



**HAL**  
open science

# Instabilité de Faraday dans les fluides complexes

Pierre Ballesta

► **To cite this version:**

Pierre Ballesta. Instabilité de Faraday dans les fluides complexes. Matière Molle [cond-mat.soft]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2006. Français. NNT: . tel-00811893

**HAL Id: tel-00811893**

**<https://theses.hal.science/tel-00811893>**

Submitted on 11 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : \*\*\*\*

# THÈSE

présentée à

l'université Bordeaux I

École doctorale des sciences chimiques

par Pierre BALLESTA

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : physico-chimie de la matière condensée

---

## Instabilité de Faraday dans les fluides complexes

---

Soutenance prévue le 8 septembre 2006

Après avis de :

M. Stéphan FAUVE            Rapporteur  
M. Sriram RAMASWAMY    Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

M. Philippe BAROIS  
M. Stéphan FAUVE            Rapporteur  
M. Sébastien MANNEVILLE  
M. Sriram RAMASWAMY    Rapporteur  
M. Christian WAGNER  
M. Alois WÜRGER

Invité :

M. Luca CIPELLETTI



# Table des matières

<b>I</b>	<b>État de l’art et techniques expérimentales</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>L’expérience de Faraday</b>	<b>11</b>
1.1	Historique . . . . .	11
1.2	Oscillateur paramétrique . . . . .	12
1.3	Relation de dispersion . . . . .	14
1.4	Calcul de stabilité linéaire . . . . .	14
1.4.1	Équation de Navier–Stokes . . . . .	15
1.4.2	Conditions aux limites . . . . .	16
1.4.3	Déformation sinusoïdale . . . . .	17
1.4.4	Théorie de Floquet et séries de Fourier . . . . .	17
1.4.5	Calcul numérique et langues de résonance . . . . .	18
1.4.6	Résultats et comparaison à l’expérience . . . . .	19
1.5	Au-dessus du seuil . . . . .	21
1.5.1	Motifs et quasi-motifs . . . . .	21
1.5.2	Évolution de l’amplitude . . . . .	23
1.5.3	Instabilité secondaire et transition vers le chaos . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Résultats antérieurs sur l’instabilité de Faraday dans les fluides complexes</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction aux fluides complexes . . . . .	27
2.1.1	Propriétés d’écoulement . . . . .	28
2.1.2	Rhéologie non-linéaire . . . . .	28
2.1.3	Rhéologie linéaire . . . . .	29
2.2	Calcul de stabilité linéaire pour l’instabilité de Faraday dans un fluide complexe	31
2.2.1	Accélération et nombre d’onde critiques . . . . .	31
2.2.2	Champ de vitesse . . . . .	31
2.3	Résultats expérimentaux . . . . .	34
2.3.1	Polymères dilués . . . . .	34
2.3.2	Matériaux granulaires . . . . .	35
2.3.3	Autres fluides complexes . . . . .	36
2.4	Motivations de la thèse . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Techniques et dispositifs expérimentaux</b>	<b>41</b>
3.1	Mesures au voisinage du seuil : accélération et nombre d'onde critiques . . .	41
3.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	41
3.1.2	Protocole de mesure de l'accélération et du nombre d'onde critiques	45
3.1.3	Artefacts et sources d'incertitude possibles . . . . .	46
3.1.4	Résultats pour un fluide simple . . . . .	47
3.2	Mesure de l'amplitude des ondes de surface . . . . .	49
3.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	49
3.2.2	Mesure de l'amplitude $\xi(x, t)$ des ondes de surface . . . . .	51
3.2.3	Artefacts et sources d'incertitude possibles . . . . .	54
3.2.4	Résultats pour un fluide simple . . . . .	57
3.3	Vélocimétrie par imagerie de particules (PIV) . . . . .	59
3.3.1	Dispositif et technique expérimentale . . . . .	59
3.3.2	Mesure du champ de vitesse . . . . .	61
3.3.3	Artefacts et sources d'incertitudes possibles . . . . .	66
3.3.4	Résultats pour un fluide simple . . . . .	68
<b>II</b>	<b>Micelles géantes en régime semi-dilué</b>	<b>71</b>
<b>4</b>	<b>Présentation du système CPCI-NaSal</b>	<b>73</b>
4.1	À l'équilibre . . . . .	73
4.2	Propriétés viscoélastiques . . . . .	73
4.3	Rhéologie non-linéaire . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Résultats expérimentaux au voisinage du seuil</b>	<b>79</b>
5.1	Observations qualitatives . . . . .	79
5.2	Mise en évidence d'un effet viscoélastique . . . . .	80
5.2.1	Solution de CPCI-NaSal à 4 % . . . . .	82
5.2.2	Interprétation physique . . . . .	83
5.2.3	Effet de la hauteur de fluide . . . . .	84
5.2.4	Effet de la concentration . . . . .	84
5.2.5	Effet de la température . . . . .	86
5.2.6	Conclusion : ondes élastiques . . . . .	86
5.3	Expériences de biréfringence . . . . .	88
5.3.1	Premières observations . . . . .	88
5.3.2	Recherche de l'angle d'extinction . . . . .	90
5.3.3	Onde stationnaire élastique . . . . .	93
5.4	Expérience de vélocimétrie par imagerie de particules (PIV) . . . . .	94
5.5	Bilan . . . . .	96

<b>6</b>	<b>Confrontation au calcul de stabilité linéaire</b>	<b>97</b>
6.1	Calcul de stabilité linéaire pour un fluide de Maxwell . . . . .	97
6.1.1	Accélération et nombre d'onde critiques . . . . .	97
6.1.2	Champ de vitesse . . . . .	101
6.1.3	Retour sur l'interprétation physique . . . . .	101
6.2	Influence du modèle rhéologique sur le calcul numérique . . . . .	107
6.3	Champ de vitesse et champ de biréfringence . . . . .	111
6.3.1	Champ de vitesse . . . . .	111
6.3.2	Champ de biréfringence . . . . .	112
6.4	Problème inverse . . . . .	113
6.5	Sources d'erreurs . . . . .	118
6.6	Bilan . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Résultats expérimentaux au-dessus du seuil</b>	<b>121</b>
7.1	Procédure expérimentale . . . . .	121
7.2	Amplitude des ondes de surface . . . . .	122
7.3	Intensité de biréfringence . . . . .	124

### III Effet des vibrations verticales sur d'autres fluides complexes 129

<b>8</b>	<b>Micelles géantes dans le régime dilué</b>	<b>131</b>
8.1	Présentation du système . . . . .	131
8.2	Résultats expérimentaux . . . . .	132
8.2.1	Mesure de l'accélération et du nombre d'onde critique . . . . .	133
8.2.2	Temps d'apparition pour le fluide initialement au repos . . . . .	134
8.2.3	Temps d'apparition pour le fluide préalablement vibré . . . . .	137
8.3	Effet d'une relaxation de la viscosité sur le temps d'apparition des ondes de surface . . . . .	139
8.3.1	Cas $a \leq a_1$ . . . . .	140
8.3.2	Cas $a > a_1$ . . . . .	141
8.4	Expériences complémentaires . . . . .	142
8.4.1	Variation de $f$ . . . . .	142
8.4.2	Variation de la durée des vibrations préalables . . . . .	143
8.4.3	Estimation du cisaillement . . . . .	144
8.5	Conclusion . . . . .	145
<b>9</b>	<b>Cristal liquide : virus <math>fd</math></b>	<b>147</b>
9.1	Présentation du système . . . . .	147
9.2	Mesure de l'accélération et du nombre d'onde critiques . . . . .	148
9.3	Mesure de l'amplitude des ondes de surface . . . . .	152
9.4	Mesure de la biréfringence . . . . .	153

9.5	Effet “redressé” au voisinage de la transition isotrope–nématique . . . . .	155
9.6	Modélisation du phénomène d’hystérésis . . . . .	157
9.7	Conclusion . . . . .	159
<b>IV</b>	<b>Annexes</b>	<b>163</b>
<b>A</b>	<b>Rappel sur la rhéologie classique d’une solution de micelles géantes</b>	<b>165</b>
A.1	Rhéologie linéaire . . . . .	165
A.2	Rhéologie non-linéaire . . . . .	166
A.2.1	“Shear–banding” entre deux plans infinis . . . . .	166
A.2.2	Rhéologie en géométrie de Couette . . . . .	167
A.2.3	“Shear–banding” en géométrie de Couette . . . . .	168
<b>B</b>	<b>Superposition</b>	<b>171</b>
B.1	Théorie . . . . .	171
B.1.1	Plans parallèles infinis . . . . .	172
B.1.2	Géométrie cône-plan . . . . .	174
B.1.3	Géométrie de Couette . . . . .	176
B.2	Expériences . . . . .	178
B.2.1	Procédure expérimentale . . . . .	178
B.2.2	Procédure d’ajustement des données $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$ . . . . .	179
B.2.3	Ajustement en l’absence de “shear–banding” ( $\dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma}_{min}$ ) . . . . .	180
B.2.4	Superposition dans le régime de “shear–banding” . . . . .	184
B.3	Conclusion . . . . .	188
<b>C</b>	<b>Vélocimétrie ultrasonore</b>	<b>189</b>
C.1	Montage expérimental . . . . .	189
C.2	Résultats expérimentaux . . . . .	191
C.2.1	Détermination de la vitesse de déplacement de la bande . . . . .	191
C.2.2	Oscillation de la bande . . . . .	191
C.2.3	Vérification de la théorie . . . . .	192

# Introduction Générale

La majorité des fluides utilisés quotidiennement ne sont pas des fluides simples (constitués d'un seul type de molécule) ni même des fluides newtoniens (viscosité indépendante des contraintes appliquées) mais des fluides complexes. Ces fluides possèdent une microstructure caractérisée par une échelle de longueur intermédiaire entre la taille moléculaire et la taille millimétrique du récipient. Le contrôle de cette microstructure est aujourd'hui un enjeu scientifique et économique important dans des domaines allant de la micro-électronique à l'agro-alimentaire en passant par la cosmétique.

Au cours de cette thèse, nous étudions expérimentalement les effets d'une instabilité hydrodynamique sur un fluide complexe. En effet, de nombreuses instabilités hydrodynamiques (Faraday, Bénard-Marangoni, Taylor-Couette, Rayleigh-Bénard...) introduisent, via l'apparition de "motifs", une longueur caractéristique dépendant des propriétés physiques du fluide aussi bien que de l'excitation causant l'instabilité. La microstructure d'un fluide complexe soumis à une telle instabilité devrait se réorganiser selon cette longueur d'onde. Inversement, on s'attend à ce que la présence d'une microstructure modifie fortement la réponse du fluide à une instabilité hydrodynamique. Le couplage entre microstructure et instabilité hydrodynamique soulève donc plusieurs questions fondamentales : comment la microstructure modifie-t-elle l'apparition de motifs au-dessus du seuil d'instabilité ? Quelle influence ces motifs peuvent-ils avoir sur l'organisation de cette microstructure ?

Nous essayons de répondre à ces questions en utilisant une instabilité hydrodynamique bien comprise et caractérisée dans les fluides newtoniens : l'instabilité de Faraday, qui correspond à la déstabilisation d'une surface libre soumise à des oscillations verticales. Un avantage remarquable de cette instabilité est le relativement bon contrôle de la longueur d'onde caractéristique sur une gamme allant typiquement de 1 mm à 1 cm. Nous pouvons ainsi sonder la réponse de la microstructure à des excitations de longueurs caractéristiques différentes. Nous utilisons principalement un fluide complexe modèle, les solutions de micelles géantes dans le régime semi-dilué, mais d'autres fluides complexes sont aussi étudiés comme les suspensions de virus *fd*.

Le plan de la thèse est le suivant :

- Dans une première partie, nous présentons l'instabilité de Faraday et nous passons en revue les résultats théoriques et expérimentaux obtenus jusqu'alors dans les fluides simples et les fluides complexes. Dans cette même partie, nous introduisons les techniques expérimentales utilisées au cours de cette thèse.
- Au cours de la seconde partie de cette thèse, après avoir présenté les solutions de



micelles géantes de CPCI-NaSal, le fluide majoritairement étudié au cours de cette thèse, nous présentons les résultats des expériences de Faraday effectuées dans ce fluide très viscoélastique et comparons nos résultats à ceux obtenus pour des fluides simples. Nous interprétons les forts effets de la viscoélasticité observés sur le seuil de l'instabilité de Faraday par l'existence d' "ondes stationnaires élastiques" en volume. Nous mettons ensuite en évidence expérimentalement ces ondes élastiques et relier nos observations expérimentales à des calculs théoriques.

- Enfin, dans la troisième et dernière partie de cette thèse, nous rapportons les résultats obtenus sur deux autres fluides complexes : une solution rhéoépaississante de micelles géantes dans le régime dilué et une suspension rhéofluidiante de cristaux liquides (virus fd). Nous démontrons, dans ces fluides, l'existence d'un fort couplage entre microstructure et instabilité de Faraday.
- De plus, nous présentons en annexe des expériences originales de rhéologie et de vélocimétrie sur des solutions de micelles géantes sous cisaillement. Au cours de ces expériences, nous superposons une contrainte oscillante à une contrainte constante et cela dans le régime des "bandes de cisaillement". Nous montrons qu'il est ainsi possible de remonter à la dynamique de l'interface entre les deux bandes.

Première partie

État de l'art et techniques  
expérimentales



# Chapitre 1

## L'expérience de Faraday

Dans ce premier chapitre, nous présentons l'expérience de Faraday et son interprétation théorique. Après un bref historique concernant cette instabilité hydrodynamique devenue classique, nous rappelons son lien avec l'oscillateur paramétrique avant de détailler le calcul de stabilité linéaire qui permet de prévoir les caractéristiques du seuil d'instabilité. Enfin, nous décrivons rapidement l'évolution de l'instabilité au-dessus du seuil.

### 1.1 Historique

En 1831, Faraday (figure 1.1) mit en évidence et étudia pour la première fois l'apparition de vagues à la surface d'une couche de fluide vibrée verticalement [34]. Lorsqu'une couche



FIG. 1.1 – Michael Faraday (1791–1867).

de fluide initialement plane est vibrée à une fréquence  $f$  et que l'accélération dépasse une certaine accélération, dite accélération critique,  $a_c$  la surface ondule et un système de

vagues stationnaires apparaît. Dans son article fondateur [34], Faraday décrit les motifs formés par ces ondes de surface dans divers fluides. Faraday montre d'autre part que la réponse du fluide est sous-harmonique, c'est-à-dire que les ondes de surface oscillent à la fréquence moitié de la fréquence d'excitation (à  $f/2$ ). Cinquante-deux ans plus tard, en 1883, Rayleigh [76, 77] relie cette observation à la résonance paramétrique des oscillateurs harmoniques. Ce n'est qu'en 1954 que Benjamin et Ursell démontrent que la surface répond comme un ensemble d'oscillateurs paramétriques couplés et prouvent théoriquement que la réponse de la surface est bien sous-harmonique [5].

Depuis les années 1970, l'expérience de Faraday a représenté un exemple typique de système où apparaît le chaos en hydrodynamique. En 1994, la première analyse de stabilité linéaire sur les fluides visqueux est réalisé par K. Kumar et L. Tuckermann [50], avant d'être vérifiée expérimentalement la même année par Bechhoeffer *et al.* [4]. Le calcul de stabilité linéaire de K. Kumar et L. Tuckermann est modifié par S. Kumar en 1999 pour prendre en compte la viscoélasticité des fluides complexes dans le calcul des caractéristiques du seuil d'instabilité [51]. Ce calcul prévoit notamment une réponse harmonique pour certains fluides viscoélastiques pour des fréquences plus importantes que celles prédites pour des fluides simples. La réponse harmonique est reproduite expérimentalement par plusieurs groupes [78, 67, 83] dans des solutions de polymères en régime dilué. Nous présenterons ces résultats en détail au § 2.3 page 34.

## 1.2 Oscillateur paramétrique

Rayleigh a conjecturé dès 1883 que les modes de surface d'un fluide soumis à des vibrations verticales pouvaient se comprendre comme un ensemble d'oscillateurs paramétriques couplés [76, 77]. Nous commençons donc par traiter ici le cas le plus simple d'oscillateur paramétrique : le pendule pesant soumis à une accélération oscillante.

Soit donc un pendule de masse  $m$  attaché par un fil longueur  $l$  et soumis à la gravité  $g$ , on assimile ce pendule à son centre de gravité et on se limite au plan  $(x, z)$  où  $x$  est l'horizontale et  $z$  la verticale, formé par le pendule durant ses oscillations (cf. figure 1.2). Ce pendule est soumis à une accélération verticale oscillante  $a \cos(\omega t)$ . Une telle accélération peut être obtenue, par exemple, en vibrant le point d'ancrage ou en soumettant le pendule à un champ électromagnétique oscillant. On écrit le principe fondamental de la dynamique [70] :

$$m\ddot{\mathbf{x}} = (mg + ma \cos(\omega t))\mathbf{e}_z + \mathbf{f}(t), \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{x}$  est la position du centre de masse du pendule :

$$\mathbf{x} = l \sin(\theta_0(t))\mathbf{e}_x + l \cos(\theta_0(t))\mathbf{e}_z, \quad (1.2)$$

et  $\mathbf{f}(t)$  est la tension du fil et peut s'écrire :

$$\mathbf{f}(t) = -f(t)(\sin(\theta_0(t))\mathbf{e}_x + \cos \theta_0(t)\mathbf{e}_z). \quad (1.3)$$

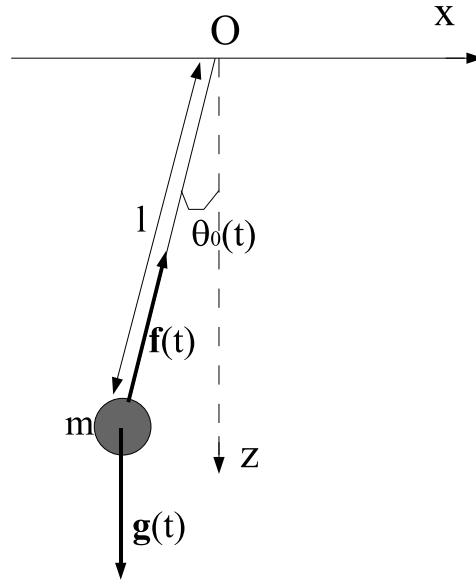


FIG. 1.2 – Schéma d'un pendule pesant de longueur  $l$ , de masse  $m$ , soumis à la force de rappel  $\mathbf{f}(t)$  et à une force de gravité modulée  $\mathbf{g}(t) = (mg + ma \cos(\omega t))\mathbf{e}_z$ , et faisant un angle  $\theta_0(t)$  avec la verticale.

En projetant sur les axes  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_z$ , on trouve les équations :

$$m\ddot{x} = -f(t) \sin(\theta_0(t)), \quad (1.4)$$

$$m\ddot{z} = mg + ma \cos(\omega t) - f(t) \cos(\theta_0(t)). \quad (1.5)$$

Pour résoudre ce système d'équations, on note  $\omega_0 = \sqrt{l/g}$  la fréquence propre de vibration du pendule. Dans la limite des faibles oscillations ( $\theta_0(t) \ll 1$ ), le mouvement du pendule peut être décrit par l'équation de Mathieu :

$$\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2(t)\theta_0 = 0, \quad (1.6)$$

avec  $\omega_0^2(t) = \omega_0^2[1 + \varepsilon \cos(\omega t)]$ , et  $\varepsilon = a/g$ . Il a été montré que, lorsque  $\omega$  est suffisamment proche de  $2n\omega_0$ , cette équation possède des solutions non-nulles croissant exponentiellement (voir par exemple le Landau et Lifshitz [53] §27) : il y a résonance pour  $\omega$  proche de  $2n\omega_0$ .

Enfin, si on rajoute un terme de dissipation visqueuse à l'équation (1.1),

$$m\ddot{\mathbf{x}} = (mg + ma \cos(\omega t))\mathbf{e}_z + \mathbf{f}(t) - b\dot{\mathbf{x}}, \quad (1.7)$$

les frottements empêchent le pendule de se mettre en mouvement tant que l'accélération  $a$  ne dépasse pas une accélération critique  $a_c$  non nulle donnée par :  $a_c = 4\nu\omega k_c$  [30].

Ainsi, à la première résonance ( $n = 1$ ), la réponse d'un pendule à une excitation extérieure sinusoïdale est une oscillation entretenue à la moitié de la fréquence d'excitation : c'est une réponse sous-harmonique. Pour Rayleigh, le comportement de la surface d'un

fluide vibré verticalement est similaire, chaque point de la surface se comportant comme un oscillateur. Plus précisément, si une couche de fluide est vibrée verticalement, il existe toujours un mode propre de la surface du fluide dont la fréquence propre est suffisamment proche de  $\omega/2$  pour que ce mode soit excité et croisse exponentiellement avec le temps. C'est pourquoi on peut analyser au moins qualitativement l'instabilité de Faraday en termes d'oscillateurs paramétriques.

### 1.3 Relation de dispersion

Les premières théories démontrant rigoureusement le caractère sous-harmonique des oscillations de la surface sont dues à Benjamin & Ursell en 1954 [5]. Ils démontrent que, pour un fluide parfait, les oscillations de la surface sont décrites par des équations de Mathieu couplées,

$$\frac{d^2\xi_m}{dt^2} + k_m \tanh k_m h \left( \frac{k_m^2 \sigma}{\rho} \pm g - a \cos \omega t \right) \xi_m = 0, \quad (1.8)$$

où  $k_m$  est un nombre d'onde réel,  $\xi_m$  l'amplitude des déformations de la surface de nombre d'onde caractéristique  $k_m$ ,  $\sigma$  la tension de surface et  $\rho$  la masse volumique du fluide. Ce résultat rejoint l'hypothèse de Rayleigh selon laquelle la surface répond comme un oscillateur paramétrique. De plus, comme on connaît la fréquence de résonance dans le cas d'une équation de Mathieu ( $\omega = \omega_0/2$ ), l'équation (1.8) donne la relation entre la fréquence d'oscillation de l'interface  $\omega_m$  et le nombre d'onde  $k_m$  :

$$\omega_m^2 = \left( \frac{k_m^3 \sigma}{\rho} + k_m g \right) \tanh(k_m h). \quad (1.9)$$

Dans le cas des fluides simples, cette expression est en très bon accord avec les résultats expérimentaux [5, 4]. Benjamin & Ursell prouvent aussi que pour un fluide incompressible de viscosité nulle, la surface doit répondre à une fréquence  $\omega_n = n\omega/2$  où  $f$  est la fréquence d'excitation et  $n$  un entier.

Beaucoup plus récemment, la viscosité a été prise en considération [50, 23]. Alors, le mode le plus instable est soit  $\omega_1 = \omega/2$  pour les fluides peu visqueux, soit  $\omega_2 = \omega$  pour les fluides visqueux en profondeur finie et pour des fréquences suffisamment faibles. Au cours de cette thèse, nous avons utilisé l'approche proposée par K. Kumar et L. Tuckerman [50] et le paragraphe suivant en résume les principales étapes.

### 1.4 Calcul de stabilité linéaire

Une analyse de stabilité linéaire complète a été proposée en 1994 par K. Kumar et L. Tuckerman [50]. Cette analyse traite le cas général de deux couches de fluides superposées de hauteur respective  $h_1$  et  $h_2$ , dans une cellule latéralement infinie. Dans la suite, nous comparons nos résultats expérimentaux à ce calcul numérique. Nous en détaillons donc ci-dessous les points importants.

### 1.4.1 Équation de Navier–Stokes

Nous nous limitons au cas d'un fluide en contact avec l'air (cf. figure 1.3). Notre couche

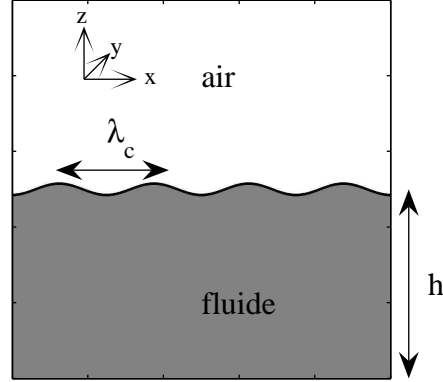


FIG. 1.3 – Couche de fluide de hauteur  $h$  en contact avec l'air soumise à des vibrations verticales.

de fluide de hauteur  $h$  suit les équations de Navier–Stokes :

$$\rho[\partial_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla)]\mathbf{U} = -\nabla\mathbf{P} + \eta\nabla^2\mathbf{U} - \rho G(t)\mathbf{e}_z, \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.11)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de notre fluide,  $\mathbf{U}$  la vitesse,  $\mathbf{P}$  la pression,  $\eta$  la viscosité de cisaillement,  $\mathbf{e}_z$  le vecteur unitaire selon la direction verticale orienté vers le haut et  $G(t)$  la gravité modulée par les vibrations :

$$G(t) = g - a \cos(\omega t), \quad (1.12)$$

où  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-1}$  est la gravité et  $a$  l'amplitude des oscillations de l'accélération. On linéarise l'équation (1.10) autour de l'état d'équilibre hydrostatique  $\mathbf{U}_0 = 0$  et  $\mathbf{P}_0 = -\rho G(t)z\mathbf{e}_z$ . On introduit pour cela les perturbations  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$  telles que  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}$  et  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{p}$ . Alors,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$  sont les solutions des équations linéarisées :

$$\rho\partial_t\mathbf{u} = -\nabla\mathbf{p} + \eta\nabla^2\mathbf{u}, \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.14)$$

On élimine la composante horizontale de la vitesse en utilisant l'opérateur  $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \nabla \times$ . L'équation (1.13) devient alors :

$$(\rho\partial_t - \eta\nabla^2) \nabla^2 w = 0, \quad (1.15)$$

où  $w$  est la composante verticale du champ de vitesse  $\mathbf{u}$ .



### 1.4.2 Conditions aux limites

La seule inconnue de l'équation (1.15) est la vitesse verticale  $w$ . Toutefois, l'existence d'une surface libre implique une deuxième inconnue : la hauteur  $\xi(x, y, t)$  d'une éventuelle déformation de l'interface autour de  $z = 0$ . Nous détaillons ici les conditions aux limites qui permettront de trouver les champs  $w$  et  $\xi$ . On impose une condition de non-glissement au fond de la cellule ( $z = -h$ ) :

$$w(-h) = 0, \quad (1.16)$$

$$\partial_z w(-h) = 0. \quad (1.17)$$

Soit  $\xi(x, y, t)$  la hauteur de la déformation de l'interface. Par continuité des vitesses on égale la vitesse verticale du fluide en  $z = \xi$  et celle d'une particule fluide située à l'interface :

$$[\partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)]\xi = w|_{z=\xi}, \quad (1.18)$$

ce qui dans la limite d'un calcul de stabilité linéaire (premier ordre en  $w$  et  $\xi$ ) devient :

$$\partial_t \xi = w|_{z=0}. \quad (1.19)$$

D'autre part, en utilisant la condition d'incompressibilité (1.14), la continuité de la contrainte tangentielle à l'interface s'écrit :

$$\eta(\nabla_H^2 - \partial_{zz})w = \eta_{air}(\nabla_H^2 - \partial_{zz})w_{air}, \quad (1.20)$$

où  $\nabla_H = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  ne prend en compte que les composantes horizontales du gradient. En négligeant la contribution de l'air ( $\eta_{air} \ll \eta$ ), on trouve :

$$(\nabla_H^2 - \partial_{zz})w|_{z=\xi} = 0. \quad (1.21)$$

L'existence d'une déformation de l'interface induit une différence de pression de part et d'autre de l'interface (pression de Laplace). En négligeant la contribution de l'air, on obtient l'équation suivante à l'interface :

$$p = 2\eta\partial_z w|_{z=0} + \rho G(t)\xi + \sigma\nabla_H^2 \xi, \quad (1.22)$$

où  $\sigma$  est la tension de surface. Une autre relation prenant en compte la pression est tirée de la différence des divergences horizontales de l'équation de Navier-Stokes :

$$\nabla_H^2 p = (\eta\nabla^2 - \rho\partial_t) \nabla_H \cdot \mathbf{u} = (\rho\partial_t - \eta\nabla^2) \partial_z w. \quad (1.23)$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant la condition d'incompressibilité (1.14). Les deux équations précédentes permettent d'obtenir, à l'interface, la condition suivante :

$$(\rho\partial_t - \eta\nabla^2)\partial_z w = 2\nabla_H^2 \partial_z w|_{z=0}\eta + G(t)\nabla_H^2 \xi\rho + \sigma\nabla_H^4 \xi. \quad (1.24)$$

### 1.4.3 Déformation sinusoïdale

On suppose maintenant que la vitesse verticale  $w$  et la déformation de la surface  $\xi$  peuvent s'écrire :

$$w(x, y, z, t) = w(z, t) \sin(k_x x + k_y y), \quad (1.25)$$

$$\xi(x, y, t) = \xi(t) \sin(k_x x + k_y y), \quad (1.26)$$

où  $k_x$  et  $k_y$  sont respectivement le nombre d'onde selon  $x$  et selon  $y$ . On note  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  le nombre d'onde horizontal. Sous cette hypothèse, on peut réécrire notre jeu d'équations (1.15), (1.16), (1.17), (1.19), (1.21) et (1.24) :

$$[\rho \partial_t - \eta(\partial_{zz} - k^2)](\partial_{zz} - k^2)w = 0, \quad (1.27)$$

$$w(-h) = 0, \quad (1.28)$$

$$\partial_z w(-h) = 0, \quad (1.29)$$

$$\eta(\partial_{zz} + k^2)w|_{z=0} = 0, \quad (1.30)$$

$$(\rho \partial_t + \eta[3k^2 - \partial_{zz}])\partial_z w|_{z=0} = -[\rho G(t) - \sigma k^2]k^2 \xi, \quad (1.31)$$

$$\partial_t \xi - w|_{z=0} = 0. \quad (1.32)$$

C'est cet ensemble d'équations qu'il faut maintenant résoudre.

### 1.4.4 Théorie de Floquet et séries de Fourier

Comme  $G(t)$  a une périodicité temporelle  $T = 2\pi/\omega$ , la théorie de Floquet nous dit que  $w(z, t)$  et  $\xi(z, t)$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$w(z, t) = e^{(\mu+i\alpha)t} \tilde{w}(z, t[2\pi/\omega]), \quad (1.33)$$

$$\xi(t) = e^{(\mu+i\alpha)t} \tilde{\xi}(t[2\pi/\omega]), \quad (1.34)$$

où  $\alpha$  et  $\mu$  sont des réels et la notation  $t[2\pi/\omega]$  signifie  $t$  modulo  $2\pi/\omega$ . De plus, comme  $\tilde{w}$  et  $\tilde{\xi}$  sont périodiques, on peut les développer en séries de Fourier :

$$\tilde{w}(z, t[2\pi/\omega]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(z) e^{in\omega t}, \quad (1.35)$$

$$\tilde{\xi}(t[2\pi/\omega]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\omega t}. \quad (1.36)$$

L'équation (1.32) conduit alors à la relation suivante entre  $w_n$  et  $\xi_n$  :

$$w_n(z=0) = [\mu + i(\alpha + n\omega)]\xi_n. \quad (1.37)$$

En substituant les équations (1.33) et (1.35) dans l'équation (1.27), on arrive à la solution :

$$w_n(z) = a_1 e^{kz} + a_2 e^{-kz} + a_3 e^{q_n z} + a_4 e^{-q_n z}, \quad (1.38)$$

où  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont quatre complexes dépendant de  $q_n$  et

$$q_n^2 = k^2 + \rho \frac{\mu + i(\alpha + n\omega)}{\eta}. \quad (1.39)$$

En fait, dans le cadre du calcul de stabilité linéaire, K. Kumar et L. Tuckerman ont montré numériquement que seules deux valeurs de  $\alpha$  sont pertinentes  $\alpha = \omega/2$  et  $\alpha = 0$ , correspondant respectivement au comportement sous-harmonique et harmonique de la surface.

Les différents modes sont alors couplés par l'équation (1.31) qu'on réécrit pour chaque mode et en  $z = 0$  :

$$[\rho\mu + i\rho(\alpha + n\omega) + 3\eta k^2]\partial_z w_n - \eta\partial_{zzz}w_n + (\rho g - \sigma k^2)k^2\xi_n = \rho k^2[\Gamma(t)\tilde{\xi}(t)]_n, \quad (1.40)$$

où  $\Gamma(t)$  est l'inverse de la partie oscillante de l'accélération et  $[\Gamma(t)\tilde{\xi}(t)]_n$  est la  $n^{\text{me}}$  composante de la transformée de Fourier de  $\Gamma(t)\tilde{\xi}(t)$ . Pour une excitation à une seule fréquence, on a :

$$\Gamma(t) = \frac{a}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (1.41)$$

ce qui conduit à :

$$[\Gamma(t)\tilde{\xi}(t)]_n = \frac{a}{2}(\xi_{n+1} + \xi_{n-1}). \quad (1.42)$$

D'après l'équation (1.37), en  $z = 0$ ,  $\partial_z w_n$  et  $\partial_{zzz}w_n$  sont proportionnels à  $\xi_n$ . L'équation (1.40) peut alors se réécrire sous la forme :

$$A_n\xi_n = a(\xi_{n+1} + \xi_{n-1}), \quad (1.43)$$

où  $A_n$  est un coefficient numérique ne dépendant ni de  $w$  ni de  $\xi$ . La condition  $w$  réel impose :

$$\xi_{-1} = \xi_1^*, \quad (1.44)$$

dans le cas harmonique ( $\alpha = 0$ ) et,

$$\xi_{-1} = \xi_0^*, \quad (1.45)$$

dans le cas sous-harmonique ( $\alpha = 1/2$ ). La résolution de l'équation (1.43) se ramène alors aisément à la résolution d'une équation matricielle de la forme :

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\xi = a\xi, \quad (1.46)$$

où  $\mathcal{A}$  comprend les  $A_n$  et  $\mathcal{B}$  correspond à l'écriture matricielle du vecteur  $\xi_{n+1} + \xi_{n-1}$  une fois les conditions initiales ramenées au cas  $n \geq 0$ . Il apparaît que l'accélération  $a$  est une valeur propre de la matrice  $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ . La résolution du problème aux valeurs propres, réalisée numériquement, permet de remonter aux accélérations solutions de l'équation (1.46).

### 1.4.5 Calcul numérique et langues de résonance

En théorie,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des matrices carrées de taille infinie. Dans la pratique, on se limite à des matrices de taille  $N \times N$ ,  $N$  variant de 5 à 10 selon la précision voulue. Dans le cas des fluides simples,  $N = 5$  donne d'excellents résultats. Une fois  $N$  fixé, on calcule les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  pour  $\omega$  et  $k$  fixés, puis la matrice  $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ . On cherche alors les

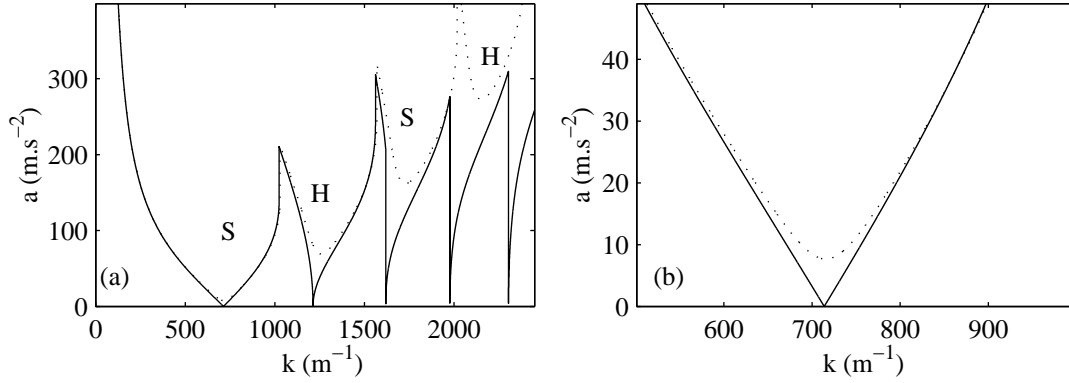


FIG. 1.4 – Langues de résonance (i.e. accélération  $a$  en fonction du nombre d'onde  $k$ ) calculées numériquement par la méthode de la référence [50] pour  $f = 50$  Hz, pour un fluide de viscosité nulle (ligne continue) et pour un fluide de viscosité 10 mPa.s (ligne en pointillés). (b) Agrandissement de la langue de résonance à  $f/2$ . S et H désignent respectivement les langues sous-harmoniques et harmoniques.

valeurs propres de  $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$  dans le cas harmonique et le cas sous-harmonique.  $a(k, \omega)$  est alors la plus petite des valeurs propres réelles, non nulles et positives de  $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ . Les courbes  $a(k, \omega)$  à  $\omega$  fixé (cf. figure 1.4) sont appelées “langues de résonance”. On obtient deux types de langues, les langues correspondant à une oscillation de l'interface à un multiple de la fréquence d'excitation :  $\omega_0 = n\omega$ , et les langues correspondant à une oscillation de l'interface à nombre demi-entier de fois la fréquence d'excitation :  $\omega_0 = \frac{2n+1}{2}\omega$ . Ces fréquences sont appelées respectivement fréquences harmoniques et sous-harmoniques. La langue de résonance au plus petit nombre d'onde correspond à la réponse de la surface à  $f/2$ . Chaque nouvelle langue correspond à une augmentation de la fréquence de résonance de  $f/2$ . Ainsi, la première langue est sous-harmonique (à  $f/2$ ), la seconde est harmonique (à  $f$ ), la troisième sous-harmonique (à  $3f/2$ ), etc. Selon la profondeur de la cellule, la fréquence d'excitation et les paramètres physiques du fluide, la réponse de l'interface, donnée par le minimum global de  $a(k, \omega)$ , peut être soit harmonique soit sous-harmonique.

Une fois  $a(k, \omega)$  connue, on cherche le minimum de  $a$  à  $\omega$  fixé et on trouve  $a_c(\omega)$  et le nombre d'onde correspondant est  $k_c(\omega)$ . Enfin, en variant  $\omega$ , on construit les courbes  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de  $\omega$ .

#### 1.4.6 Résultats et comparaison à l'expérience

Dans le cas d'un fluide simple, l'accord entre expérience et calcul numérique est presque parfait. La validité du calcul de stabilité linéaire a été, en effet, vérifiée à plusieurs reprises (e.g. [4, 85]). La figure 1.5 présente  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de la fréquence d'excitation  $f$  mesurés sur une huile silicone avec notre montage expérimental qui sera décrit au chapitre 3 page 41. Nous retrouvons ici un excellent accord entre expérience et théorie sur

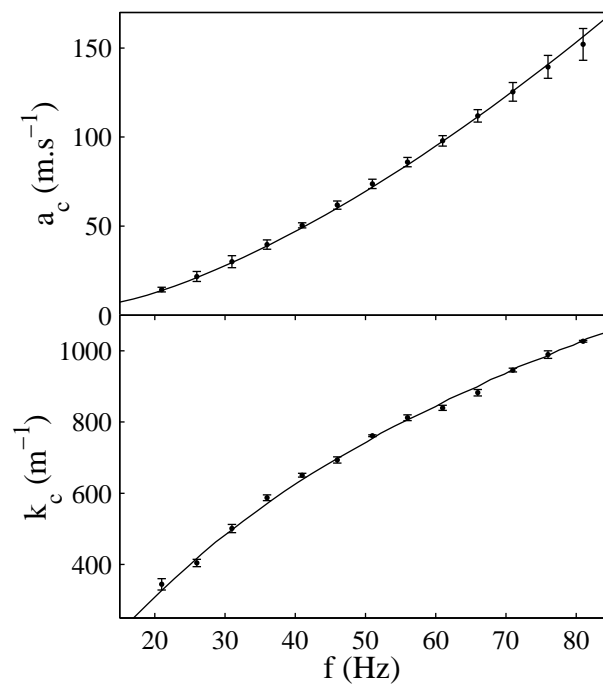


FIG. 1.5 –  $a_c$  et  $k_c$  mesurés expérimentalement (.) pour une huile silicone (Dow Corning DC200) et résultat du calcul numérique de Kumar et Tuckerman [50] (lignes continues) avec  $\rho = 968 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\eta = 0.1 \text{ Pa.s}$  et  $\sigma = 0.025 \text{ N.m}^{-1}$ . La densité et la viscosité sont celles indiquées par le fournisseur. La tension de surface a été mesurée indépendamment par la méthode de Wilhemly (avec une incertitude de  $\pm 10\%$ ).

toute la gamme de fréquences explorées.

En conclusion, le calcul de stabilité linéaire proposé par Kumar et Tuckerman prédit l'accélération et le nombre d'onde critiques d'un fluide simple dans un récipient de profondeur finie et de dimensions latérales infinies. Dans la suite, nous décrivons brièvement le comportement d'un fluide simple à mesure que l'accélération est augmentée au-dessus de l'accélération critique.

## 1.5 Au-dessus du seuil

Le comportement d'une couche de fluide vibrée verticalement lorsque  $a > a_c$  est un cas classique de transition vers le chaos spatio-temporel. Cette transition est contrôlée par un seul paramètre : l'accélération réduite (ou écart à l'accélération critique)  $\epsilon$  défini par :

$$\epsilon = \frac{a}{a_c} - 1. \quad (1.47)$$

Ce n'est pas le but de cette thèse d'être exhaustive sur les phénomènes rencontrés au-dessus du seuil. Nous ne décrivons dans ce qui suit que les comportements typiques observés dans les fluides simples au-dessus du seuil d'instabilité.

### 1.5.1 Motifs et quasi-motifs

Nous nous intéressons ici brièvement à l'organisation spatiale des ondes de surface communément appelée "motif" ou "pattern" en anglais. En effet, les ondes de surfaces peuvent prendre plusieurs formes selon la nature du fluide, la forme du récipient et la forme de l'excitation. Nous présentons d'abord des études expérimentales et théoriques pour une excitation sinusoïdale avant de résumer les résultats obtenus pour une excitation contenant plusieurs fréquences.

#### Motifs

Les motifs apparaissant à la surface d'une couche de fluide vibrée verticalement présentent une "zoologie" variée, allant de lignes parallèles [4] à des hexagones [31] en passant par des cercles concentriques [33] et des carrés [24]. Ces motifs peuvent s'interpréter comme la superposition de modes de même longueur d'onde, ou, lorsque l'accélération est augmentée au-dessus de l'accélération critique, de longueurs d'onde proches [87]. La longueur d'onde sélectionnée est fonction de la fréquence d'excitation. De plus, ces motifs sont fortement influencés par la géométrie de la cellule [25] et le sont d'autant plus que la viscosité est faible. Différents groupes [25, 69, 48] ont montré expérimentalement et théoriquement que la présence de plusieurs motifs possibles à une même fréquence pouvait conduire au chaos et ce même à des accélérations proches de l'accélération critique. Ce chaos est créé par l'apparition successive ou simultanée de plusieurs types de motifs. Cependant, même si les motifs diffèrent, le nombre d'onde et l'accélération critique suivent les valeurs numériques données par le calcul de Kumar et Tuckerman [50].

### Quasi-motifs

Les quasi-motifs apparaissent à la surface d'un fluide soumis à une accélération de la forme :

$$G(t) = g + f(t), \quad (1.48)$$

$$f(t) = a[\cos(\theta) \cos(n\omega t) + \sin(\theta) \cos(l\omega t + \phi)], \quad (1.49)$$

où  $a$  est une accélération,  $n$  et  $l$  des entiers,  $\phi$  une phase et  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  un angle modulant le rapport des contributions de chaque fréquence. Ce type d'excitation a été étudié expérimentalement par Fauve et Edwards [32, 33] et théoriquement par Besson *et al.* [12]. D'autres groupes ont aussi travaillé sur ce type d'excitation [47, 74]. Le grand intérêt d'une excitation à deux fréquences par rapport à une excitation à une seule fréquence est la possibilité de changer le motif apparaissant à la surface en jouant sur le rapport d'amplitude entre les deux excitations ( $\theta$ ). Certains motifs obtenus sont communs aux excitations à une et deux fréquences : carrés, lignes parallèles, hexagones. Mais les quasi-motifs (voir figure 1.6) sont propres au cas de deux fréquences d'excitations. Le calcul numérique de

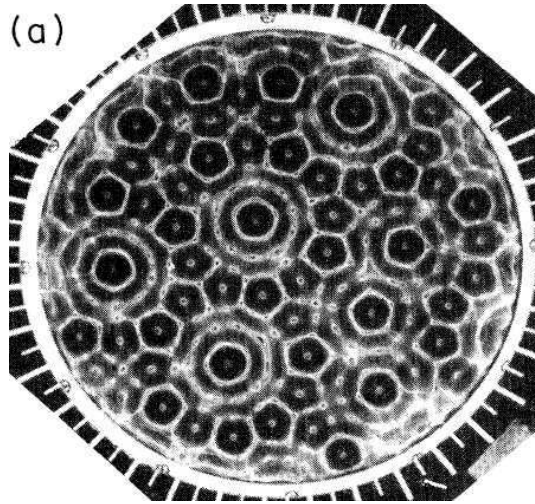


FIG. 1.6 – Photographie d'un quasi-motif de symétrie 12 tirée de la référence [32]. Le fluide est un mélange eau-glycérol (82–28%) dans un cylindre de 120 mm de diamètre et de profondeur 29 mm à  $T = 23^\circ\text{C}$ . Les paramètres de l'excitation sont  $a$  légèrement supérieur à  $a_c$  (non-mesuré),  $\theta = 66.1^\circ$ ,  $k = 4$ ,  $l = 5$ ,  $\phi = 66^\circ$  et  $f = 31$  Hz.

Kumar et Tuckerman est facilement adaptable au cas de deux fréquences d'excitation [12]. Les séries de Fourier se développent en  $n\omega$  et l'équation (1.42) devient :

$$[f(t)\tilde{\xi}(t)]_n = \frac{a}{2}[\cos\theta(\xi_{n+k} + \xi_{n-k}) + \sin\theta(\xi_{n+l} + \xi_{n-l})]. \quad (1.50)$$

Le problème se résout ensuite de la même façon. Comme pour le cas à une fréquence d'excitation, l'accord entre calculs numériques et résultats expérimentaux est très bon [12].

### 1.5.2 Évolution de l'amplitude

Dans le cas d'une excitation à une fréquence, lorsque l'accélération  $a$  est légèrement supérieure à l'accélération critique  $a_c$  ( $\epsilon < 0.1$ ), le motif formé par les ondes de surface est stable. L'augmentation de l'accélération se traduit par une augmentation de l'amplitude  $\xi$  des ondes de surface et par l'excitation progressive d'autres fréquences. L'augmentation de l'amplitude des ondes de surface a été étudiée expérimentalement par Wernet *et al.* [85], pour de l'huile silicone, grâce à une méthode de réflexion de la lumière à la surface du fluide. Ce travail a mis en évidence que pour  $\epsilon < 0.01-0.02$ ;  $\xi \propto \sqrt{\epsilon}$  (cf. figure 1.7 où l'amplitude des ondes de surface est notée  $\eta$ ). En effet, de façon générale, dans le cas d'une instabilité

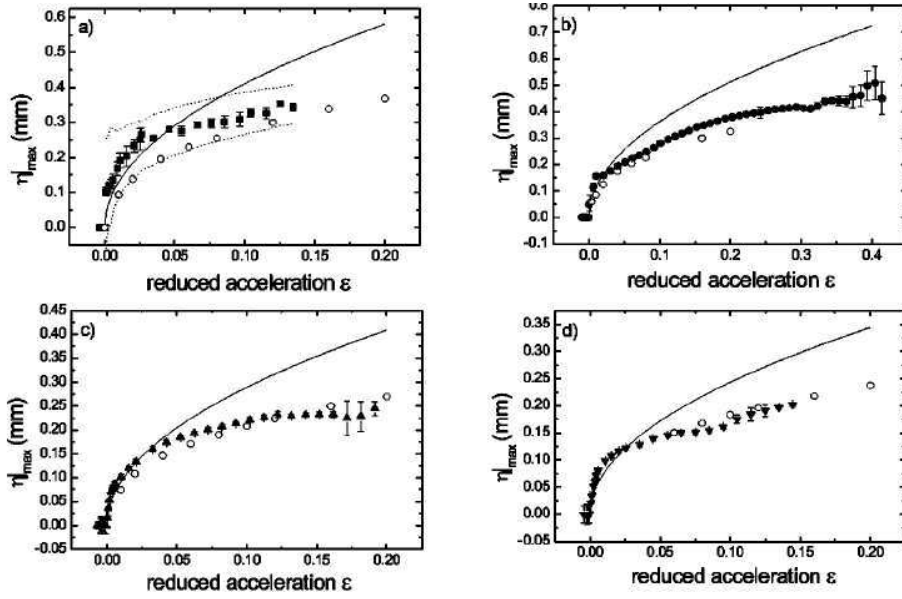


FIG. 1.7 – Amplitude maximale  $\eta_{max}$  en fonction de l'accélération réduite  $\epsilon$  pour une couche d'huile silicone ( $\rho = 934 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\sigma = 20.1 \text{ mN.m}^{-1}$ ,  $\eta = 7.8 \text{ mPa.S}$ ) d'épaisseur 3 mm vibrée à : (a)  $f = 60 \text{ Hz}$ , (b)  $f = 80 \text{ Hz}$ , (c)  $f = 120 \text{ Hz}$  et (d)  $f = 160 \text{ Hz}$ . Les symboles pleins représentent les résultats expérimentaux. Les lignes continues représentent les résultats de l'analyse de perturbation non-linéaire de la référence [86]. Les symboles creux sont les résultats de la simulation numérique. Les pointillés dans la figure (a) indique la gamme d'erreur de la technique expérimentale. Figures extraites de la référence [85].

hydrodynamique (voir par exemple [60] §1 et §5), on s'attend à ce que l'amplitude de l'instabilité suive une loi du type :

$$\tau_0 \frac{d\xi}{dt} = \epsilon \xi - b|\xi|^2 \xi. \quad (1.51)$$

La première partie de l'équation  $\tau_0 \frac{d\xi}{dt} = \epsilon \xi$  correspond à l'équation différentielle linéaire de la croissance de l'instabilité et  $-b|\xi|^2 \xi$  est un terme non-linéaire limitant l'amplitude de



l'instabilité ( $b$  positif). Alors, en régime stationnaire l'amplitude sature à la valeur :

$$\xi = \sqrt{\frac{\epsilon}{b}}. \quad (1.52)$$

L'accord quantitatif entre cette loi et les résultats expérimentaux n'est valable que sur une gamme limitée ( $\epsilon < 2\%$ ). Pour des accélérations supérieures, il faut prendre en compte les ordres supérieurs en  $\epsilon$  dans l'équation (1.51).

Cabeza *et al.* [19] ont aussi réalisé une étude de l'évolution de l'amplitude des ondes de surface d'une couche d'eau distillée avec  $\epsilon$ . Pour cela, ils ont utilisé une méthode capacitive pour mesurer le déplacement de l'interface. Cette étude a mis en évidence l'apparition

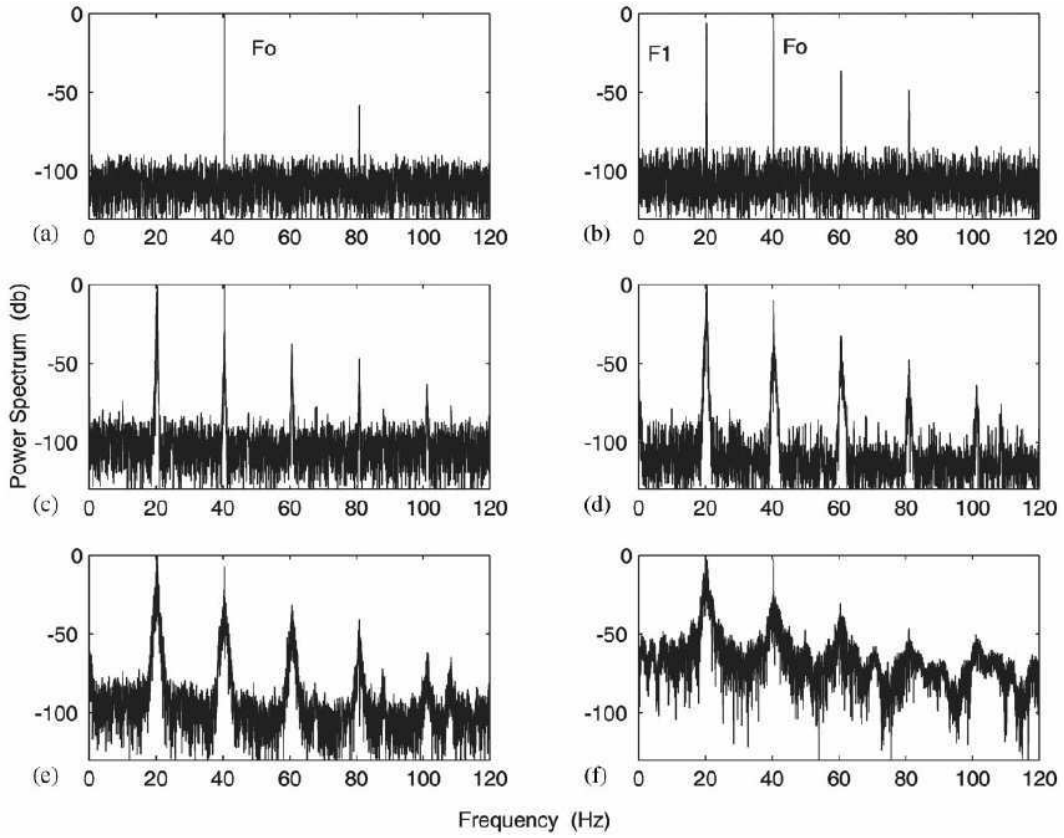


FIG. 1.8 – Spectre de fréquence du déplacement de l'interface à  $f = 40$  Hz. (a) avant le seuil,  $a = 34 \text{ m.s}^{-2}$  ( $\epsilon = -0.093$ ), (b) au seuil  $a = 37.5 \text{ m.s}^{-2}$  ( $\epsilon \simeq 0$ ), (c) et au dessus du seuil  $a = 54.1 \text{ m.s}^{-2}$  ( $\epsilon = 0.44$ ), (d)  $a = 62.1 \text{ m.s}^{-2}$  ( $\epsilon = 0.66$ ), élargissement des pics, (e)  $a = 68.2 \text{ m.s}^{-2}$  ( $\epsilon = 0.82$ ) et (f)  $a = 74.3 \text{ m.s}^{-2}$  ( $\epsilon = 0.98$ ), régime chaotique. Figures extraites de [19].

des ordres supérieurs dans le spectre de fréquence des oscillations de la surface  $\xi(t)$  (cf. figure 1.8). Si, à  $\epsilon$  petit, seul un pic à  $f/2$  est visible, correspondant à la réponse sous-harmonique, lorsque  $\epsilon$  augmente on voit apparaître des pics aux fréquences  $nf/2$  (avec  $n$

entier). De plus, la largeur des pics augmente (cf. figure 1.8 (c) et (d)) jusqu'à ce que le motif ne soit plus périodique et devienne chaotique (figure 1.8 (f)).

### 1.5.3 Instabilité secondaire et transition vers le chaos

Lorsque  $\epsilon \geq 0.1$ , il apparaît une instabilité secondaire [27, 18] : le motif se déforme et évolue dans le temps de manière quasi-périodique. Lorsque  $(a - a_c)/a_c > 0.15$ , la surface perd tout caractère déterministe et devient chaotique. Enfin lorsque  $a$  est encore augmenté des gouttes sont éjectées de la surface [38, 37].

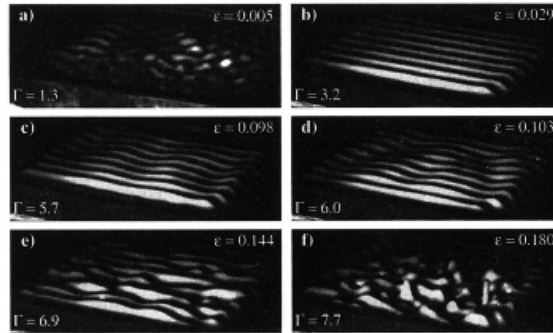


FIG. 1.9 – Évolution du motif lorsque  $a$  augmente pour une couche de glycérol à  $T = 44^\circ\text{C}$  vibrée à  $f = 40$  Hz. (a) Début de l'instabilité, la surface s'organise  $\epsilon = 0.005$ , (b) lignes parallèles,  $\epsilon = 0.029$ , (c) apparition de l'instabilité secondaire,  $\epsilon = 0.098$ , (d) modulation temporelle de l'instabilité secondaire,  $\epsilon = 0.103$ , (e) apparition de défauts,  $\epsilon = 0.144$ , (f) chaos spatio-temporel,  $\epsilon = 0.180$ . Figures tirées de [27].

En résumé, l'instabilité de Faraday a été étudiée de façon approfondie dans les fluides simples au voisinage du seuil et au-delà de l'accélération critique. Des études théoriques prédisent précisément l'accélération critique, le nombre d'onde et le motif de surface au voisinage de  $a_c$ . Au-dessus de  $a_c$ , l'augmentation de l'amplitude des ondes de surface et la transition vers le chaos spatio-temporel ont été étudiées dans différents fluides simples. Le comportement des fluides simples vibrés verticalement est donc maintenant bien compris. Dans la suite, la couche de fluide simple est remplacée par une couche de fluide complexe.



## Chapitre 2

# Résultats antérieurs sur l'instabilité de Faraday dans les fluides complexes

Le chapitre précédent a montré que, depuis les premières études par Faraday, de très nombreux travaux ont été consacrés à l'effet des vibrations verticales sur une couche de fluide newtonien. Dans ce chapitre, après de brefs rappels sur les fluides complexes et leur rhéologie, nous recensons les principaux résultats obtenus précédemment sur l'instabilité de Faraday dans divers fluides complexes. Nous verrons que les travaux antérieurs se sont concentrés sur les polymères, les granulaires secs et plus récemment les suspensions.

### 2.1 Introduction aux fluides complexes

Un fluide complexe est un fluide possédant une microstructure, c'est-à-dire une échelle de taille caractéristique comprise entre la taille nanométrique de la molécule et celle macroscopique du récipient qui contient le fluide. De fait, la majorité des fluides utilisés quotidiennement sont des fluides complexes [26, 54]. La microstructure peut provenir de l'organisation d'éléments en solution (molécules tensioactives : savons, liquide vaisselle ou molécules polymériques : caoutchouc), de la présence de particules solides (dans l'air : sable, sucre, etc ; dans un fluide suspendant : ketchup, goudron, moutarde à l'ancienne), ou encore de l'émulsification de deux liquides non miscibles (mayonnaise, vinaigrette, mousse). Par exemple, dans le cas d'une émulsion, la taille caractéristique de la microstructure est le diamètre des gouttelettes d'huile en suspension dans l'eau (typiquement 1 à 100  $\mu\text{m}$ ).

On voit donc que les fluides complexes sont omniprésents dans la vie de tous les jours. L'étude de leurs propriétés est donc importante aussi bien d'un point de vue fondamental que d'un point de vue industriel et commercial. Dans la suite, même si l'étude des propriétés à l'équilibre des fluides complexes constitue tout un pan de la recherche actuelle, nous nous concentrons uniquement sur leurs propriétés d'écoulement.

### 2.1.1 Propriétés d'écoulement

Une des méthodes les plus couramment utilisées pour déterminer les propriétés d'un fluide complexe est la rhéologie, c'est-à-dire étymologiquement l'étude de la façon dont il s'écoule. Pour ce faire, on place une couche de fluide entre deux plaques parallèles et une des deux plaques est mise en mouvement. En comparant la vitesse de la plaque mise en mouvement et la force exercée sur la plaque, on accède à la résistance du fluide au déplacement et donc à sa viscosité. La mesure de la viscosité en fonction de la force ou de la vitesse appliquée à la paroi mobile constitue l'objet de la rhéologie "non-linéaire". Alors qu'elle reste constante dans un fluide newtonien, la viscosité dépend fortement des contraintes appliquées à un fluide complexe : un tel comportement non-newtonien résulte de la présence de la microstructure dont l'organisation est susceptible d'être fortement modifiée par l'écoulement (étirement et alignement de molécules de polymères sous cisaillement par exemple).

L'expérience la plus simple est constituée d'une couche de fluide d'épaisseur  $e$  entre deux plans horizontaux, infinis et parallèles. On note  $z$  la direction verticale, le plan supérieur ( $z = e$ ) est en mouvement à la vitesse  $v(t)$  et le plan inférieur ( $z = 0$ ) est immobile. La condition de non-glissement aux bords nous dit que la vitesse du fluide est nulle en  $z = 0$  et vaut  $v(t)$  en  $z = e$ . Il y a alors deux manières de réaliser une expérience. La première consiste à imposer la vitesse  $v(t)$  et à mesurer la force par unité de surface (appelée contrainte de cisaillement)  $\sigma(t)$ <sup>1</sup> nécessaire pour obtenir cette vitesse : c'est une expérience à cisaillement imposé. La seconde méthode consiste à imposer  $\sigma(t)$  et à mesurer la vitesse  $v(t)$  : on réalise ainsi une mesure à contrainte imposée.

### 2.1.2 Rhéologie non-linéaire

On impose une vitesse constante ( $v(t) = v$ ) (respectivement une contrainte constante ( $\sigma(t) = \sigma$ )), à la plaque supérieure, et on mesure la force par unité de surface  $\sigma$  exercée par le fluide sur la plaque (respectivement la vitesse  $v$  de la plaque). Le principe fondamental de la dynamique donne pour un fluide quelconque :

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} = \rho d_t \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

où  $\bar{\sigma}$  est le tenseur des contraintes et  $\mathbf{v}$  le champ de vitesse dans le fluide.

Pour un fluide newtonien, on a la relation constitutive :

$$\sigma = \eta \dot{\gamma}, \quad (2.2)$$

où  $\sigma = \bar{\sigma}_{xz} = \bar{\sigma}_{zx}$  est la contrainte appliquée au fluide,  $\dot{\gamma}$  est le taux de cisaillement, défini, dans l'expérience de rhéologie décrite au paragraphe précédent, comme  $\partial_z v_x$  et  $\eta$  la viscosité. Les deux équations précédentes amènent, pour deux plaques parallèles en

---

<sup>1</sup> $\sigma$  a déjà été utilisée pour la tension de surface. Mais comme cette notation de la contrainte n'est utilisée qu'ici et en Annexe, il n'y a pas de confusion possible

translation à vitesse  $v$  constante, à :

$$\sigma(z) = \sigma = \text{constante}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}(z) = v \frac{z}{e} \mathbf{e}_x. \quad (2.4)$$

En rhéologie, on définit la viscosité  $\eta$  indépendamment de toute loi constitutive à partir des mesures de  $\sigma$  et  $\dot{\gamma}$  par le rapport :

$$\frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = \eta, \quad (2.5)$$

où  $\eta$  dépend a priori de  $\sigma$  et de  $\dot{\gamma}$ . En effet, pour un fluide complexe, la microstructure est susceptible d'être modifiée par le cisaillement. Dans certains fluides (micelles géantes en régime semi-dilué (étudiées plus loin), solutions de polymères, etc.), les objets ou agrégats constituant la microstructure s'alignent dans le sens de l'écoulement ce qui a tendance à diminuer la résistance du fluide. La viscosité du fluide diminue donc lorsque le cisaillement augmente : c'est le phénomène de rhéo-fluidisation. Nous verrons un exemple classique de fluide rhéofluidifiant à travers l'étude des solutions semi-diluées de micelles géantes. En revanche, pour d'autres fluides (suspensions de colloïdes, micelles géantes en régime dilué etc.), la microstructure se réarrange pour résister à l'écoulement. La viscosité du fluide augmente avec le cisaillement ; c'est le phénomène de rhéo-épaississement (voir par exemple la figure 2.1 tirée de la référence [11]). Les suspensions d'amidon ou de maïzena sont des exemples de tels fluides utilisés dans la vie quotidienne.

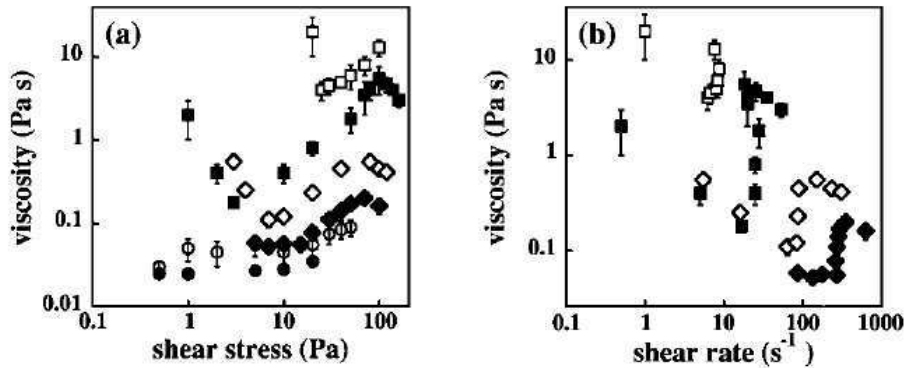


FIG. 2.1 – Viscosité d'une suspension de particules de BiOCl (a) en fonction de la contrainte et (b) en fonction du cisaillement, en échelles logarithmiques. Chaque symbole correspond à une fraction volumique différente en particules.  $\bullet$  : 11.5% ;  $\circ$  : 16.5% ; diamants pleins : 17.5% ;  $\diamond$  : 19% ; carrés pleins : 21% ;  $\square$  : 22.5%. Figure extraite de la référence [11].

### 2.1.3 Rhéologie linéaire

En rhéologie linéaire, on impose de petites déformations au fluide via un cisaillement oscillant  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma} \cos(\omega t)$  (respectivement une contrainte oscillante  $\sigma(t) = \sigma \cos(\omega t)$ ) et

on mesure la réponse du fluide. Pour un fluide newtonien, la force de friction étant proportionnelle à la vitesse, on s'attend à une réponse en phase avec l'excitation imposée :  $\sigma(t) \propto \dot{\gamma}(t)$ . De plus,  $\eta = \sigma/\dot{\gamma}$  ne dépend pas de la fréquence  $\omega$ . Au contraire, pour un solide élastique, on s'attend à une réponse en déphasage de  $\pi/2$ ,  $\sigma(t) \propto \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t}$ . En effet, la réponse d'un solide élastique est proportionnelle à la déformation (i.e. à l'intégrale  $\gamma$  du taux de cisaillement, ou encore pour des perturbations sinusoïdales, à sa dérivée).

De façon générale, dans un fluide complexe, la déformation de la microstructure est une déformation élastique, mais cette déformation s'accompagne de réarrangements irréversibles qui donnent lieu à une réponse de type visqueux en phase avec l'excitation. La réponse d'un fluide complexe à une excitation sinusoïdale peut donc se décomposer en deux termes, un terme élastique en déphasage de  $\pi/2$  par rapport à l'excitation correspondant à une réponse de type solide et un terme en phase avec l'excitation correspondant à une réponse de type liquide. À taux de cisaillement imposée ( $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma} \cos \omega t$ ), la contrainte de cisaillement est la somme de deux termes :

$$\sigma(t) = \sigma'' \cos \omega t - \sigma' \sin \omega t. \quad (2.6)$$

On peut alors définir deux viscosités caractéristiques :

$$\eta' = \frac{\sigma'}{\dot{\gamma}}, \quad (2.7)$$

$$\eta'' = \frac{\sigma''}{\dot{\gamma}}. \quad (2.8)$$

De ces deux valeurs, on déduit le module de cisaillement  $G' = -\omega\eta'$  et le module de perte  $G'' = \omega\eta''$ . On représente couramment la réponse linéaire d'un fluide en traçant sur un même graphique  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$ . En effet, cette représentation permet de visualiser rapidement le comportement du fluide. Lorsque  $G'' < G'$ , le fluide a un comportement de type solide et lorsque  $G'' > G'$  le fluide a un comportement de type liquide.

Les notations complexes donnent une autre notation possible :

$$\sigma(t) = \sigma e^{i(\omega t + \phi)}, \quad (2.9)$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma} e^{i\omega t}, \quad (2.10)$$

$$\phi = \arctan \frac{\sigma'}{\sigma''}. \quad (2.11)$$

On définit alors la viscosité complexe  $\eta^*(\omega)$  par :

$$\eta^*(\omega) = \frac{\sigma(t)}{\dot{\gamma}(t)} = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} e^{i\phi}. \quad (2.12)$$

On retrouve facilement le module de cisaillement et le module de perte :

$$G'(\omega) = -\omega \Im(\eta^*(\omega)) = -\omega \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \sin \phi, \quad (2.13)$$

$$G''(\omega) = \omega \Re(\eta^*(\omega)) = \omega \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \cos \phi. \quad (2.14)$$

La connaissance de  $\eta(\sigma, \dot{\gamma})$  par la rhéologie non-linéaire et de  $\eta^*(\omega)$  par la rhéologie linéaire donne donc des informations sur le comportement d'un fluide complexe à grande et à petite déformation. Dans la suite, nous montrons qu'il est possible de remonter au comportement d'un fluide complexe lors d'une expérience d'instabilité de Faraday.

## 2.2 Calcul de stabilité linéaire pour l'instabilité de Faraday dans un fluide complexe

### 2.2.1 Accélération et nombre d'onde critiques

En 1999, S. Kumar a proposé [51] que le comportement d'un fluide complexe dans l'expérience d'instabilité de Faraday peut être déduit des mesures de rhéologie linéaire en remplaçant simplement dans l'équation (1.39)  $\eta$  par  $\eta^*(n\omega + \alpha)$ . L'hypothèse de base est que l'amplitude des déformations au voisinage du seuil reste suffisamment faible pour pouvoir appliquer la rhéologie linéaire. On prend ainsi en compte la dépendance en  $\omega$  de la réponse d'un fluide complexe à une excitation oscillante. S. Kumar a ainsi calculé la réponse d'un fluide de Maxwell ( $\eta^* = \frac{\eta_0}{1+i\tau\omega} + \eta_S$ , voir §4.2, page 73) a des vibrations verticales et a mis en évidence la présence possible d'une réponse harmonique de la surface. Nous revenons plus loin sur ce phénomène au §2.3.1, page 34. De plus, nous montrons ci-dessous que le calcul de stabilité linéaire peut-être utiliser pour déterminer numériquement la vitesse du fluide dans le volume.

