



HAL
open science

Contribution à la commande contrainte des systèmes

Nicolas Marchand

► **To cite this version:**

Nicolas Marchand. Contribution à la commande contrainte des systèmes. Automatique / Robotique. Université de Grenoble, 2013. tel-00813273

HAL Id: tel-00813273

<https://theses.hal.science/tel-00813273>

Submitted on 15 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique et Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Nicolas Marchand

Contribution à la commande contrainte des systèmes

Thèse soutenue publiquement le **22 février 2013**,
devant le jury composé de :

Mazen Alamir, Président

DR-CNRS GIPSA-lab Grenoble

Luca Zaccarian, Rapporteur

DR-CNRS LAAS Toulouse/ Pr. à Univ. de Rome, Italie

Rogelio Lozano, Rapporteur

DR-CNRS UMI-LAFMIA Mexico

Christophe Prieur, Rapporteur

DR-CNRS GIPSA-lab Grenoble

Frédéric Boyer, Examineur

Pr à l'Ecole des Mines de Nantes

Karl-Erik Årzén, Examineur

Pr à l'Université de Lund, Suède

Olivier Sename, Examineur

Pr à Grenoble INP



*Il vaut mieux mobiliser son intelligence sur des conneries
que mobiliser sa connerie sur des choses intelligentes.*

Jacques Rouxel (1931-2004)



©aaa production 2013

Table des matières

Curriculum vitae détaillé	5
1 Curriculum vitae	5
1.1 Etat civil	5
1.2 Formation/Expérience professionnelle	5
2 Activités de recherche	6
2.1 Thématiques de recherche par mots clés et publications relatives	6
3 Responsabilités	6
3.1 Responsabilités au laboratoire	6
3.2 Participation ou responsabilités locales, régionales et nationales	7
3.3 Participation ou responsabilités dans des actions internationales	7
3.4 Activités contractuelles et responsabilités de projets de recherche <i>significatifs</i>	8
4 Activités d'encadrement de la recherche	8
4.1 Étudiants de Master recherche	8
4.2 Co-encadrement de thèses	8
4.3 Post-doctorants et ATER	10
4.4 Participation à des jurys de thèse	10
5 Activités d'enseignement	10
6 Production scientifique	11
6.1 Revues internationales	11
6.2 Chapitres de livres	12
6.3 Brevets	12
6.4 Édition de livres	12
6.5 Conférences internationales à comité de lecture	12
6.6 Contrats industriels	15
6.7 Autres	15
1 Introduction	16
1 Classification de mes travaux de recherche	17
2 Théorie de la commande des systèmes non linéaires	17
2.1 Travaux de thèse	18
2.2 Commande discontinue/prédictive des systèmes non holonomes	18
2.3 Commande basée sur événements	19
3 Robotique	20
3.1 Commande du robot Anguille	20
3.2 Estimation d'attitude	20

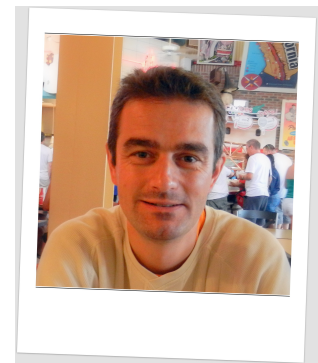
3.3	Asservissement visuel	20
4	Gestion des ressources dans les systèmes informatiques	21
4.1	Contrôle du compromis puissance/consommation	21
4.2	Contrôle d'accès des serveurs de bases	22
5	Contenu du manuscrit	22
2	Commande bornée des systèmes linéaires	24
1	Introduction	24
2	Commandes à bases de fonctions de saturations	26
2.1	Approche de Teel (1992)	27
2.2	Approche de Sussmann et al. (1994)	27
2.3	Qualités et défauts	29
2.4	Les commandes à bases de fonctions de saturations à seuils variables	30
2.5	Quelques simulations comparatives	32
3	Extension au temps échantillonné	32
4	Cas de mesures quantifiées	35
5	Conclusion	36
3	Commande bornée des robots volants	38
1	Introduction	38
2	Modélisation du corps rigide dans l'espace	39
2.1	Schéma général d'un corps rigide actionné	39
2.2	Limitations	40
2.3	Modèle mathématique du corps rigide dans l'espace	40
3	Classification du problème de commande des corps rigides	43
4	Commande contrainte de l'attitude	43
4.1	A partir de la mesure de l'attitude et de sa dérivée	44
4.2	A partir des sorties capteurs	46
4.3	Conclusion	47
5	Commande contrainte de la position	47
5.1	Commande contrainte du PVTOL	48
5.2	Commande contrainte du VTOL	57
6	Conclusion	57
4	Prospectives de recherche	58
1	Contexte	58
2	Prospectives	63
2.1	Retour de sortie événementiel	63
2.2	Retour d'état auto-événementiel robuste aux perturbations	63
2.3	Commande événementielle bio-inspirée	64
2.4	Commande événementielle des systèmes à paramètres répartis	64
2.5	Théorie des systèmes à commande événementielle	65
	Bibliographie	66
	Appendices	73

Curriculum vitae détaillé

1 Curriculum vitae

1.1 Etat civil

Nom	MARCHAND
Prénom	Nicolas
Date et lieu de naissance	18 mars 1972 à Suresnes (92)
Situation familiale	Séparé, 2 enfants
Fonction	Chargé de Recherche au CNRS Directeur adjoint de gipsa-lab Responsable du Département Automatique



1.2 Formation/Expérience professionnelle

- 2002- : **Chargé de recherche au CNRS** au Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG, UMR 5528) jusqu'au 31/12/2006 puis à Grenoble, Image, Parole, Signal et Automatique (**gipsa-lab**, UMR 5216) à partir du 01/01/2007
- 2000-2002 : **Maître de Conférences à l'Université Paris Sud**, effectuant ma recherche au Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS-UMR 8506)
- 1999-2000 : **ATER** à l'IUT B de Lyon au département Génie électrique et Informatique Industrielle (GEII) / Recherche au LAGEP (UMR 5007)
- 1996-2000 : **Doctorat** de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), spécialité Automatique-Productique,[87]
Titre : "Commande à horizon fuyant : théorie et mise en œuvre"
Soutenance : le 21 janvier 2000
Président : L. Dugard, DR CNRS, LAG
Rapporteurs : F. Lamnabhi-Lagarrigue, DR CNRS, L2S
G. Sallet, Professeur à l'Université de Metz
Directeur de thèse : H. Hammouri, Professeur à l'Université Lyon 1, LAGEP
Co-encadrant : M. Alami, Chargé de Recherches CNRS, LAG (à l'époque)
- 1994-1995 : **DEA** d'Automatique-Productique, option Automatique, à l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG)
- 1992-1995 : **Ingénieur** de l'école Nationale Supérieure d'Ingénieurs électriciens de Grenoble (ENSIEG) de l'INPG.

2 Activités de recherche

2.1 Thématiques de recherche par mots clés et publications relatives

► **Commande des robots volants (aériens, sous marins et spatiaux)**

Les recherches menées sur cette thématique portent principalement sur des travaux dans le cadre du projet ROBEA Anguille qui s'est poursuivi ensuite par l'ANR RAAMO ainsi que dans le cadre de l'ANR OVMI pour enfin se prolonger par l'ANR EVA dont je suis le porteur. Les travaux ont porté sur la stabilisation par commande prédictive rapide des robots aériens ainsi que sur la commande bornée d'assiette et de position des corps rigides et des quadricoptères avec ou sans estimation de l'assiette.

Articles de revues et chapitres de livres : [5, 8, 9, 10, 14, 16, 17] [23, 24]

Conférences internationales : [30, 36, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 60, 70, 71, 72, 75, 80, 81, 82, 83]

► **Commande pour la gestion des ressources informatiques**

Ces recherches ont porté sur l'implantation de techniques de l'automatique sur des systèmes qui ne les utilisent encore que très peu. Les travaux ont principalement porté sur la gestion du compromis puissance de calcul / énergie consommée dans les réseaux de puces de calcul dans le cadre du projet ARAVIS (et notamment avec le laboratoire TIMA et ST-Microelectronics) ainsi que sur la gestion de l'admission des serveurs de bases de données afin de maximiser un critère de qualité de service (QoS) (en collaboration avec le laboratoire LIG).

Articles de revues : [11, 12, 13]

Conférences internationales : [61, 62, 63, 64, 66, 69, 73, 76]

Brevets (en cours d'extension à l'international) : [26, 27]

► **Théorie des systèmes (commande prédictive, systèmes nonholonomes, commande bornée, commande basée sur événements)**

La théorie des systèmes est celle qui alimente les deux rubriques précédentes. Mes recherches ont porté sur deux points principaux à savoir 1) la commande non linéaire, notamment prédictive rapide et discontinue, que j'ai utilisé pour la stabilisation des robots volants mais également pour la gestion optimale du compromis puissance de calcul / énergie consommée dans les réseaux de puces de calcul ; 2) la commande bornée des systèmes linéaires que j'ai ensuite étendue à la commande bornée des corps rigides et des quadricoptères. A l'heure actuelle, mes recherches portent sur la commande événementielle qui a un lien naturel avec la commande des systèmes informatiques mais également avec une approche plus bio-inspirée de la commande des robots (comme présenté dans le chapitre 4 de prospective).

Articles de revues et chapitres de livres : [1, 2, 3, 4, 6, 7, 15, 18, 19] [20, 21, 22, 25]

Conférences internationales : [29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 56, 59, 65, 67, 62, 76, 77]

3 Responsabilités

3.1 Responsabilités au laboratoire

- Directeur adjoint de **gipsa-lab** et Responsable du département d'Automatique depuis mai 2011

- ▶ Responsable de l'équipe SysCo de novembre 2008 à mai 2011 (13 permanents en mai 2011)
- ▶ Co-responsable avec Gildas Besançon de l'équipe SysCo de décembre 2007 à novembre 2008
- ▶ Membre élu au conseil de laboratoire du LAG puis de **gipsa**-lab en tant que représentant des "chercheurs permanents" de 2003 à 2011 (2 quadriennaux)
- ▶ Responsable des séminaires de 2003 à 2007

3.2 Participation ou responsabilités locales, régionales et nationales

- ▶ Membre de la promotion 2012-2013 des futurs dirigeants potentiels du CNRS
- ▶ Co-responsable avec Nicolas Halbwachs puis Florence Maraninchi de l'action centrale "Pervasive Computing Systems" du LABEX Persyval (organisé en quatre actions) et membre de son comité exécutif
- ▶ Responsable scientifique **gipsa**-lab de l'EQUIPEX Robotex et membre de son comité scientifique
- ▶ Membre du comité de pilotage de l'institut CARNOT LSI
- ▶ Membre du comité scientifique des Journées Nationales de Robotique 2013
- ▶ Responsable de la spécialité Automatique-Productique à l'école doctorale EEATS de septembre 2009 à mai 2011
- ▶ Créateur et co-animateur avec mes collègues M. Alamir (**gipsa**-lab) et P. Poignet (LIRMM) du groupe de travail du GDR-MACS "La commande prédictive non linéaire" de septembre 2003 à septembre 2007
- ▶ Membre nommé de la commission de spécialiste 61/63ème sections de l'Université Joseph Fourier de 2003 à 2008, participation à des comités d'expert depuis
- ▶ Responsable en 2006 et 2007 du sous-projet "Contrôle commande pour l'embarqué" dans le cadre du projet EmSoC (Embedded System on Chips) de la région Rhône-Alpes.

3.3 Participation ou responsabilités dans des actions internationales

- ▶ Membre du comité technique robotique de l'IFAC
- ▶ Membre du comité de programme de IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN'12) (Conférence A+ en Systèmes)
- ▶ Membre du comité de programme de IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM'08)
- ▶ Membre du comité de programme du Workshop Advanced Control and Diagnosis (ACD'07)
- ▶ Membre du comité de programme et d'organisation du Workshop IFAC Non Linear Model Predictive Control for Fast System 2006 (NMPCFS'06).
- ▶ Membre du comité d'organisation du Workshop IEEE Positive Systems Theory and Applications 2006 (POSTA'06).

- ▶ En 2005 et 2006, cours de “Nonlinear Systems” dans le cadre de l’Automatic control for production systems summer school organisée à Grenoble par l’ITESM de Monterey-Mexique.
- ▶ En 2007, cours de “Nonlinear Control Systems” dans le cadre de l’école d’été Escuela de Verano à l’Université de Santiago du Chili (USACH).
- ▶ Responsable français du projet Téromac avec le Vietnam financé par le MAE dans le cadre du programme de formation d’ingénieurs d’excellence au Vietnam (PFIEV)

3.4 Activités contractuelles et responsabilités de projets de recherche *significatifs*

- ▶ SAFRAN-Snecma - Co-responsable du contrat d’accompagnement de la bourse de thèse CNES de Artem Marie-Magdeleine : Caractérisation des fonctions de transfert de pompe en régime cavitant (2010 - contrat INPG-SA) [86]
- ▶ Responsable du projet EMSOC-Recherche UJF Entomoptère Volant Autonome
- ▶ Responsable du projet ANR Entomoptère Volant Autonome (EVA, appel CONTINT, 2007-2012)
- ▶ Participation au projet ANR Robot Anguille Autonome en Milieu Opaque (RAAMO, appel PSIROB, 2005-2008)
- ▶ Participation au projet FUI Minalogic ARAVIS (2007-2010) : Architecture Avancée Reconfigurable et Asynchrone pour la Vidéo et la Radio logicielle (partenaires : STMicroelectronics, Orange-FT, CEA-Leti, TIMA, INRIA) - Asservissement de la capacité de calcul d’une matrice de puce en 32 nm pour l’exécution d’applications gourmandes avec peu d’énergie sur des SoC à caractéristiques fortement dispersives (contrat Fonds de compétitivité des entreprises - INRIA) [85]
- ▶ CALOR : Co-responsable du contrat de recherche ”Estimation de la vitesse d’un fer à repasser à partir de mesures accélérométriques” (2007 - contrat INPG-SA) [84]
- ▶ Porteur de l’ATIP-CNRS Jeune chercheur du CNRS ”Embedded control for Drones”
- ▶ Responsable local de l’ANR OVMI (Objet Volant Mimant l’Insecte, ANR Jeune chercheur, 2003-2007)

4 Activités d’encadrement de la recherche

4.1 Étudiants de Master recherche

Depuis ma thèse, j’ai encadré ou co-encadré 9 étudiants de Master : Mr. Bousba (2002), Mr. Hably (2003), Mr. Al Khalil (2003), Mlle Hafidi (2004), Mlle Rifai (2004), Mr Dabo (2006), Mlle Lama (2007), Mr. Desvasges (2007), Mr. Malrait (2007), Mr Durand (2007), Mr Manzoni (2010), Mr Tellez-Guzmann (2012), Mr Alvarez (2012).

4.2 Co-encadrement de thèses

4.2.1 Thèses soutenues

J’ai co-encadré 7 thèses soutenues :

- HABLY, Ahmad, actuellement Maître de Conférences à Grenoble-INP
 - Titre : Pilote automatique pour un drone
 - Spécialité : Automatique Financement : Gouv. Libanais
 - Début : Oct. 2003 Soutenance : 5 décembre 2007
 - Taux d'encadrement : 90% co-encadrant(s) : M. Alamir (10%)

- GUERRERO, Fermi, actuellement Assistant Professor à la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) au Mexique
 - Titre : Autonomie du drone à 4 rotors
 - Spécialité : Automatique Financement : Gouv. Mexicain
 - Début : Oct. 2003 Soutenance : 11 janvier 2008
 - Taux d'encadrement : 40% co-encadrant(s) : S. Leseq (40%) et J. Delamarre (G2Elab, 20%)

- LOUVAT, Benoit, actuellement "technical leader" dans la compagnie DALSA, Canada
 - Titre : Traitement d'images à cadence vidéo en vue de l'asservissement d'une caméra embarquée sur un drone
 - Spécialité : SIPT Financement : Ministère
 - Début : Oct. 2003 Soutenance : 5 février 2008
 - Taux d'encadrement : 30% co-encadrant(s) : J.-M. Chassery (10%) et L. Bonnaud (60%)

- RIFAÏ, Hala, actuellement Maître de Conférence à l'université de Cergy
 - Titre : Modélisation et commande d'un robot biomimétique volant
 - Spécialité : Automatique Financement : Ministère
 - Début : Oct. 2004 Soutenance : 6 novembre 2008
 - Taux d'encadrement : 50% co-encadrant(s) : G. Poulin (G2Elab, 50%) et M. Alamir (10%)

- EL RAFEÏ, Maher, actuellement assistant professor à Hariri Canadian University, Liban
 - Titre : Modélisation et commande d'un robot anguille
 - Spécialité : Automatique Financement : Ministère
 - Début : Oct. 2004 Soutenance : 9 décembre 2008
 - Taux d'encadrement : 20% co-encadrant(s) : M. Alamir (80%)

- MALRAIT, Luc, actuellement Ingénieur support chez Mathworks, Angleterre
 - Titre : Modélisation et commande de serveurs de bases de données
 - Spécialité : Automatique Financement : Ministère
 - Début : Oct. 2007 Soutenance : 3 juillet 2012 (en entreprise à partir d'octobre 2010)
 - Taux d'encadrement : 60% co-encadrant(s) : S. Bouchenak (LIG, 40%)

- DURAND, Sylvain, actuellement en post-doc à l'UMI LAFMIA Mexico
 - Titre : Modélisation et commande de la puissance de calcul pour plateformes de calcul embarquées
 - Spécialité : Automatique Financement : Pôle de compétitivité MINALOGIC
 - Début : Nov. 2007 Soutenance : 17 janvier 2011
 - Taux d'encadrement : 80% co-encadrant(s) : D. Simon (INRIA, 20%)

4.2.2 Thèses en cours

- MANECY, Augustin
 - Titre : Stratégies de guidage visuel bio-inspiré : application à la commande d'un drone
 - Spécialité : Automatique Financement : ANR EVA
 - Début : Sept. 2011
 - Taux d'encadrement : 50% co-encadrant(s) : S. Viollet (ISM, 50%)

– MARIE-MAGDELEINE, Artem

Titre : Caractérisation des fonctions de transfert de pompe en régime cavitant

Spécialité : Mécanique des Fluides Financement : CNES

Début : Fev. 2010

Taux d'encadrement : 50% co-encadrant(s) : R. Fortes-Patella (LEGI, 50%)

4.3 Post-doctorants et ATER

J'ai été responsable scientifique de Guylaine POULIN en ATER au laboratoire en 2004-2005 et de Ahmed CHEMORI en Post-Doc CNRS en 2005-2006 qui ont tous deux intégrés le CNRS en tant que chargés de recherche. En 2012, Mr Mungia effectue un Post-Doc (financement CONACYT, Mexique) au laboratoire sous ma responsabilité.

4.4 Participation à des jurys de thèse

J'ai été examinateur lors du jury de soutenance de thèse de Lubin Kerhuel (ISM, Marseille, 2009), Marcelin Dabo (Esigelec, Rouen, 2010), Guillaume Sanahuja (Heudiasyc, Compiègne, 2010), Mathieu Joinié-Maurin (LSIIT, Strasbourg, 2012).

5 Activités d'enseignement

Depuis mon recrutement sur un poste de fonctionnaire, j'ai effectué environ 900 heures équivalent TD.

De 2000 à 2002, lors de mon affectation en tant que maître de conférences à l'Université Paris Sud, j'ai participé

- aux TD d'Automatique de Maîtrise EEA
- aux TD d'algèbre de License EEA
- au montage (matériel et énoncés) d'une nouvelle salle de TP pour les Licence et Maîtrise EEA

De 2002 à 2011, je suis intervenu dans les enseignements :

- TP d'initiation à l'EEA en 1ère année de l'ENSIEG-INPG (logique, graftcet, correcteur proportionnel)
- TP d'automatique en 2nde année de l'ENSIEG-INPG (correcteur PID, commande de moteur à CC)
- Cours de "Commande des systèmes non linéaires" en 3ème année de l'ENSIEG-INPG, option CDSE
- Création du Cours et montage des TP d'"Automatique pour les systèmes embarqués" en 2nde année de la filière Systèmes et Logiciels embarqués de l'ENSIMAG
- Création du cours "d'Automatique embarquée" dans le master en alternance ISTRES de l'UJF
- Création du cours de "Nonlinear control" en master international PSPI de l'UJF
- Création du cours/TD de "Introduction to robotics" commun à la filière ASI de l'ENSE3 et au master d'Automatique

Enfin, j'ai (peu) participé à l'élaboration des programmes des filières "Systèmes et Logiciels Embarqués" (SLE) de l'ENSIMAG et "Automatique Systèmes et Information" (ASI) de la future ENSE³ et au programme du Master Pro Pilotage et Surveillance des Procédés Industriels

(PSPI) de l'UJF. J'ai été responsable de l'enseignement d'Automatique dans la filière SLE de l'ENSIMAG.

Depuis ma prise de fonction en tant que responsable du département Automatique de **gipsa-lab**, je n'ai conservé que le cours de robotique mentionné ci-dessus.

6 Production scientifique

6.1 Revues internationales

- [1] M. ALAMIR et N. MARCHAND : Numerical stabilization of nonlinear systems - exact theory and approximate numerical implementation. *European Journal of Control*, 5(1):87–97, 1999.
- [2] M. ALAMIR, I. BALLOUL et N. MARCHAND : Robust stabilization of nonlinear systems by discontinuous dynamic state feedback. *Int. Journal of Control*, 75(6):421–433, 2002.
- [3] M. ALAMIR et N. MARCHAND : Constrained sub-optimal feedback control for minimum-time stabilization of nonholonomic systems in chained form. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118(2):229–244, 2003.
- [4] N. MARCHAND et M. ALAMIR : Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. *Automatica*, 39(2):343–348, 2003.
- [5] N. MARCHAND et M. ALAMIR : Receding horizon stabilization of a rigid spacecraft with two actuators. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 125(3):489–491, 2003.
- [6] N. MARCHAND et A. HABLY : Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*, 41(12):2147–2152, 2005.
- [7] N. MARCHAND, H. HABLY et A. CHEMORI : Global stabilization with low computational cost of the discrete time chain of integrators by means of bounded controls. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 52(5):948–952, 2007.
- [8] G. POULIN, A. CHEMORI et N. MARCHAND : Minimum energy oriented global stabilizing control of the PVTOL aircraft. *Int. Journal of Control*, 80(3):430–442, 2007.
- [9] A. CHEMORI et N. MARCHAND : A prediction based nonlinear controller for stabilization of a non-minimum phase PVTOL aircraft. *Int. Journal of Control*, 18(8):876–889, 2008.
- [10] J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, N. MARCHAND, A. HABLY, S. LESECQ et J. DELAMARE : Bounded attitude control of rigid bodies : Real-time experimentation to a quadrotor mini-helicopter. *Control Engineering Practice*, 19(8):790–797, 2011.
- [11] L. MALRAIT, S. BOUCHENAK et N. MARCHAND : Experience with conser : A system for server admission control through fluid modeling. *IEEE Trans. on Computers*, 60(7):951–963, 2011.
- [12] S. DURAND, A.-M. ALT, D. SIMON et N. MARCHAND : Energy and computing resource aware feedback control strategies for H.264 video decoding. *International Journal of Systems Science*, 2012. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00675593>. Second revision.
- [13] S. DURAND, H. ZAKARIA, L. FESQUET et N. MARCHAND : An energy-efficient architecture for nanometric technologies with strong robustness to process variability : Design of a gals node based on a mips r2000 processor. *IEEE Trans. on Very Large Scale Intergration (VLSI) Systems*, 2012. Second revision.
- [14] J.-F. GUERRERO-CASTELLANOS, H. RIFAI, E. RAMIREZ-MUNOZ, N. MARCHAND et W.-F. GUERRERO-SANCHEZ : Bounded attitude stabilization using vector observations without attitude reconstruction : Real-time experimentation on a quadrotor. *Int. Journal of Control*, 2012. Second revision.
- [15] N. MARCHAND, S. DURAND et J. F. GUERRERO-CASTELLANOS : A general formula for event-based stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 58(5), 2013. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00675946/>. To appear.
- [16] H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded control of an underactuated biomimetic aerial vehicle - validation with robustness tests. *Autonomous Robots*, 60(9):1165–1178, sept. 2012. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00675527>.

- [17] H. RIFAI, F. GUERRERO-CASTELLANOS, N. MARCHAND et G. POULIN : Biomimetic-based output feedback for attitude stabilization of a flapping-wing micro aerial vehicle. *Robotica*, 2013. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00728410>. To appear.
- [18] S. DURAND, F. GUERRERO CASTELLANOS, N. MARCHAND et W.-F. GUERRERO-SANCHEZ : Event-based control of the inverted pendulum : Swing up and stabilization. *International Journal of Control, Automation and Systems (IJCAS)*, 2013. Submitted.
- [19] A. SEURET, C. PRIEUR et N. MARCHAND : Stability of nonlinear systems by means of event-triggered sampling algorithms. *Journal of Mathematical Control and Information*, 2013. Submitted.

6.2 Chapitres de livres

- [20] N. MARCHAND et M. ALAMIR : *NonLinear Control in the Year 2000*, volume 2, chapitre Asymptotic controllability implies continuous discrete time feedback stabilizability, pages 63–79. Springer Verlag, Londres, UK, Dec. 2000.
- [21] N. MARCHAND, M. ALAMIR et I. BALLOUL : *NonLinear Control in the Year 2000*, volume 2, chapitre Hamilton-Jacobi Based Stabilisation of Nonlinear Systems by Discontinuous Dynamic State Feedback, pages 81–93. Springer Verlag, Londres, UK, décembre 2000.
- [22] A. HABLY, F. KENDOUL, N. MARCHAND et P. CASTILLO : *Positive Systems*, volume 341 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapitre Further results on global stabilization of the PVTOL aircraft, pages 303–310. Spinger Verlag, 2006.
- [23] N. MARCHAND, A. CHEMORI et G. POULIN : *Modélisation et Commande embarquée d'objets volants miniatures*, chapitre Approches prédictives pour la stabilisation en temps discret de l'avion planaire à décollage vertical. Hermès, 2007. Chapitre 5.
- [24] H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : *Intelligent Aerial Vehicle*, chapitre Attitude and Position Control of a Flapping Micro Aerial Vehicle, pages 553–578. I-Tech, 2008.
- [25] E. WITRANT et N. MARCHAND : *Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences*, chapitre Modeling and Feedback Control for Air Flow Regulation in Deep Pits. Cambridge Scientific Publishers, 2009.

6.3 Brevets

- [26] S. DURAND et N. MARCHAND : Control mechanism of device's supply, Mars 2009. FR09/01576, Version monocoeur, En cours d'extension à l'international en 2012.
- [27] S. DURAND et N. MARCHAND : Control mechanism of device's supply, Octobre 2009. FR09/004686, Version multicoeur, En cours d'extension à l'international en 2012.

6.4 Édition de livres

- [28] C. COMMAULT et N. MARCHAND, éditeurs. *Positive Systems*, volume 341 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Spinger Verlag, 2006.

6.5 Conférences internationales à comité de lecture

- [29] N. MARCHAND et M. ALAMIR : From open loop trajectories to stabilizing state feedback - application to a CSTR. *In IFAC Symposium on System Structure and Control*, volume 2, pages 801–806, Nantes, France, 1998.
- [30] N. MARCHAND et M. ALAMIR : Numerical stabilization of a rigid spacecraft with two actuators. *In IFAC Workshop on Motion Control*, pages 81–86, Grenoble, France, 1998.
- [31] H. HAMMOURI et N. MARCHAND : High gain observer for a class of implicit systems. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, volume 1, pages 804–808, Sydney, Australia, Dec. 2000.
- [32] N. MARCHAND, M. ALAMIR et I. BALLOUL : Hamilton-Jacobi based stabilisation of nonlinear systems by discontinuous dynamic state feedback. *In Second Nonlinear Control Network (NCN) Workshop*, Paris, France, june 2000.
- [33] M. ALAMIR et N. MARCHAND : Constrained minimum-time-oriented feedback control for the stabilization of nonholonomic systems in chained form. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 356–361, Las Vegas, USA, Dec. 2002.

- [34] N. MARCHAND et M. ALAMIR : Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 350–355, Las Vegas, USA, Dec. 2002.
- [35] N. MARCHAND : Further results on global stabilization for multiple integrators with bounded controls. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, Hawaii, USA, Dec. 2003.
- [36] J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, S. LESECQ, N. MARCHAND et J. DELAMARE : A low cost air data attitude heading reference system (ADAHRS) for the tourism airplane applications. *In 4th IEEE Sensors Conference*, Orange County, USA, 2005.
- [37] A. HABLY, N. MARCHAND et M. ALAMIR : Constrained minimum time oriented stabilization of extended chained form systems. *In joint IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conference*, Seville, Spain, 2005.
- [38] N. MARCHAND : Discontinuous exponential stabilization of dynamic chained form systems. *In IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, Jul. 2005.
- [39] N. MARCHAND et A. HABLY : Improving the performance of nonlinear stabilization of multiple integrators with bounded controls. *In IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, Jul. 2005.
- [40] A. CHEMORI et N. MARCHAND : A prediction based controller for stabilization of a non-minimum phase PVTOL aircraft. *In Proc. of the 1st IFAC Workshop on Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems*, Grenoble, France, 2006.
- [41] J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, S. LESECQ, N. MARCHAND et J. DELAMARE : Estimacion de la orientacion : aplicacion a un mini-helicoptero con cuatro rotores. *In AMCA, Congreso Nacional de Control Automatica, Mexico*, 2006.
- [42] A. HABLY, F. KENDOUL, N. MARCHAND et P. CASTILLO : Further results on global stabilization of the PVTOL aircraft. *In IEEE Symposium on Positive Systems, Theory and Applications (POSTA'06)*, 2006.
- [43] M. ALAMIR, M. EL RAFEI, G. HAFIDI, N. MARCHAND, M. POREZ et F. BOYER : Feedback design for 3D movement of an eel-like robot. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 256–261, Rome, Italy, 10-14 April 2007.
- [44] J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, A. HABLY, N. MARCHAND et S. LESECQ : Bounded attitude stabilization : Application on four-rotor helicopter. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 730–735, Rome, Italy, 10-14 April 2007.
- [45] A. HABLY et N. MARCHAND : Global stabilization of four-rotor helicopter with bounded inputs. *In Proc. IEEE/RJS Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, San Diego, California, USA, 2007.
- [46] B. LOUVAT, L. BONNAUD, N. MARCHAND et G. BOUVIER : Tracking features with global motion compensation for drone camera servoing. *In IAPR Conf. on Machine Vision Applications*, Japan, 2007.
- [47] B. LOUVAT, L. BONNAUD, N. MARCHAND et G. BOUVIER : Suivi d'objets pour une caméra embarquée dans un drone. *In GRETSI*, Troyes, France, 2007.
- [48] B. LOUVAT, N. MARCHAND, L. BONNAUD et G. BOUVIER : Upsampling visual servoing for a pan and tilt camera. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, Sanya, China, 2007.
- [49] H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : OVMI - towards a 3D-space flapping flight parametrization. *In Int. Conf. on Advances in Vehicle Control and Safety*, pages 181–186, Buenos Aires, Argentina, 2007.
- [50] H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Attitude stabilization of a flapping-wing micro drone. *In Flying Insects and Robots Symposium*, pages 181–186, Ascona, Switzerland, 2007.
- [51] H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded attitude control of a biomimetic flapping robot. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, Sanya, China, 2007.
- [52] C. SOYER, S. GRONDEL, A.-C. HLADKY HENNION, T. DARGENT, E. CATTAN, B. DANET, T. RAKOTOMAMONJY, D. VASIC, G. POULIN, N. MARCHAND et H. RIFAI : Silicon-based biomimetic flying insect. *In Flying Insects and Robots Symposium*, Ascona, Switzerland, 2007.
- [53] A. CHEMORI et N. MARCHAND : Global discrete time stabilization of the PVTOL aircraft based on a fast predictive controller. *In IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [54] M. EL RAFEI, M. ALAMIR, N. MARCHAND, M. POREZ et F. BOYER : Motion control of a three-dimensional eel-like robot without pectoral fins. *In IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.

- [55] J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, N. MARCHAND, S. LESECOQ et J. DELAMARE : Bounded attitude stabilization : Real-time application on four-rotor helicopter. *In IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [56] N. MARCHAND : Stabilization of Lebesgue's sampled systems with bounded controls : the chain of integrators case. *In IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [57] H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded control of a flapping wing micro drone in three dimensions. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, Pasadena, USA, 2008.
- [58] H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Path tracking control of a flapping unmanned air vehicle (UAV). *In IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [59] E. WITRANT, S.-I. NICULESCU et N. MARCHAND : A real-time control approach for mine climate regulation. *In Proceedings of the ICNPAA - Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences*, Genoa, Italy, 2008.
- [60] M. EL RAFEI, M. ALAMIR, N. MARCHAND, M. POREZ et F. BOYER : Multi-variable constrained control approach for a three-dimensional eel-like robot. *In Proc. IEEE/RJS Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Nice, France, 2008.
- [61] L. MALRAIT, S. BOUCHENAK et N. MARCHAND : Modélisation et contrôle d'un serveur. *In Actes de la Conférence Française sur les Systèmes d'Exploitation*, Toulouse, France, 2009.
- [62] S. DURAND et N. MARCHAND : Dynamic voltage and frequency scaling of multicore system with energy-performance tradeoff. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, Shanghai, China, 2009.
- [63] L. MALRAIT, N. MARCHAND et S. BOUCHENAK : Average delay guaranty in server systems using admission control. *In Proceedings of the IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS)*, Sinaia, Romania, 2009.
- [64] L. MALRAIT, S. BOUCHENAK et N. MARCHAND : Fluid modeling and control for server system performance and availability. *In Proceedings of the 39th annual IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN)*, Estoril, Portugal, 2009. [acceptance rate 20.9% - 37 of 177].
- [65] S. DURAND et N. MARCHAND : An eventbased pid controller with low computational cost. *In Proceedings of the 8th International Conference on Sampling Theory and Applications (SAMPTA)*, Marseille, France, 2009.
- [66] S. DURAND et N. MARCHAND : Fast predictive control of micro controller's energy-performance tradeoff. *In Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, Saint Petersburg, Russia, 2009.
- [67] F. BRIBIESCA ARMAGEDO, N. MARCHAND et O. SENAME : Constrained model predictive control of a skid-steering mobile robot. *In Proceedings of the European Control Conference (ECC)*, Budapest, Hungary, 2009.
- [68] S. DURAND et N. MARCHAND : Further results on event-based pid controller. *In Proceedings of the European Control Conference (ECC)*, Budapest, Hungary, 2009.
- [69] L. MALRAIT, N. MARCHAND et S. BOUCHENAK : Modeling and control of server systems : Application to database systems. *In Proceedings of the European Control Conference (ECC)*, Budapest, Hungary, 2009.
- [70] H. RIFAI, J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded attitude control of a flapping wing micro aerial vehicle using direct sensors measurements. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, Kobe, Japan, 2009.
- [71] M. EL RAFEI, M. ALAMIR, N. MARCHAND, M. POREZ et F. BOYER : Reduced mean model for a three-dimensional eel-like robot : Identification and validation. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, Bangkok, Thailand, 2009. [Best paper finalist].
- [72] J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded attitude stabilization of rigid bodies without attitude estimation and velocity measurement. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, Bangkok, Thailand, 2009.
- [73] H. ZAKARIA, S. DURAND, N. MARCHAND et L. FESQUET : Integrated asynchronous regulation for nanometric technologies. *In Proceedings of the 1st European workshops on CMOS Variability*, 2010.
- [74] N. MARCHAND, S. DURAND et J. F. GUERRERO-CASTELLANOS : A general formula for the stabilization of event-based controlled systems. *In Proceedings of the joint IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Orlando, FL, USA, 2011. URL http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=17ssej3odpso6lca9r25ukop22&view_this_doc=hal-00648230&version=1.

- [75] H. RIFAI, J. F. GUERRERO-CASTELLANOS et N. MARCHAND : Biomimetic-based bounded output feedback for attitude stabilization of a flapping micro aerial vehicle. *In Proceedings of the 1st International Workshop on bio-inspired robots*, Nantes, France, 2011.
- [76] S. DURAND et N. MARCHAND : Fully discrete control scheme of the energy-performance tradeoff in embedded electronic devices. *In Proceedings of the IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011.
- [77] S. DURAND, N. MARCHAND et J. F. GUERRERO-CASTELLANOS : Simple Lyapunov sampling for event-driven control. *In Proceedings of the IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011.
- [78] A. MARIE-MAGDELEINE, R. FORTES-PATELLA, N. MARCHAND et N. LEMOINE : Application of unsteady flow rate evaluations to identify the dynamic transfer function of a cavitating venturi. *In Proceedings of the 26th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*, Beijing, China, 2012.
- [79] A. MARIE-MAGDELEINE, R. FORTES-PATELLA, N. MARCHAND et N. LEMOINE : Unsteady flow rate evaluation methodology for identification of the dynamic transfer function of a cavitating venturi. *In Proceedings of the 8th International Symposium on Cavitation (CAV 2012)*, Singapour, 2012.
- [80] A. MANECY, S. VIOLLET et N. MARCHAND : UAV's control improvement through a decoupled eye systems. *In Proc. IEEE/RJS Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Vilamoura-Algarve, Portugal, 2012.
- [81] J. U. ÁLVAREZ-MUÑOZ, Fermi GUERRERO CASTELLANOS, Sylvain DURAND, Nicolas MARCHAND et G. MINO-AGUILAR : Control and Model-Aided Inertial Navigation of a Nonholonomic Vehicle. *In Proceedings of the 15th IFAC Latinamerican Control Conference (CLCA'12)*, Lima, Peru, 2012. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00727706>.
- [82] J. J. TÉLLEZ-GUZMÁN, Fermi GUERRERO CASTELLANOS, Sylvain DURAND, Nicolas MARCHAND et R. LUCIO-MAYA : Event-based LQR control for attitude stabilization of a quadrotor. *In Proceedings of the 15th IFAC Latinamerican Control Conference (CLCA'12)*, Lima, Peru, 2012. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00727707>.
- [83] A. MANECY, R. JUSTON, N. MARCHAND et S. VIOLLET : Decoupling the eye : a key toward of robust hovering for sighted aerial robots. *In Proc. of the 2nd CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation & Control to be held in Delft University of Technology*, 2013.

6.6 Contrats industriels

- [84] S. LESECQ et N. MARCHAND : Estimation de la vitesse et de la direction à partir de mesures accélérométriques, Jan. 2007. Contrat CALOR-INPG SA.
- [85] J. CAMBONIE : Contrat pôle de compétitivité Minalogic : Architecture AVancée reconfigurable et asynchrone pour la Video et radio logicielle intégrée sur puce, Oct. 2007. ST-Microelectronics, France Telecom, TIMA, INRIA, CEA.
- [86] R. FORTES-PATELLA et N. MARCHAND : Caractérisation des fonctions de transfert de pompe en régime cavitant, Décembre 2010. Safran-SNECMA.

6.7 Autres

- [87] N. MARCHAND : *Commande à Horizon Fuyant : Théorie et Mise En Œuvre*. Thèse de doctorat, Lab. d'Automatique de Grenoble - INPG, Grenoble, France, 21 janvier 2000.

Chapitre 1

Introduction

L'exercice d'écriture du manuscrit pour l'Habilitation à Diriger la Recherche a pris chez moi plus de temps que de normal. Deux raisons majeures sont la cause de ce délai. Tout d'abord, les aléas de ma vie personnelle m'ont profondément affecté et naturellement orienté vers le côté le plus plaisant du métier, à savoir la science et les relations humaines. On est ensuite vite happé par la tourmente du quotidien. Ensuite, je ne cache pas que je trouve cet exercice symptomatique d'une capacité hexagonale à faire compliqué quand on pourrait faire simple. Cette rédaction n'a pu entamer ma conviction d'inutilité de ce manuscrit que personne ne lira exceptés les "pauvres" rapporteurs bien contraints, par amitié ou par devoir professionnel, d'en lire les lignes. L'intérêt pour moi-même me semble également très limité dans la mesure où des bilans des activités de recherche nous sont régulièrement demandés et les prospectives sont indispensables à l'acceptation des projets que nous portons. Il y aurait donc bien d'autres moyens moins lourds d'évaluer la capacité à encadrer des thèses... C'est pour cela que face aux différentes possibilités de rédaction de ce manuscrit, j'ai opté pour une forme concise qui permettra aux lecteurs de vite retourner à leurs activités préférées et sans nul doute bien plus utiles.

La suite du manuscrit ne reprend pas les responsabilités exposées dans mon CV au chapitre précédent ni mes activités d'enseignement. Je me concentrerai sur l'essentiel, ce qui en tant que chercheur au CNRS devrait m'occuper majoritairement (sans commentaire), à savoir mes contributions scientifiques. Présenter mes activités de recherches en tentant de leur donner une cohérence globale me semble en partie hypocrite. Penser que mon travail de recherche obéit à une stratégie parfaitement déterministe serait une erreur et la dimension stochastique y est somme toute très importante et je la revendique. C'est ce qui fait, à mon avis, la beauté et l'intérêt du métier et des rencontres qu'il permet. C'est aussi ce qui fait la difficulté à "piloter" la recherche, du moins au niveau d'un laboratoire ou d'une équipe. Le résultat intéressant n'est que très rarement là où on l'attend le plus. La présentation de mes travaux sera donc partielle et l'objectif de la suite de ce chapitre est de faire un survol rapide des activités que je ne développerais pas par la suite.

Afin de terminer cette courte introduction sur une note moins sceptique, je voudrais dire le plaisir que me procure l'activité de recherche au sens large, tant du point de vue scientifique qu'humain.

1 Classification de mes travaux de recherche

La recherche était depuis longtemps un de mes objectifs. C'est pourquoi, après mon DEA et un an de service militaire (et oui), j'ai essayé, en vain, de rencontrer Guy Bornard et Hassan Hamouri que j'avais eu en cours de commande et d'observation des systèmes non linéaires pour discuter d'un sujet de thèse. C'est finalement au bout de deux années que j'ai réussi à les rencontrer tous les deux ensemble. Entre temps, Mazen Alamir venant d'être recruté, c'était avec lui que j'avais commencé à travailler. Je ne l'ai jamais regretté.

Ces premiers pas dans la recherche sont révélateurs des aléas (que l'on appelle perturbations) qui rendent la trajectoire prédite bien différente de la trajectoire effectivement suivie. Et encore, c'est sans ajouter les doutes (que l'on appelle incertitudes) qui habitent ou du moins devraient habiter tout chercheur.

L'intégralité de mes travaux de recherche s'articule autour d'un socle commun théorique inter-corrélé à des secteurs d'application. L'interpénétration entre applications et théorie est en effet essentielle à la résolution des problèmes pratiques et nourricière des développements théoriques.

