HAL
open science

Expériences et simulations de matériaux autobloquants

Magali Dugue Dugué

To cite this version:

Magali Dugue Dugué. Expériences et simulations de matériaux autobloquants. Autre. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENI002 . tel-00820069

HAL Id: tel-00820069

https://theses.hal.science/tel-00820069

Submitted on 3 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Matériaux, Mécanique, Génie Civil, Électrochimie**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Magali DUGUÉ

Thèse dirigée par **Marc FIVEL**
et codirigée par **Yves BRÉCHET**

préparée au sein **du Laboratoire Science et Ingénierie des Matériaux et Procédés**
et de **l'École Doctorale Ingénierie – Matériaux, Mécanique, Environnement, Énergétique, Procédés, Production**

Expériences et simulations de matériaux autobloquants

Thèse soutenue publiquement le **18 Février 2013**,
devant le jury composé de :

M. Olivier BOUAZIZ
Ingénieur-Recherche, HDR à ArcelorMittal, Rapporteur
M. Christophe BOUVET
Professeur à l'ISAE, Rapporteur
M. Laurent TABOUROT
Professeur à l'Université de Savoie, Examinateur
M. Marc THOMAS
Ingénieur-Recherche, HDR à l'ONERA, Examinateur
M. Marc FIVEL
Directeur de Recherche au laboratoire SIMAP, Directeur de thèse
M. Yves BRÉCHET
Professeur à Grenoble-INP, Co-Directeur de thèse
M. Rémy DENDIEVEL
Professeur à Grenoble-INP, Invité

Remerciements

Même si une thèse est une expérience très enrichissante, elle est aussi une expérience difficile. Sans l'aide et le soutien d'un certain nombre de personnes, je n'en serais probablement pas là aujourd'hui. Je tiens donc à remercier ces personnes.

Pour commencer, j'aimerais remercier mes directeurs de thèse Marc Fivel et Yves Bréchet ainsi que Rémy Dendievel avec qui ça a été un plaisir de travailler pendant mes trois ans de thèse et avec qui les échanges ont été très instructifs et enrichissants.

J'aimerais ensuite remercier les membres du jury, Olivier Bouaziz, Christophe Bouvet, Laurent Tabourot, Marc Thomas qui ont participé à l'évaluation de mes travaux de thèse et qui m'ont fait l'honneur de venir à Grenoble pour assister à ma soutenance.

Ma thèse était inscrite dans le projet ANR MANSART. Ce projet m'a donné l'occasion de rencontrer des personnes extérieures au laboratoire et avec qui j'ai pu échanger et travailler au cours de ma thèse. Je voudrais donc remercier tous les partenaires du projet MANSART en commençant par Marc Thomas et Yves Bréchet qui ont piloté ce projet. J'aimerais aussi remercier Justin Dirrenberger, Loïc Courtois, Amélie Kolopp, Marion Amiot, Pierre Leite, Cécile Davoine, Frank Simon, Pierrick Péchambert, Dominique Bissières, Dominique Poquillon, Valia Fascio, Sophie Gourdet, Yannick Girard, Eric Maire, Michel Perez, Anne Perwuelz, Maryline Lewandowski, Samuel Forest, Dominique Jeulin et Sjoerd van der Veen.

Je voudrais aussi remercier les membres du laboratoire SIMaP-GPM2 qui m'ont accueillie dans une ambiance chaleureuse et très conviviale. J'aimerais remercier en particulier Franck Pelloux, Charles Josseron et Xavier Bataillon qui m'ont aidé pendant la mise en place de mes expériences. Claire Thomasson et Claude Ghiotti qui ont été d'une grande aide sur les points administratifs. Je voudrais aussi remercier les doctorants du GPM2 ainsi que Ratigal qui ont été d'un grand soutien pendant ma thèse.

Merci aux membres du projet FYT en espérant pouvoir revoler un jour.

Et pour finir, j'aimerais remercier ma famille qui m'a également beaucoup soutenue tout au long de mon parcours.

Résumé

Les matériaux à topologie autobloquante sont des pavages périodiques de blocs élémentaires dont la cohésion est assurée par la géométrie particulière des blocs ainsi que par l'application d'une précompression latérale. Ces assemblages peuvent notamment être réalisés entre autres possibilités à partir de tous les solides platoniciens ou à l'aide de blocs 'ostéomorphes'.

Ces pavages sont de nouveaux exemples de matériaux hybrides, car il est possible d'y associer différents matériaux dans le but d'obtenir des combinaisons de propriétés impossibles à réaliser dans le cas d'un matériau monolithique. Ce sont aussi des matériaux architecturés, car il est aussi possible de jouer sur la géométrie des blocs individuels.

De nombreux paramètres appelés variables de fabrication influencent le comportement de ces assemblages : le coefficient de frottement et la précompression latérale appliquée aux limites de l'assemblage ont une influence prépondérante. L'effet de la précompression a été étudié expérimentalement en réalisant des essais d'indentation sur des structures autobloquantes de cubes en alumine ainsi que sur plusieurs assemblages de blocs ostéomorphes en polymère réalisés par prototypage rapide et formant différentes structures parfois hiérarchisées.

Nous avons également développé un outil numérique de simulation du comportement de structures autobloquantes qui utilise la méthode des éléments discrets. Chaque bloc est représenté par son barycentre et un repère local associé. Les lois locales qui régissent l'interaction entre deux blocs sont déterminées par éléments finis.

Nous avons utilisé la méthode des éléments finis ainsi que le code discret pour simuler des essais d'indentation de structures autobloquantes, et étudier numériquement l'influence de différentes variables de fabrication ou bien d'autres variables telles que l'endommagement. Les simulations numériques mettent en évidence l'existence d'une courbe maîtresse parabolique qui décrit assez bien les courbes d'indentation expérimentales. Ces courbes maîtresses possèdent des paramètres caractéristiques qui dépendent de ces variables de fabrication.

Un phénomène de rigidité négative dû au caractère élastique de chacun des blocs au cours de la décharge d'un essai d'indentation déjà observé par A. Dyskin sur des assemblages de cubes a pu être reproduit.

Les phénomènes physiques se produisant lors de l'indentation d'un assemblage de blocs cubiques ou ostéomorphes sont maintenant mieux compris. Dans notre cas, il y en a deux : d'une part le glissement entre les blocs et d'autre part la rotation entre les blocs.

Summary

Interlocked materials are periodic paving of elementary blocks. The cohesion is insured by the boundary conditions applied on the edge of the assembly as well as the topology of the blocks. This paving can also be built for instance from all platonic solids or with the help of osteomorphic blocks.

It is possible to use blocks built with different materials inside the same assembly. Therefore, those paving are new examples of architectured materials, halfway between materials and structures, which associate different materials in a certain configuration to obtain combinations of properties, which is not possible to realize in the case of a monolithic material.

Two parameters are strongly influencing the behavior of those structures : the friction coefficient and the boundary conditions applied on the edge of the assembly. The effect of the boundary conditions has been experimentally quantified by performing indentation tests on structures built with cubic blocks in alumina.

Osteomorphic blocks have been built in polymer by rapid prototyping. Indentation tests on several assemblies of osteomorphic blocks in polymer forming different structures have been realized. A numerical tools, that can simulate the behavior of interlocked structures built with cubes or osteomorphic blocks, has also been developed. This code uses the discrete element method. Each block is represented by its center of mass and its local base associated. Local laws that govern the interaction between the two blocks are determined with the help of finite element simulations of the mechanical response of the contact between two blocks.

This code has been used to simulate indentation experiment on interlocked structures and numerically study the influence of the different parameters used to design the assembly such as the geometry of the blocks (cubic or osteomorphic), the friction coefficient, the boundary conditions, the size of the blocks and the structure.

Simulations of indentation of nineteen blocks assemblies have also been made with finite element results and compared to the results obtained with the discrete element code.

Then, the study of discrete element simulation brought to light the existence of a master curve that is similar to the experimental indentation curves. Therefore the indentation curves can be described by few parameters. The evolution of those parameters can be studied according to the design parameters.

This code also leads to a better understanding of the phenomena that occurs inside the assembly during the mechanical loading. In the case of a cubic interlocked paving, there is a competition between the sliding between the blocks and the rotation between the blocks.

Table des matières

Notations utilisées **9**

Introduction **12**

1 Les matériaux autobloquants **22**

1.1 Le concept des matériaux autobloquants 24

1.1.1 Les structures platoniciennes 24

1.1.2 Les structures à base de géométries non platoniciennes 28

1.1.3 Les structures à base de blocs ostéomorphes 29

1.2 Les propriétés des matériaux autobloquants 33

1.2.1 Raideur en indentation 34

1.2.2 Ténacité 36

1.2.3 Absorption acoustique 37

1.2.4 Dissipation d'énergie 39

1.2.5 Restitution d'énergie 40

1.2.6 Influence des variables de fabrication 42

1.2.7 Tolérance à l'endommagement 46

1.3 Les applications 48

1.3.1 Bouclier thermique de navette spatiale 48

1.3.2 Construction extraterrestre 49

1.3.3 Le génie civil 50

1.3.4 Les matériaux hybrides 52

2 Essais d'indentation d'assemblages autobloquants **55**

2.1 Méthode expérimentale utilisée dans le cas des cubes 58

2.2 Résultat de l'indentation d'un assemblage de cubes en alumine 61

2.3 Méthode expérimentale utilisée dans le cas des blocs ostéomorphes 68

2.3.1 Forme de l'indenteur 68

2.3.2 Mise en forme de l'assemblage 68

2.3.3 Installation de l'assemblage à l'intérieur de la machine de compression . . 69

2.4 Résultat de l'indentation d'assemblages de blocs ostéomorphes en polymère . . . 70

2.4.1 Indentation d'un assemblage hexagonal de 19 blocs 70

2.4.2 Indentation d'un assemblage hexagonal de 217 blocs 76

2.4.3 Indentation de l'assemblage Coarse 85

2.4.4 Indentation de l'assemblage Tissé 91

2.4.5 Comparaison des assemblages de blocs ostéomorphes étudiés 96

2.5 Synthèse des résultats expérimentaux 98

3 Méthodologie de simulations d'assemblages autobloquants 101

3.1 Introduction à la méthode des éléments discrets 103
3.2 Démarche de modélisation 103
3.2.1 Modélisation d'un bloc 104
3.2.2 Modélisation de l'interface 104
3.2.3 Modélisation par éléments finis de l'interaction entre deux blocs 104
3.2.4 Conditions aux limites 105
3.2.5 Recherche de l'équilibre 106
3.3 Algorithme utilisé dans le code d'éléments discrets 108
3.3.1 Repère utilisé dans le cas des cubes 108
3.3.2 Repère utilisé dans le cas des ostéomorphes 108
3.3.3 Déplacement relatif entre deux blocs 110
3.3.4 Position relative angulaire entre deux blocs 112
3.3.5 Calculs des efforts et du déplacement du point d'application de la force . 114
3.3.6 Calculs des moments 114
3.3.7 Somme des forces et des moments sur un bloc 115
3.3.8 Vérification des conditions d'équilibre 115
3.3.9 Algorithme Verlet-Vitesse 115
3.4 Détermination des lois de contact entre deux cubes par éléments finis 117
3.4.1 Repère utilisé et notations 117
3.4.2 Forme générale des lois de comportement 119
3.4.3 Effet du déplacement 121
3.4.4 Effet d'une rotation 128
3.4.5 Synthèse des lois de contact entre deux cubes 142
3.5 Détermination des lois de contact entre deux blocs ostéomorphes 143
3.5.1 Cas des surfaces planes de blocs ostéomorphes 143
3.5.2 Cas des surfaces réglées de blocs ostéomorphes 146
3.5.3 Synthèse des lois de contact entre deux blocs ostéomorphes 149

4 Simulations d'indentations d'assemblages autobloquants 154

4.1 Cas des cubes 156
4.1.1 Simulation par éléments discrets 156
4.1.2 Confrontation avec les simulations par éléments finis 157
4.1.3 Étude paramétrique 158
4.2 Cas des ostéomorphes 180
4.2.1 Simulations par éléments finis 180
4.2.2 Étude paramétrique 182
4.3 Synthèse et conclusion des simulations numériques 202

Conclusion **208**

A Caractérisation mécanique du polymère par essais de traction **212**
A.1 Schéma de l'éprouvette 214
A.2 traction des éprouvettes en polymère - premier essai de traction 215
A.3 traction des éprouvettes en polymère - second essai de traction 215

B Utilisation d'Abaqus **218**

C Détail des lois de contact entre les surface planes de deux blocs ostéomorphes **226**
C.1 Effet du déplacement 228
C.1.1 Effet d'un déplacement $+D_x$ 228
C.1.2 Effet d'un déplacement $+D_y$ 230
C.1.3 Effet d'un déplacement $+D_z$ 232
C.2 Effet d'une rotation 236
C.2.1 Effet d'une rotation $+R_x$ 237
C.2.2 Effet d'une rotation $+R_y$ 237
C.2.3 Effet d'une rotation $\pm R_z$ 240

D Détail des lois de contact entre les surfaces réglées de deux blocs ostéomorphes **246**
D.1 Effet d'un déplacement 248
D.1.1 Effet d'un déplacement $\pm D_x$ 248
D.1.2 Effet d'un déplacement $\pm D_y$ 250
D.1.3 Effet d'un déplacement $\pm D_z$ 258
D.2 Effet d'une rotation 264
D.2.1 Effet d'une rotation $\pm R_x$ 264
D.2.2 Effet d'une rotation $\pm R_y$ 270
D.2.3 Effet d'une rotation $\pm R_z$ 275

Bibliographie **285**

Notations utilisées

$\vec{F}$=$\{F_x$,F_y,$F_z\}$: Vecteur force
$\vec{D}$=$\{D_x$,D_y,$D_z\}$: Vecteur déplacement
$\vec{R}$=$\{R_x$,R_y,$R_z\}$: Vecteur rotation
$\vec{P_0} = \{P_{0_x}, P_{0_y}, P_{0_z}\}$: Centre de l'interface
$\delta\vec{P} = \{\delta P_x, \delta P_y, \delta P_z\}$: Déplacement du point d'application de la force
$\vec{P} = \vec{P_0} + \delta\vec{P}$: Position du point d'application de la force
L : Longueur du bloc cubique ou ostéomorphe
$L_C = \frac{L}{4}$: Distance entre le bord du bloc et le centre de l'interface entre 2 cubes
$L_R = \frac{L}{4} = \frac{a}{2}$: Distance entre le bord du bloc et le centre de l'interface entre les surfaces réglées
$L_P = \frac{l}{2}$: Distance entre le bord du bloc et le centre de l'interface entre les surfaces planes
e : Hauteur du bloc
h : Retrait
$l - 2h$: Largeur du bloc
a : Demi-longueur du bloc
E : Module d'Young
σ : Contrainte
S : Surface en contact
O_1 : Centre du bloc 1
O_2 : Centre du bloc 2
K_{zx}^{C} : Raideur reliant la force X et le déplacement selon +Z pendant la charge dans le cas d'un contact entre deux cubes

K_{xya}^{Pumd} : Raideur reliant la force Y et le déplacement selon -X pendant la décharge dans le cas d'un contact entre les surfaces planes de deux blocs ostéomorphes avec :

- u : décollement, les deux blocs ne sont plus en contact
- m : déplacement dans le sens négatif
- d : décharge
- x : application d'un déplacement selon X
- y : étude de la composante selon Y issue du déplacement selon X
- a : première partie de la décharge

J_{xyb}^{Rumd} : Raideur reliant la force Y et la rotation négative autour de X pendant la décharge dans le cas d'un contact entre les surfaces réglées de deux blocs ostéomorphes avec :

- u : décollement, les deux blocs ne sont plus en contact
- m : rotation dans le sens négatif
- d : décharge

- x : application d'une rotation autour de l'axe X
- y : étude de la composante selon Y issue d'une rotation autour de l'axe X
- a : seconde partie de la décharge

Précontrainte : donnée exprimée en kPa, correspond à l'effort appliqué sur les bords de l'assemblage dans le but de bloquer les blocs du bord.

Précompression : donnée exprimée en N/mm, correspond au couple appliqué dans les vis de précompression. Ces vis vont appliquer un déplacement aux blocs du bord de l'assemblage dans le but de bloquer ces bords.

Introduction

Les matériaux architecturés et multifonctionnels

De nos jours, dans de nombreux milieux industriels, les cahiers des charges sont de plus en plus exigeants et les matériaux doivent répondre à des critères de plus en plus sévères. De plus, de nouveaux critères ont fait leur apparition tels le coût de fabrication, la masse des matériaux de construction, l'économie d'énergie, etc..., ce qui ajoute des contraintes supplémentaires. Les matériaux doivent maintenant répondre à des exigences multiphysiques comme par exemple la résistance mécanique combinée à de la résistance thermique et/ou de l'absorption vibratoire. Mais il est souvent difficile d'associer des propriétés physiques antagonistes. Pour obtenir un matériau qui pourrait remplir plusieurs fonctions, une nouvelle classe de matériau est apparue : les matériaux architecturés.

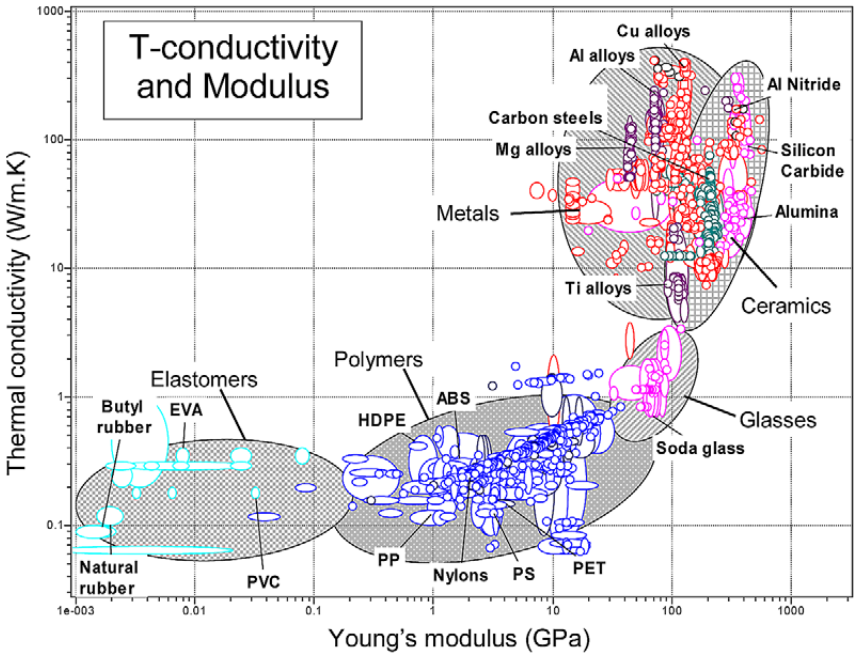


FIGURE 1 – Répartition des matériaux dans l'espace de la conductivité thermique en fonction du module d'Young

La figure 1 représente 2300 matériaux sur une carte où chacun d'entre eux est positionné à la fois en fonction de sa conductivité thermique et de son module d'Young. Ce type de carte est classiquement utilisée pour effectuer une sélection de matériaux (Ashby [1989]). Cependant, on constate qu'il existe des zones entières dans lesquelles aucun matériau n'est disponible. Ainsi par exemple, il n'y a aucun matériau représenté sur cette carte ayant à la fois une forte conductivité thermique et un faible module d'Young.

Il existe deux méthodes permettant d'optimiser des matériaux et ainsi combler en partie ces zones vierges :

– D'une part, il est possible de jouer sur la microstructure pour améliorer les propriétés du matériau dans le cas de céramiques, de métaux ou bien la formule chimique dans le cas

de polymères. Cette méthode permet d'agir à l'échelle micrométrique.

– D'autre part, il est aussi possible d'optimiser la géométrie d'un matériau pour optimiser la résistance mécanique et en même temps obtenir la structure la plus légère possible. Avec cette méthode, on agit à l'échelle centimétrique. Ces méthodes permettent d'ajouter de nombreux matériaux et d'élargir le domaine de certains matériaux sur ces cartes, mais cette méthode a ses limites.

Une autre échelle qui se situe entre les deux est l'échelle millimétrique et correspond à celle des matériaux hybrides. Cette échelle n'a pas été beaucoup explorée. Les matériaux hybrides ajoutent des degrés de liberté qui permettent d'ajouter de la multifonctionnalité aux matériaux : il est alors possible de combiner des matériaux de différentes classes tels ceux de la figure 2.

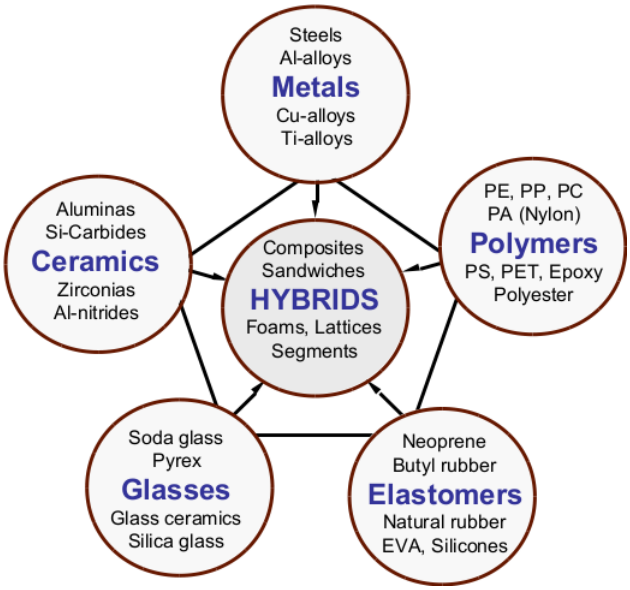


FIGURE 2 – Différentes classes de matériaux pouvant être utilisées pour la réalisation de matériaux hybrides Ashby and Bréchet [2003]

Les matériaux hybrides doivent être conçus avec des paramètres très précis pour une application donnée (Ashby [2005], Ashby and Bréchet [2003]). Citons l'exemple de l'acier galvanisé : l'acier est recouvert de zinc, ce qui lui permet de résister à la corrosion tout en conservant ses propriétés de ténacité et de résistance mécanique. Un autre exemple est le cas de matériaux composites où l'orientation des fibres est choisie pour améliorer les propriétés mécaniques du matériau suivant des directions particulières.

M. Ashby a classé ces matériaux hybrides en quatre catégories (voir figure 3) :

– Les matériaux composites : ce sont des matériaux qui peuvent concilier résistance mécanique et rigidité en traction avec faible masse. Il est aussi possible d'associer un effort optimal pour une valeur de conductivité thermique, un coefficient d'expansion et de chaleur spécifique.

– Les mousses et les treillis qui sont des matériaux très légers et possédant des propriétés isolantes thermique et acoustique (car très poreux). Les mousses possèdent aussi de bonnes capacités d'absorption d'énergie dans le cas de chocs et peuvent aussi présenter une bonne

rigidité en flexion.

- Les structures sandwichs : en combinant différents matériaux dans une structure appelée sandwich, c'est-à-dire un cœur entre deux peaux, il est possible d'obtenir des propriétés multifonctionnelles, comme dans le cas d'un matériau cœur constitué de sphères creuses qui permettent une isolation acoustique Fallet et al. [2008] et d'un matériau peau en aluminium qui donne une bonne résistance mécanique au sandwich.
- Les matériaux fragmentés : c'est dans cette catégorie que nous situons les matériaux à topologie autobloquante. Ces matériaux offrent une bonne flexibilité et une bonne résistance mécanique. En plus de ces deux propriétés, ces matériaux peuvent aussi des propriétés de résistance thermique ainsi que d'absorption vibratoire

La réalisation d'un matériau hybride consiste d'abord à effectuer une sélection des matériaux appropriés, de les combiner et de les optimiser géométriquement pour rendre le matériau hybride le plus performant possible pour une application donnée.

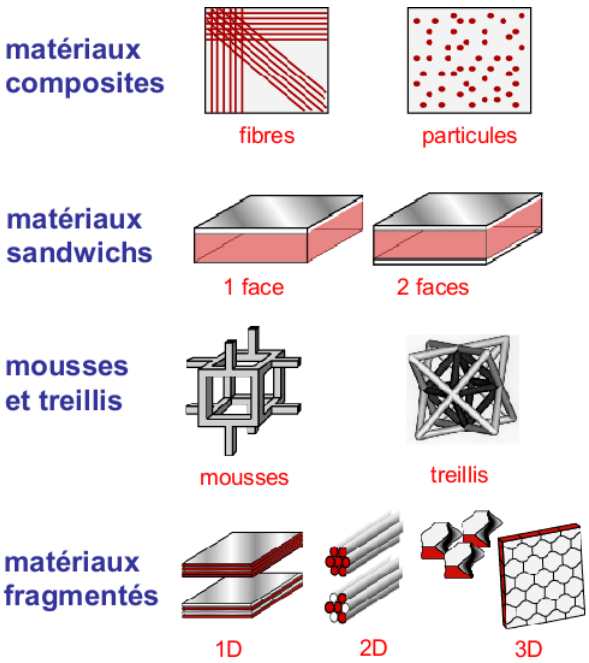


FIGURE 3 – Différentes catégories de matériaux hybrides Ashby and Bréchet [2003]

Les matériaux architecturés au laboratoire SIMaP

De nombreux matériaux architecturés sont étudiés au sein du laboratoire SIMaP comme les mousses, les matériaux enchevêtrés,...

Les matériaux autobloquants font aussi partie des matériaux architecturés étudiés au laboratoire SIMaP, en particulier lors de travaux de la thèse de Brugger [2008].

La thèse de C. Brugger

Durant cette thèse, Brugger [2008] a étudié des assemblages de blocs ostéomorphes en glace ainsi que des assemblages de cubes en plâtre. Ces expériences ont permis de comprendre comment les assemblages se comportent lorsque différents paramètres de fabrication varient, tels que le coefficient de frottement, la précompression latérale, la taille des blocs ou encore la taille de l'assemblage.

Ces travaux de thèse ont également donné lieu à l'ébauche d'un premier code numérique fondé sur la méthode des éléments discrets dans le but de simuler des assemblages autobloquants de cubes. Les lois de contact (lois locales) avec frottement entre deux cubes sont déterminées par éléments finis. Grâce à ce code, différentes études ont pu être faites sur des assemblages.

Nous présenterons en détail les travaux réalisés par Brugger [2008] dans le chapitre suivant.

Les autobloquants dans le projet MANSART : Les matériaux sandwichs architecturés

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans le projet ANR MANSART piloté par l'ONERA. Le projet MANSART est un consortium financé par l'ANR réunissant des industriels (ATECA, SMCI, AIRBUS, EADS) et des laboratoires (SIMAP, MATEIS, MINES-ParisTech, ENSAIT, CIRIMAT, LGMT).

Dans MANSART, 5 autres thèses se déroulent en parallèle :

- Matériaux monofilamentaires enchevêtrés : étude des relations microstructure-propriétés mécaniques (expériences et simulations - Courtois et al. [2012] - MATEIS)
- Impact sur structures sandwichs à âmes à fibres enchevêtrées (expériences et simulations - Amélie Kolopp - LGMT)
- Propriétés mécaniques effectives des matériaux architecturés par simulation numérique massive et prototypage rapide (Dirrenberger et al. [2011, 2012a,b], centre des matériaux, ENSMP)
- Mise en œuvre et étude de structures de non-tissés et de composites poreux multifonctionnels en para-aramide : Absorption acoustique et Résistance à l'impact (Marion Amiot - Lewandowski et al. [2012] - ENSAIT)
- Développement de nouvelles conceptions de structures sandwichs composites (expériences et simulations - Mezeix et al. [2009] - CIRIMAT)

Le but de ce projet est de travailler sur de nouveaux matériaux de type architecturés plus légers et qui ont la capacité d'absorber plus d'énergie dans le but de remplacer les nids d'abeilles. Les matériaux ayant un potentiel multicritères doivent être identifiés par la modélisation avant d'être réalisés.

Les assemblages autobloquants sont l'un des matériaux étudiés dans le cadre du projet MANSART : nous nous intéresserons plus particulièrement aux pavages 2D constitués de blocs cubiques ou ostéomorphes. Ces pavages sont étudiés pour être utilisés comme cœur

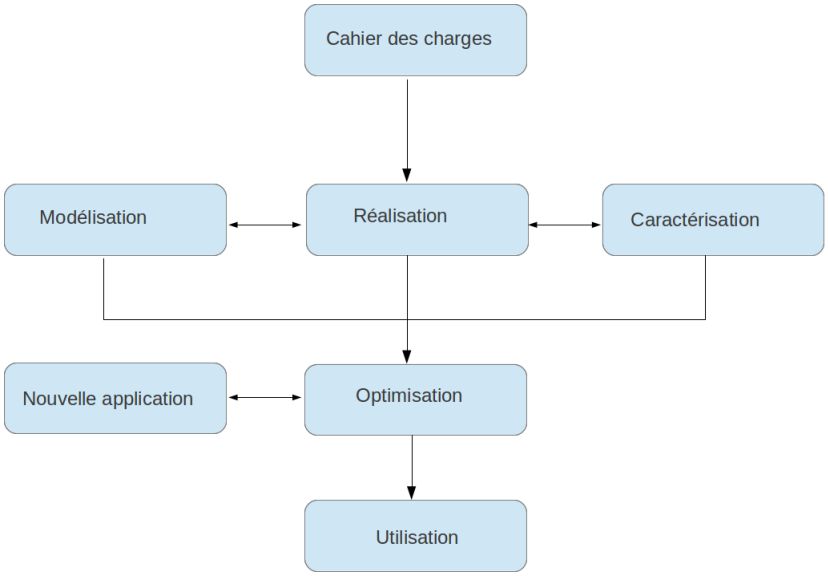


FIGURE 4 – Procédure de réalisation de matériaux sur mesure

de matériaux sandwichs pour la protection du fuselage d'un avion par exemple (fig 5). Les matériaux constitutifs des assemblages envisagés dans le cadre du projet MANSART sont des céramiques, l'aluminium et un élastomère.

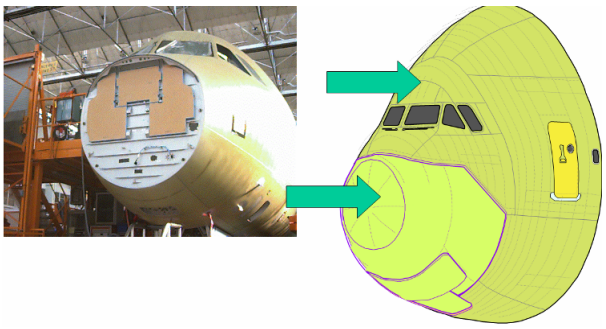


FIGURE 5 – Protection du fuselage d'un avion

Les autobloquants dans le labex CEMAM

Le labex CEMAM est un Centre d'Excellence sur les Matériaux Architecturés Multifonctionnels. Le rôle de ce centre est de concevoir, réaliser et caractériser des matériaux hybrides. Pour cela, le centre réunit 130 scientifiques issus de trois laboratoires grenoblois (SIMAP, LEPMI, LMGP) ainsi qu'une équipe expérimentale du LiPHY. Ces scientifiques issus de différents domaines tels que les sciences des matériaux, physique, mécanique et biologie s'attachent à concevoir des 'matériaux sur mesure' qui rempliront des cahiers des charges de plus en plus précis et répondant à de plus en plus de contraintes. Ces activités de CEMAM sont réparties dans 6 projets transversaux interdisciplinaires.

– Matériaux à hautes performances pour environnements extrêmes

- Ingénierie des films minces
- Allègement des structures
- Fonctionnalisation thermique des bâtiments
- Matériaux multifonctionnels pour les générateurs électrochimiques
- Conception de Biomatériaux pour l'ingénierie tissulaire

Le centre a aussi pour rôle de contribuer à l'enseignement des matériaux en France. Il réunit une école d'ingénieur (PHELMA dans Grenoble-INP) deux écoles doctorales, trois masters dont deux internationaux ainsi qu'un centre de formation intégré qui encadrera des projets de collaboration avec des partenaires industriels.

Les matériaux autobloquants sont des pistes envisageables pour réaliser certains de ces matériaux architecturés multifonctionnels. Ainsi des assemblages de blocs en céramiques permettent à la fois une tenue à haute température et une bonne résilience, leur permettant ainsi de résister à des environnements extrêmes comme par exemple dans le cas de bouclier de réacteur d'avion protégeant l'électronique embarquée.

L'objectif de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux de Brugger [2008].

Dans un premier temps, les travaux menés dans cette thèse ont consisté à reprendre les expériences de Brugger [2008]. Les mêmes essais d'indentation d'assemblages de cubes seront effectués avec des blocs en alumine dense, puis avec des blocs de formes ostéomorphes en polymère réalisés par prototypage rapide.

Dans un second temps, la thèse a consisté à compléter les résultats obtenus lors des expériences grâce à des simulations numériques afin de comprendre les effets induits par les différents paramètres de fabrication des assemblages. En effet, numériquement, il est possible de faire varier un grand nombre de paramètres de fabrication d'assemblages autobloquants de blocs cubiques ou ostéomorphiques (tels que le coefficient de frottement, la précompression latérale, la taille des blocs ou encore la taille de l'assemblage).

Des simulations numériques ont été effectuées par éléments finis ainsi que par éléments discrets. Dans cette optique, le développement du code éléments discrets initié par Brugger [2008] a été poursuivi et une nouvelle géométrie a été ajoutée : la géométrie ostéomorphe simplifiée. Les lois de contact entre les blocs ont été identifiées par éléments finis puis introduites dans le code. Des simulations par éléments finis d'assemblages complets ont également été réalisées à la fois pour valider le code d'éléments discret et pour étudier l'influence de certains paramètres de conception.

Ce mémoire sera divisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous présenterons un résumé des différents travaux effectués jusqu'à ce jour sur les matériaux autobloquants. Le second chapitre portera sur les expériences de caractérisation effectuées sur deux familles d'assemblages autobloquants : la première famille est constituée de cubes en alumine et la seconde de blocs ostéomorphes en polymère. Ensuite, nous présenterons les détails du modèle d'éléments

discrets avec une attention particulière portée sur l'identification des lois aux contacts, à la fois dans le cas de blocs cubiques et pour des blocs ostéomorphes. Pour finir, nous exposerons les résultats des simulations numériques obtenus soit par les éléments finis ou par le code d'éléments discrets.

Note pour le lecteur :

Ce manuscrit a été rédigé avec un double objectif : d'une part de présenter les travaux de ma thèse de doctorat et d'autre part de servir de document de travail aux futurs étudiants qui prendront la relève. À cette fin, les données techniques relatives aux simulations par éléments finis des lois de contacts sont entièrement détaillées dans les annexes. La lecture de ces annexes n'est cependant pas nécessaire pour comprendre la démarche de cette thèse, le seul corps du texte suffit.

Chapitre 1

Les matériaux autobloquants

1.1 Le concept des matériaux autobloquants

Les matériaux fragiles sont très sensibles aux chocs et à la propagation des fissures. On les dit 'peu tolérants aux dommages'. D'ailleurs, plus ces matériaux sont de grandes dimensions et plus leur résistance diminue. Pour les renforcer, il est nécessaire d'empêcher les fissures de se propager.

Une méthode de renforcement intéressante consiste à arrêter la propagation des fissures en fragmentant le matériau. Et plus les fragments seront petits, plus le libre parcours moyen des fissures sera petit et plus le matériau gardera son intégrité au niveau macroscopique.

C'est là que la topologie peut aider à suggérer une façon de subdiviser le matériau en plusieurs petits morceaux qui sont ensuite réassemblés pour former une structure où les éléments sont autobloqués. Il y a deux aspects du problème : trouver la forme appropriée des fragments et leur arrangement.

L'idée de l'autoblocage topologique a été motivée par la théorie du 'bloc clé' qui est populaire en mécanique des roches et dans l'ingénierie des mines Goodman and Shi [1985]. Les ingénieurs travaillant dans les mines doivent faire face à des roches massives et fragmentées par de grosses fissures. Les fragments formés près de la surface de l'excavation sont répartis en deux catégories en fonction de leur probabilité de tomber dans l'excavation.

Les blocs qui peuvent tomber de la masse rocheuse sont appelés des 'blocs clés' et distingués des autres blocs qui eux ne peuvent pas tomber car cinématiquement contraints par leurs voisins. Il est donc suffisant de maintenir les 'blocs clés' pour que la structure soit stable. Pour des structures en deux dimensions la présence de 'blocs clés' est inévitable. Aussi longtemps que les 'blocs clés' seront en place, les autres blocs seront bloqués.

Dans le monde en trois dimensions des arrangements autobloquants peuvent exister sans la présence de 'blocs clés'.

1.1.1 Les structures platoniciennes

Les premières structures autobloquantes, qui ont été mises en évidence par Glickman [1984] puis par Dyskin et al. [2001b], sont composées de briques tétraédriques. Ces blocs sont arrangés dans un plan en une seule couche comme montrée sur la figure 1.1.
Dyskin et al. [2003c] ont démontré qu'il était possible d'utiliser tous les solides platoniciens pouvant paver l'espace, pour construire une structure autobloquante, tels que : des tétraèdres, des cubes, des octaèdres, des dodécaèdres et des icosaèdres.

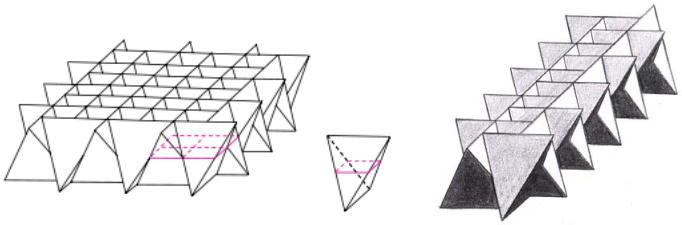


FIGURE 1.1 – Assemblages autobloquants de blocs tétraédriques

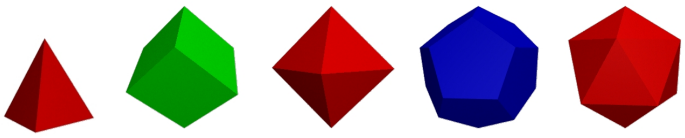


FIGURE 1.2 – Solides platoniciens pouvant paver l'espace 3D

1.1.1.1 Comment construire un assemblage autobloquant à l'aide de polyèdres réguliers

La compréhension des assemblages de tétraèdres a permis d'étendre la théorie de l'autoblocage aux autres solides platoniciens.

1.1.1.1.1 Exemple des tétraèdres

Cette structure ne contient pas de 'blocs clés'. En se plaçant dans la section A de la figure 1.3, les blocs semblent tous être des 'blocs clés'. Mais en se plaçant dans une autre section notée B et parallèle à la section A, on peut voir que ces blocs ne sont finalement pas des 'blocs clés' car ils sont immobilisés par une rangée adjacente de blocs tétraédriques.

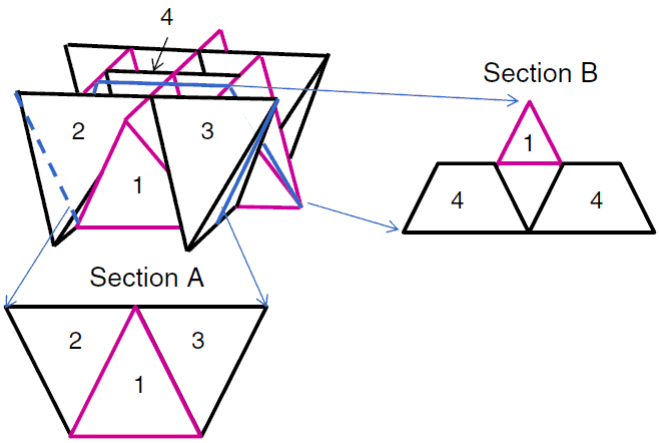


FIGURE 1.3 – Assemblage de tétraèdres - représentation schématique

De plus, on peut voir sur la figure 1.4 que deux tétraèdres voisins sont en contact l'un avec l'autre de telle sorte qu'un sommet se trouvant sur le bord supérieur de l'un des deux blocs est en contact avec le milieu du bord supérieur de l'autre bloc.
Inversement, le milieu du bord inférieur du premier tétraèdre est en contact avec le sommet

se trouvant sur le bord inférieur du second bloc. Les bords supérieurs des deux blocs sont perpendiculaires. Cette remarque est aussi valable pour les bords inférieurs.

En suivant ce procédé, l'assemblage autobloquant peut être construit. Dans cette structure,

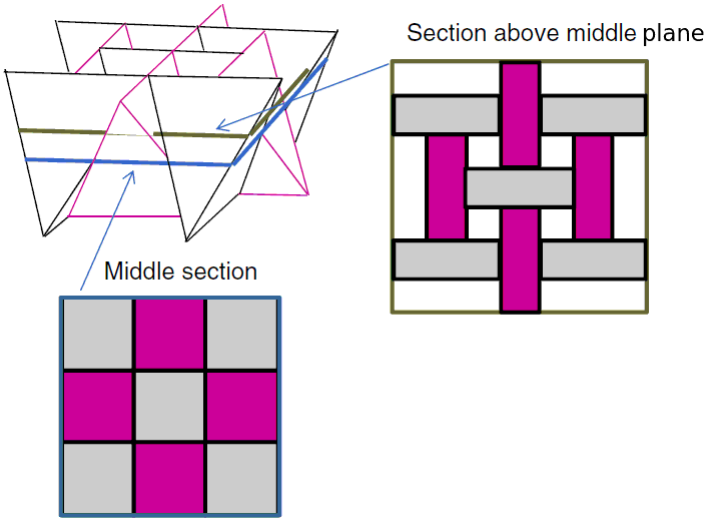


FIGURE 1.4 – Projection de deux sections parallèles d'un assemblage de tétraèdres

les blocs ont chacun quatre voisins. L'arrangement obtenu impose des contraintes cinématiques qui permettent l'autoblocage de la structure. Deux des quatre voisins de chaque tétraèdre empêchent que celui-ci puisse être retiré de l'assemblage par un mouvement orienté vers le haut, tandis que les deux autres voisins empêchent le bloc d'être retiré dans l'autre sens.

Les figures 1.4 et 1.5 montrent la forme de la section médiane de l'assemblage. Cette section est pleine et complètement pavée par des sections carrées.

Les sections se trouvant au-dessus et en dessous de la section médiane consistent en deux

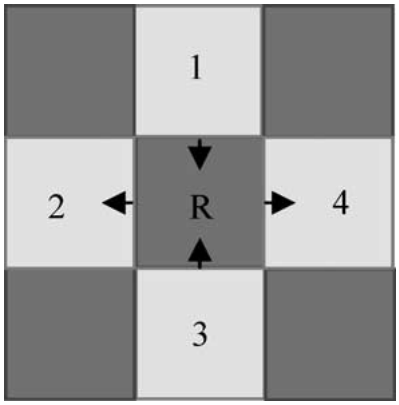


FIGURE 1.5 – Section médiane d'un assemblage de tétraèdres

familles de rectangles perpendiculaires entre eux et avec des échelles de grandeur qui dépendent de la position de la section considérée. Les rectangles se transforment en segments lorsque la section se trouve tout en haut ou tout en bas. Les flèches de la figure 1.5 indiquent la direction

dans laquelle les côtés de la section du tétraèdre de référence (et ceux de ses voisins directs) se déplaceront quand la section plane est décalée vers le haut à partir de la section médiane.

Ces flèches représentent les directions d'inclinaison des faces du tétraèdre adjacent. Les inclinaisons associées avec les flèches entrantes bloquent le déplacement vers le haut du tétraèdre de référence, tandis que les inclinaisons associées avec les flèches sortantes bloquent le déplacement vers le bas. Par conséquent, une telle alternance des directions des flèches (alternance des inclinaisons des faces) assure l'autoblocage.

L'assemblage tel quel ne peut pas résister aux contraintes dans les directions latérales, c'est-à-dire dans le plan de l'assemblage. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes externes pour empêcher le mouvement latéral des éléments par exemple en insérant l'assemblage dans un cadre rigide.

1.1.1.1.2 Cas général

Un critère d'autoblocage de polyèdres convexes a été proposé par Dyskin et al. [2003d] en considérant les polygones formés par les intersections des extensions des faces d'un élément contraint par les éléments voisins avec une section parallèle à l'assemblage. Les conditions de l'autoblocage peuvent être formulées de la façon suivante : un élément est bloqué dans l'assemblage si et seulement si, en décalant continuellement la section plane dans les deux sens suivant une direction normale au plan du pavage, le polygone représentant la section transversale dans le plan de coupe se transforme petit à petit en un segment ou bien un point.

On considère que le contact entre les blocs est maintenu aussi dans les sections se trouvant au-dessus et au-dessous de la section médiane (au moins au voisinage proche de la section médiane). Cela exclut par exemple les assemblages périodiques de sphères qui ne sont pas autobloquants.

La figure 1.6 illustre l'implémentation de ce principe en montrant comment des assemblages de cubes ou d'octaèdres peuvent être construits. On remplit une surface avec des hexagones. On ajoute ensuite des facettes pour les transformer en prismes hexagonaux puis on incline ces facettes de façon alternée comme indiqué par les flèches dessinées sur la figure 1.6. C'est l'alternance de l'inclinaison de ces facettes qui assurera l'autoblocage. Les facettes sont finalement étendues pour se rencontrer et selon leur angle d'inclinaison, elles formeront soit des cubes soient des octaèdres. Une formulation mathématique rigoureuse de ce principe de construction d'assemblages autobloquants a été présentée par Kanel-Belov et al. [2008].

C'est en utilisant ce principe que les assemblages autobloquants ont été construits à partir des autres solides platoniciens (dodécaèdres et icosaèdres).

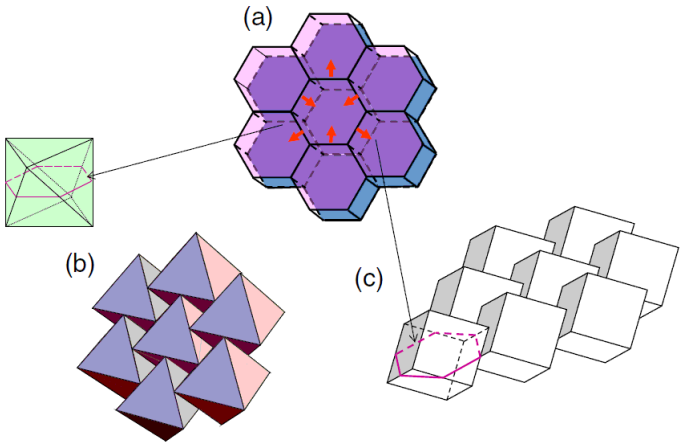


FIGURE 1.6 – Méthode de construction d'un assemblage de polyèdres autobloquants : a) Surface remplie avec des hexagones qui sont ensuite transformés en prismes hexagonaux, puis les faces des prismes de façon alternée comme indiqué par les flèches. Les faces sont finalement étendues pour se rencontrer et selon leur angle d'inclinaison, b) ils formeront soit des octaèdres, c) soit des cubes

1.1.2 Les structures à base de géométries non platoniciennes

Dans le cas des assemblages de solides platoniciens, le contact n'a pas lieu sur la surface entière des blocs. Il est alors possible de retirer de la matière là où le contact n'est pas présent tout en gardant l'aspect autobloquant de l'assemblage.

Dyskin et al. [2003a] ont montré que de nouvelles formes peuvent ainsi être générées en modifiant les structures construites à partir de solides platoniciens. La figure 1.7 montre la section octogonale du centre de l'assemblage ainsi que le résultat de la transformation d'un tétraèdre en transformant la forme de sa section médiane en doublant le nombre de côtés. Dans le cas extrême, les carrés de la section médiane se transforment en cercle. La figure 1.8 montre le résultat de cette transformation de tétraèdres en tubes creux pour un emboîtement spécifique autobloquant.

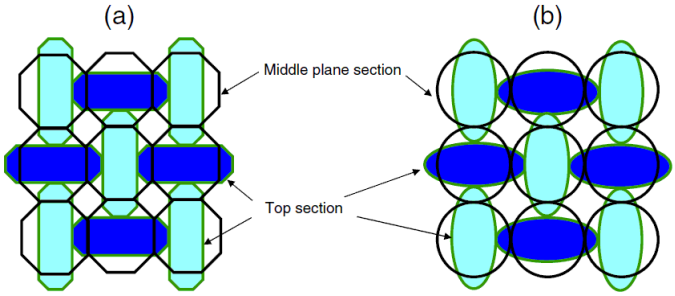
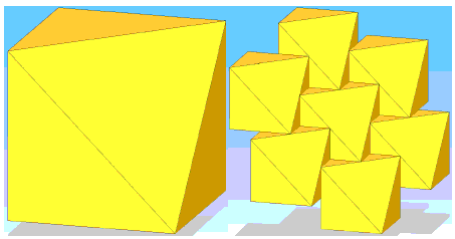


FIGURE 1.7 – Transformation d'un assemblage constitué de formes platoniciennes vers un assemblage construit avec une nouvelle géométrie : a) les carrés de la section médiane ont été transformés en octogones réguliers, b) les carrés de la section médiane ont été transformés en cercles Dyskin et al. [2003a]

FIGURE 1.8 – Assemblage de blocs tubulaires Dyskin et al. [2003a]

Cette technique peut-être utilisée avec tous les solides platoniciens, comme par exemple avec les cubes (Brugger [2008]). En tronquant le dessus et le dessous des cubes sur lesquels il n'y a aucun contact, on peut obtenir une nouvelle géométrie telle que décrite sur la figure 1.9a et construire un assemblage de cubes tronqués (figure 1.9b). Dyskin et al. [2003b] ont aussi



(a) (b)

FIGURE 1.9 – Nouvelle géométrie autobloquante construite à partir de la géométrie cubique : a) cube tronqué, b) Assemblage de cubes tronqués

découvert qu'à partir d'icosaèdres tronqués, on peut aussi obtenir des assemblages de buckyballs (figure 1.10). Ils forment un assemblage poreux, car ils ne remplissent pas entièrement la section médiane. De plus, leur surface de contact est plus petite que pour les autres assemblages. Ils ont donc une moins bonne tenue mécanique. Ces dernières années, une attention toute particulière a été portée sur une autre géométrie appelée ostéomorphe que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

1.1.3 Les structures à base de blocs ostéomorphes

Dyskin et al. [2003d] se sont penchés sur la possibilité de créer des formes autobloquantes qui seraient en contact sur toute leur surface. Le résultat pourrait être obtenu à l'aide de surfaces non planes, mais qui seraient aussi suffisamment lisses pour minimiser les concentrations de contraintes par rapport à celles induites entre les blocs convexes tels que les blocs platoniciens

FIGURE 1.10 – Assemblage autobloquant de buckyballs Dyskin et al. [2003b]

étudiés précédemment.

Considérons deux surfaces courbes conjuguées correspondant à l'interface entre deux blocs. Ces deux surfaces ont donc vocation à entrer en contact l'une avec l'autre. Un exemple est dessiné sur la fig 1.11a, la face convexe de l'un des éléments correspond à la surface concave de l'autre et inversement.
Dans le cas présent, il est impossible d'induire un mouvement dans le sens de Z ou bien dans le sens de Y. Le seul mouvement autorisé restant est un déplacement unilatéral selon X. Avec cette géométrie des interfaces, deux blocs pourraient alors être géométriquement contraints. Ce type d'autoblocage peut être vu comme une version macroscopique du frottement causé par l'interaction des aspérités de deux surfaces en contact. La concentration de contrainte sera aussi bien moindre que celle provoquée par les connecteurs entre les briques conventionnelles.

Cette idée a donné naissance à une nouvelle classe de blocs autobloquants ayant un fort potentiel dans le développement de nouvelles structures et de nouveaux matériaux. La géométrie est dessinée sur la figure 1.11b. Ces blocs ont une forme de vertèbre avec des symétries qui permettent le blocage dans les trois directions d'où leur nom d'ostéomorphes. Dyskin et al. [2003d] ont étudié des blocs ostéomorphes dont la forme des surfaces a été décrite à l'aide d'un polynôme d'ordre 4 en Z et Y. Yong [2011] a étudié des blocs ostéomorphes ayant des formes de surfaces décrites par d'autres équations. On appellera l'échelle de longueur du bloc L/2. La pièce de la figure a été dessinée grâce à ce polynôme d'ordre 4. La période du polynôme d'ordre 4 est L et correspond à la longueur du bloc. L'interface entre deux blocs s'inscrit dans un demi-carré, la longueur est donc liée à la hauteur. De ce fait, si la longueur du bloc est égale à L alors la hauteur du bloc est égale à L/2.

La courbe décrivant la surface non plane est caractérisée par un paramètre appelé H. Elle correspond à la profondeur des parties concaves (ou bien à la hauteur des parties convexes) de la surface. En augmentant le rapport H/(L/2), on peut augmenter l'interpénétration des blocs les uns par rapport aux autres ce qui a pour conséquence d'augmenter l'autoblocage. Grâce aux paramètres H et l, on peut obtenir la largeur minimale qui sera égale à l-2H et la largeur maximale qui sera égale à l+2H. Sur la figure 1.11b, le bloc a pour centre O et la longueur l

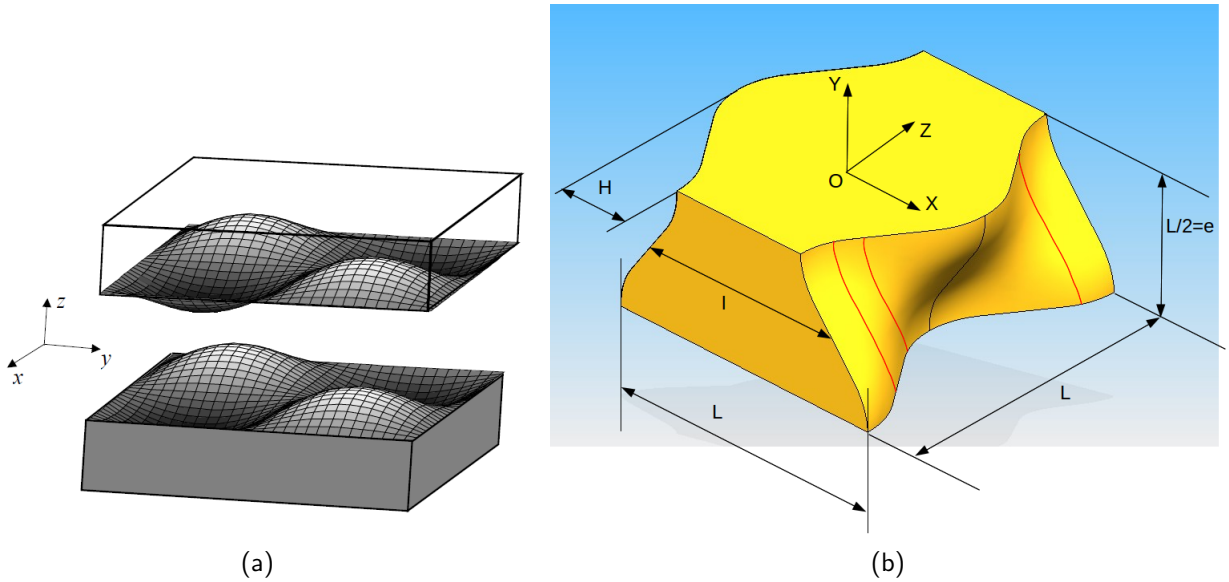


FIGURE 1.11 – Principe de l'autoblocage à partir d'une géométrie non plane : a)Formes convexes-concaves du principe des interfaces ostéomorphes - b) Bloc ostéomorphe

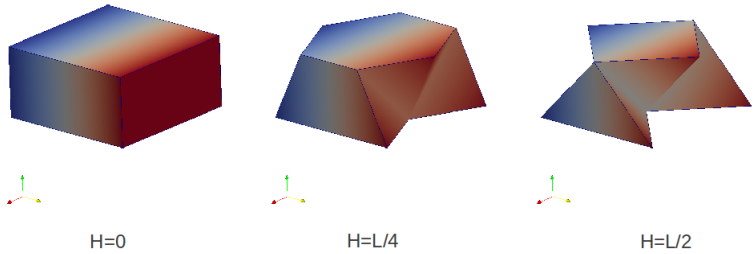


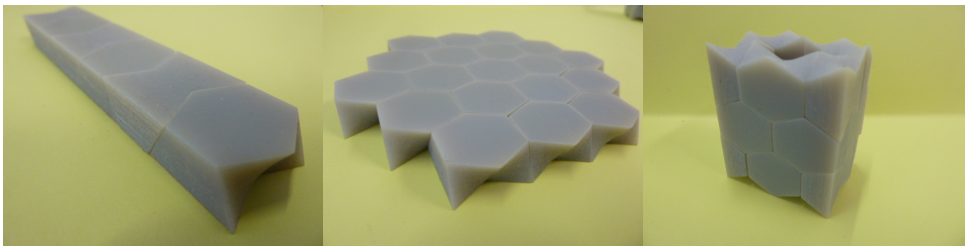
FIGURE 1.12 – Variation du paramètre H lors de la fabrication d'un bloc ostéomorphe (ici, c'est la version simplifiée de la géométrie ostéomorphe qui est dessinée)

est choisie telle que l+2H=L.

On peut observer une symétrie par rapport au plan (OXY) et une antisymétrie par rapport au plan (OXZ). Les vecteurs Y et Z sont des axes d'antisymétrie de l'interface entre deux blocs. Dans le cas du bloc représenté sur la figure 1.11b, ce rapport vaut 1/4. En alignant plusieurs blocs dans la direction des surfaces courbes (axe X), on obtient une poutre 1D (voir fig. 1.14a). Si on décale un des blocs de un demi bloc par rapport à son voisin, il est alors possible de construire une plaque (pavage 2D voir fig. 1.14b).

Si en plus de ce décalage, ce bloc subit une rotation de 90°, il est alors possible de créer des structures en angle droit (voir fig. 1.13), ce qui permet de parcourir la troisième dimension (assemblages 3D, Robson [1978], voir fig. 1.14c). Les blocs ostéomorphes sont taillés dans un parallélépipède de hauteur e et de section carrée L^2. La forme des blocs peut varier en fonction du paramètre de retrait H qui peut varier de 0 à $\frac{L}{2}$ (voir sur la figure 1.12).

FIGURE 1.13 – Blocs ostéomorphes assemblés perpendiculairement au plan initial



(a) (b) (c)

FIGURE 1.14 – Différents types d'assemblages : a) Poutre, b) Plaque, c) Volume

Il existe plusieurs types de formes ostéomorphes. Les ostéomorphes à surfaces courbes et les ostéomorphes à surfaces réglées.

Les ostéomorphes à surfaces courbes sont construits à partir d'un cube coupé en deux. Les bords opposés de ce cube sont ensuite taillés à l'aide d'une courbe composée à partir d'un polynôme d'ordre 4 en Y et Z ou bien à partir de fonction sinusoïdales Yong [2011].
Il est possible de dessiner plusieurs types de blocs ostéomorphes à surfaces courbes en modifiant la fonction mathématique servant à dessiner les faces convexes et concaves de la pièce. Mais il est difficile de maîtriser la géométrie de la surface. En pratique, lorsqu'on conçoit le dessin d'un bloc ostéomorphe, le profil de la surface inférieure (concave) et de la surface supérieure (convexe) sont introduits dans un logiciel de dessin assisté par ordinateur. Ce dernier va alors générer la surface qui s'appuie sur ces deux courbes par des fonctions splines difficilement maîtrisables. Ces imprécisions sur la forme des blocs modifient la nature du contact et perturbent la réponse de l'assemblage.
Yong [2011] avait rencontré ces difficultés dans le cas de blocs ostéomorphes s'appuyant sur des courbes sinusoïdales (SC) ou en arc de cercle (CA).

Les ostéomorphes à surfaces réglées ont été imaginés lors de la thèse de Brugger [2008]. Il s'agit d'une simplification des blocs ostéomorphes proposés par Dyskin et al. [2003d]. Ces blocs sont toujours construits à partir d'un cube coupé en deux. Les bords opposés de ce cube sont ensuite taillés à l'aide d'une droite qui va parcourir ces bords (voir figure 1.15). De plus, lorsque l'épaisseur des blocs e est choisie égale à $\frac{L}{2}$, les blocs s'assemblent alors dans des directions orthogonales permettant ainsi au pavage 2D d'envahir la 3ème dimension (fig. 1.13) comme pour les blocs ostéomorphes à surfaces courbes.

Cette géométrie a plusieurs avantages notamment pour sa fabrication. La géométrie sim-

plifiée du bloc présenté sur la figure 1.15 est beaucoup plus facile à maîtriser puisqu'elle est obtenue par une translation suivant Z d'une ligne contenue dans un plan YX et s'appuyant sur les deux contours en V des surfaces inférieures et supérieures. Il s'agit donc d'une surface réglée beaucoup plus simple à réaliser. Estrin et al. [2003] et Brugger [2008] ont aussi constaté que la

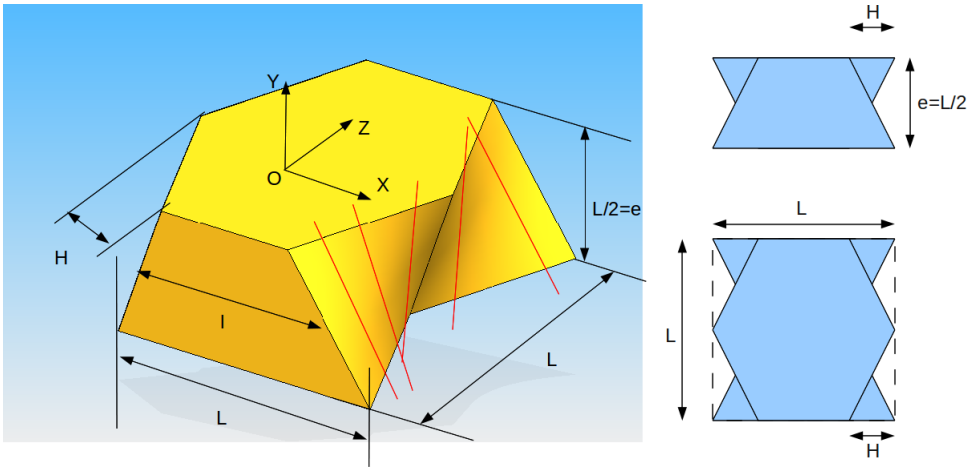
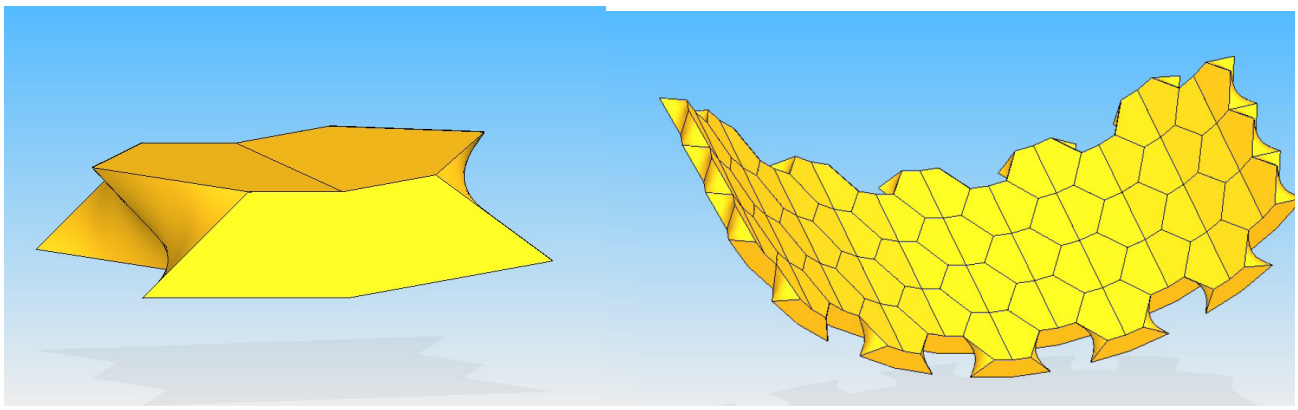


FIGURE 1.15 – Bloc ostéomorphe à géométrie simplifiée : la surface de contact est réglée

géométrie ostéomorphe est très modulable, il est par exemple possible d'incliner les faces planes des blocs pour obtenir la géométrie dessinée sur la figure 1.16a.



(a) (b)

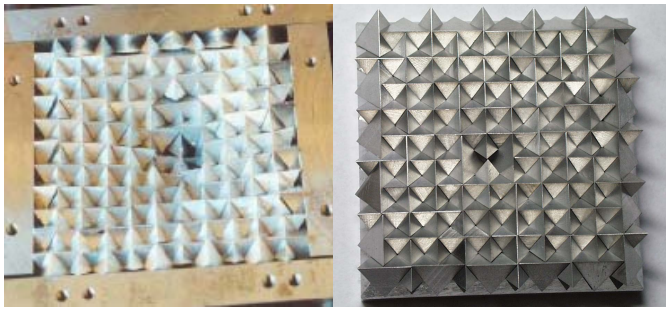
FIGURE 1.16 – Nouvelle géométrie issue de la géométrie ostéomorphe : a) Bloc ostéomorphe cintré, b) Assemblage cylindrique à base de blocs ostéomorphes cintrés Brugger [2008]

1.2 Les propriétés des matériaux autobloquants

Nous avons évoqué les principales formes qui permettaient de réaliser des structures autobloquantes telles que les tétraèdres, les cubes et les blocs ostéomorphes. Différents travaux, expérimentaux et numériques, ont déjà été effectués sur les assemblages autobloquants réalisés à partir de ces différentes formes. Ces travaux ont permis d'estimer certaines propriétés de ces assemblages.

1.2.1 Raideur en indentation

Une des techniques de caractérisation mécanique des assemblages autobloquants est l'essai d'indentation. L'indentation d'un assemblage autobloquant consiste à appliquer une compression (un effort normal au plan de l'assemblage) sur un ou plusieurs blocs jusqu'à la perforation de l'assemblage. Cela équivaut à tester une plaque en flexion. Une expérience d'indentation sur un assemblage de 100 tétraèdres fabriqués en alliage de Al-Mg-Si et ayant des bords de longueur a = 1cm a été réalisée par Dyskin et al. [2001a,b, 2003a]. Cet indenteur



(a) (b)

FIGURE 1.17 – Indentation d'un assemblage de tétraèdres en alliage d'aluminium : a) Assemblage après indentation, b) Assemblage avec un bloc manquant

est placé de telle sorte que son centre coïncide avec le centre d'une croix formée par les arêtes du bloc central et les moitiés des arêtes des deux tétraèdres adjacents. L'indentation est instrumentée et permet d'obtenir une mesure de l'effort en fonction du déplacement de l'indenteur et donc la courbe de charge. Une mesure de l'effort appliqué par l'indenteur et de son déplacement ainsi que du déplacement de l'arête du bas du bloc central est alors effectuée. L'indentation a été stoppée lorsque les blocs adjacents à l'indenteur ont tellement tourné qu'ils entrent en contact avec l'indenteur.

Du fait de la topologie autobloquante, chaque élément de la structure 3D est contraint par ses voisins et ne peut pas s'échapper, excepté les éléments qui se trouvent à la périphérie. Ces éléments doivent être contraints par un élément extérieur, dans ce cas-ci, un cadre métallique que l'on peut voir sur la photo de la figure 1.17a. Les bords de ce cadre sont serrés grâce à des vis qui permettent de régler la précontrainte. Les tétraèdres situés sur la couronne extérieure de l'assemblage ont été coupés en deux. Les bords de l'assemblage sont alors plans ce qui leur permet d'être en contact parfait avec le cadre. Le chargement a été appliqué à l'aide d'un indenteur de 1cm de diamètre.

La courbe d'indentation (force-déplacement) de l'assemblage (figure 1.18b) a été comparée à la courbe de chargement d'une plaque monolithique (figure 1.18a) constituée du même matériau et de la même épaisseur que l'assemblage. La densité de la structure autobloquante est 1/3 fois moins grande que celle de la plaque monolithique.

En comparant les deux courbes d'indentation, les auteurs ont pu constater que la pente en

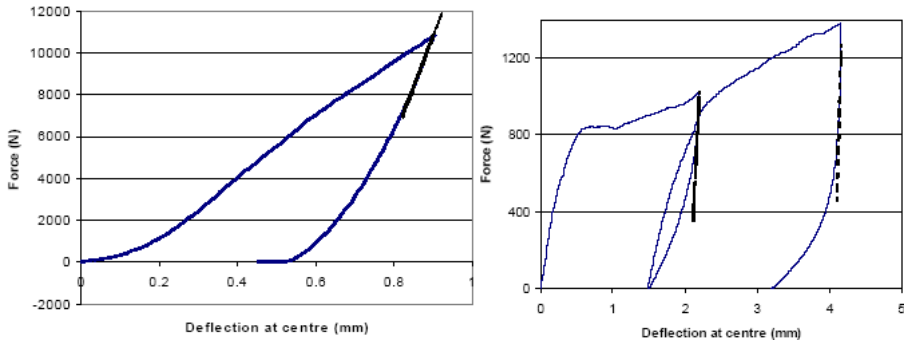


FIGURE 1.18 – Courbes d'indentation : a) Comportement mécanique de la plaque de référence, b) Comportement mécanique de l'assemblage - Dyskin et al. [2001a, 2003a]

décharge de l'assemblage est trois fois plus petite que celle de la plaque monolithique. Mais pour obtenir la rigidité en flexion, il faut tenir compte de l'aire de contact réduite entre les blocs. La surface de contact est un losange ayant un côté égal à a/2 incliné d'un angle de $cos^{-1}(sqrt(2/3))$ par rapport à la normale du plan de l'assemblage. Après une projection sur le plan perpendiculaire au plan de l'assemblage, le contact a la forme dessinée sur la figure 1.19. En tenant compte de cette surface de contact, il est ensuite possible de calculer la rigidité en flexion et de la comparer à celle de la plaque monolithique.

La rigidité de la plaque monolithique est 7.5 plus grande que celle de l'assemblage pendant la

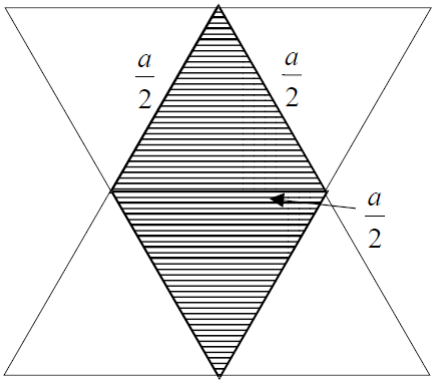


FIGURE 1.19 – Projection de la surface de contact entre deux blocs sur le plan perpendiculaire à celui du pavage

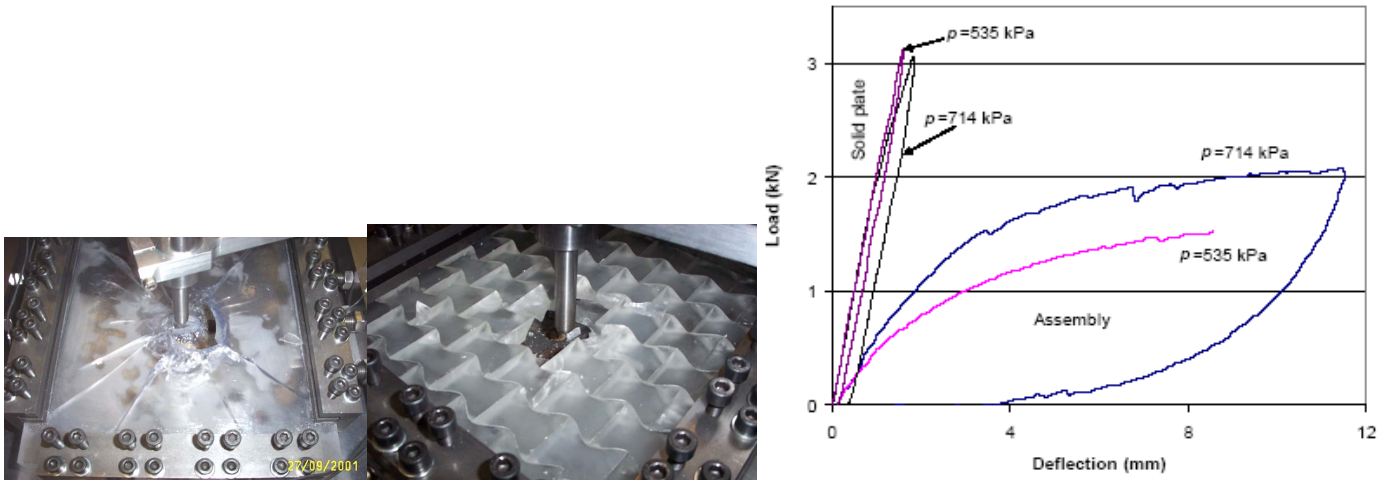
charge. Cette différence peut être expliquée par le fait que les blocs peuvent tourner les uns par rapport aux autres. Lorsque les blocs tournent, ils se décollent (le contact passe de plan-plan à plan-arêtes) et la surface de contact diminue.

Sur la photo 1.17a, on peut voir que l'assemblage est fortement déformé à la fin de l'essai, alors que les blocs ne sont pas déformés plastiquement. Cette déformation résiduelle est due à la géométrie des blocs de la structure qui permet donc une grande flexibilité et facilite la mise

en forme de l'assemblage. Par ailleurs, il est intéressant de noter que la structure garde son intégrité même lorsqu'un élément est manquant (voir photo 1.17b).

1.2.2 Ténacité

D'autres expériences d'indentation ont été réalisées par Dyskin et al. [2003d] sur un assemblage de blocs ostéomorphes en polymères Polylite 61-209 illustré par la photo 1.20a. Cette résine est translucide, ce qui permet de visualiser les fissures se propageant dans le matériau au cours de la déformation. Il s'agit d'un matériau fragile avec une ténacité de $0.6MPa.m^{1/2}$ une résistance à la compression de 140MPa et un module d'Young de 4GPa.
L'assemblage est constitué de 14*7 blocs ostéomorphes de dimensions L=38mm, H=4.75mm.



(a) (b) (c)

FIGURE 1.20 – Comparaison de l'indentation d'un assemblage avec l'indentation d'une plaque monolithique en polymère : a) Indentation d'une plaque monolithique en polymère, b) Indentation d'une plaque de bloc ostéomorphes en polymère, c) Courbes d'indentation de la plaque monolithique ainsi que de l'assemblage pour deux valeurs de précontrainte - Dyskin et al. [2003d]

A nouveau, les blocs situés au bords de l'assemblage sont coupés en deux, pour assurer un contact plan avec le cadre et faciliter la mise en place de la précontrainte. L'assemblage ainsi que la plaque monolithique sont maintenus en place de la même façon grâce à un cadre avec un contrôle de la charge latérale.

La vitesse d'indentation est fixée à 2mm/min et reste constante sur tout l'essai. Deux valeurs de précontrainte ont été testées : 535kPa et 714kPa mesurées grâce à des capteurs de force. La première remarque est que la courbe d'indentation de la structure autobloquante a un comportement élastique fortement non linéaire.

La figure 1.20c montre que la précontrainte a un effet négligeable sur le comportement

de la plaque monolithique alors qu'elle a un effet beaucoup plus important dans le cas de l'assemblage autobloquant. La courbe d'indentation de l'assemblage atteint un effort maximal plus faible pour une valeur de déformation bien plus élevée que dans le cas de l'indentation de la plaque monolithique, ce qui montre que l'assemblage est bien plus flexible que la plaque.
Dans le cas de l'assemblage autobloquant, la force maximale semble proportionnelle à la valeur de la précontrainte. En effet, lorsque la précontrainte passe de 535kPa à 714kPa (x1,33), la force maximale passe de 1500N à 2000N soit une augmentation de 33%.

La plaque est perforée après une charge de 9.5kN après une faible déformation, alors que la structure autobloquante continue à se déformer pour des déplacements de l'indenteur supérieurs à l'épaisseur des blocs (11mm). La charge maximale atteinte en fin de charge (pour un déplacement de 11mm) est alors de 2kN. Après décharge, on observe un déplacement résiduel de 4mm au niveau du bloc central.

La courbe d'indentation de cet assemblage a été comparée à la courbe d'indentation d'une plaque monolithique fabriquée dans le même matériau que les blocs ostéomorphes (figure 1.20c). Cette comparaison a montré que les fissures se propagent à l'intérieur de la plaque (fig. 1.20a) alors que dans le cas de l'assemblage autobloquant, les fissures s'arrêtent aux interfaces entre les blocs (fig. 1.20b). Il n'y a que le bloc du centre qui est fracturé alors que le reste de la structure n'a subi aucun dommage.

Le fait que les fissures restent confinées est dû à l'absence de lien physique entre les blocs et donc les fissures ne peuvent pas traverser l'interface entre les blocs. De plus la géométrie des blocs permet à l'assemblage de garder son intégrité même en l'absence de blocs. Les blocs peuvent être supportés par seulement deux voisins se trouvant en contact avec les surfaces courbes.

1.2.3 Absorption acoustique

Carlesso et al. [2012] ont étudié la possibilité d'utiliser des assemblages de blocs ostéomorphes dans le but de lutter contre la pollution sonore.

Cette caractéristique des autobloquants a été étudiée initialement dans le but d'accroître l'absorption sonore de tuiles en céramique utilisées pour l'isolation thermique de moteurs fonctionnant grâce à des turbines à gaz.

Le matériau utilisé pour l'expérience est le plâtre dentaire : dental stone GC Fujirock ($CaSO_4.1/4H_2O$). Des blocs ostéomorphes de 20*20*10mm ont été fabriqués à partir de ce matériau puis assemblés puis obtenir une petite plaque ronde de 130mm de diamètre.
L'expérience acoustique consiste en un tube de 130mm avec un haut-parleur comme source sonore, deux microphones qui vont capturer l'onde initiale et l'onde réfléchie, un support permettant de maintenir l'échantillon absorbant dans le tube. Derrière l'échantillon se trouve

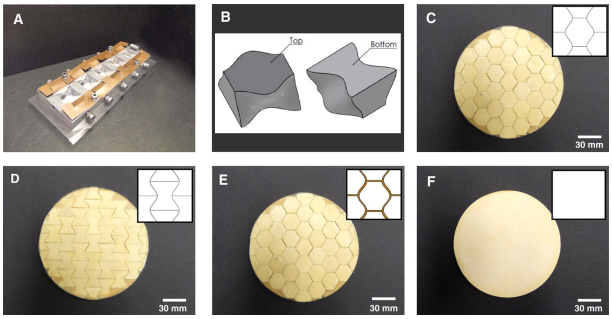


FIGURE 1.21 – Essais acoustiques sur des assemblages ostéomorphes en plâtre dentaire : a) moule de fabrication des blocs, b) forme ostéomorphe utilisée, c) face A de l'assemblage de blocs ostéomorphes, d) face B de l'assemblage de blocs ostéomorphes, e) l'assemblage de blocs ostéomorphes avec de la cire remplissant les interfaces (scellé) , f) plaque monolithique de référence - Carlesso et al. [2012]

un mur dense qui permet des mesures avec un espace contenant un volume d'air entre l'échantillon et le mur qui est ajustable.

L'échantillon a été testé dans les deux sens (nommés A et B sur la figure 1.21) et comparé à

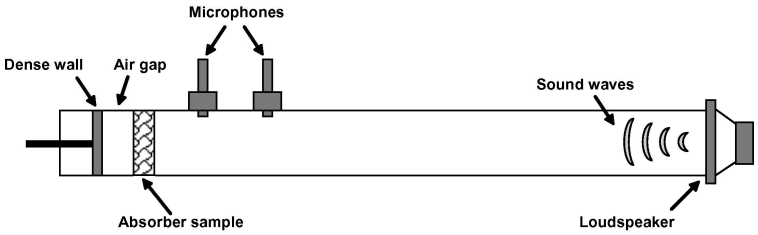


FIGURE 1.22 – Essais acoustiques sur des assemblages ostéomorphes en plâtre dentaire : Montage expérimental - Carlesso et al. [2012]

un assemblage de blocs ostéomorphes où toutes les interfaces entre les pièces ont été remplies avec de la cire ainsi qu'à une plaque monolithique fabriquée dans le même matériau et servant de référence (voir fig. 1.23). Cette plaque monolithique montre un très faible coefficient

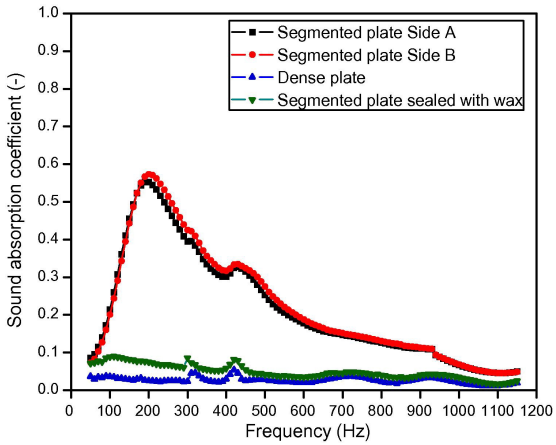


FIGURE 1.23 – Courbe d'absorption acoustique des différents échantillons - Carlesso et al. [2012]

d'absorption (inférieur à 0.1) pour toute la gamme de fréquences analysée. Le test des deux

structures non scellées a révélé un très fort pic d'absorption en particulier entre 150 et 500 Hz.

L'absorption est la même lorsque l'assemblage se trouve dans le sens A ou bien dans le sens B. Par contre, l'absorption de l'assemblage scellé est réduite de façon drastique, presque au même niveau que celle de la plaque monolithique. Cela montre bien que l'origine de l'augmentation de la capacité d'absorption de la structure segmentée par rapport à celle de la plaque monolithique vient de la dissipation aux contacts entre les blocs plutôt que la porosité interne du matériau.

Le pic d'absorption de l'assemblage montre un maximum à 200Hz et monte à 0.57 pour le côté B et 0.55 pour le côté A. Le coefficient d'absorption de l'assemblage dans le sens B est 23 fois plus grand que le coefficient d'absorption de la plaque dense et 7.5 plus grand que le coefficient d'absorption de l'assemblage autobloquant ayant les interfaces bouchées avec de la cire.

On peut supposer qu'une partie de l'intensité des ondes sonores dissipées de l'assemblage de blocs ostéomorphes non scellés est perdue à cause de l'interaction des ondes avec les interfaces et aussi peut être due à la perte frictionnelle produite par le frottement avec les blocs adjacents. Ces processus n'ont pas lieu dans une plaque massive. Pour l'assemblage scellé, la friction entre les blocs n'est pas possible tandis que la cire réduit fortement les pertes d'énergie.

Un autre paramètre important qui caractérise la performance d'absorption sonore est la résistance au flux d'air. Le facteur de la résistance au passage de l'air reflète l'interaction entre les ondes sonores et les interfaces entre les blocs. Une grande résistance au passage de l'air a pour effet qu'une grande partie de la puissance sonore se réfléchit à la surface de l'absorbant. Par contre si la résistance à l'air est faible, les ondes sonores passeront à travers le matériau et l'énergie sonore ne sera pas convertie en chaleur, donnant alors comme résultat, une faible absorption sonore. La géométrie tortueuse des interfaces entre les blocs ostéomorphes permet d'accroître la résistance à la pénétration de l'air.

1.2.4 Dissipation d'énergie

Dans les expériences présentées précédemment, la courbe d'indentation d'assemblages autobloquants montrait un comportement élastique non linéaire. Estrin et al. [2004], Schaare et al. [2008] ont étudié cette non-linéarité en indentant des assemblages de blocs cubiques en aluminium, en acier et en PVC.

La structure comprend 10*10 cubes de dimension 12.25mm (figure 1.24). Un cadre en acier maintient les bords de l'assemblage. La précontrainte latérale est assurée par 3*4 vis. Différentes valeurs de charges ont été testées : 1kN, 1.5kN et 2kN.

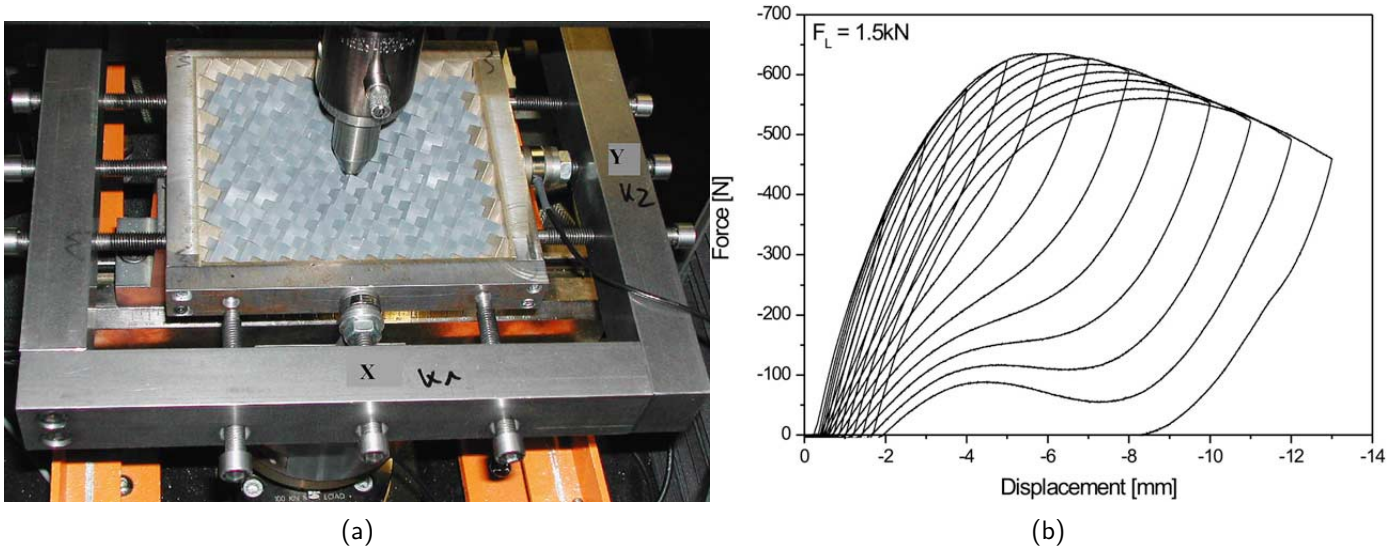


FIGURE 1.24 – Expériences d'indentation d'un assemblage de cubes en aluminium : a) Photo d'un assemblage de bloc cubiques en aluminium après indentation, b) Courbe d'indentation d'un assemblage de bloc cubiques en aluminium - précontrainte=1.5kN - décharges complètes à différentes valeurs de déplacement de l'indenteur - Estrin et al. [2004], Schaare et al. [2008]

L'indentation a été effectuée à l'aide d'une bille d'acier de 12.7mm de diamètre située sous l'indenteur. Cette bille va indenter à l'intérieur d'un creux formé par trois cubes voisins. Le contrôle de l'indentation se fera en fonction du déplacement de la bille. Une suite de cycle de charges-décharges ont été effectuées. Après un cycle de charge-décharge, la structure est rechargée avec un déplacement plus grand. On observe sur la courbe de la figure 1.24b une déformation résiduelle ainsi qu'une hystérésis.

La courbe d'indentation montre aussi que la force atteint une valeur maximale puis diminue. Mais cela n'est pas dû à de l'endommagement, car les cubes restent intacts, ils peuvent même être démontés, réassemblés pour être réindentés sans effet mesurable. De plus, les simulations numériques effectuées dans le domaine purement élastique (pas de plasticité ni de fracturation des blocs) montrent le même phénomène.

L'explication la plus plausible est que les blocs subissent des rotations importantes, donc que la surface de contact entre deux blocs diminue ce qui se traduit par une diminution de l'effort.

1.2.5 Restitution d'énergie

Une autre particularité apparaît pendant de cette expérience : lors de la décharge à déplacement imposé, il apparaît une 'rigidité négative'. Ce comportement a été observé sur deux autres dispositifs expérimentaux (figures 1.24b et 1.25).

On peut expliquer cette rigidité négative à partir de la rotation des cubes qui peut être importante au cours de l'indentation (figure 1.26). En effet lors de la charge, la rotation

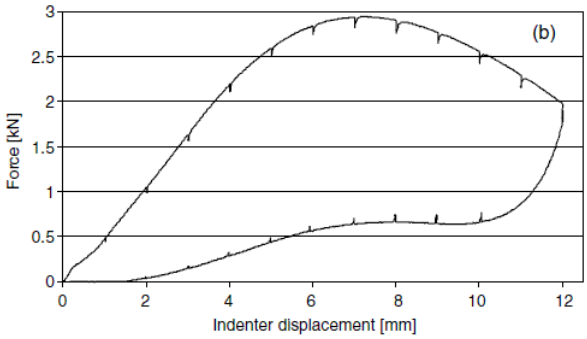


FIGURE 1.25 – Courbe d'indentation avec des petites pauses au cours de l'indentation - précontrainte=1.5kN - Phénomène de restitution d'énergie pendant la décharge d'un assemblage de cubes en aluminium - Estrin et al. [2004], Schaare et al. [2008]

diminue la surface de contact entre les blocs. On observe alors un contact entre un sommet et une face alors qu'au début de l'essai, les cubes sont en contact entre leurs faces, et cela diminue la rigidité en flexion.

Pendant la décharge, il se produit le phénomène inverse, les cubes retournent dans le sens

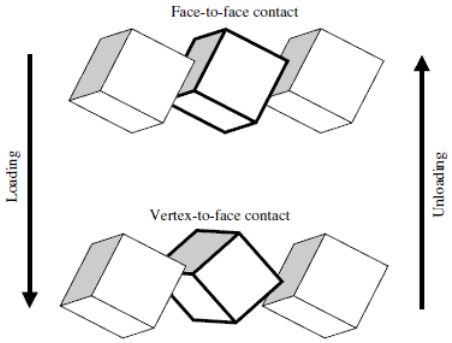


FIGURE 1.26 – Rotation des cubes dans l'assemblage pendant l'indentation - Estrin et al. [2004], Schaare et al. [2008]

inverse et donc la surface de contact entre les cubes s'agrandit à nouveau, ce qui induit une augmentation de la rigidité en flexion et donc une rigidité négative au cours de la décharge.

Lorsqu'on observe les cubes de près, des traces d'indentation sont visibles au milieu des faces, ce qui renforce l'hypothèse de la rotation des cubes et du contact sommet-face au cours de l'indentation. De petites pauses ont été effectuées tous les millimètres au cours de l'indentation. Pendant ces phases de pause, le déplacement de l'indenteur est maintenu constant. On observe alors des petits pics orientés vers le bas pendant la charge et vers le haut pendant la décharge ce qui correspond à des incréments de force positifs.

On peut alors conclure que l'assemblage restitue de l'énergie par un phénomène de relaxation apparente. Ces différentes propriétés ont aussi pu être observées par l'intermédiaire de simulations numériques par Estrin et al. [2004], Schaare et al. [2008].

1.2.6 Influence des variables de fabrication

Pour concevoir un assemblage, il faut penser à de nombreuses variables de fabrication telles que le coefficient de frottement, le module d'Young, la taille des blocs, le nombre de blocs dans l'assemblage, la forme des blocs, la précompression sur les bords de l'assemblage. L'influence de certaines de ces variables a commencé à être étudiée au laboratoire SIMAP à l'occasion de la thèse de Brugger [2008].

Jusqu'à présent, nous appelions précontrainte le blocage appliqué sur les bords de l'assemblage piloté en force. Durant la thèse de Brugger [2008] ainsi que dans les travaux présentés dans ce manuscrit, le blocage appliqué sur les bords est quantifié par le déplacement appliqué au contour et nous l'appellerons précompression latérale.

Les essais d'indentation réalisés sur les structures autobloquantes de cubes en plâtre et de blocs ostéomorphes en glace ont permis de mettre en évidence l'influence sur le comportement mécanique de différentes variables de fabrication des matériaux autobloquants tels que la précompression latérale et le coefficient de frottement.

1.2.6.1 Effet du coefficient de frottement

Grâce aux expériences effectuées sur des assemblages de blocs ostéomorphes en glace (Autruffe et al. [2007]), il a été possible de faire une étude du comportement mécanique de cet assemblage en fonction du coefficient de frottement en changeant la température de l'essai.

L'assemblage est composé de 27 blocs et de 18 demi blocs ostéomorphes à surfaces courbes en glace. Ces blocs forment un pavage rectangulaire de 175*235*19mm posé à l'intérieur d'un cadre muni de 4*3 vis qui permettent d'appliquer une précompression latérale (précontrainte appliquée en déplacement sur les blocs extérieurs) qui assurera le blocage des blocs se trouvant sur les bords de l'assemblage.

L'indentation est appliquée sur le bloc central. Le module d'Young de la glace est de 2.5GPa. Les essais sont contrôlés en contrainte. Cette dernière est définie comme la force appliquée sur l'indenteur rapportée à la surface de l'assemblage. Le chargement de l'assemblage est stoppé pour une contrainte de 0.4MPa.
Plusieurs indentations ont été effectuées à différentes températures (voir figure 1.27b). Lorsque la température augmente, le coefficient de frottement diminue. De ce fait, pour une même valeur de contrainte appliquée, le déplacement de l'indenteur est plus grand. L'assemblage est ensuite déchargé, et dans ce cas, on observe une hystérésis qui dépend fortement de la température. Plus la température est élevée et plus l'hystérésis est grande car le déplacement entre les blocs devient plus facile. Autruffe et al. [2007] ont ainsi pu constater qu'en diminuant le coefficient de frottement, il est possible d'augmenter la quantité d'énergie dissipée.

