



**HAL**  
open science

# Contribution numérique à l'étude des mécanismes aéroacoustiques intervenant dans l'interaction pale-sillage d'un rotor d'hélicoptère

Yann Mauffrey

► **To cite this version:**

Yann Mauffrey. Contribution numérique à l'étude des mécanismes aéroacoustiques intervenant dans l'interaction pale-sillage d'un rotor d'hélicoptère. Génie civil. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT : 2008PA066340 . tel-00812470

**HAL Id: tel-00812470**

**<https://theses.hal.science/tel-00812470>**

Submitted on 12 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité

Mathématiques appliquées

(ED386)

Présentée par

Yann Mauffrey

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

## Contribution numérique à l'étude des mécanismes aéroacoustiques intervenant dans l'interaction pale-sillage d'un rotor d'hélicoptère.

présentée et soutenue publiquement le 16/10/2008

Devant le jury composé de :

M. S. Piperno	<i>Rapporteurs</i>
M. B. Mohammadi	
M. G. Rahier	<i>Examineurs</i>
M. D. Sipp	
M. F. Hecht	
M. P. Frey	<i>Directeur de thèse</i>

Mis en page avec la classe thloria.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Instabilités hydrodynamiques et BWI.</b>	<b>9</b>
1.1 Généralités sur l'étude des instabilités hydrodynamiques. . . . .	10
1.1.1 Instabilités hydrodynamiques ? . . . . .	10
1.1.2 Méthodes linéaires pour l'étude des instabilités. . . . .	12
1.2 Tourbillons et sillages d'hélicoptère. . . . .	13
1.2.1 Instabilités de tourbillons. . . . .	13
1.2.2 Des tourbillons analytiques ... . . . .	14
1.2.3 ... À la modélisation des tourbillons de sillage. . . . .	15
1.3 Instabilités elliptiques d'une paire de tourbillons. . . . .	18
1.3.1 Études linéaires. . . . .	18
1.3.2 Études expérimentales. . . . .	21
1.3.3 Simulations numériques. . . . .	21
1.4 Conclusion. . . . .	22
<b>2 Etude acoustique de l'interaction pale sillage d'un rotor d'hélicoptère</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction. . . . .	23
2.2 Étude numérique des instabilités elliptiques de tourbillons corotatifs . . . . .	24
2.2.1 Caractéristiques des tourbillons de sillage. . . . .	24
2.2.2 Présentation de l'outil numérique. . . . .	26
2.2.3 Conditions initiales. . . . .	27
2.2.4 Obtention des taux d'amplifications. . . . .	28
2.2.5 Résultats. . . . .	29
2.2.6 Interprétation du phénomène dans le cadre d'un écoulement autour d'un rotor. . . . .	32
2.3 Étude Acoustique. . . . .	34
2.3.1 Extraction des perturbations du champ incident. . . . .	34

2.3.2	Obtention des perturbations de pression sur pale. . . . .	35
2.3.3	Caractéristiques expérimentales de la répartition des perturbations de pression en corde. . . . .	37
2.3.4	Résultats. . . . .	39
2.4	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Méthode harmonique</b>	<b>49</b>
3.1	Équations d'Euler linéarisées dans le repère tournant . . . . .	50
3.1.1	Formulation temporelle . . . . .	50
3.1.2	Formulation harmonique. . . . .	52
3.2	Conditions aux limites et zone éponge . . . . .	53
3.2.1	Conditions aux limites non réfléchissantes. . . . .	53
3.2.2	Application d'une zone éponge de type PML. . . . .	53
3.3	Approximation par une méthode Galerkin discontinue. . . . .	55
3.3.1	Formulation variationnelle. . . . .	56
3.3.2	Discrétisation spatiale . . . . .	57
3.3.3	Une zone éponge "géométrique". . . . .	58
3.4	Résolution du système linéaire par un solveur parallèle. . . . .	63
3.4.1	Adaptation à une méthode Galerkin discontinue. . . . .	63
3.4.2	Méthode FETI à deux champs . . . . .	65
3.5	Validation de la méthode dans le cas d'un écoulement parallèle. . . . .	66
3.5.1	Présentation du problème . . . . .	66
3.5.2	Intérêts de la méthode harmonique. . . . .	68
3.5.3	Comparaison entre PML et déraffinement de maillage . . . . .	69
3.5.4	Comparaison avec les résultats théoriques. . . . .	73
3.5.5	Instabilités de Kelvin-Helmoltz pour un écoulement faiblement non-parallèle	74
3.6	Conclusion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Application à l'étude des instabilités de tourbillons de sillage</b>	<b>77</b>
4.1	Présentation du problème. . . . .	77
4.2	Calcul du sillage tourbillonnaire d'une pale d'hélicoptère. . . . .	78
4.2.1	Présentation de la méthode numérique. . . . .	78
4.2.2	Conditions initiales du calcul. . . . .	79
4.2.3	Résultats. . . . .	80
4.3	Définition d'un maillage pour le calcul de stabilité. . . . .	85
4.3.1	Détermination des métriques. . . . .	85
4.3.2	Définition d'un maillage de peau. . . . .	88

---

4.3.3	Définition du maillage volumique. . . . .	90
4.4	Résultats . . . . .	91
4.4.1	Conditions initiales de l'étude paramétrique. . . . .	91
4.4.2	Analyse des résultats. . . . .	93
4.4.3	Stabilité dans la zone 3kHz-6kHz . . . . .	94
4.4.4	Identifications des modes . . . . .	94
4.4.5	Etude de l'évolution spatiale de l'énergie cinétique du système. . . . .	99
4.4.6	Interprétation des résultats dans le cadre d'un écoulement autour d'un rotor. . . . .	99
4.5	Conclusion. . . . .	101
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>103</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>105</b>
<b>A Application de la méthode harmonique dans le cas 2D-axi</b>		<b>111</b>
A.1	Introduction . . . . .	111
A.2	Équations d'Euler linéarisées . . . . .	111
A.3	Formulation variationnelle . . . . .	112
A.4	Formulation variationnelle axisymétrique . . . . .	113
A.4.1	Les contributions de volumes . . . . .	113
A.4.2	Les contributions de surfaces . . . . .	113
A.5	Application . . . . .	114
A.5.1	Initialisation . . . . .	114
A.6	Resultats . . . . .	114
<b>B Méthode numérique</b>		<b>119</b>
B.1	Discrétisation en espace . . . . .	119
B.1.1	Flux convectifs . . . . .	119
B.1.2	Flux diffusifs . . . . .	121
B.2	Intégration en temps . . . . .	122
B.2.1	Schéma explicite de Runge-Kutta à 4 pas . . . . .	122
B.2.2	Schéma d'Euler rétrograde . . . . .	123
B.3	Méthodes implicites . . . . .	123
B.3.1	Méthode de lissage implicite des résidus . . . . .	123
B.3.2	Méthode de relaxation . . . . .	123



# Introduction

Le développement du trafic aérien autour des agglomérations est limité notamment par les nuisances sonores qu'il engendre. Il est donc indispensable de parvenir à comprendre l'origine physique de ces phénomènes afin d'en réduire les effets. Les hélicoptères, qui sont amenés à survoler les agglomérations à basse altitude, font ainsi l'objet de nombreuses études.

On peut distinguer trois sources de bruit sur cette machine : le rotor de queue, les moteurs et le rotor principal. L'importance relative de ces sources de bruit varie selon les configurations de vol.

En vol à basse vitesse, le bruit de rotor principal d'hélicoptère est constitué de trois composantes principales dont les caractéristiques et les origines physiques sont différentes. La figure 1 montre l'intensité du bruit rayonné en fonction de la fréquence pour différentes configurations de vol dans le cas d'une maquette de rotor à l'échelle 1/3. Par ordre de fréquence croissante les différents bruits rencontrés sont :

1. Le BVI ( Blade Vortex Interaction) qui est un bruit situé sur la figure 1 dans la bande de fréquence  $[500Hz : 2500Hz]$  ( $[170Hz : 800Hz]$  dans le cas d'un rotor à l'échelle 1). On peut voir sur la figure 1 qu'il se caractérise par un spectre de raie signant son caractère périodique et déterministe. Sur la même figure on remarque que, bien qu'il soit présent dans toutes les configurations de vol, son intensité s'effondre à mesure que l'angle d'inclinaison du rotor diminue. Son caractère impulsif, donc très gênant pour les riverains, en a fait le principal sujet des études sur le bruit de rotor principal depuis les années 70. Son origine physique est maintenant bien établie : le BVI est le résultat d'une interaction quasi-parallèle entre une pale et un tourbillon qui conduit à de brusques fluctuations de pression sur pale produisant des sources acoustiques intenses et corrélées en corde et en envergure produisant un bruit très directif. Les études effectuées à l'ONERA sur ce sujet ont permis l'élaboration de codes de prévisions du bruit [73, 9] suffisamment précis pour permettre la conception de rotor moins bruyant (rotor ERATO [50]).
2. Le BWI (Blade Wake Interaction) qui est un bruit "large bande" situé sur la figure 1 dans la bande de fréquence  $[3KHz : 6KHz]$  ( $[1KHz : 2KHz]$  dans le cas d'un rotor à l'échelle 1). Son aspect large bande est bien marqué sur la figure car aucune raie n'émerge. On peut remarquer aussi que dans le cas d'un vol de montée modérée ( $\alpha_{tpp} = -3.9^\circ$ ) le BWI est le bruit dominant du rotor principal. **L'étude de ce bruit constituera le sujet de cette thèse.**
3. Enfin le bruit propre (*Self-noise*) qui occupe les hautes fréquences du spectre et varie relativement peu en intensité quelle que soit l'inclinaison du rotor. Ce bruit a un caractère "large bande".



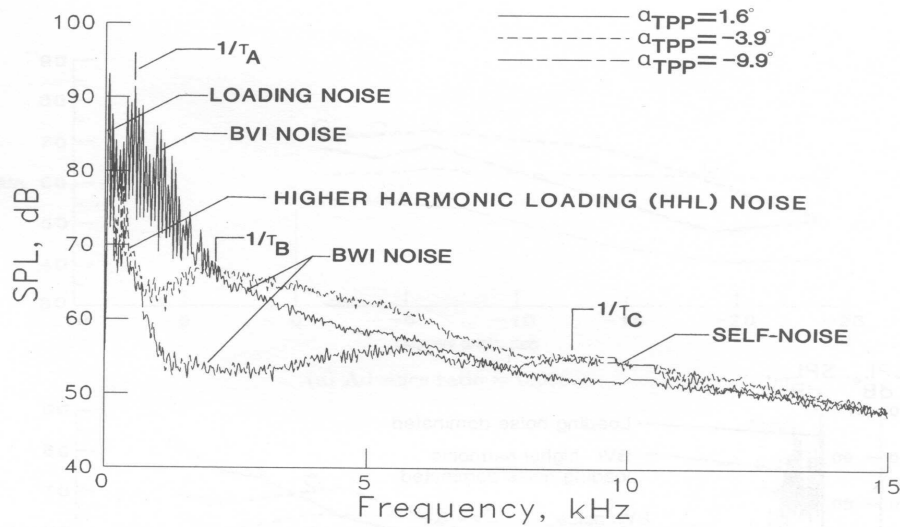


FIG. 1 – Spectre acoustique en bande étroite pour différentes configurations de vol. Les valeurs négatives de l’inclinaison du rotor  $\alpha_{TPP}$  correspondent à des vols de montée. (Issu de Brooks [22]).

## Etat de l’art

Si depuis une quarantaine d’années, le BVI a fait l’objet d’un grand nombre d’études et de mesures en vue de mieux comprendre son origine et de pouvoir en réduire le bruit. Le BWI, quant à lui, n’a pas été l’objet d’une telle attention. Historiquement il fut d’abord mis en évidence par Brooks [22]. A partir de spectres acoustiques expérimentaux, Brooks a relié le bruit à large bande engendré par le rotor aux moyennes fréquences à des fluctuations non périodiques de la pression sur les pales. Partant de cette idée, Brézillon a cherché à établir un lien entre ces fluctuations de pression à large bande et d’éventuelles interaction pales-sillage [20]. Pour cela, il a comparé le lieu des fluctuations de pression mesurées sur les pales dans la bande de fréquence du BWI, à ceux des interactions proches entre la pale et les tourbillons marginaux prévus par des calculs de sillages. Cette comparaison lui a permis de mettre en évidence qu’en vol de montée le BWI résulte d’interactions fortement obliques avec des tourbillons marginaux peu âgés ( $90^\circ$  et  $180^\circ$  d’âge).

Pendant longtemps, les travaux effectués sur le sujet ont supposé que le phénomène du BWI était lié à l’interaction de la pale avec des structures turbulentes homogènes isotropes concentrées autour des tourbillons des pales précédentes. Les premières méthodes de prévision de ce bruit ont montré que l’énergie turbulente contenue dans un tourbillon isolé ne permettait pas d’obtenir des niveaux de bruit comparables à ceux du BWI [40]. Des études expérimentales sur l’interaction perpendiculaire d’une pale avec un tourbillon ont alors montré que l’énergie turbulente à l’intérieur et autour du tourbillon augmentait de façon importante après que celui-ci ait interagi avec une pale [94, 93, 95]. En prenant en compte ce phénomène, Glegg obtient des niveaux en accord avec ceux du BWI [41].

Malheureusement les résultats expérimentaux HART<sup>1</sup> [84] tendent à montrer que les perturbations sur pale les plus importantes sont engendrées par le tourbillon créé par la pale précédente, celui-ci n'ayant donc pas pu interagir avec une pale [20]. La figure 2 issue de [20] illustre ce résultat. La figure de gauche montre les lieux et les distances d'interaction prévus par le calcul entre une des pales du rotor et les tourbillons marginaux issus des deux pales précédentes dans le cas d'un vol de montée modérée où le BWI domine. La figure de droite montre les lieux expérimentaux de perturbations de pression sur pales associés au BWI. Cette figure confirme le lien entre les fluctuations de pression BWI et les interactions perpendiculaires entre la pale et des tourbillons jeunes. En revanche, on remarque que l'interaction de la pale avec les tourbillons engendrés par les deux pales précédentes provoque des fluctuations de pression du même ordre de grandeur. Le tourbillon de la pale précédente n'ayant pas encore interagi avec une pale, l'hypothèse émise par Glegg ne permet donc pas d'expliquer l'origine du bruit BWI pour cette interaction.

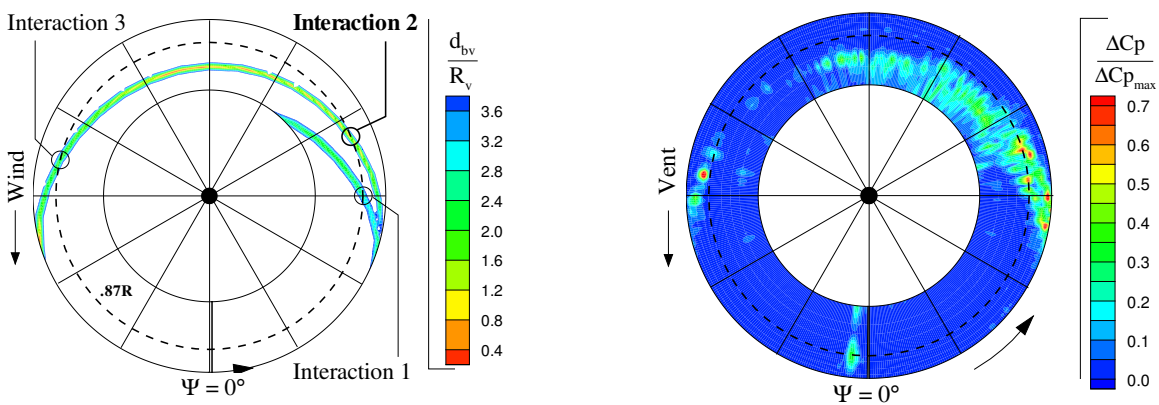


FIG. 2 – Figure de gauche : lieux expérimentaux de fluctuations de pression BWI sur le disque rotor. Figure de droite : position et distance verticale  $d_{bv}$  d'interaction pale/ tourbillon prévues par un calcul de sillage dans le cas d'un vol de montée modérée.

Le sujet de la thèse d'Eric Bouchet [18], qui précède la présente étude, était d'identifier à partir des données expérimentales HART [84] les phénomènes physiques à l'origine de ce bruit. Dans un premier temps son étude a consisté à caractériser de façon précise les structures à l'origine des fluctuations de pression sur pale. L'un des principaux résultats de cette étude a été de montrer que si le BWI avait un caractère aléatoire d'un tour sur l'autre, i.e les positions et amplitudes d'interactions sont différentes selon les rotations du rotor, les structures responsables des fluctuations de pression sur pale possèdent les caractéristiques d'un phénomène déterministe. La figure 3 montre le scalogramme obtenu pour une rotation du rotor par une analyse des pression sur pale à l'aide de la méthode des ondelettes. A gauche est montré le résultat d'ensemble, à droite un zoom sur la partie relative au BWI. Les trois flèches montrent que pour trois azimuts différents les échelles obtenues sont comparables. Le BWI serait donc le résultat d'interactions entre des échelles de dimensions comparables réparties le long de l'axe du tourbillon. La longueur d'onde des perturbations liées à ces structures est d'environ 30% de corde. Cette constatation

<sup>1</sup>Higher Harmonic Control Aeroacoustic Rotor Test. Essais sur une maquette de rotor du BO105 qui ont eu lieu au DNW en 1994 et dont l'objectif principal était de mieux comprendre la génération du BVI. Ils ont repris en 2001 sous l'acronyme HART2 [87]

s'oppose à l'hypothèse de turbulence homogène isotrope évoquée plus haut.

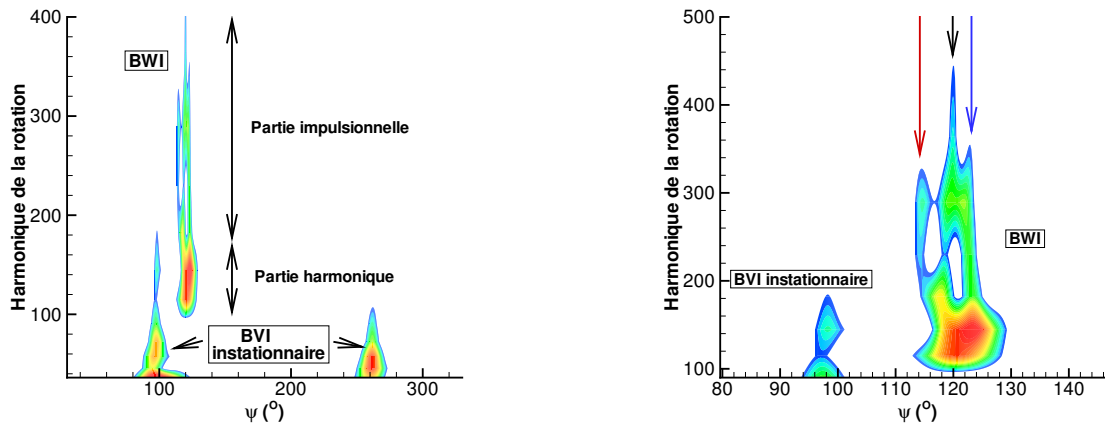


FIG. 3 – Scalogramme pour une rotation du rotor. Les intensités sont représentées par des couleurs allant du bleu au rouge. A gauche est présentée une vue d'ensemble du résultat, i.e tous les harmoniques et tous les azimuts. La figure de droite présente un zoom sur le domaine associé au bruit BWI. (Issu de [18])

Pour affiner la définition de ces structures, Bouchet évalue la cohérence en envergure des perturbations de pression sur pale. Il montre que le signal est bien corrélé sur un domaine situé entre 10% et 20% de corde. Ces derniers résultats ont été confirmés par l'étude faite par Prieur [72] à partir de l'exploitation des essais HART2 [87]. De ces résultats, Bouchet déduit que le BWI serait le résultat de l'interaction d'une pale avec des structures anisotropes cohérentes et fortement liées aux tourbillons d'extrémité pale. Enfin, pour justifier l'existence de ces structures il suppose l'existence d'instabilités elliptiques se développant lors de l'interaction proche entre deux tourbillons corotatifs issus des pales précédentes. Notons que cette interaction dure au maximum un quart de tour avant que la paire de tourbillons ne rencontre la pale.

L'origine de ce phénomène est maintenant bien connue. Le champ de déformation induit par la présence de l'autre tourbillon déforme elliptiquement le cœur du tourbillon considéré. Cette déformation permet alors le couplage de deux modes du tourbillon (appelés modes de Kelvin) et l'apparition d'une instabilité. Nous aborderons de façon plus précise ce sujet dans le chapitre suivant.

## Présentation du problème.

Les travaux de Bouchet [18] ont donc permis de caractériser de manière précise les perturbations de pression sur pale à l'origine du bruit BWI. En invalidant l'hypothèse de turbulence homogène isotrope, il remet en cause à la fois l'explication physique donnée jusqu'à présent sur l'origine de ce bruit et les méthodes de prévisions présentées dans l'état de l'art. En conclusion de son étude, il met en relation les échelles de longueurs caractéristiques des structures identifiées comme étant à l'origine du BWI à celles des instabilités elliptiques d'une paire de tourbillons

corotatifs. Toutefois, à ce jour, il manque encore des éléments pour pouvoir affirmer que ces instabilités sont à l'origine du BWI :

1. D'une part, aucun résultat n'existe sur les caractéristiques des perturbations de pression sur pale et sur le bruit rayonné issus de l'interaction d'une pale avec un tourbillon instable.
2. D'autre part, Bouchet, en se basant sur des résultats théoriques d'étude des instabilités d'une paire de tourbillon corotatif, trouve qu'une durée d'interaction d'un quart de tour de rotor serait trop courte pour permettre un développement suffisant de l'instabilité.

De plus, comment expliquer que le phénomène BWI soit présent, et de façon assez intense, même lorsque deux tourbillons marginaux issus des pales précédentes sont trop espacés pour interagir ? Un exemple d'interaction avec un tourbillon "isolé", provoquant des intensités de perturbations non-négligeables, est montré sur la figure 2 dans le domaine azimutal  $\Psi \in [120^\circ; 150^\circ]$ . Ces deux remarques laissent supposer que d'autres raisons que la présence d'un autre tourbillon, comme la forme elliptique des cœurs de tourbillons d'extrémités de pales jeunes, leur trajectoire courbe, ou les contraintes induites par le sillage du rotor pourraient aussi permettre l'émergence d'une instabilité de type elliptique.

Le but principal de notre étude sera d'étudier au moyen de simulations numériques la validité des hypothèses de Bouchet quant à la capacité de l'interaction entre pale et structures tourbillonnaire instables à générer le bruit BWI et de chercher quels mécanismes, autre que la présence d'un tourbillon, pourraient engendrer ou précipiter l'émergence d'instabilités à l'intérieur des tourbillons de sillage.

Une simulation du phénomène au moyen d'un calcul aérodynamique d'un rotor complet n'est pas accessible actuellement. C'est ce que montre une évaluation du nombre minimum de points nécessaires à cette modélisation à l'aide des équations d'Euler, avec une méthode d'adaptation de maillages non-structurés optimale. Dans cette évaluation on ne prendra pas en compte les effets dissipatifs des schémas numériques qu'il pourrait être nécessaire de compenser par une discrétisation plus importante.

D'une part, pour modéliser le phénomène physique, la prise en compte d'un rotor quadripale serait nécessaire. D'autre part, l'instabilité que l'on cherche à modéliser est liée à la forme elliptique du tourbillon, ces structures devront être discrétisées avec au moins 5 points par rayon. La taille d'un tourbillon étant d'environ 10% de corde, i.e dans le cas d'une pale BO105 à l'échelle 1/3, de l'ordre du centimètre, la taille de maille minimale sera de l'ordre du millimètre. La longueur d'onde des instabilités elliptiques étant comparable au rayon du tourbillon, le gain apporté par l'utilisation de maillages anisotropes [1] ne sera pas très important. On estime que ce calcul nous amènera à une résolution sur des maillages de quarante millions de points. Enfin, les phénomènes que nous souhaitons modéliser se trouvant au cœur du tourbillon, c'est à dire là où les mailles seront les plus fines, l'utilisation d'un schéma de discrétisation temporelle explicite serait conseillée. Une telle simulation, si elle est possible, ne serait pas adaptée à notre étude car le nombre de calculs pouvant être effectués serait très limité, et l'obtention de résultats exploitables ne serait pas assurée.

Les points 1. et 2. énoncés plus haut ne peuvent donc être abordés que de manière disjointe. La problématique de cette thèse consiste donc à répondre aux deux questions suivantes :

1. Si des instabilités elliptiques se développent dans les tourbillons d'extrémité de pale d'hélicoptère, les caractéristiques des perturbations de pression sur pale et du bruit rayonné issus de l'interaction perpendiculaire entre ces structures et une pale correspondront-elles

à celles du BWI ?

2. Les caractéristiques géométriques d'un tourbillon d'extrémité de pale d'hélicoptère jeune (coeur du tourbillon elliptique, et courbure du filament tourbillonnaire) jouent-elles un rôle sur la stabilité de celui-ci ?

## Notre approche

Dans notre approche nous avons cherché à développer des modèles numériques afin de répondre à ces deux questions avec comme objectif d'aboutir à des temps de calculs assez restreints pour nous permettre d'effectuer un grand nombre d'expérimentations.

Pour chacune des questions posées nous avons développé une méthode mettant en jeu plusieurs outils numériques. Une première méthode a été développée pour étudier l'interaction d'une pale avec un tourbillon instable. Elle consiste d'abord à simuler au moyen d'un code volumes finis le développement d'une instabilité elliptique au sein d'une paire de tourbillons analytiques parallèles rectilignes uniformes. Ensuite un outils numérique à été développée pour déterminer les perturbations de pression sur pale issues de l'interaction perpendiculaire d'une pale avec un tourbillon. L'originalité de la méthode réside dans l'extraction des données du code CFD pour obtenir les perturbations de pression sur pale. Une seconde méthode numérique à ensuite été développée pour étudier la stabilité des tourbillons d'extrémité de pale d'hélicoptère. Pour cette étude, une méthode basée sur une discrétisation Galerkin discontinue des équations d'Euler linéarisées dans le domaine fréquentiel (nous utiliserons dans ce mémoire le terme **équations d'Euler linéarisées harmoniques**) est développée. L'originalité de la méthode réside dans la résolution du système linéaire obtenu à partir de cette discrétisation par une méthode directe fortement parallèle appelée méthode de décomposition de domaine.

## Plan de la thèse.

La première partie de la thèse s'intéresse donc à **l'acoustique de l'interaction d'une pale avec un tourbillon instable**. Cette partie est composée de deux chapitres. Le premier chapitre s'attache à présenter les principaux résultats existant sur l'étude des instabilités elliptiques d'une paire de tourbillons. Pour cela, une présentation générale des mécanismes instables sera d'abord effectuée. La majorité des études portant sur des profils de tourbillons analytiques, on cherchera ensuite à définir, à partir de résultats expérimentaux le profil analytique se rapprochant le mieux des tourbillons de sillage d'hélicoptère. Enfin, une présentation des résultats théoriques et expérimentaux existant sur les instabilités elliptiques se développant dans une paire de tourbillons corotatifs dans le cas des profils tourbillonnaires choisis sera faite.

Le second chapitre portera sur l'étude acoustique de l'interaction pale/ tourbillon perturbé. Pour cela une simulation numérique de l'instabilité elliptique sera effectuée en utilisant une configuration simplifiée d'une paire de tourbillons corotatifs parallèles, rectilignes et uniformes. La réponse de la pale interagissant avec un tel phénomène sera obtenue en utilisant la théorie d'Amiet. La théorie d'Amiet [5] permet d'obtenir la réponse d'une pale à des perturbations de vitesse perpendiculaire à celle-ci. La configuration de l'interaction de la pale avec les tourbillons sera évaluée à partir des essais HART [84, 87] et des code de prévisions de sillage développées à l'ONERA.

La deuxième partie de la thèse s'attache à étudier **la stabilité d'un tourbillon de rotor "réaliste"**. Le but recherché est l'étude du phénomène d'amplification linéaire, si il y en

---

a un, de l'instabilité elliptique ou d'une autre instabilité non-visqueuse. La difficulté d'une telle étude réside dans le fait que le tourbillon considéré n'est ni rectiligne ni uniforme. Une modélisation en trois dimensions du phénomène est donc nécessaire. On présentera d'abord, dans un premier chapitre, une méthode linéaire adaptée aux caractéristiques supposées de l'instabilité. Cette méthode est basée sur une formulation harmonique des équations d'Euler linéarisées. Dans un premier temps, on présentera la formulation du problème et sa discrétisation reposant sur une méthode Galerkin discontinue. Ensuite, des conditions aux limites adaptées au problème de stabilité étudié seront évaluées. Enfin ce modèle sera validé sur des cas d'instabilités bidimensionnelles.

Le deuxième chapitre de cette partie portera sur l'application de cette méthode numérique à l'étude paramétrique des instabilités de tourbillons de sillages de rotor d'hélicoptère. L'utilisation d'une méthode linéaire suppose la prise en compte d'un état de base stationnaire. Pour l'obtenir, une simulation stationnaire d'un rotor monopale sera effectuée au moyen du code elsA [39] développé à l'ONERA. Une zone de la solution obtenue sera ensuite interpolée pour permettre une étude locale de stabilité. Enfin, à partir des résultats obtenus, une identification du phénomène observé sera faite.



# Chapitre 1

## Instabilités hydrodynamiques et BWI.

### Introduction.

Depuis les expériences de Reynolds [75], vers 1883, l'étude des instabilités hydrodynamiques occupe une place croissante dans la recherche, notamment en aéronautique où ces phénomènes peuvent entraîner un changement drastique des caractéristiques de l'écoulement. L'image 1.1 montre la visualisation par analogie hydraulique de tourbillons alternés du sillage d'une plaque mince sans incidence. La présence des tourbillons derrière la plaque est le résultat d'un mécanisme instable.

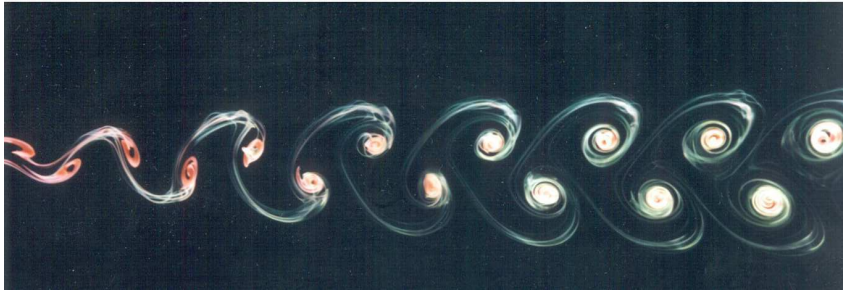


FIG. 1.1 – Tourbillons alternés du sillage d'une plaque mince sans incidence. (Source ONERA)

Pour les industriels, la compréhension de la création de ces phénomènes est un enjeu majeur car elle permettrait de contrôler leurs apparitions. Par exemple, la dissipation rapide des tourbillons de sillage d'avion par le forçage d'une instabilité permettrait de diminuer le risque d'incidents aériens dus à la rencontre d'un avion avec le sillage généré par un avion précédent.

En aéroacoustique les instabilités hydrodynamiques peuvent jouer différents rôles dans la production de bruit :

- Un rôle direct, c'est à dire que les fluctuations hydrodynamiques, engendrées par de tels mécanismes, interagissent entre elles et ces interactions créent des ondes de pression acoustique. Ce genre de phénomène est en grande partie responsable du bruit de jet provenant de l'interaction entre les structures turbulentes contenues dans celui-ci.
- Un rôle indirect, c'est à dire que l'interaction de ces fluctuations avec une paroi crée des ondes de pression acoustique. C'est le cas, par exemple, pour le bruit propre de profil (*self-*



*noise*) dont la source est issue de l'interaction de la turbulence engendrée par la couche limite du profil avec celui-ci.

Concernant le bruit BWI, Bouchet [18] émet l'hypothèse d'un mécanisme indirect de production de bruit par l'interaction d'une pale avec un tourbillon subissant une instabilité appelée instabilité elliptique. Il est ainsi nécessaire de s'intéresser à la dynamique de ce genre de phénomène.

L'objet de ce chapitre est donc de présenter les travaux effectués sur les instabilités tourbillonnaires susceptibles de jouer un rôle dans la génération du BWI.

Pour cela, dans un premier temps, nous rappellerons brièvement les concepts associés aux instabilités hydrodynamiques et les méthodes développées pour les étudier.

Ensuite nous nous intéresserons plus particulièrement aux mécanismes liés aux écoulements tourbillonnaires.

Puis, nous chercherons, à partir de résultats expérimentaux, un profil analytique susceptible d'approcher de façon satisfaisante les tourbillons de bout de pale de rotor.

Enfin nous présenterons les principaux résultats théoriques, expérimentaux et numériques trouvés dans la littérature pour le profil que nous aurons retenu.

## 1.1 Généralités sur l'étude des instabilités hydrodynamiques.

Cette section présente de façon très générale le vocabulaire et les méthodes liées à l'étude des instabilités hydrodynamiques. Cette présentation nous permettra notamment de mieux définir les caractéristiques des instabilités qui seront étudiées dans la deuxième partie du mémoire et de définir une méthode numérique d'étude adaptée à leur analyse.

### 1.1.1 Instabilités hydrodynamiques ?

Le terme instabilité porte sur la réponse d'un champ hydrodynamique à une perturbation localisée. Si la perturbation décroît au cours du temps dans tout le domaine alors on dit que l'écoulement est stable. En revanche, si cette même perturbation croît, même localement, au moins durant un certain temps, on dit que l'écoulement est instable. Par la suite l'écoulement considéré sans perturbation sera aussi appelé **champ porteur** ou **champ de base**.

Les instabilités hydrodynamiques comptent généralement trois phases de développement. Une phase **linéaire** d'amplification où une longueur d'onde sera amplifiée de façon exponentielle au cours du temps. Une phase **faiblement non-linéaire** où l'amplification de la longueur d'onde instable continue mais les sous harmoniques de cette longueur d'onde sont aussi amplifiées. Enfin une dernière phase, dite **non-linéaire**, correspondant à la saturation de l'instabilité.

Dans le cadre d'une étude linéaire locale, i.e lorsque l'on néglige l'évolution spatiale de l'écoulement dans le sens de sa propagation, deux situations peuvent intervenir lorsque une instabilité apparaît.

Soit une perturbation initialement localisée en espace. Si cette perturbation croît localement en temps on dit que l'instabilité est **absolue**. Dans ce cas, même si la source de perturbation s'arrête à un moment le phénomène d'amplification continue, on dit que le phénomène s'auto-entretient. En revanche, si la perturbation n'est pas amplifiée localement mais qu'elle croît en même temps

qu'elle est convectée par le champ porteur on dit que l'instabilité est **convective**. Dans ce cas, l'instabilité dépend de la présence d'une source harmonique de perturbation. Si cette source est arrêtée alors l'instabilité disparaît.

En résumé si l'on considère  $u(x, t)$  comme la solution d'un problème de stabilité, initialisé non par une source de perturbation mais par une condition initiale, alors trois conditions permettent de définir les concepts de stabilité vu précédemment :

1. Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \forall C$  tel que  $x/t = C$  alors l'écoulement est stable
2. Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \infty$  pour  $x/t = 0$  alors l'écoulement est absolument instable
3. Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \infty$  pour au moins un  $C$  tel que  $x/t = C$  avec  $C \neq 0$  alors l'écoulement est convectivement instable.

Ces concepts ont été abordés par Landau [52] dans le cadre de la turbulence en hydrodynamique. Des critères ont ensuite été évalués pour distinguer ces deux cas (absolument ou convectivement instable) selon les caractéristiques du champ porteur [21]. Dans la suite de cette thèse, l'utilisation de ces deux termes sera liée au caractère auto-entretenu ou non de l'instabilité.

Les mécanismes permettant l'émergence d'instabilités peuvent aussi être différents. Dans certains cas c'est la *viscosité* qui peut piloter le phénomène. Par exemple dans le cas d'un écoulement dans un conduit (expérience de Reynolds) si les termes visqueux sont négligés dans le modèle aucune instabilité n'apparaît. En revanche si les termes visqueux sont pris en compte, à partir d'un certain Reynolds, l'écoulement devient instable. Ce type de mécanisme est appelé **instabilité visqueuse**.

Dans d'autres cas, le phénomène instable n'est pas piloté par la viscosité, par exemple dans le cas d'un écoulement porteur cisailé que nous présenterons par la suite, on dira alors que l'instabilité est **non-visqueuse**. Dans ce cas, la viscosité du fluide aura plutôt un rôle stabilisant sur le développement de l'instabilité.

Notons qu'un même type de profil de champ porteur peut, selon les cas, entraîner l'apparition d'une instabilité convective ou absolue. Par exemple, lorsque l'on considère un profil de vitesse en tangente hyperbolique dont l'équation est de la forme :

$$U(y; R) = 1 + R \tanh(y)$$

Selon les valeurs du paramètre  $R$  l'instabilité sera de type absolue ou convective. Huerre et Monkievitch [47] ont montré que si  $R < 1.315$  l'instabilité est convective et si  $R > 1.315$  elle est absolue.

La simulation directe, c'est à dire par la résolution des équations de Navier Stokes complètes, permet d'obtenir l'ensemble des étapes de développement des instabilités mais elle ne permet pas de les dissocier. Cette méthode peut se révéler utile dans un cadre industriel pour mesurer directement l'impact de ces phénomènes sur un écoulement. En revanche, elle a deux désavantages : d'une part le coût de calcul peut s'avérer important que ce soit en espace mémoire ou en temps CPU, d'autre part elle peut conduire à des difficultés d'interprétation des phénomènes physiques. Par exemple dans le cadre de l'étude de la stabilité du phénomène de transition à la turbulence d'une couche limite, la simulation complète ne permet pas de dissocier les différentes instabilités conduisant à cet état.

Pour mieux comprendre l'origine de tels phénomènes en vue, par exemple, de contrôler leur apparition ou leur zone de croissance, on a donc besoin de pouvoir différencier les différentes phases de leur développement.

Dans la section suivante nous nous intéresserons uniquement aux méthodes numériques développées pour étudier la phase linéaire d'amplification des instabilités hydrodynamiques. Nous verrons par la même occasion que dans de nombreux cas la réussite de ces méthodes est liée aux caractéristiques, définies plus haut, des instabilités étudiées.

### 1.1.2 Méthodes linéaires pour l'étude des instabilités.

Ces méthodes sont généralement basées sur la résolution d'un problème aux valeurs propres obtenu après linéarisation des équations de Navier-Stokes (ou d'Euler) autour d'un champ de base. Ce dernier joue un rôle important sur la complexité des problèmes à résoudre. En effet, nous allons voir que plus le champ de base considéré est simple, plus les équations à résoudre le sont aussi.

Pour des raisons de limitation des capacités informatiques, la première méthode à avoir été développée consiste à considérer un champ de base uniforme dans la direction de l'écoulement et variant dans une seule des directions orthogonales à celui-ci. Soit donc une équation différentielle bidimensionnelle linéaire obtenue après linéarisation autour d'un champ de base stationnaire de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0 \quad (1.1)$$

Où  $L$  est opérateur linéaire dépendant du champ porteur. En considérant que l'écoulement s'effectue selon l'axe  $x$  et que la variation du champ porteur ne dépend que de  $y$ , une étude de stabilité consiste à chercher des solutions sous forme de modes normaux :

$$u(x, t) = \text{Re}\{\hat{u}(y)e^{i(kx - \omega t)}\} \quad (1.2)$$

où  $k \in \mathbb{C}$  est un nombre d'onde,  $\omega \in \mathbb{C}$  une pulsation, et  $\hat{u}$  désigne la transformée de Fourier et de Laplace de  $u$ .

Cette décomposition permet de ramener l'équation (1.1) à une équation différentielle de dimension 1 de la forme :

$$(-i\omega + \hat{L}(k))\hat{u}(y) = 0 \quad (1.3)$$

Et l'étude de stabilité consiste à chercher le noyau de l'opérateur  $-i\omega + \hat{L}(k)$ . Dans la suite, la relation obtenue par cette recherche entre  $k$  et  $\omega$  sera appelée **relation de dispersion** que l'on pourra noter :

$$D(\omega, k) = 0 \quad (1.4)$$

Lorsque l'opérateur  $\hat{L}$  ( transformée de Fourier de  $L$ ) est compliqué, on est amené à résoudre le problème par une méthode numérique. Dans ce cas, après discrétisation, et projection dans une base, généralement de polynômes de Tchebychev, la résolution de l'équation 1.3 se ramène à un problème aux valeurs propres généralisées du type :

$$Au = \lambda Bu \quad (1.5)$$

Dans le cas où l'on fera une étude temporelle, alors  $\lambda = \omega$  et les matrices  $A$  et  $B$  dépendront de  $k$ . Si on effectue une étude spatiale alors on aura  $\lambda = k$  et les matrices  $A$  et  $B$  dépendront de  $\omega$ . Des solutions non triviales de ce système existent seulement si le nombre d'onde  $k$  et la fréquence

$\omega$  satisfait la relation de dispersion (1.4) où  $D$  désigne le déterminant de  $(A - \lambda B)$ . Beaucoup d'applications ont été faites en utilisant cette approche. On peut citer Michalke [68] dans le cadre des instabilités se développant dans les jets ou Mack [60] pour la stabilité des couches limites.

Lorsque le champ porteur varie faiblement dans la direction de sa propagation, il peut être exprimé sous la forme  $u_0(y, X)$  avec le changement de variable  $X = \epsilon x$ . L'étude locale peut alors être étendue en approchant les champs de perturbations par :

$$u(x, y, t) = \tilde{u}(y, X)e^{i\left(\frac{\Theta(X)}{\epsilon} - \omega_f t\right)} \quad (1.6)$$

$\tilde{u}$  est ensuite développé asymptotiquement en  $X$ . Ce développement entraîne la nécessité de résoudre un certain nombre de problèmes aux valeurs propres selon l'ordre de l'approximation. Pour plus de précisions le lecteur peut se référer à Bender [11] pour une présentation générale de la méthode. Un exemple d'application dans le cas d'un champ cisailé faiblement non-parallèle peut être trouvé dans Huerre [42]. Enfin, Chomaz [27] a montré qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour appliquer ce genre d'étude était l'existence d'une région absolument instable dans l'écoulement porteur.

Lorsque le champ est fortement non-parallèle, c'est à dire qu'il dépend de deux ou trois variables d'espace, cette modélisation n'est plus valide. La méthode consiste alors à ne supposer que la périodicité en temps du phénomène, ou dans le cas d'un champ porteur uniforme dans une des trois directions la périodicité dans cette direction. Une revue des résultats obtenus et des méthodes numériques développées peut être trouvée dans Theofilis [85]. Cette méthode permet de trouver les modes globaux, c'est à dire les modes instables auto-entretenus d'un écoulement. En revanche, elle ne permet pas de rendre compte de la croissance transitoire de certains phénomènes ou de la réceptivité de l'écoulement à un forçage localisé. Chomaz [26] explique ce résultat par la non-normalité <sup>2</sup> de l'opérateur Navier-Stokes. Pour obtenir la solution, on doit résoudre non seulement le problème direct mais aussi le problème adjoint car les vecteurs propres de l'opérateur et de son dual ne coïncident pas.

## 1.2 Tourbillons et sillages d'hélicoptère.

### 1.2.1 Instabilités de tourbillons.

Les travaux sur les instabilités tourbillonnaires sont nombreux du fait de leurs implications dans de nombreux domaines industriels ; en astrophysique et géophysique [70], ainsi que dans plusieurs secteurs de l'aéronautique. Fabre [33], a par exemple étudié ce genre de phénomène dans le cadre des sillages d'avions. Plusieurs types d'instabilités peuvent apparaître au sein d'un écoulement tourbillonnaire :

- i. L'instabilité de Crow [30] qui est une instabilité à grandes longueurs d'ondes, par rapport au rayon du tourbillon. Elle se développe dans une paire de tourbillons, et prend la forme d'oscillations sinusoïdales le long de l'axe du tourbillon. Cette instabilité n'apparaît que dans des configurations de paires de tourbillons contrarotatifs. Jimenez [49] a en effet montré qu'elle n'existait pas dans le cas d'une paire de tourbillons corotatifs.

---

<sup>2</sup>soit  $A$  un opérateur et  $A^*$  le dual de cet opérateur. On dit que  $A$  est non normal si  $AA^* \neq A^*A$ .

- ii. L'instabilité de Widnall [92], ou elliptique, se développe dans un tourbillon soumis à un champ d'étirement. Cette instabilité prend la forme d'oscillations à courtes longueurs d'ondes, de l'ordre du rayon du tourbillon le long de l'axe du tourbillon, et se caractérise par un déplacement du centre et de la périphérie du tourbillon dans des directions opposées. L'utilisation de deux termes pour désigner ce phénomène vient du fait qu'il a été mis en évidence à partir de deux formalismes différents. D'autre part, le terme d'instabilité elliptique désigne un phénomène plus général découvert par Bayly [8] sur la stabilité des écoulements à lignes de courant elliptiques. Une revue de ces instabilités peut être trouvée dans [51].
- iii. l'instabilité centrifuge [44] est une instabilité qui se développe à la périphérie des tourbillons axisymétriques et donne lieu à la création d'anneaux tourbillonnaires autour du tourbillon. Une extension à l'étude de stabilité dans le cas des tourbillons non-axisymétriques a été faite par Sipp [82].

En conclusion de sa thèse, Eric Bouchet émet l'hypothèse qu'une des sources principales du bruit BWI serait issue de l'interaction de la pale avec des instabilités elliptiques qui se développent dans deux tourbillons marginaux lorsqu'ils sont proches. Dans ce mémoire, nous chercherons à valider cette hypothèse. Dans la suite de cette section nous ne nous intéresserons donc plus qu'à ce type d'instabilité.

Les caractéristiques de ces instationnarités étant fortement liées au champ porteur considéré, on a d'abord besoin de trouver un modèle analytique de tourbillon permettant de caractériser de façon acceptable les tourbillons de bout de pale.

### 1.2.2 Des tourbillons analytiques ...

Dans un repère cylindrique, un tourbillon axisymétrique se caractérise par une loi de **vitesse azimutale**  $V_\theta(r)$  et une **loi de vitesse axiale**  $U(r)$ . **La circulation** de ce tourbillon est définie par  $\Gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} (2\pi r V_\theta(r))$ . Par la suite, on définira le **rayon visqueux**  $a$  du tourbillon comme le moment d'ordre 2 du champ de vorticité c'est à dire

$$a^2 = \frac{1}{2\Gamma_1} \int [r^2] \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} dr \quad (1.7)$$

En décomposant la vitesse axiale  $U(r)$  sous la forme  $U(r) = U_0 + U_1(r)$  et  $P(r) = (p(r) - p_0)/\rho$  la "pression réduite", les équation de Navier-Stokes se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\frac{1}{U_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) \right) \end{cases} \quad (1.8)$$

Il existe, dans la littérature, deux grandes familles de tourbillons, les tourbillons avec ou sans vitesse axial.

#### Tourbillons sans écoulement axiaux.

Le plus connu de ces profils est sans doute le tourbillon de Rankine défini par :

$$V_\theta = \begin{cases} \frac{\Gamma r}{2\pi a^2} & r < a \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & r > a \end{cases} \quad (1.9)$$

Ce tourbillon au profil peu réaliste, à cause de la singularité en  $r = a$ , est fortement utilisé dans les études de stabilité car il permet un grand nombre de développements analytiques.

Dans [89], Vatisstas propose une famille de tourbillons analytiques sans singularité définie par la vitesse angulaire :

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{r}{(a^{2n} + r^{2n})^{1/n}} \right) \quad (1.10)$$

avec  $n \in \mathcal{N}$ . Dans le cas particulier où  $n=1$  on retrouve le profil tourbillonnaire de type Scully [78] dont nous discuterons dans la partie suivante.

Les deux profils présentés précédemment sont solutions des équations d'Euler stationnaires (équation (1.8) avec  $\nu = 0$ ). En revanche il n'existe pas de profil tourbillonnaire solution des équations de Navier-stokes stationnaire.

