



**HAL**  
open science

# Conditions aux limites absorbantes enrichies pour l'équation des ondes acoustiques et l'équation d'Helmholtz

Véronique Duprat

► **To cite this version:**

Véronique Duprat. Conditions aux limites absorbantes enrichies pour l'équation des ondes acoustiques et l'équation d'Helmholtz. Analyse numérique [math.NA]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2011. Français. NNT: . tel-00817506

**HAL Id: tel-00817506**

**<https://theses.hal.science/tel-00817506>**

Submitted on 24 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L'Université de Pau et des Pays de l'Adour  
École doctorale des sciences et leurs applications - ED 211

par

**Véronique DUPRAT**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour**

**Spécialité Mathématiques Appliquées**

---

# CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES ENRICHIES POUR L'ÉQUATION DES ONDES ACOUSTIQUES ET L'ÉQUATION D'HELMHOLTZ

---

soutenue le 06 Décembre 2011

**Après avis de :**

M. Bruno DESPRES	Professeur - Université Paris 6	Rapporteur
M. Olivier LAFITTE	Professeur - Université Paris 13	Rapporteur

**et devant la commission d'examen formée de :**

M. Alain BACHELOT	Professeur - Université de Bordeaux 1	Président
Mme. Hélène BARUCQ	Directrice de Recherche INRIA - INRIA Bordeaux Sud-Ouest	Directrice de thèse
M. Abderrahmane BENDALI	Professeur - Université Paul Sabatier Toulouse	Examinateur
M. Gilles CARBOU	Professeur - Université de Pau	Examinateur
M. Bruno DESPRES	Professeur - Université Paris 6	Rapporteur
M. Julien DIAZ	Chargé de Recherche INRIA - INRIA Bordeaux Sud-Ouest	Directeur de thèse
M. Olivier LAFITTE	Professeur - Université Paris 13	Rapporteur
M. Sébastien TORDEUX	Maître de Conférence - Université de Pau	Examinateur

**Équipe Projet INRIA MAGIQUE-3D**, Institut National de Recherche en Informatique et en  
Automatique (INRIA)

**Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau**, Unité Mixte de Recherche  
CNRS 5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)



# Remerciements

Toutes les personnes qui me connaissent bien savent que les longs discours ne sont pas vraiment ma tasse de thé. Alors, comme dans de nombreux cas, un simple mot sincère vaut mieux qu'un blabla stéréotypé :

À tous ceux qui m'ont aidée, soutenue, supportée (dans tous les sens du terme), qui m'ont permis de "respirer", de m'évader et qui m'ont surtout bien fait rire pendant ces trois longues années, je dis simplement

**MERCI**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Construction et étude mathématiques d’une famille de CLA du second ordre pour l’équation des ondes acoustiques</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Une nouvelle famille de CLA du second-ordre pour l’équation des ondes acoustiques	8
1.2.1	La technique de microdiagonalisation appliquée à l’équation des ondes . . . . .	8
1.2.2	Une condition d’ordre un : la condition avec courbure . . . . .	12
1.2.3	Une nouvelle famille de conditions aux limites absorbantes . . . . .	13
1.3	Analyse mathématique directe . . . . .	15
1.3.1	Une condition de bord de Dirichlet sur $\Gamma$ . . . . .	16
1.3.2	Condition de bord de Neumann sur $\Gamma$ . . . . .	24
1.4	Comportement en temps long . . . . .	30
1.5	Conclusion . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Analyse de stabilité de la nouvelle famille de CLA</b>	<b>37</b>
2.1	Introduction . . . . .	37
2.2	Analyse mathématique . . . . .	38
2.3	Comportement en temps long . . . . .	44
2.4	Analyse de performances . . . . .	48
2.4.1	Présentation générale de la méthode IPDG . . . . .	48
2.4.2	Analyse de précision . . . . .	52
2.5	Analyse de stabilité . . . . .	56
2.5.1	Résultats préliminaires . . . . .	57
2.5.2	Preuve de la décroissance exponentielle de l’énergie . . . . .	61
2.6	Analyse numérique de stabilité . . . . .	70
2.6.1	Analyse de stabilité discrète . . . . .	70
2.6.2	Comportement de l’énergie discrète . . . . .	74
2.6.2.1	Décroissance de l’énergie . . . . .	74
2.6.2.2	Stabilité de la CLA . . . . .	74
2.6.2.3	Décroissance exponentielle de l’énergie discrète . . . . .	76
2.6.3	Stabilisation par onde incidente . . . . .	77
2.7	Conclusion . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Modélisation des ondes évanescentes</b>	<b>85</b>
3.1	Introduction au problème . . . . .	85
3.2	La condition de Hagstrom et Warburton . . . . .	85
3.3	Une nouvelle condition aux limites absorbante généralisée . . . . .	91
3.3.1	Diagonalisation dans la région elliptique . . . . .	91
3.3.2	Une nouvelle famille de CLAs généralisées . . . . .	92

3.4	Mise en oeuvre dans un schéma de type IPDG . . . . .	93
3.4.1	Prise en compte de la CLA généralisée dans une formulation variationnelle	93
3.4.2	Schéma discret . . . . .	94
3.5	Analyse de performances . . . . .	98
3.5.1	Dépendance par rapport à $\beta$ . . . . .	98
3.5.2	Comparaison de la CLA avec la C-ABC . . . . .	100
3.5.2.1	Cas test 1 . . . . .	101
3.5.2.2	Cas test 2 . . . . .	101
3.5.2.3	Cas test 3 . . . . .	101
3.5.2.4	Cas test 4 . . . . .	101
3.5.2.5	Cas test 5 . . . . .	103
3.5.3	Le cas d'un obstacle rayonnant . . . . .	104
3.6	Conclusion . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Construction et analyse de performance de conditions de radiation optimisées pour l'équation d'Helmholtz</b>	<b>111</b>
4.1	Introduction . . . . .	111
4.2	Conditions de radiation généralisées . . . . .	112
4.3	Existence et unicité : résultats préliminaires . . . . .	114
4.3.1	Un premier résultat . . . . .	114
4.3.2	Le cas de la couronne . . . . .	118
4.4	Étude d'erreur : calcul du coefficient de réflexion pour le cercle . . . . .	120
4.5	Mise en oeuvre par éléments finis discontinus . . . . .	129
4.5.1	Le cas d'un anneau . . . . .	130
4.5.1.1	Une condition de Dirichlet sur $\Gamma$ . . . . .	130
4.5.1.2	Une condition de Neumann sur $\Gamma$ . . . . .	132
4.5.2	Le cas d'une frontière elliptique . . . . .	133
4.5.2.1	Expression des différents champs acoustiques . . . . .	133
4.5.2.2	Résultats numériques . . . . .	135
4.6	Les ondes rampantes . . . . .	136
4.6.1	Fonctions d'Airy . . . . .	136
4.6.2	Une nouvelle condition . . . . .	137
4.6.3	Une condition OSRC . . . . .	141
4.7	Coefficient de réflexion dans le cas du cercle . . . . .	142
4.7.1	Calcul numérique des coefficients $a_m^{\text{app}}$ et $b_m^{\text{app}}$ . . . . .	143
4.8	Résultats numériques . . . . .	148
4.8.1	Le cas d'un anneau . . . . .	150
4.8.1.1	Une condition de Dirichlet sur $\Gamma$ . . . . .	150
4.8.1.2	Une condition de Neumann sur $\Gamma$ . . . . .	150
4.8.2	Un obstacle elliptique . . . . .	151
4.9	Conclusion . . . . .	153
<b>5</b>	<b>Une famille de conditions aux limites absorbantes enrichies</b>	<b>155</b>
5.1	Introduction au problème . . . . .	155
5.2	Caractérisation des opérateurs $Op((ik)^{2/3})$ et $Op((i\xi)^{2/3})$ . . . . .	155
5.2.1	Dérivées de Caputo . . . . .	155
5.2.2	Dérivée fractionnaire au sens de Hörmander . . . . .	157
5.3	Nouvelles CLA modélisant aussi les ondes rampantes . . . . .	158

5.4	Discrétisation des nouvelles conditions . . . . .	159
5.4.1	La CLA généralisée . . . . .	159
5.4.1.1	Réécriture de la condition . . . . .	159
5.4.1.2	Discrétisation de l'opérateur de dérivée fractionnaire . . . . .	160
5.4.1.3	Schéma discret . . . . .	162
5.4.2	Le cas de la condition prenant en compte les trois types d'ondes . . . . .	164
5.4.2.1	Réécriture de la condition . . . . .	164
5.4.2.2	Schéma discret . . . . .	165
5.5	Analyse de performances des nouvelles CLA généralisée et enrichie . . . . .	167
5.5.1	Cas test 1 . . . . .	168
5.5.2	Cas test 2 . . . . .	168
5.5.3	Cas test 3 . . . . .	168
5.5.4	Cas test 4 . . . . .	168
5.5.5	Cas test 5 . . . . .	170
5.6	Stabilisation par une onde incidente . . . . .	171
5.7	Conclusion . . . . .	180
<b>6</b>	<b>Vers des simulations réalistes</b>	<b>181</b>
6.1	Mise en oeuvre des CLA en milieu hétérogène . . . . .	181
6.2	Le cas tridimensionnel . . . . .	185
6.2.1	Ecriture des CLA en 3D . . . . .	185
6.2.2	Implémentation . . . . .	187
<b>A</b>	<b>Cas test</b>	<b>189</b>
A.1	Cas test 1 : un obstacle circulaire . . . . .	189
A.2	Cas test 2 : Un obstacle elliptique . . . . .	190
A.3	Cas test 3 : Un obstacle elliptique allongé . . . . .	190
A.4	Cas test 4 : le cas de 2 obstacles circulaires . . . . .	191
A.5	Cas test 5 : le cas de 4 obstacles triangulaires . . . . .	192
<b>B</b>	<b>Annexe harmonique</b>	<b>193</b>
B.1	Les fonctions de Mathieu . . . . .	193
B.2	Equation de Mathieu et équation des ondes acoustiques en coordonnées elliptiques	194
B.3	Détermination des valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu . . . . .	195
B.4	Quelques propriétés des valeurs caractéristiques . . . . .	197
B.5	Solutions de l'équation de Mathieu . . . . .	198
B.6	Relations entre les coefficients de Fourier et les différentes solutions de l'équation de Mathieu . . . . .	199
B.7	Solutions de l'équation de Mathieu modifiée . . . . .	199
B.8	Notations comparatives des fonctions de Mathieu . . . . .	201
	<b>Bibliographie</b>	<b>202</b>



# Introduction

La modélisation et la simulation numérique de problèmes de propagation d'ondes sont au coeur de nombreuses applications industrielles, comme par exemple l'aéronautique ou l'exploration pétrolière. Elles interviennent aussi dans les secteurs militaire (radar aérien) ou médical (imagerie ultra-sonore). Dans ces différentes applications, le domaine de propagation est le plus souvent infini dans une direction ou alors très grand par rapport à la longueur d'onde des signaux que l'on veut reproduire. On est alors confronté au problème de résoudre numériquement un système d'équations aux dérivées partielles posé dans un domaine non borné.

Une première approche consiste à considérer les solutions fondamentales de l'équation des ondes pour en écrire une formulation intégrale définie sur une surface bornée. Cette technique est le plus souvent utilisée dans le cadre de la diffraction d'onde par un obstacle (sous-marin par exemple). L'équation intégrale est alors posée sur le bord de l'obstacle qui est donc borné. Cette approche [29, 33] est très robuste et fournit une solution très précise, en particulier à hautes fréquences. De plus, se ramener à un domaine borné permet de discrétiser le problème à l'aide d'une méthode d'éléments finis. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle conduit à l'inversion d'une matrice pleine, ce qui induit des coûts de calcul et donc des temps de calcul considérables.

Une seconde approche consiste à définir une boîte de calcul de dimension finie et dont la taille est adaptée à la zone qui nous intéresse. Ce procédé s'appuie sur le fait qu'il est suffisant de représenter le champ d'onde dans un voisinage proche de l'origine du phénomène, qui peut être l'obstacle dans des problèmes de scattering ou la source en imagerie sismique ou médicale. La boîte de calcul ainsi définie, on peut résoudre numériquement le problème de propagation d'ondes par des méthodes se basant sur l'approximation de la solution en différents noeuds d'une grille donnée, comme par exemple les méthodes de différences finies ou d'éléments finis. Les bords extérieurs de la boîte de calcul étant artificiels pour le problème physique, ils ne doivent pas générer des réflexions parasites à l'intérieur du domaine de calcul pour ne pas fausser les résultats numériques obtenus. Un moyen de modéliser numériquement ces bords artificiels est de les représenter par l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) qui exprime de façon exacte le passage des ondes au travers d'une interface. Dans le cas des bords artificiels, cet opérateur assure donc le passage parfait de l'onde de l'intérieur vers l'extérieur de la boîte de calcul sans qu'il n'y ait aucune réflexion à l'intérieur du domaine. Cependant, cet opérateur étant global, sa discrétisation va introduire une matrice pleine et casser ainsi la structure creuse du système. Les coûts de calcul engendrés par l'utilisation de cet opérateur sont équivalents à ceux obtenus avec la méthode des équations intégrales. Il faut donc trouver un autre moyen de diminuer les réflexions issues des bords artificiels tout en préservant la structure creuse des matrices de discrétisation. Pour cela, deux principales techniques s'offrent à nous : l'utilisation de conditions aux limites absorbantes (CLA) ou de couches parfaitement adaptées (PML : Perfectly Matched Layers). Dans le cas des CLA, l'idée est d'imposer une condition aux limites particulière sur les bords extérieurs du domaine de calcul permettant d'atténuer les ondes réfléchies. Cette condition est une approximation de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann, construite de façon à préserver la structure creuse des ma-

trices. Dans le cas des PML, on rajoute une couche au-delà du bord artificiel dans laquelle l'onde est absorbée grâce à l'introduction d'un terme de dissipation.

Les premiers travaux sur les CLA remontent à 1977. Engquist et Majda [37, 38] ont construit et analysé une classe de CLA locales d'ordre élevé pour l'équation des ondes acoustiques écrites pour des bords extérieurs plans. La technique utilisée consiste à construire l'opérateur DtN exact à partir de la représentation de la solution par superposition d'ondes planes. Ensuite, les CLA sont obtenues via la microlocalisation de la condition DtN exacte réalisée à l'aide d'approximations de Taylor. Ces approximations ne sont justifiées que dans le cas des ondes propagatives se propageant avec une incidence proche de la normale à la frontière artificielle. Dans le même temps, Bayliss, Guntzburger et Turkel [19] ont construit des CLA écrites pour l'équation d'Helmholtz dans le cas où la frontière artificielle est circulaire en 2D ou sphérique en 3D. Cette construction se base sur un développement à hautes fréquences de la solution. Depuis lors, de nombreux auteurs se sont consacrés à l'amélioration de ces conditions. On peut par exemple citer les travaux de Higdon [52] qui a proposé une généralisation des CLA développées par Engquist et Majda en introduisant des coefficients faisant intervenir des angles d'incidence. Les conditions en résultant sont d'ordre élevé et ne sont à nouveau justifiées que dans la zone des ondes propagatives. Le fait de ne s'intéresser qu'aux ondes propagatives est resté pendant de nombreuses années la principale manière de construire des conditions car les ondes propagatives sont les ondes qui jouent le plus grand rôle dans les réflexions. Il faut aussi noter que l'utilisation de CLA d'ordre élevé nécessite numériquement d'introduire des variables auxiliaires pour pouvoir implémenter les conditions dans une formulation variationnelle (cf Givoli [46] et sa bibliographie) ce qui entraîne des surcoûts numériques mais surtout ne conduit pas nécessairement à des schémas stables. D'autres auteurs se sont, quant à eux, intéressés à d'autres équations. On peut par exemple citer les travaux de Gustafsson [45] et Halpern [51] qui s'intéressent respectivement à des systèmes de type hyperbolique et parabolique. Pour plus de détails sur le sujet des conditions aux limites absorbantes appliquées à différents problèmes, on renvoie à l'article de Tsynkov [75] qui donne une revue détaillée sur le sujet.

Pour diminuer les réflexions à l'intérieur du domaine, on peut aussi utiliser des PML. Cette approche, proposée par Bérenger [22] en 1994, a révolutionné le domaine. En effet, cette technique consiste à définir une couche absorbante à l'extérieur de la boîte de calcul de telle sorte que l'onde passe du domaine à la couche sans se réfléchir au niveau de l'interface. L'onde est ensuite absorbée dans la couche grâce à un terme de dissipation et elle est quasiment nulle en atteignant le bord de la couche. Grâce à cela, les réflexions sont fortement diminuées. Cependant, les PML sont difficiles à mettre en oeuvre quand les bords du domaine de calcul sont courbes. On peut par exemple citer les travaux de Collino et Monk [32] sur le cas du cercle. De plus, lorsque le milieu est fortement hétérogène et anisotrope, les PML ne sont plus efficaces et la solution approchée numériquement peut exploser (l'amplitude de certaines ondes augmente exponentiellement au lieu de décroître dans la couche). De nouvelles formulations ont été proposées ces dernières années, comme par exemple les C-PML ("Convolutional Perfectly Matched Layer") [69], afin de pallier les différents inconvénients que présentent les PML mais ces formulations ne suppriment pas toutes les instabilités et ne sont toujours pas adaptées au cas des frontières courbes.

Pour réduire les coûts de calcul lors des simulations numériques, on peut adapter la taille et la forme de la boîte de calcul. Par exemple, on peut choisir un bord artificiel ayant la même forme que l'enveloppe convexe de l'obstacle de diffraction. C'est tout particulièrement intéressant quand l'obstacle est de forme allongée. Citons par exemple le cas d'un sous-marin qui, le plus souvent, est entouré par une sphère. La taille du domaine de calcul n'est donc pas optimale. Il serait en effet préférable de prendre une frontière artificielle de forme sphéroïdale prolata. C'est pourquoi dans cette thèse, nous nous concentrons sur la question de construire des CLA qui s'appliquent sur des

surfaces de forme quelconque, pour l'équation des ondes acoustiques et l'équation d'Helmholtz. Avant de décrire plus en détail comment nous souhaitons procéder, nous allons préciser la méthodologie que nous avons retenue pour la mise en oeuvre numérique. Pour résoudre numériquement l'équation des ondes, nous avons le choix entre plusieurs méthodes. Les codes de calcul industriels utilisent généralement des méthodes de différences finies ou d'éléments finis. Les méthodes de différences finies, bien que faciles à implémenter, reposent sur le calcul de la solution en différents noeuds d'une grille régulière, ce qui ne nous permet pas de considérer des géométries complexes. Ainsi, nous avons décidé d'utiliser des méthodes d'éléments finis qui ne présentent pas cet inconvénient. Cependant, si l'on utilise une méthode d'éléments finis classique, on obtient une matrice de masse creuse mais non trivialement inversible. Ces matrices pouvant dans certains cas pratiques comporter des millions d'entrées, leur inversion peut être un verrou notamment lorsqu'il s'agit d'applications réelles. Pour pallier ce problème, on pourrait utiliser une méthode de condensation de masse [30, 54] qui permet de rendre la matrice de masse diagonale. Cependant, cette technique pénalise l'ordre de convergence du schéma. Nous pourrions à la place utiliser la méthode des éléments spectraux (cf. [66]) qui permet d'obtenir une matrice de masse diagonale sans pénaliser l'ordre de convergence du schéma en utilisant des points et poids de quadrature de Gauss-Lobatto. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle se base sur des maillages quadrangulaires à 2D et parallélépipédiques à 3D. Il est donc difficile de mailler des domaines quelconques comme ceux que nous allons être amenés à considérer dans cette thèse. Dans [31], une méthode a été proposée dans le but de considérer des maillages en triangles à 2D mais sa mise en oeuvre pose de nombreuses difficultés. Nous avons donc choisi d'utiliser plutôt une méthode de Galerkin Discontinue (DG) pour discrétiser nos équations. Cette méthode, introduite par Reed et Hill [68] ne présente pas les inconvénients des méthodes précédentes. En effet, elle permet l'utilisation de maillages triangulaires à 2D et tétraédriques à 3D et la matrice de masse est par construction diagonale par blocs, ce qui conduit à une représentation quasi-explicite de la solution. Parmi les différentes méthodes DG décrites dans la littérature et analysées dans [13], nous avons décidé de nous intéresser plus particulièrement à la méthode de Galerkin Discontinue avec Pénalité Intérieure (IPDG) [12] aussi appelée Pénalité Intérieure Symétrique (SIP) [18]. Cette méthode est connue pour être stable et consistante [13], ce qui garantit l'ordre de convergence du schéma. Elle a déjà été utilisée pour résoudre l'équation des ondes acoustiques [43, 44] et l'équation d'Helmholtz [5, 21].

En ce qui concerne le cas de l'équation des ondes acoustiques, de nombreux travaux ont été réalisés dans le but d'améliorer la performance des CLA. Néanmoins, comme nous l'avons déjà précisé, la plupart des travaux réalisés ne considèrent que les ondes propagatives pour obtenir des conditions absorbantes. Or, il existe deux autres types d'ondes : les ondes évanescentes et les ondes rampantes dont l'importance a longtemps été ignorée dans le processus de construction des CLA. Récemment, Hagstrom *et al.* [49, 50] ont proposé une CLA d'ordre élevé qui est une généralisation de la condition développée par Higdon [52] prenant en compte à la fois les ondes propagatives et les ondes évanescentes. Les simulations montrent que le fait de prendre en compte les ondes évanescentes dans le processus de construction des CLA permet de diminuer les réflexions à l'intérieur du domaine. Dans [49] elles ont été mises en oeuvre à l'aide d'une méthode éléments finis classique pour la discrétisation en espace et d'un schéma de Newmark pour la discrétisation en temps. Or, nous avons observé dans un travail préliminaire [16] que les calculs étaient instables lorsqu'elles étaient réalisées à l'aide d'une méthode de Galerkin discontinue. De plus, ces nouvelles conditions sont écrites pour des surfaces planes. Si nous considérons une frontière courbe, nous devons donc imposer une condition dite "condition de coins" sur chaque extrémité des segments formant le polygone qui approche le bord courbe. Cela augmente donc considérablement le nombre d'équations à résoudre et, de fait, les coûts de calcul.

En ce qui concerne l'équation d'Helmholtz, l'influence des ondes rampantes a déjà été étudiée par Antoine *et al.* [10, 34] dans un cadre bien particulier, le cadre OSRC ("On Surface Radiation Condition"). Dans ce cas la frontière artificielle coïncide avec la frontière de l'obstacle de diffraction qui est supposée circulaire. Les analyses menées dans [10, 34] montrent que le coefficient de réflexion diminue si l'on prend en compte les ondes rampantes dans le processus de construction. Ce cadre particulier ne permet pas d'étendre la CLA construite au cas de l'équation des ondes acoustiques dans la mesure où les conditions de type OSRC sont connues pour ne pas être adaptées au régime hautes fréquences, ce qui dans le domaine temporel correspond aux temps courts. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser au développement de CLA écrites pour l'équation des ondes acoustiques et l'équation d'Helmholtz en prenant en compte les trois types d'ondes. Nous porterons une attention particulière à l'implémentation numérique de ces conditions et à l'analyse de leurs performances.

Ce manuscrit s'organise selon le plan suivant.

Dans le premier chapitre, on se concentre sur la construction d'une CLA optimisée pour les ondes propagatives. Pour cela, on reformule l'équation des ondes comme un système du premier ordre et on applique la technique de microdiagonalisation de Taylor [74] dans le cône de propagation. On obtient, en première approximation, une famille de CLA dépendant d'un paramètre  $\gamma$ . Le problème mixte associé est alors analysé dans un cadre plus général et on démontre qu'il admet une unique solution. De plus, si la frontière est convexe, on montre l'existence d'une énergie décroissant vers zéro sous réserve que le paramètre  $\gamma$  soit supérieur à  $\frac{\kappa}{4}$  où  $\kappa$  désigne la courbure de la frontière artificielle. On prouve aussi que dans le cas d'une condition de Dirichlet sur le bord de l'obstacle, la solution du problème tend bien vers zéro. Dans le cas d'une condition de Neumann, on montre que la solution converge vers une constante qui est nulle sous une certaine condition nécessaire liée aux données initiales.

Dans le second chapitre, nous mettons en oeuvre la famille de CLA construite au chapitre 1. Pour implémenter cette condition dans une formulation variationnelle, on la réécrit en introduisant une variable auxiliaire définie uniquement sur la frontière artificielle. Le problème aux limites qui découle de cette nouvelle écriture de la CLA est alors étudié dans le cas où l'on impose une condition de Dirichlet sur le bord de l'obstacle. On montre ainsi que le problème est bien posé et qu'il existe une énergie qui décroît vers zéro. On démontre aussi que si on choisit correctement la forme de la frontière artificielle, l'énergie décroît exponentiellement vers zéro. On peut noter que la formulation considérée dans ce chapitre favorise l'obtention de ce résultat de stabilisation frontière. En effet, la formulation du chapitre 1 ne permet pas facilement d'établir ce type de comportement car elle fait intervenir une fonctionnelle d'énergie pour laquelle il n'est pas facile de trouver des multiplicateurs. On analyse ensuite numériquement les performances de la famille de CLA. Les tests réalisés indiquent que la valeur optimale du paramètre  $\gamma$  est  $\gamma = \frac{\kappa}{4}$ . On montre alors que cette condition est équivalente à la condition de courbure (C-ABC) donnée par  $\partial_n u + \partial_t u + \frac{\kappa}{2} = 0$ . On illustre aussi le résultat de stabilisation en considérant le cas où la donnée de bord est une onde monochromatique. Il est alors remarquable d'observer que l'onde acoustique converge très rapidement vers la solution de l'équation d'Helmholtz.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la construction de CLA pour l'équation des ondes acoustiques qui prennent en compte à la fois les ondes propagatives et les ondes évanescentes. On présente tout d'abord un bref résumé des travaux de Hagstrom *et al* [49, 50] à ce sujet et nous montrons les limites de leur étude. Ensuite, à l'aide de la technique de microdiagonalisation uti-

lisée au premier chapitre, nous construisons une CLA prenant en compte les ondes évanescentes. Nous composons alors cette condition avec la C-ABC pour pouvoir également absorber les ondes propagatives. Nous montrons que cette nouvelle condition peut être facilement intégrée dans une formulation variationnelle et nous comparons numériquement ses performances à celles de la C-ABC. Enfin, comme dans le chapitre 2, nous illustrons le phénomène de stabilisation frontière en choisissant une onde incidente monochromatique.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse au cas de l'équation d'Helmholtz posée en domaine bornée. On réécrit les différentes CLA étudiées dans les chapitres précédents en régime harmonique. On montre que le problème est bien posé à basse fréquence et on obtient deux résultats à haute fréquence, dans des géométries simples (cercles et ellipses). On analyse ensuite numériquement les performances des diverses conditions en évaluant dans un premier temps le coefficient de réflexion avant de regarder la solution approchée avec une méthode IPDG. On constate que lorsque la frontière est proche de l'obstacle, le fait de prendre en compte les ondes évanescentes améliore fortement l'absorption à basses fréquences. Par contre, à haute fréquence, on ne constate pas d'amélioration quelle que soit la localisation de la frontière artificielle. Dans le but d'améliorer l'absorption, on a alors pensé à modéliser aussi les ondes rampantes comme dans [10, 34]. Pour cela, on utilise un développement asymptotique et on obtient ainsi une nouvelle CLA en composant la CLA du chapitre 3 avec l'équation représentant les rampants. Enfin, on teste numériquement cette CLA en la comparant aux autres conditions proposées dans cette thèse. On remarque d'abord que prendre en compte les ondes rampantes améliore les résultats à hautes fréquences. On peut en particulier noter que la nouvelle condition est nettement plus performante que la condition proposée par Antoine *et al.* à basses comme à hautes fréquences. Cette dernière propriété nous encourage à introduire les ondes rampantes pour améliorer les performances des CLA en acoustique transitoire, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

Dans le cinquième chapitre, on repasse donc à l'étude de l'équation des ondes acoustiques. Le passage du régime fréquentiel au régime transitoire fait apparaître une dérivée fractionnaire dans la condition prenant en compte les ondes rampantes. Pour pouvoir inclure ces conditions dans une formulation variationnelle, il est nécessaire de les réécrire à l'aide d'une variable auxiliaire. Il faut également considérer des schémas numériques permettant la discrétisation des opérateurs de dérivées fractionnaires. On compare alors numériquement les performances de ces nouvelles conditions à celles de la condition construite au chapitre 3 et à celles de la C-ABC. On constate que, contrairement à ce que laissait supposer l'étude de l'équation d'Helmholtz, ces nouvelles CLA n'améliorent pas significativement les performances de la CLA construite au chapitre 3. Ces résultats pouvant s'expliquer par une discrétisation trop peu précise de l'opérateur de dérivée fractionnaire, on s'intéresse à nouveau au phénomène de stabilisation frontière en choisissant une onde incidente monochromatique. Nous observons qu'avec ces nouvelles CLA, la solution converge vers la solution de l'équation d'Helmholtz mais moins vite que lorsqu'on utilise la C-ABC ou la CLA prenant en compte les ondes évanescentes. Il nous semble donc qu'il faudrait reconsidérer la façon de discrétiser les dérivées fractionnaires pour pouvoir améliorer les performances des CLA ainsi que la convergence vers la solution de l'équation d'Helmholtz.

Dans le sixième et dernier chapitre de cette thèse, nous nous intéressons à la mise en oeuvre des nouvelles CLA dans des configurations plus réalistes. Nous montrons tout d'abord leur efficacité dans des milieux hétérogènes 2D puis nous discutons de leur extension à 3D.



# Chapitre 1

## Construction et étude mathématiques d'une famille de CLA du second ordre pour l'équation des ondes acoustiques

### 1.1 Introduction

La simulation numérique des ondes acoustiques est souvent réalisée après avoir tronqué le domaine de propagation pour pouvoir se ramener à un problème dans un domaine fini ou borné. La taille du domaine de calcul est ainsi réduite et l'approximation en espace peut alors être faite en utilisant des espaces d'éléments finis. Le problème aux limites correspondant est alors défini en couplant le système d'équation initial avec une condition de bord fixée sur la frontière extérieure limitant le domaine de calcul. Cette condition de bord est utilisée pour fermer le problème et représente le comportement des ondes au niveau de la frontière extérieure. Une "bonne" condition devrait être celle pour laquelle les ondes ne sont pas réfléchies par la frontière extérieure. Le champ approché numériquement correspondrait alors à l'exacte restriction de l'onde se propageant dans le domaine infini. La construction de "bonnes" conditions, qui sont généralement appelées Conditions aux Limites Absorbantes (CLA) a déjà été abordée dans de nombreux travaux. En ce qui concerne les problèmes évolutifs, Engquist and Majda [37] ont montré que la microdiagonalisation de l'équation des ondes, et plus généralement de systèmes hyperboliques, est un moyen intéressant pour construire des CLA sur des surfaces de forme quelconque. Leur travail a été suivi par de nombreux articles dans lesquels la question de construire des CLA d'ordre élevé afin d'améliorer la précision des solutions numériques a été abordée. Par exemple, Higdon [52] a construit des CLA d'ordre élevé qui sont formulées comme étant une combinaison de CLA d'ordre peu élevé Grote et Keller [42] ont proposé des CLA non réfléchissantes qui sont obtenues à partir de l'approximation de l'opérateur DtN associé à la sphère. Des travaux très intéressants abordant ce sujet ont été réalisés et on renvoie à l'article de [75] pour une liste exhaustive de références.

Dans cette thèse, nous cherchons à construire des CLA enrichies qui peuvent atténuer les réflexions générées par le champ d'onde complet. Les CLA sont alors déduites de l'approximation de l'opérateur DtN complet qui est défini à la fois dans la région hyperbolique et la région elliptique et qui peut aussi reproduire le comportement des ondes rampantes.

Dans ce chapitre, on aborde la question de construire et d'analyser une famille de CLA dépendant d'un paramètre pour l'équation des ondes acoustiques. Notre but est de sélectionner la "meilleure" CLA prenant seulement en compte les ondes propagatives. Nos critères de sélection sont les suivants :

1. la CLA peut être appliquée à des frontières de forme quelconque ;
2. la CLA doit être locale et doit comporter des opérateurs différentiels d'ordre peu élevé ;
3. le problème aux limites correspondant (BVP) est bien posé ;
4. le BVP est associé à une fonctionnelle de Lyapunov (une énergie) qui décroît vers zéro, sauf pour un ensemble fixé de données.

Le premier critère nous permet de considérer des domaines de calculs dont la taille et la forme peuvent être optimisées en utilisant des frontières extérieures bien adaptées. Par exemple, dans le cas d'un problème de diffraction, la frontière extérieure peut être choisie de telle sorte qu'elle ait la même forme que le bord de l'obstacle ou au moins que son enveloppe convexe. Cette propriété est particulièrement intéressante quand l'obstacle est allongé, comme un sous-marin par exemple. Le second critère nous assure que le caractère creux des matrices éléments finis est préservé et que l'on peut facilement incorporer la CLA dans le schéma numérique.

Le troisième critère donne un résultat de stabilité par rapport aux données, qui est essentiel pour les simulations numériques.

Le dernier critère implique que la solution du BVP est stable en temps long, ce qui n'est pas forcément le cas pour les CLA existantes.

Dans ce chapitre, nous construisons une famille de CLA d'ordre un pour l'équation des ondes acoustiques qui satisfait tous les critères 1-4.

## 1.2 Une nouvelle famille de CLA du second-ordre pour l'équation des ondes acoustiques

Dans cette partie, nous nous intéressons à la construction d'une nouvelle famille de conditions aux limites absorbantes en utilisant la méthode de microdiagonalisation développée par M.E. Taylor [74]. On veut que cette condition soit écrite pour tout domaine régulier convexe et qu'elle ne prenne en compte que les ondes propagatives. Tout d'abord, nous présentons les principales étapes de la méthode de microdiagonalisation avant de nous intéresser à la construction de nouvelles conditions. Par souci de simplicité, on suppose que la vitesse  $c$  est égale à 1.

### 1.2.1 La technique de microdiagonalisation appliquée à l'équation des ondes

Dans ce paragraphe, on construit de nouvelles CLA en appliquant le théorème de factorisation initialement établi par M.E. Taylor [74] pour étudier la propagation de singularités dans des systèmes strictement hyperboliques. Comme nous voulons construire des conditions d'ordre peu élevé, on limite notre travail à l'application de la première étape de la factorisation. En effet, l'analyse mathématique dans [8] montre que les étapes suivantes font intervenir nécessairement des opérateurs différentiels d'ordre supérieur à deux. Ainsi, on ne s'intéresse qu'à la diagonalisation du symbole principal de l'équation des ondes.

Les CLA que nous considérons sont dérivées de l'approximation microlocale de l'opérateur Dirichlet-Neumann associé à la surface artificielle  $\Sigma$ . On commence par réécrire l'équation des ondes acoustiques dans un système de coordonnées locales  $(r, s)$  lié à  $\Sigma$ . Le couple  $(r, s)$  décrit un point dans le voisinage de  $\Sigma$  de telle manière que  $\Sigma = \{r = 0\}$ . On utilise le même système de coordonnées que dans [9] et l'équation des ondes acoustiques s'écrit ainsi de la façon suivante

$$\tilde{L}u := -\partial_t^2 u + \partial_r^2 u + \kappa_r(s)\partial_r u + h^{-1}\partial_s (h^{-1}\partial_s u) = 0, \quad (1.2.1)$$

où  $\kappa(s)$  est la courbure de  $\Sigma$ ,  $h = 1 + r\kappa(s)$  et  $\kappa_r = h^{-1}\kappa(s)$ . Ce changement de variables a donc pour effet de transformer l'équation des ondes en équation aux dérivées partielles à coefficients variables.

Ensuite, pour appliquer la méthode de Taylor, on réécrit (1.2.1) comme un système du premier ordre. Pour cela, on introduit une inconnue auxiliaire  $v$  qui est liée à  $u$  par la relation  $\partial_t v + \partial_r u = 0$  dans un voisinage de  $\Sigma$ . Le vecteur  $\mathbf{U} = (v, u)$  est alors solution du système du premier ordre

$$\partial_r \mathbf{U} = L\mathbf{U},$$

où  $L$  est un opérateur matriciel dont les composantes sont des opérateurs pseudodifférentiels du premier ordre caractérisé par son symbole  $\sigma(L) = \mathcal{L}$ . On peut décomposer  $\mathcal{L}$  en  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$  avec

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h^{-2}\xi^2 - \omega^2}{i\omega} \\ -i\omega & 0 \end{pmatrix} \in S^1 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} -\kappa_r(s) & -\frac{h^{-3}\partial_s(h)\xi}{\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S^0,$$

où  $\xi$  et  $\omega$  sont les variables duales associées respectivement à  $s$  et  $t$ .

Les ondes se propageant à incidence normale sont sélectionnées à partir de la décomposition suivante, fondée sur le théorème de factorisation de Nirenberg [65].

**Théorème 1.2.1.** *Il existe deux opérateurs pseudodifférentiels classiques  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$  d'ordre 1, dépendant régulièrement de  $r$ , tels que*

$$\tilde{L}u = (\partial_r + i\Lambda^-)(\partial_r + i\Lambda^+)u \quad \text{mod } C^\infty. \quad (1.2.2)$$

Complétons ce théorème par quelques précisions importantes pour la suite. L'unicité de la décomposition (1.2.2) est assurée par la caractérisation suivante de  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$ . Soient  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  les symboles respectifs des opérateurs  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$ . D'après la définition des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1, les symboles  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  appartiennent à la classe des symboles  $S_{1,0}^1$  (cf e.g. Chazarain-Piriou [28] pour la définition de cette classe de symboles). Par opérateur pseudodifférentiel classique, on sous-entend que les symboles  $\lambda^\pm$  admettent le développement asymptotique suivant

$$\lambda^\pm \sim \sum_{j=-1}^{+\infty} \lambda_{-j}^\pm, \quad (1.2.3)$$

où  $\lambda_{-j}^\pm$  sont des fonctions homogènes de degré  $-j$  selon la variable duale  $(\xi, \omega)$ . Ce développement a lieu au sens suivant

$$\forall m \geq -1, \lambda^\pm - \sum_{j=-1}^{+\infty} \lambda_{-j}^\pm \in S^{-(m+1)},$$

où, comme dans Taylor [74], on note de manière plus concise  $S^m$  la classe des symboles  $S_{1,0}^m$ . Afin d'obtenir des écritures plus concises nous posons la

**Définition 1.2.2.** *Soit  $\sigma_P \in S^p$  le symbole d'un opérateur pseudodifférentiel classique  $P \in OPS^p$  d'ordre  $p$ . On suppose que le développement asymptotique de  $\sigma_P$  s'écrit :*

$$\sigma_P \sim \sum_{j=-1}^{+\infty} \lambda_{P,-j}.$$

Nous noterons dorénavant  $\tau_{-m}(\sigma_P)$  le développement asymptotique tronqué du symbole  $\sigma_P$  défini par :

$$\tau_{-m}(\sigma_P) = \sum_{j=-1}^m \lambda_{P,-j}, \quad m \geq -p..$$

Ainsi, les opérateurs pseudodifférentiels  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$  sont définis dans  $OPS^1$ . L'onde se propageant le long de la direction de la direction normale, l'onde sortante, satisfait l'équation

$$(\partial_r + i\Lambda^+) u = 0,$$

au sens microlocal du terme (cf. Taylor [74]). Ainsi, nous déduisons de cette dernière équation l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) comme l'opérateur non local  $\tilde{\Lambda}^+$  tel que  $\tilde{\Lambda}^+ := \Lambda^+_{|r=0}$ . La condition transparente sur  $\Sigma$  est alors donnée par

$$(\partial_r + i\Lambda^+) u|_{r=0} = (\partial_r + i\tilde{\Lambda}^+) u = 0.$$

Ainsi, tout le problème se ramène désormais à la détermination explicite de  $\Lambda^+$ . Pour cela, commençons par développer le membre de droite de l'équation (1.2.2)

$$\tilde{L}u = \partial_r^2 u + i\Lambda^- \partial_r u + i\partial_r \Lambda^+ u - \Lambda^- \Lambda^+ u = 0. \quad (1.2.4)$$

Un calcul direct basé sur la formule de représentation intégrale d'un opérateur pseudodifférentiel à partir de son symbole (cf. [28, 74]) nous permet d'écrire la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \partial_r \Lambda^+ u(r, s, t) &= \partial_r \int e^{i(\omega t + \xi \cdot s)} \lambda^+(r, s, t, \xi, \omega) \hat{u}(r, \xi, \omega) d\omega d\xi \\ &= \int e^{i(\omega t + \xi \cdot s)} (\partial_r \lambda^+ \hat{u} + \lambda^+ \partial_r \hat{u}) . \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Introduisons la définition suivante

**Définition 1.2.3.** Etant donné  $\mu \in S^m$ , on note  $Op(\mu)$  l'opérateur pseudodifférentiel dont le symbole est  $\mu$ .

L'utilisation de cette définition permet d'obtenir la nouvelle expression de l'équation (1.2.5)

$$\partial_r \Lambda^+ u(r, s, t) = Op(\partial_r \lambda^+) u + \Lambda^+ \partial_r u,$$

ce qui entraîne que l'équation (1.2.4) s'écrit de façon équivalente :

$$\tilde{L}u = \partial_r^2 u + i(\Lambda^- + \Lambda^+) \partial_r u + iOp(\partial_r \lambda^+) u - \Lambda^- \Lambda^+ u = 0. \quad (1.2.6)$$

En identifiant les coefficients dans les deux écritures (1.2.1) et (1.2.6) de l'équation des ondes, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \Lambda^- + \Lambda^+ = -i\kappa_r(s), \\ \Lambda^- \Lambda^+ - iOp(\partial_r \lambda^+) = \partial_t^2 - h^{-1} \partial_s (h^{-1} \partial_s u). \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Rappelons que la formule de représentation intégrale d'un opérateur pseudodifférentiel assure que la connaissance de  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$  est équivalente à la détermination de  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$ . Utilisant les règles

de calcul associées aux opérateurs pseudodifférentiels (cf Taylor [74]), on est capable de réécrire symboliquement le système (1.2.7) et on obtient facilement que

$$\lambda_{-j}^- + \lambda_{-j}^+ = \begin{cases} -i\kappa_r(s) & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.2.8)$$

On voit alors que les relations (1.2.8) rendent possible l'élimination de  $\lambda^-$ . En injectant (1.2.8) dans la forme symbolique du système (1.2.7), on récupère une équation en  $\lambda_{-j}^+$  qui va nous permettre pas à pas de déterminer le symbole de  $\Lambda^+$ . L'équation permet enfin de calculer l'opérateur DtN.

Evidemment, le calcul de tous les symboles  $\lambda_{-j}^+$  n'est pas envisageable. Mais, n'oublions pas que notre but réside dans la construction de conditions aux limites absorbantes d'ordre un ce qui ne nécessite que le calcul des symboles  $\lambda_{-j}^+$ ,  $1 \leq j \leq 1$ .

De plus, suivant un principe fondé sur l'identification des symboles de même degré d'homogénéité, on peut établir une formule de récurrence permettant d'exprimer un symbole quelconque  $\lambda_{-j}^+$  à partir du symbole principal  $\lambda_1^+$ . On a (cf [7])

**Théorème 1.2.4.** *Le symbole principal  $\lambda_1^+$  est donné par l'expression*

$$\lambda_1^+ = (h^{-2}\xi^2 - \omega^2)^{1/2}.$$

Notons à présent  $\lambda_1^+$  par  $\lambda_1$ . Alors, quand  $\lambda_1 \neq 0$ , le symbole principal de  $\mathcal{L}$  admet deux valeurs propres simples  $\lambda_1$  et  $-\lambda_1$ . Quand  $h^{-2}\xi^2 - \omega^2 > 0$ ,  $\lambda_1$  est réel et quand  $h^{-2}\xi^2 - \omega^2 < 0$ ,  $\lambda_1$  est un imaginaire pur. Comme dans [8, 37], on introduit

$$\mathcal{V}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\lambda_1} & 1 \\ 1 & -\frac{\lambda_1}{i\omega} \end{pmatrix} \quad (1.2.9)$$

de telle sorte que

$$\mathcal{V}_0 \mathcal{L}_1 \mathcal{V}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_1. \quad (1.2.10)$$

Posons alors  $W_0 = V_0 U$ . On démontre (voir [74, 37, 8]) qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel  $R_0$  d'ordre 0 tel que

$$\partial_r W_0 = M_1 W_0 + R_0 W_0$$

où  $M_1$  est l'opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 dont le symbole est la matrice diagonale  $\mathcal{M}_1$ . L'équation vérifiée par  $W_0$  s'obtient en factorisant le symbole principal de  $L$ . On peut poursuivre en considérant maintenant les termes d'ordre 0.

Pour cela, on pose  $W_1 = (I + K_{-1}) W_0$  où  $K_{-1}$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1 à déterminer de telle sorte que  $W_1$  est solution de :

$$\partial_r W_1 = (M_1 + M_0) W_1 + R_{-1} W_1. \quad (1.2.11)$$

Dans (1.2.11),  $R_{-1}$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1.

L'opérateur  $K_{-1}$  est déterminé via son symbole  $\mathcal{K}_{-1}$  qu'on calcule de la façon suivante. On calcule  $\partial_r W_1$  grâce à son expression en fonction de  $W_0$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \partial_r W_1 &= \partial_r ((I + K_{-1}) W_0) \\ &= \partial_r K_{-1} W_0 + (I + K_{-1}) \partial_r W_0 \end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant la définition de  $W_1$

$$\partial_r W_1 = \partial_r K_{-1} (I + K_{-1})^{-1} W_1 + (I + K_{-1}) (M_1 + R_0) (I + K_{-1})^{-1} W_1. \quad (1.2.12)$$

Au niveau symbolique, on peut fixer les coefficients de  $\mathcal{K}_{-1}$  imposant que le symbole de  $M_0$  est diagonal. Pour cela, il faut identifier les termes d'ordre 0 dans (1.2.12). On montre ainsi (voir [74]) que  $\mathcal{K}_{-1}$  doit vérifier :

$$\mathcal{K}_{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \mathcal{K}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathcal{K}_{-1}(1, 2)\lambda_1 \\ 2\mathcal{K}_{-1}(2, 1)\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.13)$$

La relation (1.2.13) ne permet de fixer que les termes extradiagonaux de  $\mathcal{K}_{-1}$ . L'opérateur  $K_{-1}$  n'est donc pas unique.

On peut continuer à compléter la diagonalisation en introduisant les inconnues suivantes  $W_2, W_3, \dots, W_m$  définies récursivement par  $W_m = (I + K_{-m}) W_{m-1}$ . L'opérateur  $K_{-m}$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $-m$  qui est déterminé via son symbole  $\mathcal{K}_{-m}$ . Les coefficients de  $\mathcal{K}_{-m}$  sont calculés pour que  $W_m$  soit solution de

$$\partial_r W_m = (M_1 + M_0 + \dots + M_{-m+1}) W_m + R_{-m} W_m$$

où les opérateurs pseudodifférentiels  $M_1, M_0, \dots, M_{-m+1}$  sont tous diagonaux et  $R_{-m}$  est un opérateur régularisant d'ordre  $-m$ . Comme pour  $\mathcal{K}_{-1}$ , seuls les coefficients extradiagonaux des matrices  $\mathcal{K}_{-j}$ ,  $2 \leq j \leq m$ , sont fixés.

## 1.2.2 Une condition d'ordre un : la condition avec courbure

Le procédé de diagonalisation que nous venons de décrire fournit alors un moyen rigoureux de développer des conditions de bord sur la surface  $\Sigma$ . En effet, dans le cas où les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_{-1}$  sont imaginaires purs, les champs  $W_0, W_1, \dots, W_m$  ont pour composantes deux champs associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_{-1}$ . La première composante correspond alors à la partie sortante de l'onde tandis que la seconde est une onde rentrante. En imposant que la seconde composante de

$$(I + K_{-m}) (I + K_{-m+1}) \dots (I + K_{-1}) V_0 U$$

soit nulle sur  $\Sigma$ , on élimine la partie rentrante générée par  $\Sigma$  et on obtient ainsi une condition aux limites artificielle. Cette condition aux limites artificielle correspond à la troncature à l'ordre  $-m$  d'une condition aux limites transparente qui s'écrivait

$$[(I + K_{-\infty}) \dots (I + K_{-m}) \dots (I + K_{-1}) V_0 U]_2 = 0 \text{ sur } \Sigma$$

où  $[w]_2$  désigne la deuxième composante du vecteur  $w$ .

Notre objectif étant de construire des conditions d'ordre peu élevé, limitons nous à une troncature d'ordre  $-1$ . Dans ce cas, une condition aux limites artificielle s'écrit

$$[(I + K_{-1}) V_0 U]_2 = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (1.2.14)$$

La majorité des travaux qui ont utilisé la méthode de M.E. Taylor retiennent l'expression la plus simple des matrices  $\mathcal{K}_{-j}$ , à savoir quand leurs coefficients diagonaux sont nuls. Cette technique est développée par M.E. Taylor uniquement pour diagonaliser le système. Dans ce cas, quels que

soient les coefficients diagonaux de  $\mathcal{K}_{-1}$ , le résultat est le même : les termes de couplage diffèrent mais la partie diagonale est toujours la même.

Dans ce cas, on obtient

$$\mathcal{K}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\kappa(s)\omega^3}{4\lambda_1^4} \\ -\frac{i\kappa(s)\omega}{4\lambda_1^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.15)$$

et la condition aux limites ainsi obtenue est non locale, en raison de la présence de  $\lambda_1$  et de puissances successives de son inverse. Une approche classique consiste alors à localiser (pseudo-localiser) la condition en remplaçant  $\lambda_1$  et les puissances de  $\lambda_1^{-1}$  par des approximations de Taylor (de Padé) sous l'hypothèse haute fréquence  $\omega^2 \gg h^{-2}\xi^2$ . On obtient alors, en appliquant un développement de Taylor d'ordre 1 :

$$\partial_t u + \partial_n u + \frac{\kappa(s)}{2} u = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

La condition fait intervenir des opérateurs différentiels mais on devrait plutôt dire microdifférentiels car elle n'est justifiée que dans le cône de propagation  $\omega^2 \gg h^{-2}\xi^2$ . Cette condition est largement utilisée dans le cas de surfaces courbes. Par la suite, on fera référence à cette condition par le terme C-ABC pour "Curvature ABC".

A présent, il serait intéressant de voir comment cette condition change en considérant des termes diagonaux non-nuls pour  $\mathcal{K}_{-1}$ . On s'intéresse à cette question dans le paragraphe suivant.

### 1.2.3 Une nouvelle famille de conditions aux limites absorbantes

L'idée qui consiste à utiliser une matrice  $\mathcal{K}_{-1}$  dont les coefficients diagonaux sont non nuls a été appliquée dans [15] pour le système de Maxwell en 2D mais seulement d'un point de vue théorique. A notre connaissance, ces conditions n'ont jamais été analysées numériquement. Pour l'équation des ondes acoustiques, on propose de modifier  $\mathcal{K}_{-1}$  comme suit

$$\mathcal{K}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\kappa(s)\omega^3}{4\lambda_1^4} \\ -\frac{i\kappa(s)\omega}{4\lambda_1^2} & \frac{\gamma(s)}{\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad (1.2.16)$$

où  $\gamma$  est un paramètre dépendant seulement de l'abscisse curviligne  $s$ . Nous conservons 0 pour le terme diagonal de la première ligne car il n'intervient pas dans l'écriture de la condition. En effet, seule nous intéresse la seconde composante de  $(I + K_{-1}) V_0 \mathbf{U}$  dans (1.2.14). On obtient ainsi

**Théorème 1.2.5.** *Une famille de conditions aux limites absorbantes du second-ordre dépendant d'un paramètre est donnée par*

$$\partial_t (\partial_n u + \partial_t u) = \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) \partial_n u - \left( \frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s) \right) \partial_t u \text{ sur } \Sigma. \quad (1.2.17)$$

*Démonstration.* On rappelle que la condition de bord du premier ordre est donnée par

$$[(I + K_{-1}) V_0 \mathbf{U}]_2 = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (1.2.18)$$

Le symbole de l'opérateur correspondant est

$$\sigma((I + K_{-1})V_0) = ((\mathcal{I}_2 + \mathcal{K}_{-1})\mathcal{V}_0) + \mathcal{R}_{-2},$$

où  $\mathcal{R}_{-2} \in S^{-2}$ . Par conséquent, la troncature de  $\sigma((I + K_{-1})V_0)$  dans  $S^{-1}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \tau_{-1}(\sigma((I + K_{-1})V_0)) &= ((\mathcal{I}_2 + \mathcal{K}_{-1})\mathcal{V}_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\lambda_1} - \frac{i\kappa(s)\omega^3}{4\lambda_1^4} & 1 + \frac{\kappa(s)\omega^2}{4\lambda_1^3} \\ \frac{\kappa(s)\omega^2}{4\lambda_1^3} + 1 + \frac{\gamma(s)}{\lambda_1} & -\frac{i\kappa(s)\omega}{4\lambda_1^2} - \frac{\lambda_1}{i\omega} - \frac{\gamma(s)}{i\omega} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

En utilisant un développement de Taylor du premier ordre noté par  $(\cdot)_1$  pour  $\omega \gg h^{-1}\xi$ , on obtient

$$(\tau_{-1}(\mathcal{I}_2 + \mathcal{K}_{-1})\mathcal{V}_0)_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\kappa(s)}{4\omega} & 1 + \frac{i\kappa(s)}{4\omega} \\ 1 + \frac{i\kappa(s)}{4\omega} + \frac{\gamma(s)}{i\omega} & \frac{i\kappa(s)}{4\omega} - 1 - \frac{\gamma(s)}{i\omega} \end{pmatrix}. \quad (1.2.20)$$

Ensuite, sachant que  $U = (v, u)$  avec  $\partial_t v + \partial_n u = 0$  sur  $\Sigma$ , on a

$$\partial_t(\partial_n u + \partial_t u) = \left(\frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s)\right)\partial_n u - \left(\frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s)\right)\partial_t u \text{ sur } \Sigma.$$

□

On remarque que, quand  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ , on a

$$\partial_t \left( \partial_n u + \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} u \right) = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (1.2.21)$$

En reprenant les calculs, on voit qu'on peut se débarrasser du premier  $\partial_t$  dans (1.2.21). En effet, lorsque  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ , on a

$$(\tau_{-1}(\mathcal{I}_2 + \mathcal{K}_{-1})\mathcal{V}_0)_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\kappa(s)}{4\omega} & 1 + \frac{i\kappa(s)}{4\omega} \\ 1 & \frac{i\kappa(s)}{2\omega} - 1 \end{pmatrix}$$

et la condition de bord correspondante s'écrit :

$$\partial_n u + \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} u = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

On retrouve donc la C-ABC pour  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ .

Ainsi, sauf dans le cas où  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ , on a construit une famille de conditions d'ordre deux.

Avant de s'intéresser à la propriété (3) définie en introduction, on souhaite revenir sur la méthode de construction que nous avons utilisée. En fait, il aurait semblé plus naturel d'appliquer la technique de factorisation de Nirenberg [65], en particulier parce qu'elle est bien adaptée aux cas des équations scalaires comme l'équation des ondes acoustiques. Pourtant, si on se fixe le même degré d'approximations au niveau des symboles, cette technique n'aboutit qu'à la construction de la condition C-ABC alors que la technique que nous avons utilisée nous permet d'obtenir une famille de CLA.

Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse à l'analyse mathématique du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty); \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega; \\ u = 0 \text{ ou } \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty); \\ \partial_t (\partial_n u + \partial_t u) = \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) \partial_n u - \left( \frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s) \right) \partial_t u & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty). \end{array} \right. \quad (1.2.22)$$

### 1.3 Analyse mathématique directe

On considère ici le problème mixte plus général : trouver  $u$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty); \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega; \\ u = 0 \text{ ou } \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty); \\ \partial_t (\partial_n u + \partial_t u) = \alpha(x) \partial_n u - \beta(x) \partial_t u & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty). \end{array} \right. \quad (1.3.1)$$

Soit  $\Omega$  un domaine borné de frontière  $\partial\Omega = \Gamma \cup \Sigma$  régulière, avec  $\Gamma \cap \Sigma = \emptyset$  (voir Fig. 1.1). Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont de  $L^\infty(\Sigma)$ . On rappelle que dans le cas de la CLA construite à la section 1.2, on a

$$\alpha(x) = \frac{\kappa(x)}{4} - \gamma(x), \quad \beta(x) = \frac{\kappa(x)}{4} + \gamma(x)$$

où  $\kappa$  est la courbure sur  $\Sigma$  et  $\gamma$  un paramètre sur  $\Sigma$  qu'on suppose dans  $L^\infty(\Sigma)$ .

On propose d'étudier le problème (1.3.1) en utilisant la théorie de Hille-Yosida sans pour le moment faire d'hypothèse sur le signe de  $\alpha$  et  $\beta$ . C'est pourquoi, nous allons considérer un problème équivalent que l'on va définir en deux étapes. Tout d'abord, on réécrit (1.3.1) en un système du premier ordre en temps. On introduit une inconnue auxiliaire  $v$  définie par  $v = \partial_t u$ . Le couple  $U = (u, v)$  est alors solution dans  $\Omega \times (0, +\infty)$  de

$$\frac{dU}{dt} = AU, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

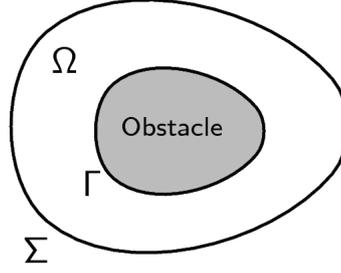


FIG. 1.1 – Domaine étudié

avec les conditions de bord suivantes

$$u = 0 \text{ ou } \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, +\infty)$$

et

$$\partial_t (\partial_n u + v) = \alpha(x) \partial_n u - \beta(x) v \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty).$$

Pour contrôler le signe des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ , on introduit une inconnue auxiliaire  $U^\sharp$  définie par  $U^\sharp = e^{-\delta t} U$  et on suppose par la suite que  $\delta$  vérifie

$$\delta > \max(0, \max_{x \in \Sigma} \alpha(x), -\min_{x \in \Sigma} \beta(x)). \quad (1.3.3)$$

On peut voir que  $U^\sharp = (u^\sharp, v^\sharp)$  est solution de

$$\begin{cases} \frac{dU^\sharp}{dt} = A_\delta U^\sharp \text{ dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u^\sharp = 0 \text{ ou } \partial_n u^\sharp = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, +\infty) \\ \partial_t (\partial_n u^\sharp + v^\sharp) = (\alpha(x) - \delta) \partial_n u^\sharp - (\beta(x) + \delta) v^\sharp \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (1.3.4)$$

avec

$$A_\delta = -\delta Id + A. \quad (1.3.5)$$

Sous l'hypothèse (1.3.3), on a toujours sur  $\Sigma$

$$\alpha(x) - \delta < 0 \text{ et } \beta(x) + \delta > 0. \quad (1.3.6)$$

Dans la suite, on se concentre sur le problème (1.3.5) et on s'intéresse à sa solution dans des espaces de Hilbert convenables.

Comme les cas d'une condition de bord de Dirichlet et d'une condition de bord de Neumann sur  $\Gamma$  sont assez différents, on aborde les deux cas dans deux sous-sections différentes.

### 1.3.1 Une condition de bord de Dirichlet sur $\Gamma$

Nous nous intéressons ici au cas d'une condition de Dirichlet ( $u = 0$ ) sur  $\Gamma$ . Introduisons tout d'abord l'espace produit  $H_D$  défini par

$$H_D = H_1 \times H_2$$

avec

$$H_1 = \{h_1 \in H^1(\Omega), \Delta h_1 \in L^2(\Omega), h_1 = 0 \text{ sur } \Gamma, \partial_n h_1 \in L^2(\Sigma)\}$$

et

$$H_2 = \{h_2 \in H^1(\Omega), h_2 = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On munit  $H_D$  de la norme hilbertienne du graphe

$$\|(h_1, h_2)\|_{H_D} = \left( \|h_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta h_1\|_{L^2}^2 + \|\partial_n h_1\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|h_2\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_2\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Soit  $V_\delta$  l'espace produit défini par

$$V_\delta = \{(v_1, v_2) \in H_D, A_\delta(v_1, v_2) \in H_D, \partial_n v_2 + \Delta v_1 = \alpha(x)\partial_n v_1 - \beta(x)v_2 \text{ sur } \Sigma\}.$$

L'espace  $V_\delta$  correspond au domaine de l'opérateur  $A_\delta$ . En imposant  $A_\delta(v_1, v_2) \in H_D$ , la condition sur  $\Sigma$  est bien définie dans  $L^2(\Sigma)$ . En effet,  $A_\delta(v_1, v_2) \in H_D$  implique, comme  $A_\delta = -\delta Id + A$ ,  $v_2 \in H^1(\Omega)$  et  $\Delta v_2 \in L^2(\Omega)$  et  $\Delta v_1 \in H^1(\Omega)$ . On peut donc donner un sens à  $\partial_n v_2|_\Sigma$  dans  $L^2(\Sigma)$  et à  $\Delta v_1|_\Sigma$  dans  $H^{1/2}(\Sigma)$ . De plus comme  $(v_1, v_2) \in H_D$  et comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $L^\infty(\Sigma)$ , on a  $\alpha(x)\partial_n v_1$  et  $\beta(x)v_2$  dans  $L^2(\Sigma)$ . Avant de poursuivre, nous rappelons la formule de Green que nous allons utiliser ([26]) : pour tout  $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  tel que  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ , on a

$$\int_\Omega \Delta uv \, dx = - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \langle \partial_n u, v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (1.3.7)$$

On démontre alors le résultat préliminaire suivant :

**Lemme 1.3.1.** *Pour tout  $h \in H_D$ , la quantité*

$$\begin{aligned} \|h\|_\delta = & \left( \int_\Omega (|\nabla(h_2 - \delta h_1)|^2 + |\Delta h_1 - \delta h_2|^2) \, dx \right. \\ & \left. + \int_\Sigma \frac{1}{2\delta - \alpha(x) + \beta(x)} |(\alpha - \delta)\partial_n h_1 - (\beta + \delta)h_2|^2 \, d\sigma \right)^{1/2} \end{aligned}$$

*est une norme sur  $H_D$  équivalente à la norme  $\|h\|_{H_D}$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, on remarque que  $\|h\|_\delta \geq 0$  pour tout  $h$  dans  $H_D$  car nous avons choisi  $\delta$  de telle sorte que  $2\delta - \alpha(x) + \beta(x) > 0$  pour tout  $x$  sur  $\Sigma$ .

$\|\cdot\|_\delta$  s'écrit comme la somme de semi-normes sur  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Sigma)$ . Elle définit donc une semi-norme sur  $H$ .

Pour montrer que  $\|\cdot\|_\delta$  est une norme sur  $H_D$ , on doit juste montrer que

$$\|h\|_\delta = 0 \Rightarrow h = 0.$$

Soit  $h = (h_1, h_2) \in H_D$  tel que  $\|h\|_\delta = 0$ . Alors  $h$  est solution de

$$\begin{cases} \nabla(h_2 - \delta h_1) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Delta h_1 - \delta h_2 = 0 \text{ dans } \Omega \\ h_1 = 0 \text{ et } h_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \\ (\alpha - \delta)\partial_n h_1 - (\beta + \delta)h_2 = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

Vu que  $\Delta h_1 - \delta h_2 = 0$  dans  $\Omega$ , on en déduit que

$$\int_{\Omega} (\Delta h_1 - \delta h_2) h_2 dx = 0.$$

En utilisant la formule de Green (1.3.7) et le fait que  $h_2 = 0$  sur  $\Gamma$ , on obtient

$$-\int_{\Omega} \nabla h_1 \cdot \nabla h_2 dx + \int_{\Sigma} \partial_n h_1 h_2 d\sigma - \delta \int_{\Omega} |h_2|^2 dx = 0.$$

On sait que  $\nabla (h_2 - \delta h_1) = 0$  dans  $\Omega$  et que  $(\alpha - \delta) \partial_n h_1 - (\beta + \delta) h_2 = 0$  sur  $\Sigma$ . On a donc

$$-\delta \int_{\Omega} (|\nabla h_1|^2 + |h_2|^2) dx + \int_{\Sigma} \frac{\beta + \delta}{\alpha - \delta} |h_2|^2 d\sigma = 0.$$

Comme  $\beta + \delta > 0$  et  $\alpha - \delta < 0$ , on obtient  $\nabla h_1 = 0$  dans  $\Omega$  et  $h_2 = 0$  dans  $\Omega$ . Sachant que  $\nabla h_1 = 0$  dans  $\Omega$  on déduit que  $h_1$  est constant dans  $\Omega$  connexe. Comme  $h_1 = 0$  sur  $\Gamma$ , on obtient finalement  $h_1 = 0$  dans  $\Omega$ .

Par conséquent  $h = 0$  dans  $\Omega$ , ce qui prouve que  $\|\cdot\|_{\delta}$  est une norme sur  $H_D$ .

A présent, montrons que  $\|\cdot\|_{\delta}$  est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H_D}$  sur  $H_D$ .

Comme les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  sont régulières, on obtient facilement qu'il existe une constante positive  $C_1$  telle que

$$\forall h \in H_D, \|h\|_{\delta} \leq C_1 \|h\|_{H_D}.$$

Réciproquement, on doit montrer qu'il existe une constante positive  $C_2$  telle que

$$\forall h \in H_D, \|h\|_{H_D} \leq C_2 \|h\|_{\delta}.$$

Comme  $h_1 = h_2 = 0$  sur  $\Gamma$  et  $mes(\Gamma) \neq 0$ , on peut utiliser l'inégalité de Poincaré ([26]) qui stipule

$$\exists C > 0, \|h_1\|_{L^2} + \|\nabla h_1\|_{L^2} \leq C \|\nabla h_1\|_{L^2}. \quad (1.3.8)$$

On obtient finalement qu'il faut montrer l'existence d'une constante positive  $C_2$  telle que

$$\forall h \in H_D, \left( \|\nabla h_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta h_1\|_{L^2}^2 + \|\partial_n h_1\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|h_2\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \|h\|_{\delta}. \quad (1.3.9)$$

Supposons que l'inégalité (1.3.9) soit fautive. Alors, il existe une suite  $(h_{1,k}, h_{2,k})$  dans  $H_D$  telle que

$$\left( \|\nabla h_{1,k}\|_{L^2}^2 + \|\Delta h_{1,k}\|_{L^2}^2 + \|\partial_n h_{1,k}\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|h_{2,k}\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} > k \|(h_{1,k}, h_{2,k})\|_{\delta}. \quad (1.3.10)$$

L'inégalité (1.3.10) implique que  $\left( \|\nabla h_{1,k}\|_{L^2}^2 + \|\Delta h_{1,k}\|_{L^2}^2 + \|\partial_n h_{1,k}\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|h_{2,k}\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \neq 0$  et qu'on peut donc extraire une sous-suite, notée également  $(h_{1,k}, h_{2,k})$ , qui converge faiblement vers  $(h_1, h_2)$  dans  $H_D$ . De plus, (1.3.10) implique que  $\|(h_{1,k}, h_{2,k})\|_{\delta} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi on a

$$\begin{cases} \nabla(h_{2,k} - \delta h_{1,k}) \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega); \\ \Delta h_{1,k} - \delta h_{2,k} \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega); \\ (\alpha - \delta) \partial_n h_{1,k}|_{\Sigma} - (\beta + \delta) h_{2,k}|_{\Sigma} \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Sigma). \end{cases}$$

On peut donc en déduire que

$$\nabla(h_2 - \delta h_1) = 0 \text{ dans } \Omega, \Delta h_1 - \delta h_2 = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } (\alpha - \delta)\partial_n h_1|_\Sigma - (\beta + \delta)h_2|_\Sigma = 0.$$

On a donc

$$h_2 - \delta h_1 = \text{cste dans } \Omega, \Delta h_1 = \delta h_2 \text{ dans } \Omega \text{ et } (\alpha - \delta)\partial_n h_1|_\Sigma = (\beta + \delta)h_2|_\Sigma.$$

Or, on sait que  $h_1 = h_2 = 0$  sur  $\Gamma$ . Ainsi,  $h_2 = \delta h_1$ .

De plus, d'une part,

$$\int_{\Omega} \Delta h_1 h_2 = \delta \int_{\Omega} \text{mega} \Delta h_1 h_1$$

et en utilisant la formule de Green (1.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta h_1 h_2 &= -\delta \int_{\Omega} \text{mega} \nabla h_1 \nabla h_1 + \delta \int_{\Sigma} \partial_n h_1 h_1 \\ &= -\delta \|\nabla h_1\|_{L^2}^2 + \int_{\Sigma} \frac{\beta + \delta}{\alpha - \delta} |h_2|^2 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

car sur  $\Sigma$ ,  $\alpha(x) - \delta < 0$  et  $\beta(x) + \delta > 0$ .

D'autre part,

$$\int_{\Omega} \Delta h_1 h_2 = \delta \|h_2\|_{L^2}^2 \geq 0.$$

Ainsi,  $\int_{\Omega} \Delta h_1 h_2 = 0$  et donc  $\|h_2\|_{L^2}^2 = 0$  et  $\|\nabla h_1\|_{L^2}^2 = 0$ . Par conséquent,  $h_2 = 0$  dans  $\Omega$  et  $h_1$  est constant dans  $\Omega$ . Or comme  $h_1 = 0$  sur  $\Gamma$ ,  $h_1 = 0$  dans  $\Omega$  ce qui contredit (1.3.10) et achève donc la preuve de l'équivalence de  $\|\cdot\|_{\delta}$  et  $\|\cdot\|_{H_D}$  sur  $H_D$ .  $\square$

Dans la suite, on notera par  $(\cdot, \cdot)_{\delta}$  le produit scalaire dérivé de la norme  $\|\cdot\|_{\delta}$ .

**Lemme 1.3.2.** *Pour tout  $v \in V_{\delta}$ , on a*

$$(A_{\delta}v, v)_{\delta} \leq 0.$$

*Démonstration.* Par définition de  $A_{\delta}$ ,  $A_{\delta}v = (-\delta v_1 + v_2, -\delta v_2 + \Delta v_1)$ . On pose

$$\begin{cases} w_1 = v_2 - \delta v_1; \\ w_2 = \Delta v_1 - \delta v_2. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} (A_{\delta}v, v)_{\delta} &= \int_{\Omega} \nabla(w_2 - \delta w_1) \cdot \nabla w_1 \, dx + \int_{\Omega} w_2 (\Delta w_1 - \delta w_2) \, dx + \\ &\int_{\Sigma} \frac{1}{2\delta - \alpha + \beta} ((\alpha - \delta) \partial_n w_1 - (\beta + \delta) w_2) ((\alpha - \delta) \partial_n v_1 - (\beta + \delta) v_2) \, d\sigma. \end{aligned}$$

On développe et on utilise la formule de Green (1.3.7)

$$\begin{aligned} (A_{\delta}v, v)_{\delta} &= -\delta \int_{\Omega} (|\nabla w_1|^2 + |w_2|^2) \, dx + \int_{\Omega} \nabla w_1 \cdot \nabla w_2 \, dx \\ &- \int_{\Omega} \nabla w_1 \cdot \nabla w_2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n w_1 w_2 \, d\sigma \\ &+ \int_{\Sigma} \frac{1}{2\delta - \alpha + \beta} ((\alpha - \delta) \partial_n w_1 - (\beta + \delta) w_2) ((\alpha - \delta) \partial_n v_1 - (\beta + \delta) v_2) \, d\sigma. \end{aligned}$$

De plus, dans  $V_\delta$ , on a  $v_1|_\Gamma = v_2|_\Gamma = w_1|_\Gamma = w_2|_\Gamma = 0$ , et sur  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} (\alpha - \delta) \partial_n v_1 - (\beta + \delta) v_2 &= \alpha \partial_n v_1 - \beta v_2 - \delta \partial_n v_1 - \delta v_2; \\ &= \partial_n v_2 + \Delta v_1 - \delta \partial_n v_1 - \delta v_2; \\ &= \partial_n w_1 + w_2. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} (A_\delta v, v)_\delta &= -\delta \int_\Omega (|\nabla w_1|^2 + |w_2|^2) dx + \int_\Sigma \partial_n w_1 w_2 d\sigma \\ &\quad - \int_\Sigma \frac{1}{2\delta - \alpha + \beta} ((\alpha - \delta) \partial_n w_1 - (\beta + \delta) w_2) (\partial_n w_1 + w_2) d\sigma. \end{aligned}$$

Maintenant, on développe l'intégrale sur  $\Sigma$

$$\begin{aligned} (A_\delta v, v)_\delta &= -\delta \int_\Omega (|\nabla w_1|^2 + |w_2|^2) dx + \int_\Sigma \partial_n w_1 w_2 d\sigma + \int_\Sigma \frac{\alpha - \delta}{2\delta - \alpha + \beta} |\partial_n w_1|^2 d\sigma \\ &\quad - \int_\Sigma \frac{\beta + \delta}{2\delta - \alpha + \beta} |w_2|^2 d\sigma + \int_\Sigma \frac{1}{2\delta - \alpha + \beta} [(\alpha - \delta) \partial_n w_1 w_2 - (\beta + \delta) \partial_n w_1 w_2] d\sigma. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que pour tout  $v$  dans  $V_\delta$ ,

$$(A_\delta v, v)_\delta = -\delta \int_\Omega (|\nabla w_1|^2 + |w_2|^2) dx + \int_\Sigma \frac{\alpha - \delta}{2\delta - \alpha + \beta} |\partial_n w_1|^2 d\sigma - \int_\Sigma \frac{\beta + \delta}{2\delta - \alpha + \beta} |w_2|^2 d\sigma.$$

Enfin, par définition de  $\delta$ ,  $\delta > 0$ ,  $2\delta - \alpha + \beta > 0$ ,  $\alpha - \delta < 0$  et  $\beta + \delta > 0$ .