- ◇ Le socle commun théorique porte sur la **théorie de la commande des systèmes non linéaires**. Cette thématique est détaillée dans la sous-section 2 qui suit. Ces contributions sur la commande des systèmes non linéaires ont irrigué principalement les deux secteurs d'application suivants.
- ◇ Tout d'abord les systèmes électromécaniques se spécialisant sur les **robots aériens** évoluant en trois dimensions. Ce secteur d'application est "historique" et a été un domaine d'abord investi lorsque j'étais à la recherche de systèmes rapides pouvant illustrer les contributions en commande prédictive rapide de mes travaux de thèse. Ce secteur d'application est évoqué à la sous-section 3.
- ◇ Le second volet applicatif investi plus récemment porte sur la **gestion des ressources dans les systèmes informatiques**. Ces travaux exposés en sous-section 4 ont été en grande partie effectués en collaboration avec des spécialistes locaux du domaine à savoir des collègues des laboratoires LIG et TIMA.

Comme expliqué ci-dessous, des développements méthodologiques sont voués à avoir des applications tant en robotique mobile aérienne et notamment en robotique bio-inspirée que dans le domaine de la gestion des ressources informatiques notamment lorsque celles-ci sont fortement "détemporalisées". Les points présentés ci-après sont présentés de manière chronologique (ou presque) dans chaque rubrique.

2 Théorie de la commande des systèmes non linéaires

Pour un exposé cohérent de mes travaux, je prendrais un système général non linéaire de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

où classiquement $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est sa commande.

2.1 Travaux de thèse

Mes premiers travaux en théorie du système correspondent à mes travaux de thèses (Marchand, 2000). Ils visaient à améliorer l’implantation de lois de commande prédictive aux systèmes rapides. Ces contraintes d’implantation sont un thème récurrent dans mes activités de recherches. La commande prédictive consiste à trouver un profil de commande, c’est à dire une fonction $\tau \rightarrow u(\tau, x(t))$ définie sur un horizon de prédiction T (i.e. $\tau \in [0, T]$) et généralement prolongée par la fonction nulle sur $]T, \infty]$ quand $T \neq \infty$. Ce profil de commande est déterminé classiquement en minimisant un critère (fonction de coût) auquel est ajouté une contrainte finale qui permet de rechercher la commande sur un horizon fini. Enfin, le profil de commande est appliqué, soit pendant un instant infinitésimal dt aboutissant à un retour d’état en temps continu, soit pendant une période d’échantillonnage T_e suffisamment petite au regard de la dynamique du système. Nous avons dans un premier temps exploité la structure triangulaire des systèmes pour une meilleure efficacité numérique (Marchand et Alamir, 1998b, Alamir et Marchand, 1999) puis extrait une propriété de transitivité traduisant que la translation du profil de commande à l’instant t est également un profil admissible à l’instant $t + dt$ (Marchand et Alamir, 1998a). Cette contribution permet en particulier de s’affranchir de toute notion d’optimalité dans la preuve de la stabilité au sens de Lyapunov du schéma de commande prédictive. On est donc ici dans une proximité marquée avec les approches de Lyapunov. Les techniques de commande prédictive nous ont également permis de lier la contrôlabilité non linéaire à la stabilisabilité en temps continu-discret (Marchand et Alamir, 2000), résultat assez similaire à celui de Clarke *et al.* (1997). Cette contribution porte également les prémises de contributions très récentes sur la commande basées sur événements où l’échantillonnage est non périodique. Enfin, toujours dans le domaine de la commande prédictive, une implantation dynamique et hybride de la commande prédictive a été proposée dans (Marchand *et al.*, 2000). Elle consiste à rajouter un état dépendant de l’équation d’Hamilton-Jacobi associé au problème de commande optimale et de commuter à la manière de la commande à mode glissant en fonction de sa valeur.

2.2 Commande discontinue/prédictive des systèmes non holonomes

Une partie de mes travaux de recherche depuis ma thèse a porté sur les systèmes chaînés. Cette classe de système a été l’objet d’un grand nombre de travaux tout d’abord parce qu’elle englobe de nombreux systèmes mécaniques (après changement de coordonnées), mais aussi parce qu’elle est connue pour ne pas satisfaire les conditions de Brockett pour une stabilisation continue (Brockett, 1983) et qu’elle est donc une classe ”benchmark” de commande avancée. Pour être franc, c’est surtout cette seconde raison qui a attiré mon attention. L’équation dynamique de tels systèmes est

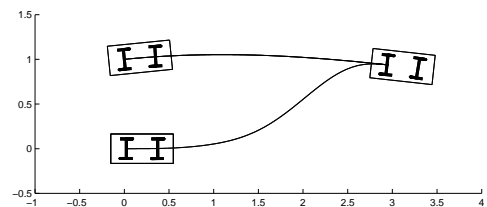


Figure 1.1 – Stabilisation discontinue de l’intégrateur de Brockett (Marchand et Alamir, 2003)

donnée par (avec $n > 1$) :

$$\dot{x}_0 = u_0 \tag{1.2}$$

$$\dot{x} = u_0 Ax + Bu \tag{1.3}$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} & I_{n-1 \times n-1} \\ 0 & 0_{1 \times n-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La condition de Brockett peut être vue comme traduisant le fait que le linéarisé du système à l'origine doit rester commandable ce qui n'est pas le cas du système (1.2-1.3). Les systèmes chaînés sont connus pour être stabilisables au moyen de lois de commande régulières mais temps variantes ou discontinues. A l'époque où j'ai commencé à travailler sur le sujet, les approches discontinues étaient basées sur une première phase pendant laquelle le système était amené loin de la zone de non contrôlabilité du linéarisé avant de commuter sur une commande garantissant la convergence à l'origine. Ceci revient à augmenter x_0 suffisamment pour être en mesure de faire converger les états vers l'origine tout en garantissant que u_0 ne s'annule pas. Il existait ainsi toujours un élément temporel empêchant l'écriture de la loi de commande sous la forme d'un retour d'état statique $k(x) = (u_0(x), u(x))$. La loi de commande proposée dans (Marchand et Alamir, 2002, 2003) est donc le premier retour d'état statique discontinu proposé dans la littérature pour les systèmes chaînés. La commutation est uniquement déterminée en comparant une fonction de Lyapunov du sous système en x_0 avec une autre concernant le sous-système en x . L'article (Marchand et Alamir, 2003) est fourni en appendice. Ce résultat a ensuite été étendu aux systèmes chaînés avec inertie (Marchand, 2005), c'est à dire ayant un intégrateur en plus sur les deux termes de commande : les commandes deviennent v_0 et v avec $\dot{u}_0 = v_0$ et $\dot{u} = v$.

Fidèle à ma culture de commande prédictive rapide, les systèmes chaînés ont également été traités avec une approche prédictive. Cela consiste à exploiter le fait tant que si u_0 est choisi non nul et constant par morceaux sur des périodes de la forme $[kT, (k+1)T]$ où $k \in \mathbb{N}$ et $T > 0$ est une constante, la commande prédictive du sous système en x avec contrainte finale sur l'état et un horizon fini peut être résolue très efficacement car le sous système est linéaire. Une commande prédictive rapide choisissant la commande la plus efficace dans un ensemble de profils de commande très limité (déterminé par la variété de profil pour u_0 choisi) a ainsi été proposée (Alamir et Marchand, 2002, 2003) qui ensuite a été étendu aux systèmes chaînés avec inertie (Hably *et al.*, 2005).

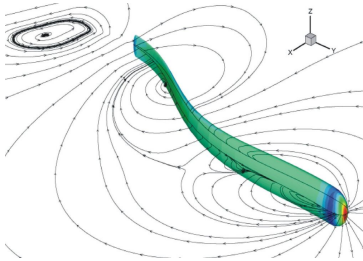
Ces travaux m'ont permis d'avoir une bonne culture d'analyse des systèmes non réguliers et des difficultés mathématiques pour les analyser. Ils m'ont également permis d'acquérir une certaine habitude des systèmes non holonomes que j'ai continué à traiter au travers des engins volants.

2.3 Commande basée sur évènements

La commande basée sur évènements est apparue récemment. Cette thématique est actuellement ma thématique de recherche prioritaire pour les années à venir. Je ne développerais donc pas ce point ici mais plutôt dans mes perspectives scientifiques générales présentées au chapitre 4.

3 Robotique

3.1 Commande du robot Anguille



Ce manuscrit ne présente pas les travaux portant sur la commande du robot anguille réalisés dans le cadre du projet ROBEA-Anguille puis maintenant dans le cadre de l'ANR RAAMO (Robot Anguille Autonome pour Milieu Opaque). Ce projet a donné lieu au développement de commandes 2D et 3D pour ce robot suractionné (Alamir *et al.*, 2007, El Rafei *et al.*, 2008a,b, 2009). Le principe consistant à paramétrer le mouvement par un nombre minimal de paramètres est également celui utilisé dans le cadre de la commande du robot mouche ou généralement dans le cadre des robots suractionnés.

3.2 Estimation d'attitude

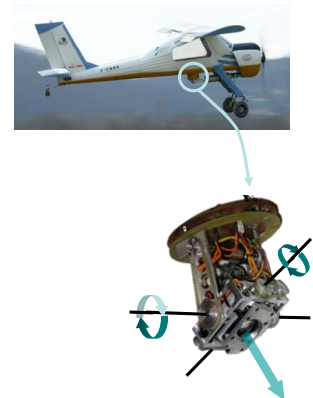
Ce manuscrit n'aborde pas les travaux sur l'estimation d'attitude visant à développer des estimateurs non linéaires efficaces pour la fusion de données de capteurs GAM (gyromètres, accéléromètres, magnétomètres montés en tri-axes). Ces estimateurs, très simples et donc aisément implantables sur de petits processeurs, nous permettent, à l'heure actuelle, d'obtenir l'attitude avec une précision de l'ordre de celle des capteurs. La convergence par rapport aux estimateurs de Kalman couramment employés est fortement accélérée (Guerrero-Castellanos *et al.*, 2005). Plus récemment, je me suis replongé dans ces problématiques pour voir comment la prise en compte des contraintes non holonomes pouvaient améliorer l'estimation (Álvarez-Muñoz *et al.*, 2012).

Ce document n'aborde pas mes travaux à caractère industriel réalisés dans le cadre d'un contrat avec la société CALOR et visant l'utilisation de capteurs accélérométriques, le traitement de la mesure et l'implantation (Leseq et Marchand, 2007).

3.3 Asservissement visuel

Ce rapport ne contient pas non plus mes recherches sur l'asservissement visuel. Pour ce faire, nous disposons d'une plateforme expérimentale composée d'un avion radio-commandé et d'une tourelle embarquée à deux degrés de liberté (Louvat *et al.*, 2007b,a). Nos travaux portent sur les thèmes suivants :

- ◊ la robustification des algorithmes d'analyse vidéo lorsque la qualité des images est médiocre et la redécouverte de cibles perdues
- ◊ le développement de commandes simples et embarquées de la tourelle, prenant en compte les aspects liés aux frottements très importants sur ce genre de mécanique
- ◊ mais surtout nous avons proposé de coupler les pas d'optimisation de la routine d'analyse vidéo avec la commande,



un peu dans l'esprit de la commande basée sur observateur où la convergence de l'observateur se fait en même temps que la convergence de la boucle de commande. Aucun résultat théorique de convergence ne peut être établi (ou alors, ils sont triviaux) par contre une amélioration des performances très notable est constatée (convergence accélérée par un facteur 3)

Ces travaux se sont fait en lien avec la société SurveyCopter située près de Valence. Depuis peu, mes travaux portant sur l'asservissement visuel ont repris avec pour objectif d'utiliser ces informations pour la stabilisation au dessus d'amers (Manecy *et al.*, 2012). Ces travaux sont menés en collaboration avec l'ISM de Marseille et portent sur l'intérêt d'avoir un oeil actionné mimant un cou. Les premiers résultats montrent l'avantage à utiliser un oeil mobile par rapport à une caméra fixe grand angle, y compris à résolution comparable.

4 Gestion des ressources dans les systèmes informatiques

L'utilisation de l'automatique et en particulier de la commande dans les systèmes informatiques n'est pas courante et cette thématique reste méconnue des automaticiens. Mes contributions ont porté sur la commande du compromis vitesse de calcul - consommation électrique dans les réseaux de puces et sur le contrôle d'accès des serveurs de bases de données. Dans les deux cas et comme la plupart du temps dans les systèmes informatiques, il s'agit de gérer une ressource en effectuant des compromis. Ces systèmes se caractérisent souvent par une phase de modélisation longue et peu commode.

4.1 Contrôle du compromis puissance/consommation

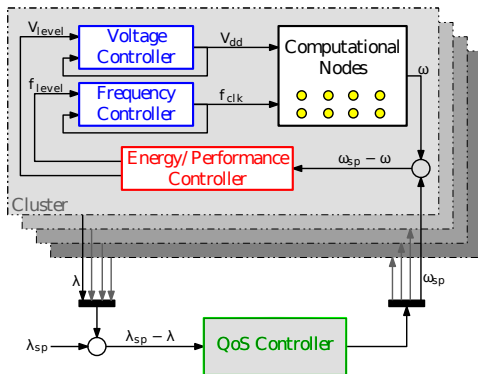


Figure 1.2 – Contrôle du compromis vitesse/consommation des systèmes sur puces

Le projet ARAVIS est un projet FUI¹ porté par ST-Microelectronics visant à améliorer les techniques permettant de faire face aux problèmes de variabilité dans les puces subnanométriques. Une triple boucle de commande a été conçue pour faire face au différentiel de performance aux différents endroits de la puce. Le niveau électronique a été traité dans le cadre de la thèse de Carolina Albea (Albea-Sanchez, 2010) et nous permettait de faire l'hypothèse que la tension et la fréquence pouvaient être fixée de manière quasi instantanée et pouvaient donc être prise comme variables de contrôle. Nous avons conçu une commande prédictive rapide dont le résultat explicite (ie. sans optimisation numérique) est compatible avec une implantation sur puce (Durand *et al.*, 2012b, Durand et Marchand, 2009c,e). La commande permet de satisfaire une deadline sur une application malgré une méconnaissance de la vitesse de calcul effective du noeud. Des versions mono-coeurs et multi-coeurs ont été développées et brevetées (Durand et Marchand, 2009a,b).

1. FUI : Fonds unique interministériel

Le concept a été également validé avec succès dans le cadre de la décompression vidéo adaptative (Durand *et al.*, 2012a).

4.2 Contrôle d'accès des serveurs de bases

Dans le cadre d'une collaboration avec Sarah Bouchenak du LIG, nous avons construit un modèle à base d'équations différentielles d'un serveur de base de données. Ce modèle du système s'avère très non linéaire. Nous avons ainsi pu, à partir de techniques de commande optimale et d'approches de type Lyapunov, proposer des lois de commande pour le contrôle du taux de rejet (pourcentage de requêtes non traitées) ou de la latence (délais avant qu'une requête soit servie). La variable de commande est le taux de parallélisation du serveur. Il présente la particularité d'être un paramètre de réglage n'ayant de l'influence que lorsque le serveur sature. On dit que le serveur sature quand il n'est plus à même de prendre toutes les requêtes entrantes. Les approches ont été validées sur un serveur de base de données PostgreSQL. Ces travaux ont été très bien accueilli par la communauté informatique en faisant l'objet d'un full paper (fourni en Appendice) et d'une communication dans une des meilleures conférences du domaine (Malrait *et al.*, 2009b,a,c, 2011).

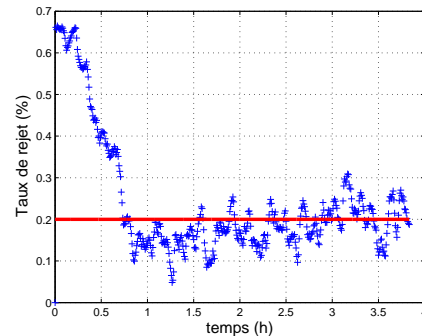


Figure 1.3 – Contrôle en boucle fermée du taux de rejet d'un serveur (Malrait *et al.*, 2011)

Cette thématique se poursuit dans le cadre du Labex Persyval autour du contrôle des serveurs MapReduce de Google. Il s'agit ici de contrôler le nombre de serveurs hébergeants une implication à partir de spécification de qualité de service en visant à réduire le coût financier de l'implantation d'une application sur le "cloud".

5 Contenu du manuscrit

Maintenant que la liste de ce que ce manuscrit ne contient pas (ou du moins que très succinctement) est terminée, je vais pouvoir présenter et développer les prochains chapitres. Ils présentent le cheminement qui m'a amené à une de mes thématiques principales à savoir la commande bornée d'attitude pour les corps rigides ainsi que les déclinaisons de ces recherches en terme de stabilisation en position.

Chapitre 2 : Ce chapitre propose ce qui est à la base des deux autres chapitres qui suivent, à savoir une amélioration d'une loi de commande non linéaire conçue initialement pour la stabilisation des chaînes d'intégrateurs linéaires. Cette amélioration porte sur deux formes existantes dans la littérature et sont présentées en temps continu et en temps discret (même si seule la version en temps continu n'est exploitée par la suite).

Chapitre 3 : Extension naturelle du chapitre précédent, nous présentons ici une loi de commande stabilisant l'attitude de forme similaire à la version linéaire présentée au

chapitre précédent. Cette commande est déclinée en version retour d'état (c'est à dire en supposant connus les vitesses angulaires et quaternion) et en version retour de sortie (c'est à dire en exploitant directement la mesure capteur). Cette approche est utilisée pour stabiliser l'hélicoptère à quatre rotors et le robot mouche. Nous étendrons ensuite les approches à la commande du robot volant dans le plan puis dans l'espace tout entier. Nous présentons ici des approches basées sur le premier chapitre mais également des approches prédictives rapides.

Chapitre 4 : Ce chapitre présentera mes perspectives en terme de recherche en lien avec les chapitres précédents.

Chapitre 2

Commande bornée des systèmes linéaires

1 Introduction

Je travaillais sur les systèmes chaînés et j'ai eu la volonté d'améliorer l'approche que nous avons proposée (Alamir et Marchand, 2002, Marchand et Alamir, 2002) en prenant en compte une borne a priori fixée sur la commande. Les commandes discontinues prennent en effet couramment des valeurs élevées au voisinage d'une surface de discontinuité et il me semblait intéressant de l'empêcher avec des bornes a priori sur les commandes. Comme les systèmes chaînés peuvent être stabilisés avec des outils du linéaire, j'ai creusé un petit peu la littérature à la recherche d'approches aisément maîtrisables pour être utilisées dans un contexte de commande non régulière. Il fallait en effet ensuite que je sois à même de garantir qu'une surface de discontinuité n'était franchie qu'une seule fois pour des raisons d'existence de trajectoire. C'est ainsi que j'ai découvert les travaux initiaux de Teel (1992) et de Sussmann *et al.* (1994) qui ont depuis donné de nombreuses suites. J'ai alors essayé d'implanter ces approches mais la lenteur avec laquelle la trajectoire converge m'a initialement fait penser à une erreur de programmation. J'ai donc commencé à m'intéresser aux chaînes d'intégrateurs linéaires sans jamais les utiliser sur les systèmes chaînés...

Les techniques pour stabiliser les systèmes linéaires en utilisant des commandes bornées sont nombreuses. Mon objectif n'est pas ici d'en faire une bibliographie, de nombreux livres existent et seront sûrement plus complets, mais seulement ici d'en faire un survol de l'état des approches à l'époque où je me suis intéressé au problème. Tout d'abord et pour clarifier les choses, il faut être clair sur ce que permet l'utilisation d'une commande bornée par conception par rapport à une application candide d'une commande linéaire ensuite saturée par effet de l'actionneur. Cet élément n'est en effet pas toujours très détaillé au point que l'on peut avoir l'impression qu'avec certaines méthodes tout est possible alors qu'avec d'autres (plus honnêtes à mon goût) seul un nombre limité de résultats sont à escompter. Tout d'abord, il convient de définir la classe des systèmes linéaires dits ANCBC (Asymptotically Null Controllable with Bounded Controls), c'est à dire contrôlable en zéro au moyen d'une commande bornée. On remarquera que cette définition qui différentie la contrôlabilité en zéro de la contrôlabilité "tout court" est

clairement de culture non linéaire.

Définition 1.1. Un système est dit contrôlable en zéro au moyen d'une commande bornée (ANCBC) si et seulement si la matrice du système ne comporte pas de valeurs propre strictement positive.

Par définition, **aucune approche bornée ne permettra d'obtenir une stabilisation globale d'un système non ANCBC**. Pour ces systèmes là, seule une augmentation de la région d'attraction est à espérer.

Parmi la longue liste des méthodes développées pour la commande bornée des systèmes linéaires, il faut commencer par la commande optimale. Lorsque seul l'état ou la commande intervient dans le critère, elle permet par simple résolution d'un problème de programmation quadratique d'obtenir une commande bornée garantissant la stabilité dès lors que l'horizon choisi est suffisamment grand. Son principal inconvénient (cependant très souvent surestimé) est le coût de calcul associé à cette programmation quadratique. Si le temps intervient dans le critère, la résolution est plus complexe aboutissant par exemple à une commande bang-bang dans le cas de la commande en temps minimum. Parmi les autres méthodes, la commande anti-windup est la plus utilisée. Plus récemment, des approches de type petit gain ont été développées. Généralement basées sur une équation de Riccati paramétrée par un paramètre (appelé petit gain), elles ont généralement pour objectif "d'éviter" la saturation (Lin et Saberi, 1993, 1997, Lin *et al.*, 1999, Saberi *et al.*, 1996). Malheureusement, ces méthodes ne pouvant structurellement pas assurer la convergence globale d'un système ANCBC comme l'ont montré Sussmann et Yang (1991), des adaptations de ces approches ont été proposées. Ces adaptations visent à modifier dynamiquement la valeur du paramètre de petit gain en exploitant le fait que plus le retour d'état est "mou", plus son rayon d'attraction est important. On obtient ainsi une stabilisation globale avec des règles d'adaptation du paramètre de gain assez simples à mettre en oeuvre (Grogard *et al.*, 2002, Lin, 1998, Megretski, 1996). Deux inconvénients à ces méthodes sont cependant à souligner. Tout d'abord il est nécessaire de résoudre à chaque pas de temps une équation de Riccati, ensuite la procédure d'adaptation, bien que garantissant un résultat, fait appel à l'optimisation (Megretski, 1996) ou bien est discontinue (Grogard *et al.*, 2002). C'est dans ce contexte que Teel (1992) proposa une commande basée sur une série de saturations imbriquées ensuite généralisée et étendue à une commande basée sur des sommes de saturations par Sussmann *et al.* (1994). Ce sont ces commandes que je vais maintenant détailler et qui sont à l'origine des travaux présentés dans ce mémoire. Il faut souligner que l'on trouve également des commandes basées sur le backstepping borné proposé par Mazenc et Iggidr (2004) ou diverses généralisations de l'approche de Teel (1992) pour les systèmes feedforward mais qui sont intervenus ultérieurement à mes travaux. On peut également cité les progrès considérables des techniques anti-windup ces dernières années.

2 Les commandes temps-continu à bases de fonctions de saturations

Implicite jusque là, je ne m'intéresse ici qu'aux systèmes mono-entrée. Pour plus de rigueur, je redéfinit la fonction de saturation utilisée abondamment par la suite :

$$\forall M \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \text{sat}_M(\cdot) := \min(\max(\cdot, -M), M) \quad (2.1)$$

Lorsque l'indice M n'est pas précisé, cela signifie que $M = 1$:

$$\text{sat}(\cdot) := \min(\max(\cdot, -1), 1)$$

Je ne présenterais que le cas des chaînes d'intégrateurs, c'est à dire des systèmes du type :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette restriction a priori importante n'est en fait pas très restrictive. En effet, on peut aisément montrer qu'un système ANCBC peut se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_{AS} = A_{11}x_{AS} + A_{12}x_{SS} + B_1u \\ \dot{x}_{SS} = A_{22}x_{SS} + B_2u \end{cases} \quad (2.3)$$

x_{AS} correspond à la partie naturellement asymptotiquement stable du système : les valeurs propres de A_{11} sont toutes à parties réelles strictement négatives. Il est clair que si u est utilisé pour stabiliser asymptotiquement x_{SS} , alors x_{AS} converge de lui même vers l'origine. x_{SS} rassemble la partie simplement stable du système c'est à dire les pôles nuls et les pôles strictement complexes. Ne traiter que les chaînes d'intégrateur revient donc à ne pas traiter le cas des systèmes linéaires ANCBC à pôles strictement complexes et le système (2.2) correspond alors à la seconde partie du système général (2.3). Ce cas est traité dans la littérature (Sussmann *et al.*, 1994), je ne l'ometts que parce qu'il ne nous sert pas pour la suite.

L'objectif est donc de stabiliser globalement le système (2.2) à l'aide d'une commande u telle que :

$$-\bar{u} \leq u \leq \bar{u} \quad (2.4)$$

2.1 Approche de Teel (1992)

La commande initialement proposée par Teel (1992) est basée sur le premier changement de coordonnées suivant :

$$y_{n-i} = \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} x_{n-j}$$

dont le changement inverse est donné par :

$$x_{n-i} = \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \frac{i!}{j!(i-j)!} y_{n-j}$$

Ce changement de coordonnées transforme le système (2.2) en le système :

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \sum_{k=i+1}^n y_k + u & \text{pour } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \dot{y}_n = u \end{cases} \quad (2.5)$$

La commande proposée par Teel (1992) est alors :

Teel (1992)

La commande

$$u = -\text{sat}_{M_n}(y_n + \text{sat}_{M_{n-1}}(y_{n-1} + \dots + \text{sat}_{M_2}(y_2 + \text{sat}_{M_1}(y_1)) \dots)) \quad (2.6)$$

stabilise globalement le système (2) avec $-M_n \leq u \leq M_n$ dès lors que :

$$M_i < \frac{1}{2} M_{i+1} \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Dans le travail de Teel, des formes plus générales de fonctions de saturations sont possible. Une hypothèse de Lipschitzité globale lui est nécessaire pour établir son résultat. Cette hypothèse peut être levée en utilisant le Lemme 1.1 de (Marchand, 2003).

2.2 Approche de Sussmann et al. (1994)

Peu de temps après la parution du premier résultat de Teel, Sussmann *et al.* (1994) ont publié un résultat assez général donnant naissance à la seconde classe de retours d'états à base de fonctions de saturations. Ce résultat avait été précédé de prémices publiés dans (Yang *et al.*, 1992). Ce résultat également basé sur un changement de coordonnée qui transforme le système initial sous une forme exploitable par "feedforward".

Ce changement de coordonnées est donné sous forme itérative. Soit $\varepsilon > 0$ et f_1 à f_n , n fonctions linéaires définies récursivement par :

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= s_1 \\ f_2(s_1, s_2) &= \varepsilon f_1(s_1) + f_1(s_2) \\ &\vdots \\ f_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= \varepsilon^{n-1} f_{n-1}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) + f_{n-1}(s_2, s_3, \dots, s_n) \end{aligned}$$

alors, le changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} y_n &= f_1(x_n) \\ y_{n-1} &= f_2(x_n, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ y_1 &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

transforme le système (2.2) en :

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-2} & \dots & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^{n-2} & \dots & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (2.8)$$

La commande proposée par [Sussmann *et al.* \(1994\)](#) est alors :

■ [Sussmann *et al.* \(1994\)](#)

La commande

$$u = -(\varepsilon \operatorname{sat}(y_n) + \varepsilon^2 \operatorname{sat}(y_{n-1}) + \dots + \varepsilon^n \operatorname{sat}(y_1)) \quad (2.9)$$

stabilise globalement le système (2) avec $-\sum_{i=1}^n \varepsilon^i \leq u \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon^i$ dès lors que $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$

Si l'approche de [Teel \(1992\)](#) permet de prendre directement un niveau de saturation quelconque, la commande proposée par [Sussmann *et al.* \(1994\)](#) est telle que $-\sum_{i=1}^n \varepsilon^i \leq u \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon^i$. Cependant, la simple modification suivante de la commande permet de traiter le cas général :

$$u = -\gamma \sum_{i=1}^n \varepsilon^{n-i+1} \operatorname{sat}\left(\frac{y_i}{\gamma}\right) \quad (2.10)$$

où γ est un facteur d'échelle donné par

$$\gamma := \frac{\bar{u}}{\sum_{i=1}^n \varepsilon^i}$$

2.3 Qualités et défauts

Au delà d'une simple présentation technique de ces lois de commande, il est bon de se pencher sur les qualités et les défauts de ces lois de commande. Dans un travail comparatif, Rao et Bernstein (2001) ont classé un nombre conséquent de lois de commandes bornées pour les systèmes linéaires. Le travail comparatif se base sur la stabilisation du double intégrateur et teste aussi bien les performances que la robustesse. Les lois de commande sont ensuite "classées" en trois classes A, B et C. La loi de commande proposée par Teel (1992) ressort dans le premier paquet. Parmi les qualités des approches à bases de fonctions de saturations, il faut en mentionner deux qui seront exploitées par la suite dans ce manuscrit.

Simplicité : Les lois de commande basées sur les fonctions de saturations sont extrêmement peu coûteuses en terme de calcul. En effet, saturer un nombre ne coûtant rien au regard d'une multiplication, le coût de ces commandes se rapproche beaucoup de celui d'une commande linéaire classique. Elles sont donc particulièrement adaptées à une utilisation sur des systèmes à faible capacité de calcul comme les micro-drones.

Souplesse : Dans tous les développements ci-dessus, on peut aisément constater que si les seuils des saturations varient tout en continuant à vérifier les contraintes, la stabilité reste assurée. C'est cette propriété qui permet une amélioration sensible des performances comme nous allons le voir dans la suite. Cette propriété est également particulièrement intéressante pour les drones à vol battu pour lesquels des contraintes couplées apparaissent (cf. chapitre 3).

Ces qualités sont cependant contrebalancées par un inconvénient majeur pour une utilisation pratique, à savoir les faibles performances de ces lois de commande dès que le nombre d'état dépasse deux. Cet inconvénient n'a pas été remarqué par Rao et Bernstein (2001) dont l'étude se limite au double intégrateur mais avait été souligné dès 1996 par Megretski (1996).

Ce problème est maintenant résolu grâce à deux voies explorées simultanément, à savoir :

Placement de pôles : Johnson et Kannan (2003) ont proposé une adaptation de la commande proposée par Teel (1992) permettant de placer les pôles de la boucle fermée ailleurs qu'en $\{-1, \dots, -1\}$. Cela permet d'accélérer la convergence du système une fois que les saturations ne sont plus effectives.

Saturations variables : C'est une approche que nous avons proposé dans (Marchand, 2003) pour la commande de Teel (1992) puis dans (Marchand et Hably, 2005b,a) pour la commande proposée par Sussmann *et al.* (1994) en temps continu puis dans (Marchand *et al.*, 2007a) en temps discret améliorant la commande proposée par Yang *et al.* (1997). Cette approche vise à faire varier de manière dynamique le niveau des saturations afin de palier au manque de performance intrinsèque aux approches de type saturations fixes. Ce sont ces travaux qui forment la suite de ce chapitre.

Depuis ces approches ont été mixées et encore améliorées. On pourra par exemple lire les contributions de Zhou (Zhou *et al.*, 2008, Zhou et Duan, 2008, Zhou *et al.*, 2009)

2.4 Les commandes à bases de fonctions de saturations à seuils variables

2.4.1 Les raisons du mal

Nous allons prendre ici un double intégrateur afin de mieux comprendre les limitations intrinsèques aux saturations imbriquées ou aux sommes de saturation.

Dans le cas des saturations imbriquées Teel (1992), pour $n = 2$ le système (2.5) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 + u \\ \dot{y}_2 &= u \end{cases}$$

avec

$$u = -\text{sat}_{M_2}(y_2 + \text{sat}_{M_1}(y_1))$$

Si le système est initialisé ou se trouve dans une situation telle que $y_1 \neq 0$ et $y_2 = 0$ alors la commande n'excédera pas M_1 . Or pour assurer la stabilité, on doit avoir $M_1 < \frac{1}{2}M_2$. En d'autres termes, la commande maximale appliquée au système est moitié de ce qu'elle pourrait être, la convergence s'en trouve donc fortement ralentie. Plus la dimension du système sera grande, plus la *sous utilisation* de la puissance de commande est importante (en $1/2^{n-1}$, où n est la dimension de la chaîne d'intégrateur).

Dans le cas des sommes de saturations (Sussmann *et al.*, 1994), le problème est le même. Pour le double intégrateur, le système (2.8) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \varepsilon y_2 + u \\ \dot{y}_2 &= u \end{cases}$$

avec

$$u = -(\varepsilon \text{sat}(y_2) + \varepsilon^2 \text{sat}(y_1))$$

Ici aussi, si $y_1 \neq 0$ et $y_2 = 0$ alors la commande n'excédera pas ε^2 alors que le maximum possible est $\varepsilon + \varepsilon^2$ avec, rappelons le, $\varepsilon < \frac{1}{4}$. Ici aussi, la *sous utilisation* de la puissance de commande d'autant plus importante que la dimension du système sera grande (en $\varepsilon^n / (\sum_{i=1}^n \varepsilon^i)$). Comme la performance est d'autant meilleure que ε est grand, la dégradation de performance sera au mieux en $1/(1 + \sum_{i=1}^{n-1} 4^i)$. On peut ainsi noter que la dégénérescence de la commande composée de somme de saturations est plus rapide que celle composée de saturations imbriquées. En fait, comme nous l'avons montré dans (Marchand et Hably, 2005b,a), ε peut être choisi jusqu'à $\frac{1}{2}$ sans compromettre la stabilité. Dans ce cas, la dégénérescence est en $1/(1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i)$, se rapprochant nettement de celle des saturations imbriquées présentées ci-dessus.

La section suivante présente un remède naturel à ce phénomène en relâchant les saturations d'indice les plus faibles lorsque les saturations d'indice plus élevé ne sont pas "actives".

2.4.2 Adaptation dynamique des seuils de saturations

On remarquera dans les améliorations proposées des lois de commandes basées sur les fonctions de saturations ne complexifient que peu le calcul de la commande en ne

rajoutant qu'une opération de type addition dans le calcul du seuil des saturations. Celles-ci restent donc très indiquées pour les systèmes à faible capacité de calcul.

Une modification naturelle de la commande proposée par Teel (1992) est alors :

Marchand (2003)

La commande

$$u = -\text{sat}_{M_n}(y_n + \text{sat}_{M_{n-1}}(y_{n-1} + \cdots + \text{sat}_{M_2}(y_2 + \text{sat}_{M_1}(y_1)) \cdots)) \quad (2.11)$$

stabilise globalement le système (2) avec $-M_n \leq u \leq M_n$ dès lors que :

$$M_i < M_{i+1} - \left| \text{sat}_{\frac{1}{2}M_{i+1}}(y_{i+1}) \right| \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

La preuve de ce théorème se fait de manière très similaire à sa version originale.

Une modification similaire à l'approche de Sussmann *et al.* (1994) peut être réalisée. La preuve est encore une fois assez similaire à l'originale.

Marchand et Hably (2005b,a)

La commande

$$u = -(\varepsilon \text{sat}_{M_n}(y_n) + \varepsilon^2 \text{sat}_{M_{n-1}}(y_{n-1}) + \cdots + \varepsilon^n \text{sat}_{M_1}(y_1)) \quad (2.12)$$

stabilise globalement le système (2) avec $-\sum_{i=1}^n \varepsilon^i \leq u \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon^i$ dès lors que

- ◊ $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}_n$ où $\bar{\varepsilon}_n$ est l'unique racine réelle dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$ du polynôme $\varepsilon^n - 2\varepsilon + 1 = 0$ si $n \geq 3$ et $\bar{\varepsilon}_2 := 1$
- ◊ $M_n = 1$ et

$$M_i = 1 + \frac{1}{\varepsilon} [M_{i+1} - |\text{sat}_{M_{i+1}}(y_{i+1})|] \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Nos travaux (Marchand et Hably, 2005b,a) proposent en plus de l'adaptation dynamique des seuils des saturations, une extension du domaine dans lequel le paramètre ε peut être choisi. En effet, on peut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}_n = \frac{1}{2}$. On peut donc conclure que la loi de commande (2.9) stabilise globalement la chaîne d'intégrateur pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Le changement de coordonnées (2.7) donné de manière itérative dans (Sussmann *et al.*, 1994) peut être calculé plus classiquement comme suit :

$$\begin{aligned} T_n &= B \\ T_{n-1} &= (A + p_{n-1}I)B \\ T_{n-2} &= (A^2 + p_{n-1}A + p_{n-2}I)B \\ &\vdots \\ T_1 &= (A^{n-1} + p_{n-1}A^{n-2} + \cdots + p_1I)B \end{aligned}$$

où les paramètres p_i sont coefficients du polynôme :

$$\prod_{i=1}^n (\lambda + \varepsilon^i) = p_0 + p_1\lambda + \dots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

En formant la matrice $T = (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n)$, on a la relation $y = Tx$. Cette transformation peut également être calculée à l'aide des matrices de contrôlabilité des systèmes (2.2) et (2.8) comme présenté dans la suite au paragraphe 3 en temps discret.

Dans (Marchand et Hably, 2005a), une étude exhaustive de robustesse similaire à celle réalisée par Rao et Bernstein (2001) a été faite. La robustesse vis à vis de retard sur la mesure et vis à vis de perturbations de pôles (tant réels qu'imaginaires) a été testée. Il s'avère que les commandes à base de saturations à seuils variables sont légèrement moins robustes que celles à seuils fixe (on s'en serait douté) mais dans des proportions qui les maintiennent très compétitives par rapport à la plupart des autres méthodes. Le gain de performance ne se paye donc que très peu par une perte de robustesse.

2.5 Quelques simulations comparatives

Nous ne présenterons ici que quelques résultats de simulation sur le quadruple intégrateur afin de cerner le bénéfice des niveau de saturations variables. Plus la dimension de l'état est élevée, plus le gain est important. Si systématiquement, les commandes d'une même famille sont sensiblement plus rapide avec saturations variables que sans, rien ne peut être conclu entre les approches basées sur des saturations imbriquées par rapport aux approches à sommes de saturations. En effet, les performances de chacune des approches dépendent évidemment des conditions initiales qui peuvent être plus favorables à telle ou telle méthode. Mais également, les performances de chacune dépend des contraintes imposées sur la commande. Ainsi, si sur la figure 2.1, les approches de type saturations imbriquées semblent plus performantes, ce n'est plus le cas si le seuil maximum de la commande passe de 1 à 0.5, comme le montrent la figure 2.2. Pour des comparatifs de robustesse, on pourra se référer à (Marchand et Hably, 2005a).

3 Extension au temps échantillonné

Bien que n'étant pas utilisée dans la suite de ce manuscrit, je souhaiterais présenter ici une extension au cas temps discret des saturations variables proposées en temps continu afin de clore ce chapitre sur mes contribution à la stabilisation des chaînes d'intégrateurs. Ce travail est la transcription de (Marchand et Hably, 2005b,a) comme (Yang *et al.*, 1997) est la transcription de (Sussmann *et al.*, 1994) au cas temps discret. Le travail de Yang *et al.* (1997) était avec notre contribution le seul résultat en temps discret sur ce type d'approche. En temps discret, une chaîne d'intégrateur peut

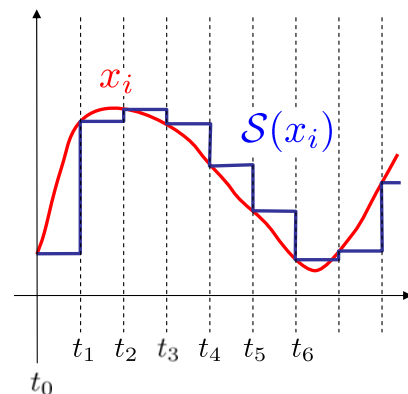


Figure 2.3 – Schéma périodique d'échantillonnage

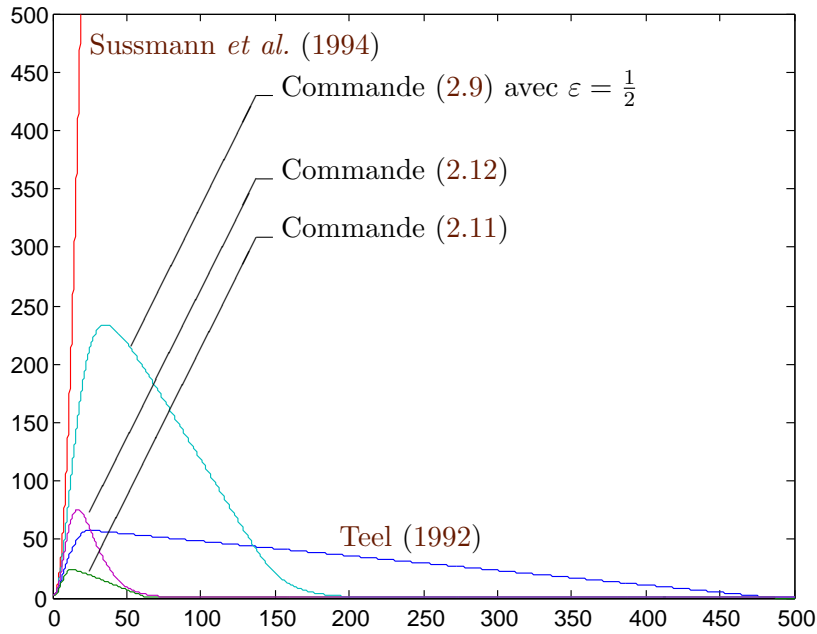


Figure 2.1 – Stabilisation du quadruple intégrateur - évolution de $\|x\|$ en fonction du temps pour $x_0 = (0 \ 1 \ -1 \ -1)^T$ et $\bar{u} = 1$

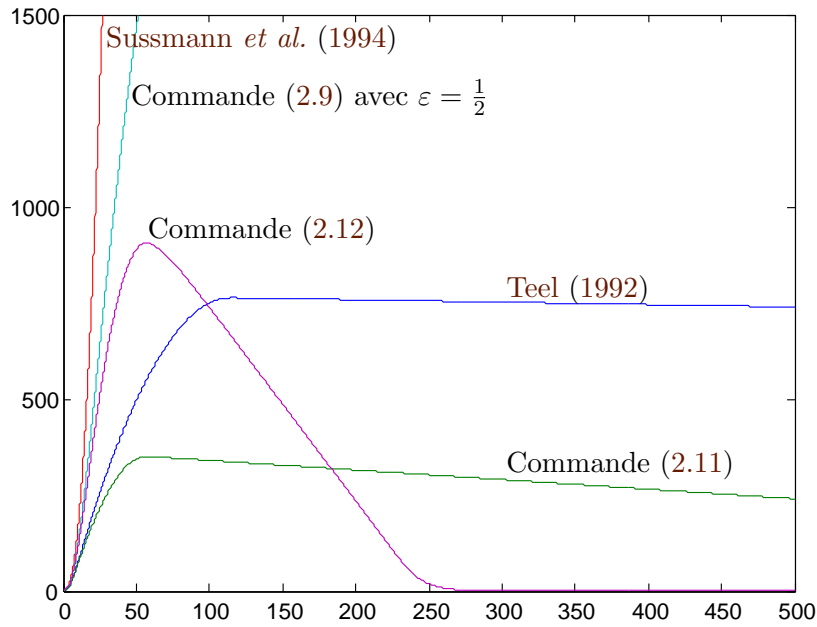


Figure 2.2 – Stabilisation du quadruple intégrateur - évolution de $\|x\|$ en fonction du temps pour $x_0 = (0 \ 1 \ -1 \ -1)^T$ et $\bar{u} = 1$

simplement être la discrétisation du système (2.2) avec une période d'échantillonnage T et un bloqueur d'ordre zéro :

$$x^+ = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u \quad (2.13)$$

avec

$$\begin{aligned} - \mathcal{A}_{ij} &= \frac{T^{j-i}}{(j-i)!} \text{ pour } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ si } i \leq j \\ - \mathcal{A}_{ij} &= 0 \text{ sinon} \\ - \mathcal{B}_i &= \frac{T^{n+1-i}}{(n+1-i)!} \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Mais également, on entend souvent par intégrateur discret, la discrétisation d'Euler du système (2.2) avec une période unitaire. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} - \mathcal{A}_{ij} &= 1 \text{ pour } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ si } i = j \text{ ou } i + 1 = j \text{ et } \mathcal{A}_{ij} = 0 \text{ sinon} \\ - \mathcal{A}_{ij} &= 0 \text{ sinon} \\ - \mathcal{B}_i &= 0 \text{ pour } i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ et } \mathcal{B}_n = 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans tous les cas, il existe un changement de coordonnées $y = P_\Theta x$ qui transforme les systèmes (2.13) à (2.15) en :

$$y^+ = \mathcal{A}_\Theta y + \mathcal{B}_\Theta u \quad (2.16)$$

avec

$$\mathcal{A}_\Theta = \begin{pmatrix} 1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots & \theta_n \\ 0 & 1 & \theta_3 & \dots & \theta_n \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \theta_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_\Theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

et ce, pour toute famille $\Theta = \{\theta_i\}_{i=1, \dots, n}$ de nombres réels. Ce changement de coordonnées s'obtient simplement par $P_\Theta = C_\Theta C^{-1}$ avec C et C_Θ les matrices de contrôlabilité des paires $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{A}_\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$. On a alors :

Marchand *et al.* (2007a)

La commande

$$u = -\gamma \sum_{i=1}^n \theta_i \text{sat}_{M_i} \left(\frac{y_i}{\gamma} \right) \quad (2.18)$$

stabilise le système (2.16) dès lors que :

- ◇ pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $0 < \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i < \theta_k < 1$
- ◇ les M_i sont tels que :

$$\begin{cases} M_n = 1 \\ M_i = 1 + \alpha_i \frac{\theta_{i+1}}{\theta_i} \left[M_{i+1} - \left| \text{sat}_{M_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1}}{\gamma} \right) \right| \right], \quad i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

avec $\alpha_i \in [0, 1]$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$
et $\gamma := \bar{u} / \sum_{i=1}^n \theta_i$

La preuve en temps discret est légèrement plus complexe qu'en temps continu. L'ajout des saturations variables ne complexifie cependant pas la preuve de manière significative par rapport aux cas à saturations fixes.