Il existe un profil de tourbillon, appelé tourbillon de Lamb-Oseen, qui lui est solution auto-similaire de ces équations si l'on pose  $a^2(t) = 4\nu t$  avec  $\nu$  le coefficient de viscosité cinématique. Sa vitesse tangentielle est définie par :

$$V_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - e^{-r^2/a^2} \right) \quad (1.11)$$

Notons que ce modèle est lui aussi solution des équations d'Euler stationnaires. De plus, on peut remarquer que l'équation 1.10 avec  $n = 2$  est une approximation de ce profil par un développement limité. D'autre part la définition du rayon visqueux donnée en 1.7 ne correspond pas dans ce cas au lieu où la vitesse tangentielle est maximum. En effet, il y a un facteur 1.12 entre ces deux quantités. Si  $a_{v_m}$  désigne le rayon où la vitesse tangentielle est maximum, alors on a  $a_{v_m} = 1.12a$

### Tourbillons avec écoulement axial.

L'écoulement axial d'un tourbillon peut être de type jet si  $V_z > 0$  ou sillage si  $V_z < 0$ ,  $V_z$  désignant la vitesse axiale du tourbillon. Le modèle le plus communément utilisé est le tourbillon de Batchlore ou *q-vortex* défini par le champs de vitesse :

$$\begin{cases} V_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - e^{-r^2/a^2} \right) \\ V_z(r) = W_0 e^{-r^2/a^2} \end{cases} \quad (1.12)$$

Ce tourbillon est caractérisé par son nombre de *swirl*, exprimant la relation entre la vitesse tangentielle maximum  $V_\theta^{max}$ , et le maximum de vitesse axiale  $W_0$  :

$$q \approx \left| 1.57 \frac{V_\theta^{max}}{W_0} \right|$$

### 1.2.3 ... À la modélisation des tourbillons de sillage.

On cherche maintenant à établir les caractéristiques des tourbillons d'extrémité de pale d'hélicoptère pour pouvoir les modéliser au moyen d'un des profils présentés dans les équations (1.9) à (1.12). Pour cela nous avons choisi de nous baser sur des résultats expérimentaux. Le choix d'un modèle de tourbillon étant nécessaire pour les méthodes de prévision du bruit BVI, on trouve

dans la littérature de nombreuses références sur ce sujet pour des tourbillons d'âge supérieur à un tour (notamment dans les essais HART [84, 87]). En revanche peu d'informations sont disponibles sur les tourbillons plus jeunes.

### Formation des tourbillons d'extrémité de pale.

Derrière un profil portant se forme une nappe de vorticité de l'intensité locale est li e aux gradients en envergure de la circulation sur la pale. Cette vorticité est en particulier intense en bout de pale car les gradients de circulation sont importants dans cette zone. A partir d'un certain niveau d'intensité, la nappe s'enroule pour donner lieu à une structure tourbillonnaire cohérente qui constitue le tourbillon de bout de pale. La durée de cette phase peut varier selon les configurations de vol et selon les critères retenus pour déterminer la fin de l'enroulement. Pour notre étude, nous avons choisi de définir la fin de l'enroulement tourbillonnaire comme le moment où la structure tourbillonnaire se distingue de la nappe de vorticité en terme d'intensité.

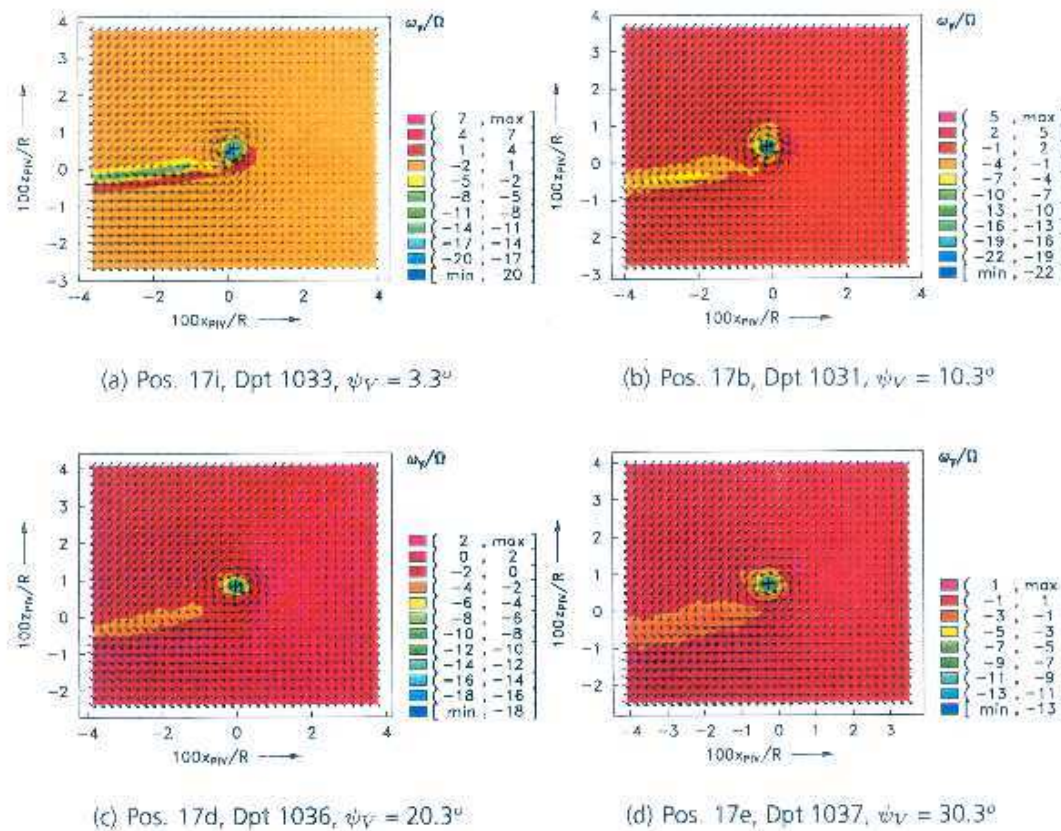


FIG. 1.2 – Exemple d'enroulement du tourbillon d'extrémité (issu de [88]).

La Figure 1.2 montre l'évolution de la nappe de vorticité derrière une pale BO105, dans le cas d'un vol de descente. Ces résultats sont issus des mesures PIV (Particle Image Velocimetry) effectués pendant les essais HART2 [87],  $\psi_v$  représente l'âge du tourbillon en azimut de pale.

On remarque que, très tôt, au bout de cette nappe on distingue une structure tourbillonnaire. Si l'intensité de la nappe et du tourbillon est comparable lorsque  $\psi_v = 3.3^\circ$ , au cours du temps, les valeurs entre ces deux structures divergent. En effet, l'intensité de la nappe devient trois fois inférieure à la vorticité maximal du tourbillon lorsque  $\psi_v = 10.3^\circ$  pour atteindre ensuite une intensité inférieure à 1/4 de celle du tourbillon.

On peut aussi remarquer sur cette image que la vorticité maximale du tourbillon diminue de façon importante pendant cette phase d'enroulement. Cette tendance est confirmée par McAlister [66] dans le cas d'un rotor en vol stationnaire. Dans son expérience, au cours des 40 premiers degrés d'azimut, la vorticité maximale contenue dans le tourbillon perd plus de 50% de sa valeur, puis la décroissance de cette quantité continue mais avec une pente beaucoup plus faible. Il apparaît donc que la formation du tourbillon passe par une phase transitoire pilotée par la dynamique de l'enroulement tourbillonnaire.

Un autre résultat observé expérimentalement [29, 43, 58, 66] est la forme elliptique, et non axisymétrique, des tourbillons de bout de pale. Cette ellipticité est présente quel que soit l'âge des tourbillons mais à des degrés plus au moins importants. Alors que la déformation est grande dans les premiers azimuts, elle diminue rapidement durant le premier quart de tour pour finalement se stabiliser. La déformation des tourbillons âgés est expliquée par Leishman [58] comme issue de la forme courbe du filament tourbillonnaire. La déformation plus prononcée dans les premiers azimuts résulte, selon le même auteur, de la contraction de la nappe tourbillonnaire. De notre point de vue, cette déformation du tourbillon pourrait aussi s'expliquer par la présence de la nappe de vorticité créant une contrainte de déformation sur le tourbillon.

### **Choix d'un profil.**

Les méthodes de prévisions du BVI utilisent des modèles de tourbillons analytiques. Pour cette raison, on trouve un certain nombre d'articles cherchant à évaluer un profil de vitesse tangentielle représentatif de ceux observés expérimentalement. En revanche, l'interaction de la pale avec le tourbillon dans ce genre de cas étant perpendiculaire, le profil de vitesse axiale n'est que peu discuté. Nous avons cherché dans cette littérature quels profils de tourbillons analytiques sont utilisés pour représenter les tourbillons de sillage pour les calculs de prévision du BVI. Scully [78] trouve dans son étude des profils de tourbillons proches des tourbillons de Vatistas avec  $n = 1$ . Dans [66], le profil correspondant aux tourbillons jeunes est aussi un tourbillon de Vatistas mais avec cette fois  $n = 3$  alors que Han [43] et Bagai [7] trouvent  $n = 2$ . Dans l'article de Han, l'auteur note aussi que le profil de tourbillon de Lamb-Oseen correspond assez bien aux résultats expérimentaux. Cette remarque est logique puisque, comme nous l'avons dit précédemment, le tourbillon de Vatistas avec  $n = 2$  est une approximation du tourbillon de Lamb Oseen.

Au sujet des profils de vitesse axiale, les résultats expérimentaux cités plus haut montrent de manière générale un déficit de vitesse dont le profil est gaussien. Ce résultat est confirmé par Han. Dans [66, 43, 58], les résultats montrent que très tôt ce déficit de vitesse devient petit devant la vitesse maximale tangentielle. Les auteurs obtiennent un rapport de 1/5 entre ces deux quantités.

Ce rapport nous a poussé pour la suite de notre étude à négliger le déficit de vitesse axiale du tourbillon. En effet, considérer une vitesse axiale pour une étude acoustique dans le cas d'une interaction perpendiculaire pale/tourbillon ne jouera pas un rôle primordial sur les résultats. D'autre part, Laporte [54] montre qu'un rapport de cet ordre ne change pas la dynamique de



l'instabilité elliptique se développant dans la paire de tourbillons. Le modèle de tourbillon que nous utiliserons dans la suite de cette thèse sera de type Lamb-Oseen. Ce profil présente en outre l'intérêt d'avoir été largement étudié dans le cadre des instabilités elliptiques que nous présentons dans la section suivante.

### 1.3 Instabilités elliptiques d'une paire de tourbillons.

On présente dans cette section les différents résultats trouvés dans la littérature au sujet des instabilités se développant dans une paire de tourbillons de Lamb-Oseen. Les interactions tourbillonnaires au sein d'un rotor mettant en jeu des interactions de tourbillons corotatifs, nous nous intéresserons plus particulièrement à ce phénomène. Après avoir brièvement rappelé les méthodes d'études linéaires de ces instabilités, on donnera une formule d'approximation du taux d'amplification de l'instabilité en fonction de différents paramètres. Puis on présentera les études expérimentales ayant mis en évidence ce phénomène et, enfin, nous parlerons des différents travaux numériques effectués sur ce sujet.

#### 1.3.1 Études linéaires.

##### Modes de Kelvin d'un tourbillon

Les instabilités elliptiques résultent en une déformation à la fois du cœur du tourbillon mais aussi de son axe. Pour faire une étude de stabilité, on est donc amené à considérer des perturbations tridimensionnelles. En 1880, Lord Kelvin a effectué une analyse de stabilité d'un tourbillon de Rankine. Pour cela, il a superposé à l'écoulement de base une perturbation  $u'$  qu'il a décomposée sur une base orthogonale, ces modes sont maintenant appelés modes de Kelvin et s'écrivent :

$$u'(r) = U'(r)e^{ik_z z + im\theta - i\omega t} \quad (1.13)$$

où  $U'(r)$  est déterminé par la forme du profil de vitesse du tourbillon,  $k_z$  est le nombre d'onde axial,  $m$  est le nombre d'onde azimutal et  $\omega$  la fréquence.

En imposant des conditions aux limites sur  $r$  on obtient une relation de dispersion du type  $D(\omega, k, m)$ . Lord Kelvin montre ainsi que le tourbillon de Rankine isolé est marginalement stable pour tout mode de Kelvin.

Dans le cas d'un tourbillon de Lamb Oseen il apparaît des couches critique à l'endroit où la vitesse angulaire du tourbillon devient égale à la fréquence du mode de kelvin. Sipp [80] a résolu ce problème en utilisant une méthode de *shooting*. Il obtient, dans le cas d'un tourbillon axisymétrique, des modes qui sont amortis pour les nombres d'ondes faibles.

##### Stabilité d'une paire de tourbillons.

Lorsqu'un tourbillon interagit avec un autre de façon assez proche, il est soumis à un champ d'étirement qui déforme elliptiquement ses lignes de courants. Moore et Saffman [69] ont présenté une méthode générale d'analyse. Leur étude concernait un tourbillon rectiligne uniforme soumis à un champ d'étirement uniforme modélisant l'effet d'un tourbillon d'une paire de tourbillons contrarotatifs sur l'autre. Dans ce cas, on doit prendre en compte, avant une étude de résonance des modes de Kelvin, la déformation à l'intérieur du tourbillon induite par le champ d'étirement,

c'est à dire que si  $u_0$  désigne le champ solution associé à un tourbillon axisymétrique, le champ porteur considéré dans l'étude de stabilité sera :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (1.14)$$

où  $\epsilon \ll 1$  et  $u_1$  désigne le profil de la déformation à l'intérieur du tourbillon induite par le champ d'étirement. Ce profil de déformation est déterminé à partir de la résolution d'une équation différentielle mono dimensionnelle [76].

Moore et Saffman montrent qu'une instabilité intervient lorsqu'une condition de résonance est vérifiée entre deux ondes de Kelvin et le champ d'étirement. Cette condition de couplage s'écrit :

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 0 \\ m_1 - m_2 = 2 \\ \omega_1 - \omega_2 = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Dans le cas d'une paire de tourbillons de Lamb Oseen le problème ne possède pas de solution analytique. Eloy et Le Dizès [32] ainsi que Sipp [80] ont cherché à l'aide d'approximations numériques les modes instables dans le cas d'une paire de tourbillons contrarotatifs. Sipp montre que seul le couple  $(m_1 = 1; m_2 = -1)$  est amplifié car dans les autres cas l'un des deux modes est atténué par la présence de la couche critique.

Lorsque l'on considère une paire de deux tourbillons corotatifs l'étude de stabilité devient plus compliquée. En effet la présence de deux tourbillons dont la circulation est de même signe provoque la mise en rotation du système à la vitesse  $\Omega_z$  défini par :

$$\Omega_z = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\Pi d^2}$$

Où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  désignent les circulations des deux tourbillons et  $d$  la distance de séparation entre leurs deux cœurs. La prise en compte de la rotation rend plus difficile le calcul de l'étirement à l'intérieur du tourbillon car une singularité dans l'équation différentielle apparaît lorsque la vitesse angulaire du tourbillon annule la vitesse de rotation du système de tourbillons. La résolution de ce problème est présentée par Le Dizès dans [56]. Dans le repère en rotation, la condition de résonance est aussi changée, elle devient :

$$\begin{cases} k_1 = k_2 = 0 \\ m_1 - m_2 = 2 \\ \omega_1 - \omega_2 = 2\Omega_z \end{cases} \quad (1.16)$$

### Études locales

Dans le paragraphe précédent la méthode d'analyse repose sur l'hypothèse d'un tourbillon de taille de cœur finie. Le fait que les instabilités elliptiques, au contraire des instabilités centrifuges, restent confinées dans le cœur du tourbillon rend possible une analyse locale de la dynamique du cœur du vortex en supposant que les longueurs d'ondes radiales de l'instabilité sont très petites devant la taille du cœur.

L'hypothèse principale est faite sur les caractéristiques de l'écoulement. On suppose que le fluide est en rotation solide à une vitesse angulaire  $\mu$  et soumis à un champ de contrainte  $S_i$  dans

un fluide en rotation à une vitesse angulaire  $\Omega$ . Dans le repère tournant le champ de vitesse au centre de chaque tourbillon est :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\mu + \Omega - E_i n t & 0 \\ \mu - \Omega - E_i n t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Ce type d'écoulement a été observé par Pierrehumbert [71] numériquement. Ses résultats montrent que cet écoulement est instable pour des instabilités tridimensionnelles. L'étude théorique de ce problème a été faite par Baily [8]. en ajoutant à cet écoulement des perturbations de la forme :

$$(u_0, p_0) e^{i \langle k(\vec{t}), \vec{x} \rangle - i \omega t}$$

avec

$$k(\vec{t}) = k_0 \begin{pmatrix} \sin(\xi) \cos((\mu - \Omega)t + \chi_0) \\ \sin(\xi) \sin((\mu - \Omega)t + \chi_0) \\ \cos(\xi) \end{pmatrix}$$

et

$$\omega^2 = 4\mu^2 \cos \xi$$

avec  $k_0$  la norme du vecteur d'ondes  $k(\vec{t})$ ,  $\langle, \rangle$  désigne le produit scalaire usuel et  $\omega$  la fréquence. L'angle  $\xi$  est l'angle minimal que fait le vecteur d'onde avec l'axe (Oz). Pour la démarche adoptée pour obtenir les taux d'amplifications voir Waleffe [91].

Enfin, l'influence de la viscosité du fluide à été évaluée par Landmann et Saffman [53].

### Approximation des taux d'amplification.

Le Dizès et Laporte [57], en réunissant les résultats obtenus par ces deux méthodes obtiennent une approximation du taux d'amplification  $\sigma$  pour le couple de modes azimutaux ( $m_1 = 1; m_2 = -1$ ) pour une paire de tourbillons corotatifs en fonction du ratio  $a/d$  de la circulation  $\Gamma$  et du nombre d'onde axial  $k_z$  pour les différentes branches de l'instabilité, dans le cas de deux tourbillons de mêmes rayons visqueux et mêmes circulations cette relation s'écrit :

$$\sigma^* = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - \frac{a^2}{2d^2}\right)^4 * K_{nl}(a, b) - \frac{4d^4}{a^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{d^2} - \cos(\xi)\right)^2} \quad (1.18)$$

ou  $K_{nl}$  représente le ratio entre le champ d'étirement au centre du tourbillon et celui à l'extérieur du tourbillon. une approximation de ce ratio est donnée dans [57] sous la forme :

$$K_{nl}(a, b) = 1.5 + 0.038 * \left(0.16 - \frac{a^2}{d^2}\right)$$

Enfin, toujours dans le même article, Le Dizès obtient une approximation de  $\cos(\xi)$  en fonction du nombre d'onde  $k_z$  et de la branche  $n$  de l'instabilité à partir d'une étude de stabilité utilisant les modes de Kelvin :

$$\cos(\xi)^n = \frac{1}{2} - \frac{(2.26 + 1.69n) - k_z a}{14.8 + 9n}$$

Dans la formule 1.18,  $\sigma^*$  est normé par la période de rotation de la paire de tourbillons. Dans la suite de l'étude, le taux d'amplification utilisé sera le taux d'amplification non normalisé  $\sigma$ , tel que :

$$\sigma = \sigma^* 2\pi \Omega_z \quad (1.19)$$

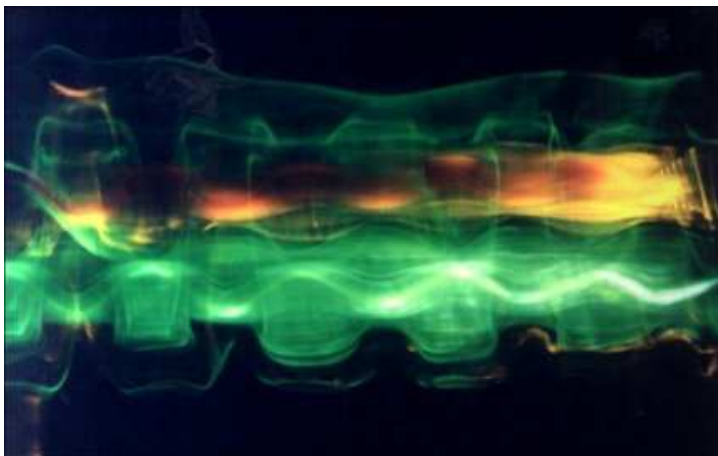


FIG. 1.3 – image d'une instabilité elliptique d'une paire de tourbillons corotatifs issue des expériences effectuées par Meunier [67].

### 1.3.2 Études expérimentales.

Expérimentalement cette instabilité a été observée d'abord par Malkus [63] dans le cas d'un cylindre de fluide en rotation. Les premiers à avoir mis en évidence ce phénomène dans le cadre de l'interaction entre deux tourbillons sont Leweke et Williamson [86] dans le cas de deux vortex contrarotatifs. Ils observent le développement d'une instabilité de Crow et d'une instabilité elliptique. Pour la configuration d'une paire de tourbillons corotatifs, Meunier [67] met en évidence l'émergence de cette instabilité dont les modes couplés sont  $(m_1 = 1; m_2 = -1)$  et son rôle dans la fusion des tourbillons. La figure 1.3 présente le résultat d'une de ses expériences à un instant fixé. L'étude de Meunier a notamment permis de valider la formule d'approximation du taux d'amplification explicitée en 1.18.

### 1.3.3 Simulations numériques.

Une des premières simulations numériques de ces instabilités est due à Billant *et al* [15]. La configuration traitée était un dipôle de Lamb-Chaplygin's qui est une solution exacte des équations d'Euler incompressibles représentant une paire de tourbillons contrarotatifs. Une grande contribution à la simulation numérique des instabilités d'une paire de tourbillons a été apportée par Laporte [54, 55, 57]. Dans le cadre d'une étude sur la stabilité des tourbillons de bout d'ailes et de volets d'avions de transport, il effectue un grand nombre de simulations dans des configurations très différentes. D'une part, il modélise la stabilité d'une paire de tourbillons de type Lamb-Oseen dans le cas co et contrarotatifs, mais il étudie en plus l'influence de la vitesse axiale des tourbillons sur le développement de ces instabilités. De plus, il est le premier, et à notre connaissance le dernier, à avoir étudié la stabilité d'une paire de tourbillons réalistes. Pour cela, il a injecté en conditions d'entrées une paire de tourbillons issue d'un calcul de sillage auquel il a ajouté une perturbation. Du fait de l'importance du temps de calcul, 1700 heures, son étude s'est en revanche limitée à une seule fréquence pour la source de perturbation.

## 1.4 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les mécanismes et les méthodes généralement mises en œuvre pour étudier les instabilités hydrodynamiques. Nous avons plus particulièrement présenté le phénomène d'instabilité elliptique pour une paire de tourbillons corotatifs, phénomène supposé être à l'origine du BWI. Les principaux résultats théoriques, numériques et expérimentaux ont été montrés. Toutes ces études ont permis de mieux comprendre les mécanismes à l'origine de cette instabilité et l'étude de ses caractéristiques de développement. En revanche peu d'applications à des problèmes industriels ont été effectués.

Ce chapitre nous a aussi permis de déterminer, en s'appuyant sur la littérature, un profil analytique de tourbillon, en l'occurrence celui de Lamb Oseen, représentatif des tourbillons de sillages de rotor d'hélicoptère, à partir de résultats expérimentaux. Nous rappelons la définition de la vitesse tangentielle,  $V_\theta$  de ce profil :

$$V_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/a^2}\right) \quad (1.20)$$

Ce profil va nous permettre dans la partie suivante d'évaluer le rayonnement acoustique associé à une interaction pale/tourbillon instable.

## Chapitre 2

# Etude acoustique de l'interaction pale sillage d'un rotor d'hélicoptère

### 2.1 Introduction.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, le principal résultat de la thèse d'Eric Bouchet est l'établissement d'un lien entre génération de BWI et l'interaction des pales avec des structures organisées au voisinage des tourbillons et la caractérisation de ces structures. Il a démontré que les fluctuations de pression sur pale dans la bande de fréquence du BWI étaient dues à l'interaction de la pale avec des structures corrélées et anisotropes situées à proximité des tourbillons générés par les pales précédentes. Il a de plus remarqué que les fluctuations les plus intenses étaient localisées à des azimuts où il y avait une interaction proche entre tourbillons jeunes. Cette constatation l'a amené à rapprocher ces structures de celles que l'on retrouve lors du développement d'instabilités elliptiques causées par l'interaction d'une paire de tourbillons corotatifs proches. Si cette hypothèse est fondée au regard des résultats expérimentaux, aucun résultat n'est venu confirmer ou démentir cette hypothèse à ce jour.

Une méthode numérique pour montrer que ce genre de dynamique pourrait être à l'origine du BWI est de calculer et comparer à l'expérience le rayonnement acoustique d'une interaction pale/tourbillon instable dans des conditions d'interaction proches de celles rencontrées expérimentalement. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce chapitre. Nous avons choisi, pour l'étude, les conditions de fonctionnement du rotor correspondant à un vol de montée modérée [84] pour lequel l'expérience a montré que le BWI dominait le rayonnement acoustique du rotor [20].

A partir d'une simulation des instabilités elliptiques d'une paire de tourbillon corotatifs, parallèles rectilignes uniformes dont les caractéristiques physiques et les paramètres géométriques (distances, orientation par rapport à la pale) ont été tirés de résultats expérimentaux ou numériques, nous avons évalué les caractéristiques des fluctuations de pression sur pale et du bruit rayonné générés par l'interaction d'une pale avec un tourbillon perturbé.

Dans une première partie nous présenterons la simulation numérique de l'instabilité elliptique d'une paire de tourbillons corotatifs. Nous décrirons notamment les différentes phases de l'instabilité. Nous présenterons ensuite la chaîne de calcul mise au point pour obtenir à partir

des résultats des simulations d'instabilités la réponse d'une pale à l'interaction avec ce genre de structure. Enfin nous présenterons les résultats obtenus (caractéristiques des fluctuations de pression sur pale et du bruit rayonné) et les compareront aux résultats expérimentaux HART.

**Remarque 2.1.0.1** *Cette partie a fait l'objet d'une communication à l'ERF 2006 [65] ainsi que d'une publication, acceptée, à l'AIAA journal of Aircraft.*

## 2.2 Étude numérique des instabilités elliptiques de tourbillons corotatifs

### 2.2.1 Caractéristiques des tourbillons de sillage.

Dans le chapitre précédent nous avons cherché à déterminer un profil de tourbillon analytique représentatif des tourbillons d'extrémité de pale. Pour cela, nous nous étions basés sur plusieurs études expérimentales en remarquant que, quelles que soient les configurations étudiées, les profils de tourbillons étaient assez proches. Finalement nous sommes arrivés à la conclusion que le tourbillon de Lamb-Oseen était un bon candidat pour l'étude envisagée.

Dans cette section nous voulons évaluer les caractéristiques physiques (circulation et rayon visqueux) des tourbillons jeunes, i.e âgés de moins de  $180^\circ$  d'azimut. Cette fois la configuration de vol simulée et l'âge du tourbillon ont leur importance. En effet, ces paramètres sont directement liés à la circulation sur la pale. Or cette circulation peut varier de manière importante selon les configurations de vol, la vitesse de rotation du rotor, la forme et les dimensions de la pale, ou l'angle d'attaque du profil.

Malheureusement aucune donnée expérimentale n'existe, pour les essais HART [84, 87], sur ces caractéristiques dans le cas d'un vol de montée modérée. Nous avons donc évalué à l'aide de la chaîne de calcul ONERA BVI [74] la valeur de la circulation et du rayon visqueux du tourbillon. Nous avons choisi de considérer les résultats obtenus pour la zone azimutale  $\psi = [90 - 120]$ . Pour la circulation, on obtient  $\Gamma = 4.7 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Pour le rayon visqueux le choix a été fait de considérer les résultats expérimentaux obtenus pour des tourbillons âgés de moins de 180 degrés. Nous trouvons un rayon visqueux moyen  $a = 0.13C$ , où  $C$  est la taille de la corde de la pale BO-105 ( $C = 0.125\text{m}$ ). Dans le cas d'un tourbillon de Lamb-Oseen, ces caractéristiques conduisent à une vitesse tangentielle maximum d'environ  $28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

La figure 2.1 à gauche montre la position, à un instant donné, des tourbillons d'extrémité de pale fourni par un calcul de sillage dans le cas d'un vol de montée modérée. On peut voir que dans la zone azimutale où des perturbations de pression sur pale associées au BWI apparaissent,  $\psi \in [90^\circ, 120^\circ]$ , il y a une interaction proche entre les deux tourbillons issus des deux pales précédentes. Dans la suite, nous utiliserons pour nommer les différents tourbillons issus des pales précédentes la numérotation utilisée sur cette figure. Cette interaction pourrait permettre le développement d'instabilités elliptiques. Sur la même figure, à droite, est représenté le domaine de fréquence pour la première branche de l'instabilité en fonction de la distance entre deux tourbillons supposés parallèles. Cette figure a été obtenue à partir de l'approximation donnée par la formule 1.19 en utilisant pour la circulation et le rayon visqueux les quantités définies plus haut. Sur cette même figure le domaine situé entre les deux lignes rouges indique le domaine de fréquence du BWI fourni par l'expérience. On peut constater que le domaine de fréquence des instabilités elliptiques est bien dans le domaine de fréquence du BWI.

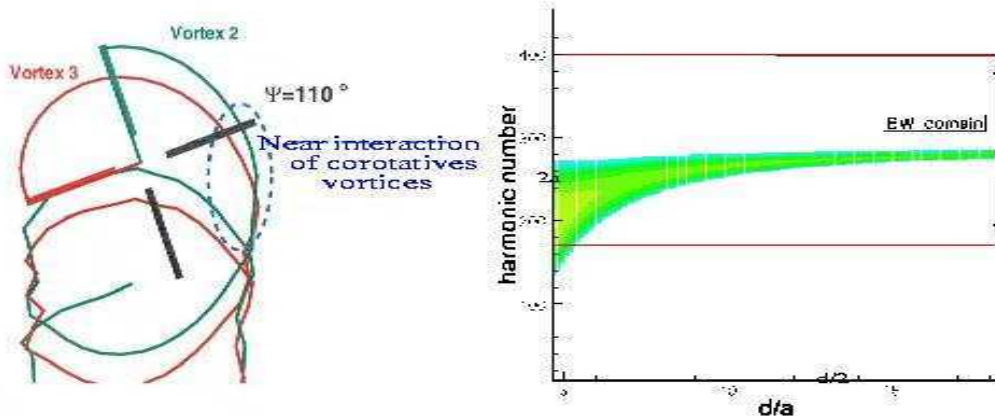


FIG. 2.1 – À gauche : trajectoire du sillage dans le cas d'un vol de montée. À droite : domaine fréquentiel de l'instabilité elliptique en fonction de la distance entre les tourbillons.

Toujours sur la Figure 2.1 il apparaît clairement que le ratio  $d/a$  a une influence majeure sur les instabilités elliptiques. En effet, sur cette figure la valeur du taux d'amplification est donnée par l'échelle de couleur allant du vert au jaune. On constate que le taux d'amplification est d'autant plus important que les tourbillons sont proches. Si ce type d'instabilités se développe au cœur du tourbillon, les perturbations peuvent déformer, au bout d'un certain temps, la périphérie du tourbillon. Ce phénomène est observé avant la saturation des instabilités. Sipp [81] montre, dans le cas d'une paire de tourbillons contrarotatifs que l'amplitude à laquelle saturent les instabilités elliptiques dépend de la distance entre les deux tourbillons. Plus les tourbillons sont distants l'un de l'autre plus les amplitudes de saturation sont petites.

Pour des raisons de contraintes numériques, notamment sur les conditions aux limites, la configuration de la paire de tourbillons sera simplifiée en considérant des tourbillons parallèles rectilignes et uniformes.

Pour évaluer la distance  $d$  entre les tourbillons, nous avons essayé d'estimer une distance représentative des interactions observées expérimentalement. Pour cela nous nous sommes appuyés sur les résultats de Brezillon [20], notamment sur celui présenté sur la figure 2.2. Cette figure montre les perturbations de pression sur pale associées au BWI en fonction de l'azimut de la rotation pour différentes sections d'envergure. On remarque qu'à l'azimut  $90^\circ$  des fluctuations de pression sur pale intenses sont présentes sur la section  $r/R = 0.97$  (avec  $R = 16C$  le rayon du rotor), ces perturbations ayant été identifiées comme l'interaction de la pale avec le tourbillon 2. Au même azimut, des perturbations de pression sur la pale sont captées en  $r/R = 0.90$ , ces événements ayant été reliés à l'interaction de la pale avec le tourbillon 3. Si l'on suppose que la distance entre ces tourbillons et la pale sont du même ordre, on peut en conclure qu'à cet azimut les tourbillons sont à une distance l'un de l'autre d'environ 7% d'envergure soit  $1.12C$ . Le ratio obtenu est donc  $d/a = 8.3$ . le même raisonnement peut être fait avec les sections  $r/R = 0.87$  et  $r/R = 0.94$  pour l'azimut  $\psi = 95^\circ$ . Ce résultat étant une approximation nous avons choisi de considérer une distance  $d/a = 10$ .



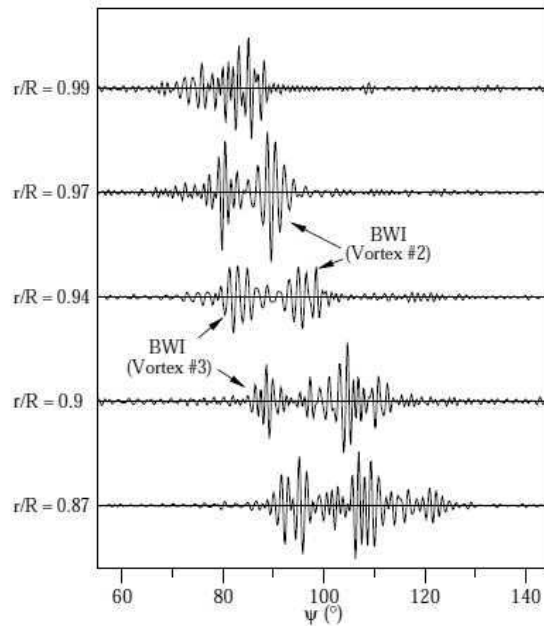


FIG. 2.2 – Historique des fluctuations de pressions sur pale associées au BWI pour différentes sections de pale dans le cas d'un vol de montée modérée. Issue de [20]

### 2.2.2 Présentation de l'outil numérique.

Pour simuler le développement des instabilités elliptiques dans la configuration retenue, le choix a été fait de ne pas considérer les effets de la viscosité. Ce choix repose sur deux raisons :

1. D'une part, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les instabilités elliptiques se développant dans la paire de tourbillons ne sont pas d'origine visqueuse.
2. D'autre part pour le ratio  $d/a = 10$ , Laporte [54] montre qu'aucun phénomène de transition à la turbulence n'intervient mais plus une succession de phénomènes instables et de restabilisations.

La simulation est effectuée à l'aide du code volumes-finis elsA [39] développé à l'ONERA. Ce solveur utilise des maillages structurés. Les simulations ont été menées en utilisant une discrétisation en temps explicite. Le schéma de discrétisation spatial est un schéma centré d'ordre 2 de type Jameson. Le terme de dissipation d'ordre 2 est fixé à 0 et le terme de dissipation d'ordre 4 est fixé pour que la dissipation soit minimale tout en assurant la stabilité du calcul. Une présentation des schémas de discrétisation, en temps et en espace, utilisés peut être trouvée dans l'annexe B. Enfin des conditions aux limites de périodicité sont imposées dans le plan orthogonal à l'axe des tourbillons et des conditions de champ lointain dans les autres directions.

Le maillage est monobloc mais optimisé pour que seule la région où se trouve la paire de tourbillon soit bien définie. Hors de cette zone, la taille des mailles augmente en se rapprochant du bord. Dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  orthogonal à l'axe des tourbillons le nombre de points total est de 47961. Dans la direction  $\vec{e}_z$ , les conditions de périodicité utilisées imposent une longueur d'onde maximale de l'instabilité de la taille de la distance entre les deux plans extrêmes.

Nous avons utilisé cette propriété dans un premier type de calcul, que nous nommerons  $Cal_1$ , en fixant la taille du domaine dans cette direction à une seule longueur d'onde. Ce type de calcul nous permettra d'apprécier l'influence de la longueur d'onde simulée sur le taux d'amplification. D'autre part, il nous permettra d'évaluer l'effet sur le rayonnement acoustique de l'interaction d'une pale avec des structures très corrélées.

Dans le cas où nous avons simulé plusieurs longueurs d'ondes différentes, nous avons utilisé une discrétisation de 20 points par longueur d'onde en moyenne. Ce calcul sera appelé  $Cal_2$ . Il nous permettra d'évaluer l'impact de fluctuations de pression moins corrélées sur le rayonnement acoustique.

### 2.2.3 Conditions initiales.

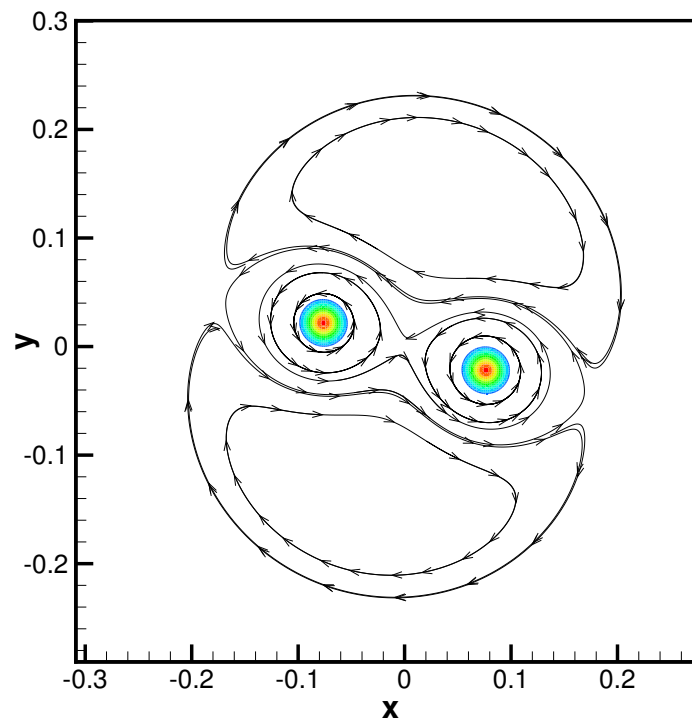


FIG. 2.3 – Lignes de courant des tourbillons à la fin du calcul 2D. Les iso-surfaces colorées représentent différents niveaux de vorticité dans le tourbillon.

L'écoulement initial est composé d'une paire de tourbillons de Lamb-Oseen parallèles, uniformes et corotatifs. Les circulations et rayons visqueux utilisés seront ceux évalués précédemment. Si le profil de vitesse utilisé est solution des équations d'Euler, la superposition des deux champs de vitesse n'est, elle, pas solution de ces équations. L'obtention d'une condition initiale satisfaisante pour le calcul en trois dimensions est obtenue en faisant un premier calcul en deux

dimensions. La somme des deux champs est utilisée comme condition initiale de ce calcul. Durant la simulation, le champ de contrainte induit par la présence de l'autre tourbillon déforme le cœur du tourbillon elliptiquement. Cette déformation est faible du fait de la distance entre les deux tourbillons. La figure 2.3 présente le résultat obtenu à la fin de la simulation 2D. elle montre les isovaleurs de vorticité (en couleurs) et les lignes de courant, tracées dans le repère lié au système de tourbillons. On remarque que les lignes de courant proches des tourbillons sont bien elliptiques.

Une fois le phénomène établi, on obtient les composantes  $(u_T, v_T)$  en chaque point  $(x, y)$  de la discrétisation du domaine de calcul 2D. la solution obtenue est alors étendue dans la troisième dimension. De plus, pour initier le phénomène instable, un bruit blanc est introduit. Pour cela, on définit un nombre aléatoire  $r$  tel que  $\|r\| < 0.5 \cdot 10^{-3}$ , et en tout point de coordonnées  $(x, y, z)$  de la discrétisation du domaine 3D les composantes  $(u_0, v_0, w_0)$  de la vitesse la vitesse initiale sont données ainsi :

$$\begin{cases} u_0(x, y, z) = u_T(x, y)(1 + r) \\ v_0(x, y, z) = v_T(x, y)(1 + r) \\ w_0(x, y, z) = w_T(x, y)(1 + r) \end{cases} \quad (2.1)$$

#### 2.2.4 Obtention des taux d'amplifications.

Afin d'obtenir les taux d'amplifications du régime linéaire de l'instabilité, dans le cas des calculs du type  $Cal_1$ , nous avons mis en place une procédure pour évaluer l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique associée à la longueur d'onde instable. Lors du régime linéaire cette énergie doit croître de façon exponentielle : soit  $E_{c_k}$  l'énergie cinétique associée au nombre d'onde  $k$ , si pour ce nombre d'onde une instabilité se développe, on doit avoir pour tout temps  $t$  :

$$E_{c_k}(t) = E_k(0)e^{\sigma_k t} \quad (2.2)$$

où  $\sigma_k$  désigne le taux d'amplification associé au nombre d'onde  $k$ . Dans nos calculs, nous avons choisi d'évaluer ce nombre de la façon suivante :

$$\sigma_k = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \frac{1}{E_k(t)} \frac{\partial E_k}{\partial t}(t) dt \quad (2.3)$$

où  $T - T_0$  sera une durée fixée incluse dans la période de développement linéaire.

Pour permettre de dissocier l'évolution de l'énergie cinétique pour chaque tourbillon, on définit deux domaines  $D_i$  associés à chacun des tourbillons comme suit :

$$D_i = \{(x, y, z) \in D \text{ tel que } |x - x_{c_i}| < 3a, |y - y_{c_i}| < (3a)\}$$

Où  $D \in \mathbb{R}^3$  désigne le domaine de calcul et  $(x_{c_i}, y_{c_i})$  les coordonnées du centre des tourbillons. Les dimensions du domaine dans chacune des directions sont respectivement  $L_x, L_y, L_z$  et les nombres de points de discrétisation contenus dans  $D_i$  dans chaque direction sont  $n_x, n_y, n_z$ . Les points de la discrétisation seront désignés par les variables  $(x_p, y_q, z_r)$ ,  $p \in \{1, \dots, n_x\}$ ,  $q \in \{1, \dots, n_y\}$ ,  $r \in \{1, \dots, n_z\}$ . Avec cette notation l'énergie cinétique en chaque point du maillage s'écrit :

$$E_c(x_p, y_q, z_r, t) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)(x_p, y_q, z_r, t) \quad (2.4)$$

Une énergie moyenne pour chacun des plan  $(z_r)_{r \in \{1, n_z\}}$  est ensuite évaluée :

$$E_c^m(z_r, t) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{p=1, n_x} \sum_{q=1, n_y} E_c(x_p, y_q, z_r, t) \Delta_{x,p} \Delta_{y,q} \quad (2.5)$$

où  $\Delta_{x,p} = x_{p+1} - x_p$  et  $\Delta_{y,q} = y_{q+1} - y_q$ . Finalement le spectre de l'énergie cinétique dans la direction axiale, à chaque instant  $t$ , est obtenu par une transformation de Fourier discrète :

$$\hat{E}_c(k, t) = \frac{1}{n_z} \sum_{r=1, n_z} E_c^m(z_r, t) e^{i\pi k r / n_z} \quad (2.6)$$

Le nombre d'onde discret  $k$  dépend de la discrétisation du domaine et varie de  $\{1, \frac{n_x}{2}\}$ . Le nombre d'onde dimensionné est  $k_d = \frac{k\pi}{L_z}$  et la longueur d'ondes associée  $\lambda_d = \frac{2L_z}{k}$ .  $\hat{E}_c(k, t)$  représente le taux de perturbation d'énergie cinétique associé au nombre d'onde discret  $k$  dans le domaine  $D_i$ . La longueur et le nombre d'onde seront par la suite adimensionnés par le rayon visqueux du tourbillon au temps initial de la simulation soit :

$$\lambda^* = \frac{\lambda_d}{a_0}, \quad k^* = k_d a_0 \quad (2.7)$$

### 2.2.5 Résultats.

Les calculs effectués pour le cas  $Cal_1$  nous ont permis d'observer les différentes phases de l'instabilité elliptique. Quatre calculs ont été effectués en fixant la taille du domaine de calcul dans la direction axiale à différentes longueurs appartenant à la zone de résonance de la première branche de l'instabilité elliptique. Ces résultats ont ensuite été comparés à la formule analytique issue de [57].

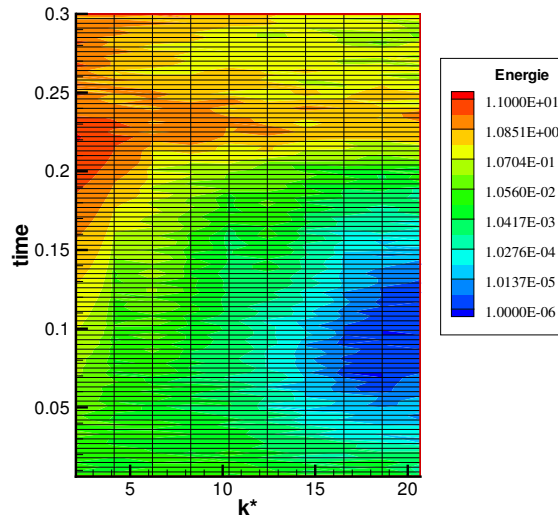


FIG. 2.4 – Evolution de l'énergie cinétique pour chaque nombre d'onde simulé dans le cas où  $L_z/a = 3.05$ .

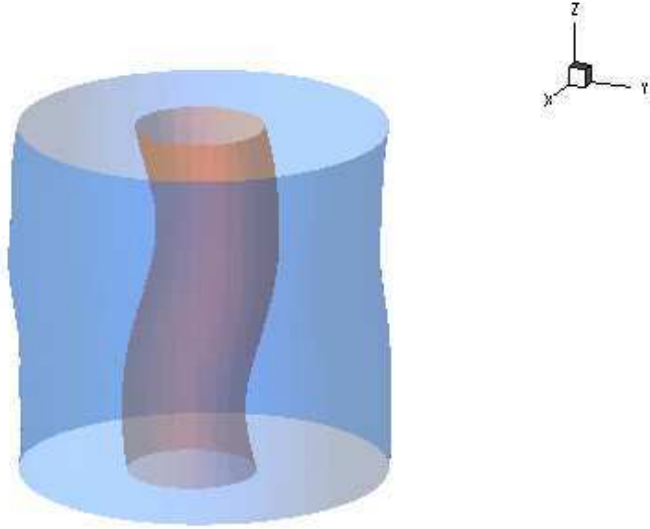


FIG. 2.5 – Iso-surfaces de vorticité de tourbillon à la fin du régime faiblement non-linéaire. On remarque que la déformation axiale du cœur du tourbillon est invers e par rapport à sa déformation à la périphérie.

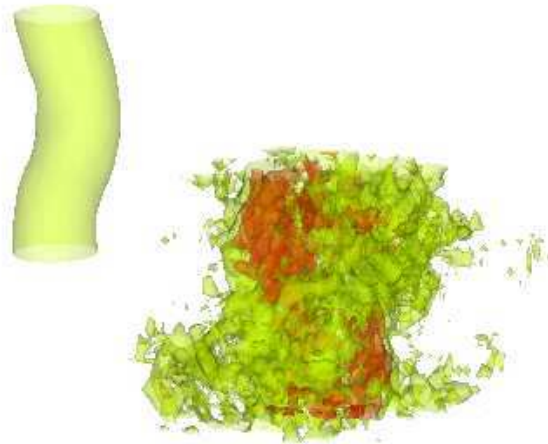


FIG. 2.6 – iso-surfaces de vorticité de tourbillon lors de la saturation non-linéaire. On remarque que si l'instabilité sature sur le tourbillon de droite, elle est toujours en phase d'amplification sur le tourbillon de gauche.

Le développement de l'instabilité elliptique se caractérise par trois phases, dont les différences apparaissent sur la figure 2.4. Cette figure représente l'évolution de l'énergie cinétique associée à un des tourbillons pour chaque nombre d'onde simulé en fonction du temps dans le cas où  $L_z/a = 3.05$ . Pour une meilleure représentation, les couleurs associées à l'intensité de l'énergie cinétique sont réparties selon une échelle exponentielle. Les lignes verticales correspondent aux nombres d'ondes imposés par la discrétisation. La première ligne  $k_z^* = 2.06$  correspondant au nombre d'onde discret  $k = 1$ . Les trois phases correspondent à des dynamiques très différentes :

1. La première phase d'amplification linéaire, où une seule longueur d'onde est amplifiée se situe approximativement dans le domaine temporel  $t \in [0.01; 0.1]$  sur la figure 2.4. Ce résultat est évalué en tenant compte de la diminution de l'énergie cinétique associée aux autres nombres d'ondes.
2. la seconde phase correspondant à la phase d'amplification faiblement non-linéaire appartient au domaine temporel  $t \in [0.1; 0.2]$ . Là, tous les sous-harmoniques de la longueur d'onde instable sont amplifiés. Ce mécanisme apparaît nettement sur la figure 2.4 pour les nombres d'ondes situés entre 15 et 20. Lors de la phase linéaire, l'énergie cinétique associée à ces nombres d'ondes diminuait alors que dans cette phase elle augmente. Une des caractéristiques de l'évolution linéaire et faiblement non-linéaire de l'instabilité apparaît sur la figure 2.5, montrant deux isovaleurs de vortacité au temps  $t = 0.16$ . On peut voir que la déformation sinusoïdale à la périphérie du cœur du tourbillon est en déphasage par rapport à sa déformation au centre.
3. La dernière phase correspond au régime non linéaire. Lors de cette étape, toutes les longueurs d'ondes simulées sont amplifiées (pas seulement les sous harmoniques) et finissent par saturer. Sur la figure 2.4, le phénomène de saturation intervient environ au temps  $t = 0.23$  s.