### 2.2.2 Champ de vitesse

Le calcul numérique proposé par S. Kumar [51] donne  $a_c$  et  $k_c$  mais aussi l'amplitude  $\xi_n$  du mode à  $n\omega t$  de  $\xi$ . En effet pour une fréquence  $\omega$  donnée, on obtient non seulement la valeur propre (égale à l'accélération critique) mais aussi le vecteur propre correspondant. Ce vecteur propre est égal à  $\xi_n$  à une constante multiplicative près qui n'est pas déterminée numériquement. En effet l'analyse de stabilité linéaire ne donne accès qu'à la proportion relative des composantes de la déformation et non à leur valeur absolue. De plus, le calcul de S. Kumar donne pour la composante verticale de la vitesse l'expression :

$$w_n(z) = a_1 e^{kz} + a_2 e^{-kz} + a_3 e^{q_n z} + a_4 e^{-q_n z}, \quad (2.15)$$

où les composantes  $a_i$  ( $i = 1..4$ ) dépendent de  $n$  et

$$q_n^2 = k^2 + \rho \frac{\mu + i(\alpha + n\omega)}{\eta^*(\alpha + n\omega)}. \quad (2.16)$$



L'équation (2.16) n'est qu'une généralisation de l'équation (1.39) (page 17) au cas d'une viscosité complexe. On rappelle enfin les conditions aux limites :

$$w(-h) = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_z w(-h) = 0, \quad (2.18)$$

$$(\partial_{zz} + k^2)w = 0, \quad (2.19)$$

$$\partial_t \xi - w|_{z=0} = 0. \quad (2.20)$$

En identifiant les termes de même fréquence, on trouve pour  $\omega_n$  :

$$w_n(-h) = 0, \quad (2.21)$$

$$\partial_z w_n(-h) = 0, \quad (2.22)$$

$$(\partial_{zz} + k^2)w_n = 0, \quad (2.23)$$

$$\partial_t \xi_n - w_n|_{z=0} = 0. \quad (2.24)$$

Comme le calcul de S. Kumar donne  $k = k_c$  et  $\xi_n$ , on peut alors résoudre ce système d'équations (2.15, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24) pour un entier  $n$  donné. La résolution, effectuée grâce au logiciel Maple, conduit à :

$$\begin{aligned} a_1 &= b_n \left( (e^{2hk_c} - 1)k_c^3 + (1 + e^{2hq_n} - 4e^{hk_c+hq_n})k_c^2 q_n + (e^{2hq_n} - 1)k_c q_n^2 + (1 + e^{2hq_n})q_n^3 \right), \\ a_2 &= b_n e^{hk_c} \left( 4e^{hq_n} k_c^2 q_n + e^{hk_c+2hq_n} (k_c^3 - k_c^2 q_n + k_c q_n^2 - q_n^3) - e^{hk_c} (k_c^3 + k_c^2 q_n + k_c q_n^2 + q_n^3) \right), \\ a_3 &= 2b_n k_c \left( (e^{2hk_c+1} - e^{hk_c+hq_n})k_c^2 + (e^{2hk_c} - 1)k_c q_n - e^{hk_c+hq_n} q_n^2 \right), \\ a_4 &= -2b_n e^{hq_n} k_c \left( e^{2hk_c+hq_n} k_c (k_c - q_n) + e^{hq_n} k_c (k_c + q_n) - e^{hk_c} (k_c^2 + q_n^2) \right), \\ b_n &= -\frac{\eta^*(\alpha + n\omega)\xi_n}{\rho} \frac{1}{(1 + e^{2hk_c})(-1 + e^{2hq_n})k_c - (-1 + e^{2hk_c})(1 + e^{2hq_n})q_n}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En reprenant la définition de  $w_n$  donnée par l'équation (1.35), on peut retrouver l'expression de la vitesse dans la direction  $z$ . Pour trouver les autres composantes du vecteur vitesse, on utilise la condition d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Nous détaillons ci-dessous trois cas particuliers.

### Cas d'un motif en bandes parallèles :

On se place dans le cas où le motif est constitué de bandes perpendiculaires à la direction  $x$ . Alors, en supposant le système invariant par une translation selon  $y$  on a  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y = 0$ . En notant  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , la condition d'incompressibilité se réduit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_z w \sin(k_c x) + \partial_x u = 0. \quad (2.26)$$

Soit,

$$u = \frac{\partial_z w}{k_c} \cos(k_c x). \quad (2.27)$$

Comme  $w$  est connu grâce aux l'équations (2.15) et (2.25), on en déduit  $u$ . On peut aussi trouver le champ de vitesse pour des motifs plus compliqués en les décomposant en somme de motifs linéaires.

**Cas d'un motif carré :**

Pour un motif carré, la vitesse selon  $z$  est de la forme

$$w(x, y, z, t) = w(z, t) \cos(k_x x) \cos(k_y y) = \frac{w(z, t)}{2} (\cos(k_x x + k_y y) + \cos(k_x x - k_y y)). \quad (2.28)$$

On a donc une somme de deux motifs linéaires de même nombre d'onde critique  $k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ , donc de même vitesse verticale  $w$ . Dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire, il suffit ensuite de traiter chaque motif linéaire séparément et de sommer les vitesses ainsi trouvées.

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = w(z, t) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \mathbf{e}_z - \frac{\partial_z w(z, t)}{k_c} \left( \frac{k_x}{k_c} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \right) \mathbf{e}_x - \frac{\partial_z w(z, t)}{k_c} \left( \frac{k_y}{k_c} \sin(k_y y) \cos(k_x x) \right) \mathbf{e}_y. \quad (2.29)$$

**Cas d'un fort confinement dans une direction :**

Si on suppose que la couche de fluide est dans une cellule à fort rapport d'aspect ( $L \gg l$ ), les ondes de surface vont se positionner perpendiculairement à la grande dimension  $L$  que nous notons  $x$ . La direction de la petite dimension  $l$  est notée  $y$ . De plus, expérimentalement, le ménisque est souvent accroché au bord de la cellule (cf. §3.1.1, page 43), ce qui impose les trois composante de  $\mathbf{v}$  nulles :

$$u(y = l, 0) = v(y = l, 0) = w(y = l, 0) = 0 \quad (2.30)$$

$$\xi(y = l, 0) = 0. \quad (2.31)$$

Les conditions aux limites ci-dessus imposent :

$$k_y = \frac{n\pi}{l}, \quad (2.32)$$

$$v = 0, \quad (2.33)$$

$$u \propto \sin(k_y y), w \propto \sin(k_y y) \quad (2.34)$$

$$k_x = \sqrt{k_c^2 - k_y^2}. \quad (2.35)$$

Les équations précédentes conduisent aux expressions des composantes de la vitesse selon  $z$  et selon  $x$  :

$$w(x, y, z, t) = w(z, t) \sin(k_x x) \sin(k_y y), \quad (2.36)$$

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial_z w(z, t)}{k_x} \cos(k_x x) \sin(k_y y). \quad (2.37)$$

Nous utiliserons l'équation (2.37) dans la suite pour interpréter nos expériences en cellule rectangulaire (cf. §3.3, page 69).

Nous avons donc montré qu'à une constante multiplicative près, il est possible de déterminer le champ de vitesse pour une couche de fluide complexe vibrée verticalement au voisinage immédiat du seuil.

## 2.3 Résultats expérimentaux

### 2.3.1 Polymères dilués

Une des familles de fluides complexes dont le comportement dans l'expérience de Faraday a été le plus étudié est la famille des solutions de polymères dans le régime dilué. Ces fluides présentent une rhéologie essentiellement fluide avec peu de viscoélasticité,  $G' \propto G'' - \eta_S \omega \propto \omega^{0.5}$  ( $\eta_S$  viscosité du solvant). Des études théoriques [67, 51] ont prédit que la viscoélasticité de ces solutions impose une réponse harmonique de la surface à basse fréquence, alors que, pour un fluide simple, la réponse de la surface est toujours sous-harmonique. Cette réponse sous-harmonique a été mise en évidence expérimentalement par Wagner *et al.* [83] pour une solution semi-diluée de 1.5 wt% d'acide polyacrylamide-co-acrylic (PAA) dilué dans un mélange 60 : 40 de glycérol-eau (voir figure 2.2).

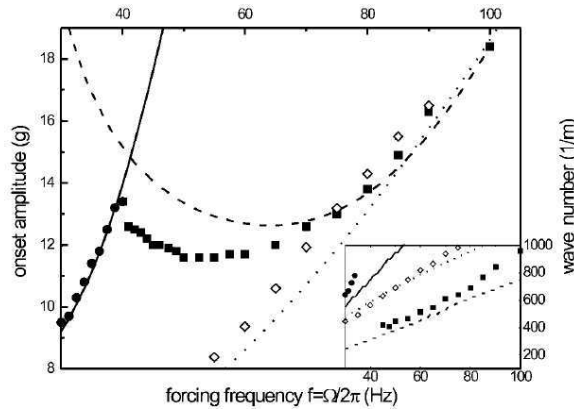


FIG. 2.2 – Accélération critique normalisée par la gravité  $a_c/g$  et nombre d'onde critique en fonction de la fréquence d'excitation  $f$ . Les cercles pleins (respectivement carrés pleins) sont les résultats expérimentaux pour les réponses harmoniques ( $f < 40$  Hz) et sous-harmoniques ( $f > 40$  Hz) de la solution de polymère. La ligne continue (respectivement ligne discontinue) représente les résultats numériques correspondants tirés de la rhéologie linéaire  $\eta^*(\omega)$ . Les diamants et la ligne en pointillés montrent les résultats expérimentaux et numériques pour le solvant (mélange eau-glycérol 40 : 60). La réponse du solvant est toujours sous-harmonique dans la gamme de fréquences étudiée.

De plus, Raynal *et al.* [78] ont montré que le nombre d'onde critique des solutions de polymères dans le régime dilué (tout comme celui des fluides simples) est proche de la relation de dispersion (1.9) et que l'accélération critique est bien décrite par le calcul numérique proposé par S. Kumar [51]. Enfin, Wang *et al.* [84] ont mis en évidence l'importance de la présence de tensioactifs ou de polymères à la surface lorsque celle-ci est déstabilisée. Cet effet a été pris en compte numériquement par Kumar *et al.* [52]. Le comportement des solutions de polymères diffère donc de celui des fluides simples, à cause de leurs propriétés viscoélastiques mais aussi à cause de la présence de polymère à la surface. Une autre famille

de fluides complexes dont le comportement sous oscillations a été très étudié est la famille des matériaux granulaires.

### 2.3.2 Matériaux granulaires

Les matériaux granulaires constituent un autre type de fluide complexe souvent étudié dans l'expérience d'instabilité de Faraday. En effet, les matériaux granulaires vibrés verticalement présentent un grand nombre de comportements intéressants que nous listons ci-dessous (même s'il ne sont pas liés à l'instabilité de Faraday proprement dite).

- La densité (voir figure 2.3) d'une couche de grains vibrée verticalement augmente avec le temps. Ce phénomène de compaction a notamment été étudié par Nowak [71] : lorsqu'une couche de grain peu compactée est vibrée verticalement, elle se compacte et que la compaction augmente avec l'amplitude des vibrations. Au contraire, une couche de grain dense a tendance à augmenter de volume, la compaction diminue.

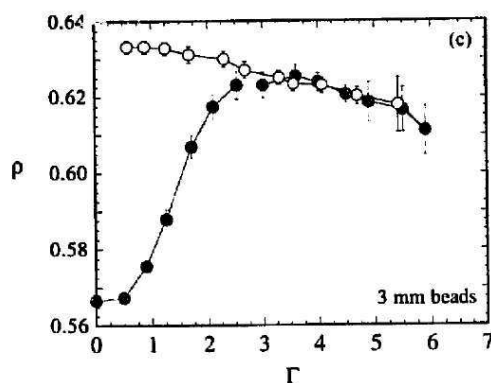


FIG. 2.3 – Évolution de la densité volumique de l'échantillon  $\rho$  en fonction du rapport de l'accélération des vibrations à la gravité  $\Gamma = a/g$ . La couche granulaire de billes de verre monodisperses (diamètre  $d = 3 \text{ mm} \pm 3\%$ ) est préparée dans un état peu compact de faible concentration volumique. L'amplitude des oscillations est alors augmentée (●) puis diminuée (○). La fraction volumique est mesurée après  $10^5$  cycles pour chaque  $\Gamma$ . Figure extraite de la référence [71].

- À plus haute accélération, la couche de grain est fluidisée : la compaction diminue et les grains sont mobiles comme des molécules au sein d'un fluide plutôt qu'immobiles dans un réseau cristallin comme dans solide. Le plus souvent, il y a coexistence d'une couche de grains fluidisée et d'une couche solide [68]. Ce comportement est similaire à une transition de phase, d'où un parallèle possible entre amplitude des oscillations et températures.
- Lorsque les billes sont de tailles différentes, il se produit sous vibrations un phénomène de ségrégation (pour une revue, voir [46]) : les grains migrent et se regroupent par taille. Pour de faibles amplitudes, les grains les plus gros se retrouvent en haut de la couche (effet de "noix du Brésil"), mais ils peuvent aussi se retrouver en bas si

les vibrations sont suffisamment importantes pour fluidiser la couche de grains (voir figure 2.4). Dans le cas (a), les grosses billes montent et se retrouvent en haut de la

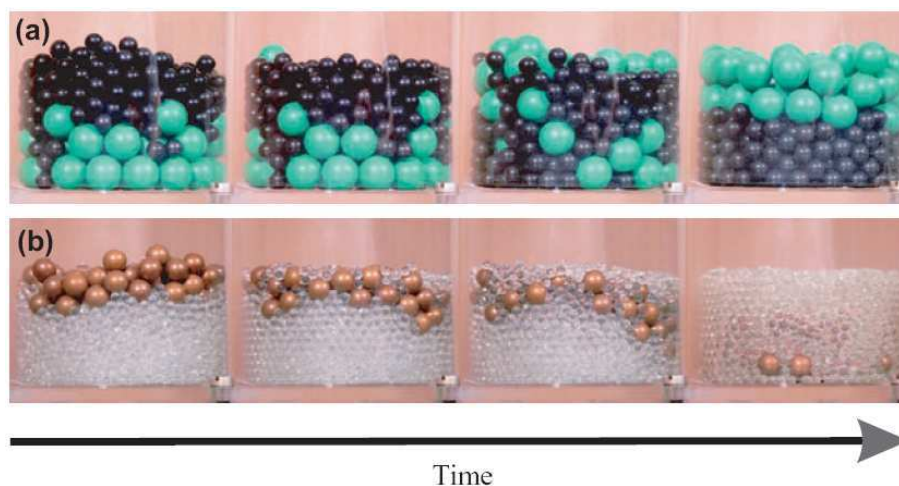


FIG. 2.4 – Illustration de la complexité de la ségrégation dans les systèmes vibrés. Les grosses particules peuvent s'élever au sommet ou couler au fond de l'empilement selon leur densité ou d'autres paramètres physiques. Photos extraites de la référence [16].

couche de grains, alors que dans le second cas (b), les grosses billes se retrouvent au fond du récipient.

- Une autre caractéristique frappante des matériaux granulaires vibrés verticalement est la présence de vortex [20, 82, 49, 36], c'est-à-dire de zones de recirculation des grains à grande échelle. Contrairement aux fluides simples, la vitesse aux parois est non nulle. Selon l'amplitude des oscillations, les grains montent par le centre et descendent par les bords ou inversement.
- Enfin, les couches de matériaux granulaires présentent des comportements similaires à l'instabilité de Faraday (figure 2.5). Au-dessus d'une certaine accélération, des motifs apparaissent à la surface [64, 1, 45, 65]. Une partie des motifs qui apparaissent à la surface de couche de grains vibrées verticalement ressemblent à ceux observés dans une couche de fluide simple (figure 2.5(a) et (b)), alors que certains comportements, comme l'apparition de fracture séparant la surface en deux zones (figure 2.5(c) et (d)), sont caractéristiques des milieux granulaires vibrés.

### 2.3.3 Autres fluides complexes

Plus récemment, des expériences d'instabilité de Faraday ont été réalisées sur des systèmes dépendant fortement de la température. Notamment, Huber *et al.* [44] ont étudié la réponse aux vibrations verticales d'une couche de tétracosanol ( $C_{24}H_{50}$ ). À cause du confinement à deux dimensions, la surface gèle à une température  $T_g = 54^\circ\text{C}$  supérieure à la température de solidification du fluide  $T = 50^\circ\text{C}$ . Huber *et al.* ont montré que l'accélération et le nombre d'onde critiques augmentent brutalement lorsque la température

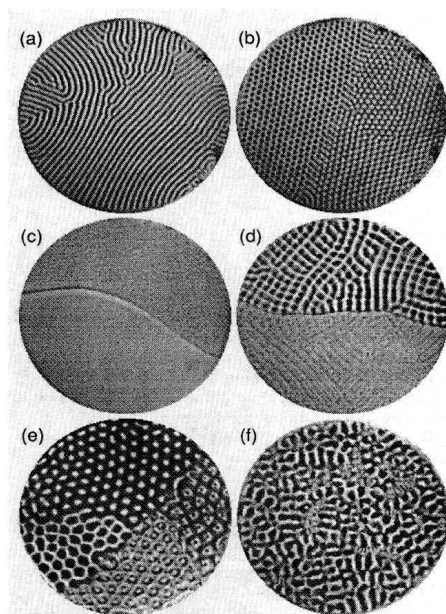


FIG. 2.5 – Motifs observés à la surface d’une couche de bille de bronze de 0.15–0.18 mm de diamètre et de profondeur 1.2 mm vibrée à  $f = 67$  Hz. (a) Bandes parallèles oscillant à  $f/2$  ( $a_c = 3.3g$ ), (b) hexagones oscillant à  $f/2$  ( $a_c = 4g$ ), (c) surface plate possédant une crevasse ( $a_c = 5.8g$ ), (d) compétition entre des carrés et des bandes oscillant à  $f/4$  ( $a_c = 6g$ ), (e) hexagones oscillant à  $f/4$  ( $a_c = 7.4g$ ) et (f) comportement chaotique ( $a_c = 8.5g$ ). Photos extraites de la référence [62].

descend en dessous de  $T_g$  (voir figure 2.6). Cette rupture de  $a_c$  peut s'interpréter comme un changement des conditions aux limites à la surface. En effet, à la surface, on passe d'une surface libre pour une surface fondue ( $T > T_g$ ), à la présence d'une couche insoluble de tensioactifs lorsque la surface gèle. En comparant les résultats expérimentaux et la théorie de Kumar *et al.* [52], Huber *et al.* ont mis en évidence un très bon accord entre expérience et théorie.

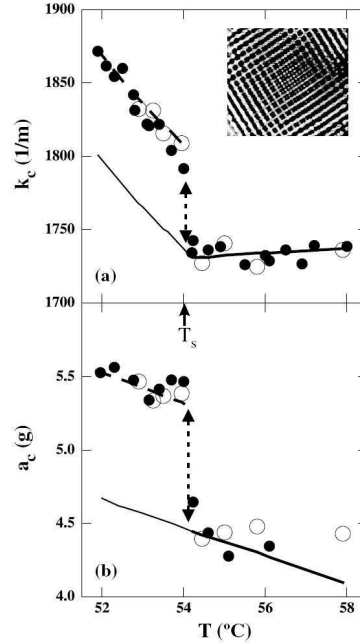


FIG. 2.6 – Nombre d'onde et accélération critiques  $k_c$  et  $a_c$  en fonction de la température pour  $f = 150$  Hz, lorsque la température diminue ( $\circ$ ) et lorsqu'elle monte ( $\bullet$ ). Encart : motif à  $T = 54^\circ\text{C}$ . Les lignes solides et les pointillés représentent respectivement les résultats numériques pour des conditions de surface libre et pour une condition de non-glissement à la surface. Les flèches marquent les discontinuités des valeurs caractéristiques de l'expérience de Faraday  $a_c$  et  $k_c$ . Figure extraite de la référence [44].

Pour terminer, mentionnons une expérience impressionnante réalisée par Merkt *et al.* [63] sur des fluides rhéo-épaississants, des suspensions d'amidon et des suspensions de billes de verre. Ces expériences ont montré que des vibrations verticales peuvent stabiliser un trou dans l'épaisseur du fluide (voir figure 2.7). De plus, lorsque l'accélération devient suffisamment importante, les bords des trous se déstabilisent et envahissent toute la cellule (voir figure 2.7(c) et (f)). Les auteurs relient la stabilisation des trous au caractère rhéo-épaississant de leurs fluides. En effet, la viscosité des suspensions d'amidon et de micro-billes de verre augmente brutalement lorsque  $\dot{\gamma} \simeq 8\text{ s}^{-1}$ , ce qui est comparable au cisaillement imposé aux parois du trou par l'accélération oscillante. Cette interprétation est corroborée par la présence d'une oscillation horizontale et harmonique (à  $f$ ) de la paroi des trous. En-

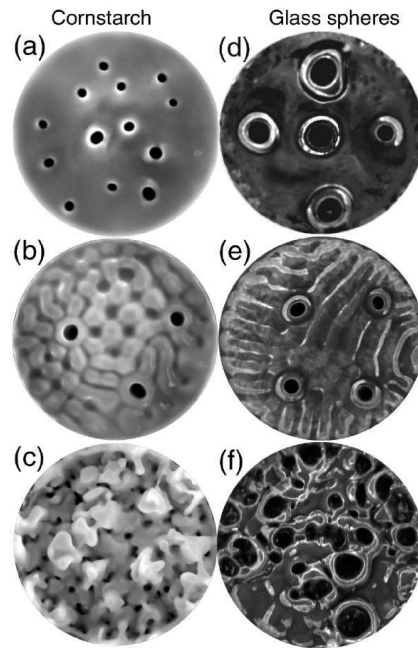


FIG. 2.7 – Vue de dessus d’une suspension d’amidon ((a)–(c)) et de micro-billes de verre ((d)–(f)) vibrées verticalement. Le blanc correspond aux pics et le noir aux creux qui atteignent presque le fond de la cellule. Trous sans ondes de Faraday : (a)  $a = 12g$ ,  $f = 150$  Hz et (d)  $a = 30g$ ,  $f = 100$  Hz. Coexistence de trous et d’ondes de Faraday : (b)  $a = 12g$ ,  $f = 60$  Hz et (e)  $a = 27.3g$ ,  $f = 92$  Hz. État délocalisé (les trous ont envahi toute la cellule) : (c)  $a = 30g$ ,  $f = 120$  Hz et (f)  $a = 30g$ ,  $f = 60$  Hz. Images extraites de la référence [63].



fin, il est intéressant de noter que les motifs de surface dus à l'instabilité de Faraday sont comparables à ceux trouvés pour des matériaux granulaires secs avec coexistence possible de zones plates et de zones déstabilisées.

Ainsi, si des travaux théoriques et expérimentaux ont été réalisés sur l'instabilité de Faraday dans des fluides complexes, ils se sont concentrés sur l'existence d'une réponse harmonique dans les solutions de polymères, et sur les motifs dans les matériaux granulaires secs. À l'exception des travaux récents de Merkt *et al.* [63], les travaux antérieurs ont négligé l'interaction probable entre instabilité et microstructure. Or, au vu des grandeurs mises en jeu lors d'une expérience de Faraday (fréquence, déformation), on s'attend à des couplages intéressants entre microstructure et instabilité. La mise en évidence et la caractérisation d'un tel couplage constitue le cœur de cette thèse.

## 2.4 Motivations de la thèse

Au cours de cette thèse, nous avons cherché à mettre en évidence deux phénomènes. Tout d'abord, nous nous sommes interrogés sur l'importance de la viscoélasticité du fluide sur l'instabilité de Faraday. En effet, les travaux effectués jusque là sur des fluides viscoélastiques [83, 78] ont porté sur des fluides *faiblement* viscoélastiques. Le caractère viscoélastique de ces fluides ne conduit alors qu'à une déviation par rapport au cas d'un fluide simple. Notamment, Raynal *et al.* [78] ont montré que le nombre d'onde critique de leur fluide suivait la relation de dispersion des fluides simples. Le cœur de cette thèse repose sur l'utilisation de fluides dont le comportement élastique domine le comportement liquide. Nous mettrons ainsi en évidence des comportements très différents de ceux observés dans des fluides simples ou dans des solutions diluées de polymères.

Le second phénomène étudié est la possibilité de modification de la microstructure du fluide par les ondes de surface stationnaires apparaissant au-dessus du seuil d'instabilité. Comme nous l'avons vu, pour des matériaux granulaires, les vibrations verticales peuvent modifier la microstructure d'un fluide complexe (phénomène de ségrégation). Une piste intéressante est alors la possibilité d'organiser la microstructure du fluide avec comme taille caractéristique la longueur d'onde critique  $\lambda_c = 2\pi/k_c$ , ce qui reviendrait à structurer le fluide sur une longueur caractéristique ( $\sim 0.1$  à  $10$  mm) intermédiaire entre la taille caractéristique de la microstructure ( $\sim 1$  à  $100$   $\mu\text{m}$ ) et la taille du récipient ( $\sim 0.1$  à  $0.1$  m).

Nous nous attendons à ce que de tels couplages se produisent dans tout le volume de notre couche de fluide. Pour étudier ces phénomènes, une étude classique de la surface n'est alors plus suffisante. Au-delà du dispositif classique permettant d'accéder aux caractéristiques du seuil d'instabilité (mesure de  $a_c$  et  $k_c$ ), nous avons donc été conduits à mettre en place des techniques spécifiques de mesure du champ de vitesse et de biréfringence. L'ensemble des dispositifs expérimentaux est présenté au chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Techniques et dispositifs expérimentaux

Dans ce chapitre, nous décrivons le dispositif expérimental mis en place au cours de cette thèse. Nous détaillons tout d'abord la cellule expérimentale et la technique de visualisation de la surface associée ainsi que les mesures effectuées au voisinage du seuil : accélération et nombre d'onde critiques. Ensuite, nous expliquons comment mesurer simplement l'amplitude des ondes de surface au-dessus du seuil d'instabilité. Enfin, un dispositif de vélocimétrie par imagerie de particules est introduit pour accéder au champ de vitesse au sein du fluide. Nous illustrons ces diverses techniques expérimentales et les traitements de données associés en prenant l'exemple d'un fluide simple (mélange eau-glycérol).

### 3.1 Mesures au voisinage du seuil : accélération et nombre d'onde critiques

En nous basant sur les travaux expérimentaux antérieurs [4], nous avons développé le dispositif décrit au paragraphe suivant, qui permet d'accéder précisément aux caractéristiques du seuil d'instabilité. Ce dispositif est validé sur un mélange eau-glycérol à la fin de cette section.

#### 3.1.1 Dispositif expérimental

Le système expérimental est schématisé sur la figure 3.1. Il est constitué d'une cellule de mesure thermostatée, d'un vibreur électromagnétique, et d'un cercle de diodes permettant de visualiser la surface.

##### Cellule de mesure

La cellule de mesure, représentée sur la figure 3.2 est un cylindre en Plexiglas de profondeur  $h = 10$  mm et de diamètre  $d = 60$  mm fermée par un couvercle transparent en plexiglas pour éviter l'évaporation, les échanges thermiques et la contamination de la surface par des poussières. Pour éviter les oscillations de l'interface induites par le ménisque

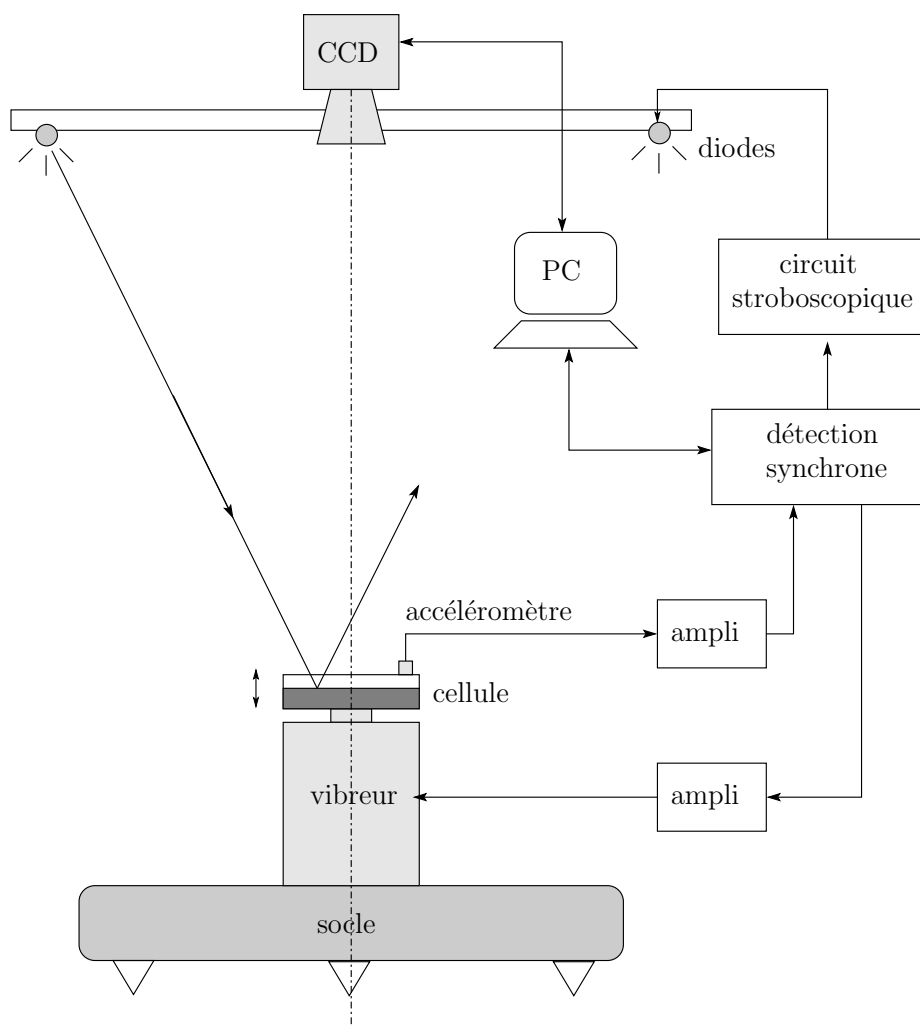


FIG. 3.1 – Schéma d'ensemble du dispositif expérimental pour l'étude de l'instabilité de Faraday.

[30], la cellule possède un épaulement à  $45^\circ$  qui empêche la formation d'un ménisque : en remplissant précautionneusement la cellule, on s'assure ainsi de la parfaite planéité de l'interface au repos. Nous reviendrons sur l'importance du contrôle des conditions aux bords plus loin dans ce chapitre (cf. section 3.2, page 49).

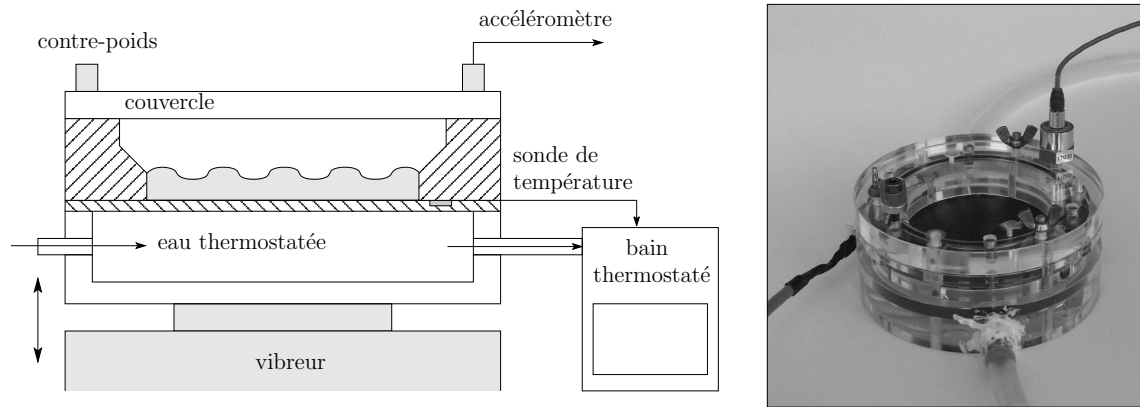


FIG. 3.2 – Cellule cylindrique utilisée pour les mesures au voisinage du seuil d'instabilité.

### Contrôle de la température

La température de la couche de fluide dans la cellule est mesurée par une sonde de platine (Pt100) insérée dans le fond de la cellule réalisé en aluminium pour favoriser les échanges thermiques. Cette sonde est couplée à un bain thermostaté (Thermo Haake C40P, 12 L). Une circulation d'eau provenant du bain thermostaté et passant sous la cellule (cf. figure 3.2) permet de réguler la température de la couche de fluide à  $\pm 0.1^\circ\text{C}$ . De plus, pour éviter la condensation sur le couvercle, la pièce est climatisée afin d'être toujours plus chaude que la cellule. La température typique de travail dans le fluide est de  $20^\circ\text{C}$  pour une température dans la pièce de  $22^\circ\text{C}$ .

### Source de vibration et mesure d'accélération

La cellule est soumise à des oscillations verticales de fréquence  $f$  et d'accélération  $a$  par un pot vibrant électromagnétique (Ling Dynamic Systems V406). Le pot vibrant est attaché à un socle en acier de 10 kg qui évite les déplacements dus aux vibrations. L'horizontalité est réalisée grâce à trois pieds de hauteur réglable. Le bon réglage d'horizontalité est confirmé systématiquement en vérifiant que les ondes de surface apparaissent simultanément en différents points au voisinage du seuil d'instabilité.

La fréquence et l'amplitude des oscillations sont imposées par la sortie sinusoïdale d'une détection synchrone (Stanford Research Systems SR810), reliée à un amplificateur (Ling Dynamic System). La détection synchrone est contrôlée par ordinateur via une connexion GPIB. L'accélération  $a$  est mesurée par un accéléromètre piézoélectrique (Endevco 2224C)

fixé sur le couvercle de la cellule. Comme le montre la figure 3.2, un contre-poids est placé symétriquement pour équilibrer l'ensemble. La sortie de l'accéléromètre est reliée à la détection synchrone via un amplificateur. En pratique, la détection synchrone extrait la composante oscillante à  $f$  du signal de tension en sortie de cet amplificateur. Cette tension est ensuite convertie en accélération grâce à une calibration réalisée par le constructeur et vérifiée par nos soins à 1% près.

### Visualisation de la surface

La surface de la cellule est observée en vue de dessus par une caméra CCD monochrome (Cohu). La surface est éclairée par dessus grâce à un cercle de diodes vertes de diamètre  $d_{\text{cercle}} = 180$  mm et situé à  $D = 1$  m de la surface (cf. figure 3.2). Les diodes sont commandées par un circuit stroboscopique à la fréquence  $f$  ou  $f/2$ , ce qui permet de discriminer entre une réponse harmonique et une réponse sous-harmonique. De plus, ce circuit permet de régler la phase relative entre les vibrations et l'éclairage et d'explorer ainsi l'allure du motif d'ondes de surface au cours d'une période. Cette phase est ajustée de façon à capturer le motif lorsque la déformation de la surface est maximale.

Dans la géométrie de notre expérience, lorsque la surface est horizontale, la surface apparaît noire puisque aucun rayon lumineux réfléchi n'atteint l'objectif (Avenir zoom lens, 12.5–75 mm) de la caméra situé au centre du cercle de diodes. Le diamètre de l'objectif est  $d_{\text{obj}} = 50$  mm.

L'éclairage par un cercle de diodes a pour objectif de faire apparaître lumineuses les zones de la surface formant avec l'horizontale un angle suffisamment important. Par souci de simplification, on explique ici le principe de la visualisation à une dimension. La figure 3.3 explicite les notations introduites dans la suite.

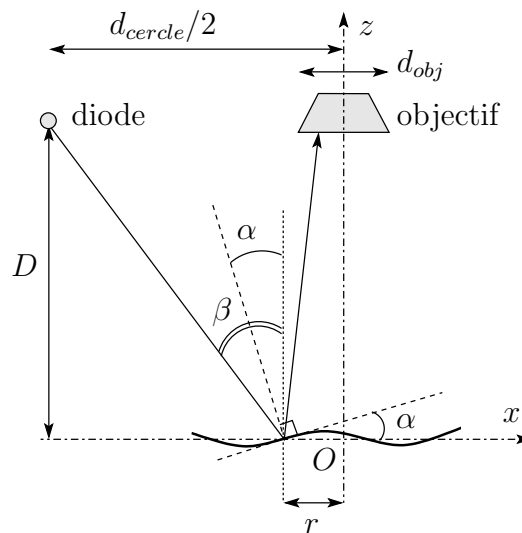


FIG. 3.3 – Visualisation de déformations de l'interface par réflexion.

On pose  $(x, y) = (0, 0)$  au centre de la cellule et on note  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . On note  $\alpha(r)$  l'angle formé par la surface avec l'horizontale à la distance  $r$  du centre de la cellule. La lumière émise par le cercle de diodes arrive en  $r$  avec un angle  $\beta = \arctan(\frac{d_{cercle} - 2r}{2D})$  par rapport à la verticale. La lumière réfléchie fait un angle  $\beta - 2\alpha$  par rapport à la verticale. Elle intersecte le plan  $z = D$  contenant le cercle de diodes à une distance  $d_i = D \tan(\beta - 2\alpha) - r$  du centre du cercle de diodes. Si  $d_i \leq d_{obj}/2$ , la lumière atteint la CCD et l'image de la surface en ce point est brillante. Cette condition s'écrit :

$$2\alpha \geq \beta - \arctan\left(\frac{d_{obj} + 2r}{2D}\right). \quad (3.1)$$

Si on suppose que tous les angles sont petits devant 1, on peut simplifier l'équation précédente qui devient :

$$\alpha \geq \frac{d_{cercle} - d_{obj} - 4r}{4D}. \quad (3.2)$$

On en déduit que  $\alpha$  est maximum pour  $r = 0$  et minimum pour  $r = 30$  mm (i.e. au bord de la cellule). Les valeurs extrêmes correspondantes sont  $\alpha = 32.5$  mrad =  $1.9^\circ$  et  $\alpha = 2.5$  mrad =  $0.14^\circ$ . En pratique, nous détectons le seuil d'instabilité en observant la surface en  $r \simeq d/4$  ce qui correspond à un angle de détection intermédiaire :  $\alpha = 17.5$  mrad =  $1^\circ$ .

Enfin, si on assimile la déformation de la surface à une sinusoïde de nombre d'onde  $k_c$ , l'angle maximum  $\alpha_{max}$  formé par la surface et l'horizontale s'écrit :  $\alpha_{max} = \arctan k_c \xi_0$  où  $\xi_0$  est l'amplitude de la déformation. En prenant comme seuil de détection l'angle caractéristique  $\alpha = 1^\circ$  et la valeur typique  $k_c = 500$  m<sup>-1</sup>, la déformation minimale  $\xi_0$  détectable avec notre dispositif vaut :  $\xi_0 = \alpha/k_c = 35$   $\mu$ m.

### 3.1.2 Protocole de mesure de l'accélération et du nombre d'onde critiques

#### Accélération critique

Pour estimer l'accélération au seuil d'instabilité, on augmente d'abord l'amplitude des vibrations jusqu'à ce que l'interface se déstabilise complètement, puis on diminue l'amplitude jusqu'à la disparition totale de l'instabilité et on note l'accélération correspondante. À partir de cette dernière valeur, on recherche plus précisément le seuil en augmentant l'amplitude de 1% toutes les minutes jusqu'à apparition d'ondes de surface. On note  $a_{cmax}$  la valeur correspondante de l'accélération. On diminue à nouveau l'amplitude à raison de 1% toutes les minutes. On note  $a_{cmin}$  l'accélération pour laquelle les ondes de surface disparaissent complètement. L'accélération critique  $a_c$  présentée dans ce manuscrit est définie simplement par :  $a_c = (a_{cmax} + a_{cmin})/2$ . Les barres d'erreur sont données par  $\pm(a_{cmax} - a_{cmin})/2$ .

En l'absence d'hystérèse, ce protocole permet de déterminer l'accélération critique avec une précision de l'ordre de 1%. Cette précision peut être améliorée en augmentant le temps d'attente et/ou en diminuant l'amplitude des sauts, par exemple en augmentant de 0.5% toutes les deux minutes. Cependant, la durée d'une expérience augmente ainsi très vite

puisque le temps d'apparition de l'instabilité augmente comme l'inverse de l'écart au seuil. C'est pourquoi, sauf dans des cas particuliers nécessitant une très bonne précision (cf. chapitre 9, page 148), le temps d'attente et l'amplitude des sauts sont fixés respectivement à 1 min et 1%.

### Nombre d'onde critique

Le nombre d'onde critique est mesuré à partir d'une image de la surface obtenue à  $a_{cmax}$ . La figure 3.4(a) montre un exemple d'une telle image dans le cadre d'une couche d'huile silicone vibrée à  $f = 51$  Hz. Dans ce cas, la longueur d'onde critique  $\lambda_c$  est donnée par l'écart entre trois franges brillantes. En effet, les régions brillantes correspondent aux zones de plus forte pente, dont la périodicité spatiale vaut  $\lambda_c/2$  (cf. figure 3.4(b)).

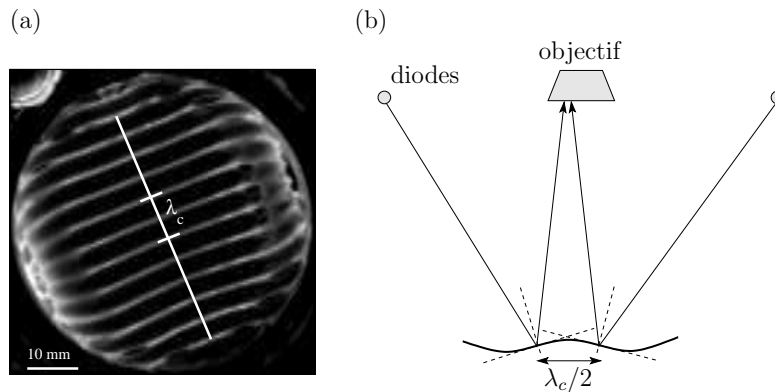


FIG. 3.4 – (a) Surface d'une couche d'huile silicone (DC200 Dow Corning) d'épaisseur  $h = 10$  mm vibrée à  $f = 51$  Hz et  $a = a_{cmax}$ . (b) Schéma de la réflexion de la lumière sur la surface.

En moyennant sur le plus de franges possibles, la précision obtenue sur la mesure de  $k_c = 2\pi/\lambda_c$  est de l'ordre de 5%. Toutefois, cette précision peut varier en fonction du fluide, de la fréquence et du motif à analyser (cf. figure 3.6). Les barres d'erreur présentées sur  $k_c$  correspondent à la déviation standard de trois à cinq différentes estimations effectuées sur une même image.

### 3.1.3 Artefacts et sources d'incertitude possibles

#### Mesure de l'accélération

Nous avons déjà mentionné ci-dessus les contraintes expérimentales inhérentes à la détermination de l'accélération critique et qui limite la précision à environ 1%. Toutefois il convient aussi d'éliminer d'emblée d'autres sources d'erreurs possibles. Ainsi la montée en température du pot vibrant conduit à des variations lentes de l'amplitude des oscillations pour une tension d'alimentation donnée. Cet effet, dépendant évidemment de l'amplitude

et de la fréquence des vibrations, nécessite d'attendre typiquement une trentaine de minutes avant d'effectuer les mesures.

D'autre part, si on mesure l'accélération au cours du temps, on se rend compte qu'elle oscille autour d'une valeur moyenne. Comme le montre la figure 3.5, la fréquence des oscillations de  $a(t)$  est très lente comparée à celle des vibrations. L'origine de ces fluctuations reste incertaine : amplificateur de l'accéléromètre, temps caractéristique de réponse de l'accéléromètre ou du bain thermostaté, etc. Un asservissement de la tension d'alimentation du vibreur à la mesure d'accélération pourrait sans doute améliorer la stabilité des vibrations. Cependant, ces fluctuations restent de très faible amplitude  $\simeq 0.1\%$ , soit un ordre de grandeur inférieures à la précision de nos mesures.

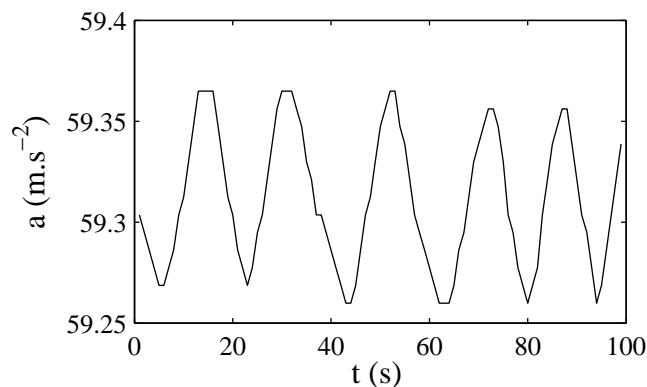


FIG. 3.5 – Accélération mesurée par l'accéléromètre au cours du temps à  $f = 100$  Hz.

### Effets de taille finie sur la mesure de $k_c$

À basse fréquence (typiquement  $f < 40$  Hz), les effets de confinement se font sentir car la taille de la cellule ne permet plus d'accommoder un grand nombre de longueur d'onde. Comme le montre la figure 3.6, il peut alors devenir difficile de déterminer précisément un nombre d'onde critique car la symétrie du motif change avec la fréquence et la géométrie de la cellule. Ces effets de taille finie s'accompagnent de plus de phénomènes de discrétisation [77]. C'est pourquoi nous avons choisi de limiter la gamme de fréquences explorées dans notre cellule cylindrique à  $f = 20$ – $120$  Hz.

### 3.1.4 Résultats pour un fluide simple

La figure 3.7 présente les mesures de  $a_c$  et  $k_c$  effectuées dans un mélange eau (22%)–glycérol (78%) en fonction de la fréquence  $f$ . Sur toute la gamme de fréquences,  $a_c$  et  $k_c$  croissent de manière monotone avec la fréquence. Comme le montrent les ajustements obtenus avec  $\rho = 1.19 \text{ g.cm}^{-3}$ ,  $\eta = 0.05 \text{ Pa.s}$  et  $\sigma = 0.06 \text{ N.m}$ , ces données sont parfaitement reproduites par le calcul de stabilité linéaire de la référence [50] (cf. section 1.4 page 15).



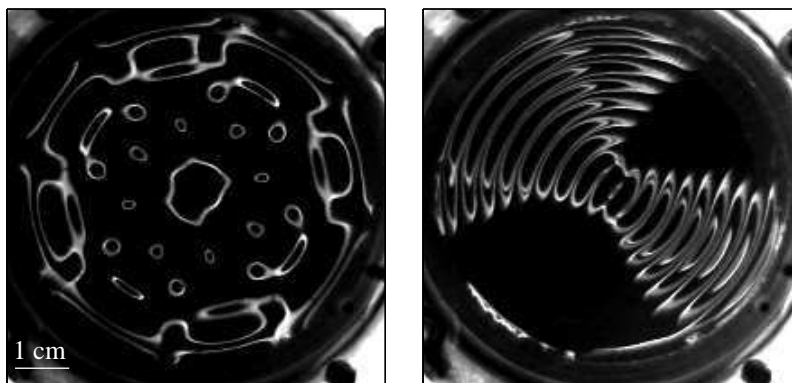


FIG. 3.6 – Images de la surface pour une couche de mélange eau (22%)–glycérol (78%) d’une hauteur  $h = 10$  mm vibrée à  $f = 29$  Hz (à gauche) et  $f = 71$  Hz (à droite), pour  $a = a_{cmax}$ .

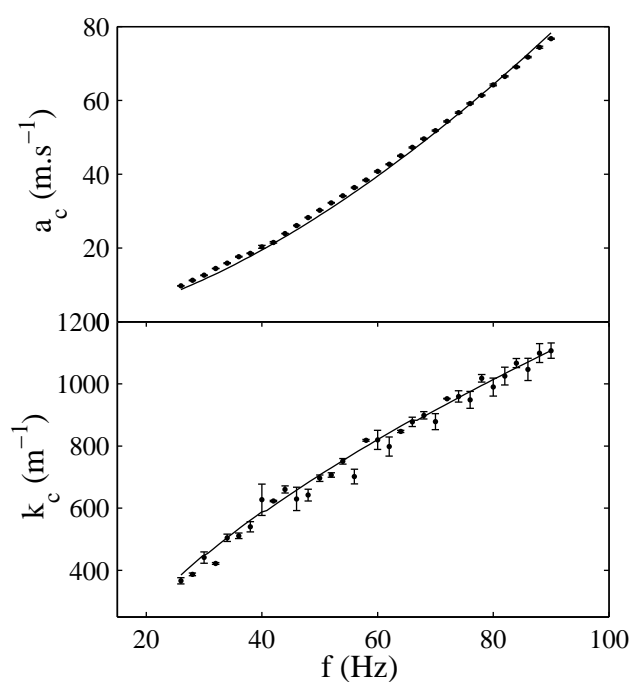


FIG. 3.7 – Détermination du seuil d’instabilité dans un mélange eau (22%)–glycérol (78%), pour une couche d’épaisseur  $h = 10$  mm et à une température de 21°C. En haut,  $a_c$  vs  $f$ . En bas,  $k_c$  vs  $f$ . Les lignes continues correspondent au calcul de stabilité linéaire de la référence [50] avec  $\rho = 1.19$  g.cm<sup>-3</sup>,  $\eta = 0.05$  Pa.s et  $\sigma = 0.06$  N.m.

## 3.2 Mesure de l'amplitude des ondes de surface

Au-delà de la détermination précise du seuil d'instabilité, nous nous sommes intéressés au comportement du fluide lorsque l'accélération  $a$  est augmentée au-dessus de l'accélération critique  $a_c$ . Les grandeurs pertinentes expérimentalement sont alors l'amplitude des ondes de surface  $\xi$  et leur nombre d'onde  $k$ , en fonction de l'écart relatif au seuil d'instabilité  $\epsilon = (a - a_c)/a_c$ . Pour accéder à  $\xi$ , nous avons mis en place le dispositif spécifique détaillé ci-dessous.

### 3.2.1 Dispositif expérimental

La figure 3.8 présente une vue de dessus du montage permettant la mesure de l'amplitude des ondes de surface. Les autres éléments (pot vibrant, visualisation par-dessus, mesure d'accélération) sont identiques au montage de la figure 3.1.

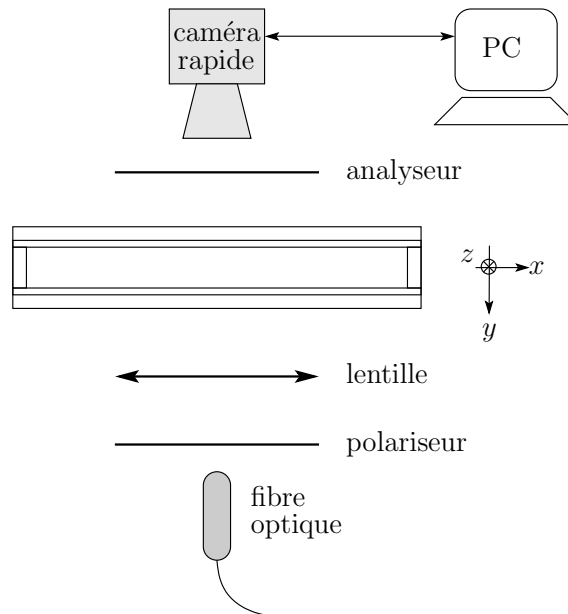


FIG. 3.8 – Montage de détection de l'amplitude, en vue de dessus.

#### Cellule de mesure

Pour mesurer l'amplitude des ondes de surface, nous avons choisi d'utiliser une cellule parallélépipédique rectangle constituée de deux lames de microscope en verre espacées de 6 mm. La figure 3.9 montre un schéma et une photographie de cette cellule de largeur  $l = 6$  mm et de longueur  $L = 72$  mm. L'épaisseur de fluide est variable entre 0.5 et 2 cm. On utilise un intervalle  $l \ll L$  entre les deux lames de verre pour forcer le motif dans une direction, les ondes s'orientant perpendiculairement aux parois de verre.

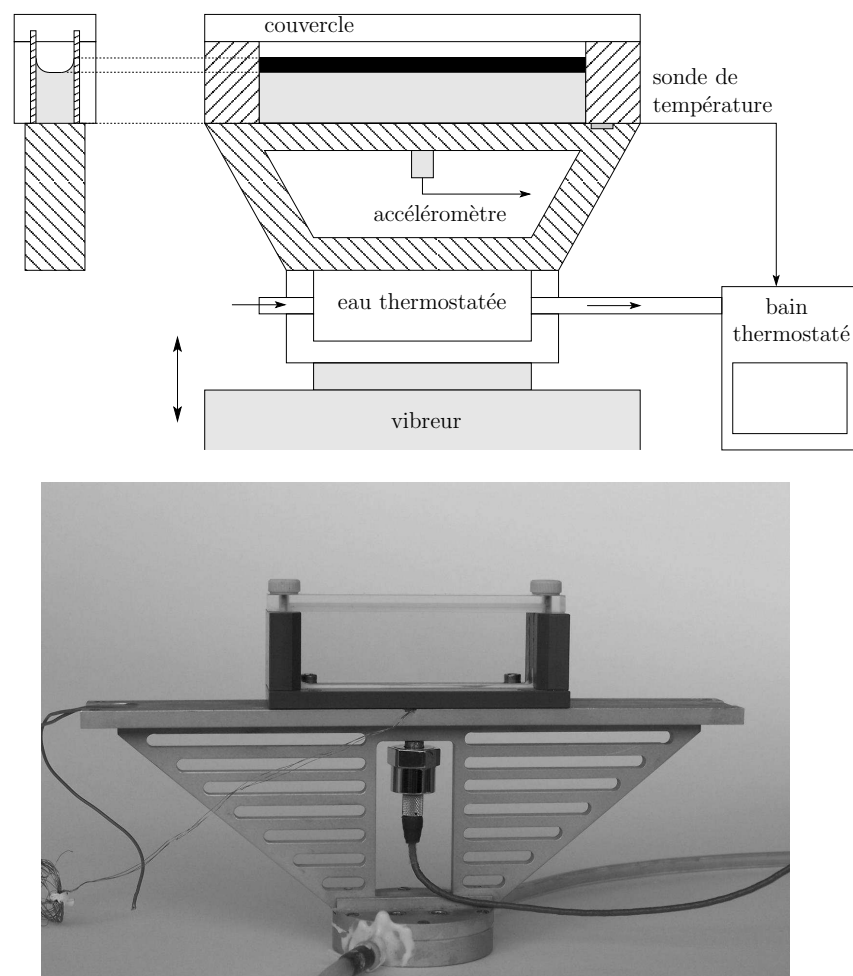


FIG. 3.9 – Cellule parallélépipédique utilisée pour les mesures de l'amplitude des ondes de surface.

### Visualisation par transmission

La cellule est éclairée en lumière blanche grâce à une fibre optique dont le faisceau est élargi à l'aide d'une lentille. On observe la couche de fluide par transmission directe de la lumière à l'aide d'une caméra rapide (Mikroton MC1310, capteur CCD 1" 1024×1280 à 500 images par seconde en pleine résolution) et d'un objectif (Fujinon, 1 : 1.4, 25 mm). La vitesse d'acquisition de la caméra est fixée à dix fois la fréquence d'excitation  $f$ . La durée d'un film correspond à une vingtaine de périodes (200 images).

### Biréfringence

Un jeu de polariseur/analyseur nous permet de plus d'effectuer des mesures de biréfringence sous vibrations. Ces mesures seront détaillées dans la section 5.3, page 88.

### 3.2.2 Mesure de l'amplitude $\xi(x, t)$ des ondes de surface

Pour détecter les déformations de la surface, nous exploitons la présence de ménisques sur les parois de verre. En effet, ces ménisques réfractent la lumière et font apparaître en noir la zone située dans l'ombre des ménisques (cf. figure 3.9). La figure 3.10 présente un exemple de visualisation dans un mélange eau (32%)–glycérol (68%) au-dessus du seuil d'instabilité. Il est alors facile de détecter la position de la surface dans l'espace et dans le temps en cherchant le saut d'intensité entre les zones noires (ménisque) et blanche (fluide en volume) selon la procédure ci-dessous.

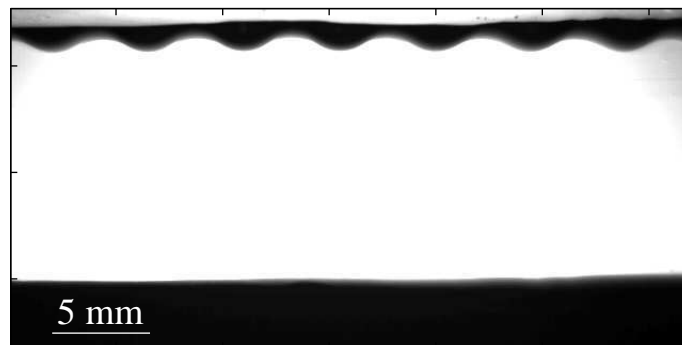


FIG. 3.10 – Visualisation des déformations de la surface d'un mélange eau (32%)–glycérol (68%) pour  $f = 100$  Hz et  $\epsilon = 5.4\%$ .

Pour déterminer la position de la surface, on s'intéresse à la différence d'intensité entre deux lignes consécutives d'une même image. Dans la suite, on note  $I(j, k)$  l'intensité du pixel de la  $j^e$  ligne et de la  $k^e$  colonne. On recherche le minimum du gradient d'intensité selon la direction verticale  $\delta I(j, k) = I(j, k) - I(j + 1, k)$ , c'est-à-dire le passage de la zone noire du ménisque à la zone blanche de la couche de fluide. De même, en recherchant le

maximum de  $\delta I$  dans la partie inférieure de l'image, on peut détecter la position  $\zeta$  du fond de la cellule. La figure 3.11 illustre cette procédure de traitement d'image.

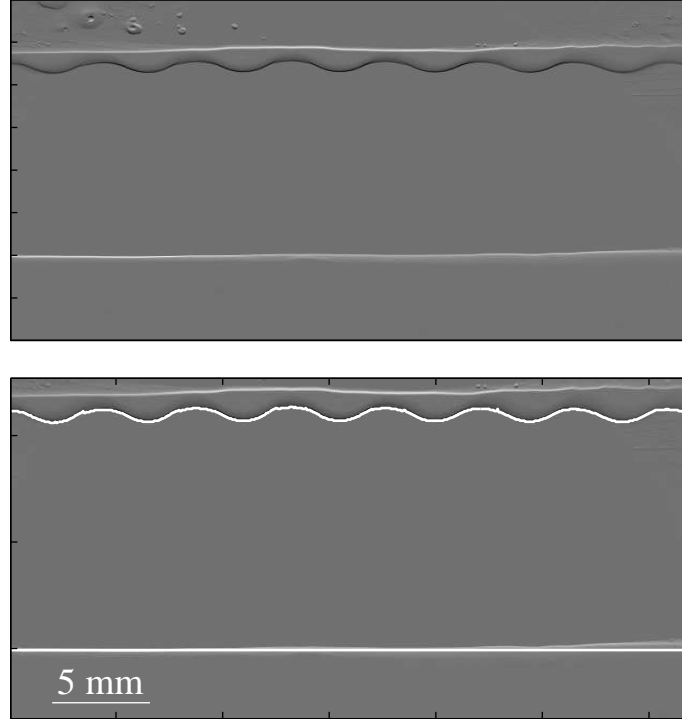


FIG. 3.11 – Gradient d'intensité  $\delta I(j, k)$  selon la direction verticale pour l'image de la figure 3.10. En bas, les lignes blanches indiquent la surface détectée ainsi que la position du fond.

En répétant ce traitement sur toutes les images d'un film, on peut remonter à l'évolution temporelle de la position de la surface  $\xi(x, t)$  et en déduire l'amplitude des ondes de surface  $\xi_0$ . Plus précisément, on commence par retirer à  $\xi(x, t)$  sa valeur moyenne puis sa composante harmonique (i.e. oscillant à  $f$ ). La figure 3.12 présente le résultat de ce premier traitement effectué à un ventre de l'onde de surface.

Ce traitement permet d'éliminer les oscillations liées au déplacement de la cellule, pour se focaliser sur la réponse sous-harmonique liée à l'instabilité (i.e. à  $f/2$ ). La figure 3.13 présente l'amplitude de la composante sous-harmonique de  $\xi(x, t)$  en fonction de  $x$ . On en tire deux informations : l'amplitude des ondes de surface et le nombre d'onde selon  $x$ . L'amplitude moyenne des ondes de surface est aisément calculée selon :

$$\xi_0 = \frac{\pi}{2} \langle \xi \rangle_x, \quad (3.3)$$

où  $\langle \rangle_x$  indique une moyenne prise sur  $x$ . Le facteur  $\pi/2$  suppose que  $\xi$  s'écrit  $\xi_0 \sin(kx)$ . De plus, on note que l'amplitude de  $\xi$  n'est pas parfaitement constante avec  $x$ . Cette variation spatiale pouvant atteindre 50% de l'amplitude maximale. Elle est sûrement liée

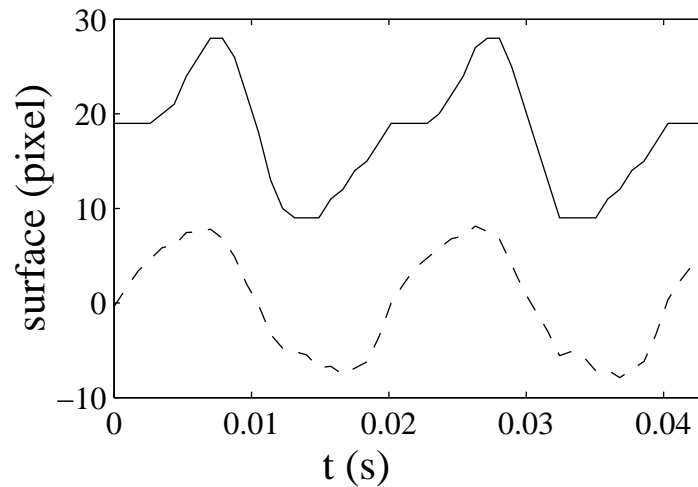


FIG. 3.12 – Ligne continue : position brute de la surface  $\xi(x_0, t)$  détectée à un ventre de l'onde dans un mélange eau (32%)–glycérol (68%) pour  $f = 100$  Hz et  $\epsilon = 5.4\%$ . Ligne pointillée : le même signal auquel on a soustrait sa valeur moyenne ainsi que sa composante harmonique.

à la présence d'un ménisque libre aux bords de la cellule et à la longueur de la cellule ne permettant qu'un nombre trop restreint de modes pour la considérer comme infinie dans la direction  $x$ . Enfin, on obtient aussi le nombre d'onde  $k_x$ , composante de  $\mathbf{k}$  selon  $x$ , à 1% près grâce à la mesure de la période spatiale de  $\xi$ .

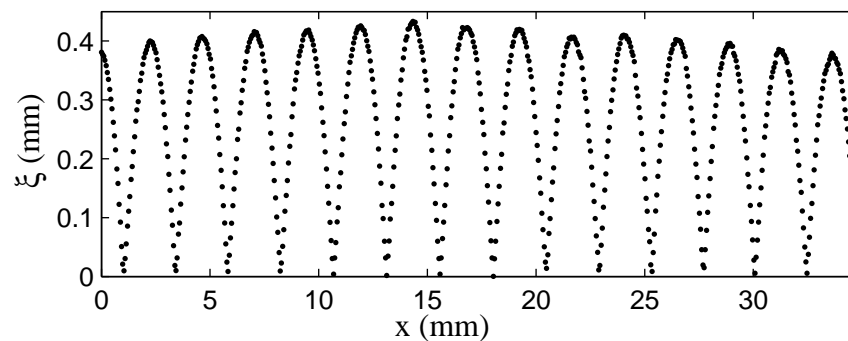


FIG. 3.13 – Amplitude  $\xi$  des oscillations en fonction de la position dans la cellule dans un mélange eau-glycérol (20-80%) pour  $f = 80$  Hz et  $\epsilon = 5.4\%$ .

### 3.2.3 Artefacts et sources d'incertitude possibles

La version de l'expérience développée pour la mesure de  $\xi$  possède deux défauts majeurs : le fort confinement et la présence d'un ménisque.

#### Mesures d'accélération

Il est connu que le confinement et la présence d'un ménisque conduisent à une dissipation accrue dans l'expérience de Faraday [66]. Cela se traduit par un désaccord notable entre les mesures de seuil effectuées dans la cellule rectangulaire décrite précédemment et le calcul d'analyse de stabilité linéaire de la référence [50]. Ce désaccord est illustré sur la figure 3.14, où les données expérimentales obtenues dans le mélange eau (20%)–glycérol (80%), sont comparées aux prédictions théoriques. L'accélération critique expérimentale est ainsi supérieure de 27% à la prédiction pour  $f = 80$  Hz.

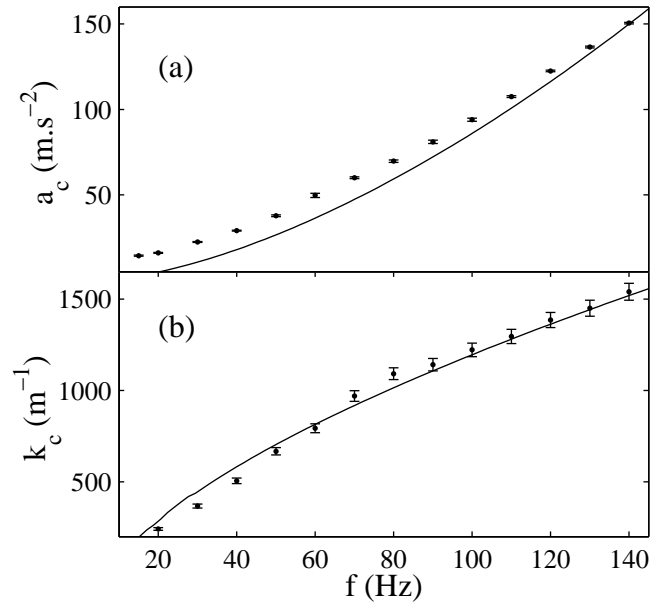


FIG. 3.14 – Détermination du seuil d'instabilité dans un mélange eau (20%)–glycérol (80%), pour une couche d'épaisseur  $h = 10$  mm et à une température de  $23^\circ\text{C}$ . (a)  $a_c$  vs  $f$ . (b)  $k_c$  vs  $f$ . Les lignes continues correspondent au calcul de stabilité linéaire de la référence [50] avec  $\rho = 1.208 \text{ g.cm}^{-3}$ ,  $\eta = 0.047 \text{ Pa.s}$  et  $\sigma = 0.06 \text{ N.m}$ .

#### Mesures du nombre d'onde

Comme nous l'avons mentionné à la section 3.1.3, les effets de taille finie altèrent le motif, surtout à basse fréquence, et limitent la précision sur  $k$ . Dans le cas particulier d'une cellule parallélépipédique à fort rapport d'aspect et en présence de conditions aux

bords libres, la composante selon  $y$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  n'est pas accessible et seul  $k_x$  est mesurable par analyse d'image. Ainsi, nous sommes contraints de supposer  $k_y = \frac{pi}{l}$  pour remonter à  $k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

### Effets liés aux ménisques

Dans notre cellule parallélépipédique, la ligne de contact n'est pas fixée par les conditions aux limites. Le ménisque est donc libre de se déplacer sous l'effet des vibrations. En particulier, la modulation de la gravité induit des variations de la longueur capillaire  $l_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$ , qui conduisent à la génération d'"ondes de ménisque" par conservation du volume [30]. Ces ondes sont facilement mises en évidences en réalisant le traitement d'images décrit ci-dessus en dessous du seuil d'instabilité. La figure 3.15 montre que l'amplitude des oscillations de la surface est supérieure d'environ 20% à celle des oscillations du fond de la cellule.

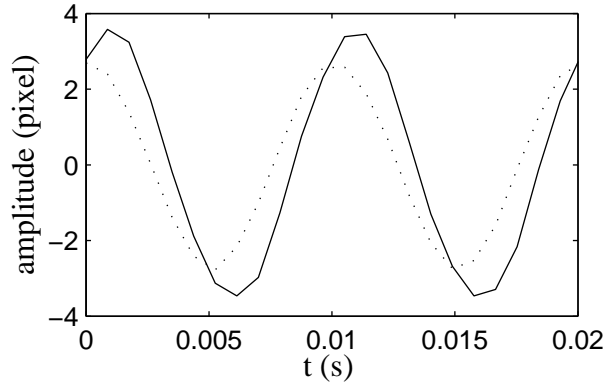


FIG. 3.15 – Ligne continue : position de la surface  $\langle \xi \rangle_x(t)$  au cours du temps dans un mélange eau (32%)–glycérol (68%) pour  $f = 100$  Hz et  $\epsilon = -2.7\%$  (soit en dessous du seuil d'instabilité). Ligne pointillée : position du fond  $\langle \zeta \rangle_x(t)$  au cours du temps.

Cette différence pourrait aussi s'expliquer par un effet de réfraction de la lumière sur les ménisques conduisant à une mauvaise estimation de  $\xi$  par un effet de lentille. Pour éliminer cette possibilité, nous avons réalisé des mesures sur la surface au repos en variant manuellement la position verticale de la cellule. La figure 3.16 montre alors que le coefficient de proportionnalité entre la position de la surface et celle du fond vaut 0.999 et non 1.2. Une interprétation purement optique en terme de réfraction ne permet d'ailleurs pas de rendre compte du déphasage observé entre  $\langle \xi \rangle_x(t)$  et  $\langle \zeta \rangle_x(t)$ . On peut donc conclure à l'absence d'artefacts optiques et confirmer la présence d'ondes de surface engendrées par les ménisques.

Notons toutefois que ces ondes de ménisques oscillent à la fréquence  $f$  des vibrations. En éliminant la composante harmonique du signal  $\xi(x, t)$ , notre traitement de données permet d'éliminer la contribution des ondes de ménisques.



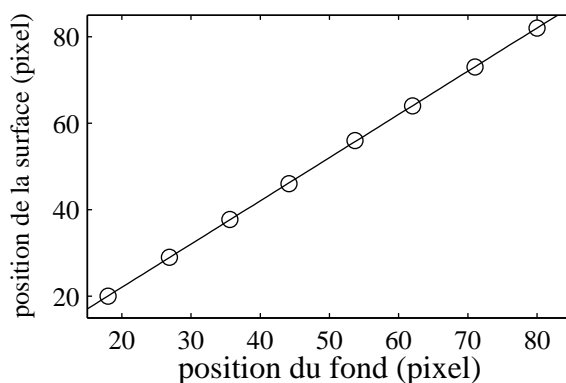


FIG. 3.16 – Position de l'interface en fonction de la position du fond ( $\circ$ ), et meilleur ajustement par une droite. La pente de la droite vaut 0.999.

### Mesure des faibles amplitudes

Aux faibles amplitudes, le seuil de détection est fixé par la pixellisation des images. Lorsqu'on extrait la composante sous-harmonique de  $\xi(x, t)$ , on obtient une précision de l'ordre du demi-pixel sur l'amplitude, soit une hauteur de l'ordre de  $30 \mu\text{m}$ .

### Mesure des fortes amplitudes

Enfin, lorsque l'amplitude des ondes de surface devient comparable à la hauteur du ménisque, notre traitement de données n'est plus applicable comme l'illustre la figure 3.17. Les amplitudes supérieures à 1 mm ne sont donc pas accessibles.

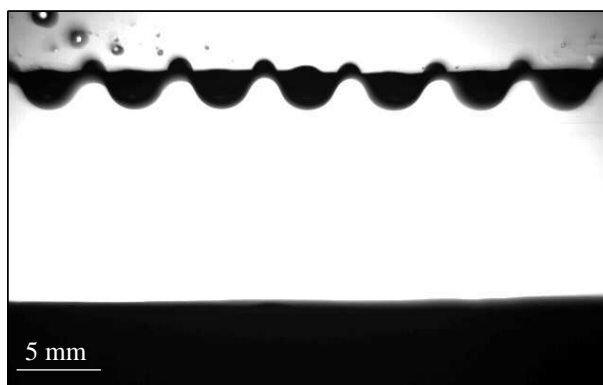


FIG. 3.17 – Surface d'un mélange eau(32%)-glycérol(68%) vibré à  $f = 100 \text{ Hz}$  pour  $\epsilon = 30\%$ . La ligne d'accrochage du ménisque est clairement déformée par les vagues. Cependant le système n'est pas chaotique.

### 3.2.4 Résultats pour un fluide simple

La figure 3.18 présente les mesures d'amplitude et de nombre d'onde effectuées dans un mélange eau (32%)–glycérol (68%) à une fréquence  $f = 100$  Hz en fonction de l'accélération  $a$ . Rappelons que la théorie prévoit une équation d'amplitude de la forme :

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \epsilon\xi_0 - b_3\xi_0^3 - b_5\xi_0^5 + \dots \quad (3.4)$$

À l'état stationnaire et à l'ordre 3 en  $\xi_0$ , cette équation prévoit :

$$\xi_0 = \sqrt{\epsilon/b_3}. \quad (3.5)$$

Cette loi en racine carrée, caractéristique d'une transition xx supercritique xx, ajuste bien les données expérimentales tant que  $\epsilon$  reste inférieur à 2%. Pour des écarts à l'accélération critique plus importants ( $\epsilon > 2\%$ ), la prise en compte du terme d'ordre 5 conduit à :

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 + 4\epsilon b_5}}{2b_5}}. \quad (3.6)$$

Comme le montre la figure 3.18, cette dernière équation ajuste parfaitement l'augmentation de l'amplitude des oscillations sur toute la gamme d'accélération accessible.