Les performances de la commande en temps discret dépendent fortement de la période d'échantillonnage T . Ce problème n'a pas été résolu pour le moment pour ce type d'approche.

4 Cas de mesures quantifiées

Si la commande échantillonnée de manière périodique est des plus classique, la commande échantillonnée "verticalement" est moins classique. Le résultat de cette section fait parti des premiers travaux dans le domaine de la commande des systèmes basés sur évènements. Il faut donc la regarder avec indulgence. La communauté reconnaît généralement le travail d'[Astrom et Bernhardsson \(2002\)](#) comme initiateur de ce sujet de recherche. Ce type d'approche vise à n'échantillonner et donc remettre à jour la commande que lorsque que l'état franchi certains seuils. Dans l'approche développée ici, l'espace d'état est pavé de cubes (éventuellement homogènes en taille). A chaque franchissement de ces seuils, la commande est remise à jour. Il est établi dans ([Marchand, 2008](#)) que ce schéma revient à mettre à jour la commande lorsque la mesure de Lebesgue $\mathcal{Q}(x_j)$ de l'état x_j change de valeur où \mathcal{Q} est défini par

$$\mathcal{Q}(x_j) = q_i \begin{cases} \text{if } x_j \in]\frac{q_{i-1}+q_i}{2}, \frac{q_i+q_{i+1}}{2}[\\ \text{or if } x_j = \frac{q_i+q_{i+1}}{2} \text{ and } x_j > 0 \\ \text{or if } x_j = \frac{q_{i-1}+q_i}{2} \text{ and } x_j < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

$\mathcal{Q}(x_j)$ est donc simplement le q_i le plus près de x_j et les trois cas donnés dans (2.19) servent uniquement à assurer une symétrie entre positif et négatif. La mesure $\mathcal{Q}(x_j)$ de l'état x_j est mis à jour quand x_j croise un niveau de détection fixé au milieu de deux valeurs quantifiées successives. Le schéma est alors celui indiqué figure 2.4 représenté ici avec des niveaux d'échantillonnage constants. Comparé au schéma 2.3, on voit l'analogie entre intégrale de Riemann qui correspondrait à un schéma périodique et l'intégrale de Lebesgue qui correspondrait au schéma asynchrone.

Notre travail a consisté à proposer sur la base des commandes à somme de saturations une commande de la forme :

$$u = - \sum_{i=1}^n a_i \text{sat}_{M_i}(\beta_i \mathcal{Q}(x_i)) \quad (2.20)$$

les a_i et M_i étant des constantes strictement positives. Cette commande est prise constante sur les périodes non uniformes d'échantillonnage et telle que pour tout $\delta > 0$

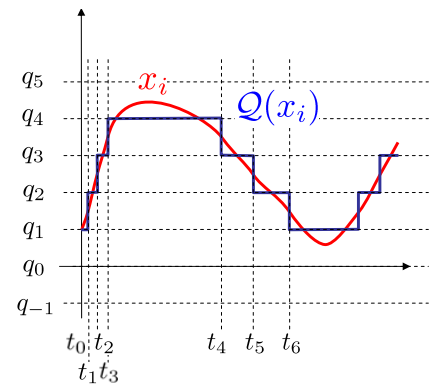


Figure 2.4 – Schéma asynchrone d'échantillonnage

donné à priori, l'état entre puis ne sorte plus d'un hyper-rectangle $\mathcal{R}(\frac{q_1}{2} + \delta)$ centré autour de l'origine. Sachant que dans l'hyper-rectangle $\mathcal{R}(\frac{q_1}{2})$ il n'y a aucune mesure, ce résultat est le plus aboutit que l'on puisse espérer avoir.

L'extension aux systèmes linéaires ANCBC n'est plus aussi triviale que dans les cas précédents et si la stabilité semble pouvoir être prouvée de manière simple, la stabilité asymptotique d'un hyper-rectangle de taille raisonnable ne me semble pas triviale. Des approches alternatives seront proposées dans la suite permettant de mieux appréhender la commande basée sur évènements.

Marchand (2008)

Pour tout $\delta > 0$, en prenant les paramètres de (2.20) les que :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i M_i < a_n \min(M_n, \beta_n \frac{q_1}{2}) \\
 & \frac{q_1}{2} + \varepsilon_{n-1} \sum_{i=1}^{n-2} a_i M_i < \varepsilon_{n-1} a_{n-1} \min(M_{n-1}, \beta_{n-1} \frac{q_1}{2}) \\
 & (1 + 2\varepsilon_{n-1}) \frac{q_1}{2} + \varepsilon_{n-2} a_{n-1} \min(M_{n-1}, \beta_{n-1} \frac{q_1}{2}) \\
 & \quad + \varepsilon_{n-2} \sum_{i=1}^{n-3} a_i M_i < \varepsilon_{n-2} a_{n-2} \min(M_{n-2}, \beta_{n-2} \frac{q_1}{2}) \\
 & \quad \vdots \\
 & (1 + 2\varepsilon_{n-k+1}) \frac{q_1}{2} + \varepsilon_{n-k} \sum_{i=n-k+1}^{n-1} a_i \min(M_i, \beta_i \frac{q_1}{2}) \\
 & \quad + \varepsilon_{n-k} \sum_{i=1}^{n-k-1} a_i M_i < \varepsilon_{n-k} a_{n-k} \min(M_{n-k}, \beta_{n-k} \frac{q_1}{2}) \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned}$$

avec pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\varepsilon_i < \min(1, \frac{\delta}{q_1})$, alors l'hyper-rectangle $\mathcal{R}(\frac{q_1}{2} + \delta)$ est asymptotiquement stable pour le système (2.2) et la commande est bornée par $\sum_{i=1}^n a_i M_i$.

5 Conclusion

Les approches par fonctions de saturation sont à mon avis bien connues maintenant, du moins en temps continu. Il existe des solutions simples pour améliorer leur faibles performances initiales et j'ai contribué à ce domaine de recherche. Elles ont également essaimé dans différents domaines dont notamment la stabilisation des corps rigides. C'est l'objectif du chapitre qui suit que de présenter mes contributions sur ce second point. En

dehors de ce développement assez naturel, cette thématique de recherche a irrigué ou a été à l'origine de nombre de mes travaux tant sur la commande des corps rigide (stabilisation d'assiette et commande en position) que sur la commande basée sur événements. Les extensions possibles dans ce domaine seraient, dans le cadre des systèmes ANCBC généraux, d'utiliser "l'excédent de commande" pour améliorer la convergence de la partie naturellement stable. Cependant, n'ayant abordé cette thématique de recherche que par intérêt pragmatique, j'ai préféré m'orienter vers d'autres champs que de creuser cette approche.

Chapitre 3

Commande bornée des robots volants

1 Introduction

Ce chapitre présente les différents travaux que j'ai menés autour de la stabilisation des robots volants. Il se décompose en trois parties :

1. Une première rappelle succinctement la modélisation des robots volants assimilés à un corps rigide. L'objectif n'est pas de rentrer dans le problème de modélisation (de nombreuses publications traitent de ce sujet) mais de donner les éléments minimaux nécessaires à la bonne compréhension de la suite.
2. Dans une seconde partie, nous présenterons les différentes approches de stabilisation d'assiette développées sur la base du chapitre précédent. Les approches sont soit des retours d'états, soit des retours de sorties directement sur la base des mesures des capteurs.
3. Dans une dernière partie nous présenterons succinctement des techniques de stabilisation en position, tant sur une version réduite au plan (type avion à décollage vertical) que sur le robot volant dans l'espace.

Encore plus que précédemment, la littérature sur la modélisation et la commande des robots volants est abondante et il n'est pas question ici de la développer. Nos travaux se placent dans le cadre de contributions à la commande contrainte des corps rigides avec une connotation très automatique et applicative. La contribution principale de mes travaux portent sur la stabilisation d'attitude où aucune commande garantissant une convergence "globale" pour ce type de système n'existait antérieurement à mes travaux. Le terme "global" est entre guillemets car la stabilisation se faisant dans l'espace $T\mathcal{SO}(3)$ tangent au groupe orthogonal euclidien des rotations dans l'espace $SO(3)$ (pour faire simple, l'espace des binômes (vitesse angulaire, rotation)) il y a une obstruction topologique à la stabilisation globale (Bhat et Bernstein, 2000). L'extension au robot en trois dimensions est pour moi très académique car elle suppose systématiquement la connaissance de la position de l'engin, ce qu'on sait être non réaliste dans des conditions de capteurs embarqués. Un souci de simplicité des lois de commande, de robustesse et d'embarquabilité m'a cependant toujours accompagné.

2 Modélisation du corps rigide dans l'espace

L'objectif de ce chapitre n'est pas de rentrer dans les détails mais uniquement de présenter un modèle général et une classification des problèmes de commande développés sur ce modèle en fonction du type d'engin considéré et de son actionnement.

2.1 Schéma général d'un corps rigide actionné

D'une manière générale, la première étape pour concevoir une commande pour le vol d'un engin consiste à le considérer comme un corps rigide actionné, c'est à dire de considérer qu'il est composé de pièces rigidement fixées les unes aux autres. Ensuite, il est souvent possible de raffiner le modèle et la commande qui lui correspond pour prendre en compte les phénomènes que l'approximation au corps rigide revient à négliger. A défaut d'être mécaniquement réaliste, cette approche permet la plupart du temps d'obtenir *un modèle de commande* sur la base duquel il est possible de concevoir un retour d'état ou de sortie. Il est ensuite souvent nécessaire de valider les approches soient sur *un modèle de simulation* qui prendra en compte les subtilités du système, soit sur un prototype réel.

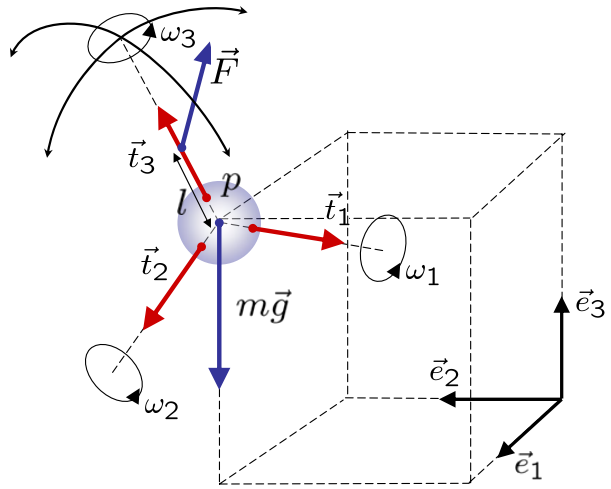


Figure 3.1 – Schéma du corps rigide actionné

Ainsi, un schéma assez général d'un engin volant est celui représenté sur la figure 3.1. Il s'agit d'un corps supposé rigide de masse m . Sa position (x, y, z) est caractérisée dans un repère inertiel $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. L'orientation du corps rigide est déterminée par l'orientation du repère mobile $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$ attaché au corps rigide par rapport au repère fixe. Je ne détaillerais que brièvement les manières de représenter l'attitude et me limiterais aux approches que j'ai utilisées par la suite (à savoir quaternions, angles d'Euler et matrice de rotation).

Les différents moyens de contrôler un engin volant peuvent dans la plupart des cas se ramener à l'application d'une force "orientable" \vec{F} dont le point d'application se situe sur un axe vertical à une distance l du centre de masse (on peut utiliser la convention $l < 0$ pour caractériser le fait que ce point d'application se situe en dessous du centre de gravité du corps rigide). Trois autres actions jouant sur la rotation du corps rigide sur lui même consistent en trois couples Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 qui impriment une rotation autour des axes \vec{t}_1 , \vec{t}_2 et \vec{t}_3 du repère mobile. De ces trois contrôles, certains peuvent s'avérer redondants et donc ne pas être présents. Par exemple, l'application de la forces \vec{F} peut générer un couple sur le corps rigide qui a le même effet que Γ_1 et/ou Γ_2 .

2.2 Limitations

Parmi les hypothèses simplificatrices liées à ce modèle, on a :

- ◇ **L'engin n'est pas un corps rigide** : C'est le cas de la plupart des engins avec notamment un effet contre-rotatif dans le cas des voilures tournantes comme les hélicoptères qu'il faut compenser et la plupart du temps essayer de ne pas traiter comme de simples perturbations ou un phénomène de "flapping" produisant un couple de cabrage lié à la vitesse de déplacement linéaire.
- ◇ **Le corps rigide présente des dissymétries** : Ces dissymétries peuvent être multiples. Parmi celles-ci on peut citer : le point d'application de la force \vec{F} n'est pas sur l'axe vertical, les axes de rotation commandés (\vec{t}_1 à \vec{t}_3) ne s'intersectent pas au centre de masse (voire même, ne forment pas un trièdre), le centre de masse n'est pas sur l'axe vertical, etc. En pratique, ces dissymétries qu'il est souhaitable de réduire à la conception de l'engin entraînent des couples additionnels qu'il est possible de compenser au cas où un modèle suffisamment fin est disponible. Dans le cas contraire, c'est la robustesse de la commande qui devra absorber ces imperfections.
- ◇ **Les couples et forces ne sont pas les contrôles directs** : C'est ce qui arrive la plupart du temps où les forces et les couples sont issues d'un actionneur propulseur (hélice, ailes battantes, réacteur, etc.). La très grande majorité des travaux font comme hypothèse que ces actionneurs sont rapides et asservis localement de sorte à délivrer la force souhaitée sans avoir à inclure leurs dynamiques dans la conception de la commande de l'engin dans son ensemble. Quoi qu'il en soit, cette approximation de conception doit se coupler avec une propriété forte de robustesse de la commande de l'engin face aux erreurs de forces ou de couples générés. En effet, la force aérodynamique varie de manière importante en fonction de l'altitude, de la vitesse de l'engin ou de sa proximité au sol.

2.3 Modèle mathématique du corps rigide dans l'espace

Avant de commencer à donner les détails du modèle du système représenté à la figure 3.1, je commence par rappeler quelques notations très classiques en mécanique des solides. On note par $\vec{v}^\times \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ le tenseur antisymétrique associé au vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, c'est à dire :

$$\vec{v}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Cette notation permet de voir le produit vectoriel entre les vecteurs \vec{v} et \vec{w} noté $\vec{v} \times \vec{w}$, comme le produit entre la matrice \vec{v}^\times et le vecteur \vec{w} ($\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v}^\times \cdot \vec{w}$).

Enfin, afin de lever l'ambiguïté inhérente à une représentation dans deux repères différents, je rajouterai un indice f pour préciser qu'un vecteur est exprimé dans le repère fixe et un indice m lorsque celui-ci est exprimé dans le repère mobile.

Un modèle mathématique du système représenté sur la figure 3.1 s'obtient facilement par une approche de Newton-Euler. Concernant la dynamique de translation, en notant $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ la position cartésienne du centre de gravité et $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sa vitesse, on a :

Equations dynamiques du corps rigide : position et vitesse cartésienne

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} \tag{3.2}$$

$$m\dot{\vec{v}} = -mg\vec{e}_3 + \vec{F}^f \tag{3.3}$$

m est la masse du corps et g est la gravité. **Ces équations s'écrivent dans le repère inertiel** (fixe) et donc \vec{F} doit être exprimé dans ce repère. Le modèle (3.2-3.3) de la position et de sa dynamique s'exprime \mathbb{R}^6 .

La dynamique de la vitesse de rotation $\vec{\omega}$ autour des trois axes du repère mobile s'écrit :

Equations dynamiques du corps rigide : vitesse angulaire

$$J\dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times J\vec{\omega} + \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix} + \vec{F}^{m \times} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Ces équations s'écrivent dans le repère mobile et donc \vec{F} doit être exprimé dans ce repère. La dynamique de l'attitude dépend ensuite du mode de représentation choisie pour celle-ci. Je présente ici les trois les plus couramment utilisées à savoir : les angles d'Euler, la matrice de rotation et les quaternions. La première représente l'orientation du repère mobile par rapport au repère fixe au moyen de trois rotations d'angles ϕ , θ et ψ successives autour des axes de roulis, tangage puis lacet du corps rigide. Elle est la plus intuitive mais a l'inconvénient de présenter une singularité. La seconde, développée justement pour palier à ce défaut, consiste à exprimer l'évolution de la matrice de rotation permettant de passer du repère fixe au repère mobile. La troisième permettant de réduire le nombre de variables intervenant est les quaternions qui représentent l'attitude à l'aide d'un vecteur unitaire et d'une rotation autour de celui-ci. Avec le formalisme d'Euler, on obtient la relation :

Equations dynamiques du corps rigide : angles d'Euler (3 ψ - 2 ϕ - 1 θ)

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t\theta s\phi & t\theta c\phi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

que l'on peut écrire également sous la forme :

Equations dynamiques du corps rigide : matrice de rotation

$$\dot{R} = R\vec{\omega}^\times \quad (3.6)$$

où $R \in SO(3)$ est la matrice de rotation permettant de passer du repère inertiel fixe au repère mobile :

$$R = \begin{pmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\theta + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\psi s\phi s\theta & -c\psi s\phi + s\psi c\phi s\theta \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix}$$

Cette seconde écriture a l'avantage de ne pas présenter de singularité si $\cos \theta = 0$, par contre elle substitue à un vecteur d'état de dimension 3 une matrice de 9 éléments. Une autre solution plus "économique" en terme de variables d'états consiste alors à définir le quaternion. Le quaternion est directement issu du théorème d'Euler qui stipule que toute rotation de l'espace en trois dimension peut s'exprimer comme une rotation simple d'angle β au tour d'un axe \vec{e} . On définit ainsi :

$$q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \vec{e} \sin \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vec{q} \end{pmatrix}$$

et l'équation dynamique s'écrit :

Equations dynamiques du corps rigide : quaternion

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{2}\Omega(\vec{\omega})\vec{q} = \frac{1}{2}\Xi(q)\vec{\omega} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Omega(\vec{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\omega}^T \\ \vec{\omega} & -\vec{\omega}^\times \end{pmatrix} \\ \Xi(q) = \begin{pmatrix} -\vec{q}^T \\ I_{3 \times 3}q_0 + \vec{q}^\times \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.7)$$

On obtient ensuite la matrice de rotation R à partir du quaternion par la relation :

$$R = \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix}$$

où q_1 , q_2 et q_3 sont les composantes du vecteur \vec{q} .

Les modèles de l'attitude et de sa dynamique (3.4,3.5), (3.4,3.6) et (3.4,3.7) sont équivalents et s'expriment dans $TSO(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

3 Une classification du problème de commande des corps rigides dans l'espace

La problématique de commande est directement liée au nombre de degrés de libertés commandés de la force \vec{F} et des couples $\vec{\Gamma} := (\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3)^T$. En effet, ce sont eux qui conditionnent la possibilité de **déplacements sans inclinaison**. Cette possibilité change radicalement les techniques de commande à utiliser, typiquement linéaire lorsque ce déplacement est possible et non linéaire lorsqu'il est impossible. L'obligation d'incliner l'engin pour le déplacer latéralement ou vers l'avant représente en effet une contrainte similaire aux contraintes non holonomes pour les véhicules terrestres et implique la non commandabilité du linéarisé tangent si l'inclinaison longitudinale et/ou latérale est nulle.

Afin de rendre plus claire la suite de ce manuscrit et les contributions qui s'y trouvent, il est naturel de classer le problème de commande du corps rigide représenté figure 3.1. Cette classification est liée au nombre de commandes dont nous disposons au travers des couples de commande $\vec{\Gamma}$ et de la force \vec{F} . On a ainsi :

- ◊ La force \vec{F} peut dans sa forme la plus générale avoir trois degrés de liberté se rapportant à ses trois coordonnées (exprimées assez naturellement dans le repère mobile). Le degré de liberté selon \vec{t}_3 est indispensable car c'est lui qui permet de compenser la gravité et il est toujours présent.
- ◊ Le couple $\vec{\Gamma}$ dispose de 3 degrés de libertés, le couple Γ_3 contrôlant le lacet et qui permet d'orienter le robot est toujours présent.

En utilisant la notation $i\vec{F}j\vec{\Gamma}$ où $1 \leq i, j \leq 3$ représentent respectivement le nombre (entier) de degrés de liberté en \vec{F} et $\vec{\Gamma}$, on a classiquement les deux classes de robots suivants :

1 \vec{F} 3 $\vec{\Gamma}$ Cette classe correspond par exemple aux quadrirotors que nous verrons dans la section suivante. Classiquement, la distance l est négligée. En effet, l'effet de l peut aisément se compenser en modifiant les couples de roulis et de tangage. C'est également dans cette classe que l'on trouve les robots volants biomimétiques qui permettent en dissymétrisant les ailes de produire des couples de roulis et de tangage. Cette classe se retrouve dans la littérature sous la terminologie de commande des *VTOL* (pour Vertical Takeoff and Landing aircraft) qui lorsqu'on les restreint à un plan vertical deviennent des *PVTOL* (pour Planar Vertical Takeoff and Landing aircraft)

3 \vec{F} 1 $\vec{\Gamma}$ Cette classe est celle des hélicoptères où seul le lacet est contrôlé par un rotor de queue. C'est également dans cette classe que l'on retrouve la plupart des hélicoptères de modélisme dont les coaxiaux.

Les travaux qui suivent traitent des systèmes appartenant à la première classe.

4 Commande contrainte de l'attitude

La commande d'attitude a intéressé la communauté depuis de nombreuses années. Les travaux sont multiples et on peut par exemple citer (Crouch, 1984, Wen et Kreutz-Delgado, 1991). J'avais commencé à aborder le problème en thèse avec des techniques

de commande prédictives (Marchand et Almir, 1998b), les travaux ci-dessous prennent une direction très différente avec des approches de type Lyapunov. Dans tous les cas, on suppose que la force \vec{F} est alignée avec l'axe vertical \vec{t}_3 attaché au corps et n'a donc aucune influence sur l'attitude du système. En effet, le dernier terme de l'équation (3.4) disparaît. On dispose donc des trois couples de commande Γ_1 à Γ_3 pour commander le système.

Cette section se décompose en deux sous-sections. La première (section 4.1) détaille le problème de commande de l'assiette quand la vitesse angulaire et le quaternion d'attitude sont disponibles, tandis que la seconde (section 4.2) s'intéresse au cas où seule la mesure capteur est accessible.

4.1 A partir de la mesure de l'attitude et de sa dérivée

On suppose ici que l'attitude sous forme du quaternion q ainsi que la vitesse angulaire sont disponibles. J'ai travaillé sur la reconstruction de l'attitude (Guerrero-Castellanos *et al.*, 2005) mais tel n'est pas le propos de ce chapitre. On a alors le résultat suivant :

Guerrero-Castellanos *et al.* (2011, 2008, 2007)

Définissons les couples $\vec{\Gamma} := (\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3)^T$ par :

$$\Gamma_i = -\text{sat}_{\bar{\Gamma}_i} \left(\frac{\kappa}{\rho_i} \omega_i + \kappa q_i \right), \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (3.8)$$

où

- ◇ $\text{sat}(\cdot)$ est la fonction de saturation définie en (2.1) page 26,
- ◇ $\bar{\Gamma}_i$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$ est la borne supérieure maximale acceptable sur le $i^{\text{ème}}$ couple de commande Γ_i ,
- ◇ κ est un paramètre réel tel que $0 < \kappa \leq \min_i \bar{\Gamma}_i / 2$,
- ◇ ρ_i sont des paramètres strictement positifs

Alors, la commande (3.8) stabilise presque globalement l'attitude (3.7,3.4) à l'origine ($q_0 = 1, \vec{q} = 0$ et $\vec{\omega} = 0$).

Comme le quaternion est unitaire et donc naturellement borné, cette commande prend la forme des saturations imbriquées du chapitre précédent. Du reste, la preuve de stabilité suit le même principe que pour les chaînes d'intégrateurs. On remarque également si l'on regarde le contenu de la fonction saturation que la commande est en quelque sorte un régulateur PD saturé où ω_i serait vu comme une dérivée de la position angulaire représentée par q_i . Le cas de l'ajout (naturel) d'un intégrateur, si il donne de bons résultats en simulation et expérimentalement, n'est malheureusement pas trivial d'en prouver la stabilité.

Cette commande présente un certains nombre d'avantages que l'on peut citer succinctement :

- ◇ La stabilité est indépendante de la valeur de la matrice d'inertie J , la seule hypothèse est que J soit symétrique afin que $W = \frac{1}{2}\bar{\omega}^T J \bar{\omega} + \kappa((1 - q_0)^2 + \bar{q}^T \bar{q})$ ait les caractéristiques d'une fonction de Lyapunov
- ◇ En cas de capteur de vitesse angulaire incapable de mesurer au delà d'une vitesse donnée, la commande continue à stabiliser le système. Dans ce cas, ω_i est remplacé dans l'équation (3.8) par sa mesure $\tilde{\omega}_i := \text{sat}_{\bar{\omega}_i}(\omega_i)$ où $\bar{\omega}_i$ est la vitesse maximale que le capteur peut mesurer sur l'axe i .
- ◇ L'état du système rejoint en temps fini un sous espace où $|\omega_i| \leq \rho_i$ et y demeure.

On peut étendre au quadrirotor qui, bien que n'étant pas un corps rigide, permet l'application directe de la commande (3.8). En effet, les couples gyroscopiques liés à la rotation des quatre pales produit un effet perpendiculaire au vecteur de vitesse angulaire et n'a donc aucune action sur la décroissance de la fonction de Lyapunov.

Toutes ces approches ont été validés expérimentalement sur un quadrirotor.

Cette commande a été adaptée aux robots biomimétiques à ailes battantes. La dynamique de ces engins est traitée en utilisant la théorie du moyennage qui permet de ne prendre en compte que la dynamique moyenne du corps en négligeant les déplacements périodiques liés aux mouvements relatifs des ailes par rapport aux corps de l'engin. En effet, chez les insectes, la masse des ailes est très faible par rapport à la masse totale de l'insecte (de l'ordre de 5%).

La difficulté ne réside donc pas dans la dynamique et sa stabilisation, mais plutôt dans la prise en compte des contraintes dans la mesure où les couples ne sont pas les véritables commandes. Afin d'avoir des angles de battement et de rotation des ailes physiquement réalisables, les couples maximum de lacet et de tangage doivent être reliés entre eux par une relation non linéaire comme illustré sur la figure 3.2. L'adaptation de la commande d'assiette aux robots à ailes battantes a été publiée dans (Rifai *et al.*, 2012b, 2008, 2007a,b). L'intérêt de cette approche pour les robots à ailes battantes réside dans la robustesse de la commande par rapport aux incertitudes de modèle généralement très mal connus. Nous avons ainsi pu tester en simulation l'effet d'ailes n'ayant pas la même surface (ou, ce qui est équivalent, la même efficacité), de coefficients aérodynamiques mal connus, de matrice d'inertie mal connue, etc. L'intégralité des tests de robustesse se

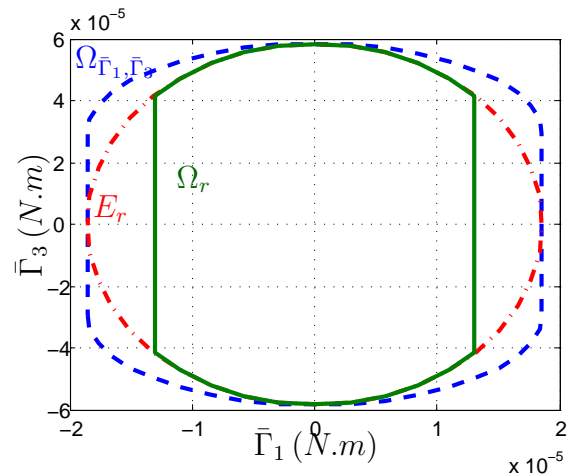


Figure 3.2 – Relation reliant les couples maximaux de lacets et de roulis dans le cas des robots à ailes battantes. Le vecteur de couples maximum est limité à l'ensemble $\Omega_{\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_3}$ approximé par l'ellipse E_r ensuite tronquée pour obtenir l'ensemble Ω_r privilégiant le roulis sur le lacet

trouvent dans (Rifai *et al.*, 2012b).

4.2 A partir des sorties capteurs

Il est parfois délicat d'estimer l'attitude et en tout cas en matière de coût de calcul, cette étape est de loin la plus couteuse (on est au delà des 99% quand on applique des commandes comme celle mentionnée ci-dessus). Il apparait donc naturel de s'en affranchir. Pour cela, il est nécessaire de classer les capteurs possibles en deux classes principales :

- ◊ La première regroupe tous les capteurs donnant la mesure dans le repère mobile $\vec{s}^m(t)$ d'un vecteur \vec{s} constant et unitaire dans le repère fixe (c'est à dire $\vec{s}^f = \text{constante}$). Dans cette classe on retrouve classiquement les accéléromètres dès lors qu'on néglige l'accélération propre du corps, les capteurs de champs magnétique terrestre (magnétomètres) ainsi que tout les systèmes de pointages sur des étoiles.
- ◊ La seconde classe regroupe les vecteurs permettant la mesure de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ dans le repère mobile.

Pour plus de rigueur, les différentes mesures du premier groupe de capteurs doivent être indexées par l'indice du capteur k car il est possible d'avoir plusieurs capteurs. Cette précaution n'est pas nécessaire pour la seconde classe pour laquelle lorsque plusieurs capteurs sont disponibles, il suffit d'en prendre la moyenne. En supposant les capteurs parfaits, les relations reliant les mesures \vec{s}_k^m et $\vec{\omega}$ sont les suivantes (il s'agit alors d'une simple application de la formule de Varignon) :

$$\dot{\vec{s}}_k^m = [\vec{s}_k^{m \times}] \vec{\omega} = \vec{s}_k^m \times \vec{\omega} = -\vec{\omega} \times \vec{s}_k^m \quad (3.9)$$

En étendant la relation à σ capteurs, on a :

$$\dot{\vec{S}}^b := \begin{pmatrix} \dot{\vec{s}}_1^m \\ \vdots \\ \dot{\vec{s}}_\sigma^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1^{m \times} \\ \vdots \\ \vec{s}_\sigma^{m \times} \end{pmatrix} \vec{\omega} =: M \vec{\omega} \quad (3.10)$$

Et donc, dès lors que l'on a au moins deux capteurs non colinéaires (typiquement accéléromètre et magnétomètre), la matrice $M \in R^{3\sigma \times 3}$ est de rang plein et la vitesse angulaire peut être reconstruite par la relation :

$$\vec{\omega} = M^\dagger \dot{\vec{S}}^b \quad (3.11)$$

où $M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$ est l'inverse de Moore-Penrose de M (i.e. pseudo inverse). Enfin, une de nos contributions a consisté à proposer une variable significative de l'erreur d'attitude. Si R_d désigne la matrice de rotation désirée (i.e. l'attitude finale), on définit le vecteur d'erreur suivant :

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^v \vec{s}_k^m \times R_d \vec{s}_k^f \quad (3.12)$$

Pour faire simple, on peut considérer que ce vecteur est nul dès lors que la mesure dans le repère mobile \vec{s}^m et celle que l'on souhaite avoir dans le repère fixe $R_d \vec{s}^f$ sont colinéaires. Le cas est en fait plus complexe et est détaillé dans (Guerrero-Castellanos *et al.*, 2012, Rifai *et al.*, 2012a). L'objectif des commandes suivantes est donc d'annuler le module de ce vecteur :

Guerrero-Castellanos *et al.* (2012, 2009), Rifai *et al.* (2012a, 2011, 2009)

Définissons les couples $\vec{\Gamma} := (\Gamma_1 \ \Gamma_2 \ \Gamma_3)^T$ par :

$$\Gamma_i = -\text{sat}_{\bar{\Gamma}_i} \left(\frac{\kappa}{\rho_i} \omega_i + \kappa \gamma_i \right), \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (3.13)$$

ou

$$\Gamma_i = -\text{sat}_{\bar{\Gamma}_i} \left(\frac{\kappa}{\rho_i} [M^\dagger \dot{S}^b]_i + \kappa \gamma_i \right), \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (3.14)$$

où

- ◇ $\text{sat}(\cdot)$ est la fonction de saturation définie en (2.1) page 26,
- ◇ $\bar{\Gamma}_i$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$ est la borne supérieure maximale acceptable sur le $i^{\text{ème}}$ couple de commande Γ_i ,
- ◇ κ est un paramètre réel tel que $0 < \kappa \leq \min_i \bar{\Gamma}_i/2$,
- ◇ ρ_i sont des paramètres strictement positifs

Alors, la commande (3.13) ou (3.14) stabilise presque globalement l'attitude (3.7,3.4) à l'origine ($q_0 = 1, \vec{q} = 0$ et $\vec{\omega} = 0$).

Afin d'éviter d'utiliser la dérivée de la mesure (commande (3.14)), des versions filtrées ont été proposées. Il faut cependant faire remarquer que contrairement au correcteur PD où il est indispensable de filtrer l'action dérivée, cet impératif ne s'est pas fait ressentir lors de l'expérimentation de ces lois de commande sur le quadrirotor. Cette approche conserve les bonnes qualités de robustesse de la loi de commande (3.8) et a ainsi pu être appliquée en utilisant la même stratégie que précédemment aux robots à ailes battante en simulation.

4.3 Conclusion

Ce chapitre a présenté mes contributions en terme de commande contrainte de l'attitude des corps rigides avec des applications expérimentales au quadrirotor. Si je continue à avoir quelques travaux ponctuels dans le domaine, ils ne sont plus ma priorité car ils sont maintenant bien maîtrisés. Les performances obtenues sont celles des correcteurs PID qui sont connus pour être très efficaces sur la stabilisation d'assiette avec en sus un respect des contraintes de saturations. La section suivante, très académique, est le prolongement très naturel de cette section et porte sur la stabilisation en position des engins volants.

5 Commande contrainte de la position

Chronologiquement, la plupart des travaux présentés ici sont antérieurs à ceux de la section précédente. La raison est très académique, autant les problèmes traités dans la section précédente nécessitent une approche expérimentale parfois fastidieuse, autant ceux présentés ici sont pour la plupart des *play cases* largement traités dans la littérature

classique d'automatique. En contre partie, si ils sont intéressant pour l'avancée des techniques, ils le sont beaucoup moins pour le réalisme des hypothèses.

Cette section se décompose en deux sous-sections. La première (section 5.1) présente mes travaux sur la stabilisation en position du sous problème de commande de l'avion planaire à décollage vertical connu sous le nom de PVTOL (pour *Planar Vertical Take-Off and Landing*). Ce système est la projection simplifiée dans un plan vertical du problème global de commande. La seconde (section 5.1) traite du problème global de commande.

5.1 Commande contrainte du PVTOL

En 1992, Hauser *et al.* proposa un modèle simplifié de VTOL, considérant l'avion dans un plan vertical avec un tangage nul et ne considérant que les effets principaux (les effets de sols, turbulences et autres phénomènes aérodynamiques ne sont pas pris en compte). Ce système est connu sous la dénomination de PVTOL pour *Planar Vertical Take-Off and Landing aircrafts*). Sa dynamique comporte trois degrés de liberté et deux entrées de commande. Ce système est rapidement devenu un "benchmark" des systèmes de commande à phase non minimale. Le modèle simplifié du PVTOL peut être considéré comme étant la projection sur un plan vertical d'un objet volant tel que présenté en section 2.3. Une telle dynamique simplifiée d'un PVTOL a été largement utilisée à cause des difficultés inhérentes qu'elle englobe, telles que le sous-actionnement (deux entrées de commande pour trois degrés de liberté), la propriété de phase non minimale (l'existence d'une dynamique des zéros instables). En outre ce système inclut toutes les difficultés de l'intégrateur de Brockett (système unicycle) qui peut être obtenu en négligeant le paramètre de couplage et la gravité. Le modèle de ce système est donné par :

$$\ddot{x} = -\sin(\theta)u + e \cos(\theta)v \tag{3.15}$$

$$\ddot{y} = \cos(\theta)u + e \sin(\theta)v - 1 \tag{3.16}$$

$$\ddot{\theta} = v \tag{3.17}$$

où x et y représentent les positions cartésiennes horizontale et verticale du centre de gravité de l'avion, comme le montre la figure 3.3. θ représente l'angle du roulis. Les entrées de commande u et v représentent les grandeurs normalisées relatives à la poussée verticale dirigée vers le haut par rapport à l'avion et le couple de roulis. e représente le paramètre de couplage entre le couple de roulis et l'accélération latérale de l'avion. Le coefficient '-1' dans l'équation (3.16) correspond à l'accélération normalisée de la gravité.

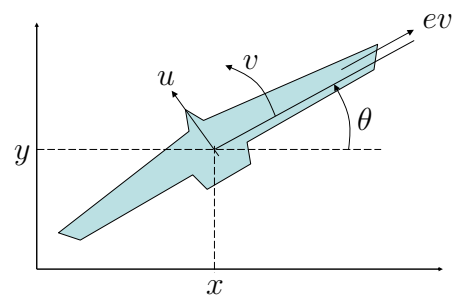


Figure 3.3 – Vue de l'avion à décollage vertical dans le plan frontal

5.1.1 Approche par chaîne d'intégrateurs

L'approche proposée s'intéresse au PVTOL sans couplage, c'est à dire au système (3.15-3.17) avec $e = 0$. Comme remarqué par [Olfati-Saber \(2002\)](#), les systèmes avec et sans couplage sont bijectifs. Cependant, le changement de coordonnées nécessite la connaissance de ce paramètre de couplage souvent mal connu. A partir de cette hypothèse, le système (3.15-3.17) est décomposé en deux sous-systèmes. Le premier, Σ_1 représente le mouvement de translation des équations (3.15-3.16) tandis que le second, Σ_2 , représente le mouvement en rotation de l'équation (3.17) qui, notons le est indépendant de x et y . En utilisant une approche similaire au backstepping, l'idée consiste à forcer l'état η_1 à converger vers un état η_{1_d} défini par :

$$\eta_{1_d} := \arctan\left(\frac{-r_1}{r_2 + 1}\right) \quad (3.18)$$

avec r_1 et r_2 définis par les équations ci-dessous. On reconnaît dans la définition de r_1 et r_2 la forme des commandes (2.9) et (2.12).

$$\begin{aligned} r_1 &= -\gamma_1 \left[\varepsilon \operatorname{sat}\left(\frac{z_2}{\gamma_1}\right) + \varepsilon^2 \operatorname{sat}\left(\frac{\varepsilon z_1 + z_2}{\gamma_1}\right) \right] & \gamma_1 &:= \frac{r_1^{\max}}{\varepsilon + \varepsilon^2} \\ r_2 &= -\gamma_2 \left[\varepsilon \operatorname{sat}\left(\frac{z_4}{\gamma_2}\right) + \varepsilon^2 \operatorname{sat}\left(\frac{\varepsilon z_3 + z_4}{\gamma_2}\right) \right] & \gamma_2 &:= \frac{r_2^{\max}}{\varepsilon + \varepsilon^2} \end{aligned}$$

Ainsi, si $\eta_1 = \eta_{1_d}$, la commande de poussée u

$$u = \sqrt{r_1^2 + (r_2 + 1)^2} \quad (3.19)$$

découple le sous système Σ_1 en deux doubles intégrateurs indépendants :

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 &= r_1 \\ \ddot{z}_3 &= r_2 \end{cases}$$

Le choix de r_1 et r_2 conforme aux conditions énoncés au chapitre 2 page 31, c'est à dire avec $\varepsilon < 1$, garanti la stabilité de ces deux systèmes. r_1^{\max} et r_2^{\max} , et donc γ_1 et γ_2 doivent être choisis tels que :

- ◊ $u^{\max} = \sqrt{r_1^{\max 2} + (r_2^{\max} + 1)^2}$ ce qui implique implicitement que $u^{\max} > 1$ et donc en d'autres termes d'être capable de compenser la gravité
- ◊ $r_2^{\max} < 1$ afin de garantir que $|r_2| < 1$ et donc la continuité et la bornitude de η_{1_d} et de ses dérivées temporelles successives.