L'évaluation de l'amplitude de saturation obtenue dans le calcul nous donne  $\frac{\delta}{a} = 0.0097 \pm 0.00175$  pour  $k^* = 2.06$ . La prévision obtenue par Sipp [81] pour l'amplitude de saturation des instabilités elliptiques dans le cas d'une paire de tourbillons corotatifs pour le nombre  $k^* = 2.26$ , correspondant au nombre d'onde le plus instable dans cette configuration, est assez proche. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que, dans le cas étudié où le ratio  $d/a$  est grand, la vitesse de rotation du système tourbillonnaire est faible devant la vitesse de rotation du tourbillon. La dynamique de l'instabilité est donc proche du cas contrarotatif.

La figure 2.6 montre, au premier plan, la structure d'un tourbillon lorsque l'instabilité sature ( $t = 0.23$ ). Au second plan, on peut voir que l'instabilité se développant au sein de l'autre tourbillon est, elle, en phase linéaire d'amplification. Ce phénomène de découplage des deux instabilités a été observé par Laporte [54] dans le cas de ratio  $d/a$  de cet ordre. D'autre part, dans nos calculs, après la phase de saturation, le tourbillon se restabilise et le phénomène de déstabilisation recommence. Ce résultat est aussi en accord avec ceux obtenus dans [54]. Le fait que l'instabilité se développe indépendamment sur chacun des tourbillon nous permettra, dans la suite, de dissocier les structures associées à chacun d'eux.

Lorsque ce ratio est plus petit, la dynamique de la paire de tourbillon est différente. Les instabilités se développent de façon similaire dans les deux tourbillons, c'est-à-dire qu'au même instant les instabilités sur chaque tourbillon sont à la même étape de développement. D'autre part, les déformations axiales sur chacun des tourbillons sont antisymétriques par rapport au centre de rotation de la paire de tourbillons. Ce phénomène a été observé numériquement par Laporte et expérimentalement par Meunier [67]. Enfin, la phase de saturation non linéaire aboutit

généralement à un phénomène transitoire conduisant à l'appariement des deux tourbillons.

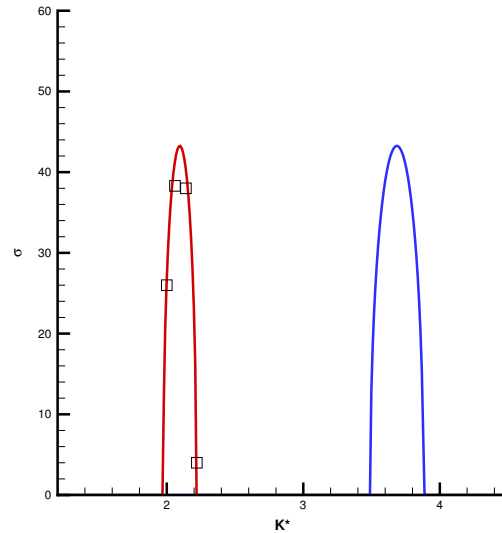


FIG. 2.7 – Comparaison entre les taux d'amplification obtenus pour les 4 calculs de type  $Cal_1$  et l'approximation 1.18 .

Finalement, les taux d'amplification trouvés ont été comparés à ceux définis par la formule 1.18. Les deux courbes, rouge et bleue de la figure 2.7, présentent les résultats obtenus par cette formule pour la configuration simulée. La courbe rouge représente la première branche de l'instabilité et la courbe bleue la seconde. Remarquons que les nombres d'ondes imposés par la taille  $L_z$  du domaine de calcul ont été choisis pour qu'ils ne soient pas un multiple de la bande de fréquence associée à la deuxième branche de l'instabilité. Les résultats obtenus sont en bon accord. On note une erreur maximum de 7% entre la formule analytique et les résultats numériques, les simulations numériques sous-estimant à chaque fois le taux d'amplification. Sur cette figure, les résultats analytiques ont été tracés sans tenir compte de la viscosité du fluide, la simulation numérique ne tenant pas compte de ce paramètre. Notons tout de même que dans le cas de la prise en compte de ce paramètre, si les taux d'amplification sont atténués pour les deux branches, le taux d'amplification maximum de la première branche de l'instabilité est plus élevé que celui de la seconde.

### 2.2.6 Interprétation du phénomène dans le cadre d'un écoulement autour d'un rotor.

La figure 2.8 montre une comparaison entre deux résultats numériques obtenus et la formule analytique approchée de Le Dizes [57]. Sur cette figure, le temps a été adimensionné par la période de rotation du rotor. On peut remarquer que, dans cette configuration, le temps nécessaire au développement de l'instabilité pour atteindre la saturation est d'environ 4 tours de rotors. De plus, il apparaît qu'en l'espace d'un quart de tour de rotor (intervalle de temps séparent l'émission d'un tourbillon par une pale donnée et son interaction avec la pale suivante, interaction

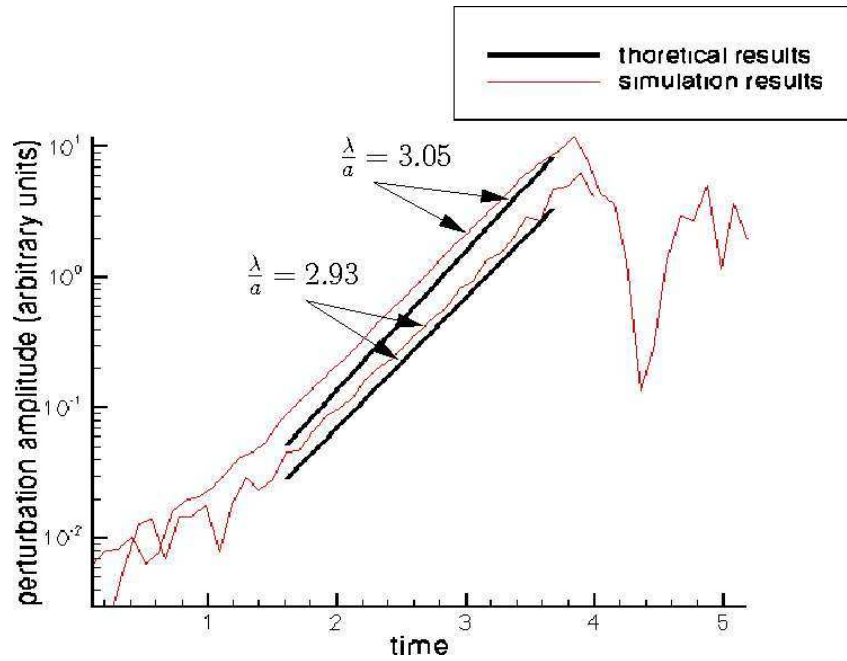


FIG. 2.8 – Comparaison entre les solutions numériques et théoriques pour deux longueurs d’ondes. Le temps est adimensionné par la période de rotation du rotor.

général du BWI, cf figure 2.1) l’amplification de l’instabilité est faible.

Ce trop faible taux d’amplification peut être la conséquence des incertitudes concernant les valeurs des paramètres liés aux tourbillons et du caractère simpliste de la modélisation. En effet dans la formule 1.18 les paramètres jouant un rôle important dans la valeur du taux d’amplification sont la distance  $d$  et la circulation  $\Gamma$ . Plus spécifiquement, c’est l’intensité du champ d’étirement sur le tourbillon qui influence le plus le taux d’amplification. Plus ce champ sera intense, plus le taux d’amplification sera grand. De plus, si la modélisation de deux tourbillons rectilignes, parallèles et uniformes nous permet de mettre en évidence de façon satisfaisante les modes de perturbation liés à l’instabilité elliptique, cette approche n’est en revanche pas assez réaliste pour conclure sur les taux d’amplification obtenus. En effet, dans le cadre d’un écoulement autour d’un rotor d’hélicoptère, la distance entre les tourbillons varie. Si l’on considère une distance moins importante le taux d’amplification de l’instabilité sera plus important. Par exemple, si  $d/a = 4$  le taux d’amplification sera environ 4 fois plus important, dans ce cas le temps imparti pour obtenir des amplitudes comparables aux amplitudes de saturation de l’instabilité ne sera que de un tour de rotor. D’autre part, les champs de déformation induit peuvent être d’origines diverses. Enfin, la forme courbe du filament tourbillonnaire ainsi que le profil elliptique du cœur des tourbillons d’extrémité de pale jeunes, non pris en compte dans la présente simulation, peuvent jouer un rôle prépondérant sur la dynamique de l’instabilité. Tout ces facteurs peuvent jouer un rôle important sur le taux d’amplification de celle-ci. Ces aspects seront abordés dans le chapitre 4.



## 2.3 Étude Acoustique.

La figure 2.9 présente les différentes étapes mises en place pour obtenir, à partir des simulations des instabilités décrites dans la section précédente les fluctuations de pression sur pale produite par la rencontre entre la pale et des tourbillons instables et au finale le bruit rayonné. Les deux premières parties de cette section décrivent chacune des étapes représentées sur cette figure. La première montre comment sont obtenues les données d'entrées pour le calcul des fluctuations de pression sur pale qui sera décrit dans la partie suivante. Puis les caractéristiques des fluctuations de pression sur pale expérimentales HART [84] seront aussi présentées. Enfin, dans une dernière partie, nous les comparerons à celles obtenues par notre méthode. Nous présenterons des prévisions numériques de rayonnement acoustique effectuées à partir des perturbations de pression sur pale calculées. Ces résultats seront comparés aux résultats expérimentaux HART2 [87].

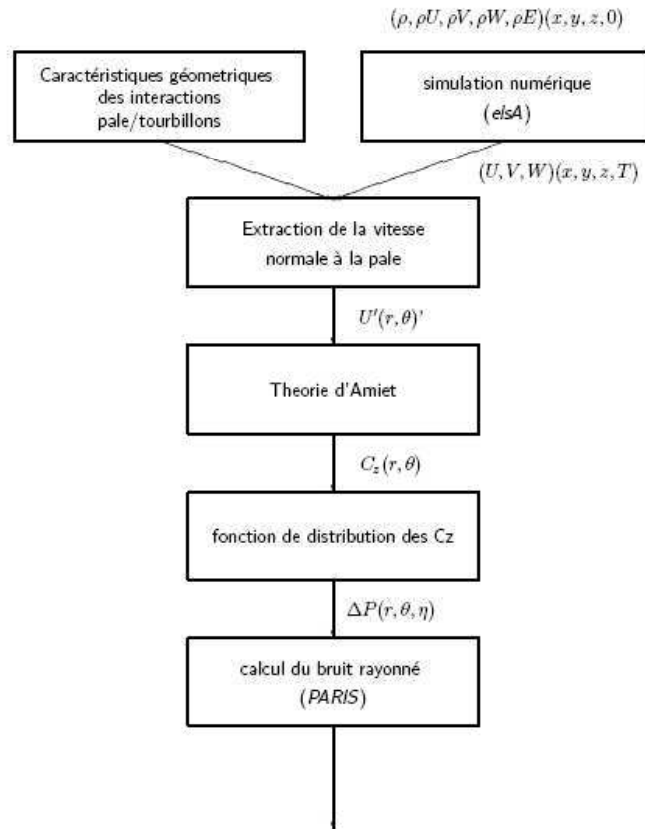


FIG. 2.9 – Représentation de la chaîne de calcul mise en place.

### 2.3.1 Extraction des perturbations du champ incident.

Dans un premier temps, il faut donc déterminer les fluctuations de pression sur pale issues d'une interaction entre un tourbillon perturbé et celle-ci. La théorie d'Amiet [5] permet d'obtenir la réponse d'une pale à des perturbations de vitesse perpendiculaire à la pale. Dans cette théorie la pale est modélisée par une plaque plane et le champ incident est supposé être bidimensionnel.

On a donc besoin d'extraire du champ solution des calcul 3D un plan parallèle au disque rotor sur lequel seront définies les vitesses normales à celui-ci. Pour cela, dans un premier temps, un maillage plan est défini à partir de l'angle d'interaction  $\beta$  et une distance  $md$  entre la pale et la paire de tourbillons perturbés. La figure 2.10 à gauche présente de façon schématisée l'opération. La position du maillage est représenté par le trait rouge. L'extension en envergure de ce plan est défini pour ne prendre en compte que les perturbations associées à un seul tourbillon. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la distance choisie entre les tourbillons pour la simulation entraîne une dynamique de l'instabilité propre à chacun des tourbillon, on peut donc bien dissocier les perturbations issues de ce tourbillon de celles de l'autre.

L'étendu du plan dans la direction de l'envergure correspond à 5% du rayon de la pale BO-105. La composante de vitesse normale au plan est ensuite extraite de la solution 3D par interpolation linéaire du champ de vitesse et sera considérée comme la "rafale" lors de l'application de la théorie d'Amiet. Cette opération est représentée sur la figure 2.10 à droite. Pour pouvoir considérer une interaction entre la pale et le tourbillon d'une durée plus importante que celle imposée par la taille  $L_z$  du domaine de calcul, le plan de perturbation extrait est étendu  $N$  fois dans la direction d'avancement de la pale.

Pour déterminer les constantes  $\beta$  et  $md$  nous nous sommes appuyés sur les résultats obtenus pour des calculs de sillages par la chaîne ONERA BVI en configuration de vol de montée modérée. Ces paramètres sont ensuite utilisés comme données dans le calcul des fluctuations de pression sur pale basé sur la théorie d'Amiet.

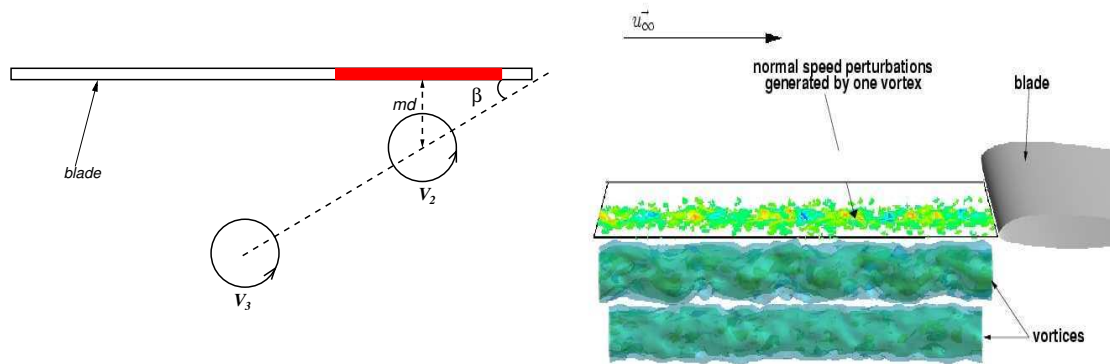


FIG. 2.10 – A gauche : paramètres pris en compte lors de l'extraction des perturbations du calcul des instabilités elliptiques. A droite : représentation schématisée de l'extraction de la vitesse normale à la pale.

### 2.3.2 Obtention des perturbations de pression sur pale.

Dans la suite on considérera  $(O, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\xi)$  un repère lié à la pale où  $\eta$  définira les coordonnées en corde, et  $\xi$  les coordonnées en envergure.

La théorie d'Amiet [4, 5] donne la réponse d'un profil, soit une seule section de la plaque plane, à une perturbation de vitesse normale, aussi appelée rafale, portée par un champ de vitesse uniforme parallèle à la plaque. Cette théorie a ensuite été adaptée aux machines tour-

nantes dans le cadre de l'étude du bruit de rotor dû à l'ingestion de turbulence atmosphérique [6].

Le champ incident de perturbation de vitesse obtenu après extraction est maintenant considéré comme convecté à une vitesse normalisée par la demi corde  $U_\infty$  parallèle à  $\vec{e}_\eta$  et définie par :

$$U_\infty = \frac{2(\Omega_r R + U_{av} \sin(\phi))}{C}$$

Où  $\Omega_r = 114 \text{ rad s}^{-1}$  est la vitesse angulaire du rotor,  $U_{av}$  la vitesse d'avancement de l'hélicoptère. Dans le cas considéré (vol de montée modérée)  $U_{av} = 0.15\Omega_r R$ .  $\phi$  représente l'angle entre  $\xi$  et le vecteur défini par la direction de l'avancement de l'hélicoptère.

Cette approche théorique permet de prendre en compte un angle d'interaction  $\gamma$  entre la pale et l'axe du tourbillon,  $\gamma = 0$  signifie alors que l'interaction entre la pale et le tourbillon est perpendiculaire. Les valeurs des paramètres  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $md$ , tous supposés constants au cours du temps, sont estimés à partir de résultats expérimentaux et de la chaîne de calcul ONERA BVI.

Dans la suite  $\eta$  et  $\xi$  sont rapportés à la taille de la demi corde, ainsi on aura  $-1 \leq \eta^* \leq 1$  et  $-A \leq \xi^* \leq A$ .

Soit donc un champ de perturbation de vitesse normale situé dans le plan de la pale et de nombre d'onde  $\vec{k} = (k_{\eta^*}, k_{\xi^*})$  avec  $k_{\eta^*} = k_d \cos(\gamma) \frac{C}{2}$  et  $k_{\xi^*} = k_d \sin(\gamma) \frac{C}{2}$ . En supposant que l'angle d'incidence de la pale est nul, Amiet définit la différence de pression intrado-extrado locale  $\Delta P$  à travers le profil par la formule :

$$\Delta P(\vec{k}, t, \eta^*, \xi^*) = C\pi\rho U_\infty A(\vec{k})g(\eta^*, \vec{k}, M)e^{i(k_{\xi^*}\xi^* - k_{\eta^*}U_\infty)t} \quad (2.8)$$

où  $A(\vec{k})$  est l'amplitude associée au vecteur d'onde  $\vec{k}$ ,  $M$  le nombre de Mach, et  $g$  est la fonction de transfert entre la vitesse incidente et les sauts de pression sur pale. Les coefficients de portance  $c_z$  sont obtenus en intégrant les forces de pression sur la corde et en sommant les contributions de tous les vecteurs d'ondes :

$$c_z(t, \xi^*) = \frac{2}{\rho(U_\infty C/2)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^{+1} \Delta P(\vec{k}, t, \eta^*, \xi^*) d\eta^* d\vec{k} \quad (2.9)$$

Les longueurs d'ondes des instabilités elliptiques sont petites devant la taille de la corde. Dans ce cas, si l'intersection entre la pale et la rafale se déplace de façon supersonique par rapport au fluide, le profil de la réponse de la pale à la perturbation est déterminé par la fonction de transfert  $g \in \mathbb{C}$  :

$$g(\eta^*, \vec{k}, M) = g_1(\eta^*, \vec{k}, M) \left( 1 + \frac{\sqrt{(1+\eta^*)}}{2} \left[ (1+i)E \left( 2 \frac{k_{\eta^*}}{1-M^2} M_\infty (1-\eta^*) - 1 \right) \right] \right) \quad (2.10)$$

avec :

$$M_\infty = \sqrt{\left( M^2 - (1-M^2) \frac{k_{\eta^*}^2}{k_{\xi^*}^2} \right)}$$

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{e^{-ir}}{\sqrt{r}} dr$$

$$g_1(\eta^*, k_{\eta^*}, k_{\xi^*}) = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi(1+M)k_{\eta^*}(1+\eta^*)}} e^{i \frac{k_{\eta^*}}{1-M^2} (M_\infty(1+\eta^*) - M^2\eta^* - 1) + \frac{\pi}{4}}$$

### 2.3.3 Caractéristiques expérimentales de la répartition des perturbations de pression en corde.

Burley *et al* [24] ont examiné les résultats expérimentaux, filtrés dans le domaine de fréquence du BWI, des spectres de fluctuations de pression sur pale issus des essais HART2 [87] pour des capteurs situés à des positions en corde différentes mais à la même envergure. Ils ont remarqué que la décroissance en fréquence du spectre de la réponse en pression est similaire pour toutes les valeurs de la position en corde  $\eta$ . Cette propriété tend à montrer que la distribution en corde des fluctuations de pression peut être exprimée selon une fonction de  $\eta$ . Il semble alors que la répartition de pression en corde 2.8 proposée par Amiet n'est pas adaptée dans notre cas puisqu'elle dépend du nombre d'onde pris en compte. Pour cette raison, nous ne considérerons que les coefficients de portance par section obtenues par cette méthode.

Malheureusement, il est bien connu que lorsque les longueurs d'ondes acoustiques en jeu sont de l'ordre de la corde du profil, ou inférieur à celle-ci, un profil de pale ne peut être considéré comme compact en corde pour le calcul du rayonnement acoustique. On a donc besoin de définir une fonction qui nous permette de répartir les efforts sur la corde. Nous avons cherché à définir une fonction  $f$  continue et intégrable qui avantagera le bord d'attaque et sera décroissante lorsque l'on se rapprochera du bord de fuite. La décroissance de cette fonction a été évaluée à partir des résultats expérimentaux HART2 issus d'une section comportant de nombreux capteurs. Un exemple des signaux expérimentaux pris en compte est présenté sur la figure 2.11. Cette figure montre les perturbations de pression sur pale dans la bande de fréquence du BWI pour une rotation de rotor à la coordonnée  $\xi/R = 0.87$ . On peut remarquer sur la figure de gauche comme sur la figure 2.2 que l'on peut séparer le signal en deux trains d'ondes principaux, chacun se référant à une interaction de la pale avec les tourbillons 2 ou 3. (cf figure 2.1)

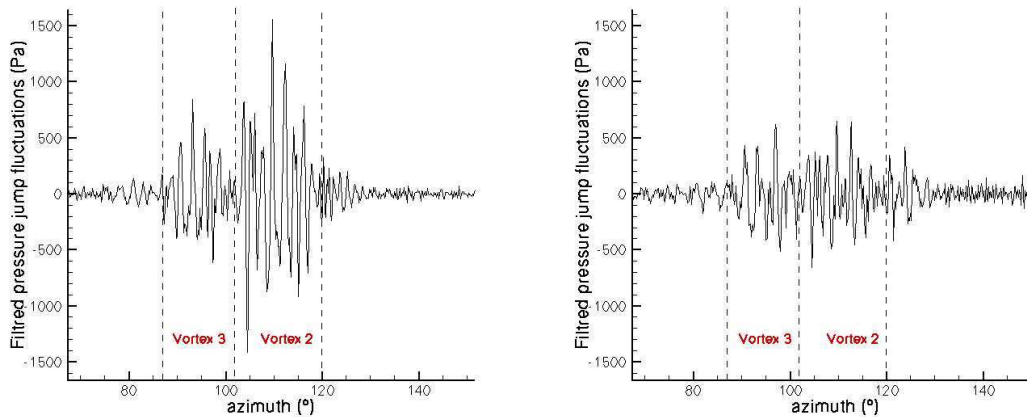


FIG. 2.11 – Fluctuations de pression mesurées sur la pale et filtrées dans la bande de fréquence du BWI en fonction de l'azimut, section  $\xi/R = 0.87$ , à 3% de corde (à gauche) et à 6% de corde (à droite).

Après filtrage dans la bande de fréquence du BWI, la valeur efficace du signal  $P_{(\eta^*+1)/2}$  est calculée dans les deux fenêtres azimutales correspondant à chacune des interactions tourbillonnaires. Par exemple, en considérant la fenêtre associée à l'interaction avec le tourbillon 2 (voir

Figure 2.1) on obtient le ratio  $P_{0.06}/P_{0.03} = 0.48$  et  $P_{0.1}/P_{0.03} = 0.35$ . Les résultats sont similaires pour la fenêtre associée à l'interaction de la pale avec le tourbillon 3. De ces informations, nous avons déduit la fonction  $f$  :

$$f(\eta^*) = \frac{2}{I_f} \frac{1 - e^{-\frac{\alpha(\eta^*+1)^2}{2(0.02)^2}}}{1 + \eta^*} \quad (2.11)$$

Où  $\alpha = \sqrt{1.256}$  est une constante permettant d'obtenir le maximum de la fonction  $f$  pour  $\eta^* = -0.96$  et  $I_f$  est la valeur de l'intégrale de  $f$  sur la corde. Finalement, le coefficient de pressions  $\Delta c_p(\eta^*)$  est obtenu en distribuant le coefficient de portance sur la corde soit :

$$\Delta c_p(\eta^*) = c_z f(\eta^*) \quad (2.12)$$

### cohérence en envergure des perturbation de pressions.

La cohérence en envergure des perturbations de pression aura une influence majeure sur le bruit rayonné. En effet, elle jouera à la fois sur l'intensité du bruit mais aussi sur sa directivité : plus le signal sera cohérent en envergure, plus directif et intense sera le bruit. Bouchet [19] a estimé la cohérence en envergure des perturbations de pression sur pale associées au BWI (pour une présentation précise de la méthode voir [18]). Malheureusement les résultats expérimentaux ne permettaient pas une bonne estimation du phénomène car les capteurs étaient trop éloignés. Lors des essais HART2 [87] ce défaut a été corrigé et nous avons pu, en utilisant la même méthode, évaluer la corrélation en envergure des signaux de pression associés au BWI.

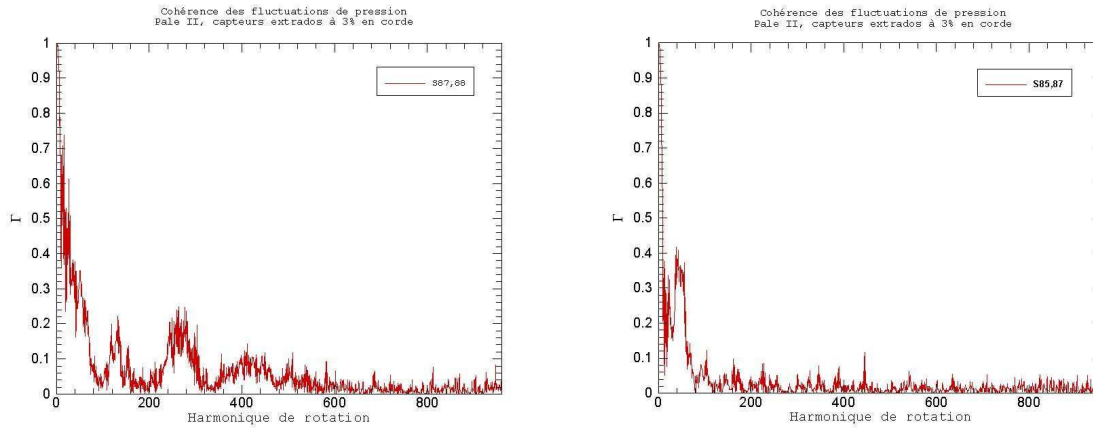


FIG. 2.12 – Corrélation en envergure des perturbations de pression à 3% de corde. A gauche : entre deux capteurs situés en  $\xi/R = 0.87$  et  $\xi/R = 0.88$ . A droite : entre deux capteurs situés en  $\xi/R = 0.85$  et  $\xi/R = 0.87$

En condition de vol de montée, les perturbations de pression sur pale associées au BWI se situent dans la zone azimutale  $\phi \in [90^\circ; 120^\circ]$  et dans la zone d'envergure  $\xi \in [0.85R; 0.94R]$ . L'étendue en envergure est due à l'obliquité des interactions entre les pales et les tourbillons. Les résultats sont présentés sur la figure 2.12. Ils montrent les cohérences en envergure des fluctuations de pression sur pale, en fonction de l'harmonique de la rotation, obtenues pour deux cas : l'un en considérant les signaux des capteurs situés en  $\xi/R = 0.87$  et  $\xi/R = 0.88$ , l'autre

entre deux capteurs situés en  $\xi/R = 0.85$  et  $\xi/R = 0.87$ . Ces résultats tendent à montrer que les perturbations de pression sont corrélées sur une étendue comprise entre 1% et 2% d'envergure.

### 2.3.4 Résultats.

#### Configurations retenues.

Pour évaluer les caractéristiques des fluctuations de pression sur pale et le bruit rayonné issu d'une interaction pale/tourbillon instable, nous avons considéré plusieurs configurations. En effet, les codes de sillage actuellement utilisés à l'ONERA ne permettent pas de prévoir de façon suffisamment précise les lieux d'interactions.

Le calcul de type  $Cal_1$  retenu correspond à la longueur d'onde  $k^* = 2.06$ . Dans tous les cas on considérera le résultat d'un calcul d'instabilité pendant la phase faiblement linéaire. Pour le calcul de type  $Cal_1$ , le temps  $t = 0.16$  a été retenu.

Une étude paramétrique de l'influence de tous les paramètres ( $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $md$ ,  $Ce$ ) serait laborieuse. Dans nos calculs, nous avons limité l'étude à celle de l'influence de  $\gamma$  et de  $md$ , le paramètre  $Ce$ , désignant le centre du plan d'extaction dans la direction de l'envergure, étant déterminé pour que les perturbations de pression sur pale soient localisées en des lieux en accord avec les résultats expérimentaux.

L'influence du paramètre  $\beta$  n'a pas été étudié. Ce paramètre peut jouer un rôle sur l'intensité des perturbations de pression sur pale car la déformation du tourbillon s'effectue dans un plan préférentiel. L'intensité des perturbations vitesses normales à la pale peut donc être très différente selon l'angle  $\beta$  considéré. D'autre part, la variation de ce paramètre entraînerait des distances d'interaction différentes entre la pale et les deux tourbillons. L'étude de l'influence de  $\beta$  conduirait donc à un trop grand nombre de calculs.

Enfin, la durée d'interaction de la pale avec les tourbillons peut aussi jouer un rôle sur l'intensité et la directivité du bruit. En vol de montée modérée, les perturbations de pression sur pale les plus intenses se produisent dans le domaine azimutal  $\psi \in [90^\circ; 120^\circ]$ . Pour nos calculs, les paramètres définissant les géométries d'interaction étant supposés constants nous avons choisi de ne considérer que des interactions pale-tourbillon dans ce domaine azimutal.

Le tableau 2.13 résume la totalité des cas considérés. Le cas **A** et le cas **B** nous permettront d'estimer l'effet des angles d'interaction sur les caractéristiques des perturbations de pression sur pale ainsi que sur le bruit rayonné. Les calculs **B**, **C**, **D**, **E**, **F** et **G** permettront d'apprécier l'évolution de l'intensité du bruit rayonné en fonction de la distance d'interaction. Enfin le calcul **H** nous permettra d'évaluer les caractéristiques d'une interaction avec une rafale dont le contenu fréquentiel est plus riche. En effet, dans le calcul  $Cal_2$ , la dimension axiale du domaine de calcul a été fixée pour que différentes longueurs d'ondes de l'instabilité apparaissent en même temps. Ce calcul a aussi permis de modéliser le développement de longueurs d'ondes plus petites de la deuxième branche de l'instabilité.

CAS	Calcul	tourbillon 2				tourbillon 3			
		$\gamma$	$\beta$	$md$	$Ce$	$\gamma$	$\beta$	$md$	$Ce$
<b>A</b>	<i>Cal1</i>	10°	7°	0.16C	91.5	15°	7°	0.16C	89.5
<b>B</b>	<i>Cal1</i>	15°	7°	0.16C	93.5	20°	7°	0.16C	91.5
<b>C</b>	<i>Cal1</i>	15°	7°	0.24C	93.5	20°	7°	0.24C	91.5
<b>D</b>	<i>Cal1</i>	15°	7°	0.32C	93.5	20°	7°	0.32C	91.5
<b>E</b>	<i>Cal1</i>	15°	7°	0.48C	93.5	20°	7°	0.48C	91.5
<b>F</b>	<i>Cal1</i>	15°	7°	0.0C	93.5	20°	7°	0.0C	91.5
<b>G</b>	<i>Cal1</i>	15°	7°	0.08C	93.5	20°	7°	0.08C	91.5
<b>H</b>	<i>Cal2</i>	15°	7°	0.16C	93.5	20°	7°	0.16C	91.5

FIG. 2.13 – tableau récapitulatif des cas considérés pour le calcul des perturbations de pression sur pale et du bruit rayonné.

### Caractéristiques des fluctuations de pression sur pale.

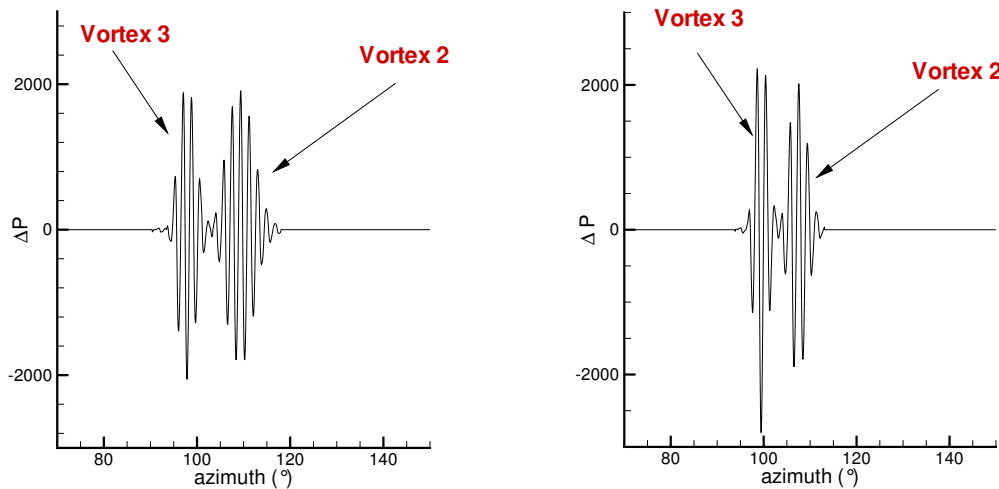


FIG. 2.14 – Perturbations de pression sur pale prévues par le calcul en  $\xi/R = 0.87$ . A gauche : dans le cas de la configuration **A**. A droite : dans le cas de la configuration **B**.

Afin d'apprécier l'influence de l'angle de l'interaction pale/tourbillons perturbés, on a comparé les perturbations de pression sur pale issues des calculs **A** et **B**. Pour ces calculs, nous avons "placé" les filaments tourbillonnaires pour que les azimuts d'interaction en  $\xi/R = 0.87$  correspondent aux azimuts où des perturbations de pression sur pale associées au BWI sont constatées dans les expériences. La figure 2.14 montre les résultats obtenus à cette coordonnée d'envergure. On peut remarquer que les domaines azimutaux d'interaction correspondent bien à ceux observés sur la figure 2.2 pour la même localisation en envergure. D'autre part on peut noter que la forme générale des perturbations est aussi en accord avec celles de la figure 2.2 pour des azimuts où les interactions associées à chaque tourbillon sont plus distantes l'une de l'autre en terme d'azimut (par exemple pour  $\xi/R = 0.97$ ).

On peut constater également que bien que les distance pale-tourbillons soient les mêmes, les amplitudes crête-crête des fluctuations de pression sur pale associées au tourbillon 3 sont légèrement plus intenses que celles associées au tourbillon 2. Cette différence est liée à deux propriétés des formules présentées dans la section précédente : plus l'angle  $\gamma$  est grand plus la perturbation vue par la pale à une longueur d'ondes importante. Or la réponse de la pale à un module d'autant plus élevé que les longueurs d'ondes de la perturbation sont grandes. D'autre part, à position en envergure fixée, les perturbations associées au tourbillon 3 apparaissent à des azimuts ou la vitesse  $U_\infty$  est plus importante qu'aux azimuts de l'interaction de la pale avec le tourbillon 2. Enfin, sur la même figure on peut constater que, comme on pouvait s'y attendre, plus l'angle d'interaction est grand (tourbillon 3) plus l'interaction entre la section de la pale et le tourbillon est courte.

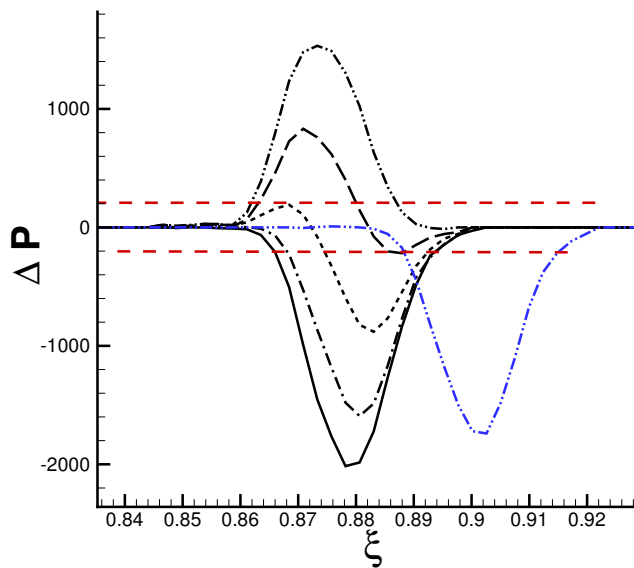


FIG. 2.15 – distribution en envergure du saut de pression à 3% de corde.

La figure 2.15 montre la distribution en envergure des perturbations de pression sur pale associées au premier tourbillon du calcul **B**. Sur cette figure, sont tracées en noir les caractéristiques de ces perturbations pour différents azimuts situés entre  $104^\circ$  et  $105^\circ$ . On peut remarquer le déphasage qui apparaît dans la réponse de la pale dû à l'angle d'interaction entre la pale et le tourbillon. La courbe bleue montre la répartition de ces perturbations lorsque  $\psi = 100^\circ$ . Elle permet de se rendre compte du glissement en envergure des perturbations sur pale à mesure que le tourbillon avance. Au niveau de la cohérence en envergure, la structure des perturbations liées aux instabilités elliptiques se développant à l'intérieur du tourbillon est fortement corrélée. On peut alors légitimement estimer que la corrélation en envergure est équivalente à la taille du domaine où l'intensité des perturbations de pression sur pale sont non nulles. Dans notre estimation nous avons enlevé le domaine où la valeur absolue des perturbations de saut de pression est inférieure à  $200Pa$ , ce qui est l'ordre de grandeur des fluctuations non périodiques du signal (différentes de celles associées au BWI). On trouve dans ce cas une longueur de corrélation sur pale



de l'ordre de 2% d'envergure. Ce résultat est en accord avec les résultats expérimentaux présentés dans la section 2.3.3. Remarquons enfin qu'un effet mécanique de l'augmentation de l'angle  $\gamma$  sera d'augmenter le déphasage des sauts de pression sur pale mais aussi d'augmenter la longueur de corrélation du signal.

### Rayonnement acoustique dans le cas A et B

Une fois obtenues les perturbations de pression sur pale, un calcul du rayonnement acoustique est effectué en utilisant le code PARIS [83]. Ce code est basé sur une formulation intégrale de la solution de l'équation de Ffowcs Williams et Hawkins et a été développé dans le cadre de l'étude du BVI.

**Remarque 2.3.4.1** *Nous ne produisons pas ci-dessous les résultats montrés dans [65]. Ces résultats se sont avérés erronés du fait d'une mauvaise mise en œuvre du calcul acoustique.*

Les cartes de bruit présentées sont relatives au niveau de dB du bruit rayonné à 2m sous le rotor. Sur les figures le rotor est schématisé par un cercle. Les points de discrétisation du maillage surfacique correspondent à l'emplacement des micros dans les expériences HART2.

Les figures 2.16 présentent les résultats obtenus dans le cas **A** lorsqu'un seul des deux tourbillons est pris en compte. La figure de gauche présente le résultat pour le tourbillon 2 et la figure de droite pour le tourbillon 3. On peut voir que la directivité est légèrement différente dans ces deux cas notamment pour le lieu où l'intensité du bruit rayonné est maximum, ce lieu est représenté par un point noir. De plus, l'intensité n'est pas, non plus, la même puisqu'elle est plus importante pour la carte de bruit de gauche (93.7dB) que celle de droite (91.15dB). Ce résultat s'explique par le fait que le tourbillon 2 interagit avec la pale à des envergures plus grandes. La vitesse  $U_\infty$  est donc plus importante et les perturbations de pression sur pale calculées avec la formule 2.8 seront donc plus grandes.

Sur la figure 2.17, la carte de bruit calculée en considérant les deux interactions pale/tourbillon est présentée et comparée à une carte de bruit issue des résultats HART. Le niveau de bruit maximum observé sur les deux cartes est très différent. En effet sur la carte calculée le niveau de bruit maximum est de 99.8dB et sur la carte expérimentale 92.3dB. En revanche, la directivité du bruit est en assez bon accord dans les deux cas, notamment pour le lieu où le bruit est maximum. Sur la figure de gauche le point du maximum de bruit a été situé entre deux micros car l'intensité est la même en ces deux points. La surévaluation des niveaux dans le calcul présenté ne doit pas être interprétée comme un mauvais résultat. Au contraire, ce résultat montre que l'interaction avec un tourbillon instable peut engendrer un bruit d'intensité comparable à celle mesurée pour le BVI.

Afin d'évaluer les différences de niveau ou de directivité pour une configuration d'interaction pale tourbillon différente, nous avons effectué un calcul en reprenant les mêmes paramètres que le calcul **A** mais en augmentant l'angle d'interaction  $\gamma$  des deux tourbillons et de la pale de 5° 5 calcul **B**. Le résultat est montré sur la figure 2.18 de gauche. On remarque que la directivité du bruit est légèrement différente de celle présentée sur la figure 2.17. En effet le bruit est un peu plus directif dans ce second cas (ceci peut se constater en exprimant la distance entre les lignes de niveaux). Ce résultat s'explique par la plus grande longueur de corrélation en envergure engendrée

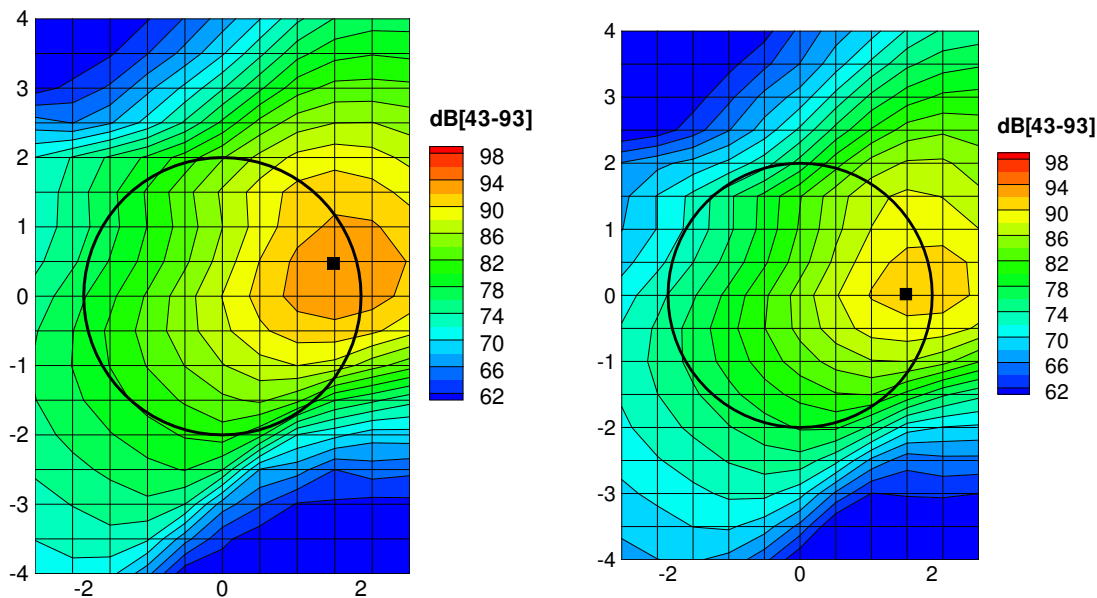


FIG. 2.16 – Calcul du rayonnement acoustique dans le cas A. A gauche : seul le tourbillon 2 a été pris en compte. A droite : seul le tourbillon 3 a été pris en compte .

par l'augmentation de l'angle d'interaction. D'autre part le niveau et le lieu du maximum de bruit sont légèrement différents. En effet, plus l'angle est grand plus le niveau maximum est élevé, comme présenté sur la figure 2.18 de gauche où  $dB_{max} = 101.2dB$ . D'autre part, il semble que l'augmentation de  $\gamma$  entraîne un léger décalage vers l'amont de la directivité. Pour s'en rendre compte on peut noter que le lieu où le bruit est maximum est plus haut par rapport au centre du rotor que dans le cas présenté précédemment.

Finalement, on a voulu estimer l'impact de la distance  $md$  sur le bruit rayonné. Pour cela plusieurs calculs, définis par les lettres allant de **B** à **G** ont été menés. La figure 2.18 compare les résultats obtenus dans les cas **B** et **C**. On remarque que si la directivité reste la même, les niveaux baissent de façon importante :  $-8\text{ dB}$  pour 50% d'augmentation de  $md$ . Enfin, la figure 2.19 montre l'évolution du maximum de bruit en fonction de  $md$ . On remarque que la baisse du niveau maximum de bruit n'est pas linéaire. En effet, lorsque la distance d'interaction entre le tourbillon et la pale croît tout en restant inférieure au rayon visqueux du tourbillon (soit  $0.13C$ ), l'intensité du bruit diminue rapidement. Lorsque l'interaction se situe à la périphérie du tourbillon il y a alors un palier où le niveau du maximum de bruit se stabilise autour  $101dB$ . Enfin lorsque  $md > 0.2C$ , le maximum de bruit recommence à baisser de façon importante puisqu'il y a une diminution de  $15dB$  des niveaux lorsque  $md$  double. Ce résultat met en avant la grande influence de la distance d'interaction sur le niveau du bruit rayonné. De notre point de vue, il permet d'expliquer le fait que d'un tour à l'autre l'intensité des perturbations de pression sur pale varie de façon importante [18] du fait de variations des distances d'interaction dans l'expérience.

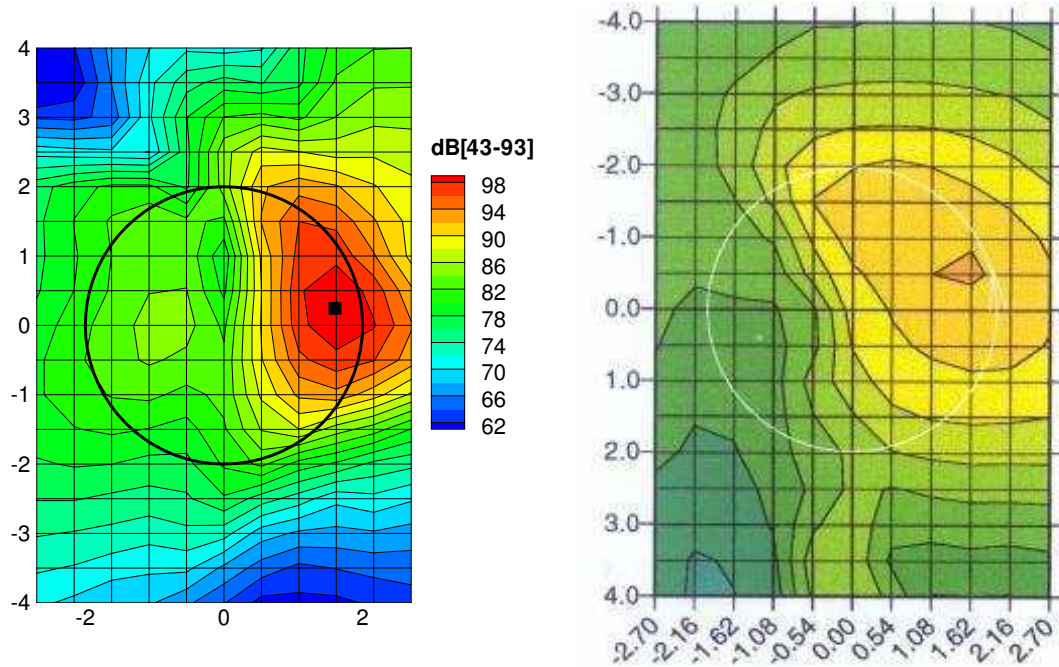


FIG. 2.17 – Comparaison entre résultats les cartes bruits calculées et expérimentales. A gauche : résultat numérique. A droite : résultat expérimental.