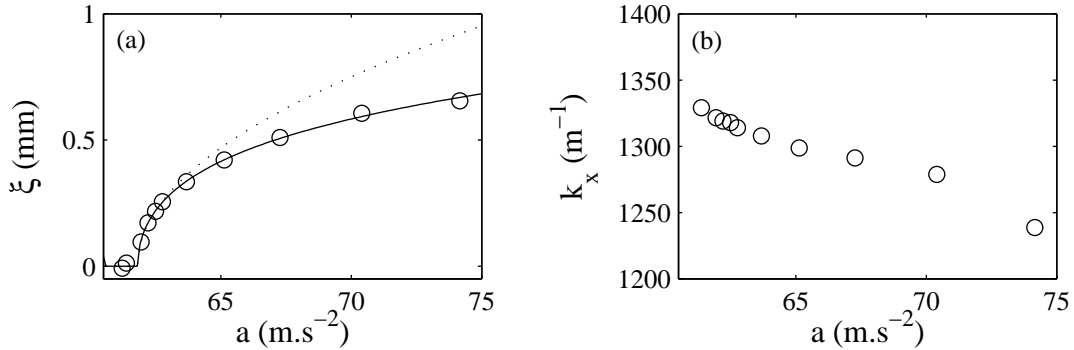


FIG. 3.18 – (a) Amplitude  $\xi$  des oscillations en fonction de l'accélération dans un mélange eau (32%)–glycérol (68%) à une fréquence  $f = 100$  Hz ( $\circ$ ). La ligne pointillée représente le meilleur ajustement par l'équation (3.5) avec  $b_3 = 2.07 \text{ m}^{-2}$  pour  $\epsilon < 3\%$ . La ligne continue correspond au meilleur ajustement par l'équation (3.6) avec  $a_c = 61.8 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $b_3 = 1.84 \text{ m}^{-2}$  et  $b_5 = 41.4 \text{ m}^{-4}$ . (b) Nombre d'onde  $k_x$  en fonction de l'accélération.

De plus, la figure 3.18(b) met en évidence une décroissance du nombre d'onde de l'ordre de 5%. Ces résultats sont compatibles avec les expériences antérieures sur les fluides simples [19, 85] et nous permettent de valider notre montage pour nos expériences ultérieures sur les fluides complexes.

Enfin, l'étude des harmoniques supérieures ( $3f/2$ ,  $2f...$ ) met en évidence la croissance des composantes non-linéaires de l'oscillation. La figure 3.19 présente l'évolution temporelle de la déformation de la surface pour une accélération proche du seuil  $\epsilon = 0.23\%$  et loin au-dessus du seuil  $\epsilon = 20\%$ . On constate qu'au bruit sur la mesure près, le signal est parfaitement doud-hzrmonique pour  $\epsilon = 0.23\%$  alors qu'une composante à  $3f/2$  est clairement visible à  $\epsilon = 20\%$ .

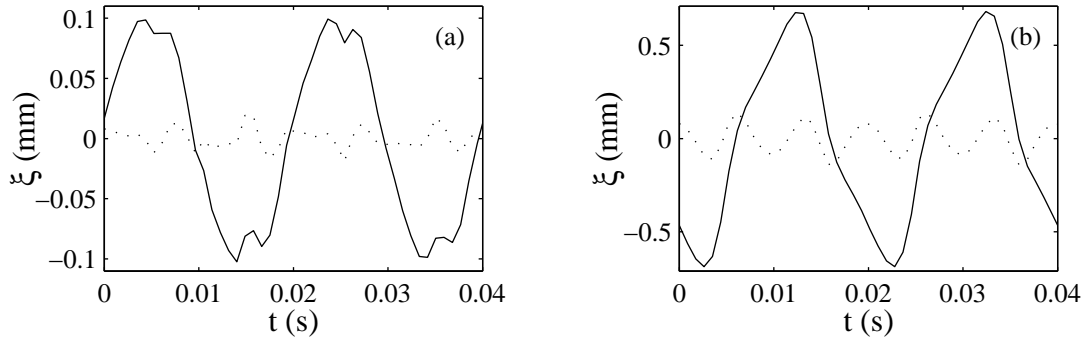


FIG. 3.19 – Lignes continues : évolution temporelle de la déformation de la surface à laquelle on a retiré la composante harmonique (à  $f$ ). Lignes pointillées : le même signal auquel on a aussi retiré la composante sous-harmonique (à  $f/2$ ), dans un mélange eau (32%)–glycérol (68%) vibré à une fréquence  $f = 100$  Hz, pour (a)  $\epsilon = 0.23\%$  et (b)  $\epsilon = 20\%$ .

Pour mieux quantifier ce phénomène, on compare l'amplitude de l'harmonique  $f/2$  du signal de surface (notée  $\xi_0$ ) à l'amplitude de l'harmonique supérieure  $3f/2$  (notée  $\xi_1$ ). La figure 3.20 montre que le rapport des deux harmoniques  $\xi_1/\xi_0$  en fonction de  $a$  semble saturer vers une valeur de l'ordre de 0.2.

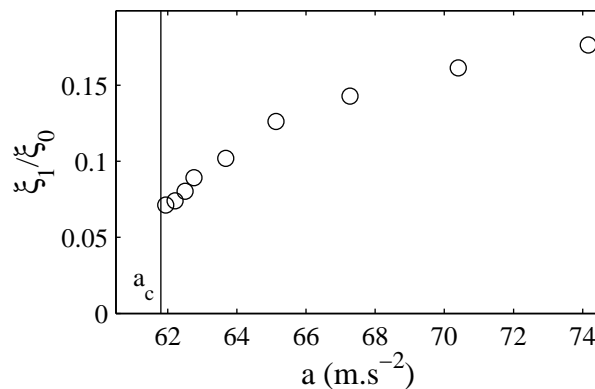


FIG. 3.20 – Rapport de l'amplitude de l'harmonique à  $3f/2$  et de l'harmonique à  $f/2$  dans un mélange eau (32%)–glycérol (68%) à une fréquence  $f = 100$  Hz ( $\circ$ ).

Même si une analyse spectrale plus poussée de nos données serait sans doute possible, une étude de la transition vers le chaos est ici hors de notre propos. Nous constatons toutefois que nous retrouvons les caractéristiques essentielles de l'instabilité au-dessus du seuil résumées au § 1.5.3, page 25.

### 3.3 Vélocimétrie par imagerie de particules (PIV)

Les expériences précédentes s'intéressent tout particulièrement à la surface du fluide. Pour sonder les effets de l'instabilité de Faraday dans l'épaisseur de la couche de fluide, nous avons aussi mis au point le montage de vélocimétrie par imagerie de particules (ou PIV, "particules imaging velocimetry") décrit ci-dessous.

#### 3.3.1 Dispositif et technique expérimentale

La figure 3.21 présente une vue de dessus du montage de PIV. Comme précédemment, nous utilisons une cellule parallélépipédique et le pot vibrant et la mesure d'accélération sont ceux montrés figure 3.1. Ici, la mesure du nombre d'onde  $k_x$  est réalisée grâce à la visualisation par le cercle de diode explicitée au § 3.1.1, page 44.

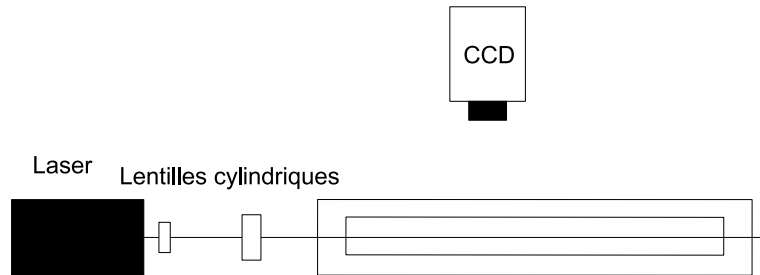


FIG. 3.21 – Montage de vélocimétrie par imagerie de particules en vue de dessus

#### Cellule de mesure

Pour mesurer la vitesse du fluide à l'intérieur de la couche de fluide, nous utilisons une cellule transparente en Plexiglas. Comme le montre la figure 3.22, le ménisque est accroché au bord de la cellule grâce à un méplat. Pour forcer les ondes de surface dans une dimension (ondes parallèles à la largeur), notre cellule possède à nouveau un fort rapport d'aspect. Ses dimensions sont : hauteur  $h = 10$  mm, largeur  $l = 4$  mm ou  $l = 8$  mm et longueur  $L = 180$  mm.

#### PIV

La cellule est traversée dans sa longueur par une nappe laser réalisée par un laser rouge He-Ne et deux lentilles cylindriques (Thorlabs LJ1310L1  $F = 4$  mm,  $H = 4$  mm et  $L =$

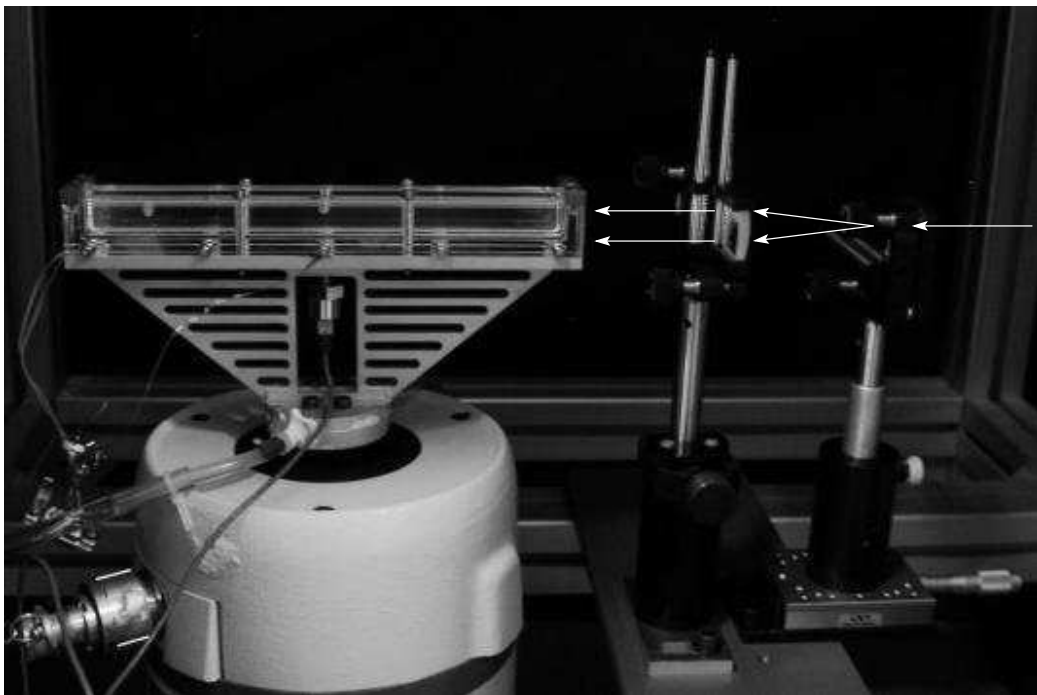
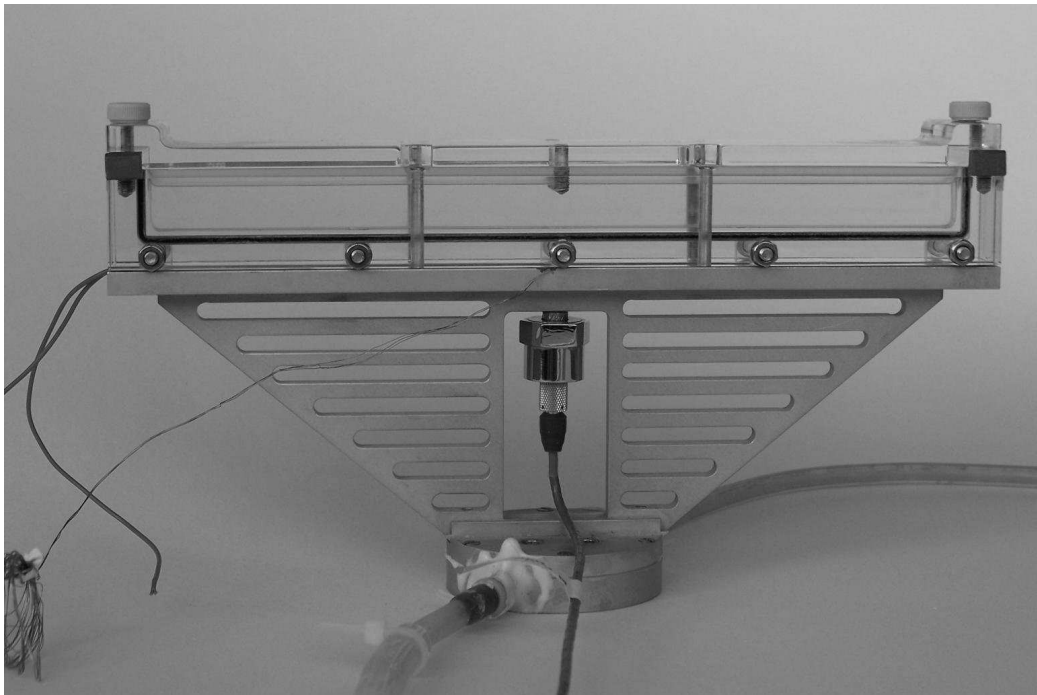


FIG. 3.22 – Photos de la cellule et du montage utilisés pour nos expériences de PIV.

6 mm et Thorlabs LJ1105L1  $F = 80$  mm,  $H = 20$  mm et  $L = 22$  mm). Les lentilles sont espacées de 22 mm. On réalise ainsi une nappe parallèle d'épaisseur  $\sim 1$  mm et de hauteur 15 mm plus grande que la hauteur  $h = 10$  mm de la couche de fluide augmentée du débattement maximum ( $\sim 2$  mm).

Comme les fluides étudiés sont transparents, on les ensemence par des diffuseurs, ici des billes de verre creuses de diamètre moyen  $11.7 \mu\text{m}$  et de masse volumique moyenne  $1100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  (Spherichel, Potters Industries). La concentration massique de diffuseurs est de 0.01%. Comme ces billes sont creuses, elles ont un fort contraste d'indice et diffusent très bien la lumière. Nous observons la lumière diffusée à travers les parois latérales de la cellule avec la caméra rapide (Mikrotron MC1310, capteur CCD  $1024 \times 1280$ ) et un objectif (Fujinon, 1 : 1.4, 25 mm) déjà utilisés précédemment. La vitesse d'acquisition de la caméra est fixée à dix fois la fréquence d'excitation  $f$ . La durée d'un film correspond à une vingtaine de périodes (200 images).

### 3.3.2 Mesure du champ de vitesse

On cherche le champ de vitesse pour une couche de fluide déstabilisée pour une faible amplitude des ondes de surface. Les problèmes liés à la taille des vagues sont explicités plus loin (cf. section 3.3.3, page 68). Les films sont donc réalisés juste au-dessus du seuil : on se place à  $\epsilon \sim 1\text{--}2\%$ . Pour avoir accès à la vitesse locale du fluide, on s'intéresse au changement local de l'intensité diffusée par les billes de verre dans le temps. La figure 3.23 montre un exemple typique d'image enregistrée par la caméra pour un mélange eau (22%)–glycérol (78%).

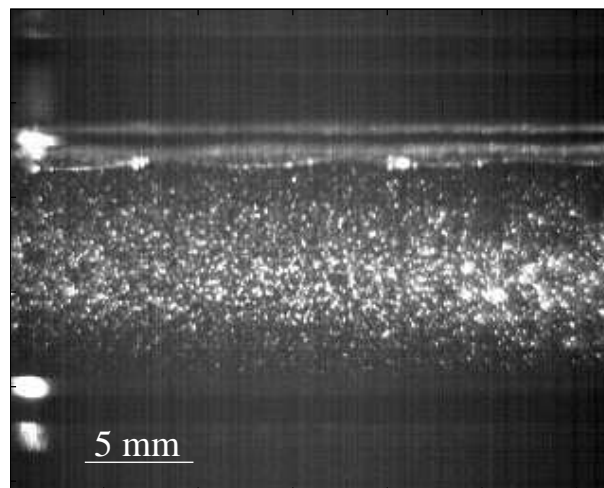


FIG. 3.23 – Image enregistrée dans un mélange eau (22%)–glycérol (78%) ensemencé par 0.01 % de billes de verre et vibré à  $f = 64$  Hz à  $21^\circ\text{C}$ .

Lorsque le fluide bouge, il entraîne avec lui les diffuseurs, ce qui change le champ

d'intensité. En comparant le champ d'intensité entre deux images successives, on peut donc remonter au champ de vitesse dans le fluide.

### Détection du fond

Pour pouvoir comparer les champs d'intensité diffusée à l'intérieur de la cellule, on doit s'affranchir du mouvement induit par le pot vibrant et donc commencer par détecter la position du fond de la cellule. Pour cela, un second laser crée un spot lumineux au fond de la cellule. En détectant le mouvement de ce spot, on peut déterminer l'évolution temporelle de la position du fond de la cellule. En pratique, on détecte le maximum du gradient d'intensité  $\delta I$  selon  $z$ . La figure 3.24 montre le gradient de l'intensité selon  $z$  moyenné sur la largeur du spot créé par le second laser pour l'image de la figure 3.23.

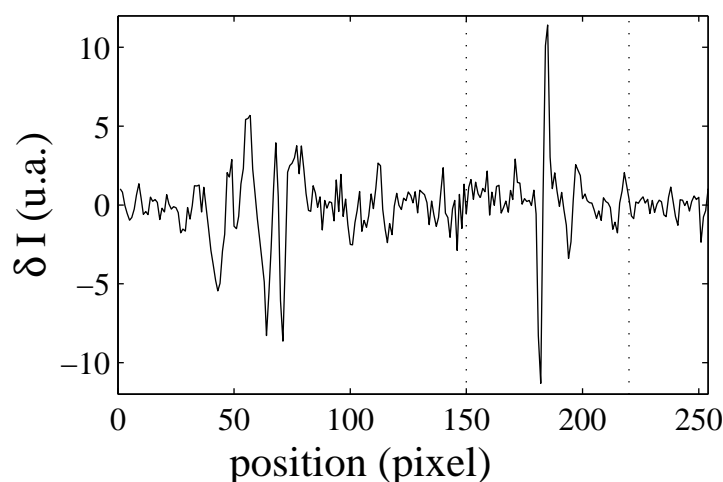


FIG. 3.24 – Gradient d'intensité  $\delta I$  selon  $z$  en fonction de  $z$  pour une image donnée. Pour détecter le fond, on cherche le maximum de  $\delta I$  entre les deux lignes en pointillés.

Ce signal est ensuite ajusté par un cosinus de fréquence  $f$  et l'ajustement est arrondi à l'entier (pixel) le plus proche. L'ajustement par un cosinus permet de s'affranchir des erreurs ponctuelles de détection du fond que peuvent provoquer des réflexions plus intenses sur certains diffuseurs. La figure 3.25 montre la position du fond détectée, l'ajustement qu'on en extrait ainsi que les valeurs effectivement utilisées pour le recadrage de l'image. On ne traite alors que les zones des images comprises entre le fond et la surface au repos. Dans la suite, on ne considère plus que les images corrigées du mouvement de la cellule.

### Traitement du champ d'intensité

En PIV, on ne suit pas directement les diffuseurs individuels mais le champ d'intensité reçu par la caméra. Plus précisément, on compare l'image prise au temps  $t$  et celle prise au temps  $t + dt$ . Soit donc  $I(j, k, t)$  l'intensité du pixel  $j, k$  de l'image prise au temps  $t$ .

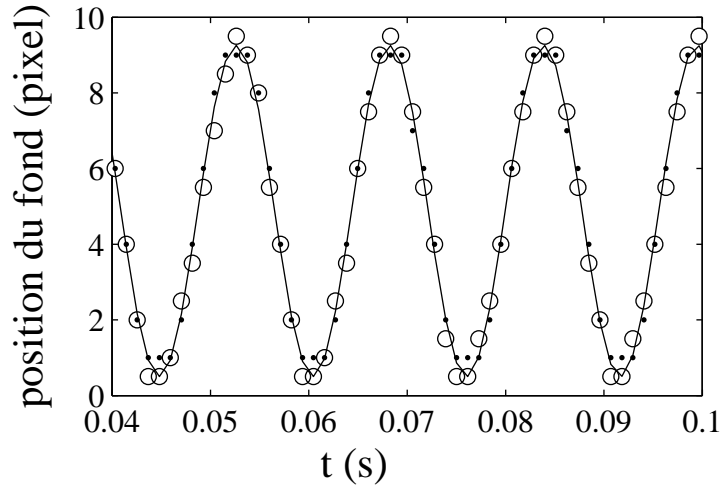


FIG. 3.25 – Position du fond détectée ( $\circ$ ), position ajustée (ligne continue) et position effectivement utilisée ( $\bullet$ ).

On découpe l'image prise au temps  $t$  en carrés de taille  $n \times n$  pixels. Pour augmenter le nombre de points de mesure, ces carrés peuvent se superposer. Pour chacun de ces carrés, on définit, dans l'image prise au temps  $t + dt$ , un carré de  $N \times N$  pixels de même centre, avec  $N > n$ . La figure 3.26 montre deux images consécutives enregistrées pour un mélange eau (22%)–glycérol (78%) ensemencé par 0.01 % de billes et vibré à  $f = 96$  Hz, les carrés blancs montrent les zones  $n \times n$  et  $N \times N$  traitées avec  $n = 11$  et  $N = 21$ .

Pour l'ensemble des carrés de taille  $n \times n$  contenus dans le carré  $N \times N$  on calcule :

$$dI(n_1, n_2) = \Sigma_{m_1} \Sigma_{m_2} (I(j+m_1+(N-n)/2, k+m_2+(N-n)/2, t) - I(j+m_1+n_1, k+m_2+n_2, t+dt))^2. \quad (3.7)$$

On obtient alors la différence d'intensité entre deux carrés en fonction de l'écart de leurs positions respectives. La figure 3.27 présente la différence  $dI$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .

On cherche ensuite la position  $(n_{1min}, n_{2min})$  du minimum de  $dI$ . Pour obtenir le déplacement selon  $x$ , on calcule le polynôme d'ordre deux qui passe par les points  $(n_{1min} - 1, dI(n_{1min} - 1, n_{2min}))$ ,  $(n_{1min}, dI(n_{1min}, n_{2min}))$  et  $(n_{1min} + 1, dI(n_{1min} + 1, n_{2min}))$ . Le déplacement en pixels selon  $x$  est alors la différence entre la position du minimum de ce polynôme et  $(N - n)/2 + 1$ , position du minimum si le fluide ne bouge pas. De même, pour obtenir le déplacement selon  $y$ , on calcule le polynôme d'ordre deux qui passe par les points  $(n_{2min} - 1, dI(n_{1min}, n_{2min} - 1))$ ,  $(n_{2min}, dI(n_{1min}, n_{2min}))$  et  $(n_{2min} + 1, dI(n_{1min}, n_{2min} + 1))$ . La figure 3.28 montre  $dI$  selon  $x$  et  $y$  ainsi que les polynômes d'ordre deux correspondant.

L'écart entre le point  $[(N - n)/2 + 1, (N - n)/2 + 1]$  et le point  $(dx, dz)$  correspondant au minimum des ajustements permet d'estimer la vitesse horizontale  $u = dx/dt$  et verticale  $w = dz/dt$ . La figure 3.29 présente le champ de vitesse calculé entre l'image au temps  $t$  et l'image au temps  $t + dt$  superposé à l'image enregistrée au temps  $t$ .

À cause de la discrétisation de l'image en pixels, les oscillations de la cellule ne sont



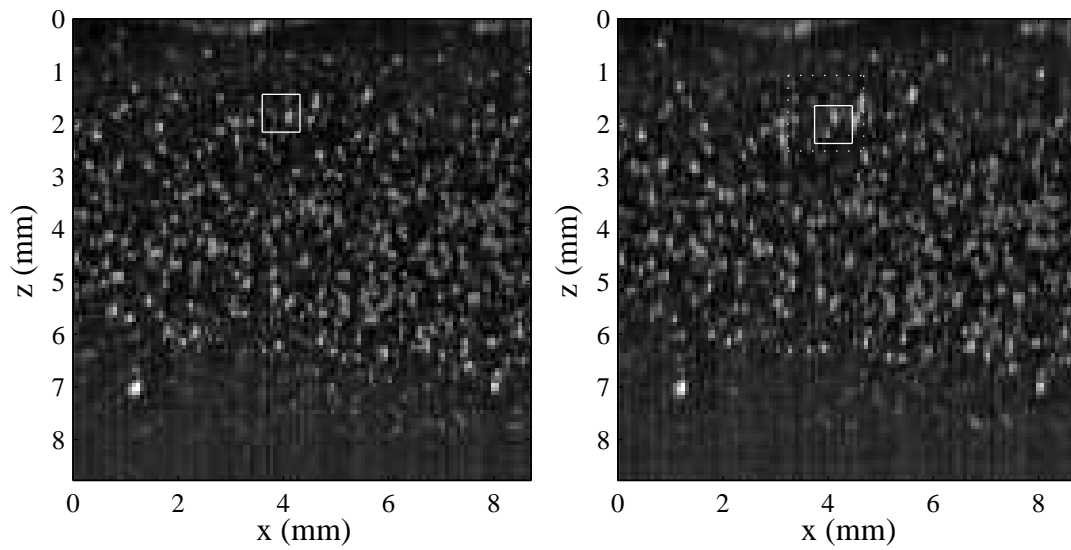


FIG. 3.26 – Images enregistrées à  $t$  et  $t + dt$  dans un mélange eau (22%)–glycérol (78%) ensemencé par 0.01 % de billes de verre et vibré à  $f = 96$  Hz. Les carrés en lignes continues blanches représentent deux zones corrélées. Le carré en pointillé sur l'image de droite représente la zone de mesure de la corrélation.

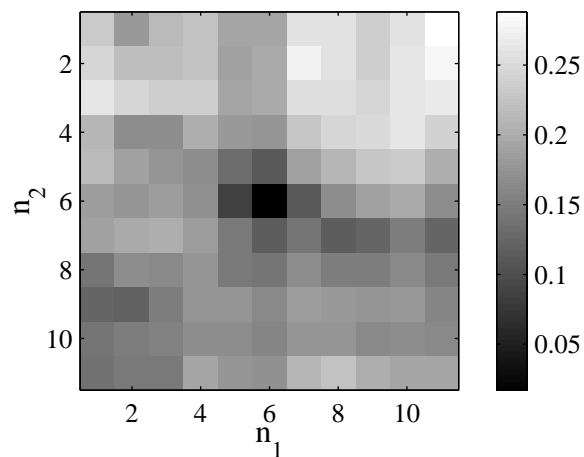


FIG. 3.27 –  $dI(n_1, n_2)$  pour les carrés montrés sur la figure 3.26.

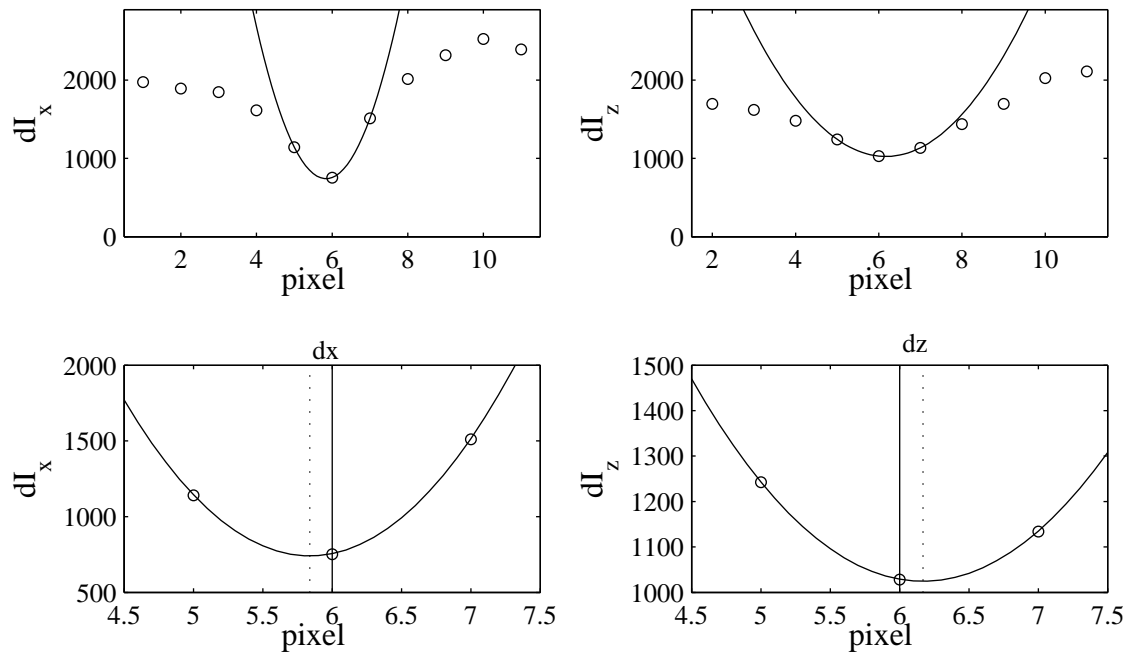


FIG. 3.28 –  $dI$  selon  $x$  et  $z$  en fonction de la position de la zone de corrélation. Les lignes continues sont les ajustements par un polynôme de degré deux. L'écart à la position médiane, ici  $6^{me}$  pixel, donne le déplacement du fluide entre les deux images.

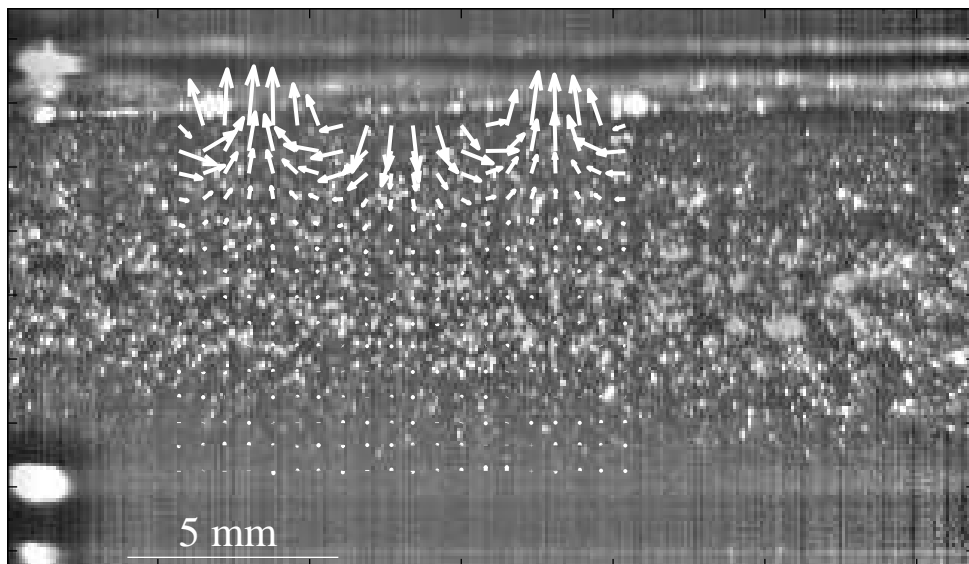


FIG. 3.29 – Image enregistrée par la caméra et champ de vitesse pour un mélange eau (22%)–glycérol (78%) ensemencé par 0.01 % de billes de verre et vibré à  $f = 64$  Hz

pas parfaitement supprimées, la position du fond peut varier de  $\pm 1$  pixel. Il y a donc une incertitude importante sur la détermination de la vitesse verticale  $w$ . Pour éviter des artefacts liés à ce problème, on se restreint par la suite à l'étude de la vitesse selon  $x$  :  $u$ . En chaque point, on ajuste alors la vitesse  $u(t)$  par un cosinus :

$$u(x, z, t) = u(x, z)\cos(\pi ft + \phi(x, z)). \quad (3.8)$$

La figure 3.30 présente la vitesse au cours du temps dans un point de l'espace ainsi que le meilleur ajustement par cosinus sous-harmonique  $f/2$ . Cette mesure donne ainsi accès à deux grandeurs spatiales : l'amplitude de la vitesse  $u(x, z)$  et la phase  $\phi(x, z)$  (figure 3.31).

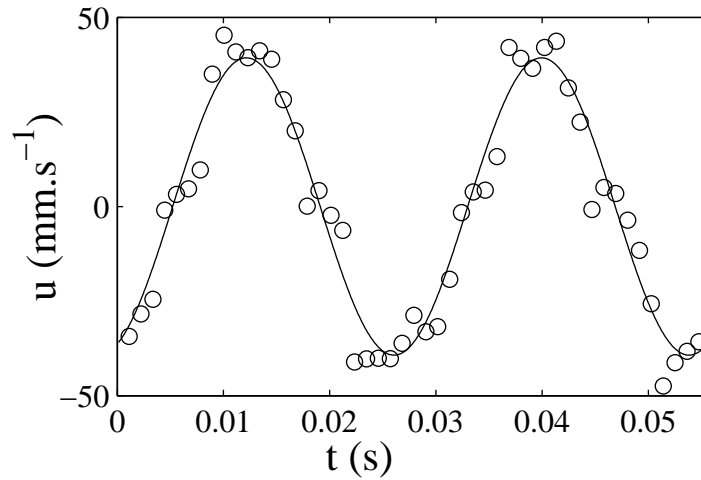


FIG. 3.30 – Vitesse  $u$  selon  $x$  en fonction du temps pour un point donné d'un mélange eau (22%)–glycérol (78%) vibré à  $f = 72$  Hz. La ligne continue représente le meilleur ajustement par un cosinus de fréquence  $f/2$ .

On peut alors comparer ces valeurs au résultat du calcul numérique du champ de vitesse sous-harmonique pour  $n = 0$  (à  $f/2$ ). La figure 3.32 montre l'amplitude de la vitesse selon  $x$  en fonction de  $z$  moyennée sur  $x$  ainsi que le calcul numérique pour  $\rho = 1188$  kg.m<sup>-3</sup>,  $\eta = 0.05$  Pa.s et  $\sigma = 0.06$  N.m<sup>-1</sup>. L'accord entre calcul et expérience est très satisfaisant (sauf pour  $z < 1$  mm, cf. artefacts possibles ci-dessous).

### 3.3.3 Artefacts et sources d'incertitudes possibles

#### Confinement

En fixant le ménisque aux bords de la cellule, on impose en pratique une vitesse nulle aux parois comme nous l'avons déjà évoqué au § 2.2.2, page 33. On peut modéliser cet effet en notant la vitesse  $v = v(x, z, t)\sin(\pi y/l)$ , où  $l$  est la largeur de la cellule. Pour

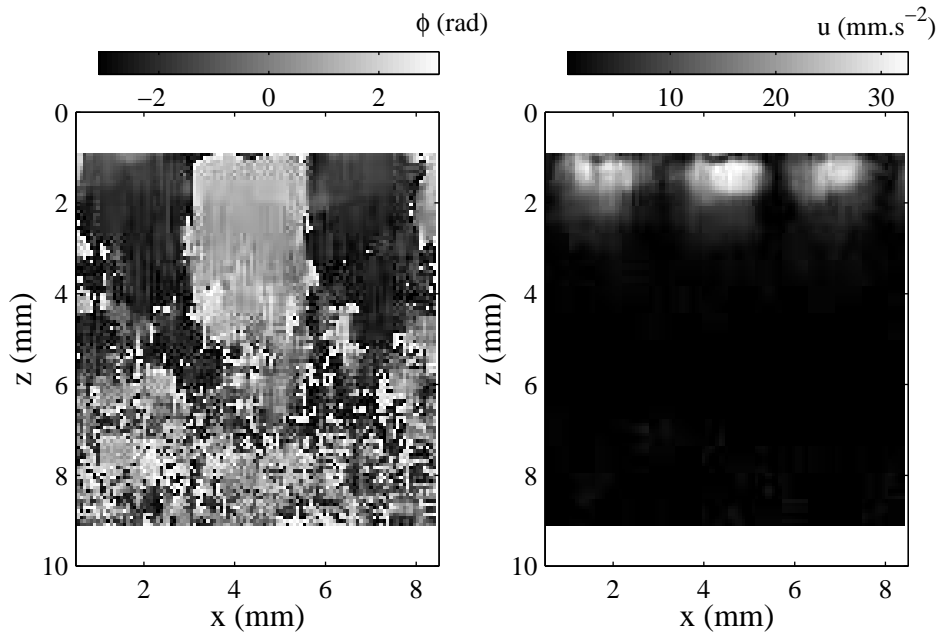


FIG. 3.31 – À gauche : phase  $\phi(x, z)$  de la vitesse selon  $x$ . À droite : amplitude  $u(x, z)$  de la vitesse selon  $x$  en fonction de la position, dans un mélange eau (22%)–glycérol (78%) vibré à  $f = 96$  Hz.

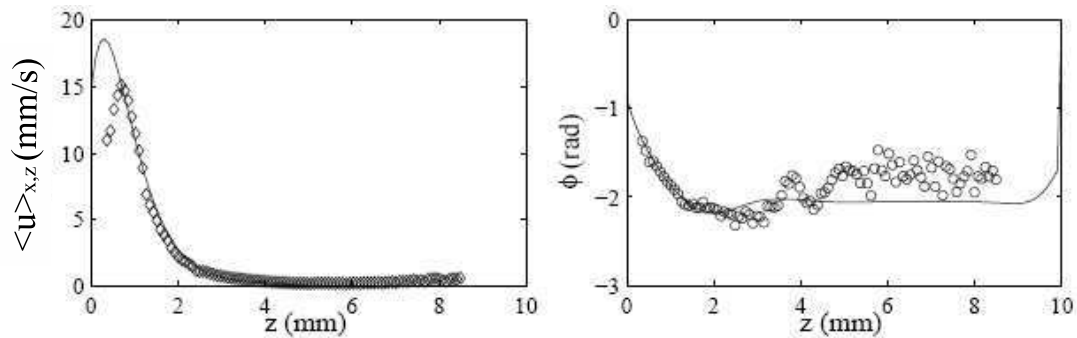


FIG. 3.32 – À gauche : amplitude  $\langle u(x, z) \rangle_x$  et à droite : phase  $\langle \phi \rangle_{\pi/k_x}$  en fonction de la profondeur  $z$  pour un mélange eau (22%)–glycérol (78%) vibré à  $f = 96$  Hz. Les lignes continues présentent le résultat du calcul numérique de Kumar et Tuckerman [50] avec  $\rho = 1188 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\eta = 0.05 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  et  $\sigma = 0.06 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

que le calcul de stabilité linéaire soit valable, on doit alors utiliser  $k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  avec  $k_x$  le nombre d'onde mesuré selon  $x$  et  $k_y = \pi/l$ . Ce qui revient à rajouter un demi-mode transverse au nombre d'onde. C'est cette procédure qui a été appliquée pour obtenir les résultats numériques présentés sur la figure 3.32.

La présence de ce demi-mode impose aussi une valeur minimale pour le nombre d'onde. À basse fréquence, le fluide se déstabilise alors à une accélération très supérieure à celle prédite par le calcul de stabilité linéaire. En effet, on ne peut pas déstabiliser le mode le plus instable tant que  $k_c < \pi/l$ . Dans ces conditions, l'instabilité de Faraday débute directement dans le régime chaotique.

### Hauteur des vagues

Le second artefact est lié à l'instabilité elle-même. Lorsque la surface du fluide est déstabilisée, il apparaît des vagues de taille finie  $\xi_0$ . Ces vagues pénètrent dans le fluide, ce qui crée une zone entre  $z = 0$  et  $z = \xi_0$  où le suivi de particules donne des résultats fantaisistes. La figure 3.33 montre la surface d'une couche d'un mélange eau (22%)–glycérol (78%) ensemencé par 0.01 % de billes et vibré à  $f = 48$  Hz. On constate clairement que les vagues pénètrent dans le fluide. Cela se traduit par une décroissance de la vitesse mesurée à l'approche de la surface, décroissance qui intervient avant celle prédite par le modèle numérique (cf. figure 3.32).

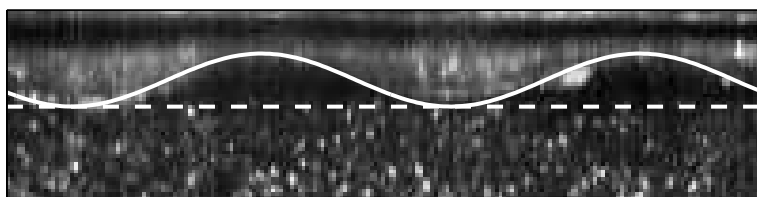


FIG. 3.33 – Image de la surface d'un mélange eau(22%)-glycérol(78%) vibrée à  $f = 48$  Hz lorsque la surface est au maximum de déformation. La ligne continue indique la position de l'onde de surface. Au-dessus des pointillés, la mesure de PIV selon la procédure décrite au § 3.3.2 sous-estime fortement la vitesse du fluide.

### 3.3.4 Résultats pour un fluide simple

On enregistre des films à plusieurs fréquences sur un mélange eau (22%)–glycérol (78%) ensemencé par 0.01 % de billes de verre. En traitant ces films, on accède au champ de vitesse dans le plan  $(x, z)$ .

On vérifie expérimentalement que, pour un nombre d'onde suffisamment grand devant  $1/h$ , dans un fluide simple, la vitesse décroît de manière exponentielle avec la profondeur  $z$ , la longueur caractéristique étant proportionnelle à l'inverse du nombre d'onde  $k_c$ . La figure 3.34 présente l'amplitude  $u$  de la vitesse en fonction de  $z$  pour plusieurs fréquences.

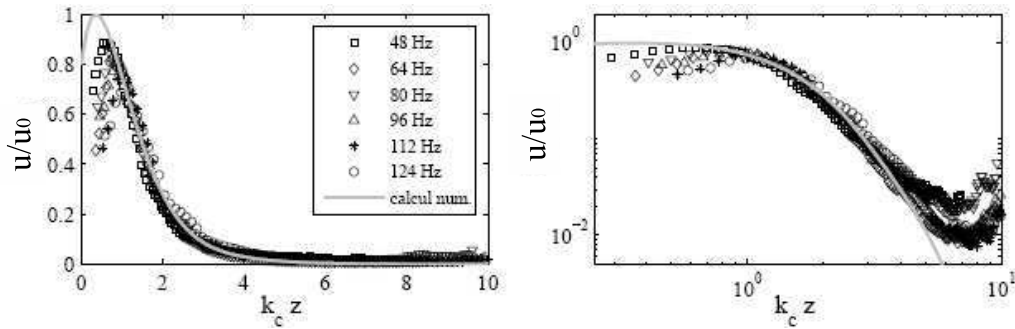


FIG. 3.34 – Amplitude  $u$  normalisée par le maximum de l’ajustement par le calcul numérique de Kumar et Tuckerman [50] en fonction de la profondeur multiplié par le nombre d’onde  $k_c z$  pour un mélange eau (22%)–glycérol (78%) ensemencé par 0.01 % de billes. Ligne grise continue : calcul numérique de Kumar et Tuckerman [50] à 96 Hz avec  $\rho = 1188 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\eta = 0.05 \text{ Pa.s}$  et  $\sigma = 0.06 \text{ N.m}^{-1}$ . À gauche : représentation en échelles linéaires, à droite : en échelles logarithmiques.

Pour résumer ce chapitre, nous avons développé des expériences classiques (au voisinage du seuil) et originales (mesures d’amplitudes et PIV) et démontré leur pertinence dans le cas de fluides newtoniens (mélanges eau–glycérol). Nous allons dans la suite appliquer ces mêmes techniques au cas de fluides complexes.



## Deuxième partie

### Micelles géantes en régime semi-dilué





# Chapitre 4

## Présentation du système CPCI-NaSal

Dans ce chapitre nous présentons le système de micelles géantes en régime semi-dilué utilisé dans l'expérience de Faraday. La suite de cette seconde partie est dédiée à l'exposé des résultats expérimentaux au voisinage du seuil puis à leur interprétation grâce au calcul numérique et à des expériences de vélocimétrie et de biréfringence. Enfin, nous présentons succinctement quelques résultats obtenus au-dessus du seuil d'instabilité.

### 4.1 À l'équilibre

Nous avons décidé de travailler avec des solutions de micelles géantes (pour une revue voir [7]), de longs agrégats cylindriques et flexibles de tensioactifs de quelques nanomètres de diamètre pour plusieurs micromètres de long. Ces micelles peuvent se couper et se recombinaison dans le temps. Leur taille n'est donc pas fixe, d'où le nom de "polymères vivants". La taille moyenne de ces micelles, dont découle les propriétés physiques de nos fluides, est fixée par un équilibre thermodynamique. La rhéologie de nos fluides va donc dépendre de la température, de la concentration en tensioactif et de la concentration en sel de notre solution. Les concentrations choisies sont telles que ces micelles sont enchevêtrées et forment un réseau, c'est le régime semi-dilué. En combinant le modèle de reptation des polymères et les propriétés de coupure et recombinaison, Cates *et al.* [21] ont parfaitement décrit la rhéologie linéaire des solutions de micelles géantes.

### 4.2 Propriétés viscoélastiques

Nous avons choisi comme fluide complexe des solutions de micelles géantes formées de cetylpyridinium chloride et de salicylate de sodium (CPCI-NaSal) de rapport de concentration molaire  $[CPCI]/[NaSal]=2$  et dilués dans de l'eau salée ( $0.5 \text{ mol.L}^{-1}$  de NaCl), pour des concentrations en CPCI-NaSal allant de 2 à 8% en masse. Ce système a été très étudié [79, 10, 9, 35], ces fluides sont des fluides de Maxwell modèle [21], et leur rhéologie non-linéaire présente un comportement singulier sur lequel nous revenons en détail dans la section 4.3.

La viscosité complexe d'un fluide de Maxwell  $\eta^*(\omega)$  est de la forme :

$$\eta^*(\omega) = \frac{G_0\tau}{1 + i\omega\tau} + \eta_S, \quad (4.1)$$

où  $G_0$  est le module élastique,  $\tau$  le temps caractéristique de relaxation et  $\eta_S$  la viscosité du solvant. On peut ainsi définir la viscosité à fréquence nulle  $\eta_0 = G_0\tau$ , le module de stockage  $G'(\omega)$  et le module de perte  $G''(\omega)$  par

$$G'(\omega) = -\omega\Im(\eta^*(\omega)) = \frac{G_0\tau^2\omega^2}{1 + \tau^2\omega^2}, \quad (4.2)$$

$$G''(\omega) = -\omega\Re(\eta^*(\omega)) = \frac{G_0\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} + \eta_S\omega. \quad (4.3)$$

Comme nous l'avons rappelé au § 2.1.3, page 29, ces deux dernières valeurs sont reliées respectivement au caractère solide ou liquide de nos fluides. Si  $G'' > G'$  le fluide se comporte essentiellement comme un liquide, alors que si  $G' > G''$  le fluide se comporte comme un solide élastique, en traçant  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$  sur un même graphique, on évalue facilement le comportement dominant de notre fluide. La figure 4.1 présente les résultats de rhéologie linéaire d'une solution de CPCI-NaSal à 3%. Ces mesures ont été réalisées à cisaillement oscillant imposé grâce à un rhéomètre (ARES, TA Instruments) en géométrie cône-plan (voir Annexe chapitre A pour plus de détails concernant les mesures rhéologiques). Le

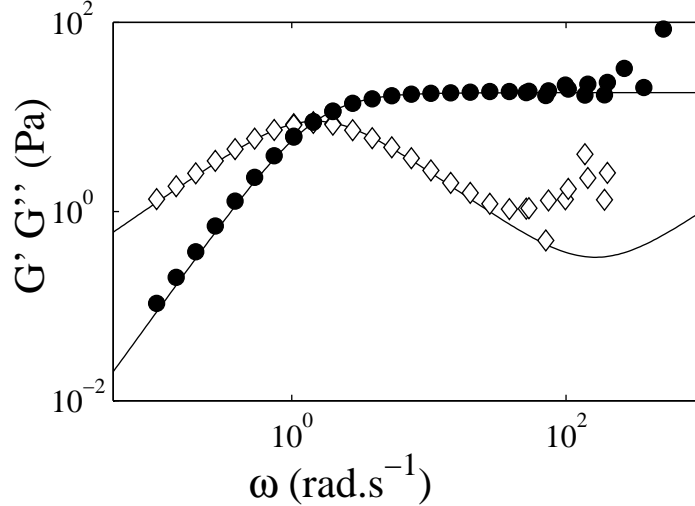


FIG. 4.1 – Rhéologie linéaire pour une solution de CPCI-NaSal à 3% :  $G'$  (●) et  $G''$  (◇) en fonction de la fréquence  $\omega$ . Les lignes continues représentent le meilleur ajustement par un fluide de Maxwell, pour  $\omega < 60 \text{ rad.s}^{-1}$ , obtenu avec  $G_0 = 18 \text{ Pa}$  et  $\tau = 0.67 \text{ s}$  et  $\eta_S = 0.001 \text{ Pa.s}$ .

changement de comportement liquide–solide intervient pour  $\omega = 1/\tau$  et  $G' = G'' = G_0/2$ .

L'ajustement de  $G'$  et  $G''$  par un fluide de Maxwell est très bon pour  $\omega < 60 \text{ rad.s}^{-1}$ . On constate que pour  $\omega > 60 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $G''$  est supérieur à ce que prévoit le modèle. Enfin, pour des questions d'inertie du système de mesure, notre rhéomètre est fiable jusqu'à  $\omega \simeq 63 \text{ rad.s}^{-1}$ . À "haute" fréquence, nous ne pouvons donc pas estimer correctement le comportement rhéologique de notre fluide.

Un moyen simple de vérifier qu'un fluide est un fluide de Maxwell est de tracer  $G''$  vs  $G'$  (représentation Cole–Cole) et de vérifier que la courbe ainsi obtenue est bien un demi-cercle. La figure 4.2 présente les mesures de rhéologie linéaire pour plusieurs concentrations en tensioactif. Toutes les courbes normalisées se regroupent sur une seule courbe maîtresse.

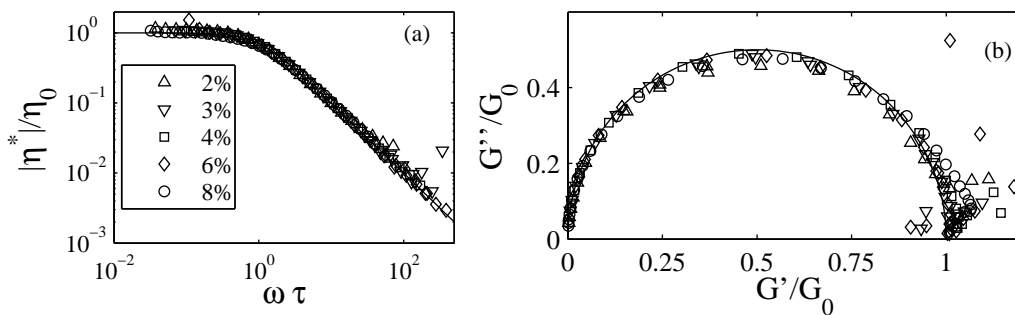


FIG. 4.2 – (a) Viscosité complexe normalisée par la viscosité à fréquence nulle  $|\eta^*|/\eta_0$  en fonction de  $\omega\tau$  pour plusieurs solutions de CPCI–NaSal de concentrations 2, 3, 4, 6 et 8% et prédiction pour un fluide de Maxwell  $|1/(1 + i\omega\tau) + \eta_S/\eta_0|$  (ligne continue). (b)  $G''/G_0$  en fonction de  $G'/G_0$  pour plusieurs solutions de CPCI–NaSal de concentrations 2, 3, 4, 6 et 8% et prédiction pour un fluide de Maxwell  $G''/G_0 = G'/\eta_0\omega + \eta_S\omega/G_0$  (ligne continue), dans les deux cas les paramètres du modèle de Maxwell sont  $G_0 = 18 \text{ Pa}$  et  $\tau = 0.67 \text{ s}$  et  $\eta_S = 0.001 \text{ Pa.s}$ .

Sur l'ensemble des concentrations étudiées (2–8%), nos fluides se comportent donc bien comme des fluides de Maxwell.

En conclusion, la rhéologie linéaire des solutions de micelles géantes en régime semi-dilué est bien comprise. En revanche, de nombreuses questions restent ouvertes sur la rhéologie non-linéaire de ces fluides et constituent à l'heure actuelle l'objet d'intenses débats.

### 4.3 Rhéologie non-linéaire

Dans nos expériences de rhéologie non-linéaire, le fluide est confiné entre deux cylindres coaxiaux (géométrie de Couette, voir section A.2.2, page 167). Le cylindre interne est mobile (rotor) et le cylindre externe reste fixe (stator). Une contrainte de cisaillement *constante*  $\sigma$  est imposée à l'aide d'un rhéomètre AR2000 (TA Instruments). L'instrument mesure alors la vitesse de rotation du rotor lorsque le régime stationnaire est atteint. À partir des

dimensions de la cellule, on calcule alors le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et on en déduit la *courbe d'écoulement*  $\sigma$  vs  $\dot{\gamma}$ .

Les mesures de rhéologie non-linéaire réalisées sur des solutions de micelles géantes montrent l'existence d'un plateau de contrainte : sur une gamme de taux de cisaillement la contrainte de cisaillement reste constante, comme on peut le voir sur la courbe d'écoulement pour une solution de CPCl-NaSal à 8% (figure 4.3). Ce plateau de contrainte est relié à un caractère très fortement rhéofluidifiant de nos solutions de CPCl-NaSal. Cette propriété remarquable des solutions de micelles géantes a été, et est encore très étu-

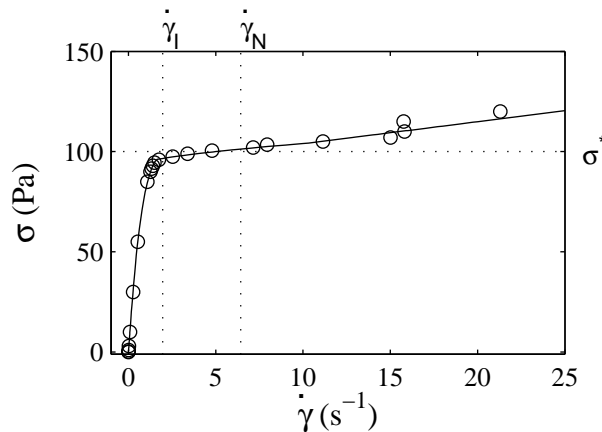


FIG. 4.3 – Contrainte  $\sigma$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  pour une solution de CPCl-NaSal à 8% ( $\circ$ ). Ajustement prenant en compte la présence de plusieurs bandes de cisaillement (ligne continue). Les lignes en pointillées délimitent le plateau (entre  $\dot{\gamma}_I$  et  $\dot{\gamma}_N$ ) et la valeur de ce plateau  $\sigma^*$  (voir Annexe page 166).

diée [22, 81, 10, 9, 75, 28, 55, 80, 56]. L'explication couramment admise de ce phénomène est la présence d'une "transition de phase hors d'équilibre" qui se traduit par la séparation du fluide en bandes de cisaillement de viscosités différentes dans l'échantillon. Les différences de viscosité de ces bandes sont attribuées à une différence d'étirement des micelles dans la direction de l'écoulement. Il y a coexistence de deux "phases" (voir figure 4.4) : une phase dite isotrope où les micelles gardent une configuration en réseau et sont peu étirées, et une phase dite nématique, où le réseau est détruit et les micelles sont fortement alignées dans la direction de l'écoulement ce qui réduit la viscosité, ces phases constituent respectivement les bandes de faible cisaillement et les bandes de fort cisaillement. La présence de ces bandes a été mise en évidence expérimentalement d'abord par résonance magnétique nucléaire (NMR) [59] puis par biréfringence [55] et plus récemment par diffusion de lumière [80] et par vélocimétrie ultrasonore [3]. La figure 4.5 présente les courbes d'écoulement expérimentales pour trois solutions de CPCl-NaSal à 4, 5.8 et 8%. À faible cisaillement, les trois courbes coïncident. Toutefois, plus la concentration en tensioactif est importante plus le plateau de contrainte commence tôt et plus la valeur normalisée

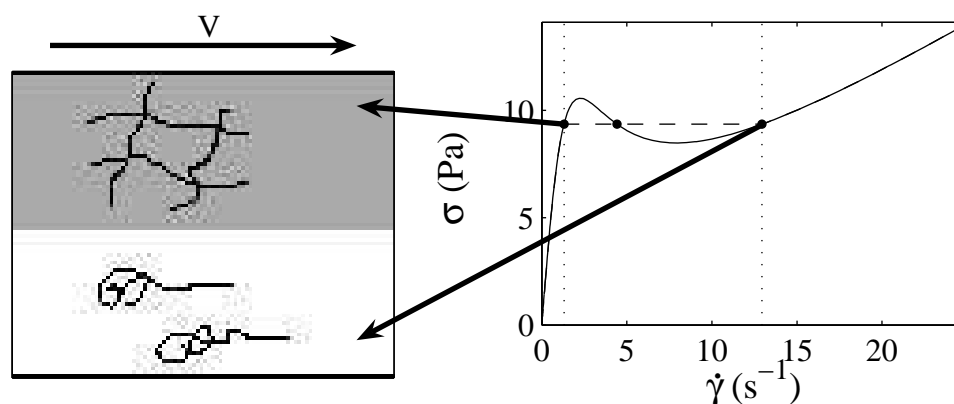


FIG. 4.4 – Phénomène de bandes de cisaillement dans les micelles géantes. Le fluide se sépare en deux phases, une phase de faible cisaillement où les micelles forment un réseau (en gris) et une phase de fort cisaillement où le réseau est détruit et où les micelles s’alignent fortement dans la direction de l’écoulement (en blanc). Le long du plateau de contrainte ces deux phases coexistent : la phase alignée induite par le cisaillement envahit progressivement tout l’échantillon à mesure que le taux de cisaillement augmente.

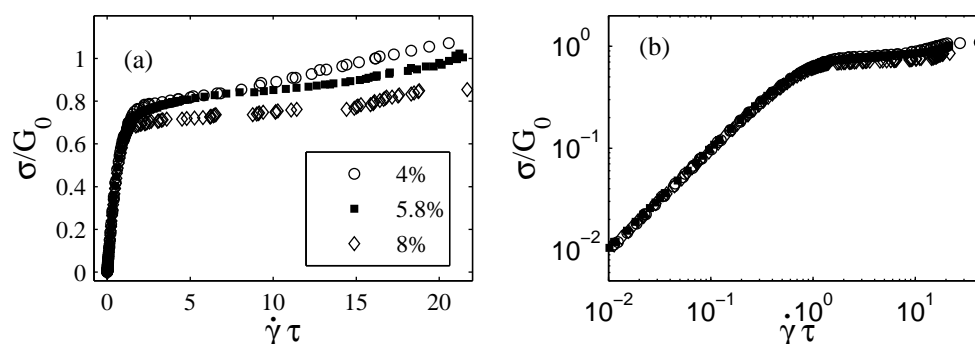


FIG. 4.5 – Contrainte normalisée par le module élastique  $\sigma/G_0$  en fonction du cisaillement normalisé par le temps de relaxation  $\dot{\gamma}\tau$  pour plusieurs solutions de CPCI–NaSal (4, 5.8 et 8%). (a) et (b) représentation en échelles linéaire et logarithmique.  $G_0$  et  $\tau$  sont tirés des expériences de rhéologie linéaire.

du plateau est faible [9]. Contrairement à la rhéologie linéaire où les courbes normalisées se regroupent sur une courbe maîtresse, en rhéologie non-linéaire, les caractéristiques du plateau de contrainte (les taux de cisaillement auxquels le plateau débute et finit et la valeur de la contrainte plateau) dépendent de la concentration et ne se regroupent pas sur une courbe maîtresse.

Ainsi, les solutions de micelles géantes présentent les deux caractéristiques désirées pour nos expériences d'instabilité de Faraday. D'une part, ces fluides sont très viscoélastiques et se comportent comme des solides pour  $f > 1$  Hz, et d'autre part, leur microstructure peut être modifiée par une contrainte extérieure.

# Chapitre 5

## Résultats expérimentaux au voisinage du seuil

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des expériences réalisées sur des solutions de micelles géantes (CPCI-NaSal) dans le régime semi-dilué. La concentration en tensioactif varie de 2 à 8%. Le but de ces expériences est de mettre en évidence les effets d'une forte viscoélasticité dans l'expérience d'instabilité de Faraday. Nous montrons d'abord l'importance du remplissage et son rôle dans le choix du motif. Dans un second temps, nous présentons les courbes  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de  $f$ . Nous montrons que contrairement à un fluide simple, ces courbes ne sont pas monotones et nous interprétons ce phénomène en terme d'ondes stationnaires élastiques. Enfin, nous présentons des mesures des champs de biréfringences et de vitesse au sein de l'échantillon. La non-monotonie de ces champs confirme la présence d'ondes stationnaires élastiques.

### 5.1 Observations qualitatives

Dans les solutions de micelles géantes, le motif dépend beaucoup du remplissage et de la proximité du seuil. On réalise plusieurs fois la même expérience avec la même solution de CPCI-NaSal à 8%. Comme notre fluide est très viscoélastique, il s'écoule lentement et un contrôle précis du remplissage est difficile. La précision sur  $h$  est donc très inférieure à celle pour un fluide simple et est de l'ordre de  $\pm 0.1$  mm. Pour estimer l'influence du remplissage, les expériences sont répétées plusieurs fois en vidant la cellule entre chaque expérience et en la remplissant à nouveau.

Pour chaque expérience, i.e. pour un remplissage donné,  $a_c$  est définie avec une précision de l'ordre de 1%. Cependant, entre deux expériences,  $a_c$  peut varier de près 10% et cette variation dépend de la fréquence. La figure 5.1 montre  $a_c$  en fonction de  $f$  pour trois expériences à sur une solution de CPCI-NaSal à 8%. Le comportement global des trois courbes est similaire mais des différences importantes sont visibles en certains points. Nous verrons à la section suivante que la gamme de fréquence où les courbes sont le plus différentes correspond à une zone de résonance entre une onde émise par la surface et une



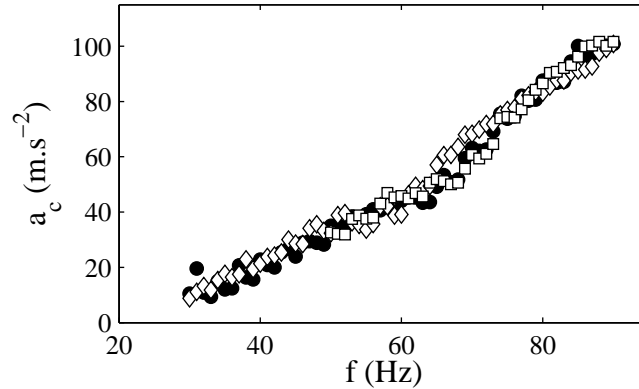


FIG. 5.1 –  $a_c$  en fonction de  $f$  pour trois remplissages différents pour une solution de micelles géantes de concentration 8%. Les barres d'erreurs sont plus petites que la taille des marqueurs.

onde réfléchi au fond de la cellule et dépend donc fortement de la hauteur de fluide.

Notons que le remplissage joue aussi sur  $k_c$ . On constate en effet que pour une même fréquence, plusieurs motifs sont possibles. La figure 5.2 montre une “zoologie” non exhaustive des motifs apparaissant à la surface d’une couche de solution de CPCl–NaSal à 8% de hauteur  $h = 10 \pm 0.1$  mm. Chaque image est prise moins d’un pour cent au-dessus du seuil. Si il est facile de déterminer un nombre d’onde critique  $k_c$  dans le cas de lignes parallèles et de cercles concentriques, il est plus difficile de déterminer  $k_c$  pour les autres motifs (motif n’apparaissant qu’aux bords, symétrie d’ordre  $n...$ ). Ces observations expliquent que la précision sur la mesure de  $k_c$  est nettement plus faible (de l’ordre de  $\pm 10\%$ ) pour les solutions de micelles géantes que pour de l’huile silicone, où le motif est toujours constitué de lignes parallèles.

Enfin, le remplissage joue sur deux facteurs. Le premier correspond aux effets de profondeur finie : si la hauteur de fluide varie, la valeur de l’accélération critique varie aussi. Le second est relié à la présence d’un ménisque aux bords de la cellule. Comme nous l’avons vu dans le cas d’un fluide simple § 3.1.3, page 47), ce ménisque joue aussi sur la valeur du seuil, et le remplissage change sa courbure ce qui modifie ces effets. Ces effets sont difficilement quantifiables. Dans la suite, et plus particulièrement dans les calculs numériques, qui ne prennent pas en compte les effets de bord, nous supposerons toujours  $h = 10$  mm.

## 5.2 Mise en évidence d’un effet viscoélastique

Dans cette partie, nous présentons les mesures d’accélération et de nombre d’onde critiques effectuées sur des solutions de micelles géantes CPCl–NaSal à différentes concentrations. Toutes les mesures de seuil d’instabilité présentées dans cette partie sont systématiquement suivies des mesures rhéologiques des modules viscoélastiques  $G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$ , à

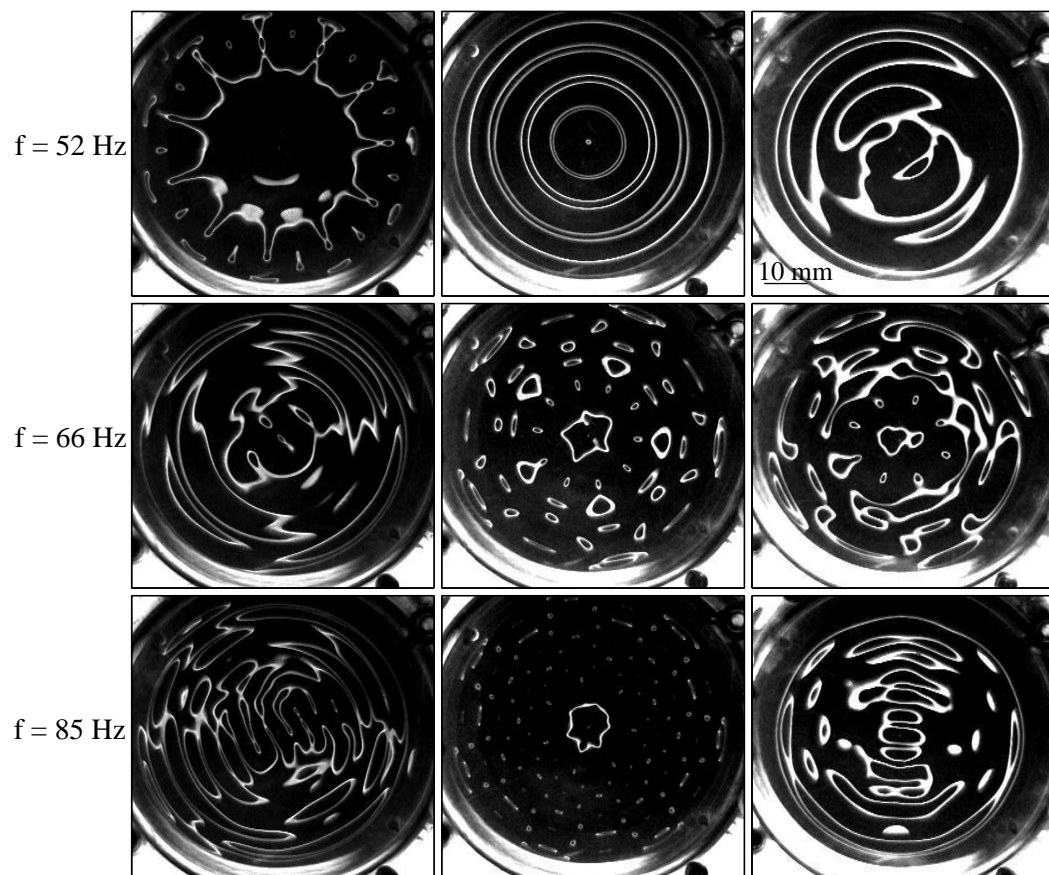


FIG. 5.2 – Images de la surface obtenues à trois fréquences (de haut en bas  $f = 52$ , 66 et 85 Hz) et pour trois expériences différentes sur une solution de micelles géantes de CPCI–NaSal à 8%. Les motifs (donnés de gauche à droite et de haut en bas) sont : motifs apparaissant uniquement aux bords (symétrie d'ordre 11?), cercles concentriques, lignes parallèles, lignes parallèles, symétrie d'ordre 5, symétrie d'ordre 4, lignes parallèles, symétrie d'ordre 7, lignes parallèles.

partir desquelles on remonte aux paramètres  $G_0$  et  $\tau$  du modèle de Maxwell correspondant (cf. section 4.2, page 74). Nous mettons ici en évidence la signature de la viscoélasticité du fluide sur le seuil d'instabilité de Faraday (ces résultats ont été publiés dans la référence [2]).

### 5.2.1 Solution de CPCI–NaSal à 4 %

On réalise une expérience d'instabilité de Faraday dans une solution de micelles géantes à 4%. L'expérience est réalisée à 20°C dans la cellule cylindrique (décrite au § 3.1.1, page 41, diamètre  $d = 60$  mm et hauteur  $h = 10$  mm). Comme pour un fluide simple, l'accélération critique  $a_c$  et le nombre d'onde critique  $k_c$  augmentent avec la fréquence. Toutefois dans une solution de micelles géantes, cette augmentation n'est pas monotone. La figure 5.3 présente les mesures de  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de  $f$ , pour une couche d'épaisseur  $h = 10$  mm d'une solution de CPCI–NaSal à 4%. On constate que l'accélération critique  $a_c$  oscille avec

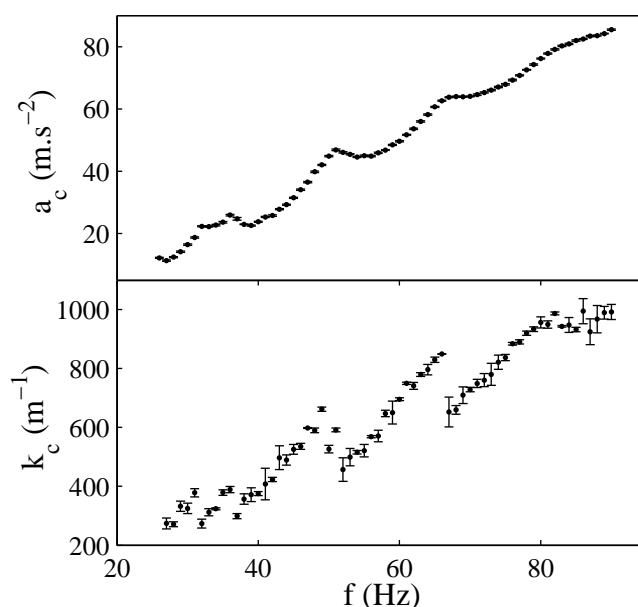


FIG. 5.3 – Accélération critique  $a_c$  et nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la fréquence  $f$  pour une solution de CPCI–NaSal à 4%.

la fréquence : on distingue clairement des maxima et des minima locaux régulièrement espacés. Dans la suite, on note  $\delta f$  l'intervalle de fréquence entre deux minima ou deux maxima. De plus, on remarque que le nombre d'onde critique  $k_c$  chute brutalement lorsque  $a_c$  atteint un maximum.