La condition $\eta_1 = \eta_{1_d}$ est cependant irréalisable mais peut être relâchée en $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_1(t) = \eta_{1_d}(t)$ utilisant les propriétés des systèmes en cascade ([Sontag, 1989](#)). Ainsi, la commande v peut être choisie de la manière suivante :

$$v = \operatorname{sat}_\beta(\ddot{\eta}_{1_d}) - \gamma_v \left[\varepsilon \operatorname{sat}\left(\frac{\eta_2 - \dot{\eta}_{1_d}}{\gamma_v}\right) + \varepsilon^2 \operatorname{sat}\left(\frac{\varepsilon(\eta_1 - \eta_{1_d}) + (\eta_2 - \dot{\eta}_{1_d})}{\gamma_v}\right) \right] \quad (3.20)$$

où $\operatorname{sat}_\beta(\cdot) = \beta \operatorname{sat}(\cdot)$. Hormis le terme $\operatorname{sat}_\beta(\ddot{\eta}_{1_d})$, la commande (3.20) correspond à la commande (2.12) appliquée à l'erreur $\eta_1 - \eta_{1_d}$. La saturation sat_β est ajoutée pour

assurer la bornitude de v . Afin de garantir la régularité de v , il est nécessaire de garantir au moins la continuité de $\dot{\eta}_{1_d}$ et donc de rendre \mathcal{C}^2 la fonction de saturation sat . La convergence de η_1 vers η_{1_d} (et par la même occasion de η_2 vers $\dot{\eta}_{1_d}$) est assurée dès lors que $\beta < \gamma_v \varepsilon^2 / 2$. Il suffit ensuite de choisir β et γ_v tels que $\beta + \gamma_v(\varepsilon + \varepsilon^2) = v^{\max}$. En résumé, le résultat de stabilisation est donc le suivant :

Hably et al. (2006)

Les commandes (3.19) et (3.20) stabilisent asymptotiquement le PVTOL (3.15-3.17) avec $e = 0$ en vérifiant $\forall t > 0, 1 \leq u(t) \leq u^{\max}$ et $-v^{\max} \leq v(t) \leq v^{\max}$ dès lors que :

- ◇ $\varepsilon < 1$
- ◇ $\sqrt{r_1^{\max^2} + (r_2^{\max} + 1)^2} = u^{\max}$
- ◇ $\beta + \gamma_v(\varepsilon + \varepsilon^2) = v^{\max}$
- ◇ $\beta < \gamma_v \varepsilon^2 / 2$

Pour plus de simplicité, le résultat n'a pas été énoncé avec des saturations variables mais il reste vrai avec celles-ci. Il est également nécessaire pour conduire la preuve d'avoir une fonction de saturation régulière et ensuite la *dérégulariser* à la limite. Les résultats en simulation montrent une sensible amélioration de la vitesse de convergence.

5.1.2 Approches prédictives

Deux autres approches basées sur des techniques de commande prédictive ont également été développées pour la stabilisation du système PVTOL. Le principe de base de commande prédictive consiste à trouver à chaque instant t une stratégie de commande en boucle ouverte sur un horizon de prédiction t_f :

$$[u(\tau), v(\tau)] \quad ; \quad \tau \in [t, t + t_f]$$

qui conduit les états du système $z = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ à un certain état désiré final $z(t + t_f)$. La mise à jour de la commande à chaque période d'échantillonnage résulte en une commande en boucle fermée. Même si de nombreuses formulations et résultats existent en temps continu, hormis à trouver des solutions explicites, le calcul ne peut se faire qu'à certains instants d'échantillonnage. On définit donc T la période d'échantillonnage, telle que $t_f = nT$. Les entrées de commande sont supposées être constantes sur chaque période d'échantillonnage. Dans la suite, l'indice k représentera la valeur à l'instant $t + kT$. La loi de commande est alors définie par les deux vecteurs :

$$\begin{aligned} U(t) &= (u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_{n-1})^T \\ V(t) &= (v_0 \quad v_1 \quad \cdots \quad v_{n-1})^T \end{aligned}$$

L'objectif est de trouver des commande bornées, à savoir une poussée positive $0 \leq u_k \leq u^{\max}$ et un couple de roulis limité $v^{\min} \leq v_k \leq v^{\max}$, et pour des raisons de commandabilité u_k doit vérifier $u^{\max} > 1$ afin d'être capable de compenser la gravité.

La première approche (Chemori et Marchand, 2008, 2006) que je ne détaillerais pas consiste en une linéarisation partielle du système permettant de le décomposer en une partie linéaire et une dynamique interne non linéaire. Des trajectoires sur la partie linéaire sont ensuite optimisées pour améliorer le comportement de la dynamique interne.

Dans la seconde approche (Poulin *et al.*, 2007, Marchand *et al.*, 2007a), une technique de commande prédictive rapide est adoptée. L'idée de base de l'approche de commande proposée a consisté à subdiviser le problème de commande en deux sous-problèmes. Dans le premier, trivial, la commande v est utilisée pour stabiliser θ et ses dérivées successives. On notera que contrairement aux approches précédentes, θ n'est pas utilisé comme variable de commande intermédiaire. Dans le deuxième sous-problème, l'objectif consiste à stabiliser x, y et leurs dérivées quel que soit le choix de v . Ceci est uniquement possible si l'évolution de θ est suffisamment "riche". Le terme "riche" fait référence à deux phénomènes qui seront expliqués plus en détails par la suite. Premièrement, à cause de la positivité de la commande u , θ (pris au sens d'un angle dans $[-\pi, +\pi]$) doit évoluer alternativement positivement et négativement sur l'intervalle $[t, t + nT]$ dans le but de préserver la commandabilité du reste du système même dans le cas d'un couplage nul. En effet, u étant nécessairement positif, en cas de couplage nul ($e = 0$) et d'angle θ toujours du même signe, la dynamique (3.15) de \ddot{x} sera toujours du même signe, interdisant ainsi d'atteindre la moitié de l'espace 3D. Ajouter cette contrainte sur θ ne rend pas, au contraire, son évolution contre naturelle. Pour cela, la dynamique (3.17) est complétée avec :

$$\dot{I}_\theta = \theta \quad (3.21)$$

Le second phénomène quant à lui correspond à la perte de commandabilité si θ s'annule. Ce problème classique des systèmes ne vérifiant pas les conditions de Brockett (1983), sera traité par la suite. La technique utilisée est similaire à celle utilisée dans (Hably *et al.*, 2005, Alamir et Marchand, 2003, 2002) et par de nombreux autres auteurs et consiste à "s'éloigner" dans un premier temps de la singularité afin de récupérer de la commandabilité avant de retendre vers cette singularité (qui contient l'origine et donc le point visé). L'approche consiste donc en une décomposition du système en deux sous-systèmes de la manière suivante :

Stabilisation en rotation On considère donc d'abord le sous-système de θ étendu à $\Theta := (I_\theta, \theta, \dot{\theta})^T$ qui correspond à une chaîne d'intégrateurs d'ordre 3, dont la discrétisation donne :

$$\Theta_{k+1} = A_\theta \Theta_k + B_\theta v_k$$

Par récurrence, Θ_k peut être exprimée en fonction de Θ_0 par :

$$\Theta_k = A_\theta^k \Theta_0 + \begin{pmatrix} A_\theta^{k-1} B_\theta & A_\theta^{k-2} B_\theta & \cdots & B_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Soit $\tilde{V}(n, \Theta(t), \Theta_f)$ la solution (si elle existe) du problème de programmation quadratique sous contraintes qui est exprimé, pour des raisons de simplicité, sous sa

forme de stabilisation :

$$\mathcal{P}_v : \tilde{V} := \text{Arg min}_V \sum_{k=1}^n \Theta_k^T Q \Theta_k + r v_{k-1}^2 \quad (3.23)$$

où $Q, r > 0$ sont les termes de pondérations, sous les contraintes (3.22) avec $\Theta_0 = \Theta(t)$ et $\Theta_n = \Theta_f$ comme conditions initiale et finale, et :

$$v^{\min} \leq v_i \leq v^{\max} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n-1$$

Toute solution du problème \mathcal{P}_v ramène après n instants le sous-système rotationnel de $\Theta(t)$ en Θ_f en garantissant $v^{\min} \leq v_i \leq v^{\max}$. Par convention, si $n = 0$ on considérera que \mathcal{P}_v admet la solution vide : $V = (\cdot)$. Tous les arguments classiques de commande linéaire optimale bornée s'appliquent alors (voir par exemple [Gauthier et Bornard, 1983](#)) : si l'horizon n est suffisamment grand, le problème \mathcal{P}_v admet une solution non vide.

Stabilisation en translation Cette seconde étape consiste à stabiliser le système en translation pour un profil d'évolution en rotation donné. Notre contribution à cette étape a consisté à montrer que pour des commandes en rotation constantes par morceaux, le sous-système en translation peut se discrétiser plus aisément qu'il n'y paraît.

Toute solution au problème \mathcal{P}_v est constante par morceaux sur les périodes d'échantillonnage. La dérivée seconde de θ est donc constante et θ est quadratique en $\tau \in [t + kT, t + (k+1)T]$ sur chaque période :

$$\theta(\tau) = \alpha_k + \beta_k[\tau - (t + kT)] + \gamma_k[\tau - (t + kT)]^2$$

où $\alpha_k := \theta(t + kT)$, $\beta_k := \dot{\theta}(t + kT)$, $\gamma_k := \frac{1}{2}v(t + kT)$ sont constants sur chaque période d'échantillonnage. En reprenant la notation de la section précédente $z := (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, \dot{x}, y, \dot{y})$ et en calculant pour k allant de zéro à n , de manière itérative la valeur de z_k à l'instant $t + kT$ en fonction de la valeur au début de l'horizon z_0 à l'instant t et des commandes u_0 à u_{k-1} et v_0 à v_{k-1} appliquées sur le système, on obtient la discrétisation suivante :

$$z_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{(kT)^2}{2} \\ -kT \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & kT & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & kT \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z_0 + (Q_1 \Gamma_k + T Q_3 \Gamma_k D_k) \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$+ e(Q_2 \Gamma_k + T Q_4 \Gamma_k D_k) \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix}$$

Le coefficient e est le paramètre de couplage apparaissant dans les équations (3.15-3.16). La constante T est la période d'échantillonnage. Les matrices Q_1 à Q_4 sont des matrices de permutations formées de combinaisons des vecteurs (e_1, e_2, e_3, e_4)

représentant la base unitaire orthonormale de \mathbb{R}^4 . La matrice D_k est une matrice diagonale dépendant de k . En fait, la matrice Γ_k concentre à la fois les non linéarités et la dimension temps-variante du sous système. Elle est donnée par :

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{k-1} \\ s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ C_0 & C_1 & \dots & C_{k-1} \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{k-1} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} s_k &:= \int_0^T \sin(\alpha_k + \beta_k \nu + \gamma_k \nu^2) d\nu \\ c_k &:= \int_0^T \cos(\alpha_k + \beta_k \nu + \gamma_k \nu^2) d\nu \\ S_k &:= \int_0^T \int_0^{\nu_2} \sin(\alpha_k + \beta_k \nu_1 + \gamma_k \nu_1^2) d\nu_1 d\nu_2 \\ C_k &:= \int_0^T \int_0^{\nu_2} \cos(\alpha_k + \beta_k \nu_1 + \gamma_k \nu_1^2) d\nu_1 d\nu_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Remplacer l'intégration des équations différentielles (3.15-3.17) par l'intégration des intégrales (3.25) ne serait guère intéressant car cela ne représenterait pas un gain substantiel en terme de coût de calcul pour rendre les approches prédictives compétitives par rapport à des approches ne faisant pas appel à l'optimisation comme celle présentées ci-avant. L'intérêt des intégrales (3.25) est qu'elles s'expriment en fonction des intégrales de Fresnel bien connues en électromagnétisme ou en optique (diffraction) et également utilisées pour le calcul des courbures des autoroutes et des TGV pour passer d'une courbure non nulle à une courbure nulle (aussi connu sous la dénomination de courbe de Cornu) :

$$s(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu^2\right) d\nu \quad c(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu^2\right) d\nu \quad (3.26)$$

Il existe pour leur calcul des suites numériques dont la convergence vers la valeur de l'intégrale est extrêmement rapide et peu coûteuse en terme de calcul (Zhang et Jin, 1996). Des routines, tant en FORTRAN que sous Matlab sont disponibles sur les sites de partage dédiés. Ainsi, pour une précision de 10^{-20} , la routine utilisée par Zhang et Jin (1996) nécessite 22 itérations pour un temps de calcul de l'ordre de $5e^{-5}$ seconde sous Matlab pour le calcul des deux intégrales (3.26) sur un Pentium 1.8 GHz avec 1 Go de RAM. On évite ainsi l'intégration des termes c_k , s_k , C_k et S_k . Les relations sont détaillées dans (Poulin et al., 2007). Le calcul de Γ_k étant maintenant possible de manière efficace, la séquence de commande $\tilde{U}(n, \tilde{V}, z(t), z_f)$ qui conduit le sous-système (x, y) de $z_0 = z(t)$ à $z_n = z_f$ après

n instants d'échantillonnage lorsque la séquence de commande \tilde{V} est appliquée au sous-système rotationnel peut maintenant être obtenue par résolution du problème de programmation quadratique suivant :

$$\mathcal{P}_u : \tilde{U} := \text{Arg min}_U \sum_{k=1}^n z_k^T O z_k + p u_{k-1}^2 \quad (3.27)$$

où $O, p > 0$ sont les termes de pondérations, sous les contraintes (3.24) avec $z_0 = z(t)$ et $z_n = z_f$ comme conditions initiale et finale, et :

$$0 \leq u_i \leq u^{\max} \quad \text{for } i = 0, \dots, n-1$$

Par convention, si $n = 0$ et donc que $V = (\cdot)$, on considérera que \mathcal{P}_u admet la solution vide : $U = (\cdot)$.

Evitement des singularités Si la résolution du problème de commande en boucle ouverte est maintenant très efficace et très proche en terme de complexité du cas linéaire en résolvant deux problèmes quadratiques successifs, elle est conditionnelle. En effet, deux phénomènes étroitement liés peuvent empêcher les deux problèmes d'optimisation quadratiques ci-dessus d'avoir une solution :

- ◇ Le premier correspond à la condition initiale singulière $\theta(t) = \theta(t + nT) = 0$ qui résulte dans une perte de commandabilité sur x (pas de mouvement latéral possible). Un tel problème est commun dans le contexte de la commande des systèmes non holonomes.
- ◇ Le second problème déjà mentionné ci-dessus se produit lorsque la contrainte sur u est trop restrictive par rapport à celle sur v . En effet, avec des arguments classiques linéaires, on peut assurer que le problème d'optimisation (3.23) admet une solution pour tout n suffisamment grand. Mais il reste quelques soucis sur z . La trajectoire optimale en boucle ouverte de $\theta(t)$ doit typiquement être d'abord de même signe que $\theta(0)$, puis de signe opposé jusqu'à ce que θ rejoigne l'origine. Par conséquent, si θ s'annule "trop vite" à cause de contraintes non restrictives (v^{\min}, v^{\max}), il sera alors impossible de conduire z à l'origine avec une contrainte u^{\max} trop restrictive, et l'augmentation de l'horizon ne résout pas ce problème.

La stratégie adoptée consiste dans un premier temps à appliquer une commande amenant le système dans une configuration dans laquelle les problèmes d'optimisation quadratique (3.27) et (3.23) ont nécessairement une solution pour commuter sur celles-ci. Ainsi, la commande préliminaire permet

1. de se déplacer latéralement en forçant θ à converger vers $\pi/2 > \theta_d > 0$ (avant de converger vers l'origine).
2. d'appliquer une commande v qui compense la gravité

On peut montrer que cette étape préliminaire amène le système dans une configuration où \mathcal{P}_u et \mathcal{P}_v ont des solutions. Pour cela, on prend la commande (2.18) proposée en section 3 page 34 avec $\alpha_j = 0$. On effectue donc le changement de coordonnées suivant :

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{3T^2}{2} \\ T & T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \theta - \theta_d \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

et donc la commande est donnée par (avec $\bar{v} := \min(v^{\max}, -v^{\min})$) :

$$v = -\frac{\bar{v}}{\theta_1 + \theta_2} \left[\theta_1 \operatorname{sat} \left(\frac{y_1(\theta_1 + \theta_2)}{\bar{v}} \right) + \theta_2 \operatorname{sat} \left(\frac{y_2(\theta_1 + \theta_2)}{\bar{v}} \right) \right] \quad (3.28)$$

où θ_1 et θ_2 sont des paramètres tels que $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$. Le signe de θ_d est alors clairement le même que celui de x (il suffit de regarder la figure 3.3 pour s'en convaincre). $|\theta_d|$ est alors choisi raisonnablement grand pour permettre à u de compenser le poids en utilisant :

$$u = \max \left(0, \operatorname{sat}_{u^{\max}} \left(\frac{1 - \varepsilon \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right) \quad (3.29)$$

Différentes approches sont possibles ici et celle proposée, si elle est une des plus simple, n'est pas nécessairement la plus satisfaisante. On pourrait par exemple utiliser u et u pour ne stabiliser que les sous-systèmes (3.16) et (3.17) en laissant x libre. Il faut bien se rendre compte qu'en pratique, le choix de cette commande ne détériore que très peu les performances du système en boucle fermée. En effet, la loi de commande présentée ci-dessous bascule automatiquement sur l'approche prédictive dès lors que celle-ci est meilleure.

On redéfinit alors les profils de commande en appliquant d'abord, pendant δ périodes d'échantillonnage, les commandes (3.28) et (3.29) suivies ensuite des commandes $\tilde{U}(n, \tilde{V}, z(t + \delta T), z_f)$ et $\tilde{V}(n, \Theta(t + \delta T), \Theta_f)$. Ces nouveaux profils de commande sont notés $\hat{U}(n, \delta, \hat{V}, z(t), z_f)$ et $\hat{V}(n, \delta, \Theta(t), \Theta_f)$.

Les étapes précédentes permettent maintenant d'énoncer le résultat de commande publié dans (Poulin *et al.*, 2007, Marchand *et al.*, 2007b). La version initialement proposée (Poulin *et al.*, 2007) ne faisait intervenir que la commande dans les critères quadratiques (3.27) et (3.23). Il faut souligner que contrairement à ce qui est généralement utilisé en commande quadratique linéaire, le critère (3.27) ne cherche pas à minimiser l'erreur de commande au sens de la différence entre une commande nominale et de la commande physiquement appliquée. L'intérêt recherché est de minimiser directement ce qui correspond à la consommation énergétique du drone, point crucial pour la miniaturisation. Ainsi, dans (Poulin *et al.*, 2007), nous avons montré que, pour des conditions initiales et des contraintes sur les actionneurs identiques, la commande prédictive proposée consomme moins de 65% de ce qui est nécessaire à la commande proposée par Fantoni *et al.* (2002). C'est à dégouter des approches dérivées des fonctions de Lyapounov ! Cependant, comme toute les commande à énergie minimale, la robustesse est un point délicat même si la commande continu de stabiliser le système malgré une erreur de 40% sur le paramètre de couplage e . Pour améliorer ce point, la commande a été étendue en intégrant l'état dans les critères d'optimisation. La complexité du problème reste identique, les résultats demeurent de qualité par rapport aux approches non prédictives et la robustesse s'en trouve considérablement renforcée. C'est cette version que je présente en page 56. On peut noter que dans cet algorithme, le critère J peut être choisi linéaire ou même non linéaire en U (mais toujours positif) au lieu de quadratique. Comme cela a été mentionné ci-dessus, ce choix dépend fortement de la relation entre la poussée et l'énergie

utilisée (électrique, carburant, etc) afin de relier J le plus justement possible à l'énergie consommée.

Poulin *et al.* (2007), Marchand *et al.* (2007a)

Soit $(z_f, \Theta_f) = (x_f, 0, y_f, 0, 0, 0, 0)$ un état final visé pour le système PVTOL (3.15-3.17). Alors, l'algorithme de commande suivant, appliqué à chaque période d'échantillonnage à $(z(kT), \Theta(kT))$, rend cet état final globalement asymptotiquement stable.

Algorithme :

- ◇ **étape 0** : Fixer l'horizon de prédiction $t_f := NT$
- ◇ **étape 1** : Calculer à travers la solution de \mathcal{P}_u et \mathcal{P}_v l'ensemble \mathcal{C} des commandes admissibles définies par :

$$\mathcal{C}(z(kT), \Theta(kT), z_f, \Theta_f, N, \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\hat{U}(n, \delta, \hat{V}, z(kT), z_f) \right) \\ \left(\hat{V}(n, \delta, \Theta(kT), \Theta_f) \right) \end{array}, \delta \in \{0, \dots, \Delta\}, n \in \{0, \dots, N\} \right\}$$

- ◇ **étape 2** : Si $\mathcal{C} = \emptyset^1$, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de commandes (U, V) , vérifiant les contraintes, qui conduisent le système de $(z(kT), \Theta(kT))$ à (z_f, Θ_f) dans une durée inférieure à NT , alors augmenter N et aller à l'étape 1. Sinon, \mathcal{C} contient les commandes admissibles en boucle ouverte, qui conduisent le système de $(z(kT), \Theta(kT))$ à (z_f, Θ_f) pendant une durée inférieure ou égale à NT . Soit $(U^{\text{opt}}, V^{\text{opt}})$ défini par

$$\begin{pmatrix} U^{\text{opt}}(kT) \\ V^{\text{opt}}(kT) \end{pmatrix} := \text{Arg} \min_{\substack{U \\ V} \in \mathcal{C}} J(U, V) \quad (3.30)$$

où $J(U, V) = U^T U + \mu V^T V$ avec $\mu > 0$ et par convention, pour prendre en compte le cas $(z(kT), \Theta(kT)) = (z_f, \Theta_f)$ où la résolution du problème d'optimisation donne des vecteurs vides, on prend la solution $J((\cdot), (\cdot)) = 0$.

- ◇ **étape 3** : La loi de commande en boucle fermée est alors donnée par :
 - ◇ si $(U^{\text{opt}}, V^{\text{opt}})$ sont des vecteurs vides :

$$\begin{cases} u(z(kT), \Theta(kT)) := 1 \\ v(z(kT), \Theta(kT)) := 0 \end{cases}$$

- ◇ sinon la loi de commande en boucle fermée est le premier élément de $(U^{\text{opt}}, V^{\text{opt}})^2$:

$$\begin{cases} u(z(kT), \Theta(kT)) := u_0^{\text{opt}} \\ v(z(kT), \Theta(kT)) := v_0^{\text{opt}} \end{cases}$$

5.2 Commande contrainte du VTOL

Le passage du PV-TOL au VTOL est assez trivial et je ne n'appesantirais pas sur le sujet autant que je l'ai fait précédemment d'autant plus que mes contributions sur le sujet sont mineures. Ma contribution porte sur l'extension de l'approche par chaîne d'intégrateur présentée à la section 5.1.1 au VTOL (Hably et Marchand, 2007). Le résultat est plus académique voire esthétique que réaliste. Il permet la stabilisa-

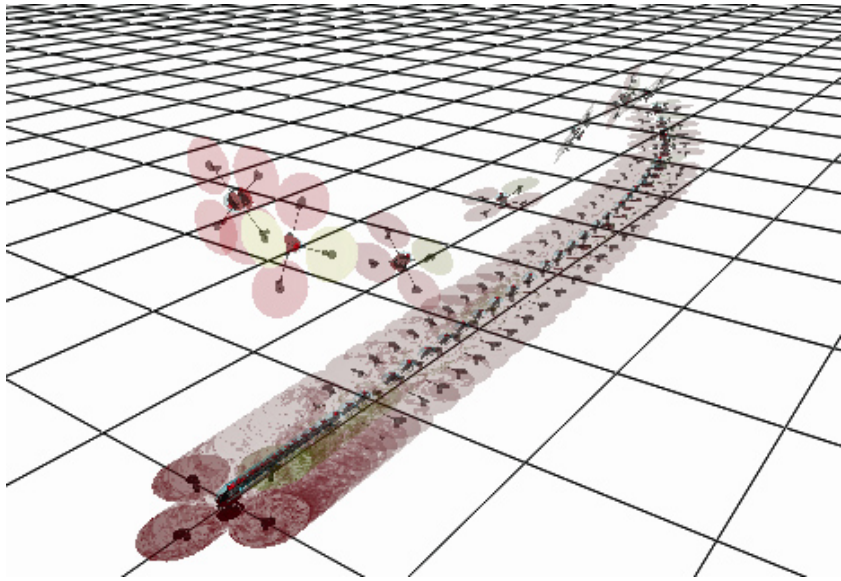


Figure 3.4 – Schéma du corps rigide actionné

tion globale du VTOL avec des commandes bornées. Les performances par rapport aux résultats existants dans la littérature antérieurement sont meilleures grâce aux performances des lois de commande à base de saturations proposées à la section 5.1.

6 Conclusion

La commande des robots mobiles dans l'espace est arrivé à un stade de maturité qui me font penser qu'il n'y a plus grand chose de significatif à trouver dans le domaine. Les plus grandes contributions portent sur l'autonomisation de tels engins, c'est à dire sur la commande en position avec des capteurs embarqués. C'est dans cette voie que je m'engage avec des travaux autour de l'amerrage sur cible au moyen de flux optique. Notre particularité dans ce domaine repose sur l'utilisation d'approche bio-inspirée. L'utilisation de capteur embarqués nécessite cependant une gestion optimale des ressources de calcul embarqués. L'objet de mes prospectives propose d'aborder ce sujet.

Chapitre 4

Prospectives de recherche

1 Contexte

Mes recherches ont été motivées jusqu'à présent par un objectif d'efficacité (au sens de la performance de la boucle de calcul) rapporté au coût de calcul qu'entraîne la commande. L'optimisation de ce ratio efficacité/coût restera au cœur de ma recherche. Mes recherches se sont progressivement articulées autour d'applications dans le domaine de la robotique et de l'informatique. Je souhaite poursuivre avec ce mouton à deux pattes dont le socle théorique alimente l'un l'autre et s'alimente de l'un et de l'autre. Même si les domaines d'applications ne vont pas changer, je souhaite donner plusieurs orientations à ma recherche issues de mes travaux les plus récents. L'objectif de ce chapitre va donc être de présenter mes contributions dans le domaine de la commande basée sur événements et les différentes pistes que j'entrevois dans cette axe.

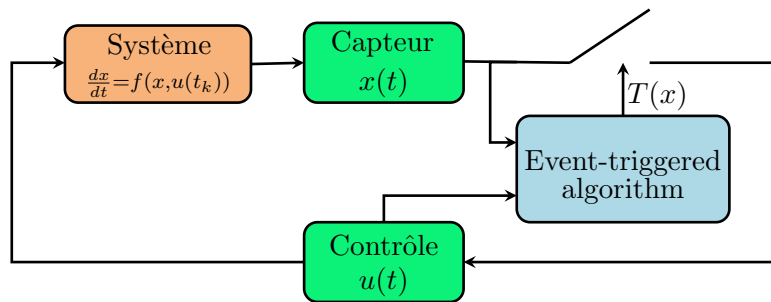


Figure 4.1 – Schéma de contrôle basé sur événement

La commande des systèmes linéaires et non linéaires a considérablement progressé sur les vingt ou trente dernières années. Les deux implémentations standards étaient le temps échantillonné et le temps continu (qui en fait la plupart du temps consistait à sur-échantillonner). Quelques variations du temps échantillonné ont vu le jour pour rendre cette approche plus compatible avec les systèmes non linéaires par exemple en modifiant la conception de la loi de commande en temps continu pour prendre en compte l'implantation dans un contexte échantillonné (Nešić et Teel, 2004, Nešić et Grüne, 2005). La commande des systèmes en réseau a amené une nouvelle approche de commande des systèmes dynamiques consistant à mettre à jour la commande uniquement lorsqu'un

évènement survient. Cette commande est appelée *commande évènementielle*. Cette est illustrée par la figure 4.1.

Cette approche a été d'abord motivée par l'économie en transmission réseau qu'elle permet dans le cas des systèmes commandés en réseaux (NeCS). Dans un second temps, le fait que la commande pouvait par ce biais être évaluée moins souvent et donc réduire la puissance de calcul nécessaire a rendu cette approche particulièrement intéressante pour les applications embarquées. Son caractère intrinsèquement asynchrone réduit également les problèmes associés au temps réel dur dans le cas des applications embarquées. Les deux grands promoteurs de cette approche ont été [Astrom et Bernhardsson \(2002\)](#) qui ont montré son efficacité comparativement à l'approche échantillonnée périodiquement et [Arzen \(2005\)](#) qui a proposé un premier correcteur PID basé sur évènements. Le principe est

indiqué en figure 4.2 dans le cadre simple d'un échantillonnage par niveau équidistants qui diffère légèrement de la version traitée au chapitre 2 et illustrée par la figure 2.4 page 35. Il consiste à déclencher le recalcul de la commande uniquement lors du passage d'une fonction de l'état par des seuils. Entre ces seuils, la commande est maintenue à sa valeur précédente. J'avais moi-même commencé relativement tôt à aborder cette thématique comme présenté à la section 4 du chapitre 2 mais de manière peu satisfaisante à mon goût. Mes travaux suivants dans ce domaine ont consisté dans un premier temps à reprendre les travaux d'Arzen.

Dans ces travaux, une commande de type PID est proposée avec une mise à jour de la valeur de la commande seulement lorsque la sortie du système franchit des seuils fixés a priori. Ce principe est illustré en figure 4.2 qui diffère légèrement de la version traitée au chapitre 2 et illustrée par la figure 2.4 page 35. La simple mise à jour sur évènement de la commande offre des performances très correctes sauf lorsque la durée entre deux évènements successifs devient trop grande. En arguant de problèmes de stabilité dérivés de la théorie de Shannon, un temps de "sécurité" est ajouté, au bout duquel, si aucun évènement dû à un franchissement de seuil n'est survenu, un évènement fictif est automatiquement généré. Les appels à la fonction de commande sont réduits de moitiés par rapport à une implantation périodique. Nos contributions ont consisté à montrer que le problème ne provenait pas d'un échantillonnage trop distendu et que la théorie de Shannon ne s'appliquait pas ici. Le problème provient en fait de l'action intégrale qui en l'absence d'évènement intègre une erreur comprise entre deux seuils qui peut lorsque la durée entre deux évènements devient longue prendre des proportions exagérées provoquant une forte excitation au système lorsqu'un nouvel évènement survient. L'introduction de facteurs d'oubli de différents type permet des performances identiques au PID échantillonné classique avec des appels à la fonction de commande réduits de 80% ([Durand et Marchand,](#)

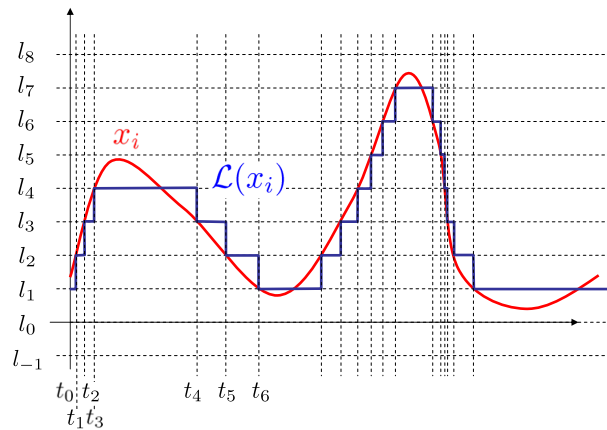


Figure 4.2 – Schéma de contrôle basé sur évènements

2009d,f). Cette approche a été validée expérimentalement (Durand *et al.*, 2011b).

Depuis ces premiers travaux, de nombreuses contributions sont venues enrichir cette thématique. Tout d'abord, une conceptualisation du problème, soit sous forme d'un système à dynamique hybride (Anta et Tabuada, 2010, Tabuada, 2007), soit sous forme d'un système dynamique discontinue dont je suis à l'origine (Marchand *et al.*, 2013) ont permis de définir un cadre théorique à l'étude de cette approche. Les approches de type PID n'autorisant pas de preuve formelle pour les systèmes dans leur généralité, il a été naturel de passer à des seuils fixés sur des fonctions de Lyapunov et non sur la sortie. Après quelques contributions mineures (Durand *et al.*, 2011a), je me suis intéressé à la généralisation de la formule de Sontag dont on trouve la formulation la plus générale dans (Clarke *et al.*, 1997). Cette formule donne un retour d'état régulier partout sauf à l'origine pour tout système non linéaire affine en la commande de la forme ($x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$) :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

pour lequel il existe V , une fonction de Lyapunov de commande (CLF) régulière. De plus, si la propriété de petit contrôle est vérifiée, alors cette commande est continue à l'origine. Notre travail a consisté à proposer le cadre suivant à la commande basée sur évènement autre que la traditionnelle représentation sous forme de système hybride :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)k(m) \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} m = x & \text{si } e(x, m) \leq 0, x \neq 0 \\ \dot{m} = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{avec : } x(0) = x_0 \text{ and } m(0) = x(0) \quad (4.4)$$

avec les hypothèses de régularité qui conviennent sur f et g . La commande évènementielle réside donc dans le choix de deux fonctions :

- ◇ la fonction évènement $e : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ qui indique si l'on doit ($e \leq 0$) ou ne doit pas ($e > 0$) mettre à jour la commande.
- ◇ le retour d'état k .

A cela, nous avons ajouté les notions de *retour d'état*

- ◇ *correctement défini* : lorsque pour toute condition initiale x_0 en $t = 0$, la solution $t \rightarrow x(t; x_0)$ existe pour tout $t \geq 0$,
- ◇ *MSI (pour Minimal Sampling Interval)* : lorsque pour toute condition initiale x_0 en $t = 0$, il existe un intervalle minimum inter-échantillon non nul :

$$\underline{\tau}(x_0) := \inf_{i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathcal{T}(x_0)} t_{i+1} - t_i > 0$$

où les t_i désignent les instants où la fonction évènement devient négative ou nulle

- ◇ *semi-uniformément MSI* : lorsque cet intervalle ne dépend que d'un rayon δ de conditions initiales :

$$\underline{\tau}(\delta) := \inf_{i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathcal{T}(x_0), x_0 \in \mathcal{B}(\delta)} t_{i+1} - t_i > 0$$

◇ *uniformément MSI* : lorsque cet intervalle ne dépend pas des conditions initiales :

$$\underline{\tau} := \inf_{i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathcal{T}(x_0), x_0 \in \text{cal}X} t_{i+1} - t_i > 0$$

Dans tout les cas, il s'avère utile pour des implémentations réelles d'avoir des retours d'état vérifiant au moins la condition semi-uniforme MSI. En effet, c'est la seule qui garantira un temps entre échantillon borné inférieurement.

Ma contribution réside alors dans le théorème suivant qui donne un retour d'état semi-uniformément MSI pour les systèmes affines en la commande. Ce résultat peut être étendu aux systèmes homogènes avec dans ce cas de figure un retour d'état uniformément MSI. La forme de la fonction événement (4.7) n'avait jamais été utilisée, les formes habituellement utilisées étant basée sur une hypothèse d'ISS (Input to State Stability) qui s'avère être très conservatrice comme dans les travaux (Anta et Tabuada, 2010, Tabuada, 2007).

Marchand *et al.* (2011, 2013)

Si le système (4.1) admet une CLF V , alors le retour d'état (e, k) suivant est semi-uniformément MSI, régulier sur $\mathcal{X} \setminus \{0\}$, et tel que :

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) k(m) < 0, \quad x \in \mathcal{X} \setminus \{0\} \quad (4.5)$$

où m est défini par (4.3) et :

$$k_i(x) := -b_i(x) \delta_i(x) \gamma(x) \quad (4.6)$$

$$e(x, m) := -a(x) - b(x) k(m) - \sigma \sqrt{a(x)^2 + \theta(x) b(x) \Delta(x) b(x)^T} \quad (4.7)$$

avec

- ◇ $a(x) := \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ and $b(x) := \frac{\partial V}{\partial x} g(x)$,
- ◇ $x \rightarrow \Delta(x) := \text{diag}(\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_p(x))$ est une fonction régulière de $\mathcal{X} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{p \times p}$, positive définie sur l'ensemble :

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{X} \mid \|b(x)\| \neq 0\}$$

- ◇ $x \rightarrow \theta(x)$ est une fonction de \mathcal{X} dans \mathbb{R} , régulière, positive et telle que $\theta(x) \|\Delta(x)\|$ s'annule en zéro et telle que sur $\mathcal{S} \setminus \{0\}$ l'inégalité $a(x)^2 + \theta(x) b(x) \Delta(x) b(x)^T > 0$ soit vérifiée
- ◇ σ est un paramètre de réglage dans $[0, 1[$,
- ◇ $\gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es définie par :

$$\gamma(x) := \begin{cases} \frac{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + \theta(x) b(x) \Delta(x) b(x)^T}}{b(x) \Delta(x) b(x)^T} & \text{si } x \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{S} \end{cases} \quad (4.8)$$

Si V vérifie en plus la *condition de petit contrôle*, alors k sera continue à l'origine. Enfin, si il existe $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que sur $\mathcal{S} \setminus \{0\}$,

$$\omega(x) b(x) \Delta(x) b(x)^T - a(x) > 0 \quad (4.9)$$

alors k sera régulier sur tout \mathcal{X} dès lors que $\theta(x) \|\Delta(x)\|$ s'annule à l'origine avec θ défini par :

$$\theta(x) := \omega(x)^2 b(x) \Delta(x) b(x)^T - 2a(x) \omega(x) \quad (4.10)$$

Les résultats de simulation sont très encourageants avec de bonnes performances par rapport à la “concurrence” (on est typiquement à 2 mises à jour de la commande là où la célèbre approche de Anta et Tabuada (2008) en nécessite 117 pour des convergences très similaires sur un système benchmark proposé dans (Anta et Tabuada, 2008). Pour plus de détails, on pourra voir (Marchand *et al.*, 2013)).

Des expérimentations des approches évènementielles, auxquelles j’ai activement participé, ont été menées avec succès sur différents systèmes dont certains connus pour être très instables (quadrirotor, pendule inversé) (Durand *et al.*, 2013, Téllez-Guzmán *et al.*, 2012, Durand *et al.*, 2011b). Les résultats de stabilisation sur quadrirotor sont montrés figure 4.3.

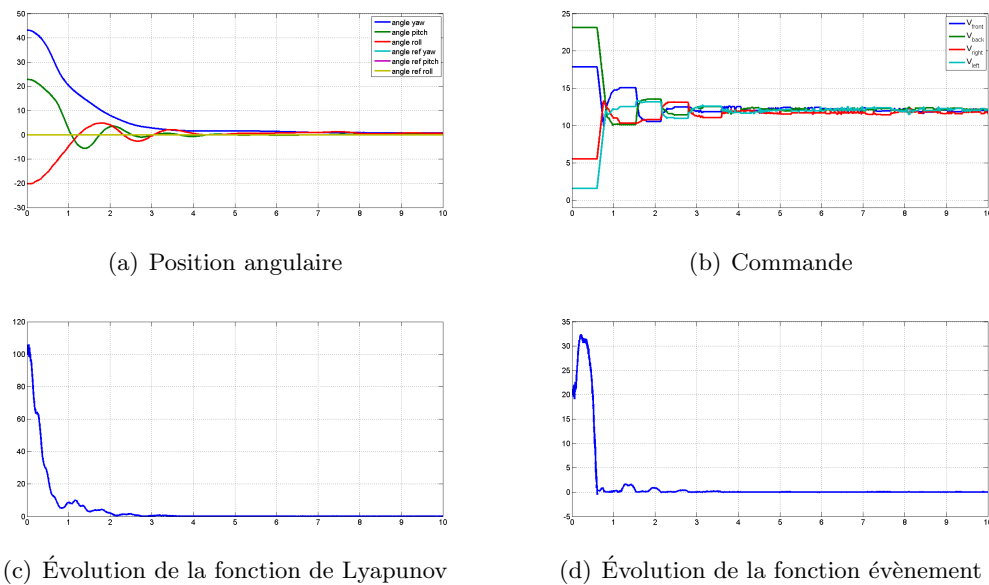


Figure 4.3 – Commande évènementielle d’un quadrirotor

De nombreuses contributions ont été apportées pour les systèmes linéaires avec principalement deux centres dans le monde à savoir les travaux de M. Heemels et M. Donkers à Eindhoven (voir par exemple (Donkers et Heemels, 2012, Heemels *et al.*, 2011)) et les travaux de P. Tabuada et A. Anta à Los Angeles (voir (Anta et Tabuada, 2010, Tabuada, 2007)). Les premiers gardent une structure d’échantillonnage périodique mais ne remettent à jour la commande que si nécessaire. Les seconds ont une approche basée sur une hypothèse ISS (Input to State Stability) et utilise les propriétés d’homogénéité des systèmes linéaires. Dans cette seconde approche permet de définir la notion de **commande auto-évènementielle** lorsque la commande prédit l’instant de l’évènement futur et “désactive” la fonction évènement. Ainsi, pendant tout un laps de temps, le système est en boucle ouverte avec une commande constante. Cela évite d’évaluer la fonction évènement pour voir si une mise à jour de la commande est nécessaire. Par contre pendant cette intervalle de temps, la commande fonctionnant sans retour d’information du système, celui-ci est très fragile par rapport aux potentielles perturbations

pouvant survenir.

2 Prospectives

Si le problème de la commande événementielle commence à avoir un socle théorique qui lui manquait il y a quelques années seulement, de nombreuses contributions sont encore nécessaires. C'est sur cet axe que je souhaiterais placer mon projet de recherche avec des perspectives pour certaines à court terme, pour d'autres à plus long terme.

2.1 Retour de sortie événementiel

Bien que la commande événementielle a fait d'énorme progrès ces dernières années, ces progrès restent limités aux retours d'état, du moins pour les systèmes non linéaires. Quelques résultats existent sur les retours de sortie et les observateurs événementiels, mais ils sont limités aux systèmes linéaires. Ou encore, ils sont envisagés dans un contexte de commande des systèmes en réseaux, c'est à dire qu'un observateur classique tourne en sortie des capteurs et seule la sortie de l'observateur est envoyée sur le réseau pour une mise à jour de la commande. Cette dernière approche répond au besoin de limitation des bandes passantes dans les réseaux des systèmes commandés en réseaux mais n'est pas computationnellement efficace car elle nécessite une unité de calcul au niveau des capteurs. Aucune approche ne permet à l'heure actuelle un retour de sortie événementiel. Une piste consisterait donc à traiter le problème du **retour de sortie événementiel** pour les systèmes non linéaires. Cette approche pourrait se baser sur des hypothèses de OSS (output to state stability) pour permettre de garantir que lorsque la trajectoire de sortie reste bornée dans un certain ensemble, il en est de même pour la sortie. Cette approche permettrait peut être d'obtenir des résultats de stabilité pour les PID événementiels basés uniquement sur la sortie du système et pour lesquels aucun résultat de stabilité n'existe, y compris lorsque le nombre d'état est limité.