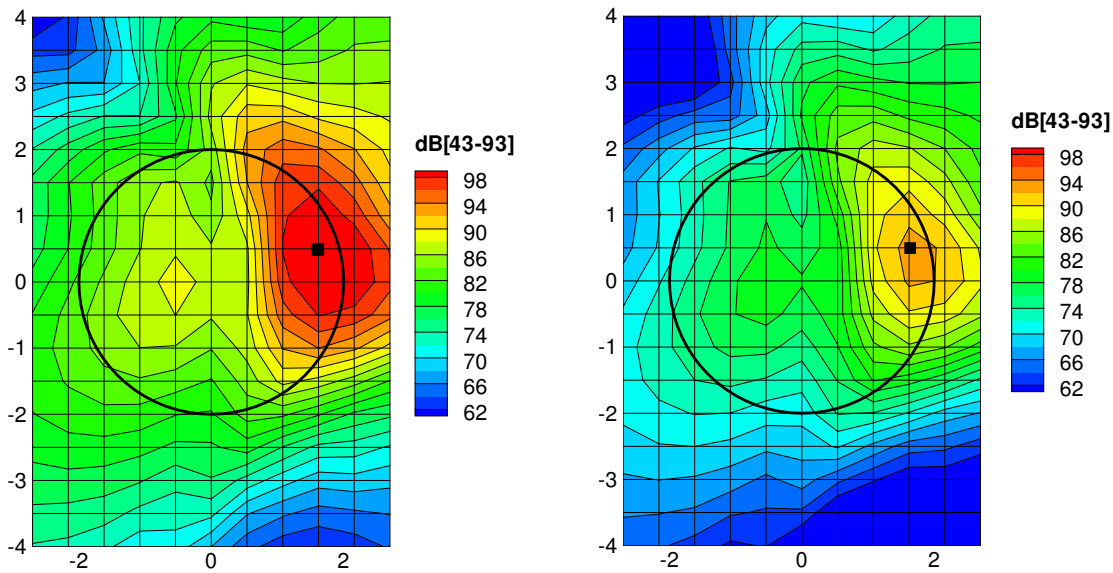


FIG. 2.18 – Evaluation de l'effet sur les cartes de bruit rayonné de la distance d'interaction entre la pale et les tourbillons. A gauche : configuration **B** . A droite : configuration **C**

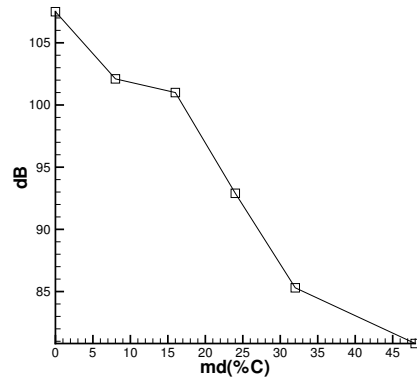


FIG. 2.19 – Evolution du maximum de bruit calculé en fonction de la distance d'interaction  $md$ .

### Bruit rayonné pour un calcul de type $Cal_2$

Enfin pour évaluer l'impact d'un signal plus riche en terme de longueurs d'ondes des structures tourbillonnaires, nous avons effectué un calcul d'instabilités en fixant la dimension axiale du domaine de calcul de telle sorte que cinq longueurs d'ondes instables différentes apparaissent. Lors de la simulation, nous nous sommes rendu compte que, d'une part, plusieurs longueurs d'ondes de la première branche d'instabilités se développaient mais aussi que de plus petites longueurs d'ondes correspondant à la deuxième branche d'instabilités se développaient aussi et interféraient avec les précédentes. D'un point de vue numérique, la discrétisation de ces petites structures étant de l'ordre de 10 points, le taux d'amplification doit être sous estimé, mais elle est suffisante pour bien définir la forme de l'onde. La figure 2.20 montre les isosurfaces de vorticités de la solution de la simulation numérique à un temps égale à trois rotation de rotor. On peut remarquer que la déformation axiale du tourbillon à droite est moins "nette" que dans le cas de la simulation  $Cal_1$  (cf 2.5. Cette caractéristique peut être attribuée à l'amplification de longueurs d'ondes de différentes branches de l'instabilité au même endroit. Cette solution a été retenue pour le calcul acoustique dont les paramètres sont ceux du cas **H**.

La figure 2.21 montre la carte de bruit obtenue par ce calcul. Cette figure doit être commentée au regard de la figure 2.18 car la configuration géométrique d'interaction entre la pale et les tourbillons est la même que celle du cas **B**, seules les données du calcul CFD diffèrent. On peut remarquer deux, dans ce dernier cas le niveau du bruit rayonné diminue : Dans le cas **B**, le niveau maximum de bruit était de  $101.2db$  dans le cas **H** il n'est plus que de  $92.8dB$ , plus proche du niveau expérimental. Cette diminution en niveau pourrait être la conséquence d'une moins grande cohérence en azimuth des structures tourbillonnaires.

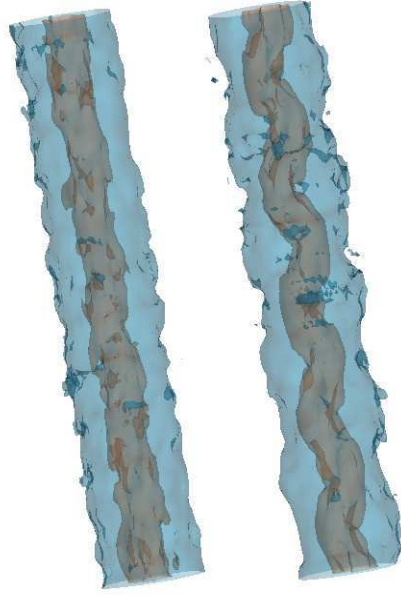


FIG. 2.20 – Isosurfaces de vorticité dans le cas de la simulation de plusieurs longueurs d'ondes instables au temps  $t = 3$  tours de rotor.

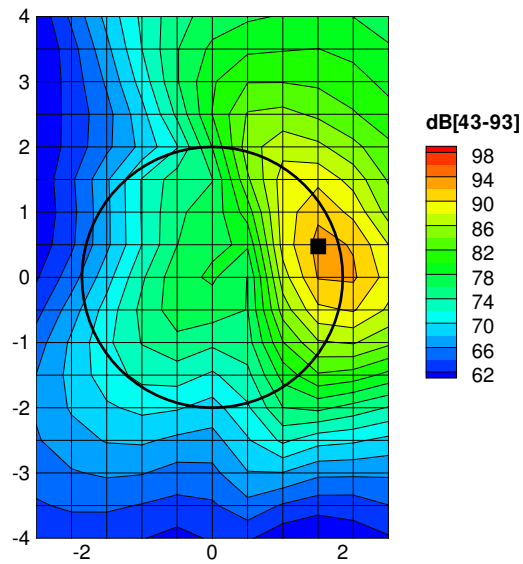


FIG. 2.21 – Bruit rayonné calculé dans le cas du calcul **H**

## 2.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons évalué les caractéristiques des perturbations de pression sur pale et du bruit rayonné dans le cas d'une interaction entre une pale et un tourbillon elliptiquement instable. Pour cela, une simulation numérique des instabilités supposées être à l'origine du BWI a été menée en considérant une configuration simplifiée de tourbillons de Lamb-Oseen parallèles rectilignes et uniformes. La dynamique du développement des instabilités elliptiques au sein de ces tourbillons a été simulée. Les résultats obtenus ont été comparés à des résultats théoriques et un bon accord avec ceux ci a été trouvé.

Le champ aérodynamique solution de ces simulations a ensuite été utilisé pour déterminer la réponse d'une pale de rotor rencontrant ces perturbations à des azimuts où des fluctuations de pression sur pale associées au BWI sont constatées expérimentalement. Pour cela, un champ monodimensionnel contenant les perturbations de vitesses normales au plan de la pale, a été extrait des résultats des simulations aérodynamiques et la réponse de la pale a été calculée à partir de la théorie d'Amiet. Des profils de perturbation de pression sur pale similaires à ceux constatés dans les expériences HART 1 et HART 2 ont été observés.

Finalement, les perturbations de pression sur pale obtenues ont été utilisées comme données d'entrée pour un calcul de rayonnement acoustique. Les niveaux de bruit et les directivités dans un plan horizontal sous le rotor ont été calculés et comparés aux résultats expérimentaux. Plusieurs configurations d'interaction pale tourbillons ont été calculées. L'influence de la distance et de l'angle d'interaction entre les tourbillons et la pale a été notamment discuté. Un bon accord est trouvé entre les directivités expérimentales et celles calculées. Il a aussi été montré que des niveaux de bruit proches de ceux observés expérimentalement peuvent être obtenus. Enfin, les niveaux calculés sont très sensibles à des variations des paramètres géométriques d'interaction, en premier lieu à la distance pale-tourbillon. Ceci est en accord avec les variations du BWI d'un tour sur l'autre constatées expérimentalement.

Bien que tous ces points tendent à montrer que les instabilités elliptiques de tourbillons sont une composante principale du bruit BWI, certaines questions restent encore en suspens pour pouvoir l'affirmer.

D'une part, les instabilités elliptiques qui apparaissent dans la paire de tourbillons se développent dans un plan préférentiel, leur taux d'amplification dépend de la distance entre les deux tourbillons et, comme nous l'avons montré, la distance d'interaction entre la pale et les tourbillons joue un grand rôle sur l'intensité des perturbations de pression sur pale. Une prédiction de la trajectoire des tourbillons d'extrémité de pale plus précise serait donc nécessaire pour permettre de prévoir correctement les caractéristiques du bruit rayonné.

Enfin, comme nous l'avons vu, le taux d'amplification de ces instabilités prévu par le calcul semble trop faible si leur apparition est uniquement due à la présence d'un autre tourbillon. En effet, au vu des taux d'amplification de l'instabilités elliptique, même si les tourbillons sont très proches, il faudrait au moins 3/4 de tour de rotor pour permettre à l'instabilité de se développer suffisamment. Neanmoins ces taux d'amplifications sont été obtenus pour des configurations simplifiées de paires de tourbillons parallèles, rectilignes, uniformes. Dans la deuxième partie de notre étude, nous allons chercher à étudier la stabilité des tourbillons pour des configurations plus proches de celles des tourbillons réels de rotor d'hélicoptère pour voir si d'autres facteurs peuvent accélérer le développement des instabilités.



## Chapitre 3

# Étude des instabilités par une méthode harmonique.

### Présentation du problème.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, on veut répondre à la deuxième question posée dans l'introduction du mémoire c'est à dire *Les caractéristiques géométriques d'un tourbillon de bout de pale d'hélicoptère jeune (cœur du tourbillon elliptique, et courbure du filament tourbillonnaire) jouent-elles un rôle sur la stabilité de celui-ci ?*

Pour cela, on souhaite modéliser les instabilités pouvant se développer dans les tourbillons réalistes d'extrémité de pale et plus précisément évaluer la stabilité d'une nappe tourbillonnaire en enroulement dans le sillage proche de la pale. Afin de déterminer les longueurs d'ondes caractéristiques de ces instabilités, on a besoin d'effectuer un nombre important de simulations numériques.

A l'heure actuelle une simulation de ce phénomène par un calcul aérodynamique d'un rotor complet ne semble pas accessible pour des calculs répétés. En effet, d'une part la modélisation de ces instabilités nécessiterait une discrétisation importante même en utilisant une méthode d'adaptation de maillage (On estime qu'environ 20 millions de points seraient nécessaires dans le cas où l'on ne considérerait qu'une seule pale). D'autre part l'utilisation d'un schéma temporel explicite conduirait à des temps de calcul trop importants. Pour exemple, Laporte, dans sa thèse [54], a modélisé par une simulation directe les instabilités se développant dans les tourbillons de sillage d'avions en champ proche étendu. Cette simulation a nécessité 1700 heures de calcul.

Comme le but de l'étude est de rechercher les taux d'amplification des instabilités, une approche linéaire est possible. En revanche, l'écoulement définissant un enroulement tourbillonnaire derrière une pale étant fortement non parallèle c'est-à-dire que cet écoulement n'est constant dans aucunes des directions de l'espace, une étude locale (cf chapitre 1) ne serait pas adaptée. De plus, nous verrons dans le chapitre 4 que dans la configuration considérée les instabilités recherchées sont de type convectives. Une recherche de modes globaux n'est donc pas adaptée à notre étude.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode numérique que nous avons développée pour nous permettre d'effectuer une étude paramétrique de la stabilité des tourbillons d'extrémité de pale d'hélicoptère.



Le développement de cet outil a été réalisé sur la base du code SPACE développé à l'ONERA. Ce code parallèle résout les équations d'Euler linéarisées en repère fixe à l'aide d'une discrétisation spatiale de type Galerkin discontinue où les fonctions de base sont des polynômes d'ordres élevés (jusqu'à l'ordre 7 en dimension 2 et 3) et des flux totalement décentrés. Le schéma de discrétisation temporelle est de type Runge-Kutta à deux pas. Dans la section 3.1, La formulation des équations d'Euler linéarisées dans un repère en rotation uniforme est présentée, puis on discute des hypothèses nécessaires à la modélisation harmonique des phénomènes physiques. Dans la section 3.2, on présente les conditions aux limites implémentées dans le code harmonique. Dans la section 3.3, la discrétisation par une méthode Galerkin discontinue est présentée et l'on discute de la mise en place d'une zone éponge basée sur un *stretching* anisotrope. Dans la section 3.4, une méthode de résolution parallèle du système linéaire basée sur une méthode de décomposition de domaine est présentée. Enfin la méthode mise au point est validée dans le cadre de différents cas bidimensionnels dans la section 3.5.

## 3.1 Équations d'Euler linéarisées dans le repère tournant

### 3.1.1 Formulation temporelle

Dans la suite, on suppose que le repère tournant est porté par l'axe  $O_z$  et qu'il est en rotation uniforme à une vitesse angulaire  $\Omega$  :

$$\Omega = (0, 0, \omega_z)^t$$

avec  $\omega_z$  constant.

Les équations d'Euler dans ce repère s'écrivent :

soit  $\vec{U} = (u, v, w)^t$  le vecteur vitesse,  $\rho$  la densité,  $S$  l'entropie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{U} = f_{e1} \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} + \nabla p + 2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{U}) - \rho f_e + \rho \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = f_{e2} \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} S) = f_{e3} \quad (3.3)$$

Dans le cas d'un écoulement adiabatique, l'état thermodynamique du fluide dépend de deux variables thermodynamiques comme  $p$  et  $\rho$  et les propriétés thermodynamiques résultent d'une seule relation fondamentale que l'on peut prendre sous la forme  $S = S(\rho, p)$ .

En écoulement adiabatique de fluide parfait, l'entropie d'une particule fluide se conserve sauf à la traversée d'un choc : dans une région sans choc, l'écoulement est isentropique. Si toutes les particules proviennent d'une région où l'entropie est uniforme et constante dans le temps (c'est le cas si l'on considère par exemple un écoulement subsonique autour d'un profil), alors en l'absence de choc, l'entropie reste uniforme et constante dans tout l'écoulement. L'écoulement est alors dit homentropique.

Dans la configuration de vol considérée (i.e vol de montée modérée), l'écoulement autour de la pale reste subsonique il n'y a donc pas de choc. On supposera donc par la suite que le champ porteur est homentropique, c'est à dire que l'entropie du système est constante dans le volume. Cette hypothèse nous permettra de ne pas considérer la troisième équation du système (3.3) et ainsi de l'alléger.

La linéarisation des équations d'Euler suppose la décomposition du vecteur solution en un champ porteur et un champ de perturbation, soit :

$$\begin{cases} \vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{U}' \\ \rho = \rho_0 + \rho' \\ p = p_0 + a_0^2 \rho' \\ f_e = f_{e0} + f'_e \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $f_e = (f_{e1}, f_{e2})^t$ .

Après développement et en supposant que le champ porteur est solution stationnaire des équations d'Euler dans ce même repère tournant, le système différentiel devient :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{U}' \cdot \nabla \rho_0 + \vec{U}_0 \cdot \nabla \rho' + \rho' \nabla \cdot \vec{U}_0 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{U}' = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \rho_0 \frac{\partial \vec{U}'}{\partial t} + \rho_0 \vec{U}' \cdot \nabla \vec{U}_0 + \rho_0 \vec{U}_0 \cdot \nabla \vec{U}' + \rho' \vec{U}_0 \cdot \nabla \vec{U}_0 + \nabla (a_0^2 \rho') \\ & + 2\rho' (\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_0) + 2\rho_0 (\vec{\Omega} \wedge \vec{U}') - \rho' f_{e0} - \rho f'_e + \rho' \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ce système peut être simplifié en considérant que le champ porteur est solution stationnaire des équations d'Euler en repère tournant. On a en considérant la deuxième équation du système 3.3 :

$$\vec{U}_0 \cdot \nabla \vec{U}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho_0} - 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_0) + \vec{f}_e - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \quad (3.7)$$

En injectant cette égalité dans 3.6 on obtient l'équation :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{U}'}{\partial t} + \rho_0 \vec{U}' \cdot \nabla \vec{U}_0 + \rho_0 \vec{U}_0 \cdot \nabla \vec{U}' - \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla p_0 + \nabla (a_0^2 \rho') + 2\rho_0 (\vec{\Omega} \wedge \vec{U}') = \rho_0 \vec{f}'_e \quad (3.8)$$

Finalement, en considérant le changement de variable  $\mu' = \frac{\rho' a_0}{\rho_0}$  on obtient le système d'équations : soit  $\phi = (u', v', w', \mu')^t$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \phi}{\partial z} + B\phi = f'_e \quad (3.9)$$

avec  $f'_e$  la source de perturbations et :

$$A_1 = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & u_0 & 0 & \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & w_0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2\omega_z & \frac{\partial u_0}{\partial z} & \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial a_0 \rho_0}{\partial x} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + 2\omega_z & \frac{\partial v_0}{\partial y} & \frac{\partial v_0}{\partial z} & \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial a_0 \rho_0}{\partial y} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} & \frac{\partial w_0}{\partial y} & \frac{\partial w_0}{\partial z} & \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial a_0 \rho_0}{\partial z} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \\ \frac{a_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} & \frac{a_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} & \frac{a_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} & -\frac{1}{a_0} \vec{U}_0 \cdot \nabla a_0 \end{pmatrix}$$

On fait maintenant l'hypothèse de perturbations barotropes c'est à dire que l'on suppose que l'influence des variations entropiques est négligeable devant celle des variations de la masse volumique ; On a donc  $\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} = a_0^2$ . De plus la loi des gaz parfaits donne  $a_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$ . On arrive donc

à la relation  $\frac{2}{a_0} \nabla a_0 = \frac{\gamma-1}{\rho_0} \nabla \rho_0$ . En remarquant que le champ porteur est solution stationnaire des équations d'Euler, on peut simplifier l'expression de la matrice B qui devient :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2\omega_z & \frac{\partial u_0}{\partial z} & -\frac{\partial a_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + 2\omega_z & \frac{\partial v_0}{\partial y} & \frac{\partial v_0}{\partial z} & -\frac{\partial a_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} & \frac{\partial w_0}{\partial y} & \frac{\partial w_0}{\partial z} & -\frac{\partial a_0}{\partial z} \\ \frac{a_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} & \frac{a_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} & \frac{a_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} & \frac{(\gamma-1)}{2} \nabla \cdot \vec{U}_0 \end{pmatrix}$$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , en tenant compte de la symétrie des matrices  $A_i$ , l'équation de bilan d'énergie globale sur  $\phi$  associée à l'équation 3.9 s'écrit avec la convention de sommation d'Einstein :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi^t (B + B^t - \partial_i A_i) \phi + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \phi^t A_i n_i \phi = \int_{\Omega} f'_e \phi \quad (3.10)$$

Le premier terme représentant la variation d'énergie dans le volume  $\Omega$ , le troisième terme le flux d'énergie à la frontière et le dernier terme l'énergie fournie par la source. Le second terme de cette équation et un terme " exotique " représentant le bilan énergétique de l'interaction milieu-onde. Le système 3.10 n'est pas forcément dissipatif, le signe de l'opérateur  $B + B^t - \partial_i A_i$  n'étant pas déterminé, on ne peut donc pas assurer sa stabilité  $L^2_{loc}(\Omega)$ . Cependant en posant  $\psi = e^{\alpha t}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et si l'on suppose que le champ porteur est  $C^1(\Omega)$ , on voit que l'on peut majorer l'opérateur. La croissance de la solution sera alors au plus exponentielle.

Enfin, dans sa thèse, Ventribout [90] montre l'existence et l'unicité de la solution sous certaines conditions de régularité sur le domaine spatial, des conditions aux limites admissibles et pour un temps fini. Ce résultat est obtenu dans le cas d'une formulation des équations d'Euler linéarisées dans un repère immobile mais s'applique sans contraintes au cas du repère en rotation uniforme.

### 3.1.2 Formulation harmonique.

Soit  $f'_e$  une source de perturbation périodique,  $f'_e = g e^{i\omega t}$ , et  $\phi$  la solution du problème, à tout instant fixé  $t_0$  cette solution peut se décomposer en une composante harmonique  $\vec{\phi}_h$ , c'est-à-dire une solution périodique en temps de la forme  $\vec{\phi}_h(t_0, x) = e^{i\omega t_0} \vec{\phi}_0(x)$ , et une composante transitoire  $\vec{\phi}_t$  soit :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \phi(t_0, \cdot) = \vec{\phi}_h(t_0, \cdot) + \vec{\phi}_t(t_0, \cdot)$$

Selon les caractéristiques de l'écoulement et les conditions aux limites associées au problème différents cas peuvent donc survenir :

- les conditions aux limites ne sont pas assez dissipatives (phénomène d'obstacle trapping) ou le phénomène physique conduit à une croissance temporelle de l'énergie locale du système, (par exemple dans le cas des phénomènes d'instabilités absolues), alors la composante transitoire de la solution reste non nulle et la résolution lorsque le temps tend vers l'infini du système 3.9 ne se réduit pas à la résolution d'un problème harmonique.
- les conditions aux limites sont assez dissipatives et l'énergie du système ne croît pas localement ou a une croissance finie en temps On peut citer comme exemple la simulation de la propagation d'une onde en champ libre ou la simulation d'une instabilité convective. Dans ces cas, la solution transitoire tend vers 0 lorsque le temps devient grand et la solution du système 3.9 revient à résoudre le problème :

$$\begin{cases} (i\omega + A_1 \partial_x + A_2 \partial_y + A_3 \partial_z + B)\psi = g & \text{dans } \Omega \\ M\phi = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.11)$$

Où  $M$  est un opérateur qui sera défini dans la section suivante.

Résoudre ce problème revient à chercher la solution d'un problème en régime établi. On appelle ce type de problème un **problème harmonique**. Ce type de problème a été abordé dans différents domaines comme l'aéroélasticité et l'aéroacoustique. Bécache et Bonnet-Bendhia [10, 16] ont abordé le problème harmonique appliqué aux équations de Galbrun à la fois pour un écoulement porteur uniforme et cisailé en dimension 2. Dans le cadre de la résolution de l'équation des ondes, les méthodes BEM (Boundary Element Method) utilisent cette approche.

L'intérêt de cette modélisation est que le problème se réduit après discrétisation à la résolution d'un système linéaire. Le calcul sera donc généralement plus court. En revanche la résolution du système peut s'avérer coûteuse en mémoire et entraîner une limitation sur la taille du problème. Dans le cadre de notre étude où nous chercherons à simuler des phénomènes instables convectivement, le problème que l'on doit alors résoudre est définir des conditions aux limites susceptibles de permettre la simulation des phénomènes en champ libre.

## 3.2 Conditions aux limites et zone éponge

### 3.2.1 Conditions aux limites non réfléchissantes.

Dans cette partie on se base sur les travaux effectués par Ventribout[90]. Dans sa thèse il définit des conditions aux limites non réfléchissantes au moyen de conditions de transparence à l'ordre 1 qui permettent une non-reflexion totale dans le cas d'ondes normales. Ces conditions sont définies ainsi :

Soit

$$\left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^+ = \sup \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s, 0 \right)$$

Et

$$\left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^- = \inf \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s, 0 \right)$$

Alors dans le cas d'un écoulement porteur entrant ou sortant, on définit la matrice  $M$  par :

$$M = - \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^-$$

### 3.2.2 Application d'une zone éponge de type PML.

Dans le cas de structures plus complexes atteignant les bords du domaine de calcul (par exemple des structures de vorticités) ces conditions aux limites se sont montrées insuffisantes pour permettre leurs sorties et des réflexions parasites sont apparues dans la zone de calcul ayant pour effet de perturber l'écoulement. Il a donc fallu mettre en place une zone où ces instabilités seront absorbées. Dans la littérature plusieurs méthodes sont proposées. Le lecteur peut se référer à Colonius [28] pour un exposé de ces méthodes. Pour notre part, nous nous sommes intéressés à deux types de conditions. Une condition dite PML (*Perfectly Matching Layer*) et une autre consistant à progressivement agrandir les mailles (nous utiliserons le mot *stretching*) dans la zone où la solution doit être atténuée. Nous présenterons la deuxième méthode par la suite.

Le principe des conditions PML est d'obtenir un système tel que la solution vérifie les équations d'Euler linéarisées en espace libre dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  et qu'elle décroisse exponentiellement sur  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ . Ce genre de méthode a été introduite par Berenger dans le cadre de l'électro-magnétisme [13]. Les premières études ont montré que l'application directe de cette technique aux équations d'Euler linéarisées conduisait à des instabilités dans la zone PML (notamment Hu [45] qui pour palier à ce problème utilise un filtrage numérique).

Dans le cadre de la simulation numérique des équations d'Euler linéarisées, les PML ont été étudiées pour des discrétisations de type différences finies [45] mais aussi dans le cadre de formulations éléments finis mixtes [25]. On se propose ici de les appliquer dans le cadre d'une discrétisation Galerkin discontinue en formulation harmonique. Une étude a été menée dans un cadre assez proche par Bonnet-Bendhia [16] mais pour la résolution des équations de Galbrun.

Soit l'équation différentielle 2D, correspondant aux équations d'Euler linéarisées pour un champ porteur uniforme :

$$(iw + A_1 \partial_{x_1} + A_2 \partial_{x_2}) \vec{\phi} = 0$$

On cherche à développer une condition PML dans la direction  $x_1$ . Pour cela on sépare le problème pour obtenir un système où chaque équation sera associée aux dérivées en  $x_i$ ,  $i \in 1, 2$  c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \vec{\phi} = \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 \\ iw \vec{\phi}_1 + A_1 \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_1} = 0 \\ iw \vec{\phi}_2 + A_2 \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

L'application de PML dans la direction  $x_1$  consiste à rajouter à la première équation différentielle du système 3.12 un terme d'amortissement  $\sigma_{x_1}$  :

$$\begin{cases} \vec{\phi} = \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 \\ (iw + \sigma_{x_1}) \vec{\phi}_1 + A_1 \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_1} = \vec{0} \\ iw \vec{\phi}_2 + A_2 \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_2} = \vec{0} \end{cases} \quad (3.13)$$

On vérifie aisément que lorsque  $\sigma_{x_1} = 0$  les deux systèmes d'équations 3.12 et 3.13 sont identiques. De plus ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} \vec{\phi} = \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 \\ iw \vec{\phi}_1 + \frac{i\omega}{i\omega + \sigma_{x_1}} A_1 \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_1} = \vec{0} \\ iw \vec{\phi}_2 + A_2 \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_2} = \vec{0} \end{cases} \quad (3.14)$$

L'application d'une PML en formulation harmonique consiste donc à faire la transformation sur l'opérateur de dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \longrightarrow \alpha(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (3.15)$$

avec  $\alpha(x) = \frac{i\omega}{i\omega + \sigma(x)}$  ce qui implique la transformation complexe sur la variable  $x_1$  :

$$x_1 \longrightarrow x_1 + \frac{i}{\omega} \int_{x_0}^{x_1} \sigma(s) ds \quad (3.16)$$

Hu [46] dans le cadre des équations d'Euler linéarisées ou Bécache [25] dans le cadre plus général des systèmes hyperboliques, ont montré que dans le cas d'un champ porteur à vitesse non nulle les PML pouvaient être instables. Ces instabilités apparaissent lorsque les vitesses de groupe et les vitesses de phase des ondes sont de sens opposés. Dans [46] et [25], les auteurs proposent d'appliquer une transformation spatio-temporelle dans la zone PML afin que dans ce système de coordonnées toutes ces ondes aient des vitesses de phases et de groupes de même signe.

Afin d'assurer la stabilité de la zone PML, Hu propose le changement de variable dans le domaine fréquentiel :

$$k^* = k + \lambda x$$

Ce changement de variable revient à ajouter  $i\omega\lambda$  à la transformation définie en 3.15 avec  $\lambda = \frac{kM}{1-M^2}$ , où  $M$  est le nombre de Mach moyen de l'écoulement. Finalement le système 3.11 devient

$$\begin{cases} (i\omega(Id + \lambda A_1) + A_1\alpha(x_1)\partial_{x_1} + A_2\partial_x + A_3\partial_x + B)\vec{\phi} = \vec{g} \\ M\vec{\phi} = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

**Remarque 3.2.2.1** *Dans la littérature, pour les simulations numériques, les zones PML sont en général définies comme un domaine fictif ajouté au domaine de calcul. Dans notre approche on adopte la méthode utilisée dans [10] c'est-à-dire que la zone PML est définie comme une partie du maillage sur lequel on effectue le calcul.*

**Remarque 3.2.2.2** *Dans le cas de la résolution temporelle des équations d'Euler linéarisées ces conditions n'ont pas été implémentées. Notons que dans ce cas l'implémentation de ce type de condition conduit à la résolution d'un système augmenté plus compliqué à mettre en œuvre.*

Si la définition de  $\lambda$  convient bien pour un écoulement non uniforme mais parallèle, il est beaucoup plus difficile de déterminer cette condition dans le cadre d'un écoulement non parallèle et la stabilité de la zone PML n'est alors plus assurée. Cette remarque nous a amené à chercher d'autres méthodes qui nous permettraient dans le cas d'écoulement porteur complexe de définir une zone éponge efficace. Nous présenterons dans la section 3.3.3 une méthode basée sur le *stretching* anisotrope du maillage.

### 3.3 Approximation par une méthode Galerkin discontinue.

Si nous n'avons pas, au cours de notre bibliographie trouver aucune référence sur une méthode Galerkin discontinue appliquée aux équations d'euler linéarisées en formulation harmonique, il en existe, en revanche, un certain nombre sur cette méthode appliquée aux mêmes équations mais en formulation temporelle. Pour les études de stabilités, Bernacki et Piperno [14] qui ont étudiés avec une telle méthode la stabilité d'écoulements 2D et 3D.

Soit  $V_i$  un ensemble d'ouverts connexes, deux à deux disjoints tel que  $\cup_i V_i = \Omega$ . Une méthode de discrétisation de type Galerkin discontinu consiste à résoudre un ensemble d'équations différentielles locales sur ces  $V_i$  dont les conditions aux limites sont déterminées à partir des conditions de saut sur les solutions entre les ouverts. Plus précisément, Si l'on note :

- $E = \{\vec{v}/\vec{v} \in (H_m^{k+1}(\Omega))^q\}$  où  $(H_m^{k+1}(\Omega))^q$  désigne l'ensemble des fonctions  $H^{k+1}$  par morceaux.
- $(V_i)_{0 < i \leq N}$  l'ensemble des ouverts connexes disjoints deux à deux où  $\vec{\phi} \in (H_m^{k+1}(\Omega))^q$

–  $S = \cup S_i = \cup \partial V_i \setminus \partial \Omega$  l'ensemble des discontinuités de  $\vec{\phi}$

En posant  $A'_i = \alpha(x)_i A_i$  où  $\vec{\alpha}(x) = (\alpha(x), 1, 1)$  et  $C = i\omega(Id + \lambda A_1) + B$  le système 3.17 peut s'écrire au sens des distributions :

trouver  $\vec{\phi} \in E$  tel que :

$$\begin{cases} C\vec{\phi} + \sum_{s=1,q} A'_s \partial_{x_s} \vec{\phi} = \vec{g} & \text{presque partout sur } \Omega \\ \sum_{s=1,q} A'_s n_s [\vec{\phi}] = 0 & \text{sur } S \\ M\vec{\phi} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \quad (3.18)$$

### 3.3.1 Formulation variationnelle.

**Remarque 3.3.1.1** Dans la suite on supposera que l'ensemble des discontinuités sur la distribution  $\vec{\psi}$  est le même que pour  $\vec{\phi}$ . Cette hypothèse est faite pour alléger l'écriture des intégrales.

**Proposition 3.3.1** la formulation variationnelle :

trouver  $\vec{\phi} \in E$  tel que  $\forall \psi \in E$  :

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{V_i} \langle C\vec{\phi} + \sum_{s=1,q} A'_s \partial_{x_s} \vec{\phi}, \vec{\psi} \rangle_{\mathbb{C}^q} + \int_{S_i} \langle \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^- [\vec{\phi}], \vec{\psi}^- \rangle_{\mathbb{C}^q} \\ + \int_{\partial \Omega} \langle M\vec{\phi}, \vec{\psi} \rangle_{\mathbb{C}^q} = \int_{V_i} \langle \vec{g}, \vec{\psi} \rangle_{\mathbb{C}^q} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où :

- $\vec{n}$  la normale unitaire sortante à  $\partial V_i$ .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^q}$  désigne le produit scalaire de  $\mathbb{C}^q$ .
- $\left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^-$  (respectivement  $\left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^+$ ) matrice associée aux valeurs propres à parties réelles négatives (respectivement à parties réelles positives) de  $\sum_{s=1,q} A'_s n_s$ .
- soit  $x \in S_i$ ,  $\psi^+$  et  $\psi^-$  sont définies ainsi :

$$\psi^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(x + \epsilon n)$$

$$\psi^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(x - \epsilon n)$$

$$[\psi] = \psi^+ - \psi^-$$

est équivalente à la 3.18.

**Preuve :** Pour démontrer que la résolution du problème 3.18 revient à résoudre 3.19 il suffit d'écrire les relations suivantes :

1.  $\ker(\sum_{s=1,q} A'_s n_s) \subset \ker\left(\left(\sum_{s=1,q} A'_s n_s\right)^-\right)$
2.  $\ker(\sum_{s=1,q} A'_s n_s) \subset \ker\left(\left(\sum_{s=1,q} A'_s n_s\right)^+\right)$

on a donc

$$\sum_{s=1,q} A'_s n_s [\vec{\phi}] = 0 \text{ sur } S \Rightarrow \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^- [\vec{\phi}] = 0 \text{ sur } S$$

ce qui entraîne :

$$\int_{S_i} \left\langle \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^- [\vec{\phi}], \vec{\psi}^- \right\rangle_{\mathbb{C}^q} = 0 \quad (3.20)$$

Donc après avoir multiplié la première ligne de 3.18 par une fonction  $\psi \in E$ , l'avoir intégrée sur les  $V_i$ , pris en compte la contribution des conditions aux limites et y avoir ajouté 3.20 on arrive à la formulation 3.19.

Démontrons maintenant que résoudre le problème 3.19 revient à résoudre 3.18. Comme la formulation est vérifiée pour tout  $\vec{\psi} \in E$  on choisit dans un premier temps des vecteurs  $\vec{\psi}$  à support compact sur les  $V_i$  et on obtient directement la première équation de 3.18.

Soient deux ouverts  $V_i$  et  $V_j$  de  $\Omega$  qui se trouvent côte à côte. On note  $B = V_i \cup V_j$ . En reprenant la deuxième intégrale de l'équation 3.19, en remarquant que sur ce bord  $\vec{\psi}^+|_i = \vec{\psi}^-|_j$  et  $\vec{\psi}^-|_i = \vec{\psi}^+|_j$  où  $|_i$  désigne la restriction de la fonction  $\vec{\psi}$  à l'élément  $i$  et que  $\left( \sum_{s=1,q} A'_s(-n_s) \right)^- = - \left( \sum_{s=1,q} A'_s(-n_s) \right)^+$  et en sommant pour ce terme les contributions de  $i$  et  $j$  on obtient :

$$\int_B \left\langle \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^- [\vec{\phi}], \vec{\psi}^- \right\rangle_{\mathbb{C}^q} + \left\langle \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^+ [\vec{\phi}], \vec{\psi}^+ \right\rangle_{\mathbb{C}^q}$$

Finalement la formulation étant vérifiée pour toute fonction  $\psi$ , on pose  $\vec{\psi}^+ = \vec{\psi}^-$  et on obtient bien la deuxième relation du système 3.18.

L'équivalence entre les deux problèmes est donc démontrée.

### 3.3.2 Discrétisation spatiale

On considère maintenant une triangulation  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$  telle que  $\mathcal{T} = \cup_{i=1, N_h} \tau_i$ .

Soit

$$\mathbb{V}_h^k = \left\{ \vec{v} \in (H_m^{k+1}(\Omega))^{d+1}, \vec{v}|_{\tau_i} \in (\mathbb{P}_k(\tau_i))^{d+1}, i = 1, N_h \right\}$$

où  $\mathbb{P}_k(\tau_i)$  est l'espace des fonctions polynomiales de degré  $k$  vectorielles à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On supposera de plus que  $\forall i \tau_i \subset V_i$ .

La formulation faible du problème est alors :

Trouver  $\vec{\phi}_h \in \mathbb{V}_h^k$  tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i} \left\langle C \vec{\phi}_h + \sum_{s=1,q} A'_s \partial_{x_s} \vec{\phi}_h, \vec{\psi}_h \right\rangle_{\mathbb{C}^q} + \int_{\partial \tau_i} \left\langle \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^- [\vec{\phi}_h], \vec{\psi}_h^- \right\rangle_{\mathbb{C}^q} \\ + \int_{\partial \mathcal{T}} \left\langle M \vec{\phi}_h, \vec{\phi}_h \right\rangle_{\mathbb{C}^q} = \int_{V_i} \left\langle \vec{g}, \vec{\psi}_h \right\rangle_{\mathbb{C}^q}, \forall \vec{\psi}_h \in \mathbb{V}_h^k, \forall \tau_i \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Soit  $Y^i_{l=1,d}$  une base de fonctions de  $(\mathbb{P}_k(\tau_i))^{d+1}$ . Pour discrétiser l'équation on décompose  $\vec{\phi}_h$  dans cette base soit :

$$\forall x \in \tau_i, \vec{\phi}_h^i(x) = \sum_{1 \leq j \leq d+1} \phi_h^{ij} Y^i_j(x)$$



On aboutit finalement au système linéaire :

$$\begin{aligned} & \forall k \in \{1 \dots dl\} \\ & \sum_{1 \leq j \leq dl} \phi_h^{ij} \left( \int_{\tau_i} < CY_{ij}^{\vec{}} + \sum_{s=1,q} A'_s \partial_{x_s} Y_{ij}^{\vec{}}, Y_i^{\vec{}} k >_{\mathbb{C}^q} + \right. \\ & \left. \int_{\partial \tau_i} < \left( \sum_{s=1,q} A'_s n_s \right)^{-} [Y_{ij}^{\vec{}}, Y_i^{\vec{}} k]^{-} >_{\mathbb{C}^q} + \int_{\partial T} < MY_{ij}^{\vec{}}, Y_i^{\vec{}} k >_{\mathbb{C}^q} \right) \\ & = \int_{\tau_i} g_h Y_i k \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cette discrétisation nous amène donc à résoudre un système linéaire du type  $Ax = b$  avec A une matrice complexe non symétrique et x et b des vecteurs avec des composantes dans  $\mathbb{C}$ .

### 3.3.3 Une zone éponge "géométrique".

Une autre méthode que celle présentée dans la section 3.2.2 pour atténuer les perturbations peut être de définir une zone de *stretching*, c'est à dire une zone où les mailles seront de plus en plus étirées dans la direction de privilégiée par le champ porteur. Si l'on considère que la perturbation contient peu de longueurs d'ondes différentes alors ces longueurs d'ondes seront de plus en plus mal définies quand elles se propageront dans cette région jusqu'à ce qu'elles ne soient plus résolues.

Le comportement des zones de *stretching* dépend de la méthode de discrétisation utilisée et notamment des schémas de flux numériques. En différences finies pour une résolution temporelle, par exemple dans le cas de schémas de flux centrés, la combinaison du *stretching* des mailles et d'un filtrage permet de bien éliminer les perturbations [31].

Pour mieux cerner l'effet du schéma décentré présenté dans 3.3, on se propose d'analyser l'influence de la combinaison schémas numériques/*stretching* dans le cas d'une équation de diffusion 1D. Comme les phénomènes de propagation en dimension 2 et 3 sont plus complexes que ceux en dimension 1 (qui peuvent être interprétés dans le cas de conditions aux limites ABC comme la combinaison de deux problèmes de diffusions découplés) les résultats obtenus ici doivent être interprétés avec réserve. En effet, les conditions à respecter sur les maillages 1D pourront être considérées comme nécessaires à la modélisation multidimensionnelle mais non suffisantes.

#### Application à une équation de diffusion 1D

On considère l'équation :

$$\left(-i\omega + c \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \delta_{x=x_0} \quad (3.23)$$

avec  $c \in \mathbb{C}$  pour permettre l'existence de solutions exponentiellement amplifiées. Cette équation admet la solution  $u = \frac{1}{c} e^{i \frac{\omega}{c} x}$ . La discrétisation est effectuée en considérant une discrétisation en espace de type  $\mathbb{P}_1$ . Le système linéaire obtenu est résolu par une méthode directe de type *LU*.

**Remarque 3.3.3.1** *Notons que dans le cas monodimensionnel les conditions de non-réflexion utilisées permettent de parfaitement faire sortir les ondes atteignant le bord du domaine.*

En chaque degré de liberté, on évaluera une erreur de dissipation  $E_d$  et la phase  $E_\phi$  entre la solution analytique et la solution discrète. Soit  $u(x_p)$  et  $u_i(x_p)$  respectivement la solution de référence et la solution obtenue par le calcul en un point  $x_p$  de la discrétisation, ces deux quantités étant à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

$$E_d = \|u\|_{\mathbb{C}} - \|u_i\|_{\mathbb{C}}$$

$$E_\phi = \text{Arctan} \left( \frac{\text{Im}(U\bar{U}_i)}{\text{Re}(U\bar{U}_i)} \right)$$

où  $\|u\|_C = \langle u, u \rangle_C$

Dans un premier temps on considère un cas où  $c \in \mathbb{R}$  avec  $\omega = 2\Pi$  et  $c = 1$ . On notera  $\lambda$  la longueur d'onde spatiale et  $h$  le pas de discrétisation

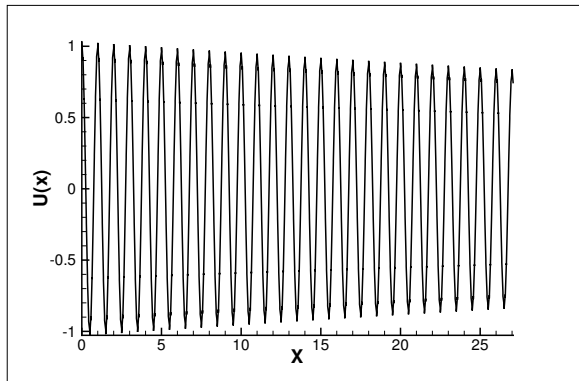


FIG. 3.1 – cas  $\frac{\lambda}{h} = 14$ . Partie réelle de la solution discrète.

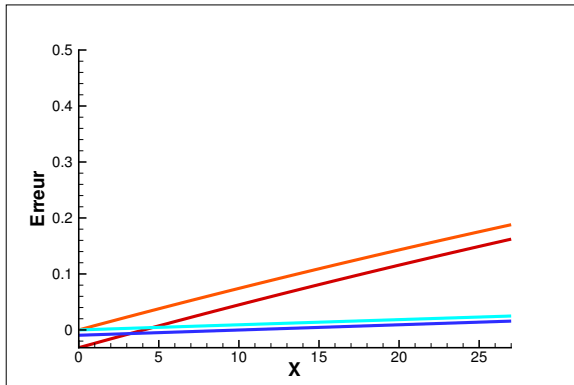


FIG. 3.2 – Erreur d'amplitude (courbes rouge et orange) et déphasage (courbes bleues) entre la solution analytique et la solution discrète.

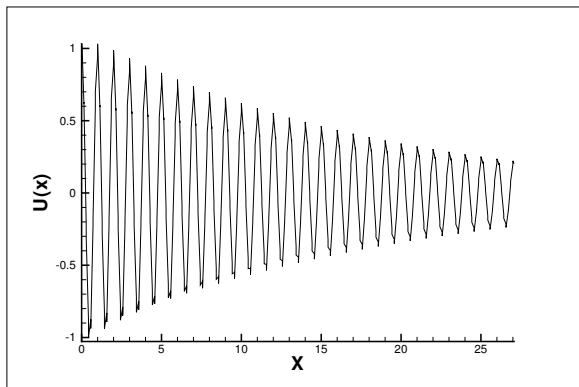


FIG. 3.3 – cas  $\frac{\lambda}{h} = 7$ . Partie réelle de la solution discrète.

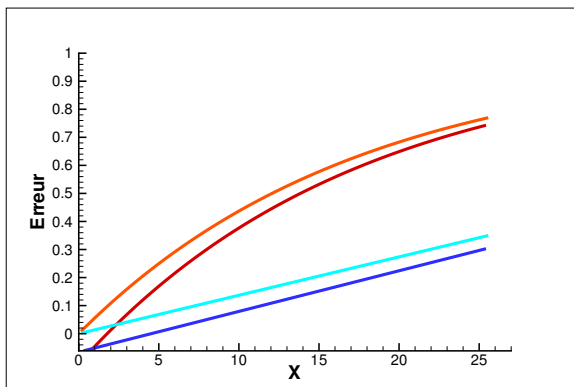


FIG. 3.4 – Mêmes commentaires que pour 3.2

Les figures 3.1 et 3.3 montrent les parties réelles des résultats obtenus pour deux discrétisations spatiales uniformes différentes; l'une en prenant  $\frac{\lambda}{h} = 14$  et l'autre  $\frac{\lambda}{h} = 7$ . Les erreurs commises sur les phases et les amplitudes pour les deux maillages sont montrées sur les figures 3.2 et 3.4. Sur ces dernières, la courbe rouge montre l'erreur commise sur l'amplitude pour les degrés de liberté situés à gauche ( $d^+$ ) des éléments de la discrétisation et la courbe orange la même quantité pour les degrés de liberté situés à droite ( $d^-$ ) des éléments. Enfin, la courbe bleu foncé définit la phase associée à ( $d^+$ ) et la courbe bleu clair la phase associée à ( $d^-$ ). Ces courbes font bien apparaître les sauts situés à l'interface entre chaque élément. On remarque que plus  $h$  est petit moins ce saut est important. Le fait que l'erreur commise au point d'origine de la source

soit négative est dû à la projection de la source sur la discrétisation. On retrouve ici un résultat connu des schémas totalement décentrés c'est-à-dire une erreur de dissipation importante mais une erreur de phase faible. Cette croissance de l'erreur sur la dissipation due à l'augmentation de la taille du pas d'espace peut être interprétée comme un filtrage du schéma numérique sur les grandes fréquences.

Un calcul a ensuite été effectué en considérant une discrétisation  $\frac{\lambda}{h} = 14$  pour  $0 \leq x < 10$  et  $\frac{\lambda}{h} = 7$  sinon. Les résultats sont présentés sur les figures 3.5 et 3.6. Au moment du passage d'une discrétisation à l'autre, on observe un saut à la fois sur l'amplitude et sur la phase. La présence de ce saut uniquement sur les valeurs associées aux  $d^-$  s'explique dans le cas de l'équation de la diffusion par le sens unique de propagation de l'onde. La présence du saut n'influence pas la zone amont dans le cas présent car les caractéristiques de l'équation car le signe du paramètre  $c$  de l'équation 3.23 impose la direction de la propagation. En revanche dans le cas des équations d'Euler linéarisées en dimension 2 et 3 des réflexions pourraient apparaître et remonter l'écoulement.

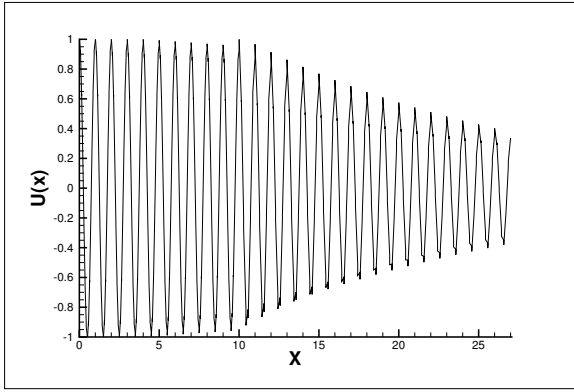


FIG. 3.5 – Cas  $\frac{\lambda}{h} = 14$  pour  $0 \leq x < 10$  et  $\frac{\lambda}{h} = 7$  sinon. Partie réelle de la solution discrète.

