRV (2ème colonne), et de la loi Gaussienne multivariée à la PDF jointe empirique du noyau Gaussien (3ème colonne), en considérant la géometrie du voisinage de la 1ère colonne : (a) détail horizontal à l'échelle 1 de Bark.0000 (b) détail diagonal à l'échelle 1 de Fabric.0000 (c) détail diagonal à l'échelle 1 de Metal.0000 et (d) détail horizontal à l'échelle 1 de Brick.0000

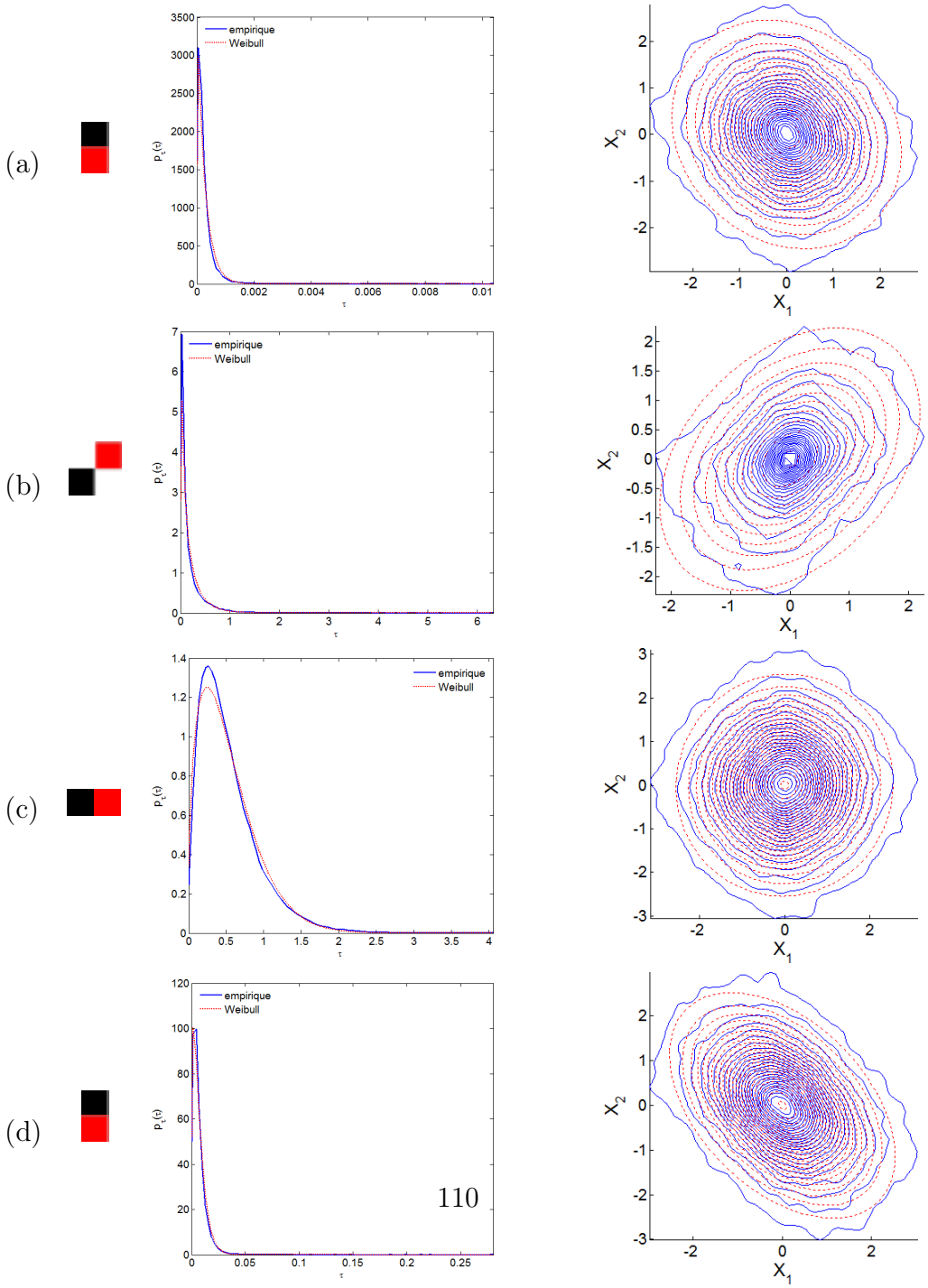


FIGURE 3.16 – Ajustement de la loi Gaussienne (surface rouge) à la PDF jointe empirique (surface verte) du noyau Gaussien dans le cas trivarié ($d = 3$), en considérant le voisinage de la 1ère colonne. Les sous-bandes sont les mêmes que dans la Figure 3.15 pour (a), (b), (c) et (d).

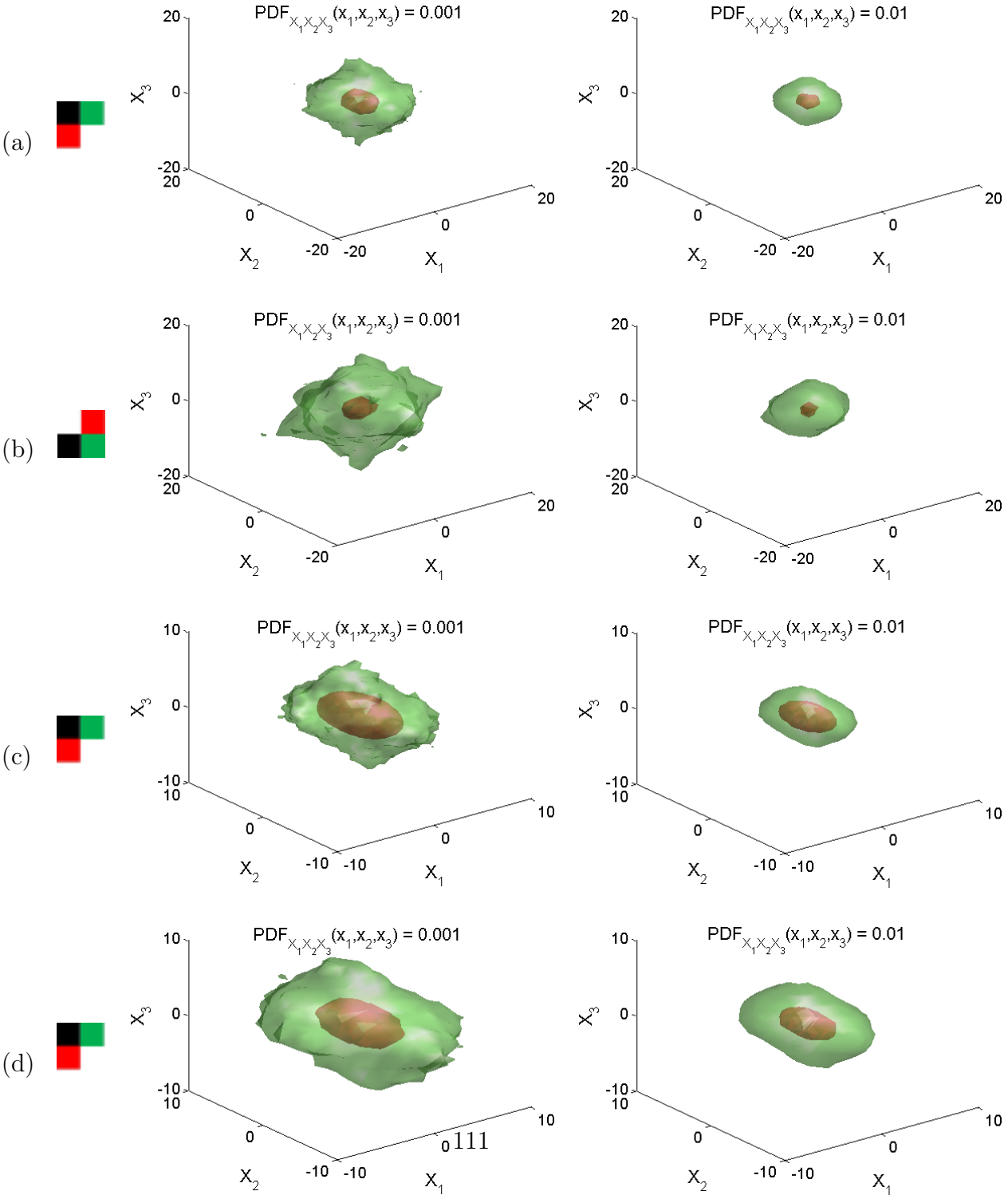
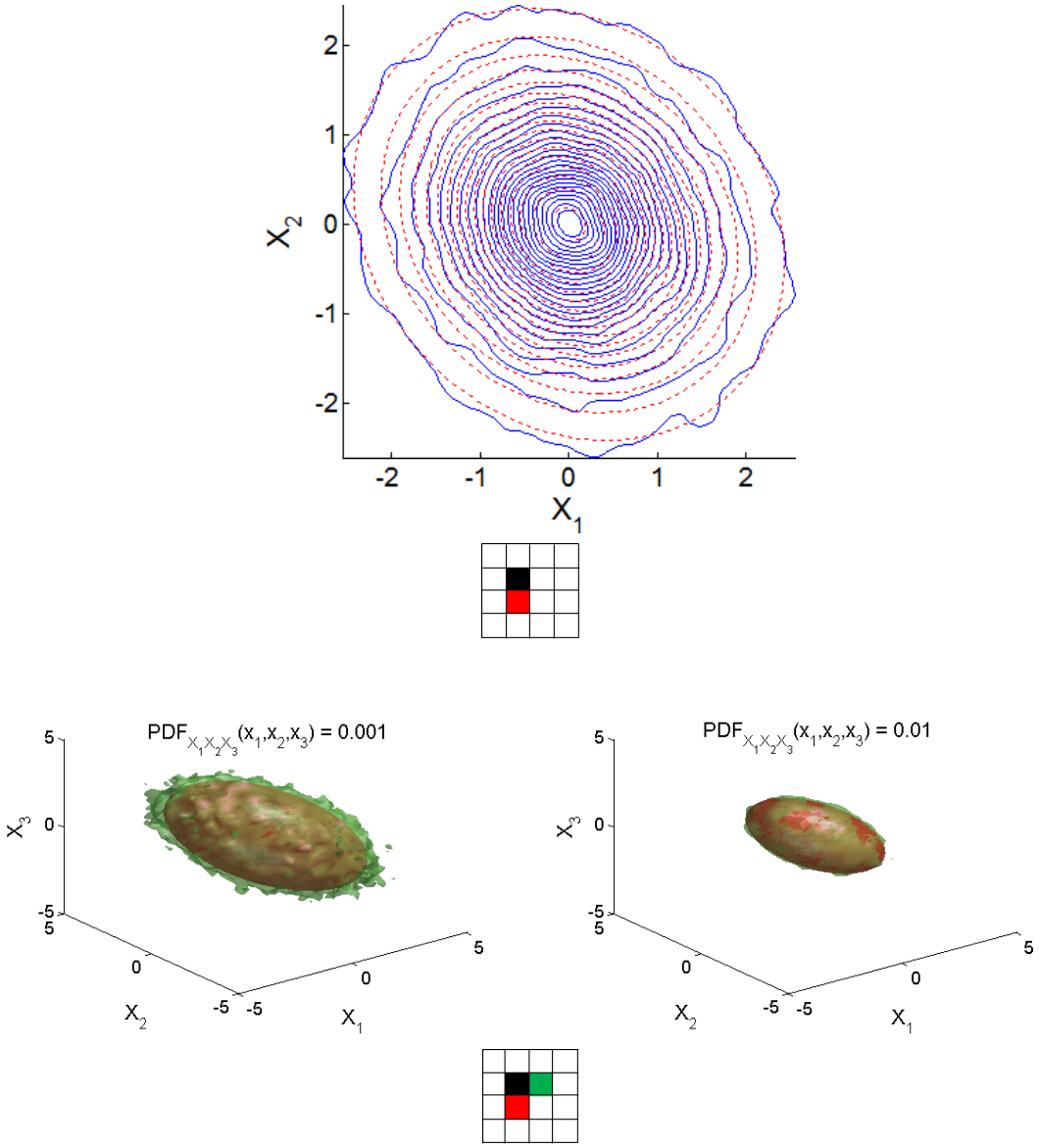


FIGURE 3.17 – Ajustement de la loi Gaussienne bivariée à la PDF empirique de deux composantes du noyau Gaussien, et de la loi Gaussienne trivariée à la PDF empirique de trois composantes du noyau Gaussien. Le voisinage considéré est de taille $d = 4 \times 4 = 16$, la sous-bande employée est la même que celle de la Figure 3.15 (a) et Figure 3.16 (a).



		Tests de *Gaussianité* multivariée	
	$p_\tau(\tau)$ Weibull	Royston	Doornik-Hansen
VisTex	17.95	83.04	71.63
Brodatz	30.77	99.62	87.26

		Tests de *Gaussianité* multivariée	
	$p_\tau(\tau)$ Weibull	Royston	Doornik-Hansen
VisTex	16.15	81.93	70.95
Brodatz	28.52	99.43	85.86

TABLE 3.6 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse d'*a posteriori* Weibull en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov, et de l'hypothèse de Gaussianité jointe. Les sous-bandes employées sont résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' (tableau en dessus) et de la transformée DT-CWT (tableau en dessous), en 3 échelles de décomposition ; le voisinage considéré est de taille $d = 2 \times 2 = 4$.

pourcentages de rejet en employant un voisinage de taille réduit $d = 2 \times 2$; de l'autre coté, la *Gaussianité* partielle de dimension 4 est validée pour la majorité des sous-bandes (plus que 80% des sous-bandes de VisTex et plus que 60% de celles de Brodatz) alors que le taux d'acceptation était inférieur à 30% en employant le voisinage de taille $d = 2 \times 2 = 4$ égale à la dimension considérée. Nous pouvons réduire encore plus les pourcentages de rejet en élargissant le voisinage, mais l'estimation de la matrice de covariance devient de plus en plus complexe.

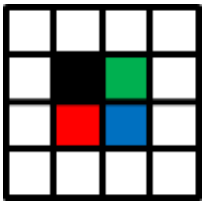
Suite à ces résultats, nous proposons pour la suite d'employer un voisinage grand ($d = 4 \times 4$ par exemple) pour estimer la matrice de covariance (de taille 16×16) et d'en extraire les coefficients de la matrice de covariance partielle qui correspondent aux composantes du voisinage réduit ($d = 2 \times 2$ par exemple) (cf. schéma Figure 3.18).

		Tests de *Gaussianité* multivariée	
	$p_\tau(\tau)$ Weibull	Royston	Doornik-Hansen
VisTex	8.45	15.87	12.55
Brodatz	12.49	35.04	28.41

		Tests de *Gaussianité* multivariée	
	$p_\tau(\tau)$ Weibull	Royston	Doornik-Hansen
VisTex	5.90	12.47	10.03
Brodatz	11.04	30.41	24.26

TABLE 3.7 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse d'*a posteriori* Weibull en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov, et de l'hypothèse de Gaussianité jointe. Les sous-bandes employées sont résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' (tableau en dessus) et de la transformée DT-CWT (tableau en dessous), en 3 échelles de décomposition ; le voisinage considéré est de taille $d = 4 \times 4 = 16$ et la dimension pour tester la multi-*Gaussianité* est $2 \times 2 = 4$.

FIGURE 3.18 – Voisinage de taille réduite $d = 2 \times 2$ à l'intérieur d'un voisinage plus grand de taille $d = 4 \times 4$.



3.4.2 Modèle multivarié de la Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne

En se basant sur les résultats de la modélisation univariée du chapitre précédent, nous proposons d'employer la distribution multivariée Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne (GC-MAGG) pour caractériser la distribution jointe intra-bande :

$$f_{GC-MAGG} = c(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i) \tag{3.29}$$

où $f_i, i = 1, \ldots, d$ sont des distributions AGGD et $F_i, i = 1, \ldots, d$ leurs fonctions de répartition.
Par construction, les lois marginales sont les mêmes en employant un voisinage glissant, le modèle est dit *isotrope* :
$\forall i = 1, \ldots, d$

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(\alpha_L + \alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)} \exp\left(-\left(\dfrac{|x|}{\alpha_L}\right)^{\beta}\right) & x < 0 \\ \dfrac{\beta}{(\alpha_L + \alpha_R)\,\Gamma(1/\beta)} \exp\left(-\left(\dfrac{|x|}{\alpha_R}\right)^{\beta}\right) & x \geqslant 0 \end{cases}$$

et

$$F_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_R}\left(1 - \gamma\left(1/\beta, (-x/\alpha_L)^{\beta}\right)\right) & x < 0 \\ \dfrac{\alpha_L}{\alpha_L + \alpha_R}\left(1 + \gamma\left(1/\beta, (x/\alpha_R)^{\beta}\right)\right) & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Les hyperparamètres du modèle sont donc $\{\alpha, \beta; \Sigma\}$.

La Figure 3.19 illustre des exemples d'ajustement dans le cas bivarié ($d = 2$), de la distribution à copule Gaussienne GC-MAGG estimée à la PDF jointe empirique observée intra-bande. Nous constatons que la distribution GC-MAGG est en général très proche de la PDF empirique. Nous observons le même comportement dans le cas trivarié (Figure 3.20), en comparant trois iso-surfaces de la PDF empirique à celles de la distribution GC-MAGG.

Pour étudier en profondeur la qualité d'adéquation de la distribution à marginale AGGD et à copule Gaussienne, nous pouvons employer des tests d'adéquation spéciaux pour copules [Berg, 2009, Genest *et al.*, 2009]. Ces tests calculent en général une statistique multivariée pour en déduire la p-value à comparer avec le degré d'incertitude (le *risque de première espèce*) pour décider de l'acceptation ou du rejet de l'hypothèse nulle. Cependant ces tests demandent des coûts de calcul considérables, en particulier

lorsque le jeu de données à tester est important (par exemple, dans notre cas nous testons 5760 sous-bandes de la base VisTex et 15984 de Brodatz résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4'). Dans le cas particulier des modèles à copule Gaussienne, le test d'adéquation se ramène à tester conjointement l'adéquation des marginales et la *Gaussianité* multivariée. En effet, une distribution à copule Gaussienne $f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_d) = c\left(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right) \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i)$ est acceptée pour décrire des données observées $\mathbf{X} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_L]$ si

1. les lois marginales $f_i, i = 1 \ldots, d$, sont adéquates pour décrire les PDFs observées
2. et les données transformées par $\mathbf{Y} = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_L]$ où

$$\vec{y}_r = \left(\phi^{-1}\left(F_1(x_{1,r}; \hat{\theta}_1)\right), \ldots, \phi^{-1}\left(F_d(x_{d,r}; \hat{\theta}_d)\right)\right)^t$$

   sont Gaussiens multivariés.

Nous proposons d'employer conjointement i) le test de Kolmogorov-Smirnov (comme nous l'avons déjà fait dans la sous-section 2.3.2) pour tester l'adéquation de la loi marginale AGGD ii) et les tests de *Gaussianité* multivariée de Royston ou de Doornik-Hansen pour tester l'adéquation de la copule Gaussienne.
Si nous notons l'hypothèse nulle $H_0^{GC-MAGG}$: la distribution GC-MAGG est conforme à la distribution jointe observée, H_0^{AGG} : la loi marginale est AGGD et H_0^{GC} : la copule de la distribution observée est Gaussienne, alors $H_0^{GC-MAGG}$ est acceptée si et seulement si les hypothèses H_0^{AGG} et H_0^{GC} sont toutes deux acceptées.

Nous rapportons sur Tableau 3.8 les pourcentages de rejet de l'hypothèse $H_0^{GC-MAGG}$ dans le cas quadri-varié ($d = 4$). Nous obtenons de bonnes performances en terme d'acceptation de la distribution GC-MAGG comme *a priori* multivarié pour ajuster les statistiques jointes intra-bande. Nous constatons que la contrainte multivariée est plus difficile à vérifier puisque le taux d'acceptation du modèle multivarié GC-MAGG est inférieur à celui du modèle univarié AGGD (cf. sous-section 2.3.2, Tableau 2.3 et Tableau 2.4). Cependant, le modèle GC-MAGG est mieux accepté que le modèle SIRV (cf. Tableau 3.7), mais cette différence n'est pas nécessairement proportionnelle à la différence des performances des deux modèles dans une application de recherche d'images par contenu texture, comme nous allons voir dans le chapitre suivant.

FIGURE 3.19 – Ajustement de la distribution GC-MAGG bivariée (trait pointillé) à la PDF empirique jointe bivariée (trait continu) des coefficients d'ondelettes intra-bande ; en 2ème colonne une vue 3D, en 3ème colonne l'ajustement en utilisant des iso-lignes et en 1ère colonne la géométrie du voisinage considéré. Les sous-bandes employées sont les mêmes que dans la Figure 3.15 respectivement pour (a), (b), (c) et (d).

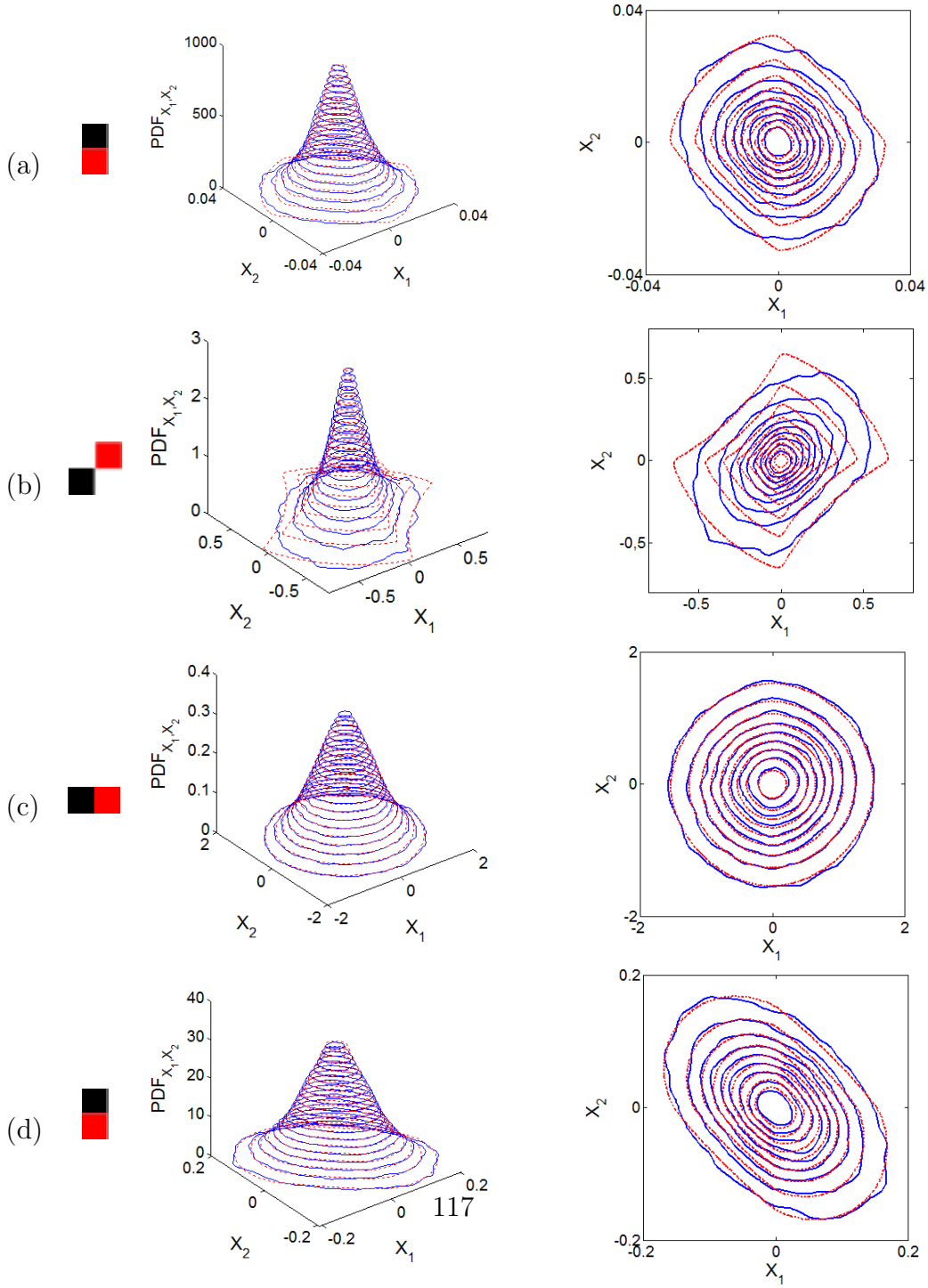
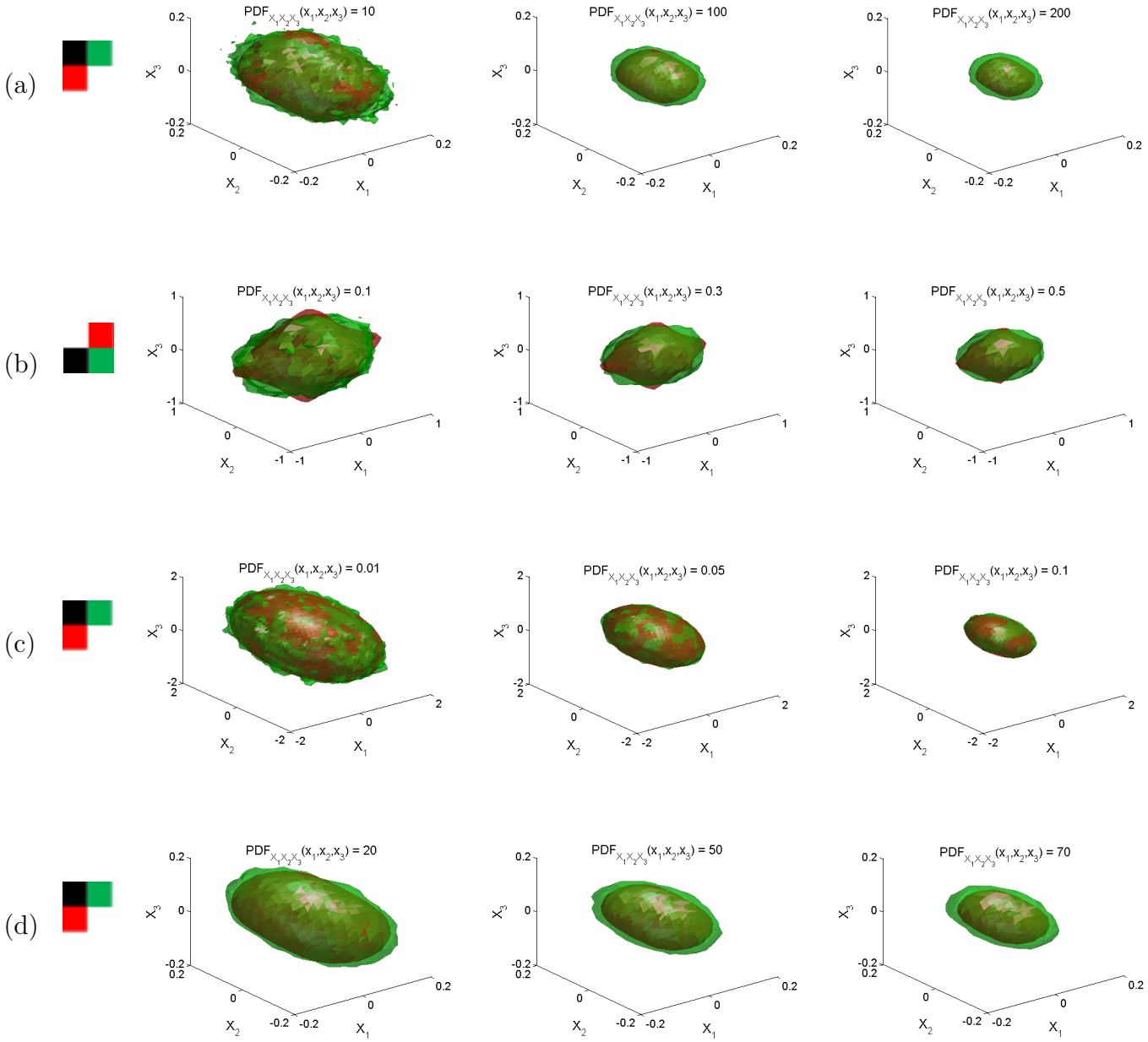


FIGURE 3.20 – Ajustement de la distribution GC-MAGG trivariée (surface rouge) à la PDF empirique jointe trivariée (surface verte) des coeffcients d'ondelettes intra-bande. Les sous-bandes employées sont les mêmes que dans la Figure 3.15 respectivement pour (a), (b), (c) et (d).



	échelle	Royston	Doornik-Hansen
VisTex	1,2 et 3	15.16	10.83
Brodatz	1,2 et 3	27.52	18.89

	échelle	Royston	Doornik-Hansen
VisTex	1,2 et 3	11.00	9.29
Brodatz	1,2 et 3	16.68	14.53

TABLE 3.8 – Pourcentages de rejet (avec incertitude $\alpha = 0.01$) de l'hypothèse d'*a priori* GC-MAGG en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov pour la loi marginale conjointement avec les tests de Royston ou Doornik-Hansen pour la *Gaussianité* multivariée. Les sous-bandes employées sont résultantes de la transformée en ondelettes de Daubechies 'db4' (tableau en dessus) et de la transformée DT-CWT (tableau en dessous) sur la base VisTex ou Brodatz ; le voisinage considéré est de taille $d = 2 \times 2 = 4$.

3.4.3 Bilan

Les différents tests d'adéquation des modèles SIRV à densité caractéristique Weibull et le GC-MAGG montrent globalement leur bon ajustement aux statistiques jointes des sous-bandes (Tableau 3.7 et Tableau 3.8).
En regardant de plus près les classes des textures auxquelles les deux modèles s'ajustent le mieux, on s'aperçoit que les deux modèles proposés décrivent très bien les statistiques jointes issues des textures stochastiques Figure 3.21. Plus particulièrement, le modèle SIRV est adapté à des textures stochastiques contenant des directions aléatoires (de type bois, sable ridé, etc.) Figure 3.22. Le modèle GCMAGG décrit finement les textures aléatoires ne contenant pas de singularités Figure 3.23.
En revanche, comme nous pouvons le remarquer sur la Figure 3.24, les deux modèles ne réussissent pas à bien s'ajuster aux statistiques jointes des sous-bandes de textures structurées qui sont plutôt déterministes et il est donc préférable d'employer des méthodes d'analyse géométriques pour les caractériser.

FIGURE 3.21 – Exemples de classes de texture dont le taux de rejet par le test d'adéquation de Royston des modèles SIRV ou GC-MAGG aux statistiques jointes est faible (inférieur à 5%).