2.2 Retour d'état auto-événementiel robuste aux perturbations

Si la commande auto-événementielle a largement été explorée pour les systèmes linéaires avec des contributions très intéressantes sur la prédiction des instants de mise à jour (Mazo *et al.*, 2009, Anta et Tabuada, 2009), elle reste largement inconnue pour les systèmes non linéaires. C'est un point que je souhaite explorer en utilisant les techniques d'intégration des équations différentielles ordinaires telles que les méthodes de Runge-Kutta afin de prédire l'instant du prochain événement. Pour être plus précis, c'est une borne inférieure à cet instant qu'il est nécessaire de trouver afin de mettre à jour la commande avant que la fonction de Lyapunov ne se mette à croître. Un second point consiste à robustifier cette approche pendant les périodes sans événement. En effet, juste après la mise à jour de la commande, le futur instant de mise à jour de commande est prédit et jusqu'à cet instant, le système est laissé en boucle ouverte sans correction de la commande, y compris en cas de perturbations. Une surveillance minimale ne nécessitant pas l'évaluation complexe d'une fonction de Lyapunov non linéaire doit donc être développée afin de déclencher une mise à jour de la commande en cas de perturbation.

2.3 Commande évènementielle bio-inspirée

Un second point porte sur l'adaptation de la durée entre chaque instant d'échantillons aux performances désirées du système. A l'heure actuelle, différentes approches produisent pour un même cas de figure plus ou moins d'instant d'échantillonnage avec des performances variables. Même s'il semble naturel de penser qu'un nombre plus important d'échantillons apportera de meilleures performances, il a été constaté que ce n'était pas nécessairement le cas (Marchand *et al.*, 2013). Arriver à obtenir un régulateur ayant un paramètre jouant directement sur la fréquence des échantillons et relier ce paramètre à une performance (typiquement vitesse de convergence, voire robustesse) est sûrement un élément clé permettant un réglage moins empirique des régulateurs évènementiels. A plus long terme, j'aimerais explorer les connexions entre ce mode de commande et celui observé sur les insectes ou les humains notamment dans le cadre du trajet d'un point à l'autre (Hicheur *et al.*, 2007, Portelli *et al.*, 2011). En effet, il semble apparaître une locomotion "relâchée" dans les zones éloignées des cibles ou d'éventuels obstacles tandis qu'à l'approche de cibles ou d'obstacles, la locomotion devient plus précise et souvent moins rapide. La relation avec les notions de performance et de robustesse me semble donc très naturelle et à explorer. Cette piste permettrait de hiérarchiser les informations pour le suivi de trajectoire en robotique afin d'augmenter l'efficacité tout en réduisant le coût computationnel associé. En relation avec ce thème, on trouve le développement de mécanismes de prédiction des évènements. Une telle prédiction permettrait d'éviter d'observer en permanence la fonction évènement et ainsi de réduire le coût associé à ces approches notamment lorsque les évènements sont issus de la vision et nécessitent un algorithme d'analyse d'image. Avec de telles approches, on pourrait développer des systèmes de perception à plusieurs niveaux, niveau de surveillance alertant d'un danger, niveaux de commande avec des acuités différentes en fonction des impératifs de performances souhaités. De même il serait intéressant d'introduire une hiérarchie entre évènements qui pourraient être "recalculer la commande impérativement", "recalculer la commande si on a le temps", etc. Cette hiérarchie est également directement liée à la notion de priorité que l'on retrouve dans la plupart des systèmes informatiques.

2.4 Commande évènementielle des systèmes à paramètres répartis

Le continu théorique de ce dernier point est inclus dans sa dénomination. Aucun travaux ne porte sur la commande basée sur évènements des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. Cette classe de système comporte des difficultés supplémentaires issues de la discontinuité des conditions aux limites qu'entraîne une telle approche au moment de la mise à jour de la commande. L'existence même d'une solution n'est pas triviale. Certains travaux conduits sur la commande commutée de ces systèmes permettrait sûrement de prendre pied dans cette thématique complexe. Quelques éléments ouvrent cependant la voie à des résultats. Des fonctions de Lyapunov de Commande (CLF) ont été découvertes pour un certain nombre de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (notamment hyperboliques Priour *et Mazenc* (2011), Coron *et al.* (2007)). Or on sait que sur la base de CLF, des stratégie de commande évènementielle peuvent être développées. Il semble donc naturel d'étendre les travaux issus de la commande évènementielle à ces systèmes. De nombreuses difficultés

existent cependant, outre l'existence même de la solution de l'équation aux dérivées partielles, l'évitement de phénomènes "Zeno" qui provoque l'écrasement de l'intervalle de temps entre deux évènements aboutissant à un échantillonnage infiniment rapide n'est pas aussi facile que dans le cas des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires. Outre l'intérêt théorique de ce sujet, il représente l'extension naturelle de mes travaux sur le contrôle des systèmes informatiques où les requêtes sont assimilées à un flux dans un tuyau. Un cas emblématique d'application pourrait être la commande des réseaux à grande échelle qui peuvent être approximé par des phénomènes de transports.

2.5 Théorie des systèmes à commande événementielle

De nombreuses questions de théorie des systèmes émergent suite au développement des approches de commande sur évènement. Parmi celles-ci, je peux mentionner les questions suivantes :

Nécessité des conditions de Brockett ? On sait que stabiliser un système ne vérifiant pas les conditions de Brockett (Brockett, 1983) nécessite le recours à des retour d'états temps variant ou discontinus. Est-il possible de stabiliser de tels systèmes à l'aide de commandes événementielles dont le retour d'état et la fonction évènement sont régulières ? Et si oui, la fonction évènement peut elle être régulière ?

Robustesse en cas de fonction évènement discontinue ? On sait que les systèmes stabilisés au moyen de commandes discontinues ne sont pas robustes aux erreurs de mesure (Sontag, 1999), la commande événementielle a-t-elle le même inconvénient si seule la fonction évènement est discontinue (la fonction de retour d'état ne l'étant pas) ?

Simplification de la synthèse des contrôles non linéaires La commande événementielle peut également être vue comme une hybridation du système. Est-il possible pour les systèmes n'ayant pas de fonction de Lyapunov de commande (CLF) triviale d'utiliser la commande événementielle pour commuter entre plusieurs CLF ?

Simplification de fonction évènement La commande événementielle est basée sur une fonction évènement issue la plupart du temps de la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov associé à la commande ou sur la différence entre celle-ci et ce qu'elle serait si la commande était continument mise à jour. Est-il possible de concevoir des fonctions évènements plus simples basées notamment sur la commande elle même ?

Bibliographie

- M. ALAMIR, M. EL RAFEI, G. HAFIDI, N. MARCHAND, M. POREZ et F. BOYER : Feedback design for 3d movement of an eel-like robot. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 256–261, Rome, Italy, 10-14 April 2007.
- M. ALAMIR et N. MARCHAND : Numerical stabilization of nonlinear systems - exact theory and approximate numerical implementation. *European Journal of Control*, 5(1):87–97, 1999.
- M. ALAMIR et N. MARCHAND : Constrained minimum-time-oriented feedback control for the stabilization of nonholonomic systems in chained form. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 356–361, Las Vegas, USA, Dec. 2002.
- M. ALAMIR et N. MARCHAND : Constrained sub-optimal feedback control for minimum-time stabilization of nonholonomic systems in chained form. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118(2):229–244, 2003.
- C. ALBEA-SANCHEZ : *Control Design for Electronic Power Converters*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2010.
- J. U. ÁLVAREZ-MUÑOZ, Fermi GUERRERO CASTELLANOS, Sylvain DURAND, Nicolas MARCHAND et G. MINO-AGUILAR : Control and Model-Aided Inertial Navigation of a Nonholonomic Vehicle. *In Proceedings of the 15th IFAC Latinamerican Control Conference (CLCA'12)*, Lima, Peru, 2012. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00727706>.
- A. ANTA et P. TABUADA : Self-triggered stabilization of homogeneous control systems. *In Proc. IEEE American Control Conf. (ACC)*, pages 4129–4134, 2008.
- A. ANTA et P. TABUADA : Isochronous manifolds in self-triggered control. *In Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, pages 3194–3199. IEEE, 2009.
- A. ANTA et P. TABUADA : To sample or not to sample : Self-triggered control for nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 55:2030 – 2042, 2010.
- K. E. ARZEN : A simple event based PID controller. *In Proceedings of the 14th IFAC World Congress*, Prague, Czech republic, 2005.
- K. J. ASTROM et B. M. BERNHARDSSON : Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems. *In Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 2011–2016, 10-13 Dec. 2002.
- S.P. BHAT et D.S. BERNSTEIN : A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. *Systems & Control Letters*, 39(1):63–70, 2000.
- R. W. BROCKETT : Asymptotic stability and feedback stabilization. *In R. W. BROCKETT, R. S. MILLMAN et H. S. SUSSMANN, éditeurs : Differential Geometric Control Theory*, pages 181–191. Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.

- A. CHEMORI et N. MARCHAND : A prediction based controller for stabilization of a non-minimum phase PVTOL aircraft. *In Proc. of the 1st IFAC Workshop on Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems*, Grenoble, France, 2006.
- A. CHEMORI et N. MARCHAND : A prediction based nonlinear controller for stabilization of a non-minimum phase PVTOL aircraft. *Int. Journal of Control*, 18(8):876–889, 2008.
- F. H. CLARKE, Y. S. LEDYAEV, E. D. SONTAG et A. SUBBOTIN : Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(10):1394–1407, 1997.
- J.M. CORON, B. d’Andrea NOVEL et G. BASTIN : A strict lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(1):2–11, 2007.
- P. E. CROUCH : Spacecraft attitude control and stabilization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-29(4):321–331, 1984.
- MCF DONKERS et W. HEEMELS : Output-based event-triggered control with guaranteed ∞ -gain and improved and decentralized event-triggering. *IEEE transactions on automatic control*, 57(6):1362–1376, 2012.
- S. DURAND, A.-M. ALT, D. SIMON et N. MARCHAND : Feedback control strategies for h.264 video decoding under computing ressource and energy consumption constraints. *IET Control Theory & Applications*, 2012a. submitted.
- S. DURAND, F. GUERRERO CASTELLANOS, N. MARCHAND et W.-F. GUERRERO-SANCHEZ : Event-based control of the inverted pendulum : Swing up and stabilization. *International Journal of Control, Automation and Systems (IJCAS)*, 2013. submitted.
- S. DURAND et N. MARCHAND : Control mechanism of device’s supply, Mars 2009a. FR09/01576, Version monocoeur, En cours d’extension à l’international en 2012.
- S. DURAND et N. MARCHAND : Control mechanism of device’s supply, Octobre 2009b. FR09/004686, Version multicoeur, En cours d’extension à l’international en 2012.
- S. DURAND et N. MARCHAND : Dynamic voltage and frequency scaling of multicore system with energy-performance tradeoff. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, Shangai, China, 2009c.
- S. DURAND et N. MARCHAND : An eventbased pid controller with low computational cost. *In Proceedings of the 8th International Conference on Sampling Theory and Applications (SAMPTA)*, Marseille, France, 2009d.
- S. DURAND et N. MARCHAND : Fast predictive control of micro controller’s energy-performance tradeoff. *In Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, Saint Petersburg, Russia, 2009e.
- S. DURAND et N. MARCHAND : Further results on event-based pid controller. *In Proceedings of the European Control Conference (ECC)*, Budapest, Hungary, 2009f.
- S. DURAND, N. MARCHAND et J. F. GUERRERO-CASTELLANOS : Simple lyapunov sampling for event-driven control. *In Proceedings of the IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011a.
- S. DURAND, H. ZAKARIA, L. FESQUET et N. MARCHAND : An energy-efficient architecture for nanometric technologies with strong robustness to process variability : Design of a gals node based on a mips r2000 processor. *IEEE Trans. on Very Large Scale Intergration (VLSI) Systems*, 2012b. second revision.

- Sylvain DURAND, Julien MINET, Fermi GUERRERO CASTELLANOS et Nicolas MARCHAND : Async-Car, a Radio-Controlled Vehicle for Asynchronous Experiments : Implementation of an Event-Based Cruise Control. In *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, Merida City, Yucatan, Mexique, octobre 2011b. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00626001>.
- M. EL RAFEI, M. ALAMIR, N. MARCHAND, M. POREZ et F. BOYER : Motion control of a three-dimensional eel-like robot without pectoral fins. In *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008a.
- M. EL RAFEI, M. ALAMIR, N. MARCHAND, M. POREZ et F. BOYER : Multi-variable constrained control approach for a three-dimensional eel-like robot. In *Proc. IEEE/RJS Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Nice, France, 2008b.
- M. EL RAFEI, M. ALAMIR, N. MARCHAND, M. POREZ et F. BOYER : Reduced mean model for a three-dimensional eel-like robot : Identification and validation. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, Bangkok, Thailand, 2009.
- I. FANTONI, A. ZAVALA et R. LOZANO : Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded thrust. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 4462–4467, 2002.
- J. P. GAUTHIER et G. BORNARD : Commande multivariable en présence de contraintes de type inégalité. *Revue d'Automatique, d'Informatique et de recherche opérationnelle (RAIRO)*, 17(3):205–222, 1983.
- F. GROGNARD, R. SEPULCHRE et G. BASTIN : Improved performance of low-gain designs for bounded control of linear systems. *Automatica*, 38(10):1777–1782, 2002.
- J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, A. HABLY, N. MARCHAND et S. LESECQ : Bounded attitude stabilization : Application on four-rotor helicopter. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 730–735, Rome, Italy, 10-14 April 2007.
- J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, S. LESECQ, N. MARCHAND et J. DELAMARE : A low cost air data attitude heading reference system (ADAHRS) for the tourism airplane applications. In *4th IEEE Sensors Conference*, Orange County, USA, 2005.
- J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, N. MARCHAND, A. HABLY, S. LESECQ et J. DELAMARE : Bounded attitude control of rigid bodies : Real-time experimentation to a quadrotor mini-helicopter. *Control Engineering Practice*, 19(8):790–797, 2011.
- J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, N. MARCHAND, S. LESECQ et J. DELAMARE : Bounded attitude stabilization : Real-time application on four-rotor helicopter. In *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded attitude stabilization of rigid bodies without attitude estimation and velocity measurement. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, Bangkok, Thailand, 2009.
- J.-F. GUERRERO-CASTELLANOS, H. RIFAI, E. RAMIREZ-MUNOZ, N. MARCHAND et W.-F. GUERRERO-SANCHEZ : Bounded attitude stabilization using vector observations without attitude reconstruction : Real-time experimentation on a quadrotor. *Int. Journal of Control*, 2012. submitted.
- A. HABLY, F. KENDOUL, N. MARCHAND et P. CASTILLO : *Positive Systems*, volume 341 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapitre Further results on global stabilization of the PVTOL aircraft, pages 303–310. Springer Verlag, 2006.
- A. HABLY et N. MARCHAND : Global stabilization of four-rotor helicopter with bounded inputs. In *Proc. IEEE/RJS Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, San Diego, California, USA, 2007.

- A. HABLY, N. MARCHAND et M. ALAMIR : Constrained minimum time oriented stabilization of extended chained form systems. *In joint IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conference*, Seville, Spain, 2005.
- J. HAUSER, S. SASTRY et G. MEYER : Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems : application to v/stol aircraft. *Automatica*, 28(4):665–679, 1992.
- W. HEEMELS, MCF DONKERS et AR TEEL : Periodic event-triggered control based on state feedback. *In Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 2571–2576. IEEE, 2011.
- H. HICHEUR, Q.C. PHAM, G. ARECHAVALETA, J.P. LAUMOND et A. BERTHOZ : The formation of trajectories during goal-oriented locomotion in humans. i. a stereotyped behaviour. *European Journal of Neuroscience*, 26(8):2376–2390, 2007.
- E. N. JOHNSON et S. K. KANNAN : Nested saturation with guaranteed real poles. *In Proc. IEEE American Control Conf. (ACC)*, volume 1, pages 497–502, 2003.
- S. LESECQ et N. MARCHAND : Estimation de la vitesse et de la direction à partir de mesures accélérométriques, Jan. 2007. Contrat CALOR-INPG SA.
- F. LIN, W. ZHANG et R. D. BRANDT : Robust hovering control of a PVTOL aircraft. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 7(3):343–351, 1999.
- Z. LIN : Global control of linear systems with saturating actuators. *Automatica*, 34(7):897–905, 1998.
- Z. LIN et A. SABERI : Semiglobal exponential stabilisation of linear systems subject to input saturation via linear feedbacks. *Systems & Control Letters*, 21(3):225–239, 1993.
- Z. LIN et A. SABERI : Low and high gain design technique for linear systems subject to input saturations. a direct method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7(3):1071–1101, 1997.
- B. LOUVAT, L. BONNAUD, N. MARCHAND et G. BOUVIER : Suivi d’objets pour une caméra embarquée dans un drone. *In GRETSI*, Troyes, France, 2007a.
- B. LOUVAT, L. BONNAUD, N. MARCHAND et G. BOUVIER : Tracking features with global motion compensation for drone camera servoing. *In IAPR Conf. on Machine Vision Applications*, Japan, 2007b.
- L. MALRAIT, S. BOUCHENAK et N. MARCHAND : Fluid modeling and control for server system performance and availability. *In Proceedings of the 39th annual IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN)*, Estoril, Portugal, 2009a.
- L. MALRAIT, S. BOUCHENAK et N. MARCHAND : Experience with conser : A system for server admission control through fluid modeling. *IEEE Trans. on Computers*, 60(7):951–963, 2011.
- L. MALRAIT, N. MARCHAND et S. BOUCHENAK : Average delay guaranty in server systems using admission control. *In Proceedings of the IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS)*, Sinaia, Romania, 2009b.
- L. MALRAIT, N. MARCHAND et S. BOUCHENAK : Modeling and control of server systems : Application to database systems. *In Proceedings of the European Control Conference (ECC)*, Budapest, Hungary, 2009c.
- A. MANECY, S. VIOLLET et N. MARCHAND : UAV’s control improvement through a decoupled eye systems. *In Proc. IEEE/RJS Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Vilamoura-Algarve, Portugal, 2012.

- N. MARCHAND : *Commande à Horizon Fuyant : Théorie et Mise En Œuvre*. Thèse de doctorat, Lab. d'Automatique de Grenoble - INPG, Grenoble, France, 21 janvier 2000.
- N. MARCHAND : Further results on global stabilization for multiple integrators with bounded controls. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, Hawaii, USA, Dec. 2003.
- N. MARCHAND : Discontinuous exponential stabilization of dynamic chained form systems. *In IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, Jul. 2005.
- N. MARCHAND : Stabilization of Lebesgue's sampled systems with bounded controls : the chain of integrators case. *In IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- N. MARCHAND et M. ALAMIR : From open loop trajectories to stabilizing state feedback - application to a CSTR. *In IFAC Symposium on System Structure and Control*, volume 2, pages 801–806, Nantes, France, 1998a.
- N. MARCHAND et M. ALAMIR : Numerical stabilization of a rigid spacecraft with two actuators. *In IFAC Workshop on Motion Control*, pages 81–86, Grenoble, France, 1998b.
- N. MARCHAND et M. ALAMIR : *NonLinear Control in the Year 2000*, volume 2, chapitre Asymptotic controllability implies continuous discrete time feedback stabilizability, pages 63–79. Springer Verlag, Londres, UK, Dec. 2000.
- N. MARCHAND et M. ALAMIR : Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 350–355, Las Vegas, USA, Dec. 2002.
- N. MARCHAND et M. ALAMIR : Discontinuous exponential stabilization of chained form systems. *Automatica*, 39(2):343–348, 2003.
- N. MARCHAND, M. ALAMIR et I. BALLOUL : *NonLinear Control in the Year 2000*, volume 2, chapitre Hamilton-Jacobi Based Stabilisation of Nonlinear Systems by Discontinuous Dynamic State Feedback, pages 81–93. Springer Verlag, Londres, UK, décembre 2000.
- N. MARCHAND, A. CHEMORI et G. POULIN : *Modélisation et Commande embarquée d'objets volants miniatures*, chapitre Approches prédictives pour la stabilisation en temps discret de l'avion planaire à décollage vertical. Hermès, 2007a. Chapitre 5.
- N. MARCHAND, S. DURAND et J. F. GUERRERO-CASTELLANOS : A general formula for the stabilization of event-based controlled systems. *In Proceedings of the joint IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Orlando, FL, USA, 2011.
- N. MARCHAND, S. DURAND et J. F. GUERRERO-CASTELLANOS : A general formula for event-based stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2013. To appear.
- N. MARCHAND et A. HABLY : Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*, 41(12):2147–2152, 2005a.
- N. MARCHAND et A. HABLY : Improving the performance of nonlinear stabilization of multiple integrators with bounded controls. *In IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, Jul. 2005b.
- N. MARCHAND, H. HABLY et A. CHEMORI : Global stabilization with low computational cost of the discrete time chain of integrators by means of bounded controls. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 52(5):948–952, 2007b.
- F. MAZENC et A. IGGIDR : Backstepping with bounded feedbacks. *Systems & Control Letters*, 51(3-4):235–245, 2004.

- M. MAZO, A. ANTA et P. TABUADA : On self-triggered control for linear systems : Guarantees and complexity. *In European control conference*, 2009.
- A. MEGRETSKI : L_2 BIBO output feedback stabilization with saturated control. *In Proc. 13th IFAC World Congress*, volume D, pages 435–440, 1996.
- D. NEŠIĆ et L. GRÜNE : Lyapunov-based continuous-time nonlinear controller redesign for sampled-data implementation. *Automatica*, 41(7):1143–1156, 2005.
- D. NEŠIĆ et A.R. TEEL : A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 49(7):1103–1122, 2004.
- R. OLFATI-SABER : Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(11):1949–1952, 2002.
- G. PORTELLI, F. RUFFIER, F.L. ROUBIEU et N. FRANCESCHINI : Honeybees’ speed depends on dorsal as well as lateral, ventral and frontal optic flows. *PloS one*, 6(5):e19486, 2011.
- G. POULIN, A. CHEMORI et N. MARCHAND : Minimum energy oriented global stabilizing control of the PVTOL aircraft. *Int. Journal of Control*, 80(3):430–442, 2007.
- C. PRIEUR et F. MAZENC : Iss lyapunov functions for time-varying hyperbolic partial differential equations. *In Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 4915–4920. IEEE, 2011.
- V. G. RAO et D. S. BERNSTEIN : Naive control of the double integrator. *IEEE Control Systems Magazine*, 21:86–97, Oct. 2001.
- H. RIFAI, F. GUERRERO-CASTELLANOS, N. MARCHAND et G. POULIN : Biomimetic-based output feedback for attitude stabilization of a flapping-wing micro aerial vehicle. *Robotica*, pages –, 2012a. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00728410>. To appear.
- H. RIFAI, J. F. GUERRERO-CASTELLANOS et N. MARCHAND : Biomimetic-based bounded output feedback for attitude stabilization of a flapping micro aerial vehicle. *In Proceedings of the 1st International Workshop on bio-inspired robots*, Nantes, France, 2011.
- H. RIFAI, J. F. GUERRERO-CASTELLANOS, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded attitude control of a flapping wing micro aerial vehicle using direct sensors measurements. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, Kobe, Japan, 2009.
- H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Attitude stabilization of a flapping-wing micro drone. *In Flying Insects and Robots Symposium*, pages 181–186, Ascona, Switzerland, 2007a.
- H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded attitude control of a biomimetic flapping robot. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, Sanya, China, 2007b.
- H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded control of a flapping wing micro drone in three dimensions. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, Pasadena, USA, 2008.
- H. RIFAI, N. MARCHAND et G. POULIN : Bounded control of an underactuated biomimetic aerial vehicle - validation with robustness tests. *Autonomous Robots*, 60(9):1165–1178, sept. 2012b.
- A. SABERI, Z. LIN et A. R. TEEL : Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(3):368–378, 1996.
- E. D. SONTAG : Remarks on stabilization and input-to-state stability. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, volume 2, pages 1376–1378, 13-15 Dec. 1989.

-
- E. D. SONTAG : Stability and stabilization : Discontinuities and the effect of disturbances. *In Nonlinear Analysis, Differential Equations, and Control*, pages 551–598. Kluwer, 1999.
- H. J. SUSSMANN, E. D. SONTAG et Y. YANG : A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 39(12):2411–2425, Dec. 1994.
- H. J. SUSSMANN et Y. YANG : On the stabilizability of multiple integrators by means of bounded feedback controls. *In Proc. IEEE Int. Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 70–73, Dec. 1991.
- P. TABUADA : Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 52(9):1680–1685, 2007.
- A. R. TEEL : Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 18(3):165–171, March 1992.
- J. J. TÉLLEZ-GUZMÁN, Fermi GUERRERO CASTELLANOS, Sylvain DURAND, Nicolas MARCHAND et R. LUCIO-MAYA : Event-based LQR control for attitude stabilization of a quadrotor. *In Proceedings of the 15th IFAC Latinamerican Control Conference (CLCA'12)*, Lima, Peru, 2012. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00727707>.
- J.T.Y. WEN et K. KREUTZ-DELGADO : The attitude control problem. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36(10):1148–1162, 1991.
- J. Y. YANG, E. D. SONTAG et H. J. SUSSMANN : Global stabilization of linear discrete-time systems with bounded feedback. *Systems & Control Letters*, 30:273–281, 1997.
- J. Y. YANG, H. J. SUSSMANN et E. D. SONTAG : Stabilization of linear systems with bounded controls. *In Proc. of the IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, pages 15–20, Bordeaux, France, 1992.
- S. ZHANG et J. JIN : *Computation of Special Functions*. Wiley & Sons, New York, 1996. URL http://ceta.mit.edu/comp_spec_func/.
- B. ZHOU et G.R. DUAN : A novel nested non-linear feedback law for global stabilisation of linear systems with bounded controls. *International Journal of Control*, 81(9):1352–1363, 2008.
- B. ZHOU, G.R. DUAN et Z.Y. LI : On improving transient performance in global control of multiple integrators system by bounded feedback. *Systems & Control Letters*, 57(10):867–875, 2008.
- B. ZHOU, Z. LIN et G. DUAN : Stabilization of linear systems with input delay and saturation—a parametric lyapunov equation approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(13):1502–1519, 2009.

Appendices



PERGAMON

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Automatica 39 (2003) 343–348

automatica

www.elsevier.com/locate/automatica

Brief Paper

Discontinuous exponential stabilization of chained form systems[☆]

Nicolas Marchand*, Mazen Alamir

Laboratoire d'Automatique de Grenoble, INPG-CNRS UMR 5528, ENSIEG BP 46, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France

Received 11 January 2002; received in revised form 23 September 2002; accepted 8 October 2002

Abstract

In this paper a novel approach to exponential stabilization of chained form system is proposed. Provided that the control law fulfills mild assumptions, it is shown that a Brunovsky-like change of coordinates depending on the control transforms any chained form system into a system having a linearly bounded nonlinear part. Using linear tools, it is possible to exponentially stabilize a chained form system for any initial condition outside a submanifold containing the origin. This result is then generalized to global exponential stabilization. The so obtained static discontinuous feedback is bounded for bounded states and exponentially converges to zero along the closed-loop trajectories of the system.

© 2002 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Keywords: Nonholonomic systems; Global exponential stabilization; Discontinuous feedback

1. Problem statement

The stabilization of nonholonomic systems, that is Lagrange systems with linear nonintegrable constraints, have focused a lot of attention this last years (see e.g. survey papers [Kolmanovky & McClamroch, 1995](#); [Canudas de Witt, Siciliano, & Bastin, 1996](#)). The absence of feedback linearizing transformation ([Isidori, 1995](#)) as of continuous stabilizing static feedback law although they are open-loop controllable ([Brockett, Millman, & Susmann, 1983](#)) render nonholonomic systems rather difficult to stabilize. This probably explains, between other reasons, their popularity and more particularly the one of chained form that rapidly became prime quality systems for the development of new array of advanced control strategies. Among these strategies, let us mention the two main classes: regular time-varying feedbacks ([Coron, 1992, 1995](#); [Teel, Murray, & Walsh, 1995](#); [Samson, 1995](#); [Lin, 1996](#); [Morin & Samson, 1997](#)) and discontinuous feedbacks ([Astolfi, 1996](#)).

Chained form systems are known to make an important class of driftless nonholonomic systems including the knife-edge, the underactuated rigid spacecraft and a car towing several trailers. As mentioned by [Murray and Sastry \(1993\)](#) and [Kolmanovky and McClamroch \(1995\)](#), many nonlinear mechanical systems can be transformed via coordinates change and feedback into chained form. A driftless nonholonomic system in single chained form is described by the following differential equations (without loss of generality, we assume that $n > 1$):

$$\dot{x}_0 = u_0, \tag{1}$$

$$\dot{x} = u_0 Ax + Bu_1, \tag{2}$$

with

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} & I_{n-1 \times n-1} \\ 0 & 0_{1 \times n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_{n-1 \times 1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

This paper deals with the exponential stabilization of chained form system by means of a static discontinuous feedback. It is divided into two parts; the first one is devoted to the exponential stabilization for all initial conditions such that $x_0(0) \neq 0$; this result is then extended to a global exponential stabilization in Section 3.

The notations used in this paper are standard. For a scalar s , $|s|$ denotes its absolute value, for a vector v , $\|v\|$ denotes its euclidian norm and v_i its i th coordinate. For a square

[☆] This paper was not presented at any IFAC meeting. This paper was recommended for publication in the revised form by Associate Editor Henk Nijmeijer under the direction of Editor Hassan Khalil.

* Corresponding author. Tel.: +33-4-76-82-6230; fax: +33-4-76-82-6388.

E-mail addresses: nicolas.marchand@inpg.fr (N. Marchand), mazen.alamir@inpg.fr (M. Alamir).

matrix M , $\|M\|$ and λ_{\max}^M denote its maximum eigenvalue and λ_{\min}^M its minimum eigenvalue. Finally, the real function sign used in the sequel is defined by $\text{sign}(r) = 1$ if $r \geq 1$ and $\text{sign}(r) = -1$ if $r < 0$.

2. Exponential stability for all $x_0(0) \neq 0$

In this section, a state feedback that almost exponentially stabilizes system (1–2) is designed. By *almost exponential stability* is meant exponential stability for any initial condition in an open dense subset of \mathbb{R}^n (Astolfi, 1996). This type of stability is often encountered in this research field (see e.g. Astolfi, 1996; Canudas de Witt & Khennouf, 1995; Reyhanoglu, Cho, McClamroch, & Kolmanovsky, 1998; Jiang, 2000) and is a revealing symptom of the absence of smooth stabilizing feedback. The open dense subset characterizes in some sense the regions where the linearized system is controllable. Most of the existing work is based on a discontinuous coordinate transformation issued from the notion of σ process and, in that case, the subset turns out to be the set where the transformation is continuous.

As in Astolfi (1996), our approach is based on linear tools. However, instead of applying a coordinate change that transforms (2) into a linear system when $x_0 \neq 0$, it is proposed to consider u_0 as a time function and hence subsystem (2) as a linear time-varying system with u_1 as control. An unfortunate reflex would be to use spectrum assignment methods to place the poles of subsystem (2). Indeed, it is known that contrary to time-invariant systems, the stability of the time varying systems cannot be ensured that way (Vidyasagar, 1993; Khalil, 1996). This does not happen if the influence of the time slowly modifies the general behaviour of the system. These systems are referred as slowly time-varying systems in the literature (Vidyasagar, 1993; Khalil, 1996). The solution chosen here consists in taking u_0 slowly varying with respect to x . With this glance, one can prove that, up to a change of coordinates depending upon the control u_0 and hence upon the time, subsystem (2) is equivalent to a system that can be bounded by a time-invariant controllable system. This change of coordinates puts subsystem (2) into a controllable Brunovsky-like canonical form and the transformation proposed by Astolfi (1996) proves to be a particular case of this coordinate change (see Remark 2). This renders the design of a stabilizing state feedback for subsystem (2) easy. Moreover, it can be extended to the whole system giving an exponential converging rate to the controlled system, which is an important performance characteristic for practical applications.

The sequel is organized as follows: after assumptions insuring a slow evolution of $u_0(t)$, a transformation putting subsystem (2) into a Brunovsky-like canonical form is given. Based on this, a class of state feedbacks that stabilize subsystem (2) when u_0 slowly varies is proposed.

2.1. Preliminaries

Assumption 1. Assume that $u_0: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous almost everywhere differentiable function with:

- (1) for all $t \geq 0$, $u_0(t) \neq 0$,
- (2) for almost all $t \geq 0$, $\|(du_0/dt)(t)\| \leq \alpha|u_0(t)|$, α being some real positive constant.

If u_0 vanishes, x clearly becomes uncontrollable; first item avoids this loss of controllability. Second item only excludes controls that vanish “almost” infinitely fast.

Keeping in mind that u_0 is “almost” constant (α being chosen small enough) and never vanishes, it becomes natural to transform system (2) into its Brunovsky normal form by defining:

$$\zeta(t) := T(u_0(t))x(t),$$

with

$$T(u_0(t)) := \text{diag}(1, u_0(t), \dots, u_0(t)^{n-1}), \quad (3)$$

where ζ is solution of ordinary differential equation $\dot{\zeta} = \dot{T}T^{-1}\zeta + Tu_0AT^{-1}\zeta + TBu_1$. Since $Tu_0AT^{-1} = A$ and $\dot{T} = (\dot{u}_0/u_0)LT$ with $L = \text{diag}(0, 1, \dots, n-1)$, this gives

$$\dot{\zeta} = \left(A + \frac{\dot{u}_0}{u_0}L \right) \zeta + Bu_0^{n-1}u_1. \quad (4)$$

Remark 2. In Astolfi (1996), it is proposed to apply the transformation $\zeta_i = x_i/x_0^{i-1}$ for $i \in [1, \dots, n]$. This transformation, also denoted state scaling, is equivalent to the coordinate change (3) with $u_0 = -kx_0$ that gives $\zeta_i = x_i/(-kx_0)^{i-1}$. Hence, one has $\zeta_i = (-k)^{i-1}\xi_i$; to a certain extent, the transformation proposed by Astolfi (1996) is a particular case of coordinate change (3).

The above transformation gives the exact Brunovsky normal form if u_0 is kept constant. Eq. (4) can also be seen as a nonlinear system with a linearly bounded nonlinear term (because of Assumption 1.2). This last point makes system (4) easily stabilizable by means of a smooth state feedback as in Theorem 3. The asymptotic stability of $x(t) = T^{-1}(u_0(t))\zeta(t)$ is ensured if ζ converges sufficiently fast. These last points are exposed in the forthcoming subsection.

2.2. Class of stabilizing feedbacks for subsystem (2)

Theorem 3. Assume that $u_0(t)$ fulfills Assumption 1, then $u_1(x, u_0(t)) := -u_0^{1-n}(t)B^TPT(u_0(t))x$, with P being the symmetric definite positive solution of the following Riccati equation parameterized by some real positive constant $\gamma > (n-1)\alpha$, is well defined and exponentially stabilizes subsystem (2) to the origin.

$$-2PBB^TP + A^TP + PA + (2\gamma + \alpha)P + \alpha LPL = 0. \quad (5)$$

Theorem 3 is proved in Appendix A. Note that, thanks to Assumption 1, u_0 never vanishes. Eq. (5) arises in a variety of stochastic control problems. The pair (A, B) being controllable, Eq. (5) is known to admit a maximal solution P such that $A - BB^T P$ has all its eigenvalues in the open left half plane (Wonham, 1970). Hence, u_1 is properly defined but nothing a priori ensures that it remains bounded since this depends upon the choice of $u_0(t)$. Note that P is static and independent of u_0 .

As a particular case of Theorem 3, one has

Theorem 4. *The feedback*

$$u_0(x_0, x) = -kx_0, \tag{6}$$

$$u_1(x_0, x) = -(-kx_0)^{1-n} B^T P T (-kx_0) x, \tag{7}$$

exponentially stabilizes system (1–2) for any initial condition in the open dense set $\{(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \neq 0\}$ as soon as $\gamma > (n - 1)k$ and $k > 0$. Furthermore, along the trajectories of the closed-loop system, the feedback law (6–7) is well defined, bounded for all $t \geq 0$ and exponentially tends to zero.

Note that x_0 satisfies the differential equation $\dot{x}_0 = -kx_0$; therefore, if $x_0(0) \neq 0$, for all $t \geq 0$ $x_0(t) \neq 0$ and the singularity set $\{(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 = 0\}$ is never crossed: for any initial condition outside this set, there is always a unique and smooth solution to the closed-loop system. Note also that u_1 becomes larger when $x_0(0)$ gets closer to the origin. This drawback underlined, among others, by Luo and Tsiotras (2000) is recurrent to almost stabilization.

3. Global exponential stability

In the above section, no solution is brought to the stabilization problem for an initial condition on the submanifold $x_0(0)=0$. The purpose of this section is to answer this question by proposing a globally exponentially stabilizing static state feedback.

The following definition of global exponential stability can be found in most books related to stability. This notion is sometimes called K -exponential stability to emphasize that function $h(\cdot)$ has not to be linear.

Definition 5. Consider the nonlinear time-invariant system $\Sigma: \dot{x} = f(x)$ with $x \in \mathbb{R}^n$. Let $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ be of class K if it is continuous, monotonically increasing and $h(0) = 0$. System Σ is said globally exponentially stable iff there exists a strictly positive constant λ and a function h of class K such that $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq h(\|x(0)\|) e^{-\lambda t}$.

Extending almost global stability of Section 2 to global exponential stability necessarily implies to take into account the singularity $x_0(0)=0$. This step is often bypass or shortly addressed. Most of the time, it is proposed to first apply an open-loop control during some a priori fixed time t_s in order to steer the state away from the singularity and then to switch

to the exponentially Converging feedback (see Astolfi, 1996; Canudas de Witt & Khenouf, 1995; Reyhanoglu et al., 1998). An improvement has been brought in Jiang (2000) who proposed to take u_0 constant and u_1 as a backstepping based control that makes x converge to the origin. Unfortunately, until today, nothing better than *global exponential regulation* was obtained. Exponential regulation is defined as exponential stability except that h is not required to be of class K . Both ensure an exponential converging rate but, contrary to exponential stability, with exponential regulation, transient deviations cannot be over-bounded with a bound vanishing with the initial condition. Hence, one loses the highly desirable property “the more closer to the origin the trajectory starts, the closer to the origin it remains”. Such a bound on the closed-loop trajectory could only be obtained using time-varying tools. Unfortunately, as pointed out by Murray (1991) and Gurvits (1992), smooth periodic time-varying feedback can only yield algebraic converging rate; global exponential stability requires nonsmooth (see Sordalen & Egeland, 1995; M’Closkey & Murray, 1997; Godhavn & Egeland, 1997) or aperiodic (see Yu & Shihua, 2000) time-varying state feedback.

The following theorem gives (to the authors knowledge) the first globally exponentially stabilizing static state feedback for chained form systems. It is obtained by switching between two smooth static feedbacks, the key point being the choice of the switching surface. Note that contrary to preceding works on this subject, the switch only depends upon the states and not upon the time, resulting in a static discontinuous feedback law in the classical sense and not a “time-dependent static feedback”. Moreover, this feedback is bounded for bounded states.

3.1. Main result

Theorem 6. *Let*

- β, δ, k and γ be strictly positive real constants such that $\gamma > (n - 1)k > 0$,
- P be the solution of static Riccati equation (5),
- V be defined by $V(x, u_0) := x^T T(u_0) P T(u_0) x$ with $T(u_0) := \text{diag}(1, \dots, u_0^{n-1})$,
- $\Gamma := \{(x_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \text{ s.t. } V(x, -kx_0) < \delta [kx_0]^{2\epsilon}\} \cup \{(0, 0)\}$ with ϵ being a real constant such that $\gamma/k > \epsilon > n - 1$,

Then, the static discontinuous feedback

$$u_0(x_0, x) = \begin{cases} \text{sign}(x_0)\beta & \text{if } (x_0, x) \notin \Gamma, \\ -kx_0 & \text{if } (x_0, x) \in \Gamma, \end{cases} \tag{8}$$

$$u_1(x_0, x) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_0 = 0, \\ -u_0^{1-n} B^T P T(u_0) x & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{9}$$

globally exponentially stabilizes chained form system (1–2). Moreover, the feedback law is bounded over bounded subsets of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

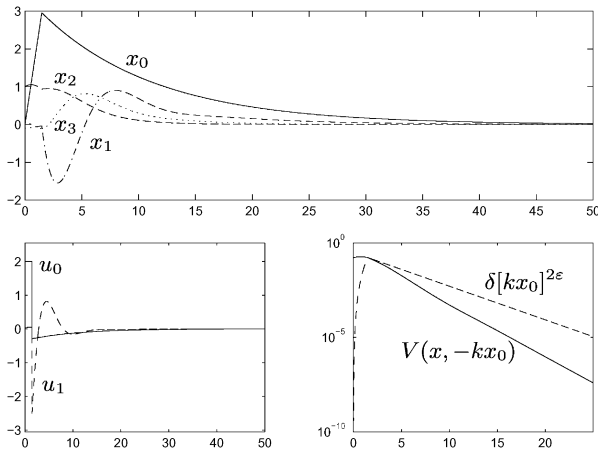


Fig. 1. Behavior of a chained system of dimension four with feedback (8–9), initial condition $[0, 1, 0.1, -0.1]$ (same as in Sordalen and Egeland (1995)) and parameters $[k, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon] = [0.1, 2, 0.21, 25, 2.05]$. Note the evolutions of $V(x, -kx_0)$ and $\delta[kx_0]^{2\varepsilon}$ emphasizing that $\delta[kx_0]^{2\varepsilon} > V(x, -kx_0)$ for all $t > t_s \approx 1.5$ s. Note that after t_s , feedbacks (8–9) and (6–7) are identical.

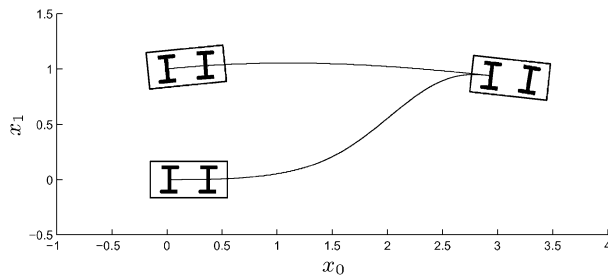


Fig. 2. The resulting path in the xy -plane. The variables $x = x_0$ and $y = x_1$ are interpreted as the planar position of a four-wheeled car.