$(A_\delta v, v)_\delta$  est donc la somme de termes négatifs ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

Il nous reste à montrer le lemme suivant

**Lemme 1.3.3.** *L'opérateur  $A_\delta$  est maximal sur son domaine  $V_\delta$ .*

*Démonstration.* Etant donné  $f = (f_1, f_2)$  dans  $H_D$ , on étudie le problème mixte suivant : trouver  $v \in V_\delta$  tel que  $(A_\delta - I)v = f$ .

Par définition de  $A_\delta$ , on cherche  $v = (v_1, v_2) \in V_\delta$  tel que

$$\begin{cases} -\delta v_1 + v_2 - v_1 = f_1 \text{ dans } \Omega; \\ -\delta v_2 + \Delta v_1 - v_2 = f_2 \text{ dans } \Omega; \\ v_1 = v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ \partial_n v_2 + \Delta v_1 = \alpha \partial_n v_1 - \beta v_2 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (1.3.11)$$

Tout d'abord, on suppose que le problème (1.3.11) admet une solution dans  $V_\delta$ . Alors, en réécrivant  $v_2$  grâce à l'équation

$$v_2 = f_1 + (\delta + 1) v_1 \text{ dans } \Omega,$$

on obtient que  $v_1$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + (\delta + 1)^2 v_1 = \tilde{f} \text{ dans } \Omega; \\ v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ \partial_n v_1 = \tilde{g} - \frac{\beta + \delta + 1}{\delta - \alpha + 1} (\delta + 1) v_1 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (1.3.12)$$

avec

$$\tilde{f} := -(f_2 + (\delta + 1) f_1) \text{ dans } H^1(\Omega)$$

et

$$\tilde{g} := -\frac{1}{\delta - \alpha + 1} (\partial_n f_1 + f_2 + (\delta + \beta + 1) f_1) \text{ dans } L^2(\Sigma).$$

Nous allons maintenant démontrer que, pour tout  $f$  dans  $H_D$ , le problème (1.3.12) admet une solution  $v_1$  telle que le couple  $(v_1, v_2) = (v_1, f_1 + (\delta + 1)v_1)$  appartienne à  $V_\delta$  et soit solution de (1.3.11). Montrons tout d'abord l'existence d'une solution  $v_1$  de (1.3.12) pour tout  $\tilde{f}$  donné dans  $H^1(\Omega)$  et  $\tilde{g}$  donné dans  $L^2(\Sigma)$ . Pour démontrer ce résultat, on utilise une approche variationnelle. Soit  $H_\Gamma^1(\Omega)$  l'espace défini par

$$H_\Gamma^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_\Gamma = 0\}$$

On munit  $H_\Gamma^1(\Omega)$  de la norme  $\|\cdot\|$  définie par

$$\forall v \in H_\Gamma^1(\Omega), \|v\| = \left( \int_\Omega (|\nabla v|^2 + (\delta + 1)^2 |v|^2) dx + (\delta + 1) \int_\Sigma \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} |v|^2 d\sigma \right)^{1/2}, \quad (1.3.13)$$

équivalente à la norme usuelle sur  $H^1(\Omega)$  puisque  $(\delta + 1)$ ,  $(\delta + \beta + 1)$  et  $(\delta - \alpha + 1)$  sont des quantités positives par définition de  $\delta$ .

Soit  $\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions tests défini par

$$\mathcal{T}(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \varphi|_\Gamma = 0\}$$

$\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H_\Gamma^1(\overline{\Omega})$  et si on suppose que le problème (1.3.12) a une solution, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), - \int_\Omega \Delta v_1 \varphi dx + (\delta + 1)^2 \int_\Omega v_1 \varphi dx = \int_\Omega \tilde{f} \varphi dx.$$

En utilisant la formule de Green (1.3.7), on obtient

$$\forall \varphi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \int_\Omega \nabla v_1 \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n v_1 \varphi d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_\Omega v_1 \varphi dx = \int_\Omega \tilde{f} \varphi dx.$$

De plus,  $\varphi|_\Gamma = 0$ . Ainsi,

$$\forall \varphi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \int_\Omega \nabla v_1 \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Sigma \partial_n v_1 \varphi d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_\Omega v_1 \varphi dx = \int_\Omega \tilde{f} \varphi dx.$$

Ensuite on utilise le fait que  $\partial_n v_1 = \tilde{g} - \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} (\delta + 1) v_1$  sur  $\Sigma$  et on obtient  $\forall \varphi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})$ ,

$$\int_\Omega \nabla v_1 \cdot \nabla \varphi dx + (\delta + 1) \int_\Sigma \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_\Omega v_1 \varphi dx = \int_\Omega \tilde{f} \varphi dx + \int_\Sigma \tilde{g} \varphi d\sigma. \quad (1.3.14)$$

Soit  $a(\cdot, \cdot)$  la forme bilinéaire définie par

$$a(v_1, \varphi) = \int_\Omega \nabla v_1 \cdot \nabla \varphi dx + (\delta + 1) \int_\Sigma \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_\Omega v_1 \varphi dx.$$

$a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $H_{\Gamma}^1(\Omega) \times H_{\Gamma}^1(\Omega)$ ,  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ -coercive, comme on a muni  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$  de la norme  $\|\cdot\|$  définie par (1.3.13).

Soit  $l(\cdot)$  la forme linéaire définie par

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} \tilde{f}\varphi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma.$$

Comme le couple  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  appartient à  $H^1(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ ,  $l(\cdot)$  est continue sur  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ .

$\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ , ainsi la formulation (1.3.14) peut être étendue à  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$  et toutes les solutions  $v_1$  de (1.3.12) vérifient  $\forall \varphi \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla \varphi \, dx + (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi \, d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_{\Omega} v_1 \varphi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f}\varphi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma.$$

Réciproquement, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème

$$\forall \varphi \in H_{\Gamma}^1(\Omega), a(v_1, \varphi) = l(\varphi)$$

admet une unique solution  $v_1$  dans  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ . En particulier,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_{\Gamma}^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla \varphi \, dx + (\delta + 1)^2 \int_{\Omega} v_1 \varphi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f}\varphi \, dx.$$

On en déduit donc que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle (\delta + 1)^2 v_1 - \Delta v_1 - \tilde{f}, \varphi \rangle = 0,$$

ce qui signifie que

$$(\delta + 1)^2 v_1 - \Delta v_1 = \tilde{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Cette identité nous permet de donner un sens à  $\Delta v_1$  dans  $H^1(\Omega)$ . Ainsi,  $\partial_n v_1|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et on a aussi  $\forall \varphi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla \varphi \, dx + (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi \, d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_{\Omega} v_1 \varphi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f}\varphi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma.$$

En utilisant la formule de Green (2.2.6), on obtient,  $\forall \varphi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta v_1 \varphi \, dx + (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi \, d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_{\Omega} v_1 \varphi \, dx \\ & + \langle \partial_n v_1, \varphi \rangle_{-1/2, 1/2} = \int_{\Omega} \tilde{f}\varphi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma \end{aligned}$$

*i.e.*

$$\forall \varphi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi \, d\sigma + \langle \partial_n v_1, \varphi \rangle_{-1/2, 1/2} = \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma.$$

A présent, on a  $\varphi|_{\Gamma} = 0$  et on obtient sur  $\Sigma$

$$\langle \partial_n v_1 + (\delta + 1) \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 - \tilde{g}, \varphi \rangle_{-1/2, 1/2} = 0,$$

ce qui signifie que

$$\partial_n v_1 + (\delta + 1) \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 = \tilde{g} \text{ sur } \Sigma.$$

$v_1$  est alors solution de (1.3.12) puisque la condition  $v_1|_{\Gamma} = 0$  est contenue dans la définition de  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ .

Comme  $v_1$  et  $f_1$  sont dans  $H^1(\Omega)$ , on en déduit l'existence de  $v_2$  dans  $H^1(\Omega)$ . Il est de plus évident que  $\delta v_2 + \Delta v_1 - v_2 = f_2$  sur  $\Omega$  et  $\partial_n v_2 + \Delta v_1 = \alpha \partial_n v_1 - \beta v_2$  sur  $\Sigma$ .

Pour montrer que  $(v_1, v_2)$  est dans  $V_{\delta}$ , il nous reste donc à vérifier que les couples  $(v_1, v_2)$  et  $A_{\delta}(v_1, v_2)$  sont dans  $H_D$ . Nous avons déjà vu que  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à  $H^1(\Omega)$ , que  $\Delta v_1 \in L^2(\Omega)$  et que  $v_1|_{\Gamma} = 0$ . Pour que  $(v_1, v_2)$  soit dans  $H_D$ , il suffit que  $\partial_n v_1 \in L^2(\Sigma)$  et que  $v_2|_{\Gamma} = 0$ . La deuxième égalité est évidente en utilisant la définition de  $v_2$  et le fait que  $f_1|_{\Gamma} = v_1|_{\Gamma} = 0$ . De plus,

$$\partial_n v_1 + (\delta + 1) \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 = \tilde{g} \text{ sur } \Sigma.$$

Comme  $v_1$  est dans  $H^1(\Omega)$ ,  $v_1|_{\Sigma} \in H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\Sigma)$ . De plus, puisque  $(f_1, f_2) \in H_D$ ,  $\tilde{g} \in L^2(\Sigma)$ . Ensuite, on obtient que  $\partial_n v_1|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$ . On a donc bien  $(v_1, v_2) \in H_D$ .

Pour démontrer que  $A_{\delta}(v_1, v_2)$  est aussi dans  $H_D$ , on doit vérifier que  $\Delta v_2 \in L^2(\Omega)$ ,  $\partial_n v_2|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$  et  $\Delta v_1 = 0$  sur  $\Gamma$ . En utilisant

$$\partial_n v_2 + \Delta v_1 = \alpha(x) \partial_n v_1 - \beta(x) v_2 \text{ sur } \Sigma.$$

et  $\partial_n v_1|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$ ,  $v_2 \in H^1(\Omega)$  et  $\Delta v_1 \in H^1(\Omega)$ , on obtient  $\partial_n v_2|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$ . De plus, on sait que  $v_2 = f_1 + (\delta + 1) v_1$  dans  $\Omega$  et que  $\Delta v_1$  et  $\Delta f_1$  sont dans  $L^2(\Omega)$ . On peut donc en conclure que  $\Delta v_2$  est dans  $L^2(\Omega)$ . Enfin, on sait que  $\Delta v_1 = f_2 + (\delta + 1) v_2$  dans  $\Omega$  et  $v_2|_{\Gamma} = v_1|_{\Gamma} = 0$  donc  $\Delta v_1|_{\Gamma} = 0$ .

Par conséquent, on a montré que le couple  $(v_1, v_2)$  est dans  $V_{\delta}$  ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

On obtient finalement le théorème suivant sur le caractère bien-posé du problème.

**Théorème 1.3.4.** *Soit  $(u_0, u_1)$  dans  $V_0$ . Le problème (1.3.1) admet une unique solution  $u$  telle que*

$$(u, \partial_t u) \in C^1([0, +\infty[; H_D) \cap C^0([0, +\infty[; V_0). \quad (1.3.15)$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème repose sur la théorie de Hille-Yosida.

Les deux lemmes précédents montrent que l'opérateur  $A_{\delta}$  est un opérateur maximal dissipatif sur son domaine  $V_{\delta}$ . On en conclut que le problème (1.3.4) admet une unique solution  $U^{\sharp} = (u^{\sharp}, v^{\sharp})$  telle que

$$(u^{\sharp}, v^{\sharp}) \in C^1([0, +\infty[; H_D) \cap C^0([0, +\infty[; V_{\delta}). \quad (1.3.16)$$

$A_{\delta}$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions  $Z_{\delta}(t)$ . Ainsi, on peut définir la solution d'énergie finie de (1.3.4) avec des données initiales  $(u_0, u_1)$  dans  $V_{\delta}$  et

$$(u^{\sharp}, v^{\sharp}) = Z_{\delta}(t)(u_0, u_1) \in C^1([0, +\infty[; H_D) \cap C^0([0, +\infty[; V_{\delta}).$$

Pour  $\delta = 0$  on retrouve l'opérateur  $A$ , associé au problème de référence (1.3.1). Ainsi,  $A$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe continu  $Z(t) = e^{\delta t} Z_{\delta}(t)$ .

De plus, on rappelle que les problèmes (1.3.1) avec  $(u_0, u_1) \in V_0$  et (1.3.4) avec  $(u_0, u_1)$  dans  $V_{\delta}$  sont équivalents. En effet,  $(u, \partial_t u)$  est solution de (1.3.1) si et seulement si  $(u^{\sharp}, v^{\sharp})$  est solution

de (1.3.4). Par conséquent, on a démontré l'existence d'une unique solution  $(u, \partial_t u)$  au problème (1.3.1). L'application  $t \mapsto e^{-\delta t}$  étant dans  $C^\infty([0, +\infty[)$ , on a

$$\begin{aligned} (u, \partial_t u) &\in C^1([0, +\infty[; H_D) \cap C^0([0, +\infty[; V_0) \Leftrightarrow \\ (u^\#, v^\#) &\in C^1([0, +\infty[; H_D) \cap C^0([0, +\infty[; V_\delta), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

### 1.3.2 Condition de bord de Neumann sur $\Gamma$

Dans le cas d'une condition de bord de Neumann sur  $\Gamma$ , on doit supposer que

$$\begin{cases} \alpha(x) \neq 0, \forall x \in \Sigma; \\ \beta(x) \neq 0, \forall x \in \Sigma; \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ sont continues et bornées sur } \Sigma. \end{cases} \quad (1.3.17)$$

La continuité de  $\alpha$  et  $\beta$  et le fait que ces deux fonctions ne peuvent pas s'annuler impliquent de manière évidente que  $\alpha$  et  $\beta$  sont de signe constant.

Pour assurer l'unicité de la solution du problème (1.3.1), on établit dans un premier temps une propriété d'invariance. On remarque d'abord que si  $u$  est une solution régulière de (1.3.1), on a

$$\int_{\Omega} (\partial_t^2 u - \Delta u) 1 \, dx = 0$$

ce qui entraîne

$$\int_{\Omega} \partial_t^2 u \, dx = \int_{\Sigma} \partial_n u \, d\sigma$$

en tenant compte du fait que  $\partial_n u = 0$  sur  $\Gamma$ .

De plus, sur  $\Sigma$ ,  $\alpha \partial_n u = \partial_t (\partial_t u + \partial_n u) + \beta \partial_t u$ . On obtient donc, comme  $\alpha(x) \neq 0$  pour tout  $x$  sur  $\Sigma$ ,

$$\int_{\Omega} \partial_t^2 u \, dx = \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (\partial_t (\partial_t u + \partial_n u) + \beta \partial_t u) \, d\sigma.$$

On en déduit donc

$$\partial_t \left[ \int_{\Omega} \partial_t u \, dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (\partial_t u + \partial_n u + \beta u) \, d\sigma \right] = 0.$$

Ainsi, pour tout  $t$ , on a la relation :

$$\int_{\Omega} \partial_t u \, dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (\partial_t u + \partial_n u + \beta u) \, d\sigma = \int_{\Omega} u_1 \, dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (u_1 + \partial_n u_0 + \beta u_0) \, d\sigma. \quad (1.3.18)$$

Soit maintenant  $X$  l'espace de Hilbert défini par

$$X = \left\{ (h_1, h_2) \in (H^1(\Omega))^2, \Delta h_1 \in L^2(\Omega), \partial_n h_1 = 0 \text{ sur } \Gamma, \partial_n h_1 \in L^2(\Sigma) \right\}.$$

On munit  $X$  de la norme hilbertienne du graphe

$$\|(h_1, h_2)\|_X = \left( \|h_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta h_1\|_{L^2}^2 + \|\partial_n h_1\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|h_2\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_2\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Ensuite, soit  $H_N$  le sous-espace de  $X$  défini par

$$H_N = \left\{ (h_1, h_2) \in X, \int_{\Omega} h_2 dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (h_2 + \partial_n h_1 + \beta h_1) d\sigma = 0 \right\}.$$

L'espace  $H_N$  jouera un rôle important par la suite car il s'agit d'un espace invariant pour (1.3.1). En effet, la relation (1.3.18) indique que si  $(u_0, u_1) \in H_N$ ,  $(u, \partial_t u) \in H_N$ .

**Proposition 1.3.5.**  $H_N$  est un sous-espace fermé de  $X$  et la semi-norme sur  $X$  définie par

$$|(h_1, h_2)|_X = \left( \|\nabla h_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta h_1\|_{L^2}^2 + \|\partial_n h_1\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|h_2\|_{L^2}^2 + \|\nabla h_2\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

définit une norme dans  $H_N$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_X$ .

*Démonstration.* Soit  $\Psi : (h_1, h_2) \in X \mapsto \int_{\Omega} h_2 dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (h_2 + \partial_n h_1 + \beta h_1) d\sigma$ . La fonction  $\Psi$  est continue sur  $X$  et  $H_N = \Psi^{-1}\{0\}$ . Ainsi  $\overline{H_N}^{\|\cdot\|_X} = H_N$ .

A présent, considérons  $(h_1, h_2) \in H_N$  tel que  $|(h_1, h_2)|_X = 0$ . On a alors :

$$\begin{cases} \nabla h_1 = 0, \Delta h_1 = 0 \text{ dans } \Omega, \partial_n h_1 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ \nabla h_2 = 0 \text{ dans } \Omega, h_2 = 0 \text{ sur } \Sigma; \end{cases}$$

ce qui implique que  $h_2 = 0$  dans  $\Omega$  et  $h_1$  est constant dans l'espace connexe  $\Omega$ .

De plus, comme  $h_2 = 0$  dans  $\Omega$ ,  $\partial_n h_1 = 0$  sur  $\Sigma$  et  $h_1$  est constant dans  $\Omega$ ,  $\Psi(h_1, h_2) = 0$  implique que

$$h_1 \int_{\Sigma} \alpha^{-1} \beta d\sigma = 0.$$

Or,  $\alpha^{-1}\beta$  ne s'annule jamais et garde le même signe sur  $\Sigma$ . On a donc  $h_1 = 0$  sur  $\Sigma$ , ce qui implique que  $h_1 = 0$  dans  $\Omega$ . Ainsi, la semi-norme  $|\cdot|_X$  définit une norme sur  $H_N$ . Pour prouver que  $|\cdot|_X$  est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_X$  dans  $H_N$ , on peut montrer seulement qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $(h_1, h_2) \in H_N$ ,

$$\|h_1\|_{L^2(\Omega)} \leq C |(h_1, h_2)|_X \tag{1.3.19}$$

car il est évident que

$$|(h_1, h_2)|_X \leq \|(h_1, h_2)\|_X,$$

puisque  $\|(h_1, h_2)\|_X^2 = |(h_1, h_2)|_X^2 + \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

Supposons que l'inégalité (1.3.19) soit fautive. Alors, il existe une suite  $(h_{1,k}, h_{2,k})$  dans  $H_N$  telle que

$$\|h_{1,k}\|_{L^2(\Omega)} > k |(h_{1,k}, h_{2,k})|_X. \tag{1.3.20}$$

L'inégalité (1.3.20) implique que  $\|h_{1,k}\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$  et on peut donc supposer que

$$\|(h_{1,k}, h_{2,k})\|_X = 1 \tag{1.3.21}$$

quitte à diviser par  $\|h_{1,k}\|_{L^2(\Omega)}$ .

On peut donc extraire une sous-suite, notée également  $(h_{1,k}, h_{2,k})$ , qui converge faiblement vers  $(h_1, h_2)$  dans  $X$ . De plus, (1.3.20) implique que  $|(h_{1,k}, h_{2,k})|_X \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi on a

$$\begin{cases} \nabla h_{1,k} \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega); \\ \Delta h_{1,k} \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega); \\ \partial_n h_{1,k}|_\Sigma \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Sigma); \end{cases} \quad (1.3.22)$$

et

$$\begin{cases} \nabla h_{2,k} \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega); \\ h_{2,k}|_\Sigma \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Sigma). \end{cases}$$

On peut donc en déduire que

$$\begin{cases} \nabla h_1 = 0 \text{ dans } \Omega, \Delta h_1 = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \partial_n h_{1,k}|_\Sigma = 0 \\ \nabla h_2 = 0 \text{ dans } \Omega, h_{2,k}|_\Sigma = 0. \end{cases}$$

On a donc  $(h_1, h_2) = (cste, 0)$ .

De plus, comme  $H_N$  est fermé,  $(h_1, h_2) \in H_N$  ce qui implique nécessairement que  $h_1 = h_2 = 0$  dans  $\Omega$ .

La suite  $(h_{1,k}, h_{2,k})$  converge donc faiblement vers  $(0, 0)$  dans  $X$ . De plus, comme  $X \subset H^{3/2}(\Omega) \times H^1(\Omega)$ ,  $X$  s'injecte de façon compacte dans  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On en déduit donc que  $h_{1,k}$  converge fortement vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ , ce qui, avec (1.3.22) implique que  $(h_{1,k}, h_{2,k})$  converge fortement vers  $(0, 0)$  dans  $X$ . On contredit donc (1.3.21) ce qui achève la preuve de la proposition (1.3.5).  $\square$

À présent, soit  $V_\delta$  l'espace produit défini par

$$V_\delta = \{(v_1, v_2) \in H_N, A_\delta(v_1, v_2) \in H_N, \partial_n v_2 + \Delta v_1 = \alpha(x)\partial_n v_1 - \beta(x)v_2 \text{ sur } \Sigma\}.$$

L'espace  $V_\delta$  correspond au domaine de l'opérateur  $A_\delta$ . Comme dans le cas d'une condition de bord de Dirichlet sur  $\Gamma$ , on vérifie que  $v_1$  et  $v_2$  sont assez régulières pour que la condition sur  $\Sigma$  ait bien un sens.

**Lemme 1.3.6.** *Pour tout  $h \in H_N$ , la quantité*

$$\begin{aligned} \|h\|_\delta = & \left( \int_\Omega (|\nabla(h_2 - \delta h_1)|^2 + |\Delta h_1 - \delta h_2|^2) dx \right. \\ & \left. + \int_\Sigma \frac{1}{2\delta - \alpha(x) + \beta(x)} |(\alpha - \delta)\partial_n h_1 - (\beta + \delta)h_2|^2 d\sigma \right)^{1/2} \end{aligned}$$

*est une norme sur  $H_N$  équivalente à la norme  $|h|_X$  et donc à  $\|h\|_X$*

*Démonstration.* Tout d'abord, on remarque que  $\|h\|_\delta \geq 0$  pour tout  $h$  dans  $H_N$  puisque nous avons choisi  $\delta$  de telle sorte que  $2\delta - \alpha(x) + \beta(x) > 0$  pour tout  $x$  sur  $\Sigma$ .

Pour montrer que  $\|\cdot\|_\delta$  est une norme sur  $H_N$ , on doit juste prouver que

$$\|h\|_\delta = 0 \Rightarrow h = 0.$$

En effet,  $\|\cdot\|_\delta$  est définie comme la combinaison linéaire de normes dans  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Sigma)$ . Soit  $h = (h_1, h_2) \in H_N$  tel que  $\|h\|_\delta = 0$ .  $h$  est alors solution de

$$\begin{cases} \nabla (h_2 - \delta h_1) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Delta h_1 - \delta h_2 = 0 \text{ dans } \Omega \\ \partial_n h_1 = 0 \text{ sur } \Gamma \\ (\alpha - \delta) \partial_n h_1 - (\beta + \delta) h_2 = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

Du fait que  $\Delta h_1 - \delta h_2 = 0$  dans  $\Omega$ , on a :

$$\int_{\Omega} (\Delta h_1 - \delta h_2) h_2 \, dx = 0.$$

En utilisant la formule de Green (1.3.7) et le fait que  $\partial_n h_1 = 0$  sur  $\Gamma$ , on obtient donc

$$- \int_{\Omega} \nabla h_1 \cdot \nabla h_2 \, dx + \int_{\Sigma} \partial_n h_1 h_2 \, d\sigma - \delta \int_{\Omega} |h_2|^2 \, dx = 0.$$

On sait que  $\nabla (h_2 - \delta h_1) = 0$  dans  $\Omega$  et que  $(\alpha - \delta) \partial_n h_1 - (\beta + \delta) h_2 = 0$  sur  $\Sigma$ . Il vient donc

$$-\delta \int_{\Omega} (|\nabla h_1|^2 + |h_2|^2) \, dx + \int_{\Sigma} \frac{\beta + \delta}{\alpha - \delta} |h_2|^2 \, d\sigma = 0.$$

Comme  $\beta + \delta > 0$  et  $\alpha - \delta < 0$ , on obtient  $\nabla h_1 = 0$  dans  $\Omega$  et  $h_2 = 0$  dans  $\Omega$ . Comme  $\nabla h_1 = 0$  dans  $\Omega$  connexe, on conclut que  $h_1$  est constant dans  $\Omega$ . Ensuite il vient que

$$\int_{\Sigma} \alpha^{-1} \beta h_1 \, d\sigma = 0,$$

car  $h = (h_1, h_2) \in H_N$ .

Comme  $h_1$  est constant dans  $\Omega$  et comme  $\alpha^{-1} \beta$  ne change pas de signe sur  $\Sigma$  d'après (1.3.17),  $h_1 = 0$  sur  $\Sigma$ . Par conséquent  $h_1 = 0$  dans  $\Omega$  ce qui montre que  $\|\cdot\|_\delta$  est une norme sur  $H_N$ .

À présent, on doit démontrer que  $\|\cdot\|_\delta$  est équivalente à  $|\cdot|_X$  sur  $H_N$ . Ceci est une conséquence directe du fait que  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $L^\infty(\Sigma)$ .  $\square$

Dans la suite, on note  $(\cdot, \cdot)_\delta$  le produit scalaire dérivé de la norme  $\|\cdot\|_\delta$ .

**Lemme 1.3.7.** *Pour tout  $v \in V_\delta$ , on a*

$$(A_\delta v, v)_\delta \leq 0.$$

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est exactement la même que celle du lemme 1.3.2. La seule différence vient du fait que le terme

$$\int_{\Gamma} \partial_n w_1 w_2 \, d\sigma$$

disparaît puisque  $\partial_n w_1 = 0$  sur  $\Gamma$  car  $(w_1, w_2) \in H_N$ . Par conséquent, pour tout  $v$  dans  $V_\delta$ , on obtient que  $(A_\delta v, v)_\delta$  est la somme de termes négatifs ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

On continue en démontrant le lemme suivant

**Lemme 1.3.8.** *L'opérateur  $A_\delta$  est maximal sur son domaine  $V_\delta$ .*

*Démonstration.* Etant donné  $f = (f_1, f_2)$  dans  $H_N$ , on étudie le problème mixte suivant : trouver  $v \in V_\delta$  tel que  $(A_\delta - I)v = f$ .

Par définition de  $A_\delta$ , on cherche  $v = (v_1, v_2) \in V_\delta$  tel que

$$\begin{cases} -\delta v_1 + v_2 - v_1 = f_1 \text{ dans } \Omega; \\ -\delta v_2 + \Delta v_1 - v_2 = f_2 \text{ dans } \Omega; \\ \partial_n v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ \partial_n v_2 + \Delta v_1 = \alpha \partial_n v_1 - \beta v_2 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (1.3.23)$$

Tout d'abord, on suppose que le problème (1.3.23) a une solution dans  $V_\delta$ . Ensuite, en réécrivant  $v_2$  à l'aide de l'équation

$$v_2 = f_1 + (\delta + 1)v_1 \text{ dans } \Omega,$$

on obtient que  $v_1$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + (\delta + 1)^2 v_1 = -(f_2 + (\delta + 1)f_1) \text{ dans } \Omega; \\ \partial_n v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ (\delta - \alpha + 1) \partial_n v_1 = -\partial_n f_1 - f_2 - (\delta + \beta + 1)(f_1 + (\delta + 1)v_1) \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (1.3.24)$$

Comme pour la démonstration du lemme 1.3.3, nous allons montrer que (1.3.24) admet une solution pour tout  $f$  de  $H_N$ , telle que le couple  $(v_1, v_2) = (v_1, f_1 + (\delta + 1)v_1)$  appartienne à  $V_\delta$  et soit solution de (1.3.23). Nous démontrons dans un premier temps l'existence d'une solution  $v_1$  de (1.3.24) pour tout  $\tilde{f}$  donné dans  $H^1(\Omega)$  et  $\tilde{g}$  donné dans  $L^2(\Sigma)$  en utilisant une approche variationnelle.

On munit  $H^1(\Omega)$  de la norme  $\|\cdot\|$  définie par

$$\forall v \in H^1(\Omega), \|v\| = \left( \int_{\Omega} (|\nabla f|^2 + (\delta + 1)^2 |f|^2) dx + (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} |f|^2 d\sigma \right)^{1/2}, \quad (1.3.25)$$

équivalente à la norme usuelle sur  $H^1(\Omega)$  puisque  $(\delta + 1)$ ,  $(\delta + \beta + 1)$  et  $(\delta - \alpha + 1)$  sont des quantités positives par définition de  $\delta$ .

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\overline{\Omega})$  et si on suppose que le problème (1.3.24) a une solution, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), - \int_{\Omega} \Delta v_1 \varphi dx + (\delta + 1)^2 \int_{\Omega} v_1 \varphi dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \varphi dx,$$

comme dans la preuve du lemme 1.3.3. On obtient finalement  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \varphi dx + (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_{\Omega} v_1 \varphi dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \varphi dx + \int_{\Sigma} \tilde{g} \varphi d\sigma, \quad (1.3.26)$$

en utilisant la formule de Green (1.3.7) et en appliquant  $\partial_n v_1|_{\Gamma} = 0$ . Soit  $a(\cdot, \cdot)$  la forme bilinéaire définie dans la preuve du lemme 1.3.3.  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$ -coercive,

puisqu'on nous a muni  $H^1(\Omega)$  de la norme  $\|\cdot\|$  définie par (1.3.25).  
Soit  $l(\cdot)$  la forme linéaire définie par

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} \tilde{f}\varphi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma.$$

Comme le couple  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  appartient à  $H^1(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ ,  $l(\cdot)$  est continue dans  $H^1(\Omega)$ .  
Etant donné que  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ , la formulation (1.3.26) donnée dans  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  peut être étendue à  $H^1(\Omega)$ . Ainsi, toutes les solutions  $v_1$  de (1.3.24) vérifient

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), a(v_1, \varphi) = l(\varphi).$$

Réciproquement, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), a(v_1, \varphi) = l(\varphi)$$

admet une unique solution  $v_1$  dans  $H^1(\Omega)$ . En particulier, comme  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , on en déduit que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle (\delta + 1)^2 v_1 - \Delta v_1 - \tilde{f}, \varphi \rangle = 0,$$

ce qui signifie que

$$(\delta + 1)^2 v_1 - \Delta v_1 = \tilde{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Grâce à ce résultat, on peut donner un sens à  $\Delta v_1$  dans  $H^1(\Omega)$  et donc à  $\partial_n v_1|_{\partial\Omega}$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .  
On a aussi  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \varphi \, dx + (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi \, d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_{\Omega} v_1 \varphi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f}\varphi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma.$$

En utilisant la formule de Green (1.3.7), on obtient  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \Delta v_1 \varphi \, dx + (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi \, d\sigma + (\delta + 1)^2 \int_{\Omega} v_1 \varphi \, dx \\ & + \langle \partial_n v_1, \varphi \rangle_{-1/2, 1/2} = \int_{\Omega} \tilde{f}\varphi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma \end{aligned}$$

*i.e.*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), (\delta + 1) \int_{\Sigma} \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 \varphi \, d\sigma + \langle \partial_n v_1, \varphi \rangle_{-1/2, 1/2} = \int_{\Sigma} \tilde{g}\varphi \, d\sigma.$$

A présent, en choisissant les fonctions  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  telles que  $\varphi|_{\Gamma} = 0$ , on obtient

$$\partial_n v_1 + (\delta + 1) \frac{\delta + \beta + 1}{\delta - \alpha + 1} v_1 = \tilde{g} \text{ sur } \Sigma.$$

et en prenant  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ , on obtient

$$\partial_n v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Ainsi  $v_1$  est solution du problème (1.3.24).

Comme  $v_1$  et  $f_1$  sont dans  $H^1(\Omega)$ , on en déduit l'existence de  $v_2$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Il reste à montrer que le couple  $(v_1, v_2)$  est dans  $V_{\delta}$ . En fait, on doit juste prouver que  $(v_1, v_2)$  vérifie la condition sur  $\Gamma$  et la propriété d'invariance puisqu'on sait déjà que les autres propriétés

sont vérifiées (cf. preuve du lemme 1.3.3). Comme  $\partial_n v_1 = 0$  sur  $\Gamma$ , on doit juste montrer que  $\partial_n v_2 = 0$  sur  $\Gamma$ . On sait que  $\partial_n v_1 = \partial_n f_1 = 0$  sur  $\Gamma$  et en utilisant le fait que  $v_2 = f_1 + (\delta + 1)v_1$  dans  $\Omega$ , on obtient  $\partial_n v_2 = 0$  sur  $\Gamma$ . Quant à la propriété d'invariance, on a supposé que  $(f_1, f_2)$  était dans  $H_N$ . On a donc

$$\int_{\Omega} f_2 dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (f_2 + \partial_n f_1 + \beta f_1) d\sigma = 0, \quad (1.3.27)$$

puis,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_2 dx &= \frac{1}{\delta + 1} \int_{\Omega} (\Delta v_1 - f_2) dx \\ &= \frac{1}{\delta + 1} \left[ \int_{\partial\Omega} \partial_n v_1 d\sigma - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (f_2 + \partial_n f_1 + \beta f_1) d\sigma \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_2 dx &= \frac{1}{\delta + 1} \left[ \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (\partial_n v_2 + \Delta v_1 + \beta v_2 - (\Delta v_1 - (\delta + 1)v_2 + \right. \\ &\quad \left. \partial_n v_2 - (\delta + 1)\partial_n v_1 + \beta v_2 - (\delta + 1)\beta v_1)) d\sigma \right] \end{aligned}$$

ce qui se simplifie en

$$\int_{\Omega} v_2 dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (v_2 + \partial_n v_1 + \beta v_1) d\sigma = 0. \quad (1.3.28)$$

et montre que le couple  $(v_1, v_2)$  est bien dans  $H_N$ . A présent, on doit montrer que

$$\int_{\Omega} (\Delta v_1 - \delta v_2) dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} ((\Delta v_1 - \delta v_2) + (\partial_n v_2 - \delta \partial_n v_1) + \beta (v_2 - \delta v_1)) d\sigma = 0.$$

Ce résultat est une conséquence directe de (1.3.27) et (1.3.28).

En conclusion, on a montré que  $A_{\delta}(v_1, v_2)$  est dans  $H_N$ , et comme la condition sur  $\Sigma$  est satisfaite, on a démontré que  $(v_1, v_2)$  est dans  $V_{\delta}$ , ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

Par conséquent, on a le théorème suivant :

**Théorème 1.3.9.** *Soit  $(u_0, u_1)$  dans  $V_0$ . Le problème (2.2.1) admet une unique solution  $u$  telle que*

$$(u, \partial_t u) \in C^1([0, +\infty[; H_N) \cap C^0([0, +\infty[; V_0). \quad (1.3.29)$$

La preuve est la même que celle du théorème 1.3.4 au paragraphe 1.3.4.

## 1.4 Comportement en temps long

On peut enrichir les résultats de la section 1.3 en considérant la fonctionnelle d'énergie définie sur  $H := H_D$  ou  $H_N$  par

$$\mathcal{E}(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\Delta h_1|^2 + |\nabla h_2|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{1}{\beta - \alpha} |\alpha \partial_n h_1 - \beta h_2|^2 d\sigma$$

qui est bien définie si

$$\beta(x) - \alpha(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in \Sigma. \quad (1.4.1)$$

De plus,  $\mathcal{E}(h_1, h_2) \geq 0$  si

$$\beta(x) - \alpha(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \Sigma. \quad (1.4.2)$$

Ainsi,  $\mathcal{E}(u, \partial_t u)$  définit une énergie sur  $H$  sous la condition (1.4.2) qui prend en compte la condition (1.4.1).

Par la suite, on suppose que  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les conditions

$$\begin{cases} \alpha(x) < 0 \text{ et } \beta(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \Sigma, \\ \beta(x) - \alpha(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in \Sigma. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

**Lemme 1.4.1.** *Pour tout  $(u_0, u_1) \in V_0$ ,  $t \mapsto \mathcal{E}(u, \partial_t u)$  est différentiable et décroissante sous la condition (1.4.3).*

*Démonstration.* Dans la section précédente, on a vu que si les conditions initiales  $(u_0, u_1)$  sont dans  $V_0$ ,  $\mathcal{E}(u, \partial_t u) \in C^1([0, +\infty[)$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u) &= \int_{\Omega} \Delta(\partial_t u) \Delta u \, dx + \int_{\Omega} \partial_t(\nabla u) \partial_t^2 \nabla u \, dx \\ &+ \int_{\Sigma} \frac{1}{\beta - \alpha} (\alpha \partial_t \partial_n u - \beta \partial_t^2 u) (\alpha \partial_n u - \beta \partial_t u) \, d\sigma. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

En utilisant la formule de Green (1.3.7) et le fait que  $\partial_t^2 u = \Delta u$ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u) &= \int_{\Omega} \Delta(\partial_t u) \partial_t^2 u \, dx - \int_{\Omega} \Delta(\partial_t u) \partial_t^2 u \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n \partial_t u \partial_t^2 u \, d\sigma + \\ &\int_{\Sigma} \frac{1}{\beta - \alpha} (\alpha \partial_t \partial_n u - \beta \partial_t^2 u) (\alpha \partial_n u - \beta \partial_t u) \, d\sigma. \end{aligned}$$

De plus,  $\partial_t u|_{\Gamma} = 0$  dans le cas d'une condition de bord de Dirichlet sur  $\Gamma$  et  $\partial_n u|_{\Gamma} = 0$  dans le cas d'une condition de bord de Neumann sur  $\Gamma$ .

Ensuite, en utilisant le fait que  $\partial_t(\partial_n u + \partial_t u) = \alpha(x) \partial_n u - \beta(x) \partial_t u$  sur  $\Sigma$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u) &= \int_{\Sigma} \frac{1}{\beta - \alpha} \left[ \alpha \partial_t^2 u \partial_n \partial_t u - \beta (\partial_t^2 u)^2 + \alpha (\partial_t \partial_n u)^2 - \beta \partial_t^2 u \partial_n \partial_t u \right] d\sigma + \\ &\int_{\Sigma} \partial_n \partial_t u \partial_t^2 u \, d\sigma. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u) = - \int_{\Sigma} \frac{1}{\beta - \alpha} \left[ \beta (\partial_t^2 u)^2 - \alpha (\partial_t \partial_n u)^2 \right] d\sigma.$$

Si la condition (1.4.3) est vérifiée, on a

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u) \leq 0,$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

**Théorème 1.4.2.** *Si les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les conditions (1.4.3), alors pour tout  $(u_0, u_1) \in V_0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u, \partial_t u) = 0.$$

*Démonstration.* On a déjà vu que, si  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les conditions (1.4.3),  $A$  est le générateur du semi-groupe continu de contraction noté  $Z(t)$ . Comme il suffit de montrer le résultat sur un espace dense de  $V_0 = D(A)$ , on considère des données initiales  $(u_0, u_1)$  dans  $D(A^2)$ , où

$$D(A^2) = \{(v_1, v_2) \in V_0, A(v_1, v_2) \in V_0\}$$

est muni de la norme du graphe

$$\|(v_1, v_2)\|_{D(A^2)} = \|(v_1, v_2)\|_{V_0} + \|A(v_1, v_2)\|_{V_0} + \|A^2(v_1, v_2)\|_{V_0}.$$

Pour toute solution de (1.3.1), on a alors

$$\|(u, \partial_t u)\|_{D(A^2)} = \|Z(t)(u_0, u_1)\|_{V_0} + \|A(Z(t)(u_0, u_1))\|_{V_0} + \|A^2(Z(t)(u_0, u_1))\|_{V_0}.$$

De plus, comme  $A$ ,  $A^2$  et  $Z(t)$  commutent sur  $D(A^2)$ , on a

$$\begin{aligned} \|(u, \partial_t u)\|_{D(A^2)} &= \|Z(t)(u_0, u_1)\|_{D(A^2)} \\ &= \|Z(t)(u_0, u_1)\|_{V_0} + \|Z(t)A(u_0, u_1)\|_{V_0} + \|Z(t)A^2(u_0, u_1)\|_{V_0}. \end{aligned}$$

Comme  $Z(t)$  est continue sur  $V_0$ , on en déduit qu'il existe une constante positive  $C$  telle que

$$\|(u, \partial_t u)\|_{D(A^2)} \leq C \|(u_0, u_1)\|_{D(A^2)}.$$

Mais comme l'injection  $i : D(A^2) \rightarrow V_0$  est compacte, on peut extraire une sous-suite  $Z(t_k)(u_0, u_1)$  telle que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} Z(t_k)(u_0, u_1) = (u_\infty, v_\infty) \text{ dans } V_0 \text{ fortement.}$$

Comme  $\mathcal{E}(u, \partial_t u)$  est continue, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u, \partial_t u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(Z(t)(u_0, u_1)) = \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(Z(t_k)(u_0, u_1)) = \mathcal{E}(u_\infty, v_\infty).$$

On a aussi, pour tout  $s$  positif,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(Z(t+s)(u_0, u_1)) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u, \partial_t u) \\ &= \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(Z(s)Z(t_k)(u_0, u_1)) \\ &= \mathcal{E}(Z(s)(u_\infty, v_\infty)). \end{aligned}$$

La solution  $(w, \partial_t w) = Z(t)(u_\infty, v_\infty)$  du problème (1.3.1), avec des données initiales  $(u_\infty, v_\infty)$  dans  $D(A)$ , est donc telle que

$$\mathcal{E}(w, \partial_t w) = \mathcal{E}(u_\infty, v_\infty) \text{ pour tout } t \text{ positif,}$$

et, d'après la preuve du lemme 1.4.1,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(w, \partial_t w) = - \int_{\Sigma} \frac{1}{\beta - \alpha} \left[ \beta (\partial_t^2 w)^2 - \alpha (\partial_t \partial_n w)^2 \right] d\sigma = 0.$$

On a donc nécessairement  $\partial_t^2 w = 0$  sur  $\Sigma$  et  $\partial_t \partial_n w = 0$  sur  $\Sigma$  et  $w$  est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[; \\ w(x, 0) = u_\infty, \partial_t w(x, 0) = v_\infty \text{ dans } \Omega; \\ w = 0 \text{ ou } \partial_n w = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[; \\ \alpha(x) \partial_n w = \beta(x) \partial_t w \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty). \end{cases}$$

Si on note  $z := \partial_t w$ ,  $z$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 z - \Delta z = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[ \\ z(x, 0) = v_\infty, \partial_t z(x, 0) = \Delta u_\infty \text{ dans } \Omega \\ z = 0 \text{ ou } \partial_n z = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[ \\ \partial_n z = z = 0 \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty). \end{cases}$$

Comme  $\partial_n z = z = 0$  sur  $\Sigma$ , on en déduit que  $z = 0$  dans  $\Omega \times [0, +\infty[$ , comme conséquence du théorème de Holmgren ([60]). Par conséquent,  $w$  est solution de

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ w = 0 \text{ ou } \partial_n w = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \alpha(x) \partial_n w = 0 \text{ sur } \Sigma \times [0, +\infty[. \end{cases}$$

Comme  $\alpha$  ne s'annule jamais sur  $\Sigma$ , on a  $w = 0$  dans  $\Omega \times [0, +\infty[$ . On en conclut que  $\mathcal{E}(w, \partial_t w) = 0$  ce qui implique que  $\mathcal{E}(u_\infty, v_\infty) = 0$  et achève la preuve du théorème 1.4.2.  $\square$

**Lemme 1.4.3.**  $\mathcal{E}^{1/2}(h_1, h_2)$  est une norme sur  $H$ .

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est divisée en deux parties. On considère tout d'abord le cas d'une condition de Dirichlet sur  $\Gamma$  avant d'envisager celui d'une condition de Neumann sur  $\Gamma$ .

(a) *Condition de Dirichlet sur  $\Gamma$*

On considère  $(h_1, h_2)$  dans  $H$  tel que  $\mathcal{E}(h_1, h_2) = 0$ . On a

$$\begin{cases} \Delta h_1 = 0 \text{ dans } \Omega; \\ \nabla h_2 = 0 \text{ dans } \Omega; \\ h_1 = h_2 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ \alpha \partial_n h_1 - \beta h_2 = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

Comme  $\Omega$  est connexe,  $\nabla h_2 = 0$  dans  $\Omega$  implique que  $h_2$  est constant dans  $\Omega$ . Mais on sait d'ores et déjà que  $h_2 = 0$  sur  $\Gamma$  donc  $h_2 = 0$  dans  $\Omega$ .

Ainsi,  $h_1$  est solution de

$$\begin{cases} \Delta h_1 = 0 \text{ dans } \Omega; \\ h_1 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ \alpha \partial_n h_1 = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

Comme  $\alpha \neq 0$  en tout point de  $\Sigma$ , on a  $\partial_n h_1 = 0$  sur  $\Sigma$ . Ainsi, on obtient que  $\nabla h_1 = 0$  dans  $\Omega$ . Or  $h_1 = 0$  sur  $\Gamma$ , il vient donc que  $h_1 = 0$  dans  $\Omega$ . Par conséquent,  $(h_1, h_2) = 0$  dans  $\Omega$  ce qui prouve que  $\mathcal{E}^{1/2}(h_1, h_2)$  est une norme sur  $H$ .

(b) *Condition de Neumann sur  $\Gamma$*

Ici encore, on considère  $(h_1, h_2)$  dans  $H$  tel que  $\mathcal{E}(h_1, h_2) = 0$ . On a

$$\begin{cases} \Delta h_1 = 0 \text{ dans } \Omega ; \\ \nabla h_2 = 0 \text{ dans } \Omega ; \\ \partial_n h_1 = 0 \text{ sur } \Gamma ; \\ \alpha \partial_n h_1 - \beta h_2 = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

et comme  $(h_1, h_2) \in H$

$$\int_{\Omega} h_2 dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (h_2 + \partial_n h_1 + \beta h_1) d\sigma = 0.$$

$\nabla h_2 = 0$  dans  $\Omega$  implique que  $h_2$  est constant dans  $\Omega$  car  $\Omega$  est connexe. Comme  $\Delta h_1 = 0$  dans  $\Omega$  et  $\nabla h_2 = 0$  dans  $\Omega$ , on obtient, en utilisant la formule de Green (1.3.7), que

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n h_1 h_2 d\sigma = 0.$$

Mais on sait que  $\partial_n h_1 = 0$  sur  $\Gamma$  et  $\partial_n h_1 = \alpha^{-1}\beta h_2$  sur  $\Sigma$ . Ainsi,

$$\int_{\Sigma} \alpha^{-1}\beta |h_2|^2 d\sigma = 0,$$

ce qui implique que  $h_2 = 0$  sur  $\Sigma$  car  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient (1.4.3) et donc  $\alpha^{-1}\beta < 0$ . On en déduit que nécessairement  $h_2 = 0$  dans  $\Omega$ . On obtient ainsi sur  $\Sigma$  que  $h_1$  est solution de

$$\begin{cases} \Delta h_1 = 0 \text{ dans } \Omega ; \\ \partial_n h_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega ; \end{cases}$$

qui donne que  $h_1$  est constant dans  $\Omega$ .

De plus,

$$\int_{\Omega} h_2 dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1} (h_2 + \partial_n h_1 + \beta h_1) d\sigma = 0,$$

entraîne que

$$\int_{\Sigma} \alpha^{-1}\beta h_1 d\sigma = 0.$$

Comme  $h_1$  est constant dans  $\Omega$  et comme  $\alpha^{-1}\beta < 0$  sur  $\Sigma$  d'après (1.4.3) sur  $\Sigma$ , on obtient  $h_1 = 0$  dans  $\Omega$  ce qui montre que  $\mathcal{E}^{1/2}(h_1, h_2)$  est une norme sur  $H$ .  $\square$

On est donc en mesure d'énoncer le théorème suivant

**Théorème 1.4.4.** *Soit  $(u_0, u_1)$  dans  $V_0$ . Alors la solution  $u$  de (1.3.1) est telle que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u, \partial_t u) = (0, 0) \text{ dans } H.$$

*Démonstration.* Si le couple  $(u_0, u_1)$  est dans  $V_0$ , on sait que (cf. Théorème 1.4.2)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u, \partial_t u) = 0$$

et que  $\mathcal{E}$  est une norme sur  $H$  (cf. Lemme 1.4.3).

Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u, \partial_t u) = (0, 0) \text{ dans } H.$$

$\square$

A présent, dans le cas d'une condition de Neumann sur le bord  $\Gamma$ , les données sont dans  $V_0$  et non dans  $H \cap V_0$ . On obtient alors :

**Théorème 1.4.5.** *Soit  $(u_0, u_1)$  dans  $V_0$ . Alors si les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les conditions (1.4.3) sur  $\Sigma$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u, \partial_t u) = (u_\infty, 0) \text{ dans } X$$

où

$$u_\infty = \frac{\int_{\Omega} u_1 dx - \int_{\Sigma} \alpha^{-1}(u_1 + \beta u_0) d\sigma}{\int_{\Sigma} \alpha^{-1} \beta d\sigma}.$$

*Démonstration.* Soit  $(\tilde{u}, \partial_t \tilde{u})$  la solution (1.3.1) avec des données initiales  $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$  définies par

$$\tilde{u}_0 = u_0 - u_\infty, \tilde{u}_1 = u_1.$$

Ainsi  $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in V_0 \cap H$  et on peut appliquer le théorème 1.4.4 à  $(\tilde{u}, \partial_t \tilde{u})$  ce qui termine la preuve du théorème 1.4.5.  $\square$

Dans le cas particulier de la famille de CLA que nous avons construite à la section 2, on rappelle que

$$\alpha(x) = \frac{\kappa(x)}{4} - \gamma(x), \beta(x) = \frac{\kappa(x)}{4} + \gamma(x).$$

De plus, on sait que la frontière  $\Sigma$  peut être choisie de telle sorte que  $\kappa(x)$  soit positif pour tout  $x \in \Sigma$ . Ainsi, pour que les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient les conditions (1.4.3), il suffit que pour tout  $x \in \Sigma$ ,  $\gamma(x) > 0$  et que  $\alpha(x) < 0$ . En effet, si  $\alpha < 0$  sur  $\Sigma$ ,  $\beta$  est nécessairement positif dans la mesure où  $\kappa(x)$  est positif. Par conséquent, il suffit que  $\gamma(x) > \frac{\kappa(x)}{4}$  pour que la solution  $u$  de (1.2.22) soit telle que tous les résultats que nous avons énoncés soient vérifiés.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit une nouvelle famille de CLA dépendant d'un paramètre  $\gamma(s) \neq 0$  et qui peut être appliquée à des frontières régulières quelconques. Nous avons réalisé une analyse mathématique qui montre que le problème aux limites correspondant est bien posé dans des espaces de Hilbert bien choisis. De plus, si  $\gamma(s)$  est supérieur à  $\frac{\kappa(s)}{4}$ , où  $\kappa(s)$  représente la courbure de la frontière absorbante  $\Sigma$  supposée convexe, il existe une énergie définie comme la combinaison de termes de volume et de surface. Cette énergie est originale dans la mesure où elle est définie comme étant la somme de l'énergie cinétique de  $\partial_t u$  et de la norme  $L^2$  sur  $\Sigma$  d'une combinaison linéaire de  $\partial_n u$  et  $\partial_t u$ . Nous avons prouvé que si  $\gamma(s) \geq \frac{\kappa(s)}{4}$ , l'énergie est décroissante et converge vers zero. Nous avons aussi montré que dans le cas où l'on impose une condition de surface libre sur le bord de l'obstacle, la solution converge vers zero. Dans le cas d'une condition de Neumann sur le bord de l'obstacle, la solution peut converger vers une constante et nous avons établi une condition nécessaire pour que cette constante soit nulle.

À présent, il serait intéressant d'analyser s'il existe une valeur de  $\gamma(s)$  qui donne des résultats numériques optimaux. Pour cela, nous avons considéré différentes approches et nous pensons que le meilleur moyen d'implémenter la CLA (1.2.17) dans une formulation variationnelle est de définir une inconnue auxiliaire. Les études mathématique et numérique du problème aux limites correspondant seront développées dans le chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Analyse de stabilité de la nouvelle famille de CLA

### 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons construit une famille de CLA dépendant d'un paramètre  $\gamma(s)$  et s'écrivant sous la forme

$$\partial_t (\partial_n u + \partial_t u) = \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) \partial_n u - \left( \frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s) \right) \partial_t u \text{ on } \Sigma. \quad (2.1.1)$$

Cette condition ne prend en compte que les ondes propagatives et peut être appliquée à des surfaces régulières de géométrie quelconque. Nous avons aussi montré que le problème aux limites correspondant est bien posé. De plus, si  $\gamma(s) \geq \frac{\kappa(s)}{4}$ , il existe une énergie décroissante qui converge vers zéro.

A présent, il serait intéressant d'analyser s'il existe une valeur de  $\gamma(s)$  qui donne des résultats numériques optimaux. Pour cela, nous avons considéré différentes approches et nous pensons que le meilleur moyen d'implémenter la CLA (2.1.1) dans une formulation variationnelle est de définir une inconnue auxiliaire. En effet, si on adopte l'écriture

$$\partial_n u = -\partial_t u - \frac{\kappa(s)}{2} \left( \partial_t - \frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s) \right)^{-1} \partial_t u \text{ sur } \Sigma,$$

on définit  $\psi$  comme le champ de surface satisfaisant

$$\left( \partial_t - \frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s) \right) \psi = \partial_t u \text{ sur } \Sigma.$$

Ainsi, on obtient sur  $\Sigma$  la relation

$$\partial_n u = -\partial_t u - \frac{\kappa(s)}{2} \psi \text{ sur } \Sigma,$$

qu'on peut facilement inclure dans une formulation variationnelle car elle fait intervenir  $\partial_n u|_\Sigma$  de façon explicite.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème aux limites correspondant dans le cas d'une condition de Dirichlet sur le bord de l'obstacle ainsi qu'à l'étude numérique de ce problème.

Dans un premier temps, on montre que le problème est bien posé et qu'il existe une énergie qui décroît vers zéro. Ensuite, on analyse numériquement les performances de la CLA avant de s'intéresser à une analyse théorique de la stabilité. On démontre que l'énergie décroît exponentiellement vers zéro et on vérifie enfin ces résultats numériquement.

## 2.2 Analyse mathématique

On considère le problème mixte suivant : trouver  $u$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty); \\ \left( \partial_t - \frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s) \right) \psi = \partial_t u & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty); \\ \partial_n u + \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} \psi = 0 & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty); \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty); \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega; \\ \psi(0, x) = \psi_0(x) & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

La donnée initiale  $\psi_0$  est donnée comme une fonction de  $u_0$  et  $u_1$  sur  $\Sigma$  et satisfait la relation

$$\partial_n u_0 + u_1 + \frac{\kappa(s)}{2} \psi_0 = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

**Remarque 2.2.1.** Observons que dans le contexte d'une condition aux limites absorbante,  $\Sigma$  doit être choisi de telle sorte que le support des fonctions  $u_0$  et  $u_1$  soit strictement inclus dans  $\Omega$ . Dans ce cas, on a  $\psi(x, 0) = \psi_0 = 0$  sur  $\Sigma$ .

La fonction  $\kappa(s)$  est la courbure de  $\Sigma$  et  $\gamma(s)$  est un paramètre régulier défini sur  $\Sigma$ . Le domaine  $\Omega$  est un domaine borné de frontière  $\partial\Omega = \Gamma \cup \Sigma$  supposée régulière, avec  $\Gamma \cap \Sigma = \emptyset$  (cf. Fig 2.1).

Dans la suite, on supposera que les fonctions  $\kappa(s)$  et  $\gamma(s)$  vérifient la condition

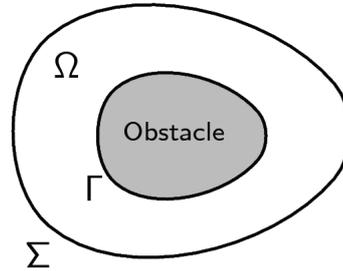


FIG. 2.1 – Domaine étudié

$$\kappa \in L^\infty(\Sigma) \text{ et } \gamma(x) > \frac{\kappa(x)}{4}, \forall x \in \Sigma. \quad (2.2.2)$$

On ne considère pas le cas  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$  car il correspond au cas particulier où la CLA est la C-ABC. L'objet de ce paragraphe est d'étudier la formulation (2.2.1). Bien évidemment, nous savons, à l'issue du chapitre 1 que (2.2.1) est bien posé. Nous allons montrer ici que l'étude de (2.2.1) est moins technique et qu'elle peut encore se faire via la théorie de Hille-Yosida.

On transforme tout d'abord (2.2.1) en un système du premier ordre en temps. On introduit une inconnue supplémentaire  $v$  définie par  $v = \partial_t u$ . Le vecteur  $U = (u, v, \psi)$  est alors solution de

$$\frac{dU}{dt} = AU, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & Id & 0 \\ \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

avec les conditions de bord

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, +\infty) \quad (2.2.4)$$

et

$$\partial_n u + \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} \psi = 0 \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty). \quad (2.2.5)$$

Dans la suite, on s'intéresse à la preuve de l'existence et unicité d'une solution au problème (2.2.3) dans des espaces de Hilbert convenables.

Introduisons tout d'abord  $H$  l'espace produit défini par

$$H = H_\Gamma^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma)$$

où

$$H_\Gamma^1(\Omega) = \{h_1 \in H^1(\Omega), h_1 = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On munit  $H$  de la norme hilbertienne du graphe

$$\|(h_1, h_2, h_3)\|_H = \left( \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_3\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right)^{1/2}.$$

Soit  $V$  l'espace produit défini par

$$V = \{(v_1, v_2, \varphi) \in H, A(v_1, v_2, \varphi) \in H, \partial_n v_1 + v_2 + \frac{\kappa(s)}{2} \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma\}.$$

L'espace  $V$  correspond au domaine de l'opérateur  $A$ . En imposant  $A(v_1, v_2, \varphi) \in H$ , on augmente la régularité de chacune des composantes du vecteur inconnu. En effet, on a alors  $v_2 \in H_\Gamma^1(\Omega)$  et  $\Delta v_1 \in L^2(\Omega)$ . Ainsi  $v_2 \in H_\Gamma^1(\Omega)$  implique que  $v_2|_\Sigma$  est défini dans  $H^{1/2}(\Sigma)$  et  $\Delta v_1 \in L^2(\Omega)$  implique que  $\partial_n v_1|_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$ , sachant que  $v_1 \in H^1(\Omega)$ . De plus, la relation  $\partial_n v_1 + v_2 + \frac{\kappa(s)}{2} \varphi = 0$  sur  $\Sigma$  implique que  $\partial_n v_1|_\Sigma = -\left(v_2 + \frac{\kappa(s)}{2} \varphi\right) \in L^2(\Sigma)$ . En résumé, on a donc

$$V = \left\{ (v_1, v_2, \varphi) \in H, \Delta v_1 \in L^2(\Omega), v_2 \in H_\Gamma^1(\Omega), \partial_n v_1|_\Sigma \in L^2(\Sigma), \right. \\ \left. \partial_n v_1 + v_2 + \frac{\kappa(s)}{2} \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}.$$

On rappelle la formule de Green classique : pour tout  $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  tel que  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ , on a

$$\int_\Omega \Delta u v \, dx = - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \langle \partial_n u, v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (2.2.6)$$

On note que (2.2.6) est valable sur  $H$  et dans ce cas, le terme de bord sur  $\Sigma$  est une intégrale.

**Lemme 2.2.2.** Soit  $\kappa(s)$  donné dans  $L^\infty(\Sigma)$  et tel que  $\min_{x \in \Sigma} \kappa(x) = \kappa_0 > 0$ . Pour tout  $h \in H$ , la quantité

$$\|h\| = \left( \int_{\Omega} |\nabla h_1|^2 + |h_2|^2 dx + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |h_3|^2 d\sigma \right)^{1/2}$$

est une norme sur  $H$  équivalente à la norme  $\|h\|_H$ .

*Démonstration.* Il est bien connu que l'application  $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$  définit une norme sur  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$  et est équivalente à la norme usuelle dans  $H^1(\Omega)$ , comme conséquence de l'inégalité de Poincaré qui est vraie dans  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$  [26]. Comme la courbure  $\kappa(s)$  est supposée être dans  $L^\infty(\Sigma)$  avec  $\min_{x \in \Sigma} |\kappa(x)| > 0$ , il est évident que  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $H$  équivalente à la norme usuelle  $\|\cdot\|_H$ .  $\square$

Dans la suite, on notera  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire dérivé de la norme  $\|\cdot\|$ .

**Lemme 2.2.3.** Soient  $\kappa(s)$  et  $\gamma(s)$  donnés tels que (2.2.2) est vérifiée. Alors, pour tout  $v \in V$ , on a

$$(Av, v) \leq 0.$$

*Démonstration.* Soit  $v = (v_1, v_2, \varphi)$  dans  $V$ . Par définition de  $A$ ,

$$Av = \left( v_2, \Delta v_1, v_2 + \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) \varphi \right)$$

et on a

$$(Av, v) = \int_{\Omega} \nabla v_2 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega} \Delta v_1 v_2 dx + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( v_2 + \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) \varphi \right) \varphi d\sigma.$$

En utilisant la formule de Green (2.2.6), on obtient

$$\begin{aligned} (Av, v) &= \int_{\Omega} \nabla v_2 \cdot \nabla v_1 dx - \int_{\Omega} \nabla v_2 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Sigma} \partial_n v_1 v_2 d\sigma + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} v_2 \varphi d\sigma \\ &\quad + \langle \partial_n v_1, v_2 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) |\varphi|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

De plus, dans  $V$ , on a  $v_1|_{\Gamma} = v_2|_{\Gamma} = 0$  et sur  $\Sigma$ ,  $\partial_n v_1 = -v_2 - \frac{\kappa(s)}{2} \varphi$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} (Av, v) &= - \int_{\Sigma} |v_2|^2 d\sigma - \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \varphi v_2 d\sigma + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \varphi v_2 d\sigma \\ &\quad + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) |\varphi|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

À présent, comme  $\frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) \leq 0$  sur  $\Sigma$ , on obtient que pour tout  $v$  dans  $V$

$$(Av, v) = - \int_{\Sigma} |v_2|^2 d\sigma + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) |\varphi|^2 d\sigma \leq 0,$$

ce qui achève la preuve du lemme 2.2.3.  $\square$

**Lemme 2.2.4.** L'opérateur  $A$ , de domaine  $V$ , est maximal.

*Démonstration.* Etant donné  $f = (f_1, f_2, f_3)$  dans  $H$ , on considère le problème mixte suivant : trouver  $v \in V$  tel que  $(A - I)v = f$ .

On cherche donc  $v = (v_1, v_2, \varphi) \in V$  tel que

$$\begin{cases} v_2 - v_1 = f_1 \text{ dans } \Omega; \\ \Delta v_1 - v_2 = f_2 \text{ dans } \Omega; \\ v_2 + \left(\frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) - 1\right) \varphi = f_3 \text{ sur } \Sigma; \\ v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ \partial_n v_1 + v_2 + \frac{\kappa(s)}{2} \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Tout d'abord, on suppose que le problème (2.2.7) admet une solution dans  $V$ . Ensuite, en remplaçant  $v_2$  à l'aide de la première équation

$$v_2 = f_1 + v_1 \text{ dans } \Omega,$$

et  $\varphi$  à l'aide de la troisième équation

$$\varphi = \frac{f_3 - f_1 - v_1}{\frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) - 1} \text{ sur } \Sigma, \quad (2.2.8)$$

on obtient que  $v_1$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + v_1 = \tilde{f} \text{ dans } \Omega; \\ v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma; \\ \partial_n v_1 + \alpha v_1 = \tilde{g} \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{f} &:= -(f_2 + f_1) \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \tilde{g} &:= -\alpha f_1 + (\alpha - 1)f_3 \text{ dans } L^2(\Sigma), \end{aligned}$$

et

$$\alpha = 1 + \frac{\kappa(s)}{2 \left(1 + \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4}\right)} > 0.$$

Il est évident que, comme  $\kappa(s) \in L^\infty(\Sigma)$  et  $\alpha > 0$  par hypothèse, la fonctionnelle

$$|v|_{1,\alpha} = \left( \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Sigma} \alpha |v|^2 d\sigma \right)^{1/2}$$

définit une norme sur  $H^1(\Omega)$  qui est équivalente à la norme usuelle  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Soit  $\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  l'espace de fonctions test défini par

$$\mathcal{T}(\overline{\Omega}) = \{\phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \phi|_{\Gamma} = 0\}.$$

Cet espace est dense dans  $H^1_{\Gamma}(\Omega)$  et, si on suppose que le problème (2.2.9) a une solution, on a

$$\forall \phi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \quad - \int_{\Omega} \Delta v_1 \phi \, dx + \int_{\Omega} v_1 \phi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \phi \, dx.$$

En utilisant la formule de Green (2.2.6), il vient

$$\forall \phi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \phi \, dx - \langle \partial_n v_1, \phi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} + \int_{\Omega} v_1 \phi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \phi \, dx.$$

De plus,  $\phi|_{\Gamma} = 0$ . Ainsi,

$$\forall \phi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \phi \, dx - \int_{\Sigma} \partial_n v_1 \phi \, d\sigma + \int_{\Omega} v_1 \phi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \phi \, dx.$$

En utilisant le fait que  $\partial_n v_1 = \tilde{g} - \alpha v_1$  sur  $\Sigma$ , on obtient alors

$$\forall \phi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \phi \, dx + \int_{\Sigma} \alpha v_1 \phi \, d\sigma + \int_{\Omega} v_1 \phi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \phi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g} \phi \, d\sigma. \quad (2.2.10)$$

À présent, on considère la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  définie par

$$a(v_1, \phi) = \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \phi \, dx + \int_{\Sigma} \alpha v_1 \phi \, d\sigma + \int_{\Omega} v_1 \phi \, dx.$$

Il vient immédiatement que  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $H_{\Gamma}^1(\Omega) \times H_{\Gamma}^1(\Omega)$  et  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ -coercive, car  $a(v_1, \phi)$  correspond exactement au produit scalaire défini à partir de la norme  $|\cdot|_{1,\alpha}$ .

Soit  $l(\cdot)$  la forme linéaire définie par

$$l(\phi) = \int_{\Omega} \tilde{f} \phi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g} \phi \, d\sigma.$$

Comme le couple  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  appartient à  $L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ ,  $l(\cdot)$  est continue sur  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ .

$\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  étant dense dans  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ , la formulation (2.2.10) peut être étendue à  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$  et il vient que

$$\forall \phi \in H_{\Gamma}^1(\Omega), a(v_1, \phi) = l(\phi).$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème

$$\forall \phi \in H_{\Gamma}^1(\Omega), a(v_1, \phi) = l(\phi)$$

admet une unique solution  $v_1$  dans  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ . En particulier,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_{\Gamma}^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \phi \, dx + \int_{\Omega} v_1 \phi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \phi \, dx.$$

On en déduit donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle v_1 - \Delta v_1 - \tilde{f}, \phi \rangle = 0,$$

ce qui signifie que

$$v_1 - \Delta v_1 = \tilde{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Cette identité nous permet de donner un sens à  $\Delta v_1$  dans  $L^2(\Omega)$ . Ainsi,  $\partial_n v_1|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et on a aussi

$$\forall \phi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \phi \, dx + \int_{\Sigma} \alpha v_1 \phi \, d\sigma + \int_{\Omega} v_1 \phi \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \phi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g} \phi \, d\sigma.$$

En appliquant la formule de Green (2.2.6), on obtient que  $\forall \phi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \Delta v_1 \phi \, dx + \langle \partial_n v_1, \phi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} + \int_{\Sigma} \alpha v_1 \phi \, d\sigma + \int_{\Omega} v_1 \phi \, dx \\ & = \int_{\Omega} \tilde{f} \phi \, dx + \int_{\Sigma} \tilde{g} \phi \, d\sigma, \end{aligned}$$

i.e.

$$\forall \phi \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \langle \partial_n v_1, \phi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} + \int_{\Sigma} \alpha v_1 \phi \, d\sigma = \int_{\Sigma} \tilde{g} \phi \, d\sigma.$$

Ensuite, on a  $\phi|_{\Gamma} = 0$ , ce qui donne

$$\langle \partial_n v_1 + \left( 1 + \frac{\kappa(s)}{2 \left( 1 + \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right)} \right) v_1 - \tilde{g}, \phi \rangle_{H^{-1/2}(\Sigma), H^{1/2}(\Sigma)} = 0,$$

et on a donc

$$\partial_n v_1 + \left( 1 + \frac{\kappa(s)}{2 \left( 1 + \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right)} \right) v_1 = \tilde{g} \text{ sur } \Sigma.$$

L'existence de  $v_1$  solution de (2.2.9) est alors démontrée.

Comme  $v_1$  et  $f_1$  sont dans  $H^1(\Omega)$ ,  $v_2 = f_1 + v_1$  est défini dans  $H^1(\Omega)$ . De plus comme  $v_2|_{\Sigma}$  et

$f_3$  sont dans  $L^2(\Sigma)$ ,  $\varphi = \frac{f_3 - f_1 - v_1}{\frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) - 1}$  est défini dans  $L^2(\Sigma)$ .

Pour finir la preuve, on doit vérifier que  $(v_1, v_2, \varphi) \in V$ , ce qui est évident puisque

$$\begin{cases} v_2 = f_1 + v_1 \text{ dans } \Omega \\ \alpha \varphi = f_3 - v_2 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

et  $f_1 \in H^1_{\Gamma}(\Omega)$ ,  $f_3 \in L^2(\Sigma)$ . □

En conclusion,

**Théorème 2.2.5.** *Soit  $(u_0, u_1, \psi_0)$  dans  $V$ . Le problème (2.2.1) admet une unique solution  $u$  telle que*

$$(u, \partial_t u, \psi) \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C^0([0, +\infty[; V). \quad (2.2.11)$$

*Démonstration.* Les deux lemmes précédents montrent que l'opérateur  $A$  est un opérateur maximal dissipatif sur son domaine  $V$ . D'après le théorème de Hille-Yosida [55], le problème (2.2.1) admet une unique solution  $U = (u, v, \psi)$  telle que

$$(u, v, \psi) \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C^0([0, +\infty[; V). \quad (2.2.12)$$

$A$  est alors le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions  $Z(t)$  et on peut définir une solution d'énergie finie de (2.2.1) avec des données initiales  $(u_0, u_1, \psi_0)$  dans  $V$  de telle sorte que

$$(u, v, \psi) = Z(t)(u_0, u_1, \psi_0) \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C^0([0, +\infty[; V),$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

Quand  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ , on a [17] :

**Théorème 2.2.6.** *Soit  $(u_0, u_1) \in W_1$  avec*

$$W_1 = \left\{ (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega), \partial_n u + v + \frac{\kappa(s)}{2} u = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}.$$

Alors le problème (2.2.1) admet une unique solution  $u$  telle que

$$(u, \partial_t u) \in C^1([0, +\infty[; W_0) \cap C^0([0, +\infty[; W_1), \quad (2.2.13)$$

où  $W_0 = H_\Gamma^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

On a établi que ce problème était bien-posé si  $\kappa(s) > 0$  et  $\gamma(s) \geq \frac{\kappa(s)}{4}$ . Le problème admet donc une solution quand la frontière extérieure  $\Sigma$  est convexe. Dans le cadre des CLA, ceci n'est pas restrictif puisque  $\Sigma$  est choisie par l'utilisateur.

### 2.3 Comportement en temps long

Les résultats de la section 2.2 peuvent être enrichis en introduisant la fonctionnelle définie sur  $H$  par

$$\mathcal{E}(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla h_1|^2 + |h_2|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |h_3|^2 d\sigma. \quad (2.3.1)$$

Si  $\kappa(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \Sigma$ ,  $\mathcal{E}$  définit une énergie sur  $H$  et si  $\kappa(x) > 0$  sur  $\Sigma$ ,  $\mathcal{E}^{1/2}$  est une norme sur  $H$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|$ , d'après le lemme 2.2.2. De plus,

**Lemme 2.3.1.** *Pour tout  $(u_0, u_1, \psi_0) \in V$  tels que  $(u, \psi)$  est solution de (2.2.1),  $t \mapsto \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi)$  est différentiable et est décroissante sous la condition (2.2.2) :*

$$\gamma(x) > \frac{\kappa(x)}{4}, \forall x \in \Sigma.$$

*Démonstration.* Dans la section précédente, on a vu que si les données initiales  $(u_0, u_1, \psi_0)$  sont dans  $V$ ,  $\mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) \in C^1([0, +\infty[)$ . De plus,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) = \int_{\Omega} \nabla(\partial_t u) \cdot \nabla u dx + \int_{\Omega} \partial_t u \partial_t^2 u dx + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi \partial_t \psi d\sigma. \quad (2.3.2)$$

En utilisant la formule de Green (2.2.6) et la relation  $\partial_t^2 u = \Delta u$  dans  $\Omega$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) = - \int_{\Omega} \partial_t u \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n u \partial_t u d\sigma + \int_{\Omega} \partial_t u \Delta u dx + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi \partial_t \psi d\sigma.$$

De plus, on sait que  $\partial_t u|_{\Gamma} = 0$  et  $\partial_n u = -\partial_t u - \frac{\kappa(s)}{2} \psi$  sur  $\Sigma$ . D'où,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) = - \int_{\Sigma} |\partial_t u|^2 d\sigma - \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi \partial_t u d\sigma.$$

Enfin, comme  $\partial_t \psi = \partial_t u - \left(\gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4}\right) \psi$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) = - \left[ \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left(\gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4}\right) |\psi|^2 d\sigma + \int_{\Sigma} |\partial_t u|^2 d\sigma \right],$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) \leq 0$$

et achève la preuve du lemme 2.3.1. □

**Remarque 2.3.2.** Le lemme 2.3.1 est aussi vrai quand  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$  (voir [17, 14]).