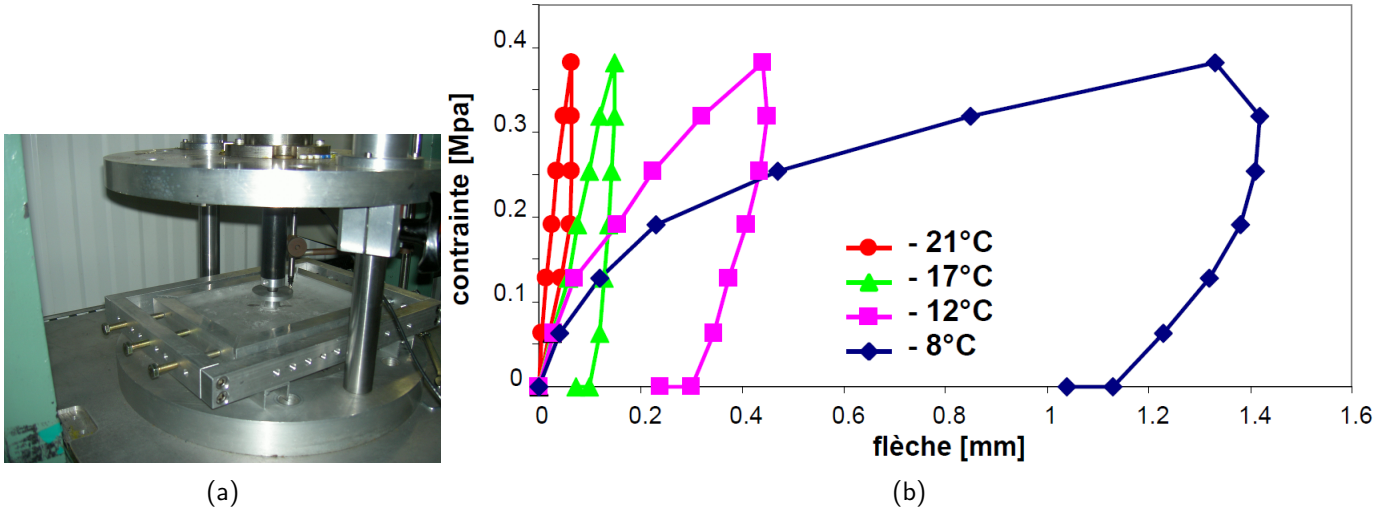


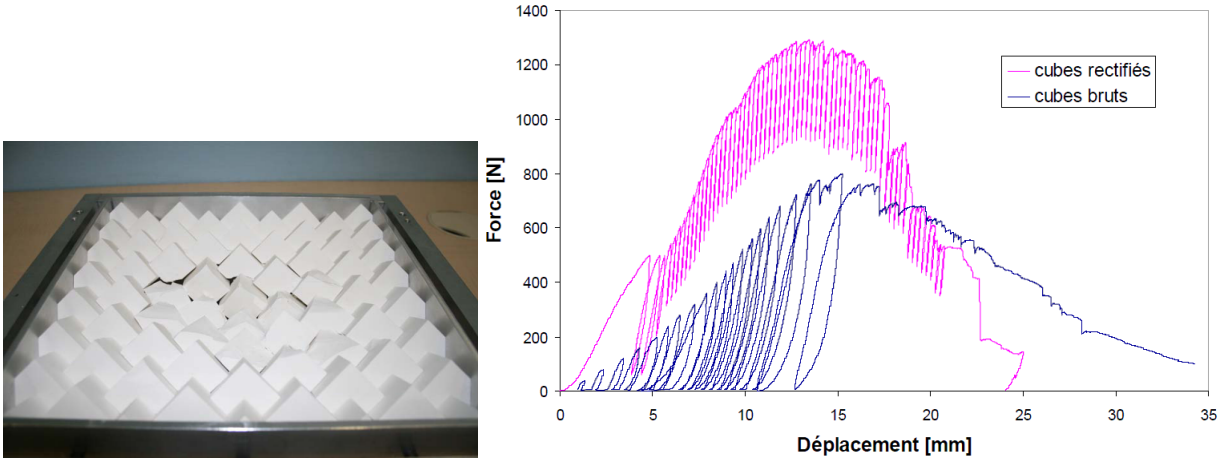
FIGURE 1.27 – Expériences d'indentation d'un assemblage de blocs ostéomorphes en glace effectuées par Autruffe et al. [2007] : a) Indentation d'une plaque de blocs ostéomorphes en glace, b) Courbe d'indentation - variation du coefficient de frottement par modification de la température

1.2.6.2 Effet de la tolérance dimensionnelle

L'étude de la tolérance dimensionnelle a été regardée par Brugger [2008]. L'assemblage est composé de 46 cubes entiers de 30mm de côté et 22 cubes tronqués qui se trouvent au bord du pavage. Le système utilisé pour maintenir les cubes du bord de l'assemblage est le même que celui utilisé dans le cas de l'indentation des blocs ostéomorphes en glace : un cadre muni de vis de précompression latérale appuyant sur les cubes tronqués des bords de l'assemblage. Les cubes ont été fabriqués par moulage. La tolérance dimensionnelle après le démoulage est de $\pm 0.5mm$. Une première indentation a été effectuée sur un assemblage composé de ces cubes. Les jeux entre les blocs sont assez importants. La courbe correspondante apparaît en bleu sur la figure 1.28b. Une seconde série de cubes a été fabriquée mais cette fois les cubes ont été rectifiés par usinage. La tolérance dimensionnelle de ces nouveaux blocs est de 0.1mm. La courbe d'indentation de ce nouvel assemblage est affichée en rose sur la figure 1.28b.

L'assemblage constitué des blocs rectifiés montre une rigidité bien plus importante que le pavage réalisé à partir des cubes non rectifiés. L'effort maximal atteint est 60% plus grand que pour le premier essai. Cela est dû au fait que les jeux entre les blocs rectifiés sont réduits et que la surface de contact entre les blocs est alors bien plus grande, les efforts se répartissent mieux dans la structure au cours de l'indentation, ce qui a retardé l'endommagement des blocs.

L'étude de l'influence de la tolérance dimensionnelle a donc montré que le contact entre les blocs est un paramètre très important et que les cubes doivent si possible être usinés de façon très précise. Dans le cas contraire, il y a apparition de jeux entre les blocs et l'assemblage montre alors une moins bonne tenue mécanique et sa rigidité diminue fortement.

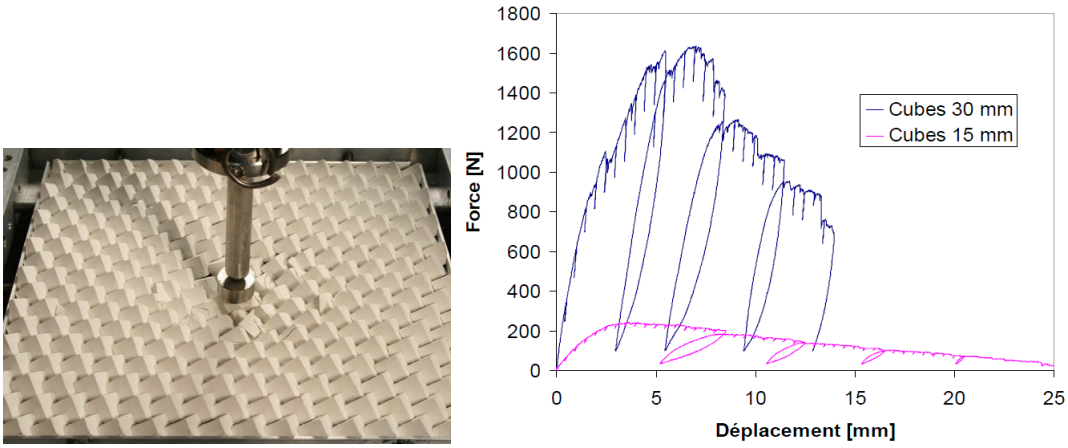


(a) (b)

FIGURE 1.28 – Etude de la tolérance dimensionnelle Brugger [2008] : a) Assemblage de blocs cubiques en plâtre de 30mm de côté après indentation, b) Courbe d'indentation - comparaison d'un assemblage de blocs non rectifiés avec un assemblage de blocs rectifiés

1.2.6.3 Effet de la taille des blocs

Avec le même montage expérimental, une étude de l'influence de la taille des blocs sur la réponse mécanique de l'assemblage a été effectuée. Deux tailles de blocs ont été choisies : 15mm et 30mm. Les courbes correspondantes apparaissent sur la figure 1.29. L'expérience réalisée grâce aux cubes de 15mm montre une courbe bien moins rigide en flexion que celle réalisée grâce aux cubes de 30mm.



(a) (b)

FIGURE 1.29 – Indentation d'un assemblage de bloc cubiques en plâtre - Etude de l'effet de la taille des blocs Brugger [2008] : a) assemblage de cubes de 15mm de côté, b) Courbes d'indentation d'un assemblage de cubes de 15mm de côté et d'un assemblage de cubes de 30mm de côté

Il y a deux paramètres à prendre en compte : la taille des blocs qui est divisée par deux ce qui a pour conséquence un second paramètre : le nombre d'interfaces est doublé. La valeur de l'effort maximal dans le cas des cubes de 15mm est 6.5 moins grande que dans le cas des cubes de 30mm. L'étude de l'influence de la taille des blocs a montré que plus les blocs sont de grande taille et plus la structure se rigidifie (à taille de plaque constante.

1.2.6.4 Effet de la précompression latérale

Toujours avec la même configuration expérimentale, une étude de l'influence de la précompression latérale sur la réponse mécanique de l'assemblage a été effectuée. Cette précompression latérale a été appliquée en appliquant un déplacement sur les blocs se trouvant aux bords de la structure grâce aux vis de précompression latérale se trouvant sur le cadre. Deux cas ont été étudiés, le cas où le déplacement appliqué sur les cubes de la périphérie est faible et le cas où ce déplacement est élevé. Les courbes résultantes sont affichées sur la figure 1.30.

Cette figure montre que lorsque la précompression latérale est élevée, l'assemblage devient plus

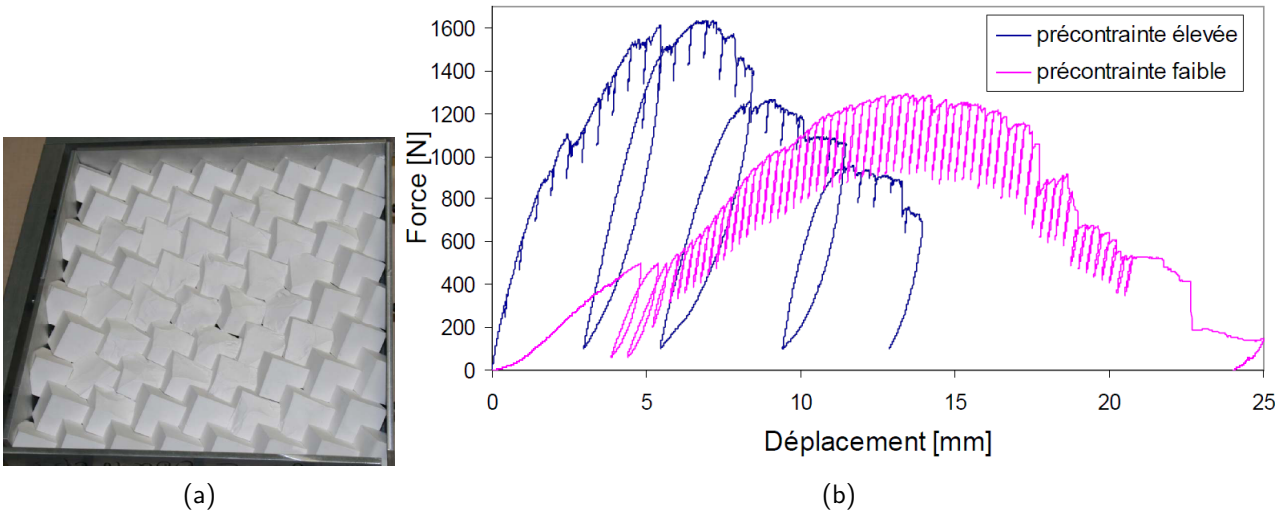


FIGURE 1.30 – Assemblage de blocs cubiques en plâtre de 30mm de côté - Etude de l'effet de la précompression latérale Brugger [2008] : a) assemblage après indentation, b) Courbe d'indentation - comparaison d'un assemblage fortement précontraint avec un assemblage faiblement précontraint

rigide. L'effort maximal atteint est plus grand que celui de l'essai réalisé à faible précompression latérale de 25%. Cette étude a montré que plus la précompression latérale appliquée est forte, plus la structure est rigide. Par contre, la valeur de la précontrainte n'ayant pas pu être mesurée, on ne peut pas conclure si la force maximale est linéairement dépendante de celle-ci comme montré par Dyskin et al. [2003d] dans le cas d'assemblages de blocs ostéomorphes en polymères.

1.2.7 Tolérance à l'endommagement

La percolation permet d'étudier les transitions de phase géométrique dans les systèmes comprenant un grand nombre d'éléments connectés entre eux et qui peuvent se trouver dans deux états distincts avec une certaine probabilité.

Molotnikov et al. [2007] a utilisé une variante de la théorie de la percolation dans le but de quantifier la limite de rupture d'un assemblage de blocs ostéomorphes. La limite de rupture sera donc déterminée par la limite de percolation de l'assemblage.

Le modèle du treillis 2D est celui qui se rapproche le plus de la description de la limite de rupture d'un assemblage. Un élément est considéré comme manquant (site vide) avec une probabilité p ou bien intact (le site est occupé) avec une probabilité 1-p. La quantité p peut être interprétée comme la densité de blocs endommagés.

Dans la théorie de la percolation conventionnelle, un nombre aléatoire est généré pour un élément individuel. L'élément est ensuite considéré comme intact si ce nombre est inférieur à p et endommagé dans le cas contraire. Cette procédure est utilisée pour chaque élément du treillis. On définit p_c comme la concentration critique d'éléments détruits pour laquelle la défaillance macroscopique apparaît.

La théorie de la percolation classique doit être modifiée pour modéliser un assemblage autobloquant, car il y a deux points à prendre en compte :

- Les éléments sont maintenus ensemble à travers le contact avec leurs voisins. De plus, le processus de retrait des éléments peut déclencher des avalanches de défaillance des blocs voisins.
- Les blocs de la périphérie restent intacts.

Les simulations sont effectuées sur un assemblage de N*N blocs ostéomorphes. La perte d'un élément peut ou non déclencher la perte d'un ou plusieurs voisins. Le voisin d'un élément retiré est considéré comme perdu ou éliminé du treillis s'il peut être retiré sans perturber les autres éléments restants.

La même simulation est effectuée 50 fois de suite, puis une moyenne est effectuée avec les 50 résultats obtenus. Les simulations ont été effectuées sur des assemblages ayant un nombre de blocs variant de 50 à 11000 pour déterminer la limite de percolation p_c. Plus l'assemblage est grand et plus la limite de percolation de p_c tend vers la limite de percolation d'un assemblage infini (voir figure 1.31).

La limite de percolation avec la théorie classique est de 59% ce qui parait peu probable. Par contre avec la théorie modifiée, on peut voir que la limite de percolation dans le cas d'un assemblage de blocs ostéomorphes est de 25% ce qui semble plus probable. L'assemblage peut

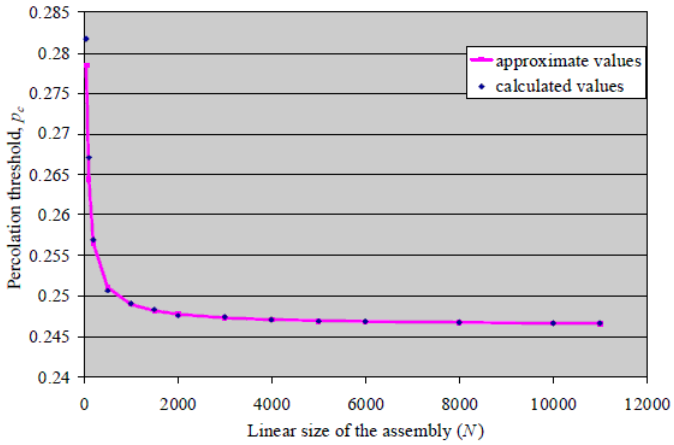


FIGURE 1.31 – Evolution de la limite de percolation en fonction du nombre de blocs à l'intérieur de l'assemblage, Molotnikov et al. [2007]

donc résister à la disparition de 25% de ses blocs.

1.3 Les applications

Pour l'heure, les applications envisagées pour les assemblages autobloquants concernent surtout le domaine du génie civil. Dans sa thèse, Yong [2011] retient trois applications potentielles : les murs de maçonnerie, les murs de soutènement et les pavages de chaussées. Mais les autobloquants peuvent aussi être envisagés dans d'autres applications en particulier dans le domaine aérospatial.

1.3.1 Bouclier thermique de navette spatiale

Après le tragique accident de l'explosion de la navette Colombia, Estrin et al. [2003] ont envisagé un nouveau concept qui permettrait de concevoir des boucliers plus résistants à la fois aux impacts et à de hautes températures.

Le bouclier thermique actuel, qui est composé de tuiles, n'est pas une structure cohésive : une tuile n'est pas supportée par ses voisines et peut donc se détacher après un impact. Il n'est pas possible de coller les tuiles entre elles, car elles vont se dilater, il est donc difficile de choisir une phase reliante alors que des liaisons mécaniques introduiraient des contraintes et nuiraient à l'intégrité de la structure. Il n'est pas non plus possible de fabriquer une couche protectrice continue (où les tuiles sont reliées entre elles), car celle-ci n'est pas capable de stopper les fissures.

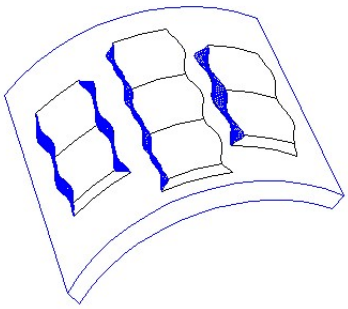


FIGURE 1.32 – Tuiles recouvertes de blocs ostéomorphes servant à la protection thermique

Grâce à l'autoblocage topologique qui consiste à découper une plaque monolithique en petits fragments qui seront bloqués topologiquement, un bloc peut être endommagé voir retiré sans perturber ses voisins. Les solides platoniciens ont d'abord été envisagés, mais ne peuvent pas être utilisés dans ce cas, car lorsqu'ils sont dans une configuration d'autoblocage, ils ne forment pas une surface lisse. De plus, ils ont une faible tolérance à l'endommagement.

Au contraire, la géométrie ostéomorphe permet d'obtenir une surface lisse. L'autoblocage peut être indépendant du matériau et de la taille des blocs. Il est alors possible de combiner

différents matériaux dans une seule couche du bouclier.

Les dimensions des blocs peuvent être choisies de façon à satisfaire des besoins technologiques ou fonctionnels, particulièrement l'épaisseur des blocs qui peut dépendre des propriétés physiques du matériau et des spécificités thermiques du bouclier.

Estrin et al. [2003] envisagent également d'utiliser les assemblages de blocs ostéomorphes pour réaliser des couches de protection thermique pour des applications spatiales. Il est en effet possible de diminuer l'épaisseur de ces blocs afin de limiter le poids de la structure. On peut également donner une courbure à l'assemblage, qui aura toujours un aspect extérieur lisse.

1.3.2 Construction extraterrestre

Les assemblages autobloquants ont aussi été envisagés par Dyskin et al. [2005] pour effectuer la construction extraterrestre, comme par exemple pour bâtir une base sur la Lune.

Comme il n'y a pas d'eau sur la Lune, il est impossible de fabriquer du mortier pour assembler des briques ensemble ou du béton pour construire les murs. L'idée est donc d'utiliser le régolite lunaire (la poussière produite par la collision de météorite à la surface de la Lune) pour fabriquer des blocs de forme ostéomorphe par frittage. Le régolite assurerait en plus une protection contre les radiations, car il contient beaucoup d'oxygène sous forme d'oxyde de silicium et d'oxyde d'aluminium.

Il est possible d'utiliser soit le relief de la lune ou bien des câbles (qui sont moins lourds que des cadres, mais tout aussi efficaces) pour appliquer les précompressions afin de maintenir les assemblages (voir figure 1.33).

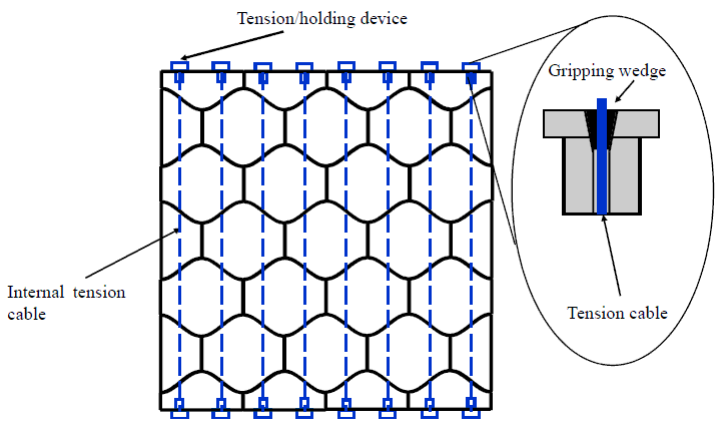


FIGURE 1.33 – Assemblage de blocs ostéomorphes maintenus par des câbles

Il est difficile de construire des toits à partir d'assemblages autobloquants en raison de leur

grande flexibilité même si la gravité sur la lune est bien plus faible. On peut alors fabriquer des plaques de blocs ostéomorphes puis les assembler pour obtenir un dôme.

1.3.3 Le génie civil

Les autobloquants ont été souvent envisagés comme solution pour le génie civil. Dans la thèse de Yong [2011] des applications dans ce domaine sont étudiées telles que :

- Les murs de maçonnerie ayant aussi des propriétés d'absorption de vibrations (murs anti-sismiques)
- les murs de soutènement
- Les pavages de chaussées

1.3.3.1 Les murs de maçonnerie anti-vibration

Une alternative aux blocs de béton classiques (comme les parpaings parallélépipédiques) est d'utiliser des blocs autobloquants. On ajoute des connecteurs de formes complémentaires à des blocs de béton classiques qui permettent de les assembler et les maintenir en place. Il est aussi possible d'ajouter des emplacements pour des renforts métalliques (béton armé). Les blocs ostéomorphes peuvent être un bon exemple de blocs de maçonnerie autobloquants.

La caractéristique de ces murs est qu'ils peuvent supporter de grandes charges. Yong [2011] a donc étudié comment des blocs ostéomorphes empilés résistent à un chargement axial grâce à des expériences couplées à des simulations numériques par éléments finis. Les résultats ont montré que la capacité limite en compression axiale dépend de l'inclinaison des interfaces curvilignes et donc du rapport H/L. Lors d'une compression axiale, il se produit de petits glissements au niveau des interfaces ce qui engendre des déformations de la crête centrale et peut donc engendrer des fissures.

L'augmentation du frottement au niveau des interfaces induit du cisaillement ce qui diminue le glissement relatif des blocs ce qui réduit la déformation de la crête centrale (fig. 1.34) et donc réduit la concentration de contrainte. La capacité de compression axiale d'une structure de blocs empilés est influencée par les aspérités de la surface de contact. Ces aspérités peuvent avoir deux formes : des particules libres qui se trouvent dans l'interface (troisième corps) ou bien des petites protubérances résultant de défauts lors du moulage. Ces défauts peuvent agir comme des points de concentration de contrainte réduisant la capacité en compression de la structure.

En ce qui concerne les capacités d'absorption vibratoire de la structure, Yong [2011] a posé l'assemblage sur une table de vibration et a pu observer que les vibrations sont atténuées au fur et à mesure qu'elles se déplacent vers le haut de la colonne. Mais plus la colonne est rigide dans le sens du déplacement des ondes et moins les ondes sont atténuées. Des surfaces

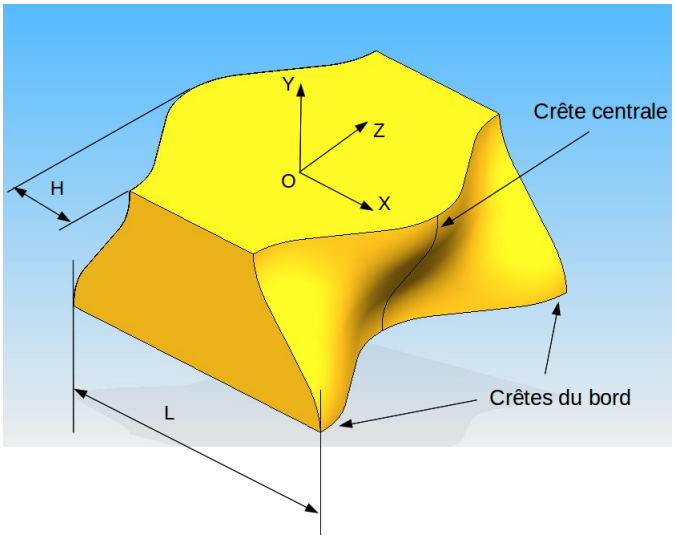


FIGURE 1.34 – Bloc ostéomorphe utilisé dans les expériences de D. Yong

rugueuses permettent une atténuation plus grande des ondes. L'atténuation de l'énergie de vibration lors de la propagation des ondes le long de la colonne est associée à la dissipation de l'énergie de vibration et est due aux petits glissements des blocs les uns par rapport aux autres au niveau des interfaces où il y a présence de friction.

Les simulations numériques réalisées pour approfondir les expériences n'ont pas pu donner des résultats confirmant ces expériences. En effet, comme expliqué dans la partie 1.1.3 les logiciels de dessins assistés par ordinateur introduisent des imprécisions lors de la création des blocs ostéomorphes à surfaces courbes (polynomiales, sinusoïdales ou en arc de cercle). Ces incertitudes de dimensionnement modifient la nature du contact entre deux blocs et sont sans doute à l'origine des contradictions entre les résultats expérimentaux et numériques.

1.3.3.2 Les murs de soutènement

Dans le génie civil, les murs de soutènement sont utilisés pour retenir la terre ce qui permet d'éviter les éboulements sur les routes par exemple ou bien des glissements de terrain. Ces murs peuvent aussi servir de soutien à une berge naturelle ce qui permet de créer un quai.

Il est possible d'utiliser des blocs ostéomorphes de différentes façons pour construire des murs de soutènement typiques (free-standing, geo-grid renforcés, acier renforcé) et aussi incorporer des éléments porteurs de lourdes charges dans le mur pour qu'il puisse être utilisé pour former des aboutements de ponts. Un essai de fabrication a été réussi et a montré comment il était possible de mouler des blocs de 20kg dans des moules peu coûteux. Il s'avère que la fabrication de murs avec des blocs ostéomorphes est moins chère que la construction de systèmes conventionnels.

1.3.3.3 Les pavages de chaussées

Des pavages de blocs ostéomorphes ont été testés en indentation. Le pavage est construit sur un support en caoutchouc déposé dans un cadre rigide lui aussi recouvert d'une couche de caoutchouc. Les bords de l'assemblage sont donc en contact avec une surface en caoutchouc qui assure la précontrainte. Deux formes de blocs ostéomorphes sont expérimentées : l'équation de description des surfaces réglées est décrite par des fonctions sinus (SC) ou bien par des arcs de cercle (CA). L'assemblage réalisé à partir de blocs CA montre une meilleure résistance à l'indentation que l'assemblage réalisé à partir de blocs SC.

La résistance des assemblages de blocs ostéomorphes dépend de la façon donc les efforts se transmettent d'un bloc à l'autre. En effet, la crête centrale des blocs montre une meilleure résistance aux fissures que les petites crêtes du bord du bloc. Donc, plus le paramètre H/L est grand et plus les crêtes sont grandes, ce qui renforce la résistance de l'assemblage.

Mais cela peut être influencé par le sens de disposition du pavage sur le support en caoutchouc. Yong [2011] a ainsi mis en évidence que lorsque l'assemblage est disposé de telle sorte que les petites crêtes sont en contact avec le support leur résistance aux fissures est plus grande. La première fissure apparaît à 10mm d'indentation. Alors que dans le cas où l'assemblage se trouve dans l'autre sens, ce sont les crêtes centrales qui sont en contact avec le support et qui sont alors renforcées, les petites crêtes étant donc plus vulnérables aux fissures. La première fissure apparaît à 4mm d'indentation.

Yong [2011] a également montré que les assemblages de blocs ostéomorphes montraient une meilleure résistance que les pavages segmentés conventionnels (constitués de pavés rectangulaires ou bien de pavés Unipave™).

D'autres paramètres ont une influence sur la réponse mécanique de l'assemblage :

- Le coefficient de frottement augmente la rigidité de l'assemblage.
- La résistance de l'assemblage dépend aussi de l'endroit de l'indentation. Dans le cas d'une indentation centrée, l'assemblage est plus résistant que dans le cas d'une indentation proche d'un bord.
- La rigidité du matériau servant à la mise en place des conditions de bords : l'assemblage est un peu plus rigide lorsque le matériau du bord est en plâtre à la place du caoutchouc, mais sa résistance reste limitée par la fissuration des crêtes du bord.

1.3.4 Les matériaux hybrides

Un matériau hybride est une combinaison d'un ou de plusieurs matériaux dans une géométrie et une échelle prédéterminée et pouvant remplir un cahier des charges bien précis.

Estrin et al. [2011] a imaginé la possibilité de placer un assemblage autobloquant dans un matériau sandwich, par exemple entre deux feuilles d'aluminium. L'assemblage y jouerait

le rôle de matériau cœur et les plaques serviraient de peaux. Les matériaux à topologie autobloquante offrent de nombreuses possibilités de conception de matériaux hybrides.

Des couches d'assemblages autobloquants peuvent aussi être combinés avec des substrats continus ou monolithiques ou encore comme cœur d'un matériau sandwich. La figure 1.35 montre un assemblage autobloquant de cubes métalliques posé sur une couche de silicone Schaare [2008]. Une telle structure hybride montre une rigidité en flexion très asymétrique,

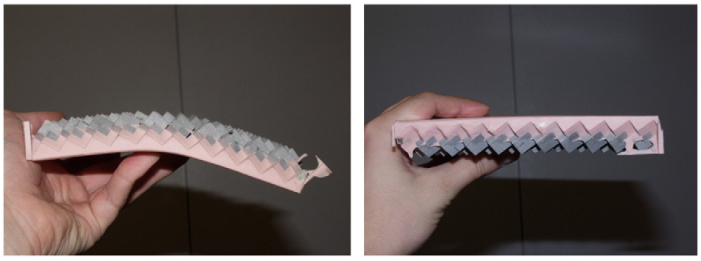


FIGURE 1.35 – Assemblage autobloquant de cubes métalliques fixé à une couche de silicone

dépendant du fait que la couche de silicone se trouve sous l'assemblage autobloquant (dans ce cas l'assemblage montre une faible rigidité en flexion (figure de gauche)) ou bien que la couche de silicone se trouve au-dessus (et dans ce cas l'assemblage montre une grande rigidité en flexion). Cette asymétrie peut être utilisée dans des applications où une certaine flexibilité d'une couche hybride est requise pour s'associer à la surface sous-jacente, tandis que la rigidité est nécessaire pour supporter le chargement de l'autre côté de la structure.

Une autre manière de construire des matériaux hybrides est d'utiliser plusieurs matériaux à l'intérieur du même assemblage, comme par exemple des élastomères au milieu d'un assemblage d'aluminium. L'aluminium assurerait la tenue mécanique et l'élastomère assurerait l'absorption de vibrations. Le matériau aurait alors des propriétés multifonctionnelles. En fonction des applications voulues, il est possible de jouer sur les proportions des matériaux dans l'assemblage (voir figure 1.36) pour en faire varier les propriétés multifonctionnelles (différence de tenue mécanique et d'absorption de vibration par exemple).

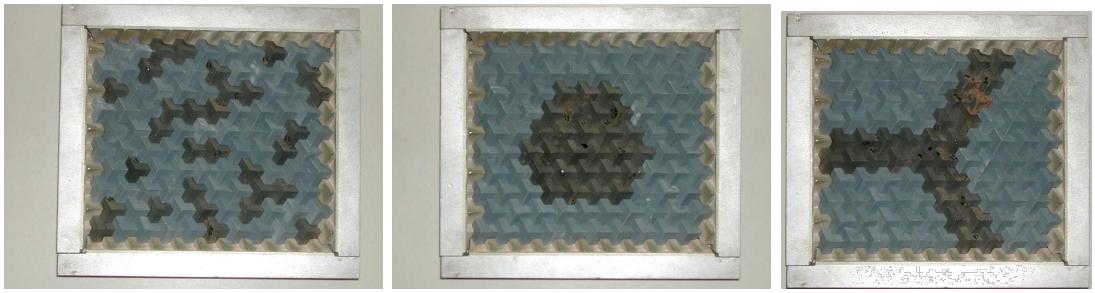


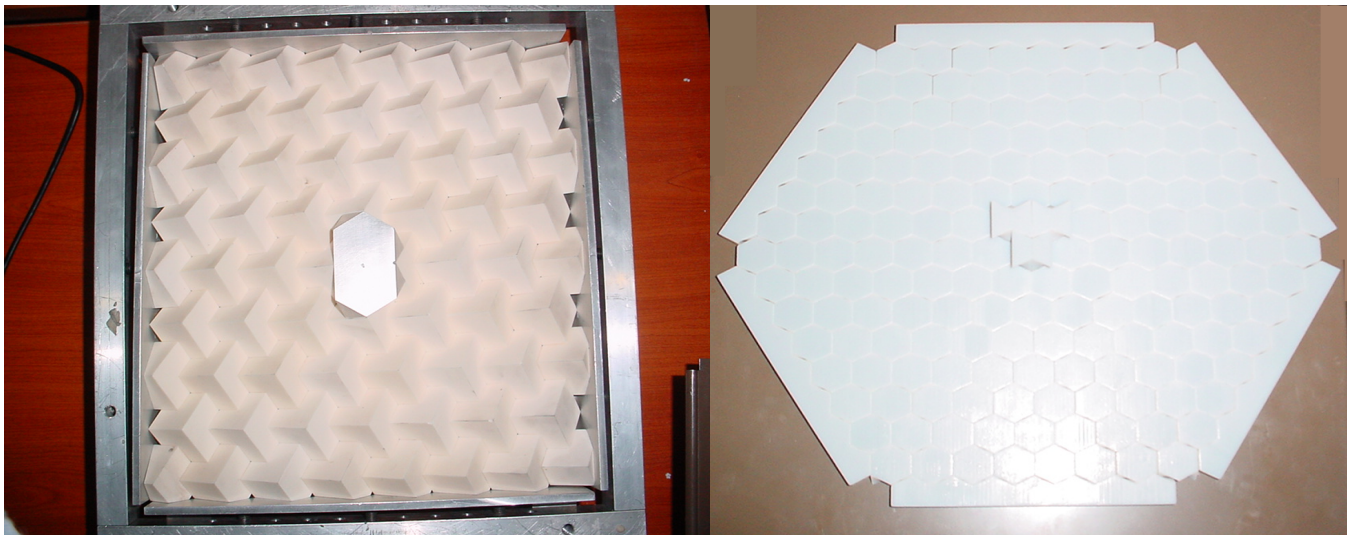
FIGURE 1.36 – Assemblage autobloquant hybride composé de cubes en aluminium et en PVC - différentes configurations possibles

Chapitre 2

Essais d'indentation d'assemblages autobloquants

Un moyen de tester le comportement mécanique de pavages 2D autobloquants consiste à étudier leur réponse mécanique sous indentation. De telles sollicitations ont déjà étudiées par Estrin et al. [2004], Autruffe et al. [2007] et plus récemment par Molotnikov et al. [2007], Brugger [2008] et Yong [2011]. Jusqu'à présent, tous les essais d'indentation ont été réalisés sur la géométrie ostéomorphe non simplifiée avec des matériaux constituant allant de la glace à l'aluminium en passant par les polymères, les céramiques et le béton et sur la géométrie cubique avec des matériaux tels que l'aluminium, le plâtre et des polymères.

Dans ce mémoire, nous avons étudié la réponse en indentation de divers assemblages autobloquants : le premier est un pavage rectangulaire de 68 cubes en alumine (fig. 2.1a). Les autres assemblages sont des assemblages de blocs ostéomorphes à géométrie simplifiée en polymère (appelé VeroGray™) fabriqués par prototypage rapide.
Un exemple d'assemblage de blocs ostéomorphes testé en indentation est donné figure 2.1b. Dans ce chapitre, nous exposerons la méthode mise en place pour réaliser les essais d'indentation des assemblages des deux géométries. Nous présenterons ensuite les réponses en indentation des assemblages.



(a) (b)

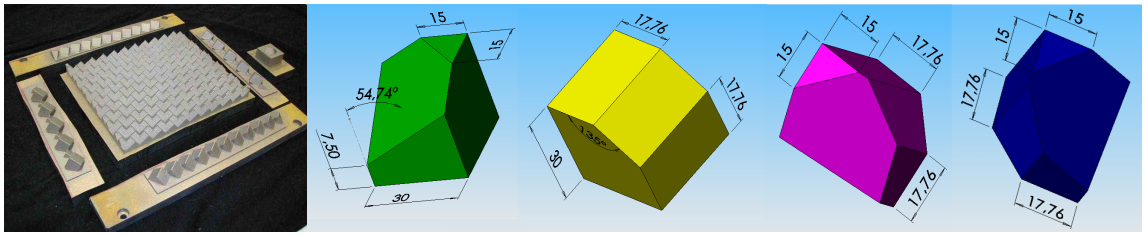
FIGURE 2.1 – Assemblages étudiés : a) assemblage de cubes en alumine, b) assemblage de blocs ostéomorphes simplifiés en VeroGray fabriqués par prototypage rapide

2.1 Méthode expérimentale utilisée dans le cas des cubes

Dans cette partie, nous allons décrire la mise en place de l'expérience d'indentation d'un assemblage de cubes.

Assemblage de cubes :

L'assemblage a la forme d'un rectangle de 270*280mm et les blocs sont des cubes en alumine dense. Les bords de l'assemblage ne sont pas plans. Pour pouvoir maintenir les cubes de la couronne extérieure en contact avec le cadre, il est indispensable soit d'usiner les bords du cadre pour qu'ils épousent la forme des cubes se trouvant aux bords de l'assemblage comme l'a fait Estrin et al. [2004], Schaare et al. [2008] (fig.2.2a), soit de tailler les cubes de la dernière couronne de l'assemblage pour prendre une arrête droite face au cadre (voir figure. 2.2b).



(a) (b)

FIGURE 2.2 – Différentes possibilités d'application des contraintes latérales aux bords de l'assemblage : a) Cadre utilisé par Estrin et al. [2004], Schaare et al. [2008], b) Cubes tronqués

Nous avons choisi l'option de tailler les blocs pour que les bords de l'assemblage de cubes épousent le cadre. Quatre nouvelles géométries vont résulter de la découpe des bords de l'assemblage (2.2b). L'assemblage sera alors constitué de 46 cubes entiers et de 22 cubes tronqués. Les cubes ont été fabriqués par Precinet, une entreprise de fabrication de pièces en céramique.

Cette entreprise est spécialisée dans l'usinage des céramiques et autres matériaux fragiles. La méthode de fabrication commence par la coulée en barbotine dans le but d'obtenir une plaque. Cette plaque est ensuite frittée puis découpée grâce à une scie diamant tournant à une vitesse calibrée de telle façon à ne pas fissurer l'alumine au cours du découpage.

La tolérance dimensionnelle est une donnée très importante comme l'a démontré Brugger [2008] dans sa thèse, car dans un assemblage autobloquant, le contact entre les blocs est crucial et a une grande influence sur la rigidité de l'assemblage. Ici, la tolérance dimensionnelle est très bonne, elle est de l'ordre de $\pm 0.05mm$ pour des cubes de 30mm de côté.

Le coefficient de frottement entre les blocs est d'environ 0.4±0.05. Cette valeur a été mesurée en posant un cube en alumine sur un autre cube qui est fixe, puis ces deux cubes sont

FIGURE 2.3 – Cube en alumine 30*30mm

inclinés. Le coefficient de frottement correspond au sinus de l'angle à partir duquel le cube supérieur commence à glisser. L'expérience a été reproduite un grand nombre de fois puis une valeur moyenne a été estimée. Le matériau utilisé est de l'alumine dont le module d'Young est de 390GPa.

Cadre :

Le cadre est le même que celui utilisé par Brugger [2008] lors de ses expériences d'indentation sur des assemblages de cubes en plâtre. Le cadre a été usiné dans de l'aluminium. Le bord de l'assemblage est maintenu par des équerres posées à l'intérieur du cadre sur deux barres se trouvant en bas. Ces équerres sont maintenues par des vis traversant le cadre. Ces vis servent à appliquer une précompression sur les bords de l'assemblage.

Par la suite, nous appellerons précompression, le couple de serrage appliqué sur chacune des vis de précompression (en N.mm). Deux barres supplémentaires ont été ajoutées en dessous du cadre pour pouvoir poser le cadre dans la machine de compression.

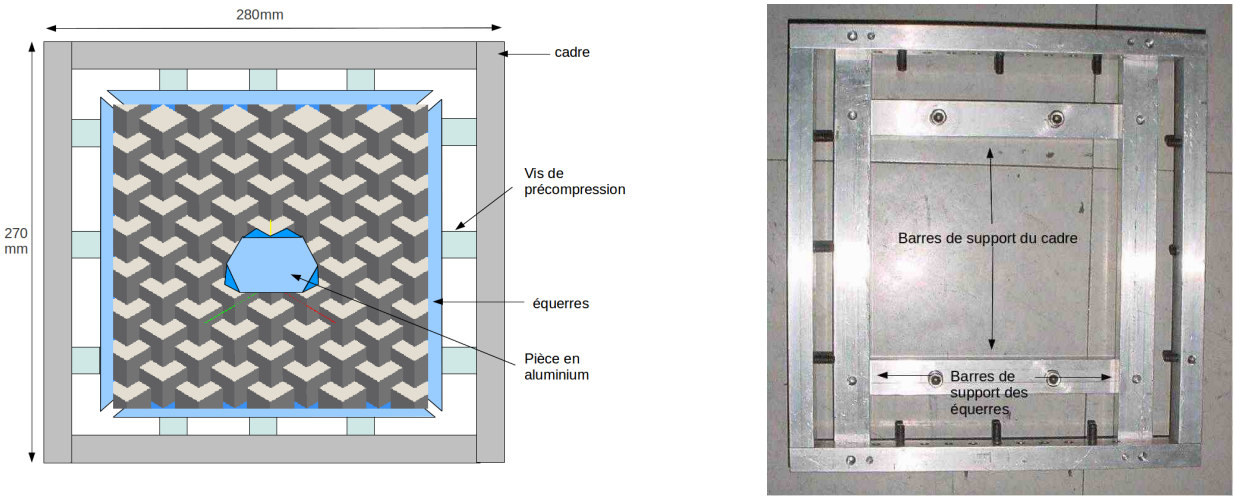


FIGURE 2.4 – Schéma et photo du cadre en aluminium servant à l'expérience

Une pièce en aluminium épousant la forme des quatre cubes du centre est posée sur ces blocs qui seront indentés (voir schéma de la figure 2.4). Cette pièce a été créée pour appliquer le chargement sans endommager les sommets des cubes centraux (voir figure 2.5).

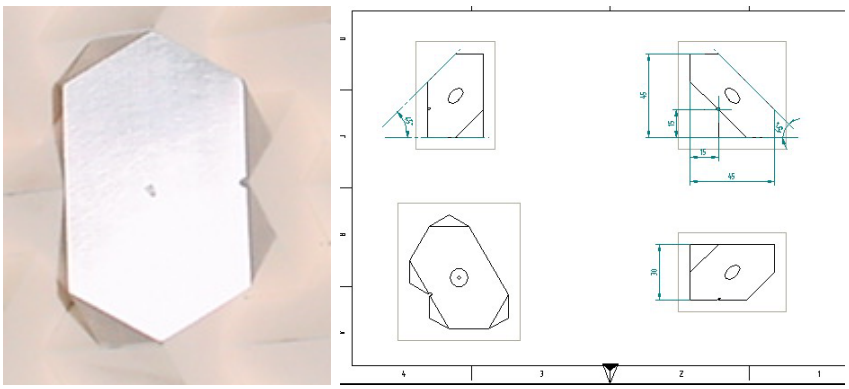


FIGURE 2.5 – Pièce épousant la forme des quatre cubes centraux à indenter

Paramètres mesurés :

Durant l'indentation, nous allons obtenir une courbe de charge ayant l'allure schématisée sur la figure 2.6. Sur cette courbe nous allons nous intéresser à deux paramètres qui permettront de caractériser l'assemblage indenté : Le module initial m_i qui sera donné par la pente à l'origine de la courbe. Le module tangent m_t qui sera donné par la pente de la courbe à un déplacement de l'indenteur donné. Durant l'indentation, nous effectuerons des décharges partielles qui donneront accès au module à décharge m_d aussi appelé rigidité apparente.

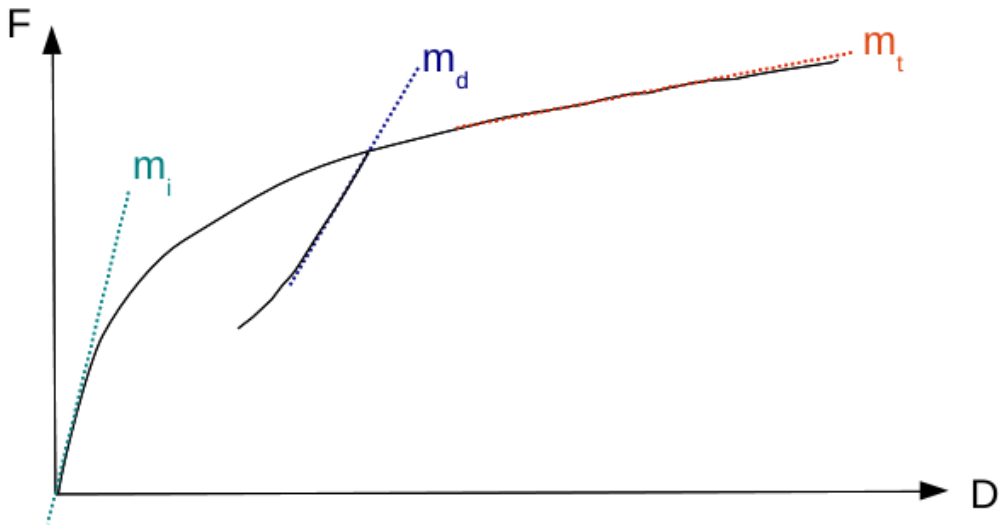


FIGURE 2.6 – Schéma caractéristique de la courbe de charge expérimentale et définition des différents modules mesurés

2.2 Résultat de l'indentation d'un assemblage de cubes en alumine

Nous allons maintenant étudier les résultats obtenus lors de l'indentation de cet assemblage. Ces expériences ont permis d'effectuer plusieurs études. La première portera sur l'influence de la précompression latérale sur la rigidité de l'assemblage.

La seconde sera une étude de l'influence de l'endommagement sur la courbe d'indentation. Pour cela, les essais ont tous été réalisés sur le même assemblage. La dernière sera une combinaison des deux premières études : l'influence de la précompression latérale sur un assemblage déjà endommagé.

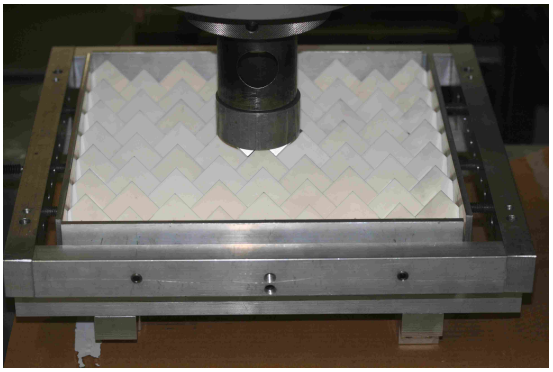


FIGURE 2.7 – Photo de l'assemblage à l'intérieur de la machine de traction

Afin de réaliser l'indentation, une pièce cylindrique a été interposée entre le mors et la pièce épousant la forme des cubes centraux. Avant d'effectuer tous ces essais, nous avons appliqué deux cycles de charges suivis de décharges complètes pour observer les premières réponses de l'assemblage lors de la phase de rattrapage de jeux.

2.2.0.1 Cyclages préliminaires - Rattrapage de jeux

Une précompression de 5N.m a été appliquée sur les bords de l'assemblage à l'aide d'une clé dynamométrique.

La charge est progressivement augmentée jusqu'à 1000N à une vitesse de $0.0001 mm.min^{-1}$. Puis une phase de décharge est programmée jusqu'à 500N. Plusieurs cycles charge-décharge sont ensuite effectués entre ces deux valeurs de forces. La courbe obtenue est donnée en figure 2.8. On constate que les courbes ne se superposent pas et que les cycles se décalent peu à peu : on a un phénomène de rochet. Il demeure toutefois une hystérésis, l'énergie dissipée résultant très probablement du frottement inter-bloc.

Un second essai a ensuite été effectué sur le même assemblage mais en appliquant des cycles de charges jusqu'à 2000N suivis de décharges complètes. La courbe résultante montre que le décalage a disparu et que les cycles se superposent (voir figure 2.9). Cela peut s'expliquer par un réarrangement des blocs, les jeux restants à l'intérieur de l'assemblage ont été rattrapés au moment de la décharge complète à la fin du premier essai.

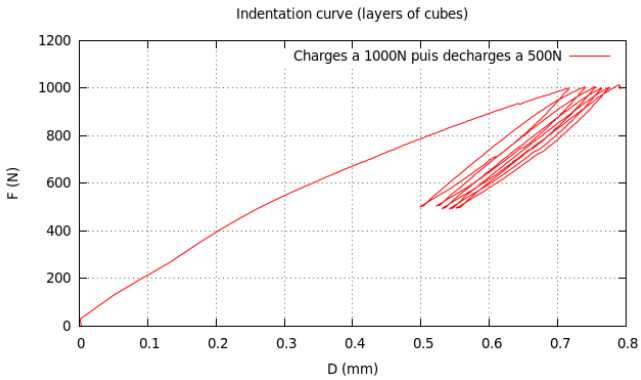


FIGURE 2.8 – Indentation d'un assemblage de cubes en alumine - Cycles de charge-décharge entre 500N et 1000N

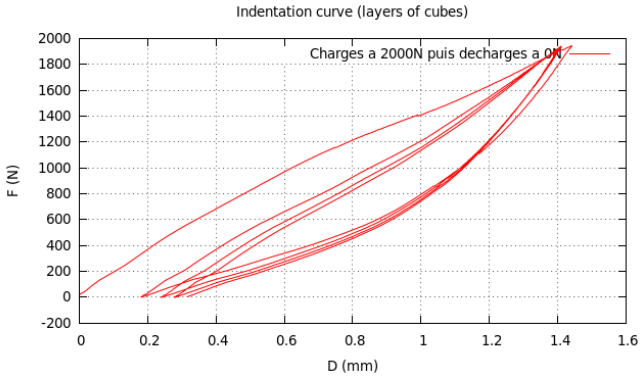


FIGURE 2.9 – Courbe d'indentation d'un assemblage de cubes en alumine : cycles de charges jusqu'à 2000N puis décharges à 0N.

2.2.0.2 Première indentation

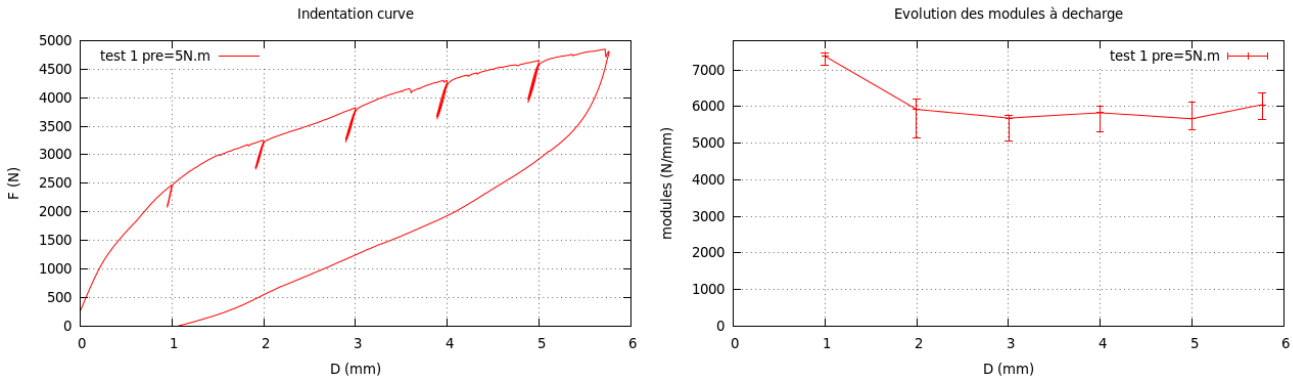
Toujours avec une précompression de 5N.m, l'assemblage a ensuite subi une première indentation de 6mm avec une décharge à 85% de la force atteinte tous les millimètres. Cela sera le cas de toutes les prochaines indentations partielles.

La figure 2.10a représente la courbe d'indentation obtenue. Cette courbe montre que l'effort augmente avec le déplacement de l'indenteur. La pente est plus forte pendant le premier millimètre d'indentation puis l'effort continue à augmenter avec une pente plus faible. Les pentes des décharges reflètent le comportement élastique de l'assemblage. La figure 2.10b présente l'évolution de ces pentes à décharge en fonction du déplacement de l'indenteur. On constate une forte diminution entre 1 et 2mm puis une stabilisation vers une valeur de 6kN/mm.

2.2.0.3 Étude de l'influence de la précompression

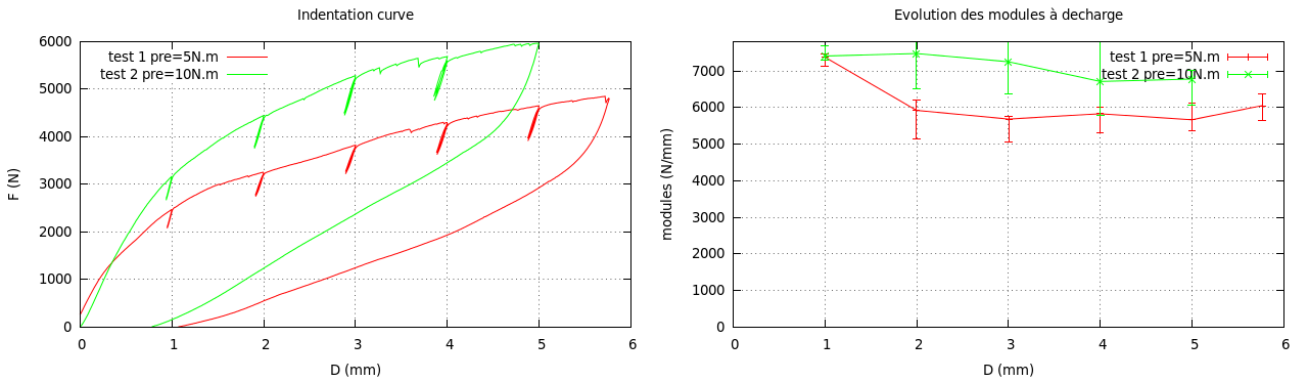
La précompression a ensuite été augmentée à 10N.m et l'assemblage a été progressivement indenté jusqu'à 5mm. La courbe de la figure 2.11a montre l'effet de la précompression sur la réponse mécanique de l'assemblage.

Avec une précompression doublée, la structure est plus rigide de 37%. Comme dans le cas

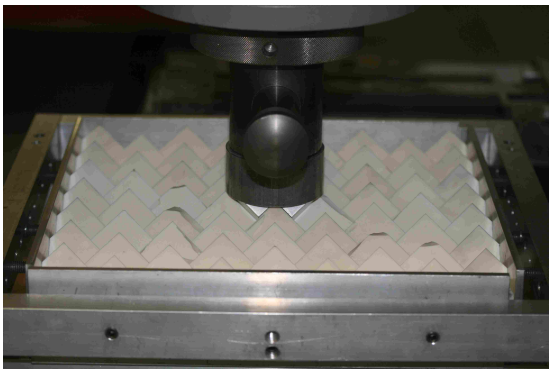


(a) (b)

FIGURE 2.10 – Courbe d'indentation d'un assemblage de cubes en alumine de 6mm - précompression 5N.m : a) Courbe d'indentation, b) Modules à décharge



(a) (b)



(c)

FIGURE 2.11 – Résultats des indentations d'un assemblage de cubes en alumine avec des précompressions de 5N.m et 10N.m : a) Courbe d'indentation, b) Modules à décharge, c) Photo de l'assemblage après indentation

d'une précompression de 5N.m, les pentes à décharge diminuent et tendent à nouveau vers une raideur apparente de l'ordre de 6kN/mm.

Il existe sur les courbes d'indentation de petites irrégularités. Celles-ci correspondent aux

endommagements que l'on peut observer sur la photo 2.11c. En effet, les coins des cubes indentent les cubes voisins. Au bout d'un certain effort, le coin de ce cube, qui est en alumine, casse en emportant toute l'arête.

2.2.0.4 Etude de l'influence de l'endommagement

Nous avons d'abord effectué une première indentation avec une précompression de 5N.m puis une seconde indentation avec une précompression de 10N.m. Comme nous avons pu le constater dans le paragraphe précédent l'assemblage a été endommagé par ces deux premiers essais. Certains coins des cubes se sont brisés et ne peuvent plus indenter leurs voisins aussi efficacement.

En rediminuant la précompression latérale à 5N.m, il est alors possible d'effectuer une étude de l'effet de l'endommagement sur la réponse mécanique de l'assemblage. Une nouvelle indentation de 5mm a donc été appliquée avec une précompression de 5N.m.

La courbe obtenue a ensuite été tracée et superposée sur le graphe du premier essai à 5N.m. Les deux courbes apparaissent sur la figure 2.12a, avec en rouge l'essai avec une précompression de 5N.m avant endommagement et en bleu clair l'essai avec une précompression de 5N.m après endommagement.

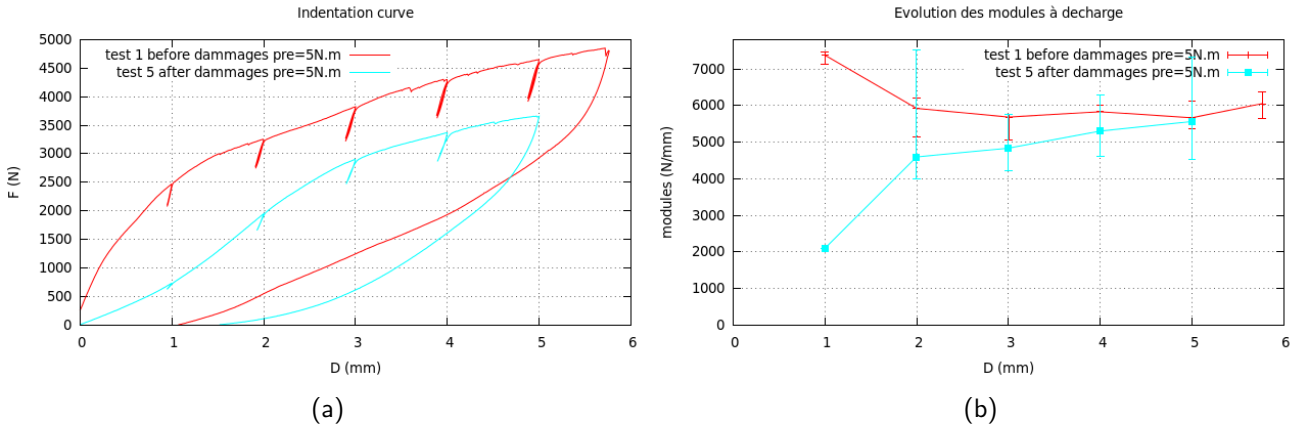


FIGURE 2.12 – Indentation d'un assemblage de cubes en alumine - Influence de l'endommagement - précompression 5N.m : a) Courbe d'indentation, b) Modules à décharge

À cause de l'endommagement, l'effort à fournir pour le second essai à 5N.m est fortement diminué. La pente initiale de la courbe bleue est plus faible, mais un peu avant 3mm de déplacement de l'indenteur, la courbe évolue et présente un module tangent similaire à celui de l'assemblage non endommagé.

C'est aussi ce que l'on observe sur la courbe d'évolution des pentes des décharges 2.12b, qui augmente fortement au début pour rejoindre les valeurs de rigidité apparente précédentes.

2.2.0.5 Etude de l'influence de la précompression après endommagement

Deux nouvelles indentations de 5mm ont été effectuées : la première avec une précompression de 2.5N.m et la seconde avec une précompression de 7.5N.m. Les courbes ont été comparées à la courbe obtenue avec une précompression de 5N.m après endommagement 2.13a. L'essai corres-

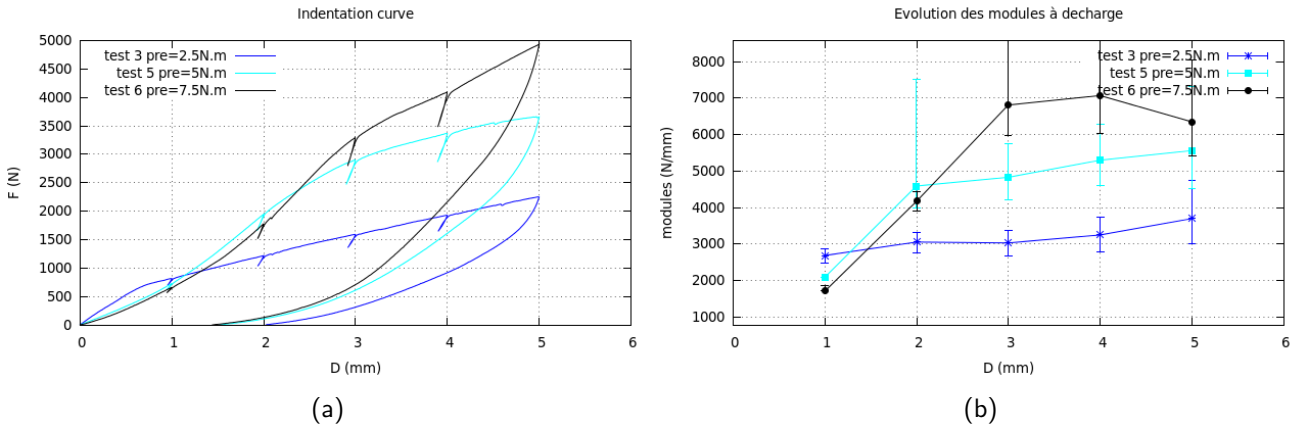


FIGURE 2.13 – Courbes d'indentation d'un assemblage de cubes en alumine après endommagement - précompressions : 2.5N.m, 5.0N.m, 7.5N.m : a) Courbe d'indentation, b) Modules à décharge

pondant à une précompression de 2.5N.m semble avoir été moins affecté par l'endommagement. La force à appliquer augmente rapidement au début de l'indentation puis un peu avant 1mm, la force augmente avec une pente plus faible tout comme les deux premières courbes avant endommagement. Cela est sûrement dû à la faible précompression. Les pentes à décharges 2.13b augmentent tout au long de l'essai pour atteindre une valeur de rigidité apparente de 3.5kN/mm.

En ce qui concerne la courbe d'indentation correspondant à la précompression de 7.5N.m, elle évolue de la même façon que celle correspondant à la précompression de 5N.m après endommagement. L'effort augmente rapidement avant 3mm d'indentation. Les pentes à décharge augmentent aussi rapidement avant 3mm, puis se stabilisent à une valeur de rigidité apparente de 6.5kN/mm.

Dans le cas des essais après endommagement, les cubes ont plus d'espace, car une partie de leur masse a disparu, les blocs peuvent donc glisser les uns par rapport aux autres, la rigidité augmente alors très peu. Puis après quelques millimètres, les blocs se bloquent et il ne peut plus se produire de glissement et la rigidité augmente plus rapidement. Pour que les blocs puissent à nouveau glisser, il faut qu'il se produise de nouveaux dommages.

2.2.0.6 Indentation jusqu'à perforation

Une dernière indentation jusqu'à la limite de perforation été effectuée pour le même assemblage avec une précompression de 7.5N.m.

La figure 2.14a montre la courbe d'indentation complète. Des décharges ont été effectuées à 5, 10 et 15mm. L'effort maximal se trouve à environ 6000N et le déplacement correspondant à cet effort se trouve à environ 7.5mm soit 4% de la hauteur d'un cube. Après cette valeur de déplacement, l'effort diminue jusqu'à la fin de l'essai et devient nul pour 40mm d'indentation. L'assemblage se trouve alors au bord de la perforation. Sur la figure 2.14b les évolutions des

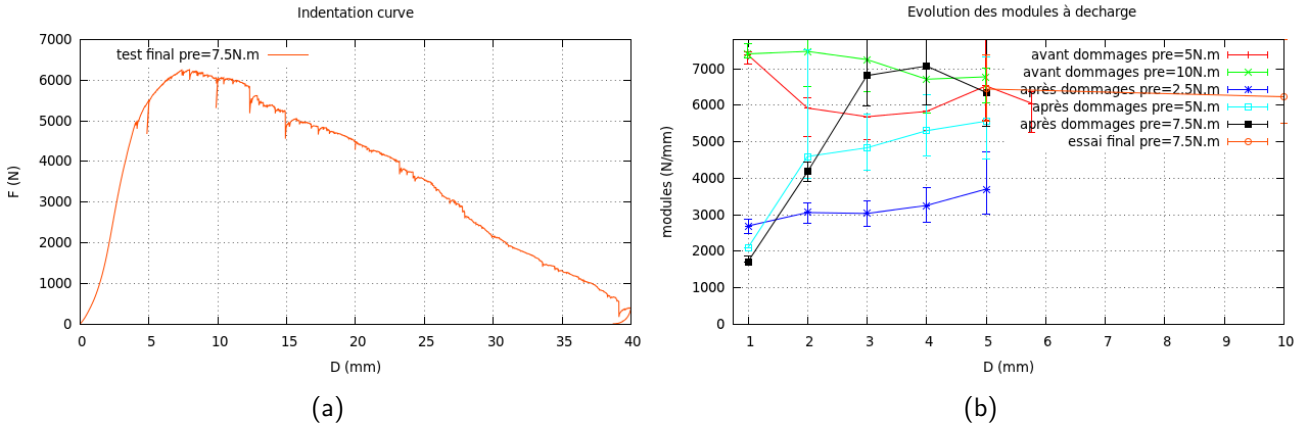


FIGURE 2.14 – Courbe d'indentation d'un assemblage de cubes en alumine jusqu'à perforation - précompression 7.5N.m : a) Courbe d'indentation, b) Modules à décharge

pentes à décharges de tous les essais sont représentées. On peut constater que toutes les pentes semblent converger vers la même rigidité apparente. Cette rigidité est celle mesurée à 5mm d'indentation sur ce dernier essai.

Cela signifie que tous les dommages causés dans les précédentes indentations de 5mm, n'ont d'effet que sur la pente mesurée pendant ces 5mm, car ils ne sont pas assez nombreux. Au-delà, l'assemblage reprend la réponse mécanique de l'assemblage non endommagé.

Les photos de la figure 2.15 montrent l'assemblage vu de dessus et de dessous après cette dernière indentation. Les quatre cubes centraux ont presque été expulsés.

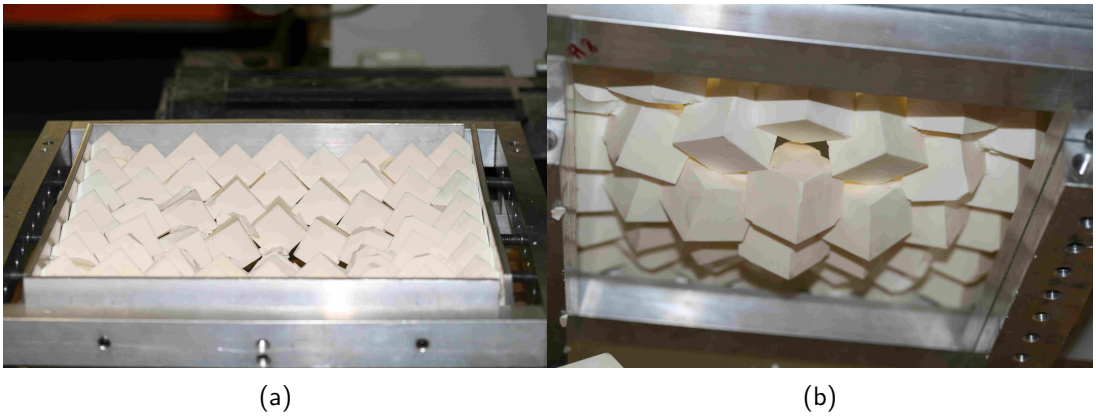


FIGURE 2.15 – Vue de l'assemblage après indentation d'un assemblage de cubes en alumine jusqu'à perforation - précompression 7.5N.m : a) Vue de dessus, b) Vue de dessous

Sur toutes les courbes d'indentation, il apparaît que lorsque l'effort de l'indenteur redevient nul à la fin de la décharge, la position de l'indenteur, n'est pas revenue à son point de départ (zéro). Il existe donc une déformation résiduelle de l'assemblage à la fin de la décharge. L'évolution de la position de cette déformation résiduelle en fonction de la précompression a été tracée sur la figure 2.16. On peut observer que ce déplacement résiduel est plus faible lorsque la

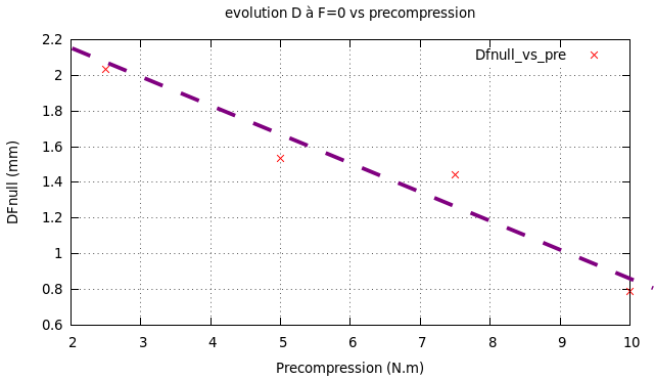


FIGURE 2.16 – Position de l'indenteur à la fin de la décharge en fonction de la précompression

précompression est plus grande. La relation entre le déplacement résiduel et la précompression semble être linéaire.

2.3 Méthode expérimentale utilisée dans le cas des blocs ostéomorphes

Dans cette partie, nous allons décrire la mise en place de l'expérience d'indentation d'assemblages autobloquants de blocs ostéomorphes à géométrie simplifiée réalisés en polymère appelé VeroGray™ 30µ par prototypage rapide. Les blocs ont été fabriqués par la société MG2 Systems (www.mg2-systems.com). Le VeroGray™ est un nom industriel d'une variante de résine acrylate.

La technologie d'impression 3D consiste à déposer des couches de ce polymère photosensible à base d'acrylique qui est ensuite durci par une lampe UV. Les zones évidées sont remplies d'un matériau support de type gel qui s'enlève à l'eau. La mention 30µ est un indicateur de l'épaisseur des couches déposées et donc de la rugosité imprimée sur la pièce réalisée. Nous avons aussi fait réaliser des éprouvettes de traction en VeroGray™ 30µ dans le but de caractériser mécaniquement ce polymère.

Les résultats de la caractérisation mécanique du VeroGray™ 30µ sont présentés dans l'annexe A. Le module d'Young mesuré lors de ces expériences est de l'ordre de 3GPa. Le coefficient de frottement entre deux blocs en VeroGray™ a été estimé à 0.7±0.05. La mesure a été effectuée de la même façon que dans le cas des cubes en alumine (cf 2.1).

D'abord, nous décrirons l'indenteur utilisé, la mise en forme de l'assemblage puis la disposition de l'assemblage dans la machine de compression.

2.3.1 Forme de l'indenteur

L'indenteur est composé d'une tige de 2cm de diamètre solidaire du mors supérieur de la presse sur lequel est connectée la cellule de force. L'extrémité de l'indenteur est sphérique et vient se centrer sur une pièce cylindrique évidée en son centre (voir figure 2.17). On créé ainsi une liaison rotule qui permet de corriger les défauts de parallélisme entre les mors de la machine et l'assemblage. Le mors inférieur de la machine a été retiré afin de pouvoir poser le cadre dans la machine de compression.

2.3.2 Mise en forme de l'assemblage

Les bords des assemblages doivent être précontraints. Dans ce but, nous avons utilisé deux types de blocs ostéomorphes : des blocs pleins (figure 2.18a) qui seront les blocs libres dans l'assemblage et des blocs percés (figure 2.18b) qui serviront à l'application de la précompression de l'assemblage. Prenons pour exemple l'assemblage de 19 blocs qui a une forme hexagonale (voir figure 2.18c).

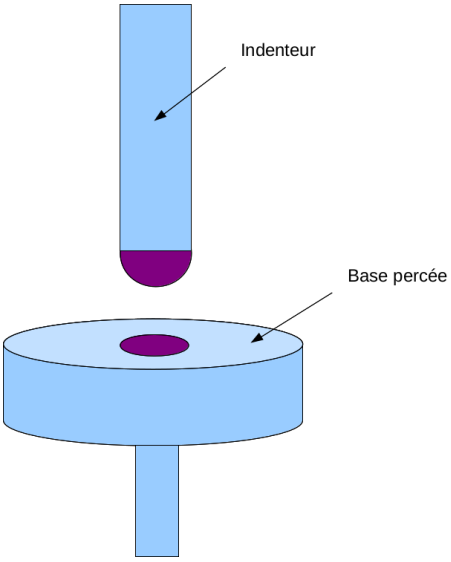
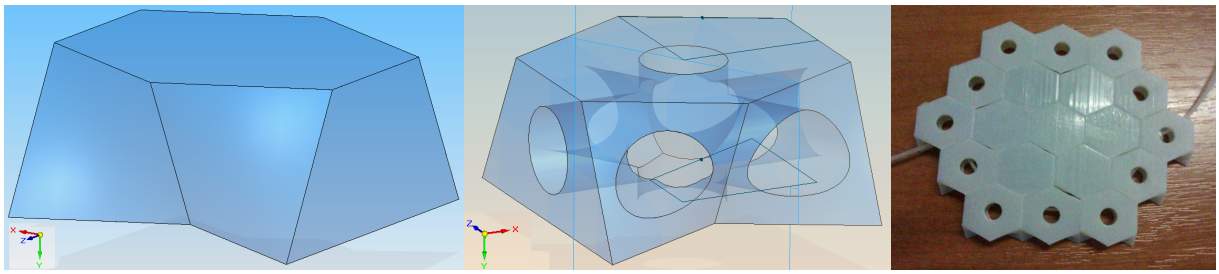


FIGURE 2.17 – Schéma de l'indenteur utilisé pour l'indentation d'assemblages ostéomorphes en polymère



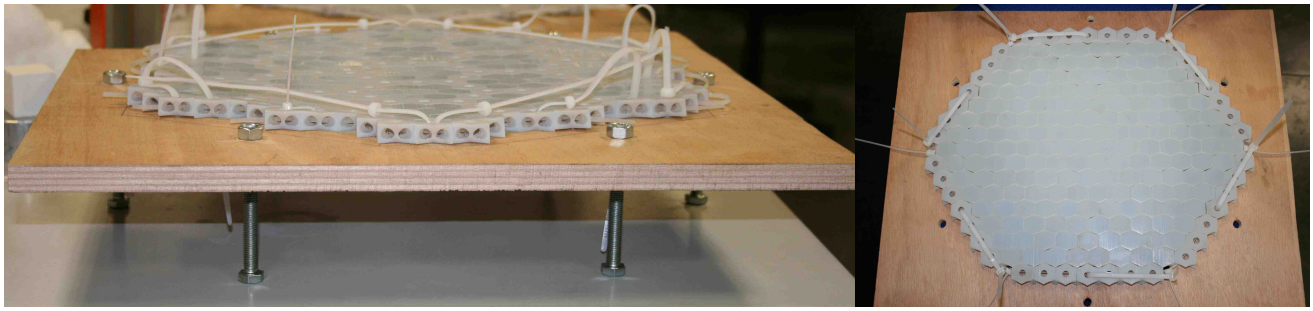
(a) (b) (c)

FIGURE 2.18 – Formes ostéomorphes à géométrie simplifiée utilisées lors des expériences : a) Bloc ostéomorphes pleins, b) Bloc ostéomorphes percés, c) Assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes

Cet assemblage est composé d'un bloc central entouré d'une couronne de blocs libres elle-même entourée d'une seconde couronne de blocs précontraints. Les blocs de cette dernière couronne sont percés. Des colliers de serrage sont introduits dans les perçages afin d'imposer la précompression à l'assemblage. Cet assemblage est donc composé de 7 blocs pleins et de 12 blocs percés.

2.3.3 Installation de l'assemblage à l'intérieur de la machine de compression

Dans une planche en bois, nous avons usiné une ouverture de la forme de l'assemblage à indenter et légèrement plus petite de telle sorte que les bords de l'assemblage soient en contact avec le support (voir figure 2.19a).



(a) (b)

FIGURE 2.19 – Installation de l'assemblage : a) Support de l'assemblage, b) Fixation de l'assemblage sur son support

Des perçages ont été effectués sur les bords de l'assemblage ce qui permet de passer des colliers de serrage qui vont fixer les bords de l'assemblage au support. Des vis permettent de surélever le support (fig. 2.19b). Le tout est ensuite posé à l'intérieur de la machine de compression.

2.4 Résultat de l'indentation d'assemblages de blocs ostéomorphes en polymère

Dans cette section, nous présenterons les résultats des expériences d'indentation menées sur différents assemblages de blocs ostéomorphes. Nous comparerons deux assemblages hexagonaux, l'un de 19 blocs et l'autre de 217 blocs. Puis nous étudierons deux assemblages (Coarse et Tissé) ayant une structure hiérarchique et constitués à partir d'assemblages hexagonaux de 19 blocs.

Pour chacun des assemblages, nous étudierons différents paramètres tels que la position du bloc indenté, l'influence de blocs manquants, le sens de l'indentation, et dans le cas de l'assemblage hexagonal 217 blocs, la précompression latérale.

2.4.1 Indentation d'un assemblage hexagonal de 19 blocs

Nous allons commencer par étudier l'assemblage hexagonal élémentaire de 19 blocs (voir figure 2.20c) décrit dans la section précédente. Pour débuter, nous avons appliqué une indentation de 11.5mm sur le bloc central de l'assemblage. Une décharge partielle de 80% de la force atteinte a été effectuée tous les millimètres d'indentation.

L'effort augmente rapidement pendant les premiers millimètres d'indentation (voir figure 2.20a).

Puis il continue à augmenter de façon moindre jusqu'à atteindre un effort maximal de 31N autour de 5mm. L'effort reste stable (le module tangent est quasi nul) jusqu'à 10.5mm. Après ce plateau, l'effort diminue lentement jusqu'à la fin de l'indentation.

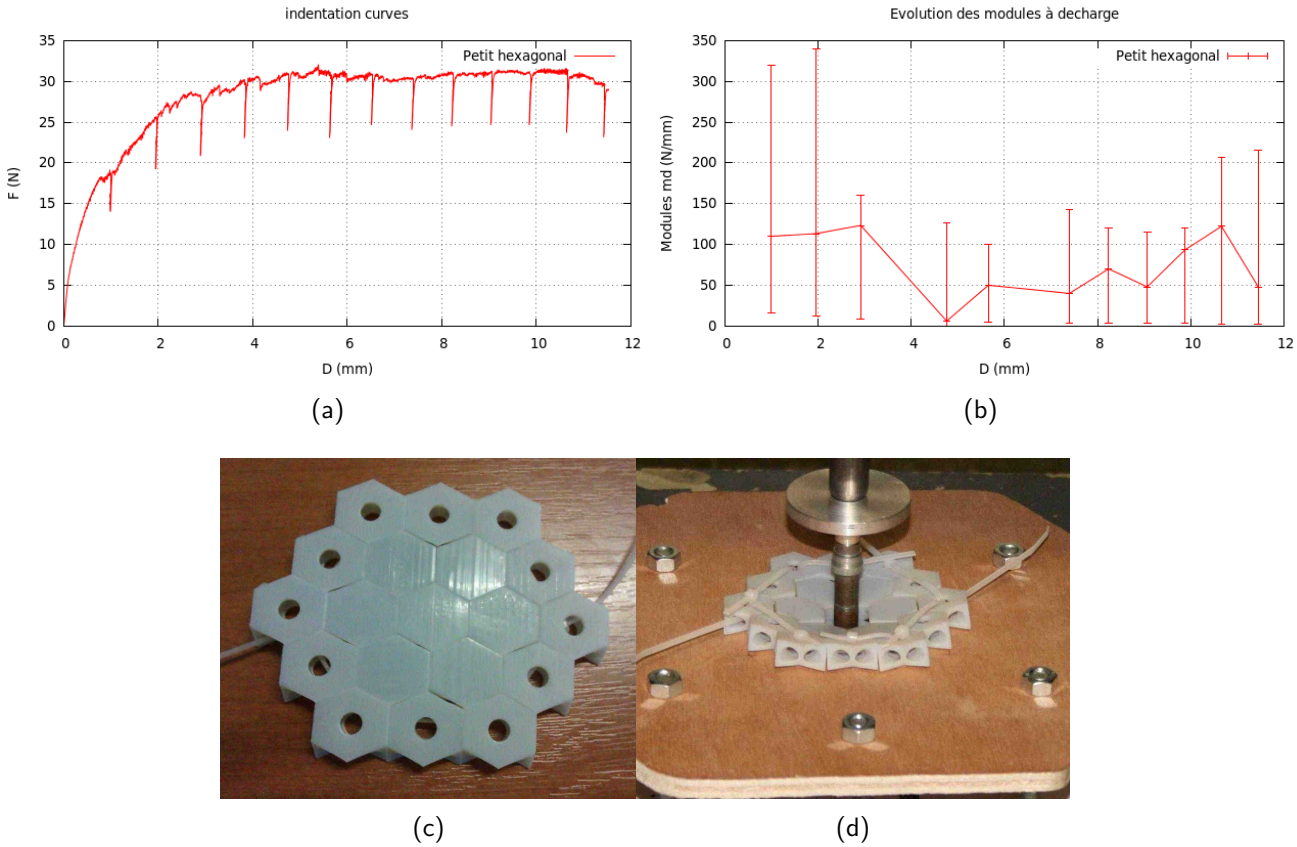


FIGURE 2.20 – Résultats de l'indentation de 12mm effectuée sur un assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) photo d'un assemblage de blocs ostéomorphes, d) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

Les modules à décharge diminuent pendant les premiers millimètres d'indentation (voir sur la figure 2.20b). Puis le module à décharge augmente à nouveau jusqu'à la fin de l'indentation pour atteindre 50N/mm. Remarquons tout de même que les variations du module à décharge sont quasiment comprises dans la barre d'erreur des mesures. Dans une première approximation, nous pouvons considérer que ce module est constant tout au long de l'essai.

2.4.1.1 Influence de la position du bloc indenté sur le comportement d'un assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes

Cette seconde étude consiste à positionner l'indenteur sur différents blocs de l'assemblage. L'indenteur est d'abord positionné sur le bloc 2 qui est en contact avec le bloc central par l'intermédiaire d'une interface plane (voir figure 2.21c). Une indentation de 12mm avec une décharge partielle de 80% de la force atteinte tous les millimètres est réalisée. Puis l'indenteur est positionné sur le bloc 7 qui est aussi en contact avec le bloc central, mais par l'intermédiaire d'une surface réglée.

Les courbes d'indentation obtenues sont comparées à la courbe d'indentation de l'assemblage indenté en son centre étudiée précédemment (voir figure 2.21a).

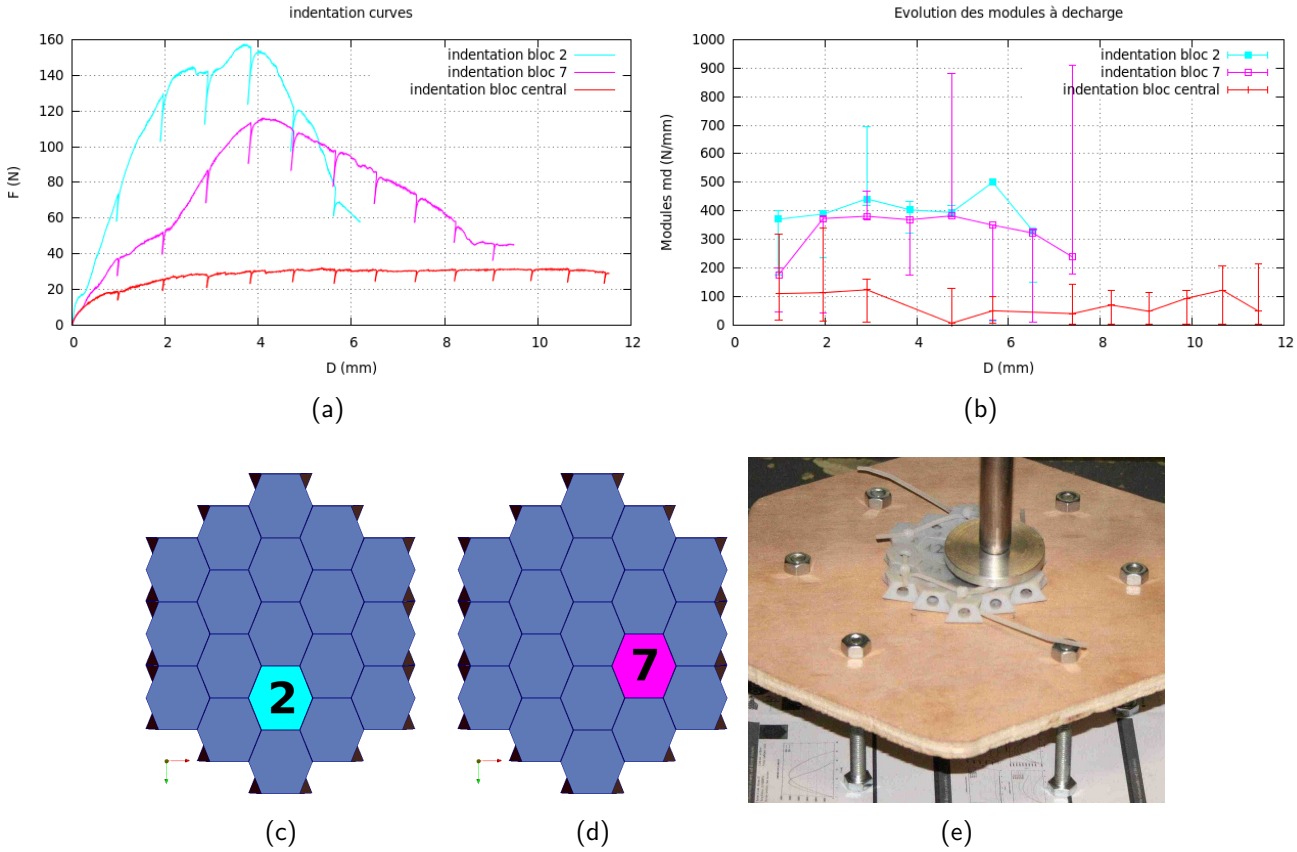


FIGURE 2.21 – Résultats de l'indentation de 12mm effectuée sur un assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes - influence de la position du bloc indenté : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) bloc ostéomorphe 2 indenté, d) bloc ostéomorphe 7 indenté, e) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

On constate que les courbes d'indentation des assemblages indentés sur le bloc 2 ou 7 ont un module initial plus grand que celui de l'assemblage indenté sur le bloc central. Il est donc nécessaire de fournir un effort plus important pour indenter un bloc positionné plus près du bord que pour indenter un assemblage en son centre.

Le bloc se trouvant plus près du bord subit plus fortement l'effet des blocs voisins qui immobilisés par la précontrainte. Le module initial de la courbe de l'assemblage indenté sur le bloc 2 est plus grand que celui de l'assemblage indenté en 7.

Les modules à décharge des différentes courbes d'indentation varient très peu avec la profondeur d'indentation. On constate que le module à décharge (module tangent) de l'indentation sur le bloc 2 est proche de celui de l'indentation sur le bloc 7 et à peu près 4 fois plus important que celui de l'indentation sur le bloc central. La rigidité apparente

de l'assemblage indenté en 2 est plus grande que l'assemblage indenté en 7 et ces deux assemblages ont des rigidités apparentes plus grandes que celles de l'assemblage indenté au centre.

Ce résultat peut s'expliquer par le fait que le centre du bloc 2 est plus proche des bords de l'assemblage que le centre du bloc 7. Mais plus le bloc indenté est loin du bord de l'assemblage et moins celui-ci subit l'effort de ses voisins qui sont précontraints ou influencés par des blocs précontraints ce qui rend l'indentation plus facile. De plus les surfaces réglées de deux blocs précontraints entourent le bloc 2 de chaque côté, alors que le bloc 7 n'est en contact avec les blocs précontraints que d'un seul côté, ce dernier est donc moins contraint par ses voisins que le bloc 2.

2.4.1.2 Étude de l'effet de blocs manquants dans un assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes

Nous allons maintenant étudier le comportement de l'assemblage élémentaire de 19 blocs lorsqu'il est endommagé et qu'il manque des blocs. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que selon le bloc indenté, l'assemblage répondait différemment. On peut donc imaginer qu'il sera de même si ces mêmes blocs sont retirés de l'assemblage. Durant cette étude, nous allons enlever ces deux blocs (voir figure 2.22c et 2.22d).

Nous avons commencé par retirer le bloc 2, l'assemblage a ensuite subi une indentation de 12mm sur le bloc central. Ensuite le bloc 2 a été remis en place et le bloc 7 a été retiré à son tour. Puis une nouvelle indentation de 12mm a été effectuée. Les deux courbes d'indentation des assemblages endommagés sont ensuite tracées avec la courbe d'indentation de l'assemblage complet de la première étude sur la figure 2.22a.

La courbe d'indentation de l'assemblage complet possède un module initial plus grand que celui des courbes d'indentation des assemblages endommagés. En revanche, le module initial de la courbe d'indentation de l'assemblage endommagé au niveau du bloc 7 est plus grand que celui de la courbe d'indentation de l'assemblage endommagé au niveau du bloc 2 et que la force maximale est plus impactée par l'absence du bloc 2 que du bloc 7.

Les modules à décharge de l'assemblage ayant le bloc 7 manquant sont plus élevés que ceux de l'assemblage ayant le bloc 2 manquant et ces deux assemblages ont des modules à décharges plus élevés que ceux de l'assemblage intact.

De cette étude expérimentale, nous pouvons conclure que le bloc 2 joue un rôle plus important que le bloc 7 lors d'une indentation sur le bloc central. Par généralisation, l'autre bloc qui joue le même rôle que 2 vis-à-vis du bloc central (numéroté 4 et 6 de la figure 2.22c) a un rôle dominant dans la réponse mécanique de l'assemblage.

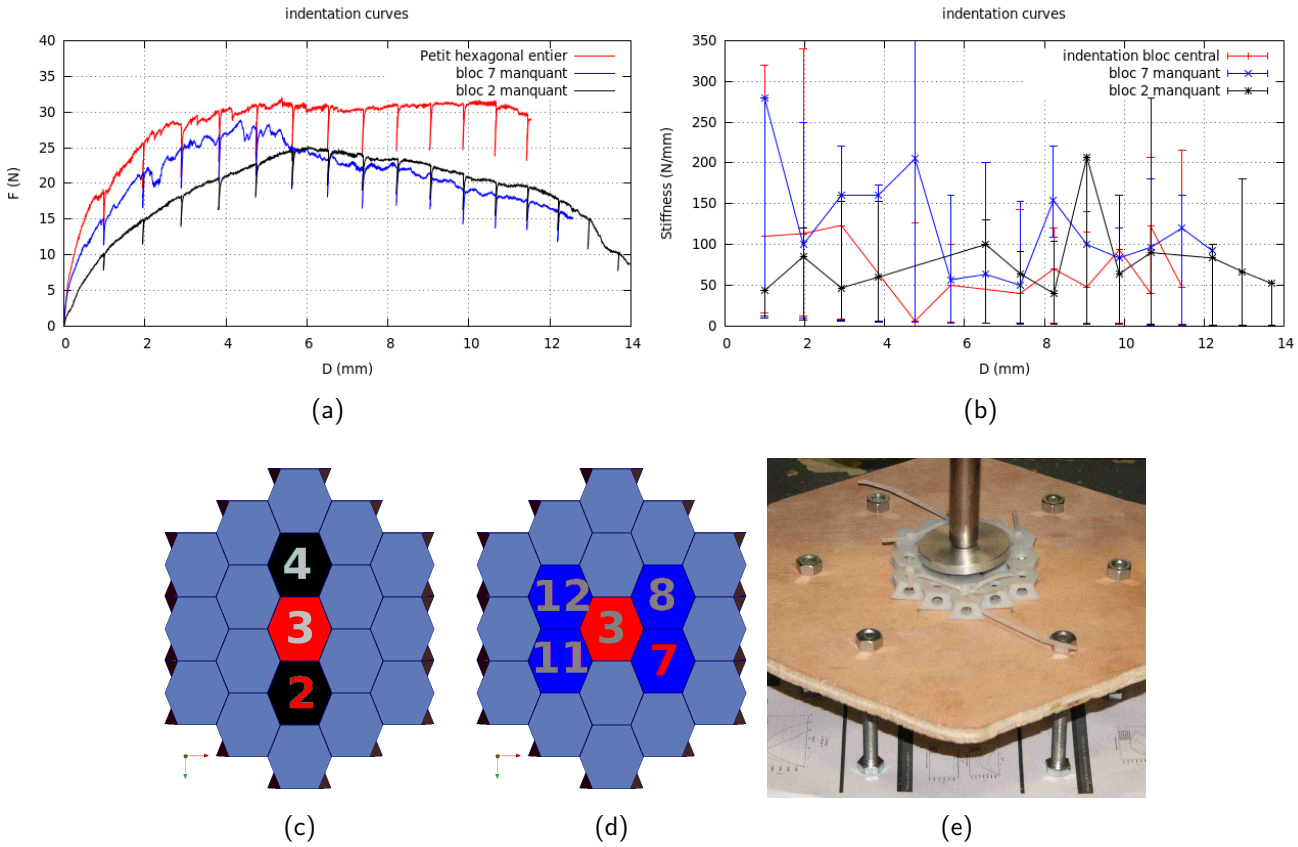


FIGURE 2.22 – Résultats d'une indentation de 12mm effectuée sur un assemblage hexagonal élémentaire de 19 blocs ostéomorphes - influence de blocs manquants : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) bloc ostéomorphe 2 manquant, d) bloc ostéomorphe 7 manquant, e) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

Cette observation est contraire à ce que nous devrions obtenir : normalement lorsqu'on retire le bloc 2, la nature du contact éliminé est plan, il y a donc une perte de transfert d'effort à cette interface et lorsque l'on retire le bloc 7, la nature du contact éliminé est courbe, et nous devrions observer une perte de transfert d'effort à cette interface encore plus importante ce qui devrait diminuer encore plus la pente à l'origine.

Cela peut s'expliquer par le fait que les blocs sont très rugueux au niveau de leurs surfaces planes ce qui est dû à l'imprécision de 30µm lors de la fabrication par prototypage rapide. Certaines rayures de ces surfaces bloquent l'indentation et l'effort à fournir pour l'indentation est plus grand. Puis lorsque l'effort est assez important pour que le bloc indenté puisse passer cette rayure, on observe une baisse de l'effort importante puis l'assemblage se rééquilibre et reprend le cours normal de son indentation.

C'est probablement ce qui se passe lors de l'indentation de l'assemblage où nous avons retiré le bloc 7. D'ailleurs peut après 5mm, on observe une baisse de l'effort assez rapide. Sa pente à l'origine est alors plus grande que celle de l'assemblage où nous avons retiré le bloc 2.

2.4.1.3 Étude du comportement d'un assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes en fonction du sens de l'indentation

Les surfaces supérieure et inférieure des blocs ostéomorphes n'ont pas la même forme. De fait, un assemblage de blocs ostéomorphes possède également 2 faces différentes. Sur la face 1, on observe un motif différent (photo 2.23c) que celui observé sur la face 2 (photo 2.23d). On peut donc supposer que l'assemblage ne réagira pas de la même façon quand il est indenté sur la face 1 que lorsqu'il est indenté sur la face 2.