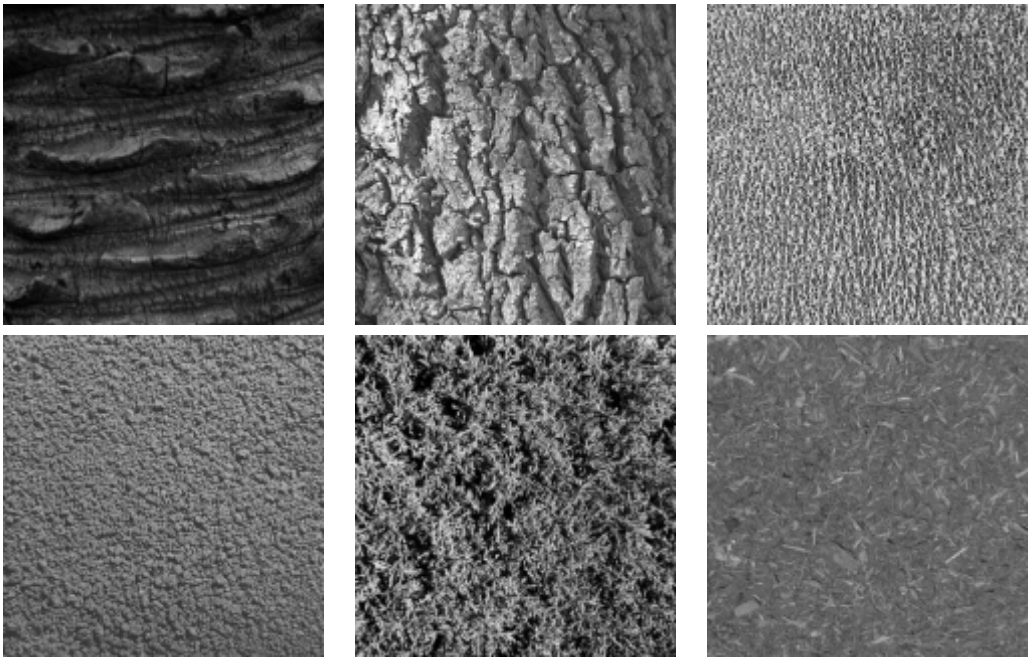


FIGURE 3.22 – Exemples de classes de texture dont le taux de rejet par le test d'adéquation de Royston du modèle SIRV de densité caractéristique Weibull aux statistiques jointes est faible (inférieur à 5%).

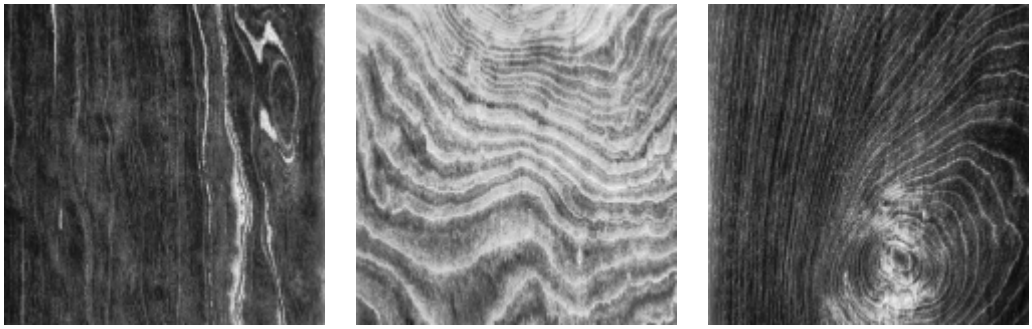


FIGURE 3.23 – Exemples de classes de texture dont le taux de rejet par le test d'adéquation de Royston du modèle GC-MAGG aux statistiques jointes est faible (inférieur à 5%).

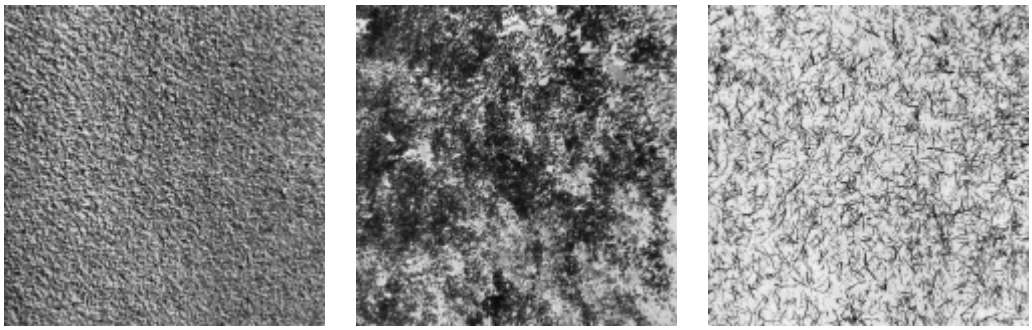
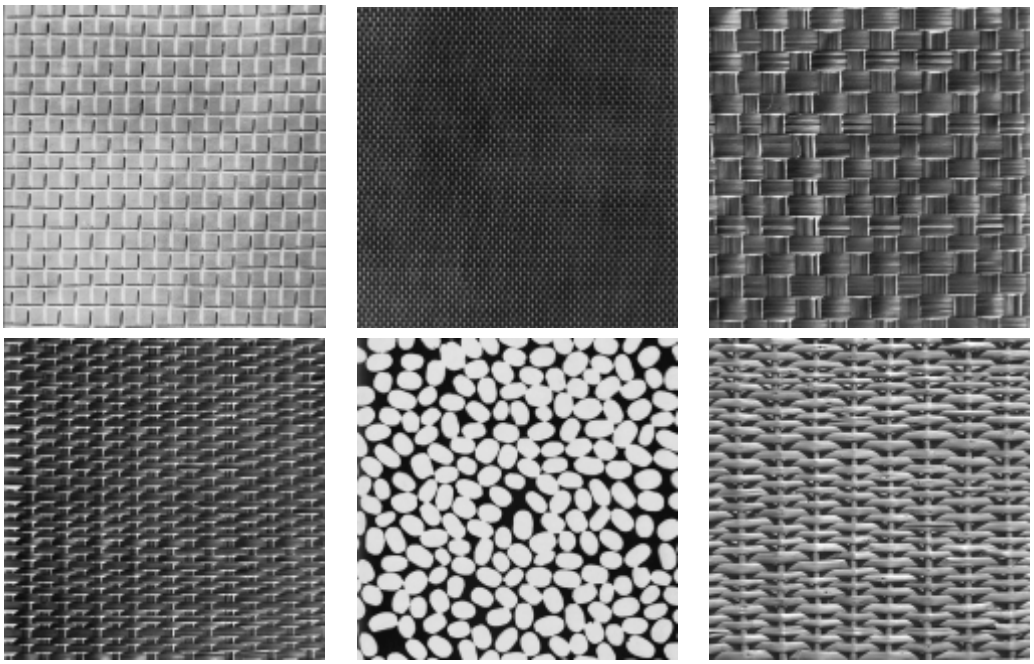


FIGURE 3.24 – Exemples de classes de texture dont le taux de rejet par le test d'adéquation de Royston des modèles SIRV ou GC-MAGG aux statistiques jointes est grand (supérieur à 50%).



3.5 Conclusion

Nous avons étudié les dépendances entre coefficients de sous-bandes d'ondelettes, et nous avons mis en évidence la prédominance de la dépendance intra-bande à l'aide d'outils qualitatifs et quantitatifs. Dans un premier temps, nous avons proposé le modèle SIRV et à l'aide de tests statistiques d'adéquation nous avons déterminé la loi Weibull comme densité caractéristique. Ensuite, à l'aide de critère de sélection, nous avons choisi la copule Gaussienne pour caractériser la structure de dépendance intra-bande. En considérant la copule Gaussienne, nous proposons une extension multivariée de l'*a priori* AGGD que nous avons introduit dans le chapitre précédent, c'est le modèle multivarié de la Gaussienne généralisée asymétrique à copule Gaussienne (GC-MAGG). Enfin, l'évaluation qualitative de l'ajustement aux statistiques jointes observées des sous-bandes, a montré que le modèle GC-MAGG est plus adéquat en moyenne que le modèle SIRV à densité caractéristique Weibull.
Dans le chapitre suivant, nous mettons à profit ces résultats et nous comparons les modèles AGGD, SIRV à densité caractéristique Weibull et GC-MAGG dans un cadre Bayésien pour la recherche d'images par le contenu textural.

Chapitre 4

Recherche d'images par le contenu texture

Sommaire

4.1 Principe général 127
4.2 Cadre Bayésien pour la recherche d'images 128
4.3 Approches probabilistes 132
4.3.1 Modèles univariés 132
4.3.2 Modèles multivariés 134
4.4 Mesures de similarité 135
4.4.1 Modèle de la Gaussienne généralisée asymétrique . 136
4.4.2 Modèle SIRV à densité caractéristique Weibull . . 138
4.4.3 Modèle multivarié à copule Gaussienne 141
4.5 Expérimentation et résultats 145
4.5.1 Protocole expérimental 145
4.5.2 Critères d'évaluation 146
4.5.2.1 Taux moyen de bonne détection 148
4.5.2.2 Critères graphiques : courbe de précision/rappel et courbe de rappel/taille de la requête . 149
4.5.3 Modèles univariés 150
4.5.4 Modèles multivariés 158
4.6 Conclusion et discussion 170

De nos jours, il est devenu de plus en plus facile de produire des images numériques, les publier et les échanger à travers des services appropriés (Picasa©, flickr©, facebook etc.). Des collections gigantesques de différentes catégories (images médicales, patrimoine numérisé, données biométriques etc.) sont aussi en pleine croissance. Il est donc devenu indispensable de

gérer toutes ces données et en particulier de développer les systèmes permettant de retrouver l'information recherchée en interrogeant les bases d'images. Les moteurs de recherche d'images par mots clés ou étiquettes (tags), retrouvent les images recherchées en utilisant les mots du texte autour des images candidates. Ce type d'exploration de collection d'images employant des descripteurs symboliques, n'exploite pas le contenu de l'image recherchée mais seulement le texte la décrivant en le comparant avec le texte qui accompagne les images dans les collections ou leurs étiquettes. Si les performances des moteurs de recherche contextuels sont très satisfaisantes pour le grand public, des applications plus avancées nécessitent l'emploi de la recherche d'images par le contenu (CBIR). Le CBIR est une technique permettant de rechercher des images à partir de son contenu visuel. En général, les caractéristiques globales [1] de bas-niveau d'une image sont exploitées pour décrire son contenu : texture, couleur et forme.

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés uniquement au contenu texture en employant les modèles paramétriques introduits dans les deux chapitres précédents. Nous commençons ce chapitre par rappeler le principe général du CBIR. Ensuite, nous rappelons le cadre Bayésien employant les modèles *a priori* dans les systèmes CBIR (et dans des applications de classification/décision en général), et nous montrons sa relation avec le calcul de la divergence de Jeffreys pour mesurer la similarité entre deux images décrites par des modèles probabilistes. Par la suite, nous présentons un état de l'art succinct des différents modèles paramétriques caractérisant la texture dans le domaine des ondelettes et employés pour la recherche d'images par le contenu texture (TBIR [2] : Texture Based Image Retrieval). Dans la section suivante, nous développons le calcul de la divergence de Jeffreys pour les modèles que nous avons introduits dans le cadre de cette thèse. Enfin, à l'aide des expérimentations nous montrons, d'une part l'apport du modèle AGGD introduit en chapitre 2 par rapport aux autres modèles univariés conventionnels, et d'autre part l'intérêt d'utiliser les deux modèles multivariés proposés en chapitre 3 (SIRV à densité caractéristique Weibull et GC-MAGG à copule Gaussienne) qui conduisent à une amélioration substantielle des performances en comparaison à celles obtenues avec les modèles multivariés proposés dans la littérature.

1. Des méthodes exploitant des caractéristiques locales sont aussi employées, mais cela sort du cadre de notre étude.

2. En distinction à l'acronyme général CBIR, l'acronyme TBIR peut être employé pour spécifier que le critère de la recherche est uniquement la texture.

4.1 Principe général

Le schéma du principe général d'un système CBIR est illustré sur la Figure 4.1. La recherche d'image par le contenu se déroule en deux étapes. Pendant la phase d'indexation qui se déroule hors ligne, les signatures (numériques) des images sont calculées et stockées dans une base de données. Ces signatures (ou descripteurs) peuvent être calculées en employant des caractéristiques globales (texture, couleur ou forme) ou des caractéristiques locales après détection des zones d'intérêt. Les signatures sont calculées en employant le contenu brut de l'image ou le contenu transformé en projetant l'image dans un autre domaine (de Fourier, d'ondelettes, etc.). Ces descripteurs ont une taille plus petite que les images à indexer et l'espace de stockage est par conséquent réduit comparativement à celui nécessaire au stockage des images initiales. La seconde phase est celle de la recherche où un utilisateur soumet une image comme requête [3] et interroge la base de données des signatures pour en recouvrer les K images les plus semblables à la requête. Le système calcule la signature de l'image requête de la même manière que pour l'indexation, et mesure sa similarité avec les signatures de l'index. La mesure de similarité doit être adaptée à la nature de la signature, et les images recouvrées sont ordonnées suivant leur similitude avec l'image requête.
L'analyse des images se faisant hors ligne, il n'y a pas de contraintes de complexité de calcul pour l'étape d'indexation. En revanche, l'étape de recherche est très sensible à la complexité calculatoire de la mesure de similarité. Le temps de réponse à la requête est déterminant pour garantir la qualité de l'expérience utilisateur ainsi que le degré de pertinence du résultat de recouvrement des images similaires à la requête.

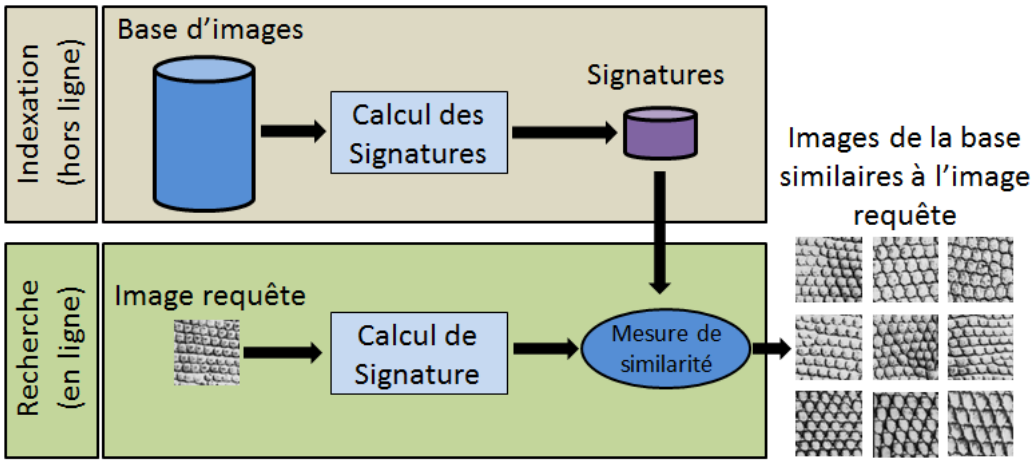
Les domaines d'application des systèmes CBIR sont multiples et ne se limitent pas à quelques moteurs de recherche par contenu sur internet [4] et ne sont pas forcément orientés « grand public ». Cette technologie est aussi employée pour la recherche de données dans le secteur industriel ou pour l'imagerie médicale [5] dans le processus diagnostic. Un autre exemple pratique concerne les solutions proposées par l'entreprise Picitup™ pour développer le secteur du e-commerce (prendre en photo un produit et le chercher sur in-

3. C'est un cas typique appelé *recherche par l'exemple*, on peut formuler des requêtes à l'aide des caractéristiques globales, locales prédéfinies ou à l'aide d'une signature précalculée.

4. Ces moteurs de recherche sont appelés dans le jargon internet *reverse image search engine*, les plus connus sont tineye `http://www.tineye.com`, revimg `http://www.revimg.net` et retrievr `http://labs.systemone.at/retrievr`.

5. Par exemple la recherche d'images pulmonaires ou les images de fractures du projet MedGIFT de la faculté de médecine à l'université de Genève, cf. `http://medgift.hevs.ch`.

FIGURE 4.1 – Schéma du principe général de recherche d'images par le contenu



ternet à l'aide de la solution Picliq™, et d'autres solutions pour le *shopping visuel* comme PicSimilar™ ou PicColor™). Nombreux programmes et produits de la recherche ont aussi vu le jour depuis que cette technologie a commencé à se développer en début des années 1990. Nous citons par exemple le système QBIC™ [Flickner *et al.*, 1995] qui est développé et commercialisé par IBM™. Le système Photobook [Pentland *et al.*, 1996] est le fruit des travaux du groupe VisMod du MIT, mais il n'est plus maintenu à jour depuis 1999. Pour une revue de plus de 40 systèmes CBIR issus des travaux de recherche nous conseillons la lecture d'un rapport technique de Veltkamp et Tanase [Veltkamp et Tanase, 2000]. Cependant, malgré la diversification et la prolifération des applications employant la technologie CBIR, beaucoup de progrès restent à faire dans ce domaine et cette technologie répond encore à des demandes spécifiques qui ne rejoignent pas forcément les pratiques et les besoins courants des utilisateurs.

4.2 Cadre Bayésien pour la recherche d'images

Différentes approches sont employées pour la recherche d'image par le contenu ou pour la problématique de classification/décision en général. Ces approches dépendent de la nature des caractéristiques [6] de l'image consi-

6. Des méthodes n'utilisant que des caractéristiques locales, d'autres employant des caractéristiques globales de couleur, texture, forme ou une combinaison de ces caractéristiques bas-niveau et certaines approches extraient des caractéristiques locales en employant celles globales.

dérées pour calculer les descripteurs. Le descripteur local le plus populaire est celui produit par l'algorithme de transformation de caractéristiques visuelles invariantes à l'échelle (SIFT) [Lowe, 2004] et qui a conduit au développement d'autres variantes aussi performantes comme le PCA-SIFT [Ke et Sukthankar, 2004] ou le descripteur des caractéristiques robustes accélérées (SURF) [Bay *et al.*, 2008]. Une étude comparative entre différents descripteurs locaux est fournie en [Mikolajczyk et Schmid, 2005] où les auteurs proposent un nouveau descripteur sous forme d'histogramme d'orientation et de localisation de gradient (GLOH) qui est une extension du SIFT. Tous ces descripteurs sont employés indépendamment de la nature des images et de la caractéristique bas-niveau considérée comme critère de discrimination entre images. Cette dernière famille de descripteurs discrets n'est malheureusement pas adaptée à la caractérisation d'images texturées. Pour les textures, d'autres descripteurs ont été proposés avec plus au moins de succès, leur point faible était souvent de ne pas être associé à une mesure de similarité pertinente. Citons par exemple les motifs binaires locaux (LBP) qui constituent un descripteur simple et opérationnel de la texture [Ojala *et al.*, 1996] et qui conduit à des résultats remarquables en classification et en CBIR [Ojala *et al.*, 2002, Takala *et al.*, 2005]. Parallèlement, les années 2000 ont vu émerger les approches statistiques pour la classification et la recherche d'image par le contenu textural. Ces approches ont rapidement connu un fort succès grâce à un formalisme Bayésien intégrant conjointement les aspects modèle et similarité. Notre travail s'inscrit dans ce cadre en employant des modèles probabilistes pour caractériser la texture dans un domaine transformé. L'intérêt du domaine transformé est de permettre de limiter le modèle probabiliste à des lois unimodales pour chacune des sous-bandes associées. Il s'agit par exemple de décomposition multi-échelles et multi-orientations.

Vasconcelos et Lippman ont formalisé le problème de CBIR dans un cadre statistique en montrant que la minimisation de la probabilité d'erreur de classification est asymptotiquement équivalente à l'emploi de la divergence de Kullback-Leibler (ou de Jeffreys qui en est la version symétrisée) pour mesurer la similitude entre les distributions des lois qui décrivent les images à classifier ou à rechercher [Vasconcelos et Lippman, 2000a, Vasconcelos et Lippman, 2000b]. Cette architecture probabiliste est aussi qualifiée de Bayésienne car la règle de sélection optimale utilise la règle de Bayes dans la démarche ramenant le problème de recherche d'images ou de classification à un problème de calcul de divergences entre lois de probabilités.
Considérons une base d'images contenant M images $I_i, i = 1, \ldots, M$. Dans les systèmes CBIR, l'objectif est de rechercher et de récupérer les N images ($N \ll M$) les plus ressemblantes à une image requête I_q. Chaque image $I_i, i = 1, \ldots, M$ est représentée par un ensemble d'échantillons (dataset)

$\mathbf{X_i} = \{\vec{x}_{i1}, \vec{x}_{i2}, \ldots, \vec{x}_{iL}\}$ où $\vec{x}_{ij}$ sont des vecteurs [7] résultant d'une transformation, décomposition en ondelettes par exemple, de l'image initiale en un autre espace dans lequel la modélisation probabiliste est plus accessible. Nous considérons chaque dataset $\mathbf{X_i}$ comme une collection de réalisations d'un vecteur (ou variable) aléatoire indépendant et identiquement distribué. Nous associons la variable $Y \in \{1, \ldots, M\}$ aux indices des images dans la base.
La règle optimale de sélection des N images les plus pertinentes et similaires à l'image requête I_q consiste à choisir celles vérifiant

$$P(Y = k_1|\mathbf{X_q}) \geqslant P(Y = k_2|\mathbf{X_q}) \geqslant \cdots \geqslant P(Y = k_N|\mathbf{X_q}) \tag{4.1}$$

où $k_l \in \{1, \ldots, M\}, l = 1, \ldots, N, k_l \neq k_m$ si $l \neq m$ et $\mathbf{X_q} = \{\vec{x}_{q1}, \vec{x}_{q2}, \ldots, \vec{x}_{qL}\}$ est le dataset de l'image requête.
Si les images sont équiprobables, et en utilisant la règle de Bayes

$$P(Y = k_l|\mathbf{X_q}) = \frac{P(\mathbf{X_q}|Y = k_l)P(Y = k_l)}{P(\mathbf{X_q})}$$

la règle de sélection optimale de l'Équation 4.1 devient une règle de sélection de maximum de vraisemblance, qui est connue sous le nom de règle de décision du maximum a posteriori MAP [Vasconcelos, 2004] :

$$P(\mathbf{X_q}|Y = k_1) \geqslant P(\mathbf{X_q}|Y = k_2) \geqslant \cdots \geqslant P(\mathbf{X_q}|Y = k_N) \tag{4.2}$$

Cette règle de sélection basée sur la vraisemblance consiste à récupérer les N images $I_{k_l}, l \in \{1, \ldots, N\}$ de la base maximisant $P(\mathbf{X_q}|Y = k_l)$ et ordonner leurs degrés de pertinence dans un sens de vraisemblance décroissante (l'image ayant la vraisemblance maximale est la plus pertinente).
Nous notons $p_i(\vec{x}; \theta_i), i = 1, \ldots, M$ les densités de probabilité modélisant les ensembles de données $\mathbf{X_i}$ des images I_i de la base, θ_i étant les hyperparamètres des modèles et $p_q(\vec{x}; \theta_q)$ d'hyperparamètres θ_q celle de l'image requête.
En introduisant la log-vraisemblance et puisque $\mathbf{X_q} = \{\vec{x}_{q1}, \vec{x}_{q2}, \ldots, \vec{x}_{qL}\}$ est aussi considéré comme réalisation d'un vecteur aléatoire i.i.d, la règle de sélection MAP de l'Équation 4.2 devient :

$$\sum_{i=1}^{L} \ln p_{k_1}(\vec{x}_{qi}; \theta_{k_1}) \geqslant \sum_{i=1}^{L} \ln p_{k_2}(\vec{x}_{qi}; \theta_{k_2}) \geqslant \cdots \geqslant \sum_{i=1}^{L} \ln p_{k_N}(\vec{x}_{qi}; \theta_{k_N}) \tag{4.3}$$

En employant la loi faible des grands nombres, nous avons

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \ln p_{k_l}(\vec{x}_{qi}; \theta_{k_l}) \underset{L \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_{\theta_q} \left[\ln p_{k_l}(\vec{x}; \theta_{k_l})\right] = \int \ldots \int \ln p_{k_l}(\vec{x}; \theta_{k_l})\, p_q(\vec{x}; \theta_q)\, d\vec{x} \tag{4.4}$$

7. Le dataset peut être une série de scalaires pour une modélisation univariée ou de vecteurs pour une modélisation multivariée.

et quand $L \to \infty$, l'Équation 4.3 devient :

$$\begin{aligned} -\int \ldots \int \ln p_{k_1}(\vec{x};\theta_{k_1})\ p_q(\vec{x};\theta_q)\ d\vec{x} &\leqslant -\int \ldots \int \ln p_{k_2}(\vec{x};\theta_{k_2})\ p_q(\vec{x};\theta_q)\ d\vec{x} \leqslant \cdots \\ &\leqslant -\int \ldots \int \ln p_{k_N}(\vec{x};\theta_{k_N})\ p_q(\vec{x};\theta_q)\ d\vec{x} \end{aligned} \tag{4.5}$$

En ajoutant à chaque terme l'expression $\int \ldots \int \ln p_q(\vec{x};\theta_q)\ p_q(\vec{x};\theta_q)\ d\vec{x}$ qui ne dépend que de l'image requête et non pas des candidates, la règle de sélection des images pertinentes devient :

$$\begin{aligned} \int \ldots \int \ln \frac{p_q(\vec{x};\theta_q)}{p_{k_1}(\vec{x};\theta_{k_1})}\ p_q(\vec{x};\theta_q)\ d\vec{x} &\leqslant \ln \frac{p_q(\vec{x};\theta_q)}{p_{k_2}(\vec{x};\theta_{k_2})}\ p_q(\vec{x};\theta_q)\ d\vec{x} \leqslant \cdots \\ &\leqslant \ln \frac{p_q(\vec{x};\theta_q)}{p_{k_N}(\vec{x};\theta_{k_N})}\ p_q(\vec{x};\theta_q)\ d\vec{x} \end{aligned} \tag{4.6}$$

L'expression

$$KLD(p_q(\vec{x};\theta_q \parallel p_{k_l}(\vec{x};\theta_{k_l})) = \int \ldots \int p_q(\vec{x};\theta_q) \ln \frac{p_q(\vec{x};\theta_q)}{p_{k_l}(\vec{x};\theta_{k_l})}\ d\vec{x}, l = 1, \ldots, N$$

est la divergence de Kullback-Leibler entre les PDFs $p_q(\vec{x};\theta_q)$ et $p_{k_l}(\vec{x};\theta_{k_l})$. Asymptotiquement, quand le nombre d'échantillons du dataset est assez grand, la règle optimale de sélection basée sur la maximisation de vraisemblance devient :

$$\begin{aligned} KLD(p_q(\vec{x};\theta_q \parallel p_{k_1}(\vec{x};\theta_{k_1})) &\leqslant KLD(p_q(\vec{x};\theta_q \parallel p_{k_2}(\vec{x};\theta_{k_2})) \leqslant \cdots \\ &\leqslant KLD(p_q(\vec{x};\theta_q \parallel p_{k_N}(\vec{x};\theta_{k_N})) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ainsi, pour récupérer les N images les plus pertinentes, il est asymptotiquement optimal de calculer d'abord les KLDs entre la PDF représentant l'image requête et celles représentant les images candidates et ordonner ensuite leur pertinence dans un sens de divergence croissante.
Sans perte de généralité, en tenant compte de la non symétrie de la KLD, sa version symétrisée appelée divergence de Jeffreys [Devroye *et al.*, 1996] est employée :

$$\begin{aligned} JD(p_q(\vec{x};\theta_q \parallel p_i(\vec{x};\theta_i)) = \ & KLD(p_q(\vec{x};\theta_q \parallel p_i(\vec{x};\theta_i)) \\ & + KLD(p_i(\vec{x};\theta_i) \parallel p_q(\vec{x};\theta_q) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Elle est plus adaptée dans le contexte de classification et améliore légèrement les performances par rapport à la version non symétrique [Liu *et al.*, 2008].

Nous rappelons que l'emploi direct de la règle de sélection MAP (Équation 4.3) n'est pas pratique et ne peut être utilisé dans des applications

exigeantes en terme de temps de réponse où la complexité de calcul des similarités pour récupérer le résultat est crucial pour la qualité de l'expérience utilisateur. C'est pour cette raison qu'on emploie la règle de sélection asymptotique basée sur la divergence de Kullback-Leibler ou sa version symétrique de Jeffreys. Nous reviendrons sur ce point dans l'Appendice E, en comparant la complexité calculatoire entre la divergence de Jeffreys pour le modèle GC-AGGD et le calcul direct de la vraisemblance comme mesure de similarité (avec la règle de sélection MAP).

4.3 Approches probabilistes

À partir des éléments présentés dans les chapitres précédents, nous avons choisi d'appliquer les modèles stochastiques à l'indexation de base d'images texturées. Pour ce faire, en tenant compte des résultats récents obtenus dans ce contexte, nous avons orienté nos travaux vers le cadre Bayésien exploitant la modélisation probabiliste des coefficients des sous-bandes de transformées multi-échelles et multi-orientations.

En effet, depuis la formalisation du problème de recherche d'images par le contenu dans le cadre Bayésien proposée par Vasconcelos et Lippman [Vasconcelos et Lippman, 2000b, Vasconcelos et Lippman, 2000a], des travaux employant des modèles statistiques associés à la divergence de Jeffreys [8] ont montré le bien fondé de cette approche en affichant de bonnes performances dans des applications de recherche d'images ou de classification. En raison de la ressemblance entre les transformées multi-échelles/multi-orientations et le système visuel humain [Navarro *et al.*, 1996] et particulièrement pour la perception de la texture [Landy et Graham, 2004], les représentations basées sur des bancs de filtres (Gabor, pyramide orientée, *lettes etc.) sont maintenant largement employées pour caractériser la texture via l'analyse spatio-fréquentielle. Dans ces schémas, tout le contenu de l'image est représenté par les statistiques de sorties des filtres. Selon les statistiques à décrire (marginale ou bien jointe), les modèles employés sont univariés ou bien multivariés.

4.3.1 Modèles univariés

Les modèles univariés employés pour la description des statistiques marginales des coefficients d'ondelettes révèlent la non-*Gaussianité* de leur loi de

8. Le terme employé dans la plupart des travaux est la KLD, cependant c'est la version symétrique qui est employée dans les expérimentations ; cette version symétrisée doit être appelée divergence de Jeffreys.

distribution de probabilité. Le modèle GGD est le premier (à notre connaissance) à être utilisé dans le cadre Bayésien de recherche d'images par le contenu texture [Do et Vetterli, 2002b] [9]. Un point fort de cette étude est aussi de montrer qu'au modèle GG peut être associé à une mesure de similarité probabiliste explicite ne dépendant que des paramètres du modèle. Depuis, d'autres modèles univariés ont été proposés pour la modélisation des marginales démontrant leur capacité à discriminer les contenus texturaux en considérant l'aspect leptokurtique et non-Gaussien des sorties de filtres. Srivastava et al. ont introduit le modèle BKF conjointement avec la norme L^2 car une forme explicite d'une autre métrique probabiliste n'était pas calculable [Srivastava *et al.*, 2002]. Dans [Mathiassen *et al.*, 2002], Mathiassen et al. présupposent l'*a priori* Gamma pour modéliser le module des coefficients de filtres de Gabor. De bonnes performances en classification de texture ont été obtenues en comparaison avec des méthodes non-paramétriques basées sur des mesures entre histogrammes. Plus récemment, le modèle Weibull a été proposé comme alternative à la modélisation du module des coefficients d'ondelettes [Kwitt et Uhl, 2010]. Pour cette dernière proposition, si le modèle Weibull peut être une bonne alternative à la distribution Gamma, il n'y a pas d'amélioration nette en termes de taux de bonne classification des images de la base VisTex par exemple. Nous avons pour notre part contribué à l'amélioration des performances d'un système TBIR en considérant le modèle AGGD qui généralise le modèle GGD et capte l'asymétrie des distributions des coefficients d'ondelettes [Lasmar *et al.*, 2009].