À notre connaissance, de telles oscillations n'ont jamais été observées dans les fluides simples ni dans les fluides complexes, du moins en géométrie non confinée. Dans un fluide simple, de telles oscillations pourraient toutefois être attribuées à un effet de bord. En effet, seul un nombre entier de modes peut être contenu dans la cellule, ce qui conduit

à une discrétisation de  $k_c$ . Une telle discrétisation est décelable aux faibles fréquences lorsque le nombre de modes devient inférieur à 5 typiquement. Or, nous avons montré que pour un fluide simple dans la même cellule (figure 3.7, page 48) et pour des nombres d'onde critiques similaires, aucune oscillation n'est décelée dans le domaine de fréquences considéré (20–100 Hz). Les oscillations observées sur la figure 5.3 sont donc caractéristiques de la structure complexe des solutions de micelles géantes. Nous allons montrer dans la suite qu'elles représentent une signature de la forte viscoélasticité du fluide sur le seuil d'instabilité de Faraday.

## 5.2.2 Interprétation physique

Nous proposons ici d'interpréter les oscillations de  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de  $f$  par la présence d'ondes de cisaillement stationnaires dans la hauteur de la cellule. Lorsque la surface se déstabilise, elle engendre des ondes de cisaillement qui se propagent selon la direction verticale  $z$ . Ces ondes sont réfléchies sur le fond de la cellule, remontent, et sont finalement susceptibles d'interférer avec les ondes à la surface du fluide. Ces réflexions engendrent une *onde élastique stationnaire* sur la profondeur de la cellule.

De façon générale, la vitesse  $c$  de propagation des ondes de cisaillement est donnée par  $c = \sqrt{G'(\omega)/\rho}$ . Nous avons vu (section 4.2, page 74) que nos solutions de micelles géantes se comportent comme un fluide de Maxwell (figure 4.2, équation (4.1) page 74). De plus, aux concentrations et aux fréquences étudiées, on a toujours  $\omega\tau \gg 1$  soit  $G'(\omega) \simeq G_0$ , de sorte que la vitesse de propagation des ondes de cisaillement s'écrit simplement  $c = \sqrt{G_0/\rho}$ .

Lorsqu'à la surface du fluide, l'onde de cisaillement émise et l'onde réfléchie sont en phase, il y a interférence constructive. Il est alors plus facile de déstabiliser la surface puisqu'une perturbation se verra amplifiée par l'onde de cisaillement. L'accélération critique doit donc présenter un minimum local. Cette situation advient lorsque  $2h$  correspond à un nombre demi-entier de longueurs d'onde<sup>1</sup>. Comme la surface répond à  $f/2$  dans le cas sous-harmonique, la longueur d'onde de l'onde de cisaillement vaut  $2c/f$ . La condition d'interférence constructive s'écrit alors  $2h = (n + 1/2)2c/f$  soit  $f = (n + 1/2)\delta f$  où  $\delta f = \sqrt{G_0/\rho}/h$  et  $n$  est un entier. Au contraire, pour  $f = n\delta f$ , l'interférence à la surface est destructive et tend à retarder l'apparition de l'instabilité, ce qui se traduit par un maximum de l'accélération critique. On prédit ainsi un intervalle de fréquence  $\delta f$  séparant deux maxima ou minima de  $a_c$  donné par :

$$\delta f = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{G_0}{\rho}}. \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>L'interférence constructive intervient pour un nombre demi-entier de longueur d'onde car la condition de vitesse nulle au fond de la cellule (section 1.4, page 16) induit un déphasage de  $\pi$  de la phase de l'onde de cisaillement lorsqu'elle est réfléchie au fond de la cellule.

### 5.2.3 Effet de la hauteur de fluide

Pour vérifier la validité de l'interprétation proposée ci-dessus, on mesure  $a_c$  et  $k_c$  à fréquence fixée pour plusieurs hauteurs  $h$  de la couche de fluide. En reprenant les arguments précédents, on s'attend à des oscillations de l'accélération critique avec la hauteur. L'écart  $\delta h$  entre deux minima ou deux maxima de  $a_c$  est donné par :

$$\delta h = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{G_0}{\rho}}. \quad (5.2)$$

La figure 5.4 montre l'évolution de l'accélération critique  $a_c$  pour une solution de CPCl–NaSal à 4% en fonction de  $f$  et en fonction de  $h$ . En comparant  $f\delta h$  et  $h\delta f$ , on trouve alors

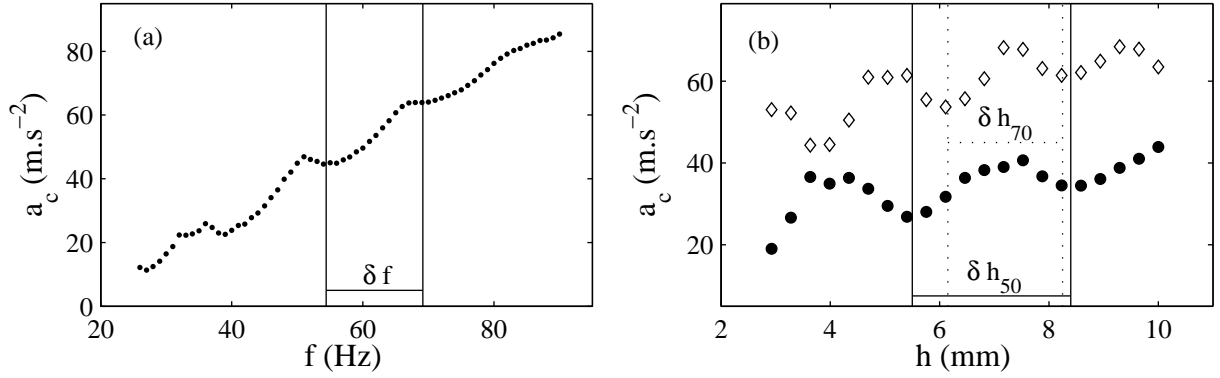


FIG. 5.4 – (a) Accélération critique  $a_c$  en fonction de la fréquence d'excitation  $f$  pour une solution de CPCl–NaSal à 4%. (b) Accélération critique  $a_c$  en fonction de la hauteur  $h$  de la couche de fluide lorsque le fluide est vibré à  $f = 50$  Hz (●) et à  $f = 70$  Hz (◇).

une très bonne correspondance :  $h\delta f = 0.1474$  S.I,  $70\delta h_{70} = 0.147$  S.I et  $50\delta h_{50} = 0.145$  S.I. La relation  $h\delta f = f\delta h$  est donc vérifiée à  $\pm 2\%$ , ce qui semble confirmer notre interprétation.

### 5.2.4 Effet de la concentration

Nous testons ici la dépendance de  $\delta f$  avec le module élastique  $G_0$ . Comme  $G_0$  augmente avec la concentration en tensioactif [79],  $\delta f$  doit dépendre fortement de la concentration du système. On étudie donc  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de la fréquence d'excitation  $f$  pour plusieurs concentrations. Les résultats pour  $a_c$  et  $k_c$  sont rassemblés sur la figure 5.5. On voit clairement croître  $\delta f$  avec la concentration. De plus l'amplitude des oscillations est moins importante aux fortes concentrations (6–8%).

D'après l'équation (5.1),  $\delta f \propto \sqrt{G_0}$ . Pour le vérifier, on trace  $a_c$  en fonction de  $f/\delta f$  sur la figure 5.6. Pour calculer ici  $\delta f$ , on détermine  $G_0$  à partir de la rhéologie linéaire de nos solutions et on utilise l'équation (5.1). Comme prévu par l'équation (5.1), les maxima et les minima correspondent alors aux mêmes abscisses.  $\delta f$  est donc directement lié à la

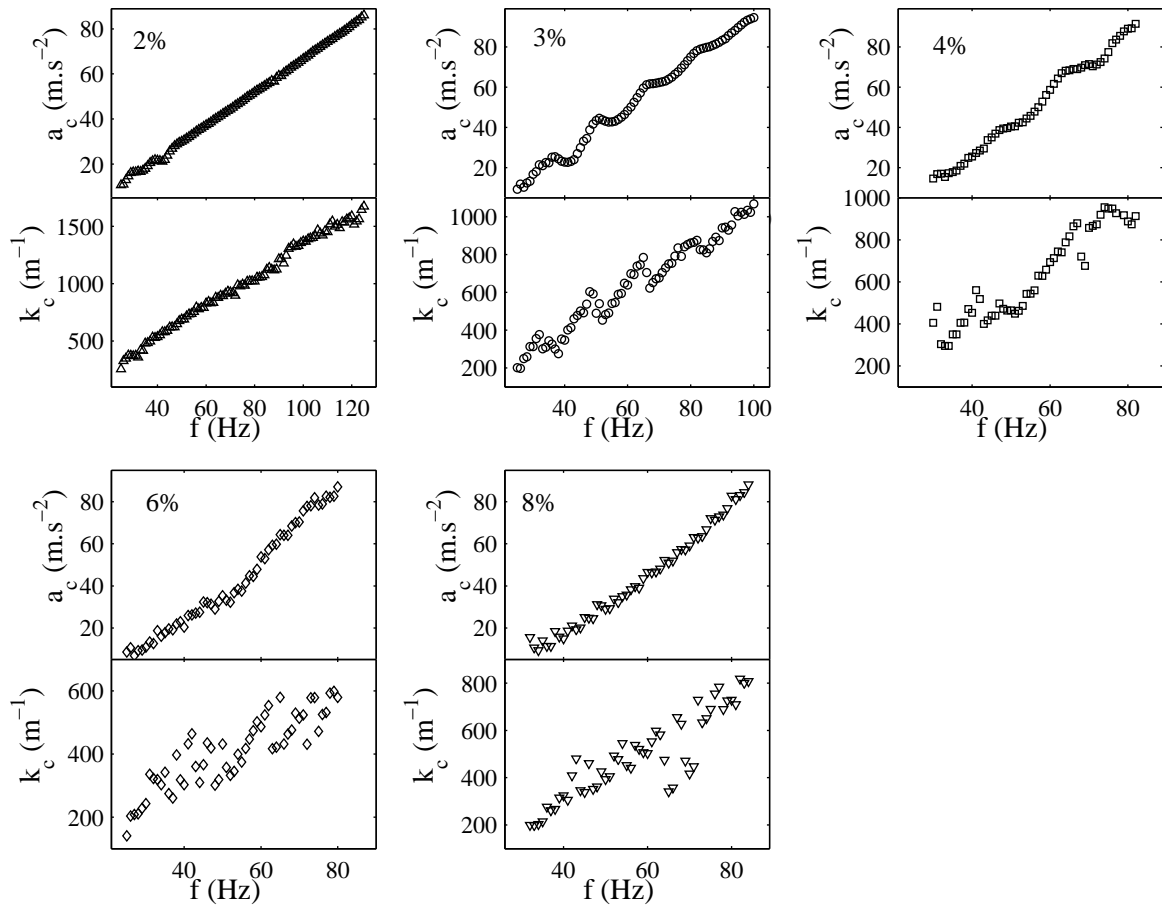


FIG. 5.5 – Accélération critique  $a_c$  et nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la fréquence d'excitation  $f$ , pour des solutions de CPCI–NaSal à 2% ( $\triangle$ ), 3% ( $\circ$ ), 4% ( $\square$ ), 6% ( $\diamond$ ) et 8% ( $\nabla$ ).

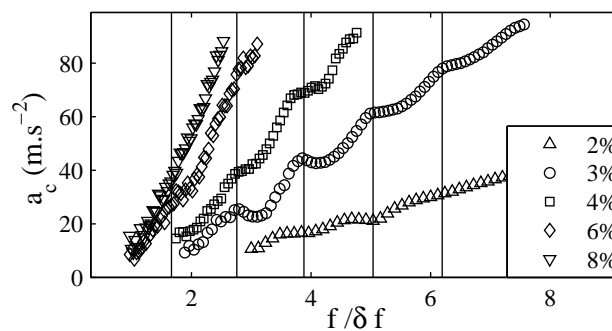


FIG. 5.6 – Accélération critique  $a_c$  en fonction de  $f/\delta f$  où  $\delta f$  est déterminé par l'équation (5.1). Les symboles  $\triangle$ ,  $\circ$ ,  $\square$ ,  $\diamond$  et  $\nabla$  correspondent respectivement à des solutions de CPCI–NaSal à 2%, 3%, 4%, 6% et 8%.

viscoélasticité de nos solutions. On remarque cependant que les maxima et les minima ne suivent exactement pas les lois  $f/\delta f = n$  et  $f/\delta f = n + 1/2$ . On atteint ici les limites de notre interprétation simple par une onde stationnaire élastique. Nous montrons plus loin (section 6.1.3, page 104) les raisons de cet écart.

Notons enfin que plus la concentration est élevée plus le domaine de fréquence accessible est limité. En effet, comme la viscosité augmente fortement avec la concentration, pour une même fréquence l'accélération critique augmente avec la concentration. Par conséquent, puisque la fréquence maximale accessible est limitée par la puissance du pot vibrant, plus la concentration augmente, plus la fréquence maximale accessible est petite. De plus, le nombre d'onde diminue lorsque  $G_0$  augmente (cf. figure 5.5). Les effets de bords se font donc sentir à des fréquences de plus en plus grandes à mesure que la concentration augmente. La fréquence minimale accessible (en dessous de laquelle les effets de bord deviennent prépondérants) augmente avec la concentration. Enfin, comme  $\delta f$  augmente avec la concentration, on s'attend à ce que le domaine de fréquences accessible devienne rapidement plus petit que  $\delta f$  ce qui ne permet plus d'observer les oscillations de  $a_c$  et  $k_c$ . En pratique, on se limite à une concentration maximale de 8%.

### 5.2.5 Effet de la température

On s'intéresse ici à l'influence du second paramètre du modèle de Maxwell : le temps caractéristique  $\tau$ . Pour étudier l'influence de ce paramètre sur le seuil d'instabilité, on mesure  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de  $f$  à deux températures 19°C et 23°C. En effet il a été montré [35] que si  $\tau$  dépend fortement de la température,  $G_0$  y est presque insensible. La figure 5.7 présente les mesures de  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de la fréquence  $f$  à  $T = 19^\circ\text{C}$  et  $23^\circ\text{C}$  pour une solution de CPCI–NaSal à 4%.

On ne constate aucune différence remarquable entre les deux expériences.  $a_c$  et  $k_c$  sont superposables à la précision des mesures près. Ce résultat s'explique facilement dans le cadre de l'équation (5.1). En effet, la rhéologie linéaire donne : à  $T = 19^\circ\text{C}$ ,  $G_0 = 31$  Pa et  $\tau = 0.74$  s, et à  $T = 23^\circ\text{C}$ ,  $G_0 = 32$  Pa et  $\tau = 0.37$  s :  $G_0$  varie de 3% lorsque  $\tau$  varie d'un facteur 2. Or, l'équation (5.1) ne dépend que de  $G_0$  (et pas de  $\tau$ ). Il n'est donc pas surprenant d'observer expérimentalement que  $\delta f$  ne dépend pas de la température  $T$  :  $\delta f_{19} \simeq \delta f_{23} \simeq 17.5 \pm 1.5$  Hz. Enfin, avec les valeurs de  $G_0$  ci-dessus l'équation (5.1) prévoit  $\delta f_{19} = 17.61$  Hz et  $\delta f_{23} = 17.89$  Hz, ce qui est en accord quantitatif avec l'expérience.

### 5.2.6 Conclusion : ondes élastiques

La figure 5.8 rassemble les valeurs de  $\delta f$  mesurées expérimentalement, à différentes concentrations, hauteurs et températures en fonction de la prédiction de l'équation (5.1) obtenue à partir des valeurs de  $G_0$  mesurées en rhéologie linéaire et de  $\rho = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>.

On constate un excellent accord entre l'équation (5.1) et les résultats expérimentaux. Ceci termine de valider notre interprétation du phénomène : les oscillations de  $a_c$  sont reliées à la présence d'ondes stationnaires élastiques dans la profondeur de la cellule. Toutefois, cette interprétation n'explique pas directement les chutes brutales du nombre d'onde

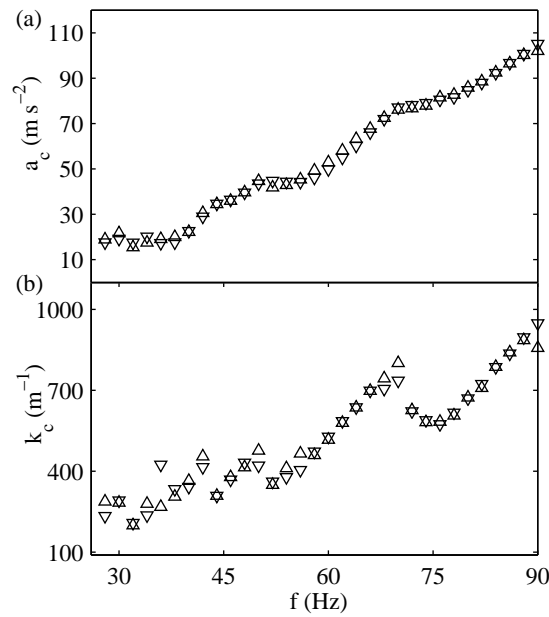


FIG. 5.7 – Accélération critique  $a_c$  et nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la fréquence d'excitation  $f$ , pour une solution de CPCl–NaSal à 4%, à  $T = 19^\circ\text{C}$  ( $\triangle$ ) et  $T = 23^\circ\text{C}$  ( $\nabla$ ).

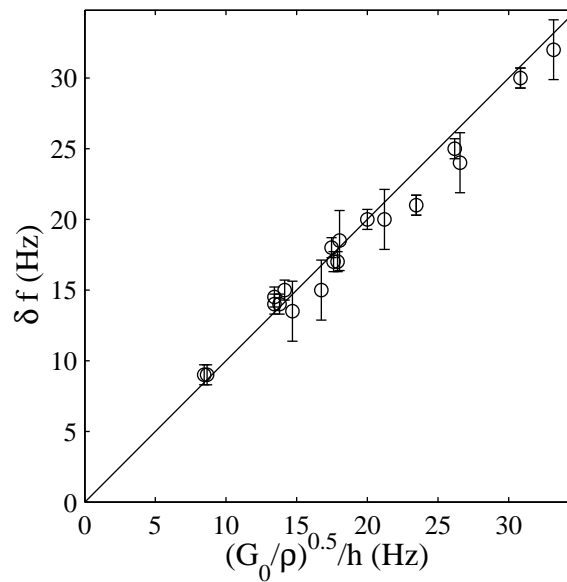


FIG. 5.8 –  $\circ$  Mesures expérimentales de  $\delta f$  (obtenue à partir de  $a_c$ ) en fonction de la valeur prévue par l'équation (5.1).  $G_0$  est donné par la rhéologie linéaire des solutions et  $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . La ligne continue représente la droite  $y = x$ .



surfacique  $k_c$ . Pour déterminer les causes de ce phénomène, on étudie dans la suite le fluide dans sa profondeur pour tenter de mettre en évidence directement les ondes de cisaillement et relier leurs propriétés aux variations de  $k_c$ .

### 5.3 Expériences de biréfringence

Dans cette partie nous présentons les résultats obtenus lors de l'étude de la biréfringence d'une solution de micelles géantes soumises à des vibrations verticales. Comme nous l'avons vu (section 4.3, page 75), les micelles s'alignent sous l'effet du cisaillement. On peut donc se demander si un tel alignement n'intervient pas aussi dans l'instabilité de Faraday sous l'effet des ondes de surface. En effet, l'amplitude du cisaillement oscillant engendrée à la surface de la couche de fluide peut être estimée simplement par :

$$\dot{\gamma} \propto \xi k_c \omega. \quad (5.3)$$

Un calcul d'ordre de grandeur avec  $\xi = 50 \mu\text{m}$ ,  $k_c = 500 \text{ m}^{-1}$  et  $\omega = 300 \text{ rad.s}^{-1}$  donne  $\dot{\gamma} = 7.5 \text{ s}^{-1}$ . Le cisaillement induit par l'oscillation de la surface est donc a priori supérieur à  $\dot{\gamma}_I \simeq 1 \text{ s}^{-1}$ , cisaillement typique d'entrée dans le plateau de contrainte (cf. section 4.3, page 76). Alors, au seuil de détection, le cisaillement généré par les ondes de surface est supérieur au cisaillement critique  $\dot{\gamma}_I$ . Les micelles sont donc susceptibles de s'aligner. Pour étudier cette possibilité, on réalise des expériences de biréfringence.

#### 5.3.1 Premières observations

Ces mesures sont réalisées dans la configuration expérimentale de mesure d'amplitude décrite en section 3.2, page 49. On ajoute simplement deux polariseurs croisés de part et d'autre de la cellule rectangulaire. Lorsque le fluide est au repos ou lorsqu'il est vibré à une accélération inférieure à l'accélération critique  $a_c$ , l'image de biréfringence est homogène et noire. Si on se place à  $a > a_c$ , la surface est déstabilisée et on voit apparaître des spots lumineux régulièrement espacés dans la couche de fluide. La figure 5.9 montre une image de biréfringence pour une solution de CPCL–NaSal à 8% vibrée à 80 Hz.

Deux éléments sont remarquables. Tout d'abord, le motif de biréfringence a, selon  $x$ , la même période que le motif de surface. Mais, là où on s'attendrait dans le cas d'un fluide newtonien biréfringent à une décroissance exponentielle de l'intensité avec la profondeur  $z$ , i.e. similaire au champ de vitesse, on constate des oscillations spatiales de la luminosité sous forme de spots lumineux. Ensuite, on remarque que la luminosité des spots oscille dans le temps à la fréquence d'excitation (à  $f$ ), c'est-à-dire avec une période très supérieure au temps caractéristique du fluide  $\tau \simeq 1 \text{ s}$ . La figure 5.10 montre l'évolution temporelle du motif de birefringence pour une solution de CPCL–NaSal à 8% vibrée à 80 Hz. On revient plus loin sur cette dernière remarque (cf. chapitre 7, page 121).

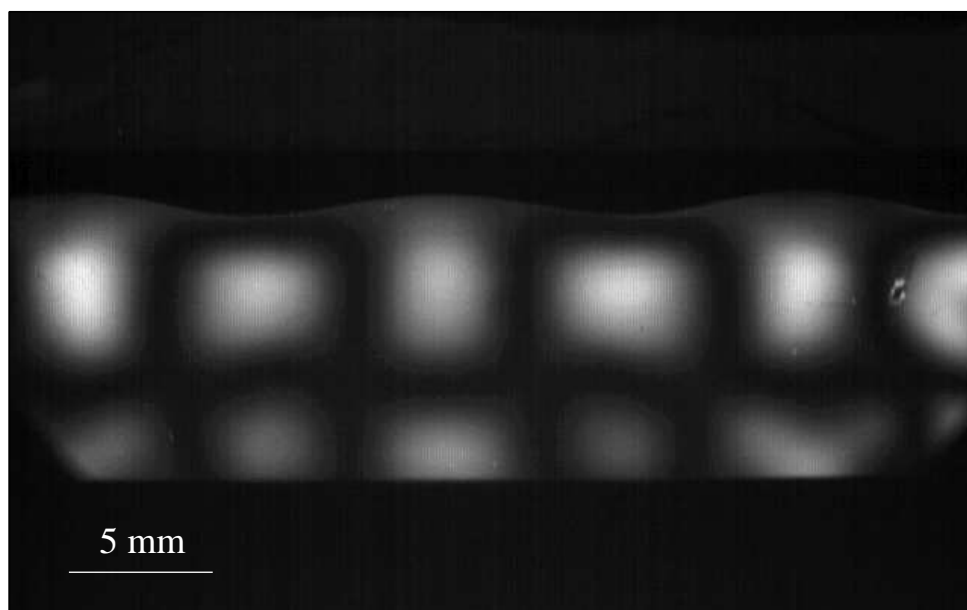


FIG. 5.9 – Image de biréfringence pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à 80 Hz.

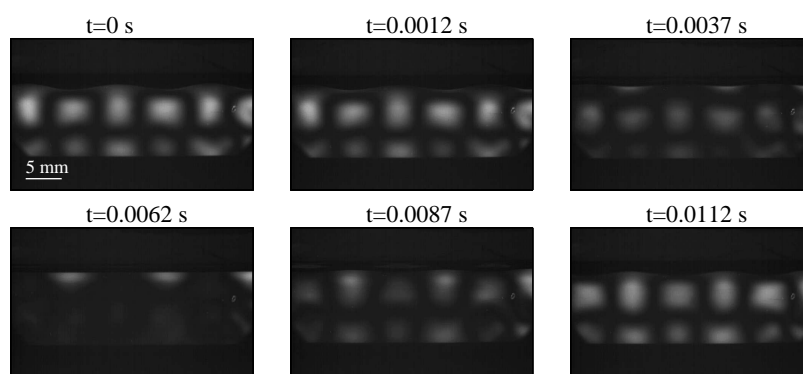


FIG. 5.10 – Évolution du motif de biréfringence sur une période ( $T = 1/f$ ) pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à 80 Hz.

### 5.3.2 Recherche de l'angle d'extinction

Les spots lumineux correspondent à un alignement local des micelles. On peut donc s'interroger sur la direction d'alignement des micelles dans ces spots. Pour cela, on tourne l'ensemble polariseur–analyseur d'un angle  $\theta$  et on enregistre un film d'une durée  $\simeq 20/f$ . On mesure alors l'évolution avec  $\theta$  de l'amplitude des variations d'intensité de la biréfringence dans la cellule. Pour interpréter ces résultats, on considère que l'alignement des micelles induit une biréfringence  $\Delta n$ , avec comme axes propres dans le plan  $x, z$ , la direction d'alignement des micelles  $x'$  et sa direction orthogonale  $z'$ . Si on note  $\chi$  l'angle formé par  $x'$  et la direction du polariseur, alors l'intensité de biréfringence  $I$  doit suivre la loi [56] :

$$I = \frac{I'}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\chi, \quad (5.4)$$

avec :

$$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda} \Delta n, \quad (5.5)$$

où  $l = 6$  mm est l'épaisseur de la cellule,  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière,  $I'$  l'intensité incidente sur le polariseur. Comme  $\Delta n$  est petit, on peut considérer que, même en lumière blanche,  $\lambda$  est constante  $\lambda \simeq 600$  nm. La luminosité détectée par la caméra doit donc être nulle pour  $\chi = 0$  [ $\pi$ ]. En tournant le couple polariseur–analyseur, on cherche alors, en chaque point de l'espace, l'angle  $\theta(x, z)$  pour lequel l'intensité  $I(x, z)$  est minimale, i.e.  $\chi(x, z, \theta(x, z)) = 0$  [ $\pi$ ].

Pour les systèmes de micelles géantes, on montre expérimentalement [55] que  $\Delta n \ll l/\lambda$ . De plus, l'intensité de biréfringence oscille dans le temps donc  $\Delta n$  dépend du temps et est nul au repos. Si on suppose que  $\theta(x, z)$  ne dépend pas de  $t$ , on peut écrire :  $\Delta n = \Delta n_0 \cos(\omega t/2 + \phi)$ . Cela conduit à l'expression suivante de l'évolution de l'intensité avec le temps en un point  $(x, z)$  de l'espace :

$$I(x, z, t) = \frac{I'}{2} \left( \frac{\pi l \Delta n_0}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\omega t}{2} + \phi \right) \sin^2 2\chi(x, z, \theta). \quad (5.6)$$

On retrouve bien ici que l'intensité oscille à la fréquence  $f$ . Pour s'affranchir de la dépendance temporelle, on calcule la déviation standard (*std*) de  $I$  avec le temps. On rappelle que :

$$I_0 = \sqrt{\langle I^2 \rangle_t - \langle I \rangle_t^2}, \quad (5.7)$$

où  $\langle \rangle_t$  est la moyenne temporelle. On trouve alors :

$$I_0(x, z) = \frac{I'}{4} \left( \frac{\pi l \Delta n_0}{\lambda} \right)^2 \sin^2 2\chi(x, z, \theta). \quad (5.8)$$

Comme on ne connaît pas les directions propres de notre couple polariseur–analyseur ( $\theta$  n'est connu qu'à une constante additive près), on étudie l'évolution de l'intensité moyenne  $\langle I_0 \rangle_{x,z}$  reçue par la caméra en fonction de l'écart à un angle initial arbitraire du couple

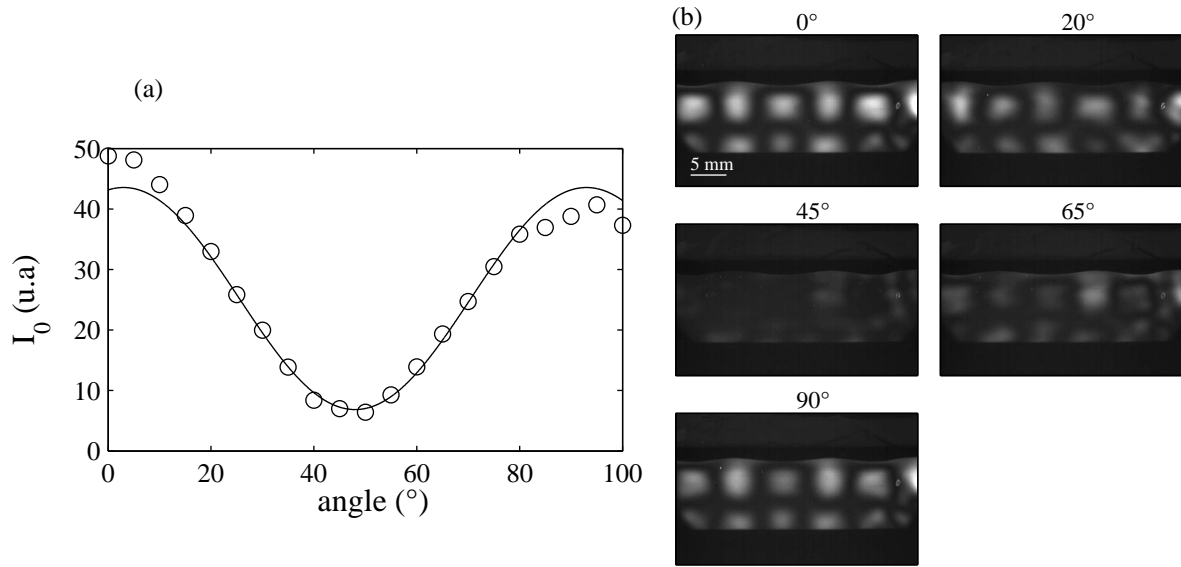


FIG. 5.11 – (a) Intensité  $\langle I_0 \rangle_{x,z}$  en fonction de  $\theta$  pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à 80Hz ( $\circ$ ). La ligne continue représente le meilleur ajustement par la formule  $-a \cos(\pi(\theta - \theta_0)/45) + b$ , avec  $\theta_0 = 48^\circ$ . (b) Images enregistrées lorsque  $\langle I \rangle_{x,z}$  est maximal pour plusieurs angles des polariseurs.

polariseur–analyseur. La figure 5.11 montre la moyenne spatiale  $\langle I_0 \rangle_{x,z}$  en fonction de  $\theta$ .

Dans la suite, on pose  $\theta_0$  l'angle correspondant au minimum de l'intensité moyenne dans la cellule. Cet angle nous sert d'angle de référence. De plus, on note  $\chi(x, z) = \chi(x, y, \theta_0)$  l'angle entre la direction d'alignement des micelles et l'angle de référence, alors  $\chi(x, z, \theta) - \theta = \chi(x, y) - \theta_0$ . En ajustant en chaque point de la cellule  $I_0(x, z)$  par l'équation (5.8), on détermine  $\chi(x, z)$  dans l'ensemble de la cellule. La figure 5.12 montre que tous les points lumineux correspondent à  $\chi = 2^\circ \pm 5^\circ$ . Comme entre deux films  $\chi$  varie de  $5^\circ$ , la précision de la mesure de l'angle d'extinction est égale à  $\pm 2.5^\circ$ . Donc les spots lumineux correspondent à une unique direction d'alignement des micelles. Mais, loin des spots lumineux, la direction d'alignement des micelles apparaît différente de  $2^\circ \pm 5^\circ$ . Toutefois, comme le bruit relatif augmente lorsque la luminosité diminue, les angles mesurés dans les zones sombres sont plus difficiles à interpréter. La précision de nos mesures ne permet donc pas de dire s'il s'agit d'un bruit expérimental ou d'un changement réel de direction dans l'espace de nos micelles.

Enfin, on étudie l'évolution de l'angle d'extinction dans le temps  $\chi(t)$ . Chaque film est ramené à une seule période d'oscillation de l'interface grâce à la transformation  $t = t [2/f]$ . Pour maximiser le signal traité et ainsi minimiser le bruit, on s'intéresse à un point lumineux. La figure 5.13 montre l'évolution de l'intensité moyennée sur 100 pixels en fonction du temps  $t$  et de l'angle  $\theta$ . La figure 5.13 présente aussi  $\chi$  en fonction du temps.

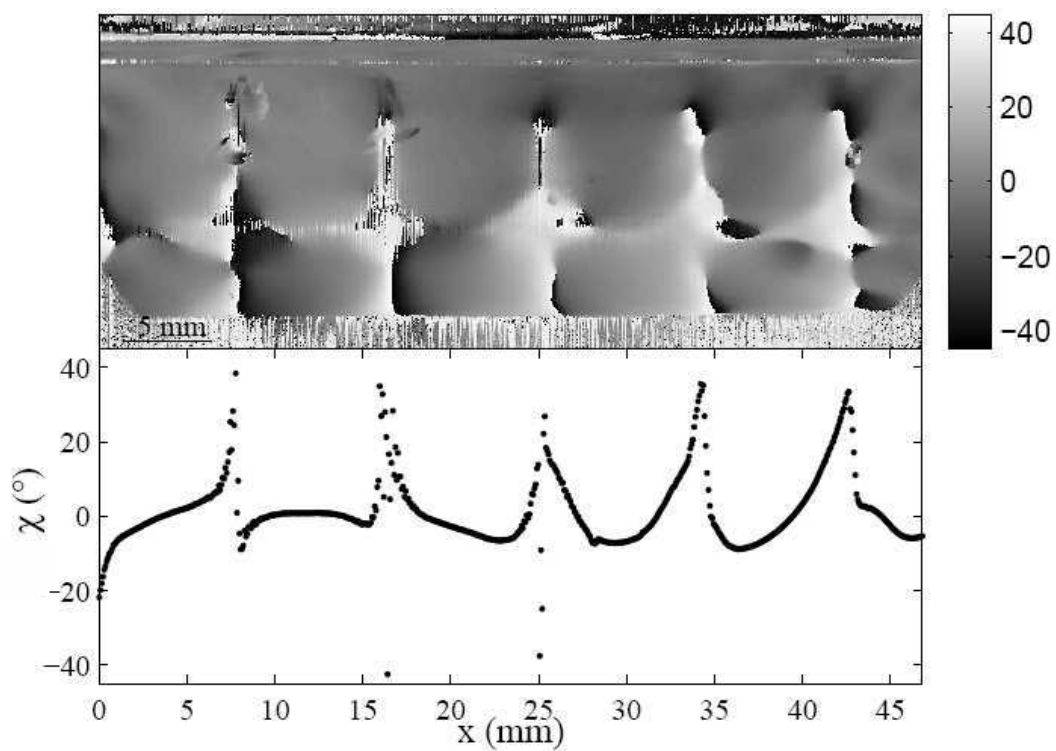


FIG. 5.12 – En haut  $\chi(x, z)$  pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à 80Hz. En bas  $\chi(x, z_0)$  en fonction de  $x$ .

On voit qu'aux cours du temps, l'angle d'extinction reste constant tant que l'intensité

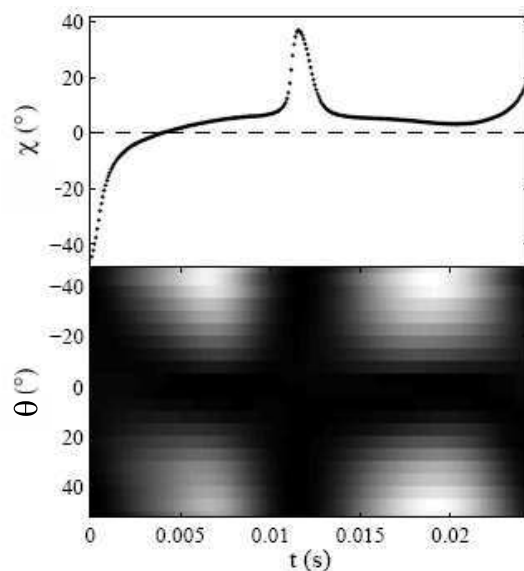


FIG. 5.13 – En haut :  $\chi$  en fonction du temps  $t$  à un maximum d'intensité. En bas : intensité en fonction du temps  $t$  et de  $\theta$ , pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à 80 Hz.

lumineuse est suffisante. On observe une divergence de  $\chi$  lorsque l'intensité est faible. Comme pour l'évolution spatiale de  $\chi$ , il est difficile de trancher entre un bruit dû à la faible luminosité et un changement de l'orientation des micelles dans le temps.

On montrera plus loin (section 6.3.2, page 114) que, dans les spots lumineux, les micelles s'alignent principalement selon  $x$  et  $z$ .

### 5.3.3 Onde stationnaire élastique

Nous nous demandons ici comment évolue le nombre de spots lumineux dans la direction verticale  $z$  lorsque la fréquence varie. La figure 5.14(a) montre l'évolution du nombre de spots selon  $z$  en fonction de la fréquence d'excitation  $f$  pour une solution de CPCI–NaSal à 5%. Sur la figure 5.14(b), nous avons reporté les mesures du nombre d'onde  $k_x$  obtenue simultanément par analyse des images de la surface.

À chaque chute de  $k_c$ , le nombre de spots lumineux augmente d'une unité. Si on associe le nombre vertical de spots lumineux au nombre de longueurs d'onde de cisaillement présentes dans la cellule selon  $z$ , on peut relier les oscillations de  $k_c$  à l'augmentation de ce nombre. Pour confirmer ce lien, on réalise dans la suite des expériences de vélocimétrie.

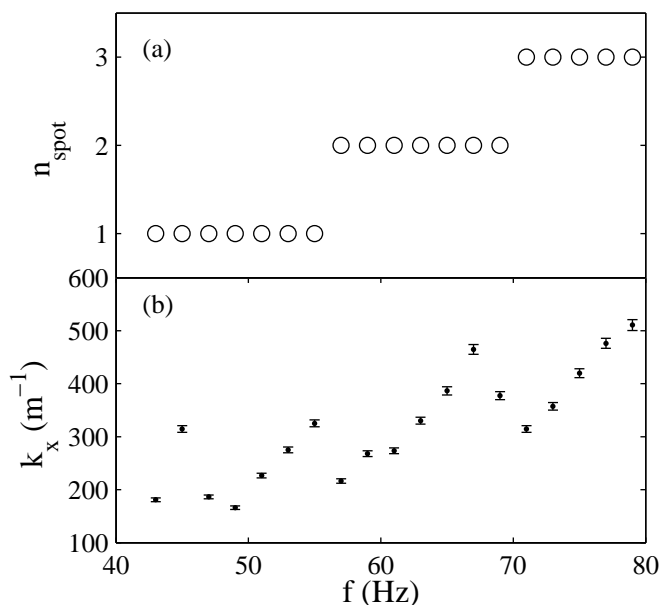


FIG. 5.14 – (a) Nombre de spots lumineux selon  $z$  en fonction de la fréquence d'excitation  $f$  pour une solution de CPCI–NaSal à 5%. (b)  $k_x$  en fonction de  $f$ .

## 5.4 Expérience de vélocimétrie par imagerie de particules (PIV)

Comme pour les expériences de vélocimétrie dans un fluide simple (section 3.3, page 59), nos solutions sontensemencées avec des billes de verres creuses. La viscosité importante des solutions de micelles géantes nous assure qu'aucune sédimentation des billes de verre n'intervient sur un temps de l'ordre de la semaine. L'évolution de la vitesse avec la profondeur pour des solutions de micelles géantes est très différente de celle observée dans des fluides simples. Ici, la vitesse  $u$  selon la direction  $x$  ne décroît pas de manière monotone avec la profondeur  $z$ . En effet, la destabilisation de l'interface s'accompagne de rouleaux dans le volume du fluide. La périodicité des rouleaux selon  $x$  est la même que celle de la surface i.e. de longueur d'onde  $2\pi/k_x$ . De plus, la vitesse oscille selon  $z$ . Les deux périodes spatiales, selon  $x$  et selon  $z$ , du champ de vitesse dépendent de la fréquence d'excitation  $f$ .

La figure 5.15 montre le champ de vitesse mesuré pour une solution de CPCI–NaSal à 4% vibrée à  $f = 75$  Hz. La présence de trois maxima de  $u$  est clairement visible. À partir du champ de vitesse  $v(x, z, t)$ , on remonte à la phase  $\phi$  et à l'amplitude  $u$  de la vitesse selon  $x$  par la procédure expliquée en section 3.3.2, page 61. La figure 5.16 montre  $u$  et  $\phi$  dans le plan  $(x, z)$ , pour une solution de CPCI–NaSal à 4% vibrée à  $f = 75$  Hz. Contrairement au cas du fluide newtonien où  $u$  ne présente qu'un maximum proche de la surface (figure 3.31, page 67),  $u$  présente trois maxima régulièrement espacés. Entre chaque maximum,  $\phi$  varie de  $\pi$ . Cela correspond à la présence de deux rouleaux contrarotatifs placés l'un au dessus

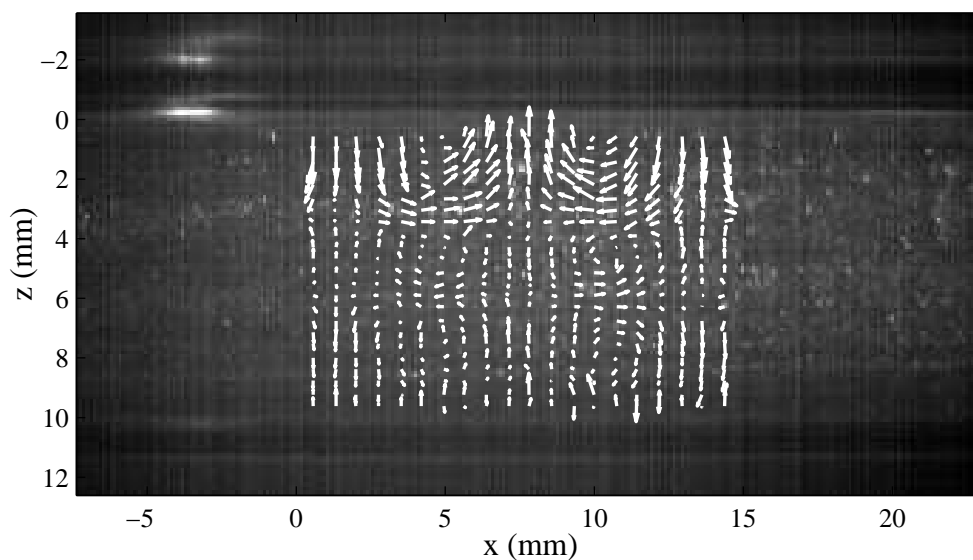


FIG. 5.15 – Image pour une solution de CPCI–NaSal à 4% vibrée à  $f = 75$  Hz. Les flèches indiquent le champ de vitesse mesuré par PIV au même instant.

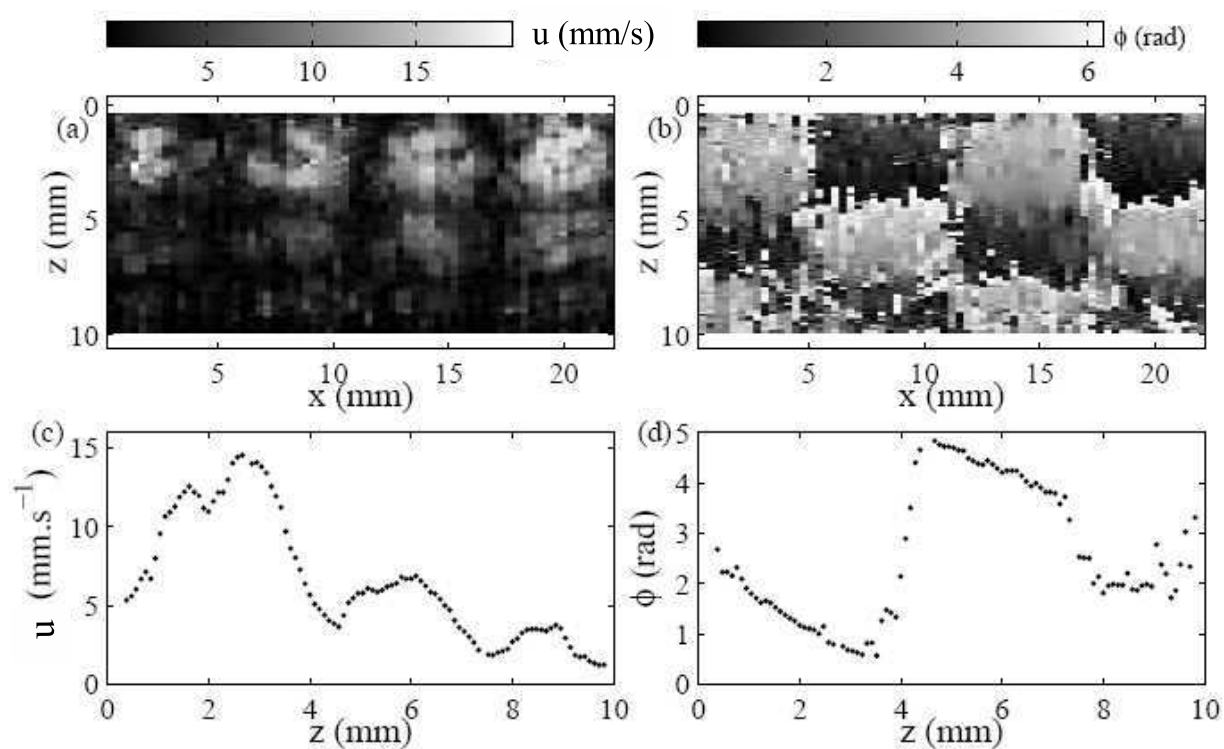


FIG. 5.16 – (a)  $u(x, z)$ , (b)  $\phi(x, z)$ , (c)  $u$  en fonction de  $z$  pour  $x = 20$  mm, (d)  $\phi$  en fonction de  $z$  pour  $x = 20$  mm pour une solution de CPCI–NaSal à 4% vibrée à 75 Hz.



de l'autre dans la direction  $z$ .

## 5.5 Bilan

Aussi bien les expériences de biréfringence que les expériences de vélocimétrie indiquent la présence de rouleaux contrarotatifs oscillant dans le temps à la fréquence  $f/2$ . Ces observations confirment l'existence d'ondes stationnaires élastiques à l'intérieur de la cellule. C'est pourquoi dans la suite, nous appelons ces rouleaux contrarotatifs des "rouleaux élastiques". De plus, la présence de ces ondes induit une discrétisation du champ de vitesse selon l'axe  $z$ . On comprend alors que le nombre d'onde qui intervient dans le champ de vitesse global inclut non seulement les composantes horizontales  $k_x$  et  $k_y$ , mais aussi une composante verticale  $k_z$ . On montre dans la suite (§ 6.1.3, page 103) que la discrétisation de  $k_z$  selon la hauteur  $h$  génère une chute brutale de  $k_c$  à chaque fois qu'un rouleau supplémentaire apparaît. On doit donc prendre en compte le caractère tridimensionnel de l'écoulement induit par l'instabilité de Faraday dans des solutions de micelles géantes.

Enfin, au chapitre suivant la comparaison quantitative de nos résultats expérimentaux au calcul de stabilité linéaire permet d'aller plus loin dans la compréhension de ce phénomène.

# Chapitre 6

## Confrontation au calcul de stabilité linéaire

Au chapitre précédent, nous avons compris que la présence d'oscillations de  $a_c$  et  $k_c$  avec  $f$  et du champ de vitesse avec  $z$  est directement liée à la viscoélasticité de nos solutions de micelles géantes. Or, comme nous l'avons évoqué section 2.2.1, page 31, le calcul de stabilité linéaire peut prendre en compte facilement cette viscoélasticité. Dans ce chapitre, nous comparons les résultats numériques et expérimentaux et nous interprétons leurs différences et similitudes. En particulier, nous essayons d'aller plus loin dans notre interprétation physique que l'équation (5.1).

### 6.1 Calcul de stabilité linéaire pour un fluide de Maxwell

On commence par réaliser des calculs de stabilité linéaire pour un fluide de Maxwell. On rappelle que, dans ce cas, la viscosité complexe est donnée par :

$$\eta_M = \frac{G_0\tau}{1 + i\omega\tau} + \eta_S. \quad (6.1)$$

Dans la suite, la viscosité du solvant sera prise égale à celle de l'eau  $\eta_S = 1$  mPa.s sauf indication contraire. La méthode numérique adaptée des travaux de Kumar [51] a été présentée en section 1.4 page 14.

#### 6.1.1 Accélération et nombre d'onde critiques

Expérimentalement, les oscillations de  $a_c$  et les chutes de  $k_c$  sont le plus visibles sur notre solution de CPCI–NaSal à 3%. Dans ce cas, la rhéologie linéaire nous donne comme meilleur ajustement par un fluide de Maxwell  $G_0 = 18$  Pa et  $\tau = 0.67$  s. Pour rester proche de ces valeurs, on choisit comme valeurs caractéristiques pour nos calculs numériques :  $G_0 = 20$  Pa,  $\tau = 0.5$  s,  $\eta_S = 0.001$  Pa.s,  $\rho = 1000$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\sigma = 0.03$  N.m<sup>-1</sup>. Avec

ces valeurs, le résultat du calcul numérique, présenté sur la figure 6.1, montre que  $a_c$  oscille avec la fréquence et que  $k_c$  présente des chutes brutales lorsque  $a_c$  est maximal. Le calcul proposé par Kumar reproduit donc qualitativement les phénomènes observés à la section 5.2 (page 80). La figure 6.1 compare de plus le résultat du calcul de stabilité linéaire pour  $h = 10$  mm au calcul en profondeur infinie  $h = \infty$ . Le calcul en profondeur infinie ne

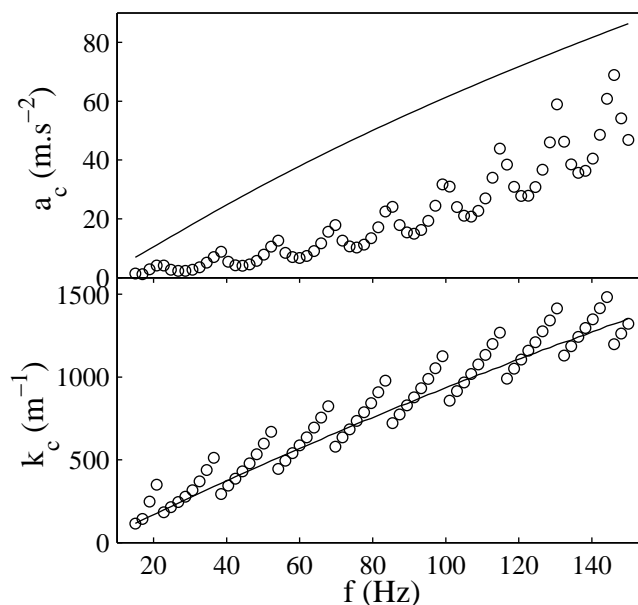


FIG. 6.1 –  $a_c$  et  $k_c$  calculés numériquement pour un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$  s pour une profondeur  $h = 10$  mm ( $\circ$ ) et pour une profondeur infinie (lignes continues).

présente pas d'oscillations. Les oscillations sont donc un effet de profondeur finie comme nous l'avons déjà mis en évidence expérimentalement en variant  $h$ .

Le calcul numérique est alors répété pour plusieurs profondeurs  $h$  et plusieurs fréquences  $f$ . La figure 6.2 montre  $a_c$  en fonction de  $f$  et de  $h$ . On voit que les maxima et les minima de l'accélération suivent bien une loi  $fh = \text{constante}$  comme prévu par l'équation (5.2), page 84.

Pour mieux comprendre les oscillations de  $a_c$ , nous nous intéressons tout d'abord aux "langues" de résonance. Ces données sont facilement accessibles via le calcul numérique puisqu'elles en constituent une étape, à partir de laquelle on déduit  $a_c$  et  $k_c$ . On rappelle que les langues de résonance indiquent l'accélération  $a$  nécessaire pour, à une fréquence d'excitation  $f$  donnée, exciter le mode de surface de nombre d'onde  $k$ . On s'intéresse ici à l'allure de ces langues de résonance juste avant et juste après une chute de  $k_c$ . La figure 6.3 présente l'évolution des langues de résonance pour des fréquences proches d'une chute de  $k_c$  pour  $h = 10$  mm. On constate que les langues présentent plusieurs minima locaux. En revanche, le calcul en profondeur infinie ne montre qu'un unique minimum par langue.

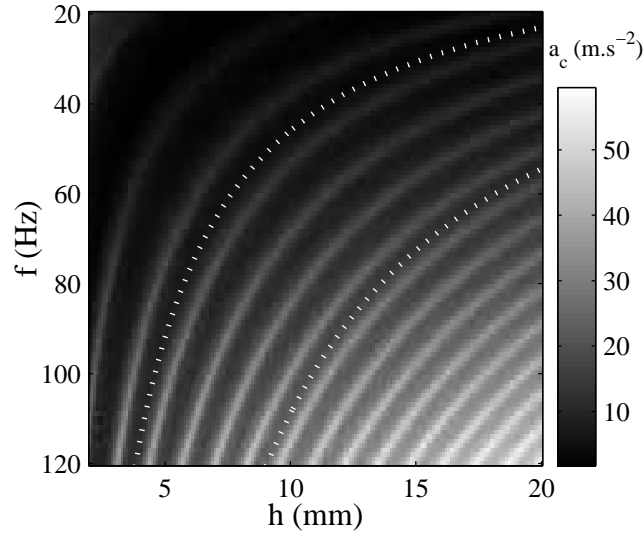


FIG. 6.2 –  $a_c$  en fonction de  $f$  et de  $h$  pour un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$ . Les lignes en pointillés sont données par les formules  $f = 3.25/h\sqrt{G_0/\rho}$  et  $f = 7.7/h\sqrt{G_0/\rho}$ .

Les minima multiples observés pour  $h = 10$  mm sont donc un effet de profondeur finie. On peut les interpréter comme des effets de résonance lié à la présence d'ondes élastiques dans la hauteur du fluide. Si l'on suppose que chaque langue correspond à un nombre entier  $n$  d'ondes de cisaillement dans la couche de fluide (cf. section 6.1.3, page 101), on constate que l'abscisse  $k$  des minima locaux diminue lorsque  $n$  augmente. Les chutes de  $k_c$  correspondent alors au passage de la langue  $n$  à la langue  $n + 1$  : on saute brutalement du minimum correspondant à  $n$  ondes de cisaillement au minimum correspondant à  $n + 1$  ondes de cisaillement. De plus, la figure 6.3 montre le lien entre chute de  $k_c$  et maximum de  $a_c$ . En effet, avant le saut, l'accélération minimale de la langue de résonance sous-harmonique correspond au minimum local pour  $n$  ondes élastiques dans la cellule. Donc  $a_c = a_n$ , et  $a_n$  augmente avec  $f$ . Au contraire, le minimum local de  $a$  correspondant à  $n + 1$  ondes élastiques  $a_{n+1}$  diminue lorsque  $f$  augmente. Lorsque  $a_n = a_{n+1}$ , l'accélération critique passe de  $a_n$  à  $a_{n+1}$ , on passe de la langue  $n$  à la langue  $n + 1$  et une onde de cisaillement supplémentaire est rajoutée dans la hauteur du fluide. Ceci se traduit par une chute brutale de  $k_c$ . De plus, sur une certaine gamme de fréquences après la chute,  $a_{n+1}$  continue de diminuer lorsque  $f$  augmente. Par conséquent, après une augmentation de  $n$ ,  $a_c$  diminue. On a donc un maximum local de  $a_c$  lors d'une chute de  $k_c$ .

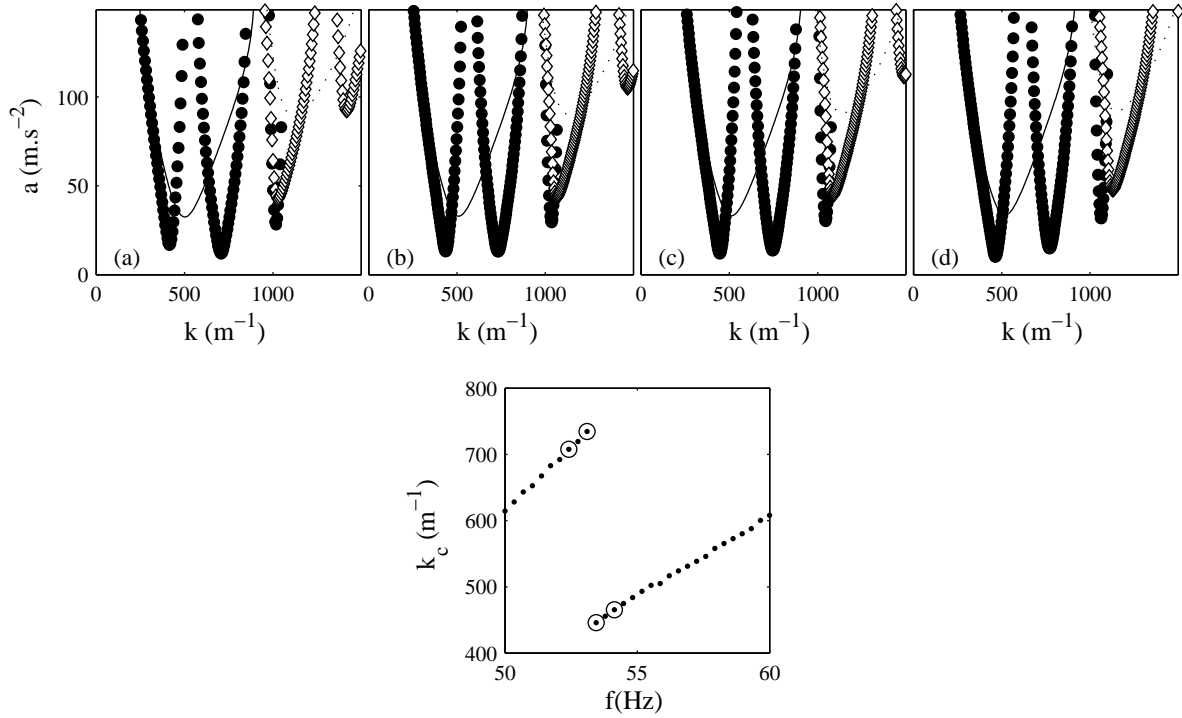


FIG. 6.3 – En haut : langues de résonances (accélération  $a$  en fonction du nombre d'onde  $k$ ) pour un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$  s pour (a)  $f = 52.4$  Hz, (b)  $f = 53.1$  Hz, (c)  $f = 53.4$  Hz et (d)  $f = 54.1$  Hz respectivement sous-harmoniques ( $\bullet$ ) et harmoniques ( $\diamond$ ) pour une profondeur  $h = 10$  mm. Les lignes continues et pointillés représentent respectivement les langues de résonance sous-harmoniques et harmoniques pour une profondeur infinie. En bas : nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de la fréquence  $f$ . Les fréquences correspondant à (a) – (d) sont entourées.

### 6.1.2 Champ de vitesse

On a déjà vu (section 2.2, page 31) que, près du seuil et dans la cellule parallélépipédique, la composante sous-harmonique (à  $f/2$ ) de la vitesse selon  $z$  peut s'écrire :

$$w_0(x, y, z, t) + w_{-1}(x, y, z, t) = 2\Re \left( e^{i\omega t/2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) (a_1 e^{k_c z} + a_2 e^{-k_c z} + a_3 e^{qz} + a_4 e^{-qz}) \right), \quad (6.2)$$

où  $k_x$  et  $k_y$  sont respectivement le nombre d'onde selon  $x$  et selon  $y$ ,  $k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  et :

$$q^2 = k_c^2 + \frac{i\rho\omega/2}{\eta(\omega/2)}. \quad (6.3)$$

Dans la suite, nous travaillons en notation complexe, l'équation (6.2) s'écrit alors :

$$w(x, y, z, t) = e^{i\omega t/2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) (a_1 e^{k_c z} + a_2 e^{-k_c z} + a_3 e^{qz} + a_4 e^{-qz}), \quad (6.4)$$

La figure 6.4(a) montre le champ de vitesse ainsi que l'amplitude  $u$  et la phase  $\phi$  calculées pour notre fluide modèle à  $f = 47$  Hz dans une cellule de dimensions  $L = \infty$ ,  $l = 35.7$  mm et  $h = 10$  mm. Le calcul numérique prévoit l'existence des *rouleaux élastiques* qui génèrent

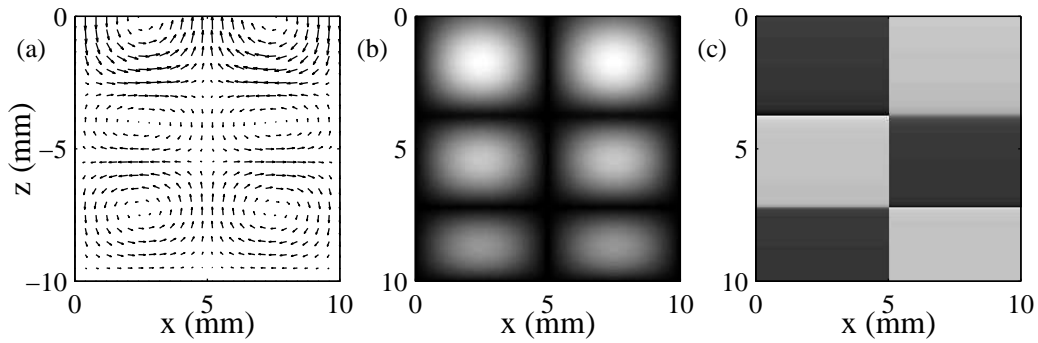


FIG. 6.4 – Champ de vitesse pour un fluide de Maxwell de paramètres  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$  s, dans une cellule de dimensions  $L = \infty$ ,  $l = 35.7$  mm et  $h = 10$  mm. Le fluide est vibré à  $f = 47$  Hz. (a) Champ de vitesse à  $t = 0$ , (b)  $u(x, z)$ , (c)  $\phi(x, z)$ .

les oscillations de l'amplitude de la vitesse avec la profondeur  $z$ . La forme de ces rouleaux est qualitativement similaire à celle des rouleaux élastiques mis en évidence expérimentalement.  $\phi$  se présente sous la forme d'un échiquier avec un déphasage de  $\pi$  entre chaque case, et  $u$  présente des maxima locaux aux centres de ces mêmes cases.

Enfin, la figure 6.5 montre l'évolution du champ de vitesse au cours du temps sur un quart de période, du minimum au maximum de  $w$ , pour notre fluide modèle à  $f = 47$  Hz.

### 6.1.3 Retour sur l'interprétation physique

Grâce à l'équation (6.4), on peut remonter à l'ensemble des grandeurs caractéristiques des oscillations observées sur  $a_c$  et  $k_c$  et sur le champ de vitesse. Nous montrons dans ce

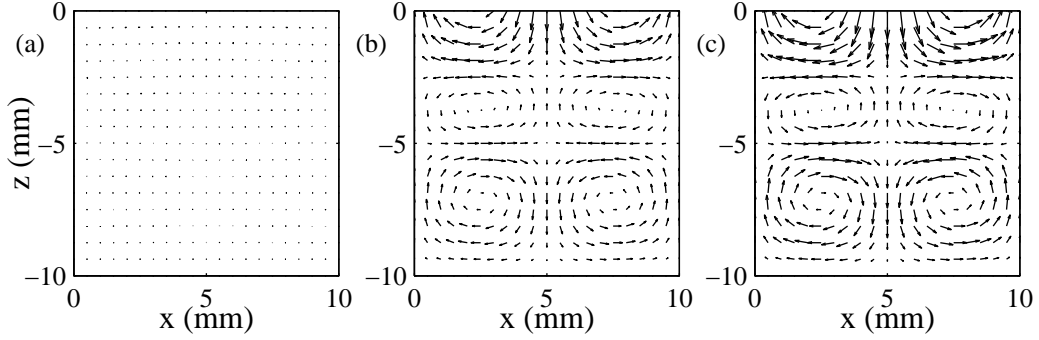


FIG. 6.5 – Champ de vitesse pour un fluide de Maxwell de paramètres  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$  s dans une cellule de dimensions  $L = \infty$ ,  $l = 35.7$  mm et  $h = 10$  mm. Le fluide est vibré à  $f = 47$  Hz. Champ de vitesse à (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 1/2f$  et (c)  $t = 1/f$ .

qui suit que le calcul numérique permet de confirmer l'interprétation physique proposée en section 5.2 (page 80).

### Longueurs de pénétration

L'équation (6.4) montre que le champ de vitesse est composé de quatre termes : une onde émise par la surface correspondant au terme en  $e^{-qz}$ , une atténuation de la déformation de la surface en  $e^{-k_c z}$ , ainsi que les réflexions correspondantes qui donnent les termes en  $e^{k_c z}$  et  $e^{qz}$ . La condition de vitesse nulle au fond de la cellule permet d'approximer  $a_2$  et  $a_4$  par<sup>1</sup> :  $a_2 = e^{-2k_c h} a_1$  et  $a_4 = e^{-2qh} a_3$ . Sous l'hypothèse, vérifiée plus loin,  $\Re(q) > 0$ , les termes en  $e^{k_c z}$  et  $e^{qz}$  sont respectivement petits devant les termes en  $e^{-k_c z}$  et  $e^{-qz}$ . On déduit de l'équation (6.4) deux longueurs de pénétration  $1/k_c$  et  $1/\Re(q)$  : la vitesse au point d'altitude  $z$  devient petite devant la vitesse en  $z = 0$ , lorsque la distance parcourue est supérieure à la plus grande des deux longueurs de pénétrations.

Dans le cas d'un fluide newtonien de viscosité  $\eta$ , on peut aisément calculer  $\Re(q)$  et  $\Im(q)$  selon :

$$\Re(q) = k_c \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\eta^2 k_c^4}}}{2}}, \quad (6.5)$$

$$\Im(q) = k_c \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\eta^2 k_c^4}} - 1}{2}}. \quad (6.6)$$

On voit donc que pour un fluide newtonien, on a toujours  $1/\Re(q) < 1/k_c$  : la longueur de pénétration caractéristique est  $1/k_c$  et la vitesse diminue avec la profondeur comme  $e^{-k_c z}$ . C'est le cas du mélange eau-glycérol étudié au chapitre 3. Pour fixer les idées, prenons le

<sup>1</sup>Les expressions complètes des coefficients  $a_i$  sont données par l'équation (2.25), page 32

cas d'un fluide newtonien de viscosité  $\eta = 0.05$  Pa.s et de densité  $\rho = 1$  g.cm<sup>-3</sup> vibré à  $f = 50$  Hz. En posant  $k_c = 500$  m<sup>-1</sup> (i.e.  $1/k_c = 2$  mm), on trouve  $1/\Re(q) \simeq 0.77$  mm. La longueur de pénétration  $1/\Re(q)$  est 13 fois plus petite que la hauteur de notre cellule  $h = 10$  mm et 2.6 fois plus petite que  $1/k_c$ . De plus, on a aussi  $1/k_c \ll h$ . On est donc proche des conditions de profondeur infinie. Ainsi, pour un fluide newtonien, la longueur de pénétration  $1/\Re(q)$  est toujours plus petite que  $1/k_c$  et les termes  $e^{\pm qz}$  sont négligeables dans la détermination du champ de vitesse selon l'équation (6.4).

Dans le cas de fluides viscoélastiques, la viscosité intervient dans les termes en  $e^{\pm qz}$  et les effets viscoélastiques sont contenus dans  $q$ . Dans le cas de notre fluide de Maxwell ( $G_0 = 20$  Pa,  $\tau = 0.5$  s,  $\eta_S = 0.001$  Pa.s,  $\rho = 1000$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\sigma = 0.03$  N.m<sup>-1</sup>) et dans les mêmes conditions de fréquence et de nombre d'onde ( $f = 50$  Hz et  $k_c = 500$  m<sup>-1</sup>), on trouve  $1/\Re(q) \simeq 78$  mm. La longueur de pénétration  $1/\Re(q)$  est près de 8 fois supérieure à la taille de notre cellule  $h = 10$  mm, et 39 fois plus grande que  $1/k_c$ . L'onde correspondant au comportement viscoélastique du fluide, décrite par les termes en  $e^{\pm qz}$ , est donc relativement peu atténuée après un aller-retour à travers la cellule ( $e^{-20/78} = 0.77382$ ), mais la composante de l'onde correspondant au comportement "classique", en  $e^{\pm k_c z}$ , est elle quasiment nulle ( $e^{-20/2} = 0.00005$ ). Ainsi, contrairement au fluide newtonien où les effets de profondeur finie disparaissent dès que  $k_c h > 1$ , dans le cas de fluides fortement viscoélastiques, les effets de profondeur finie peuvent être importants même pour  $k_c h$  grand devant 1.

Comme on vient de le voir, les effets de profondeur finie sont reliés aux termes  $e^{\pm qz}$ . Dans la suite, on note  $q = ik_z + 1/l_z$ .  $l_z$  est l'inverse de la partie réelle de  $q$  et représente la longueur de pénétration de la composante viscoélastique ( $e^{\pm qz}$ ) du champ de vitesse. La composante imaginaire de  $q$  est l'équivalent d'un nombre d'onde selon  $z$ . Pour s'en rendre compte, il suffit d'écrire la partie réelle de  $e^{-qz}$  :  $\Re(e^{-qz}) = e^{-z/l_z} \cos(k_z z)$ .  $2\pi/k_z$  est donc bien la période des oscillations spatiales de la vitesse, ce qui confirme que les "rouleaux élastiques" sont des effets de profondeur finie dus à la forte viscoélasticité de nos solutions.

### Chutes de $k_c$

Avec  $q = ik_z + 1/l_z$ , on peut réécrire l'équation (6.3) :

$$-k_z^2 + l_z^{-2} + 2i \frac{k_z}{l_z} = k_c^2 + \frac{i\rho\omega/2}{\eta(\omega/2)}, \quad (6.7)$$

soit en prenant la partie réelle de l'égalité précédente :

$$k_c^2 + k_z^2 = l_z^{-2} - \Re\left(\frac{i\rho\omega/2}{\eta(\omega/2)}\right). \quad (6.8)$$

On a vu ci-dessus que  $1/l_z \ll k_c$ . L'équation (6.8) se simplifie donc selon :

$$k_c^2 + k_z^2 = -\Re\left(\frac{i\rho\omega/2}{\eta(\omega/2)}\right). \quad (6.9)$$



On trouve ainsi une relation entre  $k_c$  et  $k_z$ .