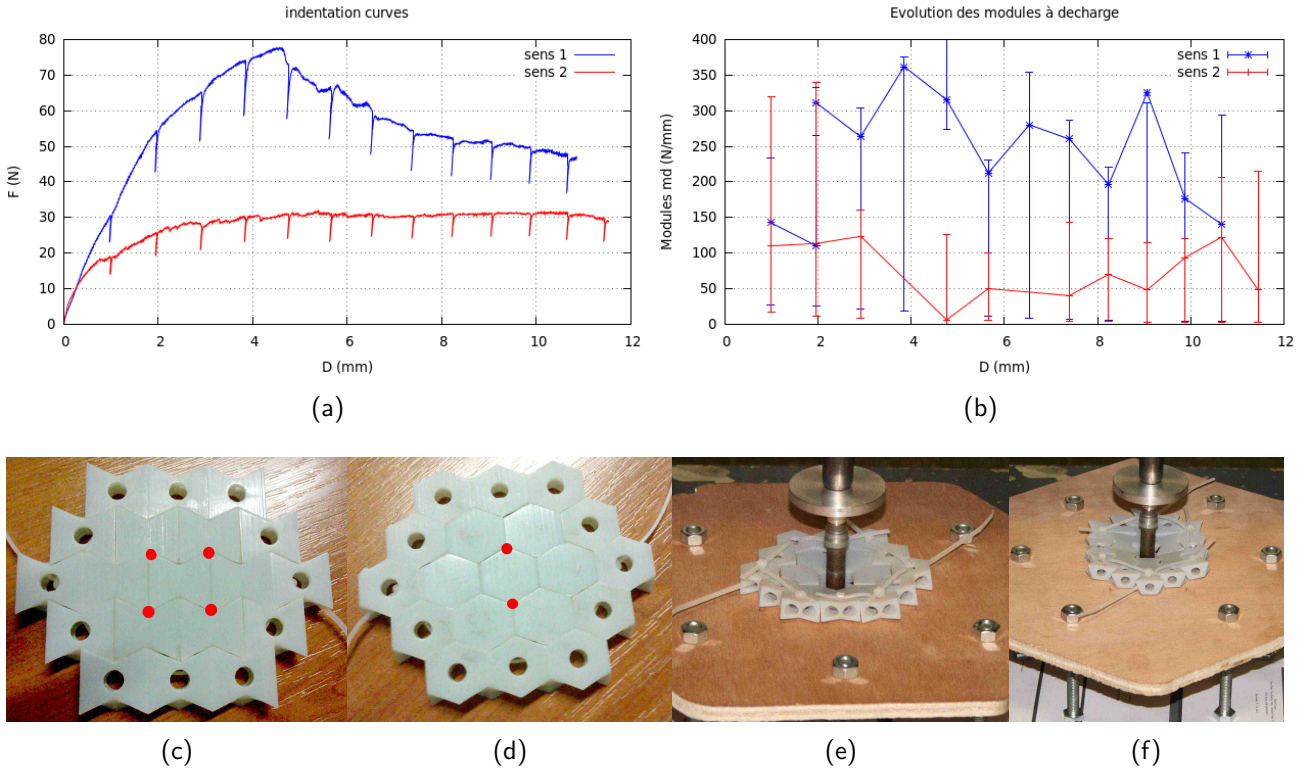
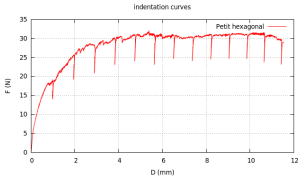


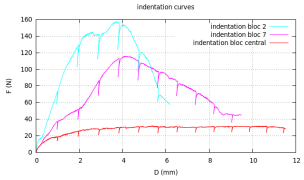
FIGURE 2.23 – Résultats de l'indentation de 12mm effectuée sur un assemblage élémentaire hexagonal de 19 blocs ostéomorphes - influence du sens de l'indentation : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) Face 1 de l'assemblage, d) Face 2 de l'assemblage, e) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation dans le sens 1, f) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation dans le sens 2

Nous allons donc tester l'assemblage en indentation dans les deux sens. Le premier essai (sens 1) est une indentation appliquée sur la face 1 (voir figure 2.23c). Puis l'assemblage est retourné pour être indenté sur la face 2 (sens 2). Les deux courbes d'indentation sont comparées sur la figure 2.23a.

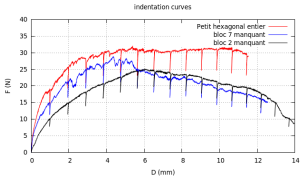
Le module initial est supérieur lorsque l'assemblage est indenté dans le sens 1 que lorsque l'assemblage est indenté dans le sens 2. Le fait que le déplacement du bloc central nécessite moins d'effort dans le sens 2 que dans le sens 1 s'explique en analysant la nature des contacts



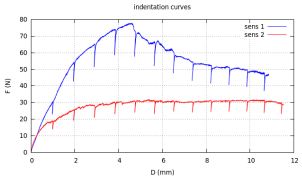
Forme parabolique et diminution des modules à décharge



Augmentation de la pente initiale avec la distance au centre du bloc indenté



Diminution de la pente initiale lors de l'indentation d'un assemblage endommagé



Asymétrie en flexion

TABLE 2.1 – Récapitulatif des résultats obtenus grâce aux expériences d'indentation sur un assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes

mis en jeux. On constate une grande différence des zones en contacts.

Lorsque le bloc central est déplacé dans le sens 2, les surfaces en contact se résument à 2 points situés de part et d'autre du bloc (voir les points rouges indiqués sur la figure 2.23d). Inversement, dans le sens 1, il y a quatre points de contact sur le bloc indenté (points rouges affichés sur la figure 2.23c) ce qui bloque plus facilement les déplacements du bloc central et rigidifie globalement la structure. On constate que la force maximale est 2.5 fois plus importante dans le sens 1 que dans le sens 2.

Les modules tangents de l'assemblage indenté dans le sens 1 sont à peu près trois fois plus élevés que ceux mesurés lorsque l'assemblage est indenté dans le sens 2 ce qui confirme le phénomène d'asymétrie observé.

Le tableau 2.1 résume les résultats obtenus sur l'assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes.

2.4.2 Indentation d'un assemblage hexagonal de 217 blocs

Nous allons maintenant indenter un assemblage de 217 blocs et ayant une forme hexagonale. Cet assemblage apparaît sur la figure 2.24. Cet assemblage est composé de 7 couronnes de blocs libres et d'une 8ème couronne de blocs attachés entre eux. Comme précédemment, les blocs de cette dernière couronne sont percés. Des colliers de serrage sont introduits dans les perçages afin de précontraindre l'assemblage. Cet assemblage est donc composé de 169 blocs pleins et de 48 blocs percés.

FIGURE 2.24 – Assemblage hexagonal de 217 blocs

L'assemblage a subi une première indentation de 23mm avec une décharge de 80% de la force atteinte tous les millimètres. La figure 2.25a représente la courbe d'indentation obtenue. Cette courbe montre que l'effort augmente avec le déplacement de l'indenteur. L'effort à

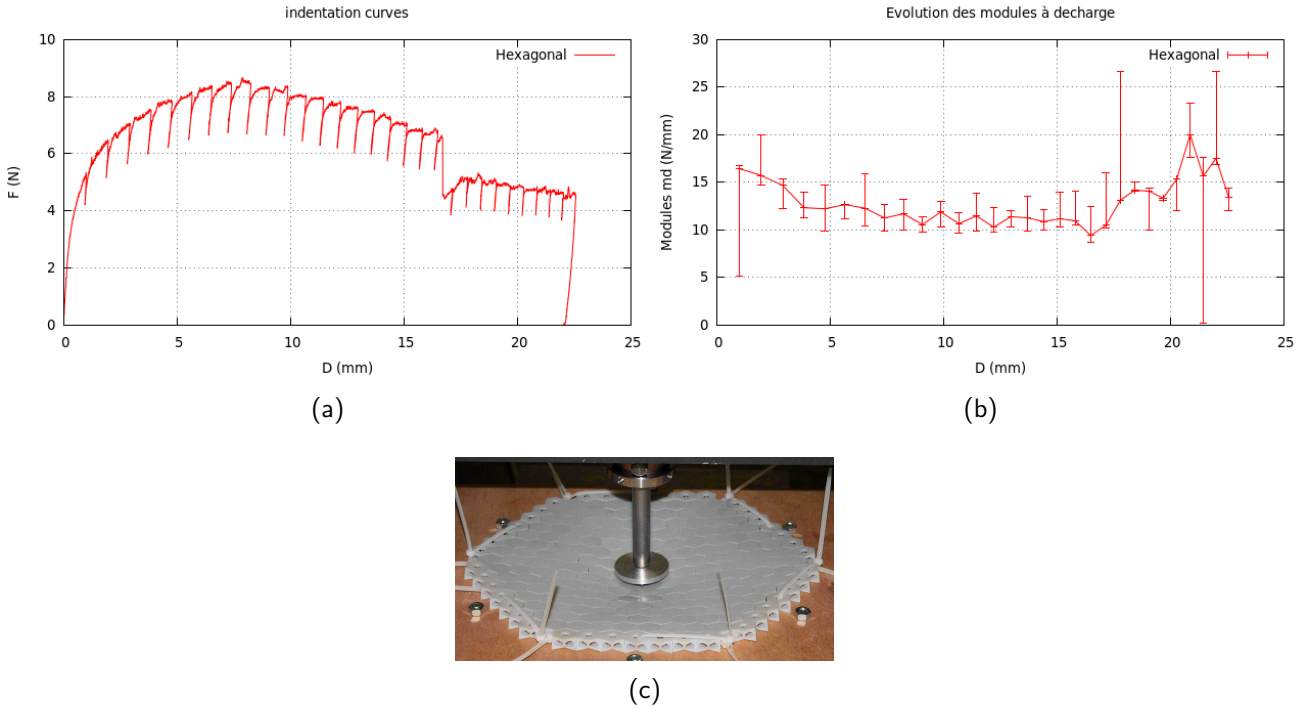


FIGURE 2.25 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes : a) Courbe d'indentation, b) Modules à décharge, c) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

fournir est plus fort pendant les trois premiers millimètres d'indentation, puis l'effort continue à augmenter avec une pente plus faible. L'effort atteint ensuite une valeur maximale pour un déplacement de 7.5mm pour ensuite diminuer.

Vers 17mm, on observe une baisse brutale de la force. Cela peut s'expliquer par la rugosité des surfaces planes des blocs qui sont dues à l'imprécision du prototypage rapide (précision de 30µm). Certaines rayures sur ces surfaces bloquent l'indentation, ce qui provoque des instabilités lors de la charge. Après cette instabilité, l'effort appliqué sur l'indenteur augmente à nouveau, l'assemblage doit se rééquilibrer. Puis, l'indentation reprend son cours.

Les pentes des décharges correspondent au comportement élastique de l'assemblage. La figure 2.25b présente l'évolution de ces modules à décharge en fonction du déplacement de l'indenteur. On constate une forte diminution avant 3mm puis une stabilisation vers une valeur de 15N/mm. Après 17mm d'indentation, on observe une nouvelle augmentation des valeurs des modules à décharge, l'assemblage se rigidifie à nouveau après la chute brutale de l'effort, ce qui conforte les résultats de la courbe d'indentation.

2.4.2.1 Influence de la position du bloc indenté sur le comportement d'un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes

Nous allons maintenant étudier l'influence de la position du bloc indenté. Dans un premier temps, nous avons indenté successivement deux blocs (1 puis 2) se trouvant à droite du bloc central. Dans un second temps, nous avons indenté deux autres blocs (3 puis 4) se trouvant sur la même ligne que le bloc central et se rapprochant du bord de l'assemblage (fig. 2.26c). Les courbes d'indentation sont tracées sur la figure 2.26a.

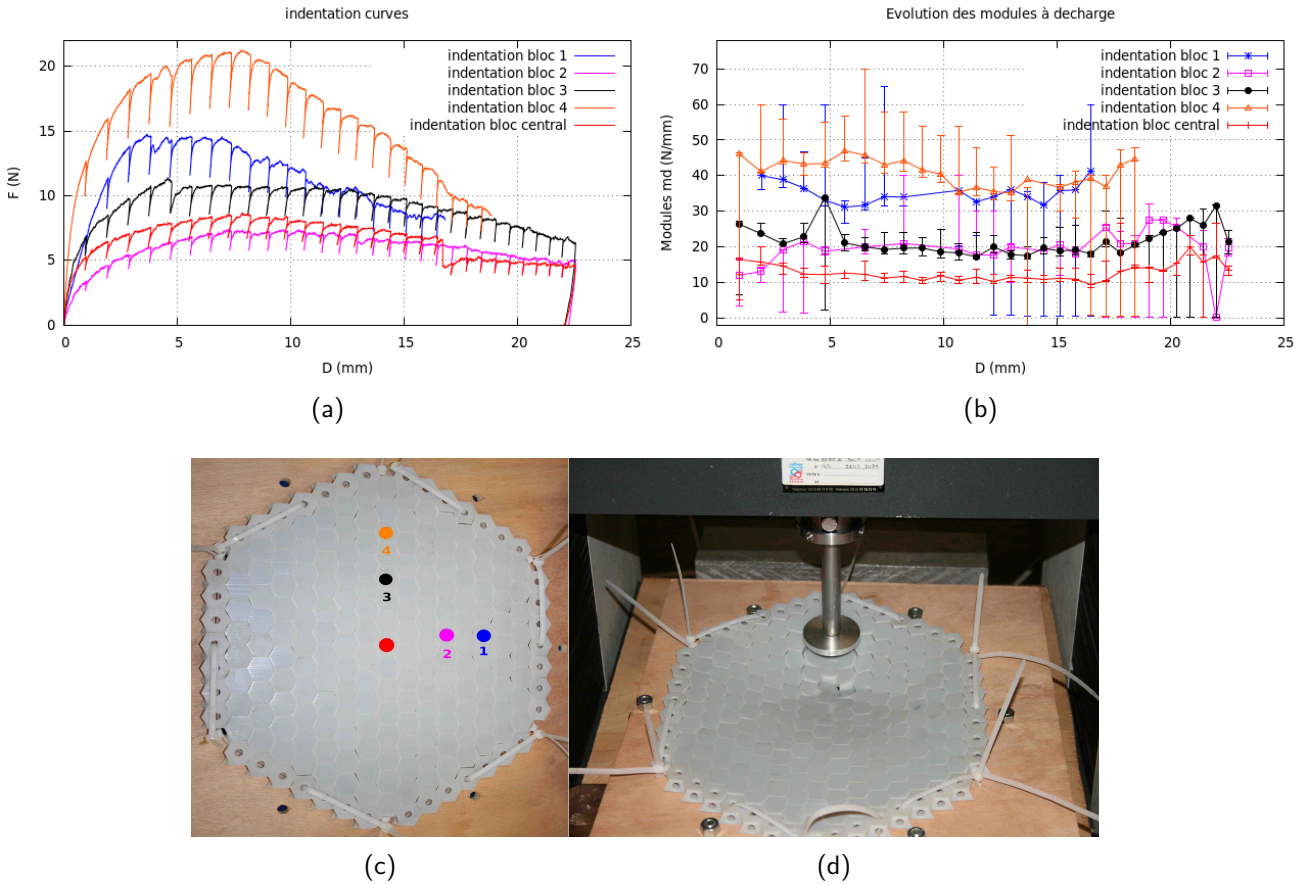


FIGURE 2.26 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes - influence de la position du bloc indenté : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) blocs indentés, d) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation sur le bloc 3

Les courbes d'indentation des blocs se trouvant les plus proches du bord de l'assemblage (blocs 1 et 4), montrent une pente à l'origine et une force maximale plus grande que celles des blocs se trouvant proche du centre de l'assemblage. Donc dans le cas de petits assemblages, les conditions de bord ont une grande influence sur la rigidité apparente de l'assemblage.

Les modules à décharge ont été calculés puis tracés sur la figure 2.26b. On observe que les

évolutions de ces pentes sont très similaires dans tous les cas de figure. L'ordre de grandeur de la rigidité apparente des assemblages indentés près du bord est plus grand (40N/mm) que la rigidité apparente de l'assemblage indenté au centre (15N/mm). La rigidité apparente des assemblages indentés plus proche du centre de l'assemblage (20N/mm) est un peu plus grande que celle de l'assemblage indenté au centre.

Plus le bloc indenté est proche du bord de l'assemblage et plus l'effort à fournir pour indenter ce bloc est grand. Les conditions de bord ont une grande influence sur la rigidité locale de l'assemblage. Il s'agit là d'un comportement classique, proche de celui d'une plaque monolithique. Cela démontre que lorsque le nombre de blocs devient important, la réponse mécanique tend vers celle d'un milieu continu. On constate tout de même un comportement anisotrope puisque les réponses de blocs situés à une même distance du point central sont différentes comme par exemple les réponses des blocs 3 et 2 ou encore les réponses des blocs 1 et 4. Cette anisotropie provient directement de la forme des blocs ostéomorphes pour lesquels certaines surfaces sont planes (typiquement sur la ligne où se situent les blocs 3 et 4) et d'autres sont courbes (typiquement entre les blocs 1 et 2).

2.4.2.2 Étude de l'effet de blocs manquants dans un assemblage hexagonal de blocs ostéomorphes de 217 blocs ostéomorphes

Nous avons ensuite étudié l'influence de blocs manquants sur le comportement d'un assemblage de blocs ostéomorphes. Dans un premier temps, deux blocs (1 et 2) se trouvant à droite du bloc central, sur une ligne perpendiculaire à la ligne centrale ont été retirés. Dans un second temps, deux autres blocs (3 et 4) se trouvant sur la même rangée que le bloc central ont été retirés.

Les courbes d'indentation correspondantes sont comparées à la courbe d'indentation d'un assemblage intact. On constate que dans les deux cas d'assemblages endommagés, la pente à l'origine est deux fois moins grande que celle de la courbe d'indentation de l'assemblage intact. Par contre, on ne constate aucun effet significatif au niveau des modules à décharge (figure 2.27b) qui restent de l'ordre de 15N/m pour les 3 assemblages.

Nous pouvons conclure de ce comportement que les blocs manquants n'affectent pas les modules à décharge alors qu'ils diminuent la force maximale ainsi que la pente à l'origine.

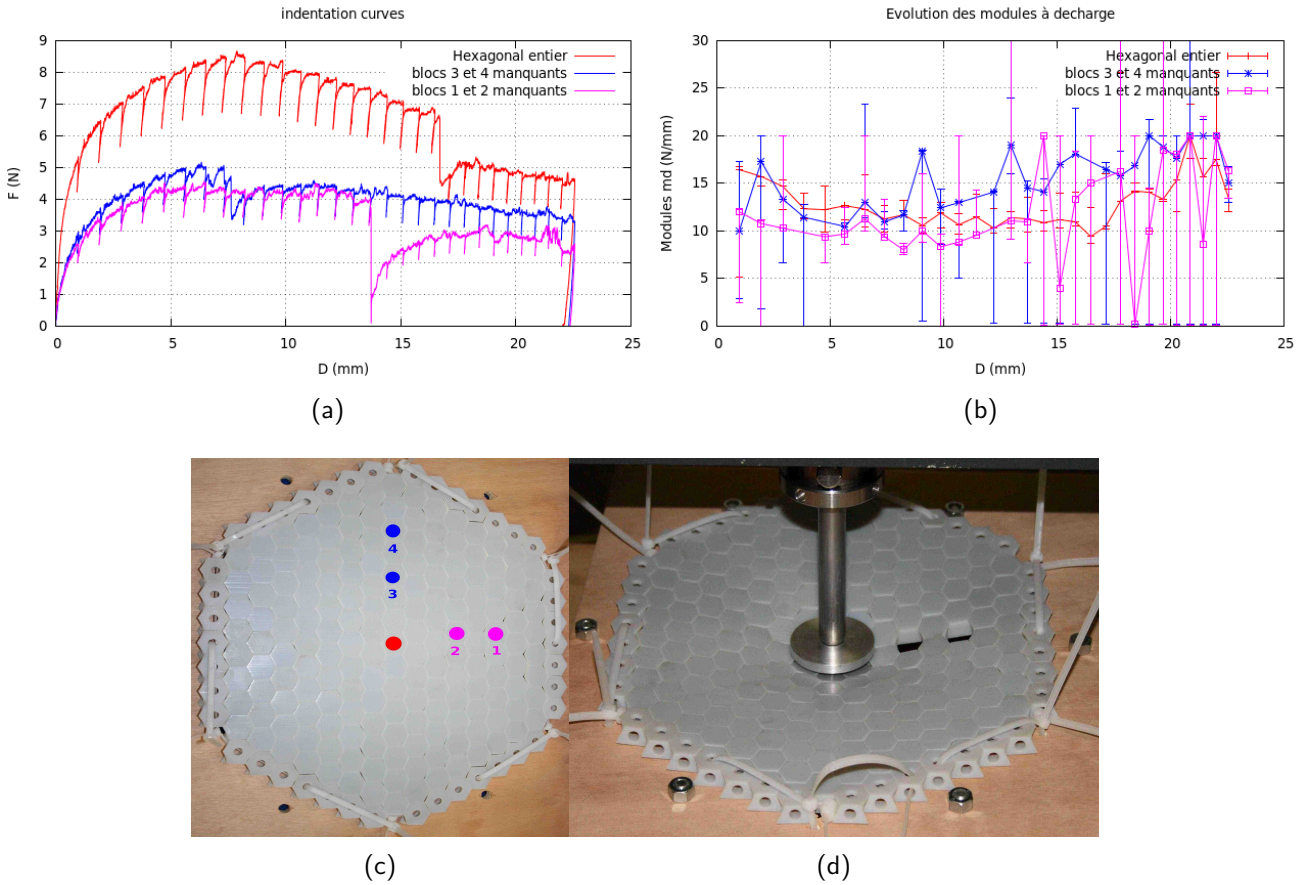


FIGURE 2.27 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes - influence de blocs manquants : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) blocs manquants, d) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation (blocs 1 et 2 manquants)

2.4.2.3 Étude de l'effet des conditions de bord sur l'indentation d'un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes

La précompression latérale a ensuite été diminuée en desserrant les colliers de serrage. Le résultat de l'essai d'indentation a été superposé avec celui de l'essai d'indentation avec une plus forte précompression. Les deux courbes sont tracées sur la figure 2.28a.

Comme observé lors des expériences d'indentation de l'assemblage de cubes en alumine, l'effort à fournir pendant l'indentation est bien inférieur dans le cas où une faible précompression est appliquée sur les bords de l'assemblage. Les modules à décharge ont été calculés et leur évolution apparaît sur la figure 2.28b.

Comme pour l'assemblage de cubes (cf. paragraphe 2.2.0.3), l'assemblage de blocs ostéomorphes est très sensible à la valeur de la précontrainte imposée sur les bords de l'assemblage. Cette dernière influence à la fois la valeur de la force maximale et les pentes à

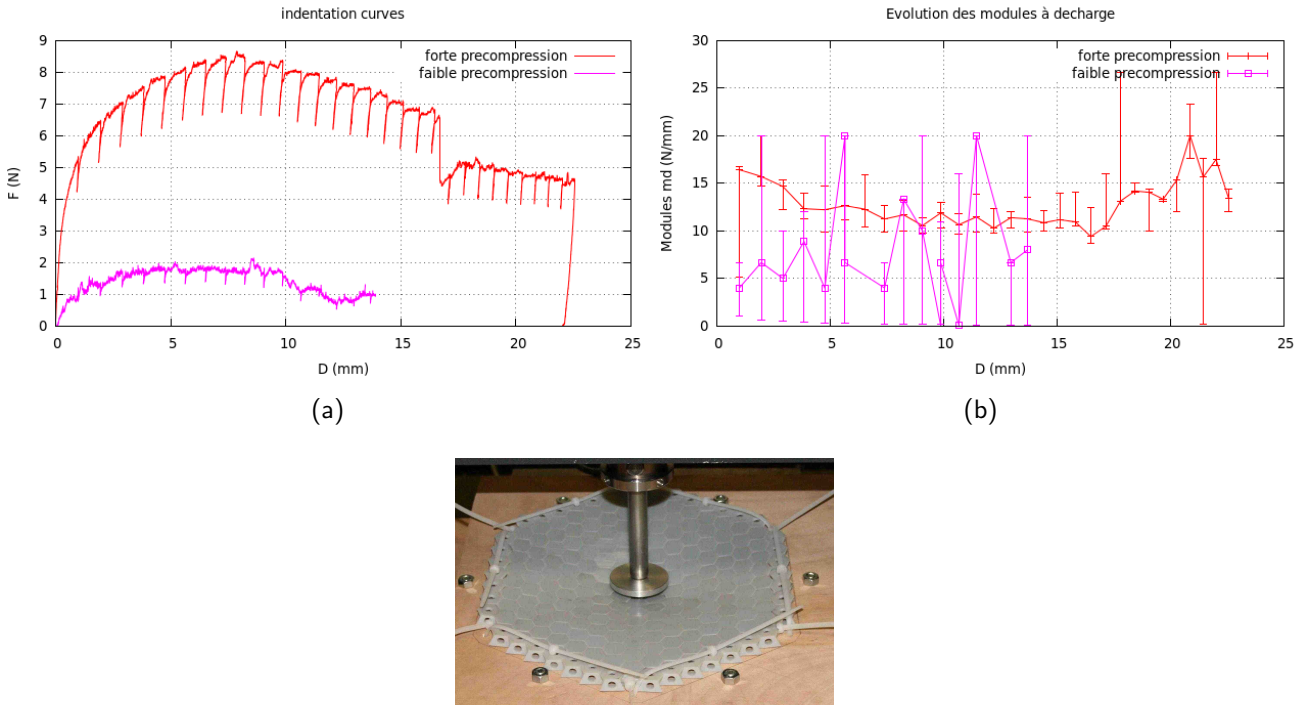


FIGURE 2.28 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes - influence des conditions de bord : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation (faible précompression)

décharge.

2.4.2.4 Étude du comportement d'un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes en fonction du sens de l'indentation

Nous allons étudier ici l'influence du sens de l'indentation sur la réponse mécanique d'un assemblage de 217 blocs ostéomorphes. L'effort nécessaire pour indenter l'assemblage dans le sens 1 (8.75N) est 60% plus important que celui à fournir pour indenter l'assemblage dans le sens 2 (5.5N) (figure 2.29).

Les modules à décharge apparaissent sur la figure 2.29b. L'évolution des modules à décharge est similaire pour les deux indentations. md est de l'ordre de 15N/mm. Ces pentes diminuent durant les premiers millimètres puis augmentent légèrement jusqu'à la fin de l'indentation.

On retrouve donc les résultats obtenus pour l'assemblage élémentaire de 19 blocs. L'origine de cette asymétrie de comportement est liée à la nature des contacts mis en jeux : 4 zones dans le sens 1 et 2 zones pour le sens 2 (cf paragraphe 2.4.1.3).

Le tableau 2.2 résume les résultats obtenus sur l'assemblage hexagonal de 217 blocs

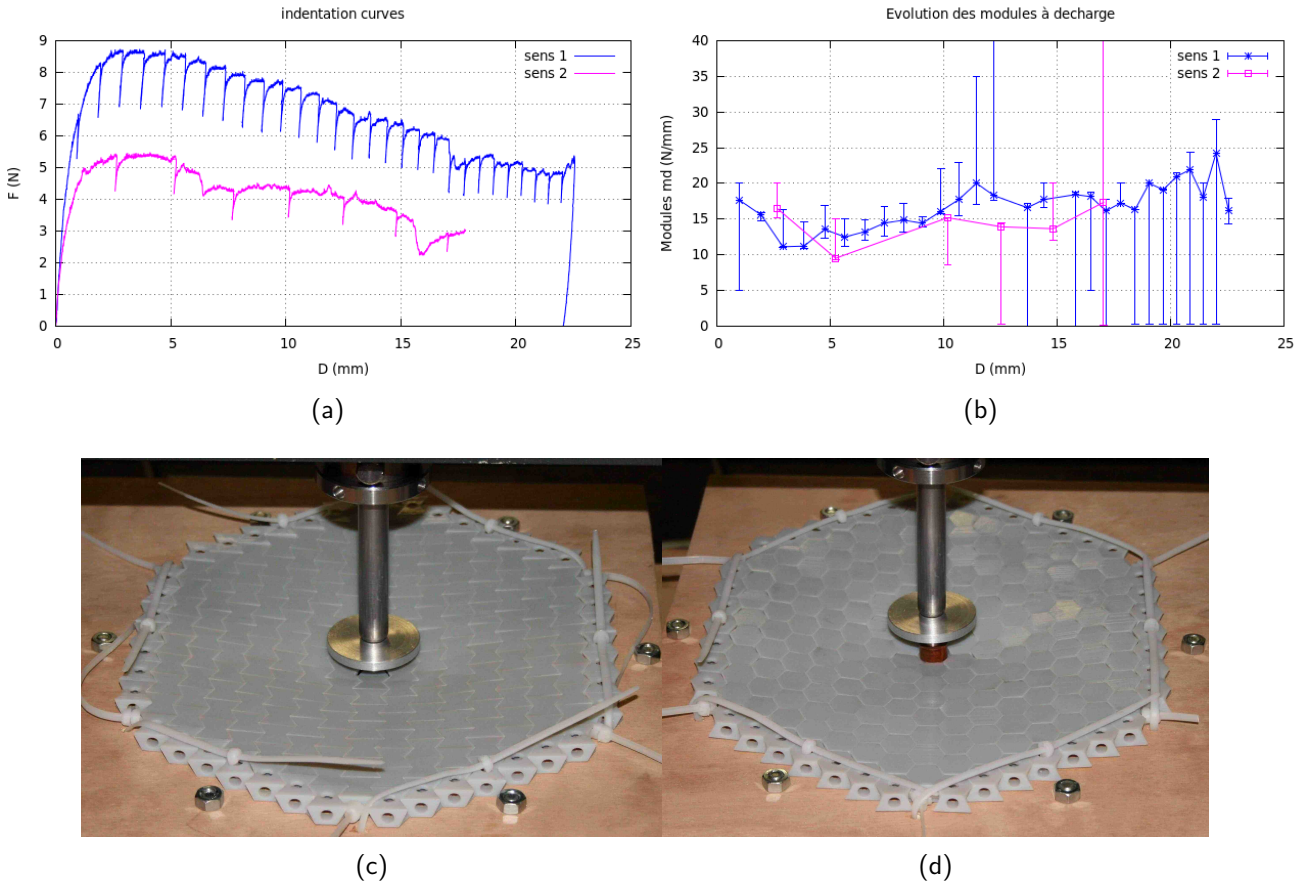


FIGURE 2.29 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes - influence du sens de l'indentation : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) assemblage dans le sens 1, d) assemblage dans le sens 2

ostéomorphes.

2.4.2.5 Comparaison entre l'assemblage hexagonal de 19 blocs et l'assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes

Nous allons comparer plus précisément les résultats issus de l'indentation des deux assemblages hexagonaux de blocs ostéomorphes. Les comportements sont reportés sur la figure 2.30. Les courbes d'indentation montrent une allure similaire.

Le module initial de l'assemblage de 19 blocs est beaucoup plus élevé que celui de l'assemblage de 217 blocs (150N/mm contre 25N/mm). L'effort maximal de l'assemblage élémentaire de 19 blocs est 4 fois élevé que celui de l'assemblage de 217 blocs et est atteint pour une valeur de déplacement de l'indenteur à peu près 4 fois plus importante. En revanche, l'assemblage de 19 blocs perfore plus tôt (à 14mm d'indentation), alors que l'assemblage possédant plus de blocs n'a pas encore perforé après 23mm d'indentation.

Forme parabolique et diminution des modules à décharge	Augmentation de la pente initiale avec la distance au centre du bloc indenté	Diminution de la pente initiale lors de l'indentation d'un assemblage endommagé	Asymétrie en flexion	Augmentation de la pente initiale avec la précompression latérale

TABLE 2.2 – Récapitulatif des résultats obtenus grâce aux expériences d'indentation sur un assemblage hexagonal de 217 blocs ostéomorphes

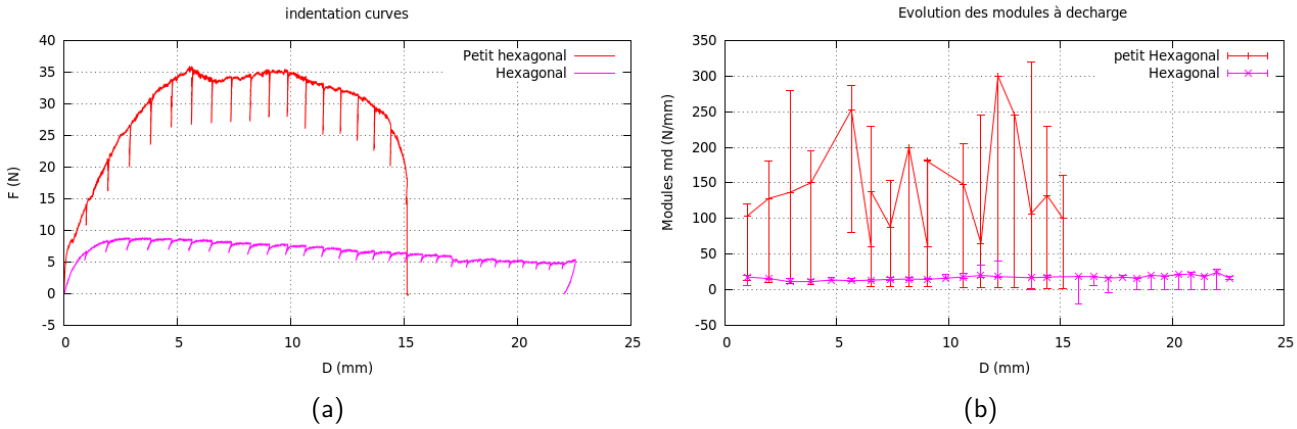


FIGURE 2.30 – Comparaison entre l'assemblage hexagonal de 19 blocs et l'assemblage hexagonal de 217 blocs : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge

Les modules à décharge du grand assemblage sont à peu près 10 fois plus faibles que ceux du petit assemblage. Logiquement, l'assemblage de 19 blocs se montre plus rigide que l'assemblage de 217 blocs, et plus l'assemblage sera grand et moins il sera rigide. Cependant plus l'assemblage est grand et plus la déformation nécessaire pour perforer l'assemblage est grande.

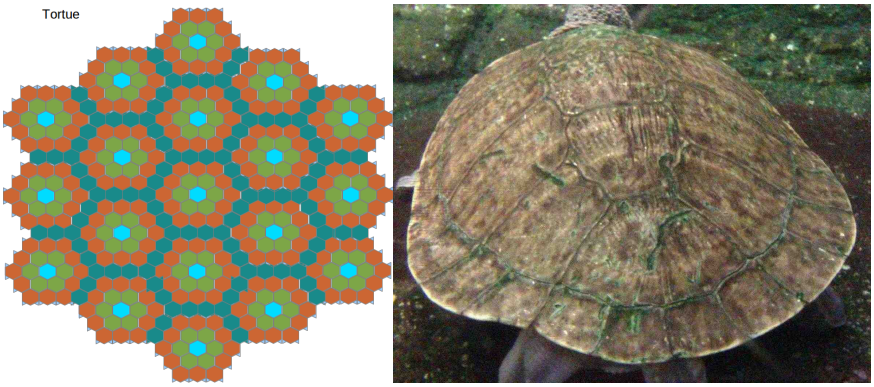
Dès lors, on peut tenter d'optimiser les propriétés mécaniques d'un grand assemblage de blocs ostéomorphes en réalisant un assemblage d'assemblages élémentaires de 19 blocs. La microstructure ressemble alors à une carapace de tortue. Les carapaces de tortues sont en effet un bon exemple de matériau qui est à la fois résistant et en même temps déformable.

En suivant cette démarche de bio-mimétisme, nous proposons de réaliser et tester mécaniquement deux assemblages : Coarse et Tissé qui s'inspire de la géométrie des carapaces de tortues.

2.4.2.6 Assemblage Tortue

Les carapaces de tortues sont constituées d'écailles en kératine reliées entre elles par du cartilage. Le cartilage est flexible ce qui permet donc de combler les écarts entre les écailles et de rendre la carapace étanche. Le comportement mécanique du cartilage est visqueux. De ce fait, la carapace est un véritable bouclier en cas de choc (déformations rapides) alors qu'il autorise les déformations lentes comme la croissance de l'animal. Les écailles sont donc mobiles les unes par rapport aux autres ce qui permet à la carapace de la tortue de se déformer tout en protégeant le corps de la tortue.

Nous inspirant de ces caractéristiques, nous proposons d'imiter une carapace de tortue en remplaçant les écailles par des assemblages élémentaires de 19 blocs. L'assemblage Tortue qui apparaît sur la figure 2.31a sera donc composé de 19 assemblages élémentaires de 19 blocs qui modéliseront les écailles de la carapace.



(a) (b)

FIGURE 2.31 – a) Assemblage 'Tortue' de 481 blocs : les couronnes de couleurs orange sont celles qui participent à la précompression de l'assemblage et sont donc composées de blocs percés. L'assemblage élémentaire est celui qui est constitué d'un bloc central (en bleu) entouré d'une couronne de blocs libres (vert) et une seconde couronne qui sera précontrainte (orange). Les sept blocs centraux sont des blocs pleins alors que les blocs de la couronne extérieure en orange sont percés dans le but d'appliquer la précompression. Entre les assemblages, il y a des rangées de blocs ostéomorphes qui ne sont pas précontraintes (en bleu), b) Carapace de Tortue

Entre les assemblages, nous disposons des rangées de blocs ostéomorphes qui ne sont pas précontraints (en bleu). Ces rangées modélisent les joints qui relient les écailles entre elles et permettent le mouvement des assemblages les uns par rapport aux autres. Idéalement ces joints devraient être réalisés dans un matériau plus visqueux que celui des assemblages élémentaires afin de reproduire le comportement du cartilage.

Ici, chacun des assemblages de 19 blocs est précontraint par des colliers de serrage. Des

rangées de blocs non précontraints (pleins) sont intercalées entre les assemblages élémentaires. Le tout est ensuite précontraint sur le contour extérieur avec des colliers de serrage. L'assemblage complet est constitué de 253 blocs pleins et de 228 blocs percés.

L'assemblage présenté en figure 2.31a n'est cependant pas réalisable. En effet, le nombre de blocs étant important et les assemblages élémentaires n'étant pas reliés entre eux, la précompression latérale qu'il est possible d'appliquer avec les colliers de serrage sans les casser n'est pas suffisante pour empêcher l'assemblage de tomber sous son propre poids. Il ne sera donc pas possible d'indenter l'assemblage. Nous avons alors imaginé deux nouveaux assemblages (Coarse et Tissé) proches de cet assemblage idéal.

Dans les deux prochains paragraphes, nous allons décrire ces assemblages et quantifier leur comportement en indentation.

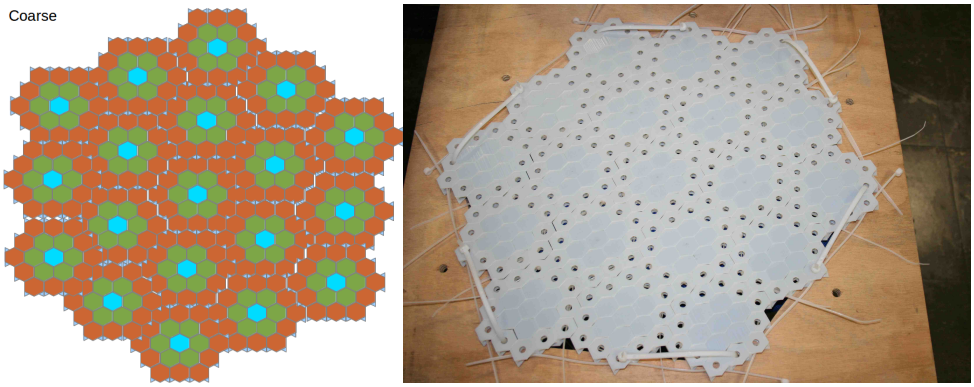
2.4.3 Indentation de l'assemblage Coarse

En retirant les joints se trouvant entre les écailles, nous obtenons l'assemblage 'Coarse' qui est constitué de 19 sous-assemblages de 19 blocs soit 361 blocs dont 133 pleins et 228 percés. Sur la figure 2.32, les couronnes de couleur rouge sont celles qui participent à la précompression de l'assemblage et sont donc composées de blocs percés. L'assemblage élémentaire est celui qui est constitué d'un bloc central (en bleu) entouré d'une couronne de blocs libres (vert) et une seconde couronne qui sera précontrainte (orange). Les sept blocs centraux sont des blocs pleins alors que les blocs de la couronne extérieure en orange sont percés afin d'appliquer la précompression au moyen d'un collier de serrage.

L'assemblage 'Coarse' a subi une première indentation de 23mm avec une décharge de 80% de la force atteinte tous les millimètres. La figure 2.33a montre une courbe de charge bien plus élevée que celle obtenue avec l'assemblage de 217 blocs. Ainsi pour un déplacement de 7mm, la force appliquée est supérieure à 10N alors qu'elle ne valait que 8N dans le cas précédent (voir figure 2.25a).

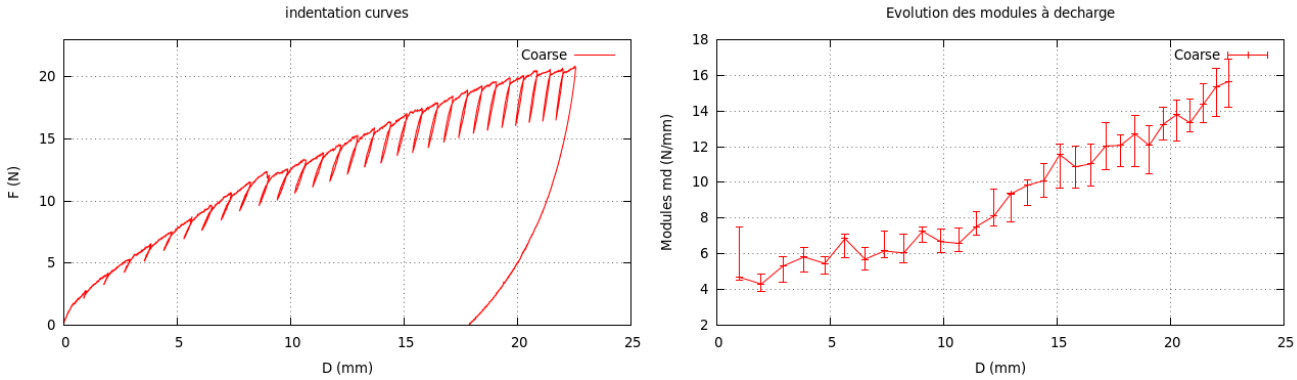
De plus, la résistance à la rupture de l'assemblage est bien supérieure puisqu'après les 23mm de déplacement imposé, l'effort n'a toujours pas atteint l'effort maximal, contrairement à ce qui a été observé dans le cas des assemblages hexagonaux où l'effort maximal a été atteint pour un déplacement de l'indenteur de l'ordre de 8mm.

La figure 2.33b présente l'évolution de ces modules à décharge en fonction du déplacement de l'indenteur. On constate une évolution lente de ces modules avant 10mm puis une augmentation constante jusqu'à une valeur de 16N/mm en fin d'indentation. Cette valeur finale est comparable aux modules à décharge du grand assemblage de 217 blocs, qui lui, était constant. On montre donc ici une différence importante avec l'assemblage de 217 blocs : la sous-structuration en

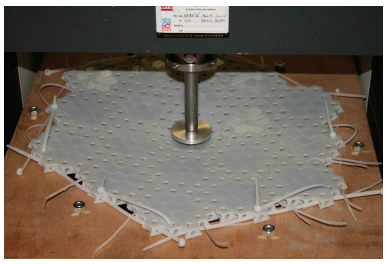


(a) (b)

FIGURE 2.32 – a) Schéma de l'assemblage Coarse : les couronnes de couleurs orange sont celles qui participent à la précompression de l'assemblage et sont donc composées de blocs percés. L'assemblage élémentaire est celui qui est constitué d'un bloc central (en bleu) entouré d'une couronne de blocs libres (vert) et une seconde couronne qui sera précontrainte (orange). Les sept blocs centraux (bleus et verts) sont des blocs pleins alors que les blocs de la couronne extérieure en orange sont percés et traversés par un collier de serrage, b) Photo de l'assemblage Coarse réalisé et testé en indentation



(a) (b)



(c)

FIGURE 2.33 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes : a) Courbe d'indentation, b) Modules à décharge, c) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

assemblages de 19 blocs semble induire une augmentation importante des modules à décharge au cours de l'indentation. En d'autres termes, la structure se rigidifie avec le déplacement de l'indenteur.

2.4.3.1 Étude de l'effet de blocs manquants dans un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes

Nous avons étudié l'influence de blocs manquants sur le comportement d'un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes. Dans un premier temps, deux blocs (7 et 12) situés au centre des écailles se trouvant sur la même rangée que l'écaille centrale ont été retirés. Dans un second temps, deux autres blocs (2 et 4) situés au milieu des écailles se trouvant sur une autre ligne passant par l'écaille centrale ont été retirés (voir figure 2.34c). Les courbes d'indentation correspondantes sont comparées à la courbe d'indentation d'un assemblage complet.

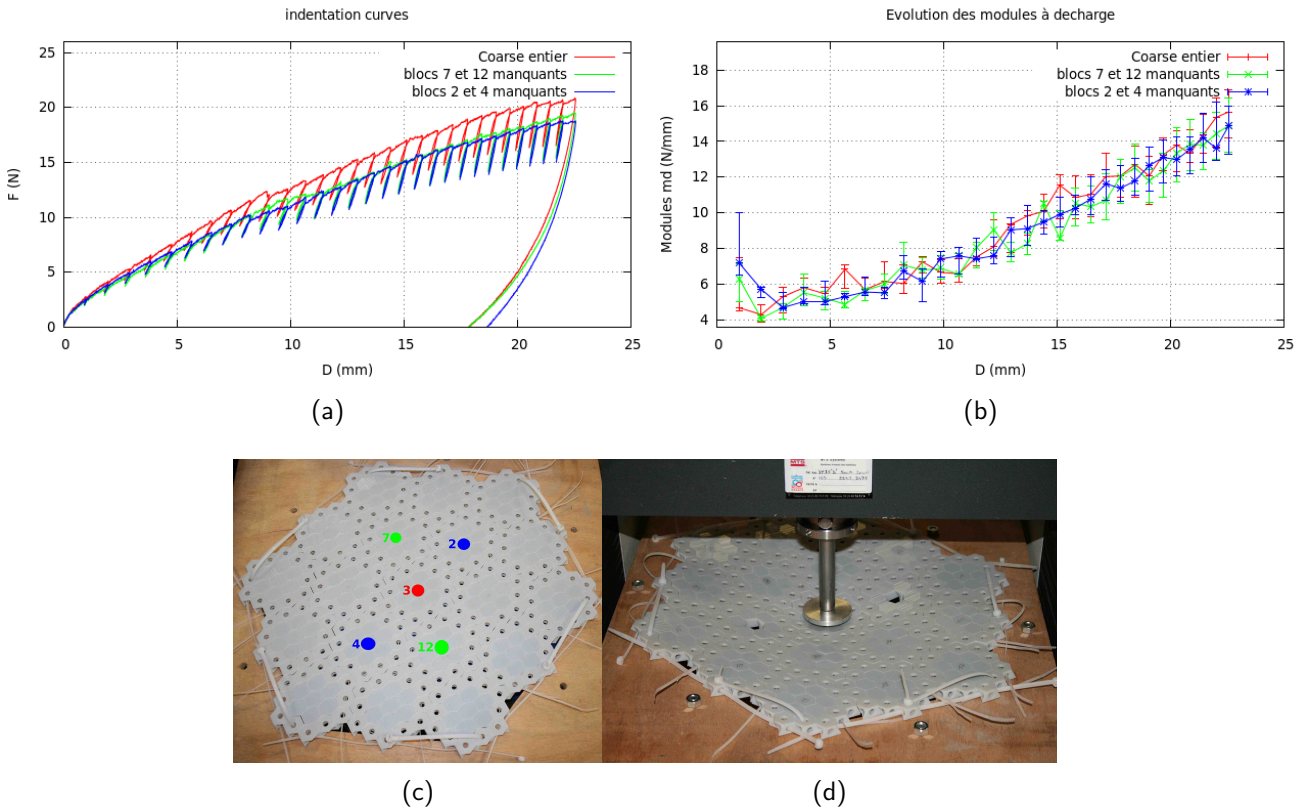


FIGURE 2.34 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes - influence de blocs manquants : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) blocs manquants, d) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

On constate que pour les deux assemblages endommagés, la pente à l'origine est légèrement moins grande que celle de la courbe d'indentation de l'assemblage intact. Cependant, elle est la même pour les deux assemblages endommagés, ce qui peut s'expliquer par le fait que la distance entre le centre de l'assemblage et les blocs retirés est la même. Cela signifie

également que les blocs retirés jouent le même rôle dans le comportement global de l'assemblage.

Les modules à décharge ont été calculés et tracés sur la figure 2.34b. On observe que ces modules à décharge évoluent de la même façon dans les cas d'un assemblage endommagé ou intact. Les blocs retirés n'influencent donc pas la rigidité apparente de l'assemblage qui reste une fonction croissante du déplacement de l'indenteur.

2.4.3.2 Influence de la position du bloc indenté sur le comportement d'un assemblage Coarse

Nous allons maintenant étudier l'influence de la position du bloc indenté. Nous avons indenté le bloc (7) situé au centre de l'écaille se trouvant sur la même ligne que l'écaille centrale et se rapprochant du bord de l'assemblage 2.35d. Les courbes d'indentation sont tracées sur la figure 2.35a.

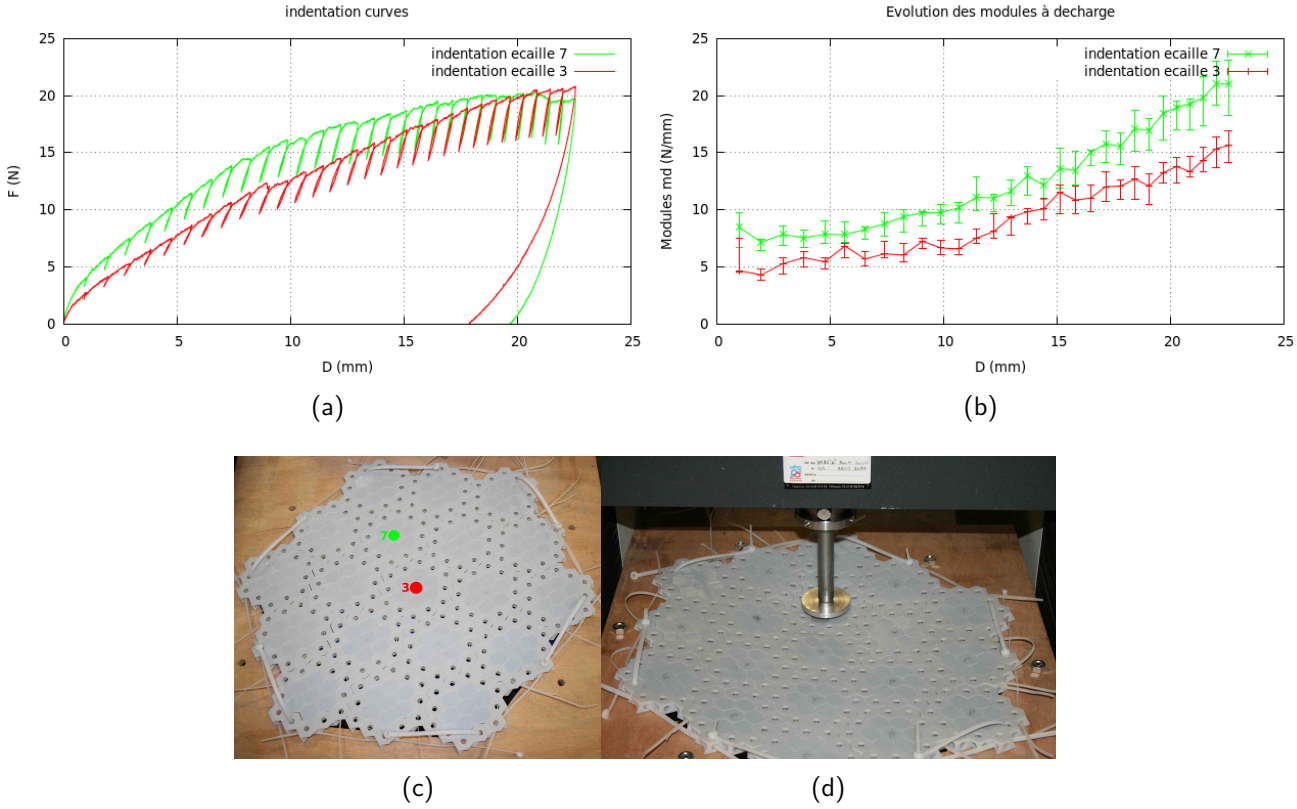


FIGURE 2.35 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes - influence de la position du bloc indenté : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) blocs indentés, d) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

La courbe d'indentation du bloc se trouvant plus près du bord de l'assemblage montre une pente à l'origine plus grande que celle du bloc se trouvant au centre de l'assemblage. L'effort

est plus important lors de l'indentation du bloc 7 jusqu'à 20mm d'indentation où l'effort de l'indentation devient plus faible que celui de l'indentation du bloc central. On peut donc en conclure que l'effort maximal est atteint pour un plus faible déplacement de l'indenteur lorsque celui-ci s'éloigne du centre de l'assemblage et aussi que l'assemblage perforera plus tôt.

Les modules à décharge sont tracés sur la figure 2.35b. On observe que les évolutions de ces pentes sont très similaires pour les deux indentations même si l'ordre de grandeur de la rigidité apparente des assemblages indentés près du bord est 50% plus grand (22N/mm en fin d'indentation) que la rigidité apparente de l'assemblage indenté au centre (15N/mm).

2.4.3.3 Étude du comportement d'un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes en fonction du sens de l'indentation

Nous allons étudier ici l'influence du sens de l'indentation sur la réponse mécanique d'un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes. L'indentation est à nouveau conduite jusqu'à un déplacement de 23mm de l'indenteur. Les résultats sont reportés sur la figure 2.36.

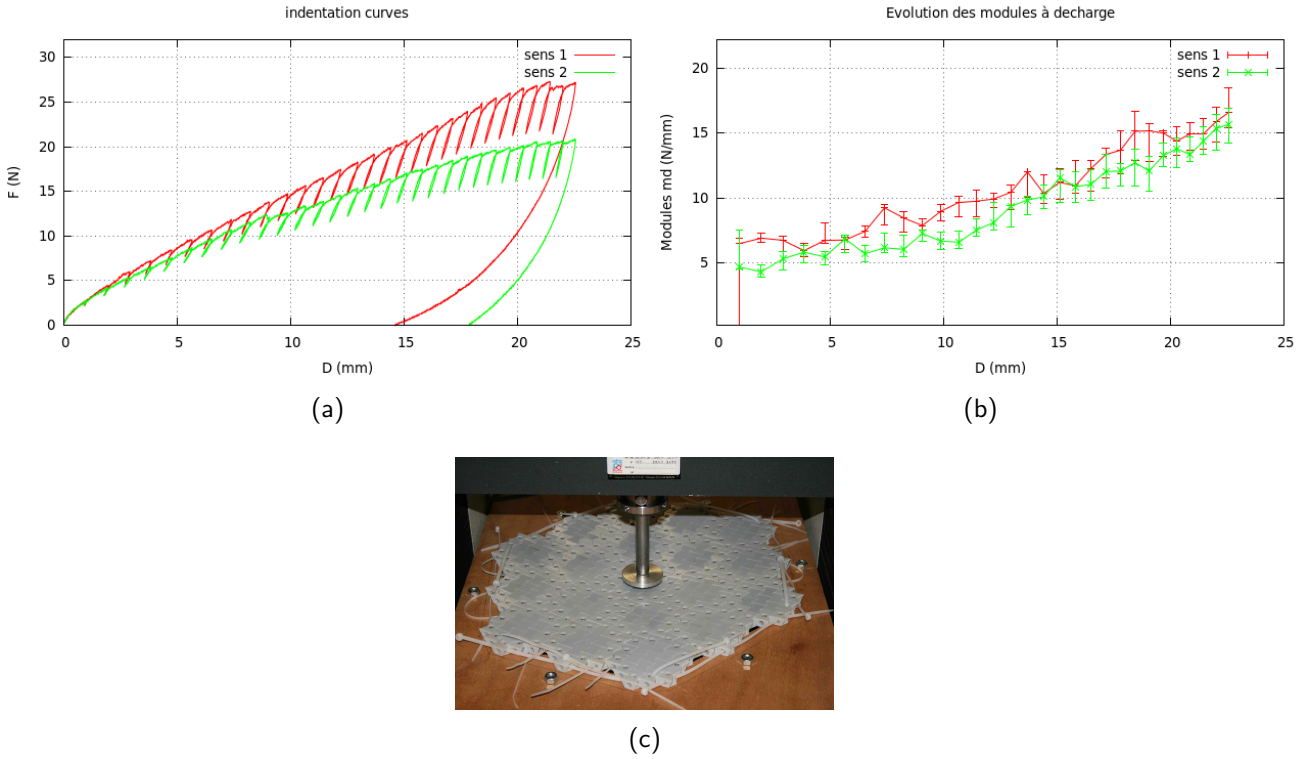


FIGURE 2.36 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes - influence du sens de l'indentation : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

La force atteinte en fin d'indentation dans le sens 1 est de 27N tandis que dans le sens 2, elle n'est que de 20N, soit une augmentation de 35%. L'effort maximal atteint dans le

cas de l'assemblage indenté dans le sens 2 est plus faible et est atteint pour une valeur de déplacement plus faible. Il est donc plus facile d'indenter le bloc central dans le sens 1, car les deux crêtes centrales ne bloquent pas les rotations, alors que dans le sens 2, les 4 crêtes externes bloquent les rotations ce qui apporte une meilleure résistance à l'indentation. Ce comportement est le même que celui observé lors des expériences sur les assemblages hexagonal et Tissé.

Les modules à décharge apparaissent sur la figure 2.36b. L'indentation selon le sens 1 présente des modules à décharge environ 35% plus importants que dans le sens 2. Ces pentes diminuent durant les premiers millimètres puis augmentent jusqu'à la fin de l'indentation.

2.4.3.4 Étude de l'effet des conditions de bord sur l'indentation d'un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes

La précompression latérale est maintenant augmentée en resserrant les colliers de serrage. Le résultat de l'essai d'indentation a été superposé avec celui de l'essai d'indentation avec une plus faible précompression. Les deux courbes sont tracées sur la figure 2.37a.

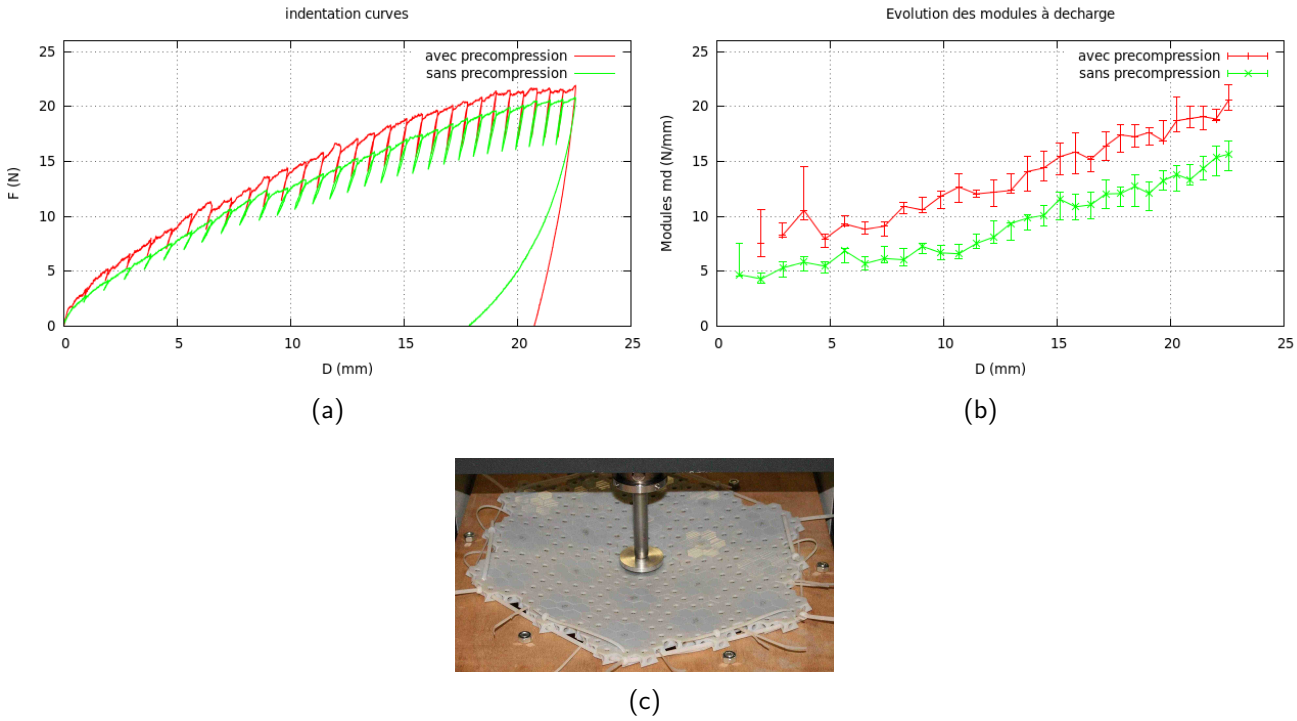


FIGURE 2.37 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Coarse de blocs ostéomorphes - influence des conditions de bords : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

Comme observé lors des expériences d'indentation de l'assemblage de cubes en alumine ou bien de l'assemblage hexagonal, l'effort à fournir pendant l'indentation est légèrement inférieur

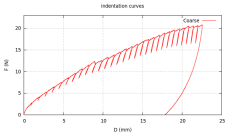
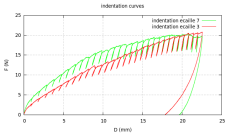
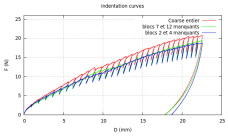
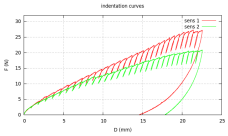
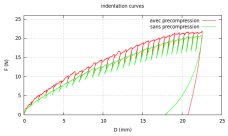
				
Forme parabolique et diminution des modules à décharge	Augmentation de la pente initiale avec la distance au centre du bloc indenté	Diminution de la pente initiale lors de l'indentation d'un assemblage endommagé	Asymétrie en flexion	Augmentation de la pente initiale avec la précompression latérale

TABLE 2.3 – Récapitulatif des résultats obtenus grâce aux expériences d'indentation sur un assemblage Coarse

dans le cas où une faible précompression est appliquée sur les bords de l'assemblage.

Le même phénomène apparaît sur les évolutions des modules à décharge (voir figure 2.37b). La rigidité apparente de l'assemblage le plus précontraint est aussi bien plus 40% plus importante que celle de l'assemblage moins contraint. Le tableau 2.3 résume les résultats obtenus sur l'assemblage Coarse.

2.4.4 Indentation de l'assemblage Tissé

Il s'agit du même assemblage de 19 sous-assemblages de 19 blocs que l'assemblage 'Coarse' mais pour lesquels les couronnes externes des assemblages élémentaires sont fusionnées entre elles (voir 2.38). L'assemblage est alors composé de 133 blocs pleins comme dans l'assemblage 'Coarse' mais de seulement 126 blocs percés.

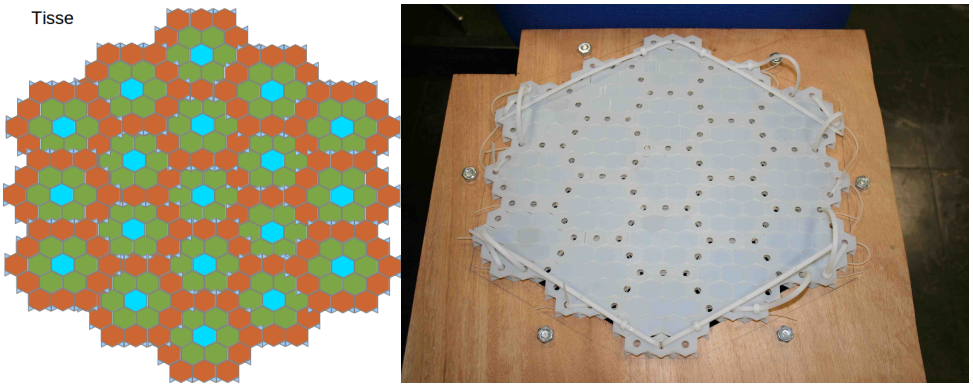
Nous allons reproduire les mêmes expériences que celles effectuées sur l'assemblage 'Coarse'. Pour commencer, nous avons effectué une première indentation de 23mm. Une décharge de 80% de la force atteinte tous les millimètres a été exécutée. La courbe de la figure 2.39a montre que l'effort augmente avec le déplacement de l'indenteur.

L'évolution des modules à décharge en fonction du déplacement de l'indenteur tracée sur la figure 2.39b montre que la rigidité apparente de l'assemblage augmente légèrement avec le déplacement de l'indenteur puis à partir de 10mm de déformation, cette rigidité augmente plus fortement et atteint une valeur de 26N/mm à la fin de l'indentation.

Ces résultats sont similaires très à ceux obtenus dans le cas de l'assemblage 'Coarse'.

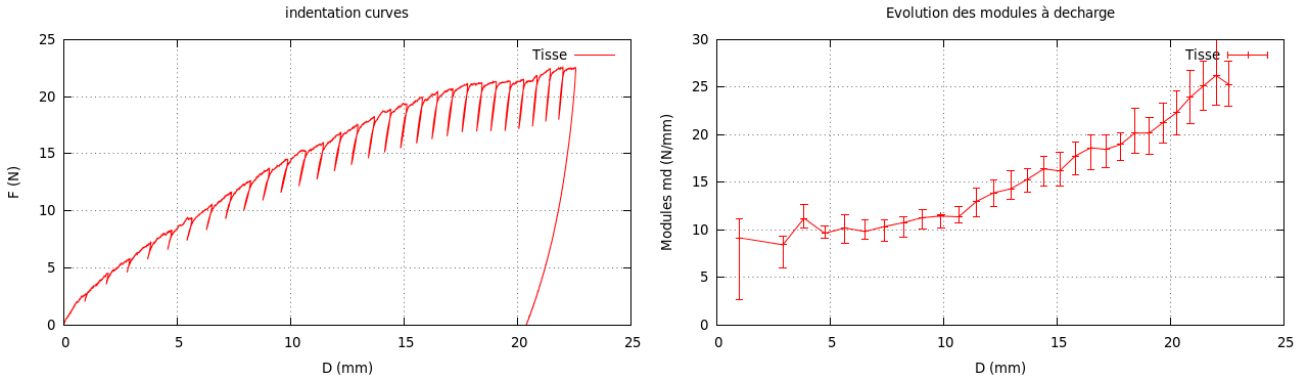
2.4.4.1 Influence de la position du bloc indenté sur le comportement d'un assemblage Tissé

Nous allons maintenant étudier l'influence de la position du bloc indenté.

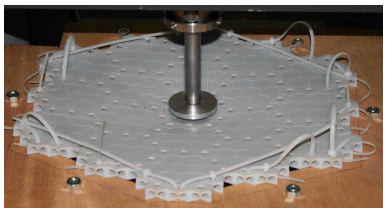


(a) (b)

FIGURE 2.38 – a) Schéma de l'assemblage Tissé : les couronnes de couleurs orange sont celles qui participent à la précompression de l'assemblage et sont donc composées de blocs percés. L'assemblage élémentaire est celui qui est constitué d'un bloc central (en bleu) entouré d'une couronne de blocs libres (vert) et une seconde couronne qui sera précontrainte (orange). Les sept blocs centraux sont des blocs pleins alors que les blocs de la couronne extérieure en orange sont percés dans le but d'appliquer la précompression, b) Photo de l'assemblage Tissé



(a) (b)



(c)

FIGURE 2.39 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Tissé de blocs ostéomorphes : a) Courbe d'indentation, b) Modules à décharge, c) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

Pour cela, nous allons indenter des blocs se trouvant au milieu de l'assemblage élémentaire. Tout d'abord, nous avons indenté les blocs (2 puis 4) qui se rapprochent du bord de l'assemblage

2.40d. Ces blocs situés au milieu des écailles se trouvent sur la même ligne que le bloc central. Puis nous avons indenté un autre bloc (7) situé au centre de l'écaille se trouvant à droite du bloc central.

Les courbes d'indentation des blocs des écailles se trouvant les plus proches du bord de l'assemblage, montrent une pente à l'origine plus grande que celles des blocs centraux des écailles se trouvant près du centre de l'assemblage (voir figure 2.40a).

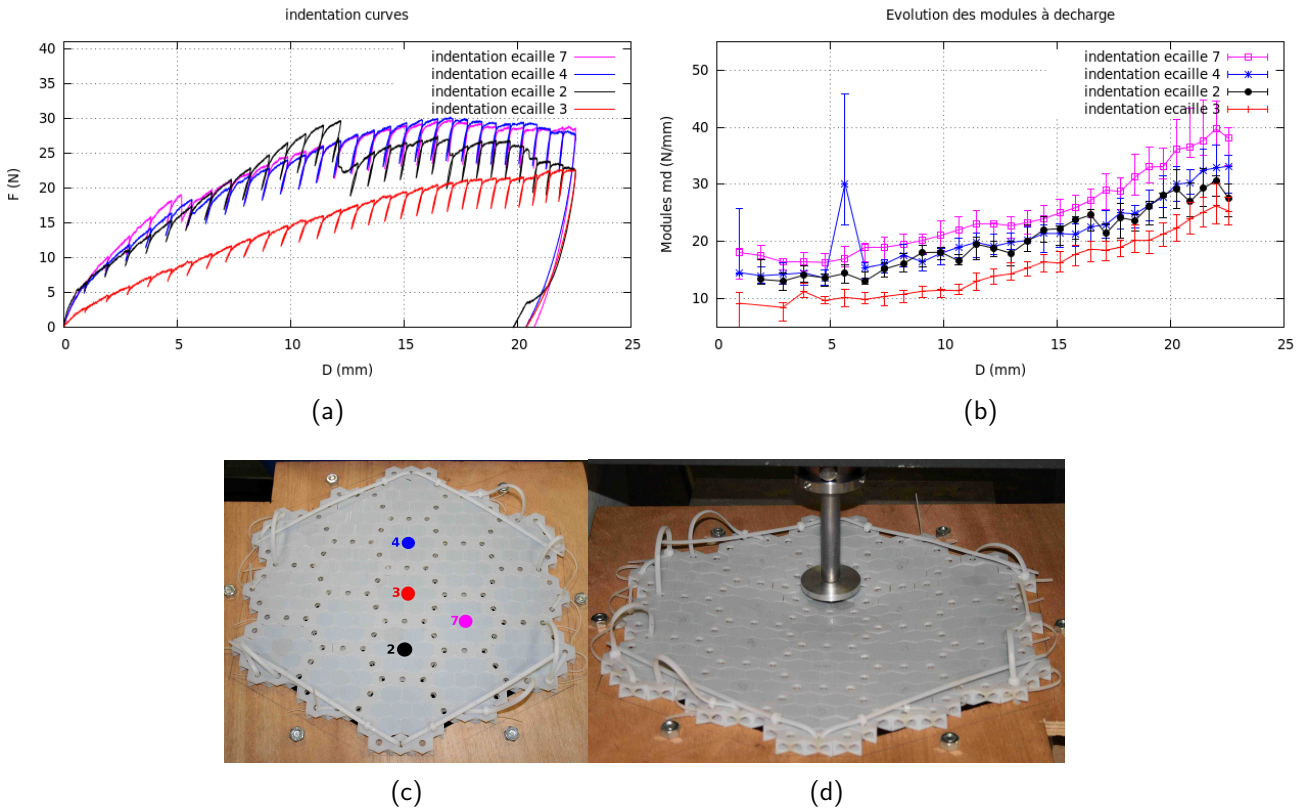


FIGURE 2.40 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Tissé de blocs ostéomorphes - influence de la position du bloc indenté : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) blocs indentés, d) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

Les évolutions des modules à décharge sont très semblables quel que soit le bloc indenté (voir figure 2.40b). L'ordre de grandeur de la rigidité apparente des assemblages indentés près du bord est plus grand (40N/mm en fin d'essai) que la rigidité apparente de l'assemblage indenté au centre (25N/mm). D'ailleurs c'est la courbe du bloc 7 qui montre le module à décharge le plus grand. Et le bloc 7 est le bloc le plus éloigné du bloc central. D'une façon générale, les modules à décharge semblent dépendre de la distance au centre de l'assemblage.

2.4.4.2 Étude de l'effet de blocs manquants dans un assemblage Tissé de blocs ostéomorphes

Nous avons ensuite étudié l'influence de blocs manquants sur le comportement d'un assemblage de blocs ostéomorphes Tissé. Deux blocs (2 et 4) situés au-dessus et en dessous du bloc central ont été retirés (voir figure 2.41c). La différence est très faible entre la courbe d'indentation de l'assemblage endommagé et l'assemblage complet (voir figure 2.41a).

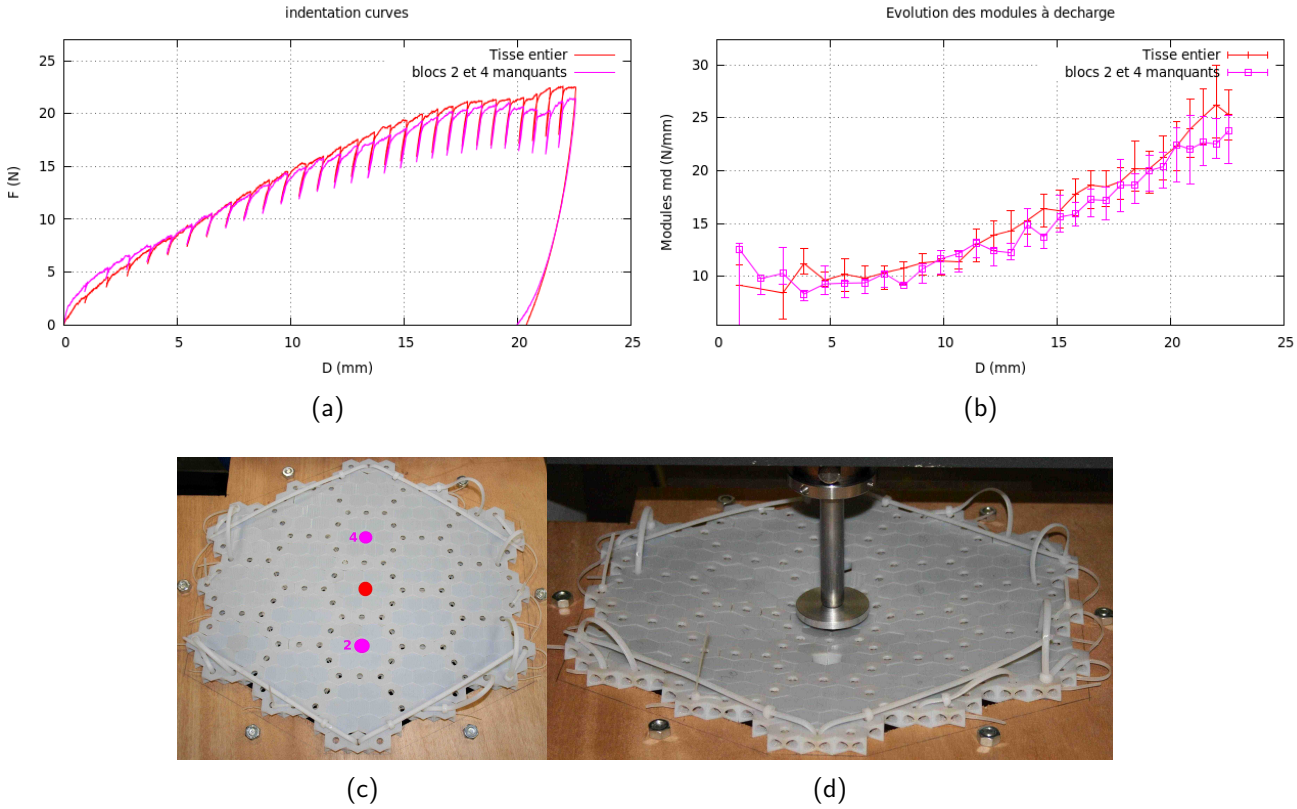


FIGURE 2.41 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Tissé de blocs ostéomorphes - influence de blocs manquants : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) blocs manquants, d) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

On constate que l'effort nécessaire pour indenter l'assemblage endommagé est très proche de celui nécessaire à l'indentation de l'assemblage intact. De même, on observe sur la figure 2.41b que les modules à décharge évoluent aussi de la même façon pour les deux assemblages. Ces rigidités apparentes sont constantes pendant les premiers millimètres d'indentation, puis augmentent pour atteindre un module à décharge de 25N/mm.

Durant l'étude de l'influence de blocs manquants sur l'assemblage Coarse, la différence entre l'assemblage entier et l'assemblage endommagé était plus prononcée. Cette différence peut peut-être s'expliquer par le fait que l'assemblage 'Coarse' est sensiblement plus grand et que l'effet de taille amplifie l'effet de l'endommagement.

2.4.4.3 Étude du comportement d'un assemblage Tissé de blocs ostéomorphes en fonction du sens de l'indentation

Pour finir, nous étudions à nouveau l'influence du sens de l'indentation sur la réponse mécanique d'un assemblage de blocs ostéomorphes Tissé. Pour cela, nous allons comme dans les essais précédents indenter l'assemblage puis le retourner et le ré-indenter.

La courbe de la figure 2.42a montre que l'effort à fournir pour indenter l'assemblage dans le sens 1 (35N, voir figure 2.42c) est encore une fois plus important que celui nécessaire à l'indentation de l'assemblage dans le sens 2 (27.5N, figure 2.39c). Lorsque l'assemblage est indenté dans le sens 2, l'effort maximal atteint est plus faible et est atteint pour une valeur de déplacement plus faible.

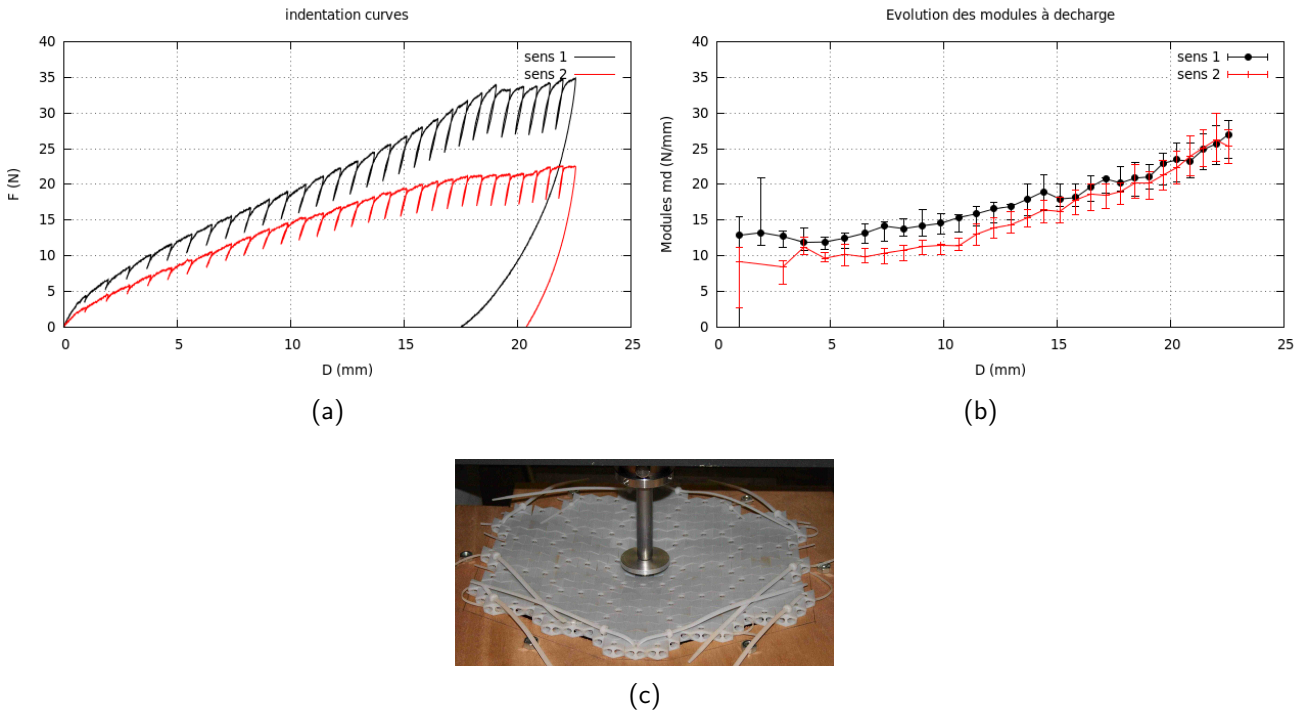
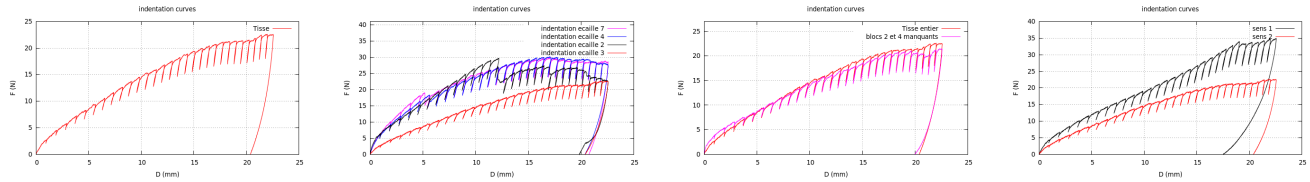


FIGURE 2.42 – Résultats de l'indentation de 23mm effectuée sur un assemblage Tissé de blocs ostéomorphes - influence du sens de l'indentation : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge, c) Photo de l'assemblage à la fin de l'indentation

L'évolution des modules à décharge est similaire (voir figure 2.42b) quel que soit le sens de l'indentation. Ces pentes évoluent lentement durant les premiers millimètres d'indentation avec un module à décharge légèrement supérieur dans le cas d'une indentation dans le sens 1, puis augmentent jusqu'à la fin de l'indentation pour tendre vers la même valeur (27N/mm).

Comme on pouvait s'y attendre, ce résultat confirme ceux obtenus précédemment dans le cas de l'assemblage Coarse ainsi que dans le cas des assemblages hexagonaux. Le tableau 2.4



Forme parabolique et diminution des modules à décharge	Augmentation de la pente initiale avec la distance au centre du bloc indenté	Diminution de la pente initiale lors de l'indentation d'un assemblage endommagé	Asymétrie en flexion

TABLE 2.4 – Récapitulatif des résultats obtenus grâce aux expériences d'indentation sur un assemblage Tissé

résume les résultats obtenus sur l'assemblage Tissé.

2.4.5 Comparaison des assemblages de blocs ostéomorphes étudiés

Nous allons comparer les résultats obtenus sur les trois assemblages de blocs ostéomorphes. Leurs courbes d'indentation apparaissent sur la figure 2.43a.

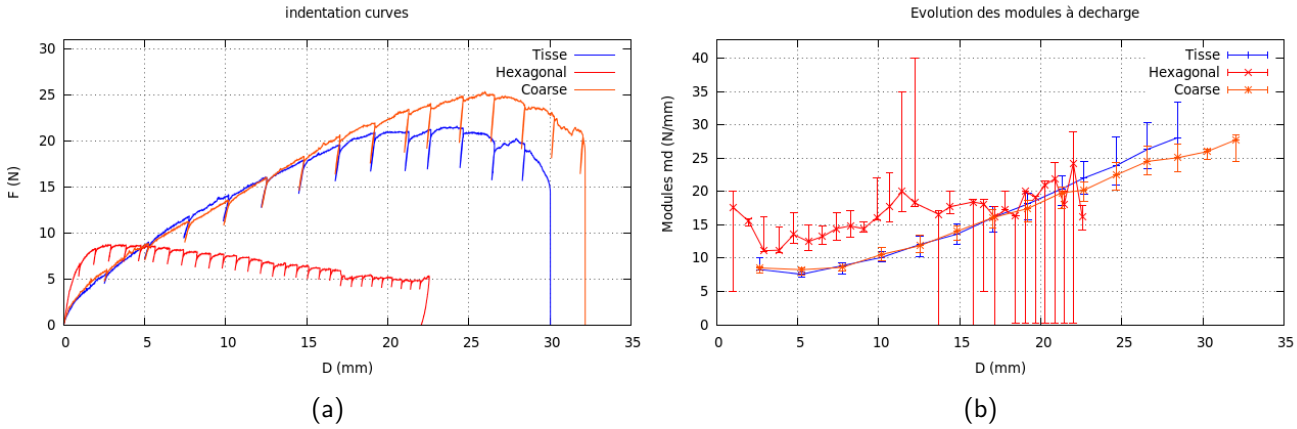


FIGURE 2.43 – Comparaison des courbes d'indentation des trois assemblages de blocs ostéomorphes : a) Courbes d'indentation, b) Modules à décharge

La courbe d'indentation de l'assemblage hexagonal montre une pente à l'origine deux fois plus forte que les assemblages Coarse et Tissé. L'effort maximal est atteint pour une valeur de déplacement de l'indenteur de 2.5mm alors que dans le cas de l'assemblage Tissé, cet effort est atteint à 22.5mm et dans le cas de l'assemblage Coarse il est atteint à 26mm. L'effort maximal est d'ailleurs bien plus faible dans le cas de l'assemblage hexagonal que pour les autres assemblages (8N contre 22N pour l'assemblage Tissé et 25N pour l'assemblage Coarse).

Les assemblages Coarse et Tissé ont des comportements très similaires. Ces deux assemblages montrent la même pente à l'origine jusqu'à un déplacement de l'indenteur de 15mm puis l'effort à fournir pour indenter l'assemblage Coarse devient plus grand que celui à fournir

pour indenter l'assemblage Tissé. L'effort maximal est plus grand et est atteint plus tard que celui de l'assemblage Tissé. Cela peut s'expliquer par le fait que l'assemblage Tissé possède moins de blocs.

Les modules à décharge sont tracés sur la figure 2.43b. On observe que la rigidité apparente de l'assemblage hexagonal diminue pendant les trois premiers millimètres puis cette rigidité augmente lentement au cours de l'indentation pour atteindre une valeur de 20N/mm. Les assemblages Coarse et Tissé ont des évolutions de rigidité apparente similaires entre elles, mais différentes celle de l'assemblage hexagonal. Ces rigidités sont similaires et augmentent jusqu'à la fin de l'indentation pour atteindre une valeur de 27N/mm.

C'est l'assemblage Coarse qui est l'assemblage le plus rigide et qui perfore le plus tard.

2.5 Synthèse des résultats expérimentaux

Dans ce chapitre, nous avons exposé les résultats des expériences d'indentation réalisées sur des assemblages de cubes en alumine et des assemblages hexagonaux de blocs ostéomorphes en polymère. Pour les deux familles d'assemblages, nous avons testé l'influence de la précompression latérale et l'endommagement.

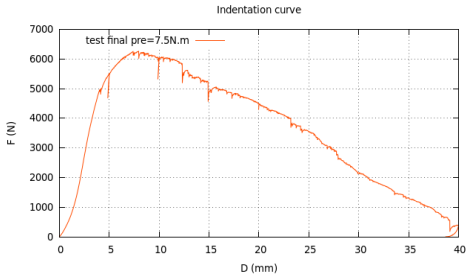
Dans le cas de la précompression latérale, on observe un comportement similaire pour les deux géométries. Lorsqu'elle augmente, la rigidité de l'assemblage augmente aussi bien dans le cas de l'assemblage cubique que dans les cas des assemblages de blocs ostéomorphes. L'effet de la précompression a pu être quantifié dans le cas des assemblages de cubes, car elle était imposée par le couple de serrage appliqué aux vis de maintien. Dans le cas des blocs ostéomorphes, seul le comportement qualitatif a pu être montré, car nous ne maîtrisons pas la valeur de la précontrainte imposée par les colliers de serrage.

En ce qui concerne l'endommagement, pour l'assemblage de cubes, il ne peut être que partiel, car si un cube entier est retiré, c'est toute la structure qui s'effondre. Alors que la géométrie asymétrique des blocs ostéomorphes permet de retirer des blocs sans que la structure s'écroule. Mais quel que soit le type d'endommagement, il y a une perte de rigidité de l'assemblage.

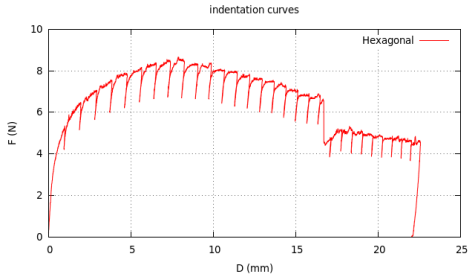
Nous avons testé deux autres paramètres sur les assemblages de blocs ostéomorphes. Le premier paramètre est la position du bloc indenté. Cette étude nous a permis d'observer qu'il était plus difficile d'indenter les blocs se trouvant proches du bord de l'assemblage. Le second paramètre est le sens de l'indentation : le caractère asymétrique de la géométrie confère à l'assemblage des propriétés asymétriques en flexion. L'assemblage est en effet plus rigide du côté des faces concaves des blocs, car les déplacements sont bloqués par deux fois plus de points de contact.

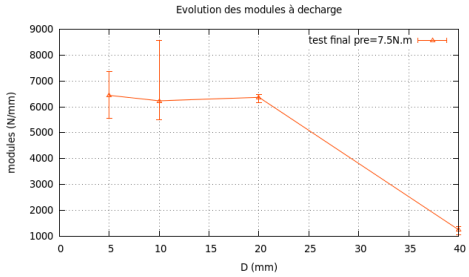
Pour une indentation dans l'autre sens, les rotations sont moins bien bloquées et donc l'assemblage est moins rigide. Certains résultats de ce chapitre permettront de valider les résultats issus des simulations numériques présentés dans le chapitre 4.

Le tableau 2.5 montre les similarités et les différences entre les géométries cubique et ostéomorphique.

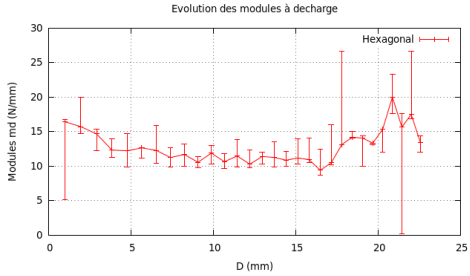


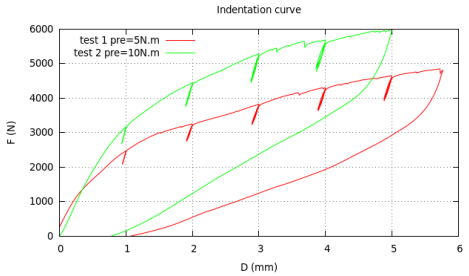
Comportement en indentation : Comportement à perforation similaire : même forme parabolique ☑



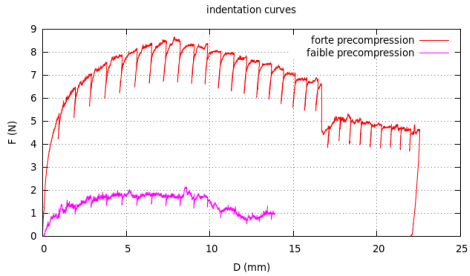


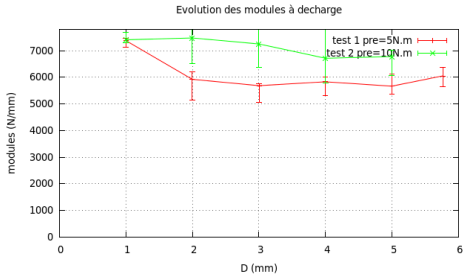
Et même diminution des modules à décharge ☑



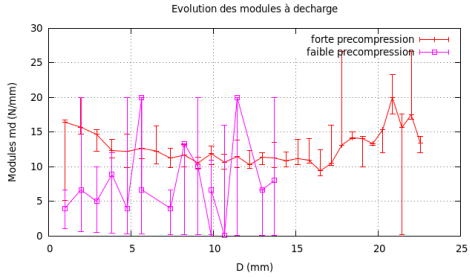


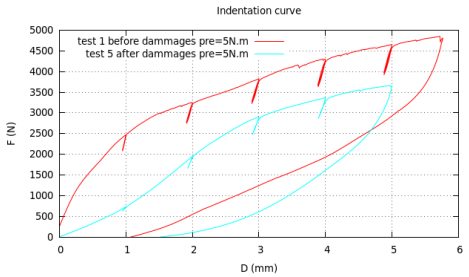
Effet de la précompression : Comportement similaire sur la courbe d'indentation ☑



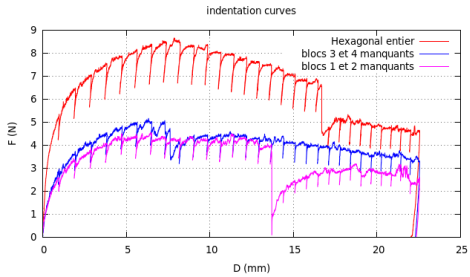


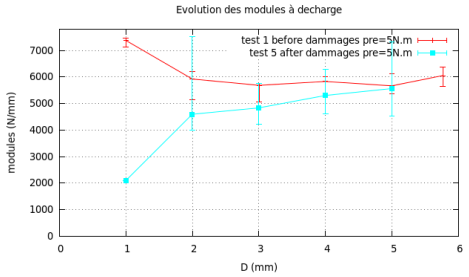
Même augmentation des modules à decharge avec la precompression ☑





Endommagement : Endommagement partiel seulement pour les cubes (à gauche) ; Possibilité d'enlever des blocs pour les ostéomorphes grâce à leur géométrie asymétrique (à droite) ☒ : Comportement en indentation similaire, baisse de la rigidité des assemblages ☑





Baisse de la rigidité apparente des assemblages avec l'endommagement ☑

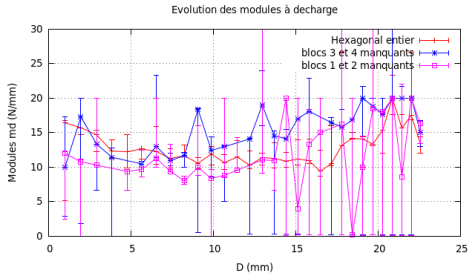


TABLE 2.5 – Récapitulatif des résultats obtenus grâce aux expériences d'indentation - comparaison des effets des différents paramètres entre la géométrie cubique (à gauche) et la géométrie ostéomorphe à 217 blocs (à droite)

Chapitre 3

Méthodologie de simulations d'assemblages autobloquants

Dans ce chapitre, nous présenterons la mise en place des simulations d'indentation dans le cas des cubes et des blocs ostéomorphes. Des tentatives de simulations numériques du comportement de pavages 2D de blocs ostéomorphes ont déjà été réalisées en utilisant la méthode des éléments finis Molotnikov et al. [2007] et Yong [2011]. Ce type de simulation est pourtant très difficile à mettre en œuvre du fait du grand nombre de blocs à positionner, à mailler et pour lesquels il faut gérer le contact.

Une méthode alternative consiste à utiliser la méthode des éléments discrets (DEM). Un premier code a été initié par Brugger [2008] pendant sa thèse afin de simuler le comportement d'assemblages de blocs cubiques. L'avantage de ce genre de code est de pouvoir facilement gérer un très grand nombre de blocs sans un gros surcoût en temps de calcul. Lors de la thèse de Brugger [2008], ce code n'avait pas été validé.