Theorem 6 is proved in Appendix B and Figs. 1 and 2 show the behaviour of system (1–2) with feedback (8–9). The key feature of the above feedback is that the constant control $\text{sign}(x_0)\beta$ is applied only as long as x_0 is too small with respect to x in order to retrieve “some sufficient” controllability on the state x . Note that along the trajectories of the closed-loop system, when u_0 tends to zero, u_1 does the same (see Appendix B). Hence, “ $u_1 = 0$ if $u_0 = 0$ ” is, on the trajectories of the controlled system, the continuous extension of “ $u_1 = -u_0^{1-n}B^TPT(u_0)x$ otherwise” and $u_0 = 0$ is applied iff the system starts at the origin. It should be emphasized that a discontinuous feedback may become excessively large even for small states. In particular, it may happen for initial conditions close to a singular manifold as in previous works on this field (see Luo & Tsiotras, 2000, and the references therein). Here, the feedback law being bounded over bounded subsets of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, this phenomena is avoided.

4. Conclusion

In this paper a novel transformation for single chained form system was proposed. This enables to derive a class of almost exponential stabilizing feedbacks (u_0, u_1) , provided that u_0 varies sufficiently slow. As a particular case, one retrieves a previously existing result. This feedback was extended to a global exponential stabilization. The so obtained static discontinuous feedback law has the advantageous property of being bounded for bounded states and converging to zero along the trajectories of the closed-loop system. All the control laws proposed in this paper can be straightforwardly extended to multi-input chained systems.

Appendix A. Proof of Theorems 3 and 4

A.1. x is exponentially stable if $\gamma > (n-1)\alpha$

Note first that $\xi(t)$ exists for all initial conditions. Taking $V(\xi) = \xi^T P \xi$, it directly follows, thanks to Riccati equation (5) and Assumption 1, that $\dot{V} \leq -2\gamma V$. Since V is continuous, ξ is exponentially stable. Now, using Assumption 1 and $\xi = T(u_0)x$, it follows with $k(u_0) := \max(|u_0(0)|, |u_0(0)|^{-1})^{n-1}$ that:

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| k(u_0) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^P}{\lambda_{\min}^P}} e^{((n-1)\alpha - \gamma)t}.$$

A.2. Feedback law (6–7) is exponentially bounded

Recalling that along the trajectories of the closed-loop system one has $V(t) = x^T T P T x \leq V(0) e^{-2\gamma t}$, it follows $|u_1(t)| \leq |kx_0(0)|^{1-n} \sqrt{\lambda_{\max}^P / V(0)} e^{((n-1)k - \gamma)t}$.

Appendix B. Proof of Theorem 6

The proof will hold in three steps. First, we shall prove that any trajectory starting from Γ remains in Γ implying with Theorem 4 that the trajectory exponentially converges to the origin. In a second step, this exponential regulation will be proved to be exponential stabilization in the usual sense. Finally, the control will be shown to be bounded over bounded subsets of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

First, let us recall two important properties used in the sequel. Let u_0 fulfilling Assumption 1 and use $(u_0, -u_0^{1-n}(t)B^TPT(u_0(t))x)$ to control system (1–2), then, for all $\forall t \geq t_0$:

$$V(x(t), u_0(t)) \leq V(x(0), u_0(0)) e^{-2\gamma(t-t_0)}, \quad (\text{B.1})$$

where t_0 denotes the initial instant. Note also that, by definition of V , for all $(x_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, one has

$$V(x, -kx_0) \leq \frac{\max(1, k|x_0|)^{2n-2}}{\min(1, \beta)^{2n-2}} V(x, \text{sign}(x_0)\beta). \quad (\text{B.2})$$

B.1. Exponential regulation of system (1–2)

Let $(x_0(0), x(0)) \notin \Gamma$. It then follows that $u_0 = \text{sign}(x_0)\beta$ and hence that $|x_0(t)| = |x_0(0)| + \beta t$ is strictly increasing and that u_0 satisfies Assumption 1 with $\alpha = 0$ ¹. It ensures that $V(x, \text{sign}(x_0)\beta)$ is a continuous and exponentially decreasing time function along the trajectories of the closed-loop system. Using Eq. (B.2), it follows that $V(x, -kx_0)$ necessarily becomes lower than $\delta [kx_0]^{2\epsilon}$ after some time. Therefore, for any initial condition outside Γ , there necessarily exists some time t_s such that (x_0, x) reaches Γ .

Let t_s is an instant such that $(x_0(t_s), x(t_s)) \in \Gamma$. If $(x_0(t_s), x(t_s)) = (0, 0)$, the applied control being $(0, 0)$, the trajectory clearly remains in Γ . If now $(x_0(t_s), x(t_s)) \neq (0, 0)$ then $\forall t \geq t_s, |x_0(t)|^{2\epsilon} = |x_0(t_s)|^{2\epsilon} e^{-2k\epsilon(t-t_s)}$ and using Eq. (B.1) with $t_0 = t_s$ and $\gamma > k\epsilon$, it follows that for all $t \geq t_s, (x_0(t), x(t))$ remains in Γ . Hence, Γ is an invariant subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ for system (1–2) under control (8–9).

The discontinuity of the feedback is only reached once: the feedback law is *piecewise smooth*. Moreover on Γ , feedbacks (8–9) and (6–7) are identical; so any trajectory reaching Γ at some time t_s exponentially converges to the origin. This concludes the proof of this subsection. To obtain the exponential stability, it is proved in the next section that the transitory excursions of the closed-loop trajectories are bounded by some upper-bound that goes to zero as the initial condition goes closer to the origin (recall the definitions mentioned above).

B.2. Exponential stabilization of system (1–2)

Let $t_s(x_0(0), x(0))$ be now the first time instant such that $V(x(t_s), -kx_0(t_s)) \leq \delta [kx_0(t_s)]^{2\epsilon}$. Then for all $t < t_s$ (if there is some), the applied control u_0 is $\text{sign}(x_0)\beta$ while u_0 switches to $-kx_0$ after t_s .

B.2.1. t_s is bounded by some $\bar{t}_s(x_0(0), x(0))$

From Eqs. (B.2) and (B.1), it follows:

$$V(x(t_s), -kx_0(t_s)) \leq \frac{\max(1, k|x_0(t_s)|)^{2n-2}}{\min(1, \beta)^{2n-2}} \times V(x(0), \text{sign}(x_0(0))\beta) e^{-2\gamma t_s}.$$

Since $V(x, u) = x^T T(u) P T(u) x$, it gives

$$V(x(t_s), -kx_0(t_s)) \leq \max(1, k|x_0(t_s)|)^{2\epsilon} \times \max(\beta^{-1}, \beta)^{2n-2} \|x(0)\|^2 \lambda_{\max}^P e^{-2\gamma t_s}.$$

Since t_s is the first instant such that $V(x(t_s), -kx_0(t_s)) \leq \delta [kx_0(t_s)]^{2\epsilon}$ and since $|x_0(t_s)| = |x_0(0)| + \beta t_s$, it follows:

$$\delta \leq \max(1, k|x_0(0)| + k\beta t_s)^{-2\epsilon} \max(\beta^{-1}, \beta)^{2n-2} \times \|x(0)\|^2 \lambda_{\max}^P e^{-2\gamma t_s}.$$

¹ Note that $x_0(t)$ remains continuously differentiable along the trajectories of system (1) with control $u_0 = \text{sign}(x_0)\beta$.

This gives $t_s \leq \bar{t}_s(x_0(0), x(0)) := \max(0, \tau_1, \tau_2)$ with

$$\tau_1 := \frac{1}{2\gamma} \log \left[\frac{1}{\delta} \|x(0)\|^2 \lambda_{\max}^P \max(\beta^{-1}, \beta)^{2n-2} \right],$$

$$\tau_2 := \frac{k}{\beta} \left[\sqrt[2\epsilon]{\frac{\|x(0)\|^2}{\delta} \lambda_{\max}^P \max(\beta^{-1}, \beta)^{2n-2}} - \frac{|x_0|}{k} \right],$$

where τ_1 and τ_2 being, respectively, the roots of $\delta = \max(\beta^{-1}, \beta)^{2n-2} \|x(0)\|^2 \lambda_{\max}^P e^{-2\gamma t}$ and $\delta = [k|x_0(0)| + k\beta t]^{-2\epsilon} \max(\beta^{-1}, \beta)^{2n-2} \|x(0)\|^2 \lambda_{\max}^P$. \bar{t}_s is forced to be positive with the choice $\max(0, \tau_1, \tau_2)$. With this constraint, \bar{t}_s is well defined and *continuous* on all $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

B.2.2. x_0 is bounded by some $\rho_0(x_0(0), x(0))$

For all $t < t_s$ (if $t_s > 0$), x_0 is given by $|x_0(t)| = |x_0(0)| + \beta t$ and by $|x_0(t)| = |x_0(t_s)| e^{-k(t-t_s)}$ for all $t \geq t_s$. Hence, for any initial condition, using $0 \leq t_s \leq \bar{t}_s(x_0(0), x(0))$, it follows:

$$\forall t \geq 0, |x_0(t)| \leq \rho_0(x_0(0), x(0)) e^{-kt},$$

$$\rho_0 := [|x_0(0)| + \beta \bar{t}_s(x_0(0), x(0))] e^{k\bar{t}_s(x_0(0), x(0))}. \quad (\text{B.4})$$

Note that ρ_0 is *continuous* with respect to its arguments since so is $\bar{t}_s(x_0(0), x(0))$ and vanishes as the initial condition goes to zero.

B.2.3. x is bounded by some $\rho(x_0(0), x(0))$

For all $t < t_s$ (if $t_s > 0$) the exponential decrease of $V(x, \text{sign}(x_0)\beta)$ guarantees that:

$$\forall t < t_s, \|x(t)\| \leq r_1(x_0(0), x(0)) e^{-\gamma t},$$

$$\text{with : } r_1 := \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^P}{\lambda_{\min}^P} \max(\beta^{-1}, \beta)^{n-1} \|x(0)\|}. \quad (\text{B.5})$$

For all $t \geq t_s, V(x, -kx_0)$ is exponentially decreasing: $V(x(t), -kx_0(t)) \leq V(x(t_s), -kx_0(t_s)) e^{-2\gamma(t-t_s)} \leq \delta [kx_0(t_s)]^{2\epsilon} e^{-2\gamma(t-t_s)}$. By definition of $V: \|x(t)\|^2 \lambda_{\min}^P \min(1, k|x_0(t)|)^{2n-2} \leq V(x(t), -kx_0(t))$. These two last equations give

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\delta}{\lambda_{\min}^P} \max(1, k|x_0(t_s)|)^{2n-2} \times [kx_0(t_s)]^{2(\epsilon-n+1)} e^{-2[\gamma-k(n-1)](t-t_s)}.$$

Finally, using t_s 's bound and $\epsilon > n - 1$, one gets

$$\forall t \geq t_s, \|x(t)\| \leq r_2(x_0(0), x(0)) e^{-[\gamma-k(n-1)]t}$$

$$\text{with : } r_2 := \frac{\delta^{1/2}}{(\lambda_{\min}^P)^{1/2}} \max(1, k|x_0(0)| + k\beta \bar{t}_s)^{n-1} \times [k|x_0(0)| + k\beta \bar{t}_s]^{\epsilon-n+1} e^{[\gamma-k(n-1)]\bar{t}_s}. \quad (\text{B.6})$$

Eq. (B.5) coupled with (B.6) gives

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq \rho(x_0(0), x(0)) e^{-[\gamma-k(n-1)]t},$$

$$\rho := \max(r_1(x_0(0), x(0)), r_2(x_0(0), x(0))). \quad (\text{B.7})$$

Here again, ρ is *continuous* with respect to its arguments with $\rho(0, 0) = 0$.

Eqs. (B.4) and (B.7) clearly end the proof: static discontinuous feedback law (8–9) globally exponentially stabilize chained form system (1–2) to the origin.

B.3. The feedback law is bounded

From Eqs. (8) and (9), it follows that before t_s , $u_0 = \text{sign}(x_0)\beta$ and after t_s , $u_0(t) = -kx_0$. Hence, $u_0(x_0, x)$ is clearly bounded over bounded subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Furthermore, since x_0 is exponentially converging (recall Eq. (B.4)), $u_0(t)$ is exponentially converging to the origin.

Let us now prove the same for u_1 . For $(x_0, x) \notin \Gamma$, $u_0 = \text{sign}(x_0)\beta$ and $|u_1| \leq \beta^{1-n} \lambda_{\max}^p \max(1, \beta^{n-1}) \|x\|$. Now, if $(x_0, x) \in \Gamma$, $u_0 = -kx_0$ and $V(x, -kx_0) < \delta[kx_0]^{2\varepsilon}$ giving: $|u_1| \leq |kx_0|^{\varepsilon+1-n} \sqrt{\delta} \lambda_{\max}^p$. Thus, since $\varepsilon > n - 1$, it follows from the two last equations that $u_1(x_0, x)$ is bounded over bounded subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Furthermore, since x_0 and x exponentially converge to the origin, u_1 as time function does the same. Note also that $u_1(x_0, x)$ tends to zero as (x_0, x) tends to the origin.

References

- Astolfi, A. (1996). Discontinuous control of nonholonomic systems. *Systems & Control Letters*, 27, 37–45.
- Brockett, R. W., Millman, R. S., & Sussmann, H. S. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. In R. W. Brockett, R. S. Millman & H. S. Sussmann (Eds.) *Differential geometric control theory*. Birkhäuser: Boston-Basel-Stuttgart.
- Canudas de Witt, C., & Khennouf, H. (1995). Quasi-continuous stabilizing controllers for nonholonomic systems: Design and robustness considerations. In: *Proceedings of the European Control Conference*, Rome, Italy, Vol. 3, 2630–2635.
- Canudas de Witt, C., Siciliano, B., & Bastin, G. (Eds.) (1996). *Theory of robot control*. London: Springer.
- Coron, J. M. (1992). Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Mathematics of Control, Signal and Systems*, 5(3), 295–312.
- Coron, J. M. (1995). On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(3), 804–833.
- Godhavn, J. M., & Egeland, O. (1997). A Lyapunov approach to exponential stabilization of nonholonomic systems in power form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7), 1029–1032.
- Gurvits, L. (1992). Averaging approach to nonholonomic motion planning. In *Proceedings of the IEEE international conference on robotics and automation*, pp. 2541–2546.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear control theory*. Berlin-Heidelberg: Springer.
- Jiang, Z. P. (2000). Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties. *Automatica*, 36(2), 2000.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. London: Prentice-Hall.
- Kolmanovky, I., & McClamroch, N. H. (1995). Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(6), 20–36.
- Lin, W. (1996). Time-varying feedback control of nonaffine nonlinear systems without drift. *Systems & Control Letters*, 29(2), 101–110.
- Luo, J., & Tsiotras, P. (2000). Control design for chained-form systems with bounded inputs. *Systems & Control Letters*, 39(2), 123–131.
- M'Closkey, R. T., & Murray, R. M. (1997). Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5), 614–628.
- Morin, P., & Samson, C. (1997). Application of backstepping techniques to the time-varying exponential stabilization of chained form systems. *European Journal of Control*, 3(1), 15–36.
- Murray, R. M. (1991). Control of nonholonomic systems using chained form. In M. Enos (Ed.), *Dynamic and control of mechanical systems. The falling cat and related problems*, Vol 1 (pp 219–245). The Field Institute for Research in Mathematical Sciences.
- Murray, R. M., & Sastry, S. (1993). Nonholonomic motion planning: Steering with sinusoids. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 700–716.
- Reyhanoğlu, M., Cho, S., McClamroch, N. H., & Kolmanovskiy, I. (1998). Discontinuous feedback control a planar rigid body with an underactuated degree of freedom. In *Proceedings of 37th conference on decision and control*, Piscataway, NJ, USA, pp. 433–438.
- Samson, C. (1995). Control of chained systems, application to path following and time-varying point stabilization of mobile robot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1), 64–77.
- Sørdalen, O. J., & Egeland, O. (1995). Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1), 35–49.
- Teel, A. R., Murray, R. M., & Walsh, G. C. (1995). Non-holonomic control systems: From steering to stabilization with sinusoids. *International Journal of Control*, 62(4), 849–887.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems analysis* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Wonham, W. M. (1970). *Probabilistic methods in applied mathematics*, Vol. 2, Random differential equations in control theory (pp. 131–212). New York: Academic Press.
- Yu, P. T., Shihua, L. (2000). Smooth exponential stabilization of nonholonomic systems via time-varying feedback. In *The 39th Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Piscataway, NJ, USA, Vol. 2 (pp. 1912–1917).



N. Marchand was born in 1972 in Suresnes, France. He graduated in Electrotechnical Engineering from the Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), France (1995) and received a Ph.D. in Nonlinear Control (2000) at the INPG. After one year in the Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP) in Villeurbanne, France, he held an Assistant Professor position at the Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S) in Gif-sur-Yvette, France, and is currently Chargé de Recherche of the Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) at the Laboratoire d'Automatique de Grenoble in Saint Martin d'Hères, France. His research interests are in the fields of nonlinear control, non smooth control, control theory and receding horizon.



M. Alamir was born in 1966 in Cairo, Egypt. He graduated in Mechanical Engineering from the Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), France (1990) and in Aeronautics from the Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs en Construction Aéronautiques (ENSICA), France (1992). He received a Ph.D. from INPG in Nonlinear Control (1995). Since 1996, he is a research associate CNRS in the Laboratoire d'Automatique de Grenoble in Saint Martin d'Hères, France. His main research interests are nonlinear receding horizon control, nonlinear receding horizon observers, robust nonlinear and optimal control as well as industrial control applications.

Experience with CONSER: A System for Server Control Through Fluid Modeling

Luc Malrait, Sara Bouchenak, *Member, IEEE*, and Nicolas Marchand

Abstract—Server technology provides a means to support a wide range of online services and applications. However, their ad-hoc configuration poses significant challenges to the performance, availability and economical costs of applications. In this paper, we examine the impact of server configuration on the central tradeoff between service performance and availability. First, we present a server model as a nonlinear continuous-time model using fluid approximations. Second, we develop concurrency control on server systems for an optimal configuration. We primarily provide two control laws for two different QoS objectives. $AM-\mathcal{C}$ is an availability-maximizing server control that achieves the highest service availability given a fixed performance constraint; and $PM-\mathcal{C}$ is a performance-maximizing control law that meets a desired availability target with the highest performance. We then improve the control with two additional multi-level laws. $AA-PM-\mathcal{C}$ is an availability-aware performance maximizing control, and $PA-AM-\mathcal{C}$ is a performance-aware availability maximizing control. In this paper, we present CONSER, a novel system for the control of servers. We evaluate CONSER's fluid model and control techniques on the TPC-C industry-standard benchmark. Our experiments show that the proposed techniques successfully guarantee performance and availability constraints.

Index Terms—Server systems, QoS, SLA, Performance, Availability, Modeling, Control.

1 INTRODUCTION

1.1 Context and challenges

A large variety of Internet services exists, ranging from web servers to e-mail servers [1], streaming media services [2], e-commerce servers [3], and database systems [4]. These services are usually based on the classical client-server architecture, where multiple clients concurrently access an online service provided by a server (e.g. reading web pages, sending emails or buying the content of a shopping cart). Such server systems face varying workloads as shown in several studies [5], [6], [7]. For instance, an e-mail server is likely to face a heavier workload in the morning than in the rest of the day, since people usually consult their e-mails when arriving at work. In its extreme form, a heavy workload may induce server thrashing and service unavailability, with underlying economical costs. These costs are estimated at up to US\$ 2.0 million/hour for Telecom and Financial companies [8], [9].

A classical technique used to prevent servers from thrashing when the workload increases consists in limiting client concurrency on servers – also known as the multi-programming level (MPL) configuration parameter of servers. This technique is a special case of admis-

sion control [10]. Obviously, servers' MPL configuration has a direct impact on server performance, availability and quality-of-service (QoS). Existing approaches to server control either rely on ad-hoc tuning and heuristics without optimality guarantees [11], [12], [13], or apply linear control theory which does unfortunately not capture the intrinsic nonlinear behavior of server systems [14], [15], or follow a queueing theory approach where the system can be accurately modeled but at the expense of a hard model calibration process which makes it unwieldy to use [16], [17], [18]. We believe that modeling server systems is necessary to provide guarantees on the QoS. However, we argue that for the effective deployment of server modeling, the models must accurately capture the *dynamics* and the *nonlinear* behavior of server systems while being *simple* to deploy on existing systems.

1.2 Scientific contributions

In this paper, we apply a nonlinear continuous-time control theory based on fluid approximations, in order to model and control the QoS of server systems. The main contribution of the paper is twofold:

- The design and implementation of a nonlinear continuous-time model of server systems that is simple to use since it involves very few external parameters, and which still accurately captures the dynamics of server systems as fluid flows.
- The design and implementation of nonlinear *MPL* control for server systems. First, two variants of control laws are proposed: $AM-\mathcal{C}$ is an availability-maximizing optimal server control that achieves the highest service availability given a fixed per-

- L. Malrait is with the NeCS Networked Controlled System Research Group, INRIA – Gipsa Lab, Grenoble, France.
E-mail: Luc.Malrait@inria.fr
- S. Bouchenak is with the SARDES Distributed Systems Research Group, INRIA – Grenoble Universities, France.
E-mail: Sara.Bouchenak@inria.fr
- N. Marchand is with the NeCS Networked Controlled System Research Group, CNRS – Gipsa Lab, Grenoble, France.
E-mail: Nicolas.Marchand@inria.fr

formance constraint, and $PM-\mathcal{C}$ is a performance-maximizing optimal server control that meets a desired availability target with the highest performance. Furthermore, two additional control laws are proposed for applying performance and availability optimization at multiple levels, the $PA-AM-\mathcal{C}$ and $AA-PM-\mathcal{C}$ laws.

In this paper, we present the implementation and evaluation of CONSER, a novel system for the control of servers. An evaluation of CONSER was conducted on the TPC-C application, an industry-standard benchmark, running on the PostgreSQL database server. A wide range of application workload conditions was considered. The results of the experiments show that the proposed techniques provide significant benefits on the performance and the availability of the controlled system compared to ad-hoc control solutions.

1.3 Paper roadmap

The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 gives an overview of the background. Section 3 presents our contribution in terms of fluid modeling of server systems. Section 4 describes the validation of the proposed model. Sections 5 and 6 respectively present and evaluate the proposed $AM-\mathcal{C}$ and $PM-\mathcal{C}$ feedback control laws for servers. Sections 7 and 8 describe and evaluate the $PA-AM-\mathcal{C}$ and $AA-PM-\mathcal{C}$ control laws for multi-level optimization. Section 9 describes the related work. Finally, Section 10 draws our conclusions.

2 SERVER SYSTEMS

2.1 Definitions

We consider server systems such as database servers and web servers that follow the client-server architecture where servers provide clients with some online service, such as on-line bookstore, or e-banking. Clients and servers are hosted on different computers connected through a communication network. Basically, a client remotely connects to the server, sends it a request, the server processes the request and builds a response that is returned to the client before the connection is closed. Multiple clients may concurrently access the same server.

2.1.1 Server workload

Server workload is characterized, on the one hand, by the number of clients that try to concurrently access a server (i.e. *workload amount*), and on the other hand, by the nature of requests made by clients (i.e. *workload mix*), e.g. read-only requests mix vs. read-write requests mix. Workload amount is denoted as N while workload mix is denoted as M . Furthermore, server workload may vary over time. This corresponds to different client behaviors at different times. For instance, an e-mail service usually faces a higher workload amount in the morning than in the rest of the day.

2.1.2 Server MPL control

Admission control is a classical technique to prevent a server from thrashing [19]. *MPL* control is a special case of admission control that consists in fixing a limit for the maximum number of clients allowed to concurrently access a server – the Multi-Programming Level (*MPL*) configuration parameter of a server. Above this limit, incoming client requests are rejected. Thus, a client request arriving at a server either terminates successfully with a response to the client, or is rejected because of the server's *MPL* limit. Therefore, due to the *MPL* limit, among the N clients that try to concurrently access a server, only N_e clients actually access the server, with $N_e \leq MPL$. Servers' *MPL* has a direct impact on the quality-of-service (QoS), performance and availability of servers as discussed below.

2.2 Quality-of-service of server systems

Several criteria may be considered to characterize service performance and availability [13]. In the following, we consider in particular two metrics that reflect performance and availability from the user's perspective [13], namely *latency* and *abandon rate*.

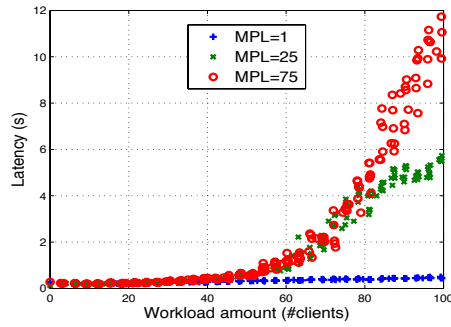
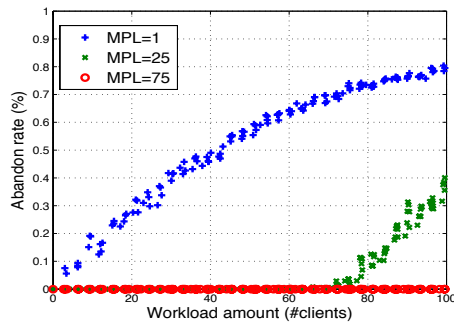
2.2.1 Service performance – Latency

Client request latency is defined as the time needed by the server to process a request. The average client request latency is denoted as L . A low client request latency (or latency, for short) is a desirable behavior which reflects a reactive system. Figure 1 describes the impact of server's *MPL* value on client request latency, when the workload amount varies¹. Here, three values of *MPL* are considered, a low value (1), a medium value (25) and a high value (75). The low *MPL* is very restrictive regarding client concurrency on the server and thus, keeps the server unloaded and implies a low client request latency. In contrast, with a high *MPL*, when the server workload amount increases client request latency increases too.

2.2.2 Service availability – Abandon rate

Client request abandon rate is defined as the ratio between requests rejected due to server control and the total number of requests received by a server. It is denoted as α . A low client request abandon rate (or abandon rate, for short) is a desirable behavior that reflects service availability. Figure 2 describes the impact of *MPL* on client request abandon rate¹. A low *MPL* is very restrictive regarding client concurrency on the server, and obviously implies a higher abandon rate compared to a high *MPL* which accepts more clients.

1. Details on the underlying experimental testbed are given in Section 4.1.


 Fig. 1. Impact of MPL on performance

 Fig. 2. Impact of MPL on availability

2.2.3 Service Level Agreement

Service Level Agreement (SLA) is a contract negotiated between clients and their service provider [20]. Service performance and service availability are part of the SLA (Service Level Agreement). The SLA specifies the service level objectives (SLOs) such as the maximum latency L_{max} and the maximum abandon rate α_{max} to be guaranteed by the server.

3 CONSER'S FLUID MODEL

We propose a fluid model which renders the dynamics of server systems and captures characteristics that reflect the state of servers in terms of performance and availability. Roughly speaking, fluid approximation consists in looking at all the state variables of the system - that are most integers - as real variables in \mathbb{R} . This enables to write the infinitesimal variation of characteristic state variables of the system with respect to time. Those variations can be seen as fluid flows, e.g. client request flows in the present case; and a request queue on the server is similar to a fluid tank [21]. The model is therefore built as a set of differential equations - as for most physical systems in mechanics, physics, electricity, etc. - that describe the time evolution of state variables.

In the present case, we identify three state variables that describe and have an impact on server performance and availability, namely the current number of concurrent client requests in the server N_e , the server

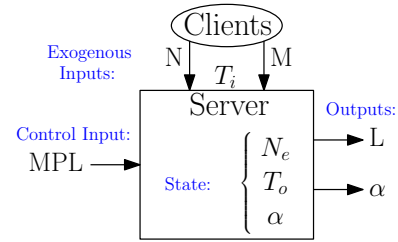


Fig. 3. Model inputs/outputs

throughput T_o and the client request abandon rate α . State variables are usually influenced by themselves and by input variables. The inputs of the proposed model are: the server workload amount N and workload mix M exogenous inputs, and the server MPL tunable parameter that can be used to control the admission to the server. In addition to input and state variables, the model has output variables such as the average latency L to process a client request on the server. In the following, we describe the proposed fluid model through the formulas of its state and output variables.

3.1 Model state variables

Among the N concurrent clients that try to connect to a server, MPL control authorizes N_e concurrent clients to actually enter the server, with $0 \leq N_e \leq N$ and $0 \leq N_e \leq MPL$. Let $cr(t, t + dt)$ be the number of client connections created on the server between t and $t + dt$, and $cl(t, t + dt)$ be the number of client connections closed on the server between t and $t + dt$. Thus, a balance on N_e between t and $t + dt$ gives

$$N_e(t + dt) = N_e(t) + cr(t, t + dt) - cl(t, t + dt) \quad (1)$$

Let T_i be the incoming throughput of the server, measured as the number of client connection demands per second. It comes that the number of connections created between t and $t + dt$ is

$$cr(t, t + dt) = (1 - \alpha(t)) \cdot T_i(t) \cdot dt \quad (2)$$

where α is the abandon rate of the server.

Similarly, let T_o be the outgoing throughput of the server, measured as the number of client requests a server is able to handle per second. Thus, the number of connections closed between t and $t + dt$ is

$$cl(t, t + dt) = T_o(t) \cdot dt \quad (3)$$

Deriving from (1), (2) and (3), we have \dot{N}_e , the derivative of N_e

$$\dot{N}_e(t) = (1 - \alpha(t)) \cdot T_i(t) - T_o(t) \quad (4)$$

Moreover, we assume that the system reaches a steady state in a reasonably short period of time Δ ; this is particularly reflected in state variables outgoing throughput T_o and abandon rate α . During this short period of time, the workload is relatively stable, which is consistent with

studies such as [7]. Thus, the dynamics of T_o and α can be approximated by first order systems through their derivatives as follows

$$\begin{aligned} \dot{T}_o(t) &= -\frac{1}{\Delta} (T_o(t) - \bar{T}_o) \\ \dot{\alpha}(t) &= -\frac{1}{\Delta} (\alpha(t) - \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

where \bar{T}_o and $\bar{\alpha}$ are the steady state values of respectively the outgoing throughput and the abandon rate of the server. The next step naturally consists in finding the expression of \bar{T}_o and $\bar{\alpha}$. A balance on the number of served client requests (or outgoing requests) N_o gives

$$N_o(t + dt) = N_o(t) + sr(t, t + dt)$$

where $sr(t, t + dt)$ is the number of served request between t and $t + dt$. Since there are N_e concurrent clients on the server and the average client request latency is L , the number of served requests during dt will be $sr(t, t + dt) = \frac{dt}{L} N_e$. Thus, we get $\dot{N}_o = \frac{N_e}{L}$, that is $\bar{T}_o = \frac{N_e}{L}$ which is an expression of Little's law [22].

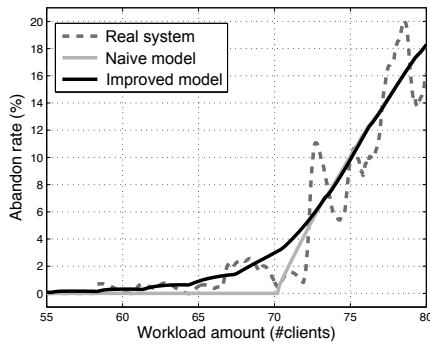


Fig. 4. Accuracy of modeled abandon rate

By definition, $\bar{\alpha}$ is equal to zero if N_e is smaller than MPL , and $\bar{\alpha}$ is equal to $1 - \frac{T_o}{T_i}$ if $N_e = MPL$ (see Figure 4, naive model). However, the stochastic nature of the client request arrival may lead to situations where the measured average N_e is smaller than MPL but where punctually, the number of clients that try to access the server is actually higher than MPL , and thus, some clients are rejected. This is illustrated in Figure 4 which compares the actual measured abandon rate with the naive estimation of the abandon rate, showing a mismatch between the two². In order to take this behavior into account, we choose to write $\bar{\alpha} = \frac{N_e}{MPL} \cdot \left(1 - \frac{T_o}{T_i}\right)$. This renders that the probability to reject a client connection is higher when the average N_e is close to MPL . Figure 4 shows that this improved method provides a more accurate estimation of the abandon rate. Finally, it

2. Details on the underlying experimental testbed are given in Section 4.1.

follows that

$$\dot{T}_o(t) = -\frac{1}{\Delta} \left(T_o(t) - \frac{N_e(t)}{L(t)} \right) \quad (5)$$

$$\dot{\alpha}(t) = -\frac{1}{\Delta} \left(\alpha(t) - \frac{N_e(t)}{MPL(t)} \cdot \left(1 - \frac{T_o(t)}{T_i(t)} \right) \right) \quad (6)$$

3.2 Model output variables

Now that we have defined the model state variables, the last step consists in expressing the model output variable latency L . Latency obviously depends on the global load of the server, i.e. the workload mix M and the number of concurrent clients on the server N_e . Figure 5 describes the evolution of latency L as a function of N_e , for a given workload mix². One can see that a second degree polynomial in N_e is a good approximation of the latency L . Thus:

$$L(N_e, M, t) = a(M, t)N_e^2 + b(M, t)N_e + c(M, t) \quad (7)$$

The parameter c is positive as it represents the zero-load latency. a and b are also positive since they model the processing time of requests.

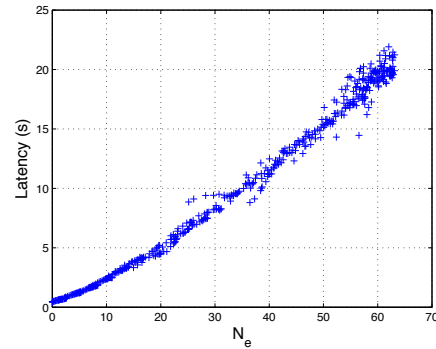


Fig. 5. Latency as a function of N_e

In summary, the proposed fluid model is given by equations (4) to (7) that reflect the dynamics of the state and outputs of server systems in terms of performance and availability. Section 5 then describes the proposed control techniques that build upon the fluid model in order to guarantee service performance and availability level objectives.

4 MODEL VALIDATION

This section first describes the environment that underlies our experiments, before presenting the results of the evaluation of the proposed fluid model.

4.1 Experimental setup

The evaluation of the proposed fluid model has been conducted using the TPC-C benchmark [23]. TPC-C is an industry standard benchmark from the Transaction Processing Council that models a realistic database server

application as a warehouse system where clients request transactions on warehouses stored on a database server. TPC-C comes with a client emulator which emulates a set of concurrent clients that remotely send requests to the database server. The TPC-C client emulator allows to specify the number of concurrent clients to launch (i.e. the workload amount N). It also specifies the client think time, that is the interarrival time between two consecutive client requests. We extended the client emulator in order to be able, on the one hand, to vary the workload amount N over time, and on the other hand, to vary the workload mix M over time. For the latter extension, we considered two mixes of workload, one consisting of read-only requests, and another consisting of read-write requests.

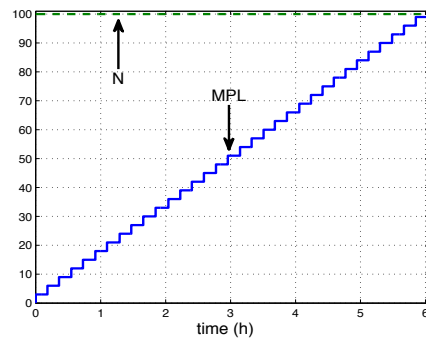
Our experiments have been conducted on a set of two computers connected via a 100 Mb/s Ethernet LAN, one computer dedicated to the database server and another to the client emulator. The database server is PostgreSQL 8.2.6 [4]. The proposed model was implemented using an online monitoring of the system which allows to maintain the state of the model. Well-known Kalman filtering techniques were therefore applied [24]. Both client and server machines run Linux Fedora 7. The server machine is a 3 GHz processor with 2GB RAM, while the clients' computer is a 2 GHz processor with 512MB RAM.

4.2 Real system vs. modeled system

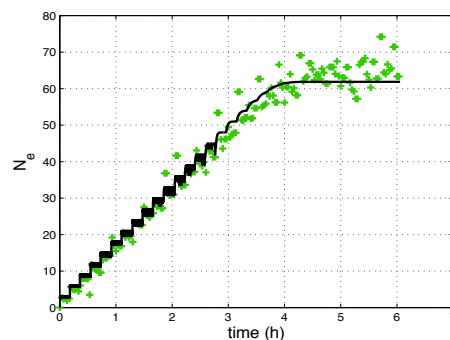
We perform measurements to validate the accuracy of the proposed fluid model and its ability to render the dynamics of the system. In particular, we evaluate the ability of the model to reflect the variation of the state of the system when input variables such as the server MPL and the workload amount N vary. The variation of the state of the system is described by the state variables N_e for the number of concurrent clients admitted in the server, T_o for the outgoing throughput of the server, and α for the client request abandon rate. Thus, for the same set of input variables, the state reified by the model is compared with the actual state of the real system.

Figure 6 describes the case of an open loop system where the workload amount N trying to access the database server is fixed (to 100 clients) and where the MPL value of the server varies (see Figure 6(a)). Figures 6(b), 6(c) and 6(d) show the evolution over time of respectively the number N_e of concurrent clients admitted in the server, the outgoing throughput T_o and the abandon rate α , for both the real system (+) and the model (solid line). Results show that the model accurately reflects the behavior of the real system. For instance, we can observe a thrashing phenomenon of the server when T_o decreases whereas N_e increases. And the model is able to render that behavior, which would not be possible without an overlinear term with respect to N_e in Equation (7).

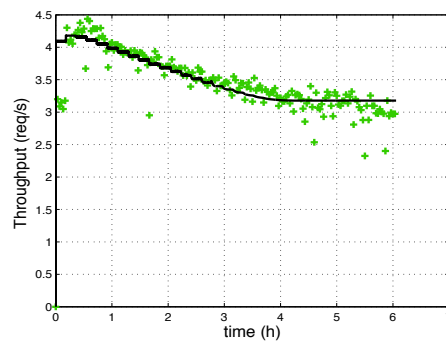
Figure 7 illustrates the case of a dynamic open loop system where both the workload amount N and the



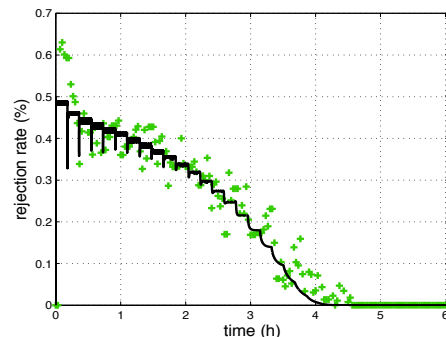
(a) Varying MPL with a fixed workload amount



(b) Admitted concurrent clients



(c) Throughput



(d) Abandon rate

Fig. 6. System behavior with a varying MPL and a fixed workload amount – Real system (+) vs. modeled system (solid line)

server MPL vary over time (see Figure 7(a)). Figures 7(b), 7(c) and 7(d) present the evolution over time of respectively the number N_e of concurrent clients admitted in the server, the outgoing throughput T_o and the abandon rate α , for both the real system (+) and the modeled system (solid line). Results show that the model is able to render the behavior of the real system.

5 $AM-\mathcal{C}$ AND $PM-\mathcal{C}$ CONTROL LAWS

In the following, we study the tradeoff between the performance and the availability of server systems, and derive the optimal MPL control of server systems based on the proposed fluid model, that is the optimal number of concurrent clients admitted to the server with respect to this tradeoff. In particular, we provide two variants of control laws, namely $AM-\mathcal{C}$ and $PM-\mathcal{C}$. $AM-\mathcal{C}$ is an availability-maximizing optimal server MPL control that achieves the highest service availability given a fixed performance constraint. Symmetrically, $PM-\mathcal{C}$ is a performance-maximizing optimal server MPL control that meets a desired availability target with the highest performance. In the present case, service availability is measured as the client request acceptance rate (i.e. $1 - \alpha$), and service performance is measured as the average client request latency (i.e. L).

5.1 $AM-\mathcal{C}$ availability-maximizing control

$AM-\mathcal{C}$ aims at guaranteeing a tradeoff between server performance and availability with the following properties:

- (P1) the average client request latency does not exceed a maximum latency L_{max} , and
- (P2) the abandon rate α is made as small as possible.

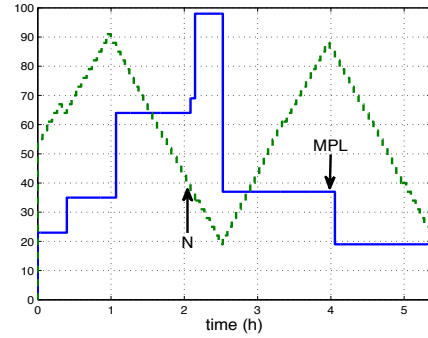
To that end, a feedback control law is proposed to automatically adjust the MPL server control parameter in order to satisfy this tradeoff. The basic idea behind this law is to admit clients in such a way that the average client request latency L is close (equal) to L_{max} . By construction, this maximizes the number of admitted clients N_e , which induces a minimized abandon rate α .

A first approach could consist in solving Eq. (7) in such a way that $L = L_{max}$. Although accurately reflecting the system, such an approach is unwieldy since it requires the knowledge of accurate values of parameter a , b and c in equation 7, through an online identification of these parameters since the workload may change over time.