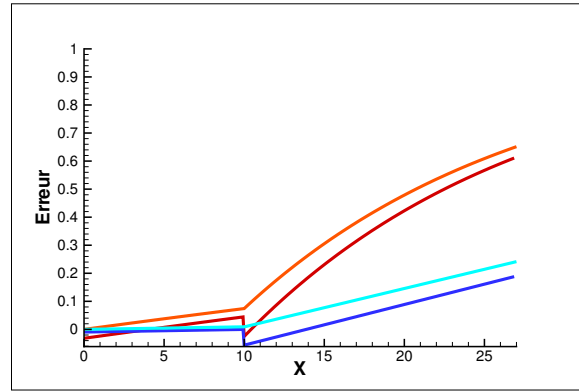


FIG. 3.6 – Mêmes commentaires que pour 3.2

On a donc cherché une fonction permettant de définir un rapport optimal entre deux mailles pour que les sauts (entre le domaine de calcul et la zone de *stretching*) sur l'erreur d'amplitude et celui sur le déphasage disparaissent tout en permettant de dissiper la solution sur une distance minimale. Soit  $hmin$  la taille de maille à l'intérieur de la zone de calcul,  $hmax$  la taille maximale des mailles et  $L$  la taille de la zone de *stretching*. La fonction  $f$  donnant pour chaque  $x$  la distance à la maille suivante est définie ainsi :

$$f(x) = (hmin)e^{[\ln(\frac{hmax}{hmin})]\frac{(x-x_0)}{L}}$$

Les résultats sont présentés sur les figures 3.7 et 3.8. Dans ce cas  $hmin = \frac{1}{14}$  et  $hmax = 1$ . La zone de *stretching* commence en  $x = 10$ . Sur la première figure on peut voir que la solution est presque totalement atténuée au bout de cinq longueurs d'ondes, le nombre de points total dans la zone de *stretching* étant de 22. Sur la figure 3.8 on remarque que les discontinuités sur les courbes ont disparu. D'autre part, les courbes rouge et orange associées à la dissipation numérique évoluent exponentiellement dans la zone de *stretching*, i.e que la solution est atténuée de façon exponentielle dans cette zone.

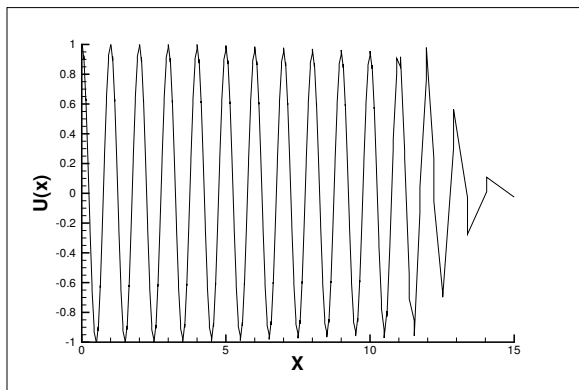


FIG. 3.7 – Cas  $\frac{\lambda}{h} = 14$  pour  $0 \leq x < 10$  et un déraffinement exponentiel sinon. Partie réelle de la solution discrète.

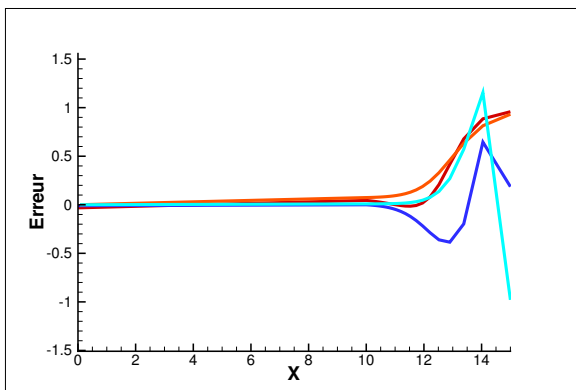


FIG. 3.8 – Mêmes commentaires que pour 3.2

En dernier lieu pour valider ce résultat dans le cas où la solution croit exponentiellement on a choisi une simulation où  $c = 1 + 0.05i$ . Les résultats sont présentés sur les figures 3.9 et 3.10. On remarque sur la première figure que, comme dans le cas précédent, la solution est atténuée dans la zone de *stretching* en cinq longueurs d'ondes. De plus, les courbes représentant l'erreur sur l'amplitude ne changent pas par rapport au cas précédent et seul le déphasage qu'entraîne le déraffinement semble plus important dans le dernier cas étudié.

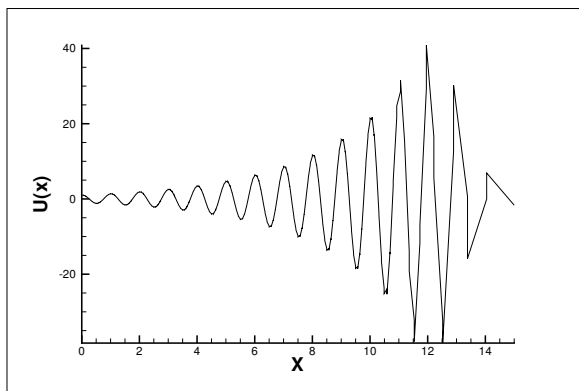


FIG. 3.9 – Cas  $\frac{\lambda}{h} = 14$  pour  $0 \leq x < 10$  et un déraffinement exponentiel sinon. Partie réelle de la solution discrète.

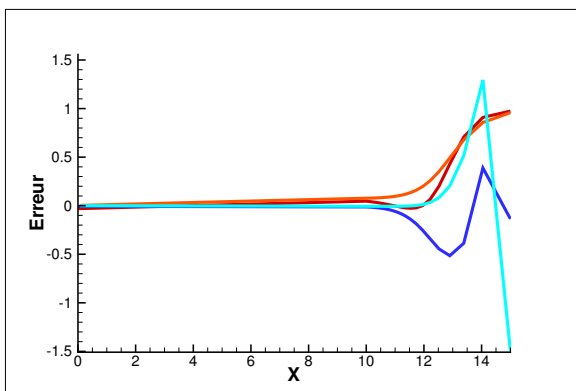


FIG. 3.10 – Mêmes commentaires que pour 3.2

Les résultats obtenus sont encourageants dans l'optique de mettre en place une zone de *stretching* dans le cas multidimensionnel. On présente maintenant la méthode utilisée pour générer des maillages non-structurés multidimensionnels adaptés à la modélisation harmonique des équations d'Euler linéarisées.

### Présentation de la méthode appliquée aux études multidimensionnelles

Dans les cas 2D et 3D qui seront étudiés dans ce chapitre et le chapitre suivant la détermination d'un maillage adapté est un point clé de la modélisation. Dans les simulations que l'on souhaite effectuer, le champ porteur considéré n'est pas uniforme. Si l'on veut mettre en place une zone de *stretching* il faut que cette zone ne détériore pas la solution dans la zone de calcul. Prenons comme exemple le cas d'un écoulement unidirectionnel où des points d'inflexion sur le champ de vitesse sont présents dans la direction orthogonal au déplacement. Si l'on effectue un *stretching* isotrope du maillage alors ces points d'inflexion vont disparaître et la solution dans la zone de calcul pourrait en être affectée. On doit donc tenir compte de la géométrie de l'écoulement lors de la mise en place d'une zone de *stretching*.

On doit donc pouvoir définir un maillage anisotrope dans la zone où la solution doit être atténuée.

Pour cela on a utilisé le mailleur de surface Yams [37] développé à l'INRIA et le mailleur volumique MMG3D développé au *laboratoire Jacques Louis Lyons* de Paris VI. Le principe de ces logiciels est d'effectuer un remaillage global d'une surface à partir de métriques  $\mathcal{M}$  définies en chacun des nœuds. Par souci de clarté, on présente de façon succincte le principe de cette méthode mais plus de précisions et des exemples d'applications peuvent être trouvés dans [1, 2, 3].

**Définition 3.3.3.1** Une métrique est une matrice  $\mathcal{M}$  symétrique définie positive.

A partir de cette métrique on peut définir un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  et une norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  tel que : soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire de  $R^n$

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}} = \sqrt{\langle u, \mathcal{M}u \rangle}$$

Une fois ce produit scalaire défini, en pratique lorsque l'on fixera une métrique en un point P, on cherchera l'ensemble des points M vérifiant  $\|u\|_{\mathcal{M}} = 1$ .

La figure 3.11 montre un exemple de zone de *stretching* obtenue par cette méthode.

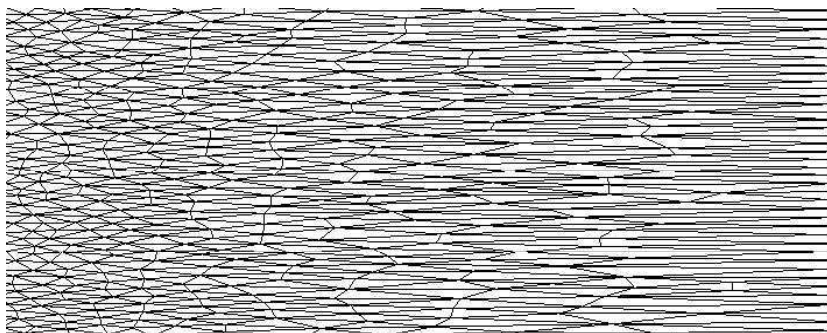


FIG. 3.11 – Exemple de *stretching* anisotrope

Dans le cadre des bases de polynômes de type Lagrange on peut faire une première remarque pour rapprocher les méthodes PML des méthodes de *stretching* anisotrope. On considère deux triangles  $T_1$  de sommets  $(A_1^1, A_2^1, A_3^1)$  et  $T_2$  de sommets  $(A_1^2, A_2^2, A_3^2)$  ou  $T_2$  est l'image de  $T_1$  par la transformation :

$$f : x \longrightarrow \beta x$$

alors si on nomme  $Aire(T_i)$  l'aire du triangle  $T_i$ ,  $Aire(T_2) = \beta Aire(T_1)$ . Si l'on considère maintenant une base de fonctions polynomiales  $\mathbb{P}_1(T_i)$ , les dérivés de ces fonctions de bases sont :

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_1} |_{T_j} = \frac{y_{i+1} - y_{i+2}}{2Aire(T_j)}$$

on a donc

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_1} |_{T_1} = \beta \frac{\partial w_i}{\partial x_1} |_{T_2}$$

On a donc une transformation de la même forme que l'équation 3.15 avec  $\alpha_x = \beta \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 3.3.3.2** *Cette transformation peut être interprétée comme une contraction de la longueur d'onde propagée.*

### 3.4 Résolution du système linéaire par un solveur parallèle.

Une fois le problème discret 3.22 construit, on est amené à résoudre un système linéaire du type  $Ax = b$ . Dans le cadre d'une résolution parallèle de ce problème une méthode de type FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) a été choisie. Cette méthode a été introduite par Fahrat et Roux [35, 36] pour la résolution des équations elliptiques du second ordre. Le principe de cette méthode est de déterminer des sous problèmes locaux permettant de résoudre un problème global. Pour cela, pour chaque problème local on cherche à définir des conditions aux limites représentant l'action de la solution sur les domaines voisins sur les interfaces du domaine considéré. La méthode utilisée ici et développée à L'ONERA est une méthode à deux champs (ou à deux multiplicateurs de Lagrange [79, 62]). Elle consiste à adjoindre aux problèmes locaux des conditions aux limites absorbantes aux interfaces entre les sous domaines. On présente ici la méthode et son application dans le cas d'une discrétisation de type Galerkin discontinue.

#### 3.4.1 Adaptation à une méthode Galerkin discontinue.

On considère une triangulation  $\mathcal{T}$  d'un espace  $\Omega$ . La grande différence entre une méthode éléments finis et Galerkin discontinue peut être appréciée grâce à la formulation 3.22. On peut voir que les intégrales de volumes ne sont définies que localement c'est-à-dire qu'aucune interaction entre les éléments n'est prise en compte dans ces termes, les communications entre les éléments étant assurées par les termes des intégrales sur les surfaces. Afin de se rapprocher d'une formulation éléments finis, nous avons considéré qu'une représentation géométrique de cette formulation pouvait nous conduire à considérer deux sortes d'éléments :

- i) *des éléments que l'on appellera "volumes" associés aux intégrales volumiques sur chaque élément et contenant les parties continues de la solution.*
- ii) *des éléments que l'on appellera "faces" associées aux intégrales surfaciques entre chaque élément et contenant les discontinuités de la solution.*

Avec cette représentation on a une interprétation plus proche des éléments finis. Sur la figure 3.12 est présentée une discrétisation en tenant compte de cette approche. Pour plus de clarté les éléments ont été séparés. En bleu (respectivement en noir) sont représentés les faces (respectivement les volumes) et leurs degrés de libertés associés. On peut voir que dans ce cas, chacun des sommets de la discrétisation, sauf ceux appartenant au bord du domaine, appartient à deux éléments. La figure montre aussi comment a été effectué le découpage de chaque sous-domaine.

On introduit  $\mathcal{T}^1$  et  $\mathcal{T}^2$  deux triangulations, telles que  $\mathcal{T}^1 \cup \mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}^1 \cap \mathcal{T}^2 = \{0\}$ . Lors du découpage de  $\mathcal{T}$  chacune des faces se trouvant à l'interface entre les deux domaines appartient complètement à un seul sous-domaine.

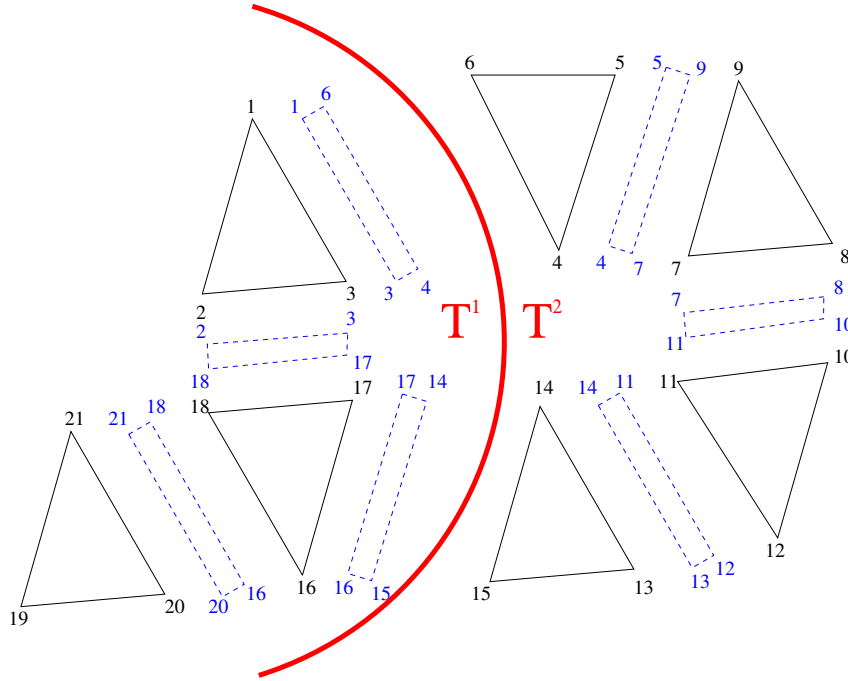


FIG. 3.12 – numérotation dans le cas d'une méthode Galerkin discontinue.

D'un point de vue matriciel, si sur le domaine  $(T^s)_{s \in \{1,2\}}$  on cherche une solution  $(\vec{\phi}^s)_{s \in \{1,2\}}$ , ce vecteur peut être séparé en deux composantes :

$$\vec{\phi}^{(s)} = \begin{pmatrix} \vec{u}_i^{(s)} \\ \vec{u}_p^{(s)} \end{pmatrix}$$

où l'indice  $i$  fait référence aux inconnues à l'intérieur de  $T^s$  et  $p$  fait référence aux inconnues à l'interface entre les deux triangulations. Avec ces notations les matrices obtenues pour chaque sous-domaine sont de la forme :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} + \tilde{A}_{ii}^{(1)} & \tilde{A}_{ip}^{(1)} \\ \tilde{A}_{pi}^{(1)} & A_{pp}^{(1)} + \tilde{A}_{pp}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} A_{ii}^{(2)} + \tilde{A}_{ii}^{(2)} & \tilde{A}_{ip}^{(2)} \\ \tilde{A}_{pi}^{(2)} & A_{pp}^{(2)} + \tilde{A}_{pp}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Les  $\tilde{\cdot}$  indiquent les matrices construites à partir des faces, et les indices  $pp$  désignent les matrices construites à partir des termes dépendant des nœuds situés à l'interface entre  $T_1$  et  $T_2$ . Enfin sur  $T_s$  on peut écrire  $b^{(s)} = \begin{pmatrix} \vec{b}_i^{(s)} \\ \vec{b}_p^{(s)} \end{pmatrix}$ . En tenant compte de ces notations le problème global peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(1)} + \tilde{A}_{ii}^{(1)} & 0 & \tilde{A}_{ip}^{(1)} \\ 0 & A_{ii}^{(2)} + \tilde{A}_{ii}^{(2)} & \tilde{A}_{ip}^{(2)} \\ \tilde{A}_{pi}^{(1)} & \tilde{A}_{pi}^{(2)} & A_{pp} + \tilde{A}_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_i^{(1)} \\ \vec{u}_i^{(2)} \\ \vec{u}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_i^{(1)} \\ \vec{b}_i^{(2)} \\ \vec{b}_p \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

avec  $A_{pp} + \tilde{A}_{pp} = A_{pp}^{(1)} + \tilde{A}_{pp}^{(1)} + A_{pp}^{(2)} + \tilde{A}_{pp}^{(2)}$  et  $\vec{b}_p = \vec{b}_p^{(1)} + \vec{b}_p^{(2)}$ . On est donc ramené à une formulation du problème équivalente au cas d'une discrétisation de type éléments finis. On présente maintenant la méthode FETI à deux champs utilisée pour résoudre le système. Cette méthode a notamment été présentée dans le cas de la résolution des équations de Helmholtz [34] et de l'élasticité linéaire [62, 79].

### 3.4.2 Méthode FETI à deux champs

Dans la suite, pour alléger l'écriture, on ne différenciera plus les matrices construites à partir des faces et des volumes.

La méthode de décomposition de domaines à deux multiplicateurs de Lagrange consiste à trouver  $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$  pour lesquels les solutions des problèmes locaux :

$$\begin{pmatrix} A_{ii}^{(s)} & A_{ip}^{(s)} \\ A_{pi}^{(s)} & A_{pp}^{(s)} + R^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_i^{(s)} \\ \vec{u}_p^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_i^{(s)} \\ \vec{b}_p^{(s)} - \lambda^{(s)} \end{pmatrix} \quad \forall s = 1, 2 \quad (3.25)$$

satisfont à l'interface entre  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  les conditions :

$$\begin{cases} \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} - (R^{(1)} + R^{(2)})u_p^{(2)} = 0 \\ \lambda^{(1)} + \lambda^{(1)} - (R^{(1)} + R^{(2)})u_p^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Les matrices  $R^s$  seront appelées par la suite opérateurs augmentés. Ces conditions définissent le résidu du problème interface qui est résolu par une méthode de Krylov. Le système 3.25 devient par condensation des variables internes :

$$[S^{(s)} + R^{(s)}] x_p^{(s)} = c^s + \lambda^{(s)} \quad \forall s \in 1, 2 \quad (3.27)$$

Les matrices  $S^s$  et les vecteurs  $c^s$  étant respectivement les compléments de Schur et les second membres condensés :

$$\begin{aligned} S^{(s)} &= A_{pp}^{(s)} - A_{pi}^{(s)} A_{ii}^{(s)-1} A_{ip}^{(s)} \\ c^s &= \vec{b}_p^{(s)} - A_{pi}^{(s)} A_{ii}^{(s)-1} \vec{b}_i^{(s)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

En combinant ces équations aux équations 3.26 le problème aux interfaces devient :

$$\begin{pmatrix} Id & Id - (R^{(1)} + R^{(2)}) [S^{(2)} + R^{(2)}]^{-1} \\ Id - (R^{(1)} + R^{(2)}) [S^{(1)} + R^{(1)}]^{-1} & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R^{(1)} + R^{(2)}) [S^{(2)} + R^{(2)}]^{-1} c^{(1)} \\ (R^{(1)} + R^{(2)}) [S^{(1)} + R^{(1)}]^{-1} c^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

On remarque que dans le cas où l'opérateur est égal au complément de Schur du domaine voisin le système est très bien conditionné et converge en une itération. Plus généralement, dans [61] les auteurs montrent que si l'on considère  $N$  sous-domaines, la méthode converge au plus en  $N-1$  itérations. En pratique, pour ne pas trop augmenter le nombre de termes de la matrice d'interface



locale (le complément de Schur étant une matrice pleine), on approche le complément de Schur par une matrice creuse. Cette approximation consiste à considérer à la place de  $S$  la matrice  $A_{pp}$  du domaine voisin plus la condensation sur une partie de l'interface des inconnues du sous domaine voisin distant de  $n$  couches de l'interface.

**Remarque 3.4.2.1** *Dans le cas des éléments finis une couche de profondeur 1 à l'interface consiste géométriquement à prendre tous les voisins du point sur l'interface considérée. L'opération consistant à définir les couches pouvant directement être faite à partir de la matrice. D'une manière générale, plus la profondeur est grande plus l'opérateur augmenté construit est optimal et plus la méthode converge vite. En revanche, le coût de calcul pour chaque itération est plus important. Pour obtenir le même résultat géométrique dans le cas d'une discrétisation Galerkin discontinue, il faudrait savoir quels sont les types d'éléments considérés, éléments ou faces (voir la figure 3.12). Dans nos calculs nous n'avons pas changé la définition des couches et la stabilité de la méthode n'a été assurée que lorsque leur profondeur était restreinte.*

## 3.5 Validation de la méthode dans le cas d'un écoulement parallèle.

### 3.5.1 Présentation du problème

Afin de valider les développements effectués, des simulations sont réalisées dans le cas d'un écoulement parallèle cisailé 2D. Des résultats théoriques peuvent être trouvés dans Michalke [68] et Huerre [42] pour ce genre d'écoulement. Ces résultats théoriques ont été confrontés à des résultats expérimentaux obtenus par Freymuth [38] dans le cas d'un jet. On se place dans le cas d'un écoulement incompressible et l'on considère le cisaillement parallèle :

$$U_x(x, y) = \frac{U_o}{2} \left( 1 + \tanh\left(\frac{y}{2\Theta_m}\right) \right) \quad (3.30)$$

$$U_y(x, y) = 0 \quad (3.31)$$

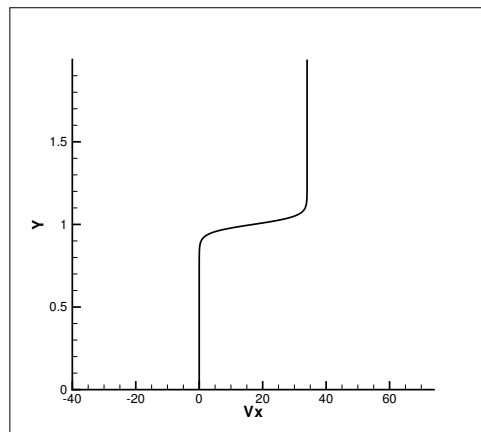


FIG. 3.13 – profil de la vitesse.

Dans notre exemple  $\Theta_m = 0.025$  m ,  $U_0 = 34$  m.s<sup>-1</sup>. la vitesse du son dans le fluide est  $c = 340$  m.s<sup>-1</sup>. Le profil de la vitesse tangentielle est présenté sur la figure 3.13. Le nombre de

Mach au centre du cisaillement, c'est-à-dire là où se développera l'instabilité est  $M = \frac{U_a}{2c} = 0.05$ . On considérera une source périodique de perturbation de pression de la forme  $h = p(x, y) \cos(2\pi ft)$  avec

$$p(x, y) = A_o e^{\sigma_r^2((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)}$$

où  $(x_0, y_0)$  donnés représentent le centre de la source. On comparera les solutions numériques obtenues aux résultats théoriques en considérant les variables normalisées :

- $\frac{f\theta_m}{U_0}$  la fréquence de la source.
- $\alpha_r \theta_m$  la longueur d'onde de l'instabilité.
- $\alpha_i \theta_m$  le taux d'amplification de cette instabilité.

Afin de pouvoir évaluer ces différentes quantités sur les résultats obtenus, des traitements sont nécessaires .

### Analyse des résultats

Soit  $y_{ci}$  le centre du cisaillement, on fixe un pas d'espace  $\Delta x$  dans la direction de l'écoulement puis on interpole la solution sur le nuage de points obtenu. L'interpolation linéaire de la solution sur le nuage de point est faite de la façon suivante :

Soit  $M = (x, y_{ci})$  un point appartenant au nuage de points et soit  $T$  l'élément de la triangulation  $\mathcal{T}$  auquel le point  $M$  appartient. On note  $(P_k)_{k=1,3}$  les sommets de ce triangle et  $T_k$  les triangles dont on a remplacé le sommet  $P_k$  par  $M$ . Si  $V(k)_{1 \leq k \leq 3}$  désigne la valeur de la solution à interpoler et  $V(M)$  la valeur de la solution au point  $M$  alors :

$$V(M) = \frac{1}{\text{Aire}(T)} \sum_{k=1,3} V(k) \text{Aire}(T_k)$$

On extrait l'enveloppe de cette courbe et l'on en déduit le taux d'amplification par une méthode de régression exponentielle sur la solution obtenue dans le domaine de calcul. Enfin la longueur d'onde de l'instabilité est calculée à partir des points de l'enveloppe.

La figure 3.14 illustre les étapes de la procédure, la courbe rouge montre le résultat obtenu après interpolation de la solution sur le nuage de points, Les points noirs montrent l'enveloppe extraite de cette courbe et la courbe verte représente le résultat de la régression exponentielle.

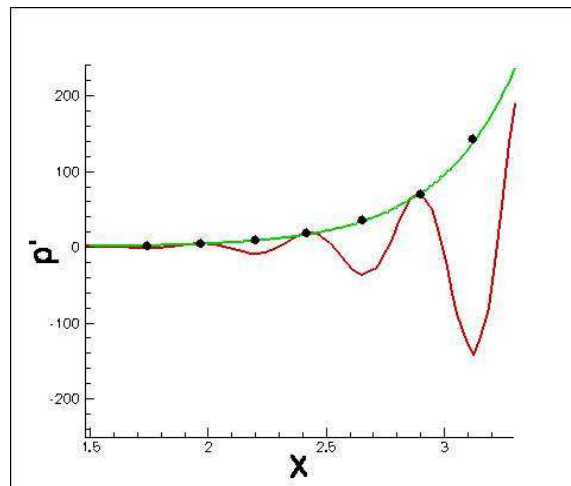


FIG. 3.14 – Illustration des différentes étapes de traitement des solutions numériques.

### Sources et maillages considérés

Dans les deux prochaines sections, 3.5.2 et 3.5.3, on considérera les mêmes sources de perturbations avec  $\sigma_r = 10^4$  et  $f = 34 \text{ Hz}$ . Nous fixerons  $(x_0, y_0) = (1.5, 1.)$ . Les conditions aux limites seront des conditions de non-reflexion sur tous les bords du domaine. De plus, selon les cas différents maillages seront considérés :

- Un premier maillage pour évaluer la méthode de *stretching* anisotrope développée ici. Le domaine de calcul est  $[0; 3.5] \times [0. : 2.]$  et le domaine de *stretching* est  $[3.5; 6] \times [0. : 2.]$ . Ce maillage que l'on nommera par la suite MESH1 est composé de 23334 triangles, le rapport d'anisotropie du maillage ( $hmin_x/hmin_y$ ) a été fixé à 3 dans la zone de calcul. Dans la zone de déraffinement ce rapport augmente jusqu'à 25. Le nombre d'éléments dans la zone éponge (zone de *stretching*) est de 3525.
- Un second maillage pour évaluer la méthode PML explicitée dans la section 3.2.2. Le domaine de calcul est  $[0; 3.5] \times [0. : 2.]$  et le domaine de *stretching* est  $[3.5; 4] \times [0. : 2.]$ . Ce maillage que l'on nommera par la suite MESH2 est composé de 19569 triangles, le rapport d'anisotropie du maillage ( $hmin_x/hmin_y$ ) a été fixé à 3 dans la zone de calcul. Dans la PML le nombre d'éléments est de 2055.

### 3.5.2 Intérêts de la méthode harmonique.

Dans cette partie on a voulu comparer le résultat d'une simulation numérique effectuée avec un solveur harmonique à celui issu du calcul avec un solveur temporel sur un même maillage.

Une première difficulté est apparue lors de la simulation car le comportement de la solution dans la zone de *stretching* diffère selon l'utilisation de l'un ou l'autre des solveurs. En effet dans le cas harmonique, la condition sur la métrique obtenue dans la section 3.3.3.0 permet une bonne dissipation de la solution et peu de réflexions dans la zone de calcul. En revanche lors de la simulation temporelle le comportement de la solution lors de l'entrée dans la zone de *stretching* a fait apparaître de fortes réflexions dans la zone de calcul. Une comparaison des deux solutions n'avait donc plus de sens.

Pour permettre malgré cela une comparaison entre les deux méthodes en terme de temps de calcul et de coût mémoire on a choisi de comparer le temps de calcul et la mémoire vive utilisée entre un calcul harmonique et un calcul temporel effectué jusqu'à ce que la zone de *stretching* provoque des réflexions parasites dans la zone calcul. Les calculs ont été effectués en parallèle sur 4 processeurs. Dans le cas des calculs temporel le nombre d'itérations a été fixé à 34000, nombre d'itérations nécessaires pour que la perturbation atteigne la zone éponge. Le tableau 3.15 résume les résultats obtenus. Le calcul temporel a été effectué en utilisant deux méthodes : l'une en stockant les matrices  $A_i$ , l'autre en les recalculant à chaque itération. La première méthode étant plus rapide que la seconde mais nécessitant plus de stockage mémoire.

Les résultats montrent que le gain en terme de temps de calcul apporté par la méthode harmonique est très important (de l'ordre de 50). En revanche le coût en terme de mémoire vive est lui plus important, de l'ordre de 7 fois par rapport à la méthode avec stockage de la matrice. Cette méthode est donc appropriée à des études paramétriques, en revanche la taille des problèmes sera limitée par l'espace mémoire nécessaire.

Méthode	Harmonique	temporelle avec stockage des $A_i$	temporelle
temps CPU	206 s	9500 s	56000 s
Mémoire vive	2678 Mb	319 Mb	248 Mb

FIG. 3.15 – Comparaison des temps CPU et de la mémoire vive utilisés pour le même calcul avec différents solveurs.

### 3.5.3 Comparaison entre PML et déraffinement de maillage

Afin de vérifier la validité des deux conditions aux limites développées ici, on a effectué deux calculs : l'un avec une zone PML en utilisant le maillage MESH2 et l'autre avec une zone de *stretching* en utilisant le maillage MESH1. Pour la zone PML le coefficient d'absorption  $\sigma(x_1)$  est défini par :

$$\sigma(x_1) = C_0 \frac{|x - x_0|^2}{|D|^2}$$

Avec  $D$  la longueur de la zone PML dans la direction axiale de l'écoulement,  $C_0 = 40$ . La valeur de cette constante a été évaluée empiriquement. Les figures 3.16 et 3.17 montrent l'amplification spatiale de la vitesse axiale et de la vitesse normale toutes deux normalisées par  $\frac{U_0}{2}$ . Ces figures montrent les résultats dans la zone de calcul et dans la zone PML. La ligne rouge figure la démarcation entre ces deux zones. Dans la zone PML la solution est très vite atténuée et la fréquence spatiale de l'onde semble de plus en plus courte à mesure que l'on se rapproche du bord (voir 3.3.3.2). On remarque aussi que la solution, lorsqu'elle atteint le bord du domaine de calcul, n'est pas nulle et crée des perturbations dans la zone PML. Il semble en revanche que ces phénomènes ne causent pas ou peu de réflexion dans la zone de calcul.

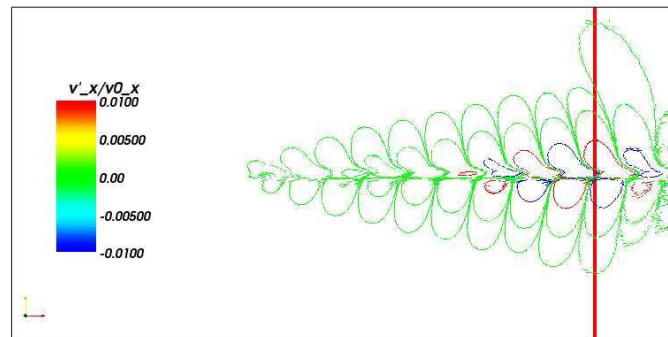


FIG. 3.16 – Isocontours de la composante  $\frac{2U_x}{U_0}$  de la solution. La ligne rouge situe le début de la zone PML.

La figure 3.18 montre les isocontours de l'évolution spatiale de pression. On remarque que les réflexions lorsque la solution approche le bord de la zone PML sont un peu plus importantes. Toutefois il faut tenir compte de l'effet d'échelle dû à la représentation d'une solution augmentant exponentiellement en espace. En effet les isovaleurs ont été choisies sur les figures pour permettre de localiser la source des perturbations c'est-à-dire que la plus petite iso est inférieure à l'amplitude de la source de perturbation. Or c'est cette isovaleur qui semble signifier des problèmes de réflexions entre la zone PML et la zone de calcul.

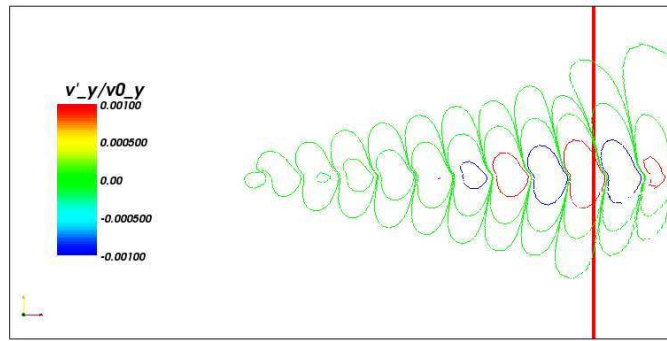


FIG. 3.17 – Isocontours de la composante  $\frac{v'_y}{v0_y}$  de la solution. La ligne rouge situe le début de la zone PML.

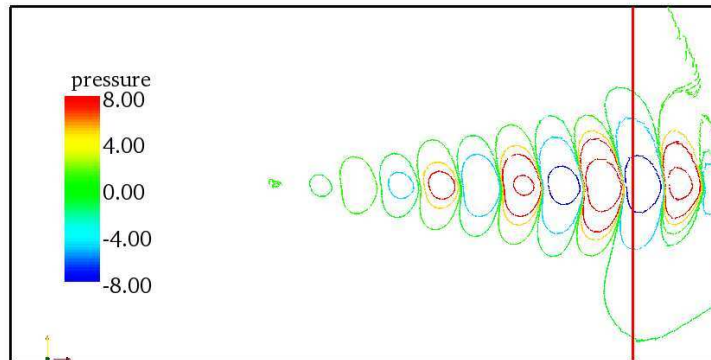


FIG. 3.18 – Isocontours de la pression de la solution dans le cas de l'utilisation d'une zone éponge PML.

Cette simulation a aussi permis de valider l'utilisation des conditions aux limites de non-réflexion pour l'échappement des ondes acoustiques. En effet la source de perturbation introduite ici crée des ondes acoustiques qui se propagent partout dans la zone de calcul. Des conditions PML n'étant appliquées que dans le sens de propagation des instabilités hydrodynamiques, les conditions aux limites de non-réflexions semblent efficaces pour permettre la sortie des ondes acoustiques du domaine de calcul.

Les figures 3.19 et 3.20 montrent les composantes de vitesses de la solution dans le cas du calcul sur le maillage MESH2. Le début de la zone de *stretching* est figuré par la ligne rouge. La présence de la zone de *stretching* ne semble pas avoir d'impact sur ces deux quantités dans la zone de calcul. La croissance des instabilités semble continuer dans les premières mailles de la zone éponge mais le phénomène est vite atténué ensuite lorsque les longueurs d'ondes sont moins résolues.

La figure 3.21 montre les isocontours de l'évolution spatiale de pression. On peut noter que l'influence de la zone de *stretching* sur la solution semble très faible même si la symétrie axiale du mode d'instabilités ne semble pas préservée pour la dernière longueur d'onde avant la zone de *stretching*.

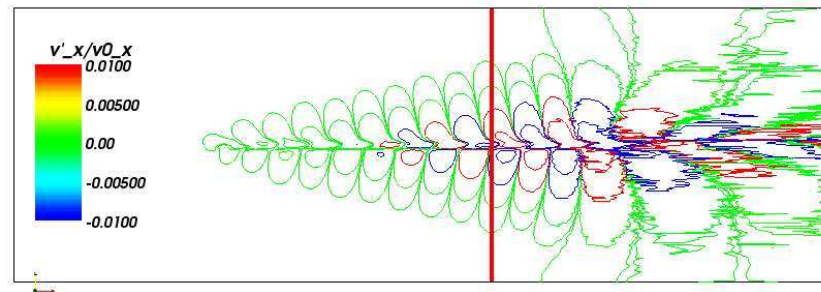


FIG. 3.19 – Isocontours de la composante  $\frac{2U_x}{U_0}$  de la solution. La ligne rouge situe le début de la zone de *stretching*.

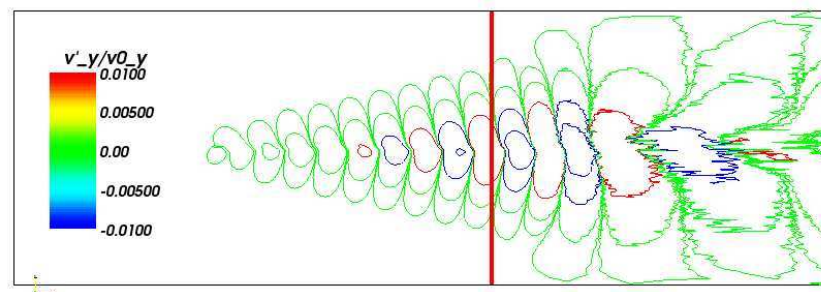


FIG. 3.20 – Isocontours de la composante  $\frac{2U_y}{U_0}$  de la solution. La ligne rouge situe le début de la zone de *stretching*.

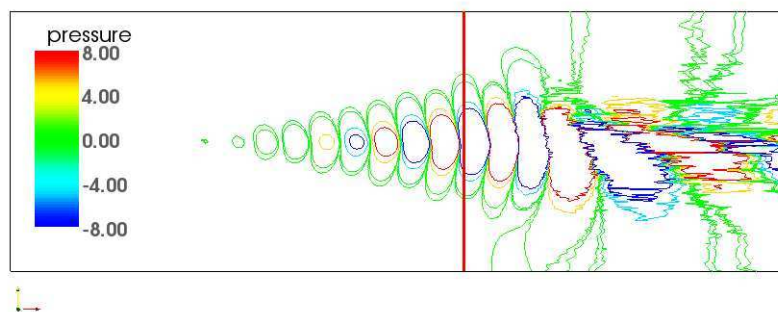


FIG. 3.21 – Isocontours de la composante de pression de la solution. La ligne rouge situe le début de la zone de *stretching*.

Afin de pouvoir décrire de façon plus précise l'influence des zones de *stretching* sur l'évolution spatiale de la solution numérique on évalue le taux d'amplification moyen de l'instabilité et sa longueur d'onde pour la pression au moyen des outils décrits dans la section 3.5.1. Le nuage de points considéré est défini sur la droite  $y = 1$  et sur le domaine  $x \in [1.5; 3.5]$ . Le taux d'amplification et la longueur d'onde moyenne de l'instabilité sont présentés dans le tableau 3.23. Les résultats obtenus sont en accord avec les observations faites dans la section 3.3.3.0 sur les schémas de discrétisation utilisés, alors que l'erreur de phase est presque nulle, en moyenne, l'erreur de dissipation est plus importante (différence de 7% entre la solution théorique et le taux d'amplification trouvé par le calcul sur MESH1).

La différence entre les deux calculs sur le taux d'amplification peut être expliquée si l'on regarde la figure 3.22, représentant l'amplification spatiale de la pression, par le dernier point trouvé dans le cas du calcul avec une zone éponge de type PML. En effet il apparaît que le taux d'amplification est très légèrement atténué avant la zone PML. D'autre part cette figure permet de voir que les solutions dans les deux cas sont assez proches.

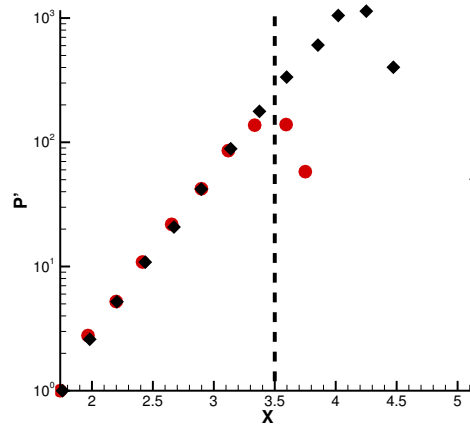


FIG. 3.22 – Évolution spatiale de l'amplitude de l'instabilité pour différents calculs. point rouge : PML, carrés noir : *stretching*.

Calcul	$-\alpha_i \theta_m$	$\alpha_r \theta_m$
Théorique	0.84	0.34
MESH1	0.79	0.34
MESH2	0.77	0.34

FIG. 3.23 – Taux d'amplification et nombre d'onde spatial dans le cas des calculs avec une zone PML et avec une zone de *stretching*.

### 3.5.4 Comparaison avec les résultats théoriques.

Pour finir de valider la méthode de *stretching*, plusieurs calculs ont été effectués et comparés aux résultats issus d'une étude d'instabilité locale (des détails sur le code utilisé peuvent être trouvés dans [31]). Pour cela on a effectué plusieurs calculs correspondant à différentes fréquences temporelles.

En raison de la variété des fréquences temporelles simulées, différents maillages ont été nécessaires aux simulations. Le maillage MESH1 a été utilisé pour simuler les cas où  $0.0306 \leq \frac{f\theta_m}{U_0} \leq 0.0204$ . En revanche pour les fréquences plus courtes, un autre maillage a été utilisé. Sur ce maillage le domaine de calcul est  $[0 : 8] \times [0 : 4]$  et le domaine de *stretching* est  $[8 : 12] \times [0 : 4]$ . Le domaine total est discrétisé en 37122 triangles dont 6829 dans la zone de *stretching*. Les résultats obtenus sont tracés sur la figure 3.24. La figure de gauche présente les taux d'amplification obtenus en fonction de la fréquence adimensionnée de la source. On peut voir que comme dans le cas particulier de la section précédente les résultats numériques ont tendance à sous estimer les taux d'amplification. Les petites fluctuations sur les écarts entre la courbe issue de l'étude locale de stabilité et les résultats numériques peuvent s'expliquer par le fait que la discrétisation par longueur d'onde n'est pas la même selon les cas puisque chacun des maillages considérés a été utilisé pour plusieurs simulations. La figure de gauche montre les longueurs d'ondes spatiales obtenues en fonction de la fréquence de la source. Sur cette figure on peut noter que les résultats issus des deux méthodes sont très proches.

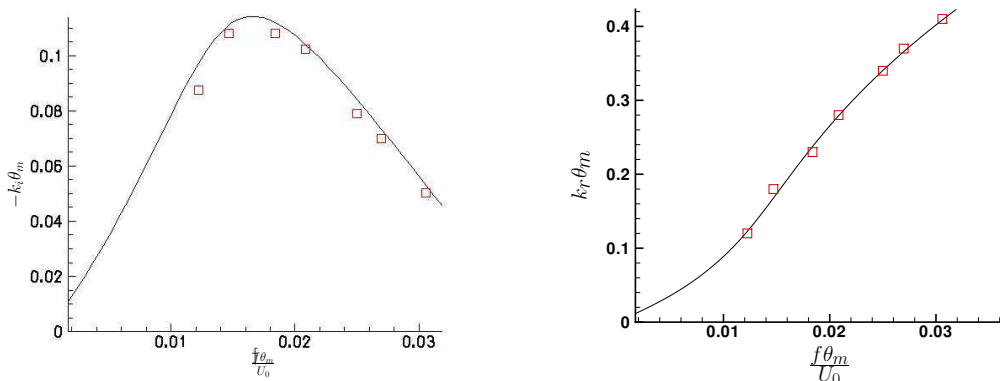


FIG. 3.24 – Comparaison entre les résultats obtenus par une étude d'instabilité locale et des calculs. La ligne noire représente les résultats obtenus par une étude linéaire locale et les points rouge ceux obtenus par le calcul.

En conclusion, cette méthode numérique semble donc propice à simuler les phénomènes convectivement instables. Pour s'en assurer, on se propose maintenant d'étudier l'évolution spatiale des instabilités de Kelvin Helmholtz dans le cas d'un champ porteur non-parallèle.



### 3.5.5 Instabilités de Kelvin-Helmoltz pour un écoulement faiblement non-parallèle

Dans cette partie on utilisera le maillage MESH1. La vitesse du champ porteur est définie ainsi :

$$U_x(x, y) = \frac{U_o}{2} \left( 1 + \tanh\left(\frac{y - y_0}{2\Theta_m(x)}\right) \right) \quad (3.32)$$

avec  $\theta_m(x) = 0.02 + 0.05x$ . La figure 3.25 représente l'évolution spatiale de la vitesse axiale du champs porteur. Notons que dans ce cas le champ porteur n'est plus solution stationnaire des équations d'Euler car il ne vérifie plus l'équation de conservation de la masse. L'évolution spatiale de la taille du cisaillement étant très faible cette approximation est couramment utilisée dans le cas des études de champs faiblement non-parallèles (voir [42]). Pour cette étude nous n'avions pas de résultats de référence. On ne jugera que des tendances des résultats au vu de ceux fournis par Huerre et Rossi [42] .

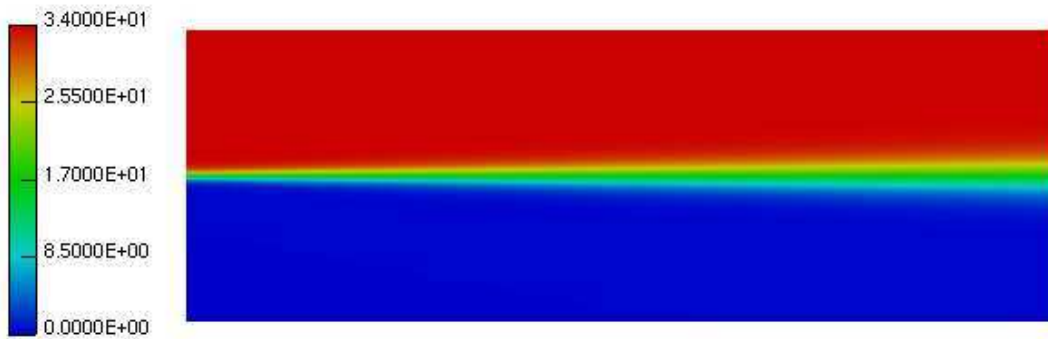


FIG. 3.25 – Profil de la vitesse axiale du champs porteur.

La source de perturbation est cette fois placée en  $(x_0, y_0) = (1; 1.)$  et la source de perturbation est une source tourbillonnaire donnée par les équations :

$$u'(x, y) = -\frac{(y - y_0)^2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} e^{-\sigma_r^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}$$

$$v'(x, y) = \frac{(x - x_0)^2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} e^{-\sigma_r^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}$$

Dans la suite, les solutions dans la zone éponge ne seront pas pris en compte.

La figure 3.26 présente l'évolution spatiale de l'amplitude de la perturbation de pression. Cette fois, la perturbation ne croit plus exponentiellement mais le taux de croissance diminue lorsque  $x$  augmente. Ce résultat était attendu. En effet, le cisaillement en  $(1; 1.)$  correspond à la fréquence adimensionnée  $\frac{f\theta_m}{U_0} = 0.025$ , puis plus  $x$  augmente plus  $\theta_m(x)$  augmente. On peut voir sur la figure 3.24 que le taux d'amplification diminue à mesure que la fréquence augmente. Le taux d'amplification local de l'instabilité a donc tendance à diminuer.

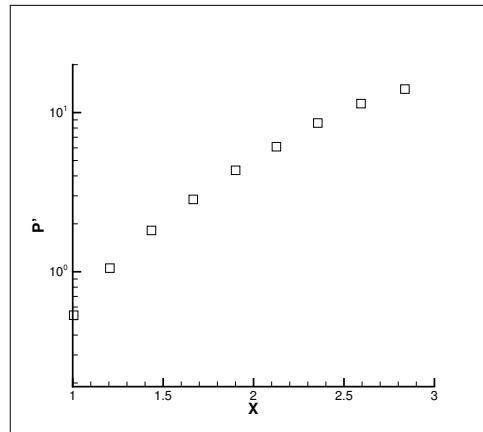
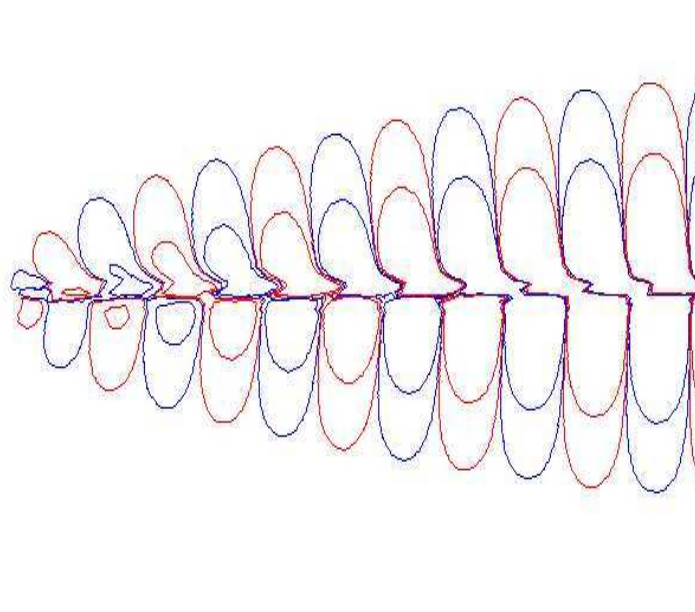


FIG. 3.26 – Evolution de l'amplitude de la perturbation au centre du cisaillement.