Tous ces modèles univariés ont été employés avec efficacité dans le cadre Bayésien de recherche d'images (ou de classification en général) basée sur le contenu texture. En dérivant des formes explicites de divergences probabilistes, leur exploitation dans les systèmes TBIR devient simple et pratique. Cependant, cette approche n'emploie pas une description statistique complète des sous-bandes d'ondelettes. Nous avons montré dans la section 3.1 l'existence et l'importance de la dépendance spatiale intra-bande, ce qui ne peut être capté par des modèles univariés. Pour tirer profit de l'information intrinsèque de cette dépendance, des modèles multivariés sont employés pour décrire les statistiques jointes et le développement des formes analytiques permet de les exploiter pour le TBIR.

9. Beaucoup d'auteurs attribuent à tort ce framework à Do et Vetterli alors qu'il a été initialement introduit deux ans avant eux par Vasconcelos et Lippman dans [Vasconcelos et Lippman, 2000b, Vasconcelos et Lippman, 2000a]

4.3.2 Modèles multivariés

En raison de la complexité de développement des métriques probabilistes dans le cas multivarié, il y a peu de travaux en CBIR/TBIR malgré l'introduction des *a priori* multivariés pour développer des algorithmes efficaces pour d'autres applications comme le débruitage d'image. Dans le contexte du débruitage, nous citons par exemple une extension multivariée de la GGD dans [Cho et Bui, 2005] et les distributions à contours elliptiques (ECD) [Tan et Jiao, 2007]. Un cas particulier de la modélisation SIRV a été employé sous le nom de mélange d'échelle de Gaussiennes (GSM), où la densité de probabilité caractéristique est un *a priori* de Jeffrey qui est non-informatif ne possédant pas les propriétés d'une densité de probabilité [Portilla *et al.*, 2003]. Ces modèles ne peuvent être employés dans le cadre Bayésien de classification d'images à cause d'une expression analytique de la KLD qui fait défaut.

Le premier modèle multivarié à être employé dans ce cadre est la loi de mélange de Gaussiennes multivariées (MGmix). La loi de mélange étant un approximateur universel d'une distribution recherchée, elle a été employée conjointement avec une approximation de la KLD puisque la forme exacte n'est pas disponible [Vasconcelos, 2004]. Depuis, d'autres auteurs ont utilisé le modèle MGmix pour des applications de classification des textures [Permuter *et al.*, 2006,Kim et Kang, 2007] et de nouvelles approximations de la KLD ont été développées [Goldberger *et al.*, 2003,Hershey et Olsen, 2007] afin que ce modèle puisse être exploité efficacement dans les systèmes CBIR/TBIR. En outre, le modèle Gaussien multivarié peut être considéré comme *a priori* si une procédure de *Gaussianisation* est employée à la sortie des filtres pour garantir des sous-bandes de distribution Gaussienne [Tzagkarakis *et al.*, 2006,Lasmar *et al.*, 2008]. L'avantage de *Gaussianiser* les sous-bandes est de pouvoir employer l'expression analytique de la KLD et par suite la JD pour mesurer la similarité entre images. Récemment, Verdoolaege et Scheunders ont introduit un modèle généralisant la GGD au cas multivarié [Verdoolaege et Scheunders, 2011], appelé distribution Gaussienne généralisée multivariée (MGG) qui est aussi connu sous l'appellation de distribution de puissance exponentielle multivariée (MPE) [Gómez *et al.*, 1998]. En l'absence d'une forme explicite de la KLD entre deux distributions MGG (sauf pour le cas bivarié), une approximation de la métrique de Fisher-Rao appelée aussi distance géodésique est utilisée.
Concernant nos travaux, nous avons proposé d'employer la modélisation SIRV à densité de probabilité caractéristique Weibull pour un système TBIR en calculant la forme analytique de la KLD entre deux distributions multivariées résultantes de cette modélisation [Lasmar et Berthoumieu, 2010]. De même, la modélisation à base de copules a permis une nette avancée en

description des statistiques jointes des sous-bandes d'ondelettes. Dans notre première application des modèles à copule Gaussien en TBIR, nous avons employé une distance euclidienne normalisée entre les vecteurs des hyperparamètres [Stitou *et al.*, 2009]. La distance euclidienne n'étant pas une métrique probabiliste ce travail n'était qu'une preuve du concept démontrant la faisabilité de la théorie des copules pour déterminer la distribution jointe des sous-bandes à partir des marginales et qui a montré que les performances en TBIR peuvent considérablement s'améliorer en comparaison à l'emploi des modèles univariés. Indépendamment de notre recherche, une autre preuve de concept a été proposée par Kwitt et Uhl [Kwitt et Uhl, 2009] qui ont proposé un modèle à copule de Student-t pour la description des statistiques jointes des magnitudes de coefficients d'ondelettes complexes. La KLD a été estimée en utilisant une solution fondée sur des tirages de Monte-Carlo très lourde en calcul mais les auteurs ont montré l'intérêt d'employer les modèles multivariées à base de copules dans les systèmes TBIR. Le calcul d'une expression analytique de la KLD étant l'enjeu pour exploiter un modèle probabiliste dans un système TBIR, nous avons introduit une mesure de la similarité entre distributions multivariées à copule Gaussiennes [Lasmar et Berthoumieu, 2011].

Dans la section suivante, nous proposons de dériver des expressions analytiques de la KLD et par suite de la JD, entre les modèles que nous avons introduits pour la description des statistiques marginales et jointes des sous-bandes d'ondelettes.

4.4 Mesures de similarité

Pour qu'un système de recherche d'images par le contenu soit efficace, il est indispensable que le calcul des similarités entre l'image requête et les images candidates soit le moins complexe possible. Dans le cadre Bayésien de recherche ou de classification d'image, cette contrainte est liée à la possibilité d'obtenir une expression analytique de la KLD entre distributions des modèles statistiques considérés. Même si la KLD peut être estimée en employant une méthode de Monte-Carlo, cela nécessite la génération de nombreuses réalisations suivant les modèles à comparer et le calcul des log-vraisemblances dont la complexité calculatoire est linéairement dépendante de la taille des réalisations générées ; sans oublier que ce n'est qu'une estimation et donc une mesure de similarité non déterministe et qui peut être biaisée. Employer directement la vraisemblance comme mesure de similarité est aussi possible mais non pratique dans des applications de recherche d'images ou de classification à cause de la complexité calculatoire élevée. Par conséquence, l'em-

ploi d'une expression analytique de la KLD ou de sa version symétrique JD, quand c'est possible, permet d'exploiter les modèles statistiques pour évaluer les similarités entre images.

Dans notre étude, nous avons montré le bon ajustement du modèle AGGD aux statistiques marginales. Ce modèle univarié a été étendu en modèle multivarié GC-MAGG à copule Gaussienne pour caractériser les statistiques jointes des sous-bandes d'ondelettes. Les tests ont confirmé le bon ajustement des modèles SIRV à densité de probabilité caractéristique Weibull et le GC-MAGG, nous proposons de les inclure dans notre évaluation des modèles probabilistes dans le TBIR. Afin de comparer les performances des trois modèles proposés aux différents modèles conventionnels ou introduits récemment, nous allons calculer les expressions analytiques de la KLD leur correspondant.

4.4.1 Modèle de la Gaussienne généralisée asymétrique

Proposition 4.1. *La divergence de Kullback-Leibler entre deux distributions AGGD $f(x;\alpha_{L1},\alpha_{R1},\beta_1)$ et $g(x;\alpha_{L2},\alpha_{R2},\beta_2)$ est :*

$$\begin{aligned} KLD(f \parallel g) &= \ln\left[\frac{\beta_1(\alpha_{L2}+\alpha_{R2})\Gamma(1/\beta_2)}{\beta_2(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)}\right] \\ &+ \frac{\alpha_{R2}^{\beta_2}\alpha_{L1}^{\beta_2+1}+\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R1}^{\beta_2+1}}{\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R2}^{\beta_2}(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})} \times \frac{\Gamma\left(\dfrac{\beta_2+1}{\beta_1}\right)}{\Gamma(1/\beta_1)} - \frac{1}{\beta_1} \end{aligned}$$

Démonstration. On a,

$$KLD(f \parallel g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\alpha_{L1},\alpha_{R1},\beta_1)\ln\frac{f(x;\alpha_{L1},\alpha_{R1},\beta_1)}{g(x;\alpha_{L2},\alpha_{R2},\beta_2)}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{\beta_1}{(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)}\exp-\left(\frac{|x|}{\alpha_{L1}}\right)^{\beta_1}\ln\frac{\beta_1(\alpha_{L2}+\alpha_{R2})\Gamma(1/\beta_2)\exp-\left(\dfrac{|x|}{\alpha_{L1}}\right)^{\beta_1}}{\beta_2(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)\exp-\left(\dfrac{|x|}{\alpha_{L2}}\right)^{\beta_2}}\,dx$$

$$+\int_{0}^{+\infty} \frac{\beta_1}{(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)}\exp-\left(\frac{|x|}{\alpha_{R1}}\right)^{\beta_1}\ln\frac{\beta_1(\alpha_{L2}+\alpha_{R2})\Gamma(1/\beta_2)\exp-\left(\dfrac{|x|}{\alpha_{R1}}\right)^{\beta_1}}{\beta_2(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)\exp-\left(\dfrac{|x|}{\alpha_{R2}}\right)^{\beta_2}}\,dx$$

$$= \ln\left[\frac{\beta_1(\alpha_{L2}+\alpha_{R2})\Gamma(1/\beta_2)}{\beta_2(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\alpha_{L1},\alpha_{R1},\beta_1)\ dx$$
$$+\frac{\beta_1}{(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[-\left(\frac{|x|}{\alpha_{L1}}\right)^{\beta_1}+\left(\frac{|x|}{\alpha_{L2}}\right)^{\beta_2}\right]\exp-\left(\frac{|x|}{\alpha_{L1}}\right)^{\beta_1}\ dx\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{+\infty}\left[-\left(\frac{|x|}{\alpha_{R1}}\right)^{\beta_1}+\left(\frac{|x|}{\alpha_{R2}}\right)^{\beta_2}\right]\exp-\left(\frac{|x|}{\alpha_{R1}}\right)^{\beta_1}\ dx\right\}$$

En employant l'expression du calcul intégral [Abramowitz et Stegun, 1965]

$$I\left(\nu,\mu,\xi\right)=\int_0^{\infty}x^{\nu-1}\exp\left(-\mu x^{\xi}\right)\ dx=\frac{\mu^{\frac{-\nu}{\xi}}\Gamma\left(\frac{\nu}{\xi}\right)}{\xi} \tag{4.9}$$

nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{0}\left[-\left(\frac{|x|}{\alpha_{L1}}\right)^{\beta_1}+\left(\frac{|x|}{\alpha_{L2}}\right)^{\beta_2}\right]\exp-\left(\frac{|x|}{\alpha_{L1}}\right)^{\beta_1}\ dx$$
$$=\frac{\alpha_{L1}^{\beta_2+1}\Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_1}\right)}{\alpha_{L2}^{\beta_2}\beta_1}-\frac{\alpha_{L1}^{\beta_1+1}\Gamma(1+1/\beta_1)}{\alpha_{L1}^{\beta_1}\beta_1} \tag{4.10}$$

et

$$\int_{-\infty}^{0}\left[-\left(\frac{|x|}{\alpha_{R1}}\right)^{\beta_1}+\left(\frac{|x|}{\alpha_{R2}}\right)^{\beta_2}\right]\exp-\left(\frac{|x|}{\alpha_{R1}}\right)^{\beta_1}\ dx$$
$$=\frac{\alpha_{R1}^{\beta_2+1}\Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_1}\right)}{\alpha_{R2}^{\beta_2}\beta_1}-\frac{\alpha_{R1}^{\beta_1+1}\Gamma(1+1/\beta_1)}{\alpha_{R1}^{\beta_1}\beta_1} \tag{4.11}$$

Finalement

$$KLD(f\parallel g)=\ln\left[\frac{\beta_1(\alpha_{L2}+\alpha_{R2})\Gamma(1/\beta_2)}{\beta_2(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)}\right]$$
$$+\frac{\beta_1}{(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)}\left(\frac{(\alpha_{R2}^{\beta_2}\alpha_{L1}^{\beta_2+1}+\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R1}^{\beta_2+1})\Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_1}\right)}{\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R2}^{\beta_2}\beta_1}-\frac{\alpha_{L1}++\alpha_{R1}}{\beta_1}\Gamma(1+1/\beta_1)\right)$$
$$=\ln\left[\frac{\beta_1(\alpha_{L2}+\alpha_{R2})\Gamma(1/\beta_2)}{\beta_2(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})\Gamma(1/\beta_1)}\right]+\frac{\alpha_{R2}^{\beta_2}\alpha_{L1}^{\beta_2+1}+\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R1}^{\beta_2+1}}{\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R2}^{\beta_2}(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})}\times\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_1}\right)}{\Gamma(1/\beta_1)}-\frac{1}{\beta_1}$$

□

Corollaire 4.1. *La divergence de Jeffreys entre deux distributions AGGD* $f(x;\alpha_{L1},\alpha_{R1},\beta_1)$ *et* $g(x;\alpha_{L2},\alpha_{R2},\beta_2)$ *est :*

$$\begin{aligned} JD(f \parallel g) &= \frac{\alpha_{R2}^{\beta_2}\alpha_{L1}^{\beta_2+1}\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R1}^{\beta_2+1}}{\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R2}^{\beta_2}(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})} \times \frac{\Gamma\left(\dfrac{\beta_2+1}{\beta_1}\right)}{\Gamma(1/\beta_1)} \\ &+ \frac{\alpha_{R1}^{\beta_1}\alpha_{L2}^{\beta_1+1}\alpha_{L1}^{\beta_1}\alpha_{R2}^{\beta_1+1}}{\alpha_{L1}^{\beta_1}\alpha_{R1}^{\beta_1}(\alpha_{L2}+\alpha_{R2})} \times \frac{\Gamma\left(\dfrac{\beta_1+1}{\beta_2}\right)}{\Gamma(1/\beta_2)} - \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \end{aligned}$$

4.4.2 Modèle SIRV à densité caractéristique Weibull

Nous avons montré dans le chapitre précédant que les statistiques jointes des sous-bandes d'ondelettes peuvent être décrites par la modélisation SIRV à densité caractéristique Weibull. Cependant, la densité jointe du vecteur aléatoire $\vec{X} = \sqrt{\tau}\vec{G}$ n'a pas de forme analytique simple. Nous proposons de modéliser le vecteur augmenté $\vec{Y} = [\tau;\vec{G}]$ de dimension $d+1$ plutôt qu'une modélisation uniquement fondée sur $\vec{X}$. La réalisation est représentée par la matrice :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \tau_1 & \dots & \tau_r & \dots & \tau_L \\ g_{1,1} & \dots & g_{1,r} & \dots & g_{1,L} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_{d,1} & \dots & g_{d,r} & \dots & g_{d,L} \end{bmatrix}$$

En utilisant la modélisation SIRV, et puisque τ et le noyau Gaussien $\vec{G}$ sont indépendants, la densité jointe de $\vec{Y}$ est

$$f_{\vec{Y}}(\vec{y}) = p_\tau(\tau) \times f_{\vec{G}}(\vec{g})$$

où $p_\tau(\tau) = \dfrac{a}{b}\left(\dfrac{\tau}{b}\right)^{a-1} \exp - \left(\dfrac{\tau}{b}\right)^{a}, \tau > 0$ est la densité de Weibull et $f_{\vec{G}}(\vec{g})$ est la distribution Gaussienne multivariée de matrice de covariance M.
Nous remarquons que les deux distributions $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ et $f_{\vec{Y}}(\vec{y})$ impliquent le même jeu d'hyperparamètres associés respectivement aux paramètres (a,b) de la loi du multiplicateur τ et à la matrice de covariance M du noyau Gaussien $\vec{G}$. Sous un principe d'isométrie, entre les espaces des lois $f_{\vec{X}} \Leftrightarrow (a,b,M)$ et $f_{\vec{Y}} \Leftrightarrow (a,b,M)$, il y aurait équivalence à développer une mesure de similarité entre les distributions liées à $\vec{X}$ et à $\vec{Y}$.

Proposition 4.2. *La divergence de Kullback-Leibler entre deux distributions* $f_{\vec{Y}}(\vec{y}; a_1, b_1, M_1)$ *et* $g_{\vec{Y}}(\vec{y}; a_2, b_2, M_2)$ *est :*

$$\begin{aligned} KLD(f \parallel g) &= \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{a_2} \Gamma\left(\frac{a_2}{a_1}+1\right) + \ln\left(\frac{a_1 b_2^{a_2}}{a_2 b_1^{a_1}}\right) + (a_1 - a_2)\ln(b_1) \\ &+ \frac{\gamma a_2}{a_1} - \gamma - 1 + 0.5\left(\mathrm{tr}\,(M_2^{-1}M_1) + \ln\left(\frac{|M_2|}{|M_1|}\right) - d\right) \end{aligned}$$

où $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0.577215665$ *est la constante d'Euler-Mascheroni.*

Démonstration. Les distributions s'écrivent sous forme de produit de deux distributions, nous pouvons facilement démontrer que

$$\begin{aligned} KLD(f \parallel g) &= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} p_\tau(\tau; a_1, b_1) f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_1) \ln \frac{p_\tau(\tau; a_1, b_1) f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_1)}{p_\tau(\tau; a_2, b_2) f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_2)}\, d\tau\, d\vec{g} \\ &= \int_0^{+\infty} p_\tau(\tau; a_1, b_1) \ln \frac{p_\tau(\tau; a_1, b_1)}{p_\tau(\tau; a_2, b_2)}\, d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_1) \ln \frac{f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_1)}{f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_2)}\, d\vec{g} \end{aligned}$$

La KLD s'écrit comme la somme d'une KLD entre les deux distributions de Weibull et d'une KLD entre les distributions Gaussiennes multivariées. L'expression de la KLD entre Gaussiennes multivariées est donnée par [Penny, 2001]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_1) \ln \frac{f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_1)}{f_{\vec{G}}(\vec{g}; M_2)}\, d\vec{g} = 0.5\left(\mathrm{tr}(M_2^{-1}M_1) + \ln\left(\frac{|M_2|}{|M_1|}\right) - d\right) \tag{4.12}$$

Il reste à calculer la KLD entre distributions Weibull. Nous avons :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} p_\tau(\tau; a_1, b_1) \ln \frac{p_\tau(\tau; a_1, b_1)}{p_\tau(\tau; a_2, b_2)}\, d\tau \\ = &\int_0^{+\infty} \frac{a_1}{b_1}\left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1-1} \exp - \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1} \ln \frac{\frac{a_1}{b_1}\left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1-1} \exp - \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1}}{\frac{a_2}{b_2}\left(\frac{\tau}{b_2}\right)^{a_2-1} \exp - \left(\frac{\tau}{b_2}\right)^{a_2}}\, d\tau \\ = &\int_0^{+\infty} \ln \frac{a_1 b_2^{a_2}}{a_2 b_1^{a_1}} p_\tau(\tau; a_1, b_1)\, d\tau + \frac{a_1(a_1 - a_2)}{b_1^{a_1}} \int_0^{+\infty} \tau^{a_1-1} \ln \tau\, \exp - \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1} d\tau \\ &+ \frac{a_1}{b_1^{a_1}} \int_0^{+\infty} \tau^{a_1-1} \left[\left(\frac{\tau}{b_2}\right)^{a_2} - \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1}\right] \exp - \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1} d\tau \end{aligned} \tag{4.13}$$

En effectuant le changement de variable $t = \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1}$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \tau^{a_1-1} \ln\tau \ \exp - \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1} d\tau = \frac{b_1^{a_1}}{a_1}\int_0^{+\infty} \ln\left(b_1 t^{1/a_1}\right) \ e^{-t} \ dt \\
&= \frac{b_1^{a_1}}{a_1}\left(\ln(b_1)\int_0^{+\infty} e^{-t} \ dt + \frac{1}{a_1}\int_0^{+\infty} \ln t \ e^{-t} \ dt\right) \\
&= \frac{b_1^{a_1}}{a_1}\left(\ln(b_1)\Gamma(1) + \tfrac{1}{a_1}\Gamma'(1)\right) \\
&= \frac{b_1^{a_1}}{a_1}\left(\ln(b_1) - \tfrac{1}{a_1}\gamma\right)
\end{aligned}$$

où $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0.577215665$ est la constante d'Euler-Mascheroni.
En employant l'expression du calcul intégral de l'Équation 4.9, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \tau^{a_1-1}\left[\left(\frac{\tau}{b_2}\right)^{a_2} - \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1}\right] \exp - \left(\frac{\tau}{b_1}\right)^{a_1} d\tau \\
&= \frac{1}{b_2^{a_2}} \frac{\left(\frac{1}{b_1^{a_1}}\right)^{-\frac{a_1+a_2}{a_1}} \Gamma\left(\frac{a_1+a_2}{a_1}\right)}{a_1} - \frac{1}{b_1^{a_1}} \frac{\left(\frac{1}{b_1^{a_1}}\right)^{-\frac{2a_1}{a_1}} \Gamma(\frac{2a_1}{a_1})}{a_1} \\
&= \frac{b_1^{a_1+a_2}\Gamma\left(a_2/a_1+1\right)}{a_1 b_2^{a_2}} - \frac{b_1^{a_1}}{a_1}
\end{aligned}$$

Finalement l'Équation 4.13 devient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} p_\tau(\tau; a_1, b_1) \ln \frac{p_\tau(\tau; a_1, b_1)}{p_\tau(\tau; a_2, b_2)} \ d\tau \ &= \ln\left(\frac{a_1 b_2^{a_2}}{a_2 b_1^{a_1}}\right) + (a_1 - a_2)\left(\ln(b_1) - \frac{\gamma}{a_1}\right) \\
&+ \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{a_2} \Gamma\left(\frac{a_2}{a_1} + 1\right) - 1
\end{aligned} \tag{4.14}$$

En substituant les deux termes de la KLD (Équation 4.12 et Équation 4.14), on en déduit le résultat de la proposition. □

Corollaire 4.2. *La divergence de Jeffreys entre deux distributions fondées sur la modélisation SIRV $f_{\vec{Y}}(\vec{y}; a_1, b_1, M_1)$ et $g_{\vec{Y}}(\vec{y}; a_2, b_2, M_2)$ est :*

$$\begin{aligned}
JD(f \parallel g) \ &= \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{a_2} \Gamma\left(\frac{a_2}{a_1} + 1\right) + \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{a_1} \Gamma\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right) + (a_1 - a_2)\ln(\frac{b_1}{b_2}) \\
&+ \gamma\left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right) - 2\gamma - 2 + 0.5\left(\mathrm{tr}\left(M_2^{-1}M_1\right) + \mathrm{tr}\left(M_1^{-1}M_2\right) - 2d\right)
\end{aligned}$$

où $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0.577215665$ est la constante d'Euler-Mascheroni.

4.4.3 Modèle multivarié à copule Gaussienne

Soient $f_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(1)},\ldots,\theta_d^{(1)},\Sigma_1)$ et $g_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(2)},\ldots,\theta_d^{(2)},\Sigma_2)$ deux distributions multivariées à copule Gaussienne et aux lois marginales $f_i(x_i;\theta_i^{(1)}$ et $g_i(x_i;\theta_i^{(2)})$ respectivement.

Proposition 4.3. *La divergence de Kullback-Leibler entre deux distributions multivariées à copule Gaussienne $f_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(1)},\ldots,\theta_d^{(1)},\Sigma_1)$ et $g_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(2)},\ldots,\theta_d^{(2)},\Sigma_2)$ est :*

$$\begin{aligned} KLD(f \parallel g) = & \sum_{i=1}^{d} KLD\left(f_i(x_i;\theta_i^{(1)}) \parallel g_i(x_i;\theta_i^{(2)})\right) \\ & +0.5\ln\left(\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|}\right) + 0.5\,\mathrm{tr}\left(\left(\Sigma_2^{-1}-I_d\right)M\right) \end{aligned}$$

où les $f_i(x_i;\theta_i^{(1)}$ et $g_i(x_i;\theta_i^{(2)})$ sont les lois marginales de $f_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(1)},\ldots,\theta_d^{(1)},\Sigma_1)$ et de $g_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(2)},\ldots,\theta_d^{(2)},\Sigma_2)$ respectivement,
et $M = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\vec{z}\vec{z}^t\,d\vec{x} = \mathbb{E}_{f_{\vec{X}}(\vec{x})}\left[\vec{z}\vec{z}^t\right]$, $\vec{z}^t = (\phi^{-1}(G_1(x_1)),\ldots,\phi^{-1}(G_d(x_d)))$ est la covariance du vecteur Gaussien $\vec{z}$ selon la loi $f_{\vec{X}}(\vec{x})$.

Démonstration. Nous avons

$$f_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(1)},\ldots,\theta_d^{(1)},\Sigma_1) = \frac{1}{|\Sigma_1|^{1/2}}\exp\frac{-\vec{y}^t\left(\Sigma_1^{-1}-I_d\right)\vec{y}}{2}\prod_{i=1}^{d} f_i(x_i;\theta_1^{(1)})$$

$$g_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(2)},\ldots,\theta_d^{(2)},\Sigma_2) = \frac{1}{|\Sigma_2|^{1/2}}\exp\frac{-\vec{z}^t\left(\Sigma_2^{-1}-I_d\right)\vec{z}}{2}\prod_{i=1}^{d} g_i(x_i;\theta_1^{(2)})$$

où $\vec{y}^t = (\phi^{-1}(F_1(x_1)),\ldots,\phi^{-1}(F_d(x_d)))$ et $\vec{z}^t = (\phi^{-1}(G_1(x_1)),\ldots,\phi^{-1}(G_d(x_d)))$
Donc,

$$\begin{aligned} & KLD(f \parallel g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ln\frac{f_{\vec{X}}(\vec{x})}{g_{\vec{X}}(\vec{x})}\,d\vec{x} \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ln\frac{|\Sigma_2|^{1/2}}{|\Sigma_1|^{1/2}}\,d\vec{x} - \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{y}^t\left(\Sigma_1^{-1}-I_d\right)\vec{y}}{2} f_{\vec{X}}(\vec{x})\,d\vec{x} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{z}^t\left(\Sigma_2^{-1}-I_d\right)\vec{z}}{2} f_{\vec{X}}(\vec{x})\,d\vec{x} + \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ln\frac{\prod_{i=1}^{d} f_i(x_i;\theta_1^{(1)})}{\prod_{i=1}^{d} g_i(x_i;\theta_1^{(2)})}\,d\vec{x} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Nous proposons de calculer chacun des 4 termes :

D'abord nous avons,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ln\frac{|\Sigma_2|^{1/2}}{|\Sigma_1|^{1/2}}\,d\vec{x} = \ln\frac{|\Sigma_2|^{1/2}}{|\Sigma_1|^{1/2}} = 0.5\ln\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|} \tag{4.16}$$

Ensuite, en employant la relation $\mathrm{tr}(a) = a$ si a est un scalaire, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{y}^t \left(\Sigma_1^{-1} - I_d\right) \vec{y}}{2} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ d\vec{x} = \mathrm{tr}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{y}^t \left(\Sigma_1^{-1} - I_d\right) \vec{y}}{2} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ d\vec{x} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\left(\vec{y}^t \left(\Sigma_1^{-1} - I_d\right) \vec{y} f_{\vec{X}}(\vec{x})\right)\ d\vec{x} \\
&= 0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\left(f_{\vec{X}}(\vec{x}) \left(\Sigma_1^{-1} - I_d\right) \vec{y}\vec{y}^t\ d\vec{x}\right) \\
&= 0.5\, \mathrm{tr}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x}) \left(\Sigma_1^{-1} - I_d\right) \vec{y}\vec{y}^t\ d\vec{x} \right) \\
&= 0.5\, \mathrm{tr}\left(\left(\Sigma_1^{-1} - I_d\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x}) \vec{y}\vec{y}^t\ d\vec{x} \right) \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $\vec{y} = \left(\phi^{-1}(F_1(x_1)), \ldots, \phi^{-1}(F_d(x_d))\right)^t$, nous calculons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x}) \vec{y}\vec{y}^t\ d\vec{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} N\left(\vec{y}; 0, \Sigma_1\right) \vec{y}\vec{y}^t\ d\vec{y}$$

où $N\left(\vec{y}; 0, \Sigma_1\right)$ est une distribution normale multivariée.
Nous avons par définition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} N\left(\vec{y}; 0, \Sigma_1\right) \vec{y}\vec{y}^t\ d\vec{y} = \mathbb{E}\left[\vec{y}\vec{y}^t\right] = \Sigma_1$$

car le vecteur $\vec{y}$ est normal et de covariance Σ_1. Par suite, l'Équation 4.17 devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{y}^t \left(\Sigma_1^{-1} - I_d\right) \vec{y}}{2} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ d\vec{x} = 0.5\, \mathrm{tr}\left(\left(\Sigma_1^{-1} - I_d\right) \Sigma_1\right) = 0 \quad (4.18)$$

De la même manière, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{z}^t \left(\Sigma_2^{-1} - I_d\right) \vec{z}}{2} f_{\vec{X}}(\vec{x})\, d\vec{x} = 0.5\, \mathrm{tr}\left(\left(\Sigma_2^{-1} - I_d\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x}) \vec{z}\vec{z}^t\ d\vec{x} \right) \quad (4.19)$$

Pour calculer le quatrième terme de l'Équation 4.15, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ln\frac{f_i(x_i;\theta_1^{(1)})}{g_i(x_i;\theta_1^{(2)})}\,d\vec{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x_i;\theta_1^{(1)})\ln\frac{f_i(x_i;\theta_1^{(1)})}{g_i(x_i;\theta_1^{(2)})}\,dx_i\\ &= KLD\left(f_i(x_i;\theta_i^{(1)})\parallel g_i(x_i;\theta_i^{(2)})\right)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ln\frac{\prod_{i=1}^d f_i(x_i;\theta_1^{(1)})}{\prod_{i=1}^d g_i(x_i;\theta_1^{(2)})}\,d\vec{x}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^d\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x})\ln\frac{f_i(x_i;\theta_1^{(1)})}{g_i(x_i;\theta_1^{(2)})}\,d\vec{x}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^d KLD\left(f_i(x_i;\theta_i^{(1)})\parallel g_i(x_i;\theta_i^{(2)})\right)\end{aligned}\tag{4.20}$$

Finalement, le résultat de la proposition est obtenu en sommant les Équation 4.16, Équation 4.18, Équation 4.19 et Équation 4.20.

