



HAL
open science

Failles et séismes : quelques approches statistiques

Jean Schmittbuhl

► **To cite this version:**

Jean Schmittbuhl. Failles et séismes : quelques approches statistiques. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1994. Français. NNT : . tel-00819860

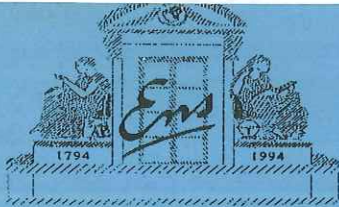
HAL Id: tel-00819860

<https://theses.hal.science/tel-00819860>

Submitted on 2 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



BRITO DANIEL

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité:

Physique

présentée par

Jean SCHMITTBUHL

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la Thèse:

Failles et Séismes:
quelques approches statistiques

Soutenue le 12 décembre 1994

Devant le jury composé de:

- M. E. GUYON (président)
- M. K. J. MALOY (rapporteur)
- M. C. H. SCHOLZ (rapporteur)
- M. Y. C. ZHANG (rapporteur)
- M. Y. BERTHAUD (examineur)
- M. S. ZALESKI (examineur)
- M. J. P. VILOTTE (directeur)
- M. S. ROUX (co-directeur)

2. Avril 2003

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GÉOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53

F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité:

Physique

présentée par

Jean SCHMITTBUHL

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la Thèse:

Failles et Séismes:
quelques approches statistiques

Soutenue le 12 décembre 1994

Devant le jury composé de:

M. E. GUYON (président)
M. K. J. MALOY (rapporteur)
M. C. H. SCHOLZ (rapporteur)
M. Y. C. ZHANG (rapporteur)
M. Y. BERTHAUD (examineur)
M. S. ZALESKI (examineur)
M. J. P. VILOTTE (directeur)
M. S. ROUX (co-directeur)

10249332

Remerciements

Etienne Guyon a accepté de présider le jury de cette thèse en dépit de ces très nombreuses activités comme directeur de l'Ecole. Je le remercie chaleureusement pour cette marque d'intérêt. Messieurs Zhang et Måløy se sont déplacés de bien loin pour être les rapporteurs européens de cette thèse au label du même nom. Je leur suis très reconnaissant de ce double effort. Chris Scholz en année sabbatique à Paris, me fait l'honneur d'être également rapporteur de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements. Enfin, c'est un grand merci que j'adresse à Stéphane Zaleski et Yves Berthaud pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Ce travail de thèse a été dirigé par Jean-Pierre Vilotte. Je lui dois une immense reconnaissance pour m'avoir fourni, à tout moment, les meilleures conditions de travail possibles: à la fois par les outils numériques mis à ma disposition, ou les conseils prodigués, les «envois» à de nombreux congrès internationaux, la constitution de multiples collaborations. La co-direction de Stéphane Roux est un point clé de ce travail. Responsable de mon DEA, il est resté tout au long de cette thèse un acteur principal. Son dynamisme, son ouverture, sa qualité d'écoute, sa disponibilité ont été et seront toujours pour moi, l'image d'un exemple. Qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements les plus forts et les plus sincères.

Au cours de cette thèse, nombreuses ont été les collaborations, toujours sources de découvertes et de dialogues. J'ai passé trois mois à New-York dans le laboratoire de Chris Scholz. Je tiens à le remercier pour son accueil ainsi que tous les membres de son équipe que j'ai pu rencontrer. J'adresse des remerciements tout particuliers à Weibin Wang et Ted Koczynski sans lesquels, le travail entrepris n'aurait pu être conclu. Tout au long de cette thèse, un travail expérimental régulier a été effectué au LMT à l'ENS de Cachan. Yves Berthaud m'y a toujours très gentiment accueilli, de même que de nombreux membres du laboratoire comme Marc, Thierry, Jean-Marc et bien d'autres. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude. Nombreuses furent les rencontres et au combien animées les discussions avec Raül Madariaga et Alain Cochard. Je garde un bien agréable souvenir de cette collaboration. Nous avons également souvent traversé le laboratoire (LPMMH) de l'ESPCI. La grande qualité d'accueil que j'avais trouvée pendant mon DEA y est toujours restée. Je tiens à remercier ici tous les membres de ce laboratoire, en particulier Hans Hermann, Jean-Pierre Hulin, Pascal Kurowski, Franck Plouraboué. C'est avec beaucoup de plaisir que j'ai retrouvé un camarade de Lycée, François Schmitt au LMD à Jussieu. Nos discussions avec Daniel Schertzer ont toujours été fructueuses. Je les en

remercie. Au début de ce travail de Thèse, une collaboration a été initiée avec Sylvie Gentier du BRGM. Elle nous a fourni des données précieuses. Qu'elle trouve ici l'expression de ma reconnaissance. Enfin, je tiens à remercier Knut Jorgen Måløy pour la collaboration que nous avons récemment démarrée avec lui. C'est un bien plaisant souvenir que j'ai gardé de sa rencontre, il y a maintenant plus de deux ans lors d'une Gordon Conférence.

Cette thèse de «physique» est le résultat d'un changement de cap que j'ai pris à la fin de mon service militaire. Elle m'a permis d'aborder certains domaines de la géophysique avec un tout autre regard. Ce nouveau départ, quelque peu risqué, a été possible grâce aux discussions et la confiance de quelques personnes que je tiens à remercier tout spécialement. Parmi elles, je citerais Yves Caristan, Saint-Clair Dujon, Claude Froidevaux et Jean-Pierre Hulin.

L'essentiel de cette thèse s'est déroulé dans l'équipe de géophysique du Département TAO de l'ENS de Paris. J'exprime toute ma reconnaissance à tous ceux, qui de près ou de loin, ont du me supporter et m'ont permis de suivre jusqu'au bout la route du thésard. Merci à Laurent, Daniel, Bruno, Ji, Andreas, Fawsia, Pascal, Philippe, Luce, Claude, Françoise, Christophe, Denise, Valérie, Marie-Pierre, Mi-sha, Henri-Claude, Thierry, Sylvain, Paul, Pablo, Jean-Matthieu, Yanick, Frédéric, Emmanuelle, Olivier, Sandrine et tous les autres.

Je tiens également à remercier ceux qui par leurs commentaires, leurs discussions m'ont permis d'apprendre bien des choses: P. Davy, F. Cornet, D. Pissarenko, F. Heslot, B. Baumberger, B. Perrin, M. Barquins, Y. Gueguen, L. Jouniaux, S. Ciliberto, C. Laroche, L. Knopoff, P. Bernard, L. Gilbert V. Croquette, M. Bonnet et tous ceux que j'oublie.

Je ne peux finir sans exprimer ma gratitude à ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce manuscrit. Je tiens également à remercier Marie-Paule, mes famille et belle-famille, mes amis pour leur soutien sans condition lors de ces trois années de dur et précieux labeur.

*à celle qui est
devenue mon épouse*

à la petite Marie

Préambule

Ce travail de thèse est l'aboutissement d'une formation comprenant plusieurs facettes. Tout d'abord, l'apprentissage de la géologie proposé au cours du magistère de sciences de la Terre, m'a initié aux différents objets de cette science très riche. En effet, la géologie couvre des domaines particulièrement variés, allant de la structure des planètes à la minéralogie de cristaux, de l'apparition de la vie à l'histoire récente de l'homme, des cycles géodynamiques de deux cents millions d'années aux derniers tremblements de Terre si soudains.

La compréhension de tous ces phénomènes naturels, si complexes, est abordée en général selon deux axes principaux de recherche. L'un se base sur l'observation et la description. C'est l'approche dite naturaliste. La préparation de l'agrégation de sciences naturelles m'a permis d'en entrevoir un certain panorama. L'autre approche cherche davantage à comprendre les mécanismes en jeu, en tentant de les individualiser et de les «caricaturer» au mieux tant sur le point physique (géophysique) que chimique (géochimie). En général, cette démarche conduit à la définition de modèles du monde réel et requiert bien souvent l'utilisation de méthodologies issues de domaines scientifiques différents ainsi que le développement d'outils spécifiques. Le nombre et la complexité de ces outils sont à présent si grands, que la simple maîtrise de quelques uns d'entre eux nécessite déjà une longue expérience. Au travers du DEA de physique des liquides, j'ai donc essayé d'acquérir certaines de ces méthodes d'analyse avec, en particulier, une initiation à la mécanique des milieux continus que sont les fluides, au comportement des interfaces, aux techniques d'études des systèmes dynamiques non linéaires ou encore à celles de la physique des états critiques.

Sous-jacente à cette formation, a toujours existé au fond de moi une certaine fascination pour les phénomènes dynamiques. Ainsi est née une affection toute particulière pour les phénomènes géologiques qui «bougent» comme, par exemple, les séismes, la tectonique, ou encore la circulation des fluides. Travailler sur les failles géologiques peut être considéré comme un bon compromis.

Ce travail de thèse correspond à l'application de méthodes issues de la physique de la matière hétérogène, à l'objet géologique que sont les failles et leurs séismes. Au cours de ces trois années, cette relation *géo-physique*, à ma grande satisfaction, a pu prendre trois aspects complémentaires. Si une bonne partie du travail a été numérique, à travers la réalisation de nombreux modèles ou le traitement et l'analyse de données, cette thèse aura également donné lieu à un travail à la fois expérimental

et théorique. En ce qui concerne le travail expérimental, une collaboration régulière avec le laboratoire de Mécanique et Technologie de l'ENS Cachan, ainsi qu'une période de trois mois au laboratoire de Mécanique des Roches au LDEO (New York), m'auront permis de participer activement à la réalisation de deux expériences. Elles ont abouti à l'acquisition des principales données analysées au cours de ce travail. Par ailleurs, j'ai beaucoup appris par la résolution analytique de différents problèmes exposés dans la suite de ce manuscrit.

Il me semble nécessaire d'ajouter quelques points quant à l'esprit général dans lequel a été synthétisé et rédigé ce travail. Tout d'abord, il cherche à s'inscrire dans le domaine de la géophysique de la matière hétérogène qui, me semble-t-il, n'en n'est qu'à un stade embryonnaire. Les approches, dans ce cadre, sont bien souvent préliminaires. Il n'apparaît pas toujours de consensus clairement établis. Beaucoup de discussions et de spéculations existent encore. La seconde remarque se place davantage au niveau du travail réalisé pendant cette thèse. En effet, ce travail contient des résultats partiels, dans des directions différentes. Parmi ces dernières, deux peuvent être considérées comme principales. Il s'agit d'une part, de l'étude de la géométrie des surfaces de fractures, son origine et ses conséquences et d'autre part, de l'étude des modèles dynamiques discrets de rupture, du type de celui introduit par *Burridge and Knopoff* [1967].

J'ai cependant choisi de construire ce manuscrit autour d'un même objet (les failles et leurs séismes) et de montrer en quoi les diverses approches utilisées apportent des éclairages différents sur cet objet. Pour parvenir à cette fin, des schématisations et simplifications des problèmes en jeu, ont été faites. Certaines d'entre elles pourront étonner le lecteur. Il convient de redire qu'il s'agit d'études préliminaires. En d'autres mots, ce travail est à voir comme un point de départ plutôt qu'un point d'arrivée.

Guides de lecture

Comme cela a été évoqué précédemment, j'ai choisi de présenter ce travail en utilisant comme fil directeur, l'objet d'étude, à savoir: les failles et leurs séismes. Sont proposées ici, d'autres façons de parcourir le document, à travers des guides de lecture permettant au lecteur qui le souhaite, de trouver des informations orientées vers des préoccupations spécifiques¹:

1. Outils de caractérisation de l'invariance d'échelle de type auto-affine, lire les points: I.1.2/I.1.3/I.1.5.1/I.1. Annexe 3/II.1.1/II.1.2.3/II.1.2.4
2. Conséquences physiques de la géométrie auto-affine des fractures, lire les points: I.2/I.2. Annexe 1/I.2. Annexe 2/I.2. Annexe 3/II.2.4.2/II.3.1/II.3. Annexe 1
3. Origine de la rugosité des surfaces de fractures, lire les points: II.1/II.1. Annexe 1/-II.1. Annexe 2/II.2. Introduction

1. Afin de faciliter l'emploi de ces guides, nous donnerons uniquement les numérotations des parties, chapitres et paragraphes concernés, en accord avec la table des matières.

4. Etude du modèle de Burridge-Knopoff, lire les points: II.2.3.3/II.2.4.2/II.3.2/-II.3.3/II.3.4/II.3. Annexe 2/II.3. Annexe 3/II.3. Annexe 4/II.3. Annexe 5
5. Les travaux expérimentaux, lire les points: I.1/I.1. Annexe 1/I.1. Annexe 2/-I.2.1.2/II.1. Intro
6. Les travaux numériques: a) analyse de données, lire les points: I.1.2/I.1.3/-I.1. Annexe 3/II.1.1.2/II.1.1.3/II.1.1.4, b) modélisation, lire les points: I.2.1.3/-I.2.2.1/I.2. Annexe 2/I.2. Annexe 3/II.1.2/II.1. Annexe 2/II.2.4/II.3 (sauf II.3.3.2)
7. Travaux théoriques, lire les points: I.2.1.1/I.2.1.2/I.2.2.1/I.2.2.2/II.3.3.2

Intégration des publications Une grande partie des résultats présentés dans cette thèse ont fait ou font l'objet de publications. Nous avons choisi d'intégrer les documents correspondants dans les chapitres concernés. Ils apparaissent sous forme d'annexes à la fin de chaque chapitre. Au début de chaque chapitre, nous précisons comment tel ou tel article s'intègre dans le chapitre (*liens avec les publications*). Nous proposons au lecteur de se référer régulièrement à ces annexes où sont développés certains points précis de manière plus autonome et plus détaillée.

Afin d'éviter de dupliquer l'information, nous nous sommes efforcés, dans ce manuscrit, de présenter le travail sous un angle différent de celui des articles. Précisons qu'en général, l'effort de synthèse nous a conduits à laisser certains détails (calculs, points techniques, précisions spécifiques) dans les articles. De plus, la plupart des figures n'ont pas été dédoublées, afin d'alléger le manuscrit. Elles se trouvent ainsi principalement dans les annexes. Enfin, lorsque nous estimons qu'il ne nous est pas véritablement possible de dégager un éclairage sensiblement différent de celui utilisé dans un article, nous avons choisi d'intégrer directement celui-ci dans le texte. De ce fait, certains paragraphes de cette thèse sont en anglais. Nous prions le lecteur francophone de bien vouloir nous en excuser.

Résumé

Cette thèse propose différentes approches statistiques permettant de caractériser la géométrie des failles et la dynamique des tremblements de Terre. La formation des failles est considérée comme le résultat d'une localisation spatiale de la déformation fragile de la lithosphère et la sismicité comme sa localisation temporelle. *La partie I* est consacrée à l'étude de la géométrie des failles. Au cours du chapitre I.1, nous montrons qu'au premier ordre, la surface de la faille est auto-affine avec un exposant de 0.8. Nous examinons également des surfaces de fracture à l'échelle du laboratoire et obtenons une propriété similaire d'auto-affinité. Nous supposons dans le suite du travail que failles et surfaces de fracture sont identiques statistiquement. Dans le chapitre I.2, nous nous intéressons aux implications géophysiques de ces résultats, et en particulier à quelques propriétés lors d'une déformation quasistatique (i.e. non sismique) de la faille. Le contact normal et élastique entre deux surfaces auto-affines est estimé à partir d'arguments d'échelle. Nous montrons que l'ouverture de la faille évolue de façon non triviale en fonction du cisaillement horizontal, impliquant l'exposant d'auto-affinité. Nous nous concentrons également sur les propriétés de transport (percolation de fluides à seuil) ainsi que leur évolution lors de mouvements lents de la faille (e.g. évolutions de la perméabilité et du transfert de chaleur). *La partie II* traite de la déformation sismique le long de la faille. Dans le chapitre II.1, nous analysons la création de l'interface lors du processus de fracturation. Expérimentalement, nous suivons le développement de la rugosité à partir d'une initiation rectiligne jusqu'au régime «permanent» (i.e. surface auto-affine). Numériquement, nous étudions la formation de la rugosité d'un front de fracture en mode I, lors d'une propagation plane et quasi-statique, en utilisant une formulation perturbative (au premier ordre). Des coefficients dynamiques sont estimés. Le chapitre II.2 fournit un panorama bibliographique des propriétés de frottements statique et dynamique de la faille ainsi qu'une présentation des deux contributions que nous avons développées dans ce domaine. Au cours du dernier chapitre II.3, nous montrons, d'une part, les résultats de l'influence sur le frottement, de la géométrie auto-affine, en régime inertiel. D'autre part, nous étudions un modèle dynamique de patin-ressort. Lors d'un chargement lent (i.e. conditions lithosphériques), une approche «thermodynamique» permet une description déterministe du système. A chargement rapide, la dynamique du système change significativement: des ondes solitaires apparaissent. Nous proposons une caractérisation analytique de ces ondes. Pour finir, nous mettons en correspondance le frottement d'un massif élastique bidimensionnel avec le modèle de patin-ressort grâce à un processus de renormalisation.

Abstract

This PhD thesis proposes different statistical approaches to characterize the geometry of faults and the dynamics of earthquakes. The process of faulting is considered as a localization in space of the brittle deformation of the lithosphere and seismicity as its localization in time. *Part I* is devoted to the study of the geometry of fault surfaces. In chapter I.1, we show that to first order the fault surface is self-affine with an exponent of 0.8. We also examine fracture surfaces at laboratory scale and obtain a similar self-affine property. We assume in the following that both faults and fractures surfaces are identical statistically. In chapter I.2, we look at the geophysical implications of previous results. We study some properties of quasi-static (i.e. non seismic) deformation of a fault. Normal elastic contact of two self-affine surfaces is computed with scaling arguments. Evolution of the aperture of a fault is shown to scale with the horizontal shear in a non trivial way, involving the self-affine exponent. We also focus on transport properties (percolation of fluids with a threshold) and their evolutions with slow motions of the fault (e.g. evolutions of permeability and heat transfer). *Part II* deals with seismic deformation along the fault. In chapter II.1, we analyze the generation of the interface during the cracking process. Experimentally, we follow the development of the roughness from a straight notch up to its "permanent" regime (i.e. self-affine scaling). Numerically, we study the roughening of a mode I crack front during a quasi-static plane propagation, using a first order perturbation formulation. Dynamical coefficients are pointed out. Chapter II.2 is devoted to an overview of the static and dynamic frictional properties of faults and present the framework of both contributions we developed in this field. In the last chapter II.3, we show, on one hand, the results of the influence on friction of the self-affine geometry within the inertia regime. On the other hand, we study a dynamical spring-block model. With a slow loading (i.e. lithospheric conditions), a "thermodynamical" approach provides a deterministic description of the system evolution. At high rate of loading, the dynamics of the system changes drastically: solitary waves emerge. We propose an analytical characterization of these waves. Finally, we map the friction of a two dimensional elastic block on the spring-block model with respect to a renormalization approach.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | i |
| Préambule | v |
| Résumé | ix |
| Abstract | xi |
| Introduction | 1 |
| 0.1 La machine Terre | 1 |
| 0.1.1 Les éléments constitutants | 1 |
| 0.1.2 Les sources d'énergie | 2 |
| 0.1.3 La dynamique | 3 |
| 0.2 Un élément particulier: la lithosphère | 5 |
| 0.2.1 Ses constituants et leurs propriétés | 5 |
| 0.2.2 Les conditions aux limites | 5 |
| 0.2.3 Comportement mécanique | 6 |
| 0.3 L'analyse d'un régime mécanique singulier | 7 |
| 0.3.1 Vie des failles | 7 |
| 0.3.2 Une longue histoire | 11 |
| 0.3.3 S'agit-il d'un état critique permanent? | 12 |
| 0.4 Des outils de la physique statistique | 14 |
| 0.4.1 Désordre géométrique et fractales | 14 |
| 0.4.2 Désordre dynamique et analyse des systèmes dynamiques | 15 |
| Présentation du plan de la thèse | 16 |
| | |
| I Failles et désordre | 19 |
| | |
| 1 Caractérisation géométrique de l'interface | 21 |
| Introduction | 21 |
| 1.1 Les objets d'étude | 22 |
| 1.1.1 Une faille à l'échelle du terrain | 22 |
| 1.1.2 Des fractures à l'échelle du laboratoire | 23 |
| 1.2 Les outils d'analyse mono-fractales | 24 |
| 1.2.1 Auto-similarité et auto-affinité | 24 |
| 1.2.2 Les outils d'analyse | 27 |

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
 MAISON DES GEOSCIENCES
 DOCUMENTATION
 B.P. 53
 F. 38041 GRENOBLE CEDEX
 Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
 Mail: ptalour@ujf-grenoble.fr

27 AOÛT 2003

| | | |
|-----------|---|------------|
| 1.3 | Les outils d'analyse multi-fractales | 32 |
| 1.4 | Résultats | 35 |
| 1.4.1 | Auto-affinité | 35 |
| 1.4.2 | Multi-fractalité | 36 |
| 1.5 | Discussion | 36 |
| 1.5.1 | Relation avec les autres travaux | 36 |
| 1.5.2 | Fracture et faille: une hypothèse de travail | 37 |
| | Conclusion | 38 |
| | Annexes | 39 |
| | Annexe 1: <i>Field Measurements of the Roughness of Fault Surfaces</i> | 41 |
| | Annexe 2: <i>Scaling Invariance of Crack Surfaces</i> | 53 |
| | Annexe 3: <i>Reliability of Self-Affine Measurements</i> | 91 |
| 2 | Implications géophysiques | 117 |
| | Introduction | 117 |
| 2.1 | Déformation asismique | 119 |
| 2.1.1 | Poinçonnement mécanique | 119 |
| 2.1.2 | Cisaillement et évolution de l'ouverture | 122 |
| 2.1.3 | Evolution du point de contact | 127 |
| 2.2 | Propriétés de transport | 129 |
| 2.2.1 | Transport sans déformation | 129 |
| 2.2.2 | Transport avec déformation | 134 |
| | Conclusion | 135 |
| | Appendice A | 137 |
| | Appendice B | 139 |
| | Annexes | 140 |
| | Annexe 1: <i>Some Physical Properties of Self-Affine Rough Surfaces</i> | 141 |
| | Annexe 2: <i>Percolation through self-affine surfaces</i> | 149 |
| | Annexe 3: <i>Geometry of contact between self-affine surfaces</i> | 171 |
| II | Séismes et désordre | 185 |
| 1 | Création de l'interface | 187 |
| | Introduction | 187 |
| 1.1 | Approche expérimentale | 188 |
| 1.1.1 | Objet d'étude | 188 |
| 1.1.2 | Ecart-type et rugosité | 189 |
| 1.1.3 | Evolution de la longueur de corrélation | 190 |
| 1.1.4 | Intersection avec le plan moyen de fracture | 192 |
| 1.2 | Approche numérique | 193 |
| 1.2.1 | Modélisation du front de fracture | 194 |
| 1.2.2 | Discretisation et cas-test | 197 |
| 1.2.3 | Propagation en régime permanent | 199 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 1.2.4 | Propagation en régime transitoire | 203 |
| | Conclusion | 204 |
| | Annexes | 207 |
| | Annexe 1: <i>Development of roughness in crack propagation</i> | 209 |
| | Annexe 2: <i>Pinning of interfaces: effect of non local interactions</i> | 219 |
| 2 | Rejeu de l'interface | 229 |
| | Introduction | 229 |
| 2.1 | Lois phénoménologiques | 231 |
| 2.1.1 | Frottement sec quasi-statique | 232 |
| 2.1.2 | Frottement dynamique | 234 |
| 2.1.3 | Mémoire du frottement | 238 |
| 2.2 | Les micro-mécanismes | 239 |
| 2.2.1 | Les modes de déformation | 240 |
| 2.2.2 | Les effets de surface | 244 |
| 2.2.3 | Propagation d'ondes | 245 |
| 2.2.4 | Agents extérieurs | 246 |
| 2.3 | Désordre | 247 |
| 2.3.1 | Une dynamique complexe | 248 |
| 2.3.2 | Variables d'état | 248 |
| 2.3.3 | Nombre de degrés de liberté | 249 |
| 2.3.4 | Transformation d'échelles | 249 |
| 2.4 | Deux directions d'étude | 250 |
| 2.4.1 | Influence du désordre géométrique | 250 |
| 2.4.2 | Modèle dynamique discret | 252 |
| | Conclusion | 255 |
| 3 | Quelques résultats | 257 |
| | Introduction | 257 |
| 3.1 | Géométrie auto-affine et loi de frottement | 258 |
| 3.1.1 | Vitesses caractéristiques | 258 |
| 3.1.2 | Lois de frottement | 259 |
| 3.1.3 | Temps de contact | 260 |
| 3.2 | Une thermodynamique des tremblements de Terre | 262 |
| 3.2.1 | Variables globales | 262 |
| 3.2.2 | Influences des paramètres | 265 |
| 3.2.3 | Cohérence avec les lois sismologiques | 265 |
| 3.3 | Chargement rapide et ondes solitaires | 267 |
| 3.3.1 | Emergence des ondes propagatives | 268 |
| 3.3.2 | Caractérisation analytique | 274 |
| 3.3.3 | Loi de frottement | 277 |
| 3.3.4 | Influence de la radiation | 281 |
| 3.3.5 | Dimension du système | 283 |
| 3.4 | Transformations d'échelles et loi de Coulomb | 287 |

| | | |
|-------|--|------------|
| 3.4.1 | Une approche par renormalisation | 289 |
| 3.4.2 | Loi de frottement et vitesse de glissement | 291 |
| | Conclusion | 292 |
| | Annexes | 293 |
| | Annexe 1: <i>Dynamic friction of self-affine surfaces</i> | 295 |
| | Annexe 2: <i>Conservative and dissipative events in an earthquake fault model</i> | 313 |
| | Annexe 3: <i>Propagative Macrodislocation Modes in an Earthquake Fault Model</i> | 343 |
| | Annexe 4: <i>Analytic characterization of propagative solutions in a discrete frottement model</i> | 355 |
| | Annexe 5: <i>Velocity weakening friction: A renormalization approach</i> . | 373 |
| | Conclusion | 385 |
| | Références | 389 |
| | Listes des tableaux | 397 |
| | Listes des figures | 398 |
| | Listes des articles publiés ou en préparation | 401 |

Introduction

0.1 La machine Terre

0.1.1 Les éléments constitutants

La planète Terre est constituée d'enveloppes sphériques concentriques. Chacune de ces enveloppes se définit par le contraste de ses propriétés avec ses voisines: contraste de densité, de viscosité, d'élasticité, de composition, de phases, de température, etc. Les lieux de ces contrastes constituent des interfaces. Lorsque plusieurs interfaces (mécaniques, chimiques, thermiques, etc) se superposent, elles individualisent alors les principaux éléments constitutants de la Terre: atmosphère, croûte, manteau, noyau.

La qualité de la description de ces différentes entités et de leurs frontières, est variable. En effet, il faut avoir présent à l'esprit que celui qui procède à l'analyse, n'est autre que l'Homme. Il introduit dans sa description un biais incontournable, lié à l'accessibilité des structures. Parcourir trois milles kilomètres le long de la surface de la Terre pour étudier la morphologie du relief local est bien plus simple que de «partir» dans les profondeurs de la planète pour aller examiner la topographie du noyau. Ainsi, la finesse de la description de l'interface où vit l'Homme (la biosphère), entre la croûte et l'atmosphère, est sans commune mesure avec, par exemple, celle de l'interface noyau-manteau. Bien souvent, plus la distance à l'objet d'étude est grande, plus le pouvoir de résolution des méthodes d'observation est faible.

Précisons rapidement quelles sont les principales structures de la Terre. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux ensembles mécaniques de la Terre. Une première séparation vient alors naturellement à l'esprit: le sol. Au-dessus, existe l'atmosphère et l'hydrosphère, en dessous, la Terre solide. Les premiers sont les lieux de mouvements rapides et complexes aux yeux de l'Homme. Par contre, la Terre solide paraît quasiment immobile. La connaissance de sa structuration se fonde principalement sur des observations indirectes (sismiques) (voir *Caron et al. [1992]*). On distingue ainsi, la lithosphère, l'asthénosphère, la zone de transition, le manteau inférieur, le noyau externe et la graine.

Si la dénomination de Terre solide est commode, elle est abusive puisque le noyau externe présente les propriétés mécaniques et thermodynamiques d'un liquide. Sa viscosité est comparable à celle de l'eau. Elle se trouve dans des conditions de température et de pression compatible avec la phase liquide du fer. Le reste de

la Terre se trouve dans des conditions thermodynamiques telles que le milieu est globalement en phase solide. Il peut en effet exister des traces de fusion partielle (quelques pourcents) comme par exemple dans l'asthénosphère. Cependant, un état thermodynamique solide peut paraître mécaniquement fluide². Il s'agit en fait de la distinction entre un régime élastique et un régime de type fluage. Tout matériau solide va répondre à la façon d'un fluide ou d'un solide, en fonction du rapport entre la vitesse de sollicitation mécanique et la vitesse de relaxation du matériau³. Lorsque la vitesse de sollicitation est grande par rapport à la vitesse de relaxation, le comportement est de type «solide», i.e. élastique. Dans le cas contraire, il est visqueux. C'est ainsi, qu'à l'échelle des temps géologiques, le manteau est visqueux. Notons que de la modélisation de ce solide visqueux, est souvent faite par analogie entre les cellules de convection du manteau et l'instabilité de Rayleigh-Benard en hydrodynamique.

L'un des premiers moyens mis en œuvre pour caractériser les propriétés mécaniques des différentes structures de la Terre est la sismologie. En effet, la propagation des ondes S (cisailantes) est fonction du couplage qui existe dans le milieu qu'elle traverse, entre contraintes normales et contraintes cisailantes, (cf. le coefficient de Poisson). Plus le milieu se comporte comme un fluide, plus la vitesse des ondes S chute. Leur vitesse décroît au niveau de l'asthénosphère. Par contre, elles sont véritablement arrêtées par l'enveloppe extérieure du noyau. Précisons que cette distinction sismique entre solide et fluide est de nature mécanique pour une vitesse de sollicitation élevée (quelques secondes).

0.1.2 Les sources d'énergie

Si la Terre est une machine active, elle le doit à l'existence de sources considérables d'énergie. Le tableau 0.1, (d'après Poirier [1991]), nous dresse un bilan schématique des puissances moyennes en jeu.

| Sources | | Puissance (W) |
|----------|--|---------------------|
| Externe | Rayonnement Solaire reçu en surface | $7.1 \cdot 10^{17}$ |
| Internes | Désintégration radioactive dans la croûte | $0.8 \cdot 10^{13}$ |
| | Désintégration radioactive dans le manteau | $2.4 \cdot 10^{13}$ |
| | Refroidissement de la chaleur initiale | $1.0 \cdot 10^{13}$ |

TAB. 0.1 - principales sources d'énergie

La source principale d'énergie est extérieure à la Terre. Il s'agit du Soleil, qui fournit une puissance dix mille fois supérieure à l'énergie produite à l'intérieur de la planète. Cependant l'influence du soleil ne se fait sentir que dans les couches les plus

2. La notion de fluide n'a pas du tout le même sens selon que l'on parle d'un point de vue mécanique ou thermodynamique.

3. Ce rapport est encore appelé nombre de Deborah.

externes de la Terre. Elle conditionne complètement l'atmosphère et l'hydrosphère mais ne pénètre que de quelques mètres dans le sol, car le support de cette énergie (i.e. le rayonnement électromagnétique) est y est définitivement arrêté. Les sources d'énergie susceptible d'agiter la Terre solide sont donc principalement internes. Notons toutefois, que le soleil est le principal moteur de l'érosion du relief et donc du façonnage de cette Terre solide⁴. Par ailleurs, des phénomènes de gravitation agissent sur l'ensemble du volume de la Terre. L'effet gravitaire est surtout important sur les enveloppes à la fois denses et éloignées du centre de la Terre. Ainsi, non seulement l'hydrosphère est sous l'influence de la Lune⁵ (cf. les marées), mais aussi la lithosphère.

Les sources d'énergie internes à la Terre, sont de deux natures. L'essentiel de l'énergie provient de la désintégration radioactive. Notons que la croûte⁶ est une zone où la production est certes plus faible que dans le reste de la Terre, mais c'est un lieu où la densité de production est très élevée. En effet, elle est le siège du quart de la production, alors qu'elle ne représente qu'environ 1% du volume de la Terre. La seconde source est celle liée au refroidissement du stade initial de la Terre. Ce phénomène entraîne la cristallisation d'énormes masses de fer au sein du noyau assurant une croissance de la graine solide.

C'est la présence de ces sources d'énergie internes et externes, qui font de la Terre une planète «vivante».

0.1.3 La dynamique

L'énergie produite au sein de la Terre doit être évacuée sinon la température augmenterait indéfiniment, ce qui aboutirait à une volatilisation de la planète. L'étude des diverses «stratégies» que va utiliser la Terre pour dissiper l'énergie produite, constitue véritablement ce qui anime et passionne le géologue. Deux types de phénomènes sont à distinguer: le transport de cette énergie des lieux de production vers les lieux de dissipation et la dissipation proprement dite.

Le transport de la chaleur se fait de deux façons différentes. Le profil simplifié de la température au sein du globe permet de mettre clairement en évidence cette dualité (voir Figure 0.1, d'après Poirier [1991]).

On constate que l'essentiel du manteau présente une conductivité thermique apparente anormalement forte⁷ par rapport à la lithosphère ou à la base du manteau. Le manteau est effectivement le siège d'un processus de convection sur des échelles de temps (200 millions d'années) et d'espace (2000 km) considérables. Grâce à ce processus, la chaleur est efficacement transportée de l'intérieur de la Terre solide, à la périphérie. Dans les couches limites (i.e. lithosphère et base du manteau), le transfert de chaleur est principalement conductif.

4. Le soleil détruit par l'intermédiaire des vents, des pluies, des variations thermiques, etc ce que la Terre produit, i.e. le relief

5. L'ensemble des planètes sont à l'origine de phénomènes gravitaires. Cependant, celles dont le rôle est dominant sont la Lune et le Soleil.

6. La croûte terrestre constitue le trente premiers kilomètres de la lithosphère

7. Le profil est quasi-vertical.

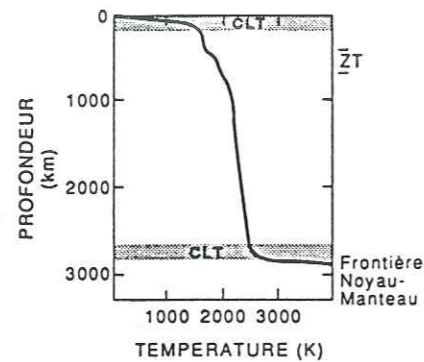


FIG. 0.1 - Profil de température à l'échelle du globe.

Les processus de dissipation sont très variés. Les principaux sont présentés dans le tableau 0.2 (d'après Poirier [1991]).

| Processus | Puissance globale (10^{12} W) |
|------------------------------|----------------------------------|
| Surrection des montagnes | 0.007 |
| Volcanisme | 0.8 |
| Tremblements de Terre | 1 |
| Flux de chaleur à la surface | 42 |
| Champ magnétique | 0.0008 |

TAB. 0.2 - Principaux processus de dissipation de l'énergie terrestre

L'essentiel de la dissipation a lieu à la surface du globe. Elle se produit par émission de chaleur dans l'atmosphère. Il existe cependant des voies «minoritaires» en termes de quantité de chaleur dissipée, mais particulièrement importantes aux yeux de l'Homme. En effet, en surface, environ 1% de la puissance dissipée, est à l'origine des principales manifestations géologiques: surrection des chaînes de montagnes, volcanisme et tremblements de Terre. En profondeur, l'effet le plus significatif se situe au niveau du noyau externe. Dans ce milieu conducteur (constitué essentiellement de Fer), se développent d'importants mouvements turbulents à l'origine du champ magnétique terrestre. Nous en concluons que la lithosphère, épiderme de notre Terre solide, est une enveloppe dont la principale caractéristique est d'être une couche limite, lieu d'une importante dissipation d'énergie (44 tera Watt).

0.2 Un élément particulier: la lithosphère

0.2.1 Ses constituants et leurs propriétés

Il faut distinguer la lithosphère océanique de la lithosphère continentale. Toutes deux comportent une croûte et un manteau supérieur. La première, essentiellement constituée de gabbros et de basaltes, est plus dense ($\rho \approx 3.0$) que la seconde ($\rho \approx 2.7$) faite de granites et de grano-diorites. Cette différence de densité est une propriété fondamentale. En effet, les continents apparaissent comme les structures les plus légères de la Terre solide. En d'autres termes, ils «surnagent».

Les détails de la structure des différentes lithosphères font l'objet de multiples études. Nous ne pouvons ici fournir davantage de précisions et proposons au lecteur de se référer à des livres généraux comme Caron *et al.* [1992]. La principale caractéristique que nous souhaitons retenir, est que la lithosphère constitue une enveloppe superficielle et rigide de la Terre mais extrêmement hétérogène. Elle se caractérise par une très grande variété minéralogique et pétrographique des roches (roches volcaniques, plutoniques, sédimentaires). La géométrie des structures est également très variée: couches sédimentaires d'épaisseurs et d'extensions différentes, intrusions granitiques, zones métamorphiques, etc. Les propriétés physiques, et en particulier mécaniques, de tous ces constituants sont très diverses.

Il est nécessaire d'ajouter que la lithosphère est en contact avec l'hydrosphère. Ce contact est plus exactement une interpénétration des deux milieux. La lithosphère est le lieu d'importantes circulation de fluides. La présence d'eau permet, en particulier, des changements de comportement thermodynamique, facilitant souvent les processus de fusion. Elle permet également l'érosion des reliefs, le transport de solutés. De plus, son rôle peut être primordial dans de nombreux processus mécaniques, comme par exemple le fluage Ranalli [1987].

0.2.2 Les conditions aux limites

La lithosphère est comprise entre l'atmosphère fluide et froide (20 °C) et l'asthénosphère chaude (environ 1000 °C) et solide, lieu de fusion partielle. La lithosphère fait en moyenne 100 km d'épaisseur. Son épaisseur est minimale au niveau des dorsales océaniques. Elle croît ensuite avec l'âge. Elle est maximale sous les vieux cratons. Des fluctuations d'épaisseur apparaissent en fonction du relief, mais aussi du fait de ses variations horizontales de densité.

D'un point de vue mécanique, il existe un contraste de viscosité important entre lithosphère (10^{26} poises) et asthénosphère (10^{22} poises). A sa base, la lithosphère est entraînée par le lent mouvement convectif du manteau. Par ailleurs, la lithosphère océanique ancienne, donc froide⁸, plonge au niveau des zones de subduction. Ceci génère alors des forces de traction. Au niveau de l'interface atmosphère-lithosphère, la condition aux limites peut être considérée comme celle d'une surface libre, tant

8. La densité de cette lithosphère devient supérieure à celle de l'asthénosphère. La plaque est donc entraînée à grande profondeur (au moins 700 km).

le contraste de viscosité est énorme (1 poise dans l'atmosphère, 10^{26} poises pour la lithosphère).

Vu du «dessus», la lithosphère se découpe en sous-ensembles: les plaques tectoniques. On en compte 6 principales (Afrique, Eurasie, Amérique, océan Indien, Pacifique et Antartique) et quelques autres plus petites (Nazca, Cocos, Caraïbes, Arabie, Philippines...). La lithosphère se décompose donc en grands sous-blocs interagissant les uns avec les autres, principalement au niveau de leurs frontières.

0.2.3 Comportement mécanique

Le comportement mécanique de la lithosphère n'est pas homogène, à la fois dans sa structure horizontale et dans son épaisseur *Sibson* [1986]. En première approximation, il peut être considéré dans ensemble comme élastique-fragile dans sa partie supérieure (15 premiers kilomètres), et visco-plastique dans sa partie inférieure. Cette approximation est particulièrement vraie pour la lithosphère océanique. La lithosphère continentale présente, une structuration plus complexe (voir Figure 0.2, d'après *Caron et al.* [1992]).

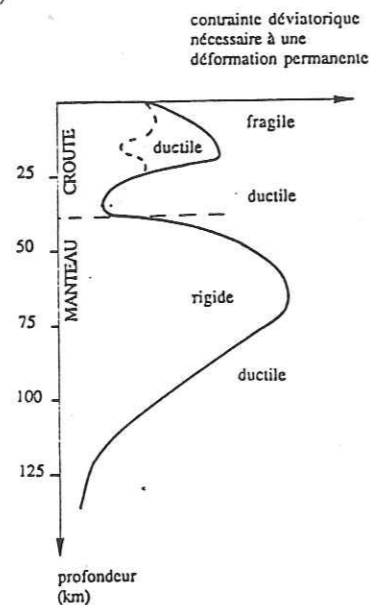


FIG. 0.2 - Illustration de la rhéologie hétérogène de la lithosphère continentale.

Cette figure présente le profil de la contrainte déviatorique nécessaire à une déformation permanente. Les vingt premiers kilomètres (au-dessus de la discontinuité de Conrad) sont cassants. Ensuite, jusqu'au Moho (environ 30 km), le milieu est ductile (visco-plastique). Le haut du manteau supérieur (de 30 à 100 km environ) est à nouveau fragile (visco-élastique).

Si la lithosphère supérieure est principalement élastique-fragile, elle répond donc à une sollicitation mécanique importante, par l'apparition de fractures. La loi de comportement caractéristique a été obtenue en laboratoire *Scholz* [1990]. Lors d'une

mise sous contrainte d'amplitude croissante, on observe tout d'abord la compaction des pores. S'en suit un régime purement élastique où contrainte et déformation sont proportionnelles. Ensuite, apparaît une dilatation volumique de l'échantillon, bien que la contrainte croisse. C'est une phase de micro-fissuration. Enfin, la déformation se localise puis le matériau se rompt.

Un tel comportement mécanique présente un aspect tout à fait singulier. Il y a *localisation spatiale et temporelle de la déformation*. Le chargement lent des plaques tectoniques est localisé en espace, le long des *failles* et en temps, pendant de courtes périodes de rupture: les *séismes*.

C'est un phénomène géologique auquel l'Homme est particulièrement sensible. En effet, les failles sont bien visibles. De plus, les constantes de temps en jeu sont exceptionnellement faibles pour un phénomène géologique (quelques secondes). Mais surtout, de tels phénomènes sont souvent dévastateurs. Nous avons vu précédemment que l'énergie libérée sous forme de séismes (radiation d'ondes) est faible par rapport à l'ensemble de l'énergie dissipée (1%). Il s'agit cependant de près de 1 tera Watts, soit la puissance de plusieurs bombes atomiques. Par exemple (voir *Madariaga and Perrier* [1991], le tremblement de Terre de Shaanxi en Chine aurait fait, le 2 février 1556, plus de 800000 victimes en libérant près de $5 \cdot 10^{17}$ J. Plus récemment, le séisme de Mexico (le 19/09/1985, $9 \cdot 10^{16}$ J) a tué plus de 20000 personnes et celui d'Arménie (le 07/12/1988, $1 \cdot 10^{15}$ J) près de 25000.

0.3 L'analyse d'un régime mécanique singulier

La volonté de comprendre ce comportement mécanique se retrouve tout au long de l'histoire humaine. Les Grecs, dont Aristote, expliquaient les phénomènes de volcanisme et de séismes par des remontées brutales d'air chaud depuis le centre de la Terre où régnait «l'enfer» ou le «feu central». L'association entre failles et tremblement de Terre n'est que relativement récente. D'abord suggérée vers la fin du XIX^e siècle par des naturalistes et des géologues, elle ne fut véritablement démontrée qu'au début de ce siècle par des sismologues comme Montessus de Ballore *de Ballore* [1907].

L'analyse de ce régime mécanique, faite aujourd'hui, comporte différentes facettes: structuration spatiale, développement temporel, influence du passé, existence de corrélations spatiales et temporelles.

0.3.1 Vie des failles

Une première étape dans la caractérisation de ce comportement, consiste à examiner l'état actuel du système.

0.3.1.1 Caractérisation de la localisation spatiale

La localisation spatiale aboutit à la formation des failles qui s'organisent en réseau. Les zones comprenant les plus grandes failles se trouvent principalement aux

frontières des plaques lithosphériques. Les cartes géologiques des réseaux de failles en constituent une première description géométrique. Citons par exemple, la région du sud de la Californie où le «complexe» de la faille de San Andrés a été largement étudié (voir Figure 0.3, d'après Scholz [1990]).

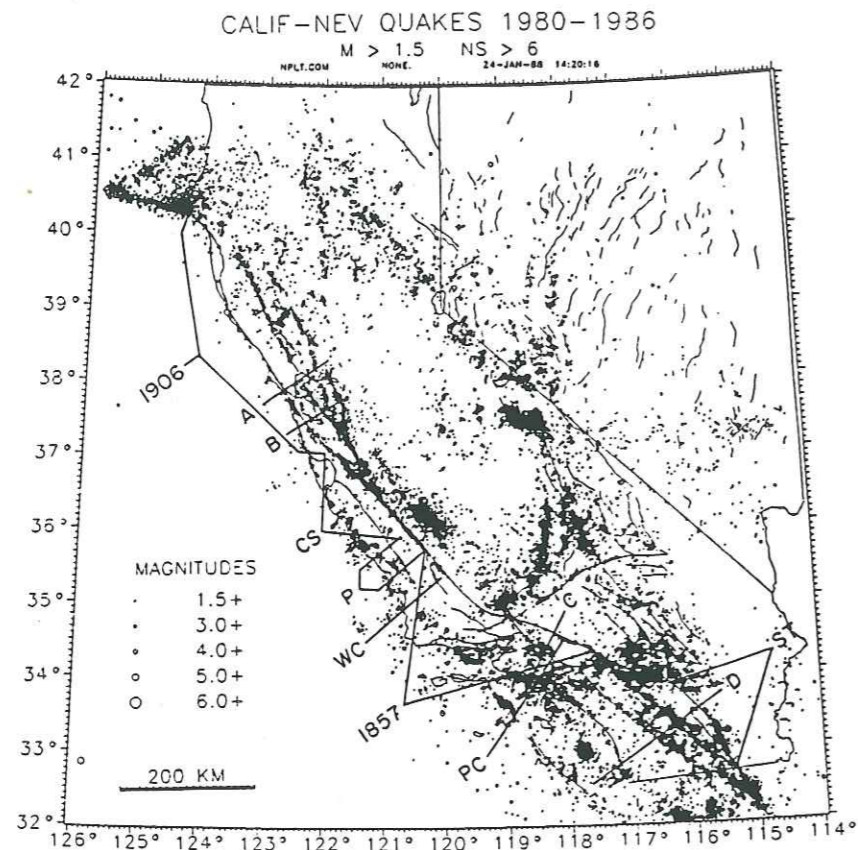


FIG. 0.3 - Carte sismique de la région de la faille de San Andrés.

De telles cartes représentent l'intersection de la surface de rupture et de la surface du sol. Il s'agit donc d'une projection des zones de localisation dans le «plan horizontal» tangent à la surface du globe.

Un autre type de projection permet de visualiser la géométrie des structures le long d'une coupe verticale de la lithosphère. Parmi les techniques d'auscultation, la sismique réflexion et réfraction fournissent des images précises (voir Figure 0.4, d'après Raoult [1988]).

L'analyse, sur le terrain, du miroir de faille fournit des indications sur l'orientation tridimensionnelle de la structure (orientation et pendage). Un examen approfondi de l'état de la surface permet de distinguer des stries ou encore des joints stylolitiques. Il est alors possible de reconstituer le mouvement cumulé des lèvres de la faille. On distingue alors les failles normales, inverses ou décrochantes.

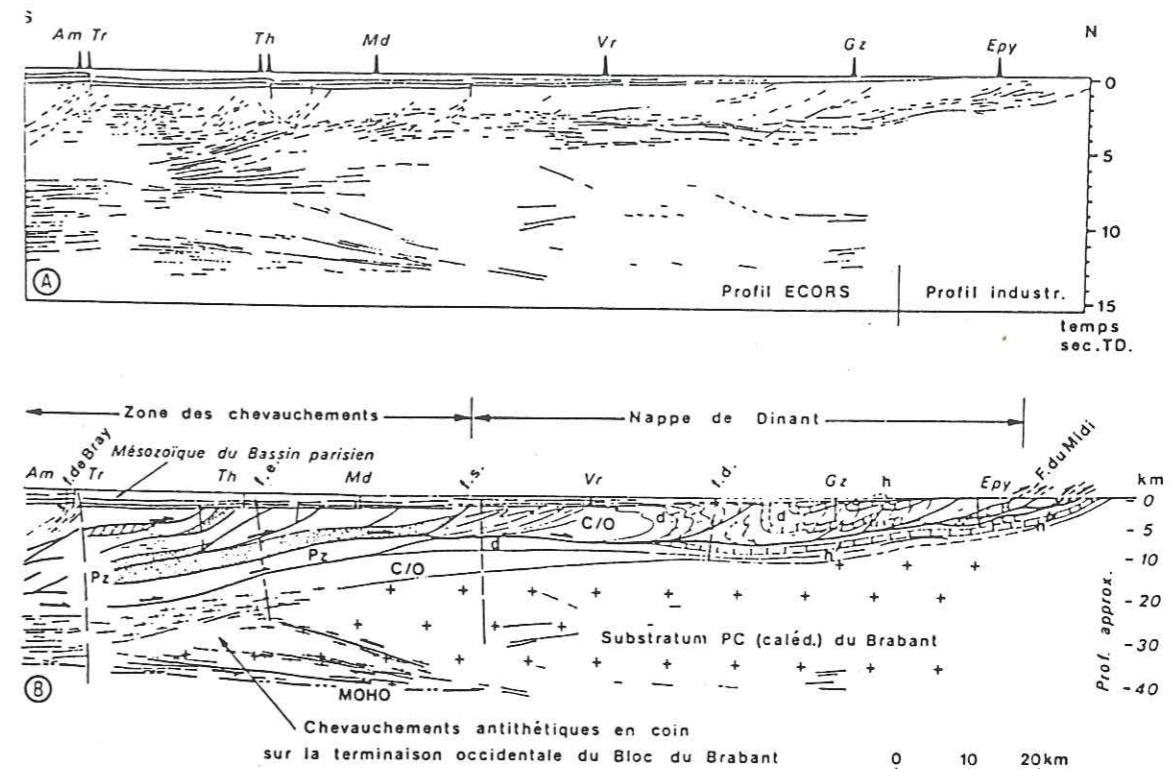


FIG. 0.4 - Exemple de profil sismique mettant en évidence des traces de failles géologiques.

0.3.1.2 Caractérisation de la localisation temporelle

L'analyse des sismogrammes permet de localiser et de reconstituer, au moins partiellement, l'émission d'ondes élastiques par la source sismique lors du tremblement de Terre. Elle se fonde sur l'étude des ondes de volumes (compressives (P) et cisailantes (S)) ainsi que sur les ondes de surface (ondes de Love et Rayleigh). Si la localisation et la puissance de la source sont des problèmes que l'on arrive aujourd'hui à résoudre avec précision (voir Figure 0.3), la caractérisation de la source en termes de détermination de l'évolution temporelle du champ spatial de glissement, est en général beaucoup plus difficile à identifier. Ceci résulte des hétérogénéités de propagation, des phénomènes de multiplicité liés aux diverses réflexions et réfractations des rais sismiques, mais surtout du problème «d'écrantage de la source». En effet, les mouvements le long de la source, se font dans des régimes d'anélasticité sollicitant des hautes fréquences. Les procédures d'inversion perdent alors beaucoup de leur résolution. Ainsi, la radiation sismique se décompose en champ proche et champ

lointain. Le second est bien interprété par un double couple conjugué *Aki and Richards* [1980], ce qui permet la construction des mécanismes au foyer *Madariaga and Perrier* [1991].

A partir des sismogrammes, est estimée l'énergie relaxée pendant le séisme. La méthode la plus fréquente consiste à déterminer la magnitude du séisme. Cependant, différents types de magnitudes peuvent être définis *Madariaga and Perrier* [1991]. Nous nous intéresserons à deux définitions. La première est empirique. Il s'agit de la magnitude des ondes de surface: M_S .

$$M_S = \log(A/T) + 1.66 \log(\Delta) + 3.3 \quad (0.1)$$

où A est l'amplitude des ondes de surface de type Rayleigh à la période T^9 . Δ est la distance épacentrale en degrés. Cette formule est valable pour $25^\circ < \Delta < 90^\circ$ et une profondeur du séisme inférieure à 80 km. La seconde est la magnitude d'énergie ou de Kanamori: M_W .

$$M_W = (2/3) \log(M_0) - 6.0 \quad (0.2)$$

où M_0 est le moment sismique du séisme¹⁰. Il s'estime comme le produit:

$$M_0 = \mu S \bar{u} \quad (0.3)$$

avec μ le second coefficient élastique de Lamé, S la surface de la zone qui a glissé pendant le séisme et \bar{u} le glissement moyen *Aki and Richards* [1980]. Cette formulation se base donc sur un modèle de source sismique: modèle de double couple. Pour les très «grands» séismes, seule la magnitude d'énergie M_W est utilisable. Dans les autres cas, les magnitudes M_S et M_W sont identiques.

L'énergie W du séisme se déduit de la magnitude par la relation:

$$\log(W) = 1.5M_W + 4.8 \quad (0.4)$$

Il s'agit d'une estimation minimale de l'énergie, puisqu'elle ne tient compte que de l'énergie radiée. Or, il existe vraisemblablement une importante énergie dissipée sous forme de chaleur (frottement) au moment du séisme.

L'analyse de la sismicité de la Terre permet d'établir des cartes des zones actives de localisation. Par exemple, la compilation de 64000 événements sismiques de magnitude supérieure à 1.5, a été réalisée autour de la faille de San Andréas (voir Figure 0.3). Une telle carte souligne parfaitement les failles cartographiées.

Il convient de préciser que l'apparition d'un séisme n'est pas toujours reliée à la présence de failles. Il s'agit de séismes dits non tectoniques, comme les séismes «volcaniques» liés à une intrusion de matériel magmatique, ou les séismes «naturels» liés par exemple à l'effondrement du toit d'une cavité calcaire, ou encore des séismes artificiels résultant des explosions nucléaires souterraines ou de mises en eau de barrages.

9. La période des ondes généralement utilisées est de 20 s.

10. Il s'agit d'un invariant du tenseur du moment acoustique: sa trace.

0.3.2 Une longue histoire

L'examen de l'histoire de la Terre montre que la structuration dynamique de la planète que l'on observe aujourd'hui, existe depuis longtemps. Les plus anciennes traces de la lithosphère sont celles d'une lithosphère continentale de près de 3.8 milliards d'années. Cependant, la majeure partie des continents a été formée il y a environ deux milliards d'années. Depuis, la machine «tourne» avec un cycle de 400 à 500 millions d'années, selon des processus voisins de ceux que nous avons décrits précédemment. La lithosphère est depuis longtemps une couche limite thermique et mécanique, toujours entraînée à former des «super-continent»¹¹ qui se disloquent ensuite en continents distincts.

La localisation de la déformation en failles et séismes se produit depuis bien longtemps. Par conséquent, la forte hétérogénéité mécanique de la lithosphère actuelle est le fait non seulement de ses constituants variés et des géométries complexes, mais également des nombreuses failles héritées. Notons que pour la lithosphère océanique, l'héritage est beaucoup moins important puisque l'on ne connaît pas de lithosphère océanique datant de plus de 200 millions d'années. Elle est en effet réinjectée au sein de la Terre dès que son âge devient trop important (du fait la croissance de sa densité avec le temps).

L'état mécanique de la lithosphère que l'on observe aujourd'hui, n'est donc pas un stade particulier mais véritablement un instantané d'un régime permanent.

A une tout autre échelle, examinons à présent la vie d'une faille au cours du temps. Etudier la croissance d'une faille à partir de sa naissance sur quelques mètres jusqu'à son développement dans l'ensemble de la lithosphère, est difficile. Aujourd'hui dans quelques cas, on peut suivre l'évolution de la longueur d'une faille *Scholz* [1990], *Scholz et al.* [1993]. Il s'agit de la mesure de la croissance cumulée sur un intervalle de temps important. Suivre la croissance liée à chaque séisme n'a pu être fait que dans des cas marginaux: croissance d'une fracture dans une structure minière *Scholz* [1990].

De façon schématique, chaque étape de la croissance de la faille est séparée en deux types de périodes. Les phases de «repos» ou asismiques sont séparées par des phases de mouvement ou sismiques. La durée de la période asismique est en général très longue (de l'ordre de 1000 ans) par rapport à la phase sismique (de l'ordre de la seconde). Au cours de la phase asismique, la faille est le lieu de mouvements lents¹² (fluage) liés au champ de contraintes régional. Notons que ce champ peut évoluer suite à l'apparition de séismes sur des failles voisines. La faille est également le lieu de circulation de fluides, de cristallisation, de redéposition, d'érosion, pouvant aboutir à une véritable cicatrisation mécanique *Sibson* [1986]. Au contraire, pendant les phases sismiques, il y a mouvement et donc rejeu de la faille. Le tremblement de Terre est le résultat de la propagation dynamique d'un front de rupture le long de la faille. Le glissement d'une éponte par rapport à l'autre est soudain. Il peut atteindre

11. la Pangée constitue le dernier super-continent formé.

12. Ces mouvements lents sont d'autant plus importants avec la profondeur de la faille ou le long de la faille.

quelques mètres pour les plus gros séismes *Scholz* [1990].

Le passage de la période asismique à la période sismique est l'un des principaux objets de la prévision sismique: pourquoi et comment se réveille une faille? Une bonne partie des efforts réalisés dans ce domaine cherche à identifier des évolutions de propriétés annonciatrices des séismes (i.e. les précurseurs) comme la circulation de fluides, le champ électrique local, les micro-séismes précurseurs, ou encore le comportement des animaux, etc.

0.3.3 S'agit-il d'un état critique permanent?

Nous voyons que la lithosphère est dans un régime mécanique complexe, du fait de la variabilité des matériaux géologiques en présence, les diverses géométries, l'héritage de la longue histoire du système. Comment quantifier cette complexité? Existe-t-il une analogie avec d'autres systèmes physiques?

De nombreuses données géologiques montrent que la complexité se traduit notamment par l'absence de longueurs ou de temps caractéristiques. Ceci s'avère particulièrement vrai pour la déformation de la lithosphère. Examinons tout d'abord les échelles de temps dans la déformation (d'après *Madariaga and Perrier* [1991]) (tableau 0.3) Il est manifeste au vu de ce tableau, que la dynamique du processus

| Durée (s) | Observation principale |
|---------------------------------|---|
| 10^{15} (100 Ma) | Tectonique des plaques, convection |
| $10^{13} - 10^{14}$ (1-10 Ma) | Formation de chaînes de montagne, Frontières de plaques |
| $10^{10} - 10^{13}$ (1 Ka-1 Ma) | Formation de grandes failles |
| $10^9 - 10^{10}$ (100 a- 1 Ka) | Récurrence des grands tremblements de Terre |
| $10^7 - 10^9$ (1-100 a) | Déformation géodésique aux alentours de la faille |
| $10^5 - 10^7$ (1 j-1 a) | Phénomènes précurseurs |
| $10^0 - 10^2$ (1-100 s) | Durée de la rupture sismique |
| $10^{-1} - 10^0$ (0.1-2 s) | Période des ondes destructrices |

TAB. 0.3 - Echelles de temps du phénomène sismique

est extrêmement large. A toutes les échelles de temps, «il se passe quelque chose». Il ne semble pas exister de véritables coupures permettant d'extraire une gamme réduite d'échelles de temps dans laquelle on pourrait individualiser un problème. Une continuité dans les échelles de temps a été mise en évidence en particulier pour le temps de récurrence des répliques¹³. Il s'agit de la loi d'Omori *Kagan and Knopoff* [1981], *Knopoff* [1990], *Shaw* [1993], qui montre que le temps de récurrence de ces séismes est distribué de façon continue, selon une loi de puissance.

13. Il s'agit des séismes suivant un très gros séisme.

Il existe également des données montrant cette absence de longueur caractéristique d'un point de vue spatial *Scholz et al.* [1993]. Considérons en effet, la distribution des longueurs de failles dans une région. Plusieurs auteurs *Scholz and Cowie* [1990], *Scholz* [1991], *Sornette and Davy* [1991] ont montré que cette distribution était en loi de puissance, du type:

$$N(L) \propto L^{-a} \quad (0.5)$$

où L est la longueur de la faille et $a \approx 2.1$. Le glissement le long des failles suit une distribution équivalente *Scholz and Cowie* [1990]. Longueur de faille et glissement moyen le long de la faille sont en effet proportionnels.

Enfin, la répartition en énergie des séismes n'est pas quelconque. Elle est donnée par une loi à présent particulièrement documentée mais toujours sujette à controverses. Il s'agit de la loi de Gutenberg-Richter *Madariaga and Perrier* [1991], *Pacheco and Scholz* [1992] (voir Figure 0.5 d'après *Madariaga and Perrier* [1991]).

$$\log[N(M)] = a - bM \quad (0.6)$$

où M est la magnitude du séisme et $N(M)$, le nombre cumulé de séismes de magnitude M , pendant une période donnée.

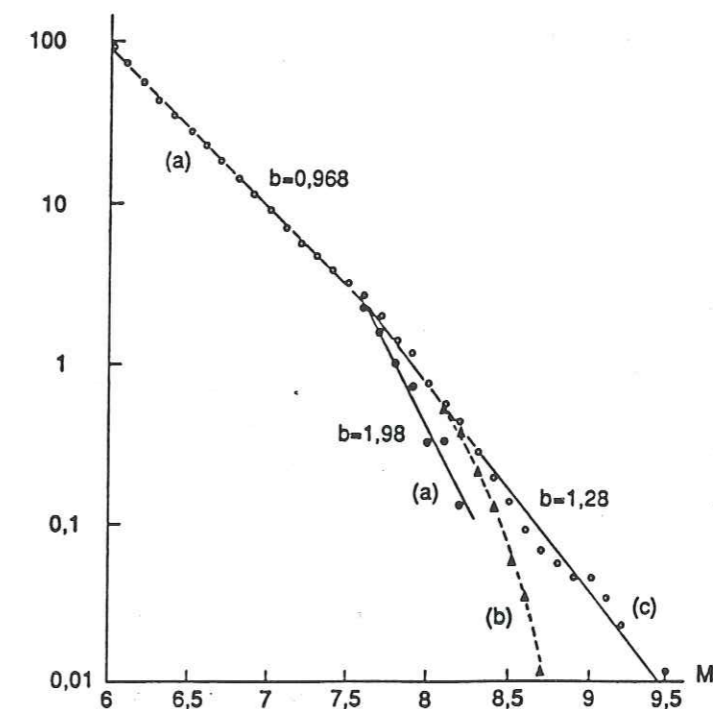


FIG. 0.5 - Distribution de la magnitude des séismes: loi de Gutenberg-Richter.

La valeur du paramètre b (b-value) est de l'ordre de 1, pour les séismes petits à moyens ($M < 7.6$). Au delà, la valeur de b augmente. Si la détermination de b

pour les grands séismes est délicate, cette loi est suivie par la majeure partie des séismes. Il existe des séismes de toute énergie. Plus ils sont grands, plus ils sont rares. Il est toutefois important de noter que cette distribution est établie à partir d'une compilation des séismes sur une région et non pas sur une seule faille.

L'absence de longueur ou de temps caractéristique dans la mécanique peut susciter une possible analogie entre l'état mécanique de la lithosphère et un état thermodynamique critique. C'est Bak *et al.* [1987], Bak *et al.* [1988], Bak and Tang [1989] qui ont été les premiers à proposer cette perspective. Le fait que cet état de la lithosphère apparaisse non seulement critique à un instant donné, mais plutôt comme un régime permanent, a suggéré l'existence d'une dynamique sans cesse convergente vers cet état critique, d'où la formule maintenant célèbre de: «Self-Organized Criticality» (SOC). Le fait de placer le problème dans le cadre de la physique du point critique, a initié de très nombreux travaux Sornette *et al.* [1990b], Sornette and Sornette [1989], Scholz [1991], Ciliberto and Laroche [1993] où les outils de la thermodynamique et de la physique statistique du point critique, ont pu être appliqués dans une nouvelle perspective: la mécanique de la lithosphère.

Une conséquence immédiate de l'absence de longueur caractéristique, est la *non existence de volume élémentaire représentatif*. Ce point est particulièrement important car il remet en cause l'application et l'utilisation de nombreux concepts et outils classiques, principalement d'un point de vue mécanique.

0.4 Des outils de la physique statistique

Les outils de la physique statistique permettant de décrire un état désordonné¹⁴ sont de différentes natures, selon le type de désordre.

0.4.1 Désordre géométrique et fractales

La description de certaines structures dont la géométrie paraît complexe à l'œil, a connu un grand pas en avant avec l'introduction des *fractales* par Mandelbrot [1982]. Il s'agit des structures présentant des propriétés d'invariance d'échelles¹⁵. Nombreuses sont ces structures dans les milieux naturels, et en particulier en géologie. L'ensemble de la discipline a donc largement profité de ces outils Scholz and Mandelbrot [1989], Cox and Wang [1993]. Nous nous contenterons de présenter ici quelques résultats concernant les objets géométriques que sont les failles.

0.4.1.1 A l'échelle du réseau de failles

Le réseau de failles de Californie a été l'un des premiers à être étudié en termes de dimension fractale Aviles *et al.* [1987], Obuko and Aki [1987]. Ces premiers essais

14. On entend par désordonné, un état où il existe une multitude d'échelles caractéristiques.

15. Une telle invariance ne peut exister que si l'objet ne présente pas d'échelle caractéristique.

visiblement immatures¹⁶, ont été suivis de nombreuses études plus étayées Scholz and Mandelbrot [1989], Nagahama [1994]. Des résultats importants ont été obtenus à partir de l'analyse de réseaux de fractures en laboratoire Davy *et al.* [1990], Sornette *et al.* [1990a], Davy *et al.* [1992] ou sur le terrain Boadu and Long [1994].

Si la géométrie du réseau de faille est un aspect important, la connectivité du réseau l'est également. Cette propriété va en effet réguler bien des caractéristiques de la circulation des fluides à l'échelle de la lithosphère (réseau de failles) mais également à l'échelle du site géologique considéré (réseau de fractures) Gueguen and Dienes [1989], Balberg *et al.* [1991]. Ce dernier point a des implications humaines importantes, tant pour la prévision sismique que pour le problème du stockage des déchets ou encore l'extraction du pétrole.

0.4.1.2 A l'échelle de la faille

Au niveau de la faille, élément de base du réseau, les études géométriques se sont axées sur la description de la surface de la faille. Ainsi, des dimensions fractales de surfaces de faille ont été calculées Brown and Scholz [1985a], Power and Tullis [1991]. La question de l'universalité des propriétés d'invariance d'échelles a été formulée à propos des surfaces de fracture Bouchaud *et al.* [1990]. Dans quelle mesure existe-t-elle également pour les failles?

Si la connectivité des failles au sein d'un réseau est importante pour comprendre les propriétés de circulation des fluides, la géométrie des surfaces de faille et donc des interstices permettant l'écoulement «de base» au sein du réseau, est capitale Brown [1987a]. Les implications de la géométrie sur les propriétés géophysiques de la faille sont donc nombreuses.

Une partie du travail effectué au cours de cette thèse tente d'apporter quelques éléments de réponse à ce type de problématique.

0.4.2 Désordre dynamique et analyse des systèmes dynamiques

La déformation de la lithosphère peut être vue comme l'évolution d'un système dynamique non linéaire où coexiste un grand nombre de degrés de liberté. Des systèmes physiques avec de telles propriétés ont été bien décrits Bergé *et al.* [1988], Manneville [1991], en particulier dans le cas des systèmes hydrodynamiques. On distingue des systèmes *chaotiques*, lorsque les structures dissipatives que l'on observe «perdent» leur temps caractéristique. On passe de formes périodiques à des formes dont les échelles de temps sont distribuées de façon continue. Lorsque la «complexité» prend une forme, non plus uniquement spatiale, mais également temporelle (en général parce que le nombre de degrés de liberté augmente dans le problème), on distingue alors un régime *turbulent*. Les transitions entre régime «laminaire» et de tels régimes ont été également bien étudiées. Citons par exemple la «route vers le

16. Aujourd'hui personne ne prétendrait qu'un objet présente une grande complexité avec une dimension fractale de 1.0008. On dirait tout simplement qu'il est linéaire! Ajoutons également que la description de la complexité ne se résume pas à la seule détermination de la dimension fractale.

chaos» par cascade harmonique *Croquette* [1989]. L'ensemble des analyses n'a pu être possible que grâce au développement d'outils comme le portrait de phase, la section de Pointcarré, la détermination des exposants de Lyapunov, l'analyse de stabilité, etc.

L'utilisation de ces techniques dans le cadre de la mécanique de la lithosphère et en particulier celle des failles et de leur séismes n'en n'est qu'à ses débuts. Citons comme travaux pionniers dans cette perspective, ceux de *Huang and Turcotte* [1990], *Carlson and Langer* [1989b]. Un second aspect du travail présenté ici s'inscrit dans ce type de problématique.

L'une des observations importantes qui montre la complexité de la dynamique du tremblement de Terre est celle proposée par *Herrero and Bernard* [1994]. Il s'agit de l'étude des spectres de fréquences en temps et en espace, de la radiation sismique en champ proche (accélérogrammes).

Présentation du plan de la thèse

L'organisation générale du manuscrit se fait autour d'un objet géologique particulier: les failles et leurs séismes. Les failles résultent d'une localisation spatiale de la déformation en régime fragile. Les séismes sont le résultat de la localisation temporelle de cette déformation. Nous respecterons cette dichotomie au cours de cette synthèse.

Ainsi, une première partie sera dédiée à l'analyse de quelques propriétés des failles pendant la phase aismique. Nous limiterons notre étude à l'étude de la faille comme «objet de base». Son intégration dans un véritable réseau ne sera pas abordée. Nous étudierons la faille comme une interface mécanique. Nous montrerons au travers du premier chapitre que sa géométrie constitue un objet «complexe» (ou désordonné) présentant une invariance d'échelle de type auto-affine. Une première approche des propriétés multi-fractales sera également exposée. Nous discuterons la relation entre surface de fracture et surface de faille car ce point est à l'origine d'une hypothèse importante pour les chapitres suivants.

Le second chapitre nous permettra d'examiner en quoi la caractérisation de la géométrie peut permettre de comprendre et prédire certaines propriétés physiques de la faille. La géométrie de la faille conditionne, en effet, celle des interstices (ou ouvertures) qui sont le lieu de circulation de fluides. L'écoulement de ces fluides peut s'avérer capital dans les problèmes de prévision sismique, de pollution, ou encore de pompage du pétrole. Nous étudierons également comment la géométrie peut évoluer lors d'un chargement mécanique des épontes de la faille.

La seconde partie de ce travail s'intéresse aux séismes et au rôle du désordre dans leur apparition. Nous utiliserons alors un cadre très général pour présenter les différents aspects du travail. Nous commencerons tout d'abord par quelques aspects de la naissance des failles. En effet, au cours du premier chapitre, nous essayerons de voir en quoi le processus de fracturation lors du séisme, peut générer les propriétés géométriques présentées dans la première partie (auto-affinité). Est-il possible de

mieux comprendre le phénomène de fracturation par un simple examen de la surface de fracture résultante?

Le second chapitre doit nous permettre de présenter la problématique du rejeu dynamique de la faille, générateur du séisme. Il s'agit d'un très vaste sujet, où deux grandes écoles de pensée se confrontent. Les uns se concentrent sur la connaissance de l'état initial (avant le séisme): description de la géométrie, des propriétés physiques du milieu, des conditions aux limites, etc. De façon caricaturale, on peut dire qu'ils voient l'influence du désordre sous sa forme «géométrique». Ils considèrent le système comme ayant un faible nombre de degrés de liberté mais que chacun des «éléments» indépendants possède des propriétés physiques complexes. Les autres postulent (implicitement) que la dynamique est, au moins en première approximation, indépendante du désordre local. En d'autres termes, ils supposent que le nombre de degrés de liberté est extrêmement grand et que chaque constituant peut être simplifié à l'extrême. Au cours de ce chapitre, nous tenterons de formuler plus en détails les éléments de cette discussion, présentée ici trop schématiquement. Nous chercherons à dresser un certain panorama des différentes approches existantes. Enfin, nous présenterons deux directions d'étude que nous avons choisi de suivre au cours de ce travail. Il s'agit d'une part, d'examiner le rôle de l'influence de la géométrie (auto-affine) dans les lois de frottement à travers un modèle simple. D'autre part, nous avons étudié un modèle discret dynamique de type Burridge-Knopoff.

Le troisième et dernier chapitre nous permettra de dresser un bilan des résultats obtenus avec les deux approches suivies dans le cadre de l'étude du rejeu de faille. Nous présenterons tout d'abord les lois de friction et la dépendance en vitesse, introduite par la géométrie auto-affine. En second lieu, nous chercherons à voir s'il existe une «thermodynamique» permettant d'expliquer le fonctionnement du modèle de patins-ressorts d'un point de vue déterministe, lorsqu'il cherche à modéliser les tremblements de Terre. Dans un troisième temps, nous montrerons qu'à haute vitesse de sollicitation, le glissement se fait par propagation d'ondes solitaires. Enfin, nous étudierons, grâce à une approche de type renormalisation, l'évolution de la loi de frottement lors des changements d'échelles.

Nous tenons à rappeler ici que, même si le cadre utilisé pour la présentation de cette thèse peut paraître très général, en aucun cas les différents chapitres ne se veulent exhaustifs sur le sujet. Il s'agit d'un choix de structuration du document nous permettant de placer en perspective les différents aspects du travail réalisé.

Première partie
Failles et désordre

Chapitre 1

Caractérisation géométrique de l'interface

Introduction

La déformation de la lithosphère fragile, se localise, pendant un séisme, le long de surfaces que l'on nomme failles. Ces failles s'organisent en réseaux. Nous n'étudierons pas ici, l'organisation spatiale de ce réseau, à l'échelle de la lithosphère. Nous limiterons notre étude à l'objet constitutif: la faille. Nous examinerons les propriétés géométriques de cette structure considérée comme une interface continue et sans branchement. La faille sera vue comme une interface mécanique. Elle sépare deux massifs: les épontes.

D'un point de vue géométrique, nous dirons que cette interface mécanique est constituée de deux frontières, marquant les limites de deux massifs rocheux, et de l'ensemble des interstices soit laissés vides, soit remplis de matériel de trituration (gouges) ou comblés par des dépôts minéralogiques comme ceux de calcite (stries). Du fait de la rugosité des surfaces rocheuses, le contact entre les deux épontes n'est pas parfait. De nombreuses lacunes existent dans lesquelles une circulation de fluides peut avoir lieu.

La géométrie de la surface de la faille est susceptible de se transformer au cours du temps selon deux régimes distincts. D'une part, lors des périodes asismiques (i.e. inter séismes), la géométrie évolue lentement. Les ouvertures peuvent grandir ou disparaître, si le chargement mécanique de la faille est modifié (e.g. accumulation de contrainte, apparition d'un séisme sur une faille voisine, processus de fluage). Il convient de préciser également que la présence de fluide le long de l'interface peut, suivant le potentiel chimique des électrolytes en présence, être à l'origine de processus de dissolution-précipitation modifiant sensiblement la géométrie de cette interface. Ce dernier phénomène est d'autant plus significatif que la période asismique est longue. Il peut alors conduire à une véritable cicatrisation de l'interface. D'autre part, les séismes peuvent conduire à une transformation rapide de la géométrie de l'interface. En effet, lors du passage du front de fracture, il peut y avoir rupture

d'aspérité, branchement de la fracture, coalescence de micro-fissures, etc.

Présentation du plan Une première étape, dans la caractérisation de l'interface consiste à en préciser sa géométrie. C'est ce que nous ferons dans ce premier chapitre. Les objets sur lesquels les mesures de la géométrie de l'interface ont été réalisées seront tout d'abord décrits. Ensuite, les outils d'analyse permettant une caractérisation de la rugosité en termes d'invariance d'échelle seront exposés. Nous chercherons à décrire les propriétés géométriques par «ordres» successifs d'approximation. Nous montrerons qu'au «premier ordre», la rugosité est auto-affine et que sa mesure est mono-fractale. Pour cela, nous utilisons des outils pour la plupart récents et spécifiques. Nous prendrons soin de bien les tester afin de donner un véritable poids aux résultats proposés. Nous tenterons ensuite d'estimer un «deuxième ordre» en cherchant à mettre en évidence les propriétés multi-fractales. Pour cela, nous utiliserons un formalisme particulier, celui des multi-fractales «universelles» (i.e. supposant une cascade multiplicative continue). Enfin, les résultats de l'application de ces outils aux différents objets, seront présentés. Pour finir, nous discuterons ces résultats en les intégrant à l'ensemble des analyses faites dans ce domaine.

Lien avec les publications Le travail d'analyse de la rugosité à l'échelle du terrain a fait l'objet d'une publication dont un exemplaire figure dans l'annexe 1. Le travail à l'échelle du laboratoire, plus complet, a donné lieu à une synthèse qui est sous presse (voir annexe 2). Enfin, l'étude systématique des erreurs d'analyse des objets auto-affines devrait également paraître sous peu. Le manuscrit correspondant est inclus dans l'annexe 3.

1.1 Les objets d'étude

1.1.1 Une faille à l'échelle du terrain

La géométrie des miroirs de faille a fait l'objet de nombreuses études. Elle constitue, pour la plupart des séismes, la principale source d'informations permettant de reconstituer l'histoire mécanique de la faille. Ainsi, par exemple, l'existence et l'orientation de stries de calcite permettent de retrouver la direction du déplacement moyen à une époque donnée, ainsi que les différentes phases de glissement. On peut également citer l'existence de stylolites comme marqueurs de l'histoire mécanique de la faille.

Une quantification de cette géométrie ou rugosité de la faille résulte d'une approche plus récente¹. La caractérisation se fait alors à partir de relevés topographiques de la surface. Dans ce cadre, grâce à une collaboration avec Sylvie Gentier (BRGM), nous avons étudié la rugosité d'un plan de faille se situant au Mayet de

1. La présentation du cadre scientifique de ce travail (panorama du travail existant) peut être trouvée dans les annexes 1 et 2. Cependant, nous reviendrons sur l'ensemble des travaux existants à la fin de ce chapitre afin de replacer cette étude dans un contexte plus général

Montagne (Massif Central) *Bernasconi* [1991]. Il s'agit d'une faille dans un massif granitique. Suite à une exploitation minière, un miroir a été dégagé et mis à jour. Dix-huit profils parallèles le long de ce miroir ont été enregistrés avec un profilomètre de terrain. Il s'agit d'une aiguille montée sur un bras rigide en rotation. Un ressort astreint le bras à suivre le relief alors que le point de fixation du bras est en mouvement à vitesse constante. Le principe de fonctionnement peut être comparé à celui d'un bras de tourne-disque. Les profils enregistrés sont dirigés perpendiculairement à la direction de déplacement, obtenue par l'analyse de marqueurs cités préalablement. Ils sont constitués d'environ 1100 points de mesures (voir Annexe 1, Figure 1, page 49). Un point de mesure se définit comme l'enregistrement de l'altitude pour une position donnée. Le pas entre deux points de mesure est de 0.5 mm. L'appareillage utilisé possède une dynamique allant du millimètre au mètre. L'erreur de position est estimée par reproductibilité. Elle vaut 0.1mm pour la direction «horizontale» (i.e. dans le plan moyen de la fracture) et 0.2mm pour la direction «verticale» (i.e. perpendiculaire au plan moyen).

1.1.2 Des fractures à l'échelle du laboratoire

Une exploration a été également réalisée à l'échelle du laboratoire. Elle n'a pas été effectuée sur un échantillon prélevé sur la faille mais sur des échantillons de roches, fraîchement cassés.

La mesure d'une telle rugosité a été effectuée avec Ted Koczyński et Chris Scholz au LDEO (Palissades, USA). Les surfaces analysées ont été obtenues par fracturation de barres de 5cm×5cm×12cm. Ces barres ont été découpées avec une orientation spatiale différente. Un trièdre orthogonal (X, Y, Z) a été défini sur les roches (avant découpe) afin de repérer les orientations de chaque barre.

Deux types de roches ont été examinées: un granite rose de type Westerly (originaire de Westerly, USA) et un gneiss de type Fordham (originaire du Bronx, USA). Tous deux sont des roches à minéraux de petite taille (1 mm). Par contre, le granite est un matériau dont la structure cristalline (fabrique) est isotrope au contraire de celle du gneiss, fortement anisotrope.

La fracturation des échantillons a été obtenue par une flexion trois points (voir Annexe 2, Figure 1, page 77). Il s'agit d'un mode de rupture en tension (mode I). En vue d'une parfaite utilisation du profilomètre, il a été nécessaire de réaliser une fracture la plus «plate» possible. On entend par plat, le fait que les modes à très grande longueur d'onde ont une amplitude très faible. Ainsi, la fracture peut être plate tout en étant extrêmement rugueuse. Une entaille de 1 mm de large et 3 mm de profondeur a , par conséquent, été meulée le long d'une section de la barre afin d'initier et contrôler la fracture. La propagation de la fracture s'est faite à grande vitesse de sorte que le plan moyen représente bien une section de la barre initiale. Au cours du processus de fracture, aucun phénomène de branchement ou de formation de gouge n'a été observé.

La mesure de la rugosité des surfaces a été obtenue par un profilomètre de laboratoire. Son principe de fonctionnement est identique à celui du profilomètre de

terrain. Afin de travailler avec la plus grande dynamique de l'appareil, il a été nécessaire de se placer dans une gamme de mesure de la hauteur de $\pm 0.75\text{mm}$. D'où la nécessité de travailler avec une fracture aussi plate que possible. Avec ce choix expérimental, la précision de la mesure de la hauteur est de $2\ \mu\text{m}$. La position horizontale du point de mesure a été obtenue directement par l'installation de capteurs de déplacement. Dans ce cas, la position n'est pas déduite du mouvement du capteur, supposé à vitesse constante mais mesurée indépendamment. La précision sur cette position horizontale est également de $2\ \mu\text{m}$. Les profils sont constitués de près de 1500 points sur 4 cm (voir Annexe 2, Figure 2, page 77). Le pas entre deux points de mesure est donc de l'ordre de $25\ \mu\text{m}$ ce qui reste grand devant le diamètre de l'aiguille du stylet ($5\ \mu\text{m}$).

Étant donné que cette technologie permettait une acquisition rapide (40 ms par point), le profilomètre a été complété d'une nouvelle direction de mesure y , perpendiculaire à la direction des profils: x . Ainsi, des multiples profils parallèles ont été enregistrés permettant d'obtenir de véritables cartes topographiques des surfaces fracturées (voir Annexe 2, Figure 3, page 78). Le pas entre deux profils consécutifs est de l'ordre de $50\ \mu\text{m}$. Huit surfaces ont été échantillonnées (voir Annexe 2, Table 1, page 76). Seules deux directions différentes (perpendiculaire à X et Z) ont été explorées dans le granite, une seule dans le gneiss (perpendiculaire à X). Pour toutes les fractures, les deux épontes ont été cartographiées au moins une fois.

1.2 Les outils d'analyse mono-fractales

La géométrie d'une surface de faille ou d'une surface fracturée apparaît à l'œil comme un objet d'aspect complexe. Il est souvent bien difficile d'identifier une échelle de longueur caractéristique. L'amplitude de la rugosité est en général très variable. La variabilité des formes en jeu semble infinie. Qualifier et quantifier de telles surfaces en cherchant à les décomposer en objets simples est un exercice des plus approximatifs et toujours très dépendant des matériaux utilisés, du mode de fracture, de l'échelle d'observation.

1.2.1 Auto-similarité et auto-affinité

Depuis quelques années, certaines études ont cherché à montrer que les surfaces de fracture présentent une propriété singulière. En effet, des invariances d'échelle (ou fractalité) Mandelbrot [1982] ont été mises en évidence dans un certain nombre de cas Sayles and Thomas [1978]: quelle que soit l'échelle d'observation, la surface apparaît statistiquement de la même façon. Les premières études, dans ce cadre, sont fondées sur l'hypothèse d'une même invariance pour toutes les directions de l'espace Brown and Scholz [1985a]. C'est ce que l'on appelle l'auto-similarité. En fait, dans un processus comme la fracture, il semble clair que toutes les directions ne peuvent pas être considérées comme identiques. Les directions dans le plan de propagation de la fissure ont une signification différente de celle perpendiculaire à ce plan. Il faut donc pour un objet comme une surface fracturée, considérer l'invariance comme différente

selon les directions de l'espace. On parle alors d'auto-affinité Mandelbrot [1985], Mandelbrot [1986], Voss [1985], Alexander [1985]. Ce type de propriété géométrique peut se formaliser de la façon suivante:

$$\Delta_x \rightarrow \lambda_x \Delta_x \quad (1.1)$$

$$\Delta_y \rightarrow \lambda_y \Delta_y \quad (1.2)$$

$$\Delta_z \rightarrow \lambda_z \Delta_z \quad (1.3)$$

Ainsi, si l'on effectue une transformation d'échelle sur l'axe des x , d'un élément de longueur Δ_x par un facteur λ_x , on obtient un objet semblable à condition que les éléments Δ_y et Δ_z , le long des directions y et z , soient multipliés respectivement par les facteurs λ_y et λ_z . Il est à noter que cette propriété ne se définit que statistiquement. C'est uniquement en moyenne (pour différents éléments de longueurs Δ_x) qu'il y a invariance d'échelle. Afin d'obtenir une structure de groupe pour ce type d'opérations, il est nécessaire de combiner les différentes transformations et donc de relier chacun des facteurs d'échelles λ par des fonctions homogènes.

$$\lambda_y = \lambda_x^{\zeta_y} \quad (1.4)$$

$$\lambda_z = \lambda_x^{\zeta_z} \quad (1.5)$$

On nomme les exposants ζ_y et ζ_z : exposants d'auto-affinité. Dans une première étape, nous supposons que toutes les directions dans le plan de propagation jouent un même rôle dans cette propriété d'invariance d'échelle. Par conséquent, les deux facteurs d'échelles dans le plan (x, y) sont identiques:

$$\lambda_x = \lambda_y \quad \text{i.e.} \quad \zeta_y = 1 \quad (1.6)$$

On note alors simplement:

$$\zeta_z = \zeta \quad (1.7)$$

L'exposant ζ est alors appelé l'exposant d'auto-affinité. La connaissance de ce seul exposant fournit toute l'information nécessaire à la reconstitution de la propriété.

On peut noter que dans le cas d'une propriété d'auto-similarité, tous les facteurs d'échelle sont identiques:

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z \quad (1.8)$$

Par conséquent, l'exposant d'auto-affinité pour un objet auto-similaire est égal à un: $\zeta = 1$.

Précisons que la propriété d'invariance d'échelle, auto-similaire ou auto-affine, ne nécessite pas l'introduction d'une mesure. Il existe par conséquent, un problème différent qui consiste à estimer la mesure de tel objet invariant d'échelle. Pour les objets auto-similaires, on caractérise cette mesure par une dimension fractale. De nombreuses définitions existent. Elle est souvent exprimée à partir de l'estimation de la taille de l'objet. Si l est une unité de longueur en suivant l'objet, la longueur est définie comme le nombre $n(l)$ d'unités de mesure pour couvrir l'objet. La dimension

fractale D (ou dimension de l'objet dans l'espace euclidien) est alors l'expression de la dépendance de la taille avec l'unité de mesure:

$$n(l) \propto l^D \quad (1.9)$$

Il est possible d'exprimer la propriété d'auto-affinité, dans le cadre d'une hypothèse d'isotropie dans le plan de propagation, par une seule équation. Quelle que soit la direction x dans le plan moyen de la fracture, on a:

$$\langle \Delta_z(\lambda_x \Delta_x) \rangle = \lambda_x^{-\zeta} \langle \Delta_z(\Delta_x) \rangle \quad (1.10)$$

Une telle équation permet d'estimer statistiquement l'évolution de l'amplitude de la rugosité Δ_z correspondant à un élément de longueur horizontal Δ_x , lorsque cet élément change de taille:

$$\langle \Delta_z(\Delta_x) \rangle \propto |\Delta_x|^\zeta \quad (1.11)$$

Ceci se traduit par le fait que la rugosité évolue en loi de puissance de la distance horizontale (i.e. dans le plan de propagation de la fracture).

Plusieurs conséquences de cette propriété sont à noter. Tout d'abord, lorsque l'exposant d'auto-affinité est inférieur à un ($\zeta < 1$), il est intéressant de calculer la pente typique $s = \langle |\Delta_z/\Delta_x| \rangle$ pour une distance $\Delta_x = L$:

$$s \propto L^{\zeta-1} \quad (1.12)$$

On montre ainsi que la pente apparente d'un objet auto-affine dont l'exposant est plus petit que un, tend vers zéro si sa taille est suffisamment grande ($L \rightarrow \infty$). Il est donc « asymptotiquement » plat.

Par ailleurs, si l'exposant d'auto-affinité d'un objet est de un, ceci signifie que, statistiquement, l'échelle de rugosité verticale évolue linéairement avec l'échelle horizontale. Un tel cas se produit si l'objet est auto-similaire ou s'il se présente simplement selon un segment de droite.

La dérivée d'un profil auto-affine n'existe pas si l'exposant d'auto-affinité est inférieur à un. Soit $z'(x)$ la dérivée du profil z au point x :

$$z'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{z(x + \epsilon) - z(x)}{\epsilon} \quad (1.13)$$

Pour un profil auto-affine, on a:

$$z'(x) \propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\zeta-1} \quad (1.14)$$

Par conséquent, un objet auto-affine dont l'exposant est inférieur à un, est continu mais non dérivable.

1.2.2 Les outils d'analyse

De nombreux outils permettant de mettre en évidence des propriétés d'invariance d'échelle, ont été développés depuis plus de vingt ans *Mandelbrot* [1982], *Feder* [1988], *Scholz and Mandelbrot* [1989], *Falconer* [1990]. Ce sont d'abord, des techniques permettant d'obtenir la dimension fractale de l'objet qui ont été proposées. Parmi ces outils, trois sont principalement utilisés: le dénombrement des boîtes nécessaires à recouvrir l'objet, l'évolution de sa longueur en fonction de l'unité de mesure et la mesure du rapport entre le périmètre et la surface lors d'une coupe de l'objet. De ces trois méthodes, nous étudierons uniquement les deux premières.

Les techniques permettant d'obtenir l'exposant d'auto-affinité sont plus récentes et leurs erreurs ne sont pas toujours quantifiées. Nous prendrons donc soin pour chaque méthode de bien analyser ses limites. Notons qu'il existe dans certains cas des liens entre dimension fractale et exposant d'auto-affinité bien que ces exposants ne renvoient pas au même type de propriétés. Il est ainsi possible de reprendre des analyses qui ont été faites dans une perspective de caractérisation de la dimension, pour estimer l'exposant d'auto-affinité se référant à l'invariance d'échelle.

L'estimation des erreurs issues des différents outils d'analyse repose sur deux approches distinctes. Tout d'abord, on définira une erreur de reproductibilité. Ainsi, l'analyse de multiples réalisations indépendantes, supposées présenter les mêmes propriétés d'invariance d'échelle, permet de calculer une première barre d'erreur. Cependant, il ressort que chaque méthode, du fait de sa spécificité, comporte des erreurs systématiques: sous-estimation ou sur-estimation dont l'ampleur peut être importante lorsque l'on s'intéresse à une détermination absolue de l'exposant d'auto-affinité ζ .

La démarche que nous utiliserons pour quantifier les erreurs systématiques de chaque méthode est identique. Il s'agit d'analyser avec les différents outils, des surfaces synthétiques dont on connaît a priori les caractéristiques géométriques. On définira alors un exposant d'auto-affinité de construction et un exposant de mesure. La différence entre les deux sera considérée comme une mesure de l'erreur systématique (voir Annexe 3, Figures 8 et 9, pages 112 à 114). La construction des surfaces se fait selon une méthode itérative proposée par Voss. Pour des études sur surfaces synthétiques, l'erreur de reproductibilité peut être rendue très faible par l'analyse d'un très grand nombre de surfaces indépendantes. Pour tous les tests réalisés, deux paramètres sont importants: d'une part, la taille du système L et d'autre part la valeur de l'exposant d'auto-affinité ζ . Nous avons exploré l'espace (L, ζ) systématiquement pour toutes les méthodes selon la grille:

$$L \in [64; 16384] \quad \zeta \in [0.1; 0.9] \quad (1.15)$$

Il a été alors possible de comparer les différentes méthodes entre elles et ainsi, de déterminer la méthode la plus adaptée au problème rencontré.

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les surfaces de fractures présentent une propriété d'invariance d'échelles où les différentes directions de l'espace ne jouent pas le même rôle: directions dans le plan de propagation de la fracture et direction

perpendiculaire à ce plan. De ce fait, si on examine une surface fracturée par "le dessus", il existe une propriété d'auto-similarité liée à une dimension fractale D . Par contre, en coupe, l'isotropie de la propriété géométrique n'est plus vérifiée. Il faut alors utiliser les outils d'analyse d'auto-similarité avec une grande prudence ou se tourner vers des outils spécifiques d'analyse d'objets auto-affines.

Etant donné que l'objet fourni par les mesures est un profil topographique, c'est-à-dire une coupe de la surface fracturée, nous nous intéresserons essentiellement aux méthodes permettant de caractériser des objets auto-affines. Nous montrerons comment les méthodes «auto-similaires» utilisées sur des objets auto-affines peuvent conduire à des résultats aberrants.

1.2.2.1 Détermination de la dimension fractale

Pour l'analyse de profils, principalement deux méthodes permettent d'estimer une dimension fractale: le dénombrement de boîtes et l'estimation de la longueur de l'objet Mandelbrot [1982], Feder [1988], Scholz and Mandelbrot [1989].

Estimation par dénombrement de boîtes Cette méthode cherche à recouvrir l'objet étudié par des boîtes de dimension: $a \times \mu a$. Le nombre N de boîtes de recouvrement évolue en fonction de la taille de la boîte pour un rapport d'aspect μ fixé. La dimension fractale $D_b(\mu)$ est alors:

$$N(a) \propto a^{-D_b(\mu)} \quad (1.16)$$

Suivant les valeurs du paramètre μ , une échelle caractéristique a^* sépare deux comportements où la dimension vaut soit 1 soit $2-\zeta$ (voir Annexe 3, Figure 2, page 106). Pour obtenir une estimation correcte de l'exposant d'auto-affinité du profil, il faut donc impérativement faire évoluer le rapport d'échelles μ .

Il faut noter que le choix du paramètre μ est également fonction de l'amplitude du signal. L'amplitude A est définie pour un profil auto-affine d'exposant ζ , par:

$$A = \frac{\langle \Delta_z \rangle}{\langle \Delta_x^\zeta \rangle} \quad (1.17)$$

Une telle quantité est comparable à un gain et est, par conséquent, complètement dépendante du système expérimental. Alors que l'invariance d'échelle devrait être indépendante de l'amplitude A , la dimension fractale, estimée par la méthode de boîtes, est sensible à une telle quantité. Le choix du paramètre μ doit donc se faire en fonction de cette amplitude.

Lorsque toutes les précautions sont prises afin d'obtenir une mesure significative de l'exposant ζ , il est alors possible de tester systématiquement cette méthode selon la démarche exposée précédemment (voir Annexe 3, Figure 8g, page 112). On constate que l'exposant mesuré par cette méthode est surestimé lorsque l'exposant est faible, et ceci d'autant plus que le profil analysé comprend peu de points de mesure. La surestimation systématique peut atteindre 0.3: exposant de construction

$\zeta_c = 0.1$, exposant mesuré $\zeta_m = 0.4$. Pour des exposants grands (proches de 1), la tendance s'inverse. Dans ce cas, la méthode sous-estime la valeur réelle de l'exposant. Il est toutefois remarquable que lorsque le système devient grand, l'erreur systématique décroît (voir Annexe 3, Figure 9g, page 114).

Estimation de la longueur Cette méthode consiste à calculer la longueur d'un objet et de voir comment varie cette mesure avec l'unité de longueur choisie. Si l'on nomme également a l'unité de longueur, la mesure $n(a)$ sera alors définie comme le nombre d'unités nécessaires à décrire l'objet. La dimension fractale est alors:

$$n(a) \propto a^{-D_l} \quad (1.18)$$

Dans ce cas, la dimension D_l est fonction de l'amplitude du profil (définie comme précédemment). Elle vaut, soit 1, soit $1/\zeta$ (voir Annexe 3, Figure 3, page 106). La sensibilité à ce paramètre est importante. L'exposant ζ ne peut être alors obtenu que de façon asymptotique. L'erreur résultant de cette méthode est de ce fait souvent d'autant plus importante que l'exposant est petit. On constate ainsi que pour des exposants inférieurs à 0.3, la méthode ne permet pas une détermination de cet exposant (voir Annexe 3, Figure 8f, page 112). Par contre, si l'objet présente une auto-affinité avec un exposant proche de 1 et qu'il est de taille conséquente, la méthode devient relativement précise avec une légère surestimation de 0.05 (voir Annexe 3, Figure 9f, page 114).

La présence d'importants artefacts dans l'utilisation des méthodes estimant une dimension fractale (que l'on peut relier à l'exposant d'auto-affinité), rend l'analyse des profils, par de telles méthodes, particulièrement difficiles. De ce fait, nous nous servirons peu de ces méthodes pour l'étude des mesures de surfaces de fracture ou de faille.

1.2.2.2 Détermination de l'exposant d'auto-affinité

Des méthodes plus spécifiques d'analyse d'objets auto-affines ont été développées récemment. Nous en présentons ici trois qui constitueront les principales méthodes d'analyse des données.

Méthode de fenêtre Un profil de longueur L est découpé en «fenêtres» de largeur Δ_x Feder [1988] (voir Figure 1.1). La position de chaque fenêtre est repérée par l'abscisse de l'origine x_0 de cette fenêtre. Un recouvrement entre les différentes fenêtres du profil est possible. Sur chacune de ces fenêtres, deux quantités sont calculées: d'une part, l'écart-type w_2 et d'autre part, la différence «d'altitude» w_∞ entre le point le plus élevé et le point le plus bas sur la fenêtre considérée. On s'intéresse à l'évolution de ces deux quantités lorsque la taille de la fenêtre croît. Par conséquent, il est nécessaire de moyennner w_2 et w_∞ sur l'ensemble des origines x_0 possibles. Si le profil est auto-affine, on peut montrer que les deux quantités suivent des comportements en loi de puissance (voir Annexe 1, Figure 2, page 50 ou Annexe 2, Figure

4, page 79):

$$\langle w_2(\Delta_x) \rangle_{x_0} \propto \Delta_x^\zeta \quad (1.19)$$

$$\langle w_\infty(\Delta_x) \rangle_{x_0} \propto \Delta_x^\zeta \quad (1.20)$$

Notons que les deux grandeurs w_2 et w_∞ sont sensibles à des moments très différents de la distribution des hauteurs. La première n'est autre que la racine carrée du deuxième moment alors que la seconde est reliée au moment d'ordre infini.

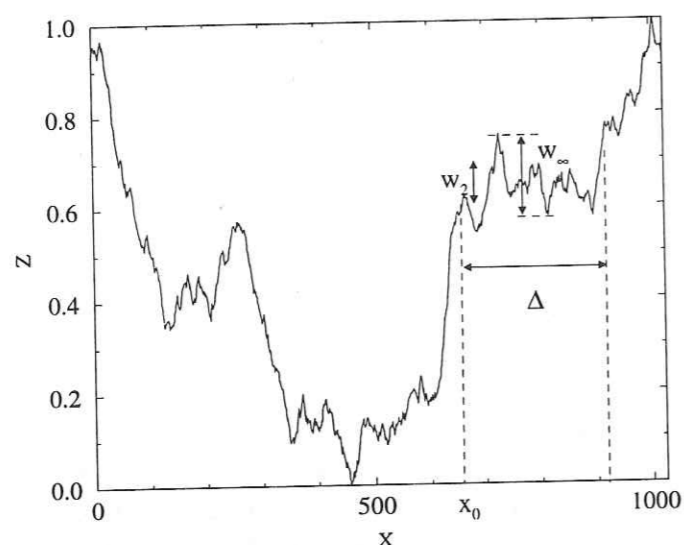


FIG. 1.1 - La méthode de fenêtre consiste à découper un profil en fenêtres de taille Δ . L'origine de chaque fenêtre est x_0 . Sur chacune des fenêtres est calculé l'écart-type w_2 et la différence entre la hauteur maximale et la hauteur minimale w_∞ .

Le test de cette méthode à partir de profils synthétiques montre qu'il y a sur ou sous-estimation selon la valeur de l'exposant d'auto-affinité en jeu (voir Annexe 3, Figure 8a, page 112). On constate que le calcul de w_2 tend plutôt à sous-estimer l'exposant à l'inverse de celui de w_∞ . Dans chacun des cas, si l'exposant mesuré est de l'ordre de 0 ou de 1, il devient prudent d'analyser le signal dérivé ou intégré². Il existe en effet une saturation de la mesure. L'erreur systématique décroît sensiblement lorsque le nombre de points de mesure dans le profil devient important (voir Annexe 3, Figure 9a, page 114).

2. L'intégration est toujours bien définie, la dérivation ne concerne que les profils dont l'exposant est supérieur à 1. On doit obtenir que l'intégration entraîne un accroissement de l'exposant de un. Au contraire, la dérivation fait chuter d'une unité l'exposant.

Probabilité de retours Etudier la probabilité de retour consiste à calculer la probabilité pour que, partant d'un point du profil à une altitude donnée, et avançant horizontalement (i.e. parallèlement à la direction x) de la distance d , on retrouve un autre point à la même altitude (voir Figure 1.2). Lorsque le point d'arrivée est le plus proche, on parle de premier retour. Dans le cas contraire, il s'agit de la probabilité de multiples retours.

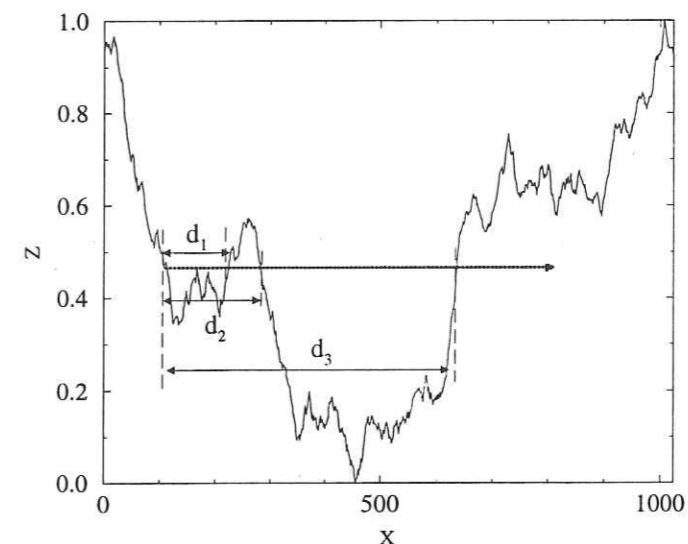


FIG. 1.2 - La probabilité de retour est définie comme la probabilité, partant d'un point du profil, d'intercepter à nouveau le profil, en se déplaçant à altitude constante. On appelle alors d_1 , la distance pour obtenir la première intersection, d_2 , la deuxième, d_3 , la troisième, etc.

La probabilité est obtenue à partir de l'histogramme des distances de retour d . On définit alors trois types d'histogramme (voir Annexe 3, Figure 6, page 109). Le premier correspond à celui des distances de premiers retours avec des classes dont la taille est constante. Ce type d'histogramme suit un comportement en loi de puissance Hansen and Måløy [1994]:

$$p_1(d) \propto d^{\zeta-2} \quad (1.21)$$

Un tel comportement tend à montrer que l'utilisation de classes constantes pour le calcul de l'histogramme, n'est pas des plus adaptées. En effet, on constate souvent la présence de fluctuations importantes lors de l'estimation de la quantité $p_1(d)$. Une bien meilleure définition de la probabilité est obtenue en utilisant des classes logarithmiques. Dans ce cas, il faut être attentif au fait que: $d \ln(d) = dd/d$ et donc que:

$$p_1^{(\log)}(d) \propto d^{\zeta-1} \quad (1.22)$$

Le troisième type d'histogramme est celui des multiples retours *Bouchaud et al.* [1990]. On calcule alors toutes les distances pour revenir à une même altitude et non plus seulement la plus petite. Un tel histogramme suit une loi du type:

$$p_m(d) \propto d^{-\zeta} \quad (1.23)$$

Le test des méthodes du premier et des multiples retours montre que les erreurs systématiques de ces méthodes sont peu sensibles à la valeur de l'exposant d'auto-affinité mais surtout au nombre de points de mesure que contient le profil (voir Annexe 3, Figures 8c et 8d, page 112). Même pour des grandes tailles de profil, une légère surestimation de l'exposant persiste (voir Annexe 3, Figures 9c et 9d, page 114).

Spectre de Fourier Cette dernière méthode est la plus classique. Il s'agit du calcul du spectre d'amplitude (carré de l'amplitude) pour chaque fréquence. Ce spectre n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation du signal. Il a souvent été utilisé pour déterminer une dimension fractale du profil selon la loi *Scholz and Mandelbrot* [1989]:

$$P(f) \propto f^{-(5-2D)} \quad (1.24)$$

Le relation avec l'exposant d'auto-affinité se déduit simplement du comportement de la fonction d'auto-corrélation *Falconer* [1990], *Isichenko* [1992] (voir Annexe 1, Figure 4, page 51 et Annexe 2, Figure 6, page 80):

$$P(f) \propto f^{-2\zeta-1} \quad (1.25)$$

Dans ce cas, l'exposant d'auto-affinité se relie simplement à la dimension fractale: $\zeta = 2 - D$.

Le test de cette méthode rapide montre qu'elle apparaît comme la plus précise de toutes les méthodes proposées ici (voir Annexe 3, Figure 8e, page 112). Tout d'abord, l'erreur systématique est peu sensible à la valeur de l'exposant d'auto-affinité. Elle est la seule méthode permettant de mesurer avec fiabilité des exposants supérieurs à un ou inférieur à zéro. Pour des profils riches en points de mesure, sa précision peut être quasiment parfaite (voir Annexe 3, Figure 9e, page 114).

1.3 Les outils d'analyse multi-fractales

Jusqu'à présent nous avons supposé un comportement mono-fractal de la distribution des altitudes du profil. Ceci se traduit par une description des moments d'ordre q , de la façon suivante:

$$\langle |\Delta_z|^q \rangle \propto \Delta_x^{q\zeta} \quad (1.26)$$

On peut également dire que cette hypothèse de mono-fractalité équivaut à postuler que la racine $q^{\text{ème}}$ du moment d'ordre q suit toujours la même loi de puissance en fonction de la distance horizontale:

$$\sqrt[q]{\langle |\Delta_z|^q \rangle} \propto \Delta_x^\zeta \quad (1.27)$$

Grâce à la collaboration avec François Schmitt et Daniel Schertzer, nous avons pu considérer le comportement multi-fractal qui apparaît comme une généralisation de la description d'invariance d'échelle *Parisi and Frisch* [1985], *Stanley and Meakin* [1988], *Scholz and Mandelbrot* [1989]. Il s'agit de ce que nous appellerons la description de la géométrie au «second ordre». Dans ce cadre, la racine q^{e} des différents moments d'ordre q ne se comporte plus de façon identique. L'exposant de la loi de puissance est alors fonction de l'ordre du moment (voir Annexe 2, Figure 17, page 88):

$$\sqrt[q]{\langle |\Delta_z|^q \rangle} \propto \Delta_x^{\zeta(q)} \quad (1.28)$$

La dépendance de l'exposant avec l'ordre du moment est ici décrite par une véritable fonction, si l'on accepte l'idée que les moments de la distribution sont définis pour tout ordre q réel. Un tel comportement peut être suggéré simplement à partir de l'analyse d'auto-affinité que nous avons présentée précédemment. En effet, si on reprend l'analyse par fenêtres, on constate qu'il existe une différence faible mais significative entre les exposants fournis par le calcul de w_2 lié au deuxième moment et w_∞ lié au moment d'ordre infini (voir Annexe 1, Figure 2, page 50). En termes de fonction $\zeta(q)$, on devrait avoir:

$$w_2(\Delta_x) \propto \Delta_x^{\zeta(2)/2} \quad (1.29)$$

$$w_\infty(\Delta_x) \propto \Delta_x^{\zeta_\infty} \quad (1.30)$$

avec $\zeta_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \zeta(q)/q$. La fonction $\zeta(q)$ est estimée de diverses façons. Tout d'abord, elle s'obtient directement à partir du calcul des différents moments du profil jusqu'à un ordre limité (ordre 8). Au delà, surviennent des problèmes numériques importants.

La non linéarité de la fonction peut être également calculée à partir d'un champ dit conservatif. En effet, la fonction $\zeta(q)$ peut se décomposer de la façon suivante (voir Annexe 2, Figure 17, page 88):

$$\zeta(q) = q\zeta - K(q) \quad (1.31)$$

où la fonction $K(q)$ exprime la multi-fractalité du processus *Schertzer and Lovejoy* [1987], *Schertzer and Lovejoy* [1989], *Schertzer and Lovejoy* [1991]. Cette fonction décrit le comportement d'un champ ϕ dérivé du champ des hauteurs du profil selon la relation:

$$\Delta_z \propto \phi(\Delta_x) \cdot \Delta_x^\zeta \quad (1.32)$$

Ce champ ϕ suit donc un comportement en loi de puissance:

$$\langle |\phi(\Delta_x)|^q \rangle \propto \Delta_x^{-K(q)} \quad (1.33)$$

Le champ ϕ est dit conservatif car il vérifie la relation: $K(1) = 0$. Sa construction est obtenue grâce à une intégration fractionnaire d'ordre ζ du profil initial. Ceci permet, en effet, d'extraire la composante en Δ_x^ζ du signal. Etudier les différents moments de ce champ ϕ fourni ainsi une estimation de la fonction $K(q)$.

Enfin, l'invariance d'échelle, différente pour chaque ordre de moment de la distribution des hauteurs, peut être mise en évidence par le calcul des probabilités de hauteurs supérieures à un seuil divergeant avec l'échelle horizontale considérée.

$$P(\Delta_z > \Delta_x^{-\gamma}) \propto \Delta_x^{C(\gamma)} \quad (1.34)$$

La fonction $C(\gamma)$ est difficile à obtenir numériquement avec une bonne précision. Elle nécessite en effet un très grand nombre de points de mesure. Elle est reliée à la fonction $K(q)$ par une relation de Legendre:

$$K(q) = q\gamma - C(\gamma) \quad (1.35)$$

Ces fonctions $K(q)$ et $C(\gamma)$ peuvent être interprétées selon un formalisme proposé en analyse de la turbulence. Il s'agit des multi-fractales universels dans le cadre des cascades multiplicatives continues. Trois paramètres sont alors nécessaires pour caractériser complètement et de la façon la plus générale, l'invariance d'échelle du processus. Le premier paramètre est l'exposant d'auto-affinité ζ . Les deux autres permettent de définir les comportements non linéaires (voir Annexe 2, Figure 18, page 89 pour la fonction $K(q)$).

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \quad (1.36)$$

$$C(\gamma) = C_1 \left(\frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'} \quad (1.37)$$

où α et C_1 constituent les deux derniers paramètres. Le paramètre α' est relié au paramètre α par: $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$. Notons que ce formalisme n'est valable que si α est différent de un.

Le comportement non linéaire de la fonction $\zeta(q)$ ou $K(q)$ ne peut s'observer que s'il existe une bonne représentation statistique des données. On peut montrer qu'il existe un moment caractéristique q_s , au-delà duquel la non-linéarité n'est plus visible *Schertzer and Lovejoy [1987]*.

$$q_s = \left(\frac{d + d_s}{C_1} \right)^{1/\alpha} \quad (1.38)$$

où d est la dimension de l'espace et d_s , la dimension «d'échantillonnage». Cette dernière est reliée au nombre de réalisations indépendantes N_s :

$$N_s = N^{d_s} \quad (1.39)$$

où N est le nombre de point dans le profil. Ainsi, par exemple, pour un ensemble de 30 profils indépendants comprenant chacun 1024 points, on obtient $q_s = 2.8$.

Par conséquent, tout moment d'ordre supérieur à 2.8 présente la même invariance d'échelle. Le comportement du moment d'ordre infini sera le même que celui d'ordre q_s .

$$\zeta_\infty = \frac{\zeta(q_s)}{q_s} \quad (1.40)$$

Ce calcul de l'ordre du moment maximum q_s montre également que l'on s'attend à ce que la différence de comportement entre les premiers moments et le moment infini, sur l'analyse d'un seul profil, soit la plus faible ($q_s = 2.2$). Pour obtenir une description précise de la fonction $K(q)$ jusqu'à des ordres de moments élevés, il faut un très grand nombre de données.

Il est important d'ajouter que l'amplitude du comportement non linéaire de l'exposant des différents moments de la distribution des hauteurs est fixée par la co-dimension C_1 . En général, elle est faible et donc le comportement linéaire caractérisé par le seul exposant d'auto-affinité ζ est une bonne approximation. L'exposant α (index de Lévy *Levy [1925]*, *Levy [1954]*), quant à lui, contrôle la «courbure» de la non-linéarité. Lorsque α est grand, l'exposant des moments évolue de façon très non-linéaire avec l'ordre des moments. Le profil présente alors de fortes singularités.

1.4 Résultats

Forts de ces différents outils et de la connaissance de leur limitations, nous allons pouvoir analyser de façon complète les propriétés d'invariance d'échelle de cette interface que représente la surface d'une faille ou celle d'une fracture.

Nous allons résumer ici les principaux résultats obtenus tant dans la caractérisation précise de l'exposant d'auto-affinité des différents objets d'étude présentés, ainsi que les premières estimations des exposants α et C_1 précisant le comportement relatif des différents moments de la distribution.

1.4.1 Auto-affinité

Dans le cadre de l'analyse des données, seules les méthodes spécifiques de l'étude des objets auto-affines ont été utilisées. Ceci exclut, par conséquent, les méthodes cherchant à déterminer une dimension fractale.

L'ensemble des résultats est résumé dans le tableau 1.1. On constate que le poids statistique des données de laboratoire, sur des surfaces de fracture, est bien plus grand que celui des données de terrain, obtenues sur une faille. Les valeurs des exposants que nous proposons dans deux cas sont:

$$\zeta^{(faille)} = 0.84 \pm 0.10 \quad \zeta^{(fracture)} = 0.80 \pm 0.05 \quad (1.41)$$

Il ressort que l'ensemble des résultats présentés dans le tableau 1.1 est tout à fait compatible. L'exposant d'auto-affinité peut être considéré comme identique pour la fracture ou la faille.

1.4.2 Multi-fractalité

L'analyse de la multi-fractalité n'a pu être faite que sur les données de laboratoire où de très nombreux profils ont été enregistrés. Une première estimation des paramètres, à la fois par le calcul direct de la fonction $K(q)$ à partir des profils ainsi que par la construction d'un champ conservatif ϕ , donne: $C_1 = 0.3 \pm 0.05$ et $\alpha = 1.5 \pm 0.1$. La surface de fracture présente par conséquent des propriétés multi-fractales dont l'amplitude est significative. Les valeurs de C_1 et α sont comparables à celles obtenues en turbulence.

Nous avons étudié les propriétés multi-fractales uniquement sur des surfaces de fractures. Il s'agit cependant de surfaces formées dans des matériaux très différents (granite et gneiss). Aucune différence significative dans la caractérisation multi-fractale n'a été obtenue.

1.5 Discussion

1.5.1 Relation avec les autres travaux

Il ressort de notre étude que l'exposant d'auto-affinité est le même (aux barres d'erreur près) pour des surfaces de fracture et des surfaces de failles. La propriété est donc observable à des échelles très différentes: de la dizaine de micro-mètres au mètre. De plus, pour des matériaux différents que sont le granite et le gneiss, le résultat n'est pas significativement différent. Ceci se confirme également avec des études antérieures que nous avons menées sur un grès, un calcaire riche en aragonite, une magnétite et une roche métamorphique basique *Schmittbuhl et al.* [1991]. Il ressort de ceci une grande robustesse de l'exposant d'auto-affinité face à la nature du matériau.

Une telle observation est parfaitement compatible avec les études de nombreux groupes de travail. Des premières études cherchant à mettre en évidence les propriétés d'invariance d'échelles en termes d'auto-similarité *Brown and Scholz* [1985a], *Brown* [1987b], *Power et al.* [1987], *Brown* [1988], *Power and Tullis* [1991], fournissent une dimension fractale compatible avec nos résultats. En effet, ils aboutissaient à: $D = 1.25 \pm 0.10$. Or l'exposant d'auto-affinité peut être relié, dans ce cas, à la dimension fractale: $\zeta = 2 - D$, soit $\zeta = 0.75 \pm 0.10$. Ces données étaient constituées de relevés sur différentes roches à l'échelle du laboratoire et du terrain. Aucune différence significative avait été mise en évidence entre terrain et laboratoire. Une revue plus récente est proposée par *Cox and Wang* [1993]. Ils montrent que tous les résultats établis depuis, ne sont pas concordants. Cependant, la qualité de l'estimation des exposants ou dimensions n'est pas toujours précisée et les biais que nous avons suggérés au cours de ce chapitre ont certainement affecté bon nombre de mesures.

Par ailleurs des analyses de surfaces de fractures en termes d'auto-affinité ont été réalisées par différents groupes. Citons le travail de *Poon et al.* [1992] sur des roches (argiles, grès et calcaires) qui proposent des exposants compatibles avec les nôtres. L'analyse de *Måløy et al.* [1992] sur des matériaux très différents confirme le

fait que la propriété est vérifiée quel que soit le matériau fracturé. Enfin, il semble que la propriété d'auto-affinité de la fracture avec un exposant de $\zeta \approx 0.80$ soit vérifié pour différents modes de rupture. *Bouchaud et al.* [1990] ont en effet, sur des alliages d'aluminium dont les modes de ruptures sont différents, mis en évidence l'absence de différences significatives dans l'exposant d'auto-affinité. Cette généralité de la propriété d'invariance d'échelle et la robustesse de l'exposant d'auto-affinité soulèvent la question d'une éventuelle universalité du processus de fracture *Bouchaud et al.* [1990].

1.5.2 Fracture et faille: une hypothèse de travail

Nous montrons à partir de l'analyse de la surface d'une faille que sa géométrie présente une invariance d'échelle de type auto-affine. Ainsi les transformations d'échelles à faire pour obtenir l'invariance sont différentes selon les directions de l'espace. Les directions dans le plan de faille n'ont pas le même rôle que celle perpendiculaire à ce plan. Les analyses des surfaces fracturées en laboratoire présentent le même type d'invariance d'échelle, avec un exposant similaire. Cette identité entre failles et fractures a été également observée par d'autres groupes *Scholz* [1990].

Il existe cependant des différences entre surface de fracture et faille. La faille résulte d'un ensemble de processus de croissance par fracturation lors des séismes. Il y a alors rupture d'aspérités, apparition de phénomènes de branchement, coalescence de micro-fissures, etc. Pendant les périodes inter-sismiques, la faille est le lieu des nombreux phénomènes lents pouvant modifier la géométrie: corrosion sous contrainte, circulation de fluides entraînant dissolution, recristallisation, transport de matière, etc.

La constatation de différences géophysiques entre failles et fractures alors que l'analyse d'auto-affinité conduit au même résultat dans les deux cas, suggère trois types d'interprétations.

1. Il existe une différence mais la propriété analysée (auto-affinité) n'est pas assez spécifique de l'état de la surface pour mettre en évidence cette différence. Numériquement, il est possible de tester cette «insensibilité» de la propriété d'auto-affinité. Si l'on imagine que, lors des rejeux transformant la surface de fracture en faille, l'un des phénomènes importants pour la géométrie, consiste à casser les principales aspérités, il devient possible de construire un modèle très simple d'érosion mécanique. Il suffit de tronquer, sur un profil auto-affine synthétique, de plus en plus de «matière» et de voir comment évolue la mesure de l'exposant d'auto-affinité. On constate alors que pour une érosion de près de la moitié du profil, l'exposant est toujours le même.

Si une telle interprétation est la bonne, il devrait exister des outils plus «sensibles» à la différence entre faille et fracture. On peut proposer, par exemple, l'étude multi-fractale. Il serait particulièrement intéressant de voir comment évoluent les propriétés multi-fractales lors de cette érosion. On s'attend à ce que la distribution des hauteurs soit significativement modifiée par le processus d'abra-

sion. En particulier, une grande partie des singularités les plus fortes tend à disparaître. On peut penser en première approximation³ que la multi-fractalité doit «décroître». En effet, le comportement linéaire de la fonction $\zeta(q)$ doit apparaître pour des ordres de moments q plus faibles. Une étude expérimentale de la multi-fractalité de la rugosité d'une surface de faille, serait donc très intéressante.

2. La faille conserve au cours de son histoire un héritage provenant de sa période de création qui n'est autre qu'un processus de fracturation. L'auto-affinité de la surface apparaîtrait lors de la création de la faille et de ses extensions successives (puisque il s'agit de fracture de matériaux et que toutes fractures présentent une auto-affinité avec un exposant du même type). Ensuite, le phénomène de rejeu, n'altérerait que peu la propriété «initiale». Cette interprétation est la vision géophysique de l'insensibilité énoncée lors de la remarque précédente.
3. La faille est auto-affine non pas du fait d'un héritage conservé au cours des rejeux successifs, mais parce qu'elle est recréée au cours des différents rejeux sismiques. En effet, on peut imaginer le rejeu sismique⁴ local comme le résultat d'une coalescence de micro-fissures, ou la fracturation d'une interface qui s'est cicatrisée pendant la phase inter-sismique, ou encore la formation de nouvelles interfaces du fait de changements locaux du champ de contraintes. Le processus de base du rejeu est donc la fracturation à même de créer continuellement des surfaces auto-affines.

Trancher entre ces différences ne nous semble pas facile, d'autant plus qu'il est probable qu'il existe des cas intermédiaires. En tout cas, nous avons choisi, pour la suite de ce travail, de considérer que la «conservation» de la propriété d'auto-affinité était un résultat physique. Ceci constitue, par conséquent, une hypothèse qui sera sous-jacente dans beaucoup des aspects de cette thèse. Ainsi, nous considérons que les observations, les modèles, les conclusions faites pour le problème de fracture sont non seulement pertinents mais également transposables à l'étude des failles. C'est cette hypothèse qui nous permet de replacer une bonne partie du travail dans une véritable perspective géophysique.

Conclusion

Nous avons analysé la géométrie de deux types de surface. D'une part, il s'agit de la surface d'une faille à l'échelle du terrain. Cette surface est le résultat d'une localisation de la déformation au cours de différents séismes. Elle est donc le produit d'une histoire complexe comprenant des phénomènes de fracturation et de rejeu. A

3. L'abrasion rend asymétrique la distribution des hauteurs. Elle réduit donc une partie des singularités (queue de distribution relative aux maxima) mais pas totalement puisque les minima sont intacts (s'ils ne se remplissent pas de matériau de trituration ou par cristallisation).

4. Nous proposons au lecteur de se reporter au chapitre 2 de la deuxième partie, où nous traitons plus spécifiquement du rejeu sismique.

ceci s'ajoutent les déformations lentes (i.e. aismiques) et les processus géochimiques d'érosion et de recristallisation. Nous avons montré que cette surface présentait une invariance d'échelle de type auto-affine avec un exposant: $\zeta = 0.84 \pm 0.10$. Par ailleurs nous avons caractérisé, avec une grande précision, des surfaces fraîches de fracture à l'échelle du laboratoire. Il s'agit de fractures obtenues dans deux matériaux dont la fabrication est très différente: un granite et un gneiss. Ces surfaces sont toutes auto-affines avec un exposant: $\zeta = 0.80 \pm 0.05$, comparable à ce qui a été obtenu à l'échelle du terrain.

Les résultats à l'échelle du laboratoire ont été obtenus à partir d'un nombre beaucoup plus conséquent de mesures. Le poids statistique de ces résultats est donc supérieur. De plus, nous avons vérifié les résultats à partir de techniques indépendantes. Nous avons pris soin de tester l'ensemble des outils d'analyses utilisés. Ces outils récents présentent des biais qui n'ont pas toujours été précisés. Nous abordons également le problème de l'anisotropie de la propriété dans le plan de fracture. Nous montrons (voir annexe 2) qu'il n'existe pas de direction privilégiée. Le formalisme utilisé qui suppose cette isotropie dans le plan de fracture semble donc approprié. Nous avons pu, grâce au grand nombre de données acquises à cette échelle, aborder une étape supplémentaire dans la caractérisation de l'invariance d'échelle: les propriétés multi-fractales. Nous avons développé cette approche dans le cadre des multi-fractales universelles (basées sur le principe d'existence de cascade continue d'énergie). Nous obtenons la co-dimension $C_1 = 0.3 \pm 0.05$ et l'indice de Lévy $\alpha = 1.5 \pm 0.1$.

Ces résultats s'inscrivent dans un cadre beaucoup plus large sur l'étude des surfaces de fracture. De nombreuses études montrent, en effet, que la propriété d'auto-affinité des surfaces de fracture est très générale. Elle dépend peu du matériau considéré, du mode de fracture et s'étend sur une très large gamme d'échelles. Cette observation suscite une question fondamentale sur le processus de fracture: s'agit-il d'un phénomène universel, au moins pour ce qui est des propriétés d'échelles? Il semble en effet que le préfacteur dans la loi d'échelle soit dépendant du matériau.

Notre observation de la même propriété d'invariance d'échelle entre surface de fracture et faille permet de poser la question du rôle de l'histoire de la faille dans cette propriété d'invariance d'échelle. L'auto-affinité de la surface est-elle un héritage de la naissance de la faille que le processus de rejeu n'affecte pas? Ou bien, le phénomène de rejeu est-il véritablement un processus de fracturation des aspérités, des zones cicatrisées, etc? Nous explicitons l'hypothèse qui est à la base de l'organisation du manuscrit, à savoir l'équivalence physique entre fracture et faille.

| échelle | lot de données | roche | nombre de profils traités | différence max. min. | r.m.s. | proba. retour | spectre Fourier |
|------------------|----------------|---------|---------------------------|----------------------|--------|---------------|-----------------|
| Labo- ratoire | wgx1 | granite | 104 | 0.78 | 0.63 | 0.75 | 0.70 |
| | wgx2 | granite | 122 | 0.80 | 0.71 | 0.75 | 0.80 |
| | wgx3 | granite | 234 | 0.81 | 0.75 | 0.80 | 0.79 |
| | wgz1 | granite | 61 | 0.81 | 0.71 | 0.75 | 0.80 |
| | wgz2 | granite | 84 | 0.81 | 0.74 | 0.75 | 0.75 |
| | wgz3 | granite | 128 | 0.81 | 0.74 | 0.79 | 0.80 |
| | gnx1 | gneiss | 62 | 0.81 | 0.71 | 0.73 | 0.75 |
| | gnx2 | gneiss | 257 | 0.81 | 0.71 | 0.73 | 0.70 |
| terrain | | granite | 6 | 0.90 | 0.83 | 0.84 | 0.81 |

TAB. 1.1 - Résultats de l'analyse d'auto-affinité aux différentes échelles de mesures, suivant les quatre méthodes utilisées.

Annexe 1

Field Measurements of the Roughness of Fault Surfaces

J. Schmittbuhl, S. Gentier and S. Roux

Publié dans: *Geophysical Research Letters*
Vol. 20, No 8, Pages 639-641, 1993

FIELD MEASUREMENTS OF THE ROUGHNESS
OF FAULT SURFACES

Jean SCHMITTBUHL
École Normale Supérieure, Paris

Sylvie GENTIER
Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Orléans

Stéphane ROUX
École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles, Paris

ABSTRACT: We recorded the height of a granitic fault surface as a function of position along one-dimensional profiles. We show that the profiles exhibit an "anisotropic" scaling invariance: *self-affinity*. The difference between the maximum and the minimum height, and the standard deviation of the height, over a length L are proportional to L^ζ , where $\zeta \approx 0.84$. Other properties such as the Return Probability distribution or the Power Spectrum of the profile confirm this result. This self-affine property is in good agreement with recent works on artificial fractured surfaces. Previous studies at field scale are consistent with this concept.

INTRODUCTION

The morphology of fractured surfaces appears at first sight to be very different depending on the material, its fracture mechanism and the scale of observation. Nevertheless, it is fundamental to have a faithful description of the surface geometry — at least from a statistical point of view — in as much as it controls physical properties of the fracture such as

- *contact and friction* [Obuko and Dietrich, 1984]; *e.g.* [Tullis, 1988] suggests a relationship between a distance parameter controlled by the surface roughness and a characteristic length of the friction law.

- *permeability*, since fracture aperture is directly related to the roughness of the two surfaces in contact [Brown, 1987; Brown, 1989; Thompson 1991].

- *wetting* [de Gennes, 1985]; the meniscus will be very sensitive to the detailed local morphology, and as a consequence, the flow of immiscible fluids in natural fractures, ...

Over the past ten years, a decisive progress has been achieved in the characterization of fracture morphology through systematic analysis of scale invariance properties, which were observed in a number of instances [Mandelbrot, 1982; Mandelbrot *et al.*, 1984; Termonia and Meakin, 1986]. The absence of a typical length scale is suggestive of some underlying critical phenomena [Charmet *et al.*, 1990; Hermann and Roux, 1990]. Brown and Scholz [1985], Power *et al.* [1987] showed the self-similar feature of natural fault surfaces. However, in spite of the versatility of fractal concepts, some care has to be taken when analyzing anisotropic structures (obviously directions along the mean fracture plane and perpendicular to it are not to be treated on the same footing). It has been recently reported that the geometry of brittle fractures was *self-affine* [Mandelbrot, 1985]. In such a case, concepts and tools originally developed for specifically self-similar object may fail [Mandelbrot, 1985; Wong, 1987; Brown, 1987; Brown, 1988].

The present letter reports on the analysis

CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE

of statistical features of a natural fault surface at field scale using three different methods, and shows that indeed the surface is self-affine, and may be characterized by a roughness exponent very close to the one observed on fresh fracture surface of laboratory scale samples [Måløy *et al.*, 1992].