Dans la suite, on suppose que  $\psi_0 = 0$  sur  $\Sigma$ . Comme nous l'avons précédemment annoncé dans la remarque 2.2.1, c'est une condition nécessaire dans le cadre d'une méthode avec des conditions aux limites absorbantes.

**Théorème 2.3.3.** Sous la condition (2.2.2), pour tout  $(u_0, u_1, 0) \in V$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) = 0.$$

*Démonstration.* On a déjà vu que  $A$  est le générateur d'un semi-groupe de contraction continu  $Z(t)$ . Comme il est suffisant de montrer le théorème dans un sous-espace dense de  $V = D(A)$ , on considère des données initiales  $(u_0, u_1, 0)$  dans  $D(A^2)$ , avec

$$D(A^2) = \{(v_1, v_2, \psi) \in V, A(v_1, v_2, \psi) \in V\}$$

muni de la norme du graphe

$$\|(v_1, v_2, \psi)\|_{D(A^2)} = \|(v_1, v_2, \psi)\|_V + \|A(v_1, v_2, \psi)\|_V + \|A^2(v_1, v_2, \psi)\|_V.$$

Pour toute solution de (2.2.1), on a

$$\begin{aligned} \|(u, \partial_t u, \psi)\|_{D(A^2)} &= \|Z(t)(u_0, u_1, 0)\|_{D(A^2)} \\ &= \|Z(t)(u_0, u_1, 0)\|_V + \|A(Z(t)(u_0, u_1, 0))\|_V + \|A^2(Z(t)(u_0, u_1, 0))\|_V. \end{aligned}$$

Comme  $A$ ,  $A^2$  et  $Z(t)$  commutent dans  $D(A^2)$ ,

$$\|(u, \partial_t u, \psi)\|_{D(A^2)} = \|Z(t)(u_0, u_1, 0)\|_V + \|Z(t)A(u_0, u_1, 0)\|_V + \|Z(t)A^2(u_0, u_1, 0)\|_V.$$

Comme  $Z(t)$  est continue dans  $V$ , on en déduit facilement qu'il existe une constante positive  $C$  telle que

$$\|(u, \partial_t u, \psi)\|_{D(A^2)} \leq C\|(u_0, u_1, 0)\|_{D(A^2)}.$$

On a donc une suite bornée de solutions dans  $D(A^2)$  ce qui implique que l'on peut extraire une sous-suite notée  $Z(t_k)(u_0, u_1, 0)$  qui converge faiblement vers  $(u_\infty, v_\infty, \psi_\infty)$  dans  $D(A^2)$ . À présent, notons  $(u(t_k), v(t_k))$  la suite convergeant vers  $(u_\infty, v_\infty)$ . Par définition de  $D(A^2)$ ,  $(u(t_k), v(t_k))$  est bornée dans  $H^{3/2}(\Omega) \times H^{3/2}(\Omega)$  et  $\Delta u(t_k)$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ . En effet, tout  $(u, v)$  dans  $D(A^2)$  satisfait

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \Delta u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma, \partial_n u|_\Sigma \in L^2(\Sigma) \\ v \in H^1(\Omega), \Delta v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma, \partial_n v|_\Sigma \in L^2(\Sigma). \end{cases}$$

et, comme  $\Omega$  est régulier,

$$\{w \in H^1(\Omega), \Delta w \in H^1(\Omega), w = 0 \text{ sur } \Gamma, \partial_n w|_\Sigma \in L^2(\Sigma)\} \subset H^{3/2}(\Omega). \quad (2.3.3)$$

On peut donc en déduire que  $(u(t_k), v(t_k))$  converge fortement vers  $(u_\infty, v_\infty)$  dans  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  en utilisant l'injection compacte de  $H^{3/2}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . De plus,  $\Delta u(t_k)$  converge fortement dans  $L^2(\Omega)$  car il est borné dans  $H^1(\Omega)$ . Comme,  $\Delta u(t_k)$  converge vers  $\Delta u_\infty$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ,

on a prouvé que  $\Delta u(t_k)$  converge fortement vers  $\Delta u_\infty$  dans  $L^2(\Omega)$ , par unicité de la limite. On a donc  $\partial_n u(t_k)|_\Sigma$  converge fortement vers  $\partial_n u_\infty|_\Sigma$  dans  $H^{-1/2}(\Sigma)$  et  $v(t_k)|_\Sigma$  converge fortement vers  $v_\infty|_\Sigma$  dans  $H^{1/2}(\Sigma)$ . Ceci implique que  $\psi(t_k)$  converge fortement vers  $\psi_\infty$  dans  $H^{-1/2}(\Sigma)$ . Néanmoins, ce résultat de convergence n'est pas suffisant pour que  $(u(t_k), v(t_k), \psi(t_k))$  converge fortement vers  $(u_\infty, v_\infty, \psi_\infty)$  dans  $V$ . C'est pourquoi on revient à l'équation qui définit  $\psi(t_k)$  pour montrer qu'en fait,  $\psi(t_k)$  converge fortement dans  $L^2(\Sigma)$ . Par construction,  $\psi$  est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \psi + \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right) \psi = \partial_t u \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty) \\ \psi(0, x) = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

et d'après la formule de Duhamel, on a

$$\psi(t, x) = \int_0^t e^{(\gamma - \frac{\kappa}{4})(s-t)} v(s, x) ds.$$

On sait que  $u$  est bornée dans  $H^{1/2}(\Sigma)$ . Ainsi on a, pour tout  $\xi \in H^{-1/2}(\Sigma)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \psi, \xi \rangle_{H^{1/2}, H^{-1/2}} &= \langle \int_0^t e^{(\gamma - \frac{\kappa}{4})(s-t)} v ds, \xi \rangle_{H^{1/2}, H^{-1/2}} \\ &\leq C \int_0^t e^{\alpha_{\min}(s-t)} \langle v, \xi \rangle_{H^{1/2}, H^{-1/2}} ds \end{aligned}$$

car  $v(s)$  est uniformément bornée par rapport à la variable  $s$ , avec  $\alpha_{\min} = \min_{x \in \Sigma} (\gamma - \frac{\kappa}{4})$ . On obtient donc

$$| \langle \psi, \xi \rangle_{H^{1/2}, H^{-1/2}} | \leq \frac{1}{\alpha_{\min}} \|v\|_{H^{1/2}(\Sigma)} \|\xi\|_{H^{-1/2}(\Sigma)} (1 - e^{-\alpha_{\min} t})$$

ce qui donne

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\Sigma)} \leq \frac{1}{\alpha_{\min}} (1 - e^{-\alpha_{\min} t}) \|v\|_{H^{1/2}(\Sigma)}.$$

On a donc montré que  $\psi(t)$  est uniformément bornée dans  $H^{1/2}(\Sigma)$  et on en déduit que  $\psi(t_k)$  converge fortement vers  $\psi_\infty$  dans  $L^2(\Sigma)$ , comme conséquence de l'injection compacte de  $H^{1/2}(\Sigma)$  dans  $L^2(\Sigma)$ .

En conclusion,  $(u(t_k), v(t_k), \psi(t_k))$  converge fortement vers  $(u_\infty, v_\infty, \psi_\infty)$  dans  $V$ .

Comme  $t \mapsto \mathcal{E}(u, \partial_t u)$  est continue, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(Z(t)(u_0, u_1, 0)) \\ &= \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(Z(t_k)(u_0, u_1, 0)) \\ &= \mathcal{E}(u_\infty, v_\infty, \psi_\infty). \end{aligned}$$

On a aussi, pour tout  $s$  positif ;

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(Z(t+s)(u_0, u_1, 0)) = \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(Z(s)Z(t_k)(u_0, u_1, 0)) = \mathcal{E}(Z(s)(u_\infty, v_\infty, \psi_\infty)).$$

Ainsi, si  $(w, \partial_t w, \varphi) = Z(t)(u_\infty, v_\infty, \psi_\infty)$  représente la solution du problème (2.2.1), avec des données initiales  $(u_\infty, v_\infty, \psi_\infty)$  dans  $D(A)$ , on a

$$\mathcal{E}(w, \partial_t w, \varphi) = \mathcal{E}(u_\infty, v_\infty, \psi_\infty) \text{ pour tout } t \text{ positif.}$$

D'après la preuve du lemme 2.3.1, comme

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(w, \partial_t w, \varphi) = - \left[ \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right) |\varphi|^2 d\sigma + \int_{\Sigma} |\partial_t w|^2 d\sigma \right],$$

on a nécessairement  $\partial_t w = 0$  sur  $\Sigma$  et  $\varphi = 0$  sur  $\Sigma$ . On en déduit donc que  $w$  est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[ \\ w(x, 0) = u_{\infty}, \partial_t w(x, 0) = v_{\infty} \text{ dans } \Omega \\ w = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[ \\ \partial_n w = 0 \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty) \end{cases}$$

et  $z := \partial_t w$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 z - \Delta z = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[ \\ z(x, 0) = v_{\infty}, \partial_t z(x, 0) = \Delta u_{\infty} \text{ dans } \Omega \\ z = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[ \\ \partial_n z = z = 0 \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty). \end{cases}$$

Comme  $\partial_n z = z = 0$  sur  $\Sigma$ , on en déduit que  $z = 0$  dans  $\Omega \times [0, +\infty[$ , comme conséquence du théorème de Holmgren (cf. Lions [60]). Par conséquent,  $w$  est solution de

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[ \\ w(x, 0) = u_{\infty} \text{ dans } \Omega \\ w = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[ \\ \partial_n w = 0 \text{ sur } \Sigma \times (0, +\infty) \end{cases}$$

ce qui implique que  $w = 0$  dans  $\Omega \times [0, +\infty[$  car  $\Omega$  est connexe. Le couple  $(u_{\infty}, v_{\infty})$  est alors égal à zéro. Par conséquent, on obtient aussi que  $\psi_{\infty}$  est égal à zéro et *a fortiori*, on a  $\mathcal{E}(u_{\infty}, v_{\infty}, \psi_{\infty}) = 0$ .  $\square$

On est donc en mesure d'énoncer le théorème suivant

**Théorème 2.3.4.** *Soit  $(u_0, u_1, 0)$  dans  $V$ . Alors la solution  $u$  de (2.2.1) satisfait*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u, \partial_t u, \psi) = (0, 0, 0) \text{ dans } H.$$

*Démonstration.* Si le couple  $(u_0, u_1, 0)$  est dans  $V$ , on sait que (cf. Théorème 2.3.3)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) = 0$$

et que  $\mathcal{E}$  est une norme sur  $H$ , équivalente à  $\| \cdot \|$ .

Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u, \partial_t u, \psi) = (0, 0, 0) \text{ dans } H.$$

$\square$

Le théorème 2.3.4 est toujours valide quand  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ . Le résultat a été prouvé dans [14].

**Remarque 2.3.5.** Dans la démonstration du théorème, l'hypothèse  $\Psi_0 = 0$  sur  $\Sigma$  est importante car elle aide à prouver que  $\Psi(t_k)$  est borné dans  $H^{1/2}(\Sigma)$ . On obtient le même résultat si  $\Psi_0 \in H^{1/2}(\Sigma)$ . Par contre, dans le cas général où  $\Psi_0 \in L^2(\Sigma)$ , on ne peut prouver la convergence forte de la suite de solutions dans  $V$ .

## 2.4 Analyse de performances

### 2.4.1 Présentation générale de la méthode IPDG

La méthode IPDG, aussi appelée Symetric Interior Penalty, a été introduite par Bassi et Rebay [12, 18] pour des problèmes elliptiques généraux. On renvoie à [13] pour une comparaison de cette méthode à d'autres techniques Galerkin Discontinues (DG). C'est une méthode DG dans laquelle un terme de pénalisation est introduit pour imposer la continuité faible de la solution au travers de chaque élément du maillage. Il a été montré dans [13] que la méthode IPDG est l'une des seules méthodes DG qui soit à la fois stable et consistante, ce qui garantit un ordre de convergence optimal. Comme toutes les méthodes de DG, la méthode IPDG est une méthode d'éléments finis ce qui nous permet de considérer des maillages triangulaires en 2D et des maillages tétraédriques en 3D. Cette propriété est très importante dans notre cas puisque nous souhaitons considérer des domaines de forme arbitraire, qui sont plus faciles à mailler avec des triangles ou tétraédriques. De plus, quand on utilise des méthodes de Galerkin discontinues, on obtient une représentation quasi-explicite de la solution car la matrice de masse que l'on doit inverser est par construction diagonale par blocs. Enfin, comme les fonctions de base sont discontinues, on peut facilement considérer des milieux hétérogènes et l'adaptativité hp est directe.

On considère une partition  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  composée d'éléments  $K$ , triangles en 2D et tétraèdres en 3D. On note  $\Omega_h$  l'ensemble des éléments,  $\Sigma_{\text{abs}}$  l'ensemble des faces sur le bord absorbant  $\Sigma$ ,  $\Sigma_D$  l'ensemble des faces sur  $\Gamma$  et  $\Sigma_i$  l'ensemble des faces internes dans le domaine de telle sorte que  $\Sigma_i \cap (\Sigma_D \cup \Sigma_{\text{abs}}) = \emptyset$ . Pour chaque  $\sigma \in \Sigma_i$ , on doit distinguer les deux triangles (ou tétraèdres) qui partagent  $\sigma$  : on les note arbitrairement  $K^+$  et  $K^-$ . On introduit les notations suivantes pour définir le saut et la moyenne au travers d'une face :

$$[[v]] := v^+ \nu^+ + v^- \nu^- \quad \text{et} \quad \{\{v\}\} := \frac{v^+ + v^-}{2},$$

où  $v^+$  et  $v^-$  représentent respectivement la restriction de  $v$  sur  $K^+$  et  $K^-$  et  $\nu^\pm$  représente le vecteur normal unitaire extérieur à  $K^\pm$ .

Tout d'abord, on rappelle que la CLA (2.1.1) que nous avons construite s'écrit

$$\partial_n u = -\partial_t u - \frac{\kappa(s)}{2} \psi \text{ sur } \Sigma,$$

avec

$$\left( \partial_t - \frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s) \right) \psi = \partial_t u \text{ sur } \Sigma.$$

On cherche une approximation de la solution  $u$  dans l'espace d'éléments finis  $V_h^k$  défini comme suit

$$V_h^k = \left\{ v \in L^2(\Omega); v|_K \in P^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, k \in \mathbb{N}$$

et une approximation de  $\psi$  dans l'espace d'éléments finis  $W_h^k$  défini par

$$W_h^k = \left\{ W \in L^2(\Sigma); w|_\sigma \in P^k(\sigma), \forall \sigma \in \Sigma_{\text{abs}} \right\}, k \in \mathbb{N}$$

où  $P^k(K)$  (respectivement  $P^k(\sigma)$ ) est l'ensemble des polynômes de degré au plus  $k$  sur  $K$  (respectivement sur  $\sigma$ ).

Le problème discret est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h^k \times (0, +\infty) \text{ et } \psi \in W_h^k \times (0, +\infty) \text{ tels que,} \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \partial_t^2 u_h v_h + a(u_h, v_h) + \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_\sigma \left( \partial_t u_h + \frac{\kappa(s)}{2} \psi_h \right) v_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v_h, \forall v_h \in V_h^k \\ \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_\sigma \left( \partial_t - \frac{\kappa(s)}{4} + \gamma(s) \right) \psi_h \varphi_h = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_\sigma \partial_t u_h w_h, \forall w_h \in W_h^k \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

avec

$$a(u, v) = \sum_K \int_K \nabla u \nabla v - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_\sigma \left( \{\{\nabla u\}\} [v] + \{\{\nabla v\}\} [u] - \alpha [u] [v] \right)$$

et  $\alpha \in (R)^{+*}$  est un coefficient de pénalisation [5]. On fait référence à [12, 13] pour plus de détails sur les méthodes IPDG, à [5, 4] pour une analyse du coefficient de pénalisation et à [43] pour l'application de la méthode IPDG à la discrétisation de l'équation des ondes.

Soit  $d$  la dimension du problème. Pour chaque élément  $K$  (respectivement pour chaque face  $\sigma$ ) la dimension de  $P^k(K)$  (respectivement  $P^k(\sigma)$ ) est  $n_d$  (respectivement  $n_{d-1}$ ) avec  $n_3 = C_{k+3}^k$ ,  $n_2 = C_{k+2}^k$  et  $n_1 = k + 1$ . Si le maillage est composé de  $N_e$  éléments et  $N_f$  faces, on a alors

$$N := N_e \times n_d$$

degrés de liberté pour interpoler  $u_h$  et

$$M := N_f \times n_{d-1}$$

degrés de liberté pour interpoler  $\psi_h$ .

Considérons  $\{v_i, 1 \leq i \leq N\}$  une base de  $V_h^k$  et  $\{w_i, 1 \leq i \leq M\}$  une base de  $W_h^k$ . On peut réécrire  $u_h$  et  $\psi_h$  de la façon suivante

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) v_i(x) \text{ et } \psi_h(x, t) = \sum_{i=1}^M \Psi_i(t) w_i(x).$$

La forme matricielle du problème est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + B \frac{d \mathbf{U}}{dt} + B_\kappa \mathbf{\Psi} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{S}, \\ C \frac{d \mathbf{\Psi}}{dt} + C_{\kappa, \gamma} \mathbf{\Psi} = D \frac{d \mathbf{U}}{dt}, \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\Psi$  sont les vecteurs inconnus et

$$\begin{aligned}
M &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad K = (a(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq N}, \\
\mathbf{S} &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K S v_i \right)_{1 \leq i \leq N}, \quad B = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \\
B_{\kappa} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)}{2} w_i v_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}, \\
C &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \\
C_{\kappa, \gamma} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right) w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \quad D = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} v_i w_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}.
\end{aligned}$$

(2.4.3)

En ce qui concerne la discrétisation en temps, on utilise un schéma aux différences finies d'ordre deux avec un pas de temps  $\Delta t$  et on obtient

$$\mathbf{M}\mathbf{X}^{n+1} = \begin{pmatrix} \Delta t^2 \mathbf{S}^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta t^2 K + 2M \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}^n + \begin{pmatrix} -M + \frac{\Delta t}{2} B & -\frac{\Delta t^2}{2} B_{\kappa} \\ -D & C - \Delta t C_{\kappa, \gamma} \end{pmatrix} \mathbf{X}^{n-1},$$

(2.4.4)

où

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M + \frac{\Delta t}{2} B & \frac{\Delta t^2}{2} B_{\kappa} \\ -D & C + \Delta t C_{\kappa, \gamma} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{X}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^i \\ \mathbf{\Psi}^i \end{pmatrix}.$$

**Remarque 2.4.1.** En pratique, on n'inverse pas la matrice  $\mathbf{M}$  et on résout (2.4.4) élément par élément. Pour simplifier la présentation, on suppose, sans perte de généralité, que les degrés de liberté sont numérotés de telle sorte que

1. l'élément  $K_i$  est le support des fonctions  $(v_{n_d*(i-1)+j})_{j=1, n_d}$  ;
2. la face  $\sigma_i$  est le support des fonctions  $(w_{n_{d-1}*(i-1)+j})_{j=1, n_{d-1}}$ .

On note alors  $U_{K_i}$  (respectivement  $\Psi_{\sigma_i}$ ) la restriction de  $U$  (respectivement  $\Psi$ ) à l'élément  $K_i$  (respectivement la face  $\sigma_i$ ) :

$$U_{K_i} = (U_{n_d*(i-1)+j})_{j=1, n_d}$$

$$\Psi_{\sigma_i} = (\Psi_{n_{d-1}*(i-1)+j})_{j=1, n_{d-1}},$$

par  $M_{K_i}$  et  $B_{K_i}$  les restrictions de  $M$  et  $B$  à l'élément  $K_i$  :

$$M_{K_i} = (M_{n_d*(i-1)+j, n_d*(i-1)+k})_{j,k=1, n_d}$$

$$B_{K_i} = (B_{n_d*(i-1)+j, n_d*(i-1)+k})_{j,k=1, n_d},$$

et par  $B_{\kappa\sigma_i}$ ,  $C_{\sigma_i}$ ,  $C_{\kappa, \gamma\sigma_i}$  et  $D_{\sigma_i}$  les restrictions de  $B_\kappa$ ,  $C$ ,  $C_{\kappa, \gamma}$  et  $D$  à la face  $\sigma_i$

$$B_{\kappa\sigma_i} = (B_{\kappa n_d*(j_i-1)+k, n_{d-1}*(i-1)+l})_{\substack{k=1, n_d \\ l=1, n_{d-1}}}$$

$$C_{\sigma_i} = (C_{n_{d-1}*(i-1)+k, n_{d-1}*(i-1)+l})_{\substack{k=1, n_{d-1} \\ l=1, n_{d-1}}}$$

$$C_{\kappa, \gamma\sigma_i} = (C_{\kappa, \gamma n_{d-1}*(i-1)+k, n_{d-1}*(i-1)+l})_{\substack{k=1, n_{d-1} \\ l=1, n_{d-1}}}$$

$$D_{\sigma_i} = (D_{n_{d-1}*(i-1)+k, n_d*(j_i-1)+l})_{\substack{k=1, n_{d-1} \\ l=1, n_d}}$$

(si on suppose que la face  $i$  appartient à l'élément  $j_i$ ).

Ainsi,

1. si  $K_i$  est un élément intérieur (i.e. un élément qui n'a pas de face sur  $\Sigma$ ), on doit résoudre le système

$$M_{K_i} U_{K_i}^{n+1} = G$$

où  $G$  est un vecteur qui ne dépend que de  $U^n$ ,  $U^{n-1}$  et  $\mathbf{S}^n$  ;

2. si  $K_i$  est un élément du bord, avec par exemple pour faces externes  $\sigma_{j_1}$  et  $\sigma_{j_2}$  (en pratique un élément du bord a rarement plus de deux faces externes), on doit résoudre le système

$$\begin{pmatrix} M_{K_i} + \frac{\Delta t}{2} B_{K_i} & \frac{\Delta t^2}{2} B_{\kappa\sigma_{j_1}} & \frac{\Delta t^2}{2} B_{\kappa\sigma_{j_2}} \\ -D_{\sigma_{j_1}} & C_{\sigma_{j_1}} + \Delta t C_{\kappa, \gamma\sigma_{j_1}} & 0 \\ -D_{\sigma_{j_2}} & 0 & C_{\sigma_{j_2}} + \Delta t C_{\kappa, \gamma\sigma_{j_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{K_i}^{n+1} \\ \Psi_{\sigma_{j_1}}^{n+1} \\ \Psi_{\sigma_{j_2}}^{n+1} \end{pmatrix} = G$$

où  $G$  est un vecteur qui ne dépend que de  $U^n$ ,  $U^{n-1}$ ,  $\Psi^n$ ,  $\Psi^{n-1}$  et  $\mathbf{S}^n$ .

Si  $K_i$  a deux faces externes (respectivement une ou trois), on doit inverser une matrice  $(n_d + 2n_{d-1}) \times (n_d + 2n_{d-1})$  (respectivement  $(n_d + n_{d-1}) \times (n_d + n_{d-1})$  ou  $(n_d + 3n_{d-1}) \times (n_d + 3n_{d-1})$ ). Si  $d = 3$  et  $k = 3$ , on a  $n_d = 20$  et  $n_{d-1} = 10$ , de telle sorte que dans la pire configuration, on n'ait à inverser qu'une matrice  $50 \times 50$ .

Dans tous les cas, on doit donc juste résoudre des petits systèmes facilement inversibles.

**Remarque 2.4.2.** En pratique, le terme de courbure est supposé constant par élément du bord. Pour le calculer, on le définit comme étant la moyenne des courbures aux deux extrémités de l'élément considéré. Pour évaluer la courbure de manière précise en un noeud du bord, on utilise le résultat suivant donné dans Spivak [72] :

**Proposition 2.4.3.** Soit  $K$  un triangle dont les trois sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont sur la frontière  $\Sigma$  (2.4.3). On peut évaluer la courbure au point  $B$  par

$$\kappa(B) = \frac{4A(K)}{AB \times AC \times BC},$$

où  $A(K)$  représente l'aire du triangle  $ABC$ .

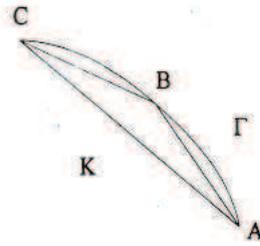


FIG. 2.2 – Calcul approché de la courbure

De plus, pour le calcul de l'aire du triangle, on utilise le théorème de Kaplan [41] :

$$A(K) = ((a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b))^{1/2} / 4,$$

où les quantités  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent les différentes longueurs des côtés de  $K$  ordonnés de la façon suivante :  $a \geq b \geq c$ .

## 2.4.2 Analyse de précision

On veut analyser les performances de la CLA (2.1.1) comparée à celle de la C-ABC pour différentes valeurs de  $\gamma$ . Pour cela, nous allons considérer deux configurations notées respectivement Configuration 1 et Configuration 2.

Dans la Configuration 1,  $\Omega_1$  est un domaine bidimensionnel (voir Fig. 2.3) et est délimité par une frontière extérieure circulaire  $\Sigma_1$ . La frontière  $\Gamma_1$  représente la frontière de l'obstacle. Les deux cercles sont centrés à l'origine. Le rayon de  $\Sigma_1$  est  $R_{\text{ext}} = 3\text{m}$  et le rayon de  $\Gamma_1$  est  $R_{\text{int}} = 1\text{m}$ . La

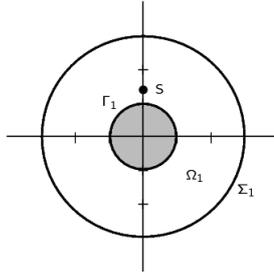


FIG. 2.3 – Domaine de calcul - Configuration 1

source est une source ponctuelle placée à  $(0\text{m}, 1.3\text{m})$  et est définie comme une dérivée seconde de Gaussienne de fréquence dominante 1Hz :

$$S = \delta_{x_0} 2\lambda \left( \lambda (t - t_0)^2 - 1 \right) e^{-\lambda(t-t_0)^2},$$

avec  $x_0 = (0\text{m}, 1.3\text{m})$ ,  $\lambda = \pi^2 f_0^2$ ,  $f_0 = 1$ ,  $t_0 = 1/f_0$  et  $\delta_{x_0}$  représente le Dirac en  $x_0$ .

Dans la Configuration 2,  $\Omega_2$  (cf Fig. 2.4) est un domaine bidimensionnel délimité par une frontière extérieure  $\Sigma_2$  et par une frontière intérieure  $\Gamma_2$ .  $\Sigma_2$  est une ellipse de demi-grand axe  $a_{\text{ext}} = 6\text{m}$  et de demi-petit axe  $b_{\text{ext}} = 3\text{m}$  centrée à l'origine.  $\Gamma_2$  représente la frontière d'un obstacle elliptique de demi-grand-axe  $a = 2\text{m}$  et de demi-petit axe  $b = 1\text{m}$  centré à l'origine.

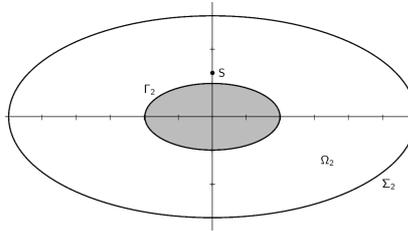


FIG. 2.4 – Domaine de calcul - Configuration 2

Pour comparer l'influence de la CLA (2.1.1) pour différentes valeurs de  $\gamma$ , on calcule tout d'abord l'erreur relative  $L^2$  en temps en un récepteur donné près de la frontière extérieure. Pour évaluer cette erreur relative, on doit calculer la solution exacte à chaque récepteur. En pratique, on ne calcule pas la solution exacte mais on calcule une solution approchée dans un domaine plus grand que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Ici, on multiplie les dimensions de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  par 3. L'erreur relative  $L^2_{(x,y)}([0, T])$  au point  $(x, y)$  est alors définie par

$$\frac{\left( \int_0^T (u_{\text{app}}(t, (x, y)) - u_{\text{ex}}(t, (x, y)))^2 dt \right)^{1/2}}{\left( \int_0^T (u_{\text{ex}}(t, (x, y)))^2 dt \right)^{1/2}}, \quad (2.4.5)$$

où  $u_{\text{app}}$  est la solution approchée et  $u_{\text{ex}}$  est la solution "exacte". L'erreur est calculée après 6000 itérations (avec un pas de temps égal à  $3.6 \times 10^{-3}\text{s}$ ).

On considère trois récepteurs placés près de la frontière extérieure de coordonnées  $(0, 2.85\text{m})$ ,  $(0.7\text{m}, 2.75\text{m})$  et  $(1.4\text{m}, 2.45\text{m})$  pour la configuration 1 et quatre récepteurs de coordonnées

(6m, 2.05m), (5m, 2.3m), (6m, -2.05m) et (5m, -2.3m) pour la configuration 2. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 2.1 pour la configuration 1 et dans le tableau 2.2 pour la configuration 2. De ces résultats, on déduit que l'erreur relative  $L^2$  est quasiment la même pour

	(0, 2.85m)	(0.7m, 2.75m)	(1.4m, 2.45m)
C-ABC	4.92	13.11	13.3
$\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{3}$	4.92	13.10	13.31
$\gamma(s) = \kappa(s)$	4.89	13.19	13.37
$\gamma(s) = 3\kappa(s)$	4.92	13.42	13.83
$\gamma(s) = 10\kappa(s)$	5.33	14.04	14.22

TAB. 2.1 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) - Source en (1.5,1) - Configuration 1

	(6m, 2.05m)	(5m, 2.3m)	(6m, -2.05m)	(5m, -2.3m)
curvature	2.49	3.65	6.77	11.53
$\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{3}$	2.49	3.65	6.79	11.56
$\gamma(s) = \kappa(s)$	2.50	3.66	6.93	11.75
$\gamma(s) = 3\kappa(s)$	2.52	3.67	7.35	12.31
$\gamma(s) = 10\kappa(s)$	2.60	3.74	7.89	13.10

TAB. 2.2 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) - Source en (1.5,1) - Configuration 2

toutes les valeurs de  $\gamma(s)$  et est similaire aux erreurs obtenues avec la C-ABC. On remarque aussi que l'erreur commence à augmenter quand  $\gamma(s)$  est supérieur à  $\kappa(s)$ .

Dans la suite, on prend arbitrairement  $\gamma(s) = \kappa(s)$ .

À présent, on s'intéresse à l'évolution de ces erreurs lorsqu'on déplace la frontière absorbante, pour déterminer où placer la frontière afin d'obtenir des résultats convenables sans coûts de calcul élevés. On considère tout d'abord la configuration 1. Nous avons testé six différents rayons  $R_{\text{ext}}$  : 1.5m, 2m, 3m, 4m, 5m et 6m dans le but de trouver la valeur critique du rayon du cercle extérieur qu'on devrait prendre pour obtenir des résultats précis.

Tout d'abord, on place trois récepteurs de coordonnées (1.025m, 1.025m), (1.256m, 0.725m) et (1.4m, 0.375m) près de l'obstacle et on calcule l'erreur relative  $L^2$  en temps définie en (2.4.5). Les résultats que nous avons obtenus sont présentés dans le tableau 2.3. On voit que lorsque la

	(1.025m, 1.025m)	(1.256m, 0.725m)	(1.4m, 0.375m)
$R_{\text{ext}} = 1.5\text{m}$	29.87	35.08	41.75
$R_{\text{ext}} = 2\text{m}$	6.49	10.84	18.17
$R_{\text{ext}} = 3\text{m}$	1.46	2.46	4.52
$R_{\text{ext}} = 4\text{m}$	0.96	1.42	2.03
$R_{\text{ext}} = 5\text{m}$	0.94	1.33	1.11
$R_{\text{ext}} = 6\text{m}$	0.93	0.87	1.07

TAB. 2.3 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) - Source in (1.3,0) - Configuration 1

frontière artificielle est placée près de l'obstacle, les erreurs relatives obtenues sont très importantes à cause des nombreuses réflexions provenant de la frontière extérieure. Quand le rayon de

la frontière artificielle est supérieur à 3m, on obtient de faibles valeurs pour l'erreur relative. Quand on prend un rayon extérieur égal à 4m, 5m ou 6m, les erreurs relatives obtenues sont similaires à celles obtenues avec un rayon extérieur de 3m mais la simulation est beaucoup plus coûteuse. Par conséquent, quand l'obstacle est circulaire, nous recommandons de prendre comme frontière artificielle un cercle de rayon égal à trois fois le rayon de l'obstacle.

À présent, on réalise une analyse similaire mais en regardant l'erreur globale en temps et en espace, *i.e.* on calcule l'erreur relative  $L^2([0, t] \times \Omega)$  définie par

$$\left( \frac{\int_0^t \int_{\Omega} |u_{app}(s, x) - u_{ex}(s, x)|^2 dx ds}{\int_0^t \int_{\Omega} |u_{ex}(s, x)|^2 dx ds} \right)^{1/2}.$$

Les résultats que nous avons obtenus sont présentés dans la figure 2.5. Pour un rayon extérieur inférieur à 3m, il y a beaucoup de réflexions provenant de la frontière extérieure et donc les erreurs relatives calculées sont entre 3 et 25%. Quand le rayon extérieur est supérieur à 3m, on obtient de petites erreurs relatives et la différence entre les erreurs relatives est faible. Ainsi, choisir un rayon extérieur de 3m quand le rayon intérieur est égal à 1m semble être le meilleur choix afin d'obtenir de bonnes approximations de la solution de l'équation des ondes sans coûts de calculs élevés.

À présent, on veut vérifier si cette conclusion est la même dans le cas où l'obstacle est elliptique.

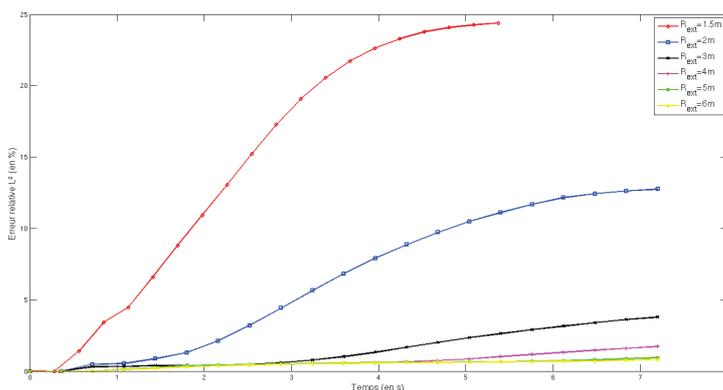


FIG. 2.5 – Erreur relative pour différentes distances - Configuration 1

Ici aussi, on considère six domaines différents. Dans chaque configuration, la frontière intérieure est la même que dans la configuration 2 c'est-à-dire que l'obstacle est une ellipse centrée à l'origine, de demi-grand axe  $a$  égal à 2m et de demi-petit axe  $b$  égal à 1m. La frontière extérieure est une ellipse centrée à l'origine de demi-grand axe  $a_{ext}$  et de demi-petit axe  $b_{ext}$ .  $a_{ext}$  et  $b_{ext}$  sont respectivement calculés en multipliant  $a$  et  $b$  par 1.5, 2, 3, 4, 5 et 6. Nous avons placé trois récepteurs près de l'obstacle de coordonnées (0.75m, 1.4m), (2.51m, 0.725m) et (2.8m, 0.375m) et on calcule l'erreur relative  $L^2$  en temps définie en (2.4.5). Les résultats que nous avons obtenus sont présentés dans le tableau 2.4. On peut voir que dans ce cas, on obtient de bons résultats quand  $a_{ext} \geq 4a$  et  $b_{ext} \geq 4b$ . Si on prend  $a_{ext} = 6m$  et  $b_{ext} = 3m$  on obtient des résultats convenables mais la différence avec le cas où  $a_{ext} = 8m$  et  $b_{ext} = 4m$  est importante. A présent, on vérifie que nous obtenons des résultats similaires en calculant l'erreur relative  $L^2([0, t] \times \Omega)$ . Les résultats sont représentés dans la figure 2.6. On en déduit que dans une telle configuration, on devrait

	(0.75m, 1.4m)	(2.51m, 0.725m)	(2.8m, 0.375m)
$a_{\text{ext}} = 3\text{m}, b_{\text{ext}} = 1.5\text{m}$	35.03	61.61	69.34
$a_{\text{ext}} = 4\text{m}, b_{\text{ext}} = 2\text{m}$	4.27	22.69	30.77
$a_{\text{ext}} = 6\text{m}, b_{\text{ext}} = 3\text{m}$	4.1	8.75	10.52
$a_{\text{ext}} = 8\text{m}, b_{\text{ext}} = 4\text{m}$	3.72	2.48	3.27
$a_{\text{ext}} = 10\text{m}, b_{\text{ext}} = 5\text{m}$	0.59	1.15	1.77
$a_{\text{ext}} = 12\text{m}, b_{\text{ext}} = 6\text{m}$	0.44	0.55	1.38

TAB. 2.4 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) - Source in (1.3,0) - Configuration 2

prendre  $a_{\text{ext}} = 3a$  et  $b_{\text{ext}} = 3b$  afin d’obtenir de petites erreurs relatives comme dans le cas d’un réflecteur circulaire.

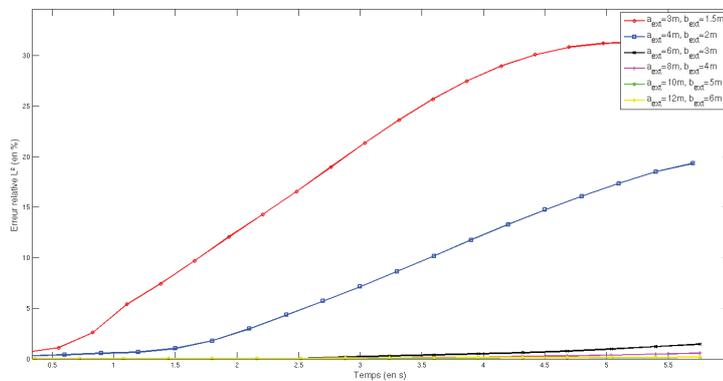


FIG. 2.6 – Erreur relative pour des distances à l’obstacle différentes - Configuration 2

Au cours de ces expériences numériques, nous n’avons pas observé d’instabilités même lors de simulations en temps long. Dans la suite, on cherche à montrer un résultat de stabilité dans le but de confirmer et de quantifier ces observations numériques.

## 2.5 Analyse de stabilité

La stabilité en temps des équations d’ondes couplées à des CLA est un sujet d’actualité car elle fait souvent défaut quand on utilise des PML. Des résultats théoriques ont été établis par Bécache *et al.* [20] sous des hypothèses haute fréquence mais à notre connaissance, aucun résultat reposant sur une méthode d’énergie n’est disponible pour les PML. C’est certainement dû au fait que les PML font intervenir un noyau de convolution en temps qu’il n’est pas possible de traiter variationnellement. On va voir dans ce paragraphe qu’on peut établir un résultat de stabilité forte pour la famille de CLA construite au chapitre 1. Par stabilité forte, nous entendons existence d’une fonctionnelle d’énergie qui, sous des hypothèses géométriques réalisées en pratique, décroît en temps de façon exponentielle.

Pour les tests numériques, nous avons considéré le cas où les ondes sont générées par une source ponctuelle. Cette source est à support compact en temps inclus dans un intervalle  $[0, T]$ . Cela signifie donc que pour  $t > T$ , le système se transforme en un problème aux limites avec données initiales qui sont définies par les valeurs du champ et de sa dérivée en temps à l'instant  $T$ . C'est pourquoi dans la suite, nous nous intéressons encore au problème (2.2.1) pour lequel on cherche à établir un résultat de stabilité forte. Pour préciser notre objectif, on pose la définition suivante :

**Définition 2.5.1.** *On dit qu'un problème aux limites est fortement stable s'il peut être associé à une fonctionnelle positive  $t \mapsto \mathcal{E}(u)(t)$ ,  $u$  désignant la solution du problème, telle que :  $\exists C > 0$ ,  $\exists \beta > 0$  tel que*

$$\mathcal{E}(u)(t) \leq C e^{-\beta t} \mathcal{E}(u)(0). \quad (2.5.1)$$

À la section 2 de ce chapitre, on a déjà montré qu'il existe une fonctionnelle qu'on vanoter pour simplifier  $\mathcal{E}(t)$  ( $:= \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi)$ ) et dont on rappelle la définition :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |\psi|^2 d\sigma.$$

Pour établir l'estimation (2.5.1), on va appliquer une méthode de multiplicateurs (voir par exemple [60, 58, 56, 64]). Dans [60, 56], il a été notamment montré qu'il suffit de prouver qu'il existe une constante  $C$  positive telle que

$$\int_S^T \mathcal{E}(t) dt \leq C \mathcal{E}(S) \quad (2.5.2)$$

avec  $0 \leq S < T < +\infty$  pour obtenir (2.5.1).

### 2.5.1 Résultats préliminaires

On commence par établir un résultat de régularité.

**Lemme 2.5.2.** *Soit  $(u_0, u_1, \psi_0) \in V$  avec  $\psi_0 \in H^{1/2}(\Sigma)$ . Alors*

$$u \in C^0([0, +\infty[; H^2(\Omega)).$$

*Démonstration.* Le théorème de Hille-Yosida nous permet de prouver que pour tout  $(u_0, u_1, \psi_0) \in V$ ,

$$(u, \partial_t u) \in C^0([0, +\infty[; V) \cap C^1([0, +\infty[; H).$$

Par définition de  $V$ , on a donc :

$$u \in C^0([0, +\infty[; H^1(\Omega)) \text{ et } \Delta u \in C^0([0, +\infty[; L^2(\Omega)). \quad (2.5.3)$$

De plus, si  $\psi_0 \in H^{1/2}(\Sigma)$ , l'inconnue auxiliaire satisfait

$$\psi \in C^0([0, +\infty[; H^{1/2}(\Sigma)).$$

En effet, d'après la formule de Duhamel,  $\psi$  s'écrit, pour tout  $x \in \Sigma$ ,

$$\psi(t, x) = \int_0^t e^{(\gamma - \frac{\kappa}{4})(s-t)} \partial_t u(s, x) ds + \psi_0(x).$$

On sait que  $\partial_t u \in C^0([0, +\infty[; H^1(\Omega))$ , ce qui implique que  $\partial_t u|_\Sigma \in C^0([0, +\infty[; H^{1/2}(\Sigma))$ . On obtient donc que  $\psi \in C^0([0, +\infty[; H^{1/2}(\Sigma))$  si  $\psi_0 \in H^{1/2}(\Sigma)$ . À présent,  $u$ ,  $\partial_t u$  et  $\psi$  vérifient la condition de bord

$$\partial_n u + \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} \psi = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Comme  $\kappa$  appartient à  $L^\infty(\Sigma)$ , on a donc

$$\partial_n u|_\Sigma \in C^0([0, +\infty[; H^{1/2}(\Sigma))$$

et le résultat de régularité précédent combiné avec (2.5.3) implique que

$$u \in C^0([0, +\infty[; H^2(\Omega)).$$

□

**Lemme 2.5.3.** Soit  $(u_0, u_1, \psi_0) \in V$ . Alors,

$$\mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(S) = - \int_S^T \int_\Sigma |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) |\psi|^2 d\sigma dt. \quad (2.5.4)$$

*Démonstration.* On a déjà montré que si  $(u_0, u_1, \psi_0) \in V$ ,  $\mathcal{E}$  est différentiable et que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(u, \partial_t u, \psi) = - \int_\Sigma |\partial_t u|^2 d\sigma + \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) |\psi|^2 d\sigma.$$

Ainsi, après une intégration sur  $[S, T]$ , on obtient

$$\mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(S) = - \int_S^T \int_\Sigma |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) |\psi|^2 d\sigma dt.$$

□

Par la suite, on suppose que

$$\gamma(x) > \frac{\kappa(x)}{4}, \forall x \in \Sigma, \gamma(x) - \frac{\kappa(x)}{4} \in L^\infty(\Sigma) \text{ et } \kappa(x) > 0, \forall x \in \Sigma. \quad (2.5.5)$$

**Lemme 2.5.4.** Soit  $(u_0, u_1, \psi_0) \in V$  avec  $\psi_0 \in H^{1/2}(\Sigma)$ . On a

$$\begin{cases} \int_S^T \int_\Sigma |\partial_t u|^2 d\sigma dt \leq \mathcal{E}(S) \\ \int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right) |\psi|^2 d\sigma dt \leq \mathcal{E}(S) \end{cases} \quad (2.5.6)$$

et si  $\alpha_{\min} = \min_{x \in \Sigma} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right)$ , on a aussi

$$\int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} |\psi|^2 d\sigma dt \leq \frac{1}{\alpha_{\min}} \mathcal{E}(S). \quad (2.5.7)$$

*Démonstration.* On sait que

$$\mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(S) = - \int_S^T \int_{\Sigma} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) |\psi|^2 d\sigma dt,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathcal{E}(S) = \int_S^T \int_{\Sigma} |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right) |\psi|^2 d\sigma dt + \mathcal{E}(T).$$

Comme chaque terme de droite est positif, on obtient

$$\begin{cases} \int_S^T \int_{\Sigma} |\partial_t u|^2 d\sigma dt \leq \mathcal{E}(S); \\ \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right) |\psi|^2 d\sigma dt \leq \mathcal{E}(S). \end{cases}$$

De plus,  $\int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right) |\psi|^2 d\sigma dt \leq \mathcal{E}(S)$  implique que si  $\alpha_{\min} = \min_{x \in \Sigma} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right)$ ,

$$\alpha_{\min} \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |\psi|^2 d\sigma dt \leq \mathcal{E}(S)$$

ce qui termine la preuve du lemme 2.5.9. □

**Lemme 2.5.5.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $0 \leq S \leq t$ ,*

$$\int_{\Sigma} |u(t, x)|^2 d\sigma \leq C \mathcal{E}(S). \quad (2.5.8)$$

*Démonstration.* L'application trace de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^{1/2}(\Sigma)$  est continue et il existe  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  telles que pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq C_1 \|u\|_{H^{1/2}(\Sigma)}^2 \leq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

De plus, comme  $u|_{\Gamma} = 0$ ,  $u$  vérifie l'inégalité de Poincaré dans  $\Omega$  avec  $\partial\Omega = \Gamma \cup \Sigma$  et  $\Gamma \cap \Sigma = \emptyset$ . Il existe donc une constante positive  $C_3$  telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \mathcal{E}(t). \quad (2.5.9)$$

Ceci implique que

$$\|u\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq C \mathcal{E}(t).$$

On conclut facilement en utilisant le fait que  $t \mapsto \mathcal{E}(t)$  est décroissante. □

Soit  $m(x)$  une fonction dans  $C^1(\bar{\Omega})^3$  et  $u$  une solution de l'équation des ondes vérifiant  $u \in C^0([0, +\infty[, H^2(\Omega))$ .

**Lemme 2.5.6.** *On a*

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u) dx \right]_S^T - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} \operatorname{div} m |\partial_t u|^2 dx dt + \\ & \int_S^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (m \cdot \nabla u) dx dt - \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt = 0. \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

*Démonstration.* Cette identité a été utilisée dans de nombreux travaux. On fait référence par exemple à [56]. On rappelle néanmoins sa construction.

Pour  $(u_0, u_1, \psi_0) \in V$ ,  $u$  est solution de l'équation de sondes assez régulière pour qu'on ait :

$$\int_S^T \int_{\Omega} (\partial_t^2 u - \Delta u) (m \cdot \nabla u) dx dt = 0.$$

On en déduit, après intégration par parties, que

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u) dx \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla \partial_t u) dx dt + \int_S^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (m \cdot \nabla u) dx dt \\ & - \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt = 0 \end{aligned}$$

De plus, on peut vérifier que dans  $\Omega$ , on a

$$\partial_t u (m \cdot \nabla \partial_t u) = \frac{1}{2} m \cdot \nabla |\partial_t u|^2$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla \partial_t u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} m \cdot \nabla |\partial_t u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} m \cdot n |\partial_t u|^2 d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} m |\partial_t u|^2 dx \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u) dx \right]_S^T - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} \operatorname{div} m |\partial_t u|^2 dx dt + \\ & \int_S^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (m \cdot \nabla u) dx dt - \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt = 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. Remarquons que la condition  $\psi_0$  dans  $H^{1/2}(\Sigma)$  est nécessaire pour avoir  $u(t, \cdot)$  dans  $H^2(\Omega)$  et pour que chacun des termes de (2.5.10) soit justifié.  $\square$

## 2.5.2 Preuve de la décroissance exponentielle de l'énergie

Dans ce paragraphe, on pose  $m(x) = x - x_0$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$  représente la dimension d'espace). On suppose que  $x_0$  est choisi de telle sorte que

$$\Gamma = \{x \in \partial\Omega, m \cdot n \leq 0\} \quad (2.5.11)$$

et

$$\Sigma = \{x \in \partial\Omega, m \cdot n > 0\}. \quad (2.5.12)$$

**Remarque 2.5.7.** L'existence de  $x_0$  est garantie si  $\Gamma$  est la frontière extérieure d'un domaine étoilé  $\omega$ . En effet, on peut ainsi choisir  $x_0$  à l'intérieur de  $\omega$  de telle sorte que  $\omega$  soit étoilé par rapport à  $x_0$  et (2.5.11) est vérifié si  $n$  est la normale intérieure par rapport à  $\omega$  est donc extérieure à  $\Omega$ . De plus, comme  $\Sigma$  entoure  $\Gamma$ ,  $x_0$  est dans le domaine délimité par  $\Sigma$ . Comme  $\Sigma$  est convexe, ce domaine est alors étoilé par rapport à chacun de ces points et en particulier par rapport à  $x_0$ , ainsi (2.5.12) est vérifiée.

Dans ce cas là, on sait que  $\operatorname{div} m = d$ . Par souci de simplicité, on suppose que  $d = 3$  mais il n'y a aucune difficulté pour étendre ce résultat pour  $d = 2$ .

Pour montrer qu'il existe une constante positive  $C$  qui vérifie (2.5.2), on doit juste majorer

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx dt$$

car on sait déjà d'après le lemme 2.5.4 que

$$\int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |\psi|^2 d\sigma dt \leq \frac{1}{\alpha_{\min}} \mathcal{E}(S).$$

**Lemme 2.5.8.** Soit  $(u_0, u_1, \psi_0) \in V$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx dt &= - \left[ \int_{\Omega} \partial_t u ((m \cdot \nabla u) + u) dx \right]_S^T \\ &+ \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) [|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2] d\sigma dt + \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u u d\sigma dt \\ &+ \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

*Démonstration.* D'après le lemme 2.5.6, on sait que

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u) dx \right]_S^T - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} \operatorname{div} m |\partial_t u|^2 dx dt + \\ \int_S^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (m \cdot \nabla u) dx dt - \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt = 0. \end{aligned}$$

De plus, on peut vérifier que

$$\partial_j (m \cdot \nabla u) = (m \cdot \nabla) \partial_j u + \nabla u \cdot \partial_j m \text{ pour } j = 1, 2, 3;$$

et comme  $m(x) = x - x_0$ , on obtient

$$\nabla (m \cdot \nabla u) = (m \cdot \nabla) \nabla u + \nabla u.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (m \cdot \nabla u) dx dt &= \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt + \int_S^T \int_{\Omega} ((m \cdot \nabla) \nabla u) \cdot \nabla u dx dt \\ &= \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} m \cdot \nabla |\nabla u|^2 dx dt \\ &= \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\nabla u|^2 d\sigma dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} \operatorname{div} m |\nabla u|^2 dx dt \end{aligned}$$

On obtient alors, comme  $\operatorname{div} m = 3$ ,

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u) dx \right]_S^T - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\partial_t u|^2 d\sigma dt + \frac{3}{2} \int_S^T \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 dx dt \\ - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\nabla u|^2 d\sigma dt \\ - \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt = 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_S^T \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt = \\ - \left[ \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u) dx \right]_S^T + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\partial_t u|^2 d\sigma dt \\ - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\nabla u|^2 d\sigma dt + \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

De plus on sait que

$$\int_S^T \int_{\Omega} (\partial_t^2 u - \Delta u) u = 0$$

ce qui implique que

$$\left[ \int_{\Omega} \partial_t u u dx \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 dx dt + \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt - \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u u d\sigma dt = 0. \quad (2.5.15)$$

Ainsi, en ajoutant (2.5.14) et (2.5.15), on obtient

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} \partial_t u u dx \right]_S^T + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} |\partial_t u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt - \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u u d\sigma dt = \\ - \left[ \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u) dx \right]_S^T + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\partial_t u|^2 d\sigma dt \\ - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) |\nabla u|^2 d\sigma dt + \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Finalement, il vient que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx dt &= - \left[ \int_{\Omega} \partial_t u ((m \cdot \nabla u) + u) dx \right]_S^T \\ &+ \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot n) [|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2] d\sigma dt + \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u u d\sigma dt \\ &+ \int_S^T \int_{\partial\Omega} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme 2.5.8.  $\square$

**Lemme 2.5.9.** *On a l'inégalité suivante*

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma} (m \cdot n) [|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2] d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Gamma} \partial_n u u d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Gamma} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt \leq 0.$$

*Démonstration.* On sait que  $u = 0$  sur  $\Gamma$  donc  $\nabla_{\Gamma} u = 0$  et  $\partial_t u = 0$  sur  $\Gamma$ . De plus, comme  $\nabla u = \nabla_{\Gamma} u + (\nabla u \cdot n)n$ ,  $\nabla u = (\nabla u \cdot n)n$  sur  $\Gamma$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma} (m \cdot n) [|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2] d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Gamma} \partial_n u u d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Gamma} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma} (m \cdot n) |\partial_n u|^2 d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Gamma} (m \cdot n) |\partial_n u|^2 d\sigma dt \\ &= \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma} (m \cdot n) |\partial_n u|^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a  $m \cdot n$  négatif sur  $\Gamma$ . Par conséquent, il vient que

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma} (m \cdot n) [|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2] d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Gamma} \partial_n u u d\sigma dt + \int_S^T \int_{\Gamma} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt \leq 0.$$

$\square$

Dans la suite, on notera indifféremment par  $C$  toutes les constantes.

**Lemme 2.5.10.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\int_S^T \int_{\Sigma} \partial_n u (m \cdot \nabla u) d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Sigma} (m \cdot n) |\nabla u|^2 d\sigma dt \leq C\mathcal{E}(S).$$

*Démonstration.* Comme  $m \cdot n > 0$  sur  $\Sigma$ , on a

$$\partial_n u (m \cdot \nabla u) = \sqrt{m \cdot n} (m \cdot \nabla u) \frac{\partial_n u}{\sqrt{m \cdot n}}.$$

Ainsi, si on note  $R = \max_{x \in \Sigma} |m(x)|$ , on obtient

$$\begin{aligned} |\partial_n u (m \cdot \nabla u)| &\leq 2R \frac{|\partial_n u|}{\sqrt{m \cdot n}} \frac{\sqrt{m \cdot n}}{2} |\nabla u| \\ &\leq \frac{R^2}{m \cdot n} |\partial_n u|^2 + \frac{m \cdot n}{4} |\nabla u|^2 \\ &\leq C |\partial_n u|^2 + \frac{m \cdot n}{4} |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

On déduit de cette inégalité

$$\int_S^T \int_\Sigma \partial_n u (m \cdot \nabla u) \, d\sigma \, dt - \frac{1}{2} \int_S^T \int_\Sigma (m \cdot n) |\nabla u|^2 \, d\sigma \, dt \leq -\frac{1}{4} \int_S^T \int_\Sigma (m \cdot n) |\nabla u|^2 \, d\sigma \, dt + C \int_S^T \int_\Sigma |\partial_n u|^2 \, d\sigma \, dt,$$

ce qui implique que

$$\int_S^T \int_\Sigma \partial_n u (m \cdot \nabla u) \, d\sigma \, dt - \frac{1}{2} \int_S^T \int_\Sigma (m \cdot n) |\nabla u|^2 \, d\sigma \, dt \leq C \int_S^T \int_\Sigma |\partial_n u|^2 \, d\sigma \, dt, \quad (2.5.16)$$

comme  $m \cdot n \leq 0$  sur  $\Sigma$ .

Pour finir la preuve de ce lemme, on doit vérifier que

$$\int_S^T \int_\Sigma |\partial_n u|^2 \, d\sigma \, dt \leq C \mathcal{E}(S). \quad (2.5.17)$$

On sait que

$$\partial_n u = -\partial_t u - \frac{\kappa(s)}{2} \psi \text{ sur } \Sigma.$$

Comme  $\kappa(s) > 0$  sur  $\Sigma$  d'après (2.5.5), on obtient

$$|\partial_n u|^2 \leq \kappa(s) \left( \frac{\kappa(s)}{2} |\psi|^2 + \frac{2}{\kappa(s)} |\partial_t u|^2 \right).$$

Ensuite, si on note par  $\kappa_{\max}$  le maximum de  $\kappa$  sur  $\Sigma$ , il vient

$$\int_S^T \int_\Sigma |\partial_n u|^2 \, d\sigma \, dt \leq \frac{\kappa_{\max}}{\alpha_{\min}} \mathcal{E}(S) + 2 \int_S^T \int_\Sigma |\partial_t u|^2 \, d\sigma \, dt.$$

D'après le lemme 2.5.4, on sait que

$$\int_S^T \int_\Sigma |\partial_t u|^2 \, d\sigma \, dt \leq C \mathcal{E}(S)$$

ce qui prouve (2.5.17). Ainsi, en incorporant (2.5.17) dans (2.5.16), on obtient

$$\int_S^T \int_\Sigma \partial_n u (m \cdot \nabla u) \, d\sigma \, dt - \frac{1}{2} \int_S^T \int_\Sigma (m \cdot n) |\nabla u|^2 \, d\sigma \, dt \leq C \mathcal{E}(S),$$

ce qui termine la preuve du lemme 2.5.10.  $\square$

**Lemme 2.5.11.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_\Sigma (m \cdot n) |\partial_t u|^2 \, d\sigma \, dt \leq C \mathcal{E}(S).$$

*Démonstration.* Par définition de  $R$ , on a  $|m \cdot n| \leq R$ . On obtient alors

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Sigma} (m \cdot n) |\partial_t u|^2 d\sigma dt \leq \frac{R}{2} \int_S^T \int_{\Sigma} |\partial_t u|^2 d\sigma dt$$

et (2.5.6) implique que

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Sigma} (m \cdot n) |\partial_t u|^2 d\sigma dt \leq C\mathcal{E}(S).$$

□

**Lemme 2.5.12.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\int_S^T \int_{\Sigma} \partial_n u u d\sigma dt \leq C\mathcal{E}(S).$$

*Démonstration.* On rappelle qu'on a sur  $\Sigma$ ,  $\partial_n u = -\partial_t u - \frac{\kappa(s)}{2}\psi$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Sigma} \partial_n u u d\sigma dt &= \int_S^T \int_{\Sigma} \left( -\partial_t u - \frac{\kappa(s)}{2}\psi \right) u d\sigma dt; \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \int_{\Sigma} |u|^2 d\sigma \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi u d\sigma dt; \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |u(T)|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |u(S)|^2 d\sigma - \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi u d\sigma dt; \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |u(S)|^2 d\sigma - \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi u d\sigma dt. \end{aligned}$$

Comme l'opérateur de trace est continu, on sait qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\int_{\Sigma} |u(S)|^2 d\sigma \leq C \|u(S)\|_{H^1}^2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré (2.5.9), il existe une constante positive notée  $C$  telle que

$$\|u(S)\|_{H^1}^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(S)|^2 dx.$$

Finalement, on obtient

$$\int_S^T \int_{\Sigma} \partial_n u u d\sigma dt \leq C\mathcal{E}(S) - \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi u d\sigma dt.$$

À présent, on s'intéresse au contrôle de  $-\int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi u d\sigma dt$ . On sait que sur  $\Sigma$

$$\partial_t \psi = \partial_t u + \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right) \psi$$

ce qui est équivalent à

$$\psi = \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} (\partial_t \psi - \partial_t u),$$

comme  $\gamma(s) > \frac{\kappa(s)}{4}$ .

On obtient alors

$$\begin{aligned}
-\int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \psi u \, d\sigma \, dt &= -\int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} (\partial_t \psi - \partial_t u) u \, d\sigma \, dt \\
&= -\int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} \partial_t \psi u \, d\sigma \, dt + \\
&\quad \int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} \partial_t u u \, d\sigma \, dt \\
&= -\int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} \partial_t \psi u \, d\sigma \, dt + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [u^2]_S^T \, d\sigma
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
-\int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \psi u \, d\sigma \, dt &= \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [u^2]_S^T \, d\sigma \\
&\quad + \int_S^T \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} \psi \partial_t u \, d\sigma \, dt \quad (2.5.18) \\
&\quad - \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [\psi u]_S^T \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant majorer séparément les trois termes du second membre de cette égalité.

Tout d'abord, on sait que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [u^2]_S^T \, d\sigma &= \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} |u(T)|^2 \, d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} |u(S)|^2 \, d\sigma
\end{aligned}$$

et, comme  $\gamma(s) \geq \frac{\kappa(s)}{4}$  et  $\kappa(s) > 0$

$$\frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} |u(T)|^2 \, d\sigma \leq 0,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [u^2]_S^T \, d\sigma &\leq \frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right)^{-1} |u(S)|^2 \, d\sigma \\
&\leq \frac{\kappa_{\max}}{4\alpha_{\min}} \int_\Sigma |u(S)|^2 \, d\sigma.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.5.5, on obtient qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\frac{1}{2} \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [u^2]_S^T \, d\sigma \leq C\mathcal{E}(S). \quad (2.5.19)$$

De plus, en utilisant le lemme 2.5.4, on sait que

$$\int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} \psi \partial_t u \, d\sigma \, dt \leq C\mathcal{E}(S). \quad (2.5.20)$$

Si on s'intéresse au dernier terme de (2.5.18), on a

$$\begin{aligned} \left| - \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [\psi u]_S^T \, d\sigma \right| &= \left| \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right)^{-1} \psi(T)u(T) \, d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \gamma(s) - \frac{\kappa(s)}{4} \right)^{-1} \psi(S)u(S) \, d\sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{\min}} \left( \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |\psi(T)u(T)| \, d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |\psi(S)u(S)| \, d\sigma \right). \end{aligned}$$

À présent, en utilisant l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$|\psi(T)u(T)| + |\psi(S)u(S)| \leq \frac{1}{2} (|\psi(T)|^2 + |u(T)|^2 + |\psi(S)|^2 + |u(S)|^2).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [\psi u]_S^T \, d\sigma &\leq \frac{1}{2\alpha_{\min}} \int_{\Sigma} \left( \frac{\kappa(s)}{2} |\psi(T)|^2 + \frac{\kappa(s)}{2} |u(T)|^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\kappa(s)}{2} |\psi(S)|^2 + \frac{\kappa(s)}{2} |u(S)|^2 \right) \, d\sigma. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Par définition de  $\Sigma$ , on sait d'ores et déjà que

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{\kappa(s)}{2} |\psi(T)|^2 + \frac{\kappa(s)}{2} |\psi(S)|^2 \right) \, d\sigma \leq C (\mathcal{E}(T) + \mathcal{E}(S)) \quad (2.5.22)$$

et d'après le lemme 2.5.5, il existe une constante positive  $C$  telle que

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{\kappa(s)}{2} |u(T)|^2 + \frac{\kappa(s)}{2} |u(S)|^2 \right) \, d\sigma \leq C (\mathcal{E}(T) + \mathcal{E}(S)). \quad (2.5.23)$$

Ainsi, comme  $t \mapsto \mathcal{E}(t)$  est décroissante,  $\mathcal{E}(T) \geq \mathcal{E}(S)$  et d'après (2.5.21), (2.5.22) et (2.5.23) on obtient

$$- \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \gamma(s) \right)^{-1} [\psi u]_S^T \, d\sigma \leq C\mathcal{E}(S). \quad (2.5.24)$$

En conclusion, d'après (2.5.18) et les estimations successives (2.5.19), (2.5.20), (2.5.24), on obtient

$$- \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \psi u \, d\sigma \, dt \leq C\mathcal{E}(S)$$

ce qui prouve que

$$\int_S^T \int_{\Sigma} \partial_n u u \, d\sigma \, dt \leq C\mathcal{E}(S).$$

et termine la preuve du lemme 2.5.12.  $\square$

**Lemme 2.5.13.** *On a*

$$- \left[ \int_{\Omega} \partial_t u ((m \cdot \nabla u) + u) \, dx \right]_S^T \leq C\mathcal{E}(S).$$

*Démonstration.* On sait que

$$\begin{aligned} & - \left[ \int_{\Omega} \partial_t u ((m \cdot \nabla u) + u) \, dx \right]_S^T = - \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u)|_{t=T} \, dx - \int_{\Omega} \partial_t u u|_{t=T} \, dx \\ & + \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u)|_{t=S} \, dx + \int_{\Omega} \partial_t u u|_{t=S} \, dx. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{cases} - \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u)|_{t=T} \, dx \leq C \left( \int_{\Omega} |\partial_t u|_{t=T}|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|_{t=T}|^2 \, dx \right) \\ \int_{\Omega} \partial_t u (m \cdot \nabla u)|_{t=S} \, dx \leq C \left( \int_{\Omega} |\partial_t u|_{t=S}|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|_{t=S}|^2 \, dx \right) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} - \int_{\Omega} \partial_t u u|_{t=T} \, dx \leq C \left( \int_{\Omega} |\partial_t u|_{t=T}|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|_{t=T}|^2 \, dx \right) \\ \int_{\Omega} \partial_t u u|_{t=S} \, dx \leq C \left( \int_{\Omega} |\partial_t u|_{t=S}|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|_{t=S}|^2 \, dx \right). \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (2.5.9) et le fait que  $\mathcal{E}$  décroît, on obtient facilement que

$$- \left[ \int_{\Omega} \partial_t u ((m \cdot \nabla u) + u) \, dx \right]_S^T \leq C\mathcal{E}(S),$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Théorème 2.5.14.** *Il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $0 \leq S < T < +\infty$ ,*

$$\int_S^T \mathcal{E}(u, \partial_t u, \psi) \, dt \leq C\mathcal{E}(S). \quad (2.5.25)$$

*Démonstration.* D'après les lemmes 2.5.8 à 2.5.13, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) \, dx \, dt \leq C\mathcal{E}(S). \quad (2.5.26)$$

En combinant (2.5.26) avec le résultat du lemme 2.5.4, il vient

$$\int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |\psi|^2 \, d\sigma \, dt \leq C\mathcal{E}(S). \quad (2.5.27)$$

On obtient donc

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Sigma} \frac{\kappa(s)}{2} |\psi|^2 d\sigma dt \leq C\mathcal{E}(S) \quad (2.5.28)$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.5.14.  $\square$

**Théorème 2.5.15.** *Il existe une constante positive  $C$  telle que pour toutes données initiales dans  $V$  avec  $\psi_0 \in H^{1/2}(\Sigma)$ ,*

$$\mathcal{E}(t) \leq e^{-(t-C)/C} \mathcal{E}(0). \quad (2.5.29)$$

*Démonstration.* Dans le théorème 2.5.14, on a montré qu'il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $0 \leq S < T < +\infty$ ,

$$\int_S^T \mathcal{E}(t) dt \leq C\mathcal{E}(S).$$

Quand  $T$  tend vers  $+\infty$ , il vient

$$\int_S^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt \leq C\mathcal{E}(S), \quad (2.5.30)$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dS} \left( e^{S/C} \int_S^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt \right) \leq 0.$$

L'application  $S \mapsto e^{S/C} \int_S^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt$  est donc décroissante et en appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$e^{S/C} \int_S^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt \leq \int_0^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt. \quad (2.5.31)$$

De plus, quand on applique (2.5.30) avec  $S = 0$ , il vient

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt \leq C\mathcal{E}(0),$$

ce qui, avec (2.5.31), entraîne

$$e^{S/C} \int_S^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt \leq C\mathcal{E}(0). \quad (2.5.32)$$

De plus, comme  $\mathcal{E}$  est positive

$$\int_S^{+\infty} \mathcal{E}(t) dt \geq \int_S^{S+C} \mathcal{E}(t) dt,$$

et comme  $\mathcal{E}$  décroît

$$\int_S^{S+C} \mathcal{E}(t) dt \geq \int_S^{S+C} \mathcal{E}(S+C) dt = C\mathcal{E}(S+C). \quad (2.5.33)$$

Par conséquent, en incorporant (2.5.32) dans (2.5.33), on obtient

$$e^{S/C} \mathcal{E}(S + C) \leq \mathcal{E}(0),$$

ce qui implique que pour tout  $t > 0$

$$\mathcal{E}(t) \leq e^{-(t-C)/C} \mathcal{E}(0).$$

□

On a donc établi que l'énergie du problème continu est exponentiellement décroissante sous deux conditions. La première demande plus de régularité sur  $\psi_0$ . En effet,  $\psi_0$  doit être dans  $H^{1/2}(\Sigma)$  alors qu'il est suffisant d'avoir  $\psi_0$  dans  $L^2(\Sigma)$  pour prouver que le problème est bien posé. D'un point de vue pratique, ce n'est pas gênant puisqu'on prend  $\psi_0 = 0$  sur  $\Sigma$ . En effet, les données initiales  $u_0$  et  $u_1$  sont à support compact dans  $\Omega$ . Leurs traces s'annulent donc sur  $\Sigma$  ce qui implique que  $\psi_0 = 0$  sur  $\Sigma$  d'après la condition de compatibilité  $\partial_n u_0 + u_1 + \frac{\kappa(s)}{2} \psi_0 = 0$  sur  $\Sigma$  qui doit être vérifiée dans  $V$ . La condition  $\psi_0 \in H^{1/2}(\Sigma)$  est alors satisfaite. La seconde condition concerne la forme géométrique de  $\Omega$ . La décroissance de l'énergie a été montrée sous la condition qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(x - x_0) \cdot n \leq 0$  sur  $\Gamma$  et  $(x - x_0) \cdot n > 0$  sur  $\Sigma$  et  $\Sigma$  convexe. Ceci est vérifié si l'obstacle est étoilé par rapport à  $x_0$ . La décroissance exponentielle devrait pouvoir être démontrée dans des cas plus généraux où l'obstacle est "non-trapping", comme cela a été fait dans [14] pour la condition avec courbure, soit pour  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ . Il faut aussi noter que l'analyse microlocale qui est développée dans [14] permet de traiter le cas d'une condition de Neumann sur l'obstacle alors que la méthode des multiplicateurs ne permet pas de conclure. Par contre, on peut remarquer qu'en utilisant la méthode des multiplicateurs, il est possible d'exprimer  $C$  en fonction des caractéristiques du domaine (voir par exemple [56]).

## 2.6 Analyse numérique de stabilité

Dans cette section, on montre qu'il existe une énergie discrète qui est décroissante et correspond à une version discrétisée de la fonctionnelle  $\mathcal{E}$  puis on s'intéresse au comportement de cette énergie discrète via des simulations numériques.

### 2.6.1 Analyse de stabilité discrète

Dans ce paragraphe, on étudie la stabilité du schéma totalement discrétisé

$$\begin{cases} M \frac{\mathbf{U}^{n+1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t^2} + B \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} + B_\kappa \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2} + K\mathbf{U}^n = 0, \\ C \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2\Delta t} + C_{\kappa, \gamma} \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2} - D \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} = 0 \end{cases} \quad (2.6.1)$$

où toutes les matrices et vecteurs sont définis à la section 2.4. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\begin{aligned} E^{n+1/2} &= \left( M \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \right) + (K\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}^n) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(C_\kappa \Psi^{n+1}, \Psi^{n+1}) + (C_\kappa \Psi^n, \Psi^n)] \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

avec

$$C_\kappa = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)}{2} v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}$$

Comme  $M$  et  $K$  sont des matrices symétriques positives et que  $M$  est définie, les valeurs propres de  $M^{-1}K$  sont réelles et positives.

Soit  $\lambda_{\max}$  le maximum de ces valeurs propres.

**Proposition 2.6.1.** *Sous la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)*

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\max}}}, \quad (2.6.3)$$

$E^{n+1/2}$  définit une énergie discrète.

*Démonstration.* Pour montrer que  $E^{n+1/2}$  définit une énergie discrète, on doit vérifier que  $E^{n+1/2}$  est positive.

Par définition, en regroupant les termes de même nature,

$$\begin{aligned} E^{n+1/2} &= \left( \left( M - \frac{\Delta t^2}{4} K \right) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \right) + \left( K \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(C_\kappa \Psi^{n+1}, \Psi^{n+1}) + (C_\kappa \Psi^n, \Psi^n)] \end{aligned}$$

car

$$\left( -\frac{\Delta t^2}{4} K \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \right) + \left( K \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2} \right) = (K \mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}^n).$$

Il est évident que  $E^{n+1/2}$  est positive si  $\left( M - \frac{\Delta t^2}{4} K \right)$ ,  $K$  et  $C_\kappa$  sont positives. On sait que  $K$  et  $C_\kappa$  sont des matrices positives par construction. De plus, comme  $M$  est définie positive, la positivité de la première matrice est équivalente à la positivité de  $I - \frac{\Delta t^2}{4} M^{-1}K$ . Ainsi, si on note  $\lambda_{\max}$  la plus grande valeur propre de  $M^{-1}K$ ,  $I - \frac{\Delta t^2}{4} M^{-1}K$  est positive si

$$\lambda_{\max} \leq \frac{4}{\Delta t^2}.$$

□

**Proposition 2.6.2.** *Quand le pas d'espace  $h$  est assez petit, la condition CFL (2.6.3) est équivalente à :*

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\alpha_{LF}}} h \quad (2.6.4)$$

où  $\alpha_{LF}$  est une constante dépendant du maillage et de la discrétisation en espace choisie.