Dans le travail présenté ici, nous utiliserons ces deux types de modélisation pour simuler à la fois les assemblages de cubes et les assemblages de blocs ostéomorphes. Même si un objectif affiché de la thèse est de construire un code 3D d'éléments discrets capable de simuler de grands assemblages autobloquants. Les simulations par éléments finis permettront d'une part de valider le code d'éléments discrets et d'autre part d'étudier la réponse de l'assemblage dans des conditions particulières que le code d'éléments discrets ne peut pas encore prendre en compte.

Ce chapitre détaille la méthode retenue pour développer le code d'éléments discrets. Les simulations menées par éléments finis sont en effet beaucoup plus classiques et ne nécessitent pas d'explications spécifiques (le maillage utilisé et les conditions propres à Abaqus sont spécifiés en Annexe B).

3.1 Introduction à la méthode des éléments discrets

La méthode des éléments discrets permet de décrire un milieu par un ensemble de particules en interaction. Cette méthode est largement utilisée pour modéliser des milieux granulaires Martin et al. [2003]. Cette méthode peut aussi être utilisée pour des milieux initialement continus et qui deviennent discontinus, comme un bloc de matière dans lequel vont se propager des fissures et le fragmenter. Elle permet de simuler un grand nombre de particules, mais aussi de modéliser de grands déplacements, de grands glissements voire la rupture des grains. Elle semble donc a priori bien adaptée à la modélisation d'assemblages autobloquants.

3.2 Démarche de modélisation

La démarche de modélisation que nous avons retenue est schématisée sur la figure 3.1.
Dans notre code d'éléments discrets, nous considérerons que chaque bloc est un point matériel

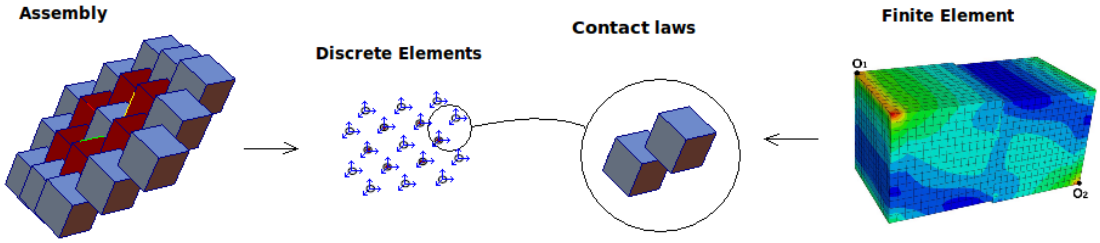


FIGURE 3.1 – Schéma représentant la démarche de modélisation par éléments discrets

ayant six degrés de liberté. Chacun des blocs se trouvant à l'intérieur de l'assemblage est en contact avec six voisins. Les blocs extérieurs ont seulement trois ou quatre voisins. L'hypothèse de départ est que les blocs sont en contact seulement deux à deux. Il est donc nécessaire de connaître les lois de contact entre deux blocs. Pour cela, nous avons modélisé chaque interaction élémentaire entre deux blocs par éléments finis. Une fois que ces lois sont introduites dans le code d'éléments discrets, il est alors possible de simuler des assemblages comportant un grand nombre de blocs en contact en utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique.

3.2.1 Modélisation d'un bloc

Dans la méthode discrète, chaque bloc est assimilé à un point matériel correspondant à son barycentre avec six degrés de liberté (3 coordonnées et 3 angles) : à chaque bloc, seront associées une position exprimée sous la forme d'un vecteur qui traduit une translation du centre de gravité du bloc et une orientation exprimée sous la forme d'une matrice de passage entre le repère local et le repère du laboratoire qui traduit une opération de rotation du bloc.

3.2.2 Modélisation de l'interface

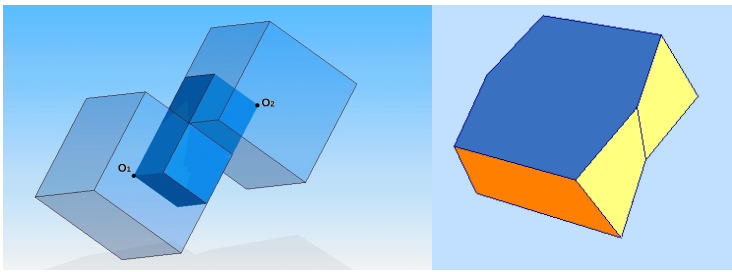
Des lois d'interaction sont introduites pour modéliser le comportement entre deux blocs en contact. Typiquement, dans le cas d'un pavage 2D de blocs ostéomorphes, chaque bloc est en contact avec six voisins (voir figure 3.1) ce qui nécessite de connaître les lois de contact pour chacune des 6 interfaces. Il est donc nécessaire de définir des lois locales pour chaque interface entre deux éléments discrets. Ces lois sont difficiles à prédire analytiquement, elles sont donc estimées par éléments finis en utilisant le logiciel Abaqus. Ces simulations sont facilement réalisables, car elles ne mettent en jeu que deux blocs.

3.2.3 Modélisation par éléments finis de l'interaction entre deux blocs

Les autobloquants présentent un intérêt particulier dans le cas de matériaux fragiles. On suppose que les matériaux restent dans le domaine élastique. Les lois de comportement sont alors calculées par éléments finis grâce au logiciel Abaqus [2011]. Dans le cas des cubes, le contact a lieu entre des surfaces planes et les symétries de l'assemblage permettent d'utiliser les

mêmes lois de comportement pour les 6 interfaces d'un bloc donné (voir sur la figure 3.2a). En outre, dans le cas particulier des pavages de blocs ostéomorphes, nous pouvons constater deux types d'interfaces différentes, nous aurons donc deux catégories de lois (voir sur la figure 3.2b) :

- les lois de contact entre les surfaces planes des blocs (en orange)
- les lois de contact entre les surfaces réglées (en jaune)



(a) Zones de contacts sur un cube (b) Zones de contacts sur un bloc ostéomorphe

FIGURE 3.2 – Contacts sur les blocs étudiés

L'identification des lois de contact par éléments finis est effectuée en appliquant une translation ou une rotation à un bloc et en mesurant le torseur de réaction au contact. Ce torseur peut se résumer à un glisseur défini par la résultante des efforts au contact et le point d'application pour lequel le moment est nul.

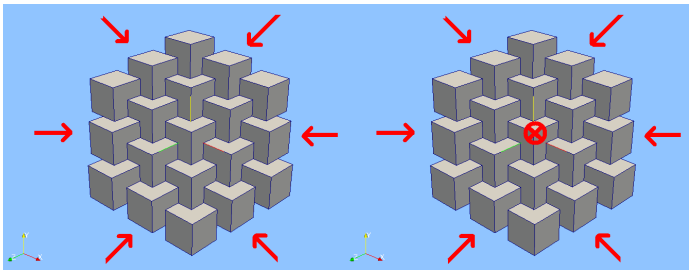
Une fois ces lois locales introduites dans le code d'éléments discrets, il est alors possible de modéliser un assemblage entier. La méthode des éléments discrets permet en principe de modéliser de gros assemblages plus rapidement que par éléments finis.

Le contact n'ayant lieu que sur une partie des blocs, nous n'effectuerons les calculs d'identification des lois de contact que sur des demi-blocs, ce qui permet de réduire le temps de calcul sous Abaqus.

3.2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites concernent les conditions appliquées au bloc indenté, et les conditions appliquées aux blocs se trouvant au bord de l'assemblage (précompression latérale, voir sur la figure 3.3a).

Dans le code d'éléments discrets, on commence par appliquer la précontrainte latérale en appliquant un déplacement aux blocs se trouvant sur les bords de l'assemblage. Une fois ce premier état d'équilibre atteint, le chargement sera appliqué sur le(s) bloc(s) indenté(s) (voir sur la figure 3.3b).



(a) Précompression sur un assemblage de cubes (b) Indentation sur un assemblage de cubes

FIGURE 3.3 – Conditions aux limites

3.2.5 Recherche de l'équilibre

Le chargement est appliqué incrémentalement de manière quasi statique. Pour chaque pas de chargement, le programme va rechercher la position et l'orientation de chacun des blocs jusqu'à ce que l'assemblage soit dans un état d'équilibre. L'assemblage sera considéré à l'équilibre lorsque la somme des forces de chacun des blocs et la somme des moments de chacun des blocs sont proches de zéro.

Le diagramme suivant (figure 3.4) montre l'algorithme de résolution utilisé dans le code d'éléments discrets. Il s'agit de l'algorithme Verlet-cinétique souvent utilisé dans la méthode de résolution par éléments discrets. Cet algorithme est détaillé dans les paragraphes suivants.

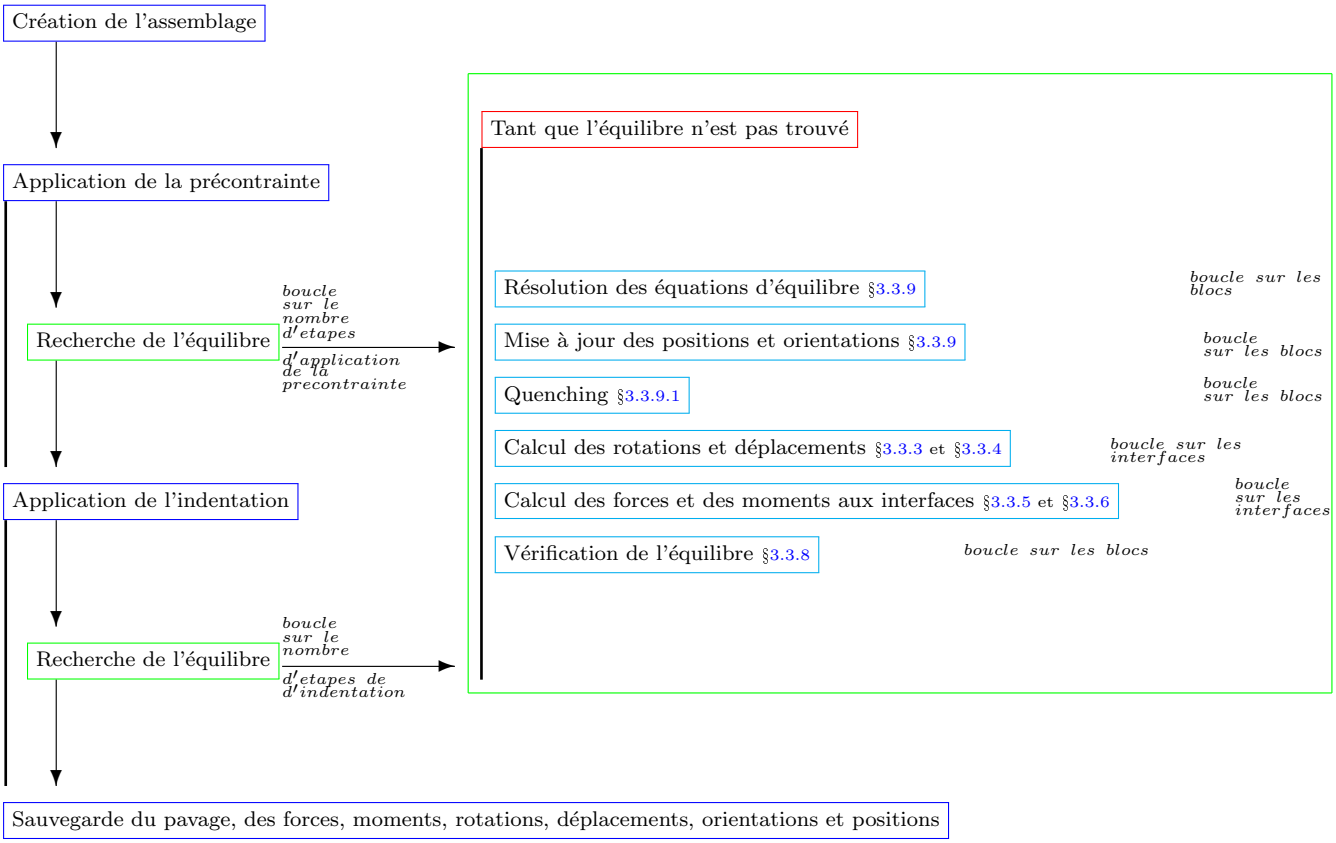


Figure 3.4 – Algorithme général utilisé dans le code d'éléments discrets

3.3 Algorithme utilisé dans le code d'éléments discrets

Dans cette section, nous présenterons en détail, l'algorithme de recherche de l'équilibre de l'assemblage pour un chargement donné. Chaque interface est composée d'un bloc 1 et d'un bloc 2. On associera au bloc 1 un vecteur qui stockera la position du centre du bloc 1, O_1 ainsi qu'une matrice de passage $\mathbb{M}_{0\to1}$ qui permettra de connaître l'orientation du bloc par rapport au repère du laboratoire. On fera de même pour le bloc 2 dont le centre se trouve en 0_2, on notera sa matrice de passage $\mathbb{M}_{0\to2}$. A chaque bloc sera associé un vecteur position et une matrice qui stockera la position angulaire du bloc dans le repère global.

3.3.1 Repère utilisé dans le cas des cubes

Dans le cas des cubes, nous utiliserons la configuration représentée sur la figure 3.4 où deux cubes disposés de la même façon que dans l'assemblage. Les parties colorées représentent les parties simulées par éléments finis et correspondants à des demi-cubes.

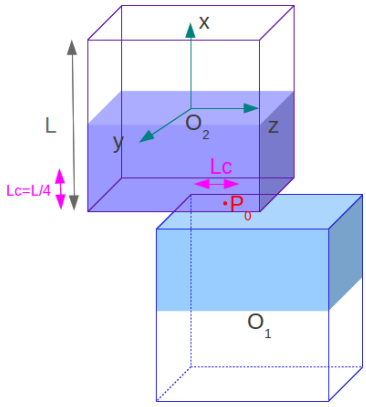


FIGURE 3.4 – Repère utilisé pour gérer le contact entre deux cubes

Un repère local est défini pour chaque interface, donc pour chacun des couples de cubes de l'assemblage. Ce repère est placé en O_2, centre du bloc 2 représenté en violet sur la figure. La sollicitation mécanique (déplacement ou rotation) sera appliquée au centre du bloc 1 représenté en bleu. Le bloc 2 est immobile.

3.3.2 Repère utilisé dans le cas des ostéomorphes

Dans le cas des blocs ostéomorphes, il existe deux types de contact, nous aurons alors deux types de configurations à étudier. La première configuration concerne le cas du contact entre surfaces planes et la seconde configuration concerne le cas du contact entre surfaces réglées.

3.3.2.1 Cas du contact entre les surfaces planes

Sur la figure 3.5 sont représentés deux blocs ostéomorphes disposés dans le cas où les deux blocs sont en contact entre leurs surfaces planes. Les parties colorées représentent les demi-blocs simulés par éléments finis.

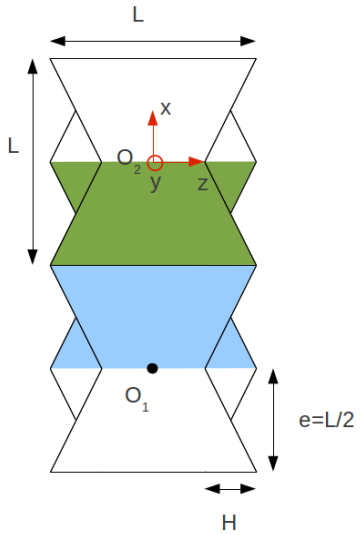


FIGURE 3.5 – Repère utilisé pour gérer le contact entre les surfaces planes de deux blocs ostéomorphes

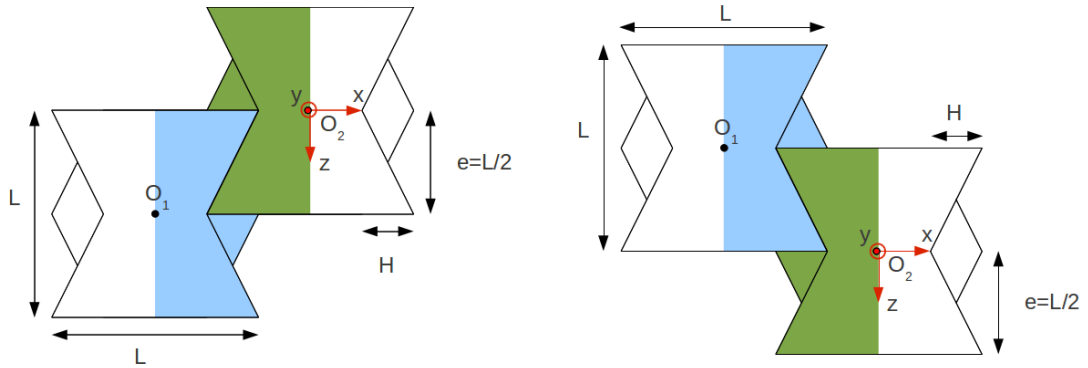
Un repère local est défini pour chacun des couples de blocs de l'assemblage. Ce repère est placé en O_2, centre du bloc 2 représenté en vert sur la figure. La sollicitation mécanique (déplacement ou rotation) sera appliquée au centre du bloc 1 représenté en bleu.

3.3.2.2 Cas du contact entre les surfaces réglées

Sur la figure 3.6 sont représentés deux blocs ostéomorphes disposés dans le cas où les deux blocs sont en contact entre leurs surfaces réglées. Les parties colorées représentent les parties simulées par éléments finis.
Le repère local est placé en O_2, centre du bloc 2 représenté en vert sur la figure. La sollicitation mécanique (déplacement ou rotation) sera appliquée au centre du bloc 1 représenté en bleu, le bloc 2 étant immobile.

Les lois de comportement ont été calculées dans le cas du contact entre la surface réglée supérieure du bloc 1 et la surface inférieure du bloc 2 (curved-high) (voir figure 3.6a). Dans le cas du contact entre la surface réglée inférieure pour le bloc 1 et supérieure pour le bloc 2 (curved-low) (cf figure 3.6b), les lois seront déduites à partir des lois du cas de curved-high par symétrie.

Dans la suite, toutes les étapes de calcul sont valides pour tous les types de contact, aussi bien pour les cubes que pour les ostéomorphes (pour un contact entre surfaces planes et pour



(a) Configuration curved-high (b) Configuration curved-low

FIGURE 3.6 – Repère utilisé pour gérer le contact entre les surfaces réglées de deux blocs ostéomorphes

un contact entre surfaces réglées).

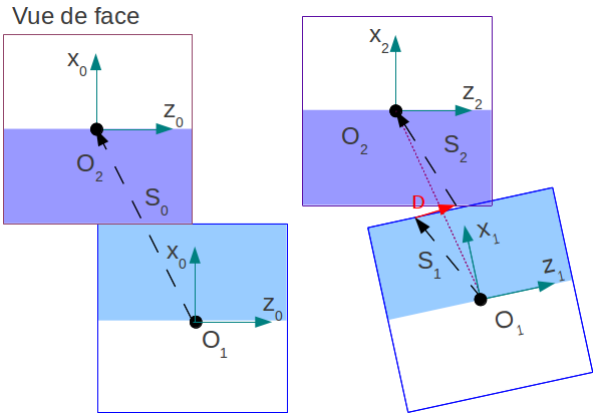
3.3.3 Déplacement relatif entre deux blocs

On appellera $\vec{S_0}$ la position initiale du bloc 1 dans le repère du bloc 2 et $\vec{S} = \overrightarrow{O_2O_1}$ la position courante du bloc 1 par rapport au bloc 2 après une rotation ou un déplacement. On notera $\vec{D}$ le déplacement relatif du bloc 1 par rapport au bloc 2 qui sera la différence entre $\vec{S}$ et $\vec{S_0}$:

$$\vec{D} = \vec{S} - \vec{S_0} = \overrightarrow{O_2O_1} - \vec{S_0}$$

Selon la géométrie des blocs utilisée, les valeurs de $\vec{S}$ et $\vec{S_0}$ seront différentes. Comme le montre la figure 3.7, au début de la simulation les blocs n'ont pas encore tourné.

Leurs repères locaux sont alignés avec le repère du laboratoire et leurs matrices de passage



(a) Position initiale (b) Position après une rotation

FIGURE 3.7 – Définition des différents vecteurs utilisés pour gérer le contact dans une interface

sont des matrices identité. Dans le cas d'un cube de côté L, $\vec{S_0}$ sera écrit tel que :

$$\vec{S_0} = -L(\vec{X_0}) + \frac{L}{2}(\vec{Y_0}) + \frac{L}{2}(\vec{Z_0})$$

où $\vec{X_0}$, $\vec{Y_0}$ et $\vec{Z_0}$ sont les vecteurs unitaires du repère associé au bloc 2 lorsque les blocs n'ont pas encore tourné.

Par la suite, les blocs ont tourné et les repères locaux ne sont plus alignés avec le repère du laboratoire. Pour que les efforts soient réciproques entre les deux blocs, la position relative linéaire calculée ne doit pas dépendre du choix du bloc 1 ou du bloc 2 et doit être exprimée dans le repère du bloc 2. $\vec{S_0}$ a donc été décomposé à l'aide de deux vecteurs qui apparaissent en tirets sur la figure 3.7b :
$\frac{L}{2}\vec{X_1} - \frac{L}{4}\vec{Y_1} - \frac{L}{4}\vec{Z_1}$ qui est exprimé dans le repère du bloc 1 et $\frac{L}{2}\vec{X_2} - \frac{L}{4}\vec{Y_2} - \frac{L}{4}\vec{Z_2}$ qui est exprimé dans le repère du bloc 2.

Ce qui donne :

$$\vec{S_0} = -L(\frac{1}{2}\vec{X_1} + \frac{1}{2}\vec{X_2}) + \frac{L}{2}(\frac{1}{2}\vec{Y_1} + \frac{1}{2}\vec{Y_2}) + \frac{L}{2}(\frac{1}{2}\vec{Z_1} + \frac{1}{2}\vec{Z_2})$$

Cette notation est compatible avec celle utilisée dans le cas où les blocs n'ont pas encore tourné. $\overrightarrow{O_2O_1}$ sera exprimé dans le repère du laboratoire et apparaît en pointillés sur la figure 3.7b. La position relative calculée $\vec{D}$ apparaît en trait plein. La formule utilisée pour calculer $\vec{D}$ est donc :

$$\boxed{\vec{D} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} \end{pmatrix} + \mathbb{M}_{0\to 2}\left(\overrightarrow{O_2O_1} + \mathbb{M}^t_{0\to 1}\begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} \end{pmatrix}\right)} \tag{3.1}$$

En position initiale, on a bien $\vec{D} = \vec{0}$ car $\mathbb{M}_{0\to 1} = \mathbb{M}_{0\to 2} = \mathbb{I}$ et $\overrightarrow{O_2O_1} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{4} \\ -\frac{L}{4} \end{pmatrix}$

Dans le cas de la géométrie ostéomorphe et dans le cas d'un contact entre surfaces planes (fig 3.8), $\vec{S_0}$ aura pour valeur :

$$\vec{S_0} = L(\frac{1}{2}\vec{Z_1} + \frac{1}{2}\vec{Z_2})$$

La formule utilisée pour calculer $\vec{D}$ est donc :

$$\boxed{\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix} + \mathbb{M}_{0\to 2}\left(\overrightarrow{O_2O_1} + \mathbb{M}^t_{0\to 1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix}\right)} \tag{3.2}$$

Dans le cas de la géométrie ostéomorphe et dans le cas d'un contact entre surfaces réglées et dans la configuration curved-high (voir figure 3.9a),$\vec{S_0}$ aura pour valeur :

$$\vec{S_0} = -(L - \frac{L}{4})(\frac{1}{2}\vec{X_1} + \frac{1}{2}\vec{X_2}) + \frac{L}{2}(\frac{1}{2}\vec{Z_1} + \frac{1}{2}\vec{Z_2})$$

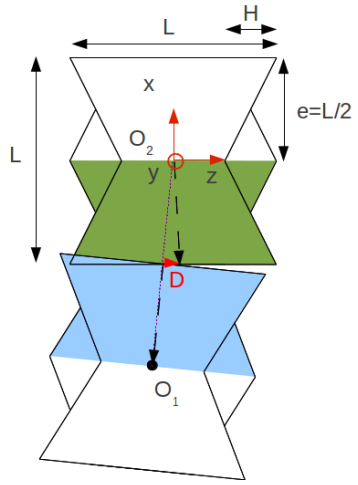


FIGURE 3.8 – Repère utilisé dans le cas des ostéomorphes : cas du contact entre surfaces planes

La formule utilisée pour calculer $\vec{D}$ est donc :

$$\boxed{\vec{D} = \begin{pmatrix} -\frac{L-\frac{L}{4}}{2} \\ 0 \\ \frac{L}{4} \end{pmatrix} + \mathbb{M}_{0\to 2}\left(\overrightarrow{O_2O_1} + \mathbb{M}^t_{0\to 1}\begin{pmatrix} -\frac{L-\frac{L}{4}}{2} \\ 0 \\ \frac{L}{4} \end{pmatrix}\right)} \tag{3.3}$$

Dans le cas de la géométrie ostéomorphe et dans le cas d'un contact entre surfaces réglées et dans la configuration curved-low (voir figure 3.9b),$\vec{S}_0$ aura pour valeur :

$$\vec{S}_0 = -(L - \frac{L}{4})(\frac{1}{2}\vec{X}_1 + \frac{1}{2}\vec{X}_2) - \frac{L}{2}(\frac{1}{2}\vec{Z}_1 + \frac{1}{2}\vec{Z}_2)$$

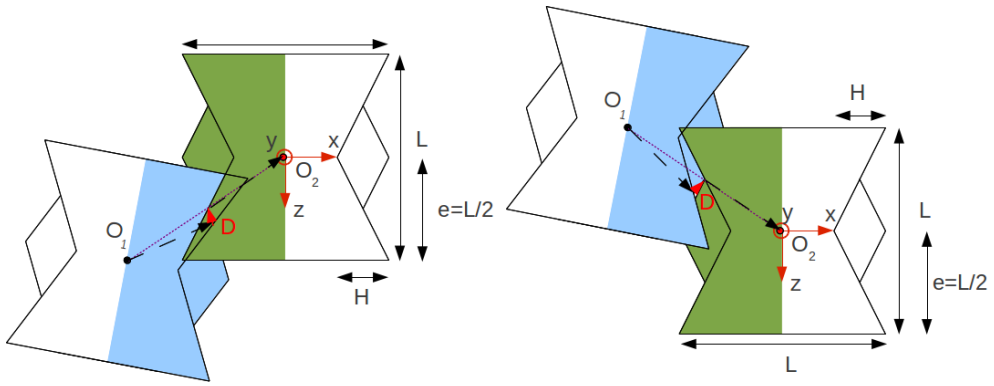
La formule utilisée pour calculer $\vec{D}$ est donc :

$$\boxed{\vec{D} = \begin{pmatrix} -\frac{L-\frac{L}{4}}{2} \\ 0 \\ -\frac{L}{4} \end{pmatrix} + \mathbb{M}_{0\to 2}\left(\overrightarrow{O_2O_1} + \mathbb{M}^t_{0\to 1}\begin{pmatrix} -\frac{L-\frac{L}{4}}{2} \\ 0 \\ -\frac{L}{4} \end{pmatrix}\right)} \tag{3.4}$$

3.3.4 Position relative angulaire entre deux blocs

La position relative angulaire $\vec{R}$ est la rotation vectorielle du bloc 1 par rapport au bloc 2. Comme dans le cas de la position relative linéaire, $\vec{R}$ doit être indépendante du choix des blocs 1 et 2. La position relative angulaire est calculée à partir de la matrice de passage entre le bloc 1 et le bloc 2. Cette matrice de passage se calcule en multipliant les matrices de passage entre le repère du laboratoire et chacun de ces deux blocs $\mathbb{M}_{0\to 2}$ et $\mathbb{M}^t_{0\to 1}$.

$$\boxed{\mathbb{M} = \mathbb{M}_{0\to 2}\mathbb{M}^t_{0\to 1}} \tag{3.5}$$



(a) Configuration curved-high (b) Configuration curved-low

FIGURE 3.9 – Repère utilisé dans le cas du contact entre les surfaces réglées de deux blocs ostéomorphes

Cette matrice $\mathbb{M}$ est appelée matrice de Olinde-Rodrigues et contient les termes d'axe et d'angle de rotation. Elle peut être décomposée de la façon suivante :

$$\mathbb{M} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} N_x^2 & N_xN_y & N_xN_z \\ N_yN_x & N_y^2 & N_yN_z \\ N_zN_x & N_zN_y & N_z^2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -N_z & N_y \\ N_z & 0 & -N_x \\ -N_y & N_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Où $\vec{N} = N_x, N_y, N_z$ représente l'axe de rotation et θ représente l'angle de rotation. En calculant la trace de cette matrice, on peut remonter au cosinus de l'angle de rotation θ.

$$tr(\mathbb{M}) = 1 + 2\cos\theta \tag{3.7}$$

$$\cos\theta = \frac{tr(\mathbb{M}) - 1}{2} \tag{3.8}$$

D'une façon un peu plus complexe, on peut aussi remonter à la valeur absolue du sinus de l'angle θ. À partir de l'équation 3.6, on peut écrire :

$$\mathbb{M} - \mathbb{M}^t = 2\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -N_z & N_y \\ N_z & 0 & -N_x \\ -N_y & N_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

En réécrivant l'équation 3.9, on obtient l'expression suivante :

$$2\sin(\theta\vec{N}) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{3,2} - \mathbb{M}_{2,3} \\ \mathbb{M}_{1,3} - \mathbb{M}_{3,1} \\ \mathbb{M}_{2,1} - \mathbb{M}_{1,2} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Ce qui donne accès à la valeur absolue du sinus de θ :

$$|\sin\theta| = \frac{||\vec{N'}||}{2} \tag{3.11}$$

La valeur de θ peut ensuite être calculé de la façon suivante :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \arctan\left(\frac{||\vec{N'}||}{tr(\mathbb{M})-1}\right) \tag{3.12}$$

Le vecteur directeur unitaire de l'axe de rotation est égal à :

$$\vec{N} = \frac{1}{2\sin\theta}\vec{N'} = \frac{\vec{N'}}{||\vec{N'}||} \tag{3.13}$$

L'axe et l'angle de rotation permettent ensuite de calculer le vecteur rotation $\vec{R}$ du bloc 1 par rapport au bloc 2.

$$\boxed{\vec{R} = \vec{N} * \theta} \tag{3.14}$$

3.3.5 Calculs des efforts et du déplacement du point d'application de la force

En introduisant $\vec{D}$ et $\vec{R}$ dans les lois de comportement déterminées par éléments finis (voir 3.4.5), il est possible pour chaque interface, de calculer la force résultante $\vec{F}$ que le bloc 1 appliquera sur le bloc 2, ainsi que son point d'application $\vec{P}$, dans le repère du bloc 2. Dans le repère du pavage, on obtient alors :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1\to2}} = \mathbb{M}^t_{0\to2}\vec{F}} \tag{3.15}$$

L'effort qu'applique le bloc 2 sur le bloc 1 dans le repère du pavage, peut être obtenu en utilisant la troisième loi de Newton sur la réciprocité des efforts :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{2\to1}} = -\overrightarrow{F_{1\to2}}} \tag{3.16}$$

3.3.6 Calculs des moments

Pour chaque interface, le couple exercé par le bloc 1 sur le bloc 2 au point O_2 dans le repère du bloc 2 s'exprime sous la forme suivante :

$$\boxed{\vec{C} = \overrightarrow{O_2P} \wedge \vec{F}} \tag{3.17}$$

Le couple exercé par le bloc 1 sur le bloc 2 au point O_2 dans le repère du pavage s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{C_{1\to2,O_2}} = \mathbb{M}^t_{0\to2}\vec{C} = \mathbb{M}^t_{0\to2}(\overrightarrow{O_2P} \wedge \vec{F})} \tag{3.18}$$

En utilisant la troisième loi de Newton sur la réciprocité des moments, on peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{C_{1\to2,O_2}} = -\overrightarrow{C_{2\to1,O_2}}} \tag{3.19}$$

Le moment que le bloc 2 va exercer sur le bloc 1 au point O_1 peut être calculé grâce au théorème de Varignon :

$$\boxed{\overrightarrow{C_{1\to2,O_1}} = -\overrightarrow{C_{2\to1,O_2}} + \overrightarrow{F_{2\to1}} \wedge \overrightarrow{O_2O_1}} \tag{3.20}$$

3.3.7 Somme des forces et des moments sur un bloc

Dans les paragraphes précédents, nous avons calculé à chaque interface un vecteur $\vec{F}_{1\to 2}$ et un vecteur $\vec{C}_{1\to 2,O_2}$ calculés au centre des blocs impliqués.

Dans les assemblages étudiés, chaque bloc est entouré par six voisins (excepté les blocs extérieurs qui possèdent trois ou quatre voisins). Pour un bloc donné, chacun de ses voisins va exercer une force ainsi qu'un couple sur ce bloc. L'effort et le couple résultant sont finalement obtenus en sommant les contributions des blocs environnants.

3.3.8 Vérification des conditions d'équilibre

Ensuite, les conditions d'équilibre sont vérifiées. Une force critique ainsi qu'un moment critique pour chaque composante sont définis tels que :

$$\boxed{\text{force critique}_i = Max_{\substack{\text{sur toutes}\\ \text{les interfaces}}} \left(\frac{F_{1\to 2_{max_i}}}{||\vec{F}_{1\to 2_{max}}||} \right)} \tag{3.21}$$

et :

$$\boxed{\text{moment critique}_i = Max_{\substack{\text{sur toutes}\\ \text{les interfaces}}} \left(\frac{C_{1\to 2,O_{2_{max_i}}}}{||\vec{C}_{1\to 2,O_{2_{max}}}||} \right)} \tag{3.22}$$

avec i=(x, y ou z).

La somme des forces de chaque bloc maximale exercée dans tout l'assemblage calculée précédemment doit être inférieure à la force critique imposée pour que l'assemblage soit considéré à l'équilibre.

$$\boxed{Max_{blocs}\left(\sum F_i\right) \leq \text{force critique}_i} \tag{3.23}$$

On fera la même chose pour les couples :

$$\boxed{Max_{blocs}\left(\sum C_i\right) \leq \text{moment critique}_i} \tag{3.24}$$

avec i=(x, y ou z).

3.3.9 Algorithme Verlet-Vitesse

Après avoir calculé la somme des efforts sur chacun des blocs, nous pouvons mettre à jour la position (linéaire et angulaire) des blocs en résolvant les équations d'équilibre suivantes :

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F} = M\overrightarrow{\gamma}}\boxed{\sum \overrightarrow{C} = I\overrightarrow{\alpha}} \tag{3.25}$$

Pour cela, on utilise un schéma numérique Verlet-vitesse classiquement utilisé pour résoudre les équations du mouvement. Connaissant la position $\overrightarrow{x(t)}$, la vitesse $\overrightarrow{v(t)}$ et l'accélération $a(t)$ à l'instant t, la vitesse $\overrightarrow{v(t+\delta t)}$ et la position $\overrightarrow{x(t+\delta t)}$ sont calculées à l'instant $t+\delta t$ par :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{x(t+\delta t)} &= \overrightarrow{x(t)} + \overrightarrow{v(t)\delta t} + \overrightarrow{a(t)}.\frac{\delta t}{2} \\ \overrightarrow{v(t+\delta t)} &= \overrightarrow{v(t)} + [\overrightarrow{a(t)} + \overrightarrow{a(t+\delta t)}].\frac{\delta t}{2} \end{aligned}} \tag{3.26}$$

Cette méthode d'ordre 2 en vitesse (3 en déplacement) ne nécessite pas de calculer les accélérations en des pas de temps intermédiaire. Il n'y a donc pas de surcoût par rapport à une méthode explicite pure tout en étant plus précise. Par contre, l'algorithme de Verlet-vitesse ne converge pas si les accélérations dépendent des vitesses. Il ne peut donc pas être utilisé dans le cas de forces visqueuses pures. Dans notre cas, on ajoute des relations similaires sur les rotations à savoir :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\theta(t+\delta t)} &= \overrightarrow{\theta(t)} + \overrightarrow{w(t)}.\delta t + \overrightarrow{\alpha(t)}.\frac{\delta t}{2} \\ \overrightarrow{w(t+\delta t)} &= \overrightarrow{w(t)} + [\overrightarrow{\alpha(t)} + \overrightarrow{\alpha(t+\delta t)}].\frac{\delta t}{2} \end{aligned}} \tag{3.27}$$

À partir de cette nouvelle position angulaire, il est possible de calculer le nouvel angle θ et le nouvel axe de rotation $\vec{N}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \theta &= ||\overrightarrow{\Delta\theta}|| \\ \vec{N} &= \frac{1}{\theta}\overrightarrow{\Delta\theta} \end{aligned}} \tag{3.28}$$

Cet angle θ et cet axe $\vec{N}$ permettent de remonter à la matrice de Olinde-Rodrigues :

$$\mathbb{M} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} N_x^2 & N_xN_y & N_xN_z \\ N_yN_x & N_y^2 & N_yN_z \\ N_zN_x & N_zN_y & N_z^2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -N_z & N_y \\ N_z & 0 & -N_x \\ -N_y & N_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Cette matrice permet de remonter à la nouvelle matrice de passage entre le repère du bloc et le repère global.

$$\boxed{(\mathbb{M}_{0\to b})_{new} = \mathbb{M}^t(\mathbb{M}_{0\to b})_{old}} \tag{3.30}$$

3.3.9.1 Quenching

Il s'agit d'une méthode numérique qui permet de converger plus rapidement vers la solution. Pour cela, nous allons ajouter une condition supplémentaire appliquée sur la vitesse linéaire qui est la suivante :

Si $\vec{F}.\vec{V} < 0$, cela veut dire que l'on ne cherche pas la solution dans la bonne partie de l'espace des phases. On impose alors :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{0}} \tag{3.31}$$

La recherche de la solution va alors se faire dans l'autre sens. Cette opération permet d'éliminer un grand nombre de solutions non valides de l'espace des phases et donc de converger plus rapidement vers la solution. La même condition est appliquée sur la vitesse angulaire :
Si $\vec{C}.\vec{\omega} < 0$ alors :

$$\boxed{\vec{\omega}_{=}\vec{0}} \tag{3.32}$$

3.4 Détermination des lois de contact entre deux cubes par éléments finis

Dans cette section, nous présentons les résultats des simulations par éléments finis qui définissent les lois de comportement dans le cas du contact entre deux cubes. Les cubes utilisés dans la simulation par éléments finis ont une longueur L=30mm (et donc L_C=7.5mm). Les lois seront calculées pour ces dimensions exprimées en millimètres. Le module d'Young est fixé à E=1MPa. Les analyses présentées ci-après ont été conduites 6 fois pour des valeurs de coefficients de frottement respectivement de 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 et 1.

3.4.1 Repère utilisé et notations

Nous ne simulerons que les deux demi-blocs représentés en couleur sur la figure 3.10 (bleu pour le bloc 1, à qui le mouvement est appliqué et violet pour le bloc 2 qui est encastré). Le repère utilisé est également rappelé sur cette figure. Le point de contact est initialisé en $\vec{P}_0$=$\{\frac{-L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{4}\}$ qui est le centre de l'interface entre les deux blocs.

En pratique nous devons considérer les 3 composantes de la rotation d'un cube par rapport à l'autre. Or, il ne sera pas possible de superposer les contributions de ces trois composantes, car les rotations ne sont pas additives. Or, en observant des assemblages de cubes, nous avons pu constater que lors d'une indentation, les cubes tournent essentiellement autour de l'axe $\vec{R} = \phi(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Pour éviter les erreurs dues à une combinaison de rotation telle que $\vec{R} = \vec{R_x} + \vec{R_y} + \vec{R_z}$, nous avons modélisé seulement cette rotation. Par conséquent, nous considérerons cette rotation pour la suite de cette étude complétée par une rotation autour de l'axe X (axe normal à l'interface).

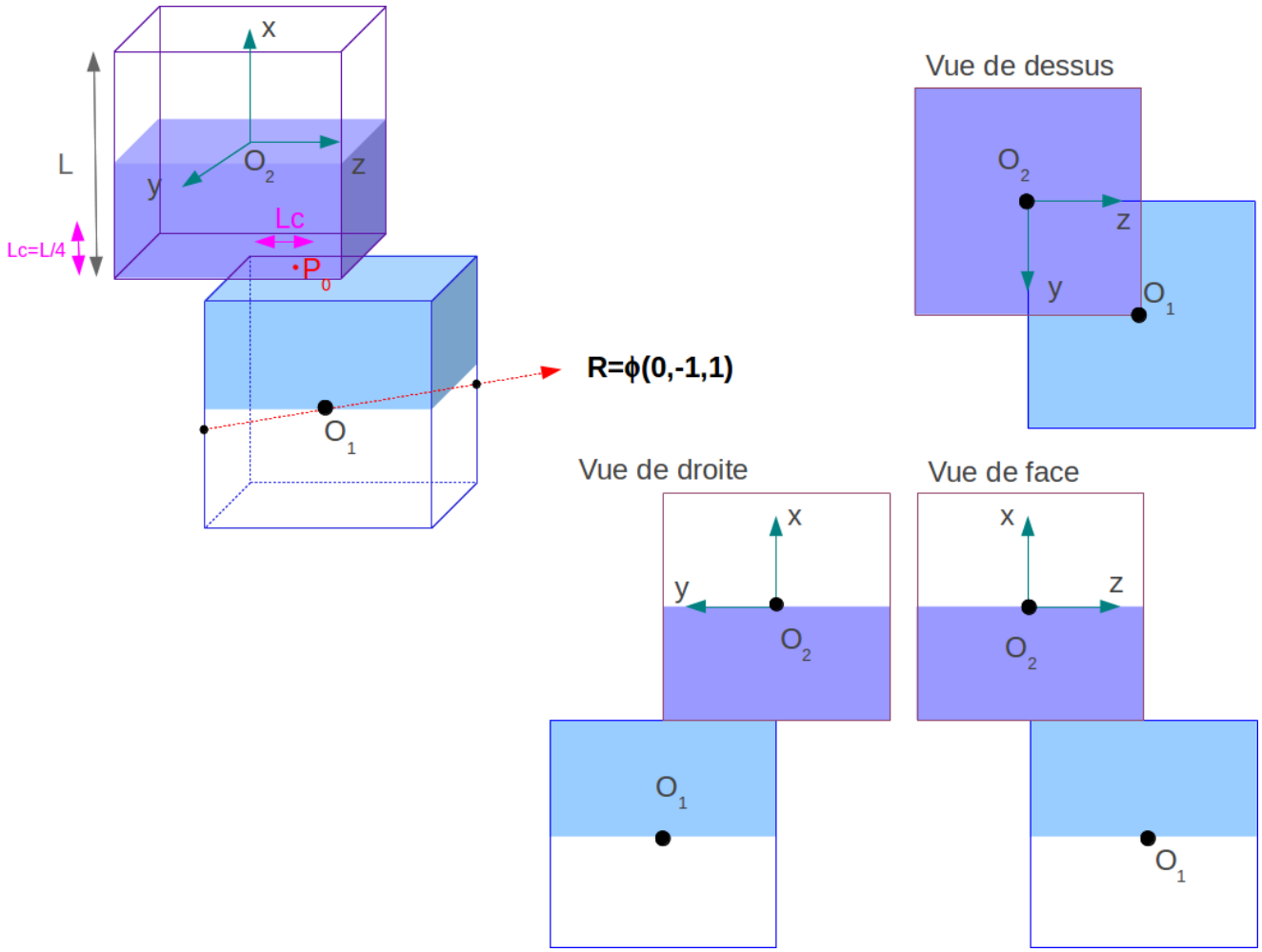


FIGURE 3.10 – Modélisation sous Abaqus du contact entre deux cubes

La géométrie cubique ainsi que la position relative de deux blocs montrent une configuration possédant de nombreuses symétries qui nous permettent de réduire le nombre de simulations à effectuer. Parmi les douze simulations envisagées, nous ne retiendrons que les simulations suivantes :

- le déplacement selon $X+$
- le déplacement selon $Y+$
- le déplacement selon $Z+$
- la rotation autour de $X+$
- la rotation autour de $\phi+$
- la rotation autour de $\phi-$

En effet, le déplacement selon $X-$ induit un décollement du contact et donc un torseur des réactions nul. Par symétrie, la réponse à un déplacement selon $Y-$ est identique à celle simulée suivant $Y+$. De même, la réponse à un déplacement selon $Z-$ est identique à celle simulée suivant $Z+$. Enfin, les rotations autour de $X-$ se déduisent des simulations réalisées autour de $X+$.

3.4.1.1 Application du chargement

Dans Abaqus, nous avons tout d'abord positionné les deux demi-cubes l'un par rapport à l'autre de la même façon que dans l'assemblage autobloquant. Le bloc 2 sera fixe alors que le bloc 1 sera en mouvement. Pour cela, nous allons associer le point situé au milieu de la face arrière du bloc 2 (noté RP_2) à cette face par un mouvement de corps rigide. Ensuite en appliquant une condition limite d'encastrement au point RP_2 associé à la surface arrière du bloc 2, nous allons encastrer toute la face arrière. Le bloc 1 est ensuite contraint en déplacement ou en rotation sur toute sa face arrière en appliquant une sollicitation au point noté RP_1 (qui est situé au centre de la face arrière du bloc 1) et en associant ce point à la surface arrière du bloc 1 par un mouvement de corps rigide.

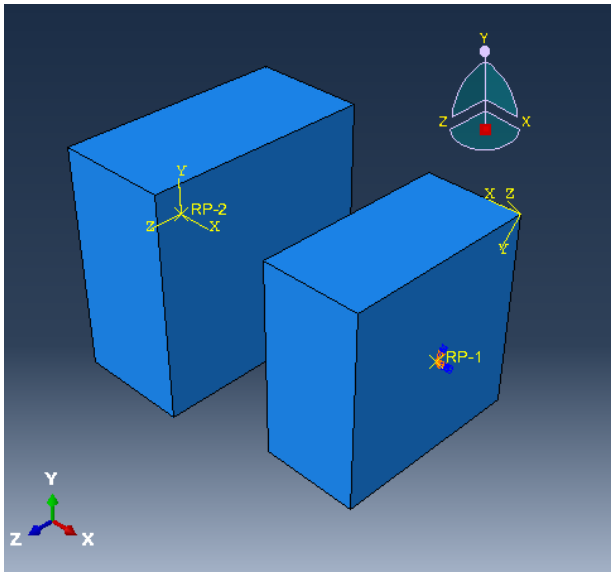


FIGURE 3.11 – Application de l'encastrement et de la sollicitation sur les blocs par éléments finis

Comme mentionné précédemment, nous ne simulerons que deux demi-cubes et pour chaque demi-cube le maillage utilisé lors des calculs apparaît sur la figure 3.12. Le maillage est régulier sur tout le demi-bloc. Les deux demi-cubes possèdent le même nombre d'éléments qui est de 8125 d'éléments cubiques linéaires.

Les détails des simulations par éléments finis sont donnés dans l'annexe B dans le cas du contact entre blocs ostéomorphes. La méthodologie utilisée pour traiter les blocs cubiques est exactement identique (mis à part le maillage présenté sur la figure 3.12).

3.4.2 Forme générale des lois de comportement

Les sollicitations appliquées lors des simulations vont se départager en deux catégories : des déplacements et des rotations. Dans les deux cas, Abaqus calculera la force résultante au contact et le déplacement du point d'application. Les lois de contact relient donc ces deux

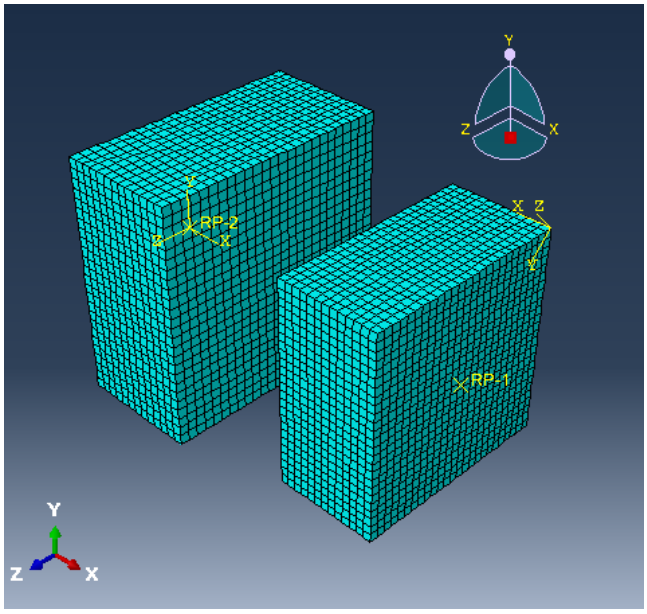


FIGURE 3.12 – Maillage utilisé pour simuler le contact entre deux cubes : chaque demi-bloc possède 8125 éléments et 9464 nœuds)

grandeurs.

Nous utiliserons les notations décrites ci-dessous (voir également dans la partie Notations au début du manuscrit pour une liste exhaustive des variables). Dans le cas d'un déplacement imposé $\vec{D}$=$\{D_x,D_y,D_z\}$, nous chercherons à identifier les neuf raideurs K^u_{ij} reliant les trois composantes F_i de la force aux 3 composante D_j du déplacement. Ainsi dans le cas d'un déplacement sur X, on obtient les composantes de force :

$$\begin{cases} \frac{F_x}{E} = K^u_{xx} * D_x \\ \frac{F_y}{E} = K^u_{yx} * D_x \quad \text{où l'indice } u \text{ devient } C \text{ pour les cubes, } P \text{ pour les surfaces} \\ \frac{F_z}{E} = K^u_{zx} * D_x \qquad\qquad \text{planes et } R \text{ pour les surfaces réglées.} \end{cases}$$

D'une façon générale, un déplacement D_i engendrera un effort F_j tel que :

$$\frac{F_j}{E} = K^u_{ij} * D_i$$

Le module d'Young étant fixé à 1MPa et les dimensions en millimètres, K est homogène à des millimètres. On notera alors :

$$K^u_{ij} = \alpha^u_{ij} * L_u$$

où α^u_{ij} un nombre sans dimension et où l'indice u devient C pour les cubes, (avec $L_C = \frac{L}{4}$), P pour les surfaces planes (avec $L_P = \frac{L-H}{2}$) et R pour les surfaces réglées (avec $L_R = \frac{L}{4}$), de sorte

que :

$$\boxed{\frac{F_j}{E} = \alpha_{ij}^u * L_u * D_i} \tag{3.33}$$

De façon similaire, le déplacement du point d'application de la force est défini tel que :

$$\boxed{\delta P_j = \gamma_{ij}^u * D_i} \qquad \text{avec } \gamma_{ij}^u \text{ un nombre sans dimension} \tag{3.34}$$

et où l'indice u devient C pour les cubes, P pour les surfaces planes et R pour les surfaces réglées.

De la même manière, une rotation $\vec{R}$ induira une force :

$$\frac{F_j}{E} = J_{ij}^u * R_i$$

avec $J_{ij}^u = \beta_{ij}^u * L_u^2$ où l'indice u devient C pour les cubes, P pour les surfaces planes et R pour les surfaces réglées et où β_{ij}^u est un nombre sans dimension ce qui donne :

$$\boxed{\frac{F_j}{E} = \beta_{ij}^u * L_u^2 * R_i} \tag{3.35}$$

Comme dans le cas des déplacements, le point d'application de l'effort dû à une rotation peut s'écrire de la façon suivante :

$$\boxed{\delta P_j = \lambda_{ij} * L * R_i} \tag{3.36}$$

En résumé, les simulations par éléments finis consistent à déterminer les fonctions α_{ij}^u, β_{ij}^u, γ_{ij} et λ_{ij} qui relient l'effort à la sollicitation et seront d'une façon générale fonction du coefficient de frottement et de l'histoire du chargement.

3.4.3 Effet du déplacement

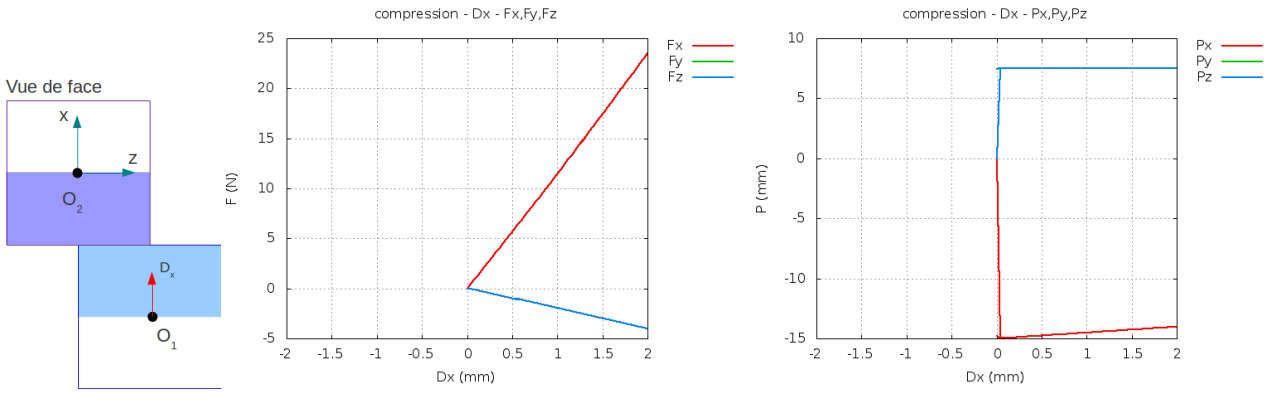
3.4.3.1 Effet d'un déplacement normal D_x

Les figures 3.13 montrent que le déplacement normal du bloc 1 par rapport au bloc 2 va engendrer un effort normal et un déplacement du point d'application tous deux portés par l'axe X et dans une moindre mesure un effort porté par l'axe Y et Z. Ceci est dû à la présence de frottement (égal à f=0.4 sur les figures 3.13). Les efforts et couples sur les autres axes sont tous nuls. Les paragraphes suivants détaillent les lois de comportement trouvées à l'issue de ce déplacement normal.

3.4.3.1.1 Déplacement normal D_x vs force normale F_x

La force normale F_x résultant du déplacement D_x appliqué peut être décrite de façon analytique grâce à la loi de Hooke :

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{S} = E\epsilon_{xx} = \frac{\delta L}{4L_C}E$$



(a) Déplacement $+D_x$ (b) Force (c) Position du point d'application

FIGURE 3.13 – Contact entre 2 cubes - Effet d'un déplacement selon X - $f = 0.4$

$$F_x = \frac{\delta L S}{4L_C} E$$

Ici, $\delta L = D_x$ et $S = 2L_C * e$ avec $e = 2L_C$, on obtient alors :

$$\boxed{\frac{F_x}{E} = D_x * L_C} \tag{3.37}$$

Ce qui donne $K^C_{xx} = 1.0 * L_C$, donc $\alpha^C_{xx} = 1.0$. Or dans le cas du modèle élément finis l'effort est donné par :

$$\boxed{\frac{F_x}{E} = ((5.0 * f/(1 + 20 * f)) + 1) * 1.3 * D_x * L_C} \tag{3.38}$$

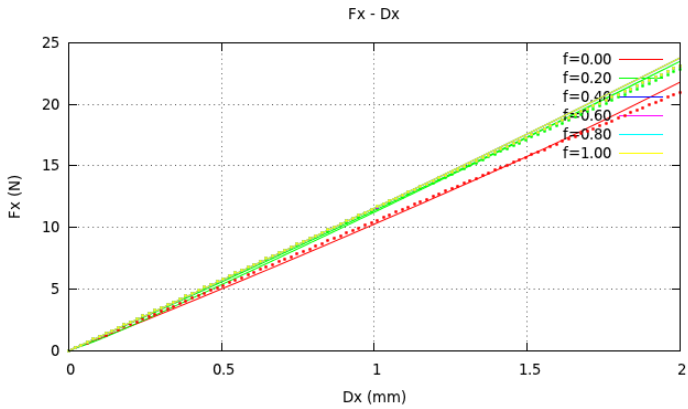
Ce qui donne $K^C_{xx} = ((5.0*f/(1+20*f))+1)*1.3*L_C$, donc $\alpha^C_{xx} = ((5.0*f/(1+20*f))+1)*1.3$ ce qui est plus rigide que la pente analytique.

Ceci est dû à l'indentation du bloc 1 dans le bloc 2 lors de la compression. L'effort à fournir est donc plus grand que dans une simple compression. Cela induit aussi une dépendance de la pente avec le coefficient de frottement. La figure 3.14a permet de comparer la formule analytique avec la réponse obtenue par les éléments finis. Nous pouvons aussi y voir la dépendance de la composante normale de l'effort en fonction du coefficient de frottement.

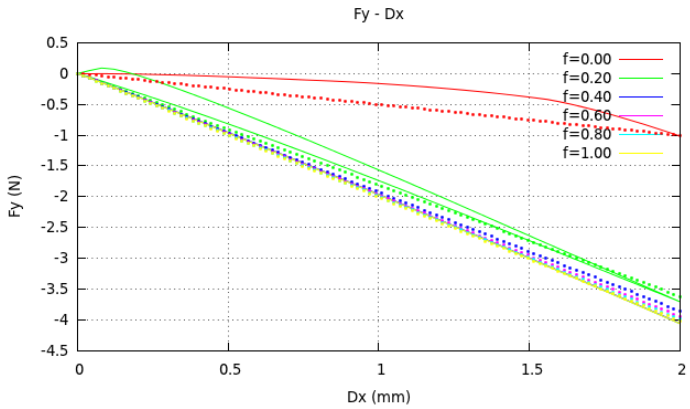
3.4.3.1.2 Déplacement normal D_x vs forces tangentielles F_y et F_z

Il existe aussi de faibles forces tangentielles selon Y et Z qui sont présentes même sans friction (voir figures 3.14b et 3.14c). Ces composantes sont dues à l'indentation du bloc 1 dans le bloc 2 qui tend à induire un effort selon Y et Z. Cela induit aussi une dépendance de la pente de ces efforts avec le coefficient de frottement. Les forces tangentielles F_y et F_z résultantes diminuent avec le déplacement D_x selon la pente suivante :

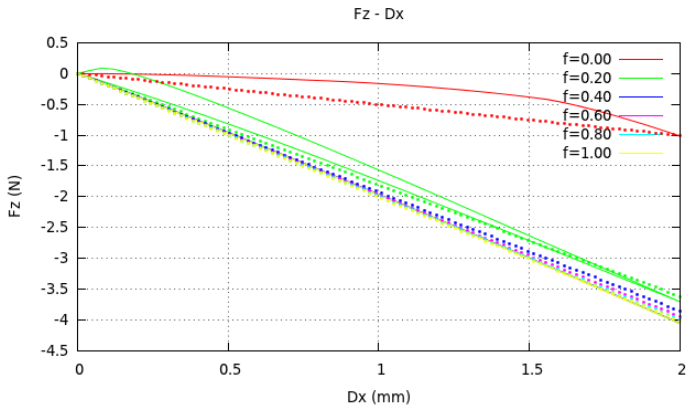
$$\boxed{\alpha^C_{xy} = \alpha^C_{xz} = ((78.0 * f/(1 + 25 * f)) + 1) * -0.067} \tag{3.39}$$



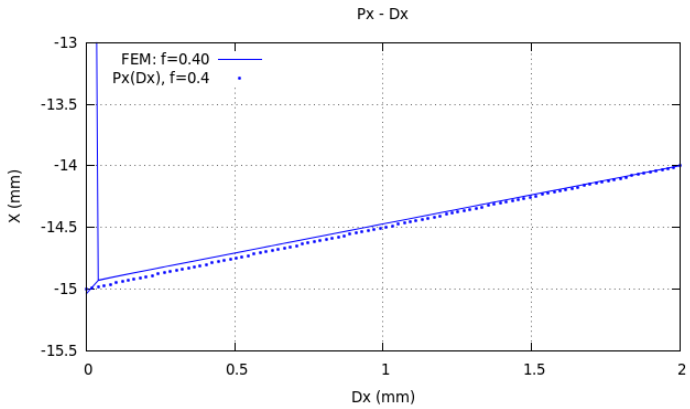
(a) Force normale



(b) Force tangentielle selon Y



(c) Force tangentielle selon Z



(d) Coordonnée X du point d'application

FIGURE 3.14 – Contact entre 2 cubes - Lois de comportement dues au déplacement selon X. Les courbes continues sont les résultats de simulations par éléments finis et les pointillés le modèle analytique proposé.

3.4.3.1.3 Déplacement normal D_x vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Le déplacement du point d'application de la force $\vec{P}$ se déplace seulement selon X (voir 3.14d) :

$$\boxed{\delta P_x = \frac{D_x}{2}} \tag{3.40}$$

Le tableau 3.1 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre deux cubes pour un déplacement D_x. Les lois que nous avons retenues apparaissent en orange et en bleu dans ce tableau. Les lois en orange sont du premier ordre et ont donc une grande importance. Les lois en bleu sont du second ordre et seront des corrections des lois du premier ordre qu'il faudra éventuellement intégrer dans notre modèle.

F_x	1er ordre
F_y	2ème ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	1er ordre
δP_y	négligeable
δP_z	négligeable

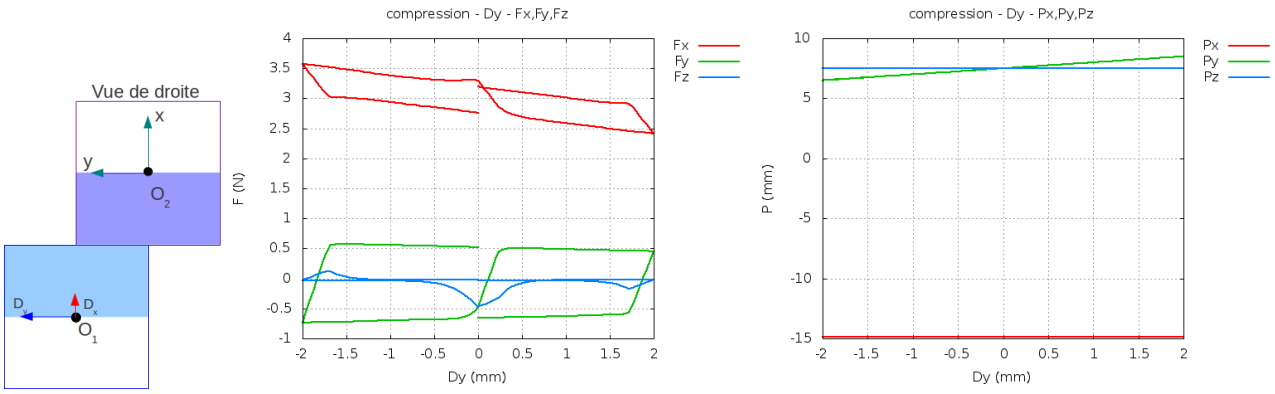
TABLE 3.1 – Récapitulatif des lois de contact entre deux cubes dans le cas d'un déplacement D_x

Dans le cas présent, seuls δP_y et δP_z sont considérés comme négligeables. F_y et F_z sont considérés comme du second ordre. F_x et δP_x sont les lois ayant le plus d'influence et sont donc considérées comme du premier ordre.

3.4.3.2 Effet d'un déplacement tangentiel D_y

Si un déplacement tangentiel du bloc 1 par rapport au bloc 2 est effectué sans avoir appliqué au préalable une force normale, alors l'effort résultant de cette sollicitation sera nul. Il est nécessaire d'appliquer d'abord une compression D_x pour observer les effets du déplacement D_y. Dans notre cas, $D_x = 0.3$ mm. Il est aussi nécessaire d'ajouter du frottement à l'interface.

Il existe donc un effort normal F_x dû à la compression en plus de l'effort dû au déplacement tangentiel. À cause de cette sollicitation composée, il est plus difficile de faire une prédiction analytique que dans le cas d'un cisaillement classique. Le résultat de cette sollicitation sera donc calculé par les éléments finis.
Les courbes de la figure 3.15b et 3.15c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'un déplacement du bloc 1 le long de Y. Au niveau des forces, on constate principalement un cisaillement suivant Y et dans une moindre mesure un effort normal selon X. En ce qui concerne le point d'application de la force, on constate



(a) Déplacement $+D_y$ (b) Force (c) Position du point d'application

FIGURE 3.15 – Contact entre 2 cubes - Effet d'un déplacement selon Y - $f = 0.2$

qu'il se déplace légèrement dans le sens de la sollicitation. Les paragraphes suivants présentent les relations retenues pour représenter ces comportements.

3.4.3.2.1 Déplacement tangentiel D_y vs force tangentielle F_y

L'effort évolue d'abord linéairement avec la raideur suivante :

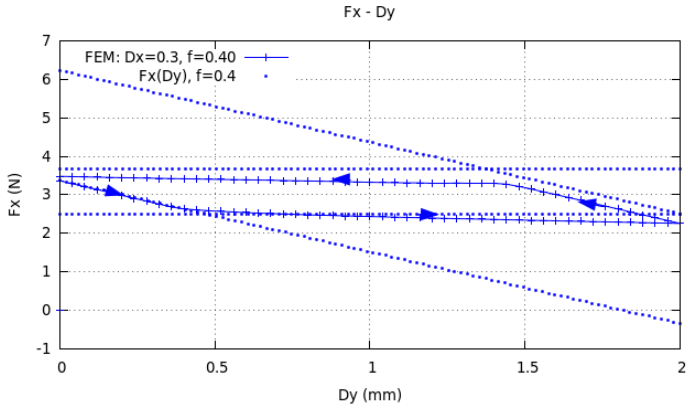
$$\boxed{K_{yy}^C = \alpha_{yy}^C * L_C \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yy}^C = 0.535} \tag{3.41}$$

Cet effort va ensuite plafonner à une valeur maximale qui peut être prédite par les lois de frottement de Coulomb. En notant le coefficient de frottement f, la valeur du plafond est égale à f.F_x (voir figure 3.16e). La figure 3.16b montre la courbe trouvée par éléments finis, avec en pointillés la prédiction obtenue par les lois de Coulomb qui se superpose bien aux éléments finis. On peut expliquer ce seuil par un phénomène de glissement. Le bloc 1 glisse par rapport au bloc 2 jusqu'à ce que le déplacement du bloc 1 change de sens. Une fois que le déplacement change de sens alors, l'effort reprend une évolution linéaire avec la raideur K_{yy}^C.

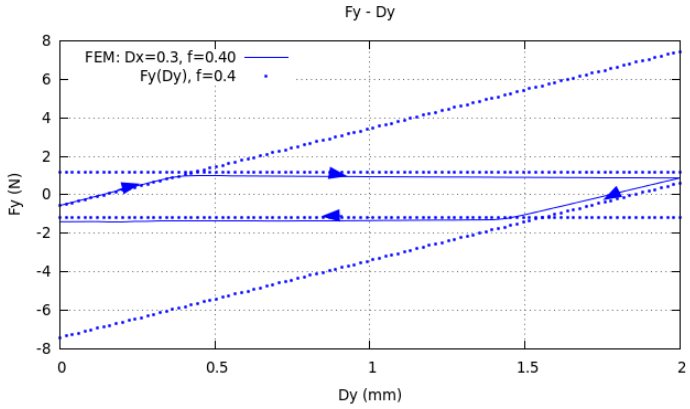
À cause de ce phénomène de glissement, la force va dépendre de l'histoire du déplacement. L'histoire de ce déplacement permettra de savoir à quel endroit de la courbe on se trouve au moment du changement de sens du déplacement. Il sera donc nécessaire de stocker cet historique dans une variable que l'on va appeler $D_{y,0}$. Cette valeur permettra de décrire l'effort après le changement de sens du déplacement. L'équation utilisée pour décrire cet effort est la suivante :

$$\boxed{\frac{F_y}{E} = K_{yy}^C(D_y - D_{y,0})} \tag{3.42}$$

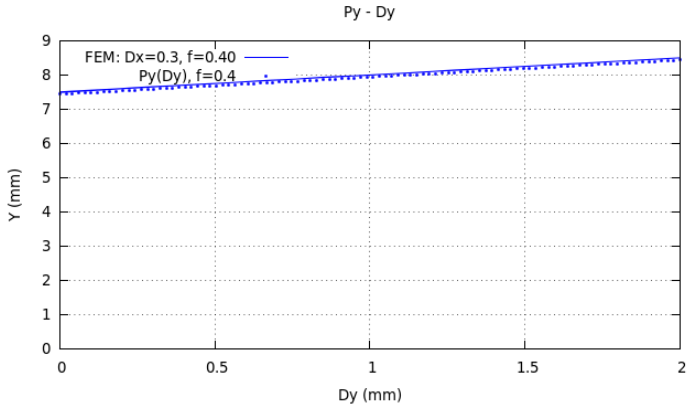
Une fois que l'effort tangentiel est déterminé à l'aide de cette formule, un test doit être réalisé pour déterminer s'il y a glissement entre les blocs :



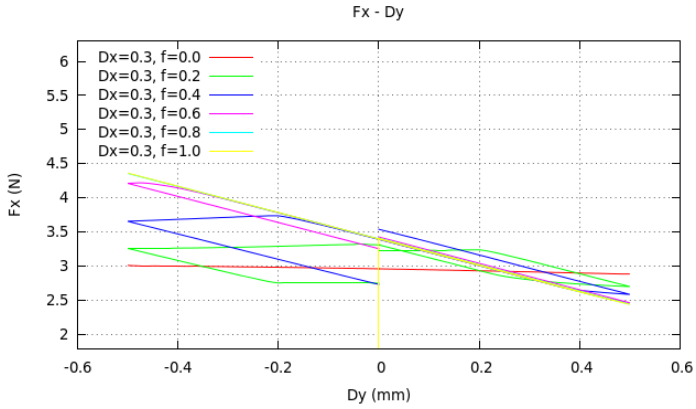
(a) Force normale - $f = 0.4$



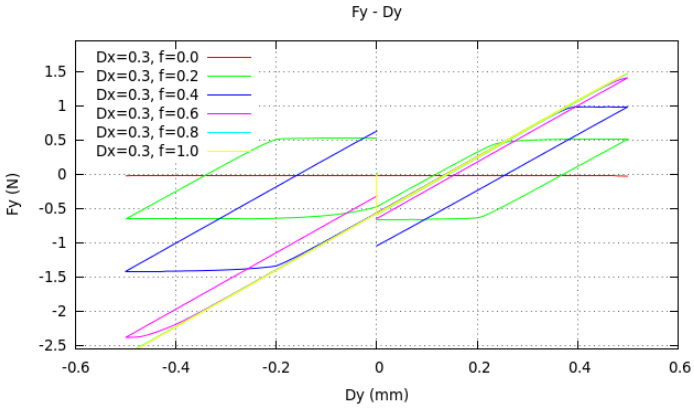
(b) Force selon Y - $f = 0.4$



(c) Coordonnée Y du point d'application - $f = 0.4$



(d) Influence du coefficient de frottement sur la force normale



(e) Influence du coefficient de frottement sur la force selon Y

FIGURE 3.16 – Contact entre 2 cubes - Lois de comportement dues au déplacement selon Y pour une précompression $D_x = 0.3mm$

Si $|F_y| > f.F_x$:

$$F_y = signe(F_y).f.F_x \tag{3.43}$$

$$D_{y,0} = D_y - \frac{F_y}{K_{yy}^C} \tag{3.44}$$

3.4.3.2.2 Déplacement tangentiel D_y vs force normale F_x

L'effort diminue d'abord linéairement avec la raideur suivante :

$$\boxed{K_{yx}^C = \alpha_{yx}^C * L_C \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yx}^C = -0.248} \tag{3.45}$$

Cet effort va ensuite saturer à une valeur maximale en même temps que la valeur de F_y. Comme dans le cas de l'effort tangentiel F_y, on peut expliquer ce seuil par un phénomène de glissement. Le bloc 1 glisse par rapport au bloc 2 jusqu'à ce que le déplacement du bloc 1 change de sens. Une fois qu'il y a glissement entre les blocs, la valeur maximale de F_x est déterminé par l'expression suivante :

Si $|F_y| > f.F_x$:

$$F_x = K_{yx}^C(D_{y,1}) \tag{3.46}$$

avec $D_{y,1}$ défini comme la valeur du déplacement où le glissement commence :

$$D_{y,1} = \frac{\alpha_{yy}^C * D_{y,0} + \frac{signe(F_y).f.F_x}{E*L_C}}{\alpha_{yy}^C}$$

Une fois que le déplacement change de sens alors, l'effort reprend une évolution linéaire avec la raideur K_{yx}^C.

À cause de ce phénomène de glissement, la force va dépendre à nouveau de l'histoire du déplacement. Comme dans le cas de la détermination de F_y, il nécessaire de stocker cet historique dans la variable $D_{y,0}$. Cette valeur permettra de décrire l'effort après le changement de sens du déplacement. L'équation utilisée pour décrire cet effort avant le glissement est la suivante :

$$\boxed{\frac{F_x}{E} = K_{yx}^C(D_y - D_{y,0})} \tag{3.47}$$

3.4.3.2.3 Déplacement tangentiel D_y vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure 3.16c affiche la position du point d'application de la force en fonction de D_y. On constate que le point d'application de la force se déplace dans le même sens que le déplacement imposé, tel que :

$$\boxed{\delta P_y = \frac{D_y}{2}} \tag{3.48}$$

Le tableau 3.2 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre deux cubes pour un déplacement D_y. Les lois que nous avons retenues apparaissent en orange dans ce tableau et sont considérées comme du premier ordre. Dans le cas présent, seules F_x, F_y et δP_y sont du premier ordre. Les autres lois ont une influence très faible et sont donc négligeables.

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	négligeable
δP_x	négligeable
δP_y	1er ordre
δP_z	négligeable

TABLE 3.2 – Récapitulatif des lois de contact entre deux cubes dans le cas d'un déplacement D_y

Les mêmes comportements sont observés lors d'un déplacement selon Z, excepté que la majorité de l'effort est porté par Z à la place de Y. Le reste de l'effort est toujours porté par X et le point d'application de la force se déplace selon Z au lieu de se déplacer selon Y.

3.4.4 Effet d'une rotation

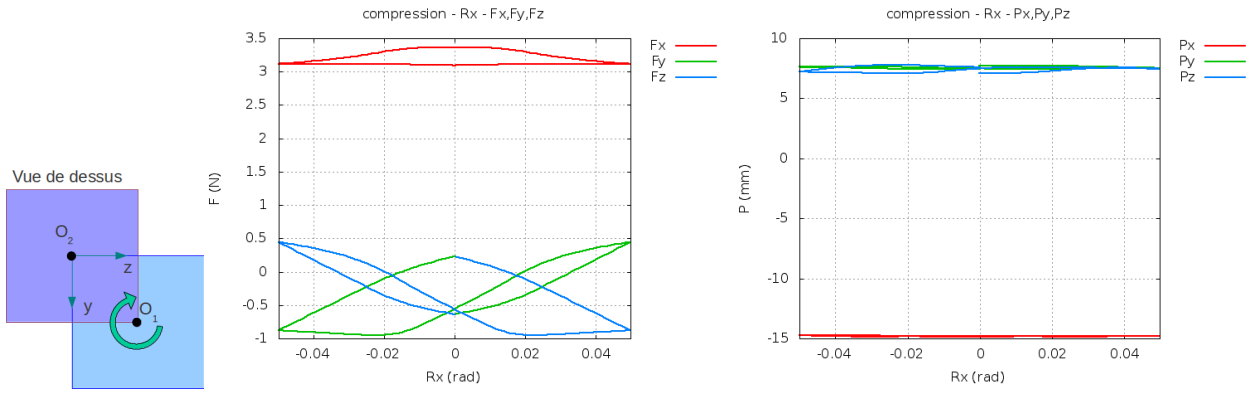
Dans cette partie, nous allons déterminer l'évolution de la force et de la position du point d'application lorsque le bloc 1 est soumis à une rotation par rapport au bloc 2.

Les expériences exposées dans le chapitre 1 sur les assemblages de cubes ont montré que ces rotations peuvent induire un effet très important sur la réponse de l'assemblage. Dans sa thèse, Yong [2011] montre que dans le cas de pavés classiques (type pavés de jardin), les rotations ont pour effet d'écarter les blocs entre eux, et donc de venir solliciter les conditions aux limites de l'assemblage. On doit retrouver ce genre de comportement dans le cas de blocs cubiques en contact.

En pratique, nous avons appliqué une rotation de 0.05 rad (2.9 deg) suivant l'axe ϕ défini tel que $\vec{R} = \phi(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ voir figure 3.10.

3.4.4.1 Effet d'une rotation R_x

Comme nous avons pu observer dans la partie sur le cisaillement D_y, si une rotation selon X du bloc 1 par rapport au bloc 2 est effectuée sans avoir appliqué au préalable une force normale, alors l'effort résultant de cette sollicitation sera nul. Il est nécessaire d'appliquer d'abord une compression D_x (ici $D_x = 0.3$ mm) ainsi que d'ajouter un coefficient de frottement pour observer les effets de la rotation R_x. Cela provient du fait que, sans frottement, les forces locales correspondent à un couple autour de l'axe X et s'annulent donc par symétrie.



(a) Rotation $+R_x$ (b) Force (c) Position du point d'application

FIGURE 3.17 – Cubes - Effet d'une rotation selon X - $f = 0.4$

La figure 3.17b montre la présence d'hystérésis au niveau des efforts pour un coefficient de $f = 0.4$. En revanche, la courbe 3.17c montre que le point d'application ne se déplace pas et reste positionné au milieu de l'interface.

3.4.4.1.1 Rotation $+R_x$ vs force normale F_z

On observe une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls. Pendant la charge, l'effort qui ne dépend pas du frottement diminue linéairement en fonction de la rotation $+R_x$ selon la raideur β^R_{xz} suivante :

$$\boxed{J^C_{xza} = \beta^C_{xza} * L^2_C \qquad \text{où} \qquad \beta^C_{xza} = -0.45403} \tag{3.49}$$

La figure 3.18c montre la courbe trouvée par éléments finis, avec en pointillés la proposition analytique. On peut expliquer ce seuil par un phénomène de glissement. Le bloc 1 glisse par rapport au bloc 2 jusqu'à ce que la rotation du bloc 1 change de sens.

La force va donc dépendre de l'histoire de la rotation qui permettra de savoir à quel endroit de la courbe on se trouve au moment du changement de sens de la rotation. Comme dans le cas d'un déplacement tangentiel, il sera donc nécessaire de stocker cet historique dans une variable que l'on va appeler $R_{x,0}$. Cette valeur permettra de décrire l'effort après le changement de sens de la rotation. L'équation utilisée pour décrire cet effort est la suivante :

$$\boxed{\frac{F_z}{E} = J^C_{xz}(R_x - Rx, 0)} \tag{3.50}$$

Une fois que l'effort tangentiel est déterminé à l'aide de cette formule, un test doit être réalisé pour déterminer s'il y a glissement entre les blocs :

Si $R_x > 0.0280256 * f$:

$$\beta^C_{xzb} = 0.00570352 \tag{3.51}$$

$$R_{x,0} = R_x - \frac{F_z}{J^C_{xz}} \tag{3.52}$$

Dans le cas d'un coefficient de frottement nul, la courbe de décharge évolue suivant ce même coefficient :

$$\boxed{\beta_{xz}^{Cd} = 0.00570352}$$

Lorsque la rotation change de sens et jusqu'à ce que $R_x > (0.042 - 0.0825 * f)$. l'effort évolue à nouveau selon le coefficient :

$$\boxed{\beta_{xza}^{Cd} = -0.45403}$$

Ensuite, l'effort évolue à nouveau plus lentement selon le coefficient :

$$\boxed{\beta_{xzb}^{Cd} = 0.00570352}$$

3.4.4.1.2 Rotation $+R_x$ vs force tangentielle F_y

On observe une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls. Comme dans le cas de l'autre composante tangentielle, la courbe peut se décomposer en quatre droites. Les deux premières simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge.
Nous utiliserons les mêmes équations que dans le paragraphe précédent :

Pendant la charge, l'effort augmente en fonction de la rotation $+R_x$. Les coefficients des pentes sont les mêmes que ceux observés pour la composante selon Z Pour la première partie de la charge, nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\beta_{xya}^{C} = -\beta_{xza}^{C} = 0.45403}$$

Ensuite à partir d'un certain angle défini tel que : $R_x > 0.02 + 0.03 * f$, l'effort évolue plus lentement avec le coefficient suivant :

$$\boxed{\beta_{xyb}^{C} = \beta_{xzb}^{C} = 0.00570352}$$

Ce coefficient est aussi valide pour une décharge dans le cas d'un frottement nul.

Quand on change le sens de la rotation et jusqu'à ce que $R_x > (0.025 - 0.05 * f)$, l'effort évolue à nouveau avec le coefficient :

$$\boxed{\beta_{xya}^{Cd} = -\beta_{xza}^{Cd} = 0.45403}$$

Ensuite, l'effort évolue à nouveau plus lentement selon le coefficient suivant :

$$\boxed{\beta_{xyb}^{Cd} = \beta_{xzb}^{Cd} = 0.00570352}$$

3.4.4.1.3 Rotation $+R_x$ vs force normale F_x

On observe une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls qui se divise en trois parties. Les deux premières simulant la phase de charge et la dernière simulant la décharge.

La première partie modélise le début de la charge et évolue linéairement et indépendamment du frottement en fonction de la rotation $+R_x$ avec le coefficient β_{xx}^{C} suivant :

$$\boxed{\beta_{xxa}^{C} = -0.0070352}$$

Dans le cas d'un coefficient de frottement nul, la courbe de décharge suit la même équation.

Mais lorsque le coefficient de frottement est non nul, l'effort évolue ensuite de la façon suivante pendant la charge :

Si $R_x > (0.03 * f)$, alors :

$$\boxed{\beta^{C}_{xxb} = -0.1253}$$

Comme dans le cas d'un déplacement tangentiel, nous utiliserons une variable $R_{x,0}$ pour stocker l'historique du chargement. Pendant la décharge, l'effort évolue à nouveau très faiblement :

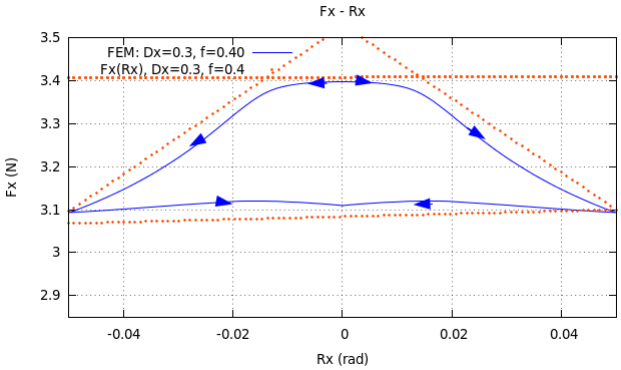
$$\boxed{\beta^{Cd}_{xxa} = 0.000570352}$$

Pour une rotation R_x dans l'autre sens, nous pouvons utiliser les lois que nous venons de présenter car on peut observer des symétries pour F_x. Dans le cas des efforts tangentiels, on observe une symétrie entre F_y et F_z.

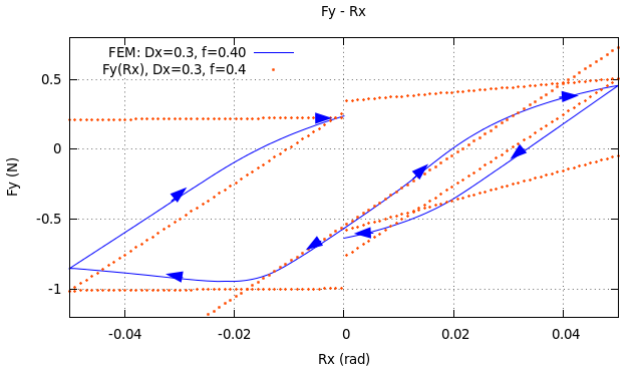
Comme indiqué sur le tableau 3.3, toutes les lois concernant le point d'application de l'effort ont une influence très faible et sont considérées comme négligeables alors que toutes les lois concernant les efforts ont une forte influence et sont considérées comme du premier ordre. Elles apparaissent en orange dans le tableau.

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	1er ordre
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	négligeable

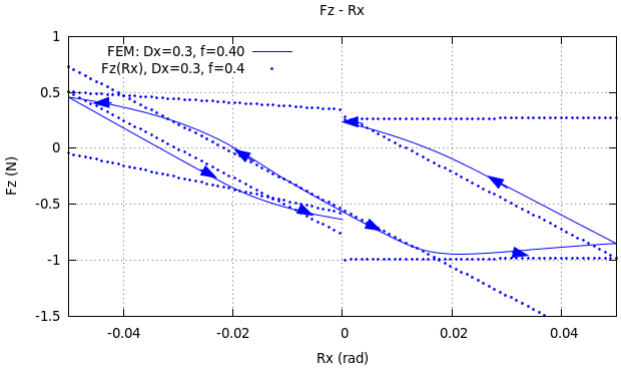
TABLE 3.3 – Récapitulatif des lois de contact entre deux cubes dans le cas d'une rotation R_x



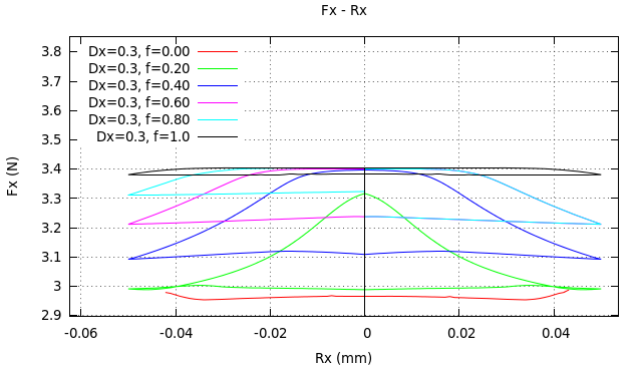
(a) Force selon X - $f = 0.4$



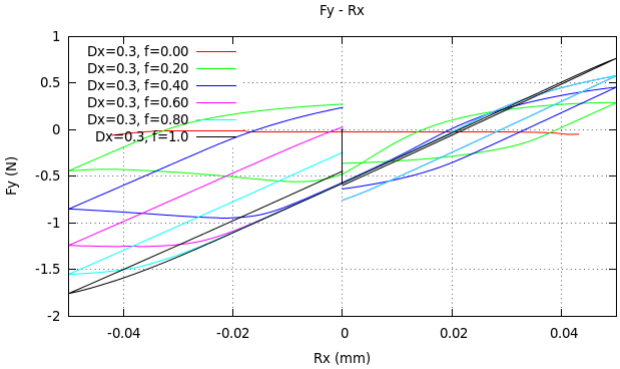
(b) Force selon Y - $f = 0.4$



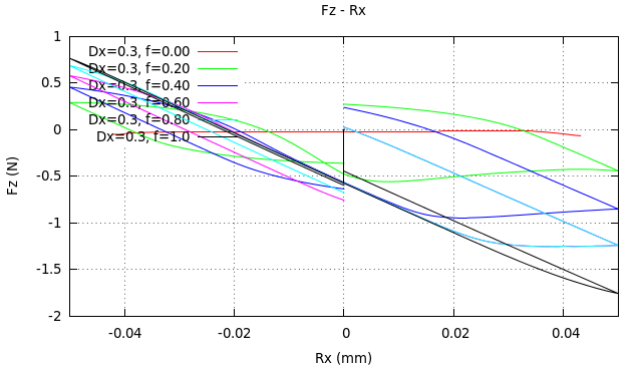
(c) Force selon Z - $f = 0.4$



(d) Influence du coefficient de frottement sur la force selon X



(e) Influence du coefficient de frottement sur la force selon Y

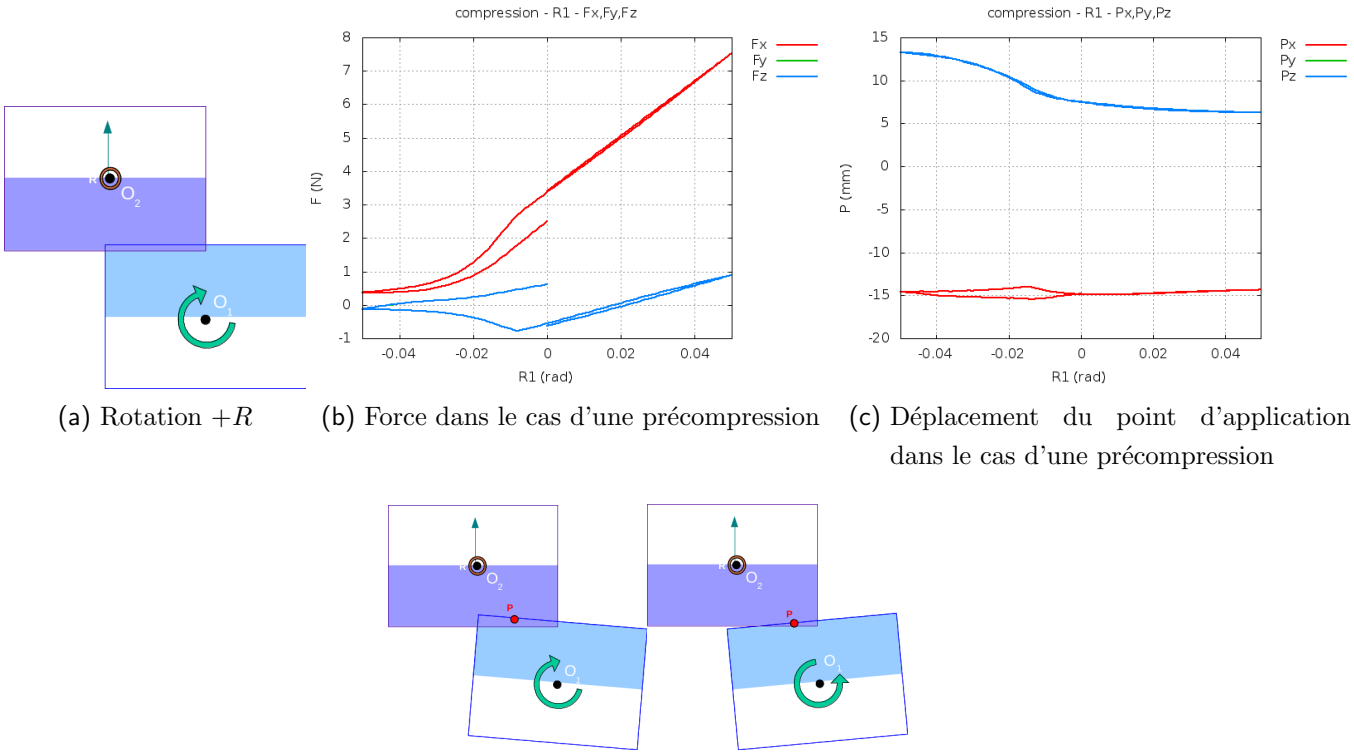


(f) Influence du coefficient de frottement sur la force selon Z

FIGURE 3.18 – Contact entre 2 cubes - Effet d'une rotation R_x sur l'effort $\vec{F}$

3.4.4.2 Effet d'une rotation R autour de ϕ : cas d'une précompression

Les courbes de la figure 3.19 montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'une rotation du bloc 1 autour de ϕ dans le cas d'une précompression initiale. Ici, le coefficient de frottement est égal à 0.4. La dépendance des efforts et du déplacement du point d'application de la force en fonction du coefficient de frottement est très faible et on n'observe pas d'hystérésis, les équations sont donc les mêmes lors de la décharge. Au niveau des forces, on constate principalement une compression suivant X et dans une moindre mesure un cisaillement qui est le même selon Y et Z. En ce qui concerne le point d'application de la force, on constate qu'il se déplace très rapidement suivant Y et Z pour atteindre le coin du cube 1 qui indente le cube 2 et ensuite il évolue très peu. Les paragraphes suivants présentent les formules retenues pour représenter ces comportements.