Let us recall some basic properties of self-affinity which are presented in more details in *e.g.* [Feder, 1988]. A profile $h(x)$ is self-affine if it is (statistically) invariant under the affinity

$$\begin{cases} x \rightarrow \lambda x \\ h \rightarrow \mu h \end{cases} \quad (1)$$

Group properties implies that μ should be an homogeneous function of λ . The homogeneity index ζ such that

$$\mu = \lambda^\zeta \quad (2)$$

is the *roughness* or Hurst exponent. Let us note that for a self-similar invariance, ζ is unity. In this case, both scaling factors are equal.

MEASUREMENTS AND SELF-AFFINE ANALYSIS

Using a field surface profiler, we have studied the topography of one natural rock surface. This instrument provides raw profiles (height function of position: $h(x)$), see figure 1a, of more than one thousand points with a sampling interval of 0.5mm. The x and h resolutions are respectively 0.1 and 0.2mm. The range of scale investigated is from 1 mm to 1 m. Eighteen independent profiles were recorded over a granitic fault plane at "Mayet de Montagne" (France) [Bernasconi, 1991]. They are transverse to the local direction of slip (at large scale, motion is not well defined). We report below the analysis of six of these profiles. Prior to any analysis, we subtracted from the raw profile a linear function so as to reset the height of the first and last point to zero as shown in Fig. 1b. This defines a reference "mean" fracture plane. (Other choices

CHAP. I.1: ANNEXE 1

have also been considered such as subtracting a linear regression through the raw profile, and this does not affect significantly the results obtained).

Each profile is analyzed with three methods. The first one is a "variable band width" method [Feder, 1988]. A profile of length L is divided in windows or "bands" of width Δ indexed by the position of the first point x_0 of the band. The standard deviation of the height, w , and the difference δ between the maximum and minimum height on each band. Both w and δ are then averaged over the various band origins x_0 at fixed Δ . Band widths larger than $L/2$ are not considered because of insufficient independent sampling. Then $\langle w \rangle(\Delta)$ and $\langle \delta \rangle(\Delta)$ are plotted in a log-log diagram (see figure 2). This figure shows that both quantities follow a power law of Δ , as expected for self-affine where

$$\begin{cases} w \propto \Delta^\zeta \\ \delta \propto \Delta^\zeta \end{cases} \quad (3)$$

Therefore, the roughness increases continuously with the size of the window over which it is estimated. No absolute roughness scale can be defined independently of the sample size. An average of the estimates of ζ over the different profiles give $\zeta \approx 0.83$ and 0.9 respectively for w and δ .

The second method is the calculation of the return probability distribution. Starting from a point x_0 on the profile, we compute the distance d_0 where for the first time, the profile reaches the same height $h(x_0 + d_0) = h(x_0)$ as that of the starting point. The distribution of d_0 for all starting is called the return probability distribution, $P(d_0)$. Figure 3 shows that this distribution follows a power law. For self-affine profiles, it can be shown [17] that the return probability histogram satisfies:

$$P(d_0) \propto d_0^{\zeta-2} \quad (4)$$

Our average estimate of ζ over all samples is approximately 0.83.

The third method is the calculation of the autocorrelation function of the profile through its Fourier transform. The power

spectrum $P(f)$ of the profile is the Fourier transform of the correlation function $\langle h(x + \Delta x) \cdot h(x) \rangle$. Because of the filtering, a signal without any residual trend is computed with the FFT and so no artefact evolving like f^{-2} emerges in the power spectrum masking the physical information. Figure 4 shows that the power spectrum also follows a power-law. For self-affine profiles, we expect that the power spectrum fulfills [Feder, 1988]:

$$P(f) \propto f^{-1-2\zeta} \quad (5)$$

Table 1 summarizes the different estimates of ζ provided by the different methods of analysis and averaged over the 6 different samples. Typical fluctuations in the estimates are also indicated. Let us note however that these fluctuations are not to be confused with error bars on the determination of the roughness exponent. They do not take into account systematic deviations that could be due *e.g.* to finite size effects. Combining all different results gives a roughness exponent $\zeta \approx 0.84$.

In the variable band width method, we also considered other moments of the height distribution than the second. A nice power-law was also obtained, but all those moments could be described by a single ζ exponent, without having to resort to a more general multifractal description.

It is interesting to note that the *relative roughness* estimated over a sample size L , w/L decreases as the system size tends to infinity. Thus asymptotically, the fracture appears flat. This property justifies *a posteriori* the way we characterized the fracture surface through cuts, by probing the surface at constant intervals. Indeed since the relative roughness decreases to zero, overhangs if ever they exist at a very local level, would vanish upon coarse graining, in contrast with self-similar profiles, where the relative roughness is constant.

DISCUSSION

Some previous roughness measurements were done by Brown and Scholz [1985] on

laboratory and field scale samples. They recorded profiles on various surfaces: fresh natural joints, frictional wear surface formed by glaciation and a bedding plane surface at field scale. In this reference, the power spectra of the different profiles were studied and interpreted in terms of fractal dimension. The slope s of the power spectra provided a "fractal dimension" D defined by: $s = -(5 - 2D)$. It is straightforward to relate their result to the ζ exponent we introduced. Doing so we obtain a very consistent exponent of $\zeta \approx 0.8 \pm 0.1$ using Eq.(5), in very good agreement with our estimate.

The roughness of fractured surfaces expressed in terms of self-affinity was tested at laboratory scale on many different materials. Cracks surfaces on different rocks or minerals like sandstone, aragonite, magnetite or basic metamorphic rocks were analyzed and gave comparable results [Schmittbuhl, 1991]. Måløy *et al.* [1992] performed measurements over varied brittle materials including graphite, plaster of Paris, porcelain or bakelite and reported a roughness exponent of order 0.87. Also other fracture mechanisms were explored. For instance, in the ductile domain, the experiments on aluminium alloys of Bouchaud *et al.* [1990] provided again very similar observations: fractured surfaces appears as self-affine with an exponent of 0.8. It is quite striking that such a property appears to be so independent of the material type, the fracture mechanism, and the observation scale. The "universality" of the self-affine nature of fracture surfaces seems, in our opinion, to be likely, or to be more conservative, we believe that the real precision on the roughness index that we may reasonably defend, is such that most experimental data reported to date lies within the confidence limits of one single value — which depends on the space dimensionality. This "universality" implies that no information can be deduced on the mode of fracture being given only the roughness index, but on the other hand, it also means that physical consequences derived from the self-affine geometry of cracks can be transposed to a wide

class of different situations.

Albeit similar properties can also be obtained from numerical simulations in two dimensional systems [Hansen *et al.*, 1991], a theoretical understanding of such an "universal" scale invariance for fractured surfaces is still lacking. A qualitative analogy can be developed for perfectly plastic heterogeneous materials, where it can be shown — through a mapping onto an exactly solvable directed polymer problem in two dimensions [Kardar *et al.*, 1986; Kardar and Zhang, 1987] and onto a directed membrane problem in three dimensions — that a continuous interface of plastic elements develops with a self-affine geometry ($\zeta = 2/3$ in two dimensions).

In this paper, the field scale measurements of the roughness over a granitic fault were analyzed. One-dimensional profiles revealed with three methods, a scale invariance property of self-affinity characterized by an exponent ζ estimated to amount to 0.84. This result is consistent with previous studies on fault surfaces and some works on artificial fracture surfaces. Physical implications of this property are currently being investigated.

ACKNOWLEDGMENTS: We thank F. Cornet, A. Hansen, J.P. Hulin, K. J. Måløy, J.P. Vilotte for useful discussions. This work was supported by the AFME, the BRGM, the PIRSEM and the GRECO Géomatériaux. The surface profilometer was developed with the support of the ANDRA.

REFERENCES

- Bernasconi P., Mayet de Montagne, D.E.S.S. report of I.P.G.P., 1991.
- Bouchaud E., G. Lapasset and J. Planès, Fractal dimension of fractured surfaces: a universal value?, *Europhys. Lett.*, **13**, 73-79, 1990.
- Brown S.R. and C.H. Scholz, Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces, *J. Geophys. Res.*, **90**, 12575-12582, 1985.
- Brown S.R., A note on the description of surface roughness using fractal dimension, *Geophys. Res. Lett.*, **14**, 1095-1098, 1987.
- Brown S.R., Correction to "A note on the description of surface roughness using fractal dimension", *Geophys. Res. Lett.*, **15**, 286 1988.
- Brown S.R., Fluid flow through rock joints: the effect of surface roughness, *J. Geophys. Res.*, **92**, 1337-1347, 1987.
- Brown S.R., Transport of fluid and electric current through a single fracture, *J. Geophys. Res.*, **94**, 9429-9438, 1989.
- Charmet J.C., S. Roux and E. Guyon, *Disorder and Fracture*, edited by J.C. Charmet, S. Roux and E. Guyon, Plenum, New York, 1990.
- de Gennes P.G., Wetting: statics and dynamics, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 827-863, 1985.
- Feder J., *Fractals*, Plenum, New York, 1988.
- Hansen A., E.L. Hinrichsen and S. Roux, Roughness of crack interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 2476-2479, 1991.
- Herrmann H.J. and S. Roux, *Statistical Models for Fracture of Disordered Media*, edited by H.J. Herrmann and S. Roux, Elsevier, Amsterdam, 1990.
- Kardar M., G. Parisi and Y.C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 889-892, 1986.
- Kardar M. and Y.C. Zhang, Scaling of directed polymers in random media, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 2087-2090, 1987.
- Måløy K.J., A. Hansen, E.L. Hinrichsen and S. Roux, Experimental measurements of the roughness of brittle cracks, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 213-215, 1992.
- Mandelbrot B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, 1982.
- Mandelbrot B.B., D.E. Passoja and A.J. Paullay, Fractal character of fracture surfaces of metals, *Nature*, **308**, 721-722, 1984.
- Mandelbrot B.B., *Phys. Scripta*, **32**, 257-260, 1985.
- Okubo P.G. and J.H. Dietrich, Effects of physical fault properties on frictional instabilities produced on simulated faults, *J. Geophys. Res.*, **89**, 5817-5827, 1984.
- Power W.L., T.E. Tullis, S.R. Brown, G.N. Boitnott and C.H. Scholz, Roughness of natural fault surfaces, *Geophys. Res. Lett.*, **14**, 29-32, 1987.
- Schmittbuhl J., Y. Berthaud and S. Roux, Analyse de rugosité de surfaces de rupture fragile, in *Rapport Scientifique du GRECO Géomatériaux*, edited by J.M. Reynouard, 267-271, 1991.
- Termonia Y. and P. Meakin, Formation of fractal cracks in a kinetic fracture model, *Nature*, **320**, 429-431, 1986.
- Thompson M.E., Numerical simulation of solute transport in rough fractures, *J. Geophys. Res.*, **96**, 4157-4166, 1991.
- Tullis T.E., Rock friction constitutive behavior from laboratory experiments and its implications for an earthquake field monitoring program, *Pure Appl. Geophys.*, **126**, 555-588, 1988.
- Wong in *AIP Conf. Proc.*, **154**, edited by J. Banavar, *Amer. Inst. Phys.*, New York, 1987.
- J. Schmittbuhl, Département T.A.O., URA CNRS 1316, École Normale Supérieure, 24 Rue Lhomond, F-75231 Paris cedex 05, France.
- S. Gentier, Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Avenue de Concyr, Orléans la Source, B.P. 6009, 45060 Orléans Cedex 2, France.
- S. Roux, L.P.M.M.H., URA CNRS 857, École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles, 10 rue Vauquelin, F-75231 Paris cedex 05, France.

(Received October 7, 1992;
revised: December 7, 1992;
accepted: January 12, 1993.)

Copyright 1991 by the American Geophysical Union.

| Measures | Average | Fluctuations |
|--------------|---------|--------------|
| point number | 1226 | 2% |
| δ | 0.90 | 3% |
| w | 0.83 | 2% |
| $P(d_0)$ | 0.83 | 2% |
| $P(f)$ | 0.81 | 3% |

Table 1: Estimates of roughness exponents and fluctuations

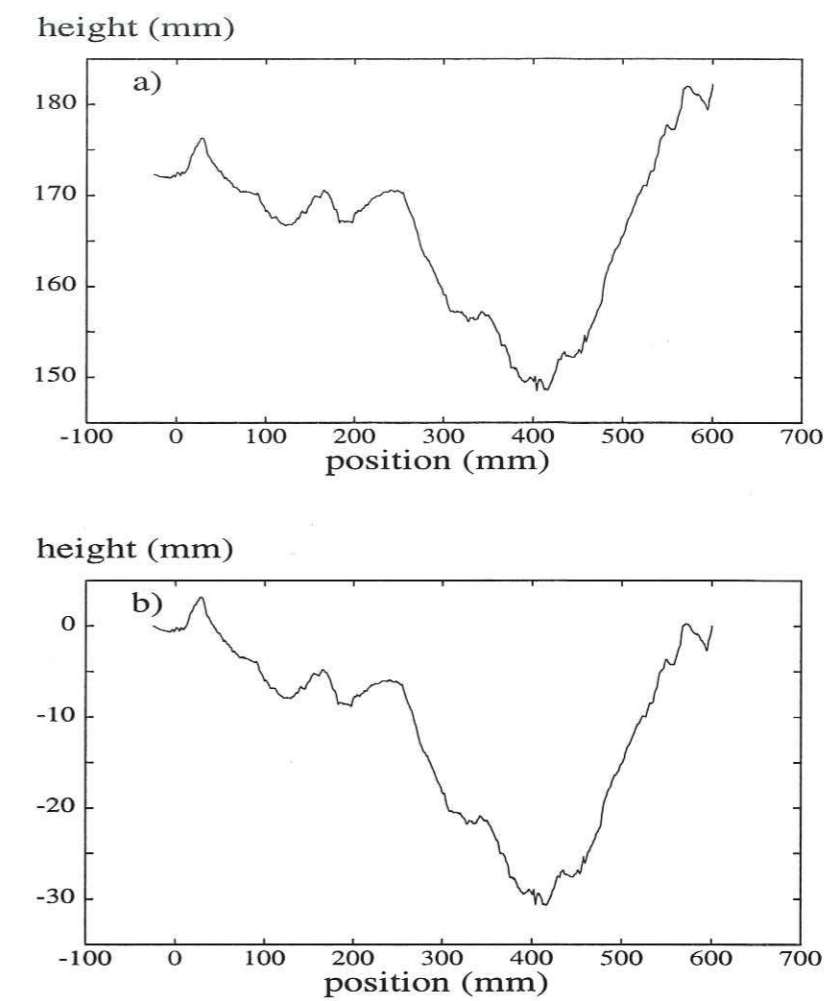


Figure 1: (a) is one of the 6 raw profiles taken over the granitic fault surface. The height is plotted as a function of position. (b) is the filtered profile obtained by subtracting the drift between the first point and the last one.

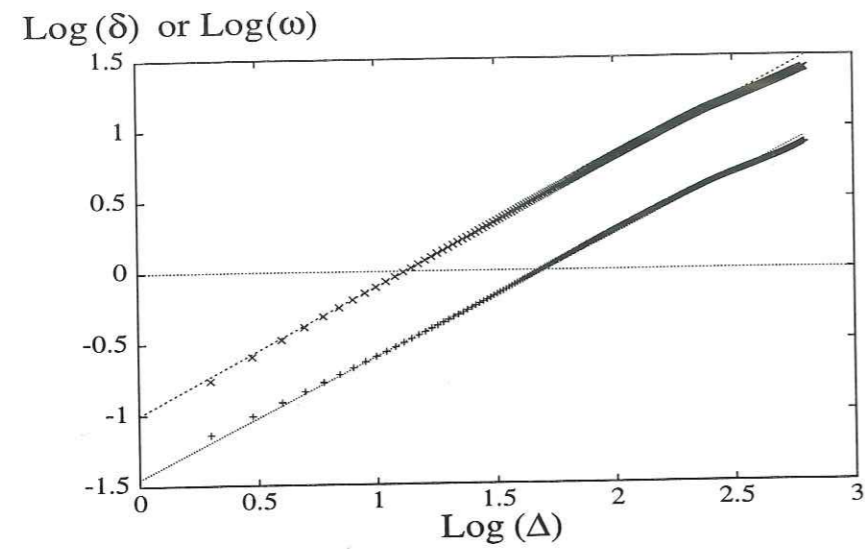


Figure 2: The difference between the maximum and the minimum height δ (\times) and the standard deviation $w = \sqrt{\langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2}$ ($+$) on bands of width Δ are shown in a log-log diagram. The two straight lines are best fits of slopes 0.89 (\cdots) and 0.85 ($- -$) respectively.

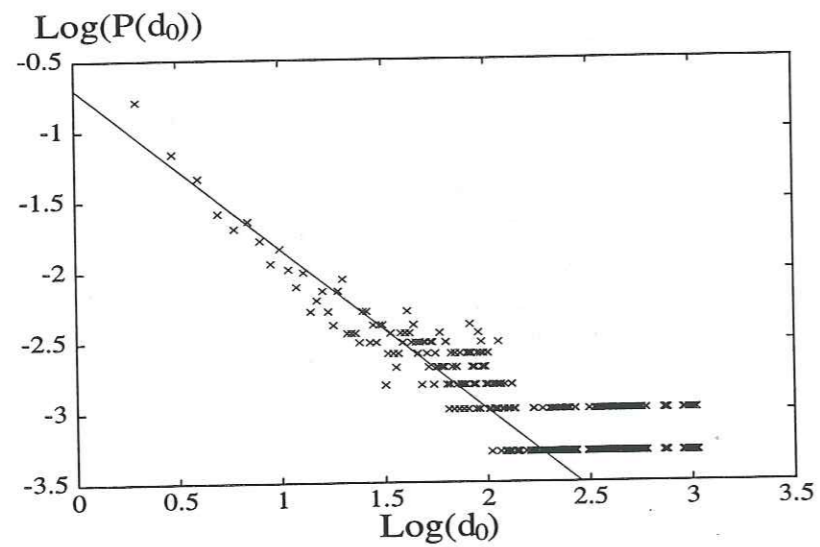


Figure 3: The return probability histogram $P(d_0)$ in a log-log diagram for one profile. It is the distribution of intercept length of the profile with horizontal lines starting at each point of the profile. A best fit is shown as line of slope -1.14 (giving $\zeta = 0.86$).

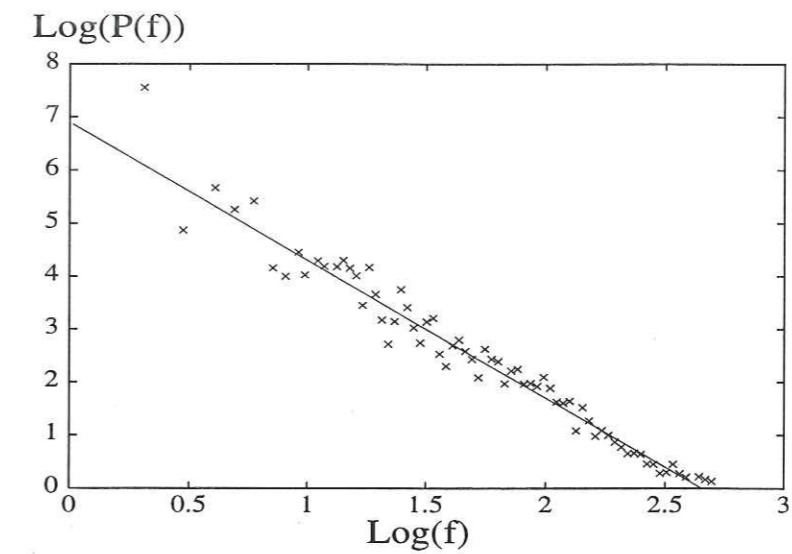


Figure 4: The power spectrum $P(f)$ of the profile as a function of the frequency f in a log-log diagram. A linear regression of slope 2.60 is shown. The corresponding value of the roughness exponent is 0.80.

Annexe 2

Scaling Invariance of Crack Surfaces
J. Schmittbuhl, F. Schmitt and C. Scholz

Soumis au: *Journal of Geophysical Research*
(version révisée)

SCALING INVARIANCE OF CRACK SURFACES

Jean SCHMITTBUHL

Laboratoire de Géologie, Ecole Normale Supérieure, Paris

François SCHMITTLaboratoire de Météorologie Dynamique,
Université Paris 6, Paris**Christopher SCHOLZ**

Lamont Doherty Earth Observatory, Columbia University, Palisades, NY

ABSTRACT: The morphology of fractured rock surfaces is studied in terms of their scaling invariance. Fresh brittle fractures of granite and gneiss were sampled with a mechanical laboratory profilometer and (1+1)-dimension parallel profiles were added to build actual maps of the surfaces. A first step in the scaling invariance description is a self-affine analysis using three independent methods. The root-mean-square and the maximum-minimum difference of the height are shown to follow a power law with the sample length. The return probability and the Fourier spectrum are also computed. All these approaches converge to a unique self-affine exponent: $\zeta = 0.80$. Analysis over a broad statistical set provides a reproducibility error of ± 0.05 . No significant differences between the isotropic granite and the markedly anisotropic gneiss appear for the scaling exponents. An analysis of the profilometer shows that the two main drawbacks of the set-up are not significant in these analyses. The systematic errors of the scaling analysis are estimated for the different methods. Isotropy of the scaling invariance within the mean fracture plane is shown either with the result obtained from different fracture orientations or with the two dimensional Fourier spectrum of the surface topography itself. The analysis is brought further into the multifractal framework. The structure functions are shown to have power law behavior and their scaling exponent varies non linearly with the moment order. Finally, the corresponding conserved process belongs to a universal multifractal class with $\alpha = 1.5$ for the Levy index and $C_1 = 0.3$ for the fractal codimension of the mean singularities. The three indices (ζ, α, C_1) completely characterize the scale invariance. The multifractal behavior is significant for physical properties which depend on high order moments like contact. According to this study and that of other groups, the self-affine exponent ζ is constant over a large range of scales and for different fracture modes and various materials. This opens the possibility that there exists a form of universality in the cracking process. It appears that only the prefactor of the roughness is dependent on material and mode.

INTRODUCTION

The topography of crack surfaces, or fractography, has been studied for many years. The scale invariance description of a metal fracture initiated by Mandelbrot *et al.* [1984] stimulated an important renewal of interest in this field. This decisive progress has been achieved thanks to the fractal concept Mandelbrot [1982] discussed for a wide number of natural or artificial surfaces Sayles and Thomas [1978]. It shows that no characteristic volume can be defined. Hence, distinctions between micro and macro-scale are not relevant. The absence of a typical length is suggestive of some underlying critical phenomena Charmet *et al.* [1990], Herrmann and Roux [1990]. In geophysics, Brown and Scholz [1985a] and Power *et al.* [1987] showed the self-similar features of natural fault surfaces at field scale and on brittle cracks at the lab scale. A recent review of the fractal description of fractured surfaces is given by Cox and Wang [1993].

Recently, a more general scaling transformation has been proposed: *self-affinity* Mandelbrot [1985], Mandelbrot [1986], Voss [1985], Alenxander [1985]. It takes anisotropy into account, which is fundamental for a process like fracture where directions along the mean fracture plane and perpendicular to it should not be treated on the same footing. Such scaling was verified to correctly describe the roughness of faults Schmittbuhl *et al.* [1993a] and also of crack surfaces at the laboratory scale Poon *et al.* [1992]. Some care has to be taken with anisotropic phenomena because concepts and tools originally developed for self-similar objects may fail Mandelbrot [1985], Wong [1987], Brown [1987b], Brown [1988], Feder [1988], Hatton *et al.* [1993].

A fundamental discussion emerges from the scaling invariance description. Some studies claim that fractal dimensions are dependent on the fracture process Mandelbrot *et al.* [1984] or of the material Cox and Wang [1993]. But most of the recent studies emphasize a very robust fractal dimension or self-

affine exponent independent of the material Måløy *et al.* [1992], Meakin [1993] or the fracture mode Bouchaud *et al.* [1990]. This leads to the question of universality in the fracture process. In fact, a robust exponent is difficult to define experimentally because of the estimate of the errors. Is it because of too low a resolution that a unique exponent is found? One of the aims of the present paper is to answer this question.

The general effort to describe fracture surfaces is motivated by two fundamental reasons. First, the geometry of the crack surface is directly related to the features of the aperture of such surfaces in contact. Aperture is significant in determining a number of important properties, such as fluid permeability Brown [1987a], Brown [1989], Thompson and Brown [1991], Thompson [1991], Schmittbuhl *et al.* [1993b] and electrical or thermal conductivities of faults Brown [1989], Thompson [1991], Roux *et al.* [1993].

For the mechanical behavior of fractures, the geometry of the surfaces controls the contact area and subsequently the friction law, compressibility, wear or lubrication Wong *et al.* [1989], Johnson [1989], Oden and Martins [1985], Tullis [1988], Brown and Scholz [1985b], Biegel *et al.* [1992], Boitnott *et al.* [1992]. The complexity of the geometry leads to some very local contacts compared to the system size. The relation between any local contact and the resulting macroscopic friction law is an active area of research Ruina [1983b], Okubo and Dieterich [1984], Scholz [1990]. Recent experiments and analyses on normal loading of a self-affine surface have been performed Måløy *et al.* [1993], Roux *et al.* [1993]. Simple models of the friction law between two self-affine surfaces have been investigated Wang and Scholz [1993], Schmittbuhl *et al.* [1994]. However, for most of these studies the roughness appears as a parameter which is not always well described.

Secondly, the crack surface can be seen as the trace of the crack process (in the case of a fresh surface). The shape of the surface is produced by the geometry of the crack front. As a consequence, the study of the sur-

face provides information about the cracking phenomenon. Properties of crack surfaces are strongly related to the fracture dynamics and to the influence of the medium heterogeneities or its correlation between different scales. A close study of the crack topography is necessary for any model of fracture (especially for the study of the crack front geometry).

Though the description of the crack surface with self-affine tools provides a wealth of information, multifractal analysis Halsey *et al.* [1986], Parisi and Frisch [1985], Schertzer and Lovejoy [1987] allows us to go a step further towards a comprehensive description of all the singularities.

In this article, we attempt a complete characterization of a fresh brittle fracture of rock in terms of scaling invariance. The influence of constitutive isotropy or anisotropy of the features of the surface is studied through the analysis of two quite different rocks: a granite and a gneiss. Mono and multi self-affine approaches on (1+1) and (2+1) dimensional objects are carried out. We also deal with the different biases that appear in the experimental device and calculate systematic deviations of the self-affine analyses in order to estimate errors.

The present paper is organized as follows: after introducing the subject in section I, we present in section II the measurements of fracture topography with a laboratory profiler, on granite and gneiss surfaces. Section III is devoted to the self-affine (mono-fractal) analysis for (1+1) dimensional profiles with emphasis on both experimental and analytical biases. In section IV, (2+1) dimensional maps are built and their anisotropy discussed. The multifractal analysis is described in section V, within the framework of universal multifractals. Finally, in section VI we discuss the results.

MEASUREMENTS

Material and fracture

We focus our study on tensile fracture surfaces obtained from brittle heterogeneous rocks. Our aim is to characterize surfaces resulting from a single process: crack propagation. We chose the material in order to obtain mainly intra-granular rupture. An inter-granular fracture implies a cut-off in the roughness analysis. Indeed, for length scales smaller than the grain size, the shape of the surface is not the result of the crack process but is a function of the growth history of the grain. As a consequence, we looked for a very coherent material with a small grain size (1 mm). Pink Westerly granite (from Westerly, Rhode Island) appeared to be a good candidate. It is supposed to be quite isotropic and this has been verified by cutting three bars oriented in different directions. The cross section of these bars is 5×5 cm and the length is 12 cm. Bar directions are given by the longest size of the sample and are perpendicular to one another according to an orthogonal frame: X, Y, Z. They are used to name the surfaces (see Table 1). For instance, a X-surface is normal to the X-direction.

The influence of the rock isotropy in the fracture topography will be evaluated by analyzing measurements on a gneiss surface. It is the Fordham gneiss, (from Bronx, New York) which is a granite gneiss with approx. 70% of plagioclase, 25 % of quartz and the rest of mica and accessory minerals. It is also a fine grained material but with a very strong intrinsic anisotropy. The gneiss block was cut to have its main direction parallel to the foliation. In order to sum up all the main features of each surface, the name of each surface also included the rock type (*cf* Table 1): *wg* for Westerly Granite and *gn* for Gneiss.

These samples were broken with a mechanical press in tension by three point bending (see Figure 1). In order to induce a "flat" fracture, perpendicular to the main direction, we cut a guideline of 3 mm depth along a square around the bar before the bending process. Well defined fractured surfaces are obtained for the mapping process: no crack branching or overhangs were observed and very few wear particles were detected.

Data acquisition

A laboratory stylus profiler provided (1+1) dimensional profiles of the crack surfaces. This was the same instrument used by *Brown and Scholz* [1985a]. A stylus is moved horizontally (parallel to the mean plane of the fracture) with constant speed while a spring forces the tip to follow the roughness. The path of the stylus is sampled at regular time intervals.

The profiles are 4 cm long and contained around 1500 points. A point is a record of the height h as a function of the position x . Height direction is given by the profiler frame and is supposed to be the vertical direction. Note that the horizontal position is not deduced from the linear speed of the stylus but actually measured with a horizontal displacement transducer. The typical horizontal step between two adjacent points is $25 \mu\text{m}$ which is long compared to the stylus tip diameter: $5 \mu\text{m}$. The accuracy for both directions is $2 \mu\text{m}$. Note that the horizontal step is much smaller than the grain size. Therefore, in the analysis we are able to determine if the grain size is a characteristic length.

The main limitation of this device is that the range of the admissible vertical displacement decreases as the accuracy increases. However, since the maximum range of observation scales was expected, we chose a correspondingly high precision and thus we were restricted to a limited height range for the profile measurement: $\pm 0.75 \text{ mm}$. This provides the widest dynamic range, i.e. the broadest ratio between large and small scales. This explains why we had to impose a guideline to the fracture to make it as flat as possible.

The measurement method is fast: 40 ms per point, which allowed us to make many parallel profiles in order to build a (2+1) dimensional map of the surface. To do this, the fracture sample was mounted on a rectangular positioning table, which was moved by a pre-set $50 \mu\text{m}$, perpendicular to the profile direction in the interval between successive traverses.

Profiles and maps

Table 1 shows the structure of the eight data sets used for this study. Only two of the three granite surfaces were sampled. For each fracture, each side has been measured at least once.

Figure 2 gives an example of a raw profile obtained from one of the Westerly Granite surface (*wgx3*), note the vertical exaggeration. Each dot corresponds to one measured point. This graph shows the complexity of the roughness (topography height). At first sight, no characteristic wavelength can be recognized. A distinction between the macro-scale and the micro-scale cannot be defined. Intermittency does not seem very important. In other words, a point which is far from the average height has a strong probability to have neighbors close to its height. By assembling many such parallel profiles, we build a (2+1) dimensional map as shown on Figure 3 for the *wgx3*-surface.

MONO-FRACTAL ANALYSIS OF PROFILES

Self-affine scaling

The first step of the scale invariance description is the (1+1) dimensional analysis. We show that profiles along crack surfaces follow a robust scaling invariance: *self-affinity*. Let us define such a geometrical property.

Self-affine set A self-affine set is a set statistically invariant under an affine transformation. The frame origin is defined by the position of the first point of the profile. For a horizontal direction amplitude Δx in the mean fracture plane, and a vertical direction amplitude Δh , the affine transformation is defined by:

$$\begin{cases} \Delta x \rightarrow \lambda \Delta x \\ \Delta h \rightarrow \mu \Delta h. \end{cases} \quad (1)$$

In order to combine these transformations, a group structure has to be used. As a consequence, μ is a homogeneous function of λ .

The homogeneity exponent is called the *self-affine exponent* ζ or Hurst exponent. It fulfills the condition:

$$\mu = \lambda^\zeta. \quad (2)$$

The scaling invariance is then described by this single exponent.

Let us make several comments about this self-affine property. First, for a self-similar set, both directions have to follow the same scaling to preserve the invariance. Consequently, both scaling factors are equal and so ζ is equal to one. Secondly, it is interesting to compute the macroscopic trend of a self-affine ideal profile of length L . Let us call s the slope of this linear trend. An approximation of this slope is: $s \approx \Delta h(L)/L$. If the profile is self-affine then:

$$\langle |\Delta h(\lambda \Delta x)| \rangle = \lambda^\zeta \langle |\Delta h(\Delta x)| \rangle \quad (3)$$

where λ is a positive scaling factor. The bracket deals with a mean over many realizations, i.e., many profiles. This is also true for $\lambda = 1/\Delta x$, therefore it shows simply that:

$$\langle |\Delta h(\Delta x)| \rangle \propto |\Delta x|^\zeta \propto \lambda^{-\zeta}. \quad (4)$$

Consequently, on average, the height at the "end" of a profile of length L in terms of number of points is L^ζ . The macroscopic slope is therefore estimated as: $s \propto L^{\zeta-1}$. The consequence of this is that a sufficiently broad — in the sense of a large scale ratio between small and large scales ($L \rightarrow \infty$) — profile appears flat for a self-affine exponent smaller than one. The same arguments leads, for (2+1) dimensional problems, to the appearance of a flat plane at large scale which can be defined as a mean crack plane. For our measurements, this is the zero height plane because of our choice of reference.

Moreover, it is an *a posteriori* justification of a one to one mapping during the measurement. Indeed, because the stylus is recording only one height for a given horizontal position, we are not able to describe any overhangs of the surfaces. The above argument implies that the local missing information is not significant if the surface is

self-affine with an exponent less than one. Furthermore, it says that a self-similar set ($\zeta = 1$) has significantly tortuous profiles and consequently, cannot be completely described with a one to one mapping record.

In order to characterize a self-affine object, we used three methods which are detailed in the following subsections. To illustrate the three methods of analysis, the results of only one profile of *wgx3*-surface (referred to, in the following, as the *typical* profile, see Figure 2) will be presented. The global synthesis of all the measurements is addressed in the subsection 1.5.2: *Average over n profiles*.

Variable band width method The method we will first present is the *variable band width method* *Feder* [1988]. A profile of length L is divided, in the x -direction, in bands or windows of width Δ (in terms of point number). The origin of each band is defined by the position of the starting point: x_0 . Overlaps between windows are allowed. Hence, the initial position x_0 is included in the range: $[1; L - \Delta]$ for a given band width Δ .

Two statistical estimates of the roughness are defined *Roux and Hansen* [1994]. On the one hand, $w_2(x_0, \Delta)$ is the standard deviation of height over such a band starting at point x_0 :

$$w_2(x_0, \Delta) = \left[\frac{1}{\Delta} \sum_{x \in [x_0; x_0 + \Delta]} h(x)^2 - \left(\frac{1}{\Delta} \sum_{x \in [x_0; x_0 + \Delta]} h(x) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

This is related to the second moment of the height distribution. Even if the average of the global set is nil, it is of great importance to subtract the window mean because we are interested in the relative height magnitude.

On the other hand, the difference between the maximum and the minimum height

over the band is called w_∞ :

$$w_\infty(x_0, \Delta) = \max_{x \in [x_0; x_0 + \Delta]} h(x) - \min_{x \in [x_0; x_0 + \Delta]} h(x) \quad (6)$$

which is a function of the infinite order moment.

Both quantities are averaged over the different starting points x_0 for a given width Δ :

$$\begin{cases} w_2(\Delta) = \langle w_2(x_0, \Delta) \rangle_{x_0 \in [0; L - \Delta]} \\ w_\infty(\Delta) = \langle w_\infty(x_0, \Delta) \rangle_{x_0 \in [0; L - \Delta]} \end{cases} \quad (7)$$

Bands which have a width larger than $L/2$ are ignored because it is not possible to obtain a sufficiently large number of independent windows.

An example of such an analysis is plotted on Figure 4. A power law behavior of both roughness estimates is obtained. The exponents are both close to 0.80. A cut-off emerges for large windows as a result of the statistical problem emphasized above. No lower cut-off is visible. Scaling is obtained over a large dynamic range (more than two decades). It clearly shows that the r.m.s. value of the topography (roughness) is sample size dependent.

Let us show roughly that both estimates exhibit self-affine scaling. $w_2(\Delta)$ and $w_\infty(\Delta)$ can be thought as two characteristic measures of the height over a length Δ . Hence, scaling (1) transforms the window size and the roughness estimates w_2 and w_∞ as:

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow \lambda \Delta \\ w_2 \rightarrow \lambda^\zeta w_2 \\ w_\infty \rightarrow \lambda^\zeta w_\infty \end{cases} \quad (8)$$

With an argument analogous to that above, by choosing $\lambda = 1/\Delta$, it emerges that:

$$w_2(\Delta) \propto \Delta^\zeta \quad w_\infty(\Delta) \propto \Delta^\zeta \quad (9)$$

The exponent of the power law fit (adjusted by least squares) on Figure 4 is a direct estimate of the self-affine exponent. More detailed arguments can be found in Appendix A or in Feder [1988].

Return Probability Histogram The *Return Probability Histogram* is based on the

following computation. Starting from a point of abscissa x_0 on the profile, the distance d is calculated as the distance to reach, for the first time, the same height as the starting one: $h(x_0 + d) = h(x_0)$. The d histogram is an estimate of the Return Probability: P_R . It is a function of the probability $P(h = 0, d)$ to cross the height: $h = 0$ after a distance d_0 and the probability $P(h \neq 0, 0 < x < d)$ to avoid the zero height in between. The latter probability is hard to compute because of the very long range correlations which exist in the problem. Such a probability is expected to behave like Hansen and Måløy [1994]:

$$P_R(d) \propto d^{\zeta-2} \quad (10)$$

Figure 5 provides an example of the histogram with a logarithmical binning, for the typical profile. The power law behavior is confirmed and the obtained slope of -1.20 leads also to a self-affine exponent of 0.80. The deviation at large d from the power law behavior is mainly due to the underestimate of the number of large returns. Indeed, returns which do not end at the end of the profile are ignored.

Power spectrum The last estimate follows a more classical method. It is the calculation of the auto-correlation function between two points of the profile Falconer [1990], Isichenko [1992]:

$$C(\delta) = \langle (h(x + \delta) - \bar{h})(h(x) - \bar{h}) \rangle_{profile} \quad (11)$$

where \bar{h} is the average of $h(x)$ over the entire profile. If L is the length of the profile, the difference between the zero auto-correlation function and the correlation at a range δ becomes:

$$C(0) - C(\delta) = \frac{1}{2} \langle (h(x + \delta) - h(x))^2 \rangle_{profile} \quad (12)$$

let note that:

$$C(0) = w_2^2(L) \quad C(0) - C(\delta) = w_2^2(\delta) \quad (13)$$

Equation (9) provides the scaling of the latter expression (if the major trend has been suppressed). Consequently, the behavior of

the auto-correlation function of a self affine profile is given by:

$$C(0) - C(\delta) \propto \delta^{2\zeta} \quad (14)$$

Let us recall that the power spectrum is the Fourier transform of the auto-correlation function Falconer [1990]. Consequently (see appendix B), the scaling of the spectrum $S(f)$ is given by:

$$S(f) \propto f^{-2\zeta-1} \quad (15)$$

On Figure 6 the power spectrum is plotted in a log-log diagram for the typical profile. The fit obtained by least squares leads to a slope of -2.7 which is very consistent with the predicted behavior. It implies for this example a self-affine exponent of 0.85.

It is necessary to take care with the numerical computation of the Fourier spectrum because it leads to many artifacts. We mention two: *aliasing* due to the discrete profile sampling and *leakage* as a consequence of the finite size of the sample (or the numerically discrete frequency space) Press et al. [1992]. Let us first look at the aliasing problem. The sampling interval between two consecutive points is: $S = 25 \mu\text{m}$. Consequently, the Nyquist frequency is: $f_c = 1/2S$. It provides the upper frequency cut-off. Because of the non zero value of the spectrum around such a boundary (see Figure 7), aliasing effects at high frequency are expected. It explains the deviation from the power law behavior in this region.

On the other hand, let us say that the computed power spectrum is a periodogram. Indeed, it is the simple estimate of the square amplitude of the Fourier mode f_k .

$$S(f_k) = |\bar{h}(f_k)|^2 + |\bar{h}(-f_k)|^2 \quad (16)$$

Is the $S(f_k)$ computation of a discrete frequency f_k a good estimate of the continuous spectrum $S(f)$? Actually, because of the discretization of the frequency space, there is data windowing. Without taking care, the window is a square and the Fourier transform of such a window function leads to some leakage to the neighbor modes and a poor esti-

mate of the spectrum. It is possible to introduce another shape of this data windowing and suppress part of this effect. Figure 7 (curve "data windowing") illustrates such an effect and the correction due to a window function like the Welch function (triangular function). It is also of great interest to cut the initial profile into several parts, compute the different power spectrum of each piece, and average the results. The latter technique is illustrated in Figure 7 (curve "spectrum average"). However, these biases do not drastically change the power law behavior of the power spectrum. Consequently for most of the study we use the straightforward periodogram computation.

Average over n profiles Because of the numerous records of parallel profiles, we can address two types of problems according to the assumption of independent or dependent profiles. The first is the question of the reproducibility and accuracy of the analysis. Indeed, if we consider the different profiles as independent realizations, we can check the fluctuations of the self-affine scaling. Such a statement leads to the assumption of an invariant direction perpendicular to profile direction. On the other hand, the isotropy or anisotropy of the crack geometry can be reached by building a $(2+1)$ dimensional map. In this case, the dependence between profiles is considered. It is the underlying hypothesis of the section: *Map analysis*.

The assumption of considering different profiles as different realizations can be tested by checking whether or not there exists a characteristic scaling evolution from one profile to another. We assess this by computing the evolution of the height r.m.s. value w_2 for a given window size ($\Delta = 10$), in the y direction (perpendicular to the profile direction) (see Figure 8). The window Δ is along the x -direction. In Figure 8a, no typical trend is visible with regard to the direction y . We conclude that there is an independence of the variable band width analyses of profiles in the y direction.

The histogram of the quantity $w_2(\Delta = 10)$, estimated for various y positions, fol-

lows a gaussian distribution (see Figure 8b). It turns out that averaging over the different profiles is meaningful. The histogram width provides a first estimate of the self-affine exponent precision. Its r.m.s. value is 0.05 and can be considered as an error in reproducibility. An estimate of the systematic error bars is described in the following section.

The global statistical analysis is, within this framework of independent realizations, to consider each profile of each surface with the three previous methods. The four curve types (r.m.s., maximum-minimum difference, return probability and Fourier spectrum) obtained for each profile are then averaged over the respective entire surface. Such a computation provides an accurate determination of the self-affine exponent ζ . Table 2 contains the global results. The exponent $\zeta = 0.80 \pm 0.05$ is statistically confirmed within the stated error bounds. The weight of each averaged result on the global determination of the self-affine exponent ζ , is a function of the number of profiles considered for the surface.

Two points have to be emphasized. First, no significant difference exists between the gneiss and the granite crack surfaces. Both types of surfaces can be characterized by the same self-affine exponent. Second, no influence of the space direction (X or Z-plane) is visible. This follows from the study of the differently oriented surfaces of the Westerly granite. No anisotropy in terms of exponent difference is exhibited.

Measurement and analysis biases

Profilometer model The record of the profilometer used for this study is obtained with a needle moving along the surface as described above. Two main drawbacks can be imagined: a geometric cut-off due to the shape of the needle and dynamic effects introducing jumps. In the following, we show that neither of those flaws is significant for our analyses.

For all the following tests, synthetic self-affine surfaces are simulated. The numerical

profiles and surfaces are built according to a Voss construction Voss [1985]. They are discrete sets, rather than the real topography of the surface.

Geometric effect The first filter arising from the experimental device that can be invoked, is the influence of the non-zero volume of the needle tip. Let us assume that the tip is a half-sphere of radius R . Because of the geometry, the needle explores hills more correctly than sharp holes. The quality of the measured height is a function of the surroundings of the current point.

Numerically, the profile is discretized with a step S . This introduces a non physical length in the problem. It is of great interest to compare the horizontal step S between two synthesized points — $S = L/n$, where n is the number of points and L the length of the profile, — to the radius R . A dimensionless number Γ is defined by:

$$\Gamma = \frac{R}{S} \quad (17)$$

For R equal to zero ($\Gamma = 0$), no geometrical effects are expected. For the real profile which is a continuous function ($S = 0$), this ratio diverges. Changing the size R of the sphere on a given profile can be seen as equivalent to changing the discretization n of the numerical profile with a constant radius. The convergence of the analysis with Γ sets the importance of this effect. If the trajectory of the center of the half-sphere is supposed to be the output profile provided by the profilometer (which is actually an under sampling of this trajectory), let us study how self-affine analyses are sensitive to this geometrical filter. Figure 9 illustrates different trajectories, assuming different values of Γ .

In Figure 10 we represent the evolution of the measured exponent with the Fourier spectrum calculation. The self-affine exponent increases and tends to 2 which is the self-affine exponent of a parabola. Note that the finite size does not introduce a cut-off in the spectrum, but a slope change. This could be roughly explained by the fact that very

short wavelengths are still seen by the needle when it traces a hill rather than a hole.

The experimental cut-off is defined by the fact that the characteristic relative height between two consecutive points (separated by the step S) becomes comparable to the vertical precision a_z of the apparatus.

$$S^\zeta \approx a_z. \quad (18)$$

Notice that this horizontal step S has nothing to do with the step between two records. For the actual set-up: $R = 2.5 \mu m$ and $a_z = 2 \mu m$. These values state the maximum range for experimental Γ_{exp} :

$$\Gamma_{exp} \approx R a_z^{-1/\zeta} \approx 1. \quad (19)$$

This magnitude of Γ_{exp} is weak. As shown on Figure 10, no significant influence on the determination of the self-affine exponent is expected.

Dynamic effect The second effect that could be expected is the existence of ballistic jumps of the needle from local hills because of the horizontal speed of the profilometer head and the mass of the needle. This effect is especially marked when the crack profile is supposed to be mechanically rigid. Indeed, no smoothing of the singular points of the profile, due for instance, to elasticity, are expected. Consequently, the assumption of rigidity of the surface magnifies any jumps effects.

Let us make a simple model of the profiler. The forces that the needle undergoes are the weight of the mass m and the elastic stiffness k of the profilometer spring which compels the tip to follow the profile. A horizontal speed V is imposed by the profilometer head movement. A trivial motion equation allows one to describe the ballistic jumps that appear when the slope of two consecutive facets — a facet is defined by the line between two consecutive points of the profile — decreases (see Schmittbuhl *et al.* [1994] for details). If x and z are respectively the horizontal and vertical positions of the tip and z_0 the origin position of the spring, Newton's

law is:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = -g + \omega z_0 \end{cases} \quad (20)$$

where $\omega = \sqrt{k/m}$. Let us note that the z_0 influence is equivalent to the mass effect. Indeed, a new mass can be defined as: $m' = m - k z_0/g$.

A characteristic wavelength (or jump length): $\lambda = 2\pi V/\omega$ emerges from the trajectory computation. The actual end point of a jump is determined as the intersection of the ballistic trajectory and the profile. Complete dissipation is assumed because no rebound is allowed.

Figure 11 illustrates this dynamic effect for large wavelength λ say, for instance, a high speed. In the case of important jumps, the trajectory of the needle and crack topography are significantly different. Then a self-affine analysis will provide an increased exponent according to an effect close to the one described in the previous section (if we assume that sinusoids of the trajectory are close to parabolas).

For the actual experimental set-up, such an effect appears when the typical height of a jump is comparable to the vertical accuracy a_z .

$$\frac{V \cdot s}{\omega} \approx a_z \quad (21)$$

where s is the typical slope of the profile. Let us choose: $s = 1$. The device characteristics are: $\omega = 100 s^{-1}$, $v = 2.5 \cdot 10^{-4} m/s$. This leads to $\frac{V \cdot s}{\omega} = 2.5 \mu m$ which is close to the dynamic effect boundary ($a_z = 2 \mu m$). No significant effects are consequently expected in the self-affine analysis.

Trend suppression Trend is defined according to a reference frame and trend suppression deals with reference changes. The physical reference is the mean fracture plane and the normal to it. However, adjusting the experimental reference to the physical one is difficult because the exact position of the mean fracture plane is hard to determine *a priori*.

Three reasons motivate best fitting this reference. The first is to optimize the mea-

surement itself. Because of the limited vertical range of the profiler, it is necessary to adjust the average crack plane to the zero horizontal plane of the device. However, some saturation can appear for too great a roughness or a poor determination of the mean fracture plane. Corrections are possible *a posteriori* but if a profile exhibits such a saturation for more than five per cent of its points, important artifacts are introduced and it must be ignored.

The second reason is based on the fact that the height of the crack surface is defined according to the mean plane of the crack: it is supposed to be measured along the normal line to this plane. To avoid any projection effects, the horizontal plane of the profiler frame has to best fit the mean fracture plane. But this experimental definition of the reference is vague and there always exists a small difference.

Third is the *a posteriori* trend suppression on the measured profiles. If we were able to perfectly superimpose experimental and physical references, no residual trend should exist. But, it is important to keep in mind that we have only a finite sample size. Consequently, the exact average plane, if it can be defined because of the finite size of the sample, can never be computed accurately from the profile records. Thus, there always exists a residual unphysical trend in the signal. Moreover, as mentioned above, self-affine analyses are sensitive to the presence of a trend. But trend suppression is complex. Indeed, all length scales are involved in the crack process, even very large ones. So, suppressing macroscopic information may influence the scale invariance analysis at large scales. For the following analyses, the trend has been defined simply as the line between the first point and the last one. Such a subtraction eliminates any ramp artifact for the Fourier analysis. The classical linear average trend (obtained by least squares) was also tested and no significant difference could be noticed in the analysis. Quantitative influence of this trend artifact on the self-affine analysis can be found in Schmittbuhl *et al.* [1].

Analysis tests The analysis of the scaling invariance has been obtained with three methods. The errors for each of them can be estimated (see Schmittbuhl *et al.* [1] for details). Self-affine surfaces are synthesized with a given exponent. The different analyses are run for these numerical surfaces. A determination of intrinsic errors is obtained by comparing the "input" self-affine exponent used for the construction of the synthetic profiles and the "output" one resulting from the analysis of these same profiles. Two parameters control the analysis errors: the size of the system in terms of number of record points and the self-affine exponent. It emerges that the exponent accuracy with profiles of around 1500 points and for a self-affine exponent of 0.8, is numerically estimated as: +0.10 for the r.m.s. (or w_2), +0.05 for the max-min difference (or w_∞), -0.03 for the first return probability and +0.06 for the power spectrum. These errors do not have to be considered as actual errors. They deal with systematic over (i.e. sign -) or under (i.e. sign +) estimates of the self-affine exponent. For example, an amount of +0.06 should be added to the measured exponent with the power spectrum analysis, to obtain the actual one. Otherwise, errors due to these systematic biases have to be considered. They are shown to be the smallest with the Fourier analysis (± 0.02 for this choice of parameters).

The variable band width method is theoretically useful for exponents in the range [0;1]. Practically, the analysis with this method shows a saturation when the exponent reaches one. The "output" exponent loses any sensitivity to the "input" one for large self-affine exponents. We checked that the robustness of the measured exponent was not related to an analysis saturation effect. Indeed, the spectrum analysis is not dependent on the exponent value.

MAP ANALYSIS: ISOTROPY AND ANISOTROPY

Regular grid construction

As mentioned before, the distance between two consecutive points on a profile is a function of a time interval. The actual distance depends on the horizontal stylus speed. Because of the inertia of the apparatus, the beginning and the end of each profile have irregular stepping. Otherwise, a non regular distance between profiles was chosen (for instance as a geometric series) in order to reduce the mapping time. Mainly for these two reasons, the data are on an irregular grid. We translated such a map to a regular grid. A lot of care has to be taken for such a transformation within the framework of a scale invariance analysis. It is fundamental to avoid any long range interpolation to keep the relevance of the widest range of wavelengths. We defined the smallest mesh (in the XY plane) size to have at least one record in this mesh. With such a transformation, some resolution is lost. For example, for the *wgx3* surface, the measured map is made of 325 profiles each of the order of 1300 points. The regular grid built from this is an array of 253 by 867. Figure 12 is an example of the granite fracture shape on a regular map.

Two dimensional fft

Let us consider now all the parallel profiles of the different surfaces as dependent and constituting a real (2+1) dimensional topography record. A first step in the isotropy study is the observation of a projection of the surface on the mean surface plane. Figure 13 shows two drawings of the zero contour line versus the set of points which have a zero height. At first sight, no typical symmetry direction emerges from the graphic either for the granitic surface (*wgx3*), or for the gneiss one (*gnx1*).

A close examination of the anisotropy within the surface itself, is provided by the computation of the Fourier transform of the surface. The linear trend of the surface, i.e. the mean fracture plane, is subtracted from the map for the same reasons as for the (1+1) dimensional analysis. A two dimensional Fourier transform of the surface allows

one to determine the periodogram map as:

$$S(f_x, f_y) = |\bar{h}(f_x, f_y)|^2 \quad (22)$$

where $h(x, y)$ is the height for the (x, y) point. Because the height is a real number, only the quarter of the frequency space is considered. Figure 14 and Figure 15 illustrate the shape of the function $(S(f_x, f_y))$ for respectively, the *wgx3* and *gnx1* surfaces in a log-log diagram. Large fluctuations reduce the clarity of the graph. But it remains clear that the power law behavior is the same regardless of the spatial direction. The conical shape of the spectrum or the circle contour line presented on the projection leads to the conclusion that no characteristic direction can be identified (excepted the grid direction) and supports the idea of isotropy. Previous sections dealt with the isotropy by comparing surfaces of different orientations. Here, the accurate Fourier description emphasizes the fact that isotropy also exists within a single surface. Equivalent conclusions can be made by analyzing the other surfaces.

MULTIFRACTAL ANALYSIS

So far, we implicitly assumed a monofractal behavior of the height distribution. This means that the height distribution has a simple scaling, which depends only on the self-affine exponent ζ . In other words, a linear scaling exponent of the structure functions is implied:

$$\zeta(q) = q\zeta \quad (23)$$

where q is the moment order and $\zeta(q)$ is given by:

$$\langle |\Delta h_l|^q \rangle \propto l^{\zeta(q)}. \quad (24)$$

In this section we denote $\Delta h_l = h_l(x) - h_l(x + \Delta x)$ and $\Delta x = l \propto 1/\lambda$, λ being the scale ratio ($\lambda = \frac{l}{L}$, L is the fixed outer scale).

In fact, according to the previous analysis of the self-affine scaling, and especially to Figure 4, a slight systematic difference exists between the exponent related to the second order moment w_2 and to the function

of the infinite moment w_∞ (in terms of $\zeta(q)$ these exponents are respectively $\zeta(2)/2$ and $\lim_{q \rightarrow \infty} \zeta(q)/q$). It turns out that the linear behavior is only an approximation. A more precise nonlinear scaling exponent of the structure functions corresponds to a multifractal height distribution rather than a (mono)fractal one. In this multiple-scaling case, the structure function exponent $\zeta(q)$ will be nonlinear.

We note here that two kinds of surfaces have already been analyzed in the multifractal framework: earth topography *Lavalley et al.* [1993], and ocean surface *Tessier et al.* [1993]. The aim of the following analysis is to characterize the multifractal fracture process. This process has previously been assumed by *Williford* [1988] to be multifractal, but our data analysis here is made in a different and more precise framework.

The scaling of the height structure functions

The height structure functions were computed for moments order from 0 to 8.0. We didn't restrict ourselves to integer moments, since non-integer moments are defined mathematically, and give us a much more precise information about the height distribution than if restricted to integer moments (see *Parisi and Frisch* [1985], *Schertzer and Lovejoy* [1987] for a more extended presentation of this approach). To illustrate the scaling of equation (24), the moments are represented versus the distance l in Figure 16 in a log-log representation, for various moment orders q . The straight lines fit over a wide range of scales show that equation (24) is well supported. The slopes of these straight lines give the estimate of $\zeta(q)$. This function is shown in Figure 17. The global nonlinear behavior is clear, although it is only a trend for the first moments. In fact, we see here that the straight line $\zeta(q) = q\zeta = 0.80q$ (also represented in this figure) is some kind of average linear behavior estimated for moments from 0 to 3. The actual nonlinearity is a characteristic of multiple-scaling *Anselmet et al.* [1984], *Parisi and Frisch* [1985],

hence multifractality. For larger moments, the (mono)scaling assumption expressed by $\zeta(q) = q\zeta$ is clearly no more valid. Because of the finite size of the data set analyzed, we restricted ourselves to moments up to order 8.

It is here convenient (and justified as an analogy to dimensional analysis in turbulence, (see *Kolmogorov* [1941], *Kolmogorov* [1962]) to introduce a conserved (i.e. its mean is resolution independent) fracture process ϕ_λ verifying:

$$\Delta h_l \propto (\phi_\lambda)^{1/a} l^\zeta \quad (25)$$

where a is an unknown constant factor which can be determined as shown below with the conservation of ϕ_λ . Introducing the scaling moment function $K(q)$ for the multifractal fracture process ϕ_λ *Schertzer and Lovejoy* [1987]:

$$\langle (\phi_\lambda)^q \rangle \propto \lambda^{K(q)} \quad (26)$$

the conservation property translates into $K(1) = 0$. Now calculating the q th statistical moments of both sides of equation (25), we obtain the following relation between the moment scaling functions $\zeta(q)$ and $K(q)$ (with the help of equations (24) and (26)):

$$\zeta(q) = q\zeta - K\left(\frac{q}{a}\right). \quad (27)$$

Thus $K(1) = 0$ gives $\zeta(a) = a\zeta$. With the previous estimate of $\zeta = 0.80 \pm 0.05$ we obtain (graphically, on Figure 17) $a = 2.25 \pm 0.25$. Because of the convexity of $K(q)$ (see below), we have: $\zeta(q) > q\zeta$ for $0 \leq q < a$, and $\zeta(q) < q\zeta$ for $q > a$ (see Figure 17).

Using equation 27, we can then analyze the $K(q)$ function which characterizes the multifractal behavior of the conserved fracture process.

Universal multifractal characteristics of the conserved field

Multifractal fields are generically obtained with multiplicative cascade processes *Schertzer and Lovejoy* [1987]. The only constraint possessed by the scaling exponent

function $K(q)$ for discrete multiplicative processes is convexity. However, when seeking the continuous limit of discrete multiplicative processes, stable and attractive processes are obtained, which depend on few universal parameters *Schertzer and Lovejoy* [1987], *Schertzer and Lovejoy* [1989], *Schertzer and Lovejoy* [1991], *Schertzer and Lovejoy* [1994]. The general form of the scaling exponent function for these universal multifractals is given by:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \quad (28)$$

where α is the Lévy index *Lévy* [1925], *Lévy* [1954] of the generator of the multifractal field ($0 \leq \alpha \leq 2$, $\alpha = 0$ corresponds to the monofractal β -model *Frisch et al.* [1978] and the maximum $\alpha = 2$ to the log-normal model *Kolmogorov* [1962]) and C_1 characterizes the mean inhomogeneities ($0 \leq C_1 \leq d$, where d is the dimension of the outer space; $C_1 = 0$ corresponds to a homogeneous process).

We estimate $C_1 = K'(1)$ (see equation (28)) by differentiating the empirical $K(q)$ function given by equation (27) and $\zeta(q)$: $K(q) = qa\zeta - \zeta(aq)$, and we obtain the following value: $C_1 = 0.30 \pm 0.05$. Then α is estimated using a best non-linear fit on the first empirical moments (from 0 to 3), using equation (28). We obtain: $\alpha = 1.5 \pm 0.1$. In Figure 16 the plot of the structure functions obtained with these estimates is also represented, and we can see an excellent agreement between the two curves until moment order about 6. In Figure 18, the nonlinear fit obtained from equation (28) is also plotted in comparison with empirical estimates. We can see that the agreement is also excellent until moment order about $2.7 = \frac{6}{2.25}$; then the empirical $K(q)$ becomes linear in q . This behavior is theoretically explained *Schertzer and Lovejoy* [1987] by sampling limitations: for N_s independent realizations of a multifractal field, there is a critical moment order q_s such as the empirical $K(q)$ function is linear for $q > q_s$ (following the tangency of $K(q)$ in $q = q_s$) given by:

$$q_s = \left(\frac{d + d_s}{C_1}\right)^{1/\alpha} \quad (29)$$

where d is the dimension of the outer space (=1 here), and d_s is a sampling dimension, linked to N_s by: $\lambda^{d_s} = N_s$. Here with $N_s = 30$ (we systematically eliminated profiles showing more than five percent of the points which are recorded in the saturation range of the profiler) and $\lambda = 1024$, we obtain $d_s = 0.49$, giving $q_s = 2.8$, in good agreement with the visual critical moment in Figure 18.

Physical interpretation of the multifractal results

Several interpretations can be proposed for these results. First, equation (25) represents the assumption that the fracture process is governed by a multiplicative process ϕ_λ (a cascade of the fracture from large to smaller scales), whose statistics are characterized by the universal indices C_1 and α . Furthermore, the value $\alpha = 1.5$ indicates that this process belongs to a universal class of multifractal, qualitatively different from the well-known log-normal multifractals *Schertzer and Lovejoy* [1987]. The $K(q)$ function is the scaling exponent of ϕ_λ , and expresses the "correction" to the linear behavior of $\zeta(q)$ (equation (27)). All the statistics of the fracture process are then described with these indices (α, C_1, ζ) and the normalizing constant a .

Finally we may note here, to go on with our analogy with turbulence, that the following values have been obtained (using more precise techniques, see *Schmitt et al.* [1992] and *Schmitt et al.* [1993]) for the conserved energy flux: $\alpha = 1.45 \pm 0.1$, $C_1 = 0.25 \pm 0.05$. This flux is associated to the turbulent velocity field by the exponents $a = 3$ and $\zeta = \frac{1}{3}$ (from dimensional analysis). Those values are close to the values we obtained here for the fracture surface, except for the most visible one: the self-affine exponent ζ .

DISCUSSION OF THE RESULTS

The main result of this study is that fresh crack surfaces obtained from Westerly granite and Fordham gneiss are self-affine with a

robust exponent of 0.80 ± 0.05 . No significant differences exist for the scaling properties (within the different methods of analysis) despite the different fabric of the two rocks. The scaling invariance is true over a wide range of scales. The grain size does not appear as a cut-off. However, such a conclusion can be emphasized only if the quality of the measurement and accuracy of the analysis has been strictly taken into account. Both have been largely discussed in this paper. However several comments should be noted.

Universality of the simple scaling exponent ζ

In the simple scaling (monofractal) framework, the results we obtain are in good agreement with studies of many other groups. Other rock surfaces have been analyzed at the laboratory and field scales *Power et al.* [1987], *Brown and Scholz* [1985a], *Brown* [1987b], *Brown* [1988]. In those studies, a fractal description was used for profile analysis. The slope s of the power spectrum was related to the fractal dimension D by: $s = -(5 - 2D)$. Using equation 15, it is straightforward to compute the self-affine exponent: $\zeta = 2 - D$. Their results of $D = 1.25 \pm 0.10$ are then consistent with the value we obtain. A review of the fractal dimension of fracture surfaces, measured with different techniques is included in *Cox and Wang* [1993]. Recent self-affine analyses, also at the laboratory scale *Schmittbuhl et al.* [1991], of sandstone, a rock mainly composed of aragonite or magnetite, a basic metamorphic rock, and at field scale on a granitic fault plane *Schmittbuhl et al.* [1993a], provide very similar results. A self-affine characterization has been proposed by *Poon et al.* [1992] for limestone, sandstone, chert and carbonate: respectively $\zeta = 0.79; 0.78; 0.77; 0.80$. The consistency between lab scale and field scale results implies independence of the fracture mode. Indeed, at the lab scale, previous results were obtained on fresh brittle fractures. In contrast, at the field scale, surfaces like fault planes *Power et al.* [1987],

Schmittbuhl et al. [1993a] or frictional wear surfaces formed by glaciation *Power et al.* [1987] or bedding plane surfaces *Brown and Scholz* [1985a] have very complex histories. Other types of materials have been studied. *Måløy et al.* [1992] performed a self-affine analysis over a variety of brittle materials, including graphite, plaster of Paris, Porcelain or bakelite, and reported a roughness exponent of order of 0.87 ± 0.07 . Different rupture mode processes were studied by *Bouchaud et al.* [1990] on various aluminium alloys. In the ductile domain, they found that the scaling invariance property is still true with a consistent self-affine exponent ($\zeta = 0.81 \pm 0.05$). Meakin presented a complete review of the different scaling analyses of artificial fractured surfaces in terms of mono-fractal approach (Hurst exponent determination) over a large range of materials like metals, ceramics, rocks, minerals, etc and straws *Poirier et al.* [1992]. All the results are around $\zeta = 0.8 \pm 0.1$. It is quite striking that this property appears to be so independent of the material type, the fracture mechanism, and the observational scale. Consequently, the underlying question concerns the existence of a universal crack process which leaves a "constant" surface in terms of self-affine scaling.

Prefactor role

This very robust property implies that no information can be deduced by a simple geometrical scaling invariance determination as regards the mode of fracture, the material type (particularly its disorder level) or the scale of the phenomenon. The "sensitivity" of the crack processes to these factors is contained in the prefactor of this scaling rather than the scaling of the geometrical features *Poon et al.* [1992]. Appendix A illustrates this point. It shows that the expression for the prefactor (see equation 42) is a function of the moments of the scaling function which characterizes the probability distribution of the surface height. An inverse problem could be the determination of this general scaling

function through the computation of the different prefactors for different order moments. The existence of a unique scaling function will translate into an universality in the fracture process.

Physical implications

A precise description of the geometry of crack surfaces is crucial in the field of rock mechanics. On one hand, a fresh surface of the crack is the trace of the crack front propagation. The complexity of the surface is inherited from that of the front. Correlation lengths which are measured by the self-affine analysis along the crack surfaces result from those existing during the crack propagation. Notice that the roughness of the surface left by the crack is an integration over time of the crack front position. Consequently, the roughness of the surface provides information only on the "vertical" roughness of the front, i.e., perpendicularly to propagation. But, the "horizontal" roughness of the front (in the plane of propagation) is not independent of the "vertical". Therefore, knowledge of the geometry of the crack surface is expected to have strong implications regarding the understanding of the crack propagation.

On the other hand, the geometry of the crack surfaces determines many physical properties of faults and other fractures. An example is the aperture along the fault which controls many conductivity properties. Fluid permeability has been studied with regard to this roughness *Brown* [1987a], *Brown* [1989], *Thompson and Brown* [1991], *Thompson* [1991]. Fractal surfaces were considered as the description of the crack geometry and the permeability was shown to be function of the fractal dimension of the surface. Our observations of isotropy in the scaling properties of the crack surface indicates that the self-similar description of crack surfaces in the "mean crack plane" is relevant. Consequently, our study allows fine tuning of the fractal dimension to $D = 3 - \zeta$ ($D \approx 2.2$) to obtain the expected permeability and flows for faults. Similarly, the geometry of frac-

ture surfaces is fundamental for the mechanical behavior of the faults, because it controls the contact properties. Under normal load, it affects the compressibility *Brown and Scholz* [1985b], *Wong et al.* [1989]. *Måløy et al.* [1993] have shown how the penetration depth is related through the self-affine exponent to the normal load. Under a shear stress, the geometry of the contact zone influences the frictional response of the system *Biegel et al.* [1992], *Wang and Scholz* [1993]. The geometry of the contact surface is also supposed to be of great importance for velocity dependence of dynamic friction law *Pisarenko and Mora* [1994].

Multifractal analysis can be a fundamental tool for determining many physical properties like the contact or aperture of cracks. Although the self-affine mono-fractal approach is a good approximation for properties which are function of the lowest moments of the height distribution (for instance, the average or the variance), some of these properties depend also on higher moments of the height distribution. Contact, for example, depends on the extrema of the crack surface. In other words, the highest local hill may control the contact between two surfaces which are weakly loaded. The statistics of these extrema are monitored by the highest moments of the distribution. Consequently, they are expected to scale with an exponent much lower than the so-called self-affine exponent.

CONCLUSION

With a laboratory profilometer, we recorded the topography of brittle crack surfaces for two types of rock: Westerly granite and Fordham Gneiss. The basic samplings are (1+1) profiles. Three statistical methods: the band-width method, the return probability and the power spectrum indicate self-affine scaling invariance. A number of parallel profiles (as independent realizations) on each surface allowed a precise determination of the self-affine, or Hurst, exponent with regard to reproducibility: $\zeta = 0.80 \pm 0.05$.

A geometric and a dynamic model of the profilometer allow quantification of measurement. The different self-affine analyses are tested with synthetic surfaces and systematic errors are estimated. No significant filtering is found to be important. Analysis of fractures in different material orientations in the granite demonstrate its constitutive isotropy with regard to the crack process. No characteristic difference in scaling can be seen between the gneiss with an anisotropic bulk elasticity and the granite with an isotropic one. (2+1) dimensional analysis by contouring and 2D Fourier transform also demonstrate the intrinsic isotropy of individual fracture surface. This justifies the self-similar characterization along the mean crack plane. The next step in the scale invariance characterization was obtained by a multifractal analysis. In the context of a conserved (universal multifractal) fracture process given by $\phi_l = l^{-\alpha} [\Delta h_l]^a$, where $a = 2.25$, we obtain: $C_1 = 0.30$ and $\alpha = 1.5$. These indices characterize all the statistics of the geometry of the crack surface. Hence they can help to provide very realistic simulations of fracture fields. The assumption of a conserved multifractal fracture process resulting from a multiplicative process from largest to smallest scales will be the subject to future studies.

According to studies of many other groups, the self-affine scaling invariance is very robust for different materials, rupture modes and observational scales. The question of universality has to be emphasized. Scaling does not provide distinguishing criteria in characterizing fracture surfaces. More information is included in the prefactor, particularly in the included general scaling function.

A large effort has been stimulated in order to understand the invariance according to growth interface models.

ACKNOWLEDGMENTS: We thank S. Roux, J.P. Vilotte, D. Schertzer and S. Lovejoy for useful discussions. T. Koczynski provided necessary support for the experimental set-up. The work was partially supported by the

U.S. Geological Survey under grant USGS 1434-92-G2161.

Appendix A: Prefactor derivation

The probability $P(h, x)$ that a point x has the height h , is a function of two variables: x and h . The general formalism of such probability is introduced according to a scaling function ϕ :

$$P(h, x) = x^{-A} \phi(hx^B). \quad (30)$$

This equation includes the fact that at an infinite distance ($x \rightarrow \infty$), the profile is flat: $P(h, x \rightarrow \infty)$ tends to zero if A is positive. Two conditions allow to compute both coefficients A and B . First, the probability is normalized:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(h, x) dh = 1. \quad (31)$$

The scaling property is expressed by the fact that on average over all the realizations, the affine transformation (1) leaves the profile invariant (cf equation 3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h| P(h, x) dh = x^\zeta \quad (32)$$

Those equations lead to the general expression of the probability that a point belongs to a self-affine set:

$$P(h, x) = x^{-\zeta} \phi\left(\frac{h}{x^\zeta}\right). \quad (33)$$

Using this probability expression, the scaling of w_2 will be first examined. Let us write the expression of w_2 as if the profile was a continuous function and whether we were looking over many realizations. The assumption that variables x and h are independent is also made. Hence, the integral over x and the one over h can be switched.

$$w_2^2(x_0, \Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x) P(h, x) dh dx \quad (34)$$

$$- \left(\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \int_{-\infty}^{\infty} h(x) P(h, x) dh dx \right)^2$$

Such an expansion is invariant under any translation. Introducing the probability expression (33) and the variable change: $u =$

h/x^ζ ,

$$w_2^2(x_0, \Delta) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta x^{2\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \phi(u) du dx \quad (35)$$

$$- \left(\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta x^\zeta \int_{-\infty}^{\infty} u \phi(u) du dx \right)^2$$

Hence,

$$w_2^2 = \left(\frac{A_2}{2\zeta + 1} - \frac{A_1^2}{(\zeta + 1)^2} \right) \Delta^{2\zeta} \quad (36)$$

with

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \phi(u) du \quad A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \phi(u) du.$$

Because the prefactor is not nil, we obtain the scaling of w_2 :

$$w_2(\Delta) \propto \Delta^\zeta. \quad (37)$$

It is interesting to note that the prefactor for this scaling is a function of the two first moments of the distribution ϕ . Let us now compute the quantity w_∞ which is related to the infinite order moment. Let us first define the q -order moment:

$$w_q = \left[\frac{1}{\Delta} \sum_i \left(h(x_i) - \frac{1}{\Delta} \sum_j h(x_j) \right) \right]^{q-1/q}. \quad (38)$$

The difference between the local height and the average to the power q can be developed:

$$w_q^q = \frac{1}{\Delta} \sum_i \left[\sum_{k=0}^q C_k^q h^k(x_i) \cdot \left(-\frac{1}{\Delta} \sum_j h(x_j) \right)^{q-k} \right]. \quad (39)$$

If we assume a continuous form of the profile $h(x)$, we obtain:

$$w_q^q = \sum_{k=0}^q C_k^q \left(\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \int_{-\infty}^{\infty} h^k(x) P(h) dh dx \right)$$

$$\left(-\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \int_{-\infty}^{\infty} h(x) P(h) dh dx \right)^{q-k} \quad (40)$$

We define the k -order moment of the distribution ϕ :

$$A_k = \int_{-\infty}^{\infty} u^k \phi(u) du. \quad (41)$$

Using the probability definition (33), it comes out:

$$w_q = \left[\sum_{k=0}^q C_q^k \frac{(-A_1)^{q-k} A_k}{(k\zeta + 1)(\zeta + 1)^{q-k}} \right]^{1/q} \Delta\zeta. \quad (42)$$

Such formula shows that all the moments of the height distribution scale as the length of the band to the power ζ . In a similar spirit, it can be shown that the difference between the maximum and the minimum over a distribution behaves like the infinite moment:

$$w_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} w_q. \quad (43)$$

Appendix B Scaling of the power spectrum

The auto-correlation function is defined as:

$$C(\delta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(x+\delta)h(x)dx - \langle h \rangle^2. \quad (44)$$

Using the convolution product, it emerges:

$$C(\delta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} h^- * h(-\delta) - \langle h \rangle^2 \quad (45)$$

where $h^-(x) = h(-x)$. For a nil average function (here profile), the Fourier transform or more precisely the cosine transform of the $C(\delta)$ function leads to the fundamental relation (Wiener-Kintchine theorem):

$$\hat{C}(f) = |\hat{h}(f)|^2 = S(f). \quad (46)$$

The scaling of the power spectrum $S(f)$ is estimated using (14).

$$S(f) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{2\zeta} \cos(f\delta) d\delta. \quad (47)$$

Introducing the variable substitution: $u = f\delta$, it comes out rapidly that

$$S(f) \propto f^{-2\zeta-1} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\zeta} \cos(u) du. \quad (48)$$

Whether the integral converges, it provides the scaling:

$$S(f) \propto f^{-2\zeta-1}. \quad (49)$$

References

- Alenxander, S. *Transport and Relaxation in Random Materials*. Plenum, New York, 1985.
- Anselmet, F., Y. Gagne, E.J. Hopfinger, and R. A. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 140, 63, 1984.
- Biegel, R. L., W. Wang, C.H. Scholz, G.N. Boitnott, and N. Yoshioka. Micromechanics of rock friction 1. effects of surface roughness on initial friction and slip hardening in westerly granite. *J. Geophys. Res.*, 97, 8951-8964, 1992.
- Boitnott, G. N., R.L. Biegel, C.H. Scholz, N. Yoshioka, and W. Wang. Micromechanics of rock friction 2: quantitative modeling of initial friction with contact theory. *J. Geophys. Res.*, 97, 8965-8978, 1992.
- Bouchaud, E., G. Lapasset, and J. Planès. Fractal dimension of fractured surfaces: a universal value? *Europhys. Lett.*, 13, 73-79, 1990.
- Brown, S. R. Fluid flow through rock joints: the effect of surface roughness. *J. Geophys. Res.*, 92, 1337-1347, 1987a.
- Brown, S. R. A note on the description of surface roughness using fractal dimension. *Geophys. Res. Lett.*, 14, 1095-1098, 1987b.
- Brown, S. R. Correction to "a note on the description of surface roughness using fractal dimension". *Geophys. Res. Lett.*, 15, 286, 1988.
- Brown, S. R. Transport of fluid and electric current through a single fracture. *J. Geophys. Res.*, 94, 9429-9438, 1989.
- Brown, S. R. and C. H. Scholz. Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces. *J. Geophys. Res.*, 90, 12575-12582, 1985a.
- Brown, S. R. and C. H. Scholz. Closure of random elastic surfaces in contact. *J. Geophys. Res.*, 90, 5531-5545, 1985b.
- Charmet, J. C., S. Roux, and E. Guyon. *Disorder and Fracture*. Plenum, New York, 1990.
- Cox, B. L. and J. S. Y. Wang. Fractal surfaces: measurement and application in earth sciences. *Fractals*, 1, 87-115, 1993.
- Falconer, K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley, New York, 1990.
- Feder, J. *Fractals*. Plenum, New York, 1988.
- Frisch, U., P.-L. Sulem, and M. Nelkin. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.*, 87, 719-736, 1978.
- Halsey, T. C., M. H. Jensen, L. P. Kadanov, I. Procaccia, and B. Shraiman. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. *Phys. Rev. A*, 33, 1141, 1986.
- Hansen, A. and K.J. Måløy. Measuring hurst exponents with the first return method. preprint, 1994.
- Hatton, C. G., I. G. Main, and P.G. Meredith. A comparison of seismic and structural measurements of scaling exponents during tensile subcritical crack growth. *J. Structural Geology*, 15(12), 1485-1495, 1993.
- Herrmann, H. J. and S. Roux. *Statistical Models for Fracture of Disordered Media*. Elsevier, Amsterdam, 1990.
- Isichenko, M. B. Percolation, statistical topography, and transport in random media. *Rev. Mod. Phys.*, 64, 961-1043, 1992.
- Johnson, K. L. *Contact mechanics*. Cambridge Univ. Press, New York, 1989.
- Kolmogorov, A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *CR Acad. Sci. USSR*, 30, 299, 1941.
- Kolmogorov, A.N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13, 82, 1962.
- Lavallee, D., S. Lovejoy, D. Schertzer, and Ph. Ladoy. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In *Fractals in Geography*, pages 171-205. Prentice-Hall, 1993.
- Levy, P. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1925.
- Levy, P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, 1954.
- Måløy, K. J., A. Hansen, E. L. Hinrichsen,

- and S. Roux. Experimental measurements of the roughness of brittle cracks. *Phys. Rev. Lett.*, 68, 213-215, 1992.
- Måløy, K. J., X. L. Wu, A. Hansen, and S. Roux. Elastic contact on rough surfaces. *Europhys. Lett.*, 24, 35-40, 1993.
- Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, New York, 1982.
- Mandelbrot, B. B. Self-affine fractals and fractal dimension. *Phys. Scripta*, 32, 257-260, 1985.
- Mandelbrot, B. B. *Fractals in Physics*. Elsevier, Amsterdam, 1986.
- Mandelbrot, B. B., D. E. Passoja, and A. J. Paullay. Fractal character of fracture surfaces of metals. *Nature*, 308, 721-722, 1984.
- Meakin, P. The growth of rough surfaces and interfaces. *Phys. Rep.*, 235, 189-289, 1993.
- Oden, J. T. and J. A. C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech.*, 52, 527-634, 1985.
- Okubo, P. G. and J. H. Dieterich. Effects of physical fault properties on frictional instabilities produced on simulated faults. *J. Geophys. Res.*, 89, 5817-5827, 1984.
- Parisi, G. and U. Frisch. A multifractal model of intermittency. In *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*. North-Holland, 1985.
- Pisarenko, D. and P. Mora. Velocity weakening in a dynamical model of friction. preprint, 1994.
- Poirier, C., M. Ammi, and J. P. Troadec. Experimental study of the geometrical effects in the localization of deformation. *Phys. Rev. Lett.*, 68, 216-219, 1992.
- Poon, C. Y., R. S. Sayles, and T. A. Jones. Surface measurement and fractal characterization of naturally fractured rocks. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 25, 1269-1275, 1992.
- Power, W. L., T. E. Tullis, S. R. Brown, G. N. Boitnott, and C. H. Scholz. Roughness of natural fault surfaces. *Geophys. Res. Lett.*, 14, 29-32, 1987.
- Press, W. H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical recipes*. Cambridge University, 1992.
- Roux, S. and A. Hansen. Interface roughening and pinning. *J. Physique I*, 4, 515-538, 1994.
- Roux, S., J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, and A. Hansen. Some physical properties of self-affine rough surfaces. *Europhys. Lett.*, 23, 277-282, 1993.
- Ruina, A. L. Slip instability and state variable friction law. *J. Geophys. Res.*, 88, 10359-10370, 1983.
- Sayles, R. S. and T. R. Thomas. Surface topography as a nonstationary random process. *Nature*, 271, 431-434, 1978.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92, 9693, 1987.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. Nonlinear variability in geophysics: Multifractal simulations and analysis. In Pietronero, L., editor, *Fractals: Physical Origin and Consequences*, page 49. Plenum, 1989.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. Scaling nonlinear variability in geodynamics: multiple singularities, observables, universality classes. In *Scaling, fractals and nonlinear variability in geophysics*, page 41. Kluwer, 1991.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. Multifractals and turbulence. in press, 1994.
- Schmittbuhl, J., Y. Berthaud, and S. Roux. Analyse de rugosité de surfaces de rupture fragile. In *Rapport Scientifique du GRECO Géomatériaux*, pages 267-271, 1991.
- Schmittbuhl, J., S. Gentier, and S. Roux. Field measurements of the roughness of fault surfaces. *Geophys. Res. Lett.*, 20, 639-641, 1993a.
- Schmittbuhl, J., J. P. Vilotte, and S. Roux. Percolation through self-affine surfaces. *J. Phys. A*, 26, 6115-6133, 1993b.
- Schmittbuhl, J., J. P. Vilotte, and S. Roux. Dynamic friction of self-affine surfaces. *J. Phys. II France*, 4, 225-237, 1994a.
- Schmittbuhl, J., J. P. Vilotte, and S. Roux. Reliability of self-affine measurements. submitted to *Phys. Rev. E*, 1994b.

- Schmitt, F., D. Lavallee, D. Schertzer, and S. Lovejoy. Empirical determination of universal multifractal exponents in turbulent velocity fields. *Physical Review Letters*, 68(3), 305-308, 1992.
- Schmitt, F., D. Schertzer, S. Lovejoy, and Y. Brunet. Estimation of universal multifractal indices for atmospheric turbulent velocity fields. *Fractals*, 1(3), 568-575, 1993.
- Scholz, C. H. *The mechanics of Earthquakes and faulting*. Cambridge Univ. Press, New York, 1990.
- Tessier, Y., S. Lovejoy, D. Schertzer, D. Lavallee, and B. Kerman. Universal multifractal indices for the ocean surface at far red wavelengths. *Geophys. Res. Lett.*, 20, 1167-1170, 1993.
- Thompson, M. E. Numerical simulation of solute transport in rough fractures. *J. Geophys. Res.*, 96, 4157-4166, 1991.
- Thompson, M. E. and S. R. Brown. The effect of anisotropic surface roughness on flow and transport in fractures. *J. Geophys. Res.*, 96, 21923-21932, 1991.
- Tullis, T. E. Rock friction constitutive behavior from laboratory experiments and its implications for an earthquake field monitoring program. *Pure Appl. Geophys.*, 126, 555-588, 1988.
- Voss, R. F. *Scaling Phenomena in Disorder Systems*. Plenum, New York, 1985.
- Wang, W. and C.H. Scholz. Scaling of constitutive parameters of friction for fractal surfaces. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 7, 1359-1365, 1993.
- Williford, R.E. multifractal fracture. *Scripta Metallurgica*, 22, 1749-1754, 1988.
- Wong, T. F. Physics and chemistry of porous media II. In *AIP Conf. Proc.*, New York, 1987. Amer. Inst. Phys.
- Wong, T. F., J.T. Fredrich, and G.D. Gwanmesia. Crack aperture statistics and pore space fractal geometry of westerly granite and rutland quartzite: implications for an elastic contact model of rock compressibility. *J. Geophys. Res.*, 94, 10267-10278, 1989.

| data set | rock | average point number (per profile) | profile number | measured point number |
|----------|---------|------------------------------------|----------------|-----------------------|
| wgx1 | granite | 1357 | 104 | 141201 |
| wgx2 | granite | 1339 | 369 | 494129 |
| wgx3 | granite | 1335 | 327 | 436593 |
| wgz1 | granite | 492 | 195 | 95997 |
| wgz2 | granite | 1268 | 119 | 150963 |
| wgz3 | granite | 1180 | 128 | 151047 |
| gnx1 | gneiss | 1337 | 655 | 875831 |
| gnx2 | gneiss | 1336 | 268 | 358254 |

Table 1: Roughness measurements: eight maps, named according to the rock and to the surface orientation, have been recorded on crack surfaces by a lab profiler. Maps are obtained by assembling numerous parallel profiles of measured points.

| data set | rock | number of treated profiles | max. min. difference | r.m.s. | return probability | fourier spectrum |
|----------|---------|----------------------------|----------------------|--------|--------------------|------------------|
| wgx1 | granite | 104 | 0.78 | 0.63 | 0.75 | 0.70 |
| wgx2 | granite | 122 | 0.80 | 0.71 | 0.75 | 0.80 |
| wgx3 | granite | 234 | 0.81 | 0.75 | 0.80 | 0.79 |
| wgz1 | granite | 61 | 0.81 | 0.71 | 0.75 | 0.80 |
| wgz2 | granite | 84 | 0.81 | 0.74 | 0.75 | 0.75 |
| wgz3 | granite | 128 | 0.81 | 0.74 | 0.79 | 0.80 |
| gnx1 | gneiss | 62 | 0.81 | 0.71 | 0.73 | 0.75 |
| gnx2 | gneiss | 257 | 0.81 | 0.71 | 0.73 | 0.70 |

Table 2: Roughness analysis with three independent methods: the average self-affine exponent over the different profiles is proposed for the different analysis technics.

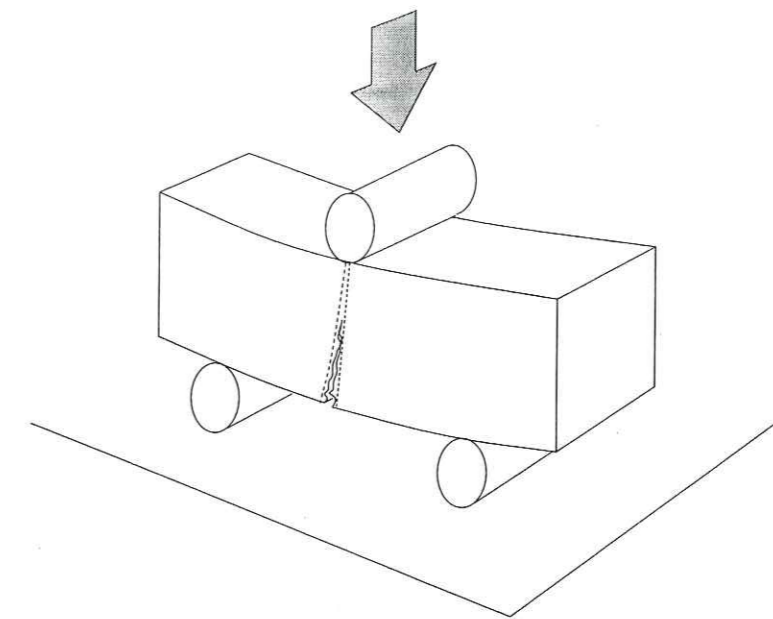


Figure 1: Scheme of the mechanical press allowing a three point bending crack along the guideline (dashed line) in the sample. Crack surfaces are perpendicular to the main direction of the block.

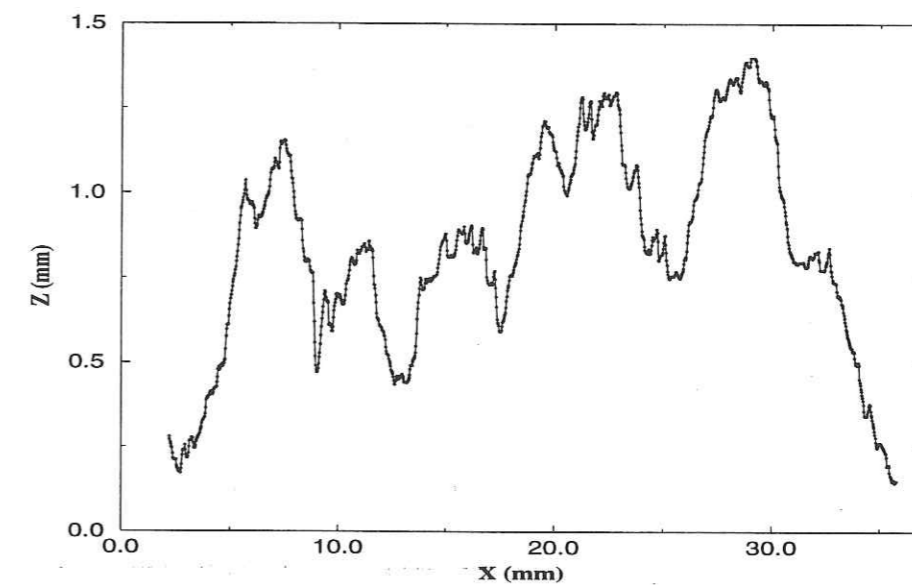


Figure 2: Example of a raw measured profile on a granite crack surface (wgx3). This profile is named as the typical profile.

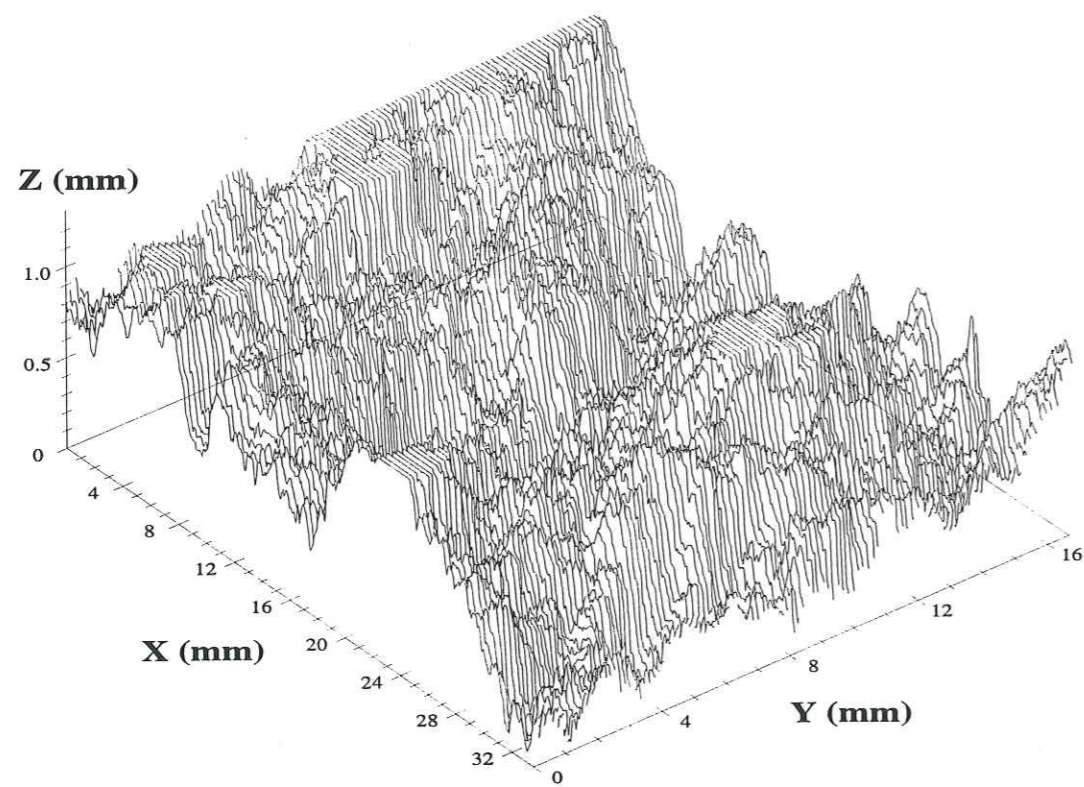


Figure 3: Assembling parallel profiles allows to obtain (2+1) dimensions map (wgx3-surface). Only one profile out of three is plotted.

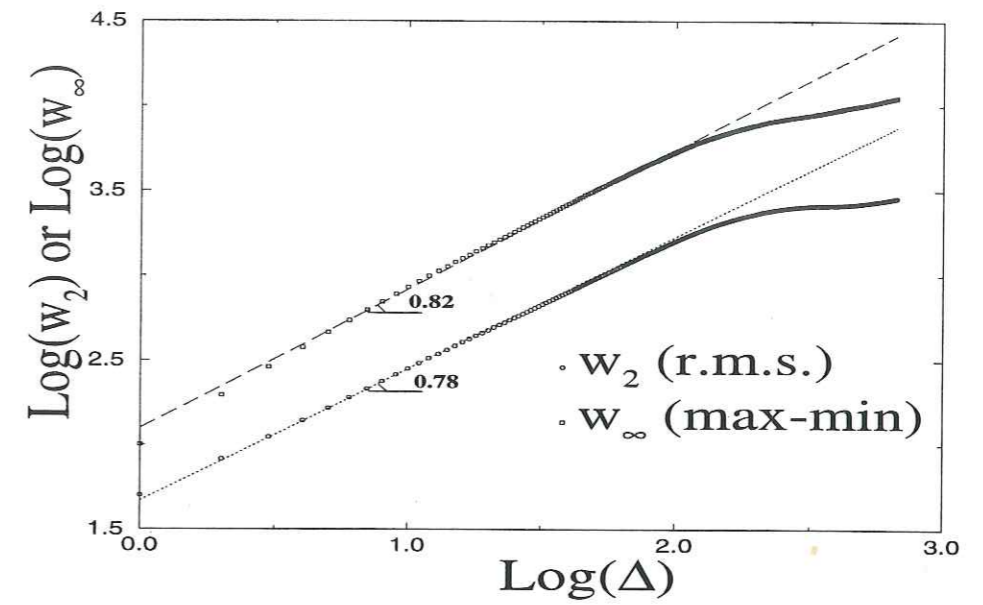


Figure 4: The standard deviation w_2 and the maximum and minimum difference w_∞ of the height for a window of width Δ are plotted in a log-log diagram. It deals with a typical profile of the $wgx3$ -surface. Both quantities are expected to scale as: $w_2 \propto \Delta^\zeta$ and $w_\infty \propto \Delta^\zeta$.

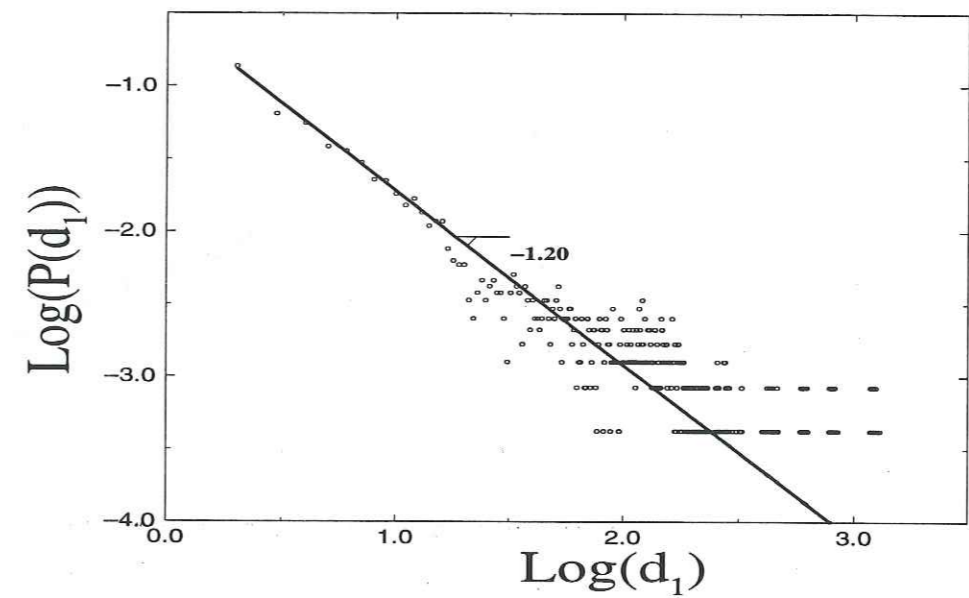


Figure 5: The Return Probability Histogram of a typical profile of the $wgx3$ -surface, is computed as the probability to cross the same height than the starting one after covering the distance d_0 along the profile. It is supposed to be: $P(d_0) \propto d_0^{2-\zeta}$.

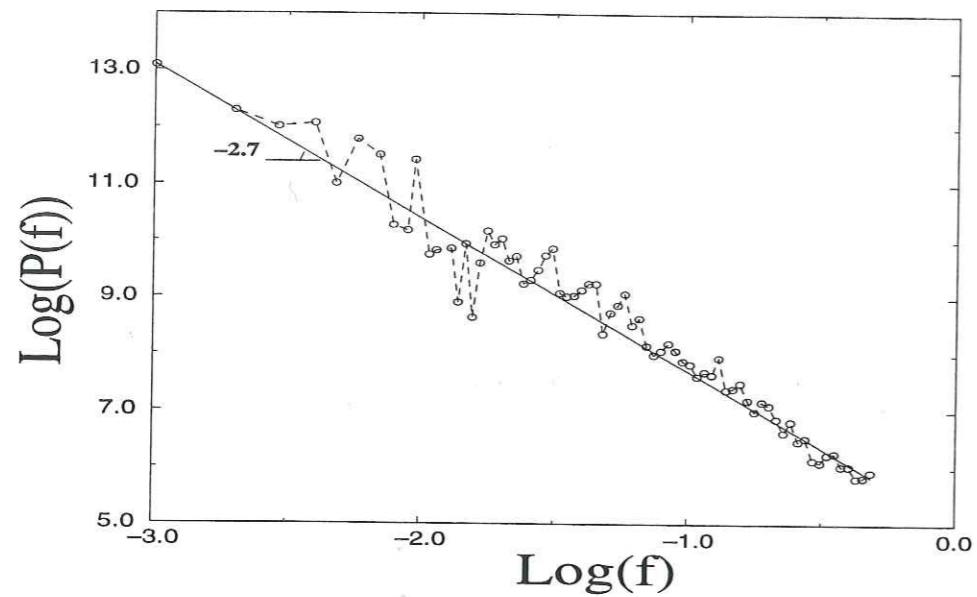


Figure 6: The Power Spectrum of a typical profile is plotted in a log log diagram. A self-affine scaling is characterized by: $P(f) \propto f^{-1-2\zeta}$.

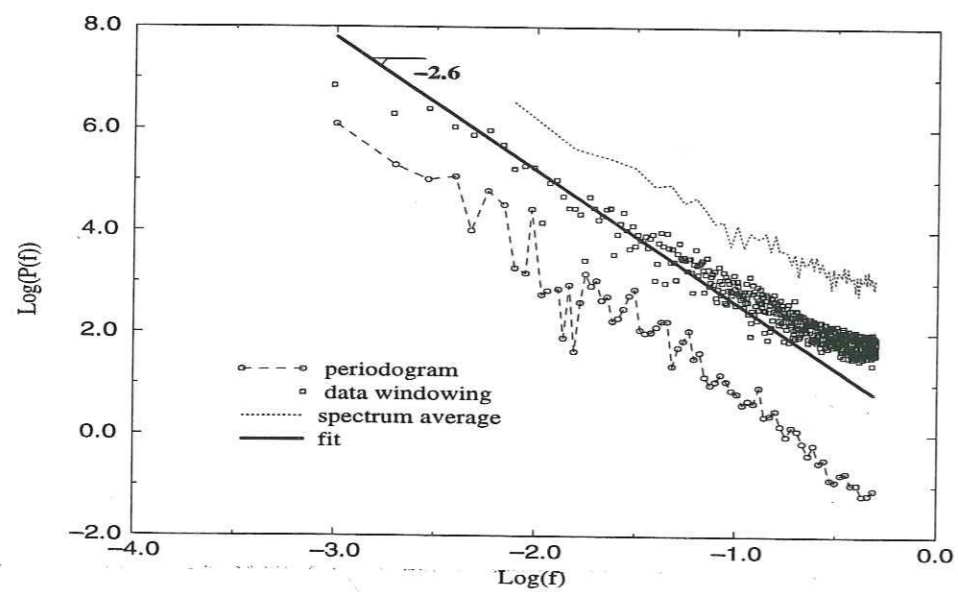


Figure 7: Improvements of the Fourier spectrum estimation by using a non trivial windowing (Welch function), named on the plot as *data windowing* or by averaging over a sub-part of the profile (*spectrum average*) are presented with regard to the straightforward *periodogram* computation. Aliasing effects produce a departure from the power law behavior at high frequency.

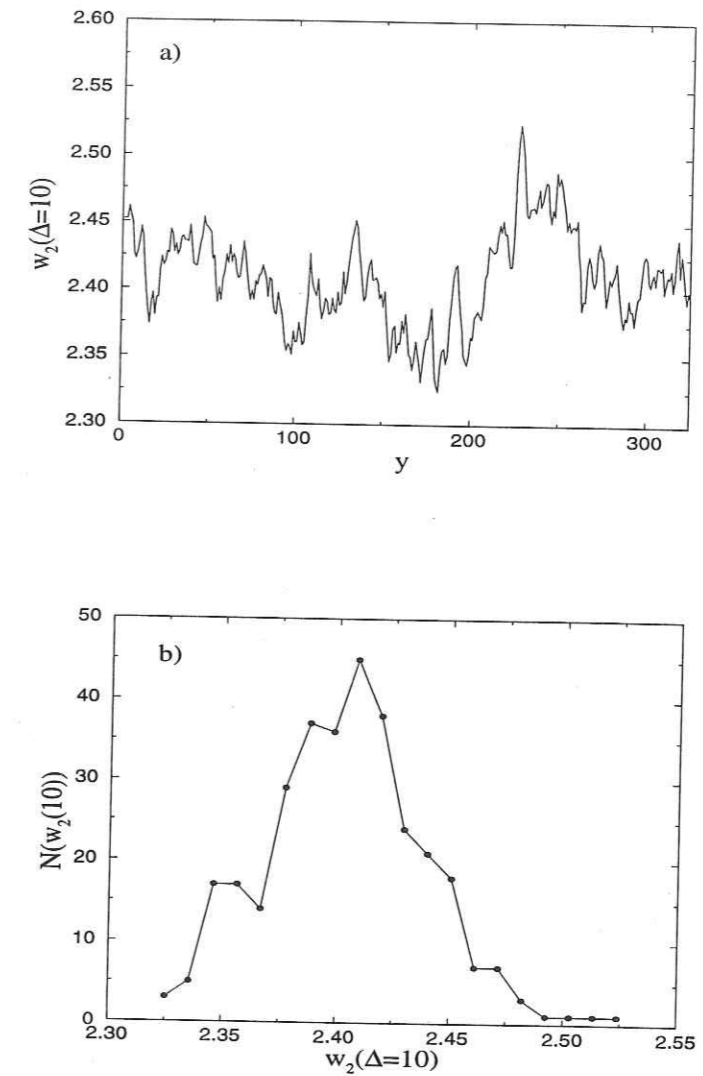


Figure 8: The upper graph (a) shows the evolution of the r.m.s. of the height w_2 for a given window size ($\Delta = 10$) for all the profiles of the wx3 surface versus the y position of the profile. Lower plot (b) is the histogram of such r.m.s.. The width of the histogram provides an error bar estimation of the self-affine exponent.

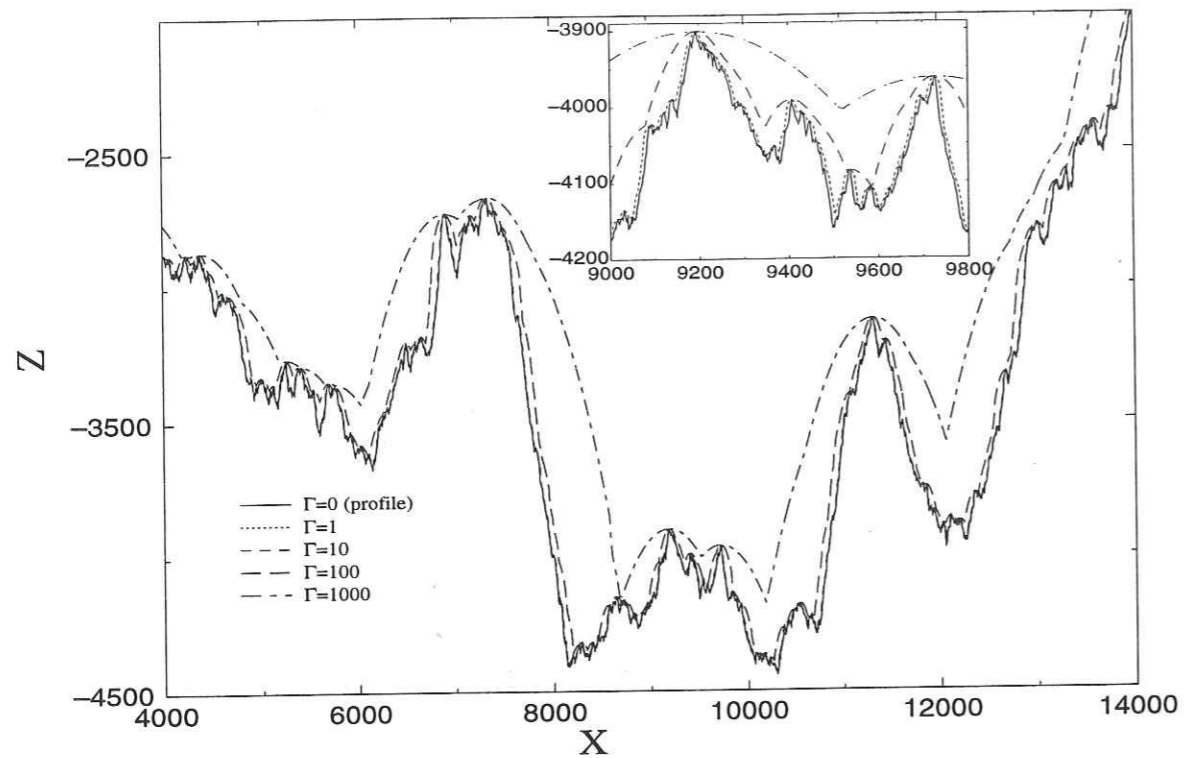


Figure 9: Geometrical filter due to the finite size of the profilometer needle. The role of the needle size is monitored by the parameter Γ , proportional to its radius. At large radius, the profile is seen as a set of parabola. Curves for $\Gamma = 0$ and $\Gamma = 1$ cannot be distinguished even in the inset plot which presents a detail of the trajectories.

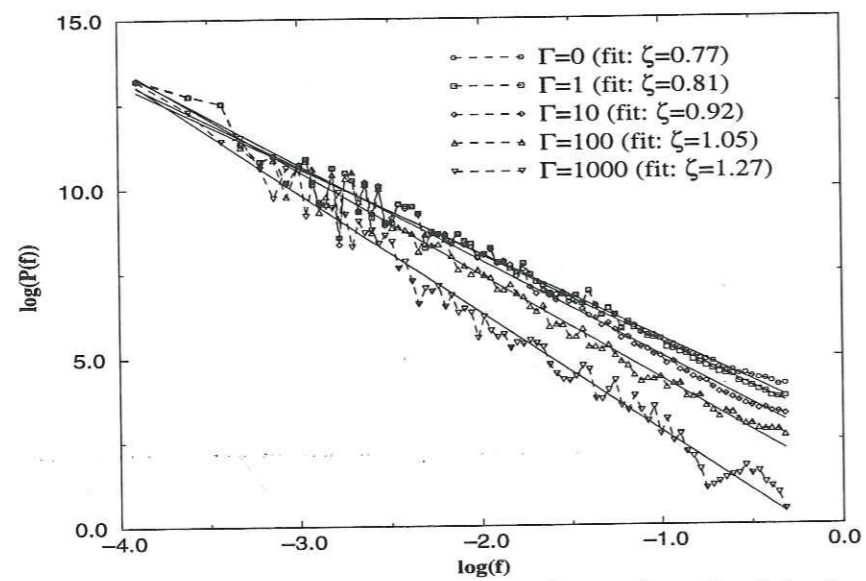


Figure 10: Evolution of the self-affine analysis according to the ratio of the tip radius and the horizontal step between two consecutive points in the discrete synthetic profile. The measured exponent increases as the radius of the needle grows.

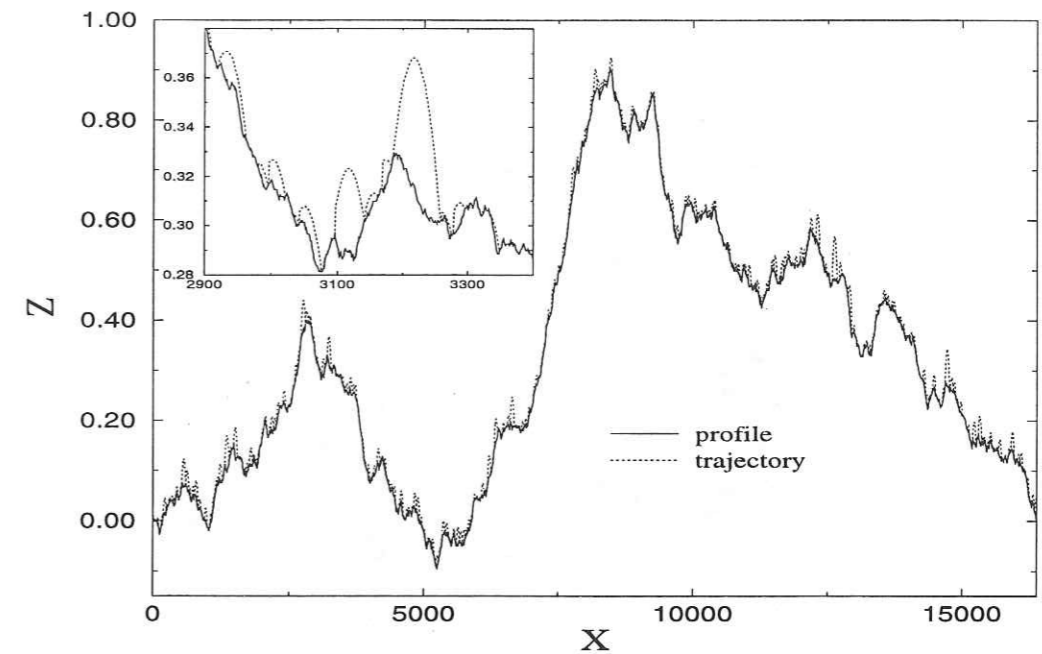


Figure 11: Ballistic jumps of the needle for a broad characteristic wavelength λ .

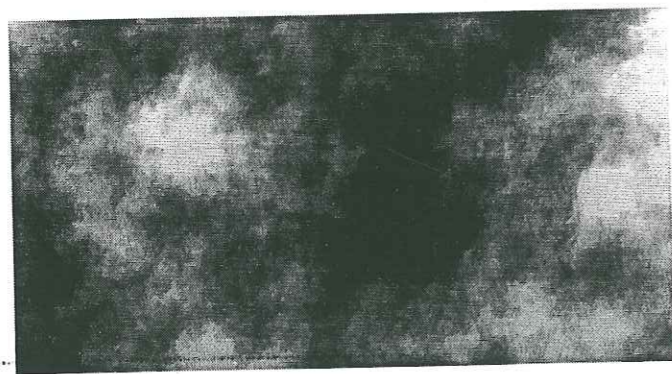
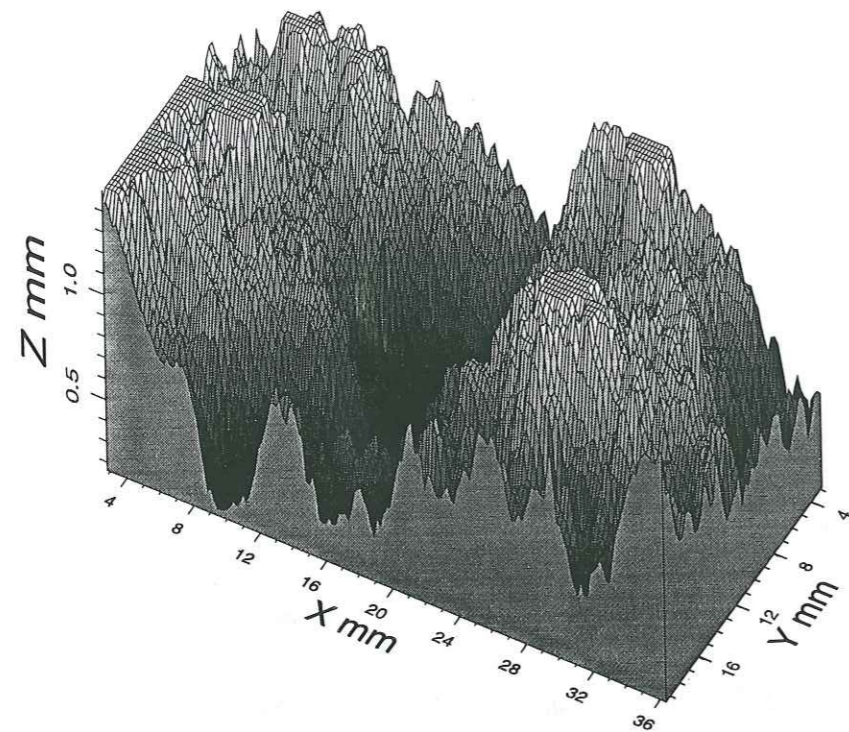


Figure 12: Example of the fracture surface shape in a granitic sample (wgx3). The surface was obtained after transformation of the data on a regular grid. Upper graph is a 3D colored drawing of the surface and lower picture is a grey scale representation of the height according to x and y position.

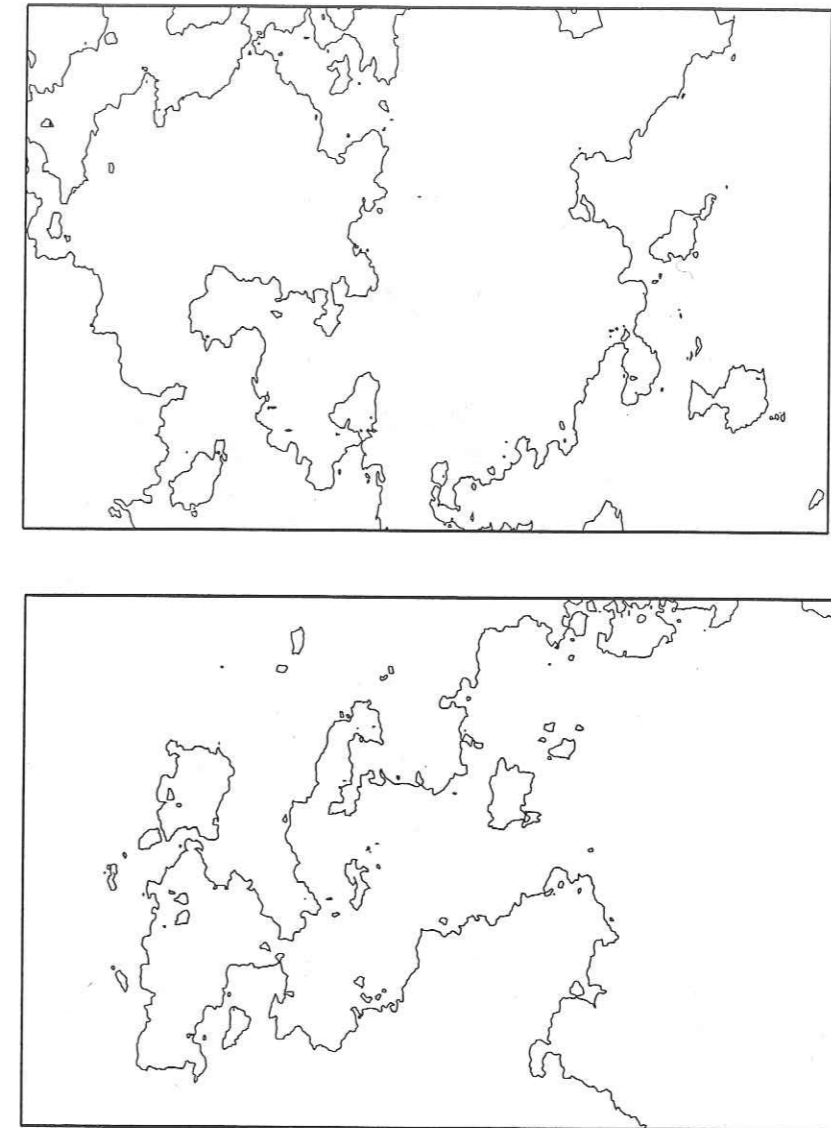


Figure 13: Contour line obtained as the intersection of the previous surface and the mean fracture plane for wgx3-granitic surface (upper plot) and gnx1-gneiss surface (lower plot).

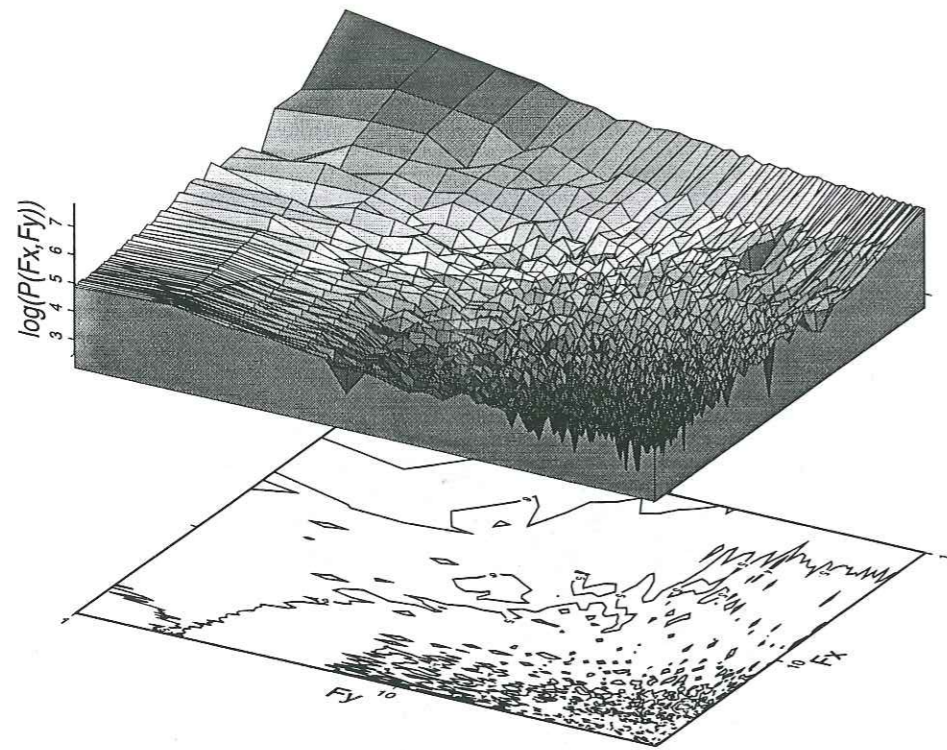


Figure 14: Fourier transform of the wx3 granite surface. The upper part of the graph shows the conic shape of the spectrum. The power law behavior is well defined independently of the space direction. The lower part is the countour lines of the spectrum. Their circular shape confirmed the isotropy of the scaling property.

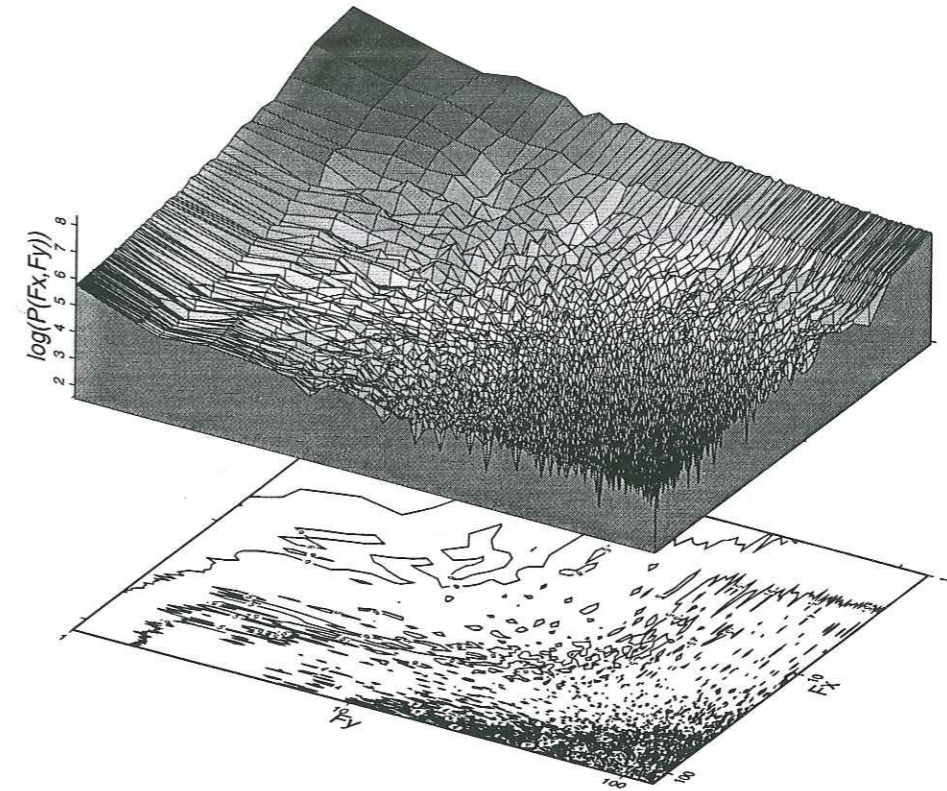


Figure 15: Fourier transform of the gnx1-gneiss surface. The shape of the spectrum is the same than for the case of the granite surface.

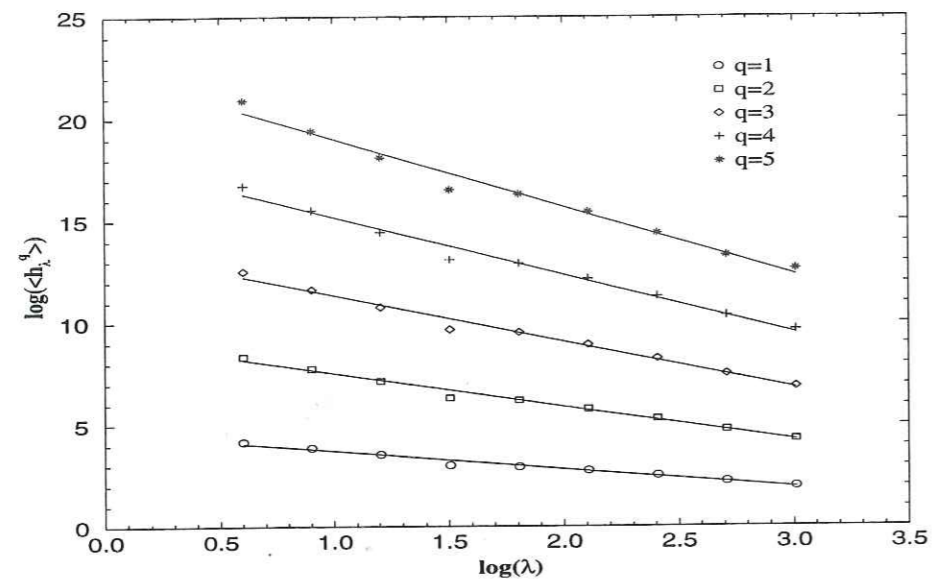


Figure 16: Structure functions for several order moments (see different curves) of the height distribution for the wx3-surface. All of them can be fitted by a power law with a different exponent. The significant evolution of these exponents translates the multifractal behavior.

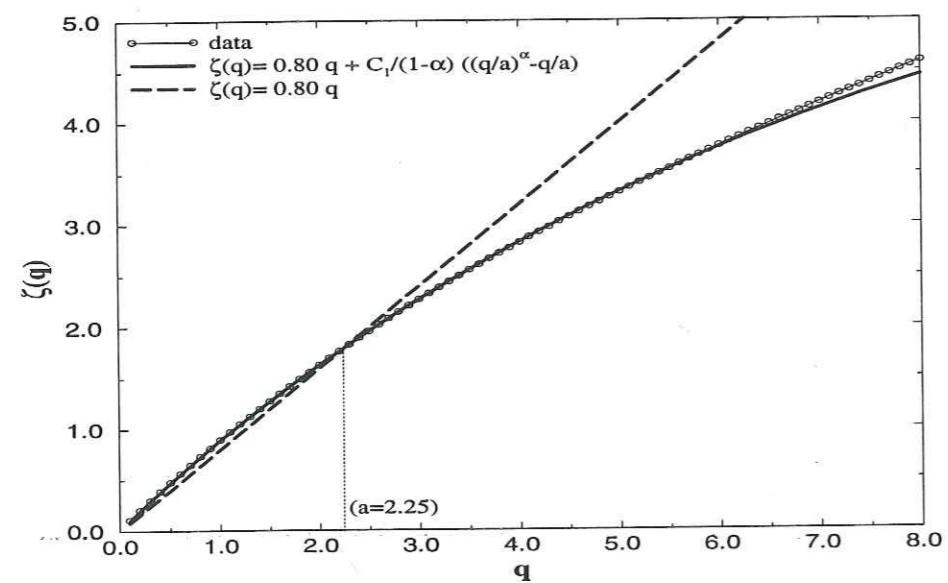


Figure 17: The $\zeta(q)$ function is made of the exponents of the power laws which fit the different structure functions. It clearly shows that the scaling exponent decreases for high moment orders.

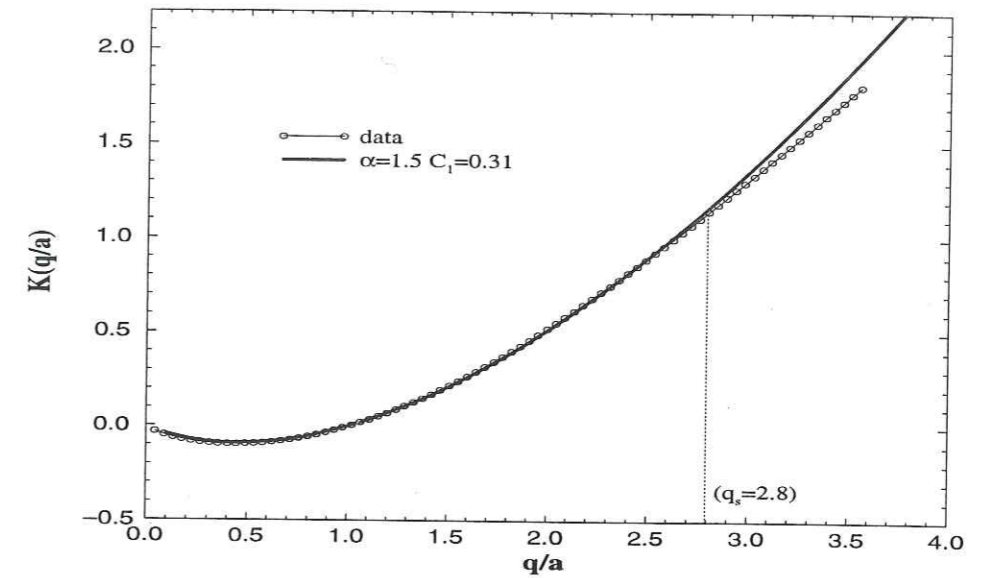


Figure 18: The $K(q)$ function describes the scaling of the conserved fracture field: ϕ_λ .

Annexe 3**Reliability of Self-Affine Measurements**

J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux

A paraître dans: *Physical Review E*

RELIABILITY OF SELF-AFFINE MEASUREMENTS

Jean SCHMITTBUHL and Jean-Pierre VILOTTE

Département T.A.O., Laboratoire de Géologie, URA1316

École Normale Supérieure

24 rue Lhomond, 75231 Paris cedex 05, France

Stéphane ROUX

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, URA 857

École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles

10 rue Vauquelin, 75231 Paris cedex 05, France.

ABSTRACT: Reliability and accuracy of the determination of self-affine exponents are studied and quantified from the analysis of synthetic self-affine profiles and surfaces. The self-affine exponent is measured using different methods either relying on the determination of a "fractal dimension" (*i.e.* box counting and divider method), or directly analysing the self-affine exponent. The second group of methods include the variable band width, the first and multi-return probability distribution and the power spectrum. The accuracy of all these methods is assessed in term of the difference between an "input" self-affine exponent used for the synthetic construction and the "output" exponent measured by those different methods. The statistical results of this study provide a quantitative estimate of the dependence of the accuracy with the system size and the value of the self-affine exponent. Artefacts in the measurement of self-affine profiles or surfaces: misorientation, signal amplification and local geometric filtering, which lead to biased estimates of the self-affine exponent, are also discussed.

INTRODUCTION

Descriptions of scaling invariance have become in recent years of crucial importance for many physical problems. The concept of self-similarity developed e.g. by Mandelbrot 1 has been extended to account for anisotropy through the notion of *self-affine* symmetry. This scaling is fully characterized by a $(d - 1)$ exponents in a d -dimensional space. For $d = 2$ (e.g. two dimensional cuts such as considered in the body of this paper), one single exponent is needed. It is called the *Hurst* or self-affine exponent. A large number of natural surfaces are found to be self-affine such as those encountered in surface growth models 4, in landscape and erosion surfaces 3, or in fracture surfaces 1, 10, 15, 6, 3.

Most of the methods used for the determination of a self-affine invariance are devoted to (1+1) dimension profiles, and their reliability has hardly ever been discussed 9, 10, 11, 3. When it is, accuracy is only meant as an estimate of the quality of the power law regression. In particular no systematic comparison of the different analysis tools is available.

Methods for measuring self-affine exponents can be schematically cast in two groups. On one hand, one finds the classical methods, developed for analysing self-similar objects: divider method, box counting, area-perimeter, *etc.*, which provide a so-called "fractal dimension". For most of these methods, a relationship with the self-affine exponent has been derived. On the other hand, several methods have been designed to specifically determine the self-affine exponent. They are more recent and not always systematically documented.

A number of artefacts may "pollute" the measurement of a self-affine object and hence introduce systematic errors in the self-affine exponent. Two types of biases can be distinguished: those which take place during the geometric measurement of the object, and those which are relative to the method used in the signal analysis. In the latter case, sensitivity and accuracy are method depen-

dent, and from the results reported below, we strongly recommend the simultaneous use of different tools in order to appreciate the confidence on the measured exponent in a quantitative way.