*Démonstration.* La valeur propre  $\lambda_{\max}$  dépend de la discrétisation en espace et vérifie  $\lambda_{\max} \simeq \frac{\alpha_{LF}}{h^2}$ , avec  $\alpha_{LF}$  une constante. Ainsi la condition CFL (2.6.3) peut être réécrite comme suit

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\alpha_{LF}}} h$$

□

**Remarque 2.6.3.** La condition CFL dépend seulement des matrices  $M$  et  $K$  et non des matrices de bord. Ceci montre que les CLA que nous étudions ne pénalisent pas la condition CFL.

**Proposition 2.6.4.** Sous la condition CFL (2.6.4) et si  $\gamma(s) > \frac{\kappa(s)}{4}$  sur  $\Sigma$ , l'énergie  $E^{n+1/2}$  est décroissante.

*Démonstration.* On écrit tout d'abord la restriction de la seconde équation de (2.6.1) sur une face externe  $\sigma_i$  :

$$C_{\sigma_i} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} - \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2\Delta t} + C_{\kappa, \gamma_{\sigma_i}} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} - D_{\sigma_i} \frac{\mathbf{U}_{K_{j_i}}^{n+1} - \mathbf{U}_{K_{j_i}}^{n-1}}{2\Delta t} = 0$$

où  $K_{j_i}$  est l'élément contenant la face  $\sigma_i$ . On multiplie cette équation par  $\frac{\kappa_i}{2} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\kappa_i}{2} C_{\sigma_i} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} - \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} \right) + \frac{\kappa_i}{2} \left( C_{\kappa, \gamma_{\sigma_i}} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}, \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} \right) \\ & - \frac{\kappa_i}{2} \left( D_{\sigma_i} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}, \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

On somme sur toutes les faces extérieures pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left( C_{\kappa} \frac{\Psi^{n+1} - \Psi^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2} \right) = - \sum_{i=1}^{n_f} \frac{\kappa_i}{2} \left( C_{\kappa, \gamma_{\sigma_i}} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}, \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{n_f} \frac{\kappa_i}{2} \left( D_{\sigma_i} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}, \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} \right). \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Multiplions à présent la première équation de (2.6.1) par  $\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t}$  :

$$\begin{aligned} & \left( M \frac{\mathbf{U}^{n+1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \left( B \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ & + \left( B_{\kappa} \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \left( K \mathbf{U}^n, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) = 0. \end{aligned}$$

(2.6.6)

Remarquons que le terme  $\left( B_{\kappa} \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right)$  peut être écrit comme

$$\sum_{i=1}^{n_f} \left( B_{\kappa_{\sigma_i}} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}, \frac{\mathbf{U}_{K_{j_i}}^{n+1} - \mathbf{U}_{K_{j_i}}^{n-1}}{2\Delta t} \right).$$

Mais

$$\begin{aligned}
(B_{\kappa\sigma_i})_{k,l} &= \int_{\sigma_i} \frac{\kappa_i}{2} w_{n_{d-1}*(i-1)+k} v_{n_d*(j_i-1)+l} \\
&= \frac{\kappa_i}{2} \int_{\sigma_i} w_{n_{d-1}*(i-1)+k} v_{n_d*(j_i-1)+l} \\
&= \frac{\kappa_i}{2} (D_{\sigma_i})_{l,k}
\end{aligned}$$

car nous supposons que  $\kappa$  est constant par face.

On a donc

$$\left( B_{\kappa} \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) = \sum_{i=1}^{n_f} \frac{\kappa_i}{2} \left( \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}, D_{\sigma_i} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} \right).$$

En ajoutant (2.6.5) et (2.6.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left( M \frac{\mathbf{U}^{n+1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \left( K\mathbf{U}^n, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \\
&\left( C_{\kappa} \frac{\Psi^{n+1} - \Psi^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2} \right) = \\
&-\left( B \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \sum_{i=1}^{n_f} \frac{\kappa_i}{2} \left( C_{\kappa, \gamma_{\sigma_i}} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}, \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} \right).
\end{aligned}$$

(2.6.7)

Comme  $M$  est une matrice symétrique, on vérifie que

$$\begin{aligned}
&\left( M \frac{\mathbf{U}^{n+1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) = \frac{1}{2\Delta t} \left[ \left( M \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \right) \right. \\
&\left. - \left( M \frac{\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t}, \frac{\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t} \right) \right].
\end{aligned}$$

De la même manière, comme  $K$  et  $C$  sont des matrices symétriques, on obtient

$$\left( K\mathbf{U}^n, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) = \frac{1}{2\Delta t} [(K\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}^n) - (K\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^{n-1})]$$

et

$$\begin{aligned}
\left( C_{\kappa} \frac{\Psi^{n+1} - \Psi^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{\Psi^{n+1} + \Psi^{n-1}}{2} \right) &= \frac{1}{4\Delta t} [(C_{\kappa} \Psi^{n+1}, \Psi^{n+1}) - (C_{\kappa} \Psi^{n-1}, \Psi^{n-1})] \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \left[ \frac{(C_{\kappa} \Psi^{n+1}, \Psi^{n+1}) + (C_{\kappa} \Psi^n, \Psi^n)}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(C_{\kappa} \Psi^n, \Psi^n) + (C_{\kappa} \Psi^{n-1}, \Psi^{n-1})}{2} \right]
\end{aligned}$$

de telle sorte que (2.6.7) s'écrive

$$\frac{1}{2\Delta t} \left( E^{n+1/2} - E^{n-1/2} \right) = - \left( B \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \sum_{i=1}^{n_f} \frac{\kappa_i}{2} \left( C_{\kappa, \gamma \sigma_i} \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2}, \frac{\Psi_{\sigma_i}^{n+1} + \Psi_{\sigma_i}^{n-1}}{2} \right).$$

Comme  $B$  et  $C_{\kappa, \gamma \sigma_i}$  sont des matrices symétriques définies positives si  $\gamma(s) > \frac{\kappa(s)}{4}$  et  $\kappa(s)$  est positif, on obtient

$$\frac{1}{2\Delta t} \left( E^{n+1/2} - E^{n-1/2} \right) < 0,$$

ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

## 2.6.2 Comportement de l'énergie discrète

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement de l'énergie numérique (2.6.2) afin d'illustrer numériquement les résultats théoriques obtenus à la Section 4.

On considère la Configuration 1 décrite à la section 2.4. Tout d'abord, on vérifie que l'énergie discrète est effectivement décroissante quand la source a fini d'émettre. Ensuite, on souligne que la condition  $\gamma(s) \geq \frac{\kappa(s)}{4}$  est bien une condition optimale pour que le problème soit bien posé. Enfin, on constate que l'énergie discrète est contrôlée par une fonction exponentiellement décroissante.

### 2.6.2.1 Décroissance de l'énergie

Pour commencer, on vérifie que l'énergie discrète définie en (2.6.2) décroît au cours du temps. Sur la figure 2.7, nous représentons l'évolution de l'énergie discrète au cours du temps avec  $\gamma(s) = \kappa(s)$ . On remarque que l'énergie croît dans un premier temps, ce qui est dû au fait que le théorème 2.5.15 n'est valable que lorsque la source a fini d'émettre. Dès que la source s'éteint, l'énergie reste constante jusqu'à ce que l'onde atteigne la frontière du domaine. Enfin, l'énergie décroît comme prévu par le théorème 2.5.15.

### 2.6.2.2 Stabilité de la CLA

Dans la section 3, on a vu que si  $\gamma(s)$  est supérieur à  $\frac{\kappa(s)}{4}$ , le problème est bien posé. Pour illustrer cette propriété, on compare l'évolution de l'énergie discrète pour  $\gamma(s) = 0.249 * \kappa(s)$  et  $\gamma(s) = 0.25 * \kappa(s)$ . Dans la figure 2.8 (respectivement dans la figure 2.9), on représente l'évolution de l'énergie pendant 1 000 000 itérations quand  $\gamma(s) = 0.249\kappa(s)$  (respectivement quand  $\gamma(s) = 0.25\kappa(s)$ ). Si l'on regarde ces figures, on a l'impression que les deux schémas sont stables même avec  $\gamma(s) < \frac{\kappa(s)}{4}$ . Mais si on regarde la figure 2.10 (respectivement la figure 2.11) où on a zoomé par un facteur  $10^4$ , pour  $\gamma(s) = 0.249\kappa(s)$  (respectivement pour  $\gamma(s) = 0.25\kappa(s)$ ), on voit que le schéma n'est pas stable quand  $\gamma(s) < \frac{\kappa(s)}{4}$ . Les tests numériques confirment donc que  $\frac{\kappa(s)}{4}$  est une valeur critique pour  $\gamma(s)$ .

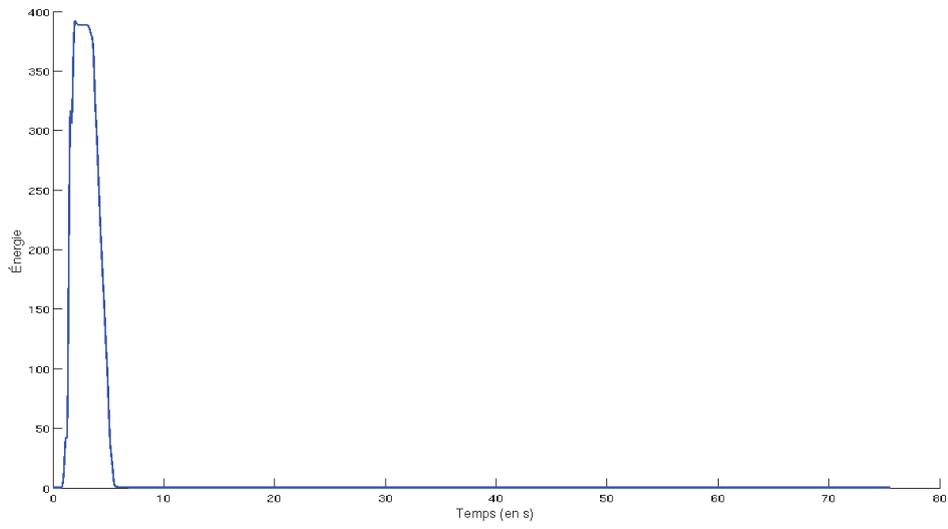


FIG. 2.7 – Energie vs temps pour  $\gamma(s) = \kappa(s)$

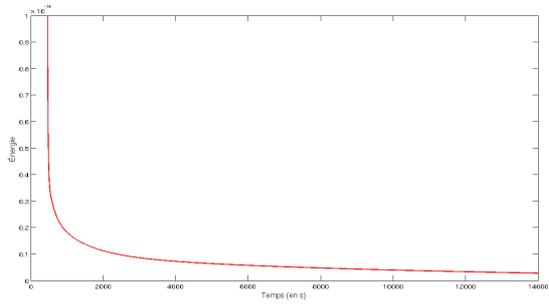


FIG. 2.8 – Energie pour  $\gamma(s) = 0.249\kappa(s)$

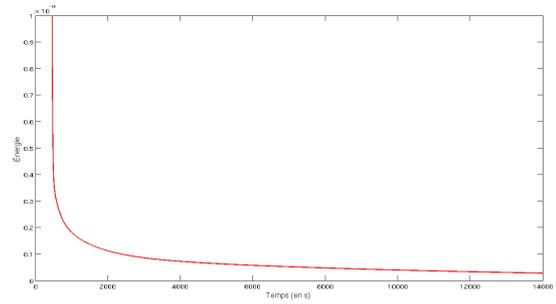


FIG. 2.9 – Energie pour  $\gamma(s) = 0.25\kappa(s)$

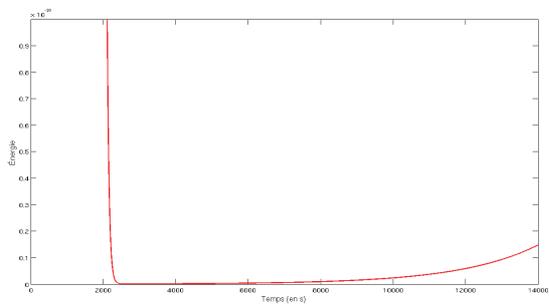


FIG. 2.10 – Energie pour  $\gamma(s) = 0.249\kappa(s)$  - zoom

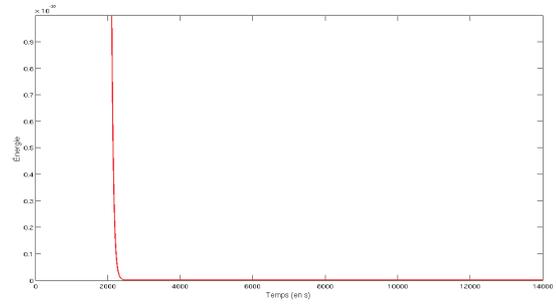


FIG. 2.11 – Energie pour  $\gamma(s) = 0.25\kappa(s)$  - zoom

### 2.6.2.3 Décroissance exponentielle de l'énergie discrète

Dans la section 2.5, on a vu que l'énergie continue pouvait être contrôlée par une fonction exponentiellement décroissante. Pour vérifier cette propriété, nous avons calculé l'évolution du logarithme de l'énergie discrète (voir Fig. 2.12). Remarquons que le logarithme de l'énergie décroît linéairement jusqu'à  $t = 250s$  et est constant pour  $t > 250s$ . Ceci est dû au fait que l'énergie devient plus petite que  $10^{-16}$  et donc plus petite que l'erreur numérique. En utilisant une méthode de régression linéaire, on trouve que le logarithme de l'énergie peut être approché, pour  $t < 250s$  par la fonction

$$h(t) = -3 - 0.14t.$$

Ainsi, l'énergie peut être approchée par la fonction

$$g(t) = \exp(-0.14 * t - 3).$$

dans la figure 2.13, on compare l'évolution de l'énergie discrète obtenue avec  $\gamma(s) = \kappa(s)$  (courbe

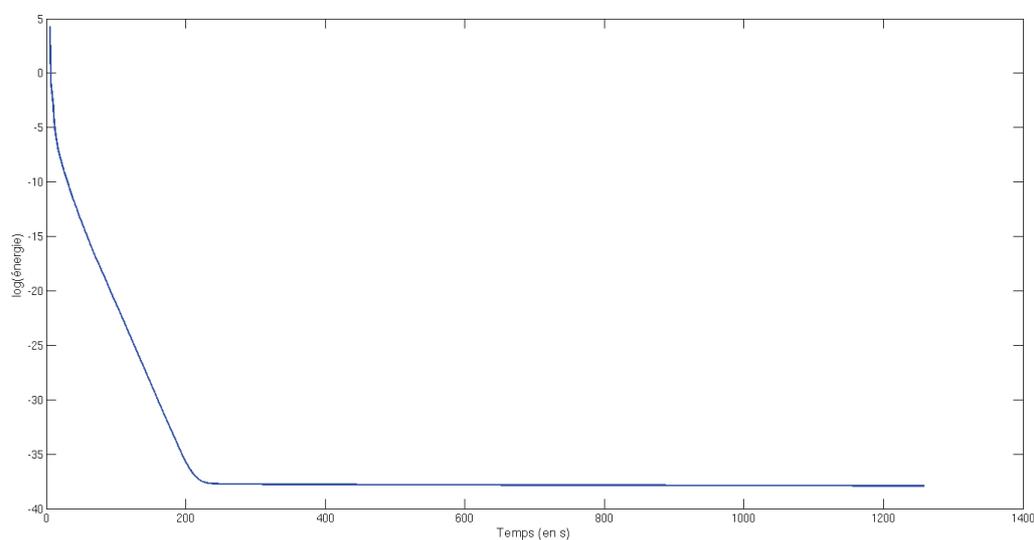
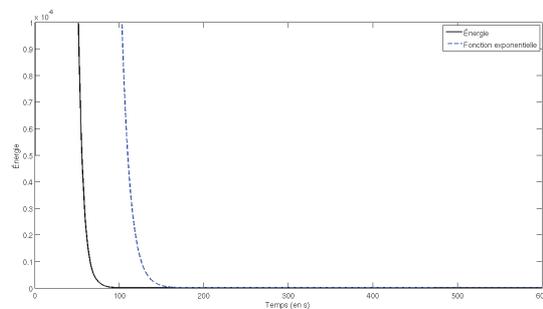
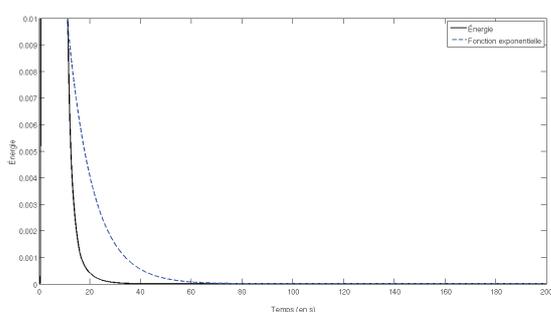


FIG. 2.12 – Log(énergie) vs temps pour  $\gamma(s) = \kappa(s)$

noire) avec la fonction  $g$  (courbe bleue en pointillé), zoomée avec un facteur 100 dans la deuxième image et avec un facteur  $10^8$  dans la troisième. Il est clair que  $g$  est toujours supérieure à l'énergie



discrète ce qui illustre bien la décroissance exponentielle de l'énergie.

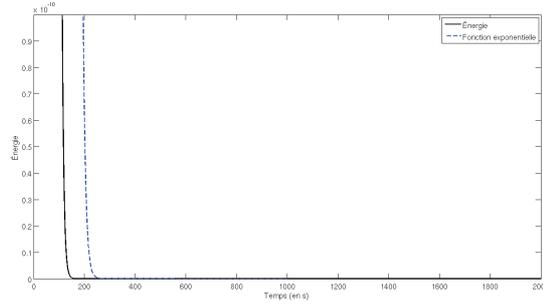


FIG. 2.13 – Décroissance exponentielle de l'énergie

### 2.6.3 Stabilisation par onde incidente

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement de la solution approchée lorsque la source est nulle et qu'on impose une onde incidente sur le bord de l'obstacle. On se place donc exactement dans le cas où c'est l'obstacle qui est la source de l'onde. On résout donc le problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = u^{\text{inc}} := e^{ik(t + \cos \theta x + \sin \theta y)} \text{ sur } \Gamma \\ +CLA \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.6.8)$$

où  $k$  est la fréquence de l'onde incidente et  $\theta$  l'angle d'incidence.

Comme les conclusions des résultats numériques précédents montrent que, quel que soit le paramètre  $\gamma(s)$  choisi ( $\gamma(s) \geq \frac{\kappa(s)}{4}$ ), les performances de la CLA sont équivalentes, nous choisissons de ne considérer qu'une valeur particulière de  $\gamma(s)$ . De plus, nous avons remarqué que pour  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ , on retombe sur la C-ABC qui, contrairement aux autres CLA, ne nécessite pas l'introduction d'une variable auxiliaire. Par conséquent, nous allons considérer dans ce test la C-ABC sur le bord  $\Sigma$ .

L'intérêt de ce test est de vérifier si pour  $t$  vérifiant  $kt \equiv 0[2\pi]$ , la solution (2.6.8) tend vers la solution harmonique qui vérifie

$$\begin{cases} k^2 u + \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = u^{\text{inc}} := e^{ik(t + \cos \theta x + \sin \theta y)} \text{ sur } \Gamma \\ \partial_n u - iku - \frac{\kappa(s)}{2} u = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (2.6.9)$$

où  $k^2 u + \Delta u = 0$  est l'équation d'Helmholtz avec une source nulle.

Afin de comparer ces deux solutions, nous avons donc développé un nouveau code en Fortran 90 permettant de résoudre l'équation d'Helmholtz avec une formulation IPDG. Les détails de cette formulation dans ce cas particulier seront explicités dans le chapitre 4.

Ensuite, nous avons fixé deux configurations particulières décrite dans la section ?? de l'annexe ?? afin de comparer les deux solutions : une avec un obstacle et une frontière artificielle circulaires et l'autre où ce sont des ellipses.

Par souci de simplicité et sans perte de généralité, on fixe  $\theta$  égal à zéro.

Considérons tout d'abord le cas de l'obstacle circulaire.

Les résultats obtenus visualisés sous Paraview sont représentés sur les figures 2.14, 2.15, 2.16 et 2.17 pour  $k = 1$ . A gauche, on représente la solution de (2.6.8), pour  $t = \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}$  et  $\frac{8\pi}{k}$  alors

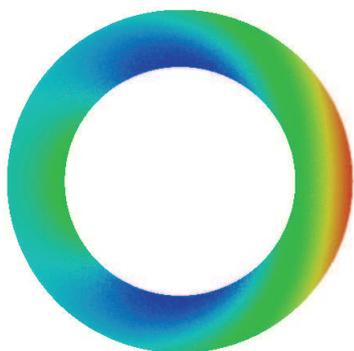


FIG. 2.14 – Solution temporelle :  $t = \frac{2\pi}{k}$

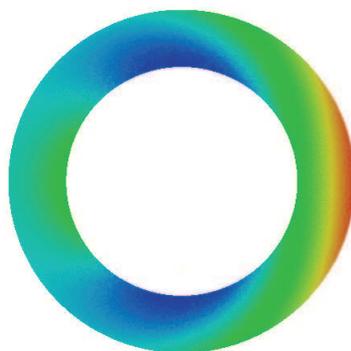


FIG. 2.15 – Solution temporelle :  $t = \frac{4\pi}{k}$

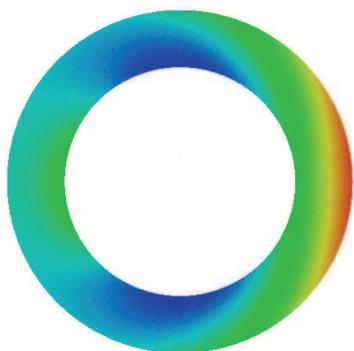


FIG. 2.16 – Solution temporelle :  $t = \frac{6\pi}{k}$

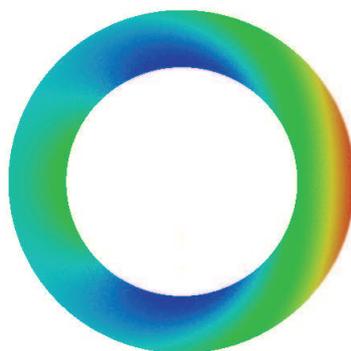


FIG. 2.17 – Solution temporelle :  $t = \frac{8\pi}{k}$

qu'à droite on représente la solution de (2.6.9) pour  $k = 1$ .

Visuellement, il semble bien qu'il y ait concordance entre les deux solutions et donc stabilisation de la solution de l'équation des ondes. Pour s'en assurer, on calcule l'erreur  $L^2(\Omega)$  entre les deux solutions pour différentes valeurs de  $k$ . On obtient les figures 2.19, 2.20 et 2.21 dans lesquelles on a représenté l'évolution de la norme  $L^2$  au cours du temps pour  $kt \equiv 0[2\pi]$  pour  $k = 1, 5$  et  $10$ . On remarque donc que l'erreur entre les deux solutions est très faible et diminue ce qui montre bien que la solution en temps tend vers la solution harmonique.

A présent, on vérifie que les résultats sont équivalents lorsque l'obstacle et la frontière artificielle sont de forme elliptique. Comme précédemment, on compare dans les figures 2.22, 2.23, 2.24 et 2.25, les deux solutions obtenues en harmonique et en temporel pour  $t = \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}$  et  $\frac{8\pi}{k}$ . On remarque que comme précédemment les visualisations concordent. Pour le vérifier, on calcule

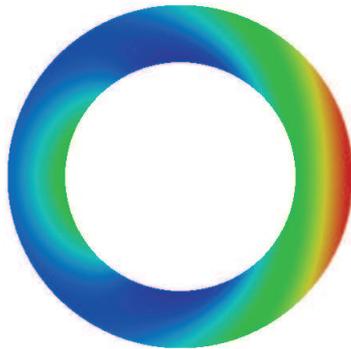


FIG. 2.18 – Solution harmonique

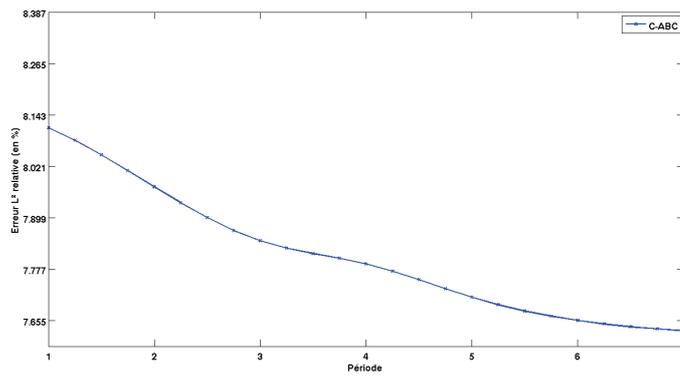


FIG. 2.19 – Erreur  $L^2$  pour  $k=1$

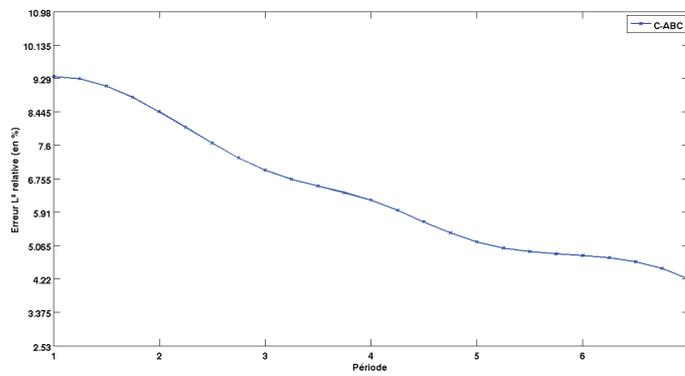


FIG. 2.20 – Erreur  $L^2$  pour  $k=5$

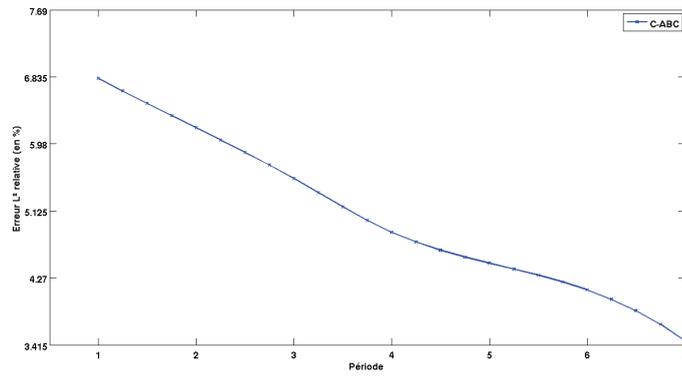


FIG. 2.21 – Erreur  $L^2$  pour  $k=10$

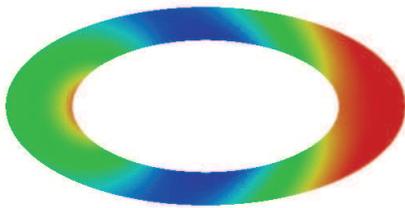


FIG. 2.22 – Solution temporelle :  $t = \frac{2\pi}{k}$

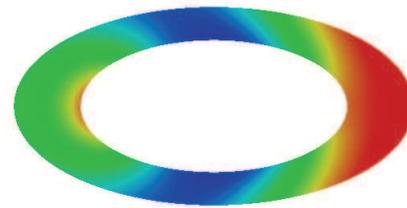


FIG. 2.23 – Solution temporelle :  $t = \frac{4\pi}{k}$

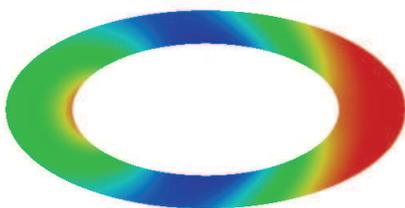


FIG. 2.24 – Solution temporelle :  $t = \frac{6\pi}{k}$

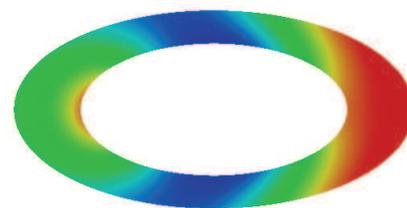


FIG. 2.25 – Solution temporelle :  $t = \frac{8\pi}{k}$

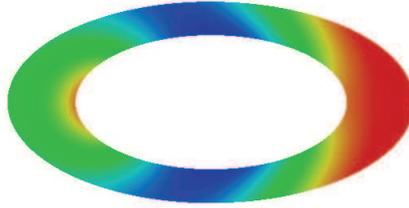


FIG. 2.26 – Solution harmonique

l'erreur  $L^2(\Omega)$  entre les deux solutions pour  $k = 1, 5, 10$ . Les trois figures obtenues pour les trois valeurs différentes de  $k$  sont représentées dans les figures 2.27, 2.28 et 2.29. On constate que

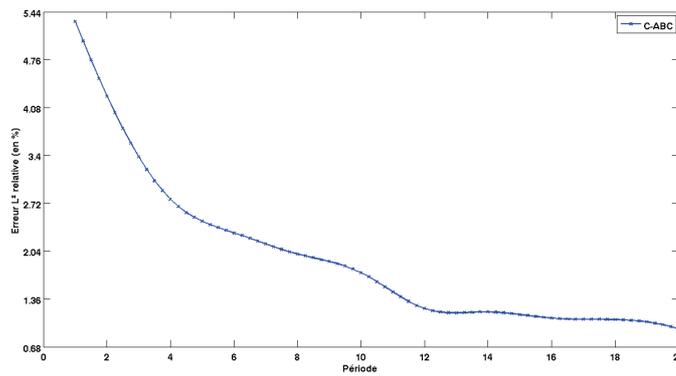


FIG. 2.27 – Erreur  $L^2$  pour  $k=1$

comme précédemment, la solution en temps tend bien vers la solution harmonique.

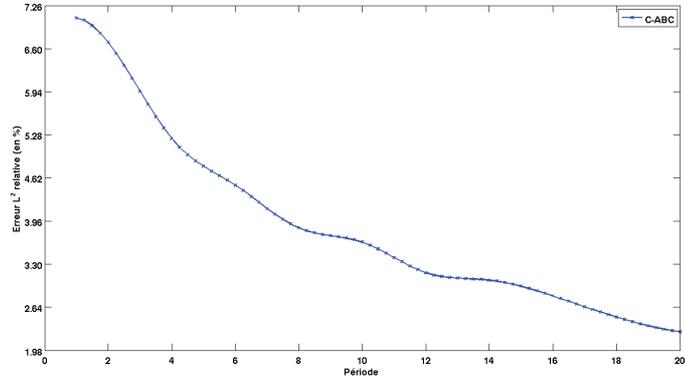


FIG. 2.28 – Erreur  $L^2$  pour  $k=5$

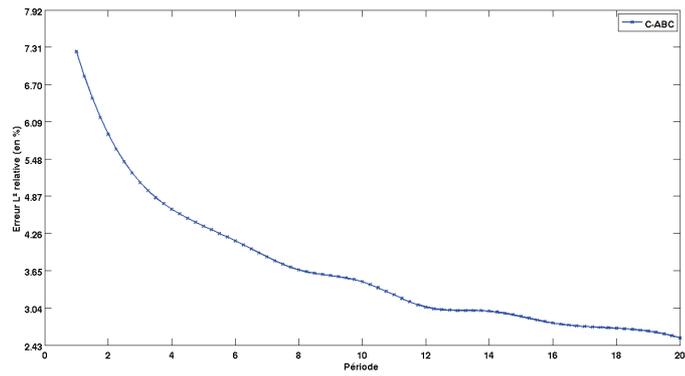


FIG. 2.29 – Erreur  $L^2$  pour  $k=10$

## 2.7 Conclusion

Nous avons donc montré que dans le cas d'une condition de Dirichlet sur le bord de l'obstacle, le problème avec une variable auxiliaire est bien posé et qu'il existe une énergie décroissant exponentiellement vers zéro. De plus, ces résultats ont été confirmés numériquement. L'analyse des performances de la CLA a quant à elle montré que la condition de courbure est une bonne candidate pour représenter les ondes acoustiques propagatives. En effet, cette condition correspondant au cas où  $\gamma(s) = \frac{\kappa(s)}{4}$ , donne des résultats similaires aux conditions obtenues avec d'autres valeurs de  $\gamma(s)$  mais ne nécessite pas l'ajout d'une variable auxiliaire lors des simulations numériques. À présent, il serait intéressant de considérer les cas des ondes évanescentes et des ondes rampantes.



## Chapitre 3

# Modélisation des ondes évanescentes

### 3.1 Introduction au problème

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation du comportement des ondes évanescentes au travers d'une frontière afin de construire une condition aux limites absorbante prenant en compte ces ondes en plus des ondes propagatives. Les ondes évanescentes ayant une amplitude non négligeable au voisinage de la frontière artificielle, il est donc nécessaire de les prendre en compte pour pouvoir rapprocher au maximum la frontière de l'obstacle sans augmenter considérablement l'erreur entre la solution exacte (dans le domaine infini) et la solution approchée (dans le domaine tronqué). La réduction de la taille du domaine de calcul permettra ainsi de minimiser les coûts de calcul. L'idée de prendre en compte les ondes évanescentes dans le processus de construction des CLAs a récemment été abordée par Hagstrom *et al.* [49, 50]. La condition qu'ils ont obtenue est une généralisation aux ondes évanescentes de la condition de Higdon [52] qui est une condition d'ordre élevé ne considérant que les ondes propagatives. Les simulations réalisées à l'aide d'une méthode éléments finis classique montrent une nette diminution des réflexions issues de la frontière artificielle. Cependant, après avoir testé cette condition avec une méthode IPDG, nous avons remarqué que des instabilités apparaissaient. De plus, cette condition est écrite pour des surfaces planes et nécessite l'ajout de conditions dite "conditions de coin" à chaque "coin" du domaine. Lorsque la frontière est courbe, elle est approchée par un maillage polygonal et il est nécessaire d'imposer ces conditions particulières en chaque coin du domaine, c'est-à-dire quasiment sur chaque arête (ou face en 3D) externe du maillage. Ainsi, nous avons décidé de construire une condition prenant en compte les ondes évanescentes mais écrites pour des surfaces convexes quelconques et qui soit stable lorsqu'on utilise une formulation IPDG lors de la discrétisation. Pour cela, nous souhaitons reprendre la technique de micro-diagonalisation de Taylor utilisée au chapitre 1 pour construire la famille de CLAs et l'adapter au cas des ondes évanescentes. Dans un premier temps, nous rappelons la condition développée dans [49, 50] (section 2) puis nous détaillons la construction de la nouvelle CLA (section 3). Enfin, nous présenterons les résultats numériques obtenus avec la méthode IPDG aux sections 4 et 5.

### 3.2 La condition de Hagstrom et Warburton

Nous commençons par décrire l'approche proposée par Hagstrom *et al.* [50]. L'équation des ondes en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \times [0, +\infty[$$

où  $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times ]-\infty, 0]$ .

Supposons qu'on connaisse le champ d'ondes  $u := u(x, y, t)$  en  $y = 0$  et que la vitesse de propagation  $c$  ne dépend que de  $x$ . Appliquons une transformée de Fourier-Laplace en  $x$  et en  $t$ . Notons respectivement  $\xi$  et  $\omega$  les variables duales de  $x$  et  $t$ . On obtient alors l'équation différentielle

$$\begin{cases} \partial_y^2 \hat{u} = \left( \xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{u} \\ \hat{u}(\xi, 0, \omega) \text{ donné.} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\hat{u}(\xi, y, \omega) = A_+ e^{\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} y} + A_- e^{-\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} y}.$$

Dans la zone elliptique, les fréquences  $\xi$  et  $\omega$  sont liées par la condition  $\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$ . Ainsi, comme le champ d'onde est défini pour  $y < 0$ , on ne conserve que la partie d'énergie finie, ce qui élimine le terme multiplié par  $A_-$ . La constante  $A_-$  est donc nécessairement égale à 0. On a ainsi :

$$\hat{u}(\xi, y, \omega) = A_+ e^{\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} y},$$

et la constante  $A_+$  est fixée grâce à la donnée  $u(x, 0, t)$  :

$$A_+ = \hat{u}(\xi, 0, \omega).$$

On a donc

$$\hat{u}(\xi, y, \omega) = \hat{u}(\xi, 0, \omega) e^{\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} y},$$

ce qui nous fournit, via une transformée de Fourier inverse, l'expression de  $u$ , pour tout  $y < 0$  :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \mathcal{F}^{-1} \left( \hat{u}(\xi, 0, \omega) e^{\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} y} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{u}(\xi, 0, \omega) e^{\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} y} e^{i(\omega t + \xi x)} d\omega d\xi. \end{aligned}$$

On distingue ensuite les cas où  $(\xi, \omega) \in \{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0\} = \mathcal{E}$  et  $(\xi, \omega) \in \{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0\} = \mathcal{H}$ . Dans  $\mathcal{H}$ , on a

$$\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0 \Leftrightarrow \xi^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow \xi < \frac{|\omega|}{c}.$$

On peut donc poser, pour tout  $(\xi, \omega) \in \mathcal{H}$ ,

$$\xi = \frac{|\omega|}{c} \sin \alpha, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

On a ainsi, dans  $\mathcal{H}$ ,

$$d\xi = \frac{|\omega|}{c} \cos \alpha d\alpha.$$

Dans  $\mathcal{E}$ , on a

$$\xi^2 > \frac{\omega^2}{c^2}.$$

On peut donc poser

$$\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \sigma^2 \text{ avec } \sigma > 0,$$

ce qui donne pour  $(\xi, \omega) \in \mathcal{E}$ , la relation

$$\xi = \frac{1}{c} (c^2 \sigma^2 + \omega^2)^{1/2} \text{ avec } \sigma > 0.$$

On a alors, dans  $\mathcal{E}$ ,

$$d\xi = \frac{c\sigma}{(c^2 \sigma^2 + \omega^2)^{1/2}} d\sigma.$$

Par conséquent, de l'expression

$$u(x, y, t) = \int_{\mathcal{H}} \widehat{u}(\xi, 0, \omega) e^{\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} y} e^{i(\omega t + \xi x)} d\omega d\xi + \int_{\mathcal{E}} \widehat{u}(\xi, 0, \omega) e^{\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} y} e^{i(\omega t + \xi x)} d\omega d\xi,$$

on déduit la représentation de  $u$  suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \int_0^{\pi/2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}\left(\frac{|\omega|}{c} \sin \alpha, 0, \omega\right) e^{i \cos \alpha \frac{|\omega|}{c} y} e^{i(\omega t + \frac{|\omega|}{c} \sin \alpha x)} \frac{|\omega|}{c} \cos \alpha d\omega d\alpha \\ &+ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}\left(\frac{1}{c} (c^2 \sigma^2 + \omega^2)^{1/2}, 0, \omega\right) e^{\sigma y} e^{i(\omega t + \frac{1}{c} (c^2 \sigma^2 + \omega^2)^{1/2} x)} \frac{c\sigma}{(c^2 \sigma^2 + \omega^2)^{1/2}} d\omega d\sigma. \end{aligned}$$

Chacune des deux intégrales est calculée de façon approchée en appliquant une formule de quadrature. Si on note  $u_{\mathcal{H}}$  et  $u_{\mathcal{E}}$  les champs définis respectivement par

$$u_{\mathcal{H}} := u_{\mathcal{H}}(\alpha, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}\left(\frac{|\omega|}{c} \sin \alpha, 0, \omega\right) e^{i \cos \alpha \frac{|\omega|}{c} y} e^{i(\omega t + \frac{|\omega|}{c} \sin \alpha x)} \frac{|\omega|}{c} \cos \alpha d\omega$$

et

$$u_{\mathcal{E}} := u_{\mathcal{E}}(\sigma, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}\left(\frac{1}{c} (c^2 \sigma^2 + \omega^2)^{1/2}, 0, \omega\right) e^{\sigma y} e^{i(\omega t + \frac{1}{c} (c^2 \sigma^2 + \omega^2)^{1/2} x)} \frac{c\sigma}{(c^2 \sigma^2 + \omega^2)^{1/2}} d\omega,$$

on applique les formules suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} u_{\mathcal{H}}(\alpha, y, t) d\alpha \simeq \sum_{j=1}^P p_j u_{\mathcal{H}}(\alpha_j, y, t)$$

où  $\{p_j\}_{1 \leq j \leq P}$  désigne l'ensemble des poids de quadrature et  $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq P}$  désigne l'ensemble des points de quadrature et

$$\int_0^{\pi/2} u_{\mathcal{E}}(\sigma, y, t) d\sigma \simeq \sum_{j=1}^Q q_j u_{\mathcal{E}}(\sigma_j, y, t)$$

où  $\{q_j\}_{1 \leq j \leq Q}$  désigne l'ensemble des poids de quadrature et  $\{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq Q}$  désigne l'ensemble des points de quadrature.

On peut alors vérifier formellement que si

$$u_{app}(x, y, t) = \sum_{j=1}^P p_j u_{\mathcal{H}}(\alpha_j, y, t) + \sum_{j=1}^Q q_j u_{\mathcal{E}}(\sigma_j, y, t),$$

$u_{app}(x, y, t)$  vérifie, en  $y = 0$ ,

$$\left[ \prod_{j=1}^Q (\sigma_j - \partial_y) \right] \left[ \prod_{j=1}^P (\cos \alpha_j \partial_t - c \partial_y) \right] u \simeq 0.$$

La CLA généralisée proposée dans [50] s'écrit alors

$$\left[ \prod_{j=1}^Q (\sigma_j - \partial_y) \right] \left[ \prod_{j=1}^P (\cos a_j \partial_t - c \partial_y) \right] u = 0 .$$

Maintenant que nous avons obtenu une nouvelle condition absorbante faisant intervenir des produits d'opérateurs différentiels, on introduit des variables auxiliaires pour pouvoir implémenter facilement cette CLA dans une formulation variationnelle. On pose

$$\begin{cases} (\cos a_1 \partial_t - c \partial_y) u = \cos a_1 \partial_t u_1, \\ (\cos a_j \partial_t - c \partial_y) u_{j-1} = (\cos a_j \partial_t + c \partial_y) u_j, & 2 \leq j \leq P, \\ (\sigma_j - \partial_y) u_{P+j-1} = (\sigma_j + \partial_y) u_{P+j}, & 1 \leq j \leq Q, \\ u_j(x, y, 0) = 0, & 1 \leq j \leq P + Q; \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Dans (3.2.1), les inconnues auxiliaires  $\{u_j\}_{1 \leq j \leq P}$  sont introduites pour intégrer facilement la condition de Higdon. Les inconnues  $\{u_j\}_{P+1 \leq j \leq P+Q}$  sont elles utilisées pour prendre en compte la condition de type Robin.

**Proposition 3.2.1.** *La condition  $\left[ \prod_{j=1}^Q (\sigma_j - \partial_y) \right] \left[ \prod_{j=1}^P (\cos a_j \partial_t - c \partial_y) \right] u = 0$  est alors équivalente à  $u_{P+Q} = 0$ .*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que le fait d'imposer  $u_{P+Q} = 0$  implique que la condition  $\left[ \prod_{j=1}^Q (\sigma_j - \partial_y) \right] \left[ \prod_{j=1}^P (\cos a_j \partial_t - c \partial_y) \right] u = 0$  est bien vérifiée. Comme  $u_{P+Q} = 0$  sur  $\Sigma$ , on obtient

$$(\sigma_Q + \partial_y) u_{P+Q} = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Ainsi en utilisant la définition de  $u_{P+Q}$ , on a

$$(\sigma_Q - \partial_y) u_{P+Q-1} = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Appliquons maintenant l'opérateur différentiel  $(\sigma_{Q-1} + \partial_y)$ . On obtient alors en commutant les opérateurs

$$(\sigma_Q - \partial_y)(\sigma_{Q-1} + \partial_y) u_{P+Q-1} = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

En utilisant la définition de  $u_{P+Q-1}$ , il vient

$$(\sigma_Q - \partial_y)(\sigma_{Q-1} - \partial_y) u_{P+Q-2} = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Par suite, on obtient

$$\prod_{j=1}^Q (\sigma_j - \partial_y) u_P = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

À présent, on compose avec l'opérateur  $(\cos a_P \partial_t + c \partial_y)$ . Comme nous avons supposés que la vitesse est constante, on peut commuter les opérateurs et on obtient

$$\prod_{j=1}^Q (\sigma_j - \partial_y) (\cos a_P \partial_t + c \partial_y) u_P = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

En utilisant la définition de  $u_P$ , on obtient

$$\prod_{j=1}^Q (\sigma_j - \partial_y) (\cos a_P \partial_t - c \partial_y) u_{P-1} = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

Par suite, il vient  $\left[ \prod_{j=1}^Q (\sigma_j - \partial_y) \right] \left[ \prod_{j=1}^P (\cos a_j \partial_t - c \partial_y) \right] u = 0$ .

En ce qui concerne l'implication réciproque, on peut montrer de la même manière que précédemment en commutant les opérateurs :

$$\left[ \prod_{j=1}^Q (\sigma_j + \partial_y) \right] \left[ \prod_{j=2}^P (\cos a_j \partial_t + c \partial_y) \right] \cos a_1 \partial_t u_{P+Q} = 0.$$

Or on sait que  $(\cos a_j \partial_t + c \partial_y)$  et  $(\sigma_j + \partial_y)$  représentent des ondes rentrantes. Ainsi, comme nous avons supposé que le domaine est borné, il ne peut y avoir d'ondes issues de l'extérieur du domaine de calcul, autrement dit

$$(\cos a_j \partial_t + c \partial_y) w = 0 \implies w = 0, \forall 1 \leq j \leq P,$$

et

$$(\sigma_j + \partial_y) w = 0 \implies w = 0, \forall 1 \leq j \leq Q.$$

On obtient aisément que

$$\cos a_1 \partial_t u_{P+Q} = 0,$$

et donc

$$\partial_t u_{P+Q} = 0.$$

On a obtenu que  $u_{P+Q}$  est constante au cours du temps. Or, on a supposé que  $u_{P+Q}$  est nulle à l'instant initial. Par conséquent,  $u_{P+Q} = 0$  ce qui termine la démonstration de la proposition.  $\square$

L'inconvénient de cette formulation est qu'elle nécessite le calcul des dérivées normales des inconnues auxiliaires. On ne peut donc pas calculer ces inconnues uniquement sur la frontière. Les auteurs ont donc reformulé les équations définissant les variables auxiliaires pour faire intervenir des dérivées tangentielles plutôt que des dérivées normales. Pour cela, ils utilisent la propriété remarquable que chaque variable auxiliaire vérifie l'équation des ondes. Hagstrom *et al.* [49] proposent alors de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ (\cos a_1 \partial_t - c \partial_y) u = \cos a_1 \partial_t u_1 \text{ sur } \Sigma, \end{cases}$$

les inconnues auxiliaires  $\{u_j\}_{1 \leq j \leq P}$  vérifient sur  $\Sigma$

$$l_{1,0} \partial_t^2 u + l_{1,1} \partial_t^2 u_1 + l_{1,2} \partial_t^2 u_2 = c^2 (m_{1,0} \partial_x^2 u + m_{1,1} \partial_x^2 u_1 + m_{1,2} \partial_x^2 u_2)$$

avec

$$\begin{cases} l_{1,0} = 2\cos a_2 (1 - \cos^2 a_1) \\ l_{1,1} = \cos a_1 (1 + 2\cos a_2 \cos a_1 + \cos a_2) \\ l_{1,2} = \cos a_1 (1 - \cos a_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m_{1,0} = 2\cos a_2 \\ m_{1,1} = \cos a_1 \\ m_{1,2} = \cos a_1 \end{cases}$$

et

$$l_{j,j-1} \partial_t^2 u_{j-1} + l_{j,j} \partial_t^2 u_j + l_{j,j+1} \partial_t^2 u_{j+1} = c^2 [m_{j,j-1} \partial_x^2 u_{j-1} + m_{j,j} \partial_x^2 u_j + m_{j,j+1} \partial_x^2 u_{j+1}]$$

pour  $j = \{2, \dots, P-1\}$ , avec

$$\begin{cases} l_{j,j-1} = \cos a_{j+1} (1 - \cos^2 a_j) \\ l_{j,j} = \cos a_{j+1} (1 + \cos^2 a_j) + \cos a_j (1 + \cos^2 a_{j+1}) \\ l_{j,j+1} = \cos a_j (1 - \cos^2 a_{j+1}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m_{j,j-1} = \cos a_{j+1} \\ m_{j,j} = \cos a_{j+1} + \cos a_j \\ m_{j,j+1} = \cos a_j \end{cases}$$

alors que les inconnues auxiliaires  $\{u_j\}_{P+1 \leq j \leq P+Q-1}$  vérifient sur  $\Sigma$

$$\begin{aligned} \bar{l}_{j,j-1} \partial_t^2 u_{P+j-1} + \bar{l}_{j,j} \partial_t^2 u_{P+j} + \bar{l}_{j,j+1} \partial_t^2 u_{P+j+1} = c^2 (\bar{m}_{j,j-1} \partial_x^2 u_{P+j-1} + \bar{m}_{j,j} \partial_x^2 u_{P+j} \\ + \bar{m}_{j,j+1} \partial_x^2 u_{P+j+1}) + c^2 (\bar{s}_{j,j-1} u_{P+j-1} + \bar{s}_{j,j} u_{P+j} + \bar{s}_{j,j+1} u_{P+j+1}) \end{aligned}$$

pour  $j = 1, \dots, Q-1$ , avec

$$\begin{cases} \bar{l}_{j,j-1} = \bar{m}_{j,j-1} = \frac{1}{\sigma_j} \\ \bar{l}_{j,j} = \bar{m}_{j,j} = \frac{1}{\sigma_j} + \frac{1}{\sigma_{j+1}} \\ \bar{l}_{j,j+1} = \bar{m}_{j,j+1} = \frac{1}{\sigma_{j+1}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{s}_{j,j-1} = \sigma_j \\ \bar{s}_{j,j} = -(\sigma_j + \sigma_{j+1}) \\ \bar{s}_{j,j+1} = \sigma_{j+1} \end{cases}$$

et

$$u_{P+Q} = 0.$$

Finalement les inconnues associées aux ondes propagatives sont reliées aux inconnues associées aux ondes évanescentes par la fonction  $\psi$  définie par

$$\cos a_P \partial_t \psi = 2c \partial_y u_P$$

et qui vérifie sur  $\Sigma$

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \cos^2 a_P)}{\cos a_P} \partial_t^2 u_{P-1} + \frac{(\cos^2 a_P + 1)}{\cos a_P} \partial_t^2 u_P + \cos a_P \partial_t^2 \psi = \frac{c^2}{\cos a_P} (\partial_x^2 u_{P-1} + \partial_x^2 u_P), \\ \frac{1}{\cos a_P \sigma_1} (\partial_t^2 u_P + \partial_t^2 u_{P+1}) - c \partial_t \psi = \frac{\sigma_1 c^2}{\cos a_P} (u_{P+1} - u_P) + \frac{c^2}{\cos a_P \sigma_1} (\partial_x^2 u_{P+1} + \partial_x^2 u_P). \end{aligned}$$

En pratique, on se ramène à résoudre un système tridiagonal sur le bord  $\Sigma$  dont le triplet type est donné par  $\{u_j, u_{j+1}, u_{j+2}\}_{0 \leq j \leq P+Q-2}$  avec  $u_0 = u$ .

Le système obtenu ici n'est valable que dans le cas où la frontière absorbante est une surface plane. Comme nous l'avons déjà précisé, si l'on considère que la frontière est polygonale, il nous faut rajouter une équation supplémentaire à chaque coin du polygone ce qui complique l'expression de la condition absorbante et augmente le nombre de variables auxiliaires.

Hagstrom et ses collaborateurs ont testé numériquement cette condition en utilisant une méthode d'éléments finis classique pour la discrétisation en espace et une méthode de prédicteurs-correcteurs pour la discrétisation en temps. Ils ont observé une amélioration de la qualité de l'absorption lorsqu'on prend en compte l'influence des ondes évanescentes. Nous avons testé cette

condition avec une formulation IPDG en espace et un schéma saute-mouton pour la discrétisation en temps. Pour faciliter l'implémentation, nous avons considéré un domaine carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  sans obstacle à l'intérieur. Nous avons imposé la condition développée par Hagstrom et al. [50] sur le bord inférieur du domaine et nous avons imposé une condition de Neumann homogène sur le reste du domaine. En procédant ainsi, nous nous sommes affranchis des problèmes liés aux conditions de coin.

Nous avons alors observé que l'utilisation de cette CLA détériore fortement la condition CFL. On rappelle que cette condition fixe le pas de temps maximal que l'on peut prendre en fonction du pas d'espace  $h$ . Avec cette nouvelle CLA, on doit prendre un pas de temps très petit et donc réaliser beaucoup plus d'itérations qu'avec la C-ABC pour atteindre un temps final fixé. Enfin, les différents tests réalisés montrent que des instabilités apparaissent pour certaines valeurs de  $a_j$  et  $\sigma_j$  lorsqu'on utilise une formulation IPDG. Ces résultats numériques nous ont alors encouragés à chercher une autre CLA généralisée qui puisse satisfaire les deux critères suivants :

- le problème formulée en IPDG reste stable et la CFL n'est pas perturbée ;
- la CLA généralisée peut s'écrire pour des frontières courbes.

Nous avons donc décidé de construire une autre condition aux limites absorbantes prenant en compte les ondes évanescentes, écrite pour des surfaces convexes de forme arbitraire et qui soit facilement implémentable dans une formulation IPDG. C'est l'objet de la section suivante.

### 3.3 Une nouvelle condition aux limites absorbante généralisée

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la construction d'une nouvelle condition aux limites absorbantes en utilisant la méthode de micro-diagonalisation développée par M.E. Taylor [74]. Cette condition peut s'écrire sur toute surface régulière et elle prend en compte à la fois les ondes propagatives et les ondes évanescentes.

#### 3.3.1 Diagonalisation dans la région elliptique

La condition que nous proposons d'utiliser est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.3.1.** *Une condition prenant en compte les ondes évanescentes est donnée par*

$$\partial_n u + \beta u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (3.3.1)$$

où  $\beta$  est un paramètre réel strictement positif.

*Démonstration.* On utilise donc la technique de micro-diagonalisation présentée au chapitre 1. Nous ne redétaillons pas la méthode ici et nous ne présentons que les étapes principales. On rappelle que la condition de bord à l'ordre 0 est donnée par

$$[V_0 U]_2 = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

où  $V_0$  est un FIO de symbole  $\mathcal{V}_0$  avec

$$\mathcal{V}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\lambda_1} & 1 \\ 1 & -\frac{\lambda_1}{i\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Dans le chapitre 1,  $\lambda_1$  est un nombre imaginaire pur défini par  $i\sqrt{\omega^2 - h^{-2}\xi^2}$  car nous considérons le cas des ondes propagatives. Ici, comme nous considérons le cas des ondes évanescentes,  $\lambda_1 := \sqrt{h^{-2}\xi^2 - \omega^2}$  est un réel car les fréquences  $(\omega, \xi)$  sont dans la zone elliptique. Comme dans [49], on propose d'utiliser la paramétrisation  $\lambda_1 = \beta$ , avec  $\beta > 0$ . On obtient donc

$$\tau_{-1}((\mathcal{I}_2 + \mathcal{K}_{-1})\mathcal{V}_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\beta} & 1 \\ 1 & -\frac{\beta}{i\omega} \end{pmatrix}$$

Ensuite, sachant que  $U = (v, u)$  avec  $\partial_t v + \partial_n u = 0$  sur  $\Sigma$ , il vient

$$\partial_n u + \beta u = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

□

On obtient donc une condition de Fourier-Robin via une approximation d'ordre 0 de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann dans la région elliptique. On observe que si l'équation des ondes est couplée avec seulement (3.3.1), le système qui en résulte est conservatif quand  $\beta > 0$ . En effet, si on note par  $\mathcal{E}(t)$  la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \beta |u|^2 dF,$$

définie pour toute solution régulière de l'équation des ondes,  $t \mapsto \mathcal{E}(t)$  est une constante et définit une énergie si  $\beta > 0$ .

### 3.3.2 Une nouvelle famille de CLAs généralisées

Nous sommes à présent en mesure de construire une nouvelle famille de CLAs généralisées. La construction est directe puisqu'elle est basée sur la combinaison de la C-ABC et de (3.3.1). L'idée de combiner la condition écrite pour prendre en compte les ondes propagatives et celle écrite pour les ondes évanescentes se base sur la représentation du champ d'onde  $u$  à partir de sa transformée de Fourier inverse qui peut être définie grâce à la relation algébrique faisant intervenir  $\mathcal{L}$ . En effet, la transformée de Fourier est utilisée pour représenter le champ d'ondes comme la somme de deux intégrales définies respectivement dans le cône de propagation et dans la région elliptique. Par construction, chaque intégrale vérifie la condition exacte d'où proviennent les conditions approchées. Comme les deux conditions approchées commutent, une approximation de la condition exacte est obtenue en combinant les deux conditions approchées. L'idée de décomposer le champ d'ondes sera plus explicitement détaillée dans la section consacrée aux tests numériques.

**Proposition 3.3.2.** *Une famille du second-ordre de CLAs prenant en compte les ondes propagatives et les ondes évanescentes s'écrit*

$$(\partial_n + \beta) \left( \partial_t + \partial_n + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (3.3.3)$$

où  $\kappa(s)$  désigne la courbure de  $\Sigma$  et  $\beta$  est un paramètre strictement positif.

### 3.4 Mise en oeuvre dans un schéma de type IPDG

#### 3.4.1 Prise en compte de la CLA généralisée dans une formulation variationnelle

Pour pouvoir implémenter la CLA généralisée dans une formulation de type élément fini, on propose d'introduire une variable auxiliaire définie sur  $\Sigma$ . On peut ainsi réécrire (3.3.3) sous la forme d'une condition de type Dirichlet-to-Neumann.

**Proposition 3.4.1.** *La CLA généralisée (3.3.3) est réécrite comme*

$$\partial_n u + \frac{1}{c} \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} u = \psi \text{ sur } \Sigma.$$

où  $\psi$  est le champ de surface satisfaisant

$$\left( \beta + \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} \right) \psi = \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) u \text{ sur } \Sigma.$$

*Démonstration.* Lorsqu'on développe la CLA généralisée (3.3.3), il vient

$$\partial_n^2 u + \frac{1}{c} \partial_t \partial_n u + \left( \beta + \frac{\kappa(s)}{2} \right) \partial_n u + \frac{\beta}{c} \partial_t u + \frac{\beta \kappa(s)}{2} u = 0.$$

Ensuite, on utilise le fait que  $u$  vérifie l'équation des ondes sur  $\Sigma$ . Ainsi,

$$\partial_n^2 u + \kappa(s) \partial_n u + \partial_s^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = 0.$$

On obtient donc en couplant les deux dernières équations

$$\left( \beta - \frac{\kappa(s)}{2} + \frac{1}{c} \partial_t \right) \partial_n u = \partial_s^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \frac{1}{c} \partial_t u - \frac{\beta \kappa(s)}{2} u,$$

ce qui revient à

$$\partial_n u = \left( \beta - \frac{\kappa(s)}{2} + \frac{1}{c} \partial_t \right)^{-1} \left( \partial_s^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \frac{1}{c} \partial_t u - \frac{\beta \kappa(s)}{2} u \right).$$

On a donc pu réécrire (3.3.3) comme une condition de type Dirichlet-to-Neumann liant la dérivée normale de  $u$  à  $u$  via un opérateur pseudo-différentiel. Cependant, si on garde la condition sous cette forme, on perturbe la structure creuse des matrices éléments finis à cause de l'opérateur  $\left( \beta - \frac{\kappa(s)}{2} + \frac{1}{c} \partial_t \right)^{-1}$ .

Remarquons que la condition peut se réécrire sous la forme

$$\partial_n u = -\frac{1}{c} \partial_t u - \frac{\kappa(s)}{2} u + \left( \beta + \frac{1}{c} \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} \right)^{-1} \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) u \text{ sur } \Sigma.$$

On introduit alors une variable auxiliaire notée  $\psi$ , définie seulement sur  $\Sigma$ , pour traiter le terme  $\left( \beta + \frac{1}{c} \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} \right)^{-1} \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) u$ . On pose

$$\left( \beta + \frac{1}{c} \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} \right) \psi = \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) u \text{ sur } \Sigma,$$

et la CLA généralisée (3.3.3) se réécrit comme un système couplé sur  $\Sigma$

$$\begin{cases} \partial_n u + \frac{1}{c} \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} u = \psi \text{ sur } \Sigma \\ \left( \beta + \frac{1}{c} \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} \right) \psi = \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) u \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

□

**Remarque 3.4.2.** *Cette condition peut être vue comme une pénalisation de la C-ABC qui est une condition du premier ordre. Ceci n'est pas surprenant puisque cette condition est la combinaison de la C-ABC avec une condition de Robin. De plus, cette écriture montre explicitement que le champ d'onde  $u$  n'est pas seulement propagatif et la correction est représentée par  $\psi$ .*

Ainsi, au lieu de résoudre le problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty); \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega; \\ u = 0 \text{ ou } \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty); \\ (\partial_n + \beta) \left( \partial_n + \frac{1}{c} \partial_t + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty), \end{cases}$$

on va résoudre le problème mixte

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty); \\ \partial_n u + \frac{1}{c} \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} u = \psi & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty); \\ \left( \beta + \frac{1}{c} \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} \right) \psi = \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) u & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty); \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty); \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega; \\ \psi(0, x) = \psi_0(x) & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

À présent, nous sommes en mesure de proposer une formulation variationnelle associée à ce problème et ainsi de tester numériquement cette nouvelle condition pour pouvoir en analyser les performances. En particulier, nous souhaitons mesurer l'influence du paramètre  $\beta$  sur les performances de la CLA et analyser le comportement de la valeur optimale de  $\beta$  lorsque le maillage ou la géométrie sont modifiés.

### 3.4.2 Schéma discret

Comme dans le chapitre 2, on utilise une formulation IPDG pour la discrétisation en espace du problème aux limites. Dans ce paragraphe on suppose que  $c = 1$  afin d'alléger les notations.

En reprenant les mêmes notations que dans le chapitre 2, il vient que le problème discret est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h^k \times (0, +\infty) \text{ et } \psi_h \in W_h^k \times (0, +\infty) \text{ tel que,} \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \partial_t^2 u_h v_h + a(u_h, v_h) + \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \left( \partial_t u_h + \frac{\kappa(s)}{2} u_h \right) v_h + \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \psi_h v_h \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v_h, \quad \forall v_h \in V_h^k \\ \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \left( \partial_t + \beta - \frac{\kappa(s)}{2} \right) \psi_h w_h = - \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)^2}{4} u_h w_h - b(u_h, w_h), \quad \forall w_h \in W_h^k \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

avec

$$a(u, v) = \sum_K \int_K \nabla u \nabla v - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_{\sigma} \left( \{\{\nabla u\}\} [v] + \{\{\nabla v\}\} [u] - \alpha_1 [u] [v] \right)$$

et

$$b(u, v) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \partial_s u \partial_s v - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_{\sigma} \left( \{\{\partial_s u\}\} [v] + \{\{\partial_s v\}\} [u] - \alpha_2 [u] [v] \right)$$

et  $\alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*}$  deux coefficients de pénalisation [5]. On fait référence à [12, 13] pour plus de détails sur les méthodes IPDG, à [5, 4] pour une analyse du coefficient de pénalisation et à [43] pour l'application de la méthode IPDG à la discrétisation de l'équation des ondes.

La forme matricielle du problème est alors donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + B \frac{d\mathbf{U}}{dt} + B_{\kappa} \mathbf{U} + K \mathbf{U} - B_{\star} \mathbf{\Psi} = S, \\ \beta C \mathbf{\Psi} + C \frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} - C_{\kappa} \mathbf{\Psi} = -\frac{D_{\kappa^2}}{4} \mathbf{U} - E \mathbf{U}, \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\Psi$  sont les vecteurs inconnus et

$$\begin{aligned}
M &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad K = (a(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq N}, \quad \mathbf{S} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K S v_i \right)_{1 \leq i \leq N}, \\
B &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad B_{\kappa} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)}{2} v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \\
B_{\star} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} w_i v_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}, \quad C = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \\
C_{\kappa} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)}{2} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \quad D_{\kappa} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \kappa(s)^2 v_i w_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}, \\
E &= (b(v_i, w_j))_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la discrétisation en temps, on utilise un schéma de différences finies d'ordre deux avec un pas de temps  $\Delta t$ . On obtient alors le système matriciel

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\mathbf{X}^{n+1} &= \begin{pmatrix} \Delta t^2 \mathbf{S}^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta t^2 K + 2M \\ -\Delta t E \end{pmatrix} \mathbf{X}^n \\
&+ \begin{pmatrix} -M + \frac{\Delta t}{2} B - \frac{\Delta t^2}{2} B_{\kappa} & \frac{\Delta t^2}{2} B_{\star} \\ -\frac{\Delta t}{8} D_{\kappa} & \left( \frac{1}{2} + \frac{\Delta t \beta}{2} \right) C + \frac{\Delta t}{2} C_{\kappa} \end{pmatrix} \mathbf{X}^{n-1}, \tag{3.4.3}
\end{aligned}$$

où

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M + \frac{\Delta t}{2} B + \frac{\Delta t^2}{2} B_{\kappa} & -\frac{\Delta t^2}{2} B_{\star} \\ \frac{\Delta t}{8} D_{\kappa} & \left( \frac{1}{2} - \frac{\Delta t \beta}{2} \right) C - \frac{\Delta t}{2} C_{\kappa} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{X}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^i \\ \Psi^i \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.4.3.** De la même manière qu'au chapitre 2, en pratique, on n'inverse pas la matrice  $\mathbf{M}$  et on résout (3.4.3) élément par élément. Pour simplifier la présentation, on suppose comme dans le chapitre précédent, et sans perte de généralité, que les degrés de liberté sont numérotés de telle sorte que

1. l'élément  $K_i$  est le support des fonctions  $(v_{n_d*(i-1)+j})_{j=1, n_d}$  ;

2. la face  $\sigma_i$  est le support des fonctions  $(w_{n_{d-1}*(i-1)+j})_{j=1, n_{d-1}}$ .

On note alors  $U_{K_i}$  (respectivement  $\Psi_{\sigma_i}$ ) la restriction de  $U$  (respectivement  $\Psi$ ) à l'élément  $K_i$  (respectivement la face  $\sigma_i$ ) :

$$U_{K_i} = (U_{n_d*(i-1)+j})_{j=1, n_d}$$

$$\Psi_{\sigma_i} = (\Psi_{n_{d-1}*(i-1)+j})_{j=1, n_{d-1}}$$

$M_{K_i}$ ,  $B_{K_i}$  et  $B_{\kappa K_i}$  les restrictions de  $M$ ,  $B$  et  $B_{\kappa}$  à l'élément  $K_i$  :

$$M_{K_i} = (M_{n_d*(i-1)+j, n_d*(i-1)+k})_{j, k=1, n_d}$$

$$B_{K_i} = (B_{n_d*(i-1)+j, n_d*(i-1)+k})_{j, k=1, n_d}$$

$$B_{\kappa K_i} = (B_{\kappa n_d*(i-1)+j, n_d*(i-1)+k})_{j, k=1, n_d}$$

et  $B_{\star\sigma_i}$ ,  $C_{\sigma_i}$ ,  $C_{\kappa\sigma_i}$  et  $D_{\sigma_i}$  les restrictions de  $B_{\star}$ ,  $C$ ,  $C_{\kappa}$  et  $D_{\kappa}$  à la face  $\sigma_i$

$$B_{\star\sigma_i} = (B_{\star n_d*(j_i-1)+k, n_{d-1}*(i-1)+l})_{\substack{k=1, n_d \\ l=1, n_{d-1}}}$$

$$C_{\sigma_i} = (C_{n_{d-1}*(i-1)+k, n_{d-1}*(i-1)+l})_{\substack{k=1, n_{d-1} \\ l=1, n_{d-1}}}$$

$$C_{\kappa\sigma_i} = (C_{\kappa n_{d-1}*(i-1)+k, n_{d-1}*(i-1)+l})_{\substack{k=1, n_{d-1} \\ l=1, n_{d-1}}}$$

$$D_{\kappa\sigma_i} = (D_{\kappa n_{d-1}*(i-1)+k, n_d*(j_i-1)+l})_{\substack{k=1, n_{d-1} \\ l=1, n_d}}$$

(si on suppose que la face  $i$  appartient à l'élément  $j_i$ ).

Ainsi,

1. si  $K_i$  est un élément intérieur (i.e. un élément qui n'a pas de face sur  $\Sigma$ ), on doit résoudre le système

$$M_{K_i} U_{K_i}^{n+1} = G$$

où  $G$  est un vecteur qui ne dépend que de  $U^n$ ,  $U^{n-1}$  et  $\mathbf{S}^n$  ;

2. si  $K_i$  est un élément du bord, avec par exemple deux faces externes  $\sigma_{j_1}$  et  $\sigma_{j_2}$  (en pratique un élément du bord a rarement plus de deux faces externes), on doit résoudre le système

$$\begin{pmatrix} M_{K_i} + \frac{\Delta t}{2} B_{K_i} + \frac{\Delta t^2}{2} B_{\kappa K_i} & -\frac{\Delta t^2}{2} B_{\star\sigma_{j_1}} & -\frac{\Delta t^2}{2} B_{\star\sigma_{j_2}} \\ \frac{\Delta t}{8} D_{\sigma\sigma_{j_1}} & C_{\star\sigma_{j_1}} & 0 \\ -\frac{\Delta t}{8} D_{\sigma\sigma_{j_2}} & 0 & C_{\star\sigma_{j_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{K_i}^{n+1} \\ \Psi_{\sigma_{j_1}}^{n+1} \\ \Psi_{\sigma_{j_2}}^{n+1} \end{pmatrix} = G$$

où  $C_{\star\sigma_j} := \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta t\beta}{2}\right) C_{\sigma_j} - \frac{\Delta t}{2} C_{\kappa\sigma_j}$ . et  $G$  est un vecteur qui ne dépend que de  $U^n$ ,  $U^{n-1}$ ,  $\Psi^n$ ,  $\Psi^{n-1}$  et  $\mathbf{S}^n$ .

Si  $K_i$  a deux faces externes (respectivement une ou trois), on doit donc inverser une matrice  $(n_d + 2n_{d-1}) \times (n_d + 2n_{d-1})$  (respectivement  $(n_d + n_{d-1}) \times (n_d + n_{d-1})$  ou  $(n_d + 3n_{d-1}) \times (n_d + 3n_{d-1})$ ). Si  $d = 3$  et  $k = 3$ , on a  $n_d = 20$  et  $n_{d-1} = 10$ , de telle sorte que dans la pire configuration, on n'ait à inverser qu'une matrice  $50 \times 50$ .

Dans tous les cas, on doit juste résoudre de petits systèmes facilement inversibles.

## 3.5 Analyse de performances

Dans cette section, nous étudions les performances de la CLA généralisée dans différentes configurations. Nous analysons tout d'abord la précision de la CLA en fonction du paramètre  $\beta$  et nous montrons qu'il existe un paramètre optimal (*i.e.* permettant de minimiser les réflexions). Nous comparons ensuite la nouvelle CLA à la C-ABC pour cinq cas test décrits à l'annexe A. Nous montrons que la nouvelle CLA est toujours meilleure que la C-ABC mais que les différences de précision sont relativement faibles.

Finalement, nous nous intéressons au cas de la diffraction par une onde plane ce qui nous permet de comparer la solution calculée à celle obtenue dans le cas harmonique.

### 3.5.1 Dépendance par rapport à $\beta$

Dans un premier temps, on souhaite analyser numériquement l'influence du paramètre  $\beta$  sur les performances de la CLA. Pour cela, nous testons numériquement la CLA pour différentes valeurs de  $\beta$  et dans différentes configurations.

Pour une configuration donnée, on compare l'erreur  $L^2$  relative en temps obtenue à un récepteur fixé. Cette erreur  $L^2_{(x,y)}([0, T])$  au point  $(x, y)$  est définie par

$$\frac{\left( \int_0^T (u_{app}(t, (x, y)) - u_{ex}(t, (x, y)))^2 dt \right)^{1/2}}{\left( \int_0^T (u_{ex}(t, (x, y)))^2 dt \right)^{1/2}}, \quad (3.5.1)$$

où  $u_{app}$  est la solution approchée et  $u_{ex}$  est la solution "exacte". Cette solution est obtenue en simulant la propagation de l'onde dans un domaine  $\Omega_{ex}$  défini par le même obstacle que celui présent dans le domaine  $\Omega$  mais où la frontière artificielle est fortement éloignée de telle sorte que la restriction de la solution au domaine  $\Omega$  ne comporte aucune réflexion due à la présence d'une frontière artificielle.