FIG. 3.27 – Isocontour de la la vitesse  $U_x$ .

Un résultat moins attendu est celui tracé sur la figure 3.27. Le profil du mode semble changer au cours de son évolution spatiale. Plus précisément, à la différence de la figure 3.19, il semble que la longueur d'onde spatiale de  $U_x$  se développant dans le demi plan  $y \geq 1$  soit plus grande que celle se développant dans le demi plan  $y \leq 1$ . Alors que dans le cas parallèle les tourbillons produits sont de signe alterné, dans ce cas, à une grande distance de la source, on pourrait assister à la cohabitation de tourbillons corotatifs et donc à leur fusion. Ce processus étant non-linéaire, la limite de validité du calcul serait atteinte.

### 3.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté une méthode numérique permettant d'effectuer des études de stabilité dans le cas où l'écoulement porteur considéré n'est pas parallèle. Cette méthode ayant été développée pour étudier un phénomène stationnaire dans un repère en rotation constante, nous avons présenté une formulation des équations d'Euler linéarisées dans un tel repère. Puis nous avons discuté des hypothèses physiques entraînant l'équivalence entre la résolution d'une formulation temporelle de ses équations et leur résolution en formulation harmonique. Il est apparu que si l'écoulement porteur ne présentait aucun lieu où il était absolument instable ces deux formulations tendaient, au bout d'un certain temps  $t$ , vers la même solution. Pour résoudre ce problème une discrétisation de type Galerkin discontinue a été mise en oeuvre et différentes zones éponges ont été évaluées pour permettre de modéliser un écoulement en milieu infini. Pour cela, deux méthodes ont été présentées et comparées. L'une est basée sur les zones éponges de type PML et l'autre sur le stretching anisotrope du maillage. Ces deux méthodes se sont avérées efficaces dans le cas étudié où le champ porteur considéré était unidirectionnel. En revanche, pour des raisons de simplicité de mise en oeuvre dans le cas d'un écoulement non parallèle, la méthode de stretching anisotrope du maillage a été retenue. Enfin des exemples d'applications dans le cas d'écoulements parallèles et non-parallèles ont été présentés. En particulier, les résultats obtenus dans le cas d'un écoulement parallèle sont en très bon accord avec les résultats théoriques trouvés dans la littérature.

## Chapitre 4

# Application à l'étude des instabilités de tourbillons de sillage

### 4.1 Présentation du problème.

Dans le chapitre 2, nous avons montré que les structures caractérisant les instabilités elliptiques de tourbillons pouvaient être responsables du BWI. En effet nous avons vu que si la pale traversait un tourbillon instable, les caractéristiques des fluctuations de pression sur pale et du bruit rayonné étaient en accord avec celles du bruit BWI. Néanmoins, il est apparu que le taux d'amplification de ces instabilités dans le cas simplifié d'une paire de tourbillons de Lamb-Oseen parallèles, rectilignes, uniformes n'était pas suffisant, puisqu'il fallait au minimum  $3/4$  de tour de rotor pour obtenir des perturbations de pression sur pale, issues de l'interaction de la pale avec le tourbillon, d'intensité comparable à celles associées au BWI. Le phénomène BWI identifié expérimentalement mettant en jeu un tourbillon âgé d'un quart de tour, la seule présence d'un autre tourbillon d'extrémité de pale ne suffit donc pas à engendrer un taux d'amplification suffisant.

On souhaite, dans ce chapitre, savoir si d'autres phénomènes pourraient permettre d'accroître ce taux d'amplification. Pour cela, il est nécessaire d'étudier la stabilité d'un profil de tourbillon plus proche des profils de tourbillons d'extrémité de pale jeunes.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, ces tourbillons ne sont pas axisymétriques et sont caractérisés par la présence d'une nappe de vortacité s'enroulant autour de celui-ci. Il est en revanche difficile d'établir un lien entre cette ellipticité et la présence de la nappe de vortacité. En effet dans les expériences effectuées sur la formation des tourbillons de sillage d'avion il apparaît que cette ellipticité est moindre [33] bien que le phénomène d'enroulement de la nappe de vortacité soit aussi présent. Il semble donc que d'autres phénomènes, telle que la forme courbe du filament tourbillonnaire, pourraient jouer un rôle sur sa forme elliptique. Cette difficulté à identifier la source de la déformation du tourbillon nous empêche de mener une étude de stabilité linéaire au moyen d'un profil analytique. En effet, pour l'effectuer, il faudrait connaître la définition du champ de contrainte extérieur appliqué au tourbillon. De plus les caractéristiques du tourbillon évoluant rapidement en terme d'azimut lorsqu'il est en phase d'enroulement, une telle modélisation ne serait peut-être pas suffisamment représentative.

Nous avons donc choisi de faire une étude de stabilité en ne considérant pas un champ porteur analytique mais le résultat d'un calcul numérique d'un écoulement à travers un rotor.

Pour effectuer une étude de stabilité linéaire, la définition d'un champ porteur stationnaire est nécessaire. Pour respecter la condition de stationnarité de ce champ, dans le cadre du calcul de sillage d'un rotor, la seule configuration de vol possible est le vol stationnaire, la solution utilisée pour le champ porteur devant être exprimée dans le repère lié à la pale.

Dans ce repère, si des instabilités apparaissent alors on peut supposer qu'elles seront convectives, dans le sens où elles n'auront pas un caractère auto-entretenu. En effet, dans ce repère, les tourbillons seront convectés à la vitesse de rotation du bout de la pale, et cette vitesse est dix fois supérieure à la vitesse tangentielle maximum du tourbillon.

L'étude de stabilité se résumera donc à l'étude de la réponse à un forçage harmonique. La méthode décrite par Chomaz dans [27] pourrait être utilisée mais ne serait pas optimale car il faudrait calculer à la fois les vecteurs propres du problème direct mais aussi du problème dual pour un système comportant un grand nombre de degrés de liberté. Le champ de base étant tridimensionnel ces calculs nécessiteront un temps important. De plus comme le montre l'auteur une petite erreur sur la détermination des valeurs propres du système entraîne une erreur importante sur la détermination de la solution. La méthode mise en place dans le chapitre précédent consistant à déterminer la solution directement par la résolution d'un système linéaire, elle paraît plus adaptée à notre étude.

- Dans un premier temps nous présenterons la méthode utilisée pour simuler le tourbillon produit par la rotation d'une pale d'hélicoptère. Les résultats obtenus seront présentés et comparés qualitativement à des données expérimentales.
- Dans la partie suivante nous décrirons la méthode utilisée pour aboutir à un maillage non-structuré optimal pour l'étude de stabilité dans une zone précise de l'écoulement simulé précédemment.
- Enfin nous présenterons les résultats obtenus lors de l'étude paramétrique de la stabilité du tourbillon d'extrémité de pale.

## 4.2 Calcul du sillage tourbillonnaire d'une pale d'hélicoptère.

### 4.2.1 Présentation de la méthode numérique.

Le calcul du sillage d'une pale d'hélicoptère a été mené en utilisant une méthode d'adaptation de maillage cartésienne développée à l'ONERA par Benoit *et al* [12] depuis 2000. Cette méthode a déjà été appliquée avec succès dans le cas d'un rotor en vol stationnaire à partir des équations d'Euler. Les flux numériques sont implémentés au moyen d'un schéma centré de Type JST [77] (Jameson, Schmidt et Turkel) d'ordre 2. La solution recherchée étant stationnaire, l'ordre du schéma temporel n'a pas d'importance. En revanche, l'utilisation d'un schéma implicite permettra de définir une grande condition CFL et donc de converger plus vite vers la solution. La discrétisation temporelle choisie sera un schéma de type implicite à un pas Euler rétrograde. On rappelle au lecteur qu'une présentation de ces schémas peut être trouvée à l'annexe B.

La méthode d'adaptation de maillage cartésienne repose sur un générateur automatique de grilles cartésiennes à pas constant. Ces grilles se recouvrent et discrétisent la plus grande partie du domaine de calcul. Les zones proches des corps sont, elles, maillées par l'utilisateur, généralement à l'aide de grilles curvilignes de tailles réduites, appelées grilles de "corps". Le transfert de la solution numérique au niveau des zones de recouvrement est assuré par une technique chimère. Plus précisément, dans les zones de recouvrement et au voisinage des points masqués, la solution numérique est évaluée par interpolation.

Le remaillage consiste, au cours du calcul, à construire entièrement un nouveau maillage à partir d'indicateurs calculés sur le précédent. Dans le cas de notre calcul, l'indicateur sera fondé sur la valeur du rotationnel au temps  $n - 1$ . L'adaptation se fait ensuite en tenant compte non seulement d'une valeur seuil sur ce maillage mais aussi d'un rapport de taille de maille entre deux grilles voisines fixé par l'utilisateur, dans notre cas nous avons établi ce rapport à 1.7.

#### 4.2.2 Conditions initiales du calcul.

La figure 4.2 de gauche, montre le maillage volumique curviligne définissant la grille de corps, et contenant la pale dont le maillage de la surface est présenté à droite sur la même figure. Sur cette dernière, on peut remarquer que le maillage est défini pour que les mailles soient grossières en pied de pale mais fines à l'autre extrémité. Ce maillage surfacique discrétise une pale BO-105 dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 4.1.

Le vrillage de la pale est linéaire,  $\alpha_p$  et  $\alpha_e$  représentant respectivement l'angle d'attaque en pied de pale et en extrémité de pale. Enfin  $C$  représente la taille de la corde du profil.

	Pale BO-105
Taille ( cm )	200
Vrillage ( ° )	8
$\alpha_p$ ( ° )	12,5
$\alpha_e$ ( ° )	4,5
$C$ ( cm )	125
Epaisseur ( % $C$ )	12

FIG. 4.1 – tableau récapitulatif des caractéristiques de la pale BO-105 utilisée pour la simulation.

Le domaine de calcul  $D$  est défini ainsi :

$$D = \{(x, y, z) \text{ tels que } -15 \text{ m} \leq x \leq 15 \text{ m}, -15 \text{ m} \leq y \leq 15 \text{ m}, -4 \text{ m} \leq z \leq 4 \text{ m}\}$$

Dans le repère lié à la pale, l'envergure est dirigée selon  $\vec{e}_y$  et la corde selon  $\vec{e}_x$ . Le pied de pale n'étant pas exactement situé au centre du maillage, l'extrémité de la pale rectangulaire est alors située en  $y = 2.05$ .

La vitesse de rotation du rotor est de  $114. \text{ rad.s}^{-1}$ . Les variables  $\rho$ ,  $\vec{u}$  et  $p$  sont fixées au temps initial comme égales aux caractéristiques de l'air au repos soit :  $\rho = 1.23 \text{ Kg.m}^{-3}$ ,  $\vec{u} = (0, 0, 0) \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p = 101325. \text{ Pa}$

**Remarque 4.2.2.1** *Dans la suite les données spatiales seront adimensionnées par la dimension de la corde  $C$  et l'âge du tourbillon sera exprimé en azimuts.*

La simulation numérique a été menée pour répondre à deux objectifs. D'une part, on cherche à obtenir un filament tourbillonnaire dont l'évolution de la circulation et de la vitesse tangentielle sont en accord avec celles constatées expérimentalement. D'autre part, on cherche à simuler l'enroulement de la nappe tourbillonnaire et la forme elliptique du tourbillon en formation. Pour cela, il faudra une discrétisation importante sur un certain nombre d'azimuts derrière la pale.

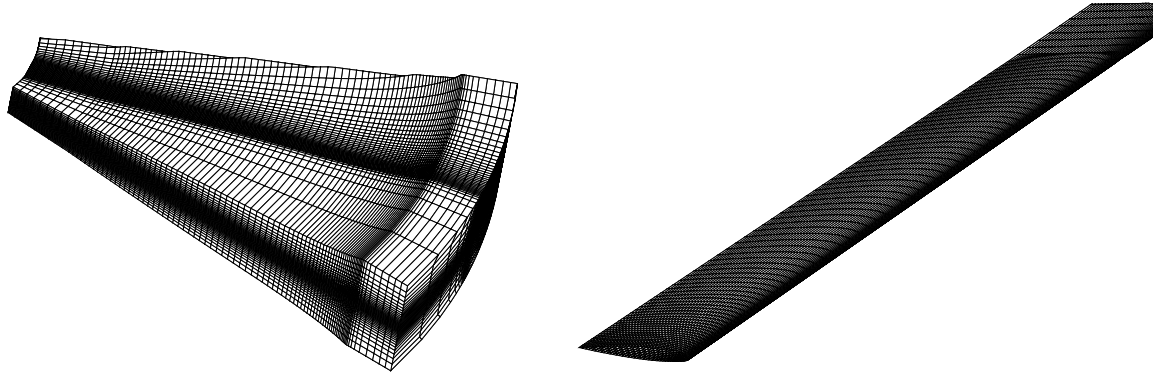


FIG. 4.2 – A gauche : grille de corps. A droite : discrétisation de la surface de la pale.

La méthode d'adaptation de maillage mise en œuvre permet à l'utilisateur de définir une taille de maille minimale. En nous basant sur une taille de rayon visqueux de l'ordre de  $0.1C$  nous avons estimé qu'une taille minimale de maille permettant une discrétisation de 5 points en moyenne par rayon visqueux serait suffisante pour obtenir des géométries de tourbillons réalistes (la taille de maille minimale retenue sera donc de  $0.02C$ ).

La méthode d'adaptation de maillage permet aussi de définir des zones où le maillage initial ne sera jamais adapté ce qui permet de réduire le nombre total de points à la fin de la simulation. Nous avons choisi de définir cette zone, que nous appellerons  $Z_{na}$ , de la façon suivante :

$$Z_{na} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -15 \text{ m} \leq x \leq 0.5 \text{ m}, -15 \text{ m} \leq y \leq 1.2 \text{ m}, -4 \text{ m} \leq z \leq 4 \text{ m}\}$$

Cette zone recouvre une partie de la pale. L'hypothèse a été faite qu'au plus, les 40 derniers pourcents d'envergure de la nappe de vorticité jouaient un rôle dans l'enroulement du tourbillon d'extr emitt e de pale. D'autre part, cette zone permettra de ne raffiner que la zone où les tourbillons seront  ag es de moins de  $180^\circ$  d'azimut.

### 4.2.3 Résultats.

Le calcul est effectu e en utilisant pour la grille de corps un schéma d'ordre 2 en espace. La condition CFL est fixée à 20. Le calcul a duré environ 120 heures sur un processeur Itanium et a n ecessitt e 16 GB de mémoire vive au maximum. Huit remaillages ont été nécessaires et le maillage final comporte 16.5 millions de points.

Les figures 4.3 et 4.4 montrent les isovaleurs de vorticité de la solution calculée. Sur la première figure, les traits noirs représentent les contours de grilles chimère interceptant le plan  $z = 0$  :

Sur cette image, la zone de non-raffinement peut être appréciée. D'une part, un saut est présent lorsque l'on regarde la répartition de la vorticité sur la pale. D'autre part, la densitt e des grilles chimères augmente seulement à partir d'une certaine envergure sur la pale.

Sur ces deux figures, la dynamique globale du sillage, dans les premiers azimuts, semble être en accord avec ce que l'on observe expérimentalement (cf figure 1.2 du Chapitre 1). Plus précisément, dans les premiers azimuts on a bien la présence d'une nappe de vorticité d'intensitt e

comparable à celle du tourbillon d'extrémité de pale. Puis il y a un déchirement de la nappe tourbillonnaire aux environs de l'azimut de rotation  $\psi = 40^\circ$ , c'est-à-dire que la nappe de vorticité et le tourbillon semblent, à partir de ce moment, évoluer de façon disjointe. A partir de ce moment, l'intensité de la nappe diminue rapidement alors que la structure tourbillonnaire conserve une intensité importante.

Nous cherchons dans ce chapitre à caractériser la réponse des tourbillons jeunes d'extr emitt e de pale à une perturbation. On souhaite en effet étudier la stabilité de la structure tourbillonnaire lorsque la nappe de vorticité a encore une intensité suffisante pour jouer un rôle sur la déformation du tourbillon. Une telle étude nécessite de considérer un grand nombre de fréquences, donc de faire un grand nombre de simulations, pour pouvoir déterminer le domaine fréquentiel d'existence de l'instabilité.

La nécessité de faire un grand nombre de simulations ne nous permet pas, à l'heure actuelle, de prendre en compte la totalité du sillage. En effet, la méthode harmonique développée lors de cette thèse, ne permet pas de considérer le nombre de points nécessaires à la discrétisation de la totalité du sillage. D'autre part, si l'on effectuait des calculs avec le solveur temporel, le temps CPU requis pour un calcul serait trop important pour permettre un grand nombre de simulations.

Nous avons donc choisi de concentrer notre étude dans une zone azimutale incluse dans le domaine  $\psi \in [0^\circ; 30^\circ]$ , correspondant à la zone d'enroulement de la nappe de vorticité.

Pour permettre une simulation en considérant un nombre de degrés de liberté assez limit e pour un calcul avec le solveur harmonique, le domaine du calcul de stabilité sera réduit à une zone azimutale d'environ  $10^\circ$  située entre l'azimut  $\psi = 20^\circ$  et  $\psi = 30^\circ$ .

Pour évaluer la qualité de la solution obtenue par le calcul stationnaire dans cette zone azimutale, nous avons tracé le profil des composantes de la vitesse issues de la simulation. Pour cela, nous avons projet e les champs de vitesse aux deux extr emitt es de ce domaine sur un plan  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  normal à l'axe du tourbillon. Soient  $u_r$  la composante de vitesse selon  $\vec{e}_r$ ,  $u_z$  la composante de vitesse selon  $\vec{e}_z$  et  $u_\theta$  la composante de vitesse normale à ce plan, la projection de la vitesse du calcul 3D dans ce plan implique le changement de variable en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_y \\ u_x \\ u_z \end{pmatrix}$$

Une fois la transformation effectuée, la vitesse de convection moyenne du sillage est soustraite au champ de vitesse obtenu.

La figure 4.5 montre la norme du rotationnel de la solution à l'azimut  $\psi = 20^\circ$  dans le repère li e au tourbillon. On peut noter la forme elliptique de celui-ci, (ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux de Mc Alister [66]) et une intensité de la nappe de vorticité encore relativement importante comparée à l'intensité du maximum de rotationnel. Le rapport entre ces deux quantités étant de 1/6, il est en accord avec le résultat de la PIV de la figure 1.2 du Chapitre 1 au même azimut.



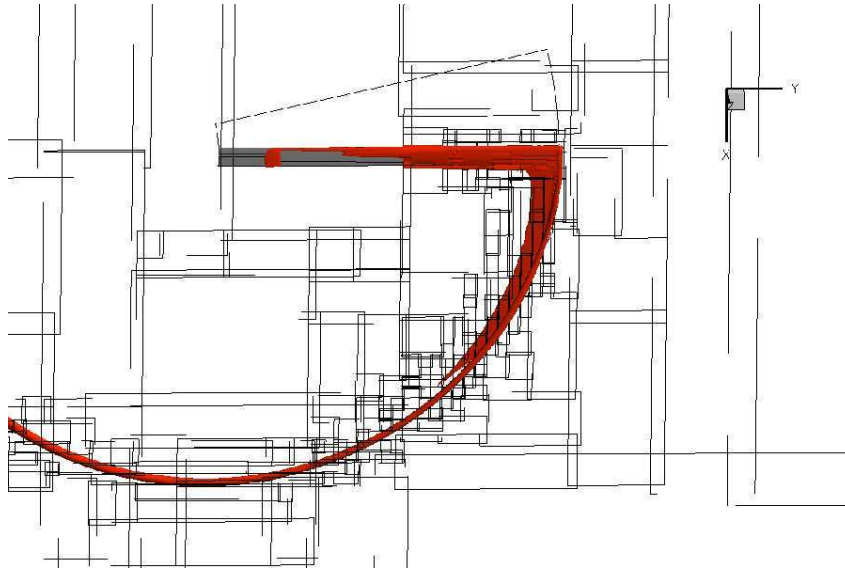


FIG. 4.3 – Isosurface du rotationnel de la solution de la simulation et représentation des contours des maillages cartésiens interceptant le plan  $z = 0$ .

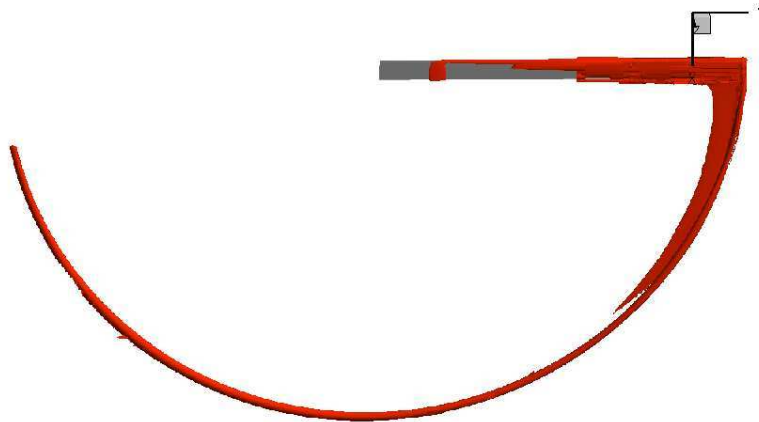


FIG. 4.4 – Isosurface du rotationnel de la solution sur l'ensemble du domaine de calcul.

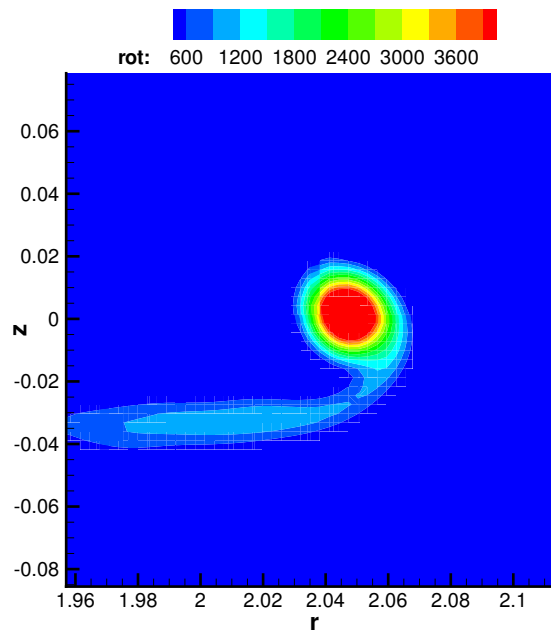


FIG. 4.5 – Contour du rotationnel de la solution à l'azimut  $\psi = 20^\circ$

Nous avons ensuite extrait de cette coupe les composantes de vitesse selon le vecteur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  passant par le maximum de rotationnel de la solution.

**Remarque 4.2.3.1** *Ces vecteurs ne coïncident pas avec les directions du grand axe et du petit axe de l'ellipse formée par l'enveloppe du domaine où le rotationnel du tourbillon est non nul de la figure 4.5. Les résultats présentés dans la suite ne rendront donc que relativement compte de cette déformation.*

Les résultats sont tracés sur les figures 4.6, 4.7 et 4.8. Les figures de gauche représentent les composantes de vitesse extraites à  $\psi = 20^\circ$  et celles de droite les composantes de vitesses extraites à  $\psi = 30^\circ$ . Sur la figure 4.6 la distance entre le minimum et le maximum de vitesse  $\Delta x_\psi$  est de  $\Delta x_{20} = 0.203C \pm 0.02C$  pour la figure de gauche et de  $\Delta x_{30} = 0.232C \pm 0.02C$  pour celle de droite. Sur la figure 4.7 elle est de  $\Delta x_{20} = 0.224C \pm 0.02C$  à gauche  $\Delta x_{30} = 0.239C \pm 0.02C$  à droite. Malgré la remarque 4.2.3.1 on note donc une certaine ellipticité du profil. D'autre part, l'estimation du rayon visqueux à environ  $0.1C$  faite précédemment semble en accord avec les résultats obtenus. On peut aussi remarquer que ce rayon semble augmenter de façon plus importante dans une direction que dans l'autre. En effet, alors que le rapport  $\Delta x_{30}/\Delta x_{20} = 1.14$  pour la figure 4.6 il devient  $\Delta x_{30}/\Delta x_{20} = 1.06$  sur la figure 4.7. Il semble donc que le profil du tourbillon tende vers un profil axisymétrique. Enfin, on note sur ces deux figures la relative bonne conservation de la vitesse tangentielle entre les deux azimuts, qui reste autour de  $22 \text{ m.s}^{-1}$ .

Sur la figure 4.6, on peut voir que le profil du tourbillon n'est pas symétrique car il y a un pic sur la courbe lorsque l'on se déplace dans le sens des  $z$  négatifs. Ce pic est dû à la présence de la nappe de vorticité, la vitesse qu'elle induit est comparable à la vitesse tangentielle maximale du tourbillon sur les courbes de droite et de gauche.

La figure 4.8 montre l'évolution du déficit de vitesse au centre du tourbillon. Le rapport entre la vitesse tangentielle du tourbillon et ce déficit est supérieur 4. Si l'on reprend la définition de nombre de swirl  $q$ , donné dans le chapitre 1 lors de la présentation des tourbillons avec jets axiaux, on arrive à  $q \simeq 6.3$ . Dans le cadre d'une étude de stabilité d'une paire de tourbillons contrarotatifs, Laporte [54], montre que pour ce nombre, l'instabilité elliptique est encore la dynamique la plus instable mais que ce déficit de vitesse axiale aura pour effet d'atténuer le taux d'amplification de l'instabilité. Notons enfin, que ce déficit semble diminuer rapidement car entre l'azimut  $\psi = 20^\circ$  et  $\psi = 30^\circ$  le maximum du déficit de vitesse diminue de 8%. Cette tendance apparaît aussi sur les études expérimentales de Han [43] et Bagai [7].

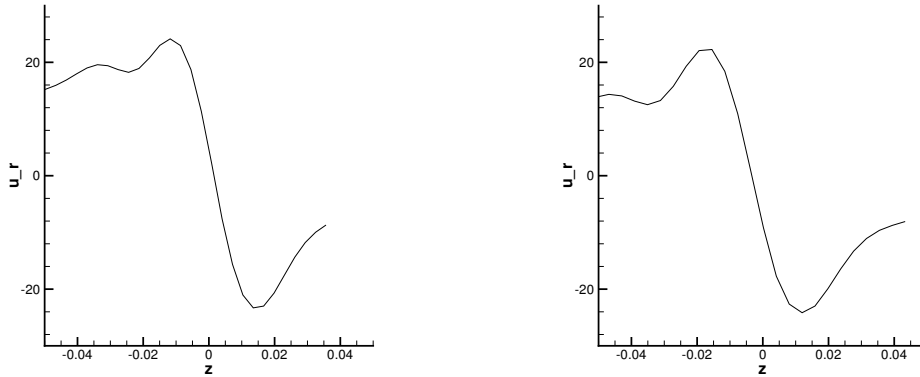


FIG. 4.6 – Profil de la vitesse  $u_z$ . A gauche : à l'azimut  $\psi = 20^\circ$ . A droite à l'azimut  $\psi = 30^\circ$ .

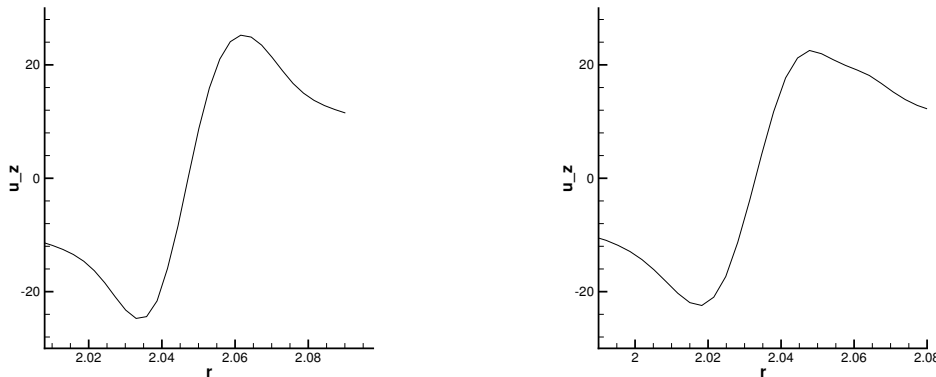


FIG. 4.7 – Profil de la vitesse  $u_r$ . A gauche : à l'azimut  $\psi = 20^\circ$ . A droite à l'azimut  $\psi = 30^\circ$ .

Il apparaît donc que la simulation effectuée permet la définition d'un sillage assez représentatif des sillages tourbillonnaires d'un rotor d'hélicoptère. Une étude de la réponse du champ obtenu à une perturbation localisée sera donc représentative de la dynamique des tourbillons d'extrémité de pale d'un rotor. Dans la section suivante nous présentons une méthode pour obtenir un maillage non-structuré adapté à cette étude, dans la zone azimutale considérée, sur lequel nous interpolerons le champ aérodynamique dans le repère de la pale.

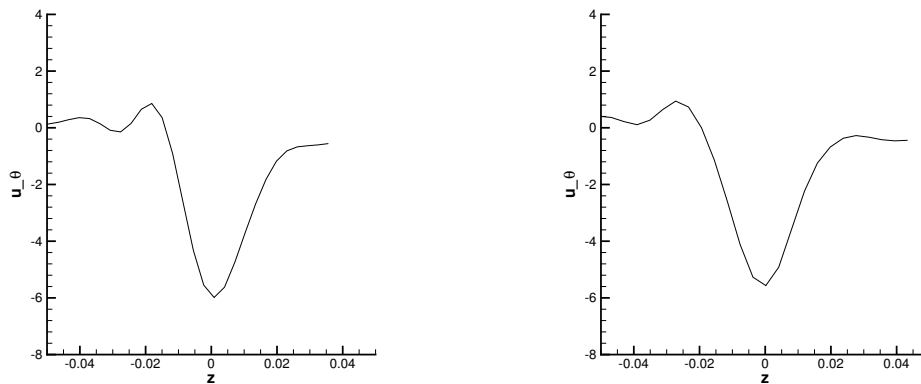


FIG. 4.8 – Profils de la vitesse  $u_\theta$ . A gauche : à l'azimut  $\psi = 20^\circ$ . A droite à l'azimut  $\psi = 30^\circ$ .

### 4.3 Définition d'un maillage pour le calcul de stabilité.

#### 4.3.1 Détermination des métriques.

La méthode harmonique développée s'est avérée bien plus rapide que la méthode temporelle existante. En revanche, elle est apparue plus coûteuse en mémoire vive. La mémoire utilisée étant directement liée au nombre de degrés de liberté du problème discret, il faut donc définir un maillage permettant la simulation des phénomènes que l'on cherche à modéliser, mais avec le plus petit nombre d'éléments possible.

Le but de cette partie est de définir une méthode permettant de générer un maillage non-structuré optimal pour le calcul de la stabilité du tourbillon d'extrémité de pale. Pour cela on a utilisé une méthode d'adaptation de maillage basée sur la notion de métrique anisotrope.

De manière générale la définition des métriques est faite à partir de critère zonaux, d'estimations d'erreurs [2] ou d'indicateurs sur les champs aérodynamiques. L'adaptation à partir de critères zonaux est utilisée lorsque l'on sait *a priori* où le maillage aura besoin d'être raffiné. Les estimateurs d'erreurs *a posteriori* ou les indicateurs sur les champs aérodynamiques sont eux utilisés lorsque l'on ne peut prévoir à l'avance les caractéristiques spatiales de l'écoulement. On utilise alors l'une de ces méthodes pour adapter le maillage au fur et à mesure que l'écoulement se développe. Ce genre de méthode peut être utilisé pour des calculs stationnaires, dans ce cas le maillage est adapté tant que le régime n'est pas établi, comme pour la simulation effectuée dans la section précédente, ou dans le cas de calculs instationnaires (cf thèse de Alauzet [1]).

Dans le cadre de notre étude, nous disposons, a priori, d'un certain nombre d'informations sur les caractéristiques du phénomène que l'on cherche à simuler. En effet, le champ porteur étant connu et le lieu de développement des instabilités elliptiques étant le cœur du tourbillon, un maillage optimal sera un maillage où la densité des points de discrétisation sera importante dans le cœur du tourbillon et moins importante ailleurs dans le domaine de calcul. Le critère sur lequel sera évalué la métrique devra donc permettre de localiser au mieux le tourbillon et de ne pas tenir compte des autres structures de l'écoulement porteur.

Nous avons mis en œuvre deux méthodes pour définir cette métrique. Une première méthode

basée sur un indicateur, en l'occurrence le rotationnel, et une autre reposant sur un critère de distance au centre du tourbillon. Dans les deux cas, le maillage est obtenu par le processus itératif décrit sur la figure 4.9. Dans un premier temps on considère un maillage de référence  $\mathcal{T}_0$  et  $G_{ref}$   $U_{ref}$  respectivement les coordonnées des points de la discrétisation et la solution en ces points de la simulation stationnaire présentée dans la partie précédente. La solution  $U_{ref}$  est d'abord interpolée linéairement sur  $\mathcal{T}_0$ , on obtient  $S_0$  la solution sur le maillage non-structuré. La métrique  $M'_0$  définie en chaque sommet du maillage  $\mathcal{T}_0$  est ensuite calculée à partir des critères choisis, nous décrirons les étapes intermédiaires nécessaires à l'obtention de cette métrique dans le paragraphe suivant. On régularise ensuite la métrique grâce à une méthode permettant de contrôler le rapport entre la taille de deux tétraèdres voisins qui sera présentée dans la section suivante. Enfin un nouveau maillage  $\mathcal{T}_1$  est généré. Ce processus est réitéré tant que le rapport entre le nombre de sommets du nouveau maillage et de l'ancien maillage est supérieur à 1%. A chaque itération l'interpolation de la solution est faite à partir de  $G_{ref}$  et  $U_{ref}$ .

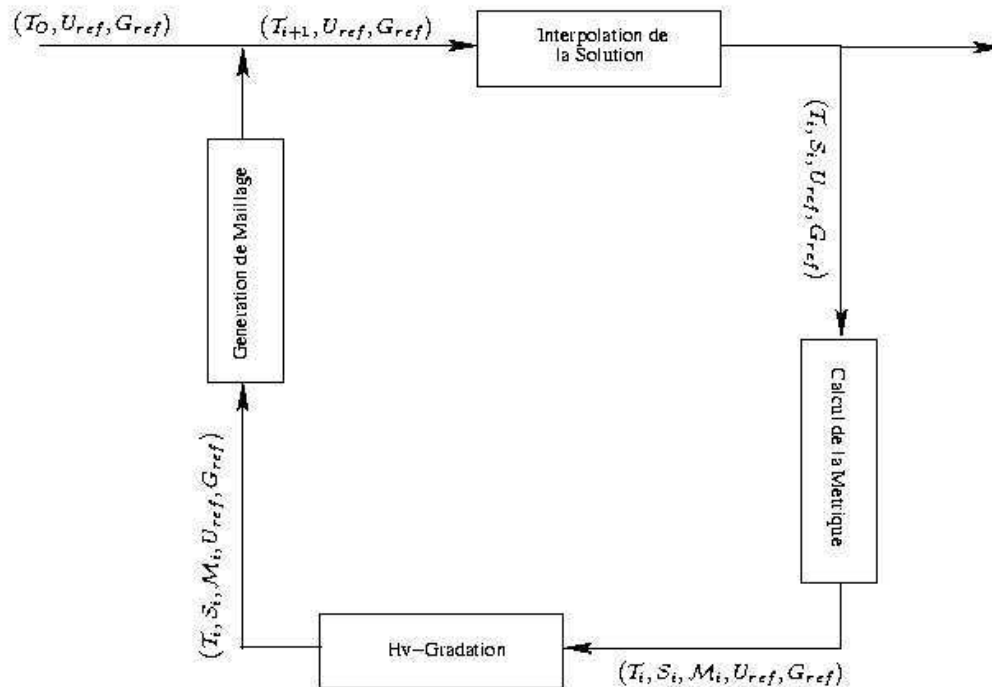


FIG. 4.9 – schématisation de la boucle d'adaptation de maillage utilisée.

L'étape qui consiste en la détermination de la métrique diffère selon le critère retenu. Dans le cas où elle est obtenue à partir du rotationnel cette étape comprend deux opérations :

1. La norme du rotationnel  $\|rot(x, y, z)\|$  de  $S_i$  est calculée en chaque point de la discrétisation.
2. Après avoir fixé une valeur seuil  $rot_{max}$ , la métrique est calculée pour que la taille des tétraèdres soit maximum dans la zone où  $rot_{max} > \|rot(x, y, z)\|$  et minimum dans la zone où  $rot_{max} < \|rot(x, y, z)\|$ .

**Remarque 4.3.1.1** *La nappe de vorticité étant encore intense dans la zone de calcul retenue*

pour nos simulations, cette méthode entraîne la définition de petits tétraèdres dans des zones où le tourbillon n'est pas présent. Ce problème nous a amené à chercher une autre méthode permettant d'imposer une taille de tétraèdre minimale uniquement dans la zone tourbillonnaire.

La nappe de vorticité ayant des caractéristiques physiques très proches du tourbillon, la seule méthode trouvée pour ne prendre en compte que la structure tourbillonnaire est basée sur un critère de distance au centre du tourbillon. La détermination de la m etricque dans ce cas comprend 3 étapes :

- i) La norme du rotationnel  $\|rot(x, y, z)\|$  de  $S_i$  est calculée en chaque point de la discrétisation.
- ii) Le maillage est ensuite partitionn e en  $N$  sous domaines selon l'axe  $\vec{e}_x$ , cet axe étant la direction principale du filament tourbillonnaire dans la zone de calcul consid eree.
- iii) Dans chaque sous domaine le centre du tourbillon  $(C_i)_{i \in \{1, N\}} = (x_{C_i}, y_{C_i}, z_{C_i})$  est d etermin e comme le point où le rotationnel est maximum.
- iv) La m etricque est déterminée dans chaque sous domaine pour que la taille des tétraèdres soit minimale dans la zone où  $(y - y_{C_i})^2 + (z - z_{C_i})^2 < D$  où  $D \in \mathbb{R}$  est une valeur fixée par l'utilisateur.

Dans les deux cas, la définition des m etricques utilisées entra ene que le rapport entre la taille de deux tétraèdres voisins n'est pas contrôlée. On risque donc de retrouver le problème constat e dans le chapitre précédent, à savoir des phénomènes de réflexions à l'intérieur du domaine maill e finement. Pour palier à ce problème, une méthode permettant de contrôler le déraffinement du maillage a été mise en  oeuvre.

### Déraffinement gradu e du maillage.

Cette méthode est basée sur les travaux de Borouchaki *et al* [17]. Dans cet article, les auteurs présentent deux méthodes de contrôle. La méthode que nous avons choisie est appelée Hv-correction. Elle consiste à contrôler le gradient de la m etricque. Plus précisément, soit  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  deux matrices symétriques définies positives définissant deux m etricques en un point P et un point Q du maillage. Comme ces deux matrices sont symétriques définies positives, on peut trouver une base commune dans laquelle elles sont toutes deux diagonales. Pour déterminer cette base, on utilise pour cela une méthode de réduction simultanée. Soit  $P = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la matrice formée par les vecteur propres de  $\mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2$ , on peut écrire :

$$\mathcal{M}_1 = {}^t P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \mathcal{M}_2 = {}^t P^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix} P^{-1} \quad (4.1)$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{M}_1$  et les  $\mu_i$  les valeurs propres de  $\mathcal{M}_2$ .

La méthode dite Hv-correction consiste à borner la variation de la tailles des arêtes des tétraèdre dans chaque direction. Une fois une première m etricque définie aux points P et Q, la correction consiste donc à remplacer la m etricque au point P par la m etricque  $\mathcal{M}_1^{hv}$  définie par :

$$\mathcal{M}_1^{hv} = {}^t P^{-1} \begin{pmatrix} \max(\lambda_1, \frac{\mu_1}{(1+\alpha\|PQ\|\sqrt{\mu_1})^2}) & & \\ & \max(\lambda_2, \frac{\mu_2}{(1+\alpha\|PQ\|\sqrt{\mu_2})^2}) & \\ & & \max(\lambda_3, \frac{\mu_3}{(1+\alpha\|PQ\|\sqrt{\mu_3})^2}) \end{pmatrix} P^{-1} \quad (4.2)$$

et la métrique au point  $Q$  par la métrique  $\mathcal{M}_2^{hv}$  définie par :

$$\mathcal{M}_1^{hv} = P^{-1} \begin{pmatrix} \max(\mu_1, \frac{\lambda_1}{(1+\alpha\|PQ\|\sqrt{\lambda_1})^2}) & & \\ & \max(\mu_2, \frac{\lambda_2}{(1+\alpha\|PQ\|\sqrt{\lambda_2})^2}) & \\ & & \max(\mu_3, \frac{\lambda_3}{(1+\alpha\|PQ\|\sqrt{\lambda_3})^2}) \end{pmatrix} P^{-1} \quad (4.3)$$

### 4.3.2 Définition d'un maillage de peau.

Dans un premier temps, il faut définir une géométrie permettant de prendre en compte une partie de la solution obtenue par le calcul stationnaire des tourbillons de sillages présenté précédemment. Une géométrie de forme cylindrique a été choisie pour définir le maillage de surface, appelé aussi maillage de peau, et une transformation de type translation est effectuée pour que ce cylindre contienne la totalité du tourbillon d'extrémité de pale dans le domaine azimutal choisi ( $\psi \in [20^\circ; 30^\circ]$ ).

Les figures 4.10 et 4.11 montrent le maillage de surface considéré et son positionnement par rapport au résultat du calcul stationnaire. On peut remarquer sur la figure 4.11 que ce domaine prend bien en compte la totalité du sillage tourbillonnaire dans la zone azimutale où il est défini. Sur cette même figure on peut aussi voir que, dans cette zone azimutale, le tourbillon est bien en phase d'enroulement, la nappe de vorticité ayant encore une intensité importante relativement à celle du tourbillon.

Pour générer ce maillage, la boucle d'adaptation représentée sur la figure 4.9 a été utilisée. La définition de la m etricue est basée sur un capteur sur la norme du rotationnel du champ de vitesse. Cette adaptation du maillage de surface a été menée à l'aide du remaillieur de surface Yams [37]. Nous avons choisi de définir un maillage isotrope car les surfaces qui interceptent le tourbillon sont presque normales à celui-ci.  $hmin$ , la taille d'arête minimale a été fixée à  $hmin = 0.015$ . Cette dimension a été retenue d'une part pour que le c oeur tourbillon soit bien défini et d'autre part pour que l'interpolation linéaire ait un sens. La taille de maille maximale,  $hmax$ , est fixée à  $hmax = 0.6C$ .

**Remarque 4.3.2.1** *Pour des raisons d'économie de points de discrétisation nous avons fait le choix de d eraffiner le maillage de façon isotrope dans le sens axial du tourbillon pour permettre aux perturbations d'êtres atténuées. Ce choix a été fait car le champ porteur, pris en compte ici, le permet. En effet contrairement au cas du cisaillement 2D pr esent e dans le chapitre précédent, un déraffinement isotrope n'entra ene pas l'apparition d'un choc ou d'une discontinuité importante. Au contraire, si l'on exclut le cas où un point de la discrétisation est situ e près du centre du tourbillon, le déraffinement aura pour effet de lisser la solution. En utilisant cette méthode, la taille des arêtes des tétraèdres dans le plan circulaire du domaine de calcul, correspondant au plan de sortie du fluide, est fixée à  $hmax$ . La discrétisation de ce plan est montrée sur la figure 4.12.*

Une fois le maillage de peau g en er e un maillage volumique peut être d etermin e.

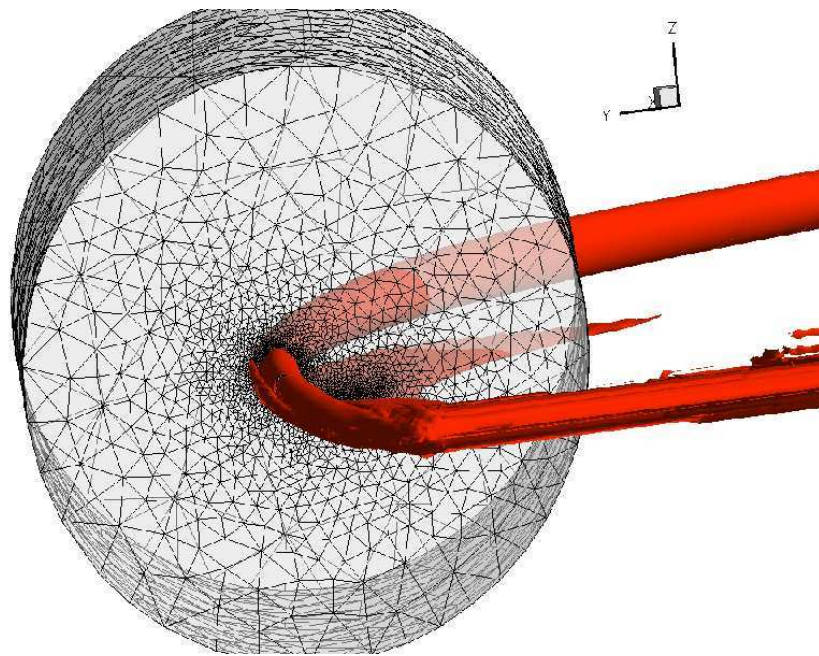


FIG. 4.10 – Représentation du sillage de la pale et du maillage non-structuré sur lequel seront interpolés les champs aérodynamiques

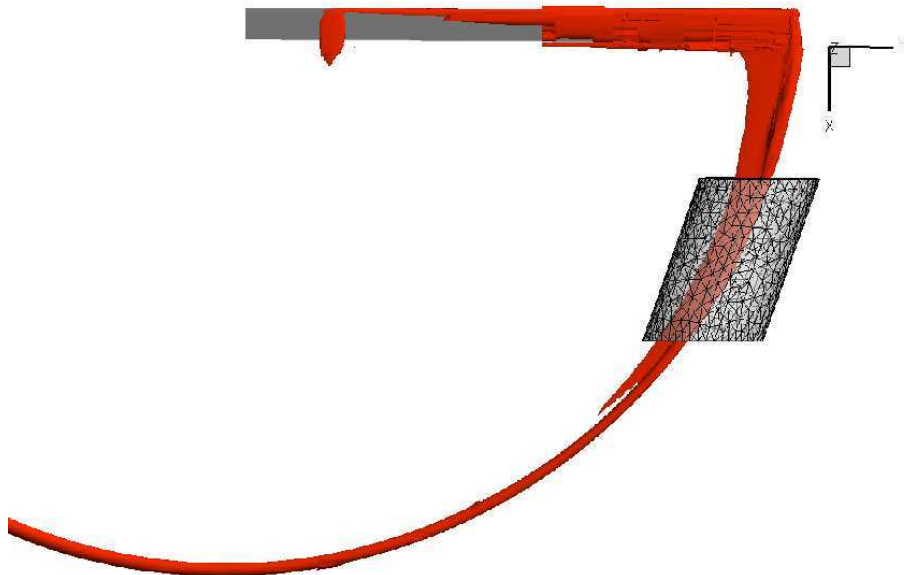


FIG. 4.11 – Représentation du sillage de la pale et du maillage non-structuré sur lequel seront interpolés les champs aérodynamiques



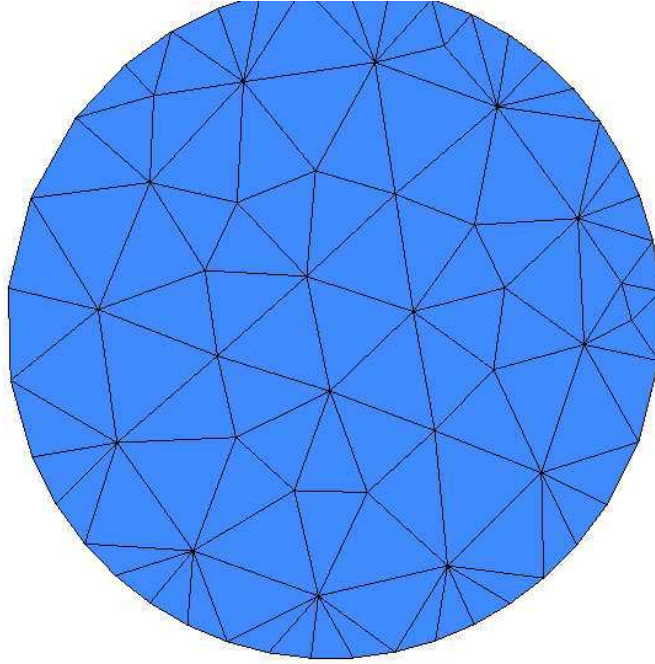


FIG. 4.12 – Représentation de la surface du maillage de peau correspondant à la sortie du fluide.