An accurate estimation of the self-affine exponent may have deep physical implications, and is of crucial importance for the identification of the universality class of various phenomena such as fracture propagation 10, 6, 12. Fracture surfaces are found to be self-affine with a well defined exponent quite insensitive to the material type and the rupture mode. Whenever this observation is violated, one may wonder whether it is a real violation or simply a systematic underestimation of error bars in the analysis. This point may also help to resolve apparent discrepancies in published results. The existence of some universal symmetries of the fracture propagation process is an exciting problem which heavily relies on an accurate and faithful analysis of experimental data.

Another example where the role of the analysing tools in self-affine measurement is crucial is a recent very active debate on the roughness of imbibition fronts in a porous medium. The reported experimental values were all inconsistent with most available models. A recent analysis¹³ shows that a possible origin of this discrepancy — or even more annoyingly, of apparent agreement between different studies — may result from a misuse of a measurement technique out of its field of validity.

In order to assess the accuracy and the reliability of the different methods of signal processing, these are tested against synthetic self-affine sets considered here as "ideal", and which are well characterized by a prescribed self-affine exponent. Artificial alterations of the profiles corresponding to what could be measurement biases have also been introduced in order to estimate their influence in the exponent determination. Other effects such as the existence of a cross-over at intermediate length-scales or multi-fractal properties are not considered in this study. One should keep in mind that the analysis

presented here addresses only "mono-fractal" objects 8. Multi-fractal signals where the Hurst exponent becomes ill-defined (it depends on the order of the studied moments) are not considered.

This paper is organized as follows. In Sec. 1.5.2, self-affine properties are briefly reviewed and the generation procedure of the synthetic sets is presented. We consider, in Sec. 1.5.2, the tools derived from the techniques initially developed for self-similar objects, and which provide a fractal dimension. In Sec. 1.5.2, independent methods for the self-affine characterization are described. Sec. 1.5.2, is devoted to the systematic study of the accuracy of those methods. Finally in Sec. 1.5.2, the influence of some of the most important measurement artefacts on the self-affine analysis is investigated.

SELF-AFFINE PROFILE CONSTRUCTION

A self-affine set is statistically invariant under an affine transformation. For a horizontal surface, the affine transformation is written in term of the horizontal distances d_x and d_y , and the vertical distance d_z .

$$\begin{cases} d_x \rightarrow \lambda_x \cdot d_x \\ d_y \rightarrow \lambda_y \cdot d_y \\ d_z \rightarrow \lambda_z \cdot d_z \end{cases} \quad (1)$$

Requiring that such transformations can be combined, implies a group structure. As a consequence, λ_y and λ_z have to be homogeneous functions of say λ_x . The homogeneity exponents are called the *self-affine exponents* or Hurst exponents. They obey:

$$\lambda_y = \lambda_x^{\zeta_y} \quad \lambda_z = \lambda_x^{\zeta_z} \quad (2)$$

Isotropy along the (x, y) plane implies $\zeta_y = 1$. In this study, we will restrict ourselves to the two-dimensional case where a single ζ exponent is needed. These two dimensional sets can always be considered as cuts through a three-dimensional medium. Conventionally, we assume that the profile lies in the (x, z) plane.

Ideal self-affine objects are constructed using the algorithm proposed by Voss 15. For a (1+1)-dimension profiles the basic procedure is as follows: knowing the values of z at both ends, i and j , of a root segment, we compute its value at the center l as the average $(z_i + z_j)/2$ plus a fluctuation, $\alpha\epsilon$. At each generation k , the fluctuation ϵ_k is picked from a statistical distribution $f(\epsilon)$ with zero mean and scaled by a factor α proportional to the length of the parent segment $|i - j|$ raised to the power ζ , ζ being the prescribed self-affine exponent. The distribution f can be chosen, without any loss of generality, to be a Gaussian distribution. Fig. 1a,b,c show examples of such self-affine profiles for respectively three different exponents: 0.2, 0.5 and 0.8, each of them being normalized so that the maximum magnitude of the signal is identical for all profiles.

For this study, each profile is characterized by both a self-affine exponent ζ and a size L . We analyse systematically profiles with exponent in the range [0.1;0.9] with a step of 0.1 and system sizes in geometrical series from 2^5 to 2^{14} . For each point of the space $(\zeta; L)$, a set of 100 independent profiles are considered.

MEASUREMENT OF FRACTAL DIMENSION

One of the most often used method to characterize a self-affine structure is to estimate the fractal dimension of the profile. Although it seems natural to associate a fractal dimension to an object which fulfills some kind of scale invariance, it has been recognized for a long time that the very concept of fractal dimension is not well defined as soon as the symmetry obeyed by the structure is not a pure self-similarity.

The reason for such a statement is that the fractal dimension gives the scaling of a measure with a length scale. For a self-affine object, the scaling with the distance along one axis may differ depending on the orientation of the axis. We will see below that a variety of different fractal dimensions can be defined and observed.

The fuzzy definition of a fractal dimension for a self-affine object has encouraged in the past some misuse of the fractal dimension in this framework, as well as some confusion in the measure of this property. Nevertheless, we will analyse two methods which have been introduced in this connection and used in the past. The *box counting* and the *divider* method.

The box counting method

The box counting method consists in covering the profile with boxes of size $a \times (\mu a)$ for a fixed aspect ratio μ and various sizes a . Let $n(a)$ be the number of boxes needed to cover the profile. We can estimate the scaling of $n(a)$ for a profile such that $\langle \Delta z \rangle = A\Delta x^\zeta$ where A is named as the amplitude of the profile. Over a distance $\Delta x = a$, the fluctuation of height amounts to $\Delta z = Aa^\zeta$. Two situations can arise: if $Aa^\zeta \gg \mu a$ then the number of boxes to consider in the interval $[x, x + a]$ will be $A/\mu a^{\zeta-1}$, so that the total number of boxes over a profile of length L_x will be :

$$n(a) = (A/\mu)L_x a^{\zeta-2} \quad \text{for } a \ll (A/\mu)^{1/(1-\zeta)} \quad (3)$$

On the other hand if $Aa^\zeta \leq \mu a$, the number of boxes will be one over a distance a along x . Thus in this case, the total number of boxes can simply be expressed as

$$n(a) = L_x a^{-1} \quad \text{for } a \geq (A/\mu)^{1/(1-\zeta)} \quad (4)$$

Thus the roughness exponent ζ can only be measured in a specific range of a values. Moreover, it should be noted that the upper bound on a depends on the aspect ratio of the box μ , or alternatively on the amplitude of the profile A . This upper bound does not mean that the correlations have died out over this distance. It is an intrinsic limitation of the method and does not reveal a correlation distance. Therefore, in order to use this method, one should be careful in setting the parameter μ , or rather one should perform the measurement for different values of μ .

In Fig. 2 we show the evolution of $n(a)$ vs. a for three different μ . One corresponds

to the regime (3), another to the other regime (4), and a third one which displays a crossover between both regimes at an intermediate length scale.

We can derive a simple property from the above results which will be useful in the following discussion. For μ small enough to be in the regime (3), we consider a strip $z_0 < z < z_0 + \mu a$ for a z_0 such that the profile is intersected at least once. The number of possible strips satisfying this property is $n_s = AL_x^\zeta/(\mu a)$. Assuming that each strip is equivalent, we can compute the number of box per strip,

$$n_x = n(a)/n_s = \left(\frac{L_x}{a}\right)^{1-\zeta} \quad (5)$$

We see that the aspect ratio μ do not appear in the expression of n_x . Thus as μ tends to zero, the strip tends to a line and for each line, we are measuring — using a box counting technique — the fractal dimension of the intersection between the line and the profile. This fractal dimension can be read from Eq. (5), as $D_1 = 1 - \zeta$.

The divider method

We now turn to another method which appears to be close to the previous although it gives a rather different information. The *divider* method consists in computing the length of the profile by walking a yardstick of length a over it. Again, one computes the number of intersections $n(a)$ vs. a . Let us first derive the expected scaling behavior and then discuss its validity. The two end points of the yardstick at a given stage are such that $a^2 = \Delta x^2 + \Delta z^2$. Therefore one should distinguish two regimes: one for which $\Delta x \gg \Delta z$, and one for which the opposite inequality holds. As in the previous method, both regimes can be encountered depending on the yardstick length a .

If $\Delta x \ll \Delta z$, then $\Delta z \approx a$, and since $\Delta z = A\Delta x^\zeta$, we can write $\Delta x \approx (a/A)^{1/\zeta}$. Therefore

$$n(a) = L_x \left(\frac{a}{A}\right)^{-1/\zeta} \quad \text{for } a \ll A^{1/(1-\zeta)} \quad (6)$$

If $\Delta x \gg \Delta z$, then $\Delta x \approx a$. The expression of $n(a)$ is thus similar to Eq.(4) but for a slightly different condition

$$n(a) = L_x a^{-1} \quad \text{for } a \gg A^{1/(1-\zeta)} \quad (7)$$

Fig. 3 shows a typical measurement of $n(a)$ for a large profile changing the amplitude A to cross from the first regime (6) to the second one (7). The theoretical slope for the self-affine sensitive regime is indicated by a thin line. We indeed observe a good agreement for large yardstick length but at smaller scale, strong corrections are observed.

The argument leading to the result (6) is straightforward but it requires a more careful examination. The point is that if the value of Δz is very well defined, it is not the case for Δx . Indeed, when the magnitude of the profile is large compare to its length, so that (6) should hold, the ratio between extreme values of Δx becomes large (it can amount in practice to several orders of magnitude), although the maximum value of Δx is small compared to a . The lower bound on Δx is given by the argument developed above, provided it is larger than the short length scale cut-off, but the upper bound is not. In between the two extreme values of Δx , the probability distribution of Δx is a power-law which can be traced back to the "first-return" probability distribution (cf Sec. 1.5.2). In computing the number of yardstick needed to cover the profile, only the upper bound of Δx will matter. When the yardstick length a increases, the ratio between the extreme values of Δx becomes more narrow, and thus the result becomes closer to the expectation (6). However, if a continues to increase, one will finally encounter the regime where (7) holds.

Let note that a pure numerical artefact may influence the Δx distribution. Indeed, if the length Δx is consider as an integer, the lower bound of the distribution is largely over-estimated and the width of the distribution becomes narrow again. Subsequently, the method gets closer to a box counting method in situation (3). An apparent power law regime can be found with an exponent $\zeta - 2$ instead of $-1/\zeta$.

These observations lead to the conclusion that severe bounds should be imposed on the domain which allows the determination of the roughness exponent. Otherwise any value can be measured. This method is by far the most difficult to handle and the most restricted in range. We will however consider this method in Sec. 1.5.2 so as to provide an extensive comparison between available tools, and in particular those which have been used in the past, however, we do not recommend the use of this method to estimate the roughness exponent.

Other methods exist in particular in (2+1) dimensions, such as the Slit-Island method 1, 3, but they are not considered here.

SELF-AFFINE ANALYSIS

Three independent methods for the analysis of (1+1)-dimension self-affine profiles are considered here, namely the variable band width method, the return probability and the power spectrum.

The variable band width method

A profile of length L is divided in windows or "bands" of width Δ indexed by the position of the first point x_0 of the band. The standard deviation of the height, w , and the difference δ between the maximum and minimum height are computed on each band, and then averaged over all the possible bands varying the origin x_0 at fixed Δ : $\langle w(\Delta) \rangle_{x_0}$ and $\langle \delta(\Delta) \rangle_{x_0}$. Band widths larger than $L/2$ are discarded because of insufficient independent sampling. Both quantities follow a power law of Δ , as expected for self-affine set 16:

$$\begin{cases} \langle w \rangle_{x_0} \propto \Delta^\zeta \\ \langle \delta \rangle_{x_0} \propto \Delta^\zeta \end{cases} \quad (8)$$

Fig. 4 illustrates the power law behavior of w and δ for a self-affine profile with $\zeta = 0.5$.

Let note that the Variable Band Width method is only relevant for a self-affine exponent in the range: $\zeta \in [0; 1]$, in agreement with the choice of exponents used for

the synthetic generation of profiles. Outside this range, an apparent exponent equal to the upper or lower bound will be observed. We should note that other methods such as the spectral analysis 1.5.2 are not limited to such a range. Therefore, when using this method, if an exponent close to 0 or 1 is detected, one should resort to the spectral analysis to check the result. Then using the fact that a derivation reduced the self-affine exponent by one, and that an integration increases it by one, it is always possible to build a signal characterized by an exponent in the admissible range, $\zeta \in [0; 1]$, and then use the variable band width method.

This method is close to the *bridge* method 9. The main difference being that, in the latter the linear trend between the first and the last point is subtracted from the signal for each band in contrast with the above method. The results of both methods are almost identical either for the r.m.s. computation (see Fig. 5a) or for maximum-minimum difference (see Fig. 5b). That leads us to favour the variable band width method since it is numerically faster.

Return Probability

For each point x_0 of the profile with height $h(x_0)$, we seek the minimum distance d at which the profile is intersected again at the same height, $h(x_0 + d) = h(x_0)$. The distribution of the distances d built for all the points of the profile is called the *first return* probability distribution, $p_1(d)$. For self-affine profiles, it can be shown that the first return probability satisfies 17:

$$p_1(d) \propto d^{\zeta-2} \quad (9)$$

This property can be derived easily from the previous discussion. We have seen above in Eq. (5) that the intersection between a constant height line and the profile is a fractal set of dimension $D_1 = 1 - \zeta$. Therefore the statistical distribution of distances between intersections, and hence $p_1(d)$, follows a power-law whose exponent is $-D_1 - 1$.

An example of this analysis is illustrated on Fig. 6 for ζ equals 0.5. Note the poor precision that can be obtained in the curve fit due to the noise at large distances. A discussion of this technique in connection in particular with the effect of an additional bias is given by Hansen *et al.* 17

A logarithmic binning instead of a linear one is useful to dampen the fluctuations happening for large distances. Due to the change in measure associated with a logarithmic binning, the scaling (9) is changed into

$$p_1^{(\log)}(d) = d \times p_1(d) \propto d^{\zeta-1} \quad (10)$$

This is illustrated in Fig. 6.

Related to the latter technique, one should also mention another alternative way which is close in spirit with this one. It consists in studying the probability of *any* return — and not just the first one — after a distance d . This latter probability, or *multi-return* probability, scales differently from Eq. (9), namely as

$$p_m(d) \propto d^{-\zeta} \quad (11)$$

This method has been used in particular by Bouchaud *et al.* 10.

Again this result can simply be obtained from the self-similarity of the intersection between the profile and a constant height line. Over a distance d the number of intersections scales as $n_x = (d/a)^{D_1}$ (see Eq. (5)). Thus $p_m(d)$ is proportional to the derivative of n_x with respect to d . As above, a logarithmic binning of this multi-return probability scales as:

$$p_m^{(\log)}(d) \propto d^{1-\zeta} \quad (12)$$

Such a power law is shown on Fig. 6.

Power Spectrum

The power spectrum $S(f)$ of the profile is the Fourier transform of the autocorrelation function: $\sigma(\Delta x) = \langle h(x+\Delta x) \cdot h(x) \rangle - \langle h(x+\Delta x) \rangle \langle h(x) \rangle$. For self-affine profiles, the power spectrum is expected to scale as 18:

$$S(f) \propto f^{-1-2\zeta} \quad (13)$$

This scaling result can simply be recovered by a power counting after having observed that the self-affinity implies $\sigma(\Delta x) \sim \Delta x^{2\zeta}$.

Such scaling is nicely visible in Fig. 7 with a slope of -2 for an exponent ζ equal to 0.5.

INTRINSIC ANALYSIS ERROR BARS

Synthetic profiles of given lengths and self-affine exponents are generated as described in Sec. 1.5.2. Those profiles are hereafter considered as “ideal” ones. They are analysed with both “self-similar” methods and divider methods and, “self-affine” methods: the variable bandwidth (r.m.s. and max-min difference), the first and multi return probability and the power spectrum. Their intrinsic error is defined as the difference between the *input* exponent value (used for the construction) and *output* exponent estimated from the analysis.

While the input exponent is prescribed, the output one is defined statistically. Indeed for each pair $(\zeta_{input}; L)$, 100 analyses with the three methods are carried out from independent profiles. Then, for each method, average curves: $\langle \log(n(a)) \rangle$, $\langle \log(w) \rangle$, $\langle \log(\delta) \rangle$, $\langle \log(p) \rangle$ and $\langle \log(S) \rangle$ are defined from the data. The output exponent is obtained by a linear fit of the average curves. For the Box Counting method, fit is run for box sizes included in: $[L/10; 9L/10]$ where L is the length of the profile. The range of meaningful divider size is much more severe especially if the self-affine exponent is small. We take care of always computing regression only in the (7) domain. For the Variable Band Width method, best fits are estimated when the window size is in the range: $[4; 3L/8]$. For the Return Probabilities the linear regression is on a range of distance included between 2 and half the maximum return distance. Fit for the spectral method is computed over the whole spectrum.

It should be noted that we kept the number of profile constant, independently of the profile length, so that the data relative to

the largest size represent a more significant computation effort and a broader statistical weight.

The results $\zeta_{output}(\zeta_{input}; L)$ for the different analysis methods is presented in two sets of plots. The first one (Fig. 8a-g) captures the influence of the main effects: system size L and self-affinity exponent ζ_{input} . The second (Fig. 9a-g) focuses on the estimation of the error bars.

Finite size effect and self-affine exponent influence

Fig. 8a-g present a comparison between input and output exponents according to the different analysis methods. Each curve of the different graphs shows the finite size effects. The diagonal where the output exponent equals the input one would be the response of an ideal analysing process.

As the system size — number of points along the profile — increases, the output exponent gets closer to the input one. For the First Return Probability method, the smallest errors are not obtained for large systems where a systematic over estimate emerges. The reason for this observation is to be found in the influence of the very noisy end of the probability distribution (see Fig. 6 as an example).

On one hand, methods as Box Counting, r.m.s. or Max-Min difference, are mainly sensitive to the self-affine exponent. In this case, the typical trend of the curve is not parallel to the diagonal. Small self-affine exponents are systematically over-estimated whereas large exponents are underestimated. Consequently, there exists a typical value of ζ where the output exponent is correct independent of the system size. It is close to 0.4 for the r.m.s., 0.6 for the Box Counting and 0.7 for Max-Min difference. That leads to the global conclusion that the r.m.s. provides generally a low value of ζ in contrast with the Box Counting and the Max-Min difference.

On the other hand, First and Multi-Return Probability, and Power Spectrum are more sensitive to the size effects. The re-

sponse is more or less parallel to the diagonal. Error is then mainly a function of the system size. The Divider method shows such a behavior if we ignore low self-affine exponent. The finite size effects are very important for the First Return Probability. The spectral method appears as the more accurate one with a small systematic under estimate effect.

Error estimates

The analysis error is defined as the difference between the input exponent and the output one. Fig. 9a-g allow to quantify the error for the different methods.

Previous effects can be also read on such figures. The role of the self-affine exponent for Box Counting, r.m.s. and Max-Min difference is illustrated by well separated curves. On the contrary, the other methods (*i.e.* Divider, First Return Probability and Power Spectrum) provide curves more or less superimposed. There, the error decreases rapidly with size. The Multi-Return Probability can also be put in this group for non too large self-affine exponent.

Absolute errors can be read directly from these curves. It supports the fact that Power Spectrum method is the most reliable. The detail of the error bars are given in Table 1.5.2 for three typical system sizes (256, 1024 and 16386), and for the seven methods. It is obvious from the table that system size less than 1024 can hardly be studied seriously, unless one has some independent way of assessing the self-affine character of the profiles, and a very large statistical sampling. More precise results may be extracted from the graph if a restricted range of self-affine exponents is found.

It should be emphasized that *using one single method and estimating the error-bar on ζ by the quality of the power-law fit leads to a severe underestimate of the uncertainty in all cases.* Such a procedure is to be prohibited imperatively.

MEASUREMENT ARTEFACTS

The self-affine objects were up to now assumed to be perfect without any flaws. Actually, measuring a self-affine object is rather difficult and has to satisfy two main requirements. The set up has to provide a very broad dynamic (ratio between large scales and small scales) and a large sampling has to be recorded for a correct statistical description of the object. The latter point requires rapid measurement difficult to combine with a broad dynamic. In this section, the influence on the self-affine analysis of some of the measurement errors are assessed.

Large scale effects

At the system scale, the drift and the signal magnitude are the two main effects which influence the scaling analysis.

Misorientation A linear drift is very often superimposed to the signal due the difficulty of determining correctly the mean plane. Adjusting the measurement set-up frame to the profile frame is quite a difficult problem. In order to assess the effect of a rotation on the three methods studied above, a linear function $z = sx$ is added to the synthetic profiles.

The addition of a linear drift of slope s to a synthetic profile (which by construction has a zero mean) introduces a characteristic length scale ℓ_c at which the typical roughness amplitude equals the linear drift:

$$A\ell_c^\zeta = s\ell_c \quad (14)$$

where A is the amplitude of the roughness profile. This gives the expression of the cross-over scale:

$$\ell_c \propto s^{1/(\zeta-1)} \quad (15)$$

At scales smaller than ℓ_c , the drift appears as a negligible correction, whereas for larger scale, the drift dominates.

Analyses of those "polluted" profiles are performed with the self-affine methods. Fig. 10a-d summarizes the results obtained for a synthetic profile with exponent $\zeta = 0.5$, and various slopes s . The major result here is that all the methods are quite sensitive to the

addition of a rotation. For both r.m.s. and Max-Min difference, a linear drift introduces an apparent ζ exponent of one at large length scales. As expected, the cut-off ℓ_c decreases as the slope s increases. One should always keep in mind that a drift may be difficult to detect for a self-affine exponent close to one and may well lead to an over-estimation of that exponent. Moreover such a unit exponent must not be misinterpreted as the signature of a self-similar object ($\zeta = 1$).

The Power Spectrum method is also sensitive to this effect. The spectrum gets close a slope equals to -2 which is the Fourier transform of linear ramp. The expected slope for the power spectrum of a self-affine signal with exponent $\zeta = 0.5$ turns out to be also $-1 - 2\zeta = -2$. Obviously one has to be cautious when such an exponent is measured from the analysis of signal. For the Return Probability, the measurement is reported to be function of s , and a quantitative analysis is given in Ref.17. In Fig. 10.d, such an effect is not strongly pronounced. bandwidth

Signal amplification By construction, Variable band Width method, Return Probability estimation and Power Spectrum computation are insensitive to the amplitude of the signal in terms of scaling studies. They do not couple the two directions x and z . In contrast, the divider and Box Counting methods exhibit a strong sensitivity to the signal amplitude, and therefore depends on the gain of the apparatus, as discussed in Sec. 1.5.2.

Amplitude A plays a similar role for both methods changing the cross-over length a . Specific influence of this amplitude is shown for the Divider method in Fig. 3, where three levels of the amplitude A (as previously defined) are analysed. For small value of A , the divider just measures the horizontal length of the profile, and the slope on the diagram 3 becomes one. For large amplitudes, the slope is now related to the self-affine exponent: $s = -1/\zeta$.

Local filter

While the simple above discussed large

scale artefacts can be avoided thanks to simple data filters, local filters introduce much more complicated biases.

Only one example of such local filters will be studied here to illustrate the type of difficulties that may be encountered. Let us consider the measurement of a self-affine object by a mechanical tip 8. The tip is supposed to follow slowly the profile with a given step defined here as the unit length. Due to the finite size of the needle, holes are much more difficult to reach than hills, and locally the recorded geometry of the object will be partially distorted. The shape of the tip is assumed elliptic and characterized by two parameters: a the half of the horizontal long axis and b the half of the vertical small axis. Two extreme cases are considered: the circle for which a equals b ; and the flat tip for which a is large compared to b .

Fig. 11a shows a profile with self-affine exponent 0.8 and the tip trajectories for both geometries of the needle. A large size of the needle is used in order to amplify the effects. When the tip is spherical, path is made of circle arcs and straight lines. The number of arcs is function of the sphere radius. On the other hand, a flat instrument reproduces more details between the top of the hills (where a plateau appears) and the bottom of holes.

Power Spectra are computed from these three data sets (see Fig. 11b). The spectrum slope for the initial profile is well correlated to the self-affine exponent: $-2.6 = -1 - 2\zeta$. However, slopes of the "measured" profiles lead to over-estimated exponents: 1.3 for the large spherical tip and 0.95 for the long flat set up. The slope s of the spectrum is function of the needle size. In the case of a spherical tip, two extreme cases can be predicted: a zero radius — compared to the measure step — gives rise to a slope of $s = -1 - 2\zeta$; a large radius leads to the description of arcs of similar radius: $\zeta = 2$ and $s = -4$. Even if the absolute error is wider for a flat tip, the estimation of the self-affine exponent with the Fourier Spectrum is less affected.

CONCLUSION

Characterization of self-affine object is quite difficult and has to be done carefully. Two main biases in the analyses have been identified in this paper : intrinsic errors of the methods used to analyse the signal and artefacts inherent to data acquisition.

Two groups of methods can be separated. The "self-similar" methods are inherited from the so-called fractal description. We focussed on the most two used ones: Divider and Box Counting. We show that a lot of care has to be taken to make them relevant. Therefore, we do not recommend them specially the Divider method. Specific "self-affine" methods have been recently developed: The Variable Band Width, First and Multi Return Probabilities and Power Spectrum. The intrinsic errors for the seven methods of signal analysis, has been reported. For the Box Counting and Variable Band Width methods, the error is shown to be mainly controlled by the self-affine exponent. For the Divider method, the First and Multi Return Probabilities and the Fourier Spectrum, the error is shown to be mainly controlled by the finite size of the signal. For each of those methods errors have been quantified in terms of the system size and the self-affine exponent. Those results, in Fig. 9a-g, may help to better constrain the confidence to be given to measured exponents.

Artefacts inherent to the geometrical description of the self-affine object are of two kinds : large scale filters due to a rotation or signal amplitude, or local filters. Both cases can induced spurious effects which may affect the exponent determination. Careful analysis is needed to detect and filter out those effects.

All the results of this study point out that in order to estimate the reliability of a self-affine exponent, it is important to provide enough informations on the apparatus used for the data recording, and to systematically make use of several methods for measuring the exponent, each of those methods having different response. It is again to be

emphasized that the reliability of one single method as judged from quality of the power-law fit gives a strongly underestimated value of typical error bars, and thus should be avoided.

ACKNOLEGMENTS: We thank A. Hansen, K.J. Måløy, and F. Schmitt for useful discussions. The support of the GdR "Physique des Milieux Hétérogènes Complexes" is acknowledged.

References

- [1] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, 1982).
- [2] P. Meakin, *Phys. Rep.* **235**, 189 (1993).
- [3] W. Newmann and D. Turcotte, *Geophys. J. Int.* **100**, 433 (1990).
- [4] B. Mandelbrot, D. Passoja, and A. Paullay, *Nature* **308**, 721 (1984).
- [5] E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planès, *Europhys. Lett.* **13**, 73 (1990).
- [6] S. Brown and C. Scholz, *J. Geophys. Res.* **90**, 12575 (1985).
- [7] J. Schmittbuhl, S. Gentier, and S. Roux, *Geophys. Res. Lett.* **20**, 639 (1993).
- [8] B. Cox and J. Wang, *Fractals* **1**, 87 (1993).
- [9] B. Mandelbrot, *Phys. Scripta* **32**, 257 (1985).
- [10] S. Brown, *Geophys. Res. Lett.* **14**, 1095 (1987).
- [11] Wong, in *AIP Conf. Proc.* (Amer. Inst. Phys., 1987), Vol. 154.
- [12] J. Charmet, S. Roux, and E. Guyon, *Disorder and Fracture* (Plenum, 1990).
- [13] S. Roux and A. Hansen (unpublished).
- [14] J. Schmittbuhl, F. Schmitt, and C. Scholz, preprint (unpublished).
- [15] R. Voss, *Scaling Phenomena in Disorder Systems* (Plenum, 1985).
- [16] J. Feder, *Fractals* (Plenum, 1988).
- [17] A. Hansen, K. Måløy, and T. Engøy, preprint (unpublished).
- [18] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* (John Wiley, 1990).

| method | L=256 | L=1024 | L=16384 |
|--------------|-------|--------|---------|
| Box | 0.35 | 0.28 | 0.20 |
| Divider | 0.65 | 0.45 | 0.15 |
| R.M.S. | 0.30 | 0.25 | 0.16 |
| Max-Min | 0.39 | 0.31 | 0.24 |
| First-Return | 0.23 | 0.10 | 0.12 |
| Multi-Return | 0.25 | 0.18 | 0.10 |
| Spectrum | 0.10 | 0.07 | 0.03 |

Table 1: Table of error bars for all methods, for three characteristic sample sizes. The error bars are the maximum observed value for all ζ exponents. Note that these estimates may be very conservative if a narrower range of self-affine exponent is studied.

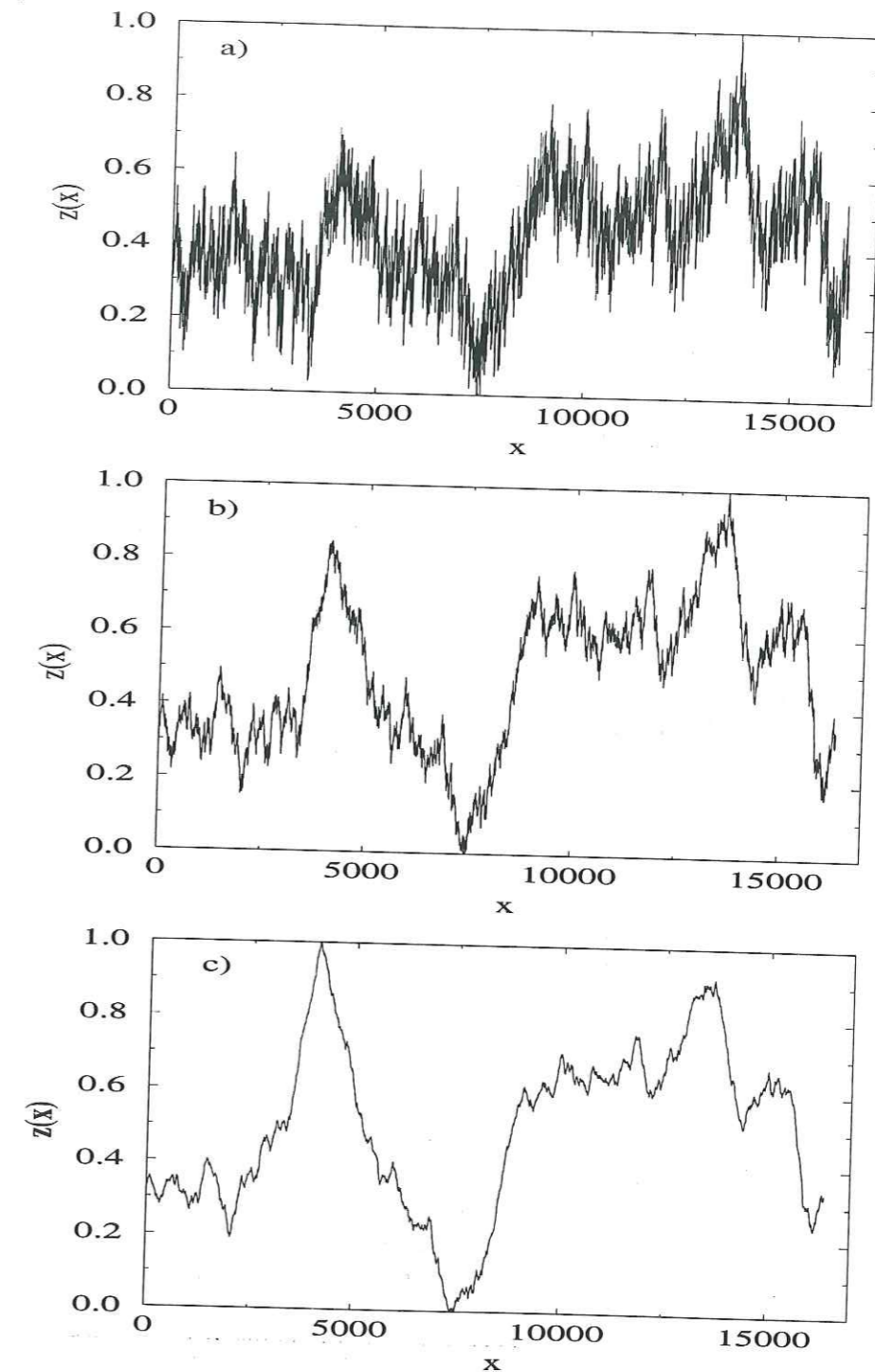


Figure 1: Three examples of synthetic self-affine profiles for different self-affine exponents, respectively: a - $\zeta = 0.2$; b - $\zeta = 0.5$; c - $\zeta = 0.8$.

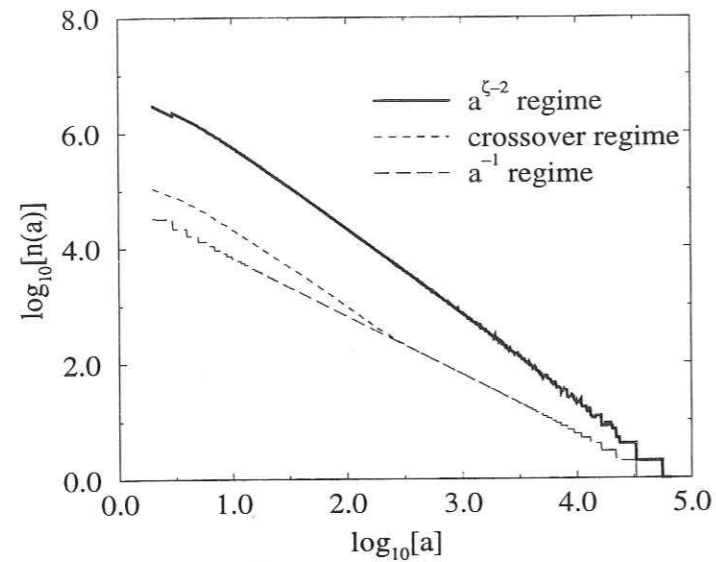


Figure 2: Analysis of a synthetic profile of length 65536 with a 0.5 exponent by the Box Counting method. The decimal logarithm of the number of boxes $n(a)$ is plotted according to the box length a . According to the height of boxes, two kinds of regimes are expected.

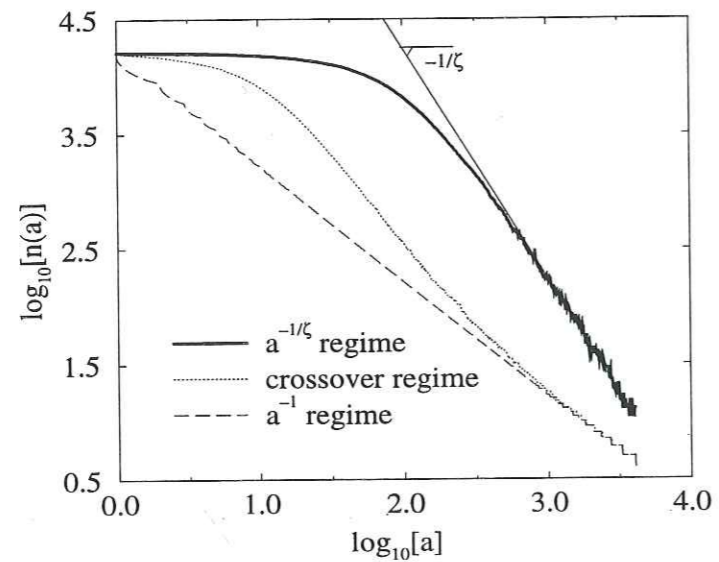


Figure 3: Analysis of a synthetic profile of length 16386 with a 0.5 exponent by the Divider method. The decimal logarithm of the number of dividers $n(a)$ is plotted according to the divider length a . The amplitude of the signal is a very sensitive parameter and separates two distinct regimes.

Fig 4

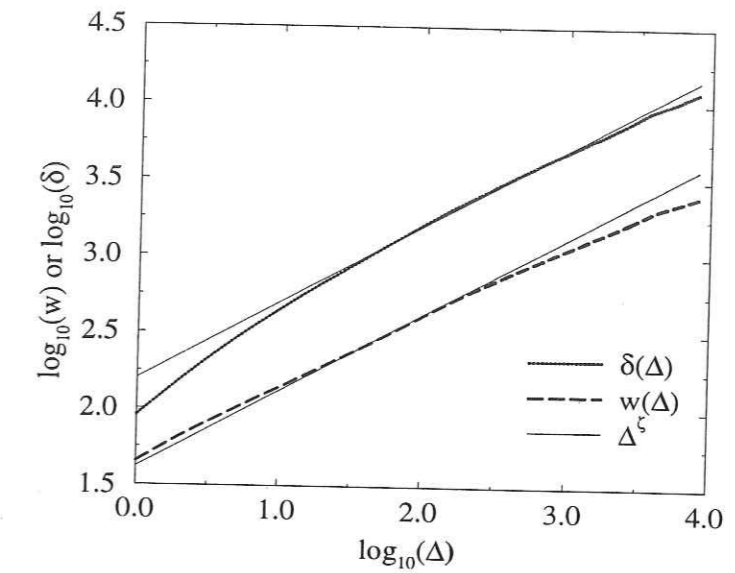


Figure 4: Example of self-affine analyses of a synthetic profile with a 0.5 exponent by the Variable Band Width method. Estimations of the root mean square δ and the maximum minimum difference w , according to the band width Δ , are shown. Best fits lead to the indicated value of the self-affine exponent ζ .

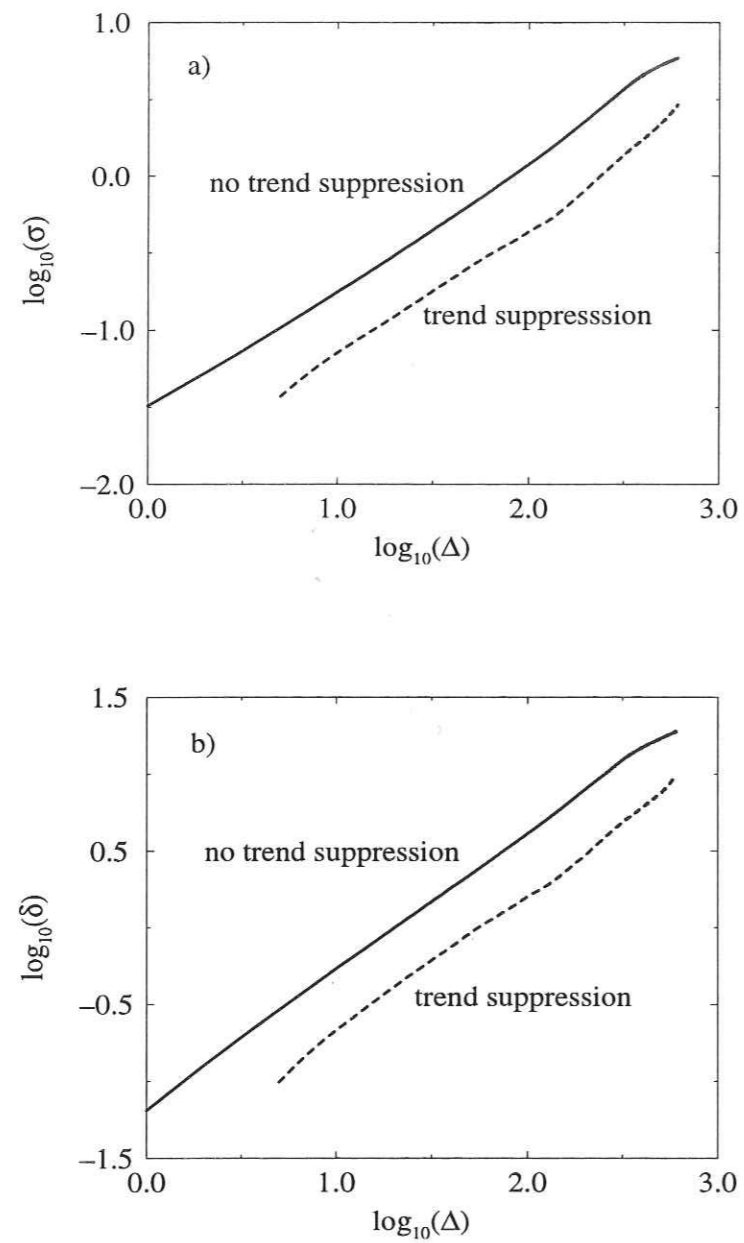


Figure 5: Comparison of the variable band width method and the *bridge* method for both estimators: a - r.m.s. and b - maximum-minimum difference.

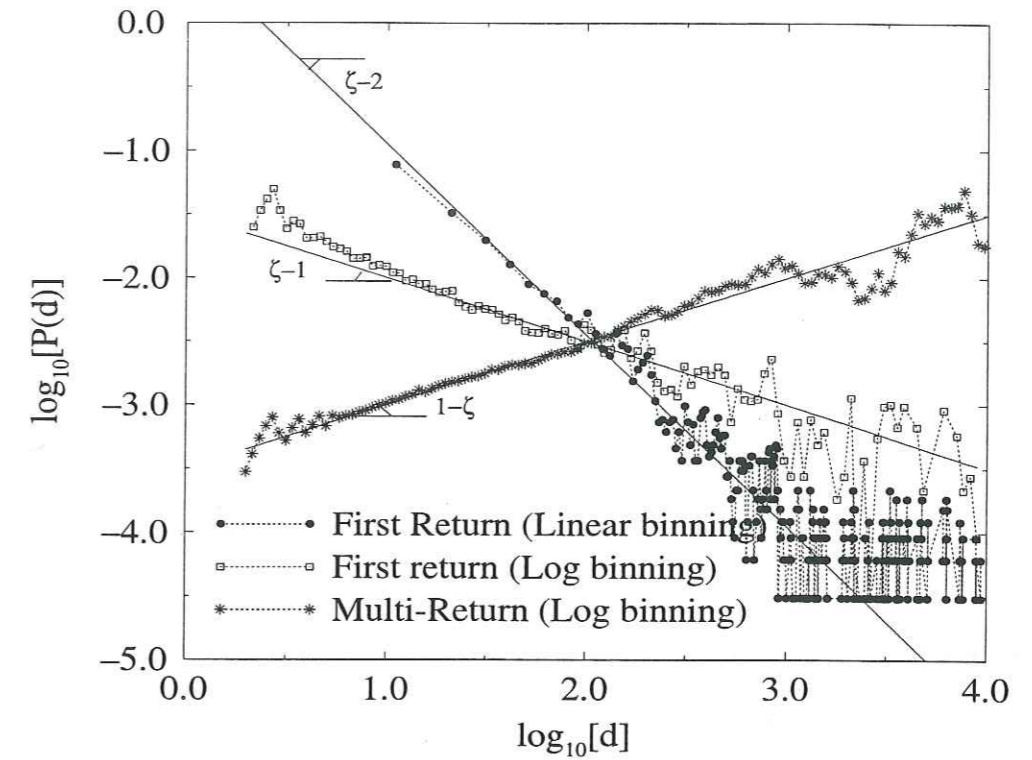


Figure 6: Analysis of a synthetic profile of length 16386 with a 0.5 exponent by the First and Multi Return Probabilities. The Return Probability is the probability, starting at a given height, to cross again the profile at the same height after a distance d . When only the first intersection is considered, the method is called the First Return Probability. When all the intersections are considered, the method is called the Multi Return Probability. Actually, the probability is built as a histogram. So binning can be either linear (sizes of classes are all equal) or logarithmic.

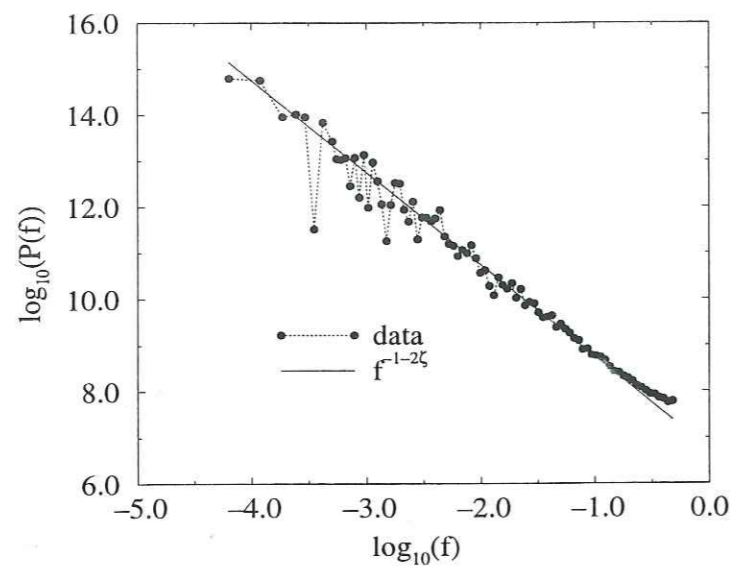


Figure 7: Analysis of a synthetic profile of length 16386 with a 0.5 exponent by the Power Spectrum method. The power $S(f)$ is plotted according to the frequency f in a decimal log-log diagram.

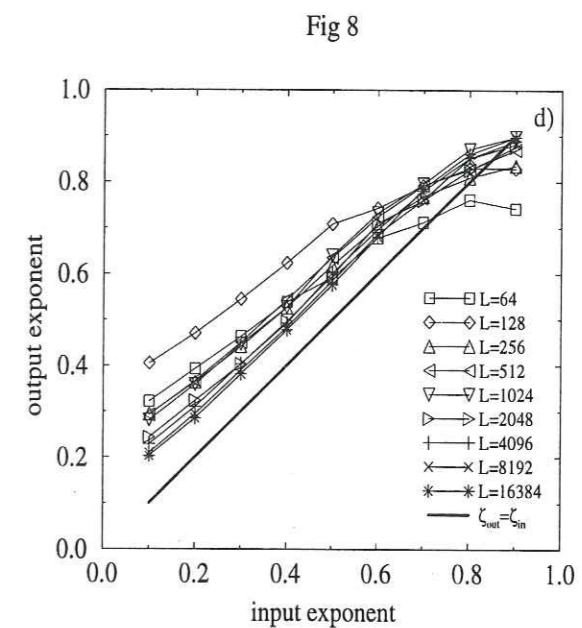
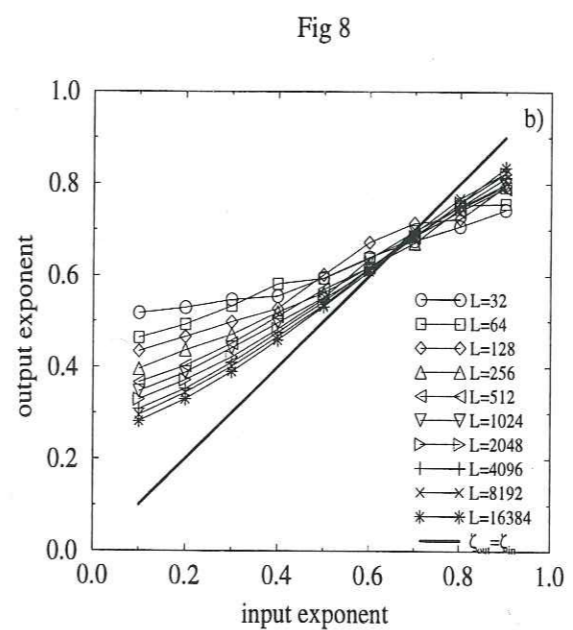
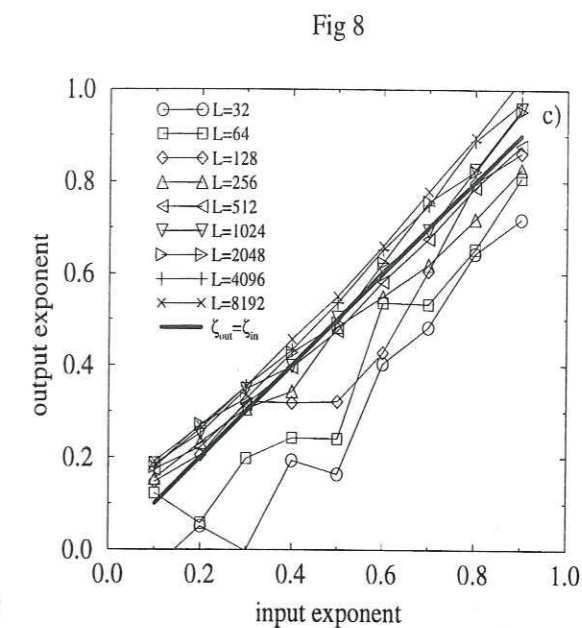
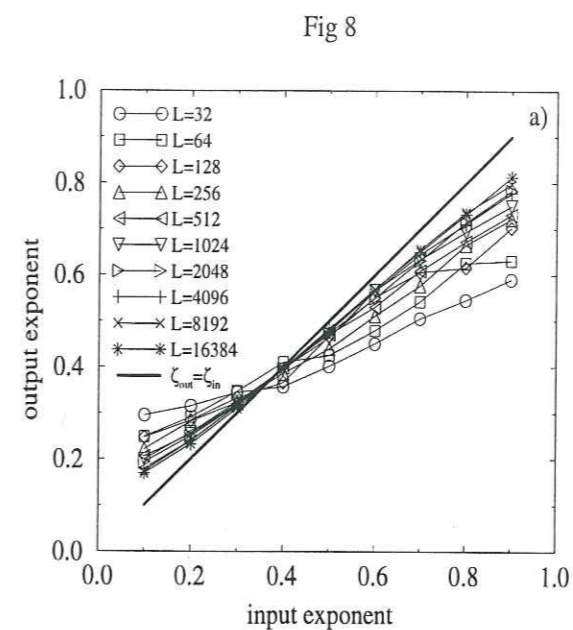


Fig 8

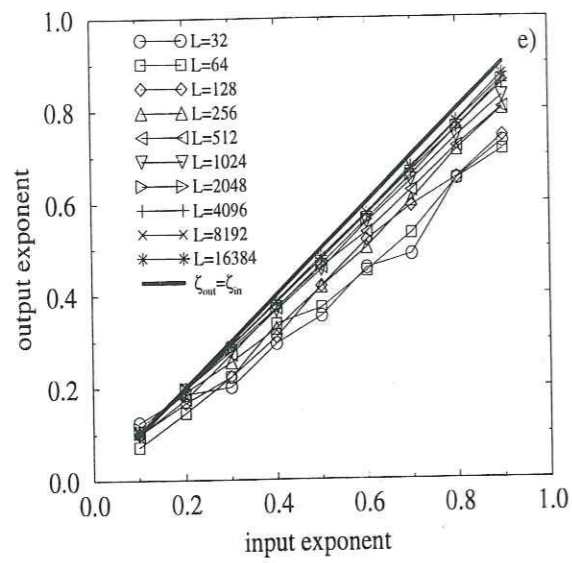


Fig 8

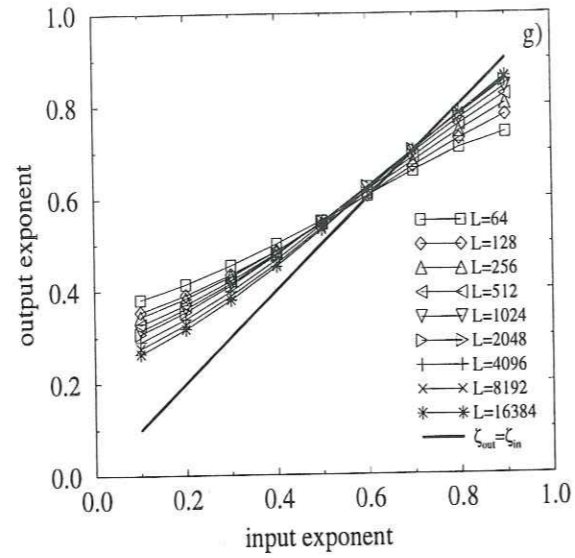


Fig 8

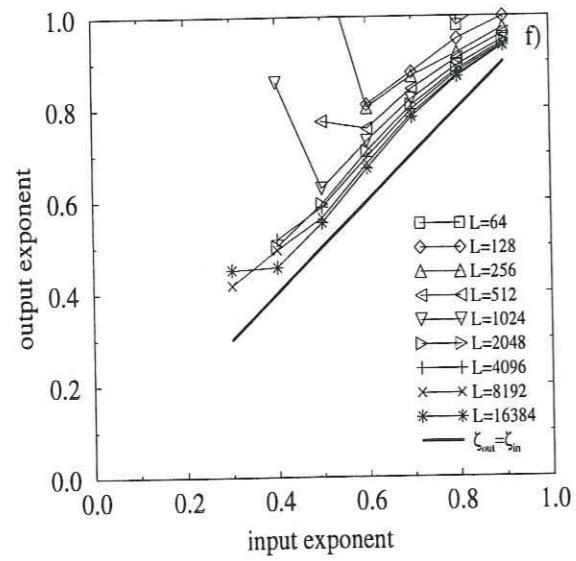


Figure 8: Comparisons of the "output" exponent obtained from the self-affine analysis and the "input" one introduced in the numerical construction for the seven methods of analysis: a - Variable Band Width method using r.m.s. estimator; b - Variable Bandwidth method using max-min difference; c - First Return Probability method; d - Multi Return Probability method; e - Power Spectrum method; f - Divider method; g - Box Counting method. Box counting, r.m.s., and max-min difference are mainly sensitive to the self-affine exponent, while first and multi return probability, and the power spectrum are more sensitive to size effects.

Fig 9

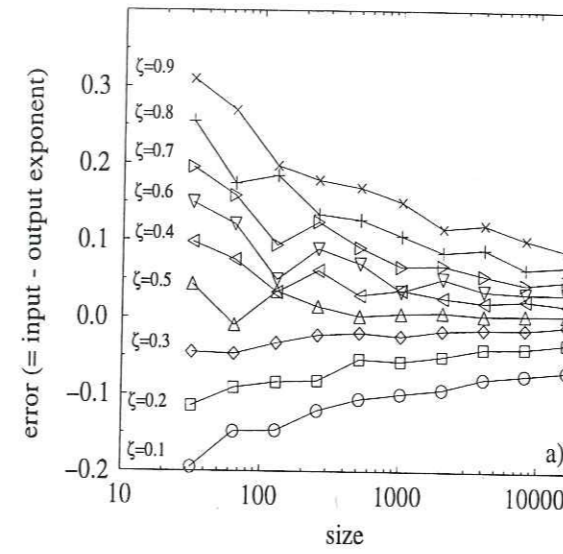


Fig 9

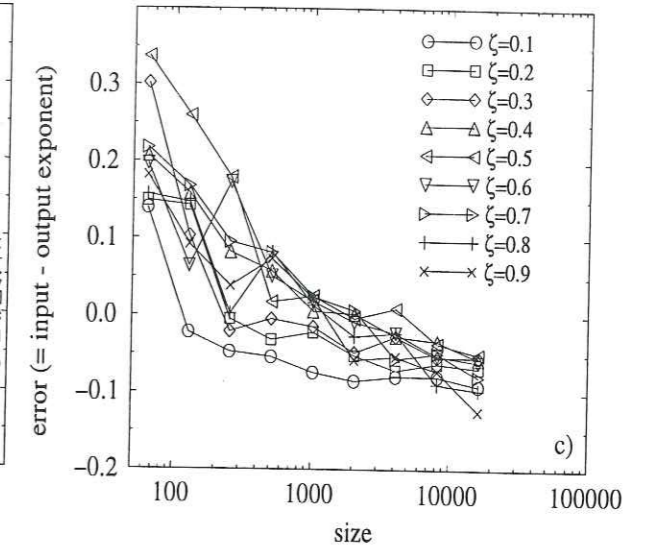


Fig 9

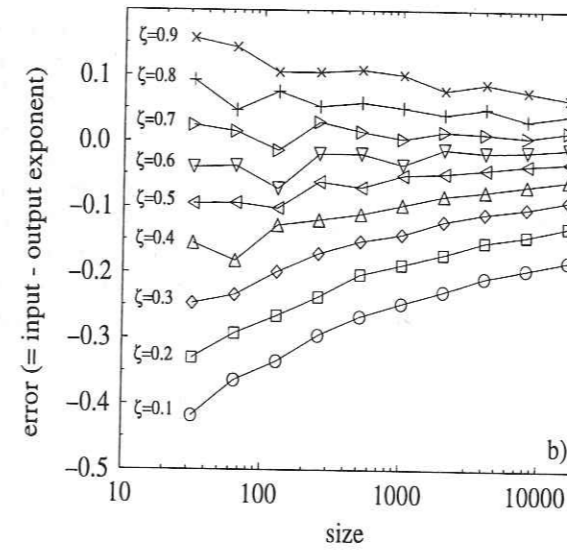
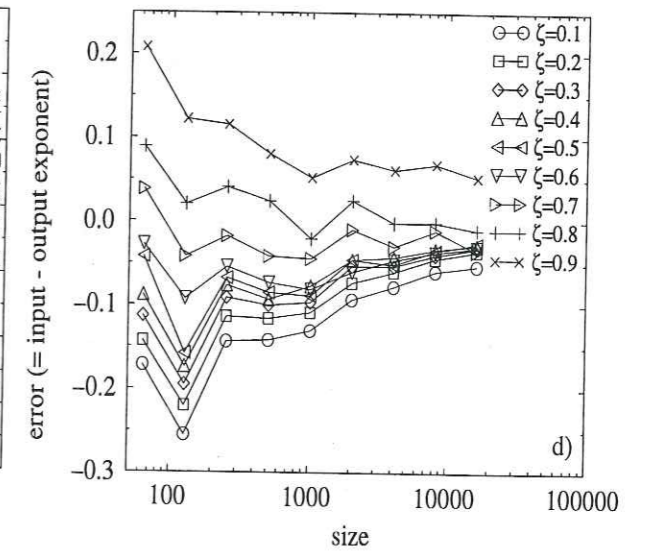


Fig 9



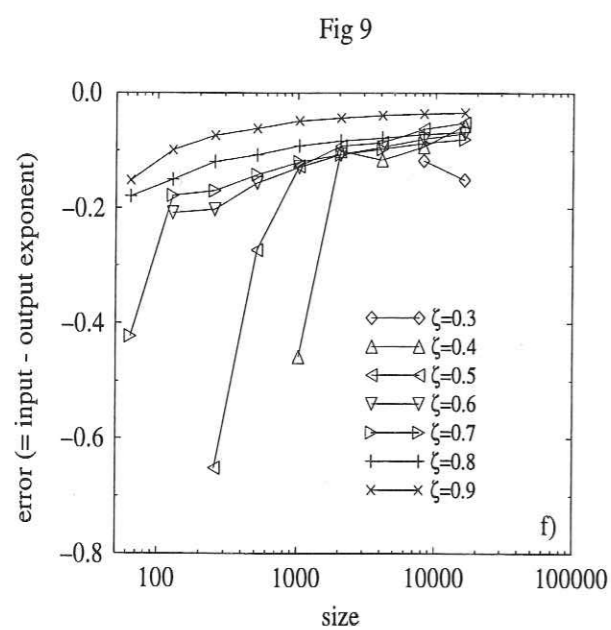
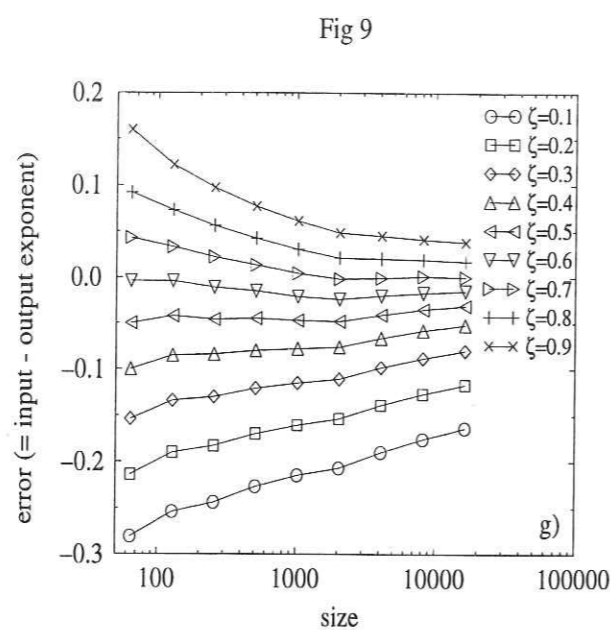
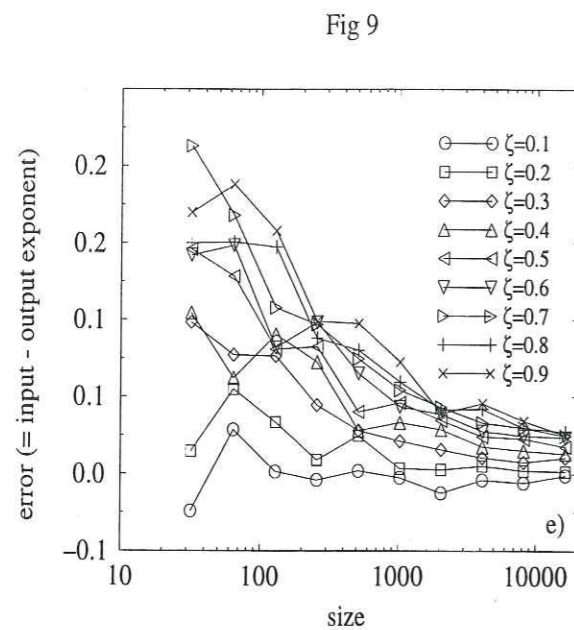


Figure 9: Estimation of the intrinsic errors as the difference between the "input" exponent minus the "output" one, for the seven methods of analysis : a - Variable Band Width method using r.m.s. estimator; b - Variable Bandwidth method using max-min difference; c - First Return Probability method; d - Multi Return Probability method; e - Power Spectrum method; f - Divider method; g - Box Counting method. Absolute errors can be directly read from these curves.

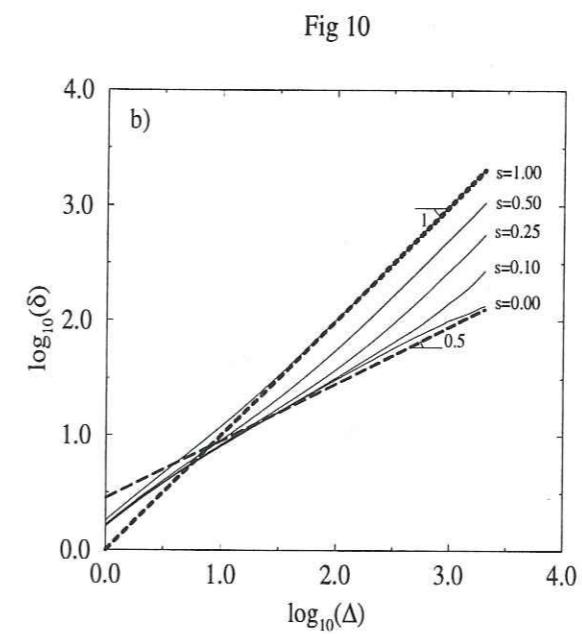
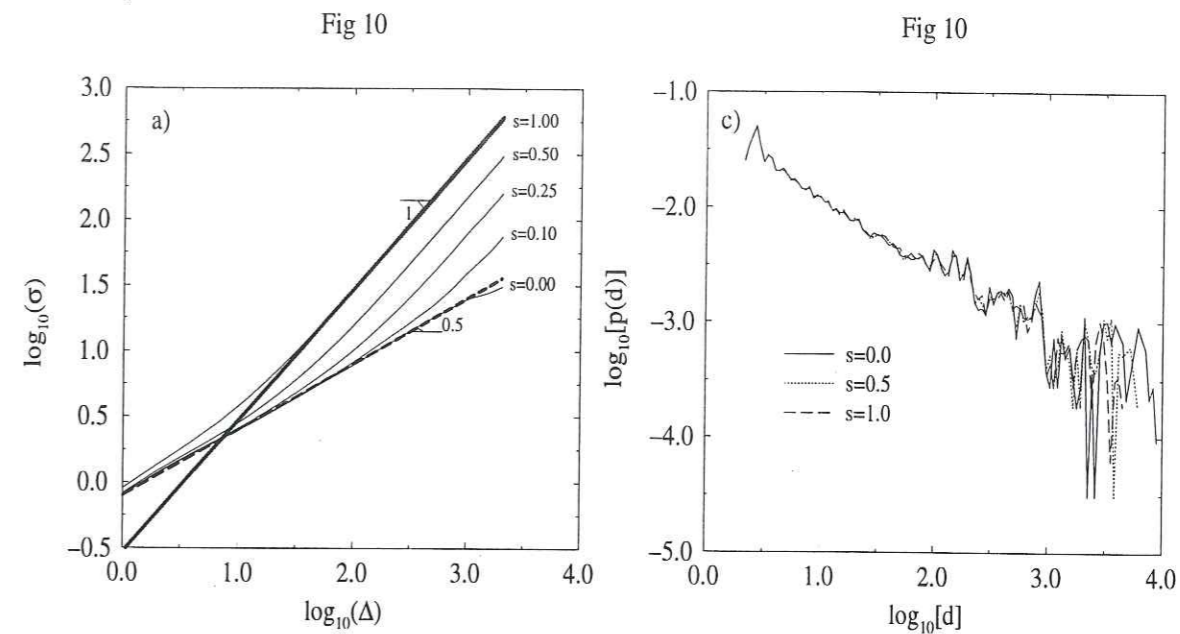


Figure 10: Influence of an additional linear trend to the self-affine signal produced with an exponent of 0.5 for the "self-affine" methods: a - Variable Bandwidth method using the r.m.s. estimator; b - Variable Bandwidth method using the max-min difference; c - First Return Probability method using a logarithmic binning; d - Power Spectrum method. The different curves of each plot present the result of the analysis for five different value of the added slope s .

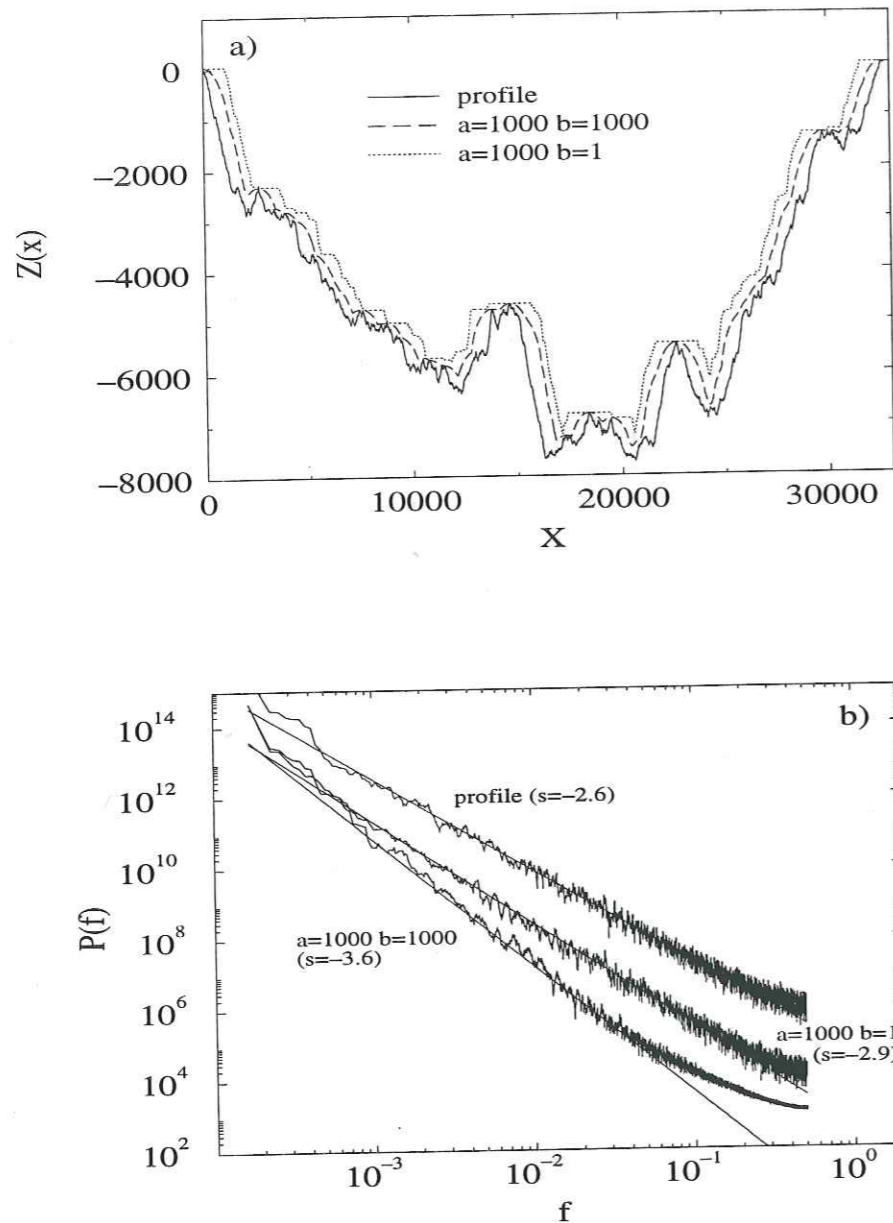


Figure 11: Influence of a local geometric filter, due for instance to the tip shape of the measurement set up. An elliptic shape is assumed, with a the half horizontal long axis and b the half vertical axis. Consequently, one case corresponds to a circular tip and the other one to a almost rectangular one. A synthetic profile with an exponent of $\zeta = 0.8$ is measured using these two measurement set-up. In a - The measured profiles obtained for these two cases, compared to the exact one; In b - The analysis of those biased profiles using the Power Spectrum method, compared to the Power Spectrum of the synthetic profile (with a slope of $s = -1 - 2\zeta$).

Chapitre 2

Implications géophysiques

Introduction

Comme nous venons de le voir, la géométrie d'une faille présente des propriétés d'invariance d'échelle. Au premier «ordre», elle est auto-affine. Cette propriété est statistique et se caractérise par un exposant dit d'auto-affinité. Rappelons que cette propriété n'est pas une mesure de la dimension de la surface, mais une description des corrélations spatiales. La fonction d'auto-corrélation est monotone entre une longueur de coupure inférieure¹ et la taille du système. Par conséquent, toutes les échelles sont dépendantes les unes des autres. On ne peut pas définir de longueur élémentaire en dessous de laquelle les propriétés géométriques sont moyennables. En d'autres termes, il n'existe pas de volume élémentaire représentatif².

Ce type de géométrie de l'interface est hérité du processus de fracturation qui a généré ou fait rejouer cette interface. Nous faisons alors l'hypothèse que failles et surfaces de fracture présentent les mêmes propriétés géométriques.

Si l'étude de la géométrie de la faille est intrinsèquement liée à celle du processus de fracture lui-même (cf deuxième partie), elle est également d'une importance majeure pour de nombreuses propriétés géophysiques de la faille. Trois groupes de propriétés sont distinguables selon qu'elles résultent de: la déformation sismique, la déformation asismique ou des phénomènes de transport. Le premier groupe sera abordé dans les chapitres 2 et 3 de la deuxième partie. Par contre, nous discuterons, dans ce chapitre, des deux derniers points.

Sont considérées ici, uniquement les conséquences relatives aux périodes non sismiques, c'est-à-dire lorsqu'aucun mouvement rapide³ n'apparaît entre les deux lèvres de la faille. L'ensemble des propriétés peut être scindé en deux groupes: celles qui sont relatives à la déformation proprement dite: poinçonnement mécanique, cisaillement, point de contact,

1. Une telle longueur n'a pas été observée expérimentalement.
2. Lorsqu'un volume élémentaire existe, ceci signifie implicitement qu'il apparaît une échelle séparant des domaines homogénéisables de domaines qui ne le sont pas. La transformation d'échelle dans le domaine homogénéisé est alors triviale (isotropie). Dans le cas, de milieux présentant une invariance d'échelle, un domaine n'est «homogénéisable» qu'en respectant l'invariance.
3. Par rapport à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans le milieu.

etc et celles liées aux propriétés de transport. Le transport des fluides constitue l'un des aspects les plus importants.

Notons que la notion de déformation asismique peut être vue de deux façons différentes. Tout d'abord, il est possible de la définir comme la déformation se produisant pendant une période inter-sismique. Elle résulte alors de processus de relaxation, de fluage, de variation du champ de contraintes régionales, de corrosion sous contrainte, etc. Dans ce cadre, on suppose la déformation asismique comme petite devant la déformation qui se développe lors du séisme. Cette déformation peut être vue également à une autre échelle de temps. On considère alors la déformation produite par un séisme, comme un incrément de déformation. En supposant que⁴, lors de chaque rejeu sismique (i.e. chaque incrément de la déformation), la propriété d'auto-affinité n'évolue pas, on peut alors voir le processus de déformation asismique comme une intégration du glissement sur de nombreux séismes.

Il convient d'ajouter qu'une description numérique précise de l'interface auto-affine, dans les modèles de processus physiques comme le poinçonnement élastique ou la propagation d'ondes ou encore la circulation de fluides, est difficile. L'essentiel de la difficulté résulte de la faible régularité de la frontière⁵.

Notations Tout au long de ce chapitre, nous considérerons les directions x et y comme deux directions perpendiculaires, dans le plan moyen de la faille ou fracture. Ces directions seront également appelées directions «horizontales». La direction z sera définie comme la normale au plan moyen de fracture (i.e. comme la direction «verticale»).

Présentation du plan Au cours de ce chapitre nous examinerons tout d'abord quelques propriétés liées à la déformation proprement dite de la faille. Il s'agit de l'étude du poinçonnement de deux massifs fracturés, du cisaillement de deux massifs et de l'évolution du point de contact. Dans le cadre du cisaillement de l'interface, nous nous intéresserons principalement à l'évolution des ouvertures. Dans un deuxième temps, nous nous tournerons vers les propriétés de transport à travers la faille. Il s'agira principalement de la circulation de fluides. Nous diviserons cette étude selon que le transport se fait en présence ou non de déformation du système. Ainsi, nous décrirons, d'une part, les propriétés de percolation lorsque la circulation introduit des seuils dans le problème. Nous étudierons également la question du transfert de chaleur. D'autre part, nous suivrons l'évolution de la perméabilité lors du cisaillement de la faille.

Lien avec les publications Deux articles ont été publiés à partir de cette étude des implications de la géométrie auto-affine. Un troisième est sous presse. Le premier, inclus dans l'annexe 1, présente les propriétés liées au contact élastique de deux surfaces auto-affines ainsi que l'évolution de la perméabilité lors d'une ouverture de la fracture. Dans l'annexe 2, est présenté un article s'intéressant à la percolation à travers une ouverture auto-affine. Le troisième article (voir annexe 3) s'intéresse au problème de l'évolution du point de contact.

4. Voir discussion du chapitre 1.

5. Voir chapitre 1

Un autre projet d'article (soumis) concerne l'étude de l'évolution de l'ouverture d'une fracture, tant d'un point de vue expérimental que théorique. Il intègre en particulier le rôle de la corrélation des surfaces en vis-à-vis, lorsque ces dernières sont issues d'une même fracture. Ce document n'est pas inclus dans ce manuscrit de thèse car ma participation à ce travail n'est que très minoritaire.

2.1 Déformation asismique

2.1.1 Poinçonnement mécanique

Il s'agit de la mise en contact de deux massifs élastiques dont les frontières sont auto-affines. Nous nous intéressons à la dépendance de la taille de la surface de contact ainsi qu'à l'évolution de l'interpénétration, en fonction du chargement. Le chargement est supposé résulter de l'application d'une force normale F à l'infini. La surface de contact S est définie comme l'ensemble des zones où l'ouverture entre les massifs est nulle. L'interpénétration δ correspond à la distance entre deux points appartenant respectivement au massif supérieur et au massif inférieur, selon une direction normale au plan moyen de la surface.

Supposons que les massifs mis en contact soient deux massifs élastiques limités par des surfaces auto-affines indépendantes dont les exposants⁶ sont respectivement ζ_1 et ζ_2 . Soient $h_1(x, y)$ et $h_2(x, y)$ les descriptions des frontières des massifs (1) et (2). Il ressort que:

$$\langle h_1(\Delta_x, y) \rangle \propto \Delta_x^{\zeta_1} \quad \text{et} \quad \langle h_1(x, \Delta_y) \rangle \propto \Delta_y^{\zeta_1} \quad (2.1)$$

$$\langle h_2(\Delta_x, y) \rangle \propto \Delta_x^{\zeta_2} \quad \text{et} \quad \langle h_2(x, \Delta_y) \rangle \propto \Delta_y^{\zeta_2} \quad (2.2)$$

où Δ_x est un élément de longueur le long de l'axe (x). Si l'on définit l'ouverture entre les deux massifs par:

$$a(x, y) = h_1(x, y) - h_2(x, y) \quad (2.3)$$

on peut alors montrer (voir *Plouraboué et al.* [1994]) qu'il existe une échelle Δ_x^* séparant deux domaines: pour des distances Δ_x plus petites que Δ_x^* , l'ouverture $a(x, y)$ est auto-affine avec un exposant: $\zeta = \min(\zeta_1, \zeta_2)$, au contraire, pour des distances plus grandes que Δ_x^* , l'exposant est: $\zeta = \max(\zeta_1, \zeta_2)$. Une distance caractéristique Δ_y^* existe aussi dans la direction y . Si les préfacteurs, dans l'invariance d'échelles de h_1 et h_2 selon la direction x , sont les mêmes que ceux dans la direction y , alors les deux distances caractéristiques sont identiques ($\Delta_x^* = \Delta_y^*$).

Ainsi, si on examine les propriétés des deux massifs en contact à des échelles, soit grandes, soit petites par rapport à Δ_x^* , on peut définir un problème équivalent. Il s'agit du contact entre un massif élastique auto-affine, limité par une interface ayant une auto-affinité caractérisée par un exposant ζ et un demi-espace infini rigide (voir Annexe 1, Figure 2, page 148).

Nous définirons deux types de transformation d'échelles aux cours desquelles nous suivrons l'évolution des grandeurs physiques suivantes: la surface de contact S la force normale F appliquée à l'infini et l'interpénétration δ .

6. On se limite aux surfaces dont l'exposant d'auto-affinité est isotrope.

Ajoutons que pour faire le calcul précisément, il convient de définir un repère local, lié à une facette⁷ de contact et différent de celui à l'échelle de l'échantillon. La verticale z , définie à l'échelle globale, par rapport au plan moyen de la fracture, peut être différente de la verticale locale. Sa projection dans le repère local peut donner lieu à trois composantes non nulles. Nous nous intéresserons aux déplacement, déformation et contrainte normaux, i.e. aux composantes de ces grandeurs le long de la verticale globale.

La première transformation est, dans le repère global, une dilatation isotrope du système:

$$\begin{cases} x \rightarrow \lambda x \\ y \rightarrow \lambda y \\ z \rightarrow \lambda z \end{cases} \quad (2.4)$$

Notons que cette homothétie ne laisse pas l'ouverture invariante. L'interpénétration δ est définie comme la composante verticale du déplacement. Elle évolue simplement selon:

$$\delta \rightarrow \lambda \delta \quad (2.5)$$

Au vu de la transformation globale, la surface de contact devient:

$$S \rightarrow \lambda^2 S \quad (2.6)$$

A l'échelle locale, la dilatation est également isotrope. Par conséquent, à cette échelle, le déplacement évolue de façon isotrope. La déformation ε , est définie comme la dérivée du déplacement. Or, coordonnées et composantes du déplacement sont transformées de la même façon par la dilatation isotrope. La déformation élastique est donc inchangée. Comme le milieu est élastique et que toutes les composantes de la déformation sont inchangées, la contrainte normale σ_N le sera également.

$$\varepsilon_N \rightarrow \varepsilon_N \quad \sigma_N \rightarrow \sigma_N \quad (2.7)$$

Si la contrainte reste inchangée en tout point, la résultante de contrainte normale $\sum_S \sigma_N$, intégrée sur l'ensemble de la surface de contact, est invariante. Or on a; $\sum_S \sigma_N = F/S$.

Par conséquent, la force normale va évoluer sous la dilatation isotrope selon:

$$F \rightarrow \lambda^2 F \quad (2.8)$$

La seconde transformation que l'on va considérer également à l'échelle globale, est une transformation n'impliquant que la direction verticale (z). Si on nomme μ son facteur d'échelle, alors la transformation est caractérisée par:

$$\begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow y \\ z \rightarrow \mu z \end{cases} \quad (2.9)$$

Elle ne préserve pas non plus l'invariance de l'ouverture. L'interpénétration évolue selon:

$$\delta \rightarrow \mu \delta \quad (2.10)$$

La surface totale de contact est inchangée⁸ puisque les surfaces auto-affines en vis-à-vis

7. Une facette correspond à un élément de la surface totale de contact.

8. La surface locale de contact peut évoluer.

sont asymptotiquement plates:

$$S \rightarrow S \quad (2.11)$$

La transformation dans le repère local est plus complexe car elle dépend de l'orientation de la facette de contact. Si le facteur d'échelle μ est grand alors, au premier ordre, la déformation verticale évolue selon:

$$\varepsilon_N \rightarrow \mu \varepsilon_N \quad (2.12)$$

Du fait de l'élasticité, la contrainte normale devient: $\sigma_N \rightarrow \mu \sigma_N$. Il s'en déduit simplement que la force normale de chargement se transforme en:

$$F \rightarrow \mu F \quad (2.13)$$

A présent, nous pouvons combiner les deux transformations afin de respecter l'invariance auto-affine de la géométrie du massif élastique, avec un exposant ζ . En effet, si on pose: $\mu = \lambda^{\zeta-1}$, alors en appliquant successivement les deux transformations que nous venons de détailler, on obtient:

$$\begin{cases} x \rightarrow \lambda x \\ y \rightarrow \lambda y \\ z \rightarrow \lambda^{\zeta} z \end{cases} \quad (2.14)$$

On obtient alors simplement l'évolution des différentes grandeurs:

$$\begin{cases} \delta \rightarrow \lambda^{\zeta} \delta \\ S \rightarrow \lambda^2 S \\ F \rightarrow \lambda^{\zeta+1} F \end{cases} \quad (2.15)$$

Or, ces relations doivent être vérifiées pour toutes valeurs de λ . Par conséquent, en les combinant pour supprimer la dépendance en λ , on obtient trois relations reliant les grandeurs physiques deux à deux:

$$\begin{aligned} F &\propto \delta^{(\zeta+1)/\zeta} \\ F &\propto S^{(\zeta+1)/2} \\ S &\propto \delta^{2/\zeta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Il convient de préciser que ces résultats ont été démontrés de façon indépendante, par Borodich [1993].

Précisons tout d'abord que la relation entre la force normale F imposée et la surface de contact S , a fait l'objet de nombreuses études. Il s'agit d'une des lois fondamentales du frottement: la loi d'Amontons. Cette dernière postule que les deux quantités sont proportionnelles:

$$F \propto S \quad (2.17)$$

Or, les mesures de ζ effectuées au premier chapitre, nous donnent $\zeta \approx 0.80$, soit:

$$F \propto S^{0.9} \quad (2.18)$$

On peut donc considérer que notre résultat est en bon accord avec cette loi d'Amontons.

La deuxième remarque concerne la relation entre force normale F et l'interpénétration δ . Ce problème a été très largement étudié par Hertz Johnson [1989], en particulier lors

du contact de deux aspérités sphériques. La non linéarité de la relation entre F et δ dans ce problème purement élastique, donc linéaire, provient de la croissance singulière de la surface de contact. Vérifions que notre résultat est également cohérent avec celui de Hertz⁹. Pour cela, il est nécessaire de définir un exposant d'auto-affinité «apparent» pour une sphère. Un tel exposant peut être obtenu par la relation statistique entre un élément horizontal et un élément vertical de l'objet étudié, on a pour une sphère:

$$\langle \Delta_z \rangle \propto \Delta_x^2 \quad (2.19)$$

Par analogie, on dira donc que l'exposant d'auto-affinité d'une sphère est deux ($\zeta = 2$). La relation à laquelle nous parvenons, à partir du calcul précédent, est:

$$F \propto \delta^{3/2} \quad (2.20)$$

ce qui est bien, en dimension, la relation obtenue par Hertz¹⁰.

Enfin, si on cherche à appliquer le calcul au cas d'une fracture où les deux lèvres sont indépendantes mais avec un même exposant: $\zeta \approx 0.80$, il en résulte que:

$$F \propto \delta^{2.25} \quad (2.21)$$

Les résultats expérimentaux présentés par *Måløy et al.* [1992] sont en bon accord avec l'estimation théorique.

2.1.2 Cisaillement et évolution de l'ouverture

Nous venons d'étudier le poinçonnement mécanique de la faille, i.e. la déformation des massifs lors d'un chargement normal. Nous nous intéressons à présent au problème du cisaillement de la faille, à savoir la réponse de l'interface lorsqu'elle est soumise à un couple de «forces». Ce cisaillement peut être dynamique. Il s'agit alors de ce que nous dénommerons le rejeu de la faille et que nous analyserons au cours du chapitre 2 de la deuxième partie. Nous nous limitons ici au cas quasistatique, i.e. un chargement lent asismique. Revenons sur ce que nous entendons par asismique. Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de ce chapitre, nous en proposons deux interprétations.

Tout d'abord, il s'agit de l'étude de l'évolution quasistatique sur de courtes échelles de temps. La géométrie de la faille se transforme suite à des mouvements lents: apparition d'un séisme sur une faille voisine entraînant une modification du champ de contrainte régionale, corrosion sous contrainte (fracturation sous-critique), dissolution des aspérités, fluage, relaxation visqueuse des contraintes, etc. La déformation sous poinçonnement se place dans un tel cadre. Cette première définition de la déformation asismique s'intéresse à une déformation, en général de faible amplitude. Elle a lieu durant chaque phase intersismique. On peut considérer qu'il s'agit de l'étude des propriétés de la faille à partir d'une seule photographie de la faille. Cette dernière correspondrait à une certaine phase de son «sommeil».

9. Il faut noter que la cohérence ne peut être faite que sur le comportement en dimension. Les arguments d'échelles que nous utilisons ici, ne peuvent pas fournir d'indications sur les préfacteurs.

10. Cette relation a été établie dans le cas tridimensionnel.

On peut également voir la déformation asismique comme le film réalisé par un stroboscope dont la fréquence est extrêmement faible. L'étude se fait alors sur des clichés successifs de différentes phases asismiques (i.e. de longues échelles de temps). La pertinence de cette seconde approche n'existe que si les phases sismiques ne modifient pas ou peu les propriétés que l'on étudie. Or, comme nous l'avons vu au cours du premier chapitre, la géométrie d'une fracture fraîche et d'une faille déjà ancienne, présentent la même propriété d'auto-affinité.

Nous étudierons selon cette double définition de la déformation asismique, trois propriétés liées au cisaillement de l'interface auto-affine: l'évolution de l'ouverture de la faille (présent paragraphe), celle du point de contact (paragraphe suivant) et celle de la perméabilité aux fluides. En cisaillement, nous n'intégrerons pas le comportement élastique. En effet, nous avons cherché à décrire au mieux les caractéristiques géométriques du système, au prix d'une simplification de la mécanique du milieu. Le travail décrit ci-dessous, suppose que les matériaux en présence sont *rigides*. Il s'agit donc d'une première approche.

Nous nous intéressons ici au système suivant. Deux massifs rigides, semi-infinis et limités par une géométrie auto-affine, sont mis en contact. Ils sont alors soumis à un cisaillement à déplacement horizontal¹¹ imposé d . On imagine qu'une force normale existe à tout moment et maintient les deux massifs en contact. Comment évolue alors l'ouverture qui existe entre ces deux massifs?

Nous choisirons comme origine du «temps», c'est-à-dire, comme première situation, le moment où les deux lèvres de la fracture sont en parfait vis-à-vis. En effet, pour une faille, les deux lèvres ne sont pas quelconques. Il s'agit des deux parties d'un massif qui ne faisait qu'un. Juste après la fracturation, aucun décalage n'est imposé, l'ouverture est nulle en tout point.

2.1.2.1 Surfaces indépendantes

Lorsque l'on déplace les deux épontes d'une distance d , l'une par rapport à l'autre, deux cas sont à considérer selon l'échelle d'observation à laquelle on se place. Si l'ouverture est examinée à une échelle très inférieure à ce déplacement, deux points en vis-à-vis sur l'interface seront statistiquement indépendants. En effet, en regardant à cette échelle, on ne pourra pas voir que les deux surfaces sont en fait identiques, et décalées. Les deux surfaces seront alors considérées comme indépendantes. Notons que plus le déplacement d est grand, plus une telle situation sera générale.

L'ouverture entre les deux massifs est fonction du décalage vertical $h(d)$ que le massif supérieur est astreint à subir pour «enjamber» les aspérités successives (que l'on suppose rigides) du massif inférieur (voir Annexe 1, Figure 1, page 2.2.2).

$$a(x, y, d) = z(x + d, y) + h(d) - z(x, y) \quad (2.22)$$

On suppose ici que le déplacement horizontal est dirigé selon la direction x ce qui est un choix de commodité. Le décalage vertical se caractérise alors par:

$$h(d) = \max_{(x,y)} (z(x, y) - z(x + d, y)) \quad (2.23)$$

11. horizontal signifie parallèle au plan moyen de la fracture

Notre attention se porte sur la dépendance de l'ouverture avec le déplacement horizontal imposé: $a(d)$. Si l'on s'intéresse, lors du décalage, à l'évolution de l'ouverture en un point donné, on constate que cette évolution est uniquement fonction des propriétés du décalage vertical $h(d)$. Or, du fait de la propriété d'invariance d'échelle de l'interface, la fonction $h(d)$ est auto-affine (voir appendice A):

$$\langle h(d) \rangle \propto |d|^\zeta \quad (2.24)$$

Il est important de noter que cette auto-affinité du décalage n'est pas une caractérisation géométrique puisque le décalage s'exprime en fonction du déplacement. On obtient deux propriétés distinctes: auto-affinité à deux dimensions de la géométrie de l'ouverture et auto-affinité à une dimension du décalage (donc de l'ouverture), en fonction du déplacement.

2.1.2.2 Surfaces non indépendantes

Pour des échelles d'observation plus grandes que le déplacement horizontal, les surfaces ne peuvent plus être considérées comme indépendantes. En effet, l'identité des surfaces devient alors sensible. Cette situation se rencontre particulièrement lors de faibles déplacements.

Dans ce cas, on peut montrer *Plouraboué et al.* [1994] qu'une correction est à ajouter dans le comportement du décalage vertical en fonction du déplacement horizontal. L'amplitude de la correction est particulièrement significative de faibles déplacements. Il s'agit d'une correction logarithmique. Son origine est due à la statistique des événements extrêmes. Les frontières en vis-à-vis sont découpées en carrés dont la taille est égale au déplacement d . Dans chacun des ces éléments, les surfaces peuvent être considérées comme indépendantes. Le calcul du décalage vertical se fait alors comme dans le paragraphe précédent. Par contre, le décalage que devra effectivement subir l'ensemble de la surface est le maximum de tous les décalages « locaux » (correspondant à chacun des éléments carrés). Or les décalages locaux sont distribués de façon gaussienne¹². On utilise alors une propriété de la « queue » d'une distribution gaussienne:

$$\int_{h_{max}}^{\infty} p(h) dh = \frac{1}{n} \quad (2.25)$$

où h_{max} est la valeur maximale des n événements réalisés. $p(h)$ est la probabilité de devoir imposer un décalage local de h , et n est le nombre d'échantillons, i.e. d'éléments carrés. Connaissant la forme de la distribution des hauteurs¹³ $p(h)$, ainsi que la taille L de la surface et le déplacement d imposé, on peut en déduire la correction à apporter pour la fonction $h(d)$:

$$h(d) \propto |d|^\zeta \sqrt{1 + C \ln(L/|d|)} \quad (2.26)$$

où C est une constante de l'ordre de l'unité. Deux commentaires sont à formuler. Tout d'abord, la correction intervient à deux niveaux. Pour les faibles déplacements, l'amplitude

12. Dans une approximation mono-fractale

13. Cette distribution inclut la propriété d'auto-affinité de l'interface dans le problème.

de la correction est grande, mais le comportement (i.e. la variation de h avec d) est dominé par le terme en loi de puissance:

$$h(d) \propto |d|^\zeta \quad \text{pour } d \rightarrow 0 \quad (2.27)$$

Lors de grands déplacements (voisins de la taille du système), l'amplitude de la correction logarithmique s'amenuise et le décalage se rapproche de celui de deux surfaces indépendantes. Par contre, le comportement change significativement, pour peu que la constante C soit grande ($C > 1$). Soit $h^{(n)}(d)$, l'expression du décalage pour des surfaces non indépendantes et $h^{(i)}(d)$ pour des surfaces indépendantes. On obtient alors:

$$\begin{cases} h^{(n)}(d) - h^{(i)}(d) \rightarrow 0 \\ \frac{h^{(n)}(d)}{h^{(i)}(d)} \rightarrow 1 - Cd \ln(d) \end{cases} \quad \text{pour } d \rightarrow L \quad (2.28)$$

Dans ce régime, la pente peut même devenir négative si la constante C est grande¹⁴. L'approximation de comportement en loi de puissance n'est plus valide. Dans ces conditions, le comportement se différencie nettement de celui en loi de puissance.

Une étude expérimentale de ce problème, a été menée au Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes (ESPCI) *Plouraboué et al.* [1994]. Un bloc de granite a été fracturé en deux. Les deux lèvres de la fracture ont alors été déplacées l'une par rapport à l'autre, dans les conditions que nous avons décrites plus haut. La condition de rigidité a été remplie grâce au protocole suivant. Le bloc supérieur¹⁵ reste fixe pendant toute l'expérience. Par contre, le bloc inférieur est descendu à partir de sa position de contact, d'une distance prescrite. Une fois en position basse, il est déplacé horizontalement, puis remonté jusqu'au contact suivant, et ainsi de suite.

Le mesure du déplacement vertical h à imposer au bloc inférieur pour permettre un déplacement horizontal d , est présentée Figure 2.1.

14. Ceci est non physique et fournit par conséquent une borne sur C .

15. Le plan moyen de fracture est placé le plus horizontalement possible.

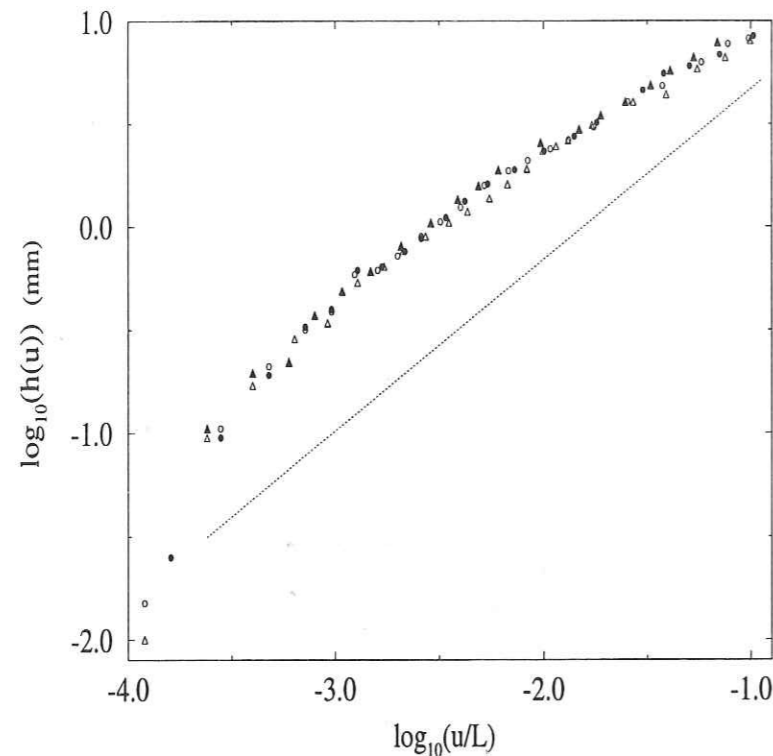


FIG. 2.1 - Etude expérimentale du déplacement vertical $h(d)$ en fonction du déplacement horizontal d , dans un diagramme $\log\text{-}\log$. Une loi de puissance avec un exposant 0.83 (exposant mesuré sur la surface considérée) est ajoutée.

Expérimentalement, la constante est estimée de l'ordre de: $C \approx 1.6$. On constate que pour les petits déplacements, le comportement est différent de celui attendu. Ceci résulte principalement de l'imprécision sur la mesure de la position de parfait vis-à-vis de surface ($d = 0$). Dès que le déplacement d devient suffisamment grand, la détermination expérimentale est en bon accord avec les résultats théoriques précédents (voir Plouraboué et al. [1994]).

2.1.2.3 Multi-fractalité

Pour l'étude de l'évolution de l'ouverture, nous nous sommes placés dans le cadre de l'approximation de premier «ordre» de la géométrie des surfaces en contact, à savoir l'auto-affinité. Or nous avons montré au cours du premier chapitre, qu'il existait un deuxième ordre dans la caractérisation de la géométrie avec l'étude multi-fractale. La généralité de cette deuxième étape dans la description, n'est certes pas encore établie. Cependant, si nous nous fondons sur les résultats obtenus, on peut s'attendre à ce que, pour le problème de l'évolution de l'ouverture, ce second ordre géométrique devienne important. En effet, nous avons vu que le calcul du décalage vertical à imposer pour accommoder un déplacement horizontal (dans l'hypothèse du massif rigide) est fonction des plus fortes singularités (i.e.

extréma des hauteurs) des surfaces en contact. Le décalage $h(d)$ est fonction du moment infini de la distribution des hauteurs (voir appendice A). Par conséquent, s'il existe une différence significative entre moment d'ordre un et moment d'ordre infini, le comportement en loi de puissance¹⁶ du décalage ne sera plus donné par ζ mais ζ_∞ .

$$h(d) \propto d^{\zeta_\infty} \quad (2.29)$$

Nous avons vu que le comportement du moment infini est en fait caractérisé par un moment dont l'ordre q_s est fonction de l'échantillonnage¹⁷ des surfaces:

$$\zeta_\infty = \frac{\zeta(q_s)}{q_s} \quad (2.30)$$

Or la fonction $\zeta(q)$ est donnée par:

$$\zeta(q) = q\zeta - K(q) \quad (2.31)$$

où $K(q)$ est positif (pour $q > 1$) et non linéaire (voir Eq. 1.36). On obtient alors:

$$h(d) \propto d^{\zeta - K(q_s)/q_s} \quad (2.32)$$

L'exposant de la loi de puissance décroît par rapport à celui décrit dans les paragraphes précédents. Le décalage suit alors une auto-affinité «apparente» avec un exposant plus faible que celui qui caractérise, au premier ordre, la géométrie des surfaces.

Reprenons, dans cette perspective, les résultats expérimentaux de la mesure du déplacement vertical h pour un déplacement horizontal d . En fonction du calcul ci-dessus, on s'attend à ce que le comportement pour les faibles déplacements présente un comportement en loi de puissance, mais avec un exposant plus faible que l'exposant d'auto-affinité. Or il existe dans ce régime, une grande imprécision expérimentale liée à la caractérisation du déplacement nul ($d = 0$). Le comportement n'est pas en loi de puissance. Il n'est donc pas véritablement possible d'infirmer ou de confirmer ce rôle de la multi-fractalité de la surface. Ajoutons que le comportement logarithmique résulte de l'invariance d'échelle (auto-affinité) mais surtout des corrélations à longue portée que cette dernière propriété introduit¹⁸. Il domine l'essentiel du comportement.

2.1.3 Evolution du point de contact

Nous nous intéressons, à présent, au point de contact entre deux surfaces auto-affines, toujours dans les mêmes conditions de déplacement¹⁹. Ce travail correspond à un article présenté dans l'annexe 3. Nous nous limiterons dans ce manuscrit à la présentation de

16. Le comportement est en loi de puissance lorsque les surfaces sont indépendantes ou, pour des surfaces dépendantes, lorsque le décalage est faible.

17. Faire le lien entre taille d'échantillonnage lors d'une mesure de la géométrie d'une surface et longueur physique dans le problème du décalage, est un travail difficile.

18. Chercher le maximum d'un ensemble de valeurs devient singulier lorsque le nombre de valeurs tend vers un.

19. à savoir le cisaillement de deux surfaces auto-affines rigides.

quelques points qui nous paraissent importants. Précisons que le suivi du point de contact peut être fondamental si l'on considère qu'il est le siège de transformations singulières: concentration de contraintes entraînant une plasticité, lieu de frottement, lieu de transfert de chaleur, etc.

Le mouvement d'une surface par rapport à l'autre est réalisé de sorte qu'elles restent parallèles, et donc en contact au niveau d'un seul point. L'amplitude du déplacement horizontal imposé est u . Pour accommoder ce déplacement, le bloc supérieur subit un décalage vertical $h(u)$ que nous avons décrit dans le paragraphe précédent. Après chaque déplacement u , un nouveau point de contact apparaîtra, situé à une distance d du précédent. Ainsi, si l'on imagine qu'il est possible de suivre le mouvement à travers l'une des deux surfaces, par transparence, et que chaque point de contact successif peut être visualisé, on peut obtenir une figure comme celle présentée dans l'Annexe 3, Figure 4, page 182. Il est bien évident que le point de contact n'est physiquement que rarement le même, mais qu'il «saute» en différents endroits de la surface.

Ce problème est étudié numériquement à partir de surfaces synthétiques. Différentes propriétés sont alors caractérisées.

2.1.3.1 Voisinage du point de contact

Loin du point de contact, on a montré que l'ouverture a entre les deux surfaces en contact, était auto-affine (voir Annexe 3, Figure 1, page 180):

$$\langle a(x, y) \rangle \propto x^\zeta \cdot y^\zeta \quad (2.33)$$

Comme l'auto-affinité est supposée isotrope dans le plan moyen de la fracture, on peut s'intéresser à l'évolution des propriétés, uniquement le long d'une direction particulière que l'on nomme x . Au voisinage du point de contact, on constate que la distribution $p^{(près)}(a, x)$ des ouvertures devient singulière. L'ouverture n'est plus invariante d'échelle. La distribution $p(a, x)$ se caractérise par (on note $p^{(loin)}(a, x)$ la distribution loin du point de contact):

$$p^{(loin)}(a, x) = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{a}{x^\zeta}\right) \quad p^{(près)}(a, x) \propto x^{-1-\zeta} \quad (2.34)$$

(voir Annexe 3, Figure 2, 3a et 3b, pages 180 à 181)

2.1.3.2 Vol de Lévy

La mesure de la distance moyenne \mathcal{D} entre deux points consécutifs de contact au fur et à mesure du déplacement d des surfaces permet de montrer que:

$$\langle \mathcal{D}(d) \rangle \propto d^\zeta \quad (2.35)$$

où ζ est l'exposant d'auto affinité. Le point de contact suit, non pas une marche aléatoire, mais un vol de Lévy dont l'indice est l'exposant d'auto-affinité.

2.2 Propriétés de transport

Après avoir étudié quelques aspects mécaniques de la faille pendant ses périodes asismiques, nous nous intéressons à présent, aux propriétés de transport. Du fait de la géométrie auto-affine, certaines de ces propriétés sont particulières à chaque instant de la vie de la faille, i.e. pour une géométrie donnée. C'est ce que nous intitulerons les propriétés de transport sans déformation. Par contre, d'autres propriétés sont liées à l'évolution de la géométrie du système, résultant de sa déformation. Ce seront les propriétés de transport avec déformation.

2.2.1 Transport sans déformation

2.2.1.1 Transfert de chaleur

Nous étudierons le problème de transfert de chaleur pour une certaine géométrie des surfaces en contact. Deux cas extrêmes sont à considérer: soit les interstices sont vides donc isolants, soit remplis de fluides, et par conséquent, conducteurs. Dans les deux cas, la capacité de transport est fonction du rapport entre la surface de contact roche-roche et la taille des interstices. Le problème clé consiste alors à estimer la surface de contact²⁰.

La surface de contact n'est réduite à un point (ou un ensemble de points) que si elle est déformable. En se reportant au calcul fait dans le paragraphe 2.1.1, il vient que, pour un massif élastique, la surface de contact S , pour un état de chargement normal F , vaut:

$$S \propto F^{2/(\zeta+1)} \quad (2.36)$$

On en déduit le comportement du flux de chaleur dans le cas où les interstices sont isolants. En effet, le flux de chaleur Φ_c est inversement proportionnel à la surface de transfert:

$$\Phi_c \propto F^{-2/(\zeta+1)} \quad (2.37)$$

Pour les surfaces de fracture, le flux de chaleur devrait²¹ être relié à l'état de chargement par la relation quasi-linéaire:

$$\Phi_c \propto F^{-1.1} \quad (2.38)$$

2.2.1.2 Phénomènes à seuil et percolation

La faille auto-affine peut être vue comme un objet fortement hétérogène, au sens où les hauteurs locales sont distribuées de façon continue. Par conséquent, dans un tel milieu, toutes propriétés de transport faisant intervenir un seuil, conduiront à l'apparition d'un phénomène de percolation *Stauffer* [1985]. Citons un exemple sur lequel nous reviendrons. Il s'agit de la circulation d'un fluide qui, du fait de ces propriétés physiques (mouillabilité), ne peut s'introduire que dans des ouvertures supérieures à une certaine valeur seuil. Si, pour passer d'une zone à une autre de l'interface, il existe une ouverture proche du seuil,

20. La taille des interstices se déduit du calcul de la différence entre taille du système et taille de la surface de contact.

21. Dans le cadre des hypothèses formulées précédemment.

toute la circulation sera fonction de cette ouverture. Elle sera dite «critique» car si elle est inférieure, même de très «peu», aucune circulation ne se produira. Par contre, dès qu'elle dépassera le seuil, il y aura transport. Ceci définit le seuil de percolation.

Le problème de percolation et notamment de la percolation d'invasion, a déjà été très largement étudié *Stauffer* [1985], *Guéguen and Palciauskas* [1992], *Feder* [1988]. Cependant, il s'agit en général d'études en milieu, certes hétérogène, mais purement aléatoire, i.e. décorrélé. Le phénomène de percolation dans un milieu fortement corrélé a été peu étudié *Prakash et al.* [1992]. Or l'ouverture à travers une faille est, comme nous l'avons montré, fortement corrélée. Le but du présent paragraphe est d'examiner cette percolation en milieu corrélé. Nous reviendrons en fin de chapitre sur les applications géophysiques d'une telle étude. En effet, le problème de l'écoulement à travers une fracture ou une faille est de première importance dans de nombreux contextes géologiques, géophysiques, pétroliers, ou encore mécaniques *Jaeger and Cook* [1979], *Guéguen and Palciauskas* [1992].

2.2.1.3 Seuil de percolation

Nous étudierons les propriétés de percolation, non pas à partir d'arguments d'échelle comme nous l'avons fait précédemment, mais en grande partie²² grâce à un travail numérique sur des surfaces synthétiques (voir Annexe 2, Figure 2a, page 164).

La synthèse de telles surfaces peut se faire²³ selon une construction itérative dite de *Voss Voss* [1985], *Feder* [1988]. L'esprit de cette construction consiste en un découpage successif d'éléments dits «pères» de la surface, en éléments dits «fils» (voir Annexe 2, Figure 1, page 163). Chaque étape élémentaire correspond au calcul de la hauteur d'un point fils à partir des hauteurs de quatre points pères voisins:

$$H^{(fils)} = \langle H^{(père)} \rangle_{voisins} + \eta \quad (2.39)$$

Il s'agit donc du calcul de la hauteur moyenne des points pères plus une fluctuation η . Cette fluctuation est estimée à partir d'une distribution gaussienne de moyenne nulle. C'est le choix de l'écart-type de la distribution qui contrôle la propriété d'auto-affinité. En effet, l'écart-type est fonction de la taille de l'élément père:

$$\eta = l^\zeta \quad (2.40)$$

où l est la taille de l'élément père et ζ , l'exposant d'auto-affinité. Ainsi, au fur et à mesure de la construction²⁴, c'est-à-dire de son découpage successif, la fluctuation ajoutée devient de plus en plus faible (si l'exposant est positif comme dans le cas de la faille). Par conséquent, les premières étapes donnent rapidement l'allure générale de la surface.

22. Une étude analytique sur des surfaces hiérarchiques a permis une prédiction des exposants critiques (voir plus loin).

23. Une autre technique consiste à construire un ensemble de points en vue de reproduire un certain spectre de Fourier.

24. Notons que cette construction peut être aisément transposée à une dimension, lors de la réalisation de profils auto-affines.

Pour ce problème de percolation, nous définirons une hauteur de coupure \bar{h} et un seuil $p(\bar{h})$ de la façon suivante:

$$p(\bar{h}) = \int_{-\infty}^{\bar{h}} g(h) dh \quad (2.41)$$

où $g(h)$ est la distribution des hauteurs²⁵ h . Ainsi, au fur et à mesure que la hauteur de coupure grandit, le seuil correspondant évolue de 0 vers 1. On dira que ce seuil est de percolation (p_c) lorsque, pour la plus petite valeur de ce seuil, il existe, le long de la surface, un chemin continu reliant deux extrémités opposées de cette surface. Ce chemin est celui qui passe par l'ensemble des «cols» les plus bas de la surface. La hauteur de coupure correspondant au seuil de percolation \bar{h}_c , est l'altitude du col le plus haut de ce chemin permettant de relier les deux bords de la surface.

Numériquement, le seuil de percolation est obtenu par une résolution dichotomique. On se fixe un intervalle initial pour la hauteur de coupure: $\bar{h} \in [h_{min}; h_{max}]$ qui contient nécessairement la hauteur de coupure de percolation. On découpe alors successivement cet intervalle, en calculant pour chaque borne de l'intervalle, si la surface percole (i.e. s'il existe un chemin permettant d'aller d'un bord à l'autre de la surface). Ainsi, lorsque l'on a obtenu une estimation de la hauteur de coupure de percolation \bar{h}_c avec une précision suffisante, on calcule le seuil de percolation p_c comme suit:

$$p_c = \frac{N_{h \leq \bar{h}_c}}{N_{total}} \quad (2.42)$$

où $N_{h \leq \bar{h}_c}$ est le nombre de points de la surface dont l'altitude est inférieure à la hauteur de coupure et N_{total} est le nombre total de points de la surface. On obtient alors une bonne précision sur la valeur de p_c en moyennant le calcul sur un très grand nombre de surfaces indépendantes. Plus les surfaces sont grandes, plus un calcul précis devient difficile.

Il est tout à fait instructif d'examiner l'allure des surfaces tronquées à la hauteur \bar{h}_c . Si l'on représente sur une coupe par un point noir, un point en dessous de la hauteur de coupure, on constate que l'allure d'une telle coupe, est très différente selon l'ampleur des corrélations spatiales. Notons qu'il est possible de contrôler l'amplitude des corrélations avec l'exposant d'auto-affinité ζ : quand ζ tend vers moins l'infini, la surface perd ses corrélations spatiales. L'examen visuel des figures présentées dans l'Annexe 2, Figure 4, page 166, permet de se convaincre de ce rôle de l'exposant d'auto-affinité. Dans le cas d'un exposant fortement négatif, la coupe forme un nuage de points peu dense. Au contraire dans le cas des surfaces corrélées, comme les surfaces de fracture, la coupe est constituée de quelques amas compacts.

Notons par ailleurs que la valeur du seuil de percolation décroît lorsque l'exposant d'auto-affinité grandit (voir Annexe 2, Figure 6, page 168).

2.2.1.4 Amas infini

A partir de l'étude de l'amas infini, nous nous intéresserons plus particulièrement au comportement critique au voisinage du seuil de percolation. Bien que la valeur du seuil

25. Avec le type de construction choisi, on peut montrer que la distribution des hauteurs est également gaussienne (cf annexe 2)

soit fonction de l'exacte structure du système étudié, le comportement (par exemple, la dépendance avec la taille du système) est très général Stauffer [1985], Roux [1990]. On parle alors de classe d'universalité. Des exposants dits critiques (par exemple ν, β) sont introduits pour décrire le comportement du système face à une variation des différents paramètres. La question est, par conséquent, de savoir si l'existence des corrélations spatiales change la classe d'universalité du problème, ou s'il s'agit d'un paramètre de structure influençant uniquement l'amplitude du seuil de percolation.

Pour répondre à ce type de problème, deux approches ont été suivies. La première, numérique, consiste à estimer les exposants critiques dans le cas des surfaces auto-affines et de les comparer à ceux établis pour la percolation classique. Nous avons par exemple calculé, l'effet de taille finie que subit la densité de l'amas infini (voir Annexe 2, Figure 9, page 169). Cet amas infini est défini comme l'ensemble des points «connectés» au chemin permettant de passer d'un bord à l'autre de la surface. Il s'agit donc des points dont la hauteur est inférieure ou égale à la hauteur de coupure et directement voisins de ceux qui constituent le chemin de percolation. La densité d'un tel amas infini est obtenue par:

$$d = \frac{N_\infty}{N_{total}} \quad (2.43)$$

où N_∞ est le nombre de points de la surface appartenant à l'amas infini. Cette densité, en percolation classique, suit la loi:

$$d \propto L^{-\beta/\nu} \quad (2.44)$$

Pour un réseau carré comme celui que l'on considère, on sait Roux [1990] que le rapport β/ν vaut $5/48$ (≈ 0.11). C'est exactement la valeur que l'on retrouve pour des exposants d'auto-affinité fortement négatifs, c'est-à-dire pour des surfaces faiblement corrélées. Par contre, lorsque l'exposant devient positif, la dépendance avec la taille du système change considérablement (voir Annexe 2, Figure 9, page 169). Pour des exposants de 0.8 (cas de la fracture), le système perd complètement sa sensibilité à la taille du système. L'exposant $(\beta/\nu)_{eff}$ tend vers zéro. En effet, l'amas devient compact, et donc ne voit plus sa densité dépendre de la taille du système. Il en ressort que la classe d'universalité change lorsque l'on introduit des corrélations spatiales dans le milieu.

L'autre approche suivie est basée sur un calcul analytique. Il s'agit de l'étude de la dépendance de l'exposant ν avec l'exposant d'auto-affinité. L'exposant ν permet de décrire la divergence de la longueur caractéristique ξ au voisinage du seuil de percolation.

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu} \quad (2.45)$$

Le calcul est fait sur des «surfaces» auto-affines hiérarchiques²⁶ (voir Annexe 2, Figure 5, page 167). Leur construction est plus simple puisque le calcul de la hauteur d'un point fils ne se fait qu'à partir de celle d'un seul point père (voir Annexe 2, Figure 1, page 163). Dans ce cas, la hauteur h_i en chaque point s'écrit comme la somme des contributions des différents niveaux hiérarchiques:

$$h_i = h^{(1)} + \lambda h^{(2)} + \lambda^2 h^{(3)} + \dots + \lambda^{n-1} h^{(n)} \quad (2.46)$$

26. Ces surfaces sont non euclidiennes.

où $\lambda = 2^{-\zeta}$ et n est le nombre de hiérarchies. Avec de telles «surfaces», il devient possible de calculer l'exposant effectif ν_{eff} en fonction de l'exposant d'auto-affinité (voir annexe 2). Trois régimes existent (voir Annexe 2, Figure 3, page 165):

$$\nu_{eff} = \begin{cases} \infty & \text{si } \zeta > 0 \\ -1/\zeta & \text{si } -1/\nu < \zeta < 0 \\ \nu & \text{si } \zeta < -1/\nu \end{cases} \quad (2.47)$$

Ceci montre bien que les propriétés de percolation sont complètement différentes lorsque le milieu présente des corrélations spatiales. L'application des résultats de la percolation dite classique au cas de la fracture ou de la faille n'est donc pas possible.

2.2.1.5 Porosimétrie mercure

Les applications de cette «théorie» de la percolation d'invasion en milieu fortement corrélé, sont nombreuses en géophysique. Les problèmes de transport faisant intervenir des seuils sont multiples. Citons par exemple, le cas de la circulation de fluides à travers une faille. Le seuil peut résulter de diverses caractéristiques que présente le fluide: sa mouillabilité, son comportement mécanique (rhéologie à «seuil»), ses électrolytes, etc.

Dans le cas d'une injection de fluides non mouillants (e.g. huile, pétrole, mercure) dans une fracture, le seuil est défini par la loi de Laplace. La pression P du fluide et le rayon de courbure R de son interface sont liés par:

$$P = \frac{\gamma}{R} \quad (2.48)$$

où γ est la tension de surface.

Nous nous intéresserons ici plus particulièrement au cas de l'invasion de mercure, car elle est à la base d'une technique classique de caractérisation de la distribution des hauteurs des ouvertures: la porosimétrie mercure. Elle est jusque là surtout utilisée pour les milieux poreux. Son principe est le suivant. Le mercure est injecté sous une pression P , ce qui contrôle la taille des pores envahissables. Plus la pression est grande, plus le rayon de courbure est petit. Par conséquent, lorsque la pression augmente, le fluide va envahir des zones de plus en plus étroites. Précisons que les zones effectivement envahies sont celles pour lesquelles un chemin les reliant au bord d'injection existe. Le long de ce dernier, l'ouverture doit toujours être plus grande que celle fixée par le niveau de pression. Si l'on imagine que, pour chaque niveau de pression, le volume de fluide injecté est significatif par rapport à l'ensemble du volume envahissable, alors le volume relatif (par rapport au volume total) injecté pour chaque niveau de pression permet de connaître la distribution des tailles d'ouverture.

Nous observons alors que l'une des conséquences de la différence entre percolation classique et percolation à travers une surface auto-affine, se situe au niveau de la validité de la mesure des grandes ouvertures (voir Annexe 2, Figure 10, page 170). En effet, en percolation classique, pour des pressions très basses, très peu de fluide pénètre le milieu. La représentation n'est donc pas statistiquement valable pour les grandes ouvertures. Au contraire, pour les failles, même pour des pressions très faibles, l'injection peut être

conséquence et donc fournir une bonne description de la statistique des ouvertures. Ceci résulte principalement de l'aspect compact des amas que nous avons décrit précédemment.

2.2.2 Transport avec déformation

Dans le cadre de l'étude des propriétés de transport impliquant la géométrie auto-affine lors de la déformation asismique, nous nous intéresserons uniquement à l'évolution de la perméabilité aux fluides d'une faille.

De l'évolution de l'ouverture de la faille se déduit assez directement celle de la perméabilité aux fluides mouillants, dans des conditions de faibles nombres de Reynolds²⁷. Nous nous limiterons à des conditions d'écoulement laminaire, c'est-à-dire unidirectionnel et stationnaire. Il s'agit de l'approximation sous-entendue dans la loi d'écoulement dite cubique.

$$Q \propto \langle a \rangle^3 \quad (2.49)$$

où $\langle a \rangle$ est l'ouverture moyenne de la faille et Q le débit.

Une constatation importante, faite au cours du premier chapitre concernant l'allure de surfaces auto-affines, prend une place cruciale au sein de ce calcul. En effet, nous avons montré qu'une surface auto-affine était très plate si on la regardait à très grande échelle. On peut donc voir l'écoulement à travers une ouverture auto-affine comme une perturbation d'un écoulement de Poiseuille entre deux plans parallèles. Dans ce cas, le débit local (pour une certaine longueur Δ_x) est (voir appendice B):

$$Q_{\Delta_x} \propto -\frac{\Delta_x d^{3\zeta}}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (2.50)$$

où η est la viscosité du fluide, Δ_x , la largeur de la section à travers laquelle est estimé le débit, et y la direction de l'écoulement. De ce fait, la perméabilité κ pour un déplacement horizontal des deux lèvres d , dans le cadre de surfaces indépendantes est:

$$\kappa \propto |d|^{2\zeta} \quad (2.51)$$

Cette loi fournit une première approximation de l'évolution de la perméabilité au cours de l'histoire de la faille, s'il est possible de connaître l'histoire du glissement. Ce comportement met en évidence une évolution non triviale de la perméabilité en fonction du décalage horizontal imposé. En effet, pour une fracture ($\zeta = 0.8$), on obtient:

$$\kappa \propto |d|^{1.6} \quad (2.52)$$

Une vérification expérimentale de cette loi est en cours de réalisation au LPMMH à l'ESPCI (Paris). On s'attend à ce qu'apparaissent des effets correctifs liés à la non-indépendance des surfaces (voir paragraphe 2.1.2.2).

27. Dans ce cas, les effets visqueux sont supposés être grands devant les effets inertiels.

Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux implications de la géométrie auto-affine dans les propriétés géophysiques de la faille, durant sa phase asismique. Nous montrons que la connaissance de cette propriété géométrique est capitale car elle permet d'analyser et de prédire de nombreuses propriétés de la faille²⁸.

Nous avons choisi de scinder l'ensemble des phénomènes en deux groupes. Il s'agit tout d'abord de l'étude de la déformation asismique de l'interface. La déformation asismique peut être vue comme le résultat de mouvements lents liés à des processus de relaxation visqueuse des épontes, ou d'un changement du champ de contrainte régional (cf séismes sur des failles voisines). Elle peut également être considérée comme la succession de périodes inter-sismiques, c'est-à-dire comme un film fait des prises de vue de différentes périodes asismiques. Cette dernière perspective est soutenue par l'observation faite dans le premier chapitre, à savoir que le phénomène sismique de rejeu de faille ne modifie pas les propriétés d'échelle de la faille.

En premier lieu, nous nous sommes intéressés au poinçonnement mécanique de deux massifs élastiques dont les frontières en contact sont auto-affines. Les corrélations à longues portées sont véritablement introduites dans le problème. Par des arguments d'échelles, nous lions forces appliquées, interpénétration et surface de contact. Les relations obtenues sont cohérentes avec la loi d'Amontons, si l'exposant d'auto-affinité est proche de un, comme dans le cas des roches ($\zeta \approx 0.8$). La formulation de Hertz, pour décrire le contact de deux aspérités sphériques, est également retrouvée, pour ce qui est de la relation dimensionnelle. Les résultats sont cohérents avec des expériences réalisées en laboratoire. Dans un deuxième temps, nous nous tournons vers le problème du cisaillement de l'interface. Dans ce cadre, nous étudions l'évolution de l'ouverture de la faille. Nous montrons que la translation verticale nécessaire pour respecter la condition de rigidité est elle-même auto-affine en fonction du décalage. Une correction logarithmique intervient pour les petits déplacements lorsque les deux surfaces en contact ne sont pas indépendantes (décalage des deux lèvres d'une même fracture). Une vérification expérimentale a été faite. Enfin, nous nous intéressons à la trajectoire du point de contact lors du déplacement. Si l'on est capable de regarder à travers l'une des épontes, quels sont les différents points en contact? Il ressort que la trajectoire des points successifs de contact forme un vol de Lévy. Ce type de propriété est importante si l'on imagine que le point de contact est le lieu d'une transformation particulière (plasticité, endommagement, transfert de chaleur, etc).

Le deuxième groupe de propriétés concerne les phénomènes de transport. Deux cas sont distingués. D'une part, il s'agit des propriétés pour une géométrie fixée du système. Ce sont les propriétés de transport sans déformation. Nous nous intéressons alors au problème du transfert de chaleur à travers une faille, ainsi qu'à celui de la circulation de fluides lorsqu'il existe un seuil physique. Ce seuil peut résulter par exemple de la non mouillabilité du fluide (cf loi de Laplace). Faire circuler un fluide dans un milieu hétérogène avec présence d'un seuil, donne naissance à un phénomène de percolation d'invasion. Nous étudions ce problème de percolation lorsqu'il existe d'importantes corrélations spatiales. On montre

28. Rappelons que cette assertion se justifie uniquement sur la base de l'hypothèse formulée au chapitre 1, à savoir que surface de fracture et faille présentaient la même géométrie.

ainsi que la présence de corrélations à longue portée change la classe d'universalité du phénomène. En effet, les amas de percolation sont compacts. Nous appliquons les résultats obtenus dans un cas particulier: la porosimétrie mercure.

L'étude que nous avons menée, des problèmes de transport lors d'une déformation de l'interface, se limite à celle de l'évolution de la perméabilité lors du cisaillement de l'interface. Nous obtenons ainsi une loi de croissance de la perméabilité en fonction du décalage des deux surfaces, dans la limite où les massifs restent rigides au cours du mouvement.

Les perspectives d'études dans le cadre des implications géophysiques sont nombreuses. Au cours de ce travail, nous nous sommes, en particulier, limités à une première approche dans laquelle les massifs en contact sont rigides. Il conviendrait, d'introduire les propriétés élastiques des épontes lors du cisaillement. La pression de fluide est également susceptible de modifier la géométrie du système.

Appendice A: Auto-affinité du décalage vertical $h(d)$

On cherche à montrer la propriété d'auto-affinité du décalage vertical lors d'un décalage horizontal d de deux surfaces auto-affines. Nous nous limiterons à une démonstration pour un problème bidimensionnel, i.e. une coupe perpendiculaire à la fracture.

$$h(d) = \max_x (z(x) - z(x+d)) \quad (2.53)$$

On introduit la notation: $z_x(d) = z(x) - z(x+d)$.

$$h(d) \approx \max_x z_x(d) \quad (2.54)$$

Comparons la différence des hauteurs pour deux points voisins x et x' : $z_x(d)$ et $z_{x'}(d)$. La différence Δ de ces quantités s'écrit:

$$\Delta = z(x) - z(x+d) - z(x') + z(x'+d) \quad (2.55)$$

Deux cas se présentent. Lorsque d est grand, la différence $z(x) - z(x')$ devient indépendante de $z(x+d) - z(x'+d)$. Au contraire, pour d petit, la différence $z(x) - z(x+d)$ est indépendante de $z(x') - z(x'+d)$. On obtient donc la dualité:

$$\begin{cases} \Delta \propto |x - x'|^\zeta & \text{pour } d \gg |x - x'| \\ \Delta \propto |d|^\zeta & \text{pour } d \ll |x - x'| \end{cases} \quad (2.56)$$

Dans la suite, nous nous placerons dans la limite des petits déplacements. Le moment d'ordre q de l'altitude s'écrit:

$$M_q(d) = \langle z_x^q(d) \rangle \quad (2.57)$$

Or nous savons que le profil $z(x)$ est auto-affine. Par conséquent, la probabilité d'avoir un point à une altitude z , lorsque l'on se trouve à une position x est:

$$P(z, x) = x^{-\zeta} \phi\left(\frac{z}{x^\zeta}\right) \quad (2.58)$$

où ϕ est une fonction appelée fonction d'échelle. Elle montre comment x et z doivent évoluer pour respecter l'invariance d'échelle. L'expression du moment devient:

$$M_q(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_x^q P(z_x, d) dz \quad (2.59)$$

En introduisant l'expression de la probabilité 2.58 ainsi que le changement de variables: $u = z_x/d^\zeta$, il vient:

$$M_q(d) = d^{q\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} u^q \phi(u) du \quad (2.60)$$

A présent, si l'intégrale converge pour toutes les puissances q , alors on constate que:

$$M_q(d) \propto d^{q\zeta} \quad (2.61)$$

Le maximum de la distribution des altitudes z est égal à:

$$\max_x(z_x(d)) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sqrt[q]{M_q(d)} \quad (2.62)$$

Par conséquent, le décalage vertical est auto-affine:

$$h(d) \propto d^\zeta \quad (2.63)$$

Appendice B: Calcul du débit à travers une ouverture auto-affine

On cherche à estimer le débit à travers une ouverture auto-affine. Soit \vec{v} le vecteur vitesse du fluide circulant. On se limite à un écoulement unidirectionnel (i.e. laminaire) dans la direction y . La tortuosité de l'écoulement n'est pas considérée. Ceci se justifie en première approximation par le fait que les ouvertures sont des ensembles compacts (voir étude sur les propriétés de percolation). L'écoulement est de nature différente à celui dans un milieu poreux.

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y(x, y, z) \\ v_z = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

On se place dans le cas simple d'un écoulement stationnaire et à faible nombre de Reynolds. On suppose le fluide incompressible:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.65)$$

L'équation de Stokes nous permet d'écrire:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

où η est la viscosité du fluide.

Calculons la rugosité relative R d'une ouverture $a(x)$ auto-affine sur une longueur L :

$$R \approx \frac{\langle a(L) \rangle}{L} \quad (2.67)$$

La propriété d'auto-affinité nous permet de conclure que:

$$\langle a(L) \rangle \propto L^\zeta \quad (2.68)$$

Donc la rugosité relative est:

$$R \approx L^{\zeta-1} \quad (2.69)$$

Par conséquent, pour une taille suffisamment grande et un exposant d'auto-affinité inférieur à un ($\zeta = 0.80$), la rugosité relative devient nulle. En d'autres termes, une ouverture auto-affine peut être vue comme une perturbation d'un écoulement entre deux plaques parallèles (i.e. Ecoulement de Poiseuille). On peut donc considérer les variations d'écoulement avec la direction x comme faibles devant celles de la direction z .

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad (2.70)$$

L'équation permettant de décrire l'écoulement est donc particulièrement simple:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad (2.71)$$

Les conditions aux limites sont:

$$\begin{cases} v_y(x, z = 0) = 0 \\ v_y(x, z = a(x)) = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

Le calcul de la vitesse est alors trivial:

$$v_y(x, y) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) (z^2 - a(x)z) \quad (2.73)$$

Soit Q_{Δ_x} le débit à travers l'ouverture sur une largeur Δ_x .

$$Q_{\Delta_x} = \int_0^{\Delta_x} \int_0^{a(x)} v_y(x, z) dz dx \quad (2.74)$$

En introduisant l'expression de la vitesse, on obtient:

$$Q_{\Delta_x} = -\frac{1}{12\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \int_0^{\Delta_x} a^3(x) dx \quad (2.75)$$

Précisons que l'ouverture résultant d'un décalage horizontal d n'est auto-affine que sur une distance: $x \in [0, d]$. Au delà, l'ouverture est constante, du fait que les surfaces sont identiques.

$$\begin{cases} a(x) \propto x^\zeta & \text{si } x < d \\ a(x) \approx Cte & \text{si } x > d \end{cases} \quad (2.76)$$

Il vient que:

$$\int_0^{\Delta_x} a^3(x) dx \approx \frac{\Delta_x}{d} \int_0^d x^{3\zeta} dx \quad (2.77)$$

On parvient ainsi à une estimation du débit pour un écoulement laminaire à travers deux surfaces auto-affine décalées horizontalement de la distance d :

$$Q_{\Delta_x} \propto -\frac{\Delta_x d^{3\zeta}}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (2.78)$$

Annexe 1

Some Physical Properties of Self-Affine Rough Surfaces

S.Roux, J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and A. Hansen

Publié dans: *Europhysical Letters*
Vol. 23, No. 4, Pages 277-282, 1993

SOME PHYSICAL PROPERTIES OF
SELF-AFFINE ROUGH SURFACES

Stéphane ROUX

Laboratoire de Physique et Mécanique de la Matière Hétérogène, URA CNRS 857, Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de Paris, 10 rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05, France.