(a) Rotation $+R$ (b) Force dans le cas d'une précompression (c) Déplacement du point d'application dans le cas d'une précompression

(d) Déplacement du point d'application - $+R$ (e) Déplacement du point d'application - $-R$

FIGURE 3.19 – Contact entre 2 cubes - Effet d'une rotation R autour de ϕ - $f = 0.4$

3.4.4.2.1 Rotation R autour de ϕ vs force normale F_x

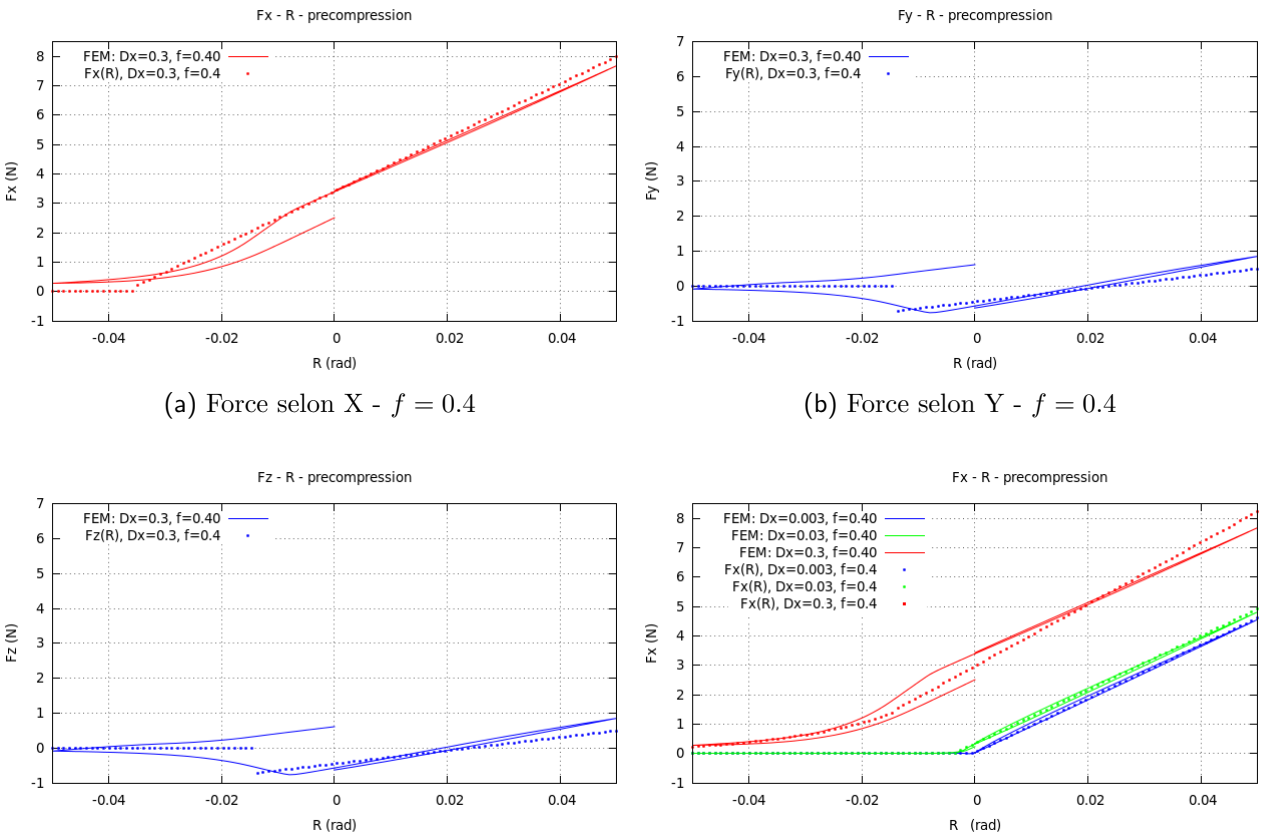
Dans le cas d'une compression initiale, l'effort est nul lors d'une rotation négative jusqu'à un angle θ_m. Puis, à partir de cet angle, l'effort évolue linéairement avec la raideur β_x^C définie telle que :

Si $R > -acos(2 * L_C/(2 * L_C - D_x))$:

$$\beta_x^C = ((-2.50 * f/(1 + 10.5 * f)) + 1) * 1.32 * \sqrt{2} \tag{3.53}$$

On observe aussi de faibles composantes tangentielles selon Y et Z de l'effort qui monte une petite dépendance avec coefficient de frottement 3.21 :

$$\beta_y^C = \beta_z^C = ((90 * f/(1 + 10.5 * f)) + 1) * 0.066 \tag{3.54}$$



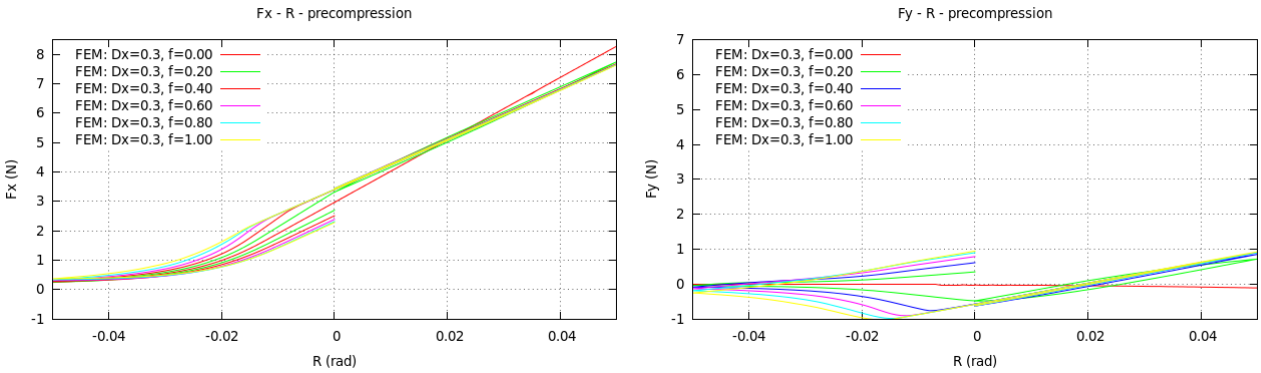
(a) Force selon X - $f = 0.4$

(b) Force selon Y - $f = 0.4$

(c) Force selon Z - $f = 0.4$

(d) Effet de la précompression sur l'effort selon X - $f = 0.4$

FIGURE 3.20 – Contact entre 2 cubes - Effet d'une rotation R autour de ϕ sur l'effort $\vec{F}$ dans le cas d'une précompression



(a) Influence du coefficient de frottement sur l'effort selon X

(b) Influence du coefficient de frottement sur l'effort selon Y (et selon Z)

FIGURE 3.21 – Contact entre 2 cubes - Effet d'une rotation R sur l'effort $\vec{F}$ - Evolution en fonction du coefficient de frottement

3.4.4.2.2 Rotation R vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Les figures 3.22a et 3.22b affichent la position du point d'application de la force au cours de la rotation R.

On observe un déplacement du point d'application de la force principalement sur les axes Y et Z. Le point d'application de la force varie aussi linéairement de façon moindre selon X autour du centre de l'interface.

Si $R > -acos(2 * L_C/(2 * L_C - D_x))$:

$$\delta P_x^C = 0.512 * L_C * \theta \tag{3.55}$$

3.4.4.2.3 Déplacement du point d'application de la force selon Y δP_y et selon Z δP_y

Dans le cas d'une rotation positive, le point se déplace légèrement vers le coin du cube 1 qui indente le cube 2. Alors que dans le cas d'une rotation négative, le point se déplace très rapidement dans l'autre sens. Et plus le décollement est faible et plus le point se déplace rapidement vers le centre du bloc 1 puis il varie très peu autour de cette position.

Après avoir appliqué une précompression et pour une rotation comprise entre -0.05 rad et 0.05 rad l'évolution du point d'application est continue et suit donc la même équation selon Y et Z :

Si $R > -acos(2 * L_C/(2 * L_C - D_x))$:

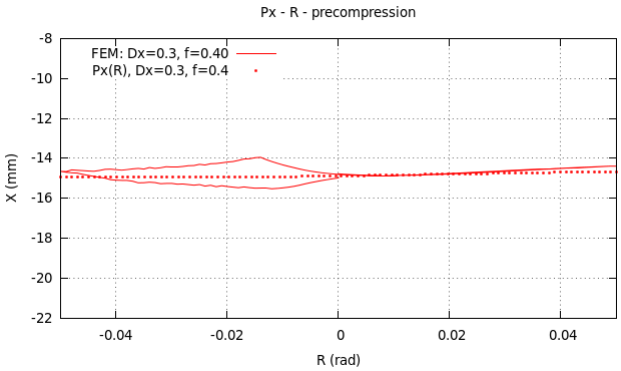
$$\delta P_y^C = \delta P_z^C = (2.7 * atan((-20/(0.0025 + 6.0 * \frac{D_x}{L_C})) * \theta - 1.5500) + 2.6) * \frac{L_C}{7.5} \tag{3.56}$$

Le tableau 3.4 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre deux cubes pour une rotation R. Les lois que nous avons retenues y apparaissent en orange lorsqu'elles sont du premier ordre et en bleu lorsqu'elles sont du second ordre. F_x, δP_x, δP_y et δP_z sont les lois ayant le plus d'influence et sont donc considérées comme du premier ordre.

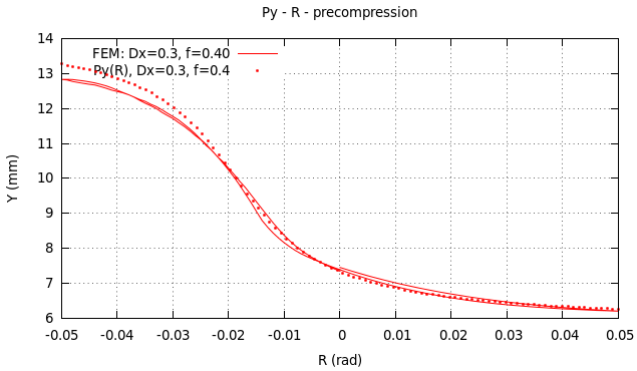
Dans le cas présent, F_y et F_z sont considérés comme du second ordre et seront des corrections des lois du premier ordre qu'il faudra éventuellement intégrer dans notre modèle.

F_x	1er ordre
F_y	2ème ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	1er ordre
δP_y	1er ordre
δP_z	1er ordre

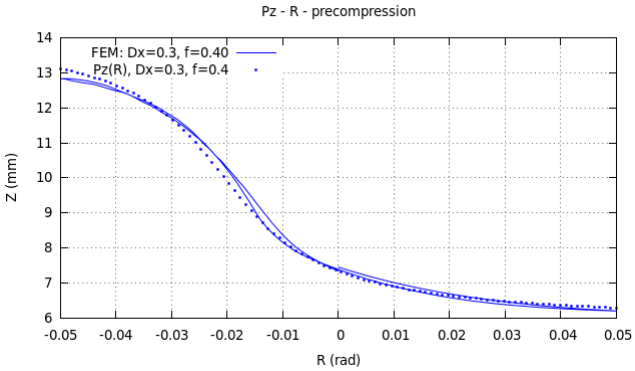
TABLE 3.4 – Récapitulatif des lois de contact entre deux cubes dans le cas d'une rotation R autour de ϕ après une précompression



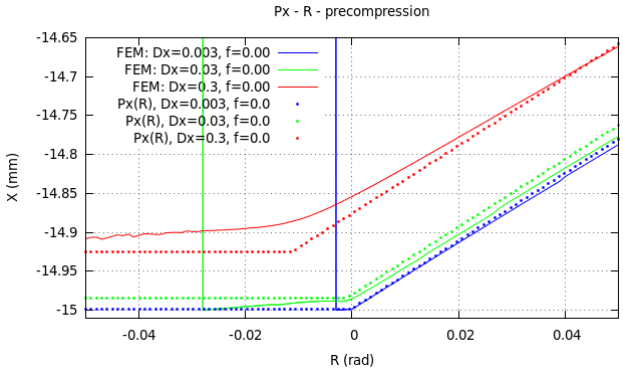
(a) Déplacement du point d'application selon X dans le cas d'une précompression



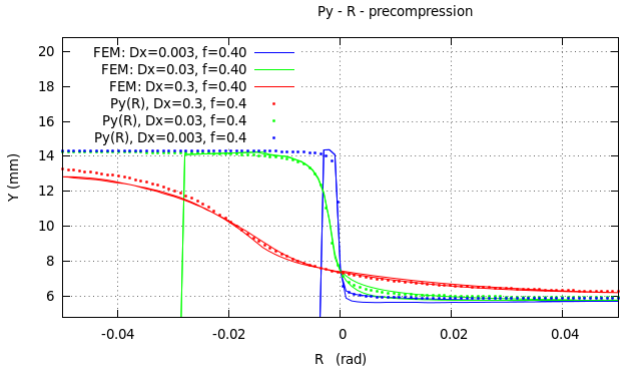
(b) Déplacement du point d'application selon Y dans le cas d'une précompression



(c) Déplacement du point d'application selon Z dans le cas d'une précompression



(d) Effet d'une précompression sur le déplacement du point d'application selon X

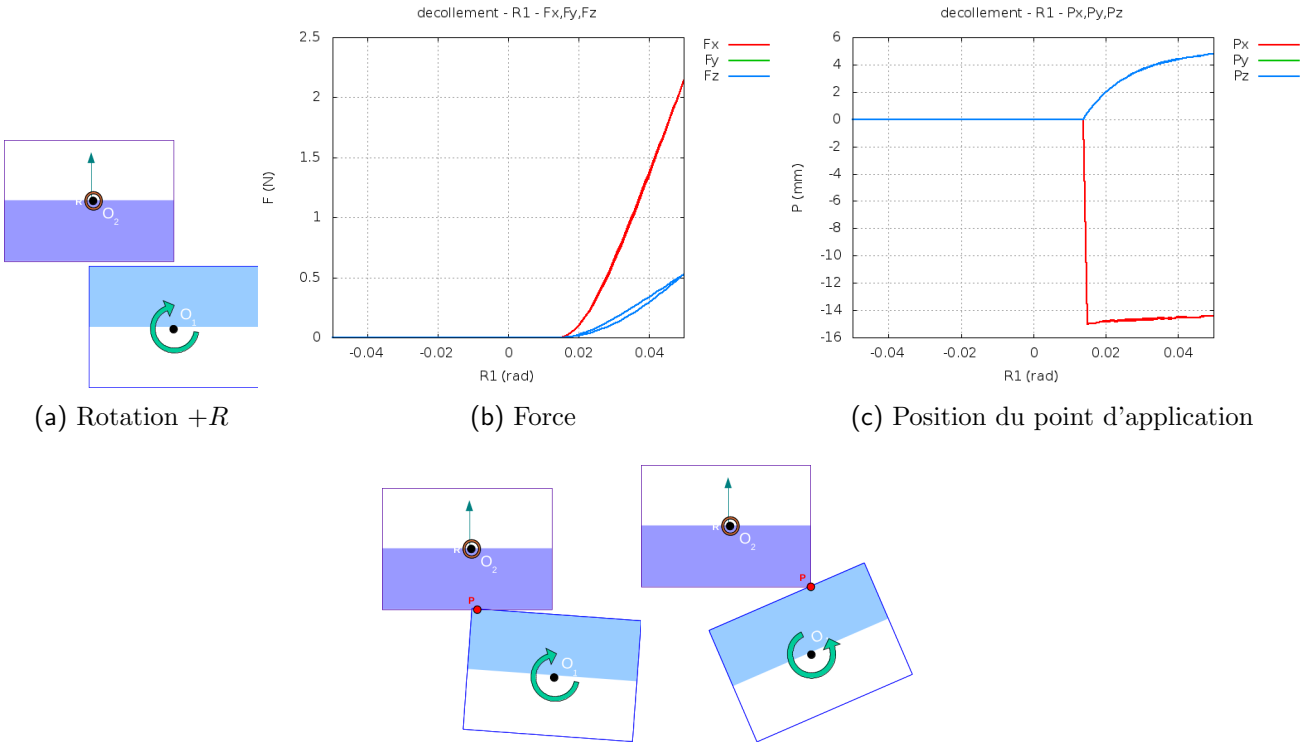


(e) Effet d'une précompression sur le déplacement du point d'application selon Y

FIGURE 3.22 – Contact entre 2 cubes - Effet d'une rotation R sur le déplacement du point d'application $\delta\vec{P}$ - $f = 0.4$

3.4.4.3 Effet d'une rotation R autour de ϕ : cas d'un décollement

Les courbes de la figure 3.23 montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'une rotation du bloc 1 autour de ϕ dans le cas d'un décollement initial. Dans le cas présent, le coefficient de frottement est égal à 0.4. La dépendance en fonction du coefficient de frottement est très faible, on n'observe alors aucune hystérésis, ni d'effort tangentiel. Les équations seront donc les mêmes lors de la décharge. Concernant les forces, il existe principalement une compression suivant X et aucun effort tangentiel. Au niveau du point d'application de la force, on constate qu'il se déplace très rapidement suivant Y et Z pour atteindre le coin du bloc 1 qui indente le cube 2 et ensuite il évolue très peu. Les paragraphes suivants présentent les formules analytiques retenues pour représenter ces comportements.



(a) Rotation $+R$ (b) Force (c) Position du point d'application

(d) Déplacement du point d'application - $+R$ (e) Déplacement du point d'application - $-R$

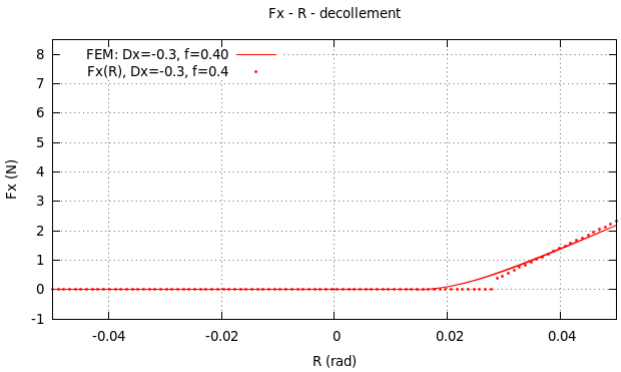
FIGURE 3.23 – Contact entre 2 cubes - Effet d'une rotation R autour de ϕ - $f = 0.4$

3.4.4.3.1 Rotation R autour de ϕ vs force normale F_x

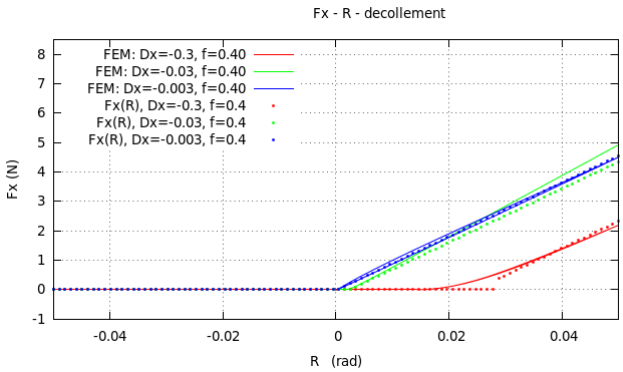
Dans le cas d'une compression initiale, l'effort est nul lors d'une rotation négative jusqu'à un angle θ_m. Après cet angle, l'effort évolue linéairement avec la raideur β_x^{Cup} définie telle que :

Si $R > (atan(\sqrt{2}) - acos((2 * L_C - D_x)/(2 * L_C * \sqrt{3}))) \text{ et } D_x >= (-2 * L_C * (\sqrt{3} - 1))$:

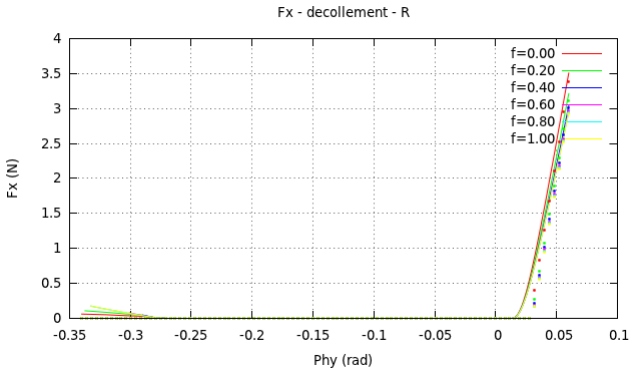
$$\beta_x^{Cup} = (-(8.0 * f/(20 + 90 * f)) + 1) * 1.32 * \sqrt{2} \tag{3.57}$$



(a) Force selon X - $f = 0.4$



(b) Effet du décollement sur l'effort selon X - $f = 0.4$



(c) Influence du coefficient de frottement sur la force selon X

FIGURE 3.24 – Contact entre 2 cubes - Effet d'une rotation R autour de ϕ sur l'effort normal $\vec{F}$ dans le cas d'un décollement

3.4.4.3.2 Rotation R autour de ϕ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Les figures 3.25 affichent la position du point d'application de la force au cours de la rotation R autour de ϕ.

On observe un déplacement du point d'application de la force principalement sur l'axe Y et Z. Le point d'application de la force varie aussi linéairement de façon moindre selon X autour du centre de l'interface, dans le cas d'une rotation dans le sens positif.

Si $R > (atan(\sqrt{2}) - acos((2 * L_C - D_x)/(2 * L_C * \sqrt{3}))) \text{ et } D_x >= (-2 * L_C * (\sqrt{3} - 1))$:

$$\delta P_x^{Cup} = 0.512 * L_C * \theta \tag{3.58}$$

Dans le cas d'une rotation négative, le point ne se déplace pas par rapport à la position du recollement.

3.4.4.3.3 Déplacement du point d'application de la force selon Y δP_y et Z δP_z

Dans le cas d'une rotation positive, le point se déplace légèrement selon Y et Z vers le coin du cube 1 qui indente le cube 2. Et plus le décollement est faible et plus le point se déplace rapidement vers le bord du bloc 1 puis il varie très peu autour de cette position (voir fig 3.25e) :

Si $R > (atan(\sqrt{2}) - acos((2 * L_C - D_x)/(2 * L_C * \sqrt{3}))) \text{ et } D_x >= (-2 * L_C * (\sqrt{3} - 1))$:

$$\delta P_y^{Cup} = \delta P_z^{Cup} = (3.0 * atan((-25/(-0.0025 + 6.0 * \frac{D_x}{L_C})) * \theta - 1.550) - 6.5) * \frac{L_C}{7.5} \tag{3.59}$$

Alors que dans le cas d'une rotation négative, le point se déplace très rapidement dans l'autre sens. Le point saute directement sur le bord du bloc et y reste. Il n'évolue donc pas en fonction de la rotation.

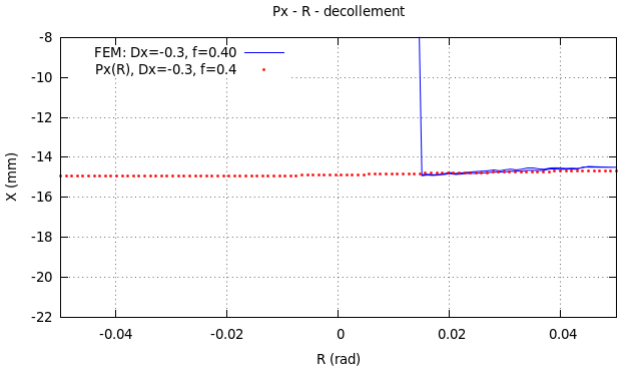
Si $R > (-acos(2 * L/(2 * L_C - D_x))) \text{ et } D_x >= (-2 * L_C * (\sqrt{3} - 1))$:

$$\delta P_y^{Cum} = \delta P_z^{Cum} = L_C \tag{3.60}$$

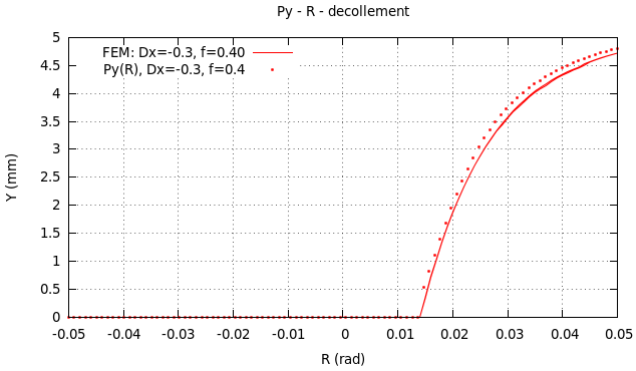
Le tableau 3.5 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre deux cubes pour une rotation $+R$ autour de ϕ dans le cas d'un décollement. Les lois que nous avons retenues y apparaissent en orange et sont considérées du premier ordre. F_x, δP_x, δP_y et δP_z sont des lois du premier ordre car elles sont les plus importantes. Les autres lois, F_y et F_z sont considérés comme négligeables.

Le tableau 3.6 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre deux cubes pour une rotation $-R$ dans le cas d'un décollement.

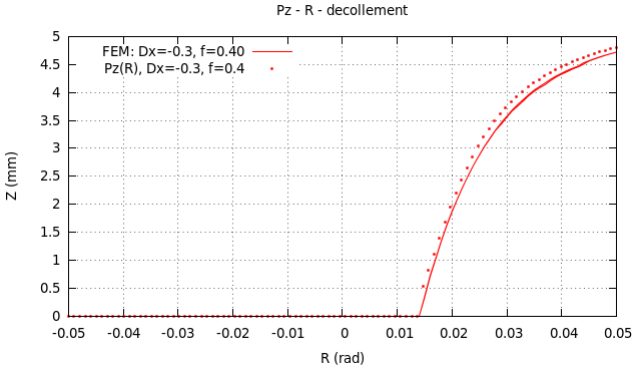
Comme on peut le constater d'après ce tableau, dans le cas d'une rotation négative, toutes les lois sont considérées comme négligeables.



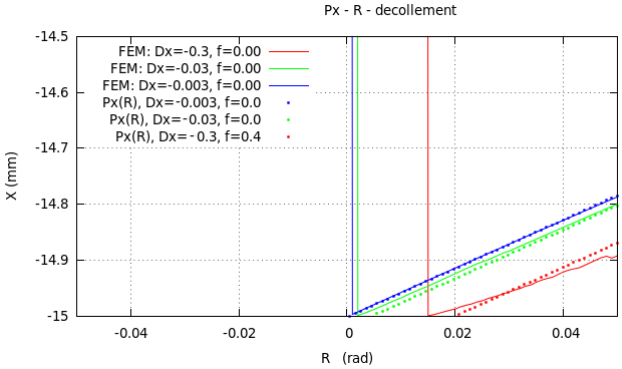
(a) Déplacement du point d'application selon X



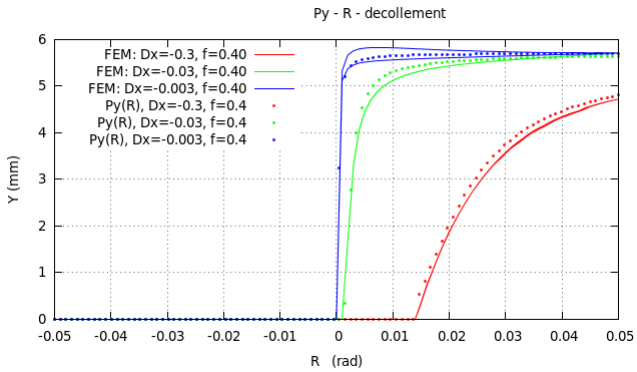
(b) Déplacement du point d'application selon Y



(c) Déplacement du point d'application selon Z



(d) Effet du décollement sur le déplacement du point d'application selon X



(e) Effet du décollement sur le déplacement du point d'application selon Y

FIGURE 3.25 – Contact entre 2 cubes - Effet d'une rotation R autour de ϕ sur le déplacement d'application $\delta\vec{P}$ - $f = 0.4$

F_x	1er ordre
F_y	négligeable
F_z	négligeable
δP_x	1er ordre
δP_y	1er ordre
δP_z	1er ordre

TABLE 3.5 – Récapitulatif des lois de contact entre deux cubes dans le cas d'une rotation $+R$ autour de ϕ après un décollement

F_x	négligeable
F_y	négligeable
F_z	négligeable
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	négligeable

TABLE 3.6 – Récapitulatif des lois de contact entre deux cubes dans le cas d'une rotation $-R$ autour de ϕ après un décollement

3.4.5 Synthèse des lois de contact entre deux cubes

Dans cette section, des calculs par éléments finis ont été réalisés pour identifier chacune des lois de contact entre deux cubes et pour différentes valeurs du coefficient de frottement. L'ensemble des lois de contact se résume à un tableau donnant à chaque fois la force et son point d'application dans le cas d'un déplacement ou une rotation relative entre les deux blocs.

Le tableau 3.7 collecte les valeurs des coefficients α et β tels que définis dans les équations 3.33 et 3.35 mesurés dans le cas de contact entre deux cubes.

Parmi les lois à retenir pour les simulations discrètes, nous distinguons les effets au premier ordre qui devront être absolument pris en compte (en orange dans le tableau 3.7) et les termes correctifs (en bleu) qu'il faudra éventuellement ajouter pour améliorer le comportement. Enfin, les lois de comportement qui peuvent être négligées apparaissent dans les cases blanches. On constate d'une part que le nombre de ces coefficients est limité et d'autre part que les termes correctifs se limitent à l'effet des rotations sur le déplacement du point d'application.

	D_x	D_y	D_z
F_x	$\alpha^C_{xx} = 1.3$	$\alpha^C_{yx} = -0.248$	$\alpha^C_{zx} = -0.248$
F_y	$\alpha^C_{xy}((78.0 * f/(1 + 25 * f)) + 1) * -0.067$	$\alpha^C_{yy} = 0.535$	0
F_z	$\alpha^C_{xz}((78.0 * f/(1 + 25 * f)) + 1) * -0.067$	0	$\alpha^C_{zz} = 0.535$
δP_x	$D_x/2$	0	0
δP_y	0	$D_y/2$	0
δP_z	0	0	$D_z/2$

	R_x	$\pm R_{precompression}$	$R_{decollement}$	$-R_{decollement}$
F_x	$\beta^C_{xxa} = -0.0070352$ $\beta^C_{xxb} = -0.1253$ $\beta^{Cd}_{xxa} = 0.000570352$	$\beta^C_x = ((-2.50 * f/(1 + 10.5 * f)) + 1) * 1.32 * \sqrt{2}$	$\beta^{Cd}_x = (-(8.0*f/(20+90*f))+1)*1.32*\sqrt{2}$	$\beta^{Cd}_x = (-(8.0*f/(20+90*f))+1)*1.32*\sqrt{2}$
F_y	$\beta^C_{xya} = 0.45403$ $\beta^C_{xyb} = 0.00570352$ $\beta^{Cd}_{xya} = 0.45403$ $\beta^{Cd}_{xyb} = 0.00570352$	$\beta^C_y = ((90 * f/(1 + 10.5 * f)) + 1) * 0.066$	0	0
F_z	$\beta^C_{xza} = -0.45403$ $\beta^C_{xzb} = 0.00570352$ $\beta^{Cd}_{xza} = -0.45403$ $\beta^{Cd}_{xzb} = 0.00570352$ $\beta^{Cd}_{xzb} = -0.45403$	$\beta^C_z = ((90 * f/(1 + 10.5 * f)) + 1) * 0.066$	0	0
δP_x	0	$0.512 * L_C * \theta$	$0.512 * L_C * \theta$	$0.512 * L_C * \theta$
δP_y	0	$(2.7 * atan((-20/(0.0025 + 6.0 * \frac{D_x}{L_C})) * \theta - 1.5500) + 2.6) * \frac{L_C}{7.5}$	$(3.0 * atan((-25/(-0.0025 + 6.0 * \frac{D_x}{L_C})) * \theta - 1.550) - 6.5) * \frac{L_C}{7.5}$	L_C
δP_z	0	$(2.7 * atan((-20/(0.0025 + 6.0 * \frac{D_x}{L_C})) * \theta - 1.5500) + 2.6) * \frac{L_C}{7.5}$	$(3.0 * atan((-25/(-0.0025 + 6.0 * \frac{D_x}{L_C})) * \theta - 1.550) - 6.5) * \frac{L_C}{7.5}$	L_C

TABLE 3.7 – Récapitulatif des coefficients α et β pour un contact entre deux cubes

3.5 Détermination des lois de contact entre deux blocs ostéomorphes

De la même façon que dans le cas des cubes, nous avons déterminé les lois de comportement liant les efforts et les couples exercés par un bloc sur un de ses voisins en fonction de leurs positions relatives (translations et rotations). Nous présenterons d'abord la configuration des blocs, le repère ainsi que les notations utilisées dans le cas d'un contact entre surfaces planes et d'un contact entre surfaces réglées. Le travail étant quelque peu répétitif, nous n'exposerons dans le corps du texte que certaines lois illustrant la démarche propre aux ostéomorphes. Les détails de ces lois de comportement est présenté dans les annexes C et D. Nous conclurons par une synthèse des lois de comportement obtenues.

3.5.1 Cas des surfaces planes de blocs ostéomorphes

Dans le cas des surfaces planes, nous suivrons la même procédure que dans le cas des cubes et nous ne simulerons que les deux demi-blocs représentés en couleur sur la figure 3.26 (bleu pour le bloc 1, à qui le mouvement est appliqué et vert pour le bloc 2 qui est encastré). Nous pouvons voir sur la figure 3.27 la configuration modélisée sous Abaqus ainsi que le repère utilisé. Le point de contact est initialisé en $\vec{P_0}=\{-\frac{L}{2}, 0, 0\}$.

Comme dans le cas des cubes, la configuration utilisée permet d'utiliser les nombreuses symétries existantes pour nous permettre de réduire le nombre de simulations à effectuer. Parmi les douze simulations envisagées, nous ne retiendrons que les simulations suivantes :

– le déplacement selon $X+$

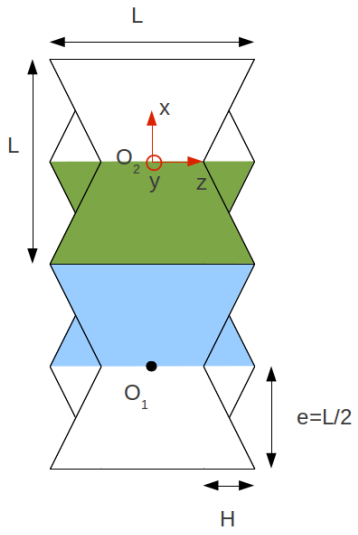


FIGURE 3.26 – Définition de la géométrie étudiée pour le contact entre surfaces planes

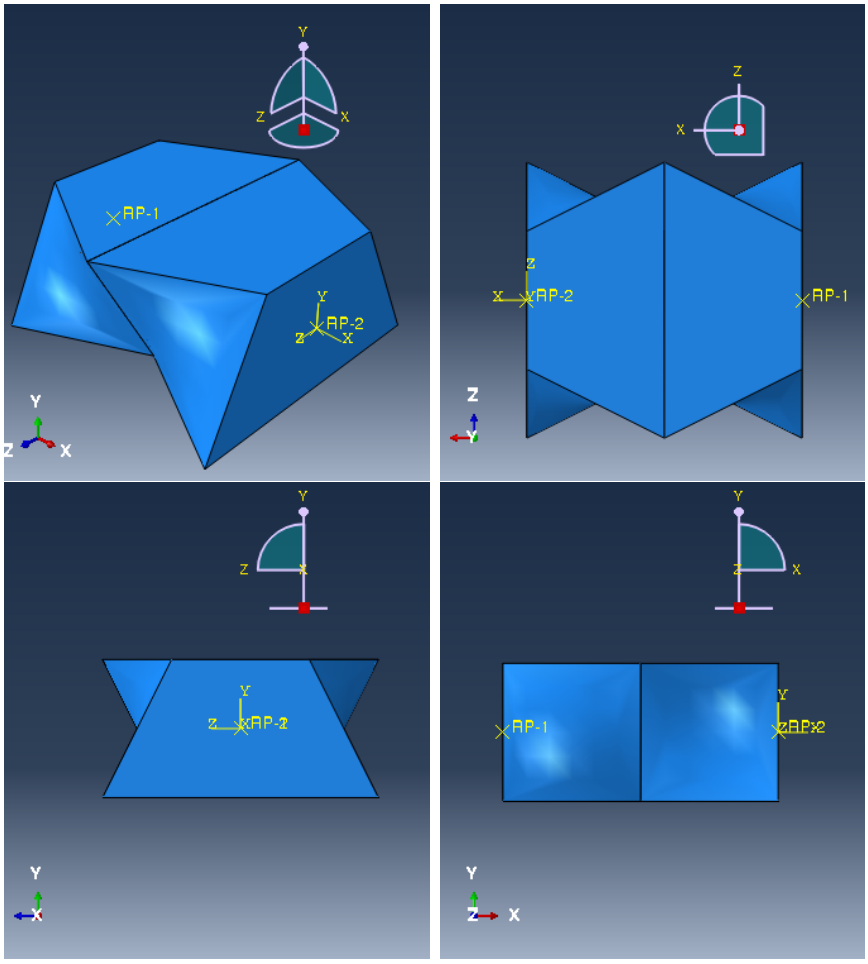


FIGURE 3.27 – Modélisation sous Abaqus du contact entre surfaces planes

- le déplacement selon $Y+$
- le déplacement selon $Z+$
- la rotation autour de $X+$

– la rotation autour de $Y+$
– la rotation autour de $Z+$
– la rotation autour de $Z-$

En effet, le déplacement selon $X-$ induit un décollement du contact et donc un torseur des réactions nul. Par symétrie, la réponse à un déplacement selon $Y-$ est identique à celle simulée suivant $Y+$. De même, la réponse à un déplacement selon $Z-$ est identique à celle simulée suivant $Z+$. Enfin, les rotations autour de $X-$ et $Y-$ se déduisent des simulations réalisées autour de $X+$ et $Y+$.

3.5.1.1 Maillage

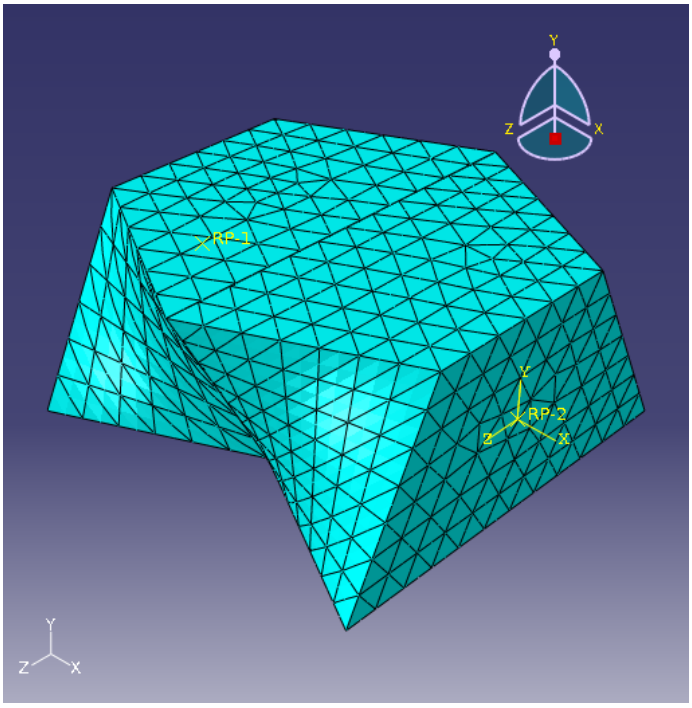
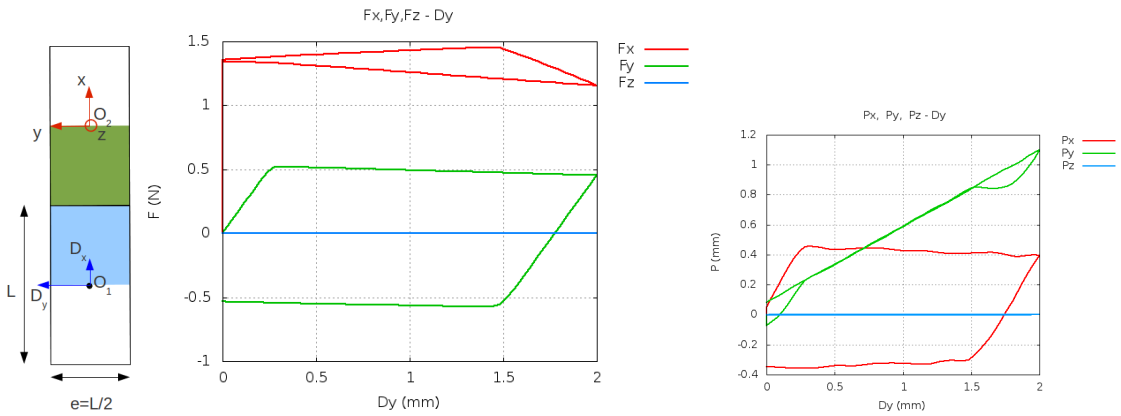


FIGURE 3.28 – Maillage pour un contact plan (bloc 1 : 2341 éléments et 3722 nœuds, bloc 2 : 2870 éléments, 4565 nœuds)

Le maillage utilisé sur un demi-ostéomorphe lors des calculs pour le type de contact plan apparaît sur la figure 3.28.

Celui-ci est constitué d'éléments de types linéaires tétraédriques à 4 nœuds (C3D4). Le maillage global du bloc 2 est plus raffiné que celui du bloc 1 pour éviter que les nœuds du bloc 1 soient en contact avec des nœuds du bloc 2, ce qui pourrait engendrer des problèmes numériques.

Nous allons maintenant étudier l'exemple de l'effet d'un déplacement tangentiel dans le cas d'une interface entre surfaces planes. Le détail de l'ensemble des lois de comportement est donné en annexe C.



(a) Déplacement $+D_y$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE 3.29 – Surfaces planes - Effet d'un déplacement selon Y

3.5.1.1.1 Exemple de l'effet d'un déplacement tangentiel D_y dans le cas d'une interaction entre deux surfaces planes

Comme nous avons pu le constater dans le cas des cubes, il est nécessaire d'appliquer une force normale au préalable pour observer une composante tangentielle lors d'un déplacement du bloc 1 par rapport au bloc 2 le long de l'axe Y. Nous avons donc d'abord appliqué une compression D_x (fixée ici à $D_x = 0.09$ mm) pour observer les effets du déplacement D_y. Les courbes de la figure 3.29b et 3.29c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors du déplacement du bloc 1 le long de Y. Nous pourrons donc observer une composante normale due à la compression en plus de la composante tangentielle. Il existe donc un effort normal F_x dû à la compression en plus de l'effort dû au déplacement tangentiel.

Le point d'application se déplace seulement selon Y et donc dans le sens du déplacement du bloc 1 par rapport au bloc 2.

Ces résultats sont très similaires à ceux observés lors du cisaillement selon Y dans le cas du contact entre deux cubes. Ceci peut s'expliquer par la nature de l'interface qui est plane dans les deux cas.

Le tableau 3.8 rassemble les résultats obtenus durant ce cisaillement le long de l'axe Y. Comme dans le cas des cubes, les lois du premier ordre y sont affichées en orange. Dans le cas présent, les F_x, F_y et δP_y sont du premier ordre. Les autres lois ont une influence très faible et sont donc négligeables.

3.5.2 Cas des surfaces réglées de blocs ostéomorphes

La figure 3.30 représente la configuration retenue et la figure 3.31, la modélisation sous Abaqus. Comme dans les cas précédents, nous n'avons simulé que deux demi-blocs en interaction. Le point de contact est maintenant initialisé à $\vec{P_0}=\{-\frac{L-H}{2}, 0, \frac{L}{4}\}$.

Dans ce cas-ci, les symétries géométriques sont plus difficiles à distinguer : un déplacement

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	négligeable
δP_x	négligeable
δP_y	1er ordre
δP_z	négligeable

TABLE 3.8 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces planes dans le cas d'un déplacement D_y

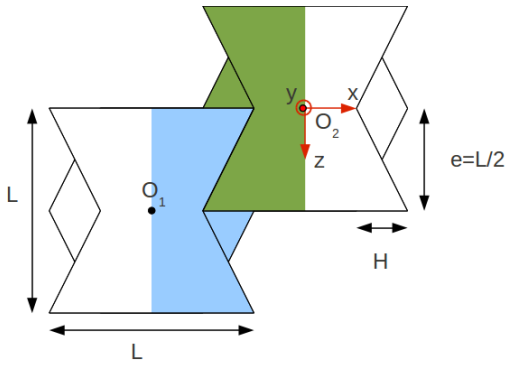


FIGURE 3.30 – Interaction entre les surfaces réglées de deux blocs ostéomorphes : représentation et notations utilisées

dans un sens positif n'induira a priori pas la même réponse qu'un déplacement dans le sens négatif. Les sollicitations ont donc toutes été réalisées dans les deux sens, soit au total douze simulations.

3.5.2.1 Application du chargement

Comme dans le cas des cubes ou des ostéomorphes en contact entre leurs surfaces planes, le bloc 2 est encastré par l'intermédiaire d'une contrainte de corps rigide appliquée entre le point central de la face arrière du bloc 2 RP_2 et cette même face arrière. En encastrant le point central, c'est toute la face arrière qui sera bloquée.

Le même procédé est utilisé pour appliquer le chargement au le bloc 1. En imposant le mouvement au centre de la face arrière du bloc 1 RP_1, c'est toute cette face arrière qui est mise en mouvement grâce à la contrainte de corps rigide entre RP_1 et la face en question.

3.5.2.2 Maillage

Le maillage utilisé sur un demi-ostéomorphe lors des calculs pour les deux types de contact plan et réglé apparaît sur la figure 3.32.

Il est constitué d'éléments de types linéaires tétraédriques à 4 nœuds (C3D4). Le maillage est régulier sur la plupart du bloc, mais il est plus raffiné le long des arêtes qui sont en contact, car les arêtes sont singulières et en y raffinant le maillage, on peut améliorer la

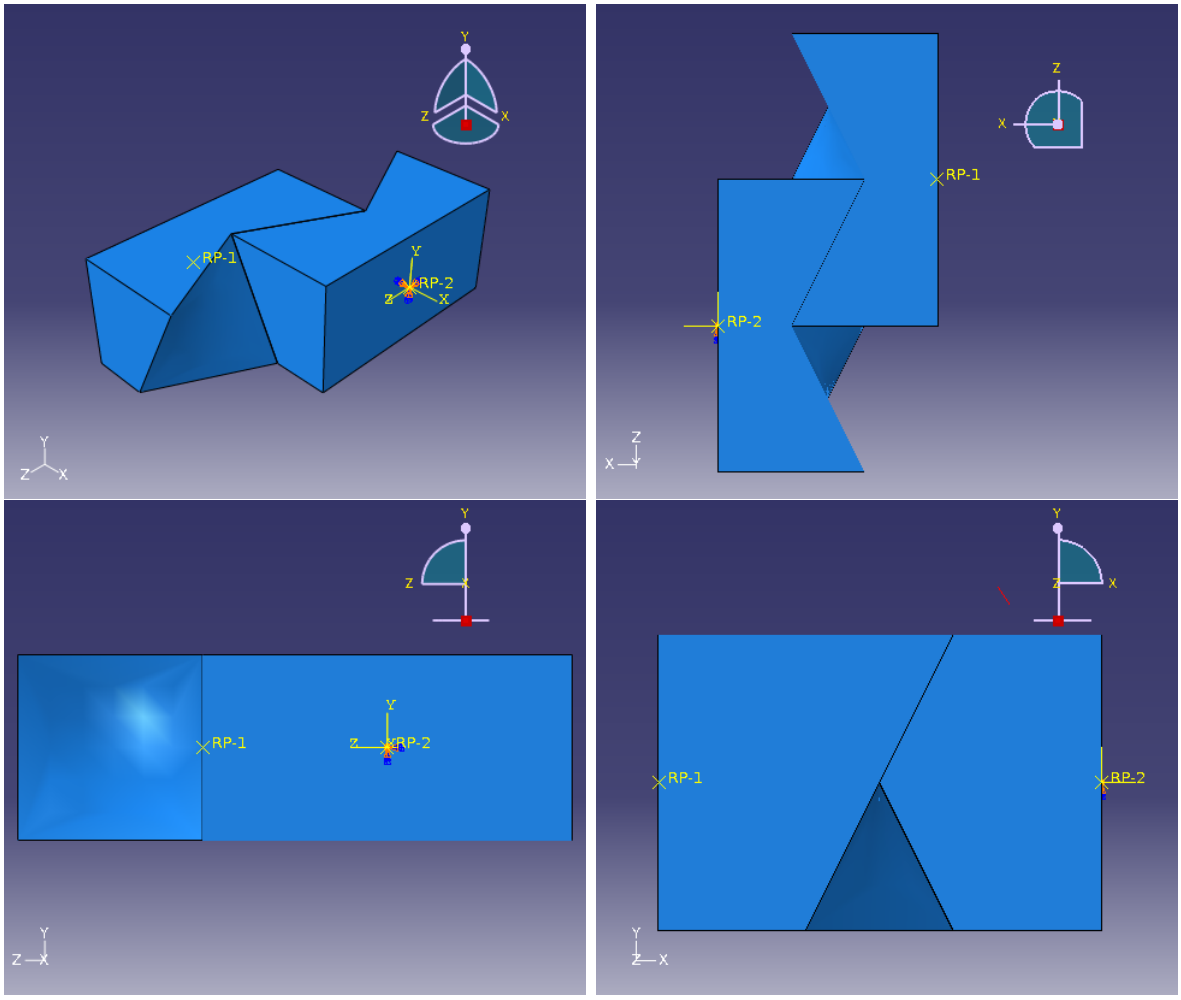


FIGURE 3.31 – Différentes vue des deux demi-blocs ostéomorphes en contact avec leur surface réglée

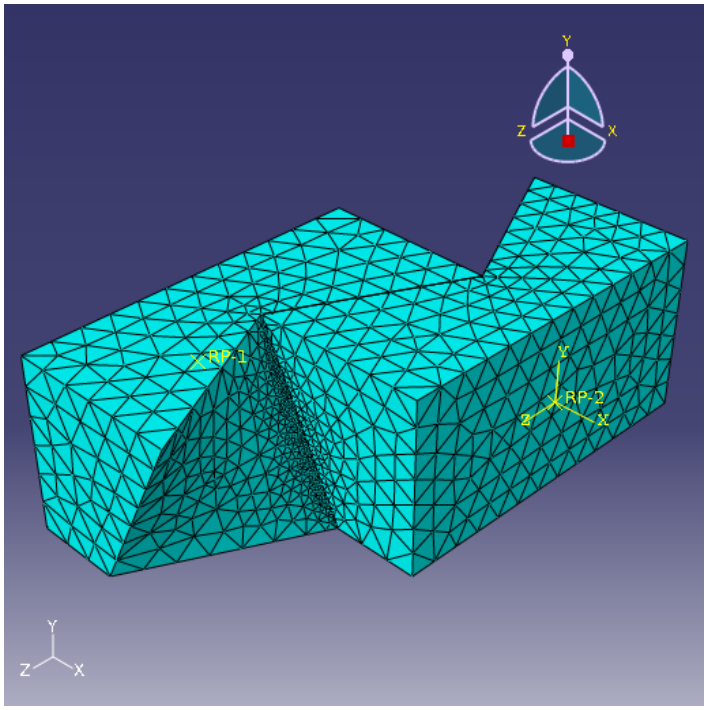
qualité de calcul. Comme mentionné dans le cas du contact entre surfaces planes, le maillage global du bloc 2 comporte plus d'éléments que celui du bloc 1 pour éviter que les nœuds du bloc 1 se trouvent en face des nœuds du bloc 2, ce qui pourrait poser des problèmes numériques.

Nous allons maintenant étudier l'exemple de l'effet d'une rotation autour de l'axe $Z+$ dans le cas d'une interface entre surfaces réglées. Le détail de l'ensemble des lois de comportement est donné en annexe D.

3.5.2.2.1 Effet d'une rotation R_z

Les courbes de la figure 3.33b et 3.33c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'une rotation du bloc 1 autour de Z.
On constate alors que lors d'une rotation autour de Y, il y a des phénomènes de compression et de cisaillement, il y a donc une composante selon X, Y et aussi une faible composante selon Z.

Le tableau 3.9 récapitule les lois observées dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour une rotation R_z. Aucune loi n'est négligeable dans le cas présent. Nous avons retenu F_x, F_y



(a)

FIGURE 3.32 – Maillage pour un contact entre surfaces réglées (bloc 1 : 8405 éléments et 1838 nœuds, bloc 2 : 8819 éléments, 1931 nœuds)

et δP_y comme loi du premier ordre (orange). Ici, les autres lois F_z, δP_x et δP_z sont considérées comme du second ordre (bleu).

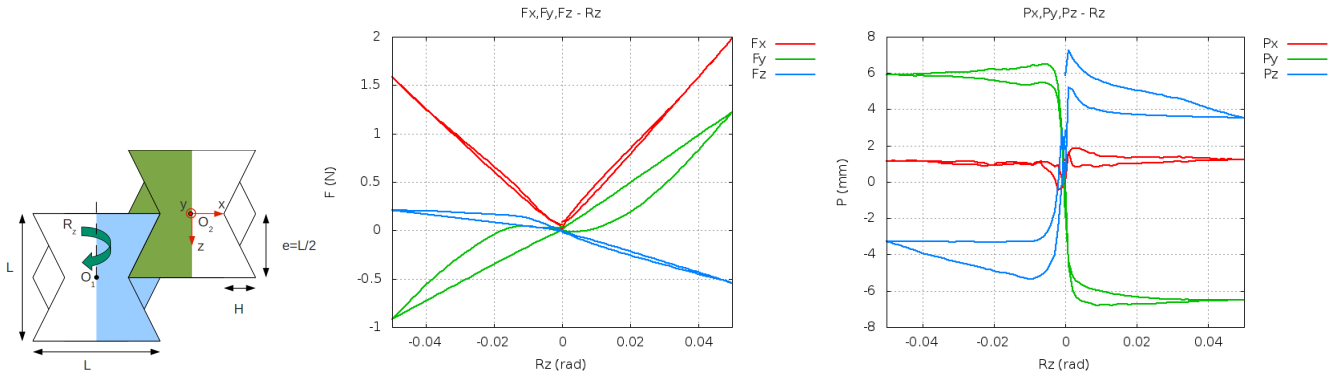
F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	2ème ordre
δP_y	1er ordre
δP_z	2ème ordre

TABLE 3.9 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'une rotation R_z

3.5.3 Synthèse des lois de contact entre deux blocs ostéomorphes

Dans cette section ainsi qu'en annexes C et D, des calculs par éléments finis ont été réalisés pour identifier chacune de ces lois et pour différentes valeurs du coefficient de frottement. On distingue deux grandes familles de lois selon que le contact a lieu le long d'une surface plane ou sur la surface réglée du bloc ostéomorphe.

De plus, dans le cas de la surface réglée le chargement dans un sens n'est pas équivalent au chargement dans le sens opposé. Au final, l'ensemble des lois de contact se résume aux trois



(a) Rotation $+R_z$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE 3.33 – Surfaces réglées - Effet d'une rotation selon Z

tableaux donnant à chaque fois la force et le déplacement du point d'application dans le cas d'un déplacement ou d'une rotation relative entre les deux blocs.

Le tableau 3.10 récapitule les valeurs des coefficients α et β tels que définis dans les équations 3.33 et 3.35 dans le cas de contact entre surfaces planes.

Parmi les lois à retenir pour les simulations discrètes, nous distinguons les effets au premier ordre qui devront être absolument pris en compte (surlignés en orange dans le tableau) et les termes correctifs (surlignés en bleu) qu'il faudra éventuellement ajouter pour améliorer le comportement. Enfin, les lois de comportement qui peuvent être négligées apparaissent dans les cases blanches.

On constate d'une part que le nombre de ces coefficients est limité et d'autre part que les termes correctifs se limitent à l'effet des rotations sur le déplacement du point d'application.

Les tableaux 3.11 et 3.12 résument respectivement les coefficients obtenus dans le cas d'un contact entre deux surfaces réglées pour une sollicitation dans le sens positif ou négatif (au sens de la figure 3.30).

On constate que peu de relations peuvent être négligées ce qui provient probablement de la complexité géométrique des surfaces en contact.

Le chapitre suivant traitera des résultats obtenus après introduction de ces lois dans le code d'éléments discrets afin de simuler le comportement d'assemblages de blocs cubiques ou ostéomorphiques de grande taille et d'étudier ainsi la réponse à des indentations et de comparer à des essais réalisés dans les mêmes conditions.

	D_x	D_y	D_z
F_x	$\alpha^P_{xx} = 1.0$	$\alpha^P_{yx} = -0.0011 * (10.1 * f + 1)$ $\alpha^{Pd}_{yxa} = -0.0387$ $\alpha^{Pd}_{yxb} = -0.0011 * (-15.2 * f + 1)$	$\alpha^P_{zx} = -0.0012 * (5.0 * f + 1)$ $\alpha^{Pd}_{zxa} = -0.0293$ $\alpha^{Pd}_{zxb} = -0.0011 * (-8.0 * f + 1)$
F_y	0	$\alpha^P_{yy} = 0.1333$	0
F_z	0	0	$\alpha^P_{zz} = 0.1333$
δP_x	$D_x/2$	0	0
δP_y	0	$D_y/2$	0
δP_z	0	0	$D_z/2$

	R_x	R_y	R_z	$-R_z$
F_x	0	$\beta^P_{yx} = 0.24$	$\beta^P_{zx} = 0.1618$	$\beta^{Pm}_{zx} = -0.1618$
F_y	0	0	$\beta^P_{zy} = 0.0044 * (34.0 * f + 1)$ $\beta^{Pd}_{zya} = 0.142$ $\beta^{Pd}_{zyb} = -0.0044 * (29.0 * f + 1)$	$\beta^{Pm}_{zy} = 0.0044 * (34.0 * f + 1)$ $\beta^{Pmd}_{zya} = 0.142$ $\beta^{Pmd}_{zyb} = -0.0044 * (29.0 * f + 1)$
F_z	0	$\beta^P_{yz} = -0.0044 * (47.0 * f + 1)$ $\beta^{Pd}_{yza} = -0.1973$ $\beta^{Pd}_{yzb} = -0.0044 * (-59.0 * f + 1)$	0	0
δP_x	0	$0.33 * R_y * L_P$	$0.22 * R_z * L_P$	$0.22 * R_z * L_P$
δP_y	0	0	$+D_x : (-0.317 * atan(313 * 0.2/(90 * \frac{D_x}{L_P} + 0.01) * R_z)) * L_P$ $-D_x : 0.001 * R_z * L_P$	$+D_x : (-0.317 * atan(313 * 0.2/(90 * \frac{D_x}{L_P} + 0.01) * R_z)) * L_P$ $-D_x : 0.001 * R_z * L_P$
δP_z	0	$+D_x : (0.45 * atan(317 * 0.2/(70 * \frac{D_x}{L_P} + 0.001) * R_y)) * L_P$ $-D_x : 0.001 * R_y * L_P$	0	0

TABLE 3.10 – Récapitulatif des coefficients α etβ pour un contact entre surfaces planes

	D_x	D_y	D_z
F_x	$\alpha^R_{xx} = 1.48752 * (1 + f/3)$	$\alpha^R_{yx} = 0.1504 * (-0.58 * f + 1)$ $\alpha^{Rd}_{yxa} = 0.02$ $\alpha^{Rd}_{yxb} = 0.135 * (1.6 * f + 1)$	$\alpha^R_{zx} = 0.1184 * (-0.5 * f + 1)$ $\alpha^{Rd}_{zxa} = -0.04$ $\alpha^{Rd}_{zxb} = -0.1 * (0.90 * f + 1)$
F_y	0	$\alpha^R_{yy} = 0.054 * (1.9 * f + 1)$ $\alpha^{Rd}_{yya} = 0.2$ $\alpha^{Rd}_{yyb} = 0.0735 * (-2.8 * f + 1)$	0
F_z	$\alpha^R_{xz} = -0.1 * (1 + f * 4)$	$\alpha^R_{yz} = -0.0154 * (0.15 * f + 1)$ $\alpha^{Rd}_{yza} = 0.00015$ $\alpha^{Rd}_{yzb} = -0.0154 * (2.28 * f + 1)$	$\alpha^R_{zz} = 0.038 * (2.35 * f + 1)$ $\alpha^{Rd}_{zza} = 0.24$ $\alpha^{Rd}_{zzb} = 0.0428 * (-2.90 * f + 1)$
δP_x	$D_x/2$	0	0
δP_y	0	0	$+D_x : (0.48 * atan(3/(8 * \frac{D_x}{L_R} + 0.001) * \frac{D_z}{L_R})) * L_R$ $-D_x :$ $(0.50 * atan(-2.59/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * \frac{D_z}{L_R})) * L_R$
δP_z	0	$+D_x : (0.5 * atan(3/(8 * \frac{D_x}{L_R} + 0.001) * \frac{D_y}{L_R})) * L_R$ $-D_x :$ $(1.18 * atan(-2.58/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.1) * \frac{D_y}{L_R}) - 1) * L_R$	$D_z * 0.5$

	R_x	R_y	R_z
F_x	$\beta^R_{xx} = 0.1825 * (-0.35 * f + 1)$ $\beta^{Rd}_{xxa} = 0.0515$ $\beta^{Rd}_{xxb} = 0.2 * (0.50 * f + 1)$	$\beta^R_{yx} = 0.0777$	$\beta^R_{zx} = 0.46$
F_y	$\beta^R_{xy} = 0.0371 * (2.58 * f + 1)$ $\beta^{Rd}_{xya} = 0.18$ $\beta^{Rd}_{xyb} = 0.0135 * (1.6 * f + 1)$	$\beta^R_{yy} = 0.035$	$\beta^R_{zy} = 0.1094 * (2.7 * f + 1)$ $\beta^{Rd}_{zya} = 0.4$ $\beta^{Rd}_{zyb} = 0.0135 * (1.6 * f + 1)$
F_z	$\beta^R_{xz} = -0.0108 * (10.58 * f + 1)$ $\beta^{Rd}_{xza} = -0.1$ $\beta^{Rd}_{xzb} = -0.0125 * (10.58 * f + 1)$	$\beta^R_{yz} = -0.03$ $\beta^{Rd}_{yza} = -0.35$ $\beta^{Rd}_{yzb} = -0.0314 * (-2.2 * f + 1)$	$\beta^R_{zz} = -0.145 * (-0.65 * f + 1)$
δP_x	0	$+D_x : (0.1532 * atan(26.99/(30 * \frac{D_x}{L_R} + 0.015) * R_y)) * L_R$ $-D_x : (0.21 * atan(-29.33/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_y)) * L_R$	$+D_x : (0.087 * atan(81.19/(90.26 * \frac{D_x}{L_R} + 0.1) * R_z)) * L_R$ $-D_x : (-0.985 * atan(-48.2/(8 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_z + 0.2) + 1.68) * L_R$
δP_y	0	$+D_x : (-0.38 * atan(107.99/(70 * \frac{D_x}{L_R} + 0.04) * R_y)) * L_R$ $-D_x : (0.57 * atan(29.33/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_y)) * L_R$	$+D_x : (-0.33 * atan(2763.04/(2165.3 * \frac{D_x}{L_R} + 1) * R_z) - 0.1) * L_R$ $-D_x : (0.42 * atan(132.55/(-3.34 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_z)) * L_R$
δP_z	$+D_x : (0.22 * atan(42.84/(50 * \frac{D_x}{L_R} + 0.0016) * R_x)) * L_R$ $-D_x : (0.22 * atan(-25.89/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_x)) * L_R$	$+D_x : (0.54 * atan(33.56/(12.94 * \frac{D_x}{L_R} + 0.0039) * R_y)) * L_R$ $-D_x : (0.57 * atan(-29.33/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_y)) * L_R$	$+D_x : (0.32 * atan(17.44/(12.99 * \frac{D_x}{L_R} + 0.005) * R_z)) * L_R$ $-D_x : (0.41 * atan(-63.69/(-3.3 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_z)) * L_R$

TABLE 3.11 – Récapitulatif des coefficients α etβ pour un contact entre surfaces réglées et pour une sollicitation dans le sens positif

	$-D_x$	$-D_y$	$-D_z$
F_x	0	$\alpha_{yx}^{R} = -0.1504 * (-0.58 * f + 1)$ $\alpha_{yxa}^{Rmd} = -0.02$ $\alpha_{yxb}^{Rmd} = -0.135 * (1.6 * f + 1)$	$\alpha_{zx}^{R} = -0.2055$
F_y	0	$\alpha_{yy}^{R} = 0.0539 * (1.9 * f + 1)$ $\alpha_{yya}^{Rmd} = 0.2$ $\alpha_{yyb}^{Rmd} = 0.0735 * (-2.8 * f + 1)$	0
F_z	0	$\alpha_{yz}^{R} = 0.01275$ $\alpha_{yza}^{Rmd} = -0.000026$ $\alpha_{yzb}^{Rmd} = 0.0041 * (15.0 * f + 1)$	$\alpha_{zz}^{R} = 0.0623 * (3.9 * f + 1)$ $\alpha_{zza}^{Rmd} = 0.375$ $\alpha_{zzb}^{Rmd} = 0.0428 * (-2.90 * f + 1)$
δP_x	0	0	0
δP_y	0	0	$+D_x$: $(0.38 * atan(3/(8 * \frac{D_x}{L_R} + 0.001) * \frac{D_z}{L_R})) * L_R$ $-D_x$: $(0.40 * atan(-2.59/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * \frac{D_z}{L_R})) * L_R$
δP_z	0	$+D_x$: $(0.5 * atan(3/(8 * \frac{D_x}{L_R} + 0.001) * \frac{D_y}{L_R})) * L_R$ $-D_x$: $(0.45 * atan(60.25/(500 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * \frac{D_y}{L_R} - 0.1) - 1.5) * L_R$	$D_z * 0.5$

	$-R_x$	$-R_y$	$-R_z$
F_x	$\beta_{xx}^{R} = -0.23 * (-0.58 * f + 1)$ $\beta_{xxa}^{Rmd} = -0.05$ $\beta_{xxb}^{Rmd} = -0.2355 * (0.80 * f + 1)$	$\beta_{yx}^{R} = -1.3664$	$\beta_{zx}^{R} = -0.3148 * (-0.018 * f + 1)$
F_y	$\beta_{xy}^{R} = 0.0941207 * (1.55 * f + 1)$ $\beta_{xya}^{Rmd} = 0.3$ $\beta_{xyb}^{Rmd} = 0.08 * (-2.0 * f + 1)$	$\beta_{yy}^{R} = 0.215 * (-1.095 * f + 1)$	$\beta_{zy}^{R} = 0.0755 * (3.4 * f + 1)$ $\beta_{zya}^{Rmd} = 0.37$ $\beta_{zyb}^{Rmd} = 0.0135 * (1.6 * f + 1)$
F_z	$\beta_{xz}^{R} = 0.038 * (0.01 * f + 1)$ $\beta_{xza}^{Rmd} = -0.002$ $\beta_{xzb}^{Rmd} = 0.070 * (0.01 * f + 1)$	$\beta_{yz}^{R} = -0.0547 * (10.0 * f + 1)$	$\beta_{zz}^{R} = -0.08 * (-1.1 * f + 1)$ $\beta_{zza}^{Rmd} = -0.002$ $\beta_{zzb}^{Rmd} = -0.0914 * (1.0 * f + 1)$
δP_x	0	$+D_x$:$(-0.03 * atan(0.21/(-0.175 * \frac{D_x}{L_R} + 0.01) * R_y)) * L_R$ $-D_x$: $(0.825 * atan(-48.2/(8 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_y + 0.2) + 1.31) * L_R$	$+D_x$: $(-0.067 * atan(429.58/(465.398 * \frac{D_x}{L_R} + 1.189) * R_z)) * L_R$ $-D_x$: $(0.95 * atan(-48.2/(11 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_z - 0.1) + 1.6) * L_R$
δP_y	0	$+D_x$: $(-0.21 * atan(65.97/(34 * \frac{D_x}{L_R} + 0.02) * R_y + 0.3466) - 0.2078) * L_R$ $-D_x$: $(0.12 * atan(29.33/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_y)) * L_R$	$+D_x$: $(-0.36 * atan(2696.8/(2195 * \frac{D_x}{L_R} + 2) * R_z + 0.36) + 0.0116) * L_R$ $-D_x$: $(0.42 * atan(132.55/(-3.34 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_z)) * L_R$
δP_z	$+D_x$: $(0.57 * atan(15.11/(45 * \frac{D_x}{L_R} + 0.02) * R_x)) * L_R$ $-D_x$: $(0.6 * atan(-29.27/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.1) * R_x)) * L_R$	$+D_x$: $(0.2258 * atan(134.17/(120 * \frac{D_x}{L_R} + 0.015) * R_y)) * L_R$ $-D_x$: $(-0.65 * atan(-48.2/(20 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_y + 0.2) - 1.4) * L_R$	$+D_x$: $(0.299 * atan(18.71/(12.96 * \frac{D_x}{L_R} + 0.008) * R_z)) * L_R$ $-D_x$: $(-0.75 * atan(-48.202/(28 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_z - 0.1) - 1.6) * L_R$

TABLE 3.12 – Récapitulatif des coefficients α etβ pour le contact entre surfaces réglées et pour une sollicitation dans le sens négatif

Chapitre 4

Simulations d'indentations d'assemblages autobloquants

Dans ce chapitre, nous présenterons une étude paramétrique de simulations d'indentation dans le cas d'assemblages de cubes et de blocs ostéomorphes.
Des simulations seront menées à la fois avec le code éléments discrets développé précédemment et avec le code d'éléments finis ABAQUS. Les simulations seront comparées à des expériences menées dans les mêmes conditions.
Dans les deux cas, nous commencerons par simuler l'assemblage élémentaire de 19 blocs puis nous extrapolerons ces résultats aux cas d'assemblages plus grands (68 cubes contenus dans un cadre rectangulaire et 37 blocs ostéomorphes générant une structure hexagonale) afin de comparer les résultats numériques aux essais présentés dans le chapitre 2.
Dans tous les cas, les conditions limites seront définies de la façon suivante :

- Les blocs se trouvant sur la couronne extérieure sont encastrés (les six degrés de liberté sont mis à zéro).
- Le bloc indenté est le bloc central et est contrôlé en déplacement. Le déplacement du bloc central est imposé selon la normale au plan de l'assemblage

4.1 Cas des cubes

La taille des cubes est de 3cm de côté. Le module d'Young fixé est celui équivalent à celui de l'aluminium ($E = 70000$ MPa) et le coefficient de Poisson est fixé à $\nu = 0.3$

4.1.1 Simulation par éléments discrets

Les résultats de la simulation d'indentation par éléments discrets sont présentés sur la figure 4.1.

La courbe d'indentation de la figure 4.1c a une forme de parabole. Lors du déplacement du bloc central, la force augmente jusqu'à atteindre une valeur maximale F_{max} pour une profondeur d'indentation D_{pic} de 7.5mm. Après ce maximum, la force diminue jusqu'à ce qu'elle retombe à 0. La valeur du déplacement lorsque l'effort s'annule est notée D_{perf}. Sur cette seconde partie de la parabole, plus le cube central est indenté et plus il est facile de le pousser à travers l'assemblage. Le cube central est sur le point d'être éjecté de l'autre côté de l'assemblage comme le montre la figure 4.1b qui illustre l'assemblage vu de dessus au moment où l'effort à appliquer sur le cube central devient nul.

On constate que l'indentation du cube central a entraîné une rotation des cubes de la couronne intermédiaire. On retrouve ainsi le comportement qualitativement observé expérimentalement. Afin de valider le code par éléments discrets, nous allons reproduire cet essai par la méthode des éléments finis afin de comparer les deux réponses numériques.

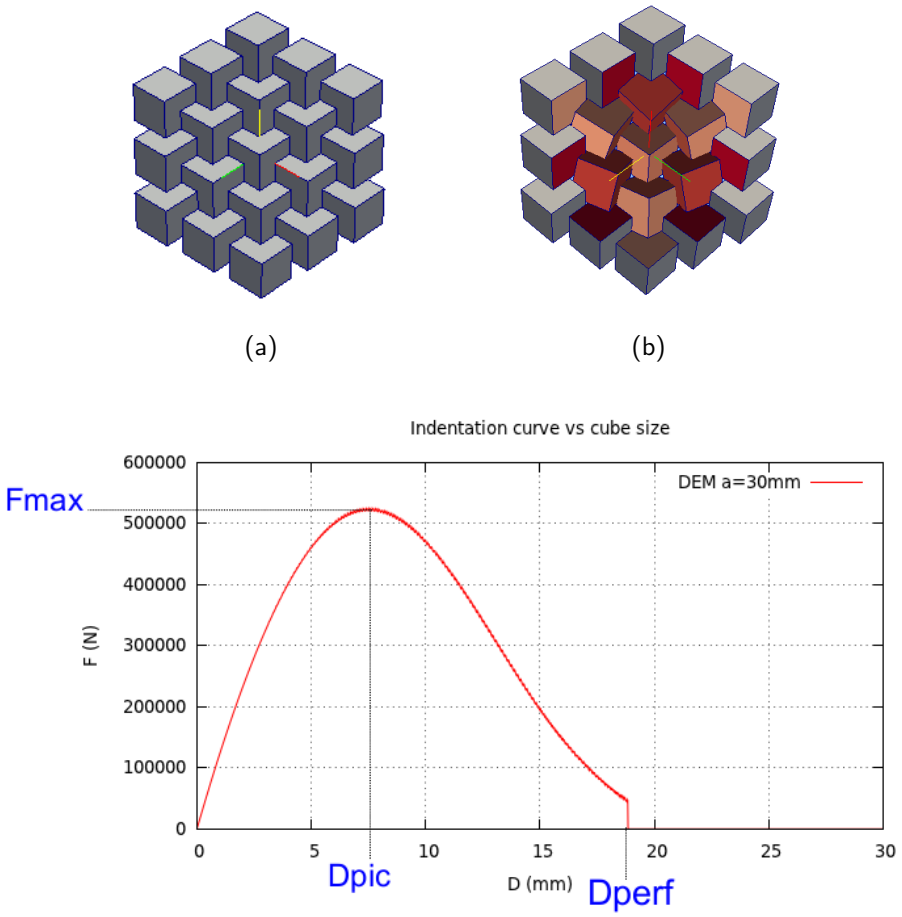


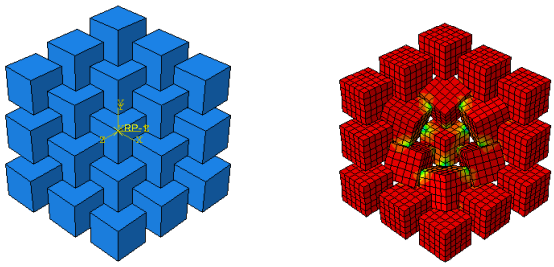
FIGURE 4.1 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes par éléments discrets : a) Assemblage avant indentation, b) Assemblage après indentation, c) Courbe d'indentation

4.1.2 Confrontation avec les simulations par éléments finis

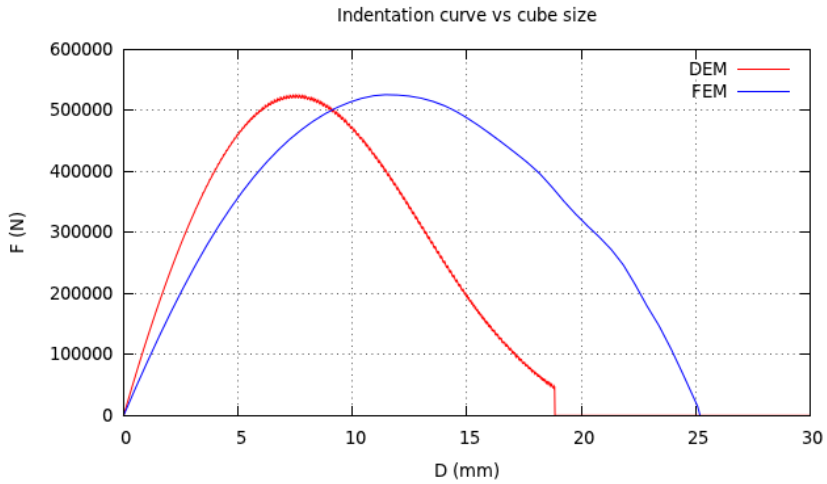
Des simulations 3D par éléments finis ont été réalisées sous ABAQUS. Pour ces dernières, les cubes sont maillés en 5x5x5 éléments à 8 nœuds. À chaque élément est affecté un comportement élastique linéaire isotrope avec les mêmes coefficients que ceux utilisés dans le modèle discret (E=70GPa, n=0.3). Le contact entre blocs est géré par Abaqus avec un coefficient de frottement imposé à f=0. Les résultats de la simulation par éléments finis apparaissent, sur la figure 4.2.

La courbe d'indentation 4.2c a la même allure que celle trouvée précédemment par la méthode des éléments discrets. Les ordres de grandeur correspondent en particulier pour l'effort maximal qui est de l'ordre de 520kN. On constate cependant que celui-ci est atteint pour une plus grande valeur du déplacement de l'indenteur.

Dans le cas du calcul par éléments discrets, la pente à l'origine est plus élevée que celle



(a) (b)



(c)

FIGURE 4.2 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Comparaison entre les éléments discrets et les éléments finis - f=0 : a) Assemblage avant indentation, b) Assemblage après indentation, c) Courbes d'indentation

estimée par éléments finis. Cette différence de comportement entre les deux outils numériques peut avoir plusieurs origines :

- Les lois au contact : le modèle discret utilise ici seulement les lois du premier ordre identifiées dans le chapitre 3. Les lois d'ordre 2 sont négligées.
- Les grandes transformations : toutes les lois de contact ont été calculées par éléments finis dans un domaine de petites transformations. Par exemple les rotations n'ont pas excédé 0.05 radians. Or dans le cas de l'indentation réelle, la rotation globale des blocs devient conséquente (comme visible sur la figure 4.2c). Même si les rotations à chaque pas sont petites, les configurations du contact s'éloignent de celle utilisée pour l'identification des lois. Cela engendre donc des erreurs qui se cumulent avec les pas de calculs.

4.1.3 Étude paramétrique

Nous allons maintenant faire varier les paramètres de fabrication tels que le module d'Young qui dépend du matériau utilisé et la taille des cubes. Les résultats des simulations menées par éléments discrets seront comparés à celles menées par éléments finis. Puis, une étude de l'influence du coefficient de frottement, de la précompression latérale et du nombre de cubes

ainsi que d'autres paramètres tels que l'endommagement, le sens d'indentation et la géométrie de l'assemblage sera effectuée par éléments finis.

4.1.3.1 Étude du comportement d'un assemblage de cubes en fonction du module d'élasticité du matériau constitutif

Différentes valeurs de modules d'Young ont été testées. Dans le cas présent, le module est changé pour tout l'assemblage donc tous les cubes de l'assemblage ont le même module d'élasticité. Les valeurs des modules d'Young testées sont les valeurs des matériaux envisagés dans le cadre du projet MANSART : le polymère qui a servi à fabriquer les blocs ostéomorphes à géométrie simplifiée par prototypage rapide (3GPa), l'aluminium étudié par Estrin et al. [2004] (70GPa), l'alumine qui est le matériau utilisé pour la fabrication des cubes (390GPa). Un autre matériau qui ne sera pas utilisé dans le cadre du projet MANSART mais qui a servi pour les expériences d'indentation d'assemblages de cubes effectuées par Brugger [2008] est le plâtre (16GPa). La courbe 4.3a montre le résultat obtenu par la méthode des éléments finis et la courbe 4.3b montre le résultat obtenu par la méthode des éléments discrets.

Ces courbes montrent un comportement similaire avec les deux méthodes de simulation excepté une légère inversion de la courbure en fin d'essai pour le modèle discret. Comme on pouvait s'y attendre, seule l'amplitude de la force est affectée par le module d'Young. Le déplacement de l'indenteur pour lequel l'effort devient maximal est le même quel que soit le module d'Young. Le même phénomène peut-être observé pour le déplacement de l'indenteur pour lequel l'effort devient nul qui est aussi le même quel que soit le module d'Young.

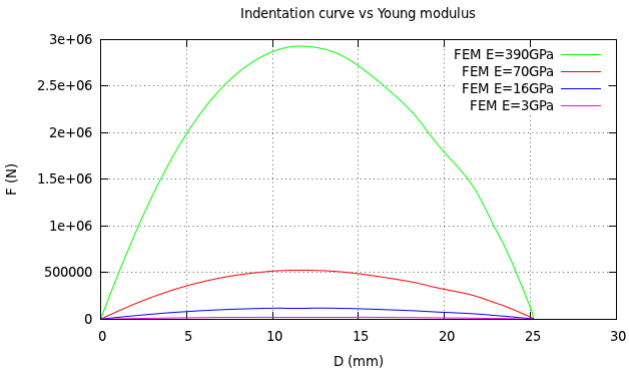
En normalisant les courbes par F_{max} et D_{perf} (voir figures 4.3c et 4.3d), il apparaît dans le cas des éléments finis ainsi que dans le cas du calcul par éléments discrets qu'elles se superposent pour ne former qu'une seule courbe qu'on appellera courbe maîtresse. Cette courbe a une forme parabolique et a pour équation :

$$\frac{F}{F_{max}} = -4 * \frac{D}{D_{perf}} * (\frac{D}{D_{perf}} - 1)$$

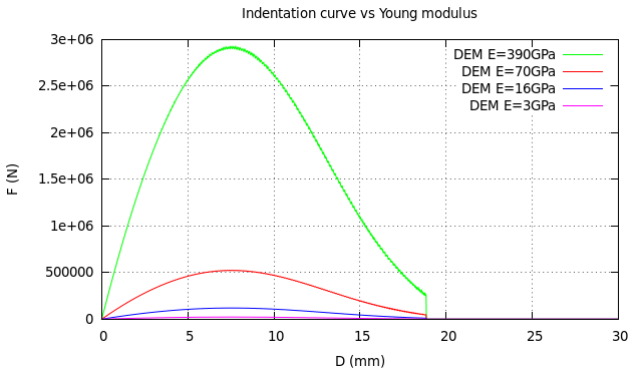
4.1.3.2 Étude du comportement d'un assemblage élémentaire de 19 cubes en fonction de la taille des cubes

Des assemblages élémentaires composés de 19 cubes de différentes tailles ont été simulés : 10mm, 20mm, 30mm et 40mm. Des simulations par éléments finis et par éléments discrets ont été effectuées et les courbes obtenues sont reportées respectivement sur les figures 4.4a et 4.4b.

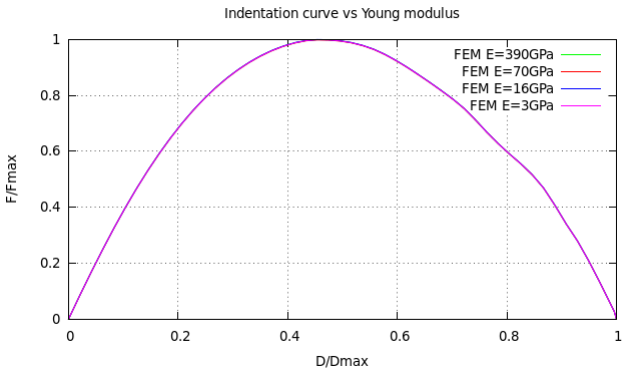
À nouveau, les deux méthodes numériques donnent des comportements similaires. La rigidité des assemblages augmente avec la taille des cubes. L'évolution des différents paramètres de caractérisation des courbes d'indentation, F_{max}, D_{pic}, D_{perf} apparaît sur les figures 4.5a,



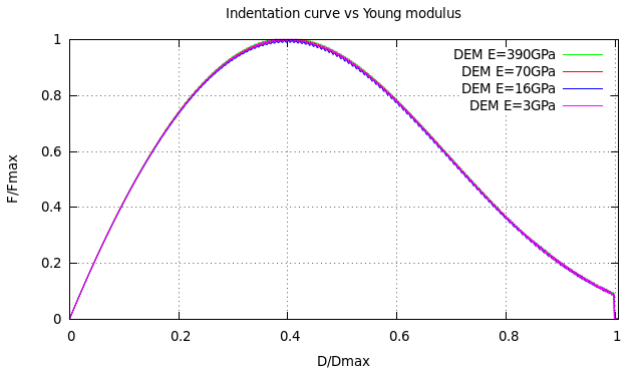
(a)



(b)

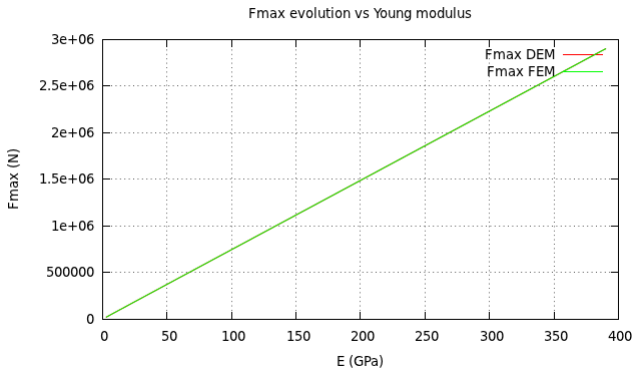


(c)



(d)

Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes par éléments finis



(e)

FIGURE 4.3 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté - Comparaison entre éléments finis et éléments discrets - Étude de l'influence du module d'élasticité : a) Courbes d'indentation obtenues par éléments finis, b) Courbes d'indentation obtenues par éléments discrets, c) Courbes maîtresses obtenues par éléments finis, d) Courbes maîtresses obtenues par éléments discrets, e) évolution de l'effort maximal en fonction du module d'Young

4.5b et 4.5c.

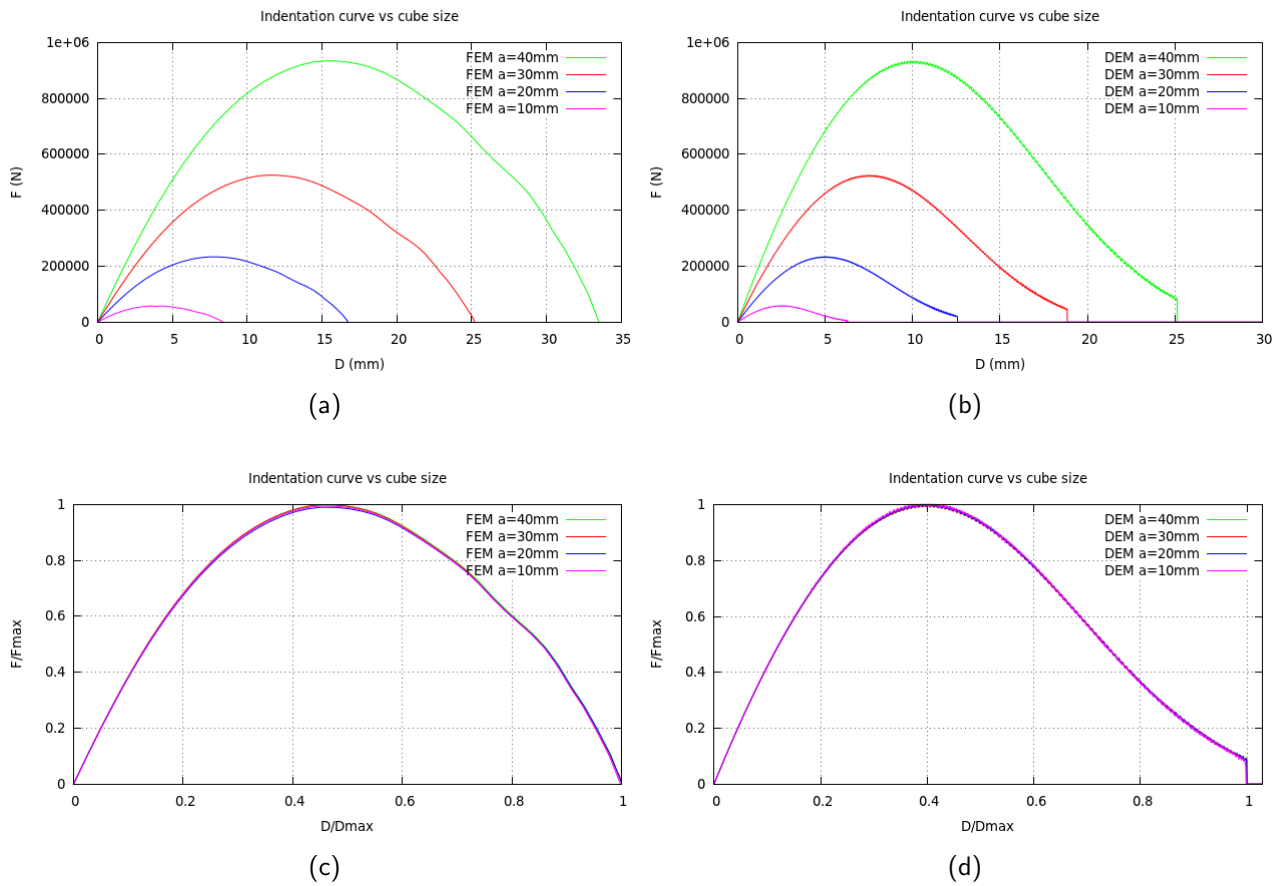


FIGURE 4.4 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes par éléments finis - Comparaison entre éléments finis et éléments discrets - Étude de l'influence de la taille des cubes : a) Courbes d'indentation obtenues par éléments finis, b) Courbes d'indentation obtenues par éléments discrets, c) Courbes maîtresses obtenues par éléments finis, d) Courbes maîtresses obtenues par éléments discrets

Le déplacement de l'indenteur à force maximale ou bien à perforation augmente linéairement avec l'augmentation de la taille des cubes. Sur la figure 4.5d, la force F et le déplacement D ont été normalisés par la taille des blocs. Cette courbe montre que la pente initiale des courbes de charge augmente aussi de façon non linéaire avec la taille des blocs.

On a donc simplement un effet de taille agissant sur ces deux paramètres, car si on augmente la taille du cube central, il lui faudra plus d'espace pour être expulsé de l'assemblage et une profondeur d'indentation qui dépend directement de la taille de ce bloc. L'effort maximal n'évolue pas non plus de façon linéaire, mais augmente aussi avec la taille des cubes. Dans le cas présent, cette évolution peut s'expliquer par l'augmentation de matière se trouvant de chaque côté du plan médian et donc une augmentation du moment d'inertie. Ce phénomène est d'ailleurs amplifié par le fait que la matière n'est pas répartie de façon homogène autour du plan médian.

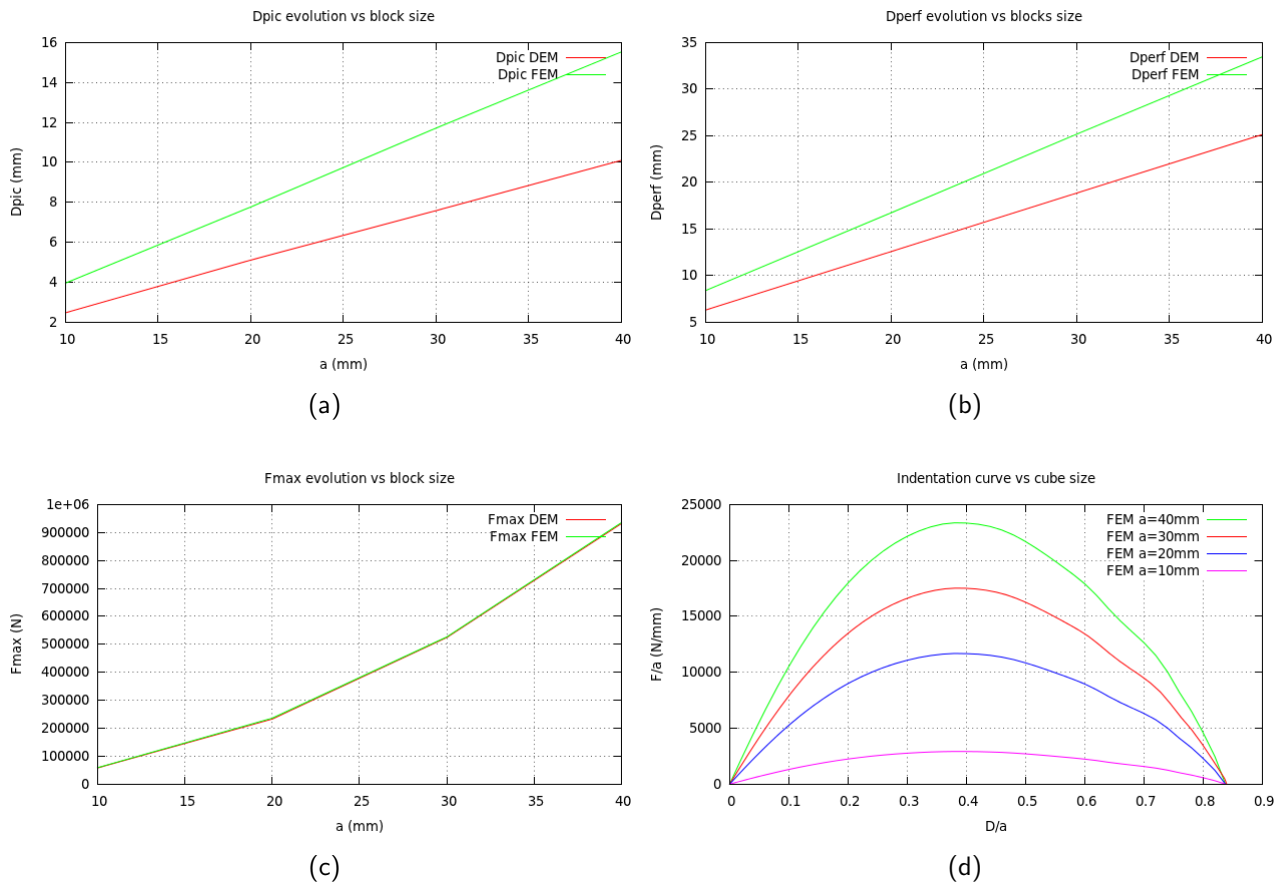


FIGURE 4.5 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes - Comparaison entre éléments finis et éléments discrets - Évolution des paramètres caractéristiques en fonction de la taille des blocs : a) Évolution du déplacement à force maximale, D_{pic}, b) Évolution du déplacement à force nulle, D_{perf}, c) Évolution de la force maximale, F_{max}, d) Courbes d'indentation avec F et D normalisés par la taille des blocs

4.1.3.3 Étude du comportement d'un assemblage élémentaire de cubes en fonction du coefficient de frottement

Des simulations par éléments finis ont été effectuées sur un assemblage de 19 cubes dans le but d'étudier l'effet du coefficient de frottement entre les cubes. Ces courbes ont été tracées et comparées avec celle de l'indentation d'une plaque hexagonale de masse équivalente affichée sur la figure 4.6c.

Une seconde droite possédant une pente plus forte que celle de la plaque hexagonale apparaît aussi sur ce graphe. Cette droite correspond à l'indentation du même assemblage de 19 blocs étudié habituellement, mais où tous les cubes ont été soudés entre eux. Il n'y a donc plus aucune rotation ni aucun déplacement permis entre les blocs. La distribution de matière n'étant pas répartie de façon uniforme autour du plan de l'assemblage, le moment d'inertie est alors plus grand, et donc l'assemblage est plus rigide.

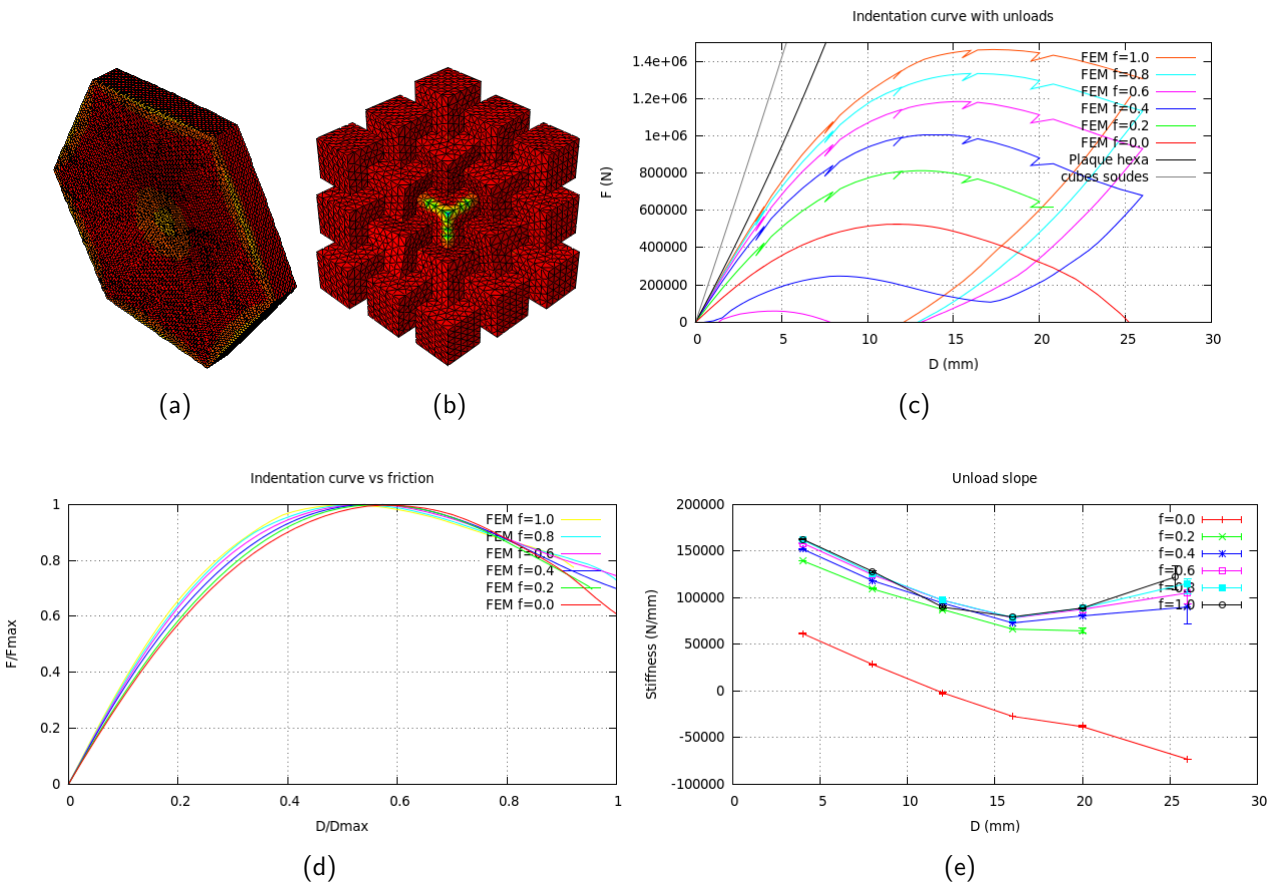


FIGURE 4.6 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du coefficient de frottement : a) Plaque hexagonale de masse équivalente, b) assemblage de cubes où tous les blocs sont soudés entre eux, c) Courbes d'indentation, d) Courbes maîtresses, e) Modules à décharge

On peut observer que la rigidité de l'assemblage augmente avec le coefficient de frottement pour tendre vers la rigidité d'une plaque de masse équivalente et ainsi se rapprocher de l'assemblage de cubes soudés. Les simulations ont été effectuées avec des décharges partielles tous les 4mm (figure 4.6c).