□

En développant les calculs, on aboutit à une formule de différents termes dépendants des jeux des paramètres. On remarque notamment qu'il existe un terme impliquant les paramètres des marginales et un autre en fonction des matrices de covariance. Ce dernier n'est malheureusement pas simplifiable. Cependant, nous pouvons développer une expression analytique de la limite de la KLD entre distributions à copule Gaussienne de lois marginales proches et de matrices de covariances distinctes [10].

Corollaire 4.3. *La limite de la divergence de Kullback-Leibler entre deux distributions multivariées à copule Gaussienne* $f_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(1)},\ldots,\theta_d^{(1)},\Sigma_1)$ *et* $g_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(2)},\ldots,\theta_d^{(2)},\Sigma_2)$*, de matrices de covariance distinctes, quand les lois marginales sont proches est :*

$$\begin{aligned}\lim_{\theta_i^{(1)}\approx\theta_i^{(2)}\forall i} KLD(f\parallel g) = &\sum_{i=1}^d KLD\left(f_i(x_i;\theta_i^{(1)})\parallel g_i(x_i;\theta_i^{(2)})\right)\\ &+0.5\left(\mathrm{tr}\left(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1\right)+\ln\left(\frac{|\Sigma_2|}{|\Sigma_1|}\right)-d\right)\end{aligned}$$

où les $f_i(x_i;\theta_i^{(1)}$ *et* $g_i(x_i;\theta_i^{(2)})$ *sont les lois marginales de* $f_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(1)},\ldots,\theta_d^{(1)},\Sigma_1)$ *et de* $g_{\vec{X}}(\vec{x};\theta_1^{(2)},\ldots,\theta_d^{(2)},\Sigma_2)$ *respectivement.*

10. Dans les expérimentations nous emploierons la version symétrique de cette expression qui est une limite de l'expression exacte quand les lois marginales sont proches ; cela revient à fixer une partie des hyperparamètres pour dériver une forme analytique d'une métrique comme c'est le cas dans [Verdoolaege et Scheunders, 2012].

Démonstration. Dans le cas de lois marginales proches, $\forall i = 1, \ldots, d\ \theta_i^{(1)} \approx \theta_i^{(2)}$, nous avons en effectuant le changement de variable $\vec{y} = (\phi^{-1}(F_1(x_1)), \ldots, \phi^{-1}(F_d(x_d)))^t$

$$\lim_{\theta_i^{(1)} \approx \theta_i^{(2)} \forall i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{X}}(\vec{x}) \vec{z}\vec{z}^t \, d\vec{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} N\left(\vec{y}; 0, \Sigma_1\right) \vec{y}\vec{y}^t \, d\vec{y} = \Sigma_1$$

et l'Équation 4.19 devient

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_i^{(1)} \approx \theta_i^{(2)} \forall i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{z}^t \left(\Sigma_2^{-1} - I_d\right) \vec{z}}{2} f_{\vec{X}}(\vec{x}) \, d\vec{x} \quad &= 0.5 \operatorname{tr}\left(\left(\Sigma_2^{-1} - I_d\right) \Sigma_1\right) \\ &= 0.5 \left(\operatorname{tr}\left(\Sigma_2^{-1} \Sigma_1\right) - d\right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Finalement, le résultat du corolaire est obtenu en sommant les Équation 4.16, Équation 4.18, Équation 4.21 et Équation 4.20.

□

Corollaire 4.4. *La limite de la divergence de Jeffreys entre deux distributions multivariées à copule Gaussienne* $f_{\vec{X}}(\vec{x}; \theta_1^{(1)}, \ldots, \theta_d^{(1)}, \Sigma_1)$ *et* $g_{\vec{X}}(\vec{x}; \theta_1^{(2)}, \ldots, \theta_d^{(2)}, \Sigma_2)$*, de matrices de covariance distinctes, quand les lois marginales sont proches est :*

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_i^{(1)} \approx \theta_i^{(2)} \forall i} JD(f \parallel g) = \quad & \sum_{i=1}^{d} JD\left(f_i(x_i; \theta_i^{(1)}) \parallel g_i(x_i; \theta_i^{(2)})\right) \\ & +0.5 \left(\operatorname{tr}\left(\Sigma_2^{-1} \Sigma_1\right) + \operatorname{tr}\left(\Sigma_2^{-1} \Sigma_2\right)\right) - d \end{aligned}$$

où les $f_i(x_i; \theta_i^{(1)}$ *et* $g_i(x_i; \theta_i^{(2)})$ *sont les lois marginales de* $f_{\vec{X}}(\vec{x}; \theta_1^{(1)}, \ldots, \theta_d^{(1)}, \Sigma_1)$ *et de* $g_{\vec{X}}(\vec{x}; \theta_1^{(2)}, \ldots, \theta_d^{(2)}, \Sigma_2)$ *respectivement.*

Nous notons que cette expression est composée d'un premier terme qui est la somme des JDs entre les lois marginales, ce qui correspond à la JD entre distributions jointes si les lois marginales sont indépendantes. Le deuxième terme est l'expression de la JD entre distributions Gaussiennes multivariées correspondant à la *Gaussianisation* des lois marginales en vue de déterminer les paramètres de la copule Gaussienne. En particulier, quand les lois marginales sont indépendantes ($\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_d$) ou si les lois marginales sont identiques, cette limite est exactement l'expression analytique de la JD.

Dans notre étude, nous avons proposé le modèle multivarié à copule Gaussienne et de même loi marginale AGGD (modèle *isotrope*, cf. sous-section 3.4.2). En utilisant l'expression de la JD entre distributions AGGD

(corollaire4.1) et le corollaire précédent, nous proposons d'employer une forme analytique réduite pour comparer deux distributions GC-MAGG

$$JD(f_{GC-MAGG} \parallel g_{GC-MAGG}) = d \times \left[\frac{\alpha_{R2}^{\beta_2}\alpha_{L1}^{\beta_2+1}\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R1}^{\beta_2+1}}{\alpha_{L2}^{\beta_2}\alpha_{R2}^{\beta_2}(\alpha_{L1}+\alpha_{R1})} \times \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{\beta_1}\right)}{\Gamma(1/\beta_1)} \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_{R1}^{\beta_1}\alpha_{L2}^{\beta_1+1}\alpha_{L1}^{\beta_1}\alpha_{R2}^{\beta_1+1}}{\alpha_{L1}^{\beta_1}\alpha_{R1}^{\beta_1}(\alpha_{L2}+\alpha_{R2})} \times \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\beta_2}\right)}{\Gamma(1/\beta_2)} - \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right] + 0.5\left(\mathrm{tr}\left(\Sigma_2^{-1}\Sigma_1\right) + \mathrm{tr}\left(\Sigma_2^{-1}\Sigma_2\right)\right) - d \tag{4.22}$$

Par abus de langage, nous appelons cette métrique divergence de Jeffreys entre distributions GC-MAGG même si ce n'est qu'une limite.

4.5 Expérimentation et résultats

Avant d'évaluer les performances des modèles proposés dans le TBIR, nous présentons le protocole expérimental employé ainsi que différents critères qui seront nécessaires à l'évaluation des performances.

4.5.1 Protocole expérimental

Nous avons employé trois benchmarks, que nous appelons B1, B2 et B3 :

- B1 : nous employons 40 classes de la base VisTex [url VisTex,] que nous avons présentées dans la Figure 1 (page 6) et déjà employées pour étudier la qualité de l'ajustement des modèles aux statistiques des sous-bandes d'ondelettes. Chaque image/classe de texture de taille 512x512 pixels est divisée en 16 imagettes sans-chevauchement de taille 128x128. Nous constituons ainsi une base d'images de test contenant 640 textures. Cet ensemble de test est devenu conventionnel et fréquemment utilisé dans la littérature pour évaluer les performances en TBIR ou en classification de textures (par exemple dans [Do et Vetterli, 2002b, Mathiassen *et al.*, 2002, Permuter *et al.*, 2006, Kwitt et Uhl, 2010, Verdoolaege et Scheunders, 2011]).
- B2 : Nous employons 40 classes de l'album de Brodatz (Figure 4.2). Chaque image de taille 640x640 est divisée en 16 imagettes de taille 160x160 pour produire une base de 640 textures. Ce test a déjà été employé dans [Lasmar *et al.*, 2009]. Nous soulignons que cet ensemble de test ne contient pas des sous-bandes avec une asymétrie très prononcée.

Nous représentons sur la Figure 4.3 la répartition du skewness des sous-bandes des textures constituant B2. Nous remarquons que presque la moitié des sous-bandes ont un skewness entre -0.2 et 0.2 et l'autre moitié à un skewness plus grand.

- B3 : N classes de texture sont aléatoirement choisies de l'album de Brodatz [url Brodatz,], en augmentant successivement le nombre $N = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Pour chaque valeur fixée de N, 25 ensembles différents de N images/classes sont aléatoirement sélectionnés à partir des 111 classes de l'album. Ensuite, chaque texture de taille 640x640 est divisée en 16 imagettes de taille 160x160 pour créer une base d'images de $N_t = N \times 16$ textures. Au final, le benchmark est composé de $25 \times 7 = 175$ ensembles de test aléatoires et de différentes tailles $N_t = N \times 16, N = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Ce benchmark a l'avantage d'être aléatoire et donc plus objectif en comparaison avec les benchmarks B1 et B2. En outre, il est composé de 175 ensembles de test aléatoirement choisis tandis que B1 et B2 ne sont composés que d'un seul ensemble.

Chaque image de chaque ensemble de test des benchmarks est employée comme image requête dans un système TBIR ; les images pertinentes sont ses 15 voisines issues de la même classe tandis que toutes les N_t images de la base d'imagettes de test sont candidates. Le nombre des images pertinentes récupérées est considéré par rapport au nombre total des images récupérées K appelé aussi taille de la requête.

Afin de calculer les signatures en utilisant les modèles statistiques, nous avons employé deux sortes de transformées : la transformée en ondelettes orthogonales (OWT) de Daubechies [Daubechies, 1992] et la transformée en ondelettes complexes à arbre dual (DT-CWT) de Kingsbury [Kingsbury, 2001]. Nous employons au maximum trois échelles de décompositions pour convenir aux recommandations de Do et Vetterli dans [Do et Vetterli, 2002b] qui préconisent l'emploi des sous-bandes de taille plus grande que 16x16 pour s'assurer de la consistance de l'estimation des paramètres des modèles.

4.5.2 Critères d'évaluation

Pour quantifier les performances en recherche d'images par le contenu, plusieurs critères peuvent être employés [Müller *et al.*, 2001]. En plus d'un critère global appelé *taux moyen de bonne détection* (ARR), nous employons les courbes de rappel/précision et les courbes de rappel en fonction des tailles de requêtes qui sont deux méthodes graphiques devenues un standard pour évaluer les performances en recherche d'information.

Pour la suite, nous notons $n_q(K)$ le nombre des images pertinentes récupérées parmi K qui est la taille de la requête. $N_R(q)$ est le nombre d'images

FIGURE 4.2 – Les 40 classes de l'album de Brodatz utilisées pour la construction du benchmark B2 : 'D6', 'D8', 'D11', 'D16', 'D17', 'D18', 'D20', 'D21', 'D24', 'D26', 'D28', 'D32', 'D33', 'D34', 'D47', 'D49', 'D51', 'D53', 'D55', 'D56', 'D57', 'D64', 'D65', 'D66', 'D75', 'D76', 'D77', 'D78', 'D82', 'D83', 'D84', 'D85', 'D87', 'D92', 'D95', 'D101', 'D102', 'D103', 'D104' et 'D110'

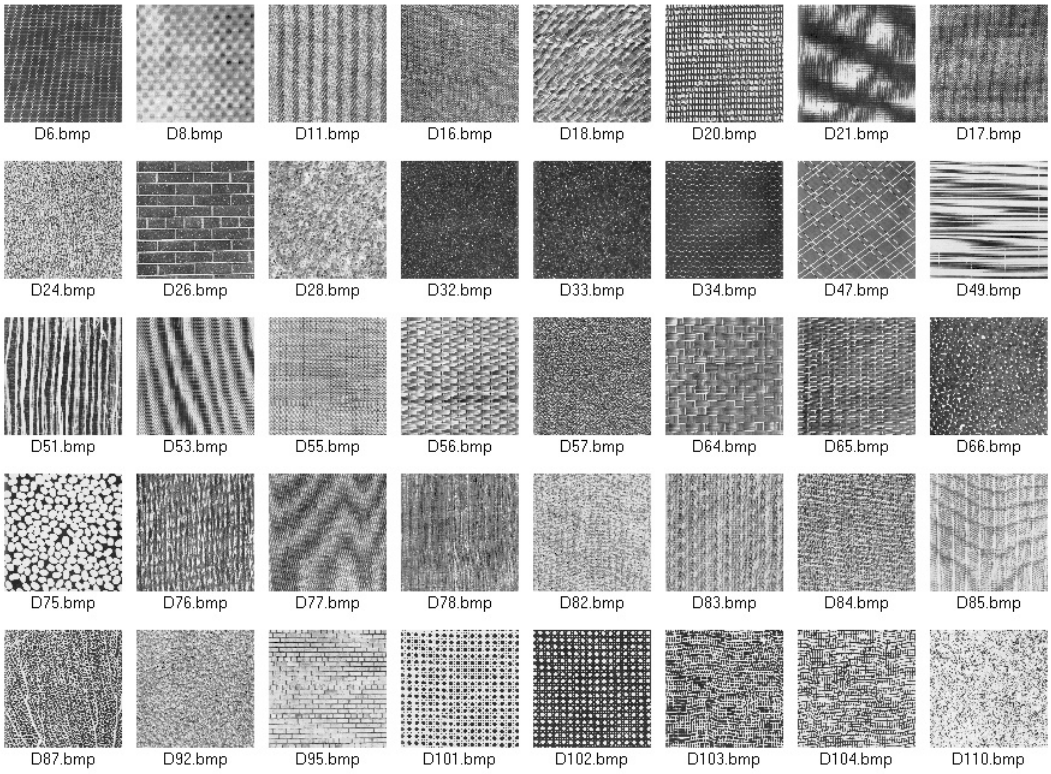
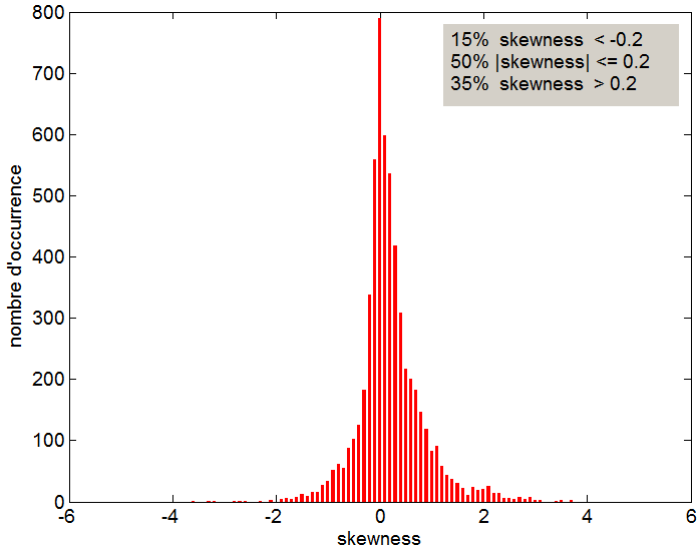


FIGURE 4.3 – la répartition du skewness des sous-bandes résultantes de la décomposition des images du benchmark B2 en 3 échelles en utilisant l'ondelette de Daubechies 'db2'.



pertinentes à une image requête ; dans notre cas, toutes les images requêtes ont le même nombre d'images pertinentes $N_R(q) = N_R = 15$ puisque toutes les images/classes sont divisées en 16 et contiennent le même nombre d'imagettes. Le nombre total des imagettes est noté N_t qui est de 640 textures pour le benchmark B1 et B2, et de taille variable $N \times 16$ textures où $N = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ pour le benchmark B3.

4.5.2.1 Taux moyen de bonne détection

Ce critère donne une indication sur la performance moyenne du système même s'il ne contient pas d'information sur le comportement en fonction de la taille de requête. Son expression est donnée par

$$ARR = \frac{\sum_{q=1}^{N_t} n_q(N_R)}{N_t \times N_R} \tag{4.23}$$

Une approche est jugée plus performante si son ARR est plus grand. Un système de recherche d'information est parfait quand le ARR est de 100%.

4.5.2.2 Critères graphiques : courbe de précision/rappel et courbe de rappel/taille de la requête

Les deux mesures d'évaluation des performances en CBIR les plus répandues sont le rappel R et la précision P définies par

$$\begin{aligned} R(K) &= \underset{q}{\text{mean}}\left(\frac{\text{nombre d'images pertinentes récupérées}}{\text{nombre d'images pertinentes existantes}}\right) \\ &= \frac{\sum_{q=1}^{N_t} n_q(K)}{N_t \times N_R} \end{aligned} \tag{4.24}$$

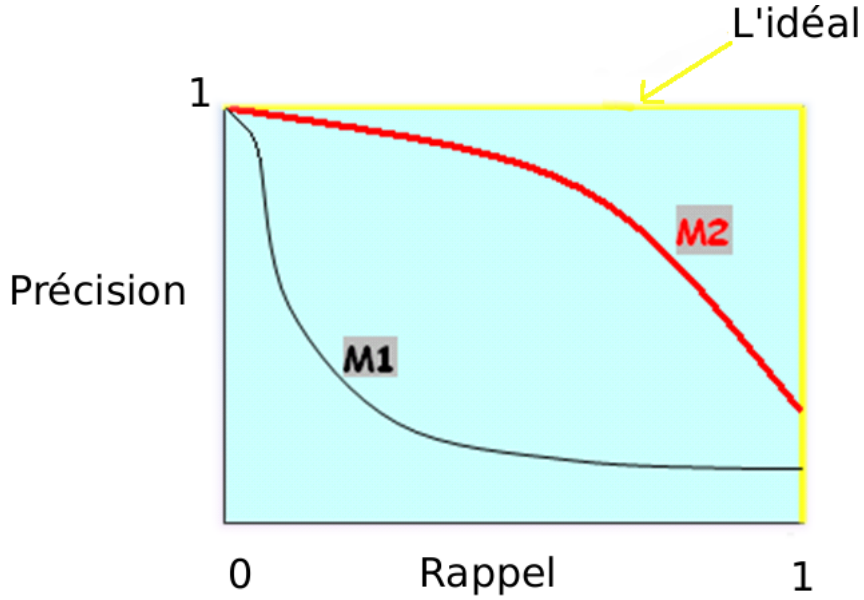
et

$$\begin{aligned} P(K) &= \underset{q}{\text{mean}}\left(\frac{\text{nombre d'images pertinentes récupérées}}{\text{nombre d'images récupérées}}\right) \\ &= \frac{\sum_{q=1}^{N_t} n_q(K)}{N_t \times K} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Les deux mesures sont des fonctions de la taille de la requête K, et elles sont calculées en moyennant sur toutes les images prises comme requête et en considérant différentes valeurs de K entre 1 et N_t. Le rappel est une fonction croissante de K, et quand $K \longrightarrow N_t$, $R(k) \longrightarrow 1$ puisqu'en récupérant toutes les images de la base on est sûr de récupérer toutes les candidates pertinentes au sein de l'ensemble. La précision est une fonction décroissante de K, et $P(k) \longrightarrow 1$ quand $K \longrightarrow 1$ car on est plus *précis* en cherchant une seule image similaire à l'image requête et cette précision tends vers $\frac{N_R}{N_t}$ (proche de 0) quand $K \nearrow$. La courbe précision/rappel est obtenue en affichant P en fonction de R (qui est une fonction décroissante car P est une fonction décroissante de K tandis que R en est une fonction croissante).

Un modèle M2 est jugé plus performant qu'un autre modèle M1, si sa courbe de précision/rappel est au-dessus de celle de M1 (Figure 4.4). L'affichage de la courbe de rappel/taille de la requête K est aussi employée. Cela donne une information de la convergence du système i.e. sa capacité à retourner toutes les images pertinentes en considérant une taille de requête raisonnable sans que l'utilisateur soit obligé de naviguer au sein d'un grand nombre d'images pour retrouver celles similaires à sa requête. À la différence de l'ARR qui est un critère global et qui ne représente qu'un seul point dans la courbe rappel/précision ($ARR = P(N_R)$), les représentations graphiques donnent une vision plus détaillée pour comparer les performances et le comportement des modèles dans un système de recherche d'information. Si dans

FIGURE 4.4 – Comparaison des courbes précision/rappel



des cas extrêmes, on n'arrive pas à départager des modèles (si les courbes se croisent par exemple), d'autres critères peuvent être considérés comme le rang auquel la première image pertinente est classée, le rang moyen normalisé ou différentes valeurs particulières comme le $P(20)$, $P(50)$, la valeur du rappel quand la précision est de 0.5 etc. [Müller *et al.*, 2001].

4.5.3 Modèles univariés

Nous avons réalisé plusieurs simulations de recherche d'images par le contenu texture afin d'évaluer les performances du modèle AGGD [Lasmar *et al.*, 2009] en le comparant aux modèles univariés les plus utilisés dans des travaux antérieurs pour le TBIR.

Trois modèles univariés sont considérés : le modèle GGD [Do et Vetterli, 2002b], le modèle gamma (Gam) [Mathiassen *et al.*, 2002] et le modèle Weibull (Wbl) [Kwitt et Uhl, 2010]. Nous employons la divergence de Jeffreys comme mesure de similarité entre distributions. Toutes les expressions analytiques de la JD peuvent être déduites à partir des formes closes de la KLD qu'on trouve dans ces références. Dans tous ces travaux, l'hypothèse d'indépendance entre sous-bandes (intra-bande, inter-orientations et inter-échelles) est considérée. Sous l'hypothèse d'indépendance inter-orientations et inter-échelles, on peut employer la somme des JD entre sous-bandes deux à deux

pour mesurer la similarité entre deux images. Nous rappelons que même si cette hypothèse est *forte* et que de l'information peut être négligée pour certaines classes de textures, notre étude a montré que c'est la dépendance intra-bande qui est prédominante (cf. section 3.1).
La mesure de similarité entre deux images I_1 et I_2 décomposées en sous-bandes $\{B_1, \ldots, B_{nb}\}$, sous l'hypothèse d'indépendance inter-orientations et inter-échelles est :

- dans le cas univarié, l'indépendance intra-bande est aussi supposée, la JD globale est la somme des JD entre les distributions **marginales** des sous-bandes :

$$\begin{aligned} &JD\left(p_1\left(\vec{x};\{\theta_k^{(1)}\}_{1,\ldots,nb}\right) \parallel p_2\left(\vec{x};\{\theta_k^{(2)}\}_{1,\ldots,nb}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{nb} JD\left(p_1\left(x_{B_k};\theta_k^{(1)}\right) \parallel p_2\left(x_{B_k};\theta_k^{(2)}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

  où $\{\theta_k^{(1)}\}_{1,\ldots,nb}$ et $\{\theta_k^{(2)}\}_{1,\ldots,nb}$ sont les paramètres des distributions univariées caractérisant les statistiques marginales des sous-bandes.
- dans le cas multivarié, la dépendance intra-bande est prise en compte, la JD globale est la somme des JD entre les distributions **jointes** des sous-bandes :

$$\begin{aligned} &JD\left(p_1\left(\vec{x};\{\eta_k^{(1)}\}_{1,\ldots,nb}\right) \parallel p_2\left(\vec{x};\{\eta_k^{(2)}\}_{1,\ldots,nb}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{nb} JD\left(p_1\left(\vec{x}_{B_k};\eta_k^{(1)}\right) \parallel p_2\left(\vec{x}_{B_k};\eta_k^{(2)}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.27}$$

  où $\{\eta_k^{(1)}\}_{1,\ldots,nb}$ et $\{\eta_k^{(2)}\}_{1,\ldots,nb}$ sont les hyperparamètres des distributions multivariées caractérisant les statistiques jointes des sous-bandes.

Discussion des résultats

Nous rappelons que la finalité est de comparer les performances des modèles statistiques univariés en TBIR. Dans les Tableau 4.1, Tableau 4.2 et Tableau 4.3 nous rapportons les taux moyens de détection pour les différents modèles en utilisant les deux transformées OWT et DT-CWT, en employant les benchmarks B1, B2 et B3.

D'abord, nous constatons que toutes les performances s'améliorent en augmentant le nombre d'échelles de décomposition. Cela est dû à l'ajout de l'information en allant vers les échelles les plus grossières sans pour autant dépasser un nombre d'échelles produisant des sous-bandes de taille trop réduite qui posent des problèmes d'estimation. Ensuite, nous remarquons qu'en

employant la transformée OWT, le modèle AGGD surclasse les trois modèles GGD, Gam et Wbl dans les trois benchmarks. Cependant, le modèle Wbl est le plus performant quand on emploie la transformée DT-CWT dans les benchmark B1 et B3. En effet, la modélisation Wbl des modules des coefficients complexes de la transformée DT-CWT contient à la fois de l'information sur la partie réelle et imaginaire, contrairement à la modélisation des coefficients réels de la variante DT-CWT réelle orientée [Selesnick *et al.*, 2005] à l'aide des modèles GGD ou AGGD. Cependant, en considérant le benchmark B2, c'est le modèle AGGD qui affiche des performances bien supérieures à celles des modèles GGD, Gam et Wbl, et ce quel que soit la transformée considérée.

Transformée	Modèles			
	GGD	Gam	Wbl	AGGD
1 échelle				
OWT, db2	71.64	69.63	70.92	**72.41**
DT-CWT	72.89	72.50	73.17	**73.35**
2 échelles				
OWT, db2	75.68	74.44	75.07	**77.39**
DT-CWT	78.74	79.18	**79.63**	79.21
3 échelles				
OWT, db2	78.97	77.51	78.36	**80.31**
DT-CWT	80.36	81.52	**82.05**	80.92

TABLE 4.1 – Comparaison des performances des modèles univariés en TBIR en considérant le benchmark B1, en utilisant le taux moyen de détection.

Transformée	Modèles			
	GGD	Gam	Wbl	AGGD
1 échelle				
OWT, db2	88.31	87.55	87.92	**92.67**
DT-CWT	89.44	89.87	90.09	**92.08**
2 échelles				
OWT, db2	92.50	92.29	92.39	**96.38**
DT-CWT	93.76	94.16	94.25	**96.95**
3 échelles				
OWT, db2	94.91	94.44	94.72	**98.25**
DT-CWT	95.93	95.95	96.02	**99.26**

TABLE 4.2 – Comparaison des performances des modèles univariés en TBIR en considérant le benchmark B2, en utilisant le taux moyen de détection.

Nombre de classes	Modèles			
	GGD	Gam	Wbl	AGGD
OWT, db2				
10	88.06	87.63	87.83	**88.90**
15	86.12	85.73	85.96	**87.45**
20	83.78	83.42	83.61	**85.21**
25	83.03	82.52	82.74	**84.75**
30	80.58	80.01	80.27	**82.55**
35	79.87	79.18	79.53	**81.79**
40	79.05	78.48	78.77	**81.74**
DT-CWT				
10	89.43	89.83	**89.92**	88.96
15	88.04	88.35	**88.51**	87.71
20	85.96	86.37	**86.54**	85.57
25	85.27	85.81	**85.96**	85.01
30	82.95	83.41	**83.61**	82.69
35	82.63	82.98	**83.25**	82.38
40	81.66	82.11	**82.31**	81.81

TABLE 4.3 – Comparaison des performances des modèles univariés en TBIR en considérant le benchmark B3 et des transformées en 3 échelles, en utilisant le taux moyen de détection (en %).

Afin de voir en détail le comportement de ces modèles statistiques en TBIR, nous avons évalué les performances dans le benchmark B1 et B2 à l'aide des courbes de précision/rappel et de rappel/taille de la requête (Figure 4.5 et Figure 4.6). Dans la Figure 4.5, nous constatons qu'il n'y a aucun chevauchement des courbes et donc le comportement qu'on a déduit à partir des ARR se reproduit indépendamment de la taille des requêtes. Nous remarquons que pour le benchmark B1, le modèle AGGD n'a pas les mêmes performances selon la transformée employée. Il est plus performant comparé aux trois autres modèles en employant la transformée OWT tandis qu'en employant DT-CWT c'est le modèle Wbl qui est meilleur.

Dans la Figure 4.6, nous représentons graphiquement les performances obtenues dans le benchmark B2. Le modèle AGGD affiche des performances bien au delà de celles des trois autres modèles. Par exemple, pour récupérer 99% des images pertinentes, on a besoin de récupérer seulement 19 images en employant le modèle AGGD et la transformée OWT (17 images seulement avec la transformée DT-CWT) alors qu'il en faut 29 (27 si la transformée est la DT-CWT) pour les autres modèles.

En observant les taux moyens de détection de chaque classe du benchmark B1, nous notons l'existence de classes de textures dont le taux moyen de détection (par classe) obtenu en utilisant le modèle GGD est supérieur à celui obtenu à l'aide du modèle AGGD (Figure 4.7). Cependant, les taux de rejet par classe en utilisant le test de Kolmogorov-Smirnov pour les deux classes de la Figure 4.7, est de 2.08% et 1.04% en considérant le modèle GGD tandis que le modèle AGGD s'ajuste parfaitement aux sous-bandes issues de ces deux classes (taux de rejet de 0%). Il n'existe donc pas une relation d'implication entre l'adéquation d'un modèle aux statistiques observées et les performances en discrimination des textures. En effet, d'autres paramètres entrent en jeux, notamment l'existence de *faux-amis* texturaux [11].
Nous signalons que les tests d'adéquation peuvent être employés pour étudier l'aptitude d'un modèle à décrire des statistiques empiriques mais ne garantissent pas les meilleures performances en exploitant ce modèle dans une application donnée comme la recherche d'images, la classification, la segmentation etc. Par exemple, le taux moyen de détection des classes de texture de la Figure 4.8 en considérant le modèle AGGD est de seulement 42.38% alors que les statistiques marginales des sous-bandes s'ajustent très bien à l'*à priori* AGGD.

11. Nous employons ce terme pour qualifier les textures ayant des statistiques de sous-bandes très proches mais qui sont facilement distinguable visuellement.

FIGURE 4.5 – Représentations graphiques des performances des modèles univariés en TBIR en utilisant le benchmark B1, 1ère colonne la transformée employée est OWT, 2ème colonne DT-CWT.