Jean SCHMITTBUHL, Jean-Pierre VILOTTE

Département Terre-Atmosphère-Océan, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France.

Alex HANSEN

Groupe Matière Condensée et Matériaux, URA CNRS 804 Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France.

ABSTRACT: We study some examples where the self-affine nature of surfaces determines the scaling of transport properties, beyond the simple geometrical characterization. The first example deals with the permeability of two identical surfaces which have been translated with respect to each other along their mean orientation. The second example is the force displacement characteristic of two elastic solids limited by independent self-affine surfaces which are pressed against each other.

INTRODUCTION

In recent years, there has been a considerable interest in the geometry of systems appearing to be scale-invariant, or fractal.^[1] More recently, *self-affinity*, *i.e.* a more general scaling transformation which takes anisotropy into account, has been found to appear naturally in quite a number of different areas. Examples of this may be found in growth models — such as the boundary of Eden clusters, or ballistic deposition models recently reviewed in Ref. [2] — landscape and erosion surfaces,^[3] or fracture surfaces.^[4–7] It is indeed important to be able to identify such a geometrical property whenever it exists, but often, it is not clear what *physical consequences* this geometrical property may imply. It is the aim of this letter to identify a few of such physical properties whose scaling behavior can be simply attributed to the underlying self-affine geometry.

A self-affine object is invariant under an affine transformation: $x_i \rightarrow \lambda_i x_i$, for $i = 1, \dots, d$. This invariance is in general to be considered only in a *statistical* sense. For this symmetry to be meaningful, a reasonable range of λ values should fulfil this condition. Requiring that these transformations can be combined implies a group structure which result in each λ_i to be an homogeneous function of one of them, say λ_1 . The homogeneity exponent is called ζ_i :

$$\lambda_i = \lambda_1^{\zeta_i} \quad (1)$$

The set of homogeneity indices $\{\zeta_i\}$ characterizes the scaling properties of the self-affine object. In the following, we will only consider the case of surfaces with a mean plane parallel to (x_1, \dots, x_{d-1}) along which the surfaces are isotropic. The only non-trivial exponent is thus relative to the scaling in the x_d direction, ζ_d — hereafter simply referred to as ζ . In the rest of this letter, we will keep the discussion on these well-defined notions, and avoid the use of any “fractal dimension” concept which can assume different values depending on the precise definition or measurement method chosen. This term is also somewhat

misleading in the sense that it encourages unduly the use of tools and results which were developed specifically for self-similar objects (*i.e.* $\zeta_i = 1$ for all i).

The examples we consider in this letter concern fracture surfaces. These have been observed to exhibit self-affine geometries under very general conditions.^[4–7] Furthermore, the roughness exponent has been found to be surprisingly insensitive to the materials involved, and how they were fractured. The typical value found is $\zeta \approx 0.85$.^[6–7] We first study the permeability of a crack which has been subjected to a displacement parallel to its mean surface. As a second example, we consider a semi-infinite elastic medium limited by a self-affine surface which is pressed onto another independent self-affine surface. We finally consider the transport properties across the interface in the previous situation.

Consider a single rough crack in a solid. We assume that the two opposite parts of the solid are displaced with respect to each other by an amount d parallel to the mean crack plane. We moreover suppose that the solid is undeformable, or that the applied normal stress pressing the two sides of the crack together is low, so that most of the deformation takes place in the relative displacement of the two rigid blocks. In order to allow a displacement d without deformation of (nor overlap between) the two blocks, a normal displacement $h(d)$ is necessary. If we introduce a parametrization of the surface $z(x)$ (for $x = (x_1, \dots, x_{d-1})$), the normal displacement can easily be computed to be

$$h(d) = \max_x (z(x) - z(x+d)). \quad (2)$$

The self-affinity of the surface imposes that on average, $\langle h(d) \rangle \propto |d|^\zeta$. The opening $a(x) = z(x+d) + h(d) - z(x)$ itself is self-affine with an exponent ζ for distances smaller than d , whereas it exhibits a size independent roughness proportional to $h(d)$ for larger distances.

Let us now consider the laminar flow of a Newtonian fluid in the crack, in a direction parallel to the mean crack plane. In the two-

dimensional geometry sketched in Fig. 1, the flow would take place perpendicularly to the figure plane.

In most cases of physical interest, the roughness exponent ζ is smaller than 1. In such a case, the *relative roughness* (*i.e.* the roughness divided by the system size), tends to zero as the system size increases to infinity. This observation implies that fracture planes are asymptotically flat. Such a property allows us to simplify the estimate of the permeability scaling. The asymptotic behavior (for large system size) can be obtained with arbitrarily small prefactors in the roughness, and thus the roughness can be treated as a perturbation on the simple Poiseuille flow between parallel plates.

However, in the following we will derive the scaling properties of the permeability as a function of displacement d , without having to resort to this simplifying feature. Locally, the hydraulic conductance scales as the cube of the aperture, $\kappa(x) \propto a(x)^3$. When the two opposing faces of the crack are displaced by a quantity d parallel to the mean fracture plane, the distribution of local apertures has the same form for all d , apart from a scaling factor which depends on $|d|$. Since the upper cut-off in the aperture distribution is proportional to $|d|^\zeta$, the *entire* aperture distribution scales as $|d|^\zeta$. Thus, the scaling of the local conductance distribution is simply $|d|^{3\zeta}$. As a consequence, we conclude that the global hydraulic conductance K for a unit length along the flow and perpendicular to it scales as

$$K \propto |d|^{3\zeta}. \quad (3)$$

The permeability is deduced from the hydraulic conductance by taking into account the cross section available for the flow. Thus the hydraulic conductance should be divided by the mean aperture to give the permeability, thus it scales as $|d|^{2\zeta}$. However the latter quantity requires the knowledge of the mean aperture, which may be difficult to estimate experimentally for each displacement. Thus the roughness exponent determines the scaling of the permeability as a function of the displacement. With a roughness exponent

$\zeta = 0.85$, we find that $K \propto |d|^{2.55}$.

There has been a number of theoretical and experimental investigations of the permeability of cracks.^[8–9] However, in most cases, the key problem addressed was the evolution of the permeability as a function of the aperture of a crack, under a varying normal pressure. As the pressure increases, the closing of the crack leads to an interesting percolation problem, where however, the self-affinity of the surface leads to long-range correlations which are expected to change the value of the critical exponents compared to the usual accepted values. This point — which deserves a detailed study — is however far from our initial problem. This has not been studied so far to our knowledge.

Let us now consider a semi-infinite elastic solid limited by a self-affine surface with an exponent ζ_1 . This domain is pressed against another elastic solid limited by an *independent* self-affine surface with an exponent ζ_2 , whose mean orientation is parallel to the first surface. As shown in Fig. 2, a normal force F is applied so as to close the space in between the two surfaces. As F is increased, the area of contact between the two solids will increase, and thus the force-displacement is non-linear, as in the classic example of two spheres in contact solved by Hertz last century.^[10] Correlations in the height distribution will appear to be determinant as shown below.

First, it is important to note that, like for the Hertz contact, the two surfaces only appear through the distance which separates them. In our case, this separation will also be self-affine, with an exponent $\zeta = \max(\zeta_1, \zeta_2)$. Similarly, the elastic properties of the two solids only comes into play through the harmonic average of plane strain elastic moduli.^[10] We will derive the force-displacement scaling by using the self-affinity of the separation, and the combination of two simple transformations.

First, we consider a uniform dilation $x_i \rightarrow \lambda x_i$ and $z \rightarrow \lambda z$ (which *does not* leave the separation invariant). Under this transformation, the strain (dimensionless quan-

tity) is unchanged, and thus so is the stress. The interpenetration of the two solids, δ is rescaled to $\delta \rightarrow \lambda\delta$, whereas the total force varies as the area of contact $F \rightarrow \lambda^{d-1}F$.

We now consider a simple rescaling of the z axis $z \rightarrow \mu z$, while the other directions are unchanged $x_i \rightarrow x_i$ for $i = 1, \dots, d-1$. This particular case is simple to treat since it leaves the area of contact unchanged, while the interpenetration is transformed to $\delta \rightarrow \mu\delta$. We thus can use the linearity of the elastic behavior to obtain simply $F \rightarrow \mu F$.

None of those two transformations preserved the invariance of the separation. This can however be achieved by combining these two transformations successively with $\mu = \lambda^{\zeta-1}$. In this case, the force F , the interpenetration δ and the area of contact S will be rescaled as

$$\begin{cases} F \rightarrow \lambda^{d+\zeta-2}F \\ \delta \rightarrow \lambda^{\zeta}\delta \\ S \rightarrow \lambda^{d-1}S \end{cases} \quad (4)$$

Searching for combination of those quantities which are invariant for all λ we find the two scaling relations:

$$\begin{cases} F \propto \delta^{(\zeta+d-2)/\zeta} \\ S \propto \delta^{(d-1)/\zeta} \propto F^{(d-1)/(d+\zeta-2)} \end{cases} \quad (5)$$

Using this simple scaling approach, we can recover the classic Hertz law for two spheres in contact.^[10] In this case, the ζ exponent is 2, and the space dimension $d = 3$, therefore $F \propto \delta^{3/2}$. The value $\zeta = 2$ comes from the fact that at the contact point, the surfaces can be approximated by parabolas which are invariant under the affinity $x_i \rightarrow \lambda x_i$ for $i = 1, \dots, d-1$ and $z \rightarrow \lambda^2 z$, with a fixed radius of curvature.

With a fracture roughness exponent 0.85, we find that $F \propto \delta^{2.2}$. It is interesting to confront this expectation with experimental results which have been collected in the past on this problem. A power-law relation between the force and the displacement is indeed very commonly encountered in compression tests on fracture surfaces.^[11] The typical exponent which is measured is in the range 2-3, in good agreement with our expectation considering the usual uncertainty

associated with these measurements. To our knowledge, this provides the first theoretical explanation for this long-standing empirical observation.

Note that for the case of real fractures, the most common situation to be encountered, is when the two facing self-affine surfaces are not independent, but rather opposite faces of the same crack, which may be translated with respect to each other as in Fig.1, by an amount d along the mean fracture plane. In this case, the early stage of the compression should display the scaling law obtained in Eqs.(5). Above a cross-over interpenetration $\delta = \delta^* \propto |d|^\zeta$, the identity of the two surfaces becomes apparent, and the force is expected to increase very abruptly (faster than any power-law).

It is amusing to note that in the two-dimensional case, the force-displacement relation does not depend any longer on the roughness exponent. An exact computation can be performed for two parallel cylinders ($\zeta = 2$) which shows that an additional logarithmic contribution is to be expected.^[10] This logarithmic correction is obviously out of reach of the present dimensional analysis.

In the latter example, one could also study transport from one edge of the crack to the opposite one, across the surface. In a number of cases, the void in between the two boundaries is insulating whereas the solid is conducting. One could think of the example of heat transport. In such a case, using again the asymptotic flat character of the surface, one is lead to conclusion that the transport coefficient between the two solids is simply proportional to the area of contact. We have seen in Eq. (5) that the latter varies as a power-law of the normal force, with an exponent $(d-1)/(d+\zeta-2) \approx 2.35$ in three dimensions for real fractures. Thus the conduction across the crack appears to display again a non trivial dependence with the normal pressure which result from the self-affine nature of the crack geometry.

Other examples of physical properties which exhibit a non-trivial scaling due to the self-affine character of the surface should be

investigated, both for a better understanding of the considered physical phenomena themselves, and also for an indirect way of detecting some geometrical features when they are not directly accessible through a direct measurement.

This work has also been supported by the program "Dynamique et Bilan de la Terre" of the INSU. We also acknowledge the support of the GRECO Géomatériaux. Many thanks to D. Bideau, S. Gentier, E. Guyon, J. P. Hulin, K. J. Måløy and J. P. Trodec for useful discussions. We also thank K. J. Evans for making Ref. [8] available to us.

REFERENCES

- [1] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Co, (New York, 1982)
- [2] J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, (New York, 1988); T. Vicsek, *Fractal growth phenomena*, World Sci. Pub., (Singapore, 1989); *Dynamics of self-affine surfaces*, F. Family, T. Vicsek eds., World Sci. Pub., (Singapore, 1990)
- [3] W. I. Newmann and D. L. Turcotte, *Geophys. J. Int.* **100**, 433, (1990)
- [4] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja and A. J. Paullay, *Nature* **308**, 721, (1984)
- [5] S. R. Brown, C. H. Sholz, *J. Geol. Res.* **90**, 5531, (1985)
- [6] E. Bouchaud, G. Lapasset and J. Planés, *Europhys. Lett.* **13**, 73, (1990)
- [7] A. Hansen, E. L. Hinrichsen and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2476, (1991); K. J. Måløy, A. Hansen, E.L. Hinrichsen and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 213, (1992)
- [8] for a recent review see K. J. Evans, T. Kohl, R. J. Hopkirk and L. Rybach, Report to Swiss National Energy Research Fund, NEFF Project N° 359, (April 1992)
- [9] S.R. Brown, *J. Geophys. Res.* **92**, 337, (1987); *ibid.* *J. Geophys. Res.* **94**,429, (1989); *ibid.* *Geophys. Res. Lett.* **13**, 1430, (1986)
- [10] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge Univ. Press, (New York,1985)
- [11] J. T. Oden and J. A. C. Martins, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng.* **52**, 527, (1985)

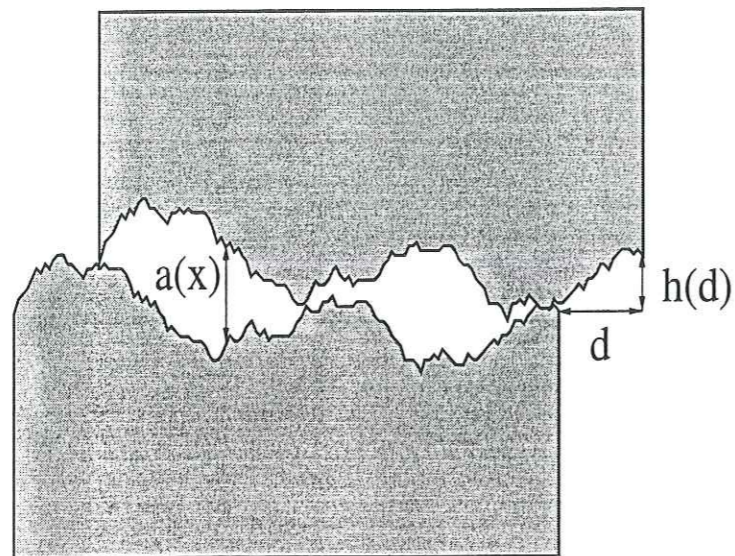


Figure 1: The two opposite surfaces of a crack are displaced parallel to the mean crack plane by some amount d . The material is considered to be rigid and undeformable. As a result, the two sides have to be displaced perpendicularly so as to avoid overlap. We study the flow in the space which is comprised between the two surfaces along the direction indicated by the arrows, and more specifically the scaling of the permeability with $|d|$.

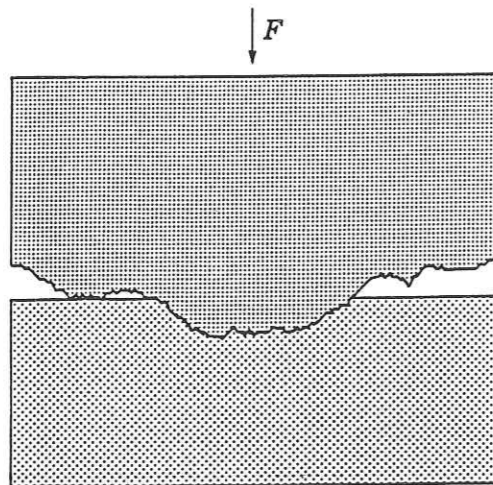


Figure 2: Schematized is the elastic contact between a flat plane and the self-affine boundary of a rigid punch. As the normal force F is varied the interpenetration between the two solids δ follows a non-linear relation with respect to F , whose form depends on the roughness exponent ζ .

Annexe 2

Percolation through self-affine surfaces
J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux

Publié dans: *Journal of Physic A: Math. Gen.*
Vol. 26, Pages 6115-6133, 1993

PERCOLATION THROUGH SELF-AFFINE SURFACES

Jean SCHMITTBUHL, Jean-Pierre VILOTTE

Laboratoire de Géologie, Ecole Normale Supérieure 24 rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05,
France.

Stéphane ROUX

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, Ecole Supérieure de Physique et
Chimie Industrielles 10 rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05, France.

ABSTRACT: We study the percolation transition in a long-range correlated system: a self-affine surface. For all relevant physical cases, (i.e. positive roughness exponents), it is found that the onset of percolation is governed by the largest wavelength of the height distribution, and thus self-averaging breaks down. Self-averaging is recovered for negative roughness exponents (i.e. power-law decay of the height pair correlation function), and in this case, the critical exponents that characterize the transition are explicitly dependent on the roughness exponent above a threshold value. Below this threshold, the spatial correlations are no longer relevant. The problem is analytically investigated for a hierarchical network, and by means of numerical simulations in two dimensions. Finally, we discuss the application of those properties to mercury porosimetry in cracks.

INTRODUCTION

While percolation theory has been extensively studied in the past decade,¹ little attention has been paid to the occurrence of long-range spatial correlations.²⁻³ However in natural systems, spatial correlations are often observed and direct transposition of classical percolation theory can be misleading. Short range correlations are expected to make the computation or the measurement of the percolation threshold explicitly dependent on the microstructure of the medium, but the critical behavior is unaffected (i.e. still described by the usual critical exponents obtained in the absence of correlation). This illustrates the power of the concept of "universality", and justifies the effort developed in the past for the determination of those exponents. For long-range correlations, that picture is drastically changed: even the critical exponents may become different.

In this article, we address precisely the question of the universality of the percolation transition in the presence of long-range correlations, with a special emphasis on the case of self-affine geometry. Self-affine geometry, which characterizes quite a number of different natural surfaces, exhibits such long range correlations. Examples of occurrence of such a property may be found in growth models,⁴ such as the boundary of Eden clusters or ballistic deposition models, landscape and erosion surfaces,⁵ or fracture surfaces.⁶⁻¹⁰ Only recently, the importance of long-range correlations in connection with percolation has motivated some work.^{2,3}

We proceed along the same lines, using different tools and techniques to generate correlated surfaces, and we extend the previous work to the case of self-affine surfaces which has never been addressed to our knowledge. We consider the case of a hierarchical lattice, which allows us to reach analytical conclusions. Then we use those results as a paradigm to analyze numerically the Euclidean case.

The paper is organized as follow: First, the construction of a self-affine surface, both

for euclidean and hierarchical lattices, and the percolation transition is defined in section II. In section III, the influence of spatial correlations on the percolation transition is explicated for the hierarchical lattice. The same problem is solved numerically, in section IV, for the euclidean case and the results shown to be consistent with the hierarchical case. Finally, in section V, the consequences of those results to mercury porosimetry applied to fractures are considered.

SELF-AFFINE SURFACE CONSTRUCTION

Euclidean lattice

A self-affine object is statistically invariant under an affine transformation: $x_i \rightarrow \lambda_i x_i$ for $i = 1, \dots, d$ where d is the space dimension. Requiring that these transformations can be combined implies a group structure. As a consequence, each λ_i has to be an homogeneous function of one of them, say λ_1 . The homogeneity exponents are called ζ_i : $\lambda_i = \lambda_1^{\zeta_i}$. The set of homogeneity indices, $\{\zeta_i\}$, characterizes the scaling properties of the self-affine object. We only consider here the case of surfaces with a mean plane parallel to (x_1, \dots, x_{d-1}) along which the surface is isotropic. Therefore, $\zeta_i = 1$ for $i = 1, \dots, d-1$. The only non trivial exponent is thus relative to the scaling in the x_d direction — the "height" of the surface — ζ_d , simply referred to as ζ in the following.

In order to illustrate the type of correlations introduced by a self-affine geometry we sketch the construction, presented by Voss,^{4,11} of a simple one dimensional self-affine height profile $H(x)$.

The elementary process consists in: knowing the values of H at both ends of a root segment, i and j , compute its value at the center k as the average $(H_i + H_j)/2$ plus a fluctuation, h . At each generation m , the fluctuation h_m is picked from a statistical distribution $f(h)$ with zero mean. The magnitude of the fluctuation is scaled according to

the length of the parent segment raised to the power ζ , ζ being the above defined roughness exponent. The initial segment is supposed to be of length $L = 1$. We may choose f to be a Gaussian distribution although this is unessential. Let H_i be the height of a profile at point i . At the m^{th} generation, by construction 2^{m-1} new points will be generated and:

$$H_i = \frac{1}{2} (H_{i-l} + H_{i+l}) + 2^{-(m-1)\zeta} h_m(i), \quad (1)$$

where $l = 2^{-m}$, and $i = l, 3l, \dots, (2m-1)l$. The height at a given point can finally be expressed, with this recursive construction, as the average of the two heights at the ends of the entire profile weighted by the distance to these points, plus a sum of fluctuations with different weights that depends on the precise location of each point. For positive ζ , the amplitude of the fluctuations decreases exponentially with the generation. Therefore, after a few generations, the overall shape of the profile is roughly determined, and the addition of the last points makes little modifications of the profile, since the construction of the last heights is almost reduced to a linear interpolation between existing points. The statistical distribution of the heights H are then controlled by the fluctuation h_1 of the first generation. For negative ζ , the last generations become dominant compared to the first ones, and the "memory effect" of the first generations is reduced. Figure 1a shows for each point of the first generations the location of the two parents end points.

The two dimensional construction follows the same basic iterative process. The main difference is in the dependence on the boundary conditions which are supposed to be periodic in both directions. At each step, the height of the surface at the center i of a square, with an initial height H_j at each vertices j , is computed as the average of the four vertex heights to which is added a random fluctuation, weighted by the length of the half diagonal raised to the power ζ . The initial state is a periodic square lattice, of size L , with a prescribed uniform height, say

$H = 0$. At the first generation, the height at the center of one square is generated which lead, using the periodicity, to a square lattice of mesh size $1/\sqrt{2}$ tilted at 45° from the original one. At the second generation, four new points, in one periodic cell, are generated and the process is iterated as many times as necessary. An example of such a surface is shown on Fig. 3a. That construction has been used for the numerical simulations relative to the Euclidean lattice.

Hierarchical lattice

We present now an alternative way of generating a self-affine profile in one dimension and two dimensions, perfectly suited to a hierarchical lattice, although not restricted to it.

Starting from a line segment with an initial uniform height, an additional height h_1 is added to each half of the parent segment. The heights h_1 are picked up randomly from a statistical distribution $f(h)$, with zero mean, and scaled by the length of the parent segment raised to the power ζ . This procedure is iterated again recursively until the desired length has been achieved. Initially (generation 0), the segment is of unit length and zero height. At each generation, the segment is divided by two, and the number of segments after k generations is 2^k , with a length of 2^{-k} . Each segment can be considered as sites, and previous parent segments as "macro-sites", in the spirit of a renormalization procedure. Figure 1b shows the construction of such profile and how the correlations develop. The simplicity of this tree-like structure allows us to compute the correlations in a straightforward manner. The first construction (Fig.1a) shows that the tracking of correlations is much more complex in the Euclidean case.

In two dimensions, the construction is similar, using squares instead of line segments. A unit square with zero height is first divided in four equal squares to which independent additional heights h_1 , picked from a statistical distribution $f(h)$ with zero mean,

are prescribed. That procedure is iterated, and at generation k the additional heights h_k are scaled by a factor $\lambda = 2^{-k\zeta}$. A general expression for the n^{th} generation, of length 2^{-n} can be derived :

$$H_i = h_1 + \lambda h_2 + \lambda^2 h_3 + \dots + \lambda^{n-1} h_n. \quad (2)$$

where $\lambda = 2^{-\zeta}$.

This procedure is very close although simpler than the previous case. It allows the computation of the correlation pair function of the height distribution. In that hierarchical construction, two sites i and j are correlated if they share a common ancestor. A natural distance, between the two sites i and j , can be defined as $d = (2^k - 1)2^{-n}$, with k being the number of generations by which the lattice must be coarse grained so that i and j share the same parent site.²⁹ We note *en passant* that this distance has the interesting feature of being an "ultra-distance". However, we will not use this property in the following.

Let us now compute the correlation between the heights at two sites i and j . From generation 1 to $n - k$, the additional heights are identical for both sites i and j . For lower generations, the two sites will belong to different squares and thus the additional heights they will be attributed will be uncorrelated. Thus the sum in Eq.(2) can be split in two parts

$$\begin{aligned} H^i &= X + Y, \\ H^j &= X + Z, \end{aligned} \quad (3)$$

where Y and Z are uncorrelated, and X is the height (as in Eq.(3)) truncated at order $n - k$. The correlation between the sites becomes:

$$C = \langle H_i H_j \rangle - \langle H_i \rangle \langle H_j \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \quad (4)$$

i.e. equal to the variance of X : $1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^{2(n-1-k)} = (1 - \lambda^{2(n-k)}) / (1 - \lambda^2)$. Two cases can be distinguished:

- When ζ is negative, or $\lambda \geq 1$, the correlation between the heights decays with the distance d as a power-law:

$$C = \frac{\lambda^{2n}}{(\lambda^2 - 1)} \left[(2^n d + 1)^{-2 \log(\lambda) / \log(2)} - \lambda^{-2n} \right], \quad (5)$$

thus

$$C \propto d^{2\zeta} \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

In such a case, the reference to a self-affine geometry with a negative roughness exponent is rather awkward, since it is simply a power-law decay of the pair correlation function. However, it constitutes a natural extension of the following case which is our initial motivation for this study.

- When ζ is positive, or $\lambda \leq 1$, the correlation amounts to

$$C = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(1 - (d + 2^{-n})^{-2 \log(\lambda) / \log(2)} \right), \quad (6)$$

or

$$C \propto (1 - d^{2\zeta}) \quad \text{when } n \rightarrow \infty.$$

This represents the usual case of self-affine surfaces with a roughness exponent equal to $\zeta = -\log(\lambda) / \log(2)$.

If the distribution $f(h)$ is a Gaussian, then the height distribution $g(H)$ is a Gaussian since it is a sum of normal variables with various but fixed weights. In the same spirit, it is easy to show that for all distributions $f(h)$ with a finite second moment, and in the case $\lambda > 1$, $g(H)$ will tend toward a Gaussian distribution as n tends to infinity. On the contrary, for $\lambda < 1$, the final height distribution will keep the memory of the basic distribution f used to construct the profile, and it will not converge to a unique distribution. However, there is no need to specify the form of the distribution. We will see that the scaling properties of the percolation problem only depend on the parameter λ . In the following, we will only assume that the average of $f(h)$ is 0, and the variance is 1.

Let us also note that depending on the value of λ compared to 1, the width of the distribution of local heights will be either controlled by the large scale roughness (i.e. h_1 in Eq.(2)), and thus independent of n (or of the number of sites) for λ smaller than 1, or imposed by the smaller length scale (i.e. h_n in Eq.(2)). In the latter case, the width of the distribution of heights will decrease exponentially with the generation of the lattice, as

λ^n (or as a power-law of the number of sites $(2^n)^{-\zeta}$). However, in order to compare the results for different system sizes, it is physically more founded to deal with an overall distribution whose standard deviation is invariant. Therefore, for $\lambda > 1$, we propose to rescale all heights by a factor λ^{-n} so that the distribution of height no longer depends on n . In this case, we will introduce $\tilde{H}_i = \lambda^{-n} H_i$.

Percolation transition

Let us now define what we mean by percolation transition. In general, the percolation threshold p_c is defined on a regular infinite lattice as the value of the minimum concentration p of sites (or bonds) chosen at random and without correlations to form an infinite cluster with probability 1. Equivalently one could look for the existence of a continuous path of present sites which connects one border to the opposite one, in the thermodynamic limit of an infinite system size. A common way of choosing which sites are present or not consists in attributing to each site a random number H picked from a distribution g , and deciding that the site is present if H is smaller than a threshold ϕ so that

$$\int_{-\infty}^{\phi} g(H) dH = p. \quad (7)$$

We will resort to the same procedure, but using for H the height of the surface, i.e. with the built-in correlations above described. Figure 3b shows a typical example of the percolation problem for the self-affine surface of Fig.3a.

In order to define the percolation transition, it is important to introduce the notion of connectedness. On a Euclidean lattice, one usually considers that only nearest neighbors are connected. On a hierarchical lattice, a different choice is made for defining (connected) paths. For a one generation lattice, both lattices are equivalent. A 2×2 lattice will percolate if at least one of the two columns of two sites have both sites present. Above the first generation, the percolation criterion is defined recursively: a

lattice of generation n can be viewed as consisting of four sublattices of generation $n - 1$. It will percolate if it contains at least two sublattices in series which themselves percolate. This definition is evidently tailored for real space renormalization, through the identification of a percolating sublattice with a present (macro-)site. The definition of the hierarchical lattice together with the second construction (section II-2) of the self-affine surface (which also fulfills the self-similarity) will lead us to an analytic solution of the percolation problem.

However, the critical exponents that can be computed exactly on this structure are known to be different from those relative to a Euclidean two dimensional lattice. Nevertheless, the *relation between critical exponents are expected to be reliable* and thus can be transposed to the Euclidean lattice. This will allow us to test those predictions on the numerical results in the Euclidean case.

PERCOLATION THROUGH A HIERARCHICAL LATTICE

Percolation formulation

We will first recall the analysis in the absence of correlation for the hierarchical lattice. Let p be the probability that a site is present. The probability that a lattice of generation 1 percolates when no correlation is present can be written:

$$P = \varphi(p) = 1 - (1 - p^2)^2 \quad (8)$$

Therefore in the absence of correlations, the percolation probability is obtained by iterating the function φ on the initial probability of site presence, $G(H) = \int_{-\infty}^H g(x) dx$. Moreover, this distribution is never used apart from the first step, and thus we can simply express the threshold height $H_c = G^{(-1)}(p_c)$ using the inverse function of G .

This constitutes the basis for analysing usual percolation on this hierarchical network. Let us recall the most important results: the probability to percolate will converge for an infinite system size toward a step

(Heavyside) distribution $P_\infty(p) = Y(p - p_c)$. The value of p_c is obtained as the non-trivial fixed point (different from 0 or 1) of φ (Eq.(8)), and thus satisfies $\varphi(p_c) = p_c$. A simple calculation leads to

$$p_c = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}. \quad (9)$$

In the immediate vicinity of this fixed point, the function φ is well behaved and the approach toward the fixed point can be obtained using a Taylor expansion of φ around p_c . If we introduce the local slope:

$$a = \left. \frac{d\varphi(p)}{dp} \right|_{p=p_c} = 2(3 - \sqrt{5}), \quad (10)$$

we can write $\varphi(p) = p_c + a(p - p_c) + \mathcal{O}((p - p_c)^2)$. The width, σ_n , of the percolation probability distribution, $P_n(p) = \varphi^{(n)}(p)$, will asymptotically scale as $\sigma_n \propto a^{-n}$ or using the system size as the number of points, $L = 2^n$, as

$$\sigma(L) \propto L^{-1/\nu}, \quad (11)$$

where $\nu = \log(2)/\log(a) \approx 1.63$ is the so-called correlation length exponent. Indeed one can interpret such a scaling through the occurrence of a characteristic length scale ξ which diverges when the probability of presence p approaches p_c as $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$.

Let us now introduce correlations in the height distribution. We consider the second construction of a self-affine surface presented in the previous section.

From the construction of the surface it is possible to reformulate the procedure in the following way: a self-affine surface at generation n can be obtained from four independent surfaces at generation $(n - 1)$ rescaled by a factor of two in the plane (x_1, x_2) as can be seen from Eq.(2). For each of the four $(n - 1)$ lattices, the initial height H'_i is given by

$$H'_i = h_2 + \lambda h_3 + \dots + \lambda^{n-2} h_n. \quad (12)$$

In order to get Eq.(2), all heights H'_i should be rescaled by a factor λ and then each sublattice independently is to be translated as a block by a height h_1 randomly picked

from the distribution $f(h)$. Then the four sublattices are pasted together to form a generation- n surface. For a site i which was part of a sublattice with a height H' , the new height reads

$$H_i = h_1 + \lambda H', \quad (13)$$

which is similar to Eq.(2), using the expression of H'_i in Eq.(12).

We can now compute the recurrence on the probability to percolate. Let $P_n(\phi)$ be the probability that a generation- n surface, cut at a height $H = \phi$, contains a percolating path from one border to the opposite one. In order to relate P_n to P_{n-1} , we use the previous property: Cutting the generation- n surface at a level ϕ is equivalent to cutting each generation- $(n - 1)$ surface at a level ϕ' with $\phi' = (\phi - h)/\lambda$. We introduce the probability $\Pi_{n-1}(\phi)$ which takes into account the transformation on ϕ :

$$\Pi_{n-1}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}((\phi - h)/\lambda) f(h) dh. \quad (14)$$

The probability to percolate on the generation- n surface is written now as in the uncorrelated case,

$$P_n(\phi) = \varphi(\Pi_{n-1}(\phi)), \quad (15)$$

as in Eq.(8), since the latter equation only describes the peculiar topology of paths on the hierarchical lattice. Equations (14) and (15) constitute the recurrence we look for to study the scaling properties.

Eq.(14) leads to simple relations between moments of the distributions P_n and Π_n . In particular, the variance of the distributions is important. We call σ_n^2 the variance of P_n and ζ_n^2 that of Π_n . Both are related through

$$\zeta_n^2 = \lambda^2 \sigma_n^2 + 1. \quad (16)$$

Let us now distinguish between the cases λ smaller or larger than 1.

Self-affine surface $\lambda < 1$ ($\zeta > 0$)

We need to complement Eq.(16) by the corresponding relation between σ_n and ζ_{n-1}

derived from Eq.(15). Unfortunately, it is difficult to express such a relation in the general case. However, bounds can easily be obtained. Since φ is well behaved, one can establish the inequalities:

$$(\lambda^2 \sigma_{n-1}^2 + 1)/b^2 < \sigma_n^2 \leq (\lambda^2 \sigma_{n-1}^2 + 1), \quad (17)$$

where b is the maximum value of $d\varphi(x)/dx = 8/(3\sqrt{3})$. Thus σ_n is bounded from above and below by two convergent series having a finite non-zero limit. The upper series converges to $\sigma \rightarrow 1/\sqrt{1 - \lambda^2}$, while the lower tends to $\sigma \rightarrow 1/\sqrt{b^2 - \lambda^2}$.

In fact the upper bound is expected to give the correct behavior. If we note that the height distribution will tend to have a width proportional to $(1 - \lambda)^{-1/2}$, it is natural to express the scaling of the σ compared to the height distribution, or to introduce $\bar{\sigma} = (1 - \lambda)^{1/2} \sigma$. If we assume that the upper bound is valid, we obtain $\bar{\sigma} \propto \sqrt{1 - \lambda}$ in the neighborhood of $\lambda = 1$ or $\zeta = 0$. The other bound gives a quicker vanishing of $\bar{\sigma}$ as λ approaches 1.

Those bounds are sufficient to insure that the distribution will not tend toward a step function, and thus self-averaging breaks down in this case. The additional details of the surface which are given by increasing the number of points n will play such a minor part, that the percolation process even for infinite n will behave as if the system size was finite in the absence of correlation. We can also compare the result to a situation where an external field is imposed to the system, giving rise to a finite correlation length. The genuine critical behavior is then recovered for $\lambda = 1$. This result is rather surprising: *even in the thermodynamic limit, the percolation transition on a self-affine surface is only critical for a zero roughness exponent.*

Long-range correlated surface $\lambda > 1$ ($\zeta < 0$)

In order to derive Eq.(17) we made no assumption on the value of λ . Thus this inequality also holds for negative ζ . However, in this case we have already pointed out that the distribution of heights, $g(H)$, is

now controlled by the smaller length scale of the surface, and thus the width of the distribution scales as λ^n . The larger the number of sites, the wider the distribution g . In order to reach physical conclusions we should deal with rescaled heights $\tilde{H}_i = H_i \lambda^{-n}$. It is straightforward to rewrite the recursion relation for the scaled threshold $\tilde{\phi} = \phi \lambda^{-n}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{n-1}(\tilde{\phi}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_{n-1}(\tilde{\phi} - h \lambda^{-n}) f(h) dh, \quad (18') \\ \tilde{P}_n(\tilde{\phi}) &= \varphi(\tilde{\Pi}_{n-1}(\tilde{\phi})). \quad (18'') \end{aligned}$$

with obvious notations. The variance of the threshold distribution σ_n^2 is to be compared to the variance of g , and thus we introduce $\bar{\sigma}_n = \sigma_n / \lambda^n$. The inequalities Eq.(17) expressed for $\bar{\sigma}_n$ can be written

$$(\bar{\sigma}_{n-1}^2 + \lambda^{-2n})/b^2 < \bar{\sigma}_n^2 < (\bar{\sigma}_{n-1}^2 + \lambda^{-2n}), \quad (19)$$

The upper bound is now finite while the lower bound is zero. The upper bound is very conservative and indeed, the variance of the distribution goes to zero as n tends to infinity.

The limit distribution \tilde{P}_∞ when n goes to infinity should fulfill

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\infty(\tilde{\phi}) &= \varphi \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_\infty(\tilde{\phi} - h \lambda^{-n}) f(h) dh \right) \\ &= \varphi(\tilde{P}_\infty(\tilde{\phi})) \end{aligned} \quad (20)$$

since $\lambda^{-n} \rightarrow 0$ as n goes to infinity. The distributions which fulfill this condition can only assume the values $P_\infty = 0, p_c$, or 1, the three fixed points of φ . The instability of the intermediate value p_c leads to 0 or 1 as the only possible values over a non zero interval. Since P_∞ is an increasing function, a step (Heavyside) distribution is the only possible limit: $P_\infty(\tilde{\phi}) = Y(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_c)$, as for the uncorrelated surface case.

Since the variance $\bar{\sigma}_n$ converges to zero for large n , this allows to change the inequality (19) into a genuine equality

$$\bar{\sigma}_n^2 = (\bar{\sigma}_{n-1}^2 + \lambda^{-2n})/a^2, \quad (21)$$

for large n , with a given in Eq.(10). The asymptotic behavior of $\bar{\sigma}_n$ will be exponential of n which we write $\bar{\sigma}_n = x_n \mu^{-n}$ where the series x_n converge to a constant x_∞ . Inserting this expression in (21) leads to

$$a^2 x_n^2 = (\mu^2 x_{n-1}^2 + (\lambda/\mu)^{-2n}), \quad (22)$$

To keep the series x_n bounded, μ has to be smaller or equal to λ . Two cases have to be distinguished:

- $1 < \lambda < a$

In this case, $\mu = \lambda$. Eq.(22) gives

$$x_\infty = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - \lambda^2)}} \quad (23)$$

and thus $\bar{\sigma}_n \sim \lambda^{-n} \sim L^\zeta$. Using the scaling result Eq.11, we can write this result in the form of an effective correlation length exponent, ν_{eff} :

$$\nu_{eff} = -1/\zeta \quad (24)$$

- $a < \lambda$

In this case, the previous solution breaks down. Indeed, the result ($\mu = \lambda$) would imply that the reduction in the width of the distribution is faster than in the absence of correlation. This is obviously unphysical. In fact, μ is strictly smaller than λ so that the second term of Eq.(22) vanishes in the large n limit. Therefore, μ has to be equal to a . Thus, $\bar{\sigma}_n \sim a^{-n}$ or

$$\nu_{eff} = \nu \quad (25)$$

where ν designates the standard percolation exponent, Eq.(10).

Figure 2 summarises the above results. For ζ smaller than a threshold value $\zeta^* = -1/\nu \approx -0.613$, the correlation length exponent is identical to the one of standard percolation. More generally, in this case, the universality class, i.e. all critical exponents are expected to be insensitive to the presence of correlations, and they assume their usual value. For larger ζ , on the contrary, the long-range correlations do modify the universality class, and in particular, the correlation length exponent.

We have mentioned the fact that the numerical value of critical exponents obtained on the hierarchical lattice were not reliable, in the sense that they could not be directly compared to their Euclidean counterpart.

However, *relations between exponents are expected to be preserved*. Therefore, from the result obtained on the hierarchical lattice, we propose the following behavior:

$$\nu_{eff} = \begin{cases} \infty, & \text{if } \zeta > 0; \\ -1/\zeta, & \text{if } -1/\nu < \zeta < 0; \\ \nu, & \text{if } \zeta < -1/\nu. \end{cases} \quad (26)$$

with ν equal to the standard percolation value: on the Euclidean lattice for $d = 2$, $\nu = 4/3$ and on a hierarchical lattice, $\nu \approx 1.63$. The ν_{eff} value for $\zeta > 0$ is here indicated as conventional. We have already mentioned the fact that this case is expected to lead to an off-critical behavior (i.e. it should behave as if the system size was finite). Let us now confront this prediction with the numerical simulations performed on the Euclidean lattice.

EUCLIDEAN LATTICE

We now report the result of numerical simulations in the case of an Euclidean lattice, with the construction of the surface presented in Section II. We have investigated ζ exponents equal to -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 0.8 and 1. For each value of the roughness exponents we have generated 1000 independent surfaces for each size L (integer power of 2) ranging from 8 to 512. We checked for positive values of ζ that usual techniques to measure the roughness exponent, when applied to the artificially generated surfaces, provided an estimate consistent with the chosen input exponent.

Percolation threshold

The percolation threshold is defined as mentioned in section III. Numerically, we compute it for each surface by monitoring the height ϕ of the cutting plane. Starting from the interval $[H_{min}, H_{max}]$ which necessarily contains the effective threshold, we progressively reduce the size of the interval by a factor of 2, by checking if the surface percolates or not for a trial value of ϕ equal

to the middle of the interval. This very simple procedure leads to a rapid convergence on the value of ϕ_c using simple tests. This dichotomy algorithm was continued to the desired accuracy (10^{-5}).

Figure 4 shows examples of surfaces generated using the first technique (Euclidean lattice case for four values of ζ). The surface is cut exactly at the threshold height, so that the black area is just above the percolation threshold (it contains one path of nearest neighbor sites which is entirely contained in the black part). We note that for positive values of ζ and in particular for the case which corresponds to real cracks ($\zeta \approx 0.8$) the black region is very compact and contains almost no hole. The first generations (large scale) roughness is dominant, and the last generations only bring minor alterations of the surface. As the roughness exponent is reduced, the boundary of the black regions becomes rougher and more diffuse. Finally, for $\zeta = -1$ correlations are hardly detectable by visual inspection. The same set of pictures using the second procedure (suited to the hierarchical lattice) described in Section II are shown in Figure 5. The same features are apparent. The most striking difference comes from the sharp discontinuities generated along the boundaries of large subsquares in the case of positive ζ exponent.

The averaged percolation threshold $\phi_c(L, \zeta)$ for a finite size system is defined as

$$\phi_c(L, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi \frac{dP_n(\phi)}{d\phi} d\phi \quad (27)$$

where $L = 2^n$. When L tends to infinity, the average percolation threshold tends to the asymptotic percolation threshold, when this notion can be defined without ambiguity (i.e. for positive ζ). Figure 6 shows $\phi_c(L, \zeta)$ as a function of L for various ζ values. We observe that the threshold decreases with ζ , and that the size effects are very weak for positive ζ .

The variance of the distribution of threshold σ^2 is expected to behave as a power-law of L with an exponent $-2/\nu_{eff}$, to be compared to the above predicted values

Eq.(26). For positive values of ζ , we observe on Fig. 7, that the width of the distribution is nearly constant, in agreement with (26). or $\zeta = -0.5$, the expected law is $\sigma \propto L^\zeta$. The measured exponent is -0.3 ± 0.1 consistent with the predicted value. For $\zeta = -1$ and -2 we expect to recover the standard percolation case, $\sigma \propto L^{-3/4}$.

Figure 8 shows the entire threshold distribution for a positive value of the roughness exponent, $\zeta = 0.8$, and for three system size, $L = 8, 32, \text{ and } 512$. We indeed see on this graph that the size effect is extremely scarce, and vanishes with L , in agreement with the expectation.

Incipient infinite cluster

We were also interested in other critical properties of the percolation problem on self-affine surfaces. In particular, the usual order parameter, defined as the probability that a site belongs to the infinite cluster. At the percolation threshold, this is equivalent to studying the incipient infinite cluster. It can be seen from figures 4 and 5 that the structure of the infinite cluster is extremely dependent on the roughness exponent or the decay of long-range correlations.

In standard percolation theory, the mass (i.e. number of sites) of the infinite cluster in a lattice of size L at the percolation threshold scales as $M \propto L^D$ where $D = d - \beta/\nu$, where d is the space dimension and β the order parameter critical exponent. In two dimensions, $\beta = 5/36$, or $D \approx 1.89$.

We have plotted on Figure 9, the density $d = M/L^2$ of the infinite cluster as a function of the system size, in a log-log scale, for various ζ exponents. For positive ζ , the density approaches a constant, again consistent with the fact that the finer details do not contribute more than marginally to the overall percolation properties. This is also consistent with the obvious guess that the clusters are compact, $D = d$, as can be seen e.g. in Figure 3b. For $\zeta = -0.5$, the density seems to decrease slightly, with an estimate of the exponent equal to $(\beta/\nu)_{eff} \approx 0.1$ of the same

order than the standard case ($\beta/\nu \approx 0.11$). For smaller values of ζ , the expectation is that its value remains equal to the standard percolation value. The data is roughly consistent with this result, although it is difficult to give a definitive answer due to the large fluctuations of the data.

IV-2 Discussion

The results obtained for long range correlations (i.e. $\zeta < 0$) can be compared with recent numerical² and analytical³ results on correlated percolation, for which long range spatial correlations are built with a different technique as : $\alpha \propto f(\mu)r^{-(d-\mu)}$ where d is the spatial dimension, r the distance, and μ a tuning parameter.

The compactness of the incipient infinite cluster is shown to increase with long range correlations and the cluster to become almost identical to its backbone². This conclusion is mainly based on the evolution of the fractal dimension of the cluster backbone rather than on an evolution of the fractal dimension of the mass or density of the cluster itself. Indeed the size dependence of the density is shown to be quite constant for the limited range of correlations studied², and of the order of the standard percolation with an exponent $(\beta/\nu)_{eff} \approx 0.1$. That is consistent with our result for $\zeta < 0$. The results we have reported above are in agreement with this progressive increase of the compactness of the infinite cluster.

The variation of the correlation length exponent ν with the exponent ζ ($\zeta < 0$) is identical to the prediction obtained through an ϵ -expansion,³ and consistent with the numerical results reported in Ref.[2]. Indeed both studies predict the same variation of $\nu = 1/\zeta$ for ζ above a critical value ζ^* , with $\zeta^* \approx -3/4$ in ² closed to the critical value obtained in that study from the Euclidean lattice, i.e. $\zeta^* = 3/4$. That variation of ν leads to a singularity as $\zeta \rightarrow 0$ which is clearly observed^{2,3} and consistent with both our analytical and numerical results.

APPLICATION TO MERCURY POROSIMETRY

One of the most striking application of percolation theory is to model the very slow drainage of a porous medium. In this case, where the capillary forces are dominant, the domain which is invaded by a non-wetting fluid being very slowly injected, can be compared to the infinite cluster connected to the injection side.¹² This is the origin of one algorithm known as "invasion percolation" to identify the infinite cluster without having to compute the threshold explicitly.

The justification of the model is the following. With a given injection pressure p , (and assuming that the pressure in the porous medium is zero), the meniscus of the non-wetting fluid will assume a curvature proportional to p . Thus pores whose size is larger than this radius of curvature will be invaded provided they can be reached by the fluid. Smaller pores will be able to prevent the fluid from penetrating because of the high value of the capillary pressure. In a quasistatic invasion, with a constant flux, the fluid will invade the largest pore available along the interface.

The key point is the constraint that a site should be connected to the injection border by a continuous path of invaded pores in order to be invaded. Indeed if this constraint could be forgotten, then the invaded volume under a given pressure would give genuinely the cumulative pore volume of a successive decreasing pore sizes. This is the important piece of information which is looked for when mercury invasion is used as a porosimetry analysing tool.

However, one can easily be convinced that the accessibility constraint is not always innocuous. Indeed, At the very beginning of the invasion, very few pores are accessible, and thus the invaded volume is not representative of the set of pores in a given size class. At the end of the process on the contrary, most resistant sites will be located on the boundary of invaded regions, and thus the invaded volume can be considered as a trustable information. One can proceed more quantitatively along those lines so as to establish that once the invaded cluster

spans through the medium, ("break-trough" pressure), one can assume that most pores are accessible. Therefore, by recording the pressure-volume p - v characteristic, one can read directly the pore size distribution, the volume of pores in a given size range. This principle is the basis of the widely used technique known as "mercury porosimetry" to measure the pore size distribution of a porous medium.

We have mentioned in the introduction that the surface of cracks is self-affine, with a roughness exponent ζ close to 0.85. We have just seen that the percolation properties of such correlated surfaces were drastically different from those of usual percolation. Thus a natural point to explore is the consequences of this fact on the applicability of a mercury porosimetry measurement applied to a particular porous medium: an open crack.

What has been called a height up to this point all along the paper is now to be considered as the aperture of the crack. The threshold level, ϕ , is the minimum aperture that can be invaded for a given pressure.

In particular, for a given pressure, one can compare the real invaded volume V_i , to the total volume, V_a , that would be invaded if all sites were connected to the inlet. V_i is the experimentally accessible measurement, and V_a is the ideal information one would like to retrieve.

$$V_a = \int_{\phi}^{\infty} Hg(H)dH. \quad (28)$$

We also introduce the total volume, $V_t = V_a(\phi = 0)$.

If no correlations are present, below the break-through pressure, the ratio $v = V_i/V_a$ tends to zero for an infinite system size. Above the breakthrough pressure, this ratio approach one for very small threshold aperture ϕ , or a very large pressure. In order to use the measurement, one implicitly assumes that $v = 1$, and thus only pressures above the break-through pressure can be exploited.

We have computed the average value of the ratio v as a function of V_a/V_t , for some values of ζ . The results are shown on Fig-

ure 10. It shows a marked difference between self-affine and uncorrelated surfaces. Even for a very low pressure, i.e. from the very beginning of the injection, the ratio v is far from being 0. Therefore, one can extract meaningful (although underestimated) information even before the breakthrough pressure, in marked contrast with the uncorrelated case. On the other hand, the ratio approaches one very slowly, and thus the distribution may be less precisely measured than in the uncorrelated case just above the breakthrough point. We also note that as ζ is progressively decreased, the evolution of the ratio v with the accessible volume is approaching the standard percolation case, expected to be achieved for $\zeta < -1/\nu$.

This observation is consistent with the previous discussion on the percolation behavior. For self-affine surfaces, the breakthrough point is not a sharp transition, and at this point a large volume has already been invaded. The interface with the rest of the system is nevertheless rather limited and thus the accessibility constraint never disappears completely. On the contrary, for uncorrelated surfaces, at the breakthrough point, a fractal (ramified) cluster has been invaded with a vanishing volume and thus v is equal to zero for an infinite system size. However, even if the invaded volume is small, it is widely spread in the system, and allows for a large interface with other pores, and hence this explains the sharp increase of v above the break-through pressure. It should also be noted that the very concept of the pore size distribution has only a limited interest in the case of a long-range correlated surface, if correlations are not studied independently. In particular, the connection with permeability is not direct, and the scaling properties of the latter have to be independently determined (average value and fluctuations).

CONCLUSION

We have investigated the percolation behavior both for a hierarchical network, using an analytic approach, and for a Euclidean

lattice, through numerical simulations. Our main conclusion is that for self-affine surfaces ($\zeta > 0$), the percolation process does not show a genuine phase transition but rather behaves as a finite-size system, or as if an external field was imposed. For long-range correlated surface with an exponent larger than $\zeta > -1/\nu$, then the percolation transition is well behaved, but it belongs to a different universality class as standard percolation, with critical exponents varying continuously with ζ . Finally, when the exponent ζ is smaller than $1/\nu$, a standard percolation problem is recovered, and correlations do not change the universality class of the problem. Numerical simulations support this picture in two dimensions.

Finally, the applicability of mercury porosimetry is investigated, and is shown to lead to a more reliable behavior for small pressure, and to a very slow convergence for large pressure. Experimental investigations of the latter process are clearly of large potential interest. ACKNOWLEDGMENTS: We ac-

knowledge useful discussions with L. de Arcangelis, A. Coniglio, A. Hansen, J. P. Hulin and M. Rosen. We thank S. Prakash for communicating Ref. [3] prior to publication. The support of the GdR "Physique des Milieux Hétérogènes Complexes" is acknowledged.

References

- [1] D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis pub., (London, 1985).
- [2] S. Prakash, S. Havlin, M. Schwartz and H.E. Stanley, *Phys. Rev. A*, **46**, 1724, (1992)
- [3] A. Weinrib and B.I. Halperin, *Phys. Rev. B*, **29**, 387, 1984.
- [4] J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, (New York, 1988); T. Vicsek, *Fractal growth phenomena*, World Sci. Pub., (Singapore, 1989); *Dynamics of self-affine surfaces*, F. Family, T. Vicsek eds., World Sci. Pub., (Singapore, 1990)

- [5] W. I. Newmann and D. L. Turcotte, *Geophys. J. Int.* **100**, 433, (1990)
- [6] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja and A. J. Paullay, *Nature* **308**, 721, (1984)
- [7] S. R. Brown, C. H. Sholz, *J. Geol. Res.* **90**, 5531, (1985)
- [8] E. Bouchaud, G. Lapasset and J. Planés, *Europhys. Lett.* **13**, 73, (1990)
- [9] J. Schmittbuhl, S. Gentier and S. Roux, to be published in *Geophys. Res. Lett.*
- [10] A. Hansen, E. L. Hinrichsen and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2476, (1991); K. J. Måløy, A. Hansen, E. L. Hinrichsen and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 213, (1992)
- [11] R. F. Voss, in *Fundamental algorithms in computer graphics*, ed. R. A. Earnshaw, Springer-Verlag, Berlin, pp 805-835, (1985)
- [12] R. Chandler, J. Koplik, K. Lerman and J. F. Willemsen, *J. Fluid Mech.* **119**, 249, (1982)

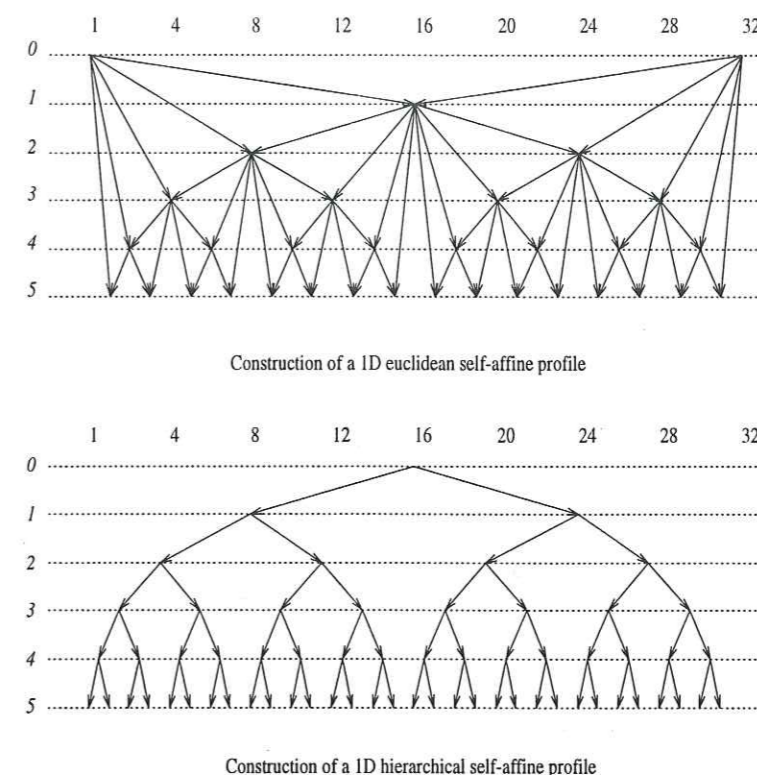


Figure 1: Illustration of the construction of the self-affine profile in one dimension using two techniques presented in the text. (a) the first technique is the one which is used to generate the surfaces in two dimensions on a Euclidian lattice. (b) the second technique which is close to the previous one, albeit simpler, is tailored to the hierarchical lattice, and is used in this context to reach an exact solution with this topology.

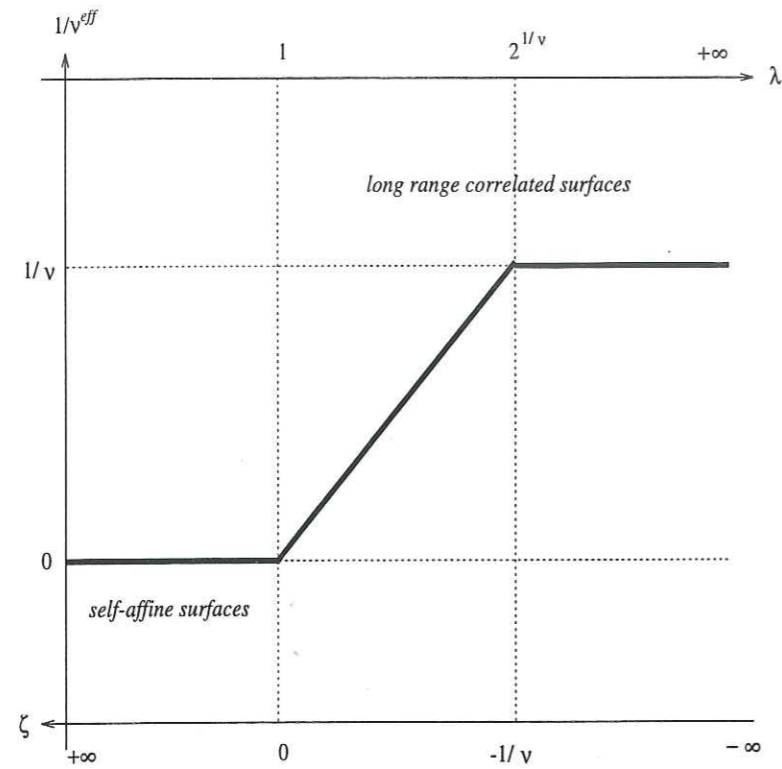


Figure 2: Evolution of $1/\nu_{eff}$ as a function of ζ . For small ζ , the standard percolation case is recovered. Above ζ^* , but for negative roughness exponents, the correlation length exponent depends on ζ . Finally for positive ζ , the length exponent vanishes: No critical point is obtained even in the thermodynamic limit.

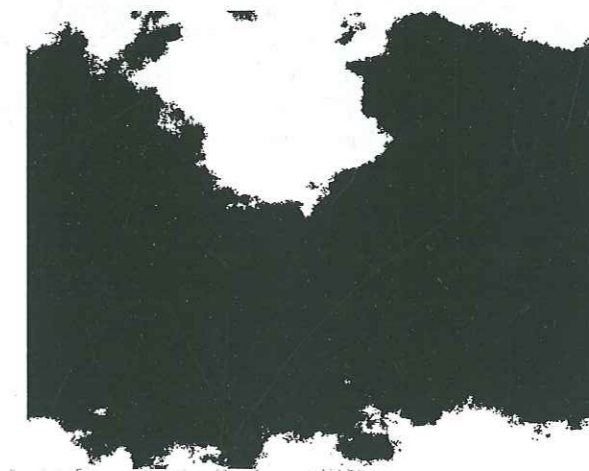
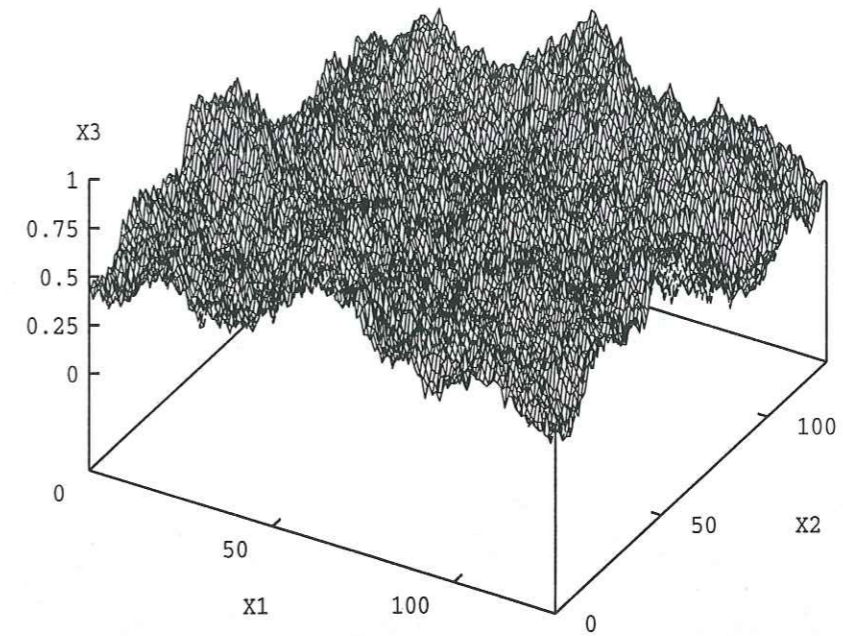


Figure 3: Shape of a "natural" self-affine surface ($\zeta \approx 0.8$) (a) is a 3D plot of the surface where the average plane is parallel to $(x; y)$. (b) A cut of the surface at the percolation threshold height. Black areas are below the threshold.

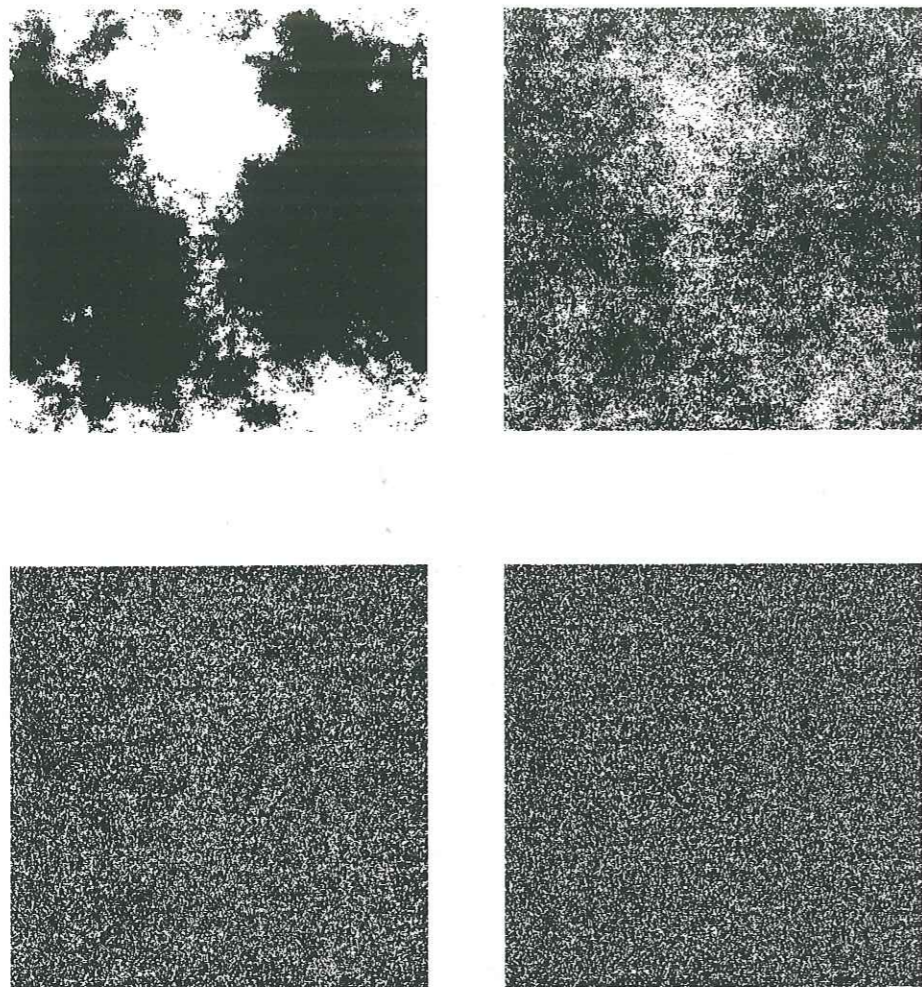


Figure 4: Four examples of the intersection of the surface with a constant height plane exactly at the percolation threshold. The four values of ζ considered are 0.5, 0, -0.5 and -1. The lattice size is 512. The construction used is the one relative to Euclidean lattices.

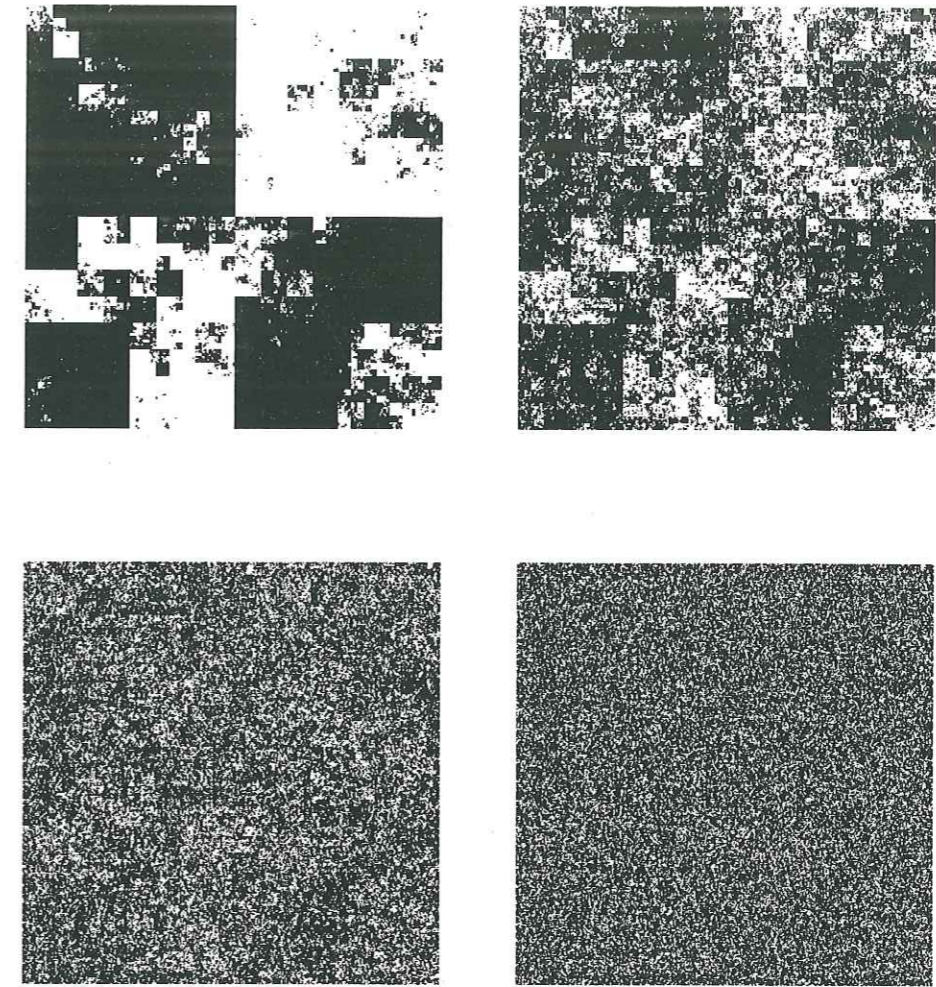


Figure 4: i.e. Figure 4 using the hierarchical lattice procedure to generate self-affine surfaces.

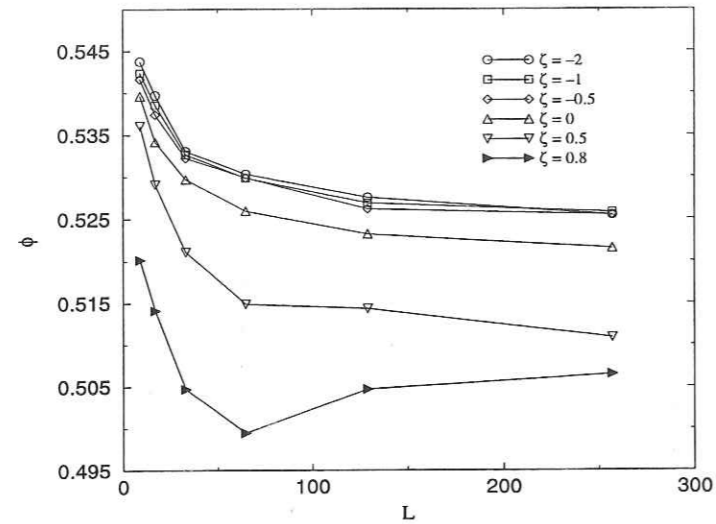


Figure 6: Average effective threshold $\phi_c(L, \zeta)$ as a function of L for various ζ values, on the Euclidean lattice.

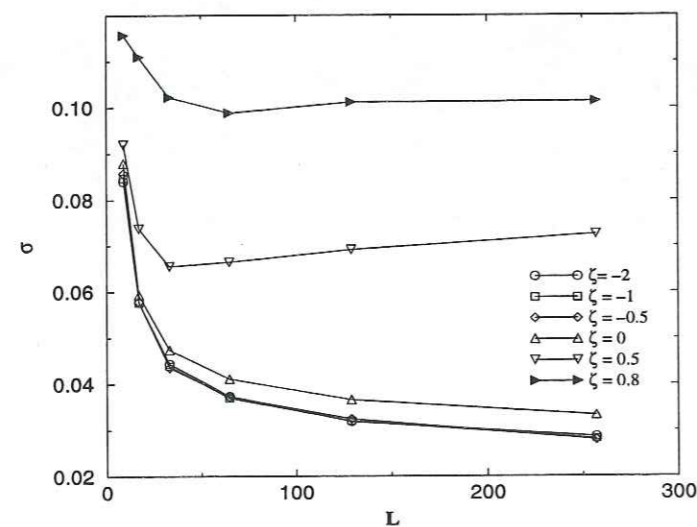


Figure 7: Standard deviation of the effective threshold distribution as a function of L for various ζ values, on the Euclidean lattice. The data points are expected to follow asymptotically a power-law behavior with an exponent $-1/\nu_{eff}$.

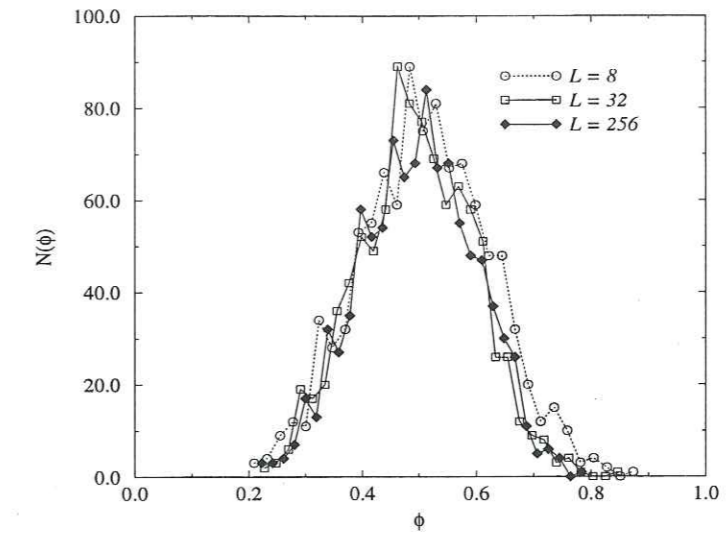


Figure 8: The entire threshold distribution for $\zeta = 0.8$, and for three system size, $L = 8, 32$, and 512.

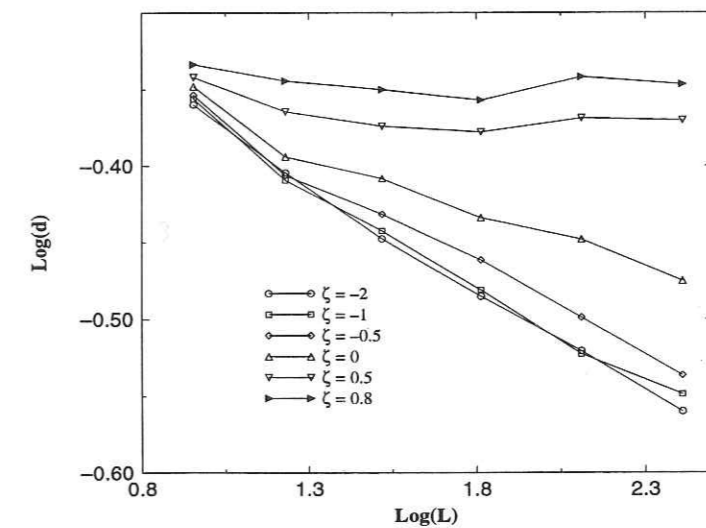


Figure 9: Density d of the incipient infinite cluster as a function of the system size L in log-log coordinates. We see that for positive ζ , the density approaches a constant, whereas, for negative ζ , the density vanishes with the system size.

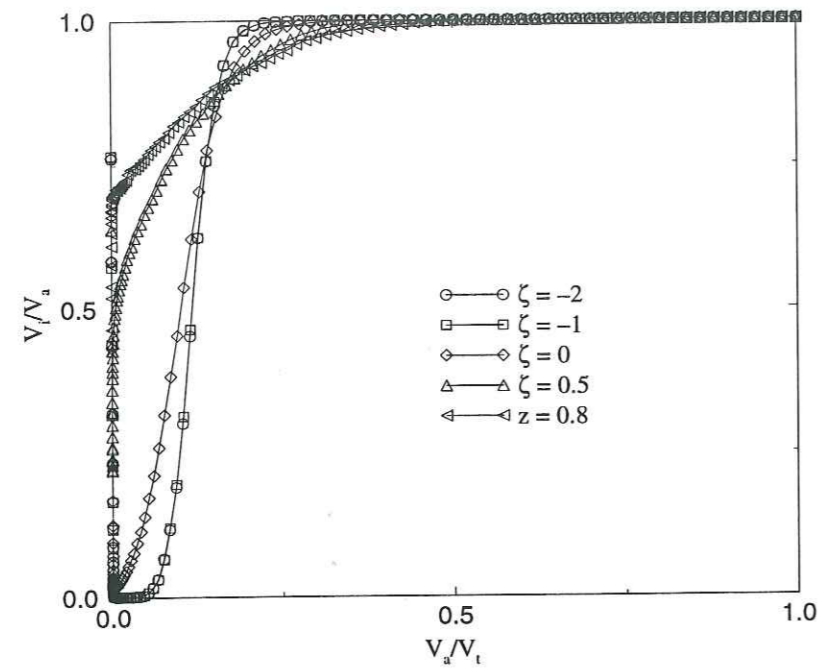


Figure 10: Relative invaded volume compared to the accessible one $v = V_i/V_a$, as a function of V_a/V_t . We see a marked difference of behaviour between positive and negative ζ exponents.

Annexe 3

Geometry of contact between self-affine surfaces
 F. Plouraboué, S. Roux, J. Schmittbuhl and J.P. Vilotte

A paraître dans: *Fractals*

GEOMETRY OF CONTACT BETWEEN SELF-AFFINE SURFACES

Franck PLOURABOUÉ, Stéphane ROUX

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes,
École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles,
10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France.

Jean SCHMITTBUHL, Jean-Pierre VILOTTE

Laboratoire de Géologie,
École Normale Supérieure,
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

ABSTRACT: We study the geometry of the contact between two rigid self-affine surfaces. We investigate the mean shape of the surface in the vicinity of the contact point as well as the probability distribution of apertures a as a function of the distance to the contact point. The latter reveals two distinct scaling regimes which are characterized. We show that as the two surfaces are shifted with respect to each other the contact point on one surface undergoes a "Levy walk". If u is the relative shift of the surfaces, the distance d between the two contact points (before and after the shift) scales as $d \propto u^\alpha$ where the exponent α is shown to be equal to the roughness exponent of the surfaces.

INTRODUCTION

Self-affine surfaces^[1] have been shown to appear in a number of instances (see reviews in Refs.[2-4]) ranging from growth models, ballistic deposition models, fluid displacement in porous media, or fracture surfaces. Two main issues are naturally emerging: the first one deals with the understanding and modelling of the process which generates those surfaces, whereas the second one is more concerned with the use of such geometrical characterization and the possible physical consequences. In view of the latter category of problems, the contact between such rough surfaces appears to play a major role. There has been a number of physical implications reported for the permeability of crack aperture,^[5-6] elastic contact,^[6-9] and friction^[10]. Our aim in this paper is to study some geometrical properties of contact between two independent rigid self-affine surfaces.

After having introduced our notations, we first analyse the mean aperture between two self-affine surfaces in contact, as a function of the distance to the contact point. We then study in more details the full distribution of apertures. In the following sections we are concerned with the evolution of the contact point under a given relative translation of the two facing surfaces. We show in particular that the contact point on one surface undergoes a "Levy flight" with an exponent related to the roughness exponent of the surfaces. The problem will be analysed through numerical simulation on artificially generated rough profiles (in two dimensions) or surfaces (in three dimensions).

NOTATIONS

Let us consider two self-affine surfaces given by their heights $z_1(x, y)$ and $z_2(x, y)$ which are assumed to be a single valued function of the coordinates in the mean plane (x, y) . The self-affinity property states that upon the scale transformation $x \rightarrow \lambda x$, $y \rightarrow$

λy and $z \rightarrow \lambda^\zeta z$, the surface remains statistically invariant. The parameter ζ which comes in the scale transformation in the direction normal to the surface is called the "Hurst" or "roughness" exponent. We will investigate specifically the case where both surfaces are characterized by the same roughness exponent ζ and are statistically independent. Both surfaces are assumed to be planar on average, and parallel to each other. The surfaces are isotropic with respect to their mean plane. The size of the surfaces is called L . We introduce ℓ the smaller length scale above which the surface is self-affine. In numerical simulations, the ℓ parameter corresponds to the discretization level. We define the contact between two surfaces by introducing the height h such that one surface, say S_2 , should be translated along the z axis so that S_2 is above S_1 , i.e. $z_2(x, y) + h \geq z_1(x, y)$ for all points (x, y) . At the contact point (x^*, y^*) , the equality is met. Thus,

$$\begin{aligned} h &= \max_{0 \leq x < L; 0 \leq y < L} (z_1(x, y) - z_2(x, y)) \\ &= z_1(x^*, y^*) - z_2(x^*, y^*). \end{aligned} \quad (1)$$

We introduce the aperture between those surfaces as $a(x, y) = h + z_2(x, y) - z_1(x, y)$. For two statistically similar but independent self-affine surfaces in contact — i.e. with the same amplitude and roughness exponent — the aperture a is also a self-affine function with the same roughness exponent. We will come back in the next section on a statistical characterization of the aperture.

The results presented in this paper have been obtained or checked numerically, using artificially generated self-affine surfaces. Let us give a few general informations concerning those simulations. We have generated self-affine profiles and surfaces with varying roughness exponents in the range $0 < \zeta < 1$. The algorithm used for generating the surfaces and profiles is due to Voss.^[11] The length of profiles were $L/\ell = 4096$ in two dimensions, and in three dimensions $L/\ell = 512$. Periodic boundary conditions have been implemented in x and y directions in three dimensions. For each value of ζ we performed an average over 100 (resp. 10) independent

realizations in two (resp. three) dimensions. Only the two dimensional case is studied in the following section, since x and y directions are equivalent. We will resort to the three dimensional simulations for the following two sections.

MEAN APERTURE AND STATISTICAL DISTRIBUTION

Let us first analyse the shape of the aperture $a(x)$ close to the contact point chosen conventionally to be at the origin. If the surfaces were smooth, we could approximate the aperture function close to the origin by its Taylor expansion, and thus the dominant term would be quadratic. However, for a self-affine surface, this result is obviously invalid. If we consider only the mean value of the aperture $\langle a(x) \rangle$ at a distance x from the origin, the self-affinity of $a(x)$ imposes

$$\langle a(x) \rangle \propto x^\zeta \quad (2)$$

so that a fulfills the scale invariance introduced above. The self-affinity of a results from the fact that a is a difference between two independent self-affine functions.

Figure 1 illustrates this property in two dimensions. We have generated one hundred pairs of self-affine surfaces of size $L/\ell = 4096$, and computed the average aperture at a distance x from the contact point. For each pair, we have also averaged over all initial translations along the x axis of the S_2 surface, while the S_1 was kept fixed. Only one roughness exponent is shown in Fig. 1. We chose arbitrarily $\zeta = 0.8$. On top of the average aperture, we have plotted a dotted line which is a power-law with the same exponent ζ . The departure from the power-law appears for distances at which the prescribed periodic boundary conditions begins to be sensitive ($x/\ell \geq 1000$). For convenience of notations, in the following we will use a length unit such that $\ell = 1$.

However, the mean value may not be the most important feature. Transport properties in a rock joint for instance will be ex-

tremely sensitive to "quasi-contacts" i.e. regions where the aperture is extremely narrow. In order to reveal those quasi-contact points it is necessary to characterize the scaling behavior of *negative moments* of the aperture.

In order to go further, we introduce the distribution of aperture $p(a, x)da$ at a distance x from the contact point. We expect that the reduced variable to account for the x dependence is a/x^ζ . Taking into account the normalization of p leads to the reduced form of the aperture distribution

$$p(a, x) = \frac{1}{a} \varphi(a/x^\zeta). \quad (3)$$

We show on Figure 2 the scaling function φ obtained for different x , in two dimensions, for a choice of the roughness exponent equal to $\zeta = 0.7$. We see on this figure a good data collapse for large apertures. This confirms that the scaling with x is well captured by the reduced form (3). The data shown on Figure 2 corresponds to the analysis of 10^4 pairs of independent profiles, each of length 512.

However, it is also obvious from Figure 2, that the small aperture regime behaves quite differently, and in particular, the scaling equation (3) seems violated. A closer analysis of the small aperture regime leads to the conclusion that the probability $p(a, x)$ approaches a constant (i.e. it does not depend on the aperture a) as a tends to zero. This constant however *does* depend on the distance x . More quantitatively, a systematic study done for various roughness exponents shows that

$$p(a, x) \propto x^{-1-\zeta} \quad (4)$$

Figures 3a and 3b demonstrate this property for two different values of $\zeta = 0.3$, and 0.7 . The data used in these graphs are the same as in the previous figure (10000 samples of length 512).

As a result, the moments $\langle a^{-\mu} \rangle^{-1/\mu}$ for $\mu \geq 1$ will be controlled by the lower cut-off of p rather than the typical height. The latter will come into play in higher order moments

$\mu < 1$ such as the arithmetic average of the aperture, as shown in Figure 1.

The fact that the small apertures do not obey the scaling form (3) is surprising at first sight. It is worth noting that a similar puzzling observation has been reported recently.^[12] Choosing any point M on a self-affine profile, we define the first return M' , as the closest point along the profile such that M and M' have the same height. The statistical distribution of distances Δ between M and M' is a power-law $f(\Delta) \propto \Delta^{-2+\zeta}$. This property has been shown analytically in Ref.[13]. If we now choose the point M such that it is a local maximum for the profile left of M and look for first returns on the right of M , we encounter a very different behavior: $f(\Delta) \propto \Delta^{-1-\zeta}$. This latter property was studied, and obtained analytically, in the context of shadow patterns over a self-affine surface with a quasi tangent incident light^[12]. The particular scaling occurs when focusing on maxima over a medium range window. The change in behavior between the first return problem and the shadow one, is reminiscent of the change in the aperture distribution close to zero. However, we have not been able to relate the two problems to prove the result (4).

EVOLUTION OF THE CONTACT POINT

The previous section dealt with the aperture function between two surfaces in contact. In the rest of this paper, we will study how the geometry changes when the two surfaces are moved relative to each other, while remaining in contact.

If we translate the S_2 surface along the x axis by an amount u , we can compute the height $h(u)$ of the surface at contact, and the location of the contact point $(x^*(u), y^*(u))$ as a function of the parameter u . By construction, h , x^* and y^* are three periodic functions of u , of period L . We are interested in properties of those functions on a scale smaller than L and naturally larger than ℓ .

Figure 4 shows an example of the location of the contact points on one surface of

roughness exponent $\zeta = 0.5$ so as to illustrate the jerky displacement of (x^*, y^*) as a function of u .

For each displacement u , we compute the distance between the contact points, $d(u) = |x^*(u) - x^*(0)| + |y^*(u) - y^*(0)|$ in three dimensions. The sliding distance u was varied continuously from ℓ to $L/3$ so as to avoid a systematic bias due to the periodic boundary conditions.

Let us first consider the statistical distribution, $n(d, u)$, of jumps d for a fixed displacement u . Due to the symmetric role played by the two surfaces, we expect that $n(d, u) = n(u - d, u)$ — i.e. counting the distance d with respect to the initial contact point on S_1 or S_2 should yield identical results. Therefore, in order to account for the u dependence of the distribution n , the only possible reduced variable is d/u . In other words, u sets the only relevant intermediate length scale. As a consequence the probability distribution n can be rewritten in the following form

$$n(d, u) = (1/u)\psi(d/u) \quad (5)$$

where the prefactor in front of ψ has been set by normalization. In Figure 5 we show that indeed plotting $(u n(d, u))$ as a function of d/u , we obtain a data collapse of three distributions for $u = 2, 8$ and 32 . (We only show three values of u so as to preserve the readability of the graph.) As expected from the symmetry, the distribution presents a sharp maximum for $d = u$. This corresponds to the fact that the contact point did not move on the S_2 surface. Past this local maximum, the distribution $n(d, u)$ displays a long power-law behavior, $\psi(d/u) \propto (d/u)^{-\tau}$.

Let us now show that τ can be computed to be $\tau = 1 + \zeta$. The aperture after a displacement u can be written $a(x, u) = a(x, 0) + z_2(x + u) - z_2(x) + h(u) - h(0) = a(x, 0) + \delta z(x) + cst$. For $u \ll L$, up to a translation, the aperture is modified by $\delta z(x) = z_2(x + u) - z_2(x)$. The properties of δz have been studied in details in Ref.[7]. This function appears to be self-affine with a roughness exponent ζ in the range $x < u$.

Above this scale, the rms fluctuation of δz saturates to a value proportional to u^ζ , and the covariance of $\delta z(x)$ and $\delta z(x')$ decays algebraically to zero with the distance $|x - x'|$. Thus at large distances compared to u , δz can be considered as a white noise of amplitude u^ζ . For $u \ll L$, the recalled properties of δz justify the fact that it can be considered as a small perturbation of the initial surface.

Choosing the origin at the contact point on the initial profile, the new contact point after a translation u is where $a(x, 0) + \delta z(x)$ is smallest. The probability that the new contact is at $x^*(u)$ from the origin is thus simply proportional to the probability that the initial aperture (before translation) at point $x^*(u)$ is less than the amplitude of δz . For a small displacement u , we are in the small aperture regime described by Eq. (4). Integrating the latter from zero to u^ζ , we obtain

$$n(d, u) \propto \frac{u^\zeta}{d^{1+\zeta}} \quad (6)$$

which agrees with the scaling form (5) and determines the exponent of the power-law followed by ψ

$$\tau = 1 + \zeta \quad (7)$$

We have plotted on Figure 5 a straight line which corresponds to $d^{-\tau}$ with the above exponent.

At this stage, if we neglect the correlation between successive jumps, the power-law tail of the distribution ψ suffices to give to the trajectory of contact point a "Levy flight" character. We analyse now in more details the scaling of the mean distance between contact points as a function of the displacement u . We show in particular that in spite of the correlations, the contact point does follow a "Levy flight".

MEAN DISTANCE BETWEEN CONTACT POINTS

We can use the distribution form to get the scaling of the mean distance d . Using the rescaled form (5), we are lead to $\langle d(u) \rangle =$

$\int \delta n(\delta, u) d\delta = u(\int x\psi(x) dx)$. This argument is not correct because of the power-law behavior of ψ . As long as $\tau < 2$, the first moment of ψ diverges and thus the expression $(\int x\psi(x) dx)$ is no longer independent of u . The divergence of the first moment implies that the integral will be dominated by its upper bound. Therefore, since d is limited by half the system size L , we obtain $\langle d(u) \rangle \propto u(L/u)^{2-\tau}$. This expression leads to the scaling

$$\langle d(u) \rangle \propto u^\alpha \quad (8)$$

with $\alpha = \tau - 1$. Using the relation $\tau = 1 + \zeta$ yields

$$\alpha = \zeta \quad (9)$$

In Figure 6, we give three examples of $\langle d(u) \rangle$ for $\zeta = 0.3, 0.6$ and 0.9 , for two dimensional profiles. The distance $\langle d(u) \rangle$ is averaged over different configurations and initial positions. We see in this figure that the displacement of the contact point increases as a power-law of the sliding distance u , as expected from Eq. (8). The power-law regime extends over the entire range studied for the larger ζ , but breaks down at intermediate length scales for the smaller $\zeta = 0.3$.

We show in Figure 7, a similar analysis performed for three dimensional surfaces. The same trends can be observed. A power-law behavior can be seen for small displacement u compared to the system size.

The results obtained by fitting the small u data to a power law are summarized in Table 1. The latter gives the measured α exponent as a function of ζ . We see that expression (10) is approximately fulfilled for intermediate ζ values. For low and high ζ values, the measured α is very unprecise. It is well known that when ζ is close to 0 or 1, the determination of this exponent is very difficult, and very strong size effect and systematic bias are commonly encountered.^[14] We also note that the discrepancy between the theoretical prediction and the measured values appears more markedly in three dimensional data for $\zeta > 0.7$. It is likely that the moderate system sizes analysed (512×512) and the

small number of samples is partly responsible for this more pronounced disagreement.

CONCLUSIONS

We have studied the average shape of the aperture between two self-affine surfaces in contact, and shown that the probability distribution of aperture displays two distinct scaling regimes for small and large apertures.

We have also studied the evolution of the contact point as the two surfaces are translated with respect to each other while being in contact. The contact point has been shown to follow a Levy walk with an exponent equal to the roughness exponent of the surfaces. Those properties have been obtained through numerical simulations in two and three dimensions, and related to the statistical distribution of apertures.

Other properties can be studied in order to complement the present study. In particular, one can analyse the probability that a given point on a surface may be the contact point with another surface. Simple arguments suggest that the probability field might be multifractal. We have concentrated in the present work on statistically independent surfaces. Another case which occurs quite naturally, is the situation where the two surfaces are identical (e.g. the two faces of a crack). This feature leads to very different results which can be addressed using some results derived in the second paper listed in ref.[6].

We acknowledge useful discussions with A. Hansen, H. J. Herrmann, E. J. Hinch, J. P. Hulin and P. Kurowski. This work has been supported by the Groupement de Recherche CNRS "Physique des Milieux Hétérogènes Complexes".

References

[1] J. Feder, *Fractals*, Springer, (New York, 1990)

- [2] T. Vicsek, *Fractal growth phenomena*, 2nd ed., World Sci. Pub., (Singapore, 1992)
- [3] P. Meakin, *Phys. Rep.* **235**, 189, (1993).
- [4] T. Halpin-Healy and Y. C. Zhang, "Surface growth, Directed polymer... and all that", preprint
- [5] S. R. Brown, *J. Geophys. Res.* **92**, 337, (1987); *ibid.* *J. Geophys. Res.* **94**, 429, (1989); *ibid.* *Geophys. Res. Lett.* **13**, 1430, (1986)
- [6] S. Roux, J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte and A. Hansen, *Europhys. Lett.* **23**, 277, (1993); F. Plouraboué, P. Kurowski, J. P. Hulin, S. Roux and J. Schmittbuhl, "Aperture of rough cracks", preprint.
- [7] S. R. Brown and C. H. Scholz, *J. Geo. Res.* **90**, 5531, (1985); *ibid.*, *J. Geo. Res.* **91**, 4939, (1986)
- [8] F. M. Borodich, *C. R. Acad. Sci. II*, **316**, 281, (1993)
- [9] K. J. Måløy, X.-l. Wu, A. Hansen and S. Roux, *Europhys. Lett.* **24**, 35, (1993)
- [10] W. Wang and C. H. Scholz, *PA-GEOPH*, to appear (94); J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte and S. Roux, *J. Physique II*, **4**, 225, (1994)
- [11] R. F. Voss, in *Fundamental algorithms in computer graphics*, pp 805-835, ed. R. A. Earnshaw, Springer-Verlag, (Berlin, 1985)
- [12] A. Hansen, F. Plouraboué and S. Roux, "Shadows in a self-affine landscape", to appear in *Fractals*
- [13] T. Engøy, A. Hansen and K. J. Måløy, "Measuring the Hurst exponent with the first return method", to appear in *Fractals*
- [14] J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte and S. Roux, "Reliability of self-affine measurements", to appear in *Phys. Rev. E*

| | $d = 2$ | $d = 3$ |
|---------|----------|----------|
| ζ | α | α |
| 0.2 | 0.24 | 0.24 |
| 0.3 | 0.33 | 0.31 |
| 0.4 | 0.41 | 0.38 |
| 0.5 | 0.50 | 0.46 |
| 0.6 | 0.58 | 0.53 |
| 0.7 | 0.65 | 0.58 |
| 0.8 | 0.70 | 0.61 |

Table 1: Comparison between the numerical estimate of α and the predicted one $\alpha = \zeta$ in two ($d = 2$) and three ($d = 3$) dimensions.

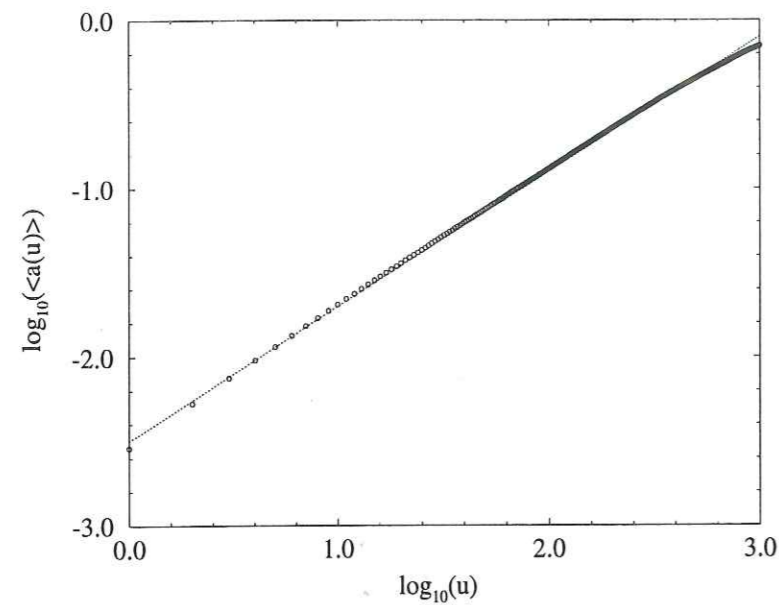


Figure 1: Mean aperture $\langle a(x) \rangle$ as a function of the distance x to the contact point in two dimensions, for self-affine surfaces of roughness exponent $\zeta = 0.8$. The dotted curve is a power-law of exponent $a \propto x^\zeta$.

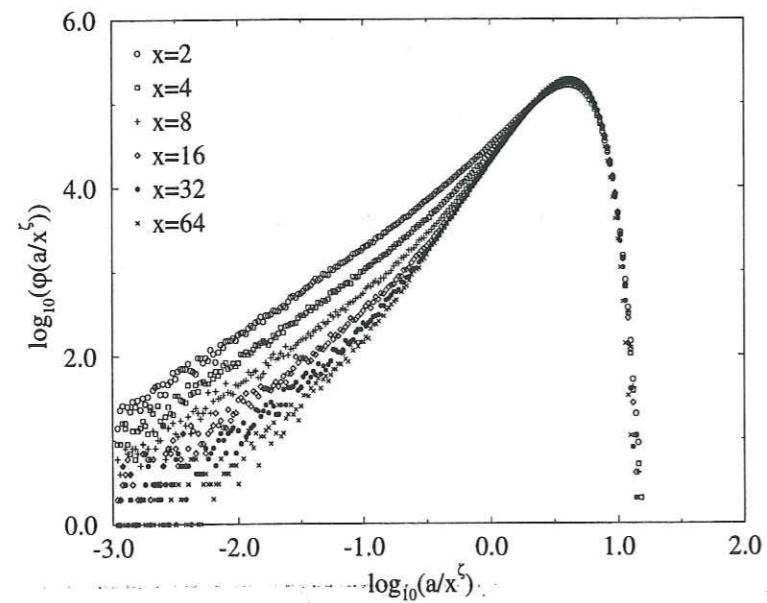


Figure 2: Rescaled distribution of apertures $\varphi(a/x^\zeta)$ versus a/x^ζ for different distances from the contact point $x = 2$ to $x = 64$ with symbols indicated in the insert. Note that the large apertures are well described by the scaling law, while the small apertures do not obey the scaling. The

roughness exponent is chosen here to be $\zeta = 0.7$.

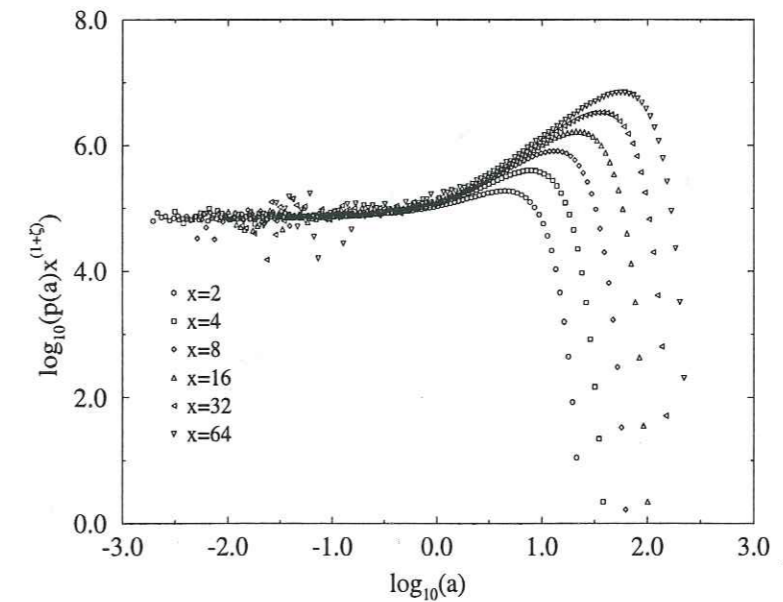
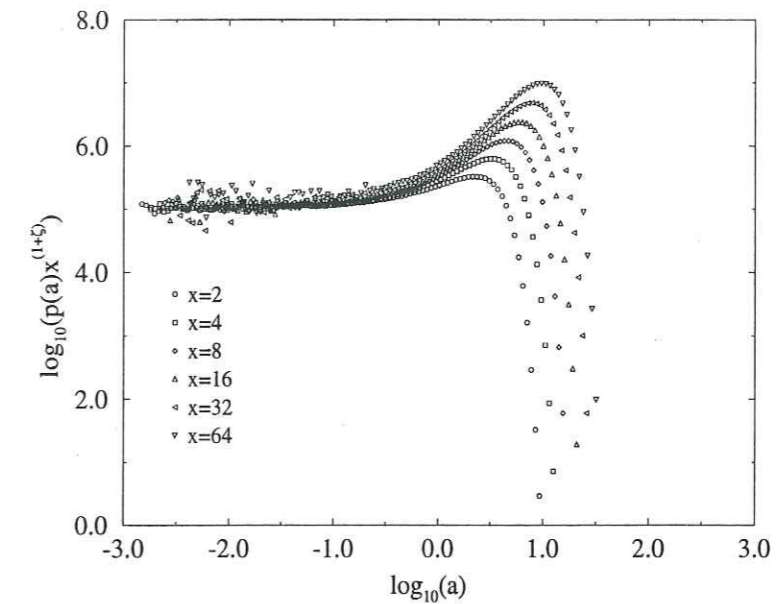


Figure 3: Rescaled distribution of apertures $p(a, x)x^{1+\zeta}$ versus a for different distances from the contact point $x = 2$ to $x = 64$ with symbols indicated in the insert. The roughness exponent is (a) $\zeta = 0.3$ and (b) $\zeta = 0.7$.

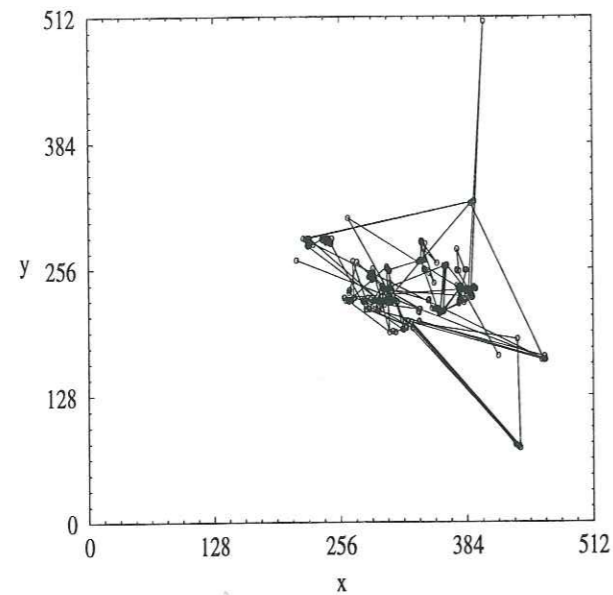


Figure 4: An example of the different contact points on one self-affine surface of size $L/\ell = 512$, with a roughness exponent $\zeta = 0.5$, as an independent facing surface having the same statistical characteristics is sliding along the x direction. The line connecting the contact points shows the order in which the contact points are effective.

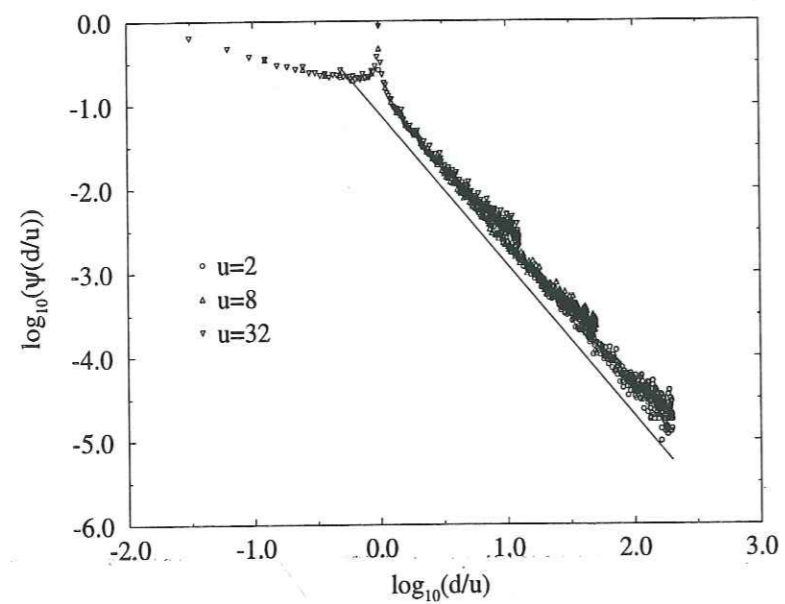


Figure 5: Rescaled distribution of reduced distances d/u between contact points relative to a displacement u , for three values of $u = 2$ (symbol \circ), 8 (Δ) and 32 (∇). The bold line has a slope $(1 + \zeta)$ and is shown as a guide to the eye. The data has been collected from 1000 two-dimensional profiles of length 1024, with a roughness exponent $\zeta = 0.8$.

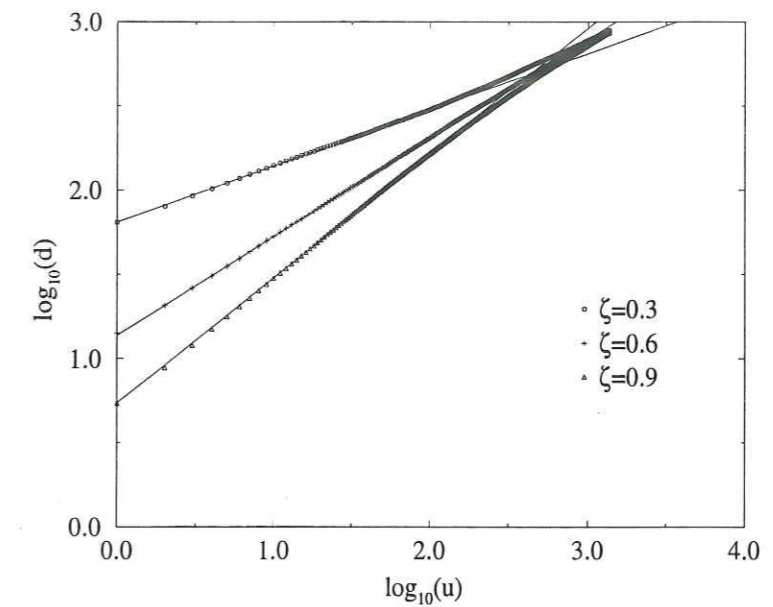


Figure 6: Log-log plot of the mean distance d between the contact points on one profile for a sliding distance u . The system size is $L/\ell = 4096$. Three different values of the roughness exponent is shown: $\zeta = 0.3$ (\circ), 0.6 ($+$) and 0.9 (Δ) together with linear fits.

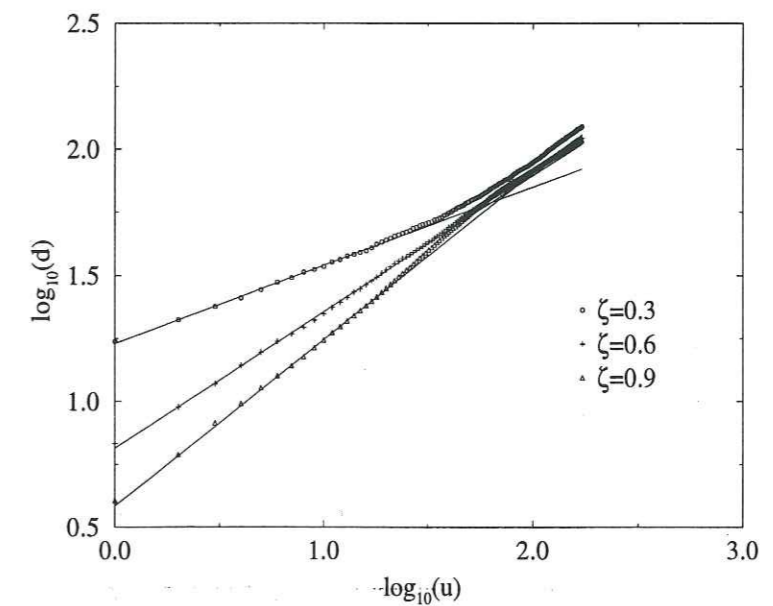


Figure 7: Same as figure 2 in three dimensions. The system size is $L/\ell = 512$.

Deuxième partie
Séismes et désordre

Chapitre 1

Création de l'interface

Introduction

La faille est une interface qui «grandit», pendant la phase sismique. Sa croissance résulte d'une succession de multiples fracturations. Cependant, au cours d'un séisme, la distinction entre création d'interface ou rejeu mécanique d'une interface pré-existante, est difficile à obtenir. On peut malgré tout dire que, plus la faille est grande, plus le processus de création d'interface est négligeable devant celui de rejeu. En réalité, la classification soit quelque peu arbitraire. En effet, si pendant la longue période asismique qui précède le séisme, une cicatrisation mécanique de la faille a lieu par la dissolution et recristallisation des aspérités, le rejeu le long de cette faille risque de nécessiter un véritable processus de fracturation. Par ailleurs, si l'on imagine que la propagation d'une faille se fait dans un volume préparé («process zone»), par coalescence et rejeu de micro-fissures pré-existantes, la croissance sera plus proche d'un phénomène de frottement.

On va considérer ici que le processus de croissance de la faille peut être clairement distingué du phénomène de rejeu. On dira, dans le premier cas, qu'il s'agit d'une fracturation et dans le second cas, d'une rupture sismique. Nous nous limiterons dans ce premier chapitre, à l'analyse du processus de fracture. Ceci a fait l'objet de maintes études dont on peut trouver des synthèses dans: *Jaeger and Cook* [1979], *Atkinson* [1989], *Scholz* [1990], *Kostrov and Das* [1988], *Freund* [1990].

Au cours de ce travail, nous chercherons à comprendre, comment est générée, lors du processus de fracture, une interface avec des propriétés géométriques auto-affines. Rappelons que ce type de propriétés a pour conséquence l'existence de corrélations spatiales à très longue portée.

Les propriétés géométriques de la surface de fracture (et donc de la faille¹) sont un héritage de la géométrie du front de fracture lors de sa propagation *Gao* [1993], *Bouchaud et al.* [1993]. Il s'agit donc de comprendre comment le front de fracture acquiert une telle invariance d'échelle. Quelle propriété de la fracturation est fondamentale pour la formation de la géométrie observée? Cela résulte-t-il de l'hétérogénéité du milieu ou bien des propriétés physiques du front?

1. Voir hypothèse formulée dans la discussion du chapitre 1 de la première partie.

Présentation du plan Deux approches distinctes ont été suivies pour proposer un premier pas dans la compréhension de la structuration des propriétés géométriques d'une surface de fracture. D'une part, une approche expérimentale a cherché, à quantifier l'évolution de la rugosité d'une surface de fracture d'une forme «imposée» vers une forme «libre». Il s'agit du développement de la rugosité à partir d'une entaille rectiligne lors de la fracturation en mode I d'un bloc de granite. Dans le second chapitre, nous montrons comment, numériquement, nous avons modélisé la propagation d'un front de fracture dans un milieu continu hétérogène. L'équation d'évolution retenue introduit une tension non locale de ligne de front ainsi qu'un désordre spatial aléatoire. Nous essayons alors de comprendre la construction de la rugosité du front de fracture à fur et à mesure de sa propagation. Dans une première approche, nous considérons une propagation planaire quasi-statique.

Lien avec les publications les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet de deux projets d'articles respectant les deux directions d'études. Le premier article (voir annexe 1) s'intéresse au problème de la caractérisation expérimentale de la croissance de la rugosité de fracture. L'étude numérique de la propagation d'un front de rupture dans un milieu désordonné, est présentée dans l'annexe 2.

1.1 Approche expérimentale

Ce travail expérimental constitue un élément de la collaboration établie avec le Laboratoire de Mécanique et Technologie à l'ENS de Cachan. En effet, une expérience permettant l'acquisition de la topographie de surfaces de fracture a été montée dans ce laboratoire, avec l'aide de Yves Berthaud.

1.1.1 Objet d'étude

Les surfaces de fractures étudiées sont issues d'un bloc de granite de $25\text{cm} \times 25\text{cm} \times 12\text{cm}$. Ce granite provient de Lanhélin (Bretagne). Il est à grains moyens avec une minéralogie du type: quartz, feldspath, mica et minéraux accessoires. Dans ce bloc, une fracture a été initiée et propagée selon un plan moyen, perpendiculaire à la petite dimension. L'initiation s'est faite à partir d'une entaille de section triangulaire, de 2mm de profondeur et située à mi-distance du petit côté. Le fond de cette entaille forme une ligne droite parallèle à l'un des grands côtés. Un coin métallique est alors envoyé violemment sur cette entaille. Avec ce protocole, la forme du front de fracture est imposée à l'instant initial. Par contre, la vitesse de propagation du front n'est pas connue. Elle subit vraisemblablement une forte accélération sur les premiers centimètres. Afin de contrôler la position finale de la surface de fracture, une rainure superficielle a été dessinée sur la face opposée à celle d'initiation.

Cette fracturation aboutit à la formation de deux «sous-blocs» séparés par la même surface de fracture. On possède ainsi deux représentations de l'interface générée. Il est à noter que la fracture est non branchée. De plus, très peu de matériel de trituration est apparu. Aucun signe macroscopique de directionnalité n'a pu être observé le long de la surface.

L'analyse de la rugosité a été obtenue grâce à un profilomètre mécanique dont la technologie est différente de celle présentée au cours de la première partie. Un capteur mécanique de déplacement est monté sur un support dont le mouvement est contrôlé par des moteurs pas à pas. Le capteur mécanique est un capteur de déplacement à induction. Il est en fait utilisé comme capteur de contact². Le pas en déplacement des moteurs est de $1\mu\text{m}$. Le capteur peut être ainsi translaté dans une direction horizontale³ x et selon une direction verticale z . Le déplacement le long de ces deux directions permet l'acquisition de profils de rugosité. De véritables cartes sont obtenues grâce à l'ajout d'une seconde direction horizontale y , perpendiculaire à la première. Elle régit, non pas le déplacement du capteur mais celui de la table sur laquelle est posé le bloc. L'ensemble des éléments est relié à un PC qui assure un pilotage et une acquisition numérique. Ajoutons que cette technique, alliant une grande précision et une importante dynamique, est relativement lente: 2s par point de mesure).

Le protocole d'acquisition d'un point est le suivant. Le capteur est déplacé verticalement, pas à pas, à partir d'un niveau de référence jusqu'au contact avec la surface. Il y a alors enregistrement du nombre de pas nécessaires, puis remontée du capteur, avant le prochain déplacement horizontal. Ce dernier constitue le pas entre deux points de mesure. Le processus est ensuite itéré jusqu'à l'obtention complète d'un profil.

L'erreur de mesure a été estimée par reproductibilité. Elle est de $5\mu\text{m}$, le long de la direction verticale (z) et de la direction horizontale perpendiculaire à la direction des profils (y). Dans la direction des profils (x), la précision est de $2\mu\text{m}$.

Trois cartes topographiques de la surface de fracture ont été enregistrées. Elles permettent de suivre l'évolution de la rugosité à partir de l'entaille rectiligne d'initiation. Toutes ces cartes sont constituées de 100 profils parallèles définis par 1050 points. Deux de ces cartes couvrent une surface de $5\text{cm} \times 4\text{cm}$. La troisième est plus grande: $8\text{cm} \times 4\text{cm}$ (voir Annexe 1, Figure 1, page 216).

Précisons que tous les profils obtenus sont parallèles au bord d'initiation. Leur direction commune (horizontale) constitue la direction x . Perpendiculaire à cette dernière, également dans le plan horizontal, est définie la direction y . Elle mesure la distance de chaque profil au bord d'initiation.

1.1.2 Ecart-type et rugosité

Le but de l'étude est de quantifier l'évolution de la rugosité de la surface à partir d'une forme imposée⁴ vers une forme «libre», en équilibre dynamique avec les conditions de propagation du front. La rugosité croît à partir de l'entaille d'initiation ($y = 0$) avec la distance y à cette entaille. On fait l'hypothèse, dans notre étude, que le front reste parallèle au bord d'initiation tout au long de la phase de croissance de la rugosité.

Nous introduisons un outil d'analyse de la rugosité qui est la mesure de l'écart-type, sur une certaine fenêtre Δ_x , des hauteurs locales z d'un profil distant de y de l'entaille

2. On considère qu'il y a contact lorsque le capteur subit un déplacement d'environ $300\mu\text{m}$.

3. Le plan moyen de la fracture est appelé plan horizontal. La verticale est définie comme la perpendiculaire au plan moyen de la fracture.

4. Le front est rectiligne le long de la rainure d'initiation.

d'initiation:

$$\sigma^2(y, \Delta_x) = \left\langle \frac{1}{\Delta_x} \sum_{i=1}^{\Delta_x} z(x_i, y)^2 - \left(\frac{1}{\Delta_x} \sum_{i=1}^{\Delta_x} z(x_i, y) \right)^2 \right\rangle_{x_0} \quad (1.1)$$

où x_0 est la position de la fenêtre Δ_x définie dans le profil, et x_i , l'abscisse des différents points de mesure dans la fenêtre considérée. Une moyenne est effectuée sur toutes les différentes fenêtres de même taille d'un même profil, i.e. à une même distance du bord d'initiation, pour s'affranchir des nombreuses fluctuations. La dépendance de l'écart-type avec la taille de la fenêtre, pour une certaine distance y au bord d'initiation, fournit la valeur de l'exposant d'auto-affinité (voir chapitre 1 de la première partie). L'outil permet ainsi de suivre l'évolution des propriétés auto-affines de la rugosité avec la distance au bord d'initiation.

Si le front reste parallèle, en moyenne, au bord d'initiation, on peut dire que notre outil caractérise la composante verticale de la position du front de fracture à un «instant» donné. La difficulté de cette démarche, cherchant à lier rugosité de la surface de fracture et rugosité du front de fracture, est que tous les points constituant un profil de mesure, ne sont pas synchrones. L'ensemble des points d'un profil est bien situé le long d'une même position moyenne⁵ du front. Cependant, le front présente des fluctuations de position non seulement verticalement mais aussi horizontalement. En d'autres termes, un profil mesuré ne constitue pas un instantané du front de fracture, mais le résultat d'une intégration sur un court laps de temps. Précisons que l'analyse de la rugosité horizontale du front de fracture, n'est réalisable qu'en suivant en temps réel le front de fracture, opération bien plus difficile que le simple examen de la surface.

Ainsi, à travers l'étude que nous menons ici, nous cherchons à caractériser la rugosité verticale du front de fracture. La caractérisation complète du front (composante horizontale et verticale) ne pourra être faite que s'il existe un couplage connu entre composante verticale et horizontale du front.

1.1.3 Evolution de la longueur de corrélation

Loin du bord d'initiation, on s'attend à se trouver en régime «établi». Un tel régime est supposé exister au vu des résultats présentés dans la première partie (chapitre 1). En effet, il ressort que la même propriété d'auto-affinité s'observe dans des conditions très variées de fracturation. Au cours de ce régime établi, la rugosité doit être peu sensible à la vitesse de propagation. Cette vitesse n'est en général pas indiquée dans les différents travaux qui ont été réalisés par les différents groupes sur le sujet. Cependant, elle a peu de chance d'être la même dans tous les cas, ni même constante lors de la réalisation de chacun des échantillons étudiés.

Le régime établi se caractérise par une auto-affinité avec un exposant de l'ordre de 0.80. Ceci a été vérifié sur notre bloc où, loin du bord, la propriété est bien retrouvée. Or cette invariance n'existe pas le long de l'entaille initiale. Nous appelons transitoire la période correspondant à l'établissement de la propriété d'auto-affinité (i.e. des corrélations à longue portée) sur l'ensemble de la surface.

5. Dans le cadre de notre hypothèse.

L'analyse se base sur une évolution de la longueur de corrélation ξ avec la distance au bord. Cette longueur est définie comme la taille de la fenêtre séparant deux comportements de l'écart-type. Cette technique est empruntée au domaine de la croissance des interfaces Kardar *et al.* [1986], Family and Vicsek [1991].

$$\xi \propto y^{1/z} \quad (1.2)$$

où z est appelé coefficient dynamique.

Lorsque la fenêtre est beaucoup plus petite que la longueur de corrélation, l'écart-type croît avec la taille de la fenêtre considérée. Par contre, pour des fenêtres plus grande que la longueur de corrélation, l'écart-type atteint une saturation et n'est plus sensible à la taille de la fenêtre. La dualité du comportement s'écrit:

$$\sigma(y, \Delta_x) = \Delta_x^\zeta \varphi(y/\Delta_x^z) \quad (1.3)$$

où la fonction d'échelle φ est définie par:

$$\begin{cases} \varphi(t) \sim t^{\zeta/z} & \text{for } t \ll 1 \\ \sim \text{cst.} & \text{for } t \gg 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

On retrouve bien le comportement de l'écart-type dans les deux cas:

$$\begin{cases} \sigma \propto y^{\zeta/z} & \text{for } \Delta_x \gg \xi \\ \sigma \propto \Delta_x^\zeta & \text{for } \Delta_x \ll \xi \end{cases} \quad (1.5)$$

La vérification expérimentale de la croissance de la longueur de corrélation ξ et l'estimation de l'exposant dynamique z , sont obtenues par la caractérisation de la fonction d'échelle φ . L'adéquation du formalisme se fait à partir de la qualité du collapse des courbes obtenues pour chaque valeur de la distance au bord y . Nous disposons pour chaque carte de 100 profils. Par conséquent, 100 courbes sont à superposer. Le meilleur collapse fournit une première estimation de l'exposant dynamique⁶. Une confirmation de la valeur de l'exposant s'obtient en traçant la loi de puissance: $\varphi(t) \sim t^{\zeta/z}$ et s'assurant qu'elle constitue une bonne régression des points de mesure pour t petit (voir Annexe 1, Figure 2a et 2b, page 217). La valeur expérimentale obtenue pour le coefficient dynamique est:

$$z = 1.20 \pm 0.15 \quad (1.6)$$

Notons que cette mesure permet également de décrire le résultat que fournirait une analyse d'auto-affinité par méthode de fenêtres, appliquée sur des profils orientés dans la direction de propagation, et situés à proximité du bord d'initiation. Dans ce cas, on s'attend à l'évolution: $\sigma \propto y^{\zeta/z}$, soit:

$$\sigma \propto \Delta_y^{0.66} \quad (1.7)$$

Dans cette zone de transition, il existe par conséquent une anisotropie apparente de l'auto-affinité de la surface selon que l'on mesure des profils parallèles ou perpendiculaires au bord d'initiation de la fracture.

6. Pour ce travail de superposition, on suppose que l'exposant ζ est connu: $\zeta = 0.8$. Il s'agit de la valeur de l'exposant obtenue indépendamment, pour l'analyse des profils en régime établi, i.e. loin du bord.

1.1.4 Intersection avec le plan moyen de fracture

Nous avons imaginé une autre méthode, indépendante de la première, pour estimer la valeur de l'exposant dynamique z . On s'intéresse, pour cela, à l'intersection d'un profil auto-affine avec une droite horizontale. Le nombre de points d'intersection entre le profil et la droite est fonction de la longueur L du profil et l'exposant d'auto-affinité ζ :

$$N \propto L^{1-\zeta} \quad (1.8)$$

Ceci est vrai si le profil est auto-affine pour toutes les échelles, en particulier pour l'échelle L . Or nous avons vu que dans la période transitoire, la longueur de corrélation ξ peut être beaucoup plus petite que la longueur du profil. Dans ce cas, le nombre d'intersections est:

$$N \propto L \xi^{-\zeta} \quad (1.9)$$

On peut alors en déduire que l'étude de l'évolution du nombre d'intersections entre un profil, distant de y de l'initiation, et le plan horizontal, i.e. le plan moyen de fracture, permet d'obtenir une estimation du coefficient z . En effet, on peut s'attendre au comportement suivant:

$$N(y) \propto y^{-\zeta/z} \quad (1.10)$$

Le calcul d'une telle évolution fournit une courbe relativement bruitée du fait du manque de résolution statistique. Il n'est alors pas possible de procéder à une détermination de l'exposant z (connaissant la valeur de l'exposant ζ). Nous nous limitons à une confirmation de la valeur obtenue précédemment. On peut constater que la loi proposée est compatible avec la courbe expérimentale obtenue (Voir Figure 1.1).

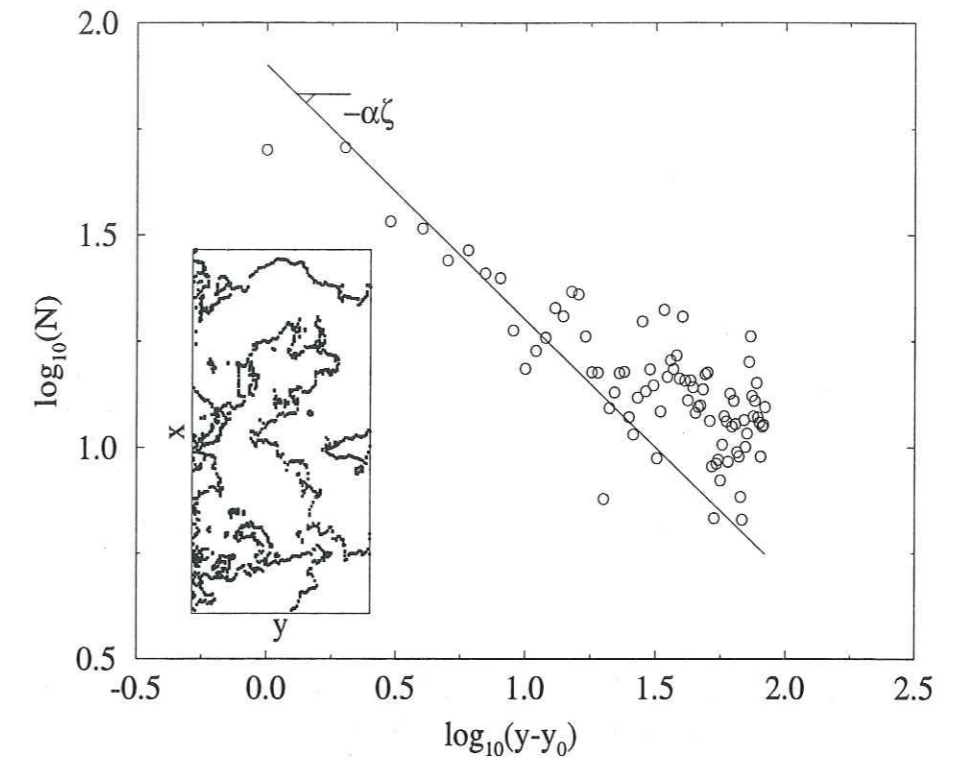


FIG. 1.1 - Analyse du nombre N d'intersections entre chaque profil et le plan moyen de fracture en fonction de la distance au bord d'initiation de la fracture.

1.2 Approche numérique

Nous venons de voir qu'il était possible, expérimentalement, de suivre la formation de la rugosité d'une surface de fracture. Cette rugosité est héritée de la composante verticale de la position du front de fracture.

Dans cette seconde partie du chapitre, nous considérerons le problème par l'autre «bout». En effet, nous allons chercher à modéliser la propagation d'un front de fracture dans un milieu désordonné et à examiner la géométrie que prend celui-ci⁷. Le développement de cette problématique fait l'objet d'une collaboration avec l'Institut de Physique de l'Université d'Oslo et en particulier Knut Jorgen Måløy. Deux axes de travail sont suivis. Tout d'abord, il s'agit d'une modélisation numérique, avec, dans un premier temps⁸, le traitement du cas bidimensionnel (propagation plane) et quasi-statique. Ce travail est à présent bien avancé et nous proposons ici les premiers résultats. Une seconde partie de cette collaboration sera initiée dans un proche avenir. La modélisation ne sera alors plus

7. Connaissant la géométrie du front, il sera alors possible d'en déduire celle de la surface de fracture générée.

8. Une des perspectives de ce travail sera la construction d'un modèle tridimensionnel.

numérique mais expérimentale. Elle se fera au cours d'un stage post-doctoral à l'Université d'Oslo. Il sera alors particulièrement intéressant de confirmer ou infirmer les résultats numériques ci-dessous.

1.2.1 Modélisation du front de fracture

La modélisation de la propagation tridimensionnelle et dynamique d'un front de fracture dans un milieu hétérogène, est un problème difficile, non encore résolu. On peut, parmi les nombreuses études réalisées sur ce sujet, en distinguer deux grands types.

Il s'agit, d'une part, des études menées dans le cadre de la *propagation d'interface en milieu désordonné*. Le modélisation se base alors sur des équations de propagation dynamique de type Langevin. La construction de telles équations se fonde sur la séparation des termes de relaxation vers un équilibre, et de ceux correspondant aux fluctuations «thermiques» (voir la synthèse de M. Kardar dans *Charmet et al.* [1990]).

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Gamma F[h] + \eta(x, t) \quad (1.11)$$

où $h(x, t)$ est la position de l'interface au cours du temps. Le terme $F[h]$ correspond à l'ensemble des «forces» de relaxation. Le coefficient Γ peut être vu comme une tension de ligne. La fonction $\eta(x, t)$ rend compte des fluctuations thermiques. Elle est introduite généralement comme un bruit. Notons que ces fluctuations sont, tout au long de l'histoire de la propagation, le moteur de l'avancée de l'interface.

L'une des voies d'étude de cette classe d'équations, particulièrement féconde ces dernières années, cherche à caractériser les termes de premiers ordres parmi les «forces» de relaxation, sur la base d'invariances géométriques. Il s'agit alors du groupe des équations de type KPZ *Kardar et al.* [1986], *Family and Vicsek* [1991], *Vicsek* [1992], *Charmet et al.* [1990], *Ertas and Kardar* [1992]. Citons, par exemple, le cas d'une propagation présentant trois symétries: translation ($h(x) \rightarrow h(x) + h_0$), réflexion ($h(x) \rightarrow -h(x)$) et isotropie spatiale. Dans ce cas, le terme d'ordre le plus bas sera $\nabla^2 h$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \eta(x, t) + \text{termes d'ordre supérieur} \quad (1.12)$$

Une telle approche de la dynamique du front de fracture a été développée par *Bouchaud et al.* [1993] (voir également *Ertas and Kardar* [1992]). Ainsi, les équations contrôlant la propagation d'un front de fracture, seraient:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_x}{\partial t} = V + \gamma \frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} + \frac{\lambda_{xx}}{2} \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\lambda_{xz}}{2} \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} \right)^2 + \eta_x(y, t) \\ \frac{\partial h_z}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} + \lambda_z \left(\frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} \right) + \eta_z(y, t) \end{cases} \quad (1.13)$$

où y est la direction du front moyen et V sa vitesse. Les coefficients sont des tensions de lignes mettant en évidence le couplage entre rugosité «horizontale» et «verticale» du front⁹.

9. Ce type de couplage illustre les propos énoncés dans le paragraphe précédent.

Deux commentaires importants sont à formuler à propos de cette approche. Tout d'abord, les forces de relaxation sont en général supposées *locales*. Toutefois, une étude de l'avancée de la ligne de contact d'un fluide mouillant sur une surface «hétérogène», faisant intervenir des forces capillaires non locales, a été récemment proposée par *Ertas and Kardar* [1994].