Nous allons maintenant montrer que  $k_z$  est discrétisé. Pour cela, nous pourrions chercher des conditions aux limites ( $z = 0, -h$ ) imposant des valeurs discrètes pour  $k_z$ . Une des conditions aux limites sur la vitesse verticale impose  $w = 0$  au fond de la cellule (en  $z = -h$ ). Cependant, aucune des conditions aux limites utilisées dans le calcul du champ de vitesse (section 2.2 page 32) n'impose de contrainte sur  $w$  en  $z = 0$ . À défaut d'une condition aux limites, on sait que la résolution du calcul de stabilité linéaire impose de trouver le minimum de l'accélération  $a$ . En effet, le nombre d'onde  $k_c$  sélectionné minimise  $a(k)$ . Pour avoir  $a(k)$  à l'ordre 0, il faudrait résoudre algébriquement l'équation (1.40) avec  $n = 0$ , calculer la dérivée de  $a$  en fonction de  $k$ , trouver les valeurs de  $k$  annulant la dérivée et utiliser la relation (6.8) pour finalement trouver  $k_z$ . On se contente ici de calculer  $k_c$  numériquement et d'en déduire  $k_z$  à l'aide de la relation (6.8). La figure 6.6 montre  $k_z$  et  $k_c$  en fonction de  $f$  ainsi que  $k_z h [\pi]$  calculé numériquement pour un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$  s. On constate que les chutes de  $k_c$  sont liées à des augmentations de

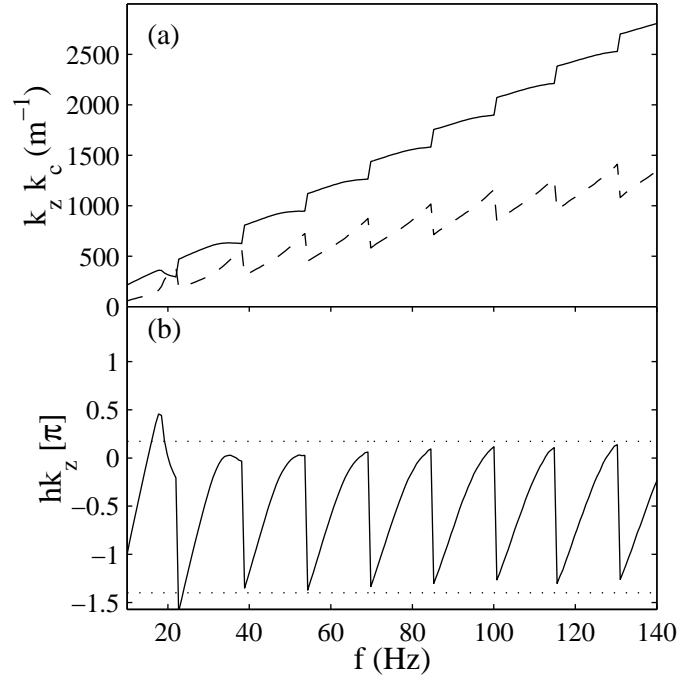


FIG. 6.6 – (a)  $k_z$  (ligne continue) et  $k_c$  (ligne pointillée) en fonction de  $f$  pour un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$  s. (b)  $k_z h [\pi]$  en fonction de  $f$  pour le même fluide.

$k_z$  de  $\pi/2h$ .  $k_z$  n'est donc pas discrétisé à proprement parler mais  $k_z h [\pi]$  possède une bande interdite de largeur  $\pi/2$  que  $k_z$  ne peut traverser qu'en sautant de  $\pi/2h$ . La relation (6.8) implique alors que l'amplitude d'une chute de  $k_c$  vaut :

$$\delta k_c = k_c - \sqrt{k_c^2 - \frac{\pi k_z}{h} - \frac{\pi^2}{4h^2}}, \quad (6.10)$$

où  $k_c$  et  $k_z$  correspondent aux nombres d'onde juste avant la chute. De plus, entre deux chutes de  $k_c$ ,  $k_z$  augmente continûment de  $\pi/2h$ . Au total sur  $\delta f$ ,  $k_z$  augmente de  $\pi/h$ .

La figure 6.7 montre l'amplitude de la vitesse selon  $z$  au seuil de détection ( $\xi_0 = \pi/180k_c$ , voir § 3.1.1, page 44) en fonction de la profondeur  $z$  juste avant et juste après une chute de  $k_c$  pour un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$  s. La courbe correspondant à  $f = 52.1$  Hz présente trois maxima locaux, alors que celle correspondant à  $f = 54.1$  Hz en présente quatre si on compte celui en  $z = 0$ . On en déduit que la chute de  $k_c$  correspond à l'apparition d'un maximum local supplémentaire pour  $w$ , c'est-à-dire à l'introduction d'un nouveau rouleau élastique selon la direction verticale.

### Calcul de $\delta f$

Pour mieux comprendre le comportement du fluide dans la profondeur de la cellule, on fait un développement limité au premier ordre en  $1/k_z$  de  $q$  avec les approximations suivantes, basées sur les valeurs typiques de fréquence et de viscosité mises en jeu dans les expériences :

$$\frac{\rho\omega}{2\eta(\omega/2)} \gg k_c^2, \quad (6.11)$$

$$\omega\tau/2 \gg 1, \quad (6.12)$$

$$\frac{G_0\tau}{1+i\omega\tau} \gg \eta_S. \quad (6.13)$$

Les équations (6.4) et (6.3) conduisent alors à :

$$q = i\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\rho}{G_0}} - i\frac{k_c^2}{\omega}\sqrt{\frac{G_0}{\rho}} + \frac{\omega^2\eta_S}{8}\sqrt{\frac{\rho}{G_0^3}} + \frac{1}{2\tau}\sqrt{\frac{\rho}{G_0}}, \quad (6.14)$$

soit :

$$k_z = \frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\rho}{G_0}} - \frac{k_c^2}{\omega}\sqrt{\frac{G_0}{\rho}}, \quad (6.15)$$

$$l_z = 2\tau\sqrt{\frac{G_0}{\rho}}\frac{1}{\frac{\omega^2\tau\eta_S}{4G_0} + 1}. \quad (6.16)$$

Le terme dominant est  $i\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\rho}{G_0}}$ . La longueur de pénétration  $l_z \simeq 80$  mm est donc grande devant la longueur d'onde verticale  $2\pi/k_z \simeq 6$  mm. On détermine ainsi, à l'ordre zéro, la périodicité spatiale  $k_z$  à  $\omega$  des oscillations du champ de vitesse avec la profondeur  $z$  :

$$k_z(\omega) = \frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\rho}{G_0}}. \quad (6.17)$$

Comme on l'a vu précédemment, les chutes de  $k_c$  sont liées à l'apparition d'un rouleau supplémentaire dans la cellule, ce qui correspond à l'apparition d'une demi longueur d'onde

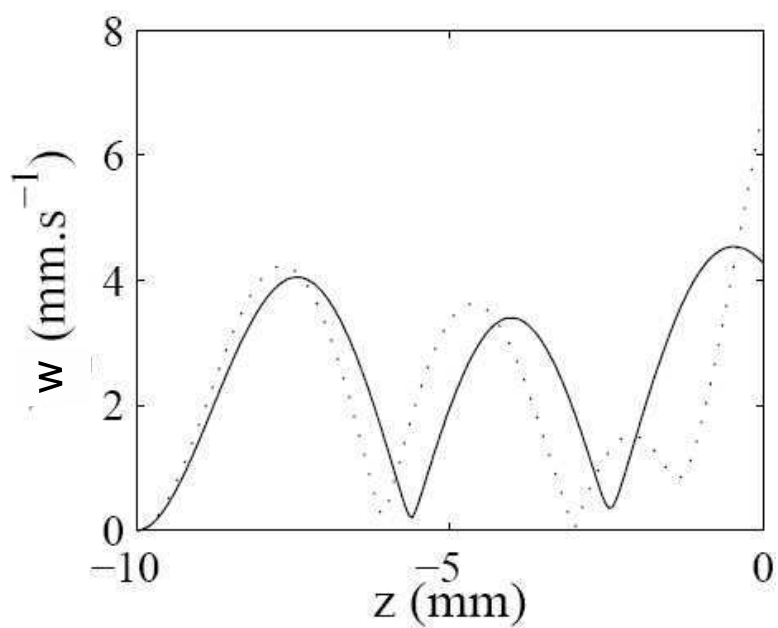


FIG. 6.7 – Ligne continue :  $w$  en fonction de  $z$  à  $f = 52.1$  Hz soit juste avant une chute de  $k_c$ . Ligne pointillée :  $w$  en fonction de  $z$  à  $f = 54.1$  Hz soit juste après une chute de  $k_c$ , pour un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 20$  Pa et  $\tau = 0.5$  s.

supplémentaire et à l'augmentation de  $k_z$  de  $\delta k_z = \pi/h$ . D'après l'équation (6.17), cette variation  $\delta k_z$  correspond à une variation  $\delta\omega$  de la fréquence  $\omega$  :

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{h} \sqrt{\frac{G_0}{\rho}}. \quad (6.18)$$

On retrouve ici analytiquement l'équation (5.1). Les oscillations de  $a_c$  et les chutes de  $k_c$  ont donc bien la même période  $\delta f = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{G_0}{\rho}}$ . Elles sont reliées à la présence d'ondes de cisaillement dans la cellule. Le calcul de stabilité linéaire est donc cohérent avec notre interprétation physique du phénomène. De plus, ce calcul, et en particulier l'équation (6.3), permet de déterminer les ordres supérieurs du développement limité.

### Limites du D.L.

Le terme  $\frac{k_c^2}{\omega} \sqrt{\frac{G_0}{\rho}}$  correspond à la modulation du nombre d'onde de profondeur  $k_z$  par le nombre d'onde de la surface  $k_c$ . C'est ce terme qui induit les minima locaux dans les langues de résonance (cf. section 6.1.1 page 97) car il couple  $k_z$  et  $k_c$ . Plus précisément les nombres d'onde  $k$  des minima sont tels que :

$$k^2 = k_c^2 + \frac{n\pi}{h}. \quad (6.19)$$

Lorsque la viscosité (i.e.  $G_0$  via  $\eta_0 = G_0\tau$ ) devient importante, ce terme est à prendre en considération dans le calcul de  $\delta f$ .

Les termes  $\frac{\omega^2 \eta_s}{8} \sqrt{\frac{\rho}{G_0^3}}$  et  $\frac{1}{2\tau} \sqrt{\frac{\rho}{G_0}}$  dans l'équation (6.14) correspondent à la profondeur de pénétration  $l_z$  (équation (6.16)). Le premier terme contient  $\eta_s$ . Comme ce terme est proportionnel à  $\omega^2$ , il peut devenir important à haute fréquence : la longueur de pénétration diminue et les oscillations disparaissent. Le second terme prend en compte le temps de relaxation du fluide. Plus celui-ci est petit, plus le fluide se comporte comme un fluide simple et plus la profondeur de pénétration diminue.

Dans la suite, on compare quantitativement les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

## 6.2 Influence du modèle rhéologique sur le calcul numérique

Pour comparer quantitativement le calcul numérique aux résultats expérimentaux, on réalise le calcul de stabilité linéaire pour le meilleur ajustement de la rhéologie de notre solution de micelles géantes par un fluide de Maxwell. Les résultats de cette analyse sont présentés sur la figure 6.8.

Le calcul prédit correctement  $\delta f$  et  $k_c$ . En revanche, l'accélération critique calculée numériquement est inférieure de près d'un ordre de grandeur aux données expérimentales.

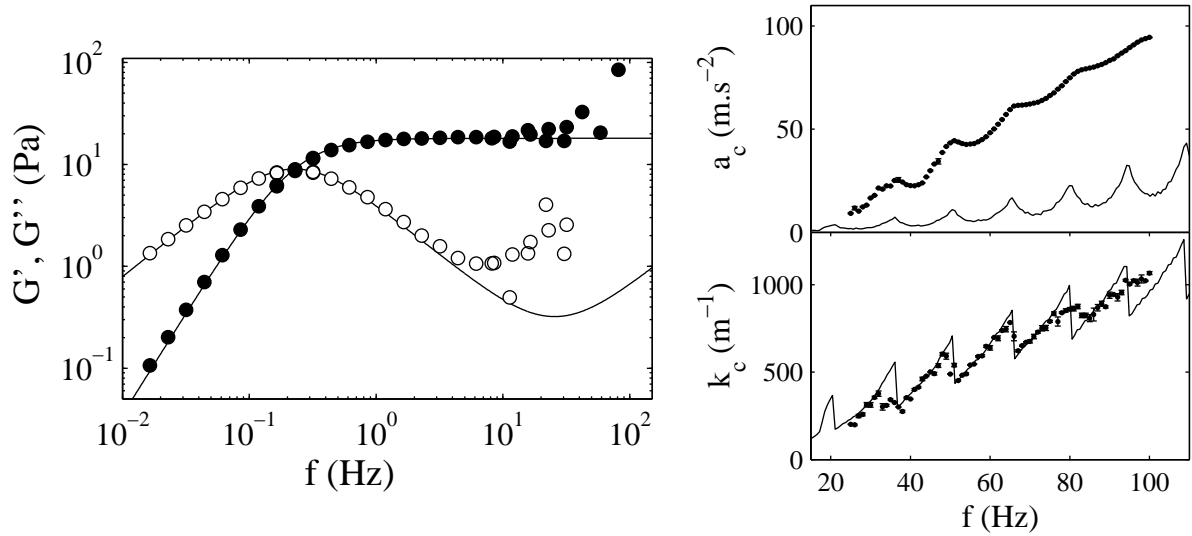


FIG. 6.8 – À gauche : rhéologie linéaire pour une solution de CPCI–NaSal à 3% et ajustement par un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 18$  Pa,  $\tau = 0.69$  s et  $\eta_S = 1$  mPa.s. À droite  $a_c$  et  $k_c$  : mesurés expérimentalement ( $\bullet$ ) en fonction de la fréquence d'excitation  $f$ . La ligne continue représente le résultat du calcul numérique pour un fluide de Maxwell.

La raison principale pour cette différence est sans doute due aux limitations de nos mesures rhéologiques, la fréquence maximale accessible à notre rhéomètre (AR2000, TA Instruments) étant limitée à une dizaine de Hertz. En effet, la mesure rhéologique est effectuée pour  $f < 10$  Hz, alors que dans nos expériences d'instabilité de Faraday on a  $f > 20$  Hz. Même en tenant compte de la réponse sous-harmonique de la surface,  $f/2 > 10$  Hz, ce qui est difficilement accessible par une mesure rhéologique. Comme  $\delta f$  est bien décrit par un fluide de Maxwell, on peut supposer  $G'(\omega) \simeq G_0$ . De plus, les fortes valeurs de  $a_c$  obtenues expérimentalement semblent indiquer qu'à haute fréquence,  $G'' \neq \eta_S \omega$ . Cette déviation au modèle de Maxwell à haute fréquence semble confirmée par la forte augmentation de  $G''$  pour  $f > 10$  Hz (cf. figure 6.8) même si la mesure rhéologique devient peu fiable à ces fréquences. On réécrit donc la viscosité de manière plus générale pour prendre en compte les hautes fréquences :

$$\eta(\omega) = \frac{G_0 \tau}{1 + i\omega \tau} + \eta_S + \eta_+(\omega), \quad (6.20)$$

où  $\eta_+$  contient le comportement à haute fréquence de notre fluide. Alors, le développement limité de  $q$  se retrouve en changeant  $\eta_S$  par  $\eta_S + \eta_+$  dans l'équation (6.14). Dans la suite, nous testons plusieurs modèles rhéologiques classiques pour tenter de mieux rendre compte de la viscoélasticité aux fréquences impliquées dans l'expérience de Faraday.

### Fluide de Oldroyd

On suppose d'abord que notre fluide est un fluide de Oldroyd [72, 73]. La viscosité complexe s'écrit alors :

$$\eta(\omega) = G_0\tau \frac{1 + i\omega\tau_O}{1 + i\omega\tau} + \eta_S, \quad (6.21)$$

où  $\tau_O$  est un deuxième temps caractéristique du fluide. En d'autre terme, on a ici  $\eta_+ = \frac{i\omega G_0\tau\tau_O}{1+i\omega\tau}$ . Le meilleur ajustement des données rhéologiques obtenue en conservant  $G_0$  et  $\tau$  trouvés précédemment donne  $\tau_O = 0.00055$  s et conduit à une meilleure représentation des données expérimentales  $G'$  et  $G''$  que le modèle de Maxwell. Les résultats du calcul numérique pour cet ajustement sont rassemblés sur la figure 6.9. On constate que les

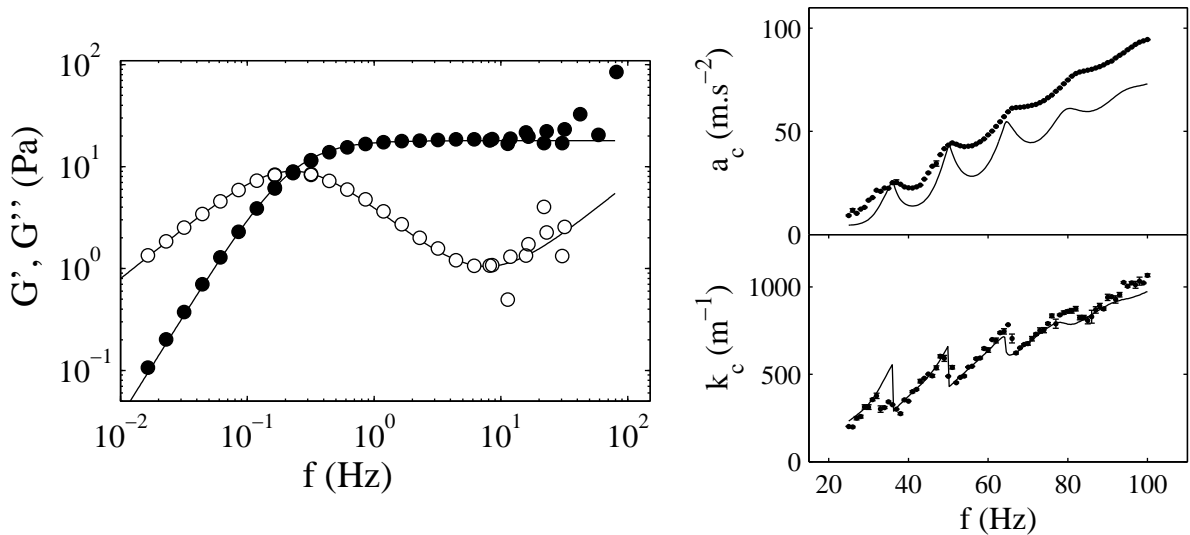


FIG. 6.9 – À gauche : rhéologie linéaire pour une solution de CPCI–NaSal à 3% et ajustement par un fluide de Oldroyd avec  $\tau_O = 0.00055$  s. À droite :  $a_c$  et  $k_c$  mesurés expérimentalement ( $\bullet$ ), et résultat du calcul numérique pour le fluide de Oldroyd (lignes continues).

résultats du calcul numérique sont nettement plus proches des résultats expérimentaux que ceux obtenus pour un fluide de Maxwell. En particulier,  $a_c$  est cette fois du même ordre que les mesures expérimentales et les maxima correspondent. De plus, la diminution de l'amplitude des chutes de  $k_c$  apparaît aussi dans les résultats du calcul de stabilité linéaire. Néanmoins, à haute fréquence ( $f > 70$  Hz), l'accélération critique obtenue numériquement reste toujours nettement inférieure à la valeur expérimentale et le nombre d'onde critique n'ajuste plus parfaitement la courbe expérimentale.

### Modèle de Rouse

On étudie ensuite la possibilité qu'à haute fréquence, notre fluide suive le modèle de Rouse ([54] §3, pages 126–127), en ajoutant cette fois à la viscosité un terme  $\eta_+ \propto \omega^{-1/2}$ . La viscosité s'écrit alors :

$$\eta(\omega) = \frac{G_0\tau}{1 + i\omega\tau} + \eta_S + a_R(1 - i)\frac{1}{\sqrt{\omega}}. \quad (6.22)$$

Le meilleur ajustement des courbes de rhéologie linéaire obtenus en conservant  $G_0 = 19$  Pa et  $\tau = 0.69$  s donne  $a_R = 0.067$  S.I. Les résultats du calcul numérique pour cet ajustement sont présentés sur la figure 6.10. Les résultats sont similaires à ceux obtenus pour un fluide

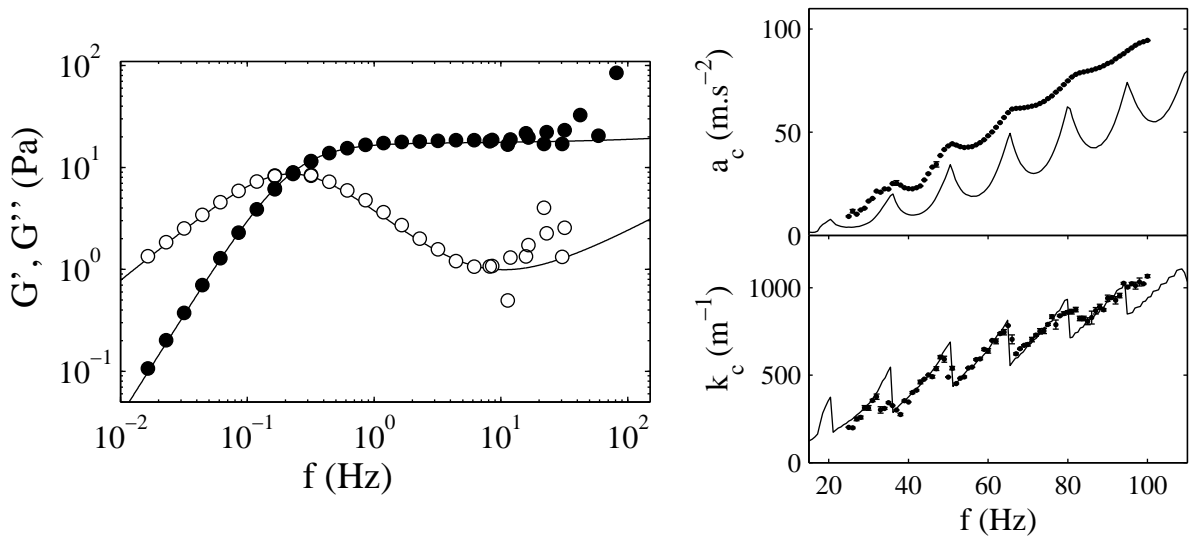


FIG. 6.10 – À gauche : rhéologie linéaire pour une solution de CPCI–NaSal à 3% et ajustement par un fluide de Maxwell auquel est ajouté un terme de Rouse avec  $a_R = 0.067$  S.I. À droite :  $a_c$  et  $k_c$  mesurés expérimentalement (●), et le résultat d'un calcul numérique pour le fluide de Rouse (ligne continue).

de Oldroyd :  $a_c$  est plus grand que pour le fluide de Maxwell et les chutes de  $k_c$  s'atténuent lorsque la fréquence augmente. Cependant, si les valeurs numériques ajustent mieux les valeurs expérimentales du nombre d'onde critique  $k_c$ , l'accord est moins bon que pour le fluide de Oldroyd en ce qui concerne l'accélération critique  $a_c$ .

### Modèle de Zimm

On rajoute finalement un terme de Zimm ([54] §3, pages 134–136) à la viscosité  $\eta_+ \propto \omega^{-1/3}$ . Dans ce cas la viscosité s'écrit :

$$\eta = \frac{G_0\tau}{1 + i\omega\tau} + \eta_S + a_Z \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \omega^{-1/3}. \quad (6.23)$$

Le meilleur ajustement des courbes de rhéologie linéaire donne  $a_Z = 0.04$  S.I. Les résultats du calcul numérique pour cet ajustement sont présentés dans la figure 6.11. Comme précé-

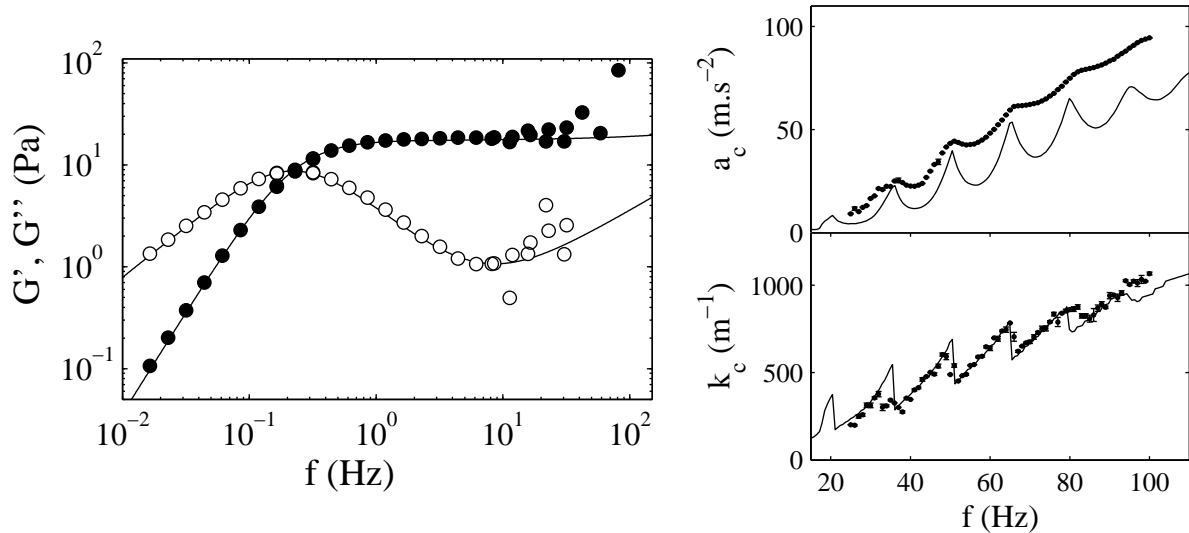


FIG. 6.11 – À gauche : rhéologie linéaire pour une solution de CPCI–NaSal à 3% et ajustement par un fluide de Maxwell auquel est ajouté un terme de Zimm avec  $a_Z = 0.04$  S.I. À droite :  $a_c$  et  $k_c$  mesurés expérimentalement ( $\bullet$ ), et résultat du calcul numérique pour le fluide de Zimm (ligne continue).

demment,  $a_c$  est plus grand qu'en l'absence de terme correctif, les chutes de  $k_c$  s'atténuent bien lorsque la fréquence augmente mais l'accord sur l'accélération critique reste qualitatif.

Bien qu'aucun des trois modèles précédents ne reproduise parfaitement les résultats expérimentaux, ils en sont plus proches que le seul modèle de Maxwell ( $\eta_+ = 0$ ). La différence entre modèle numérique et expérience est donc sûrement liée au comportement rhéologique à haute fréquence de notre fluide.

## 6.3 Champ de vitesse et champ de biréfringence

Après nous être intéressés aux mesures de  $a_c$  et  $k_c$ , nous comparons dans cette partie les mesures de vitesse et de biréfringence au calcul numérique.

### 6.3.1 Champ de vitesse

Expérimentalement, plusieurs films sont enregistrés dans la cellule rectangulaire de largeur  $l = 4$  mm pour une solution de CPCI–NaSal à 4%. Pour prendre en compte la rhéologie à haute fréquence, on ajuste la rhéologie linéaire de notre solution par un fluide de Maxwell auquel on rajoute un terme de Zimm selon l'équation (6.23), avec  $G_0 = 28$  Pa,



$\tau = 0.87$  s,  $\rho = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>,  $\sigma = 0.03$  N.m<sup>-1</sup> et  $a_Z = 0.05$  S.I. La figure 6.12 présente les mesures de  $G'$  et  $G''$  ainsi que l'ajustement obtenu avec les valeurs ci-dessus.

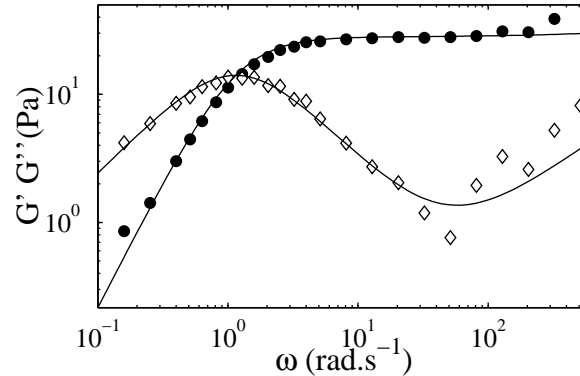


FIG. 6.12 – Rhéologie linéaire d'une solution de CPCI–NaSal à 4%,  $G'$  (●),  $G''$  (◇) et ajustement pour un fluide de Maxwell auquel on rajoute un terme de Zimm avec  $G_0 = 28$  Pa,  $\tau = 0.87$  s et  $a_Z = 0.05$  S.I (lignes continues).

La figure 6.13 compare les résultats expérimentaux et les calculs numériques à plusieurs fréquences ( $f = 48, 63, 78, 87$  et  $93$  Hz). Comme pour le fluide simple (section 3.3.4, page 69), on ajuste la constante multiplicative sur  $u$  pour reproduire au mieux les données expérimentales. Dans tous les cas, la fréquence spatiale des oscillations de  $u$  en fonction de  $z$  est bien reproduite par le calcul numérique. Toutefois, l'amplitude des rouleaux décroît toujours nettement plus vite avec la profondeur dans les expériences que dans le calcul. Nous proposons dans la section 6.5 ci-dessous des explications possibles pour cette différence.

### 6.3.2 Champ de biréfringence

Nous avons vu que le champ de vitesse était donné par l'équation (2.15) et par la condition d'incompressibilité (1.14). On peut en déduire les différents termes du tenseur des gradients de vitesse :

$$\dot{\gamma}_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial j}, \quad (6.24)$$

avec  $i = x, y, z$  et  $j = x, y, z$ .

Expérimentalement, les images de biréfringence montrent que les spots lumineux sont situés sous les zones de déformation maximale de la surface. Il est évident que les déformations maximales de la surface se trouve au maximum de  $w(x, 0)$ . Les composantes du cisaillement induisant la biréfringence ont donc la même phase selon  $x$  que  $w$ . Les seuls termes qui vérifient cette condition sont  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w}{\partial z}$ . Dans nos expériences, la biréfringence est donc induite par l'étirement et la compression. Comme d'après les hypothèses d'incompressibilité du fluide et de vitesse nulle selon la direction  $y$  (pour une cellule parallélépipédique

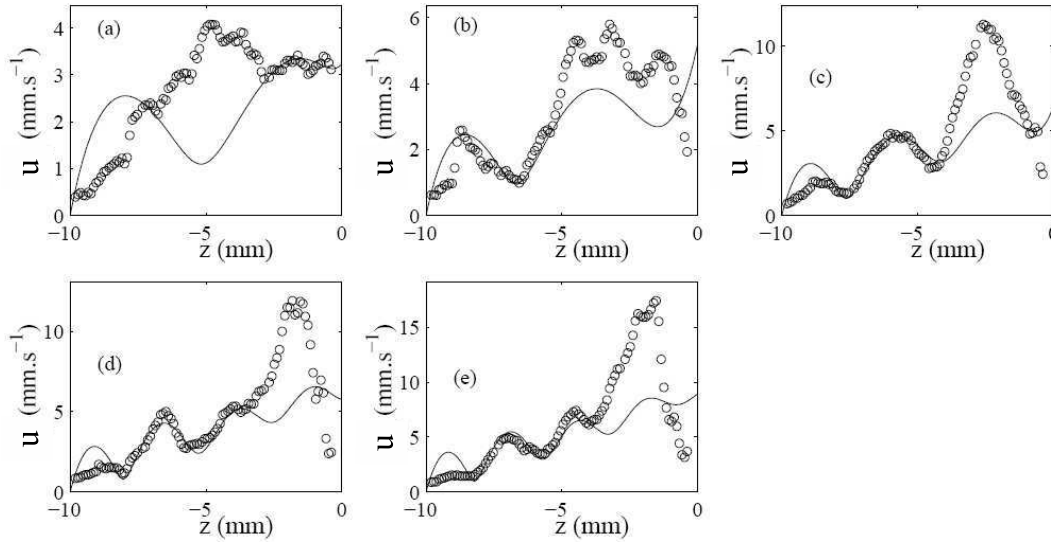


FIG. 6.13 – Vitesse  $u$  selon  $x$  en fonction de la profondeur  $z$  pour une solution de CPCl–NaSal à 4% (○). Les lignes continues représentent le résultats du calcul numérique pour un fluide de Maxwell+Zimm avec  $G_0 = 28$  Pa,  $\tau = 0.9$  s,  $\rho = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>,  $\sigma = 0.03$  N.m<sup>-1</sup> et  $a_Z = 0.06$  S.I. (a),(b),(c),(d) et (e) correspondent respectivement à  $f = 48, 63, 78, 87$  et 93 Hz.

de fort rapport d'aspect),  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial z}$ , lorsque le fluide est comprimé selon  $z$ , il est étiré selon  $x$  et inversement. Alors les micelles tendent à s'aligner selon  $x$  ou selon  $z$ . La figure 6.14 montre le calcul numérique de  $\frac{\partial w}{\partial z}$  pour un fluide de Maxwell auquel est ajouté un terme de Zimm reproduisant les courbes de rhéologie linéaire d'une solution de CPCl–NaSal à 8%, vibrée à 80 Hz dans une cuve de largeur  $l = 6$  mm. Le calcul numérique reproduit qualitativement les images de biréfringence observées expérimentalement (cf. section 5.3.2, page 89).

## 6.4 Problème inverse

On se demande ici, s'il est possible à remonter à la rhéologie à "haute fréquence" de notre fluide à partir des résultats expérimentaux obtenus sur l'accélération et le nombre d'onde critique. Une première procédure est de choisir une loi de comportement (Oldroyd, Rouse, Zimm...) pour modéliser le comportement de notre fluide à "haute fréquence" et de regarder quels paramètres ( $\tau_2$ ,  $a_R$ ,  $a_Z$ ...) ajustent le mieux nos résultats expérimentaux. Les premières lois que nous testons sont celles décrites section 6.2 (page 107). Ces lois ont l'avantage de ne posséder qu'un seul paramètre ajustable en plus du comportement d'un fluide de Maxwell déduit des expériences de rhéologie pour  $f < 10$  Hz. Le calcul du meilleur ajustement est donc relativement rapide, de l'ordre d'une douzaine d'heures de calcul par une méthode de moindres carrés. La figure 6.15 montre le meilleur ajustement

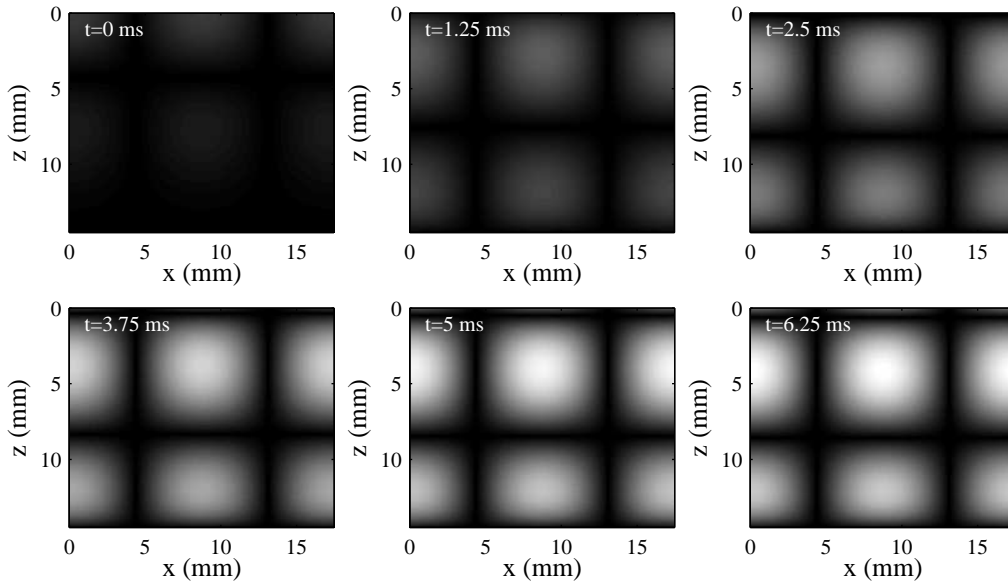


FIG. 6.14 – Champ d'étirement  $\frac{\partial w}{\partial z}$  résultant du calcul numérique pour un fluide de Maxwell auquel est ajouté un terme de Zimm avec  $a_Z = 0.067$  S.I,  $G_0 = 123$  Pa,  $\tau = 1$  s. La fréquence vaut  $f = 80$  Hz.

des données expérimentales  $a_c$  et  $k_c$  pour une solution de CPCI–NaSal à 3% par un fluide de Oldroyd. Si l'accélération critique calculée numériquement s'est rapprochée des valeurs expérimentales par rapport au résultat numérique tiré de l'ajustement de  $G'$  et  $G''$  par un fluide de Oldroyd, les oscillations de  $a_c$  et les chutes de  $k_c$  obtenues numériquement sont cette fois nettement plus petites que celles observées expérimentalement. Par ailleurs, cette procédure de moindres carrés conduit à un accord moins bon sur les valeurs de  $G''$  pour  $f > 10$  Hz. Des résultats similaires sont observés pour les deux autres méthodes (Zimm et Rouse).

La rhéologie des micelles géantes étant mal connue à haute fréquence, on peut penser qu'aucun modèle classique ne s'applique. Une autre manière de procéder est alors de chercher point par point la viscosité complexe nécessaire à un bon ajustement des données  $a_c$  et  $k_c$ . On suppose que cette viscosité peut s'écrire à chaque fréquence :

$$\eta(\omega) = \frac{G_0\tau}{1 + i\omega\tau} + \eta_S + \eta_{\Re} - i\eta_{\Im}, \quad (6.25)$$

où  $G_0$  et  $\tau$  sont tirés du meilleur ajustement par un fluide de Oldroyd ( $G_0 = 18$  Pa et  $\tau = 0.71$  s) et  $\eta_{\Re}$  et  $\eta_{\Im}$  sont des réels constants, de telle sorte que  $\eta_+(n\omega) = \eta_+(\omega)$ . On a donc deux paramètres ajustables. Pour chaque fréquence  $f$ , on cherche  $\eta_{\Re}$  et  $\eta_{\Im}$  (entre  $-0.02$  et  $0.04$  Pa.s avec un pas de  $0.001$  Pa.s) qui minimisent l'écart entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux. C'est une méthode très lourde car il faut prendre en compte deux paramètres libres et donc minimiser une distance dans un plan. De plus,

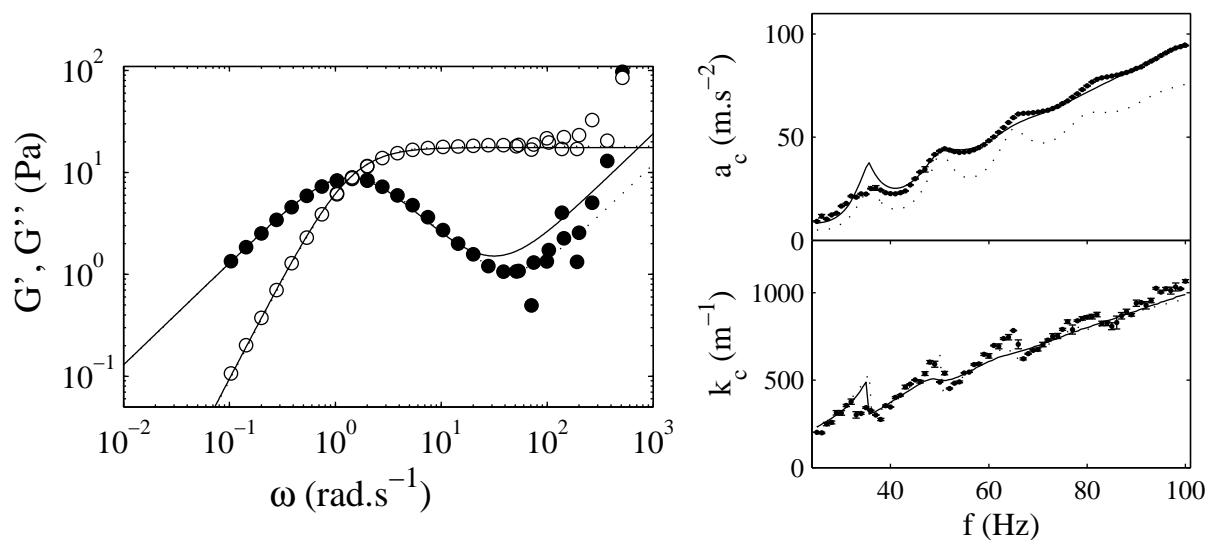


FIG. 6.15 – À gauche : rhéologie linéaire pour une solution de CPCI–NaSal à 3%,  $G'$  et  $G''$ , mesurés par un rhéomètre ( $\circ$  et  $\bullet$ ), ajustés directement par un fluide Oldroyd (lignes pointillées) avec  $\eta_0 = 12.9$  Pa.s,  $\tau = 0.71$  s,  $\tau_O = 0.6 \cdot 10^{-3}$  s, et déduit du meilleur ajustement de  $a_c$  et  $k_c$  par la méthode des moindres carrés (lignes continues) avec  $\eta_0 = 12.9$  Pa.s,  $\tau = 0.71$  s,  $\tau_O = 1.3 \cdot 10^{-3}$  s. À droite :  $a_c$  et  $k_c$  mesurés expérimentalement ( $\bullet$ ), et meilleur ajustement par la méthode des moindres carrés (ligne continue), et tiré du meilleur ajustement de  $G'$  et  $G''$  par un fluide de Oldroyd (lignes pointillées).

ces paramètres changent pour chaque fréquence ce qui oblige à faire autant de fois le calcul numérique. Les résultats de ces calculs sont présentés sur la figure 6.16. Si l'ajustement de

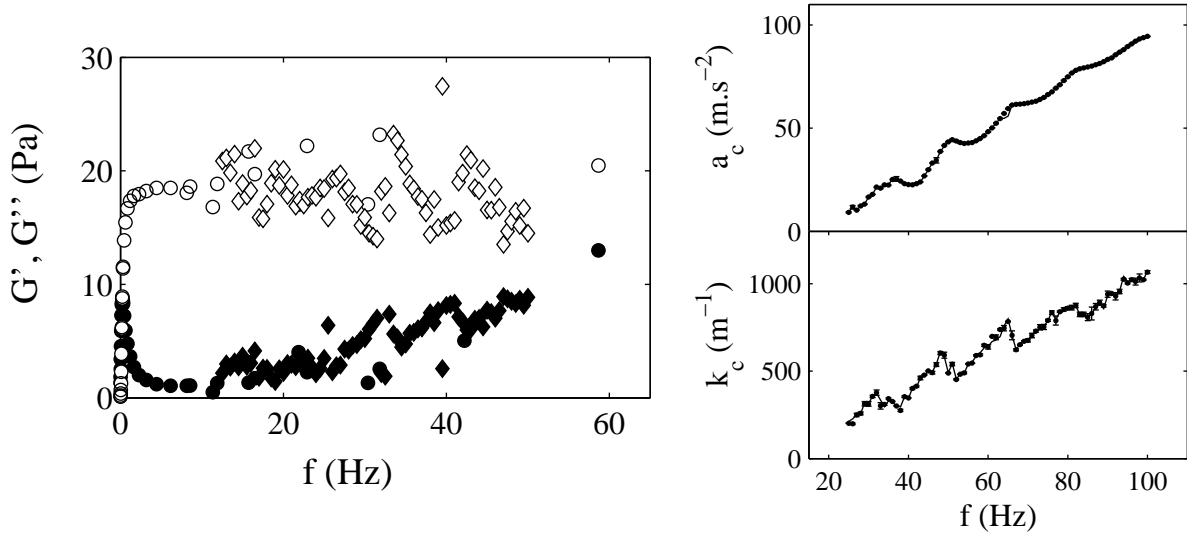


FIG. 6.16 – À gauche : rhéologie linéaire pour une solution de CPCI–NaSal à 3% :  $G'$  et  $G''$ , mesurés par un rhéomètre ( $\circ$  et  $\bullet$ ), et déduits de  $a_c$  et  $k_c$  par la méthode décrite ci-dessus ( $\diamond$  et losanges noirs). À droite  $a_c$  et  $k_c$  msurés expérimentalement ( $\bullet$ ), et meilleur ajustement point par point par la méthode décrite ci-dessus (ligne continue).

$a_c$  et  $k_c$  est cette fois excellent, la viscosité complexe ne semble pas posséder de tendance particulière permettant de valider un modèle viscoélastique pertinent. En effet, on voit que  $G''(\omega)$  oscille avec  $\omega$  à la période  $\delta f$ . On ne peut donc pas ajuster les résultats obtenus par un modèle rhéologique simple. On en conclut que la différence entre calcul numérique et expérience n'est sans doute pas uniquement liée à la rhéologie haute fréquence. Nous reviendrons plus tard sur les origines possibles de cette différence (cf. section 6.5, page 118).

La tentative de remonter à la viscosité complexe  $\eta(\omega)$  de notre fluide par ajustement de  $a_c(\omega)$  et  $k_c(\omega)$  n'est donc pas très concluante. Cette idée, initialement proposée par F. Raynal *et al.* [78], reste pourtant séduisante. Une dernière méthode possible serait de remonter à la viscosité via le champ de vitesse mesuré sous vibrations. En effet la composante sous-harmonique de la vitesse dépend de  $\eta(\omega)$  via  $q$ . De plus,  $q$  est la seule inconnue expérimentale car on connaît  $k_y$ ,  $k_x$ ,  $\omega$  et  $h$ . En cherchant la valeur de  $q$  qui minimise l'écart aux mesures expérimentales de  $u$ , on doit, en principe, pouvoir remonter à  $\eta(\omega)$ .  $q$  étant complexe, on a à nouveau deux inconnues. La figure 6.17 montre les meilleurs ajustements obtenus sur  $u$  en fonction de  $z$ , pour une solution de CPCI–NaSal à 4% vibrée à différentes fréquences. Ces ajustements sont nettement plus convaincants que ceux obtenus à partir de l'ajustement de la rhéologie (cf. section 6.3.1, figure 6.13), page 113). Une fois  $q$  déterminé,

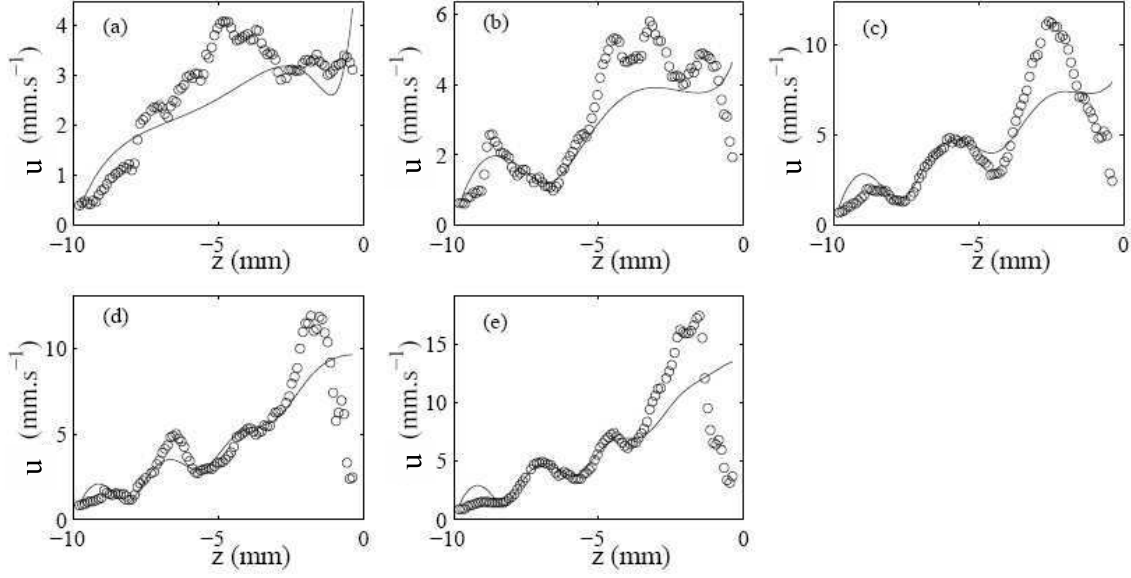


FIG. 6.17 –  $u$  en fonction de la profondeur  $z$  pour une solution de CPCl–NaSal à 4%. Résultats expérimentaux ( $\circ$ ), et meilleurs ajustements avec  $q$  comme paramètre libre (lignes continues). (a),(b),(c),(d) et (e), respectivement pour  $f = 48, 63, 78, 87$  et  $93$  Hz.

on peut remonter à  $G'$  et  $G''$  grâce aux relations :

$$G' = -\rho\omega^2 \Im \left( \frac{1}{q^2 - k_c^2} \right), \quad (6.26)$$

$$G'' = \rho\omega^2 \Re \left( \frac{1}{q^2 - k_c^2} \right). \quad (6.27)$$

La figure 6.18 montre la rhéologie déduite de ces ajustements en fonction de la fréquence et la compare à la rhéologie linéaire mesurée par un rhéomètre. Les résultats sont très bruités. Néanmoins, des tendances apparaissent. À la précision de nos ajustements près,  $G'$  reste sensiblement égal à  $G_0$ . En revanche,  $G''$  est très supérieur à la valeur attendue pour un fluide de Maxwell, ce qui semble confirmer l'importance de la rhéologie à haute fréquence dans nos expériences. En cela, les expériences de PIV sont cohérentes avec les mesures de  $a_c$  et  $k_c$ . De plus, nous ne pouvons pas non plus déduire un modèle rhéologique des expériences de PIV.

Au final, tout nos essais de mesures de la viscosité complexe par une expérience de Faraday se sont montrés peu concluants. Le seul paramètre rhéologique relativement bien déduit de ces expériences est le module élastique  $G_0$ . On obtient seulement un ordre de grandeur du comportement rhéologique à “haute fréquence” ( $f > 10$  Hz). Le temps caractéristique du fluide  $\tau$  n'est pas accessible par cette méthode car il est trop grand devant  $1/\omega < 0.02$  rad.s<sup>-1</sup>.

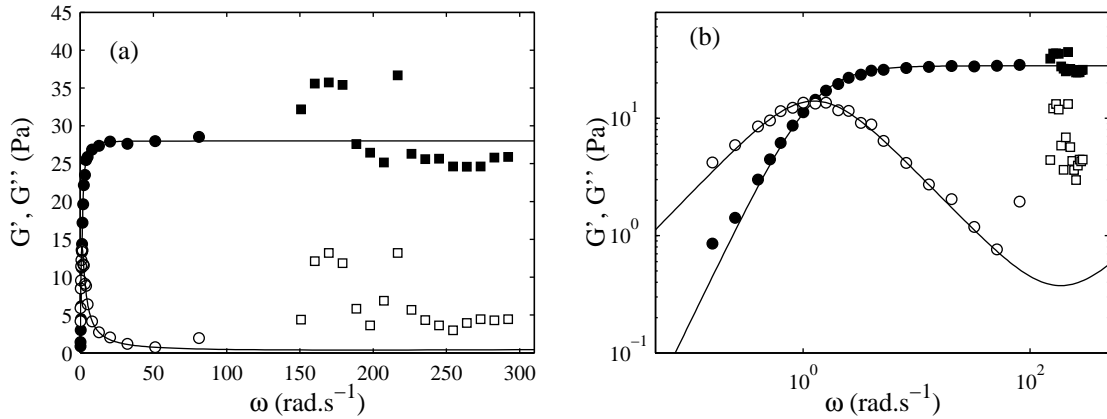


FIG. 6.18 –  $G'$  et  $G''$  en fonction de  $\omega$  pour une solution de CPCI–NaSal à 4% : mesurés par un rhéomètre ( $\bullet$  et  $\circ$ ) et déduits du champs de vitesse (carrés noirs et blancs). Les lignes continues représentent le meilleur ajustement par un fluide de Maxwell,  $G_0 = 28 \text{ Pa}$  et  $\tau = 0.89 \text{ s}$ . (a) représentation en échelles linéaires, (b) en échelles logarithmiques.

## 6.5 Sources d'erreurs

Pour les expériences de mesure de  $a_c$  et  $k_c$ , la première explication possible pour un biais entre nos expériences et le calcul numérique est la dissipation aux bords. Nous avons vérifié dans des fluides simples (huile silicone, mélange eau-glycérol) que cet effet est négligeable (cf. section 3.1.4, page 47). Cependant, comme les solutions de micelles géantes ont des longueurs de pénétration très supérieures à celles des fluides simples (cf. section 6.1.3, page 102), on ne peut pas exclure un effet plus important des éventuels ménisques et de la dissipation associée.

Une autre possibilité concerne l'atténuation des ondes de cisaillement lors de la réflexion au fond de la cellule. En effet, il est possible que la cellule absorbe une certaine partie de l'énergie des ondes élastiques. S'il y a atténuation, l'amplitude de l'onde de cisaillement réfléchiée peut être moins importante. On se rapproche alors d'une expérience en profondeur infinie. Or, on montre numériquement que l'accélération critique pour une profondeur infinie est supérieure à l'accélération critique pour une profondeur finie. Donc l'atténuation à la réflexion au fond de la cellule entraînerait une augmentation de l'accélération critique. Ces deux effets sont cohérents avec les mesures expérimentales où  $a_c$  est plus grand que l'accélération critique prédite par les calculs numériques.

Les mêmes sources d'erreurs sont à prendre en considération dans l'ajustement du champ de vitesse. De plus, les ajustements réalisés reposent sur l'hypothèse  $v = 0$ . Si cette hypothèse est mise en défaut, alors notre expression de  $u$  n'est plus valable (cf. section 2.2, page 2.37). Toutefois, les expériences sur un fluide simple semblent confirmer que  $v = 0$  (cf. section 3.3, page 69). Nous avons déjà mentionné à la section 3.3.3, la perturbation engendrée sur les mesures du champ de vitesse par la présence de vagues à la surface.

Dans le cas d'un fluide simple, cette perturbation se traduit par une sous-estimation de la vitesse mesurée à proximité de l'interface. On s'abstrait facilement de cet artefact en ne prenant pas en compte les premiers points de notre champ de vitesse. Dans le cas d'un fluide viscoélastique, l'effet des ondes de surface est nettement plus complexe car la variation locale de la hauteur peut changer la position des rouleaux dans le temps, ce qui peut empêcher de distinguer deux rouleaux proches. La possibilité de cet artefact est mise en évidence par la comparaison des figures 6.13 (page 113) et 6.17 (page 117), en particulier à  $f = 93$  Hz. On constate que le meilleur ajustement possède un rouleau de moins que le nombre prédit par l'ajustement de la rhéologie linéaire.

## 6.6 Bilan

Le calcul de stabilité linéaire proposé par K. Kumar et L. Tuckerman [50] et sa modification par K. Kumar [51] forment un puissant outil pour prédire mais aussi comprendre le comportement d'un fluide complexe sous oscillation. Dans le cas de solutions de micelles géantes, ce calcul prédit les oscillations de l'accélération et les chutes brutales du nombre d'onde critique ainsi que leur période. Et, si il existe des écarts importants entre l'accélération critique prédite pour un fluide de Maxwell et les résultats expérimentaux, ces écarts sont fortement réduits par la prise en compte de la rhéologie haute fréquence, par exemple par l'ajustement par un fluide de Oldroyd.

À l'aide de ce calcul, nous sommes remontés à l'expression du champ de vitesse au seuil d'instabilité. Là aussi, le champ de vitesse calculé numériquement reproduit les principaux comportements du champ de vitesse expérimental à savoir l'existence de rouleaux élastiques contrarotatifs oscillant dans le temps.

De plus, ce calcul donne la base théorique nécessaire pour comprendre la cause de la présence d'ondes stationnaires élastiques dans la profondeur de la cellule à partir de l'étude du nombre d'onde complexe  $q$ . Nous avons ainsi compris que ces ondes sont liées au comportement solide de notre solution de micelles géantes.

Enfin, ce calcul permet de remonter à la rhéologie de notre fluide connaissant  $a_c$  et  $k_c$  ou  $\mathbf{u}$ . Même si ces résultats ne sont pas concluants, ils mettent clairement en évidence l'impossibilité de se contenter d'un fluide de Maxwell pour décrire le comportement des solutions de micelles géantes dès que  $f > 10$  Hz ainsi que la présence d'artefacts expérimentaux, absorption des ondes réfléchi ou discrétisation.

Cependant, le calcul de stabilité linéaire reste limité à  $\epsilon$  faible. Dans ce qui suit, nous présentons des résultats d'expériences réalisées très au-dessus du seuil d'instabilité.





# Chapitre 7

## Résultats expérimentaux au-dessus du seuil

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes intéressés à l'effet de la viscoélasticité sur l'instabilité de Faraday au voisinage du seuil. Toutefois, notre technique de détection de surface permet aussi d'étudier le comportement du fluide au-dessus du seuil. Plus précisément, nous nous intéressons dans ce chapitre à l'évolution de la biréfringence en fonction de l'écart à l'accélération critique  $\epsilon$  défini par :

$$\epsilon = \frac{a - a_c}{a_c}. \quad (7.1)$$

### 7.1 Procédure expérimentale

Pour une fréquence d'excitation  $f$  fixée, on enregistre plusieurs films en augmentant  $\epsilon$  entre chacun d'eux. Le choix d'augmenter  $\epsilon$  vise à restreindre les effets de mouillage des parois par le ménisque. En effet, à forte déformation, le liquide a tendance à mouiller les parois près des zones de forte déformation. En commençant par les faibles valeurs de  $\epsilon$ , on s'assure que, pour chaque expérience, le mouillage des parois est minimal. Les films sont réalisés pour un angle  $\chi$  du couple polariseur–analyseur croisés maximisant l'intensité reçue par la caméra (cf. section 5.3.2, page 90).

La figure 7.1 montre une image typique enregistrée par la caméra lorsque les polariseurs sont croisés et lorsque les polariseurs sont décroisés. Comme nous l'avons relevé précédemment, les spots lumineux sont situés à l'aplomb des zones de plus fortes déformations de la surface (ventres de l'onde de surface).

Nous prévoyons (cf. section 5.3.2, équation (5.6) page 90) que l'intensité suit la loi :

$$I(x, z, t) = \frac{I'}{2} \left( \frac{\pi l \Delta n_0(x, z)}{\lambda} \right)^2 \cos^2(\omega t/2 + \phi) \sin^2 2\chi(x, z). \quad (7.2)$$

L'intensité de biréfringence oscille à la même fréquence  $f$  que la position du fond de la cellule et deux fois plus vite que la surface. La figure 7.2 montre l'intensité  $I(x_0, z_0, t)$  d'un

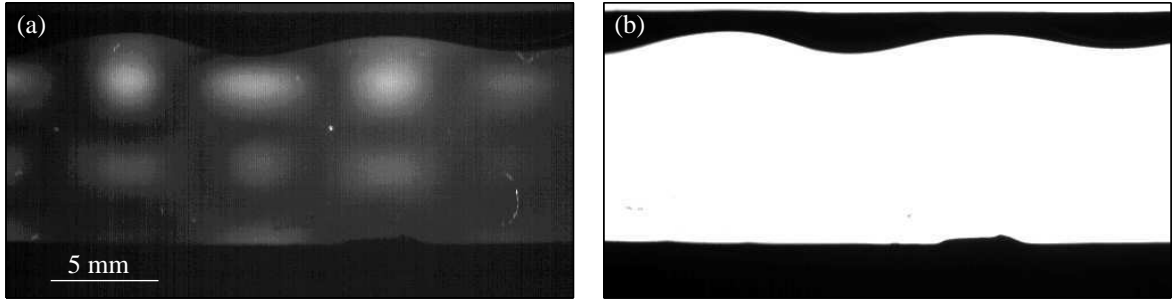


FIG. 7.1 – (a) Image de biréfringence de la couche de fluide déstabilisée lorsque les polariseurs sont croisés et (b) lorsqu'ils sont décroisés, pour une solution de CPCI–NaSal à 5% vibrée à 65 Hz.

spot lumineux, la position du fond de la cellule et la taille  $\xi$  des vagues (mesurée selon la procédure exposée en section 3.2.2, page 51) au cours du temps pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à 80 Hz. Comme prévu, la période de  $\xi$  est deux fois plus grande que la période de la position du fond : la réponse du fluide est bien sous-harmonique (à  $f/2$ ). Cependant, l'intensité de biréfringence n'évolue pas de manière parfaitement harmonique (à  $f$ ). Il s'ajoute une composante sous-harmonique sûrement liée à la présence de vagues d'amplitude finie à la surface qui déplacent périodiquement la position du maximum d'intensité. Pour minimiser cet effet, on moyenne l'intensité sur une période spatiale  $2\pi/k_x$  :

$$I(z_0, t) = \frac{k_x}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_x} I(x, z_0) dx. \quad (7.3)$$

Le signal ainsi obtenu est alors bien harmonique. On définit enfin l'amplitude des variations d'intensité  $I_0$  comme la composante harmonique (à  $f$ ) de l'intensité moyennée sur  $2\pi/k_x$ . De même, on définit l'amplitude des ondes de surface  $\xi_0$  comme la composante sous-harmonique (à  $f/2$ ) des oscillations de l'interface.

## 7.2 Amplitude des ondes de surface

La figure 7.3 montre l'évolution de  $\xi_0$  avec  $\epsilon$ . Comme pour le fluide simple, nous commençons par ajuster la courbe  $\xi_0$  vs  $\epsilon$  par la formule  $\sqrt{\epsilon/b_3}$ . On constate que cet ajustement n'est valable que pour  $\epsilon < 0.01$ . Pour des accélérations supérieures, nous ajustons cette courbe par la formule (7.4) déjà utilisée en section 3.2.4 (page 57) :

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 + 4\epsilon b_5}}{2b_5}}. \quad (7.4)$$

Comme pour un fluide newtonien, l'ajustement reproduit parfaitement l'évolution de l'amplitude en fonction de l'écart au seuil avant que l'interface ne devienne chaotique i.e tant que  $\epsilon < 0.12$ .

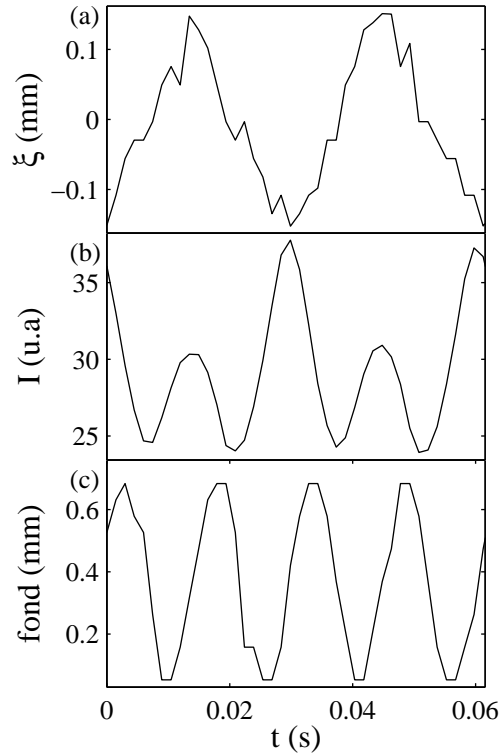


FIG. 7.2 – (a) Amplitude  $\xi$  des ondes de surface, (b) intensité  $I(x_0, z_0)$  à un maximum d'intensité et (c) position du fond en fonction du temps  $t$ , pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à 80 Hz.

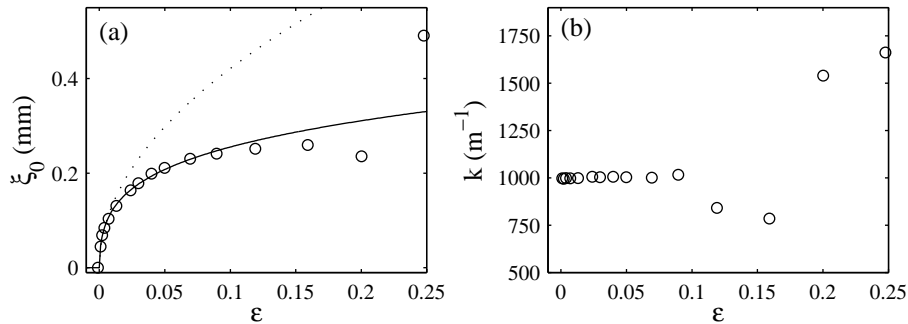


FIG. 7.3 – (a) Amplitude  $\xi_0$  et (b) nombre d'onde  $k$  des ondes de surface en fonction de l'accélération réduite  $\epsilon$ , pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à  $f = 80$  Hz, la ligne continue représente le meilleur ajustement par l'équation (7.4) et la ligne pointillée le meilleur ajustement par la formule  $\sqrt{\epsilon/b_3}$ .

### 7.3 Intensité de biréfringence

On s'intéresse maintenant à l'évolution de l'intensité de biréfringence. La figure 7.4 montre l'évolution de l'amplitude des oscillations d'intensité  $I_0$  en fonction de l'écart à l'accélération critique  $\epsilon$ . Toutefois, dans l'approche rhéo-optique développée par J.-P. De-

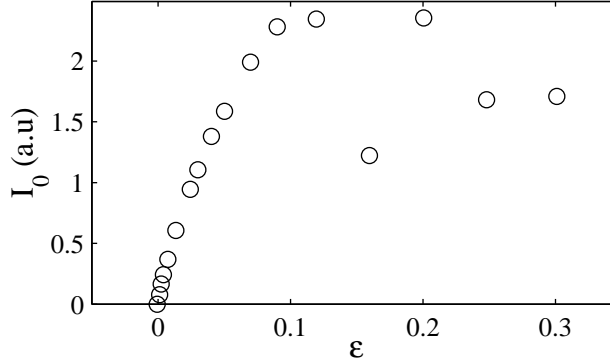


FIG. 7.4 –  $I_0$  en fonction de  $\epsilon$  pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à  $f = 80$  Hz ( $\circ$ ).

cruppe, J.-F. Berret et S. Lerouge [55], le paramètre pertinent n'est pas  $\epsilon$  mais le taux de cisaillement. On définit donc un cisaillement équivalent expérimental  $\dot{\gamma} = \xi_0 k \omega$  où  $\xi_0$  et  $k$  sont représentés figure 7.3. La figure 7.5 montre l'évolution de  $I_0$  avec  $\dot{\gamma}$  ainsi que les meilleurs ajustements par une loi de puissance et par une parabole. L'ajustement de  $I_0(\dot{\gamma})$

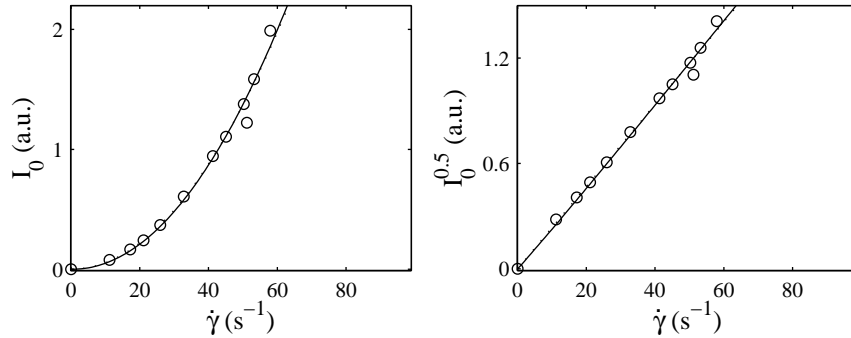


FIG. 7.5 –  $I_0$  en fonction du cisaillement équivalent  $\dot{\gamma} = \xi_0 k \omega$  pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à  $f = 80$  Hz ( $\circ$ ) et ajustements par une loi de puissance d'exposant  $p = 2.051$  (ligne continue) e par une parabole (pointillés).

par une loi de puissance conduit à un exposant  $p = 2.05 \pm 0.06$ . En utilisant l'équation (7.2), on en déduit la relation entre  $\dot{\gamma}$  et  $\Delta n$  :

$$\Delta n \propto \dot{\gamma}^{1.03 \pm 0.03}. \quad (7.5)$$

Théoriquement [55], on s'attend à une loi  $\Delta n \propto \dot{\gamma}$ . Cette loi est vérifiée aux incertitudes de mesure près. Pour tester la dépendance de cette loi avec la concentration en tensioactif, on réalise la même expérience pour une solution de CPCl–NaSal à 5% vibrée à  $f = 65$  Hz. Les résultats sont présentés dans la figure 7.6. On peut de nouveau ajuster la courbe  $I_0(\dot{\gamma})$  par

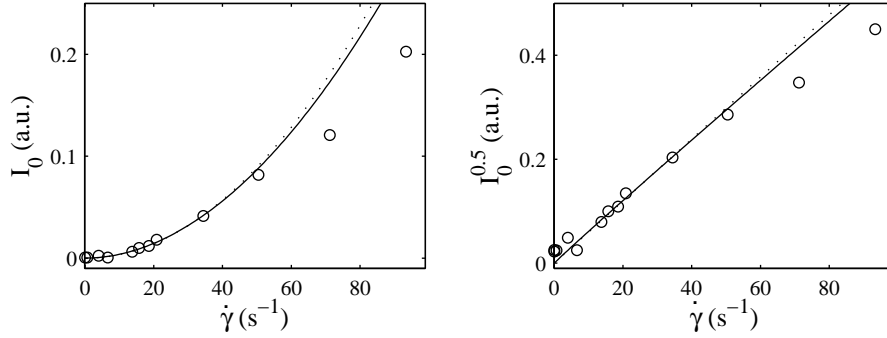


FIG. 7.6 –  $I_0$  en fonction du cisaillement équivalent  $\dot{\gamma} = \xi_0 k \omega$  pour une solution de CPCl–NaSal à 5% vibrée à  $f = 65$  Hz ( $\circ$ ) et ajustements par une loi de puissance d'exposant  $p = 1.92$  (ligne continue) et par une parabole (pointillés).

une loi de puissance d'exposant  $p = 1.92 \pm 0.09$  au moins pour  $\dot{\gamma} < 50 \text{ s}^{-1}$ . L'incertitude sur l'exposant est plus grande car l'intensité est ici plus faible d'un facteur 10.

Dans les deux expériences, la précision de nos mesures ne permet pas de distinguer entre le meilleur exposant et un exposant 2. Nos résultats sont donc cohérents avec la relation :

$$\Delta n \propto \dot{\gamma}^{1 \pm 0.05}. \quad (7.6)$$

En conclusion, aussi bien pour l'amplitude des ondes de surface que d'un point de vue rhéo-optique, notre fluide se comporte comme un fluide newtonien. De plus, avant l'apparition du régime chaotique, on observe aucun plateau de  $I_0$  en fonction du cisaillement équivalent  $\xi_0 k \omega$ . On en conclut à l'absence de transition isotrope–nématique induite par les ondes de surface dans nos expériences. Le réseau de micelles enchevêtrées se déforme mais les micelles ne se désenchevêtrent pas. Et ce, même si le cisaillement équivalent prend des valeurs instantanées très supérieures au cisaillement critique  $\dot{\gamma}_I$  (cf. § 4.3, page 76). Une façon de lever ce paradoxe apparent est de comparer le nombre sans dimension  $\dot{\gamma}/\omega \simeq k_c \xi_0$  au nombre sans dimension caractéristique pour une solution de micelles géantes  $\tau \dot{\gamma}_I$ . Or, au maximum de déformation  $\xi_0 \sim 0.5 \text{ mm}$  et  $k_c \sim 1000 \text{ m}^{-1}$ , donc  $k_c \xi_0 \sim 0.5$  ce qui reste inférieur à  $\tau \dot{\gamma}_I \sim 1$ . On comprend donc que le temps durant lequel le fluide est fortement cisailé est trop court pour induire la transition d'alignement. Pour confirmer ce résultat, une expérience intéressante consisterait à utiliser les dispositifs classiques de rhéo-optique sous un cisaillement oscillant d'amplitude  $\dot{\gamma}$  et à mesurer la loi  $I_0$  vs  $\dot{\gamma}$  en fonction de la fréquence des oscillations. En effet, à notre connaissance, seules des mesures de biréfringence sous cisaillement permanent (i.e. à fréquence nulle et donc dans le régime non-linéaire) ont été effectuées.