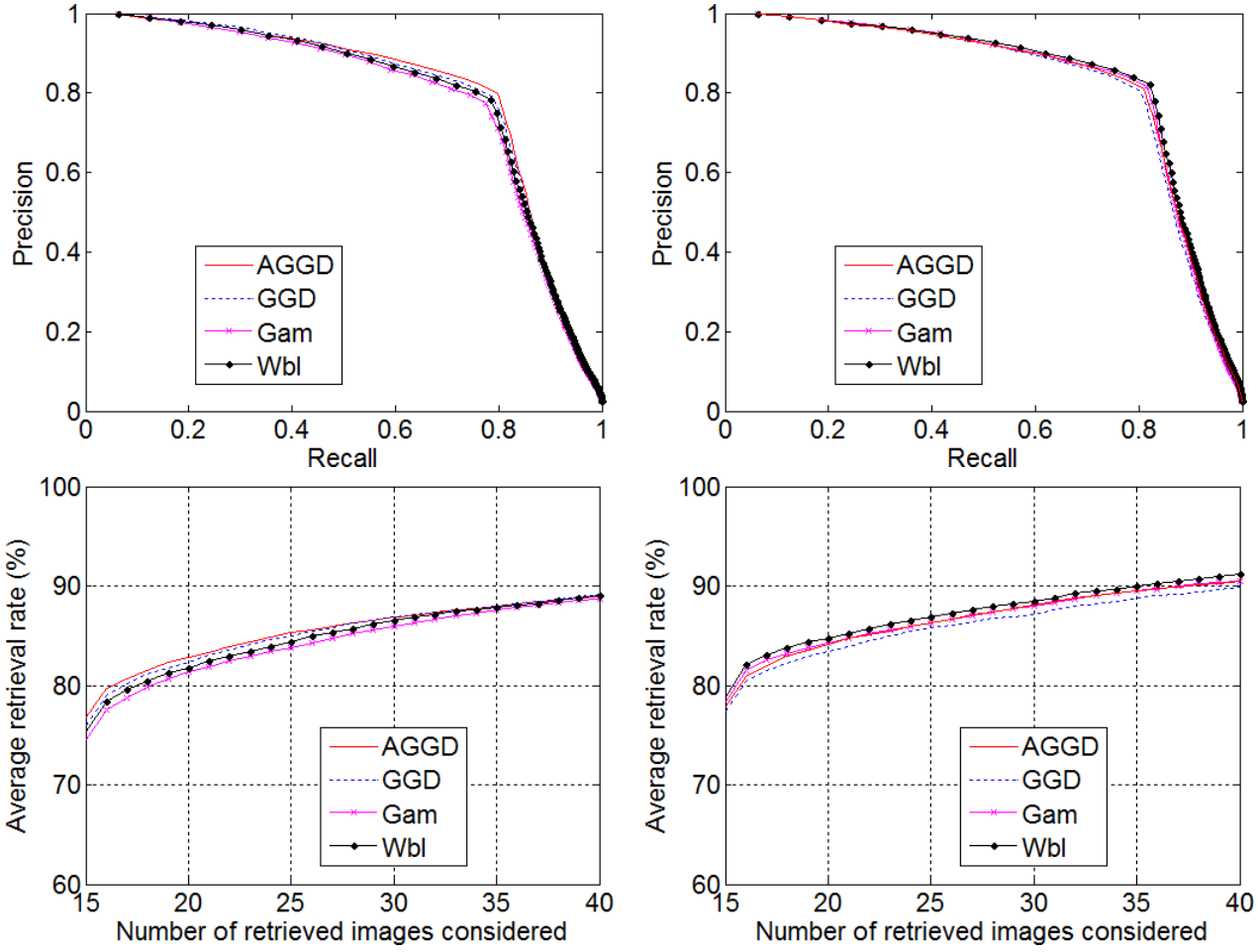


FIGURE 4.6 – Représentations graphiques des performances des modèles univariés en TBIR en utilisant le benchmark B2, 1ère colonne la transformée employée est OWT, 2ème colonne DT-CWT.

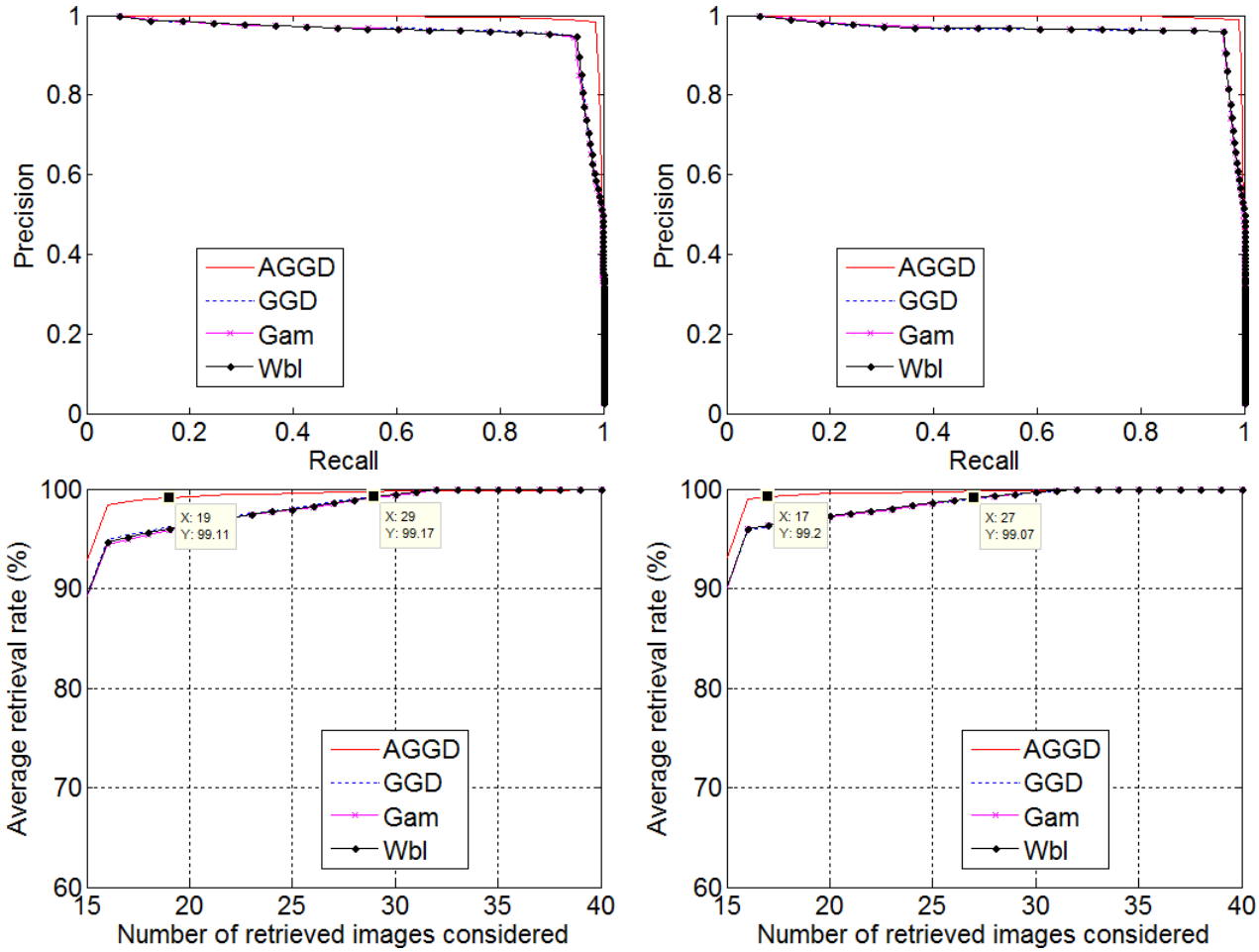


FIGURE 4.7 – Exemples de classes de texture dont les taux moyens de détection en utilisant le modèle GGD sont supérieurs à ceux obtenus en utilisant l'AGGD.

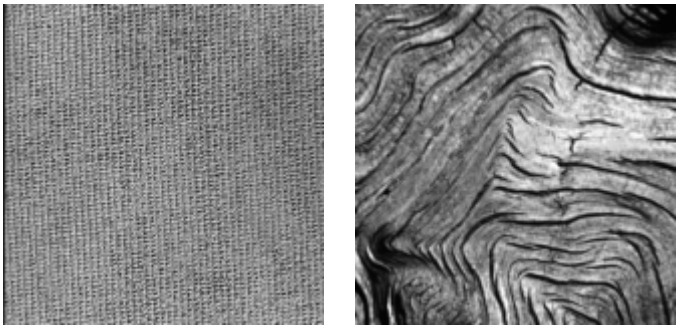
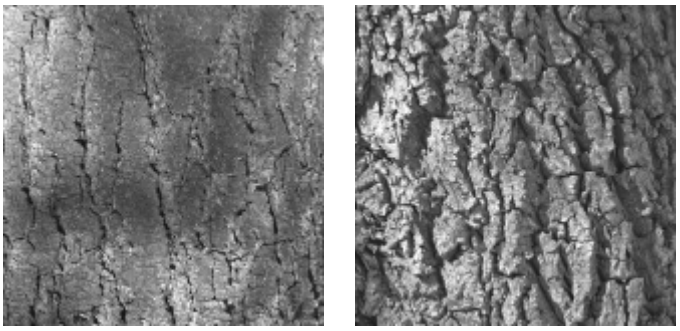


FIGURE 4.8 – Exemples de classes de texture dont les taux moyens de détection en utilisant le modèle AGGD sont inférieurs à 50% alors que le pourcentage du rejet de l'*a priori* est nulle.



4.5.4 Modèles multivariés

Nous proposons d'évaluer en TBIR les performances du modèle SIRV à densité caractéristique Weibull [Lasmar et Berthoumieu, 2010] et des modèles à copule Gaussienne [Lasmar et Berthoumieu, 2011]. En plus du modèle GC-MAGG, nous définissons le modèle Weibull multivarié à copule Gaussienne (GC-MWbl) puisque la modélisation à copule Gaussienne que nous avons introduite en section 3.3 est générique et peut être utilisée pour divers *a priori* univariés. Nous employons la divergence de Jeffreys pour mesurer la similarité entre distributions (cf. corollaire 4.2 et corollaire 4.4). Le voisinage considéré pour caractériser la dépendance intra-bande est de dimension $d = 2 \times 2 = 4$.

Nous mettons d'abord en évidence le gain en performances affiché en passant d'un modèle univarié AGGD ou Wbl à son dual multivarié à copule Gaussienne GC-MAGG ou GC-MWbl. Ensuite, nous comparons les performances des modèles SIRV, GC-MAGG et GC-MWbl aux performances de trois modèles multivariés de la littérature :

- le modèle Gaussien multivarié (MG) : En employant la méthode de *Gaussianisation* décrite dans [Tzagkarakis *et al.*, 2006], la dépendance intra-bande est modélisée par la loi Gaussienne multivariée. La JD pour le modèle MG est déduite par exemple à partir de l'Équation 4.12 (voir aussi [Penny, 2001]).
- le modèle de mélange de Gaussiennes multivariées (MGmix) [Vasconcelos, 2004, Permuter *et al.*, 2006] : C'est un approximateur universel de toute distribution recherchée. Nous l'avons ajusté en considérant un nombre de 2, 3 et 4 composantes gaussiennes. Les valeurs initiales des hyperparamètres sont générées aléatoirement, et l'algorithme EM est utilisé pour l'estimation en s'arrêtant après convergence ou 100 itérations. Une valeur de régularisation $\epsilon = 10^{-5}$ est ajoutée à la diagonale des matrices de covariance estimées afin de s'assurer qu'elles soient définies-positives. Nous avons employé la méthode variationnelle pour calculer l'approximation de la JD entre modèles MGmix [Hershey et Olsen, 2007].
- le modèle de la Gaussienne généralisée multivariée (MGG) introduit récemment par Verdoolaege et Scheunders [Verdoolaege et Scheunders, 2011] : La distance géodésique de Fisher-Rao est employée. En l'absence d'une forme analytique dans le cas général, les auteurs ont dérivé une limite au cas particulier de deux distributions avec le même paramètre de forme [Verdoolaege et Scheunders, 2012].

Discussion des résultats

Afin d'illustrer l'intérêt de l'extension des modèles univariés AGGD et Wbl en modèles multivariés à copule Gaussienne GC-MAGG et GC-MWbl, nous avons employé le benchmark B3 et les transformées OWT et DT-CWT. Nous rapportons les taux moyens de détection obtenus pour les différents modèles en employant 1 ou 2 échelles (Tableau 4.4 etTableau 4.5). Il est évident que les performances s'améliorent en employant un modèle multivarié à copule Gaussienne en comparaison de son dual univarié quel que soit la décomposition. En employant 2 échelles, les performances du modèle GC-MAGG employé avec la transformation OWT sont comparables à celles du modèle GC-MWbl caractérisant les modules des sous-bandes résultantes de la DT-CWT. Toutefois, le nombre de sous-bandes résultantes de la DT-CWT est le double de celles obtenues via OWT. Par conséquent, le coût calculatoire pour atteindre les performances du modèle GC-MWbl & DT-CWT est le double de celui nécessaire pour GC-MAGG & OWT.
En effet, dans le cas univarié, la complexité calculatoire de la mesure de similarité n'était pas une contrainte. En revanche, dans le cas multivarié, le calcul matriciel découlant des expressions analytiques de la JD augmente la complexité calculatoire. Or, la JD globale est la somme des JD entre les distributions jointes (cf. Équation 4.27), donc la complexité calculatoire totale est une fonction linéaire du nombre de sous-bandes. Pour une comparaison équitable des modèles multivariés, nous devons les considérer avec le même nombre de sous-bandes. Si on veut comparer un modèle M_1 employé pour modéliser des sous-bandes résultantes de la transformée OWT à Nsc échelles, à un autre modèle M_2 modélisant les sous-bandes résultantes de la DT-CWT, il faut que le nombre d'échelles pour la DT-CWT soit égal à $\frac{Nsc}{2}$.
Par exemple, Nous comparons les performance du modèle GC-AMGG modélisant les sous-bandes OWT à 2 échelles avec celles du modèle GC-MWbl employé avec la DT-CWT à 1 échelle (6 sous-bandes pour les deux décompositions). Nous constatons, qu'à nombre de sous-bandes égal, le modèle GC-AMGG affiche des meilleures performances que le modèle GC-MWbl (Tableau 4.6 et Figure 4.9).

Nombre de classes	AGGD	GC-MAGG	gain	Wbl	GC-MWbl	gain
OWT, db2						
10	84.67	**88.33**	3.66	81.98	86.28	4.30
15	82.55	**87.26**	4.71	79.86	84.19	4.34
20	79.01	**84.14**	5.13	75.83	80.87	5.04
25	78.14	**83.94**	5.80	74.10	80.20	5.80
30	75.63	**81.13**	5.50	71.55	77.21	5.66
35	74.10	**80.59**	6.49	70.31	76.79	6.47
40	74.13	**80.04**	5.91	69.77	75.98	6.21
			Moy=5.31			**Moy=5.40**
DT-CWT						
10	82.76	**88.49**	5.73	83.36	87.11	3.76
15	80.75	**87.03**	6.28	81.31	85.15	3.84
20	77.04	**84.35**	7.31	77.27	81.96	4.69
25	76.51	**83.67**	7.16	76.57	81.96	5.39
30	73.28	**80.75**	7.47	73.30	78.54	5.25
35	72.41	**80.65**	8.24	72.47	78.46	5.99
40	71.85	**79.77**	7.92	71.45	77.30	5.85
			Moy=7.15			**Moy=4.97**

TABLE 4.4 – Amélioration des performances en TBIR en employant les modèles multivariés à copule Gaussienne GC-MAGG et GC-MWbl ; Le benchmark testé est B3 et le nombre d'échelles de décomposition est 1.

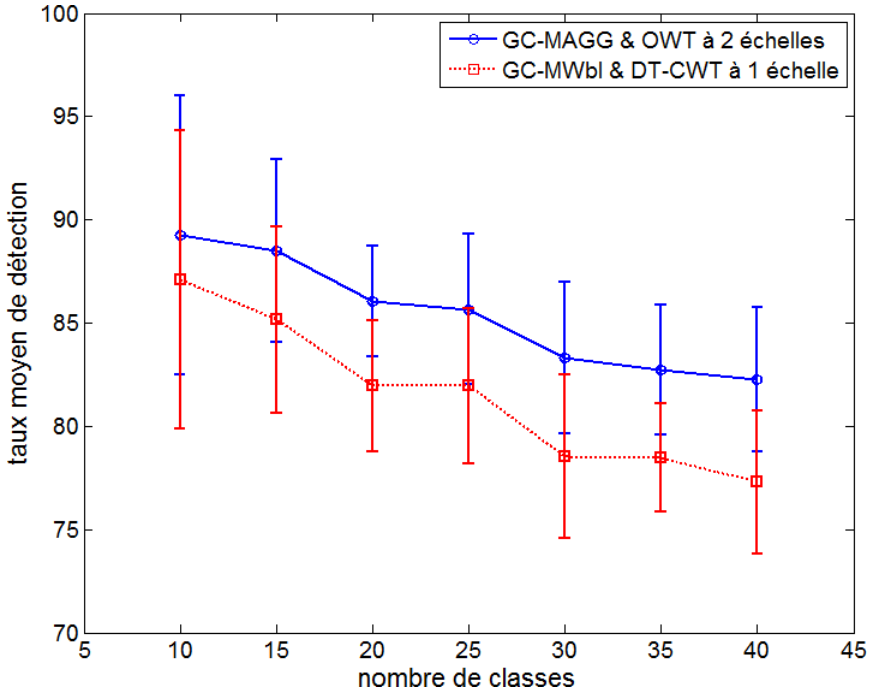
Nombre de classes	AGGD	GC-MAGG	gain	Wbl	GC-MWbl	gain
OWT, db2						
10	87.18	**89.25**	2.07	85.53	88.50	2.98
15	85.28	**88.50**	3.21	83.27	86.34	3.07
20	82.36	**86.03**	3.67	80.17	83.71	3.54
25	82.12	**85.66**	3.54	79.45	83.11	3.65
30	79.45	**83.31**	3.86	76.35	80.51	4.15
35	78.62	**82.74**	4.12	75.64	80.01	4.37
40	78.77	**82.27**	3.50	75.12	79.22	4.10
			Moy=3.42			**Moy=3.69**
DT-CWT						
10	86.76	89.61	2.84	87.93	**89.84**	1.91
15	85.28	**88.43**	3.15	86.27	88.36	2.08
20	82.50	85.90	3.40	83.45	**86.08**	2.63
25	81.85	85.24	3.40	82.84	**85.98**	3.14
30	79.19	82.76	3.57	80.01	**83.08**	3.07
35	78.71	82.69	3.98	79.74	**83.04**	3.30
40	78.15	81.60	3.44	78.61	**81.81**	3.20
			Moy=3.40			**Moy=2.76**

TABLE 4.5 – Amélioration des performances en TBIR en employant les modèles multivariés à copule Gaussienne GC-MAGG et GC-MWbl ; Le benchmark testé est B3 et le nombre d'échelles de décomposition est 2.

	Nombre de classes de texture						
	10	15	20	25	30	35	40
GC-MAGG OWT, db2 2 échelles	**89.25**	**88.50**	**86.03**	**85.66**	**83.31**	**82.74**	**82.27**
GC-MWbl DT-CWT 1 échelle	87.11	85.15	81.96	81.96	78.54	78.46	77.30

TABLE 4.6 – Comparaison des performances entre les modèles GC-MAGG & OWT et GC-MWbl & DT-CWT, à nombre égal de sous-bandes.

FIGURE 4.9 – Comparaison des taux moyens de détection entre les modèles GC-MAGG & OWT et GC-MWbl & DT-CWT à nombre égal de sous-bandes.



Dans la suite nous comparons les performances du modèle GC-MAGG par rapport aux modèles multivariés MG, MGmix et MGG. Nous rapportons sur le Tableau 4.7 les taux moyens de détection obtenus pour les benchmarks B1 et B2, en employant la transformée OWT,db5 à 2 échelles ou la DT-CWT à 1 échelle.

		MG	MGmix		MGG	SIRV	GC-MAGG
			nc=2	nc=3			
B1	OWT,db5 2 échelles	70.17	78.80	79.21	70.67	80.51	**82.98**
	DT-CWT 1 échelle	65.71	78.22	79.70	71.51	77.51	**83.27**
B2	OWT,db5 2 échelles	88.19	95.44	95.11	93.04	95.17	**96.25**
	DT-CWT 1 échelle	83.93	94.59	93.04	91.31	93.41	**95.95**

TABLE 4.7 – Comparaison des performances des modèles multivariés en TBIR en considérant les benchmark B1 et B2, en utilisant le taux moyen de détection.

Nous observons d'abord les faibles performances du modèle MG malgré l'emploi d'une procédure de Gaussianisation couteuse. Ceci est dû à une perte d'information en Gaussianisant les bandes avec la méthode proposée dans [Tzagkarakis *et al.*, 2006] puisqu'on ne garde pas une trace des statistiques des sous-bandes avant Gaussianisation ; contrairement au modèle GC-MAGG où la Gaussianisation est paramétrique employant les paramètres des lois marginales qui font eux-mêmes partie des hyperparamètres en plus de la matrice de covariance de la sous-bande Gaussianisée.
Dans tous les cas [12] , le modèle GC-MAGG offre un gain notable par rapport à tous les autres modèles en terme de détection des textures similaires. Ce qui confirme encore une fois notre choix de ce modèle pour la caractérisation statistique de la texture dans le domaine des ondelettes.
Le modèle SIRV affiche des performances moindres mais au moins équivalentes à celles du modèle de mélange de Gaussiennes MGmix. Même si le modèle MGmix représente une bonne approximation de la distribution jointe des coefficients intra-bande, son emploi en TBIR ne conduit pas aux meilleures performances. Nous notons que l'ajout de composantes pour le modèle MGmix n'apporte pas systématiquement des améliorations de ses performances

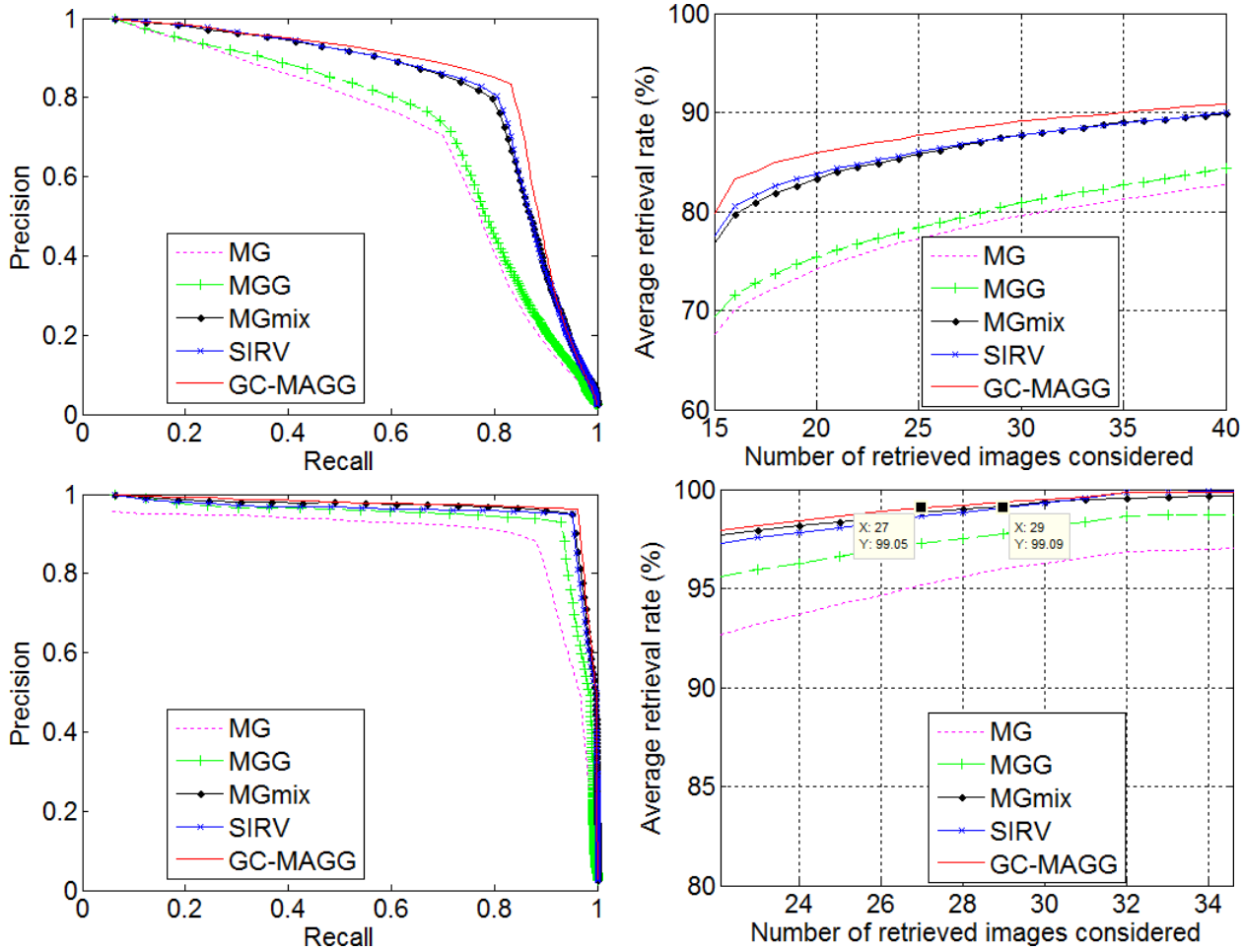
12. En comparant les performances des modèles en considérant la même transformée pour tous.

tout en augmentant le temps de calcul des mesures de similarité malgré l'emploi de l'approximation variationnelle proposée dans [Hershey et Olsen, 2007]. C'est pour cette raison que nous avons réalisé nos simulations en considérant le modèle MGmix à 2 ou 3 composantes, qui est le bon compromis pour atteindre des bonnes performances tout en respectant la contrainte du temps de calcul de la mesure de similarité.
Nous soulignons aussi que les performances du modèle MGG qui a été récemment introduit pour la modélisation des textures en couleur, diminuent (en comparaison avec les résultats obtenus dans [Verdoolaege et Scheunders, 2011]) en l'employant pour la caractérisation de la texture uniquement sans information sur les couleurs. Nous pourrions améliorer les performances en considérant l'information de texture et de couleur comme nous l'avons déjà démontré dans [Bombrun *et al.*, 2011], mais cela dépasse le cadre de notre travail où nous nous sommes intéressés uniquement à la texture.
Nous représentons graphiquement les performances en TBIR en utilisant la transformée conduisant au meilleur taux moyen de détection pour chaque modèle multivarié Figure 4.10 :

- Benchmark B1 : les modèles MG et SIRV avec la transformée OWT ; GC-MAGG, MGG et MGmix à 3 composantes avec la DT-CWT.
- Benchmark B2 : tous les modèles sont employés avec la transformée OWT ; 2 composantes ont été considérées pour le modèle MGmix.

Nous confirmons les mêmes conclusions citées précédemment. Le modèle GC-AMGG à copule Gaussienne et à marginale AGGD dépasse tous les autres modèles multivariés. Les modèles SIRV à densité caractéristique Weibull et le MGmix présentent des performances similaires. Tandis que les modèles MG et MGG affichent des résultats médiocres.

FIGURE 4.10 – Représentations graphiques des performances des modèles mulitvariés en TBIR en utilisant le benchmark B1 (première ligne) et B2 (deuxième ligne).



Nous présentons sur la Figure 4.11 des exemples de classes de textures du benchmark B1 qui sont bien classifiées à l'aide des modèles SIRV ou GC-MAGG. Nous remarquons qu'en plus des textures stochastiques dont les statistiques jointes des sous-bandes peuvent être bien ajustées par le modèle SIRV ou GC-MAGG (cf. sous-section 3.4.3), des textures structurées peuvent aussi être bien distinguées. Parmi les 40 classes de textures du benchmark B1 qui sont mieux classifiées en utilisant le modèle GC-MAGG en comparaison au modèle SIRV et dont les taux moyens de détection sont supérieurs à 90%, la majorité sont des textures stochastiques Figure 4.12. Une seule classe de texture a été mieux classifiée en utilisant le modèle SIRV par rapport au modèle GC-MAGG, nous la représentons sur la Figure 4.13, et elle est de type structuré.

FIGURE 4.11 – Exemples de classes de texture dont les taux moyens de détection en utilisant les modèles SIRV à densité caractéristique Weibull ou GC-MAGG sont supérieurs à 95% ; la transformée employée est OWT, db5 à deux échelles.

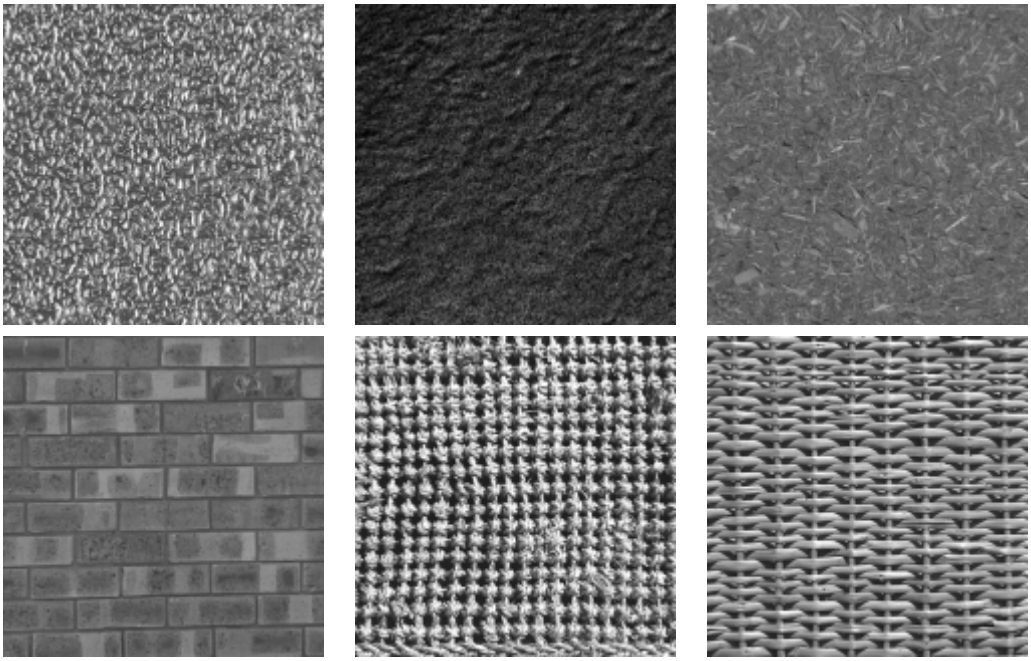


FIGURE 4.12 – Exemples de classes de texture dont les taux moyens de détection en utilisant le modèle GC-MAGG est supérieur à 90% et supérieur à celui obtenu en utilisant le modèle SIRV à densité caractéristique Weibull ; la transformée employée est OWT, db5 à deux échelles.