L'autre remarque concerne le bruit introduit. En général, ce bruit est fonction du temps. Il est dit «recuit». De plus, il est souvent aléatoire, i.e. décorrélé. Cependant, il peut apparaître comme la modélisation, non seulement des fluctuations thermiques, mais aussi les contributions des termes d'ordre supérieur des forces de relaxation. Dans ce cas, il est judicieux de le choisir corrélé. Le bruit peut être également «gelé», i.e. indépendant du temps *Roux* [1990], *Jiang and Hentschel* [1994]. Mais l'introduction d'un tel bruit, suppose implicitement qu'il ne s'agit plus de fluctuations thermiques. On sort alors de la perspective des équations de Langevin. Le bruit est devenu une modélisation des hétérogénéités du milieu dans lequel se fait la propagation. Une force extérieure est, alors, nécessaire pour entraîner l'interface ou le front. Un bruit gelé sous-entend également que les forces de relaxation considérées de premier ordre, sont bien toujours de premier ordre. Le bruit gelé ne pouvant en aucun cas reproduire le comportement des termes d'ordre supérieur.

La seconde grande famille d'approches s'organise autour de la *fracturation d'un milieu continu faiblement hétérogène*. Nous n'allons pas dresser ici un bilan de l'ensemble des études faites sur la fracturation (voir par exemple *Kostrov and Das* [1988]). Nous nous intéresserons uniquement aux travaux portant sur la géométrie du front de fracture et plus particulièrement aux analyses perturbatives. La démarche consiste à supposer connue une certaine situation du front, puis à calculer son évolution lorsqu'un couple de forces élémentaires est placé en un point de la fracture *Rice* [1985]. L'analyse perturbative se fonde sur le fait que le couple de force élémentaire d'amplitude $\pm C$, est appliqué sur un disque de rayon ϵ . On s'intéresse alors à la perturbation du front lorsque $C \rightarrow 0$ et $\epsilon \rightarrow 0$. L'essentiel de la difficulté réside dans le calcul de l'influence du couple de forces élémentaires, sur le facteur d'intensité de contrainte en tout point du front. Cette influence est caractérisée par une fonction dite d'influence *I Rice* [1985], *Rice* [1989]. Le facteur d'intensité de contrainte $K(s)$ en un point s du front s'écrit alors:

$$K(s) = C I(s; x, z) \quad (1.14)$$

lorsque le couple de force élémentaire est placée en (x, z) . Contrairement au premier type d'approche, les propriétés *non locales* du front de fracture sont explicitement intégrées au calcul. Par contre, les études faites dans ce domaine s'intéressent en général qu'à la propagation dans un milieu faiblement hétérogène¹⁰.

Notre travail cherche, d'une certaine manière, à établir un lien entre les deux types d'approches. En effet, nous nous intéressons à la formulation non locale d'un front de fracture dans un milieu hétérogène. Nous avons emprunté la problématique au domaine de la croissance d'interface, tout en traitant avec soin de la modélisation mécanique du front de rupture.

10. La résolution numérique de la propagation d'un front, dans ce cadre de milieu continu, est souvent très lourde et pose des problèmes de stabilité. La prise en compte d'un bruit est difficile.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à une propagation quasi-statique dans un milieu bidimensionnel. Nous considérons un front de fracture se propageant dans un plan horizontal ($z = 0$), séparant deux épontes d'un massif élastique (voir Annexe 2, Figure 1, page 226)¹¹. La fracturation ne laisse «derrière elle», aucune rugosité de la surface de fracture. Par contre, une rugosité horizontale du front, i.e. dans le plan de la fracture, apparaît du fait de l'hétérogénéité du milieu. Le chargement entraînant la fracture est supposé être en mode I, sous l'action d'une force verticale de traction appliquée à l'infini.

Sous l'effet du chargement, le front se propage dans la direction x . Il développe une rugosité autour du front moyen, orienté selon la direction y , perpendiculaire à la direction x . La position x caractérise l'avancée de ce front moyen. Pour une position donnée du front moyen, l'exacte description de la géométrie du front est faite par la grandeur: $a(y)$.

L'avancée du front de fracture est contrôlée, dans ce modèle, par la comparaison entre la sollicitation mécanique, due au chargement, et la résistance mécanique locale du matériau. Lorsque la sollicitation devient supérieure à la résistance, le matériau se rompt et le front se propage.

La sollicitation mécanique est quantifiée par le calcul de la contrainte locale. L'expression de la contrainte σ en front de fissure est bien connue dans le cas d'un front rectiligne:

$$\sigma \propto \frac{K}{\sqrt{r}} \quad (1.15)$$

où K est le facteur d'intensité de contrainte et r la distance au front. Par conséquent, elle diverge le long du front. En fait, l'état mécanique de chacun des points du front sera donné par le facteur d'intensité de contrainte. Le calcul de ce facteur lorsque le front n'est plus rectiligne, constitue une des difficultés majeures du problème. La rugosité du front est alors vu comme une perturbation en position d'un front rectiligne. Revenons sur le principe du calcul. Il s'agit de chercher la charge ponctuelle à ajouter au système pour rendre compte de l'apparition d'une avancée perturbative du front. Ensuite, connaissant la fonction d'influence, le facteur d'intensité peut être estimé en tout point du front. Rice [1985] a montré que la fonction d'influence, dans le cas d'un front rectiligne dans un massif semi-infini, est:

$$I(s; x, y) = \frac{(-2x)^{1/2}}{\pi^{3/2}[x^2 + (s - y)^2]} \quad (1.16)$$

La position du front de rupture sera notée $a(y)$. L'estimation, au premier ordre, du facteur d'intensité de contrainte K est alors donnée, en tout point du front, par:

$$K(y) = K_0(y) + \delta K(y) \quad (1.17)$$

où K_0 est le facteur d'intensité de contrainte dans le cas d'un front rectiligne et $\delta K(y)$ sa fluctuation. Cette dernière a été calculée par Rice [1985] et Gao and Rice [1989]:

$$\delta K(y) = \frac{1}{2\pi} p.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(y') - a(y)}{(y' - y)^2} dy' \quad (1.18)$$

11. Ce problème bidimensionnel est proche de celui de la décohésion de deux surfaces.

où *p.p.* désigne la valeur principale de l'intégrale. Rappelons que cette expression n'est valable que si la rugosité du front peut être considérée comme une perturbation d'un front moyen rectiligne.

La résistance mécanique en tout point du matériau, i.e. du «grain»¹² est exprimée par un seuil correspondant au niveau maximum de contrainte admissible sans rupture. Cependant, une façon d'exprimer la résistance mécanique comme un seuil, est de le faire en termes de facteur d'intensité de contrainte maximum: $K_c(x, y)$ où x et y sont les coordonnées du grain dans le plan de fracture. C'est dans le choix du champ $K_c(x, y)$ que se fait l'introduction de l'hétérogénéité du milieu. Lorsque ce champ est uniforme $K_c(x, y) = Cte$, le front est parfaitement rectiligne.

Le front se propage lorsque:

$$K(y) \geq K_c(y, a(y)) \quad (1.19)$$

Cette propagation est supposée quasistatique. On considère pour cela que la propagation est toujours «lente», et par conséquent, qu'elle ne donne pas naissance à la radiation d'ondes dans le milieu. De telles ondes élastiques peuvent en effet modifier l'état de contrainte le long du front, et donc son avancée. L'hypothèse de quasistaticité empêche le calcul exact de l'avancée dynamique du front, lorsqu'un grain est cassé. Nous choisissons alors l'avancée locale $\delta a(y)$ selon une distribution uniforme¹³[0;1].

$$a(y^*) \rightarrow a(y^*) + \delta a(y^*) \quad (1.20)$$

où y^* est l'abscisse du point de rupture.

Examinons à présent, le chargement effectué pour obtenir une propagation quasistatique. Nous avons choisi un chemin de chargement permettant d'avoir à tout moment, un seul point de rupture (d'abscisse y^*). Il s'agit d'un chargement cyclique. Chaque cycle est constitué d'un déchargement total du système, puis d'une phase de chargement infiniment lente jusqu'à ce qu'un des points du front atteigne la condition de rupture. Ce chargement peut être décrit en terme de facteur d'intensité de contrainte, en particulier à travers sa composante K_0 , identique pour tous les points du front. La rupture intervient alors pour:

$$K_0^* + \delta K(y^*) = K_c(y^*, a(y^*)) \quad (1.21)$$

Une façon simple d'estimer le chargement K_0^* à effectuer pour rompre le grain sensible consiste à chercher:

$$K_0^* = K(y^*) - K_c(y^*, a(y^*)) = \max_y (K(y) - K_c(y, a(y))) \quad (1.22)$$

1.2.2 Discrétisation et cas-test

La discrétisation de ce problème comprend principalement deux difficultés: la discrétisation de la représentation intégrale du facteur d'intensité de contrainte ainsi que la discrétisation de la géométrie de l'interface. Ces deux difficultés ne sont pas indépendantes.

12. Nous utiliserons la dénomination de grain pour qualifier un voisinage local le long du front.

Examinons dans un premier temps, le problème du noyau intégral discret. L'appendice A présente la méthodologie que nous avons suivie. Nous obtenons l'expression suivante du facteur d'intensité de contrainte au point du front d'abscisse i :

$$K_i = K_0 \left(1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j y_{i+j} \right) \quad (1.23)$$

où m_j représente les différentes composantes du noyau intégral discret (i.e. de la fonction d'influence) et y_i chacune des composantes de la position du front. Ces deux vecteurs sont de «taille» N , où N est le nombre de points dans la discrétisation du front. Les conditions aux limites sont périodiques. Ainsi, la perturbation du facteur d'intensité de contrainte δK est obtenue par le simple produit scalaire du vecteur d'influence (m_j) et du vecteur position (y_{i+j}). Il s'agit en fait du vecteur position ayant subi i permutations circulaires¹⁴ (si le point d'intégration a pour abscisse i). La forme de l'équation ne présente alors aucune singularité.

La deuxième difficulté concerne la discrétisation de la géométrie de l'interface. Deux points sont à signaler. En premier lieu, afin de respecter le domaine de validité du calcul fait par *Gao and Rice* [1989], il est nécessaire d'avoir une pente¹⁵ locale continue le long du front. En second lieu, rappelons que l'appendice A a montré que la discrétisation du noyau n'était pas indépendante de celle de la géométrie. Les deux problèmes sont donc intimement couplés. De ce fait, toute erreur dans la description de la géométrie se traduira par une propagation «anormale» du front. En particulier, lorsque le front se propage dans un milieu hétérogène, tous les modes instables dus au problème de discrétisation, sont excités et polluent la propagation du front. L'hypothèse de petites perturbations n'est plus respectée.

Nous avons constaté que le choix de la discrétisation de la géométrie a principalement une influence, sur les dix premières composantes (m_i avec $i \in [1; 10]$) du vecteur d'influence. Rappelons que ce vecteur d'influence est symétrique:

$$m_{N-i} = m_i \quad (1.24)$$

Par conséquent, les dix dernières composantes sont également sensibles. Pour résoudre le problème de stabilité, deux choix ont été faits. D'une part, les dix premières composantes (et par symétrie, les dix dernières) ont été calculées d'une manière différente de celle présentée dans l'appendice A. Au vu de l'Equation 1.18, il ressort que le noyau à appliquer sur la position du front est en $1/i^2$ où i est la distance entre le point courant et le point d'intégration. Nous avons donc choisi:

$$m_i = \frac{1}{i^2} \quad i \in [1; 10] \quad (1.25)$$

D'autre part, la composante m_N du vecteur d'influence est obtenue de sorte à respecter l'invariance par translation du noyau:

$$\sum_{i=1}^N m_i = 0 \quad \text{d'où} \quad m_N = -\sum_{i=1}^{N-1} m_i \quad (1.26)$$

14. Cette propriété résulte des conditions aux limites périodiques.

15. La pente est la dérivée de la position du front $\frac{\partial a}{\partial y}$.

L'avancée du front se fait par sauts successifs du point de rupture, d'un pas δy . Du fait qu'un seul point est rompu à la fois, la mise à jour des facteurs d'intensité de contrainte, est réalisée de la façon suivante:

$$K_i^{(après)} = K_i^{(avant)} + K_0 \left(1 + \frac{m_{i_c-i} \delta y}{2\pi} \right) \quad (1.27)$$

où i_c est l'abscisse du point de rupture. On constate que cette formulation présente un grand intérêt numérique puisque le vecteur d'influence n'est pas remis à jour. Il est, par conséquent, calculé une fois pour toute au début de la simulation avec une grande précision.

La méthodologie utilisée a été testée en comparant nos résultats avec ceux présentés par *Gao and Rice* [1989], dans quelques cas-test. Il s'agit de milieux homogènes par morceaux. Deux types de structures ont été imaginées: la juxtaposition de bandes de matériaux élastiques avec des facteurs d'intensité de contrainte critiques différents, ou l'inclusion de sphères résistantes dans une matrice plus fragile. Dans les deux cas, les résultats obtenus par la méthodologie numérique présentée ci-dessus, sont qualitativement comparables à ceux de *Gao and Rice* [1989]. La figure 1.2 illustre, par exemple, la propagation du front dans un milieu contenant des sphères résistantes¹⁶.

1.2.3 Propagation en régime permanent

Nous nous sommes intéressés à la propagation du front dans des matériaux hétérogènes. Le champ de facteurs d'intensité de contrainte critiques, $K_c(x, y)$ est alors choisi aléatoirement selon une distribution uniforme. Aucune corrélation spatiale n'est introduite à travers ces seuils de rupture.

16. Le facteur d'intensité critique est deux fois plus grand dans les sphères que dans la matrice.

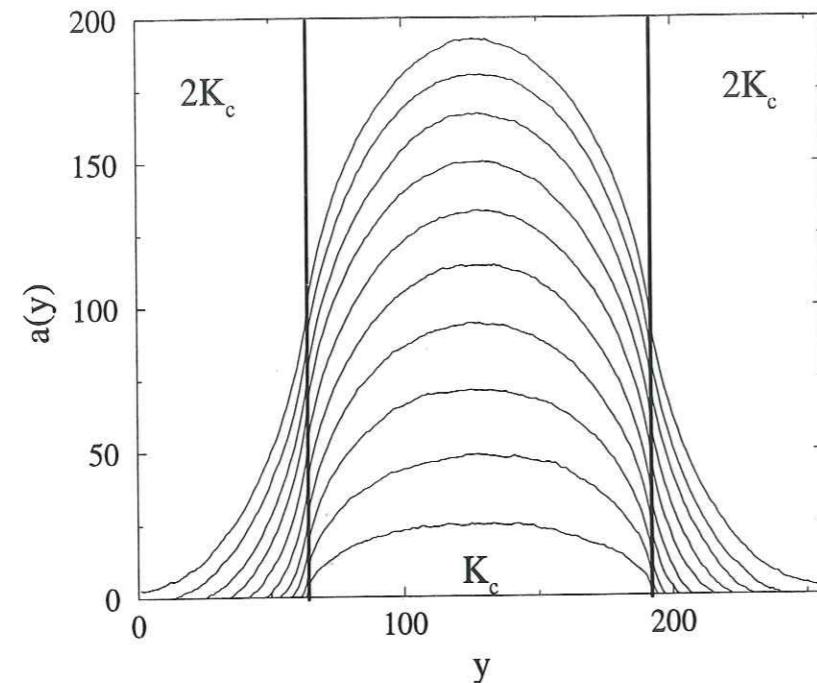


FIG. 1.2 - Propagation d'un front dans un milieu homogène contenant deux inclusions plus résistantes à la fracture. K_c y est deux fois plus élevé que dans le reste du milieu. La figure superpose différentes étapes de la propagation.

A l'initialisation, le front est supposé plat. La propagation présente deux régimes. Tout d'abord, la rugosité croît avec la position moyenne du front: $\langle a \rangle_y$. C'est le régime *transitoire*. Ensuite, l'amplitude de la rugosité est contrôlée par la taille du système et devient indépendante de la position moyenne du front $\langle a \rangle_y$. Cette deuxième phase est considérée comme le régime *permanent*. La démarche utilisée pour l'analyse de la propagation du front au cours des deux régimes est reprise de celle présentée par Roux and Hansen [1994].

Examinons à présent le régime permanent. Deux types de corrélations régissent ce régime.

1.2.3.1 Corrélations spatiales et analyse d'auto-affinité

Le front présente des fluctuations importantes (voir Annexe 2, Figure 2, page 227). L'analyse des corrélations spatiales existant dans la géométrie du front, est réalisée par les méthodes que nous avons détaillées au cours du chapitre 1 de la première partie: méthodes de fenêtres, probabilité de retour et spectre de Fourier. Nous mettons en évidence ainsi l'auto-affinité du front de fracture. L'exposant mesuré est: $\zeta = 0.35$ (voir Annexe 2, Figure 3, page 227). Cet exposant est à comparer avec celui obtenu par Roux and Hansen [1994]:

$\zeta = 1.2$. Les deux simulations diffèrent par la nature du noyau introduit dans le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Dans l'étude de Roux and Hansen [1994], le noyau est purement local. L'allure des profils est radicalement différente (voir Figure 1.3). La présence d'un noyau non local réduit sensiblement la valeur de l'exposant d'auto-affinité.

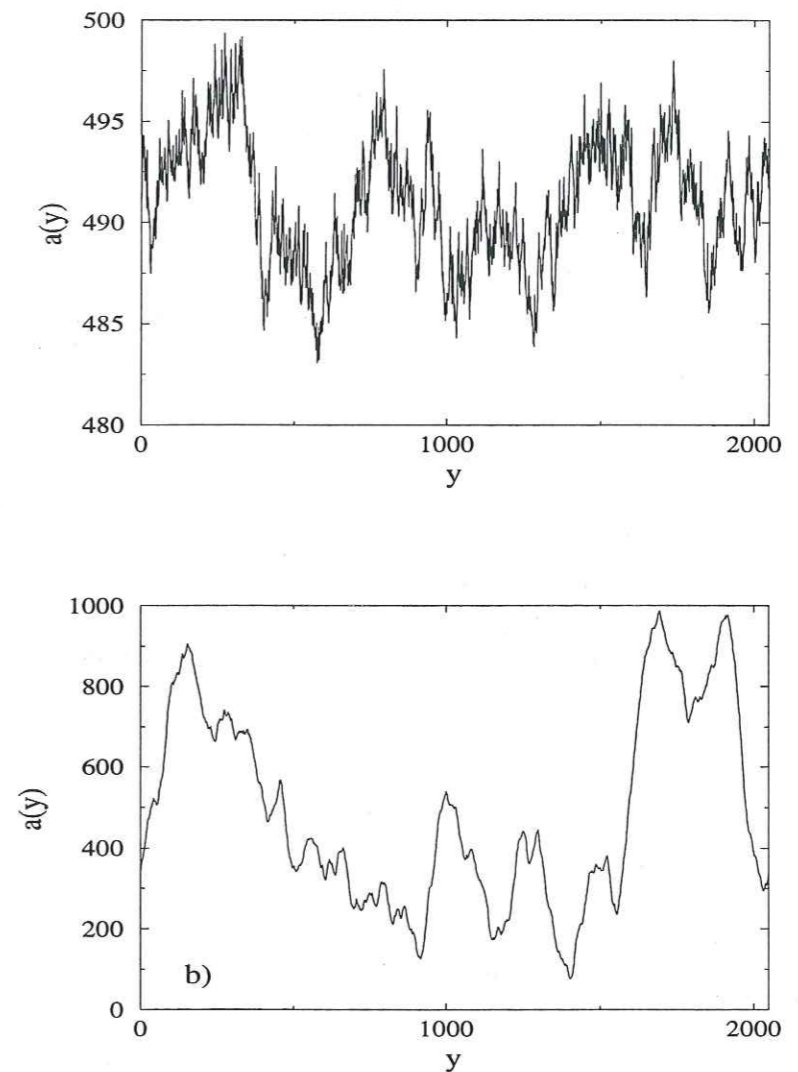


FIG. 1.3- Allure du front de fracture avec intégration d'un noyau à longue portée: $\zeta = 0.35$ (a) et d'un noyau local: $\zeta = 1.2$ (b).

L'ampleur des corrélations est bien plus grande lorsque le noyau est local. Le front apparaît alors avec une forme très «molle».

On peut comprendre cette observation en remarquant que, dans le cas local, une avancée du front entraîne un changement du facteur d'intensité de contrainte, uniquement

pour les premiers voisins. Ils vont être les meilleurs «candidats» aux ruptures suivantes. Le schéma d'avancée du front est donc séparé en deux phases. Tout d'abord, il apparaît une initiation en un certain endroit du front. Ensuite, le front se propage de proche en proche à partir de cette initiation. Puis émerge une nouvelle initiation, et ainsi de suite... Par conséquent, toute perturbation est accommodée sur de grandes distances. Le front est donc construit essentiellement à partir de grandes longueurs d'onde. Son exposant d'auto-affinité est élevé.

Dans le cas d'un noyau non local, le schéma général devient radicalement différent puisque la rupture en un point peut entraîner une modification sensible du facteur d'intensité de contrainte loin de cette zone de rupture (pas uniquement sur les premiers voisins). Toute perturbation initiée en un point du front a peu de chance de déclencher un mouvement majeur du front autour d'elle. En effet, un point du front situé loin de la perturbation peut voir son chargement atteindre le seuil de rupture et provoquer un saut de la zone active le long du front. La propagation est donc beaucoup plus sensible au désordre local, ce qui se traduit par des fluctuations plus grandes (modes à hautes fréquences). L'exposant d'auto-affinité est alors faible.

1.2.3.2 Corrélations temporelles et analyse de Furuberg

L'autre démarche consiste à s'intéresser aux corrélations temporelles¹⁷. Pour cela, nous étudions les corrélations qui existent entre les points successifs de rupture¹⁸. Cette analyse se base sur la méthode de Furuberg. Il s'agit d'étudier la distribution $f(d, \Delta t)$ des distances d , en termes de différence d'abscisse le long du profil, entre des points de rupture séparés d'un intervalle de temps Δt (voir Figure 1.4). La distribution peut se mettre sous la forme Roux and Hansen [1994]:

$$f(d, \Delta t) = \frac{1}{d} \phi\left(\frac{d}{\Delta t^{z'}}\right) \quad (1.28)$$

où z' est un coefficient «pseudo-dynamique» et ϕ est fonction décrite par:

$$\begin{cases} \phi(x) \propto x^a & \text{pour } x \ll 1 \\ \phi(x) \propto x^{-b} & \text{pour } x \gg 1 \end{cases} \quad (1.29)$$

17. La notion de temps, dans le problème quasistatique que nous présentons, est arbitraire. Il s'agit davantage de la distance par rapport à la position initiale du front.

18. Les différents points de rupture correspondent aux différentes zones actives du front.

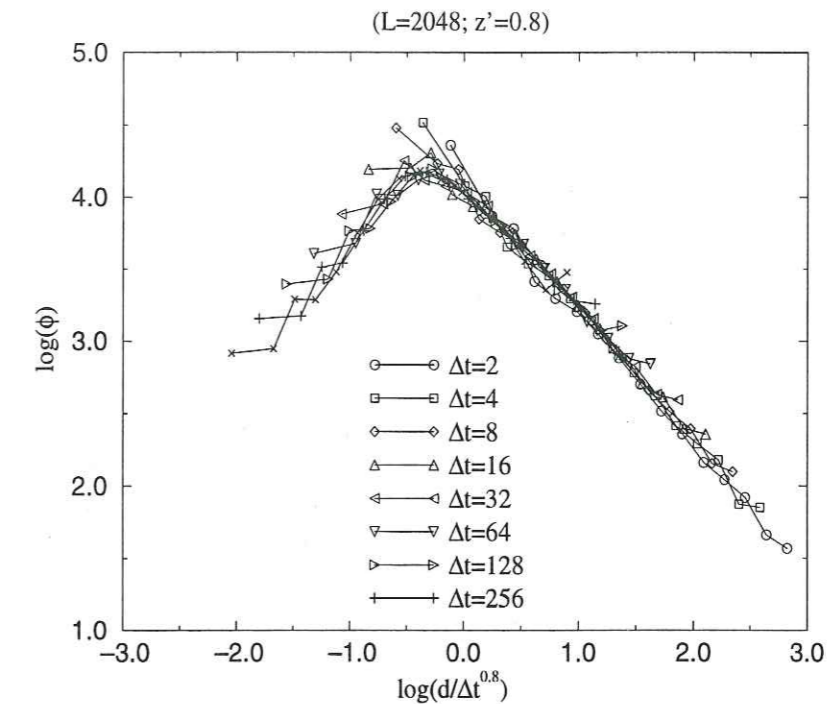


FIG. 1.4 - Analyse de Furuberg basée sur l'estimation de la distribution des distances entre points de rupture pour différents intervalles de temps.

Le coefficient z' décrit l'évolution des perturbations au cours du régime permanent. On le distingue du coefficient dynamique z présenté préalablement, car il décrit l'évolution des corrélations lorsque l'on introduit une perturbation dans le profil. Le coefficient dynamique z caractérise l'évolution des corrélations quand le front passe d'une forme imposée à l'échelle du système (forme rectiligne), à un état stationnaire. Nous mesurons numériquement:

$$z' \approx 0.80 \quad a \approx 1 \quad b \approx 0.90 \quad (1.30)$$

Ces valeurs sont également sensiblement plus faibles de celles obtenues pour un noyau local où l'on observe: $z' \approx 0.5$, $a \approx 1$ et $b \approx 1.90$.

1.2.4 Propagation en régime transitoire

Étudions, à présent, la phase transitoire. Nous utiliserons un outil comparable à celui de l'analyse expérimentale. Il s'agit du calcul de l'écart-type σ de la position du front:

$$\sigma(\langle a \rangle, L) = \frac{1}{N} \sum_L a(y_i)^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_L a(y_i) \right)^2 \quad (1.31)$$

Précisons que la position moyenne du front $\langle a \rangle$ correspond à la position x . A la différence de l'outil expérimental, la distance au bord d'initiation est définie comme la position moyenne du front et l'écart-type n'est calculé que pour une seule fenêtre dont la taille est égale à celle du système L . Au cours du régime transitoire, la rugosité, donc l'écart-type σ , croît avec l'avancée moyenne du front: x . Pour une taille de système donnée, l'écart-type présente deux régimes selon que la longueur de corrélation¹⁹ ξ a atteint ou non la taille du système. Cette longueur de corrélation est supposée évoluer en fonction de la position moyenne du front selon:

$$\xi \propto x^{1/z} \quad (1.32)$$

où z est le coefficient dynamique. Lorsque la longueur de corrélation est inférieure à la taille du système, l'écart-type est fonction de la distance au bord d'initiation. Au contraire, pour des longueurs de corrélation égale à cette taille, l'écart-type devient uniquement sensible à cette taille de système. L'évolution de σ est par conséquent donnée, pour un système de taille L , par:

$$\sigma(x, L) = L^\zeta \varphi\left(\frac{x}{L^z}\right) \quad (1.33)$$

où ζ est l'exposant d'auto-affinité. La fonction d'échelle φ se définit par:

$$\begin{cases} \varphi(t) \sim t^{\zeta/z} & \text{pour } t \ll 1 \quad (x \ll L^z) \\ \sim \text{cst.} & \text{pour } t \gg 1 \quad (x \gg L^z) \end{cases} \quad (1.34)$$

La vérification de l'hypothèse d'évolution du front par structuration progressive d'une géométrie auto-affine et la caractérisation de l'exposant dynamique²⁰, est faite à partir du calcul de la fonction d'échelle φ pour différentes positions d'avancée du profil et diverses tailles de système L . Il est possible d'obtenir un collapse de qualité des nombreuses courbes (voir Annexe 2, Figure 5, page 228). L'exposant mesuré est:

$$z = 0.65 \pm 0.05 \quad (1.35)$$

On en déduit que l'écart-type évolue dans la direction de propagation, pendant la phase de propagation, selon:

$$\sigma \propto x^{0.5} \quad (1.36)$$

Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons cherché à illustrer le lien qui peut exister entre la rugosité auto-affine des surfaces de fracture et le processus de fracturation. Nous avons abordé ce problème sous deux angles différents. Le premier est expérimental. Il s'agit de suivre l'évolution de la rugosité lors de l'initiation d'une fracture. La forme du front de fracture est imposée au départ. Le front se propage ensuite avec une vitesse qu'il nous est pas possible de contrôler. Lors de son passage, il développe une rugosité de

19. De la même façon que pour l'analyse expérimentale, la longueur de corrélation est définie comme la frontière entre les deux régimes.

20. la valeur de l'exposant d'auto-affinité ζ est supposée être la même que dans le régime permanent

plus en plus importante. Cette croissance est quantifiée à travers un exposant dynamique $z = 1.20 \pm 0.15$. L'exposant décrit l'évolution de la longueur de corrélation avec la distance au bord d'initiation.

L'autre approche est numérique. Elle cherche à modéliser la propagation d'un front de fracture dans un matériau hétérogène et à analyser les propriétés géométriques du front. Seule une première étape a été réalisée. Il s'agit de la modélisation d'une propagation plane (i.e. problème bidimensionnel) et quasi-statique. La particularité de ce calcul est de prendre soin de la description mécanique du front. Le facteur d'intensité de contrainte est obtenu par une représentation intégrale mettant en évidence un noyau à longue portée *Gao and Rice* [1989]. Dans ce cadre, nous obtenons deux régimes de propagation. Le premier correspond à une période où la longueur de corrélation est plus petite que la taille du système. Dans ce cas, la longueur de corrélation croît avec un exposant dynamique: $z = 0.65 \pm 0.05$. Le régime permanent (une fois la longueur de corrélation égale à la taille du système) présente un front auto-affine avec un exposant: $\zeta = 0.35 \pm 0.05$. Ces résultats sont significativement différents de ceux obtenus dans une étude analogue par *Roux and Hansen* [1994], avec un noyau purement local.

Le lien exact entre fracturation et auto-affinité de la surface de fracture est encore hors de portée pour le moment. L'étude expérimentale nous a permis de faire ressortir des paramètres directement comparables et donc utilisables dans les outils théoriques et numériques. Ces derniers fournissent des résultats fort intéressants en particulier sur l'influence des différents mécanismes en jeu, mais ne nous permettent pas encore de reproduire les observations faites. Il est donc nécessaire de poursuivre le travail en tenant compte de l'aspect dynamique ainsi que de la dimensionnalité du problème (modèle tridimensionnel). En effet, la rugosité de la surface de fracture mesurée est celle qui est perpendiculaire au plan moyen de la fracture. Un modèle bidimensionnel ne peut pas «produire» une telle rugosité. Par contre, il peut fournir des éléments quant au développement des corrélations spatiales à travers le coefficient dynamique, ainsi qu'une bonne description de corrélation temporelles au cours du régime à vitesse imposée.

Appendice A: Discrétisation du noyau intégral

Dans le cas d'une propagation de fracture par un front présentant une perturbation par rapport à une forme linéaire, le facteur d'intensité de contrainte peut être, en tout point y du front, mis sous la forme *Gao and Rice* [1989]:

$$K(x) = K_0 \left(1 + \frac{1}{2\pi} p.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da/dy'}{y' - y} dy' \right) \quad (1.37)$$

L'objectif est de trouver une forme discrétisée du noyau intégral. Le front de rupture est discrétisé en N points. Le facteur d'intensité de contrainte au point i s'écrit alors:

$$K_i = K_0 \left(1 + \frac{I_i}{2\pi} \right) \quad (1.38)$$

où I_i représente la forme discrétisée de la partie principale de l'intégrale:

$$I_i = \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq i}}^{j=\infty} \frac{p_i}{j - i} \quad (1.39)$$

où i est la position du point du point i , j celle du point courant j et p_i la pente au point i le long du front. Un simple changement de variables permet d'obtenir:

$$I_i = \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{j=\infty} \frac{p_{i+j}}{j} \quad (1.40)$$

On introduit une coupure C de sorte que:

$$I_i = \sum_{\substack{j=-C \\ j \neq 0}}^{j=C} \frac{p_{i+j}}{j} \quad (1.41)$$

Nous supposons que les conditions aux limites du problème sont périodiques. Par conséquent, la taille N est une période:

$$p_{i+j+kN} = p_{i+j} \quad (1.42)$$

On sépare à présent la sommation en deux parties pour faire ressortir une somme sur le front comprenant N points, en utilisant (1.42):

$$I_i = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=-\frac{C}{N}-1}^{k=\frac{C}{N}-1} \frac{1}{kN + j} \right) p_{i+j} \quad (1.43)$$

Si on pose:

$$M_j = \sum_{k=-\frac{C}{N}-1}^{k=\frac{C}{N}-1} \frac{1}{kN + j} \quad (1.44)$$

on peut alors écrire simplement la forme de I_i :

$$I_i = \sum_{j=1}^N M_j p_{i+j} \quad (1.45)$$

Une des difficultés restantes réside dans l'estimation de la pente locale p_i . Nous avons choisi de définir la pente par:

$$p_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} \quad (1.46)$$

où y_i est la position d'avancée du front. Il vient alors simplement:

$$I_i = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{N+1} M_{j-1} - \sum_{j=0}^{N-1} M_{j+1} \right) y_{i+j} \quad (1.47)$$

En introduisant les notations:

$$\begin{cases} M_0 = M_N \\ M_{N+1} = M_1 \end{cases} \quad m_i = \frac{M_{i-1} - M_{i+1}}{2} \quad (1.48)$$

nous obtenons la forme discrétisée du noyau intégral:

$$I_i = \sum_{j=1}^N m_j y_{i+j} \quad (1.49)$$

Annexe 1

Development of roughness in crack propagation
J. Schmittbuhl, S. Roux and Y. Berthaud

A paraître dans: *Europhysical Letters*

DEVELOPMENT OF ROUGHNESS IN CRACK PROPAGATION

Jean SCHMITTBUHLLaboratoire de Géologie, École Normale Supérieure,
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.**Stéphane ROUX**Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes,
École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles,
10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France.**Yves BERTHAUD**Laboratoire de Mécanique et Technologie,
École Normale Supérieure de Cachan,
61 Avenue du Président Wilson, 94230 Cachan Cedex, France.

ABSTRACT: We report on the statistical analysis of experimental measurements of the crack roughness for a fracture initiated from a straight notch in a granite sample. The crack surface is shown to develop a self-affine character over a correlation length ξ which depends on the distance to the notch y as a power-law $\xi \propto y^\alpha$ characterized by a dynamic exponent $1/\alpha$ estimated to be 1.2 ± 0.15 . The self-affine roughness exponent below the correlation length is found to be 0.80 ± 0.05 . The scaling is obtained from two maps of the surface, consisting each in more than 10^5 data points.

Starting from the pioneer work of Mandelbrot *et al.*¹, there has been numerous works focusing on a statistical characterisation of the roughness of cracks (see Refs. 2, 3, 4 for reviews). Scale invariance has been evidenced in a number of cases 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 6, 17, 18, 19, 20. It is now firmly established that the topography of crack surfaces can be described as self-affine. Many different materials have been investigated, with different fracture behaviors from ductile to brittle, at very different scales from nanometer scale using atomic force or scanning tunneling microscopy^{5, 6}, micron to centimeter scale using profilometry measurements on a variety of materials^{7, 8, 9}, image analysis techniques^{1, 10, 11, 12, 13} or other techniques¹⁴, meter^{15, 6} and up to kilometer scale¹⁷ for geological faults.

The initial hope in measuring the surface topography was to relate this geometrical information to mechanical properties (such as toughness¹) or to material characterization. However, some technical difficulties are related to the determination of the roughness exponent of a self-affine surface, and some often used tools — in particular those developed for isotropic fractals — may lead to biased measurements¹⁰. A critical analysis of the early published data, as well as more recent experimental data analysis, shows that in many cases the range of reported values for the roughness exponents was of extent comparable to real uncertainty. Subsequently, the roughness exponent was proposed to be universal^{7, 4, 22}. Although some measurements are in conflict with this conjecture, the amount of data which supports it is so large that the question is more to identify the parameters which eventually limit the validity of this law than to falsify it. In three dimensions, this exponent ζ amounts to $\zeta_{3d} \approx 0.80 \pm 0.057$,⁴ whereas for two-dimensional systems it assumes a lower value $\zeta_{2d} \approx 0.66 \pm 0.059$,^{13, 20}

While experimental and numerical results seem to converge to the above results, there is at present a very poor understanding of this property in spite of its broad range of

validity. In two dimensions, an analogy with perfect plasticity has been proposed which accounts for the value of the roughness exponent, $\zeta_{2d} = 2/3$, through a mapping²² between the latter problem and the conformation of directed polymers in a random medium at zero temperature²³. However, the three dimensional generalization of this argument to minimal surfaces gives an exponent about 0.5 or less²⁴ which is much too small compared to the observed value. An interesting approach has been proposed recently by Bouchaud *et al.*²⁶. The crack surface is considered as the trace of the crack front whose propagation is modelled by a non-linear Langevin equation. The latter, constructed on the basis of respecting all symmetries of the system, has to be identical to the one originally proposed by Ertaş and Kardar²⁷ for vortex line motion in superconductors. However, in spite of a rich phase diagram, most regions of the phase space give a roughness exponent which is somewhat smaller than the measured value. Moreover, in many cases, the surface roughness is not isotropic in the mean surface plane.

Many other models, in particular for interfacial growth, have been studied recently^{4, 28} and a general scaling law for the development of the roughness has been established. Such a law is also relevant for both previously mentioned models: perfect plasticity and vortex lines. A selected set of articles focusing on this property has been recently collected and published²⁹. The aim of this paper is to go beyond the characterization of fully developed roughness, and to analyse the development of the roughness from a border where a straight notch imposes a zero roughness. We will show that the fracture roughness obeys a scaling law comparable to the ones of the above mentioned growth models.

This property leads naturally to the introduction of a correlation length ξ which governs the largest scale over which correlations have developed parallel to the initial border. More precisely, below the scale ξ , the surface appears as self-affine with an exponent ζ . Above this scale, the height can

be considered as uncorrelated, with the same statistical distribution. The observed scaling provides a power-law relation between the correlation length and the distance to the notch.

The system on which the analysis is performed is a parallelepipedic block of granite of size 25cm×25cm×12cm. Two straight notches were first sawn on two opposite faces of the sample using a diamond saw. The one where the fracture is initiated is 2mm deep with a triangular profile. The opposite one is shallow and its role is simply to direct the crack in the late stage of the crack propagation. The fracture has then been produced by the impact of a massive steel blade along the notch of initiation producing essentially a single crack. No fragments were observed to detach from the main crack. From direct observation of the crack surface it was not possible to distinguish the direction of propagation.

The analysis of the fracture roughness is based on the measurement of the surface topography $z(x, y)$ using a mechanical profilometer. The latter consists of a 50 μ m radius stylus which probes the surface vertically (along the z axis). A contact is detected by an induction cell mounted on the support of the stylus. Displacements along x and y were imposed by two high-precision step motors monitored by a PC. The accuracy and reproducibility of the apparatus was tested by measuring the same profile after a long series of intermediate displacements. We estimated the accuracy to be of 2 μ m along x , 5 μ m along y and 5 μ m along z .

Three maps of a hundred profiles parallel to the notch of initiation (parallel to x) were measured. One of them is shown on Figure 1. Two maps are built according to a regular grid. The spacing along the x -axis between the 1050 points is $\delta x = 50\mu$ m. The distance between profiles (y -axis) is $y = 350\mu$ m. So that a total of about 10^5 data points were collected to extract a map of the surface close to the notch. The total extent of the probed area was thus 5cm×4cm, i.e. much smaller than the available area. The third

map is sampled with a non regular grid in order to focus on the area very close to the initiation of the fracture. The spacing follows an arithmetic series. The x step for this map is $\delta x = 80\mu$ m and the measured zone is 8cm×4cm. For all maps the maximum distance of the profiles to the notch was chosen to be small enough so that the facing notch was not sensitive.

We follow the formalism applied to growth models²⁹ and define the roughness $\sigma(y, \Delta)$ over a window size Δ along x as

$$\sigma(y, \Delta)^2 = \left\langle \left(\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{\Delta} z(x_i, y) \right)^2 - \left(\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{\Delta} z(x_i, y) \right) \right\rangle_j \quad (1)$$

where the brackets $\langle \dots \rangle$ stand for an average over the position of the window j . The expected behavior is

$$\sigma(y, \Delta) = \Delta^\zeta \varphi(y/\Delta^{1/\alpha}) \quad (2)$$

where the scaling function assumes the following behaviors

$$\begin{cases} \varphi(x) \sim x^{\zeta\alpha} & \text{for } x \ll 1 \\ \sim cst. & \text{for } x \gg 1 \end{cases} \quad (3)$$

Thus at a large distance from the border, the roughness is only dependent on the window size as $\sigma \propto \Delta^\zeta$. This reveals a self-affine character of the crack surface with a roughness exponent ζ .

On the opposite, for a small distance y , the roughness no longer increases when the window size exceeds a correlation length $\xi \propto y^\alpha$. Therefore for large window sizes, the roughness of the crack varies with y as

$$\sigma \propto y^{\zeta\alpha} \quad (4)$$

In order to check the validity of the scaling form (2), we plotted $\sigma(y, \Delta)/\Delta^\zeta$ vs. $y/\Delta^{1/\alpha}$ as shown in Figure 2a and 2b for two different maps. Due to the difficulty of measuring profiles extremely close to the notch, and because of the roughness of the notch itself, we introduced as a free parameter the origin y_0 of the y axis. However, this parameter was only varied in a small interval $\pm 3 \delta x$

which was checked to be consistent with the experimental set-up. For clarity only a small subset of data is shown on each graph. In order to obtain a plot similar to Fig. 2, we have to impose trial values of the exponents α and ζ . The latter exponent $\zeta = 0.80 \pm 0.05$ was measured independently on profilometry measurements — not reported here — performed at large distances from the boundaries. The α exponent as well as the offset y_0 were estimated by looking for the best data collapse. We also checked that treating ζ as an unknown parameter yield the same results.

Once the two exponents and the offset are fixed, as in Figure 2, the data collapse on the scaling function φ . We can thus check self-consistently the scaling behavior (3) by fitting the φ evolution on both sides of the cross-over point. We have drawn a power-law of exponent $\alpha\zeta$ as a guide to the eye for small window sizes. For large arguments, the scaling function should behave like a constant. Both behaviors appear to be consistent with the data using the determined exponents.

This data collapse procedure was also tested blindly on a well documented model which is known to display a similar property, the free energy landscape of directed polymers (DP) (along y) attached to a straight line at $y = 0$. A similar amount of data was generated (100 profiles of 1024 points each), and α and ζ were measured using the same data collapse procedure. We measured $\alpha = 0.65$ and $\zeta = 0.45$, values which are consistent with the known exponents $\alpha = 2/3$ and $\zeta = 1/2$. A similar scatter of data was observed in the DP problem and the crack roughness.

We do not address here the question of the origin of this dynamical scaling. It is indeed possible that the velocity at which the crack front advances also affects the development of the crack roughness. For homogeneous materials such as PMMA or glass it has been reported^{30, 31} that the surface structure depends on the crack velocity. Since the crack velocity depends on the crack location in the first acceleration phase, it cannot

be excluded that the dynamical exponent we measure here combines a roughness-velocity dependence with the acceleration of the crack front. An analysis along these lines has been very recently proposed by Bouchaud and Navéos³². Nevertheless, in the two limit cases where the crack velocity can be considered as constant, i.e. in a quasistatic crack propagation, or in a very fast fracture where the crack velocity saturates to a constant value, one expects that the roughness depends on the distance to the notch. Therefore presumably in the most general case, a combination of the crack position and the crack velocity should govern the geometrical structure of the fracture surface.

From the analysis of a crack surface starting from a straight notch, we have obtained for the first time a scaling law for describing the growth of roughness of the crack surface which indicates the existence of a correlation length with growth as a power-law of the distance to the notch. The dynamic exponent which governs this growth is $1/\alpha \approx 1.2 \pm 0.15$.

This new result constitutes an additional property which should be recovered in models which attempts to describe the crack propagation e.g. through a Langevin approach. It would be very interesting to test the above results on other materials, other scales, and other fracture modes so as to probe its universality which is expected to be comparable to that of the ζ exponent, and to investigate the role of the crack velocity.

We thank E. Bouchaud, A. Hansen, H. J. Herrmann, J. P. Hulin, K. J. Måløy, F. Plouraboué and J.P. Vilotte for useful discussions. This work has been supported by the Groupement de Recherche CNRS "Physique des Milieux Hétérogènes Complexes" and the "Géoproge" program.

References

- [1] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja, and A. J. Paullay, *Nature* **308**, 721 (1984).

- [2] R. H. Dauskardt, F. Haubensak, and R. O. Ritchie, *Acta Metall. Mater.* **38**, 143 (1990).
- [3] B. L. Cox and J. S. Y. Wang, *Fractals* **1**, 87 (1993).
- [4] P. Meakin, *Phys. Rep.* **235**, 189 (1993).
- [5] D. M. Kulawansa *et al.*, *J. Mater. Res.* **9**, 476 (1994).
- [6] V. Y. Milman, R. Blumenfeld, N. A. Stelmashenko, and R. C. Ball, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 204 (1993).
- [7] K. J. Måløy, A. Hansen, E. L. Hinrichsen, and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 213 (1992).
- [8] J. Schmittbuhl, F. Schmitt, and C. H. Scholz, preprint (unpublished).
- [9] T. Engøy, K. J. Måløy, A. Hansen, and S. Roux, preprint (unpublished).
- [10] E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planès, *Europhys. Lett.* **13**, 73 (1990).
- [11] J. J. Mecholsky, D. E. Passoja, and K. S. Feinberg-Ringel, *J. Am. Ceram. Soc.* **72**, 60 (1989).
- [12] J. J. Friel and C. S. Pandle, *J. Mater. Res.* **8**, 100 (1993).
- [13] J. Kertész, V. Horváth, and F. Weber, *Fractals* **1**, 67 (1993).
- [14] A. Imre, T. Pajkossy, and L. Nyikos, *Acta Metall. Mater.* **40**, 1819 (1992).
- [15] S. R. Brown and C. H. Scholz, *J. Geophys. Res.* **90**, 12575 (1985).
- [16] J. Schmittbuhl, S. Gentier, and S. Roux, *Geophys. Res. Lett.* **20**, 639 (1993).
- [17] W. L. Power *et al.*, *Geophys. Res. Lett.* **14**, 29 (1987).
- [18] A. Chudnovsky and B. Kunin, *J. Appl. Phys.* **62**, 4124 (1987).
- [19] Z. Q. Mu and C. W. Lung, *J. Phys. D : Applied Physics* **21**, 848 (1988).
- [20] C. Poirier, M. Ammi, and J. P. Troadec, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 216 (1992).
- [21] J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, and S. Roux, to appear in *Phys. Rev. E*.
- [22] A. Hansen, E. L. Hinrichsen, and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2476 (1991).
- [23] D. A. Huse, C. Henley, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2924 (1985).
- [24] M. Kardar and Y. C. Zhang, *Europhys. Lett.* **8**, 233 (1989).
- [25] E. Bouchaud, G. Lapasset, J. Planès, and S. Naveos, *Phys. Rev. B* **48**, 2917 (1993).
- [26] J. P. Bouchaud, E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planès, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2240 (1993).
- [27] D. Ertas and M. Kardar, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 929 (1992).
- [28] T. Vicsek, *Fractal growth phenomena*, 2 ed. (World Sci. Pub., Singapore, 1992).
- [29] F. Family and T. Vicsek, *Dynamic of fractal surfaces* (World Sci. Pub., Singapore, 1991).
- [30] S. P. Gross, J. Fineberg, M. Marder, W. D. McCormick and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3162, (1994).
- [31] S. Ciliberto, Private communication
- [32] E. Bouchaud and S. Navéos, preprint

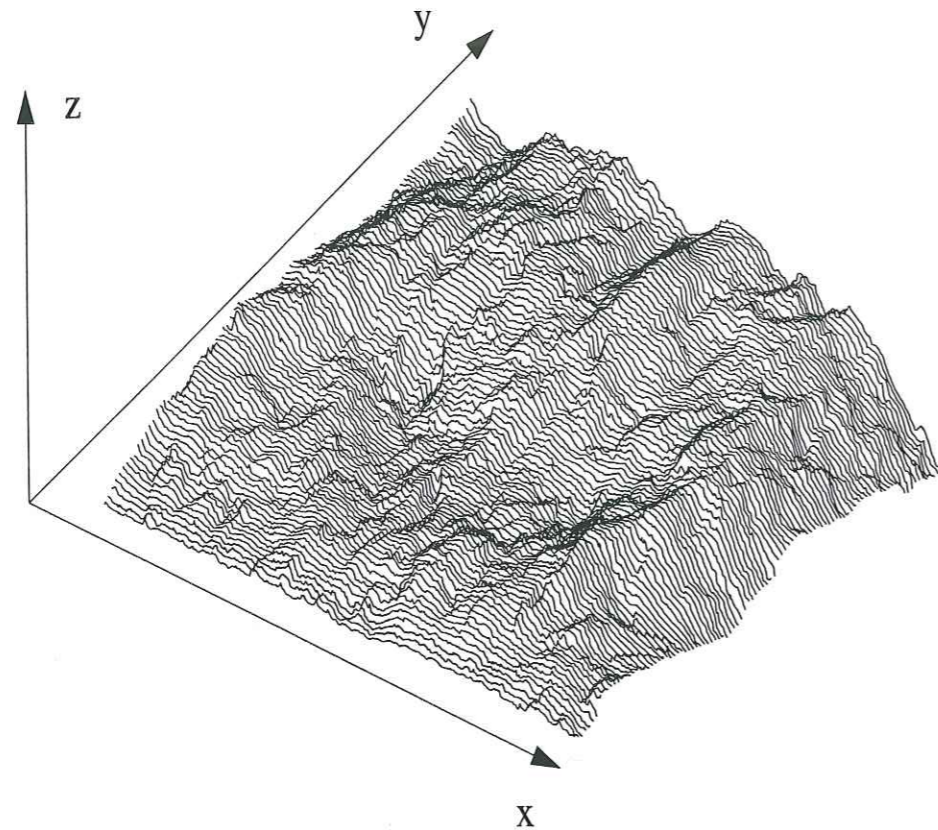


Figure 1: Map of the crack surface close to the notch. The notch was initially sawn along the x axis close to $y = 0$ $z = 0$. As the distance to the notch y increases, the roughness develops.

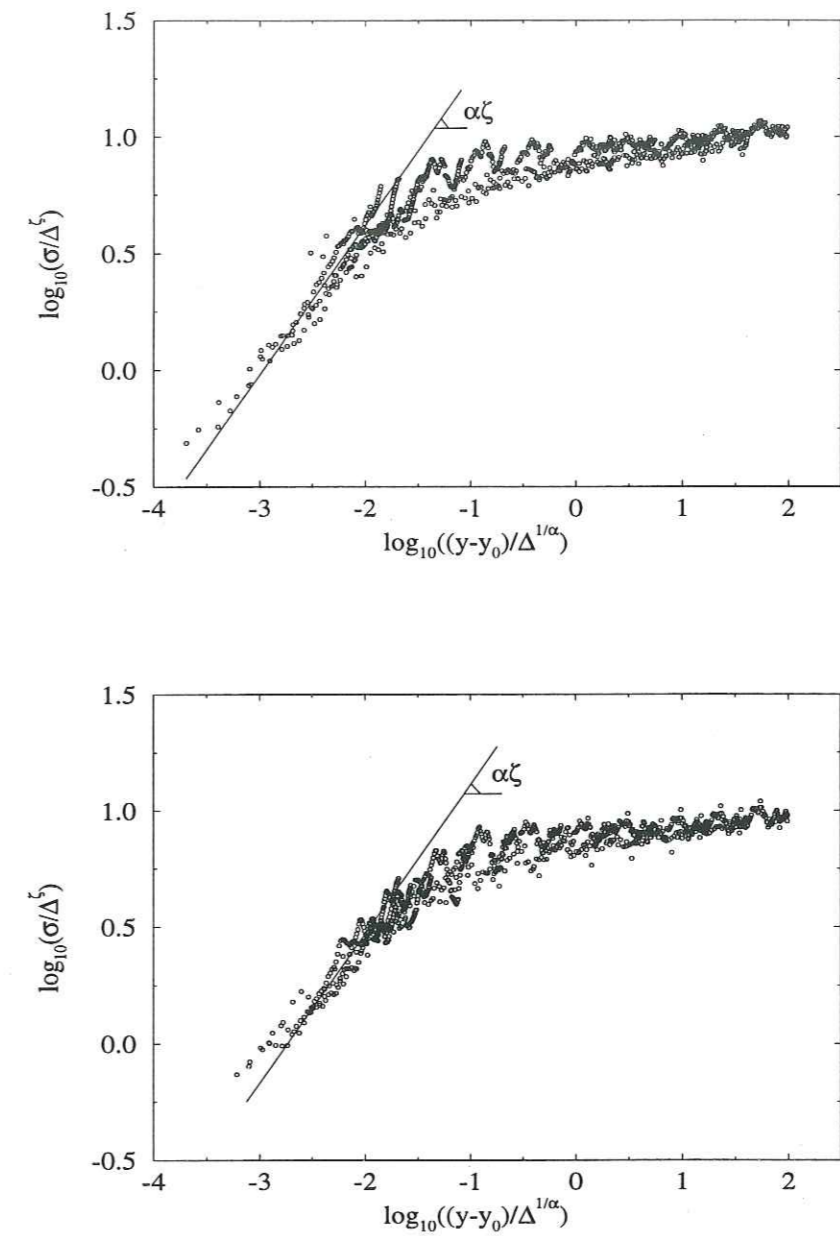


Figure 2: On figure 2a is plotted the data collapse of the roughness $\sigma(y, \Delta)/\Delta^\zeta$ over a window of size Δ along the x axis *vs.* the rescaled border distance $y/\Delta^{1/\alpha}$ for various window sizes Δ . Figure 2b is the same as Fig. 2a for a different map.

Annexe 2

Pinning of interfaces: effect of non local interactions
J. Schmittbuhl, S. Roux, J.P. Vilotte and K.J. Måløy

Soumis au: *Physical Review Letters*

PINNING OF INTERFACES: EFFECT OF NON-LOCAL INTERACTIONS

Jean SCHMITTBUHL

Laboratoire de Géologie,
 École Normale Supérieure,
 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

Stéphane ROUX

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes,
 École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles,
 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France.

Jean-Pierre VILOTTE

Laboratoire de Géologie,
 École Normale Supérieure,
 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

Knut Jurgen MÅLØY

Fysisk Institutt,
 Universitetet i Oslo,
 P. O. Boks 1048 Blindern, N-0316 Oslo 3, Norway.

ABSTRACT: We propose a perturbative approach to describe the evolution of an interfacial crack between two elastic solids with a quenched disorder. The driving force is the stress intensity factor along the crack front. The latter is expressed as a function of the entire crack geometry through a linear convolution with a long-ranged kernel using a first order approximation developed by Gao and Rice¹⁷. The resulting problem is studied numerically and is shown to give rise to self-affine geometries with a roughness exponent $\zeta = 0.35$ and a dynamic exponent $z = 1.5$ very different from the corresponding exponents obtained with a local form of the driving force.

27 AOÛT 2003

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
 MAISON DES GEOSCIENCES
 DOCUMENTATION
 B.P. 53
 F. 38041 GRENOBLE CEDEX
 Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
 Mail: ptalour@ujf-grenoble.fr

Numerous studies have reported on the geometrical properties of crack surfaces, and shown in particular the apparent universality of the self-affine properties for three1, 2, 3 and two dimensional4 cracks experimentally, and numerically in discrete models of fracture5, 6. The development of this roughness from a straight notch7 has shown that the scaling tools developed for stochastic growth models8 can be applied successfully. Moreover, recent studies9 have focussed on a theoretical analysis of the effect of heterogeneities in the crack plane on *dynamic* fracture propagation. However, no proper understanding of these properties has emerged yet.

Simultaneously, a lot of progress has been achieved to describe interface pinning by random impurities in the field of non-equilibrium statistical mechanics. A recent review10 covers most recent developments. Therefore, it is natural to search for a connection between these two problems.

A first hint in this direction has been proposed recently by Bouchaud et al11 using a phenomenological approach. They proposed to see the crack surface as the trace left in space by the crack front during its propagation. The latter was proposed to be described by a non-linear Langevin equation, keeping only the terms which are allowed by the symmetry of the system. Such an approach leads to a set of equations already considered by Ertas and Kardar12 in a very different framework, namely the depinning of vortex lines in superconductors. Unfortunately, the scaling exponents obtained in such a model are clearly different from those observed in fracture surfaces.

Two weak points can be identified in this interesting model. First, the nature of the noise which in most cases should be described as a quenched noise (i.e. dependent on the space coordinate, but independent of time). In a simple Langevin equation, introduced and solved with an annealed noise by Edwards and Wilkinson13, it has been shown recently14 that if the noise is quenched, the scaling exponents of the model are significantly altered (the roughness expo-

nent changes from $\zeta = 1/2$ for an annealed noise to $\zeta \approx 1.2$ for a quenched noise). The second criticism is about the assumption that the Langevin equation should be local (i.e. the rate of propagation of the crack at one point is only dependent on the crack geometry — position, slope, curvature ... — at the same point). This is in general not justified as we will see below, and again it can lead to drastic changes in the scaling exponents.

In this letter, we propose to study a simpler problem, but using a more rigorous foundation. We consider an interfacial crack which propagates along a perfect plane $z = 0$, between two elastic solids having the same elastic properties as shown schematically in Figure 1. No roughness is left behind the crack (the crack surface is $z = 0$). However the crack front will acquire some tortuosity in the plane as it propagates if the interface is heterogeneous.

In order to characterize locally the heterogeneity of the interface, we introduce the local toughness $K_c(x, y)$ as a quenched disorder. K_c is assumed to be equal to a constant K_c^0 plus an uncorrelated fluctuation δK_c of small amplitude with respect to K_c^0 .

In the case of a straight crack front, the stress field in mode I is the well-known solution of Irwin16. It is a singular field which diverges as $K/(2\pi\sqrt{r})$ at a distance r from the crack tip. If the crack front $y(x)$ is slightly distorted from a strictly linear geometry, Rice and Gao17 have solved to first order in perturbation the stress intensity factor along the crack front. They have shown that $K(x)$ can be written as

$$\frac{K(x)}{K_0} = 1 + \frac{1}{2\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y(x') - y(x))}{(x' - x)^2} dx', \quad (1)$$

where K_0 is the stress intensity factor which would result if the crack was straight under the same loading conditions at infinity. *p.v.* denotes principal value.

It is worth noting an interesting parallel which can be drawn between the crack propagation problem, and the quasistatic spreading of a partially wetting liquid on an heterogeneous plane. The displacement of a contact

line is controlled by a local capillary force which is a non-local function of the entire contact line. Moreover, the functional dependence of the local capillary force on the contact line geometry has precisely the same form18, 19 as Eq.(1). This effect is specific from three dimensional geometries, through which interactions are mediated. In a confined two-dimensional geometry (Hele-Shaw cell), the kernel becomes local, i.e. the local capillary force is proportional to the local curvature of the contact line. A qualitatively similar change of dimensionality would also occur for a crack propagating between two thin plates.

From fracture mechanics, we know that the criterion for the propagation of the crack is $K \geq K_c$. Moreover, in order to simplify the model we assume that the propagation is quasistatic. To insure this condition, we introduce a simple rule for the propagation inspired from recent studies14, 15 on the role of quenched noise in some model Langevin equations. At each step of the computation, we look for the first site which will move if the loading is increased from 0. This site x^* is such that

$$K(x^*) - K_c(x^*, y(x^*)) = \max_x (K(x) - K_c(x, y)) \quad (2)$$

Once this site has been identified, the crack front is advanced locally by a random amount dy uniformly sampled in the interval $[0, 1]$, $y(x^*) \rightarrow y(x^*) + dy$. At the same time, the local toughness at this site is changed since it is assumed to be dependent on x and y . Because the disorder is spatially uncorrelated the new toughness is chosen randomly from a prescribed distribution.

The definition of this model is almost identical to the one studied in Ref.14, with only one difference on the expression of the local driving force. In the latter reference, the equivalent to the stress intensity factor was a capillary force acting on a wettability heterogeneity. Therefore, the local force was simply proportional to the local curvature of the interface, and thus due to the choice of focusing on the first order terms, the curvature was computed from the second

derivative. We will see in the following that this leads to severe differences in the scaling properties of the model. Let us also note that the very same model was also considered by Galluccio and Zhang20 including a first non-linear term in the expression of the curvature. This choice was legitimated by known results on the annealed disorder case where the introduction of such a non-linear contribution (square of the slope of the profile) transforms the Edwards-Wilkinson model into the celebrated Kardar-Parisi-Zhang21 equation which display different scaling properties.

The geometry used in our numerical simulations is periodic along the mean direction of the crack front (i.e. x -direction). This requires a resummation of the non-local kernel over all periods, but does not involve any difficulty. The discretization of the front is more subtle. It is imperative that the front has a continuous derivative. A naive discretization is first incompatible with the assumption of the perturbation computation, and second it leads to spurious unstable local modes where a single spike grows without limit. This latter effect is quite similar to the one observed in Ref.20.

Let us now turn to a discussion of the results obtained in the numerical simulations. Two regimes appear successively as in most growth models8. First, the crack develops some roughness which increases with the crack mean position $\langle y \rangle$. Then the roughness is limited by the system size and it becomes statistically independent of $\langle y \rangle$.

We first focus on this steady-state regime where the geometry can be characterized using the standard tools applied in growth models (see e.g. Ref.10). A typical example of a front is shown in Figure 2. The power spectrum of the front position $P(k)$ averaged over 1000 samples, is shown in Figure 3, and reveals a power-law behavior $P(k) \propto k^{-1-2\zeta}$ which means that the front is self-affine with a Hurst or roughness exponent $\zeta \approx 0.35 \pm 0.05$. Such a result can also be confirmed through the analysis of the height deviation σ over varying size windows δ , where $\sigma \propto \delta^\zeta$. The latter method gives an

estimate of $\zeta \approx 0.4 \pm 0.1$. A value which is also confirmed by an analysis based on the return probability method. In the case where the interaction kernel is purely local — driving force proportional to the local curvature of the front — the roughness exponent is equal to $\zeta \approx 1.2$, almost three times as large as in the non-local case.

The time evolution in this steady-state regime is highly structured. The spatial distribution of active sites as a function of the mean crack advance displays a hierarchical cluster structure, which can be qualitatively compared to similar active sites in other growth models such as those reported in Ref.14. These correlations in the succession of active sites can be partly analyzed through the probability distribution $p(d)$ of the distance d between two consecutive active sites, $d = |x(t+1) - x(t)|$. Figure 4 shows that $p(d)$ decreases as a power-law $p(d,1) \propto d^{-(b+1)}$ where $b = 0.90 \pm 0.05$. Again the b exponent in the model where the driving force is local is strongly different $b \approx 1.87$.

In order to model completely the scaling properties of the roughness, one needs two exponents. The first is the roughness exponent in the steady state, and the other — the *dynamic* exponent z — gives the time development of the front fluctuations. More precisely if $\sigma(L)$ is the standard deviation of $y(x)$ over the entire system size, one expects the following scaling

$$\sigma(\bar{y}, L) = L^\zeta \varphi\left(\frac{\bar{y}}{L^{1/z}}\right) \quad (3)$$

where \bar{y} is the averaged position of the front.

At early stages $\bar{y} \ll L^{1/z}$, the fluctuations in height are not dependent on the system size and thus $\varphi(x) \propto x^\zeta$. On the other limit, for large times, the fluctuations σ are no longer dependent of the front position, so that $\varphi(x) \propto x^0$.

This scaling has been verified by analyzing the early time evolution of the standard deviation $\sigma(L)$ for different system sizes L from 32 to 1024, using respectively 10^4 to 10^2 independent realizations. The result is shown in Figure 5 where the function φ is

plotted for all these cases. The good collapse obtained here allows the accurate determination of the scaling exponents, $z = 1.5 \pm 0.1$ and $\zeta = 0.35 \pm 0.05$, the latter is very consistent with the previous analyses of the Hurst exponent in the stationary regime. This leads to $\varphi(x) \propto x^{0.5}$ in the early time regime, which is well observed in Figure 5.

This study underlines the importance of an infinite medium surrounding the interface where all activity takes place. This medium has the only role of mediating the interactions between different regions of the front giving rise to a non-local dependence of the driving force on the front geometry. We have shown that this non-locality can drastically alter the scaling properties of the front geometry, and hence it cannot be neglected. We have mostly considered an elastic crack problem, and mentioned the analogy with a wetting problem in three dimensions, but the problem at hand is much more general and it can be extended to other cases as soon as Green functions for the homogeneous problem are available.

It is a pleasure to thank A. Hansen, R. Madariaga, J. R. Rice, Y. C. Zhang for interesting discussions. We acknowledge the support of the "Groupement de Recherche" "Physique des Milieux Hétérogènes Complexes". The LG and LPMMH are Unités de Recherche Associées au Centre Nationale de la Recherche Scientifique n° 1316 and n° 857 respectively.

References

- [1] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja, and A. J. Paullay, *Nature* **308**, 721 (1984).
- [2] P. Meakin, *Phys. Rep.* **235**, 191 (1993).
- [3] K.J. Måløy, A. Hansen, E.L. Hinrichsen, and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 213, 1992.
- [4] J. Kertész, V. Horváth, and F. Weber, *Fractals* **1**, 67 (1993); T. Engøy, K. J. Måløy, A. Hansen and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* to appear.
- [5] Y. Termonia and P. Meakin, *Nature* **320**, 429, (1986)
- [6] A. Hansen, E. L. Hinrichsen and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2476, (1991)
- [7] J. Schmittbuhl, S. Roux and Y. Berthaud, preprint
- [8] F. Family and T. Vicsek, *Dynamic of fractal surfaces* (World Sci. Pub., Singapore, 1991).
- [9] J. R. Rice, Y. Ben-Zion, and K. S. Kim, *J. Mech. Phys. Solids* (to appear); G. Perrin and J. R. Rice, *J. Mech. Phys. Solids* (to appear)
- [10] T. Halpin-Healy and Y. C. Zhang, *Phys. Rep.* (to appear)
- [11] J. P. Bouchaud, E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planès, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2240 (1993).
- [12] D. Ertas and M. Kardar, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 929, (1992); *ibid.*, *Phys. Rev. E* **48**, 1228, (1993)
- [13] S. F. Edwards and D. R. Wilkinson, *Proc. Roy. Soc. A* **381**, 17, (1982)
- [14] S. Roux and A. Hansen, *J. Physique* **4**, 515, (1994)
- [15] K. Sneppen, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3539, (1992)
- [16] G. R. Irwin, *J. Appl. Mech.* **24**, 361, (1957)
- [17] H. Gao and J. R. Rice, *J. Appl. Mech.* **56**, 828, (1989)
- [18] J. F. Joanny and P. G. de Gennes, *J. Chem. Phys.* **81**, 552, (1984)
- [19] D. Ertas and M. Kardar, *Phys. Rev. E* **49**, R2532, (1994)
- [20] S. Galluccio and Y. C. Zhang, preprint
- [21] M. Kardar, G. Parisi and Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889, (1986).

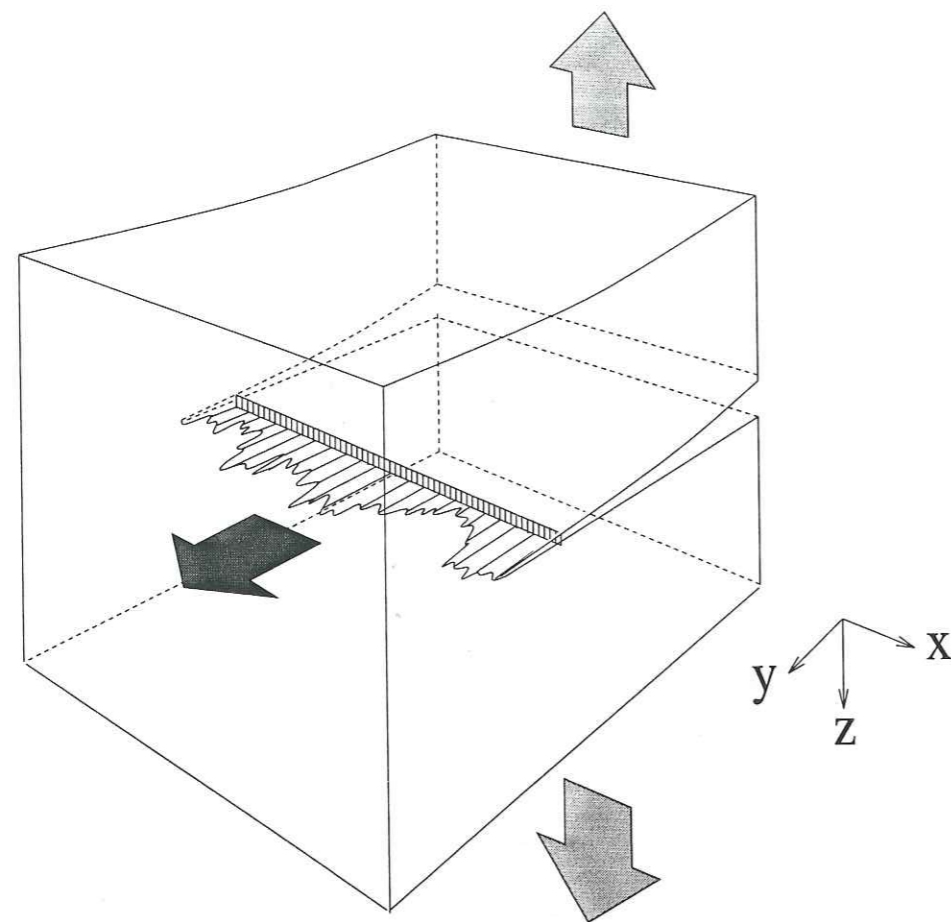


Figure 1: Geometry of the interfacial crack modelled in this letter. The crack front is planar $z = 0$. It is aligned along the x direction and it propagates along y . A pure tensile stress is applied at infinity, so that the crack opens in mode I.

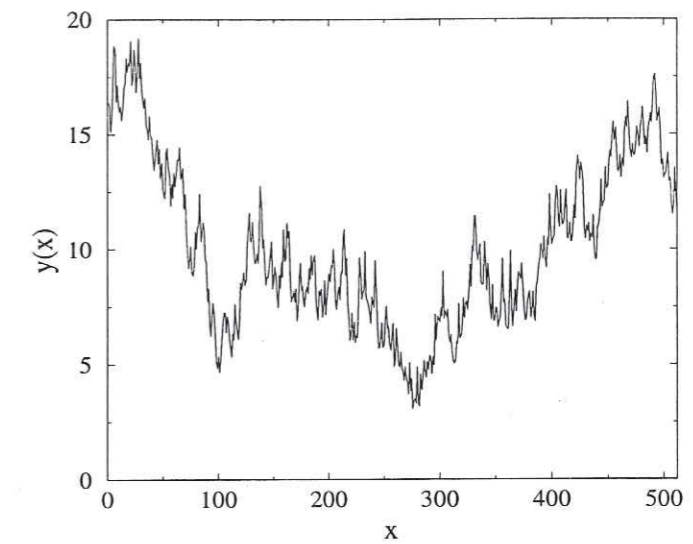


Figure 2: An example of the crack front geometry in the steady state regime. No characteristic scale exists in the problem. However, with regard to the perturbation approximation, the y -scale is greatly magnified.

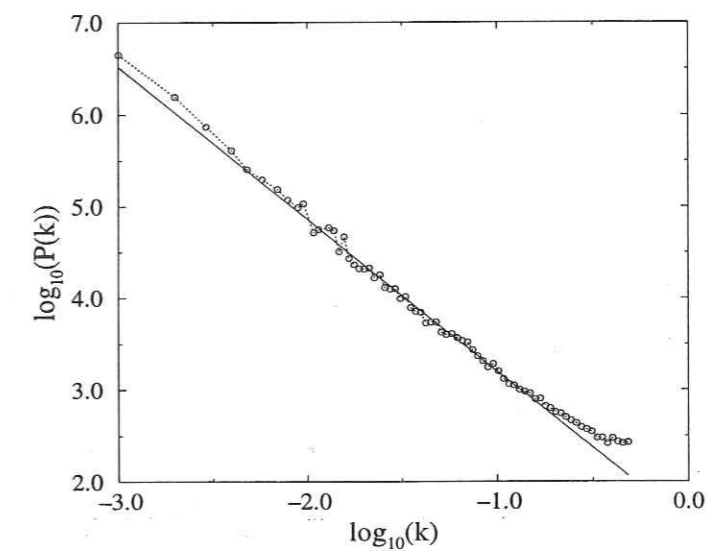


Figure 3: Power spectrum of the crack front in the steady state regime. The width of the system is $L = 2048$. The spectrum is the average over all the spectrum sampled every 1000 steps during 10^6 computation steps, after having grown the crack for a time 10^6 . The plain line is a best fit of slope -1.70 .

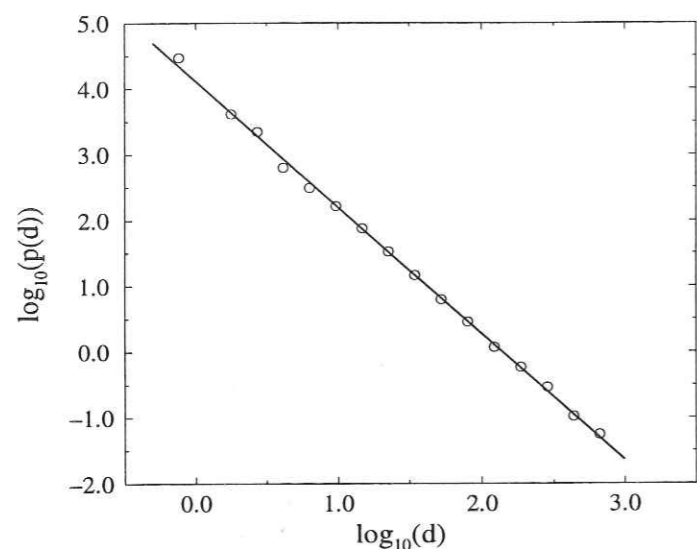


Figure 4: Log-log plot of the probability distribution of distance d between two consecutive active sites in the steady state regime. The plain line is a power-law fit of exponent $b = 0.90$.

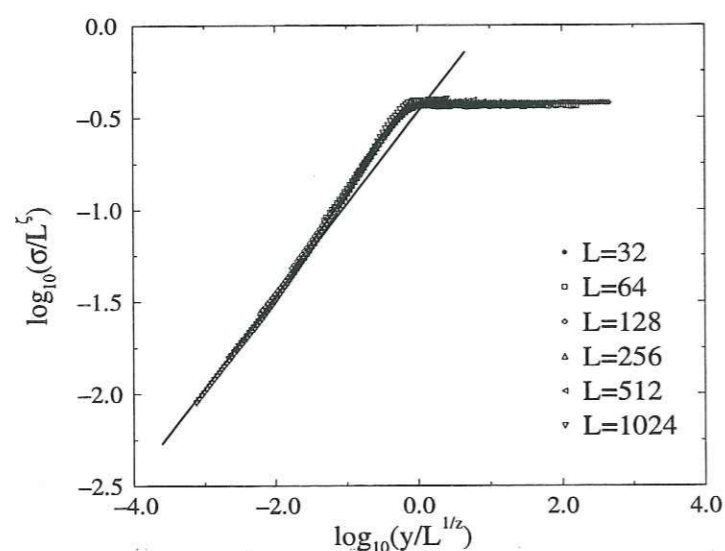


Figure 5: Standard deviation of the front fluctuations as a function of the mean front position \bar{y} in the early stages, for different system sizes. The plain line is a power law with exponent $\zeta z = 0.5$ where $\zeta = 0.35$ and $z = 1.5$ have been obtained by the data collapse.

Chapitre 2

Rejeu de l'interface

Introduction

Reprenons en quelques mots la description du système étudié, dans le cadre d'un rejeu sismique. Le mouvement lent et continu de la lithosphère est localisé en temps et en espace, en une « brusque » déformation, le long de la faille. Cette déformation à « haute » vitesse constitue le rejeu dynamique de la faille. C'est un phénomène clé de la physique des tremblements de Terre. En effet, dès qu'une faille atteint une taille et donc une histoire importante, la création de l'interface devient négligeable devant le rejeu d'interfaces pré-existantes.

Une remarque de première importance est à faire à propos de la définition du rejeu de la faille. En effet, elle à l'origine d'approches conceptuellement très différentes du problème. Il s'agit de la notion d'« épaisseur relative de l'interface ».

$$e = \frac{E}{L} \quad (2.1)$$

où E est l'épaisseur de la faille et L la longueur, de la faille dans la zone étudiée.

Pour illustrer ce point, partons d'une observation faite par *Tchalenko and Berberian* [1975] (voir Figure 2.1, d'après *Scholz* [1990]). A l'échelle de 10km, la faille apparaît comme une structure unique parfaitement localisée. Ainsi, à grande échelle, le rapport épaisseur sur longueur est très faible ($e \approx 0$). La faille peut être vue comme une *surface*. Il paraît alors naturel de voir le mouvement d'une éponte par rapport à l'autre comme le *frottement* entre deux blocs. Par contre, à l'autre extrême, à l'échelle de 100m, la même faille est bien plus un réseau complexe de fractures dans le massif considéré. Elle est une structure en *volume*. Le rapport épaisseur sur longueur ne peut plus être considéré comme petit ($e \approx 1$). Le rejeu de cette faille est, dans ce cas, plutôt appréhendé comme une fracturation dans un milieu confiné. Il n'existe pas de véritable interface, bien définie, séparant les deux massifs. Le rejeu se fera en tirant profit des structures existantes et en en créant de nouvelles, lorsque cela sera nécessaire. Il s'agit de la propagation d'un front de rupture dans un milieu fortement hétérogène. En ce sens, l'approche suivie au cours du chapitre précédent, peut, non seulement être appropriée pour l'analyse de la création d'une interface mais également pour celle du rejeu de l'interface.

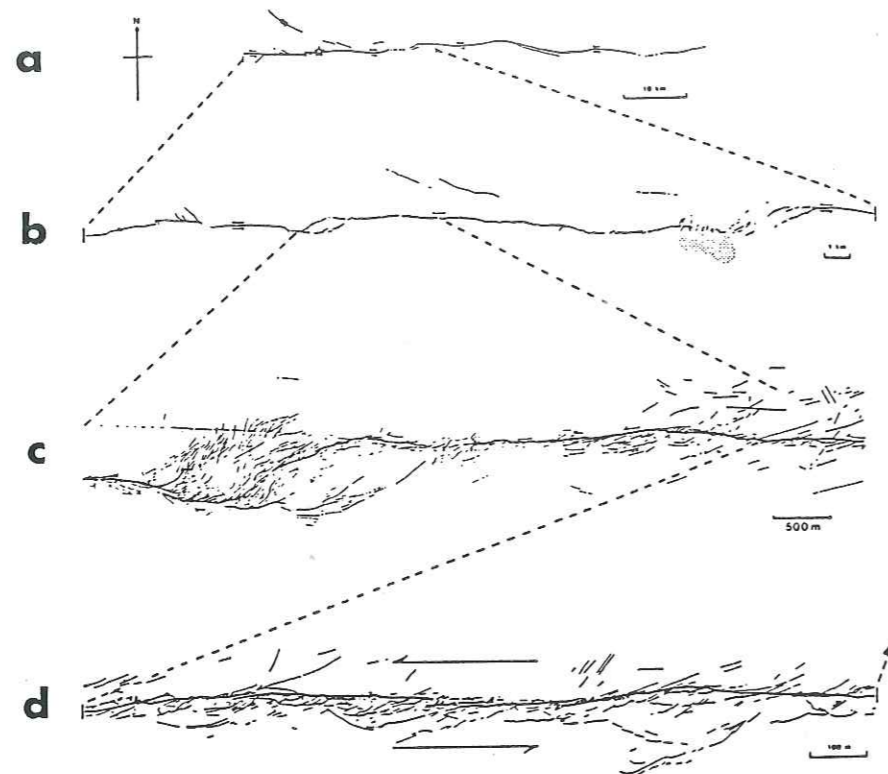


FIG. 2.1 - Description d'une faille à trois échelles différentes: a) 10 km, b) 1 km, c) 500 m et d) 100 m.

Une conséquence de cette notion d'épaisseur d'interface se traduit dans la modélisation du phénomène d'interface. Elle est totalement fonction de l'échelle à laquelle est considérée le problème. Lorsque le rapport e est faible, la notion d'interface existe. Par conséquent définir une loi d'interface peut avoir un sens. Par contre, à petite échelle, une des difficultés réside dans la détermination d'une loi d'interface «apparente», nécessaire pour reproduire le phénomène sismique. L'éventualité d'une fracturation en volume pour accommoder le cisaillement imposé, pose la question fondamentale de savoir si une telle loi existe.

Lorsque l'interface est bien définie, il peut paraître tentant de séparer les effets de volume de ceux plus spécifiquement liés à l'interface et ainsi de définir une loi d'interface. Cependant un tel découpage soulève quelques questions difficiles. Est-il réellement possible de découpler le comportement de l'interface de celui du milieu environnant¹? Peut-on véritablement définir une loi phénoménologique de l'interface indépendante de celle du matériau portant l'interface? Si une loi de frottement peut être définie, quels en sont les

1. Certaines géométries expérimentales peuvent proposer une certaine séparation. Par exemple, l'expérience de *Heslot et al.* [1994] avec l'étude du contact de deux feuilles de papier, permet de se placer dans des conditions expérimentales où le rapport volume sur surface est particulièrement faible.

paramètres principaux? S'agit-il du déplacement entre les lèvres de la faille, de la vitesse de déplacement, du temps de contact, de la surface de contact, de son état, de sa géométrie ...?

Présentation du plan Au cours de ce chapitre, nous tenterons d'apporter quelques éléments de réponses à ces nombreuses questions en présentant, à partir d'une analyse bibliographique², les principaux résultats expérimentaux dont nous disposons. Nous traitons tout d'abord, de lois phénoménologiques i.e. à une échelle «macroscopique». Nous nous tournerons ensuite vers l'analyse, à l'échelle microscopique, des «micro»-mécanismes en jeu. Nous verrons enfin, quelles peuvent être les effets dans le désordre du milieu. Pour finir, nous présenterons deux voies d'études que nous avons choisies (parmi les nombreuses possibles). Nous décrirons les modèles numériques qui en découlent. Le chapitre suivant montrera les principaux résultats que nous avons obtenus au cours de ce travail.

Lien avec les publications L'essentiel de ce chapitre tente de dresser un panorama des différents travaux réalisés dans le domaine du rejeu de faille ou de fracture. Il s'agit d'une «revue» bibliographique (non exhaustive). Seule la dernière partie présente les deux directions d'étude que nous avons suivies pendant ce travail de thèse. Les études ainsi réalisées ont abouti à cinq articles ou projets d'article. Nous avons choisi de présenter l'ensemble de ces articles dans le prochain chapitre qui décrit l'ensemble des résultats obtenus. Nous demanderons par conséquent au lecteur de s'y référer: l'annexe 1 est relative au problème de frottement de deux surfaces auto-affines, les annexes 2,3,4,5 au le modèle de patins-ressorts.

2.1 Lois phénoménologiques

L'expérimentation en frottement est une tâche difficile. Il existe des problèmes de reproductibilité (i.e. instabilités), des interférences des multiples phénomènes physiques en jeu, une grande variabilité des échelles pertinentes, etc. De plus, la plus part des expériences en géophysique ont été réalisées avec des roches. Il s'agit de matériaux difficiles à manipuler: densité, dureté, vitesse du son élevée, etc. Les expériences sont lourdes et longues.

«Pourtant», cette science du frottement a une longue et riche histoire *Amontons* [1699]. Ce n'est alors que, par la compilation d'un grand nombre de travaux, qu'il est possible de dégager les lois les plus importantes *Oden and Martins* [1985], *Scholz* [1990]. Ainsi, de très nombreux résultats existent même s'il semble aujourd'hui que de multiples questions soient encore ouvertes.

Par ailleurs, des études ont été réalisées sur des matériaux modèles plus «maniables» et peuvent permettre des observations relativement complètes des différentes lois. Citons

2. Cette analyse se construit essentiellement sur la base de deux ouvrages de revues: d'une part, le livre de *Scholz* [1990] dresse un panorama des très nombreuses expériences faites dans le domaine de la mécanique des roches, d'autre part, l'article de *Oden and Martins* [1985] présente une revue des résultats expérimentaux et des modèles développés dans le domaine de la physique du frottement. Nous avons cherché également à compléter la lecture de ces deux ouvrages par quelques publications récentes, principalement dans le domaine de la mécanique des roches.

par exemple les travaux de *Heslot et al.* [1994] avec un contact papier-papier ou de *Brune et al.* [1991] dans de la mousse élastique, ou également certains travaux de tribologie *Best et al.* [1981], *Barquins* [1987].

Nous distinguerons dans le processus de rejou, trois grandes classes de phénomènes.

2.1.1 Frottement sec quasi-statique

Nous entendons par quasi-statique, un frottement dont l'amplitude du glissement reste infiniment faible.

2.1.1.1 Lois classiques

Deux lois fondamentales ont été établies par *Amontons* [1699]. La première nous dit que la force de frottement F est proportionnelle à la force normale N appliquée sur l'un des massifs en contact:

$$F = \mu N \quad (2.2)$$

Le coefficient μ de proportionnalité est appelé *coefficient de frottement*. La deuxième loi postule que ce coefficient de frottement est indépendant de la taille de la surface de contact.

Amontons a également observé que la surface de contact effective A_c était souvent indépendante de la surface A qui représente la taille de la frontière de chacun des massifs.

Une expérience désormais classique a été montrée pour la première fois par *Euler* [1748]. Un patin est disposé sur un plan que l'on incline de plus en plus. Dans ce cas, le coefficient de frottement est:

$$\mu = \tan \Theta \quad (2.3)$$

où Θ est l'angle du plan avec l'horizontale. Plus l'inclinaison devient importante, plus le coefficient de frottement croît. Le mouvement du patin se fait alors pour un angle critique Θ_c . On définit le coefficient de frottement statique μ_s par:

$$\mu_s = \tan \Theta_c \quad (2.4)$$

Le frottement est donc un phénomène à seuil (loi de Coulomb).

2.1.1.2 Micro-glissement

L'étude fine de l'évolution du coefficient de frottement lors de déplacements de l'ordre de la dizaine de micro-mètres de deux blocs de granite permet d'être plus précis sur la notion de coefficient de frottement statique *Biegel et al.* [1992]. (voir Figure 2.2 d'après *Biegel et al.* [1992]).

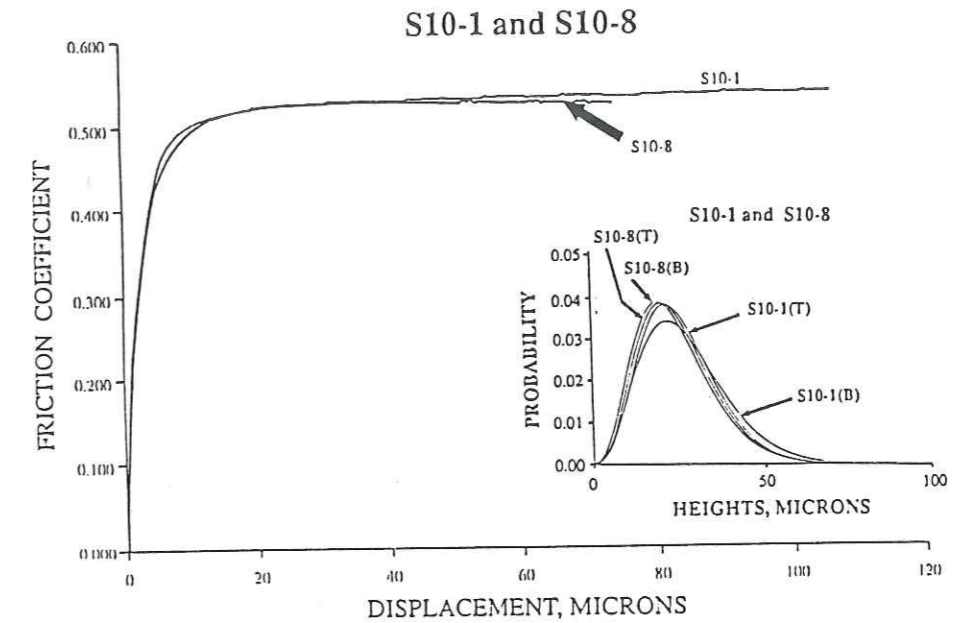


FIG. 2.2 - Evolution de la contrainte cisailante en fonction du glissement.

Pour de très faibles glissements, le coefficient de frottement augmente rapidement avec le niveau de frottement (quasi-linéairement), puis atteint un plateau. Ce dernier définit le coefficient de frottement statique.

2.1.1.3 Temps de contact

Il a été souvent observé que le coefficient de frottement statique a une amplitude qui dépend du temps de contact. Plus le temps de contact t_c est grand, plus le coefficient de frottement croît. La forme de la dépendance en temps présente différentes expressions suivant les auteurs *Oden and Martins* [1985]. Nous retiendrons une forme de loi souvent utilisée en géomécanique. Il s'agit d'une dépendance logarithmique *Dieterich* [1978], *Dieterich* [1979a], *Ruina* [1983a] (voir Figure 2.3 d'après *Ruina* [1983a]).

$$\mu_s(t_c) = \mu_0 + A \log(Bt_c) \quad (2.5)$$

où A et B sont des constantes. Ce type de dépendance avec le temps de contact a été vérifiée par *Heslot et al.* [1994] pour un contact papier-papier.

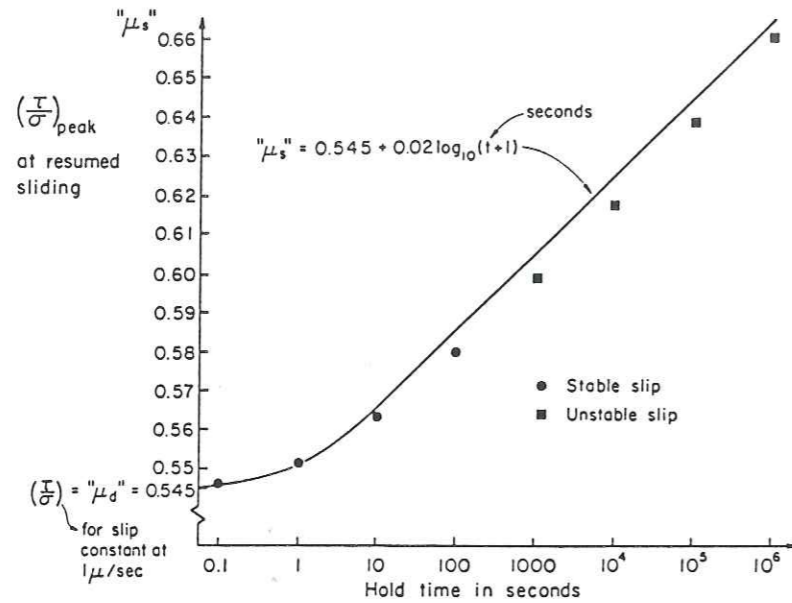


FIG. 2.3 - Evolution du coefficient de frottement en fonction du temps de contact.

2.1.2 Frottement dynamique

Le frottement est considéré comme dynamique lorsque le coefficient de frottement a dépassé son seuil μ_s . Cependant, ce domaine est en général restreint à celui de situations reproductibles. Tout phénomène irréversible (formation de gouge, endommagement majeur de la surface, etc) est ainsi exclu.

2.1.2.1 Loi classiques

Deux lois peuvent être considérées comme classiques. La première est à l'origine du nom même de frottement. Elle a été clairement établie par les travaux de Rabinowicz [1965]:

$$F = -\mu N \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \quad (2.6)$$

La force de frottement est toujours opposée au mouvement.

La seconde est issue de l'observation du mouvement du patin le long du plan incliné. En effet, lorsque le patin se met à glisser, sa vitesse croît brutalement. Une telle situation ne peut se produire que si l'accélération est très grande dès l'initiation du mouvement. Par conséquent, le coefficient de frottement chute brutalement dès qu'il y a mouvement. Un premier ordre de description du phénomène consiste à postuler l'existence d'un coefficient de frottement dynamique μ_d , inférieur au coefficient statique μ_s .

2.1.2.2 Dépendance en vitesse de glissement

De nombreuses études fines de la transition entre coefficient de frottement statique et dynamique, montrent que le coefficient de frottement dépend de la vitesse de glissement Oden and Martins [1985], Scholz [1990].

Précisons que pour l'étude de la dépendance en vitesse, deux grands types d'expériences sont conduites. Sont distingués, d'une part, les expériences cinématiques où la vitesse d'entraînement est maintenue constante tout au long de l'expérience. La dépendance en vitesse est véritablement étudiée en renouvelant l'expérience à des vitesses différentes. L'autre type est fait des expériences dites dynamiques. Dans ce cas, c'est la réponse à un changement soudain en vitesse qui est analysée.

En géomécanique, la dépendance a été clairement mise en évidence dans le cadre d'expériences cinématiques Dieterich [1978], Dieterich [1979a], Tullis [1988], Scholz [1990], Weeks [1993]. Une explication de l'existence d'une dépendance se fonde sur la relation entre coefficient statique μ_s et le temps de contact. En effet, plus le mouvement est rapide, plus le temps de contact entre aspérités est court. Par conséquent, le coefficient de frottement doit décroître avec la vitesse de glissement. Une longueur d_0 est introduite de sorte que: $t = d_0/V$ où V est la vitesse d'entraînement. L'expression du coefficient de frottement devient (voir Figure 2.4 d'après Heslot et al. [1994]):

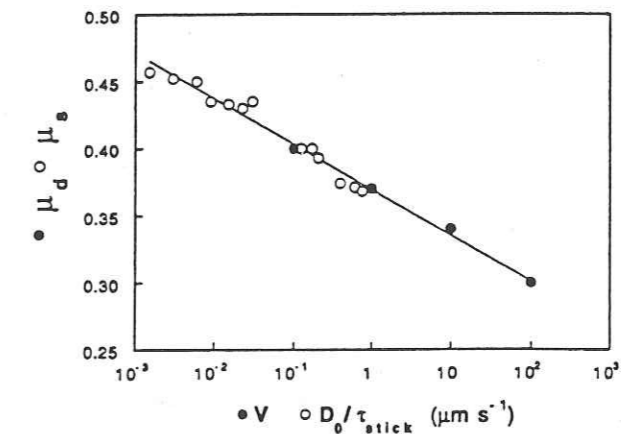


FIG. 2.4 - Evolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse d'entraînement lors d'expériences cinématiques.

$$\mu_d(V) = \mu_0 + A \log(d_0/V) \quad (2.7)$$

Il est intéressant de noter que l'expression du coefficient dynamique de frottement a été faite à partir de celle du coefficient statique:

$$\mu_d(V) = \mu_s(d_0/V) \quad (2.8)$$

La caractérisation de la longueur d_0 a également été faite lors d'expériences de frottement dynamique *Linker and Dieterich* [1992], *Kilgore et al.* [1993], *Wang and Scholz* [1994a]. Dans ce cas, la vitesse d'entraînement est maintenue constante jusqu'à un changement soudain de son amplitude. Le coefficient de frottement subit alors une évolution fonction de cette distance d_0 .

2.1.2.3 Instabilité de glissement

Revenons sur l'existence d'un seuil de frottement suivie d'une diminution du coefficient de frottement avec la vitesse. Ceci est à l'origine d'une instabilité de glissement.

En effet, lorsque le bloc, sur le plan incliné, est suffisamment «chargé» pour pouvoir dépasser le seuil de frottement statique μ_s , il se met en mouvement. Sa vitesse croît, donc le coefficient de frottement dynamique μ_d chute. Par conséquent, si le même chargement est appliqué (i.e. l'angle du plan est maintenue constante), son accélération grandit très fortement et par conséquent la vitesse ne cesse de croître.

Ce type d'instabilité est à l'origine d'un mouvement bien connu des expérimentateurs: le glissement saccadé ou «stick-slip» (voir Figure 2.5 d'après *Rice and Tse* [1986]). Il s'agit de la description d'un modèle constitué d'un bloc attaché à un ressort que l'on tire à vitesse constante *Bowden and Leben* [1939]. Le bloc reste fixé au support, puis passe l'instabilité lorsque la sollicitation par le ressort dépasse le seuil statique. Il se met alors à glisser jusqu'à un arrêt, facilité par la force de rappel du ressort. Et ainsi de suite... Ce modèle a été très largement étudié *Oden and Martins* [1985]. Il est alors observé que l'amplitude du mouvement pendant le glissement saccadé décroît lorsque: (i) la vitesse d'entraînement augmente, (ii) la raideur du ressort est plus grande ou (iii) la masse croît. Ce modèle a été repris en géophysique car il «permet» de transformer un mouvement continu (i.e. le mouvement lithosphérique) en un glissement saccadé (i.e. les séismes) *Brace and Byerlee* [1966], *Rice and Tse* [1986], *Tullis* [1988], *Gu and Wong* [1991].

2.1.2.4 Inertie

A haute vitesse de chargement, le comportement du coefficient de frottement change en grande partie parce que les phénomènes inertiels deviennent sensibles. L'étude expérimentale dans ces régimes est plus difficile, pourtant elle est de toute première importance en géophysique. En effet, les vitesses sismiques sont particulièrement élevées (de l'ordre du kilomètre par seconde). Une question fondamentale a été souvent posée: les études du frottement à «faible³» vitesse, sont-elles pertinentes pour la physique des tremblements de Terre?

L'influence de l'inertie à haute vitesse d'entraînement est une étude difficile à réaliser expérimentalement avec des roches. *Heslot et al.* [1994] ont pu avec le matériau modèle (papier-papier) suivre l'influence des phénomènes inertiels et montrer qu'ils étaient à l'origine d'un changement radical dans la réponse en frottement. On passe ainsi du glissement saccadé et instable (stick-slip) à un régime de glissement inertiel continu et stable (voir Figure 2.6 d'après *Heslot et al.* [1994]).

3. nettement inférieure à la vitesse sismique.

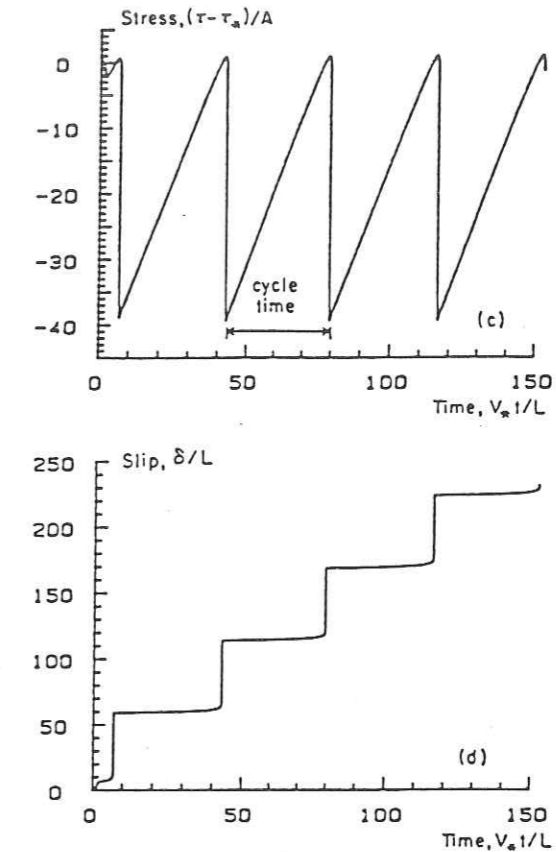


FIG. 2.5 - Mouvement de glissement saccadé (ou «stick-slip») d'un bloc entraîné par un ressort déplacé à vitesse constante.

Cette transition se produit lorsque deux temps caractéristiques deviennent comparables: t_f le temps de contact (temps caractéristique de la période sans glissement) et t_i temps du régime inertiel:

$$t_f = \sqrt{\frac{M}{k}} \quad t_i = \frac{d_0}{V} \quad (2.9)$$

où M est la masse, k la raideur élastique, d_0 la longueur caractéristique de contact et V la vitesse d'entraînement. Plus la vitesse imposée est grande, plus la période de stick-slip diminue. On parvient ainsi à un glissement continu lorsque la vitesse est suffisamment grande.

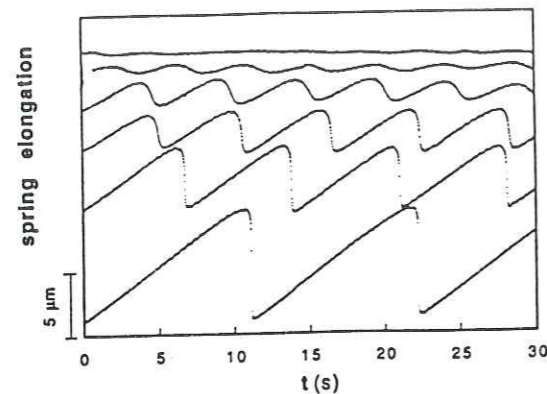


FIG. 2.6 - Transition entre mouvement de glissement saccadé (ou «stick-slip») et mouvement continu (ou «creep»).

En mécanique des roches, il a été montré *Tse and Rice* [1986], *Weeks* [1993] que la dépendance en vitesse change lorsque la vitesse d'entraînement est grande. Elle ne peut être mise sous la forme d'une décroissance logarithmique avec la vitesse. Au contraire, on observe en général, une croissance rapide du coefficient de frottement avec la vitesse. Il s'agit d'un frottement de type visqueux.

2.1.3 Mémoire du frottement

D'importants phénomènes d'hystérésis existent dans les nombreuses expériences de frottement cinématique *Oden and Martins* [1985]. La décroissance du coefficient de frottement lorsque la vitesse est augmentée, n'est pas comparable avec son accroissement lors du «ralentissement». Il est même souvent observé que le coefficient de frottement dynamique reste à sa plus faible valeur (qu'il a atteint à grande vitesse), même si la vitesse est ramenée à un bas niveau (voir Figure 2.7 d'après *Kato et al.* [1970]).

Il existe donc une mémoire dans le processus de frottement. Ceci a conduit *Rabinowicz* [1958] à dire que le coefficient de frottement ne dépend pas seulement de la vitesse de glissement mais aussi de l'état des surfaces. Il a ainsi introduit dans la caractérisation de loi de frottement, des variables d'état permettant de suivre l'histoire du processus. Ce type de démarche a été repris plus récemment en particulier par *Ruina* [1983a] qui propose une relation entre contrainte normale et cisailante comme suit:

$$\tau = \sigma[\mu_0 + \theta_1 + \theta_2 + A \ln(V/V_c)] \quad (2.10)$$

$$\dot{\theta}_1 = -(V/d_1)(\theta_1 + B_1 \ln(V/V_c)) \quad (2.11)$$

$$\dot{\theta}_2 = -(V/d_2)(\theta_2 + B_2 \ln(V/V_c)) \quad (2.12)$$

$$(2.13)$$

où θ_1 et θ_2 sont deux variables d'état définies par leur dérivée temporelle et d_1 et d_2 des longueurs caractéristiques.

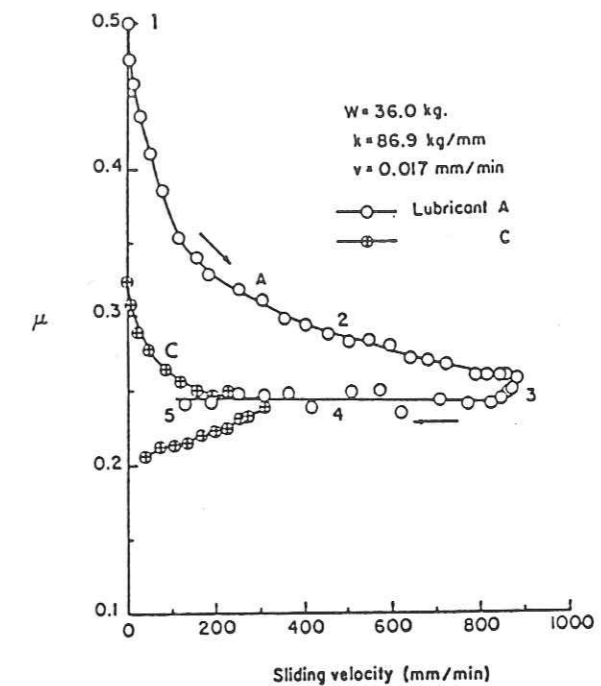


FIG. 2.7 - Phénomène d'hystérésis dans la mesure du coefficient dynamique en fonction de la vitesse.

Précisons que ce formalisme ne repose pas sur l'intégration des mécanismes à une échelle plus locale. Il cherche uniquement à rendre compte de l'effet des processus d'endommagement des surfaces: plastification et fracturation des aspérités.

2.2 Les micro-mécanismes

Le phénomène de rejeu d'interface met en jeu, comme nous l'avons laissé entendre préalablement, un grand nombre de processus physiques différents. Ceci en fait un domaine de recherche complexe. Nous avons choisi d'illustrer la richesse du phénomène en dressant un panorama des principaux processus susceptibles d'interagir même si l'état des recherches ne nous permet pas toujours d'apporter des réponses précises quant à leur rôle exact dans le processus de frottement⁴.

Précisons que nous intéresserons ici aux phénomènes contrôlant la mécanique du rejeu de faille. Nous ne traiterons pas des processus apparaissant comme une conséquence de ce rejeu. Citons, par exemple, les phénomènes électro-magnétiques associées aux variations de circulation de fluides riches en électrolytes.

4. Afin de contourner certaines difficultés, il peut être intéressant de se tourner vers des matériaux modèles. Ils permettent souvent un meilleur accès aux phénomènes en jeu. Ceci suppose évidemment que les matériaux utilisés soient de «bons» modèles!

Pour le géophysicien, un point de première importance est à ajouter à propos de l'analyse des micro-mécanismes en jeu. Il s'agit du problème du changement d'échelles. Les expérimentations se font à l'échelle du laboratoire. Elles mettent en jeu des échelles de vitesse de l'ordre du millimètre par seconde. Or, lors d'un rejeu sismique, les échelles spatiales et temporelles sont toutes autres. Les failles peuvent être pluri-kilométrique et les vitesses sont de l'ordre du kilomètres par seconde. Comment peut se faire le passage de l'un à l'autre? Il est clair que c'est uniquement en maîtrisant les mécanismes en jeu, leurs échelles de temps, leurs distances caractéristiques, qu'il devient possible d'extrapoler les résultats de laboratoire aux situations de terrain.

2.2.1 Les modes de déformation

Lors du frottement de deux interfaces, les principaux acteurs de la déformation sont les aspérités en contact. Par conséquent, nous nous intéresserons surtout aux modes de déformation à cette échelle.

2.2.1.1 Elasticité

Lorsqu'un matériau se déforme en régime élastique, contraintes et déformations suivent une relation linéaire. La déformation est «parfaitement» réversible. Ce régime est valable uniquement pour des sollicitations et déformations de faibles amplitudes. Du fait de la linéarité, le principe de superposition est applicable ce qui permet souvent une simplification significative dans le traitement des problèmes. Notons cependant que l'isotropie du milieu est souvent supposée. Le tenseur de Hooke est alors complètement décrit par seulement deux paramètres indépendants: module d'Young et coefficient de Poisson.

L'analyse du rôle de l'élasticité se fait selon deux perspectives différentes. D'une part, l'influence de l'élasticité est examinée au niveau de l'ensemble des massifs en contact. D'un point de vue expérimental, elle est difficile à étudier. *Ciliberto and Laroche* [1993] ont pu fabriquer des surfaces synthétiques (sphères d'acier ou de verres dans une colle élastique ou rigide) «purement» élastiques ou quasi-rigides. Le rôle de l'élasticité du «volume» est souvent abordé à partir du modèle de bloc et de ressort, soit expérimentalement *Heslot et al.* [1994], soit numériquement *Carlson and Langer* [1989b], *Gu and Wong* [1991].

D'autre part, de nombreuses études portent sur le comportement élastique des aspérités en contact (voir *Boitnott et al.* [1992], *Gao* [1989], *Yoshioka and Scholz* [1989a], *Yoshioka and Scholz* [1989b], *Wang and Scholz* [1993]). Les aspérités sont décrites comme des hémisphères. La théorie de Hertz est applicable pour chaque contact élémentaire *Johnson* [1989].

2.2.1.2 Plasticité

Dans le cas d'un frottement sec quasi-statique, on considère en général que la concentration de contrainte au niveau des aspérités est telle qu'elles se déforment en régime plastique. Ceci signifie que la déformation n'est plus réversible. Dans le cas du régime plastique parfait, une fois que la contrainte dépasse le seuil de plasticité, la déformation peut devenir «infinie».

L'irréversibilité du comportement plastique des aspérités produit une modification progressive de la surface. Ceci a, par exemple, été montré dans la mesure des ouvertures entre les surfaces en contact, lors du chargement normale de deux surfaces. D'importants phénomènes d'hystérésis ont été observés dans la mesure des ouvertures entre les surfaces en contact *Brown and Scholz* [1986].

L'hypothèse de comportement plastique parfait des aspérités, a conduit *Bowden et Tabor* *Bowden and Tabor* [1950], *Bowden and Tabor* [1964] à introduire la théorie de l'adhésion. Soit H la dureté du matériau⁵, A_c , l'aire de contact et N , le chargement normal. La déformation plastique des aspérités est régit par:

$$\frac{N}{A_c} = H \quad (2.14)$$

Par conséquent, la surface de contact est proportionnelle au chargement appliqué (voir Figure 2.8 d'après *Oden and Martins* [1985]):

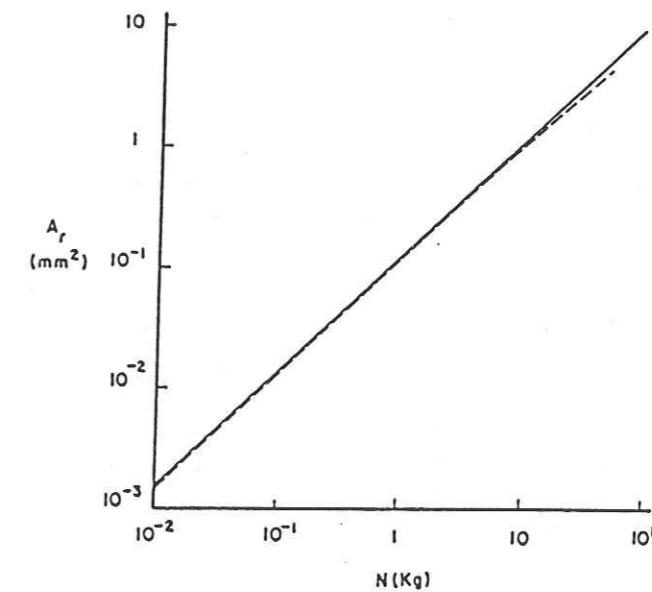


FIG. 2.8 - Mesure de la surface de contact (A_r) en fonction du chargement normal N .

$$N \propto A_c \quad (2.15)$$

Si on introduit le couplage entre contrainte normale et contrainte cisailante au niveau de l'interface, ainsi que τ la résistance au cisaillement des aspérités, alors on obtient:

$$F = A_c \tau \quad (2.16)$$

⁵ ou seuil de plasticité.

Par conséquent, force de frottement et surface de contact sont proportionnelles. Le coefficient de frottement par adhésion μ_a est bien indépendant de la surface de contact:

$$\mu_a = \frac{\tau}{H} \quad (2.17)$$

Ce type de comportement permet d'interpréter de nombreuses observations expérimentales (voir par exemple Yamada *et al.* [1978], Buckley [1981], Boitnott *et al.* [1992]).

Le comportement plastique permet de décrire «l'écrasement» des aspérités. Il peut également rendre compte de la formation d'un sillon par une aspérité dans la surface en vis-à-vis. Si on approxime la forme de l'aspérité à un cône d'un angle θ , alors le coefficient de frottement par indentation μ_i est:

$$\mu_i = \frac{2}{\pi} \cot \frac{\theta}{2} \quad (2.18)$$

Le phénomène de plasticité que l'on décrit ici est le résultat, à l'échelle minéralogique, de la propagation de dislocations. Le régime devient plastique lorsque la propagation des dislocations se fait plus rapidement que celle des fractures ou que leur taux d'apparition devient élevé.

2.2.1.3 Viscosité

On parle de viscosité lorsque la déformation d'un matériau est fonction du temps. Deux cas peuvent être distingués. D'une part, il y a fluage si la déformation a lieu alors que le chargement est constant. D'autre part, on dira qu'il se produit une relaxation lorsque la déformation, suite à une modification rapide du chargement, est fonction du temps⁶

Le rôle de la déformation visqueuse a été clairement mis en évidence lors de la sollicitation en contact normal avec chargement statique d'une surface rugueuse. La distance entre les surfaces diminue avec le temps Wang and Scholz [1993]. La surface en contact croît avec le temps Scholz [1990] (voir Figure 2.9). Ce phénomène est une origine possible pour expliquer la dépendance du coefficient de frottement avec le temps et donc avec la vitesse dans les expériences de frottement cinématique.

6. Ce sont les propriétés visco-élastiques du matériau qui sont responsables de la relaxation.

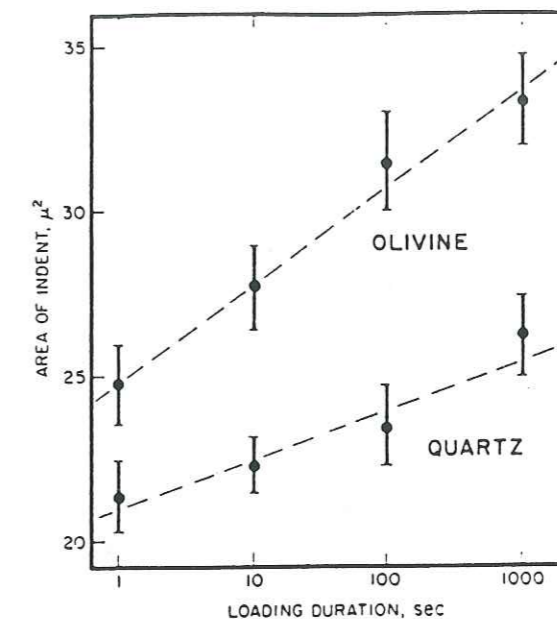


FIG. 2.9 - Mesure de la surface de contact (A_r) en fonction du temps de chargement.

2.2.1.4 Fracture

La déformation par fracturation peut également être considérée à deux niveaux. Il s'agit d'une part de la fracturation des aspérités. Quelques études Gao [1989], Pissarenko [1994] s'intéressent à la propagation du front de rupture d'une aspérité. D'autres travaux, plus nombreux, concernent le produit de cette fracturation: les gouges, ainsi que son rôle dans le processus de frottement. En effet, les gouges peuvent contenir des particules abrasives et donc accroître le coefficient de frottement Scholz [1990]. Se pose également le problème de la fabrication de cette gouge en termes d'énergie de surface dépensée, de volume de matériaux impliqués et d'épaisseur de la couche formée Wang and Scholz [1994b].

A une autre échelle, nous avons déjà mentionné le fait que le phénomène de rejeu dynamique d'une faille peut être considéré comme la propagation d'un front de rupture dans un milieu confiné (e.g. l'épaisseur E). De nombreux travaux sur la fracture, évoqués dans le chapitre précédent, peuvent ainsi prendre leur place dans l'analyse du rejeu de la faille. Des études plus complètes parviennent à «mélanger» phénomènes de fracture et de frottement. Ainsi, Cochard and Madariaga [1994] ont modélisé la propagation d'une fracture sous un chargement anti-plan avec une loi de frottement «à l'arrière» du front, présentant une décroissance avec la vitesse. Il faut ajouter également les études sur le rôle de la zone de micro-fissuration en volume, située en tête de fissure (i.e «process zone») Dugdale [1960], Barenblatt [1962], Scholz [1990], Scholz *et al.* [1993]. La propagation de la fracture se fait alors, non pas dans un milieu élastique⁷, mais dans un milieu fortement

7. Dans un tel milieu, la divergence de la concentration de contrainte en pointe de fissure est non physique.

hétérogène, non linéaire.

On doit à *Griffith* [1920] l'approche théorique de la fracture. Il a proposé de voir le phénomène de fracture comme une évolution vers un équilibre mécanique (voir des synthèses dans *Atkinson* [1989], *Kostrov and Das* [1988], *Freund* [1990]). Ainsi, l'évolution de la fracture est supposée minimiser l'énergie mécanique du système U :

$$U = -W + U_e + U_s \quad (2.19)$$

où W est le travail extérieur fourni au système, U_e est l'énergie de déformation interne et U_s est l'énergie de création d'interface. Fabriquer une nouvelle interface «coûte» au système et donc peut être vu comme une dissipation de l'énergie fournie par le chargement extérieur. On introduit souvent la grandeur G : le taux de dissipation d'énergie:

$$G = -\frac{d(-W + U_e)}{ds} \quad (2.20)$$

où ds est un élément de la surface de la fracture. Si on suppose que la surface créée, a une densité surfacique d'énergie constante (γ), alors la condition de propagation de la fracture s'écrit:

$$G \geq 2\gamma \quad (2.21)$$

Le processus de fracture peut être également dû à une corrosion sous contrainte *Scholz* [1990]. Il s'agit alors d'une propagation lente, dite sous-critique. Elle invoquée dans ce nombre de phénomènes de glissement asismique *Das and Scholz* [1981]. Cette fracturation est particulièrement sensible aux conditions environnementales (température, pression, etc...).

2.2.2 Les effets de surface

2.2.2.1 Géométrie de l'interface

Byerlee [1967b] a montré que le coefficient de frottement dépendait de l'amplitude de la rugosité. Ceci est valable pour des amplitudes faibles de la rugosité. Plus la rugosité croît, plus le coefficient de frottement croît.

Dans un certains nombre de cas, la linéarité entre surface de contact et chargement normal, proposée dans la théorie de l'adhésion, n'est pas respectée. C'est le cas en particulier pour le contact de deux surfaces dominées par quelques aspérités majeures et sphériques *Bowden and Tabor* [1964]. Dans ce cas, il s'agit du contact de Hertz *Johnson* [1989] qui prédit que:

$$A_c \propto N^{2/3} \quad (2.22)$$

Lorsque le nombre de sphères en contact est grand, et que le rayon des différentes sphères est très varié, il a été montré *Archard* [1957], *Yamada et al.* [1978] que la linéarité entre surface de contact et force normale était retrouvée.

Dans notre première partie (deuxième chapitre), nous avons montré que dans le cas du contact entre deux surfaces auto-affines, la surface de contact était liée au chargement normal par:

$$A_c \propto N^{2/(\zeta+1)} \quad (2.23)$$

Précisons que cette relation a été obtenue en supposant un comportement élastique des aspérités. Pour des surfaces fracturées ou des failles, l'exposant d'auto-affinité vaut: $\zeta \approx 0.80$. On obtient donc: $A_c \propto N^{1.1}$ ce qui est proche du comportement linéaire.

Si on suppose que la linéarité entre surface de contact et force de frottement reste vérifiée, on obtient alors:

$$\mu \propto N^{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \quad (2.24)$$

Pour les surfaces de fracture, le coefficient de frottement est «presque» indépendant du chargement normal: $\mu \propto N^{0.1}$.

2.2.2.2 Forces de surface

Toute interface est une structure dont l'existence résulte d'un équilibre thermodynamique. Ce n'est que lorsque son énergie libre de formation (ou tension superficielle) est positive qu'elle apparaît *de Gennes* [1985], *Papon and Leblond* [1990].

Nous nommerons ici par adhésion, le phénomène lié aux interactions moléculaires (covalentes, ioniques ou Van de Waals). Ce type d'interaction peut assurer un couplage mécanique entre deux surfaces en contact. Le couplage comporte deux aspects.

D'une part, il s'agit d'un couplage «normal», i.e. qui régit la non-séparation des surfaces en contact *de Gennes* [1985]. L'énergie d'adhésion est positive lorsque la transformation d'une interface roche-roche en une double interface roche-«autre» et «autre»-roche nécessite un apport d'énergie au système. De tels phénomènes sont susceptibles d'exister dans tout frottement⁸. En effet, la taille de la surface de contact évolue pendant le glissement. Des aspérités entre en contact, d'autres se séparent.

L'étude expérimentale de cet effet est difficile pour deux raisons. L'ampleur d'un tel phénomène est en général faible. Par ailleurs, les processus d'adhésion sont très sensibles aux conditions ambiantes de l'expérience: température, humidité, qualité de l'atmosphère, etc.

D'autre part, il existe un couplage «cisailant» *Persson* [1993], *Pissarenko* [1994]. Quelle est la tenue mécanique de l'interface lorsqu'on lui fait subir un cisaillement (sans vouloir les séparer)? Ce type d'interaction est à l'origine de la loi liant surface de contact et force de frottement *Dietrich* [1979a], *Boitnott et al.* [1992], *Heslot et al.* [1994].

Le phénomène d'adhésion a été largement étudié en tribologie, en particulier lors des contacts verre-élastomères *Barquins* [1987].

2.2.3 Propagation d'ondes

2.2.3.1 Propagation d'ondes de surface

La propagation d'onde de Love ou de Rayleigh le long d'une interface rugueuse est un sujet de recherche actif.

Les ondes sont à l'origine de fluctuations de la contrainte normale le long de l'interface. Par conséquent, elles sont particulièrement importantes dans le phénomène de frottement.

8. On ne parle d'adhésion que lorsque l'interface roche-roche est préexistante, sinon il s'agit de décohesion ou fracture.

Linker and Dieterich [1992] ont montré qu'une variation soudaine de la contrainte normale était équivalente à une variation brusque de la vitesse d'entraînement. Des tels résultats ont été confirmés par *Wang and Scholz* [1993]. Cependant ces derniers montrent que le coefficient de frottement chute brutalement avant de se restabiliser lorsque la contrainte normale est accrue. Par ailleurs, la propagation d'ondes semble contrôler le processus d'instabilité du frottement (i.e. transition frottement statique, frottement dynamique) *Wong et al.* [1992], *Brune et al.* [1991], *Heslot et al.* [1994].

Un modèle d'oscillateurs pouvant vibrer dans un plan parallèle à la surface de contact a été développé par *Pissarenko* [1994]⁹. Il montre que de telles vibrations peuvent être à l'origine d'une décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement.

La modélisation de la propagation des ondes de surfaces le long d'une fracture peut présenter d'importantes difficultés si l'on veut prendre en compte la géométrie auto-affine de la surface de fracture. En effet, du fait de l'invariance d'échelles, une très large gamme de longueur d'ondes existent dans la géométrie de l'interface¹⁰. Par conséquent, des «interférences» peuvent se produire avec la longueur d'onde de l'onde de surface qui se propage.

2.2.3.2 Propagation d'ondes de volume

La propagation des ondes de volume dans un milieu élastique, est appelée radiation. Ceci constitue un mode d'évacuation de l'énergie entre la zone de glissement et «l'infini».

Par ailleurs, les ondes de volume propagent à grande vitesse des ondes de compression et de cisaillement qui peuvent faire évoluer localement les conditions de chargement d'une aspérité *Mikumo and Miyatake* [1978] ou le champ de contraintes autour du front de fracture *Cochard and Madariaga* [1994].

Dans le cas d'une hypothèse de propagation d'un front dans un milieu confiné, c'est par la propagation d'ondes que le front va être «sensible» à la finitude du milieu. Les interactions des ces ondes avec le front peuvent être à l'origine de modification sensible de l'avancée du front.

2.2.4 Agents extérieurs

2.2.4.1 Fluides

La présence de fluide dans les interstices peut modifier significativement les propriétés de frottement le long de la faille. Les fluides possèdent des propriétés de surface pouvant influencer significativement les phénomènes d'adhésion. *Dieterich and Conrad* [1984] ont ainsi montré que lors des expériences de frottement avec des roches, le coefficient de frottement pouvait décroître de près de 40% en présence d'humidité. Les fluides peuvent ainsi jouer le rôle de lubrifiant.

De plus, les fluides sont souvent incompressibles. Dans un environnement confiné, ils peuvent, par conséquent, entraîner des modifications significatives du champ de contraintes.

9. La séparation entre ondes de volume et ondes de surface, dans ce type de modèle, est quelque peu arbitraire.

10. Voir chapitre 1 de la première partie.

D'après *Byerlee* [1967a], en présence de fluides, on obtient la relation entre la contrainte cisailante τ et la contrainte normale σ :

$$\tau = 10 + 0.6(\sigma - p) \quad (2.25)$$

où p est la pression de fluide.

2.2.4.2 Solides

Rappelons simplement combien les matériaux de trituration¹¹ (i.e. gouge) peuvent être acteurs dans le processus de frottement.

2.2.4.3 Pression et température

Beaucoup des processus que nous avons évoqués jusque là sont sensibles aux conditions de température et de pression ambiantes. Par conséquent, ils vont dépendre de la profondeur à laquelle ils se développent dans la lithosphère. Pour les grandes failles¹², il existe des variations importantes des lois de comportement des interfaces ou des processus de fracturation, aux différents endroits de la faille *Rice* [1983], *Scholz* [1990], *Rice* [1993].

Citons quelques exemples d'influence de la pression et de la température. La dépendance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement semble fortement évoluer avec la température. Ainsi, il y a décroissance du coefficient à basse température. Le phénomène de stick-slip est alors observable (à basse vitesse). Par contre, lorsque la température croît, le coefficient de frottement croît avec le glissement. Il n'y a plus d'instabilité mais un glissement continu *Rice* [1983], *Scholz* [1990]. Ce type d'argument est controversé puisque *Blanpied et al.* [1991] montrent que la stabilité ou l'instabilité du glissement est fonction plutôt de la pression de fluide et que c'est elle qui évolue avec la profondeur. Par ailleurs, *Wong et al.* [1992] ont montré qu'en présence de gouge, la décroissance du coefficient de frottement avec le glissement disparaissait sous l'effet d'une augmentation de la pression de confinement.

La température et la pression jouent un rôle dans la transition fragile-ductile (fracture-plasticité) *Scholz* [1990]. Elles contrôlent la propagation des dislocations ainsi que leur nombre donc les phénomènes de plasticité. On peut ainsi aboutir à une situation où la surface de contact devient comparable à la taille de l'interface ($A_c \approx A$).

Les phénomènes impliquant une énergie de surfaces sont également très dépendants de la température. Les processus d'adhésion «chimiques» et la fracturation vont donc évoluer sensiblement *Scholz* [1990].

2.3 Désordre

Examinons comment le désordre géométrique¹³ ou constitutif¹⁴ peut intervenir dans le phénomène de rejeu de l'interface. En quoi les différents processus que nous venons de

11. Les particules peuvent être considérées comme des éléments extérieurs aux surfaces en contact.

12. Failles ayant une grande extension verticale.

13. Voir la description de l'interface faite dans le chapitre 1 de la première partie.

14. Résultant de l'hétérogénéité du milieu: diversité des propriétés mécaniques.

décrire sont sensibles aux hétérogénéités? Comment tenir compte des interactions possibles?

2.3.1 Une dynamique complexe

Non linéarités La dynamique du processus de rejeu est un phénomène particulièrement complexe car elle intègre de multiples non linéarités. Il existe des non-linéarités «brutales» que l'on modélise comme des *phénomènes à seuil*. La transition frottement statique – frottement dynamique est un exemple. Les évolutions «douces» sont également non linéaires. Citons par exemple, la relation entre le coefficient de frottement et le temps de contact ou encore la dépendance en vitesse du coefficient de frottement à haute vitesse.

Instabilités La dynamique est également complexe car elle peut être *instable*. Dans les régimes de faibles vitesses, plus la vitesse croît plus le coefficient de frottement diminue avec la vitesse. Ceci génère une instabilité pouvant initier des «sauts» d'accélération. La transition entre glissement saccadé et glissement continu est une bifurcation¹⁵.

Hystérésis D'importants phénomènes d'hystérésis apparaissent du fait de processus irréversibles comme la plasticité ou la fracturation. Il existe donc une histoire du glissement. Le mécanisme possède une *mémoire*.

Multiplés échelles de temps et d'espace Le phénomène de rejeu est une intégration de multiples mécanismes dont les échelles caractéristiques sont différentes. Il y a interactions de processus se déroulant de l'échelle atomique (e.g. propagation de dislocations dans les cristaux) jusqu'à l'échelle macroscopique¹⁶ comme l'élasticité ou la masse des massifs en contact.

Le processus de rejeu possède par conséquent tous les ingrédients pour en faire un système dynamique non linéaire *Bergé et al.* [1988].

2.3.2 Variables d'état

On constate que les matériaux en présence sont hétérogènes, que la géométrie du système n'a pas d'échelles caractéristiques. La question fondamentale qui surgit alors, est: les distributions existantes dans le problème, sont-elles moyennables?

Si la réponse à cette question est oui, la définition de variables d'état prend tout son sens. Une approche thermodynamique peut être développée. Les variabilités du processus sont alors reportées dans la définition d'un nombre suffisant de variables d'état. C'est cette approche que proposent *Ruina* [1983a], *Rice* [1983], *Okubo* [1989], *Linker and Dieterich* [1992]. Elle se base sur une vision parfaitement déterministe du problème. Elle sous-entend l'existence d'un équilibre au sens thermodynamique vers lequel le système tend en permanence.

15. Voir *Heslot et al.* [1994]

16. i.e. l'échelle de l'échantillon

Cette vision est en bon accord avec l'existence d'un désordre «géométrique» sans désordre «dynamique»

2.3.3 Nombre de degrés de liberté

L'autre position consiste à considérer que les distributions du système ne sont pas moyennables. La caractérisation précise de certaines distributions va dans ce sens. Beaucoup d'entre elles sont en effet de type loi de puissance et ne sont donc pas moyennables.

Le système est alors vu comme un système dynamique non linéaire avec un «grand» nombre de degrés de liberté¹⁷. Sa dynamique est de type chaotique voire turbulente. Il est capable de construire un désordre «dynamique»: deux particules voisines dans le diagramme de phase à un instant donné ne le seront plus du tout un instant plus tard. Dans ce cas, une approche thermodynamique n'a plus de sens. Les longueurs de corrélations spatiales ou temporelles contrôlent le nombre de degré de liberté.

Le modèle de patins-ressorts *Carlson and Langer* [1989a], *Carlson and Langer* [1989b] est un exemple de ce type d'approche où un très grand nombre de degrés de liberté est introduit (e.g. nombre de blocs). D'autres *Horowitz and Ruina* [1989], par subdivision d'un milieu continu en éléments indépendants, introduisent un grand nombre de degrés de liberté.

L'importance du nombre de degrés de liberté dans le problème se retrouve au niveau de la modélisation utilisée. Travailler en milieu continu suppose qu'il est possible d'homogénéiser le milieu (à partir d'une longueur de coupure), au contraire d'un milieu discret qui accentue les contrastes *Rice* [1993], *Carlson et al.* [1991], *Pissarenko* [1994].