Nous considérons tout d'abord le cas test 1 (cf Annexe A). Sur la figure 3.1 nous représentons l'erreur relative au point  $(-2m; 2m)$  pour  $\beta \in [0.3, 5]$ . Pour des valeurs inférieures à 0.3, le schéma n'est numériquement plus stable. On remarque que l'erreur relative présente un minimum pour  $\beta = 0.7$ . Pour plus de lisibilité, nous n'avons représenté l'erreur que pour  $\beta$  plus petit que 5 mais nous avons testé des valeurs beaucoup plus grandes de  $\beta$  et l'erreur continue bien d'augmenter. Pour vérifier si la valeur optimale de  $\beta$  dépend de la géométrie de la frontière absorbante, on considère le cas test 2 dans lequel le bord de l'obstacle et la frontière absorbante sont des ellipses. La figure 3.2 représente l'erreur relative au point  $(-2m; 2.73m)$  pour  $\beta \in [0.5; 5]$ . La valeur optimale de  $\beta$  est ici 2, ce qui montre que cette valeur dépend de la géométrie de la frontière. Remarquons cependant que l'allure des courbes est la même dans les deux configurations : le schéma est instable pour  $\beta$  trop petit, puis l'erreur décroît jusqu'à la valeur optimale et croît ensuite

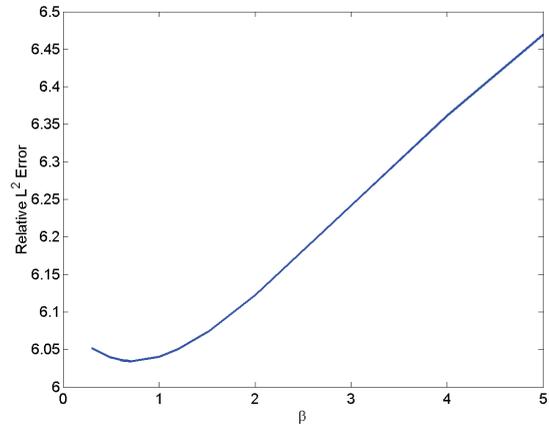


FIG. 3.1 – Erreur en fonction de  $\beta$  - Configuration 1

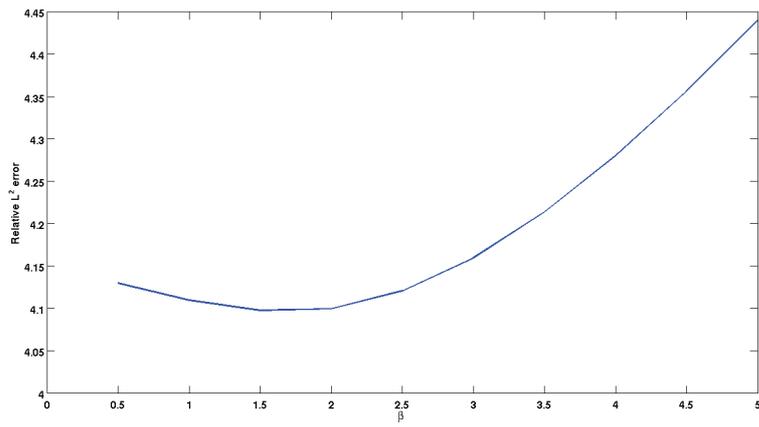


FIG. 3.2 – Erreur en fonction de  $\beta$  - Configuration 2

avec  $\beta$ .

Pour vérifier si la valeur optimale dépend du pas d'espace  $h$ , nous avons recalculé la solution du premier test en utilisant un maillage deux fois plus fin. La figure 3.3 représente l'erreur relative au

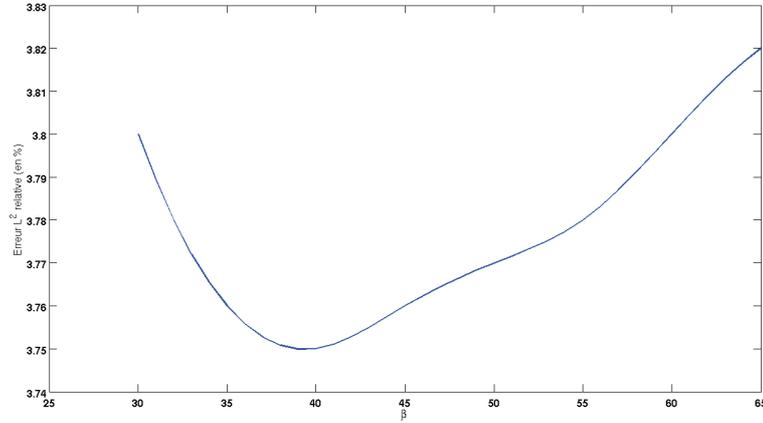


FIG. 3.3 – Erreur en fonction de  $\beta$  - Configuration 1 raffinée

point  $(-2m; 2m)$  pour  $\beta \in [30, 65]$ . La valeur optimale est cette fois  $\beta = 40$ , ce qui montre que cette valeur dépend également du maillage.

### 3.5.2 Comparaison de la CLA avec la C-ABC

On souhaite à présent comparer les performances de la CLA (3.3.3) avec celles de la C-ABC pour voir si le fait de prendre en compte les ondes évanescentes dans le processus de construction des CLAs améliore l'absorption. Nous avons testé les CLAs sur les différents cas tests présentés dans l'annexe A. Pour chaque cas test, nous avons tout d'abord déterminé la valeur optimale du paramètre  $\beta$ . Pour cela nous avons mené une étude similaire à celle de la sous-section précédente que nous ne présentons pas ici pour ne pas alourdir la présentation.

Pour comparer les deux CLAs dans une configuration donnée, on calcule l'erreur globale en temps et en espace définie au chapitre 2 *i.e.* on calcule l'erreur relative  $L^2([0, t] \times \Omega)$  définie par

$$\left( \frac{\int_0^t \int_{\Omega} |u_{app}(s, x) - u_{ex}(s, x)|^2 dx ds}{\int_0^t \int_{\Omega} |u_{ex}(s, x)|^2 dx ds} \right)^{1/2},$$

où  $u_{app}$  est la solution approchée obtenue et  $u_{ex}$  est la solution "exacte" calculée comme précédemment.

Précisons que pour les différents tests réalisés, nous avons gardé la même condition CFL que celle utilisée avec la C-ABC. Par conséquent, nous pouvons prendre le même pas de temps que dans le cas de la C-ABC ce qui n'est pas le cas lorsqu'on utilise la condition développée par Hagstrom et Warburton.

### 3.5.2.1 Cas test 1

Dans un premier temps, on s'intéresse au cas où l'obstacle est un cercle comme décrit dans l'annexe A. Ainsi, la courbure de la frontière artificielle, qui est aussi de forme circulaire, est constante. Sur la figure 3.4, on représente en bleu l'erreur globale en temps et en espace obtenue

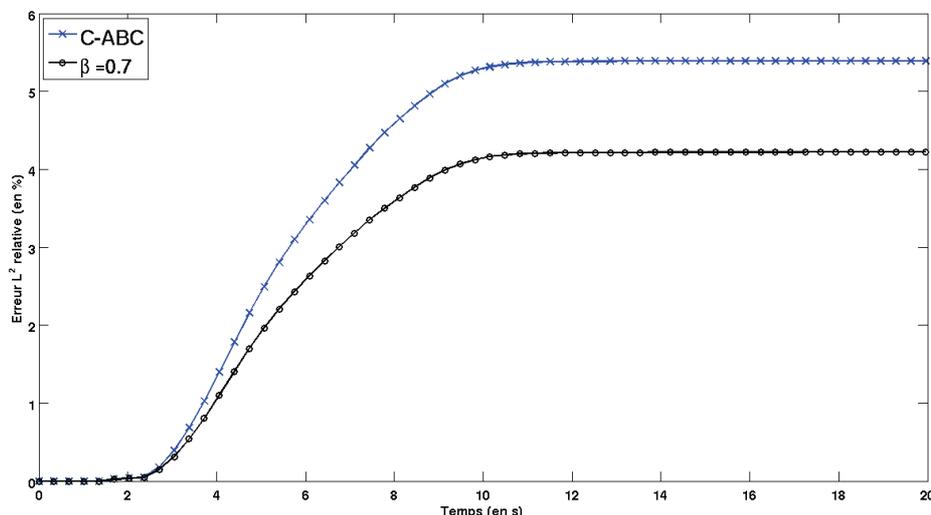


FIG. 3.4 – Comparaison entre CLA généralisée et C-ABC - Configuration 1

avec la C-ABC et en noir celle obtenue avec la condition (3.3.3) pour  $\beta = 0.7$  qui est la valeur optimale de  $\beta$  trouvée au paragraphe précédent. On constate qu'on obtient de meilleurs résultats avec la nouvelle CLA qu'avec la C-ABC et que le gain global est d'environ 1%.

### 3.5.2.2 Cas test 2

Dans ce cas, l'obstacle n'est plus de forme circulaire mais de forme elliptique. On représente sur la figure 3.5 l'erreur relative globale en temps et en espace obtenue lorsqu'on utilise la C-ABC (en bleu) sur la frontière  $\Sigma$  et celle obtenue avec la CLA (3.3.3) (en noir) avec comme valeur de  $\beta$  la valeur optimale évaluée. On remarque que les résultats obtenus avec la nouvelle CLA sont meilleurs que ceux obtenus avec la C-ABC. Le gain global est encore d'environ 1%.

### 3.5.2.3 Cas test 3

A présent, on s'intéresse au cas d'une ellipse allongée correspondant à la configuration 3 décrite dans l'annexe A. Comme précédemment, on représente sur la figure 3.6 en bleu l'erreur globale en temps et en espace obtenue avec la C-ABC et en noir celle obtenue avec la condition (3.3.3) pour  $\beta = 35\kappa(s)$ . On remarque à nouveau que l'erreur est plus petite lorsqu'on utilise la CLA généralisée (3.3.3) mais que l'amélioration n'est pas significative.

### 3.5.2.4 Cas test 4

Ici, on considère le cas de deux obstacles circulaires entourés par une frontière artificielle elliptique. Sur la figure 3.7, on représente l'erreur globale en temps et en espace obtenue avec

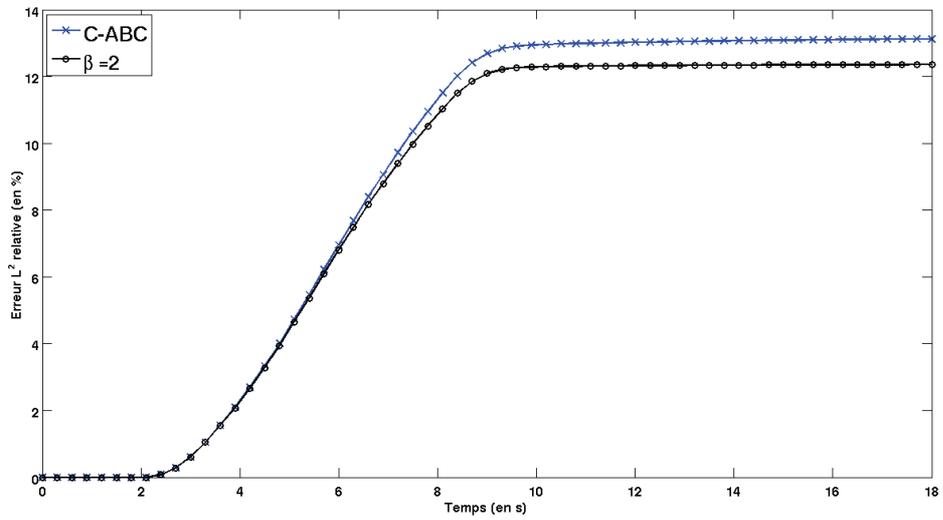


FIG. 3.5 – Comparaison entre CLA généralisée et C-ABC - Configuration 2

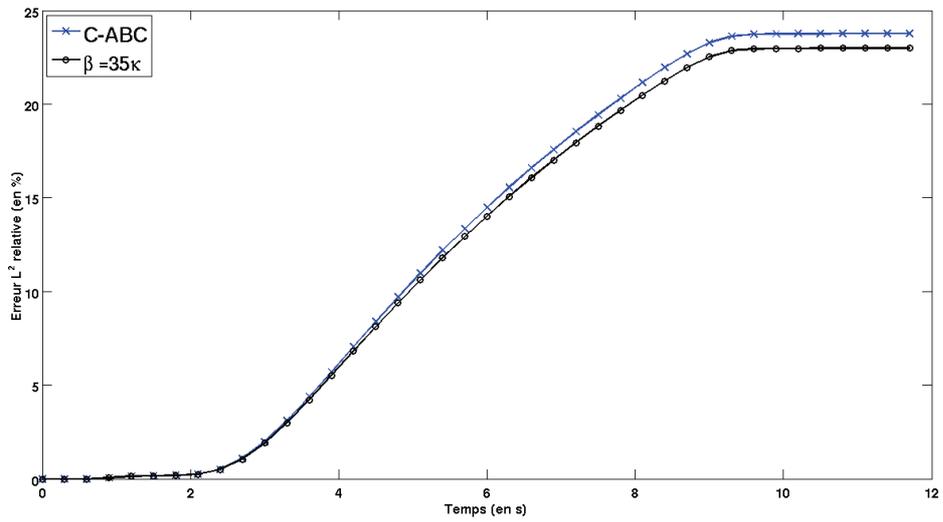


FIG. 3.6 – Comparaison entre CLA généralisée et C-ABC - Configuration 3

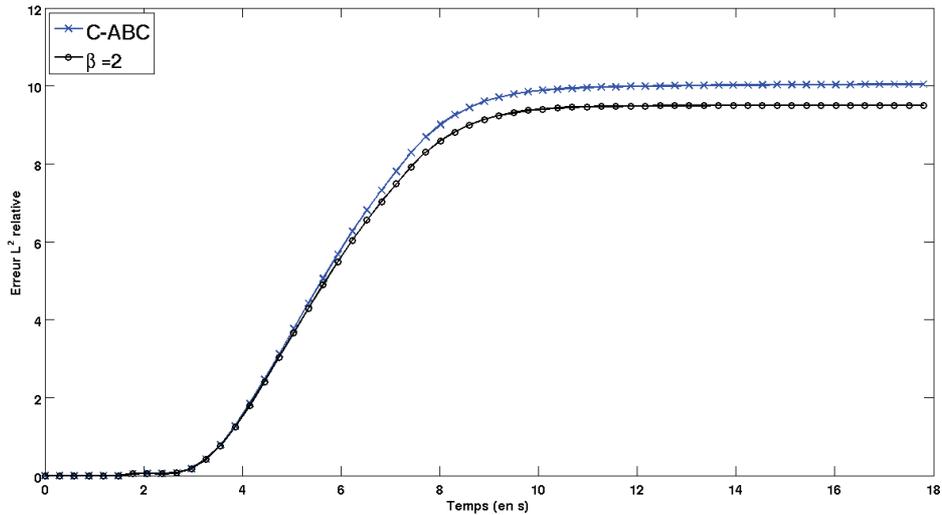


FIG. 3.7 – Comparaison entre CLA généralisée et C-ABC - Configuration 4

la C-ABC en bleu et celle obtenue avec la CLA (3.3.3) pour  $\beta = 2$  en noir. On remarque que la prise en compte des ondes évanescentes permet d'améliorer l'absorption. Le gain global n'est cependant que de 1%.

### 3.5.2.5 Cas test 5

Nous considérons ici un domaine contenant 4 obstacles triangulaires et une frontière artificielle circulaire. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 3.8. Ici encore, nous avons représenté en bleu l'erreur globale obtenue avec la C-ABC et en noir celle obtenue avec la CLA définie en (3.3.3) pour  $\beta = 1$ . Comme dans les cas précédents, on remarque que les résultats obtenus avec la nouvelle CLA sont meilleurs que ceux obtenus avec la C-ABC. On remarque que dans ce cas le gain est inférieur à 1% mais on observe tout de même que l'erreur relative obtenue avec la C-ABC est déjà faible (moins de 5%). Le gain ne peut être très important.

Dans toutes les configurations que nous avons étudiées, la prise en compte des ondes évanescentes améliore la précision de la CLA mais le gain est relativement faible. Pour augmenter la précision, il faudra probablement envisager de coupler la condition sur les modes évanescents à une condition d'ordre élevé sur les modes propagatifs.

Une autre piste consiste à considérer le problème de diffraction d'une onde plane. Dans ce cas, c'est l'obstacle lui-même qui est la source du champ d'onde. Nous étudions ce cas dans la sous-section suivante.

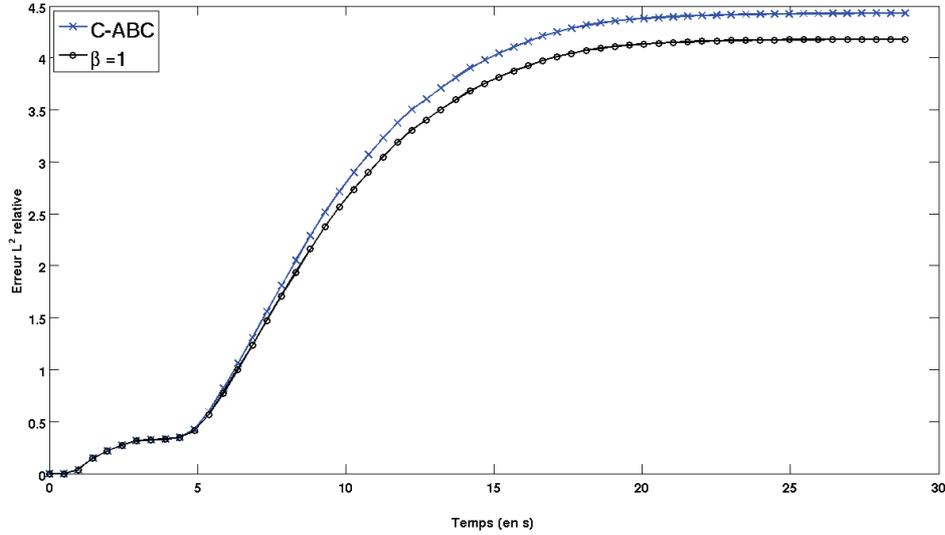


FIG. 3.8 – Comparaison entre CLA généralisée et C-ABC - Configuration 5

### 3.5.3 Le cas d'un obstacle rayonnant

On s'intéresse ici au cas où le champ d'onde est généré par une onde incidente que l'on impose sur le bord de l'obstacle comme nous l'avons fait au chapitre précédent avec la C-ABC.

On cherche donc à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = u^{\text{inc}} := e^{ik(t + \cos \theta x + \sin \theta y)} \text{ sur } \Gamma \\ (\partial_n + \beta) \left( \partial_n + \partial_t + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.5.2)$$

où  $k$  est la fréquence de l'onde incidente et  $\theta$  est l'angle d'incidence.

On veut observer si comme dans le cas de C-ABC, la solution de (3.5.2) se stabilise sur la solution du problème harmonique

$$\begin{cases} k^2 u + \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = u^{\text{inc}} := e^{ik(t + \cos \theta x + \sin \theta y)} \text{ sur } \Gamma \\ (\partial_n + \beta) \left( \partial_n - ik + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Nous considérons ici les deux premières configurations décrites dans l'annexe A mais on prend  $R_{ext} = 1.5\text{m}$  pour le cas du cercle extérieur et  $a_{ext} = 3\text{m}$  et  $b_{ext} = 1.5\text{m}$  pour l'ellipse extérieure. Sur les figures 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 nous représentons la partie réelle de la solution de (3.5.2), dans la configuration 1 et pour  $k = 5$  respectivement aux instants  $t = \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}$  et  $\frac{8\pi}{k}$ . La solution du problème harmonique est représentée sur la figure 3.13 (toutes les figures sont visualisées grâce au logiciel Paraview).

La solution de l'équation des ondes se stabilise visiblement et converge vers la solution de l'équation d'Helmholtz. Pour s'en assurer, nous avons calculé la différence en norme  $L^2$  relative entre

les deux solutions pour différentes valeurs de  $k$ . Nous représentons l'évolution de cette erreur au cours du temps pour  $k = 1, 5$  et  $10$  sur les figures 3.14, 3.15 et 3.16. Les courbes bleues repré-

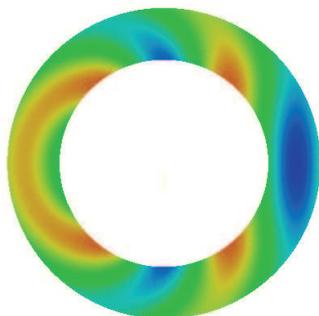


FIG. 3.9 – Solution temporelle :  $t = \frac{2\pi}{k}$

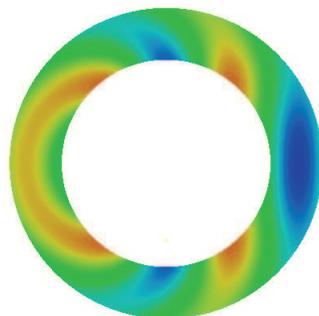


FIG. 3.10 – Solution temporelle :  $t = \frac{4\pi}{k}$

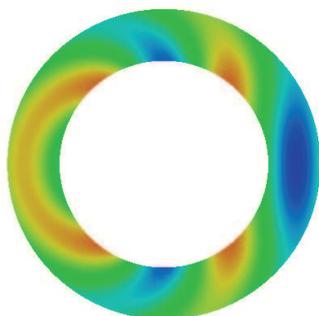


FIG. 3.11 – Solution temporelle :  $t = \frac{6\pi}{k}$

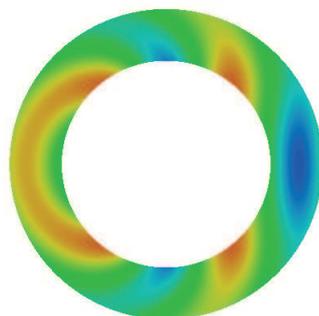


FIG. 3.12 – Solution temporelle :  $t = \frac{8\pi}{k}$

sentent les erreurs obtenues avec la C-ABC alors que les courbes rouges représentent les erreurs obtenues avec la CLA modélisant les évanescents. On remarque que, quel que soit  $k$ , la nouvelle CLA améliore nettement la vitesse de convergence vers la solution harmonique.

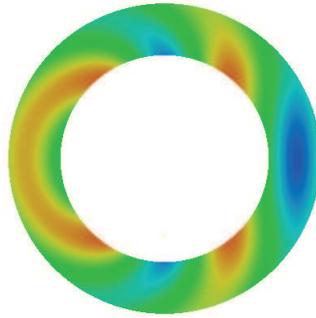


FIG. 3.13 – Solution harmonique

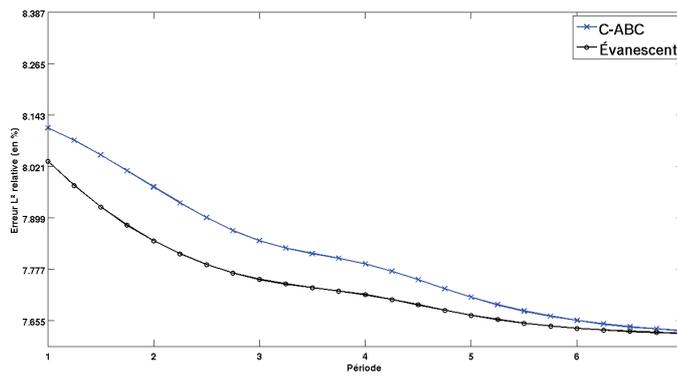


FIG. 3.14 – Différence entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 1 - k=1

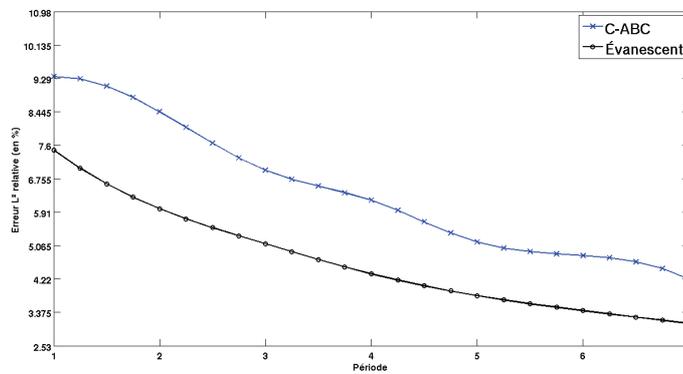


FIG. 3.15 – Différence entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 1 - k=5

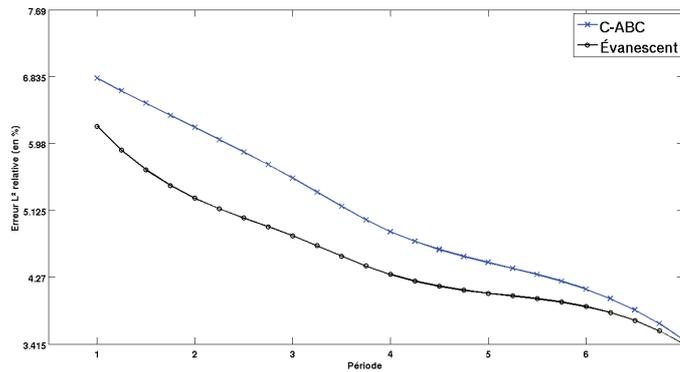


FIG. 3.16 – Différence entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 1 -  $k=10$

On considère ensuite la configuration 2 pour s'assurer que ces conclusions restent valables pour des frontières elliptiques. Nous représentons sur les figures 3.17, 3.18, 3.19 et 3.20, la solution de (3.5.2) pour  $k = 5$ , respectivement aux instants  $t = \frac{2\pi}{k}$ ,  $\frac{4\pi}{k}$ ,  $\frac{6\pi}{k}$  et  $\frac{8\pi}{k}$ . La figure 3.21

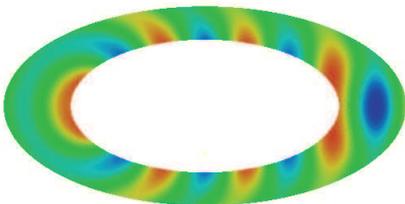


FIG. 3.17 – Solution temporelle :  $t = \frac{2\pi}{k}$

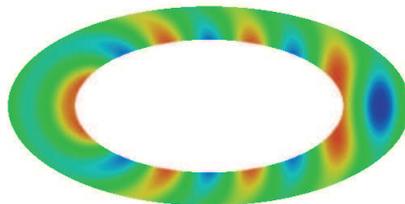


FIG. 3.18 – Solution temporelle :  $t = \frac{4\pi}{k}$

représente la solution du problème harmonique. Comme pour la première configuration, on observe la convergence de la solution temporelle vers la solution harmonique.

Pour confirmer ce point, on représente l'erreur relative  $L^2$  entre les deux solutions au cours du temps pour  $k = 1, 5$  et  $10$ , respectivement sur les figures 3.22, 3.23 et 3.24 (courbe rouge). Nous traçons également les erreurs obtenues avec la C-ABC (courbe bleue).

On peut en conclure que la condition prenant en compte les ondes propagatives et évanescentes est stable. De plus, elle semble fournir de meilleurs résultats que la C-ABC et être plus stable. Il semblerait donc intéressant d'étudier le cas de l'équation d'Helmholtz plus en détail.

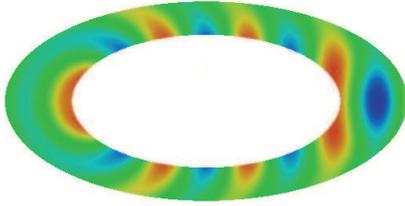


FIG. 3.19 – Solution temporelle :  $t = \frac{6\pi}{k}$

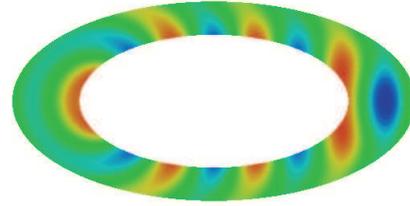


FIG. 3.20 – Solution temporelle :  $t = \frac{8\pi}{k}$

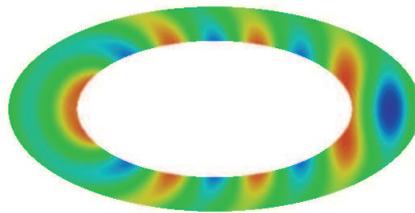


FIG. 3.21 – Solution harmonique

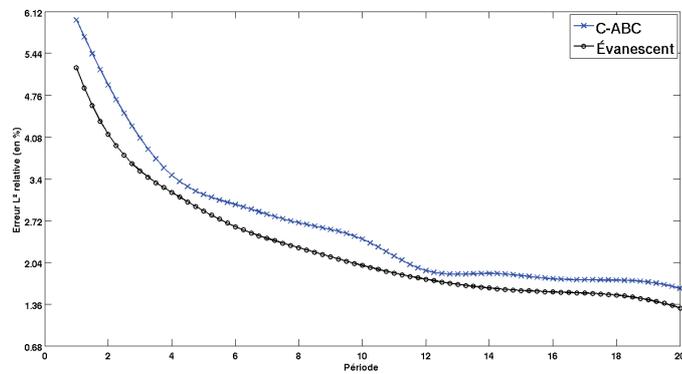


FIG. 3.22 – Différence entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 2 -  $k=1$

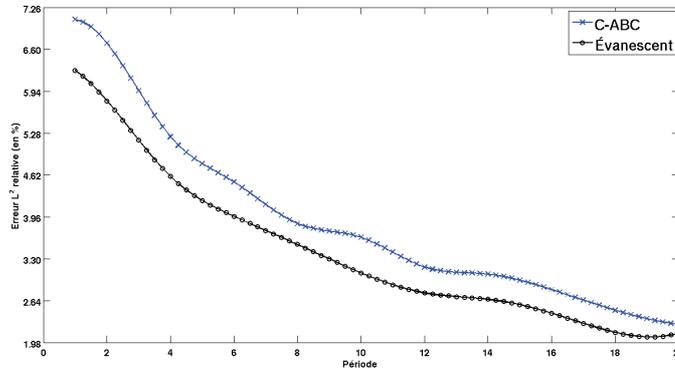


FIG. 3.23 – Différence entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 2 -  $k=5$

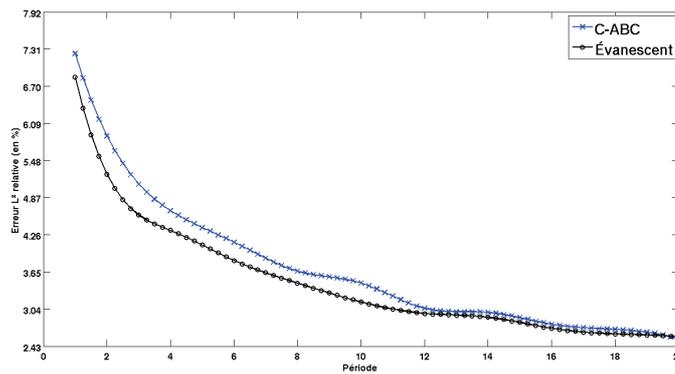


FIG. 3.24 – Différence entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 2 -  $k=10$

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la condition développée par Hagstrom et al. dans [50, 49]. Nous avons tout d'abord constaté que cette condition n'était pas bien adaptée au cas où la frontière artificielle  $\Sigma$  a une forme quelconque. De plus, son utilisation mène numériquement à des instabilités dans certains cas, lorsqu'on la couple à une formulation IPDG. Enfin, lorsque ces instabilités ne sont pas présentes, la condition CFL est tout de même fortement détériorée. Pour toutes ces raisons, nous avons décidé de construire une condition dépendant d'un paramètre  $\beta$  positif, représentant le comportement des ondes évanescentes, que nous avons ensuite composé avec la C-ABC pour obtenir une CLA prenant en compte les ondes propagatives et les ondes évanescentes. L'implémentation de cette nouvelle CLA requiert l'introduction d'une variable auxiliaire définie seulement sur le bord absorbant. Nous avons réalisé une série de tests numériques pour étudier l'influence du paramètre  $\beta$  sur les performances de la CLA avant de comparer les erreurs obtenues avec cette CLA à celles obtenues avec la C-ABC. Les résultats montrent qu'il existe une valeur optimale de  $\beta$  qui permet d'obtenir de meilleurs résultats que pour les autres valeurs de  $\beta$ . De plus, cette valeur optimale semble dépendre à la fois de la géométrie de la frontière et du pas d'espace  $h$ . Lorsqu'on la compare à la C-ABC, la nouvelle CLA définie en (3.3.3) donne de meilleurs résultats et ce quelles que soient les configurations considérées.

Enfin, lorsqu'on s'attarde sur la stabilisation de la solution, on remarque que les résultats obtenus sont très encourageants et nous incite à étudier plus amplement le cas de l'équation d'Helmholtz pour évaluer les performances de cette nouvelle condition en régime harmonique.

## Chapitre 4

# Construction et analyse de performance de conditions de radiation optimisées pour l'équation d'Helmholtz

### 4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étendre aux ondes monochromatiques l'application des conditions qui ont été proposées au chapitre 2. Le cadre d'étude est différent car on se ramène à un problème stationnaire pour lequel on va pouvoir mesurer la robustesse des CLA à haute et basse fréquence. De plus, on va pouvoir observer facilement s'il est possible de réduire le domaine de calcul tout en préservant la qualité de la solution numérique. Cette capacité est plus difficile à évaluer en temporel car la place de frontière artificielle est plus ou moins fixée par l'emplacement des récepteurs. En stationnaire, il suffit de considérer le cas d'un obstacle qui rayonne pour éviter cette contrainte. Le problème de départ est un problème posé en domaine non borné qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.1.1)$$

Il s'agit d'un problème de scattering dont l'inconnue  $u^{ex}$  représente le champ diffracté par un obstacle  $K$  illuminé par une onde incidente  $u^{inc}$ .  $K$  est donc défini comme le complémentaire dans  $R^2$  de  $\Omega^+$ . On se limite ici au cas d'une condition de Dirichlet sur le bord de  $K$ . On fera, le cas échéant, quelques commentaires sur le cas d'une condition de Neumann et on présentera aussi quelques tests numériques. À l'infini, on impose la condition de radiation de Sommerfeld sortante. Il existe de nombreux articles qui traitent du problème de construire des CLA pour l'équation d'Helmholtz. Nous renvoyons à l'article de revue de Tsynkov [75] pour une liste de ces travaux. La plus simple des conditions est la condition dite de Sommerfeld [71] :

$$\partial_n u - iku = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (4.1.2)$$

Une autre condition, qui est très utilisée, s'écrit :

$$\partial_n u - iku + \frac{\kappa(s)}{2} u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (4.1.3)$$

Elle tient compte de la géométrie de la surface artificielle via le paramètre  $\kappa(s)$  qui désigne la courbure. Cette condition, que nous appellerons encore C-ABC, peut s'obtenir en factorisant l'opérateur d'Helmholtz comme suggéré dans l'article de Nirenberg [65, 9] ou bien en remplaçant dans

la C-ABC le champ d'onde par un champ à variables séparées, la dépendance en temps s'écrivant  $e^{ikt}$ . Comme en temporel, l'application du théorème de factorisation de Nirenberg n'est justifiée que pour les modes propagatifs, ce qui correspond encore à des fréquences dans le cône de propagation. En appliquant le théorème de Nirenberg, on peut aussi construire des conditions d'ordre élevé [9] mais nous n'en parlerons pas ici car notre objectif est le même qu'au chapitre 2 : nous souhaitons établir s'il est possible d'enrichir la C-ABC en la complétant par une condition qui représente les modes évanescents. Pour cela, nous proposons d'utiliser le travail qui a été fait au chapitre 2 et d'écrire les conditions pour des ondes monochromatiques. Le procédé de construction est ainsi très simple et cela nous laisse du temps pour analyser le problème mixte correspondant. Nous montrons qu'il est possible d'appliquer l'alternative de Fredholm quand on se limite au régime de basses fréquences. On établit ainsi un résultat d'existence et unicité que nous complétons ensuite à haute fréquence en considérant des domaines de calcul particuliers, à savoir un anneau circulaire puis elliptique. Nous réalisons ensuite une batterie de cas test et nous obtenons les résultats suivants :

- La prise en compte des modes évanescents améliore la performance de la C-ABC. On peut en particulier rapprocher la frontière artificielle du bord de l'obstacle en préservant la qualité de la solution numérique.
- On observe numériquement qu'il existe une valeur optimale du paramètre  $\beta$  qui croît avec la fréquence.
- Le paramètre  $\beta$  varie avec la taille du domaine de calcul.

Toutefois, si nous avons observé que la prise en compte des modes évanescents améliore à chaque fois la qualité de la solution, nous devons reconnaître que cette amélioration n'est pas très significative. C'est pourquoi nous avons décidé de pousser plus loin l'enrichissement de la condition en ajoutant la modélisation des modes rampants. Pour cela, nous avons construit une approximation de l'opérateur  $DtN$  pour les modes rampants, comme cela avait été proposé dans [24]. On obtient une condition qui fait intervenir une puissance fractionnaire de  $k$ . Cette condition ressemble à une condition OSRC qui a été construite par M. Darbas dans sa thèse (voir [34, 11, 10]). Nous présentons des calculs qui montrent que la nouvelle condition est la plus performante et qu'elle conserve ses qualités quand on rapproche la frontière artificielle du bord de l'obstacle.

## 4.2 Conditions de radiation généralisées

Dans cette section, on propose une nouvelle famille de conditions de radiation pour l'équation de Helmholtz. Leur écriture découle directement des conditions construites aux deux chapitres précédents. Pour justifier ces conditions, on suppose que l'équation des ondes décrit la propagation d'ondes mono-chromatiques *i.e.* de la forme  $u(t, x) = e^{i-kt}u(x)$  où  $k = \frac{\omega}{c}$  représente le nombre d'onde. Dans ce cas, l'opérateur de dérivation  $\partial_t$  est remplacé par une multiplication par  $-ik$ . On obtient alors les conditions de radiation suivantes :

$$\left( \partial_n - ik + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (4.2.1)$$

et

$$(\partial_n + \beta) \left( \partial_n - ik + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (4.2.2)$$

La fonction  $\kappa(s)$  désigne toujours la courbure de la frontière artificielle  $\Sigma$ ,  $\beta$  est un paramètre positif défini sur  $\Sigma$ . La condition (4.2.1) est une approximation de l'opérateur  $DtN$  dans le cône

de propagation. Les conditions (4.2.2) sont obtenues en complétant la condition (4.2.1) par une approximation de l'opérateur DtN dans la zone elliptique. Les conditions (4.2.2) modélisent donc à la fois les modes propagatifs et les modes évanescents. Dans la suite, nous aurons donc à résoudre le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ Bu = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (4.2.3)$$

où  $Bu$  est donné par (4.2.1) ou (4.2.2). Dans le premier cas, le problème aux limites est simple à mettre en oeuvre car la condition aux limites (4.2.1) fournit une expression explicite de la dérivée normale de  $u$  sur  $\Sigma$ . Elle s'intègre donc facilement dans la formulation variationnelle du problème. Par contre, dans le cas de la condition (4.2.2), on n'a pas une expression explicite de  $\partial_n u$  sur  $\Sigma$ . Or, nous souhaitons utiliser la même structure algébrique pour les deux problèmes discrétisés. Nous sommes donc intéressés à transformer la condition (4.2.2). Pour cela, nous utilisons l'opérateur de Laplace qui fournit une expression de  $\partial_n^2$  sur  $\Sigma$ . On rappelle que dans le système de coordonnées locales lié à  $\Sigma$  que nous avons choisi, le laplacien s'écrit :

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{\partial_r h}{h} \partial_r u + \frac{1}{h} \partial_s (h \partial_s u),$$

où  $h = 1 + r\kappa(s)$ . On rappelle que  $r$  représente la distance d'un point intérieur situé dans  $\Omega$  à la frontière  $\Sigma$ . Sur  $\Sigma$ ,  $r$  est donc égale à 0, ce qui nous donne finalement l'expression suivante :

$$\partial_n^2 u + \kappa(s) \partial_n u + \partial_s^2 u + k^2 u = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

pour toute solution assez régulière de l'équation d'Helmholtz. On peut ainsi reformuler la condition (4.2.2) sous la forme :

$$\partial_n u = -\alpha_{ev} \partial_s^2 u + \beta_{ev} u, \quad (4.2.4)$$

avec

$$\alpha_{ev} = -\frac{1}{\beta - \frac{\kappa(s)}{2} - ik}$$

et

$$\beta_{ev} = \frac{k^2 - \beta \frac{\kappa(s)}{2} + ik\beta}{\beta - \frac{\kappa(s)}{2} - ik}.$$

La condition (4.2.4) peut alors être intégrée dans la formulation variationnelle exactement de la même façon que la condition (4.2.1). On peut remarquer que dans le cas harmonique, la condition généralisée qui tient compte à la fois des modes propagatifs et des modes évanescents, ne nécessite pas l'introduction d'une variable auxiliaire. Sa mise en oeuvre est tout à fait comparable à la mise en oeuvre de la condition plus simple qui ne tient compte que des modes propagatifs. En ce qui concerne les coûts de calcul, les deux conditions sont donc du même ordre.

Dans la section suivante, nous établissons certains résultats d'existence et unicité.

### 4.3 Existence et unicité : résultats préliminaires

#### 4.3.1 Un premier résultat

De façon générale, le problème que nous avons à résoudre s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ u = -u^{inc} \text{ ou } \partial_n u = -\partial_n u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \partial_n u = Bu & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (4.3.1)$$

où  $B$  est un opérateur différentiel donné par (4.2.1) ou (4.2.4).

Pour établir une solution au problème (4.3.1), on peut appliquer l'alternative de Fredholm. Quitte à appliquer un relèvement de la donnée de bord  $u^{inc}$  qu'on suppose dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , on peut supposer qu'on s'est ramené à un problème aux limites homogène sur  $\partial\Omega$  et non homogène dans  $\Omega$ ,  $\tilde{f}$  désignant le nouveau terme source. On peut alors, au moins formellement, écrire une formulation variationnelle faible de (4.3.1) : étant donnée  $v$ , fonction test dans  $V$ , où  $V = \mathcal{D}_\Gamma(\bar{\Omega}) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$  dans le cas où  $u = 0$  sur  $\Gamma$  et  $V = \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  quand  $\partial_n u = 0$  sur  $\Gamma$ , trouver  $u \in U$  solution de

$$a(k, u, v) + \langle Bu, v \rangle_\Sigma = \int_\Omega \tilde{f} v dx,$$

où

$$a(k, u, v) = \int_\Omega k^2 u \bar{v} dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx.$$

L'espace  $U$  est un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  dont les propriétés dépendent de la condition imposée sur  $\partial\Omega$ . Par exemple, si  $Bu = (ik - \frac{\kappa(s)}{2})u$ ,  $U = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ ou } \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$  est bien adapté. Si  $Bu = (-\alpha_{ev} \partial_s^2 + \beta_{ev})u$ ,  $U = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ ou } \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma, \partial_s u \in L^2(\Sigma)\}$  convient. Le crochet  $\langle, \rangle_\Sigma$  est à préciser et dépend bien évidemment de  $U$ .

On peut observer que la forme sesquilinéaire  $a$  n'est pas coercive, ce qui explique qu'on ne va pas appliquer la théorie de Lax-Milgram. Toutefois, on peut toujours écrire (4.3.1) sous la forme

$$\begin{cases} +\Delta u - u = \tilde{f} - (k^2 + 1)u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 \text{ ou } \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_n u = Bu & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Considérons alors le problème auxiliaire : trouver  $\hat{u}$  solution de

$$\begin{cases} +\Delta \hat{u} - \hat{u} = \hat{f} & \text{dans } \Omega \\ \hat{u} = 0 \text{ ou } \partial_n \hat{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_n \hat{u} = B\hat{u} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (4.3.3)$$

On va donc commencer par étudier le problème (4.3.3). Pour cela, on suppose que  $\hat{f} \in L^2(\Omega)$ . On pose

$$H_\Gamma^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

qu'on munit de la norme de  $H^1(\Omega)$ .

On peut alors écrire (4.3.3) sous forme variationnelle :  $\forall v \in V$ ,

$$\hat{a}(\hat{u}, v) + \langle B\hat{u}, v \rangle_\Sigma = \int_\Omega \hat{u}\bar{v}dx,$$

où  $\hat{a}$  désigne la forme sesquilinéaire donnée par

$$\hat{a}(\hat{u}, u) = -\|u\|_{H^1}^2.$$

Pour l'instant, nous ne précisons pas l'expression de  $\langle B\hat{u}, v \rangle_\Sigma$ . Nous supposons seulement que ce terme est bien défini pour tout  $v \in V$ . On vérifie sans peine que la forme  $\hat{a}$  satisfait l'inégalité

$$\Re(-\hat{a}(\hat{u}, \hat{u})) \geq C\|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Par conséquent, si on peut aussi prouver que

$$\Re(-a(k, \hat{u}, \hat{u}) + \Re(-\langle B\hat{u}, \hat{u} \rangle_\Sigma)) \geq C\|u^2\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

en appliquant le théorème de Lax-Milgram, on peut définir un opérateur linéaire continu noté  $P : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  qui à  $\hat{f} \in L^2(\Omega)$  associe  $\hat{u} \in H^1(\Omega)$  de façon unique. On peut ainsi définir  $u$ , solution du problème (4.3.2) via la représentation

$$u = P((1 + k^2)u) + P(\tilde{f}).$$

Si on introduit maintenant l'opérateur

$$T_k : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

$$u \mapsto P((1 + k^2)u),$$

on obtient que  $u$  est solution de

$$(I - T_k)u = P(\tilde{f}).$$

L'opérateur  $T_k$  est un opérateur linéaire de  $\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$  et comme l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte et  $T_k$  est un opérateur compact. L'opérateur  $I - T_k$  se présente donc comme une perturbation compacte de l'identité, ce qui nous permet de dire que  $I - T_k$  est inversible s'il est injectif.

Établir l'existence d'une solution de (4.3.2) revient donc à établir son unicité. Dans la suite, nous allons donc nous focaliser sur les solutions des problèmes homogènes, *i.e.* avec  $\tilde{f} = 0$ .

Distinguons les deux conditions aux limites car elles ne présentent pas les mêmes difficultés.

- Premier cas :  $Bu = iku - \frac{\kappa(s)}{2}u$ .

On doit d'abord vérifier que

$$\Re(-a(k, \hat{u}, \hat{u}) + \Re(-\langle B\hat{u}, \hat{u} \rangle_\Sigma)) \geq C\|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (4.3.4)$$

On a,  $\forall \hat{u} \in H_\Gamma^1(\Omega)$  ou  $H^1(\Omega)$ ,

$$\Re(-\langle B\hat{u}, \hat{u} \rangle_\Sigma) = \Re\left(-\int_\Sigma \left(ik|u|^2 - \frac{\kappa(s)}{2}|u|^2\right) d\sigma\right) = \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2}|u|^2 d\sigma.$$

Il est donc évident que si  $\frac{\kappa(s)}{2} \geq 0$ , ce qui est le cas si  $\Sigma$  est convexe, on a  $\Re(-a(k, \hat{u}, \hat{u})) \geq 0$  et donc par conséquent (4.3.4) est bien vérifiée.

Il nous reste donc à étudier l'unicité. Dans ce cas, on obtient pour tout  $u \in H^1_\Gamma(\Omega)$  ou  $H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{cases} -a(k, u, u) + \int_\Sigma \frac{\kappa(s)}{2} |u|^2 d\sigma = 0 \\ \int_\Sigma k |u|^2 d\sigma = 0 \end{cases} \quad (4.3.5)$$

La deuxième ligne de (4.3.5) correspond à  $\Im m(\langle -Bu, u \rangle_\Sigma) = 0$  et comme précédemment,

$$a(k, u, u) = \int_\Omega (k^2 |u|^2 - |\nabla u|^2) dx.$$

On obtient donc que nécessairement  $u = 0$  sur  $\Sigma$ , ce qui entraîne  $\partial_n u = 0$  sur  $\Sigma$ . On peut alors en déduire que  $u = 0$  dans  $\Omega$ , d'après le théorème de prolongement analytique ([35], page 969).

- Deuxième cas :  $Bu = -\alpha_{ev} \partial_s^2 u + \beta_{ev} u$  Nous supposons ici que  $\alpha_{ev}$  est constant. Tel qu'il est écrit, l'opérateur  $B$  requiert *a priori* plus de régularité que dans le premier cas. En effet, il est nécessaire de définir  $\partial_s^2 u$  sur  $\Sigma$ . Toutefois, on peut noter que si on cherche  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ , l'équation en volume implique  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ , ce qui donne un sens à  $\partial_n u$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ . La condition  $\partial_n u = -\alpha_{ev} \partial_s^2 u + \beta_{ev} u$  sur  $\Sigma$  implique donc que  $\partial_s^2 u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ . En fait, un espace bien adapté au problème pourrait être

$$H = \{u \in H^1_\Gamma(\Omega) \text{ ou } H^1(\Omega), \partial_s u \in L^2(\Sigma)\},$$

muni de la norme du graphe

$$\|u\|_H = \left( \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_s u\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On doit donc étudier la coercivité de la forme sesquilinéaire associée à (4.3.3). Le fait que  $\alpha_{ev}$  soit constant va nous aider car sans cela le terme  $\langle B\hat{u}, \hat{u} \rangle_\Sigma$  ne serait plus hermitien. On se concentre sur le terme  $\langle B\hat{u}, \hat{u} \rangle_\Sigma : \forall \hat{u} \in H$ ,

$$\langle B\hat{u}, \hat{u} \rangle_\Sigma = \int_\Sigma \alpha_{ev} |\partial_s \hat{u}|^2 d\sigma + \int_\Sigma \beta_{ev} |\hat{u}|^2 d\sigma.$$

On voit donc que pour que la forme sesquilinéaire associée soit coercive, il suffit d'avoir  $-\Re(\alpha_{ev}) > 0$  et  $-\Re(\beta_{ev}) \geq 0$ . On rappelle que la forme en question fait intervenir  $-\langle B\hat{u}, \hat{u} \rangle_\Sigma$ , ce qui explique le signe  $-$  devant  $\alpha_{ev}$  et  $\beta_{ev}$ . On obtient donc comme première condition

$$\Re(\alpha_{ev}) < 0 \text{ et } \Re(\beta_{ev}) \leq 0.$$

Pour l'unicité, on va obtenir, comme pour le premier cas, une première condition qui porte sur la partie réelle de la forme et qui n'est pas exploitable à cause du défaut de coercivité. Une deuxième condition porte sur la partie imaginaire de la forme et s'écrit

$$\Im m \left[ \int_\Sigma \alpha_{ev} |\partial_s^2 \hat{u}|^2 d\sigma + \int_\Sigma \beta_{ev} |u|^2 d\sigma \right] = 0.$$

On voit donc qu'il suffit d'avoir  $\Im m(\alpha_{ev})$  et  $\Im m(\beta_{ev})$  du même signe pour pouvoir conclure. Par définition de  $\alpha_{ev}$  et  $\beta_{ev}$ , un calcul rapide montre que  $\Re(\alpha_{ev})$  est du même signe que

$\frac{\kappa(s)}{2} - \beta$  et  $\Re(\beta_{ev})$  du même signe que  $\frac{\kappa(s)}{2} \left( -\beta^2 + \frac{\kappa(s)}{2}\beta - k^2 \right)$ . On fait désormais l'hypothèse que  $\kappa(s) \geq 0$  sur  $\Sigma$ , ce qui revient à choisir  $\Sigma$  convexe. Ainsi, pour avoir  $\Re(\alpha_{ev}) < 0$ , il suffit de choisir  $\beta > \frac{\kappa(s)}{2}$ . On doit ensuite étudier le signe du polynôme  $p(\beta) = -\beta^2 + \frac{\kappa(s)}{2}\beta - k^2$ . Le discriminant associé est donné par

$$\Delta = \frac{\kappa(s)^2}{4} - 4\beta^2 = 4 \left( \frac{\kappa(s)^2}{16} - \beta^2 \right) = 4 \left( \frac{\kappa(s)}{4} - \beta \right) \left( \frac{\kappa(s)}{4} + \beta \right).$$

On observe alors que si  $\beta > \frac{\kappa(s)}{2}$ ,  $\Delta$  est toujours négatif, ce qui implique que  $p(\beta)$  est aussi toujours négatif. La condition  $\Re(\beta_{ev}) \leq 0$  est donc toujours satisfaite si  $\Re(\alpha_{ev}) < 0$ . Venons-en à l'étude des signes des parties imaginaires de  $\alpha_{ev}$  et  $\beta_{ev}$ . On voit facilement que  $\Im(\alpha_{ev})$  est toujours strictement négative car du même signe que  $k$ . Par conséquent, on ne pourra conclure que si  $\Im(\beta_{ev})$  est négatif. Le signe de  $\Im(\beta_{ev})$  est le même que celui de  $q(\beta) = \beta^2 - \beta\kappa(s) + k^2$ . Le discriminant associé à  $q$  s'écrit

$$\Delta = (\kappa(s) - 2k)(\kappa(s) + 2k).$$

Si  $\Delta \leq 0$ , i.e. si  $\kappa(s) - 2k \leq 0$ , on a toujours  $q(\beta) \geq 0$  et dans ce cas on ne peut pas conclure. Si  $\Delta > 0$ ,  $q(\beta)$  admet deux racines :

$$\beta_{\min} = \frac{\kappa(s) - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \beta_{\max} = \frac{\kappa(s) + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Il faut alors choisir  $\beta \in ]0, \beta_{\max}]$  pour avoir  $\Im(\beta_{ev}) \leq 0$ .

**Conclusion** : si on récapitule toute l'étude des signes qui vient d'être menée, on obtient le résultat partiel d'existence et d'unicité suivant.

**Théorème 4.3.1.** *Supposons que  $\Sigma$  est convexe et que  $k \leq \frac{\kappa(s)}{2}$ . Alors, si on choisit  $\beta \in ]\frac{\kappa(s)}{2}, \beta_{\max}[$ , le problème mixte 4.3.1 admet une unique solution, quelle que soit la donnée  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ .*

Nous obtenons un résultat à basse fréquence uniquement puisqu'il n'est valable que pour  $k$  vérifiant  $2k\kappa(s)^{-1} \leq 1$ . Bien évidemment, cela ne signifie pas que le résultat n'est pas valable pour des fréquences élevées. Pour étayer cette remarque, nous allons considérer dans les deux sections suivantes des géométries particulières pour lesquelles on peut utiliser des développements adaptés. Avant cela, nous pouvons toutefois observer que

$$\alpha_{ev} = \frac{\frac{\kappa(s)}{2} - \beta - ik}{\left( \frac{\kappa(s)}{2} - \beta \right)^2 + k^2}$$

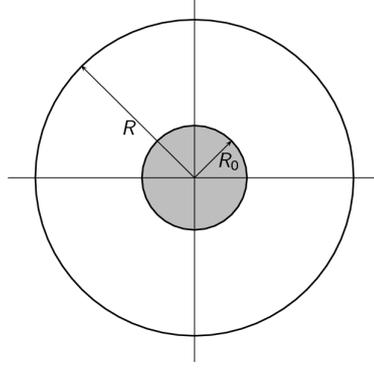
et on a donc toujours  $\Im(\alpha_{ev}) < 0$ . Par contre, sous l'hypothèse  $k \gg 1$ ,

$$\beta_{ev} \sim +ik.$$

On voit donc qu'asymptotiquement, on a  $\Im(\beta_{ev}) > 0$ . Si on veut traiter le cas haute-fréquence, il faudra donc être capable d'analyser le problème dans le cas où les parties imaginaires de  $\alpha_{ev}$  et  $\beta_{ev}$  sont de signe opposé. Ce cas est souvent rencontré dans les problèmes de type Ventcel [23]. Nous ne l'avons pas considéré ici par manque de temps. Toutefois, dans la section suivante, nous établissons un résultat d'existence et unicité à haute fréquence en supposant que la géométrie de  $\Omega$  est canonique.

### 4.3.2 Le cas de la couronne

Supposons ici que  $\Gamma$  est un cercle de rayon  $R_0$  et que  $\Sigma$  est un cercle de rayon  $R$ . Pour simplifier, on suppose que les deux cercles sont centrés à l'origine (cf Figure 4.3.2). On note  $H_m^{(1)}$



et  $H_m^{(2)}$  les fonctions de Hankel de première et deuxième espèces. D'après [25], si  $u^{\text{inc}}$  est définie par

$$u^{\text{inc}} = e^{-ikr \cos(\theta^{\text{inc}})} \quad (4.3.6)$$

on peut décomposer  $u^{\text{ex}}$  sous la forme

$$u^{\text{ex}}(R, \theta) = \sum_{m \geq 0} \epsilon_m (-i)^m a_m^{\text{ex}} H_m^{(1)}(kR) \cos(m\theta).$$

avec  $\epsilon_0 = 1$  et  $\epsilon_m = 2$  si  $m \neq 0$  et on a

$$a_m^{\text{ex}} = -\frac{J_m(kR_0)}{H_m^{(1)}(kR_0)}$$

La solution approchée s'écrit alors

$$u(r, \theta) = \sum_{m \geq 0} \left( a_m^1 H_m^{(1)}(kr) + a_m^2 H_m^{(2)}(kr) \right) \cos(m\theta). \quad (4.3.7)$$

Les coefficients  $a_m^2$  sont générés par la frontière artificielle. La solution approchée doit vérifier

$$\begin{cases} \partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega; \\ u = -u^{\text{inc}}(R_0, \theta) & \text{sur } \Gamma; \\ \partial_r u = \frac{\alpha_{ev}}{R^2} \partial_\theta^2 u + \beta_{ev} u & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (4.3.8)$$

L'équation en volume est automatiquement vérifiée et on va fixer les coefficients  $a_m^1$  et  $a_m^2$  grâce aux conditions de bord sur  $\Gamma$  et  $\Sigma$ . Etant donné que les modes sont découplés, on peut écrire facilement le système vérifié par  $a_m^1$  et  $a_m^2$  pour calculer la solution approchée. Pour cela, on utilise les deux conditions de bord. La première, issue de  $\Gamma$ , donne comme relation

$$a_m^1 H_m^{(1)}(kR_0) + a_m^2 H_m^{(2)}(kR_0) = -a_m^{\text{inc}} H_m^{(1)}(kR_0),$$

où

$$a_m^{\text{inc}} = \epsilon_m (-i)^m \frac{J_m(kR_0)}{H_m^{(1)}(kR_0)}$$

La seconde, issue de  $\Sigma$ , s'écrit

$$k \left( -\frac{1}{2R} + ik + \beta \right) \left( a_m^1 H_m^{(1)'}(kR) + a_m^2 H_m^{(2)'}(kR) \right) = \frac{m^2}{R^2} \left( a_m^1 H_m^{(1)}(kR) + a_m^2 H_m^{(2)}(kR) \right) \\ + \left( k^2 - \frac{\beta}{2R} - ik\beta \right) \left( a_m^1 H_m^{(1)}(kR) + a_m^2 H_m^{(2)}(kR) \right).$$

On obtient donc le système matriciel :

$$M_{r,\theta} \begin{pmatrix} a_m^1 \\ a_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_m^{\text{inc}} H_m^{(1)}(kR_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $M_{r,\theta}$  est la matrice définie par

$$M_{r,\theta} = \begin{pmatrix} H_m^{(1)}(kR_0) & H_m^{(2)}(kR_0) \\ \alpha_m H_m^{(1)'}(kR) + \beta_m H_m^{(1)}(kR) & \alpha_m H_m^{(2)'}(kR) + \beta_m H_m^{(2)}(kR) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_m = k \left( \frac{1}{2R} - ik - \beta \right) \\ \beta_m = \frac{m^2}{R^2} - \frac{\beta}{2R} + k^2 - ik\beta. \end{cases}$$

On obtient le théorème suivant :

**Théorème 4.3.2.** *Le champ d'onde  $u$  défini par (4.3.7) existe si et seulement si*

$$\det M_{r,\theta} \neq 0.$$

Par définition de  $M_{r,\theta}$ , on a :

$$\det M_{r,\theta} = \alpha_m \left( H_m^{(1)}(kR_0) H_m^{(2)'}(kR) - H_m^{(2)}(kR_0) H_m^{(1)'}(kR) \right) \\ + \beta_m \left( H_m^{(1)}(kR_0) H_m^{(2)}(kR) - H_m^{(1)}(kR) H_m^{(2)}(kR_0) \right). \quad (4.3.9)$$

En utilisant le fait que  $H_m^{(2)} = \overline{H_m^{(1)}}$ , on simplifie l'expression de  $\det M_{r,\theta}$  en

$$\det M_{r,\theta} = 2i\alpha_m \Im m \left[ H_m^{(1)}(kR_0) \overline{H_m^{(1)'}(kR)} \right] + 2i\beta_m \Im m \left[ H_m^{(1)}(kR_0) \overline{H_m^{(1)}(kR)} \right]. \quad (4.3.10)$$

Lorsque  $k$  est grand, on sait que

$$H_m^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\chi_r}$$

et que

$$H_m^{(1)'}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left( i - \frac{4m^2 + 3}{kr} \right) e^{i\chi_r},$$

avec  $\chi_r = kr - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ . On en déduit donc que lorsque  $k$  est grand,

$$\begin{aligned} \det M_{r,\theta} &\sim 2i\alpha_m \mathfrak{S}m \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{i\chi_{R_0}} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} \left( -i - \frac{4m^2 + 3}{kR} \right) e^{-i\chi_R} \right] \\ &+ 2i\beta_m \mathfrak{S}m \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} e^{i\chi_{R_0}} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-i\chi_R} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

En simplifiant cette expression, on obtient

$$\begin{aligned} \det M_{r,\theta} &\sim 2i\alpha_m \frac{2}{\pi k \sqrt{RR_0}} \mathfrak{S}m \left[ \left( -i - \frac{4m^2 + 3}{kR} \right) e^{i(\chi_{R_0} - \chi_R)} \right] \\ &+ 2i\beta_m \frac{2}{\pi k \sqrt{RR_0}} \mathfrak{S}m \left[ e^{i(\chi_{R_0} - \chi_R)} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

De plus,

$$\beta_m = \frac{m^2}{R^2} - \frac{\beta}{2R} + k^2 - ik\beta.$$

On en déduit donc que pour  $k \rightarrow \infty$ ,

$$2i\beta_m \underset{+\infty}{\sim} 2k(\beta + ik) \quad (4.3.13)$$

Par ailleurs, on a

$$\mathfrak{S}m \left( \left( -i + \frac{4m^2 + 3}{kR} \right) e^{i(\chi_{R_0} - \chi_R)} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\cos(k(R_0 - R)) \quad (4.3.14)$$

et

$$\mathfrak{S}m \left( e^{i(\chi_{R_0} - \chi_R)} \right) = \sin(k(R_0 - R)). \quad (4.3.15)$$

On déduit donc de (4.3.13), (4.3.14) et (4.3.15) que lorsque  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\det M_{r,\theta} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{4k}{\pi \sqrt{RR_0}} e^{ik(R-R_0)},$$

ce qui montre que lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on a toujours  $\det M_{r,\theta} \neq 0$ . On a donc démontré le résultat suivant.

**Théorème 4.3.3.** *Supposons que  $\Gamma$  et  $\Sigma$  sont des cercles. Le problème (4.3.8) admet une unique solution  $u$  pour toute onde incidente  $u^{inc}$  de la forme (4.3.6) et  $k$  suffisamment grand.*

Ce théorème fournit un exemple où on sait conclure à haute fréquence. Dans le cas général, les coefficients  $\alpha_{ev}$  et  $\beta_{ev}$  de la CLA ne vérifient pas les conditions suffisantes de l'alternative de Fredholm et dans la continuation de cette thèse, il serait intéressant de relâcher ces conditions.

## 4.4 Étude d'erreur : calcul du coefficient de réflexion pour le cercle

Dans cette section, on propose d'analyser les performances de la condition (4.2.2) dans le cas d'une couronne. Pour cela, on va calculer trois quantités différentes.

- La première est notée  $\text{err}_{\text{scat}}$ ,

$$\text{err}_{\text{scat}} = \left( \sum_{m=0}^M |b_m^{\text{app}}|^2 \right)^{1/2}; \quad (4.4.1)$$

Si on calculait la solution exacte, on aurait  $\text{err}_{\text{scat}} = 0$  car les coefficients  $b_m^{\text{app}}$  sont associés aux fonctions de Hankel rentrantes qui n'interviennent pas dans la représentation de la solution exacte. Ainsi, plus  $\text{err}_{\text{scat}}$  sera petite, plus la condition sera performante.

- La seconde, notée  $\text{err}_{\text{trans}}$ , est définie par

$$\text{err}_{\text{trans}} = \frac{\left( \sum_{m=0}^M |a_m^{\text{app}} - a_m^{\text{ex}}|^2 \right)^{1/2}}{\left( \sum_{m=0}^M |a_m^{\text{app}}|^2 \right)^{1/2}}; \quad (4.4.2)$$

Elle représente l'erreur relative  $L^2$  sur les coefficients des fonctions de Hankel sortantes. Bien évidemment, (4.4.1) et (4.4.2) sont fortement corrélées au sens où elles tendent vers 0 en même temps.

- La dernière, notée  $\text{err}_{\text{sol}}$ , est donnée par

$$\text{err}_{\text{sol}} = \frac{\left( \sum_{m=0}^M |u_m^{\text{app}} - u_m^{\text{ex}}|^2 \right)^{1/2}}{\left( \sum_{m=0}^M |u_m^{\text{app}}|^2 \right)^{1/2}}. \quad (4.4.3)$$

Elle représente l'erreur relative globale  $L^2$ .

Nous nous intéressons dans un premier temps aux variations de  $\text{err}_{\text{sol}}$  en fonction de  $\beta$  pour différentes valeurs de  $k$  et de  $\delta$ . Le paramètre  $\delta$  permet de quantifier la distance séparant l'obstacle de la frontière artificielle. Ici, on a  $R = \delta R_0$  où  $R_0$  désigne le rayon du cercle  $\Gamma$  et  $R$  celui du cercle  $\Sigma$ . Nous rappelons que dans tous les tests numériques que nous présentons, la frontière artificielle est obtenue par une homothétie de l'obstacle de rapport  $\delta > 1$ . Sur les figures 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4, nous représentons  $\text{err}_{\text{sol}}$  en fonction de  $\beta$ , respectivement pour  $(k, \delta) = (0.5, 1.5)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(3, 2.5)$  et  $(10, 2)$ . Le comportement de l'erreur est le même quelles que soient les valeurs de  $k$  et de  $\delta$ . Elle décroît pour de petites valeurs  $\beta$ , atteint un minimum puis croît faiblement et semble finalement se stabiliser pour de grandes valeurs de  $\beta$ . Il existerait donc une valeur optimale de  $\beta$  que nous appellerons par la suite  $\beta_{\text{opt}}$ . Cette valeur semble augmenter avec la fréquence. Pour confirmer cette observation, nous avons représenté  $\beta_{\text{opt}}$  en fonction de  $k$  pour différentes valeurs de  $\delta$  (de 1.1 à 3) sur la figure 4.5. Même si  $\beta_{\text{opt}}$  n'est pas monotone par rapport à  $k$ , il semble clair qu'il est globalement croissant pour  $k \geq 1$ . La dépendance de  $\beta_{\text{opt}}$  vis-à-vis de  $\delta$  est moins évidente à analyser. Pour illustrer cela, nous avons représenté  $\beta_{\text{opt}}$  en fonction de  $\delta$  pour différentes valeurs de  $k$  (de 0.5 à 7) sur la figure 4.6. Au vu de ce résultat, il ne nous est pas possible d'affirmer que  $\beta_{\text{opt}}$  croît ou décroît en fonction de  $\delta$ . Remarquons cependant que  $\beta_{\text{opt}}$  varie peu lorsque  $k$  est petit et oscille plus fortement pour  $k$  grand.

Nous allons maintenant comparer l'efficacité des différentes conditions étudiées jusqu'à présent. Pour cela, nous représentons les variations des erreurs  $\text{err}_{\text{trans}}$ ,  $\text{err}_{\text{scat}}$  et  $\text{err}_{\text{sol}}$ , obtenues pour la condition de Sommerfeld, la condition avec la courbure et la condition prenant en compte les

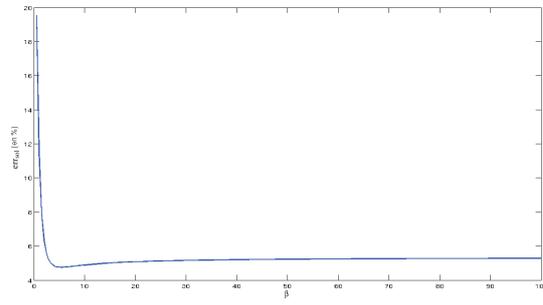


FIG. 4.1 –  $\beta$  vs  $err_{sol}$  :  $k=0.5$ ,  $\delta=1.5$

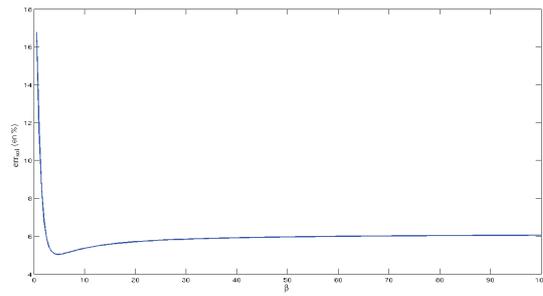


FIG. 4.2 –  $\beta$  vs  $err_{sol}$  :  $k=1$ ,  $\delta=2$

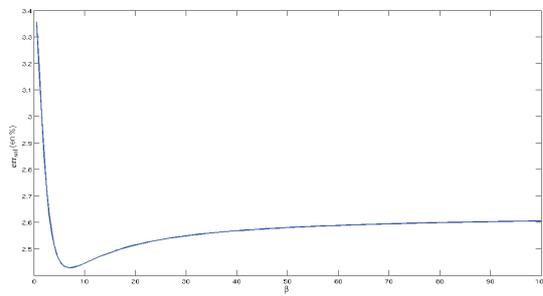


FIG. 4.3 –  $\beta$  vs  $err_{sol}$  :  $k=3$ ,  $\delta=2.5$

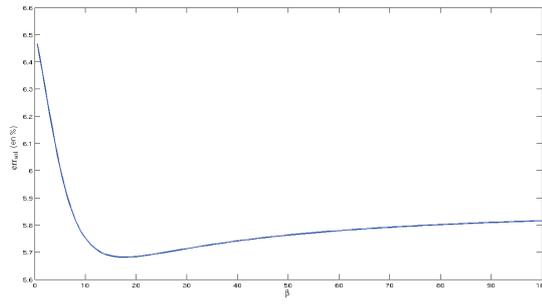


FIG. 4.4 –  $\beta$  vs  $err_{sol}$  :  $k=10, \delta=2$

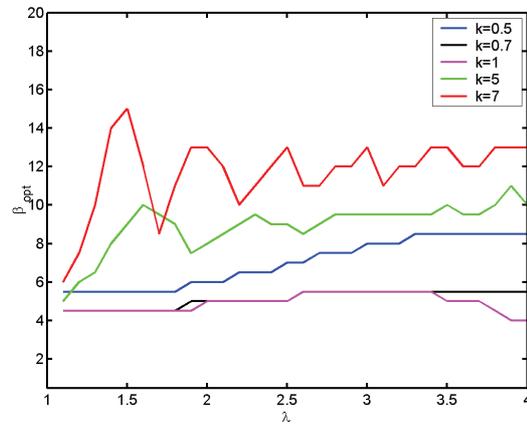


FIG. 4.5 –  $\beta$  optimal vs  $\delta$

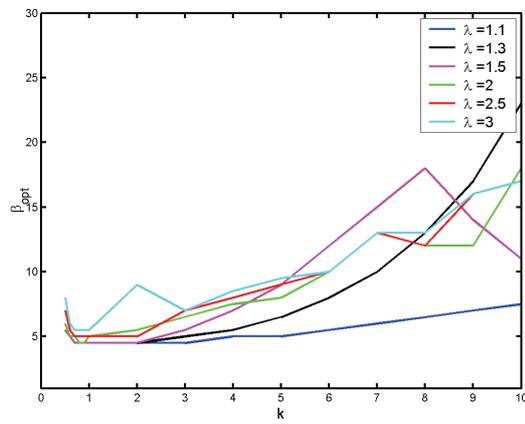


FIG. 4.6 –  $\beta$  optimal vs  $k$

ondes évanescentes en fonction de  $\delta$  sur les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10, respectivement pour  $k = 0.5, 1, 5, 10$ .

Remarquons qu'à l'exception de la condition de Sommerfeld, toutes les conditions produisent une erreur similaire pour  $\delta$  grand. Par contre, lorsque la frontière artificielle est proche de l'obstacle, la prise en compte des ondes évanescentes améliore significativement la précision de la solution.

**Conclusion.** En effectuant des calculs analytiques, possibles sur le cercle, nous avons donc montré que la condition (4.2.2) améliore la qualité de la solution, notamment quand on rapproche la frontière artificielle de l'obstacle. Il semblerait qu'il existe une valeur optimale  $\beta_{opt}$  de  $\beta$  qui croît avec  $k$ . Par contre, nous n'avons pas réussi à exhiber un quelconque comportement de  $\beta_{opt}$  en fonction du paramètre d'éloignement  $\delta$ . À la section suivante, nous nous intéressons à la mise en oeuvre de la condition (4.2.2) dans une formulation variationnelle discrétisée par éléments finis discontinus.