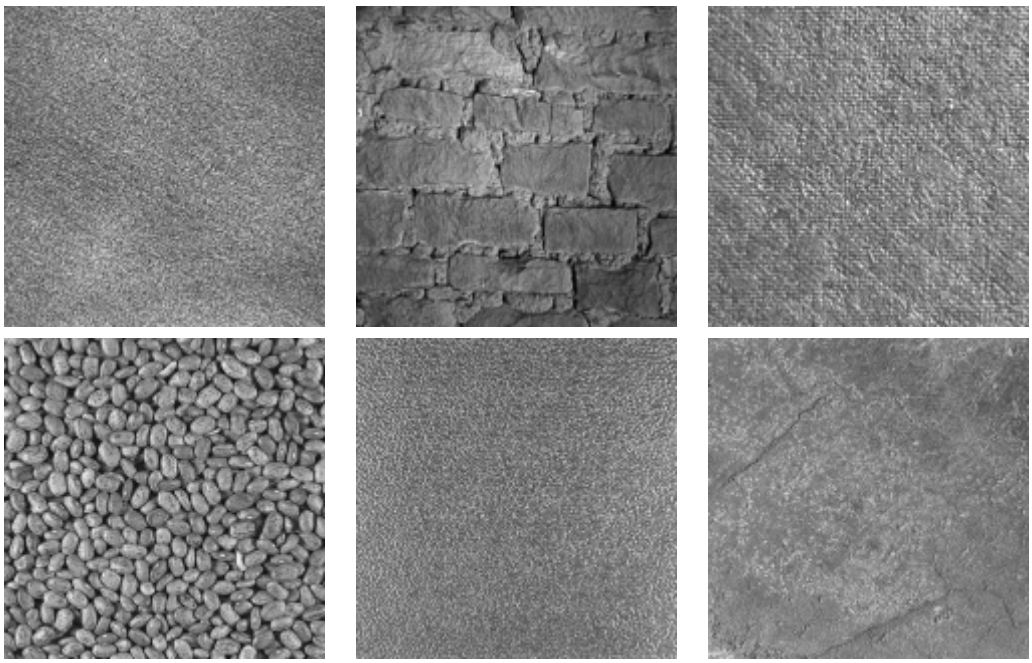


FIGURE 4.13 – Exemple de classe de texture dont les taux moyens de détection en utilisant le modèle SIRV à densité caractéristique Weibull est supérieur à 90% et supérieur à celui obtenu en utilisant le modèle GC-MAGG ; la transformée employée est OWT, db5 à deux échelles.

Afin d'étudier les performances des modèles GC-MAGG et SIRV en classification des textures quasi-déterministes, nous sélectionnons de l'album de Brodatz 20 classes de ce type (Figure 4.14). Chaque image de texture de taille 640x640 est divisée en 64 imagettes de taille 80x80 pour construire une base de 1280 textures. Nous utilisons le même protocole expérimental employé précédemment pour comparer les performances des différents modèles multivariés. Les résultats des taux moyens de détection pour ces classes de textures régulières sont présentés dans le Tableau 4.8. Nous remarquons que les modèles SIRV et GC-MAGG affichent de très bonnes performances même sur des textures déterministes. Néanmoins, ces performances ne sont pas forcement proportionnelles à la qualité d'ajustement des modèles aux statistiques jointes comme nous pouvons le remarquer via les taux de rejet des tests d'adéquation qui ne sont pas très faibles Tableau 4.9.

Nous signalons que notre objectif n'était pas d'atteindre des performances élevées mais surtout de mettre en lumière le pouvoir descriptif des différents modèles statistiques des coefficients d'ondelettes en considérant le TBIR comme plateforme de comparaison.

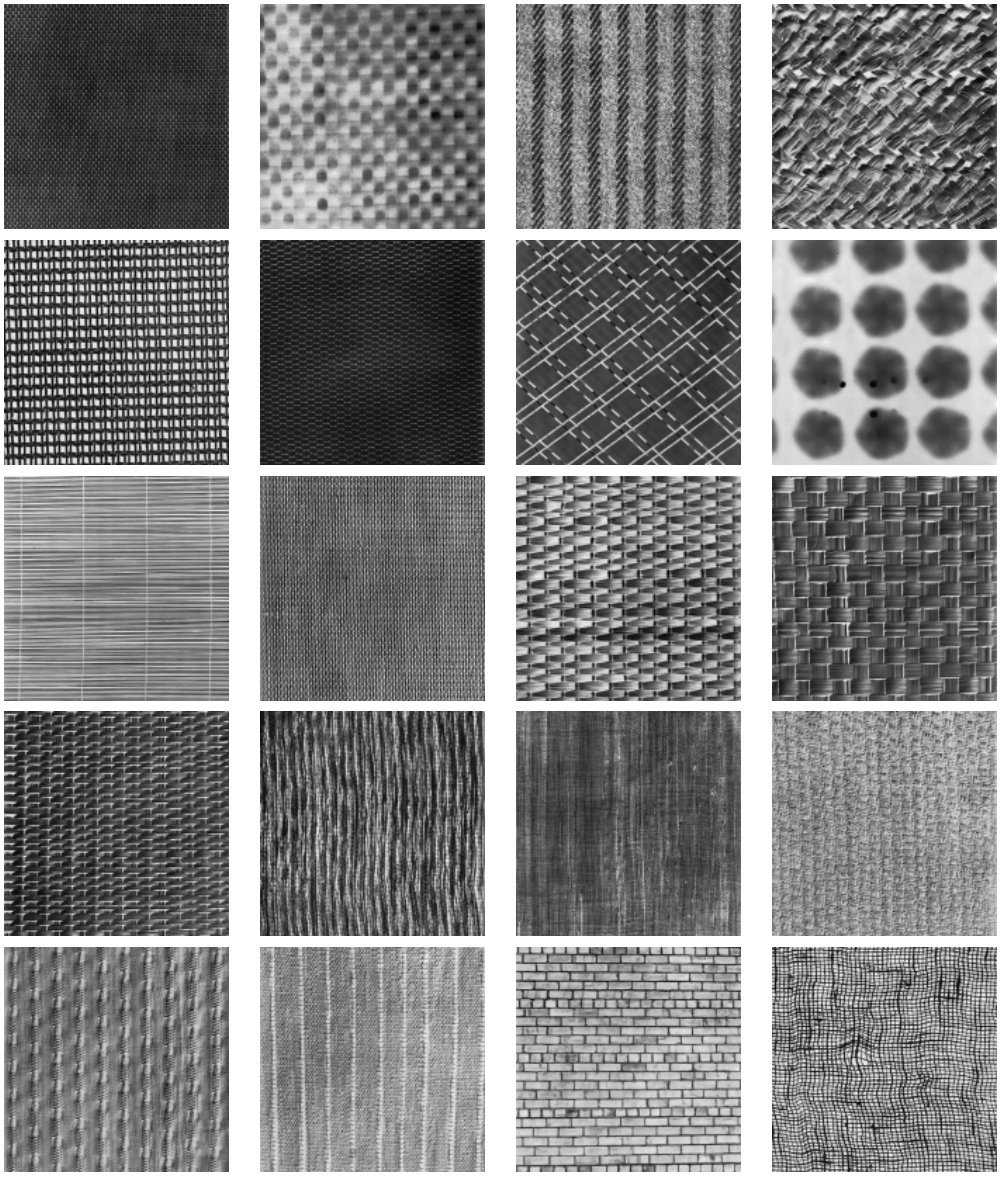
	MG	MGmix	MGG	SIRV	GC-MAGG
OWT,db5 2 échelles	82.82	90.00	87.93	95.71	**96.43**
DT-CWT 1 échelle	79.45	89.92	85.09	92.90	**94.84**

TABLE 4.8 – Comparaison des taux moyens de détection en TBIR en utilisant 1280 textures déterministes issues des 20 classes de textures de la Figure 4.14.

	SIRV		GC-MAGG	
	Royston	Doornik-Hansen	Royston	Doornik-Hansen
OWT,db5 2 échelles	30.23	20.51	20.42	13.91
DT-CWT 1 échelle	28.91	19.57	10.48	10.99

TABLE 4.9 – Pourcentages de rejet de l'hypothèse d'adéquation du modèle SIRV à densité caractéristique Weibull ou du modèle GC-MAGG, aux statistiques jointes des sous-bandes de 1280 textures structurées.

FIGURE 4.14 – Les 20 classes de textures structurées de l'album de Brodatz, utilisées pour tester les performances des modèles probabilistes multivariés en TBIR.



4.6 Conclusion et discussion

Dans ce chapitre nous avons employé les modèles statistiques proposés (AGGD, SIRV et GC-MAGG) dans une application de recherche d'images par le contenu texture TBIR.

Après avoir présenté le cadre Bayésien pour la recherche et la classification d'images, nous avons proposé des formes analytiques des divergences de Kullback-Leibler et par extension celles de Jeffreys pour les modèles proposés. Dans un premier temps, nous avons calculé l'expression analytique de la KLD/JD pour le modèle AGGD. Ensuite, nous avons montré qu'à partir de la densité jointe du modèle SIRV il est possible d'obtenir une expression de la divergence ne dépendant que des paramètres du modèle et discriminante de point de vue de la classification. Enfin, pour le modèle à copule, nous avons proposé une approximation de la forme exacte de la divergence qui permet aussi d'obtenir une forme exclusivement dépendante des paramètres et suffisamment discriminante pour être utilisée dans un schéma de classification. L'avantage des formes analytiques des KLD/JD ne dépendant que des paramètres est de pouvoir exploiter un modèle statistique dans une application où la complexité calculatoire de la mesure de similarité est une contrainte qui ne peut pas être satisfaite en employant la vraisemblance comme mesure ou bien en estimant la KLD/JD à l'aide d'une méthode de Monte Carlo.

En comparant le modèle univarié asymétrique AGGD avec d'autres modèles de l'état de l'art en modélisation univariée des coefficients d'ondelettes, les résultats expérimentaux ont montré ses bonnes performances qui sont supérieures à celles de la version symétrique GGD. Nous avons ensuite employé le modèle GC-AGG qui est une extension de l'AGGD au cas multivarié afin de mettre en évidence l'amélioration des performances en TBIR en considérant un modèle multivarié joint au lieu de se limiter aux marginales.

Dans une deuxième série de tests, nous avons comparé les modèles proposés SIRV à densité caractéristique Weibull et GC-MAGG aux modèles multivariés connus de l'état de l'art. Les performances de la GC-MAGG s'avèrent supérieures tandis que le SIRV est au moins équivalent au modèle de mélange de Gaussiennes.

Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire de thèse, nous nous sommes intéressés à la caractérisation des contenus texturaux. Partant des résultats d'études en neurosciences assimilant le mécanisme de la perception humaine à un schéma de transformée en échelle et en orientation, nous nous somme focalisés sur la modélisation probabiliste des coefficients d'ondelettes.

Dans le premier chapitre, nous avons dressé un état de l'art sur le sujet, nous avons présenté les méthodes classiques d'analyse de texture selon quatre grandes familles : les méthodes géométriques fondées sur l'extraction des primitives ; les méthodes basées sur l'analyse spatiale ; les méthodes fréquentielles et enfin les méthodes employant les modèles probabilistes. Après avoir proposé un bilan comparatif entre les différentes méthodes, nous avons mis en avant l'approche de caractérisation de texture dans le domaine des ondelettes à l'aide des modèles probabilistes.

Dans un cadre statistique univarié, nous avons introduit dans le deuxième chapitre le modèle AGGD afin de décrire les statistiques marginales des sous-bandes d'ondelettes en prenant en compte l'éventuelle asymétrie des distributions empiriques. Le modèle AGGD est une généralisation du modèle GGD qui est l'*a priori* le plus fréquemment considéré dans les différentes applications impliquant les statistiques marginales des sous-bandes. Après avoir mis en évidence l'asymétrie des distributions marginales des sous-bandes à travers quelques exemples ainsi que la répartition du skewness des sous-bandes de la base VisTex, nous avons présenté quelques propriétés et méthodes d'estimation associées au modèle AGGD. L'étude des performances de trois méthodes d'estimation a montré la supériorité de l'estimateur ML que nous avons adopté tout au long de ce travail. Enfin, nous avons utilisé les tests statistiques d'adéquation de χ^2 et de Kolmogorv-Smirnov et nous avons montré le potentiel du modèle AGGD par rapport à l'*a priori* usuel GGD en terme de qualité d'adéquation aux statistiques marginales des sous-bandes.

Dans le deuxième chapitre, nous avons pris en considération la dépendance entre coefficients de sous-bandes en étudiant leurs statistiques jointes dans un cadre statistique multivarié. Nous avons d'abord mis en évidence la

prédominance de la dépendance intra-bande par rapport aux dépendances inter-orientations et inter-échelles. Ensuite, en considérant une sous-bande comme la réalisation d'un vecteur aléatoire, nous avons proposé le modèle des vecteurs aléatoires à invariance sphérique (SIRV) pour la description des statistiques jointes dans un contexte non-Gaussien. Nous avons évoqué quelques propriétés du modèle SIRV ainsi que la méthode d'estimation du point fixe, et nous avons réalisé des tests statistiques qui nous ont conduits à sélectionner la loi Weibull comme densité caractéristique.
Par la suite, afin de caractériser la structure de la dépendance intra-bande, nous avons aussi considéré les modèles multivariés à copule. Les différents critères de sélection, nous ont conforté dans notre choix d'utiliser la copule Gaussienne pour définir le modèle Gaussien généralisé asymétrique multivarié à copule Gaussienne (GC-MAGG) qui est une extension multivariée du modèle AGGD.
La qualité d'ajustement du modèle SIRV à densité caractéristique Weibull et du modèle GC-MAGG aux statistiques jointes des sous-bandes a été étudiée. Le test de Kolomogorv-Smirnov a été employé pour tester l'hypothèse de la densité caractéristique Weibull du modèle SIRV ainsi que pour celle relative à l'utilisation des lois marginales AGGD du modèle GC-MAGG. Le noyau du modèle SIRV et la copule du modèle GC-MAGG étant Gaussiens, nous avons employé les tests statistiques de Royston et de Doornik-Hansen pour évaluer l'hypothèse de *Gaussianité* multivariée. Les résultats en termes de taux de rejet des hypothèses ont montré globalement le bon ajustement des deux modèles particulièrement pour les statistiques jointes des sous-bandes des textures stochastiques.

Nous avons consacré le quatrième chapitre à l'évaluation des performances des modèles introduits dans un cadre Bayésien de recherche d'images par le contenu textural (TBIR). D'abord, nous avons présenté le cadre Bayésien pour la classification et la recherche d'images et nous avons montré la liaison entre la minimisation de la probabilité d'erreur de classification et le calcul de similarité entre modèles stochastiques à l'aide d'une métrique probabiliste. Ensuite, nous avons rappelé les différents modèles univariés et multivariés utilisés dans la littérature pour les applications de classification ou en TBIR. Afin de comparer les performances en TBIR des modèles AGGD, SIRV et GC-MAGG, nous avons calculé des formes analytiques des métriques probabilistes que nous pouvons leur associer. Cela nous a amené à proposer de nouvelles mesures de similarité. Enfin, les différentes expérimentations que nous avons menées ont montré, d'une part les bonnes performances du modèle AGGD par rapport aux modèles univariés usuels ne prenant pas en compte l'asymétrie éventuelle des statistiques marginales ; d'autre part, que le modèle GC-MAGG présente les meilleures performances en termes de taux

moyen de bonne détection tandis que le modèle SIRV est au moins équivalent en performance au modèle de mélange de Gaussiennes multivariées qui est un approximateur universel des distributions multivariées.

Les perspectives à ce travail sont nombreuses. D'une part, concernant le modèle AGGD, notre étude a montré que ce dernier permet une meilleure représentation statistique du contenu textural que celle offerte par le modèle symétrique GGD. Il serait donc intéressant d'exploiter ce modèle dans les nombreuses applications où le modèle GGD a été utilisé avec succès telles que le débruitage, la compression, le tatouage numérique etc.. Par exemple, dans [Mittal *et al.*, 2012] les auteurs ont employé l'*a priori* AGGD afin de proposer une méthode sans référence pour l'évaluation de la qualité des images. Ensuite, l'analyse de nos résultats en ce qui concerne les tests d'adéquation ont montré que les modèles stochastiques étaient plus particulièrement adaptés pour certaines classes de textures. Nous avons remarqué en outre que ces classes peuvent varier d'un modèle à l'autre. Ces différentes observations nous amènent à penser que nous pourrions tirer partie d'une approche multi-modèles afin d'améliorer les résultats obtenus.

Un troisième point concerne les aspects « mesure de similarité ». Dans le contexte multivarié, nous avons proposé différentes approches permettant de fournir des formes analytiques ne dépendant que des paramètres des lois. À partir de ces nouvelles mesures de similarité telles que la KLD ou la JD pour le modèle SIRV dans sa description jointe, nous pouvons envisager d'utiliser des approches de type « Clustering » avec ou sans apprentissage et généraliser les approches k-means au cas des textures.

L'emploi des modèles SIRV à densité Weibull ou du modèle GC-MAGG n'est pas limité au cadre présenté dans ce travail ; nous notons par exemple l'utilisation du modèle SIRV à densité Weibull proposé conjointement à l'expression analytique de la métrique probabiliste associée pour développer une méthode à référence réduite pour l'évaluation de la qualité des images [Abdelouahad *et al.*, 2012]. Nous avons mis en évidence l'importance de la caractérisation de la dépendance intra-bande, il serait donc intéressant de pouvoir mettre en place des nouveaux estimateurs Bayésiens basés sur les modèles SIRV ou GC-MAGG, ce qui constitue un autre moyen d'évaluer les performances dans le cadre du débruitage d'images.

Il serait aussi important d'étudier et de comparer les performances des modèles proposés dans le domaine des ondelettes géométriques adaptatives (bandelettes, contourlettes, ridgelettes, curvelettes, groupelettes, tetrolettes etc.). Il est donc envisageable de produire une étude comparative pour déterminer la transformée qui permet d'atteindre les meilleurs performances.

Enfin, une autre extension consiste à étudier la modélisation des sous-bandes de type complexe car certaines études notamment menées par Portilla et Si-

moncelli [Portilla et Simoncelli, 2000] ont montré l'importance de la phase dans la description des coefficients complexes des sous-bandes.

Publications et diffusion des résultats

Articles dans des revues avec comité de lecture

- [1] **N. Lasmar**, Y. Berthoumieu, "Gaussian Copula Multivariate Modeling for Image Texture Retrieval Using Wavelet Transforms," *IEEE Transactions on Image Processing*, soumis en juin 2011, en révision.

Articles dans des actes de conférences internationales avec comité de lecture

- [2] **N. Lasmar**, Y. Stitou, S. Jouini, Y. Berthoumieu, et M. Najim, "Parametric Gaussianization procedure of wavelet coefficients for texture retrieval," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2008)*, Las Vegas, Nevada, USA, 2008, pp. 749-752.
- [3] Y. Stitou, **N. Lasmar**, et Y. Berthoumieu, "Copulas based multivariate Gamma modeling for texture classification," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2009)*, Taipei, Taiwan, 2009, pp. 1045-1048.
- [4] **N. Lasmar**, Y. Stitou, et Y. Berthoumieu, "Multiscale skewed heavy tailed model for texture analysis," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP 2009)*, Cairo, Egypt, 2009, pp. 2281-2284.
- [5] **N. Lasmar** et Y. Berthoumieu, "Multivariate statistical modeling for texture analysis using wavelet transforms," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2010)*, Dallas, Texas, USA, 2010, pp. 790-793.
- [6] A. Drissi El Maliani, **N.Lasmar**, M. El Hassouni, Y. Berthoumieu, et D. Aboutajdine "Texture classification based on the generalized gamma distribution and the dual tree complex wavelet transform,"

in *Proceedings of the International Symposium on Image/Video Communications over fixed and mobile networks (ISIVC 2010)*, Rabat, Morocco, 2010, pp. 1-4.

– [7] L. Bombrun, **N. Lasmar**, Y. Berthoumieu, and G. Verdoolaege, "Multivariate texture retrieval using the SIRV representation and the geodesic distance," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2011)*, Prague, Czech Republic, 2011, pp. 865–868.

– [8] L. Bombrun, **N. Lasmar**, Y. Berthoumieu, and G. Verdoolaege, "Multivariate texture retrieval using the geodesic distance between elliptically distributed random variables," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP 2011)*, Brussels, Belgium, 2011, pp. 3637 –3640.

Articles dans des actes de conférences nationales avec comité de lecture

– [9] L. Bombrun, **N. Lasmar**, Y. Berthoumieu, et G. Verdoolaege "Indexation d'images texturées couleur basée sur la distance géodésique entre des variables elliptiquement distribuées," dans *Actes du Colloque Groupe de Recherche et d'Études du Traitement du Signal et des Images (GRETSI 2011)*, Bordeaux, France, 2011.

Conférences internationales avec comité de lecture et édition en livre

– [10] A. D. El Maliani, M. El Hassouni, **N. Lasmar**, Y. Berthoumieu, and D. Aboutajdine, "Color Texture Classification Using Rao Distance between Multivariate Copula Based Models," in *Computer Analysis of Images and Patterns*, vol. 6855, P. Real, D. Diaz-Pernil, H. Molina-Abril, A. Berciano, and W. Kropatsch, Eds. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 498–505.

Conférences internationales avec comité de lecture sans acte

– [11] Y. Berthoumieu, **N. Lasmar**, Y. Stitou, M. C. Peron, "Texture discrimination based upon stochastic modeling," *Mathematics and Image Analysis 2009 (MIA 2009)*, December 14-16th 2009.

Journées nationales

- [12] Y. Berthoumieu, **N. Lasmar**, Y. Stitou, M.C. Peron, "Caractérisation de champs texturaux : transformation de Nataf et copules elliptiques," *Journée thématique du GDR ISIS « Modèles stochastiques multivariés en traitement d'images »*, Télécom ParisTech, 04 Mars 2009.
- [13] A. Atto, L. Bombrun, **N. Lasmar**, Y. Berthoumieu, " Mesure de stochasticité et modélisation stochastique pour les images texturées," *Journée thématique du GDR ISIS « modélisation mathématique des textures »*, Télécom ParisTech, 12 Janvier 2011.

Annexes

Annexe A

Approximation de la fonction *Ratio Gaussien généralisée*

Nous présentons une approximation analytique de la fonction *Ratio Gaussien généralisé* définie par :

$$GGR : x \longmapsto \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{x}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma\left(\frac{3}{x}\right)} \tag{A.1}$$

La méthode des moments pour estimer le paramètre de forme β du modèle GGD ou AGGD fait intervenir l'inverse de fonction GGR (cf. sous-sous-section 2.2.3.1, l'Équation 2.45). Cependant, une expression analytique de GGR^{-1} n'étant pas disponible, des tables de correspondance sont employées pour estimer β par interpolation. Une autre alternative efficace consiste à utiliser une approximation de la fonction GGR et d'en déduire une forme analytique approximative de GGR^{-1}. Cette approximation est donnée par [Gonzalez-Farias *et al.*, 2009] :

$$GGR^*(x) = \begin{cases} 3^{\frac{x-6}{2x}} 2^{\frac{4-x}{x}} & \text{si} \quad x \in [0, 0.2771981[\\ a_1x^2 + a_2x + a_3 & \text{si} \quad x \in [0.2771981, 0.828012[\\ \dfrac{b_1x}{1 + b_2x + b_3x^2} & \text{si} \quad x \in [0.828012, 2.631718[\\ \frac{3}{4} - c_1e^{-c_2x+c_3x^2} & \text{si} \quad x \in [2.631718, +\infty[\end{cases} \tag{A.2}$$

où $a_1 = -0.535707356$, $a_2 = 1.1689399911$, $a_3 = -0.1516189217$,
$b_1 = 0.9694429$, $b_2 = 0.8727534$, $b_3 = 0.07350824$,
$c_1 = 0.3655157$, $c_2 = 0.6723532$et $c_3 = 0.033834$.
Nous représentons sur la Figure A.1 les courbes de la fonction GGR ainsi

que son approximation GGR^*. Nous remarquons la bonne qualité de cette approximation, ce qui est aussi vérifié à l'aide de l'erreur quadratique entre GGR et GGR^* qui est inférieure à 10^{-5} (Figure A.2). Finalement, une approximation de l'inverse de GGR est donnée par :

$$GGR^{-1}(y) \approx \begin{cases} 2\dfrac{\ln \frac{27}{16}}{\ln \frac{3}{4y^2}} & \text{si} \quad y \in]0, 0.131246[\\ \frac{1}{2a_1}\left(-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3 + 4a_1y}\right) & \text{si} \quad y \in [0.131246, 0.448994[\\ \frac{1}{2b_3y}\left(b_1 - b_2y - \sqrt{(b_1 - b_2y)^2 - 4b_3y^2}\right) & \text{si} \quad y \in [0.448994, 0.671256[\\ \frac{1}{2c_3}\left(c_2 - \sqrt{c_2^2 + 4c_3 \ln \frac{3-4y}{4c_1}}\right) & \text{si} \quad y \in \left[0.671256, \frac{3}{4}\right[\end{cases} \tag{A.3}$$

Cette approximation peut être efficacement utilisée sans avoir recours aux tables de correspondance et d'interpolation pour estimer le paramètre de forme avec la méthode des moments.

FIGURE A.1 – Comparaison des courbes de la fonction GGR et de son approximation.

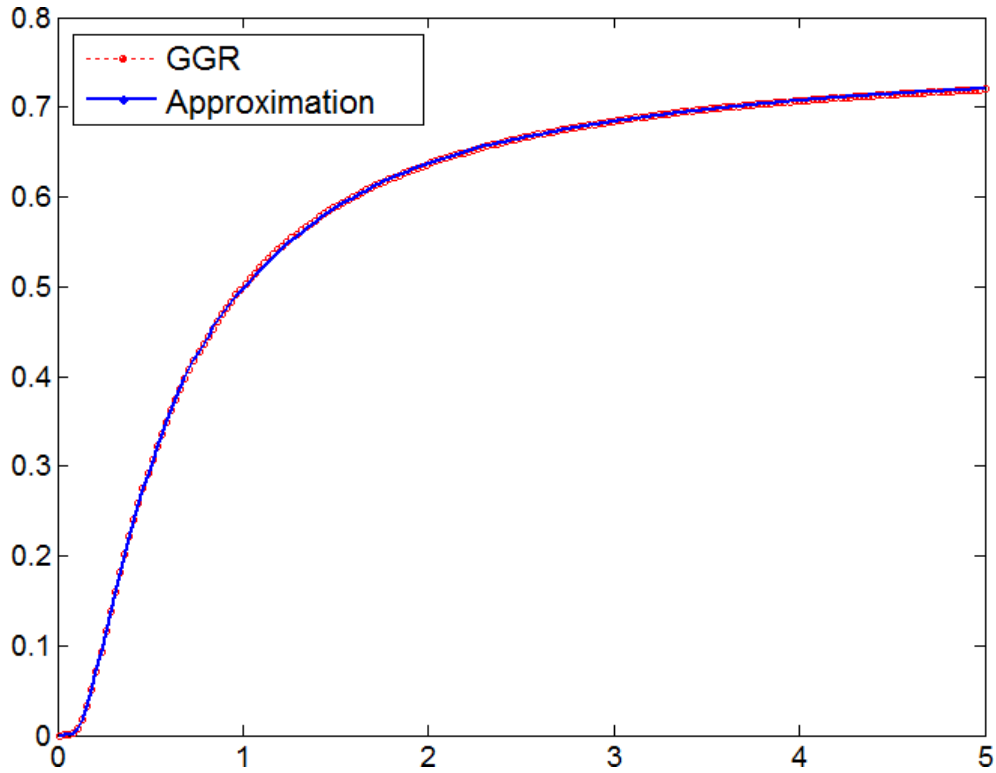
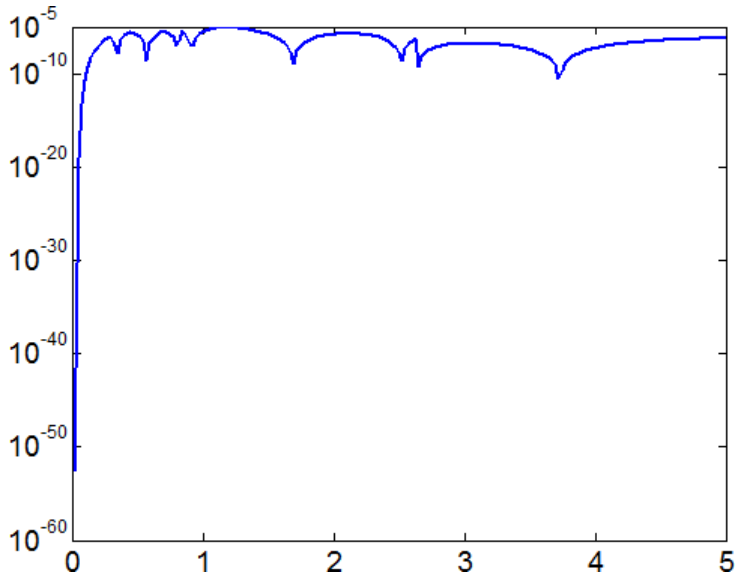


FIGURE A.2 – L'erreur quadratique entre la fonction GGR et son approximation.



Annexe B

Génération d'échantillons de distribution AGGD

Nous utilisons la méthode de la transformée inverse pour générer des échantillons $x_1, \ldots, x_L$ distribués selon la loi AGGD de paramètres $(\alpha_L, \alpha_R, \beta)$. Cela consiste à générer des échantillons $u_1, \ldots, u_L$ distribués selon la loi uniforme $U(0,1)$ et calculer l'ensemble des antécédents $x_1, \ldots, x_L$ définis par :

$$x_i = F^{-1}(u_i; \alpha_L, \alpha_R, \beta), i = 1, \ldots, L \tag{B.1}$$

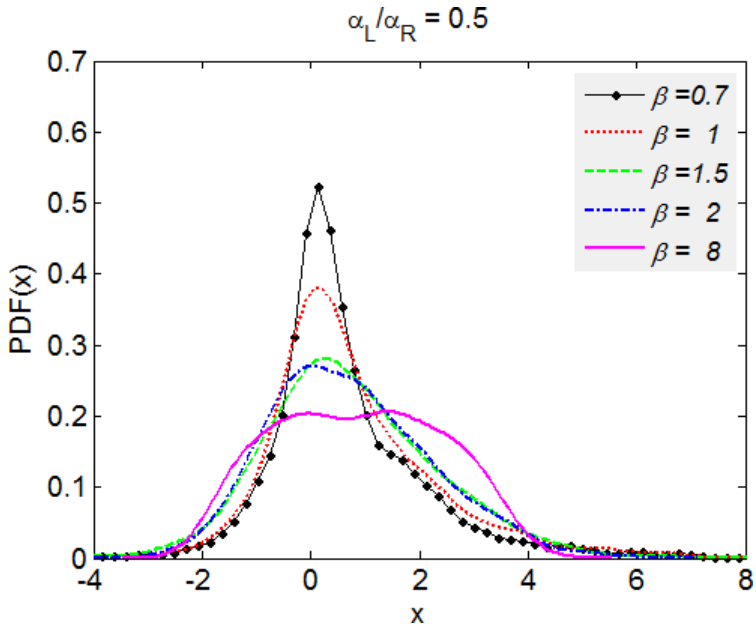
où $F^{-1}(.; \alpha_L, \alpha_R, \beta)$ est l'inverse de la fonction de répartition d'une loi AGGD, défini par :

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} -\alpha_L \left[\gamma^{-1}\left(1/\beta, 1 - \frac{(\alpha_L+\alpha_R)y}{\alpha_l}\right)\right]^{1/\beta} & \text{si} \qquad y < \dfrac{\alpha_L}{\alpha_L+\alpha_R} \\ -\alpha_R \left[\gamma^{-1}\left(1/\beta, \frac{(\alpha_L+\alpha_R)y-\alpha_L}{\alpha_R}\right)\right]^{1/\beta} & \text{si} \qquad y \geqslant \dfrac{\alpha_L}{\alpha_L+\alpha_R} \end{cases} \tag{B.2}$$

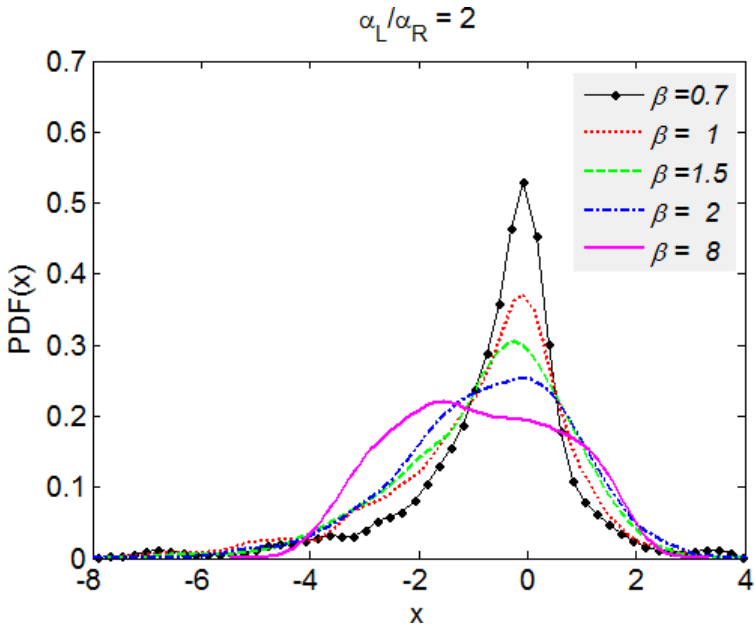
et $\gamma(a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^b t^{a-1} e^{-t} dt$ est la fonction Gamma incomplète.