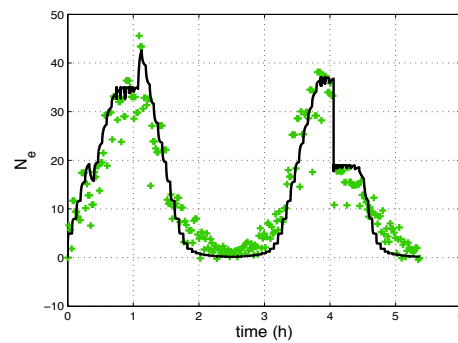
We propose another approach which avoids this online identification of model's parameters. It is obtained via a simple input-output linearization technique in which the considered output is latency L [25]. Roughly speaking, the approach aims at determining how to control the MPL value in such a way that

$$\dot{L} = -\gamma_L (L - L_{max}) \quad (8)$$

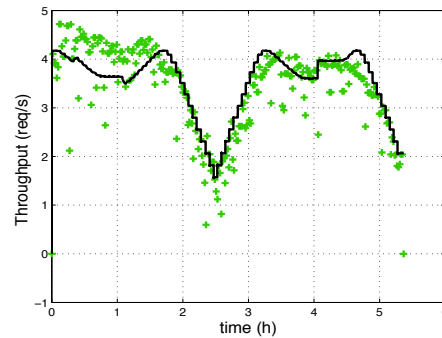
As soon as $\gamma_L > 0$, this will ensure the convergence of L to its maximum L_{max} . From Eq. (7), we have



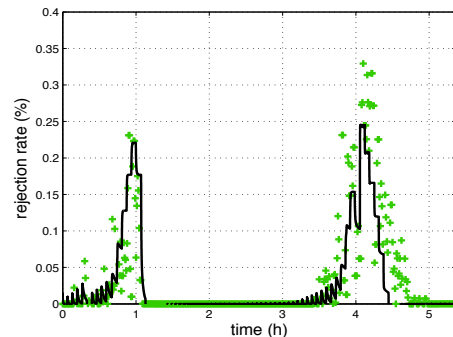
(a) Varying MPL and workload amount



(b) Admitted concurrent clients



(c) Throughput



(d) Abandon rate

Fig. 7. System behavior with varying MPL and workload amount – Real system (+) vs. modeled system (solid line)

$\dot{L} = (2aN_e + b)\dot{N}_e$. And since T_o and α reach a steady state in a reasonably short period of time, $T_o(t) = \bar{T}_o$ and $\alpha(t) = \bar{\alpha}$. Therefore, with Eq. (4) we have

$$\dot{L} = (2aN_e + b) \left(1 - \frac{N_e}{MPL}\right) (T_i - \bar{T}_o) \quad (9)$$

As a result from Eq. (8) and (9), MPL should be controlled as follows

$$MPL = \frac{N_e}{1 + \frac{\gamma_L}{(2aN_e + b)(T_i - \bar{T}_o)}(L - L_{max})}$$

To free ourselves from a and b , we choose to use $\gamma'_L = \frac{\gamma_L}{(2aN_e + b)(T_i - \bar{T}_o)}$, which produces

$$MPL = \frac{N_e}{1 + \gamma'_L(L - L_{max})} \quad (10)$$

where $\gamma'_L > 0$ is a tuning parameter. It follows that with Eq. (8) and control described in (10), the dynamic evolution of L is given by:

$$\dot{L} = -(\gamma'_L(2aN_e + b)(T_i - \bar{T}_o))(L - L_{max})$$

Here again, L will converge to L_{max} .

In summary, it is interesting to notice that the feedback control law given in (10) will reflect one of the following situations. If the current latency L is higher than L_{max} , property (P1) is not guaranteed and the control law will produce an MPL as a decreased value of the current number of admitted concurrent clients N_e (since $(1 + \gamma'_L(L - L_{max})) > 1$), which aims at meeting (P1). Symmetrically, if L is lower than L_{max} , property (P1) holds but property (P2) may not hold, and the control law will produce an MPL as an increased value of N_e (since $(1 + \gamma'_L(L - L_{max})) < 1$), which aims at meeting (P2). Finally, if L is equal to L_{max} , both properties (P1) and (P2) hold.

Moreover, we observe that with the highest value of γ_L the MPL reaches its highest value while keeping the latency near its authorized limit. Thus, with the $AM\text{-}\mathcal{C}$ control law, the highest value of γ_L to be used is $1/L_{max}$.

5.2 $PM\text{-}\mathcal{C}$ performance-maximizing control

Similarly, $PM\text{-}\mathcal{C}$ aims at guaranteeing the following tradeoff between server performance and availability where:

- (P3) the client request abandon rate does not exceed a given maximum abandon rate α_{max} ,
- (P4) with the lowest average client request latency.

In this context, (P4) will be ensured given (P3) iff the MPL converges to the smallest value that guarantees $\alpha \leq \alpha_{max}$. Once again, we use an input-output linearization approach, taking α as the output, to solve the problem

$$\dot{\alpha} = -\gamma_\alpha(\alpha - \alpha_{max}) \quad (11)$$

with $\gamma_\alpha > 0$. Furthermore, since the workload remains relatively stable during a short period of time, as stated previously, $\dot{N}_e = 0$. Then, from Eq. (4) and (6), we get

$$\alpha = 1 - \frac{T_o}{T_i}$$

$$\dot{\alpha}(t) = -\frac{1}{\Delta}\alpha(t)\left(1 - \frac{N_e(t)}{MPL(t)}\right) \quad (12)$$

Thus, from Eq. (11) and (12) and with the following control applied to MPL , α will converge to α_{max}

$$MPL = \frac{\alpha N_e}{\alpha - \gamma'_\alpha(\alpha - \alpha_{max})} \quad (13)$$

where $\gamma'_\alpha = \gamma_\alpha \Delta$.

We observe that with the highest value of γ_α the MPL reaches its highest value while keeping the abandon rate under its authorized limit. Thus, with the $PM\text{-}\mathcal{C}$ control law, the highest value of γ_α to be used is $1/(1 - \alpha_{max})$.

6 $AM\text{-}\mathcal{C}$ AND $PM\text{-}\mathcal{C}$ EVALUATION

This section presents the results of the evaluation of the implemented feedback controllers presented in Section 5 when applied to the PostgreSQL database server that hosts the TPC-C database. The results of the experiments conducted with the $AM\text{-}\mathcal{C}$ availability-maximizing controller are first presented in Section 6.2, and the results of the $PM\text{-}\mathcal{C}$ performance-maximizing controller are then described in Section 6.3.

6.1 Experimental environment

We used the same experimental environment as the one described in Section 4.1. The proposed controllers were deployed as follows. A proxy-based approach was followed to implement the $AM\text{-}\mathcal{C}$ and $PM\text{-}\mathcal{C}$ controllers where a proxy stands in front of the database server to implement online feedback server control. Moreover, the CONSER-based controlled system is compared with two base systems applying ad-hoc MPL control, that is ad-hoc control 1 with a static MPL set to 25 and ad-hoc control 2 with a static MPL at 40.

6.2 $AM\text{-}\mathcal{C}$ evaluation

In this section, we evaluate the proposed $AM\text{-}\mathcal{C}$ availability-maximizing feedback controller presented in Section 5.1. Here, we consider a performance constraint limiting the maximum average client request latency to 8 s. The role of $AM\text{-}\mathcal{C}$ is thus to guarantee that performance constraint while maximizing service availability, through online feedback control of the server MPL . We consider two scenarios to evaluate this controller, each one illustrating a variation of one of the two exogeneous input variables of the system, i.e. the first scenario considers a changing workload mix, and the second scenario handles a varying workload amount N .

6.2.1 Workload mix variation

Figure 8 describes the first scenario where the workload mix varies from $M1$ to $M2$ twice (c.f. Figure 8(a)), while the workload amount N is of 80 clients. The workload mix $M1$ consists of read-only requests while the workload mix $M2$ generates read-write requests. The two mixes differ in their average request latency as follows. With 10 concurrent clients in the server, the average client request latency is $0.23s$ with mix $M1$ and $0.55s$ with mix $M2$. Figures 8(d), 8(b) and 8(c) present the variation over time of respectively the server MPL , the average client request latency and the client request abandon rate. The figures compare the two base systems using ad-hoc control 1 and ad-hoc control 2 with the CONSER-based controlled system. Notice that the sudden change of MPL after the 10th, 20th and 30th minutes corresponds to workload mix changes; this has also an impact on latency and abandon rate.

Results demonstrate that the $AM-\mathcal{C}$ controller is able to dynamically adjust MPL in order to guarantee the latency performance constraint while keeping the service availability to its maximum, with an abandon rate minimized to 0% with $M1$ and to 10% in average with $M2$. Whereas none of the two base systems with ad-hoc control is able to guarantee the SLOs when the workload varies. Here, compared to CONSER, a latency overhead of up to 25% is induced by ad-hoc control 2 and an abandon rate overhead of up to 28% results from ad-hoc control 1.

6.2.2 Workload amount variation

Figure 9 presents another dynamics of the system, that is the variation of the server workload amount over time (c.f. Figure 9(a)) when the workload mix remains at $M2$. Figures 9(d), 9(b) and 9(c) present the variation over time of respectively the server MPL , the average client request latency and the client request abandon rate, comparing the two base systems using ad-hoc control and the CONSER-based controlled system. Notice that, due to TPC-C client think time, the number of active clients at any given time may be different from (i.e. lower than) the actual load generated by TPC-C client emulator at that time. Results show that the CONSER-based controlled MPL is able to adjust its value to the optimal value so that the performance constraint is guaranteed. Whereas in the case of the system with ad-hoc control 1, the latency grows up to $11.5s$, with an overhead of up to 44% compared to CONSER. The system with ad-hoc control 2 allows to guarantee the performance constraint but the abandon rate grows up to 40%, with an overhead of up to 14%.

In the CONSER-based controlled system, the abandon rate is maintained at 0% with up to 70 clients. Then, the abandon rate increases with the increase of concurrent clients in the system, to attain its highest value when the number of clients is maximum, in order to keep latency below the target maximum latency. Notice that

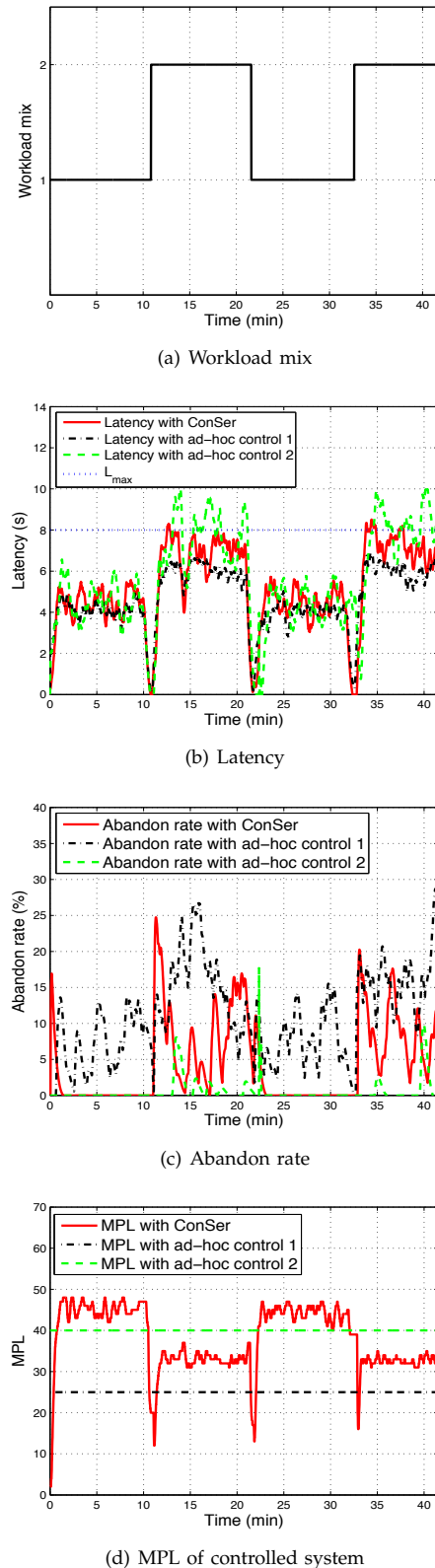


Fig. 8. System behavior upon workload mix variation – $AM-\mathcal{C}$ -based controlled system vs. non-controlled system

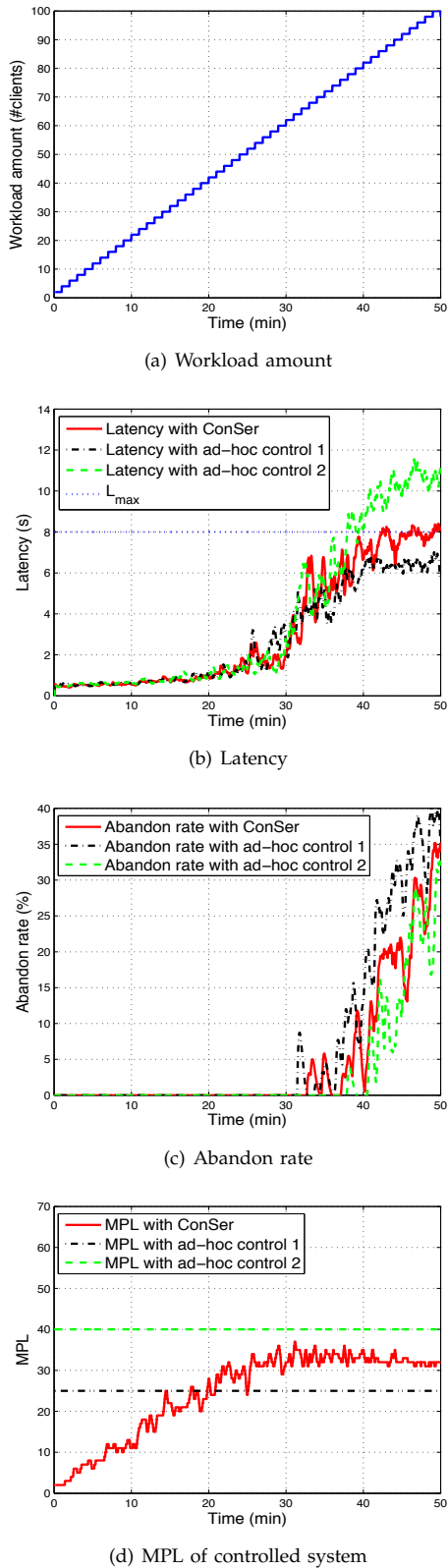


Fig. 9. System behavior upon workload amount variation – $AM-\mathcal{C}$ -based controlled system vs. non-controlled system

at the end of the experiment (between the 40th and 50th minutes), it seems justifiable to have a high abandon rate since latency attains its maximum authorized value (c.f. Figure 9(d)) and client request rejection is necessary at that time to guarantee the latency constraint.

6.3 $PM-\mathcal{C}$ evaluation

In this section, we evaluate the proposed $PM-\mathcal{C}$ performance-maximizing feedback controller presented in Section 5.2. Here, we consider an availability constraint limiting the maximum client request abandon rate to 10%. The role of $PM-\mathcal{C}$ is thus to guarantee this availability constraint while maximizing service performance, through online feedback control of server MPL .

6.3.1 Workload mix variation

Figure 10 presents the variation of system behavior and dynamic control when the exogeneous input variable of workload mix M changes. In Figure 10(a), the workload mix varies from M_1 to M_2 twice when the workload amount N is of 80 clients. Figures 10(d), 10(b) and 10(c) present the variation over time of respectively the server MPL , the client request abandon rate and the average client request latency, comparing the two base systems using ad-hoc control with the CONSER-based controlled system. Here again, we notice a sudden change in the MPL when the workload mix suddenly changes, with an impact on the latency and abandon rate.

Results demonstrate that the $PM-\mathcal{C}$ controller is able to dynamically adjust MPL in order to meet the abandon rate constraint, although abandon rate is sensitive to MPL control. Under this constraint, $PM-\mathcal{C}$ keeps service performance to its maximum, with an average latency minimized to 4 s with M_1 and to 6 s with M_2 . Whereas none of the two base systems with ad-hoc control is able to guarantee the SLOs when the workload varies. This results in an abandon rate overhead of up to 250% with ad-hoc control 1, and a latency overhead of up to 66% with ad-hoc control 2, compared to the CONSER-based controlled system.

6.3.2 Workload amount variation

Figure 11 shows the variation of the system behavior with a varying workload amount (c.f. Figure 11(a)) and a constant workload mix M_1 . Figures 11(d), 11(c) and 11(b) present the variation over time of respectively the server MPL , the average client request latency and the client request abandon rate, comparing two base systems using ad-hoc control with the CONSER-based controlled system. Results show that the $AM-\mathcal{C}$ controller is able to adjust the MPL so that the availability constraint is met, although we can notice that abandon rate is sensitive to MPL control. During the first 15 minutes of the experiment, the CONSER-based controlled system does not reject any request since too few clients are trying to connect to the server. Compared to CONSER-based control, the base system with ad-hoc control 1

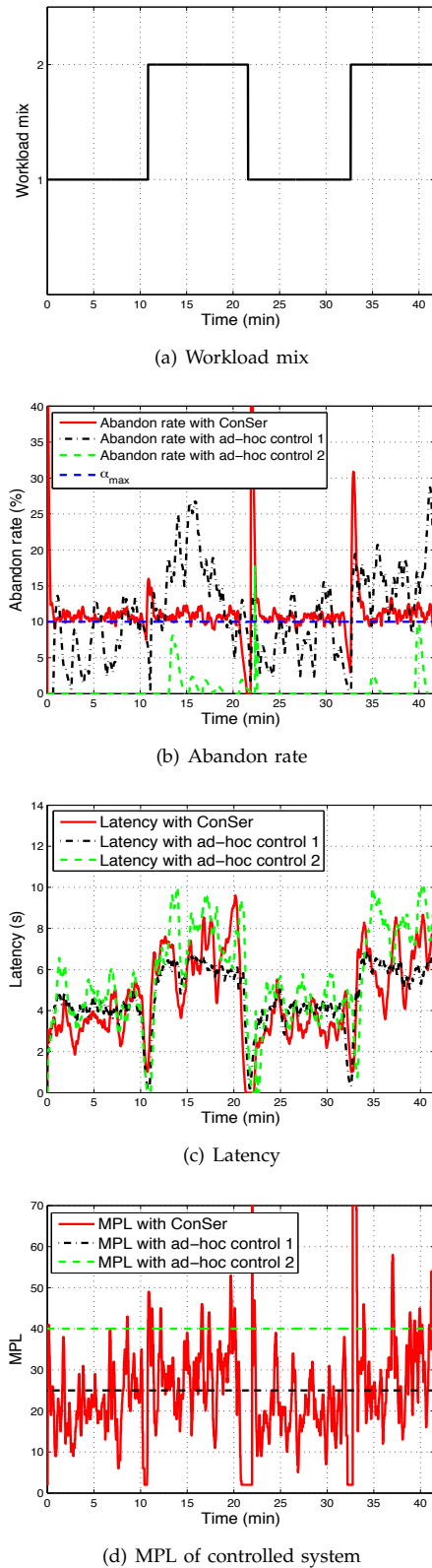


Fig. 10. System behavior upon workload mix variation – $PM-\mathcal{C}$ -based controlled system vs. non-controlled system

(respectively ad-hoc control 2) increases abandon rate with a factor of up to 4 (respectively 3). In terms of latency, these two ad-hoc systems induce an overhead of up to 40 % (respectively 32%) compared to the CONSER-based controlled system.

7 AA- $PM-\mathcal{C}$ AND PA- $AM-\mathcal{C}$ CONTROL LAWS

7.1 AA- $PM-\mathcal{C}$ availability-aware performance-maximizing control

AA- $PM-\mathcal{C}$ is another MPL control law that extends the previously presented $PM-\mathcal{C}$ law. Indeed, in section 6.3, Figure 11 illustrates the behavior of $PM-\mathcal{C}$ where the client request abandon rate is kept below a service level limit while the request latency is minimized. However, this may result in a situation where client request latency has a reasonable value (i.e. a value below a given service level limit) whereas client requests are rejected. For instance, Figures 11(b) and 11(c) respectively show that between the 14th and 37th minutes of the experiment, 10% of client requests are rejected while request latency is below 8 seconds. During that period of time, and if availability is prioritized over performance, availability could be maximized (i.e. rejection rate minimized) as long as performance meets a given service level objective (i.e. request latency is below a limit). Then, as long as availability objective is guaranteed (i.e. abandon rate is below a limit), performance is maximized.

Thus, AA- $PM-\mathcal{C}$ aims at guaranteeing the following tradeoff between server performance and availability, with a priority to availability as follows:

- (P5) the client request abandon rate does not exceed a given maximum abandon rate α_{max} ,
- (P6) furthermore, the client request abandon rate is minimized as long as request latency does not exceed a given maximum latency L_{max} , and
- (P7) the request latency is minimized as long as abandon rate reaches its limit α_{max} .

Therefore, the AA- $PM-\mathcal{C}$ control law takes into account two limits, a request abandon rate limit and a request latency limit. This law consists in applying the $AM-\mathcal{C}$ -based control when the latency is below its limit. Then if the load is too heavy to guarantee both performance and availability constraints, AA- $PM-\mathcal{C}$ switches to the $PM-\mathcal{C}$ -based control.

7.2 PA- $AM-\mathcal{C}$ performance-aware availability-maximizing control

Similarly, PA- $AM-\mathcal{C}$ extends the previously proposed $AM-\mathcal{C}$ law with service level limits for both performance and availability, and a priority of performance over availability. Thus, PA- $AM-\mathcal{C}$ aims at guaranteeing the following tradeoff between server performance and availability:

- (P8) the client request latency does not exceed a given maximum latency L_{max} ,

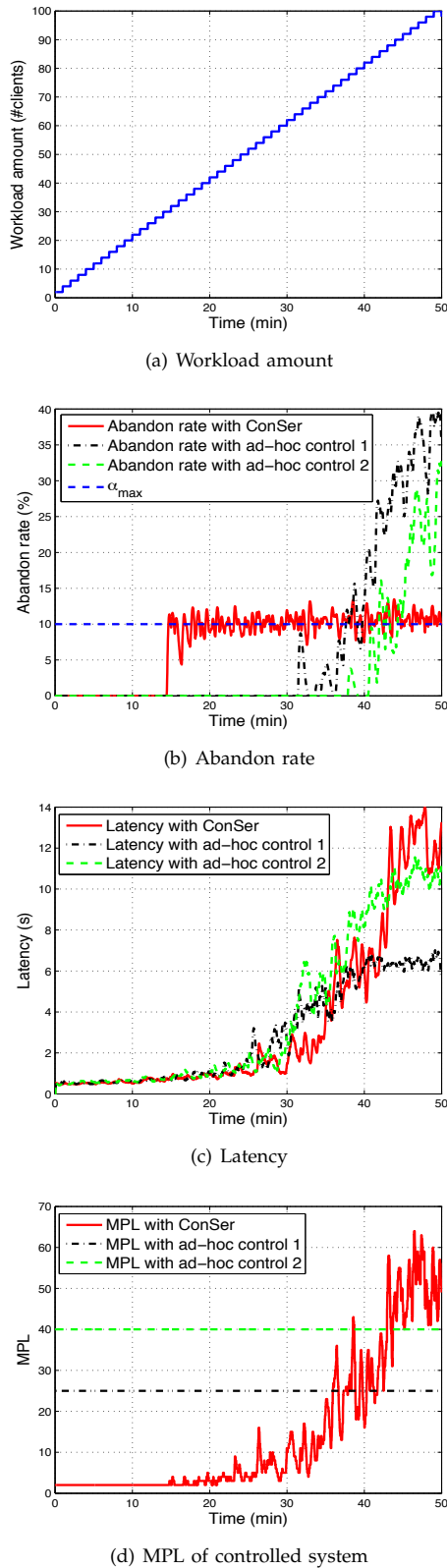


Fig. 11. System behavior upon workload amount variation – $PM\text{-}\mathcal{C}$ -based controlled system vs. non-controlled system

- (P9) moreover, the client request latency is minimized as long as request abandon rate does not exceed a given maximum abandon rate α_{\max} , and
(P10) the request abandon rate is minimized when the latency reaches its maximum authorized limit.

Thus, $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ consists in first applying the $PM\text{-}\mathcal{C}$ -based control when the abandon rate is below its limit. Then if the load is too heavy to guarantee both availability and performance constraints, $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ switches to the $AM\text{-}\mathcal{C}$ -based control.

8 $AA\text{-}PM\text{-}\mathcal{C}$ AND $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ EVALUATION

In the following, we present the results of the evaluation of the $AA\text{-}PM\text{-}\mathcal{C}$ and $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ control laws and show how they improve the behavior of CONSER with respectively $PM\text{-}\mathcal{C}$ and $AM\text{-}\mathcal{C}$ (c.f. Section 6). We used the same experimental environment as the one described in Section 4.1. Here again, the proposed controllers are implemented following a proxy-based approach where $AA\text{-}PM\text{-}\mathcal{C}$ and $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ controllers stand in front of the database server to apply online feedback control.

8.1 $AA\text{-}PM\text{-}\mathcal{C}$ evaluation

Figure 12 presents the results of the experiments conducted with $AA\text{-}PM\text{-}\mathcal{C}$ when the workload amount varies between 1 and 100 clients and the workload mix is $M2$. Here, $AA\text{-}PM\text{-}\mathcal{C}$ specifies that abandon rate should not exceed $\alpha_{\max} = 10\%$ and is reduced as long as latency remains below $L_{\max} = 8$ s.

Figures 12(b) and 12(c) show, for instance, that during the first 35 minutes of the experiment the abandon rate with $AA\text{-}PM\text{-}\mathcal{C}$ is reduced compared to $PM\text{-}\mathcal{C}$ and does not exceed 5%, as long as latency does not exceed L_{\max} . When latency increases above L_{\max} , $AA\text{-}PM\text{-}\mathcal{C}$ provides similar behavior as $PM\text{-}\mathcal{C}$.

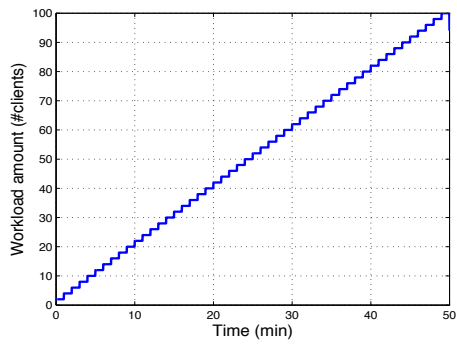
8.2 $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ evaluation

Experiments were conducted with $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ and are presented in Figure 13. They show how to improve the behavior of $AM\text{-}\mathcal{C}$. Here, $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ specifies that latency should not exceed $L_{\max} = 8$ s and is reduced as long as abandon rate remains below $\alpha_{\max} = 10\%$.

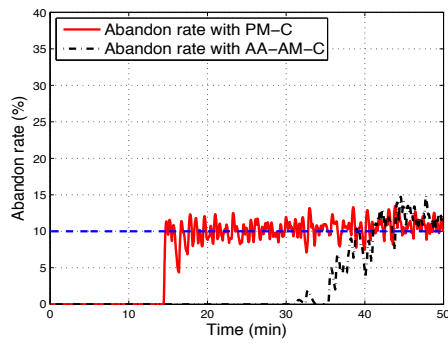
Figure 13(a) shows that the server workload amount is increasing over time while the workload mix remains at $M2$. Figures 13(b) and 13(c) show that during the first 40 minutes of the experiment the abandon rate with $PA\text{-}AM\text{-}\mathcal{C}$ remains below 10% while the latency is slightly improved compared to $AM\text{-}\mathcal{C}$. Here, latency is reduced by up to 54%.

8.3 CONSER performance overhead

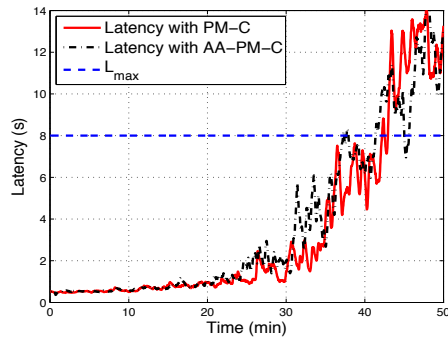
In addition to the previous evaluations, we conducted experiments to measure the performance overhead that may be induced by CONSER due to online monitoring. In the following, we compare a baseline system that does



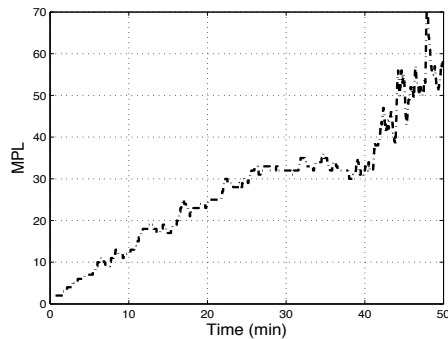
(a) Workload mix



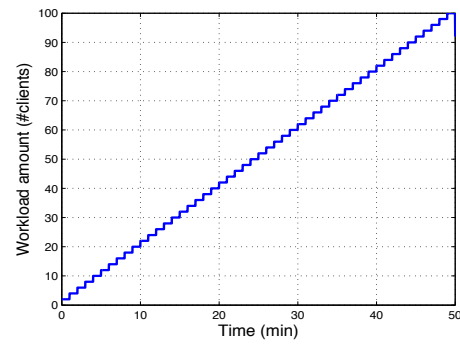
(b) Abandon rate



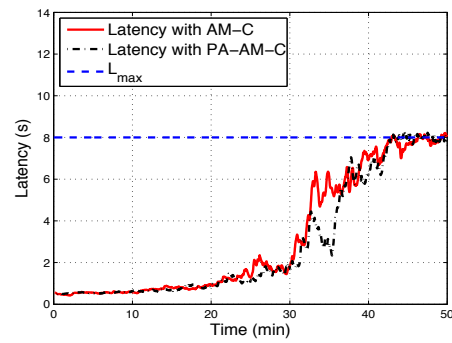
(c) Latency



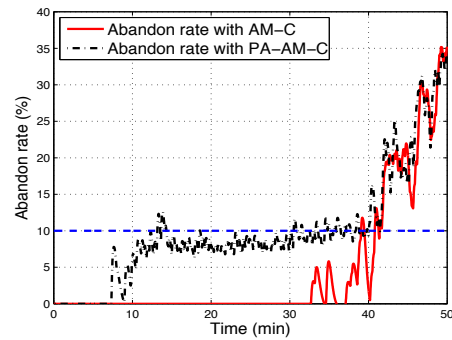
(d) MPL of controlled system with $AA-PM-\mathcal{L}$



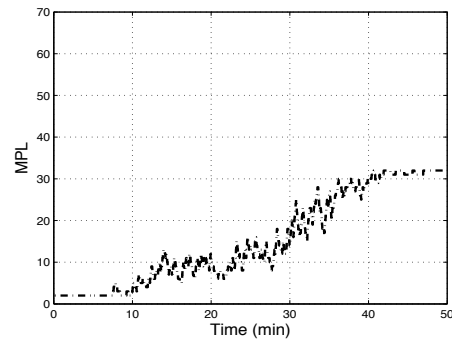
(a) Workload mix



(b) Latency



(c) Abandon rate



(d) MPL of controlled system with $PA-AM-\mathcal{L}$

Fig. 12. System behavior upon workload amount variation – $AA-PM-\mathcal{L}$ -based controlled system vs. $PM-\mathcal{L}$ -based controlled system

Fig. 13. System behavior upon workload amount variation – $PA-AM-\mathcal{L}$ -based controlled system vs. $AM-\mathcal{L}$ -based controlled system

not apply control with a CONSER-based system. Both systems run the TPC-C application with workload mix *M2* and 80 clients. Table 8.3 presents the results of this evaluation which clearly show that CONSER does not induce perceptible overhead on the application's request latency, memory usage and cpu usage.

	Baseline system	CONSER-based system
request latency	7 s	7 s
cpu usage	2%	2%
memory usage	98%	98%

TABLE 1
Performance overhead

9 RELATED WORK

This article builds upon our previous work on control of server system performance and availability, which introduced the design principles of *AM- \mathcal{C}* and *PM- \mathcal{C}* server control laws [26]. Here, we describe our experience with the CONSER server control prototype and, its extension with two additional control laws for multi-level optimization, at performance and availability levels, namely *PA-AM- \mathcal{C}* and *AA-PM- \mathcal{C}* . We validate CONSER in a wide range of application workload conditions, and explore the parameter space for control accuracy and control convergence time.

Previous work has noted that system configuration is a crucial issue for the performance and availability of server systems [27], [28]. Much related work has been done in the area of system QoS management (see [19] for a good overview), investigating techniques such as session-based admission control [29], service degradation [30], service differentiation [31] and request scheduling [32]. In the following, we briefly overview the work related to admission control, and particularly *MPL* control, for server system management. While the improvement of server performance and availability is usually achieved by system administrators using ad-hoc tuning [11], [12], new approaches tend to appear to ease the management of such systems. Menascé et. al. propose a heuristic for the management of the QoS of servers through the determination of the multi-programming level (MPL) of servers using the hill-climbing optimization technique [13]. Although performing well in a variety of applications, hill-climbing does not guarantee optimality. In [32], a similar technique is applied; however the MPL is determined offline and thus, does not adapt to changing workloads. Other solutions to MPL identification were proposed specifically to some server technologies, such as transactional servers [33]. Other approaches aim at modeling the system in order to characterize its capacity. In [34], a simulation-based study is conducted and an analytic model is proposed to adjust server MPL according to changing workloads. However, this model is restricted to performance functions with a parabola shape and thus, does not apply to criteria such as request latency and abandon rate that usually underly service level objectives (SLOs) as perceived by clients.

Other works aiming at applying control theory to server systems appeared in the last decade. A first approach consists in applying well-known linear control theory on servers modeled as SISO (single-input single-output) or MIMO (multiple-inputs multiple-outputs) black-boxes [14], [15]. Nevertheless, due to the intrinsic non-linear behavior of these systems, linear control theory does not provide much success. Other approaches are based on non-linear models derived from queuing theory [16], [17] with a theoretical proposal in [35], [36], [18]. The resulting models interestingly predict the performance of the system, but this is obtained at the expense of a hard calibration of model parameters in order to provide accurate results. [37], [38] are other examples of the application of queuing theory models, however, they are restricted to the control of performance and do not consider availability constraints.

The proposed CONSER system differs from the previous works in many respects. It applies control theory based on fluid approximation, which results in a simpler non-linear model with very few external parameters. Fluid approximation is successfully used to model and control various systems in other areas such as car flow control and population models. In the present work, we apply it to model and control server systems, and show how this allows to provide combined guarantees on service performance and service availability.

10 CONCLUSION

This paper presents the design, implementation and evaluation of CONSER, a novel system with a nonlinear continuous-time model based on the fluid flow control theory, upon which server control is derived for server configuration. Two variants of control are primarily proposed for two different QoS objectives. *AM- \mathcal{C}* is an availability-maximizing optimal server *MPL* control that achieves the highest service availability given a fixed performance constraint. *PM- \mathcal{C}* is a performance-maximizing optimal server *MPL* control that meets a desired availability target with the highest performance. Two additional laws are proposed for multi-level control. *AA-PM- \mathcal{C}* is an availability-aware performance maximizing control, and *PA-AM- \mathcal{C}* is a performance-aware availability maximizing control. Our experiments show that the proposed techniques improve performance by up to 30 % while guaranteeing availability constraints.

While this paper concentrates on QoS metrics such as client request latency and abandon rate, we believe that both the proposed modeling and control techniques may apply to other metrics, such as server throughput. Although the proposed modeling and server control laws were applied to a database server, we believe that they could be easily applied to any sever system where *MPL* control holds (e.g. web servers, application servers, etc.). We also believe that the proposed control technique could be combined to other techniques such as service differentiation and degradation. Furthermore,

we are interested in how these modeling and control techniques can be applied to distributed systems.

REFERENCES

- [1] Sendmail.org, 2007, <http://www.sendmail.org/>.
- [2] Apple Inc., "QuickTime Streaming Server," 2007, <http://www.apple.com/quicktime/streamingserver/>.
- [3] Amazon.com Inc, 2007, <http://www.amazon.com/>.
- [4] PostgreSQL, 2008, <http://www.postgresql.org/>.
- [5] M. Arlitt and C. L. Williamson, "Web server workload characterization: the search for invariants," *SIGMETRICS Perform. Eval. Rev.*, vol. 24, no. 1, pp. 126–137, 1996.
- [6] J. A. Dilley, "Web Server Workload Characterization," HP Laboratories, Tech. Rep. HPL-96-160, Dec. 1996.
- [7] M. Arlitt and T. Jin, "Workload Characterization of the 1998 World Cup Web Site," HP Laboratories Palo Alto, Tech. Rep. HPL-1999-35(R.1), Sep. 1999.
- [8] Iron Mountain, "The Business Case for Disaster Recovery Planning: Calculating the Cost of Downtime," 2001, <http://www.ironmountain.com/dataprotection/resources/CostOfDowntimeIronMtn.pdf>.
- [9] North American Systems International Inc., "The True Cost of Downtime," 2008, http://www.nasi.com/downtime_cost.php.
- [10] J. Hyman, A. A. Lazar, and G. Pacifici, "Joint Scheduling and Admission Control for ATS-based Switching Nodes," in *ACM SIGCOMM*, Baltimore, MA, Aug. 1992.
- [11] M. Brown, "Optimizing Apache Server Performance," Feb. 2008, <http://www.serverwatch.com/tutorials/article.php/3436911>.
- [12] Microsoft, "Optimizing Database Performance," [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/aa273605\(SQL.80\).aspx](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/aa273605(SQL.80).aspx).
- [13] D. A. Menascé, D. Barbara, and R. Dodge, "Preserving QoS of E-Commerce Sites Through Self-Tuning: A Performance Model Approach," in *ACM Conference on Electronic Commerce*, Tampa, FL, Oct. 2001.
- [14] S. Parekh and N. Gandhi and J. Hellerstein and D. Tilbury and T. Jayram and J. Bigus, "Using Control Theory to Achieve Service Level Objectives In Performance Management," *Real-Time Syst.*, vol. 23, no. 1-2, pp. 127–141, 2002.
- [15] Y. Diao, N. Gandhi, J. Hellerstein, S. Parekh, and D. Tilbury, "Using MIMO feedback control to enforce policies for interrelated metrics with application to the Apache Web server," *Network Operations and Management Symposium*, 2002.
- [16] D. Tipper and M. Sundareshan, "Numerical methods for modeling computer networks under nonstationary conditions," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 8, no. 9, pp. 1682–1695, Dec. 1990.
- [17] W.-P. Wang, D. Tipper, and S. Banerjee, "A simple approximation for modeling nonstationary queues," *IEEE INFOCOM*, Mar. 1996.
- [18] A. Robertsson, B. Wittenmark, M. Kihl, and M. Andersson, "Admission control for web server systems - design and experimental evaluation," *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 2004.
- [19] J. Guitart, J. Torres, and E. Ayguadé, "A survey on performance management for internet applications," *Concurr. Comput. : Pract. Exper.*, vol. 22, no. 1, pp. 68–106, 2010.
- [20] J. Lee and R. Ben-Natan, *Integrating Service Level Agreements*. Wiley, 2002.
- [21] T. Abdelzaher, Y. Lu, R. Zhang, and D. Henriksson, "Practical application of control theory to Web services," *American Control Conference*, Jun. 2004.
- [22] J. D. C. Little, "A proof for the queueing formula $L = \lambda W$," *Operation Research*, vol. 9, pp. 383–387, 1961.
- [23] TPC-C, "Tpc transaction processing performance council," 2008, <http://www.tpc.org/tpcc/>.
- [24] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [25] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [26] L. Malrait, S. Bouchenak, and N. Marchand, "Fluid Modeling and Control for Server System Performance and Availability," in *39th Annual IEEE International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN 2009)*, Estoril, Lisbon, Portugal, Jun. 2009.
- [27] C. Loosley, F. Douglas, and A. Mimos, *High-Performance Client/Server*. John Wiley & Sons, Nov. 1997.
- [28] E. Marcus and H. Stern, *Blueprints for High Availability*. Wiley, Sep. 2003.
- [29] L. Cherkasova and P. Phaal, "Session-based admission control: A mechanism for peak load management of commercial web sites," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 51, no. 6, pp. 669–685, 2002.
- [30] T. F. Abdelzaher and N. Bhatti, "Web content adaptation to improve server overload behavior," *Comput. Netw.*, vol. 31, no. 11-16, pp. 1563–1577, 1999.
- [31] T. F. Abdelzaher, K. G. Shin, and N. Bhatti, "Performance guarantees for web server end-systems: A control-theoretical approach," *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, vol. 13, no. 1, pp. 80–96, 2002.
- [32] S. Elnikety, E. Nahum, J. Tracey, and W. Zwaenepoel, "A Method for Transparent Admission Control and Request Scheduling in E-Commerce Web Sites," in *13th international conference on World Wide Web*, New York, NY, May 2004.
- [33] B. Schroeder, M. Harchol-Balter, A. Iyengar, E. Nahum, and A. Wierman, "How to determine a good multi-programming level for external scheduling," in *22nd International Conference on Data Engineering*, Atlanta, GA, Apr. 2006.
- [34] H.-U. Heiss and R. Wagner, "Adaptive Load Control in Transaction Processing Systems," in *17th International Conference on Very Large Data Bases*, San Francisco, CA, 1991.
- [35] M. Kihl, A. Robertsson, and B. Wittenmark, "Analysis of admission control mechanisms using non-linear control theory," *8th IEEE International Symposium on Computers and Communication*, pp. 1306–1311 vol.2, Jul. 2003.
- [36] M. Kihl, "Performance Modelling and Control of Server Systems Using Non-Linear Control Theory," in *18th International Teletraffic Congress*, Berlin, Germany, Sep. 2003.
- [37] A. Kamra, "Yaksha: A self-tuning controller for managing the performance of 3-tiered web sites," in *In International Workshop on Quality of Service (IWQoS)*, 2004, pp. 47–56.
- [38] X. Liu, J. Heo, and L. Sha, "Adaptive control of multi-tiered web application using queueing predictor," in *in: 10th IEEE/IFIP Network Operations and Management Symposium (NOMS 2006)*, 2006.



Luc Malrait is a PhD candidate in Control at Grenoble Institute of Technology and conducts his research at INRIA and Gipsa-Lab. His research focuses on applying control theory to server systems. He received his MS in control engineering from Grenoble Institute of Technology in 2007.



computer science from Grenoble University in 1998.

Sara Bouchenak is Associate Professor in computer science at Grenoble University since 2004. She conducts research at INRIA and LIG Laboratory, focusing on highly-available, dependable and manageable distributed systems. Prior to that, she worked at EPFL, Switzerland, in 2003. Sara Bouchenak is an IEEE member, an ACM EuroSys member, and an officer of the French chapter of the ACM-SIGOPS. She received her PhD in computer science from the Grenoble Institute of Technology in 2001, and her MS in



Nicolas Marchand is Researcher at CNRS, France. His research interests focus on the control of server systems and systems on chips with asynchronous interconnections. He received his PhD in control from the Grenoble Institute of Technology in 1999.

A general formula for event-based stabilization of nonlinear systems

Nicolas Marchand, Sylvain Durand and Jose Fermi Guerrero Castellanos

Abstract—In this paper, a universal formula is proposed for event-based stabilization of general nonlinear systems affine in the control. The feedback is derived from the original one proposed by E. Sontag in the case of continuous time stabilization. Under the assumption of the existence of a smooth Control Lyapunov Function, it is proved that an event-based static feedback, smooth everywhere except at the origin, can be designed so to ensure the global asymptotic stability of the origin. Moreover, the inter-sampling time can be proved not to contract at the origin. More precisely, it is proved that for any initial condition within any given closed set the minimal inter-sampling time is proved to be below bounded avoiding the infinitely fast sampling phenomena. Moreover, under homogeneity assumptions the control can be proved to be smooth anywhere and the inter-sampling time bounded below for any initial condition. In that case, we retrieve a control approach previously published for continuous time stabilization of homogeneous systems.