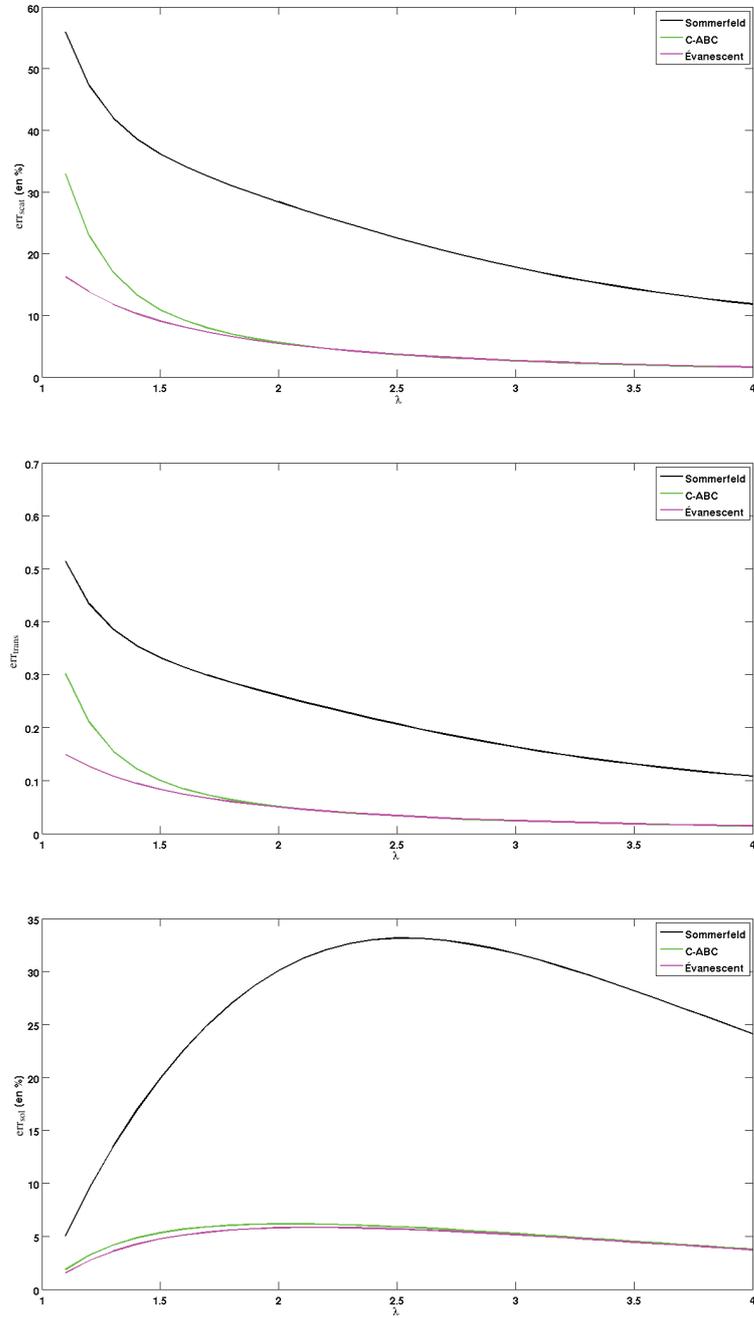


FIG. 4.7 –  $k=0.5$

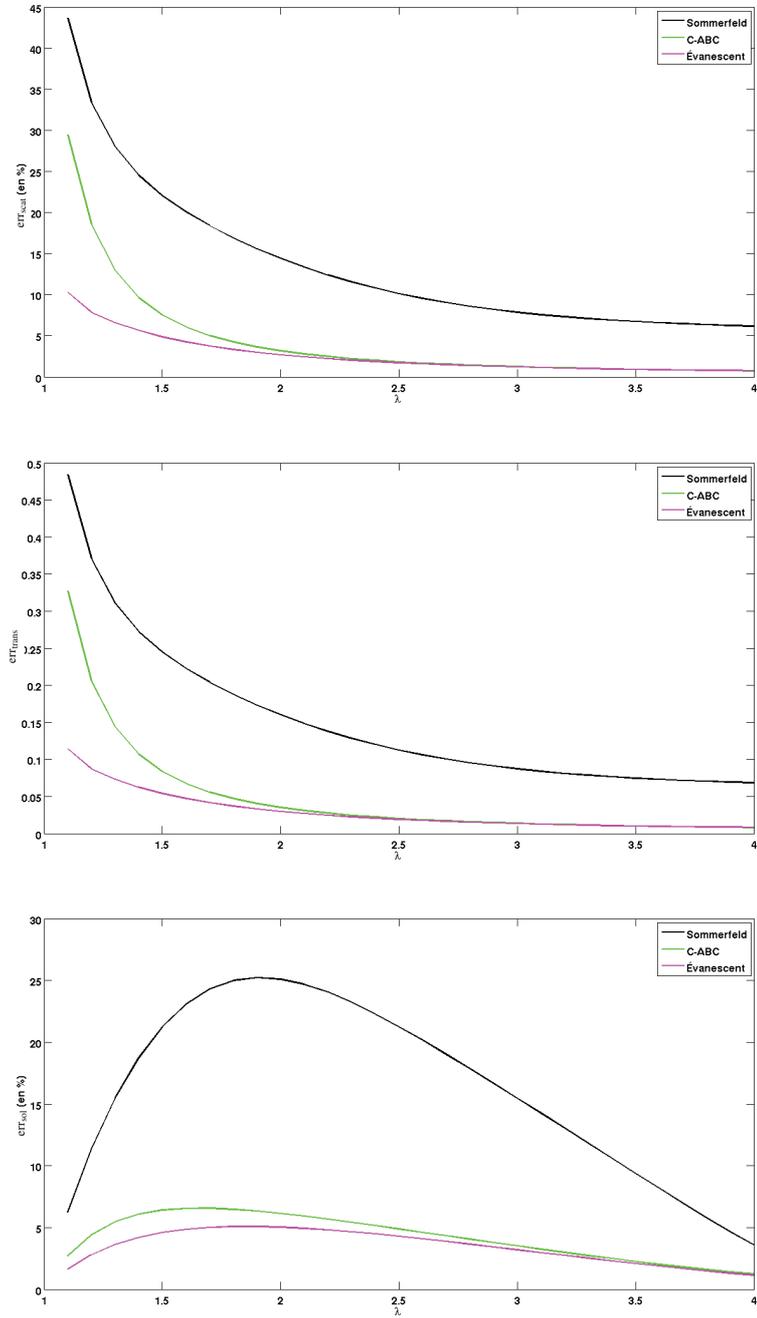


FIG. 4.8 –  $k=1$

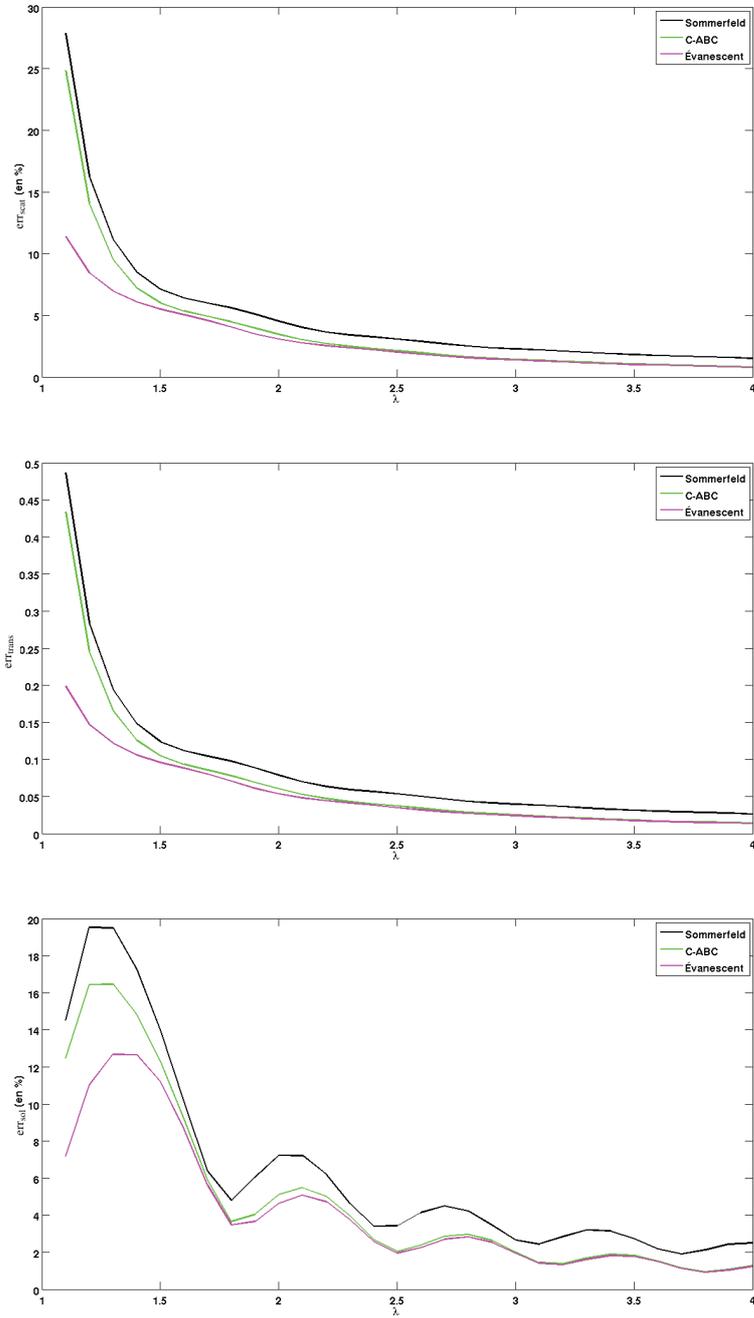


FIG. 4.9 – k=5

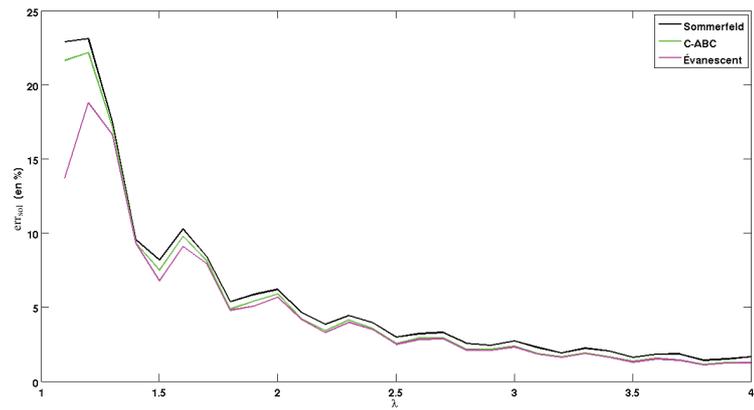
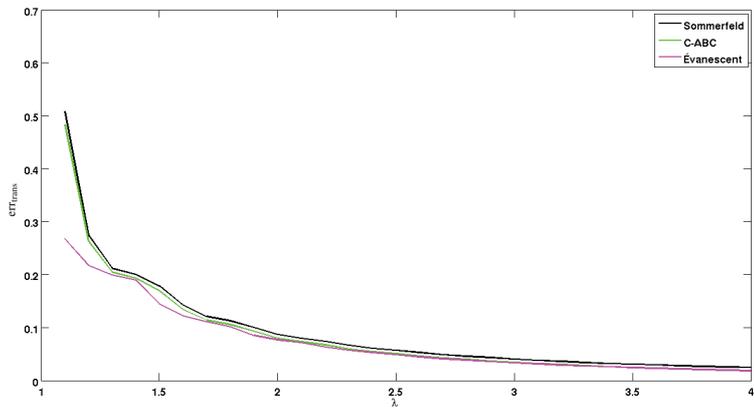
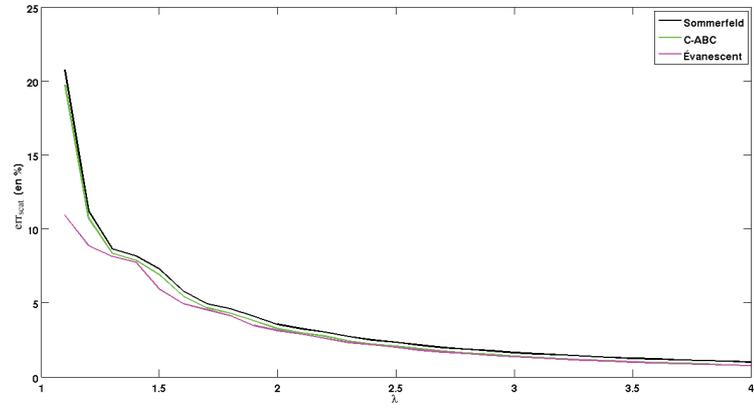


FIG. 4.10 –  $k=10$

## 4.5 Mise en oeuvre par éléments finis discontinus

Nous avons choisi d'intégrer les nouvelles conditions de radiation dans une formulation IPDG de l'équation d'Helmholtz. Ce choix s'est fait naturellement car il s'agissait ainsi d'adapter le code développé pour le cas temporel. Cependant, l'adaptation requise n'est pas triviale. En effet, même si les matrices qui interviennent sont les mêmes, le système algébrique résultant est différent. En temporel, on doit inverser à chaque itération la matrice de masse qui est diagonale par blocs quelles que soient les conditions aux limites absorbantes utilisées (cf. chapitre 2). On peut donc inverser et résoudre le système localement, c'est-à-dire maille par maille. Dans le cas stationnaire qui nous préoccupe, on doit résoudre le système matriciel

$$(k^2M + K + B)U = F \quad (4.5.1)$$

où  $B$  est une matrice complexe qui représente la condition de radiation. Les matrices  $M$ ,  $B$  et  $K$  ont déjà été définies au chapitre 2. C'est pourquoi nous ne donnons pas l'expression de leurs coefficients et renvoyons à cette partie. La matrice à inverser n'est pas hermitienne et de plus, elle n'est pas diagonale par blocs. La perte de cette dernière propriété est due à la matrice de raideur  $K$  et le caractère non hermitien est hérité de la condition de radiation. En plus de ces inconvénients, le mauvais conditionnement de la matrice  $k^2M + K + B$  nous a convaincu de privilégier une méthode de décomposition directe de type LU pour résoudre le système.

Signalons cependant qu'une des difficultés posée par l'équation d'Helmholtz est qu'il s'agit d'une équation faiblement elliptique. Cette propriété se traduit par la nécessité de raffiner fortement le maillage quand la fréquence  $k$  augmente. Le raffinement du maillage doit varier plus que linéairement avec la fréquence, c'est-à-dire qu'une multiplication par deux de la fréquence nécessite une division du pas d'espace par plus que deux. Quand on sait qu'en dimension deux, le nombre de mailles et donc la place mémoire varient comme le carré du pas d'espace, il est évident qu'il faut utiliser des méthodes permettant une utilisation optimale de la place mémoire. Pour cela, nous devons tirer parti au maximum du caractère creux des matrices  $M$ ,  $K$  et  $B$ . En remarquant que les éléments non nuls de  $M$  et de  $B$  sont aussi des éléments non nuls de  $K$ , il est suffisant d'étudier la structure de  $K$ . La forme bilinéaire  $a$  associée à  $K$  est telle que  $a(\phi_i, \phi_j)$  est non nulle uniquement si  $\phi_j$  est une fonction de base appartenant au même élément que  $\phi_i$  ou à un de ses voisins. Chaque triangle ayant au plus trois voisins, il est clair que pour un triangle  $K$ , il suffit de stocker quatre blocs de taille  $n_\phi \times n_\phi$ , où  $n_\phi$  est le nombre de fonctions de base sur un élément. Le premier bloc correspond aux interactions entre les fonctions de base de  $K$ , les trois suivants aux interactions entre ces fonctions de base et celles des voisins de  $K$ . Nous pouvons également tirer partie du caractère symétrique des trois matrices  $M$ ,  $B$  et  $K$ . Même si le gain n'est pas aussi important qu'avec des matrices hermitiennes, nous pouvons ainsi quand même diviser le stockage pratiquement par deux.

Après avoir pris en compte toutes ces propriétés, nous avons dû trouver un solveur linéaire adapté. Parmi ceux que nous avons testé, MUMPS (MULTifrontal Massively Parallel sparse direct Solver), <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/index.php?page=home>, nous a paru le plus approprié. Pour des valeurs de  $k$  allant jusqu'à 50, nous avons pu nous limiter à des calculs séquentiels, mais pour pouvoir considérer des valeurs de l'ordre de la centaine, nous avons dû nous tourner vers le calcul parallèle, non pour des raisons de temps de calcul, mais pour augmenter la capacité mémoire en profitant de celle de plusieurs ordinateurs.

Nous précisons que toutes ces considérations sont valables pour des calculs en dimension deux. En dimension trois, l'augmentation de la mémoire nécessaire au calcul est telle que les méthodes directes ne sont pas envisageable pour des hautes fréquences. Il faut donc se tourner vers des méthodes itératives malgré les inconvénients décrits ci-dessus. Une alternative serait d'utiliser

des méthodes dites hybrides, combinant résolution directe et itérative, comme celles développées par l'équipe HIEPACS [3]. Nous ne traiterons pas cette question ici et nous nous limiterons au cas 2D.

#### 4.5.1 Le cas d'un anneau

Dans cette partie, nous nous intéressons à la simulation numérique de la diffraction d'une onde autour d'un obstacle circulaire. On compare les différentes conditions étudiées dans ce chapitre. Afin de pouvoir calculer l'erreur réalisée, il nous faut comparer les solutions approchées avec une solution exacte. Ainsi, nous allons considérer les mêmes conditions sur  $\Gamma$  que celles utilisées dans le paragraphe précédent à savoir :

$$u = -u^{\text{inc}}$$

dans le cas d'une donnée de Dirichlet sur  $\Gamma$  et

$$\partial_n u = -\partial_n u^{\text{inc}}$$

dans le cas d'une donnée de Neumann sur  $\Gamma$ .

##### 4.5.1.1 Une condition de Dirichlet sur $\Gamma$

Nous avons choisi de comparer les performances des différentes conditions en fonction de la fréquence pour différentes valeurs  $\delta$  de l'éloignement de la frontière artificielle. Pour cela, nous calculons l'erreur  $L^2$  relative dans  $\Omega$  définie par

$$\frac{\|u^{\text{app}} - u^{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u^{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}.$$

La solution approchée est calculée à l'aide d'une méthode IPDG alors que la solution exacte est donnée par

$$u^{\text{ex}}(r, \theta) = - \sum_{m=0}^{+\infty} \epsilon_m (-i)^m \frac{J_m(kR_0)}{H_m^{(1)}(kR_0)} H_m^{(1)}(kr) \cos(m\theta).$$

Dans la suite du chapitre, chaque fois que nous aurons à évaluer de telles fonctions, nous les tronquerons à un certain rang  $M$  judicieusement choisi et nous évaluerons les fonctions de Bessel à l'aide de la librairie Fortran Specfun (<http://www.netlib.org/specfun/>). Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.1 pour  $\delta = 1.5$ , dans le tableau 4.2 pour  $\delta = 2$  et dans le tableau 4.3 pour  $\delta = 3$ . On observe dans un premier temps que, comme on pouvait s'y attendre, plus la frontière est éloignée de la frontière de l'obstacle, plus les erreurs sont petites.

Lorsque  $\delta = 1.5$ , c'est-à-dire lorsque la frontière est très proche de l'obstacle, les erreurs sont de l'ordre de 10 à 15 % pour des hautes fréquences quelles que soient les CLA considérées. Dans cette configuration, les conditions prenant en compte la courbure et les ondes évanescentes n'améliorent la précision de la condition de Sommerfeld qu'à basse fréquence.

Lorsqu'on éloigne la frontière artificielle, pour  $\delta = 2$  et 3, les erreurs sont alors de l'ordre de 3% pour les hautes fréquences. Là encore, les conditions avec courbure ou avec ondes évanescentes sont meilleures que la condition de Sommerfeld à basse fréquence.

Finalement, la condition prenant en compte les ondes évanescentes n'est pas significativement plus précise que la condition avec courbure.

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	10.34	3.81	3.14
1	11.36	2.77	6.84
3	10.86	5.77	7.26
5	10.47	9.08	14.2
7	12.08	11.49	10.67
10	11.85	10.83	10.16
15	10.29	9.95	9.29

TAB. 4.1 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=1.5$

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	10.98	2.51	2.85
1	13.39	2.19	6.43
3	9.31	4.08	5.36
5	7.13	5.06	5.90
7	6.84	6.52	6.88
10	5.90	5.78	6.30
15	3.57	3.24	2.85

TAB. 4.2 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=2$

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	17.01	3.12	6.87
1	11.48	2.98	5.08
3	4.81	2.75	3.41
5	4.07	2.68	2.96
7	3.69	2.48	2.59
10	2.03	2.45	2.16
15	2.83	2.55	2.88

TAB. 4.3 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta = 3$

#### 4.5.1.2 Une condition de Neumann sur $\Gamma$

Pour nous assurer que les conclusions précédentes ne dépendaient pas de la condition de bord sur l'obstacle, nous avons choisi de reproduire les expériences en considérant une condition de Neumann. Nous n'explicitons pas ici la forme de la solution exacte, mais le principe de son calcul est similaire à celui de la section précédente. Nous avons ici également voulu montrer les performances de la nouvelle CLA à haute fréquence et nous avons fait des tests pour  $k = 50$  et  $k = 100$  avec  $\delta = 1.5$ . Nous n'avons pas testé d'autres valeurs de  $\delta$  à haute fréquence car nous devons utiliser un maillage très fin qui contenait trop d'éléments lorsque la frontière était loin de l'obstacle.

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	159.68	48.00	20.79
1	26.10	9.77	7.09
3	17.99	13.50	9.42
5	4.82	3.36	4.40
7	15.18	14.87	10.42
10	14.39	13.87	11.61
15	8.11	7.54	8.37
50	10.34	10.26	8.54
100	10.48	10.49	8.82

TAB. 4.4 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=1.5$

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	82.37	19.18	13.57
1	20.72	7.78	8.41
3	9.22	7.71	6.92
5	6.66	6.23	6.13
7	5.19	5.14	5.99
10	4.27	3.50	5.83
15	5.56	5.19	4.87

TAB. 4.5 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=2$

Qualitativement, les remarques sont les mêmes que pour la condition de Dirichlet. Les conditions avec courbure et avec ondes évanescentes sont meilleures que la condition de Sommerfeld à basse fréquence et donnent des résultats similaires à haute fréquence. Notons cependant que l'amélioration est bien plus forte que dans le cas de la condition de Dirichlet. Ici encore, éloigner la frontière améliore la précision des CLA et la condition avec ondes évanescentes n'améliore pas significativement les performances de la condition avec courbure.

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	12.76	3.83	3.84
1	14.56	2.20	2.09
3	3.94	1.80	2.27
5	2.85	2.22	2.50
7	3.70	3.56	3.28
10	3.90	3.58	4.11
15	4.76	4.55	4.74

TAB. 4.6 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=3$

### 4.5.2 Le cas d'une frontière elliptique

Nous supposons ici que la frontière est une ellipse, toujours notée  $\Gamma$ . Les coordonnées elliptiques peuvent être liées aux coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  par les relations :

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta \\y &= b \sin \theta\end{aligned}$$

où  $\theta \in [0, 2\pi[$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $a$  est le grand rayon de l'ellipse et  $b$  le petit rayon de l'ellipse qui sont définis par :

$$\begin{aligned}a &= f \cosh \xi \\b &= f \sinh \xi\end{aligned}$$

Le nombre  $\xi$  est un réel strictement positif et  $f$  est la distance interfocale de l'ellipse qui vérifie :

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Une ellipse donnée est paramétrée par  $\{\xi = \text{constante}\}$ . On définit alors l'excentricité  $e$  en  $\xi = \xi_0$  par :

$$e = \frac{1}{\cosh \xi_0} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

L'excentricité  $e$  caractérise l'allongement de la frontière. Elle satisfait  $0 < e < 1$ . Lorsque  $e \rightarrow 0$ , l'ellipse dégénère en un cercle et lorsque  $e \rightarrow 1$ , l'ellipse dégénère en un segment de longueur  $2f$ . Dans le système de coordonnées elliptiques  $(\xi, \theta)$ , la frontière  $\Gamma$  est repérée par  $\xi = \xi_0$  et son excentricité est notée  $e_\Gamma = \frac{1}{\cosh \xi_0}$ . On note  $u^{ex}$  le champ diffracté exact.

La frontière artificielle  $\Sigma$  est, elle aussi, elliptique et est repérée par  $\xi = \xi_1$ . Son excentricité  $e_\Sigma$  est définie par  $e_\Sigma = \frac{1}{\cosh \xi_1}$ .

#### 4.5.2.1 Expression des différents champs acoustiques

De la même manière que dans le cas d'un obstacle circulaire, on peut calculer

##### Décomposition de la solution exacte $u^{ex}$

On rappelle que le champ diffracté exact  $u^{ex}$  est solution du problème exact, c'est-à-dire du problème posé en domaine non borné  $\Omega^+$ , complémentaire dans  $\mathbb{R}^2$  de l'obstacle elliptique :

$$\begin{cases} \Delta u^{ex} + k^2 u^{ex} = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u^{ex} = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{1/2} \left[ \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u - iku \right] = 0 \end{cases}$$

Le problème exact est posé en domaine infini et la condition de Sommerfeld [71] posée à l'infini garantit l'unicité de  $u^{ex}$ . L'existence de  $u^{ex}$  a été démontrée dans [59] par exemple.

Dans le cas présent, la solution exacte peut s'exprimer comme un développement asymptotique de modes sortants  $R_m^{(3)}(kf, \cosh \xi)$ , indépendants les uns des autres. En effet, il est démontré dans [25], Eq. (3.4), que la solution  $u^{ex}$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$u^{ex} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m^{ex} u_m^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) \quad (4.5.2)$$

où  $u_m^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta)$  est définie par

$$u_m^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) = R_m^{(3)}(kf, \cosh \xi) \frac{S_m(kf, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \quad (4.5.3)$$

et le coefficient  $d_m^{ex}$  est donné,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , par :

$$d_m^{ex} = \sqrt{8\pi} (-i)^{|m|+2} \frac{R_m^{(1)}(kf, \cosh \xi_0) S_m(kf, \cos \theta_0)}{\sqrt{N_m} R_m^{(3)}(kf, \cosh \xi_0)}. \quad (4.5.4)$$

On rappelle que sur la surface elliptique  $\{\xi = \xi_0\}$ ,  $\cosh \xi_0 = e_\Gamma^{-1}$  et  $kf = e_\Gamma k a_\Gamma$  où  $a_\Gamma$  est le demi axe principal de cette ellipse et  $e_\Gamma$  sont excentricité.

Les fonctions  $R_m^{(3)}$ ,  $S_m$  ont été respectivement définies Eqs. (B.8.4), (B.8.5) de l'annexe et  $N_m$  (B.8.6) toujours en annexe.

### Décomposition de l'onde incidente $u^{inc}$

On suppose que l'onde incidente, donnée sur  $\Gamma$ , est du type onde plane :

$$u^{inc} = e^{ikf \cosh \xi (\cos \theta \cos \theta_0 + \tanh \xi \sin \theta \sin \theta_0)} \quad (4.5.5)$$

où  $\theta_0$  est l'angle d'incidence.

On sait d'après Stratton (cf Eq. (84) p 386 dans [73]) que, tout comme le champ diffracté exact, cette onde plane peut s'écrire comme une superposition de modes découplés :

$$u^{inc} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m^{inc} u_m^{(1)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) \quad (4.5.6)$$

où

$$u_m^{(1)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) = R_m^{(1)}(kf, \cosh \xi) \frac{S_m(kf, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \quad (4.5.7)$$

et,  $\forall m \in \mathbb{N}$  :

$$d_m^{inc} = \sqrt{8\pi} i^{|m|} \frac{S_m(kf, \cos \theta_0)}{\sqrt{N_m}} \quad (4.5.8)$$

La fonction  $R_m^{(1)}$  est définie par (B.8.4) en annexe.

#### 4.5.2.2 Résultats numériques

Nous calculons à nouveau la solution approchée par une méthode de type IPDG. Comme dans le cas de l'anneau, nous évaluons l'erreur  $L^2$  relative dans  $\Omega$  définie par

$$\frac{\|u^{app} - u^{ex}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u^{ex}\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Pour évaluer les fonctions de Mathieu, nous utilisons les routines disponibles à l'adresse : [http://iris-lee3.ece.uiuc.edu/~jjin/jin\\_home.html](http://iris-lee3.ece.uiuc.edu/~jjin/jin_home.html). Dans le cas particulier de l'ellipse, les calculs ne sont pas faits pour des fréquences supérieures à  $k = 3$  car au-delà, les fonctions de Mathieu sont numériquement instables et la solution exacte que l'on calcule n'est plus valable. En effet, pour nous en assurer, nous avons comparé les valeurs de la solution exacte sur le bord de l'obstacle à  $e^{-ikx}$ , qui coïncide avec l'onde incidente. Pour  $k > 3$ , les valeurs données par la solution exacte ne correspondent pas aux valeurs de  $e^{-ikx}$ . Par conséquent, nous n'avons pas poussé plus loin l'analyse pour des valeurs de  $k > 3$ . Nous présentons les erreurs pour  $\delta = 1.5, 2$  et  $3$ , respectivement dans les Tab. 4.7, 4.8 et 4.9. On remarque que, comme pour le cas de l'anneau, la condition

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	15.20	5.07	4.32
1	18.33	13.20	11.11
2	16.75	15.85	8.68
3	19.34	18.56	9.06

TAB. 4.7 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=1.5$

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	18.21	6.87	7.17
1	16.80	11.49	7.57
2	15.27	12.72	14.45
3	18.83	18.11	15.65

TAB. 4.8 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=2$

k	Sommerfeld	C-ABC	prop-ev
0.5	12.95	10.28	6.28
1	13.84	13.57	10.77
2	16.77	14.94	11.97
3	15.48	13.16	12.83

TAB. 4.9 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=3$

avec courbure et la conditions prenant en compte les ondes évanescentes sont meilleures que la condition de Sommerfeld à basse fréquence. À plus haute fréquence les trois conditions présentent des performances similaires. Un résultat intéressant concerne le cas  $\delta = 1.5$ , c'est-à-dire avec la

frontière très proche de l'obstacle. Dans cette configuration, le fait de modéliser les ondes évanescentes améliore clairement les résultats obtenus avec la courbure (l'erreur est divisée par deux pour  $k = 2$  et  $3$ ). Pour analyser ce résultat un peu plus précisément, il faut reprendre les erreurs obtenues pour  $\delta = 1.5$  dans le cas de l'anneau, Tab.4.1. On voit alors que l'erreur obtenue avec la courbure est beaucoup plus forte pour l'ellipse que pour le cercle (on observe un rapport de 6 pour  $k = 1$ ) alors que la condition avec les ondes évanescentes est peu perturbée par la différence de géométrie. Prendre en compte les ondes évanescentes pourrait donc permettre de considérer des frontières plus proches de l'obstacle.

## 4.6 Les ondes rampantes

Les conditions construites précédemment ne représentent pas les ondes rampantes. Dans le cas harmonique, il est tout particulièrement intéressant de rapprocher la frontière artificielle, notamment à haute fréquence car on peut ainsi réduire l'espace mémoire utilisé en limitant de nombre de ddl. Dans ce cas, des ondes rampantes peuvent être générées et il pourrait donc être judicieux de les prendre en compte dans la condition de radiation.

### 4.6.1 Fonctions d'Airy

Dans un premier temps, on introduit des fonctions spéciales adaptées à l'étude des ondes rampantes. Ces fonctions seront très utiles par la suite pour décrire le comportement de la solution de l'équation des ondes dans la zone de fréquence qui annule  $\omega^2 - \xi^2$ . En effet, nous verrons que le symbole principal de l'équation des ondes satisfait une équation d'Airy dans cette région spécifique. C'est pour cela que dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux principales propriétés des fonctions d'Airy.

La fonction d'Airy a été introduite par l'astronome britannique George Biddell Airy dans ses calcul d'optique en physique [6]. En effet, la fonction d'Airy décrit la forme de l'intensité à proximité d'une caustique directionnelle, comme dans le cas de l'arc-en-ciel.

La fonction d'Airy notée  $Ai(x)$  et la fonction  $Bi(x)$ , aussi appelée fonction d'Airy de seconde espèce, sont solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \quad (4.6.1)$$

connue sous le nom d'équation d'Airy. Cette équation est la plus simple des équations différentielles linéaires du second degré avec un point stationnaire.

Pour des valeurs de  $x$  réelles, la fonction d'Airy est définie par l'intégrale oscillante

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt,$$

qui est l'unique solution tempérée (à une constante près) de l'équation (4.6.1). En ce qui concerne la fonction d'Airy de seconde espèce, on a

$$Bi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \exp\left(-\frac{1}{3}t^3 + xt\right) + \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) \right] dt$$

qui a les mêmes amplitudes d'oscillations que  $Ai(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  mais qui diffère en phase de  $\pi/2$ .

Le comportement asymptotique des fonctions d'Airy quand  $x$  tend vers  $+\infty$  est donné par les formules asymptotiques suivantes

$$Ai(x) = \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi x^{1/4}}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k c_k \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-k},$$

et

$$Bi(x) = \frac{e^{\frac{2}{3}x^{3/2}}}{\sqrt{\pi x^{1/2}}} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-k},$$

où  $c_0 = 1$  et

$$c_k = \frac{\Gamma(3k + \frac{1}{2})}{54^k k! \Gamma(k + \frac{1}{2})}.$$

Ici,  $\Gamma(\cdot)$  représente la fonction Gamma définie par

$$\Gamma : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Lorsque  $x$  est positif,  $Ai(x)$  est une fonction positive, convexe et exponentiellement décroissante vers zéro, alors que  $Bi(x)$  est une fonction positive, convexe et exponentiellement croissante. Quand  $x$  est négatif,  $Ai(x)$  et  $Bi(x)$  oscillent autour de zéro avec des fréquences augmentant de façon constante et des amplitudes diminuant de façon constante.

De plus, les valeurs de  $Ai(x)$  et  $Bi(x)$  ainsi que de leurs dérivées pour  $x = 0$  sont données par

$$Ai(0) = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad Ai'(0) = -\frac{1}{3^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad (4.6.2)$$

et

$$Bi(0) = \frac{1}{3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad Bi'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de construire une nouvelle CLA prenant en compte les ondes rampantes.

#### 4.6.2 Une nouvelle condition

Dans ce paragraphe, on réalise un développement asymptotique pour construire une CLA prenant en compte les ondes rampantes [24] car la technique de microdiagonalisation ne peut pas être appliquée dans ce cas précis.

L'idée consiste à ne considérer que le symbole principal de l'équation des ondes au voisinage de  $\Sigma$  donné par :

$$k^2 u + \partial_r^2 u + h^{-2} \partial_s^2 u = 0,$$

où on rappelle que  $h := 1 + r\kappa(s)$  avec  $\kappa(s)$  la courbure associée à  $\Sigma$ .

On sait qu'au voisinage de  $\Sigma$ , la coordonnée radiale  $r$  est très petite. Ainsi, on peut utiliser un développement de Taylor à l'ordre 1 sur le terme  $h^{-2}$  et on obtient

$$h^{-2} \sim 1 - 2r\kappa(s) + \mathcal{O}(r^2).$$

Par conséquent, on obtient une approximation du symbole principal de l'équation des ondes en combinant les deux équations précédentes

$$k^2 u + \partial_r^2 u + (1 - 2r\kappa(s)) \partial_s^2 u = 0.$$

Maintenant, on applique une transformée de Fourier en la coordonnée curviligne  $s$  et on ne conserve que la partie principale. Lorsque  $\kappa(s)$  est constant, la transformée de Fourier en la coordonnée curviligne  $s$  donne

$$\partial_r^2 \hat{u} + [k^2 - \xi^2 (1 - 2r\kappa(s))] \hat{u} = 0, \quad (4.6.3)$$

En première approximation, on utilisera l'équation (4.6.3) pour calculer la transformée de Fourier de la solution approchée du problème d'ondes qui est une équation d'Airy car  $k^2 - \xi^2 (1 - 2r\kappa(s))$  est linéaire par rapport à la variable radiale  $r$ . On peut alors montrer le théorème suivant.

**Théorème 4.6.1.** *Les solutions de (4.6.3) qui vérifient la condition de radiation sortante s'écrivent,*

$$\hat{u} = A Ai \left( (i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \left( r + \frac{k^2 - \xi^2}{2\xi^2 \kappa(s)} \right) \right), \quad (4.6.4)$$

où  $A$  est une constante qui dépend des données.

*Démonstration.* Comme  $\hat{u}$  satisfait une équation d'Airy,  $\hat{u}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la fonction d'Airy  $Ai$  et de la fonction d'Airy de seconde espèce  $Bi$ . Par conséquent, il vient que

$$\hat{u} = A Ai(\alpha(\omega, s)r + \beta(\omega, s)) + B Bi(\alpha(\omega, s)r + \beta(\omega, s)),$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes par rapport à la variable  $r$  à déterminer.

Dans le paragraphe 4.6.1, nous avons vu que  $Ai$  décroît exponentiellement vers zéro en l'infini alors que  $Bi$  croît exponentiellement. Comme  $\hat{u}$  vérifie la condition de radiation à l'infini, la fonction d'Airy de seconde espèce  $Bi$  doit s'annuler et on obtient donc  $B = 0$ .

Il vient alors que  $\hat{u}$  peut s'écrire sous la forme

$$\hat{u} = A Ai(\alpha(k, s)r + \beta(k, s)). \quad (4.6.5)$$

Pour déterminer l'expression de  $\alpha$  et  $\beta$ , on évalue  $\partial_r^2 \hat{u}$  à l'aide de (4.6.5) et on identifie avec (4.6.3). On pose alors  $X = \alpha(k, s)r + \beta(k, s)$ . Il vient

$$\partial_r \hat{u} = A \alpha(k, s) Ai'(X)$$

et

$$\partial_r^2 \hat{u} = A (\alpha(k, s))^2 Ai''(X),$$

qui peut se réécrire comme

$$\partial_r^2 \hat{u} = A (\alpha(k, s))^2 X Ai(X), \quad (4.6.6)$$

puisque  $Ai$  est solution de l'équation d'Airy et que donc  $Ai''(z) = z Ai(z)$  pour tout  $z$ .

À présent, en incorporant (4.6.6) et (4.6.5) dans (4.6.3), on obtient

$$\begin{aligned} & A \left[ (\alpha(k, s))^3 r + (\alpha(k, s))^2 \beta(k, s) \right] Ai(X) + \\ & [k^2 - \xi^2 (1 - 2r\kappa(s))] A Ai(X) = 0, \end{aligned}$$

i.e. comme  $A \neq 0$

$$(\alpha(k, s))^3 r + (\alpha(k, s))^2 \beta(k, s) + k^2 - \xi^2 (1 - 2r\kappa(s)) = 0.$$

Par identification, il vient

$$\begin{cases} (\alpha(k, s))^3 = -2\xi^2 \kappa(s); \\ (\alpha(k, s))^2 \beta(k, s) = -k^2 + \xi^2; \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha(k, s) = (i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3}; \\ \beta(k, s) = \frac{-k^2 + \xi^2}{(i\xi)^{4/3} (2\kappa(s))^{2/3}}. \end{cases}$$

Pou bien définir  $\alpha$ , on doit préciser quel sens on donne à  $(i)^{2/3}$ . *A priori*, l'équation  $z^3 = -1$  a trois racines. On ne retient que la solution dont la partie imaginaire est négative. Ainsi, on pose  $(i)^{2/3} = e^{-i\pi/3}$  et on a donc

$$\begin{cases} \alpha(k, s) = e^{-i\pi/3} (\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3}; \\ \beta(k, s) = \frac{-k^2 + \xi^2}{e^{-2i\pi/3} (\xi)^{4/3} (2\kappa(s))^{2/3}}. \end{cases}$$

Ensuite, on obtient que

$$\hat{u} = A Ai \left( (i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \left( r + \frac{k^2 - \xi^2}{2\xi^2 \kappa(s)} \right) \right),$$

ce qui achève la preuve du théorème 4.6.1. □

Posons  $\zeta_r = r + \frac{k^2 - \xi^2}{2\xi^2 \kappa(s)}$ . On a alors :

$$\partial_r \hat{u} = (i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \frac{Ai'((i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \zeta_r)}{Ai((i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \zeta_r)}.$$

On obtient alors le symbole de l'opérateur DtN sur  $\Sigma$  en posant  $r = 0$  ie *i.e.*

$$\sigma(DtN) = (i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \frac{Ai'((i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \zeta_0)}{Ai((i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \zeta_0)}.$$

Nous sommes donc en mesure d'exprimer l'opérateur DtN correspondant

**Théorème 4.6.2.** *L'opérateur DtN s'écrit au voisinage des points "glancing" sous la forme :*

$$\partial_r \hat{u} = (i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \frac{Ai'((i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \zeta_0)}{Ai((i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \zeta_0)} \hat{u}.$$

**Corollaire 4.6.3.** *Lorsqu'on regarde le point "glancing", et qu'on suppose  $\xi = k$ , le symbole vaut :*

$$\sigma_{\xi=k}(DtN) = (i\xi)^{2/3} (6\kappa(s))^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}.$$

*Démonstration.* On sait que lorsqu'on regarde le point "glancing"

$$\partial_r \widehat{u} = (i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \frac{Ai'((i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \zeta_0)}{Ai((i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \zeta_0)} \widehat{u}.$$

et si  $\xi = k$ ,  $\zeta_0 = 0$ . On obtient donc \*

$$\sigma_{\xi=k}(DtN) = (i\xi)^{2/3} (2\kappa(s))^{1/3} \frac{Ai'(0)}{Ai(0)}.$$

En utilisant les expressions de  $Ai(0)$  et  $Ai'(0)$  données en (4.6.2), on obtient

$$\sigma_{\xi=k}(DtN) = (i\xi)^{2/3} (6\kappa(s))^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}.$$

ce qui termine la preuve du théorème 4.6.3. □

Ce corollaire nous incite alors à proposer, pour les applications, de modéliser les ondes rampantes au voisinage de  $\Sigma$  par la condition aux limites

$$\partial_n u = - (ik)^{2/3} (6\kappa(s))^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} u \quad (4.6.7)$$

Pour obtenir cette condition, il suffit d'utiliser le corollaire précédent en appliquant une transformée de Fourier inverse en  $s$ .

À présent, pour obtenir une condition prenant en compte à la fois les ondes propagatives et les ondes rampantes, il nous reste à composer la condition (4.6.7) avec la C-ABC comme nous l'avons précédemment fait dans le chapitre 3. Il vient

**Proposition 4.6.4.** *Une CLA du second-ordre prenant en considération les ondes propagatives et les ondes rampantes s'écrit sous la forme*

$$\left( \partial_n + c_r (ik)^{2/3} \right) \left( -ik + \partial_n + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (4.6.8)$$

avec

$$c_r := (6\kappa(s))^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}. \quad (4.6.9)$$

Nous pouvons maintenant introduire une nouvelle famille de CLA que nous appellerons complètes car elles tiennent compte des trois types d'ondes.

**Proposition 4.6.5.** *Une famille de CLA complètes s'écrit sous la forme*

$$\left( \partial_n + c_r k^{2/3} \right) (\partial_n + \beta) \left( -ik + \partial_n + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (4.6.10)$$

Pour la mise en oeuvre de la condition (4.6.8), on procède comme à la section 4.4. On développe l'expression de la condition et on élimine le terme  $\partial_n^2$  de façon à exprimer  $\partial_n$  en fonction de  $u$  via un opérateur différentiel. On obtient ainsi une reformulation de (4.6.8) qui s'écrit :

$$\partial_n u = \alpha_{ramp} \partial_s^2 u + \beta_{ramp} u$$

avec

$$\alpha_{ramp} = \left( -ik + \frac{\kappa(s)}{2} + c_r(ik)^{2/3} \right)^{-1}$$

et

$$\beta_{ramp} = \frac{-k^2 + (ik)^{2/3}c_r \left( -ik + \frac{\kappa(s)}{2} \right)}{-ik + \frac{\kappa(s)}{2} + c_r(ik)^{2/3}}$$

La condition (4.6.10) est plus compliquée à mettre en oeuvre et pour éviter la discrétisation d'opérateurs différentiels d'ordre supérieurs à 2, on introduit une inconnue auxiliaire  $\psi$ . Celle-ci ne doit être calculée que sur le bord  $\Sigma$ , ce qui signifie que les coûts de calcul resteront raisonnables. On obtient

$$\begin{cases} \partial_n u - ik u + \frac{\kappa(s)}{u} = \psi \\ (-\partial_s^2 + \gamma_{comp}) \psi = \alpha_{comp} \partial_s^2 u + \beta_{comp} u \end{cases} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (4.6.11)$$

avec

$$\alpha_{comp} = - \left( \kappa(s) - \beta - (ik)^{2/3}c_r \right),$$

$$\beta_{comp} = \frac{\kappa(s)^2}{4} \left( 3\kappa(s) - \beta - (ik)^{2/3}c_r - i \frac{\kappa(s)^2}{2} k \right)$$

et

$$\gamma_{comp} = \frac{\kappa(s)}{2} \left( 3\kappa(s) - \beta - (ik)^{2/3}c_r \right) + ik \left( \kappa(s) - \beta - (ik)^{2/3}c_r \right) - k^2 + \beta(ik)^{2/3}c_r.$$

### 4.6.3 Une condition OSRC

L'idée de prendre en compte les modes rampants a été proposée dans [10, 34] dans le cadre OSRC. Les auteurs ont montré qu'il existe un paramètre  $\epsilon$  optimal donné explicitement en fonction de  $k$  et de la courbure  $\kappa(s)$  :

$$\epsilon_{opt} = 0.4k^{1/3}\kappa(s)^{2/3}.$$

La démonstration n'est faite que dans le cas où  $\Gamma$  est un cercle. Elle s'appuie sur le développement de la solution en fonctions de Hankel et le cadre OSRC est indispensable pour mener à bien la démonstration. Il est très intéressant d'observer que l'analyse modale qui est menée dans [10, 34] montre que le prolongement de DtN dans le plan complexe permet d'atténuer les modes rampants, ce qui n'est pas possible dans le cas réel. Dans la pratique, les auteurs proposent alors d'utiliser comme condition OSRC optimisée la condition

$$\partial_n u - ik u + 0.4k^{1/3}\kappa(s)^{2/3}u = 0, \quad \text{sur } \Gamma (= \Sigma).$$

On plaque la frontière artificielle exactement sur la frontière  $\Gamma$  de l'obstacle. On se ramène ainsi à résoudre une équation aux dérivées partielles sur  $\Gamma$  qui permet de calculer  $\partial_n u|_{\Gamma}$  si  $u|_{\Gamma}$  est donné ou  $u|_{\Gamma}$  si  $\partial_n u|_{\Gamma}$  est donné. Le champ diffracté est ensuite reconstruit en utilisant une équation intégrale [57]. L'étude réalisée dans [10, 34] s'appuie sur l'observation suivante. En première approximation, le symbole de l'opérateur DtN s'écrit sur le cercle :

$$\sigma(DtN) = ik \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{k^2}}.$$

Cette approximation revient à approcher localement le cercle par son plan tangent. Elle n'est valide que pour des fréquences  $(\xi, k)$  dans le cône de propagation, *i.e.*, telles que  $k > |\xi|$ . Il

est alors possible de prolonger analytiquement ce symbole en dehors du cône en passant dans le plan complexe grâce au changement de fréquence  $k \rightarrow k_\epsilon = k + i\epsilon$ . Bien évidemment, les performances de la condition aux limites absorbantes vont dépendre du choix du paramètre  $\epsilon$ . Cette condition a été écrite dans le cadre OSRC et sa justification s'appuie sur le fait que  $\Gamma = \Sigma$ . Toutefois, et certainement parce qu'elle est la seule dans la littérature à tenir compte des modes rampants, nous avons souhaité utiliser cette condition dans un cadre CLA et la comparer avec notre condition.

## 4.7 Coefficient de réflexion dans le cas du cercle

Nous reproduisons ici les mêmes calculs qu'à la section 4.4. Nous avons déjà exprimé la décomposition de la solution exacte  $u^{ex}$  et de l'onde incidente  $u^{inc}$  dans le cas particulier d'un obstacle  $D_{R_0}$ , disque centré à l'origine de rayon  $R_0$  et de frontière le cercle  $C_{R_0}$ . La frontière circulaire fictive  $C_{R_1}$  est centrée à l'origine et de rayon  $R_1$ . Il nous reste à regarder le cas de la solution approchée qui, elle, dépend de la condition de bord.

La solution approchée peut s'écrire dans la couronne sous la forme

$$u^{app}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} \epsilon_m (-i)^m \left[ a_m^{app} H_m^{(1)}(kr) + b_m^{app} H_m^{(2)}(kr) \right] \cos(m\theta). \quad (4.7.1)$$

Il est alors utile de remarquer que la conditions sur  $\Sigma$  admet une écriture plus simple :

**Proposition 4.7.1.** *Les conditions (4.6.8) et (4.6.10) peuvent se réécrire sous la forme simplifiée*

$$\partial_n u_m^{app} = c_m u_m^{app}.$$

*Démonstration.* La proposition 4.7.1 vient du fait que  $\partial_s^2 = \frac{1}{R_1^2} \partial_\theta^2$ . Ainsi,  $\partial_s^2 u^{app} = -\frac{m^2}{R_1^2} u^{app}$ . La condition (4.6.8) se réécrit donc sous la forme  $\partial_n u = c_m u$  avec

$$c_m = \frac{\alpha_{ramp} m^2}{R_1^2} + \beta_{ramp}$$

La condition (4.6.10) peut aussi se simplifier car dans le cas de la couronne, la solution  $u^{app}$  donnée par (4.7.1) vérifie

$$\begin{aligned} \partial_s^2 (\partial_n u^{app}) &= \frac{1}{R_1^2} \partial_\theta^2 (\partial_r u^{app}) \\ &= -\frac{m^2}{R_1^2} \partial_r u^{app}. \end{aligned}$$

On obtient donc l'expression simplifiée

$$\partial_n u_m^{app} = c_m u_m^{app}$$

avec

$$c_m = \left( ik - \frac{\kappa(s)}{2} + \delta_{comp} \right)$$

et

$$\delta_{comp} = \frac{\frac{\kappa(s)^2}{4} (3\kappa(s) - \beta - (ik)^{2/3} c_r) - \frac{\kappa(s)^2}{2} ik + \frac{m^2}{R_1^2} (\kappa(s) - \beta - (ik)^{2/3} c_r)}{\frac{\kappa(s)}{2} (3\kappa(s) - \beta - (ik)^{2/3} c_r) + ik (\kappa(s) - \beta - (ik)^{2/3} c_r) - k^2 - \beta (ik)^{2/3} c_r + \frac{m^2}{R_1^2}}$$

On peut donc reprendre ce qui a été fait dans la section 4.4 de ce chapitre pour en conclure que

$$\begin{cases} a_m^{\text{app}} = \frac{-J_m(kR_0) - b_m^{\text{app}} H_m^{(2)}(kR_0)}{H_m^{(1)}(kR_0)}; \\ b_m^{\text{app}} = \frac{J_m(kR_0) \Psi_m^{(1)}(kR_1)}{H_m^{(1)}(kR_0) \Psi_m^{(2)}(kR_1) - H_m^{(2)}(kR_0) \Psi_m^{(1)}(kR_1)}. \end{cases} \quad (4.7.2)$$

avec, pour  $j = 1, 2$ ,

$$\Psi_m^{(j)}(kr) = H_m^{(j)}(kr) \left( k \frac{H_m^{(j)'}(kr)}{H_m^{(j)}(kr)} - c_m \right).$$

Si l'on traite à présent le cas de la condition de Neumann sur  $\Gamma$ , on a

$$\begin{cases} a_m^{\text{app}} = \frac{-J'_m(kR_0) - k b_m^{\text{app}} H_m^{(2)'}(kR_0)}{k H_m^{(1)'}(kR_0)}; \\ b_m^{\text{app}} = \frac{J'_m(kR_0) \Psi_m^{(1)}(kR_1)}{k \left( H_m^{(1)'}(kR_0) \Psi_m^{(2)}(kR_1) - H_m^{(2)'}(kR_0) \Psi_m^{(1)}(kR_1) \right)}. \end{cases} \quad (4.7.3)$$

□

Nous n'avons pas considéré le cas de l'ellipse, essentiellement pour des raisons de temps car les calculs à faire sont techniquement identiques

#### 4.7.1 Calcul numérique des coefficients $a_m^{\text{app}}$ et $b_m^{\text{app}}$

Nous voulons maintenant comparer les performances des conditions prenant en compte les modes rampants aux conditions étudiées précédemment. Nous reprenons donc la démarche présentée à la section 4.4 et nous étudions le comportement des trois quantités  $\text{err}_{\text{scat}}$ ,  $\text{err}_{\text{trans}}$  et  $\text{err}_{\text{sol}}$  définies respectivement en (4.4.1), (4.4.2) et (4.4.3). Nous représentons l'évolution de ces trois quantités en fonction de la distance de la frontière à l'obstacle (pour  $\delta$  variant de 1.1 à 4) pour  $k=0.5, 1, 5$  et  $10$  respectivement sur les figures 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14. Nous présentons les résultats obtenus avec la condition de Sommerfeld, la condition avec courbure, la condition avec les modes évanescents, la condition prenant en compte les modes propagatifs et rampants et la condition complète. Nous avons également calculé les erreurs obtenues avec la condition OSRC présentée à la section 4.6.3.

On remarque sur toutes les figures que les deux nouvelles conditions prenant en compte les ondes rampantes sont nettement meilleures que les autres lorsque la frontière est proche de l'obstacle. Il est intéressant de noter que ces deux conditions sont également meilleures que la condition OSRC. De plus il n'y a pas de différence significative entre la condition complète et celle modélisant uniquement les modes propagatifs et rampants, ce qui semble indiquer qu'il n'est pas nécessaire de modéliser les ondes évanescentes.

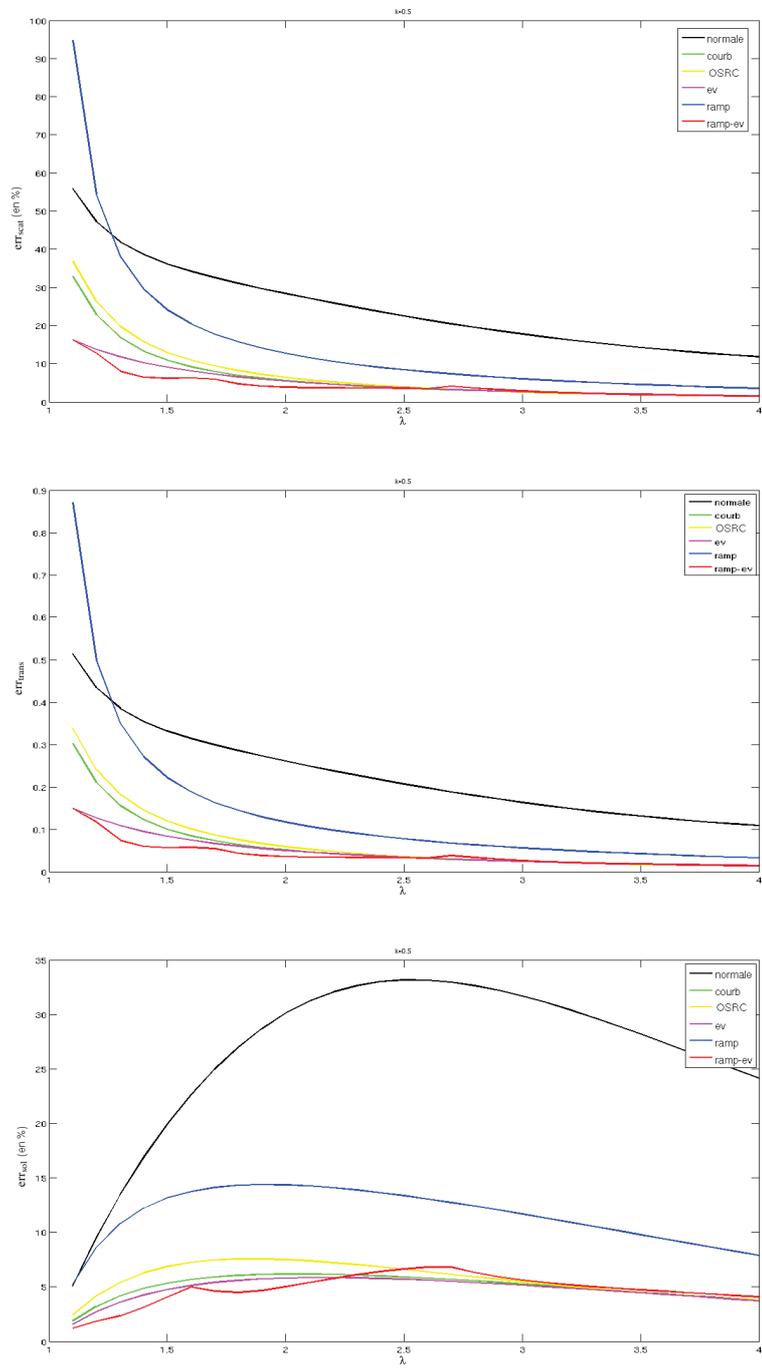


FIG. 4.11 –  $k=0.5$

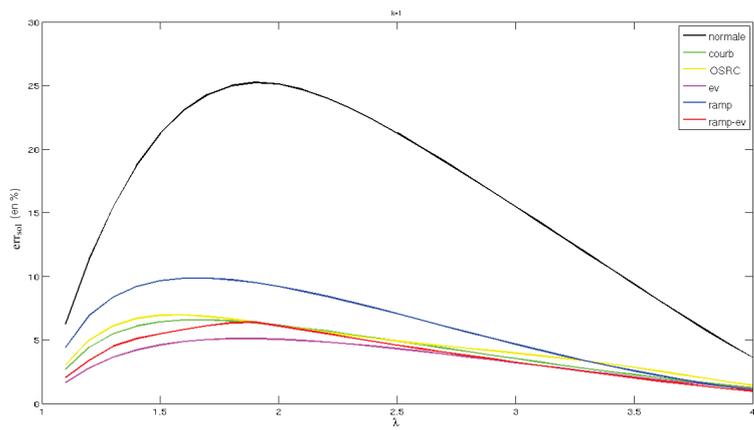
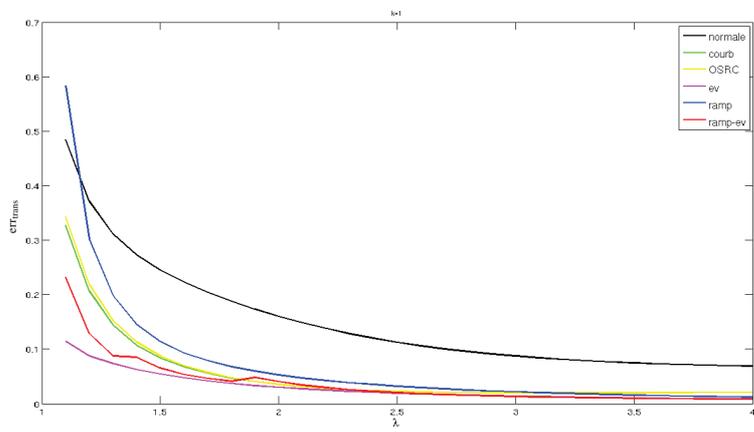
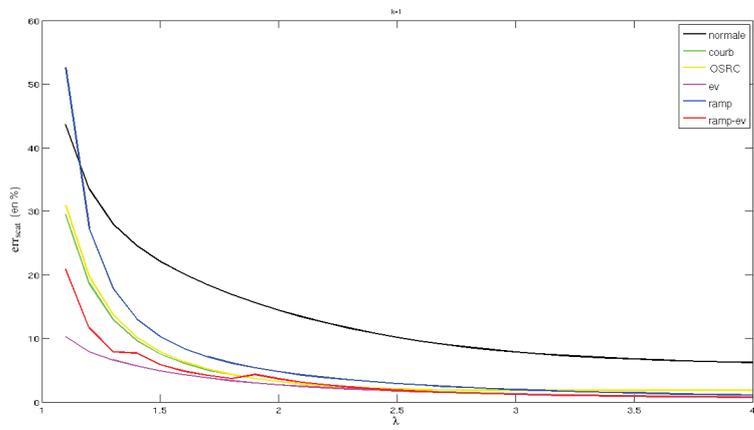


FIG. 4.12 –  $k=1$

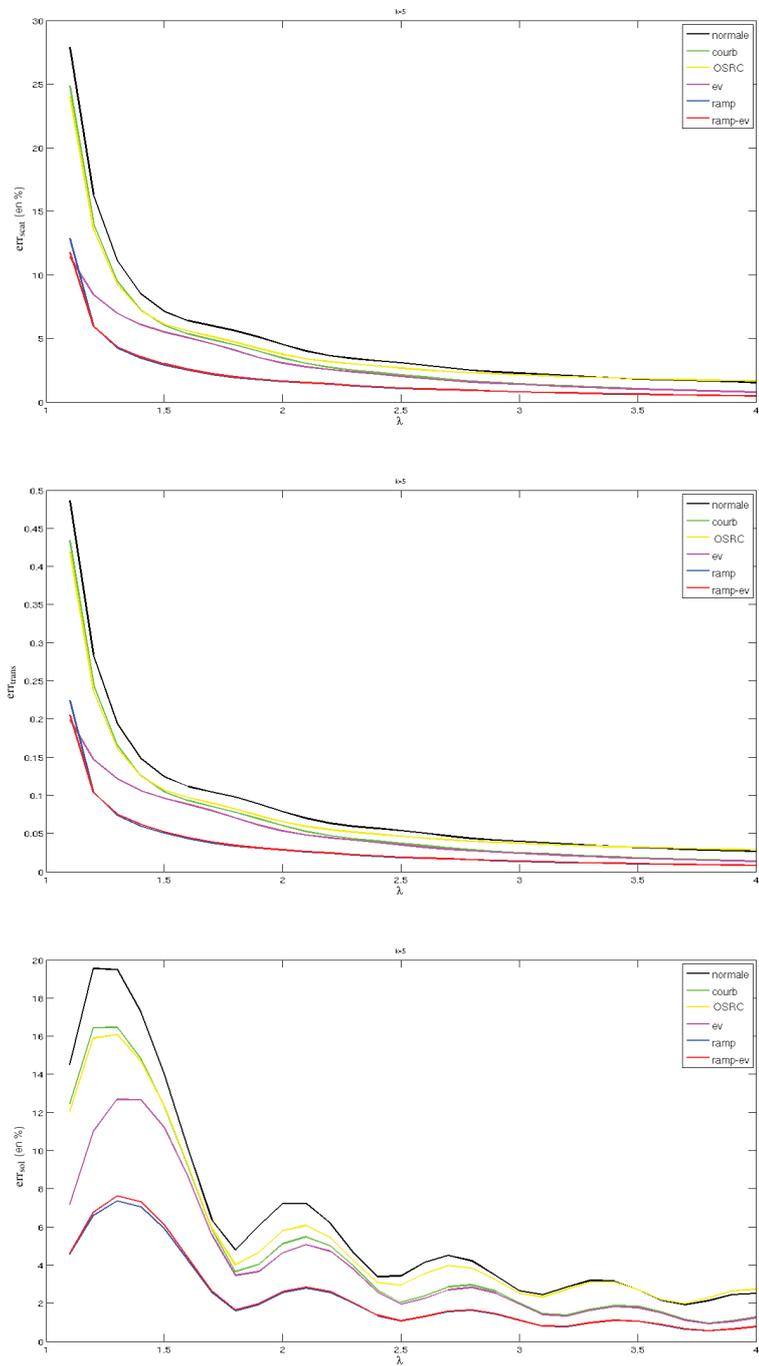


FIG. 4.13 –  $k=5$

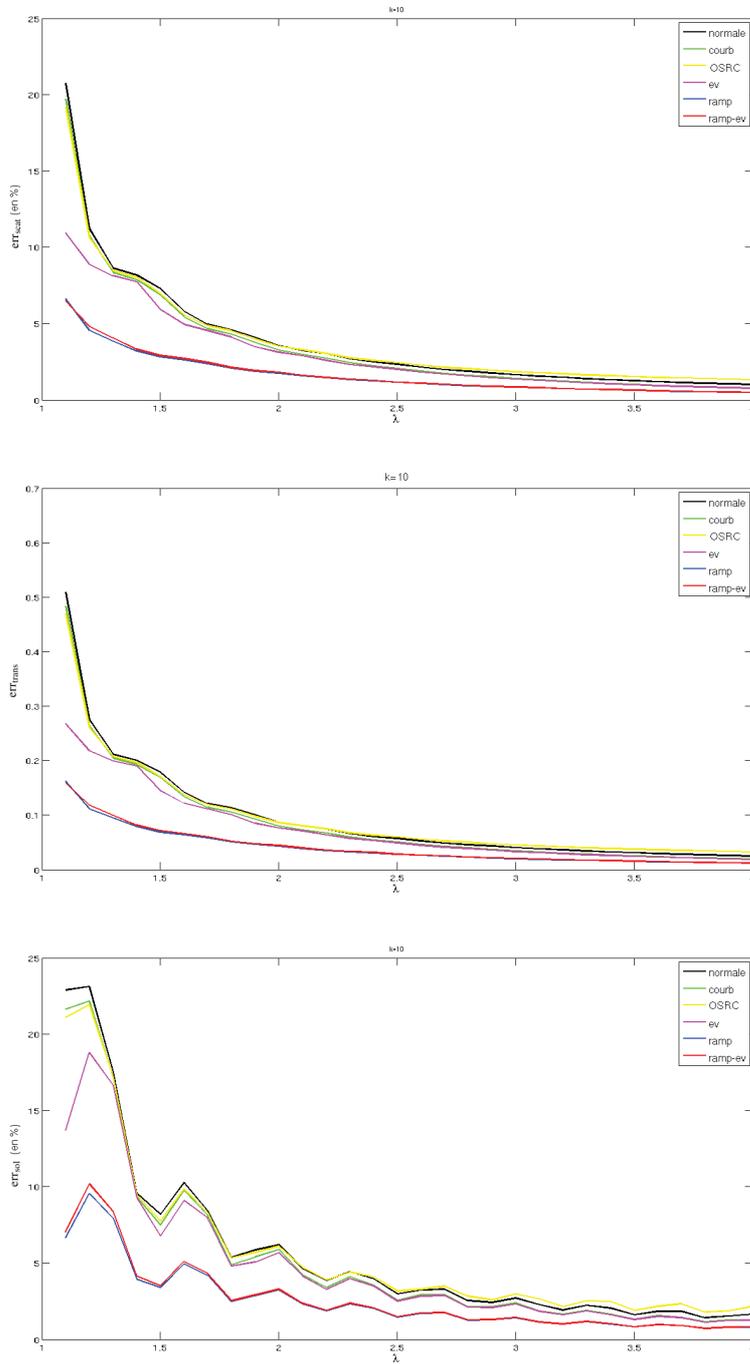


FIG. 4.14 –  $k=10$

## 4.8 Résultats numériques

A présent, on s'intéresse à l'implémentation des CLA prenant en compte les rampants dans une méthode IPDG. La principale difficulté consiste à réécrire la condition sur  $\Sigma$  pour pouvoir les coupler à la formulation variationnelle. Nous avons procédé de la façon suivante

- On vérifie après quelques calculs que la condition (4.6.8) prenant en compte les rampants et les ondes propagatives peut se mettre sous la forme

$$\partial_n u = \frac{k^2 + \partial_s^2 - c_r(ik)^{5/3} - c_r \frac{\kappa(s)}{2} (ik)^{2/3}}{-\frac{\kappa(s)}{2} + ik + c_r(ik)^{2/3}} u$$

Pour simplifier les calculs, nous introduisons provisoirement la fonction  $\psi$ , définie uniquement sur  $\Sigma$ , telle que  $\partial_n u = \psi$ , c'est-à-dire

$$\left( -\frac{\kappa(s)}{2} + ik + c_r(ik)^{2/3} \right) \psi = \left( k^2 + \partial_s^2 - c_r(ik)^{5/3} - c_r \frac{\kappa(s)}{2} (ik)^{2/3} \right) u$$

Le système matriciel à résoudre s'écrit alors

$$\begin{cases} k^2 MU + KU + B^{ramp} \Psi = F \\ M_\Sigma^{ramp} \Psi = K_\Sigma^{ramp} U \end{cases} \quad (4.8.1)$$

où  $M$  et  $K$  sont les matrices de masse et de raideur classiques que nous avons déjà décrites et  $B^{ramp}, M_\Sigma^{ramp}$  et  $K_\Sigma^{ramp}$  sont les matrices associées à la nouvelle CLA vérifiant (en utilisant les fonctions de base  $v_i$  et  $w_j$  définies dans les chapitres précédents).

$$B^{ramp} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} w_i v_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}, \quad M_\Sigma^{ramp} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M},$$

$$K_\Sigma^{ramp} = \left( b(v_i, w_j) + \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} \left( k^2 - c_r(ik)^{5/3} - c_r \frac{\kappa(s)}{2} (ik)^{2/3} \right) v_i w_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}.$$

La forme sesquilinéaire  $b$  correspond à la discrétisation de l'opérateur  $\partial_s^2$ . Elle est définie par

$$c(u, v) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} \partial_s u \partial_s v - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_{\sigma} \left( \{\{\partial_s u\}\} [v] + \{\{\partial_s v\}\} [u] - \alpha_2 [u] [v] \right)$$

où  $\alpha_2 \in (R)^{+*}$  désigne un coefficient de pénalisation [5].

La matrice  $M_\Sigma^{ramp}$  étant diagonale par blocs, on peut calculer facilement son inverse et on résout alors le système linéaire

$$\left( k^2 M + K + B^{ramp} M_\Sigma^{ramp-1} K_\Sigma^{ramp} \right) U = F \quad (4.8.2)$$

- Pour la condition prenant en compte les trois types d'ondes, on réécrit la condition sous la forme

$$\partial_n u + iku + \frac{\kappa(s)}{2} u = \psi$$

où  $\psi$  est définie uniquement sur  $\Sigma$  et vérifie

$$\begin{aligned} & \left( -k^2 - \partial_s^2 + (\beta - \kappa(s))ik - \frac{\kappa(s)}{2}(\beta - \kappa(s)) + c_r \left( -\frac{\kappa(s)}{2} + ik + \beta \right) (ik)^{2/3} \right) \psi = \\ & \left( (\beta - \kappa(s))\partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4}(\beta - \kappa(s)) + c_r \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) (ik)^{2/3} \right) u. \end{aligned}$$

On aboutit alors à un système matriciel de la forme

$$\begin{cases} k^2 MU + KU + C^{comp}U + B^{comp}\Psi = F \\ M_\Sigma^{comp}\Psi + D_\Sigma^{comp}\Psi = K_\Sigma^{comp}U \end{cases} \quad (4.8.3)$$

avec

$$C^{comp} = - \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} \left( ik + \frac{\kappa(s)}{2} \right) v_i w_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}, \quad B^{comp} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} w_i v_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}},$$

$$\begin{aligned} M_\Sigma^{comp} = & \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} \left( -k^2 + (\beta - \kappa(s))ik - \frac{\kappa(s)}{2}(\beta - \kappa(s)) \right. \right. \\ & \left. \left. + c_r \left( -\frac{\kappa(s)}{2} + ik + \beta \right) (ik)^{2/3} \right) w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \end{aligned}$$

$$D_\Sigma^{comp} = (b(w_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq M}$$

$$\begin{aligned} K_\Sigma^{comp} = & \left( -c(v_i, w_j) + \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} \left( -\frac{\kappa(s)^2}{4}(\beta - \kappa(s)) \right. \right. \\ & \left. \left. + c_r \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) (ik)^{2/3} \right) v_i w_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}. \end{aligned}$$

La forme sesquilinéaire  $c$  permet de discrétiser l'opérateur  $(\beta - \kappa(s))\partial_s^2$  et est définie par

$$\begin{aligned} b(u, v) = & \sum_{\sigma \in \Sigma_{abs}} \int_{\sigma} (\beta - \kappa(s)) \partial_s u \partial_s v \\ & - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_{\sigma} \left( \{(\beta - \kappa(s))\partial_s u\} [v] + \{(\beta - \kappa(s))\partial_s v\} [u] - \alpha_2 [u] [v] \right) \end{aligned}$$

La matrice  $M_\Sigma^{comp}\Psi + D_\Sigma^{comp}$  n'étant pas diagonale par blocs, nous ne simplifions pas le système comme dans le cas précédent et nous résolvons directement

$$\begin{bmatrix} k^2 M + K + C^{comp} & B^{comp} \\ M_\Sigma^{comp} + D_\Sigma^{comp} & -K_\Sigma^{comp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 4.8.1 Le cas d'un anneau

Dans cette partie, nous complétons l'étude menée à la section 4.5.1 en ajoutant les résultats obtenus avec la condition prenant en compte les modes rampants et la condition complète. Nous considérons d'abord le cas d'une condition de Dirichlet sur l'obstacle puis celui d'une condition de Neumann.

#### 4.8.1.1 Une condition de Dirichlet sur $\Gamma$

Nous présentons les résultats obtenus pour  $\delta = 1.5$ ,  $\delta = 2$  et  $\delta = 3$  dans les tableaux 4.10, 4.11 et 4.12. Ces résultats confirment les observations de la section précédente, c'est-à-dire que la modélisation des ondes rampantes permet d'améliorer significativement la précision des solutions. On observe en effet que dans le cas  $\delta = 1.5$ , les erreurs ne dépassent pas 5% dans le cas des deux conditions prenant en compte les rampants alors que les autres conditions (y compris la condition OSRC) génèrent des erreurs parfois supérieures à 10%. Pour  $\delta = 2$ , on observe un phénomène similaire mais la différence est moins marquée. Pour  $\delta = 3$ , il n'y a pas vraiment de différence car les conditions simples sont déjà très performantes. Signalons également que la condition ne prenant en compte que les modes propagatifs et rampants est moins efficace à haute fréquence que la condition complète.