Nous représentons sur les Figure B.1 et Figure B.2 des distributions empiriques d'échantillons de taille $L = 1000$ générés en utilisant la méthode de la transformée inverse selon des lois AGGD de différents paramètres.

FIGURE B.1 – Distributions empiriques des échantillons de lois AGGD de paramètres $\beta \in 0.7, 1, 1.5, 2, 8$, (a) d'écart type à gauche = 1 et d'écart type à droite = 2. (b) d'écart type à gauche = 2 et d'écart type à droite = 1.

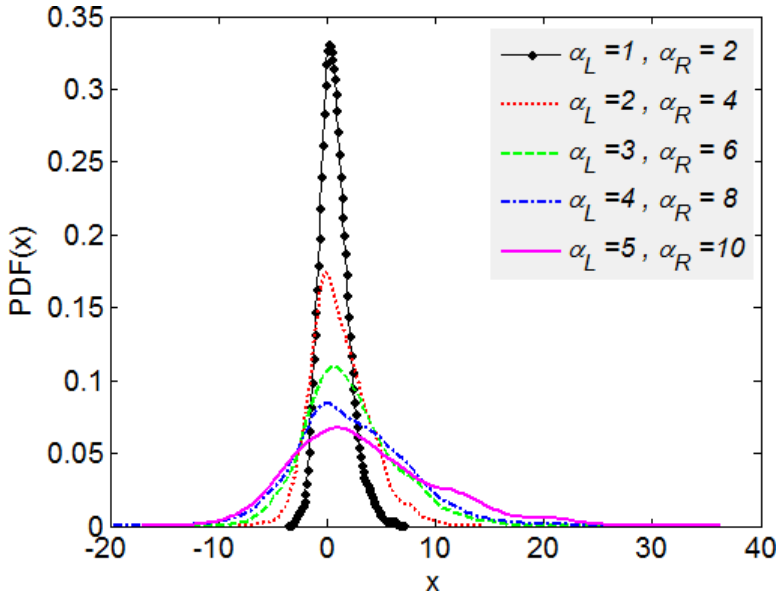


(a)

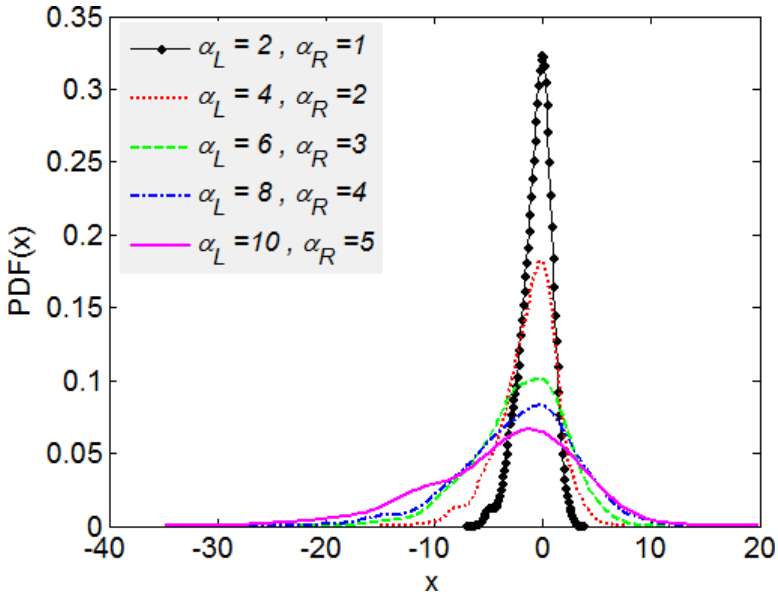


(b)

FIGURE B.2 – Distributions empiriques des échantillons de lois AGGD de paramètres de forme $\beta = 1.5$, (a) Le rapport d'asymétrie $\gamma = \alpha_L/\alpha_R = 0.5$, l'écart type à droite est le double de l'écart type à gauche. (b) Le rapport d'asymétrie $\gamma = \alpha_L/\alpha_R = 2$, l'écart type à gauche est le double de l'écart type à droite.



(a)



(b)

Annexe C

Estimateur IFM et fonction d'autocorrélation

Nous considérons une sous-bande dont on veut modéliser les statistiques jointes à l'aide d'un modèle multivarié à copule Gaussienne caractérisant la dépendance intra-bande. La méthode d'estimation IFM se résume en deux étapes (cf. sous-section 3.3.4, page 107), nous montrons dans cette partie comment estimer la matrice de covariance Σ à l'aide de la FFT.
Dans le cas d'utilisation d'une fenêtre glissante de taille $p \times q$ parcourant une sous-bande pour caractériser la dépendance intra-bande, la matrice de covariance de la copule Gaussienne peut être estimée sans construction de la matrice d'observations. En effet, après avoir estimé les paramètres des lois marginales $\hat{\theta}$ $(= (\hat{\alpha}_L, \hat{\alpha}_R, \hat{\beta})$ dans le cas du modèle GC-MAGG par exemple), nous les utilisons pour *Gaussianiser*[1] la sous-bande en employant la transformation $\vec{y} = \phi^{-1}\left(F(\vec{x};\hat{\theta})\right)$ (voir un exemple de *Gaussianisation* sur la Figure C.1). Le résultat est une sous-bande Gaussienne dont la matrice d'observations est $\mathbf{G} = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_L]$ où les $\vec{y}_r, r = 1, \ldots, L$ sont exactement ceux donnés par l'Équation 3.27. En considérant le voisinage de taille $p \times q$ qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,q} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{p,1} & \cdots & y_{p,q} \end{bmatrix}$$

le vecteur $\vec{y}$ représente la vectorisation de ce voisinage et s'écrit

$$\vec{y} = [y_{1,1} \cdots y_{p,1} \cdots y_{1,i} \cdots y_{p,i} \cdots y_{1,q} \cdots y_{p,q}]^t, i = 1, \ldots, q$$

1. Une description plus détaillée de cette procédure de Gaussianisation est donnée dans [Lasmar *et al.*, 2008]

Ensuite, la matrice de covariance de $\vec{y}$ est définie par $\mathbb{E}[\vec{y}\vec{y}^t]$, donc

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{1,1} & \cdots & \Sigma_{1,q} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \Sigma_{q,1} & \cdots & \Sigma_{q,q} \end{bmatrix}$$

où $\Sigma_{i,j} = \mathbb{E}\left[[y_{1,i} \cdots y_{p,i}]^t [y_{1,j} \cdots y_{p,j}]\right], 1 \leqslant i, j \leqslant q$.
Nous avons pour tout $1 \leqslant k, l \leqslant p$, $\mathbb{E}\left[y_{k,i} y_{l,j}\right] = \mathbb{E}\left[y(m,n) y(m+l-k, n+j-i)\right]$ puisque le processus est stationnaire. Par conséquent,

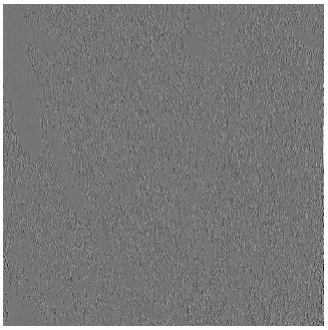
$$\mathbb{E}\left[y_{k,i} y_{l,j}\right] = R(l-k, j-i)$$

où R est la fonction d'auto-corrélation.
Finalement,

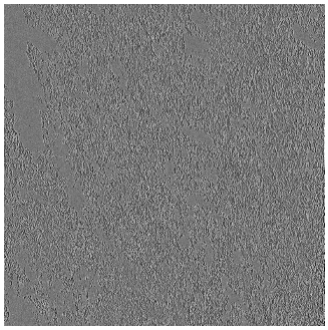
$$\Sigma_{i,j} = (R(l-k, j-i))_{1 \leqslant k,l \leqslant p} = \begin{bmatrix} R(0, j-i) & \cdots & R(p-1, j-i) \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ R(-p+1, j-i) & \ddots & R(0, j-i) \end{bmatrix}$$

Les matrices $\Sigma_{i,j}$ sont de type Toeplitz et la matrice de covariance Σ est Toeplitz par bloc. Si nous notons BG la sous-bande *Gaussianisée*, la fonction d'auto-corrélation est estimée efficacement à l'aide de la FFT : $R = FFT^{-1}\left(|FFT(BG)|^2\right)$; il suffit ensuite de construire Σ en agençant les coefficients pour obtenir une matrice Toeplitz par bloc.

FIGURE C.1 – La sous-bande *Gaussianisée* est obtenue à partir de la sous-bande initiale en vue d'estimer la matrice de covariance à l'aide de la FFT.



Sous-bande initiale



Sous-bande *Gaussianisée*

Annexe D

Tests de la *Gaussianité* multivariée

Soient $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_N}$, $\vec{y_i} \in \mathbb{R}^d$ $i = 1, \ldots, N$ des échantillons d'un vecteur aléatoire $\vec{y}$ de dimension d dont on veut vérifier l'hypothèse de *Gaussianité* jointe.

D.1 Test de Royston

La méthode de Royston pour vérifier si une réalisation est celle d'un vecteur aléatoire Gaussien $\vec{y}$ emploie dans un premier temps un test de *Gaussianité* univariée pour chaque composante marginale $y_j, j = 1, \ldots, d$ en utilisant la statistique de Shapiro-Wilk [Shapiro et Wilk, 1965], ensuite les d tests sont combinés pour calculer la statistique de Royston afin de décider de l'hypothèse de *Gaussianité* jointe [Royston, 1983]. De ce fait, le test de Royston est considéré comme une extension multivariée du test de *Gaussianité* univariée proposé initialement par Shapiro et Wilk [Shapiro et Wilk, 1965]. Le test de Royston transforme les statistiques de Shapiro-Wilk calculées sur chaque composante marginale, en une nouvelle statistique (de Royston) qui est approximativement de distribution khi-deux.

Nous notons $w_j, j = 1, \ldots, d$ les statistiques de Shapiro-Wilk [1] de chaque

1. L'algorithme en Fortran pour le calcul de la statistique de Shapiro-Wilk est disponible sur `http://lib.stat.cmu.edu/apstat/181`.

composante y_j du vecteur aléatoire $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_d)^t$, nous calculons

$$R_j = \left[\phi^{-1} \left(\frac{\phi\left(-\frac{\ln(1 - w_j) - m}{s} \right)}{2} \right) \right]^2 \tag{D.1}$$

où les variables m et s sont calculées par approximations polynomiales [Royston, 1992] :

$$\begin{cases} x = \ln(d) \\ m = 0.0038915x^3 - 0.083751x^2 - 0.31082x - 1.5861 \\ s = \exp(0.0030302x^2 - 0.082676x - 0.4803) \end{cases} \tag{D.2}$$

Ensuite, la statistique de Royston est calculée par :

$$H = e \sum_{j=1}^{d} \frac{R_j}{d} \tag{D.3}$$

où $e = \dfrac{d}{1 + (d-1)mC}$, mC est appelée corrélation moyenne et calculée par

$$\begin{cases} x = \ln(d) \\ u = 0.715 \\ v = -0.0018034x^3 + 0.015124x^2 + 0.21364 \\ \Sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{y}\vec{y}^t \text{ (matrice de covariance)} \\ T = (T_{k,l})_{1 \leqslant k,l \leqslant d} = \Sigma.^5. \times (1. - (u. \times (1. - \Sigma).^u)./v) \\ \text{(matrice de covariance transformée, l'opérateur "." indique} \\ \text{un calcul matriciel terme à terme)} \\ mC = \dfrac{\sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} T_{k,l} - d}{d^2 - d} \end{cases} \tag{D.4}$$

D'après Royston [Royston, 1983], la statistique H de l'Équation D.3 est approximativement distribuée selon la loi khi-deux avec e degrés de liberté. Par conséquent, la p-value est donnée par

$$\alpha\prime = 1 - \frac{\gamma(e/2, H/2)}{\Gamma(e/2)} \tag{D.5}$$

où γ est la fonction *Gamma incomplète*.
Finalement, en fixant le *risque de première espèce* α, l'hypothèse de *Gaussianité* jointe est rejetée si $\alpha\prime \leqslant \alpha$, sinon l'hypothèse est acceptée.

D.2 Test de Doornik-Hansen

La méthode de Doornik-Hansen [Doornik et Hansen, 2008] est une extension multivariée du test de *Gaussianité* univariée de Bowman et Shenton [Bowman et Shenton, 1975]. Tout d'abord, la matrice de covariance est diagonalisée dans une base orthonormée de vecteurs propres, ensuite, après la normalisation des données dont on veut tester la *Gaussianité* jointe, des données transformées sont calculées en utilisant les données normalisées, la matrice diagonale des valeurs propres et la matrice des vecteurs propres.
Nous notons $\Sigma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{y}\vec{y}^t$ la matrice de covariance de $\vec{y}$. La diagonalisation permet d'écrire $\Sigma = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale de valeurs propres et P est une matrice de vecteurs propres. En considérant les échantillons normalisés du vecteur $\vec{z} = \frac{\vec{y} - \text{mean}(\vec{y})}{\text{std}(\vec{y})}$, nous calculons la matrice des données transformées par :

$$T = ZPD^{-0.5}P^t$$

où $D^{-0.5}D^{0.5} = I_d$ et $Z = [\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}]^t \in M_{N,d}(\mathbb{R})$ est une matrice de taille $N \times d$ composée d'échantillons normalisés.
En considérant la matrice T comme ensemble échantillons d'un vecteur $\vec{t}$, nous calculons les vecteurs des moments d'ordre 3 et 4 par :

$$\begin{cases} \vec{sk} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_{i,j}^3\right)_{j=1,\ldots,d}^t \\ \\ \vec{ku} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_{i,j}^4\right)_{j=1,\ldots,d}^t \end{cases}$$

Ensuite, nous calculons des moments transformés d'ordre 3 $\vec{z}_1$ et d'ordre 4 $\vec{z}_2$ par :

$$\begin{cases} a = \frac{3(d^2+27d-70)(d+1)(d+3)}{(d-2)(d+5)(d+7)(d+9)} \\ b = -1 + \sqrt{2(a-1)} \\ c = \frac{1}{\sqrt{0.5\ln(b)}} \\ \vec{y} = \sqrt{\frac{(b-1)(d+1)(d+3)}{12(d-2)}}\vec{sk} \\ \vec{z}_1 = c\ln(\vec{y} + \sqrt{\vec{y}.^2+1}) \end{cases} \tag{D.6}$$

$$\begin{cases} a = (d-3)(d+1)(d^2+15d-4) \\ b = \dfrac{(d-2)(d+5)(d+7)(d^2+27d-70)}{6a} \\ c = \dfrac{(d-7)(d+5)(d+7)(d^2+2d-5)}{6a} \\ e = \dfrac{(d+5)(d+7)(d^3+37d^2+11d-313}{12a} \\ \vec{al} = b + c\ \vec{sk}.^2 \\ \vec{kh} = \text{abs}\left(2e(\vec{ku} - 1 - \vec{sk}.^2)\right) \\ \vec{z}_2 = \left((\vec{kh}./2\vec{al}).^{1/3} + 1./9\vec{al} - 1\right). \times \sqrt{9\vec{al}} \end{cases} \tag{D.7}$$

L'opérateur "." désigne un calcul matriciel terme à terme, les fonctions $\sqrt{}$, ln() et abs() opèrent sur les vecteurs terme à terme.
Les moments transformés $\vec{z}_1$ et $\vec{z}_2$ sont utilisés pour calculer la statistique de Doornik-Hansen :

$$DH = \vec{z}_1^t \vec{z}_1 + \vec{z}_2^t \vec{z}_2 \tag{D.8}$$

Si les échantillons à tester sont issus d'une distribution Gaussienne multivariée, la statistique de Doornik-Hansen est approximativement distribuée selon la loi khi-deux avec $2d$ degrés de liberté. La p-value est donc donnée par

$$\alpha\prime = 1 - \frac{\gamma(d, DH/2)}{\Gamma(d)} \tag{D.9}$$

où γ est la fonction *Gamma incomplète*.
En fixant le *risque de première espèce* α, l'hypothèse de *Gaussianité* jointe est rejetée si $\alpha\prime \leqslant \alpha$, sinon l'hypothèse est acceptée.

Annexe E

Comparaison entre la règle de sélection MAP et l'emploi de l'expression analytique de la JD

Nous proposons de comparer les performances et la complexité calculatoire de la règle de sélection MAP (cf. Équation 4.3) et la JD (cf. corollaire 4.4) employés comme mesure de similarité entre modèles GC-MAGG en TBIR. Nous considérons une sous-bande d'une image requête I_q représentée par la matrice d'observations $\mathbf{X} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_L]$ où $\vec{x}_r = (x_{1,r}, \ldots, x_{d,r})^t, r = 1, \ldots, L$ et d est la dimension du voisinage considéré pour construire la matrice d'observations.

La complexité calculatoire pour mesurer la similarité entre la sous-bande de I_q et les sous-bandes lui correspondant des M images candidates dans une base de données, dépend de la taille de la base M et des dimensions des matrices d'observations issues des sous-bandes ($d \times L$). Dans le cas d'un *a priori* multivariée GC-MAGG, les différentes fonctions impliquées pour le calcul de la vraisemblance ou de la JD (ln, exp, Γ, ψ, ϕ, ϕ^{-1}, γ etc.) dépendent de l'implémentation (Matlab, C/C++, etc.) et de la configuration matérielle (processeur, mémoire etc.). Nous proposons d'analyser la complexité calculatoire comme fonction de M, d et L, par conséquent nous considérons les fonctions impliquées ayant une complexité $O(1)$ (ne dépendant pas des tailles M, d et L). Nous supposons que le pré-calcul des inversions de matrices et des déterminants est effectué hors-ligne lors de l'indexation de la base, nous nous intéressons seulement au calcul des mesures de similarité s'effectuant en ligne lors de l'interrogation de la base par un utilisateur.
L'emploi de la JD pour mesurer la similarité entre l'image requête I_q et les M candidates de la base d'images, nécessite d'abord l'estimation des hyperparamètres du modèle GC-MAGG pour représenter les statistiques jointes

en utilisant la matrice d'observation $\mathbf{X}$ d'une sous-bande de I_q. L'estimation des paramètres des lois marginales a une complexité $O(L)$, elle ne dépends ni de la dimension d ni de la taille de la base M. Ensuite, la matrice d'observation $\mathbf{X}$ est transformée en réalisations Gaussiennes $\mathbf{G} = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_L]$ (cf. Équation 3.27, page 107). Cette procédure de *Gaussianisation* présente une complexité en $O(d \times L)$. Enfin, l'estimation de la matrice de covariance Σ à partir des réalisations Gaussiennes $\mathbf{G}$ (cf. Équation 3.28) a une complexité de $O(d^2 \times L)$ et le calcul de Σ^{-1} une complexité de $O(d^3)$ (en utilisant la méthode de Gaussian-Jordan par exemple). La complexité globale pour estimer les hyperparamètres d'une sous-bande de I_q est de $O\left((d^2 + d + 1) \times L + d^3\right)$. L'étape suivante consiste à utiliser l'expression analytique de la JD (cf. corollaire 4.4) en employant les hyperparamètres d'une sous-bande de I_q et ceux pré-calculés des images indexées. Cette expression analytique ne dépend pas de la taille d'observations L. La complexité de calcul dépend seulement de la dimension d puisque les matrices de covariance et leurs inverses sont déjà pré-calculés. Donc, la complexité de la JD revient à celle de deux produits matriciels et deux calculs de trace ainsi que d calculs de JD entre lois marginales (qui sont en $O(1)$). Par suite, la complexité de la JD entre deux modèles GC-MAGG est $O(2d^3 + 3d)$ et celle pour mesurer la similarité d'une sous-bande de I_q et les sous-bandes lui correspondant des M images candidates est $O((2d^3 + 3d) \times M)$. Finalement, la complexité totale incluant l'estimation des hyperparamètres d'une sous-bande de l'image requête ainsi que le calcul de similarité avec les sous-bandes des M images candidates est :

$$O((2d^3 + 3d) \times M + (d^2 + d + 1) \times L + d^3) \tag{E.1}$$

La règle de sélection MAP (cf. Équation 4.3) nécessite l'évaluation du log-vraisemblance des vecteurs $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_L$ de la matrice d'observations d'une sous-bande de I_q en supposant les M *a priori* des images candidates. En considérant l'expression de la PDF GC-MAGG de l'Équation 3.29, la complexité calculatoire de $\sum_{i=1}^{L} \ln(f_{GC-MAGG}(\vec{x}_i; \theta))$ est composée de :

- $O(d \times L)$ pour la procédure de Gaussianisation afin de calculer les réalisations Gaussiennes $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_L$ en utilisant les paramètres marginaux des hyperparamètres du *theta*.
- $O((d^2 + d) \times L)$ pour le calcul de $-\vec{y}_i^t(\Sigma^{-1} - I)\vec{y}_i, i = 1, \ldots, L$.
- $O(d \times L)$ pour calculer $\prod_{k=1}^{d} f_k(x_{k,i}), i = 1, \ldots, L$

La complexité calculatoire totale pour calculer le log-vraisemblance des observations d'une sous-bande de I_q sous les M *a priori* des images candidates est :

$$O((d^2 + 3d) \times L \times M) \tag{E.2}$$

Nous remarquons que la règle de sélection MAP a une complexité calculatoire plus importante que celle nécessaire en utilisant la forme analytique de la JD. Par exemple, en considérant un voisinage de dimension $d = 2 \times 2 = 4$, et une sous-bande de taille $L = 64\times = 64 = 4096$, la mesure de la similarité entre une image requête et $M = 1000$ candidates nécessite 114688000 opérations en utilisant le règle MAP, tandis que seulement 226080 opérations sont nécessaires en utilisant l'expression analytique de la JD (un rapport d'environ 500).
Même si la taille L peut être diminuée par un facteur $1/n$ à l'aide d'un sous-échantillonnage uniforme comme cela a été proposé dans [Vasconcelos, 2004], la règle MAP reste considérablement coûteuse en terme du temps de calcul avec une complexité de $O((d^2 + 3d) \times \frac{L}{n} \times M)$.

Afin de comparer les performances et la complexité de la règle de sélection MAP et de l'expression analytique de la JD pour le modèle GC-MAGG, nous avons réalisé les expérimentations en TBIR sur le benchmark B1 (cf. sous-section 4.5.1) en employant la transformée OWT,db5. Les résultats rapportés sur le Tableau E.1 montrent les meilleures performances en utilisant l'expression analytique de la JD proposée, à la fois en terme du taux moyen de détection ainsi qu'en terme de temps de calcul.

	JD		MAP,n=1		MAP,n=4		MAP,n=8		MAP,n=16	
	ARR	Temps	ARR	Temps	ARR	Temps	ARR	Temps	ARR	Temps
1 échelle	79.70	43s	69.02	11h32m	67.54	3h18m	66.92	1h58m	64.51	1h10m
2 échelles	82.98	86s	74.03	14h49m	72.93	4h26m	74.46	2h48m	70.17	1h50m
3 échelles	83.07	128s	75.53	15h58m	75.53	5h08m	74.87	3h24m	72.84	2h25m

Table E.1 – Le taux moyen de détection (ARR) et le temps consommé pour l'expérimentation en TBIR sur le benchmark B1, en utilisant l'expression analytique de la JD ou la règle de sélection MAP avec ou sans sous-échantillonnage.

Bibliographie

[Abdelouahad *et al.*, 2012] Abdelouahad, A. A., El Hassouni, M., Cherifi, H. et Aboutajdine, D. (2012). Image quality assessment measure based on natural image statistics in the tetrolet domain. *In* Hutchison, D., Kanade, T., Kittler, J., Kleinberg, J. M., Mattern, F., Mitchell, J. C., Naor, M., Nierstrasz, O., Pandu Rangan, C., Steffen, B., Sudan, M., Terzopoulos, D., Tygar, D., Vardi, M. Y., Weikum, G., Elmoataz, A., Mammass, D., Lezoray, O., Nouboud, F. et Aboutajdine, D., éditeurs : *Image and Signal Processing*, volume 7340, pages 451–458. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[Abramowitz et Stegun, 1965] Abramowitz, M. et Stegun, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York.

[Achim *et al.*, 2001] Achim, A., Bezerianos, A. et Tsakalides, P. (2001). Novel bayesian multiscale method for speckle removal in medical ultrasound images. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 20(8):772 –783.

[Aiazzi *et al.*, 1999] Aiazzi, B., Alparone, L. et Baronti, S. (1999). Estimation based on entropy matching for generalized gaussian PDF modeling. *Signal Processing Letters, IEEE*, 6(6):138 –140.

[Alata et Olivier, 2003] Alata, O. et Olivier, C. (2003). Choice of a 2-d causal autoregressive texture model using information criteria. *Pattern Recognition Letters*, 24(9–10):1191–1201.

[Alata et Ramananjarasoa, 2005] Alata, O. et Ramananjarasoa, C. (2005). Unsupervised textured image segmentation using 2-d quarter plane autoregressive model with four prediction supports. *Pattern Recognition Letters*, 26(8):1069–1081.

[Arivazhagan et Ganesan, 2003a] Arivazhagan, S. et Ganesan, L. (2003a). Texture classification using wavelet transform. *Pattern Recognition Letters*, 24(9–10):1513–1521.

[Arivazhagan et Ganesan, 2003b] Arivazhagan, S. et Ganesan, L. (2003b). Texture segmentation using wavelet transform. *Pattern Recognition Letters*, 24(16):3197–3203.

[Arivazhagan *et al.*, 2006] Arivazhagan, S., Ganesan, L. et Subash Kumar, T. (2006). Texture classification using ridgelet transform. *Pattern Recognition Letters*, 27(16):1875–1883.

[Barnard et Khan, 2004] Barnard, T. et Khan, F. (2004). Statistical normalization of spherically invariant non-gaussian clutter. *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, 29(2):303–309.

[Bay *et al.*, 2008] Bay, H., Ess, A., Tuytelaars, T. et Van Gool, L. (2008). Speeded-up robust features (SURF). *Computer Vision and Image Understanding*, 110(3):346–359.

[Bazi *et al.*, 2005] Bazi, Y., Bruzzone, L. et Melgani, F. (2005). An unsupervised approach based on the generalized gaussian model to automatic change detection in multitemporal SAR images. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 43(4):874 – 887.

[Berg, 2009] Berg, D. (2009). Copula goodness-of-fit testing : an overview and power comparison. *The European Journal of Finance*, 15(7-8):675–701.

[Bharati *et al.*, 2004] Bharati, M. H., Liu, J. et MacGregor, J. F. (2004). Image texture analysis : methods and comparisons. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 72(1):57–71.

[Bombrun *et al.*, 2011] Bombrun, L., Berthoumieu, Y., Lasmar, N.-E. et Verdoolaege, G. (2011). Multivariate texture retrieval using the geodesic distance between elliptically distributed random variables. *In 2011 18th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 3637 –3640.

[Boubchir et Fadili, 2006] Boubchir, L. et Fadili, J. M. (2006). A closed-form nonparametric bayesian estimator in the wavelet domain of images using an approximate α-stable prior. *Pattern Recognition Letters*, 27(12): 1370–1382.

[Boubchir *et al.*, 2010] Boubchir, L., Nait-Ali, A. et Petit, E. (2010). Multivariate statistical modeling of images in sparse multiscale transforms domain. *In Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing - ICIP 2010*, pages 1877 –1880.

[Bovik *et al.*, 1990] Bovik, A., Clark, M. et Geisler, W. (1990). Multichannel texture analysis using localized spatial filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(1):55 –73.

[Bowman et Shenton, 1975] Bowman, K. O. et Shenton, L. R. (1975). Omnibus test contours for departures from normality based on $\sqrt{b1}$ and b2. *Biometrika*, 62(2):243–250.

[Briassouli *et al.*, 2005] Briassouli, A., Tsakalides, P. et Stouraitis, A. (2005). Hidden messages in heavy-tails : DCT-domain watermark detection using alpha-stable models. *IEEE Transactions on Multimedia*, 7(4):700 – 715.

[Buccigrossi et Simoncelli, 1999] Buccigrossi, R. et Simoncelli, E. (1999). Image compression via joint statistical characterization in the wavelet domain. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(12):1688 –1701.

[Caelli, 1982] Caelli, T. (1982). On discriminating visual textures and images. *Perception & Psychophysics*, 31(2):149–159.

[Cambanis *et al.*, 1981] Cambanis, S., Huang, S. et Simons, G. (1981). On the theory of elliptically contoured distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 11(3):368–385.

[Chang *et al.*, 2000] Chang, S., Yu, B. et Vetterli, M. (2000). Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 9(9):1532 –1546.

[Chellappa et Chatterjee, 1985] Chellappa, R. et Chatterjee, S. (1985). Classification of textures using gaussian markov random fields. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(4):959 – 963.

[Chellappa et Kashyap, 1985] Chellappa, R. et Kashyap, R. (1985). Texture synthesis using 2-d noncausal autoregressive models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(1):194 – 203.

[Cho et Bui, 2005] Cho, D. et Bui, T. D. (2005). Multivariate statistical modeling for image denoising using wavelet transforms. *Signal Processing : Image Communication*, 20(1):77–89.

[Choy et Tong, 2007] Choy, S. et Tong, C. (2007). Supervised texture classification using characteristic generalized gaussian density. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 29(1):35–47.

[Clausi et Yue, 2004] Clausi, D. et Yue, B. (2004). Comparing cooccurrence probabilities and markov random fields for texture analysis of SAR sea ice imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(1):215 – 228.

[Comer et Delp, 1999] Comer, M. et Delp, E. (1999). Segmentation of textured images using a multiresolution gaussian autoregressive model. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(3):408 –420.