L'évolution des différents paramètres de caractérisation des courbes d'indentation, F_{max}, D_{pic} apparaît sur les figures 4.7a et 4.7b. Plus le coefficient de frottement augmente et plus l'effort maximal est important et est atteint pour un déplacement plus grand.

Les modules à décharge ont été calculés et leur évolution apparaît sur la figure 4.6e. Comme observée précédemment, la rigidité pour un déplacement donné augmente avec le coefficient de frottement. Dans le cas d'un coefficient de frottement non nul, la rigidité diminue puis augmente à nouveau. Quel que soit le coefficient de fortement choisi non nul, les modules à décharges ont les mêmes valeurs. Par contre dans le cas d'un contact glissant (frottement nul),

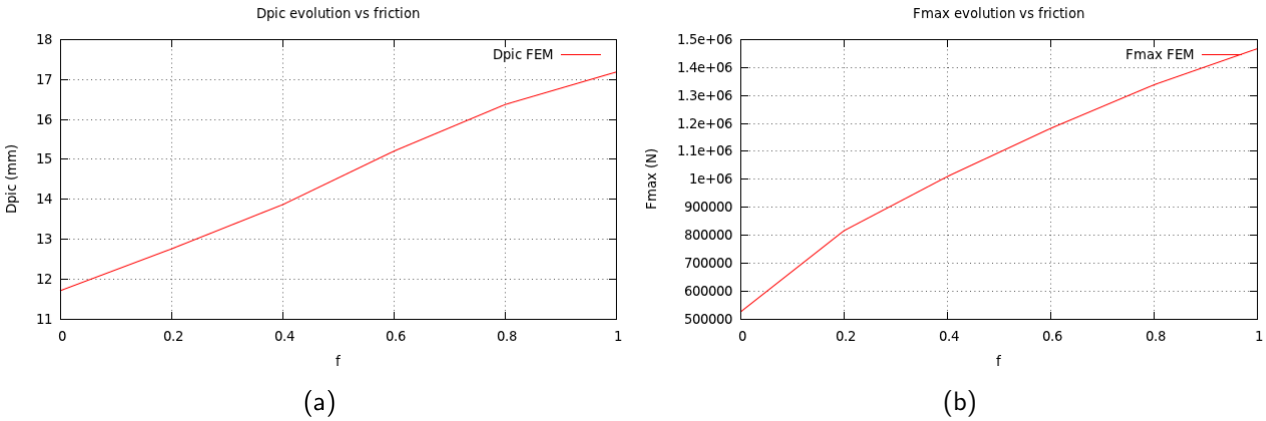


FIGURE 4.7 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du coefficient de frottement - Évolution des paramètres caractéristiques : a) Évolution du déplacement à force maximale, D_{pic}, b) Évolution de la force maximale, F_{max}

les modules à décharges sont à peu près 3 fois plus faibles.

Pour un coefficient de frottement de 0.4, différentes simulations ont été effectuées en imposant un cycle complet de déplacement de l'indenteur tous les 4mm, le premier ayant une décharge démarrée à 4mm et le dernier à 25mm (voir figure 4.8).

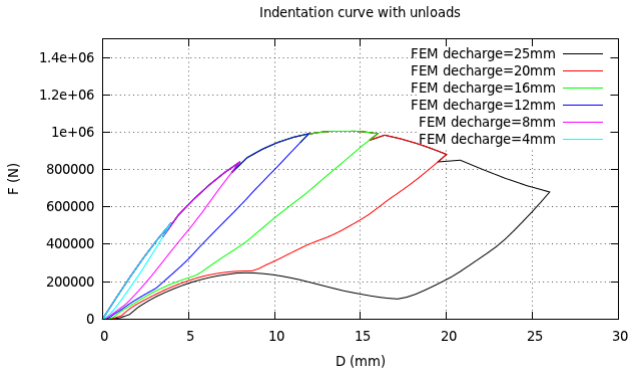


FIGURE 4.8 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Courbes d'indentation avec un cycle complet en déplacement imposé et pour un coefficient de frottement de f=0.4

On constate un comportement macroscopique réversible : il n'existe pas de déformation apparente de la structure après décharge. Pour des petites valeurs du déplacement maximal avant décharge, l'effort va diminuer de façon monotone pour atteindre zéro. Lorsque la décharge est amorcée pour un grand déplacement ($\geq 8mm$), on observe le phénomène de rigidité négative observé par Estrin et al. [2004] lors de ses expériences. Pendant cette décharge, l'effort va diminuer puis augmenter à nouveau (rigidité négative aussi appelée 'snap-back')

pour ensuite revenir à zéro.

Estrin et al. [2004] ont expliqué ce phénomène par le fait que lorsque l'assemblage est indenté les cubes tournent les uns par rapport aux autres, la surface de contact entre deux blocs diminue et le contact entre deux surfaces planes, se fait maintenant entre un sommet et une face et donc il devient plus facile d'indenter l'assemblage. Lorsqu'on applique une décharge, c'est le phénomène inverse qui se produit, la surface de contact entre les cubes augmente à nouveau et donc la structure se rigidifie à nouveau.

4.1.3.4 Étude du comportement d'un assemblage élémentaire de cubes en fonction de la précompression latérale

Des simulations par éléments finis ont été effectuées sur un assemblage de 19 cubes dans le but d'étudier l'effet des conditions de bords sur la réponse mécanique de l'assemblage. Les courbes résultantes sont données sur la figure 4.9a.

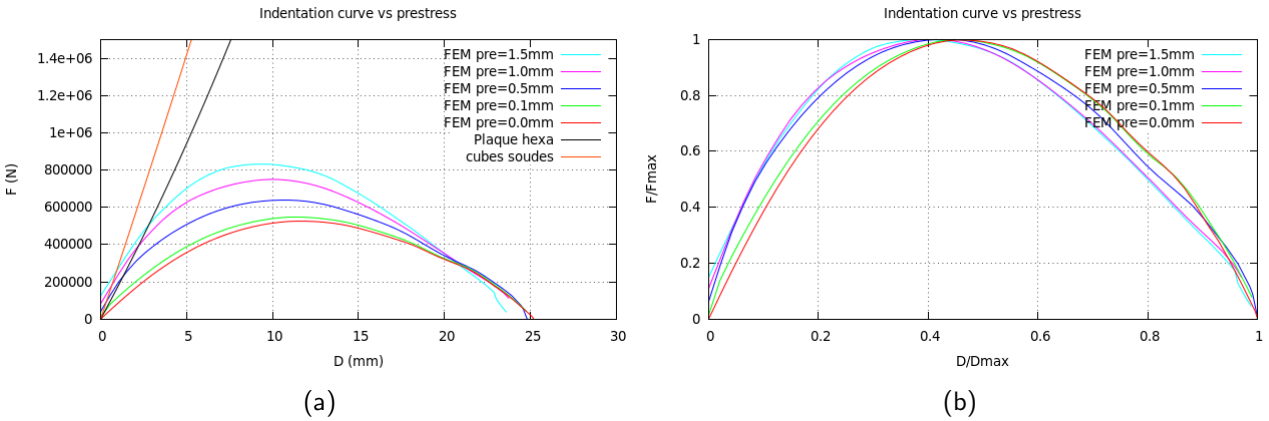


FIGURE 4.9 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence de la précompression latérale : a) Courbes d'indentation, b) Courbes maîtresses

Plus la précompression, exprimée en déplacement latéral imposé, est élevée et plus le cube central est chargé. La courbe d'indentation ne débute pas à un effort initial nul. Celui-ci augmente avec la précompression, ce qui signifie que la précompression applique un chargement sur le cube central avant l'indentation. La rigidité de l'assemblage augmente avec la précompression appliquée. L'évolution des différents paramètres de caractérisation des courbes d'indentation, F_{max}, D_{pic}, D_{perf} apparaît sur les figures 4.10a, 4.10b et 4.10c.

L'effort maximal augmente avec la précompression et est atteint pour un déplacement qui diminue avec la précompression. Le déplacement maximal diminue aussi avec la précompression. La courbe d'indentation d'une plaque hexagonale de masse équivalente ainsi que celle de l'assemblage de cubes soudés entre eux sont aussi affichées sur le graphe de la figure 4.9a. Plus la

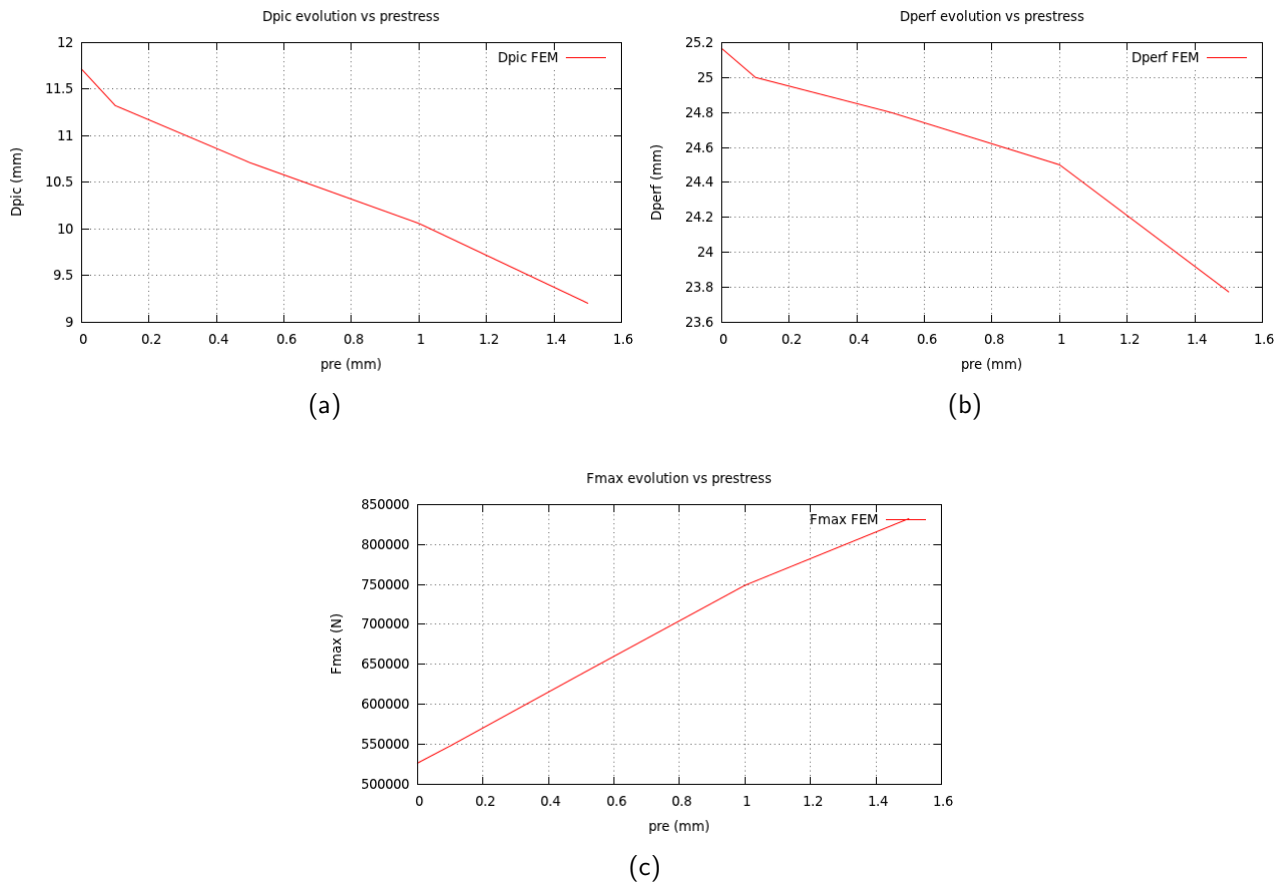


FIGURE 4.10 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Évolution des paramètres caractéristiques en fonction de la précompression latérale : a) Évolution du déplacement à force maximale, D_{pic}, b) Évolution du déplacement à force nulle, D_{perf}, c) Évolution de la force maximale, F_{max}

précompression est grande et plus la rigidité initiale de l'assemblage augmente pour tendre vers la rigidité d'une plaque hexagonale de masse équivalente ainsi que de l'assemblage de cubes soudés.

4.1.3.5 Étude du comportement d'un assemblage de cubes en fonction du nombre de blocs

Nous allons maintenant étudier le comportement d'un assemblage en fonction du nombre de cubes de même taille (30mm de côté). Pour cela, nous allons comparer la réponse mécanique d'un assemblage de 37 cubes et d'un assemblage de 61 cubes avec celle de l'assemblage élémentaire de 19 cubes étudié dans les sections précédentes. La couronne extérieure est toujours encastrée et il y a maintenant respectivement deux et trois couronnes de cubes libres à l'intérieur de l'assemblage. Seul le cube central est indenté. Les courbes d'indentation résultantes sont affichées sur la figure 4.11a.

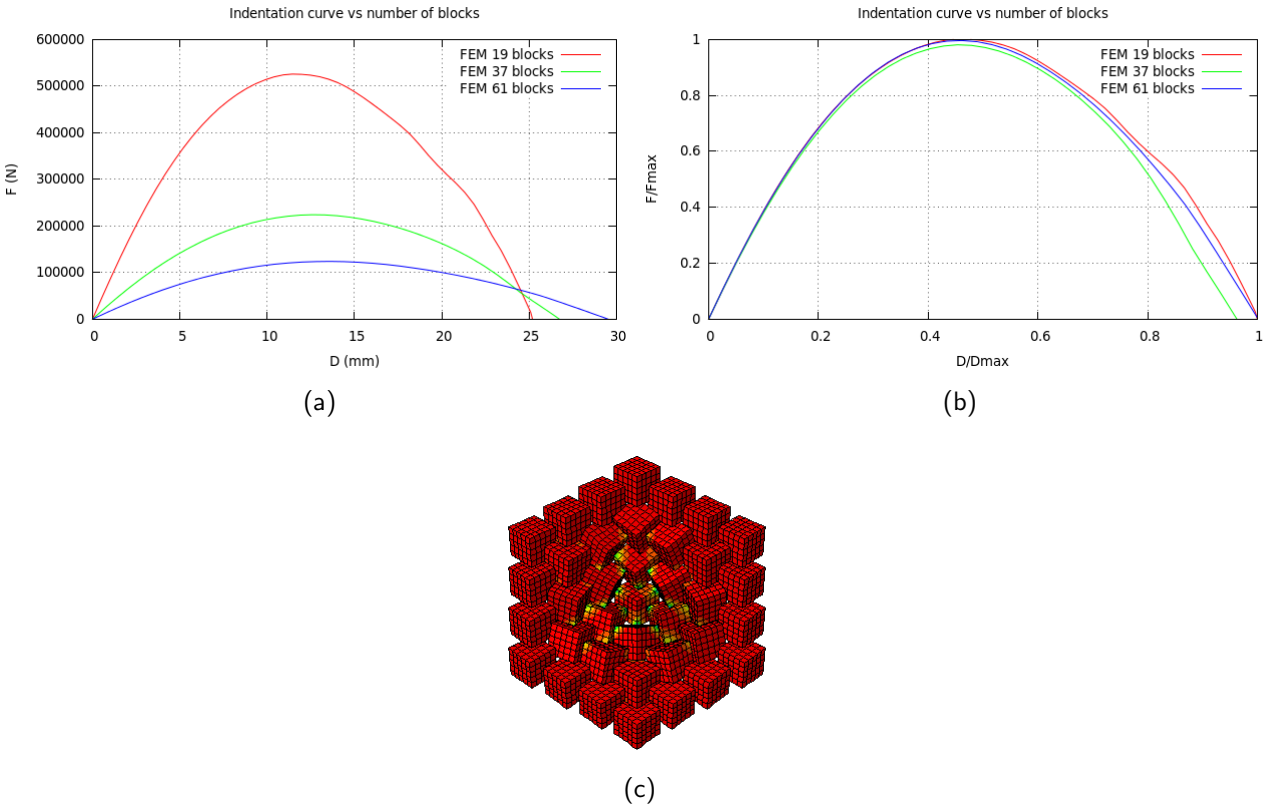


FIGURE 4.11 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du nombre de cubes - comparaison d'un assemblage de 19 cubes avec un assemblage de 37 cubes et un assemblage de 61 cubes : a) Courbes d'indentation, b) Courbes maîtresses, c) Assemblage de 37 cubes

Comme dans les paragraphes précédents, on peut observer une courbe maitresse sur la figure 4.11b.

On constate que la pente initiale diminue avec le nombre de blocs ainsi que l'effort maximal qui est atteint pour une valeur de déplacement plus grande et le déplacement à perforation est aussi plus grand (voir figures 4.12a, 4.12b, 4.12c).

Plus le nombre de blocs libres est grand et plus les rotations deviennent plus faciles, il est donc possible de déformer plus fortement l'assemblage, mais avec un effort moins important.

4.1.3.6 Étude du comportement d'un assemblage de cubes en fonction de sa géométrie

Nous allons maintenant étudier le comportement d'un assemblage en fonction de la géométrie de l'assemblage. Pour cela, nous allons comparer la réponse mécanique d'un assemblage de 61 cubes positionnés dans un hexagone (4 couronnes) avec celle d'un assemblage de 61 cubes positionnés dans un rectangle comparable aux essais du chapitre 2. La couronne extérieure est toujours encastrée et il y a donc trois couronnes de cubes libres à l'intérieur

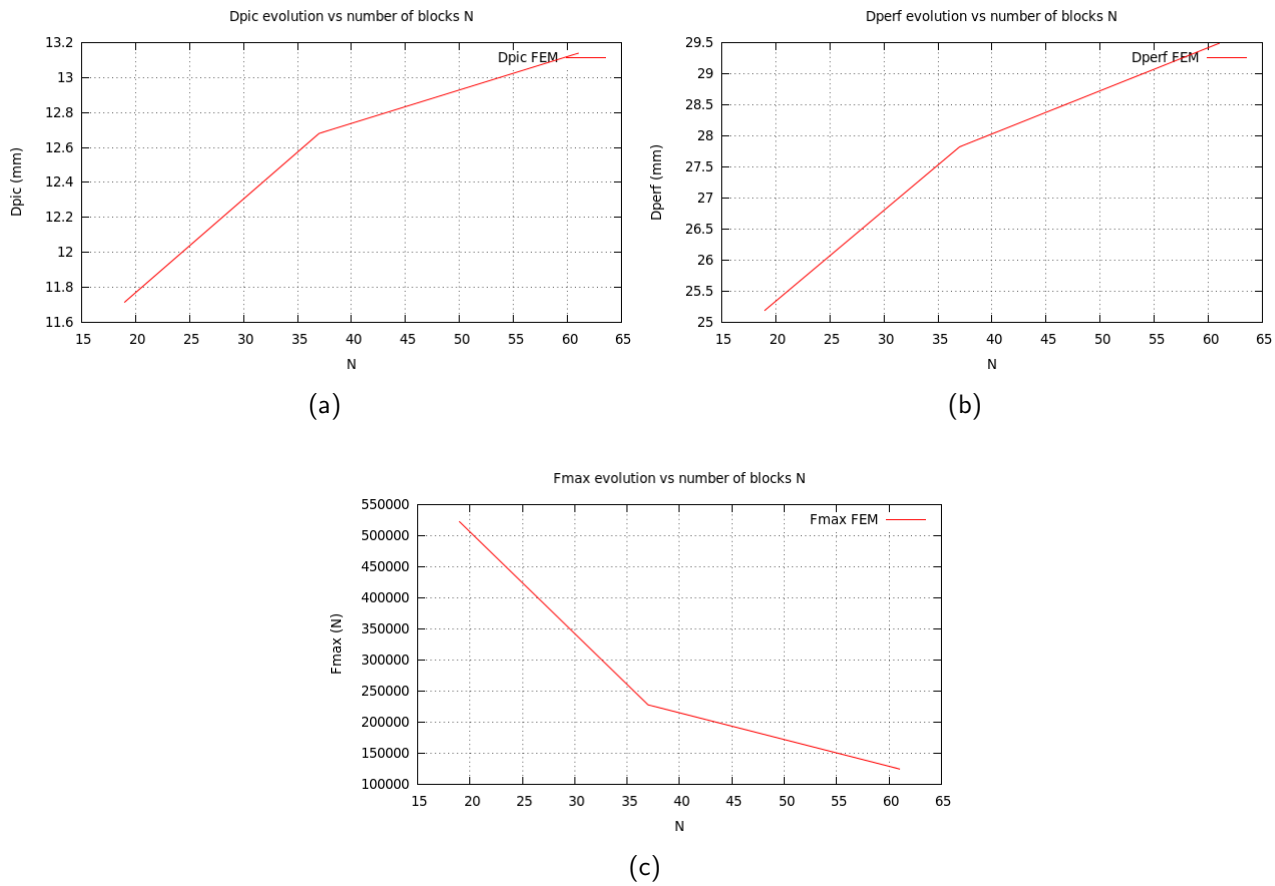


FIGURE 4.12 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de cubes de 30mm de côté par éléments finis - Évolution des paramètres caractéristiques en fonction du nombre de cubes - comparaison d'un assemblage de 19 cubes avec un assemblage de 37 cubes et un assemblage de 61 cubes : a) Évolution du déplacement à force maximale, D_{pic}, en fonction du nombre de cubes, b) Évolution du déplacement à force nulle, D_{perf}, en fonction du nombre de cubes, c) Évolution de la force maximale, F_{max}, en fonction du nombre de cubes

de l'assemblage. Seul le cube central est indenté. La figure 4.13c montre que l'assemblage rectangulaire est le plus rigide.

Cela peut s'expliquer par l'effet des conditions de bords. Celles-ci sont homogènes dans le cas d'un assemblage hexagonal qui respecte les symétries des contacts ce qui n'est pas le cas dans l'assemblage rectangulaire. Le bloc central est entouré par 4 blocs dans un sens et par 10 blocs dans l'autre sens. Le bloc central de l'assemblage hexagonal est entouré de 3 couronnes de blocs libres, alors que celui de l'assemblage rectangulaire n'est entouré que d'une seule couronne de blocs libres. Les conditions de bord sont donc plus fortes dans la direction comprenant le moins de blocs.

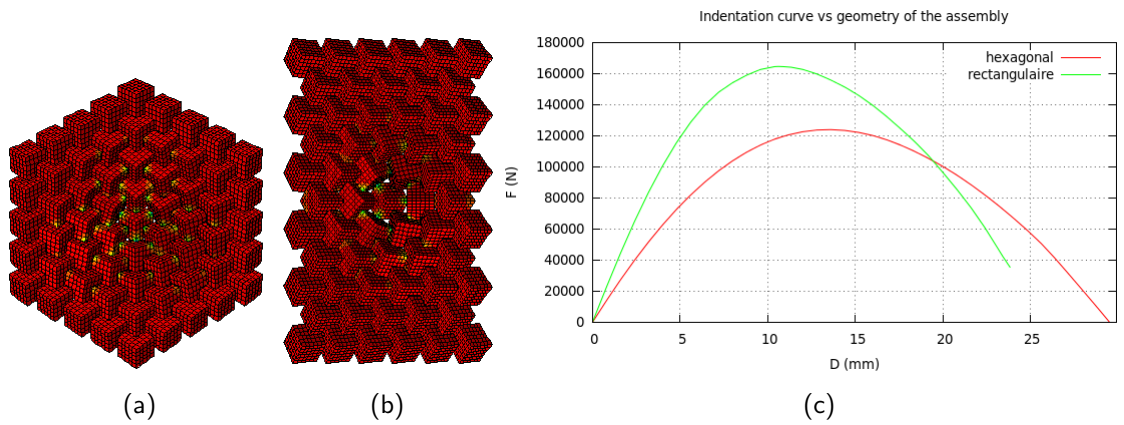


FIGURE 4.13 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 61 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence de la géométrie de l'assemblage : a) Assemblage de cubes hexagonal, b) Assemblage de cubes rectangulaire, c) Courbes d'indentation

4.1.3.7 Étude du comportement d'un assemblage élémentaire de 19 cubes en fonction du sens de l'indentation

Nous allons étudier dans cette section l'influence du sens de l'indentation sur la réponse mécanique d'un assemblage élémentaire de 19 cubes. Les courbes résultantes apparaissent sur la courbe de la figure 4.14a.

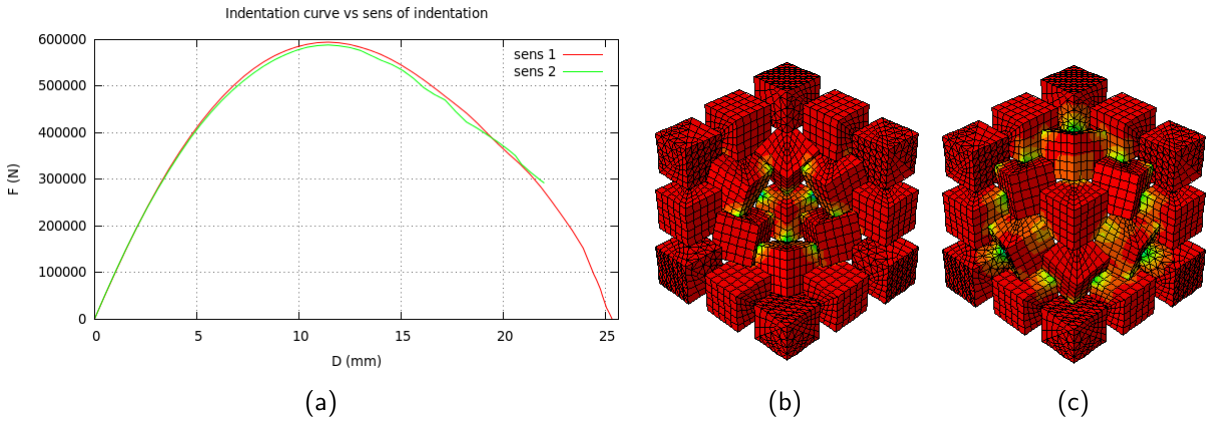


FIGURE 4.14 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du sens de l'indentation : a) Assemblage dans le sens 1, b) Assemblage dans le sens 2, c) Courbes d'indentation

Les deux courbes se superposent parfaitement, il n'y a donc aucune influence du sens de l'indentation sur le comportement d'un assemblage autobloquant de cubes.

4.1.3.8 Étude du comportement d'un assemblage élémentaire de 19 cubes en fonction de l'endommagement

Nous allons étudier le comportement d'un assemblage élémentaire de 19 cubes composés de cubes endommagés grâce à des simulations par éléments finis. Puisqu'il est impossible de retirer un cube dans l'assemblage autobloquant sans détruire la structure, l'endommagement des blocs sera pris en compte en réduisant leur module élastique. Nous avons donc utilisé un assemblage donc le module d'Young de chacun des cubes est de 70GPa. Puis le module d'Young d'un des cubes a été divisé par 10 (7GPa).

Deux simulations ont été effectuées, la première où le module du cube se trouvant en dessous du cube indenté (cube 2) est fixé à 7GPa (figure 4.15a) et la seconde où le module du cube se trouvant au-dessus du cube indenté (cube 4) est fixé à 7GPa (figure 4.15b). Les courbes résultantes sont affichées sur la figure 4.15c et comparées à la courbe d'indentation de l'assemblage de 19 cubes non endommagés.

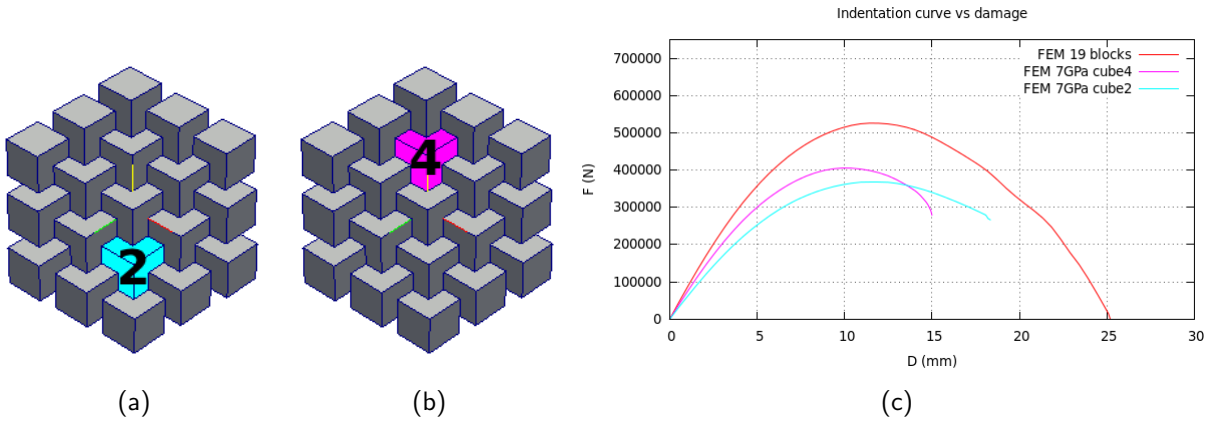


FIGURE 4.15 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'endommagement d'un cube sur 19 cubes : a) Endommagement du bloc 2, b) Endommagement du bloc 4, c) Courbes d'indentation

La rigidité de l'assemblage change selon le cube endommagé choisi. Cela peut être expliqué par le fait que dans l'assemblage, il existe deux types de cubes, les cubes qui aident à l'indentation et les cubes qui résistent à l'indentation. En effet, dans l'assemblage étudié, le cube 2 résiste à l'indentation et le cube 4 aide à l'indentation, donc la rigidité est plus grande lorsque le cube 4 est endommagé que lorsque le cube 2 est endommagé.

Par symétrie, il apparaît que les cubes 8 et 12 (voir figure 4.16a) jouent le même rôle que le cube 2, c'est-à-dire qu'ils résistent à l'indentation. Ces blocs forment ce qu'on appelle les lignes de force. Alors que les cubes 7 et 11 (voir figure 4.16b) jouent le même rôle que le cube 4, c'est-à-dire qu'ils aident à l'indentation. Ces blocs forment ce qu'on appelle les lignes faibles.

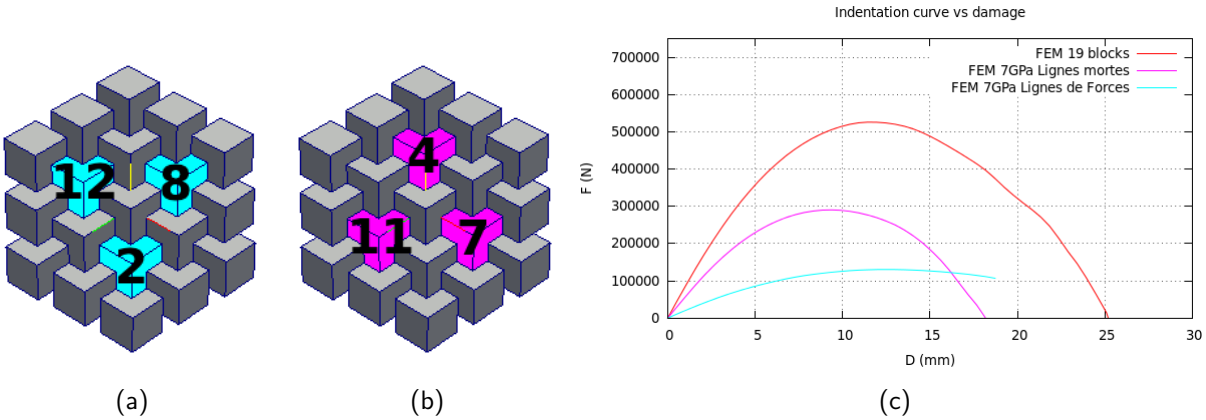


FIGURE 4.16 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'endommagement de 3 cubes sur 19 cubes : a) Lignes de force, b) Lignes mortes, c) Courbes d'indentation

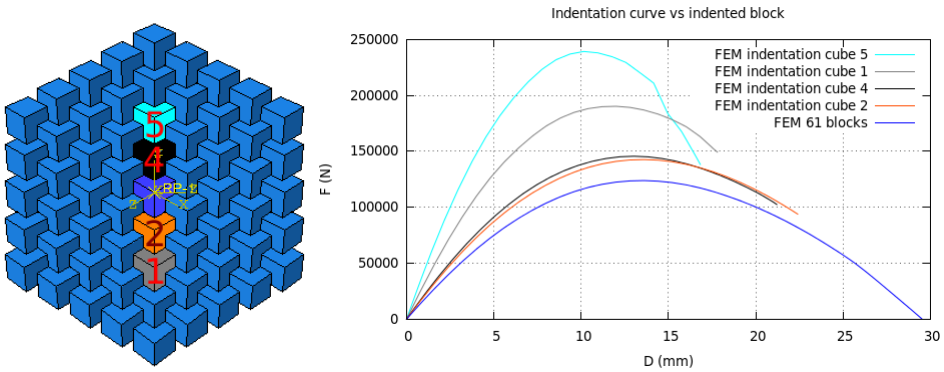
Pour vérifier cette idée de ligne de force, nous réalisons deux simulations complémentaires. Dans la première simulation, les trois blocs des lignes de force illustrées sur la figure 4.16a ont un module d'Young de 7GPa. Dans la seconde simulation, les trois blocs des lignes faibles illustrées sur la figure 4.16b ont un module d'Young de 7GPa. En observant les courbes de la figure 4.16c, il apparaît que les effets de l'endommagement sont amplifiés.

Typiquement lorsque les 3 blocs 2, 8 et 12 sont retirés, la force maximale chute de 520kN à 135kN (basse de 400kN). Lorsque seul le bloc 2 était retiré, la force diminuait à 380kN (baisse de 14OkN). L'effet de l'endommagement est donc presque proportionnel au nombre de blocs endommagés sur la ligne de force. On retrouve ces résultats lorsque l'on endommage les blocs 4,7 et 11, la force maximale est réduite de 360kN soit 3 fois la valeur pour l'endommagement du bloc 4 seul (120kN).

4.1.3.9 Étude de l'effet de la position du point d'indentation

Nous allons étudier l'influence du choix du bloc à indenter. Nous avons choisi les 4 blocs se trouvant sur la même ligne que le bloc central et se rapprochant du bord de l'assemblage (4.17a). Les cubes 1 et 5 sont ceux qui se trouvent le plus proche du bord. Les courbes d'indentation sont tracées sur la figure 4.17b.

Les courbes d'indentation des cubes les plus proches du bord (1 et 5) sont les courbes montrant la plus grande pente à l'origine. Cela peut s'expliquer par le fait que les blocs qui sont les plus proches de la couronne extérieure sont en appui sur des blocs encastrés et donc il est plus difficile de les pousser. Donc sur les petits assemblages, les conditions de bord ont une grande influence sur la rigidité de l'assemblage.



(a) (b)

FIGURE 4.17 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 61 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'effet des conditions de bord sur l'indentation : a) Blocs indenté, b) Courbes d'indentation

La courbe d'indentation du cube 5 est celle qui a la pente à l'origine la plus grande. Cela est dû au fait que les blocs se trouvant à côté de ce bloc et participant aux conditions de bord sont des blocs résistant à l'indentation alors que dans le cas du bloc 1, ces blocs contribuent à l'indentation.

4.1.3.10 Étude du comportement d'un assemblage de cubes en fonction de l'endommagement géométrique

Nous avons pu constater lors des expériences que les cubes étaient endommagés géométriquement : certaines arêtes ont disparu au cours de l'indentation. Il est possible de reproduire cet endommagement en plaçant des cubes tronqués dans l'assemblage.

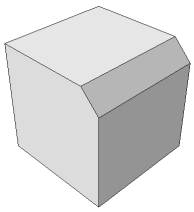


FIGURE 4.18 – cube tronqué

Pour cela, nous allons tronquer des cubes selon l'une de leurs arrêtes (voir figure 4.18). Les trois cubes des lignes de force ont été tronqués dans le premier cas (figure 4.19a) et dans le second cas, les trois cubes des lignes faibles (figure 4.19b).

Dans le cas des lignes faibles tronquées, la rigidité est la même que celle de l'assemblage non endommagé. La différence commence après le maximum de force. La perforation se fait

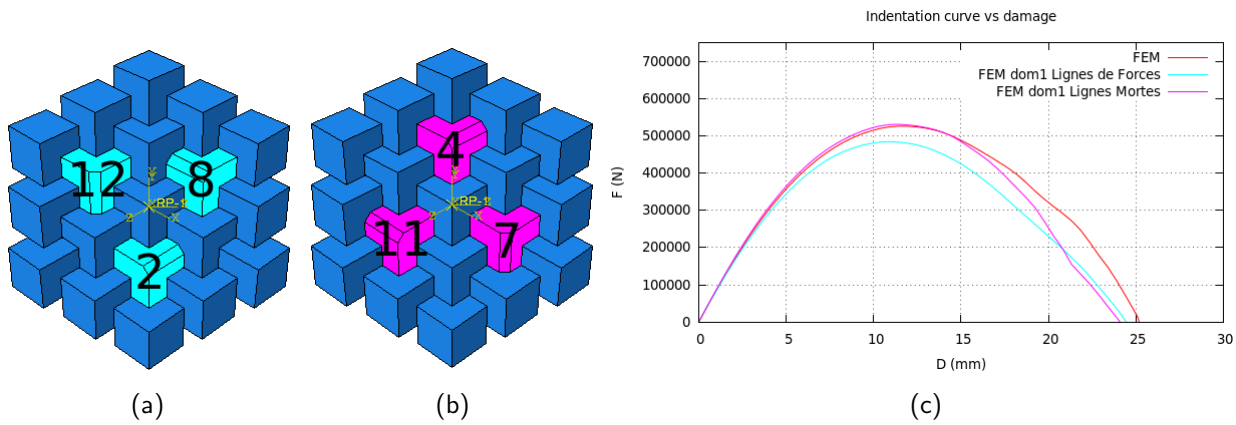


FIGURE 4.19 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence de l'endommagement géométrique d'un assemblage de 19 cubes : a) Endommagement géométrique sur les lignes de force, b) Endommagement géométrique sur les lignes faibles, c) Courbes d'indentation

pour un déplacement plus faible. Dans le cas des lignes de force tronquées, la rigidité est la même au tout début. Puis avant d'atteindre le maximum d'effort, la rigidité diminue et donc l'effort maximal est plus faible et est atteint pour un déplacement plus faible et la perforation se produit aussi à une valeur de déplacement plus faible.

4.1.3.11 Rigidification d'un assemblage de 19 cubes

Il est aussi possible de rigidifier une structure autobloquante de cubes en augmentant le module d'Young de certains blocs. Nous allons étudier le comportement d'un assemblage de 19 cubes composés de cubes rigidifié grâce à des simulations par éléments finis. Pour cela, nous avons utilisé un assemblage donc le module d'Young de chacun des cubes est de 70GPa. Puis le module d'Young d'un des cubes a été multiplié par 10 (700GPa).
Deux simulations ont été effectuées, la première où le module du cube se trouvant en dessous du cube indenté (cube 2) est fixé à 700GPa (figure 4.20a) et la seconde où le module du cube se trouvant au-dessus du cube indenté (cube 4) est fixé à 700GPa (figure 4.20b). Les courbes résultantes sont comparées à la courbe d'indentation de l'assemblage de 19 cubes non rigidifiés (figure 4.20c).

Comme dans la partie concernant l'endommagement élastique, le cube 2 résiste à l'indentation alors que le cube 4 aide à l'indentation. Donc lorsque le cube 2 voit son module élastique augmenter, la rigidité de l'assemblage augmente, alors que lorsque le module du cube 4 augmente, la rigidité de l'assemblage augmente très peu.

Comme dans le cas de l'endommagement, il est possible d'amplifier les effets de la rigidification en augmentant les rigidités des blocs situés sur les lignes de force (figure 4.21a)

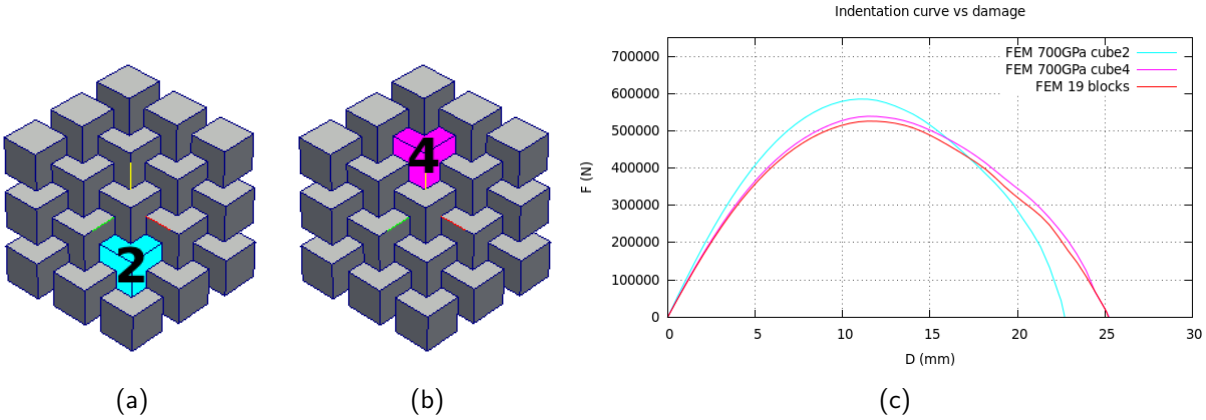


FIGURE 4.20 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de la rigidification d'un cube sur 19 cubes : a) Cube 2 plus rigide, b) Cube 4 plus rigide, c) Courbes d'indentation

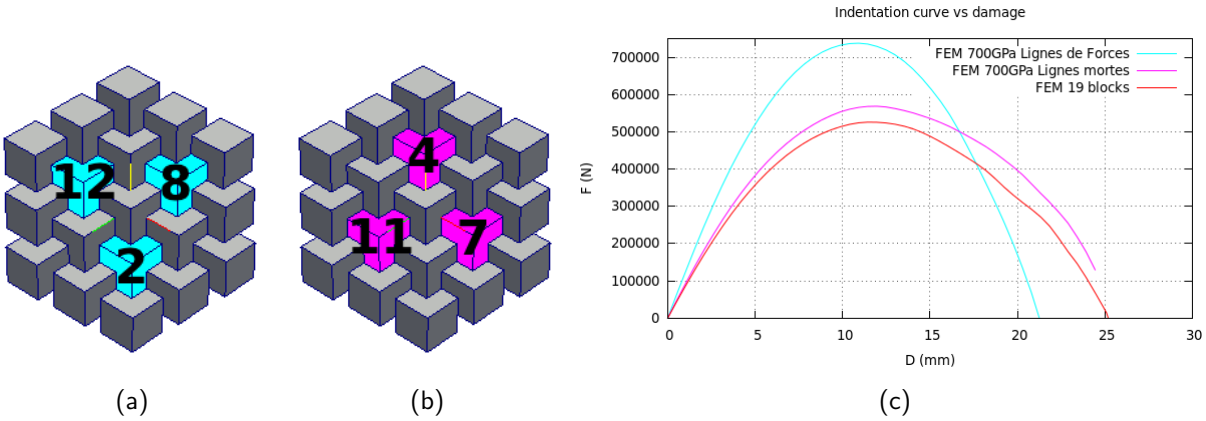


FIGURE 4.21 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Étude de la rigidification de 3 cubes sur 19 cubes : a) Cubes des lignes de force plus rigides, b) Cubes des lignes faibles plus rigides, c) Courbes d'indentation

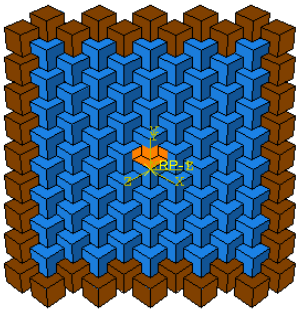
et/ou sur les lignes faibles (figure 4.21b) comme on peut le voir sur la figure 4.21c.

Les mêmes simulations ont été effectuées en utilisant les symétries de l'assemblage. Dans la première simulation, les trois cubes de la figure 4.21a ont un module d'Young de 700GPa. Dans la seconde simulation, les trois cubes de la figure 4.21b ont un module d'Young de 700GPa. Comme dans le cas de l'endommagement, l'effet de durcissement s'additionne et est multiplié par 3 lorsque 3 blocs ont leur module élastique modifié.

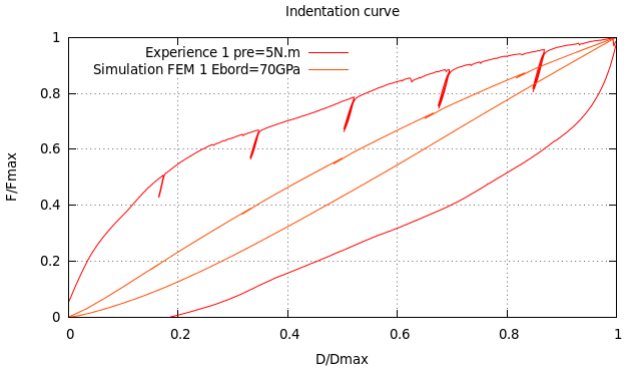
4.1.3.12 Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis :

Pendant l'étude du comportement d'un assemblage de 68 cubes en alumine (voir chapitre 2), nous avons pu étudier l'évolution de la rigidité de cet assemblage en fonction de la précontrainte

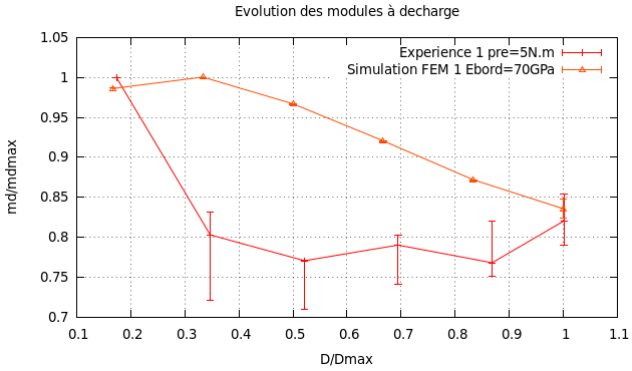
et de l'endommagement. Nous allons voir s'il est possible de reproduire cette expérience grâce à des simulations par éléments finis. L'assemblage rectangulaire de 68 blocs a été reproduit et indenté par éléments finis, les cubes modélisés ont le module d'Young de l'alumine (E=390GPa).



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.22 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 68 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Comparaison de la simulation d'un assemblage de 68 cubes avec l'expérience : a) Assemblage de 68 blocs, b) Courbes d'indentation normalisées, c) Modules à décharge normalisés

Le cadre est modélisé par une couronne de 36 cubes supplémentaires ayant le module d'Young de l'aluminium (70GPa) et qui sont fixes. Le coefficient de frottement est fixé à f=0.4. Les quatre cubes centraux sont indentés. Les courbes d'indentation sont normalisées puis tracées sur la figure 4.22b.

Les courbes issues des simulations et des expériences ont le même comportement. Les hystérésis de l'assemblage simulé sont très fermées et donc difficiles à distinguer. Cela est dû au fait que les cubes du bord sont encastrés.

D'ailleurs la rigidité apparente de l'assemblage simulé est bien plus grande que celui de l'assemblage expérimental.
Lorsque les rigidités apparentes sont normalisées (par la rigidité maximale et par D_{perf}), il apparaît que les rigidités apparentes diminuent toutes les deux durant l'indentation.

Mais dans le cas de l'expérience, le module à décharge diminue fortement au début de l'indentation alors que dans les simulations, la rigidité apparente évolue faiblement pour ensuite diminuer plus rapidement. On observe donc un comportement similaire entre les expériences et les simulations, mais les modules à décharge évoluent avec des courbures opposées.

4.1.3.13 Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis : effet de la précompression

Il est possible de changer les conditions de bord en modifiant le module d'Young des cubes servant de cadre à l'assemblage. Dans ce paragraphe, le module d'Young a été changé et fixé à 7GPa.

On peut constater que les courbes issues des simulations (fig.4.23a) montrent un comportement

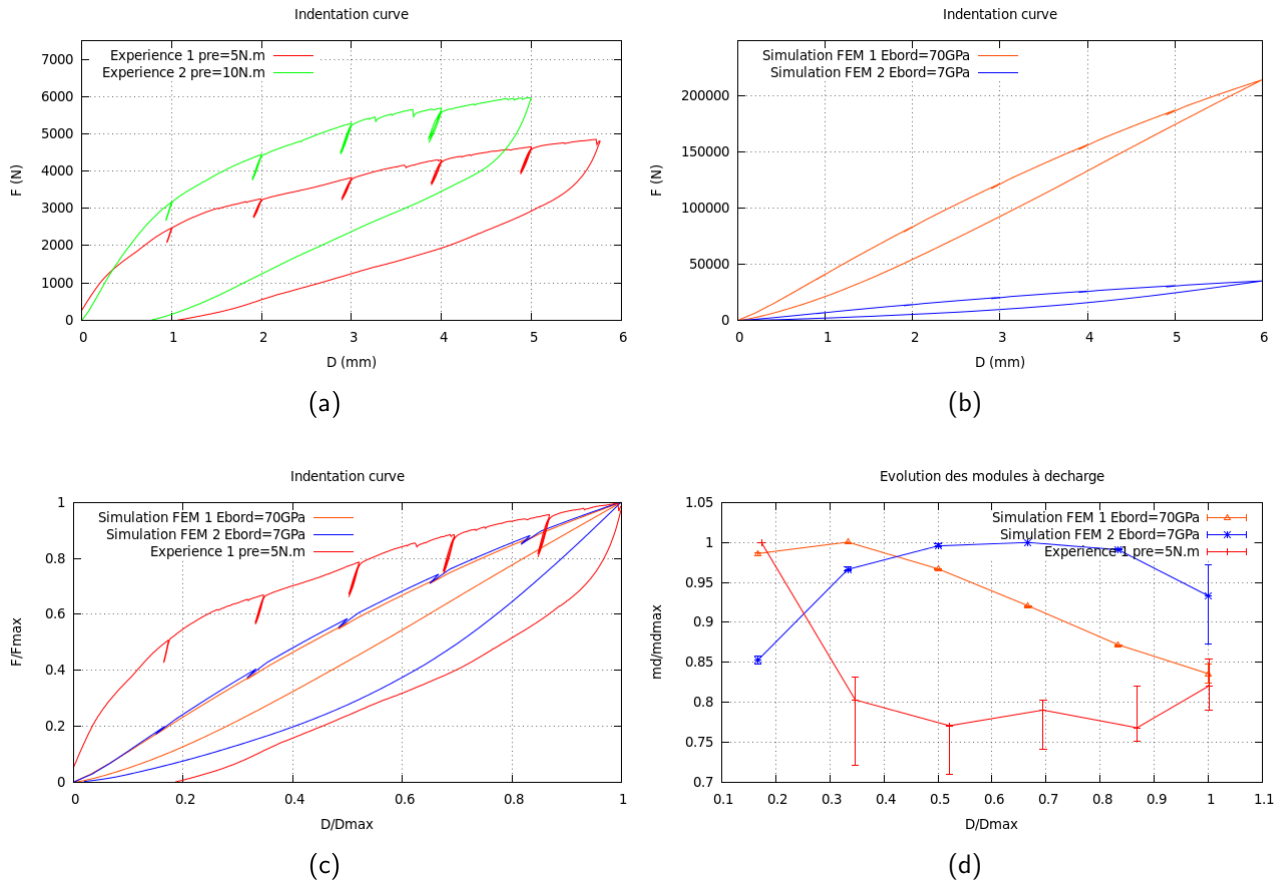


FIGURE 4.23 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 68 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Comparaison de la simulation d'un assemblage de 68 cubes avec l'expérience - Étude de l'effet de la précompression : a) Courbes d'indentation expérimentales normalisées, b) Courbes d'indentation simulées, c) Comparaison des courbes d'indentation expérimentale (essai à 5N.m) et simulées normalisées, d) Comparaison des modules à décharge normalisés provenant des indentations expérimentale (essai à 5N.m) et simulées

similaire à celui obtenu lors des expériences (fig.4.23a) qui est que lorsque la précompression augmente, la pente initiale augmente et donc la rigidité de l'assemblage augmente également (voir aussi paragraphe 4.1.3.4).

Les courbes sont ensuite normalisées par Fmax et Dmax puis tracées sur la figure 4.23c. Ces courbes montrent que lorsque la précompression (quand on divise par 10 le module d'Young des blocs du cadre) diminue les hystérésis de la courbe d'indentation sont plus ouvertes.

L'évolution des modules à décharges a été normalisée sur la figure 4.23d.

Comme dans le paragraphe précédent, toutes les rigidités diminuent, mais avec des courbures inversées entre les éléments finis et expériences. Cependant, une différence apparaît lorsque la précompression diminue par éléments finis : la rigidité augmente pour ensuite diminuer.

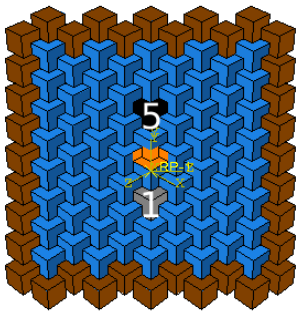
4.1.3.14 Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis : effet de l'endommagement d'un cube

Le module d'Young des cubes du cadre est à nouveau fixé à 70GPa. Nous allons maintenant essayer de reproduire l'effet de l'endommagement grâce aux simulations numériques par éléments finis. Pour cela, nous avons diminué le module d'Young d'un des cubes de l'assemblage. Les évolutions des deux rigidités normalisées ont été tracées sur la courbe 4.24.

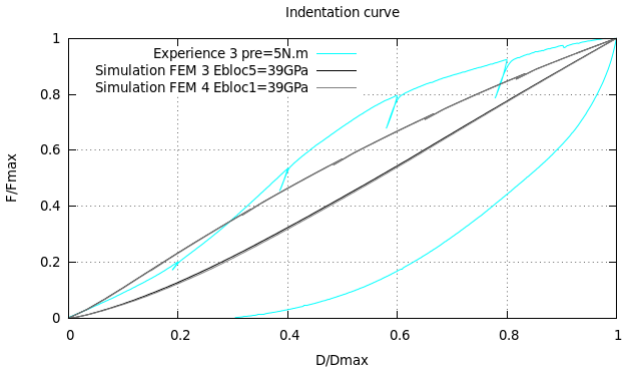
Dans le cas des éléments finis, on observe le même comportement pour un assemblage intact et un assemblage contenant un cube endommagé. La pente initiale est plus faible que dans le cas d'un assemblage intact simulé par éléments finis et diminue encore durant l'indentation alors que pendant l'expérience, l'assemblage endommagé voit sa rigidité augmenter durant l'indentation. Dans le cas des expériences, l'endommagement a changé la géométrie des cubes alors que dans le modèle éléments finis, seul le module d'Young a été changé. Là encore, les modules à décharge diminuent alors que dans les expériences ces modules augmentent.

4.1.3.15 Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis : effet de l'endommagement géométrique

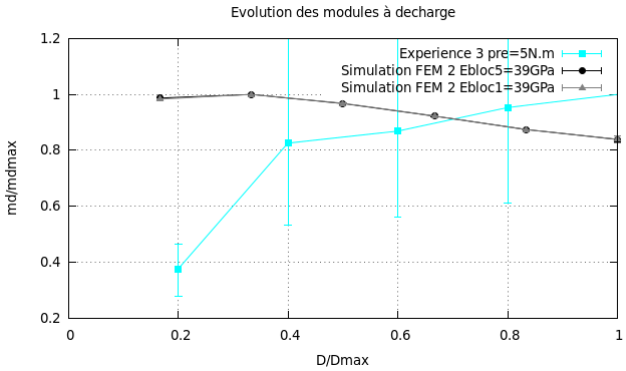
Nous avons ensuite essayé de reproduire l'effet de l'endommagement grâce aux simulations numériques par éléments finis. Pour cela, nous avons tronqué des cubes de l'assemblage. Les courbes obtenues ont été normalisées et tracées sur la figure 4.25a. L'évolution des deux rigidités normalisées a été tracée sur la courbe 4.25b. Dans le cas des éléments finis, la rigidité augmente pour ensuite diminuer. Le comportement est différent entre les expériences et les simulations. Nous ne pouvons pas reproduire par simulation numérique l'augmentation de la rigidité apparente observée expérimentalement.



(a)

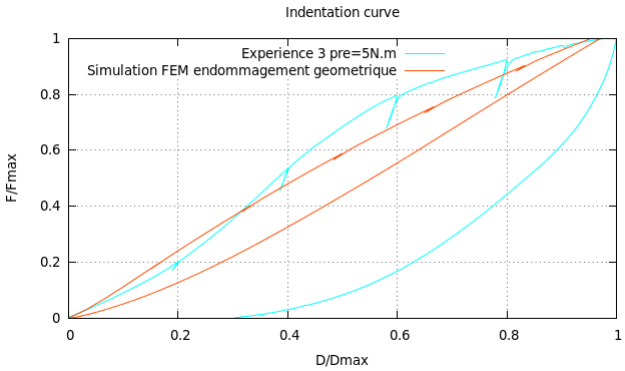


(b)

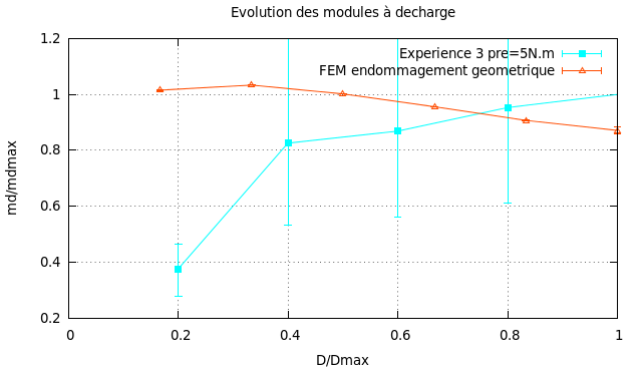


(c)

FIGURE 4.24 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 68 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Comparaison de la simulation d'un assemblage de 68 cubes avec l'expérience - Étude de l'effet de l'endommagement : a) Assemblage de 68 blocs, b) Courbes d'indentation normalisées, c) Modules à décharge normalisés



(a)



(b)

FIGURE 4.25 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 68 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Comparaison de la simulation d'un assemblage de 68 cubes avec l'expérience - Étude de l'effet de l'endommagement géométrique : a) Courbes d'indentation normalisées, b) Modules à décharge normalisés

4.1.3.16 Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis : effet de la plastification

Toujours dans l'optique de reproduire l'effet de l'endommagement grâce aux simulations numériques par éléments finis, nous avons ajouté de la plasticité aux cubes du lot

Les courbes obtenues ont été normalisées et tracées sur la figure 4.26a.

Chaque cube a un comportement élastique parfaitement plastique avec une valeur de limite

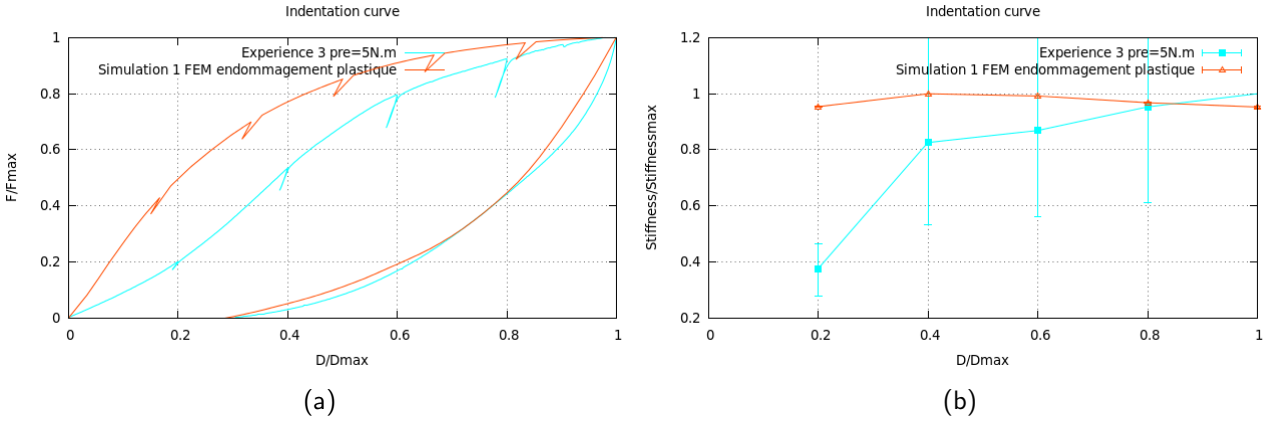


FIGURE 4.26 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 68 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Comparaison de la simulation d'un assemblage de 68 cubes avec l'expérience - Étude de l'effet de l'endommagement plastique - Première indentation : a) Courbes d'indentation normalisées, b) Modules à décharge normalisés

d'élasticité fixée à $\sigma_y = 225MPa$. L'évolution des deux rigidités normalisées apparaît sur la courbe 4.26b.

Le comportement est toujours différent entre les expériences et les simulations. En revanche, les hystérésis sont plus ouvertes. Nous ne pouvons toujours pas reproduire par simulation numérique l'augmentation de la rigidité observée expérimentalement.

En effectuant une nouvelle indentation à la suite de la première (dans la même simulation), on obtient une nouvelle courbe d'indentation ainsi qu'une nouvelle courbe d'évolution des modules à décharge qui sont superposée aux premières courbes (voir figures 4.27a et 4.27b).

On peut constater sur ces courbes que le changement de courbure obtenu expérimentalement a pu être reproduit numériquement. On peut expliquer ce phénomène par le fait que pendant la première indentation, la plasticité parfaite a engendré une déformation géométrique des blocs. C'est donc un assemblage endommagé qui sera sollicité pendant la seconde indentation.

Comme constaté pendant les expériences, les cubes sont en contact sur leur partie endommagée au début de l'indentation qui est donc plus facile. Puis au fur et à mesure de l'indentation les cubes tournent les uns par rapport aux autres et les cubes retrouvent un contact sur leur partie saine. L'effort nécessaire à l'indentation reprend une évolution similaire à celle d'un assemblage non endommagé.

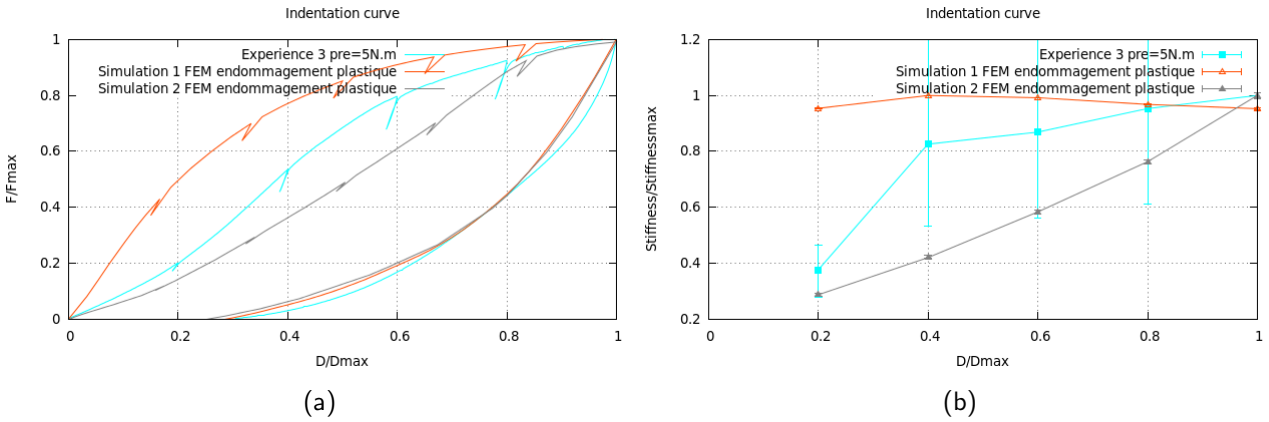


FIGURE 4.27 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 68 cubes de 30mm de côté par éléments finis - Comparaison de la simulation d'un assemblage de 68 cubes avec l'expérience - Étude de l'effet de l'endommagement plastique - Seconde indentation : a) Courbes d'indentation normalisées, b) Modules à décharge normalisés

4.2 Cas des ostéomorphes

Nous avons modélisé un assemblage hexagonal de 19 blocs ostéomorphes. Nous allons conduire les mêmes simulations par éléments finis que celles menées pour les cubes. La taille des blocs est de L=4cm et avec un retrait de H=10cm et une épaisseur de e=L/2=2cm.

4.2.1 Simulations par éléments finis

Les résultats de la simulation par éléments finis apparaissent, sur la figure 4.28. La courbe d'indentation 4.28c a la même allure que celle trouvée précédemment dans le cas des cubes.

L'interprétation de cette courbe permet de connaître les phénomènes physiques se produisant à l'intérieur de l'assemblage au cours de l'indentation. Comme pour les assemblages de cubes, l'effort augmente jusqu'à une valeur Fmax=370kN obtenue pour un déplacement de l'indenteur (Dpic=10mm). Il est d'abord difficile d'enfoncer le bloc ostéomorphe central. Et plus ce bloc central est indenté et plus l'effort à fournir pour l'indenter doit être grand. Puis l'effort diminue, et plus le bloc central est indenté et moins l'effort à fournir pour l'indenter est faible. L'effort s'annule en fin d'indentation avec un déplacement permanent Dperf. Le bloc ostéomorphe central est alors sur le point de passer à travers l'assemblage. Remarquons que la valeur maximale de l'effort est atteinte pour une valeur de déplacement égale à la moitié de l'épaisseur du bloc (Dpic=H/2).

Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis :

Nous allons maintenant comparer les résultats numériques aux résultats obtenus lors des expériences. Pendant les expériences, nous avions indenté un assemblage élémentaire de 19 blocs. L'assemblage est composé de 7 blocs pleins (le bloc central ainsi que la première

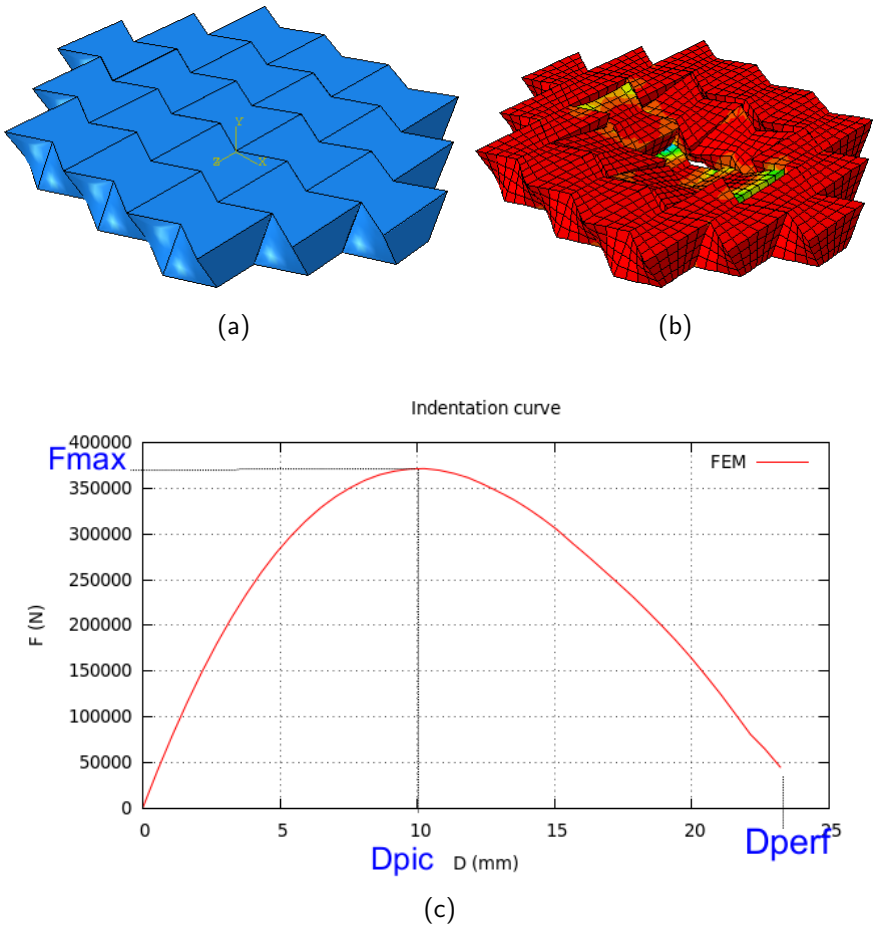


FIGURE 4.28 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis : a) Assemblage avant indentation, b) Assemblage après indentation, c) Courbes d'indentation

couronne) et de 12 blocs percés formant la couronne extérieure. Un câble passe dans cette couronne percée pour appliquer la précompression latérale. Le tout est ensuite fixé à un support en bois percé en son centre. Le coefficient de frottement entre les blocs était de 0.7 et le module d'Young du matériau utilisé (Verogray 30µ) de 3GPa. Nous allons effectuer la même simulation que pour les assemblages de cubes excepté que le module d'Young est maintenant fixé à 3GPa et le coefficient de frottement à 0.7. L'indentation sera conduite jusqu'à 12mm avec une décharge partielle programmée tous les millimètres, comme dans l'expérience. La courbe d'indentation obtenue par les éléments finis apparaît sur la figure 4.29a et la courbe de l'indentation expérimentale sur la figure 4.29b.

Les courbes adoptent la même forme parabolique que celle obtenue précédemment. Dans les deux cas, l'effort maximal est atteint autour de 6mm et l'assemblage perfore autour de 14mm. Par contre, la valeur de l'effort est beaucoup plus grande par éléments finis que pour l'expérience. Cela peut s'expliquer par la différence dans l'application de la précompression. Dans le cas des éléments finis, les blocs du bord sont très précontraints, car ils sont encastrés. Dans le cas des expériences, les conditions de bord sont plus difficiles à contrôler. Les blocs

sont contraints par des colliers de serrage qui ont un comportement élastique. D'ailleurs, il est difficile de serrer les colliers très fortement sans les casser. De plus l'application de la précompression n'est pas homogène : certains blocs sont moins précontraints que les autres ce qui implique la présence de jeux qui n'existent pas lors des simulations.

Les modules à décharge ont aussi été tracés sur la figure 4.29c dans le cas des simulations et sur la figure 4.29d dans le cas des expériences. Les modules à décharge obtenus numériquement diminuent jusqu'à 5mm se stabilisent jusqu'à 7mm puis diminuent à nouveau jusqu'à la fin de l'indentation. Les modules à décharge obtenus par l'expérience sont bien plus faibles et n'évoluent pas de la même façon que par les éléments finis : ils augmentent jusqu'à 6mm puis diminuent jusqu'à la fin de l'indentation.

4.2.2 Étude paramétrique

Nous allons maintenant faire varier les paramètres de fabrication tels que le module d'Young ainsi que la taille des blocs, le coefficient de frottement, la précompression latérale et le nombre de blocs ainsi que d'autres paramètres tels que l'endommagement, le sens d'indentation et la géométrie de l'assemblage. L'effet de ces paramètres sur la réponse de l'assemblage à une indentation sera étudié par éléments finis. Certains des résultats obtenus par éléments finis seront comparés à des résultats obtenus par des expériences menées dans les mêmes conditions sur un assemblage de 19 blocs ostéomorphes.

4.2.2.1 Étude du comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes en fonction du module d'élasticité du matériau constitutif

Comme pour les cubes, différentes valeurs de modules d'Young ont été testées (3, 16, 70 et 390GPa).

La courbe 4.30a montre qu'une fois encore la réponse en indentation dépend linéairement du modèle d'Young des blocs. En normalisant les courbes (voir figure 4.30b), il apparaît qu'elles se superposent pour former une courbe maîtresse. Cette courbe a une forme parabolique d'équation :

$$\frac{F}{F_{max}} = -4 * \frac{D}{D_{perf}} * (\frac{D}{D_{perf}} - 1)$$

Bien que la géométrie des blocs et leurs agencements soient très différents entre un assemblage de cubes et un assemblage de blocs ostéomorphes, les réponses en indentation se révèlent très similaires avec une courbe maitresse d'équation parabolique.

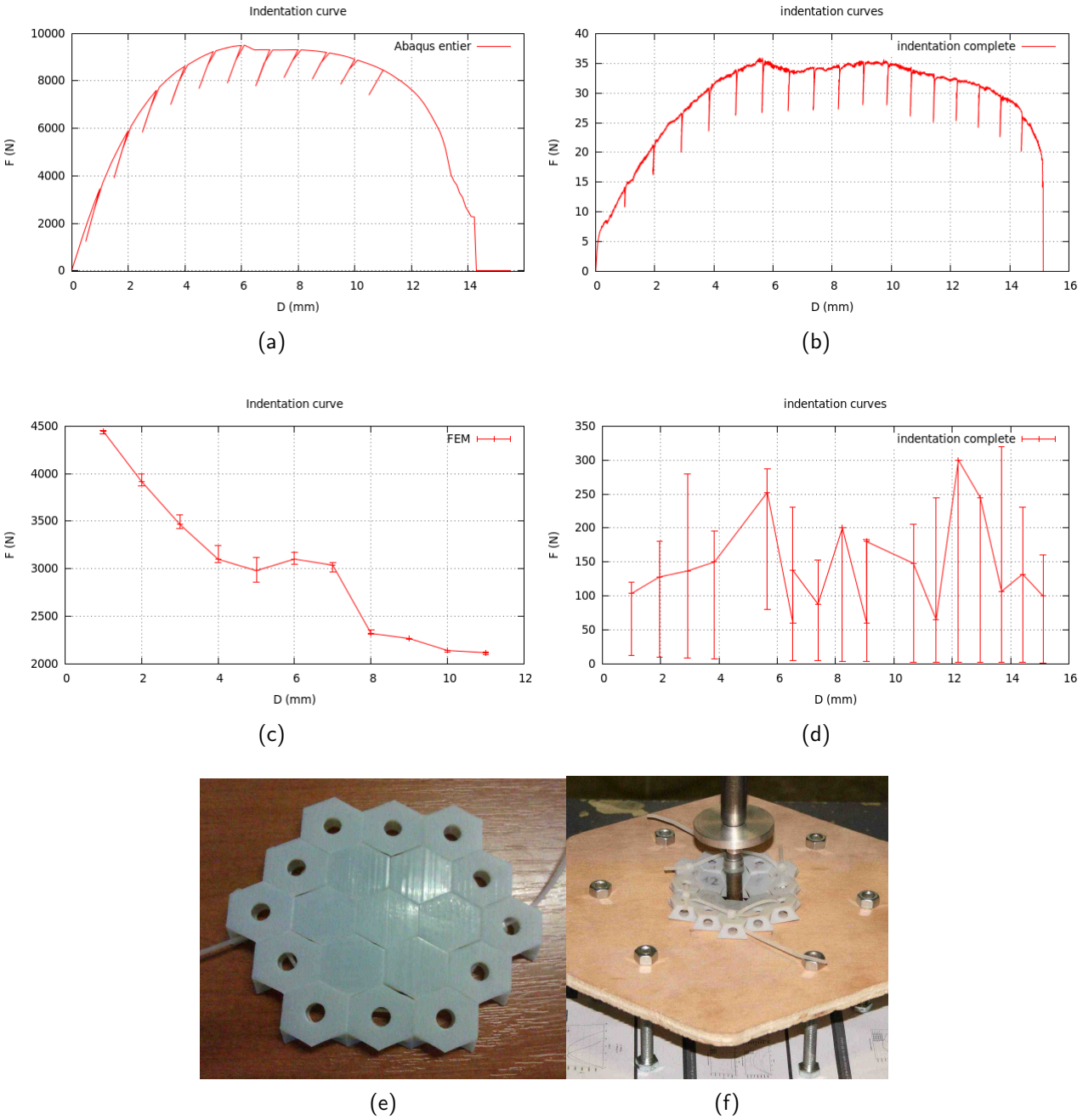


FIGURE 4.29 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Courbes d'indentation de 15mm : a) Courbes d'indentation numériques, b) Courbes d'indentation expérimentales, c) Modules à décharge numériques, d) Modules à décharge expérimentales, e) Assemblage de 19 blocs, f) Photo de l'assemblage après indentation

4.2.2.2 Étude du comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes en fonction de la taille des blocs

Des assemblages composés de blocs ostéomorphes de différentes tailles ont été simulés. Les tailles testées sont : 10mm, 20mm, 30mm et 40mm. Des simulations par éléments finis ont été

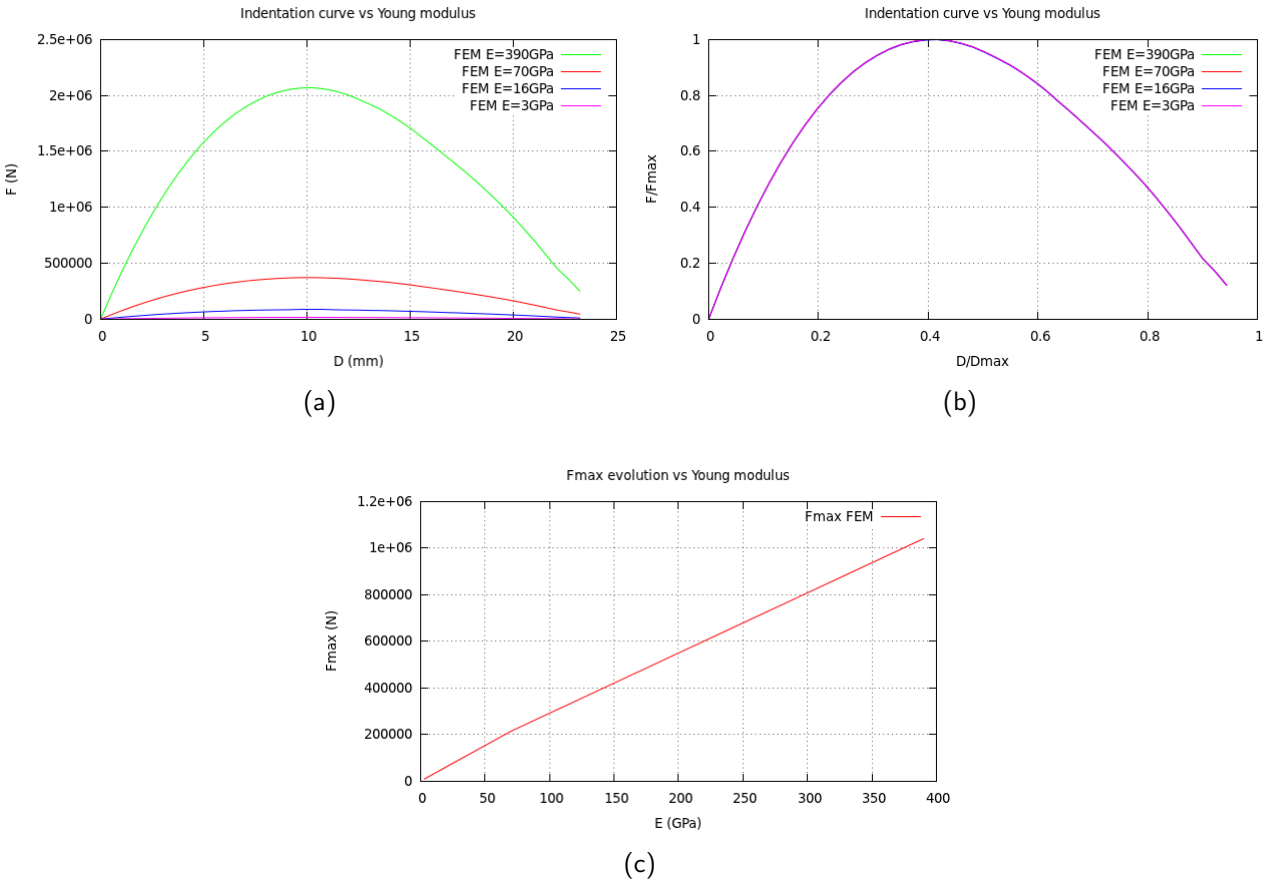


FIGURE 4.30 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du module d'élasticité : a) Courbes d'indentation, b) Courbes maîtresses, c) évolution de l'effort maximal en fonction du module d'Young

effectuées.

Les courbes des simulations par éléments finis sont données sur la figure 4.31a.

Ces deux figures montrent des comportements similaires.

L'évolution des différents paramètres de caractérisation des courbes d'indentation, F_{max}, D_{pic}, D_{perf} apparaît sur les figures 4.32a, 4.32b et 4.32c.

L'évolution du déplacement de l'indenteur à force maximale ou bien à perforation augmente linéairement avec l'augmentation de la taille des blocs. Comme dans le cas des assemblages de cubes, il existe un effet de taille influençant ces deux paramètres, la profondeur d'indentation dépend alors directement de la taille de ce bloc. L'effort maximal augmente non linéairement avec la taille des blocs.

La pente initiale des courbes de charge augmente aussi de façon non linéaire avec la taille des blocs comme le montre la figure 4.32d où la force F et le déplacement D ont été normalisés par la taille des blocs.

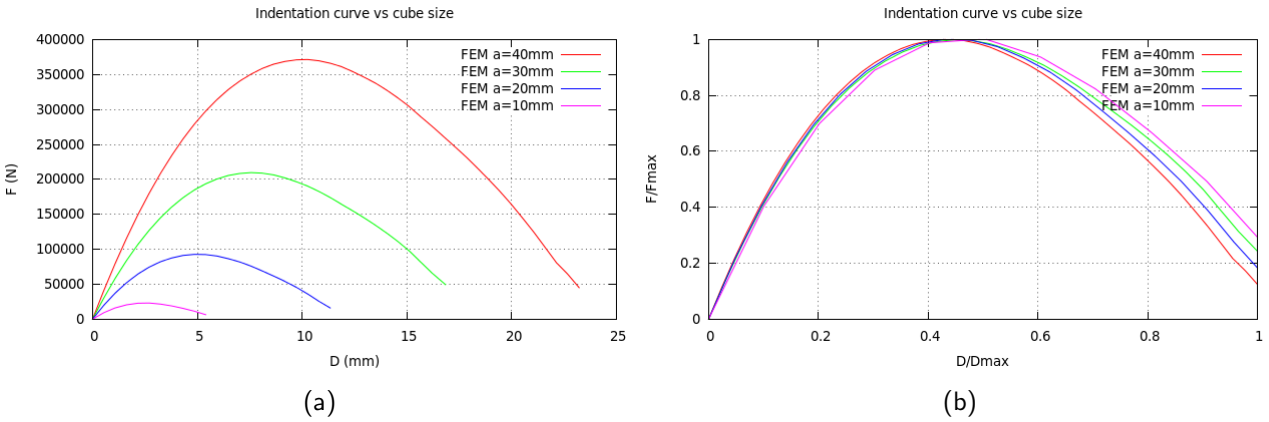


FIGURE 4.31 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence de la taille des blocs : a) Courbes d'indentation, b) Courbes maîtresses

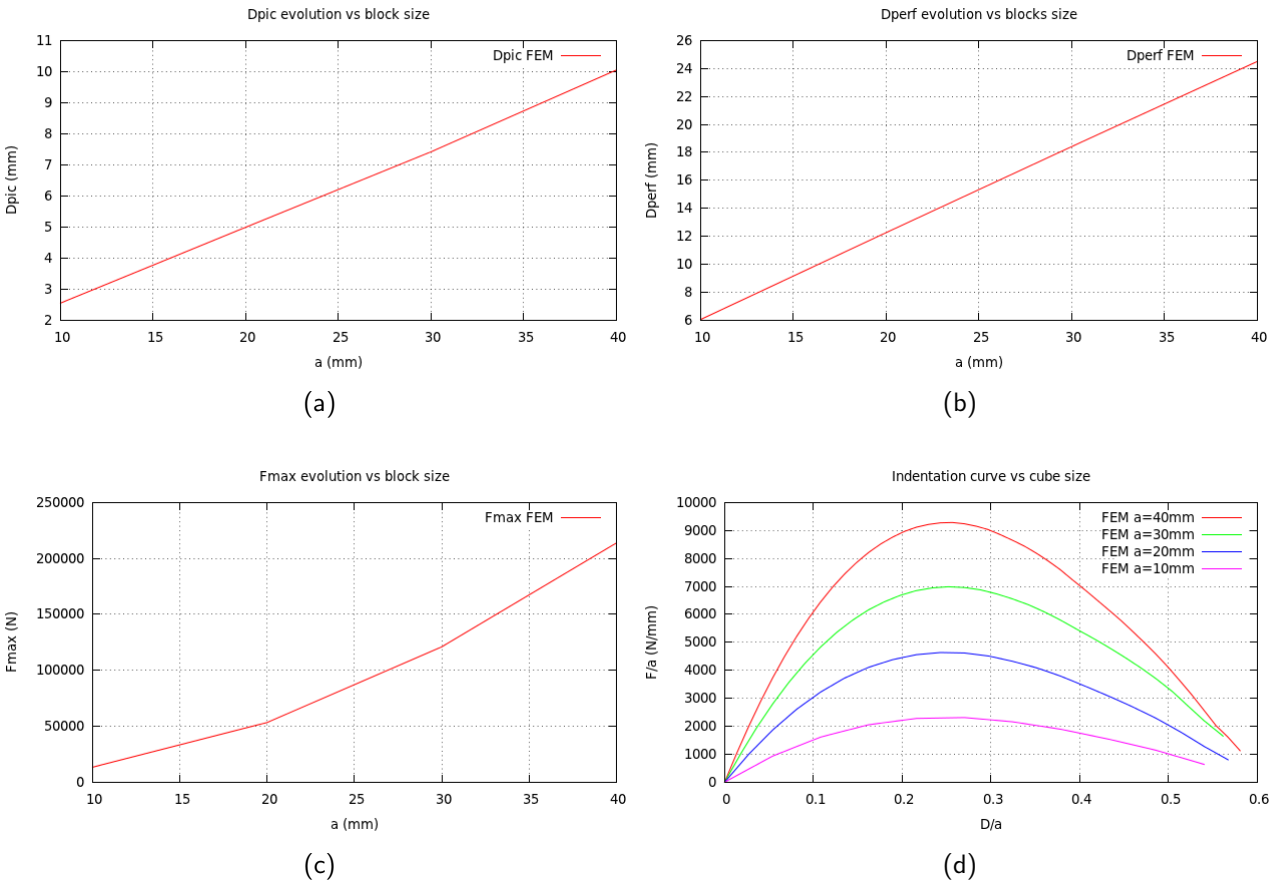


FIGURE 4.32 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Évolution des paramètres caractéristiques en fonction de la taille des blocs : a) Évolution du déplacement à force maximale, D_{pic}, b) Évolution du déplacement à force nulle, D_{perf}, c) Évolution de la force maximale, F_{max}, d) Courbes d'indentation avec F et D normalisés par la taille des blocs

On retrouve donc les mêmes caractéristiques que celles de l'assemblage de 19 cubes. L'augmentation de ces paramètres peut s'expliquer par l'augmentation de la quantité de matière autour du plan médian et donc une augmentation du moment d'inertie. Dans le cas des cubes, le phénomène était amplifié par la distribution de matière hétérogène autour du plan médian. Ce n'est pas le cas ici, car l'assemblage est plat, la matière est répartie de façon homogène.

4.2.2.3 Étude du comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes en fonction du coefficient de frottement

Des simulations par éléments finis ont été effectuées sur un assemblage de 19 blocs ostéomorphes dans le but d'étudier l'effet du coefficient de frottement entre les blocs. Les courbes de ces résultats apparaissent sur la figure 4.33b. Ces courbes ont été comparées avec celle de l'indentation d'une plaque hexagonale de masse équivalente.

On peut observer que la pente à l'origine de l'assemblage augmente avec le coefficient de frottement pour tendre vers la rigidité d'une plaque de masse équivalente. Plus le coefficient de frottement est grand et plus l'effort maximal est grand et est atteint pour une valeur de déplacement plus grande. Le déplacement maximal augmente aussi avec le coefficient de frottement.

Les simulations ont été effectuées avec des décharges partielles tous les 4mm (figure 4.33b). Les rigidités des modules à décharge ont été calculées et leur évolution apparaît sur la figure 4.33b. Comme observée précédemment dans le cas des cubes, la pente à l'origine augmente avec le coefficient de frottement. La rigidité apparente diminue pour tous les coefficients de frottement. Pour un coefficient de frottement de 0.4, différentes simulations ont été effectuées avec des cycles complets de déplacements imposés tous les 4mm, le premier cycle commençant la décharge complète à 4mm et le dernier ayant une décharge débutée à 25mm.

L'effort augmente pour ensuite diminuer pendant la charge. Puis, pendant la décharge, l'effort va diminuer pour devenir négatif, puis va augmenter à nouveau pour revenir à zéro. On n'observe donc plus la rigidité négative (snap-back) mesurée dans le cas des cubes (voir section 4.1.3.3). Cela peut s'expliquer par le fait que la nature des interfaces entre deux blocs est complètement différente de celle observée entre deux cubes. Lors de la charge, les blocs tournent aussi les uns par rapport aux autres, mais de façon moins importante et la surface de contact ne diminue pas autant que pendant l'indentation d'un assemblage de cubes et n'augmente pas beaucoup pendant la décharge. De fait, on n'observe pas le phénomène de 'rigidité négative' propre aux cubes.

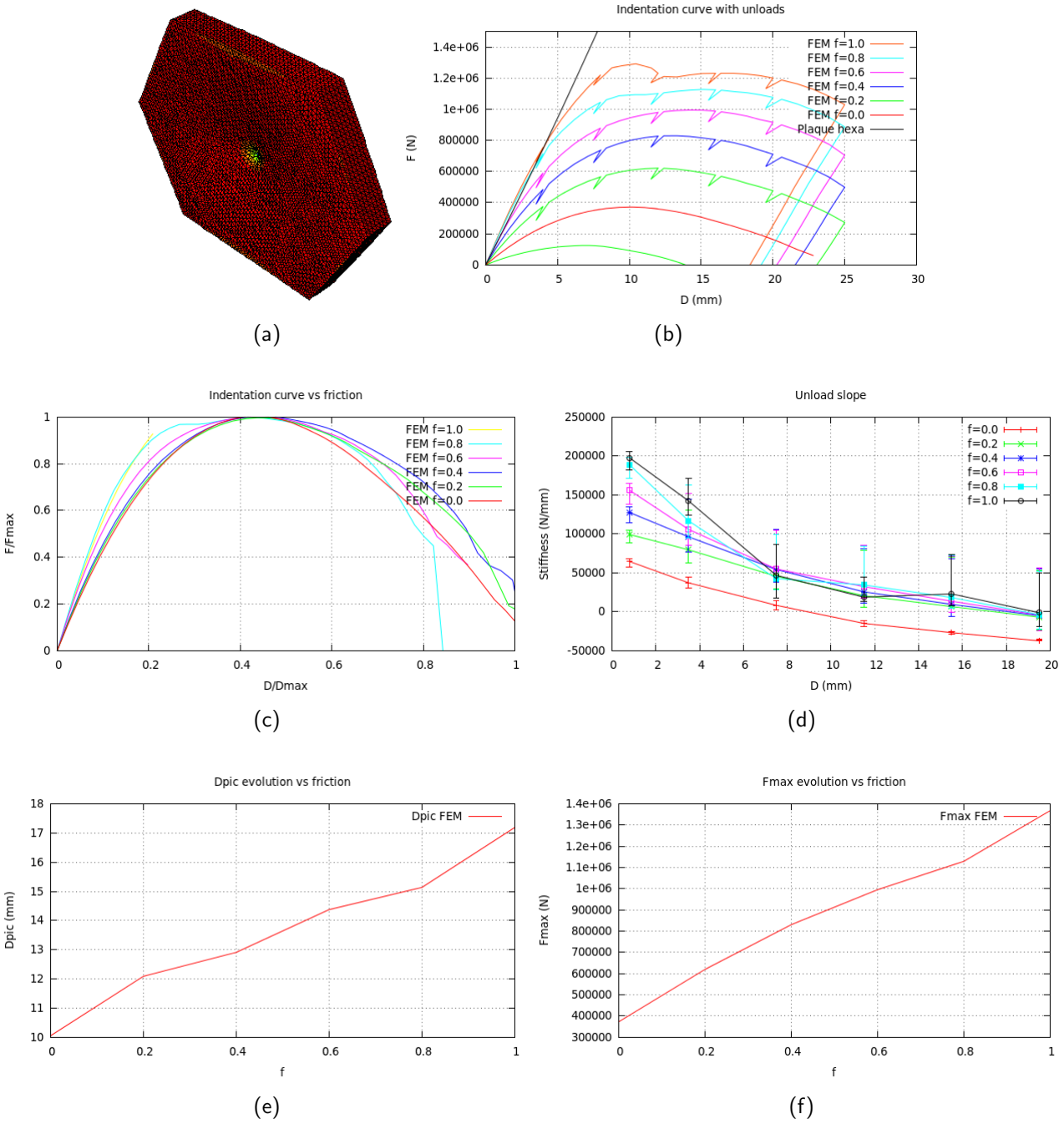


FIGURE 4.33 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du coefficient de frottement : a) Plaque hexagonale de masse équivalente, b) Courbes d'indentation, c) Courbes maîtresses, d) Modules à décharge, e) Évolution du déplacement à force maximale, D_{pic}, f) Évolution de la force maximale, F_{max}

4.2.2.4 Étude du comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes en fonction de la précontrainte

Des simulations par éléments finis ont été effectuées sur un assemblage de 19 blocs ostéomorphes dans le but d'étudier l'effet des conditions de bords sur la réponse mécanique de

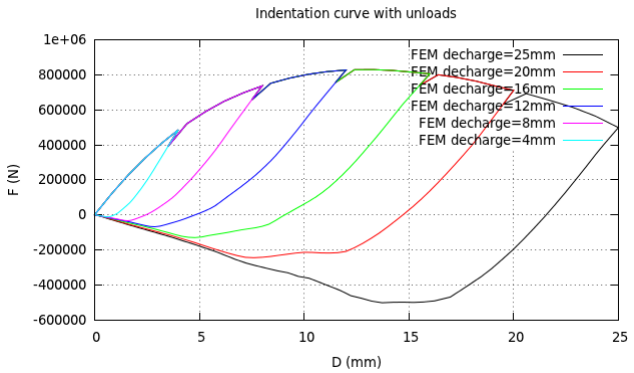


FIGURE 4.34 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de cycles de charges en déplacement imposé de différentes amplitudes - coefficient de frottement fixé à 0.4

l'assemblage. Les courbes de ces résultats apparaissent sur la figure 4.35a.

Comme pour les assemblages de cubes, plus la précontrainte est élevée et plus le bloc ostéomorphe central est chargé. La courbe d'indentation commence donc avec un effort initial qui augmente avec la précontrainte. La valeur du déplacement à perforation diminue légèrement avec la précompression. Pour une valeur de précompression inférieure à 1 mm, la rigidité augmente avec la précontrainte appliquée. L'effort maximal augmente avec la précontrainte et est atteint pour un déplacement plus faible. Au-dessus d'une précompression de 1mm, l'effort diminue avec la précompression et est atteint pour une valeur de déplacement plus grande.