Une autre manière d'obtenir une relation entre  $\Delta n$  et  $\dot{\gamma}$  est de comparer l'amplitude des ondes de surface et l'intensité de la biréfringence au cours de l'apparition de l'instabilité. Pour cela on fait brusquement passer l'accélération d'en dessous de l'accélération critique ( $\epsilon = -10\%$ ) à  $\epsilon \simeq 10\%$  et on mesure simultanément  $\xi_0(t)$  et  $I_0(t)$ . La figure 7.7 montre l'amplitude des ondes de surface  $\xi_0(t)$  en fonction de l'intensité de biréfringence  $I_0(t)$  pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à  $f = 80$  Hz. Chaque valeur est tirée d'une moyenne sur une durée  $T = 4/f$ . Dans ce cas, le meilleur ajustement de la forme  $I_0(t) \propto$

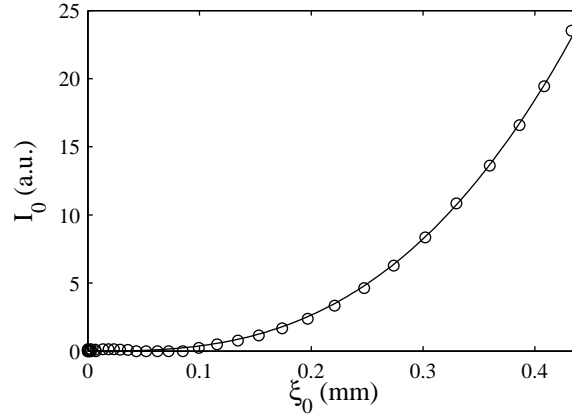


FIG. 7.7 –  $I_0(t)$  en fonction de  $\xi_0(t)$  pour une solution de CPCI–NaSal à 8% vibrée à  $f = 80$  Hz ( $\circ$ ) et ajustement par une loi de puissance d'exposant  $p = 2.8$  (ligne continue).

$\xi(t)^p$  donne  $p = 2.8 \pm 0.05$ . Nous ne savons pas pourquoi la puissance vaut ici 2.8 et non 2. Il est probable que cela soit dû au caractère non stationnaire de l'expérience.

Ainsi, au-dessus du seuil, notre fluide ne subit pas de transition isotrope–nématique. Les micelles conservent une structure de réseau enchevêtré jusqu'au début de l'instabilité secondaire. Une possibilité intéressante, mais non traitée dans ce travail, est que la transition isotrope–nématique induise la transition vers le chaos. En effet, quelques observations qualitatives tendent à confirmer ce scénario pour les solutions les plus concentrées : à l'apparition du chaos, on a  $\xi_0 k \sim \tau \dot{\gamma}_I$  et on passe rapidement d'une interface sinusoïdale à une interface chaotique. Dans la prochaine partie nous montrons que, dans certains fluides, l'instabilité de Faraday peut induire localement une transition isotrope–nématique.

# Conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons montré que les résultats obtenus lors d'expériences d'instabilité de Faraday sur une couche de fluide fortement viscoélastique diffèrent nettement de ceux obtenus pour un fluide simple. Nous nous sommes concentrés sur des solutions de micelles géantes (CPCl–NaSal) en régime semi-dilué. Dans ce système particulier, les effets de la viscoélasticité se traduisent par la présence d'ondes élastiques dans la hauteur de la cellule. Ces ondes induisent des oscillations dans la direction  $z$  du champ de vitesse, ce qui se traduit par l'existence d'un nombre d'onde  $k_z$  dans la direction  $z$ . Le nombre d'onde total est donc à trois dimensions et la discrétisation du nombre d'onde selon  $z$  implique des chutes brutales du nombre d'onde de surface (donc du nombre d'onde critique  $k_c$ ) ainsi que des oscillations de l'accélération critique  $a_c$ .

Nous avons mis en évidence l'ensemble de ces effets aussi bien numériquement qu'expérimentalement grâce à une expérience classique de mesure de  $a_c$  et  $k_c$  et grâce à deux expériences originales : une expérience de vélocimétrie par PIV et une expérience de biréfringence sous vibrations.

Nous nous sommes aussi demandés si l'instabilité de Faraday pouvait nous permettre de déterminer la viscosité complexe de notre fluide, en particulier à haute fréquence ( $f = 10\text{--}50$  Hz). Même si les résultats fournis par la résolution d'un tel "problème inverse" ne sont pas convaincants et laissent des questions ouvertes concernant l'influence de la dissipation aux parois ou l'estimation de la vitesse au voisinage du seuil, ces expériences ont permis de mettre en évidence l'influence de la viscoélasticité dans un domaine de fréquence inaccessible à la rhéologie classique (limitée à  $f \leq 20$  Hz).

Enfin, nous avons étudié le comportement de notre fluide lorsque l'accélération est supérieure à l'accélération critique et nous avons montré que même si le cisaillement peut atteindre localement des valeurs importantes, le temps mis en jeu est trop court pour induire la transition isotrope–nématique dans notre système sous vibrations.

La partie suivante est consacrée à l'étude de deux autres fluides : les micelles géantes dans le régime dilué et les suspensions de virus *fd*.





## Troisième partie

# Effet des vibrations verticales sur d'autres fluides complexes



# Chapitre 8

## Micelles géantes dans le régime dilué

Dans la partie précédente, nous avons effectué une étude exhaustive de l’instabilité de Faraday dans des solutions de micelles géantes en régime semi-dilué et mis en évidence l’effet de la viscoélasticité sur le seuil d’instabilité. Nous abordons ici une étude plus rapide de l’effet des vibrations verticales sur deux autres fluides complexes : une solution de micelles géantes dans le régime dilué, puis au chapitre suivant, une suspension de bâtonnets rigides.

Dans le régime des grandes dilutions, les solutions de micelles géantes présentent un phénomène de rhéoépaississement (augmentation de la viscosité avec le taux de cisaillement) dont l’origine reste inexplicée et sujette à controverse [43, 13, 41, 42, 8, 39, 6]. Nous nous demandons ici quelles peuvent être les conséquences d’un tel phénomène dans l’instabilité de Faraday. En particulier, nous étudions le temps d’apparition des ondes de surface une fois l’accélération critique dépassée et nous montrons que ce temps dépend de l’histoire de la couche de fluide. Enfin, nous proposons une modélisation simple de ce phénomène, qui permet de rendre compte des résultats expérimentaux.

### 8.1 Présentation du système

Nous avons utilisé dans notre expérience d’instabilité de Faraday une solution très diluée de CTAB–NaSal à 250 ppm. Ce système a d’abord été étudié il y a une dizaine d’année par Liu et Pine [58], qui ont montré que lorsque ce fluide est soumis à un cisaillement constant suffisamment important, sa viscosité augmente avec le temps pour atteindre, après plusieurs minutes, des valeurs 5 à 10 fois supérieures à la viscosité de la solution au repos. La figure 8.1 montre les mesures de viscosité en fonction du cisaillement effectuées par Liu et Pine. Le rapport de viscosité entre le fluide cisailé et le fluide non cisailé passe par un maximum ( $\simeq 10$ ) pour des cisaillements de l’ordre de  $5\text{--}10\text{ s}^{-1}$ . Ce phénomène de rhéoépaississement n’est pas instantané mais intervient après un temps d’attente de typiquement 500 s, comme le montre l’insertion de la figure 8.1.

Nous commençons par vérifier que notre solution est aussi rhéoépaississante. Pour cela nous utilisons une géométrie “double couette” et un rhéomètre ARES. La figure 8.2(b) montre l’évolution de la viscosité avec le temps enregistrée dans notre solution diluée de

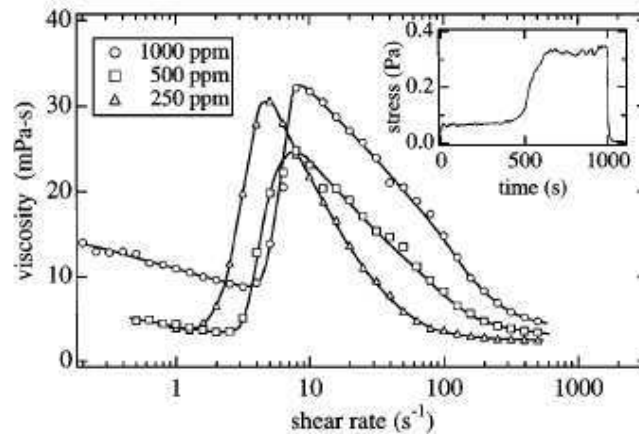


FIG. 8.1 – Viscosité en fonction du cisaillement pour trois solutions diluées de CTAB–NaSal dans de l’eau. L’insert présente la contrainte en fonction du temps lorsqu’un cisaillement supérieur au cisaillement critique de rhéoépaississement est imposé au temps  $t = 0$ . Cette figure est extraite de la référence [58].

micelles géantes à 250 ppm soumise à un cisaillement constant de  $4 \text{ s}^{-1}$ . Pendant une centaine de secondes, la viscosité de notre fluide est comparable à celle de l’eau ( $1 \text{ mPa.s}$ ). La viscosité croît ensuite rapidement avec un temps caractéristique de l’ordre de 400 s, comparable au temps d’attente trouvé par Liu et Pine, avant d’atteindre un plateau à  $10 \text{ mPa.s}$ . Nous étudions aussi l’évolution de la viscosité avec le cisaillement (figure 8.2(a)). Pour cela, nous travaillons à cisaillement imposé. Pour chaque point, nous attendons 900 s que la contrainte se stabilise puis nous moyennons sur 100 s, pour obtenir  $\eta(\dot{\gamma})$ . Nous montrons ainsi que notre solution est rhéoépaississante. Cependant, on constate que nos mesures sont peu reproductibles et moins précises que celles de Liu et Pine. En effet, nos mesures sont réalisées à  $\dot{\gamma}$  imposé, ce qui est difficile à ces faibles viscosités. De plus, ce système de micelles géantes diluées est très sensible aux perturbations extérieures (pureté de l’eau et du tensioactif, impuretés diverses, incertitude sur la mesure des concentrations), d’où une difficulté à reproduire exactement les données de Liu et Pine.

On a vu expérimentalement (chapitre 7 , page 125) que les valeurs du cisaillement à la surface de notre fluide sous vibrations peuvent être localement très importantes. On peut donc naturellement se demander s’il est possible d’induire du rhéoépaississement lors d’une expérience de Faraday. Toutes les expériences présentées dans la suite sont réalisées à  $T = 21^\circ\text{C}$ .

## 8.2 Résultats expérimentaux

Nous présentons d’abord les mesures du nombre d’onde et de l’accélération critique pour notre solution diluée de CTAB–NaSal. Ces mesures ne montrent a priori pas d’effet notable de la microstructure du fluide sur le seuil d’instabilité. Toutefois, nous constatons

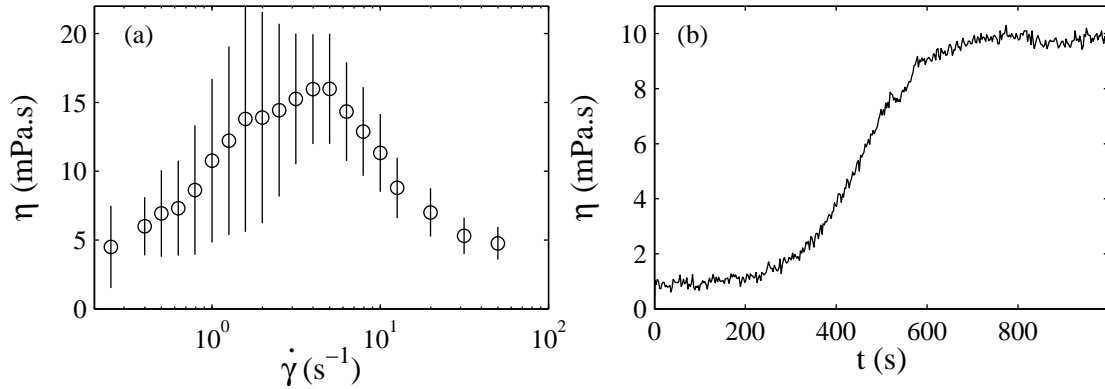


FIG. 8.2 – Viscosité  $\eta$  de notre solution de CTAB–NaSal à 250 ppm. (a)  $\eta$  en fonction du cisaillement. Chaque point représente une moyenne sur trois expériences différentes. La déviation standard sur ces mesures est de l'ordre de 40%. (b) Viscosité d'un échantillon cisailé à  $\dot{\gamma} = 5 s^{-1}$  en fonction du temps.

la présence d'une hystérésis sur  $a_c$  après que le fluide ait été vibré loin au dessus du seuil. C'est pourquoi nous avons décidé d'étudier le temps d'apparition des ondes de surface en fonction de l'histoire de l'échantillon.

### 8.2.1 Mesure de l'accélération et du nombre d'onde critique

L'expérience classique d'instabilité de Faraday (mesure de  $a_c$  et  $k_c$ ) ne montre aucun comportement singulier des solutions de micelles dans le régime très dilué (cf. figure 8.3). Le nombre d'onde et l'accélération critiques sont monotones et comparables au résultat escompté pour un fluide simple et ne présentent pas de phénomène d'hystérésis remarquable. Notons d'emblée que notre solution de micelles géantes diluée est très peu visco-élastique [41]. On ne s'attend donc pas à observer des effets résultant d'ondes élastiques comme dans la partie précédente mais plutôt des effets du rhéoépaississement. Deux facteurs entrent en ligne de compte pour expliquer l'absence d'effet notable de la microstructure du fluide. Tout d'abord, chaque mesure de  $a_c$  et  $k_c$  est réalisée en  $3 \pm 1$  min, ce qui est court par rapport au temps caractéristique de rhéoépaississement  $\tau_e \simeq 500$  s. Ensuite le cisaillement oscille à une fréquence  $f/2 \simeq 50$  Hz. La durée d'une période est donc elle aussi très courte devant le temps caractéristique de rhéoépaississement. En effet, si reprenant les arguments de la section 7.3, page 124, on compare les nombres sans dimension  $\dot{\gamma}\tau_e$  et  $\xi k_c$ , où  $\dot{\gamma} \simeq 5 s^{-1}$  est le cisaillement typique de rhéoépaississement,  $\xi = \tan(\pi/180)/k_c$  est la hauteur minimale détectable pour les ondes de surface et  $k_c$  est le nombre d'onde critique, on trouve  $\dot{\gamma}\tau_e \simeq 2000 \gg \tan(\pi/180) \simeq 0.02$ . On comprend que le rhéoépaississement n'ait pas le temps de se produire.

On remarque expérimentalement que le nombre d'onde  $k$  varie peu avec l'écart à l'accélération critique  $\epsilon$ . Pour augmenter le cisaillement apparent à la surface du fluide on se

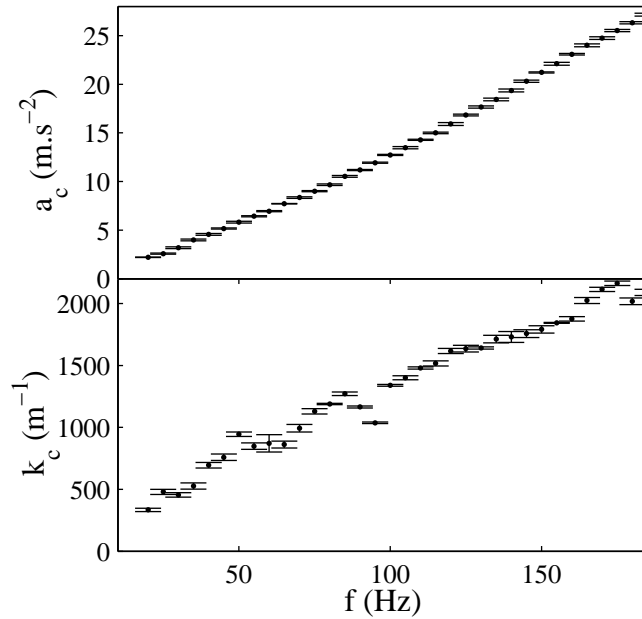


FIG. 8.3 – Accélération et nombre d’onde critiques  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de la fréquence d’excitation  $f$  pour une solution de CTAB–NaSal à 250 ppm.

place à  $\epsilon = 1$ , soit à deux fois l’accélération critique. On augmente ainsi  $\xi$  à  $k$  constant. Si le fluide est vibré à  $\epsilon = 1$  pendant une durée comparable à  $\tau_e$  puis vibré à  $\epsilon = 0.05$ , on remarque que la surface n’est pas déstabilisée. La figure 8.4 montre l’évolution avec le temps du motif à la surface d’une couche de fluide préalablement vibrée à  $\epsilon = 1$  pendant 43 min et vibrée ensuite à  $\epsilon = 0.05$  à partir de  $t = 0$ . Il faut attendre un temps comparable à  $\tau_e$  pour voir apparaître le motif de surface. Le motif qui apparaît reste d’abord stable pendant une dizaine de minutes, puis on voit se développer l’instabilité secondaire. Donc, à mesure que le temps s’écoule, la surface se comporte d’abord comme si  $a < a_c$ , puis comme si  $a \simeq a_c$  et enfin comme si  $a > a_c$ . Cette évolution se produit sur des temps très supérieurs au temps d’apparition du motif pour un fluide simple. Réaliser une mesure de  $a_c$  et  $k_c$  (en  $\simeq 3$  min) alors que se produit cette évolution conduit alors à une hystérésis apparente. Pour essayer de quantifier ce phénomène, nous réalisons dans la suite des expériences de mesure du temps d’apparition.

### 8.2.2 Temps d’apparition pour le fluide initialement au repos

Nous commençons par étudier le temps d’apparition de l’instabilité dans une solution diluée de micelles géantes *initialement au repos*.

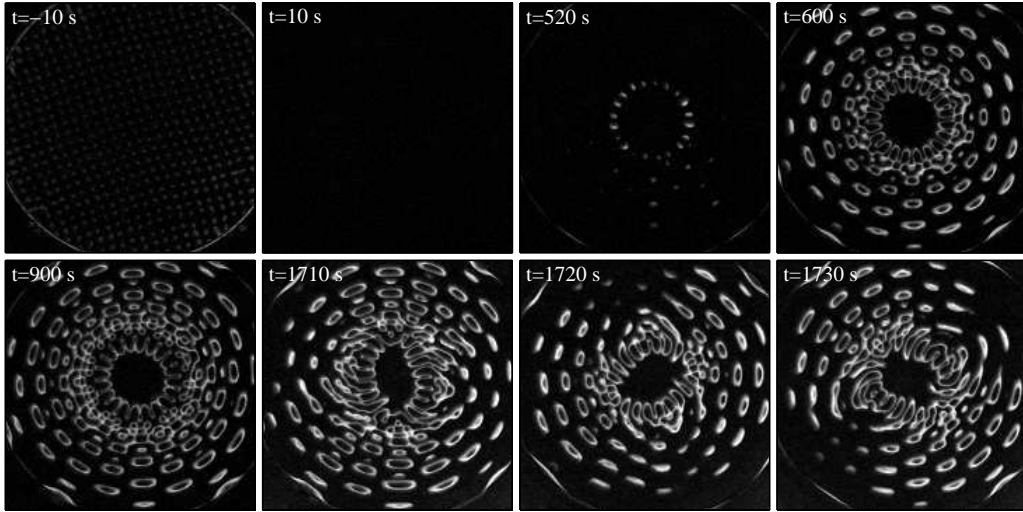


FIG. 8.4 – Évolution temporelle du motif d'ondes de surface dans une solution de CTAB–NaSal à 250 ppm vibrée à  $\epsilon = 0.05$  et  $f = 120$  Hz et préalablement vibrée à  $\epsilon = 1$  et  $f = 120$  Hz pendant 43 min. Pour  $\epsilon = 1$  le motif est carré. À  $t = 0$ , l'accélération est ramenée à  $\epsilon = 0.05$ . Pendant  $\sim 8$  min, la surface reste plate. On voit ensuite apparaître le motif qui se développe pendant  $\sim 5$  min. Enfin après une vingtaine de minutes, le motif évolue dans le temps (instabilité secondaire).

### Évolution de l'amplitude des ondes de surface avec le temps

La théorie des instabilités (voir par exemple [60], chapitre 1) prévoit que le temps d'apparition  $t_a$  décroît comme l'inverse de l'accélération réduite  $\epsilon = (a - a_c)/a_c$ . En effet, si l'on suppose que l'amplitude  $\xi$  des ondes de surface suit l'équation différentielle :

$$\tau_g \partial_t \xi = \epsilon \xi + b \xi^3 + O(\xi^2), \quad (8.1)$$

où  $\tau_g$  est le temps caractéristique de croissance des ondes de surface, et  $b$  l'inverse d'une longueur. Si  $\xi$  est petit, cette équation revient à :

$$\tau_g \partial_t \xi = \xi \epsilon, \quad (8.2)$$

$$\xi = \xi_0 e^{t/\tau_g}, \quad (8.3)$$

où  $\xi_0$  est l'amplitude de la perturbation du mode de surface de nombre d'onde  $k_c$  à  $t = 0$ . Si on note  $\xi_d$  l'amplitude des vagues lorsqu'elles deviennent mesurables expérimentalement par notre dispositif (cf. § 3.1.1, page 44), on trouve :

$$t_a = \frac{\tau_g}{\epsilon} \ln \left( \frac{\xi_d}{\xi_0} \right). \quad (8.4)$$

Alors, on peut écrire :

$$t_a = \frac{T_0}{\epsilon}, \quad (8.5)$$



où  $T_0 = \tau_g \ln \left( \frac{\xi_d}{\xi_0} \right)$ .

Pour des questions de notations, on note  $a_0$  l'accélération critique du fluide au repos dans toute la suite de ce chapitre. Alors l'écart relatif au seuil d'instabilité est donné par  $\epsilon = (a - a_0)/a_0$ .

### Mesure de $t_a$

Pour être sûr que le fluide est "au repos" avant chaque mesure, c'est-à-dire dans un état non perturbé par son histoire, le fluide est laissé 10 min à  $\epsilon = -0.5$ . On ne coupe pas le vibreur pour éviter qu'il ne refroidisse. En effet, lorsque le vibreur chauffe l'accélération diminue à intensité constante. En laissant le vibreur à  $\epsilon = -0.5$ , on s'assure qu'il ne refroidisse pas trop et que l'accélération est bien proportionnelle à l'intensité. En plus de cette précaution, une rétroaction est réalisée via le logiciel de contrôle (Matlab) entre l'accéléromètre et la détection synchrone pour réajuster l'intensité des oscillations toutes les minutes. Une attente de dix minutes à  $\epsilon = -0.5$  permet de laisser le liquide relaxer suffisamment tout en conservant des expériences de durée inférieure à une journée.

Une fois les dix minutes écoulées, l'accélération est augmentée à une valeur  $a \geq a_c$ . On utilise la fonction chronomètre de Matlab pour mesurer le temps  $t_a$  nécessaire à l'apparition du motif. Le chronomètre est déclenché par le programme qui augmente  $a$  et il est arrêté manuellement par l'expérimentateur lorsque les ondes de surface deviennent visibles. La figure 8.5(a) montre le temps  $t_a$  nécessaire à l'apparition du motif en fonction de l'accélération  $a$ . On ajuste la courbe  $t_a(a)$  par la formule :

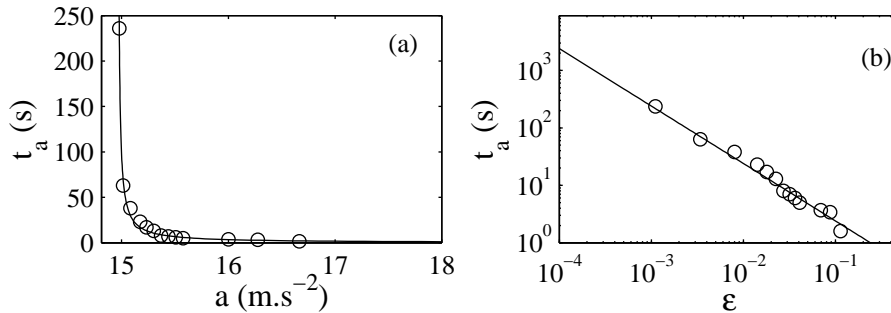


FIG. 8.5 – Temps  $t_a$  nécessaire à l'apparition du motif en fonction (a) de l'accélération et (b) de l'écart à l'accélération critique  $\epsilon$  ( $\circ$ ) pour une solution à 250 ppm de CTAB–NaSal initialement au repos vibrée à  $f = 110$  Hz. Les lignes continues représentent l'ajustement par l'équation (8.6) avec  $T_0 = 0.24$  s et  $a_0 = 14.96$  m.s<sup>-2</sup> (ligne continue).

$$t_a = T_0 \frac{a_0}{a - a_0}, \quad (8.6)$$

où les deux paramètres libres sont l'accélération critique  $a_0$  et  $T_0$  le temps caractéristique introduit précédemment qui n'est autre que le temps d'apparition des ondes de surface

pour  $a = 2a_0$  ( $\epsilon = 1$ ). La figure 8.5(b) présente  $t_a$  en fonction de  $\epsilon$  déduit de l'ajustement de  $t_a(a)$  par l'équation (8.6). On vérifie que  $t_a$  évolue bien comme  $1/\epsilon$ .

On en conclut que lorsque l'amplitude des ondes de surface est suffisamment importante pour être détectée expérimentalement, l'amplitude des ondes de surface est encore dans la limite des faibles amplitudes et que l'équation (8.3) est valable. L'amplitude des vagues évolue donc dans le temps en suivant une loi en  $e^{ct/\tau_g}$  comme pour un fluide simple.

### 8.2.3 Temps d'apparition pour le fluide préalablement vibré

Nous étudions ici le temps d'apparition du motif de surface pour une couche de fluide préalablement vibrée. Nous comparons ce temps à celui obtenu pour un fluide initialement au repos et mettons en évidence un très fort effet des vibrations préalables.

#### Mode opératoire

Pour générer un effet de rhéoépaississement dans notre couche de fluide, nous la vibrons pendant 15 minutes à  $\epsilon = 1$  et à  $f = 110$  Hz. la durée de ces vibrations préalables est typiquement le double du temps caractéristique de rhéoépaississement. Nous nous assurons ainsi que le fluide est proche de l'état stationnaire. Nous trouvons expérimentalement que  $\epsilon = 1$  est la limite supérieure de l'accélération pour laquelle la surface de notre fluide reste stationnaire avec un motif carré. Une fois les 15 minutes écoulées, on vibre pendant 3 s à  $\epsilon = -0.5$  ( $a = a_0/2$ ) puis pendant 2 s à  $\epsilon = -0.1$  pour que les ondes de surface disparaissent. On augmente enfin l'accélération  $a$  au-dessus de l'accélération critique  $a_0$  du fluide au repos et on note le temps  $t_a$  de réapparition du motif (voir figure 8.6).

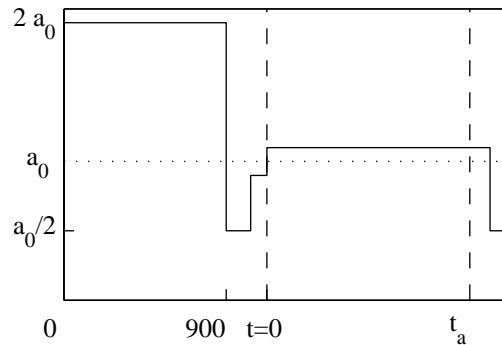


FIG. 8.6 – Protocole expérimental : la couche de fluide est préalablement vibrée pendant 15 min à  $\epsilon = 1$ , puis pendant 3 s à  $\epsilon = -0.5$  et pendant 2 s à  $\epsilon = -0.1$  avant d'être augmentée à l'accélération désirée. Le temps  $t_a$  est défini comme la durée entre le moment où l'accélération est augmentée à l'accélération finale et le moment où les ondes de surface deviennent détectables expérimentalement.

Le temps d'apparition  $t_a$  en fonction de l'écart à l'accélération critique  $\epsilon$  mesuré expérimentalement est présenté dans la figure 8.7 et comparé aux valeurs de  $t_a$  obtenues

précédemment pour le fluide initialement au repos. On remarque que pour un même écart

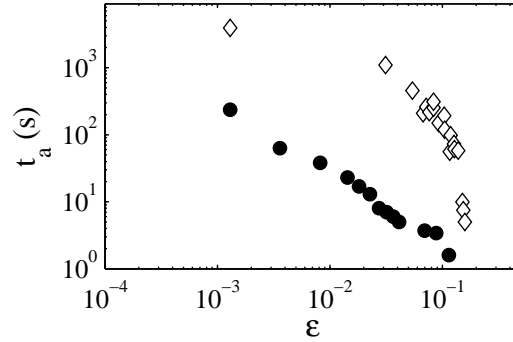


FIG. 8.7 – Temps  $t_a$  nécessaire à l'apparition du motif en fonction de l'écart à l'accélération critique  $\epsilon$  pour une solution de CTAB–NaSal à 250 ppm préalablement vibrée pendant 15 min à  $f = 110$  Hz et à  $\epsilon = 1$  (◇) et pour une solution initialement au repos (●).

au seuil  $\epsilon$ , le temps d'apparition de l'instabilité  $t_a$  est beaucoup plus important pour le fluide préalablement vibré que pour le fluide initialement au repos (parfois de deux ordres de grandeur). Cette croissance du temps d'attente peut se comprendre comme une conséquence du rhéoépaississement engendré par les déformations de l'interface. En effet, lorsque la surface du fluide est déstabilisée, une couche de fluide d'épaisseur  $e \simeq 1/k_c$  est soumise à un cisaillement alternatif d'amplitude  $\dot{\gamma} \simeq \xi_0 k_c \omega$ , avec  $\xi_0$  la hauteur des vagues,  $k_c$  le nombre d'onde critique, et  $\omega$  la fréquence d'excitation. Le cisaillement de cette couche de fluide peut engendrer localement un rhéoépaississement et augmenter l'accélération critique nécessaire pour déstabiliser le fluide. Cet effet sur le seuil d'instabilité analogue à celui observé par Huber *et al.* [44] lors de la gélification d'une surface contrôlée par la température (cf. figure 2.6, § 2.3.3, page 38).

Dans notre expérience sur le fluide initialement vibré, tout se passe donc comme si l'on partait d'un fluide de viscosité amplifiée localement par le rhéoépaississement. Toutefois, cette viscosité a tendance à relaxer vers sa valeur à l'équilibre si le fluide n'est plus déstabilisé. Lors de la mesure de  $t_a$ , il y a donc une compétition entre l'effet de rhéoépaississement et la relaxation de la viscosité qui conduit à une dépendance non triviale de  $t_a$  avec  $\epsilon$ . Dans la suite, nous proposons une modélisation du phénomène de relaxation qui conduit à une interprétation simple de l'évolution du temps d'apparition  $t_a$  avec  $\epsilon$  dans le fluide préalablement vibré.

### 8.3 Effet d'une relaxation de la viscosité sur le temps d'apparition des ondes de surface

On sait que pour un fluide simple l'accélération critique  $a_c$  est proportionnelle à la viscosité  $\nu$  [30]. Pour prendre en compte les variations de la viscosité, on suppose que

$$a_c = a_0 \frac{\nu}{\nu_0}, \quad (8.7)$$

où  $\nu_0$  est la viscosité du fluide à l'équilibre et  $a_0$  l'accélération critique du fluide au repos. De plus, le temps caractéristique de croissance des ondes de surface  $\tau_g$  dépend aussi de la viscosité [30] :

$$\tau_g = \frac{2}{\nu k_c^2}, \quad (8.8)$$

ce qui conduit, lorsqu'on prend en compte la viscosité au repos :

$$\tau_g = \tau_{g0} \frac{\nu_0}{\nu}, \quad (8.9)$$

où  $\tau_{g0}$  est le temps caractéristique d'apparition du motif à l'équilibre. On suppose enfin que la viscosité relaxe exponentiellement avec un seul temps caractéristique de relaxation  $\tau$ . En d'autres termes, on suppose que la viscosité évolue avec le temps en suivant la loi :

$$\nu(t) = \nu_0(1 + \delta e^{-t/\tau}), \quad (8.10)$$

où  $\delta$  est un coefficient numérique caractéristique du rhéoépaississement induit par les vibrations préalables de sorte que  $\nu(t=0) = \nu_0(1 + \delta)$ . On peut ainsi définir deux accélérations :

$$a_1 = a_0(1 + \delta), \quad (8.11)$$

$$a_c(t) = a_0(1 + \delta e^{-t/\tau}), \quad (8.12)$$

qui correspondent respectivement à l'accélération critique "initiale", i.e juste après les vibrations préalables (de 15 min) et à l'accélération critique de notre fluide à un temps  $t$  quelconque au cours de la relaxation. On suppose que la durée des vibrations est suffisamment importante pour que l'équilibre soit atteint (cf. figure 8.2(b)),

En toute rigueur, il est très probable que la viscosité varie d'un point à l'autre de l'échantillon préalablement vibré. Cependant, la modélisation de l'évolution de la viscosité par le terme  $\delta e^{-t/\tau}$  est suffisamment générale pour pouvoir décrire plusieurs types de comportements comme par exemple une viscosité homogène dans l'échantillon ou la superposition de couches de viscosités différentes.

Une fois l'accélération  $a$  fixée pour la mesure de  $t_a$ , deux cas sont possibles :  $a \leq a_1$  ou  $a > a_1$ . La discussion de ces deux cas fait l'objet des paragraphes suivants.

### 8.3.1 Cas $a \leq a_1$

À  $t = 0$ , on vibre le fluide avec une accélération inférieure à l'accélération critique "initiale"  $a_1 = a_c(0)$ . Tant que  $a_c(t) \geq a$ , la surface reste plane et la viscosité relaxe vers  $\nu_0$ . On note  $t_1$  le temps tel que  $a_c(t_1) = a$ . Avec  $\epsilon = (a - a_0)/a_0$ , l'équation (8.12) conduit à :

$$t_1 = \tau \ln \left( \frac{\delta}{\epsilon} \right). \quad (8.13)$$

On effectue alors le changement de variable suivant :  $t \Rightarrow t - t_1$ , ce qui équivaut à écrire  $\nu = \nu_0(1 + \epsilon e^{-t/\tau})$ . On cherche maintenant le temps  $t_2$  nécessaire à l'apparition des ondes de surface dans le cas  $a_1 = a$ . Pour cela, on substitue l'équation (8.10) modifiée dans les équations (8.7) et (8.9) :

$$a_c(t) = a_0(1 + \epsilon e^{-t/\tau}), \quad (8.14)$$

$$\tau_g = \frac{\tau_{g0}}{1 + \epsilon e^{-t/\tau}}. \quad (8.15)$$

$$(8.16)$$

On peut donc calculer  $\epsilon(t)$  :

$$\epsilon(t) = \frac{a - a_c(t)}{a_c(t)} = \epsilon \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + \epsilon e^{-t/\tau}}. \quad (8.17)$$

D'après l'équation 8.1, on a :

$$\frac{d_t \xi}{\xi} = \frac{\epsilon(t)}{\tau_g(t)}, \quad (8.18)$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$\ln \left( \frac{\xi(t)}{\xi_0} \right) = \int_0^t \frac{\epsilon(t) dt}{\tau_g(t)}, \quad (8.19)$$

$$\ln \left( \frac{\xi(t)}{\xi_0} \right) = \frac{\epsilon}{\tau_{g0}} \int_0^t (1 - e^{-t/\tau}) dt. \quad (8.20)$$

Les ondes de surface sont détectables expérimentalement pour  $\xi(t_2) = \xi_d$ , L'expression  $\ln \left( \frac{\xi_d}{\xi_0} \right) = \frac{T_0}{\tau_{g0}}$  conduit alors à l'équation implicite suivante pour  $t_2$  :

$$\frac{T_0}{\epsilon} = \int_0^{t_2} (1 - e^{-t/\tau}) dt. \quad (8.21)$$

Si on suppose  $t_2/\tau \ll 1$ , on peut faire un développement limité en  $t_2/\tau$  de l'équation (8.21), ce qui conduit à :

$$t_2 = \sqrt{\frac{2T_0\tau}{\epsilon}}. \quad (8.22)$$

Le temps d'apparition du motif  $t_a$  est donc la somme de deux termes :

$$t_a = t_1 + t_2 = \tau \ln \left( \frac{\delta}{\epsilon} \right) + \sqrt{\frac{2T_0\tau}{\epsilon}}. \quad (8.23)$$

### 8.3.2 Cas $a > a_1$

Dans ce cas, on a toujours  $\epsilon > \delta$ . Alors  $\epsilon(t)$  est de la forme :

$$\epsilon(t) = \frac{\epsilon - \delta e^{-t/\tau}}{\delta e^{-t/\tau} + 1} \quad (8.24)$$

Un calcul similaire au calcul précédent pour  $t_2$ , toujours sous l'hypothèse  $t_2 \ll \tau$ , conduit à :

$$t_a = \left(1 - \frac{\epsilon}{\delta}\right) \tau + \sqrt{\left(1 - \frac{\epsilon}{\delta}\right)^2 \tau^2 + \frac{2T_0\tau}{\delta}}. \quad (8.25)$$

Pour  $\epsilon = \delta$ , on retrouve bien le cas  $a = a_1$  discuté au paragraphe précédent (équation (8.22)). L'ensemble des résultats expérimentaux à  $f = 110$  Hz est présenté sur la figure 8.8. On ajuste  $t_a(\epsilon)$  trouvé expérimentalement par les équations (8.23) et (8.25) avec

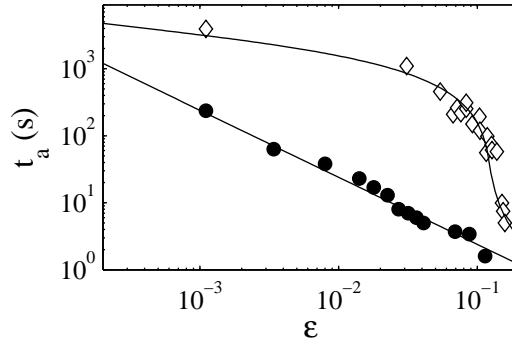


FIG. 8.8 – Temps d'apparition  $t_a$  en fonction de  $\epsilon$  pour une solution de CTAB–NaSal à 250 ppm initialement au repos (●) et pour une solution de CTAB–NaSal à 250 ppm préalablement vibrée pendant 15 minutes à  $\epsilon = 1$  (◇) pour  $f = 110$  Hz. Dans le cas des vibrations préalables, la ligne continue représente l'ajustement par les équations (8.23) et (8.25) avec  $T_0 = 0.24$  s ;  $\tau = 560$  s ;  $a_0 = 14.96$  m.s<sup>-2</sup> et  $\delta = 0.12$ .

comme paramètres libres  $\delta$  et  $\tau$ , on trouve une augmentation de  $\nu$  de l'ordre de  $\delta = 10\%$ . De plus, on peut calculer  $a_0(1 + \delta) = 16.83$  m.s<sup>-2</sup>. L'effet est donc bien quantifiable comparé à la précision de la détermination de  $a_0$  ( $\simeq 1\%$ .) Les équations (8.23) et (8.25) sont valables sous la condition  $t_2 \ll \tau$ . On vérifie a posteriori que cette condition est valable tant que  $\epsilon \geq 0.01$ . Nous avons exclu les points (en fait, le premier point) ne vérifiant pas cette condition de l'ajustement de  $t_a$  présenté dans la figure 8.8.

Notre description du phénomène avec un temps de relaxation décrit donc quantitativement les mesures expérimentales de  $t_a$ . Le temps caractéristique de relaxation  $\tau = 560$  s est comparable au temps caractéristique de rhéoépaississement ( $\sim 400$  s) mesuré par le rhéomètre. La présence de deux régimes, à forte ( $\epsilon > \delta$ ) et à faible ( $\epsilon < \delta$ ) accélération, est bien reproduite par notre modèle.

## 8.4 Expériences complémentaires

Après avoir montré la validité de notre modèle au paragraphe précédent, nous présentons ici quelques expériences complémentaires qui permettent de confirmer l'influence du rhéoépaississement induit par des vibrations sur le temps d'apparition de l'instabilité de Faraday.

### 8.4.1 Variation de $f$

Pour un même remplissage, nous avons répété l'expérience décrite au § 8.2.3 à trois fréquences différentes,  $f = 65, 85$  et  $135$  Hz. La couche de fluide est vibrée préalablement pendant 10 min à  $\epsilon = 1$  et à la même fréquence. L'ajustement des données ainsi obtenues permet de remonter à la dépendance de  $T_0$ ,  $a_0$ ,  $\delta$  et  $\tau$  en la fréquence. La figure 8.9 présente les résultats obtenus à ces trois fréquences et le tableau 8.1 rassemble les paramètres des ajustements par le modèle proposé précédemment.

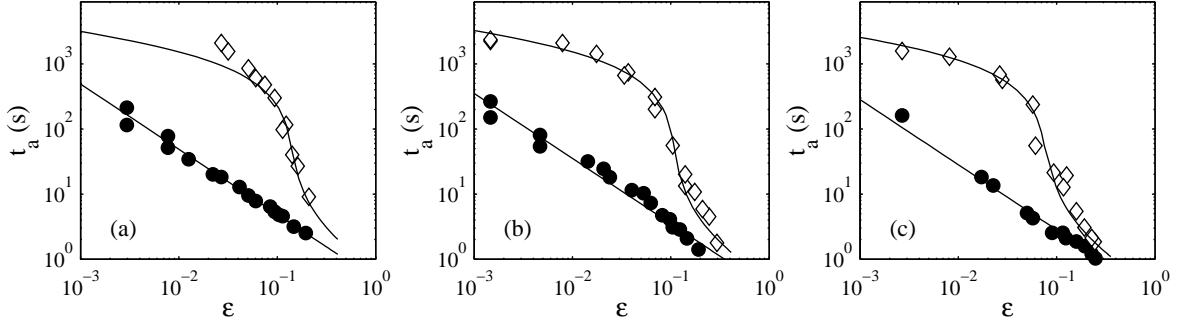


FIG. 8.9 – Temps d'apparition  $t_a$  en fonction de  $\epsilon$  pour une solution de CTAB–NaSal à 250 ppm initialement au repos (•) et pour une solution préalablement vibrée pendant 10 minutes à  $\epsilon = 1$  (◊). Les lignes continues représentent les ajustements de  $t_a$  par le modèle proposé au § 8.3. Les valeurs des paramètres sont données dans le tableau 8.1. (a)  $f = 60$  Hz; (b)  $f = 85$  Hz; (c)  $f = 135$  Hz;

$f$ (Hz)	65	85	135
$a_0$ ( $\text{m.s}^{-2}$ )	7.3	10.9	19.3
$T_0$ (s)	0.49	0.35	0.28
$\tau$ (s)	501	565	502
$\delta$	0.136	0.105	0.076

TAB. 8.1 – Paramètres des ajustements par les équations (8.23) et (8.25).

Comme on peut s'y attendre,  $\tau$  ne varie pas de façon significative avec la fréquence et  $a_0$  augmente avec la fréquence. De plus, on remarque que  $T_0$  et  $\delta$  diminuent lorsque  $f$

augmente. Pour comprendre que  $T_0$  diminue avec  $f$ , on rappelle que  $\tau_g = 2/\nu k_c^2$ . De plus, le montage est tel que les zones lumineuses forment avec l'horizontale un angle supérieur à  $1^\circ$ . Le seuil de détection expérimental correspond donc à  $\xi_d k_c = \tan(\pi/180)$  soit :

$$\xi_d = \frac{1}{k_c} \tan\left(\frac{\pi}{180}\right). \quad (8.26)$$

L'expression  $T_0 = \tau_{g0} \ln\left(\frac{\xi_d}{\xi_0}\right)$  conduit alors à :

$$T_0 = \frac{2}{\nu k_c^2} \ln\left(\frac{1}{\xi_0 k_c} \tan\left(\frac{\pi}{180}\right)\right). \quad (8.27)$$

Si on suppose que  $\xi_0$  varie peu avec  $k_c$ , comme  $k_c$  augmente lorsque  $f$  augmente,  $T_0$  doit diminuer lorsque la fréquence d'excitation  $f$  augmente. En ce qui concerne  $\delta$ , trop de facteurs (dépendance de  $\xi$  avec  $\epsilon$  et  $f$ , variation de la fréquence du cisaillement) sont à prendre en compte pour expliquer facilement sa diminution. Le facteur le plus important semble être la diminution de l'épaisseur  $e$  de la zone fortement cisailée lorsque  $k_c$  (et donc  $f$ ) augmente, ce qui entraîne une diminution de l'effet du rhéoépaississement avec la fréquence.

#### 8.4.2 Variation de la durée des vibrations préalables

On varie maintenant la durée  $t_v$  des vibrations préalables à  $\epsilon = 1$ . Pour cela, on secoue le fluide à  $\epsilon = 1$  pendant une durée  $t_v$ , puis on arrête les vibrations et on se place enfin à une distance fixée du seuil  $\epsilon = 0.05$ . Le motif apparaît alors après un temps  $t_a$ . On définit un écart asymptotique à la viscosité au repos  $\delta_\infty$  tel que  $\nu \xrightarrow{t_v \rightarrow \infty} \nu_0(1 + \delta_\infty)$ . De plus, on suppose que le temps d'épaississement et le temps de relaxation sont identiques et égaux à  $\tau$ . La viscosité à la fin de la période de vibrations préalables à  $\epsilon = 1$  s'écrit alors  $\nu = \nu_0(1 + \delta_\infty(1 - e^{-t_v/\tau}))$ . En reprenant les arguments développés au chapitre 8.3 page 139, on trouve que le temps d'apparition de l'instabilité vaut, si  $\delta_\infty(1 - e^{-t_v/\tau}) > 0.05$  :

$$t_a = \sqrt{2\tau T_0 \left(1 + \frac{1}{0.05}\right)} + \tau \ln\left(\frac{\delta_\infty(1 - e^{-t_v/\tau})}{0.05}\right), \quad (8.28)$$

et si  $\delta_\infty(1 - e^{-t_v/\tau}) < 0.05$  :

$$t_a = \tau \left(1 - \frac{0.05}{\delta_\infty(1 - e^{-t_v/\tau})}\right) + \sqrt{\tau^2 \left(1 - \frac{0.05}{\delta_\infty(1 - e^{-t_v/\tau})}\right)^2 + \frac{2T_0\tau}{\delta_\infty(1 - e^{-t_v/\tau})}}. \quad (8.29)$$

La figure 8.10 montre  $t_a$  en fonction de  $t_v$  ainsi que le meilleur ajustement obtenu grâce aux équations ci-dessus. On trouve que  $\tau$  est du même ordre de grandeur que celui mesuré à la section précédente ( $\tau \simeq 500$  s). De plus, on constate que pour  $t_v > 900$  s,  $t_a$  ne varie plus significativement. Le fluide atteint donc un état stationnaire sous vibration pour  $t \geq 900$  s, ce qui justifie a posteriori l'hypothèse du § 8.2.3, page 137.



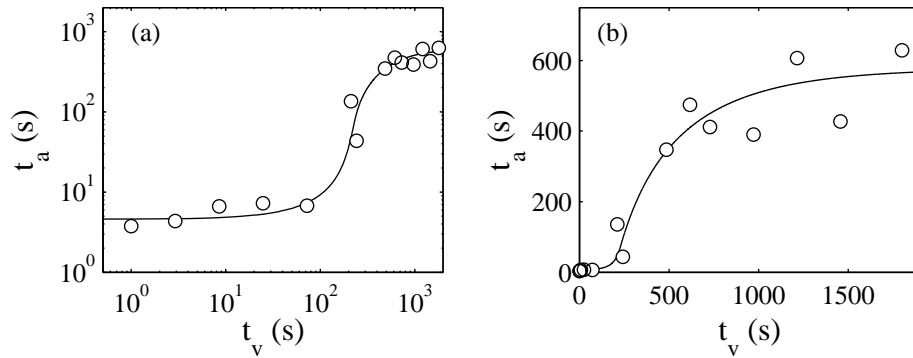


FIG. 8.10 – Temps d'apparition  $t_a$  en fonction de la durée  $t_v$  des vibrations préalables à  $\epsilon = 1$  pour une solution de CTAB–NaSal à 250 ppm vibrée à  $f = 100$  Hz. Les courbes en trait plein sont les ajustements de  $t_a$  par les équations (8.28) et (8.29) avec  $T_0 = 0.24$  s ;  $\tau = 461$  s ;  $a_0 = 13.5$  m.s<sup>-2</sup> et  $\delta_\infty = 0.149$ . (a) Représentation en échelles logarithmiques et (b) en échelles linéaires.

En conclusion, notre modèle à un temps caractéristique  $\tau$  reproduit qualitativement l'évolution de  $t_a$  en fonction de  $t_v$ . Cependant, on remarque que lorsque  $t_v$  est grand,  $t_a$  n'est plus monotone et semble fluctuer autour de la prédiction de notre modèle. Cette variabilité rappelle les différences observées d'une expérience de rhéologie à l'autre (cf section 8.1, page 133) et pourrait être liée à la difficulté d'obtenir un état parfaitement reproductible après que les oscillations soient stoppées.

### 8.4.3 Estimation du cisaillement

Pour obtenir un ordre grandeur du cisaillement imposé à notre fluide lorsque la surface est déstabilisée, nous réalisons des mesures de l'amplitude des ondes de surface (cf. section 3.2, page 49) à une fréquence d'excitation  $f = 88$  Hz. Après avoir estimé  $a_c$ , on augmente l'accélération de  $\epsilon = -0.5$  à  $\epsilon = 1$  par petites augmentations successives de  $a$ . Le fluide est vibré pendant 20 min à chaque valeur intermédiaire de  $a$ , et un film est réalisé sur une vingtaine de périodes des vibrations. On extrait de ces films l'amplitude  $\xi_0$  des ondes de surface ainsi que le nombre d'onde  $k$  selon la technique décrite § 3.2.2, page 51.

On estime alors le cisaillement à la surface par la formule  $\dot{\gamma} \propto k\xi_0\omega$ . La figure 8.11 présente le cisaillement estimé en fonction de l'écart au seuil. Le cisaillement induit par l'instabilité de Faraday est donc très important par rapport au cisaillement critique mesuré par Liu et Pine ( $\dot{\gamma} \simeq 5$  s<sup>-1</sup>) : pour  $\epsilon = 1$ , on trouve  $\dot{\gamma} \simeq 300$  s<sup>-1</sup>. Toutefois, ce cisaillement n'est pas permanent mais oscillant. En comparant une nouvelle fois les nombres sans dimension  $\dot{\gamma}\tau$  ( $\sim 2000$ ) et  $\xi k_c$  ( $\sim 0.5$ ), on comprend que  $\delta$  soit seulement de l'ordre de 0.1 pour une expérience d'instabilité de Faraday et qu'il atteigne des valeurs de l'ordre de 10 pour une expérience en cisaillement continu.

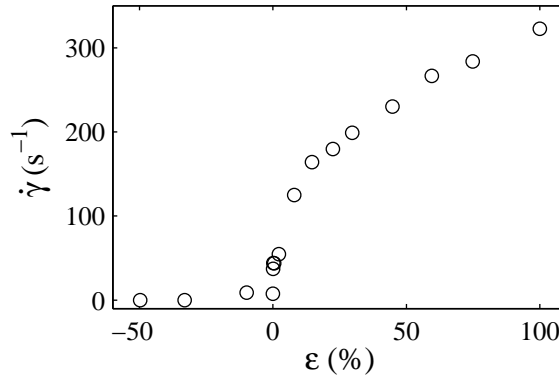


FIG. 8.11 – Cisaillement  $\dot{\gamma} = k\xi\omega$  en fonction de l'écart au seuil  $\epsilon$  pour une solution de CTAB–NaSal à 250 ppm vibrée à  $f = 88$  Hz.

## 8.5 Conclusion

Nous avons mis en évidence un processus de rhéoépaississement engendré par l'instabilité de Faraday via le cisaillement à la surface. De plus, nous avons montré que l'instabilité de Faraday est un bon moyen pour révéler de faibles variations de la viscosité grâce à la mesure du temps d'apparition des ondes de surface. Enfin, nous avons proposé un modèle à un temps caractéristique pour décrire le comportement du temps d'apparition après que le fluide ait été fortement vibré au préalable. Ce modèle reproduit quantitativement l'évolution du temps d'apparition  $t_a$  aussi bien avec l'écart au seuil  $\epsilon$  qu'avec la durée  $t_v$  des vibrations préalables. De plus, le temps caractéristique  $\tau \simeq 500$  s est parfaitement compatible avec le temps d'induction du rhéoépaississement déduit des mesures rhéologiques. Enfin, nous concluons ce chapitre plus succinct que les précédents par l'exposé d'un modèle simple tentant d'expliquer les observations expérimentales.



# Chapitre 9

## Cristal liquide : virus *fd*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'interaction microstructure-instabilité de Faraday dans une suspension de bâtonnets semi-flexibles (virus *fd*). Plus précisément, nous étudions l'alignement du vecteur directeur de ces bâtonnets induit par les ondes de surface. Les résultats présentés ci-dessous proviennent d'expériences réalisées en collaboration avec Pavlick Lettinga (FZ Jülich) et Eric Grelet (CRPP). Nos données expérimentales montrent que, lors d'une expérience de Faraday, les bâtonnets s'alignent dans la direction de l'écoulement. La suspension s'organise sur une bande de faible épaisseur au voisinage de la surface et cette organisation du fluide possède la même longueur caractéristique que l'onde de surface. Enfin, nous concluons ce chapitre plus succinct que les précédents par l'exposé d'un modèle simple tentant d'expliquer les observations expérimentales.

### 9.1 Présentation du système

Les virus *fd* sont un système modèle de bâtonnets semi-flexibles (voir par exemple [40]). Les virus sont très monodisperses, de longueur  $L_{fd} = 0.88 \mu\text{m}$  pour un diamètre de  $d_{fd} = 6.6 \text{ nm}$  et de longueur de persistance  $L_p = 2.2 \mu\text{m}$ . Les virus sont mis en suspension dans un tampon de Tris HCl de pH 8.15. À ce pH, les virus sont chargés avec une charge de surface de  $1 \text{ e}^- \cdot \text{nm}^{-1}$ . Pour écranter les interactions électrostatiques entre les virus, on rajoute du sel (NaCl) dans le tampon. On travaille ainsi à concentration ionique de 20 mM.

Les virus *fd* présentent, avec la concentration et la force ionique, un diagramme de phase complexe (voir figure 9.1). Nous nous intéressons ici uniquement à la transition isotrope–nématique<sup>1</sup>. En effet, cette transition d'alignement peut aussi être réalisée hors équilibre (cf. figure 9.2<sup>2</sup>) en soumettant le fluide à un cisaillement constant suffisamment important (voir par exemple [57]). Lorsque le fluide est cisailé, le directeur tend à s'aligner dans la

---

<sup>1</sup>En toute rigueur, il faudrait parler de transition isotrope–cholestérique mais comme la différence d'énergie libre entre les deux phases est faible, nous parlerons, comme c'est l'usage, de phase nématique lorsque nous ferons référence à la phase cholestérique.

<sup>2</sup>Le “tumbling” est une instabilité de bâtonnets rigides sous écoulement : lorsque le cisaillement est suffisamment important, le virus s'aligne dans la direction de l'écoulement et pour des cisaillements encore supérieurs le virus fait des “tête-à-queue” au cours du temps.

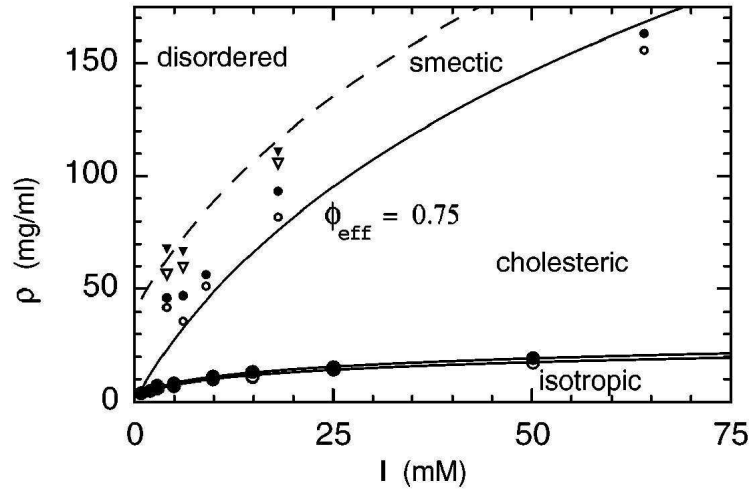


FIG. 9.1 – Diagramme de phases des suspensions de virus *fd* en fonction de la concentration et de la force ionique. Les suspensions de virus *fd* présentent une succession de phases : isotrope, cholestérique, smectique, et désordonnée à mesure que la concentration augmente. Figure extraite de la référence [29].

direction de l'écoulement, ce qui a pour effet de diminuer la viscosité de la suspension. Ainsi, comme le montre la figure 9.3, les suspensions de virus *fd* sont rhéofluidifiantes. De plus, la viscosité diminue aussi avec la concentration en virus.

Il est donc possible d'aligner les virus, et donc de transiter vers la phase nématique, à des concentrations inférieures à la concentration critique de transition isotrope–nématique. Cependant, il s'agit là d'une transition hors équilibre (à vitesse non nulle).

Comme nous l'avons déjà vu, la déformation de la surface par des ondes de surface au cours d'une expérience de Faraday engendre à la surface du fluide un cisaillement équivalent important. On peut donc s'attendre à un couplage du vecteur directeur avec le champ de vitesse induit par l'instabilité de Faraday. En utilisant les mêmes expériences que pour les solutions de micelles géantes, nous examinons dans ce qui suit le comportement de suspensions de virus *fd* soumises à des oscillations verticales.

## 9.2 Mesure de l'accélération et du nombre d'onde critiques

Nous réalisons des expériences de mesure de  $a_c$  et  $k_c$  en fonction de  $f$  pour des suspensions de virus *fd* à trois concentrations différentes : une concentration supérieure à la concentration critique de transition isotrope–nématique ( $c = 13.6 \text{ mg.mL}^{-1}$ ), une concentration très légèrement inférieure à la concentration critique ( $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$ ), et une concentration nettement inférieure à la concentration critique ( $c = 5.8 \text{ mg.mL}^{-1}$ ). Ces trois

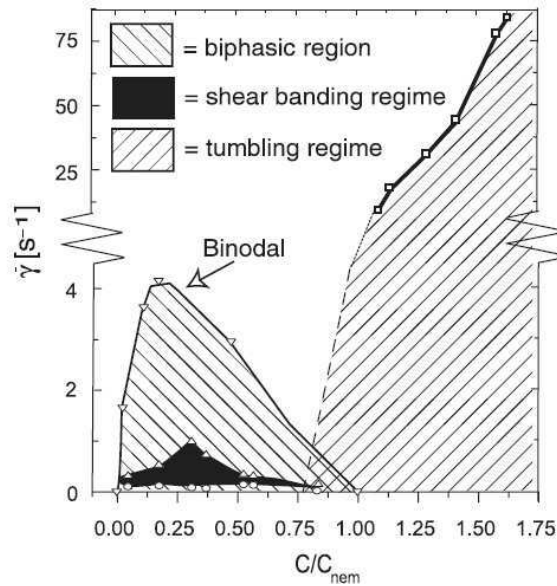


FIG. 9.2 – Diagramme de phases des suspensions de virus *fd* en fonction de la concentration normalisée par  $C_{nem}$  et du cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Les hachures descendantes indiquent la région biphasique. La région noire indique la zone de bandes de cisaillement. Les hachures ascendantes indiquent la zone de “tumbling”. Figure extraite de la référence [57].

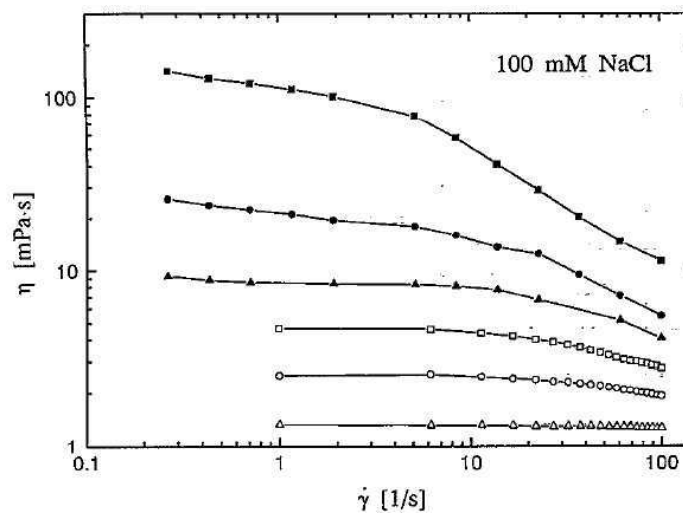


FIG. 9.3 – Viscosité  $\eta$  en fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  pour des suspensions de virus *fd* à  $c = 9.12 \text{ mg}\cdot\text{mL}^{-1}$  (carrés pleins),  $c = 4.04 \text{ mg}\cdot\text{mL}^{-1}$  (●),  $c = 2.68 \text{ mg}\cdot\text{mL}^{-1}$  (triangles pleins),  $c = 1.56 \text{ mg}\cdot\text{mL}^{-1}$  (□),  $c = 0.88 \text{ mg}\cdot\text{mL}^{-1}$  (○),  $c = 0.22 \text{ mg}\cdot\text{mL}^{-1}$  (△). Figure extraite de la référence [40].

concentrations ont été mesurées a posteriori avec Eric Grelet par spectroscopie d'absorption U.V. (Genesys 10 UV, ThermoElectron). Comme la concentration critique dépend fortement de la température, notre système est thermostaté à  $T = 20 \pm 0.1^\circ\text{C}$ .

Pour comparer nos résultats avec ceux obtenus dans un fluide simple, nous réalisons aussi une expérience de mesure de  $a_c$  et  $k_c$  pour un mélange eau(32%)–glycérol(68%). Le rapport d'eau et de glycérol est choisi tel que l'accélération critique soit similaire à celle obtenue dans notre suspension la plus concentrée. Les résultats des mesures de  $a_c$  et  $k_c$  (effectuées dans la cellule cylindrique décrite au chapitre 3, page 43) sont présentés sur la figure 9.4. Les mesures pour la suspension nématique sont réalisées en suivant le protocole présenté au chapitre 3, page 45. Nous verrons ci-dessous l'influence du protocole de mesure sur les deux autres suspensions de virus *fd*.

Comme pour un fluide simple (voir chapitre 3, page 48),  $a_c$  et  $k_c$  sont monotones. Cependant, au cours des mesures sur la suspension à  $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$ , nous avons remarqué que nous ne pouvons pas diminuer arbitrairement l'hystérésis sur la mesure de  $a_c$  en augmentant le temps d'attente dans le protocole de mesure. Or, nous avons vu au chapitre précédent que, pour un fluide simple, le temps d'apparition varie comme  $1/\epsilon$ , où  $\epsilon$  est l'écart à l'accélération critique. Le même raisonnement montre que le temps de disparition des ondes de surface lorsque  $\epsilon$  est négatif varie comme  $-1/\epsilon$ . Donc, la précision des mesures de  $a_c$  doit, pour un fluide simple, varier comme  $1/t$  où  $t$  est le temps d'attente entre deux variations de  $a$ , ce qui est vérifié expérimentalement pour un fluide simple. En revanche, pour notre suspension de virus *fd* à  $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$ , même en incrémentant  $a$  de 0.1% toutes les deux minutes, l'accélération à laquelle les ondes de surface apparaissent et l'accélération à laquelle elles disparaissent diffèrent d'au moins 2%. Dans la même configuration, l'hystérésis mesurée pour le mélange eau–glycérol est égale à la précision de nos mesures ( $< 0.1\%$ ). La présence d'hystérésis dans nos suspensions de bâtonnets rigides est donc certainement liée à l'existence d'une microstructure.

Pour comparer quantitativement la variation de l'hystérésis avec la concentration, on choisit le protocole expérimental suivant de mesure de  $a_c$  et  $k_c$  pour nos suspensions à  $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$  et  $c = 5.8 \text{ mg.mL}^{-1}$  ainsi que pour notre fluide de référence (mélange eau(32%)–glycérol(68%))<sup>3</sup> : on augmente  $a$  de 0.5% toutes les deux minutes jusqu'à apparition du motif. On attend alors une minute que le motif se stabilise, puis on diminue  $a$  de 0.5% toutes les deux minutes jusqu'à disparition du motif. La moyenne de l'hystérésis sur toute la gamme de fréquences étudiées (30–140 Hz) en fonction de la concentration en virus est présentée sur la figure 9.5. Les barres d'erreurs représentent l'écart-type de ces mesures d'hystérésis. La figure 9.5 présente aussi la mesure de l'hystérésis à 100 Hz réalisée dans la cellule parallélépipédique utilisée pour les expériences de biréfringence ( $L = 72 \text{ mm}$  et  $l = 6 \text{ mm}$ ) avec le protocole suivant : on augmente  $a$  de 0.1% toutes les deux minutes jusqu'à apparition du motif, puis on attend une minute que le motif se stabilise, enfin on diminue  $a$  de 0.1% toutes les deux minutes jusqu'à disparition du motif.

Pour ces deux types de mesure, on constate que l'hystérésis augmente avec la concentra-

---

<sup>3</sup>La suspension à  $c = 13.6 \text{ mg.mL}^{-1}$  ayant été diluée pour réaliser les deux autres suspensions, il ne nous a pas été possible d'effectuer les mesures de seuil en suivant ce protocole à cette concentration.

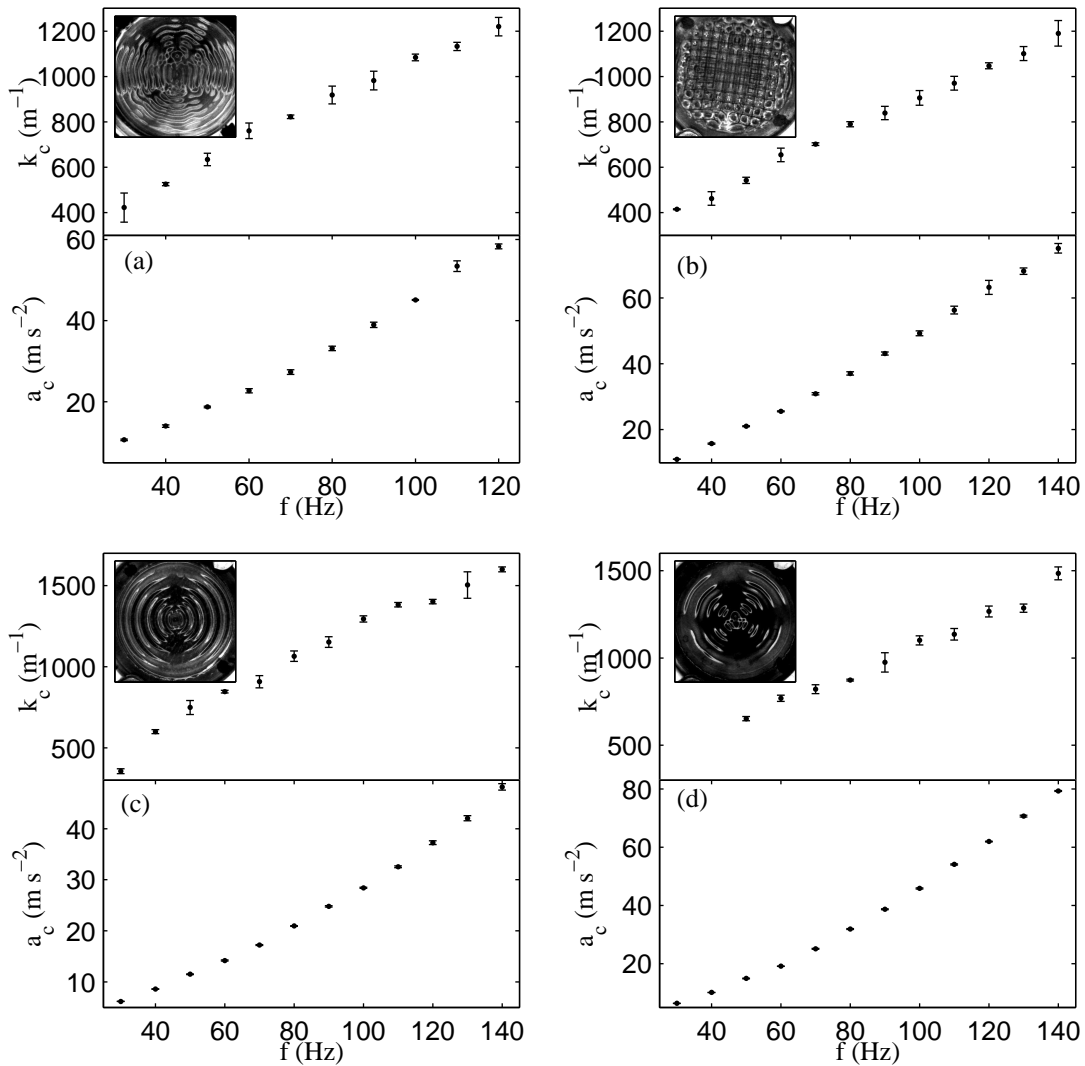


FIG. 9.4 – Accélération et nombre d'onde critiques en fonction de la fréquence d'excitation pour (a) une suspension de virus  $fd$  dans la phase nématique ( $c = 13.6 \text{ mg.mL}^{-1}$ ), (b) une suspension de virus  $fd$  dans la phase isotrope proche de la transition isotrope-nématique ( $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$ ), (c) une suspension de virus  $fd$  dans la phase isotrope ( $c = 5.8 \text{ mg.mL}^{-1}$ ) et (d) un mélange eau-glycérol (32–68%). Inserts : image de la surface pour  $a$  légèrement supérieur à  $a_c$  ( $\epsilon \simeq 0.01$ ) et  $f = 100$  Hz.

tion jusqu'à la concentration critique, puis diminue. L'hystérésis est maximale pour notre suspension isotrope proche du seuil. Nous pensons que cette hystérésis est la signature d'un alignement des bâtonnets dans la direction de l'écoulement induit par les ondes de surface. En effet, cet alignement abaisse la viscosité du fluide proche de la surface ce qui diminue l'accélération critique. En diminuant l'accélération, on diminue la taille des ondes de sur-



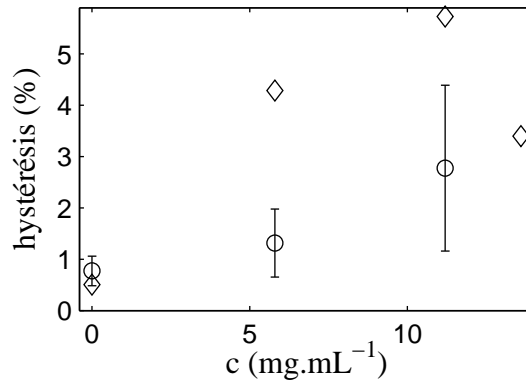


FIG. 9.5 – Amplitude de l’hystérésis en cellule cylindrique moyennée sur l’ensemble des fréquences (○) et à  $f = 100$  Hz en cellule parallélépipédique (◇) en fonction de la concentration en virus *fd*. Les données à  $c = 0$  correspondent au mélange eau(32%)–glycérol(68%).

face, donc le cisaillement. Cependant, tant que le cisaillement est suffisant pour aligner une couche de fluide, la surface reste déstabilisée. Il faut nettement diminuer l’accélération pour que les vagues disparaissent complètement, d’où l’hystérésis.

Pour confirmer ce scénario, nous réalisons des expériences de mesure d’amplitude et de biréfringence.

### 9.3 Mesure de l’amplitude des ondes de surface

On réalise des mesures d’amplitude et de longueur d’onde des ondes de surface en utilisant la méthode décrite au § 3.2 (page 51). Les résultats de ces mesures sont présentés en fonction de l’accélération sur la figure 9.6. Dans cette configuration, il y a aussi un phénomène d’hystérésis important sur l’accélération critique (cf. figure 9.5). L’hystérésis est encore plus remarquable sur les mesures d’amplitude. Pour les trois suspensions de virus *fd*, lorsque le motif apparaît, l’amplitude des ondes de surface est déjà importante voire saturée (cf. figure 9.6(b)).