[Conte *et al.*, 2002] Conte, E., Maio, A. D. et Ricci, G. (2002). Recursive estimation of the covariance matrix of a compound-gaussian process and its application to adaptive CFAR detection. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50(8):1908–1915.

[Coroyer, 1996] Coroyer, C. (1996). *Apport des corrélations d'ordre élevé à l'analyse de textures non-gaussiennes.* Thèse de doctorat, Université Cergy-Pontoise.

[Coroyer *et al.*, 1997] Coroyer, C., Declercq, D. et Duvaut, P. (1997). Texture classification using third order correlation tools. *In Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics, 1997*, pages 171 –175.

[Cross et Jain, 1983] Cross, G. R. et Jain, A. K. (1983). Markov random field texture models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-5(1):25 –39.

[Dasgupta et Carin, 2006] Dasgupta, N. et Carin, L. (2006). Texture analysis with variational hidden markov trees. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(6):2353 – 2356.

[Daubechies, 1992] Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.

[De Bonet, 1997] De Bonet, J. S. (1997). Multiresolution sampling procedure for analysis and synthesis of texture images. *In Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '97, page 361–368, New York, NY, USA. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.

[De Rivaz et Kingsbury, 1999] De Rivaz, P. et Kingsbury, N. (1999). Complex wavelet features for fast texture image retrieval. *In 1999 International Conference on Image Processing, 1999. ICIP 99. Proceedings*, volume 1, pages 109 –113 vol.1.

[De Valois *et al.*, 1982] De Valois, R. L., Albrecht, D. G. et Thorell, L. G. (1982). Spatial frequency selectivity of cells in macaque visual cortex. *Vision Research*, 22(5):545–559.

[Derin et Elliott, 1987] Derin, H. et Elliott, H. (1987). Modeling and segmentation of noisy and textured images using gibbs random fields. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9(1):39 –55.

[Dettori et Semler, 2007] Dettori, L. et Semler, L. (2007). A comparison of wavelet, ridgelet, and curvelet-based texture classification algorithms in computed tomography. *Comput. Biol. Med.*, 37(4):486–498.

[Devroye *et al.*, 1996] Devroye, L., Györfi, L. et Lugosi, G. (1996). *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*. Springer.

[Do et Vetterli, 2002a] Do, M. et Vetterli, M. (2002a). Rotation invariant texture characterization and retrieval using steerable wavelet-domain hidden markov models. *IEEE Transactions on Multimedia*, 4(4):517 – 527.

[Do et Vetterli, 2002b] Do, M. et Vetterli, M. (2002b). Wavelet-based texture retrieval using generalized gaussian density and Kullback-Leibler distance. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 11(2):146 –158.

[Doornik et Hansen, 2008] Doornik, J. A. et Hansen, H. (2008). An omnibus test for univariate and multivariate normality. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 70:927–939.

[Dunn *et al.*, 1994] Dunn, D., Higgins, W. et Wakeley, J. (1994). Texture segmentation using 2-d gabor elementary functions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(2):130 –149.

[Elfadel et Picard, 1994] Elfadel, I. et Picard, R. (1994). Gibbs random fields, cooccurrences, and texture modeling. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(1):24 –37.

[Fadili et Boubchir, 2005] Fadili, J. et Boubchir, L. (2005). Analytical form for a bayesian wavelet estimator of images using the bessel k form densities. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 14(2):231 –240.

[Fan et Xia, 2003] Fan, G. et Xia, X.-G. (2003). Wavelet-based texture analysis and synthesis using hidden markov models. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 50(1):106 – 120.

[Figueiredo, 2005] Figueiredo, M. (2005). Bayesian image segmentation using wavelet-based priors. *In Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition - CVPR 2005*, volume 1, pages 437 – 443.

[Fisher et Switzer, 1985] Fisher, N. I. et Switzer, P. (1985). Chi-plots for assessing dependence. *Biometrika*, 72(2):253–265.

[Fisher et Switzer, 2001] Fisher, N. I. et Switzer, P. (2001). Graphical assessment of dependence : Is a picture worth 100 tests ? *The American Statistician*, 55:233–239.

[Flickner *et al.*, 1995] Flickner, M., Sawhney, H., Niblack, W., Ashley, J., Huang, Q., Dom, B., Gorkani, M., Hafner, J., Lee, D., Petkovic, D., Steele, D. et Yanker, P. (1995). Query by image and video content : The QBIC system. *Computer*, 28(9):23–32.

[Fogel et Sagi, 1989] Fogel, I. et Sagi, D. (1989). Gabor filters as texture discriminator. *Biological Cybernetics*, 61(2):103–113.

[Gagalowicz, 1981] Gagalowicz, A. (1981). A new method for texture fields synthesis : Some applications to the study of human vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-3(5): 520 –533.

[Genest et Favre, 2007] Genest, C. et Favre, A.-c. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4):347—368.

[Genest *et al.*, 2009] Genest, C., Rémillard, B. et Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(2):199–213.

[Gimel'farb, 1999] Gimel'farb, G. (1999). Modeling image textures by gibbs random fields. *Pattern Recognition Letters*, 20(11–13):1123–1132.

[Gómez *et al.*, 1998] Gómez, E., Gomez-Viilegas, M. et Marín, J. (1998). A multivariate generalization of the power exponential family of distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27(3):589–600.

[Goldberger *et al.*, 2003] Goldberger, Gordon et Greenspan (2003). An efficient image similarity measure based on approximations of KL-divergence between two gaussian mixtures. *In Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision - ICCV 2003*, pages 487–493 vol.1, Nice, France.

[Gonzalez-Farias *et al.*, 2009] Gonzalez-Farias, G., Molina, J. et Rodriguez-Dagnino, R. (2009). Efficiency of the approximated shape parameter estimator in the generalized gaussian distribution. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 58(8):4214 –4223.

[Gonzalez-Jimenez *et al.*, 2007] Gonzalez-Jimenez, D., Perez-Gonzalez, F., Comesana-Alfaro, P., Perez-Freire, L. et Alba-Castro, J. (2007). Modeling gabor coefficients via generalized gaussian distributions for face recognition. *In Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing - ICIP 2007.*, volume 4, pages IV –485 –IV –488.

[Greenwood et Nikulin, 1996] Greenwood, P. E. et Nikulin, M. S. (1996). *A Guide to Chi-Squared Testing.* John Wiley & Sons.

[Hadjidemetriou *et al.*, 2004] Hadjidemetriou, E., Grossberg, M. et Nayar, S. (2004). Multiresolution histograms and their use for recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(7):831 –847.

[Haralick, 1979] Haralick, R. (1979). Statistical and structural approaches to texture. *Proceedings of the IEEE*, 67(5):786 – 804.

[Haralick *et al.*, 1973] Haralick, R. M., Shanmugam, K. et Dinstein, I. (1973). Textural features for image classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-3(6):610 –621.

[Harvey et Gervais, 1978] Harvey, L. O. et Gervais, M. J. (1978). Visual texture perception and fourier analysis. *Perception & Psychophysics*, 24(6): 534–542.

[He et Wang, 1990] He, D.-c. et Wang, L. (1990). Texture unit, texture spectrum, and texture analysis. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 28(4):509 – 512.

[He et Wang, 1991] He, D.-C. et Wang, L. (1991). Texture features based on texture spectrum. *Pattern Recognition*, 24(5):391–399.

[Heeger et Bergen, 1995] Heeger, D. et Bergen, J. (1995). Pyramid-based texture analysis/synthesis. *In , International Conference on Image Processing, 1995. Proceedings*, volume 3, pages 648 –651 vol.3.

[Hershey et Olsen, 2007] Hershey, J. R. et Olsen, P. A. (2007). Approximating the kullback leibler divergence between gaussian mixture models. *In Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - ICASSP 2007*, pages IV–317–IV–320, Honolulu, HI, USA.

[Huard *et al.*, 2006] Huard, D., Évin, G. et Favre, A.-C. (2006). Bayesian copula selection. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2):809–822.

[Joe, 2005] Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. *Journal of Multivariate Analysis*, 94(2): 401–419.

[Joe et Xu, 1996] Joe, H. et Xu, J. J. (1996). the estimation method of inference functions for margins for multivariate models. technical report 166, Department of Statistics, University of British Columbia.

[Julesz, 1962] Julesz, B. (1962). Visual pattern discrimination. *IRE Transactions on Information Theory*, 8(2):84 –92.

[Julesz, 1981a] Julesz, B. (1981a). Textons, the elements of texture perception, and their interactions. *Nature*, 290(5802):91–97.

[Julesz, 1981b] Julesz, B. (1981b). A theory of preattentive texture discrimination based on first-order statistics of textons. *Biological Cybernetics*, 41(2):131–138.

[Julesz *et al.*, 1978] Julesz, B., Gilbert, E. N. et Victor, J. D. (1978). Visual discrimination of textures with identical third-order statistics. *Biological Cybernetics*, 31(3):137–140.

[Kasaei *et al.*, 2002] Kasaei, S., Deriche, M. et Boashash, B. (2002). A novel fingerprint image compression technique using wavelets packets and pyramid lattice vector quantization. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 11(12):1365 – 1378.

[Ke et Sukthankar, 2004] Ke, Y. et Sukthankar, R. (2004). PCA-SIFT : a more distinctive representation for local image descriptors. *In Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition - CVPR 2004*, volume 2, pages II–506 – II–513 Vol.2.

[Kendall, 1938] Kendall, M. (1938). A new measure of rank correlation. *Biometrika*, 30(1/2):81–93.

[Kim et Kang, 2007] Kim, S. C. et Kang, T. J. (2007). Texture classification and segmentation using wavelet packet frame and gaussian mixture model. *Pattern Recognition*, 40(4):1207–1221.

[Kingsbury, 2001] Kingsbury, N. (2001). Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 10(3):234–253.

[Kokkinakis et Nandi, 2005] Kokkinakis, K. et Nandi, A. K. (2005). Exponent parameter estimation for generalized gaussian probability density functions with application to speech modeling. *Signal Processing*, 85(9):1852–1858.

[Kolmogorov, 1933] Kolmogorov, A. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 4:83–91.

[Krishnamachari et Chellappa, 1997] Krishnamachari, S. et Chellappa, R. (1997). Multiresolution gauss-markov random field models for texture segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2):251 –267.

[Krishnamoorthy, 2006] Krishnamoorthy, K. (2006). *Handbook of Statistical Distributions with Applications*. Chapman and Hall.

[Krommweh, 2010] Krommweh, J. (2010). Tetrolet transform : A new adaptive haar wavelet algorithm for sparse image representation. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 21(4):364–374.

[Kulikowski *et al.*, 1982] Kulikowski, J. J., Marcelja, S. et Bishop, P. O. (1982). Theory of spatial position and spatial frequency relations in the receptive fields of simple cells in the visual cortex. *Biological Cybernetics*, 43(3):187–198.

[Kuruoglu et Zerubia, 2003] Kuruoglu, E. E. et Zerubia, J. (2003). Skewed α-stable distributions for modelling textures. *Pattern Recognition Letters*, 24(1-3):339–348.

[Kwitt et Uhl, 2009] Kwitt, R. et Uhl, A. (2009). A joint model of complex wavelet coefficients for texture retrieval. *In Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing - ICIP 2009*, pages 1877–1880, Cairo, Egypt.

[Kwitt et Uhl, 2010] Kwitt, R. et Uhl, A. (2010). Lightweight probabilistic texture retrieval. *IEEE Transactions on Image Processing*, 19(1):241–253.

[Laine et Fan, 1993] Laine, A. et Fan, J. (1993). Texture classification by wavelet packet signatures. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11):1186–1191.

[Laine et Fan, 1996] Laine, A. et Fan, J. (1996). Frame representations for texture segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(5):771 –780.

[Landy et Graham, 2004] Landy, M. S. et Graham, N. (2004). Visual perception of texture. *In* Chalupa, L. M. et Werner, J. S., éditeurs : *The Visual Neurosciences*, pages 1106–1118. MIT Press, Cambridge.

[Lasmar et Berthoumieu, 2010] Lasmar, N.-E. et Berthoumieu, Y. (2010). Multivariate statistical modeling for texture analysis using wavelet transforms. *In Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing - ICASSP 2010*, pages 790–793.

[Lasmar et Berthoumieu, 2011] Lasmar, N.-E. et Berthoumieu, Y. (2011). Gaussian copula multivariate modeling for image texture retrieval using wavelet transforms. *IEEE Transactions on Image Processing*, en révision.

[Lasmar *et al.*, 2009] Lasmar, N.-E., Stitou, Y. et Berthoumieu, Y. (2009). Multiscale skewed heavy tailed model for texture analysis. *In Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing - ICIP 2009*, pages 2281–2284.

[Lasmar *et al.*, 2008] Lasmar, N.-E., Stitou, Y., Jouini, S., Berthoumieu, Y. et Najim, M. (2008). Parametric gaussianization procedure of wavelet coefficients for texture retrieval. *In Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - ICASSP 2008*, pages 749–752.

[Lee et Nandi, 1999a] Lee, J. et Nandi, A. (1999a). Maximum likelihood parameter estimation of the asymmetric generalised gaussian family of distributions. *In Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics, 1999*, pages 255–258.

[Lee et Nandi, 1999b] Lee, J. et Nandi, A. (1999b). Parameter estimation of the asymmetric generalised gaussian family of distributions. *In IEEE Colloquium on Statistical Signal Processing*, pages 9/1–9/5.

[Liu *et al.*, 2008] Liu, H., Song, D., Rüger, S., Hu, R. et Uren, V. (2008). Comparing dissimilarity measures for content-based image retrieval. *In* Li, H., Liu, T., Ma, W.-Y., Sakai, T., Wong, K.-F. et Zhou, G., éditeurs : *Information Retrieval Technology*, volume 4993 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 44–50. Springer Berlin / Heidelberg.

[Liu et Moulin, 2001] Liu, J. et Moulin, P. (2001). Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(11):1647 –1658.

[Liu et Wang, 2003] Liu, X. et Wang, D. (2003). Texture classification using spectral histograms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(6):661 – 670.

[Liu et Wang, 2006] Liu, X. et Wang, D. (2006). Image and texture segmentation using local spectral histograms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(10):3066 –3077.

[Lowe, 2004] Lowe, D. G. (2004). Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2):91–110.

[Mallat, 1989] Mallat, S. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693.

[Mandal *et al.*, 1999] Mandal, M., Aboulnasr, T. et Panchanathan, S. (1999). Fast wavelet histogram techniques for image indexing. *Computer Vision and Image Understanding*, 75(1–2):99–110.

[Manjunath et Chellappa, 1991] Manjunath, B. et Chellappa, R. (1991). Unsupervised texture segmentation using markov random field models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(5): 478 –482.

[Manjunath et Ma, 1996] Manjunath, B. et Ma, W. (1996). Texture features for browsing and retrieval of image data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(8):837 –842.

[Mao et Jain, 1992] Mao, J. et Jain, A. K. (1992). Texture classification and segmentation using multiresolution simultaneous autoregressive models. *Pattern Recognition*, 25(2):173–188.

[Massey, 1951] Massey, F. J. (1951). The kolmogorov-smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, 46(253):68–78.

[Mathiassen *et al.*, 2002] Mathiassen, J., Skavhaug, A. et Bø, K. (2002). Texture similarity measure using Kullback-Leibler divergence between

gamma distributions. *In* Heyden, A., Sparr, G., Nielsen, M. et Johansen, P., éditeurs : *European Conference on Computer Vision — ECCV 2002*, volume 2352 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 19–49. Springer Berlin / Heidelberg.

[McLaughlin et Raviv, 1968] McLaughlin, J. et Raviv, J. (1968). Nth-order autocorrelations in pattern recognition. *Information and Control*, 12(2):121–142.

[Mecklin et Mundfrom, 2004] Mecklin, C. J. et Mundfrom, D. J. (2004). An appraisal and bibliography of tests for multivariate normality. *International Statistical Review*, 72(1):123–138.

[Mikolajczyk et Schmid, 2005] Mikolajczyk, K. et Schmid, C. (2005). A performance evaluation of local descriptors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(10):1615 –1630.

[Mikosch, 2006] Mikosch, T. (2006). Copulas : Tales and facts. *Extremes*, 9(1):3–20.

[Mittal *et al.*, 2012] Mittal, A., Moorthy, A. et Bovik, A. (2012). No-reference image quality assessment in the spatial domain. *IEEE Transactions on Image Processing*, accepté, à appraître prochainement.

[Müller *et al.*, 2001] Müller, H., Müller, W., Squire, D. M., Marchand-Maillet, S. et Pun, T. (2001). Performance evaluation in content-based image retrieval : overview and proposals. *Pattern Recognition Letters*, 22(5):593–601.

[Moulin et Liu, 1999] Moulin, P. et Liu, J. (1999). Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized gaussian and complexity priors. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 45(3):909 –919.

[Nataf, 1962] Nataf, A. (1962). Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 255:42–43.

[Navarro *et al.*, 1996] Navarro, R., Tabernero, A. et Cristóabal, G. (1996). Image representation with gabor wavelets and its applications. *In* Peter W. Hawkes, B. K. et Mulvey, T., éditeurs : *Advances in Imaging and Electron Physics*, volume 97, pages 1–84. Elsevier.

[Nelsen, 2006] Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2nd revised edition édition.

[Ng et Garg, 2005] Ng, T. et Garg, H. (2005). Maximum-likelihood detection in DWT domain image watermarking using laplacian modeling. *IEEE Signal Processing Letters*, 12(4):285 – 288.

[Nikoloulopoulos et Karlis, 2008] Nikoloulopoulos, A. K. et Karlis, D. (2008). Copula model evaluation based on parametric bootstrap. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(7):3342–3353.

[Ojala *et al.*, 2002] Ojala, T., Pietikainen, M. et Maenpaa, T. (2002). Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(7):971 –987.

[Ojala *et al.*, 1996] Ojala, T., Pietikäinen, M. et Harwood, D. (1996). A comparative study of texture measures with classification based on featured distributions. *Pattern Recognition*, 29(1):51–59.

[Pascal *et al.*, 2008] Pascal, F., Chitour, Y., Ovarlez, J.-P., Forster, P. et Larzabal, P. (2008). Covariance structure maximum-likelihood estimates in compound gaussian noise : Existence and algorithm analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(1):34 –48.

[Pearson, 1900] Pearson, K. (1900). On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Philosophical Magazine Series 5*, 50(302):157–175.

[Penny, 2001] Penny, W. D. (2001). Kullback-liebler divergences of normal, gamma, dirichlet and wishart densities. Technical report, Wellcome Department of Cognitive Neurology.

[Pentland *et al.*, 1996] Pentland, A., Picard, R. W. et Sclaroff, S. (1996). Photobook : content-based manipulation of image databases. *Int. J. Comput. Vision*, 18(3):233–254.

[Permuter *et al.*, 2006] Permuter, H., Francos, J. et Jermyn, I. (2006). A study of gaussian mixture models of color and texture features for image classification and segmentation. *Pattern Recognition*, 39(4):695–706.

[Peyré, 2005] Peyré, G. (2005). *Géométrie multi-échelles pour les images et les textures*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique X.

[Peyré, 2010] Peyré, G. (2010). Texture synthesis with grouplets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 32(4):733 – 746.

[Pichler *et al.*, 1996] Pichler, O., Teuner, A. et Hosticka, B. J. (1996). A comparison of texture feature extraction using adaptive gabor filtering, pyramidal and tree structured wavelet transforms. *Pattern Recognition*, 29(5):733–742.

[Pietikäinen *et al.*, 2011] Pietikäinen, M., Hadid, A., Zhao, G. et Ahonen, T. (2011). *Computer Vision Using Local Binary Patterns*. Computational Imaging and Vision. Springer-Verlag, London.

[Pinamonti *et al.*, 1989] Pinamonti, B., Picano, E., Ferdeghini, E. M., Lattanzi, F., Slavich, G., Landini, L., Camerini, F., Benassi, A., Distante, A. et L'Abbate, A. (1989). Quantitative texture analysis in two-dimensional echocardiography : Application to the diagnosis of myocardial amyloidosis. *Journal of the American College of Cardiology*, 14(3):666–671.

[Po et Do, 2006] Po, D. et Do, M. (2006). Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(6):1610 –1620.

[Pogány et Nadarajah, 2010] Pogány, T. K. et Nadarajah, S. (2010). On the characteristic function of the generalized normal distribution. *Comptes Rendus Mathematique*, 348(3–4):203–206.

[Portilla et Simoncelli, 2000] Portilla, J. et Simoncelli, E. P. (2000). A parametric texture model based on joint statistics of complex wavelet coefficients. *International Journal of Computer Vision*, 40:49–70.

[Portilla *et al.*, 2003] Portilla, J., Strela, V., Wainwright, M. et Simoncelli, E. (2003). Image denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(11):1338–1351.

[Prasad *et al.*, 2005] Prasad, R., Saruwatari, H. et Shikano, K. (2005). Estimation of shape parameter of GGD function by negentropy matching. *Neural Processing Letters*, 22(3):377–389.

[Pun et Jeffs, 1995] Pun, W. et Jeffs, B. (1995). Shape parameter estimation for generalized gaussian markov random field models used in MAP image restoration. *In Conference Record of the Twenty-Ninth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 1995*, volume 2, pages 1472 –1476 vol.2.

[Qazi *et al.*, 2011] Qazi, I.-U.-H., Alata, O., Burie, J.-C., Abadi, M., Moussa, A. et Fernandez-Maloigne, C. (2011). Parametric models of linear prediction error distribution for color texture and satellite image segmentation. *Computer Vision and Image Understanding*, 115(8):1245–1262.

[Qu *et al.*, 2007] Qu, H., Peng, Y. et Sun, W. (2007). Texture image retrieval based on contourlet coefficient modeling with generalized gaussian distribution. *In* Kang, L., Liu, Y. et Zeng, S., éditeurs : *Advances in Computation and Intelligence*, volume 4683, pages 493–502. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[Rallabandi et Subramanyam, 2008] Rallabandi, V. R. et Subramanyam, R. V. (2008). Rotation-invariant texture retrieval using wavelet-based hidden markov trees. *Signal Processing*, 88(10):2593–2598.

[Randen et Husoy, 1999] Randen, T. et Husoy, J. (1999). Filtering for texture classification : a comparative study. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(4):291–310.

[Rangaswamy *et al.*, 1993] Rangaswamy, M., Weiner, D. et Ozturk, A. (1993). Non-gaussian random vector identification using spherically invariant random processes. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 29(1):111 –124.

[Romeu et Ozturk, 1993] Romeu, J. L. et Ozturk, A. (1993). A comparative study of goodness-of-fit tests for multivariate normality. *J. Multivar. Anal.*, 46(2):309–334.

[Royston, 1983] Royston, J. P. (1983). Some techniques for assessing multivarate normality based on the shapiro- wilk w. *Applied Statistics*, 32(2):121.

[Royston, 1992] Royston, P. (1992). Approximating the shapiro-wilk w-test for non-normality. *Statistics and Computing*, 2(3):117–119.

[Schistad Solberg et Jain, 1997] Schistad Solberg, A. et Jain, A. (1997). Texture fusion and feature selection applied to SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 35(2):475 –479.

[Selesnick *et al.*, 2005] Selesnick, I., Baraniuk, R. et Kingsbury, N. (2005). The dual-tree complex wavelet transform. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22(6):123 – 151.

[Shapiro et Wilk, 1965] Shapiro, S. S. et Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (Complete samples). *Biometrika*, 52(3/4): 591.

[Sharifi et Leon-Garcia, 1995] Sharifi, K. et Leon-Garcia, A. (1995). Estimation of shape parameter for generalized gaussian distributions in subband decompositions of video. *Circuits and Systems for Video Technology, IEEE Transactions on*, 5(1):52 –56.

[Silverman, 1986] Silverman, B. W. (1986). Density estimation for statistics and data analysis. *In Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman and Hall, London.

[Sklansky, 1978] Sklansky, J. (1978). Image segmentation and feature extraction. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 8(4):237 –247.

[Sklar, 1959] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8.

[Smirnov, 1948] Smirnov, N. (1948). Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 19(2):279–281.

[Spearman, 1987] Spearman, C. (1987). The proof and measurement of association between two things. by c. spearman, 1904. *The American journal of psychology*, 100(3-4):441–471.

[Srivastava *et al.*, 2002] Srivastava, A., Liu, X. et Grenander, U. (2002). Universal analytical forms for modeling image probabilities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(9):1200–1214.

[Stachowiak *et al.*, 2005] Stachowiak, G. P., Podsiadlo, P. et Stachowiak, G. W. (2005). A comparison of texture feature extraction methods for machine condition monitoring and failure analysis. *Tribology Letters*, 20(2):133–147.

[Stitou *et al.*, 2009] Stitou, Y., Lasmar, N.-E. et Berthoumieu, Y. (2009). Copulas based multivariate gamma modeling for texture classification. *In Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - ICASSP 2009*, pages 1045–1048.

[Takala *et al.*, 2005] Takala, V., Ahonen, T. et Pietikäinen, M. (2005). Block-based methods for image retrieval using local binary patterns. *In* Hutchison, D., Kanade, T., Kittler, J., Kleinberg, J. M., Mattern, F., Mitchell, J. C., Naor, M., Nierstrasz, O., Pandu Rangan, C., Steffen, B., Sudan, M., Terzopoulos, D., Tygar, D., Vardi, M. Y., Weikum, G., Kalviainen, H., Parkkinen, J. et Kaarna, A., éditeurs : *Image Analysis*, volume 3540, pages 882–891. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

[Tan et Jiao, 2007] Tan, S. et Jiao, L. (2007). Multivariate statistical models for image denoising in the wavelet domain. *International Journal of Computer Vision*, 75(2):209–230.

[Tesei et Regazzoni, 1998] Tesei, A. et Regazzoni, C. S. (1998). HOS-based generalized noise pdf models for signal detection optimization. *Signal Processing*, 65(2):267–281.

[Tuceryan et Jain, 1990] Tuceryan, M. et Jain, A. (1990). Texture segmentation using voronoi polygons. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(2):211 –216.

[Tuceryan et Jain, 1998] Tuceryan, M. et Jain, A. (1998). Texture analysis. *In* Chen, C. H., Pau, L. F. et Wang, P. S. P., éditeurs : *The*

Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision, pages 207–248. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA, 2nd édition.

[Turner, 1986] TURNER, M. R. (1986). Texture discrimination by gabor functions. *Biological cybernetics*, 55(2-3):71–82. PMID : 3801538.

[Tzagkarakis *et al.*, 2006] TZAGKARAKIS, G., BEFERULL-LOZANO, B. et TSAKALIDES, P. (2006). Rotation-invariant texture retrieval with gaussianized steerable pyramids. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(9):2702–2718.

[Unser, 1984] UNSER, M. (1984). *Description statistique de la texture. Application à l'inspection automatique.* Thèse de doctorat, EPFL, Lausanne.

[Unser, 1986] UNSER, M. (1986). Sum and difference histograms for texture classification. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(1):118 –125.

[Unser, 1995] UNSER, M. (1995). Texture classification and segmentation using wavelet frames. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(11): 1549–1560.

[url Brodatz,] url BRODATZ. Brodatz texture images. http ://www.ux.uis.no/ tranden/brodatz.html.

[url VisTex,] url VISTEX. Vision texture database, MIT media laboratory's vision and modeling group. http ://vismod.media.mit.edu/vismod/imagery/VisionTexture.

[Van de Wouver *et al.*, 2004] Van de WOUVER, G., WEYN, B. et VAN DYCK, D. (2004). Multiscale asymmetry signatures for texture analysis. *In Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing - ICIP 2004*, volume 3, pages 1517 – 1520.

[Van de Wouwer *et al.*, 1999] Van de WOUWER, G., SCHEUNDERS, P. et VAN DYCK, D. (1999). Statistical texture characterization from discrete wavelet representations. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 8(4):592 –598.

[Varanasi et Aazhang, 1989] VARANASI, M. K. et AAZHANG, B. (1989). Parametric generalized gaussian density estimation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 86(4):1404.

[Vasconcelos, 2004] VASCONCELOS, N. (2004). On the efficient evaluation of probabilistic similarity functions for image retrieval. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50(7):1482–1496.

[Vasconcelos et Lippman, 2000a] VASCONCELOS, N. et LIPPMAN, A. (2000a). A probabilistic architecture for content-based image retrieval.

In Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition - CVPR 2000, pages 216–221, Hilton Head Island, SC, USA.

[Vasconcelos et Lippman, 2000b] VASCONCELOS, N. et LIPPMAN, A. (2000b). A unifying view of image similarity. *In Proceedings of IEEE International Conference on Pattern Recognition - ICPR 2000*, pages 38–41, Barcelona, Spain.

[Vasile *et al.*, 2010] VASILE, G., OVARLEZ, J.-P., PASCAL, F. et TISON, C. (2010). Coherency matrix estimation of heterogeneous clutter in high-resolution polarimetric SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 48(4):1809–1826.

[Veltkamp et Tanase, 2000] VELTKAMP, R. C. et TANASE, M. (2000). Content-based image retrieval systems : A survey. Technical Report UU-CS-2000-34.

[Verdoolaege et Scheunders, 2011] VERDOOLAEGE, G. et SCHEUNDERS, P. (2011). Geodesics on the manifold of multivariate generalized gaussian distributions with an application to multicomponent texture discrimination. *International Journal of Computer Vision*, 95(3):265–286.

[Verdoolaege et Scheunders, 2012] VERDOOLAEGE, G. et SCHEUNDERS, P. (2012). On the geometry of multivariate generalized gaussian models. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 43(3):180–193.

[Victor, 1994] VICTOR, J. D. (1994). Images, statistics, and textures : implications of triple correlation uniqueness for texture statistics and the julesz conjecture : comment. *Journal of the Optical Society of America A*, 11(5):1680–1684.

[Wainwright et Simoncelli, 2000] WAINWRIGHT, M. J. et SIMONCELLI, E. P. (2000). Scale mixtures of gaussians and the statistics of natural images. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 12:855–861.

[Wand et Jones, 1993] WAND, M. et JONES, M. (1993). Comparison of smoothing parameterizations in bivariate kernel density estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 88(422).

[Watson, 1987] WATSON, A. B. (1987). The cortex transform : Rapid computation of simulated neural images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 39(3):311–327.

[Webster et De Valois, 1985] WEBSTER, M. A. et DE VALOIS, R. L. (1985). Relationship between spatial-frequency and orientation tuning of striate-cortex cells. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics and image science*, 2(7):1124–1132. PMID : 4020509.

[Westerink *et al.*, 1991] Westerink, P. H., Biemond, J. et Boekee, D. E. (1991). Subband coding of color images. *In* Woods, J. W., éditeur : *Subband Image Coding*, page 193–228. Kluwer Academic Publishers, Inc.

[Yao, 1973] Yao, K. (1973). A representation theorem and its applications to spherically-invariant random processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 19(5):600 – 608.

[Yellott, 1993] Yellott, J. I. (1993). Implications of triple correlation uniqueness for texture statistics and the julesz conjecture. *Journal of the Optical Society of America A*, 10(5):777–793.

[Zezula, 2009] Zezula, I. (2009). On multivariate gaussian copulas. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(11):3942–3946.

[Zucker, 1976] Zucker, S. W. (1976). Toward a model of texture. *Computer Graphics and Image Processing*, 5(2):190–202.