4.2.2.5 Étude du comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes en fonction du nombre de couronnes

Nous allons maintenant étudier l'influence du nombre de blocs sur le comportement d'un assemblage. Les blocs ont une longueur de 40mm. Pour cela, nous allons comparer un assemblage de 37 blocs et d'un assemblage de 61 blocs avec un assemblage élémentaire de 19 blocs ostéomorphes étudié dans les paragraphes précédents. La couronne extérieure est toujours encastrée et il y a donc des couronnes de blocs libres supplémentaires à l'intérieur des assemblages (fig.4.36c).

La courbe 4.36a montre que la rigidité diminue avec le nombre de blocs ainsi que l'effort maximal qui est atteint pour une valeur de déplacement plus grande et le déplacement à perforation est aussi plus grand. Les rotations deviennent plus faciles lorsqu'il y a plus de blocs et il est donc possible de déformer l'assemblage de façon plus importante et avec un effort moins élevé. Nous retrouvons le comportement des assemblages de cubes (voir paragraphe 4.1.3.5).

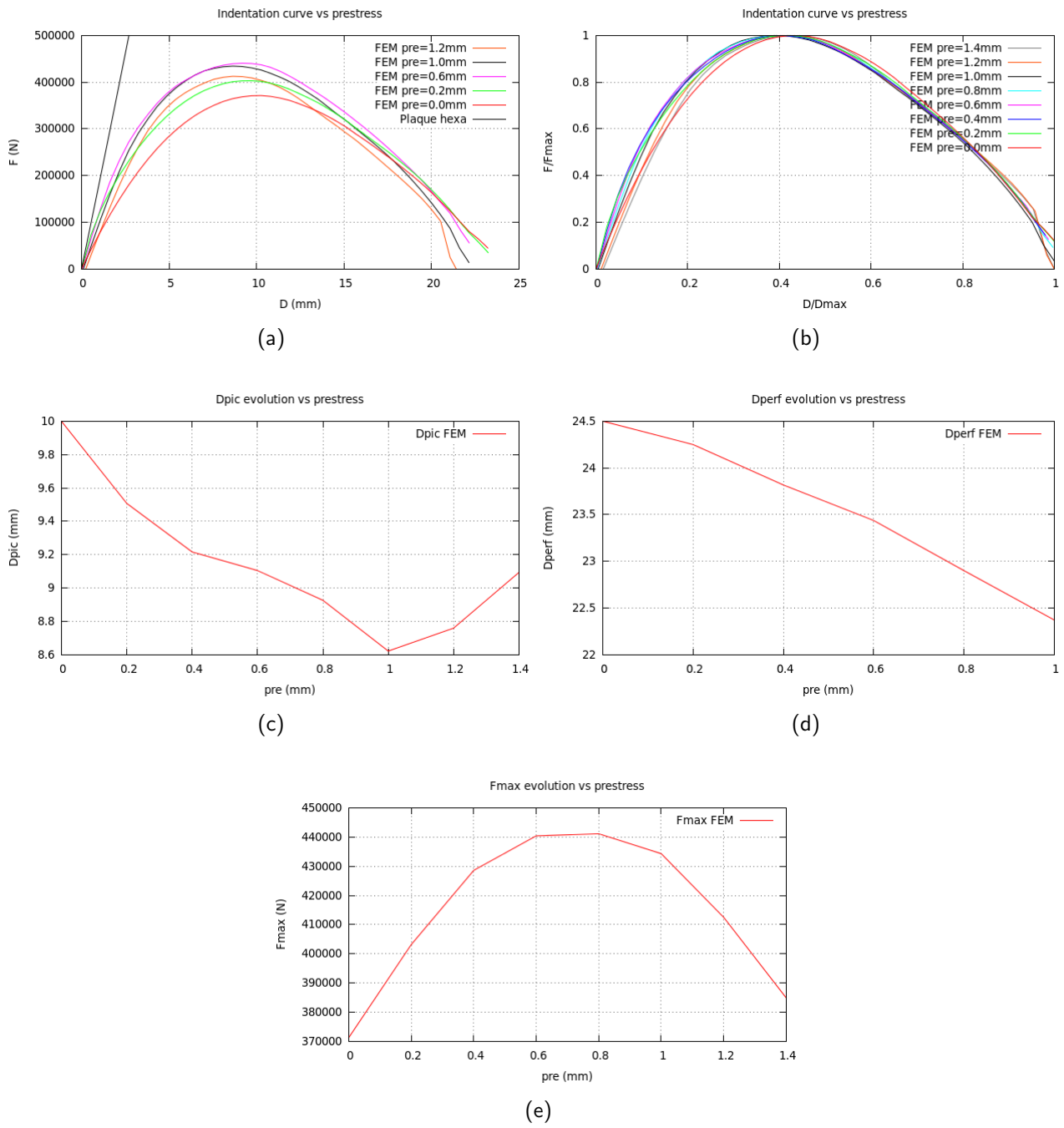


FIGURE 4.35 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence de la précompression latérale : a) Courbes d'indentation, b) Courbes maîtresses, c) Évolution du déplacement à force maximale, D_{pic}, d) Évolution du déplacement à force nulle, D_{perf}, e) Évolution de la force maximale, F_{max}

4.2.2.6 Étude du comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes en fonction de sa géométrie

Nous allons maintenant comparer la réponse mécanique d'un assemblage de 61 blocs positionnés dans un hexagone (4 couronnes, fig 4.38a) avec celle d'un assemblage de 61 blocs

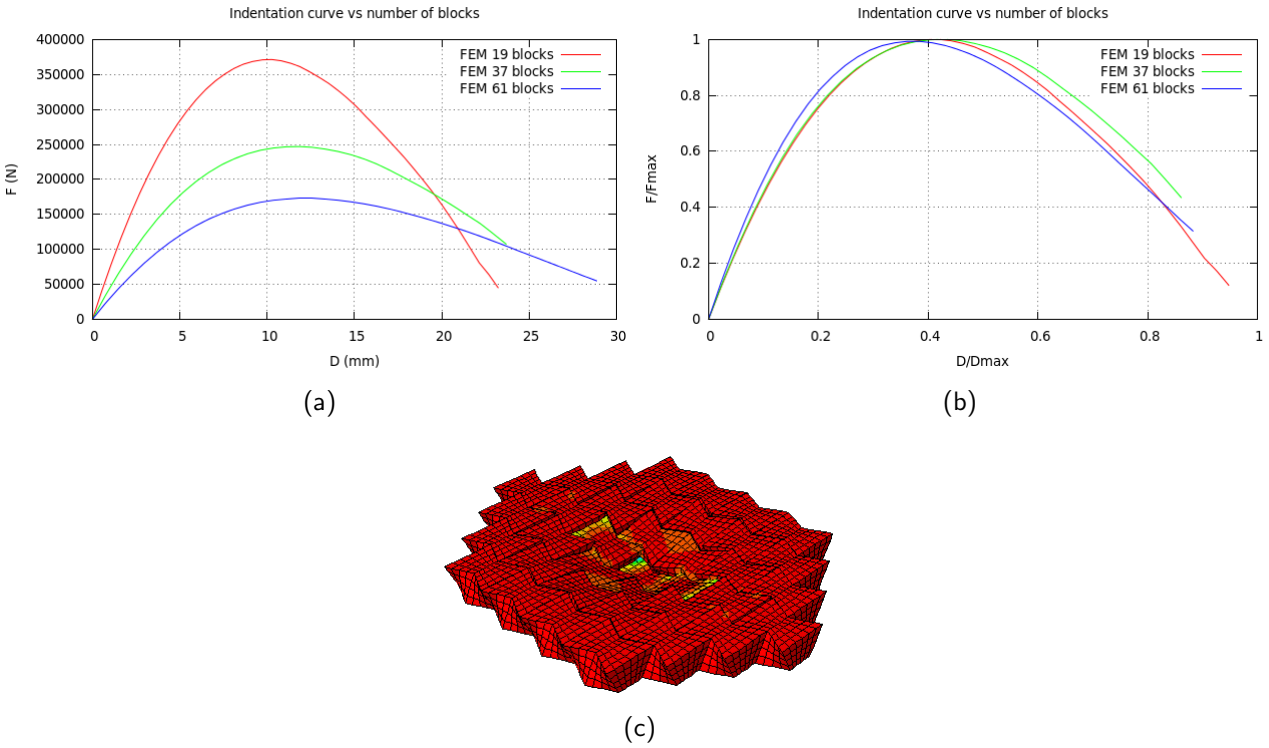


FIGURE 4.36 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du nombre de blocs ostéomorphes - comparaison d'un assemblage de 19 ostéomorphes avec un assemblage de 37 ostéomorphes et un assemblage de 61 ostéomorphes : a) Courbes d'indentation, b) Courbes maîtresses, c) Assemblage de 37 ostéomorphes

positionnés dans un rectangle (fig 4.38b). La couronne extérieure est toujours encastrée et il y a donc trois couronnes de blocs ostéomorphes libres à l'intérieur de l'assemblage. Seul le bloc central est indenté. La courbe apparaît sur la figure 4.38c. L'assemblage est plus rigide lorsqu'il est rectangulaire.

Le résultat obtenu est le même que celui observé sur les assemblages de cubes (voir paragraphe 4.1.3.6). Cela peut s'expliquer par l'effet des conditions de bords. Celles-ci sont homogènes dans le cas d'un assemblage possédant une symétrie hexagonale qui n'est pas présente dans le cas dans l'assemblage de forme rectangulaire.

Le bloc central de l'assemblage hexagonal est entouré de 3 couronnes de blocs libres, alors que celui de l'assemblage rectangulaire n'est entouré que d'une seule couronne de blocs libres. Son bloc central est entouré par 4 blocs dans un sens et par 10 blocs dans l'autre sens. Les conditions de bord sont donc plus fortes dans la direction la plus pauvre en blocs.

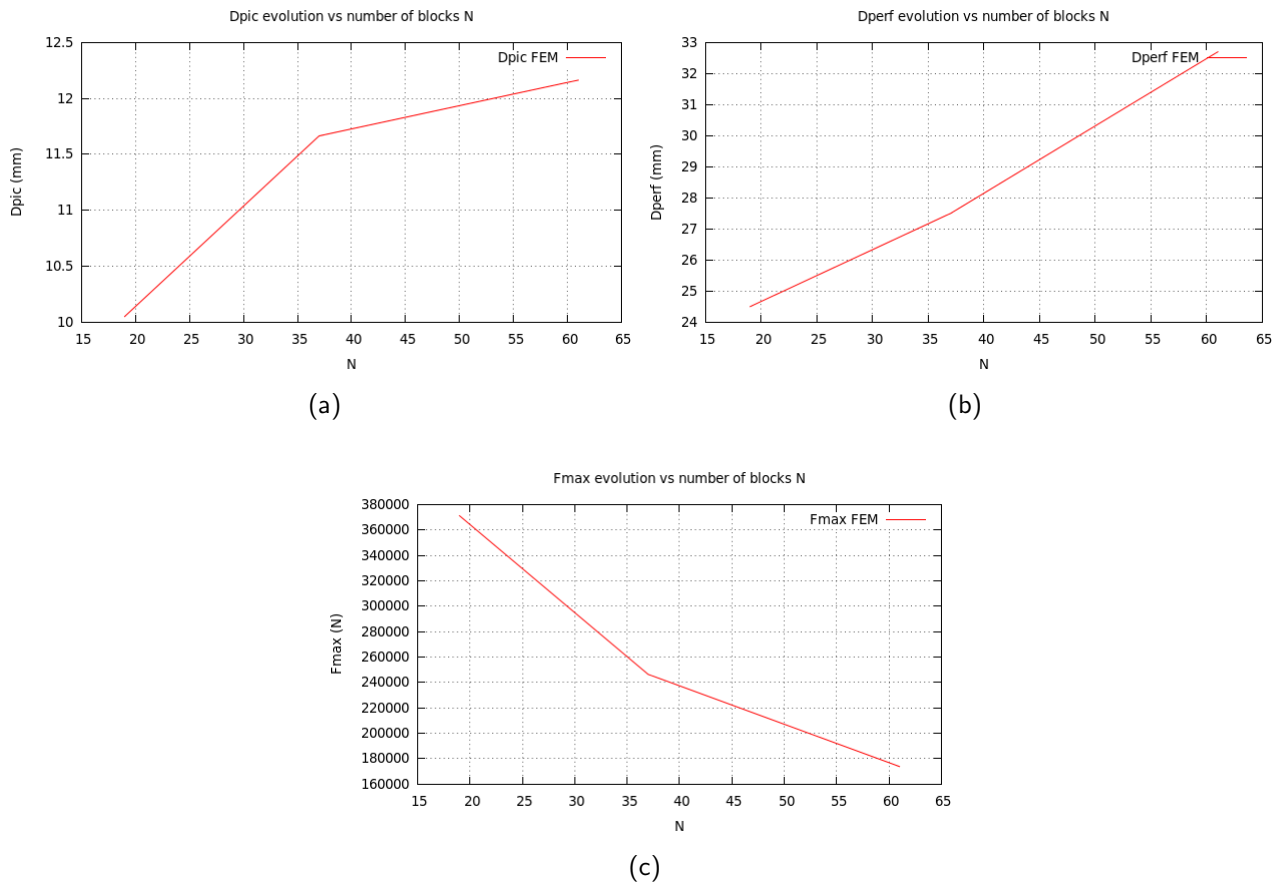


FIGURE 4.37 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Évolution des paramètres caractéristiques en fonction du nombre de blocs ostéomorphes : a) Évolution du déplacement à force maximale, D_{pic}, b) Évolution du déplacement à force nulle, D_{perf}, c) Évolution de la force maximale, F_{max}

4.2.2.7 Étude du comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes en fonction du sens de l'indentation

Nous allons étudier ici l'influence du sens de l'indentation sur la réponse mécanique d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes. Contrairement aux assemblages de cubes qui montraient un comportement symétrique, la rigidité de l'assemblage indenté dans le sens 1 (voir figure 4.39a) est plus grande que celle de l'assemblage indenté dans le sens 2 (figure 4.39b).

L'effort maximal atteint dans le cas de l'assemblage indenté dans le sens 2 est plus faible et est atteint pour une valeur de déplacement plus faible. Le déplacement atteint lors de la perforation est plus faible.

Il est donc plus facile d'indenter le bloc central, car les deux crêtes centrales ne bloquent pas les rotations dans le sens 1, alors que les 4 crêtes externes bloquent les rotations ce qui apporte

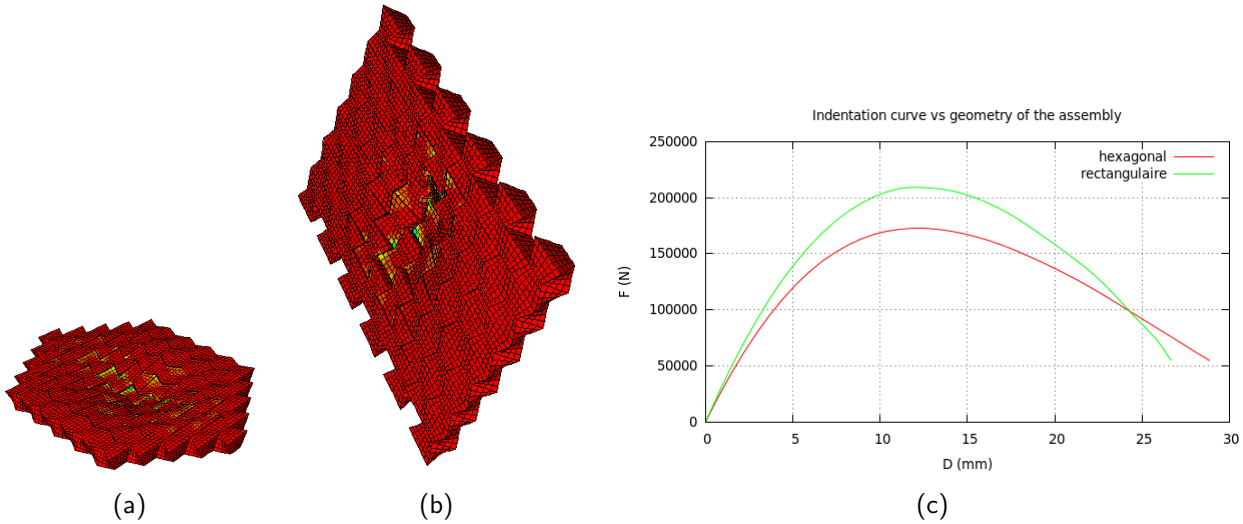


FIGURE 4.38 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 61 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence de la géométrie de l'assemblage : a) Assemblage de blocs ostéomorphes hexagonal, b) Assemblage de blocs ostéomorphes rectangulaire, c) Courbes d'indentation

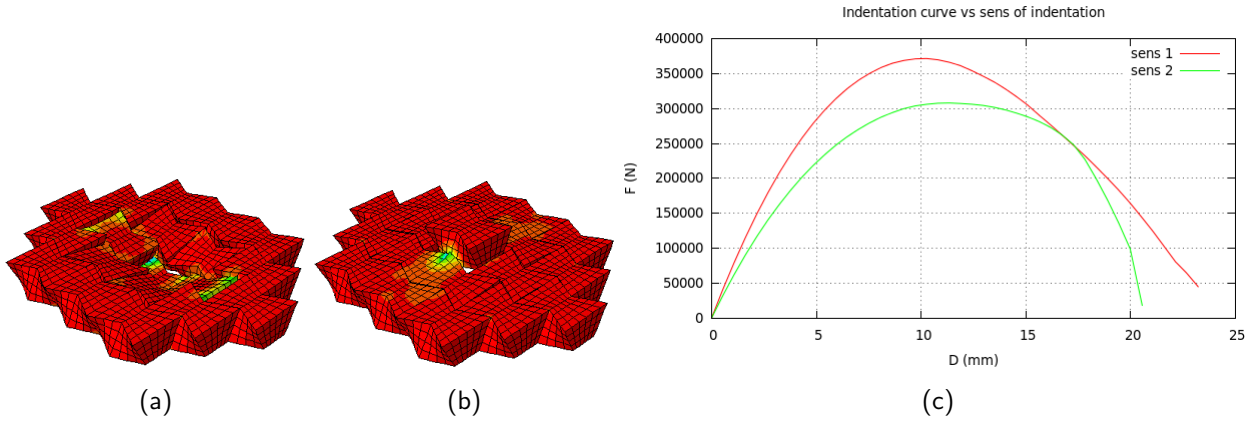


FIGURE 4.39 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du sens de l'indentation : a) Assemblage dans le sens 1, b) Assemblage dans le sens 2, c) Courbes d'indentation

une meilleure résistance à l'indentation dans le sens 2.

Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis :

Comme dans le cas de la première indentation, nous allons ici comparer des simulations numériques effectuées par éléments finis avec des expériences menées dans les mêmes conditions. Les courbes d'indentation numériques apparaissent sur la figure 4.40a et les courbes expérimentales sur la figure 4.40b.

Sur les deux figures, on observe le même phénomène que celui expliqué dans le début de

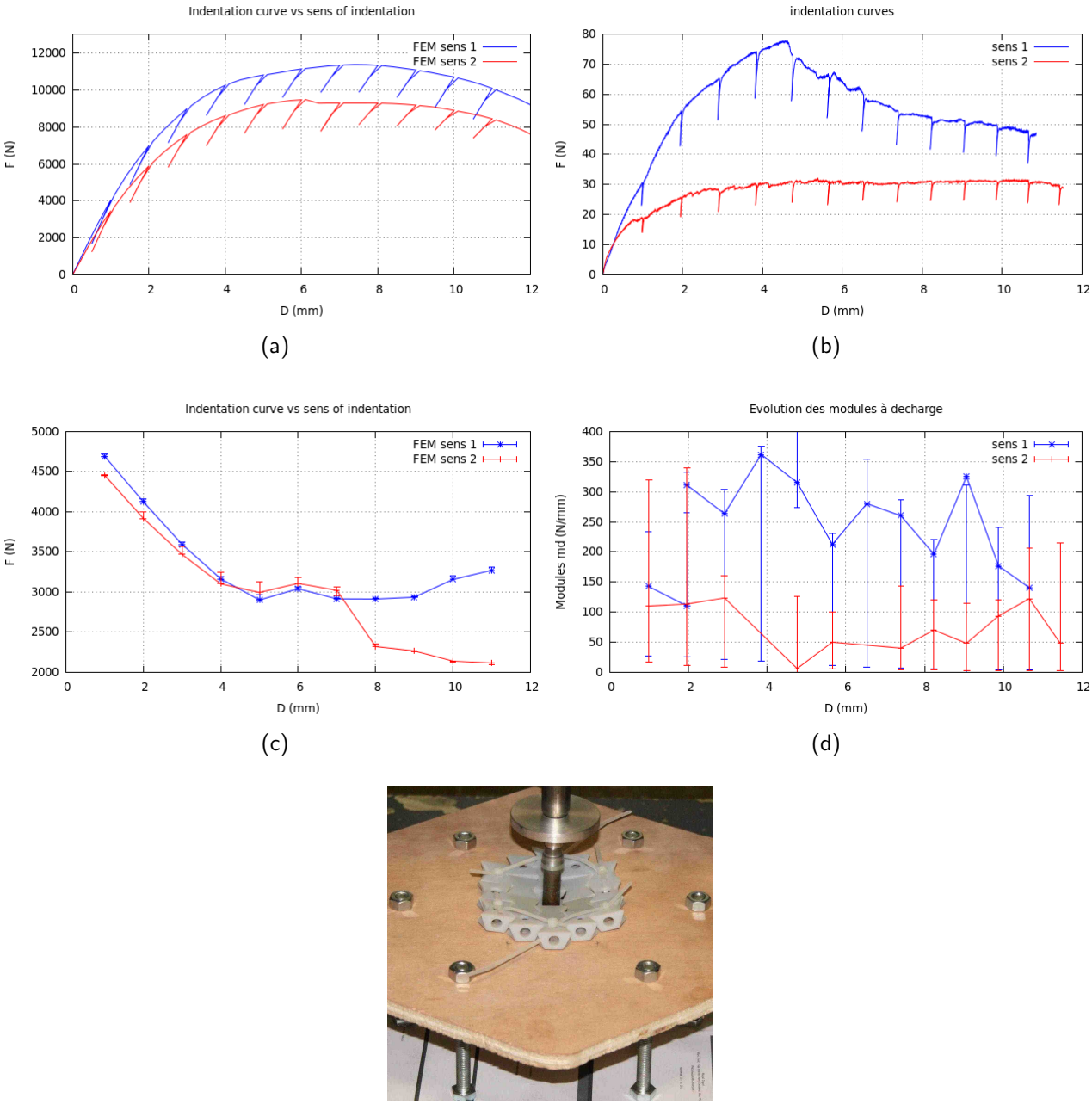


FIGURE 4.40 – Résultats de l'indentation de 12mm d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence du sens de l'indentation : a) Courbes d'indentation numériques, b) Courbes d'indentation expérimentales, c) Modules à décharge numériques, d) Modules à décharge expérimentales, e) Photo de l'assemblage dans le sens 1 à la fin de l'indentation

cette partie : la pente à l'origine est plus grande dans le sens 1 que dans le sens 2. Ce résultat est donc validé par l'expérience.

Les modules à décharge ont été tracés sur la figure 4.40c dans le cas des simulations par

éléments finis et sur la figure 4.40d dans le cas des expériences.

Les modules à décharge numériques montrent que l'assemblage dans le sens 2 a une rigidité apparente plus grande que celle dans le sens 1 ce qui correspond à ce que l'on observe expérimentalement.

Les deux assemblages montrent une rigidité apparente (expérimentale et numérique) qui diminue au cours de l'indentation.

4.2.2.8 Étude de l'effet de la position de l'indentation

Nous allons étudier l'influence de la position du bloc indenté. Nous avons choisi les 4 blocs se trouvant sur la même ligne que le bloc central et se rapprochant du bord de l'assemblage 4.41a. Les blocs 1 et 5 sont ceux qui se trouvent le plus proche du bord. Les résultats issus de ces simulations sont tracés sur la figure 4.41b.

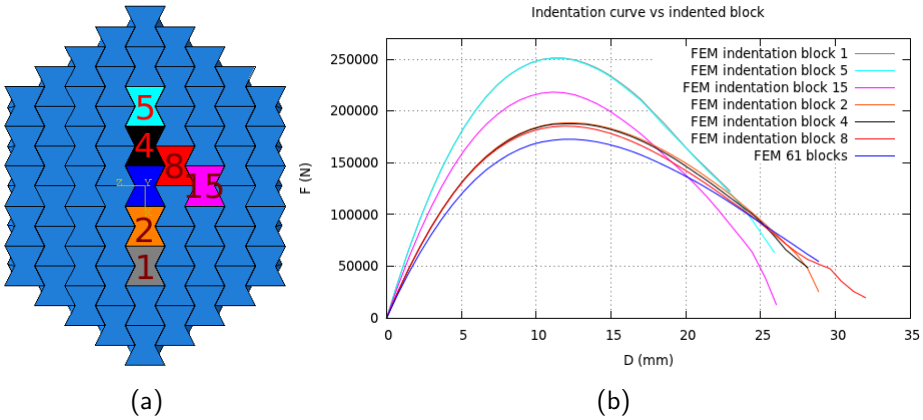


FIGURE 4.41 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 61 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'effet de la position de l'indentation : a) Blocs indentés, b) Courbes d'indentation

Les courbes d'indentation des blocs les plus proches du bord (1 et 5) sont celles qui montrent la plus grande force maximale. Cela est dû au fait que ces blocs sont en contact avec des blocs contraints et sont alors plus contraints que les blocs proches du centre de l'assemblage. Donc plus le bloc indenté est proche du bord de l'assemblage et plus l'effort nécessaire pour l'indenter est grand.

Deux autres blocs se trouvant sur une ligne perpendiculaire à celle des quatre premiers blocs indentés (voir figure 4.41a). On observe le même phénomène que précédemment. La courbe correspondant au bloc 8 indenté a une pente à l'origine moins grande que celle de la courbe correspondant au bloc 15 indenté ce qui est normal, car c'est le bloc 15 qui est le plus proche

du bord de l'assemblage. De plus, la courbe du bloc 8 indenté a une pente à l'origine égale à celle du bloc 2 indenté ou du bloc 4 indenté, car ces blocs sont à peu près à la même distance du bord de l'assemblage.

Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis :

Comme dans les autres paragraphes, nous allons effectuer une comparaison entre les simulations par éléments finis et les expériences. Cette fois, nous allons indenter numériquement et expérimentalement le bloc 2 (contact plan par rapport au bloc central) puis le bloc 7 (contact réglé par rapport au bloc central) qui sont illustrés sur les figures 4.42f et 4.42g. Les courbes d'indentation numériques et expérimentales sont respectivement affichées sur les figures 4.42a et 4.42b.

Ces courbes montrent des comportements similaires. Les courbes des blocs indentés 2 et 7 ont des pentes à l'origine plus grandes que la courbe du bloc central indenté. La courbe de l'assemblage indenté au bloc 2 a une pente à l'origine légèrement plus grande que celle indentée en 7. Cela est dû à la distance entre le centre du bloc indenté et le bord de l'assemblage.

Ici, le centre du bloc 2 est plus proche du bord que le centre du bloc 7. Plus le bloc indenté est proche du bord de l'assemblage et plus celui-ci subit l'effort de ses voisins qui sont encastrés ou influencés par des blocs encastrés ce qui rend l'indentation plus difficile. Le bloc 7 n'est en contact avec les blocs précontraints que d'un seul côté tandis que le bloc 2 est entouré de chaque côté par les surfaces réglées de deux blocs précontraints, celui-ci est donc plus contraint par ses voisins que le bloc 7.

C'est le même phénomène que celui observé sur l'assemblage de quatre couronnes étudié dans le début du paragraphe. Les modules à décharge sont tracés sur la figure 4.42c dans le cas des simulations numériques et sur la figure 4.42d dans le cas des expériences. Les modules à décharge diminuent au fur et à mesure de l'indentation et ce, quel que soit le bloc indenté. Ces expériences montrent que les rigidités apparentes des assemblages indentés près des bords sont plus élevées que celles de l'assemblage indenté au centre ce qui confirme les observations effectuées sur les courbes d'indentation.

4.2.2.9 Étude du comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes en fonction de l'endommagement

Nous allons étudier le comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes composés de blocs endommagés grâce à des simulations par éléments finis. Pour cela, nous avons utilisé un assemblage dont le module d'Young de chacun des blocs ostéomorphes est de 70GPa. Puis le module d'Young d'un des blocs ostéomorphes a été divisé par 10 (7GPa).

Deux simulations ont été effectuées, la première où le module du bloc ostéomorphe (bloc

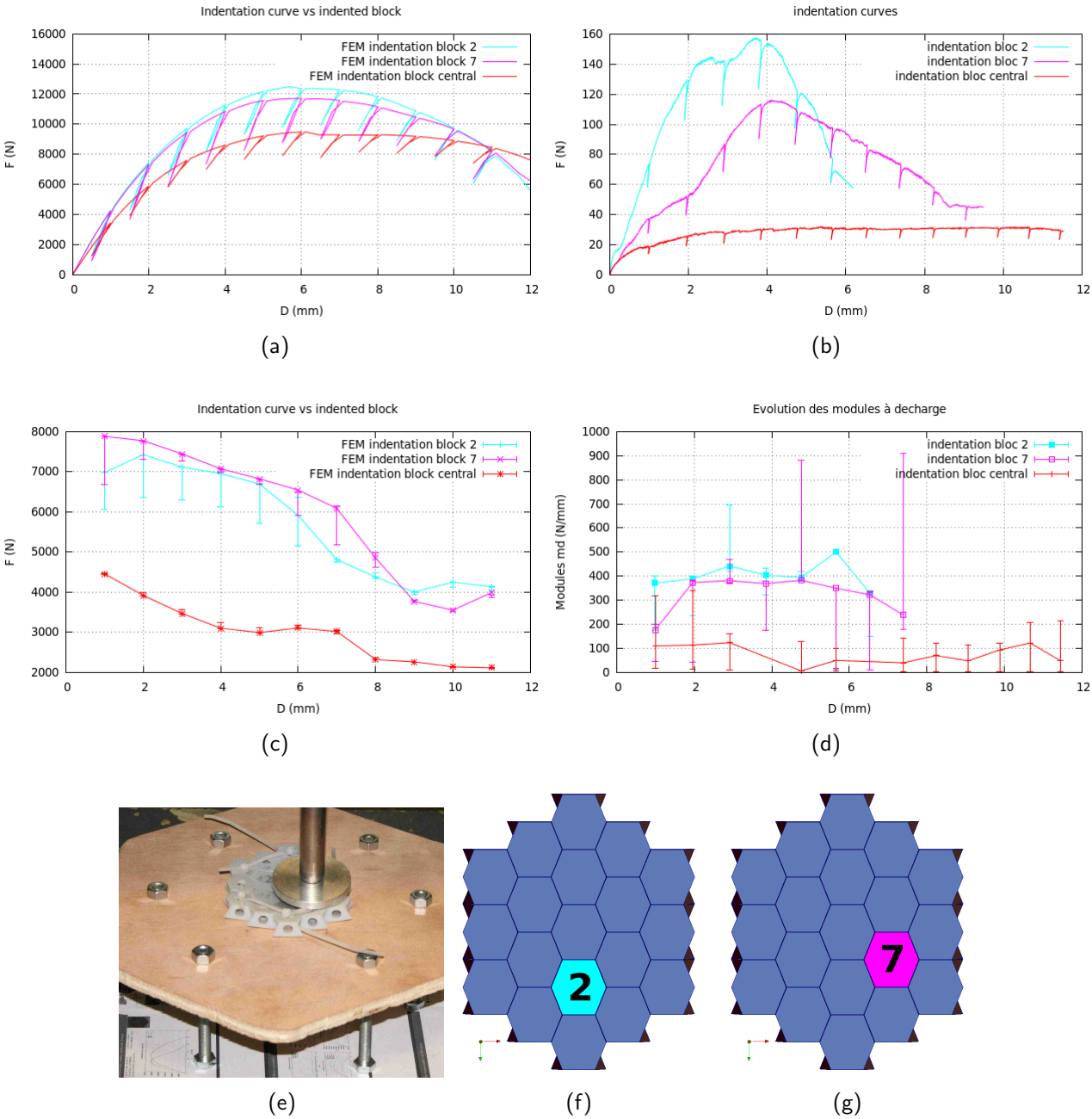


FIGURE 4.42 – Résultats de l'indentation de 12mm d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté - Étude de l'effet de la position de l'indentation - Comparaison avec l'expérience : a) Courbes d'indentation numériques, b) Courbes d'indentation expérimentales, c) Modules à décharge numériques, d) Modules à décharge expérimentales, e) Photo de l'assemblage, f) bloc 2 indenté, g) bloc 7 indenté

2) se trouvant en dessous du bloc ostéomorphe indenté est fixé à 7GPa (figure 4.43a) et la seconde où le module du bloc ostéomorphe (bloc 11) se trouvant en dessous et à droite du bloc ostéomorphe indenté est fixé à 7GPa (figure 4.43b). Les courbes résultantes sont comparées à la courbe d'indentation de l'assemblage de 19 blocs ostéomorphes non endommagés.

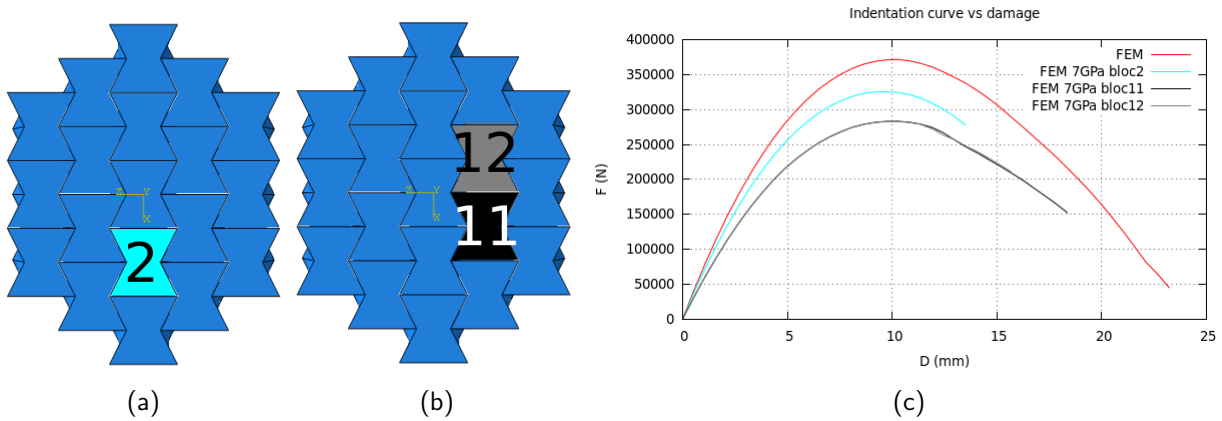


FIGURE 4.43 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'endommagement d'un bloc ostéomorphe : a) bloc 2 endommagé, b) bloc 11 endommagé, c) Courbes d'indentation

Les deux courbes des assemblages endommagés montrent une pente à l'origine plus faible que l'assemblage non endommagé. Mais il y a une différence entre la courbe correspondant à l'indentation de l'assemblage avec le bloc 2 endommagé qui possède une pente à l'origine moins grande que celle de la courbe correspondant à l'indentation de l'assemblage avec le bloc 11 endommagé.
Cette différence peut s'expliquer par la nature du contact fragilisé lors du retrait du bloc. Lorsqu'on endommage le bloc 2, la nature du contact fragilisé est plan, il y a donc une perte de transfert d'effort à cette interface et lorsque l'on endommage le bloc 11, la nature du contact fragilisé est courbe, et il y a une perte de transfert d'effort à cette interface encore plus importante ce qui diminue encore plus la pente à l'origine.

4.2.2.10 Rigidification d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes

Il est aussi possible d'utiliser le raisonnement inverse pour rigidifier une structure autobloquante de blocs ostéomorphes. Nous allons étudier le comportement d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes composés de blocs rigidifiés grâce à des simulations par éléments finis. Pour cela, nous avons utilisé un assemblage donc le module d'Young de chacun des blocs ostéomorphes est de 70GPa. Puis le module d'Young d'un des blocs ostéomorphes a été multiplié par 10 (700GPa).

Deux simulations ont été effectuées, la première où le module du bloc ostéomorphe (bloc 2) se trouvant en dessous du bloc ostéomorphe indenté est fixé à 700GPa (figure 4.44a) et la seconde où le module du bloc ostéomorphe (bloc 11) se trouvant en dessous et à droite du bloc ostéomorphe indenté est fixé à 700GPa (figure 4.44b). Les courbes résultantes sont comparées à la courbe d'indentation de l'assemblage de 19 blocs ostéomorphes non rigidifiés.

Les deux courbes des assemblages endommagés montrent une pente à l'origine plus forte

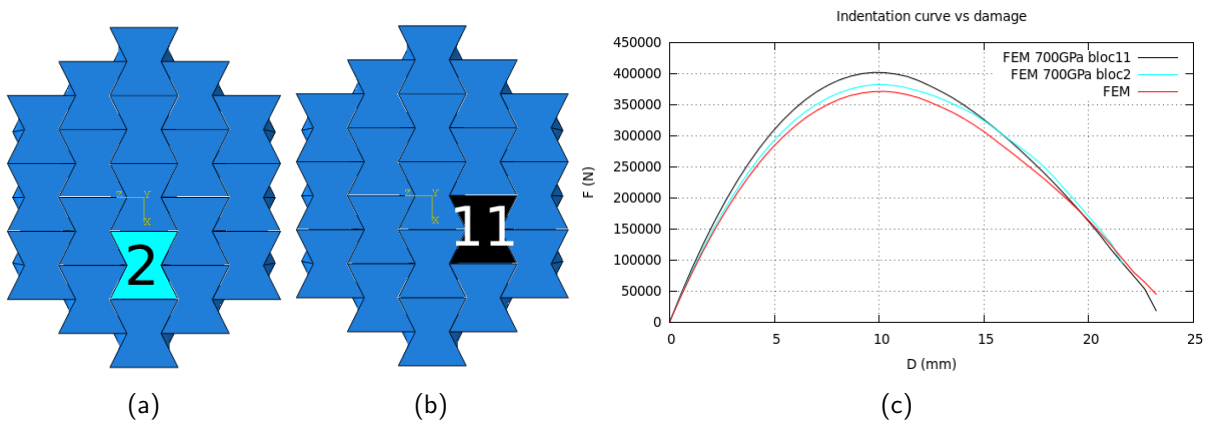


FIGURE 4.44 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de la rigidification d'un bloc ostéomorphe sur 19 : a) bloc 2 rigidifié, b) bloc 11 rigidifié, c) Courbes d'indentation

que l'assemblage non rigidifié. Mais il y a une différence entre la courbe correspondant à l'indentation de l'assemblage avec le bloc 2 rigidifié qui possède une pente à l'origine plus grande que celle de la courbe correspondant à l'indentation de l'assemblage avec le bloc 11 rigidifié.

Cette différence peut s'expliquer à nouveau par la nature du contact renforcé lors de la rigidification du bloc. Lorsqu'on rigidifie le bloc 2, la nature du contact renforcé est plan, il y a donc un gain dans le transfert d'effort à cette interface et lorsque l'on rigidifie le bloc 11, la nature du contact renforcé est courbe, et il y a un gain dans le transfert d'effort à cette interface encore plus importante ce qui augmente encore plus la pente à l'origine.

4.2.2.11 Étude de l'effet de blocs manquants dans un assemblage de blocs ostéomorphes

Nous allons étudier l'influence de blocs manquants sur le comportement d'un assemblage de blocs ostéomorphes. Dans le premier cas, le bloc 2 a été retiré (figure 4.45a) alors que dans le second cas, le bloc 11 a été retiré (figure 4.45b).

Les deux courbes des assemblages endommagés montrent une pente à l'origine plus faible que l'assemblage non endommagé. L'effort maximal atteint est divisé par deux et est atteint pour un déplacement bien plus faible que dans le cas d'un assemblage non endommagé.

Mais il y a une différence entre la courbe correspondant à l'indentation de l'assemblage avec le bloc 2 manquant qui possède une pente à l'origine moins grande que celle de la courbe correspondant à l'indentation de l'assemblage avec le bloc 11 manquant.

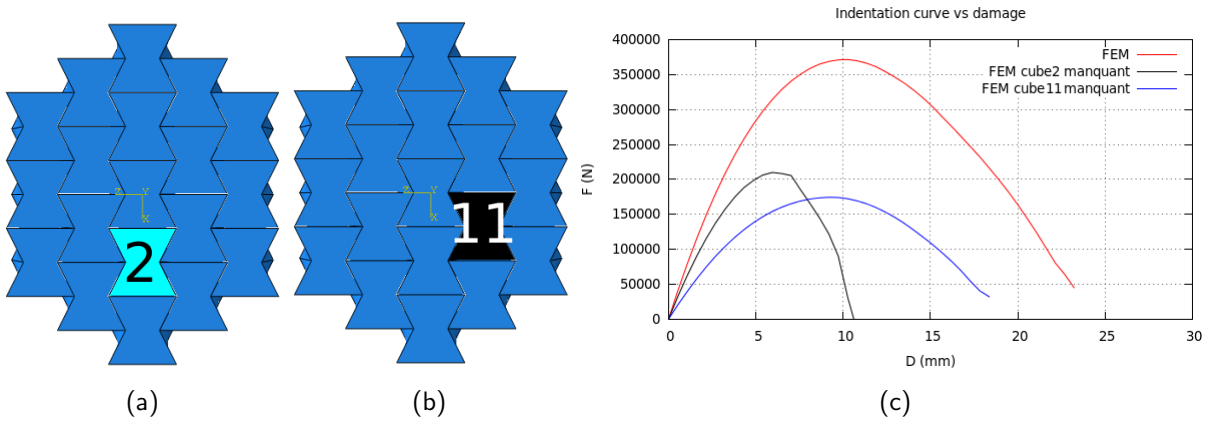


FIGURE 4.45 – Résultats de l'indentation de 12mm d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Étude de l'influence d'un bloc manquant - a) bloc 2 manquant , b) bloc 11 manquant, c) Courbes d'indentation numériques

Comme pour l'étude de l'endommagement, cette différence peut s'expliquer par la nature du contact éliminé lors du retrait du bloc. Lorsqu'on retire le bloc 2, la nature du contact éliminé est plan, il y a donc une perte de transfert d'effort à cette interface et lorsque l'on retire le bloc 11, la nature du contact éliminé est courbe, et il y a une perte de transfert d'effort à cette interface encore plus importante ce qui diminue encore plus la pente à l'origine.

La perforation est atteinte pour une valeur de déplacement bien plus faible à la valeur de perforation atteinte dans le cas d'un assemblage non endommagé en particulier lorsque le bloc 2 est manquant. On observe donc un comportement obtenu par simulations numériques qui est très similaire à celui observé lors des expériences.

Comparaison entre expériences et simulations par éléments finis :

Comme dans les autres paragraphes, nous allons tenter une comparaison entre les simulations par éléments finis et les expériences du chapitre 2. Dans le cas présent, nous avons retiré le bloc 2 puis nous avons retiré le bloc 7 (figures 4.46f et 4.46g). Les courbes des assemblages endommagés sont ensuite comparées à la courbe de l'assemblage intact. Les courbes d'indentation numériques apparaissent sur la figure 4.46a et les courbes d'indentation expérimentales sur la figure 4.46b.

Les deux courbes correspondant aux assemblages endommagés montrent des pentes à l'origine plus faibles que celle de l'assemblage entier. Dans le cas des assemblages simulés, la courbe d'indentation de l'assemblage où nous avons retiré le bloc 2 a une pente à l'origine plus grande que l'assemblage où nous avons retiré le bloc 7 ce qui est le résultat contraire à celui observé dans le cas expérimental.

Pendant nos expériences, nous avions observé un résultat contre-intuitif. Nous avions

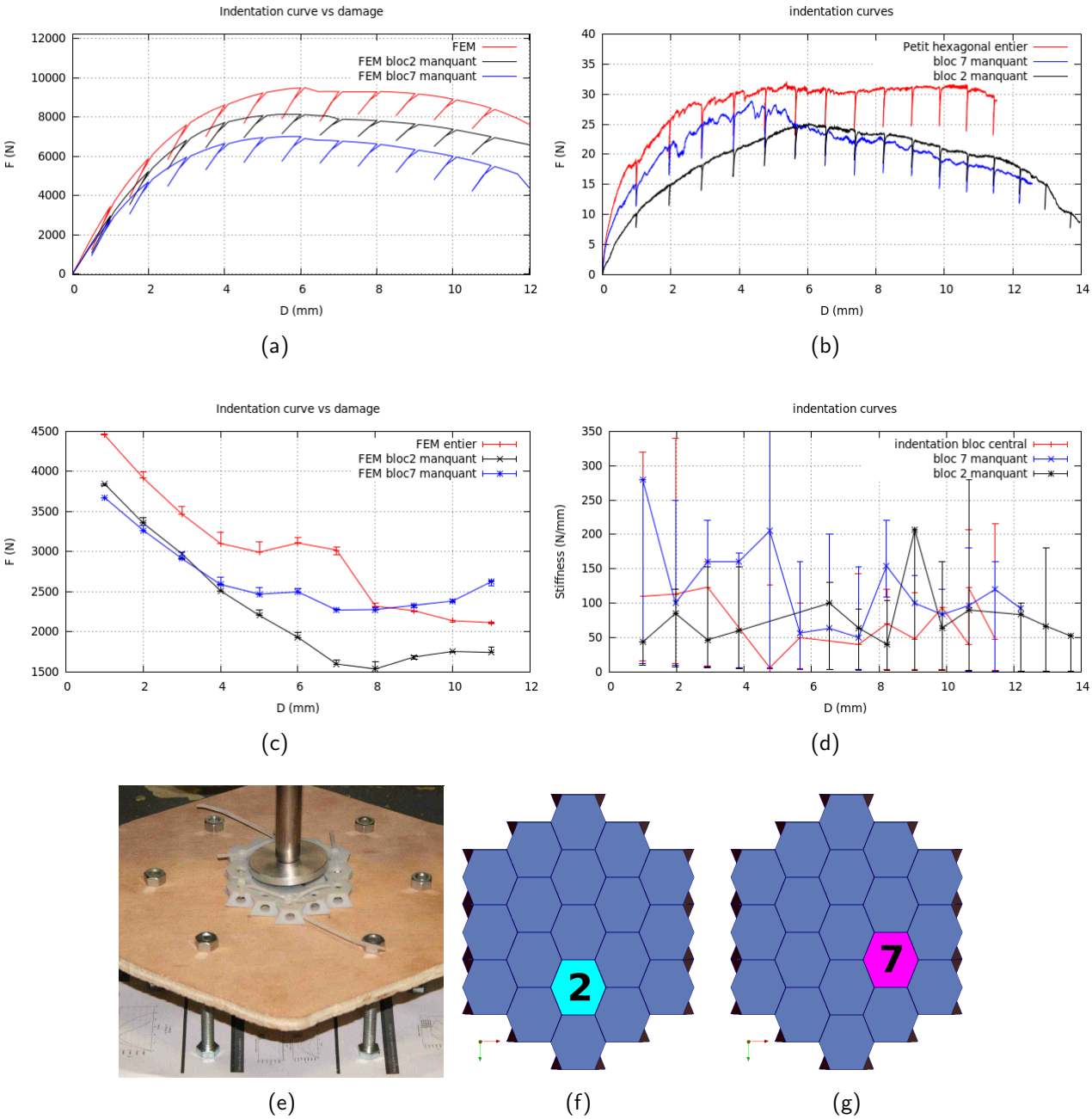


FIGURE 4.46 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 20mm de côté - Étude de l'influence d'un bloc manquant - Comparaison avec l'expérience : a) Courbes d'indentation numériques, b) Courbes d'indentation expérimentales, c) Modules à décharge numériques, d) Modules à décharge expérimentales, e) Photo de l'assemblage, f) bloc 2 manquant, g) bloc 7 manquant

expliqué ce résultat par la rugosité des blocs au niveau de leurs surfaces planes. En effet, nous avions pu constater que les blocs utilisés pendant les expériences ont des faces planes très rugueuses qui sont dues à l'imprécision du prototypage rapide.

Certaines irrégularités de ces surfaces bloquent l'indentation et l'effort à fournir pour

l'indentation est plus grand. Puis lorsque l'effort est assez important pour que le bloc indenté puisse passer cette irrégularité, on observe alors une baisse brutale de l'effort puis l'assemblage se rééquilibre et reprend le cours normal de son indentation.

C'est probablement ce qui se passe lors de l'indentation de l'assemblage où nous avons retiré le bloc 7. D'ailleurs peut après 5mm, on observe une baisse de l'effort assez rapide. Sa pente à l'origine est alors plus grande que celle de l'assemblage où nous avons retiré le bloc 2. On n'observe pas ce phénomène par éléments finis, car les surfaces planes des blocs ne sont pas rugueuses.

Les modules à décharge numériques sont tracés sur la figure 4.46c et les modules à décharge expérimentaux sont tracés sur la figure 4.46d. Ces modules diminuent avec le déplacement de l'indenteur. La rigidité apparente de l'assemblage intact est plus grande que la rigidité apparente des assemblages endommagés.

Sur les courbes expérimentales, la rigidité apparente de l'assemblage ayant le bloc 7 manquant est plus grande que celle de l'assemblage ayant le bloc 2 manquant. Comme pour les courbes d'indentation, dans le cas numérique, nous observons un comportement contraire à celui observé dans le cas expérimental. Ces résultats confirment les observations faites sur les courbes d'indentation.

4.2.2.12 Amélioration de la géométrie ostéomorphe

Nous avons pu constater au cours de cette thèse qu'une des faiblesses de la géométrie ostéomorphe est le contact entre les deux surfaces planes : les deux blocs peuvent alors glisser l'un par rapport à l'autre.

Une possible amélioration de cette surface plane serait de rajouter une connexion entre les surfaces planes des deux blocs en contact.

Ceci peut être démontré par une simulation éléments finis : en liant les points centraux des surfaces planes de deux blocs en contact entre eux par un mouvement de corps rigide.

La courbe résultante est comparée à la courbe d'un assemblage classique et apparaît sur la figure 4.47b.

On constate que la courbe correspondant à l'assemblage où les surfaces planes des blocs sont connectées montre une pente à l'origine deux fois plus grande que la pente à l'origine de la courbe de l'assemblage classique.

L'effort maximal qui est aussi deux fois plus grand est atteint pour une valeur de déplacement de l'indenteur légèrement plus grand que celle dans le cas de l'assemblage classique.

La connexion entre les deux surfaces planes voisines empêche le glissement entre les blocs et bloque aussi en partie les rotations.

Le fait de rajouter des connecteurs au niveau des surfaces planes des blocs ostéomorphes est une bonne solution pour améliorer la géométrie ostéomorphe, car elle permet de fortement

rigidifier (d'un facteur 2 sur la force) la structure qui tend d'ailleurs vers la rigidité d'une plaque monolithique.

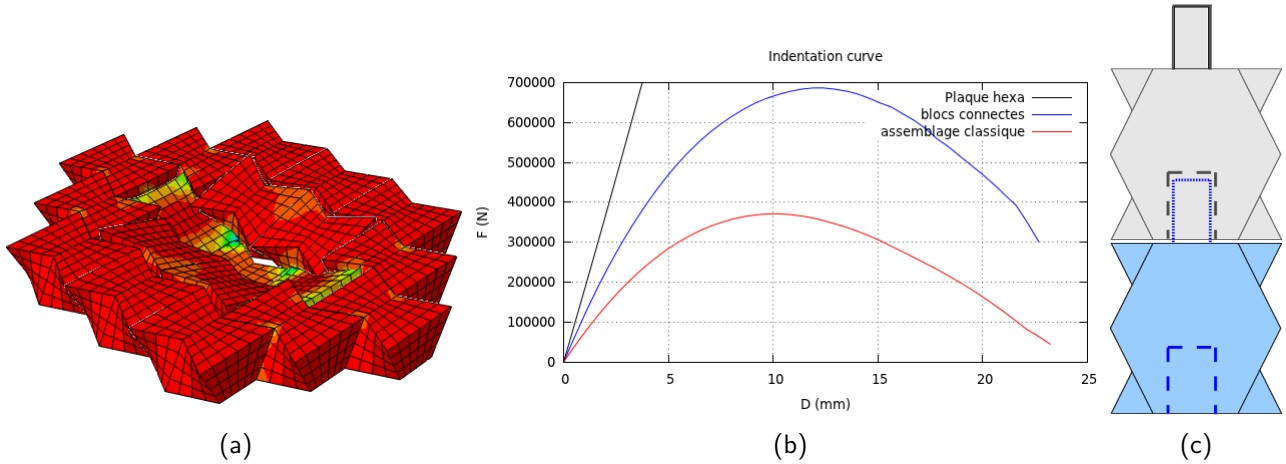


FIGURE 4.47 – Résultats de l'indentation d'un assemblage de 19 blocs ostéomorphes de 40mm de côté par éléments finis - Amélioration de la géométrie ostéomorphe : a) assemblage indenté, b) courbes d'indentation, c) ostéomorphes dotés de connecteurs

4.3 Synthèse et conclusion des simulations numériques

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats des simulations d'indentation sur des assemblages de cubes et des assemblages hexagonaux de blocs ostéomorphes.

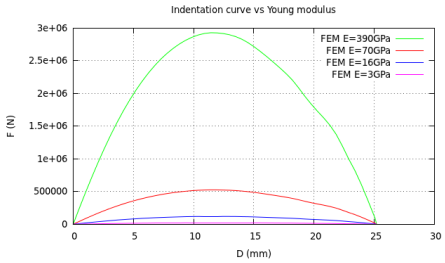
Concernant la géométrie cubique les résultats du code éléments discrets sont très similaires au résultat obtenu par éléments finis. L'ordre de grandeur de l'effort maximal obtenu est le même. Une différence se situe au niveau des valeurs de D_{pic} et de D_{perf}. Ce phénomène peut s'expliquer par l'approximation petits déplacements effectués lors de la mise en place du modèle discret. Les lois ne sont valides que pour de petits déplacements, il est donc probable qu'il y ait une accumulation d'erreurs au fur et à mesure du calcul. Ce code n'est pour l'instant capable de simuler que de petits assemblages. Pour les grands assemblages, les lois de comportement aux contacts doivent être améliorées. Cela permettrait de simuler de très grands assemblages ce qui deviendrait impossible à effectuer par simulations éléments finis. De plus, cela permettrait de gagner un temps de calcul considérable.

Pour la plupart des paramètres testés, en particulier ceux qui ne dépendent par directement de la géométrie des blocs, nous observons des comportements similaires entre les deux géométries (cubes ou ostéomorphes).

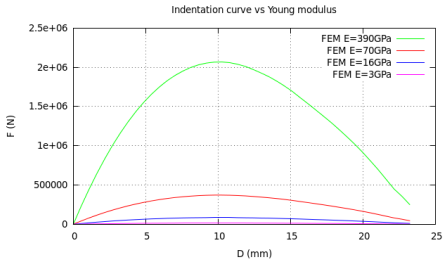
Mais pour certains paramètres, tels que le sens de l'indentation (ce que nous avions déjà pu constater lors des expériences présentées dans le chapitre 2), il y a une dissymétrie dans le comportement en flexion de l'assemblage de blocs ostéomorphes. Cette dissymétrie n'existe pas sur les assemblages de cubes.

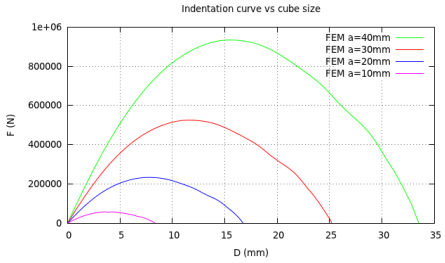
Un autre paramètre, cette fois purement élastique apparaît seulement durant la décharge complète d'un assemblage de cubes lorsque cet assemblage a été indenté jusqu'à un déplacement supérieur à D_{pic} : il s'agit du phénomène de 'snap-back'. Ce phénomène d'instabilité géométrique est propre aux contacts sommet/surface des cubes et n'est pas observé dans le cas d'assemblages de blocs ostéomorphes.

Nous avons pu aussi constater que selon les blocs indentés ou endommagés, la structure ne réagissait pas toujours de la même façon : dans le cas des ostéomorphes, cela est dû à la nature des interfaces du bloc endommagé ou indenté avec ses voisins et dans le cas des cubes, nous avons pu constater qu'il y avait deux types de cubes : ceux qui poussent et ceux qui sont poussés. Le tableau 4.1 récapitule et montre les similarités et les différences entre les deux géométries.

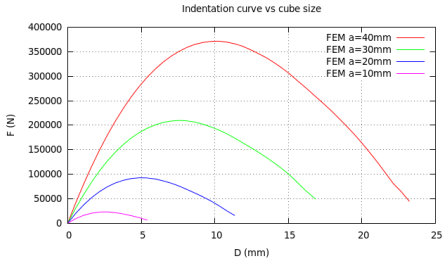


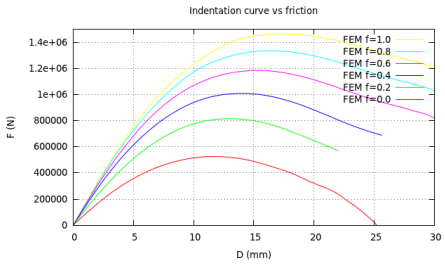
Module d'Young :
Comportement similaire entre les cubes et les ostéomorphes : l'effort maximal augmente en fonction du module d'Young alors que le déplacement maximal n'évolue pas ☑



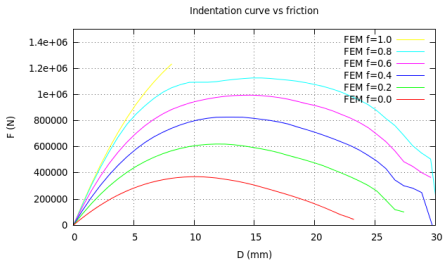


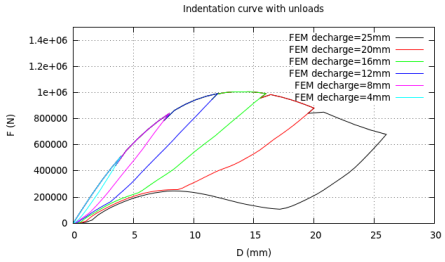
Taille des blocs :
Comportement similaire entre les cubes et les ostéomorphes : l'effort maximal ainsi que le déplacement maximal augmentent en fonction de la taille des blocs ☑



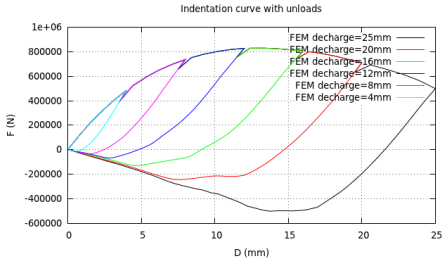


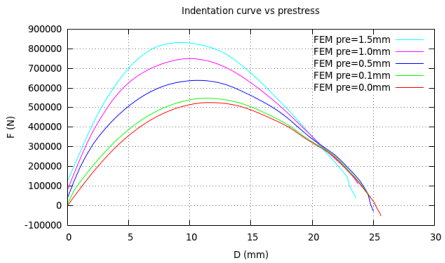
Coefficient de frottement :
Comportement similaire entre les cubes et les ostéomorphes : l'effort maximal augmente en fonction du coefficient de frottement : la rigidité de l'assemblage augmente avec f pour tendre vers la rigidité d'une plaque monolithique de masse équivalente pour les deux géométries ☑



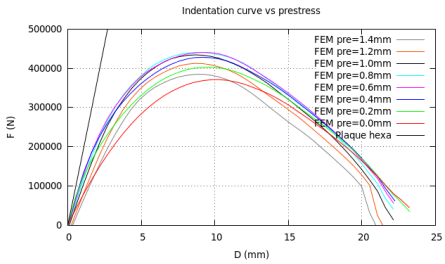


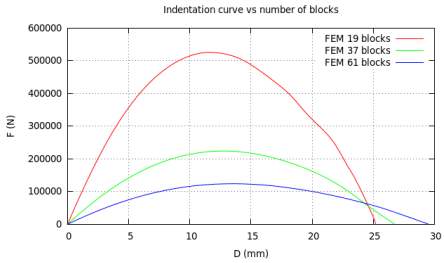
Instabilité géometrique :
phénomène de snap-back dans le cas des cubes - non existant dans le cas des ostéomorphes ☒



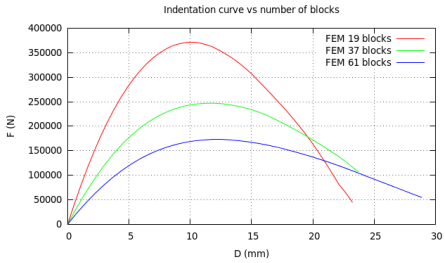


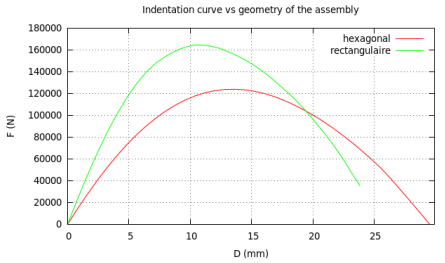
Précompression latérale : Comportement similaire entre les cubes et les ostéomorphes : l'effort maximal augmente en fonction de la précompression latérale : la rigidité de l'assemblage augmente avec f pour tendre vers la rigidité d'une plaque monolithique de masse équivalente ✓



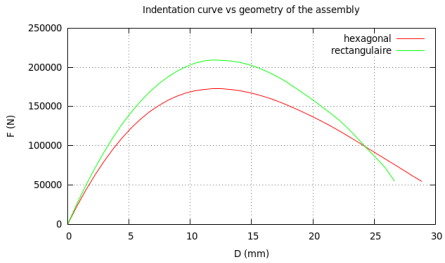


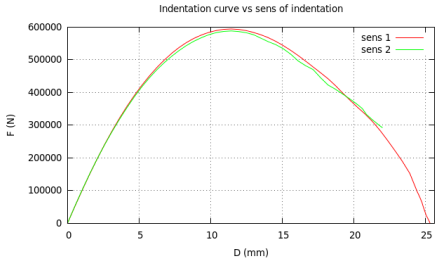
Nombre de blocs : Comportement similaire entre les cubes et les ostéomorphes : l'effort maximal diminue en fonction du nombre de blocs alors que le déplacement maximal augmente ✓





Géométrie de l'assemblage : Comportement similaire entre les cubes et les ostéomorphes : l'effort maximal est plus grand pour un assemblage rectangulaire que pour un assemblage hexagonal composé avec le même nombre de blocs alors que le déplacement maximal est plus faible ✓





Sens de l'indentation : la géométrie ostéomorphe donne un résultat asymétrique en flexion ✗

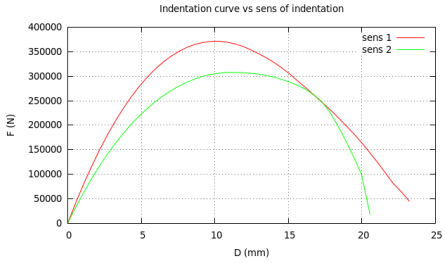


TABLE 4.1 – Récapitulatif des résultats obtenus grâce aux simulations numériques d'indentation - comparaison des effets des différents paramètres entre la géométrie cubique (à gauche) et la géométrie ostéomorphe (à droite)

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté l'étude d'architectures autobloquantes réalisées à partir d'une forme simple comme des cubes et d'une forme plus complexe appelée ostéomorphe à surfaces réglées.

Nous avons commencé par mener une étude paramétrique d'assemblages de blocs cubiques et ostéomorphiques. Deux méthodes numériques ont été utilisées dans ce but : la méthode des éléments discrets et la méthode des éléments finis. Un code par éléments discrets initialement implémenté par Brugger [2008] a été développé, de nouveaux outils de visualisations ont été introduits pour permettre une meilleure compréhension de la physique ayant lieu à l'intérieur d'un assemblage de blocs autobloquants de cubes et les lois de contact entre deux cubes ont été affinées.

Une nouvelle géométrie a été intégrée à l'intérieur de ce code : la géométrie ostéomorphe. Nous avons identifié deux types de contact : les contacts entre surfaces planes et les contacts entre les surfaces réglées. Les lois pour ces deux types de contact entre deux blocs ostéomorphes ont été calculées par éléments finis. Une forme analytique a ensuite été associée à chacune des lois, puis ces lois ont été introduites dans le code éléments discrets.

Des simulations par éléments finis ont été effectuées dans le but de compléter les résultats de l'étude par éléments discrets dans le cas des cubes. Ces simulations par éléments finis ont également été effectuées sur des assemblages de blocs ostéomorphes. De nombreux paramètres de fabrication ont pu être testés tels que le module d'Young, la taille des blocs, le coefficient de frottement, la précompression latérale. Nous avons alors pu remarquer la présence de courbes maîtresses définies par seulement 2 paramètres. En testant les assemblages ostéomorphes en fonction du sens de l'indentation, nous avons mis en évidence une dissymétrie en flexion qui s'explique par la nature des contacts mis en jeux.

En effectuant des décharges partielles, nous avons eu accès à la rigidité apparente des assemblages. Dans le cas des simulations d'assemblages de cubes, en effectuant une décharge complète après une grande valeur de déplacement de l'indenteur, nous avons pu observer un phénomène d'instabilité géométrique déjà observé par Estrin lors de ses expériences d'indentation d'assemblages de cubes en aluminium.

Nous avons réalisé des campagnes d'expériences d'indentation sur des assemblages de cubes en alumine puis sur des assemblages hexagonaux de blocs ostéomorphes en polymère. Ces essais ont permis d'approfondir et de valider les résultats des simulations numériques.

Un autre aspect étudié de ces structures autobloquantes est la tolérance à l'endommagement. Dans le cas des assemblages constitués de cubes, dès qu'un bloc est manquant, la structure autobloquante s'écroule. L'endommagement ne peut être que partiel, seule une

fraction du cube est retirée. Alors que dans le cas d'assemblages de blocs ostéomorphes, le caractère asymétrique de la géométrie nous donne la possibilité d'enlever des blocs. La structure peut d'ailleurs résister jusqu'à 25% de blocs manquants.

Nous avons pu faire des essais pour étudier cet endommagement partiel dans le cas des cubes et en retirant un à deux blocs dans le cas de la géométrie ostéomorphe. Les résultats de ces essais ont été reproduits grâce à des simulations par éléments finis.
D'autres essais d'indentation ont été réalisés sur des assemblages fabriqués à partir de petits assemblages hexagonaux de blocs ostéomorphes inspirés de la géométrie des carapaces de tortues. Ces assemblages présentent alors une structure hiérarchique. Ces assemblages ont permis d'améliorer le modèle d'assemblage initial de type hexagonal. Ces assemblages présentent une plus grande résistance à l'effort et une plus grande capacité de déformation.

Finalement, nous avons démontré par le biais de simulations numériques qu'il était possible d'améliorer la géométrie des blocs ostéomorphes en ajoutant des connecteurs dans les surfaces planes afin de limiter les glissements relatifs à cet endroit.

Perspectives

Du point de vue des simulations, il est possible d'affiner les lois de contact intégrées dans le code éléments discrets en particulier pour la géométrie ostéomorphe. Continuer à développer les outils de visualisation permettrait d'approfondir la compréhension de la physique ayant lieu au sein d'un assemblage au cours d'une indentation.

Nous pouvons explorer les assemblages architecturés hiérarchiques en trouvant de nouvelles architectures. Il est aussi possible d'utiliser une approche multimatériaux dans un même assemblage.

Nous pouvons aussi utiliser l'asymétrie de comportement en flexion qui permettrait grâce à une approche vibratoire de laisser passer les sons dans un sens et de les bloquer dans l'autre sens (exemple d'une vitre sans tain en version sonore).

Une autre exploitation de cette asymétrie de comportement serait de construire des boites de protection en assemblages de blocs ostéomorphes. Ainsi, l'objet contenu à l'intérieur serait protégé des chocs extérieurs, mais pourrait quand même déformer la structure sans trop d'effort, pour ne pas s'endommager.

Enfin, les assemblages ostéomorphes peuvent être constitués de plusieurs couches qui

seraient liées les unes aux autres par des blocs disposés verticalement. La position de ces blocs jouerait alors un rôle dans la tenue mécanique de l'assemblage.

Les cohésions des assemblages hexagonal et tortue sont très difficiles à maintenir en place avec la méthode de l'application de la précompression latérale actuelle. Une méthode qui permettrait d'appliquer une précompression latérale suffisante pour maintenir l'assemblage serait d'utiliser un câble et d'adapter un système de serrage de câblage.

En insérant les assemblages autobloquants en tant que matériaux cœurs de sandwich, il est peut-être aussi possible de les tester dans des applications d'impact.

Annexe A

Caractérisation mécanique du polymère par essais de traction

Dans cette annexe, nous allons présenter les résultats des essais de traction effectués sur des éprouvettes réalisées par prototypage rapide dans le même matériau que celui des blocs ostéomorphes qui seront testés en indentation. Le VeroGray 30µ dont les caractéristiques fournies par MG2 Systems sont :

VeroGray - FullCure850

Propriété	ASTM	Métrique		Imperial	
Résistance à la tension	D-638-03	MPa	60	psi	8700
Module d'élasticité	D-638-04	MPa	3000	psi	435000
Elongation à la rupture	D-638-05	%	15	%	1.5
Résistance à la flexion	D-790-03	MPa	95	psi	13775
Module à la flexion	D-790-04	MPa	300	psi	435000
Impact Izod Notched	D-256-06	J/m	25	ft lb/in	0.5
Dureté Shore	Scale D	Scale D	86	Scale D	86
Dureté Rockwell	Scale M	Scale M	49	Scale M	49
HDT à 0.45 MPa	D-648-06	°C	49	°F	120
HDT à 1.82 MPa	D-648-07	°C	47	°F	117
Tg	DMA, E"	°C	56	°F	134
Cendres après combustion	USP 28	%	0.3	%	0.3
Abosrption aqueuse	D570-98 24 Hr	%	1.1	%	1.1

FIGURE A.1 – Caractéristiques du VeroGray 30µ

A.1 Schéma de l'éprouvette

L'éprouvette a une épaisseur de 2mm. La longueur totale l2 est de 170mm et la longueur utile l1 est de 60mm. La largeur totale b2 de l'éprouvette et la largeur utile b1 sont de 10mm. Nous avons utilisé une machine de traction (MTS-647, voir figure A.3) qui possède des mors de serrage hydraulique. Nous avons utilisé un extensomètre pour mesurer la déformation de la longueur utile.

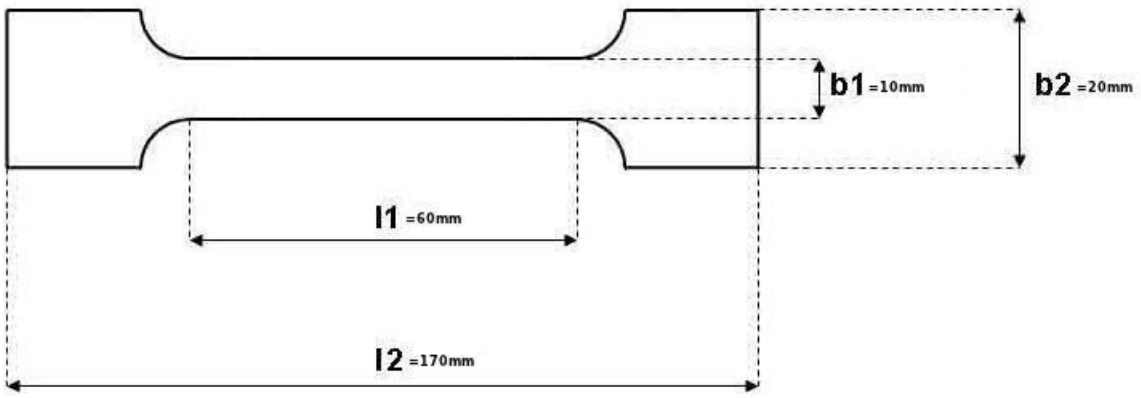
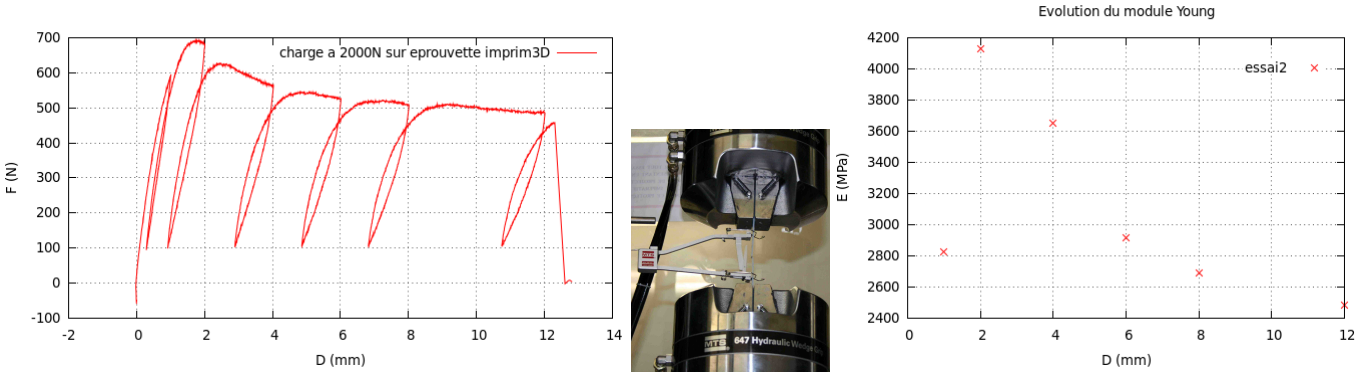


FIGURE A.2 – Schéma de l'éprouvette

A.2 traction des éprouvettes en polymère - premier essai de traction

La vitesse de déformation est constante et fixée à 0.0001 $mm.min^{-1}$. La courbe de traction apparaît sur la figure A.3a. Le module d'Young a été calculé au début de chaque décharge. Cela permet de tracer la courbe d'évolution du module d'Young (figure A.3c). Le premier module est mesuré à environ 4100MPa. Le module diminue ensuite pour atteindre la valeur de 2500MPa juste avant la rupture de l'échantillon. L'allongement de l'échantillon au moment de la rupture est de 12.3mm soit une déformation à rupture de 20.5%.

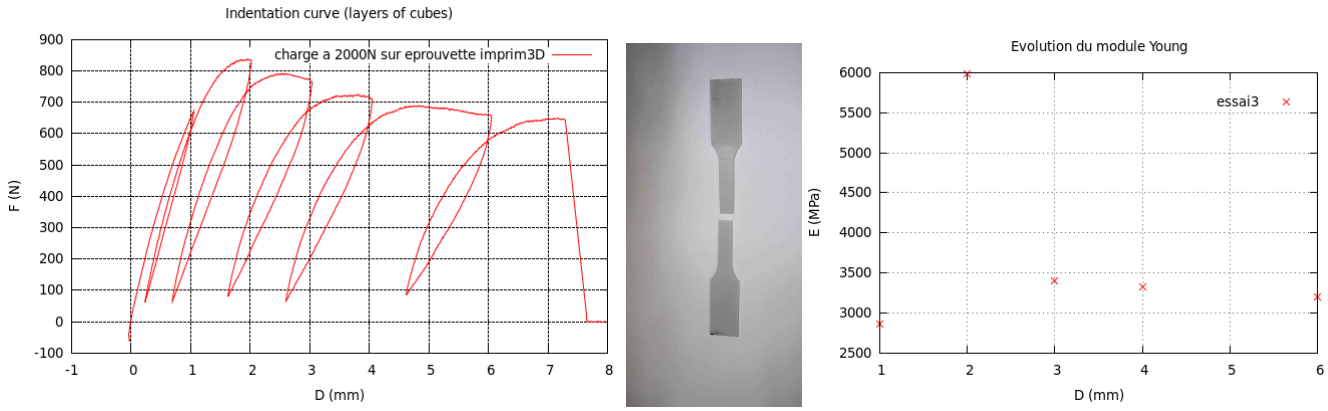


(a) Courbe de traction (b) Photo de l'essai (c) Evolution du module d'élasticité en fonction du déplacement de l'indenteur

FIGURE A.3 – Courbe de traction - premier essai de traction - vitesse de déformation constante et fixée à 0.0001 $mm.min^{-1}$

A.3 traction des éprouvettes en polymère - second essai de traction

La vitesse de déformation est constante et fixée à 0.001 $mm.min^{-1}$. La courbe de traction apparaît sur la figure A.4a. Le module d'Young a été calculé au début de chaque décharge. Cela permet de tracer la courbe d'évolution du module d'Young (figure A.4c). Le premier module est mesuré à environ 6000MPa. Le module diminue très rapidement ensuite pour atteindre la valeur de 3000MPa à la seconde décharge et diminue ensuite très peu jusqu'à la rupture de l'échantillon. L'allongement de l'échantillon au moment de la rupture est de 7.2mm soit une déformation de 12%. Dans les deux essais de traction, la cassure de l'éprouvette est nette. En conclusion, les essais donnent un module d'élasticité de l'ordre de 3GPa qui correspond aux données indiquées par le constructeur. L'allongement rupture de 12% s'avère plus faible que les données fournies (15%).



(a) Courbe de traction

(b) Photo de l'éprouvette à la fin de l'essai

(c) Evolution du module d'élasticité en fonction du déplacement de l'indenteur

FIGURE A.4 – Courbe de traction - second essai de traction - vitesse de déformation constante et fixée à 0.001 $mm.min^{-1}$

Annexe B

Utilisation d'Abaqus

B.0.0.13 Exportation de la géométrie vers Abaqus

La géométrie ostéomorphe a d'abord été dessinée sous Solid Edge. Cette géométrie peut ensuite être exportée au format IGES qui est compatible avec Abaqus. La pièce est importée dans Abaqus comme un solide 3D déformable (fig. B.1).

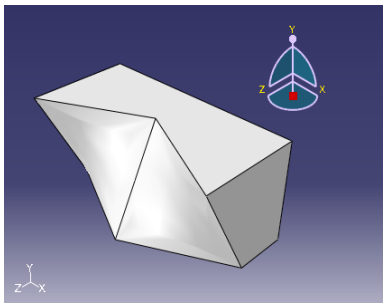


FIGURE B.1 – Demi ostéomorphe importé sous Abaqus

B.0.0.14 Association du matériau à la géométrie

On crée tout d'abord un matériau qui se comportera comme un solide déformable. Ce solide sera élastique isotrope. Comme les calculs se font dans le domaine élastique, les lois de comportement obtenues seront proportionnelles au module d'Young. On peut donc associer au matériau, un module d'Young de 1MPa. Les forces trouvées seront ensuite multipliées par le module d'Young du matériau. On va aussi associer à ce matériau un coefficient de poisson de 0.3.

Il faut ensuite créer une section appartenant au demi-bloc ostéomorphe. Cette section sera solide et homogène. On peut alors associer le matériau à la pièce par l'intermédiaire de cette section.

B.0.0.15 Création de l'assemblage

À partir de la pièce importée sous Abaqus, on peut créer un assemblage de deux demi-blocs. On ajoute d'abord les deux pièces à l'assemblage puis les deux blocs sont ensuite positionnés l'un par rapport à l'autre.

B.0.0.16 Étapes du calcul

La suite consiste à créer les étapes de calculs qui seront accomplies durant la simulation. Les étapes sont de type "Static, General", de durée 1. Il y a une première étape, appelée "Initiale", qui sert à vérifier les conditions initiales : les interactions, les contraintes et les conditions de bord. Il y a ensuite deux autres étapes qui seront créés et seront appelées "Aller" et "Retour". Ces étapes représentent les différentes sollicitations que l'on va appliquer au cours de la simulation. Ici, respectivement, la charge et la décharge. Pour les cas, ou il est nécessaire d'appliquer une compression ou un décollement, on créera une étape du même nom avant l'étape

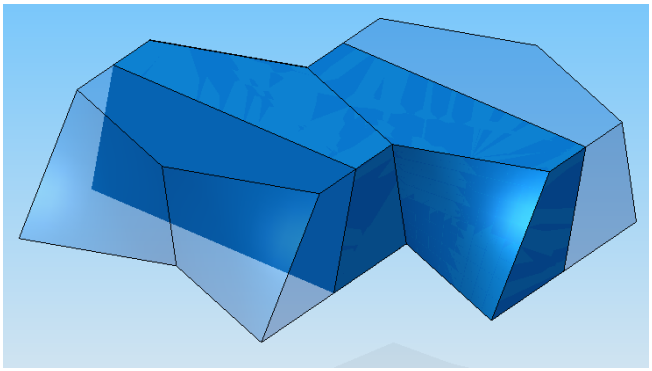


FIGURE B.2 – Positionnement des deux demi-blocs

"Aller".
Le pas de temps maximum est fixé à 0.02, ensuite Abaqus ajustera le pas de déplacement automatiquement. Il y aura donc au minimum 50 pas par étapes. Si Abaqus ne converge pas, alors il diminue le pas de temps. On fixe un pas minimum est aussi à 1E-08 : si Abaqus atteint un pas inférieur à cette valeur, la simulation est arrêtée.
Il est important lors de la création de ces étapes d'activer l'option qui prend en compte les effets non-linaires dues aux grands déplacements et aux grandes déformations. Il est aussi important de préciser l'utilisation d'une matrice non symétrique pour garder les termes non linéaires.

B.0.0.17 Stockage des résultats

Abaqus exprime la force due au contact entre les deux blocs sous la forme d'un vecteur force intégré sur toute la surface de contact et de son point d'application (position où le moment est nul). Il y a deux possibilités de stockage. La première est le 'field output' : il permet d'enregistrer les données de visualisation comme par exemple les contraintes ou la déformation des blocs. Ces données sont enregistrées tous les 0.1 (10 images sur le calcul). Le second est le 'history output' qui permet d'enregistrer les données calculées comme les forces, leur point d'application, les rotations et déplacements. Ces données sont enregistrées tous les 0.02 (50 points par calcul).

B.0.0.18 Création du contact entre les deux demi-blocs

On définit le contact dans le module interaction. L'interaction entre deux blocs déformables sera du type "surface to surface".
L'algorithme de discrétisation utilisé est de type "node to surface". On définit une surface maîtresse (surface du bloc 2) qui permettra de définir la direction de contact (qui est la normale à cette surface). On définit sur la surface du bloc 1 des points esclaves. Avec cette méthode de discrétisation, la surface maîtresse ne peut pas être pénétrée par les points esclaves. Mais l'inverse est impossible. Il est donc mieux de définir la surface maîtresse sur le matériau le plus mou.
Il faut activer l'option "Finite Sliding" pour pouvoir calculer l'aire de contact, la pression et les directions de glissement sur la position déformée des blocs. Ensuite, on définit les propriétés de

l'interaction, normales et tangentielles.
La loi normale sera de type "Hard contact". La séparation des surfaces est autorisée. À partir du contact, la pression augmente sans limites. Cette loi minimise l'interpénétration des surfaces. Pour la loi tangentielle, on utilise la loi de Coulomb en utilisant un coefficient de frottement constant. Pour cela, on utilise une méthode de pénalité. On pourrait utiliser les multiplicateurs de Lagrange, mais cela augmenterait grandement le temps de calcul, car ils augmentent le nombre de degrés de liberté et le nombre d'itérations.

B.0.0.19 Chargement et Conditions de bord

Avec le module Interaction, on peut ajouter des contraintes, comme des mouvements de solides rigides. On prend un point de référence, et on y associe une surface. On utilisera une contrainte de type "Tie" qui permet de bloquer aussi les degrés de liberté en rotation. En appliquant une sollicitation au point de référence, la sollicitation sera alors propagée à la toute surface.

Ensuite, en utilisant le module "Load", on va appliquer les sollicitations aux blocs. Le bloc 2 est encastré au point RP_2 et une contrainte de type solide rigide est appliquée à la surface à laquelle appartient le point RP_2. Le bloc 1 est contraint en déplacement ou en rotation au point RP_1 et une contrainte de type solide rigide est appliquée à la surface à laquelle appartient le point RP_1.

On peut tester les 6 degrés de liberté des blocs, 3 déplacements et 3 rotations dans les 2 directions (Dx et -Dx).

B.0.0.20 Maillage

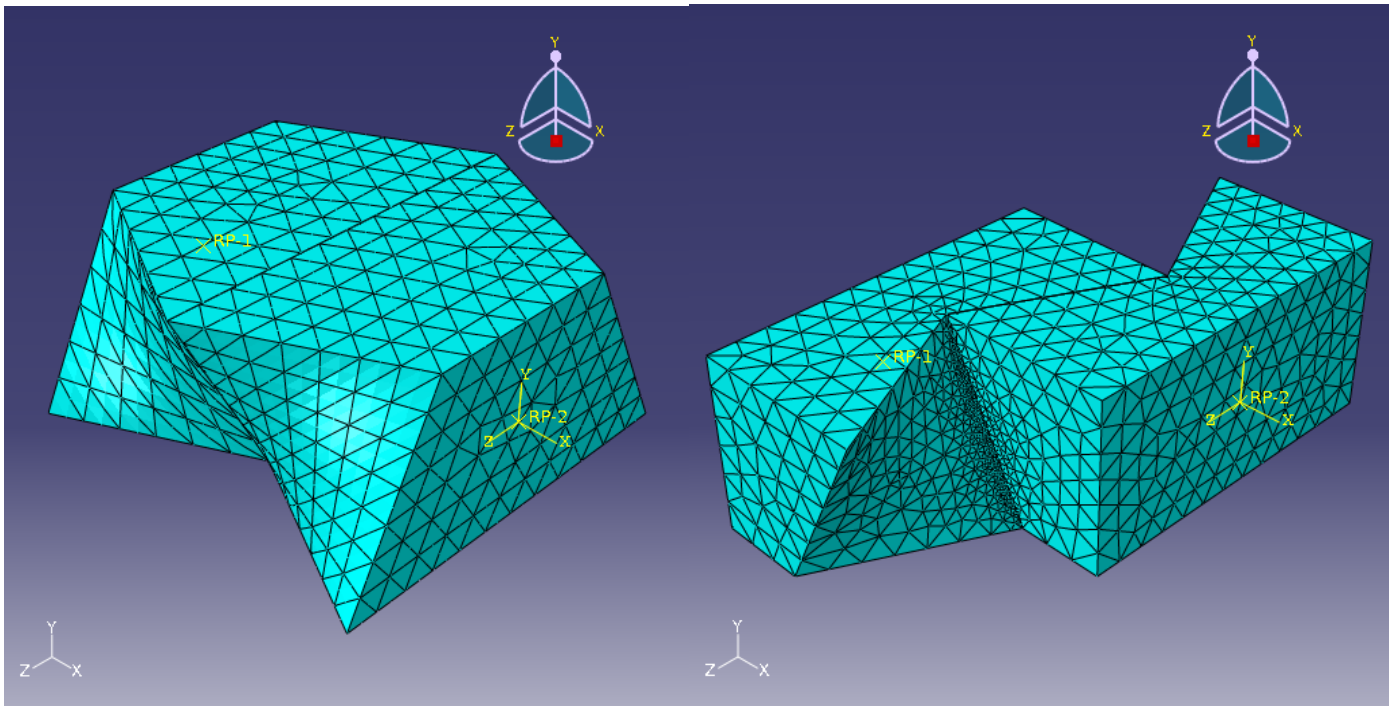
La figure B.3 montre le maillage utilisé sur un demi-ostéomorphe lors des calculs pour les deux types de contact.

Le maillage choisi est constitué d'éléments de types linéaires tétraédriques à 4 nœuds (C3D4). Le maillage est régulier sur la plupart du bloc mais il est plus raffiné le long des arêtes qui sont en contact, car les arêtes sont singulières et en y raffinant le maillage, on peut améliorer la qualité de calcul. Le maillage global du bloc 2 est plus raffiné que celui du bloc 1.

B.0.0.21 Calcul

Pour finir, on créé le calcul ('job'). Il est possible par l'intermédiaire de ce module de paralléliser ce calcul et de gérer la mémoire pour les gros calculs. Lorsqu'on lance le calcul à partir de l'interface CAE (clic droit sur le job → 'run'), un fichier inp est généré puis le calcul est lancé. Pour générer le fichier .inp sans lancer le calcul : clic droit sur le job → 'Write Input'. Un moniteur qui permet de surveiller le calcul.

Le calcul va créer un fichier .odb. Ce fichier contient les résultats et permet de les visualiser à l'aide du module de visualisation d'Abaqus. On peut alors voir les grandeurs demandées dans le



(a) Maillage pour un contact plan (bloc 1 : 2341 éléments et 3722 nœuds, bloc 2 : 2870 éléments, 4565 nœuds)

(b) Maillage pour un contact entre surfaces réglées (bloc 1 : 8405 éléments et 1838 nœuds, bloc 2 : 8819 éléments, 1931 nœuds)

FIGURE B.3 – Maillage Abaqus pour simuler le contact entre deux blocs

History Output (comme les forces et les positions) et les grandeurs à visualiser demandées dans Field Output comme les déformations et contraintes. XYData permet de tracer les grandeurs en fonction du temps. Avec la fonction “combine”, on peut tracer une grandeur en fonction d’une autre. On peut aussi exporter les données avec la fonction Report dans un fichier avec l’extension .rpt. Ce fichier est ensuite exploitable par gnuplot par exemple.

B.0.0.22 Commandes d’Abaqus

Pour lancer l’interface graphique CAE d’Abaqus, on utilise la ligne de commande suivante :

abaqus cae (pour les problèmes de cartes graphique, on peut rajouter –mesa à la fin)

Si la fenêtre CAE présente des problèmes de transparence, c’est parce que les effets 3D de l’OS sont actifs. On peut désactiver les effets 3D seulement pour la fenêtre d’Abaqus en tapant :

XLIB_SKIP_ARGB_VISUALS=1 abaqus cae

Il est aussi possible de lancer un certain nombre d’autres opérations en ligne de commande :

-Pour lancer un nouveau calcul (nécéssite de créer un fichier inp avant) :

abaqus job=nom_du_job cpus=2 mp_mode=threads interactive

-Pour stopper un calcul en cours, la commande est la suivante :

abaqus terminate job=nom_du_job

Abaqus utilise des jetons pour lancer des calculs. Un calcul monoprocesseur utilise 5 jetons. Les calculs multiprocesseurs utilisent $J = INT(P * N^{0.422})$ jetons où INT désigne la fonction Partie Entière, P désigne le nombre de jetons requis pour une exécution sur un 'core', N désigne le nombre de 'cores' effectivement utilisés. Pour connaitre le nombre de jetons utilisés et restants, on peut utiliser la commande suivante :

abaqus licensing ru

Annexe C

Détail des lois de contact entre les surface planes de deux blocs ostéomorphes

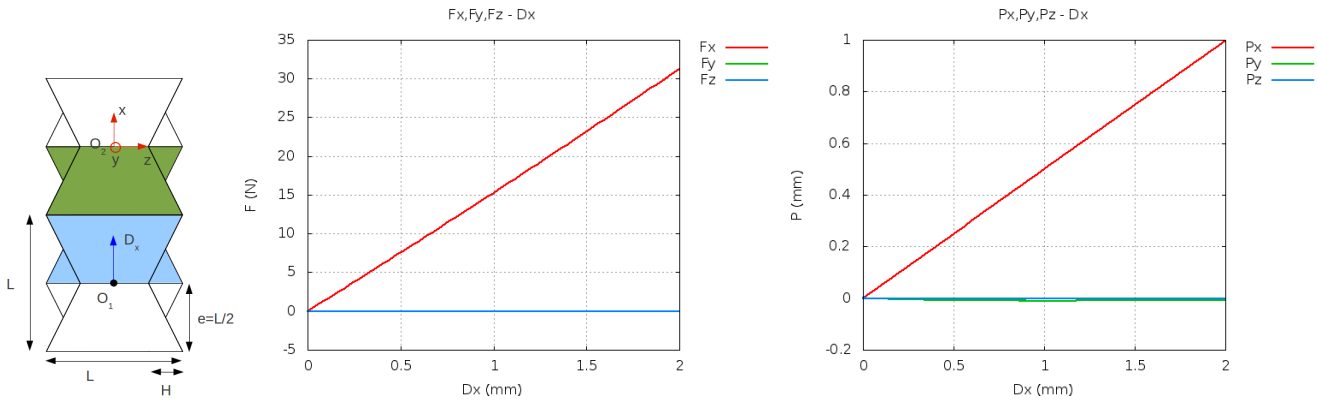
Dans cette annexe, nous présentons les résultats des simulations par éléments finis qui définissent les lois de contact liant les efforts et les couples exercés par un bloc sur un de ses voisins en fonction de leurs positions relatives (translations et rotations) dans le cas d'un contact entre surfaces planes. Les simulations ont été réalisées grâce au logiciel de calcul par éléments finis Abaqus 6.9. Les conditions de ces calculs sont détaillées dans l'annexe B de ce manuscrit. Les dimensions du bloc ostéomorphe pour la simulation Abaqus sont L=40mm, H=10mm, e=20mm et L_P=15mm. Les lois seront calculées pour ces dimensions exprimées en millimètres. Le module d'Young est toujours fixé à E=1MPa.

C.1 Effet du déplacement

Dans cette partie, nous étudions toutes les lois de comportement simulées dans le cas d'un déplacement relatif entre deux blocs ostéomorphes ainsi que les formules leur correspondant pendant les charges et les décharges, dans le cas d'un contact entre surfaces planes.

C.1.1 Effet d'un déplacement $+D_x$

Les figures C.1 montrent que le déplacement normal du bloc 1 par rapport au bloc 2 va engendrer un effort normal et un déplacement du point d'application tous deux portés par l'axe X. Les efforts et couples sur les autres axes sont tous nuls.