I. INTRODUCTION

The classical discrete time framework of controlled systems consists in sampling the system periodically with a constant time period T and in computing/updating the control every $t_k = kT$. This field, denoted as the time-triggered or time-based case, has been widely investigated for linear control systems (see [1] and the references therein), even in the case of delays, sampling jitter and measurement loss [2]. In the case of nonlinear control systems, one way to address a discrete-time feedback is to implement a continuous time control algorithm with a sufficiently small sampling period; this procedure is denoted as “emulation”. Nevertheless, this approach can be constrained by hardware and reducing the sampling period to a level that guarantees acceptable closed-loop performance may be impossible [3]. Other way to tackle this problem is the application of sampled-data control algorithms based on approximate discrete-time models [4] which is not a trivial task. Another proposed approach consists in modifying a continuous time stabilizing control using a general formula to obtain a redesigned control suitable for sampled-data implementation [5]. Beside these works, sampling was also used for control theory purpose in order to establish an equivalence between controllability and stabilizability for nonlinear systems [6], [7]. However, in these approaches, the sampling instants are not state dependent contrary to the case addressed in this paper.

To overcome the drawbacks of emulation, redesigned control and the complexity of the underlying nonlinear sampled-data models, event-based control has been recently proposed. In this control strategy, the control task is executed after the occurrence of an external event or, as focused in this paper, after the occurrence of an internal event generated by some event function. In this scheme, the *inter-sampling time* denotes the time interval between two consecutive events. Furthermore, the sampling instants are not necessarily equidistant in time. Let us first consider general nonlinear systems of the form:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

N. Marchand is with GIPSA-lab laboratory, Control Systems Dept., SySCo team, CNRS-Univ. of Grenoble, ENSE3 BP 46, 38402 St Martin d’Hères Cedex, France, nicolas.marchand@gipsa-lab.fr

S. Durand is with UMI LAFMIA, CNRS - CINVESTAV, Mexico D.F., Mexico, sylvain@durandchamontin.fr

J.F. Guerrero Castellanos is with Autonomous University of Puebla (BUAP), Faculty of Electronics, Puebla, Mexico, fguerrero@ece.buap.mx

where $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$, and f a Lipschitz function vanishing at the origin. For sake of simplicity, we only consider in this paper null stabilization with initial time instant $t_0 = 0$. *Event-based feedback* usually means a set of two functions:

- an *event function* $e : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ that indicates if one needs ($e \leq 0$) or not ($e > 0$) to update the control value. Event function e takes the current state x as input and a memory m of x last time e became negative. There is a priori no constraint on the regularity of e . Memoryless (that is $e(x)$), time-varying ($e(x, m, t)$) or simply time index depending ($e(x, m, k)$) is not the purpose of the contribution.
- a *feedback function* k . The terms static (depending upon x) and dynamic (depending upon x and t or k) will then be used as in the classical frame.

The advantages of an event-based controller over a time-based one are mainly influenced by the way in which the event are generated. Typical event mechanisms are functions of the state variation (or the output) of the system, like in [8], [9], [10], [11], [12]. Although the event-triggered control is well-motivated and allows to relax the periodicity of computations e.g. to reduce the processor usage in embedded devices or to reduce the network bandwidth, only few works report theoretical results about the stability, convergence and performance. In [13] for instance, it is proved that such an approach reduces the number of sampling instants for the same final performance. Recent works deal with the problem of scheduling the control task for continuous-time linear systems [13], [14], [15], [16] and discrete-time linear system [17] where stability and some robustness properties such as ISS and \mathcal{L}_∞ -performance are exploited. Furthermore, in [17] a Model Predictive Control scheme is used and the event-triggered policies relax the computationally demanding algorithms. Some of the above contributions do not need memory of the last sampling.

An alternative approach consists in taking e related to the variation of a Lyapunov function - and consequently to the state too - between the current state and its value at the last sampling, like in [18], [19], or in taking e related to the time derivative of the Lyapunov function. An important contribution for convergence and stability in the nonlinear case is studied in [20]. The main contribution is the existence of a minimal inter-sampling time for any bounded initial conditions. The update policy is based on the existence of a Lipschitz stabilizing control law and an ISS-CLF, that is a CLF such that $\frac{\partial V}{\partial x} f(x, k(x + \varepsilon)) \leq -\alpha(\|x\|) + \beta(\|\varepsilon\|)$ where α and β are two functions of class \mathcal{K}_∞ and $\varepsilon = m - x$ denotes the measurement error. The update is then computed as soon as $\beta(\|\varepsilon\|) \leq \sigma\alpha(\|x\|)$ ensuring that way the strict decrease of the CLF with $0 < \sigma < 1$. The result is given for general non linear systems and it is also extended to homogeneous systems (quite in the spirit of the second part of this paper) and polynomial systems [21], [22]. However, in these works is assumed that the control is Lipschitz at the origin. Unfortunately it is known that general formulas as treated in this paper can not ensure this strong property. Moreover, the event policy is based on the knowledge of an upper bound of the CLF with respect to state and measurement error, which is not the case of our research.

In the present paper a universal formula for event-based stabilization of general nonlinear systems affine in the control is proposed. Here, the event function e is related to the time derivative of a Lyapunov Control Function. With this proposal, Zeno phenomena like accumulation points are avoided since it is possible to ensure that there is a minimal sampling time between two consecutive events. As in the original work, if the Control Lyapunov Function fulfils the small control property, then the control is continuous at the origin. Moreover, with additional homogeneity assumptions, the

control can be proved to be smooth everywhere and the minimal inter-sampling time bounded below for all initial conditions. Simulations are performed in order to show the closed loop trajectories, the events and the control signal with the proposed technique.

The paper is organized as follows. The introduction ends with some notations. The section II is devoted to illustrate different examples of possible phenomena present in the event-based control paradigm. This will introduce new notions and definitions given in section III. Section IV is dedicated to the main theorem that extends Sontag's universal formula for feedback stabilization to event-based stabilization. A particular treatment is given to the case of homogeneous systems. All the proofs are given in section V. Finally, Section VI is dedicated to examples.

Notations: In the following, $\mathcal{B}(d, x)$ will stand for the ball of radius d centred at x and $\mathcal{B}(d)$ for the ball of radius d centred at the origin. $x(t; x_0, t_0, u)$ will denote the solution of a differential system starting in x_0 at t_0 with control u . For sake of simplicity, u will be omitted when trivial and $x(t; x_0)$ will stand for $x(t; x_0, 0)$. $\|\cdot\|$ will stand for the classical L_2 euclidian norm. $\|\cdot\|_p$ will stand for the L_p -norm. For diagonal matrices, the norm will denote the norm of its diagonal taken as a vector.

II. WHAT CAN HAPPEN WITH EVENT-BASED CONTROL ?

The solution of (1) with event-based feedback (e, k) starting in $x_0 \in \mathcal{X}$ at $t = 0$ is then defined as the solution (when it exists) of the differential system:

$$\dot{x} = f(x, k(m)) \quad (2)$$

$$\begin{cases} m = x & \text{if } e(x, m) \leq 0, x \neq 0 \\ \dot{m} = 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{with: } x(0) = x_0 \text{ and } m(0) = x(0) \quad (4)$$

If f is assumed to be Lipschitz, a unique solution in the Caratheodory sense always exists without any smoothness assumption on k similarly to [6] with punctual events. However, this solution may not exist for all $t \geq 0$ as shown by example 2) of the present section. Let $t \rightarrow x(t, x_0)$ denote this solution. Given an event function e , and a feedback k defined as above, for any initial condition $x(t=0) = x_0$ it fully defines a *sampling set* $T_{e,k,x_0} := \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ as the set of time instant $t_0 = 0, t_1, \dots$ (called *sampling instants*) at which e is negative. The event-based closed-loop solution is therefore defined at least for all positive t in $[0, \sup(T_{e,k,x_0})]$. This interval is closed if $\sup(T_{e,k,x_0}) \in T_{e,k,x_0}$.

To illustrate different phenomena that can arise with event-based feedback systems, we consider the simple linear integrator $\dot{x} = u$. All event functions considered in these examples are assumed to be memoryless that is to be just functions of \mathcal{X} . Between two sampling instants t_i and t_{i+1} , u remains constant so that: $x_{i+1} = x_i + (t_{i+1} - t_i)u$, x_i denoting the value of the state when the i^{th} event occurs. The following examples illustrate what may happen.

- 1) Take $k(x) = -x$, $e(x) = 0$ when $|x| = \exp(-\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ and initial condition $x_0 = 0$. Then $T_{e,k,x_0} := \{0\}$. Now, taking $x_0 = 1$, the solution is $x_i = \exp(-i)$, the inter-sampling time is constant (equal to $1 - \exp(-1)$) and $T_{e,k,x_0} := \{j \cdot (1 - \exp(-1)), j \in \mathbb{N}\}$. For both initial conditions trajectories are well-defined for all $t \in [0, +\infty[$.
- 2) Take $k(x) = -x^{\frac{1}{2}}$, $e(x) = 0$ when $|x| = \frac{1}{\kappa}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ and initial condition $x_0 = 1$. In that case, the inter-sampling interval $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{i^{\frac{1}{2}(i+1)}}$. And when i tends to infinity, the sampling interval tends to zero and t_i converges to some $\bar{t} \approx 1.86$. The trajectory is hence well-defined *only* for all $t \in [0, \bar{t}]$.

- 3) Take $k(x) = -x$, $e(x) = 0$ when $|x| = \frac{1}{\kappa}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ and initial condition $x_0 = 1$. In that case, one can calculate that $t_i = i - \sum_{j=1}^i \frac{j-1}{j}$ and $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{i}$. Hence the inter-sampling time tends to zero although the trajectory is well defined on $[0, \infty[$.
- 4) Take $k(x) = -x^3$, $e(x) = 0$ when $|x| = \exp(-\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ and initial condition $x_0 = 1$. Then, the inter-sampling time $t_{i+1} - t_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{-3x_i^2} = \exp(2i) [1 - \exp(-1)]$ and when i tends to infinity, $t_{i+1} - t_i$ also tends to infinity. The trajectory is well-defined for all $t \in [0, +\infty[$ as in case 1.

Consider now the open-loop unstable system $\dot{x} = (x + u)^3$. The control u being constant between each sampling instant, the solution is the one of a Bernoulli differential system such as:

$$x_{i+1} = \frac{x_i + u}{\sqrt{1 - 2(t_{i+1} - t_i)(x_i + u)^2}} - u$$

Then, taking

- 5) $k(x) = -2x$, $e(x) = 0$ when $|x| = \exp(-\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ and initial condition $x_0 = 1$. Then the inter-sampling duration is:

$$t_{i+1} - t_i = \frac{\exp(2i)}{2} \left[1 - \frac{1}{(2 - \exp(-1))^2} \right]$$

and when i tends to infinity, $t_{i+1} - t_i$ also tends to infinity. However, the origin of the closed loop system can be proved to be asymptotically stable and the trajectories well-defined on $[0, +\infty[$ for any initial condition.

In cases 1 to 5, the system can trivially be proved to be globally null-asymptotically stable. Case 1 shows that the sampling set is initial condition dependent. Cases 1 to 4 show that for the same system and initial condition, the sampling can be periodic, contractive or expansive (with a finite or infinite limit) depending upon the event function or the feedback. Case 5 shows the inconsistency of Shannon's sampling theorem in the event-based paradigm since the inter-sampling duration can infinitely increase even with an open-loop unstable system.

III. PRELIMINARY DEFINITIONS FOR EVENT-BASED SYSTEMS

Usually, the set of event instants is of null measure, in the sense that the control is recomputed only at distinct t . However, taking $e(x) = 0$ for all $x \in \mathcal{X}$ would mean that one recomputes the control at each x and therefore that one applies a classical continuous-time feedback. On the sets of non null measure where $e(x) = 0$, the solution is understood in the classical sense (with all possible solution existence problems if the field is discontinuous). Elsewhere, the solution can be intended in the Caratheodory sense. To go further on that, we define:

Definition 1 (Well-defined event-based control): An event-based control (k, e) will be said **well-defined** if and only if for any initial condition x_0 at $t = 0$, the solution $t \rightarrow x(t; x_0)$ exists for all $t \geq 0$.

Proposition 1 (Minimal Sampling Interval - MSI): An event-based control (k, e) will be said to satisfy the **Minimal Inter-Sampling Interval property (MSI)** iff for any initial condition x_0 at $t = 0$, there exists a non zero minimal sampling interval $\mathcal{I}(x_0) := \inf_{i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathcal{T}(x_0)} t_{i+1} - t_i > 0$.

The aim of this property is to avoid zero inter-sampling time leading to Zeno phenomena at finite time as in example 2) or at infinity as in example 3) as explained in the last section. In case the MSI property is satisfied, the control is piecewise constant between each time sample and x_i , $i \in \mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ with $x_0 := x(t=0)$ will denote the series of successive state values at which e is negative for a given initial condition x_0 . To these series correspond naturally the time

series t_i , $i \in \mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ with $t_0 := 0$. It trivially follows (proof is omitted):

Theorem 1: A MSI event-based control is well-defined.

This minimal sampling period is useful for implementation purpose but also when the feedback k is discontinuous for robustness purpose [23]. However, it would be more suitable to have such a bound less depending upon the initial condition:

Proposition 2 (Semi-uniformly MSI event-based control): An event-based control (k, e) will be said **semi-uniformly MSI** iff for any $\delta > 0$, $\underline{\tau}(\delta) := \inf_{i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathcal{T}(x_0), x_0 \in \mathcal{B}(\delta)} t_{i+1} - t_i > 0$

Proposition 3 (Uniformly MSI event-based control): An event-based control (k, e) will be said **uniformly MSI** iff $\underline{\tau} := \inf_{i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathcal{T}(x_0), x_0 \in \mathcal{X}} t_{i+1} - t_i > 0$.

Property 3 can be specified adding the term ‘‘global’’ that was omitted above for sake of simplicity. Now that the above notions for event-based controlled systems are appropriately defined, notions like stability, asymptotic stability and stabilizability naturally follow since they rely on the resulting trajectory. The question that arises then is: does a universal formula for uniformly discrete event-based feedback stabilization exist similarly to the continuous time case? This is the purpose of the next section.

IV. A UNIVERSAL FORMULA FOR EVENT-BASED STABILIZATION

In the sequel, the analysis is restricted to systems affine in the control:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_i g_i(x)u_i \quad (5)$$

where f and g are smooth functions with f vanishing at the origin. We assume that a Control Lyapunov Function (CLF) exists for system (5), that is a smooth and positive definite function $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ so that for each $x \neq 0$ there is some $u \in \mathcal{U}$ such that:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)u < 0 \quad (6)$$

In addition, one may require that V fulfils the *small control property* [24], that is that for each $\varepsilon > 0$ there is some $\mu > 0$ such that for any x in the ball $\mathcal{B}(\mu) \setminus \{0\}$, there is some u with $\|u\| \leq \varepsilon$ such that inequality (6) holds. Then, it is known that it is possible to design a feedback control that asymptotically stabilizes the system [24]:

Theorem 2 (Sontag’s universal formula): Assume that system (5) admits V as CLF. For any real analytic function $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $q(0) = 0$ and $bq(b) > 0$ for $b \neq 0$, let $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $\phi(a, b) := \frac{a + \sqrt{a^2 + bq(b)}}{b}$ if $b \neq 0$ and zero when $b = 0$. Let the feedback $k : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, smooth on $\mathcal{X} \setminus \{0\}$ be defined by $k_i(x) := -b_i(x)\phi(a(x), \beta(x))$, $i \in \{1, \dots, p\}$ with $a(x) := \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$, $b(x) := \frac{\partial V}{\partial x} g(x)$, $\beta(x) := \|b(x)\|^2$. Then k is such that for all non zero x , $\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)k(x) < 0$. Moreover, if the CLF satisfies the so called *small control property*, then taking $q(b) := b$, the control is continuous at the origin.

The main purpose of this paper is to establish that a universal formula also exists in the event-based context up to a modification of the original formula proposed by Sontag:

Theorem 3: If there exists a CLF for system (5), then the event-based feedback (e, k) defined below is semi-uniformly MSI, smooth on $\mathcal{X} \setminus \{0\}$, and such that:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)k(m) < 0, \quad x \in \mathcal{X} \setminus \{0\} \quad (7)$$

where m is defined by (3) and:

$$\begin{aligned} k_i(x) &:= -b_i(x)\delta_i(x)\gamma(x) \\ e(x, m) &:= -a(x) - b(x)k(m) \\ &\quad - \sigma \sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T} \end{aligned} \quad (8)$$

where

- $a(x)$ and $b(x)$ are as in Theorem 2,
- $x \rightarrow \Delta(x) := \text{diag}(\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_p(x))$ is a smooth function of $\mathcal{X} \setminus \{0\}$ to $\mathbb{R}^{p \times p}$, positive definite on:

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{X} \mid \|b(x)\| \neq 0\}$$

- $x \rightarrow \theta(x)$ is a smooth positive function of \mathcal{X} to \mathbb{R} , such that $\theta(x) \|\Delta(x)\|$ vanishes at the origin, and ensuring on $\mathcal{S} \setminus \{0\}$ the inequality $a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T > 0$
- σ is a control parameter in $[0, 1[$,
- $\gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by:

$$\gamma(x) := \begin{cases} \frac{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T}}{b(x)\Delta(x)b(x)^T} & \text{if } x \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathcal{S} \end{cases} \quad (10)$$

As in Theorem 2, if the CLF satisfies the *small control property*, then the control is continuous at the origin. Moreover, if there exists some smooth function $\omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that on $\mathcal{S} \setminus \{0\}$,

$$\omega(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T - a(x) > 0 \quad (11)$$

then the control is smooth on \mathcal{X} as soon as $\theta(x) \|\Delta(x)\|$ vanishes at the origin with:

$$\theta(x) := \omega(x)^2 b(x)\Delta(x)b(x)^T - 2a(x)\omega(x) \quad (12)$$

The proof of Theorem 3 is given in section V. The idea behind the construction of feedback (8) is the following. In the event function, the term $a(x) + b(x)k(m)$ is the time derivative of V whereas $-\sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T}$ is the value of \dot{V} if $k(x)$ is applied instead of $k(m)$. Therefore, right after an event, $e(x, m)$ necessarily takes a strictly positive value, more precisely, it equals $(1 - \sigma)\sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T}$ and remains positive as long as $\dot{V} \leq -\sigma\sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T}$. Events will be more frequent with smaller σ . $\sigma = 0$ means updating the control when $\dot{V} = 0$. The second crucial tuning parameter of the control law is the choice of the function Δ that directly impacts the performance of the control as well as the frequency of events.

We next focus on homogeneous systems that gave rise to an important literature (see for instance [25], [26] and the references therein) and more recently for event-based approaches (mainly in [22], [18], [20]). We shortly recall few definitions:

Definition 2: Let $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, and a set of coordinates $x = (x_1, \dots, x_n)$.

- The family of dilations $(\delta_\lambda^r)_{\lambda > 0}$ is defined by:

$$\delta_\lambda^r(x) := (\lambda^{r_1} x_1, \dots, \lambda^{r_n} x_n), \quad \forall \lambda > 0$$

- $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ is a δ^r -homogeneous function of degree d if:

$$\forall (x, \lambda) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}_{> 0}, \quad V(\delta_\lambda^r(x)) = \lambda^d V(x)$$

- $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ is a δ^r -homogeneous function of degree d if:

$$\forall (x, \lambda) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}_{> 0}, \quad h(\delta_\lambda^r(x)) = \lambda^d \delta_\lambda^r(h(x))$$

- A δ^r -homogeneous norm $x \rightarrow \|x\|_{(r, \pi)}$ is a map defined by

$$\|x\|_{(r, \pi)} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{\pi}{r_i}} \right)^{\frac{1}{\pi}}$$

To these classical definitions, and for the sake of brevity, we add:

Definition 3: Let an event-based controlled δ^r -homogeneous system of degree (d_1, d_2) denote a system of form (1) with an event-based feedback (e, k) such that $f(\delta_\lambda^r(x), k(\delta_\lambda^r(m))) = \lambda^{d_1} f(x, k(m))$ and $e(\delta_\lambda^r(x), \delta_\lambda^r(m)) = \lambda^{d_2} e(x, m)$.

Proposition 4: Consider an event-based controlled δ^r -homogeneous system of degree (d_1, d_2) , then the solution exists, is unique and such that $x(t; \delta_\lambda^r(x_0)) = \delta_\lambda^r(x(\lambda^{d_1} t; x_0))$.

The proof trivially follows from the δ^r -homogeneity of degree d_1 of $f(x, k(x))$ and using the relation $e(\delta_\lambda^r(x), \delta_\lambda^r(m)) = \lambda^{d_2} e(x, m)$.

For homogeneous systems, Theorem 3 becomes the following. It is actually the event-based formulation of the smooth homogeneous control proposed in [27] that appears as a particular case of Theorem 3 with an appropriate choice of functions $\Delta(x)$ and $\omega(x)$.

Theorem 4: Assume that f , each g_i and the CLF V are δ^r -homogeneous respectively of degree d_f , d_{g_i} , and d_V , with $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $d_{g_i} < d_f$. Then, event-based feedback (8-9) with $\theta(x)$ as in (12), $\omega(x) = \nu \|x\|_{(r, \pi)}^{d_f - d_V}$, $\nu > 0$ and $\delta_i(x) = \|x\|_{(r, \pi)}^{-2d_{g_i}}$, is given by:

$$k_i(x) := -\nu b_i(x) \|x\|_{(r, \pi)}^{d_f - 2d_{g_i} - d_V} \quad (13)$$

For ν sufficiently large, this event-based feedback is such that:

- 1) the event-based controlled system is δ^r -homogeneous of degree $(d_f, d_V + d_f)$
- 2) the event-based control is smooth and uniformly MSI
- 3) the CLF is strictly decreasing for all $x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$

V. PROOFS

A. Proof of Theorem 3

We begin the proof establishing γ is smooth on $\mathcal{X} \setminus \{0\}$. For this, consider the algebraic equation:

$$F(x, \zeta) := b(x)\Delta(x)b(x)^T \zeta^2 - 2a(x)\zeta - \theta(x) = 0 \quad (14)$$

Note first that $\zeta = \gamma(x)$ is a solution of (14) for all $x \in \mathcal{X}$. It is easy to prove that the partial derivative of F with respect to ζ is always strictly positive on $\mathcal{X} \setminus \{0\}$:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} := 2b(x)\Delta(x)b(x)^T \zeta - 2a(x)$$

Indeed, when $\|b(x)\| = 0$, equation (6) gives $\frac{\partial F}{\partial \zeta} = -2a(x) > 0$ and when $\|b(x)\| \neq 0$, equation (10) gives $\frac{\partial F}{\partial \zeta} = 2\sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T} > 0$. Therefore $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ never vanishes at each point of the form $\{(x, \gamma(x)) | x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}\}$. Furthermore, F is smooth w.r.t. x and ζ since so are a , b , θ and Δ . Hence, using the implicit function theorem, γ is smooth on $\mathcal{X} \setminus \{0\}$.

The decrease of the CLF is easy to prove. For this, let us consider the time interval $[t_i, t_{i+1}]$, that is the interval separating two successive events. Recall that x_i denotes the value of the state when the i^{th} event occurs and t_i the corresponding time instant. At time t_i , when the event occurs, one has after the update of the control:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x_i) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x_i)f(x_i) + \frac{\partial V}{\partial x}(x_i)g(x_i)k(x_i) \\ &= -\sqrt{a(x_i)^2 + \theta(x_i)b(x_i)\Delta(x_i)b(x_i)^T} < 0 \end{aligned}$$

With the updated control, the event function becomes strictly positive:

$$e(x_i, x_i) = (1 - \sigma)\sqrt{a(x_i)^2 + \theta(x_i)b(x_i)\Delta(x_i)b(x_i)^T} > 0$$

Hence, before the next event that occurs when $e(x, x_i) = 0$, the event-function necessarily remains positive by continuity. Therefore, on the interval $[t_i, t_{i+1}]$, one has:

$$\begin{aligned} e(x, x_i) &= -a(x) - b(x)k(x_i) - \sigma\sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T} \\ &= -\frac{dV}{dt}(x) - \sigma\sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T} \geq 0 \end{aligned}$$

which ensures the decrease of the CLF on the interval. Moreover, t_{i+1} is necessarily bounded since, if not, V should converge to a constant value where $\frac{dV}{dt} = 0$, which is impossible thanks to the inequality above. The event function precisely prevents this phenomena detecting $\frac{dV}{dt}$ is *close to vanish* and updates the control if it happens.

To prove that the event-based control is MSI, we have to prove that for any initial condition in a priori given set, the sampling intervals are bounded below. First of all, notice that events occur only when e becomes negative (with $x \neq 0$). Therefore, using the fact that when $b(x) = 0$, $a(x) < 0$, it follows from equation (9), on $\{x \in \mathcal{X} | \|b(x)\| = 0\} \setminus \{0\}$:

$$e(x, m) = -a(x) - \sigma|a(x)| = (1 - \sigma)|a(x)| > 0$$

It follows that there is no event on the set $\{x \in \mathcal{X} | \|b(x)\| = 0\} \cup \{0\}$. We hence restrict the study to the set $\{x \in \mathcal{X} | \|b(x)\| \neq 0\} \setminus \{0\}$ where θ and the δ_i 's are strictly positive by assumption. Let us rewrite the time derivative of the CLF along the trajectories:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x) &= a(x) + b(x)k(m) \\ &= -\sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T} \\ &\quad + b(x)(k(m) - k(x)) \end{aligned} \quad (15)$$

Let us define for $m \in \mathcal{S}$, the level $\vartheta_m := V(m)$ and the set $\mathcal{V}_{\vartheta_m} := \{x \in \mathcal{X} | V(x) \leq \vartheta_m\}$. Then in equation (15), it follows from the choice of the event function that x belongs to $\mathcal{V}_{\vartheta_x} \subset \mathcal{V}_{\vartheta_m}$. Note that if m belongs to \mathcal{S} , this is not necessarily the case for x that can escape from this set. First see that for $t = t_i$ (recall the t_i 's denote the time instant when an event occurs), $x = m =: x_i$ and therefore, since i) $\theta(x)$ is such that $a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T > 0$ for all nonzero x in \mathcal{S} , and ii) $a(x)$ is necessarily nonzero on the frontier of \mathcal{S} (except possibly at the origin):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x_i) &= -\sqrt{a(m)^2 + \theta(m)b(m)\Delta(m)b(m)^T} \\ &\leq -\underbrace{\inf_{\substack{m \in \mathcal{S} \\ \text{s.t. } V(m) = \vartheta_m}} \sqrt{a(m)^2 + \theta(m)b(m)\Delta(m)b(m)^T}}_{=: -\chi(\vartheta_m)} < 0 \end{aligned}$$

Considering now the second time derivative of the CLF:

$$\ddot{V}(x) = \left(\frac{\partial a}{\partial x}(x) + k(m)^T \frac{\partial b^T}{\partial x}(x) \right) (f(x) + g(x)k(m))$$

By continuity of all the involved functions, both terms can be bounded for all $x \in \mathcal{V}_{\vartheta_m}$ by the following upper bounds $\varrho_1(\vartheta_m)$ and $\varrho_2(\vartheta_m)$:

$$\begin{aligned} \varrho_1(\vartheta_m) &:= \sup_{\substack{m \in \mathcal{S} \\ \text{s.t. } V(m) = \vartheta_m \\ x \in \mathcal{V}_{\vartheta_m}}} \left\| \frac{\partial a}{\partial x}(x) + k(m)^T \frac{\partial b^T}{\partial x}(x) \right\| \\ \varrho_2(\vartheta_m) &:= \sup_{\substack{m \in \mathcal{S} \\ \text{s.t. } V(m) = \vartheta_m \\ x \in \mathcal{V}_{\vartheta_m}}} \|f(x) + g(x)k(m)\| \end{aligned}$$

Therefore, \dot{V} is strictly negative at any event instant t_i and can not vanish until a certain time $\tau(\vartheta_m)$ is elapsed. This minimal sampling is only depending on the level ϑ_m . A bound on $\tau(\vartheta_m)$ is given by the inequality:

$$\frac{dV}{dt}(x) \leq \frac{dV}{dt}(x_i) + \rho_1 \rho_2 (t - t_i) \quad x \in \mathcal{V}_{\vartheta_m}$$

that give:

$$\tau(\vartheta_m) \geq \frac{\chi(\vartheta_m)}{\varrho_1(\vartheta_m)\varrho_2(\vartheta_m)} > 0 \quad (16)$$

which ends the proof, the event-based feedback (8-9) is semi-uniformly MSI.

To prove the continuity of k at the origin, we only need to consider the points in \mathcal{S} since we already have $k(x) = 0$ if $\|b(x)\| = 0$. We have:

$$\begin{aligned} \|k(x)\| &\leq \frac{|a(x)| + \sqrt{a(x)^2 + \theta(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T}}{b(x)\Delta(x)b(x)^T} \|\Delta(x)b(x)^T\| \\ &\leq \left[\frac{2|a(x)|}{b(x)\Delta(x)b(x)^T} + \frac{\sqrt{\theta(x)}}{\sqrt{b(x)\Delta(x)b(x)^T}} \right] \|\Delta(x)b(x)^T\| \\ &\leq \frac{2|a(x)|}{b(x)\Delta(x)b(x)^T} \|\Delta(x)b(x)^T\| + \sqrt{\theta(x)} \|\Delta(x)\| \end{aligned}$$

With the small control property, for any $\varepsilon > 0$, there is $\mu > 0$ such that for any $x \in \mathcal{B}(\mu) \setminus \{0\}$, there exists some u with $\|u\| \leq \varepsilon$ such that $a(x) + b(x)u < 0$ and therefore $|a(x)| < \|b(x)\| \varepsilon$. It follows:

$$\|k(x)\| \leq \frac{2\varepsilon \|b(x)\| \|\Delta(x)b(x)^T\|}{b(x)\Delta(x)b(x)^T} + \sqrt{\theta(x)} \|\Delta(x)\|$$

Since the function $(v_1, v_2) \rightarrow \frac{\|v_1\| \|v_2\|}{v_1^T v_2}$ is continuous w.r.t its two variables at the origin where it equals 1, since θ and Δ are also continuous, since $\theta(x) \|\Delta(x)\|$ vanishes at the origin, for any ε' , there is some μ' such that $\forall x \in \mathcal{B}(\mu') \setminus \{0\}$, $\|k(x)\| \leq \varepsilon'$ which ends the proof of continuity.

Finally, with θ as in (12), the control becomes $k_i(x) = -b_i(x)\delta_i(x)w(x)$ which is obviously smooth on \mathcal{X} .

B. Proof of Theorem 4

Take ν such that:

$$\nu > \sup_{x \in \{x \in \mathcal{X} \mid \|x\|_{(r,\pi)} = 1, a(x) \geq 0\}} \frac{a(x)}{\sum_{i=1}^p b_i(x)^2 \|x\|_{(r,\pi)}^{d_f - 2d_{g_i} - d_V}} \quad (17)$$

As in [27], k is δ^r -homogeneous of degree $d_f - d_g$ and the system is therefore δ^r -homogeneous of degree d_f . In addition e clearly satisfies $e(\delta_\lambda^r(x), \delta_\lambda^r(m)) = \lambda^{d_V + d_f} e(x, m)$. Item 1 of Theorem 4 therefore holds.

On $\{x \in \mathcal{X} \mid \|x\|_{(r,\pi)} = 1, a(x) \geq 0\}$, equation (17) gives $\omega(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T - a(x) > 0$. Since the right-hand side of the inequality is δ^r -homogeneous of degree $d_V + d_f$, the same inequality holds for all $x \neq \{0\}$ such that $a(x) \geq 0$. Using (6), it follows that this inequality is valid for x in $\mathcal{S} \setminus \{0\}$. Therefore, equation (11) holds with the above choice of ω . Since θ given by equation (12) is homogeneous of degree $2d_f$ and using the property $d_{g_i} < d_f$ that holds for all $i \in \{1, \dots, p\}$, it follows that $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) \|\Delta(x)\| = 0$. Thanks to Theorem 3, item 3 holds and the control is smooth and semi-uniformly MSI.

To finish the proof, remains to establish that the event-based feedback is uniformly MSI. For this, we invoke the homogeneity of the Lyapunov level sets $\mathcal{V}_{\vartheta_m}$ together with the relation $x(t; \delta_\lambda^r(x_0)) = \delta_\lambda^r(x(\lambda^{d_1} t; x_0))$, that gives for all $\vartheta_m > 0$, $\tau(\vartheta_m) = \tau(1)$ that ends the proof of item 2.

VI. EXAMPLES

A. Linear time invariant systems

Consider the linear time-invariant system $\dot{x} = Ax + Bu$. Take P , the positive definite matrix solution of the Riccati equation $PA + A^T P - 4\varepsilon P B B^T P = -Q$, $Q > 0$. Then $V(x) := x^T Q x$ is a CLF for the system since for all x , $u = -2\varepsilon B^T P x$ renders \dot{V} strictly negative for $x \neq 0$. Since $a(x) = x^T (PA + A^T P)x$, $b(x) = 2x^T P B$, the Riccati takes the form of equation (11) with $\omega(x) := \varepsilon$ and $\delta_i := 1$ for all $i \in \{1, \dots, p\}$. Therefore, taking $\theta(x)$ according to (12), the control is smooth everywhere and linear: $k(x) = -\varepsilon b(x)^T$.

B. Nonlinear system

We consider next the nonlinear system proposed in [21]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 + u \end{aligned} \quad (18)$$

that admits $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ as CLF with $a(x) = -x_1^4 + x_1 x_2^3$, $b(x) = x_2$. We first take $\delta_i := 1$ for all $i \in \{1, \dots, p\}$, $\theta(x) = b(x)^2$ and $\sigma = 0.9$. The time evolution of x , $V(x)$, $k(x)$ and the event function e is depicted in Figure 1 for $x_0 = (0.1, 0.4)$.

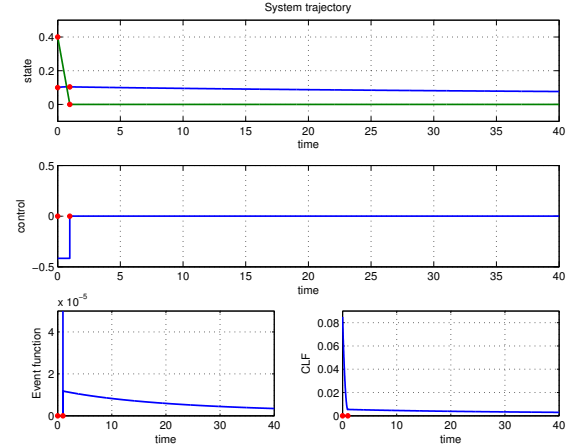


Fig. 1. System (18) under non smooth event-based control. The red dots represent the events.

Considering $\omega(x) = x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ satisfies inequality (11) on $\mathcal{S} \setminus \{0\}$:

$$\omega(x)b(x)\Delta(x)b(x)^T - a(x) = \frac{1}{2}x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^4 + x_1^4 > 0$$

it follows that taking $\theta(x)$ as in (12), the control is smooth everywhere. The resulting trajectory with $\sigma = 0.9$ is represented in Figure 2.

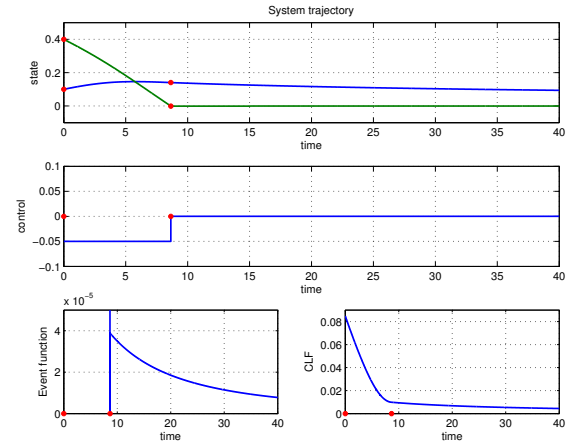


Fig. 2. System (18) under smooth event-based control. The red dots represent the events.

In both cases, two events occurred in the 40s simulation horizon (the initial event is included - see Figures 1 and 2). With the discontinuous control, the convergence is faster but the control value is also almost ten times larger. The event based approach was

compared with the continuous time implementation of the control laws on Figure 3. It appears that the event-based approach may have better convergence rates. This is due to the fact that a higher control is maintained when it is continuously reduced in the continuous-time implementation. The energy given to the system is therefore naturally a little bit higher. On Figure 3, the convergence of the CLF is also compared to [21] with the same initial condition and the parameter $\sigma = 0.9$ (the higher σ is, less frequent events are), 117 events were obtained to be compared with the 2 updates applying the proposed control. Considering the smooth and discontinuous control the convergence rates seem also a little bit better without a significant difference in the maximal control (-0.08 for [21] and -0.05 for the smooth version), In this example, with the same system and the same CLF, the proposed control and control update policy seem more efficient (faster convergence, smaller control, fewer events).

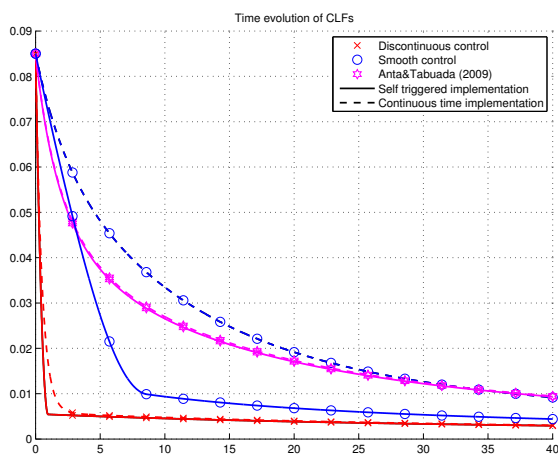


Fig. 3. Time evolution of the CLF using the non smooth and smooth version of the proposed control law compared to [21] and a continuous time implementation.

VII. CONCLUSION

In this paper, we proposed an extension of the universal formula for feedback stabilization to event-based controlled systems. A modification of the original formula is necessary to ensure that there is a minimal sampling time between two consecutive events avoiding Zeno phenomena like accumulation points. As in the original work, if the Control Lyapunov Function fulfils the small control property, then the control is continuous at the origin. With additional homogeneity assumptions, the control can be proved to be smooth everywhere and the minimal inter-sampling time bounded below for all initial conditions.

REFERENCES

- [1] K. Åström and B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems, 3rd Edition*. Prentice Hall, 1997.
- [2] A. Cervin, D. Henriksson, B. Lincoln, J. Eker, and K. Arzen, "How does control timing affect performance? Analysis and simulation of timing using Jitterbug and TrueTime," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 23, no. 3, pp. 16–30, 2003.
- [3] P. Hsu and S. Sastry, "The effect of discretized feedback in a closed loop system," in *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, vol. 26, 1987, pp. 1518–1523.
- [4] D. Nešić and A. Teel, "A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 49, no. 7, pp. 1103–1122, 2004.
- [5] D. Nešić and L. Grüne, "Lyapunov-based continuous-time nonlinear controller redesign for sampled-data implementation," *Automatica*, vol. 41, no. 7, pp. 1143–1156, 2005.
- [6] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, E. D. Sontag, and A. Subbotin, "Asymptotic controllability implies feedback stabilization," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 42, no. 10, pp. 1394–1407, 1997.
- [7] N. Marchand and M. Alamir, *NonLinear Control in the Year 2000*. Londres, UK: Springer Verlag, Dec. 2000, vol. 2, ch. Asymptotic controllability implies continuous discrete time feedback stabilizability, pp. 63–79.
- [8] K.-E. Årzén, "A simple event-based PID controller," in *Preprints of the 14th World Congress of IFAC*, Beijing, P.R. China, 1999.
- [9] J. Sandee, W. Heemels, and P. van den Bosch, "Event-driven control as an opportunity in the multidisciplinary development of embedded controllers," in *Proc. of the IEEE American Control Conference (ACC)*, 2005, pp. 1776–1781.
- [10] S. Durand and N. Marchand, "Further results on event-based PID controller," in *Proc. of the European Control Conference (ECC)*, 2009.
- [11] J. Sánchez, M. Guarnes, S. Dormido, and A. Visioli, "Comparative study of event-based control strategies: An experimental approach on a simple tank," in *Proc. of the European Control Conference (ECC)*, 2009.
- [12] J. Sánchez, M. Guarnes, and S. Dormido, "On the application of different event-based sampling strategies to the control of a simple industrial process," *Sensors*, vol. 9, pp. 6795–6818, 2009.
- [13] K. Åström and B. Bernhardsson, "Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems," in *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2002.
- [14] W. Heemels, J. Sandee, and P. van den Bosch, "Analysis of event-driven controllers for linear systems," *International journal of control*, vol. 81, pp. 571–590, 2009.
- [15] J. Lunze and D. Lehmann, "A state-feedback approach to event-based control," *Automatica*, vol. 46, pp. 211–215, 2010.
- [16] M. Donkers and W. Heemels, "Output-based event-triggered control with guaranteed \mathcal{L}_∞ -gain and improved event-triggering," in *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2010.
- [17] A. Eqtami, D. Dimarogonas, and K. Kyriakopoulos, "Event-triggered control for discrete-time systems," in *Proc. of the IEEE American Control Conference (ACC)*, 2010, pp. 1776–1781.
- [18] M. J. Mazo, A. Anta, and P. Tabuada, "On self-triggered control for linear systems: Guarantees and complexity," in *Proc. of the European Control Conference (ECC)*, 2009.
- [19] M. Velasco, P. Martí, and E. Bini, "On Lyapunov sampling for event-driven controllers," in *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2009.
- [20] P. Tabuada, "Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1680–1685, 2007.
- [21] A. Anta and P. Tabuada, "Self-triggered stabilization of homogeneous control systems," in *Proc. of the IEEE American Control Conference (ACC)*, 2008, pp. 4129–4134.
- [22] —, "To sample or not to sample: Self-triggered control for nonlinear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 55, pp. 2030 – 2042, 2010.
- [23] E. D. Sontag, "Clocks and insensitivity to small measurement errors," *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 4, pp. 537–557, 1999.
- [24] —, *Mathematical control theory, deterministic finite dimensional systems*, 2nd ed. Springer Verlag, 1998.
- [25] L. Faubourg and J. Pomet, "Control Lyapunov functions for homogeneous Jurdjevic-Quinn? systems," *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 5, pp. 293–311, 2000.
- [26] L. Grüne, "Homogeneous state feedback stabilization of homogeneous systems," in *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, vol. 4. IEEE, 2000, pp. 3409–3414.
- [27] J. Tsiniias, "Remarks on feedback stabilizability of homogeneous systems," *Control Theory and Advanced Technology*, vol. 6, pp. 533–542, 1990.