### 4.3.3 Définition du maillage volumique.

Pour la définition du maillage volumique nous avons mis en œuvre les deux méthodes d'adaptation de maillage décrites à la section 4.3.1.

Dans le chapitre précédent nous avons estimé que le nombre nécessaire de points de discrétisation par longueur d'onde entraînant une dissipation suffisamment faible pour ne pas altérer les résultats des simulations était d'environ 10 points. Dans cette étude, nous souhaitons modéliser la réponse du champ aérodynamique à un forçage dans le domaine fréquentiel  $f \in [3 \text{ kHz}; 6 \text{ kHz}]$ . La composante aérodynamique de la perturbation sera convectée à une vitesse environ égale à  $\Omega R$  où  $\Omega$  est la vitesse de rotation du rotor et  $R$  la distance initiale de la source au centre de rotation du repère tournant, ici fixé à l'origine. La longueur d'onde spatiale  $\lambda$  la plus petite que nous aurons à modéliser sera donc de l'ordre de  $\lambda = \Omega R / (6000C) = 0.304$  ce qui nous amène à une taille d'arête  $hmin_x$  dans la direction axiale du tourbillon de l'ordre de  $0.03C$ . Dans la direction orthoaxiale du tourbillon la taille minimale des arêtes  $hmin_{yz}$  a été fixée à la même valeur que la taille minimale des arêtes pour la détermination du maillage surfacique. L'anisotropie que nous pouvons fixer sur le maillage reste donc assez faible. Néanmoins elle nous permettra tout de même de diviser le nombre de points par deux par rapport à l'utilisation d'un maillage isotrope.

L'axe du tourbillon dans le domaine azimutal  $\psi = [10^\circ; 20^\circ]$  ayant comme direction privilégiée  $\vec{e}_x$ , la métrique en chaque point sera exprimée sous la forme d'une matrice diagonale.

La figure 4.13 présente deux coupes, dans le plan orthogonal à l'axe du tourbillon, des maillages obtenus à partir des deux méthodes de détermination de métrique présentées dans la section 4.3.1. Le maillage de gauche est le résultat obtenu en construisant une métrique à partir d'un capteur sur le rotationnel. On peut remarquer que le tourbillon et la nappe de vorticité

sont tous deux maillés finement. Notre étude portant uniquement sur la stabilité du tourbillon, il n'est pas nécessaire de mailler aussi finement la nappe de vorticité. Cette méthode ne conduit donc pas à la définition d'un maillage optimal pour notre étude. Le maillage de droite présente le résultat obtenu avec une définition de la métrique bas e sur la détermination d'une zone autour du maximum de rotationnel. Cette fois-ci, le maillage n'est fin que dans la zone où se trouve le tourbillon. Si cette méthode est moins générale que la précédente, elle est, en revanche, bien adapt e au cas considéré dans ce chapitre.

Sur cette même figure, que ce soit la figure de droite ou de gauche, on peut voir que la méthode de Hv- gradation permet de bien contrôler le rapport entre les tailles de deux tétraèdres voisins. Le maillage utilisé par la suite sera donc celui présenté sur la figure de droite. Il comporte 67668 points et 396287 tétraèdres, ce qui nous amènera donc à résoudre un problème à  $T_P$  degrés de liberté avec  $T_P$  égal à :

$$T_P = 396287 \times 4 \times 4 \simeq 6400000$$

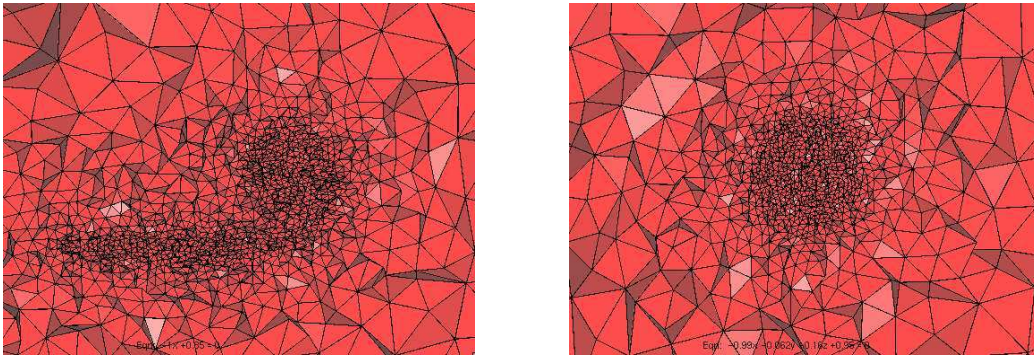


FIG. 4.13 – Visualisation en coupe des maillages volumiques obtenus par les deux méthodes de détermination de métrique.   gauche : avec une méthode basée sur un capteur sur le rotationnel.   droite : avec une méthode basée sur la détermination d'une zone cylindrique autour du maximum de rotationnel.

## 4.4 Résultats

Dans cette section on présente les résultats obtenus lors de l'étude paramétrique sur la stabilité de la nappe tourbillonnaire.

### 4.4.1 Conditions initiales de l'étude paramétrique.

Pour l'étude nous avons choisi de définir la source harmonique de perturbation  $\vec{f}$  comme une perturbation de la composante de vitesse en  $z$  soit :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_z e^{-(\epsilon^2 \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}}^2 + i\omega t)} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

où  $\vec{x} = (x, y, z)$ ,  $\vec{x}_0$  le centre de la source et  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$  la norme usuelle. La source est plac e au cœur du tourbillon aux environs de l'azimut  $20^\circ$ .

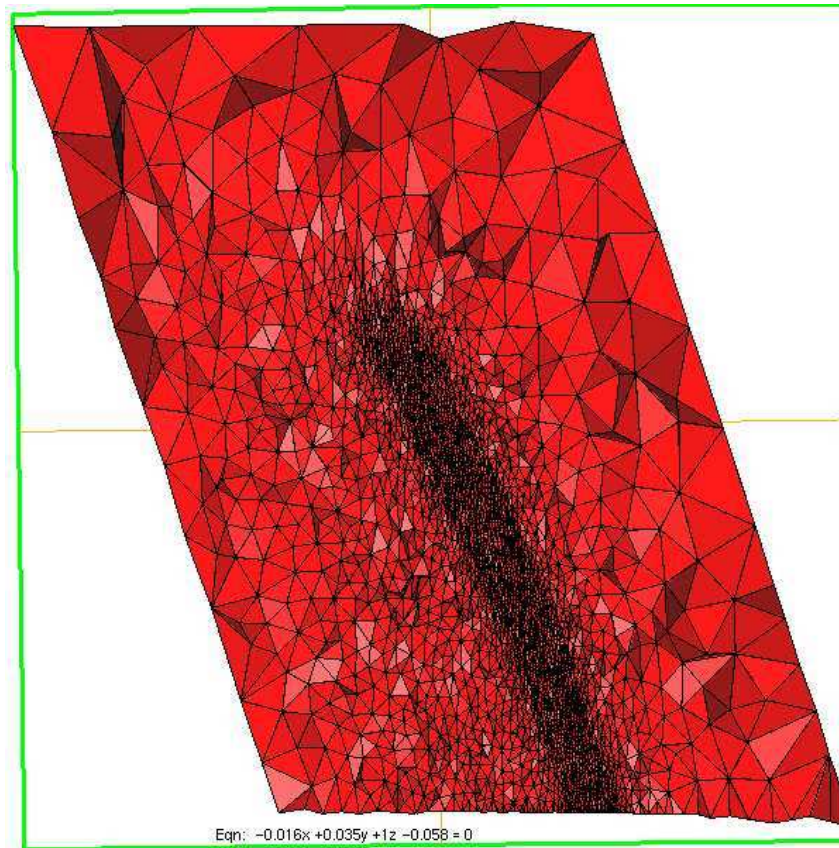


FIG. 4.14 – Coupe du maillage volumique utilisé pour le calcul de stabilité.

L'étude paramétrique nous a conduit à effectuer des calculs en considérant des sources de perturbation dans une bande de fréquence  $f = [3 \text{ kHz} - 6 \text{ kHz}]$ . Nous avons choisi de considérer un pas de 0.250 kHz entre deux simulations, ce qui nous a amené à effectuer 13 calculs.

Les conditions aux limites sur les bords du domaines sont des conditions de non-réflexion.

#### 4.4.2 Analyse des résultats.

Des développements ont été nécessaires pour l'analyse des résultats. Une instabilité se caractérise par la forme de ses modes et ses taux d'amplification spatiaux ou temporels. Dans le cas des tourbillons axisymétriques et rectilignes, les modes de perturbations peuvent se décomposer sous la forme d'onde de Kelvin :

$$u(r)e^{i(kx-\omega t+m\theta)}$$

lors de cette étude nous fixerons  $\omega$  la pulsation et nous chercherons à déterminer les modes azimutaux  $m$  qui se développent dans le tourbillon pour chaque fréquence. Nous chercherons aussi à savoir si la réponse du champ porteur à la perturbation entraîne un accroissement spatial de cette dernière, nous chercherons donc à estimer la partie imaginaire du nombre d'onde spatial  $k$ . Pour répondre à ces deux questions nous avons dû effectuer des développements que nous présentons ici.

#### Détermination des modes azimutaux.

De manière générale les modes des instabilités elliptiques sont présentés en montrant le rotationnel de la somme du champ moyen et de la perturbation, comme lors de l'étude de stabilité faite dans le chapitre 2. On rappelle que la visualisation de cette quantité dans le cas d'une instabilité elliptique se traduira par une déformation sinusoidale du tourbillon. Une autre caractérisation des modes elliptiques que l'on peut trouver dans la littérature, par exemple dans la thèse de Laporte [54], est la visualisation de la composante normale à l'axe du tourbillon du rotationnel de la perturbation. La difficulté, dans notre cas, pour déterminer cette quantité réside dans le fait que le tourbillon n'est pas parallèle. Pour pouvoir estimer cette quantité nous avons repris l'idée du partitionnement du maillage en  $N$  zones. On supposera de plus que la variation du profil du tourbillon n'entraîne pas de grands déplacements localisés de son centre. Pour un nombre  $N$  assez grand on peut estimer que la normale à l'axe du tourbillon en un point  $(P)_i \in D_i$  est colinéaire au vecteur  $\vec{n} = M_i \vec{M}_{i+1} / \|M_i \vec{M}_{i+1}\|$ . Le rotationnel de la solution dans le repère  $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = (0, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{x_3})$  s'écrit :

$$\vec{rot} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} w - \partial_{x_3} v \\ \partial_{x_3} u - \partial_{x_1} w \\ \partial_{x_1} v - \partial_{x_2} u \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Les valeurs des dérivées partielles sont obtenues en considérant une discrétisation éléments finis  $P_1$  sur chaque élément volumique. Soit :

$$\partial_{x_i} F = \sum_{p=1,4} F(p) \partial_{x_i} w_p \quad (4.6)$$

Le résultat obtenu donne une valeur constante par élément. La solution est ensuite interpolée aux nœuds du maillage.

La composante du rotationnel dans la direction de l'axe du tourbillon,  $rot_{axial}$ , est ensuite obtenue en calculant le produit scalaire :  $rot_{axial} = \vec{rot} \cdot \vec{n}$

### Détermination du taux d'amplification.

le chapitre 2, un phénomène instable linéairement se caractérise par la croissance exponentielle de l'énergie cinétique associée au mode de perturbation. Notre méthode de calcul nous permet de simuler un phénomène associé à une seule fréquence temporelle, en revanche dans le cas simulé dans cette partie le champ porteur est fortement non-parallèle, le taux d'amplification de l'instabilité dépendra donc des coordonnées spatiales.

D'autre part, la solution  $u'$  du problème harmonique est complexe et l'on peut reconstruire la solution temporelle, en posant  $u' = u'_r + iu'_i$  :

$$u'(t) = Re(u'e^{i\omega t})$$

Dans la suite on introduira le module du champ de vitesse complexe  $E^*$  calculé à partir de  $u'$

$$E^*(x, y, z) = |u'|_{\mathbb{C}}^2 \quad (4.7)$$

Si on pose  $x' = \vec{x} \cdot \vec{n}$  alors l'évolution spatiale de  $E^*$  associée au mode instable peut s'écrire de la façon suivante :

$$E^*(x') = E_c(x'_0)e^{\sigma(x')x'} \quad (4.8)$$

Où  $\sigma(x)$  est le taux d'amplification et  $x'_0$  la coordonnée de la source initiale de perturbation. Pour simplifier l'analyse de l'évolution spatiale de  $E^*$ , on reprendra le découpage du domaine en  $N$  sous domaines et l'on supposera que si  $\Delta x' = x'_n - x'_{n-1}$  est assez petit alors  $E^*$  reste constante le long de l'axe du tourbillon.

Alors, soit  $V$  le volume défini par :

$$V = S\Delta x'$$

avec  $S = 2\pi R$  et  $R \in \mathbb{R}$  un rayon que nous fixerons à  $0,3C$ . En utilisant cette approximation on pourra déterminer une énergie cinétique moyenne sur chaque sous-domaine :

$$E^*(x_n) = 1/V \int_V E_c^* dx dy dz, \quad \forall n \in 1, N$$

#### 4.4.3 Stabilité dans la zone 3kHz-6kHz

Les calculs ont été effectués à l'aide de la méthode harmonique présentée dans le chapitre 4. 98 processeurs ont été utilisés. Le nombre d'itérations maximum pour la résolution du problème a été fixé à 600. Pour chaque calcul, la mémoire vive utilisée s'élève à 360Go et le temps de calcul est d'environ 11 minutes.

#### 4.4.4 Identifications des modes

Pour identifier les modes nous avons d'abord tracé les isovaleurs de la composante du rotationnel de la perturbation normale à l'axe du tourbillon pour savoir si le profil de cette perturbation changeait à mesure qu'elle était convectée. Les figures 4.16 et 4.17 montrent les isosurfaces de  $rot_{axial}$  de la solution des calculs harmoniques pour différentes fréquences. A gauche est présentée la partie réelle et à droite la partie imaginaire de la solution. On remarque que quelque soit la fréquence considérée le profil de la perturbation convectée le long de l'axe du tourbillon reste le même. D'autre part il semble que la perturbation ne croît pas de manière importante dans le tourbillon. Cet aspect sera étudié dans la section suivante.

Si l'on s'intéresse maintenant aux profils des modes qui apparaissent dans le calcul, on remarque

que pour un plan fixé orthogonal à l'axe du tourbillon une valeur positive et négative de  $rot_{axial}$  sont présentes. Cette structure axiale correspond à un mode axial tourbillonnaire du type  $m = 1$ . D'autre part, ce mode se convecte suivant un plan préférentiel, c'est-à-dire qu'il ne tourne pas autour de l'axe du tourbillon. Ce mode semble donc être plus influencé par la déformation du tourbillon que par la rotation du fluide à l'intérieur de ce dernier. Cette propriété nous amène à conclure sur une structure modale qui est la somme de deux modes axiaux  $m = 1$  et  $m = -1$ . En effet ce type de structure correspond aux profils des perturbations trouvées par exemple par Waleffe [91] dans le cas de l'étude des instabilités d'un tourbillon de Rankine soumis à un champ de contrainte. Plus généralement, on retrouve bien dans toutes les études portant sur ce type d'instabilité le caractère plan de la perturbation, ou plus souvent de la déformation du tourbillon, et la présence d'une partie positive et d'une partie négative du rotationnel dans un plan orthogonal à l'axe du tourbillon. Notons que dans les études de stabilités les auteurs définissent un angle entre le plan de déformation elliptique du champ porteur et le plan de déformation dû à la perturbation. Nous n'avons hélas pas pu déterminer cet angle.

Pour conclure sur ce sujet nous avons additionné la solution des calculs linéaires et le champ porteur considéré. Pour bien faire apparaître la déformation induite par la perturbation sur le champ porteur nous avons appliqué un coefficient multiplicatif égal à 10 sur la perturbation. Nous avons ensuite calculé la norme du rotationnel de cette solution et l'avons comparée à celles observées dans les simulations numériques des instabilités elliptiques vu dans le chapitre 2. La figure 4.15 montre le résultat obtenu. On observe bien une déformation sinusoïdale du tourbillon similaire à celle observée dans le chapitre 2. Dans la partie suivante, nous avons étudié de façon plus précise l'évolution spatiale de l'énergie cinétique associée aux modes se propageant dans le tourbillon.

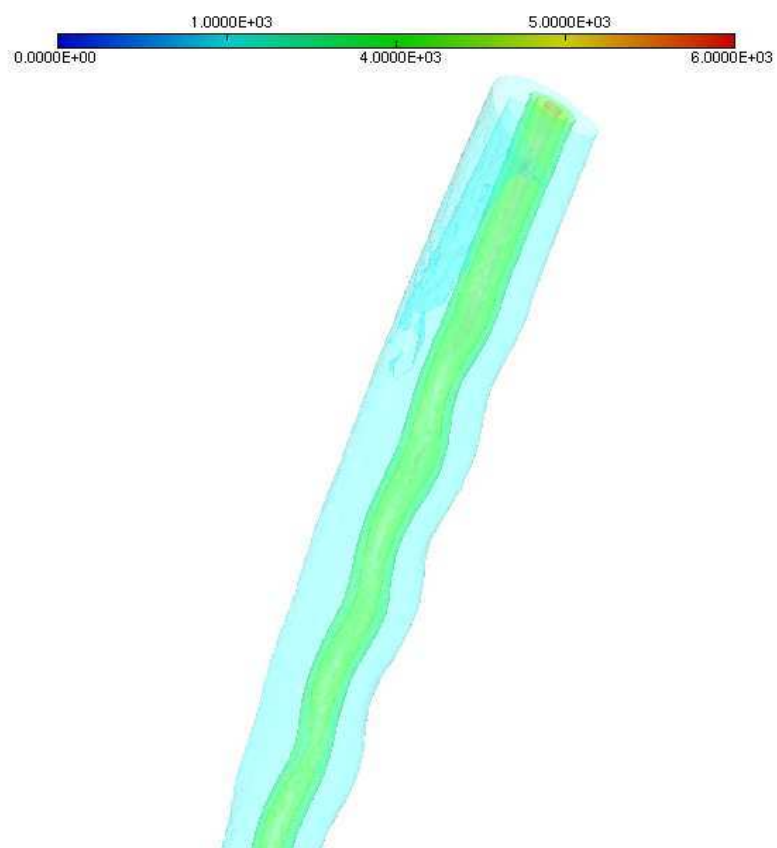


FIG. 4.15 – Isosurfaces de la norme du rotationnel dans le cas de la sommation du champ porteur et du champ de perturbation dans le cas  $f = 4000$  Hz.

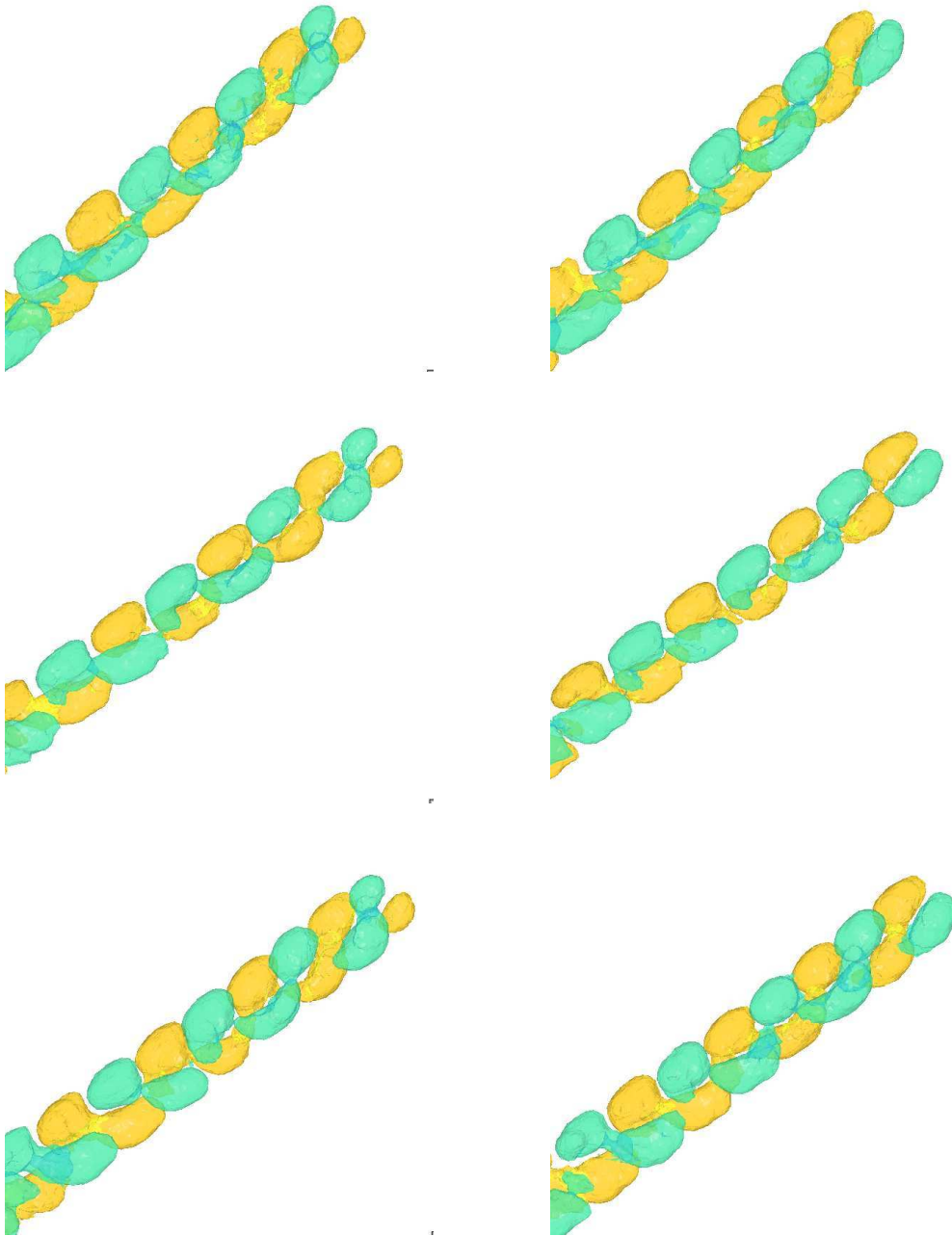


FIG. 4.16 – Isosurfaces de la composante normale à l'axe du tourbillon du rotationnel de la solution. A gauche : partie réelle. A droite : partie imaginaire. De haut en bas sont représentés les résultats pour différentes fréquences de la source de perturbation. Respectivement  $f = 3000$  Hz,  $f = 3500$  Hz,  $f = 4000$  Hz



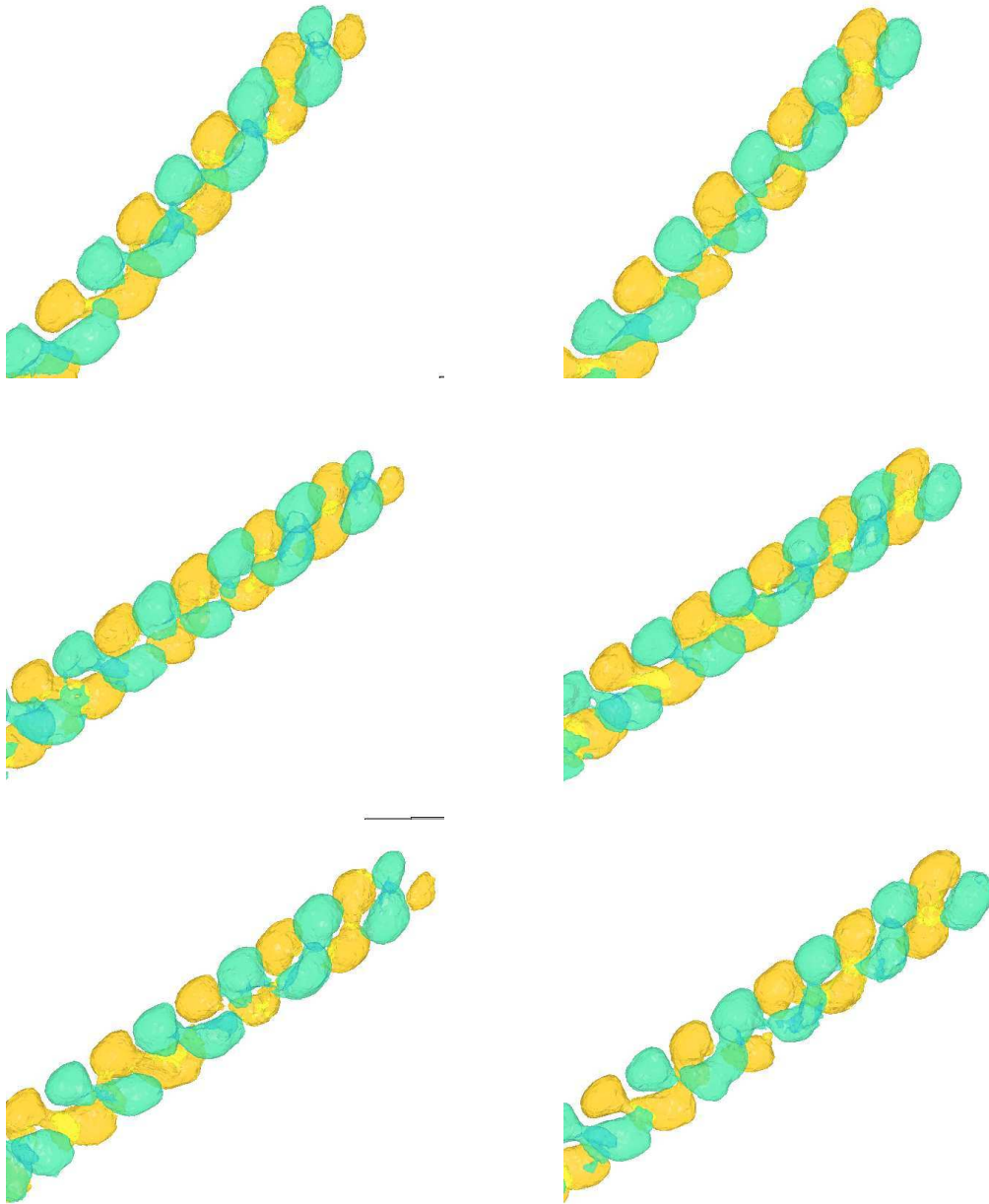


FIG. 4.17 – Isosurfaces de la composante normale à l'axe du tourbillon du rotationnel de la solution. A gauche : partie réelle. A droite : partie imaginaire. De haut en bas sont représentés les résultats pour différentes fréquences de la source de perturbation. Respectivement  $f = 4500$  Hz,  $f = 5000$  Hz,  $f = 5500$  Hz.

#### 4.4.5 Etude de l'évolution spatiale de l'énergie cinétique du système.

Pour chaque calcul effectué, l'évolution spatiale du module du champ de vitesse complexe de la perturbation a été évaluée au moyen de la méthode présentée dans la section 4.4.2. Le nombre de sous domaines a été fixé à  $N = 200$ .

Les résultats sont présentés sur les figures 4.18, 4.19, 4.20. L'axe des ordonnées est représenté en échelle logarithmique.

Globalement, les résultats obtenus tendent à montrer qu'aucune instabilité n'apparaît aux fréquences simulées. En revanche, il semble que dans tous les cas la perturbation est convectée le long de l'axe du tourbillon sans perte d'intensité.

Quelques différences peuvent, quand même, être notées dans le comportement de la solution selon les fréquences simulées. En effet, plus la fréquence augmente plus un "creux" se forme près de la source dans la direction de la convection du tourbillon. Après ce "creux"  $E^*$  augmente et se stabilise pour finalement rester quasiment constante le long de l'axe du tourbillon.

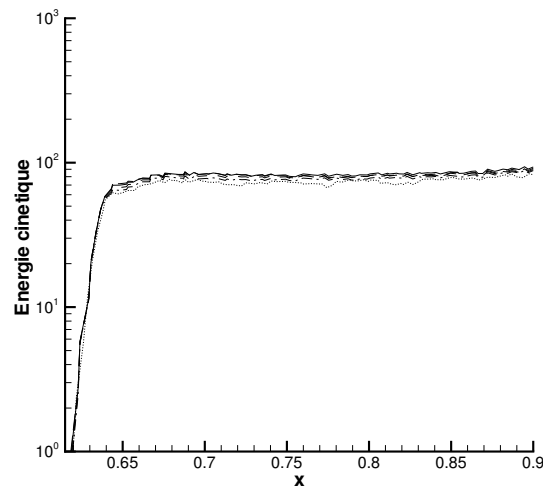


FIG. 4.18 – Evolution spatiale de  $E^*$  en fonction de  $x$  pour les fréquences  $f = 3000$  Hz,  $f = 3250$  Hz,  $f = 3500$  Hz,  $f = 3750$  Hz,  $f = 4000$  Hz.

#### 4.4.6 Interprétation des résultats dans le cadre d'un écoulement autour d'un rotor.

Les résultats présentés ici montrent que l'instabilité elliptique ne se développe pas dans un tourbillon jeune d'extrémité de pale isolé. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, cette instabilité intervient lorsqu'une condition de résonance est vérifiée entre deux ondes de Kelvin et un champ d'étirement. Si le couplage des deux modes azimutaux  $m = 1$  et  $m = -1$  est présent dans les résultats de nos calculs et que seuls ces deux modes sont convectés sans perte d'énergie le long du tourbillon, il n'y a pas d'amplification spatiale visible de cette énergie. Deux remarques peuvent être faites à partir de ces résultats :

1. Comme nous l'avons observé dans les calculs et dans les données expérimentales, l'intensité

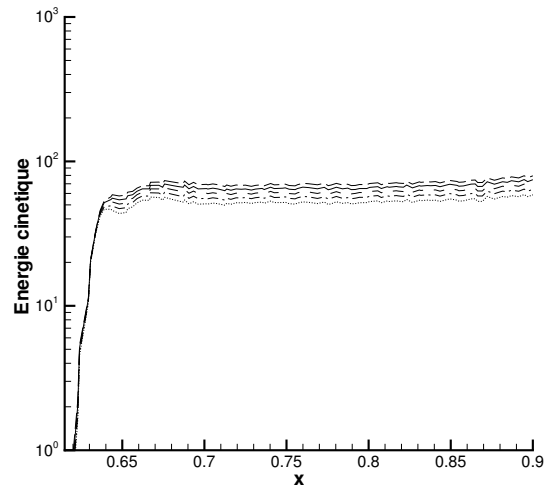


FIG. 4.19 – Evolution spatiale de  $E^*$  en fonction de  $x$  pour les fréquences  $f = 4250$  Hz,  $f = 4500$  Hz,  $f = 4750$  Hz,  $f = 5000$  Hz,  $f = 5250$  Hz,.

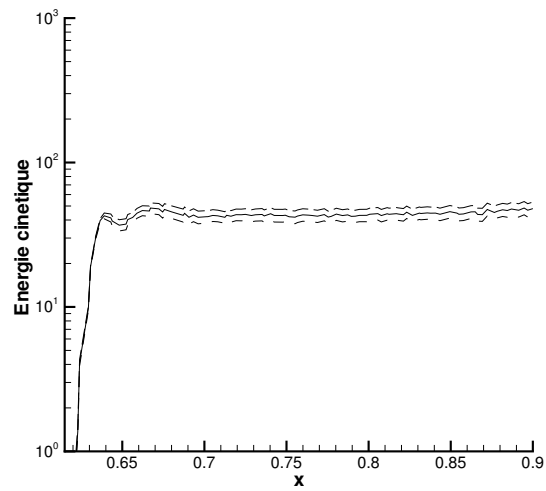


FIG. 4.20 – Evolution spatiale de  $E^*$  en fonction de  $x$  pour les fréquences  $f = 5500$  Hz,  $f = 5750$  Hz,  $f = 6000$  Hz.

du tourbillon chute de façon importante dans les premiers azimuts. Or, dans nos simulations, les perturbations sont, elles, convectées au sein du tourbillon sans perdre d'énergie. Ces deux phénomènes entraînent une augmentation de la déformation du tourbillon au fur et à mesure de son développement spatial.

Si l'intensité de la turbulence derrière la pale, au moment de la production du tourbillon est assez importante, à partir d'un certain azimut, l'énergie du mode se convectant dans le tourbillon devient d'intensité suffisante pour entraîner sa déformation. Les perturbations de pression sur pale pourront, alors, être d'intensité comparable à celles observées expérimentalement, lorsque l'interaction pale-tourbillon a lieu à des azimuts où le tourbillon de sillage est isolé.

2. D'autre part le fait que les modes correspondant aux modes de l'instabilité elliptique soient présents dans le tourbillon peut expliquer le développement rapide de l'instabilité elliptique lors de l'interaction proche entre deux tourbillons d'extrémité de pale. En effet, lors de l'interaction entre ces deux structures, les modes étant déjà présents dans les deux tourbillons, ils seront directement amplifiés, aucun phénomène transitoire pour permettre la formation des modes instables n'étant nécessaire comme lors des simulations présentées dans le chapitre 2, La dynamique de l'instabilité sera donc plus rapide.

## 4.5 Conclusion.

Dans cette partie nous avons présenté les résultats obtenus sur l'étude de la stabilité d'un tourbillon de sillage isolé. Pour cela, nous avons déterminé un champ porteur stationnaire à partir d'un calcul elsA en considérant la configuration d'une pale en vol stationnaire. Les résultats obtenus ont été présentés. Les profils tourbillonnaires issus de la simulation dans une zone azimutale correspondant à une zone d'enroulement de la nappe de vorticit   autour du tourbillon ont   t   compar  s    des r  sultats exp  rimentaux et un bon accord sur la dynamique d'ensemble du sillage a   t   trouv  . Un maillage optimal non-structur  , dans le sens du nombre de points g  n  r  s, a ensuite   t   produit pour permettre l'  tude de la stabilit   du tourbillon dans cette zone. Pour cela une boucle d'adaptation de maillage a   t   mise en   uvre. Une   tude param  trique dans la bande de fr  quence du BWI a ensuite   t   mené au moyen du code Euler lin  aris   harmonique pr  sent   dans le chapitre pr  c  dent.

Cette   tude a permis d'apporter des   l  ments de r  ponse    la deuxi  me question posé dans l'introduction    savoir : *Les caract  ristiques g  om  triques d'un tourbillon d'extr  mit   de pale d'h  licopt  re jeune (c  ur du tourbillon elliptique, et courbure du filament tourbillonnaire) jouent-elles un r  le sur la stabilit   de celui-ci ?*

En effet, nous avons montr   qu'un tourbillon d'extr  mit   de pale isol     tait stable dans la bande de fr  quence correspondant au BWI ([3 kHz, 6 kHz]). En revanche nous avons pu   tablir que les modes azimutaux  $m = 1$  et  $m = -1$    taient convect  s le long du tourbillon sans perdre d'  nergie. De notre point de vue, cette dynamique permet d'expliquer les perturbations de pression sur pale associés au BWI dans des zones azimutales o   le tourbillon interagissant avec la pale est isol  . D'autre part, la convection des modes azimutaux  $m = 1$  et  $m = -1$ , caract  ristiques de l'instabilit   elliptique, pourrait favoriser l'apparition de cette instabilit   lorsque le tourbillon interagira de fa  on proche avec un autre.

D'un point de vue num  rique, la m  thode harmonique est apparue c  teuse en m  moire mais

très rapide en temps de calcul donc en accord avec l'orientation des moyens informatiques industriels de plus en plus basés sur des architectures de calculateurs scalaires parallèles.

Enfin, cette étude est la première traitant de la stabilité des tourbillons réalistes de sillage d'hélicoptère. Plus encore, il apparaît que cette étude de stabilité linéaire est la première étude effectuée sur un champ porteur dont les caractéristiques ne supposent aucune condition de périodicité ou de régularité dans les trois directions principales de l'espace.

# Conclusion et perspectives

Le sujet de cette thèse s'inscrit dans le cadre général de l'étude du bruit généré par l'interaction d'un rotor d'hélicoptère avec son propre sillage. Depuis un certain nombre d'années, les industriels s'intéressent à ce type de bruit car il peut être le bruit dominant dans certaines configurations de vols. Deux des composantes majeures de ce bruit sont le BVI, Blade Vortex Interaction, et le BWI, Blade Wake Interaction. Si le bruit BVI est aujourd'hui bien connu - les études effectuées sur ce sujet, notamment à l'ONERA, ayant permis l'élaboration de codes de prévisions du bruit [73, 9] suffisamment précis pour permettre la conception de rotor moins bruyant - le BWI l'est beaucoup moins.

Dans une thèse précédente, effectuée à l'ONERA et s'appuyant sur les résultats expérimentaux HART [84], Bouchet [18] a montré que ce bruit était issu d'interactions entre la pale et des structures cohérentes présentes autour des tourbillons de sillages issus des pales précédentes. L'intensité des perturbations de pression issues de ces interactions étant d'autant plus importantes que les deux tourbillons de sillages (générés par les deux pales précédentes) sont proches, Bouchet a émis l'hypothèse que les structures responsables du BWI étaient le résultat d'une instabilité elliptique d'une paire de tourbillon corotatifs [57].

Dans cette thèse nous avons cherché à répondre, au moyen d'outils numériques, aux deux questions suivantes :

1. Si des instabilités elliptiques se développent dans les tourbillons d'extrémité de pale d'hélicoptère, les caractéristiques des perturbations de pression sur pale et du bruit rayonné issus de l'interaction perpendiculaire entre ces structures et une pale correspondront-elles à celles du BWI ?
2. Les caractéristiques géométriques d'un tourbillon d'extrémité de pale d'hélicoptère jeune (coeur du tourbillon elliptique, et courbure du filament tourbillonnaire) jouent-elles un rôle sur la stabilité de celui-ci ?

L'étude menée lors du chapitre 2 consistait à répondre à la première question. Pour ce faire, une simulation des instabilités elliptiques se développant dans une paire de tourbillons analytiques corotatifs parallèles rectilignes uniformes est d'abord réalisée. Ensuite, un outil numérique, basée sur la théorie d'Amiet, a été développé pour obtenir les perturbations de pression sur pale issus d'une interaction entre une pale et le tourbillon instable. Deux résultats physiques importants concernant l'origine du BWI ont été obtenus lors de cette étude :

- i) Les perturbations de pression sur pale issues de l'interaction d'une pale avec un tourbillon perturbé ont une cohérence en envergure en accord avec celle constatée expérimentalement par Bouchet. D'autre part les profils de ces perturbations sont comparables à celles de BWI.
- ii) les niveaux et la directivité du bruit rayonné issus d'une telle interaction sont en accord avec ceux du BWI.

Dans le chapitre 4 nous avons cherché à répondre à la deuxième question en étudiant l'effet de l'enroulement du tourbillon de sillage sur sa stabilité. Pour cela le profil d'un tourbillon d'extrémité de pale a été calculé au moyen du code volumes finis elsA. Une étude linéaire a ensuite été menée en considérant cette solution comme champ porteur, au moyen d'une méthode Euler linéarisée harmonique présentée et validée dans le chapitre 3. Dans cette étude nous avons montré qu'un tourbillon d'extrémité de pale isolé était stable dans la bande de fréquence correspondant au BWI ([3 kHz, 6 kHz]). En revanche nous avons pu établir que les modes azimutaux  $m = 1$  et  $m = -1$  étaient convectés le long du tourbillon sans perdre d'énergie. De notre point de vue, cette dynamique permet d'expliquer les perturbations de pression sur pale associées au BWI dans des zones azimutales où le tourbillon interagissant avec la pale est isolé. D'autre part, la convection des modes azimutaux  $m = 1$  et  $m = -1$ , caractéristiques de l'instabilité elliptique, pourrait favoriser l'apparition de cette instabilité lorsque le tourbillon interagira de façon proche avec un autre.

## Perspectives

De ce travail découle un certain nombre de perspectives tant sur l'étude du problème physique abordé lors de cette thèse que sur les méthodes numériques développées pour l'étudier.

A propos de l'étude du BWI, quelques points bloquants existent encore pour conclure sur le lien entre instabilités elliptiques de tourbillons et BWI, une étude de la stabilité de deux tourbillons d'extrémité de pale proches n'ayant pas pu être menée faute de temps. Néanmoins, une telle étude pourrait être faite en employant la même méthode que dans le chapitre 4. Une étude paramétrique de l'influence de la distance entre les tourbillons sur le taux d'amplification de l'instabilité, par exemple, pourrait permettre de conclure sur la présence d'un tourbillon subissant une instabilité elliptique au moment de l'interaction avec une pale.

D'autre part, une méthode de prévision du BWI pourrait être mise en place en se basant sur la méthode présentée dans le chapitre 2. Comme nous l'avons montré dans ce même chapitre, l'intensité des perturbations de pression sur pale est très sensible à la géométrie de l'interaction entre la pale et le tourbillon, notamment leur distance d'interaction. Une meilleure prévision de ces phénomènes est donc nécessaire pour permettre une bonne prévision du bruit rayonné.

Enfin, la méthode de résolution des équations d'Euler linéarisées en formulation harmonique, qui a été développée dans le contexte de cette étude, étant assez générale, elle peut être appliquée dans des domaines autres que les études de stabilités. Elle a notamment été utilisée dans le cas d'études de propagation de phénomènes acoustiques dans des milieux non bornés (voir annexe A pour plus de détails). Cette méthode permet l'obtention rapide de résultats et est donc propice à des utilisations dans le contexte d'études paramétriques.

# Bibliographie

- [1] F. ALAUZET, *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en mécanique des fluides*, Thèse doctorat, Thèse de doctorat de l'Université Montpellier II, 2002.
- [2] F. ALAUZET ET P. FREY, *Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. partie I : aspects théoriques*, rapport INRIA, INRIA RR-4759 (2003).
- [3] —, *Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. partie II : applications*, rapport INRIA, INRIA RR-4789 (2003).
- [4] R. K. AMIET, *compressibility effects in unsteady thin-airfoil theory*, AIAA Journal, 12 (1974), p. 252–255.
- [5] —, *High frequency thin airfoil theory for subsonic flow*, AIAA Journal, (1976), p. 1076–1082.
- [6] R. K. AMIET, J. C. SIMONICH ET R. H. SCHLINKER, *Rotor noise due to atmospheric turbulence ingestion : Part 2 aero acoustic results.*, AIAA 10th Aeroacoustics Conference 23rd Congress of ICAS, (1986).
- [7] A. BAGAI ET J. G. LEISHMAN, *Flow visualization of compressible vortex structures using density gradient techniques.*, Experiments in Fluids, 15 (1993), p. 431–442.
- [8] B. BAYLY, *Three dimensionnal instability of elliptical flow.*, Phys. rev. Letter, (1986), p. 2160–2163.
- [9] P. BEAUMIER ET P. SPIEGEL, *Validation of onera aeroacoustic prediction methods for blade-vortex interaction noise by hart test results*, Ft Worth Texas, mai 1999, 51st Annual Forum of the American Helicopter Society.
- [10] E. BÉCACHE, A.-S. BONNET-BEN DHIA ET G. LEGENDRE, *Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow*, SIAM J. Numer. Anal., 44 (2006), p. 1191–1217.
- [11] C. M. BENDER ET S. A. ORSZAG, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engenering.*, 1978.
- [12] C. BENOIT ET G. JEANFAIVRE, *Three dimensionnal inviscid isolated rotor calculations using chiméra and automatic cartesian partitionning methods.*, journal of the American Helicopter Society, (2003), p. 138–138.
- [13] J. BERENGER, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, Journal of Computational Physics, 114 (1994), p. 185–200.
- [14] M. BERNACKI ET S. PIPERNO, *A dissipation-free rime domain discontinous galerkin method applied to three dimensional linearized euler equations around a steady-state non-uniform inviscid flow*, J. Computational Acoustics, 14 (2006), p. 445–467.



- [15] P. BILLANT, P. BRANCHER ET J. CHOMAZ, *Three-dimensional stability of a vortex pair*, Phys. Fluids, 11 (1999), p. 2069–2077.
- [16] A.-S. BONNET-BENDHIA ET G. LEGENDRE, *Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow*, J. of Comp. and Applied Mathematics, 204 (2007), p. 428–439.
- [17] H. BOROUCHAKI, F. HECHT ET P. J. FREY, *Mesh gradation control*, Int J. Num. Meth. In Eng., 43 (1998), p. 1143–1165.
- [18] E. BOUCHET, *Etude du bruit d'interaction pale sillage d'un rotor principal d'hélicoptère*, Thèse doctorat, Université du Havre, 2002.
- [19] E. BOUCHET ET G. RAHIER, *Structures of the blade pressure fluctuations generated by helicopter rotor blade wake interaction.*, Virginia Beach, may 2000, 56th AHS Annual Forum.
- [20] J. BREZILLON, J. PRIEUR ET G. RAHIER, *Investigation on broadband helicopter rotor noise.*, Williamsburg, Virginia, Oct 1997, AHS Rotorcraft Acoustics and Aerodynamics Specialists Meeting.
- [21] R. J. BRIGGS, *Electron-Stream Interaction with Plasma.*, MIT Press, 1964.
- [22] T. F. BROOKS, J. R. JOLLY ET M. A. MARCOLINI, *Helicopter main-rotor noise : Determination of source contribution using scaled model data.*, rap. tech., NASA TP 2825, aout 1988.
- [23] V. BRUNET, V. COUALLIER, A. JOLLES, M. L. PAPE ET J. PETER, *Développement et amélioration des techniques d'adaptation de maillages et des méthodes de calcul en fluide visqueux pour l'installation motrice d'un avion de transport subsonique.*, Rapport Technique n.2/03715, ONERA, (2001).
- [24] C. L. BURLEY, T. F. BROOKS, W. R. SPLETTSTOESSER, K. J. SCHULTZ, R. KUBE ET H. BUCHOLTZ, *Blade-wake interaction noise for bo-105 model main rotor*, AHS Specialists' Meeting for Rotorcraft Acoustic and Aerodynamics, Williamsburg, Virginia, Oct 1997.
- [25] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX ET P. JOLY, *Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves*, Journal of Computational Physics, 399-433 (2003), p. 399–433.
- [26] J. M. CHOMAZ, *Global instabilities in spatially developing flows : Non-normality and nonlinearity*, Annu. Rev. Fluid Mech., 37 (2005), p. 357–392.
- [27] J. M. CHOMAZ, P. HUERRE ET L. G. REDEKOPP, *Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows.*, Phys. Rev. Lett, 60 (1988), p. 25–28.
- [28] T. COLONIUS, *Modeling artificial boundary conditions for compressible flow*, Ann. Rev. of Fluid Mech., 36 (2004), p. 315–345.
- [29] A. J. COYNE, M. J. BHAGWAT ET J. G. LEISHMAN, *Investigation into the rollup and diffusion of rotor tip vortices using laser doppler velocimetry*, Virginia Beach, 28 may 1997, 53 AHS Annual Forum.
- [30] S. C. CROW, *Stability theory for a pair of trailing vortices.*, AIAA J., 8 (1970), p. 2172–2179.
- [31] G. DESQUESNES, M. TERRACOL, E. MANOHA ET P. SAGAUT, *On the use of a high order overlapping grid method for coupling in cfd/caa*, j. Comp. Physics, 34 (2002), p. 83–113.
- [32] C. ELOY ET S. LE DIZES, *Three-dimensionnal instability of burgers and lamb-ossen vortices in a strain field*, J. Fluid. Mech., 378 (1998), p. 145–166.
- [33] L. FABRE, *instabilités et instationnarités dans les tourbillons : Application aux sillages d'avions.*, Thèse doctorat, Université Paris VI, 2002.