2.3.4 Transformation d'échelles

Le problème de la transformation d'échelle se révèle comme particulièrement important pour proposer un lien entre les études de laboratoire et les phénomènes naturels à l'échelle de la lithosphère.

Quelques analogies *Brace and Byerlee* [1966] ont mis en avant l'analogie entre le phénomène de glissement saccadé d'un patin entraîné par un ressort et la vie des failles. Ces dernières ne «bougent» que de façon très brutale avant de rester figées pendant plusieurs milliers d'années alors que les plaques tectoniques subissent un mouvement lent et continu.

Par ailleurs, des déformations pré-sismiques le long des failles ont souvent été interprétées en terme de fluage de la même manière que les déplacements «lents» dans les expériences de frottement *Dieterich* [1979b].

De véritables différences Aux vitesses de sollicitation sismique, l'instabilité de glissement, caractéristique du glissement saccadé, disparaît pour laisser apparaître un mouvement stable continu.

17. Il n'est pas nécessaire que le système présente un très grand nombre de degrés de liberté pour être chaotique *Bergé et al.* [1988].

2.4 Deux directions d'étude

Construire un modèle expérimental ou numérique permettant d'intégrer tous les phénomènes physiques en jeu ainsi que toutes les échelles de temps et d'espace nécessaires à une description complète du phénomène de rejeu de faille, semble aujourd'hui hors de portée. L'état des recherches sur le sujet semble montrer que l'on est pas encore capable de distinguer les processus dominant des phénomènes secondaires.

Au cours de ce travail de thèse, nous avons choisi d'explorer deux types de modèles dont les caractéristiques comprennent un nombre limité des phénomènes décrits préalablement. Ce sont donc des modèles simplifiés par rapport au monde réel, voire caricaturaux. Il s'agit alors de voir la signature d'un processus particulier dans le problème de rejeu de faille.

Nous nous proposons à présent de décrire la philosophie de ces deux modèles et de voir comment il se place par rapport au cadre général que nous venons de dresser. Nous présenterons les résultats au cours du chapitre suivant (i.e. chapitre 3).

2.4.1 Influence du désordre géométrique

Cette première direction d'étude cherche à comprendre l'interaction, dans le phénomène de rejeu, entre le désordre géométrique (i.e. interface auto-affine) et le rôle de la masse des massifs, lors d'un chargement à haute vitesse. Ce travail s'inscrit également dans l'ensemble des études qui tentent de comprendre l'origine de la relation entre la force de frottement qu'oppose le système à son mouvement à une vitesse constante et imposée.

Le problème consiste à déplacer un bloc (dit supérieur), limité par une surface auto-affine, par rapport à un autre (dit inférieur) dont la frontière est également auto-affine. Comme il s'agit de surfaces de fracture, l'exposant d'auto-affinité est identique¹⁸ pour les deux surfaces: $\zeta = 0.80$. La surface inférieure est supposée fixe. La surface supérieure évolue avec une vitesse imposée horizontale¹⁹. Une force normale est appliquée sur le bloc supérieur de sorte qu'il reste en permanence en contact avec le bloc inférieur, uniquement lorsque la vitesse d'entraînement est très faible.

Dans une première approche, nous limitons notre étude au cas de blocs parfaitement rigides. Nous imposons également un mouvement sans rotation du bloc supérieur, en particulier sans rotation autour du point de contact. Précisons que les surfaces sont supposées indépendantes. De ce fait, la probabilité d'obtenir de multiples points de contact simultanés, est négligeable. Un seul point de contact régit donc le frottement entre les deux surfaces à tout instant. Ce point de contact évolue selon un vol de Lévy²⁰.

Le fait qu'un seul point de contact existe à tout instant, permet de définir un problème équivalent plus simple. En effet, on peut calculer le déplacement vertical $z(x)$ que doit subir le bloc supérieur pour franchir toutes les aspérités de la surface inférieure après un déplacement horizontal x (hypothèse de rigidité)²¹:

$$z(x) = \max_{x', y'} (z_{inf}(x' + x, y') - (z_{sup}(x' + x, y'))) \quad (2.26)$$

18. Voir chapitre 1 de la première partie.

19. L'horizontale est considérée comme un plan parallèle aux plans moyens des deux surfaces.

20. Se référer au chapitre 2 de la première partie.

21. Se référer au chapitre 2 de la première partie.

où x est le déplacement horizontal imposé, z_{sup} et z_{inf} sont respectivement les altitudes des surfaces supérieure et inférieure. x' et y' sont les directions dans le plan moyen. On a supposé ici, que la direction de mouvement du bloc supérieur est la même que la direction x' . La fonction $z(x)$ peut être vue comme les différentes altitudes à franchir lorsque le déplacement horizontal x évolue. Le problème équivalent se définit comme le parcours par un point matériel, dont la masse est égale à celle du bloc supérieur, le long du profil $z(x)$. Le problème bidimensionnel est transformé en un problème unidimensionnel. Si les deux surfaces sont auto-affines avec le même exposant, on a montré que le profil $z(x)$ était lui-même auto-affine avec le même exposant.

Le profil $z(x)$ est discrétisé en n points. Le segment reliant deux points consécutifs est appelé facette. La taille de ces facettes est donc fonction de la discrétisation choisie.

Considérer une bille massique (i.e. un point matériel) en mouvement, fait apparaître des forces d'inertie. Ainsi, en fonction du relief local, la bille, soit reste en contact avec son substrat, soit part en vol balistique. En effet, lorsque la pente locale diminue²², la vitesse de la bille qui est tangente à la surface, la fait décoller. Ensuite, du fait du chargement normal²³, elle va revenir vers son substratum. Le choc, au moment de son atterrissage, est supposé être parfaitement inélastique. Ainsi, aucun rebond ne viendra «perturber» la propagation.

Le frottement est introduit au niveau du point de contact. Numériquement, ce point de contact est identifié à une facette. La taille de la surface est choisie comme unitaire. La loi de frottement au niveau de la surface de contact est de type Coulomb. Les efforts normal et tangentiel à la surface, sont donc reliés par le coefficient de frottement μ . Soit F la force appliquée horizontalement pour faire progresser le bloc supérieur à la vitesse V et N , la force normale. La relation entre les deux forces est fonction de la pente locale s de la facette de contact:

$$F = \frac{s - \mu}{1 + \mu s} N \quad (2.27)$$

Deux types de forces normales sont considérées. Tout d'abord, le cas d'un chargement uniquement par gravité.

$$N = mg \quad (2.28)$$

où m est la masse du bloc supérieur et g , la gravité. Le deuxième cas introduit un couplage élastique entre les deux surfaces. Ce type de chargement peut être vu comme une première approche de modélisation du comportement élastique des blocs (loin de la surface de contact).

$$N = mg + k(z - z_0) \quad (2.29)$$

où k est la raideur élastique introduite dans le couplage et z_0 une altitude de référence. On peut noter que l'influence de la gravité peut être comparée à celle de l'altitude de référence z_0 . En effet, en définissant une altitude de référence $z_0' = z_0 - mg/k$, on obtient: $N = k(z - z_0')$. Le chargement élastique est véritablement différent du chargement gravitaire, que si les variations avec l'altitude sont importantes. Pour quantifier cela, on note \bar{N} , le

22. La pente locale est constante le long d'une facette. Elle présente une discontinuité au moment de la transition vers la facette suivante.

23. Le chargement normal de la bille est équivalent à celui appliqué au bloc supérieur.

chargement constant (indépendant de l'altitude, $\bar{N} = kz_0'$) et A l'amplitude moyenne du profil $z(x)$. Les variations verticales seront significatives si $kA \gg \bar{N}$.

Les résultats obtenus par ce modèle inertiel et auto-affine, sont proposés dans le chapitre suivant. L'analyse de la loi de frottement macroscopique pour chacune des conditions de chargement est largement développée. Une emphase est mise sur le rôle du temps de contact.

2.4.2 Modèle dynamique discret

La seconde direction d'étude se base sur l'analyse d'un modèle de rupture dynamique et discret. Le modèle choisi a une longue histoire puisqu'il a été introduit en 1967 par *Burridge and Knopoff* [1967]. Il a suscité un regain d'intérêt, tout particulier, il y a quelques années par *Carlson and Langer* [1989b].

L'esprit d'un tel modèle repose sur l'importance d'un grand nombre de degrés de liberté dans le problème de rejeu d'interface. Comment évolue un système comprenant un nombre élevé de degrés de liberté?

Le contrôle du nombre de degrés de liberté résulte de l'aspect discret du modèle. Une longueur intrinsèque permettant d'individualiser des structures appelées blocs, est supposée exister dans le milieu réel. A l'intérieur de ces blocs, le milieu est considéré comme homogène et mécaniquement rigide. L'interaction entre blocs est supposée être parfaitement élastique. Un tel modèle a suscité beaucoup de controverses. Quelle est donc cette longueur caractéristique? S'agit-il d'une longueur physique?

Notons que cette longueur introduite quelque peu artificiellement ne contrôle pas la dynamique du modèle. Tous les paramètres peuvent être adimensionnés et par conséquent aucune échelle physique n'est explicitement imposée. Le modèle présente donc une apparente invariance d'échelle.

La principale caractéristique de ce modèle est son aspect discret. Le nombre de degrés de liberté est directement proportionnel aux nombres d'éléments introduits. Précisons que cette forme discrète du modèle, n'est en aucun cas, le résultat d'une discrétisation d'un milieu continu.

Par ailleurs, le modèle suppose que l'on peut considérer le rejeu de faille comme un problème de frottement le long d'une interface pré-existante. Ce point impose implicitement une échelle. Il nécessite de considérer le modèle de patins-ressorts comme une modélisation de la faille à très grande échelle. Lors de son évolution temporelle, tout événement dynamique est alors l'analogie d'un tremblement de Terre²⁴.

Les propriétés qui sont introduites dans ce modèle sont l'inertie, l'élasticité, l'instabilité de frottement et un frottement dynamique non linéaire. Il s'agit d'un modèle unidimensionnel constitué d'une chaîne de blocs (ou patins) connectés par des ressorts. Cette chaîne repose sur un plan «rugueux». Il existe donc un frottement entre les patins et ce plan. Soit F_f^i la force de frottement exercée sur chaque patin. L'ensemble de la chaîne subit un chargement extérieur par le mouvement d'une barre rigide à vitesse constante V_s . La connexion entre la barre et chaque patin est assurée par un ressort vertical²⁵.

24. Ceci correspond à l'esprit dans lequel Burridge et Knopoff l'on conçu.

25. horizontal signifie parallèle au plan de glissement, vertical correspond à la vitesse perpendiculaire à

Les ressorts horizontaux, de raideur K_h , placés entre les blocs rigides, modélisent le comportement élastique du milieu au voisinage de la faille. Les ressorts verticaux, de raideur K_v , représentent le couplage élastique entre le chargement à «l'infini» et la faille. On supposera que les propriétés élastiques du milieu sont parfaitement homogènes. Par conséquent tous les ressorts horizontaux sont identiques. Il en est de même pour tous les ressorts verticaux. Ressorts verticaux et horizontaux sont, par contre, considérés comme très différents car ils modélisent des phénomènes physiques bien séparés. Ainsi, la raideur des ressorts horizontaux sera bien plus grande que celle des ressorts verticaux.

On se place dans un repère où le mouvement des patins est assuré par celui du plan rugueux. Le repère est en effet associé à la barre et par conséquent tous les points d'ancrage des différents ressorts verticaux sur cette barre sont immobiles. On ne s'intéresse qu'au déplacement des patins par rapport à la position du point d'ancrage: U^i pour le i^{e} patin. Chaque patin subit une force élastique F_e^i dont l'expression est:

$$F_e^i = -K_v U^i + K_h (U^{i+1} - 2U^i + U^{i-1}) \quad (2.30)$$

L'application de la relation fondamentale de la dynamique permet de décrire simplement le mouvement de chaque patin.

$$M^i \ddot{U}^i = F_e^i + F_f^i \quad (2.31)$$

où M^i est la masse de chaque patin que l'on suppose identique pour tous ($M^i = M$).

Détaillons à présent un point délicat. Il s'agit de la loi de frottement «placée» sous chaque patin. Un premier aspect concerne la variabilité spatiale de la loi. Dans l'esprit d'homogénéité du modèle, la loi de frottement est la même pour tous les patins. Cette loi est fonction de deux variables: le déplacement du patin U^i et sa vitesse de déplacement \dot{U}^i . La dépendance de la force de frottement avec le déplacement se fait à travers la force élastique. En effet, lorsque la force de frottement est inférieure à un seuil (F_f^c), alors cette force s'oppose à la résultante élastique et le patin reste immobile.

$$\text{Pour } F_e \in [-F_f^c; F_f^c], \quad \text{alors } F_s^i = -F_e^i \quad (2.32)$$

où F_s^i est la force de frottement lors de cette phase dite statique (accélération et vitesse relative par rapport au support, sont nulles).

Par contre, lorsque la sollicitation élastique devient supérieure au seuil de frottement, les deux forces ne se contrebalancent plus et le patin acquiert une accélération. Une instabilité est introduite lors de la mise en mouvement du patin car plus le patin accélère (plus sa vitesse croît) et plus la force de frottement décroît. La force, lors de cette phase dynamique, est inversement proportionnelle à la vitesse du patin. Cette dépendance est non linéaire et fonction d'une vitesse de frottement caractéristique V_f .

$$F_d^i = -\text{sign}(\dot{U} - V_s) \cdot F_e^i \cdot f_d \left(\frac{|\dot{U}^j - V_s|}{V_f} \right) \quad (2.33)$$

ce plan.

où $\dot{U} - V_s$ est la vitesse relative du patin et f_d est la force adimensionnée de frottement pendant la phase dynamique (vitesse relative non nulle du patin) dont l'expression est:

$$f_d(x) = \frac{1}{1+x} \quad (2.34)$$

Pour obtenir une forme adimensionnée de l'équation du mouvement *Carlson and Langer* [1989b], *Carlson and Langer* [1989a], *Carlson et al.* [1991], on introduit les temps et déplacement caractéristiques:

$$T^* = \sqrt{\frac{M}{K_v}} \quad U^* = \frac{F_f^c}{F_v} \quad (2.35)$$

T^* est proportionnel à l'inverse de la pulsation du ressort vertical. U^* correspond au déplacement d'un seul patin (uniquement relié à un ressort vertical), lorsqu'il atteint le seuil de frottement F_f^c . Fort de ces deux grandeurs, sont définis un temps et un déplacement adimensionnés:

$$t = \frac{T}{T^*} \quad u^i = \frac{U^i}{U^*} \quad (2.36)$$

La force de frottement est adimensionnée par la valeur du seuil de frottement F_f^c .

Le système n'est alors fonction que de trois paramètres l , ν_s et ν_f contrôlant respectivement l'élasticité du milieu, le chargement et la dissipation par frottement:

$$l = \sqrt{\frac{K_h}{K_v}} \quad \nu_s = \frac{V_s}{V^*} \quad \nu_f = \frac{V_f}{V^*} \quad (2.37)$$

où $V^* = U^*/T^*$ est la vitesse caractéristique définie par le rapport du déplacement sur le temps caractéristique. Avec ces paramètres adimensionnels, l'équation du mouvement s'écrit:

$$\ddot{u}^i = -u^i + l^2(u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}) - f_d\left(\frac{|\dot{u}^i - \nu_s|}{\nu_f}\right) \quad (2.38)$$

Deux échelles de temps sont importantes dans le problème. La première est liée au chargement: $t_c = 1/\nu_s$. t_c est le temps (adimensionné) qu'il faut pour déplacer un patin d'une distance unité à la vitesse de mouvement du support. La seconde est représentative de la vitesse de propagation des ondes élastiques dans le système: $t_p = N/\nu_e$, où N est le nombre de blocs dans la chaîne et ν_e la vitesse adimensionnée de propagation du son. t_p est le temps nécessaire à une onde élastique pour parcourir le système. On considère que la vitesse du son adimensionnée ν_e est proportionnelle au paramètre²⁶ l . Soit Θ , le paramètre égal au rapport de ces deux échelles de temps:

$$\Theta = \frac{t_p}{t_c} = \frac{N\nu_s}{l} \quad (2.39)$$

26. Ceci se base sur une analogie entre l'équation du mouvement qui suit le patin et une équation d'onde. En effet, en ignorant le terme élastique vertical et la force de frottement, l'équation de mouvement devient une équation d'onde où la vitesse de propagation est l

Dans le cas d'une faille, le rapport Θ est extrêmement faible. En effet, le temps de propagation est de l'ordre de la seconde, par contre le temps de chargement est de l'ordre d'au moins l'année, ou plutôt le siècle, voire la dizaine de milliers d'années. Par conséquent, à l'échelle de la plaque lithosphérique, on peut considérer:

$$\Theta \approx 10^{-8} - 10^{-10} \quad (2.40)$$

Par contre, si on s'intéresse à des échelles beaucoup plus petites, le long de la faille, (e.g. pendant le séisme), le chargement peut être le résultat de la propagation des ondes élastiques dans le massif et par conséquent, on obtient:

$$\Theta \approx 1 \quad (2.41)$$

Nous avons étudié ce modèle dans les deux limites de chargement: $\Theta = 0$ et $\Theta \approx 1$. Le rôle des paramètres l , ν_s et ν_f ainsi que de la taille du système ont été examinés. Des extensions du modèle ont été analysées avec, par exemple, l'ajout d'une modélisation de la radiation. Le comportement est également interprété en termes de variables globales et variables locales en particulier pour le phénomène de frottement. Une approche «thermodynamique» a été suivie à l'échelle lithosphérique dans l'esprit d'un système à haut nombre de degrés de liberté moyennable. L'évolution des propriétés du système lors de transformations d'échelles ont été abordées. L'ensemble des résultats, correspondant aux différentes approches que nous venons de proposer, sont développés dans le chapitre suivant.

Conclusion

L'objet de ce chapitre est principalement de dresser un panorama des principales connaissances disponibles sur le phénomène de rejeu de faille. Il illustre la grande variété des processus en jeu.

Selon l'épaisseur relative de la faille, le rejeu peut être vu comme un problème de frottement le long d'une interface pré-existante ou comme un processus de fracturation dans un milieu confiné et fortement hétérogène. Dans ce cas, caractériser le phénomène de rejeu par une loi d'interface n'a pas véritablement de sens. Pour l'étude du problème de rejeu sismique, se pose le problème de l'échelle d'analyse. Nous distinguons l'échelle macroscopique où sont caractérisées des lois phénoménologiques et l'échelle microscopique. Cette dernière correspond aux processus régissant le comportement des aspérités.

Macroscopiquement, sont définies des lois phénoménologiques. Se pose alors la question, pour le cas du frottement, de savoir s'il est possible de séparer l'intégration des processus en volume (élasticité, inertie, radiation, etc) de ceux caractéristiques de l'interface. Dans l'hypothèse où une telle séparation est possible, nous avons vu que trois régimes de frottement sont distinguables: quasi-statique, dynamique reproductible et frottement irréversible. L'étude de ces différents régimes est faite depuis bien longtemps. Il existe des lois classiques comme par exemple les lois d'Amontons ou celle de Coulomb. Des études plus «récentes» montrent que de multiples paramètres influent le frottement de deux surfaces. Le frottement quasi-statique est dépendant du temps de contact, de la surface réelle

de contact, de micro-déplacements horizontaux. La dépendance avec le temps de contact aboutit dans le cas d'un frottement cinématique (i.e. vitesse d'entraînement constante) à une dépendance du frottement avec la vitesse de glissement. Sous certaines conditions, cette dépendance avec la vitesse peut être à l'origine d'une instabilité. En effet, on constate alors que plus la vitesse croît, plus le coefficient de frottement diminue. Une telle instabilité génère un glissement saccadé ou stick-slip. Dans d'autres conditions, l'instabilité de glissement disparaît. C'est le cas lorsque la vitesse d'entraînement ou la température ou encore la pression de fluide augmentent. Le frottement peut être irréversible si une fracturation des aspérités entraîne la formation de gouge ou si des déformations plastiques modifient les surfaces.

A l'échelle microscopique, les mécanismes en jeu lors du rejeu sont particulièrement variés ce qui est à l'origine de la grande difficulté de l'étude de ce phénomène. Il est souvent difficile de savoir quels sont les mécanismes majoritaires. Nous citerons rapidement quelques exemples de ces processus: la rugosité, les tensions de surface avec en particulier les problèmes d'adhésion, la génération d'interface par fracturation, la présence de lubrifiants fluides ou solides (gouges), la propagation d'ondes de surface et de volume, les modes de déformation (élasticité, plasticité, viscosité), l'inertie à haute vitesse, la pression de confinement, la température.

On constate que les processus impliqués dans le rejeu sont très variés mais également que le résultat produit par cette «boîte noire» est très riche. L'origine de cette complexité peut être vue selon deux écoles de pensées différentes. Les uns sont sensibles au fait que l'ensemble des ces processus se font dans un milieu hétérogène. Les constantes de temps des différents processus ainsi que les distances caractéristiques qu'ils introduisent peuvent varier considérablement. Pour faire face à ce désordre «géométrique», certains prennent une position «thermodynamique» et introduisent des variables d'état permettant de suivre l'évolution du système. Ceci suppose qu'il est possible de moyenniser les différentes fluctuations locales. L'autre école insiste sur la variabilité des processus en jeu et le fait que les fluctuations ne sont pas moyennables. En effet, les processus sont pour la plus part fortement non linéaires et les échelles caractéristiques distribuées sur des intervalles particulièrement larges (e.g. phénomènes critiques). Le nombre de degrés de liberté est alors supposé élevé. Qui dit grand nombre de degrés de liberté et dynamique non linéaire, voit la faille sismique comme un système dynamique chaotique voire turbulent. Le désordre devient dans ce cas «dynamique».

Face à cette difficulté, nous avons choisi de suivre deux routes très distinctes. La première est à cheval entre les deux écoles. Elle s'intéresse au rôle du désordre géométrique. Il s'agit dans un modèle dont la dynamique particulièrement simple (voire simpliste). Il permet d'étudier le rôle de la géométrie auto-affine dans le processus de frottement en régime inertiel. La seconde route s'inscrit plus typiquement dans la perspective d'un système dynamique non linéaire. Nous avons en effet étudié un modèle de patins-ressorts (type Burridge et Knopoff) où le nombre de degrés de liberté est facilement contrôlable, et où la dynamique inclut de fortes non linéarités.

Chapitre 3

Quelques résultats

Introduction

Ce dernier chapitre présente les résultats obtenus au cours de ce travail de thèse dans le cadre du rejeu de faille lors des séismes. Il se place dans la continuité du chapitre précédent.

Nous rappelons simplement que deux approches nettement distinctes ont été suivies.

La première consiste à étudier le rôle du désordre «géométrique» dans le phénomène de rejeu. La description mécanique y est simplifiée à l'extrême. Seuls sont retenus les phénomènes inertiels, la loi de frottement des aspérités (loi de Coulomb), et «l'élasticité» loin de la surface. Par contre, le désordre géométrique est caractérisé par l'auto-affinité des surfaces en contact.

La seconde se base sur l'étude du modèle dynamique de patins-ressorts (type Burridge-Knopoff *Burridge and Knopoff* [1967]). Il s'agit d'un modèle de la faille sismique, unidimensionnel et discret. Les principaux «ingrédients» physiques qu'il contient sont: un grand nombre de degrés de liberté, élasticité, inertie, instabilité de frottement avec décroissance de la frottement lorsque la vitesse croît («velocity weakening») et un chargement à vitesse constante (frottement cinématique). Au contraire du chargement, toutes les interactions sont locales. Un tel modèle se place dans une perspective de désordre «dynamique».

Présentation du plan Dans le cadre de la première approche suivie, nous discuterons les lois de frottement obtenues. Nous montrerons comment l'apparition de vols balistiques (en régime de haute vitesse) le long de surfaces auto-affines, peuvent conduire à l'apparition de dépendances de la force de frottement macroscopique avec la vitesse de glissement. Le reste de chapitre concerne trois groupes de résultats liés au modèle de patins-ressorts. Tout d'abord, nous placerons le modèle à l'échelle lithosphérique. Une analogie est alors faite entre mouvements de groupe des patins et tremblements de Terre. Pour ce faire, le chargement est arrêté pendant les «séismes» afin de véritablement séparer les échelles de temps. Ensuite, nous étudierons la réponse du modèle lorsque le temps de chargement devient comparable au temps de propagation des ondes élastiques. Le glissement est alors accommodé par la propagation d'ondes solitaires. Enfin, nous étudierons la question du transfert d'échelles. Par une technique de renormalisation dont chaque étape peut être

calquée sur un modèle de Burridge-Knopoff, il est possible de suivre l'évolution de la loi de frottement au fur et à mesure des changements d'échelle.

Lien avec les publications Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, ce travail dans le cadre du rejeu sismique, a permis d'élaborer cinq articles contenus dans les différentes annexes du présent chapitre. L'annexe 1 traite du problème de rejeu de deux surfaces auto-affines en régime inertiel. Les autres annexes traitent du modèle de patins-ressorts. Le cas où les échelles de temps sont véritablement séparées (comme dans le phénomène naturel de tremblement de Terre), est traité dans l'annexe 2. Les annexes 3 et 4 se réfèrent, au contraire, à la situation où temps de propagation élastique et temps de chargement sont comparables. L'annexe 3 s'intéresse davantage à l'aspect numérique à l'inverse de l'annexe 4, dédiée à l'approche analytique. Enfin, l'annexe 5 pose le problème du changement d'échelle de la loi de frottement.

3.1 Géométrie auto-affine et loi de frottement

Rappelons¹ que le mouvement relatif de deux surfaces auto-affines en contact a pour problème équivalent, celui d'un point matériel le long d'un profil auto-affine ayant le même exposant d'auto-affinité (voir Annexe 1, Figure 1, page 308). Lors de sa mise en mouvement par une vitesse horizontale² constante, le point va, soit rester en contact avec le profil, soit décoller et partir en vol balistique. Le décollage se produit lors d'une diminution de la pente locale. Plus la vitesse d'entraînement est grande et plus les sauts ont une amplitude importante. La trajectoire du point est donc composée de deux types d'événements: parcours du profil auto-affine (zone de contact) et des sauts. Tout au long du contact, le frottement est local, de type Coulomb. Pendant les vols, le frottement est considéré comme nul.

3.1.1 Vitesses caractéristiques

Dans ce problème, il existe une échelle de vitesse. Cette vitesse correspond à celle pour laquelle en moyenne, la distance horizontale que couvre un vol est égale à la taille de discrétisation du profil: l . La longueur de ce vol est fonction de la pente s locale du profil où a été initié le décollage du point.

Une première étape du calcul consiste à estimer la pente caractéristique s_c d'une facette élémentaire du profil, de longueur horizontale l . La variation d'altitude δz le long de cette facette, sachant que la profil est auto-affine avec un exposant ζ , est estimée par:

$$\delta z = \frac{A}{\left(\frac{l}{L}\right)^\zeta} \quad (3.1)$$

où A est l'écart-type des altitudes du profil et L la longueur totale du profil. La pente

1. Voir paragraphe 2.4.1.

2. horizontal signifie parallèle à la direction moyenne du profil.

caractéristique s'obtient alors simplement:

$$s_c = \frac{\delta z}{l} = \frac{AL^\zeta}{l^{1+\zeta}} \quad (3.2)$$

Etudions tout d'abord le cas du comportement gravitaire. En vol, le point ne subit que l'action de son poids. A tout autre instant, se rajoute la force de frottement. Notons que le poids est une force indépendante³ de l'altitude du point. Soit U_x la vitesse horizontale pour obtenir un vol balistique dont la distance horizontale est l et la vitesse initiale orientée avec une pente s par rapport à l'horizontale:

$$U_x = \sqrt{\frac{lg}{s}} \quad (3.3)$$

En utilisant l'expression de la pente caractéristique, on définit la vitesse adimensionnée caractéristique $v_g = V/U_x$, où V est la vitesse d'entraînement:

$$v_g = V \sqrt{\frac{A}{l^2 g}} \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta/2} \quad (3.4)$$

Dans le cas du comportement élastique, le point subit, en plus de la gravité, une force de rappel élastique. La force dépend donc de l'altitude du point. La vitesse caractéristique est également définie comme la vitesse horizontale initiant un saut horizontal de longueur de l . On suppose qu'en première approximation, la force élastique est constante pendant ce saut élémentaire et son ordre de grandeur est de kA où k est la raideur du système. La vitesse caractéristique est alors:

$$U_x = \sqrt{\frac{lkA}{sm}} \quad (3.5)$$

où m est la masse du point (i.e. la masse du bloc supérieur). Il s'en suit l'expression de la vitesse caractéristique adimensionnée, en régime élastique:

$$v_e = V \sqrt{\frac{m}{l^2 k}} \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta/2} \quad (3.6)$$

La vitesse de chargement considérée dans la suite, est normalisée par v_g ou v_e selon le comportement étudié:

$$v = \frac{V}{v_g} \quad \text{ou} \quad v = \frac{V}{v_e} \quad (3.7)$$

3.1.2 Lois de frottement

Pour chaque type de chargement, le coefficient de frottement est estimée pour différentes vitesses d'entraînement adimensionnées. Ce coefficient est défini par:

$$\phi(v) = \frac{\langle F \rangle_t}{N} \quad (3.8)$$

3. Les variations du champ de gravité ne sont pas considérées.

où N est le chargement normal: $N = mg$ dans le cas du chargement gravitaire et $N = kA$ dans le cas élastique. La moyenne $\langle F \rangle_t$ est réalisée sur les différentes évaluations de la force de frottement à chaque pas de discrétisation du profil. Précisons que lorsque le point est en vol, la force de frottement est considérée comme nulle, sinon elle est égale à la force Coulomb, i.e. indépendante de la vitesse.

Deux types de loi de frottement apparaissent selon le chargement imposé. Dans le cas gravitaire, le coefficient de frottement est constant pour des vitesses d'entraînement plus petites que un, puis pour des vitesses ($v \geq 1$), il décroît avec la vitesse (voir Annexe 1, Figure 2, page 308):

$$\begin{cases} \phi(v) \propto Cte & \text{pour } v < 1 \\ \phi(v) \propto v^{-2} & \text{pour } v > 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans le cas de chargement élastique, le comportement du coefficient de frottement est globalement identique. Il existe cependant une «saturation» à haute vitesse ($v > v^*$) où la dépendance en vitesse du coefficient de frottement est moins grande (voir Annexe 1, Figure 5, page 310):

$$\begin{cases} \phi(v) \propto Cte & \text{pour } v < 1 \\ \phi(v) \propto v^{-2} & \text{pour } 1 < v < v^* \\ \phi(v) \propto v^{-1} & \text{pour } v > v^* \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour les deux chargements considérés, une dépendance du coefficient de frottement avec la vitesse apparaît introduite pour les régimes à hautes vitesses. Ceci correspond à des régimes où les vols balistiques du point sont significatifs.

Par ailleurs, on peut vérifier que la normalisation de la vitesse est pertinente puisque la transition entre régime à coefficient constant et régime avec dépendance en vitesse, a bien lieu pour des vitesses normalisées de l'ordre de l'unité.

3.1.3 Temps de contact

Montrons que cette dépendance en vitesse du coefficient de frottement peut être reliée à la fraction $t(v)$ du temps passé en réel contact par le point (i.e. les surfaces):

$$t(v) = \frac{T_{\text{contact}}}{T_{\text{contact}} + T_{\text{vol}}} \quad (3.11)$$

La force de frottement moyenne est alors bien approximée (vérification graphique, voir Annexe 1, Figure 2, page 308) par la relation:

$$F(v) \approx F(0) \cdot t(v) \quad \text{soit} \quad \phi(v) \approx \phi(0) \cdot t(v) \quad (3.12)$$

Le frottement moyen $F(0)$, pour une vitesse nulle, est un paramètre géométrique. Par conséquent, la connaissance de la fraction de temps passé en contact, permet de prédire la force de frottement pour toute vitesse.

Le temps de vol (T_{vol}) est estimé en disant que, pendant le vol, le point parcourt en moyenne la distance $\bar{x}(v)$ avec la vitesse horizontale et constante: v . Le temps de

contact (T_{contact}) est défini comme le temps que met le point pour franchir la longueur de discrétisation l , à la vitesse v :

$$T_{\text{vol}} \approx \frac{\bar{x}(v)}{v} \quad T_{\text{contact}} \approx \frac{l}{v} \quad (3.13)$$

En reprenant l'équation 3.11, le coefficient de frottement $\phi(v)$ vérifie:

$$\phi(v) \approx \frac{\phi(0)}{1 + \frac{\bar{x}(v)}{l}} \quad (3.14)$$

Lorsque la vitesse est faible, la distance moyenne de saut est plus petite que la discrétisation. On retrouve ainsi que le coefficient de frottement est constant. Par ailleurs, on peut calculer la distance moyenne de saut $\bar{x}(v)$ pour différentes vitesses. On obtient, dans le cas gravitaire (voir Annexe 1, Figure 3, page 309):

$$\bar{x}(v) \propto v^2 \quad (3.15)$$

Ce calcul permet de vérifier l'observation faite sur la dépendance de la frottement moyenne avec la vitesse:

$$\phi(v) \approx \frac{\phi(0)}{1 + v^2} \quad (3.16)$$

Dans le cas du comportement élastique, nous intéresserons plus particulièrement au régime à très hautes vitesses ($v > v^*$). Pour les régimes à vitesse v inférieure à la vitesse critique v^* , les arguments sont identiques au cas précédent. En effet, les sauts sont suffisamment «petits» pour ne pas être sensibles aux variations verticales de la force de rappel. Dans ce cas, la force élastique agit de façon analogue à la gravité. Par contre, lorsque les sauts deviennent «grands», on ne peut plus négliger le ressort de rappel.

La pulsation de ce ressort définit alors une longueur λ «naturelle» dans le problème:

$$\lambda = \frac{v_e}{\sqrt{k/m}} v \quad (3.17)$$

Cette longueur est proportionnelle à la vitesse adimensionnée v . De plus, λ n'est autre que la longueur d'onde de la trajectoire du vol. Par conséquent, lorsque le saut est suffisamment grand, la distance moyenne horizontale de vol $\bar{x}(v)$ est proche de la longueur d'onde λ , d'où:

$$\bar{x}(v) \propto v \quad (3.18)$$

Il s'en suit que l'évolution de coefficient de frottement devient:

$$\phi(v) \approx \frac{\phi(0)}{1 + v} \quad (3.19)$$

Nous retrouvons aussi le comportement du coefficient de frottement, observé préalablement.

En conclusion, nous retiendrons de ce modèle très simple de rejeu de faille⁴ que la géométrie auto-affine est à l'origine de dépendance en vitesse de la loi de frottement macroscopique. Rappelons les hypothèses nécessaires à ce calcul. Les surfaces en vis-à-vis sont

4. cf les hypothèses faites au cours du chapitre 1 de la première partie.

auto-affines et toujours parallèles entre elles. Le contact est uniquement considéré comme ponctuel et régit par une loi de Coulomb (sans dépendance en vitesse). Le chargement est à vitesse constante. Deux types de comportement sont décrits. Soit les surfaces sont parfaitement rigides, alors seule la gravité constitue la force de rappel de la surface supérieure. Soit les surfaces sont également considérées comme rigides mais couplées à des massifs «élastiques». Pour les deux types de comportement, la dépendance est en $1/v^2$. Dans le cas d'un régime du comportement élastique où la force de rappel dépend de l'altitude, un régime particulier apparaît à très haute vitesse. La dépendance est alors en $1/v$.

Notons cependant que les lois de frottement obtenues présentent une dépendance en vitesse indépendante de l'exact géométrie de la surface, à savoir son exposant d'auto-affinité. L'influence de l'auto-affinité se trouve par contre dans le préfacteur est la description des fluctuations. Ajoutons enfin que ce modèle présente d'importantes limitations mécaniques. Des extensions seraient à développer comme l'influence d'un choc partiellement élastique, l'intégration de propriétés d'élasticité ou de plasticité des aspérités en contact.

3.2 Une thermodynamique des tremblements de Terre

Nous nous tournons vers l'étude du modèle de patins-ressorts (voir Annexe 2, Figure 1, page 329). Au cours de ce paragraphe, nous considérons le modèle à l'échelle lithosphérique. Le temps de chargement est nettement séparé du temps de propagation, en stoppant l'entraînement du système, lorsqu'un événement est initié. Rappelons que le rapport des échelles de temps est paramétré par⁵:

$$\Theta = \frac{N\nu_s}{l} \quad (3.20)$$

En imposant $\nu_s = 0$, nous nous plaçons par conséquent à:

$$\Theta = 0 \quad (3.21)$$

Dans le cas «naturel», les tremblements de Terre se produisent pour une valeur de: $\Theta \approx 10^{-8} - 10^{-10}$.

L'étude du modèle avec de telles conditions aux limites fait l'objet d'un projet d'article en cours d'élaboration (voir Annexe 2). Etant donné qu'il nous paraît difficile de dégager un éclairage substantiellement différent de celui proposé dans l'annexe 2, nous ne présenterons dans ce manuscrit, que le résumé de quelques points que nous jugeons importants.

3.2.1 Variables globales

La notion de «thermodynamique» des tremblements de Terre est quelque peu caricaturale. Elle renseigne plutôt sur l'esprit dans le lequel s'est développé le travail. Nous pourrions constater au cours des prochains paragraphes qu'un tel modèle peut, dans certains cas, présenter une dynamique particulièrement riche (cf la notion de «désordre géométrique»⁶).

5. Voir paragraphe 2.4.2.

6. se référer en particulier à Carlson and Langer [1989b], Carlson and Langer [1989a].

La question que l'on est alors en droit de se poser est: Existe-t-il des variables globales (i.e. définies à l'échelle du système) permettant de décrire voire suivre ou prédire l'évolution du système? Cette question soulève implicitement le problème de l'existence de fluctuations moyennables. Peut-on voir la variabilité des grandeurs locales (i.e. à l'échelle du patin) comme des fluctuations autour d'un état moyen du système? Ou bien de telles moyennes sont-elles inexistantes? La seule façon de décrire le système est alors probabiliste.

3.2.1.1 Energies élastiques

Nous nous sommes intéressés aux différentes formes d'énergie dans le système. Trois formes d'énergie existent: l'énergie potentielle élastique, l'énergie cinétique et l'énergie dissipée lors du frottement. Précisons que le système reçoit de l'énergie à travers le chargement extérieur lors des périodes inter-événements. Du fait du chargement choisi, les périodes où l'énergie cinétique et l'énergie de dissipation sont non nulles, sont très localisées en temps. Il s'agit des périodes d'événements «sismiques». De ce fait, l'énergie mécanique du système est égale à l'énergie élastique E_t , pour peu qu'on ne la mesure pas pendant les événements. Cette énergie se décompose en deux termes: l'énergie élastique horizontale E_h , liée aux ressorts horizontaux (K_h), et l'énergie élastique verticale E_v , liée aux ressorts verticaux (K_v).

$$E_h = l^2 \sum_{i=1}^N (u^{i+1} - u^i)^2 \quad E_v = \sum_{i=1}^N (u^i)^2 \quad (3.22)$$

où u^i est la position du patin i .

L'examen de l'évolution de ces deux énergies au cours du temps (voir Annexe 2, Figures 10a et 10b, page 334), permet de suivre l'évolution du système. La première constatation est que l'énergie élastique verticale est toujours nettement supérieure à l'énergie horizontale. En fait, l'énergie verticale est à tout instant quasiment égale à l'énergie totale. La description du système peut se faire alors uniquement par deux variables: E_h et E_t . Au cours du temps, apparaît une quasi-cyclicité des deux variables. On peut ainsi définir un macro-chargement comme l'ensemble des micro-événements de chacun des cycles. L'évolution du système est alors considérée comme la succession: macro-chargement, rupture, macro-chargement, rupture, etc.

Au cours des cycles, deux phénomènes majeurs se produisent. D'une part, le système se charge, ce qui se traduit par une augmentation de l'énergie potentielle. D'autre part, l'énergie horizontale décroît. La signification physique de ce deuxième point se déduit d'une traduction statistique de cette énergie horizontale. Il s'agit de la variance de la position des patins. L'énergie élastique horizontale est donc une mesure du «désordre» de position dans la chaîne. Lorsque tous les patins sont régulièrement espacés, l'énergie horizontale est minimale et égale à zéro. Par conséquent, au cours d'un cycle, pendant que le système se charge, il s'ordonne.

3.2.1.2 Événement conservatifs et dissipatifs

Un autre point de vue dans le système, se fonde sur l'étude de l'évolution incrémentale de l'énergie totale.

$$\Delta E_t(t_i) = E_t^0(t_{i+1}) - E_t^0(t_i) \quad (3.23)$$

où $E_t^0(t_i)$ est l'énergie totale au départ de l'incrément de chargement aboutissant à l'événement t_i . Cet incrément d'énergie se décompose en deux parties: d'une part, l'énergie potentielle élastique apportée au système permettant d'initier l'événement et d'autre part, la dissipation d'énergie lors du frottement des patins pendant l'événement. Lorsque cet incrément ΔE_t est positif, cela signifie que le système est en train d'accumuler de l'énergie. Au cours du temps (voir Annexe 2, Figure 10c, page 334), cette énergie incrémentale présente deux types de comportement. Pendant les macro-chargeurs, elle est positive. Chacun des micro-événements qui la compose est dit *conservatif*. Au contraire, la fin d'un macro-chargeur est marquée par l'apparition de quelques micro-événements qui dissipent bien plus d'énergie qu'il n'en n'a fallu pour les déclencher. Ces derniers sont dits *dissipatifs*.

3.2.1.3 Evolution déterministe des événements conservatifs

Il est possible de suivre l'évolution du système en se plaçant dans l'espace: $[E_h/(E_t E_h^i); E_t]$ où E_h^i est l'énergie horizontale élastique au moment de l'initiation d'un macro-chargeur (voir Annexe 2, Figure 13, page 336). Deux phases sont mises en évidence au sein de chaque macro-chargeur. Le système commence par se charger à désordre constant:

$$E_t < E_t^c \quad E_h \approx E_h^i \quad (3.24)$$

où E_t^c est l'énergie maximale que le système peut accumuler⁷. Ensuite, au fur et à mesure que le paramètre de contrôle $E_h/(E_t E_h^i)$ décroît, le système entre dans une phase méta-stable caractérisée par:

$$E_t \approx Cte \quad \frac{E_h}{E_t} < \frac{E_h^i}{E_t^c} \quad (3.25)$$

Au cours de cette phase, l'énergie totale est constante. Le système est alors «piloté» par le niveau de désordre qu'il présente. L'évolution déterministe des micro-événements consiste à faire chuter le rapport E_h/E_t . Ceci se fait, soit par un chargement conséquent du système, soit par une «mise en ordre» des patins.

3.2.1.4 Critère probabiliste d'apparition des événements dissipatifs

Nous venons d'étudier la dynamique des événements conservatifs. Qu'en est-il des événements dissipatifs? Rappelons que la plupart de ces événements ont une taille égale à celle du système. Ils réduisent significativement l'énergie mécanique du système et introduisent un nouveau désordre de position. Nous dirons qu'il s'agit d'une véritable «rupture» du système. L'apparition de ces événements est régie par le paramètre de contrôle $E_h/(E_t E_h^i)$.

7. Cette énergie est de l'ordre de: $E_t^c \approx 105$ pour un système de $N = 128$. Ceci est un peu inférieur à l'énergie «théoriquement» accumulable: $E_t^{max} = N$.

La probabilité P_d de développer un événement dissipatif est calculée en fonction de ce paramètre (voir Annexe 2, Figure 14, page 336). On mesure:

$$P_d \left(\frac{E_h}{E_t E_h^i} \right) \propto \exp \left(-12.5 \frac{E_h}{E_t E_h^i} \right) \quad (3.26)$$

Le critère d'apparition des grands événements dissipatifs est donc probabiliste. La bifurcation à partir de l'état méta-stable dans lequel se trouve le système avant une rupture ne peut être décrit par une variable d'état. Les fluctuations ne sont plus moyennables.

L'idée que l'on peut se faire sur l'évolution générale du système, est qu'il suit en permanence une certaine trajectoire vers un point particulier (évolution déterministe). Cependant, au fur et à mesure qu'il se rapproche de ce point, la probabilité de quitter la trajectoire et de se ré-éloigner du point de convergence, croît exponentiellement. Il ne peut donc véritablement jamais atteindre ce point. Le système suit une quasi-cyclicité. Précisons que le point d'entrée dans le cycle (au point d'initiation d'un macro-chargeur) est pas déterministe. Il est fonction du bruit introduit par le grand événement dissipatif. Il en est de même du point de rupture (à la fin d'un macro-chargeur).

3.2.2 Influences des paramètres

Nous étudions l'influence des paramètres sur la dynamique du système. Ces paramètres sont: l'élasticité (l), le taux de dissipation lors du frottement (ν_f) et la taille du système (N). Ceci se fait principalement à partir de la distribution des tailles d'événements. Nous montrons en particulier qu'il existe une taille caractéristique: $N^* = l^2$ (voir Annexe 2, Figure 17, page 338). Une telle taille s'interprète selon l'argument suivant. Supposons que L blocs se mettent en mouvement d'un seul tenant. Ce macro-bloc sera lié à la barre rigide par un macro-ressort dont la raideur est fonction de sa taille: $K_v^M = LK_v$. Au contraire, le ressort horizontal, liant le bloc au reste de la chaîne reste avec la même raideur $K_h^M = H_h$. Il apparaît un changement de régime lorsque la taille du bloc croît de telles sortes que raideur horizontale et verticale soient du même ordre. Soit N^* cette taille:

$$N^* K_v \approx K_h \quad (3.27)$$

On retrouve ainsi:

$$N^* \approx l^2 \quad (3.28)$$

Quand un événement est plus petit que N^* , sa dynamique est essentiellement contrôlée par les ressorts horizontaux. Le système se comporte comme une chaîne d'oscillateurs. Par contre, lorsqu'un événement dépasse cette taille N^* , sa dynamique devient sensible à la taille du système.

3.2.3 Cohérence avec les lois sismologiques

Il est particulièrement intéressant de mettre en évidence quelques analogies de comportement entre le modèle et la réalité des tremblements de Terre. Pour cela, nous nous référerons à différentes lois sismologiques.

3.2.3.1 Durée des événements

Nous montrons que la durée des micro-événements Δt est en moyenne proportionnelle à leur taille L (voir Annexe 2, Figure 6, page 331):

$$\langle \Delta t \rangle \propto L \quad (3.29)$$

Ceci est en bon accord avec l'observation sismologique *Scholz* [1990].

3.2.3.2 Glissement moyen

Le glissement moyen Δu est obtenu en calculant la différence moyenne de position de chaque patin entre le début et la fin d'un micro-événement. Nous mesurons (voir Annexe 2, Figure 7, page 332):

$$\langle \Delta u \rangle \propto L \quad (3.30)$$

Cette loi est également cohérente avec les statistiques sismologiques *Scholz* [1990].

3.2.3.3 Moment sismique

Le moment sismique M est défini dans le modèle comme:

$$M = \sum_{i=1}^N \Delta u^i \quad (3.31)$$

où Δu^i est la différence de position induite par un événement pour le patin i . L'analyse du modèle aboutit à:

$$M \propto L^2 \quad (3.32)$$

Ceci est en bon accord avec l'observation sismique à condition que l'on se souvienne que le modèle est unidimensionnel. Il faut donc faire le parallèle avec le comportement des grandes failles le long desquelles, la propagation se fait principalement dans une seule direction.

Le moment sismique est également utilisé pour construire la distribution de Gutenberg et Richter. En effet, la magnitude des séismes n'est autre que le logarithme du moment sismique⁸. On peut ainsi vérifier que la distribution du moment sismique évolue en loi de puissance (voir Annexe 2, Figure 9a, page 333):

$$\log(N(M > M_0)) = a - b \log(M) \quad (3.33)$$

Revenons sur un point qui peut paraître étonnant. En effet, la distribution des tailles d'événements L est exponentielle. Par ailleurs, la distribution du moment sismique est en loi de puissance. Or moment sismique et taille d'événement sont liés par la relation quadratique: $M \propto L^2$.

8. Voir introduction

L'incohérence apparente se lève si on postule que les distributions suivent en fait, les comportements suivants:

$$N(L) \propto L^{-3} \exp(-L/L_0) \quad (3.34)$$

$$N(M) \propto M^{-2} \exp(-\sqrt{M/M_0}) \quad (3.35)$$

Nous avons pu vérifier ce double comportement (voir Annexe 2, Figure 9b, page 333). Ainsi, l'étude de la distribution de la taille est par construction un zoom sur la dépendance exponentielle alors que l'examen du moment est quant à lui, un zoom sur la dépendance en loi de puissance.

3.3 Chargement rapide et ondes solitaires

Nous intéressons à présent au même modèle de rupture, mais avec des conditions aux limites différentes. Le chargement est en effet, dorénavant continu et constant, que les patins bougent ou non. Ce type de conditions aux limites correspond à celui choisi par *Burridge* et *Knopoff* lors de la création du modèle *Burridge and Knopoff* [1967].

Dans ce cas le rapport Θ des échelles de temps dans le problème est à tout instant non nul. Rappelons l'expression de Θ :

$$\Theta = \frac{Nv_s}{l} \quad (3.36)$$

Il est important de préciser quelles sont les plages de paramètres habituellement choisies dans la littérature dont voici quelques exemples⁹: *Burridge and Knopoff* [1967], *Carlson and Langer* [1989b], *Carlson and Langer* [1989a], *Carlson* [1991b], *Carlson et al.* [1991], *Langer and Tang* [1991], *Carlson* [1991a], *Knopoff et al.* [1992], *Shaw et al.* [1992], *Shaw* [1993], *Vasconcelos et al.* [1992], *de Sousa Vieira et al.* [1993], *Pepke et al.* [1994], *de Sousa Vieira and Hermann* [], *Español* [1994].

1. La taille du système N varie de 1 à quelques milliers. Plus le système est grand, plus bien évidemment, le calcul est long pour chaque pas de temps. Par conséquent, les statistiques sur un grand nombre d'événements deviennent difficiles. Pour notre étude nous avons rarement considéré des tailles de plus de 256 patins.
2. La vitesse adimensionnelle d'entraînement est en général choisie dans l'intervalle [0.001 - 0.1]. Si elle est faible et que tous les pas de temps sont intégrés de la même façon, alors un très grand nombre de pas de temps est nécessaire pour suivre plusieurs cycles du système. Au cours de notre étude, nous avons exploré l'ensemble de la gamme.
3. Le paramètre l évolue dans une plage [1 - 10]. La limite ($l = 10$) est fonction du pas de temps choisi car le système est «raide». Plus il augmente, plus le pas de temps doit être petit.

9. Ceci est principalement fonction de la puissance de calcul des outils numériques dont on dispose

La gamme du paramètre Θ ainsi couverte, est:

$$0.0001 < \Theta < 10 \quad (3.37)$$

Ajoutons que la borne inférieure est obtenue pour un système comportant un seul patin. Si l'on travaille avec des systèmes de l'ordre de 100 patins, la borne inférieure n'est plus que de 0.01. Ce discours plutôt technique que scientifique a pourtant une implication très importante. En effet, le modèle de Burridge-Knopoff, considéré avec un chargement continu, ne peut en aucun cas être vu comme un modèle de plaque lithosphérique. Nous avons vu, en effet, que dans ce cas, le rapport des échelles de temps était d'une toute autre nature: $\Theta \approx 10^{-8} - 10^{-10}$. La gamme de valeur la plus accessible avec un tel modèle correspond à: $\Theta \approx 1$. Alors le temps caractéristique de chargement est du même ordre que le temps caractéristique de propagation d'une onde élastique dans le système.

Précisons enfin que si Θ est le bon paramètre du système, faire varier la réponse du système, peut se faire soit en modifiant la vitesse d'entraînement adimensionnée (ν_s), soit la taille du système (le nombre de bloc N), soit sa raideur (l).

La précédente partie s'est intéressée à la modélisation pour: $\Theta = 0$. Nous étudierons ici, le comportement du système dans une autre limite: $\Theta \approx 1$.

3.3.1 Emergence des ondes propagatives

Nous avons utilisé le modèle avec des conditions spatiales périodiques¹⁰. La condition initiale est caractérisée par l'introduction d'un faible désordre géométrique dans la position des patins. En effet, chaque patin est placé autour de sa position d'équilibre avec une «faible» précision: 0.1% (bruit blanc). L'intégration numérique se fait par un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 2. Cependant, elle nécessite quelques précautions. En effet, la loi de frottement placée sous chaque patin est fortement non linéaire. Elle présente des seuils qu'il est difficile de suivre numériquement. Comme nous l'avons mentionné dans la précédente partie, l'initiation du mouvement se fait en introduisant une perturbation dans le système. L'importance donnée à cette perturbation modifie significativement la dynamique du système. Par ailleurs, une attention particulière est portée sur l'estimation de la position d'arrêt du patin. En effet, à ce moment, le patin subit une décélération fortement non linéaire avant un saut «théorique» d'accélération au moment de son arrêt (e.g. loi de frottement). Toute erreur numérique sur la position ou la vitesse du patin à cette période de variations brutales des quantités, introduit un bruit numérique important. Précisons que des techniques de pas de temps adaptatif, qui pourraient paraître a priori adéquate dans ce type de situation, se révèlent inopérantes car à tout instant, les patins, surtout s'ils sont nombreux sont dans des situations très variées. Par conséquent, la méthode consiste simplement à réduire le pas de temps.

Notre premier objectif sera de suivre l'évolution du système lorsque il y a «résonance» c'est à dire que les deux échelles de temps deviennent comparables ($\Theta = 1$).

10. Quelques simulations ont été réalisées avec des conditions non périodiques pour vérifier que les résultats obtenus ne sont pas spécifiques des conditions aux limites choisies.

La loi de frottement est normalisée par une vitesse caractéristique ν_f que nous supposons fixe pour le moment. En effet, elle n'intervient pas dans le paramètre de contrôle de la résonance.

3.3.1.1 Echelle microscopique

Nous appellerons échelle microscopique, l'échelle des patins au contraire de l'échelle macroscopique qui sera celle de l'ensemble de la chaîne.

La réponse du système sera étudiée dans deux cas particuliers. L'un pour un chargement «lent»¹¹ ($\Theta = 0.1$) et l'autre pour un chargement «rapide» ($\Theta = 1.0$) (voir Figure 3.1).

Solution chaotique Un contraste frappant est obtenu dans le type de solution obtenue. Pour un rapport petit des échelles de temps ($\Theta = 0.1$), la solution est localisée en temps et présente une forte variabilité spatiale. Elle est de même nature que celle présentée dans le paragraphe 3.2. Cette solution a été appelée solution «chaotique» *Carlson and Langer* [1989a], *Carlson and Langer* [1989a], *Carlson et al.* [1991]. Rappelons qu'elle reproduit certaines analogies avec les lois sismologiques, notamment la loi du Gutenberg-Richter.

Solution propagative Par contre, lorsque le système est proche de la résonance ($\Theta = 1.0$), la forme de la solution change radicalement. On assiste à une synchronisation des patins. La solution n'est plus localisée en temps, mais est régit par une propagation continue d'ondes solitaires. Numériquement, on constate que leur vitesse de propagation (c) est proche de la vitesse du son ($c \approx l$). Cette vitesse est particulièrement stable au cours du temps. Elle est la même lorsque la taille du système change. Leur longueur d'onde est de l'ordre de 8 patins dans le cas de la figure 3.1.

Transition Le passage de la solution chaotique à la solution propagative se fait par stabilisation progressive d'ondes solitaires. En augmentant lentement le paramètre Θ , des ondes émergent des événements chaotiques de grande taille. Leur durée de vie est de plus en plus longue. Lorsque l'on atteint la résonance, leur stabilité dans le temps est quasi-parfaite. Leur durée de vie est devenue «infinie». Cette situation correspond à: $\Theta = 1$.

11. Il est commode de contrôler l'état du système (Θ) par la vitesse d'entraînement.

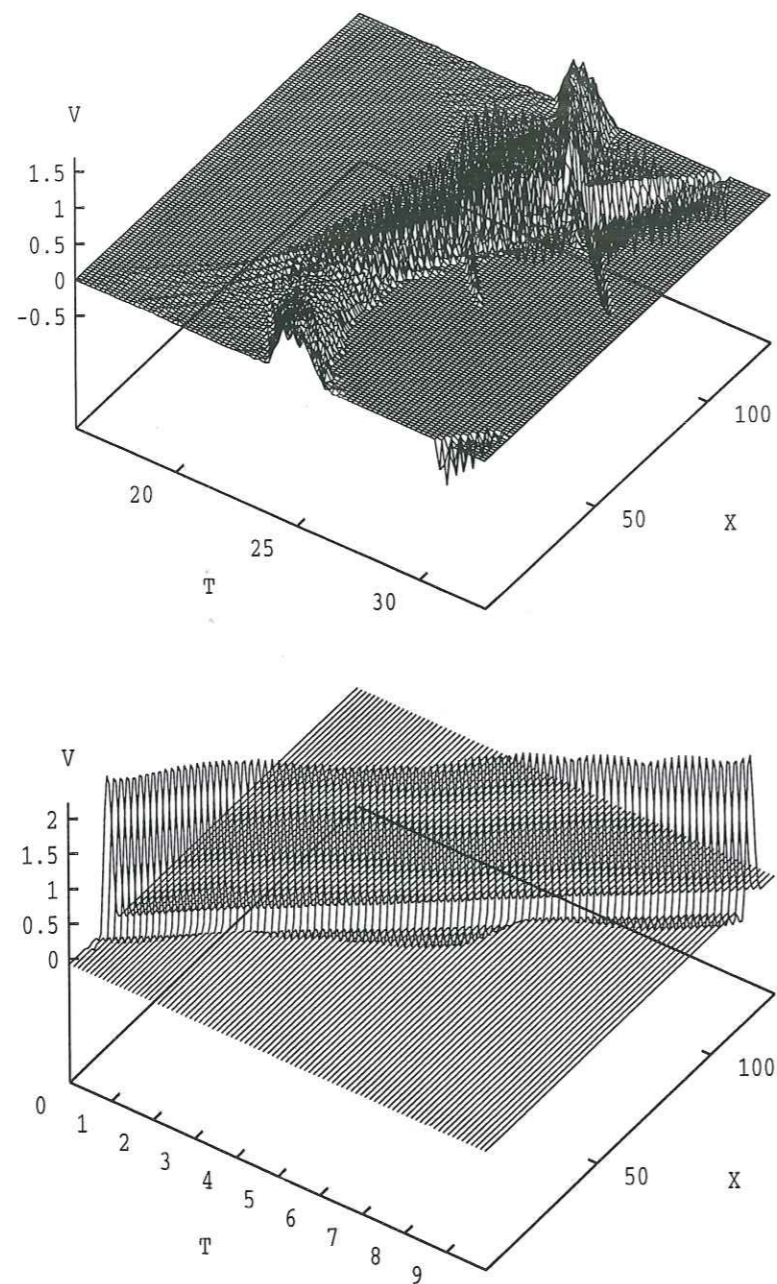


FIG. 3.1 - Etude de la réponse du système à l'échelle microscopique (i.e. échelle des patins) pour deux paramètres du système: $\Theta = 0.1$ (en haut) et $\Theta = 1.0$ (en bas). La vitesse de chaque patin $\dot{u}^i(t)$ est dessinée en fonction du temps et sa position i .

Si l'on continue à faire croître le paramètre Θ , on observe que l'unique onde solitaire se déstabilise par moment pour laisser, pendant de courts instants, la place à deux ondes.

Enfin, pour $\Theta = 2$, la solution présente deux ondes stables. Ainsi, des multiples¹² apparaissent pour chaque valeur entière de Θ .

Un argument simple permet d'expliquer la relation entre le nombre d'ondes solitaires et le paramètre Θ . On considère d'une part, qu'en moyenne, le déplacement imposé à chaque patin pendant un temps δt se fait à la vitesse ν_s . D'autre part, ce déplacement est accommodé par le passage des N_o ondes qui se propagent à la vitesse c et engendrent un déplacement Δu pour chaque patin¹³. Le nombre de patins impliqués par le passage d'une onde pendant l'intervalle de temps est $c\delta t$. L'équilibre entre le déplacement imposé et la réponse du système, conduit à:

$$N_o \Delta u c \delta t \approx N \nu_s \delta t \quad (3.38)$$

Sachant que la vitesse de propagation c est proche de la vitesse du son l , on obtient:

$$N_o \approx \frac{\Theta}{\Delta u} \quad (3.39)$$

Le saut de déplacement imposé, du fait de l'adimensionnalisation choisie est unitaire. Il existe de ce fait une relation linéaire entre nombre d'ondes solitaires et la variable Θ .

Qualitativement, le mécanisme de stabilisation de ces ondes est le suivant. Un patin une fois l'onde passée se trouve dans une situation de «déchargement». C'est le mouvement lent du support le recharge à la vitesse ν_s . Si cette vitesse de chargement est suffisamment grande pour qu'il retrouve une position critique (i.e. chargement maximum admissible) en un temps correspondant à celui du parcours complet du système par l'onde, alors elle sera stabilisée. Par contre, si le chargement est trop lent, l'onde va «arriver» sur un patin insuffisamment chargé. Elle va donc décélérer voire mourir. Ainsi, on s'attend à ce que la vitesse de l'onde s'adapte en fonction du chargement imposé au système. Cependant, la vitesse est bornée puisqu'elle ne peut être supérieure à la vitesse du son. Par conséquent, lorsque le chargement est accéléré, le nombre d'ondes N_o augmente plutôt que leur vitesse.

3.3.1.2 Echelle macroscopique

On peut suivre cette même transition entre solution propagative et solution chaotique à l'échelle du système. On s'intéresse alors à des grandeurs moyennées sur l'ensemble du système à un instant donné. Il s'agit principalement du glissement moyen et de la vitesse de glissement:

$$\langle u \rangle (t) = \frac{1}{N} \sum_i u^i(t) \quad \langle \dot{u} \rangle (t) = \frac{1}{N} \sum_i \dot{u}^i(t) \quad (3.40)$$

glissement saccadé (stick-slip) La Figure 3.2 présente la vitesse moyenne de glissement à l'échelle du système au cours du temps.

12. Nous avons pu vérifier cette règle jusqu'à $\Theta = 4$.

13. On constate que l'amplitude en vitesse de l'onde est constante de même que sa longueur d'onde. Le déplacement total peut donc être considéré comme constant.

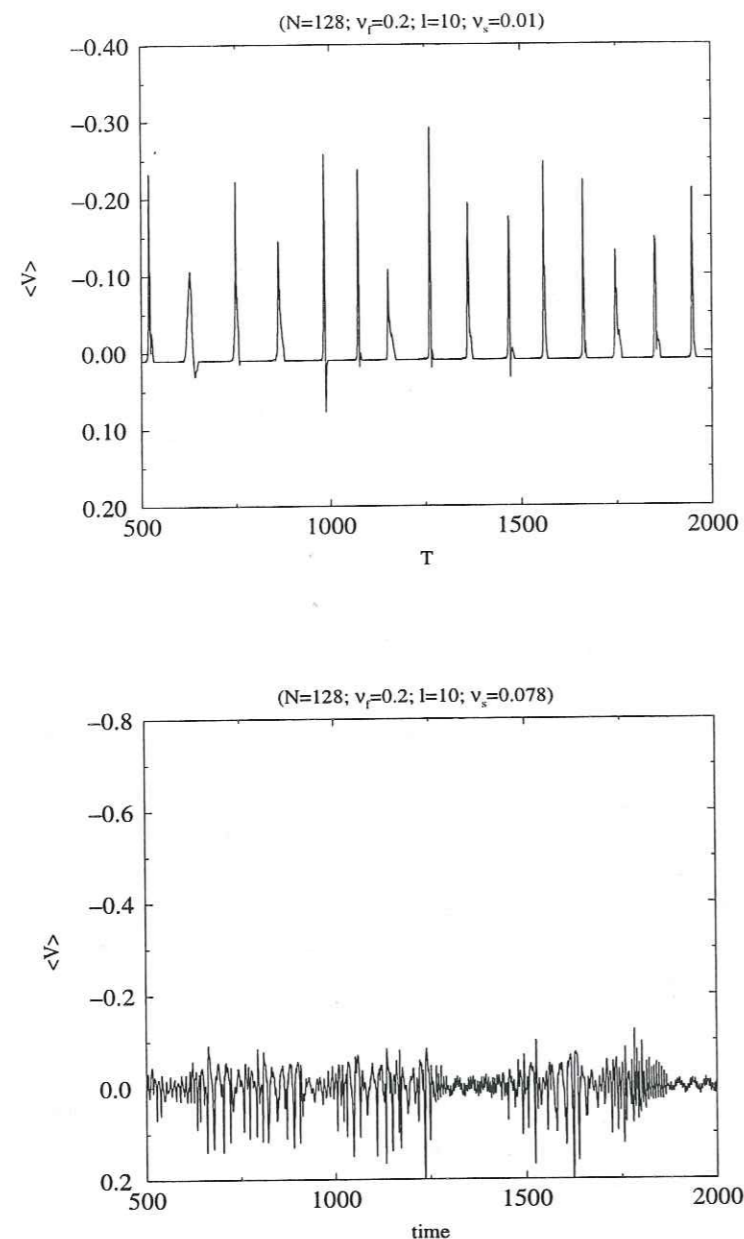


FIG. 3.2 - Etude de la réponse du système à l'échelle macroscopique (i.e. échelle de l'ensemble du système) pour deux paramétrages du système: $\Theta = 0.1$ (en haut) et $\Theta = 1.0$ (en bas). La vitesse moyenne de glissement $\langle \dot{u} \rangle (t)$ est dessinée en fonction du temps.

Le mouvement de glissement saccadé ou «stick-slip» (pour $\Theta = 0.1$) est clairement mis en évidence. La vitesse du système est en général égale à celle du support d'entraînement sauf à de rares moments où cette vitesse croît et décroît brutalement. Il y a bien

transformation d'un mouvement lent et continu en un mouvement rapide et localisé en temps. La localisation temporelle résulte de la loi de frottement choisie (frottement sec), en particulier de la présence d'un seuil. L'analogie entre ce comportement de frottement et le fonctionnement de failles à grande échelle est claire.

glissement continu (creep) Lorsque l'on se trouve près de la résonance, le comportement est tout autre. Le mouvement du système est continu. Il comporte certes des fluctuations, mais il ne présente plus cette dualité de réponse: périodes de glissement et périodes où le système est fixé au support. Le glissement ici a lieu à tout moment (creep). Le frottement est à présent de type visqueux bien qu'il s'agissent d'un frottement solide-solide. On constate que plus le système est sollicité plus il répond par un frottement visqueux.

Cycle limite Une autre façon de visualiser cette transition est de réaliser un portrait de phase¹⁴: vitesse moyenne en fonction du déplacement moyen (voir figure 3.3).

Lorsque le glissement est de type saccadé, le portrait de phase présente un cycle limite. Le parcours horizontal correspond à la période de chargement. La boucle décrit la phase. C'est au cours de cette phase dynamique que naissent les fluctuations. Par contre, proche de la résonance, le portrait de phase ressemble plus à un point fixe. Effet, vitesse et glissement moyen du système sont approximativement constants.

La transition entre les deux états se fait par «concentration» du cycle limite (i.e. diminution de son diamètre). En d'autres termes, lorsque le paramètre Θ croît, la pseudo-période du glissement saccadé diminue. L'amplitude du glissement, résultat de la phase dynamique décroît et par conséquent le temps de chargement (i.e. phase statique), diminue également. Cette coalescence se poursuit jusqu'à la formation d'un point fixe (i.e. résonance).

Notons que cette transition est tout à fait comparable à celle décrite par *Heslot et al.* [1994] dans le modèle expérimental. Ces derniers ont montré qu'il existait une bifurcation de type Hopf.

14. Il ne s'agit pas véritablement d'un portrait de phase puisque l'on considère l'évolution de la vitesse moyenne du système en fonction de la position moyenne.

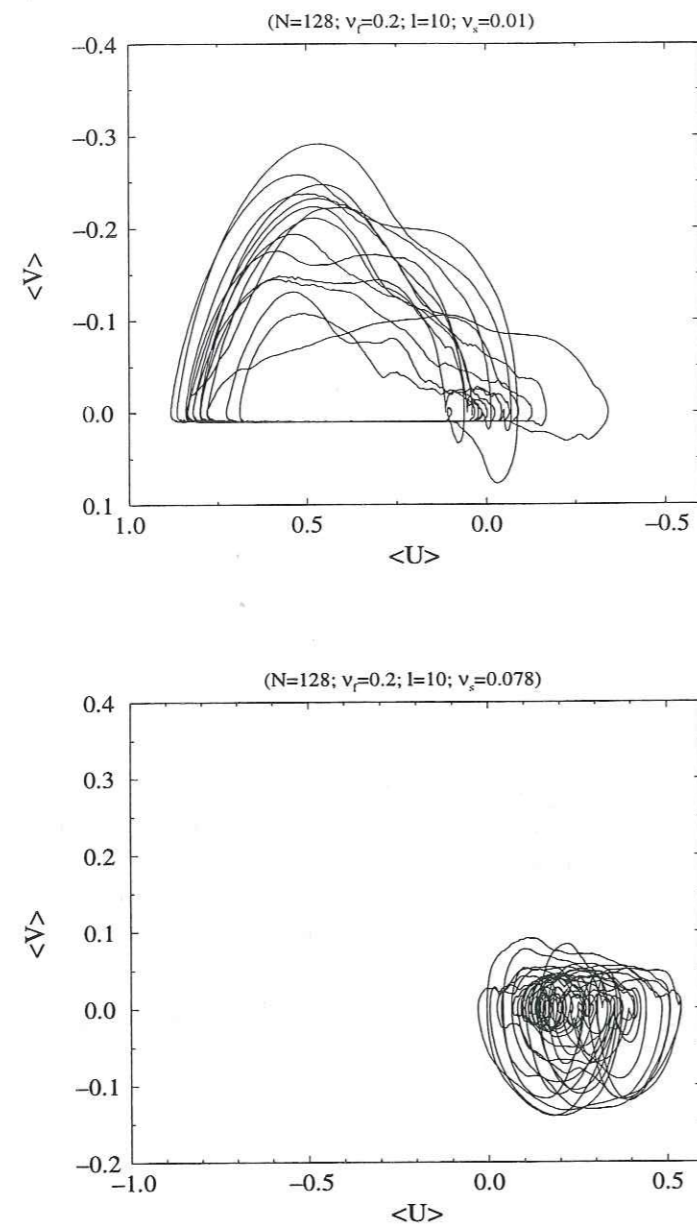


FIG. 3.3 - Etude de la réponse du système en termes de «portrait de phase». Il s'agit de l'évolution de la vitesse moyenne des patins en fonction de leur position moyenne pour deux valeurs de Θ ($\Theta = 0.1$ et $\Theta = 1.0$).

3.3.2 Caractérisation analytique

Nous avons cherché à mieux comprendre l'émergence de ces ondes propagatives à partir d'une description analytique du problème. Ceci a conduit à la préparation d'un projet d'ar-

ticle présentant un caractère technique (voir annexe 2). Nous demanderons par conséquent au lecteur soucieux des détails de calcul, de se référer à ce travail. Nous nous limiterons dans ce manuscrit à la présentation des grandes lignes de l'étude.

Solutions propagatives Comme nous l'avons montré numériquement à l'échelle microscopique, les solutions de type ondes solitaires se propagent à vitesse constante. La position des patins i et $i + 1$ sont reliées par:

$$u^{i+1}(t) = u^i(t + a/c) \quad (3.41)$$

où a est la distance entre les points d'ancrage des ressorts verticaux et c la vitesse adimensionnée de propagation des ondes. Lorsque cette vitesse de propagation est grande par rapport à la distance a et que l'on se place entre les zones de discontinuité de l'accélération, il est alors possible de procéder à un développement de Taylor. Notons qu'aucune supposition de milieu continu est nécessaire pour écrire ce développement. On utilise simplement la propriété de continuité du temps.

En se plaçant, à présent, dans le repère $s = ct - x_0$ où x_0 est une position spatiale arbitraire le long de la chaîne, il est possible d'écrire la relation fondamentale de la dynamique sous la forme:

$$\frac{(c^2 - \xi^2)}{c^2} u'' + u - f_f(u, cu' - \nu_s, \nu_f) = 0 \quad (3.42)$$

où les dérivées sont définies par rapport à s . $f_f(u, cu' - \nu_s, \nu_f)$ est la force de frottement. Elle dépend du glissement u , de la dérivée du glissement u' , de deux paramètres du problème (la vitesse d'entraînement ν_s et la vitesse caractéristique de frottement ν_f) et d'une vitesse de propagation c . Son expression générale est complexe du fait des seuils existant dans la loi de frottement. Elle introduit de fortes non linéarités (fonction de Dirac). C'est précisément le traitement des seuils qui rend l'exercice délicat.

Précisons que dans ce repère s , tous les patins suivent la même évolution. On peut donc considérer que l'on s'intéresse à la description d'un seul patin du système. Remarquons également que dans ce repère, le mouvement des patins peut être vu comme un glissement saccadé (stick-slip) avec une période de chargement où la position croît linéairement avec le temps et une phase dynamique.

Il convient de traiter le problème «par morceaux», i.e. de découper des intervalles de la variable s où les expressions se simplifient. Il existe alors deux phases. La première est la *phase statique* où le patin est fixé au support (i.e. vitesse relative nulle). Dans ce cas, la relation de Newton se simplifie significativement:

$$u'' = 0 \quad (3.43)$$

La seconde phase est la *phase dynamique* (i.e. vitesse relative nulle) dont l'évolution est guidée par:

$$(c^2 - \xi^2)u'' + \text{sign}(u' - \nu_s/c) \cdot f_d\left(\frac{|u' - \nu_s/c|}{\nu_f}\right) + u = 0 \quad (3.44)$$

où $\xi = la$ est une vitesse du son¹⁵, $f_d(u')$ est la force de frottement pendant le glissement du système.

La résolution de la phase statique est triviale à conditions que l'on connaisse les conditions aux limites. On obtient alors:

$$\begin{cases} u(s) = \nu_s s/c + u_c \\ \dot{u}(s) = \nu_s/c \end{cases} \quad (3.45)$$

où u_c est la position du patin à la transition: phase statique-phase dynamique.

Loi de frottement «linéaire» Une première étape dans la recherche de solutions propagatives consiste à utiliser une loi de frottement dynamique la plus simple possible¹⁶. Dans cet esprit, nous avons considéré une loi de frottement linéaire par morceaux (voir Annexe 4, Figure 4, page 369):

$$f_d(u') = -\text{sign}(u') \left(1 - \frac{|u'|}{2\nu_f}\right) \quad (3.46)$$

La vitesse caractéristique de frottement ν_f est définie comme la vitesse à atteindre pour faire chuter la force de frottement de moitié¹⁷.

Nous avons alors montré (voir annexe 2) qu'avec une telle loi, des solutions propagatives existent uniquement si le frottement décroît avec la vitesse (ν_f). Cependant, tout type de décroissance n'est pas admissible. Il faut que la vitesse caractéristique de frottement (ν_f) soit supérieure à une vitesse critique¹⁸ ν_f^c . Dans le domaine d'existence ($\nu_f^c < \nu_f < \infty$), la forme de la solution dynamique est de type sinusoïdal par morceaux (voir Annexe 4, Figures 5 et 6, pages 370 et 370). Lorsque la vitesse de frottement ν_f est très grande ($\nu_f \rightarrow \infty$), la loi de frottement tend vers la loi de Coulomb (avec coefficients statique et dynamique identiques). Dans ce cas le mouvement devient sinusoïdal à tout instant. Au contraire, lorsque la vitesse de frottement est proche de la vitesse critique, l'amplitude de l'onde diverge et sa longueur d'onde chute vers zéro (i.e. Dirac).

Nous avons vérifié numériquement, en intégrant dans le modèle de patins-ressorts, une loi de frottement linéarisée, qu'il apparaissait des ondes solitaires.

Loi de frottement non linéaire Le calcul peut être étendu au cas d'un frottement dynamique non linéaire. notamment, en linéarisant localement la loi de frottement utilisée numériquement (voir Annexe 4, Figure 9, page 372):

$$f_d(u') = -\text{sign}(u') \frac{1}{1 + u'/\nu_f} \quad (3.47)$$

15. On définit la vitesse du son comme étant celle de la propagation d'une onde dans un système sans frottement.

16. Il faut malgré tout préserver la dynamique du système.

17. Elle est négative lorsque la force croît avec la vitesse.

18. Cette vitesse critique est fonction de la vitesse de propagation (c). Plus la vitesse de propagation est proche de la vitesse du son ($c \approx l$), plus la vitesse critique de frottement est grande, donc plus le «cône» d'existence se réduit.

La forme linéarisée devient:

$$f_d^{(l)}(u') = -\text{sign}(u') \left(f_d^* - \frac{u'}{2\nu_f^*|u'|} \right) \quad (3.48)$$

où f_d^* et ν_f^* sont fonction de u' . On peut montrer qu'il existe alors une vitesse¹⁹ critique u'_c .

$$u'_c = \sqrt{\nu_f} - \nu_f \quad (3.49)$$

Lorsque la vitesse est plus grande que cette vitesse critique ($u' > u'_c$), des solutions propagatives peuvent exister. Dans le cas contraire, les solutions qui vont se développer sont de nature «chaotique»²⁰. Remarquons que lorsque la vitesse caractéristique de frottement tend vers zéro, ce qui correspond au cas d'une loi de Coulomb avec coefficient dynamique inférieur au coefficient statique, alors des solutions propagatives peuvent exister en tout point de la loi de frottement. Ceci nous montre que l'existence de solution de nature chaotique nécessite une décroissance «faible» avec la vitesse.

Pour finir, ajoutons que ce travail ne comporte pas d'analyse de stabilité mais uniquement des critères d'existence des solutions propagatives de type ondes solitaires. Il est probable qu'une analyse de stabilité fournirait un critère de sélection de la vitesse de propagation des ondes (c), élément qui manque dans l'analyse d'existence. Cependant réaliser une étude de stabilité semble difficile en raison des très fortes non linéarités du problème (seuils).

3.3.3 Loi de frottement

Frottement macroscopique L'étude de la loi de frottement consiste à examiner la réponse en frottement de l'ensemble du système. Quelle est la force nécessaire pour tirer le système à vitesse constante?

Cette force provient de la résistance au glissement qu'exerce chaque patin. Par conséquent, la force résultante est fonction de la taille du système. Par ailleurs cette force n'est pas constante, elle évolue au cours du temps. Enfin, une expérience²¹ de frottement peut être dépendante des conditions initiales imposées, en particulier le bruit qui y est introduit.

Afin de quantifier cette réponse en frottement pour l'ensemble du système, nous avons cherché à définir une variable permettant de s'affranchir des principales difficultés que nous venons de citer. Il s'agit de la force de frottement F_f :

$$F_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_{f_j}^k(t_i) \quad (3.50)$$

La force est moyennée sur K réalisations, i.e. K initiations du bruit initial indépendantes. La force est également moyennée au cours du temps (sur une période T). Précisons qu'en général, une période de «chauffe» du système, est ignorée. L'ignorance de cette partie

19. Il s'agit plus exactement de la dérivée par rapport à s du glissement.

20. au sens décrit précédemment

21. On peut voir le suivi numérique du système comme une véritable expérience numérique de frottement. Un modèle est construit. Des conditions aux limites lui sont imposées. Comment réagit-il?

permet de ne traiter que des régimes en état permanent. La suppression de la période transitoire a également pour conséquence la réduction significative de la sensibilité au bruit initial. Le nombre de réalisations indépendantes peut donc être diminué. Ainsi dans bon nombre de cas, une seule réalisation est effectuée ($K = 1$). Ajoutons que la force F_f est une moyenne spatiale de la force locale de frottement subie par chaque patin. A l'échelle de l'ensemble du système, elle peut être vue comme une densité de force et donc indépendante de la taille du système. Notre étude est basée sur l'analyse de la dépendance de la force de frottement F_f avec les différents paramètres du système.

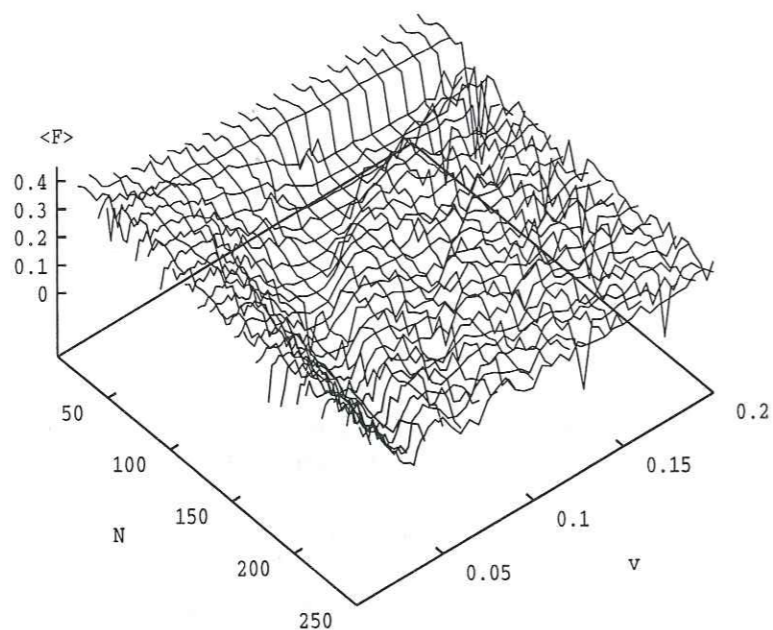


FIG. 3.4 - Etude de la réponse en frottement macroscopique (i.e. à l'échelle du système): densité moyenne de la force de frottement F_f qu'oppose le système lorsqu'il est tiré à vitesse constante. La figure illustre la dépendance de F_f avec la taille du système N et la vitesse d'entraînement ν_s .

Le plan $N - \nu_s$ (taille-vitesse d'entraînement) Lors de cette expérimentation, l'essentiel du travail été orienté vers l'exploration de la dépendance en fonction de la taille du système N et la vitesse d'entraînement ν_s . Le plan ($N - \nu_s$) a été quadrillé systématiquement pour des tailles comprises dans l'intervalle [40; 250] avec un pas de 10 blocs. La vitesse est incluse dans la gamme [0.01; 0.2] avec un pas de 0.01. Pour chaque point de ce plan, la réponse du système a été moyennée sur 1000 unités de temps (100000 itérations) après le rejet des 500 premières unités de temps constituant la période transitoire. La

courbe $F_f(N, \nu_s)$ est présentée sur la Figure 3.4. Cette figure montre l'existence de structures hyperboliques concentriques. Le long des axes (vitesse ou taille «nulle») la densité de frottement est maximale. Il apparaît des minima successifs lorsque l'un des paramètres (N ou ν_s) croît. Le premier minimum est bien visible. Par contre, plus l'ordre du minimum est grand (2^e , 3^e , etc), plus sa caractérisation est difficile. Au vu de la figure 3.4, la densité de force est donc fonction du produit: $N \cdot \nu_s$.

La direction l (élasticité) L'étude de l'influence du paramètre d'élasticité (l) consiste à vérifier que la densité de force de frottement F_f est en fait fonction du paramètre: $\Theta = N\nu_s/l$. Quelques expériences ont été réalisées pour différentes valeurs de l comme l'indique la Figure 3.5. Une étude complète de cette dépendance a été menée par *Español* [1994].

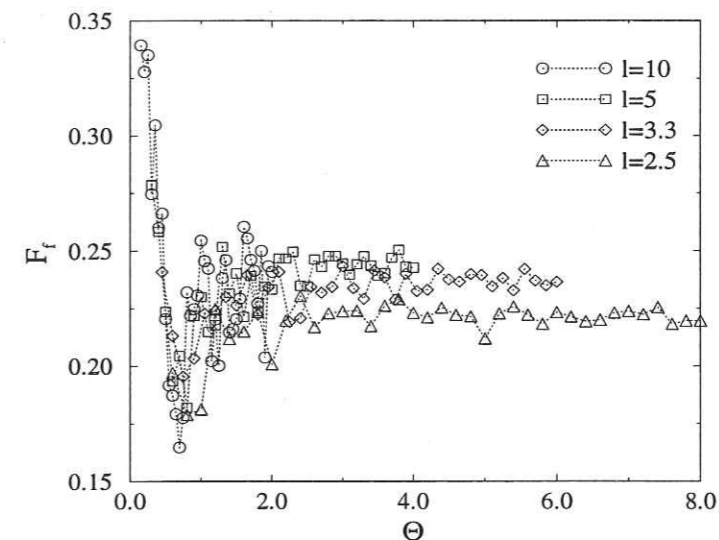


FIG. 3.5 - Influence du paramètre d'élasticité l sur la densité moyenne de frottement.

Est ainsi mis en évidence une réelle dépendance de la densité moyenne de frottement avec le rapport des échelles de temps dans le système:

$$F_f = f(\Theta) \quad (3.51)$$

L'étape suivante dans la compréhension de loi de frottement est d'obtenir l'expression de la fonction $f(\Theta)$. La figure 2 de l'Annexe 5 (page 383) montre que cette fonction est maximale pour des valeurs de Θ faible. Ceci correspond à l'échelle locale à la solution de type chaotique et macroscopiquement à celle de type glissement saccadé. Ensuite, la densité moyenne de frottement F_f décroît avec l'augmentation de Θ , jusqu'au premier minimum. Ce point correspond à la résonance ($\Theta = 1$). La solution microscopique est

de type onde propagative. A l'échelle du système, la réponse correspond à un glissement continu. Toujours en augmentant Θ , la fonction croît brutalement puis décroît lentement jusqu'au second minimum et ainsi de suite. Le maximum relatif de la densité de force, franchi entre le premier et le second minimum, est nettement inférieur à celui des solutions chaotiques. Il correspond à une solution microscopique où un nombre non entier d'ondes propagatives est stable. Ceci se traduit par une continuelle oscillation du nombre d'ondes (1 ou 2), présentes dans le système.

L'interprétation de cette courbe peut être faite en terme de coût c'est-à-dire d'énergie ou de puissance dissipée. Précisons que la quantité analysée F_f est une densité de force par unité de temps. Pour obtenir un travail, il faut multiplier, en dimension, cette quantité par une distance moyenne parcourue²². Si on fait l'hypothèse que cette distance moyenne est indépendante de la vitesse d'entraînement, la Figure 2 de l'Annexe 5 (page 383) est une mesure de l'énergie dissipée par le système. L'énergie dissipée est la plus forte lorsque la solution microscopique est de type chaotique. Elle est minimale lorsqu'un nombre entier d'ondes solitaires sont stables dans le système. La propagation d'ondes solitaires pour accommoder le déplacement imposé, est moins «coûteuse» au système que de procéder à un glissement saccadé. La puissance dissipée s'obtient en multipliant par la vitesse moyenne qui n'est autre que la vitesse d'entraînement ν_s (voir Figure 3.6). Cette puissance croît avec la vitesse d'entraînement ν_s , par plateaux successifs, en fonction du nombre d'ondes présent dans le système.

Une régression de la fonction $f(\Theta)$ peut être faite sous la forme (voir Annexe 5, Figure 2, page 383):

$$F_f(\Theta) = \frac{E(\Theta/\Theta_c + 1)}{1 + \Theta^*/\Theta} \quad (3.52)$$

où $E(x)$ est la fonction partie entière, Θ_c est la valeur du paramètre pour laquelle on a résonance: $\Theta_c = 1$. Le paramètre Θ^* permet de caractériser la décroissance de la loi de frottement. Il s'agit d'une vitesse de frottement généralisée, à l'échelle du système. Lorsque $\nu_f = 0.2$, on obtient $\Theta^* \approx 5.8$. On constate que l'on a une évolution de la loi de frottement quantifiée en fonction du nombre d'ondes solitaires qui circulent dans le système.

La loi de frottement qu'oppose le système à son avancée, présente une décroissance par morceaux avec la vitesse d'entraînement. Il y a autour des résonances, des sauts importants de la force de frottement qu'oppose le système à son avancée. Précisons qu'il existe un plateau pour des valeurs de Θ très faibles. Une grande prudence est nécessaire à l'examen de cette zone car des artefacts numériques importants (cf le passage du seuil de frottement de la loi locale mise sous chaque patin), peuvent «parasiter» la mesure F_f .

22. Dans l'hypothèse où la moyenne du produit est proportionnelle au produit des moyennes.

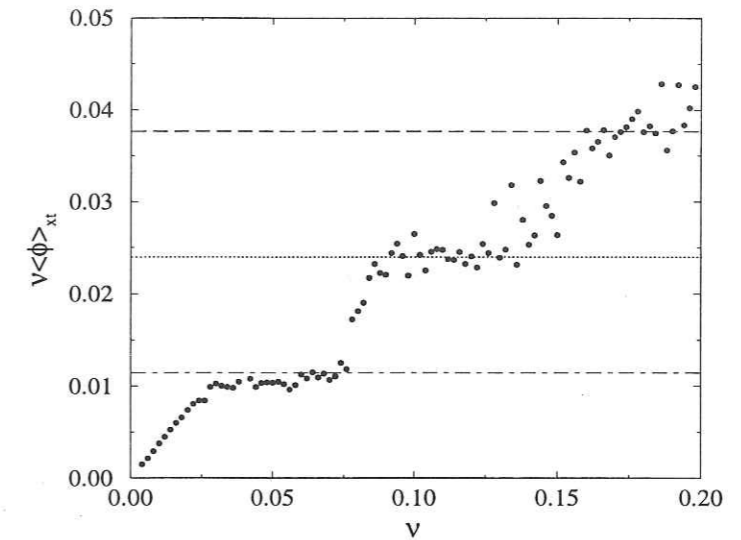


FIG. 3.6 - Etude de la puissance dissipée par frottement. La puissance est calculée comme le produit de la force moyenne par la vitesse d'entraînement.

La direction ν_f (vitesse caractéristique de frottement) Nous avons cherché à compléter l'étude de la réponse en frottement du système par l'examen de l'influence de la loi de frottement placée sous chaque patin. Différentes lois de frottement auraient pu être introduites. Nous nous sommes contentés de conserver le même type de loi mais en modifiant la vitesse caractéristique de frottement ν_f . Obtenir alors la forme du collapse nécessaire pour intégrer le rôle des paramètres N , ν_s et l pouvait paraître «naturel», au vu du rôle majeur de $\Theta = N\nu/l$. Quantifier l'influence du paramètre ν_f est plus difficile. Nous avons cherché le meilleur collapse des lois obtenues pour différentes valeurs du paramètre (voir Figure 3.7).

3.3.4 Influence de la radiation

Parmi les processus physiques que nous avons décrits comme importants dans le phénomène de rejeu, figure la radiation d'ondes sismiques. Cette radiation de la source dans le milieu naturel comprend deux aspects: le champ proche et le champ lointain. Transcrire l'effet de cette propagation d'onde dans le modèle de patin-ressort ne peut se faire que pour sa composante en champ lointain. Pour cela, *Burridge and Knopoff* [1967] ont supposé que les ressorts verticaux sont infiniment longs. Ainsi, tout mouvement du patin va initier la propagation d'une onde le long du ressort auquel il est attaché. Soient F_r la force qu'exerce cette onde sur le patin, y la position d'un point sur le ressort et x une coordonnée le long du ressort.

$$F_r = k_v \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (3.53)$$

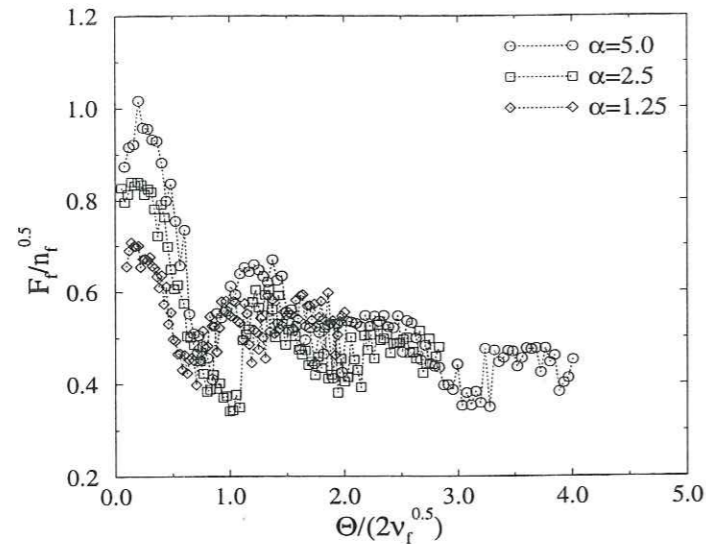


FIG. 3.7 - Etude de la dépendance de la densité de frottement avec la vitesse caractéristique de frottement.

La force est fonction de l'allongement du ressort (i.e. variation de position le long du ressort) à l'origine du ressort. La position du point le long du ressort est fonction de l'espace et du temps: $y(x, t)$. Il s'agit de la propagation d'une onde élastique le long du ressort:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.54)$$

où c est la vitesse du son le long du ressort. Par conséquent, on peut écrire:

$$y(x, t) = y(t - x/c) \quad (3.55)$$

L'expression de l'allongement du ressort est alors:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (3.56)$$

Or la position le long du ressort à son origine est égale à la position du patin. On en déduit la force que subit le patin suite à la propagation d'une onde, en fonction de la vitesse relative du patin:

$$F_r = -\frac{k}{c} (\dot{u}(t) - \nu_s) \quad (3.57)$$

Cette force peut donc être considérée comme une force visqueuse.

L'effet de la radiation (en champ lointain) sur la réponse en frottement du système a été étudiée numériquement en ajoutant le paramètre γ dans le problème.

$$\gamma = K_v \omega_v \quad (3.58)$$

où ω_v est la pulsation du ressort vertical. La force due à la radiation est donc:

$$f_r = \frac{\gamma}{\nu_f} (\dot{u} - \nu_s) \quad (3.59)$$

L'équation du mouvement devient:

$$\ddot{u}^i = l^2 (u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}) - u^i - f_d(\dot{u}^i, \nu_s, \nu_f) - f_r(\dot{u}^i, \nu_s, \nu_f, \gamma) \quad (3.60)$$

La croissance de ce paramètre γ est équivalente à une croissance de la vitesse caractéristique de frottement ν_f . Lorsque le paramètre γ devient important, la loi de frottement effective devient proche de la loi de Coulomb (coefficient de frottement statique et dynamique identique), on retrouve la solution sinusoïdale évoquée lors de l'expression analytique des ondes solitaires²³. Dans les cas intermédiaires, les ondes propagatives sont stables. La densité de force de frottement F_f présente une forme similaire au cas sans radiation (voir Figure 3.8). Au fur et à mesure que le niveau de radiation croît, on tend vers la loi de Coulomb.

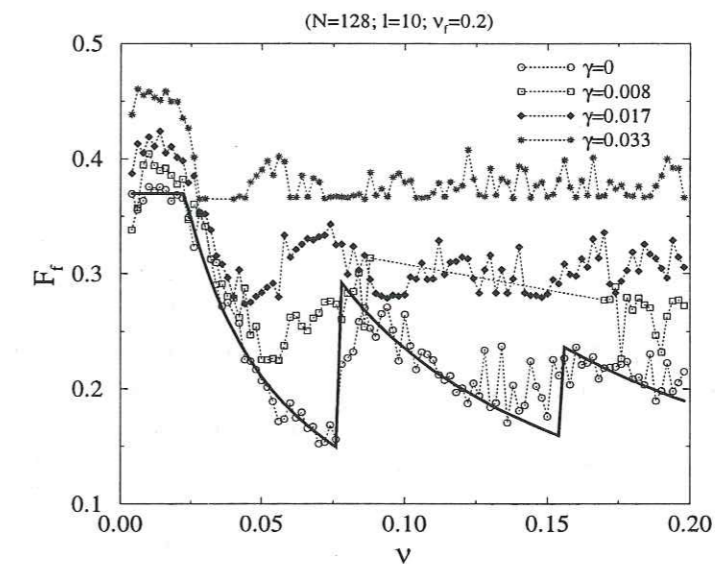


FIG. 3.8 - Allure de la solution microscopique $\dot{u}^i(t)$ avec introduction de la radiation en champ lointain.

3.3.5 Dimension du système

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés à un modèle unidimensionnel. Dans ce cadre, nous observons une transition entre deux types de solution: glissement saccadé-glissement continu. A l'échelle microscopique, ceci correspond à une transformation des

23. Dans ce cas, on constate que la vitesse sélectionnée de propagation des ondes est infinie.

solutions chaotiques en solution propagatives de type ondes solitaires. Nous avons étudié l'influence de l'ensemble des paramètres. Qu'en est-il du rôle de la dimensionnalité du modèle? Un modèle à deux dimensions va-t-il changer la nature des résultats?

Modèle horizontal Dans un premier temps, nous proposons d'examiner un modèle à deux dimensions «horizontales». Il s'agit d'étudier le mouvement, non plus d'une chaîne entraînée par une barre rigide, mais un réseau de patins par un plan rigide. Ce type de modèle a déjà été étudié par Carlson [1991b]. Cependant, dans cette dernière étude, il ne s'agit pas véritablement d'un système à deux dimensions car le réseau considéré n'est pas «rigide». Son coefficient de Poisson est nul. Pour obtenir un réseau dont le coefficient de Poisson est non nul alors qu'il est composé uniquement de ressorts «linéaires»²⁴, il doit avoir à deux dimensions une coordinance au moins égale à six. Nous avons donc imaginé un réseau hexagonal de patins (voir Figure 3.9) Deux directions spatiales sont définies dans le plan du réseau (x, y) . La direction x est choisie comme la direction du chargement. On se place dans une approximation de premier ordre, i.e. la distance entre les patins est grande par rapport à l'amplitude de leur mouvement. Les forces élastiques verticales se calculent comme dans le cas unidimensionnel:

$$\vec{F}_v = -K_v \vec{U}^i \quad (3.61)$$

La force élastique horizontale \vec{F}_h^{AB} exercée entre deux patins voisins A et B s'écrit:

$$\vec{F}_h^{AB} = K_h \left(1 - \frac{l_0}{d_{AB}}\right) \vec{AB} \quad (3.62)$$

où d_{AB} est la distance entre les deux patins et l_0 l'allongement à vide du ressort. La résultante élastique horizontale appliquée sur un patin est la somme des six forces élémentaires dues à chaque patin voisin. Remarquons que le système est plus raide à deux dimensions car chaque patin n'est plus lié à deux mais six ressorts horizontaux. Par conséquent, un rapport de raideur l n'est pas équivalent dans les cas unidimensionnel ou bidimensionnel.

La position de chaque patin est repérée par le vecteur: $\vec{U}(i, j)$. Il s'agit également du vecteur position du patin par rapport au point d'ancrage du ressort vertical. Une des difficultés du modèle consiste à définir sa loi de frottement. La force de frottement est orientée en fonction du vecteur vitesse relative²⁵:

$$\vec{f}_d = \frac{\dot{\vec{U}} - \vec{v}_s}{\|\dot{\vec{U}} - \vec{v}_s\|} g \left(\frac{\|\dot{\vec{U}} - \vec{v}_s\|}{v_f} \right) \quad (3.63)$$

24. Les degrés de liberté liés à la rotation ne sont pas pris en compte dans le problème.

25. Voir chapitre 2

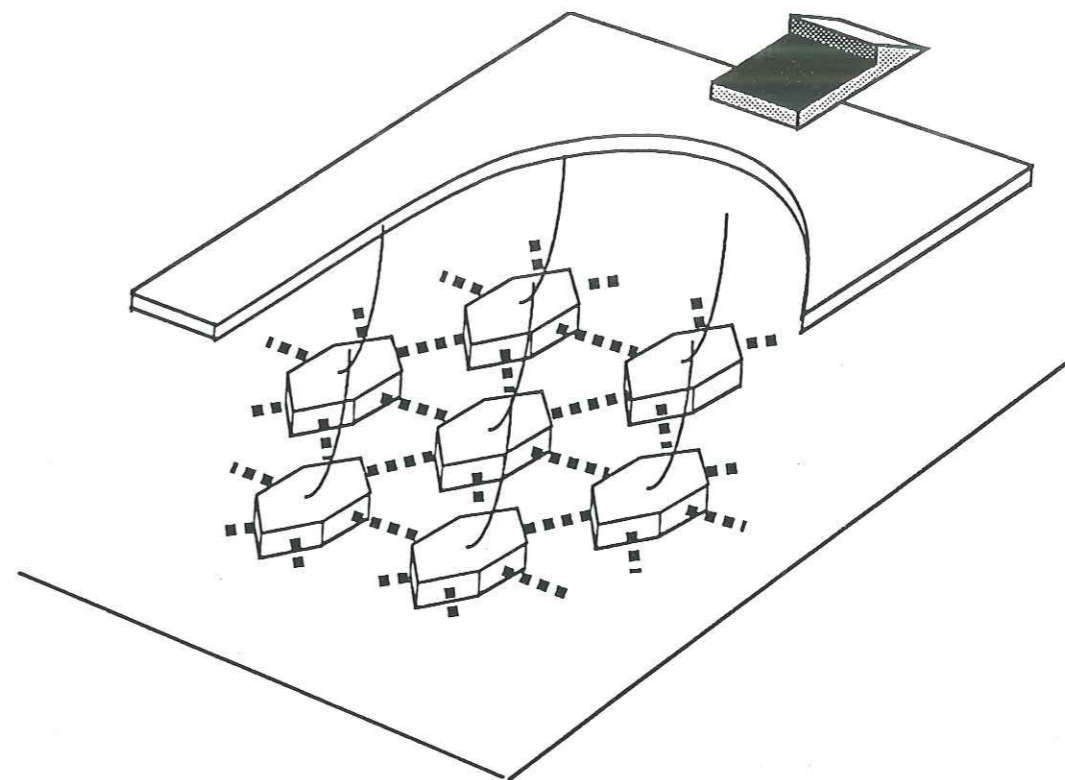


FIG. 3.9 - Schéma du réseau bidimensionnel «horizontal» de patins-ressorts. Son coefficient de Poisson est non nul du fait de sa coordinance égale à 6.

Quelques résultats ont pu être obtenus avec un tel modèle bidimensionnel. Cependant, il est bien évidemment beaucoup plus lourd numériquement. De ce fait, seules quelques analyses ont été réalisées, dont en particulier l'étude de la réponse du système à l'échelle macroscopique.

Nous montrons que la transition glissement saccadé-glissement continu se préserve avec le modèle bidimensionnel (voir Figure 3.10).

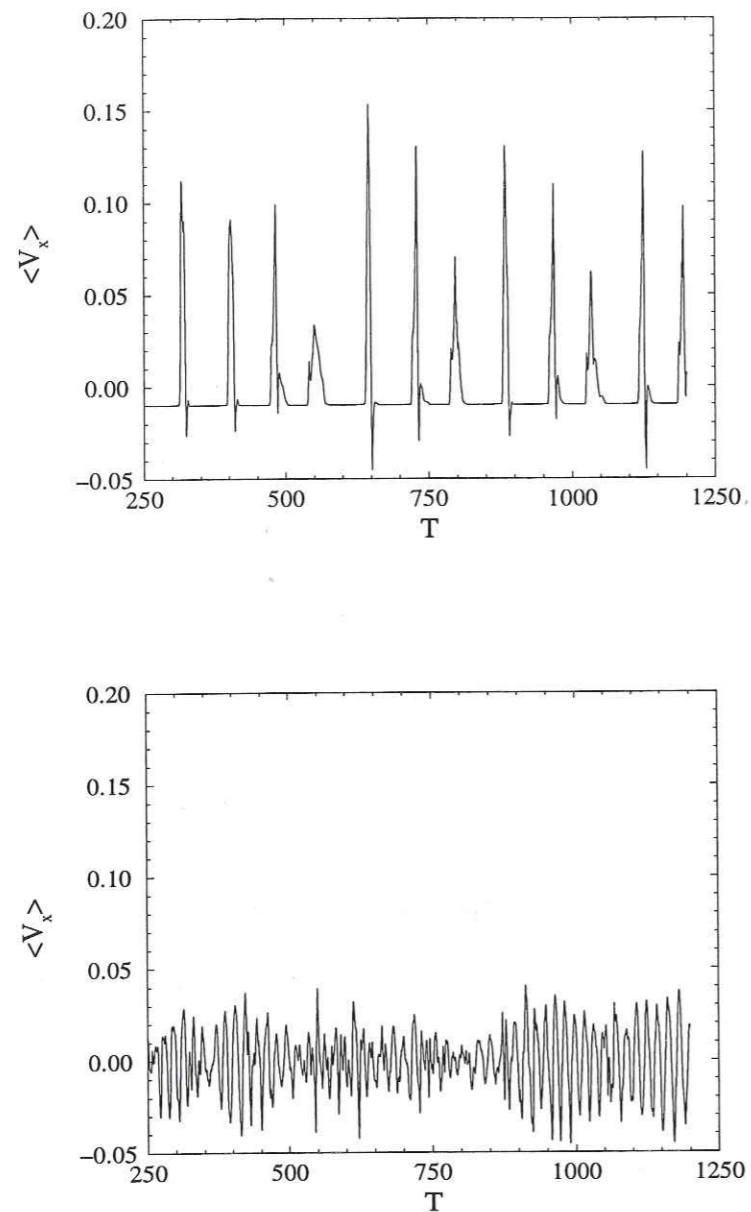


FIG. 3.10 - Réponse en vitesse V_x moyenne du système bidimensionnel pour deux sollicitations différentes: $\nu_x = 0.01$ (en haut) et $\nu_x = 0.1$ (en bas). La taille du système est 128×128 et sa raideur $l = 5$. La transition glissement saccadé - glissement continu est respectée.

Quelques lois de frottement à l'échelle du système ont été obtenues (voir Figure 3.11).

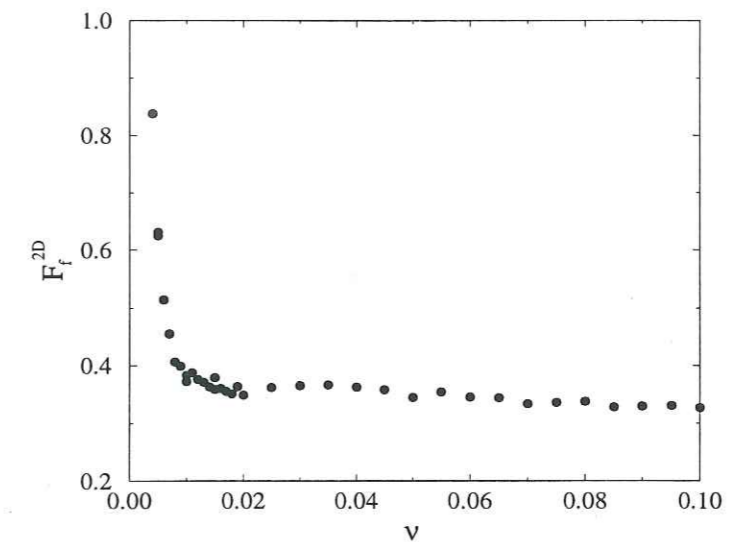


FIG. 3.11 - Loi de frottement pour le modèle bidimensionnel en fonction de la vitesse d'entraînement.

L'allure générale semble préservée, i.e. chute de la densité moyenne de la force avec la vitesse, par contre les fluctuations entre maxima et minima relatifs ne semblent pas significatives.

Modèle vertical L'autre modèle bidimensionnel que l'on peut construire est celui constitué d'un empilement vertical de patins au dessus d'une interface de contact unidimensionnelle. Le chargement est alors assuré par le mouvement d'une barre à laquelle seule la «couche» la plus élevée de patins est reliée. Ce modèle permet de comprendre l'influence d'un véritable chargement par un massif élastique et non pas par une simple barre rigide. En effet, par la présence d'une barre rigide, sont introduites des corrélations à très longues portées à vitesse infinie. Précisons que ce type de construction a été étudiée par *Nakanishi* [1994].

Au cours de ce travail, une approche de ce type a été suivie par une technique de renormalisation. Elle est discutée dans la prochaine partie avec un objectif différent. Cependant, l'essentiel de la démarche est rigoureusement identique. Nous renvoyons donc le lecteur à la suite de ce chapitre.

3.4 Transformations d'échelles et loi de Coulomb

Le modèle de patins-ressorts ne précise pas l'échelle à laquelle il se place. Il semble pouvoir étudier des problèmes à différentes échelles sans changer les paramètres du problème. C'est une constatation soulevant beaucoup de critiques *Rice* [1993].

Cependant, il semble qu'il existe une échelle interne, incluse dans la loi de frottement choisie. Une loi avec une décroissance avec la vitesse de glissement est véritablement une loi phénoménologique. Elle est donc le résultat d'une intégration de processus plus élémentaires s'effectuant à une certaine échelle. Le problème clé est de vérifier l'invariance d'échelles de la loi de frottement. Si la loi reste inchangée lors d'une transformation d'échelles, alors le modèle est véritablement invariant d'échelles.

Citons à ce sujet, un exercice très illustratif. Il s'agit de considérer un système constitué d'un seul patin²⁶. On le suppose suivre en frottement la loi de décroissance monotone avec la vitesse (cf fonction $g(x)$). Le système est tiré à vitesse constante. On construit alors la courbe $F_f(\nu_s)$ qui reproduit la loi de frottement du système interface-patin-chargement élastique. S'il y a invariance, on doit obtenir égalité entre $F_f(\nu_s)$ et la fonction $g(\dot{u} - \nu_s)$. Le résultat numérique est que l'on obtient «presque» invariance (voir Figure 3.12). En effet, la forme de $F_f(\nu_s)$ est du même type que celle de $g(\dot{u} - \nu_s)$. Cependant la vitesse de frottement caractéristique ν_f à changer.

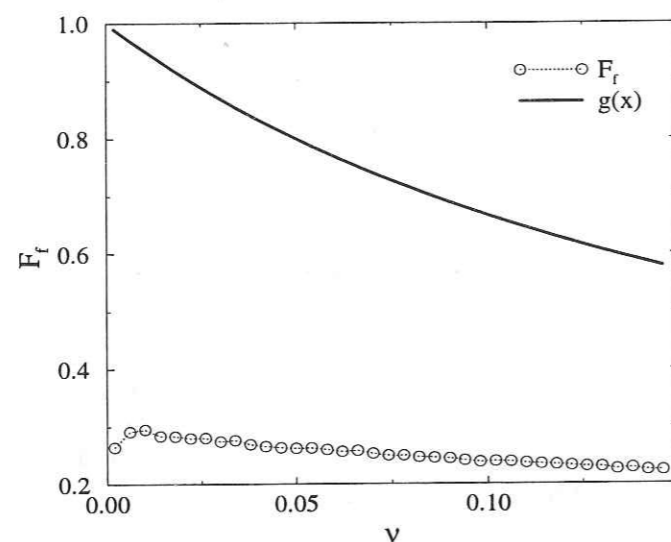


FIG. 3.12 - Loi de frottement pour un système constitué d'un seul patin.

Ce type de problématique peut également apporter des éléments de réponse quant à la relation entre résultats expérimentaux à l'échelle du laboratoire et observations à l'échelle de la faille.

Nous tenons à préciser que cette étude fait l'objet d'un projet d'article présenté dans l'annexe 3. Nous ne formulerons, par conséquent, dans ce manuscrit uniquement un résumé des principaux points discutés dans cet article.

26. Un système équivalent peut être obtenu en considérant le modèle de Burridge-Knopoff, comme nous l'avons décrit jusque là, mais en «coupant» les ressorts horizontaux, i.e. en fixant le rapport des raideurs l à zéro.

3.4.1 Une approche par renormalisation

Il s'agit ici d'étudier, comme nous venons de l'évoquer dans la précédente partie, le glissement d'un bloc élastique sur une surface rugueuse. Nous simplifions le problème et nous ramenons à un problème bidimensionnel «vertical». Le bloc est supposé invariant par translation parallèle au plan de faille. Le chargement est anti-plan. Nous poursuivons notre simplification en supposant que il se fait à vitesse constante. Ainsi, on ne s'intéressera pas à des variations de sollicitation.

Lors de l'entraînement de ce bloc, nous nous attendons, à ce que les mouvements soient complexes près de l'interface (hautes fréquences) et qu'ils soient filtrés au fur et à mesure que l'on s'en éloigne²⁷. Il convient donc de discrétiser le bloc en éléments de plus en plus fins en se rapprochant de l'interface. Pour cela, nous avons choisi une structure de discrétisation hiérarchique (voir Annexe 5, Figure 1, page 382).

Discrétisation hiérarchique Chaque élément de la discrétisation est considéré comme un patin relié à ses voisins par des ressorts purement élastique. Les éléments ne peuvent se déplacer que le long de lignes parallèles à l'interface. Le bloc initial est donc découpé en différents niveaux correspondant chacun à un ensemble de chaînes de patins. Nous nommerons (n) le n^e niveau en partant de l'interface. Au sein d'une chaîne, les patins sont couplés par les ressorts dits horizontaux. Du fait de la structure hiérarchique, la connexion horizontale à un niveau (n) entre chaînes est inexistante. Elle se fait par les niveaux supérieurs. Le lien entre chaque niveau est assuré par des ressorts dits verticaux. Chaque chaîne d'un niveau (n) est liée à un seul patin du niveau supérieur ($n + 1$). Ainsi, au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'interface, chaque patin d'un niveau (n) est subdivisé en N patins d'un niveau ($n - 1$) et ainsi de suite. Le bloc initial est ainsi discrétisé en N_b patins:

$$N_b = N \left(\frac{N^n - 1}{N - 1} \right) \quad (3.64)$$

où n est le nombre total de niveau.

Processus de renormalisation A présent la démarche consiste à chercher la loi de comportement niveau après niveau en partant du niveau (1). Le niveau (1) correspond à l'ensemble des patins en contact direct avec l'interface. Si on ne s'intéresse qu'au comportement d'un sous-ensemble de N patins, il s'agit alors d'un problème de type Burridge-Knopoff. Précisons toute fois que le chargement est «en théorie» différent puisqu'il se veut anti-plan. Cependant, il est facile de se convaincre qu'un tel chargement ne modifie en rien la méthodologie de résolution du problème. Il suffit de postuler que les ressorts horizontaux ne sont plus des ressorts «linéaires»²⁸ mais des ressorts de torsion comme le sont les ressorts verticaux.

Le calcul de la loi de frottement macroscopique d'un sous-ensemble de patins du niveau (1) constitue la première étape de la renormalisation. Précisons qu'une telle analogie entre le modèle de Burridge-Knopoff et un milieu élastique discrétisé sous-entend une *hypothèse*

27. Plus la distance est grande, plus les modes courts sont atténués.

28. i.e. le raccourcissement se fait dans l'axe du ressort.

forte. En effet, dans le modèle de Burrige-Knopoff, le chargement est supposé être à vitesse constante. Ceci signifie que l'on imagine que le «macro-patin» du niveau supérieur (2) auquel est relié l'ensemble des patins du niveau (1), se déplace à vitesse constante²⁹. Toute variation dynamique du mouvement des macro-patins est donc considérée comme négligeable. L'influence de la propagation d'ondes est exclue. Il convient d'ajouter cependant, la constatation suivante. Dans le milieu continu, l'influence des hautes fréquences ne peut se faire que sur un voisinage proche. Plus la fréquence est grande, plus le filtre sera important avec la distance. Ainsi, on peut voir la structure hiérarchique comme une adaptation de la taille des éléments en fonction des gammes de fréquence auxquelles ils seront «sensibles».

Le principe de la renormalisation consiste à calculer les propriétés d'un patin à chacun des niveaux de la structure hiérarchique. La masse du patin est fonction de son volume. Pour les propriétés élastiques, on dira qu'elles sont fonction de la taille de la frontière du patin. La loi de frottement apparente qu'il convient de placer sous le patin, est constituée de la loi de frottement macroscopique du sous-ensemble de patins qui se trouve «sous» lui. Ce dernier point qui constitue la difficulté du problème. Il faut en effet obtenir une formulation fonctionnelle de la loi macroscopique d'un système de Burrige-Knopoff, variable³⁰ pour chaque niveau. Nous utiliserons pour cela, la fonctionnelle obtenue dans la partie précédente:

$$f_d(\nu_s) = \frac{E(\nu_s/\nu_c^{(n)} + 1)}{\nu_s/\nu_f^{(n)} + 1} \quad (3.65)$$

où $\nu_c^{(n)}$ et $\nu_f^{(n)}$ sont les paramètres de la loi de frottement caractéristique du niveau (n) considéré. On s'attend à ce que le seuil de frottement dynamique F_f^c soit fonction du niveau précédent. On dira qu'à un niveau (n), il est N fois celui du niveau précédent ($n-1$), dans la mesure où il résulte de la mise en mouvement de N patins à l'échelle inférieure³¹. Si c'est uniquement numériquement que nous parviendrons à suivre l'évolution lors des différentes étapes de la renormalisation des paramètres $\nu_c^{(n)}$ et $\nu_f^{(n)}$, l'évolution des autres paramètres peut être résumée ainsi:

$$M^{(n)} = NM^{(n-1)} = N^n M^{(0)} \quad (3.66)$$

$$K_v^{(n)} = NK_v^{(n-1)} = N^n K_v^{(0)} \quad (3.67)$$

$$K_h^{(n)} = NK_h^{(n-1)} = N^n K_h^{(0)} \quad (3.68)$$

$$F_{cr}^{(n)} = NF_{cr}^{(n-1)} = N^n F_{cr}^{(0)} \quad (3.69)$$

où le niveau (0) correspond aux variables introduites pour le niveau de base en contact avec l'interface. Pour le frottement, il s'agit de la loi construite avec la dépendance en vitesse $g(v)$. Il y a ainsi invariance des paramètres adimensionnels T^* , U^* , V^* et l .

Ainsi, en estimant le comportement successif des différents niveaux, on peut obtenir celui de l'ensemble du bloc élastique. En particulier, on estimera la loi de frottement que

29. Cette hypothèse de mouvement à vitesse constante est fait également pour tous les niveaux (n) du bloc initial.

30. i.e. stable lors du processus de renormalisation.

31. Cette hypothèse se base implicitement sur la relation linéaire qui existe entre force de frottement et surface de contact. Ici, la surface de contact est proportionnelle au nombre de patins.

subit un tel bloc. Pour cela, on calculera l'évolution des paramètres $\nu_c^{(n)}$ et $\nu_f^{(n)}$ lors de la renormalisation.

3.4.2 Loi de frottement et vitesse de glissement

Numériquement, nous choisirons de suivre un chemin particulier au cours de la renormalisation. Nous imposerons que la vitesse de chargement (dimensionnée) soit invariante:

$$V_s^{(n)} = V_s^{(n-1)} = V_s^{(0)} \quad (3.70)$$

On a ainsi conservation du paramètre ν_s . En d'autres termes, nous supposons qu'en tirant le haut du bloc à la vitesse V_s , tous les éléments jusqu'à l'interface subissent une même vitesse d'entraînement.

Nous avons choisi de constituer des sous-ensembles de $N = 128$ patins. Trois étapes de la renormalisation i.e. trois niveaux de discrétisation ont été étudiées. Ceci peut paraître a priori faible mais il convient de préciser que, du fait du grand nombre de patins dans chaque sous-ensemble, la réponse en frottement du système évolue très significativement avec le nombre de niveaux. On obtient ainsi rapidement l'évolution de la loi de frottement.

Précisons que les évolutions des paramètres $\nu_c^{(n)}$ et $\nu_f^{(n)}$ ne peuvent être indépendantes. En effet, on suppose que la loi de Coulomb, sans dépendance avec la vitesse (uniquement des coefficients de frottement statique et dynamique) soit stable lors du processus de renormalisation. Par conséquent, au vu de l'Equation 3.65 qui fournit la limite pour les grande vitesse,

$$\lim_{\nu_s \rightarrow \infty} f_d(\nu_s) = \frac{\nu_f^{(n)}}{\nu_c^{(n)}} \quad (3.71)$$

toutes les étapes doivent présenter:

$$\frac{\nu_f^{(n)}}{\nu_c^{(n)}} = Cte \quad (3.72)$$

Dans l'annexe 5, la Figure 2, page 383, illustre la transformation de la loi de frottement du premier niveau que nous avons déjà commentée. Elle a permis de définir avec précision la fonctionnelle utilisée. On mesure alors $\nu_c^{(1)}$ et $\nu_f^{(1)}$. En introduisant la loi de frottement caractérisée par ces paramètres, sous les patins, on obtient les paramètres à l'étape (2) (voir Annexe 5, Figure 3, page 384) puis à l'étape (3) (voir Annexe 5, Figure 3, page 384). L'exacte valeur des paramètres est obtenue en faisant un zoom pour les faibles vitesses.

On constate que les $\nu_c^{(n)}$ et $\nu_f^{(n)}$ chutent rapidement avec la renormalisation, i.e. le changement d'échelles. Ceci montre qu'en suivant le chemin particulier où la vitesse de chargement est supposée constante, la dépendance en vitesse de la loi de frottement disparaît. A grande échelle, la loi de frottement est de type loi de Coulomb avec coefficients statique et dynamique différents. Elle est différente de celle à l'échelle locale. La réponse du système en frottement n'est pas bien décrite par la loi introduite à l'interface qui n'intègre pas les propriétés élastiques du milieu. On peut dire que la loi de Coulomb est une loi d'interface intégrant une dépendance en vitesse et le rôle du comportement élastique

des épontes. La question est de savoir si, dans ces conditions, on peut parler véritablement de la loi de Coulomb comme d'une loi d'interface ou de frottement.

Mentionnons que si on s'intéresse à un chargement extrêmement lent, la loi de frottement reproduisant le comportement du système est sensible à la vitesse. Au vu des résultats dans cette gamme de vitesse, la loi macroscopique présente une forme analogue à celle de la loi locale.

Par contre, en suivant un chemin pendant la renormalisation où la vitesse de chargement évolue de la même façon que la vitesse critique $\nu_c^{(n)}$, on peut obtenir une invariance de la loi de frottement (i.e. un point fixe de la renormalisation). A partir des calculs effectués, une estimation précise de la dépendance de $\nu_c^{(n)}$ avec l'étape (n) de la renormalisation, est difficile puisque nous disposons uniquement de trois étapes. Cependant, nous pouvons proposer:

$$\nu_f^{(n)} = \nu_f^{(0)} \exp(-na) \quad (3.73)$$

avec $a \approx 3$. Par conséquent, on imagine que si l'on choisit la transformation pour la vitesse de chargement:

$$\nu_s^{(n)} = \nu_s^{(n-1)} \exp(-a) = \nu_s^{(0)} \exp(-na) \quad (3.74)$$

la loi de frottement est invariante d'échelle. Ainsi, si on estime que la vitesse de sollicitation croît exponentiellement avec la proximité de l'interface, la loi de frottement est la même à l'échelle de l'interface qu'à celle de l'ensemble du bloc.

Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les résultats obtenus au cours de ce travail de thèse à propos du phénomène de jeu de faille. L'ensemble de l'étude se base sur deux approches distinctes. La première s'intéresse à l'influence de la complexité géométrique (auto-affinité) sur le comportement de frottement en régime inertiel. Nous montrons alors qu'une dépendance de la loi de frottement avec la vitesse d'entraînement peut être la conséquence de l'auto-affinité de la surface. Cette dépendance résulte principalement des multiples vols balistiques que subit une des épontes par rapport à l'autre.

La deuxième approche consiste en l'étude du modèle de patins-ressorts avec différents types de conditions aux limites. Tout d'abord, le système est placé dans des conditions comparables à celle d'une faille à l'échelle lithosphérique. Le chargement est alors extrêmement lent par rapport à la vitesse de propagation des ondes élastiques le long de la faille. Nous montrons une dualité de comportement autour de deux types d'événements. Des événements conservatifs assure un chargement global du système (macro-chargement) et une réduction du désordre géométrique. Deux variables globales permettent de suivre l'évolution «thermodynamique» du système: l'énergie élastique totale (pour le chargement) et l'énergie élastique contenue dans les ressorts horizontaux (pour le désordre géométrique). Les événements du deuxième type sont dits dissipatifs. Leur dynamique ne peut être discutée de façon déterministe: les fluctuations ne sont plus moyennables. Un critère probabiliste régit l'apparition de ces grandes ruptures dans le système. Nous étudions également le système lors d'un chargement toujours à vitesse constante et élevée. Nous montrons qu'il apparaît une résonance dans le système entraînant un changement radical dans la

dynamique du système. On passe de solutions dites chaotiques à la propagation d'ondes solitaires. Ceci se traduit dans la loi de frottement macroscopique par une transition entre le glissement saccadé (stick-slip) et le glissement continu. L'allure des ondes solitaires et leurs conditions d'existence ont été abordées analytiquement. On met ainsi en évidence la nécessité d'une décroissance «douce» de la loi de frottement pour obtenir des solutions dites chaotiques. Enfin, nous traitons du problème de changement d'échelles de la loi de frottement à partir d'une approche de type renormalisation dont chaque étape peut être calquée sur un modèle de type patins-ressorts. Il en résulte, dans la limite des hypothèses faites, que la dépendance en vitesse de la loi de frottement n'est pas stable par changement d'échelles.

Il convient pour finir de replacer notre étude dans le cadre général du phénomène de jeu de faille que nous avons dressé au chapitre précédent. Il semble clair que les deux démarches suivies sont très ponctuelles dans ce vaste domaine. Cependant, elles cherchent à montrer et quantifier les désordres «géométrique» ou «dynamique» qui peuvent exister.

Annexe 1

Dynamic friction of self-affine surfaces
J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux

Publié dans: *Journal de Physique II (France)*
Vol. 4, Pages 225-237, 1993

DYNAMIC FRICTION OF SELF-AFFINE SURFACES

Jean SCHMITTBUHL, Jean-Pierre VILOTTE

Laboratoire de Géologie, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France.

Stéphane ROUX

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles, 10 rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05, France.

ABSTRACT: We investigate the velocity dependence of the friction between two rigid blocks limited by a self-affine surface such as the one generated by a crack. The upper solid is subjected either to gravity either to an external elastic stiffness, and is driven horizontally at constant velocity, V , while the lower solid is fixed. For low velocities, the apparent friction coefficient is constant. For high velocities, the apparent friction is shown to display a velocity weakening. The weakening can be related to the variation of the mean contact time due to the occurrence of jumps during the motions. The cross-over between these two regimes corresponds to a characteristic velocity which depends on the geometry of the surfaces and on the mean normal force. In the case of simple gravity loading, the velocity dependence of the apparent friction at high velocities is proportional to $1/V^2$ where V is the imposed tangential velocity. In the case of external elastic stiffness, two velocity weakening regimes can be identified. the first is identical to the gravity case with a $1/V^2$ dependence. the second appears at higher velocities and is characterized by a $1/V$ variation. The characteristic velocity of this second cross-over depends on the roughness and the elastic stiffness. The statistical distribution of ballistic flight distances is analysed, and is shown to reveal in all cases the self-affinity of the contacting surfaces.

FROTTEMENT DYNAMIQUE DE SURFACES AUTO-AFFINES

RÉSUMÉ: Nous analysons la dépendance en vitesse du frottement entre deux solides limités par une surface rugueuse auto-affine comme celle d'une surface de fracture. Le solide supérieur est soumis soit à la gravité, soit à une raideur élastique externe, et est entraîné à vitesse horizontale constante V sur le solide inférieur fixe. A faible vitesse, le coefficient de friction apparent, est constant. A forte vitesse, le coefficient de friction apparent devient inversement proportionnel à la vitesse. Cette dépendance peut être reliée à la variation du temps de contact moyen, provoquée par l'apparition de sauts au cours du glissement. La transition entre ces deux régimes est caractérisée par une vitesse qui dépend de la géométrie des surfaces et de la force normale moyenne. Dans le cas d'un simple chargement par gravité, la dépendance en vitesse de la friction apparente, pour les fortes vitesses, est en $1/V^2$, où V est la vitesse de glissement imposée. Dans le cas d'une raideur élastique externe, on peut montrer l'existence à forte vitesse de deux régimes: l'un identique au cas gravitaire et caractérisé par une dépendance en $1/V^2$, l'autre est caractérisé par une dépendance en $1/V$. Cette deuxième transition est aussi caractérisée par une vitesse qui dépend de la rugosité et de la raideur élastique. La distribution statistique des distances de vols balistiques révèle le caractère auto-affine des surfaces de contact.

INTRODUCTION

The study of surfaces in moving contact is a very important technological field. The detailed physical understanding of the processes involved during contact is still an active area of research with important implications in terms of friction, striction, wear, and lubrication^[1-2]. Most solid surfaces, natural or hand made, are characterized by a roughness which is scale dependent. This has been observed for molecular surfaces^[2-4], crack surfaces^[5], and at much larger scale for surfaces of geological faults^[6]. A lot of attention has been paid to characterize such statistical aspects of the geometry of crack surfaces both experimentally and through models. It has been shown in particular that fracture surfaces could very generally be characterized as self-affine, with a roughness exponent which seems about constant (close to 0.8 for three dimensional cracks)^[5-6]. While the geometric aspect has been very extensively considered, the physical consequences of such a property have not yet received the attention that they deserve. The microgeometry of those surfaces is supposed to be of major importance for the contact properties, since the true area of contact takes place at the asperity level and depends on the statistical distribution of those asperities. In term of friction, only a few microscale models integrates the roughness distribution^[7], and those are limited to the early stages of the development of frictional sliding. There is ample experimental evidences^[8] that the friction force between two fully sliding macroscopic solids in contact is dependent on the sliding velocity. In such a statement the "friction" has to be considered at least in the sense of an *apparent macroscopic friction*, and velocity dependence often results from a complex inhomogeneous local distribution of contact forces, or from a "chaotic" temporal sequence of instantaneous friction forces. Indeed such slip rate dependence has long been advocated for the stick-slip motion of two interacting elastic surfaces with frictionally slipping surfaces. The relation between the

local instantaneous contact law and the resulting macroscopic apparent friction is a far-reaching fundamental problem, with potential applications ranging from geophysics^[9] to mechanics^[10]. As an example of the richness of microscopic to macroscopic transition, we can mention recent studies on discrete models by Carlson and Langer^[11]. Depending on various constitutive parameters of the model, and in particular on the driving velocity, periodic "stick-slip",^[12] chaotic motion^[11-13] or smooth macroscopic apparent friction with an inhomogeneous spatial structure^[14] can be found.