Pour les deux suspensions isotropes, lorsque l’accélération diminue, l’amplitude diminue légèrement avant de passer brutalement à zéro (cf. figure 9.6(b) et (c)). Pour la suspension nématique, l’amplitude diminue sensiblement plus que dans le cas des suspensions isotropes avant de tomber à zéro, de sorte que le cycle d’hystérésis est nettement plus petit. Nous montrerons dans la suite (§ 9.6, page 157) que cela est sûrement relié à un temps de réorientation des virus dans la phase nématique nettement plus long que ce même temps dans la phase isotrope.

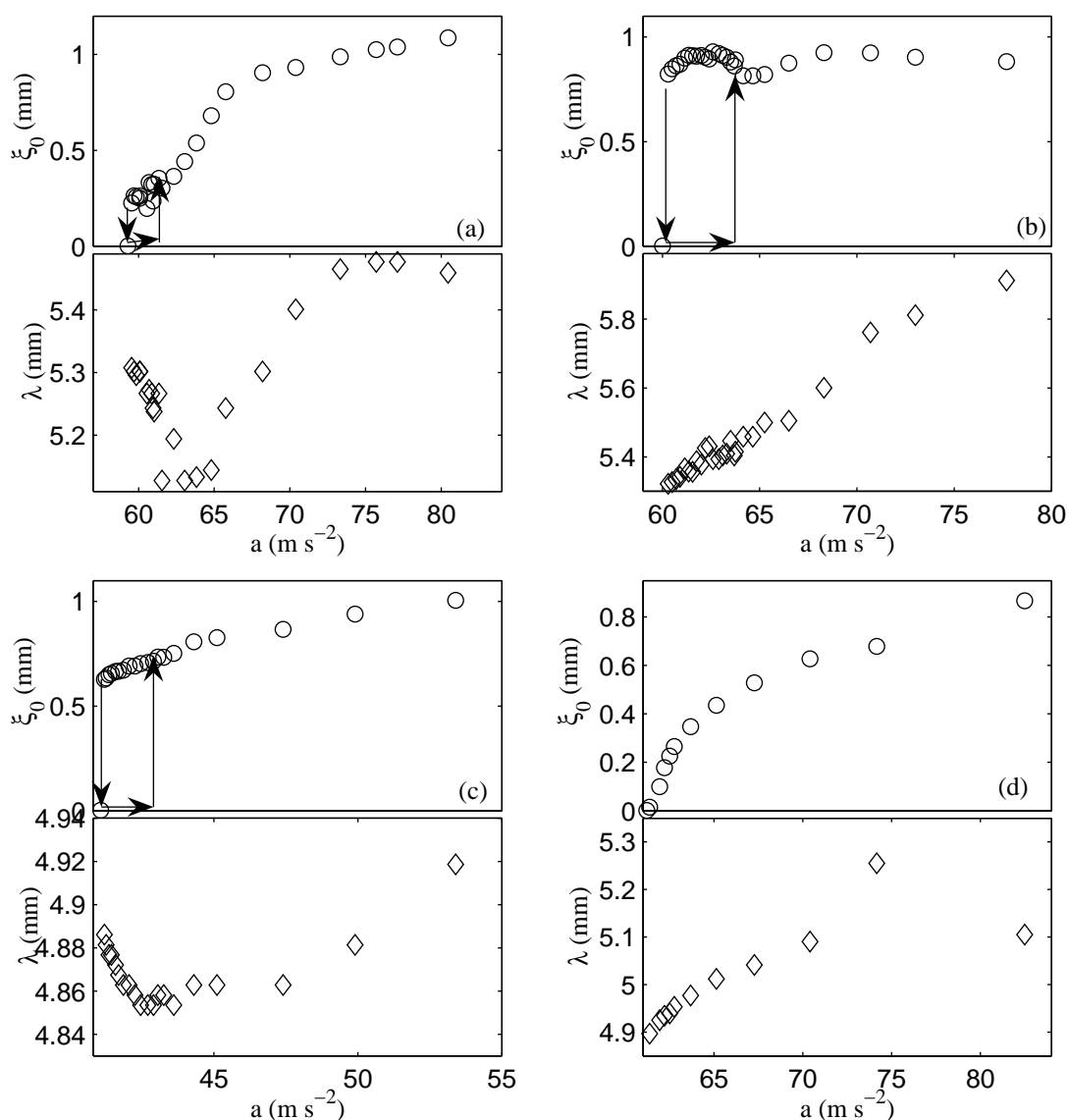


FIG. 9.6 – Amplitude des déformations de la surface ( $\circ$ ) et longueur d'onde ( $\diamond$ ) en fonction de l'accélération pour (a) une suspension de virus *fd* dans la phase nématique ( $c = 13.6 \text{ mg.mL}^{-1}$ ), (b) une suspension de virus *fd* dans la phase isotrope proche de la transition isotrope–nématique ( $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$ ), (c) une suspension de virus *fd* dans la phase isotrope ( $c = 5.8 \text{ mg.mL}^{-1}$ ) et (d) un mélange eau(32%)–glycérol(68%).

## 9.4 Mesure de la biréfringence

En croisant les polariseurs, des mesures de biréfringence sont réalisées en même temps que les mesures d'amplitude. Pour les suspensions isotropes, une bande biréfringente apparaît à la surface lorsque la surface se déstabilise (cf. figure 9.7(a) et (d)). La taille de

cette bande croit lorsque l'accélération augmente (cf. figure 9.7(b), (c), (e) et (f)). Lorsque les ondes de surface disparaissent, ces zones biréfringentes disparaissent aussi.

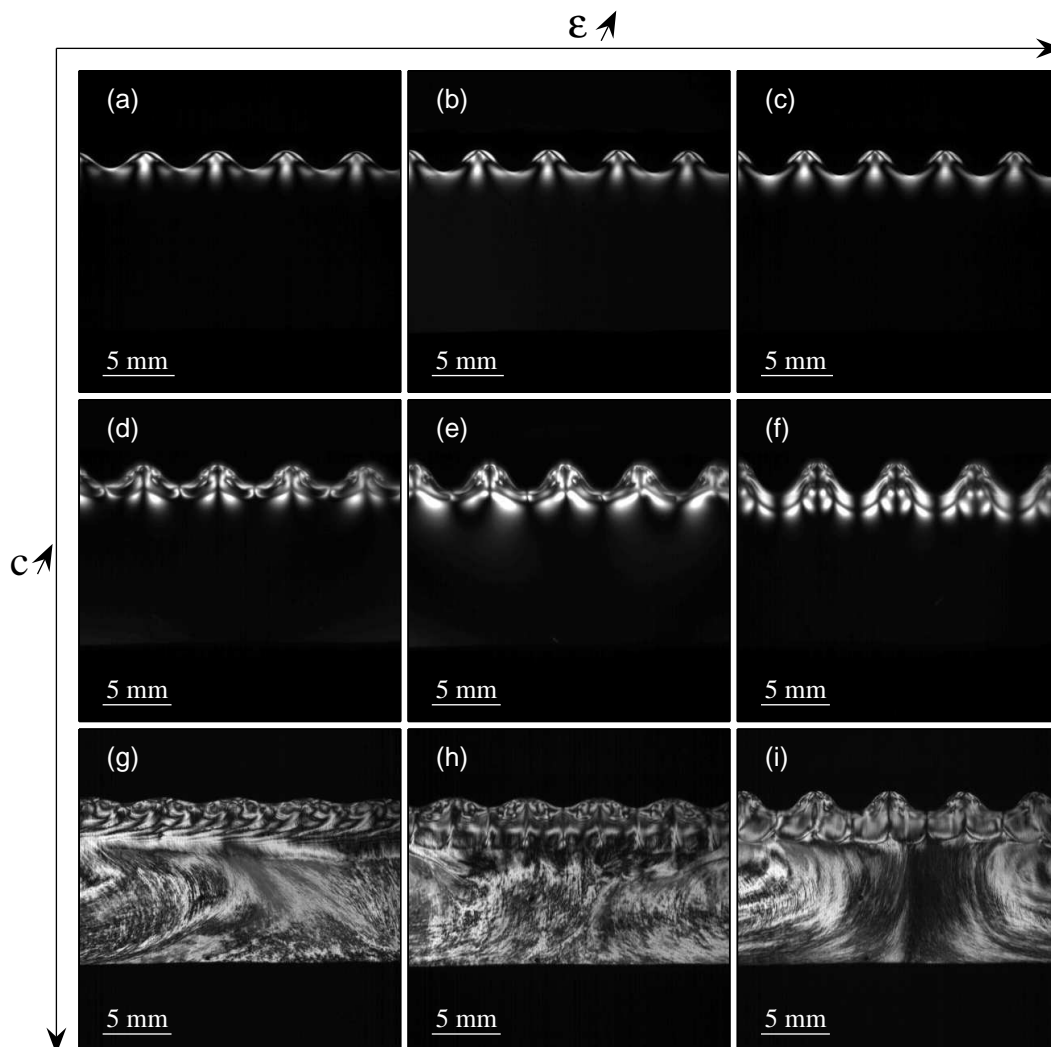


FIG. 9.7 – Images de biréfringence filmées par la caméra rapide pour : une suspension de virus *fd* dans la phase isotrope ( $c = 5.8 \text{ mg.mL}^{-1}$ ) à (a)  $\epsilon = 0.1\%$ , (b)  $\epsilon = 5.1\%$ , (c)  $\epsilon = 15.2\%$ ; une suspension de virus *fd* dans la phase isotrope proche de la transition isotrope–nématique ( $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$ ) à (d)  $\epsilon = 0.1\%$ , (e)  $\epsilon = 5.1\%$ , (f)  $\epsilon = 17.4\%$ ; une suspension de virus *fd* dans la phase nématique ( $c = 13.6 \text{ mg.mL}^{-1}$ ) à (g)  $\epsilon = 0.1\%$ , (h)  $\epsilon = 4.8\%$ , (i)  $\epsilon = 14.7\%$ .

Lorsque des vagues apparaissent à la surface de la suspension nématique, le fluide s'organise sur une bande proche de la surface (cf. figure 9.7(g)). Dans cette bande proche de la surface, le directeur s'oriente dans la direction de l'écoulement et a donc, dans le plan

$(x, y)$ , une périodicité spatiale égale à la longueur d’onde de l’instabilité, alors que pour le fluide au repos les bâtonnets sont alignés sur de petits domaines mais n’ont pas de direction privilégiée comme en témoigne la “texture” observée près du fond de la cellule. Lorsque les vagues apparaissent, les bâtonnets s’orientent dans la direction de l’écoulement, ce qui diminue la viscosité du fluide. Mais contrairement aux suspensions initialement isotropes, les bâtonnets restent alignés dans le sens de l’écoulement lorsque l’amplitude des vagues diminue et la viscosité reste faible. La surface reste donc déstabilisée pour des amplitudes plus faibles que celle nécessaire à l’alignement des bâtonnets. Il est aussi intéressant de noter que lorsque les vagues disparaissent, les virus restent alignés dans le sens de l’écoulement pendant plusieurs minutes. On peut alors se demander pourquoi l’hystérésis est plus faible dans la suspension nématique que dans la suspension isotrope proche de la transition. Une explication possible est proposée ci-dessous § 9.6, page 157.

La différence de comportement entre suspension isotrope et nématique est reliée au temps de réorientation de la phase nématique dans ces suspensions, quelques secondes pour nos suspensions isotrope et “infini” pour une suspension nématique. Or, ce temps de réorientation diverge à l’approche de la transition isotrope–nématique. En se plaçant à une concentration quasi-identique à la concentration critique, il devrait être possible d’obtenir une zone nématique stationnaire au sein d’un fluide isotrope.

## 9.5 Effet “redressé” au voisinage de la transition isotrope–nématique

Pour tester l’hypothèse précédente, Pavlik Lettinga nous a préparé une suspension de virus  $fd$  la plus proche possible de la transition isotrope–nématique tout en restant dans la phase isotrope (la concentration de cette suspension n’a pas été mesurée). Nous comparons l’évolution de la bande nématique engendrée par les ondes de surface de cette solution à celle de la suspension à  $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$ . Pour cela, on réalise une expérience de biréfringence à  $f = 100 \text{ Hz}$  et  $\epsilon = 0.1$  pour les deux suspensions et on enregistre un film de 300 images à 1000 images par seconde, soit une trentaine de périodes. Dans les deux cas, une zone fortement biréfringente apparaît près de la surface (voir figure 9.8). Pour la suspension à  $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$  les zones brillantes sont situées juste sous la surface (cf. figure 9.8(a)), alors que pour la suspension proche du seuil il existe une zone biréfringente située nettement en dessous de la zone de pénétration des vagues, représentée dans la figure 9.8(b) entre la ligne pointillée et la ligne discontinue. La luminosité de cette zone n’oscille presque pas dans le temps, contrairement à l’intensité des zones brillantes de la suspension à  $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$  qui oscille à la fréquence d’excitation  $f$ .

Pour mieux représenter ce phénomène, on recherche le pixel dans l’image dont l’intensité moyenne est maximale et on suit l’évolution dans le temps de l’intensité de ce pixel. La figure 9.9 présente les variations de l’intensité du pixel le plus lumineux dans le temps. On voit que l’intensité normalisée  $(\frac{I}{\langle I \rangle_t} - 1)$  varie beaucoup moins pour la suspension la plus proche de la transition isotrope–nématique que pour la solution à  $c = 11.2 \text{ mg.mL}^{-1}$

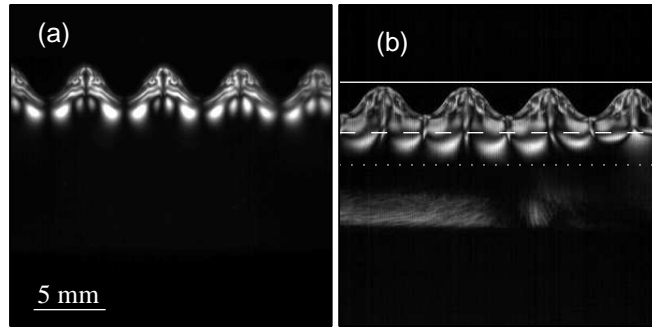


FIG. 9.8 – Images enregistrées par la caméra rapide pour des suspensions de virus *fd* vibrées à  $f = 100$  Hz et à  $\epsilon = 0.1$  pour (a) la suspension à  $c = 11.2$  mg.mL $^{-1}$  et (b) la suspension la plus proche du seuil.

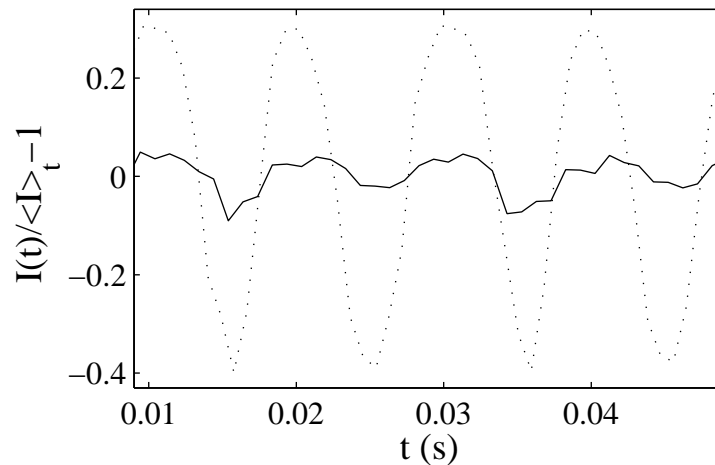


FIG. 9.9 – Intensité normalisée du pixel le plus lumineux en fonction du temps, pour une suspension de virus *fd* à  $c = 11.2$  mg.mL $^{-1}$  (ligne pointillée) et pour la suspension la plus proche possible de la transition isotrope–nématique (ligne continue).

(5% contre 30%). En d'autres termes, le champ de biréfringence reste constant lorsque la concentration de la suspension est suffisamment proche du seuil, alors que l'intensité oscille à  $f$  si la concentration en virus *fd* s'éloigne de la transition. Le temps de réorientation des virus semble donc bien être le critère déterminant pour obtenir des zones nématiques stables au cours de l'instabilité de Faraday.

## 9.6 Modélisation du phénomène d'hystérésis

Dans cette section, nous essayons de modéliser simplement le comportement des suspensions de virus *fd* sous vibration. En particulier, nous montrons qu'il est possible de comprendre la présence simultanée d'une couche alignée selon l'écoulement induit par les ondes de surface et d'une couche au repos.

Supposons d'abord qu'il existe un cisaillement équivalent critique  $\dot{\gamma}_s$  au-dessus duquel se produit l'alignement des bâtonnets avec l'écoulement. De plus, dans une première approximation, la vitesse et donc le cisaillement diminuent avec la profondeur  $z$  comme  $e^{-kz}$ , et à la surface, le cisaillement équivalent vaut  $\xi k\omega$ . Finalement, le cisaillement peut s'écrire :

$$\dot{\gamma}(z) = \xi k\omega e^{-kz}. \quad (9.1)$$

D'autre part les images de biréfringence (cf. figure 9.7, page 154) nous incitent à penser que, sous vibration, l'échantillon est constitué d'une couche alignée organisée par les ondes au voisinage de la surface et que le reste de l'échantillon conserve la même structure que le fluide au repos. La position de l'interface entre la couche organisée et le fluide "au repos" se trouve en  $z_s$  tel que  $\dot{\gamma}(z_s) = \dot{\gamma}_s$ . L'équation (9.1) conduit à :

$$z_s = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{\xi k\omega}{\dot{\gamma}_s} \right). \quad (9.2)$$

Il nous reste à relier l'amplitude  $\xi$  des ondes de surface et l'accélération  $a$  des vibrations. Pour cela, on rappelle la relation entre l'écart à l'accélération critique et l'amplitude des ondes de surface :

$$\xi = l_\xi \sqrt{\epsilon}, \quad (9.3)$$

où  $l_\xi$  est une longueur caractéristique. Cependant,  $\epsilon$  dépend de  $z_s$ . En effet, le seuil d'instabilité dépend de l'épaisseur  $z_s$  de la couche de fluide aligné. On choisit la relation la plus simple possible entre  $a_c$  et  $z_s$ , i.e. une relation linéaire :

$$a_c = a_0 - \delta a_c \frac{z_s}{h}, \quad (9.4)$$

où  $a_0$  est l'accélération critique pour une couche de hauteur  $h$  de fluide "au repos",  $a_0 - \delta a_c$  l'accélération critique d'une couche de hauteur  $h$  de fluide aligné. Cette approximation est évidemment fautive dès que  $h$  ou  $z_s$  sont suffisamment grands mais elle nous paraît pratique pour fixer les idées. En utilisant les équations (9.2) et (9.4), on trouve comme équation pour  $z_s$  :

$$z_s = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{l_\xi k\omega}{\dot{\gamma}_s} \sqrt{a - a_0 + \delta a_c \frac{z_s}{h}} \right). \quad (9.5)$$

Nous résolvons numériquement cette équation implicite sur  $z_s$  pour des valeurs typiques des paramètres (voir figure 9.10). Pour  $a - a_0 > 0$ , on constate qu'il n'y a qu'une profondeur  $z_s$  possible. De même, il existe une accélération minimale  $a_{min}$  en dessous de laquelle le seul point stable est  $z_s = 0$ . On remarque que  $a_{min}$  est plus grand que  $a_0 - \delta a_c$ . Par

contre, si  $a_{min} < a - a_0 \leq 0$  trois solutions sont possibles, deux solutions stables séparées par une solution instable. La profondeur correspondant à la première solution stable est évidemment  $z_s = 0$ . En effet, si  $a < a_0$  et  $z_s = 0$  le fluide ne se déstabilise pas. La seconde valeur stable augmente lorsque  $a$  augmente : la taille de la zone alignée augmente avec l'accélération.

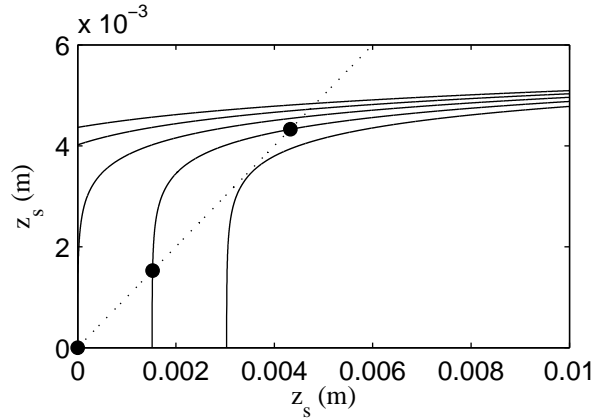


FIG. 9.10 – Profondeur tirée de l'équation (9.5) en fonction de  $z_s$  pour  $\frac{a-a_0}{a_0}$  valant de haut en bas 0.02, 0.01, 0,  $-0.01$ ,  $-0.02$ , avec :  $h = 0.01$  m,  $f = 100$  Hz,  $a_0 = 50$  m.s $^{-2}$ ,  $\delta a_c = 3.3$  m.s $^{-2}$ ,  $l_\xi = 0.0025$  m et  $\dot{\gamma}_s = 10$  s $^{-1}$ . Les points noirs représentent les solutions de l'équation (9.5) pour  $\frac{a-a_0}{a_0} = 0.01$ .

Le modèle simple proposé ci-dessus explique la présence d'une hystérésis importante sur nos mesures : lorsque l'accélération dépasse l'accélération critique, il se forme une bande alignée de hauteur  $z_s$ . Lorsque l'accélération diminue et passe en dessous de  $a_0$ , il existe, sur une certaine gamme d'accélération, une hauteur  $z_s$  non nulle et inférieure à  $z_s(a_0)$  pour laquelle la surface est déstabilisée. Comme cette configuration est stable, la surface reste déstabilisée. La figure 9.11 montre l'évolution avec  $\epsilon_1 = \frac{a-a_0}{a_0}$  des solutions stables et instables de l'équation (9.5). Pour un  $\epsilon_1$  donné, en partant d'une surface plate, si l'épaisseur de la bande alignée est supérieure à la solution instable de l'équation (9.5), la surface se déstabilise. De même, si l'épaisseur de la bande alignée est inférieure à la solution instable, la surface reste plate ou si elle est déstabilisée, les ondes de surface disparaissent. Enfin, lorsque l'accélération passe en dessous de l'accélération  $a_{min}$ , il n'y a plus de hauteur  $z_s$  non nulle stable, les ondes de surface disparaissent.

Notre modèle permet aussi de comprendre pourquoi l'hystérésis est plus petite pour le fluide nématique que pour le fluide isotrope. En effet, lorsque l'on cherche précisément  $a_c$  expérimentalement, on passe souvent au-dessus et en dessous de cette valeur. Dans le cas de suspensions isotropes, la rapide désorientation des virus nous assure que l'accélération critique maximum trouvée est bien  $a_0$ . Mais dans le cas d'une suspension nématique ces allers et retours autour de  $a_0$  alignent le fluide localement et cet alignement peut persister plusieurs minutes. La présence d'une bande alignée près de la surface conduit à une accé-

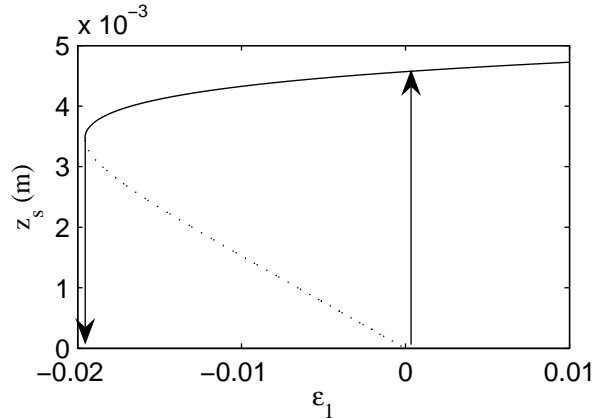


FIG. 9.11 – Profondeur de la bande alignée en fonction de l'écart à l'accélération critique de la couche de fluide au repos  $\epsilon_1 = \frac{a-a_0}{a_0}$ , pour la profondeur stable (ligne continue) et la profondeur instable (ligne en pointillés).

lération maximale mesurée inférieure à  $a_0$  : l'hystérésis est plus petite. La taille plus faible du cycle d'hystérésis dans le cas d'une suspension nématique résulte donc d'un temps de réorientation plus long, paramètre dynamique qui n'est pas pris en compte dans le modèle.

Notons que notre modèle reste très qualitatif. En particulier l'équation (9.4) est beaucoup trop simplificatrice. Une solution plus correcte serait de calculer  $a_c$  pour une superposition de deux couches de fluide à fréquence d'excitation fixée et de varier les hauteurs de chaque couche. On trouverait ainsi une relation  $a_c(z_s)$  plus proche des conditions réelles.

## 9.7 Conclusion

Les expériences présentées dans ce chapitre montrent qu'il est possible de structurer une suspension de virus *fd* par l'intermédiaire de l'instabilité de Faraday. Bien que nous n'ayons pas eu le temps de le faire au cours de cette thèse, il serait intéressant de réaliser des expériences similaires avec des cellules plus petites et plus légères, pour pouvoir atteindre des fréquences plus élevées et voir s'il est possible de structurer le fluide sur des échelles plus petites de l'ordre de 0.5 mm contre 5 mm dans les expériences montrées ci-dessus. Enfin, des expériences complémentaires seraient nécessaires pour interpréter complètement les effets mis en évidence ici et affiner le modèle proposé.





## Conclusion et perspectives

Au cours de ce travail, nous avons mis en évidence une forte interaction entre la microstructure de divers fluides complexes et une instabilité hydrodynamique classique, l'instabilité de Faraday. Pour ce faire, nous avons adapté des techniques de vélocimétrie et de biréfringence à l'étude en volume d'une couche de fluide vibrée verticalement. En combinant ces nouvelles techniques à des mesures classiques d'accélération et de nombre d'onde critiques, nous avons montré que dans les solutions de micelles géantes étudiées en partie II, l'interaction microstructure-instabilité se traduit par la présence d'une "onde stationnaire élastique" dans le volume. La présence de cette onde selon la direction verticale entraîne des oscillations de l'accélération et du nombre d'onde critiques avec la fréquence. Il faut alors prendre en compte un système tridimensionnel, comme le prouvent les expériences de biréfringence et de vélocimétrie. Ces expériences mettent clairement en évidence la présence de rouleaux "élastiques" structurés horizontalement avec la même longueur d'onde que la surface et structurés verticalement selon une longueur d'onde bien définie dépendant de la fréquence et de la rhéologie du fluide. De plus, la comparaison des résultats expérimentaux et de l'analyse de stabilité linéaire confirme notre hypothèse d'"onde stationnaire élastique". Toutefois, les divergences entre les valeurs de l'accélération critique issues du calcul numérique et de l'expérience semblent indiquer la présence d'interactions plus subtiles entre la modification de la structure et la rhéologie de nos fluides à des fréquences supérieures à 20 Hz. Enfin, nous avons déduit des expériences de biréfringence au-dessus du seuil d'instabilité que la microstructure de nos solutions de micelles géantes n'est pas modifiée par l'écoulement induit par les ondes de surface. Avant le régime chaotique, le réseau est déformé par l'écoulement de compression-dilatation induit par les ondes de surface, mais n'est pas détruit : les solutions de micelles géantes restent dans la phase isotrope au cours d'une expérience de Faraday.

Au contraire, pour les fluides étudiés dans la partie III, le cisaillement à la surface de notre couche de fluide est suffisant pour modifier fortement la microstructure. Dans le cas de micelles géantes dans le régime dilué, nous avons montré que le cisaillement induit par la déformation de la surface est suffisamment important pour déclencher le phénomène de rhéoépaississement. Cet effet a été mis en évidence grâce à des expériences de mesure du temps d'apparition des ondes de surface. Ce temps augmente parfois de deux ordres de grandeur lorsque le fluide est soumis à des vibrations préalables au-dessus du seuil d'instabilité. Nous avons alors proposé un modèle basé sur un mécanisme de relaxation de la viscosité avec le temps et prouvé que ce modèle reproduisait qualitativement les résul-

tats observés. Enfin, pour les suspensions de virus *fd*, nous avons visualisé l'organisation du fluide sur une longueur caractéristique égale à la longueur d'onde de l'instabilité de Faraday et montré que plus la concentration en virus est proche de la concentration de transition isotrope–nématique à l'équilibre plus l'organisation est stable dans le temps. Une autre conséquence de cette organisation est la présence d'hystérésis dans les mesures d'accélération critique et d'amplitude des ondes de surface. Cette hystérésis est d'autant plus grande que le système s'approche de la transition isotrope–nématique.

Nous avons donc prouvé qu'il est possible de structurer un fluide complexe à l'aide d'une instabilité hydrodynamique. Cependant, un bon contrôle de cette structuration nécessite une connaissance approfondie de la rhéologie aussi bien linéaire que non-linéaire du fluide complexe.

Dans le futur, il serait intéressant d'approfondir les résultats obtenus sur les virus *fd*. En particulier, un modèle théorique ou numérique de l'alignement des virus dans un écoulement oscillant et la comparaison des résultats expérimentaux obtenus au cours de cette thèse à ce modèle permettraient sûrement de déterminer une concentration optimale de virus pour obtenir l'effet redressé mis en évidence au § 9.5. D'un point de vue plus pratique, mettre au point une méthode pour geler le système dans un état ordonné permettrait de remonter à l'organisation locale des virus.

Nous pourrions aussi changer de type de suspension. Les suspensions de colloïdes ainsi que les suspensions de matériaux granulaires présentent sous oscillations des propriétés de vieillissement, mais aussi de fluidisation. Une même suspension peut alors présenter simultanément deux aspects, un aspect solide et un aspect fluide. Lors d'une expérience de Faraday, il serait intéressant d'étudier le comportement de telles suspensions à l'interface entre les phases, et/ou entre la couche sédimentée et le fluide suspendant. Dans ces zones, il pourrait y avoir présence d'ondes de surface.

Enfin, il est aussi envisageable de changer d'instabilité. Par exemple, les instabilités de Bénard-Marangoni ou de Rayleigh-Bénard ont aussi un état de référence à vitesse nulle et possèdent une longueur d'onde caractéristique. Leur principale différence par rapport à l'instabilité de Faraday est la stationnarité des rouleaux au voisinage du seuil. On peut alors s'attendre à une interaction structure-instabilité évoluant sur des temps long (alors que le caractère oscillant inhérent à l'instabilité de Faraday implique des couplages aux temps courts). Des transitions de type isotrope–nématique seraient ainsi envisageables pour des cisaillement bien inférieurs à ceux mis en jeu dans nos expériences de Faraday.

# Quatrième partie

## Annexes



# Annexe A

## Rappel sur la rhéologie classique d'une solution de micelles géantes

Dans cette partie regroupant trois annexes, nous présentons des résultats originaux obtenus sur des solutions de micelles géantes de CPCI–NaSal sous cisaillement. Après un rapide rappel des résultats de rhéologie linéaire et non-linéaire classique dans l'annexe A, nous présenterons ensuite des résultats sur la superposition d'un cisaillement oscillant à un cisaillement constant dans le régime isotrope et dans le régime de "shear-banding". Dans l'annexe B, nous développerons un modèle simple pour expliquer comment la présence de deux bandes de cisaillement modifie les expériences de superposition. Dans cette même annexe, nous montrerons qu'un léger changement dans l'ajustement classique de la courbe d'écoulement permet d'ajuster correctement les courbes de rhéologie de superposition dans le régime isotrope. Enfin, dans l'annexe C, nous démontrons la validité de notre modèle grâce à des expériences de vélocimétrie ultrasonore. Dans ce qui suit, on rappelle les caractéristiques rhéologiques remarquables des solutions de micelles géantes à partir de données expérimentales obtenues sur une solution de CPCI–NaSal à 4%.

### A.1 Rhéologie linéaire

On a déjà vu (section 4.2, page 74) que la rhéologie linéaire d'une solution de micelles géantes est bien décrite par un fluide de Maxwell. Sa viscosité complexe est très bien approchée par la formule :

$$\eta(\omega) = \frac{G_0\tau}{1 + i\omega\tau} + \eta_s, \quad (\text{A.1})$$

où  $G_0$  est le module élastique,  $\tau$  le temps de relaxation et  $\eta_s$  la viscosité du solvant. Dans la suite, nous nous intéressons surtout à la viscosité complexe  $\eta$  que nous écrivons :

$$\eta(\omega) = \frac{\eta_0}{1 + i\omega\tau} + \eta_s, \quad (\text{A.2})$$

avec  $\eta_0 = G_0\tau$ . La viscosité du solvant est fixée égale à celle de l'eau  $\eta_s = 1$  mPa.s.

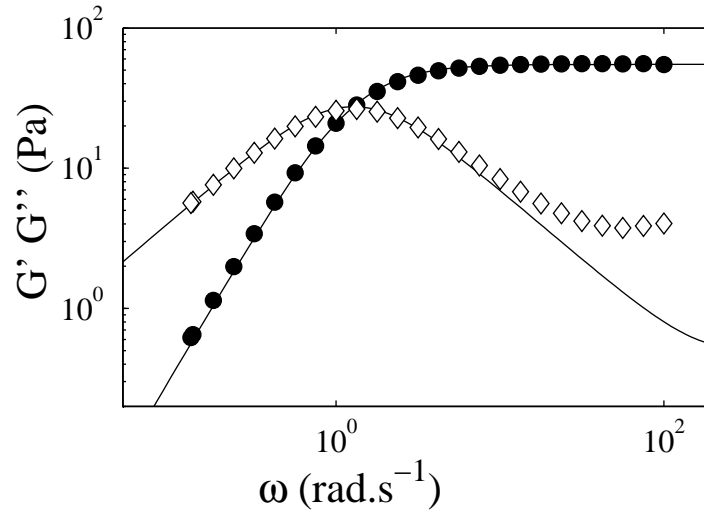


FIG. A.1 – Modules viscoélastiques d’une solution de CPCI–NaSal à 4%.  $G'$  ( $\bullet$ ),  $G''$  ( $\diamond$ ) en fonction de la fréquence  $\omega$ . Les lignes continues représentent le meilleur ajustement par un fluide de Maxwell avec  $G_0 = 43$  Pa et  $\tau = 0.78$  s.

La figure A.1 montre les mesures des modules viscoélastiques  $G'$  et  $G''$  (définis au § 2.1.3, page 30) obtenues sur une solution de CPCI–NaSal à 4%. La mesure est effectuée en géométrie de Couette avec un rhéomètre à contrainte imposée (AR2000, TA Instruments). Comme nous l’avons déjà notée au § 4.2, page 74, l’ajustement par un modèle de Maxwell est parfait pour  $G'(\omega)$  et rend très bien compte de  $G''(\omega)$  tant que  $\omega < 60$  rad.s $^{-1}$ .

## A.2 Rhéologie non-linéaire

### A.2.1 “Shear–banding” entre deux plans infinis

Nous avons déjà vu (section 4.2, page 76) que les micelles géantes possèdent une contrainte critique  $\sigma^*$  au-delà de laquelle elles subissent une transition d’alignement caractérisée par un saut du cisaillement de  $\dot{\gamma}_I$  à  $\dot{\gamma}_N$  lorsqu’on impose une contrainte constante.

À cisaillement imposé, lorsque  $\dot{\gamma}_I \leq \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_N$ , l’écoulement se sépare en plusieurs bandes de structure isotrope et nématique, c’est le phénomène de “shear-banding”. Les micelles dans la phase isotrope sont enchevêtrées et désordonnées. Dans la phase nématique, elles s’alignent et se desenchevêtrent : elles possèdent ainsi une viscosité  $\eta_N = \frac{\sigma^*}{\dot{\gamma}_N}$  très inférieure à la viscosité de la phase isotrope  $\eta_I = \frac{\sigma^*}{\dot{\gamma}_I}$ . La transition d’alignement est donc très fortement rhéofluidifiante. L’épaisseur totale des bandes nématiques à l’équilibre vaut [80] :

$$h_N = e \frac{\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_I}{\Delta \dot{\gamma}}, \quad (\text{A.3})$$

avec  $e$  l'épaisseur de l'entrefer, et  $\Delta\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_N - \dot{\gamma}_I$  la taille du plateau de contrainte. La relation (A.3) est souvent appelée "loi du levier" (par analogie avec la règle de Maxwell pour les transitions de phase à l'équilibre).

On définit alors le paramètre d'ordre :

$$\alpha = \frac{h_N}{e}. \quad (\text{A.4})$$

$\alpha = 1$  correspond à un fluide entièrement nématique et  $\alpha = 0$  correspond à un fluide isotrope. Au cours de la transition à cisaillement imposé,  $\alpha$  passe continûment de 0 à 1.

On montrera plus loin (section B.2.3, page 180) que lorsque  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_I$ ,  $\sigma$  suit la loi empirique :

$$\sigma = \eta_0 \dot{\gamma} \frac{1 + \frac{\tau_1 \tau_2 \dot{\gamma}^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}}}{1 + \frac{\tau_1^2 \dot{\gamma}^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}}} + \eta_S \dot{\gamma}. \quad (\text{A.5})$$

Pour  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_N$ , on peut ajuster  $\sigma(\dot{\gamma})$  par un fluide de Bingham [80] :

$$\sigma = \eta_B \dot{\gamma} + \sigma_B. \quad (\text{A.6})$$

Comme  $\sigma(\dot{\gamma}_I) = \sigma(\dot{\gamma}_N) = \sigma^*$ , on obtient les relations :

$$\sigma^* = \eta_B \dot{\gamma}_N + \sigma_B, \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma^* = \eta_0 \dot{\gamma}_I \frac{1 + \frac{\tau_1 \tau_2 \dot{\gamma}_I^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_I}}{1 + \frac{\tau_1^2 \dot{\gamma}_I^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_I}} + \eta_S \dot{\gamma}_I. \quad (\text{A.8})$$

Ces relations sont valables pour une géométrie cône-plan où le cisaillement et la contrainte sont homogènes dans l'espace. En revanche, elles doivent être modifiées pour une géométrie de Couette, géométrie que nous utiliserons plus loin (§ C.1, page 189) pour nos expériences de vélocimétrie ultrasonore.

### A.2.2 Rhéologie en géométrie de Couette

La géométrie de Couette est constituée d'un cylindre interne de rayon  $R_I$  et d'un cylindre externe de rayon  $R_E$  tous deux de hauteur  $h$ . Les deux cylindres ont le même axe et le fluide est placé entre les deux cylindres. Le cylindre interne est entraîné en rotation grâce à l'application d'un couple  $\Gamma$  par le rhéomètre. À cause de la courbure des cylindres, la contrainte n'est pas constante entre le cylindre interne et le cylindre externe. On note  $e = R_E - R_I$  l'épaisseur de l'entrefer et  $\sigma(0) = \frac{\Gamma}{2\pi h R_I^2}$  la contrainte au cylindre interne. L'équation du mouvement en régime stationnaire donne :

$$\nabla \cdot \sigma = 0. \quad (\text{A.9})$$

La résolution de cette équation en coordonnées cylindriques permet de déterminer la contrainte à une distance  $r$  du cylindre interne :

$$\sigma(r) = \frac{\sigma(0)}{\left(1 + \frac{r}{R_I}\right)^2}. \quad (\text{A.10})$$



Dans le cas d'un fluide Newtonien de viscosité  $\eta$  constante, on peut calculer la vitesse  $\omega$  de rotation du cylindre interne et la vitesse  $v = \omega R_I$  à la paroi du rotor :

$$v = \int_0^e \dot{\gamma}(r) dr = \int_0^e \frac{\sigma(r)}{\eta} dr, \quad (\text{A.11})$$

$$v = \frac{\sigma(0)}{\eta} \int_0^e \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{R_I}\right)^2} dr = \frac{e\sigma(0)}{\eta} \frac{1}{1 + \frac{e}{R_I}}, \quad (\text{A.12})$$

$$(\text{A.13})$$

on comprend alors que pour indiquer la bonne valeur de  $\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}}$  le rhéomètre donne comme valeur de  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{\sigma(0)}{1 + \frac{e}{R_I}}. \quad (\text{A.14})$$

Même pour un fluide newtonien, il y a donc une différence entre la valeur locale ( $\dot{\gamma}(r)$ ,  $\sigma(r)$ ) et la mesure globale ( $\dot{\gamma}$ ,  $\sigma$ ) indiquée par le rhéomètre en géométrie de Couette. Cette différence d'ordre 1 en  $e/R_I$  peut avoir des conséquences importantes dans le cas d'un fluide complexe. Dans la suite, nous étudions comment la géométrie de Couette affecte le plateau de contrainte dans les solutions de micelles géantes.

### A.2.3 “Shear-banding” en géométrie de Couette

En géométrie de Couette, l'inhomogénéité de la contrainte conduit à la localisation de la zone nématique au voisinage du rotor (contraintes plus fortes) et à celle de la zone isotrope près du stator (contraintes plus faibles). On a donc seulement deux bandes de cisaillement [7]. Soit  $r$  la position de l'interface entre les deux bandes de cisaillement. Comme la coexistence de deux bandes est réalisée pour  $\sigma = \sigma^*$  alors,  $\sigma(r) = \sigma^*$ . Cette condition est vérifiée seulement dans une gamme de contrainte allant de  $\sigma^*/(1 + \frac{e}{R_I})$  à  $\sigma^*(1 + \frac{e}{R_I})$ . Il existe donc deux contraintes critiques  $\sigma_{min} = \sigma^*/(1 + \frac{e}{R_I})$  et  $\sigma_{max} = \sigma^*(1 + \frac{e}{R_I})$ . On peut donc définir les deux cisaillements correspondants  $\dot{\gamma}_{min}$  et  $\dot{\gamma}_{max}$  : pour  $\dot{\gamma}_{min} < \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_{max}$ , il y a deux bandes dans le gap.

En géométrie Couette, la zone de coexistence ne correspond donc pas à un plateau de contrainte à  $\sigma = \sigma^*$  mais s'étend de  $(\sigma, \dot{\gamma}) = (\sigma_{min}, \dot{\gamma}_{min})$  à  $(\sigma, \dot{\gamma}) = (\sigma_{max}, \dot{\gamma}_{max})$ . La bande nématique, fortement cisailée, est comprise entre 0 et  $r$  et la bande isotrope, moins cisailée, est comprise entre  $r$  et  $e$ . On définit alors la contrainte moyenne dans chaque bande :

$$\sigma_I = \frac{1}{e - r} \int_r^e \frac{\sigma(0)}{\left(1 + \frac{r'}{R_I}\right)^2} dr' = \frac{\sigma(0)}{\left(1 + \frac{r}{R_I}\right)\left(1 + \frac{e}{R_I}\right)}, \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_N = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\sigma(0)}{\left(1 + \frac{r'}{R_I}\right)^2} dr' = \frac{\sigma(0)}{1 + \frac{r}{R_I}}. \quad (\text{A.16})$$

Comme  $\sigma(r) = \sigma^* = \sigma(0)/(1 + r/R_I)^2$ , on peut aussi écrire :

$$\sigma_I = \sigma^* \frac{R_I + r}{R_I + e}, \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_N = \sigma^* \left(1 + \frac{r}{R_I}\right). \quad (\text{A.18})$$

On rappelle enfin que la contrainte indiquée par le rhéomètre vaut  $\sigma(0)/(1 + \frac{e}{R_I})$ . Si on connaît les relations  $\eta_I(\sigma)$  et  $\eta_N(\sigma)$  respectivement dans la bande isotrope et dans la bande nématique, on peut alors déterminer le cisaillement dans la zone de coexistence et donc la courbe d'écoulement  $\eta(\sigma)$  pour  $\sigma_{min} < \sigma < \sigma_{max}$ .

Pour tracer  $\dot{\gamma}(\sigma)$  dans la zone de coexistence des phases isotropes et nématiques, on calcule d'abord les cisaillements  $\dot{\gamma}_I$  et  $\dot{\gamma}_N$  moyennés dans les bandes isotropes et nématiques respectivement grâce aux relations :

$$\dot{\gamma}_I = \frac{1}{e - r} \int_r^e \frac{\sigma(0)}{\eta_I(\sigma(r'))} \frac{1}{\left(1 + \frac{r'}{R_I}\right)^2} dr', \quad (\text{A.19})$$

$$\dot{\gamma}_N = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\sigma(0)}{\eta_N(\sigma(r'))} \frac{1}{\left(1 + \frac{r'}{R_I}\right)^2} dr'. \quad (\text{A.20})$$

On calcule maintenant  $\alpha$  grâce à la relation :

$$\alpha = \frac{R_I}{e} \left( \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}} - 1 \right). \quad (\text{A.21})$$

Finalement, on utilise la loi du levier :

$$\dot{\gamma} = (1 - \alpha)\dot{\gamma}_I + \alpha\dot{\gamma}_N. \quad (\text{A.22})$$

La figure A.2 présente les mesures de la contrainte  $\sigma$  en fonction du cisaillement  $\dot{\gamma}$  pour une solution de CPCI–NaSal à 4% ainsi que l'ajustement de cette courbe prenant en compte la présence de deux bandes. L'accord entre l'ajustement et les valeurs numériques est excellent. En particulier, on constate que la pente de la zone de coexistence est bien reproduite.

En conclusion, le comportement des micelles géantes de CPCI–NaSal est bien décrite par un fluide de Maxwell en rhéologie linéaire et par le phénomène de “shear-banding” en rhéologie non linéaire tel que décrit par Salmon *et. al.* [80]. Dans la suite, nous étudions le comportement de ces solutions de micelles géantes lorsqu'un cisaillement constant et un cisaillement oscillant sont superposés dans une même expérience.

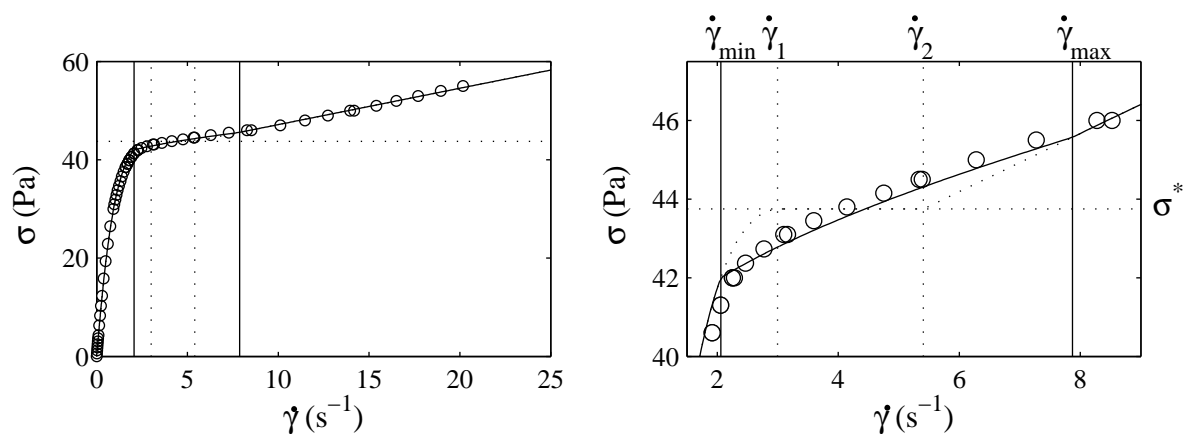


FIG. A.2 – Rhéologie non linéaire pour une solution de CPCI–NaSal à 4%. Contrainte  $\sigma$  en fonction du cisaillement  $\dot{\gamma}$  trouvée expérimentalement ( $\circ$ ) et meilleur ajustement par l'équation (A.5) (lignes continues) avec  $\tau_1 = 0.77$  s,  $\tau_2 = 0.7$  ms,  $\tau_3 = 0.56$  s et  $\eta_0 = 43$  Pa.s pour  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_{min}$  et par l'équation (A.6) avec  $\eta_B = 0.7398$  Pa.s et  $\sigma_B = 39.75$  Pa pour  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_{max}$ . Entre  $\dot{\gamma}_{min}$  et  $\dot{\gamma}_{max}$  la loi du levier (équation (A.22)) s'applique. Les pointillés indiquent les valeurs de  $\dot{\gamma}_I$ , de  $\dot{\gamma}_N$  et de  $\sigma^*$ .

# Annexe B

## Superposition

Dans cette annexe, nous soumettons nos fluides à des oscillations de la contrainte autour d'une valeur moyenne non nulle. Si la contrainte moyenne est suffisamment importante, il y a présence de deux bandes dans l'entrefer. Nous allons montrer que de petites oscillations de la contrainte font osciller la largeur des bandes et que les mesures rhéologiques dans une telle expérience de superposition permettent de remonter à la dynamique de l'interface entre les bandes.

En superposition, la contrainte  $\sigma$  et le cisaillement  $\dot{\gamma}$  peuvent s'écrire :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 e^{i\omega t}, \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 e^{i\omega t}. \quad (\text{B.2})$$

On définit alors deux viscosités caractéristiques :

$$\eta_1 = \frac{\sigma_1}{\dot{\gamma}_1}, \quad (\text{B.3})$$

et

$$\eta_2 = \frac{\sigma_2}{\dot{\gamma}_2}. \quad (\text{B.4})$$

On montre expérimentalement que  $\eta_1$  est égal à la viscosité mesurée lors d'une expérience de rhéologie non-linéaire classique (cf. figure B.1). De plus,  $\eta_2(\dot{\gamma} = 0)$  est la viscosité complexe mesurée lors d'une expérience de rhéologie linéaire classique.

Dans toute la suite, les indices 1 et 2 se rapportent respectivement au terme moyen et au terme oscillant d'une grandeur rhéologique. Nous développons tout d'abord un modèle théorique de la superposition pour un fluide présentant des bandes de cisaillement. Pour cela, nous considérons successivement les différentes géométries expérimentales. La section suivante sera consacrée aux résultats expérimentaux et à leur ajustement par la théorie.

### B.1 Théorie

Dans cette partie, nous détaillons notre modèle et nous déterminons les viscosités déduites de ce modèle pour plusieurs géométries. En particulier, nous nous intéressons à la dépendance de  $\eta_2 = \sigma_2/\dot{\gamma}_2$  avec  $\omega$  et  $\sigma_1$  ou  $\dot{\gamma}_1$ .

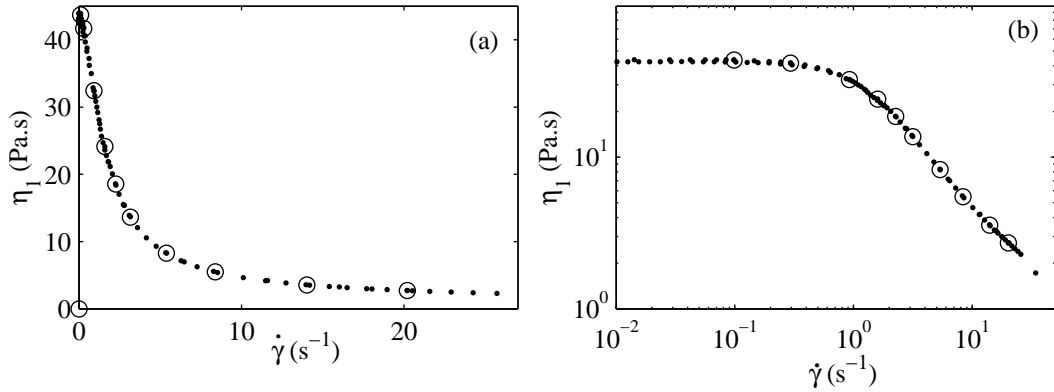


FIG. B.1 – Rhéologie non-linéaire pour une solution de CPCL–NaSal à 4%. Viscosité  $\eta$  en fonction du cisaillement  $\dot{\gamma}$  pour une expérience de rhéologie non-linéaire ( $\bullet$ ), et  $\eta_1$  en fonction de  $\dot{\gamma}_1$  mesurée dans une série d’expériences de superposition ( $\circ$ ). Les deux courbes se superposent parfaitement. (a) Représentation en échelles linéaires et (b) en échelles logarithmiques.

### B.1.1 Plans parallèles infinis

Le cisaillement modèle s’obtient entre deux plans parallèles infinis en translation et séparés d’une couche de fluide d’épaisseur  $e$ . Dans cette section, on se place dans ce cadre théorique. Les deux plans sont entraînés en translation de sorte que :

$$\sigma = \sigma^* + \sigma_2 e^{i\omega t}, \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 e^{i\omega t}, \quad (\text{B.6})$$

où  $\sigma_1 = \sigma^*$  est la “contrainte plateau” caractéristique de la coexistence de bandes de cisaillement (cf. section 4.3, page 76). Alors au premier ordre en  $\sigma_2$ , la proportion de fluide aligné défini par l’équation (A.4) peut s’écrire :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 e^{i\omega t}. \quad (\text{B.7})$$

Pour obtenir une relation entre  $\sigma_2$  et  $\dot{\gamma}_2$ , on commence par chercher des relations entre  $\alpha$  et  $\sigma$  et entre  $\alpha$  et  $\dot{\gamma}$ . On suppose que la “loi du levier” (A.3) reste valable sous oscillation, de sorte que :

$$\dot{\gamma}(t) = (1 - \alpha(t))\dot{\gamma}_I(t) + \alpha(t)\dot{\gamma}_N(t). \quad (\text{B.8})$$

Les cisaillements dans les bandes  $I$  et  $N$  peuvent eux-mêmes s’écrire comme la somme d’un terme constant et d’un terme oscillant à  $\omega$ . L’équation précédente peut alors se réécrire au premier ordre en  $\sigma_2$  :

$$\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 e^{i\omega t} = (1 - \alpha_1 - \alpha_2 e^{i\omega t}) \left( \frac{\sigma^*}{\eta_{I1}} + \frac{\sigma_2}{\eta_{I2}} e^{i\omega t} \right) + (\alpha_1 + \alpha_2 e^{i\omega t}) \left( \frac{\sigma^*}{\eta_{N1}} + \frac{\sigma_2}{\eta_{N2}} e^{i\omega t} \right). \quad (\text{B.9})$$

Soit,

$$\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 e^{i\omega t} = (1 - \alpha_1) \frac{\sigma^*}{\eta_{I1}} + \alpha_1 \frac{\sigma^*}{\eta_{N1}} + e^{i\omega t} \left( (1 - \alpha_1) \frac{\sigma_2}{\eta_{I2}} + \alpha_1 \frac{\sigma_2}{\eta_{N2}} + \alpha_2 \sigma^* \left( \frac{1}{\eta_{N1}} - \frac{1}{\eta_{I1}} \right) \right) \quad (\text{B.10})$$

En identifiant les termes constants et les termes en  $e^{i\omega t}$ , on trouve :

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{(1 - \alpha_1)\sigma^*}{\eta_{I1}} + \frac{\alpha_1\sigma^*}{\eta_{N1}}, \quad (\text{B.11})$$

qui correspond à la “loi du levier” stationnaire, et

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{(1 - \alpha_1)\sigma_2}{\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1\sigma_2}{\eta_{N2}} + \alpha_2\sigma^* \left( \frac{1}{\eta_{N1}} - \frac{1}{\eta_{I1}} \right), \quad (\text{B.12})$$

où

$$\eta_{N1} = \frac{\sigma^*}{\dot{\gamma}_{N1}}, \quad (\text{B.13})$$

$$\eta_{I1} = \frac{\sigma^*}{\dot{\gamma}_{I1}}, \quad (\text{B.14})$$

$$\eta_{N2} = \frac{\sigma_2}{\dot{\gamma}_{N2}}, \quad (\text{B.15})$$

$$\eta_{I2} = \frac{\sigma_2}{\dot{\gamma}_{I2}}. \quad (\text{B.16})$$

D'autre part, Radulescu [75] ont montré que, sous certaines hypothèses, la vitesse  $c$  de déplacement de l'interface est proportionnelle à  $\sigma - \sigma^*$  :  $c = c_0 \frac{\sigma - \sigma^*}{\sigma^*}$ . Soit  $h_N$  la taille de la bande nématique, on a la relation :

$$\dot{h}_N = \frac{\sigma}{\sigma^*} c_0 - c_0. \quad (\text{B.17})$$

Les équations (A.4) et (B.7) conduisent alors à :

$$\dot{h}_N = i\omega e \alpha_2 e^{i\omega t}. \quad (\text{B.18})$$

En comparant les équations (B.17) et (B.18), on trouve :

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma^*} \frac{c_0}{i\omega}. \quad (\text{B.19})$$

En injectant cette expression pour  $\alpha_2$  dans l'équation (B.12) et en utilisant  $\eta_2 = \sigma_2/\dot{\gamma}_2$ , on trouve :

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{1 - \alpha_1}{\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1}{\eta_{N2}} + \frac{\Delta\dot{\gamma}}{\sigma^*} \frac{c_0}{i\omega}. \quad (\text{B.20})$$

La viscosité complexe est donc la somme de deux termes, un premier terme  $\frac{1 - \alpha_1}{\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1}{\eta_{N2}}$  similaire à la loi du levier et un second terme  $\frac{\Delta\dot{\gamma}}{\sigma^*} \frac{c_0}{i\omega}$  correspondant au déplacement

de l'interface. Dans la limite des faibles fréquences  $\omega \ll \eta_{I2}c_0\Delta\dot{\gamma}/\sigma^*$  et  $\eta_{N2}c_0\Delta\dot{\gamma}/\sigma^*$ , la viscosité complexe  $\eta_2$  tend vers 0. De plus, à basse fréquence  $\omega \rightarrow 0$ , on s'attend ce que le fluide parcourt au cours du temps les états stationnaires, ce qui équivaut à la relation :  $\eta_2(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \dot{\gamma}_1}$ , (voir aussi les équations (B.72) et (B.71)). Cette relation est bien vérifiée par notre théorie.

Cependant, l'équation (B.20) suppose qu'à chaque instant, la loi du levier soit valable. Ceci suppose que la contrainte est constante dans le gap. Pour tester la validité de cette hypothèse, on reprend l'équation de Navier–Stokes dans le cas d'une vitesse oscillant à la fréquence  $\omega$  :

$$i\rho\omega v_2 = \partial_z \sigma_2. \quad (\text{B.21})$$

$\sigma_2 \simeq \text{constante}$  revient à écrire :

$$\int_0^e \partial_z \sigma_2 dz \ll \sigma_2, \quad (\text{B.22})$$

$$\int_0^e i\rho\omega v dz \ll \sigma_2. \quad (\text{B.23})$$

Comme  $v_2 \simeq \dot{\gamma}_2 e$ , alors on arrive à la relation :

$$i\rho\omega e^2 \ll \eta_2. \quad (\text{B.24})$$

Dans la limite des basses fréquences on a  $\eta_2 \simeq \sigma^* e \omega / \Delta\dot{\gamma} c_0$ , ce qui conduit à

$$\frac{\Delta\dot{\gamma} c_0 e \rho}{\sigma^*} \ll 1. \quad (\text{B.25})$$

Expérimentalement, on a (en unités S.I) :  $e = 10^{-3}$ ,  $\sigma^* \simeq 10$ ,  $\Delta\dot{\gamma} \simeq 10$ ,  $c_0 \simeq 10^{-4}$ ,  $\rho \simeq 10^3$ , ce qui conduit à

$$\frac{\Delta\dot{\gamma} c_0 e \rho}{\sigma^*} \sim 10^{-4} \ll 1. \quad (\text{B.26})$$

La condition est bien vérifiée pour  $\omega$  petit. Aux hautes fréquences ( $\omega \simeq 100 \text{ rad.s}^{-1}$ ), on trouve expérimentalement  $\eta_2 \simeq 1 \text{ Pa.s}$ . La relation (B.24) donne alors :

$$\rho\omega e^2 \sim 10^{-1} \ll \eta_2 \sim 1. \quad (\text{B.27})$$

Pour conclure, la condition  $\sigma_2 = \text{constante}$  dans l'entrefer est valable de  $\omega = 0$  à  $\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ , ce qui correspond à la gamme de fréquences utilisée dans nos expériences. Les hypothèses de notre modèle sont alors vérifiées.

## B.1.2 Géométrie cône-plan

Nous nous interrogeons maintenant sur les modifications à apporter à l'équation (B.20) dans des géométries réelles : la géométrie cône-plan et la géométrie de Couette. Nous

considérons tout d'abord le cas d'un cône de rayon  $r_{max}$  et d'un plan en rotation autour de l'axe central du cône. On note  $r$  la distance entre un point du cône et l'axe de rotation et  $e$  la distance entre ce point et le plan. Alors  $e$  dépend de  $r$  selon la loi  $e = r \tan \beta$ , avec  $\beta$  l'angle du cône avec l'horizontale (on néglige la troncation). L'épaisseur de l'entrefer dépend donc de l'écart à l'axe de rotation. Cependant, pour chaque  $r$ , l'ensemble des relations précédentes reste valable et on peut écrire :

$$\frac{1}{\eta_2(r)} = \frac{1 - \alpha_1}{\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1}{\eta_{N2}} + \frac{\Delta \dot{\gamma}}{\sigma^*} \frac{c_0}{i\omega r \tan \beta}. \quad (\text{B.28})$$

De fait, la géométrie cône-plan impose un cisaillement constant pour tout  $r$ . On a donc, pour tout  $r$ ,  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 e^{i\omega t}$ . Dans une expérience de superposition en géométrie cône-plan, c'est donc uniquement la contrainte qui varie localement avec  $r$  selon :

$$\sigma_2(r) = \eta_2(r) \dot{\gamma}_2. \quad (\text{B.29})$$

Par conséquent, d'après l'équation (B.19),  $\alpha_2(r)$  varie aussi selon :

$$\alpha_2(r) = \frac{\sigma_2(r)}{\sigma^*} \frac{c_0}{i\omega r \tan \beta}. \quad (\text{B.30})$$

La variation totale de la proportion de fluide aligné  $\alpha_{2tot}$  et la contrainte moyenne  $\sigma_{2moy}$  se trouvent simplement en intégrant les relations précédentes pour tout  $r$  :

$$\alpha_{2tot} = \frac{3}{r_{max}^3} \int_0^{r_{max}} \alpha_2(r) r^2 dr, \quad (\text{B.31})$$

$$\sigma_{2moy} = \frac{2}{r_{max}^2} \int_0^{r_{max}} \sigma_2(r) r dr, \quad (\text{B.32})$$

où  $r_{max}$  est le rayon du cône. En notant :

$$\frac{1}{\eta_{20}} = \frac{1 - \alpha_1}{\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1}{\eta_{N2}}, \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{1}{\Delta \eta} = \frac{\Delta \dot{\gamma} c_0}{i\sigma^* \omega r_{max} \tan \beta}, \quad (\text{B.34})$$

on trouve pour  $\eta_2$  :

$$\eta_2 = \frac{\sigma_{2moy}}{\dot{\gamma}_2} = \eta_{20} \left( 1 - 2 \frac{\eta_{20}}{\Delta \eta} + 2 \frac{\eta_{20}^2}{\Delta \eta^2} \ln \left( 1 + \frac{\Delta \eta}{\eta_{20}} \right) \right). \quad (\text{B.35})$$

De plus, l'intégration de l'équation (B.31) conduit à :

$$\alpha_{2tot} = \frac{\sigma_2}{\sigma^*} \frac{3c_0}{2i r_{max} \omega \tan \beta}. \quad (\text{B.36})$$



Dans la limite  $\frac{\Delta\eta}{\eta_{20}} \ll 1$  un développement limité de l'équation (B.35) conduit à :

$$\eta_2 = \frac{2}{3}\Delta\eta - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta^2}{\eta_{20}}, \quad (\text{B.37})$$

ce qui est aussi le développement limité (à un facteur 8/9 près) de :

$$\frac{1}{\eta_2(r)} = \frac{1 - \alpha_1}{\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1}{\eta_{N2}} + \frac{\Delta\dot{\gamma}}{\sigma^*} \frac{3c_0}{i\omega r_{max} \tan \beta}. \quad (\text{B.38})$$

Les équations B.38 et (B.36) sont similaires aux équations (B.20) et (B.19) avec  $e = 2r_{max}/(3 \tan \beta)$ .

Dans le cas limite opposé où  $\frac{\Delta\eta}{\eta_{20}} \gg 1$ , un développement limité de l'équation (B.35) conduit à :

$$\eta_2 = \eta_{20} - 2\frac{\eta_{20}^2}{\Delta\eta}, \quad (\text{B.39})$$

ce qui a le même développement limité que :

$$\frac{1}{\eta_2(r)} = \frac{1 - \alpha_1}{\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1}{\eta_{N2}} + \frac{\Delta\dot{\gamma}}{\sigma^*} \frac{2c_0}{i\omega r_{max} \tan \beta}. \quad (\text{B.40})$$

Cette équation est alors similaire à l'équation (B.20) avec  $e = r_{max}/(2 \tan \beta)$ .

En fonction de  $\Delta\eta/\eta_{20}$ , on peut utiliser l'une ou l'autre de ces approximations pour avoir une bonne estimation de  $c_0$ . De plus, les facteurs 2/3 et 1/2 sont assez proches : si la précision de la mesure est faible, un ajustement par l'équation (B.20) peut être suffisant. On trouve alors une vitesse caractéristique comprise entre  $3c_0/2$  et  $2c_0$ .

### B.1.3 Géométrie de Couette

La géométrie Couette est plus subtile que les deux géométries précédentes, puisque le cisaillement et la contrainte varient tous les deux dans l'espace. On rappelle que la contrainte locale  $\sigma(r)$  s'écrit :

$$\sigma(r) = \frac{\sigma(0)}{\left(1 + \frac{r}{R_I}\right)^2}. \quad (\text{B.41})$$

Dans le cas d'une expérience de superposition, on pose,

$$\sigma(0) = \sigma_1 + \sigma_2 e^{i\omega t}. \quad (\text{B.42})$$

D'après le § A.2.3 (page 168), un écoulement en bandes de cisaillement se développera dans la cellule de Couette lorsque  $\sigma_1 \pm \sigma_2$  est compris entre  $\sigma^*$  et  $\sigma^*(1 + \frac{e}{R_I})^2$ .

Soit donc  $r^*$  et  $r_1$  tels que :

$$\sigma^* = \frac{\sigma(0)}{\left(1 + \frac{r^*}{R_I}\right)^2}, \quad (\text{B.43})$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma_1}{\left(1 + \frac{r_1}{R_I}\right)^2}. \quad (\text{B.44})$$

Un développement limité en  $\sigma_2$  et  $r_2^*$  obtenu à partir des équations (B.42) et (B.43) donne :

$$r^* = r_1^* + r_2^* e^{i\omega t} = r_1 + R_I \frac{\sigma_2}{2\sigma^* \left(1 + \frac{r_1}{R_I}\right)} e^{i\omega t}. \quad (\text{B.45})$$

D'autre part, on rappelle l'expression :

$$\dot{\alpha} = \frac{c_0}{e} \left( \frac{\sigma}{\sigma^*} - 1 \right). \quad (\text{B.46})$$

Dans le cas d'une géométrie de Couette, cette expression se réécrit :

$$\dot{r} = c_0 \left( \frac{\sigma(r)}{\sigma^*} - 1 \right). \quad (\text{B.47})$$

Avec  $r = r_1 + r_2 e^{i\omega t}$  et en utilisant l'équation (B.41), on trouve :

$$i\omega r_2 e^{i\omega t} = c_0 \left( \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R_I} + \frac{r_2^* e^{i\omega t}}{R_I}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_1}{R_I} + \frac{r_2 e^{i\omega t}}{R_I}\right)^2} - 1 \right). \quad (\text{B.48})$$

Un développement limité au premier ordre en  $\sigma_2$  conduit à :

$$i\omega r_2 = \frac{2c_0}{R_I + r_1} (r_2^* - r_2), \quad (\text{B.49})$$

soit

$$r_2 = \frac{r_2^*}{1 + \frac{i\omega(R_I + r_1)}{2c_0}}. \quad (\text{B.50})$$

Au final,

$$r_2 = R_I \frac{\sigma_2}{2\sigma^*} \frac{1}{1 + \frac{r_1}{R_I}} \frac{1}{1 + i\frac{\omega(R_I + r_1)}{2c_0}}. \quad (\text{B.51})$$

Or, on a déjà vu au § A.2.3 (page 168) que :

$$\sigma_I = \frac{\sigma(0)}{\left(1 + \frac{e}{R_I}\right) \left(1 + \frac{r}{R_I}\right)}. \quad (\text{B.52})$$

Le développement limité au premier ordre en  $\sigma_2$  donne :

$$\sigma_I = \frac{\sigma_1}{\left(1 + \frac{e}{R_I}\right) \left(1 + \frac{r_1}{R_I}\right)} + \frac{\sigma_2 e^{i\omega t}}{\left(1 + \frac{e}{R_I}\right) \left(1 + \frac{r_1}{R_I}\right)} \left(1 - \frac{1}{2 + i\frac{\omega(R_I + r_1)}{c_0}}\right). \quad (\text{B.53})$$

et

$$\sigma_N = \frac{\sigma(0)}{1 + \frac{r}{R_I}}, \quad (\text{B.54})$$

$$\sigma_N = \frac{\sigma_1}{1 + \frac{r_1}{R_I}} + \frac{\sigma_2 e^{i\omega t}}{1 + \frac{r_1}{R_I}} \left( 1 - \frac{1}{2 + i \frac{\omega(R_I + r_1)}{c_0}} \right). \quad (\text{B.55})$$

La “loi du levier” donne :

$$\dot{\gamma}_2 = \alpha_2 \left( \frac{\sigma_{N1}}{\eta_{N1}} - \frac{\sigma_{I1}}{\eta_{I1}} \right) + \frac{\sigma_2}{1 + \frac{r_1}{R_I}} \left( 1 - \frac{1}{2 + i \frac{\omega(R_I + r_1)}{c_0}} \right) \left( \frac{1 - \alpha_1}{\eta_{I2} \left( 1 + \frac{e}{R_I} \right)} + \frac{\alpha_1}{\eta_{N2}} \right). \quad (\text{B.56})$$

On rappelle qu’en géométrie de Couette, le rhéomètre mesure :

$$\sigma = \frac{\sigma(0)}{1 + \frac{e}{R_I}}. \quad (\text{B.57})$$

Alors,

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{\dot{\gamma}_2}{\sigma_2} \left( 1 + \frac{e}{R_I} \right). \quad (\text{B.58})$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_2} = & \left( 1 - \frac{1}{2 + i\omega(R_I + e\alpha_1)/c_0} \right) \left( \frac{1 - \alpha_1}{(1 + e\alpha_1/R_I)\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1(1 + \frac{e}{R_I})}{(1 + e\alpha_1/R_I)\eta_{N2}} \right) \\ & + \frac{R_I}{e} \left( \frac{1}{\eta_{N1}} - \frac{1}{1 + \frac{e}{R_I}} \frac{1}{\eta_{I1}} \right) \frac{1}{2 + i\omega(R_I + e\alpha_1)/c_0}. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Les viscosités employées dans ces équations sont donnée par :

$$\eta_{Nj} = \eta_{Nj} \left( \sigma^* \left( 1 + \frac{e\alpha_1}{R_I} \right) \right), \quad (\text{B.60})$$

$$\eta_{Ij} = \eta_{Ij} \left( \sigma^* \frac{1 + \frac{e\alpha_1}{R_I}}{1 + \frac{e}{R_I}} \right). \quad (\text{B.61})$$

On vérifie que lorsque  $R_I \rightarrow \infty$ , on retrouve bien la rhéologie en plans infinis, en particulier l’équation (B.20).

## B.2 Expériences

### B.2.1 Procédure expérimentale

Pour vérifier notre modèle, nous avons réalisé des expériences de superposition pour des solutions de micelles géantes de CPCl–NaSal. Le rhéomètre utilisé (AR 2000, TA

Instruments) travaille à contrainte imposée. Nous imposons donc au fluide étudié une contrainte moyenne  $\sigma_1$  constante modulée par des oscillations de contrainte selon le même direction et d'amplitude  $\sigma_2$ .