- 
- [34] C. FAHRAT, A. MACEDO, M. LESOINNE ET F. X. ROUX, *Two-level domain decomposition methods with lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 184 (2000), p. 213–239.
- [35] C. FARHAT ET F. X. ROUX, *A method of of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm.*, Internat J. Numer. Meth. Engrg, 32 (1991), p. 1205–1227.
- [36] ———, *Implicit parallel processing in structural mechanics*, Computational Mechanics Advances, 2 (1994), p. 1–124.
- [37] P. FREY, *Yams, a fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure*, rapport INRIA, INRIA RT-0252 (2003).
- [38] P. FREYMUTH, *On transition in a separated laminar boundary layer.*, J. of Fluid Mech., 25 (1966), p. 683–704.
- [39] M. GAZAIX, A. JOLLES ET M. LAZAREFF, *The elsa object-oriented computational tool for industrials applications*, Toronto, Canada, Sept 2002, 23rd Congress of ICAS.
- [40] S. A. L. GLEGG, *The prediction of blade wake interaction noise based on a turbulent vortex model*, AIAA paper, 89 (1989).
- [41] S. A. L. GLEGG, S. WITMMER, J. DEVENPORT ET D. S. POPE, *Broadband helicopter noise*, AHS Specialists' Meeting for Rotorcraft Acoustic and Aerodynamics, (1997).
- [42] C. GODRÈCHE ET E. PAUL MANNEVILLE, éd., *Hydrodynamic instabilities in open flows.*, Cambridge University Press, 1998.
- [43] Y. O. HAN, J. G. LEISHMAN ET A. J. COYNE, *On the turbulent structure of a tip vortex generated by a rotor*, Washington DC, 4-6June 1996, 52nd AHS Annual Forum.
- [44] L. N. HOWARD ET A. GUPTA, *On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flow.*, J. Fluid. Mech., 14 (1964), p. 463–476.
- [45] F. Q. HU, *On absorbing boundary conditions for linearized euler equations by a perfectly matched layer*, Journal of Computational Physics, 129 (1996), p. 201–219.
- [46] ———, *A perfectly matched layer absorbing boundary condition for linearized euler equations with a non-uniform mean flow*, J. Comput. Phys., 208 (2005), p. 469–492.
- [47] P. HUERRE ET P. MONKEWITZ, *Absolute and convective instabilities in free shear layers.*, J. Fluid Mech., 159 (1985), p. 151–168.
- [48] A. JAMESON, W. SHMIDT ET E. TURKEL, *Numerical solution of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time stepping schemes*, AIAA Paper, (1981), p. 81–1259.
- [49] J. JIMENEZ, *Stability of a pair of corotating vortices*, Phys. Fluids, 18 (1974), p. 1580–1581.
- [50] J. PRIEUR ET W. R. SPLETTSTOESSER, *Erato : an onera-dlr cooperative programme on aeroacoustique rotor optimisation*, 25th European Rotorcraft Forum, Rome, Italy, (1999).
- [51] R. KERSHWELL, *Elliptical instability*, annu. Rev. Fluid Mech, 34 (2002), p. 83–113.
- [52] L. D. LANDAU ET E. M. LIFSCHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, London, 1958.
- [53] M. LANDMAN ET P. SAFFMAN, *The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid.*, Phys. Fluids, 30 (1987), p. 2339–2342.
- [54] F. LAPORTE, *Simulation numérique appliqué à la caractérisation et aus instabilités de tourbillons de sillage d'avions de transport*, Thèse doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002.

- [55] F. LAPORTE ET A. CORJON, *Direct numerical simulations of the elliptic instability of a vortex pair*, Phys. Fluids, 12 (2000), p. 1016–1031.
- [56] S. LE DIZES, *Non axisymétrique vortices in two dimensionnal flows*, J. Fluid. Mech., (2000).
- [57] S. LE DIZES ET F. LAPORTE, *Theoretical predictions for the elliptical instability in a two vortex flow*, J. Fluid. Mech., 471 (2002), p. 169–201.
- [58] J. G. LEISHMAN, A. BAKER ET A. J. COYNE, *Measurments of rotor tip vortices using three-component laser doppler velocimetry*, Fairfield, CT, 11-13 oct 1995, AHS Aeromechanics Specialists Meeting.
- [59] A. LERAT, C. SIDES ET V. DARU, *An implicite finite-volume method for solving the euler equations*, Lecture Notes in Physics, 170 (1982), p. 343–349.
- [60] L. M. MACK, *Boundary layer linear stability theory*, Phys. Fluids, 15 (2003), p. 1861–1874.
- [61] F. MAGOULES, F. X. ROUX ET S. SALMON, *Optimal discrete transmission conditions for a non-overlapping domain decomposition methode for the helmoltz equation*, SIAM J. Sci Comput., 25 (2004), p. 1497–1515.
- [62] F. MAGOULES, F. X. ROUX ET L. SERIES, *Algebraic dirichlet-to-neumann mapping for linear elasticity problems with extreme contrasts in the coefficients*, App. Math. Modelling, 30 (2006), p. 702–713.
- [63] W. V. R. MALKUS, *An experimental study of global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder*, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 48 (1989), p. 123–134.
- [64] L. MARTINELLI, *Calculation of viscous flows with a multigrid method*, Thèse de doctorat, Princeton University, (1987).
- [65] Y. MAUFFREY, G. RAHIER ET J. PRIEUR, *Numerical investigation on blade-wake interaction noise. toward a better understanding of BWI mechanisms.*, Maastricht, PAYS-BAS, september 2006 2006, 32nd European Rotorcraft Forum.
- [66] K. W. MCALISTER, *Rotor wake development during first revolution*, AHS journal, 49 (2004), p. 371–390.
- [67] P. MEUNIER ET T. LEWEKE, *Elliptic instability of a co-rotating vortex pair.*, J. Fluid. mech, 533 (2005), p. 125 – 159.
- [68] A. MICHALKE, *Survey on jet instability theory.*, Prog. Aerospace Sci, 21 (1984), p. 159–199.
- [69] D. W. MOORE ET P. G. SAFFMAN, *The instability of a straight vortex filament filament in a strain field*, Proc. R. Soc. Lon, 346 (1975), p 413.
- [70] P. OTHÉGUY, *Dynamique de l'appariement tourbillonnaire en milieu stratifié et stratifié tournant*, Thèse doctorat, Thèses. Ecole Polytechnique X, 2005.
- [71] R. T. PIERREHUMBERT, *Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid*, Phys. Rev. Lett., 57 (1986), p. 2157–2159.
- [72] J. PRIEUR ET A. DURAND, *Etude du bruit d'interaction pale-sillage (BWI) des rotors d'hélicoptère : première exploitation des résultats d'essais hart2.*, rap. tech., ONERA, 2004.
- [73] G. RAHIER, *Modélisation de l'interaction profil-tourbillon et application au rotor principal d'hélicoptère en présence d'interactions pale-tourbillon.*, Thèse doctorat, Université Paris VI, 1996.

- 
- [74] G. RAHIER ET Y. DELRIEUX, *Blade vortex interaction noise prédiction using a rotor wake roll-up model.*, J. of Aircraft, 34 (1997), p. 29–41.
- [75] O. REYNOLDS, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels.*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 174 (1883), p. 935–982.
- [76] P. G. SAFFMAN, *Vortex dynamics*, Cambridge University Press, 1992.
- [77] O. SAUNIER, S. PERON, G. JEANFAIVRE, C. BENOIT ET A. LERAT, *High-order accurate cartesian partitioning methods. application to rotor flow*, Kazan, Russie, Sept 2007, 33rd European Rotorcraft Forum - ERF 2007.
- [78] M. SCULLY ET J. SULLIVAN, *Helicopter rotor wake geometry and airloads and development of laser doppler velocimeter for use in helicopter rotor wakes*, Experiments in Fluids, 11 (1991), p. 73–76.
- [79] L. SERIES, F. FEYEL ET F. X. ROUX, *Une méthode de décomposition de domaine à deux multiplicateurs de lagrange*, 6ème congrès national en calcul de structures, 2003.
- [80] D. SIPP, *Self-adaptation and viscous selection in concentrated two-dimensional vortex dipoles*, Phys OF Fluids, 12 (2000), p. 245–248.
- [81] ———, *weakly nonlinear saturation of short wave instabilities*, Phys. Fluids, (2000).
- [82] D. SIPP ET L. JACQUIN, *Three-dimensional centrifugal-type instabilities of two-dimensional flows in rotating systems*, Phys. Fluids, 12 (2000), p. 1740–1748.
- [83] P. SPIEGEL, *Prévision et Analyse du Bruit Emis par un Rotor Principal d’Hélicoptère en Présence d’Interaction Pale-Tourbillon*, Thèse doctorat, Thèse de doctorat de l’ONERA, 1996.
- [84] W. SPLETTSTOESSER, R. KUBE, W. WAGNER, U. SEELHORST, A. BOUTIER, F. MICHELI, E. MERCKER ET K. PENGEL, *Key results from a higher harmonic control aeroacoustic rotor test (hart)*, Journal of the AHS, (1997).
- [85] V. THEOFILIS, *Advance in global linear instability analysis of nonparallel and three dimensionnal flows*, Prog. in Aeros. Sc., 39 (2003), p. 249–315.
- [86] T. LEWEKE ET C. WILLIAMSON, *Vortex dynamics in the cylinder wake*, Annu. Rev. Fluid. Mech., 28 (1996), p. 477–539.
- [87] B. VAN DER WALL, *2nd HHC aeroacoustic rotor test (hart 2) ? part 1 : Test documentation*, rap. tech., DLR, 2003.
- [88] B. VAN DER WALL ET C. BURLEY, *2nd HHC aeroacoustic rotor test (hart 2) ? part 2 : Representative results*, rap. tech., DLR, 2005.
- [89] G. H. VATISTAS, V. KOZEL ET W. MIH, *A simpler model for concentrated vortices*, Experiments in Fluids, 11 (1991), p. 73–76.
- [90] Y. VENTRIBOUT, *Contrôle des perturbations aéroacoustiques pas impédances de parois : application à un modèle de matériaux poreux.*, Thèse doctorat, ENSAE, Janvier 2006.
- [91] F. WALEFFE, *On three dimensionnal instability of strained vortex*, Phys. Fluids, (1990), p 76.
- [92] S. E. WIDNALL, D. B. BLISS ET C. TSAI, *instability of short waves on a vortex ring*, J. Fluid. Mech., 66 (1974), p. 35–47.
- [93] K. WITMMER ET W. J. DEVENPORT, *Turbulence structure resulting from a perpendicular airfoil vortex interaction.*, New Orleans, LA, june 1996, 27th Fluid Dynamics Conference.

- [94] K. WITMMER, W. J. DEVENPORT ET S. A. L. GLEGG, *Perpendicular blade vortex interaction.*, AIAA Journal, (1995).
- [95] K. S. WITTMER, W. J. DEVENPORT ET C. W. WENGER, *Turbulence structure resulting from a vortex/blade tip interaction*, journal of the American Helicopter Society, 44 (1999), p. 141–149.

# Annexe A

## Application de la méthode harmonique dans le cas 2D-axi

### A.1 Introduction

Cette annexe présente la discrétisation des équations d'Euler linéarisées en formulation harmonique dans le cas 2D-axisymétrique et quelques résultats de calculs. Ces calculs ont été effectués dans le cadre d'un contrat industriel.

Cette formulation a été implémentée par C. Peyret (ONERA) dans le code SPACE. Le système linéaire issu de la discrétisation est ensuite résolu par la méthode FETI présentée dans cette thèse.

### A.2 Équations d'Euler linéarisées

On se place dans le repère  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  où  $\mathbf{e}_x$  est un vecteur unitaire colinéaire à l'axe longitudinal,  $\mathbf{e}_r$  un vecteur unitaire colinéaire à l'axe radial et  $\mathbf{e}_\theta$  tel que  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  forme une base orthonormée directe.

Il existe plusieurs modèles physiques pour propager des ondes acoustiques dans un milieu inhomogène. Le système des équations d'Euler linéarisées constitue un des modèles les plus précis de l'acoustique linéaire. Ce système d'équations linéaires aux dérivées partielles constitue un système de Friedrich pour lequel le théorème de Godonov affirme que le système est symétrisable s'il existe une entropie mathématique. Dans la cas d'une formulation harmonique, si  $\mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, w_0)$  est le vecteur vitesse exprimé dans la base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ , si  $\varphi(x, r, \theta) = \varphi(x, r) \exp(-jm\theta)$  alors, en introduisant la variable  $\varphi = (u_1, v_1, w_1, a_0 \rho_1 / \rho_0)^3$ , le système des équations d'Euler linéarisées s'écrit :

$$\begin{aligned} i\omega \varphi + [\mathcal{A}_x \partial_x] \varphi + [\mathcal{A}_r \partial_r] \varphi + \frac{1}{r} [\mathcal{A}_\theta \partial_\theta] \varphi + [\mathcal{B}] \varphi &= \mathbf{0}, \\ \iff i\omega \varphi + [\mathcal{A}_x \partial_x] \varphi + [\mathcal{A}_r \partial_r] \varphi - \frac{jm}{r} [\mathcal{A}_\theta] \varphi + [\mathcal{B}] \varphi &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \mathcal{O}(x^2)$

avec :

$$\mathcal{A}_x = \begin{bmatrix} u_0 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_r = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & v_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_\theta = \begin{bmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & w_0 \end{bmatrix},$$

et :

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \partial_x u_0 & \partial_r u_0 & \frac{1}{r} \partial_\theta u_0 & -\partial_x a_0 \\ \partial_x v_0 & \partial_r v_0 & \frac{1}{r} \partial_\theta v_0 & -\partial_r a_0 \\ \partial_x w_0 & \partial_r w_0 & \frac{1}{r} \partial_\theta w_0 & -\frac{1}{r} \partial_\theta a_0 \\ \frac{a_0}{\rho_0} \partial_x \rho_0 & \frac{a_0}{\rho_0} \partial_r \rho_0 & \frac{a_0}{\rho_0} \frac{1}{r} \partial_\theta \rho_0 & (\gamma - 1) (\partial_x u_0 + \partial_r v_0 + \frac{1}{r} \partial_\theta w_0 + \frac{1}{r} v_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_0}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut montrer que la matrice  $\mathcal{A}_x \partial_x + \mathcal{A}_r \partial_r - \frac{jm}{r} \mathcal{A}_\theta$  est symétrique, elle sera notée  $\mathcal{A}_i \partial_i$  par la suite.

### A.3 Formulation variationnelle

Nous considérons un espace fonctionnel composé par un ensemble  $\{w^k, k \in N\}$  de polynômes d'ordre  $k$  à l'intérieur de chaque cellule. Cet espace peut présenter une discontinuité sur les bords des cellules. La méthode de Galerkin discontinue revient à chercher une solution discrète  $\varphi_h \in W^k(\omega_h)$ . La continuité par morceau vérifiée par l'espace fonctionnel conduit à écrire la formulation faible des équations d'Euler linéarisées comme une somme de formulations faibles vérifiées au niveau des cellules et de relier les cellules des flux.

Pour l'élément local  $\omega_h$ , la formulation faible s'écrit :

$$\forall h, \forall \psi_h \in W^k(\omega_h), \int_{\omega_h} (i\omega \varphi_h + \mathcal{A}_i \partial_i \varphi_h + \mathcal{B} \varphi_h) \cdot \psi_h d\Omega + \oint_{\partial\omega_h} \mathcal{M}(n) (\varphi_h^+ - \varphi_h^-) \cdot \psi_h^- d\Gamma = \int_{\omega_h} \mathbf{g} \cdot \psi_h d\Omega,$$

où  $\varphi^+$  (respectivement  $\varphi^-$ ) correspond à la trace extérieure (respectivement trace intérieure) de  $\varphi$  et  $\mathbf{g}$  est la source et  $\mathcal{M}$  est un opérateur de frontière. En sommant l'ensemble des contributions de chaque cellule sur tout le domaine, on obtient :

$$\mathcal{L}(\varphi_h, \psi_h) = \int_{\Omega} (i\omega \varphi_h + \mathcal{A}_i \partial_i \varphi_h + \mathcal{B} \varphi_h) \cdot \psi_h d\Omega + \sum_h \oint_{\partial\omega_h} \mathcal{M}(n) (\varphi_h^+ - \varphi_h^-) \cdot \psi_h^i d\Gamma_h - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \psi_h d\Omega = 0. \quad (\text{A.1})$$

Le premier et le troisième termes sont habituellement les mêmes pour toute méthode de Galerkin discontinue alors que le deuxième terme peut varier. La méthode retenue généralise la méthode de caractéristiques dans le cas 1D. Comme  $\mathcal{A}_i n_i$  est symétrique, la matrice est diagonalisable et peut être décomposée en une partie positive (ensemble des valeurs propres positives) et une partie négative (ensemble des valeurs propres négatives)  $\mathcal{A}_i n_i = [\mathcal{A}_i n_i]^+ + [\mathcal{A}_i n_i]^-$ . En posant,

$$\mathcal{A}_i n_i = [\mathcal{A}_i n_i]^-,$$

on obtient les schémas décentrés mis en œuvre dans le code SPACE qui ont l'avantage de présenter la plus grande robustesse. Pour cette méthode, la formulation faible conduit à rechercher :

$$\left\{ \varphi_h \in W^k(\omega_h) \mid \forall \psi_h \in W^k(\omega_h); \mathcal{L}(\varphi_h, \psi_h) = 0 \right\},$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi_h, \psi_h) &= \int_{\Omega} \psi_h \cdot i\omega \varphi_h + \int_{\Omega} \psi_h \cdot \mathcal{A}_i \partial_i \varphi_h + \int_{\Omega} \psi_h \cdot \mathcal{B} \varphi_h \\ &+ \oint_{\partial\psi_h|\partial\Omega} \psi_h \cdot [\mathcal{A}_i n_i]^- (\varphi_h^+ - \varphi_h^-) + \oint_{\partial\omega_h \cap \partial\Omega} \psi_h \cdot (\mathcal{M} \varphi_h - \mathbf{g}_s) - \int_{\Omega} \psi_h \cdot \mathbf{g}_v. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Plusieurs termes apparaissent dans l'équation (A.2) :

- le premier terme est la matrice locale de masse (diagonalisable par bloc),
- le deuxième est la matrice locale de rigidité (diagonalisable par bloc),
- le troisième est un produit matriciel (diagonalisable par bloc),
- le quatrième est la matrice locale de rigidité de bord qui interconnecte les éléments,
- le cinquième permet d'introduire les conditions aux limites,
- le sixième permet d'introduire les sources acoustiques.

## A.4 Formulation variationnelle axisymétrique

### A.4.1 Les contributions de volumes

Pour le cas 2D-axi  $(x, r, \theta)$ , l'élément de volume  $d\Omega$  vaut  $r dx dr d\theta$ . En reportant cette égalité dans l'intégrale (A.1), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi_h \cdot [i\omega + A_i \partial_i + B] \varphi_h d\Omega &= \iiint_{x r \theta} \psi_h \cdot \left[ i\omega + A_x \partial_x + A_r \partial_r + \frac{1}{r} A_{\theta} \partial_{\theta} + B \right] \varphi_h r dx dr d\theta \\ &= 2\pi \iint_{r z} \psi_h \cdot \left[ i\omega + A_x \partial_x + A_r \partial_r - \frac{j m}{r} A_{\theta} + B \right] \varphi_h r dx dr \end{aligned}$$

### A.4.2 Les contributions de surfaces

Dans le repère  $(x, r, \theta)$ , les schémas décentrés s'écrivent :

$$[\mathcal{A}_i n_i]^- = \inf(0, \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \begin{bmatrix} 1 - n_x^2 & -n_x n_r & 0 & 0 \\ -n_x n_r & 1 - n_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} - a_0}{2} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_r & 0 & -n_x \\ n_x n_r & n_r^2 & 0 & -n_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n_x & -n_r & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et l'élément de surface  $d\Gamma$  vaut  $2\pi r dr$  ou  $2\pi r dx$  :

$$\begin{aligned} &\sum_h \oint_{\partial\omega_h} \mathcal{M}(n) (\varphi_h^o - \varphi_h^i) \cdot \psi_h^i d\Gamma_h \\ &= 2\pi \sum_h \oint_{\partial\omega_h} \psi_h^i \cdot \mathcal{M}(n) (\varphi_h^o - \varphi_h^i) r dr \end{aligned}$$



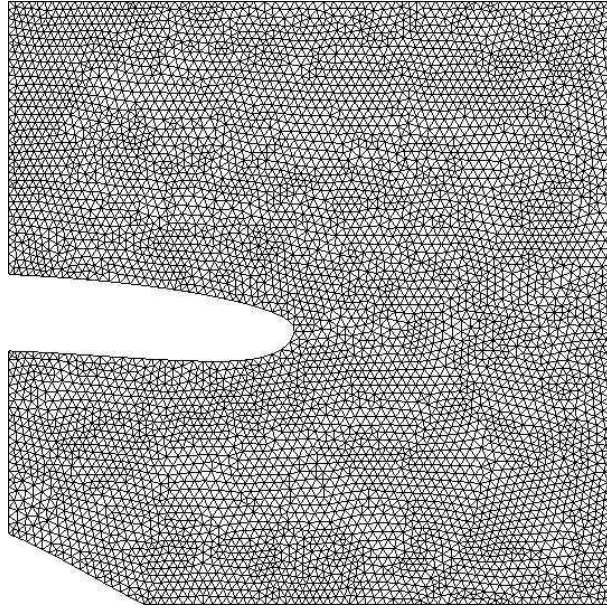


FIG. A.1 – Maillage aéroacoustique

## A.5 Application

On présente ici des résultats d'applications obtenus dans le cadre d'un contrat industriel. Pour des raisons de confidentialité, les échelles ont été supprimées et les dimensions ne seront pas données.

### A.5.1 Initialisation

La figure A.1 présente la maillage considéré pour les simulations. Ce maillage comporte 11865 éléments et 6117 noeuds. Une solution aérodynamique issue d'un calcul RANS effectué sur un maillage structuré multibloc est d'abord interpolé sur ce maillage. Les figures A.2, A.3, A.4 montrent respectivement les champs de la vitesse du son, de la densité et de la norme de la vitesse de cette solution après interpolation sur le maillage aéroacoustique A.1.

Une source modale de perturbation est ensuite introduite. Cette perturbation peut être exprimée sous la forme :

$$p(t, x, r, \theta) = p_n(r) e^{j(\omega t - k_x x - m\theta)}. \quad (\text{A.3})$$

Pour les calculs harmoniques,  $\omega$  la fréquence,  $m$  le nombre d'onde azimutal sont des paramètres d'entrée. La valeur de  $p_n$ , où  $n$  désigne l'ordre radial du mode, doit être donnée en chaque noeud.

## A.6 Resultats

Des calculs ont été menés en utilisant le solveur harmonique et le solveur temporel. Peu de calculs ont abouti en temporel, car des problèmes de stabilité sont apparus lorsque les ondes approchaient de l'axe de symétrie. Le solveur harmonique, en revanche, a permis de mener à

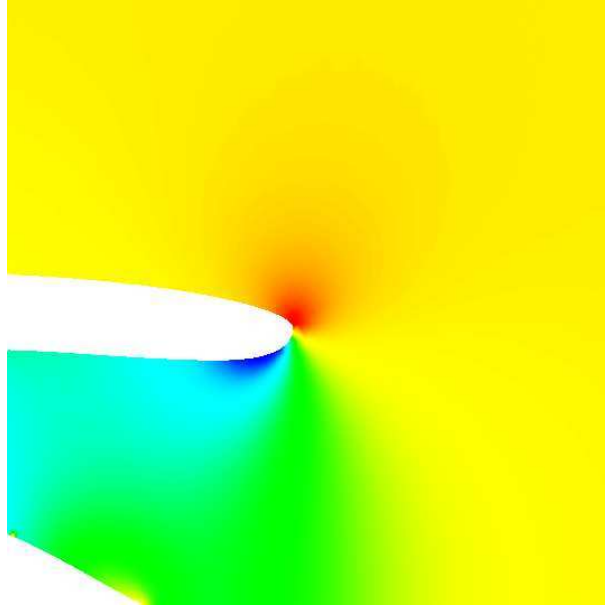


FIG. A.2 – contours de la vitesse du son sur le maillage aéroacoustique après interpolation.

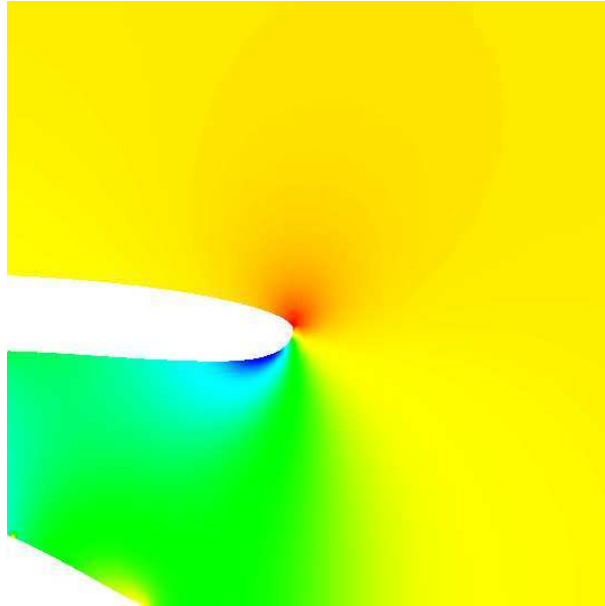


FIG. A.3 – contours de la densité sur le maillage aéroacoustique après interpolation.

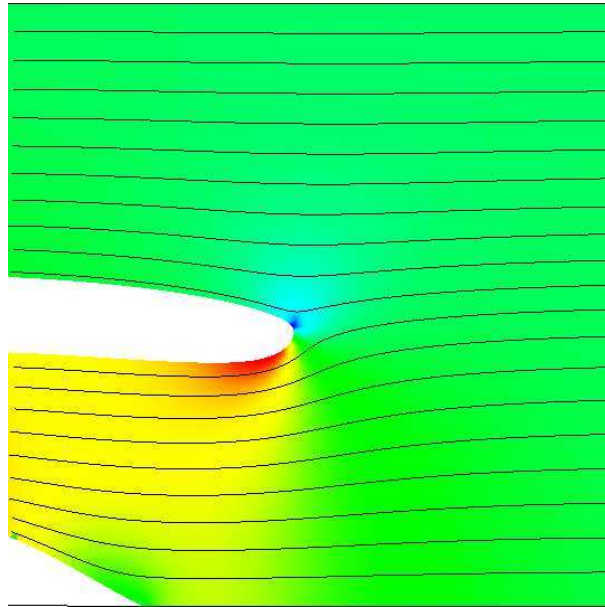


FIG. A.4 – Contours de la norme de la vitesse et lignes de courant sur le maillage aéroacoustique après interpolation.

terme tous les calculs.

Des résultats des calculs sont montrés sur les figures A.5 et A.6 présentant les contours de la partie réelle des perturbations de pression pour un mode  $m = 13$ ,  $n = 3$   $\omega = 2\pi f$  avec  $f = 1015$  Hz.

La figure A.5 montre le résultat d'un calcul sans écoulement porteur. La figure A.6 montre la solution d'un calcul pour le champ porteur présenté dans la section précédente.

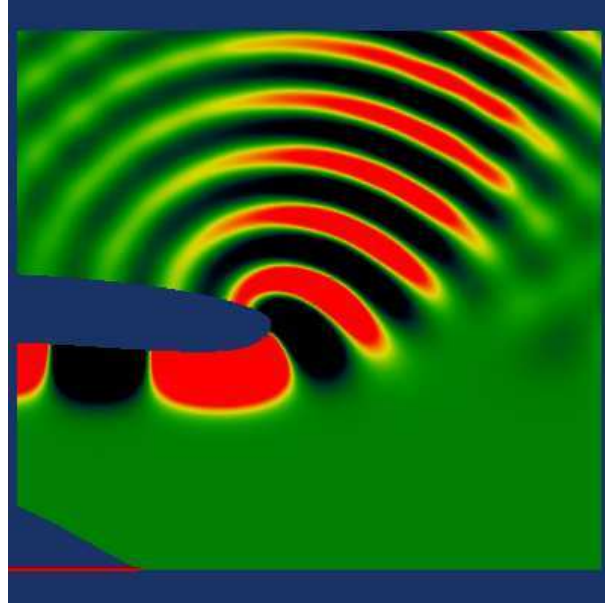


FIG. A.5 – Contours de la pression acoustique pour un écoulement porteur uniforme.

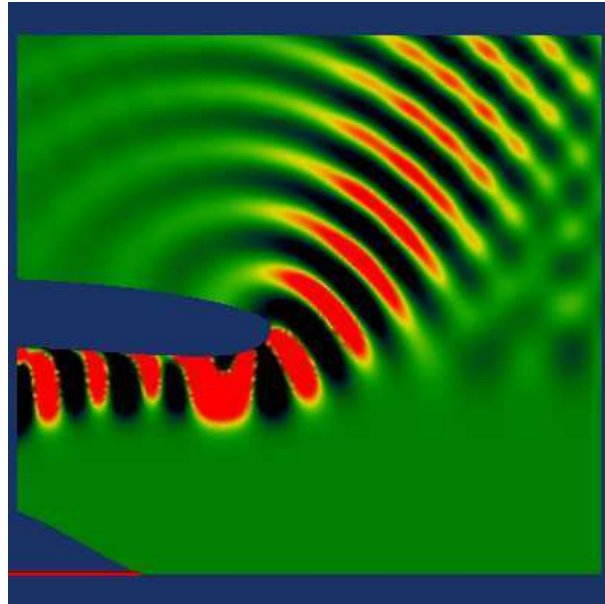


FIG. A.6 – Contours de la pression acoustique pour un écoulement porteur non-uniforme.



# Annexe B

## Méthode numérique

L'objectif de cette annexe est de présenter plus en détail la méthode numérique utilisée au cours de ce travail de thèse et à laquelle il est fait référence à de nombreuses reprises dans ce mémoire.

La méthode de discrétisation considérée est la méthode des volumes finis, dans laquelle les inconnues sont des valeurs moyennes dans les cellules de discrétisation, affectées au centre des cellules, *i.e.* dans une approche *cell-centered*.

Un système de lois de bilan est considéré, sous la forme intégrale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} \mathbf{W} \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega(t)} \left[ \overline{\overline{F_c}} [\mathbf{W}, \mathbf{s}] + \overline{\overline{F_d}} [\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W}] \right] \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \int_{\Omega(t)} \mathbf{T} [\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W}] \, d\Omega \quad (\text{B.1})$$

où  $\Omega(t)$  est le domaine de calcul de frontière  $\partial\Omega(t)$  en mouvement dans un repère absolu, de normale extérieure unitaire  $\mathbf{n}(t)$  et de vitesse  $\mathbf{s}(t)$ .  $\mathbf{W}$  représente le vecteur des inconnues conservatives,  $\overline{\overline{F_c}}$  le tenseur des flux convectifs,  $\overline{\overline{F_d}}$  le tenseur des flux diffusifs et  $\mathbf{T}$  le vecteur des termes sources.

### B.1 Discrétisation en espace

#### B.1.1 Flux convectifs

Le schéma considéré dans cette étude pour discrétiser la partie convective du flux numérique est le schéma centré de Jameson [48]. Ce schéma s'écrit comme la somme d'une discrétisation dite "centrée simple" et d'un terme de dissipation numérique. Le rôle de ce terme de dissipation est de stabiliser le schéma et aussi d'éviter les oscillations parasites.

L'approximation du flux convectif s'écrit alors :

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}_\Omega, \mathbf{W}_{\Omega_l}) \cdot \mathbf{N}_{\Sigma_l} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_c(\mathbf{W}_\Omega) + \mathbf{F}_c(\mathbf{W}_{\Omega_l})] \cdot \mathbf{N}_{\Sigma_l} - \mathbf{D}_{\Sigma_l} \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathbf{W}_\Omega$  représente le vecteur des inconnues conservatives dans la cellule considérée  $\Omega$  et  $\mathbf{W}_{\Omega_l}$  le vecteur des inconnues conservatives dans la cellule voisine  $\Omega_l$ , adjacente à la face  $\Sigma_l$ .  $\mathbf{D}_{\Sigma_l}$  désigne le flux de dissipation artificielle.

Le flux convectif est approché en évaluant la densité de flux aux centres des cellules :

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{W}_\Omega) = \left[ \begin{array}{c} \rho \mathbf{V} \\ \left[ \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + p \overline{Id} \right] \\ \left[ \rho E \mathbf{V} + p \mathbf{V} \right] \end{array} \right]_\Omega \quad (\text{B.3})$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $\mathbf{V}$  la vitesse absolue de l'écoulement,  $p$  la pression, et  $E = e + \frac{|V|^2}{2}$  l'énergie totale spécifique, avec  $e$  l'énergie interne spécifique.

Le schéma de Jameson s'écrit, dans l'approche des volumes finis, sous la forme semi-discrétisée en espace suivante :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}_\Omega = -\frac{1}{\nu(\Omega)} \left[ \sum_{l=1}^6 \frac{1}{2} [\mathbf{F}_c[\mathbf{W}_\Omega] + [\mathbf{W}_{\Omega_l}]] \cdot \mathbf{N}_{\Sigma_l} - \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_j - \mathbf{D}_k - \nu(\Omega) \mathbf{T}_\Omega \right] \quad (\text{B.4})$$

$\mathbf{D}_i$ ,  $\mathbf{D}_j$  et  $\mathbf{D}_k$  représentant l'opérateur de dissipation artificielle, appliqué à la cellule  $ijk$  dans les directions  $i$ ,  $j$  et  $k$  du maillage structuré, et  $\nu(\Omega)$  le volume de la cellule  $\Omega$ .

Cet opérateur de dissipation comporte deux termes de dissipation numérique : un terme de dissipation non linéaire du second ordre permettant de bien capturer les discontinuités de l'écoulement, et un terme de dissipation linéaire du quatrième ordre introduit afin de rendre le schéma dissipatif au sens de Kreiss.

Dans la direction  $i$ , l'opérateur de dissipation artificielle se décompose donc de la manière suivante :

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i^{(2)} - \mathbf{D}_i^{(4)} \quad (\text{B.5})$$

Ce terme de dissipation du second ordre peut s'écrire, en chaque point  $ijk$ , comme la différence de termes de différence première calculés aux interfaces  $i - \frac{1}{2}$  et  $i + \frac{1}{2}$  :

$$\mathbf{D}_i^{(2)} = \mathbf{D}_i^{(1)}_{i+\frac{1}{2}jk} - \mathbf{D}_i^{(1)}_{i-\frac{1}{2}jk} \quad (\text{B.6})$$

De même le terme de dissipation du quatrième ordre peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{D}_i^{(4)} = \mathbf{D}_i^{(3)}_{i+\frac{1}{2}jk} - \mathbf{D}_i^{(3)}_{i-\frac{1}{2}jk} \quad (\text{B.7})$$

avec  $\mathbf{D}_i^{(3)}$  un terme de différence troisième.

Pour un flux de dissipation artificielle scalaire, comme c'est le cas dans cette étude, le terme de différence première s'écrit :

$$\mathbf{D}_i^{(1)}_{i+\frac{1}{2}jk} = \epsilon_{i+\frac{1}{2}jk}^{(2)} \mathbf{d}_{i+\frac{1}{2}jk}^s \quad (\text{B.8})$$

le coefficient  $\epsilon_{i+\frac{1}{2}jk}^{(2)}$  étant défini par :

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2}jk}^{(2)} = k_2 \max \left( \nu_{ijk}^{(i)}, \nu_{i+1jk}^{(i)} \right) \quad (\text{B.9})$$

où  $k_2$  est le coefficient de dissipation du second ordre et  $\nu_{ijk}^{(i)}$  un senseur permettant de détecter les discontinuités de l'écoulement. Le senseur est calculé à partir de la pression statique  $p$  et de la vitesse  $\|\mathbf{V}\|$  par la formule suivante :

$$\nu_{ijk}^{(i)} = \sigma \frac{|p_{i+1jk} - 2p_{ijk} + p_{i-1jk}|}{|p_{i+1jk} + 2p_{ijk} + p_{i-1jk}| + \epsilon} + (1 - \sigma) \frac{|||\mathbf{V}|||_{i+1jk} - 2||\mathbf{V}||_{ijk} + ||\mathbf{V}||_{i-1jk}|}{|||\mathbf{V}|||_{i+1jk} + 2||\mathbf{V}||_{ijk} + ||\mathbf{V}||_{i-1jk}| + \epsilon} \quad (\text{B.10})$$

avec  $\sigma$  un réel compris entre 0 et 1, et valant généralement 1.

Le terme  $\mathbf{d}_{i+\frac{1}{2}jk}^s$  est quant à lui défini par :

$$\mathbf{d}_{i+\frac{1}{2}jk}^s = \bar{\rho}_{c_{i+\frac{1}{2}jk}} (\mathbf{W}_{i+1jk} - \mathbf{W}_{ijk}) \quad (\text{B.11})$$

où  $\bar{\rho}_{c_{i+\frac{1}{2}jk}}$  désigne une évaluation du rayon spectral  $\rho_{c_{i+\frac{1}{2}jk}}$  de la matrice jacobienne des termes convectifs. Cette quantité peut être modifiée par une correction de Martinelli [64].

Le terme de différence troisième peut s'écrire de différentes manières. L'approche retenue dans cette étude conduit à utiliser la formule suivante pour ce terme :

$$\mathbf{D}\mathbf{i}_{i+\frac{1}{2}jk}^{(3)} = \epsilon_{i+\frac{1}{2}jk}^{(4)} \left( \mathbf{d}_{i+\frac{3}{2}jk}^s - 2\mathbf{d}_{i+\frac{1}{2}jk}^s + \mathbf{d}_{i+\frac{1}{2}jk}^s \right) \quad (\text{B.12})$$

avec le coefficient  $\epsilon_{i+\frac{1}{2}jk}^{(4)}$  défini par :

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2}jk}^{(4)} = \max \left( 0, k_4 - \epsilon_{i+\frac{1}{2}jk}^{(2)} \right) \quad (\text{B.13})$$

où  $k_4$  est le coefficient de dissipation du quatrième ordre.

### B.1.2 Flux diffusifs

La discrétisation des flux de diffusion se déroule en deux étapes. La première consiste à évaluer les densités de flux, ce qui nécessite une évaluation numérique des gradients de la vitesse, de la température et éventuellement des quantités turbulentes, à l'aide d'un schéma de discrétisation. La deuxième étape consiste à discrétiser les flux de diffusion et à en effectuer le bilan.

Le gradient du vecteur vitesse  $\mathbf{V}$  au centre de la cellule de discrétisation  $\Omega$  est évaluée par la formule suivante :

$$(\nabla \mathbf{V})_{\Omega} = \frac{1}{\nu(\Omega)} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{V} \, d\Omega = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\nu(\Omega)} \int_{\Sigma_i} \mathbf{V} \otimes \mathbf{n} \, d\Sigma \quad (\text{B.14})$$

où les six faces de la cellule de discrétisation  $\Omega$  sont considérées,  $\nu(\Omega)$  étant le volume de la cellule  $\Omega$  et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure.

La vitesse sur une face  $\Sigma_i$ , interface entre la cellule considérée  $\Omega$  et la cellule adjacente  $\Omega_i$  est donnée par la formule :

$$\int_{\Sigma_i} \mathbf{V} \otimes \mathbf{n} \, d\Sigma = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{\Omega} + \mathbf{V}_{\Omega_i}) \otimes \mathbf{N}_{\Sigma_i} \quad (\text{B.15})$$

Le bilan des flux de diffusion s'écrit alors :

$$\mathbf{R}\mathbf{d} = \sum_{i=1}^6 \int_{\Sigma_i} \mathbf{F}\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma \quad (\text{B.16})$$

avec la densité de flux sur la face  $\Sigma_i$  calculée à partir des densités de flux dans les cellules  $\Omega$  et  $\Omega_i$  par :

$$\int_{\Sigma_i} \mathbf{F}\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \frac{1}{2} (\mathbf{F}\mathbf{d}_{\Omega} + \mathbf{F}\mathbf{d}_{\Omega_i}) \cdot \mathbf{N}_{\Sigma_i} \quad (\text{B.17})$$



## B.2 Intégration en temps

Deux méthodes d'intégration en temps sont utilisées dans ce mémoire et présentées ici pour le système (B.1), écrit sous une forme découplée temps/espace :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}_\Omega = -\frac{1}{\nu(\Omega)} \left[ \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}(\mathbf{W}_\Omega, \mathbf{W}_{\Omega_i}) \cdot \mathbf{N}_{\Sigma_i} - \nu(\Omega) \mathbf{T}_\Omega \right] = -\frac{1}{\nu(\Omega)} \mathbf{R}_\Omega \quad (\text{B.18})$$

avec  $\mathbf{F}(\mathbf{W}_\Omega, \mathbf{W}_{\Omega_i})$  le flux numérique et  $\mathbf{R}_\Omega$  le résidu de modélisation, contenant les contributions de la discrétisation spatiale du flux convectif, du flux diffusif et du terme source.

### B.2.1 Schéma explicite de Runge-Kutta à 4 pas

Une formulation de la méthode de Runge-Kutta à 4 pas, permettant d'avancer la solution numérique du pas de temps  $t^n$  au pas de temps  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} W^{(0)} = W^n \\ \Delta W^{(1)} = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{\nu(\Omega)} R_\Omega^{(0)} \\ W^{(1)} = W^{(0)} + \Delta W^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta W^{(q)} = -\alpha_q \frac{\Delta t}{\nu(\Omega)} R_\Omega^{(q-1)} \\ W^{(q)} = W^{(0)} + \Delta W^{(q)} \\ \vdots \\ W^{(n+1)} = W^{(4)} \end{array} \right. \quad (\text{B.19})$$

avec  $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha_3 = \frac{1}{2}$  et  $\alpha_4 = 1$ .

L'évolution du résidu de modélisation  $\mathbf{R}_\Omega$  à chaque pas Runge-Kutta dépend de l'itération Runge-Kutta. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, comme considéré dans cette étude, il est possible de considérer le temps comme un paramètre itératif permettant de converger vers une solution stationnaire de (B.18). Dans l'expression du résidu explicite, le flux convectif est recalculé à chaque pas Runge-Kutta alors que le flux diffusif, le terme de dissipation numérique et le terme source sont figés à la première étape, afin de pas augmenter inutilement le coût de l'intégration en temps. Ainsi, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_\Omega^{(q-1)} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}^{(q-1)} \cdot \mathbf{N}_{\Sigma_i} - \nu(\Omega) \mathbf{T}_\Omega^{(0)} \\ \mathbf{F}^{(q-1)} = \mathbf{F}\mathbf{c}^{(q-1)} + \mathbf{F}\mathbf{d}^{(0)} - \mathbf{D}^{(0)} \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

avec  $\mathbf{F}\mathbf{d}$  une approximation spatiale "centrée simple" du flux convectif,  $\mathbf{F}\mathbf{c}$  une approximation spatiale centrée du flux diffusif et  $\mathbf{D}$  un flux de dissipation numérique.

Le schéma ainsi obtenu est précis au deuxième ordre en temps dans les régions de fluide parfait et au premier ordre dans les régions de fluide visqueux. Le pas de temps est un pas de temps local.

### B.2.2 Schéma d'Euler rétrograde

Le schéma d'Euler rétrograde, également appelé schéma Backward Euler est un cas particulier de la méthode Runge-Kutta, s'écrivant sous la forme :

$$\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n = -\frac{\Delta t}{\nu(\Omega)} \mathbf{R}_\Omega^{(n)} \quad (\text{B.21})$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\Omega^{(n)} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}^{(n)} \cdot \mathbf{N}_{\Sigma_i} - \nu(\Omega) \mathbf{T}_\Omega^{(n)} \\ \mathbf{F}^{(n)} = \mathbf{F}_c^{(n)} + \mathbf{F}_d^{(n)} \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

où  $\mathbf{F}_c$  représente une approximation spatiale du flux convectif et  $\mathbf{F}_d$  une approximation spatiale centrée du flux diffusif.

## B.3 Méthodes implicites

La recherche efficace de solutions numériques de systèmes d'équations non-linéaires nécessite l'utilisation de méthodes implicites. Sont décrites ici la méthode de lissage implicite des résidus, pour le schéma de Runge-Kutta, et des méthodes de relaxation, pour le schéma d'Euler rétrograde.

### B.3.1 Méthode de lissage implicite des résidus

Initialement développé par Lerat *et al* [59] pour le schéma de Lax-Wendroff, la méthode de lissage des résidus (également appelée IRS pour "Implicit Residual Smoothing") a été adaptée par Jameson au schéma de Runge-Kutta.

La phase implicite de lissage des résidus consiste alors à résoudre à chaque pas Runge-Kutta l'opérateur suivant, utilisant une technique de factorisation par directions alternées :

$$\left[ \prod_{l=i,j,k} I_l \right] \Delta \mathbf{W}^{(q)} = -\alpha_q \frac{\Delta t}{\nu(\Omega)} \mathbf{R}_\Omega^{(q-1)} \quad (\text{B.23})$$

avec l'expression de l'opérateur aux différences suivante :

$$I_l = 1 + \frac{\Delta t}{2\nu(\Omega)} \left[ \delta_l \left( \beta_l^E \frac{\Delta t}{\nu(\Omega)} \rho_c^2 \delta_l + \beta_l^N \frac{S^2}{\nu(\Omega)} \delta_l \rho_d \right) \right] + \frac{\beta_{k\omega} \Delta t \lambda_{k\omega}}{2} \quad (\text{B.24})$$

$\beta_l^E$ ,  $\beta_l^N$  et  $\beta_{k\omega}$  étant des paramètres scalaires indépendants du champ de variables conservatives, choisis de manière à assurer la stabilité de la méthode pour les grands pas de temps,  $\rho_c$ ,  $\rho_d$  les rayons spectraux pour les flux respectivement convectifs et diffusifs,  $\lambda_{k\omega}$  le rayon spectral du système  $k - \omega$ , et  $\delta_l$  le pas en espace.

### B.3.2 Méthode de relaxation

Une méthode de relaxation consiste à calculer une succession de solutions approchées du système exact :

$$(\mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta \mathbf{W} = -\mathbf{R} \quad (\text{B.25})$$

où  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{U}$  représentent respectivement les parties strictement inférieure, diagonale et strictement supérieure de la matrice implicite globale.

Une méthode de relaxation par balayage amont et aval est considérée ici pour obtenir une méthode symétrique de type SSOR (Symmetric Successive Over Relaxation), qui s'écrit sous la forme de deux étapes répétées à chaque cycle de relaxation :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} + \mathcal{D}) \Delta \mathbf{W}^{p+\frac{1}{2}} &= -\mathbf{R} - \mathcal{U} \Delta \mathbf{W}^{(p)} \\ (\mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta \mathbf{W}^{p+1} &= -\mathbf{R} - \mathcal{L} \Delta \mathbf{W}^{(p+\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

où  $p$  indique le numéro du cycle SSOR.

La première étape du cycle est une étape de résolution par descente et la seconde une étape de résolution par remontée.

Effectuer une seule itération de la méthode de relaxation LU-SSOR avec une initialisation nulle équivaut à utiliser un schéma avec phase implicite factorisée LU-RELAX [23], comme détaillé ci-après.

Avec une intialisation nulle de la solution, (B.26) devient :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W}_{(p=0)} &= 0 \\ (\mathcal{L} + \mathcal{D}) \Delta \mathbf{W}^{(p=\frac{1}{2})} &= -\mathbf{R} \\ (\mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta \mathbf{W}^{(p=1)} &= -\mathbf{R} - \mathcal{L} \Delta \mathbf{W}^{(p=\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

d'où :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta \mathbf{W}^{(p=1)} &= \mathcal{D} \Delta \mathbf{W}^{(p=\frac{1}{2})} \\ (\mathcal{L} + \mathcal{D}) \mathcal{D}^{-1} (\mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta \mathbf{W}^{(p=1)} &= -\mathbf{R} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

La méthode LU-RELAX présente l'avantage d'être moins coûteuse en nombre d'opérations et en stockage mémoire que la méthode LU-SSOR. La méthode LU-SSOR conduit quant à elle à une résolution quasi exacte du système, grâce à la succession de cycles de relaxation.



## Résumé

Le développement du trafic aérien autour des agglomérations est limité notamment par les nuisances sonores qu'il engendre. Il est donc indispensable de parvenir à comprendre l'origine physique de ces phénomènes afin d'en réduire les effets. Les hélicoptères, qui sont amenés à survoler les agglomérations à basse altitude, font ainsi l'objet de nombreuses études.

Le but principal de notre étude est de développer des méthodes numériques permettant d'évaluer le rôle des instabilités elliptiques de tourbillons dans la production du BWI.

La première partie de cette thèse s'intéresse aux caractéristiques du bruit produit par l'interaction d'une pale avec un tourbillon instable. Pour ce faire, une simulation des instabilités elliptiques se développant dans une paire de tourbillons analytiques corotatifs parallèles rectilignes uniformes est d'abord réalisée. Ensuite, un outil numérique, basée sur la théorie d'Amiet, est développé pour obtenir les perturbations de pression sur pale issus d'une interaction entre une pale et le tourbillon instable. Un bon accord est trouvé entre ces résultats et les données expérimentales.

Dans une deuxième partie nous nous intéressons à l'influence des caractéristiques géométriques du tourbillon d'extrémité de pale jeune isolé (cœur du tourbillon elliptique, trajectoire courbe) sur le développement des instabilités elliptiques. Pour cela le profil d'un tourbillon d'extrémité de pale a été calculé au moyen du code volumes finis. Une étude linéaire a ensuite été menée en considérant cette solution comme champ porteur, au moyen d'une méthode Euler linéarisée harmonique développée et validée au cours de cette thèse.

**Mots-clés:** BWI, hélicoptères, méthodes numérique, Galerkin discontinue, Euler linéarisées