One possible source for an apparent velocity dependent friction lies in the potential importance of the normal degree of freedom in sliding friction. In the pioneer work of Tolstoi^[15], the real area of contact along which shear strength can be transmitted is shown to depend crucially on the evolution of the separation between the two contacting bodies during the sliding. There has been experimental evidences that an increase of the sliding speed increases the mean upward vertical components of the motion as a result of vertical jumps of the slider. In turn, the asperities of the upper slider surface collide with those of the underlying surface, with an higher impact velocity^[15]. This can be observed through the dependence of the amplitude of the normal natural vibrations of the slider - which depends on the contact stiffness and mass of the slider - as a function of the sliding speed. Such experimental observations have also been reported for lubricated surfaces^[16]. During the jumps the friction force is obviously nul, and the temporal average of the friction force will display a velocity dependence. Furthermore if sufficiently heavy external damping of the tangential vibrations suppress the vibrations, it failed to affect the velocity weakening effect. Tolstoi *et al.*^[17] report direct observations of the normal displacements of the slider - carried out at low driving speeds - showing forward movements of the undamped slider in synchronism with the upward jumps. This emphasize the fundamental role played by

the occurrence of vertical jumps of the slider and the normal stiffness of the contacting asperities in sliding friction.

This basic problem has been recently addressed^[18] within the context of the seismic friction, and very recently, a renormalization-type approach^[19] has been proposed to account for this phenomenon in the case of a simple geometry of the two contacting surfaces. When vertical motion is involved, the geometry of the contacting surfaces is essential, and in particular, the statistical aspects of the roughness should be accounted for in a precise way. The model described here, eventhough very simplistic in the description of local contacts, focuses on the relation between the geometry of the contacting surfaces and the spatio-temporal distribution of the vertical jumps. The consequences of the self-affine geometry of the two contacting surfaces – like fracture surfaces – are specifically investigated. Two extreme cases are considered for normal loading: in the first, we assume a simple gravity loading; in the second an external elastic coupling. After a short presentation of the model, results for the two cases of normal loading are presented followed by conclusions in perspectives.

PRESENTATION OF THE MODEL

Let us consider two solids, each of them being limited by a self-affine rough surface with a well defined roughness exponent ζ . Two different exponents could be considered, but only one matters, in a range of scales, and without loss of generality the two exponents will be assumed equal. The mean surfaces are horizontal planes. Both solids are assumed to be rigid (undeformable). The lower solid is fixed, whereas the upper one is moved horizontally (x -axis) at a constant velocity V . The motion of the upper solid is restricted vertically (z -axis) by the contact with the lower solid and by a normal force which results either from simple gravity loading or an external elastic coupling. Finally, no other degree of freedom is allowed, and in particular rotations are not considered in

this study. Thus, only two cases are to occur: either the upper body undergoes jumps, or the surfaces remain in contact. In the latter case, the contact will be fulfilled at one single point (the probability that the contact occurs simultaneously at two distant points is zero). If $z_1(x)$ and $z_2(x)$ are the roughness profiles of the two solids, one can define the contact profile as $z(x) = \max_{x'}(z_1(x' + x) - z_2(x'))$. Thus the interactions between two self-affine rough surfaces, for a horizontal displacement x , is captured in the inequality $z \geq z(x)$. It should be noted that the function $z(x)$ does not correspond to the contact of one single asperity on the opposite surface. On the contrary, as the displacement x is varied, the contact point on either surface fluctuates very strongly. It can even be shown in particular that the trajectory of the contacting point is a Levy flight. Let us underline that the profile $z(x)$ is defined as the minimum vertical uplift required for a sliding displacement x of the slider. *It does not represent a physical profile to be found on one of the facing surfaces in general.*

As discussed in detail below, the function $z(x)$ can be shown to be self-affine with the same roughness exponent as the surfaces. The problem turns out to be strictly equivalent to that of a point particle moving along a rough self-affine profile $z(x)$ in 1+1 dimensions, as sketched in Fig. 1. This property causes a major simplification of the problem.

The frictional behavior at each local contact point is assumed to fulfill Coulomb's law, independent of the sliding velocity, with a friction coefficient μ . In the discrete case, the macroscopic horizontal friction force F is thus a simple function of the orientation of the facet in contact. If s is the slope of the facet, F amounts to

$$F = N \frac{(s - \mu)}{(1 + \mu s)} = N \phi(s) \quad (1)$$

where N is the normal force exerted on the upper solid. In the case with only gravity loading, $N = mg$, while for the case with an external vertical elastic coupling, $N = mg + k(z - z_0)$, where z_0 is a reference vertical level, and k the elastic stiffness.

F is counted algebraically in Eq.(1) so that a negative force means that it opposes the prescribed motion.

In the case of a quasistatic motion (infinitesimal V), the macroscopic friction coefficient will thus simply be equal to $F(x)/N(x) = \phi(dz(x)/dx)$. As the velocity V increases, the upper solid will undergo jumps when the contact surface can not be followed. Such a situation arises each time the slope decreases from one facet to the next.

In the definition of the normal force given above, the gravity effect can be absorbed in the redefinition of $z_0 \rightarrow z_0 - mg/k$. Depending on z_0 and k , two extreme cases can be clearly distinguished :

- First, the normal force does not vary much with the vertical displacement of the slider: i.e. $kA \ll \bar{N}$ where \bar{N} is the average normal force: $\bar{N} = mg - kz_0$, and A the standard deviation of $z(x)$ over the system size. In such a case, we are in a situation similar to that with a gravity acceleration, $B = \bar{N}/m$. That occurs in particular for $z_0 \ll z_{min}$, where z_{min} is the minimum height of the z -profile.
- Second, the change induced in the normal load by the vertical displacements is large compared to the body force, that situation typically arises when $z_{min} = z_0$ and $kA \gg \bar{N}$.

Intermediate cases can be regarded, as the second case weighted by the probability of finding heights greater than the reference one z_0 . In the following we shall only consider the two generic cases: case A, for which the normal force result from a simple gravity loading; and case B, for which the normal force result from an external elastic coupling.

The numerical simulation performed consists in the following steps:

1. Generation of the self-affine contact profile $z(x)$, with the prescribed roughness exponent, using an algorithm of Voss^[20,21]. The self-affine exponent of

the generated profile was checked independently.

2. Construction of the trajectory of the upper solid, for an imposed velocity V . An example of such a construction is displayed in Fig. 1. In this second stage, the friction force is computed, as well as the average contact time, and the distribution of ballistic flight distances.

The second step is repeated for a series of velocities, and the entire computation is averaged over a number of realizations. The dependence on the system size is analyzed through the introduction of a reduced velocity, and thus we will essentially present below the results in terms of velocity, at fixed overall roughness and system size. Typically, the profile contained 2^{16} points. Conversely, the number of realizations was kept rather small (at most 200).

INFLUENCE OF THE SIZE OF THE CONTACTING SOLID

Self-affine surfaces are characterized by a roughness which is intrinsically scale dependent. More precisely, the height fluctuation of the surface, defined as the standard deviation A , scales as a power-law of the system size, with an exponent ζ . If the y -axis is defined as the direction perpendicular to the sliding direction in the mean surface plane, size effects may be expected as the surface is extended along the y direction in the characteristics of $z(x)$. When the width of the surface (along the y axis) increases, the range of variation of height is increased, and therefore, the mean level of contact $(1/L) \int_0^L z(x) dx$ increases. However, the most interesting feature of $z(x)$ is not its average level, but rather its standard deviation, A . In particular, the latter controls the distribution of angle of facets in contact and therefore the shape of the parabolic ballistic flight (initial slope), and the mean contact time.

We generated a series of $512 \times L_y$ self-affine surfaces with an exponent $\zeta = 0.8$ using an algorithm due to Voss^[20,21]. The width of the rectangles, L_y , was varied from 2 to 512 (square). The resulting surfaces were checked to have the required properties by measuring the roughness exponent directly on the generated surfaces. The measured value was found to be slightly smaller than expected $\zeta \approx 0.75 \pm 0.05$. Then the contact profile $z(x)$ was constructed by scanning through the surfaces, displaced horizontally by x , and computing the maximum overlap. The profile $z(x)$ was checked to be itself self-affine with the same exponent $\zeta \approx 0.78 \pm 0.05$ than the one of the surfaces.

We studied the evolution of the standard deviation A of $z(x)$ as a function of the width of the surfaces L_y . A is shown to slightly decrease as L_y increases. This variation is however very small and tends to vanish for sufficiently large L_y . Therefore, we conclude that the size effect can be neglected.

RESULTS

Case A : Gravity Loading

Before discussing the results, let us note that there is an intrinsic velocity scale in the problem, so that one can define a dimensionless velocity v . Let L be the profile length, and ℓ the lower cut-off distance of the self-affine description (taken as the size of a facet), and let A be the standard deviation of $z(x)$ over the system size. For realistic surfaces exhibiting a self-affine character, the lower cut-off scale ℓ could be for instance a "grain size", although other limits can be considered. For the sake of simplicity, we will call "grain size" this lower cut-off in the rest of this paper. With those parameters, the statistical properties of the profile are completely determined in our model. Using the self-affinity of the profile $z(x)$, a typical slope can be introduced at the grain size: $s \approx (A/\ell)(L/\ell)^{-\zeta}$, where ζ is the self-affine

exponent. A and therefore s are proportional to the overall roughness of the contact surfaces at fixed roughness exponent, and system size.

Depending on the imposed horizontal velocity, the typical flight distance can cover any range from 0 to the system size. It seems reasonable however to expect a different behavior when the typical flight distance is smaller or larger than the only intermediate length scale that appears in our model: ℓ . This allows to introduce a "natural" local scale for the horizontal velocity, U_x , such that the typical ballistic flight distance will be comparable to the grain size. A simple computation leads to $U_x = \sqrt{\ell g/s}$. We can now scale the velocity with respect to U_x to obtain the dimensionless reduced velocity :

$$v = V/U_x = V \sqrt{\frac{A}{\ell^2 g}} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\zeta/2} \quad (2)$$

In the numerical simulations, g was kept constant, and $\zeta = 0.8$ in order to be consistent with experimental observations on crack surfaces. The local friction coefficient μ was set to one in all cases. Similarly, the length unit was such that $\ell = 1$. The above reduced form for the velocity was checked numerically by varying L , A and V independently. In the following, we report results only in term of this reduced velocity.

Figure 2 shows the evolution of the temporal and realisation average of the friction force as a function of the velocity. Two distinct regimes can clearly be identified: for small velocities the friction coefficient $\varphi(v) = F(v)/mg$ is constant, whereas for larger velocities, it drops abruptly, φ being proportional to v^{-2} .

The most important effect to explain such an abrupt weakening of the friction force is the occurrence of longer and longer jumps during which the friction force is obviously zero. If we now assume that the friction force during contacts has on average the same value as the spatial average of F as given in Eq.(1) we can write

$$F(v) = F(0)t(v) \quad (3)$$

where $F(0)$ is the friction for zero velocity, and $t(v)$ is the fraction of time spent on contact compared to the total time $t(v) = T_{\text{contact}}/(T_{\text{contact}} + T_{\text{flight}})$. We have not plotted on Figure 2 the r.h.s. of Eq.(3) since it cannot be distinguished from $F(v)$.

In order to progress in the understanding of the velocity weakening, we can analyze the distribution of ballistic times or distances.

We have analyzed the evolution of the mean flight distance $x^*(v)/\ell$ with the velocity, as shown in Fig. 3, $x^*(v)/\ell$ is clearly proportional to v^2 . This proportionality is obeyed over the entire range of velocity, including the velocities for which the apparent friction is velocity independent.

From this observation it is possible to obtain an expression for the mean friction coefficient. Indeed, the fraction of time spent on contact, $t(v)$, can be estimated to be

$$t(v) \approx \frac{\ell}{\ell + x^*(v)} \quad (4)$$

using the fact that the mean distance of continuous contact is of the order of the lower cut-off distance ℓ of the profile (i.e. the size of the grains).

A few consequences are to be noted.

- The first regime of velocity independent friction is limited to the case where the mean distance of ballistic flights is smaller than ℓ , i.e. the lower cut-off of the self-affine regime. Below this length scale, the friction is dominated by the time spent in close contact, and thus the ballistic periods appears as negligible corrections to the static limit.
- The variation of $x^*(v)$ with v can be recovered using a simple heuristic argument considering the intersection of the largest parabola with the envelope of profiles starting from a given point, i.e. $A^*(L, \zeta)x^{\zeta} \approx -g/2V^2x^{*2} + sx^*$ where A^* is a small normalization factor. This argument leads to the conclusion that a v^2 dependence is always encountered for ζ exponents smaller

than 1. This includes the case of simple rough surfaces with no size scaling. For an exponent $\zeta > 1$, a non trivial power-law dependence occurs: $x \propto v^{2/(2-\zeta)}$. We did not push the analysis of this situation any further since the self-affine roughness exponent is generally expected to lie in the range $[0, 1]$.

- We note however, that the features of the self-affine profile are still present in the macroscopic friction law, in the form of the prefactor of the velocity in Eq.(2).

The shape of the distribution of flight distances can also be analysed. For velocities such that $x^*(v)$ is much larger than ℓ , a typical distribution of x is shown in log-log scale on Fig. 4. Clearly two regimes can be distinguished: the large distance distribution consists in a peak, the position of which is roughly given by the mean value of x , i.e. x^* . That position is thus proportional to v^2 as above mentioned. For small distances, the distribution exhibits a power-law decay. This power-law reveals the self-affine nature of $z(x)$, and thus of the surfaces in contact. Indeed for small distances, the vertical displacement of the upper solid is dominated by the fluctuation of $z(x)$ in the neighborhood of the "take-off" point. Therefore, the probability that the flight distance is x is simply equal to the probability to encounter the profile at the same height as the take-off point for the first time at a distance x . In fact the latter probability distribution is one of the tools^[21-22] one can use to analyse the self-affine character of a signal. The probability varies as a power-law of x : $x^{-(2-\zeta)}$ where ζ is the roughness exponent. We have plotted on Figure 4 a power-law with the expected slope.

As a consequence, despite the fact that the apparent macroscopic friction coefficient is only dependent on the self-affine nature of the surfaces through the expression of the cross-over velocity, the self-affinity could be analysed experimentally by recording the temporal fluctuations of the friction force at

high velocity, possibly through acoustic measurements.

Case B : External Elastic Stiffness

This situation gives rise to a new scaling. The reduced velocity has to be constructed on the stiffness constant k rather than on the acceleration of gravity g . In order to obtain a velocity scale from k , dimensional analysis indicates that a length scale has to be invoked. The maximum normal force can be written kA , and thus kA/m plays the role of an effective gravity. This leads to the definition of a new reduced velocity:

$$v = \lambda/\ell \left(\frac{\ell}{L} \right)^{c/2} \quad (5)$$

with $\lambda = V/\omega$ and $\omega = \sqrt{k/m}$. It is interesting to note that the elastic stiffness introduces a natural wavelength for the jumps, λ , which does not depend on the local slope.

Figure 5 shows the evolution of the temporal and realisation averaged friction force as a function of the sliding velocity. This figure must be compared with the one in the case of a pure gravity loading, Figure 2. The main difference is the apparition of a second velocity weakening regime with a v^{-1} dependence at higher velocities. These two velocity weakening regimes are related to the occurrence of longer and longer jumps, and the decrease of the mean contact time. Relation (3) holds for both regimes, however in the elastic case the statistics at very high velocities is biased and under sampled. This explains why even though relation (3) predicts correctly the change in the velocity weakening, it is slightly shifted from the computed apparent friction coefficient at very high velocities.

In order to understand the transition between those two velocity weakening regimes, we have again analyzed the evolution of the mean jump length $x^*(v)/\ell$ with the velocity. Figure 6 clearly shows that above a given velocity, that jump length is no longer proportional to v^2 but rather to v . In particular:

- For the first weakening regime at low

enough velocities, the mean jump distance remains small compared to the natural wavelength, and we face a situation similar to the gravity case, using the above given correspondance with k , with a v^{-2} friction dependence. In that regime, as shown for the ballistic flights, the mean jump distance increases as v^2 while the natural wavelength only increases as v .

- For the second weakening regime at higher velocities, the mean jump distance is of the order of the natural wavelength which act as a natural upper cut-off. As expected from relation (3), and observed in Figure 5, the friction coefficient scales now as v^{-1} since now the mean jump distance can only increase as the natural wavelength with v . The variation of $x^*(v)$ with v can be recovered using the same simple heuristic argument considered above where the parabola is replaced by $-g/\omega^2(\cos\{|\omega/V|x\} - 1) - s|V/\omega|\sin\{|\omega/V|x\}$, for high V and $|V/\omega| \approx x$.
- The cross-over between those two regimes is governed by a characteristic velocity which must depend on the elastic stiffness and the roughness of the surface.

In Figure 6, a cross over can be observed at the beginning for small mean jump distance, before the v^2 regime. For this regime, it can be shown that the mean jump distance will be $\langle x \rangle \approx 2sv^2/g^* < 1/z_d - z_{min} >$ where $g^* = k/m$ and z_d is the height of the "taking-off" point. This leads to a logarithmic divergence for $z \rightarrow z_{min}$, so that the average become sensitive on the lower cut-off, which depends on the velocity. That small effect is suppressed as soon as one superimposes to the elastic force a gravity loading.

The shape of the distribution of jump length can also be analyzed. As for the gravity case, a typical distribution of x is shown, Figure 7, for velocities such that $x^*(v)$ is much larger than ℓ , a typical distribution of

x is shown Figure 7. Again, it can be noticed that for small distances, the vertical displacement of the upper slider is dominated by the fluctuation of $z(x)$ in the neighborhood of the "take-off" point, and the probability varies as a power-law of $x : x^{-(2-c)}$. The tail of the distribution is smoother than the one observed for the gravity case.

CONCLUSION

One has to bear in mind that the model studied here is indeed too simple to readily apply to most realistic situations, and is only meant to provide a simple reference case where the velocity dependence of the friction can be fully analyzed in terms of the geometry of the contact surfaces. A major limitation is the fact that both solid bodies in contact are undeformable. For two deformable bodies in contact one can expect, beside local non linear dissipations, two major changes : *i)* First, the contact point will become a contact region with a finite extent and a complex distribution of normal and tangential stress; *ii)* Moreover, more than one contacting region could be obtained leading at least to two additional length scales - the size of the contacting region and the distance between different contacts. Complicated comminution processes are also known to take place at the contacting regions leading to a rather complicated problem with a third body.

Among possible extensions of our model, a special attention should be paid to account for :

- The inclusion of a finite anelastic local dissipation associated with the impact on the asperities of the surfaces. In this respect, the present model can be regarded as one with an infinite dissipation. Recent numerical simulations in this direction indicates that such local dissipation may affect the velocity weakening effect.
- An other interesting problem would be the case of two matching surfaces produced by fracture and with no previous sliding history. In such a case, in

order for the sliding displacement to be possible those two surfaces would have to disengage themselves leading to an initial mean vertical displacement which is a power-law of the sliding distance. This gives rise to a slip weakening rather than a velocity weakening.

- The driving mechanism is another parameter that can be explored since in our model the a velocity was maintained constant.

Interestingly enough, beside all those limitations and further possible extensions the model allowed us to analyze the velocity weakening of the apparent friction coefficient of two rough solids in contact in terms of the geometry of those contacting surfaces. The apparent friction force is computed by considering explicitly the separation between the two surfaces during the sliding motion. In that sense our approach is related to that of Tolstoi [15]. Two generic cases were considered for the normal force : a pure body force and an external elastic stiffness. The mean friction coefficient has been cast in a simple expression which only depends on a characteristic velocity. The latter has been related to the statistical features of the surfaces. The velocity weakening of the apparent friction force has been shown to depend on the type of normal loading. In the case of an external elastic stiffness, a typical $1/v$ weakening has been identified for large velocities.

Finally, the statistical distribution of ballistic flight distances has been shown to reveal the self-affinity of the contact surfaces. It would be of high interest to test those predictions on laboratory test samples.

ACKNOWLEDGMENTS: We acknowledge useful discussions with A. Hansen, J.P. Hulin, and K.J. Måløy. Two of us (J.P.V. and S.R.) would like to thank H.J. Herrmann and HLRZ-KFA Jülich for their hospitality during a visit where this work was stimulated. This work has been supported by the ARC "Géothermie et Roches Fracturées" and the GdR "Physique des Milieux Hétérogènes Complexes".

References

- [1] K.L. Johnson, Contact mechanics, Cambridge University Press, 1989; J.T. Oden and J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Comp. Meth. Appl. Mech* **52**, 527-634, 1985.
- [2] Fundamentals of Friction, I. Singer and H. Pollock Editors, NATO Advanced Study Institute, Brauwage, Germany, 1992.
- [3] D. Avnir, D. Farin and P. Pfeifer, *Nature* **308**, 262-263, 1984
- [4] B. Bushan and M.F. Doerner, *ASME J. of Tribology* **111**, 452-458, 1989; A. Majumdar and B. Bushan, *ASME J. of Tribology* **112**, 205-216, 1990.
- [5] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja and A. J. Paullay, *Nature* **308**, 721, 1984; E. Bouchaud, G. Lapasset and J. Planés, *Europhys. Lett.* **13**, 73, 1990; A. Hansen, E. L. Hinrichsen and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2476, 1991; K. J. Måløy, A. Hansen, E. L. Hinrichsen and S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 213, 1992.
- [6] S.R. Brown and C.H. Scholz, *J. geophys. Res.* **90**, 5531-5545, 1986; C.H. Scholz and C.A. Aviles, in: *Earthquake Source Mechanics*, S. Das, and C.H.Scholz Eds., *Geophys. Monogr. Ser.* **37**, 147-155, AGU, Washington D.C., 1986; W.L. Power, T.E. Tullis, S.R. Brown, G.N. Boitnott, and C.H. Scholz, *Geophys. Res. Lett.* **14**, 29-32, 1987; J. Schmittbuhl, S. Gentier and S. Roux, *Geophys. Res. Lett.* **20**, 639-641, 1993.
- [7] P.R. Nayak, *J. Lubr. Technol.* **93**, 398-407, 1971; R.J. Adler and D. Firman, *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A* **303**, 433-462, 1981; C.H. Scholz, *Nature* **336**, 761-763, 1988; G.N. Boitnott, R.L. Biegel, and C.H. Scholz, *J. Geophys. Res.* **1992**, 8965-8978, 1992;
- A. Majumdar and B. Bhushan, *ASME J. of Tribology* **113**, 1-11, 1991.
- [8] F.Jenkin and J.A. Ewing, *Phil. Trans. R. Soc. London* **167**, 508, 1877; F.P. Bowden and L. Leben, *Proc. R. Soc. Ser. A* **169**, 371, 1938; J.B. Sampson, F. Morgan, D.W. Reed, and Muskat, *J. Appl. Phys* **14**, 689, 1943; D.M. Tolstoi, *Wear* **10**, 199, 1967; R. Bell and M. Burdekin, *Proc. Inst. Mech. Engrs.* **184**, 1969; J.H. Dietrich, *J. Geophys. Res.* **77**, 3690-3697, 1972.
- [9] A.L. Ruina, *J. Geophys. Res.* **88**, 10359-10370, 1983; P.G. Okubo and J.H. Dietrich, *J. Geophys. Res.* **89**, 5815-5827, 1984; C.H. Scholz, *The mechanics of Earthquakes and Faulting*, Cambridge Univ. Press, New York, 97-221, 1990; J.R. Rice, *J. Geophys. Res.* **98**, 9885-9907, 1993.
- [10] E. Rabinowicz, *Proc. Phys. Soc. London* **71**, 668, 1958; J.R. Rice and A.L. Ruina, *Trans. ASME J. Appl. Mech.* **50** 343, 1983; S. Ciliberto and C. Laroche, preprint, 1993; D.P. Valette and J.P. Gollub, *Phys. Rev. A*, ??, ??-??, 1992.
- [11] J.M. Carlson and J.S. Langer, *Phys. Rev. A* **40**, 6470, 1989; J.M. Carlson, J.S. Langer, B. Shaw and C. Tang, *Phys. Rev. A* **44**, 884, 1991; J.M. Carlson, *Phys. Rev. A* **44**, 6226, 1991; E. Burridge and L. Knopoff, *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, **57**, 341, 1967.
- [12] Y. Ben-Zion and J.R. Rice, *J. Geophys. Res.* **98**, 14109-14131, 1993.
- [13] M. de Sousa Vieira, G. Vasconcelos and S. R. Nagel, to appear in *Phys. Rev. E*
- [14] J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, S. Roux, *Europhys. Lett.* **21**, 375, 1993.
- [15] D.M. Tolstoi, *Wear* **10**, 199-213, 1967.
- [16] D. Godfrey, *ASLE Trans.* **10**, 183-192, 1967.

- [17] J. Lomnitz-Adler, *J. Geophys. Res.* **96**, 6121, 1991.
- [19] D.M. Tolstoi, G.A. Borisova and S. Grigorova, *Nature of the Friction of Solids*, *Nauki i Tekhnika*, Minsk, **116**, 1971.
- [19] T. Pöschel and H. J. Herrmann, preprint
- [20] R. F. Voss, in *Fundamental algorithms in computer graphics*, ed. R. A. Earnshaw, Springer-Verlag, Berlin. pp 805-835, 1985
- [21] J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, (New York, 1988); T. Vicsek, *Fractal growth phenomena*, World Sci. Pub.. (Singapore, 1989)
- [22] A. Hansen and K. J. Måløy, preprint, 1993.

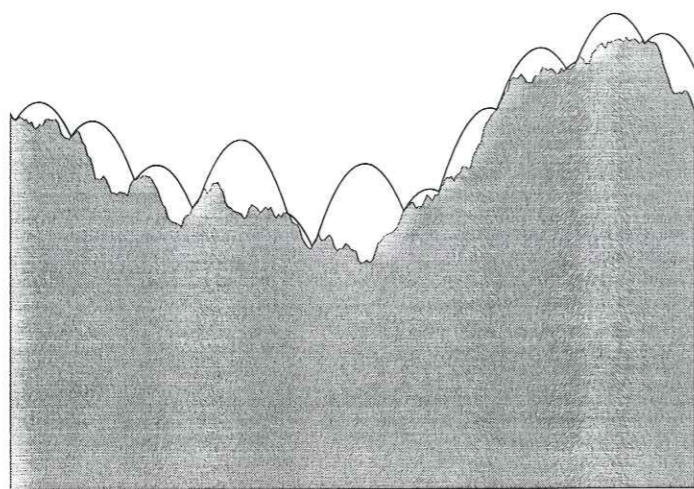


Figure 1: Example of a trajectory (bold line) of one point on the upper solid together with the underlying quasistatic lower limit $z(x)$ (border of the shadowed region).

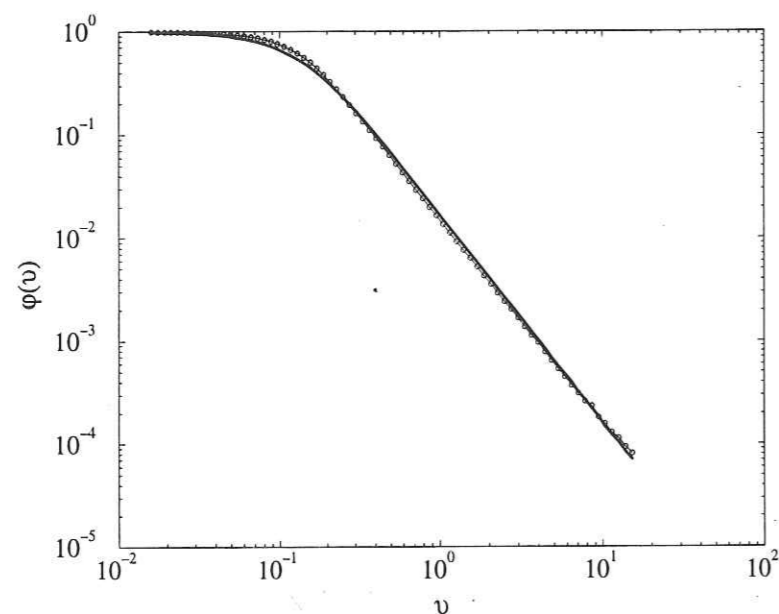


Figure 2: Evolution of the temporal and realisation average of the friction coefficient $\varphi(v)$ (symbol \circ) as a function of the dimensionless velocity v , for the case of a simple gravity loading. The plain curve gives the expected friction coefficient from the measured mean contact distance (see Figure 3).

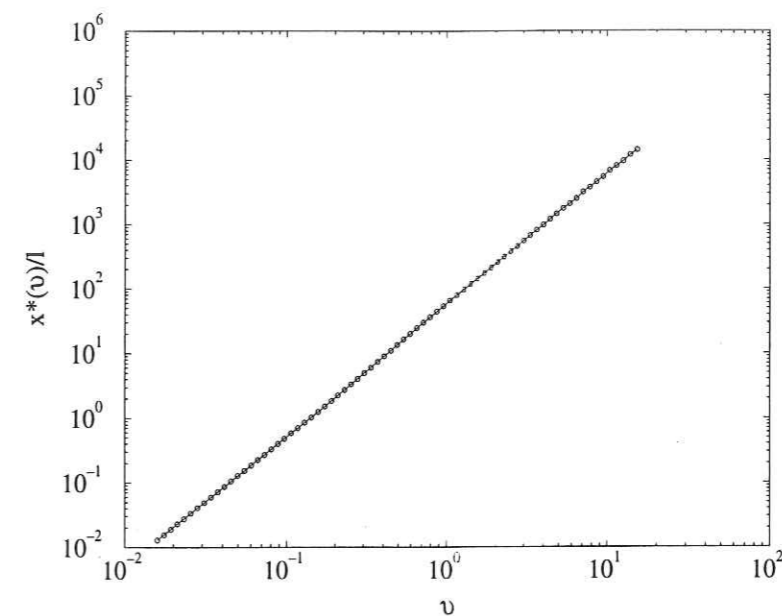


Figure 3: Average ballistic distance $x^*(v)/l$ as a function of the reduced velocity v (symbol \circ), for the case of a simple gravity loading. The plain line is a power-law fit with a slope 2.

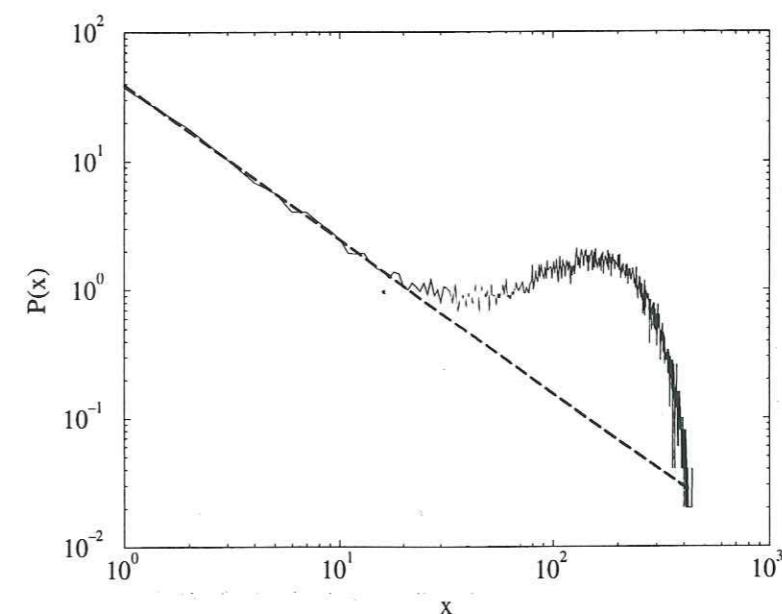


Figure 4: Statistical distribution $N(x)$ of ballistic flight distances x in log-log scale, for the case of a simple gravity loading. The dashed-line shows the expected power-law distribution for small distances, with slope $-(2 - \zeta)$. The parameter used for this example were: $\zeta = 0.8$, $L = 2^{16}$, $v = 2.53$ and the distribution has been collected from 100 independent realizations.

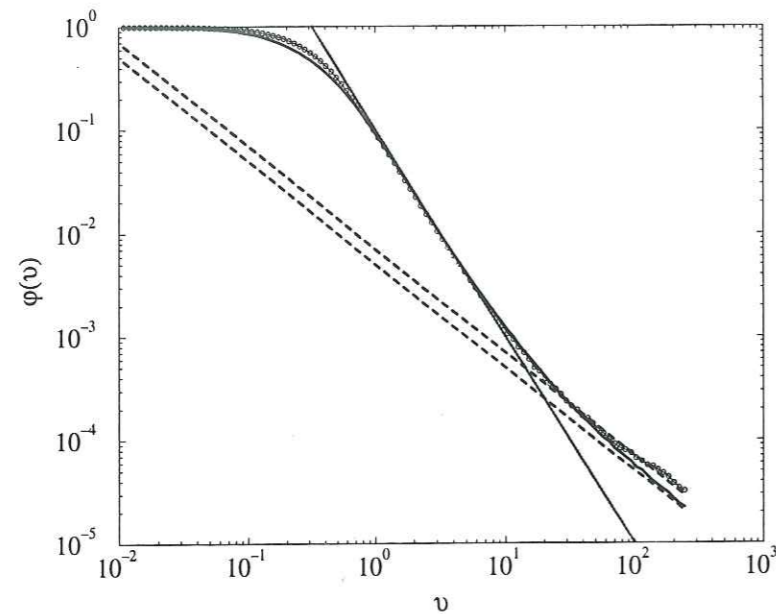


Figure 5: Same as Figure 2, for the case of an external elastic loading. The computed averaged friction coefficient is shown with symbol \circ . The plain curve gives the expected friction coefficient from the measured mean contact distances (see Figure 6). The dotted-line is a power law fit with slope -2 , the dashed-line curves are power-law fit with slope -1 both for the computed friction and the expected friction curves.

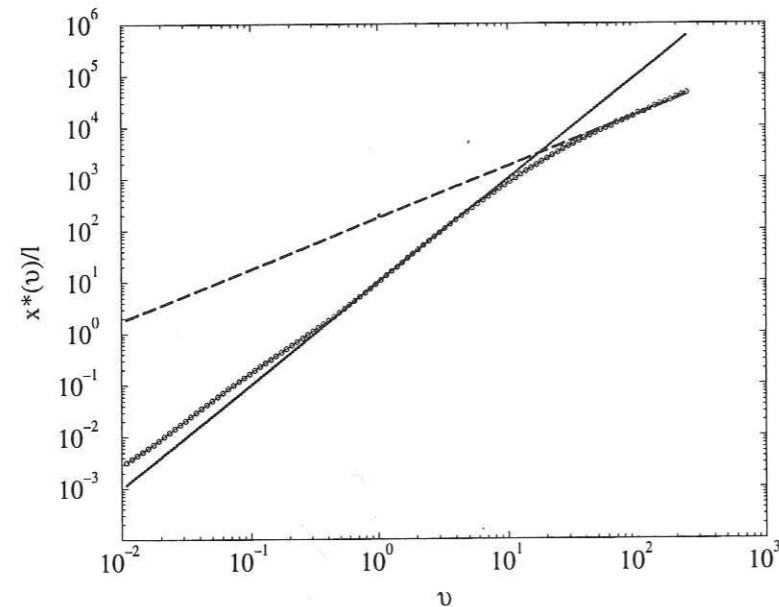


Figure 6: Same as Figure 3, for an external elastic loading. The average jump distances $x^*(v)/\ell$ are shown with symbol \circ . The dotted-line is a power-law fit with slope 2, while the dashed-line is a power-law fit with slope 1.

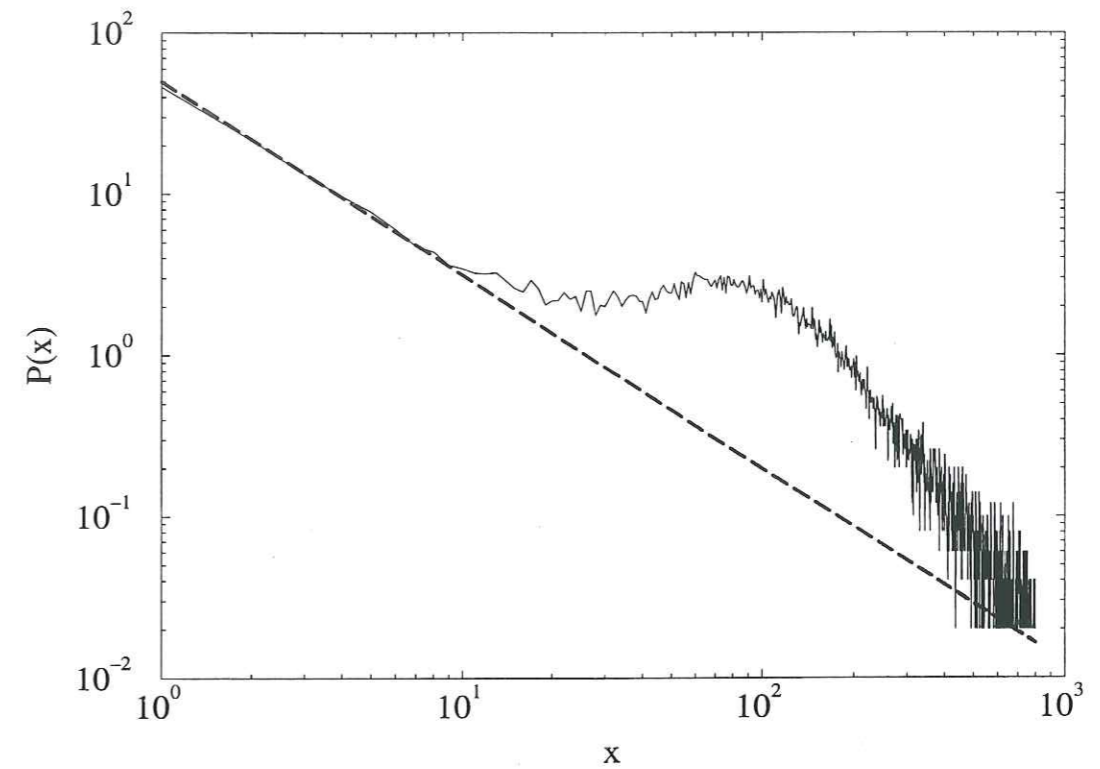


Figure 7: Same as Figure 4, for the case of an external elastic loading. The parameters used for this example were: $\zeta = 0.8$, $L = 2^{16}$, $\nu = 2.8$, and the distribution is collected from 100 independent realizations. The dashed-line curve is a power-law fit with slope $-(2 - \zeta)$, for small jump lengths.

Annexe 2

Conservative and dissipative events in an earthquake fault model
J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux

en préparation

CONSERVATIVE AND DISSIPATIVE EVENTS
IN AN EARTHQUAKE FAULT MODEL

Jean SCHMITTBUHL, Jean-Pierre VILOTTE
Département T.A.O., Laboratoire de Géologie, URA 1316,
École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond,
F-75231 Paris Cedex 05, France.

Stéphane ROUX
Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes,
École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de Paris,
10, rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05, France.

ABSTRACT: We study a discrete dynamical model for friction, derived from the Burridge-Kopoff model. We concentrate on quasistatic loading relevant for earthquake modeling, where time scales between plate loading and dynamic propagation along the fault are well separated. The general evolution of the system presents strong analogies with observed seismic data. The dynamics is shown to be properly described by the analysis of the elastic energy of the system. Two populations of events exist in the system. First, "conservative events" which allow the system to increase its mechanical energy, and second, "dissipative" ones. Among the former category, events have generally a small spatial extent. They release only a negligible fraction of the potential energy of the system, and they tend to make the spacing between blocks more regular. They reduce the position disorder in the chain. On the other hand the "dissipative events" release a large fraction of the potential energy in the system, and they also introduce a large heterogeneity in the position of the blocks. Conservative events are shown to follow a deterministic evolution with two regimes: a loading period before a metastable state. A probabilistic criterion for the failure initiation, i.e. a big dissipative event, is proposed with respect to the ratio of the horizontal elastic energy (i.e. disorder) and the total energy (i.e. loading). The influence of the friction dissipation rate, of the stiffness of the elastic coupling, and of the system size of the system are also studied. A characteristic event size: $L^* = l^2$ emerges for the dynamics of system.

INTRODUCTION

The study of the seismic source is a key point to understand the mechanics of earthquakes. Over the last thirty years, the compilation of many different records show the complexity of the rupture process along a fault zone. Several approaches have been proposed to explain these observations [1, 2, 3]. They can be related to two extreme points of view. On one hand, the complexity is supposed to be the result of quenched heterogeneities, either at the scale of the fault network (geometry of the segments or branching), or at the scale of the fault surfaces (asperities or roughness). These heterogeneities may control the initiation, the arrest and the radiation of the seismic rupture [4, 5, 6] and are responsible for the variation in strength. On the other hand, inspired from the physics of non-linear dynamic processes [2, 3, 9], complexity is considered as the result of the non linear rupture dynamics which continuously tend to produce a critical heterogeneous state of stresses. The latter has been quite revitalized recently both by the rapidly improving precision of the high frequency radiation data [10, 11], and by the important new perspectives which have been gained from numerous discrete and continuous models based on non linear dynamical friction laws [2, 3, 9, 6, 13, 14].

Observations at the seismic source level do favor strong co-seismic slip heterogeneities [15], strong variation of the stress drops for small earthquakes, and a flattening effect on the Gutenberg-Richter (GR) distribution [16, 17, 18]. Stress drop distribution along the fault plane is generally assumed to depend on the radial wave number, and the power spectra of the slip and slip rate during a seismic event appear as power laws of respectively the wave number and the frequency.

Recent studies on the dynamics of discrete fault models have brought new perspectives and questions on the subject. For the most part, the attention has been focussed on the complex behavior of discrete arrays of

massive spring-connected rigid blocks. The simplest version of these is based on the original quasi-static cellular-automata model of Bak and Tang [19], in which an array of identical cells or massive spring connected blocks is loaded uniformly or stochastically. A shedding of load to the four nearest neighbors is prescribed whenever a cell (or a block) fails. The state after failure is then quasi-statically determined. The results obtained so far show complex failure sequences which emphasized similarities with the GR distribution law, regarded here as the signature of the self-organized criticality [20, 21, 22]. Models, which solves the dynamics within slip events, derived from the original Burridge-Knopoff (BK) model [1], have been revitalized by Carlson and Langer [3, 24, 25, 4, 27, 28, 7, 30]. In this model of massive spring-connected blocks, a velocity weakening friction law is generally assumed. For a certain range of the model parameters, the BK models give rise to complex failure sequences suggestive of the GR distribution [3, 25, 27, 28]. However, this regime is not unique and a transition to solitary wave solutions has been recently shown [7, 8].

All these models raise the question of their validation. Are those models relevant to the seismic source? What are the relevant numerical results and seismological observations which could be compared? The Gutenberg-Richter law, which has been so often advocated, is weakly sensitive to the exact dynamics of the rupture process and is only the result of the integration of the earthquake history both in time and space. At the scale of one fault, it is not generally observed. Another interesting problem, raised by these models, is the question of the event size selection which has important implications in terms of prediction. Carlson *et al* [3, 4] have proposed the existence of a *critical size* characteristic for the system and its loading, in order to explain the origin and the statistics of the large events. The reason why an event should reach and overcome this size and how the history of the system influences its present behavior is a hard problem

still unanswered.

In this paper we review some of the dynamics of the BK model, in the case where loading and rupture time scales are well separated, and we show that a statistical analysis of the elastic energy of the system allows us to gain some deeper insight in the full dynamic of the system.

The paper is organized as follow: The discrete dynamical model is presented in section I with the particular boundary conditions for earthquake framework. Section II is devoted to the general description of the behavior of the system. The interpretation of the dynamics based on the study of the elastic energy is proposed in section III. In sections IV and V the influences of respectively the disorder and physical parameters (i.e. the frictional dissipation, the elastic stiffness and the system size) are studied.

A DISCRETE MODEL WITH SEPARATED LOADING AND DYNAMIC TIME SCALES

The Burridge-Knopoff model

The discrete one-dimensional BK model [1] consists of a chain of spring-connected massive blocks lying on a support. The number of blocks is N . Each block is connected to its two immediate neighbors by horizontal springs, and is loaded through a vertical spring attached to a rigid rod, by the motion at constant speed of the support. Frictional contacts take place between the blocks and the support. Figure 1 illustrates this set-up for three blocks.

A reference frame X is attached to the rigid rod, and X^j denotes the position of the block j . The origin of the vertical spring j is X_0^j , and the displacement of the block $U^j = X^j - X_0^j$. The positive direction is defined according to the loading speed V .

The forces acting on block j , at time T , are of two types: (1) An elastic force, F_e^j , resulting from the elastic horizontal interactions with the left and right neighbors,

$K_h^{j,j-1}(U^j - U^{j-1})$ and $K_h^{j,j+1}(U^{j+1} - U^j)$ respectively, and the elastic interaction between the block and the rigid rod, $-K_v^j U^j$; (2) A friction force, F_f^j , which describes the contact force exerted at the base of the block.

The Newton's law on a block j can be easily written if M^j is the mass of the j -th block:

$$M^j \ddot{U}^j = F_e^j + F_f^j \quad (1)$$

with

$$F_e^j = -K_v^j U^j + K_h^{j,j+1}(U^{j+1} - U^j) - K_h^{j,j-1}(U^j - U^{j-1})$$

This differs from the equation of motion of a chain of harmonic oscillators because of the specific vertical coupling to the driving rod. The friction force includes two distinct parts: a static friction F_s , below a static threshold F_{f_e} , with no relative speed between the support and the block is zero, and a dynamic friction F_d with non zero relative speed, when the static threshold has been exceed.

During the static phase, the friction of block j is simply the opposite of the reaction force, i.e. $-F_s^j$, and restricted to the interval $[-F_{f_e}^j, F_{f_e}^j]$

$$F_s^j = -F_e^j \quad (2)$$

Due to the elastic coupling, the static friction varies linearly with the block positions, and is oriented in the opposite direction of the support motion.

The dynamic friction F_d is assumed to be function of the relative speed of the block, and opposed to the relative speed of the block. The velocity weakening friction law introduced here can be parameterized by the threshold $F_{f_e}^j$, and a characteristic friction velocity V_f . This characteristic velocity is chosen conventionally to be such that the dynamic friction has been reduced by a factor of two compared to the static limit.

$$F_d^j = -\text{sign}(\dot{U}^j - V) \cdot F_{f_e}^j \cdot f_d(|\dot{U}^j - V|/V_f) \quad (3)$$

where f_d is a dimension-less velocity dependent function chosen as:

$$f_d(x) = \frac{1}{1+x} \quad (4)$$

The dynamic friction assumed here does not include slip dependence or any intrinsic length [11, 12].

A complete spatial homogeneity of the physical parameters along the chain will be assumed thereafter.

$$\begin{cases} M^j = M \\ K_v^j = K_v \\ K_h^{j,j-1} = K_h^{j,j+1} = K_h \\ F_{fc}^j = F_{fc} \end{cases} \quad (5)$$

Only the difference between vertical and horizontal springs is maintained.

In order to reduce the number of physical parameters in the problem, we introduce the characteristic time (i.e. the vertical pulsation), $T^* = \omega_v^{-1} = \sqrt{M/K_v}$, the characteristic length $U^* = F_{fc}/K_v$ which is defined as the maximum displacement of a single block just connected to the vertical spring, and therefore a characteristic velocity $V^* = U^*/T^*$. Dimension-less time and displacement are: $t = T/T^*$, and $u^j = U^j/U^*$. Friction is assumed to be continuous at the threshold which is used to normalize the friction force, $f_f^i = F_f^i/F_{fc}$.

The system can be fully described by three dimension-less parameters: a dimension-less loading speed $\nu_s = V_s/V^*$, a dimension-less friction velocity $\nu_f = V_f/V^*$, and an elastic dimension-less parameter $\ell = \sqrt{K_h/K_v}$ which can be interpreted as the dimension-less sound speed of the model.

The dimension-less Newton's law can be decomposed in two simple equations:

$$\begin{cases} \ddot{u}^j = 0 & \text{(static phase)} \\ \ddot{u}^j = -u^j + \ell^2(u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1}) \\ \quad - \text{sign}(\dot{u}^j - \nu_s) f_d\left(\frac{|\dot{u}^j - \nu_s|}{\nu_f}\right) & \text{(dynamic phase)} \end{cases} \quad (6)$$

Separation of time scales

Two time scales can be defined in the BK model: a loading one, defined as the time needed to bring one single block up to the

dynamic threshold; and a dynamic one, defined as the time needed for a wave traveling at the sound speed to propagate along the chain. This allows to define the model parameter: $\Theta = N\nu_s/\ell$ which is the ratio between these two time scales. The parameter Θ can also be identified to the internal "impedance" of the system, characterizing the source of mechanical energy. Characteristic geophysical time scales imply that the loading time, identified as the recurrence time of an earthquake, is by several orders of magnitude larger than the dynamic time scale, identified as the rupture time. Seismic applications would require a very low internal impedance, $\Theta \ll 1$ ($\Theta \approx 10^{-8}$). Numerically, such a small value of Θ is prohibitive. However, two ranges of Θ -values can be obtained: Θ in the interval $[10^{-2}; 1]$ which is more relevant in the framework of friction law study [7] and Θ equals zero. This latter condition is a good numerical approximation for the earthquake problem. It is obtained simply by setting the loading speed ν_s to zero during any events.

Static and dynamic phases

At the block scale The dynamics of the j -th block of the chain, as mentioned above, is the result of two distinct phases. During the "static" phase, the block has no relative motion with respect to the support and is statically loaded until the reaction force reaches the static friction threshold. Within that phase, the frictional force is exactly balanced by the reaction force and therefore can be defined as a linear function of the position of the $(j-1)$ -th, j -th and $(j+1)$ -th blocks. During the "dynamic" phase, reached when the reaction force has overshoot the friction threshold, the block j acquires a relative speed with respect to the moving support which leads initially to a motion in the direction opposite to that of the support. The dynamic phase is dissipative, and is controlled by the dynamic friction law. As a result of this dissipation and of the elastic coupling, the relative velocity of the block finally

decreases until it stops back to the "static" phase. Physical knowledge of dynamic friction at very high speed is very limited. A velocity dependent friction law is often assumed in the BK models, even though it has been the subject of some controversy [34].

At the system scale In this paper we will focus on the dynamics at the system scale as the result of the collective behavior of the block dynamics. Since the loading and the rupture time scales are supposed to be separable, the loading speed may be set to zero during a rupture events. Subsequently, as soon as a critical block starts to move, (i.e. beginning of an events), the input of energy is turned off and the system can only loose energy through the friction dissipation. Depending on the characteristic friction speed ν_f , the event duration can vary. The general evolution is a so-called "global stick-slip" motion well-described by Carlson *et al* [4]. The loading been the subject of some controversy [34]. of the system is therefore discontinuous and only allowed between events. This period between two events, i.e. when all blocks are at rest, is called the "static" phase of the system. The event is seen as the "dynamic" phase. It is worth mentioning that during this dynamic phase where at least, one block is moving, many blocks can be at rest. Thus, energy is supplied to the system during the static phase, and it is partly dissipated by friction during the dynamic phase.

NUMERICAL SOLUTIONS

All the results presented here are obtained for periodic boundary conditions. Statistics are recorded over at least 10^5 events. The positions of the blocks are initialized by imposing a small spatial perturbation (white noise of maximum amplitude 0.001). Time integration of the equation of motion during the dynamic system phase, is performed using a Runge-Kutta scheme, and special care has been taken for the start and arrest phases of the block. When a block reaches the static threshold, a certain overshoot is numerically introduced due to the

time discretization. This implies that the actual friction law includes a small discontinuity at the onset of the dynamic phase of each block. The amplitude of the discontinuity is function of the characteristic friction velocity ν_f . This has to be compared to the friction parameter σ introduced by Carlson *et al* [4]. The magnitude of this parameter may strongly influence the dynamics of the system. When it is set to a large value, it favors large events and decreases the role of the system history. In our simulations, we set this overshoot as low as possible. It is function of the shape of the friction law around the threshold. We chose σ in the range $[10^{-4} - 10^{-6}]$ according to the value of the characteristic friction speed ν_f . During the static system phase, the system is simply linearly translated according to the block which is the closest to the friction threshold.

For the two next sections, we will present the dynamic of the system for a prescribed set of the parameters: $N = 128$, $\ell = 10$, $\nu_s = 0.01$ (between events) and $\nu_f = 1/5$. The variations of the parameters ν_f , ℓ and N will be studied in sections V.

Quake map

The general behavior of the system is first described in terms of a so-called quake map. In a space-time diagram, for each event, a segment of a length equals to the event size (number of blocks which have moved during the event) is plotted centered on sides of the position of the block from which this event was initiated. This representation leads to events spanning outside the range $[1, N]$ in spite of the boundary conditions. Figure 2 presents such a quake map. A large diversity of sizes can be seen, but it is also obvious that these events display a complex spatial and temporal organization. Actually, the dynamic of the system is marked by large and almost periodic quakes (with a size equal to the system size). In between, small events appear in a "process" zone. The latter is small just after a large quake and grows until the next big

event. Inside this zone, events with no characteristic size emerge. This reveals that a cycle exists in the system at the scale of several events. Events do not show a characteristic size evolution within the "process" zone however their positions in space are not independent. The hallmark of self-organized criticality seems to be characteristic of this transient regime between big events. But, it seems that large quakes "stops" the progression of the system toward the critical point. Large quakes are well correlated in time. A complex organization of events appear which has to be analyzed including a history dependent triggering of new events.

Event size distribution and load distribution

The number of events of size L is plotted in figure 3 according to the event size L in a log-linear diagram. This figure emphasizes two kinds of event populations. Small and medium size events follow closely an exponential distribution (with some slight deviation for very small events). Large quakes do not fall into the same distribution and are rather frequent: almost one percent of the total events for this particular set of the parameters.

The system is loaded during the static system phase thanks to a uniform translation of the whole system. The amount of loading can be parametrized by the imposed displacement of the critical block which initiates the event: Δu^* . The increase of force of each block is simply equal to Δu^* time the stiffness of the vertical spring taken here as unity. We analyze the distribution of such characteristic displacement on figure 4. It behaves globally like a power law:

$$N(\Delta u^*) \propto \Delta u^{*-1.9} \quad (7)$$

However, a peak emerges for large Δu^* corresponding to small events which immediately follow a large quake.

Time and event number

For sufficiently small loading speed (small ν_s), the time evolution is monitored

by the static system periods. The event duration can be neglected. The life of these static periods is directly proportional to the corresponding loading displacement. Subsequently, the time is related to the slip Δu^* through:

$$\tau \approx \frac{1}{\nu_s} \sum_{t=0}^{\tau} \Delta u^*(t) \quad (8)$$

Numerically, we observe that on average the dimension-less time τ is proportional to the emerging order of an event n_{ev} . This reveals the periodicity of large events. Indeed, if we assume that big events (with a size equals to the system size) are periodic with a frequency f_N and are at the origin of the major loading displacement Δu_N^* , we can obtain the linear behavior by:

$$\tau \approx \frac{f_N \Delta u_N^*}{\nu_s} n_{ev} \quad (9)$$

It is also possible to check directly the periodicity of large event. Indeed, the distribution of the lapses of time between two big events (see figure 5) shows a nice peak. Between big events, the time versus event order do not reveal any particular feature.

Event duration and event size

The duration of an event is obtained according to the integration time of the numerical scheme. It is defined as the difference of time between the beginning of the first block move and the arrest time of the last block. On figure 6, the duration Δt is drawn versus the event size L in a log-log plot. A linear relation fits nicely the data up to a size of order 60, above which some saturation can be seen. Although the lack of big events make any conclusion unreliable. The event duration is averaged for events of same size. Fluctuations can be seen for large sizes because of the decreasing number of such events. The statistical relation between event duration and event size is subsequently:

$$\langle \Delta t \rangle \propto L \quad (10)$$

Average slip

The average slip of an event is calculated as the average of the difference of position of all the blocks which moved after and before the quake. Figure 7 shows the relationship between this average slip $\langle \Delta u \rangle$ and the event size:

$$\langle \Delta u \rangle \propto L \quad (11)$$

with the same limitation as in the previous data set. The mean over different events of same sizes is also considered in order to increase the readability for low event size. However, it introduces some important fluctuations at large sizes.

Seismic moment

The "seismic moment" of each event is calculated for this particular system as [3]:

$$M = \sum_{i=1}^{i=N} \Delta u^i \quad (12)$$

where Δu^i is the difference of position for the block i induced by the quake. According to this definition, the evolution of the moment M is related to that of the average slip. Indeed, we can write:

$$M \propto L \langle \Delta u \rangle \quad (13)$$

This leads to a behavior of the seismic moment as:

$$M \propto L^2 \quad (14)$$

for moderate L . Figure 8 allows to check this statistical result. For this plot, all the values of the moments for a quake of a given size are averaged.

The histogram of such seismic moment M is plotted on figure 9a, in a log-log diagram. It has to be compared to the Gutenberg-Richter law as largely done in the past [2, 4]. A power law can be fitted to the data for small quakes but a peak emerges for large events. The slope of the histogram is expected to be close to the b -value minus one. We measure a slope close to -2 which provides an analogous b -value of 1.

It should be noted that the fact that the event size is exponentially distributed

and that the event moment is power-law distributed, seems inconsistent with the quadratic relation linking size to moment. A closer inspection shows that indeed the power-law distribution of moment corresponds to sizes L extremely small which departed from the exponential fit in Figure 3, and that the moment distribution, for high moments M , can also be satisfactorily fitted by a $\exp(-\sqrt{M})$ behavior (see Figure 9b) as can be deduced from $M \propto L^2$ and $P(L) \propto \exp(-L/L_0)$. We propose that both distributions actually behave as:

$$P(L) \propto L^{-3} \exp(-L/L_0) \quad (15)$$

$$N(M) \propto M^{-2} \exp\left(-\sqrt{M/M_0}\right) \quad (16)$$

Let us note that the range of scales for each regime is small. The distinction between the power law and the exponential distribution is weak.

Analogies with seismic data

In this section, we have presented a brief overview of some statistical properties of the system. We looked at statistical properties. Part of them can be compared to observed seismic laws. It is interesting to note close analogies: linear relation between the average slip and the event size or between the event duration and the event size and the quadratic relation between the moment and the event size (if we take into account the one dimensional nature of the model) [35].

About the seismic moment distribution, it has to be mentioned that within the seismic observation of the Gutenberg-Richter law, some authors distinguish different regimes in the power law distribution which can be interpreted, in the spirit of the above calculation, as a transition from exponential to power law distribution.

ELASTIC ENERGY AND OVERALL DYNAMICS

The system is characterized by three kinds of energies: the elastic energy, the kinetic energy and the dissipative energy. With

regard to the dynamics of the system, kinetic and dissipative energies are significant only during events. In between, the dissipative energy is zero and the kinetic energy is set to a small constant equal to $N\nu_s^2$. Only the elastic energy evolves during loading periods. Let us recall that the system is dominated in time by these loading phases. Subsequently, we tempted to follow the system evolution through the elastic energy.

A special framework is underlying in the following studies. We assume that the system evolution is monitored by "global" variables, i.e. variables defined at the system scale. We implicitly suppose that local fluctuations can be averaged in the spirit of thermodynamical approaches.

We introduce the total elastic energy E_t of the system as the sum of the horizontal elastic energy E_h and the vertical one E_v with:

$$E_h = l^2 \sum_{i=1}^N (u^{i+1} - u^i)^2 \quad E_v(\tau) = \sum_{i=1}^N (u^i)^2 \quad (17)$$

During loading phases, the horizontal elastic energy is constant on the contrary of the vertical elastic energy which increases. As mentioned previously, during the static phase the mechanical energy of the system is equal apart from a small constant to the total elastic energy: $E_t = E_h + E_v$. Indeed, during this period, the blocks are moving at a low constant speed ν_s . Moreover, since it is a constant term, any differences between two states allow to ignore this small contribution. During dynamic periods the kinetic energy is expected to increase as the elastic energy decreases. However, because of the very low loading speed, event durations are negligible. Hence, the elastic energy of the system is a good indicator of the mechanical state of the system. In particular, comparing the elastic energy before and after a loading phase (or static system phase) allows to estimate the supplied energy and the dissipation.

Micro and macro events

Figure 10a shows the evolution of the to-

tal elastic energy in time. The periodicity we presented above, is clearly observable. The system increases its mechanical energy up to a maximum and suddenly loses almost all of it. The maximum energy in dimensionless unit which can be stored in the system is equal to N , the number of blocks. Let us notice that such evolution can be termed as "macro stick-slip" because the stick period concerns around 100 events. In the following, we name macro-load (ML) the overall loading phase. Because of each ML, the system goes from an unloaded to loaded state. ML are separated by a "rupture" of the system.

Events allow an increase of the mechanical energy. This corresponds to events which are in the so-called process zone we presented on the quake map. The release of energy after a ML is not always complete and consequently can influence the behavior of following events.

The elastic energy stored in the vertical springs, appears as the predominant part of the total energy. It represents on average more than 99 percent. The evolution in time, for $\ell = 1$ of the "vertical" elastic energy is subsequently very close to the total one we presented on figure 10a.

The "horizontal" elastic energy is always small in the system. As plotted on figure 10b, it always decreases within the process zone. Let us notice that this energy is a good indicator of the disorder of the system. This energy is minimum and equals to zero when the distance between the blocks is identical, (i.e. when the order in the chain is maximum). The decrease of the horizontal elastic energy can be interpreted as a smoothing of the heterogeneity of the block positions.

Conservative and dissipative events: two mechanisms of the system

Each event can be characterized by the energy increment ΔE_t during the cycle: static plus dynamic phases.

$$\Delta E_t(t_i) = E_t^0(t_{i+1}) - E_t^0(t_i) \quad (18)$$

where t_i is the emerging time of the event i and E_t^0 is the total energy at the initia-

tion of a mE. A positive ΔE_t is characteristic of events which dissipate less energy than supplied during the cycle. These events are named "conservative". On the contrary "dissipative" events are events for which ΔE_t is strongly negative, i.e. that is in a cycle they dissipate much more than the supplied energy.

On figure 10c, the increment of energy ΔE_t is plotted as a function of time. It confirms the conservative characteristic of the main part of the events (i.e. events of the process zone) and the very dissipative feature of big events. The typical trend is therefore a succession of conservative events, which are included in the ML, before a strongly dissipative event (i.e. failure between two ML).

The total elastic energy E_t^0 that exists in the chain before the loading of an event is plotted on figure 11 as a function of the incremental elastic energy ΔE_t . This clearly distinguishes both populations of events. Conservative events are along the vertical line defined as ΔE_t equals zero. This set of events includes also events with a (small) positive increment of energy. Actually, these events accumulate part of, or at worst, all the energy provided by the incremental loading which initiated them. On the contrary, dissipative quakes are along the line $\Delta E_t = -E_t$ characterizing events which induce an energy variation equal to the existing energy in the chain. If time evolution is added in this diagram ($E_t^0, \Delta E_t$), we obtain a cyclic behavior.

Let us describe roughly the general feature of a characteristic cycle. The total energy E_t^0 starts to increase rapidly from a low initial value and a positive and rather important incremental elastic energy ΔE_t . Then the increase of the total energy becomes smaller and smaller and the system reaches a state where the events are statistically weakly stable (large E_t^0 and $\Delta E_t \approx 0$). These events do not change the mechanical state of the system. They appear as neutral events. That state, which can last for a while, is only metastable and the system suddenly bifurcates. Dissipative events occur. In the space $(\Delta E_t, E_t)$, the system jumps from the

line: $\Delta E_t = 0$ to the one where: $\Delta E_t \approx -E_t$. Those events dissipate almost all the total energy in the system. Small dissipative events may occur when all the energy was not dissipated in order to bring the system back to a low energy state.

Event size and energy increment

The relation between the energy increment ΔE_t and the event size L is reported in figure 12. No clear relation between size and the local relaxation of energy appears here. Both populations of conservative and dissipative events can be distinguished and include various sizes. Conservative events have continuously distributed sizes in the range [1; 112]. Rather large events compared to the system size exist in this population and have a behavior comparable to small ones. Actually, these events correspond to the "neutral" events previously mentioned. Consequently, the system can be jammed in a mechanical state where rather large events (with large moment) are produced but without significant change of the mechanical energy. In contrast, dissipative events are either small or equal to the system size. Let us note that small events can be either conservative or dissipative whereas large events are always dissipative.

Deterministic evolution of conservative events

The existence of a deterministic evolution of the system is a key question. In Figure 13, we follow the evolution of the system during each ML, in the space: $[E_h/(E_t E_h^i), E_t]$. E_h^i is defined as the horizontal energy at the beginning of a ML. This Figure clearly indicates that two regimes emerges. First, the system is loaded. The total elastic energy increases very sharply from the initial level: E_t^i to a "critical" level: E_t^c . For the choice of the considered parameters, we measured:

$$E_t^c \approx 105 \quad (19)$$

This phase is described by:

$$E_h = E_h^i \quad E_t \ll E_t^c \quad (20)$$

The disorder in the chain is not altered. When the total energy reaches the critical level, then starts the second regime. It is a "meta-stable" regime before failure. The transition is for:

$$\frac{E_h}{E_h^i} \cdot \frac{E_t^c}{E_t} \approx 1 \quad (21)$$

The meta-stable regime is characterized by:

$$\frac{E_h}{E_t} < \frac{E_h^i}{E_t^c} \quad E_t \approx E_t^c \quad (22)$$

During this stage, the ratio: $E_h/(E_t E_h^i)$ slows down because of the decrease of the horizontal energy. The disorder in the chain disappears continuously.

A probabilistic criterion for dissipative events

In spite of the global evolution within ML is deterministic, the initiation of a large dissipative event, i.e. a system failure, is probabilistic.

In Figure 14, the probability for initiating a failure is drawn in a log-linear plot. It deals with the frequency of dissipative events with respect to the control parameter: $E_h/(E_t E_h^i)$. We name E_h^f and E_t^f , the magnitudes of respectively, the horizontal and total energy at the end of the ML. We obtain an exponential distribution:

$$N \left(\frac{E_h^f}{E_t^f E_h^i} \right) \propto \exp \left(\frac{12.5 E_h^f}{E_t^f E_h^i} \right) \quad (23)$$

A major quake happens either for a low disorder (small horizontal elastic level E_h), or for a large load (high total energy level E_t). As a consequence, when the system has reached its critical level of total admissible energy (E_t^c), it is controlled by the horizontal energy, i.e. the level of disorder in the system.

In this section, we described the behavior of the system with respect to global quantities. They allows to follow deterministically

the system evolution. However, a probabilistic criterion for the initiation of big dissipative quakes is proposed. Indeed, the bifurcation from conservative to dissipative event, depends on the local geometry of the block positions.

ROLE OF THE DISORDER

We attempt to understand the role of the disorder in the initiation of events using specific boundary conditions in the model. We focus on the study of a unique event when a well-defined initial condition is set for the block positions.

The blocks are set in the chain with an equal separation except for three blocks in the middle of the chain. These latter are translated by the same amount Δu_0 . Then the system is loaded and an event is initiated.

The analysis of the energy before and after an event with respect to the magnitude of Δu_0 , allows to understand the main dynamics of the system. The total energy E_t^0 just before the event is plotted according to the incremental energy ΔE_t (with the same definitions as before), on Figure 15. Both populations of events can be distinguished: conservative events ($\Delta E_t \approx 0$) along the vertical straight line: $\Delta E_t = 0$ and large dissipative ones along the diagonal. This figure has to be compared to Figure 11. Noise is reduced in the case with no disorder but the main behavior is unchanged.

The evolution of the horizontal elastic energy is drawn on figure 16 where a detail for low level of energy is presented. The metastable behavior of conservative event for low levels of energy is clearly illustrated.

With this simple model of the initial disorder, we are able to reproduce the major dynamics of the system. It confirms that the evolution of the system is monitored by global variables and that elastic energies are good candidates. The exact local shape of the disorder is not relevant for the evolution of the system during ML.

INFLUENCES OF THE PHYSICAL PARAMETERS

Influence of the elastic stiffness

The elastic stiffness of the system is parametrized by ℓ . This parameter monitors the size distribution of the events and the probability to initiate a large dissipative event.

The event size distribution for three values of ℓ is shown on figure 17. It provides three regimes. For small events, the distribution is exponential and the best fits of each curves allow to determine the dependence of characteristic size event L^* with ℓ :

$$N(L) \propto \exp \left(-\frac{L}{A\ell^2} \right) \quad (24)$$

where A is a constant close to one. The second regime is a uniform distribution of medium events. Finally, a peak emerges for events of the system size. The role of the characteristic size L^* can be interpreted according the following argument. Let imagine that during an event of size L , all the blocs which are involved in this event, are moving the same way and form a macro-block. The stiffness of the effective vertical spring of this macro-block is LK_v . However, the horizontal effective stiffness is unchanged: K_h . The characteristic size is defined as:

$$L^* K_v \approx K_h \quad (25)$$

It separates a regime where events are controlled by the horizontal springs ($L < L^*$) and a regime where events are monitored by vertical springs ($L > L^*$). In the first regime, the system behaves as a chain of oscillators. The relation between L^* and ℓ is straightforward to obtain if we keep in mind that: $\ell = \sqrt{K_h/K_v}$:

$$L^* \approx \ell^2 \quad (26)$$

According to the simple model we presented in section IV, we can check the influence of the parameters ℓ . Figure 18a shows

that the stiffness decreases the level of horizontal elastic energy necessary to initiate dissipative events. Consequently, we expected that, when the stiffness ℓ is small, the probability to obtain a large dissipative event is higher (for a given level of horizontal elastic energy). It is consistent with the role of the critical size $L^* = \ell^2$. As ℓ increases, the critical size also increases and large dissipative events become rare.

We expect that the saturation we observed for the different "seismic" laws (see section III), is related to the characteristic size L^* . For instance, we would restrict the linear relation between average slip and event size to quakes smaller than L^* .

Influence of the friction dissipation

The role of the friction dissipation in the system behavior is parametrized by the characteristic friction speed ν_f . An increase of the friction speed ν_f corresponds to a stronger dissipation rate in the model. The power dissipation \mathcal{P}_d can be written as:

$$\mathcal{P}_d \propto \frac{\nu}{1 + \nu/\nu_f} \quad (27)$$

Two asymptotic regimes can be distinguished:

$$\mathcal{P}_d \rightarrow_{(\nu \rightarrow 0)} \nu \quad \mathcal{P}_d \rightarrow_{(\nu \rightarrow \infty)} \nu_f \quad (28)$$

Quake map and event size distribution

Quake maps are plotted on figure 19 for different

values of ν_f ($\nu_f = 1/10; 1/6; 1/4; 1/3$) with the same time interval as for figure 2 where $\nu_f = 1/5$. The friction dissipation strongly influences the dynamics of the system. For small dissipation (small ν_f), the dynamics is dominated by big events. These are periodic and appear at high frequency. The process zone is reduced, with only small quakes. On the contrary, for high dissipation (large ν_f), large events of the system size are almost non-existent and the periodicity disappears.

The event size distributions for the different values of the characteristic friction speed

ν_f are shown on figure 20. The same trend can be seen. The number of quakes of intermediate sizes decreases with the friction dissipation rate. The exponential distribution becomes sharper as ν_f decreases. The influence of the latter can be obtained by the following collapse:

$$N(L) \propto \exp\left(-\frac{1}{5\nu_f l^2} L\right) \quad (29)$$

Actually, the prefactor is also function of the model parameter. Let us notice that for the largest value of ν_f , the number of system size events significantly decreases.

"Plastic" evolution for large dissipation

As suggested in the previous subsection, for large friction dissipation rate (high ν_f), the dynamic of the system changes drastically. The frequency of big dissipative events tends to zero. This can be seen on the time evolution of the total elastic energy (see figure 21 for ν_f equals 1/3). The macro stick-slip behavior vanishes and the system reaches a "plastic" state with an approximately constant level of energy. Events are on average rather large with an important seismic moment but conservative.

We look at the sensitivity of our disorder model to the parameter ν_f (see Figure 18b). ν_f decreases the threshold of the transition between conservative and dissipative events, in terms of horizontal elastic energy. The rate of friction dissipation acts on the opposite direction of the elastic stiffness.

Influence of the system size

We check that the size of the system is not a significant parameter for its dynamical behavior, with respect to two points.

First, the event size distribution is plotted on Figure 22 for three values of the system size: $N = 64; 128; 256$. The statistics for events with small and medium sizes is exactly the same. A peak for events of the system size always emerges with an similar magnitude. The difference is in the number of large conservative events.

CONCLUSION

We study the behavior of a simple discrete model of earthquake dynamics derived from the well-known Burridge-Knopoff model. The loading is stopped during any events to insure a quasistatic limit. Loading and dynamical propagation time scales are well separated as for real earthquakes. A lot of care has been taken numerically to follow the singularities of the friction law. The general behavior shows strong analogies with the observed seismic data. First, as previously mentioned in many other studies, the cumulative distribution of the so-called seismic moment is comparable to the Gutenberg-Richter law. Otherwise, the duration of an event is proportional to its size. The average slip during an event is also proportional to its size. The seismic moment is related to the square of the event size.

The behavior is analyzed in terms of elastic energy. Because of the choice of the loading, the mechanical energy is almost always equal, at a given time, to the elastic energy stored in the chain. The system presents two types of events which can be identified by looking at the increment of elastic energy ΔE between the initiation of the loading and the end of the actual dynamic phase of the event. A large part of them are "conservative", that is to say, they release only a small amount of the increment energy, and subsequently energy is stored in the system. Those which dissipate almost exactly the energy supplied for their initiation, are very peculiar because they can be large, compared to the system size, and are characterized by a large seismic moment or magnitude but they are almost transparent in term of mechanical evolution of the system. The second kind of event population is made of strongly "dissipative" events. Indeed, when such event occurs, it spends not only the necessary energy to be initiated but almost the whole energy which exists in the chain. A macro scale can be defined. Indeed, the set of conservative events can be seen as a macro-event. Large dissipative events are considered as the failure of

the system.

The evolution of the system is shown to be deterministic. It shows two regimes. First, a loading regime where the total energy increases very sharply to a "critical" level, and conserves the disorder in the chain. The second phase is metastable before failure, i.e. initiation of a large dissipative event. The transition is well characterized according to the ratio of the horizontal elastic energy and the total one. It has to be equal to a parameter which depends on the level of disorder in the chain at the beginning of the macro-event and the critical level of the total elastic energy. During the metastable regime, the disorder is reduced little by little (slow decrease of the horizontal elastic energy). The failure initiation is probabilistic. The probability to induce a large dissipative event increases exponentially with the decrease of the disorder.

The role of the position disorder in the chain is studied through a specific situation. We used the same block and spring model but change the initial condition. We impose a level of noise and look at its influence on the very first event. With this simple solution, we reproduce the behavior of the general model.

The influence of the friction dissipation rate is analyzed. It reveals that the stability of conservative events is increased when the dissipation is important. Thus, for very high dissipation rate, the presence of dissipative events may completely disappear leaving place to a "plastic" behavior. The latter is characterized by a quasi constant mechanical energy in time and a majority of medium size events. When the stiffness of the system increases, it increases the level of the horizontal elastic energy and subsequently favors conservative events.

Let us recall that in this system, no wave radiation is taken into account. This leads to some difficulties to put forward the analogy with seismic data and to the following fundamental question: Is the wave radiation relevant for the earthquake mechanics? Although the intuitive answer is yes, it is rather puzzling to see that most of the seismic data

related to non energetical quantities are well respected with this model. Moreover, the analysis of the model reveals that the dynamics of the system is well described when the energy is considered and specially its variation which depends crucially on the friction dissipation. It emerges that the rate of friction dissipation is crucial. Consequently, it is of great interest to compare the friction dissipation to the wave radiation during an earthquake albeit it appears difficult to measure. Otherwise, the study of the friction dissipation at the laboratory should provide interesting elements although the scaling of the data to the field scale has to be done with care.

References

- [1] H. Kanamori and G. Stewart, *J. Geophys. Res.* **83**, 3427 (1976).
- [2] B. V. Kostrov and S. Das, in *Principles of earthquake source mechanics*, edited by G. Batchelor, C. Wunsch, and J. Rice (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [3] R. Madariaga, *J. Geophys. Res.* **84**, 2243 (1979).
- [4] Y. Y. Kagan, *J. NonLinear Sci.* **1**, 1 (1991).
- [5] W. L. Power, T. Tullis, and J. Weeks, *J. Geophys. Res.* **93**, 15268 (1988).
- [6] J. Schmittbuhl, S. Gentier, and S. Roux, *Geophys. Res. Lett.* **20**, 639 (1993).
- [7] J. M. Carlson and J. S. Langer, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2632 (1989).
- [8] J. M. Carlson and J. S. Langer, *Phys. Rev. A* **40**, 6470 (1989).
- [9] Z. Olami, H. Feder, and K. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1244 (1992).
- [10] T. H. Heaton, *Phys. Earth Planet. Sci.* **64**, 1 (1990).
- [11] J. N. Brune, *Rev. Geophys.* **29 supplement**, 688 (1991).
- [12] J. S. Langer and C. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1043 (1991).
- [13] J. R. Rice, *J. Geophys. Res.* **98**, 9885 (1993).
- [14] A. Cochard and R. Madariaga, submitted to *Pure Appl. Geophys.* (unpublished).
- [15] A. A. Gusev, *Pure Appl. Geophys.* **130**, 635 (1989).
- [16] K. Aki, *J. Geophys. Res.* **92**, 1349 (1987).
- [17] P. A. Rydelek and I. S. Sacks, *Nature* **337**, 251 (1989).
- [18] S. E. Hough *et al.*, *Seismological Res. Lett.* **63**, 24 (1992).
- [19] P. Bak and C. Tang, *J. Geophys. Res.* **94**, 15635 (1989).
- [20] J. B. Rundle and D. A. Jackson, *B.S.S.A.* **87**, 1363 (1977).
- [21] S. Brown, J. Rundle, and C. Scholz, *Geophys. Res. Lett.* **18**, 215 (1991).
- [22] K. Ito and M. Matsuzaki, *J. Geophys. Res.* **95**, 6853 (1990).
- [23] R. Burridge and L. Knopoff, *Bull. Seismol. Soc. Am.* **57**, 341 (1967).
- [24] J. M. Carlson, *Phys. Rev. A* **44**, 6226 (1991).
- [25] J. M. Carlson, *J. Geophys. Res.* **96**, 4255 (1991).
- [26] J. M. Carlson, J. S. Langer, B. Shaw, and C. Tang, *Phys. Rev. A* **44**, 884 (1991).
- [27] H. Nakanishi, *Phys. Rev. A* **41**, 7086 (1990).
- [28] H. Nakanishi, *Phys. Rev. A* **43**, 6613 (1991).
- [29] J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, and S. Roux, *Europhys. Lett.* **21**, 375 (1993).
- [30] J. H. Dieterich, *J. Geophys. Res.* **84**, 2161 (1979).
- [31] G. Vasconcelos, M. de Sousa Vieira, and S. R. Nagel, *Physica A* **191**, 69 (1992).
- [32] J. C. Gu, J. R. Rice, A. L. Ruina, and S. T. Tse, *J. Mech. Phys. Solids* **32**, 167 (1984).
- [33] F. Heslot *et al.*, *Phys. Rev. E* **49**, 4973 (1994), submitted to *Physical Review E*.
- [34] B. E. Shaw, preprint (unpublished).
- [35] C. H. Scholz, in *The mechanics of Earthquakes and faulting*, edited by C. U. Press (Cambridge Univ. Press, New York, 1990).

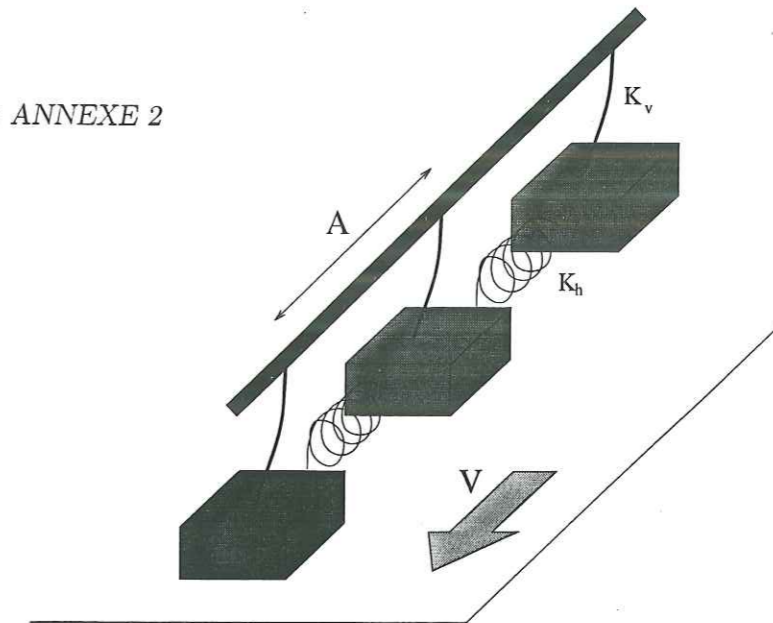


Figure 1: Sketch of the Burridge-Knopoff model. Only three blocks of the chain are presented.

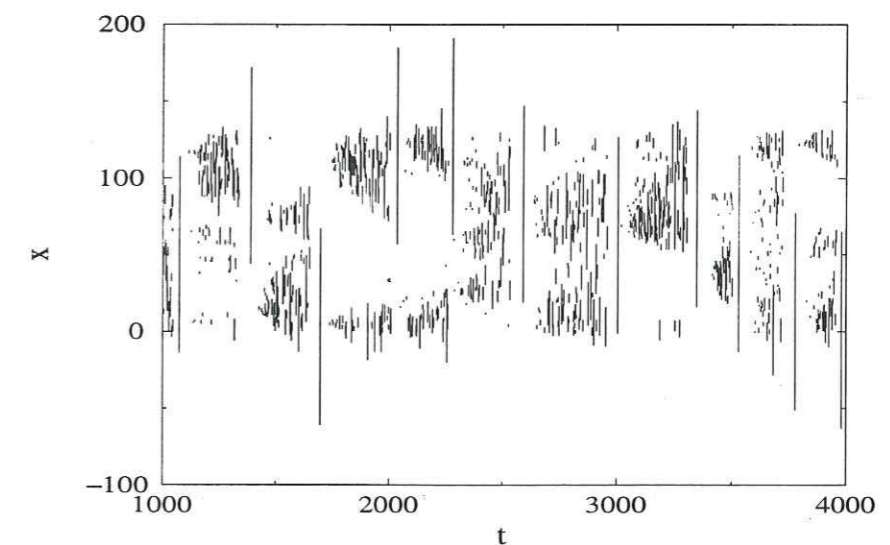


Figure 2: Quake map for $\ell = 10$, $N = 128$ and $\nu_f = 1/5$.

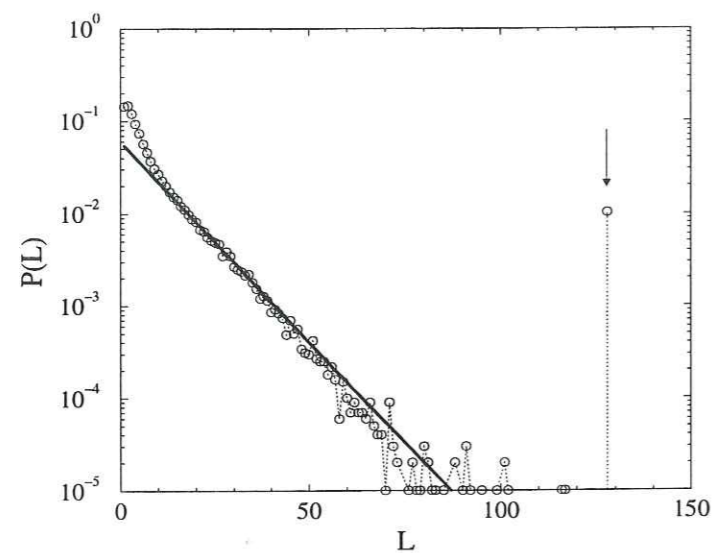


Figure 3: Event size distribution for $\ell = 10$, $N = 128$ and $\nu_f = 1/5$.

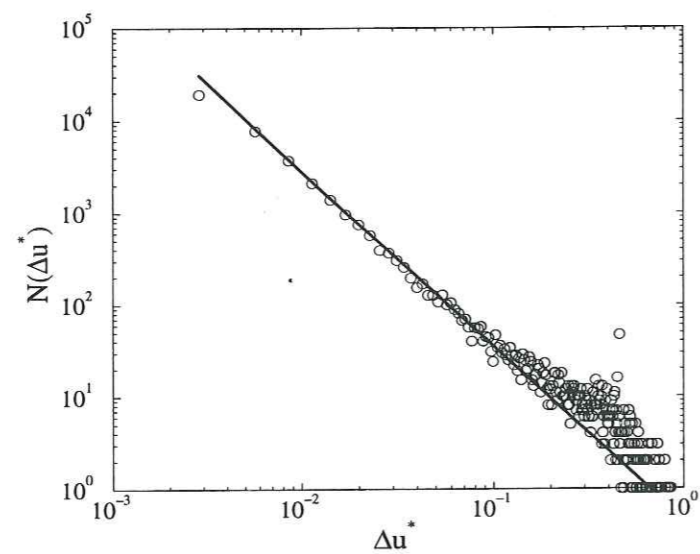


Figure 4: Static displacement Δu^* for $\ell = 10$, $N = 128$ and $\nu_f = 1/5$.

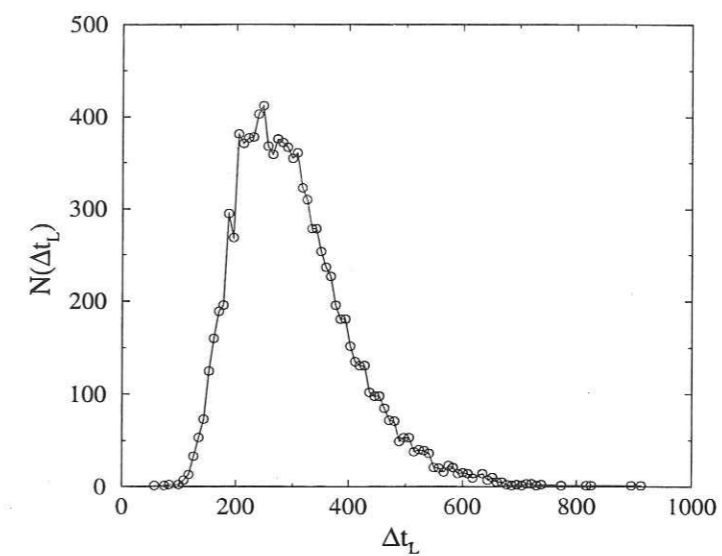


Figure 5: Distribution of time laps between two consecutive events which reach the system size.

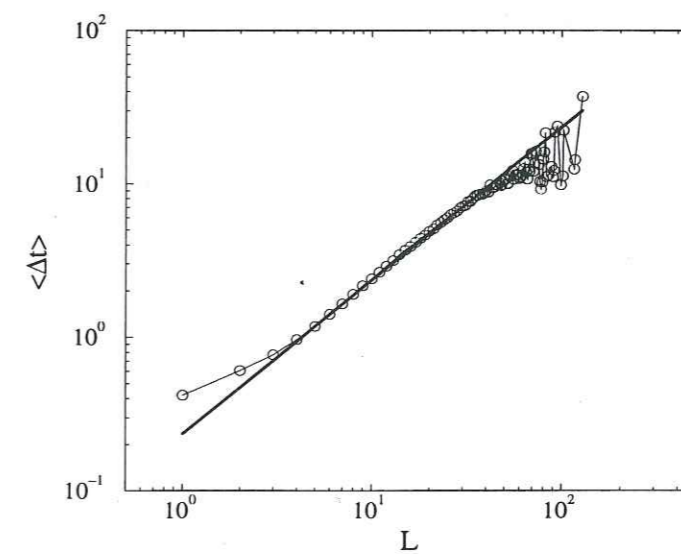


Figure 6: Averaged event duration (averaged by size) as a function of their size L .

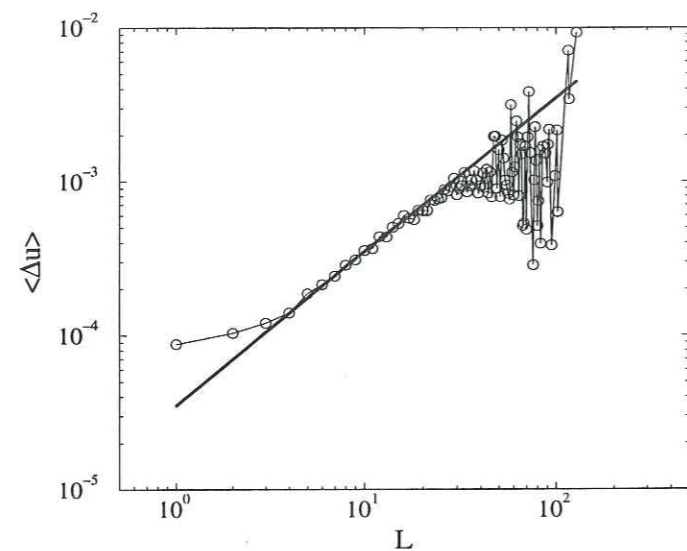


Figure 7: Averaged slip due to an event versus its size.

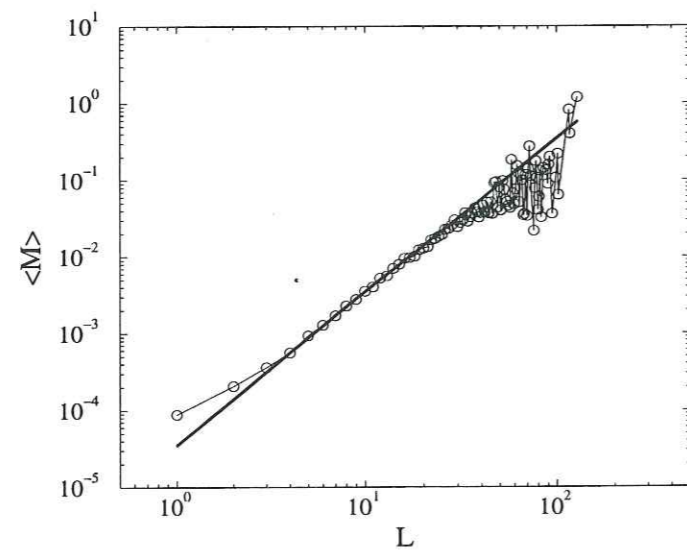


Figure 8: Seismic moment of an event versus its size.

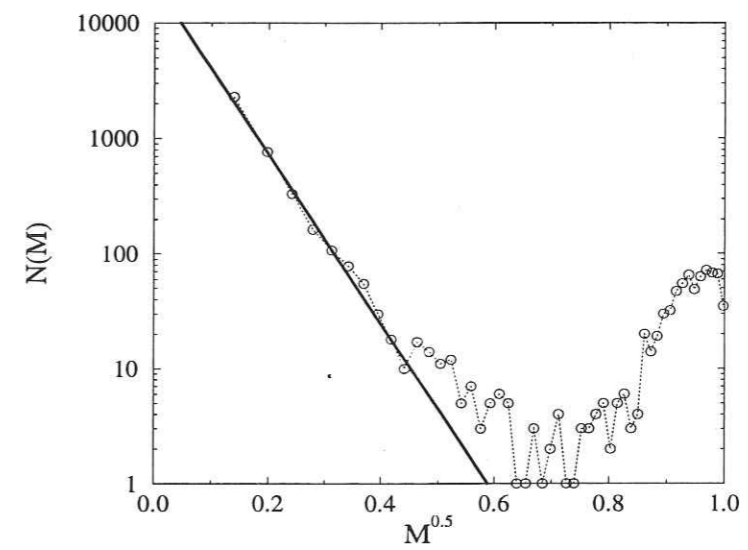
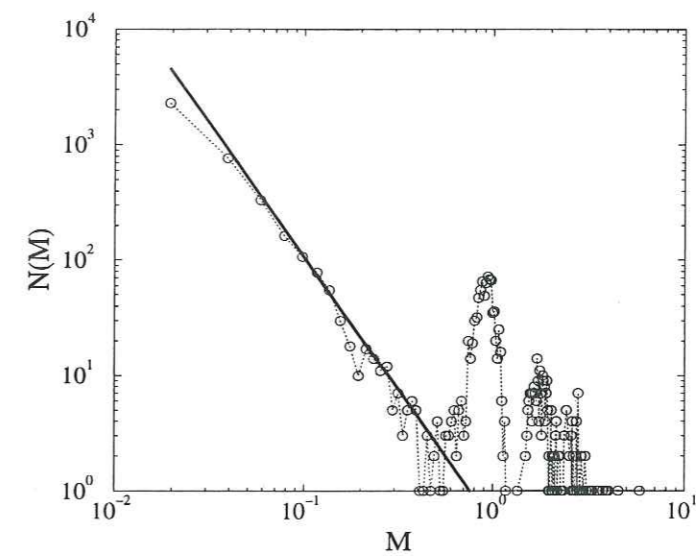


Figure 9: Histogram of the seismic moments: (a) in a log-log plot, (b) in a log-linear plot. Power law and exponential distributions are compatible (see texte).

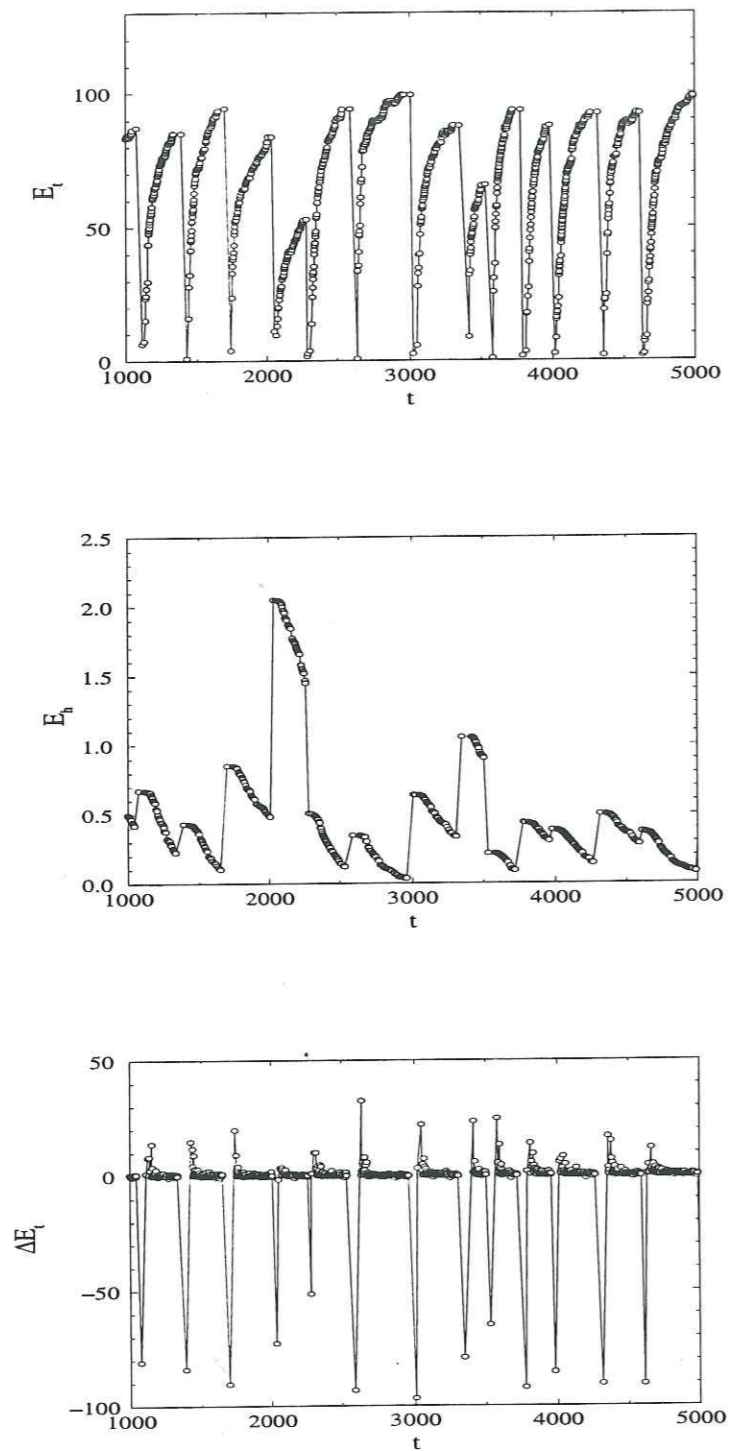


Figure 10: Time evolution of the total (a), horizontal (b) and incremental (c) elastic energy.

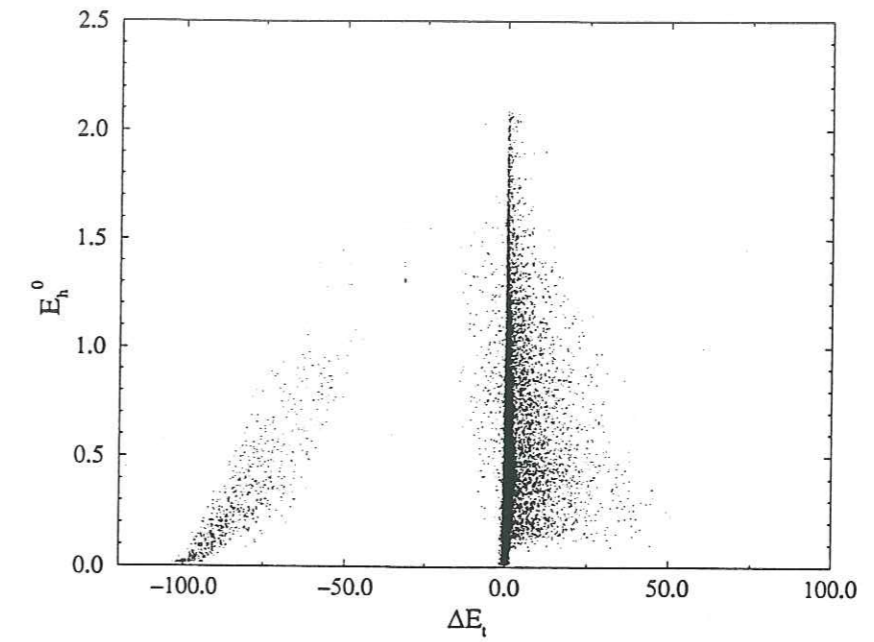


Figure 11: Total elastic energy before an event E_t^0 plotted versus the increment of energy ΔE_t . (Statistics over 100000 events.)

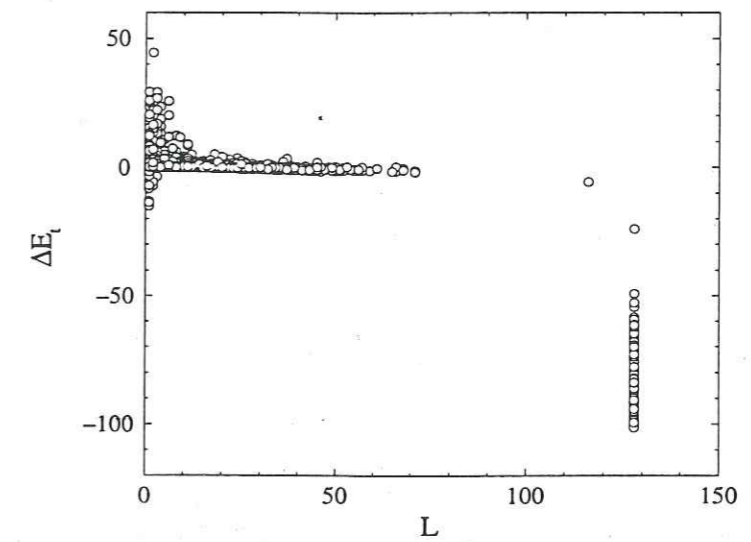


Figure 12: Incremental energy versus the event size L .

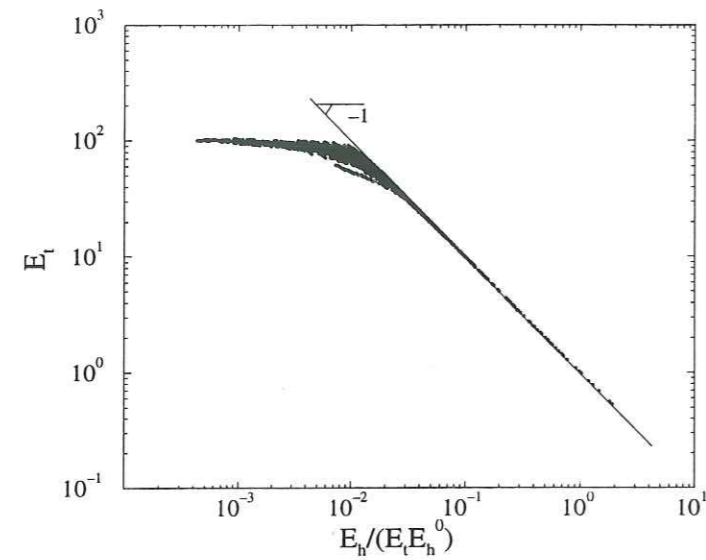


Figure 13: Deterministic description of the system evolution in a diagram: $[E_h/(E_t E_h^0), E_t]$ where E_h^0 is the horizontal elastic energy of the initiation of a macro-event.

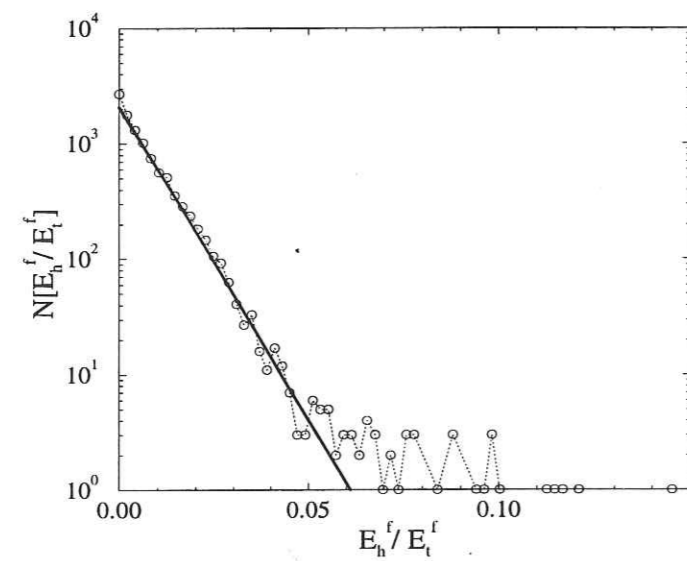


Figure 14: Probabilistic criterion of failure: histogram of the control parameter $E_h/(E_t E_h^0)$ just before a large dissipative event. E_h^f and E_t^f are the values of respectively, the horizontal and total energies at that time.

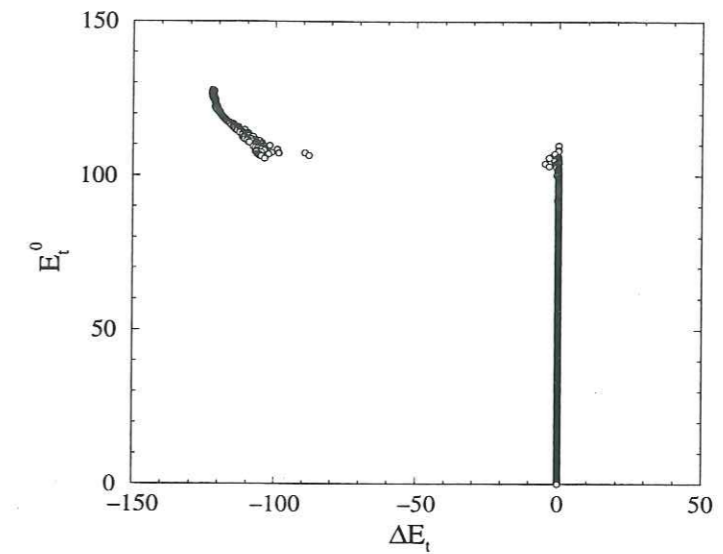


Figure 15: Total elastic energy before an event E_t^0 plotted versus the increment of energy ΔE_t in the case of a simple version of the model for various magnitudes of the initial position step.

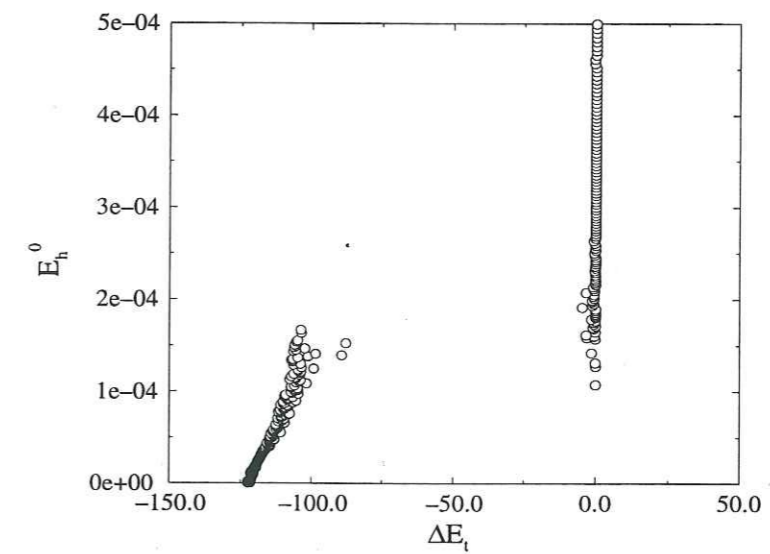


Figure 16: Horizontal elastic energy before an event E_h^0 plotted versus the increment of energy ΔE_t for simple version of the model.

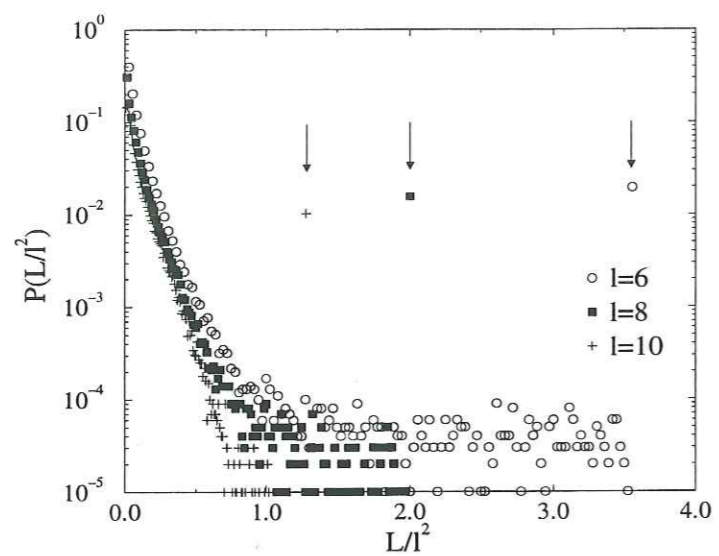


Figure 17: Event size distributions rescaled by the critical size l^2 for $l = 6; 8; 10$, $N = 128$ and $\nu_f = 1/5$.

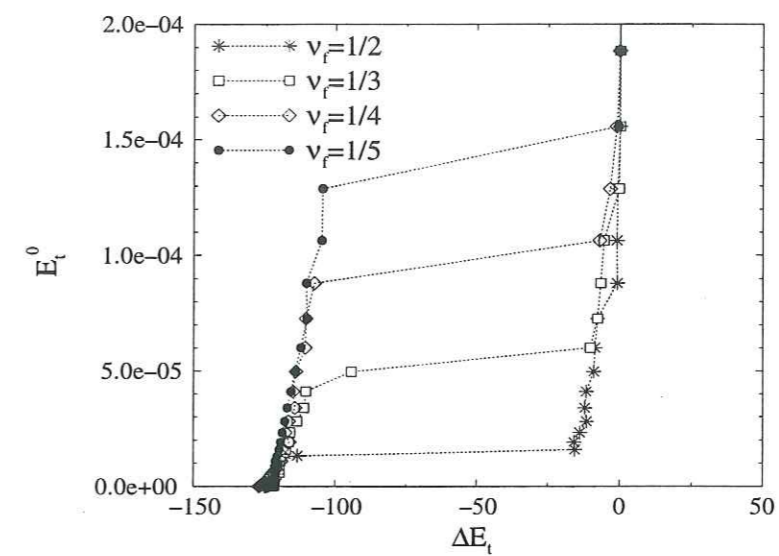
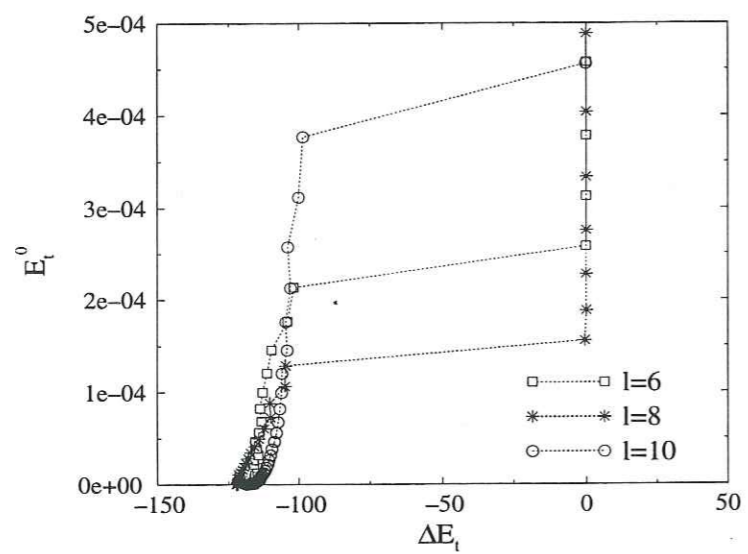


Figure 18: Horizontal elastic energy before an event E_h^0 plotted versus the increment of energy ΔE_t in the case of the simple version of the model for various stiffness (a) and various friction velocity (b).

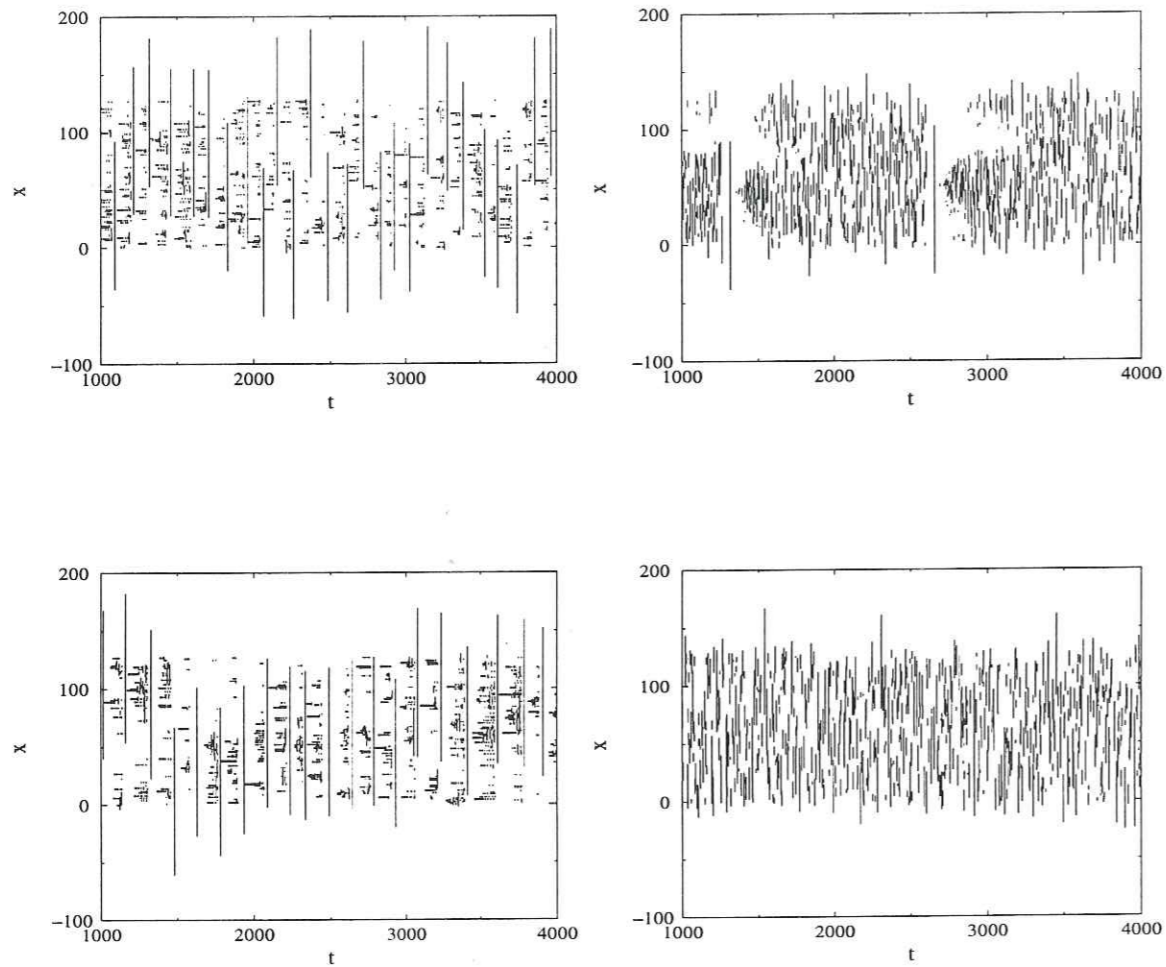


Figure 19: Quake maps for $\ell = 10$, $N = 128$ and various values of ν_f : (a) $\nu_f = 1/10$, (b) $\nu_f = 1/6$, (c) $\nu_f = 1/4$ and (d) $\nu_f = 1/3$

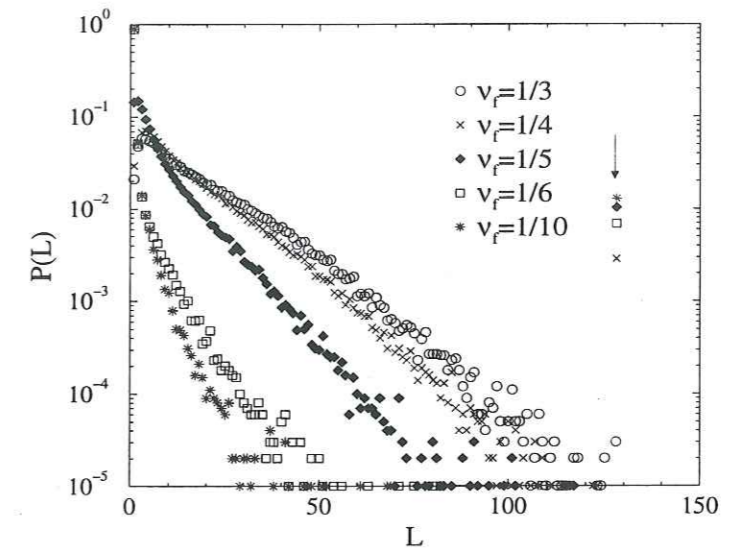


Figure 20: Event size distributions for $\ell = 10$, $N = 128$ and $\nu_f = 1/10; 1/6; 1/5; 1/4; 1/3$.

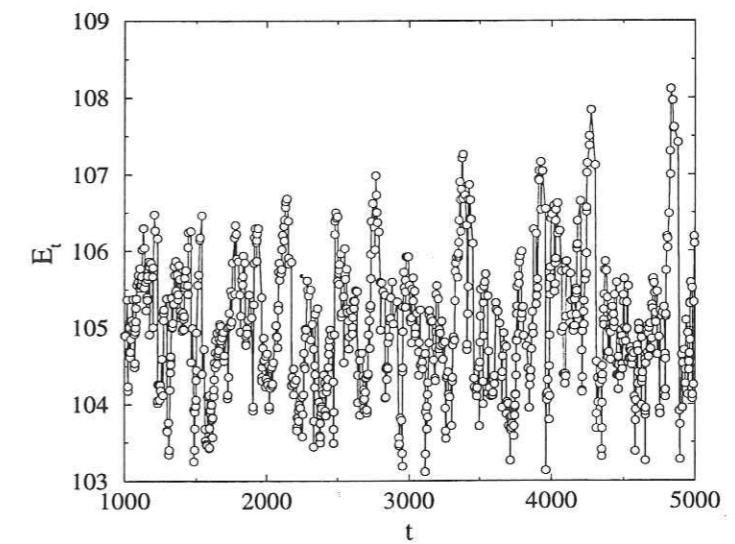


Figure 21: Evolution of the total elastic energy versus time for $\nu_f = 1/3$.

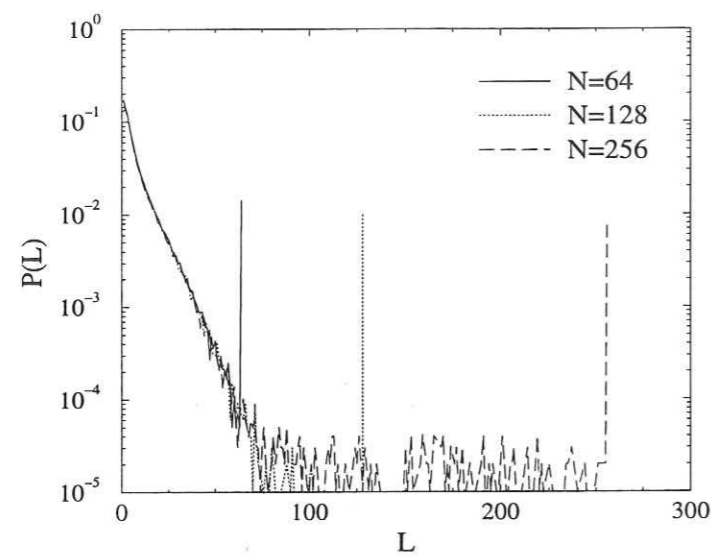


Figure 22: Event size distributions for $\ell = 10$, $N = 64; 128; 256$ and $\nu_f = 1/5$.

Annexe 3

Propagative Macrodislocation Modes in an Earthquake Fault Model

J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux

Publié dans: *Europhysical Letters*
Vol. 21, No. 3, Pages 375-380, 1993

PROPAGATIVE MACRO-DISLOCATION MODES IN AN EARTHQUAKE
FAULT MODEL

Jean SCHMITTBUHL, Jean-Pierre VILOTTE

Département Terre Atmosphère Océan, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, F-75231
Paris Cedex 05, France.

Stéphane ROUX

Laboratoire de Physique et Mécanique de la Matière Hétérogène,
UA CNRS 857, Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de Paris,
10 rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05, France.

ABSTRACT: We investigate a 1D dynamical version of the Burridge-Knopoff model for earthquakes with a velocity weakening friction law. *Such system exhibits two types of solution : chaotic motion and solitary wave propagation.* The latter can be seen as propagative localized macro-dislocations whose shape, size and velocity are found to exhibit very little fluctuations. This property leads to "resonances" in the mean friction force as a function of the control parameter Θ , defined as the product of the driving displacement rate with the size of the system. *The number of solitary waves is proportional to the parameter Θ .* Such solitary wave solutions can be correlated to recent self-healing crack models for dynamics earthquake rupture.

The recent concept of self-organized criticality introduced by Bak *et al.*,^[1] has stimulated a renewal of interest for statistical aspects of the dynamics of earthquake faults models.^[2-5] In particular a deterministic homogeneous 1D dynamical version of the Burridge - Knopoff model^[6] was intensively studied by Carlson and Langer.^[7-10] Similar quasi-static versions were also investigated.^[11,12] Many of those models were found to be chaotic for a large range of physical parameters. The statistical distribution of the magnitudes of the generated slipping events was consistent with the Gutenberg-Richter law^[13] at least for localized events.

A thorough analysis of the triggering mechanisms was proposed by Carlson and Langer^[8-10] who obtained analytical results and stability conditions in the continuous limit at the onset of slip instability. The rupture propagation was more recently addressed by Langer and Tang^[14] who raised questions regarding the existence and the stability of localized propagative solutions.

The purpose of the present letter is to investigate the dependence of the solution upon the system size and the driving displacement rate, more specifically the transition from chaotic to solitary wave type of solutions.

The dynamical system (Figure 1) consists of N identical blocks of mass m connected to each others through hookean springs of stiffness k_c . The system is driven by an upper line moving at constant velocity \hat{v} with respect to the lower surface supporting the masses (considered at rest). Each mass is linked to the upper line by another hookean spring of stiffness k_p . Finally, the masses are coupled to the supporting surface by a friction force which embodies the only non linear component of this model. The friction force is the idealized stick-slip law proposed by Carlson and Langer,^[10] which allows any force in the range $-F_0 \leq F \leq F_0$ for a block at rest, and imposes a force, $F(\dot{Q})$, decreasing with the velocity for moving blocks. If Q_n is the position of the n th block, the equation

of motion reads:

$$m\ddot{Q}_n = k_c(Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1}) - k_p(Q_n - \hat{v}t) - F(\dot{Q}_n) \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} -F_0 < F(\dot{Q}) < F_0 & \text{ for } \dot{Q} = 0 \\ F(\dot{Q}) = \frac{\text{sgn}(\dot{Q})F_0}{(1+|\dot{Q}/v_1|)} & \text{ for } \dot{Q} \neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

where v_1 is a constant which characterizes the velocity dependence of the friction.

Following Carlson and Langer, we can turn the system dimensionless through the redefinition of the displacements: $u_n = k_p Q_n / F_0$ and of the time, $\tau = \omega_p t$ (where $\omega_p^2 = k_p / m$):

$$\ddot{u}_n = \ell^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - u_n + \nu\tau - \Psi(2\alpha\dot{u}_n) \quad (3)$$

where the three free parameters of the models are introduced in dimensionless form:

$$\begin{cases} \ell^2 = k_c / k_p \\ \nu = \hat{v} k_p / (\omega_p F_0) \\ 2\alpha = \omega_p F_0 / (k_p v_1) \end{cases} \quad (4)$$

and $\Psi(x) = \text{sgn}(x)(1 + |x|)^{-1}$ for $x \neq 0$, and $-1 \leq \Psi(0) \leq 1$. Physically, α is the ratio of the characteristic slipping speed to the rate of velocity weakening of the friction, and ν the ratio of the loading rate to the characteristic slipping speed. The parameter ℓ can be interpreted as the velocity of sound.

All the results we present were obtained for fixed physical parameters ($\alpha = 2.5$; $\ell = 10$). The influence of the control parameter Θ , defined as the product of the system size N (number of sliders) and the driving displacement rate ν , has been systematically investigated either for fixed displacement rates ν by varying the system size; or for fixed system sizes N by varying the displacement rate. More systematic studies of the influence of other physical parameters such as α or ℓ are currently being investigated. Unless otherwise stated, the boundary conditions are periodic. The positions of the blocks are initialized by imposing a small spatial perturbation (white noise of maximum amplitude 0.001).

The time integration of the discrete system was done with a Runge-Kutta scheme, experiments with different relative error levels and other time integration scheme were performed to ensure that the effects described here are not a consequence of the time discretization.

For small values of Θ , one can observe the chaotic-type of solutions fully described and analyzed in Carlson and Langer.^[8-10] These solutions exhibit a wide range of events from small periodic localized to large delocalized ones. In Figure 2, the solution for $\Theta = 4$ within a given time window shows a delocalized event triggered by small events in the interior of the system. Small localized propagative pulses can also be observed, preceding — or emerging — from the delocalized event. They are quickly decaying away.

For larger values of Θ , the solutions obtained are in sharp contrast with the previous ones. The dynamical behaviour of the system for $\Theta = 8$ is pictured in Figure 3. The moving sliders are clearly localized in space and form a wave propagating at a constant velocity. It can be characterized as a solitary wave. There is a discontinuity of position for blocks before and after the passage of this wave. Thus this mode can also be interpreted in terms of a macro-dislocation. A detailed study shows that the velocity and wave-length of the solitary wave remain quite constant in time, and depend only on ℓ and α .

A more systematic numerical study of this effect was carried out either by increasing the size of the system for fixed displacement rates, or by increasing the driving displacement rate for fixed sizes of the system. All the numerical results lead to consistent evolutions in the physical space $N-\nu$, which can be interpreted in term of a single parameter (for fixed α and ℓ) $\Theta = N \cdot \nu$.

We report here results obtained for a fixed displacement rate $\nu = 0.1$ and an increasing size of the system from $N = 5$ to 250 blocks with a 5 blocks step size, and for a fixed system size of $N = 80$ blocks and an increasing driving displacement rate from

$\nu = 0.005$ to 0.2. Each numerical simulation lasts 1000 time units after the system has reached a statistical steady state. For each system size, spatial and time average of the friction force was computed, and 10 independent random perturbations of the initial position of the blocks were done. Both types of simulation lead to the same behavior captured by a single parameter $\Theta = \nu \cdot N$. In figure 3, the average (over time, space and realizations) friction force per unit length, \bar{F} is plotted versus Θ . The curve exhibits a clear succession of equally spaced local minima which can be shown to correspond to different states of the dynamical system. For Θ lower than 4, the system is characterized by chaotic-type of solutions while at $\Theta = 8$ (the first local minimum of the curve) a one solitary wave solution can be observed. It is amusing to note that the total force, \bar{F} , exerted on the upper line so as to move the system with a velocity ν appears to be smaller for $\Theta = 8$ than for $\Theta = 4$. Thus the existence of a macro-dislocation mode appears to be a very efficient way of reducing the average friction force. The second local minimum, at $\Theta = 16$, corresponds to a two solitary waves solution. We checked that for values of Θ of 24 and 32, respectively three and four solitary waves are present. For each of these local minima, after an early transient stage, the solutions are numerically very stable.

These results can be generalized, and a systematic exploration of the physical space $N-\nu$,^[15] shows that the local minima of \bar{F} are localized along hyperbolic curves.

In all experiments, the velocity and wave-length of the solitary waves remain constant for all the experiments studied so far. Obviously a selection mechanism is at play. A detailed analytical study^[15] reveals that this selection mechanism depends only on the dimensionless parameters α and ℓ . The observed wave length is of the order of 8 blocks (numerically well resolved), while the velocity is of the order of the sound velocity ℓ , here 10 blocks per unit time. The shape and speed of the solitary waves are solely determined by the parameters ℓ and α (i.e. independent of

the imposed mean velocity) because of the local nature of the wave. In addition, the mean velocity in time if each slider has to be equal to the imposed driving displacement rate. Indeed, the mean velocity of the blocks v is proportional to the local discontinuity of position across the wave Δu , to the velocity of propagation of the waves c ($\simeq \ell$) and to the dislocation density N_s/N , where N_s is the number of dislocations.

The total energy of the dynamical system arises from the potential energy in the leaf springs, the stored potential energy in between the blocks, the kinetic energy of the blocks in relative motion with the underlying surface, and the dissipated energy during that motion due to the frictional contact. For a fixed driving displacement rate, the net total energy increases with the size of the system. Chaotic solutions lead to events with highly variable time and spatial correlations, and do not provide effective dissipation and propagation mechanisms. This is attested by the initial large value of the friction force (Figure 4). With increasing sizes of the system, a critical value of the potential energy is reached allowing a more efficient mechanism of dissipation and propagation to be activated. A one solitary wave solution is initiated reducing the potential energy in the chain and leading to the first local minimum. It is important to note at this point, that the energy dissipated per unit time by one solitary wave is a constant, which is bounded from below by a non zero value. When the system is small, and/or when the driving velocity v is small, the energy fed to the system is too small to allow one solitary wave to survive. Therefore, if one is generated at some time, it will die later because it dissipates too much energy. This regime is the one which give rise to a chaotic behaviour.

The structure (velocity and wave length) of the solitary wave remaining constant, the stored energy increases again with the size of the system until a second solitary wave can be activated. Such an energy activated mechanism can be seen in Figure 4. Until the energy required to initiate a second stable

solitary wave can be reached, unstable pulses are observed emanating from the first solitary wave (which remains very stable) leading to several interactions. When initiated, a second stable solitary wave propagates with the same velocity and wave length than the first one. For periodic boundary conditions no interactions between those two waves can be observed, while for free boundary conditions due to reflections collisions are observed from which waves emerge with an unperturbed shape.

The transition from chaotic to solitary wave solution was observed over a certain range of Θ . It is characterized by increasing interactions between delocalized events, as in Figure 2, and unstable propagative pulses, up to the point where energy can be propagated in localized stable "packets". During this transition unstable pulses of different wave lengths are generated leading to interactions and collisions.

Even though the solitary wave solution appears to be stable in the computations, we just started a detailed numerical analysis of stability by studying how one macro-dislocation wave was affected by some randomness in the position of the blocks it will encounter. For all cases studied so far, the wave was robust enough to survive in this disordered medium.

In conclusion, depending on the physical parameter Θ this dynamical system exhibits two different types of solution : chaotic solutions for low values of Θ and solitary wave solutions for large values of Θ . *The chaotic solution can therefore be regarded as a finite size effect.* The simple scaling law: $N_s \propto \Theta$ tells us that for realistic geophysical values of the driving velocity v (of the order of 10^{-8}), solitary wave solutions will be the characteristic solution for systems of size N larger than $8 \cdot 10^7$. *Eventhough this discrete model does not have a clear continuous form, due to the lack of an intrinsic length, solitary wave solution can be regarded as the characteristic solution of the system in the thermodynamical limit ($N \rightarrow \infty$).*

Solitary wave solutions are activated

above a certain energy level and provides an efficient mechanism to minimize the energy which has to be furnished to the system for keeping a constant rate of loading. For such solutions, the frictional dissipation is concentrated in the opening and healing fronts of the dislocation, while inside the dissipation is negligible. The amount of energy dissipated by one dislocation is controlled by the dimensionless parameter α . Depending on this amount of dissipation, such dislocation may or may not exist in a given system (ℓ, Θ).

Eventhough this system is still rather simplistic, we believe that it captures some of the basic physical mechanisms of the complex dynamical system that is an earthquake fault.

It is interesting to note that, although direct correspondence with real faults should be considered with caution, such slip pulse mechanism has been suggested in the past by Brune^[16] and more recently by Heaton^[17] and Ellsworth.^[18] Slip durations for a given point on a fault, deduced from many rupture models (derived from seismic wave form data), have been found to be significantly shorter than the time required to notify points on the faults that the rupture has stopped.^[17-18] A linear increase of the slip with the rupture length has also been suggested by Scholz.^[19] Another correspondance may be worth being pointed out: considering the friction of rubber against glass, it has been first observed by Schallamach^[20] that above a certain speed, the motion was no longer continuous under the area of contact, but rather proceeded through the generation of propagative macro-dislocations. Those dislocation modes are caused by very different local mechanisms from our case: large deformation, visco-elastic behavior of the rubber, and adhesion of rubber with glass seems to be determining elements in the development of this mode.^[21] Nevertheless, a qualitative parallel can be made, and would be worth being pushed further.