Dans toute la suite, les indices 1 et 2 se rapportent respectivement au terme moyen et au terme oscillant d'une grandeur. De même, les indices  $I$  et  $N$  se rapportent respectivement à la phase isotrope et à la phase nématique.

Nous comparons les résultats obtenus à ceux obtenus pour des expériences de rhéologie standard (sans oscillations). Pour plus de clarté, on note  $\eta^*(\omega) = (G'' - iG')/\omega$  la viscosité complexe déduite de la rhéologie linéaire (i.e. à  $\dot{\gamma}_1 = 0$ ), et  $\sigma_{stat}(\dot{\gamma})$ ,  $\dot{\gamma}_{stat}(\sigma)$  et  $\eta_{stat}(\dot{\gamma})$  respectivement la contrainte, le cisaillement et la viscosité sous cisaillement à l'état stationnaire obtenues en rhéologie non-linéaire standard (i.e. pour  $\dot{\gamma}_2 = 0$ ).

Les expériences sont réalisées en géométrie de Couette : le cylindre interne a pour rayon  $R_I = 24$  mm et le cylindre externe à pour rayon  $R_I = 25$  mm. La cellule est fermée par un couvercle pour éviter l'évaporation et thermostatée à 20°C. Pour prévenir en partie les instabilités de surface à fort taux de cisaillement, la surface du fluide est en contact avec le couvercle qui fait office de "bouchon".

Le rhéomètre impose une contrainte  $\sigma = \sigma_1 + e^{i\omega t}$ , mesure la vitesse et en tire  $\eta_2(\omega, \sigma_1)$ . On vérifie expérimentalement que  $\dot{\gamma}_1$  ne dépend pas de la fréquence. On peut donc écrire  $\eta_2(\omega, \sigma_1) = \eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$ .

### B.2.2 Procédure d'ajustement des données $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$

Le but de ces expériences est d'accéder à la dynamique de l'interface entre la bande peu cisailée et la bande très cisailée. Dans notre modèle, cette dynamique est entièrement contenue dans la vitesse caractéristique  $c_0$ , qu'il nous faut déterminer. On a montré que dans le plateau de cisaillement la viscosité complexe  $\eta_2$  peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$\frac{1}{\eta_2} = \left(1 - \frac{1}{2 + i\omega(R_I + e\alpha_1)/c_0}\right) \left(\frac{1 - \alpha_1}{(1 + e\alpha_1/R_I)\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1(1 + \frac{e}{R_I})}{(1 + e\alpha_1/R_I)\eta_{N2}}\right) + \left(\frac{R_I}{e} \frac{\Delta\dot{\gamma}}{\sigma^*} + \frac{1}{\eta_{N1}}\right) \frac{1}{2 + i\omega(R_I + e\alpha_1)/c_0}. \quad (\text{B.62})$$

De plus, si on suppose  $\frac{e}{R_I} \ll 1$ , un développement limité en  $\frac{e}{R_I}$  permet d'écrire :

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{\eta_{I2}} + \frac{1}{2 + i\omega R_I/c_0} \frac{R_I}{e} \left(\frac{1}{\eta_{N1}} + \frac{1}{1 + \frac{e}{R_I}} \frac{1}{\eta_{I1}} + \frac{1}{\eta_{I2}}\right) + \frac{\alpha_1}{\eta_{F1}} + \frac{\alpha_1^2}{\eta_{F2}}. \quad (\text{B.63})$$

$\alpha_1$  est déduit de la relation  $\sigma_1 = \sigma^*(1 + \alpha_1 \frac{e}{R_I})^2$ . À partir de la mesure expérimentale de  $\eta_2$ , on peut, pour chaque fréquence  $\omega$ , ajuster la courbe  $1/\eta_2(\omega, \alpha_1)$  par un polynôme d'ordre 2 en  $\alpha_1$ . En prenant la valeur de ce polynôme en  $\alpha_1 = 0$ , on accède à la viscosité  $\eta_2(\omega, 0)$  :

$$\frac{1}{\eta_2(\omega, 0)} = \frac{1}{\eta_{I2}} + \frac{1}{2 + i\omega R_I/c_0} \frac{R_I}{e} \left(\frac{1}{\eta_{N1}} + \frac{1}{1 + \frac{e}{R_I}} \frac{1}{\eta_{I1}} + \frac{1}{\eta_{I2}}\right). \quad (\text{B.64})$$

Les inconnues de cette expression sont  $\eta_{I2}$ ,  $\eta_{N1}$ ,  $\eta_{I1}$  et  $c_0$ . La valeur la plus facile à approximer est  $\eta_{N1}$ . En effet, lorsque  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_{max}$ , on peut ajuster la courbe  $\sigma_1(\dot{\gamma}_1)$  par un fluide de Bingham. En prenant la valeur de cet ajustement en  $\sigma = \sigma^*$ , on obtient la viscosité  $\eta_{N1}$ .

Il reste maintenant à trouver  $\eta_{I2}$  et  $\eta_{I1}$  à partir des données expérimentales pour  $\dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma}_{min}$ .

### B.2.3 Ajustement en l'absence de "shear-banding" ( $\dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma}_{min}$ )

Dans cette section, nous traitons le cas  $\dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma}_{min}$ . Il n'y a dans l'entrefer qu'une bande isotrope. Dans ce cas,  $\eta_1 = \eta_{I1}$  et  $\eta_2 = \eta_{I2}$ .

#### Ajustement par un fluide de Oldroyd

En 1966, Booij [14, 15] a montré que l'équation à trois inconnues proposée par Oldroyd [72, 73] :

$$\left(1 + \tau_1 \frac{d}{dt}\right) p_{ik} = 2\eta_0 \left(1 + \tau_2 \frac{d}{dt}\right) e_{ik}, \quad (\text{B.65})$$

où  $p_{ik}$  est le tenseur des contraintes et  $e_{ik}$  le tenseur de cisaillement, amène, dans une expérience de superposition, aux relations :

$$\eta_1(\dot{\gamma}_1) = \eta_0 \frac{1+s_2\dot{\gamma}_1^2}{1+s_1\dot{\gamma}_1^2} + \eta_S, \quad (\text{B.66})$$

$$\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1) = \eta_S + \eta_0 \frac{1-\tau_1\tau_2\omega^2(1+s_1\dot{\gamma}_1^2)+\dot{\gamma}_1^2(3s_2-s_1+s_1s_2\dot{\gamma}_1^2)+i\omega(\tau_1+\tau_2+\dot{\gamma}_1^2(\tau_1s_2+\tau_2s_1))}{(1+s_1\dot{\gamma}_1^2)((1+i\tau_1\omega)^2+s_1\dot{\gamma}_1^2)}, \quad (\text{B.67})$$

où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont des temps caractéristiques de notre fluide et  $s_1$  et  $s_2$  des grandeurs caractéristiques homogènes au carré d'un temps. On tire les valeurs  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  de la courbe  $\eta_2(\omega, 0)$  (rhéologie linéaire standard), et  $s_1$ ,  $s_2$  de la courbe  $\eta_1(\dot{\gamma}_1)$  obtenue en rhéologie non-linéaire pour  $\dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma}_{min}$ . Les meilleurs ajustements de  $\eta_2(\omega, 0)$  et  $\eta_1(\dot{\gamma}_1)$  obtenus pour une solution de CPC1-NaSal à 5.8% sont présentés sur la figure B.2. On trouve  $\tau_1 = 0.69$  s,  $\tau_2 = 0.001$  s,  $s_1 = 0.25$  s<sup>2</sup> et  $s_2 = 0.024$  s<sup>2</sup>.

D'autre part, la figure B.3 montre  $\eta_2$  en fonction de  $\omega$  pour plusieurs  $\dot{\gamma}_1$  non nuls. On vérifie que l'équation (B.67) ajuste bien la forme des courbes  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  lorsque  $\dot{\gamma}_1$  est non nul. Pour de faibles cisaillements (figure B.3 (a), (b), (c)), l'ajustement par l'équation (B.67) des courbes  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  est excellent. En revanche, lorsque le cisaillement moyen augmente (figure B.3 (d), (e), (f)), l'ajustement de  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  n'est plus aussi bon, même s'il prédit qualitativement le comportement rhéologique de  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$ .

#### Ajustement empirique pour $\dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma}_{min}$

On cherche ici une équation qui décrit mieux le comportement de notre fluide. Pour cela, on cherche à déterminer l'évolution de  $s_1$  et  $s_2$  avec  $\dot{\gamma}_1$ . On ajuste donc  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  par la formule :

$$\eta_2 = \eta_S + \eta_0 \frac{1 - \tau_1\tau_2\omega^2(1+t_1) + (3t_2 - t_1 + t_1t_2) + i\omega(\tau_1 + \tau_2 + (\tau_1t_2 + \tau_2t_1))}{(1+t_1)((1+i\tau_1\omega)^2+t_1)}, \quad (\text{B.68})$$

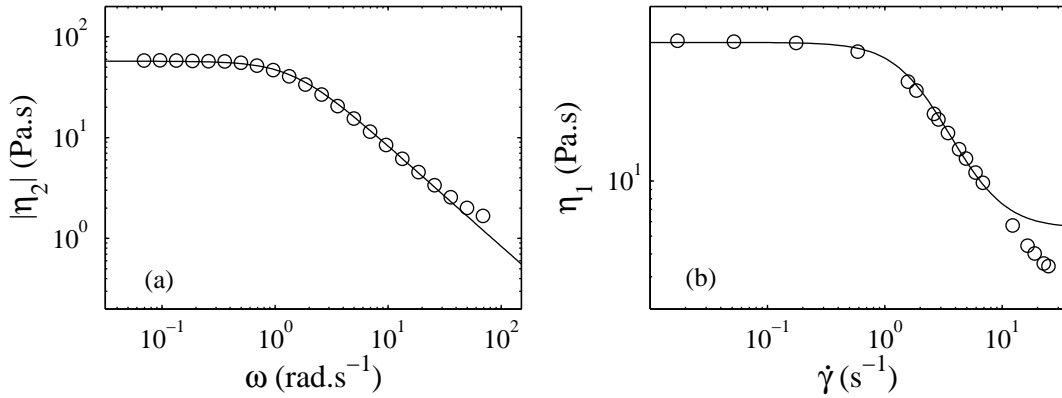


FIG. B.2 – (a) Norme de la viscosité complexe  $\eta_2$  en fonction de la fréquence  $\omega$  mesurée au cours d'une expérience de rhéologie linéaire classique ( $\dot{\gamma}_1 = 0$ ) pour une solution à 5.8%, la ligne continue représente l'ajustement par l'équation (B.67). (b) Viscosité mesurée en rhéologie non-linéaire classique ( $\dot{\gamma}_2 = 0$ ) pour une solution à 5.8%, la ligne continue représente l'ajustement par l'équation (B.66).

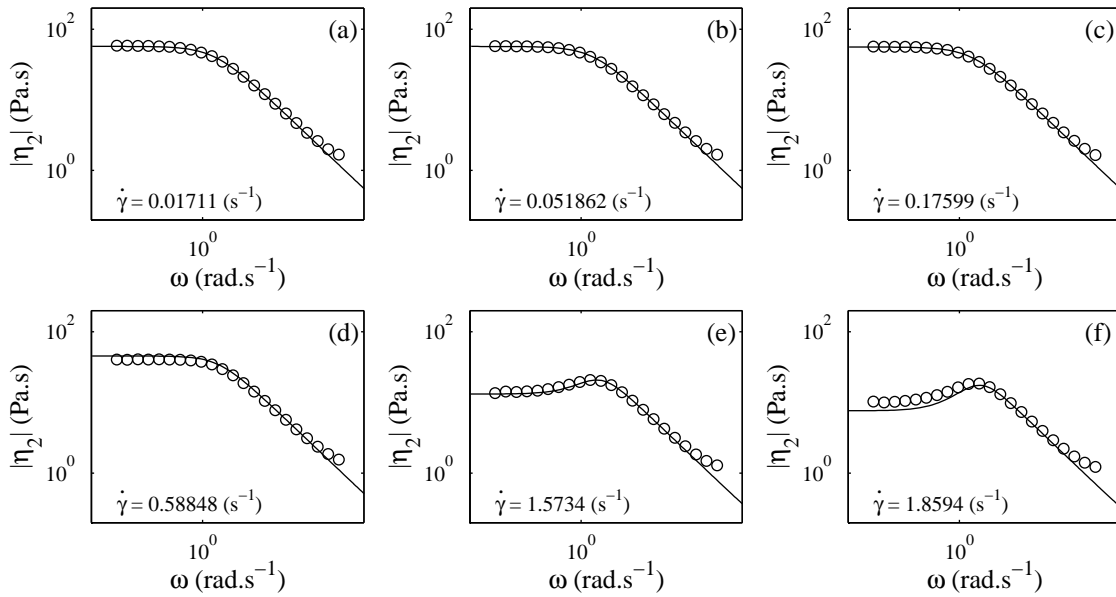


FIG. B.3 – Norme de la viscosité complexe  $|\eta_2|$  en fonction de la fréquence  $\omega$  pour une solution à 5.8%, les lignes continues représentent les ajustements par l'équation (B.67).  $\dot{\gamma}_1$  vaut respectivement (a) 0.017, (b) 0.052, (c) 0.18, (d) 0.59, (e) 1.6, (f) 1.9  $\text{s}^{-1}$ .

où les paramètres libres sont  $t_1$  et  $t_2$ . Les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\eta_0$  sont données par la rhéologie linéaire. On obtient alors deux courbes :  $t_1(\dot{\gamma}_1)$  et  $t_2(\dot{\gamma}_1)$  que l'on ajuste par des lois de puissance  $c\dot{\gamma}^n$ . Il apparaît alors que  $t_1$  et  $t_2$  sont bien ajustés par une loi de puissance d'exposant  $n = 1.5$  (voir les lignes discontinues sur la figure B.4) alors que Booij prédit un exposant 2. En d'autres termes, on en conclut que les termes  $s_1$  et  $s_2$  dans l'équation (B.66)

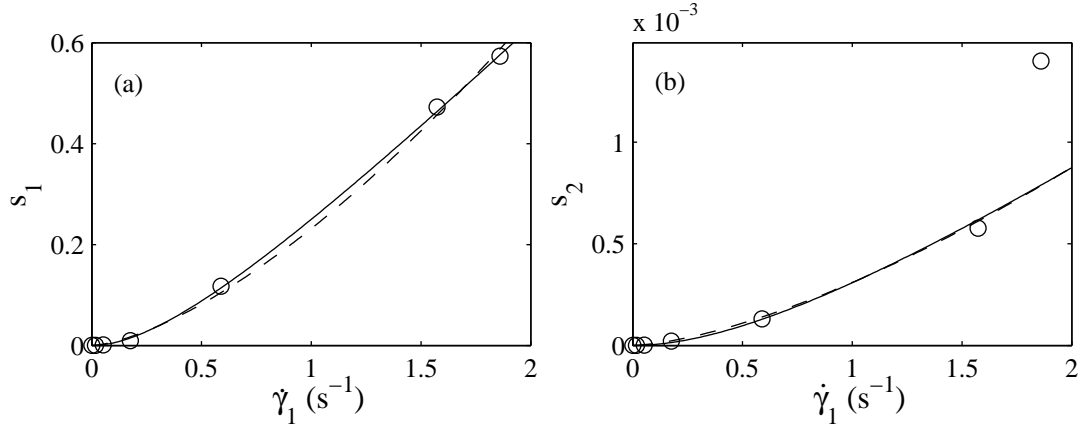


FIG. B.4 – (a)  $t_1$  en fonction de  $\dot{\gamma}_1$ , (b)  $t_2$  en fonction de  $\dot{\gamma}_1$ , pour une solution de CPCl–NaSal à 5.8%. Les lignes continues et discontinues représentent respectivement les meilleurs ajustements par les lois  $s_1 \dot{\gamma}_1^2 / (1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1)$  et  $c_1 \dot{\gamma}_1^{1.5}$ .

ne sont pas indépendants de  $\dot{\gamma}_1$  et diminuent lorsque  $\dot{\gamma}_1$  augmentent. Une raison possible pour cet écart est que ce modèle suppose que le fluide est isotrope. Or, on peut montrer par biréfringence que les micelles tendent à s'aligner dans le sens de l'écoulement [55]. Le fluide n'est alors pas isotrope ce qui peut contribuer à diminuer  $s_1$  et  $s_2$ .

Cependant, on s'attend à ce qu'à faible cisaillement le caractère isotrope du fluide soit conservé, i.e.  $t_i \simeq s_i \dot{\gamma}_1^2$  et non à  $t_i \simeq c_i \dot{\gamma}_1^{1.5}$  pour  $\dot{\gamma}_1 \rightarrow 0$ . On cherche donc, dans un deuxième temps, à ajuster la courbe  $\eta_1(\dot{\gamma}_1)$  par l'expression suivante :

$$\eta_1 = \eta_0 \frac{1 + \frac{s_2 \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_4 \dot{\gamma}_1}}{1 + \frac{s_1 \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1}} + \eta_s, \quad (\text{B.69})$$

Les ajustement de  $t_i$  par  $1 + \frac{s_i \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_{2+i} \dot{\gamma}_1}$  et par  $c_i \dot{\gamma}_1^{1.5}$  sont alors indiscernables (cf. les lignes continues sur la figure B.4). À la précision expérimentale près, on peut choisir  $\tau_4 = \tau_3$ , ce qui rend l'équation (B.69) inversible. En utilisant cette expression, on trouve que l'ajustement de  $\eta_1$  par l'équation (B.69) est meilleur que celui par l'équation (B.66). De plus, il apparaît que  $s_1 \simeq \tau_1^2$  et  $s_2 \simeq \tau_2 \tau_1$ . Enfin, lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , on peut écrire :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_{stat}(\sigma_1 + \sigma_2 \cos \omega t), \quad (\text{B.70})$$

et, si  $\sigma_2$  est suffisamment petit, on trouve :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}_{stat}(\sigma_1) + \sigma_2 \cos \omega(t) \frac{\partial \dot{\gamma}_{stat}}{\partial \sigma}, \quad (\text{B.71})$$

Finalement, on obtient la condition :

$$\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \dot{\gamma}_1}. \quad (\text{B.72})$$

On trouve ainsi la relation empirique suivante pour les courbes  $\eta_{I1}$  et  $\eta_{I2}(\omega, \dot{\gamma})$  :

$$\eta_1(\dot{\gamma}_1) = \eta_0 \frac{1 + \frac{\tau_1 \tau_2 \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1}}{1 + \frac{\tau_1^2 \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1}} + \eta_S, \quad (\text{B.73})$$

$$\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1) = \eta_S + \eta_0 \frac{-\tau_1 \tau_2 \omega^2 \left(1 + \frac{\tau_1 \tau_2 \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1}\right) + \frac{1 + 2\tau_3 \dot{\gamma}_1 (1 + \tau_1 \tau_2 \dot{\gamma}_1^2) + \dot{\gamma}_1^2 (3\tau_1 \tau_2 + \tau_3^2 - \tau_1^2) + \dot{\gamma}_1^4 \tau_1^3 \tau_2}{(1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1)^2} + i\omega \left(\tau_1 + \tau_2 + \frac{2\tau_1^2 \tau_2 \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1}\right)}{\left(1 + \frac{\tau_1^2 \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1}\right) \left((1 + i\tau_1 \omega)^2 + \frac{\tau_1^2 \dot{\gamma}_1^2}{1 + \tau_3 \dot{\gamma}_1}\right)}. \quad (\text{B.74})$$

On déduit  $\tau_3$  de la courbe de rhéologie non-linéaire en ajustant  $\eta_1(\dot{\gamma}_1)$  par l'équation (B.73). La figure B.5 présente le meilleur ajustement par l'équation (B.73) pour une solution de CPCl-NaSal à 5.8% : on trouve  $\tau_3 = 0.47$  s. En injectant cette valeur dans la formule (B.75)

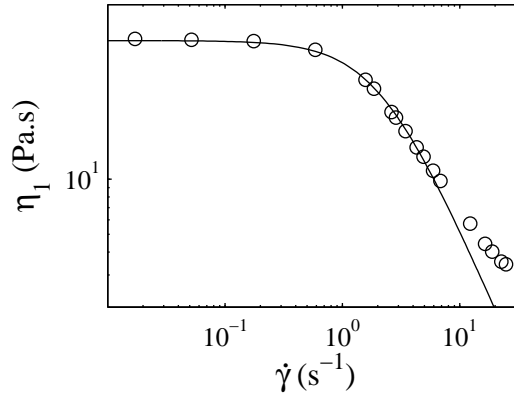


FIG. B.5 –  $\eta_1$  mesurée en rhéologie non-linéaire standard en fonction de  $\dot{\gamma}$  pour une solution à 5.8%. La ligne continue représente ajustement par l'équation (B.73) avec  $\eta_0 = 57.2$  Pa.s,  $\tau_1 = 0.68$  s,  $\tau_2 = 0.0003$  s et  $\tau_3 = 0.47$  s.

on retrouve les courbes expérimentales de la viscosité complexe. La figure B.6 compare les courbes obtenues grâce à l'équation (B.75) aux mesures expérimentales de  $\eta_{I2}$  en fonction de  $\omega$  pour  $\dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma}_{min}$ . L'ajustement ainsi réalisé est bien meilleur que celui donné par l'équation de Booij, en particulier aux basses fréquences. On peut donc déterminer précisément  $\eta_{I2}$  et  $\eta_{I1}$ . Finalement, la seule inconnue restant dans l'expression (B.64) est  $c_0$ .



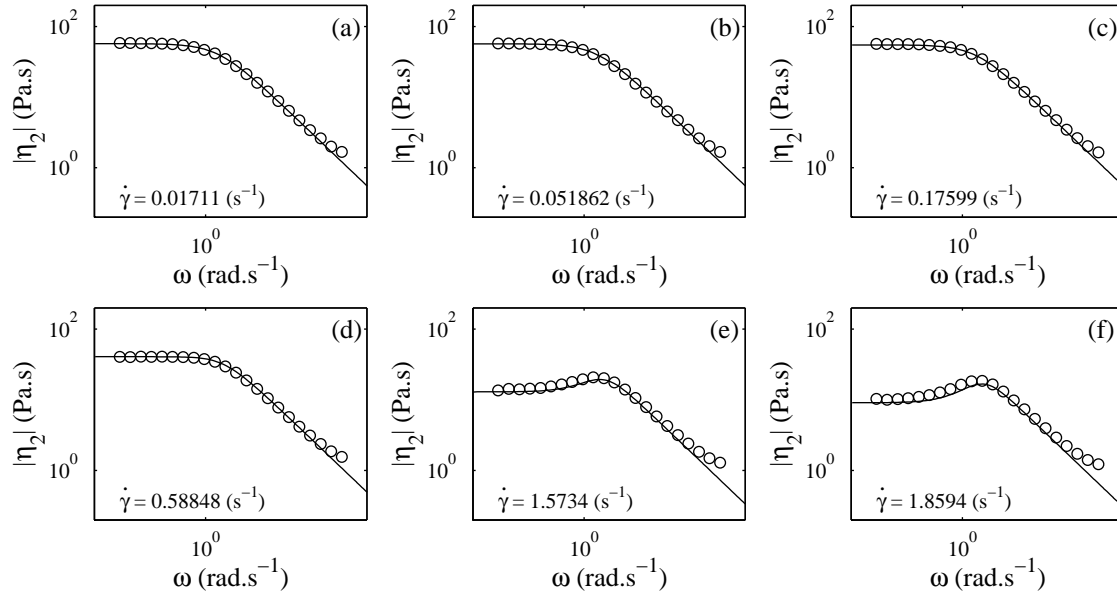


FIG. B.6 – Norme de la viscosité complexe  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  en fonction de  $\omega$  pour une solution de CPCI–NaSal à 5.8%. Les lignes continues représentent l’ajustement par l’équation (B.75) avec  $\eta_0 = 57.2$  Pa.s,  $\tau_1 = 0.68$  s,  $\tau_2 = 0.0003$  s et  $\tau_3 = 0.47$  s.

### Autres concentrations

Pour vérifier que l’équation (B.75) est indépendante de la concentration, nous réalisons des expériences de superposition à deux autres concentrations en CPCI–NaSal. Dans chaque cas, l’ajustement par l’équation (B.75) est nettement meilleur que l’ajustement par l’équation (B.67). Enfin, ces ajustements permettent aussi de mettre en évidence l’influence de l’apparition de la bande nématique. En effet, dès que l’on pénètre dans le régime de “shear-banding” ( $\dot{\gamma}_1 > \dot{\gamma}_{min}$ ), la qualité des ajustements se détériore fortement. La figure B.7 compare  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  et le résultat de l’équation (B.75) juste avant et juste après le début du plateau de contrainte pour trois concentrations différentes en CPCI–NaSal : 4, 5.8 et 8%. Dès que la zone de “shear-banding” est atteinte, à basse fréquence, les valeurs prédites par l’équation (B.75) sont trop faibles. Dans le chapitre suivant, nous analysons les données obtenues pour  $\dot{\gamma}_1 > \dot{\gamma}_{min}$  dans le but d’en déduire une mesure de  $c_0$ .

### B.2.4 Superposition dans le régime de “shear-banding”

La géométrie utilisée dans nos expériences est une géométrie de Couette terminée par un cône. Nos mesures rhéologiques sont donc les moyennes d’une rhéologie Couette et d’une rhéologie cône-plan. Bien que la géométrie cône-plan soit choisie de telle sorte que le cisaillement soit le même pour les deux géométries, dans le cas d’expériences de superposition dans le régime de “shear-banding”, cela apporte des complications. Le principal

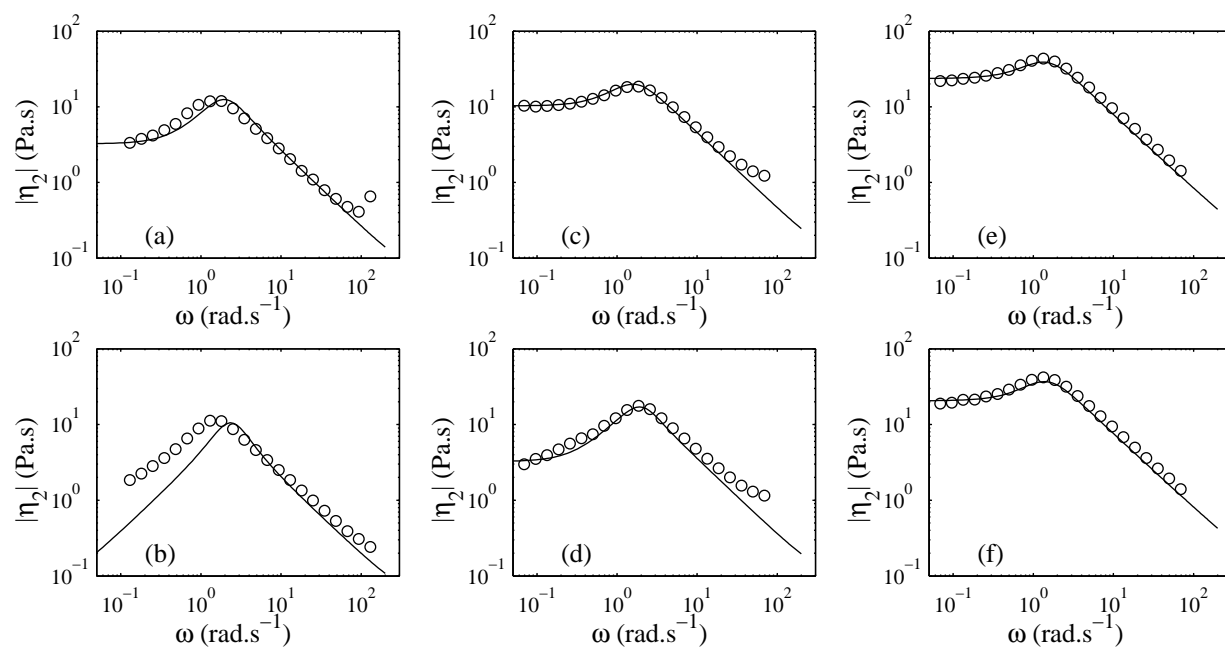


FIG. B.7 –  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  en fonction de  $\omega$  et ajustement par l'équation (B.75) juste avant ((a), (c), (e)) et juste après ((b), (d), (f)) le début du plateau de contrainte, pour trois concentrations différentes en CPCI-NaSal 4% ((a), (b)), 5.8% ((c), (d)) et 8% ((e), (f))

problème posé par la présence de deux géométries est que le plateau ne commence pas au même moment dans chacune d'elle. Dans la géométrie de Couette, la bande nématique apparaît pour  $\sigma = \sigma^* \frac{R_I}{R_I+e}$  alors qu'elle apparaît pour  $\sigma = \sigma^*$  dans la géométrie cône-plan. De plus, si la géométrie de Couette force la séparation du fluide en deux, dans la géométrie cône-plan, le fluide peut se séparer en plus de deux bandes [17] (voir figure B.8). Ce qui



FIG. B.8 – Image du taux de cisaillement local obtenue par résonance magnétique nucléaire sur une solution de CPCl–NaSal. Le taux de cisaillement est codé en niveaux de gris arbitraire. Figure extraite de la référence [59].

se passe dans cette géométrie composite est donc compliqué. On choisit alors d'utiliser la formule théorique la plus simple pour essayer de déterminer  $c_0$ , à savoir la formule pour deux plans infinis et parallèles :

$$\frac{1}{\eta_2} = \frac{1 - \alpha_1}{\eta_{I2}} + \frac{\alpha_1}{\eta_{N2}} + \frac{\Delta\dot{\gamma}}{\sigma^*} \frac{c_0}{ie\omega}. \quad (\text{B.75})$$

On prendra pour  $\alpha_1$  la moyenne de  $\alpha_1 = \frac{\dot{\gamma}_I - \dot{\gamma}_I}{\Delta\dot{\gamma}}$  pour un cône-plan et de  $\alpha_1 = \frac{R}{e} (\sqrt{\sigma_1} \sigma^* - 1)$  pour une géométrie de Couette.

On réalise alors plusieurs expériences de superposition sur le plateau. On déduit de la courbe  $\sigma_1(\dot{\gamma}_1)$  les valeurs de  $\sigma^*$ ,  $\dot{\gamma}_I$  et  $\dot{\gamma}_N$ . Pour l'ensemble des courbes  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  sur le plateau, on calcule  $\alpha_1$ . Pour une fréquence fixée, on peut alors tracer  $\eta_2(\alpha_1)$ . L'équation (B.75) nous dit que la courbe  $1/\eta_2(\alpha_1)$  doit être une droite de valeur à l'origine (voir figure B.9) :

$$\frac{1}{\eta_2} \Big|_{\alpha_1=0} = \frac{1}{\eta_{I2}(\omega, \dot{\gamma}_I)} + \frac{\Delta\dot{\gamma}}{\sigma^*} \frac{c_0}{ie\omega}. \quad (\text{B.76})$$

D'autre part, on connaît  $\eta_{I2}(\omega, \dot{\gamma}_I)$  grâce à l'équation (B.75). Expérimentalement, on calcule donc :

$$\eta_{c_0}(\omega) = -\Im \left( \frac{\eta_2 \eta_{I2}}{\eta_{I2} - \eta_2} \right). \quad (\text{B.77})$$

Finalement, on ajuste la courbe  $\eta_{c_0}(\omega)$  par une droite (voir figure B.10). La pente de cette droite doit valoir  $\frac{\sigma^* e}{\Delta\dot{\gamma} c_0}$ , où la seule inconnue est  $c_0$ .

Comme le montre la figure B.10, en ajustant  $\eta_{c_0}(\omega)$  sur toute la gamme de fréquences explorés, on trouve  $c_0 = 0.1 \pm 0.1 \text{ mm.s}^{-1}$ . Toutefois, l'ajustement obtenu n'est pas satisfaisant. Plusieurs facteurs peuvent expliquer la dispersion des données autour des prédictions théoriques. D'abord, utiliser la formule pour deux plans parallèles est peut-être trop réducteur. Ensuite, le calcul de  $\alpha_1$  comme moyenne de celui attendu dans les deux géométries est aussi une simplification importante. Enfin, il est possible que la précision de nos mesures rhéologiques ne soit pas suffisante pour réaliser une étude aussi poussée.

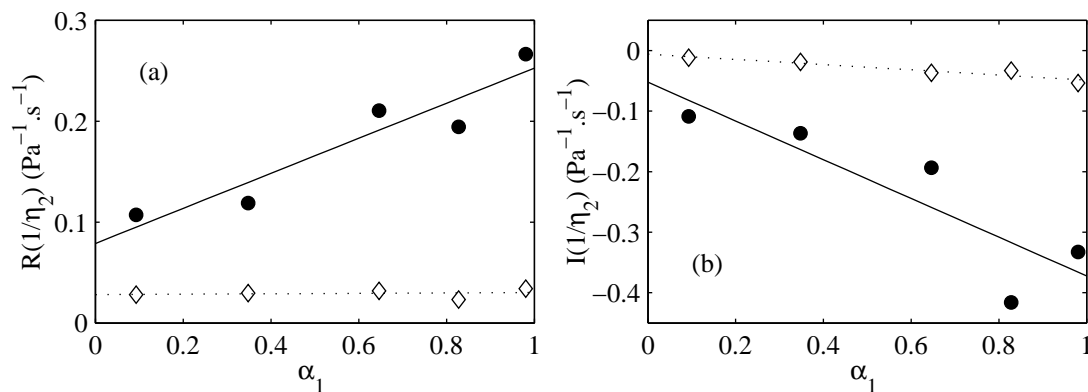


FIG. B.9 – Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) de  $\frac{1}{\eta_2(\omega)}$  en fonction de  $\alpha_1$  pour une solution de CPCI–NaSal à 8% et meilleur ajustement par une droite pour  $\omega = 0.1 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $\diamond$  et lignes en pointillés), et  $\omega = 0.96 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $\bullet$  et lignes continues).

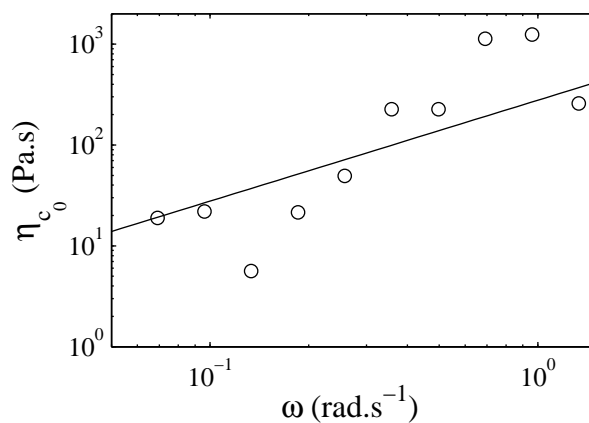


FIG. B.10 –  $\eta_{c0}$  en fonction de  $\omega$  pour une solution de CPCI–NaSal à 8%. La ligne continue représente le meilleur ajustement par une droite avec :  $c_0 = 0.1 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $\Delta\dot{\gamma} = 3.6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\sigma^* = 100 \text{ Pa}$  et  $e = 1 \text{ mm}$ .

### B.3 Conclusion

Nous avons développé un modèle pour rendre compte d'expériences rhéologiques de superposition dans le régime de "shear-banding". Cette analyse nous a permis d'obtenir un ordre de grandeur de la vitesse  $c_0$  de déplacement de l'interface entre deux bandes de cisaillement dans le système de micelles géantes CPCI–NaSal. Si l'on s'en tient au meilleur ajustement obtenu sur la figure B.10, on trouve  $c_0 = 0.1 \pm 0.1 \text{ mm.s}^{-1}$ .

Toutefois, notre étude a relevé d'importantes différences entre théorie et expérience. Nous proposons d'interpréter ces différences par l'imperfection de la géométrie expérimentale. En effet les cylindres utilisés en pratique dans une géométrie de Couette ne sont pas infinis : la partie inférieure du cylindre interne est cônique pour limiter les effets de bords. Dans le cas de mesures de superposition, surtout à contrainte imposée, ces effets peuvent devenir importants, puisqu'on doit prendre en compte une composante due à une géométrie cône-plan et une composante due à une géométrie cylindrique. En particulier, l'équation (B.63) n'est plus applicable. De plus, à faible fréquence, lorsque  $\dot{\gamma}_I < \dot{\gamma}_1 < \dot{\gamma}_N$ , la couche de fluide située sous le cône change entièrement d'état au cours d'une période, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle. Enfin, dans cette géométrie, la détermination de  $\dot{\gamma}_N$  et  $\dot{\gamma}_I$  n'est sans doute pas assez précise pour permettre de bons ajustement de  $\eta_2$ .

Les expériences devraient donc être effectuées en géométrie cône-plan. En effet, en géométrie cône-plan,  $\dot{\gamma}_I$  et  $\dot{\gamma}_N$  sont directement déterminés par le début et la fin du plateau. Cependant, pour pouvoir obtenir plusieurs mesures de  $\eta_2(\omega, \dot{\gamma}_1)$  sur le plateau, la géométrie cône-plan impose de travailler à cisaillement imposé, ce que nos rhéomètres ne font pas très bien. Pour tester plus précisément la validité de notre modèle, nous avons réalisé des expériences de vélocimétrie ultrasonore présentées dans l'annexe suivante.

# Annexe C

## Vélocimétrie ultrasonore

Nous présentons dans cette annexe les résultats obtenus par vélocimétrie ultrasonore lors d'expériences de superposition effectuées dans le régime de "shear-banding". Nous montrons que les profils de vitesse enregistrés en géométrie de Couette permettent de mesurer la vitesse  $c_0$  de déplacement de l'interface entre les deux bandes de cisaillement. Ces mesures viennent confirmer l'approche théorique proposée dans l'annexe B.

### C.1 Montage expérimental

Nous montrons ici un dispositif ultrasonore mis au point au cours de sa thèse par Lydiane Bécu [3]. Tous les détails techniques concernant la méthode de mesure sont rassemblés dans la référence [61]. Le montage expérimental est le suivant (voir figure C.1) : le fluide est placé dans une cellule de Couette de dimensions  $R_I = 25$  mm,  $e = 1$  mm,  $h = 29$  mm. Un émetteur-récepteur envoie des ondes ultrasonores focalisées de fréquence  $f = 36$  MHz par impulsion. La fréquence de répétition des impulsions est de 1 kHz. Pour éviter le glissement au rotor, le rotor est sablé. Pour une meilleure diffusion des ultrasons, le stator est lisse.

Comme en PIV, on ensemence les solutions de micelles géantes avec des billes de verre creuses de diamètre moyen  $11 \mu\text{m}$ . Cette fois, la concentration massique en bille est proche de 1% en masse. Une concentration de 1% en masse permet d'obtenir un signal optimal pour la mesure de vitesse par ultrasons. En effet, les solutions de micelles géantes sont transparentes aux ultrasons. Les billes de verre ont un fort contraste d'impédance acoustique avec l'eau et diffusent donc bien les ondes ultrasonores. Enfin, nous avons vérifié que la présence de billes de verres change peu la rhéologie de nos solutions.

Les ultrasons sont diffusés par les billes de verre et l'émetteur-récepteur capte une partie du signal diffusé. Connaissant la vitesse du son dans le fluide étudié et le temps mis par les échos pour revenir au récepteur, on peut déterminer la position des diffuseurs dans l'entrefer. En corrélant les signaux reçus par l'émetteur-récepteur, on accède au déplacement des diffuseurs et, de là, au champ de vitesse dans l'épaisseur de l'entrefer.

La figure C.2 présente la vitesse en fonction de la position dans l'entrefer pour un

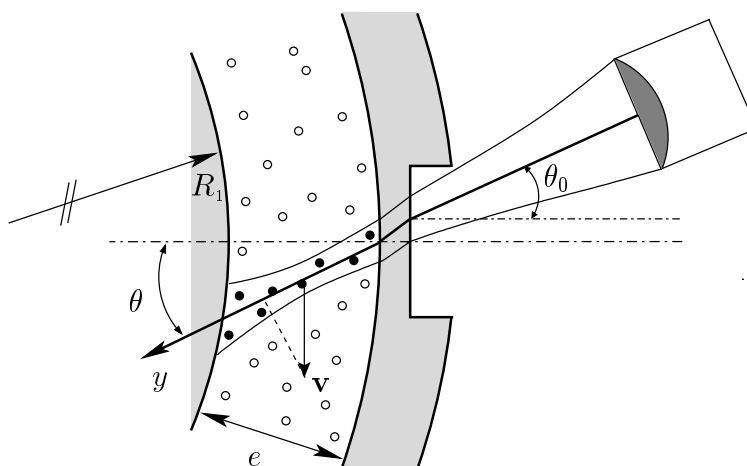


FIG. C.1 – Dispositif expérimental de vélocimétrie ultrasonore en géométrie de Couette. Les zones grises représentent les parois en plexiglas, les cercles dans l'entrefer symbolisent les diffuseurs.

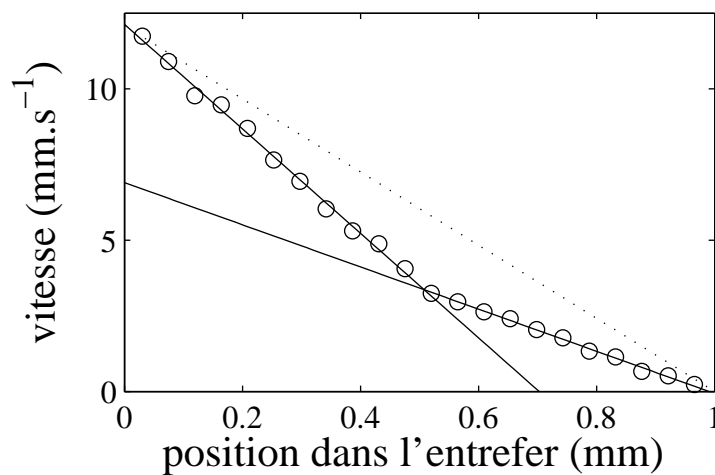


FIG. C.2 – Vitesse du fluide en fonction de sa position dans l'entrefer. Les lignes continues représentent les ajustements linéaires de la vitesse dans la bande isotrope ( $position\ dans\ l'entrefer > 0.5\ mm$ ) et dans la bande nématique ( $position\ dans\ l'entrefer < 0.5\ mm$ ). La ligne pointillée représente la vitesse attendue pour un fluide simple soumis au même cisaillement.

cisaillement appliqué au milieu du plateau de contrainte. La présence de deux bandes de cisaillement est clairement visible. Près du stator ( $r = 1$ ), le cisaillement est plus faible qu’au voisinage du rotor ( $r = 0$ ). On peut ainsi déterminer la position de l’interface (ici  $r \sim 0.5$  mm) en trouvant le point d’intersection des ajustements linéaires du profil de vitesse dans les deux régimes. Dans la suite, on étudie l’évolution de la position de l’interface lorsque le fluide est soumis à un cisaillement oscillant.

## C.2 Résultats expérimentaux

Nous nous intéressons dans ce qui suit à une solution de CPCl–NaSal à 6%. À cette concentration, le plateau de cisaillement est bien visible [80] et s’étend de  $\dot{\gamma}_I = 2.6$  s à  $\dot{\gamma}_N = 6$  s à  $\sigma^* = 70.5$  Pa.

### C.2.1 Détermination de la vitesse de déplacement de la bande

On commence par réaliser une expérience de rhéologie non-linéaire pour déterminer la contrainte plateau  $\sigma^*$  ainsi que  $\dot{\gamma}_I$  et  $\dot{\gamma}_N$ . On impose ensuite une contrainte  $\sigma = \sigma^* \pm \sigma_2$  avec  $\sigma_2 = \sigma^* e/2R_I$ . On s’assure ainsi que la bande reste bien dans l’entrefer (cf. § A.2.3, page 168). Une fois le régime stationnaire atteint, on passe rapidement de  $\sigma = \sigma^* \pm \sigma_2$  à  $\sigma = \sigma^*$  et on enregistre les profils de vitesse  $v(x, t)$  toutes les 0.5 s. On observe alors l’évolution de la position  $r$  de l’interface entre les deux bandes dans l’entrefer. Pour cela, des ajustements linéaires des profils de vitesse sont réalisés dans chaque bande de cisaillement (cf. figure C.2). On ajuste ensuite  $r(t)$  par une exponentielle :

$$r = (r_0 - r_\infty)e^{-2c_0t/R_I} + r_\infty. \quad (\text{C.1})$$

On en déduit la vitesse caractéristique de déplacement de la bande  $c_0$ .

La figure C.3 montre la position de l’interface dans le gap en fonction du temps  $t$ . Lorsque la contrainte passe de  $\sigma^* + \sigma_2$  à  $\sigma^*$ , l’épaisseur de la bande nématique diminue en suivant une loi exponentielle. De même, lorsque la contrainte passe de  $\sigma^* - \sigma_2$  à  $\sigma^*$  l’épaisseur de la bande nématique augmente en suivant une loi exponentielle de même temps caractéristique  $R_I/2c_0$ . Cependant,  $r$  présente un maximum local (“overshoot” sur la figure C.3, la relaxation après l’overshoot n’est pas ajustée, on rajoute arbitrairement une décroissance exponentielle de même  $c_0$ ). Dans les deux cas, les données expérimentales sont compatibles avec  $c_0 = 0.28 \pm 0.03$  mm.s<sup>-1</sup>. Notons que cette valeur est du même ordre de grandeur que celle estimée au § B.2.4 pour une solution de CPCl–NaSal à 8%. Cependant, la précision relative sur la mesure de  $c_0$  est meilleur d’un facteur dix avec la méthode de vélocimétrie ultrasonore par rapport à la technique de superposition.

### C.2.2 Oscillation de la bande

Dans ce qui suit, la contrainte oscille autour de la contrainte plateau :  $\sigma = \sigma^* + \sigma_2 \cos(\omega t)$ . Les évolutions dans le temps de la position  $r(t)$  de l’interface ainsi que du cisaillement  $\dot{\gamma}_I(t)$  dans la bande isotrope et dans la bande nématique  $\dot{\gamma}_N(t)$  sont présentées



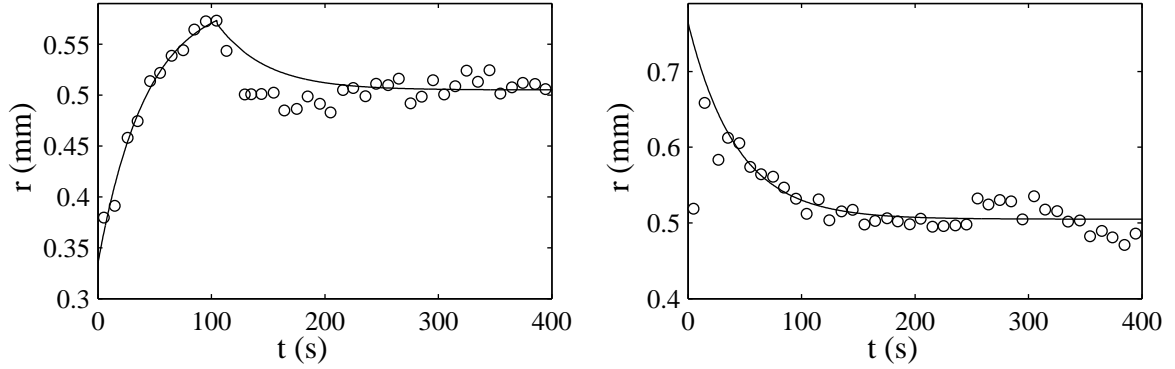


FIG. C.3 – Position de l’interface en fonction du temps pour un saut de 69.5 Pa à 70.5 Pa (à gauche) et de 71.5 Pa à 70.5 Pa (à droite). Les lignes continues représente le meilleur ajustement par la relaxation exponentielle donnée par l’équation (C.1) avec  $c_0 = 0.28 \pm 0.03 \text{ mm.s}^{-1}$ .

sur la figure C.4. La position de l’interface oscille à la fréquence  $\omega$  et l’amplitude des oscillations diminue lorsque  $\omega$  augmente. De plus, dans chaque bande, le cisaillement oscille à la fréquence d’excitation. En mesurant l’amplitude  $\dot{\gamma}_2$  des oscillation du taux de cisaillement dans chaque bande, on peut déduire de ces expériences la norme de la viscosité complexe  $|\eta_2| = \sigma_2/\dot{\gamma}_2$  dans chaque bande.

La figure C.4 montre enfin que l’on peut estimer expérimentalement l’amplitude des déplacements de l’interface grâce à un ajustement des données par une sinusoïde.

### C.2.3 Vérification de la théorie

Le modèle introduit dans l’annexe A.2 prédit :

$$r(t) = e\alpha_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma^*} \frac{R_I}{1 + \frac{e\alpha_1}{R_I}} \frac{1}{2 + i\omega \frac{R_I}{c_0} (1 + \frac{e\alpha_1}{R_I})} e^{i\omega t}. \quad (\text{C.2})$$

L’amplitude  $r_2$  des oscillations de l’interface varie donc avec  $\omega$  en suivant la loi :

$$r_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma^*} \frac{R_I}{1 + \frac{e\alpha_1}{R_I}} \frac{1}{2 + i\omega \frac{R_I}{c_0} (1 + \frac{e\alpha_1}{R_I})}. \quad (\text{C.3})$$

Or, tous les termes de cette expression ( $\sigma_2$ ,  $\sigma^*$ ,  $R_I$ ,  $\omega$ ,  $c_0$ ,  $\alpha_1$ ) sont soit fixés par l’expérimentateur soit déterminés indépendamment des expériences de superposition. En effet,  $c_0$  a été mesuré au paragraphe précédent et  $\alpha_1$  est déduit de la mesure de  $\sigma^*$  et de  $\sigma_1$ . La figure C.5 compare l’évolution de  $r_2$  en fonction de  $\omega$  mesurée expérimentalement et la prédiction de l’équation (C.3) pour nos expériences. La théorie reproduit les expériences sans aucun paramètre libre.

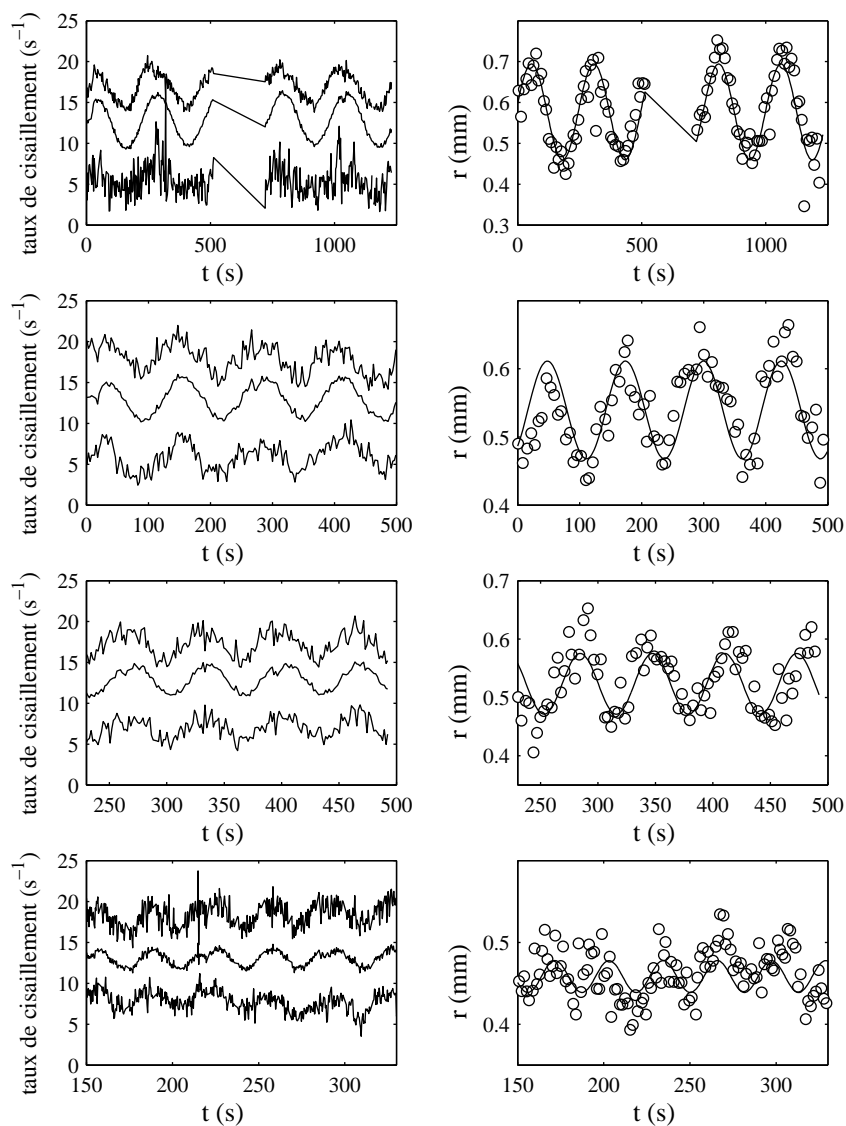


FIG. C.4 – À gauche : position de l'interface en fonction du temps. Les lignes continues représentent les ajustement par un sinus. À droite : cisaillements dans les bandes de fort cisaillement, et de bas cisaillement ainsi que le cisaillement total en fonction du temps  $t$ . À gauche : position de l'interface en fonction du temps. Les lignes continues représentent les ajustement par un sinus, pour une contrainte moyenne de 70.5 Pa et oscillant avec une amplitude de 1 Pa, à une fréquence valant de haut en bas 0.025, 0.05, 0.1 et 0.2  $rad.s^{-1}$ .

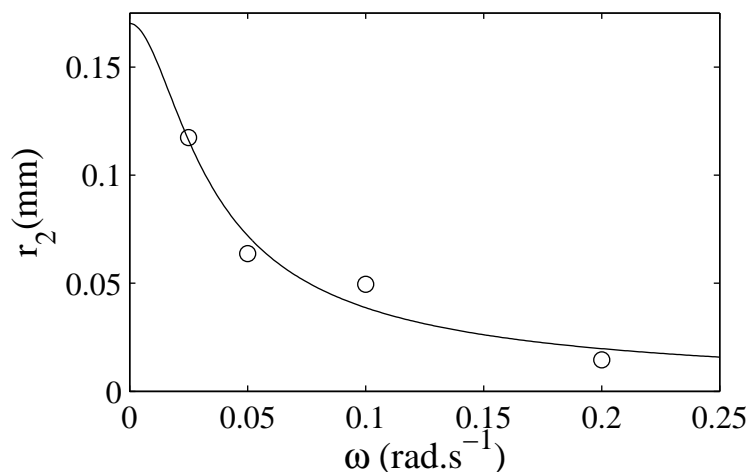


FIG. C.5 – Amplitude  $r_2$  des oscillations de la position de l'interface en fonction de la fréquence  $\omega$ . La ligne continue représente le calcul par l'équation (C.3).

En conclusion, nous avons proposé un modèle décrivant le comportement d'un fluide subissant le phénomène de "shear-banding" lors d'une expérience de superposition. Nous avons ensuite montré que la rhéologie linéaire sous cisaillement d'une solution de micelles géantes de CPCI–NaSal peut être décrite par un fluide de Oldroyd modifié (diminution de  $\tau_1$  avec  $\dot{\gamma}_1$ ). Enfin, grâce à des expériences de vélocimétrie ultrasonore, nous avons prouvé que notre modèle décrit bien le comportement de notre fluide soumis à un cisaillement oscillant autour d'une valeur moyenne de la contrainte située dans le régime de bandes de cisaillement.

# Bibliographie

- [1] T. AKIYAMA, K. M. AOKI, T. IGUCHI, et K. NISHIMOTO. « A fractal property of vertically vibrated beds of granules ». *Chemical Engineering Science*, 51 : 3551–3553, 1996.
- [2] P. BALLESTA et S. MANNEVILLE. « Signature of elasticity in the Faraday instability ». *Phys. Rev. E*, 71 : 026308, 2005.
- [3] L. BÉCU, S. MANNEVILLE, et A. COLIN. « Spatiotemporal Dynamics of Wormlike Micelles under Shear ». *Phys. Rev. Lett.*, 93 : 018301, 2004.
- [4] J. BECHHOEFFER, V. EGO, S. MANNEVILLE, et B. JOHNSON. « An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids ». *J. Fluid Mech.*, 288 : 325–350, 1994.
- [5] T. B. BENJAMIN et F. URSELL. « The stability of the plane free surface of a liquid in a vertical periodic motion ». *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 225 : 505–515, 1954.
- [6] J.-F. BERRET. « Kinetics of the shear-thickening transition observed in dilute surfactant solutions and investigated by flow birefringence ». *Langmuir*, 18 : 7279–7286, 2002.
- [7] J.-F. BERRET. « Rheology of wormlike micelles : equilibrium properties and shear banding transition ». cond-mat/0406681, 2004.
- [8] J.-F. BERRET, R. GAMEZ-CORRALES, J. OBERDISSE, L. M. WALKER, et P. LINDNER. « Flow-structure relationship of shear-thickening surfactant solutions ». *Europhys. Lett.*, 41 : 677–682, 1998.
- [9] J.-F. BERRET, G. PORTE, et J.-P. DECRUPPE. « Inhomogeneous shear flows of wormlike micelles : a master dynamic phase diagram ». *Phys. Rev. E*, 55 : 1668–1676, 1997.
- [10] J.-F. BERRET, D. C. ROUX, et G. PORTE. « Isotropic-to-nematic transition in wormlike micelles under shear ». *J. Phys. II France*, 4 : 1261–1279, 1994.
- [11] E. BERTRAND, J. BIBETTE, et V. SCHMITT. « From shear thickening to shear-induced jamming ». *Phys. Rev. E*, 66 : 060401, 2002.
- [12] T. BESSON et W. S. EDWARDS. « Two-frequency parametric excitation of surface waves ». *Phys. Rev. E*, 54 : R4606–R4609, 1996.
- [13] P. BOLTENHAGEN, Y. HU, E. F. MATTHYS, et D. J. PINE. « Inhomogeneous structure formation and shear-thickening in worm-like micellar solutions ». *Europhys. Lett.*, 38 : 389–394, 1997.

- [14] H. C. BOOIJ. « Influence of superimposed steady shear flow on the dynamic properties of non-newtonian fluids I ». *Rheol. Acta*, 5 : 215–221, 1966.
- [15] H. C. BOOIJ. « Influence of superimposed steady shear flow on the dynamic properties of non-newtonian fluids II ». *Rheol. Acta*, 5 : 222–226, 1966.
- [16] A. P. J. BREU, C. A. KRUELLE, et I. REHBERG. « Reversing the Brazil-nut effect : competition between percolation and condensation ». *Phys. Rev. Lett.*, 90 : 014302, 2003.
- [17] M. M. BRITTON et P. T. CALLAGHAN. « Two-phase shear band structures at uniform stress ». *Phys. Rev. Lett.*, 78 : 4930–4933, 1997.
- [18] C. CABEZA, V. GIBIAT, et C. NEGREIRA. « Observation of highly localized structures in a Faraday experiment with highly dissipative fluids ». *Physica A*, 327 : 34–38, 2003.
- [19] C. CABEZA, C. NEGREIRA, A. C. SICARDI-SCHIFINO, et V. GIBIAT. « Temporal behavior in Faraday instability. An experimental study ». *Physica A*, 283 : 250–254, 2000.
- [20] A. CAPRIHAN, E. FUKUSHIMA, A. D. ROSATO, et M. KOS. « Magnetic resonance imaging of vibrating granular beds by spatial scanning ». *Review of Scientific Instruments*, 68 : 4217–4220, 1997.
- [21] M. E. CATES. « Reptation of living polymers : dynamics of entangled polymers in the presence of reversible chain-scission reactions ». *Macromolecules*, 20 : 2289–2296, 1987.
- [22] M. E. CATES, T. C. B. MCLEISCH, et G. MARRUCCI. « The rheology of entangled polymers at very high shear rates ». *Europhys. Lett.*, 21 : 451–456, 1993.
- [23] E. CERDA et E. TIRAPEGUI. « Faraday instability for visquous fluids ». *Phys. Rev. Lett.*, 78 : 859–862, 1997.
- [24] B. CHRISTIANSEN, P. ALSTRØM, et M. T. LEVINSEN. « Ordered capillary-wave states : quasicrystals, hexagons, and radial waves ». *Phys. Rev. Lett.*, 68 : 2157–2160, 1983.
- [25] S. CILIBERTO et J. P. GOLLUB. « Pattern competition leads to chaos ». *Phys. Rev. Lett.*, 52 : 922–925, 1983.
- [26] P. COUSSOT et F. GAULARD. « Gravity flow instability of viscoplastic materials : the ketchup drip ». *Phys. Rev. E*, 72 : 031409, 2005.
- [27] L. DAUDET, V. EGO, S. MANNEVILLE, et J. BECHHOFFER. « Secondary instabilities of surface waves on viscous fluids in the Faraday instability ». *Europhys. Lett.*, 32 : 313–318, 1995.
- [28] J. K. G. DHONT. « A constitutive relation describing the shear-banding transition ». *Phys. Rev. E*, 60 : 4534–4544, 1999.
- [29] Z. DOGIC et S. FRADEN. « Smectic phase in a colloidal suspension of semiflexible virus particles ». *Phys. Rev. Lett.*, 78 : 2417–2420, 1997.

- [30] S. DOUADY. « Instabilité paramétrique d'ondes de surface ». Thèse de l'Université Paris VI, 1989.
- [31] S. DOUADY et S. FAUVE. « Pattern selection in Faraday instability ». *Europhys. Lett.*, 6 : 221–226, 1988.
- [32] W. S. EDWARDS et S. FAUVE. « Parametrically excited quasicrystalline surface waves ». *Phys. Rev. E*, 47 : R788–R791, 1993.
- [33] W. S. EDWARDS et S. FAUVE. « Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment ». *J. Fluid Mech.*, 278 : 123–148, 1994.
- [34] M. FARADAY. « On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces ». *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 52 : 319–340, 1831.
- [35] P. FISCHER et H. REHAGE. « Rheological master curves of viscoelastic surfactant solutions by varying the solvent viscosity and temperature ». *Langmuir*, 13 : 7012–7020, 1997.
- [36] A. GARCIMARTÍN, D. MAZA, J. L. ILQUIMICHE, et I. ZURIGUEL. « Convective motion in a vibrated granular layer ». *Phys. Rev. E*, 65 : 031303, 2002.
- [37] C. L. GOODRIDGE, H. G. E. HENTSCHEL, et D. P. LATHROP. « Breaking Faraday waves : critical slowing of droplet ejection rates ». *Phys. Rev. Lett.*, 82 : 472–475, 1999.
- [38] C. L. GOODRIDGE, W. Tao SHI, H. E. G. HENTSCHEL, et D. P. LATHROP. « Viscous effects in droplet-ejecting capillary waves ». *Phys. Rev. E*, 56 : 313–318, 1997.
- [39] J. L. GOVEAS et D. J. PINE. « A phenomenological model for shear-thickening in wormlike micelle solutions ». *Europhys. Lett.*, 418 : 706–712, 1999.
- [40] C. GRAF, H. KRAMER, M. DEGGELMANN, M. HAGENBÜCHLE, C. JOHNER, C. MARTIN, et R. WEBER. « Rheological properties of suspensions of interacting rodlike FD-virus particles ». *J. Chem. Phys.*, 98 : 4920–4928, 1993.
- [41] Y. HU et P. BOLTENHAGEN. « Shear-thickening in low-concentration solutions of wormlike micelles. I. Direct visualisation of transient behavior and phase transition ». *J. Rheol.*, 42 : 1185–1208, 1998.
- [42] Y. HU, P. BOLTENHAGEN, E. MATTHYS, et D. J. PINE. « Shear-thickening in low-concentration solutions of wormlike micelles. II. Slip, fracture, and stability of the shear-induced phase ». *J. Rheol.*, 42 : 1209–1226, 1998.
- [43] Y. HU, C. V. RAJARAM, S. Q. WANG, et A. M. JAMIESON. « Shear thickening of a rheopectic micellar solution : salt effect ». *Langmuir*, 10 : 80–85, 1994.
- [44] P. HUBER, V. P. SOPRUNYUK, J. P. EMBS, C. WAGNER, M. DEUTSCH, et S. KUMAR. « Faraday instability in a surface-frozen liquid ». *Phys. Rev. Lett.*, 94 : 184504, 2005.
- [45] Y. JUN, K. KIM, et H. K. PA. « Dynamics of spiral patterns in vertically vibrated thin granular layer system ». *Physica A*, 281 : 93–98, 2000.
- [46] A. KUDROLLI. « Size separation in vibrated granular matter ». *Rep. Prog. Phys.*, 67 : 209–247, 2004.

- [47] A. KUDROLLI, B. PIER, et J. P. GOLLUB. « Superlattice patterns in surface waves ». *Powder Technology*, 123 : 99–111, 1998.
- [48] K. KUMAR et K. M. S. BAJAJ. « Competing patterns in the Faraday experiments ». *Phys. Rev. E*, 52 : R4606–R4609, 1995.
- [49] K. KUMAR, É. FALCON, K. M. S. BAJAJ, et S. FAUVE. « Shape of convective cell in Faraday experiment with fine granular materials ». *Physica A*, 270 : 97–104, 1999.
- [50] K. KUMAR et L. S. TUCKERMAN. « Parametric instability of the interface between two fluids ». *J. Fluid Mech.*, 279 : 49–68, 1994.
- [51] S. KUMAR. « Parametric driven surface waves in viscoelastic liquids ». *Phys. Fluids*, 11 : 1970–1981, 1999.
- [52] S. KUMAR. « Vibration-induced interfacial instabilities in viscoelastic fluids ». *Phys. Rev. E*, 65 : 026305, 2002.
- [53] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ. *Mechanics*. 3rd ed. Pergamon, 1976.
- [54] R. G. LARSON. *The structure and rheology of complex fluids*. Oxford university press, 1999.
- [55] S. LEROUGE, J.-P. DECRUPPE, et J.-F. BERRET. « Correlations between rheological and optical properties of a micellar solution under shear banding flow ». *Langmuir*, 16 : 6464–6474, 2000.
- [56] S. LEROUGE, J.-P. DECRUPPE, et P. OLMSTED. « Birefringence banding in a micellar solution or the complexity of heterogeneous flows ». *Langmuir*, 20 : 11355–11365, 2004.
- [57] M. P. LETTINGA et J. K. G. DHONT. « Non-equilibrium phase behaviour of rod-like viruses under shear flow ». *J. Phys. : Condens. Matter*, 16 : S3929–S3939, 2004.
- [58] C.-H. LIU et D. J. PINE. « Shear-induced gelation and fracture in micellar solutions ». *Phys. Rev. Lett.*, 77 : 507–513, 1996.
- [59] R. W. MAIR et P. T. CALLAGHAN. « Observation of shear banding in worm-like micelles by NMR velocity imaging ». *Europhys. Lett.*, 36 : 719–724, 1996.
- [60] P. MANNEVILLE. *Structures dissipatives chaos et turbulence*. Aléa Saclay, 1991.
- [61] S. MANNEVILLE, L. BÉCU, et A. COLIN. « A spatio-temporal study of rheo-oscillations in a sheared lamellar phase using ultrasound ». *Eur. Phys. J. E*, 13 : 197–212, 2004.
- [62] F. MELO, P. B. UMBANHOWAR, et H. L. SWINNEY. « Hexagons and kinks and disorder in oscillated granular layers ». *Phys. Rev. Lett.*, 75 : 3838–3841, 1995.
- [63] F. S. MERKT, D. I. GOLDMAN, E. C. RERICHA, et H. L. SWINNEY. « Persistent holes in a fluid ». *Phys. Rev. Lett.*, 92 : 184501–1, 2004.
- [64] T. H. METCALF, J. B. KNIGHT, et H. M. JAEGER. « Standing wave pattern in shallow beds of vibrated granular material ». *Physica A*, 236 : 202–210, 1997.
- [65] R. J. MILBURN, M. A. NAYLOR, A. J. SMITH, M. C. LEAPER, K. GOOD, Michael R. SWIFT, et P. J. KING. « Faraday tilting of water-immersed granular beds ». *Phys. Rev. E*, 71 : 011308, 2005.

- [66] J. W. MILES. « Surface-wave damping in closed basins ». *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 297 : 459–475, 1967.
- [67] H. W. MÜLLER et W. ZIMMERMANN. « Faraday instability in a linear viscoelastic fluid ». *Europhys. Lett.*, 45 : 169–174, 1999.
- [68] N. MUJICA et F. MELO. « Experimental study of solid-liquid-type transitions in vibrated granular layers and the relation with surface waves ». *Phys. Rev. E*, 63 : 011303, 2001.
- [69] A. C. NEWELL et Y. POMEAU. « Turbulent crystals in macroscopic systems ». *Phys. A : Math. Gen.*, 26 : L429–L434, 1993.
- [70] I. NEWTON. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Londres, 1687.
- [71] E.R. NOWAK, J.B. KNIGHT, M.L. POVINELLI, H.M. JAEGER, et S.R. NAGEL. « Reversibility and irreversibility in the packing of vibrated granular material ». *Powder Technology*, 94 : 79–83, 1997.
- [72] J. G. OLDROYD. « The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions ». *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 218 : 122–132, 1953.
- [73] J. G. OLDROYD. « The effects of interfacial stabilizing films on the elastic and viscous properties of emulsions ». *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 232 : 567–577, 1955.
- [74] J. PORTER et M. SILBER. « Broken symmetries and pattern formation in two-frequency forced Faraday waves ». *Phys. Rev. Lett.*, 89, 2002.
- [75] O. RADULESCU, P. D. OLMSTED, et C.-Y. David LU. « Shear banding in reaction–diffusion models ». *Rheol. Acta*, 38 : 606–613, 1999.
- [76] Lord RAYLEIGH. « On maintained vibrations ». *Phi. Mag.*, 15 : 229–235, 1883.
- [77] Lord RAYLEIGH. « On the crispations of fluid resting upon a vibrating support ». *Phi. Mag.*, 16 : 50–58, 1883.
- [78] F. RAYNAL, S. KUMAR, et S. FAUVE. « Faraday instability with a polymer solution ». *Eur. Phys. J. B*, 9 : 175–178, 1999.
- [79] H. REHAGE et H. HOFFMAN. « Rheological properties of viscoelastic surfactant systems ». *J. Phys. Chem.*, 92 : 4712–4719, 1988.
- [80] J.-B. SALMON, A. COLIN, S. MANNEVILLE, et F. MOLINO. « Velocity profiles in shear–banding wormlike micelles ». *Phys. Rev. Lett.*, 90 : 228303, 2003.
- [81] N. A. SPENLEY, M. E. CATES, et T. C. B. MCLEISCH. « Nonlinear rheology of wormlike micelles ». *Phys. Rev. Lett.*, 71 : 939–942, 1993.
- [82] P. B. UMBANHOWAR, F. MELO, et H. L. SWINNEY. « Localized excitations in a vertically vibrated granular layer ». *Nature*, 382 : 793–796, 1996.
- [83] C. WAGNER, H. W. MÜLLER, et W. ZIMMERMANN. « Faraday waves on a viscoelastic fluid ». *Phys. Rev. Lett.*, 83 : 308–311, 1999.
- [84] C. H. WANG et Q. R. HUANG. « Hydrodynamic surface waves in concentrated polymer solutions in the presence of surface adsorption ». *J. Chem. Phys.*, 105 : 5898–5906, 1997.



- [85] A. WERNET, C. WAGNER, D. PAPANASSIOU, H. W. MÜLLER, et K. KNORR. « Amplitude measurements of Faraday waves ». *Phys. Rev. E*, 63 : 036305–1, 2001.
- [86] W. ZHANG et J. VIÑALS. « Secondary instabilities and spatiotemporal chaos in parametric surface waves ». *Phys. Rev. Lett.*, 74 : 690–693, 1993.
- [87] W. ZHANG et J. VIÑALS. « Pattern formation in weakly damped parametric surface waves ». *J. Fluid Mech.*, 336 : 301–330, 1997.