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	10.34	3.81	3.10	3.14	4.24	2.38
1	11.36	2.77	3.38	6.84	3.88	2.23
3	10.86	5.77	5.31	7.26	3.59	3.59
5	10.47	9.08	9.75	14.20	4.53	3.69
7	12.08	11.49	11.63	10.67	4.52	4.52
10	11.85	10.83	10.37	10.16	4.55	4.56
15	10.29	9.95	9.82	9.29	4.49	4.49

TAB. 4.10 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=1.5$

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	10.98	2.51	4.07	2.85	5.89	2.14
1	13.39	2.19	2.28	6.43	4.52	3.80
3	9.31	4.08	2.54	5.36	2.05	2.04
5	7.13	5.06	4.28	5.90	2.55	2.55
7	6.84	6.52	6.66	6.88	3.22	3.22
10	5.90	5.78	6.81	6.30	2.96	2.99
15	3.57	3.24	4.05	2.85	1.47	1.48

TAB. 4.11 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=2$

#### 4.8.1.2 Une condition de Neumann sur $\Gamma$

Nous nous intéressons ensuite au cas d'une condition de Neumann sur l'obstacle pour voir si les remarques précédentes sont toujours valides. Les résultats obtenus sont présentés dans les

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	17.01	3.12	2.35	6.87	7.25	1.96
1	11.48	2.91	2.19	5.08	3.75	1.98
3	4.81	2.73	2.56	3.41	1.56	1.56
5	4.07	2.68	2.25	2.96	1.47	1.47
7	3.69	2.48	2.12	2.59	1.43	1.42
10	2.03	2.45	3.55	2.16	1.25	1.27
15	2.83	2.55	2.59	2.88	1.63	2.62

TAB. 4.12 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=3$

tableaux 4.13, 4.14 et 4.15 pour  $\delta = 1.5, 2$  et  $3$ . À l'exception de quelques cas particuliers (comme par exemple  $k=0.5$  ou  $1$  et  $\delta = 1.5$ ), les conditions prenant en compte les modes rampants sont à nouveau bien meilleures que les autres lorsque la frontière est très proche de l'obstacle. Quand la frontière s'éloigne, leurs performances sont un peu meilleures que les autres mais ce n'est pas significatif. Ici encore, la condition complète est plus précise à basse fréquence que celle ne prenant en compte que les propagatifs et les évanescents. Visiblement la représentation des rampants à un réel impact à haute fréquence. Signalons que nous n'avons pas encore testé la condition complète à très haute fréquence ( $k = 50$  et  $100$ ) car nous n'avons pas eu le temps d'implémenter le calcul de la variable auxiliaire  $\Psi$  dans le solveur MUMPS. Cependant les résultats obtenus en ne modélisant que les modes propagatifs et rampants sont très encourageants.

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	159.68	48.00	40.50	20.79	124.45	21.16
1	26.10	9.77	9.32	7.09	30.97	16.16
3	17.99	13.50	12.69	9.42	4.61	4.65
5	4.82	3.36	4.43	4.40	3.31	3.61
7	15.18	14.87	15.04	10.42	5.71	5.87
10	14.39	13.87	13.71	11.61	5.78	6.03
15	8.11	7.54	7.37	8.37	4.49	4.26
50	10.34	10.26	10.18	8.54	6.38	
100	10.48	10.49	10.55	8.82	6,67	

TAB. 4.13 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=1.5$

#### 4.8.2 Un obstacle elliptique

Nous terminons cette étude en considérant le cas d'un obstacle elliptique. Nous présentons les résultats obtenus pour  $\delta = 1.5, 2$  et  $3$  dans les tableaux 4.16, 4.17 et 4.18. Dans cette configuration, les nouvelles CLA sont bien meilleures que les autres, quelle que soit la distance de la frontière à l'obstacle, à l'exception de quelques cas particuliers (comme par exemple  $k = 0.5$  et  $\delta = 3$ ). La condition complète est également meilleure à basse fréquence que la condition ne prenant en compte que les propagatifs et les évanescents.

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	82.37	19.18	29.60	13.57	15.91	15.93
1	20.72	7.78	8.24	8.41	18.88	4.05
3	9.22	7.71	8.56	6.92	4.20	2.31
5	6.66	6.23	8.10	6.13	2.62	2.22
7	5.19	5.14	6.87	5.99	2.17	2.24
10	4.27	3.50	4.45	5.83	2.75	2.72
15	5.56	5.19	5.12	4.87	3.48	3.57

TAB. 4.14 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=2$

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	12.76	3.83	2.88	3.84	22.73	15.05
1	14.56	2.20	3.18	2.09	3.42	3.43
3	3.94	1.80	3.96	2.27	2.35	2.37
5	2.85	2.22	3.75	2.50	1.52	1.55
7	3.70	3.56	4.18	3.28	2.52	2.55
10	3.90	3.58	3.98	4.11	3.56	3.53
15	4.76	4.55	4.55	4.74	4.41	4.35

TAB. 4.15 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=3$

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	15.20	5.07	5.39	4.32	5.29	3.22
1	18.33	13.20	11.60	11.11	11.31	6.62
2	16.75	15.85	15.46	8.68	7.48	5.47
3	19.34	18.56	18.41	9.06	6.59	7.44

TAB. 4.16 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=1.5$

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	18.21	6.87	6.76	7.17	9.71	6.73
1	16.80	11.49	11.28	7.57	7.87	6.27
2	15.27	12.72	12.25	14.45	5.83	4.80
3	18.83	18.11	19.49	15.65	9.13	8.10

TAB. 4.17 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=2$

k	Sommerfeld	C-ABC	OSRC	prop-ev	prop-ramp	complete
0.5	12.95	10.28	9.37	6.28	11.42	9.57
1	13.84	13.57	13.26	10.77	12.76	7.26
2	16.77	14.94	14.58	11.97	6.44	5.52
3	15.48	13.16	12.06	12.83	4.97	4.80

TAB. 4.18 – Erreur relative  $L^2$  ( en % ) -  $\delta=3$

**Conclusion.** Dans le cas d'un cercle, prendre en compte les modes rampants améliore significativement la précision des CLA lorsque la frontière est proche de l'obstacle. Dans un cas un peu plus général comme celui d'une ellipse, cette conclusion est vraie quelle que soit la distance entre la frontière et l'obstacle. À basse fréquence, il ne suffit pas de prendre en compte les rampants, il faut également modéliser les ondes évanescentes.

## 4.9 Conclusion

Nous avons construit et analysé une nouvelle famille de CLA pour l'équation d'Helmholtz 2D. Ces conditions ont été testées pour des cercles et des ellipses. Elles sont plus performantes à haute fréquence qu'à basse fréquence et elles permettent de rapprocher la frontière extérieure. Elles contribuent donc à réduire les coûts de calcul, ce qui est très encourageant pour le passage à la 3D.

Nous avons comparé nos conditions à la condition OSRC de Darbas *et al* [34, 11, 10] et conclu qu'elles sont meilleurs. Nous devons tempérer cette conclusion en précisant que la conditions OSRC a été utilisée dans un code qui sort de son domaine de validité. En effet, une condition OSRC est faite pour être appliquée directement sur le bord de l'obstacle ( $\delta = 1$ ).

Dans le cas où on ajoute la représentation des modes évanescents, on a réussi à établir des résultats d'existence et d'unicité. Le travail n'a pas été fait pour les modes rampants. Il serait aussi intéressant d'analyser les performances des conditions en fonction de l'aplatissement de l'ellipse. Il faudrait aussi comparer nos conditions à la condition BGT [19]. Les résultats très encourageants que nous avons obtenus motivent le chapitre suivant où nous revenons sur le problème temporel et nous proposons d'introduire la modélisation des ondes rampantes dans la CLA du chapitre 2.



## Chapitre 5

# Une famille de conditions aux limites absorbantes enrichies

### 5.1 Introduction au problème

Dans le chapitre précédent, nous avons observé que la prise en compte des ondes rampantes dans le processus de construction des CLA permet d'améliorer les propriétés de furtivité de la frontière artificielle dans le cas de l'équation d'Helmholtz.

Le but de ce chapitre est de vérifier si cette amélioration est aussi significative pour l'équation des ondes acoustiques. On rappelle que la condition dans le domaine de Fourier est issue de la relation :

$$\partial_r \hat{u}|_{r=0} = - (i\xi)^{2/3} (6\kappa(s))^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \hat{u}|_{r=0}, \quad (5.1.1)$$

ou

$$\partial_r \hat{u}|_{r=0} = - \left( i \frac{k}{c} \right)^{2/3} (6\kappa(s))^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \hat{u}|_{r=0}. \quad (5.1.2)$$

Il nous faut donc *a priori* définir un opérateur temporel (ou surfacique) dont le symbole est  $(ik)^{2/3}$  (ou  $(i\xi)^{2/3}$ ). Pour cela, nous avons considéré deux approches. La première s'appuie sur la notion de dérivée fractionnaire de Caputo. La seconde repose sur la théorie de Friedlander [39, 40]. Nous pouvons alors définir deux nouvelles conditions aux limites absorbantes, ce qui fait l'objet de la section 3. La première est généralisée et prend en compte les ondes propagatives et les ondes rampantes. La seconde prend en compte les ondes propagatives, évanescentes et rampantes et est appelée condition aux limites enrichie. La section 4 est consacrée à la discrétisation de ces conditions en temps et en espace, la difficulté majeure résidant dans la discrétisation des opérateurs fractionnaires. Enfin, nous analysons les performances de ces nouvelles conditions sur différents cas tests à la section 5.

### 5.2 Caractérisation des opérateurs $Op((ik)^{2/3})$ et $Op((i\xi)^{2/3})$

#### 5.2.1 Dérivées de Caputo

Dans cette section, nous rappelons les principales définitions et propriétés des opérateurs fractionnaires et nous renvoyons à [36, 67] pour plus de détails. Il existe dans la littérature différentes définitions des dérivées fractionnaires qui généralisent la notion de dérivation d'ordre non entier. Nous avons en particulier rencontré :

- la formule de Grünwald-Letnikov qui généralise la notion de taux d'accroissement.
- la formule de Riemann-Liouville qui généralise l'intégrale à des ordres non-entiers. La dérivée fractionnaire est alors définie comme la dérivée entière d'une intégrale fractionnaire.
- les dérivées fractionnaires peuvent aussi être représentées par des multiplications par  $(i\omega)^\alpha$  (resp.  $p^\alpha$ ) avec  $\alpha$  non entier, de la transformée de Fourier (resp. Laplace).

Nous utiliserons ici la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, qui nous a semblé la plus adaptée à notre problème pour des raisons que nous exposons plus loin.

**Définition 5.2.1.** La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) d'une fonction  $g$  donnée notée  $D_x^a g$  est définie par

$$\mathcal{F}(D_x^a g(x)) = (ik_x)^a \mathcal{F}(g(x)), \quad (5.2.1)$$

où  $\mathcal{F}$  représente la transformée de Fourier et  $k_x$  la variable duale associée à  $x$ .

On peut noter que cette définition n'impose pas à  $g$  d'autre régularité que celle d'admettre une transformée de Fourier.

Il existe aussi une autre façon de définir la dérivée au sens de Caputo :

**Définition 5.2.2.** La dérivée d'ordre  $a$  ( $0 < a < 1$ ) au sens de Caputo d'une fonction  $g$  donnée est définie par

$$D_x^a g(x) = (Y_{1-a} * D^1 g)(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{-a}}{\Gamma(1-a)} \frac{dg}{dx}(y) dy$$

où  $D^1$  représente l'opérateur de dérivée d'ordre 1 et  $Y_{1-a}$  est la fonction causale définie par

$$Y_{1-a}(x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(1-a)} \text{ pour } x > 0 \text{ et } (1-a) \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Cette définition suppose donc que  $g$  est différentiable et il suffit que sa différentielle soit bornée sur  $[0, x]$  pour que la dérivée d'ordre  $\alpha$  soit toujours définie.

La définition 5.2.2 de la dérivée au sens de Caputo indique que pour calculer la dérivée d'ordre  $a$  en un point  $x$ , on utilise la valeur de la dérivée sur tout l'intervalle  $]0, x[$ . Ceci montre que la dérivée fractionnaire est un opérateur global et on parle d'"effet mémoire".

**Remarque 5.2.3.** En commutant  $Y_{1-a}$  et  $D^1$  dans la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, on obtient la définition de la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre  $a$  notée  $D_{x,RL}^a$  :

$$D_{x,RL}^a g(x) = D^1 (Y_{1-a} * g)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-y)^{-a}}{\Gamma(1-a)} g(y) dy.$$

On peut préciser le lien entre la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Caputo. En effet, en utilisant la commutativité du produit de convolution et en dérivant sous le signe intégral, on peut montrer que

$$D_{x,RL}^a g = D_x^a g + g(0^+) Y_{1-a}.$$

On peut donc en conclure que les deux définitions sont équivalentes pour des fonctions  $g$  telles que  $g(0^+) = 0$ . Dans le cas contraire, la dérivation au sens de Riemann-Liouville fait intervenir une fonction  $Y_{1-a}$  qui tend vers l'infini en  $x = 0$ . Par contre, pour  $g$  à dérivée continue au voisinage de 0, la dérivée de Caputo d'ordre strictement inférieur à 1 est continue en 0 et tend vers 0 en  $x = 0$ . Elle se prête donc mieux au calcul numérique. C'est pour cette raison que nous avons privilégié cette définition.

**Remarque 5.2.4.** On peut généraliser les définitions obtenues à l'aide des produits de convolution des dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville pour des ordres supérieurs à un. Il suffit de considérer les opérateurs de dérivées d'ordre  $n$  à la place de  $D^1$  avec  $n$  défini par la partie entière de  $a + 1$ .

On a donc donné un sens à l'opérateur dont le symbole est  $(ik)^{2/3}$  ou  $(i\xi)^{2/3}$  à partir de la transformée de Fourier.

Il vient alors :

$$Op((ik)^{2/3}) = D_t^{2/3} \text{ et } Op((i\xi)^{2/3}) = D_s^{2/3}.$$

En conclusion, nous avons obtenu deux caractérisations des dérivées fractionnaires qui conduisent au résultat suivant :

**Théorème 5.2.5.** Les ondes rampantes peuvent être représentées par

$$\partial_n u + (6\kappa(s))^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} D_s^{2/3} u = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (5.2.2)$$

ou

$$\partial_n u + \frac{(6\kappa(s))^{1/3}}{c^{2/3}} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} D_t^{2/3} u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (5.2.3)$$

Ce théorème donne deux conditions de bord équivalentes qui prennent en compte les ondes rampantes. Nous verrons plus loin que pour des raisons pratiques, nous ne retiendrons que la seconde.

## 5.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Hörmander

Dans cette section, nous adoptons un autre point de vue qui va nous permettre de donner une autre interprétation de la dérivée fractionnaire. Cette définition repose sur une classe de symboles qui a été introduite par Hörmander [53]. Un symbole est défini comme une fonction  $C^\infty$  ayant des propriétés particulières de décroissance.

Soit  $\theta \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert. L'espace des symboles d'ordre  $m$  sur  $\theta \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  est noté  $S_{\rho,\delta}^m$  où  $\rho$  et  $\delta$  sont des poids affectant les ordres de dérivation définis dans  $[0, 1]$ . On pose alors :

$$S_{\rho,\delta}^m = \{ \sigma(\mathbf{x}, \xi) \in C^\infty(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^2), \forall K \subsetneq \mathcal{O}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall \beta \in \mathbb{N}^2, \exists C := C(m, K, \alpha, \beta, \sigma) \text{ tel que}$$

$$\sup_{\substack{(\mathbf{x}, \xi) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^2 \\ |\xi| \geq 1}} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(\mathbf{x}, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m + \rho|\alpha| - \delta|\beta|} \}.$$

Considérons alors le cas où  $\sigma(\mathbf{x}, \xi) := \sigma(t, s, k, \xi) = (ik)^{2/3}$ .

On a que pour  $|\alpha| \geq 1$ ,

$$\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(\mathbf{x}, \xi) = 0,$$

car  $\sigma(\mathbf{x}, \xi)$  ne dépend ni de  $t$  ni de  $s$ .

Pour  $|\alpha| = 0$ , on a, si  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,

$$\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(\mathbf{x}, \xi) = (i)^{2/3} k^{2/3 - \beta_1}.$$

On obtient donc que pour tout  $\beta_1 \in \mathbb{N}$ ,

$$(1 + |k|)^{-\rho|\beta| + \delta|\alpha|} |\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(\mathbf{x}, \xi)| = (1 + |k|)^{-\rho|\beta|} |i^{2/3} k^{2/3 - \beta_1}| \leq (1 + |k|)^{-\rho|\beta|} k^{2/3 - \beta_1}.$$

On en déduit donc que

**Proposition 5.2.6.** *Le symbole  $\sigma(t, s, k, \xi) = i^{2/3}k^{2/3}$  appartient à  $S_{1/3,0}^1$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de prouver qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma| \leq C (1 + |\xi|)^{1-1/3|\beta|}.$$

On a déjà remarqué que comme  $\sigma$  ne dépend ni de  $t$  ni de  $s$ , on a  $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \sigma = 0$  pour  $|\alpha| \geq 1$ . On ne considère donc que  $\partial_\xi^\beta \sigma$ . Dans ce cas, comme  $\partial_\xi^\beta \sigma = 0$  pour tout  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  avec  $\beta_2 \neq 0$ , on ne s'intéresse qu'aux dérivées  $\partial_k^{\beta_1} \sigma$ . Il vient alors

$$\partial_k^{\beta_1} \sigma = i^{2/3} k^{2/3-\beta_1}.$$

Pour  $\beta_1 = 0$ , on a bien évidemment

$$|\sigma| = k^{2/3} \leq C(1 + k).$$

Pour  $\beta_1 \geq 1$ ,

$$|\partial_k \sigma| = k^{2/3-\beta_1} \leq C(1 + k)^{1-1/3\beta_1}.$$

□

On peut donc définir  $(ik)^{2/3}$  comme un symbole de  $S_{1/3,0}^1$ , ce qui nous conduit à introduire l'opérateur pseudo-différentiel  $D^{2/3}$  comme suit :

$$D_t^{2/3} f = \int i^{2/3} k^{2/3} e^{itk} \widehat{f}(k) dk. \quad (5.2.4)$$

Dans ce travail, nous avons choisi d'utiliser la définition de la section 5.2.1 car elle fournit une représentation pour laquelle nous disposons d'une formule d'approximation qui a été étudiée dans la littérature. Toutefois, dans le cadre de travaux futurs, il pourrait être intéressant de considérer la représentation (5.2.4).

De la même manière, si on considère le cas de  $(i\xi)^{2/3}$ , on montre que  $(i\xi)^{2/3} \in S_{1/3,0}^1$  et

$$D_s^{2/3} f = \int i^{2/3} \xi^{2/3} e^{is\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

### 5.3 Nouvelles CLA modélisant aussi les ondes rampantes

**Proposition 5.3.1.** *Une CLA généralisée du second-ordre prenant en considération les ondes propagatives et les ondes rampantes s'écrit sous la forme*

$$\left( \partial_{\mathbf{n}} + c_r D_s^{2/3} \right) \left( \frac{1}{c} \partial_t + \partial_{\mathbf{n}} + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (5.3.1)$$

ou

$$\left( \partial_{\mathbf{n}} + \frac{c_r}{c^{2/3}} D_t^{2/3} \right) \left( \frac{1}{c} \partial_t + \partial_{\mathbf{n}} + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (5.3.2)$$

avec

$$c_r := (6\kappa(s))^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \quad (5.3.3)$$

où  $\kappa(s)$  désigne toujours la courbure de  $\Sigma$ .

De la même manière, pour obtenir une condition représentant le champ d'onde complet, on combine (5.2.2) ou (5.2.3) avec la condition (3.3.3) construite au chapitre précédent et ne considérant que les ondes propagatives et évanescentes.

**Proposition 5.3.2.** *Une famille de CLA enrichies d'ordre trois, prenant en compte à la fois les ondes propagatives, les ondes évanescentes et les ondes rampantes, est donnée par*

$$\left(\partial_n + c_r D_s^{2/3}\right) (\partial_n + \beta) \left(\frac{1}{c} \partial_t + \partial_n + \frac{\kappa(s)}{2}\right) u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (5.3.4)$$

ou

$$\left(\partial_n + \frac{c_r}{c^{2/3}} D_t^{2/3}\right) (\partial_n + \beta) \left(\frac{1}{c} \partial_t + \partial_n + \frac{\kappa(s)}{2}\right) u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (5.3.5)$$

$\kappa(s)$  désigne la courbure de  $\Sigma$  et  $\beta$  est un paramètre strictement positif.

**Remarque 5.3.3.** *On peut tout d'abord remarquer que les nouvelles CLA ne sont plus locales comme dans les chapitres précédents mais a priori globales puisqu'elles font intervenir un opérateur de dérivée fractionnaire. Cependant, nous verrons par la suite que ceci n'entraîne qu'un faible surcoût de calculs.*

Pour pouvoir utiliser ces conditions dans un code de type éléments finis, nous devons maintenant résoudre deux difficultés. La première consiste à inclure cette condition dans une formulation variationnelle. La seconde est liée à la discrétisation de l'opérateur de dérivée fractionnaire. Nous considérons ces deux problèmes dans la section suivante.

## 5.4 Discrétisation des nouvelles conditions

Dans cette section, nous nous intéressons d'abord à la discrétisation des conditions (5.3.1) et (5.3.2) puis nous considérons les conditions (5.3.4) et (5.3.5). Dans les deux cas, nous montrons que les conditions faisant intervenir des dérivées fractionnaires en temps sont plus simples à mettre en oeuvre que celles faisant intervenir des dérivées fractionnaires en espace. Nous décrivons ensuite les schémas totalement discrétisés que nous avons utilisés pour prendre en compte les conditions avec dérivées fractionnaires en temps et nous présentons des résultats numériques.

### 5.4.1 La CLA généralisée

#### 5.4.1.1 Réécriture de la condition

Afin de pouvoir implémenter facilement les conditions (5.3.1) et (5.3.2) dans une formulation variationnelle, nous proposons de réécrire la famille de conditions d'ordre deux décrite au paragraphe précédent. Pour cela, nous utilisons le fait que  $u$  est solution de l'équation des ondes acoustiques sur la frontière absorbante  $\Sigma$ , *i.e.*,

$$\partial_n^2 u + \kappa(s) \partial_n u + \partial_s^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = 0.$$

Les conditions (5.3.1) et (5.3.2) peuvent alors se réécrire sous la forme

$$\partial_n u = \left( -\frac{\kappa(s)}{2} + \partial_t + c_r D_t^{2/3} \right)^{-1} \left( -\partial_t^2 + \partial_s^2 - c_r D_t^{2/3} \partial_t u - c_r \frac{\kappa(s)}{2} D_t^{2/3} u \right)$$

où  $D_t^{2/3} := D_s^{2/3}$  ou  $D_t^{2/3} := \frac{1}{c^{2/3}} D_t^{2/3}$ .

Cette expression permet d'intégrer plus facilement la condition dans une formulation variationnelle car elle exprime directement  $\partial_n u$ . Elle a cependant l'inconvénient de faire intervenir un opérateur pseudo-différentiel, ce qui détruit la structure creuse des matrices éléments finis. C'est pour cette raison que nous proposons d'utiliser une inconnue auxiliaire  $\psi$  définie seulement sur la frontière absorbante. Ainsi, nous évitons de discrétiser l'opérateur pseudo différentiel.

On définit  $\psi$  par

$$\left( -\frac{\kappa(s)}{2} + \partial_t + c_r D_t^{2/3} \right) \psi = -\frac{\kappa(s)^2}{4} + \partial_s^2 u \text{ sur } \Sigma$$

et la CLA généralisée est alors donnée par

$$\partial_n u + \frac{1}{c} \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} u = \psi \text{ sur } \Sigma.$$

Ainsi, au lieu de résoudre le problème aux limites

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty); \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega; \\ u = 0 \text{ ou } \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty); \\ \left( \partial_n + c_r D_t^{2/3} \right) (\partial_n + \beta) \left( \frac{1}{c} \partial_t + \partial_n + \frac{\kappa(s)}{2} \right) u = 0 & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty), \end{cases}$$

on résout le problème mixte

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty); \\ \partial_n u + \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} u = \psi & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty); \\ \left( -\frac{\kappa(s)}{2} + \partial_t + c_r D_t^{2/3} \right) \psi = -\frac{\kappa(s)^2}{4} + \partial_s^2 u & \text{sur } \Sigma \times (0, +\infty); \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, +\infty); \\ u(0, x) = u_0(x), \partial_t u(0, x) = u_1(x) & \text{dans } \Omega; \\ \psi(0, x) = \psi_0(x) & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Avant de s'intéresser à la discrétisation complète de ce problème, nous nous concentrons sur la discrétisation de l'opérateur de dérivée fractionnaire.

#### 5.4.1.2 Discrétisation de l'opérateur de dérivée fractionnaire

La théorie des opérateurs fractionnaires est assez ancienne (elle remonte à Leibnitz à la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle), mais leur discrétisation est un sujet de recherche très récent dans la communauté scientifique. C'est pour cette raison que seuls quelques schémas existent. La plupart sont écrits

pour des problèmes en dimension 1 et utilisent des techniques de différences finies. Seuls quelques auteurs, comme par exemple Agrawal [2], commencent à considérer le cas d'une formulation éléments finis mais ils se limitent au cas de la dimension 1 et, aspect important ici, avec un pas de discrétisation constant.

Dans un premier temps, nous pensions utiliser la CLA généralisée faisant intervenir l'opérateur de dérivée fractionnaire en espace  $D_s^{2/3}$ . Les problèmes auxquels nous avons été confrontés en considérant les schémas existants se listent de la façon suivante :

- le problème est posé en dimension 1 ;
- le pas de discrétisation est constant ;
- on se donne un point initial ;
- un sens de parcours doit être donné.

Le premier point nous indique que nous ne pourrions pas utiliser ces schémas lorsque  $\Omega$  est un domaine tridimensionnel car l'opérateur surfacique sera défini en 2D. En effet, dans ce cas là, la frontière  $\Sigma$  sera une surface donnée en dimension deux et non pas en dimension un comme l'exigent les schémas existants. Par contre, si  $\Omega$  est un domaine bidimensionnel, la frontière  $\Sigma$  correspond bien à une courbe de dimension un. Cependant d'autres problèmes persistent. En effet, même si nous avons une surface 1D, la frontière est fermée et donc nous ne disposons pas d'un point initial comme c'est le cas lorsque le domaine est un intervalle. De plus, nous pouvons parcourir la frontière dans deux directions différentes : dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens inverse. Cette difficulté est toutefois surmontable en orientant l'abscisse curviligne selon l'orientation de la normale, ici extérieure à  $\Sigma$ . Enfin, il est souvent difficile de considérer un pas d'espace constant sur la frontière d'un domaine quelconque convexe. Même le cas *a priori* simple d'une ellipse nécessite de nombreux calculs. En effet, il nous faut tout d'abord calculer le périmètre de l'ellipse pour pouvoir ainsi définir un pas d'espace et commencer le maillage. Ceci nécessite d'approcher la valeur de ce périmètre puisque il n'existe pas de formule donnant explicitement le périmètre d'une ellipse en fonction de son demi-grand axe et de son demi-petit axe. Cette approximation faite, on peut alors définir un pas d'espace et en fixant le premier point, nous sommes en mesure de déterminer les autres noeuds du maillage. Cependant cette opération nécessite de résoudre une équation du quatrième degré pour chaque noeud. On se rend donc bien compte que mailler une frontière de forme quelconque avec un pas d'espace constant n'est pas une chose aisée même lorsqu'on considère des géométries relativement simples.

Pour toutes ces raisons, nous avons décidé de considérer la CLA faisant intervenir l'opérateur de dérivée fractionnaire en temps. En effet, toutes les contraintes imposées par les schémas existants sont satisfaites : la variable temporelle  $t$  appartient à un intervalle de temps fini dont le point initial est l'instant 0 et on parcourt cet intervalle en suivant la direction de temps croissant. De plus, le fait de devoir imposer un pas de temps constant ne nous gêne en rien puisque nous considérons déjà un pas de temps constant dans nos schémas. Enfin, l'extension à la 3D ne pose évidemment aucun problème.

Pour évaluer  $D_t^{2/3}\psi$  à chaque pas de temps, nous utilisons un schéma de différences finies connu sous le nom de "Shifted Grünwald formula" [70]

$$D_t^{2/3}\psi(s_i, t_k) = \sum_{j=0}^k \frac{\psi(s_i, t_{k+1-j}) - \psi(s_i, t_{k-j})}{\Gamma(4/3) \Delta t^{2/3}} g_j, \quad (5.4.2)$$

où  $s_i$  représente un degré de liberté sur la frontière  $\Sigma$ ,  $t_k := k\Delta t$  et  $\Delta t$  est le pas de temps. Les poids  $g_j$  sont donnés pour  $0 \leq j \leq k$  par

$$g_j = \left( (j+1)^{1/3} - j^{1/3} \right).$$

On sait que l'opérateur de dérivée fractionnaire est un opérateur *a priori* global. On constate à nouveau dans la formule (5.4.2) que pour déterminer la valeur de  $D_t^{2/3}\psi$  à un temps donné  $t_{k+1}$ , nous devons *a priori* considérer la valeur de  $\psi$  à tous les instants précédents. En fait, on remarque que les poids  $g_j$  correspondant aux instants  $t_{k-j}$  très anciens par rapport à  $t_{k+1}$  décroissent très vite. On peut donc négliger l'influence de ces instants très anciens. Ainsi, pour trouver la valeur de  $D_t^{2/3}\psi$  à un instant donné  $t_{k+1}$ , nous devons seulement considérer la valeur de  $\psi$  aux instants dans le voisinage de  $t_{k+1}$  (plus précisément les vingt derniers instants) ce qui fait de l'opérateur de dérivée fractionnaire  $D_t^{2/3}$  un opérateur pseudolocal.

### 5.4.1.3 Schéma discret

Maintenant que nous disposons d'une méthode pour discrétiser l'opérateur fractionnaire, nous pouvons considérer la discrétisation du problème mixte (5.4.1). Comme dans les chapitres 2 et 3, on utilise une formulation IPDG pour la discrétisation en espace. En reprenant les mêmes notations que dans le chapitre 2, le problème discret est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h^k \times (0, +\infty) \text{ et } \psi_h \in W_h^k \times (0, +\infty) \text{ tels que,} \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \partial_t^2 u_h v_h + a(u_h, v_h) + \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \left( \partial_t u_h + \frac{\kappa(s)}{2} u_h \right) v_h + \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \psi_h v_h \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v_h, \forall v_h \in V_h^k \\ \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \left( \partial_t + \frac{c_r}{c^{2/3}} D_t^{2/3} - \frac{\kappa(s)}{2} \right) \psi_h w_h = - \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)^2}{4} u_h w_h - b(u_h, w_h), \forall w_h \in W_h^k \end{array} \right. \quad (5.4.3)$$

avec, comme précédemment,

$$a(u, v) = \sum_K \int_K \nabla u \nabla v - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_{\sigma} \left( \{\{\nabla u\}\} [v] + \{\{\nabla v\}\} [u] - \alpha_1 [u] [v] \right)$$

et

$$b(u, v) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \partial_s u \partial_s v - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_{\sigma} \left( \{\{\partial_s u\}\} [v] + \{\{\partial_s v\}\} [u] - \alpha_2 [u] [v] \right)$$

et  $\alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*}$  sont les deux coefficients de pénalisation [5].

Après discrétisation en espace à l'aide d'une formulation IPDG, la forme matricielle du problème

est donnée par

$$\begin{cases} M \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + B \frac{d\mathbf{U}}{dt} + B_\kappa \mathbf{U} + K\mathbf{U} - B_\star \Psi = S, \\ C_{c_r} D_t^{2/3} \Psi + C \frac{d\Psi}{dt} - C_\kappa \Psi = -\frac{D_{\kappa^2}}{4} \mathbf{U} - E\mathbf{U}, \end{cases} \quad (5.4.4)$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\Psi$  sont les vecteurs inconnus et

$$\begin{aligned} M &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad K = (a(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq N}, \quad \mathbf{S} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K S v_i \right)_{1 \leq i \leq N}, \\ B &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_\sigma v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad B_\kappa = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_\sigma \frac{\kappa(s)}{2} v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \\ B_\star &= \left( \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}} \\ 1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \int_\sigma w_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \quad C = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_\sigma w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \\ C_\kappa &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_\sigma \frac{\kappa(s)}{2} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \quad C_{c_r} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_\sigma \frac{c_r}{c^{2/3}} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \\ D_\kappa &= \left( \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}} \\ 1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}} \int_\sigma \kappa(s)^2 v_i w_j \right)_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}, \quad E = (b(v_i, w_j))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la discrétisation en temps, on utilise un schéma de différences finies avec un pas de temps  $\Delta t$  et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{X}^{n+1} &= \begin{pmatrix} \Delta t^2 \mathbf{S}^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Delta t^2 K + 2M & 0 \\ -\Delta t E & (1 - g_1) \frac{\Delta t^{1/3}}{\Gamma(4/3)} C_{c_r} \end{pmatrix} \mathbf{X}^n \\ &+ \begin{pmatrix} -M + \frac{\Delta t}{2} B - \frac{\Delta t^2}{2} B_\kappa & \frac{\Delta t^2}{2} B_\star \\ -\frac{\Delta t}{8} D_\kappa & (g_1 - g_2) \frac{\Delta t^{1/3}}{\Gamma(4/3)} C_{c_r} + \frac{1}{2} C + \frac{\Delta t}{2} C_\kappa \end{pmatrix} \mathbf{X}^{n-1} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{j=2}^k (g_j - g_{j+1}) \frac{\Delta t^{1/3}}{\Gamma(4/3)} C_{c_r} \Psi^{n-j} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

où

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M + \frac{\Delta t}{2} B + \frac{\Delta t^2}{2} B_\kappa & -\frac{\Delta t^2}{2} B_\star \\ \frac{\Delta t}{8} D_\kappa & \frac{\Delta t^{1/3}}{\Gamma(4/3)} C_{c_r} + \frac{1}{2} C - \frac{\Delta t}{2} C_\kappa \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{X}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^i \\ \Psi^i \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant utiliser une technique similaire pour mettre en oeuvre la condition prenant en compte les trois types d'ondes.

## 5.4.2 Le cas de la condition prenant en compte les trois types d'ondes

Pour les raisons exposées à la section précédente, nous n'avons mis en oeuvre que la CLA enrichie (5.3.5) faisant intervenir la dérivée fractionnaire en temps. Nous allons d'abord introduire une variable auxiliaire pour permettre le couplage de cette condition avec une formulation variationnelle puis nous décrirons le schéma totalement discrétisé.

### 5.4.2.1 Réécriture de la condition

Comme précédemment, afin de pouvoir implémenter facilement ces CLA dans une formulation variationnelle, nous devons réécrire la famille de conditions (5.3.5) définie dans la section 5.3 de façon à expliciter  $\partial_n u$ . Pour cela, nous utilisons le fait que  $u$  est solution de l'équation des ondes acoustiques sur la frontière absorbante  $\Sigma$  *i.e.*

$$\partial_n^2 u + \kappa(s) \partial_n u + \partial_s^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = 0.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_s^2 + \frac{1}{c} (\beta - \kappa(s)) \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} (\beta - 3\kappa(s)) + \frac{c_r}{c^{2/3}} \left( \beta - \frac{\kappa(s)}{2} \right) \partial_t^{2/3} + \frac{c_r}{c^{5/3}} \partial_t^{5/3} \right) \partial_n u \\ &= -\frac{c_r}{c^{8/3}} \partial_t^{8/3} u - \frac{1}{c^3} \partial_t^3 u - \frac{1}{c^2} \left( \beta - \frac{\kappa(s)}{2} \right) \partial_t^2 u + \left( \beta - \frac{5\kappa(s)}{2} \right) \partial_s^2 u + \frac{1}{c} \partial_t \partial_s^2 u + \\ & \frac{c_r}{c^{2/3}} \partial_t^{2/3} \partial_s^2 u - \frac{c_r \beta}{c^{5/3}} \partial_t^{5/3} u - \frac{c_r \kappa(s) \beta}{2c^{2/3}} \partial_t^{2/3} \end{aligned}$$

L'introduction de cette condition dans une formulation variationnelle nécessite à nouveau la discrétisation d'un opérateur pseudodifférentiel. On perd donc la structure creuse des matrices éléments finis. Nous proposons donc une nouvelle formulation de cette condition faisant intervenir une inconnue auxiliaire  $\psi$  définie seulement sur la frontière absorbante. Ainsi, nous évitons de discrétiser l'opérateur pseudodifférentiel et le caractère creux des matrices discrètes est préservé. On définit  $\psi$  par

$$\begin{aligned} & \left( \partial_t^2 - \partial_s^2 + (\beta - \kappa(s)) \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} (\beta - 3\kappa(s)) + \frac{c_r}{c^{2/3}} \left( -\frac{\kappa(s)}{2} + \partial_t + \beta \right) D_t^{2/3} \right) \psi = \\ & \left( \kappa(s)^2 \partial_t + (\beta - 3\kappa(s)) \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} (\beta - 3\kappa(s)) + \frac{c_r}{c^{2/3}} \left( \partial_s^2 - \frac{\kappa(s)^2}{4} \right) D_t^{2/3} \right) u \text{ sur } \Sigma \end{aligned}$$

et la CLA est alors donnée par

$$\partial_n u + \frac{1}{c} \partial_t u + \frac{\kappa(s)}{2} u = \psi \text{ sur } \Sigma.$$

Ainsi écrite, on peut facilement inclure la CLA dans une formulation variationnelle.

#### 5.4.2.2 Schéma discret

La discrétisation en espace du problème aux limites par une formulation IPDG nous conduit à résoudre le problème.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h^k \times (0, +\infty) \text{ et } \psi_h \in W_h^k \times (0, +\infty) \text{ tels que,} \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \partial_t^2 u_h v_h + a(u_h, v_h) + \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \left( \partial_t u_h + \frac{\kappa(s)}{2} \psi_h \right) v_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v_h, \quad \forall v_h \in V_h^k \\ \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \left( \partial_t^2 + (\beta - \kappa(s)) \partial_t - \frac{\kappa(s)}{2} (\beta - 3\kappa(s)) + \frac{c_r}{c^{2/3}} \left( -\frac{\kappa(s)}{2} + \partial_t + \beta \right) D_t^{2/3} \right) \psi_h w_h + b(\psi_h, w_h) \\ = - \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)^2}{4} (\beta - 3\kappa(s)) u_h w_h + \kappa(s)^2 \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \partial_t u_h v_h - (\beta - 3\kappa(s)) b(u_h, w_h) \\ - \frac{c_r}{c^{2/3}} \left( b(D_t^{2/3} u_h, w_h) + \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)^2}{4} D_t^{2/3} u_h w_h \right), \quad \forall w_h \in W_h^k \end{array} \right.$$

(5.4.6)

avec

$$a(u, v) = \sum_K \int_K \nabla u \nabla v - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_{\sigma} \left( \{\{\nabla u\}\} [v] + \{\{\nabla v\}\} [u] - \alpha_1 [u] [v] \right)$$

et

$$b(u, v) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \partial_s u \partial_s v - \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \int_{\sigma} \left( \{\{\partial_s u\}\} [v] + \{\{\partial_s v\}\} [u] - \alpha_2 [u] [v] \right)$$

et  $\alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*}$  sont les deux coefficients de pénalisation [5].

Ce problème peut être reformulé sous forme matricielle par

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + B \frac{d\mathbf{U}}{dt} + B_{\kappa} \mathbf{U} + K \mathbf{U} - B_{\star} \mathbf{\Psi} = S, \\ C \frac{d^2 \mathbf{\Psi}}{dt^2} + E_{\Psi} \mathbf{\Psi} + C_{\beta, \kappa, 1} \frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} - C_{\beta, \kappa, 2} \mathbf{\Psi} - C_{c_r, \kappa} D_t^{2/3} \mathbf{\Psi} + C_{c_r} D_t^{5/3} \mathbf{\Psi} \\ + C_{c_r, \beta} D_t^{2/3} \mathbf{\Psi} = -D_{\beta, \kappa} \mathbf{U} - E_{\beta, \kappa} \mathbf{U} - D_{c_r, \kappa} D_t^{2/3} \mathbf{U} - E_{c_r} D_t^{2/3} \mathbf{U} + D_{\kappa} \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \end{array} \right. \quad (5.4.7)$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\Psi$  sont les vecteurs inconnus et

$$\begin{aligned}
M &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad K = (a(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq N}, \\
\mathbf{s} &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K S v_i \right)_{1 \leq i \leq N}, \quad B = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \\
B_{\kappa} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)}{2} v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad B_{\star} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} w_i v_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}}, \\
C &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \quad C_{\beta, \kappa, 1} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} (\beta - \kappa(s)) w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \\
C_{\beta, \kappa, 2} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)}{2} (\beta - 3\kappa(s)) w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \\
C_{c_r} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{c_r}{c^{2/3}} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \\
C_{c_r, \kappa} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)}{2} \frac{c_r}{c^{2/3}} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \quad C_{c_r, \beta} = \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \beta \frac{c_r}{c^{2/3}} w_i w_j \right)_{1 \leq i, j \leq M}, \\
D_{\kappa} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \kappa(s)^2 v_i w_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}, \\
D_{\beta, \kappa} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{\kappa(s)^2}{4} (\beta - 3\kappa(s)) v_i w_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}, \\
D_{c_r, \kappa} &= \left( \sum_{\sigma \in \Sigma_{\text{abs}}} \int_{\sigma} \frac{c_r}{c^{2/3}} \frac{\kappa(s)^2}{4} v_i w_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}, \\
E_{\beta, \kappa} &= ((\beta - 3\kappa(s)) b(v_i, w_j))_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}, \quad E_{c_r} = \left( \frac{c_r}{c^{2/3}} b(v_i, w_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la discrétisation en temps, on utilise les mêmes schémas que dans la sous-section 5.4.1.3. Comme il ressemble en bien des points au système décrit à la section précédente, on ne détaille pas ici le système à résoudre qui est de la forme

$$\mathbf{M}\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{G}$$

où

$$\mathbf{X}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^i \\ \mathbf{\Psi}^i \end{pmatrix},$$

$G$  est un vecteur dépendant de  $\mathbf{X}^i$  pour  $i \leq n$  et

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M + \frac{\Delta t}{2}B + \frac{\Delta t^2}{2}B_\kappa & -\frac{\Delta t^2}{2}B_\star \\ \frac{\Delta t^2}{2}D_{\beta,\kappa} - \frac{\Delta t}{2}D_\kappa + \frac{\Delta t^{4/3}}{\Gamma(4/3)}D_{c_r,\kappa} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbf{C} = C + \frac{\Delta t}{2}C_{\beta,\kappa,1} - \frac{\Delta t^2}{2}C_{\beta,\kappa,2} - \frac{\Delta t^{4/3}}{\Gamma(4/3)}C_{c_r,\kappa} + \frac{\Delta t^{1/3}}{\Gamma(1/3)}C_{c_r} + \frac{\Delta t^{4/3}}{\Gamma(4/3)}C_{c_r,\beta}.$$

On peut donc maintenant tester numériquement ces différentes CLA et les comparer à la C-ABC ou encore à la CLA développée dans le chapitre 3.

## 5.5 Analyse de performances des nouvelles CLA généralisée et enrichie

On souhaite à présent comparer les performances des CLA (5.3.2) et (5.3.5) avec celles de la C-ABC et de la CLA (3.3.3) développée au chapitre 3 pour voir si le fait de prendre en compte les ondes rampantes dans le processus de construction des CLA améliore l'absorption dans le cas transitoire. Pour cela, nous avons testé les CLA sur les différents cas tests présentés dans l'annexe A.

Pour comparer les différents tests réalisés dans une configuration donnée, on calcule l'erreur globale en temps et en espace définie au chapitre 2, *i.e.* on calcule l'erreur relative  $L^2([0, t] \times \Omega)$  définie par

$$\left( \frac{\int_0^t \int_\Omega |u_{app}(s, x) - u_{ex}(s, x)|^2 dx ds}{\int_0^t \int_\Omega |u_{ex}(s, x)|^2 dx ds} \right)^{1/2},$$

où  $u_{app}$  est la solution approchée obtenue et  $u_{ex}$  est la solution "exacte" calculée comme aux chapitres précédents.

Précisons tout d'abord que pour les différents tests réalisés, nous avons gardé la même condition CFL que celle utilisée avec la C-ABC. Par conséquent, nous pouvons prendre le même pas de temps que dans le cas de la C-ABC.

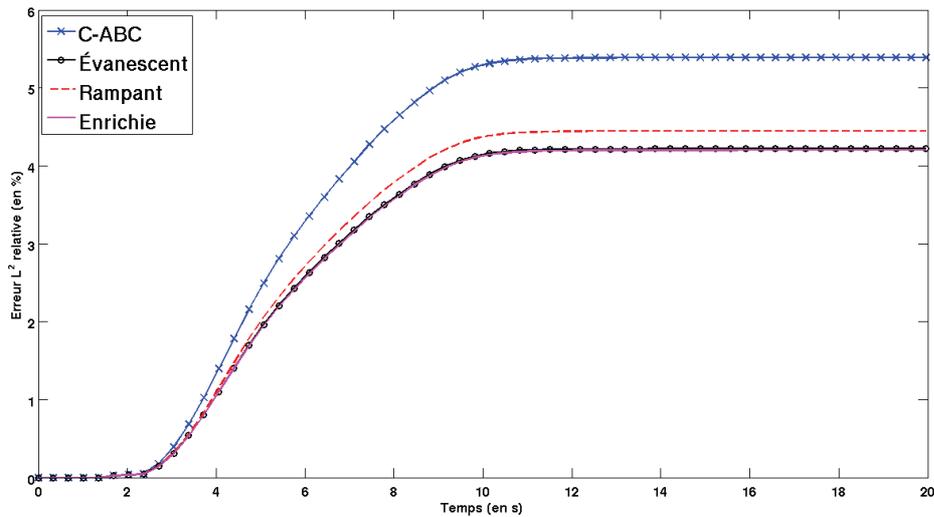


FIG. 5.1 – Comparaison entre C-ABC, CLA généralisée évanescente (3.3.3), CLA généralisée rampante (5.3.2) et CLA enrichie (5.3.5) - Configuration 1

### 5.5.1 Cas test 1

Comme dans le chapitre 3, nous nous intéressons tout d'abord au cas où l'obstacle est circulaire ce qui correspond au cas test 1 décrit dans l'annexe A. Sur la figure 5.1, on représente les erreurs obtenues avec la C-ABC (en bleu), avec la condition (3.3.3) (en noir), avec la condition (5.3.2) (en rouge) et avec (5.3.5) (en magenta). On remarque que lorsqu'on prend en compte les ondes propagatives et les ondes rampantes les résultats sont meilleurs que ceux obtenus avec la C-ABC mais moins bons que ceux obtenus avec (3.3.3). Cependant, quand on considère la CLA complète (5.3.5), on obtient des résultats équivalents à ceux avec la condition (3.3.3).

### 5.5.2 Cas test 2

Nous nous intéressons maintenant au cas d'un obstacle elliptique. Les résultats obtenus pour la configuration 2 sont présentés sur la figure 5.2. Les trois nouvelles conditions donnent des erreurs très similaires qui sont à chaque fois plus faibles que l'erreur de la C-ABC.

### 5.5.3 Cas test 3

Nous considérons ensuite la configuration 3, avec un obstacle de forme plus allongée que dans le cas précédent. Les résultats présentés sur la figure 5.3 montrent que la condition complète est légèrement meilleure que les autres conditions mais l'écart n'est pas significatif.

### 5.5.4 Cas test 4

La Figure 5.4 représente les erreurs obtenues dans le cas de deux obstacles circulaires entourés d'une frontière artificielle elliptique (Configuration 4). Comme dans la configuration 2, les erreurs générées par les trois nouvelles CLA sont très proches et plus faibles que celle générées par la C-ABC.

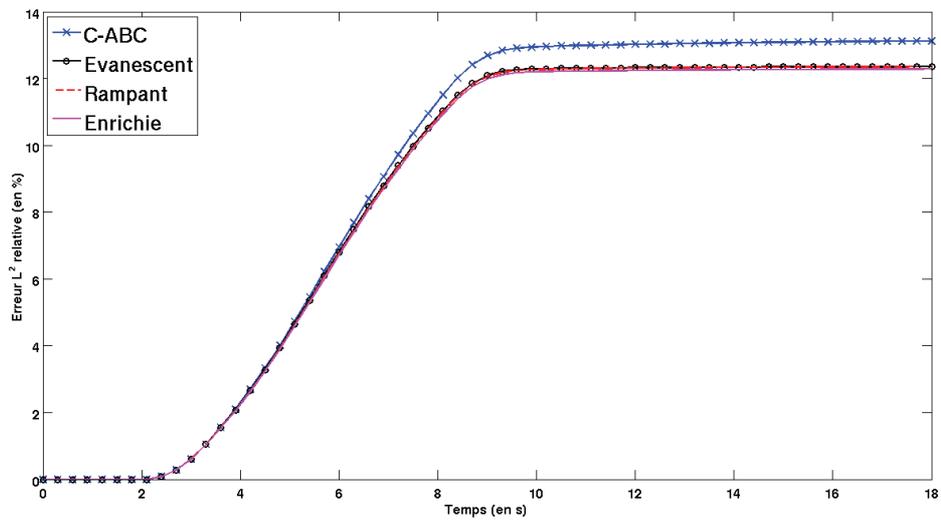


FIG. 5.2 – Comparaison entre C-ABC, CLA généralisée évanescence (3.3.3), CLA généralisée rampante (5.3.2) et CLA enrichie (5.3.5) - Configuration 2

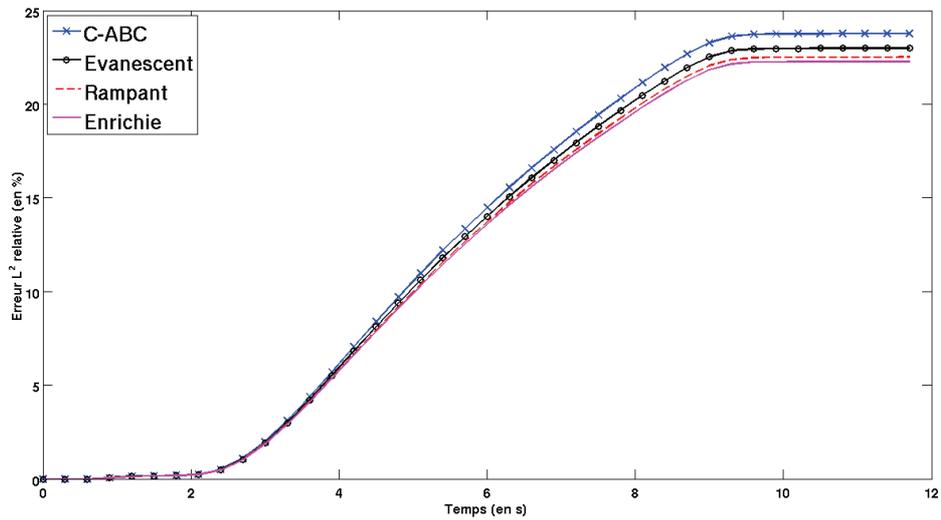


FIG. 5.3 – Comparaison entre C-ABC, CLA généralisée évanescence (3.3.3), CLA généralisée rampante (5.3.2) et CLA enrichie (5.3.5) - Configuration 3

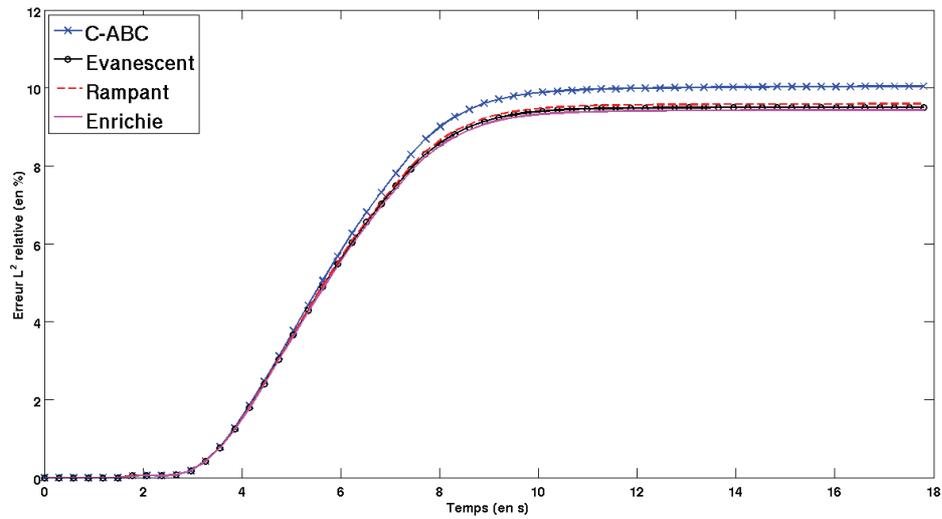


FIG. 5.4 – Comparaison entre C-ABC, CLA généralisée évanescence (3.3.3), CLA généralisée rampante (5.3.2) et CLA enrichie (5.3.5) - Configuration 4

### 5.5.5 Cas test 5

Enfin, on regarde le cas de quatre obstacles triangulaires entourés d'une frontière circulaire (Configuration 5). Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 5.5. Les conclusions sont les mêmes que précédemment : le fait de prendre en compte les rampants améliore très peu la précision des conditions.

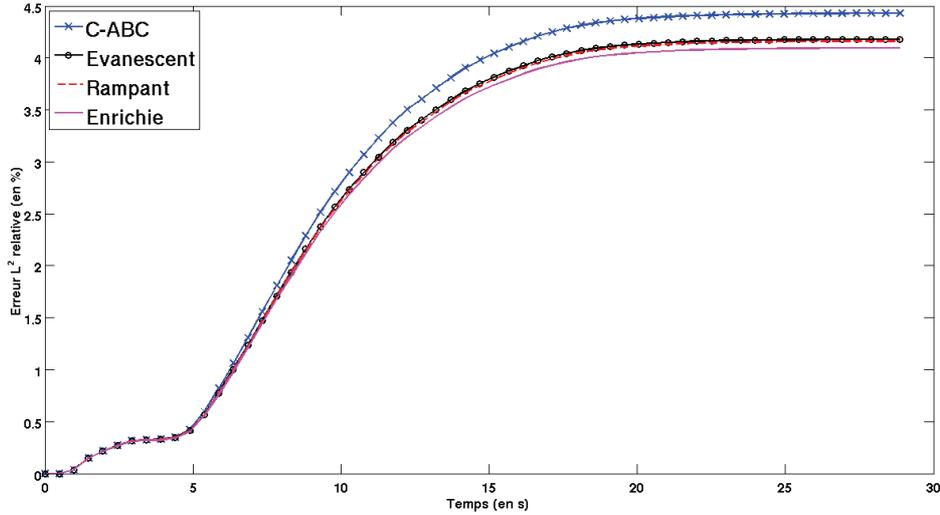


FIG. 5.5 – Comparaison entre C-ABC, CLA généralisée évanescente (3.3.3), CLA généralisée rampante (5.3.2) et CLA enrichie (5.3.5) - Configuration 5

Dans toutes les configurations que nous avons testées, nous avons remarqué que les conditions prenant en compte les ondes rampantes donnent des résultats similaires à la condition ne prenant en compte que les ondes propagatives et évanescentes, contrairement à ce qui avait été observé en régime harmonique. Ces résultats sont probablement liés en partie à la discrétisation trop peu précise de la dérivée fractionnaire en temps. En effet, dans le cas de l'équation d'Helmholtz, cette dérivée est prise en compte exactement grâce au terme  $(ik)^{2/3}$ , ce qui peut expliquer la différence de résultat.

Pour confirmer cette hypothèse, nous avons à nouveau considéré le cas où le champ d'onde est généré par une onde incidente imposée sur  $\Gamma$ .

## 5.6 Stabilisation par une onde incidente

Comme au chapitre 3, on s'intéresse au cas où le champ d'onde est généré par une onde incidente que l'on impose sur le bord de l'obstacle comme nous l'avons fait au chapitre précédent avec la C-ABC.

On résout donc le problème,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = u^{\text{inc}} := e^{ik(t + \cos \theta x + \sin \theta y)} \text{ sur } \Gamma \\ +CLA \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (5.6.1)$$

où  $k$  est la fréquence de l'onde incidente et  $\theta$  l'angle d'incidence, et la CLA choisie est soit (5.3.2) soit (5.3.5).

L'intérêt de ce test est donc de vérifier si pour  $t$  vérifiant  $kt \equiv 0[2\pi]$ , la solution (5.6.1) tend vers

la solution harmonique qui vérifie

$$\begin{cases} k^2 u + \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = u^{\text{inc}} := e^{ik(t + \cos \theta x + \sin \theta y)} \text{ sur } \Gamma \\ +CLA \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (5.6.2)$$

où  $k^2 u + \Delta u = 0$  est l'équation d'Helmholtz avec une source nulle et si oui, de comparer la vitesse de convergence.

Nous avons fixé deux configurations particulières décrites dans l'annexe A afin de comparer les deux solutions : une avec un obstacle et une frontière artificielle circulaires et l'autre où ce sont des ellipses. Par souci de simplicité et sans perte de généralité, on fixe  $\theta$  égal à zéro.

Considérons tout d'abord le cas de l'obstacle circulaire.

Les résultats obtenus visualisés sous Paraview sont représentés dans les figures 5.6, 5.7, 5.8 et 5.9 pour une fréquence égale à 10, pour  $t = \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}$  et  $\frac{8\pi}{k}$ . Les figures de gauche représentent la

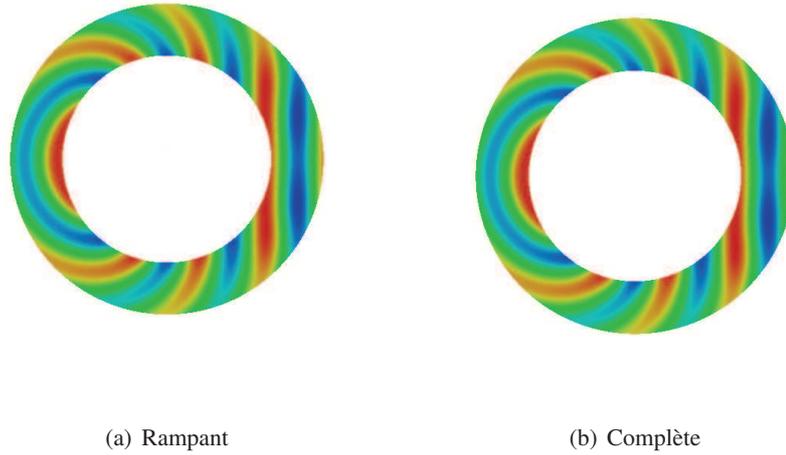


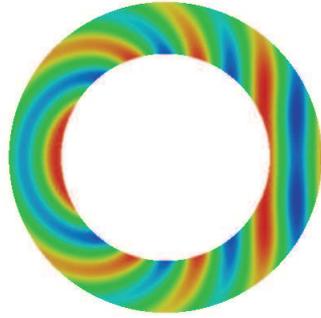
FIG. 5.6 – Solution temporelle :  $t = \frac{2\pi}{k}$

partie réelle de la solution obtenue avec la CLA (5.3.2) et celles de droite la solution obtenue avec la CLA (5.3.5). La figure 5.10 représente la partie réelle de la solution harmonique.

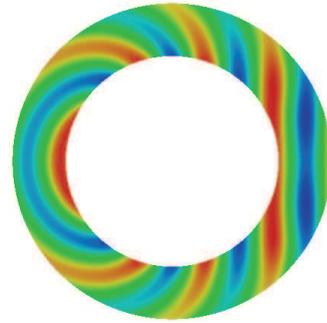
Visuellement, il semble bien qu'il y ait concordance entre les solutions temporelle et harmonique et donc stabilisation de la solution de l'équation des ondes pour les deux conditions. Pour s'en assurer, on a calculé l'erreur  $L^2(\Omega)$  entre les deux solutions pour différentes valeurs de  $k$ . Les figures 5.11, 5.12 et 5.13 représentent l'évolution de cette erreur au cours du temps, respectivement pour  $k = 1, 5$  et  $10$ .

Les courbes bleues représentent les erreurs obtenues avec la C-ABC, les courbes rouges celles obtenues en prenant compte des ondes évanescentes, les courbes magenta celles obtenues en prenant en compte les modes rampants et les courbes noires celles obtenues avec la condition complète (5.3.5).

On remarque que les erreurs obtenues dans les deux derniers cas sont faibles, mais plus importantes que les différences obtenues avec la C-ABC ou avec la condition prenant en compte uniquement

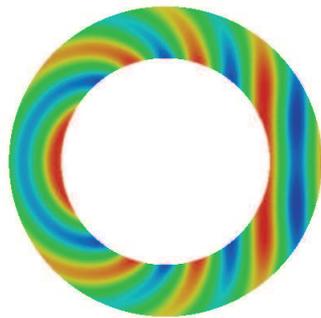


(a) Rampant

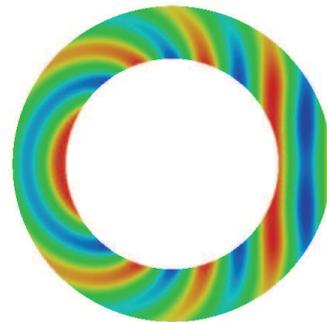


(b) Complète

FIG. 5.7 – Solution temporelle :  $t = \frac{4\pi}{k}$

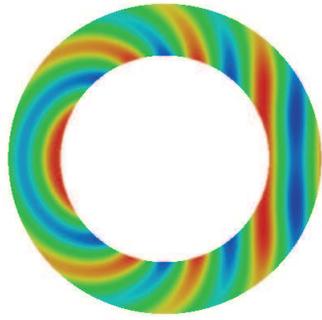


(a) Rampant

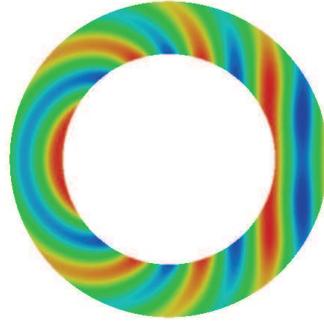


(b) Complète

FIG. 5.8 – Solution temporelle :  $t = \frac{6\pi}{k}$



(a) Rampant



(b) Complète

FIG. 5.9 – Solution temporelle :  $t = \frac{8\pi}{k}$

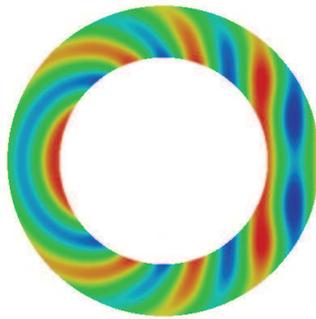


FIG. 5.10 – Solution harmonique

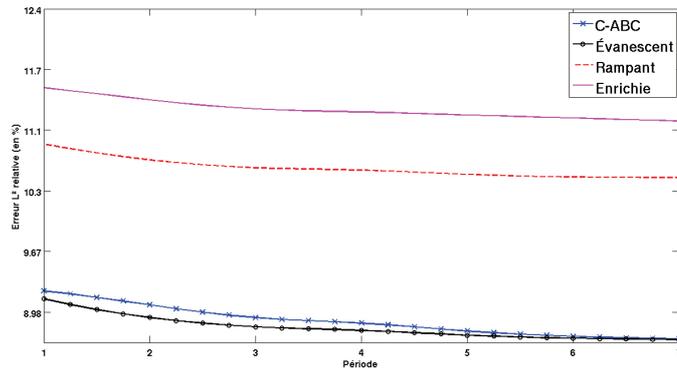


FIG. 5.11 – Erreur entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 1 - k=1

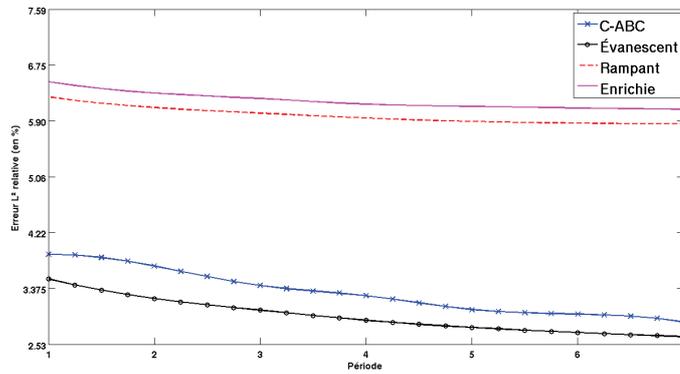


FIG. 5.12 – Erreur entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 1 - k=5

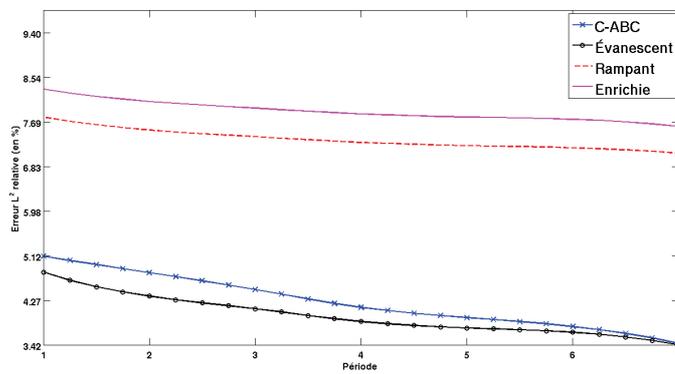


FIG. 5.13 – Erreur entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 1 - k=10

les modes évanescents. Ces résultats confirment donc la faible précision du schéma de discrétisation des dérivées fractionnaires.

A présent, on vérifie que les résultats sont équivalents lorsque l'obstacle et la frontière artificielle sont de forme elliptique. Comme précédemment, on compare sur les figures 5.14, 5.15, 5.16 et 5.17, les deux solutions obtenues en harmonique et en temporel pour  $t = \frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \frac{6\pi}{k}$  et  $\frac{8\pi}{k}$ . On

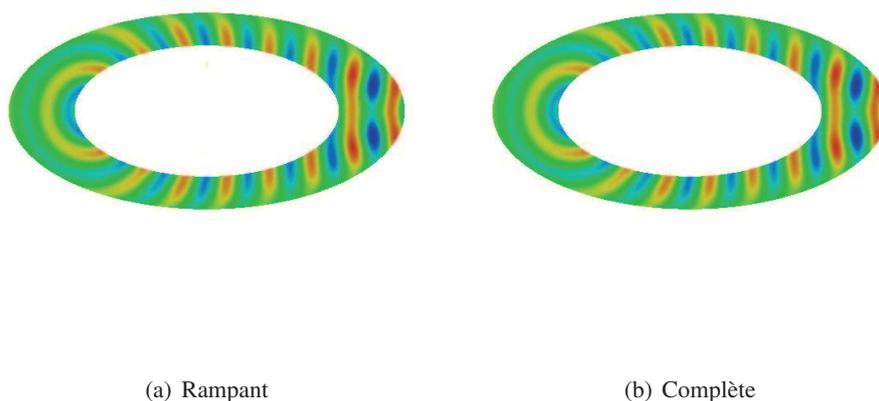
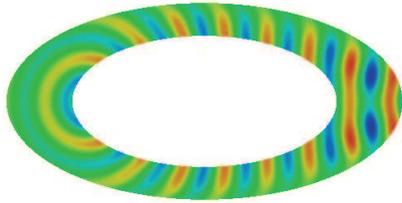
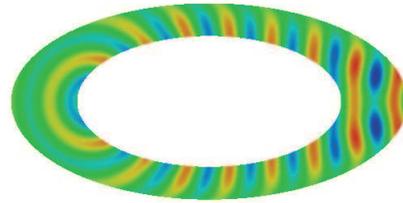


FIG. 5.14 – Solution temporelle :  $t = \frac{2\pi}{k}$

remarque à nouveau que les visualisations concordent. Pour le vérifier, on calcule l'erreur  $L^2(\Omega)$  entre les deux solutions pour  $k = 1, 5, 10$ . Les trois figures obtenues pour les trois valeurs différentes de  $k$  sont représentées dans les figures 5.19, 5.20 et 5.21. Ici encore, la solution en temps tend bien vers la solution harmonique mais moins vite que pour la C-ABC ou la condition généralisée évanescence (3.3.3).

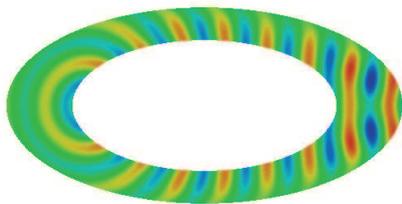


(a) Rampant

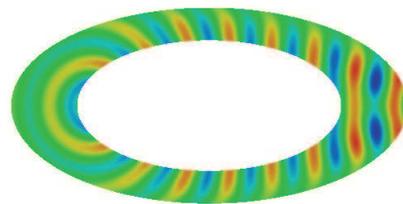


(b) Complète

FIG. 5.15 – Solution temporelle :  $t = \frac{4\pi}{k}$

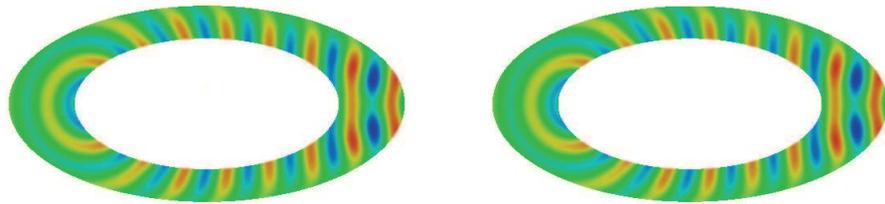


(a) Rampant



(b) Complète

FIG. 5.16 – Solution temporelle :  $t = \frac{6\pi}{k}$



(a) Rampant

(b) Complète

FIG. 5.17 – Solution temporelle :  $t = \frac{8\pi}{k}$

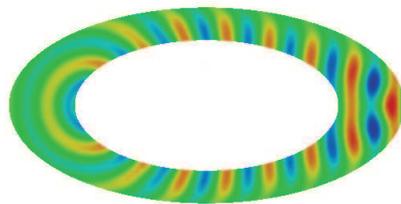


FIG. 5.18 – Solution harmonique

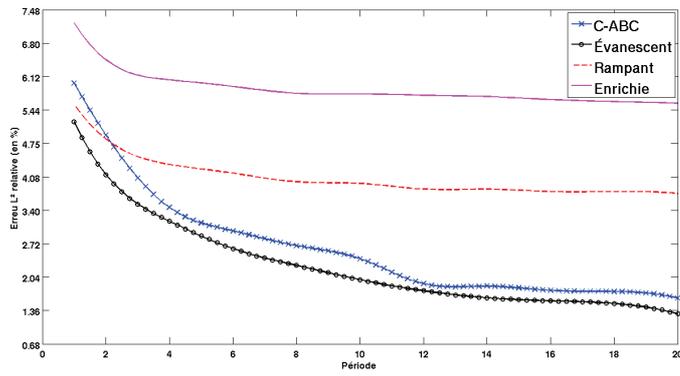


FIG. 5.19 – Erreur entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 2 - k=1

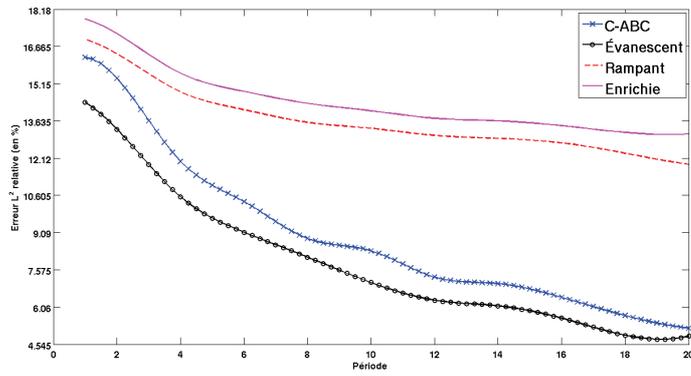


FIG. 5.20 – Erreur entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 2 - k=5

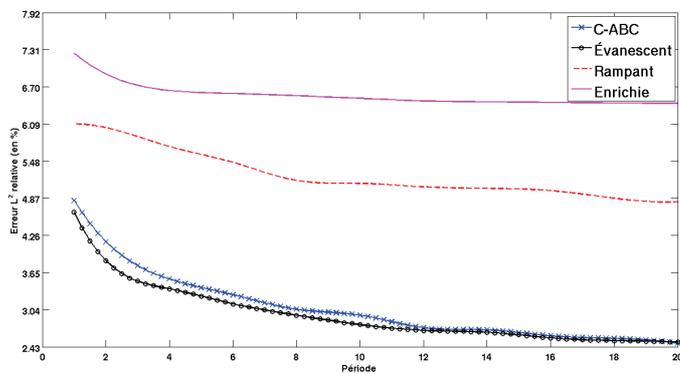


FIG. 5.21 – Erreur entre solution temporelle et solution harmonique - Configuration 2 - k=10

On peut donc à nouveau supposer que les résultats ne sont pas aussi bons que ce qu'on espérait à cause de la discrétisation de l'opérateur de dérivée fractionnaire.

## 5.7 Conclusion

Les conditions qui avaient été construites au chapitre 4 pour l'équation d'Helmholtz et prenant en compte le comportement des ondes rampantes, ont été étendues au domaine temporel. Ces conditions font intervenir des opérateurs de dérivées fractionnaires difficiles à discrétiser. Les différents tests numériques réalisés montrent que ces nouvelles conditions donnent de meilleurs résultats que si on utilise la C-ABC mais donne des résultats équivalents à ceux obtenus avec la condition (3.3.3). Ainsi l'amélioration n'est pas aussi significative que ce que nous espérions au vu des résultats du chapitre précédent. De plus, lorsqu'on regarde la stabilisation de la solution temporelle sur la solution harmonique, on remarque que la solution converge bien vers la solution harmonique mais moins rapidement que lorsqu'on utilise la C-ABC ou la condition (3.3.3). Un moyen d'obtenir de meilleurs résultats serait donc de revoir la discrétisation de l'opérateur de dérivées fractionnaires en s'appuyant par exemple sur les travaux de M.F. Cawley, P.G. Petropoulos et S. Jiang [27] ou sur ceux de H. Haddar, J.R. Li et D. Matignon [48].