The physical basis of a slip weakening friction law is still an open question. This velocity dependence has been considered as re-

sulting from dynamical variations of the normal stress,^[22] or from a cooperative effect of the rate cohesion-decohesion occurring at all microscopic contact points between the sliding surfaces.^[23]

ACKNOWLEDGMENTS: *This work has been partly supported by INSU DBT-instabilités and the GRECO-Géomatériaux. Many thanks to R. Madariaga, A. Cochard, P. Bernard and M. Barquins for numerous and extremely useful discussions.*

References

- [1] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381, (1987)
- [2] P. Bak and C. Tang, J. Geophys. Res. **94**, 15635, (1989)
- [3] J. Lomnitz-Adler and P. Lemus-Diaz, Geophys. J. Int. **99**, 183, (1990)
- [4] Z. Olami, H. J. Feder, and K. Christensen, Phys. Rev. Lett. **68**, 1244, (1992)
- [5] S. Brown, C. H. Scholz, and L. R. Sykes, Geophys. Res. Lett. **18**, 215, (1991)
- [6] R. Burridge and L. Knopoff, Bull. Seismol. Soc. Am. **57**, 341, (1967)
- [7] B. E. Shaw, J. M. Carlson, and J. S. Langer, J. Geophys. Res. **97**, 479, (1992)
- [8] J. M. Carlson, J. S. Langer, B. E. Shaw, and C. Tang, Phys. Rev. A **44**, 884, (1991)
- [9] J. M. Carlson and J. S. Langer, Phys. Rev. A **40**, 6470, (1989)
- [10] J. M. Carlson and J. S. Langer, Phys. Rev. Lett. **62**, 2632, (1989)
- [11] H. Nakanishi, Phys. Rev. A **41**, 7086, (1990)
- [12] H. Nakanishi, Phys. Rev. A **43**, 6613, (1991)

- [13] B. Gutenberg and C. F. Richter, Ann. Geophys. **9**, 1, (1956)
- [14] J. S. Langer and C. Tang, Phys. Rev. Lett. **67**, 1043, (1991)
- [15] J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, and S. Roux (in preparation)
- [16] J. N. Brune, J. Geophys. Res. **75**, 4997, (1970)
- [17] T. H. Heaton, Phys. Earth Planet. Int. **64**, 1, (1990)
- [18] W. L. Ellsworth, E.O.S. **73**(4), 44, (1992)
- [19] C. H. Scholz, Bull. Seismol. Soc. Am. **72**, 1, (1982)
- [20] A. Schallamach, Wear **17**, 301, (1971)
- [21] M. Barquins, Kautschuk + Gummi . Kunststoffe **40**, 419, (1987)
- [22] J. T. Oden, and J. A. C. Martins, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. **52**, 527, (1985)
- [23] J. B. Rundle, and S. R. Brown, preprint (1991)

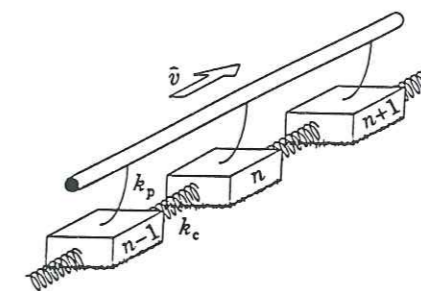


Figure 1: The geometry of the spring-block model. The system is composed of N identical blocks of mass m . The chain spring constant is k_c . Each block is connected to a rigid rod by a leaf spring of strength k_p . The rough underlying surface is fixed whereas the rigid rod is moving at a constant speed v . Interactions between each block and the rough surface is modelled by a velocity weakening friction force F .

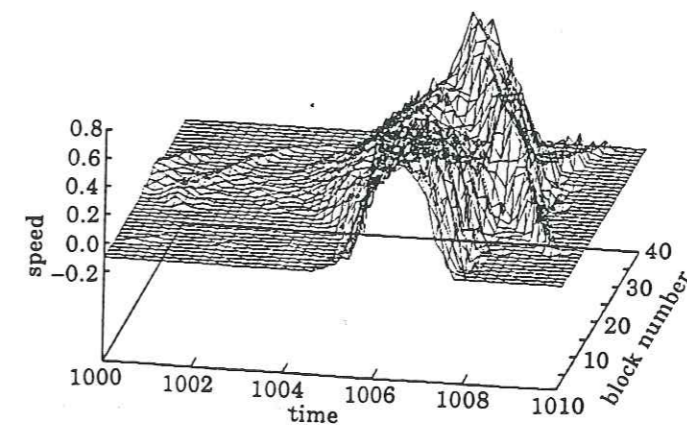


Figure 2: Chaotic solution ($\Theta = 4$). The system is composed of 40 blocks and $\nu = 0.1$. The physical parameters are $\alpha = 2.5$, $\ell = 10$. The imposed boundary conditions are periodic. A strong

delocalized event is observed triggered by smaller events inside the system. Unstable localized propagative pulses of small amplitude are decaying quickly. Interactions between the discrete event and unstable propagative pulses can be observed.

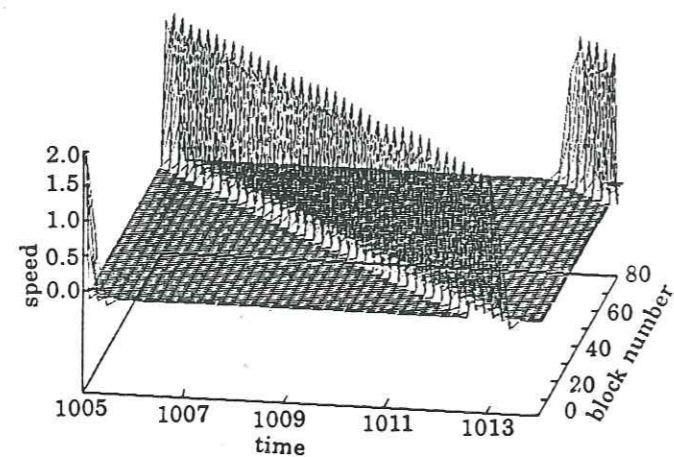


Figure 3: Solitary wave solution ($\Theta = 8$). The system is composed of 80 blocks and $\nu = 0.1$. The physical parameters and the boundary conditions are the same as in Figure 2. One solitary wave solution is stable with constant velocity (of 10 blocks per unit time) and wave length (8 blocks). Beside this wave solution no other event has been observed.

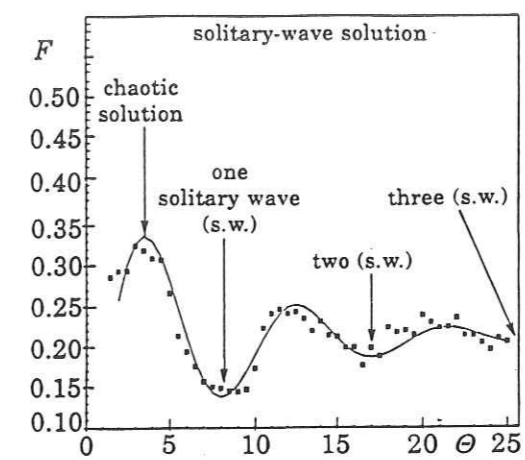


Figure 4: Mean friction force. $\Theta = \nu \cdot N$, N is the size of the system (number of blocks), ν the driving displacement rate. F is the time and space averaged friction. Each point of the curve is an average over 10 independent random spatial initializations of the position of the blocks. The mean friction force exhibits "resonances" associated with the emergence of solitary wave solutions.

Annexe 4

Analytic characterization of propagative solutions in a discrete frottement model
J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux

Soumis au: *Physical Review E*

ANALYTIC CHARACTERIZATION
OF PROPAGATIVE SOLUTIONS
IN A DISCRETE FRICTION MODEL

Jean SCHMITTBUHL, Jean-Pierre VILOTTE
Département T.A.O., Laboratoire de Géologie, URA 1316,
École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France.

Stéphane ROUX
Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes,
École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de Paris,
10, rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05, France.

ABSTRACT: An analytic characterization of solitary wave solutions of the Burridge-Knopoff model is proposed in the case of a linear velocity-dependent friction law including the classical Coulomb's law. Due to the non-smoothness of the friction law, the key point is the formulation of proper boundary conditions. The dependence of the analytical solutions on the model parameters is explicitly given. Existence and properties of these solutions are shown to be controlled by a velocity weakening friction law. Supersonic solutions are shown to be the only possible ones. An extension to non-linear velocity weakening friction law is discussed with respect to a critical 'weakening' which emerges from the previously analysed linear case.

INTRODUCTION

The discrete Burridge-Knopoff (BK) model 1, introduced originally in 1967 within the context of dynamic frictional instability along a pre-existing fault plane, has been recently revitalized by Carlson and Langer 2, 3. The dynamics of this model has been the subject of considerable interest, especially in physics 4, 5, 6, 7, 8. Attention has been generally focussed on the so-called chaotic behavior of discrete arrays of massive spring-connected rigid blocks subject to a velocity-weakening friction. Such a behavior — which emerges for a certain range of the model parameters — reveals some similarities with the Gutenberg-Richter power law distribution of earthquake magnitudes. Recent studies 7, 8, 9 have shown the existence of another regime of solutions of solitary wave type, and have numerically studied the transition between these two regimes in terms of the model parameters. Schmittbuhl *et al* 7 focussed on the role of the system size and the loading speed. The influence of the friction velocity has been described numerically by Vasconcelos *et al* 8 and by Anathakrishna and Ramachandran 9 who also have considered the elastic parameter. If the physical relevance of the spring-connected rigid blocks models for earthquake faulting is a matter of strong controversy, the BK models have potential relevance for dynamic frictional sliding, for which the loading and propagative characteristic time scales are of the same order. Within this context, the transition between the chaotic and the solitary wave regimes can be identified as a transition between an erratic stick-slip and a temporally continuous frictional response on a macroscopic scale 10.

Despite the apparent simplicity of the BK models, especially when using a linear velocity dependent friction, their dynamics has revealed a rich complexity resulting from the non-smooth friction law. In fact, analytical propagative solutions are straightforward as soon as the proper boundary conditions have been identified, and solitary wave solutions can be found.

In this paper, an analytic characterization of solitary wave solutions and their conditions of existence are proposed. This leads to define a continuous expansion of the Burridge-Knopoff model within the special context of propagative solutions. Special attention has been paid to the control of those solutions by the explicit form of the velocity dependence of the friction law.

The paper is organized as follow: The discrete BK model and its dimensional analysis are presented in Section II. In section III, the construction of a continuous form of the equations is proposed within the framework of propagative equations and periodic boundaries. In section IV, the assumption of a linear friction law gives a complete analytical description of the propagative solutions. Extension to non linear friction law is proposed in section V.

DISCRETE MODEL

Physical description

The discrete one-dimensional BK model consists of a chain of spring-connected massive blocks lying on a support. Each block is connected to its immediate neighbors by horizontal springs, and is loaded through a vertical spring, attached to a rigid rod which is pulled at constant speed by the motion of the support. Frictional contacts take place between the blocks and the support. Figure 1 illustrates this set-up for three blocks.

The dynamics of a the j -th block of the chain is the result of two distinct phases. During a "static" phase, the block has no relative motion with respect to the support and is statically loaded until the reaction force reaches a given threshold (i.e. the static friction threshold). In that phase, the frictional force is exactly balanced by the reaction force and therefore can be defined as a linear function of the position of the $(j-1)$ -th, j -th and $(j+1)$ -th blocks. During the "dynamic" phase, reached when the reaction force has

overshot the friction threshold, the block j acquires a relative speed with respect to the moving support which leads initially to a motion in the direction opposite to that of the support. The dynamic phase is dissipative, and is controlled by the assumed functional form of the dynamic friction. As a result of this dissipation, the relative velocity of the block finally decreases until it stops back to the "static" phase. Physical knowledge of dynamic friction at very high speed is very limited. A velocity dependent friction law is often assumed in the BK models, even though it has been the subject of some controversy.

A reference frame X is attached to the rigid rod, and X^j the position of the block j . The origin of the vertical spring j is noted X_0^j , and the displacement of the block $U^j = X^j - X_0^j$. The positive direction is defined according to the loading speed V . Loading in this reference frame results from the movement of the plane under the blocks.

Forces acting on block j , at time T , are of two types. First, an elastic force, E^j , including elastic horizontal interactions with left and right neighbors, $K_h^{j,j-1}(U^j - U^{j-1})$ and $K_h^{j,j+1}(U^{j+1} - U^j)$ respectively, and the elastic interaction between the block and the rigid rod, $-K_v^j U^j$. Secondly, a friction force, F_f^j , which describes the contact force exerted on the base of the block. Let us note that the latter is defined as a contact force because of the discrete nature of the model and not as a contact stress.

The Newton's law on a block j can be easily written if M^j is the mass of the j -th block:

$$M^j \ddot{U}^j = E^j + F_f^j \quad (1)$$

with

$$E^j = -K_v^j U^j + K_h^{j,j+1}(U^{j+1} - U^j) - K_h^{j,j-1}(U^j - U^{j-1})$$

This differs from the massive wave equation due to the specific vertical coupling of the BK model. Equation (1) is a Klein-Gordon type of equation. The friction force includes two distinct parts: a static friction F_s when the relative speed between the support and

the block is zero, and a dynamic friction F_d for non zero relative speed.

During the static phase, the friction of block j is simply the opposite of the reaction force, i.e. $-E^j$, and restricted to the interval $[-F_{fc}^j, F_{fc}^j]$

$$F_s^j = -E^j \quad (2)$$

The static friction is therefore defined as a linear function of the block positions, and is oriented in the opposite direction of support motion.

The dynamic friction F_d is assumed to be function of the relative speed of the block, and acts against the relative motion of the block. In the simple cases we will consider thereafter, it can be parameterized by the threshold F_{fc}^j , and a characteristic friction velocity V_r . For a velocity softening friction law, the characteristic velocity is chosen conventionally to be such that the dynamic friction has been reduced by a factor of two compared to the static limit. A velocity hardening (or viscous) friction can simply be cast into the same form with a negative V_r such that $|V_r|$ is the velocity for which the friction is equal to 3/2 times the threshold static friction.

$$F_d^j = -\text{sign}(\dot{U}^j - V) \cdot F_{fc}^j \cdot f_d(|\dot{U}^j - V|/V_r) \quad (3)$$

where f_d is a dimension-less velocity dependent function. The dynamic friction assumed here does not include slip dependence or any intrinsic length 11, 12.

Introducing the delta and Heaviside distributions, δ and Θ respectively, the expression of the friction force can be written as:

$$F_f^j = F_d^j - \delta(\dot{U}^j - V) \Theta(F_{fc}^j - |E^j|) [E^j + F_d^j] \quad (4)$$

Figure 2 shows the complete evolution of the friction force F_f^i for a block i . It is drawn in the space: $(E^i; \dot{U}^i - V)$. The static part corresponds to a linear increase of the friction up to the dynamic threshold F_{fc} . At that stage the block i acquires a relative velocity, and the friction follows the dynamic loop. After a while, the block stops, and the friction decreases instantaneously to the value of the actual reaction force $-E^i$.

A complete spatial homogeneity of the physical parameters along the chain will be assumed thereafter.

$$\begin{cases} M^j = M \\ K_v^j = K_v \\ K_h^{j,j-1} = K_h^{j,j+1} = K_h \\ F_{fc}^j = F_{fc} \end{cases} \quad (5)$$

Only the difference between vertical and horizontal springs is maintained.

Dimension-less equations

In order to reduce the number of physical parameters in the problem, we introduce the characteristic time (i.e. the vertical pulsation), $T^* = \omega_v^{-1} = \sqrt{M/K_v}$, the characteristic length $U^* = F_{fc}/K_v$ which is defined as the maximum displacement of a single block just connected to the vertical spring, and therefore a characteristic velocity $V^* = U^*/T^*$. Dimension-less time and displacement are: $t = T/T^*$, and $w^j = U^j/U^*$. Friction is assumed to be continuous at the threshold which is used to normalize the friction force, $f_f^j = F_{fc}^j/F_{fc}$.

The system can be fully described by three dimension-less parameters: a dimension-less loading speed $\nu = V_s/V^*$, a dimension-less friction velocity $\gamma = V_r/V^*$, and an elastic dimension-less parameter $l = \sqrt{K_h/K_v}$ which can be interpreted as the dimension-less sound speed of the model.

The dimension-less Newton's law is then written in the following form:

$$\ddot{u}^j = -u^j + l^2(u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1}) + f_f^j(u^{j-1}, u^j, u^{j+1}, \dot{u}^j - \nu, \gamma) \quad (6)$$

This equation can also be decomposed in two simple equations:

$$\begin{cases} \ddot{u}^j = 0 & \text{(static)} \\ \ddot{u}^j = -u^j + l^2(u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1}) - \text{sign}(\dot{u}^j - \nu) f_d\left(\frac{|\dot{u}^j - \nu|}{\gamma}\right) & \text{(dynamic)} \end{cases} \quad (7)$$

It is worth emphasizing at present the expected regularity of the solution. The position and velocity of any block are continuous functions in time. However, the acceleration exhibits finite discontinuities bounded by $[\ddot{u}] \leq 2$. The most crucial one occurs during the arrest phase of a block when \dot{u} has decreased to zero.

These possible discontinuities of the acceleration are fundamental. Indeed, it is this feature, triggered by the non-smoothness of the friction law, which makes possible the occurrence of non trivial localized propagative wave solutions of the model. We will first concentrate below on simple functional forms of the friction law such that the problem is reduced to solving piecewise linear differential equations with matching boundary conditions. Thus the "non-linearity" of the problem is concentrated in discrete points where the acceleration is discontinuous either at the transition from static to dynamic friction or between two dynamic friction regimes with slip velocities of opposite signs.

Let us also note that we neglect other sources of non-linearity, such as large deformations (the difference of position between consecutive blocks will be assumed to be small compared with the block separation), or an-harmonic character of the elastic interaction between blocks (such as hard sphere potential,...).

Note on a spatial continuous formulation

The BK model is inherently discrete in space and continuous in time. One can however study the continuous limit in space of this model. In which case a discretization size A ($a = A/U^*$ in dimensionless form) is now introduced as the distance between the origin of two consecutive vertical springs which is now $X_j = jA$, j being the order number of the block.

The spatial relation between u^{j+1} , u^j and u^{j-1} can be obtained if the displacements can be formulated as:

$$\begin{cases} u^j(t) = u(x^j, t) \\ u^{j+1} = u(x^{j+1}, t) = u(x^j + a, t) \\ u^{j-1} = u(x^{j-1}, t) = u(x^j - a, t) \end{cases} \quad (8)$$

In order to obtain the continuous model equation, we expand u in Taylor's series:

$$\begin{cases} u^{j+1} = u(x^j, t) + a\partial_x u + (a^2/2)\partial_{xx}^2 u + \mathcal{O}(3) \\ u^{j-1} = u(x^j, t) - a\partial_x u + (a^2/2)\partial_{xx}^2 u + \mathcal{O}(3) \end{cases} \quad (9)$$

The elastic term becomes:

$$l^2(u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1}) = (la)^2 \partial_{xx}^2 u + \mathcal{O}(4) \quad (10)$$

The spatial continuous form of the Newton's law is:

$$\ddot{u}(x, t) = -u(x, t) + \xi^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f_f(u(x, t), \dot{u}(x, t) - \nu, \gamma) \quad (11)$$

where ξ is a so-called sound velocity:

$$\xi = l \frac{A}{U^*} \quad (12)$$

One should however be extremely cautious with equation (11). Indeed, we already mentioned that the acceleration of each block may suffer from finite discontinuities which are essential to the physics of the problem. For propagating solutions, these discontinuities will induce jumps in the second spatial derivative of u , which are only defined in terms of measure. Those discontinuities constitute the only subtle point of this analysis, and dealing with them in a mathematically satisfactory way is unavoidable. Therefore, the spatial continuous form, can not be simply obtained through a classical Taylor expansion as usually done (except if those discontinuities are known *a priori*), and reveals to be mathematically tricky due to those spatial discontinuities. Since a spatial continuous formulation is not required for an analytical characterization of propagative solutions, we will leave this problem aside. The same remark applies also to other developments, in particular, for linear stability analysis which have been proposed in the literature using a linear perturbation approach. The presence of discontinuities in the acceleration renders this direct technique unreliable, appropriate extensions should be developed so as to be consistent with the governing dynamics.

We also note *en passant* that the possible discontinuities of the acceleration have to be considered in the way the problem should be addressed numerically. A suitable framework for dealing with such non smooth problems can be found in Ref. 13.

PROPAGATIVE SOLUTIONS

Motivated by earlier numerical investigations of this model, where the sliding self-organized into propagative discrete "macro-dislocations" for certain choices of the model parameters, we look for particular solutions of the model which are propagative at constant velocity. Thus u^{j+1} and u^j are related by

$$u^{j+1}(t) = u^j(t + t') \quad (13)$$

where t' is the dimensionless delay between nodes $j+1$ and j . No continuous function in space is required here. In this case, a propagation speed V_p can be defined as the inter-block distance A divided by the delay between solutions of two consecutive blocks T' . The equivalent dimensionless speed is:

$$\beta = V_p \frac{T^*}{U^*} = \frac{a}{t'} \quad (14)$$

The delay t' can thus be defined as $t' = a/\beta$ and may be small for a sufficiently large propagation speed. In this limit, a simple expansion provides:

$$\begin{cases} u^{j+1} = u^j(t) + (a/\beta)\dot{u}^j + (a^2/2\beta^2)\ddot{u}^j + \mathcal{O}(3) \\ u^{j-1} = u^j(t) - (a/\beta)\dot{u}^j + (a^2/2\beta^2)\ddot{u}^j + \mathcal{O}(3) \end{cases} \quad (15)$$

where the acceleration has to be understood as a measure. Therefore, this equation is valid only piecewise between the acceleration discontinuities which are well-defined in a time based formulation. Newton's law takes the simple local form:

$$\frac{(\beta^2 - \xi^2)}{\beta^2} \ddot{u}^j(t) = -u^j(t) + f_f(\dot{u}^j(t) - \nu, \gamma) \quad (16)$$

with $\xi = la$.

propagative frame

Let us introduce a propagative frame: $S = V_p T - X_0$ where V_p is the propagative speed and X_0 a space origin. The dimensionless coordinate is: $s = \beta t - x_0$ where β is the dimensionless propagation speed. Figure 3 illustrates the behavior of the position and the speed of the blocks in the discrete model.

The Newton's law becomes:

$$(\beta^2 - \xi^2)u'' + u - f_f(u, \beta u' - \nu, \gamma) = 0 \quad (17)$$

where

$$f_f(u, u') = \delta(u' - \nu/\beta) f_s(u) + (1 - \delta(u' - \nu/\beta)) f_d(\beta u' - \nu, \gamma)$$

with

$$f_s = \begin{cases} u & \text{if } |u| < 1 \\ \text{sign}(u) & \text{if } |u| \geq 1 \end{cases} \quad (18)$$

The Newton's law can be split in two parts:

for the static phase:

$$u'' = 0 \quad (19)$$

for the dynamic phase:

$$(\beta^2 - \xi^2)u'' + \text{sign}(u' - \nu/\beta) f_d\left(\frac{|u' - \nu/\beta|}{\gamma}\right) + u = 0 \quad (20)$$

Boundary conditions

The boundary conditions are supposed to be periodic with a period s_p , as illustrated on figure 3:

$$u(0) = u(s_p) \quad u'(0) = u'(s_p) \quad (21)$$

The period s_p consists of two distinct parts: a static loading part with the speed $\beta u' = \nu$, and a dynamic unloading part which extends over a distance λ . At the limit between static and dynamic phases, the displacement is $u(s_p - \lambda) = 1$. This leads to:

$$s_p = \frac{\beta}{\nu}(1 - u_c) + \lambda \quad (22)$$

with u_c equals $u(0)$. Introducing $y = s - (s_p - \lambda)$, the boundary conditions for the dynamic part are:

$$u(y=0) = 1 \quad u'(y=0) = \nu/\beta \quad (23)$$

$$u(y=\lambda) = u_c \quad u'(y=\lambda) = \nu/\beta \quad (24)$$

Static solution

The displacement in the static phase is straightforward, when boundary conditions are defined.

$$\begin{cases} u(s) = \nu s/\beta + u_c \\ u'(s) = \nu/\beta \end{cases} \quad (25)$$

It is worth noting that this static phase is evidently independent of the precise form of the velocity dependence of the friction law.

LINEAR VELOCITY DEPENDENT FRICTION LAW

The dynamic friction is assumed to be a linear function of the relative velocity.

$$f_d(u', \gamma) = -\text{sign}(u') \left(1 - \frac{|u'|}{2\gamma}\right) \quad (26)$$

Figure 4 illustrates the friction behavior for positive and negative γ . The dynamic part is described by:

$$(\beta^2 - \xi^2)u'' + \text{sign}(u' - \nu/\beta) \left(1 - \frac{|\beta u' - \nu|}{2\gamma}\right) + u = 0 \quad (27)$$

Once the direction of the relative speed is known, the problem is linear and quite straightforward. In the following this direction will be assumed, and checked *a posteriori*.

First, the limit case $\gamma \rightarrow \infty$ (constant friction) will be considered as a reference solution. This elementary solution enlighten the constraints imposed by the matching conditions. Next, the case of a finite γ is considered.

Coulomb's friction law

When $\gamma \rightarrow \infty$, the friction law is the classical Coulomb's friction. Let consider two cases, according to the direction of the relative speed:

case 1. : $u' \leq \nu/\beta$ during the motion Actually that case is the only physical one when the support velocity is counted positively. The dynamic phase, after the loading phase, is governed by:

$$(\beta^2 - \xi^2)u'' + u = 1 \quad (28)$$

The discriminant of the characteristic equation is:

$$\Delta = 4(\xi^2 - \beta^2) \quad (29)$$

• *supersonic propagation speed* ($\beta > \xi$): In that case, a solution satisfying the prescribed direction of motion exists and is fully characterized using boundary conditions (23).

$$\begin{cases} u(y) = \frac{\nu}{\beta} \sqrt{\beta^2 - \xi^2} \sin\left(\frac{y}{\sqrt{\beta^2 - \xi^2}}\right) + 1 \\ u'(y) = \frac{\nu}{\beta} \cos\left(\frac{y}{\sqrt{\beta^2 - \xi^2}}\right) \end{cases} \quad (30)$$

On figures 5 and 6, the corresponding displacement and velocity are plotted respectively. Boundary conditions for $y = \lambda$ (24) control the characteristic displacement accommodated during the dynamic phase u_c , the extent λ of the dynamic wave and its amplitude Γ in u' :

$$\begin{cases} u_c = 1 \\ \lambda = 2\pi \sqrt{\beta^2 - \xi^2} \\ \Gamma = \frac{2\nu}{\beta} \end{cases} \quad (31)$$

Since u_c equals one, the static phase vanishes. The solution is simply that of a wave propagation, and has been previously described numerically by G. Vasconcelos *et al* 8. No criterion for a selection of the propagation speed emerges. There is an infinite set of admissible solutions parametrized by β .

• *subsonic propagation speed* ($\beta < \xi$): In that case, no solution is compatible with the assumption on the direction of motion.

case 2 : $u' > \nu/\beta$, during the motion The differential equation becomes:

$$(\beta^2 - \xi^2)u'' + u = -1 \quad (32)$$

No supersonic solution is possible. Subsonic solutions may develop, but the boundary conditions for $y = \lambda$ (24) cannot be satisfied.

Friction with linear velocity dependence

We now deal with a finite γ . We only consider here $u' \leq \nu/\beta$, which as noted before is the only physical direction of motion in our problem. Equation (27) becomes:

$$(\beta^2 - \xi^2)u'' - \frac{\beta}{2\gamma}u' + u = 1 - \frac{\nu}{2\gamma} \quad (33)$$

The discriminant of the characteristic equation is:

$$\Delta = 4 \left[\xi^2 - \beta^2 \left(1 - \frac{1}{(4\gamma)^2}\right) \right] \quad (34)$$

We focus on the characteristic friction velocity γ . The sign of the discriminant is controlled by γ , and a critical characteristic velocity γ_c which can be defined as:

$$\gamma_c^2 = \frac{\beta^2}{4(\beta^2 - \xi^2)} \quad (35)$$

When $|\gamma| \geq |\gamma_c|$, the discriminant becomes negative.

Sinusoidal solutions

In this case, we have $\gamma^2 > \gamma_c^2$ ($\Delta < 0$). The solution is supersonic. Solutions of the characteristic equation are: $r = m \pm in$ with

$$m = \frac{\beta}{4\gamma(\beta^2 - \xi^2)} \quad n = \frac{\sqrt{\beta^2 \left(1 - \frac{1}{(4\gamma)^2}\right) - \xi^2}}{\beta^2 - \xi^2} \quad (36)$$

and $m^2 + n^2 = (\beta^2 - \xi^2)^{-1}$.

Boundary conditions for $y = 0$ (23) lead to:

$$\begin{cases} u(y) = \frac{\nu}{\beta} e^{my} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2} \right) \sin(ny) + \frac{2m}{m^2 + n^2} \cos(ny) \right] + 1 - \frac{\nu}{2\gamma} \\ u'(y) = \frac{\nu}{\beta} e^{my} \left[\cos(ny) - \frac{m}{n} \sin(ny) \right] \end{cases} \quad (37)$$

Such a velocity solution includes two characteristic evolutions, which are depicted on figure 7. The case a) is in contradiction with the assumed velocity direction, and does not satisfy the boundary conditions for $y = \lambda$. Case b) provides a solution with a finite wavelength λ . In this case, $u'(y)$ starts to decrease from $u'(0) = \nu/\beta$ to $u'(\pi/n) = -\nu/\beta e^{\pi m/n}$, and then increases to $u'(2\pi/n) = \nu/\beta e^{2\pi m/n}$. In order to satisfy the boundary conditions (24), it is required that :

$$u'(2\pi/n) \geq \frac{\nu}{\beta} \quad (38)$$

which implies that m is positive. If this is not satisfied, the velocity of solution b) can never get back to the support velocity. Thus for negative m (velocity hardening friction), solutions exist but they cannot be propagative and periodic.

For positive m , i.e. $\gamma \in [\gamma_c, \infty]$ — sufficiently large friction speed — the amplitude of the wave velocity is:

$$\Gamma = \frac{\nu}{\beta} \left(1 + e^{\pi m/n}\right) \quad (39)$$

Maximum velocity is obtained for zero acceleration (i.e. $y = \pi/n$). The wavelength λ is given by:

$$u'(\lambda) = \frac{\nu}{\beta} e^{m\lambda} \left[\cos n\lambda - \frac{m}{n} \sin n\lambda \right] \quad (40)$$

This non linear equation can be solved in two limit cases: $\gamma \rightarrow +\infty$ and $\gamma \rightarrow \gamma_c^+$.

* For large friction speed ($\gamma \rightarrow +\infty$), result of the previous section applies (infinite γ):

$$\lambda_{\gamma \rightarrow +\infty} = 2\pi/n \quad (41)$$

In this limit:

$$\begin{cases} m \rightarrow 0 \\ n \rightarrow 1/\sqrt{\xi^2 - \beta^2} \end{cases} \quad (42)$$

A limited expansion of $u'(y)$ around $y \approx 2\pi/n$ leads to:

$$u'(y) \approx \frac{\nu}{\beta} e^{2\pi m/n} \left(1 - \frac{(ny - 2\pi)^2}{2}\right) \quad (43)$$

we find for $u'(\lambda) = \nu/\beta$ and small m that:

$$\lambda \approx \frac{2\pi}{n} - \frac{2(\pi m)^{1/2}}{n^{3/2}} \quad (44)$$

This means physically that the static phase only appears for a finite characteristic velocity γ (or a non zero m). In this case, the solution becomes spatially localized and can be characterized as a solitary wave. The length λ is now the width of this solitary wave. Such a transition fully describes the so-called phase transition proposed by Vasconcelos *et al* 8. The amplitude of the solitary wave velocity is given by:

$$\Gamma \approx \frac{\nu}{\beta} \left(2 + \frac{\pi m}{n}\right) \quad (45)$$

It depends on m , and decreasing the slope of the friction law can increase the amplitude of the solitary wave.

* Close to the critical friction speed ($\gamma \rightarrow \gamma_c^+$),

$$\begin{cases} m \rightarrow \frac{\beta}{4\gamma_c(\beta^2 - \xi^2)} \\ n \rightarrow 0 \end{cases} \quad (46)$$

A limited expansion around $n = 0$, gives:

$$u'(\lambda) \approx \frac{\nu}{\beta} e^{m\lambda} [1 - m\lambda] \quad (47)$$

This leads to:

$$e^{-m\lambda} \approx 1 - m\lambda \quad (48)$$

when $\lambda \ll 1/m$. The amplitude of the speed diverges, and the velocity solution tends to a Dirac distribution.

$$\begin{cases} \lambda \rightarrow 0 \\ \Gamma \rightarrow \infty \end{cases} \quad (49)$$

For $\gamma \in [-\infty, -\gamma_c]$, no admissible propagative solution is found. For $\gamma \in [\gamma_c, +\infty]$, the solution goes from a Dirac distribution when $\gamma \simeq \gamma_c$ to a simple wave solution when $\gamma \rightarrow \infty$. In between, solutions are spatially localized supersonic propagative waves.

Hyperbolic solutions In that case: $\gamma^2 < \gamma_c^2$ ($\Delta > 0$). Solutions of the characteristic equation are $r = m \pm n'$ with :

$$m = \frac{\beta}{4\gamma(\beta^2 - \xi^2)} \quad n' = \frac{\sqrt{\xi^2 - \beta^2} \left(1 - \frac{1}{(4\gamma)^2}\right)}{\beta^2 - \xi^2} \quad (50)$$

We obtain here: $m^2 - n'^2 = (\beta^2 - \xi^2)^{-1}$, and both sub and supersonic solutions are expected. n' and m can be both positive or negative, and the sign of m is no longer controlled by the velocity dependence of the friction law only. This introduces non trivial relations between the sign of the parameters m , n' , γ , and β :

| | $\gamma > 0$ | $\gamma < 0$ |
|---------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $\beta > \xi$ | $m > n' > 0$ ($m^2 > n'^2$) | $m < 0 < n'$ ($m^2 > n'^2$) |
| $\beta < \xi$ | $0 > m > n'$ ($m^2 < n'^2$) | $m > 0 > n'$ ($m^2 < n'^2$) |

Boundary conditions for y equals zero (23) define completely $u(y)$ and $u'(y)$:

$$\begin{cases} u(y) = \frac{\nu}{\beta} e^{my} \left[\frac{1}{n'} \left(\frac{n'^2 - m^2}{n'^2 + m^2} \right) \sinh(n'y) \right. \\ \quad \left. + \frac{2m}{m^2 + n'^2} \cosh(n'y) \right] + 1 - \frac{\nu}{2\gamma} \\ u'(y) = \frac{\nu}{\beta} e^{my} \left[\cosh(n'y) \right. \\ \quad \left. + \frac{m}{n'} \left(\frac{3n'^2 - m^2}{n'^2 + m^2} \right) \sinh(n'y) \right] \end{cases} \quad (52)$$

Figure 8 illustrates the three characteristic types of solution for the velocity. Solution a) is incompatible with the assumption on the direction of motion, and conditions (24) are not fulfilled by solution b). Solution c) is characterized by two properties: first, the acceleration has to be negative for y close to zero:

$$u''(0) < 0 \quad (53)$$

second, the limit of the velocity for large y has to be infinite:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = +\infty \quad (54)$$

Both conditions (53) and (54) are satisfied only for subsonic propagation: $\beta < \xi$ and if the coefficient:

$$C = \frac{m}{n'} \left(\frac{3n'^2 - m^2}{n'^2 + m^2} \right) < 1 \quad (55)$$

is smaller than one. This latter condition is equivalent to:

$$P = (m - n')((1 + \sqrt{2})m - n')((1 - \sqrt{2})m - n') > 0 \quad (56)$$

and implies that:

$$\gamma^2 > \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{8} \right) \frac{\beta^2}{\xi^2 - \beta^2} \quad (57)$$

It is inconsistent with the assumption $\gamma^2 < \gamma_c^2$ ($\Delta > 0$). Consequently, no solutions are admissible for the characteristic velocity $\gamma < \gamma_c$.

Therefore propagative and periodic solutions exist only for positive characteristic friction velocity, larger than γ_c with:

$$\gamma_c = \frac{1}{2\sqrt{1 - \xi^2/\beta^2}} \quad (58)$$

and that they are all supersonic solutions.

Propagation speed selection

Up to now, no criterion for a propagation speed selection has been obtained. All the solutions presented here are admissible for a wide range of propagation speeds, which are only required to be supersonic ($\beta > \xi$). Therefore, considering β as a free parameter, propagative solitary wave may be found when the characteristic friction velocity satisfies:

$$\gamma > \frac{1}{2} \quad (59)$$

When γ reaches $1/2$, the only admissible propagation speed is an infinite speed. Otherwise, the propagation speed is always greater than the sound velocity, a negative sign of the discriminant implies:

$$\frac{\xi^2}{\beta^2} < 1 - \frac{1}{(4\gamma)^2} \quad (60)$$

For a constant friction law only, a sonic propagation is permitted.

NON LINEAR FRICTION LAW

Up to now, we dealt with a linear friction law, but more general friction laws are generally used. We mainly focus on a non-linear velocity weakening friction law similar to the

one presented by Burrige and Knopff 1. Dependence of the dynamic friction force is there supposed to be continuous from the static friction to a vanishing force at infinite speed. The classical expression of such a friction law is (see figure 9):

$$f_d(u', \gamma) = -\text{sign}(u') \frac{1}{1 + u'/\gamma} \quad (61)$$

With this formulation, γ is also a friction speed. It also corresponds to the speed for which the friction force is half its static value. The behavior of the system with this non linear friction law can be obtained at first order by a linearization of the law as (see figure 9):

$$f_d^{(l)}(u', \gamma^*) = -\text{sign}(u') \left(f_d^*(u') - \frac{u'}{2\gamma^*|u'|} \right) \quad (62)$$

The Newton's law can be written locally as:

$$(\beta^2 - \xi^2)u'' - \frac{\beta}{2\gamma^*(u')}u' + u = f_d^*(u') - \frac{\nu}{2\gamma^*(u')} \quad (63)$$

If we assume that the variation of $\gamma^*(u')$ and $f_d^*(u')$ are small on a local neighborhood of u' , we see that the Newton's law is similar to the one of the previous section. So, the existence of supersonic solitary wave solutions may still correspond to a negative sign of the discriminant. Solutions have the following shape:

$$\begin{cases} u(y) = 2e^{my} [b \sin(ny) + a \cos(ny)] \\ \quad + f_d^* - \frac{\nu}{2\gamma^*} \\ u'(y) = 2e^{my} [(am - bn) \cos(ny) \\ \quad + (bm - an) \sin(ny)] \end{cases} \quad (64)$$

where a and b are two reals given by the boundary conditions which are cumbersome to express. Since in this case, the friction speed is always positive, m is also positive. Subsequently, the existence of propagative solutions should only be function of the discriminant sign. This allows to define a zone of stability for propagative solutions according to the local slope f'_d of the friction law which is directly related to an apparent friction speed γ^* .

$$f'_d(u') = \frac{1}{2\gamma^*} \quad (65)$$

Subsequently, the criterion (59) for the existence of propagative solutions becomes:

$$f'_d(u') \in [0; 1] \quad (66)$$

Let note that, since the derivative of the friction law is:

$$f'_d(u') = \frac{\gamma}{(\gamma + u')^2} \quad (67)$$

we obtain the following property:

$$f'_d(0) \geq f'_d(u') \geq 0 \quad (68)$$

So friction speeds larger than one may always lead to propagative solutions. For smaller friction speeds, two phases have to be distinguished. The separation between both domains is given by:

$$f'_d(u'_c) = 1 \quad (69)$$

That is to say:

$$u'_c = \sqrt{\gamma} - \gamma \quad (70)$$

As γ tends to zero, the range of speed with non stable propagation speed decreases. This limit can be seen as Coulomb's friction law with static and dynamic coefficient. Consequently, previous statement translates in the fact that "weak" non linearities of the friction law are required for "chaotic" solution that is to say events of many sizes. At the boundary between stable and non stable propagative solutions, the propagation speed is infinite. For smaller speed, the solution is hyperbolic. Above the critical speed, the solution is sinusoidal. As the speed increases, the apparent friction speed increases and the propagation speed gets closer to the sound velocity.

CONCLUSION

In this paper, we investigated the analytical description of the propagative solutions obtained in a discrete model of blocks and springs (Burrige-Knopff model). A simple linear dynamic friction law has been shown to give rise to most of the major physical

features of the block dynamics observed for more elaborate friction laws. We have seen that the *non-smooth* character of the friction law which is responsible for the "localized non-linearity" of the problem, together with a velocity weakening friction law was sufficient to produce localized slip waves. We stress again that discontinuities of the acceleration of the block specially at the arrest point is an essential feature which needs to be properly taken into account. Only a velocity weakening friction law provides solitary waves solutions, and these are necessarily supersonic in the framework of a linear friction law. The influence of the physical parameters on the wavelength and magnitude of the solutions has been discussed. Two asymptotic friction laws are emphasized. First, the classical Coulomb's law where only regular waves are compatible with the boundary conditions. A smooth transition to localized waves, i.e. solitary waves is characterized by the decrease of the friction speed. The second limit is obtained for a very small friction speed in a non linear formulation. It can be seen as a Coulomb's law but with a dynamic friction coefficient different from the static coefficient. In this limit, solitary waves appear as the fundamental solution. This leads to the conclusion that existence of a large range of event sizes may result from a slow decrease of the friction with the speed, that is to say, weak non linearity.

An essential question which has not been tackled in the present study, and which deserves attention is the analysis of stability of the solutions. A linear stability analysis cannot be performed because of the non-smooth character of the friction law, without tracking discontinuities of the accelerations. At the present stage we have to rely on numerical simulations of the problem which shows that some solitary waves solutions obtained here are stable. The selection of one set of solution should emerge from a stability analysis.

References

- [1] R. Burrige and L. Knopff, Bull. Seismol. Soc. Am. **57**, 341 (1967).
- [2] J. M. Carlson and J. S. Langer, Phys. Rev. Lett. **62**, 2632 (1989).
- [3] J. M. Carlson and J. S. Langer, Phys. Rev. A **40**, 6470 (1989).
- [4] J. M. Carlson, J. S. Langer, B. Shaw, and C. Tang, Phys. Rev. A **44**, 884 (1991).
- [5] J. M. Carlson, Phys. Rev. A **44**, 6226 (1991).
- [6] J. S. Langer and C. Tang, Phys. Rev. Lett. **67**, 1043 (1991).
- [7] J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, and S. Roux, Europhys. Lett. **21**, 375 (1993).
- [8] G. Vasconcelos, M. de Sousa Vieira, and S. R. Nagel, Physica A **191**, 69 (1992).
- [9] G. Ananthakrishna and H. Ramachandran, preprint (unpublished).
- [10] J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, and S. Roux, preprint (unpublished).
- [11] J. C. Gu, J. R. Rice, A. L. Ruina, and S. T. Tse, J. Mech. Phys. Solids **32**, 167 (1984).
- [12] F. Heslot *et al.*, submitted to Physical Review E (unpublished).
- [13] J. J. Moreau, in *Non smooth mechanics and applications, CISM Courses and Lectures* (Springer-Verlag, New York, 1988), pp. 1-82.

[1] R. Burrige and L. Knopff, Bull. Seis-

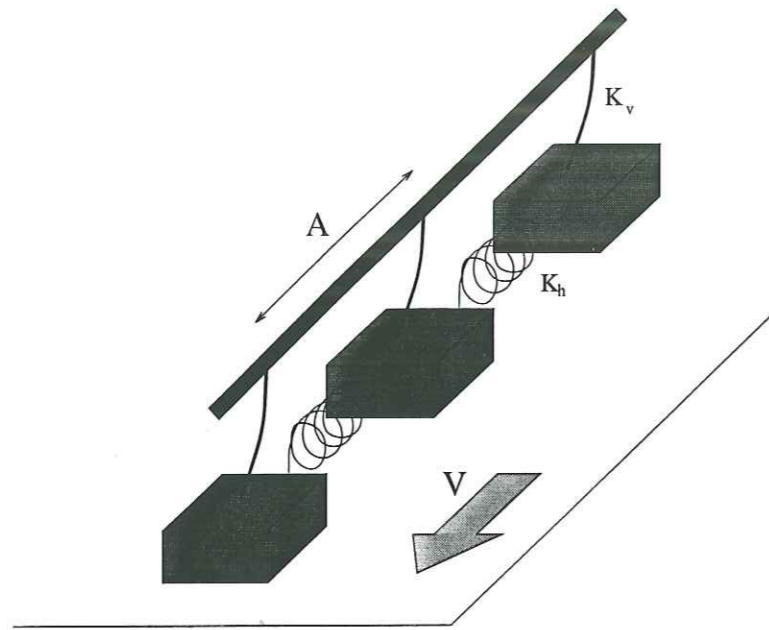


Figure 1: A chain of blocks and springs is loaded by the movement of a plane support with a constant speed V . Loading is possible because of the contact law which exist between the bottom of the block and the support. The movement of each block is compelled by a vertical spring (K_v), related to a rigid rod and by both horizontal springs (K_h). The distance between two consecutive attached points of vertical springs on the rod.

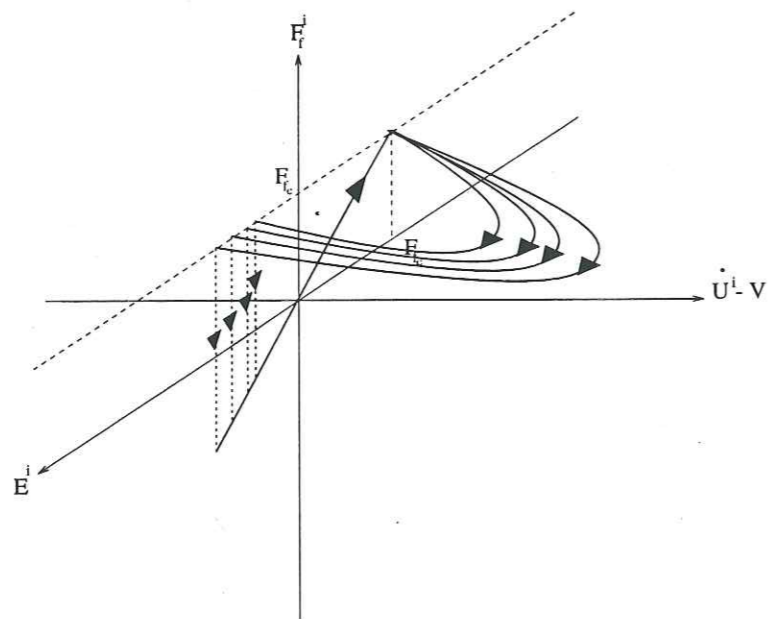


Figure 2: The friction law in the $[E^i; \dot{U}^i - V]$ space shows two regimes. The static part is on this plot reduced to a diagonal of the $[E^i; F_j^i]$ plane. The dynamic phase corresponds to a loop which is function of the precise form of the friction law.

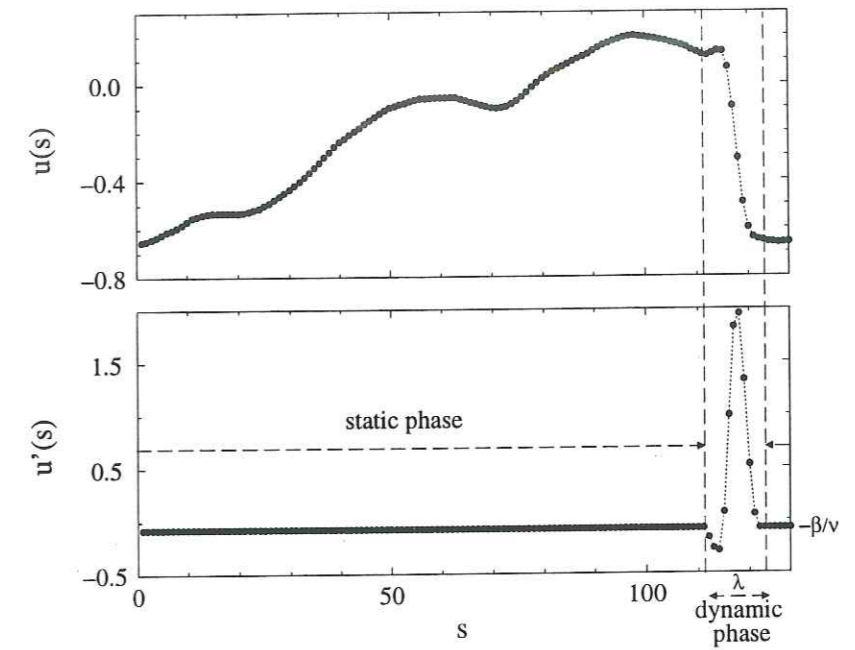


Figure 3: Position and speed for a discrete propagative solution of 128 blocks. Long wavelength fluctuations exist for the displacement in the actual numerical simulation.

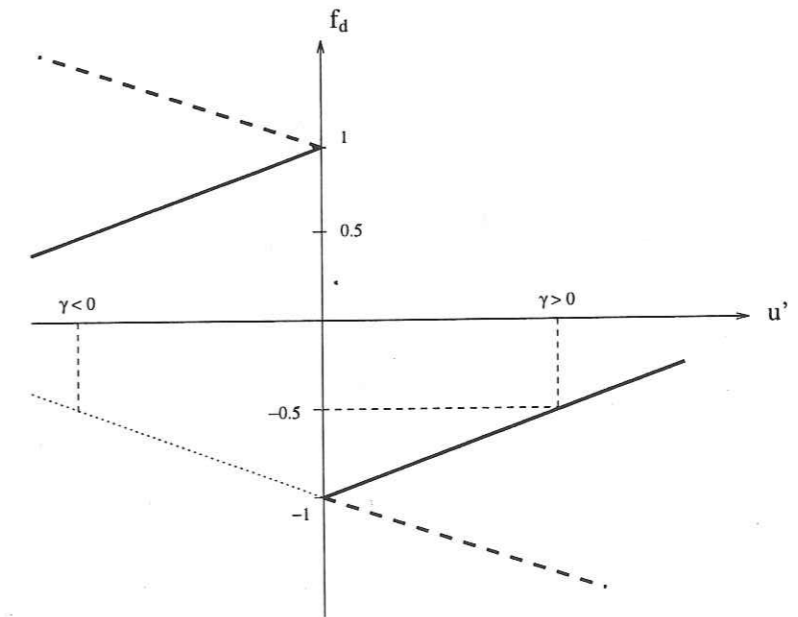


Figure 4: The linear dynamic friction law is plotted for a positive friction speed γ (velocity weakening) and a negative friction speed (velocity hardening).

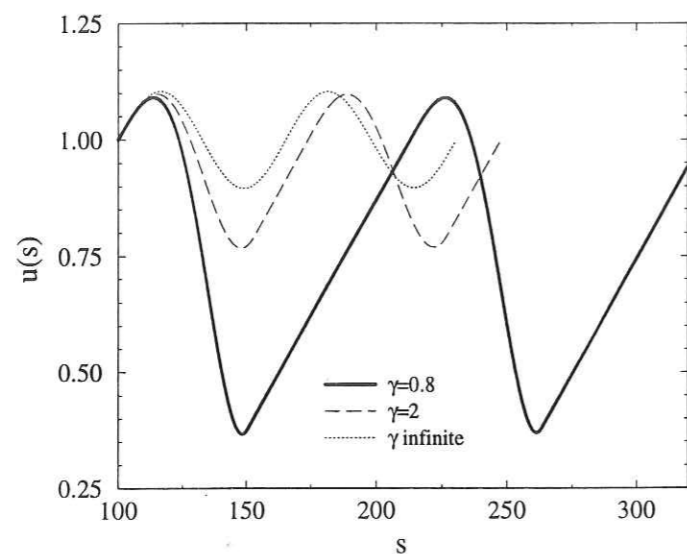


Figure 5: Analytical propagative solutions for the position where the magnitude of the parameters are: $\nu = 0.1$, $\beta = 10$, $\xi = 5$. Two periods s_p are displayed on the graph.

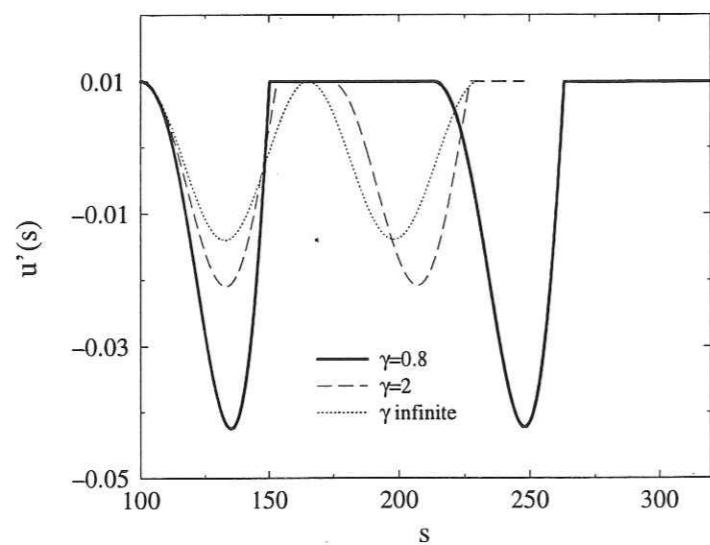


Figure 6: Analytical propagative solutions for the speed with the same parameters as the previous figure.

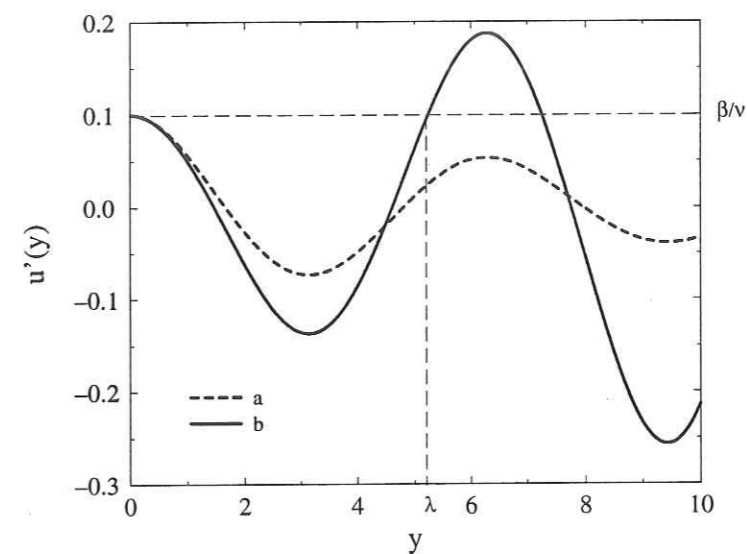


Figure 7: Different sinusoidal solutions for the speed $u'(s)$. Only case b) is compatible with all the boundary conditions.

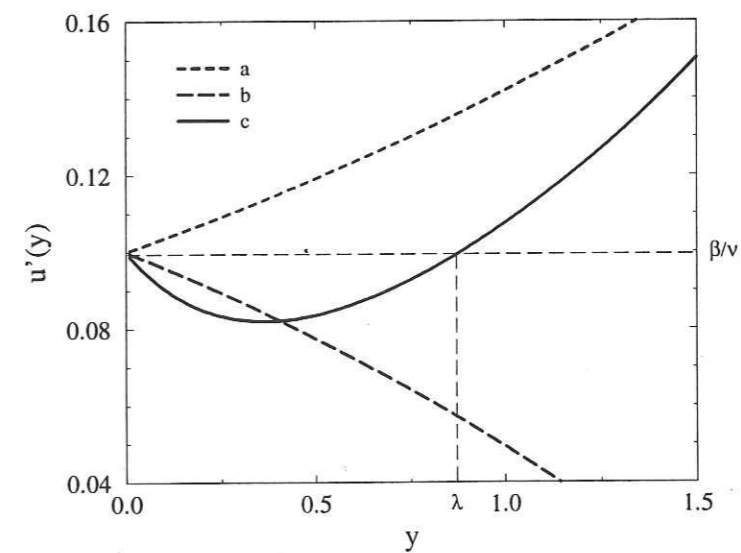


Figure 8: Different hyperbolic solutions for the speed $u'(s)$. Only case c) is compatible with all the boundary conditions.

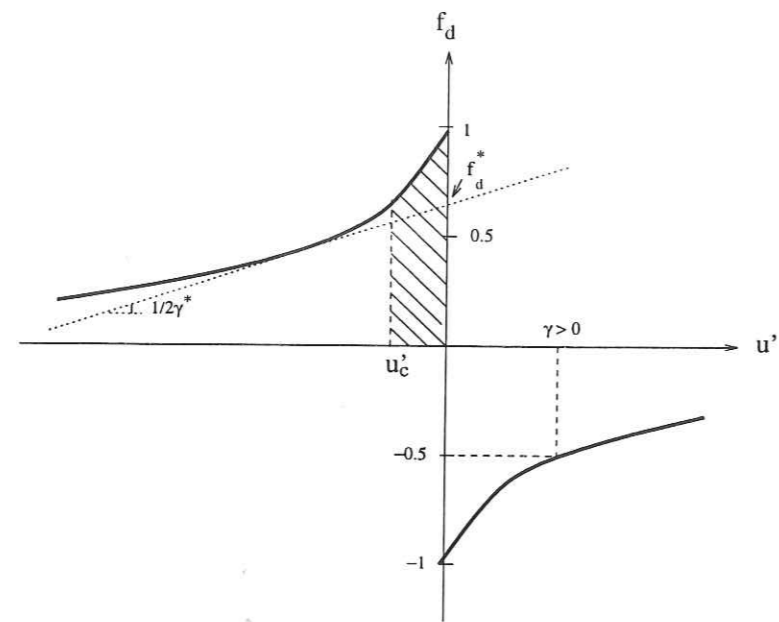


Figure 9: Non linear velocity weakening friction law. The local linearization of the law is defined according to both parameters: γ^* , the local linear friction speed and f_d^* , the local linear static coefficient.

Annexe 5

Velocity weakening friction: A renormalization approach
 J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux

Soumis au: *Geophysical Research Letters*

VELOCITY WEAKENING FRICTION:
A RENORMALIZATION APPROACH

Jean SCHMITTBUHL, Jean-Pierre VILOTTE
Laboratoire de Géologie, École Normale Supérieure, Paris

Stéphane ROUX
L.P.M.M.H., École Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de Paris, Paris

ABSTRACT: The dynamical behavior of a two dimensional elastic block sliding on a rigid frictional interface and subject to a steady antiplane shear is studied through a real-space renormalization technique. The model is mapped onto iterations of the classical Burridge-Knopoff chain model. A velocity weakening friction law is chosen to describe the interface along the block support. The system is characterized by its mechanical response in terms of mean friction force opposed to a prescribed constant velocity. This response is shown to differ strongly from the interface friction law. Under renormalization, the response converges toward an apparent dynamical Coulomb's friction law, with distinct static and dynamic coefficients. On the basis of this model, the experimental observability of velocity weakening friction laws is discussed.

The contact and rubbing of deformable bodies is a complex physical problem which is still the subject of intensive experimental works. The nature of the dynamic friction force developed between bodies in contact is the result of the interplay of various mechanical and chemical processes occurring at multiple length-scales Oden and Martins [1985], Moore [1975], Bowden and Tabor [1950], Rabinowicz [1951], Rabinowicz [1958].

When investigating the frictional response of a system, micro-scale phenomena are often omitted, and the frictional contact law is then phenomenological depending on the time and length scales under investigation. It involves generally the stress, the relative velocity and displacement at the interface. Such a law may be constructed from experimental observations. Frictional experiments have however intrinsic scale limitations in terms of slip velocity and total slip, and they may suffer from lack of reproducibility. Apart from those obvious limitations, a more subtle effect may affect the interpretation of the experimental results. A friction law is conceptually relative to an interface of zero thickness. Experimentally the interface is always coupled to the bulk of a solid, whose mechanical behavior may interfere with that of the interface itself so that the observed response is never purely the interface friction law itself. If this remark is harmless in some cases (e.g. smooth and hardening friction), it may play a crucial role as exemplified in the simple case studied in the present article. *To what degree the frictional response depends on the detailed structure of the assumed interface friction mechanisms is a key problem*, which we partially address in the following.

The simplest system which exhibits stick-slip motion involves an interface with a non-smooth kinematic (i.e. experiments with a stationary loading velocity and stable frictional motion) Coulomb's law with distinct static and dynamic coefficients, coupled to an elastic block. A dynamical Coulomb's law is the simplest velocity weakening law. More complex velocity weakening laws have

also been proposed for kinematic friction, to take into account the observed sensitivity to the loading velocity. This sensitivity is often related microscopically to the lifetime of the contacts and a static aging effect at the asperities level. It was shown recently Dieterich [1978], Dieterich [1979a], Ruina [1983a], Rice and Ruina [1983], Heslot et al. [1994], Gu and Wong [1992] that in the case of an abrupt change of the driving velocity, a gradual evolution of the frictional stress may be observed. This evolution occurs over a characteristic slip distance typical of the surface and related to its roughness.

We consider here, a simple — but generic — system consisting of a 2D elastic block under continuous antiplane shearing motion, and which lies on a rigid support. Interactions between the elastic body and the rigid support are modelled by a friction law. We will limit our study to the stationary frictional response, and we will not consider the dynamic response to a sudden change in the loading.

When the interface displays a velocity weakening friction law, we may anticipate that the slip along the interface may be spatially inhomogeneous. Therefore, a natural way to solve the problem numerically is to introduce an inhomogeneous discretization of the block such as the one schematized in Fig. 1. Close to the interface the mesh size is finer so as to capture the small scale details of the slip, but further away the mesh can be chosen coarser because the strain and stress fields are expected to be smoother. A simple discretization of the block used in the following is described in Fig. 1. The block is decomposed in elements chosen to be rigid. Elements are considered to be massive spring-connected rigid sub-blocks interacting at the same level through horizontal springs and coupled with the previous level by vertical springs. The element size increases in geometric series with the distance to the interface. At each level the element size is multiplied by a fixed ratio N chosen to be three in the figure. The spring stiffness and the mass of each block is taken proportional to

the block size. Only three levels were drawn in Fig. 1 for clarity. Such a mesh suggests to resort to a simple recursive scheme to address the problem. This is the basis of our renormalization approach which we now sketch.

In order to analyze the response of the entire block we first consider only the smallest elements in contact with the interface. We solve numerically the force needed to impose any fixed velocity. We deliberately ignore the temporal fluctuations of the force and consider only the space and time average of the force needed to drive the system so as to capture the steady state behavior. The force-velocity relation computed for a series of velocities, is hereafter called the *mechanical response* of the system. This response has not to be confused with the friction law imposed at the interface. In Particular, it depends on the elastic interaction between the elements.

Next we consider a second level of elements on top of the first layer. Relying on the previous analysis, we substitute to the interface and the first layer, a "macro-interface" on which are laid the second level elements. The macro-interface is characterized by a new friction law, which has to take into account the behavior of the previous system. We thus use the *mechanical response* as defining the friction law of the macro-interface. The structure of the problem is now similar to that of the previous step but with a different friction law. The procedure is iterated, and allows the characterization of the overall frictional response and its evolution during the renormalization. Such a real space renormalization is only considered here as reliable, when analyzing the response at wavelengths and periods larger than the space and time scales of the local slip inhomogeneities.

At each step of the renormalization procedure, the discrete problem to solve is the dynamical friction of a chain of N elastically coupled blocks, subjected to a uniform anti-plane shear velocity and a frictional law which describes the mechanical coupling with the finer levels of discretization. Such a

model was first introduced by Burridge and Knopoff (BK) Burridge and Knopoff [1967]. The BK model has been extensively studied within the context of earthquake dynamics

Burridge and Knopoff [1967], Carlson and Langer [1989b], Carlson and Langer [1989a], Carlson et al. [1991], de Sousa Vieira et al. [1993], de Sousa Vieira and Hermann [], Mikumo and Miyatake [1978], Schmittbuhl et al. [1993c], Schmittbuhl et al. [1994]. It is interesting to note here that although elastic interactions in the BK model are local, due to the hierarchical structure of the model long range interactions are now built up in the overall response — with however the limitation that only the average forces are considered.

The discrete one-dimensional Burridge-Knopoff model to be considered at step n of the renormalization procedure consists of a chain of N blocks of mass $M^{(n)}$ which are connected along the chain to their immediate neighbors by horizontal springs of rigidity $K_h^{(n)}$ and loaded, through a vertical spring of rigidity $K_v^{(n)}$, by a uniform motion with constant shear rate $V_s^{(n)}$. Each block is subject to a friction law determined as the frictional response of the previous iteration. Before the first iteration ($n = 0$), the friction law to be considered is the one describing the interactions between the rigid support and the first blocks. In this study, we consider a non-smooth velocity weakening friction law, parametrized by a static friction threshold $F_{cr}^{(0)}$, and a characteristic velocity $V_r^{(0)}$, chosen conventionally to be the one at which the dynamic friction is half the static threshold.

We introduce a characteristic time, $T^{*(n)} = \sqrt{M^{(n)}/K_v^{(n)}}$, a characteristic length $U^{*(n)} = F_{cr}^{(n)}/K_v^{(n)}$, which is defined as the maximum displacement of a single block just connected to the vertical spring, and therefore a characteristic velocity $V^{*(n)} = U^{*(n)}/T^{*(n)}$. Dimension-less time and displacement are: $t^{(n)} = T/T^{*(n)}$, and $u^{(n)} = U/U^{*(n)}$. The system can be fully described by three dimension-less parameters: a dimension-less loading speed $\nu^{(n)} =$

$V_s^{(n)}/V_r^{*(n)}$, a dimension-less friction velocity $\nu_r^{(n)} = V_r^{(n)}/V_r^{*(n)}$, and an elastic dimension-less parameter $\ell^{(n)} = \sqrt{K_h^{(n)}/K_v^{(n)}}$ which can be interpreted as the dimension-less sound speed of the model.

As a result of the hierarchical discretization, the scaling between two successive iteration is easily defined. Let N be the number of subdivisions of one block between two consecutive levels, and n the iteration to be considered, one has the simple scaling relations:

$$\begin{aligned} M^{(n)} &= NM^{(n-1)} = N^n M^{(0)} \\ K_v^{(n)} &= NK_v^{(n-1)} = N^n K_v^{(0)} \\ K_h^{(n)} &= NK_h^{(n-1)} = N^n K_h^{(0)} \\ F_{cr}^{(n)} &= NF_{cr}^{(n-1)} = N^n F_{cr}^{(0)} \\ V_r^{(n)} &= V_r^{(n-1)} = V_r^{(0)} \end{aligned} \quad (1)$$

where $M^{(0)}$, $K_v^{(0)}$, $K_h^{(0)}$, $F_{cr}^{(0)}$ and $V_r^{(0)}$ are the parameters defined at the lowest level. Under such scaling, the dimensionless parameters of the BK model, T^* , U^* , V^* , ℓ , ν are invariant during the renormalization. Only the friction law is subject to change between two iterations.

The dimensionless Newton's equation for the j -th block in a chain of the BK model, at iteration (n), can be written:

$$\ddot{u}_j^{(n)} = f_e^{(n)} + f_f^{(n)} \quad (2)$$

where $f_e^{(n)}$ is the net elastic resultant force on block j :

$$f_e^{(n)} = l^2(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}) - u_j^{(n)} \quad (3)$$

During the static phase, with no relative block velocity, the net force on the block j , $f_e^{(n)}$, increases due to the uniform loading through the vertical spring and the dynamics of its two nearest neighbors. The static friction is therefore simply defined during the static phase as :

$$\begin{aligned} f_f^{(n)} &= -f_e^{(n)} \\ f_f^{(n)} &\in [-1, +1] \end{aligned} \quad (4)$$

During the dynamic phase, i.e. when the reaction force exceeds the static threshold, the

normalized velocity weakening friction can be written in term of the dimensionless friction velocity $\nu_r^{(n)}$ and the relative block velocity as :

$$f_f^{(n)} = -sgn(\dot{u}_j^{(n)} - \nu) g\left(\frac{|\dot{u}_j^{(n)} - \nu|}{\nu_r^{(n)}}\right) \quad (5)$$

where g is a smooth function. We specialize our study to a specific form of g which has been often considered in the literature:

$$g(x) = \frac{1}{1+x} \quad (6)$$

The frictional response of the system, at iteration n , is characterized in terms of a friction force, $\Phi^{(n)}$, averaged over space, time and realizations — the latter average is not necessary in our renormalization scheme but it provides a more accurate determination of the friction — defined as:

$$\Phi^{(n)} = \langle f_f^{(n)} \rangle = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_f^{k(n)}(t_i) \quad (7)$$

where k denotes the realization number, K the number of realizations, i the time step number (for a fixed time step) and j the block number.

Time integration of the equation of motion is performed using a Runge-Kutta scheme. The position and velocity of the blocks are continuous functions in time. However, due to the non-smoothness of the friction law, the acceleration exhibits finite discontinuities bounded by $[\ddot{u}] \leq 2$. These discontinuities occur at the arrest phase of the block (for $\dot{u} = 0$). These discontinuities of the acceleration have to be considered in the way the problem is addressed numerically. A suitable framework for dealing with such non smooth problems can be found in Moreau [1988]. Each numerical simulation is started from random block positions (all the blocks being at rest), and averages are considered after discarding the initial transient regime. The boundary conditions are taken here as periodic, although this is not essential.

We first analyze in details the frictional response of the lowest hierarchical level, the first renormalization step. The results presented here are for an initial characteristic weakening rate of $\nu_r^{(0)} = 0.2$, a sound velocity of $\ell = 10$, and a system size of $N = 128$.

In previous studies Schmittbuhl *et al.* [1993c], Schmittbuhl *et al.* [1994] it was shown that the behavior of the BK model could be analyzed in term of a "control parameter", $\Theta = N\nu/l$. Depending on the parameter Θ , the BK system is shown to exhibit two rather distinct types of solution: a "chaotic" type, extensively studied by Carlson and Langer Carlson and Langer [1989b], Carlson and Langer [1989a], Carlson *et al.* [1991], and a "slip-wave" type studied by Schmittbuhl *et al.* [1993c], Schmittbuhl *et al.* [1994]. A transition is observed between these two types of solution, for $\Theta \simeq 1.0$. The imposed shear motion is accommodated during the "chaotic" solution by localized slip patches which occur nonuniformly in space and time. The slip rate looks like a sequence of pulses from which emerge major events with sizes of the order of the system size. The space averaged kinematic can be defined as an erratic stick-slip. In contrast the "slip-wave" type of solution is characterized locally by a highly structured slip pattern and the motion accommodated by propagative solitary waves with well-defined wave speed and wavelength. The space averaged kinematic is now a continuous sliding. It is worth noting that Θ is invariant in the renormalization.

The space-time averaged friction $\Phi^{(n)}$ can be plotted as a function of the control parameter. Fig. 2 shows in particular the averaged friction as a function of the imposed shear velocity, for the first iteration ($n = 1$). For a low driving velocity, in the chaotic regime, the average friction is high. As Θ is increases, one goes through the transition toward the slip-wave type of solution. Then the averaged friction goes through well-defined minima, labelled Θ_m . Between two successive minima, the friction after a sudden increase, decreases smoothly with the always

same weakening rate. Each minimum corresponds to a well defined state of the system for which there is enough supplied mechanical energy to sustain an integer number of stable solitary waves. The m th minimum, $\Theta = \Theta_m$, corresponds to m equally spaced slip-waves in the system. When Θ is not matched precisely to an integer number of waves, say $\Theta_m < \Theta < \Theta_{m+1}$, the system oscillates irregularly in time between the two closest states with m and $(m + 1)$ waves, and the transient between these two states produce a net increase of the friction force comparable to some extent to the high value found in the chaotic regime.

It was shown Schmittbuhl *et al.* [1993c], that the wavelength λ , the wave speed c and the displacement jump Δu across the wave front are solely determined by the system parameter (ℓ) and the friction law (ν_r), which imply that each solitary wave dissipates the same amount of energy. The number of solitary waves n_s is defined by : $n_s = \Delta u N \nu / c$. The wavespeed was shown to be $c \simeq \ell$, and thus $\Theta_m = m\Theta_1$. For $n = 1$, $\Theta_1 \simeq 1$. In the present study, due to a much more significant numerical work, we can go further in the quantitative description of the mechanical response.

The frictional response of the system can be accurately fitted by a function $\Phi^{(n)}$ which is piecewise similar to the initial local one, but with discontinuities at the observed minima Θ_m . Fig. 2 shows such a fit to the following expression:

$$\Phi^{(n)}(\nu) = \frac{E(1 + \nu/\nu_c^{(n)})}{1 + \nu/\nu_r^{(n)}} \quad (8)$$

with $\nu_c^{(n)}$ defined as the critical velocity at which the first solitary wave becomes stable, $\nu_c^{(n)} = \ell\Theta_1/N$, and $\nu_r^{(n)}$ the new characteristic weakening rate. The numerator simply counts the number of slip wave in the system, while the denominator provides a hyperbolic dependence of Φ on the velocity, comparable to the initial friction law. After the first iteration, the new velocity weakening rate is $\nu_r^{(1)} = 0.013$, much smaller than the initial one $\nu_r^{(0)} = 0.2$, which implies a greater

rate sensitivity of the averaged friction force. This dynamical behavior has been shown to be stable with respect to initial noise in the static friction threshold Schmittbuhl *et al.* [1993c].

Let us emphasize that the proportionality of the response with the number of slip waves makes a crucial difference between the friction response and the initial friction law. In particular for large velocities, the response tends to approach a constant non-zero value $\Phi(\nu) \rightarrow \nu_r^{(n)}/\nu_c^{(n)}$, in contrast with the initial friction law g which decays to zero. Let us also note that for extremely large velocities the distance between slip waves should vanish, and at this point, a different behavior is expected (all blocks should slip continuously). We do not consider this very high velocity regime.

Under the following renormalization iteration, the response $\Phi^{(1)}$ is used a basic friction law instead of g . A new response is computed numerically $\Phi^{(2)}$ and the process is repeated. Fig. 3 shows the responses at the second and third iterations.

We have emphasized the differences between g and $\Phi^{(1)}$. In contrast, it appears that the following responses are quite comparable to $\Phi^{(1)}$ up to a scale factor in velocity. The velocity weakening regime seems to vanish so that for a fixed velocity scale, the frictional response converges toward a dynamic Coulomb's law with distinct static and dynamic coefficients. A few points should be noted. First, the same functional dependence of the response on the velocity as the one which allowed to characterize $\Phi^{(1)}$ is sufficient to provide a good fit to the further iterations of the response. Thus the functional form of the the response (Eq. 8) seems to be in a stable parameter space. We simply need to study how the two parameters describing the response, ν_r and ν_c evolves under renormalization. Let us now consider the responses quantitatively. For extremely low velocities, the friction force is roughly constant and high although the accuracy is rather limited because we are in the "chaotic regime" where fluctuations are huge. For

large velocities, the responses $\Phi^{(n)}$ approach the same limit force. This is natural in the sense that the scale transformation Eq.(1) was designed in such a way that a Coulomb's law of friction is invariant under renormalization as physically expected. For large velocities, the discontinuities of the responses becomes small and thus the effective friction law is close to a Coulomb's law. Therefore the ratio $\nu_r^{(n)}/\nu_c^{(n)}$ remains constant, and subsequently the scaling of both ν_r and ν_c has to be the same. This scaling relation has been investigated numerically, by studying the response of the system at very low sliding velocities. We found that this scaling relation could be approximately described by:

$$\nu_c^{(n)} = \nu_c^{(n-1)} \exp(-a) \quad (9)$$

with $a \simeq 3$. We can use the scaling of the system "length" (i.e. the total number of blocks under the level (n)) $L^{(n)} = N^n L^{(0)}$ to eliminate the n dependence of $\nu_c^{(n)}$. We obtain simply the following power-law:

$$\nu_c \propto \nu_r \propto L^{-\alpha} \quad (10)$$

with $\alpha = a/\ln(N) \approx 0.62$. This latter value should be considered as simply indicative being given the few data points over which the last equation has been fitted, and the uncertainty is large. During the renormalization, the velocity interval where a smooth velocity dependence of the friction can be effectively observed, is progressively shrunk and collapsed toward the origin. Therefore, a signature of the smooth softening behavior still exists in the renormalized response but it concerns a more and more narrow regime of small velocities as the system size gets larger.

Although the frictional system retained in this study might appear quite simplistic, its stationary frictional response is rather complex, and has to be considered as a phenomenological behavior rather than an intrinsic property of the interface. The renormalization procedure proposed here allows to study the response for wavelengths and periods larger than the space-time scale of the slip wave structure. Under this hypothesis,

it is shown that a simple local velocity weakening friction law at the interface level is not scale invariant and give rise to a Coulomb's like behavior at the system scale. This study stresses the fact that experimentally one can only analyze the response of an entire elastic system coupled to an interface, and not a bare interface law, and thus one should be extremely cautious of the validity domain of experimentally observations of velocity weakening friction laws.

Straight forward extensions of this study should include more sophisticated local friction laws, e.g. with an intrinsic scale length. Further investigations should also consider dynamical effects in order to properly resolve the inherent radiation, and allows for a more accurate dynamical interaction between the different levels.

References

- F. Bowden and D. Tabor. *Friction and Lubrication of Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- R. Burridge and L. Knopff. Model and theoretical seismicity. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 57:341-371, 1967.
- J. M. Carlson and J. S. Langer. Mechanical model of an earthquake fault. *Phys. Rev. A*, 40:6470-6484, 1989a.
- J. M. Carlson and J. S. Langer. Properties of earthquakes generated by fault dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 62:2632-2635, 1989b.
- J. M. Carlson, J. S. Langer, B. Shaw, and C. Tang. Intrinsic properties of a burridge-knopoff model of an earthquake fault. *Phys. Rev. A*, 44:884-897, 1991.
- M. de Sousa Vieira and H.J. Herrmann. Self-similarity of friction laws. to appear in *Physica A*, 1994.
- M. de Sousa Vieira, G. Vascelos, and S. Nagel. Dynamics of spring-block models: Tuning to criticality. *Phys. Rev. E*, 47:2221, 1993.
- J.H. Dietrich. Time-dependant friction and the mechanics of stick-slip. *Pure and Appl. Geophys.*, 116:790-806, 1978.
- J.H. Dietrich. Modeling of rock friction: 1. experimental results and constitutive equations. *J. Geophys. Res.*, 84:2161-2168, 1979.
- Y. Gu and T. Wong. *Non-linear Dynamics and Predictability of Critical Geophysical Phenomena*. AGU, Washington, 1992.
- F. Heslot, T. Baumberger, B. Perrin, B. Caroli, and C. Caroli. Creep, stick-slip and dry friction dynamics: experiments and heuristic model. *Phys. Rev. E*, 49:4973-4988, 1994.
- T. Mikumo and T. Miyatake. Dynamical rupture process on a three-dimensional fault with non-uniform frictions and near-field seismic waves. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 54:417-438, 1978.
- D. Moore. *Principles and Applications of Tribology*. Pergamon Press, Oxford, 1975.
- J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In *Non smooth mechanics and applications*, pages 1-82, New York, 1988. Springer-Verlag.
- J. T. Oden and J. A. C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech.*, 52:527-634, 1985.
- E. Rabinowicz. The nature of static and kinetic coefficients of friction. *J. Appl. Phys.*, 22:1373, 1951.
- E. Rabinowicz. The intrinsic variables affecting the stick-slip process. *Proc. Phys. Soc.*, 71:668-675, 1958.
- J. Rice and A. Ruina. Stability of steady frictional sliding. *J. Appl. Mech.*, 50:343-349, 1983.
- A.L. Ruina. Slip instability and state variable friction laws. *J. Geophys. Res.*, 88:10359-10370, 1983.
- J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, and S. Roux. Propagative macrodislocation modes in an earthquake fault model. *Europhys. Lett.*, 21:375-380, 1993.
- J. Schmittbuhl, J. Vilotte, and S. Roux. Some physical properties of the burridge-knopoff model. In K. Bardham and A. Hansen, editors, *Non-linearity and breakdown in soft condensed matter*, Berlin, 1994. Springer-Verlag. in press.

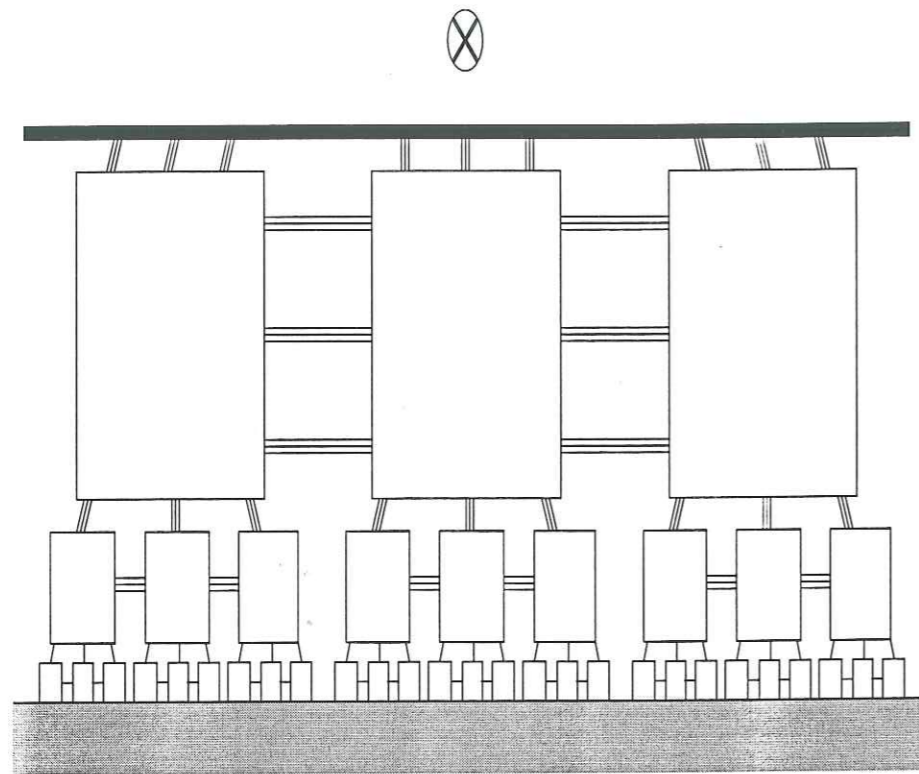


Figure 1: Discrete model of a 2D elastic block under a continuous antiplane shearing motion and which lies in a rigid support. Interactions between the elastic block and the rigid support are modelled by a local velocity friction law. The discrete system is a hierarchical array of massive spring-connected blocks interacting through vertical and horizontal springs. The stiffness of the springs is taken as proportional to the block size.

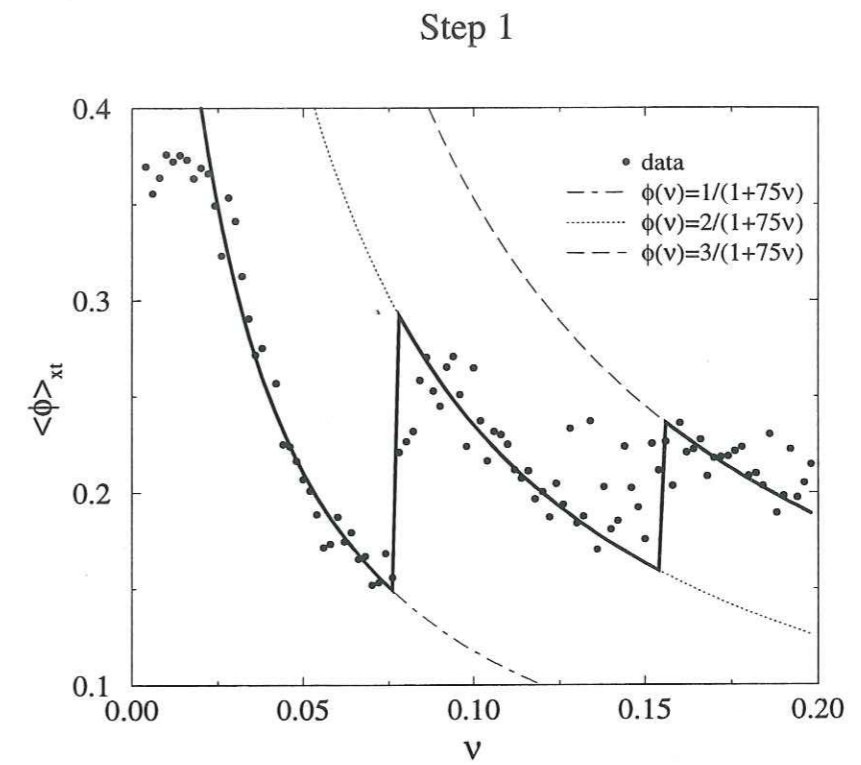


Figure 2: Space-time averaged friction versus shearing velocity, after the first renormalization iteration.

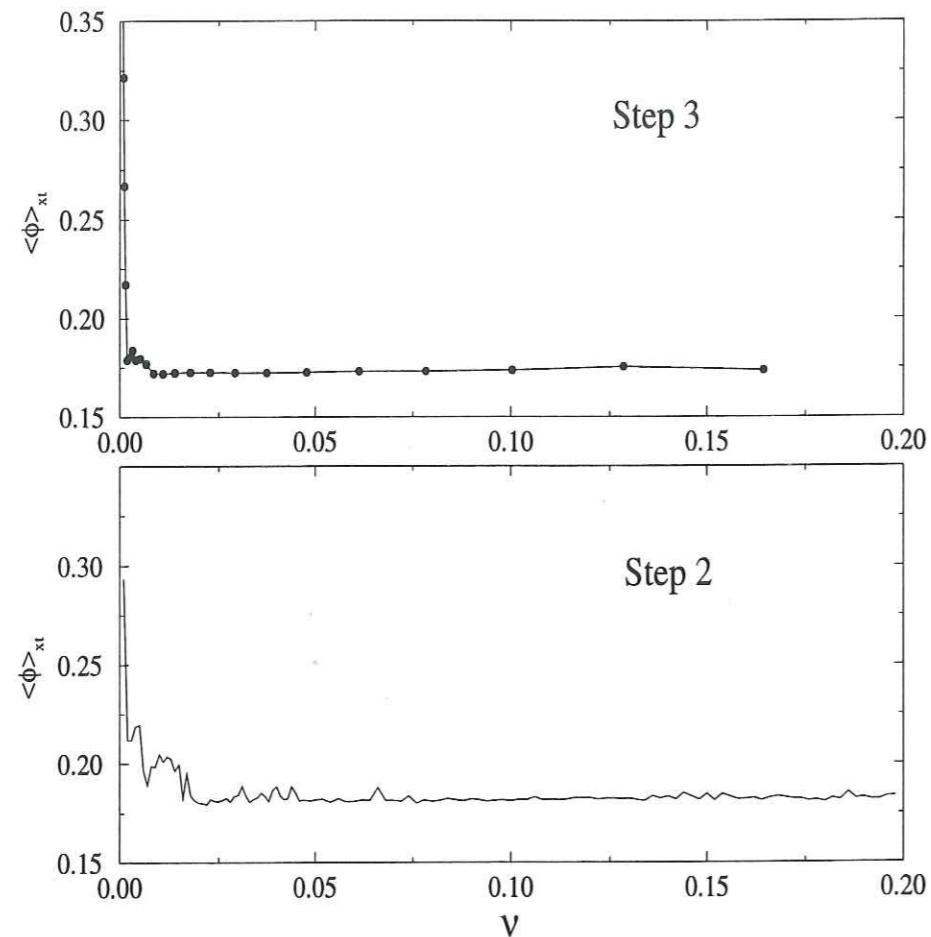


Figure 3: Space time averaged friction versus shearing velocity, after the second and third renormalization iterations.

Conclusion

Cette thèse est intitulée: «Failles et Séismes: quelques approches statistiques». Qu'en est-il après la lecture de ce manuscrit? En quoi des approches statistiques sont-elles adaptées? Le rôle des fluctuations est-il si important? Doit-on parler de désordre? Existe-t-il plusieurs désordres? Cela permet-il de mieux comprendre les propriétés des failles? Qu'en est-il de la prévision sismique?

Voici quelques questions auxquelles nous avons cherché des éléments de réponse. La déformation de la lithosphère fragile se traduit par une double localisation. Les failles constituent le résultat de la localisation spatiale et les séismes, celui de la localisation temporelle. Au cours de la première partie, nous nous sommes intéressés à la géométrie de la faille. Elle présente une invariance d'échelles qui, au premier ordre de description, est auto-affine avec un exposant caractéristique: $\zeta \approx 0.80$. Par ailleurs, une étude approfondie de surfaces de fracture fraîche, montre que ces dernières sont également auto-affines avec le même exposant (aux erreurs de mesures près). Cette similitude nous a conduit à formuler l'hypothèse de travail suivante: failles et surfaces de fracture présentent statistiquement la même géométrie. Sur la base de cette hypothèse, nous avons cherché quelles pouvaient en être les implications géophysiques. Elles sont doubles. Nous nous sommes principalement focalisés sur les conséquences aismiques, i.e. lors de déformation quasi-statique de la faille. Les propriétés élastiques, combinées avec celles de la géométrie, font que la surface de contact entre les deux épontes, évolue de façon singulière lors d'un chargement normal. En cisaillement, une première approximation (épontes rigides) montre que l'évolution de l'ouverture de la faille, i.e. le volume des interstices, est fonction du décalage imposé et de l'exposant d'auto-affinité. Les points de contact pendant le cisaillement peuvent être le lieu de transformations singulières (concentration de contraintes, plasticité, transfert de chaleur, etc). Nous proposons une description des sauts successifs de ces points en termes de vol de Lévy. D'autres implications géophysiques concernent les propriétés de transport. Pour une géométrie donnée de la faille, nous examinons la dépendance du flux de chaleur avec l'état mécanique. Nous nous intéressons, également, à la circulation de fluides à travers les interstices. Nous montrons que lorsque cette circulation fait intervenir un seuil (lié à la mouillabilité ou aux propriétés mécaniques ou à tout autre processus), un régime singulier de percolation apparaît. En effet, les corrélations à longues portées modifient la classe d'universalité du phénomène. Enfin, nous cherchons à quantifier l'évolution de la perméabilité de la faille lorsque la géométrie de l'ouverture se transforme.

La deuxième partie de cette thèse s'intéresse davantage à la période sismique de la

vie de la faille. Pendant le séisme, nous séparons arbitrairement les phénomènes liés à la fracturation (i.e. création d'interface) de ceux du frottement (i.e. rejeu d'interface). Dans le processus de fracturation, nous étudions plus particulièrement, le lien entre géométrie de la surface de fracture et géométrie du front de fracture. Ceci est réalisé grâce à deux approches distinctes. D'une part, nous cherchons à «remonter» l'information à partir de la mesure expérimentale de la croissance de la rugosité d'une surface de fracture. D'autre part, numériquement, nous tentons de modéliser la propagation plane d'un front de fracture dans un milieu désordonné en régime quasistatique. Nous nous concentrons sur l'analyse de la géométrie développée par le front. L'étude du rejeu de faille suit également une dichotomie d'approches. Tout d'abord, nous abordons le rôle de la géométrie auto-affine dans lors d'un rejeu à haute vitesse à travers un modèle simple et mettons en évidence l'existence d'une dépendance en vitesse de la loi de frottement. En second lieu, nous étudions largement un modèle de rejeu, basé sur l'importance d'un grand nombre de degrés de liberté dans le problème. Il s'agit du modèle de patin-ressort de type Burridge et Knopoff. Nous plaçons ce modèle dans diverses perspectives: modèle de faille, modèle de rupture sismique, existence d'un désordre dynamique, expérimentation numérique de frottement, définition d'une loi d'interface, changement d'échelles des lois de frottement.

Un tel travail suggère de très nombreuses questions. Il ouvre par conséquent vers de multiples perspectives. Enumérons quelques unes des questions envisageables. Tout d'abord, l'hypothèse sur laquelle l'organisation du manuscrit s'appuie, à savoir identité géométrique entre surface de fracture et faille, est-elle toujours vraie? L'auto-affinité d'une surface est-elle une propriété assurant une complète description de la surface? La réponse est non. L'auto-affinité caractérise l'invariance d'échelle. Ceci n'est qu'une facette des propriétés géométriques de la surface. C'est une facette, certes capitale pour beaucoup de propriétés de l'interface, mais qui ne constitue véritablement qu'un premier ordre dans la description. Certaines propriétés comme le frottement sont certainement sensibles à un second ordre dans la description: moments élevés de la distribution des hauteurs, anti-symétrie de la distribution, etc. Nous avons, pendant ce travail, amorcé l'étude de ce second ordre, par exemple, à travers l'analyse multi-fractale. Il conviendrait de poursuivre l'étude de cette différence entre faille et surface de fracture: rôle de l'abrasion, de l'érosion, de la dissolution, de la recristallisation, etc. Pour ce qui est de l'étude des implications de la géométrie auto-affine dans les propriétés géophysiques de la faille, nous avons examiné différentes voies possibles, d'autres existent (par exemple, propagation d'ondes le long d'une surface auto-affine). Par ailleurs, celles amorcées peuvent être approfondies: circulation de fluide avec ou sans électrolytes, rôle de l'élasticité pendant le cisaillement ou pendant l'écoulement, frottement de surfaces auto-affines, etc. Dans le problème du lien entre la rugosité de fracture et celle du front de fracture, nous avons démarré deux approches résultant de points de vue particulièrement différents. Des premiers résultats ont été obtenus. Cependant, la convergence entre ces approches n'est pas atteinte. Le travail sera poursuivi, d'une part expérimentalement lors d'un stage post-doctoral à l'université d'Oslo, mais également numériquement, à travers l'élaboration d'un modèle tridimensionnel. Le modèle de patin-ressort peut être également prolongé en le considérant comme un outil numérique permettant une expérimentation de frottement.

Pour finir, nous aborderons un point plus général. Le travail présenté dans ce manuscrit, s'intéresse au désordre géophysique des failles et des séismes. Il traite du désordre géométrique existant dans une faille, et de son rôle dans de nombreuses propriétés de la faille. Il examine également le désordre dynamique lié aux séismes. Il manque un aspect important: qu'en est-il des réseaux de failles, de leur organisation, de leur connectivité? Il existe à ce niveau, tout un champ à «explorer».

Références

- Aki, K. and P. Richards. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. W. H. Freeman, San Francisco, 1980.
- Alexander, S. *Transport and Relaxation in Random Materials*. Plenum, New York, 1985.
- Amontons, G. De la résistance causée dans les machines. *Mémoires de l'Académie Royale A*, pages 275-283, 1699.
- Anselmet, F., Y. Gagne, E.J. Hopfinger, and R. A. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 140, 63, 1984.
- Archard, J. F. Elastic deformation and the laws of friction. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 243, 190-205, 1957.
- Atkinson, B. K. *Fracture mechanics of rock*. Academic Press, London, 1989.
- Aviles, C. A., C. H. Scholz, and John Boatwright. Fractal analysis applied to characteristic segments of the san andreas fault. *J. Geophys. Res.*, 92, 331-344, 1987.
- Bak, P. and C. Tang. Earthquakes as a self-organized critical phenomenon. *J. Geophys. Res.*, 94, 15635-15636, 1989.
- Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59, 381-384, 1987.
- Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A*, 38, 364, 1988.
- Balberg, I., B. Berkowitz, and G. E. Drachler. Application of a percolation model to flow in fractured hard media. *J. Geophys. Res.*, 96(B6), 10015-10021, 1991.
- Barenblatt, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7, 55-80, 1962.
- Barquins, M. Adhèrence, frottement et usure des elastomères. *Kautschuk und Gummi-Kunststoffe*, 40(5), 419-438, 1987.
- Bergé, P., Y. Pomeau, and C. Vidal. *L'ordre dans la chaos*. Hermann, Paris, 1988.
- Bernasconi, P. Mayet de montagne. Master's thesis, I.P.G. Paris, 1991.
- Best, B., P. Meijers, and A. R. Savkoor. The formation of the schallamach waves. *Wear*, 65, 385-396, 1981.
- Biegel, R. L., W. Wang, C.H. Scholz, G.N. Boitnott, and N. Yoshioka. Micromechanics of rock friction 1. effects of surface roughness on initial friction and slip hardening in westerly granite. *J. Geophys. Res.*, 97, 8951-8964, 1992.
- Blanpied, M. L., D. A. Lockner, and J. D. Byerlee. Fault stability inferred from granite sliding experiments at hydrothermal conditions. *Geophys. Res. Lett.*, 18(4), 609-612, 1991.
- Boadu, F. K. and L. T. Long. Statistical distribution of natural fractures and the possible physical generating mechanism. *PAGEOPH*, 142, 273-292, 1994.
- Boitnott, G. N., R.L. Biegel, C.H. Scholz, N. Yoshioka, and W. Wang. Micromechanics of rock friction 2: quantitative modeling of initial friction with contact theory. *J. Geophys. Res.*, 97, 8965-8978, 1992.
- Borodich, F. M. Similarity properties of discrete contact between a fractal punch and an elastic medium. *C.R.A.S. (2) Paris*, 316(3), 281-286, 1993.
- Bouchaud, E., G. Lapasset, and J. Planès. Fractal dimension of fractured surfaces: a

- universal value? *Europhys. Lett.*, 13, 73-79, 1990.
- Bouchaud, J. P., E. Bouchaud, G. Lapasset, and J. Planès. Models of fractal cracks. *Phys. Rev. Lett.*, 71, 2240, 1993.
- Bowden, F.P. and L. Leben. The nature of sliding and the analysis of friction. *Proc. Roy. Soc. London A*, 169, 371-391, 1939.
- Bowden, F. P. and D. Tabor. *The Friction and Lubrication of Solids. Part I.* Clarendon Press, 1950.
- Bowden, F. P. and D. Tabor. *The Friction and Lubrication of Solids. Part II.* Clarendon Press, 1964.
- Brace, W. F. and J. D. Byerlee. Stick-slip as a mechanism for earthquakes. *Science*, 153, 990-992, 1966.
- Brown, S. R. Fluid flow through rock joints: the effect of surface roughness. *J. Geophys. Res.*, 92, 1337-1347, 1987a.
- Brown, S. R. A note on the description of surface roughness using fractal dimension. *Geophys. Res. Lett.*, 14, 1095-1098, 1987b.
- Brown, S. R. Correction to "a note on the description of surface roughness using fractal dimension". *Geophys. Res. Lett.*, 15, 286, 1988.
- Brown, S. R. Transport of fluid and electric current through a single fracture. *J. Geophys. Res.*, 94, 9429-9438, 1989.
- Brown, S. R. and C. H. Scholz. Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces. *J. Geophys. Res.*, 90, 12575-12582, 1985a.
- Brown, S. R. and C. H. Scholz. Closure of random elastic surfaces in contact. *J. Geophys. Res.*, 90, 5531-5545, 1985b.
- Brown, S. R. and C. H. Scholz. Closure of rock joints. *J. Geophys. Res.*, 91, 4939-4948, 1986.
- Brune, J. N., S. Brown, and P. A. Johnson. Rupture mechanism and interface separation in foam rubber models of earthquakes: a possible solution to the heat flow paradox and the paradox of large overthrusts. In *New Horizons in Strong Motion: Seismic Studies and Engineering Practice*, Santiago, 1991.
- Buckley, D. *Surface Effects in Adhesion, Friction and Wear.* Elsevier, Amsterdam, 1981.
- Burridge, R. and L. Knopoff. Model and theoretical seismicity. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 57, 341-371, 1967.
- Byerlee, J. D. Frictional characteristics of granite under high confining pressure. *J. Geophys. Res.*, 72, 3639-3648, 1967a.
- Byerlee, J. D. Theory of friction based on brittle fracture. *J. Appl. Phys.*, 38, 2928-2934, 1967b.
- Carlson, J. M. Time intervals between characteristic earthquakes and correlations with smaller events: An analysis based on a mechanical model of a fault. *J. Geophys. Res.*, 96(B3), 4255-4267, 1991a.
- Carlson, J. M. Two-dimensional model of a fault. *Phys. Rev. A*, 44, 6226-6232, 1991b.
- Carlson, J. M. and J. S. Langer. Mechanical model of an earthquake fault. *Phys. Rev. A*, 40, 6470-6484, 1989a.
- Carlson, J. M. and J. S. Langer. Properties of earthquakes generated by fault dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 62, 2632-2635, 1989b.

- Carlson, J. M., J. S. Langer, B. Shaw, and C. Tang. Intrinsic properties of a burridge-knopoff model of an earthquake fault. *Phys. Rev. A*, 44, 884-897, 1991.
- Caron, J. M., A. Gauthier, A. Schaaf, J. Ulysse, and J. Wozniak. *Comprendre et enseigner la planète Terre.* Ophrys, Paris, 1992.
- Charmet, J. C., S. Roux, and E. Guyon. *Disorder and Fracture.* Plenum, New York, 1990.
- Ciliberto, S. and C. Laroche. Experimental evidence of self organized criticality in the stick-slip dynamics of two rough elastic surfaces. Submitted to: *J. Physique (France)*, 1993.
- Cochard, A. and R. Madariaga. Dynamic faulting under rate-dependent friction. *PA-GEOPH*, 142(3-4), 419-446, 1994.
- Cox, B. L. and J. S. Y. Wang. Fractal surfaces: measurement and application in earth sciences. *Fractals*, 1, 87-115, 1993.
- Croquette, V. Déterminisme et chaos. In *L'ordre du chaos*, pages 64-87. Pour la Science, Paris, 1989.
- Das, S. and C. H. Scholz. Theory of time-dependent rupture in the earth. *J. Geophys. Res.*, 86(B7), 6039-6051, 1981.
- Davy, P., A. Sornette, and D. Sornette. Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting. *Nature*, 348, 56-58, 1990.
- Davy, P., A. Sornette, and D. Sornette. Experimental discovery of scaling laws relating fractal dimensions and the length distribution exponent of fault systems. *Geophys. Res. Lett.*, 19(4), 361-363, 1992.
- de Ballore, Montessus. *Les Tremblements de Terre.* Géographie Séismologique, Paris, 1907.
- de Gennes, P. G. Wetting: statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 57(3), 827-863, 1985.
- de Sousa Vieira, M. and H. J. Hermann. Self-similarity of friction laws. preprint.
- de Sousa Vieira, M., G. L. Vasconcelos, and S. R. Nagel. Dynamics of spring-block models: Tuning to criticality. *Phys. Rev. E*, 47(4), 2221-2224, 1993.
- Dieterich, J. H. Time-dependent friction and the mechanics of stick-slip. *Pure Appl. Geophys.*, 116, 790-806, 1978.
- Dieterich, J. and G. Conrad. Effect of humidity on time- and velocity-dependent friction in rocks. *J. Geophys. Res.*, 89, 4196-4202, 1984.
- Dietrich, J. H. Modeling of rock friction 1. experimental results and constitutive equations. *J. Geophys. Res.*, 84(B5), 2161-2168, 1979a.
- Dietrich, J. H. Modeling of rock friction 1. simulation of preseismic slip. *J. Geophys. Res.*, 84(B5), 2169-2175, 1979b.
- Dugdale, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8, 100-115, 1960.
- Ertas, D. and M. Kardar. Dynamic roughening of directed lines. *Phys. Rev. Lett.*, 69, 929-932, 1992.
- Ertas, D. and M. Kardar. Critical dynamics of contact line depinning. preprint, 1994.
- Español, P. Propagative sliding modes in a spring-block model. preprint, 1994.
- Euler, L. Histoire de l'Académie Royale à Berlin, 1748.
- Falconer, K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* John Wiley, New York, 1990.
- Family, F. and T. Vicsek. *Dynamic of fractal surfaces.* World Sci. Pub., Singapore, 1991.

- Feder, J. *Fractals*. Plenum, New York, 1988.
- Freund, L. B. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University Press, New York, 1990.
- Frisch, U., P.-L. Sulem, and M. Nelkin. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.*, 87, 719-736, 1978.
- Gao, H. Linear perturbation analysis of a shear-loaded asperity. *J. Geophys. Res.*, 94(B8), 10259-10266, 1989.
- Gao, H. Surface roughening and branching instabilities in dynamic fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(3), 457-486, 1993.
- Gao, H. and J. R. Rice. A first-order perturbation analysis of crack trapping by arrays of obstacles. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56, 828-836, 1989.
- Griffith, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 221, 163-198, 1920.
- Gu, Y. and T. F. Wong. Effects of loading velocity, stiffness, and inertia on the dynamics of a single degree of freedom spring-slider system. *J. Geophys. Res.*, 96(B13), 21677-21691, 1991.
- Gueguen, Y. and J. Dienes. Transport properties of rocks from statistics and percolation. *Math. Geol.*, 21(1), 1-13, 1989.
- Guéguen, Y. and V. Palciauskas. *Introduction à la physique des roches*. Hermann, Paris, 1992.
- Halsey, T. C., M. H. Jensen, L. P. Kadanov, I. Procaccia, and B. Shraiman. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. *Phys. Rev. A*, 33, 1141, 1986.
- Hansen, A. and K.J. Måløy. Measuring hurst exponents with the first return method. preprint, 1994.
- Hatton, C. G., I. G. Main, and P.G. Meredith. A comparison of seismic and structural measurements of scaling exponents during tensile subcritical crack growth. *J. Structural Geology*, 15(12), 1485-1495, 1993.
- Herrero, A. and P. Bernard. A kinetic self-similar rupture process for earthquakes. submitted to Bull. Seism. Soc. Am., 1994.
- Herrmann, H. J. and S. Roux. *Statistical Models for Fracture of Disordered Media*. Elsevier, Amsterdam, 1990.
- Heslot, F., T. Baumberger, B. Perrin, B. Caroli, and C. Caroli. Creep, stick-slip and dry friction dynamics: experiments and heuristic model. *Phys. Rev. E*, 49(6), 4973-4988, 1994. submitted to Physical Review E.
- Horowitz, F. G. and A. Ruina. Slip patterns in a spatially homogeneous fault model. *J. Geophys. Res.*, 94(B8), 10279-10298, 1989.
- Huang, J. and D. L. Turcotte. Are earthquakes an example of deterministic chaos? *Geophys. Res. Lett.*, 17(3), 223-226, 1990.
- Isichenko, M. B. Percolation, statistical topography, and transport in random media. *Rev. Mod. Phys.*, 64, 961-1043, 1992.
- Jaeger, J. C. and N. G. Cook. *Fundamentals of Rock Mechanics*. Chapman and Hall, London, 3th edition, 1979.
- Jiang, Z. and H. G. Hentschel. Interfaces driven by quenched random fields. *Phys. Rev. A*, 45(6), 4169-4172, 1994.

- Johnson, K. L. *Contact mechanics*. Cambridge Univ. Press, New York, 1989.
- Kagan, Y. Y. and L. Knopoff. Stochastic synthesis of the earthquake catalogs. *J. Geophys. Res.*, 86(B4), 2853-2862, 1981.
- Kardar, M., G. Parisi, and Y. C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56(9), 889-892, 1986.
- Kato, S., K. Yamaguchi, and T. Matsubayashi. On the dynamic behavior of machine tool slideway-2nd report. *Bull. J.S.M.E.*, 13(55), 180-188, 1970.
- Kilgore, B. D., M. L. Blanpied, and J. H. Dieterich. Velocity dependant friction of granite over a wide range of conditions. *Geophys. Res. Lett.*, 20(10), 903-906, 1993.
- Knopoff, L. The phenomenology of earthquake occurrence. In Charmet, J. C., S. Roux, and E. Guyon, editors, *Disorder and Fracture*. Plenum Press, New York, 1990.
- Knopoff, L., J. A. Landoni, and M. S. Abinante. Dynamical model of an earthquake fault with localization. *Phys. Rev. A*, 46(12), 7445-7449, 1992.
- Kolmogorov, A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *CR Acad. Sci. USSR*, 30, 299, 1941.
- Kolmogorov, A.N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13, 82, 1962.
- Kostrov, B. V. and S. Das. *Principles of earthquake source mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- Langer, J. S. and C. Tang. Rupture propagation in a model of earthquake fault. *Phys. Rev. Lett.*, 67, 1043-1046, 1991.
- Lavallee, D., S. Lovejoy, D. Schertzer, and Ph. Ladoy. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In *Fractals in Geography*, pages 171-205. Prentice-Hall, 1993.
- Levy, P. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1925.
- Levy, P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, 1954.
- Linker, M. F. and J. H. Dieterich. Effects of variable normal stress on rock friction: Observations and constitutive equations. *J. Geophys. Res.*, 97(B4), 4923-4940, 1992.
- Madariaga, R. and G. Perrier. *Les Tremblements de Terre*. Presses du CNRS, 1991.
- Måløy, K. J., A. Hansen, E. L. Hinrichsen, and S. Roux. Experimental measurements of the roughness of brittle cracks. *Phys. Rev. Lett.*, 68, 213-215, 1992.
- Måløy, K. J., X. L. Wu, A. Hansen, and S. Roux. Elastic contact on rough surfaces. *Europhys. Lett.*, 24, 35-40, 1993.
- Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, New York, 1982.
- Mandelbrot, B. B. Self-affine fractals and fractal dimension. *Phys. Scripta*, 32, 257-260, 1985.
- Mandelbrot, B. B. *Fractals in Physics*. Elsevier, Amsterdam, 1986.
- Mandelbrot, B. B., D. E. Passoja, and A. J. Paullay. Fractal character of fracture surfaces of metals. *Nature*, 308, 721-722, 1984.
- Manneville, P. *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Aléa Saclay, 1991.
- Meakin, P. The growth of rough surfaces and interfaces. *Phys. Rep.*, 235, 189-289, 1993.
- Mikumo, T. and T. Miyatake. Dynamical rupture process on a three-dimensional fault with non-uniform frictions and near-field seismic waves. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 54,

- 417-438, 1978.
- Moreau, J. J. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In *Non smooth mechanics and applications*, pages 1-82, New York, 1988. Springer-Verlag.
- Nagahama, H. Self-affine growth pattern of earthquake rupture zones. *PAGEOPH*, 142(2), 263-271, 1994.
- Nakanishi, H. Earthquake dynamics driven by a viscous fluid. Submitted to *Phys. Rev. A*, 1994.
- Obuko, P. G. and K. Aki. Fractal geometry in the san andreas fault system. *J. Geophys. Res.*, 92, 345-355, 1987.
- Oden, J. T. and J. A. C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech.*, 52, 527-634, 1985.
- Okubo, P. G. Dynamic rupture modeling with laboratory-derived constitutive relations. *J. Geophys. Res.*, 94(B9), 12321-12335, 1989.
- Okubo, P. G. and J. H. Dieterich. Effects of physical fault properties on frictional instabilities produced on simulated faults. *J. Geophys. Res.*, 89, 5817-5827, 1984.
- Pacheco, Javier F. and C. H. Scholz. Changes in frequency-size relationship from small to large earthquakes. *Nature*, 355, 71-73, 1992.
- Papon, P. and J. Leblond. *Thermodynamique des états de la matière*. Hermann, Paris, 1990.
- Parisi, G. and U. Frisch. A multifractal model of intermittency. In *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*. North-Holland, 1985.
- Pepke, S. L., J. M. Carlson, and B. E. Shaw. Prediction of large events on a dynamical model of a fault. *J. Geophys. Res.*, 99(B4), 6769-6788, 1994.
- Persson, B. N. Theory and simulation of sliding friction. *Phys. Rev. Lett.*, 71(8), 1212-1215, 1993.
- Pisarenko, D. and P. Mora. Velocity weakening in a dynamical model of friction. *PAGEOPH*, 142(3-4), 447-466, 1994. Pure and Appl. Geophys. (in press).
- Pissarenko, D. *Modélisation de la Friction et de l'Instabilité Sismique*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, 1994.
- Plouraboué, F., P. Kurowski, J. P. Hulin, S. Roux, and J. Schmittbuhl. Aperture of rough cracks. Submitted to *Phys. Rev. E*, 1994.
- Poirier, J. P. *Les Profondeurs de la Terre*. Masson, 1991.
- Poirier, C., M. Ammi, and J. P. Trodec. Experimental study of the geometrical effects in the localization of deformation. *Phys. Rev. Lett.*, 68, 216-219, 1992.
- Poon, C. Y., R. S. Sayles, and T. A. Jones. Surface measurement and fractal characterization of naturally fractured rocks. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 25, 1269-1275, 1992.
- Power, W. L. and T. E. Tullis. Euclidean and fractal models for the description of rock surface roughness. *J. Geophys. Res.*, 96, 415-424, 1991.
- Power, W. L., T. E. Tullis, S. R. Brown, G. N. Boitnott, and C. H. Scholz. Roughness of natural fault surfaces. *Geophys. Res. Lett.*, 14, 29-32, 1987.
- Prakash, S., S. Havlin, M. Schwartz, and H. E. Stanley. Structural and dynamic properties of long-range correlated percolation. *Phys. Rev. A*, 46(4), 1724-1727, 1992.
- Press, W. H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical recipes*. Cambridge University, 1992.

- Rabinowicz, E. The intrinsic variables affecting the stick-slip process. *Proc. Phys. Soc.*, 71, 668-675, 1958.
- Rabinowicz, E. *Friction and Wear of Materials*. John Wiley, New York, 1965.
- Ranalli, G. *Rheology of the Earth*. Allen and Unwin, Boston, 1987.
- Raoult, J. F. Le front varisque du nord de la France: Interprétation des principales coupes d'après les profils sismiques, la géologie de surface et les sondages. In Cazes, M. and G. torreilles, editors, *Etude de la croûte terrestre par sismique profonde*, chapter 11. Editions TECHNIP, Paris, 1988.
- Rice, J. R. Constitutive relations for fault slip and earthquake instabilities. *PAGEOPH*, 121, 443-475, 1983.
- Rice, J. R. First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. *J. Appl. Mech.*, 52, 571-579, 1985.
- Rice, J. R. Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis. In Wei, R. P. and R. P. Gangloff, editors, *Fracture Mechanics: Perspectives and Directions*, pages 29-57. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1989.
- Rice, J. R. Spatio-temporal complexity of slip on a fault. *J. Geophys. Res.*, 98(B6), 9885-9907, 1993.
- Rice, J. R. and S. T. Tse. Dynamic motion of a single degree of freedom system following a rate and state dependent friction law. *J. Geophys. Res.*, 91(B1), 521-530, 1986.
- Roux, S. *Structures et Désordres*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990.
- Roux, S. and A. Hansen. Interface roughening and pinning. *J. Physique I*, 4, 515-538, 1994.
- Roux, S., J. Schmittbuhl, J. P. Vilotte, and A. Hansen. Some physical properties of self-affine rough surfaces. *Europhys. Lett.*, 23, 277-282, 1993.
- Ruina, A. Slip instability and state variables friction laws. *J. Geophys. Res.*, 88(B12), 10359-10370, 1983a.
- Ruina, A. L. Slip instability and state variable friction law. *J. Geophys. Res.*, 88, 10359-10370, 1983b.
- Sayles, R. S. and T. R. Thomas. Surface topography as a nonstationary random process. *Nature*, 271, 431-434, 1978.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92, 9693, 1987.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. Nonlinear variability in geophysics: Multifractal simulations and analysis. In Pietronero, L., editor, *Fractals: Physical Origin and Consequences*, page 49. Plenum, 1989.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. Scaling nonlinear variability in geodynamics: multiple singularities, observables, universality classes. In *Scaling, fractals and nonlinear variability in geophysics*, page 41. Kluwer, 1991.
- Schertzer, D. and S. Lovejoy. Multifractals and turbulence. in press, 1994.
- Schmittbuhl, J., J. P. Vilotte, and S. Roux. Some physical properties of the burridge-knopoff model. preprint.
- Schmittbuhl, J., Y. Berthaud, and S. Roux. Analyse de rugosité de surfaces de rupture fragile. In *Rapport Scientifique du GRECO Géomatériaux*, pages 267-271, 1991.

- Schmittbuhl, J., S. Gentier, and S. Roux. Field measurements of the roughness of fault surfaces. *Geophys. Res. Lett.*, 20, 639-641, 1993a.
- Schmittbuhl, J., J. P. Vilotte, and S. Roux. Percolation through self-affine surfaces. *J. Phys. A*, 26, 6115-6133, 1993b.
- Schmittbuhl, J., J. P. Vilotte, and S. Roux. Propagative macrodislocation modes in an earthquake fault model. *Europhys. Lett.*, 21, 375-380, 1993c.
- Schmittbuhl, J., J. P. Vilotte, and S. Roux. Dynamic friction of self-affine surfaces. *J. Phys. II France*, 4, 225-237, 1994.
- Schmitt, F., D. Lavalée, D. Schertzer, and S. Lovejoy. Empirical determination of universal multifractal exponents in turbulent velocity fields. *Physical Review Letters*, 68(3), 305-308, 1992.
- Schmitt, F., D. Schertzer, S. Lovejoy, and Y. Brunet. Estimation of universal multifractal indices for atmospheric turbulent velocity fields. *Fractals*, 1(3), 568-575, 1993.
- Scholz, C. H. *The mechanics of Earthquakes and faulting*. Cambridge Univ. Press, New York, 1990.
- Scholz, C. H. Earthquakes and faulting: self-organized critical phenomena with a characteristic dimension. In Riste, T. and D. Sherrington, editors, *Spontaneous Formation of Space-Time Structures and Criticality*, pages 41-56. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Scholz, C. H. and P. A. Cowie. Determination of total strain from faulting using slip measurements. *Nature*, 346, 837-839, 1990.
- Scholz, C. H. and B. B. Mandelbrot, editors. *Fractals in Geophysique*, Basel, 1989. PAGEOPH, Birkhäuser Verlag.
- Scholz, C. H., N. H. Dawers, J. Z. Yu, M. H. Anders, and P. A. Cowie. Fault growth and fault scaling laws: Preliminary results. *J. Geophys. Res.*, 98(B12), 21951-21961, 1993.
- Shaw, B. E. Generalized omori law for aftershocks and foreshocks from a simple dynamics. *Geophys. Res. Lett.*, 20(10), 907-910, 1993.
- Shaw, B. E., J. M. Carlson, and J. S. Langer. Patterns of seismic activity preceding large earthquakes. *J. Geophys. Res.*, 97(B1), 479-488, 1992.
- Sibson, R. H. Earthquakes and rock deformation in crustal fault zones. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 14, 149-175, 1986.
- Sornette, D. and P. Davy. Fault growth model and the universal fault length distribution. *Geophys. Res. Lett.*, 18(6), 1079-1081, 1991.
- Sornette, A. and D. Sornette. Self-organized criticality and earthquakes. *Europhys. Lett.*, 9, 197-202, 1989.
- Sornette, A., P. Davy, and D. Sornette. Growth of fractal fault patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 65(18), 2266-2269, 1990a.
- Sornette, D., P. Davy, and A. Sornette. Structuration of the lithosphere in plate tectonics as a self-organized critical phenomenon. *J. Geophys. Res.*, 95(B11), 17353-17361, 1990b.
- Stanley, H. E. and P. Meakin. Multifractal phenomena in physics and chemistry. *Nature*, 405, 405-409, 1988.
- Stauffer, D. *Introduction to percolation theory*. Taylor and Francis, London, 1985.
- Tchalenko, J. S. and M. Berberian. Dasht-e-bayez fault, Iran: Earthquake and earlier related structures in bed rock. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 86, 703-709, 1975.
- Tessier, Y., S. Lovejoy, D. Schertzer, D. Lavalée, and B. Kerman. Universal multifractal

- indices for the ocean surface at far red wavelengths. *Geophys. Res. Lett.*, 20, 1167-1170, 1993.
- Thompson, M. E. Numerical simulation of solute transport in rough fractures. *J. Geophys. Res.*, 96, 4157-4166, 1991.
- Thompson, M. E. and S. R. Brown. The effect of anisotropic surface roughness on flow and transport in fractures. *J. Geophys. Res.*, 96, 21923-21932, 1991.
- Tse, S. and J. Rice. Crustal earthquake instability in relation to the depth variation of frictional slip properties. *J. Geophys. Res.*, 91, 9452-9472, 1986.
- Tullis, T. E. Rock friction constitutive behavior from laboratory experiments and its implications for an earthquake field monitoring program. *Pure Appl. Geophys.*, 126, 555-588, 1988.
- Vasconcelos, G., M. de Sousa Vieira, and S. R. Nagel. Phase transition in a spring-block model of earthquake. *Physica A*, 191, 69, 1992.
- Vicsek, T. *Fractal growth phenomena*. World Sci. Pub., Singapore, 2 edition, 1992.
- Voss, R. F. *Scaling Phenomena in Disorder Systems*. Plenum, New York, 1985.
- Wang, W. and C. H. Scholz. Scaling of constitutive parameters of friction for fractal surfaces. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 7, 1359-1365, 1993.
- Wang, W. and C. H. Scholz. Micromechanics of the velocity and normal stress dependence of rock friction. PAGEOPH (in press), 1994a.
- Wang, W. and C. H. Scholz. Wear processes during frictional sliding of rock: A theoretical and experimental study. *J. Geophys. Res.*, 99(B4), 6789-6799, 1994b.
- Weeks, J. D. Constitutive laws for high-velocity frictional sliding and their influence on stress drop during unstable slip. *J. Geophys. Res.*, 98(B10), 17637-17648, 1993.
- Williford, R. E. multifractal fracture. *Scripta Metallurgica*, 22, 1749-1754, 1988.
- Wong, T. F. Physics and chemistry of porous media II. In *AIP Conf. Proc.*, New York, 1987. Amer. Inst. Phys.
- Wong, T. F., J. T. Fredrich, and G. D. Gwanmesia. Crack aperture statistics and pore space fractal geometry of westerly granite and rutland quartzite: implications for an elastic contact model of rock compressibility. *J. Geophys. Res.*, 94, 10267-10278, 1989.
- Wong, T. F., Y. Gu, T. Yanagidani, and Y. Zhao. Stabilization of faulting by cumulative slip. In *Fault mechanics and transport properties of rocks*, chapter 5. Academic Press, 1992.
- Yamada, K., J. Kagami N. Takeda, and T. Naoi. Mechanisms of elastic contact and friction between rough surfaces. *Wear*, 48, 15-34, 1978.
- Yoshioka, N. and C. H. Scholz. Elastic properties of contacting surfaces under normal and shear loads 1. theory. *J. Geophys. Res.*, 94, 17681-17690, 1989a.
- Yoshioka, N. and C. H. Scholz. Elastic properties of contacting surfaces under normal and shear loads 1. comparison of theory with experiment. *J. Geophys. Res.*, 94, 17691-17700, 1989b.

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|----|
| 0.1 | principales sources d'énergie | 2 |
| 0.2 | Principaux processus de dissipation de l'énergie terrestre | 4 |
| 0.3 | Echelles de temps du phénomène sismique | 12 |
| 1.1 | Résultats de l'analyse d'auto-affinité aux différentes échelles de mesures, suivant les quatre méthodes utilisées. | 40 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|-----|
| 0.1 | Profil de température à l'échelle du globe. | 4 |
| 0.2 | Illustration de la rhéologie hétérogène de la lithosphère continentale. | 6 |
| 0.3 | Carte sismique de la région de la faille de San Andréas. | 8 |
| 0.4 | Exemple de profil sismique mettant en évidence des traces de failles géologiques. | 9 |
| 0.5 | Distribution de la magnitude des séismes: loi de Gutenberg-Richter. | 13 |
| 1.1 | Méthode de fenêtre | 30 |
| 1.2 | Probabilité de retour | 31 |
| 2.1 | Etude expérimentale du déplacement vertical $h(d)$ en fonction du déplacement horizontal d , dans un diagramme log-log. Une loi de puissance avec un exposant 0.83 (exposant mesuré sur la surface considérée) est ajoutée. | 126 |
| 1.1 | Analyse du nombre N d'intersections entre chaque profil et le plan moyen de fracture en fonction de la distance au bord d'initiation de la fracture. | 193 |
| 1.2 | Propagation d'un front dans un milieu homogène contenant deux inclusions plus résistantes à la fracture. K_c y est deux fois plus élevé que dans le reste du milieu. La figure superpose différentes étapes de la propagation. | 200 |
| 1.3 | Allure du front de fracture avec intégration d'un noyau à longue portée: $\zeta = 0.35$ (a) et d'un noyau local: $\zeta = 1.2$ (b). | 201 |
| 1.4 | Analyse de Furuberg basée sur l'estimation de la distribution des distances entre points de rupture pour différents intervalles de temps. | 203 |
| 2.1 | Description d'une faille à trois échelles différentes: a) 10 km, b) 1km, c) 500 m et d) 100 m. | 230 |
| 2.2 | Evolution de la contrainte cisailante en fonction du glissement. | 233 |
| 2.3 | Evolution du coefficient de frottement en fonction du temps de contact. | 234 |
| 2.4 | Evolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse d'entraînement lors d'expériences cinématiques. | 235 |
| 2.5 | Mouvement de glissement saccadé (ou «stick-slip») d'un bloc entraîné par un ressort déplacé à vitesse constante. | 237 |
| 2.6 | Transition entre mouvement de glissement saccadé (ou «stick-slip») et mouvement continu (ou «creep»). | 238 |

| | | |
|------|--|-----|
| 2.7 | Phénomène d'hystérésis dans la mesure du coefficient dynamique en fonction de la vitesse. | 239 |
| 2.8 | Mesure de la surface de contact (A_r) en fonction du chargement normal N | 241 |
| 2.9 | Mesure de la surface de contact (A_r) en fonction du temps de chargement. | 243 |
| 3.1 | Réponse microscopique du système | 270 |
| 3.2 | Etude de la réponse du système à l'échelle macroscopique (i.e. échelle de l'ensemble du système) pour deux paramétrages du système: $\Theta = 0.1$ (en haut) et $\Theta = 1.0$ (en bas). La vitesse moyenne de glissement $\langle \dot{u} \rangle (t)$ est dessinée en fonction du temps. | 272 |
| 3.3 | Etude de la réponse du système en termes de «portrait de phase». Il s'agit de l'évolution de la vitesse moyenne des patins en fonction de leur position moyenne pour deux valeurs de Θ ($\Theta = 0.1$ et $\Theta = 1.0$). | 274 |
| 3.4 | Etude de la réponse en frottement macroscopique (i.e. à l'échelle du système): densité moyenne de la force de frottement F_f qu'oppose le système lorsqu'il est tiré à vitesse constante. La figure illustre la dépendance de F_f avec la taille du système N et la vitesse d'entraînement ν_s | 278 |
| 3.5 | Influence du paramètre d'élasticité l sur la densité moyenne de frottement. | 279 |
| 3.6 | Etude de la puissance dissipée par frottement. La puissance est calculée comme le produit de la force moyenne par la vitesse d'entraînement. | 281 |
| 3.7 | Etude de la dépendance de la densité de frottement avec la vitesse caractéristique de frottement. | 282 |
| 3.8 | Solution microscopique avec radiation | 283 |
| 3.9 | Schéma du réseau bidimensionnel «horizontal» de patins-ressorts. Son coefficient de Poisson est non nul du fait de sa coordinance égale à 6. | 285 |
| 3.10 | Réponse en vitesse V_x moyenne du système bidimensionnel pour deux sollicitations différentes: $\nu_x = 0.01$ (en haut) et $\nu_x = 0.1$ (en bas). La taille du système est 128×128 et sa raideur $l = 5$. La transition glissement saccadé - glissement continu est respectée. | 286 |
| 3.11 | Loi de frottement pour le modèle bidimensionnel en fonction de la vitesse d'entraînement. | 287 |
| 3.12 | Loi de frottement pour pour un système constitué d'un seul patin. | 288 |

Listes des articles publiés ou en préparation

1. J. Schmittbuhl, G. Olivier and S. Roux, *Multifractality of the current distribution in directed percolation*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**, pp. 2119-2125, 1992.
2. J. Schmittbuhl and S. Roux, *The influence of internal stresses on the fracture of heterogeneous media*, *Modeling Simul. Mater. Sci. Eng.*, **2**, pp. 21-52, 1994.
3. J. Schmittbuhl, S. Gentier and S. Roux, *Field Measurements of the Roughness of Fault Surfaces*, *Geophys. Res. Lett.*, **20** (8), pp. 639-641, 1993.
4. S. Roux, J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and A. Hansen, *Some Physical Properties of Self-Affine Rough Surfaces*, *Europhys. Lett.*, **23** (4), pp. 277-282, 1993.
5. J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux, *Propagative Macrodislocation Modes in an Earthquake Fault Model*, *Europhys. Lett.*, **21** (3), pp. 375-380, 1993.
6. J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux, *Percolation through self-affine surfaces*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**, pp. 6115-6133, 1993.
7. J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux, *Dynamic friction of self-affine surfaces*, *J. Phys. II (France)*, **4**, pp. 225-237, 1993.
8. J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux, *Reliability of Self-Affine Measurements*, à paraître dans *Phys. Rev. E*.
9. J. Schmittbuhl, F. Schmitt and C. Scholz, *Scaling Invariance of Crack Surfaces*, à paraître dans *J. Geophys. Res.*.
10. F. Plouraboué, S. Roux, J. Schmittbuhl and J.P. Vilotte, *Geometry of contact between self-affine surfaces*, à paraître dans: *Fractals*.
11. J. Schmittbuhl, S. Roux and Y. Berthaud, *Development of roughness in crack propagation*, à paraître dans: *Europhys. Lett.*.
12. J. Schmittbuhl, S. Roux, J.P. Vilotte and K.J. Måløy, *Pinning of interfaces: effect of non local interactions*, soumis à: *Phys. Rev. Lett.*.

13. J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux, *Analytic characterization of propagative solutions in a discrete friction model*, soumis à: *Phys. Rev. E*.
14. J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux, *Velocity weakening friction: A renormalisation approach*, soumis à: *Geophys. Res. Lett.*.
15. F. Plouraboué, P. Kurowski, J.P. Hulin, S. Roux and J. Schmittbuhl, *Aperture of rough crack*, soumis à: *Phys. Rev. E*.
16. J. Schmittbuhl, J.P. Vilotte and S. Roux, *Conservative and dissipative events in an earthquake fault model* en préparation.