## Chapitre 6

# Vers des simulations réalistes

Dans ce dernier chapitre nous discutons de la mise en oeuvre des nouvelles CLA pour des configurations plus réalistes. Nous montrons dans un premier temps qu'elles permettent de modéliser la propagation d'ondes en milieu hétérogène infini. Dans une deuxième section, nous présentons les difficultés relatives aux problèmes tridimensionnels.

### 6.1 Mise en oeuvre des CLA en milieu hétérogène

Dans cette section, on s'intéresse à la propagation d'une onde dans un milieu bicouche infini en dimension deux. La vitesse de propagation des ondes est  $c = 1m/s$  dans la partie supérieure ( $y > 0$ ) et  $c = 2m/s$  dans la partie inférieure ( $y < 0$ ). On considère une source ponctuelle au point  $S=(0m, 0.25m)$  et on souhaite limiter la simulation au disque de centre 0 et de rayon 1m (voir Fig.6.1). Nous allons donc imposer successivement sur le bord de ce disque les différentes conditions présentées dans les précédents chapitres de ce document. Ce test va nous permettre de vérifier que les CLA construites tout au long de la thèse sont bien adaptées au cas des domaines hétérogènes. En particulier, nous voulons nous assurer qu'elles sont bien stables et qu'elles ne génèrent pas de réflexions particulières au niveau de l'interface entre deux milieux différents. .

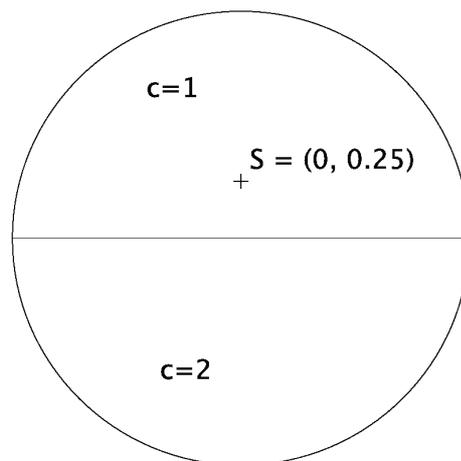


FIG. 6.1 – Domaine bicouche

Dans les figures 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5, on représente à différents instants la solution que l'on visualise à l'aide du logiciel Paraview. Les résultats obtenus avec les différentes CLA étant visuellement

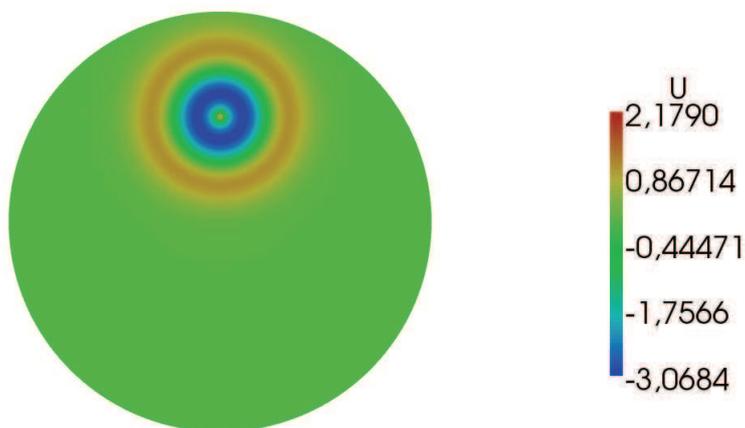


FIG. 6.2 – Solution à  $t = 0.5s$

similaires, on ne représente sur les figures 6.3 à 6.5 que les solutions obtenues avec la CLA enrichie construite au chapitre 5. On remarque tout d'abord que l'onde se propage normalement dans la première partie du domaine jusqu'à atteindre l'interface. À ce moment là, elle se décompose en deux ondes : une onde réfléchiée par l'interface et une onde transmise qui se propage ensuite dans la deuxième partie du domaine. On remarque aussi que le changement de vitesse est bien pris en compte puisque l'onde se propage plus rapidement dans la deuxième partie du domaine. Enfin, on peut constater que l'onde est bien absorbée au bord du domaine. En particulier, la frontière artificielle ne génère aucune réflexion parasite au voisinage de l'interface entre les deux milieux. Un test similaire a été effectué sur un domaine carré où là aussi les ondes ont bien été absorbées, sans aucune instabilité au niveau des interfaces.

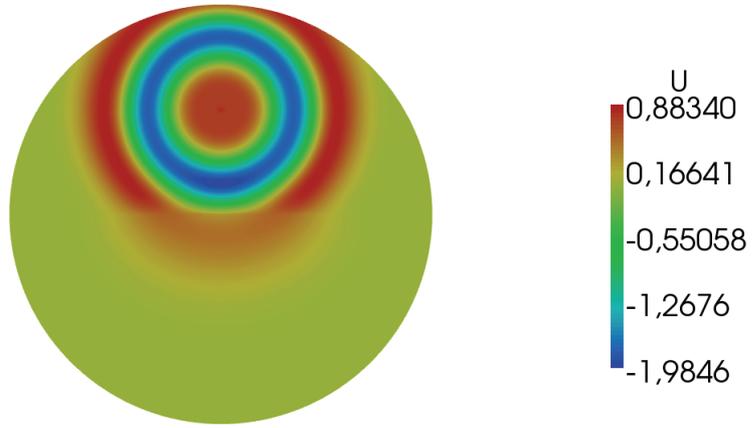


FIG. 6.3 – Solution à  $t = 1s$

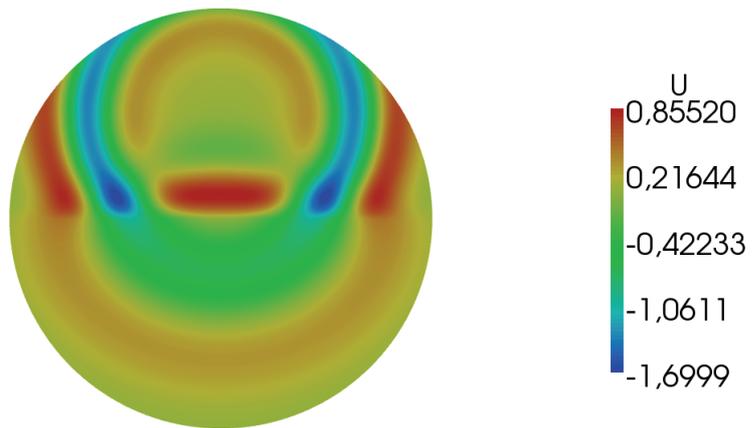


FIG. 6.4 – Solution à  $t = 1.5s$

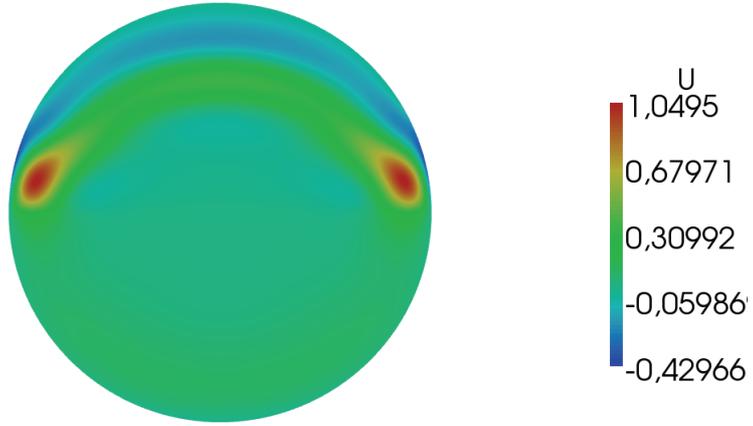


FIG. 6.5 – Solution à  $t = 2s$

Ces résultats mettent en évidence l'efficacité des CLA en milieu hétérogène, mais il ne permettent pas de comparer les performances des différentes conditions. On s'intéresse donc maintenant l'erreur globale en temps et en espace définie au chapitre 2, *i.e.* on calcule l'erreur relative  $L^2([0, t] \times \Omega)$  définie par

$$\left( \frac{\int_0^t \int_{\Omega} |u_{app}(s, x) - u_{ex}(s, x)|^2 dx ds}{\int_0^t \int_{\Omega} |u_{ex}(s, x)|^2 dx ds} \right)^{1/2},$$

où  $u_{app}$  est la solution approchée obtenue et  $u_{ex}$  est la solution "exacte" calculée comme aux chapitres précédents sur un domaine de calcul beaucoup plus large.

Sur la figure 6.6, on représente les erreurs obtenues avec la C-ABC (en bleu), avec la condition (3.3.3) (en noir), avec la condition (5.3.2) (en rouge) et avec (5.3.5) (en magenta). On constate tout d'abord que les courbes obtenues avec les nouvelles CLA sont similaires à celle obtenue avec la C-ABC ce qui nous permet de valider la stabilité des nouvelles CLA en milieu hétérogène. De plus, de la même manière que dans le cas d'un milieu homogène, on observe que lorsqu'on prend en compte les ondes rampantes ou évanescents en plus des ondes propagatives, on obtient de meilleurs résultats qu'avec la C-ABC. Enfin, on remarque que la CLA enrichie est légèrement meilleure que les autres conditions mais l'écart n'est pas significatif.

Ce cas test nous permet donc conclure que les CLA construites tout au long de cette thèse sont bien adaptées à la modélisation des milieux hétérogènes infinis.

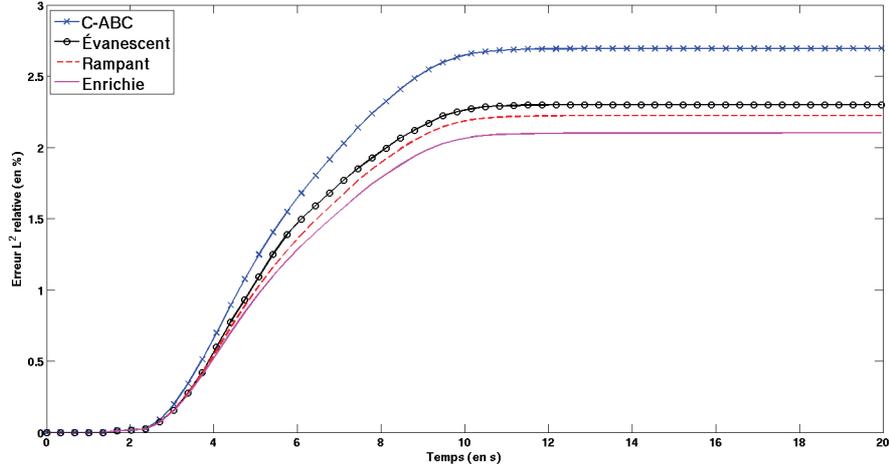


FIG. 6.6 – Comparaison entre C-ABC, CLA généralisée évanescente (3.3.3), CLA généralisée rampante (5.3.2) et CLA enrichie (5.3.5) - Domaine Bicouche

## 6.2 Le cas tridimensionnel

À présent, on s'intéresse aux difficultés relatives au passage à la dimension 3. Dans un premier temps, on réécrit les CLA avant de regarder les difficultés d'implémentation de ces CLA en dimension 3.

### 6.2.1 Ecriture des CLA en 3D

Tout d'abord, il nous faut réécrire les différentes conditions. Les techniques que nous avons développées au cours des différents chapitres peuvent être facilement étendues au cas tridimensionnel. En effet, la base de notre travail vient de l'écriture de l'équation des ondes en coordonnées curvilignes au voisinage de la frontière. Dans le cas tridimensionnel, nous pouvons aussi réécrire l'équation des ondes de la même manière qu'en 2D et on obtient donc que

$$\Delta u - \partial_t^2 u = 0$$

se réécrit dans le système de coordonnées locales  $(r, s_1, s_2)$  sous la forme

$$\tilde{L}_{3D}u := \partial_r^2 u + 2\mathcal{H}_r \partial_r u + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \partial_{s_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \partial_{s_1} u \right) + \partial_{s_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \partial_{s_2} u \right) \right) - \partial_t^2 u = 0, \quad (6.2.1)$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont définis par

$$h_j = 1 + r\kappa_j, \quad j = 1, 2$$

où  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les courbures principales de  $\Sigma$  et  $\mathcal{H}_r$  désigne la courbure moyenne de la surface parallèle donnée par

$$\mathcal{H}_r = \frac{1}{2} \frac{\partial_r(h_1 h_2)}{h_1 h_2}.$$

De plus, par la suite on notera  $\mathcal{K}$  la courbure de Gauss définie par  $\mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2$  et  $\mathcal{H}$  la courbure moyenne définie par  $\mathcal{H} = (\kappa_1 + \kappa_2) / 2$ .

On remarque donc qu'on obtient une écriture analogue au cas 2D où nous avons :

$$\tilde{L}u := -\partial_t^2 u + \partial_r^2 u + \kappa_r \partial_r u + h^{-1} \partial_s (h^{-1} \partial_s u) = 0,$$

où  $\kappa$  est la courbure de  $\Sigma$ ,  $h = 1 + r\kappa(s)$  et  $\kappa_r = h^{-1}\kappa$ .

Pour appliquer la méthode de Taylor [74], nous réécrivons (6.2.1) comme un système du premier ordre. Pour cela, on introduit comme au chapitre 1, une inconnue auxiliaire  $v$  qui est liée à  $u$  par la relation  $\partial_t v + \partial_r u = 0$  dans un voisinage de  $\Sigma$ . Le vecteur  $\mathbf{U} = (v, u)$  est alors solution du système du premier ordre

$$\partial_r \mathbf{U} = L_{3D} \mathbf{U},$$

où  $L_{3D}$  est un opérateur matriciel dont les composantes sont des opérateurs pseudodifférentiels du premier ordre. Son symbole  $\sigma(L_{3D}) = \mathcal{L}_{3D}$  peut se décomposer en  $\mathcal{L}_{3D} = \mathcal{L}_{3D,1} + \mathcal{L}_{3D,0}$  avec

$$\mathcal{L}_{3D,1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h_1^{-2}\xi_1^2 + h_2^{-2}\xi_2^2 - \omega^2}{i\omega} \\ -i\omega & 0 \end{pmatrix} \in S^1$$

et

$$\mathcal{L}_{3D,0} = \begin{pmatrix} -2\mathcal{H}_r & -\frac{i}{\omega h_1 h_2} \left( \partial_{s_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \xi_1 \right) + \partial_{s_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \xi_2 \right) \right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S^0,$$

où  $\xi_1, \xi_2$  et  $\omega$  sont les variables duales associées respectivement à  $s_1, s_2$  et  $t$ .

Ainsi en posant  $\lambda_{1,3D} := (\omega^2 - h_1^{-2}\xi_1^2 - h_2^{-2}\xi_2^2)^{1/2}$ , on peut montrer de façon analogue à ce qui a été fait en 2D qu'une condition aux limites absorbantes d'ordre un est donnée par :

$$[(I + K_{-1,3D}) V_{0,3D} \mathbf{U}]_2 = 0 \text{ sur } \Sigma$$

où  $V_{0,3D}$  et  $K_{-1,3D}$  sont donnés par leur symbole

$$\mathcal{V}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\lambda_{1,3D}} & 1 \\ 1 & -\frac{\lambda_{1,3D}}{i\omega} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{K}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2i\mathcal{H}\omega^3}{4\lambda_{1,3D}^4} \\ -\frac{2i\mathcal{H}\omega}{4\lambda_{1,3D}^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc, en utilisant le même raisonnement qu'en dimension 2, que la C-ABC en 3D s'écrit :

$$\partial_t u + \partial_n u + \mathcal{H}u = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

De même, une condition prenant en compte les ondes évanescentes s'écrit exactement de la même façon qu'en 2D à savoir

$$\partial_n u + \beta u = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

On obtient donc la proposition suivante

**Proposition 6.2.1.** *Une famille de CLA du second-ordre prenant en compte les ondes propagatives et les ondes évanescentes s'écrit*

$$(\partial_n + \beta) (\partial_t + \partial_n + \mathcal{H}) u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (6.2.2)$$

En ce qui concerne le traitement des ondes rampantes, on procède de la même manière qu'au chapitre 4. Le symbole principal de l'équation des ondes est donné par

$$k^2 u + \partial_r^2 u + h_1^{-2} \partial_{s_1}^2 u + h_2^{-2} \partial_{s_2}^2 u = 0,$$

au voisinage de  $\Sigma$ . De plus, on sait qu'au voisinage de  $\Sigma$ , la coordonnée radiale  $r$  est très petite. Ainsi

$$h_1^{-2} \sim 1 - 2r\kappa_1 + \mathcal{O}(r^2)$$

et

$$h_2^{-2} \sim 1 - 2r\kappa_2 + \mathcal{O}(r^2).$$

De la même manière que précédemment, on approche la transformée de Fourier  $\widehat{u}$  de la solution de l'équation des ondes  $u$  par la solution de l'équation d'Airy

$$\partial_r^2 \widehat{u} + [k^2 - \xi_1^2 (1 - 2r\kappa_1) - \xi_2^2 (1 - 2r\kappa_2)] \widehat{u} = 0,$$

et en reprenant le même raisonnement qu'au chapitre 4, on montre que

$$\partial_r \widehat{u}|_{r=0} = - (ik)^{2/3} (12\mathcal{H})^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \widehat{u}|_{r=0}.$$

On obtient donc les propositions suivantes :

**Proposition 6.2.2.** *Une famille de CLA du second-ordre prenant en considération les ondes propagatives et les ondes rampantes s'écrit sous la forme*

$$\left( \partial_{\mathbf{n}} + \frac{c_r}{c^{2/3}} D_t^{2/3} \right) \left( \frac{1}{c} \partial_t + \partial_{\mathbf{n}} + \mathcal{H} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (6.2.3)$$

avec

$$c_r := (12\mathcal{H})^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \quad (6.2.4)$$

De la même manière, pour obtenir une condition représentant le champ d'onde complet, on combine la condition obtenue pour les ondes rampantes avec la condition (6.2.2) qui ne considère que les ondes propagatives et évanescentes.

**Proposition 6.2.3.** *Une famille de CLA d'ordre trois prenant en compte à la fois les ondes propagatives, les ondes évanescentes et les ondes rampantes est donnée par*

$$\left( \partial_{\mathbf{n}} + \frac{c_r}{c^{2/3}} D_t^{2/3} \right) (\partial_{\mathbf{n}} + \beta) \left( \frac{1}{c} \partial_t + \partial_{\mathbf{n}} + \mathcal{H} \right) u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (6.2.5)$$

## 6.2.2 Implémentation

Comme dans le cas de la 2D, nous devons réécrire les différentes conditions afin de pouvoir les implémenter facilement dans une formulation variationnelle. Pour cela, on utilise le fait que  $u$  soit solution de l'équation des ondes sur la frontière artificielle, autrement dit

$$\partial_r^2 u + 2\mathcal{H}\partial_r u + (\partial_{s_1}^2 u + \partial_{s_2}^2 u) - \partial_t^2 u = 0.$$

On a vu qu'en 2D, on se débarrasse du terme  $\partial_{\mathbf{n}}^2$  en utilisant l'équation en volume. On obtient ainsi une équation différentielle sur le bord dont le terme de plus haut degré est  $\partial_s^2$ . En 3D, tout se passe de la même façon avec cette fois  $\partial_{\mathbf{n}}^2$  exprimé en fonction de l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\partial_{s_1}^2 u + \partial_{s_2}^2 u$ . Les difficultés du passage à la 3D sont donc de deux natures :

- la discrétisation de l’opérateur de Laplace-Beltrami ;
- le calcul des courbures principales.

Du fait de la présence de l’opérateur de Laplace-Beltrami, nous devons construire une matrice de raideur sur le bord. Pour cela, nous devons déterminer les voisins de chaque face appartenant au bord absorbant. Nous avons à faire une recherche similaire en 2D, mais le coût de calcul était beaucoup plus faible. En effet, en dimension 2, nous n’avons à déterminer que les deux voisins de chaque segment du bord absorbant. De plus, ces segments pouvaient être numérotés les uns à la suite des autres dans le sens de parcours de la frontière. Ici, nous devons considérer un nombre beaucoup plus élevé de triangles, chaque triangle a trois voisins, et il n’existe pas de sens de parcours. Ainsi, la construction de ces connectivités est bien plus complexe en 3D et est bien plus coûteuse en temps et en mémoire qu’en 2D. De plus, nous considérons des domaines à frontière courbe que nous approchons par un polyèdre. Il est donc nécessaire que le maillage de la surface comporte beaucoup d’éléments afin d’obtenir une bonne approximation du domaine. Par conséquent, le traitement des connectivités requiert d’importantes ressources en temps de calcul ainsi qu’en mémoire.

L’autre point difficile lors du passage à la dimension 3 réside dans le calcul des termes de courbure. En effet, à 2D, afin d’approcher la valeur de la courbure  $\kappa$  en un point du bord, nous avons besoin des coordonnées de ce point et de celles de ses deux voisins. Ensuite nous obtenons la courbure en calculant l’inverse du rayon du cercle passant par ces trois points consécutifs.

Déjà une première limite se posait, à savoir qu’il ne fallait pas qu’on raffine la frontière du domaine à l’aide d’un mailleur classique qui aurait coupé en plusieurs segments les arêtes initiales. On aurait alors obtenu des points alignés et donc des courbures nulles. Il nous fallait donc plutôt donner une approximation plus précise du domaine avant d’utiliser le mailleur. En 3D, en plus de ces problèmes, il est difficile d’évaluer les deux courbures principales en un point donné. En effet, contrairement à la dimension 2, les formules permettant le calcul de ces courbures font intervenir des points auxiliaires qui ne sont pas forcément des noeuds du maillage. Il nous faudra donc trouver un moyen efficace de déterminer les coordonnées de ces différents points.

Par conséquent, l’implémentation des CLA en dimension 3 n’est pas totalement directe. Cependant, les difficultés liées au passage à la dimension 3 semblent relativement minimales. Une étude plus approfondie est néanmoins nécessaire et nous sommes actuellement en train de développer des outils afin de pallier à ces différentes difficultés.

# Annexe A

## Cas test

Afin de comparer les performances des différentes CLAs construites au fil de cette thèse, nous fixons un ensemble de cas tests

### A.1 Cas test 1 : un obstacle circulaire

Dans un premier temps, on considère la diffraction d'une onde par un obstacle circulaire. Ainsi, la frontière extérieure est aussi un cercle et le terme de courbure est constant et égal à  $\frac{1}{R}$  où  $R$  est le rayon extérieur. Cette configuration particulière semble être la plus simple pour commencer à tester les codes et obtenir les premières comparaisons entre les différentes CLAs. On reprend donc la Configuration 1 décrite dans le chapitre 2 à savoir que  $\Omega_1$  est un domaine bidimensionnel (voir Fig. A.1) et est délimité par une frontière extérieure circulaire  $\Sigma_1$ . La frontière  $\Gamma_1$  représente

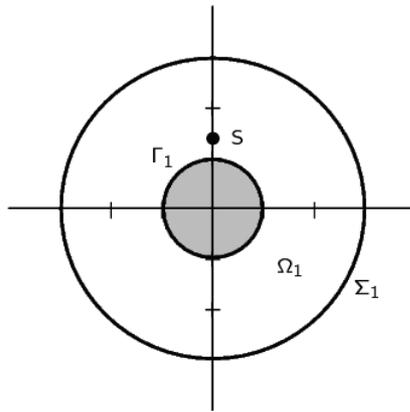


FIG. A.1 – Domaine de calcul - Configuration 1

la frontière de l'obstacle. Les deux cercles sont centrés à l'origine. Le rayon de  $\Sigma_1$  est  $R_{\text{ext}} = 3\text{m}$  et le rayon de  $\Gamma_1$  est  $R_{\text{int}} = 1\text{m}$ . La source est une source ponctuelle placée à  $(0\text{m}, 1.3\text{m})$  et est définie comme une dérivée seconde de Gaussienne de fréquence dominante 1Hz :

$$S = \delta_{x_0} 2\lambda \left( \lambda (t - t_0)^2 - 1 \right) e^{-\lambda (t - t_0)^2},$$

avec  $x_0 = (0\text{m}, 1.3\text{m})$ ,  $\lambda = \pi^2 f_0^2$ ,  $f_0 = 1$ ,  $t_0 = 1/f_0$  et  $\delta_{x_0}$  représente le Dirac en  $x_0$ .

## A.2 Cas test 2 : Un obstacle elliptique

À présent, nous souhaitons considérer le cas de la diffraction d'une onde par un obstacle elliptique. Dans ce cas, le calcul de la courbure n'est pas direct comme dans le paragraphe précédent puisque la frontière extérieure n'est plus circulaire mais elliptique. On reprend donc la configuration 2 définie au chapitre 2.  $\Omega_2$  (cf Fig. A.2) est un domaine bidimensionnel délimité par une frontière extérieure  $\Sigma_2$  et par une frontière intérieure  $\Gamma_2$ .  $\Sigma_2$  est une ellipse de demi-grand axe  $a_{\text{ext}} = 6\text{m}$  et de demi-petit axe  $b_{\text{ext}} = 3\text{m}$  centrée à l'origine.  $\Gamma_2$  représente la frontière d'un obstacle elliptique de demi-grand-axe  $a = 2\text{m}$  et de demi-petit axe  $b = 1\text{m}$  centré à l'origine.

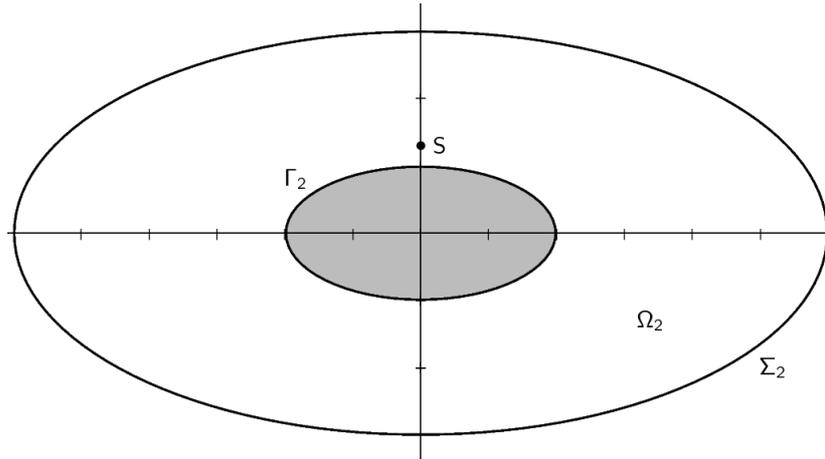


FIG. A.2 – Domaine de calcul -Configuration 2

## A.3 Cas test 3 : Un obstacle elliptique allongé

Nous envisageons ici le cas d'un obstacle elliptique allongé pour regarder l'influence de l'excentricité de l'obstacle. On considère un nouveau cas test noté Configuration 3 qui est similaire à la Configuration 2. Ici,  $\Omega_3$  (cf Fig. A.3) est un domaine bidimensionnel délimité par une frontière extérieure  $\Sigma_3$  et par une frontière intérieure  $\Gamma_3$ .  $\Sigma_3$  est une ellipse de demi-grand axe  $a_{\text{ext}} = 9\text{m}$  et de demi-petit axe  $b_{\text{ext}} = 3\text{m}$  centrée à l'origine.  $\Gamma_3$  représente la frontière d'un obstacle elliptique de demi-grand-axe  $a = 3\text{m}$  et de demi-petit axe  $b = 1\text{m}$  centré à l'origine.

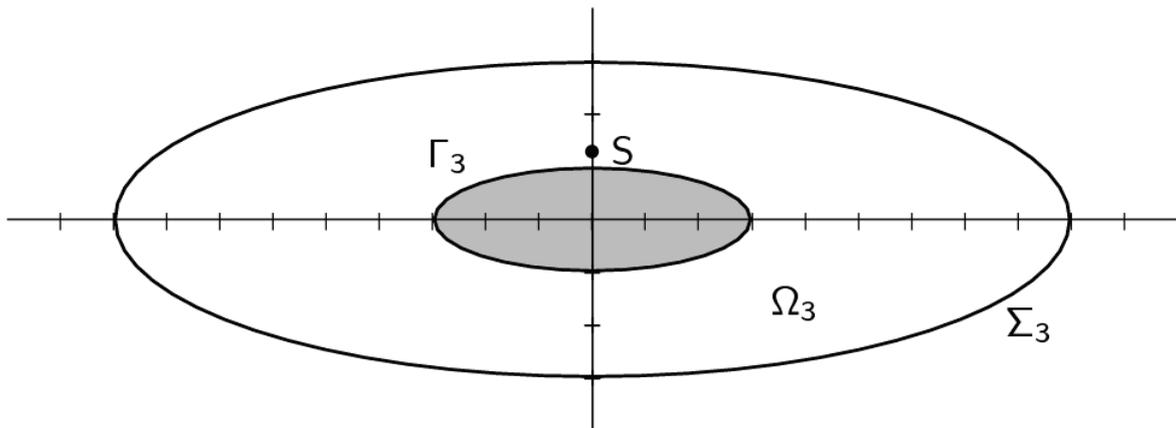


FIG. A.3 – Domaine de calcul -Configuration 3

#### A.4 Cas test 4 : le cas de 2 obstacles circulaires

À présent, on s'intéresse au cas où le domaine contient deux obstacles circulaires pour évaluer l'influence du nombre d'obstacles dans le domaine. En effet, plus il y a d'obstacles dans le domaine, plus les ondes évanescentes et les ondes rampantes sont présentes dans le domaine du fait des réflexions de l'onde au niveau de chaque obstacle. On considère donc la Configuration 4 dans laquelle  $\Omega_4$  (cf Fig. A.4) est un domaine bidimensionnel délimité par une frontière extérieure  $\Sigma_4$  et par une frontière intérieure  $\Gamma_4 := \Gamma_{4,a} \cup \Gamma_{4,b}$ .  $\Sigma_4$  est une ellipse de demi-grand axe  $a_{\text{ext}} = 7.5\text{m}$  et de demi-petit axe  $b_{\text{ext}} = 3.75\text{m}$  centrée à l'origine.  $\Gamma_4$  est l'union des frontières de deux obstacles circulaires de bord respectif  $\Gamma_{4,a}$  et  $\Gamma_{4,b}$  de rayon  $1\text{m}$  centré respectivement au point  $(-1.5\text{m}, 0\text{m})$

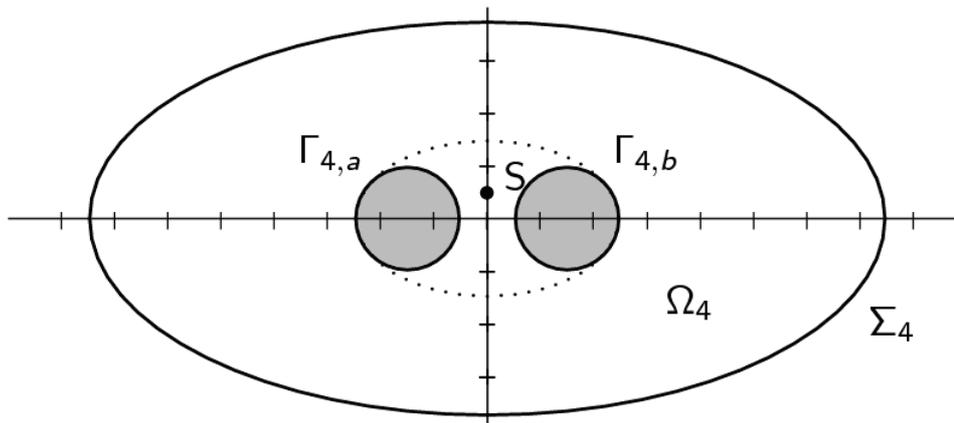


FIG. A.4 – Domaine de calcul -Configuration 4

et  $(1.5\text{m}, 0\text{m})$ .

## A.5 Cas test 5 : le cas de 4 obstacles triangulaires

Dans les cas tests précédents, nous avons considéré des obstacles de forme très régulière. On souhaite maintenant s'intéresser à des obstacles présentant des coins. Nous allons donc tester le cas où les obstacles sont triangulaires pour évaluer l'effet d'un angle au niveau de l'obstacle. La Configuration 5 est alors définie par  $\Omega_5$  (cf Fig. A.5) un domaine bidimensionnel délimité par une frontière extérieure  $\Sigma_5$  et par une frontière intérieure  $\Gamma_5 := \Gamma_{5,o} \cup \Gamma_{5,s} \cup \Gamma_{5,e} \cup \Gamma_{5,n}$ .  $\Sigma_5$  est un cercle de rayon  $a_{\text{ext}} = 5\text{m}$  centré à l'origine.  $\Gamma_5$  est l'union des frontières de quatre obstacles triangulaires de bord  $\Gamma_{5,o}$ ,  $\Gamma_{5,s}$ ,  $\Gamma_{5,e}$  et  $\Gamma_{5,n}$  définis comme suit :

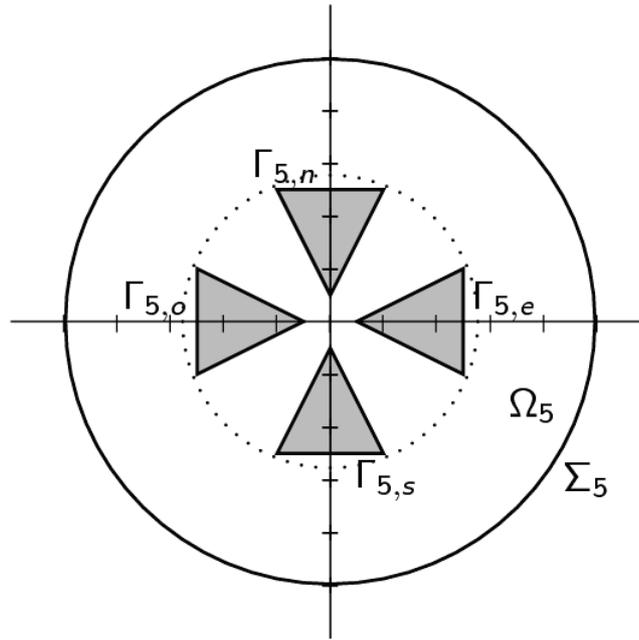


FIG. A.5 – Domaine de calcul -Configuration 5

- Triangle 1 délimité par  $\Gamma_{5,o}$  de sommets  $(-2.5\text{m}, 1\text{m})$ ,  $(-2.5\text{m}, -1\text{m})$  et  $(-0.5\text{m}, 0\text{m})$  ;
- Triangle 2 délimité par  $\Gamma_{5,s}$  de sommets  $(-1\text{m}, -2.5\text{m})$ ,  $(1\text{m}, -2.5\text{m})$  et  $(0\text{m}, -0.5\text{m})$  ;
- Triangle 3 délimité par  $\Gamma_{5,e}$  de sommets  $(2.5\text{m}, 1\text{m})$ ,  $(2.5\text{m}, -1\text{m})$  et  $(0.5\text{m}, 0\text{m})$  ;
- Triangle 4 délimité par  $\Gamma_{5,n}$  de sommets  $(-1\text{m}, 2.5\text{m})$ ,  $(1\text{m}, 2.5\text{m})$  et  $(0\text{m}, 0.5\text{m})$ .

## Annexe B

# Annexe harmonique

### B.1 Les fonctions de Mathieu

Les fonctions de Mathieu ont été introduites par Emile Mathieu en 1868 pour l'analyse du mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique [61]. Dès lors, elles ont été utilisées pour l'étude de nombreux autres phénomènes physiques et astronomiques. Cependant, ces fonctions ont bien moins d'applications que d'autres fonctions issues de la physique mathématique comme les fonctions de Bessel ou les fonctions hypergéométriques. Ceci est très certainement dû à la complexité de leur détermination et à l'impossibilité de les représenter analytiquement de façon simple.

La forme originelle (forme canonique) de l'équation différentielle de Mathieu est :

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (c - 2q \cos 2v)y = 0 \quad (\text{B.1.1})$$

où  $c$  et  $q$  sont des paramètres réels et  $v$  peut être complexe.

Cette équation est aussi appelée "équation de Mathieu angulaire". Cette dénomination provient du fait que (B.1.1) décrit la dépendance angulaire d'une quantité physique (champ électrique ou magnétique). Dans le paragraphe (B.5), nous verrons que cette équation admet deux familles distinctes de solutions dont les fonctions périodiques cosinus elliptique  $ce_m(v, q)$  et sinus elliptique  $se_m(v, q)$ .

L'équation différentielle de Mathieu modifiée s'écrit :

$$\frac{d^2y}{du^2} + (c - 2q \cosh 2u)y = 0 \quad (\text{B.1.2})$$

Cette dernière équation est obtenue en prenant :  $v = iu$  dans (B.1.1) et  $y$  reste inchangé. Elle porte aussi le nom de "équation de Mathieu radiale".

Dans toute la suite, le paramètre  $c$  est défini par les équations (B.1.1) et (B.1.2). Il est appelé valeur caractéristique et on peut le classer en deux catégories :

$$\begin{aligned} c = a_m, & \text{ associé aux solutions de période paire} \\ c = b_m, & \text{ associé aux solutions de période impaire} \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

## B.2 Equation de Mathieu et équation des ondes acoustiques en coordonnées elliptiques

On rappelle que les coordonnées elliptiques sont liées aux coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  par les relations :

$$\begin{aligned}x &= f \cosh \xi \cos \theta; \\y &= f \sinh \xi \sin \theta.\end{aligned}$$

Le nombre  $\xi$  est un réel strictement positif et  $f$  est la distance interfocale de l'ellipse qui vérifie :

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Une ellipse donnée est paramétrée par  $\{\xi = \text{constante}\}$ . On définit alors l'excentricité  $e$  en  $\xi = \xi_0$  par :

$$e = \frac{1}{\cosh \xi_0} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

L'excentricité  $e$  caractérise l'allongement de la frontière. Elle satisfait  $0 < e < 1$ . Lorsque  $e \rightarrow 0$ , l'ellipse dégénère en un cercle et lorsque  $e \rightarrow 1$ , l'ellipse dégénère en un segment de longueur  $2f$ .

Les équations de Mathieu interviennent pour la recherche de solutions analytiques de l'équation d'Helmholtz dans un système de coordonnées elliptiques. Soit  $W := W(x, y, z)$  une solution de l'équation d'Helmholtz en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On introduit le système  $(\xi, \theta, z)$  de coordonnées elliptiques via le changement de variables précédent.

On pose alors  $\tilde{W}(\xi, \theta, z) = W(x, y, z)$  et  $\tilde{W}$  est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial z^2} + \frac{1}{2f^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta)} \left( \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \theta^2} \right) + k^2 \tilde{W} = 0 \quad (\text{B.2.1})$$

On suppose maintenant que  $\tilde{W}$  est de la forme  $\tilde{W} = \varphi(z)\Psi_1(\xi)\Psi_2(\theta)$ . L'équation (B.2.1) devient donc :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{f^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta)} \left[ \frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} \right] + k^2 = 0 \quad (\text{B.2.2})$$

On peut donc montrer que  $\varphi$  est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \alpha \varphi = 0 \quad (\text{B.2.3})$$

où  $\alpha$  est une fonction constante,  $\Psi_1$  est une solution de :

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \left[ \frac{(\alpha + k^2)f^2 \cosh 2\xi}{2} - \beta_1 \right] \Psi_1 = 0 \quad (\text{B.2.4})$$

et  $\Psi_2$  est une solution de :

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} + \left[ \beta_2 - \frac{(\alpha + k^2)f^2 \cos 2\theta}{2} \right] \Psi_2 = 0. \quad (\text{B.2.5})$$

On voit donc qu'une solution  $\tilde{W}$  de l'équation d'Helmholtz s'obtient comme superposition d'une solution  $\varphi$  de l'équation d'Helmholtz 1D, d'une solution  $\Psi_1$  de l'équation de Mathieu modifiée et d'une solution  $\Psi_2$  de l'équation de Mathieu classique.

Certaines solutions physiques de (B.2.5) sont telles que  $\Psi_2$  est périodique, de période  $\pi$  ou  $2\pi$ . Il est montré dans [1, 47] qu'il existe une infinité de valeurs caractéristiques  $a_m(q)$  qui décrivent les solutions de période paire de (B.1.1) ainsi qu'une infinité de valeurs caractéristiques  $b_m(q)$  décrivant les solutions de période impaire de (B.1.1).

### B.3 Détermination des valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu

Une solution de (B.1.1) de période  $\pi$  ou  $2\pi$  est de la forme :

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos mv + B_m \sin mv)$$

avec  $B_0 = 0$ . Les coefficients  $A_m$  et  $B_m$  sont appelés coefficients de Fourier associés aux solutions de l'équation de Mathieu.

En remplaçant dans (B.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{m=-2}^{\infty} [(c - m^2)A_m - q(A_{m-2} + A_{m+2})] \cos mv \\ + \sum_{m=-2}^{\infty} [(c - m^2)B_m - q(B_{m-2} + B_{m+2})] \sin mv = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3.1})$$

en imposant  $A_m = B_m = 0$  si  $m < 0$ .

L'expression (B.3.1) peut être réduite à l'une des quatre formes simplifiées présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned} ye_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} \cos 2mv \\ ye_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} \cos(2m+1)v \\ yo_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \sin 2mv \\ yo_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1} \sin(2m+1)v \end{aligned} \quad (\text{B.3.2})$$

où  $ye_0$  et  $yo_0$  sont des solutions de période  $\pi$  tandis que  $ye_1$  et  $yo_1$  sont des solutions de période  $2\pi$ .

On notera par la suite  $ye_0 = ce_m(v, q)$  avec  $m$  pair,  $ye_1 = ce_m(v, q)$  avec  $m$  impair,  $yo_0 = se_m(v, q)$  avec  $m$  pair et enfin  $yo_1 = se_m(v, q)$  avec  $m$  impair. Les fonctions  $ce_m(v, q)$  et  $se_m(v, q)$  sont appelées fonctions de Mathieu périodiques.

En utilisant (B.3.2), il est montré dans [1, 47] qu'il existe des relations de récurrence entre les coefficients  $A_m$  et  $B_m$ . On obtient :

– pour les solutions paires de période  $\pi$  ( $A_m$ , avec  $m$  pair) :

$$\begin{aligned} cA_0 - qA_2 &= 0 \\ (c - 4)A_2 - q(2A_0 - A_4) &= 0 \\ (c - m^2)A_m - q(A_{m-2} - A_{m+2}) &= 0, (m \geq 3) \end{aligned} \quad (\text{B.3.3})$$

– pour les solutions paires de période  $2\pi$  ( $A_m$ , avec  $m$  impair) :

$$\begin{aligned} (c - 1)A_1 - q(A_1 + A_3) &= 0 \\ (c - m^2)A_m - q(A_{m-2} - A_{m+2}) &= 0, (m \geq 3) \end{aligned} \quad (\text{B.3.4})$$

– pour les solutions impaires de période  $\pi$  ( $B_m$ , avec  $m$  pair) :

$$\begin{aligned} (c-4)B_2 - qB_4 &= 0 \\ (c-m^2)B_m - q(B_{m-2} - B_{m+2}) &= 0 \quad , (m \geq 3) \end{aligned} \quad (\text{B.3.5})$$

– pour les solutions impaires de période  $2\pi$  ( $B_m$ , avec  $m$  impair) :

$$\begin{aligned} (c-1)B_1 + q(B_1 - B_3) & \\ (c-m^2)B_m - q(B_{m-2} - B_{m+2}) &= 0 \quad , (m \geq 3) \end{aligned} \quad (\text{B.3.6})$$

On pose alors :

$$Ge_m = \frac{A_m}{A_{m-2}} \quad ; \quad Go_m = \frac{B_m}{B_{m-2}} \quad ; \quad V_m = \frac{(c-m^2)}{q}$$

Dans le cas où une propriété est vérifiée à la fois dans le cas pair et impair, on utilise la notation, plus simple,  $G_m$ .

On obtient alors que les équations (B.3.3), (B.3.4), (B.3.5), (B.3.6) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} Ge_2 = V_0 \quad ; \quad Ge_3 = V_1 - 1 \quad ; \quad Ge_4 = V_2 - \frac{2}{Ge_2} \quad ; \\ Go_3 = 1 + V_1 \quad ; \quad Go_4 = V_2 \quad ; \quad G_m = \frac{1}{(V_m - G_{m+2})} \quad , (m \geq 3) \end{aligned}$$

La dernière égalité implique :

$$G_m = \frac{1}{(V_m - G_{m+2})} = \frac{1}{(V_m - \frac{1}{(V_{m+2} - G_{m+4})})} = \frac{1}{V_m - \frac{1}{V_{m+2} - \frac{1}{V_{m+4} - \dots}}}$$

Or,

$$Ge_4 = V_2 - \frac{2}{Ge_2} = V_2 - \frac{2}{V_0} = \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - \frac{1}{V_8 - \dots}}}$$

On en déduit donc que :

$$V_0 = \frac{2}{V_2 - \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - \dots}}} \quad (\text{B.3.7})$$

Cette fraction infinie est une "équation" pour  $c$  (donnée par (B.1.3)), c'est-à-dire que ses racines sont les valeurs caractéristiques  $a_{2n}$  associées aux fonctions  $ce_{2n}$  (i.e  $ce_m$  avec  $m$  pair).

De la même manière, les fractions infinies suivantes ont respectivement pour racines les valeurs caractéristiques  $a_{2n+1}$ ,  $b_{2n+1}$ ,  $b_{2n+2}$  associées aux fonctions  $ce_{2n+1}$ ,  $se_{2n}$ ,  $se_{2n+1}$  :

$$V_1 - 1 = \frac{1}{V_3 - \frac{1}{V_5 - \frac{1}{V_7 - \dots}}} \quad (\text{les } a_{2n+1} \text{ sont racines}) \quad (\text{B.3.8})$$

$$V_1 + 1 = \frac{1}{V_3 - \frac{1}{V_5 - \frac{1}{V_7 - \dots}}} \quad (\text{les } b_{2n+1} \text{ sont racines}) \quad (\text{B.3.9})$$

$$V_2 = \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - \frac{1}{V_8 - \dots}}} \quad (\text{les } b_{2n+2} \text{ sont racines)} \quad (\text{B.3.10})$$

Les valeurs caractéristiques sont déterminées en calculant les valeurs propres d'une matrice tri-diagonale infinie. Une fois les valeurs caractéristiques obtenues en résolvant les équations (B.3.7), (B.3.8), (B.3.9), (B.3.10), on peut calculer les coefficients de Fourier  $A_m$  et  $B_m$  grâce aux équations (B.3.3), (B.3.4), (B.3.5), (B.3.6). Puis en utilisant les séries (B.3.2), on obtient les fonctions de Mathieu.

## B.4 Quelques propriétés des valeurs caractéristiques

Si on prend en compte le caractère physique des solutions de (B.1.1), celles-ci sont périodiques de période  $\pi$  ou  $2\pi$ . Les valeurs de  $c$  associées à ces solutions sont appelées *valeurs caractéristiques*. Il existe une infinité de ces valeurs réelles. Comme dit précédemment, on différencie les valeurs caractéristiques associées respectivement aux solutions de périodes paires de (B.1.1) notées  $a_m(q)$  ( $m \geq 0$ ) et de périodes impaires notées  $b_m(q)$  ( $m \geq 1$ ). Ces valeurs caractéristiques jouent un rôle important dans la stabilité des solutions. De plus, elles possèdent quelques propriétés intéressantes [1, 47, 63] :

1- Pour un paramètre  $q$  fixé ( $q \neq 0$ ), les valeurs caractéristiques  $a_m$  et  $b_m$  sont distinctes, réelles et telles que :

$$\begin{aligned} a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < \dots, & \text{ si } q > 0 \\ a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < \dots, & \text{ si } q < 0 \end{aligned}$$

2- Si  $q = 0$ ,  $a_m = b_m = m^2$  (on se ramène au cas circulaire).

3- Une solution de (B.1.1) associée à  $a_m(q)$  ou  $b_m(q)$  admet  $m$  zéros dans l'intervalle  $0 \leq z < \pi$ , avec  $q$  réel.

4- Les courbes  $a_{2n}(q)$  et  $b_{2n+2}(q)$  sont symétriques par rapport à l'axe  $q = 0$ , donc :

$$a_{2n}(q) = a_{2n}(-q) \text{ et } b_{2n+2}(q) = b_{2n+2}(-q), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5- Les courbes  $a_{2n+1}(q)$  et  $b_{2n+1}(q)$  sont telles que :

$$a_{2n+1}(q) = b_{2n+1}(-q), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On connaît aussi quelques comportements asymptotiques des valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu, qui nous seront très utiles par la suite :

**Proposition B.4.1.** – Si  $q > 0$ ,  $a_m(q)$  et  $b_m(q)$  approchent  $m^2$  de la même façon que  $q$  approche 0, c'est-à-dire, lorsque  $q \rightarrow 0$  :

$$\begin{cases} a_m(q) \sim b_m(q) \sim m^2, m \geq 1 \\ a_0(q) \sim -\frac{q^2}{2} \end{cases}$$

– Lorsque  $q > 0$  et  $q$  assez grand, les courbes  $a_m(q)$  et  $b_{m+1}(q)$  sont équivalentes et mutuellement asymptotiques. Plus précisément, quand  $q \rightarrow \infty$ , on a les équivalents suivants :

$$a_m(q) \sim b_{m+1}(q) \sim -2q + 2(2m+1)\sqrt{q} - \frac{(2m+1)^2 + 1}{8}$$

$$b_{m+1}(q) - a_m(q) \sim 2^{4m+5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} q^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} \frac{e^{-4\sqrt{q}}}{m!}$$

– Lorsque  $q < 0$  et  $q$  assez grand,  $a_{2n} \sim a_{2n+1}$  et  $b_{2n+1} \sim b_{2n+2}$ .

La proposition (B.4.1) est extraite de [1].

## B.5 Solutions de l'équation de Mathieu

A chacune des solutions caractéristiques présentées, on associe une solution périodique de (B.1.1) que l'on va introduire ci-dessous. L'équation de Mathieu (B.1.1) est une équation différentielle du second ordre qui admet donc deux familles de solutions indépendantes dont une est formée de fonctions périodiques paires ou impaires respectivement notées  $ce_m(v, q)$  (pour cosinus elliptique) et  $se_m(v, q)$  (pour sinus elliptique). En effet, cette équation décrit la dépendance angulaire de quantités physiques dans la plupart des problèmes qu'elle représente. Ses solutions doivent donc être, dans ces cas-là, périodiques de période  $\pi$  ou  $2\pi$ . Nous nous intéresserons principalement aux solutions  $ce_m(v, q)$  et  $se_m(v, q)$ .

Les solutions périodiques  $ce_m(v, q)$  et  $se_m(v, q)$  sont des fonctions orthogonales qui vérifient la normalisation de McLachlan [62], i.e :

$$\int_0^{2\pi} ce_m(v, q) ce_p(v, q) dv = \int_0^{2\pi} se_m(v, q) se_p(v, q) dv = \begin{cases} \pi & , \text{ si } m = p \\ 0 & , \text{ si } m \neq p \end{cases}$$

Les relations (B.3.2) nous donnent aussi des relations de normalisation pour les coefficients de Fourier de  $ce_{2n}(v, q)$ ,  $ce_{2n+1}(v, q)$ ,  $se_{2n+1}(v, q)$ ,  $se_{2n+2}(v, q)$ , ( $n \geq 0$ ) qui s'écrivent respectivement :

$$2A_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_{2j})^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (A_{2j+1})^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (B_{2j+1})^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (B_{2j+2})^2 = 1$$

Chaque équation entraîne que chacun des coefficients est borné et vérifie :

$$|A_j| \leq 1 \quad \text{et} \quad |B_j| \leq 1$$

Les fonctions  $ce_m(v, q)$  et  $se_m(v, q)$ , solutions de l'équations de Mathieu, vérifient l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 ce_m(v, q)}{\partial v^2} + (a_m(q) - 2q \cos 2v) ce_m(v, q) &= 0 \\ \frac{\partial^2 se_m(v, q)}{\partial v^2} + (b_m(q) - 2q \cos 2v) se_m(v, q) &= 0 \end{aligned} \tag{B.5.1}$$

## B.6 Relations entre les coefficients de Fourier et les différentes solutions de l'équation de Mathieu

Pour tout ordre  $m$ , les coefficients  $A_n^m$  et  $B_n^m$  peuvent s'écrire en fonction des solutions périodiques de l'équation de Mathieu (B.1.1) :

$$A_0^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ce_m(v, q) dv$$

$$A_n^m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m(v, q) \cos nv dv \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

$$B_n^m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m(v, q) \sin nv dv \quad , n \in \mathbb{N}$$

Il existe aussi plusieurs façons d'exprimer les solutions  $ce_m(v, q)$  et  $se_m(v, q)$ , par exemple [1] :

$$ce_m(v, q) = \rho_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left( 2\sqrt{q} \cos v \cos t - p \frac{\pi}{2} \right) ce_m(t, q) dt$$

$$se_m(v, q) = \rho_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left( 2\sqrt{q} \cos v \cos t + p \frac{\pi}{2} \right) \sin v \sin t se_m(t, q) dt$$

avec :  $m = 2s + p$  où  $p = 0$  ou  $p = 1$

$$\rho_m = \frac{2ce_{2s} \left( \frac{\pi}{2}, q \right)}{\pi A_0^{2s}(q)}, \text{ si } p = 0 \text{ et } \rho_m = \frac{-2ce'_{2s+1} \left( \frac{\pi}{2}, q \right)}{\pi \sqrt{q} A_1^{2s+1}(q)}, \text{ si } p = 1 ; \text{ pour les fonctions } ce_m(v, q)$$

$$\rho_m = \frac{-4se'_{2s} \left( \frac{\pi}{2}, q \right)}{\pi \sqrt{q} B_2^{2s}(q)}, \text{ si } p = 0 \text{ et } \rho_m = \frac{4se_{2s+1} \left( \frac{\pi}{2}, q \right)}{\pi B_1^{2s+1}(q)}, \text{ si } p = 1 ; \text{ pour les fonctions } se_m(v, q)$$

Nous avons adopté ici les notations de [1] i.e pour tout mode  $m \in \mathbb{N}$  (resp.  $m \in \mathbb{N}^*$ ),  $ce'_m(v, q)$  (resp.  $se'_m(v, q)$ ) représente  $\frac{\partial ce_m(v, q)}{\partial q}$  (resp.  $\frac{\partial se_m(v, q)}{\partial q}$ ).

## B.7 Solutions de l'équation de Mathieu modifiée

L'équation de Mathieu modifiée (B.1.2) admet cinq sortes de solutions qui sont :

- Lorsque  $q > 0$ ,

1- les solutions du 1<sup>er</sup> ordre de l'équation de Bessel :  $Mc_m^{(1)}(z, q)$  et  $Ms_m^{(1)}(z, q)$  (ces quantités peuvent aussi être notées  $Je$  et  $Jo$ ),

2- les solutions du 2<sup>ème</sup> ordre de l'équation de Bessel :  $Mc_m^{(2)}(z, q)$  et  $Ms_m^{(2)}(z, q)$  (ces quantités peuvent aussi être notées  $Ne$  et  $No$ ),

3- les fonctions de Mathieu-Hankel :  $Mc_m^{(3)}(z, q)$  et  $Ms_m^{(3)}(z, q)$ .

Ces solutions de l'équation de Mathieu modifiée vérifient l'équation différentielle, pour  $j = 1, 2, 3$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M c_m^{(j)}(z, q)}{\partial z^2} + (a_m(q) - 2q \cosh 2z) M c_m^{(j)}(z, q) &= 0 \\ \frac{\partial^2 M s_m^{(j)}(z, q)}{\partial z^2} + (b_m(q) - 2q \cosh 2z) M s_m^{(j)}(z, q) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7.1})$$

- Lorsque  $q < 0$ ,
  - les solutions du 1<sup>er</sup> ordre de l'équation de Bessel modifiée souvent notées  $Ie$  et  $Io$ ,
  - les solutions du 2<sup>ème</sup> ordre de l'équation de Bessel modifiée souvent notées  $Ke$  et  $Ko$ .

Etant donné que nous nous intéressons à des problèmes de propagation d'onde, nous prendrons plus particulièrement en compte les solutions de Mathieu-Hankel. En effet, les fonctions de Mathieu-Hankel sont utilisées pour la représentation des ondes entrantes et sortantes dans les problèmes de propagation d'ondes.

On notera ces fonctions  $M c_m^{(3)}$  pour les solutions paires et  $M s_m^{(3)}$  pour les solutions impaires ; de plus, on sait que :

$$\begin{aligned} M c_m^{(3)}(z, q) &= M c_m^{(1)}(z, q) + i M c_m^{(2)}(z, q) \\ M s_m^{(3)}(z, q) &= M s_m^{(1)}(z, q) + i M s_m^{(2)}(z, q) \end{aligned}$$

Les solutions de Mathieu-Hankel s'écrivent donc en fonction des solutions du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre de l'équation de Bessel que l'on peut, à leur tour, exprimer en fonction des solutions de l'équation de Mathieu (B.1.1) :

$$\begin{aligned} M c_m^{(1)}(z, q) &= \frac{(-1)^s}{\pi A_0^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{q} \cosh z \cos v - p \frac{\pi}{2}) c e_m(v, q) dv \\ M c_{2s}^{(2)}(z, q) &= \frac{(-1)^s 2}{\pi c e_m(0, q)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Z_0^{(2)}(u) c e_m(v, q) dv \\ M c_{2s+1}^{(2)}(z, q) &= \frac{(-1)^s 8\sqrt{q} \cosh z}{\pi A_0^{2s+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Z_1^{(2)}(u) \cos v}{u} c e_{2s+1}(v, q) dv \\ M s_{2s}^{(1)}(z, q) &= \frac{4}{\pi} \sqrt{q} \frac{(-1)^{s+1}}{s e'_{2s}(0, q)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\sqrt{q} \cosh z \cos v) (\sinh z \sin v s e_{2s}(v, q)) dv \\ M s_{2s+1}^{(1)}(z, q) &= \frac{2}{\pi} \sqrt{q} \frac{(-1)^s}{s e_{2s+1}(\frac{\pi}{2}, q)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\sqrt{q} \sinh z \sin v) s e_{2s+1}(v, q) dv \\ M s_{2s}^{(2)}(z, q) &= \frac{(-1)^{s+1} 8q \sinh 2z}{\pi B_2^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Z_2^{(2)}(u) \sin 2v}{u^2} s e_{2s}(v, q) dv \\ M s_{2s+1}^{(2)}(z, q) &= \frac{(-1)^{s+1} 8\sqrt{q} \sinh z}{\pi B_1^{2s+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Z_1^{(2)}(u) \sin v}{u} s e_{2s+1}(v, q) dv \end{aligned}$$

où :  $u = \sqrt{2q(\cosh 2z + \cos 2v)}$  et  $Z_p^{(2)}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , sont les fonctions de Bessel de 2<sup>ème</sup> espèce.

**Remarque B.7.1.** Il existe d'autres solutions de première espèce de (B.1.1) proportionnelles à  $Mc_m^{(1)}$  et  $Ms_m^{(1)}$  que l'on note  $Ce_m(z, q)$  (pour cosinus hyperbolique elliptique) et  $Se_m(z, q)$  (pour sinus hyperbolique elliptique). Ces solutions s'écrivent aussi en fonction des solutions de l'équation de Mathieu (B.1.1)  $ce_m(v, q)$  et  $se_m(v, q)$ . Elles sont données par [1] :

$$\begin{aligned} Ce_{2s+p}(v, q) &= ce_{2s+p}(iv, q) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+p}^{2s+p}(q) \cosh(2k+p)v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Se_{2s+p}(v, q) &= -ise_{2s+p}(iv, q) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+p}^{2s+p}(q) \sinh(2k+p)v \end{aligned}$$

Si  $p = 0$ , on a aussi :

$$Ce_{2s}(z, q) = \frac{ce_{2s}(\frac{\pi}{2}, q)ce_{2s}(0, q)}{(-1)^r A_0^{2s}} Mc_{2s}^{(1)}(z, q)$$

$$\text{et } Se_{2s}(z, q) = \frac{se'_{2s}(\frac{\pi}{2}, q)se'_{2s}(0, q)}{(-1)^r q B_2^{2s}} Ms_{2s}^{(1)}(z, q).$$

Si  $p = 1$  :

$$Ce_{2s+1}(z, q) = \frac{ce'_{2s+1}(\frac{\pi}{2}, q)ce_{2s+1}(0, q)}{(-1)^{r+1} \sqrt{q} A_1^{2s+1}} Mc_{2s+1}^{(1)}(z, q)$$

$$\text{et } Se_{2s+1}(z, q) = \frac{se_{2s+1}(\frac{\pi}{2}, q)se'_{2s+1}(0, q)}{(-1)^r \sqrt{q} B_1^{2s+1}} Ms_{2s+1}^{(1)}(z, q).$$

où  $m = 2s + p$  ( $p = 0$  ou  $1$ ) et en notant  $A_{2k+p}^{2s+p}(q) = A_{2k+p}$  et  $B_{2k+p}^{2s+p}(q) = B_{2k+p}$ .

$Ce_m(z, q)$  est associé à  $a_m(q)$  et  $Se_m(z, q)$  à  $b_m(q)$ .

## B.8 Notations comparatives des fonctions de Mathieu

Il existe plusieurs façons de noter les fonctions de Mathieu. Dans la littérature, "deux familles" de notations se dégagent : les notations d'Abramovitz [1] que l'on a utilisées ici (données à gauche) et les notations de Meixner et Schäfer [63], [73] (données à droite). Il existe des correspondances entre ces deux familles :

Pour  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  :

$$Mc_n^{(j)}(z, q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Re_n^{(j)}(2\sqrt{q}, \cosh z) \tag{B.8.1}$$

$$Ms_n^{(j)}(z, q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Ro_n^{(j)}(2\sqrt{q}, \cosh z)$$

$$\begin{aligned}
ce_n(v, q) &= \sqrt{\frac{\pi}{N_n^{(e)}}} Se_n(2\sqrt{q}, \cos v) \\
se_n(v, q) &= \sqrt{\frac{\pi}{N_n^{(o)}}} So_n(2\sqrt{q}, \cos v)
\end{aligned} \tag{B.8.2}$$

où  $N_n^{(e)}$  et  $N_n^{(o)}$  sont des coefficients de normalisation respectivement associés aux fonctions  $Se_n$  et  $So_n$  définis dans [73] par :

$$\int_0^{2\pi} Se_n^2(2\sqrt{q}, \cos v) dv = N_n^{(e)} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} So_n^2(2\sqrt{q}, \cos v) dv = N_n^{(o)} \tag{B.8.3}$$

Lorsqu'il ne sera pas nécessaire de distinguer les cas pairs des cas impairs, nous pourrons utiliser les notations plus concises suivantes. Pour  $j = 1, 2, 3, 4$  :

$$R_m^{(j)}(kf, \cosh \xi) = \begin{cases} Re_m^{(j)}(kf, \cosh \xi) & \text{si } m \geq 0 \\ Ro_{|m|}^{(j)}(kf, \cosh \xi) & \text{si } m < 0, \end{cases} \tag{B.8.4}$$

$$S_m(kf, \cos \theta) = \begin{cases} Se_m(kf, \cos \theta) & \text{si } m \geq 0 \\ So_{|m|}(kf, \cos \theta) & \text{si } m < 0 \end{cases} \tag{B.8.5}$$

et

$$N_m = \begin{cases} Ne_m = \int_0^{2\pi} (Se_m(kf, \cos \theta))^2 d\theta & \text{si } m \geq 0 \\ No_{|m|} = \int_0^{2\pi} (So_{|m|}(kf, \cos \theta))^2 d\theta & \text{si } m < 0 \end{cases} \tag{B.8.6}$$

# Bibliographie

- [1] A. Abramovitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York, 1972.
- [2] Om P. Agrawal. A general finite element formulation for fractional variational problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 337 :1–12, 2008.
- [3] E. Agullo, L. Giraud, A. Guermouche, and J. Roman. Parallel hierarchical hybrid linear solvers for emerging computing platforms. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences : Serie Mécanique, Elsevier, High Performance Computing*, 339 (2-3) :96–103, 2011.
- [4] C. Agut and J. Diaz. Stability analysis of the interior penalty discontinuous Galerkin method for the wave equation. *INRIA Research Report*, 2010.
- [5] M. Ainsworth, P. Monk, and W. Muniz. Dispersive and dissipative properties of discontinuous Galerkin finite element methods for the second-order wave equation. *Journal of Scientific Computing*, 27, 2006.
- [6] G.B. Airy. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 6 :379–402, 1838.
- [7] X. Antoine. *Conditions de radiation sur le bord*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 1997.
- [8] X. Antoine and H. Barucq. Microlocal diagonalization of strictly hyperbolic pseudodifferential systems and application to the design of radiation conditions in electromagnetism. *SIAM J. Appl. Math.*, 61 :1877–1905, 2001.
- [9] X. Antoine, H. Barucq, and Bendali A. Bayliss-Turkel like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape. *J. Math. Anal. Appl.*, 229 :184–211, 1999.
- [10] X. Antoine, M. Darbas, and Y.Y. Lu. An improved surface radiation condition for high-frequency acoustics scattering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :4060–4074, 2006.
- [11] Xavier Antoine and Marion Darbas. Generalized combined field integral equations for the iterative solution of the three-dimensional Helmholtz equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 41(1) :147–167, 2007.
- [12] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, No. 4 :742–760, 1982.
- [13] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39 :1749–1779, 2002.
- [14] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30, no. 5 :1024–1065, 1992.

- [15] H. Barucq. A new family of first-order boundary conditions for the Maxwell system : derivation, well-posedness and long-time behavior. *J. Math. Pure Appl.*, 82 :67–88, 2002.
- [16] H. Barucq, J. Diaz, and V. Duprat. Stability analysis of the interior penalty discontinuous Galerkin method for solving the wave equation coupled with high-order absorbing boundary conditions. *Proceedings of the tenth international conference Zaragoza-Pau on applied mathematics and statistics*, 2009.
- [17] H. Barucq and B. Hanouzet. Etude asymptotique du système de Maxwell en dimension deux d’espace avec la condition aux limites absorbante de Silver-Müller. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 316, Série I :547–552, 1993.
- [18] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 131 :267–279, 1997.
- [19] A. Bayliss, M. Gunzburger, and E. Turkel. Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM J. Appl. Math.*, 42 :430–451, 1982.
- [20] E. Bécache and P. Joly. On the analysis of bérenger’s perfectly mathced layers for Maxwell’s equations. *M2AN Math. Model Numer. Anal.*, 36, 1 :87–119, 2002.
- [21] G. Benitez Alvarez, A.F. Dourado Loula, E.G. Dutra do Carmo, and A. Alves Rochinha. A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 195 :4018–4035, 2006.
- [22] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comp. Phys.*, 114 :185–200, 1994.
- [23] V. Bonnaillie-Noel, M. Dambrine, F. Hérau, and G. Vial. On generalized ventcel’s type boundary conditions for laplace operator in a bounded domain. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 42 :931–945, 2010.
- [24] D. Bouche and F. Molinet. *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*. Springer-Verlag, 1994.
- [25] J.J. Bowman, T.B.A. Senior, and P.L.E. Uslenghi. *Electromagnetic and acoustic scattering by sample shapes*. North-Holland Publishing Compagny, Amsterdam, 1969.
- [26] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et application*. Masson, Paris, 1987.
- [27] M.F. Causley, P.G. Petropoulos, and S. Jiang. Incorporating the havriliak-negami dielectric model in the fd-td method. *JCP*, 230 :3884–3899, 2011.
- [28] J. Chazarain and A. Piriou. *Inroduction to the theory of linear partial differential equations*. North-Holland, Amsterdam/New-York, 1982.
- [29] G. Chen and J. Zhou. Boundary element methods. *Academic Press, Harcourt Brace, Jovanovitch Publishers*, 1992.
- [30] P.G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. *North-Holland Publishing CO ;, Amsterdam, Studies in Mathematics and its Applications,4*, 1978.
- [31] S. Cohen, P. Joly, J.E. Roberts, and N. Tordjman. Higher-order triangular finite elements with mass-lumping for the wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 44, 6 :2408–2431, 2006.
- [32] F. Collino and P.B. Monk. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19 :2061–2090, 1998.
- [33] D. Colton and R. Kress. Integral equations in scattering theory. *Pure and Applied Mathematics, John Wiley and sons, New York*, 1983.

- [34] M. Darbas. *Préconditionneurs analytiques de type Calderón pour les formulations intégrales des problèmes de diffraction d'ondes*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, Universités de Toulouse 1 et Toulouse 3, INSA Toulouse, 2004.
- [35] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, T.3 Transformations, Sobolev, opérateurs*. Masson, 1984.
- [36] F. Dubois, A.C. Galucio, and N. Point. Introduction à la dérivation fractionnaire - théorie et applications. 2008.
- [37] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31 :629–651, 1977.
- [38] B. Engquist and A. Majda. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32 (3) :314–358, 1979.
- [39] F.G. Friedlander. The wavefront set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 79 :145–159, 1976.
- [40] F.G. Friedlander and Joseph B. Keller. Asymptotic expansions of solutions of  $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ . *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 8(3) :387–394, 1955.
- [41] D. Goldberg. What every computer scientist should know about floating point arithmetic. *ACM Computing Survey*, 23, No 1, 1991.
- [42] M. Grote and J.B. Keller. Exact nonreflecting boundary conditions for the time dependent wave equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 55, 1995.
- [43] M. J. Grote, A. Schneebeli, and D. Schötzau. Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 44 :2408–2431, 2006.
- [44] M. J. Grote and D. Schötzau. Convergence analysis of a fully discrete discontinuous Galerkin method for the wave equation. *Preprint No. 2008-04*, 2008.
- [45] B. Gustafsson. Far-field boundary conditions for time-dependent hyperbolic systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 9 :812–828, 1988.
- [46] B. Gustafsson. High-order local non-reflecting boundary conditions : a review. *Wave Motion*, 39 :319–326, 2004.
- [47] J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cerda, A. Meneses-Nava, and R.M. Rodriguez-Dagnino. *Theory and numerical analysis of the Mathieu functions*. Tecnologico de Monterey, NL, Mexico, 2003.
- [48] H. Haddar, J.R. Li, and D. Matignon. Efficient solution of a wave equation with fractional-order. *JCAM*, 234 :2003–2010, 2010.
- [49] T. Hagstrom, A. Mar-Or, and D. Givoli. High-order local absorbing conditions for the wave equation : extensions and improvements. *J. Comp. Phys.*, 227 :3322–3357, 2008.
- [50] T. Hagstrom, T. Warburton, and D. Givoli. Radiation boundary conditions for time-dependent waves based on complete plane wave expansions. *JCAM*, 234 :1988–1995, 2010.
- [51] L. Halpern. Artificial boundary conditions for incompletely parabolic perturbations of hyperbolic systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 22 :1256–1283, 1991.
- [52] R. Higdon. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation. *Math. Comp.*, 49 :65–90, 1987.
- [53] L. Hörmander. Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations. *In Proc. Sym. Pure Math. X (Singular Integrals)*, A.M.S. Providence, pages 138–183, 1967.

- [54] T.J.R. Hughes. The finite element method. *Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ. Linear static and dynamic finite element analysis, with the collaboration of R.M. Ferencz and A.M. Raefsky*, 1987.
- [55] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 132, 1966.
- [56] V. Komornik. Exact controllability and stabilization the multiplier method. *Collection RMA, vol. 36, Masson-John Wiley, Paris-Chicester*, 1994.
- [57] G.A. Kriegsmann, A. Taflove, and K.R. Umashankar. A new formulation of electromagnetic wave scattering using the on-surface radiation condition method. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 35 :153–161, 1987.
- [58] I. Lasiecka and R. Triggiani. Uniform exponential energy decay in a bounded region with  $L^2(0, t; L^2(\Omega))$ -feedback control in the Dirichlet boundary conditions. *J. Diff. Eq.*, 66 :340–390, 1987.
- [59] P. Lax and R.S. Phillips. *Scattering theory*. Academic Press, 1967.
- [60] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, T.1 : Contrôlabilité exacte*. Masson, 1988.
- [61] E. Mathieu. Le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *Journal de mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville)*, 13 :137–203, 1968.
- [62] N. W. McLachlan. *Theory and application of Mathieu functions*. New York, Oxford University Press, 1947.
- [63] J. Meixner and F.W. Schafle. *Matieusche funktionen and spheroidfunktionen*. Springer Verlag, Berlin, 1954.
- [64] S. Nicaise and C. Pignotti. Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay p. 935-958. *Differential and Integral Equations*, 21 :935–958, 2008.
- [65] L. Nirenberg. Pseudodifferential operators and some applications. *CSBM Regional Conf. Ser. in Math. AMS 17, Lectures on Linear Partial Differential Equations*, pages 19–58, 1973.
- [66] A. Patera. A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansions. *J. Comp. Phys.*, 54 :468–488, 1984.
- [67] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
- [68] W.H. Reed and T.R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. *Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM*, 1973.
- [69] J.A. Roden and S.D. Gedney. Convolution pml (cpml) : An efficient fdtd implementation of the cfs-pml for arbitrary media microwave and optical technology letters. *Microwave and Optical Technology Letters*, 27 (5) :334–339, 2000.
- [70] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives*. Yverdon, Switzerland, Gordon and Breach, 1993.
- [71] A. Sommerfeld. *Lecture on Theoretical Physics*. Academic Press, 1964.
- [72] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. 1979.
- [73] J.A. Stratton. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill, New-York, 1941.
- [74] M.E. Taylor. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, NJ, 1981.
- [75] S.V. Tsynkov. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review. *Appli. Num. Math.*, 27 :465–532, 1998.