(a) Déplacement $+D_x$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE C.1 – Surfaces planes - Effet d'un déplacement selon X

C.1.1.1 Déplacement normal D_x vs force normale F_x

La force normale F_x résultant du déplacement D_x appliqué peut être décrite de façon analytique grâce à la loi de Hooke qui est la méthode que nous avions utilisée dans le cas du contact entre deux cubes :

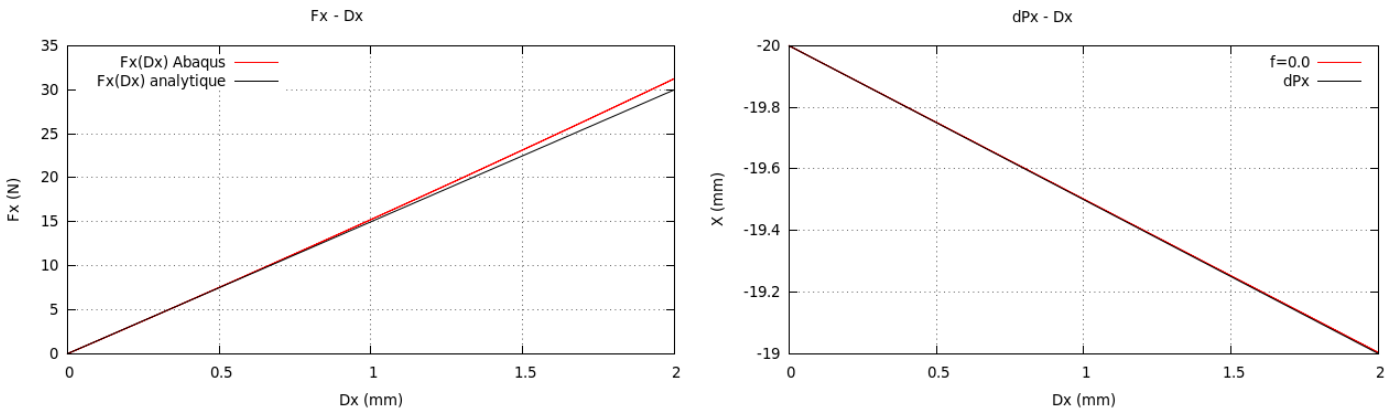
$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{S} = E\epsilon_{xx} = \frac{\delta L}{L}E$$

$$F_x = \frac{\delta L S}{L} E$$

Ici, $\delta L = D_x$ et $S = (L - H) * e$, on obtient alors :

$$\boxed{\frac{F_x}{E} = \frac{D_x * (L - H)}{2} = D_x * L_P} \tag{C.1}$$

Ce qui donne $K_{xx}^P = 1.0 * L_P$, donc $\alpha_{xx}^P = 1.0$. La figure C.2a permet de comparer la formule analytique avec la réponse obtenue par les éléments finis. Les deux courbes correspondent bien, même si on constate que pour les plus grandes valeurs de D_x, le modèle éléments finis est un peu trop rigide. Ceci provient sans doute des conditions aux limites d'encastrement du bloc 2 ou du mouvement de corps rigide imposé au bloc 1 (voir annexe B).



(a) Force normale

(b) Coordonnée X du point d'application

FIGURE C.2 – Lois de comportement dues au déplacement selon X pour $f = 0.0$ dans le cas d'un contact entre surfaces planes

C.1.1.2 Déplacement normal D_x vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Le déplacement du point d'application de la force $\vec{P}$ se déplace seulement selon X (voir C.2b) :

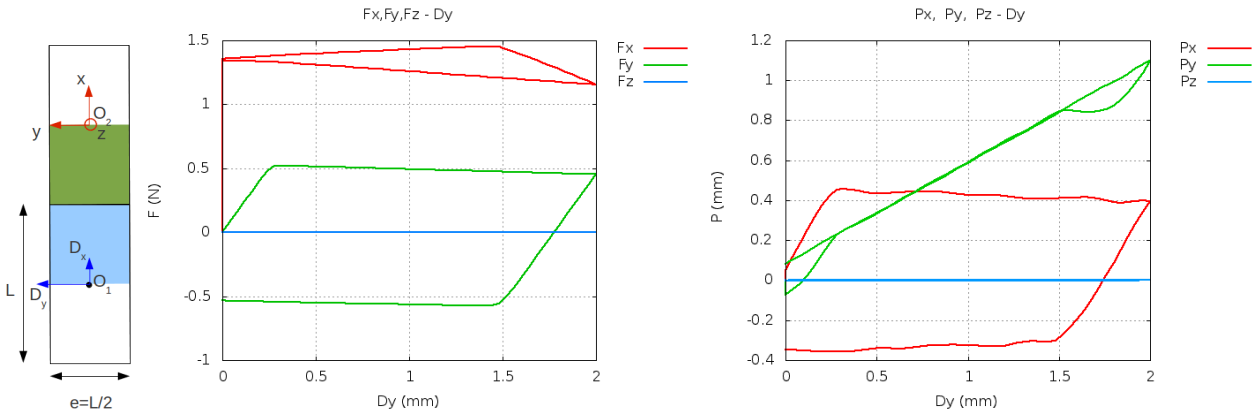
$$\boxed{\delta P_x = \frac{D_x}{2}} \tag{C.2}$$

Le tableau C.1 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces planes pour un déplacement D_x. Les lois que nous avons retenues apparaissent en orange dans ce tableau et sont considérées comme du premier ordre. Dans le cas présent, seules F_x et δP_x sont du premier ordre. Les autres lois ont une influence très faible et sont donc négligeables.

F_x	1er ordre
F_y	négligeable
F_z	négligeable
δP_x	1er ordre
δP_y	négligeable
δP_z	négligeable

TABLE C.1 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces planes dans le cas d'un déplacement D_x

C.1.2 Effet d'un déplacement $+D_y$



(a) Déplacement $+D_y$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE C.3 – Surfaces planes - Effet d'un déplacement selon Y

Si un déplacement tangentiel du bloc 1 par rapport au bloc 2 est effectué sans avoir appliqué au préalable une force normale, alors l'effort résultant de cette sollicitation sera nul. Il est nécessaire d'appliquer d'abord une compression D_x (fixée ici à $D_x = 0.09$ mm) pour observer les effets du déplacement D_y. Il existe donc un effort normal F_x dû à la compression en plus de l'effort dû au déplacement tangentiel. À cause de cette sollicitation composée, il est plus difficile de faire une prédiction analytique que dans le cas d'un cisaillement classique. Le résultat de cette sollicitation sera donc calculé par les éléments finis.
Les courbes de la figure C.3b et C.3c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'un déplacement du bloc 1 le long de Y. Au niveau des forces, on constate principalement un cisaillement suivant Y et dans une moindre mesure un effort normal selon X. Au niveau du point d'application de la force, on constate qu'il se déplace légèrement dans le sens de la sollicitation. Les paragraphes suivants présentent les formules analytiques retenues pour représenter ces comportements.

C.1.2.1 Déplacement tangentiel D_y vs force tangentielle F_y

L'effort évolue d'abord linéairement avec la raideur suivante :

$$\boxed{K_{yy}^P = \alpha_{yy}^P * L_P \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yy}^P = 0.1333} \tag{C.3}$$

Cet effort va ensuite plafonner à une valeur maximale qui peut être prédite par les lois de frottement de Coulomb. En notant le coefficient de frottement f, la valeur du plafond est égale à f.F_x. La figure C.4b montre la courbe trouvée par éléments finis, avec en pointillés la prédiction obtenue par les lois de Coulomb qui se superpose bien aux éléments finis. On peut expliquer ce seuil par un phénomène de glissement. Le bloc 1 glisse par rapport au bloc 2 jusqu'à ce que le déplacement du bloc 1 change de sens. Une fois que le déplacement change de sens alors, l'effort reprend une évolution linéaire avec la raideur K_{yy}^P.

À cause de ce phénomène de glissement, la force va dépendre de l'histoire du déplacement. L'histoire de ce déplacement permettra de savoir à quel endroit de la courbe on se trouve au moment du changement de sens du déplacement. Il sera donc nécessaire de stocker cet historique dans une variable que l'on va appeler $D_{y,0}$. Cette valeur permettra de décrire l'effort après le changement de sens du déplacement. L'équation utilisée pour décrire cet effort est la suivante :

$$\boxed{\frac{F_y}{E} = K_{yy}^P(D_y - D_{y,0})} \tag{C.4}$$

Une fois que l'effort tangentiel est déterminé à l'aide de cette formule, un test doit être réalisé pour déterminer s'il y a glissement entre les blocs :

Si $|F_y| > f.F_x$:

$$F_y = signe(F_y).f.F_x \tag{C.5}$$

$$D_{y,0} = D_y - \frac{F_y}{K_{yy}^P} \tag{C.6}$$

C.1.2.2 Déplacement tangentiel D_y vs force normale F_x

La figure C.4a, montre que la force normale ne commence pas à zéro à cause de l'effort normal dû à la compression appliquée avant le déplacement tangentiel. On observe une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls et qui se réduit à une droite lorsque le coefficient de frottement devient nul. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge.

Pour le premier segment, l'effort diminue pendant la charge et la pente augmente avec le coefficient de frottement. On définit alors la relation d'évolution suivante pour α_{yx}^P :

$$\boxed{\alpha_{yx}^P = -0.0011 * (10.1 * f + 1)} \tag{C.7}$$

Dans le cas d'un coefficient de frottement nul, la courbe de décharge suit la même équation.
Si le coefficient de frottement est différent de zéro, on définit alors deux équations supplémentaires. La première correspond à la première partie de la décharge : la force augmente en fonction du déplacement D_y avec une pente qui est la même quel que soit le coefficient de frottement. Comme dans les cas précédents d'hystérésis, on stockera l'histoire du déplacement sous la forme d'une variable $D_{y,0}$, qui permettra de décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement :

$$\boxed{\frac{F_{xa}}{E} = (D_y - D_{y,0}) * K_{yxa}^{Pd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yxa}^{Pd} = \alpha_{yxa}^{Pd} * L_P \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yxa}^{Pd} = -0.0387} \tag{C.8}$$

Puis, lorsque le bloc 1 se met à glisser par rapport au bloc 2, l'effort va diminuer à nouveau en fonction du déplacement D_y avec une pente qui augmente avec le coefficient de frottement pour tendre vers la valeur de l'effort dû à la compression.
Un test doit donc d'abord être réalisé pour déterminer s'il y a glissement entre les blocs :

Si $|F_y| > f.F_x$:

$$\frac{F_{xb}}{E} = D_y * K_{yxb}^{Pd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yxb}^{Pd} = \alpha_{yxb}^{Pd} * L_P \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yxb}^{Pd} = -0.0011 * (-15.2 * f + 1) \tag{C.9}$$

C.1.2.3 Déplacement tangentiel D_y vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

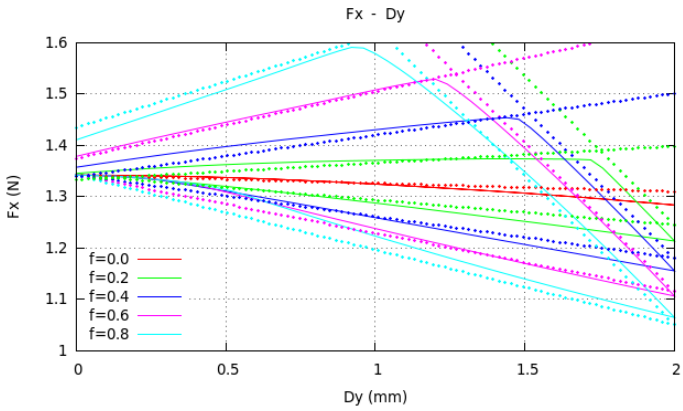
La figure C.4c affiche la position du point d'application de la force en fonction de D_y. On constate que le point d'application de la force se déplace dans le même sens que le déplacement imposé, tel que :

$$\boxed{\delta P_y = \frac{D_y}{2}} \tag{C.10}$$

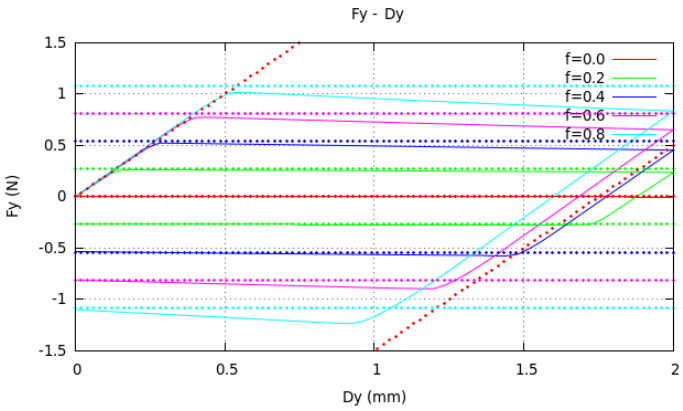
Le point semble aussi se déplacer selon l'axe X, ce qui est probablement dû au fait que les coins des blocs s'indentent entre eux lorsque les deux blocs sont décalés, cette indentation induit une résistance le long de la normale. On considèrera donc que le point ne se déplace pas selon cette direction. Le tableau C.2 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces planes pour un déplacement D_y. Les lois que nous avons retenues apparaissent en orange dans ce tableau et sont considérées comme du premier ordre. Dans le cas présent, seules F_x, F_y et δP_y sont du premier ordre en or. Les autres lois ont une influence très faible et sont donc négligeables.

C.1.3 Effet d'un déplacement $+D_z$

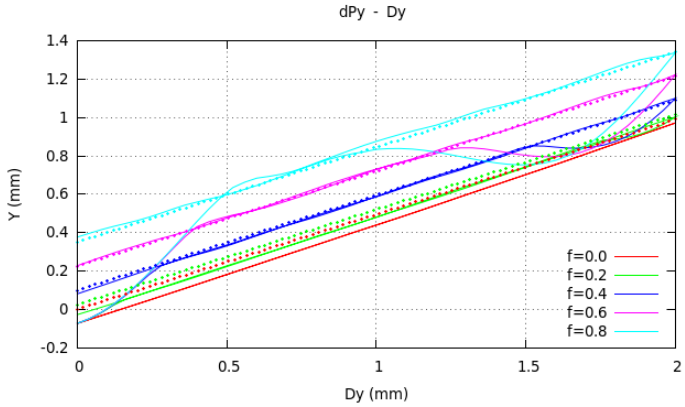
Comme dans le cas d'un déplacement D_z, il est nécessaire d'appliquer d'abord une compression D_x pour observer les effets du déplacement selon l'axe Z. Dans notre cas, $D_x = 0.09$ mm. Il



(a) Force normale



(b) Force selon Y



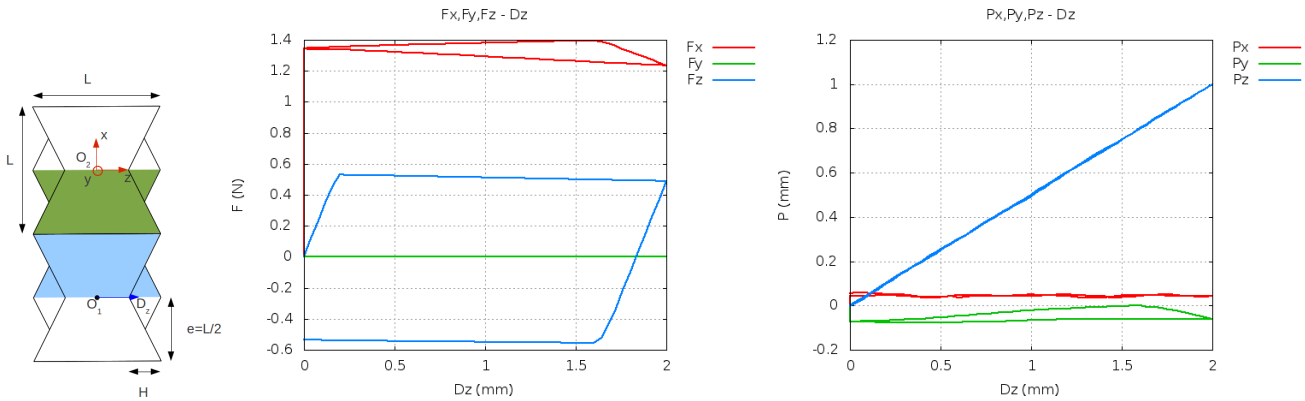
(c) Coordonnée Y du point d'application

FIGURE C.4 – Lois de comportement dues au déplacement selon Y pour un coefficient de frottement $f = 0.4$ et une compression $D_x = 0.09$ mm dans le cas d'un contact entre surfaces planes

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	négligeable
δP_x	négligeable
δP_y	1er ordre
δP_z	négligeable

TABLE C.2 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces planes dans le cas d'un déplacement D_y

existe donc aussi un effort normal F_x dû à la compression en plus de l'effort dû au déplacement tangentiel. Les figures C.5 montrent que l'effort engendré par ce cisaillement est principalement porté par l'axe Z. On observe aussi une force selon X qui est plus faible. Dans les deux cas, on observe une hystérésis due à l'effet du frottement.



(a) Déplacement $+D_z$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE C.5 – Surfaces planes - Effet d'un déplacement selon Z

C.1.3.1 Déplacement tangentiel D_z vs force tangentielle F_z

La force tangentielle est exactement la même que dans le cisaillement selon Y. On aura donc la même raideur que celle utilisée précédemment. L'effort évolue d'abord linéairement avec la raideur suivante :

$$\boxed{K_{zz}^P = K_{yy}^P = \alpha_{zz}^P * L_P \qquad \text{où} \qquad \alpha_{zz}^P = \alpha_{yy}^P = 0.1333} \tag{C.11}$$

Cet effort va ensuite plafonner à une valeur égale à $f.F_x$ qu'on a expliqué précédemment par un phénomène de glissement. Une fois que le déplacement change de sens alors, l'effort reprend une évolution linéaire avec la raideur K_{zz}^P.
À cause de ce phénomène de glissement, la force va dépendre de l'histoire du déplacement qu'on va stocker dans une variable que l'on va appeler $D_{z,0}$. Après le changement de sens du déplacement, l'équation utilisée pour décrire cet effort est la suivante :

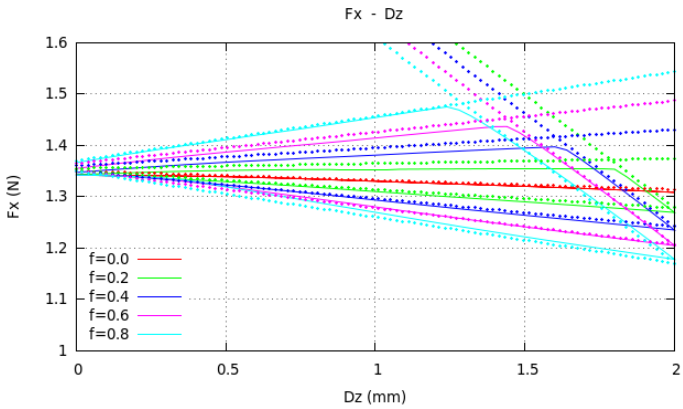
$$\boxed{\frac{F_z}{E} = K_{zz}^P(D_z - D_{z,0})} \tag{C.12}$$

La figure C.6b montre la courbe trouvée par éléments finis, avec en pointillés, la prédiction obtenue par les lois de Coulomb qui se superpose aux éléments finis. Une fois que l'effort tangentiel est déterminé à l'aide de cette formule, un test doit être réalisé pour déterminer s'il y a glissement entre les blocs :

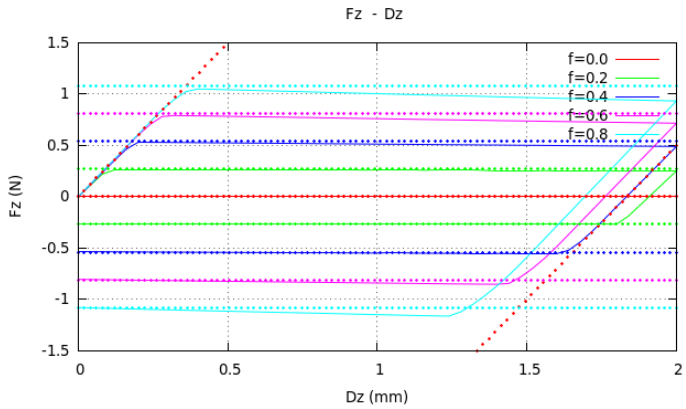
Si $|F_z| > f.F_x$:

$$F_z = signe(F_z).f.F_x \tag{C.13}$$

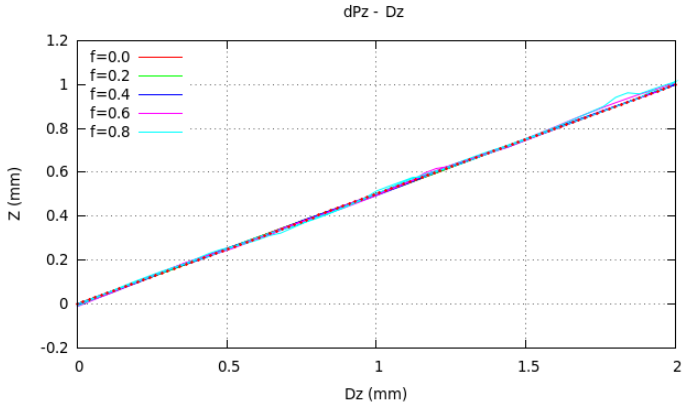
$$D_{z,0} = D_z - \frac{F_z}{K_{zz}^P} \tag{C.14}$$



(a) Force normale



(b) Force selon Z



(c) Coordonnée Z du point d'application

FIGURE C.6 – Lois de comportement dues au déplacement selon Z pour un coefficient de frottement $f = 0.4$ et une compression $D_x = 0.09$ dans le cas d'un contact entre surfaces planes

C.1.3.2 Déplacement tangentiel D_z vs force normale F_x

Sur la figure C.6a, on constate que la force normale ne commence pas à zéro à cause de l'effort normal dû à la compression appliquée avant le déplacement tangentiel. Ici, on observe une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls très similaire à celui observé lors du déplacement tangentiel selon Y. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge.
Pour le premier segment, l'effort diminue en fonction de D_z de pendant la charge et la pente augmente avec le coefficient de frottement. On définit alors la relation d'évolution suivante pour α_{zx}^P :

$$\boxed{\alpha_{zx}^P = -0.0012 * (5.0 * f + 1)} \tag{C.15}$$

Dans le cas d'un coefficient de frottement nul, la courbe de décharge suit la même équation. Si le coefficient de frottement est différent de zéro, on définit alors deux équations supplémentaires. La première partie de la décharge consiste d'abord en l'augmentation de la force en fonction de D_z avec une pente qui est la même quel que soit le coefficient de frottement. Comme dans les cas

précédents d'hystérésis, on stockera l'histoire du déplacement sous la forme d'une variable $D_{z,0}$, qui permettra de décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement :

$$\boxed{\frac{F_{xa}}{E} = (D_z - D_{z,0}) * K_{zxa}^{Pd} \qquad \text{avec} \qquad K_{zxa}^{Pd} = \alpha_{zxa}^{Pd} * L_P \qquad \text{où} \qquad \alpha_{zxa}^{Pd} = -0.0293} \tag{C.16}$$

Puis, lorsque le bloc 1 se met à glisser par rapport au bloc 2, l'effort va diminuer à nouveau en fonction de D_z avec une pente qui augmente avec le coefficient de frottement pour tendre vers la valeur de l'effort dû à la compression.
Un test doit donc d'abord être réalisé pour déterminer s'il y a glissement entre les blocs :

Si $|F_z| > f.F_x$:

$$\frac{F_{xb}}{E} = D_z * K_{zxb}^{Pd} \qquad \text{avec} \qquad K_{zxb}^{Pd} = \alpha_{zxb}^{Pd} * L_P \qquad \text{où} \qquad \alpha_{zxb}^{Pd} = -0.0011 * (-8.0 * f + 1) \tag{C.17}$$

C.1.3.3 Déplacement tangentiel D_z vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure C.6c affiche la position du point d'application de la force en fonction de D_z. On constate que le point d'application de la force se déplace dans le même sens que le déplacement imposé, tel que :

$$\boxed{\delta P_z = \frac{D_z}{2}} \tag{C.18}$$

Le tableau C.3 récapitule les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces planes pour un déplacement D_z. Les lois du premier ordre apparaissent en orange dans ce tableau. F_x, F_z et δP_z sont du premier ordre alors que les autres lois sont négligeables.

F_x	1er ordre
F_y	négligeable
F_z	1er ordre
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	1er ordre

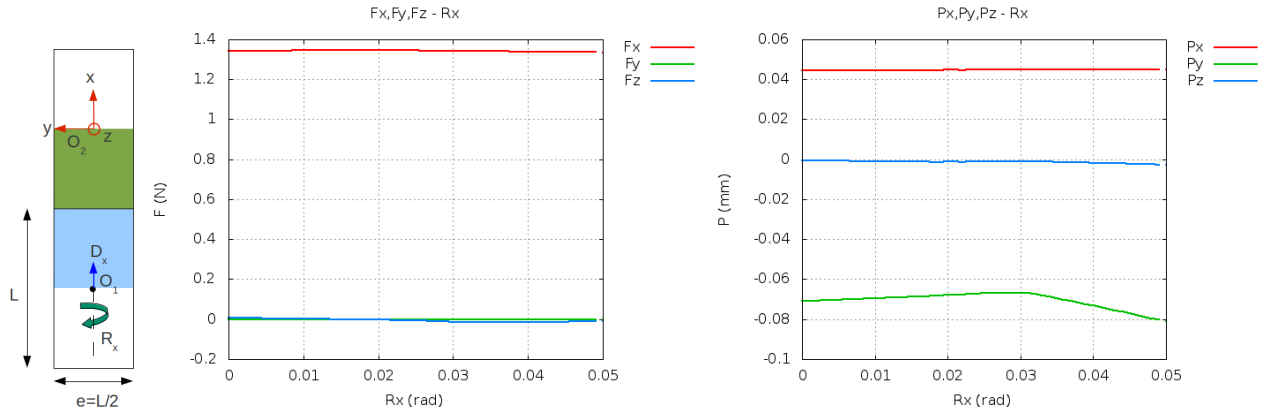
TABLE C.3 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces planes dans le cas d'un déplacement D_z

C.2 Effet d'une rotation

Dans cette partie, nous allons déterminer l'évolution de la force et de la position du point d'application lorsque le bloc 1 est soumis à une rotation par rapport au bloc 2.
Les études précédentes que nous avons menées sur les assemblages de cubes ont montré que ces

rotations jouent un rôle très important sur le comportement de l'assemblage. En pratique, nous avons appliqué une rotation de 0.05 rad (2.9 deg) suivant les trois axes définis sur la figure 3.26.

C.2.1 Effet d'une rotation $+R_x$



(a) Rotation $+R_x$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE C.7 – Surfaces planes - Effet d'une rotation selon X - $f = 0.4$

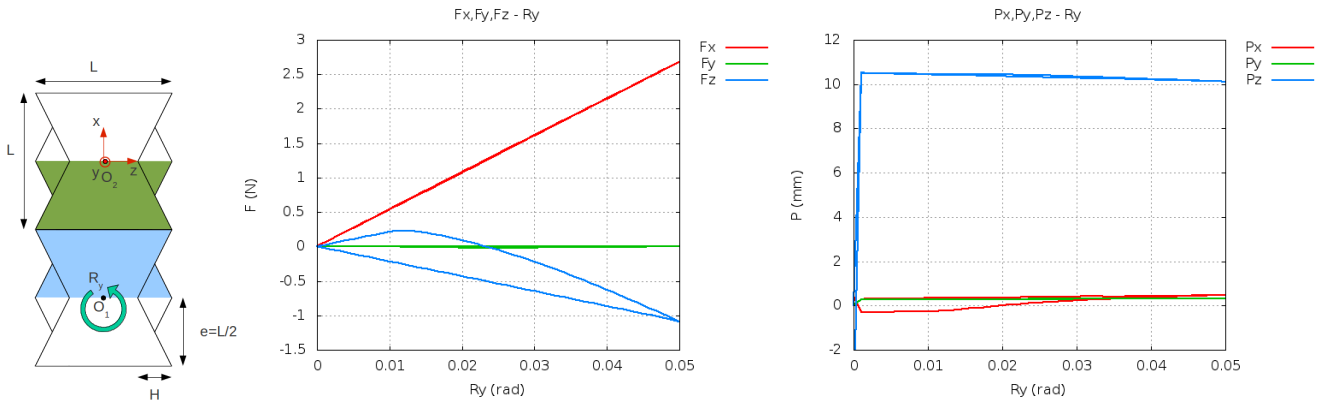
Les figures C.7b et C.7c montrent que lors d'une rotation selon X, on n'observe aucune force résultante au contact, même en appliquant une compression préalablement à la rotation. Cela provient du fait que les forces locales correspondent à un couple autour de l'axe X et s'annulent donc par symétrie. Ceci est d'ailleurs confirmé sur la courbe C.7c qui montre que le point d'application ne se déplace pas et reste positionné au milieu de l'interface. Nous allons donc négliger l'effet de cette rotation. Comme indiqué sur le tableau C.4, toutes les lois ont une influence très faible et sont considérées comme négligeables.

F_x	négligeable
F_y	négligeable
F_z	négligeable
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	négligeable

TABLE C.4 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces planes dans le cas d'une rotation R_x

C.2.2 Effet d'une rotation $+R_y$

Les courbes de la figure C.8b et C.8c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'une rotation du bloc 1 autour de



(a) Rotation $+R_y$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE C.8 – Surfaces planes - Effets d'une rotation selon Y

Y. Au niveau des forces, on constate principalement une compression suivant X et dans une moindre mesure un cisaillement selon Z. En ce qui concerne le point d'application de la force, il se déplace très rapidement suivant Z pour atteindre l'extrémité du bloc et ensuite il évolue très peu. Les paragraphes suivants présentent les formules analytiques retenues pour représenter ces comportements.

C.2.2.1 Rotation R_y vs force normale F_x

F_x, composante normale de la résultante au contact varie linéairement avec la rotation R_y. On obtient donc un coefficient β^P_{yx} constant égal à :

$$\boxed{\beta^P_{yx} = 0.24} \tag{C.19}$$

C.2.2.2 Rotation R_y vs force tangentielle F_z

La composante selon Z de la force résultante montre une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls et qui se réduit à une droite lorsque le coefficient de frottement est nul. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge.
Pour le premier segment, l'effort diminue en fonction de R_y pendant la charge et la pente augmente avec le coefficient de frottement. On définit alors la relation d'évolution suivante pour β^P_{yz} :

$$\boxed{\beta^P_{yz} = -0.0044 * (47.0 * f + 1)} \tag{C.20}$$

Dans le cas d'un coefficient de frottement nul, la courbe de décharge suit la même équation. Si le coefficient de frottement est différent de zéro, on définit alors deux équations supplémentaires. La première correspond à la première partie de la décharge : la force augmente en fonction de R_y pour repasser au dessus de zéro, avec la même pente quel que soit le coefficient de frottement. Comme dans les cas précédents d'hystérésis, on stockera l'histoire de la rotation sous la forme

d'une variable $R_{y,0}$, qui permettra de décrire l'évolution de F_z après le changement du sens de rotation :

Si $R_y > \frac{\beta_{yza}^{Pd} * R_{y,0} - \frac{F_z}{E * L_P^2}}{\beta_{yza}^{Pd} - \beta_{yzb}^{Pd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (R_y - R_{y,0}) * J_{yza}^{Pd} \quad \text{avec} \quad J_{yza}^{Pd} = \beta_{yza}^{Pd} * L_P^2 \quad \text{où} \quad \beta_{yza}^{Pd} = -0.1973 \tag{C.21}$$

Puis, pendant la deuxième partie de la décharge, l'effort va diminuer à nouveau en fonction de R_y avec une pente qui augmente avec le coefficient de frottement.

Si $R_y < \frac{\beta_{yza}^{Pd} * R_{y,0} - \frac{F_z}{E * L_P^2}}{\beta_{yza}^{Pd} - \beta_{yzb}^{Pd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = R_y * J_{yzb}^{Pd} \quad \text{avec} \quad J_{yzb}^{Pd} = \beta_{yzb}^{Pd} * L_P^2 \quad \text{où} \quad \beta_{yzb}^{Pd} = -0.0044 * (-59.0 * f + 1) \tag{C.22}$$

C.2.2.3 Rotation R_y vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Les figures C.9c et C.9d affichent la position du point d'application de la force en fonction de R_y. La rotation engendre une compression ce qui fait que le point d'application de la force varie selon X pour se rapprocher de O_2 :

$$\boxed{\delta P_x = 0.33 * R_y * L_P} \tag{C.23}$$

Mais cette rotation engendre surtout un déplacement du point d'application de la force sur l'axe Z. La rotation engendre un décollement d'un côté du bloc et une compression de l'autre côté du bloc. Le point d'application de la force se déplace alors du centre de l'interface vers l'extrémité du bloc 1 au cours de la charge et revient au centre de l'interface au cours de la décharge :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.45 * atan(317 * 0.2/(70 * \frac{D_x}{L_P} + 0.001) * R_y)) * L_P} \tag{C.24}$$

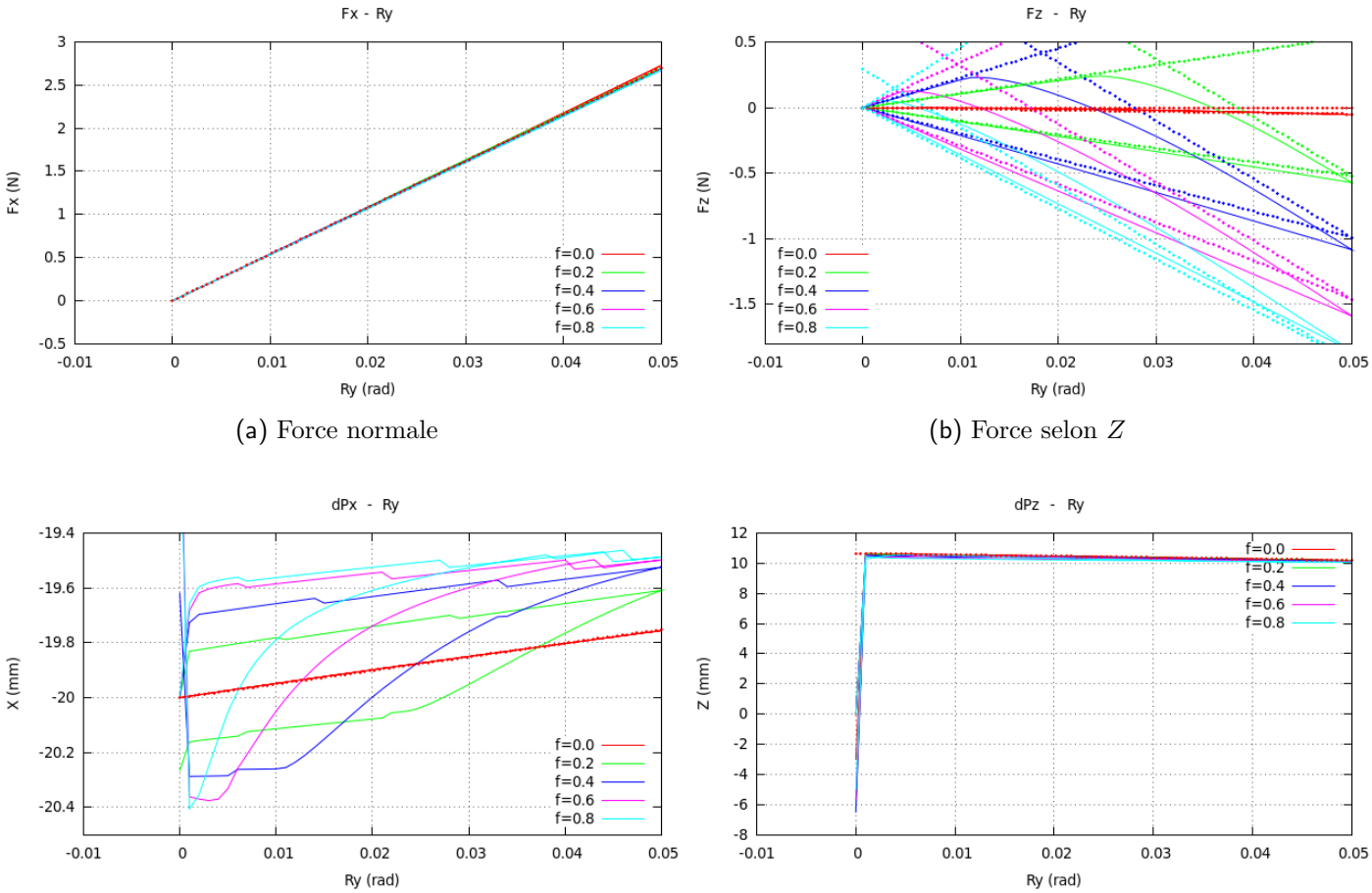
Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_y \geq R_{y_{recoll}} = (4.17 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_z = 0.001 * R_y * L_P} \tag{C.25}$$

Le tableau C.5 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces planes pour une rotation R_y. Dans le cas présent, F_y et δP_y sont considérées comme négligeables, δP_x est considérée comme du second ordre (en bleu) et F_x, F_z et δP_z sont considérées comme du premier ordre (orange).

F_x	1er ordre
F_y	négligeable
F_z	1er ordre
δP_x	2ème ordre
δP_y	négligeable
δP_z	1er ordre

TABLE C.5 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces planes dans le cas d'une rotation R_y



(a) Force normale

(b) Force selon Z

(c) Coordonnée X du point d'application

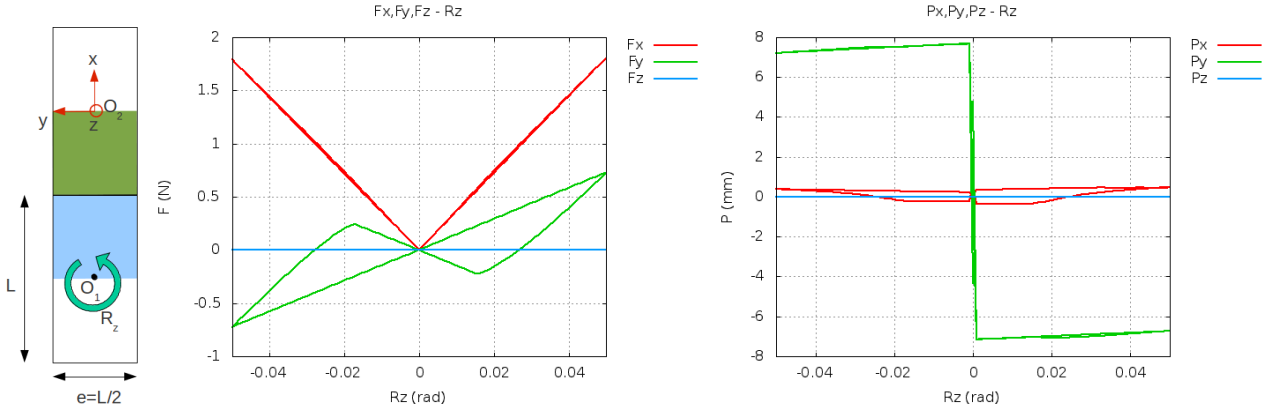
(d) Coordonnée Z du point d'application

FIGURE C.9 – Lois de comportement dues à une rotation selon Y pour un coefficient de frottement $f = 0.4$ dans le cas d'un contact entre surfaces planes

C.2.3 Effet d'une rotation $\pm R_z$

Les courbes de la figure C.10b et C.10c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'une rotation du bloc 1 autour de Z. Concernant les forces, il existe principalement une compression suivant l'axe X et un faible cisaillement selon Y. Le point d'application de la force se déplace très rapidement suivant Y pour atteindre le haut du bloc et ensuite il évolue très peu autour de cette position. Dans les para-

graphes suivants, nous présentons les formules analytiques correspondant à ces comportements.



(a) Rotation $+R_z$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE C.10 – Surfaces planes - Effet d'une rotation selon Z

C.2.3.1 Rotation R_z vs force normale F_x

F_x, composante normale de la résultante au contact varie linéairement avec la rotation R_z. Des simulations avec différents coefficients de frottement (voir fig. C.11a) montrent que la pente ne varie pas avec le coefficient de frottement. On obtient donc un coefficient β^P_{zx} constant égal à :

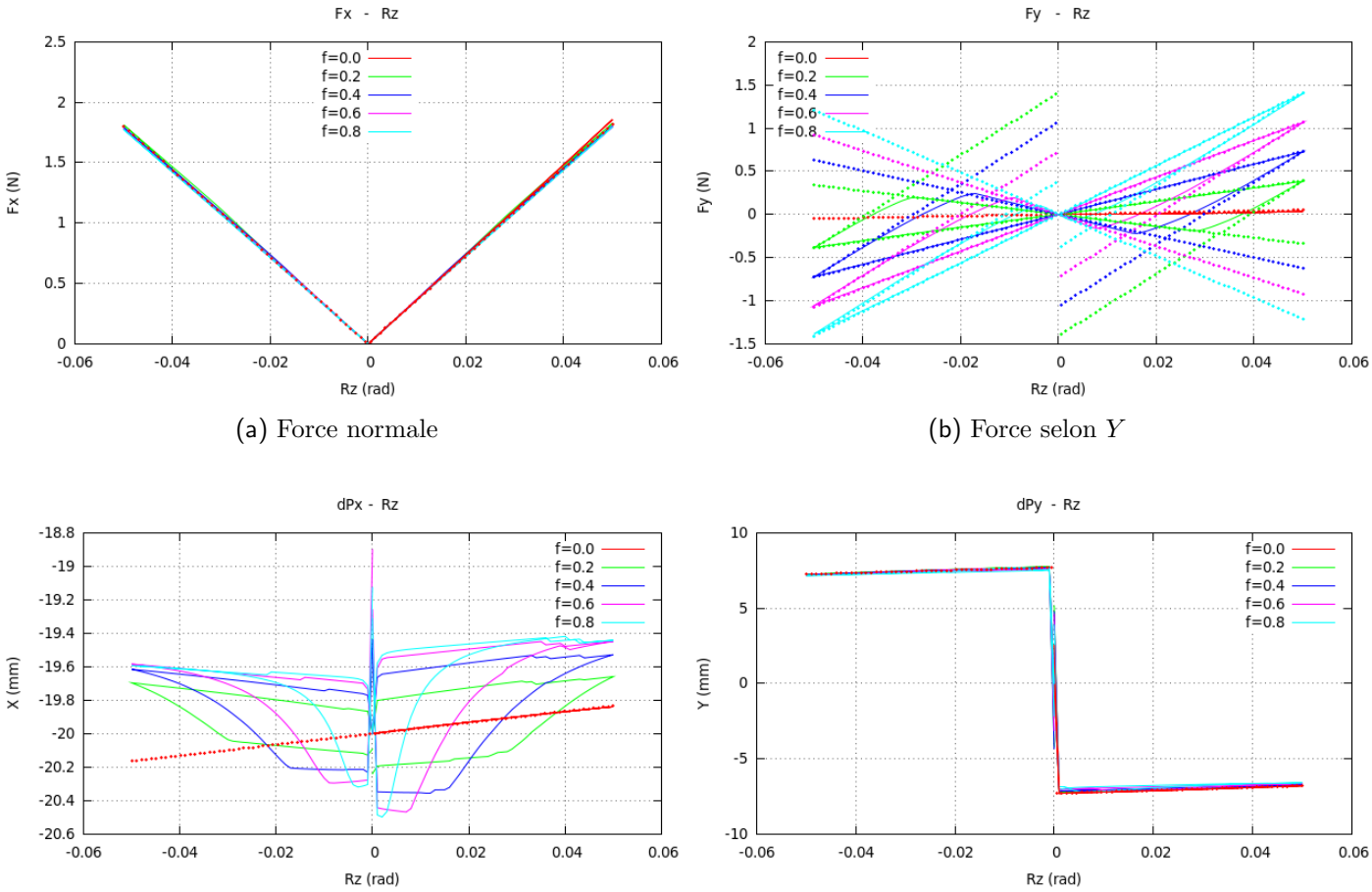
$$\boxed{\beta^P_{zx} = 0.1618} \tag{C.26}$$

C.2.3.2 Rotation R_z vs force tangentielle F_y

La composante selon Y de la force résultante est une droite lorsque le coefficient de frottement est nul. Mais pour des coefficients de frottement non nuls, on peut constater la présence d'une hystérésis que nous décomposerons en trois droites. Une première valide pendant la phase de charge et les deux suivantes pendant la décharge.
Pendant la phase de charge, l'effort augmente en fonction de R_z pendant la charge avec une pente évoluant selon le coefficient β^P_{zy} qui augmente avec le coefficient de frottement :

$$\boxed{\beta^P_{zy} = 0.0044 * (34.0 * f + 1)} \tag{C.27}$$

Lors de l'absence de friction, la courbe de décharge suit la même équation. En présence de frottement, on définit alors deux équations supplémentaires. La première partie de la décharge qui consiste d'abord en la diminution de la force en fonction de R_z qui repasse en dessous de



(a) Force normale

(b) Force selon Y

(c) Coordonnée X du point d'application

(d) Coordonnée Y du point d'application

FIGURE C.11 – Lois de comportement dues à une rotation selon Z pour un coefficient de frottement $f = 0.4$ (ou $f = 0.0$ pour δP_x) dans le cas d'un contact entre surfaces planes

zéro avec une pente qui est indépendante du coefficient de frottement. On stockera l'histoire de la rotation dans la variable $R_{z,0}$ qui permettra de décrire l'effort après le changement du sens de rotation grâce à l'équation suivante :

$$\text{Si } R_z > \frac{\beta^{Pd}_{zya} * R_{z,0} - \frac{F_y}{E * L_P^2}}{\beta^{Pd}_{zya} - \beta^{Pd}_{zyb}} :$$

$$\frac{F_{ya}}{E} = (R_z - R_{z,0}) * J^{Pd}_{zya} \qquad \text{avec} \qquad J^{Pd}_{zya} = \beta^{Pd}_{zya} * L_P^2 \qquad \text{où} \qquad \beta^{Pd}_{zya} = 0.142 \tag{C.28}$$

Puis, pendant la deuxième partie de la décharge, l'effort va diminuer à nouveau en fonction de R_z avec une pente qui décroît avec le coefficient de frottement pour tendre vers zéro :

Si $R_z < \frac{\beta_{zya}^{Pd} * R_{z,0} - \frac{F_y}{E * L_P^2}}{\beta_{zya}^{Pd} - \beta_{zyb}^{Pd}}$:

$$\frac{F_{yb}}{E} = R_z * J_{zyb}^{Pd} \qquad \text{avec} \qquad J_{zyb}^{Pd} = \beta_{zyb}^{Pd} * L_P^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{zyb}^{Pd} = -0.0044 * (29.0 * f + 1) \tag{C.29}$$

C.2.3.3 Rotation R_z vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Les figures C.11c et C.11d affichent la position du point d'application de la force au cours de la rotation R_z. On observe un déplacement du point d'application de la force principalement sur l'axe Y :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_y = (-0.317 * atan(313 * 0.2/(90 * \frac{D_x}{L_P} + 0.01) * R_z)) * L_P} \tag{C.30}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_z \geq R_{z_{recoll}} = (6.18 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_y = 0.001 * R_z * L_P} \tag{C.31}$$

Le point d'application de la force varie aussi linéairement de façon moindre selon X autour du centre de l'interface :

$$\boxed{\delta P_x = 0.22 * R_z * L_P} \tag{C.32}$$

On observe les mêmes équations lors de la décharge. La rotation engendre un décollement en bas du bloc et une compression en haut du bloc. Le point d'application de la force se déplace alors du centre de l'interface vers le haut du bloc au cours de la charge et revient au centre de l'interface au cours de la décharge.
Il y a une symétrie entre une rotation dans le sens positif et une rotation dans le sens négatif. Les courbes sont donc valides pour des rotations dans les deux sens.
Le tableau C.6 récapitule les lois obtenues dans le cas d'un contact entre surfaces planes pour une rotation R_z. Les lois qui ont une grande importance sont du premier ordre et apparaissent donc en orange. Les lois en bleu sont du second ordre. Ici, seules F_z et δP_z sont considérées comme négligeables. δP_x est considérée comme du second ordre. F_x, F_y et δP_y sont les lois ayant le plus d'influence et sont donc considérées comme du premier ordre.

	R_z	$-R_z$
F_x	1er ordre	1er ordre
F_y	1er ordre	1er ordre
F_z	négligeable	négligeable
δP_x	2ème ordre	2ème ordre
δP_y	1er ordre	1er ordre
δP_z	négligeable	négligeable

TABLE C.6 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces planes dans le cas d'une rotation $\pm R_z$

Annexe D

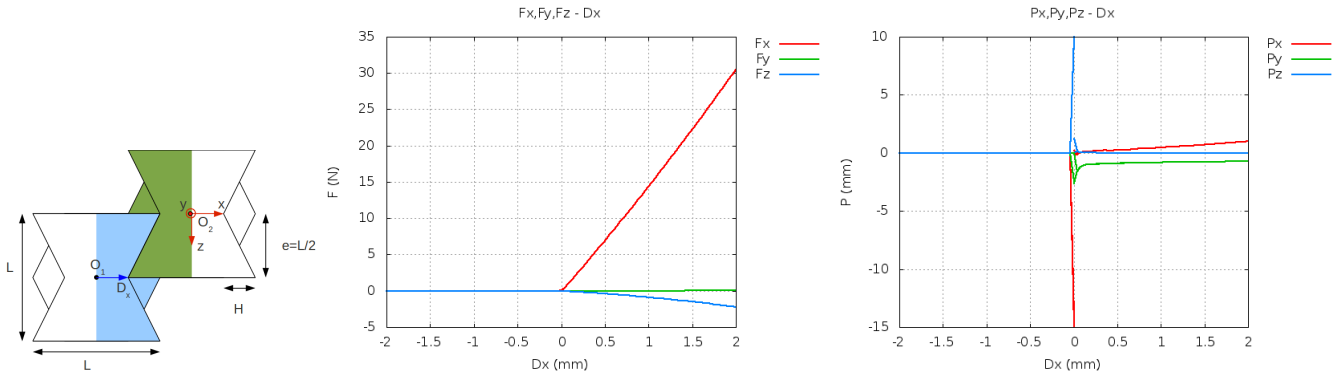
Détail des lois de contact entre les surfaces réglées de deux blocs ostéomorphes

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des simulations par éléments finis qui définissent les lois de contact dans le cas des surfaces réglées. Les dimensions du bloc ostéomorphe pour la simulation Abaqus sont les mêmes que pour les lois de contact entre surfaces planes : L=40mm, H=10mm, e=20mm et L_R=10mm. Les lois seront calculées pour ces dimensions exprimées en millimètres. Le module d'Young est fixé à E=1MPa.

D.1 Effet d'un déplacement

D.1.1 Effet d'un déplacement $\pm D_x$

Les courbes de la figure D.1b et D.1c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'un déplacement du bloc 1 selon X. On constate alors que lors d'un déplacement normal, il y a un phénomène de compression et donc une composante selon X. Mais comme la géométrie n'est pas plane, on observe aussi dans une moindre mesure une force selon Z. On observe une différence de pente avec le coefficient de frottement et pourtant il n'y a pas d'hystérésis. Cela est peut-être dû à un effet de coins : le coin du bloc 1 pénètre dans le bloc 2 et inversement. Les coins sont alors déformés. Comme il n'y a pas d'hystérésis, les efforts suivront les mêmes équations pendant la charge et la décharge. Les formules analytiques retenues pour représenter ces comportements sont présentées dans les prochains paragraphes.



(a) Déplacement $+D_x$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE D.1 – Surfaces reglées - Effet d'un déplacement selon X

D.1.1.1 Déplacement normal $+D_x$ vs force normale F_x

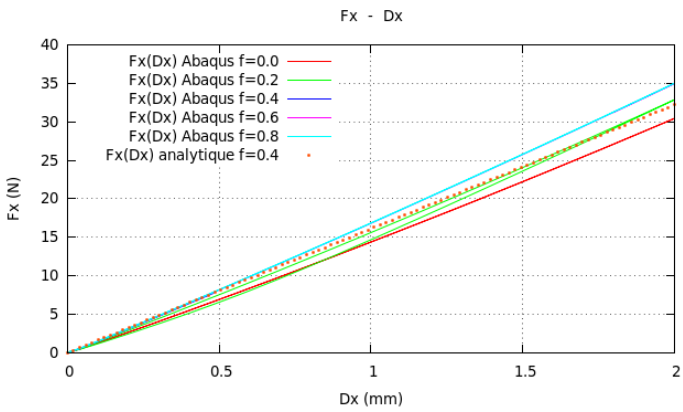
La composante normale F_x de la résultante au contact varie linéairement avec le déplacement D_x. On obtient donc un coefficient α_{xx}^R dépendant du coefficient de frottement et égal à :

$$\boxed{\alpha_{xx}^R = 1.4875 * (1 + \frac{f}{3})} \tag{D.1}$$

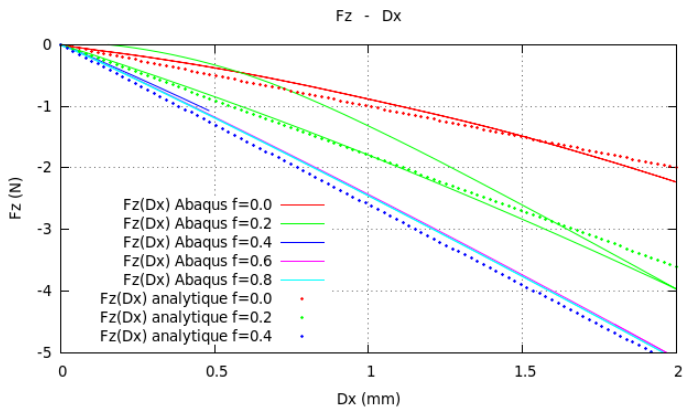
D.1.1.2 Déplacement normal $+D_x$ vs force tangentielle F_z

On observe aussi que la composante tangentielle F_z varie aussi linéairement avec le déplacement D_x avec une raideur reliée à α_{xz}^R dépendant du coefficient de frottement :

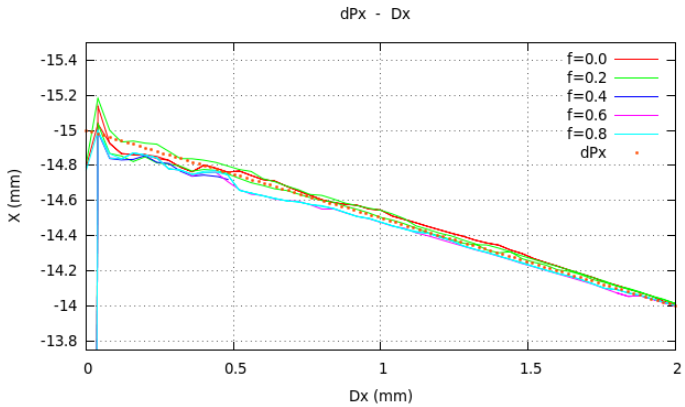
$$\boxed{\alpha_{xz}^R = -0.1 * (1 + f * 4)} \tag{D.2}$$



(a) Force normale



(b) Force selon Z



(c) Coordonnée X du point d'application

FIGURE D.2 – Lois de comportement dues au déplacement selon X pour un coefficient de frottement $f = 0.4$ dans le cas d'un contact entre surfaces réglées

D.1.1.3 Déplacement normal $+D_x$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure D.2c affiche la position du point d'application de la force au cours du déplacement D_x. Le point d'application de la force se déplace linéairement dans le sens de D_x pendant la charge et la décharge.

$$\boxed{\delta P_x = \frac{D_x}{2}} \tag{D.3}$$

Le point d'application de la force situé initialement au centre de l'interface se déplace alors vers le centre du bloc 2 au cours de la charge et revient au centre de l'interface au cours de la décharge en suivant la même équation. Le tableau D.1 réunit les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour un déplacement D_x. F_x, F_z et δP_x sont les lois ayant le plus d'influence, elles sont donc considérées comme du premier ordre et apparaissent en orange dans ce tableau. F_y, δP_y et δP_z sont considérées comme négligeables. Dans le cas

F_x	1er ordre
F_y	négligeable
F_z	1er ordre
δP_x	1er ordre
δP_y	négligeable
δP_z	négligeable

TABLE D.1 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'un déplacement D_x

d'un déplacement dans le sens négatif, on observe un décollement. Les efforts sont donc tous nuls. Les lois sont alors toutes considérées comme négligeables (voir tableau D.2).

F_x	négligeable
F_y	négligeable
F_z	négligeable
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	négligeable

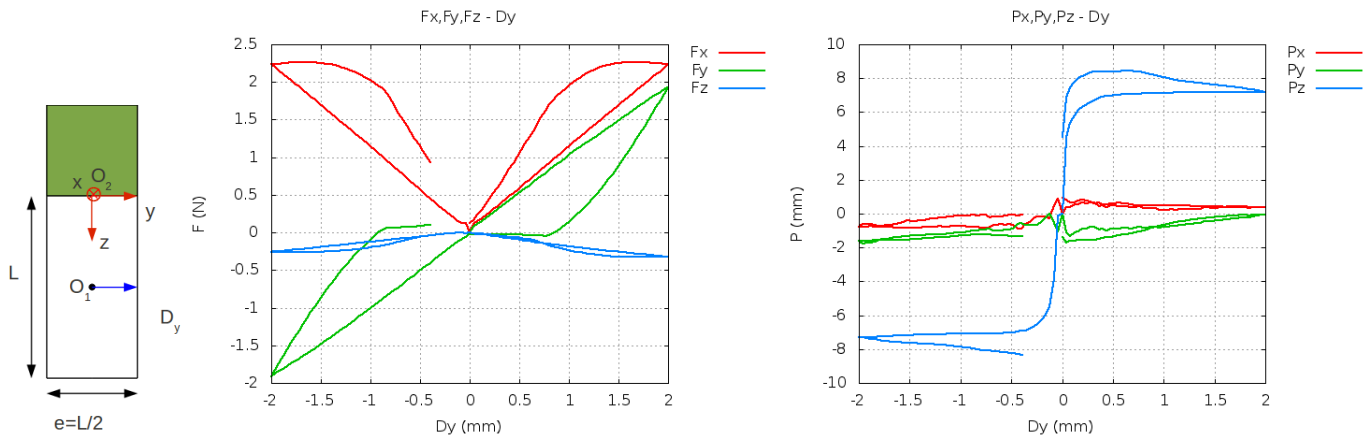
TABLE D.2 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'un déplacement $-D_x$

D.1.2 Effet d'un déplacement $\pm D_y$

Les courbes de la figure D.3b et D.3c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'un déplacement du bloc 1 par rapport au bloc 2 selon Y. On constate alors que lors d'un déplacement tangentiel selon Y, il y a des phénomènes de compression et de cisaillement et donc une composante selon X, Y et aussi une faible composante selon Z. Les paragraphes suivants présentent les formules analytiques retenues pour représenter ces comportements.

D.1.2.1 Déplacement tangentiel $+D_y$ vs force normale F_x

En présence de friction, on observe une hystérésis. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première correspondant à la charge et les deux suivantes à la décharge.



(a) Déplacement $+D_y$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE D.3 – Surfaces reglées - Effet d'un déplacement selon Y

La charge augmente linéairement avec le coefficient α_{yx}^{R} en fonction de $+D_y$ et est influencée par le coefficient de frottement, on a donc :

$$\boxed{\alpha_{yx}^{R} = 0.1504 * (-0.58 * f + 1)} \tag{D.4}$$

Sans friction, la courbe de décharge suit la même équation que celle de la charge. Si le coefficient de frottement est différent de zéro, la courbe de décharge se décompose en deux équations supplémentaires. Durant la première partie de la décharge, la force diminue légèrement en fonction de $+D_y$ avec une pente ne dépendant pas du coefficient de frottement. Pour pouvoir décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement, on stockera l'histoire du déplacement sera stockée sous la forme d'une variable $D_{y,0}$ qui interviendra dans l'équation suivante :

Si $D_y > \frac{\alpha_{yxa}^{Rd} * D_{y,0} - \frac{F_x}{E * L_R}}{\alpha_{yxa}^{Rd} - \alpha_{yxb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{xa}}{E} = (D_y - D_{y,0}) * K_{yxa}^{Rd} \quad \text{avec} \quad K_{yxa}^{Rd} = \alpha_{yxa}^{Rd} * L_R \quad \text{où} \quad \alpha_{yxa}^{Rd} = 0.02 \tag{D.5}$$

Pendant, la seconde partie de la décharge, l'effort diminue brutalement en fonction de $+D_y$. Cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_y < \frac{\alpha_{yxa}^{Rd} * D_{y,0} - \frac{F_x}{E * L_R}}{\alpha_{yxa}^{Rd} - \alpha_{yxb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{xb}}{E} = D_y * K_{yxb}^{Rd} \quad \text{avec} \quad K_{yxb}^{Rd} = \alpha_{yxb}^{Rd} * L_R \quad \text{où} \quad \alpha_{yxb}^{Rd} = 0.135 * (1.6 * f + 1) \tag{D.6}$$

D.1.2.2 Déplacement tangentiel $+D_y$ vs force tangentielle F_y

Comme précédemment, cette composante dépend du coefficient de frottement, on observe alors une hystérésis. La première partie de cette hystérésis correspond à la charge et augmente en fonction de $+D_y$. Elle dépend du coefficient de frottement et évolue linéairement avec le coefficient α_{yy}^R suivant :

$$\boxed{\alpha_{yy}^R = 0.054 * (1.9 * f + 1)} \tag{D.7}$$

Sans frottement, la courbe de décharge suit la même équation. En présence de frottement, la décharge sera décomposée en deux droites. La première partie de la décharge diminue en fonction du déplacement $+D_y$ pour passer en dessous de zéro cette partie de la décharge n'est pas influencée par le coefficient de frottement. Nous stockerons l'histoire du déplacement sous la forme d'une variable $D_{y,0}$, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement :

Si $D_y > \frac{\alpha_{yya}^{Rd} * D_{y,0} - \frac{F_y}{E * L_R}}{\alpha_{yya}^{Rd} - \alpha_{yyb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{ya}}{E} = (D_y - D_{y,0}) * K_{yya}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yya}^{Rd} = \alpha_{yya}^{Rd} * L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yya}^{Rd} = 0.2 \tag{D.8}$$

À la fin de la décharge et l'effort augmente à nouveau en fonction de $+D_y$. La pente de cette partie de la décharge est dépendante du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_y < \frac{\alpha_{yya}^{Rd} * D_{y,0} - \frac{F_y}{E * L_R}}{\alpha_{yya}^{Rd} - \alpha_{yyb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{yb}}{E} = D_y * K_{yyb}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yyb}^{Rd} = \alpha_{yyb}^{Rd} * L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yyb}^{Rd} = 0.0735 * (-2.8 * f + 1) \tag{D.9}$$

D.1.2.3 Déplacement tangentiel $+D_y$ vs force tangentielle F_z

Nous pouvons constater l'existence d'une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls. La courbe sera donc décomposée en trois droites. La phase de charge sera modélisée par une droite augmentant avec le déplacement $+D_y$. La charge est peu influencée par le coefficient de frottement et évolue linéairement selon l'équation suivante :

$$\boxed{\alpha_{yz}^R = -0.0154 * (0.15 * f + 1)} \tag{D.10}$$

Quant à la décharge, elle obéit à la même raideur lorsque le coefficient de frottement est nul alors qu'en présence de friction, elle sera modélisée par deux droites. La seconde raideur représente le

début de la décharge et augmente légèrement en fonction du déplacement $+D_y$. Dans la variable $D_{y,0}$, nous stockerons l'histoire du déplacement. À partir de cette variable, nous pourrons prédire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement qui dans le cas présent n'est pas influencé par le coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_y > \frac{\alpha_{yza}^{Rd} * D_{y,0} - \frac{F_z}{E * L_R}}{\alpha_{yza}^{Rd} - \alpha_{yzb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (D_y - D_{y,0}) * K_{yza}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yza}^{Rd} = \alpha_{yza}^{Rd} * L_R \text{ où } \alpha_{yza}^{Rd} = 0.00015 \tag{D.11}$$

La fin de la décharge est modélisée par une troisième droite. Durant cette dernière partie, l'effort augmente rapidement en fonction de $+D_y$. Il est influencé par le coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_y < \frac{\alpha_{yza}^{Rd} * D_{y,0} - \frac{F_z}{E * L_R}}{\alpha_{yza}^{Rd} - \alpha_{yzb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = D_y * K_{yzb}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yzb}^{Rd} = \alpha_{yzb}^{Rd} * L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yzb}^{Rd} = -0.0154 * (2.28 * f + 1) \tag{D.12}$$

D.1.2.4 Déplacement tangentiel $+D_y$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure D.4d affiche la position du point d'application selon Z de la force au cours du déplacement D_y. On constate que pendant la charge, le bloc 1 monte par rapport au bloc 2. Le contact se fera alors au milieu de l'arête centrale du bloc 1, et le point d'application de la force se déplace le long de l'axe Z selon l'équation suivante :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.5 * atan(3/(8 * \frac{D_x}{L_R} + 0.001) * \frac{D_y}{L_R})) * L_R} \tag{D.13}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $D_y \geq D_{y_{recoll}} = (-139.59 * D_x)$:

$$\boxed{\delta P_z = (1.18 * atan(-2.58/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.1) * \frac{D_y}{L_R}) - 1) * L_R} \tag{D.14}$$

Le point revient au centre de l'interface au cours de la décharge selon cette même équation.

Le tableau D.3 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour un déplacement D_y. Nous avons retenu F_x, F_y et δP_z comme lois du premier ordre car elles ont une forte influence et apparaissent en orange dans le tableau. F_z est considérée comme du second ordre et est en bleu dans le tableau. δP_x et δP_y sont considérées comme négligeables.

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	1er ordre

TABLE D.3 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'un déplacement D_y

D.1.2.5 Déplacement tangentiel $-D_y$ vs force normale F_x

En présence de frottement, on observe une hystérésis. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge. La première partie est la charge qui dépend faiblement de la friction et augmente linéairement en fonction de $-D_y$ avec le coefficient α_{yx}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\alpha_{yx}^{Rm} = -0.1504 * (-0.58 * f + 1)} \tag{D.15}$$

La courbe de décharge sans frottement obéit à la même équation. Par contre, si le coefficient de frottement est différent de zéro, on définit alors deux équations supplémentaires. La seconde partie modélise le début de la décharge et diminue légèrement en fonction en fonction de $-D_y$. L'histoire du déplacement sera stockée sous la forme d'une variable $D_{y,0}$, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement. La pente de cette partie de la décharge est indépendante du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_y < \frac{\alpha_{yxa}^{Rmd} * D_{y,0} - \frac{F_x}{E * L_R}}{\alpha_{yxa}^{Rmd} - \alpha_{yxb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{xa}}{E} = (D_y - D_{y,0}) * K_{yxa}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yxa}^{Rmd} = \alpha_{yxa}^{Rmd} * L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yxa}^{Rmd} = -0.02 \tag{D.16}$$

La troisième partie modélise la fin de la décharge dont l'effort diminue brutalement en fonction de $-D_y$. La pente de cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_y > \frac{\alpha_{yxa}^{Rmd} * D_{y,0} - \frac{F_x}{E * L_R}}{\alpha_{yxa}^{Rmd} - \alpha_{yxb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{xb}}{E} = D_y * K_{yxb}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yxb}^{Rmd} = \alpha_{yxb}^{Rmd} * L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yxb}^{Rmd} = -0.135 * (1.6 * f + 1) \tag{D.17}$$

D.1.2.6 Déplacement tangentiel $-D_y$ vs force tangentielle F_y

Dans le cas d'un coefficient de frottement non nul, nous observons une hystérésis. La courbe peut alors donc se décomposer en trois équations. Une première pour la phase de charge et les deux suivantes pour la décharge.
La première partie modélise la charge dont l'effort qui dépend du frottement diminue linéairement en fonction de $-D_y$ avec le coefficient α_{yy}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\alpha_{yy}^{Rm} = 0.0539 * (1.9 * f + 1)} \tag{D.18}$$

Sans frottement, la courbe de décharge suit cette même équation. Sinon, nous avons alors défini deux équations supplémentaires. La seconde équation correspond au début de la décharge et augmente avec $-D_y$ pour repasser au dessus de zéro. La variable $D_{y,0}$ aura pour rôle de stocker l'histoire du déplacement, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort qui n'est pas influencée par le coefficient de frottement après le changement du sens de déplacement :

Si $D_y < \frac{\alpha_{yya}^{Rmd} * D_{y,0} - \frac{F_y}{E * L_R}}{\alpha_{yya}^{Rmd} - \alpha_{yyb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{ya}}{E} = (D_y - D_{y,0}) * K_{yya}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yya}^{Rmd} = \alpha_{yya}^{Rmd} * L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yya}^{Rmd} = 0.2 \tag{D.19}$$

La troisième équation représente la fin de la décharge dont l'effort diminue à nouveau en fonction de $-D_y$. La pente de cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

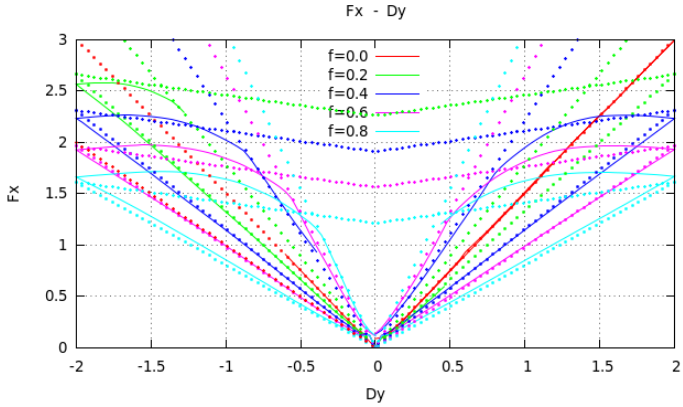
Si $D_y > \frac{\alpha_{yya}^{Rmd} * D_{y,0} - \frac{F_y}{E * L_R}}{\alpha_{yya}^{Rmd} - \alpha_{yyb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{yb}}{E} = D_y * K_{yyb}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yyb}^{Rmd} = \alpha_{yyb}^{Rmd} L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yyb}^{Rmd} = 0.0735 * (-2.8 * f + 1) \tag{D.20}$$

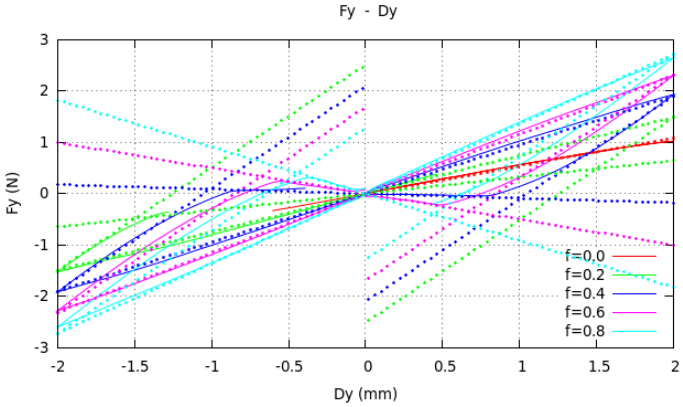
D.1.2.7 Déplacement tangentiel $-D_y$ vs force tangentielle F_z

On observe une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge.
La première partie modélise la charge et augmente en fonction en fonction de $-D_y$. La charge peu est influencée par le coefficient de frottement et évolue linéairement selon l'équation suivante :

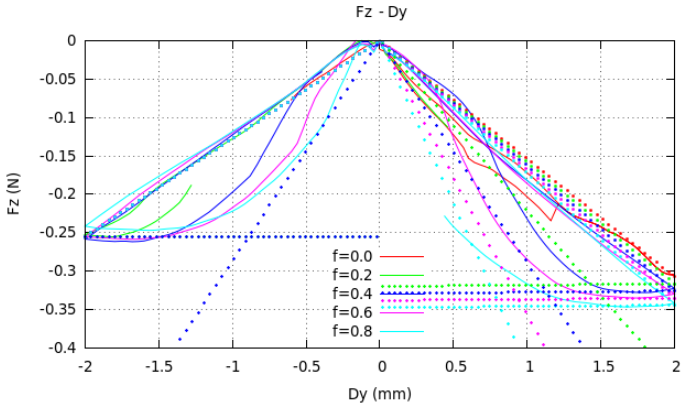
$$\boxed{\alpha_{yz}^{Rm} = 0.0128} \tag{D.21}$$



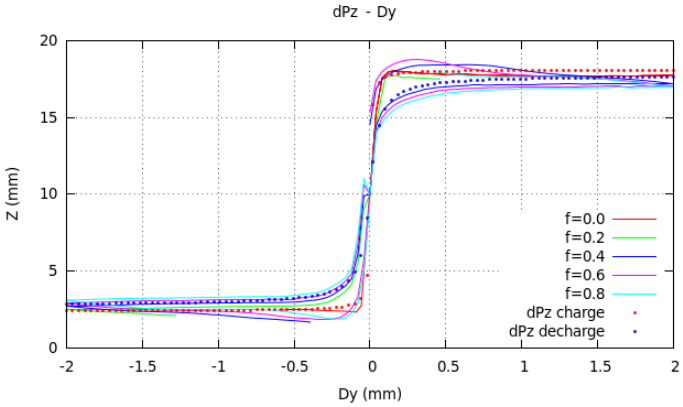
(a) Force normale



(b) Force selon Y



(c) Force selon Z



(d) Coordonnée Z du point d'application

FIGURE D.4 – Lois de comportement dues au déplacement selon Y pour un coefficient de frottement $f = 0.4$ dans le cas d'un contact entre surfaces réglées

Cette équation est aussi valide pour une décharge sans frottement. Dans le cas contraire, on définit alors deux équations supplémentaires. La seconde partie donnera le comportement du début de la décharge et diminue légèrement en fonction de $-D_y$. L'histoire du chargement sera stockée sous la forme d'une variable $D_{y,0}$, qui permettra de savoir où on se trouve sur la courbe après le changement du sens de déplacement. La pente de cette première partie de la décharge n'est pas influencée par la friction et a pour équation :

Si $D_y < \frac{\alpha_{yza}^{Rmd} * D_{y,0} - \frac{F_z}{E*L_R}}{\alpha_{yza}^{Rmd} - \alpha_{yzb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (D_y - D_{y,0}) * K_{yza}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yza}^{Rmd} = \alpha_{yza}^{Rmd} * L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yza}^{Rmd} = -0.000026 \tag{D.22}$$

Une dernière équation permettra de prédire la fin de la décharge qui dépend du coefficient de frottement. L'effort augmente rapidement en fonction de $-D_y$ en évoluant selon l'équation suivante :

Si $D_y > \frac{\alpha_{yza}^{Rmd} * D_{y,0} - \frac{F_z}{E*L_R}}{\alpha_{yza}^{Rmd} - \alpha_{yzb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = D_y * K_{yzb}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad K_{yzb}^{Rmd} = \alpha_{yzb}^{Rmd} * L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{yzb}^{Rmd} = 0.0041 * (15.0 * f + 1) \tag{D.23}$$

D.1.2.8 Déplacement tangentiel $-D_y$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure D.4d affiche la position du point d'application de la force au cours du déplacement $-D_y$. On constate que pendant la charge, le bloc 1 descend par rapport au bloc 2. Le contact se fera alors au milieu de l'arête centrale du bloc 2, et le point d'application de la force se déplace le long de l'axe Z pendant la charge et la selon l'équation suivante :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.5 * atan(3/(8 * \frac{D_x}{L_R} + 0.001) * \frac{D_y}{L_R})) * L_R} \tag{D.24}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $D_y \leq mD_{y_{recoll}} = (149.49 * D_x)$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.45 * atan(60.25/(500 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * \frac{D_y}{L_R} - 0.1) - 1.5) * L_R} \tag{D.25}$$

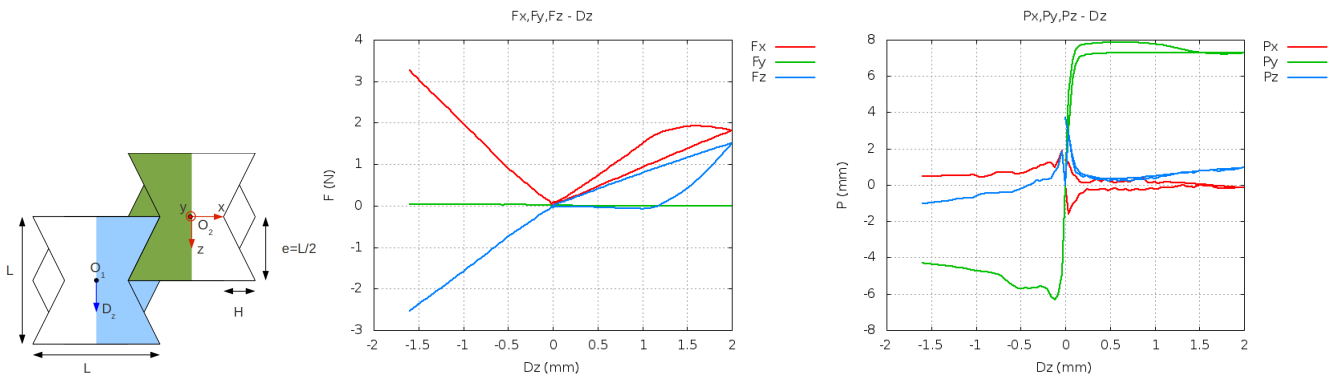
Le point revient au centre de l'interface au cours de la décharge selon cette même équation.

Le tableau D.4 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour un déplacement $-D_y$ avec en orange, les lois du premier ordre F_x, F_y et δP_z et en bleu, les lois du second ordre F_z, δP_x et δP_y sont considérées comme négligeables.

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	1er ordre

TABLE D.4 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'un déplacement $-D_y$

D.1.3 Effet d'un déplacement $\pm D_z$



(a) Déplacement $+D_z$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE D.5 – Surfaces reglées - Effet d'un déplacement selon Z

Les courbes de la figure D.5b et D.5c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'un déplacement du bloc 1 par rapport au bloc 2 selon Z. On constate alors qu'un déplacement tangentiel selon Z engendre des phénomènes de compression et de cisaillement, il y a donc une composante selon X et une composante selon Z. Les formules analytiques retenues pour représenter ces comportements sont présentées dans les paragraphes suivants.

D.1.3.1 Déplacement tangentiel $+D_z$ vs force normale F_x

En présence de friction, on observe une hystérésis. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première correspondant à la charge et les deux suivantes à la décharge.

La charge augmente linéairement avec le coefficient α_{zx}^{R} en fonction de $+D_z$ et est influencée par le coefficient de frottement, on a donc :

$$\boxed{\alpha_{zx}^{R} = 0.1184 * (-0.5 * f + 1)} \tag{D.26}$$

Sans friction, la courbe de décharge suit la même équation que celle de la charge. Si le coefficient de frottement est différent de zéro, la courbe de décharge se décompose en deux équations supplémentaires. Durant la première partie de la décharge, la force augmente légèrement en fonction de $+D_z$ avec une pente ne dépendant pas du coefficient de frottement. Pour pouvoir décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement, l'histoire du déplacement sera stockée sous la forme d'une variable $D_{z,0}$ qui interviendra dans l'équation suivante :

Si $D_z > \frac{\alpha_{zxa}^{Rd} * D_{z,0} - \frac{F_x}{E * L_R}}{\alpha_{zxa}^{Rd} - \alpha_{zxb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{xa}}{E} = (D_z - D_{z,0}) * K_{zxa}^{Rd} \quad \text{avec} \quad K_{zxa}^{Rd} = \alpha_{zxa}^{Rd} * L_R \quad \text{où} \quad \alpha_{zxa}^{Rd} = -0.04 \tag{D.27}$$

Pendant, la seconde partie de la décharge, l'effort diminue en fonction de $+D_z$. Cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_z < \frac{\alpha_{zxa}^{Rd} * D_{z,0} - \frac{F_x}{E * L_R}}{\alpha_{zxa}^{Rd} - \alpha_{zxb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{xb}}{E} = D_z * K_{zxb}^{Rd} \quad \text{avec} \quad K_{zxb}^{Rd} = \alpha_{zxb}^{Rd} * L_R \quad \text{où} \quad \alpha_{zxb}^{Rd} = -0.1 * (0.90 * f + 1) \tag{D.28}$$

D.1.3.2 Déplacement tangentiel $+D_z$ vs force tangentielle F_z

Comme précédemment, cette composante dépend du coefficient de frottement, on observe alors une hystérésis. La première partie de cette hystérésis correspond à la charge et augmente en fonction de $+D_z$. Elle dépend du coefficient de frottement et évolue linéairement avec le coefficient α_{zz}^{R} suivant :

$$\boxed{\alpha_{zz}^{R} = 0.038 * (2.35 * f + 1)} \tag{D.29}$$

Sans frottement, la courbe de décharge suit la même équation. En présence de frottement, la décharge sera décomposée en deux droites. La première partie de la décharge diminue en fonction du déplacement $+D_z$ pour passer en dessous de zéro cette partie de la décharge n'est pas influencée par le coefficient de frottement. Nous stockerons l'histoire du déplacement sous la forme d'une variable $D_{z,0}$, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement :

Si $D_z > \frac{\alpha_{zza}^{Rd} * D_{z,0} - \frac{F_z}{E * L_R}}{\alpha_{zza}^{Rd} - \alpha_{zzb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (D_z - D_{z,0}) * K_{zza}^{Rd} \quad \text{avec} \quad K_{zza}^{Rd} = \alpha_{zza}^{Rd} * L_R \quad \text{où} \quad \alpha_{zza}^{Rd} = 0.24 \tag{D.30}$$

À la fin de la décharge et l'effort augmente à nouveau en fonction de $+D_z$. La pente de cette partie de la décharge est influencée par le coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_z < \frac{\alpha_{zza}^{Rd} * D_{z,0} - \frac{F_z}{E * L_R}}{\alpha_{zza}^{Rd} - \alpha_{zzb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = D_z * K_{zzb}^{Rd} \quad \text{avec} \quad K_{zzb}^{Rd} = \alpha_{zzb}^{Rd} * L_R \quad \text{où} \quad \alpha_{zzb}^{Rd} = 0.0428 * (-2.90 * f + 1) \tag{D.31}$$

D.1.3.3 Déplacement tangentiel $+D_z$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure D.6d affiche la position du point d'application de la force au cours du déplacement D_z. Le point d'application de la force se déplace principalement le long de l'axe Y selon l'équation suivante :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_y = (0.48 * atan(3/(8 * \frac{D_x}{L_R} + 0.001) * \frac{D_z}{L_R})) * L_R} \tag{D.32}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $D_z \geq D_{z_{recoll}} = (-149.49 * D_x)$:

$$\boxed{\delta P_y = (0.50 * atan(-2.59/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * \frac{D_z}{L_R})) * L_R} \tag{D.33}$$

Mais le point d'application de la force se déplace aussi le long de l'axe Z de façon moins importante et linéairement selon l'équation suivante :

$$\boxed{\delta P_z = D_z * 0.5} \tag{D.34}$$

Le point se déplacera vers le coin du bloc 1 pendant la charge et revient au centre de l'interface au cours de la décharge.
Le tableau D.5 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour un déplacement D_z. Nous avons retenu F_x, F_z, δP_y et δP_z comme lois du premier ordre car elles ont une forte influence et apparaissent donc en orange dans le tableau. F_z est considérée comme du second ordre et est en bleu dans le tableau. F_y et δP_x sont considérées comme négligeables.

F_x	1er ordre
F_y	négligeable
F_z	1er ordre
δP_x	négligeable
δP_y	1er ordre
δP_z	1er ordre

TABLE D.5 – Récapitulatif des coefficients α pour le contact entre surfaces réglées dans le cas d'un déplacement D_z

D.1.3.4 Déplacement tangentiel $-D_z$ vs force normale F_x

Ici, nous n'observons pas d'hystérésis même en présence de frottement. Nous avons effectué des simulations avec différents coefficients de frottement (voir figure D.6a) qui montrent que la pente ne varie pas avec le coefficient de frottement. On peut constater que l'effort normal évolue de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient α_{zx}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\alpha_{zx}^{Rm} = -0.2055} \tag{D.35}$$

D.1.3.5 Déplacement tangentiel $-D_z$ vs force tangentielle F_z

En présence de frottement, on observe une hystérésis. La courbe peut donc se décomposer en trois étapes. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge.
La première partie est la charge qui dépend faiblement de la friction et augmente linéairement en fonction de $-D_z$ avec le coefficient α_{zz}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\alpha_{zz}^{Rm} = 0.0623 * (3.9 * f + 1)} \tag{D.36}$$

La courbe de décharge sans frottement obéit à la même équation. Par contre, si le coefficient de frottement est différent de zéro, on définit alors deux équations supplémentaires. La seconde partie modélise le début de la décharge et augmente en fonction en fonction de $-D_z$. L'histoire du déplacement sera stockée sous la forme d'une variable $D_{z,0}$, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de déplacement. La pente de cette partie de la décharge est indépendante du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $D_z < \frac{\alpha_{zza}^{Rmd} * D_{z,0} - \frac{F_z}{E * L_R}}{\alpha_{zza}^{Rmd} - \alpha_{zzb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (D_z - D_{z,0}) * K_{zza}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad K_{zza}^{Rmd} = \alpha_{zza}^{Rmd} L_R \qquad \text{où} \qquad \alpha_{zza}^{Rmd} = 0.375 \tag{D.37}$$

Une dernière équation permettra de prédire la fin de la décharge qui dépend du coefficient de frottement. L'effort augmente à nouveau en fonction de $-D_z$ en évoluant selon l'équation suivante :

Si $D_z > \frac{\alpha_{zza}^{Rmd} * D_{z,0} - \frac{F_z}{E * L_R}}{\alpha_{zza}^{Rmd} - \alpha_{zzb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = D_z * K_{zzb}^{Rmd} \quad \text{avec} \quad K_{zzb}^{Rmd} = \alpha_{zzb}^{Rmd} * L_R \quad \text{où} \quad \alpha_{zzb}^{Rmd} = 0.0428 * (-2.90 * f + 1) \tag{D.38}$$

D.1.3.6 Déplacement tangentiel $-D_z$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure D.6d affiche la position du point d'application de la force au cours du déplacement $-D_z$. Le point d'application de la force se déplace principalement et non linéairement le long de l'axe Y selon l'équation suivante :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_y = (0.38 * atan(3/(8 * \frac{D_x}{L_R} + 0.001) * \frac{D_z}{L_R})) * L_R} \tag{D.39}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $D_z \leq mD_{z_{recoll}} = (149.49 * D_x)$:

$$\boxed{\delta P_y = (0.40 * atan(-2.59/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * \frac{D_z}{L_R})) * L_R} \tag{D.40}$$

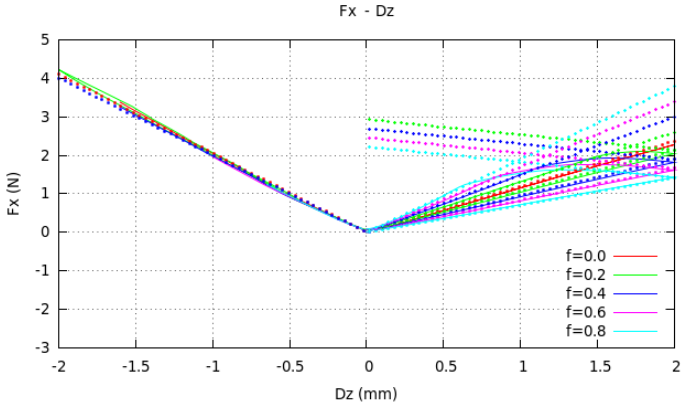
Mais il se déplace aussi linéairement le long de l'axe Z dans une moindre mesure selon l'équation suivante :

$$\boxed{\delta P_z = D_z * 0.5} \tag{D.41}$$

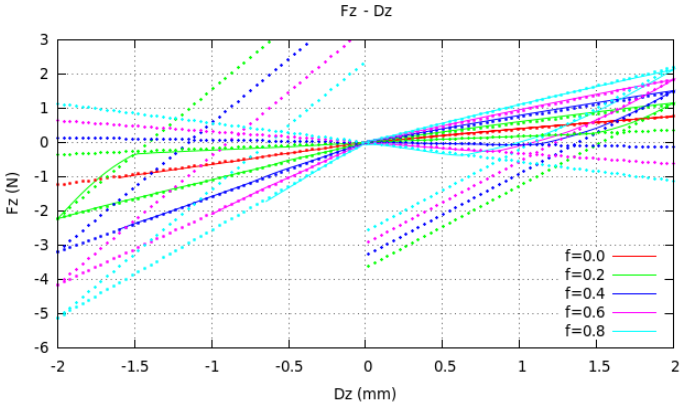
Le point se déplacera vers le coin du bloc 2 pendant la charge et revient au centre de l'interface au cours de la décharge.
Le tableau D.6 récapitule les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour un déplacement $-D_z$ avec en orange, les lois du premier ordre F_x, F_z, δP_y et δP_z. F_y et δP_x sont considérées comme négligeables.

F_x	1er ordre
F_y	négligeable
F_z	1er ordre
δP_x	négligeable
δP_y	1er ordre
δP_z	1er ordre

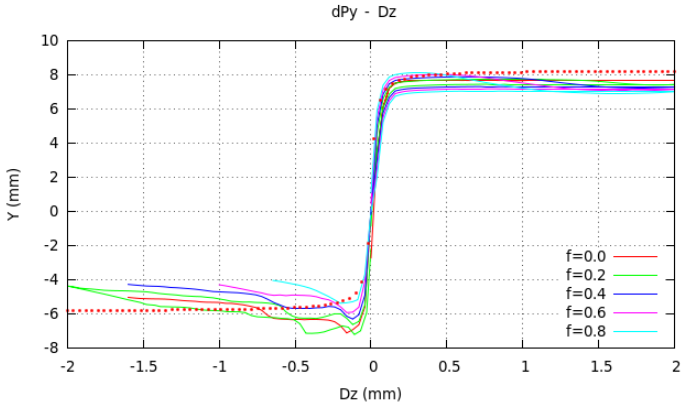
TABLE D.6 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'un déplacement $-D_z$



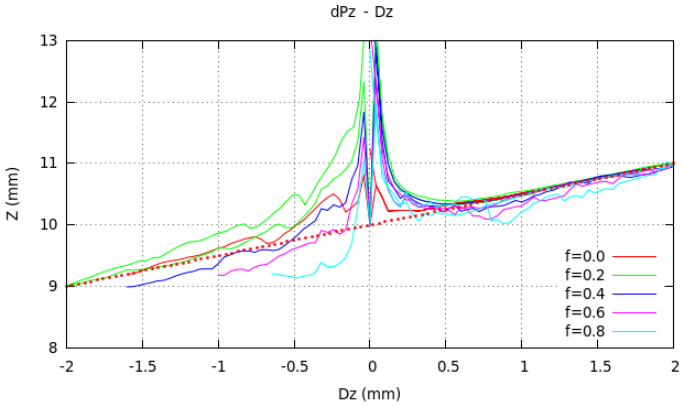
(a) Force normale



(b) Force selon Z



(c) Coordonnée Y du point d'application

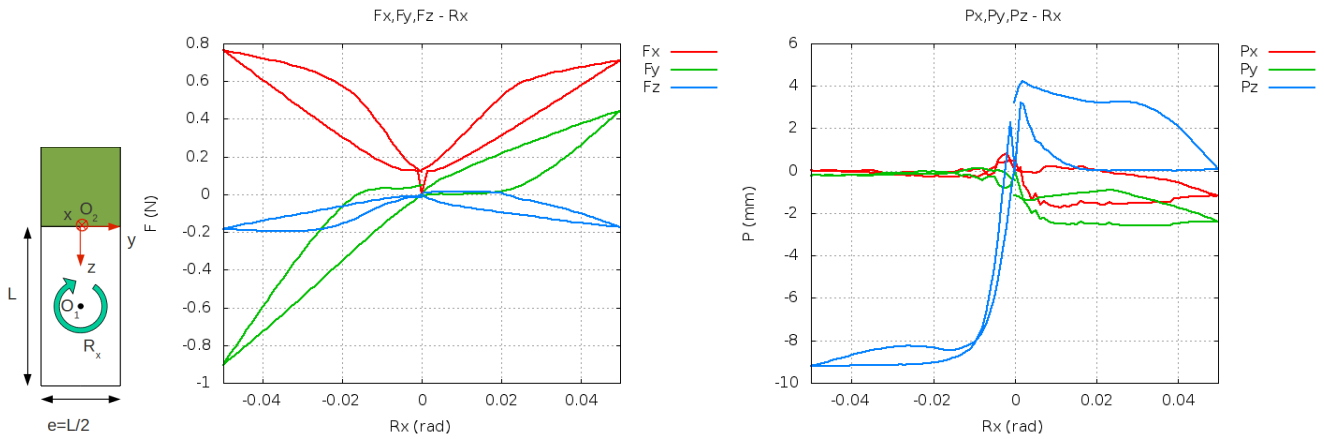


(d) Coordonnée Z du point d'application

FIGURE D.6 – Lois de comportement dues au déplacement selon Z pour un coefficient de frottement $f = 0.4$ (ou $f = 0.2$ pour F_y) dans le cas d'un contact entre surfaces réglées

D.2 Effet d'une rotation

D.2.1 Effet d'une rotation $\pm R_x$



(a) Rotation $+R_x$

(b) Force

(c) Déplacement du point d'application

FIGURE D.7 – Surfaces réglées - Effet d'une rotation selon X

Les courbes de la figure D.7b et D.7c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'une rotation du bloc 1 par rapport au bloc 2 autour de X. On constate alors que lors d'une rotation autour de X, il y a des phénomènes de compression et de cisaillement, il y a donc une composante selon X, Y mais aussi une faible composante selon Z. Les paragraphes suivants présentent les équations retenues pour représenter ces comportements.

D.2.1.1 Rotation $+R_x$ vs force normale F_x

En présence de friction, on observe une hystérésis. La courbe peut donc se diviser en trois droites. Une première correspondant à la charge et les deux suivantes à la décharge.
La charge augmente linéairement avec le coefficient β_{xx}^R en fonction de $+R_x$ et est influencée par le coefficient de frottement, on a donc :

$$\boxed{\beta_{xx}^R = 0.1825 * (-0.35 * f + 1)} \tag{D.42}$$

Sans friction, la courbe de décharge suit la même équation que celle de la charge. Si le coefficient de frottement est différent de zéro, la courbe de décharge se décompose en deux équations supplémentaires. Durant la première partie de la décharge, la force diminue légèrement en fonction de $+R_x$ avec une pente ne dépendant pas du coefficient de frottement. Pour pouvoir décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de rotation, l'histoire de la rotation sera stockée sous la forme d'une variable $R_{x,0}$ qui interviendra dans l'équation suivante :

Si $R_x > \frac{\beta_{xxa}^{Rd} * R_{x,0} - \frac{F_x}{E * L_R^2}}{\beta_{xxa}^{Rd} - \beta_{xxb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{xa}}{E} = (R_x - R_{x,0}) * J_{xxa}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xxa}^{Rd} = \beta_{xxa}^{Rd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xxa}^{Rd} = 0.0515 \tag{D.43}$$

Pendant, la seconde partie de la décharge, l'effort diminue avec une pente plus grande en fonction de $+R_x$. Cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_x < \frac{\beta_{xxa}^{Rd} * R_{x,0} - \frac{F_x}{E * L_R^2}}{\beta_{xxa}^{Rd} - \beta_{xxb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{xb}}{E} = R_x * J_{xxb}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xxb}^{Rd} = \beta_{xxb}^{Rd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xxb}^{Rd} = 0.2 * (0.50 * f + 1) \tag{D.44}$$

D.2.1.2 Rotation $+R_x$ vs force tangentielle F_y

Comme précédemment, cette composante dépend du coefficient de frottement, on observe alors une hystérésis. La première partie de cette hystérésis correspond à la charge et augmente en fonction de $+R_x$. Elle dépend du coefficient de frottement et évolue linéairement avec le coefficient β_{xy}^R suivant :

$$\boxed{\beta_{xy}^R = 0.0371 * (2.58 * f + 1)} \tag{D.45}$$

Sans frottement, la courbe de décharge suit la même équation. En présence de frottement, la décharge sera décomposée en deux droites. La première partie de la décharge diminue en fonction de la rotation $+R_x$. Cette partie de la décharge n'est pas influencée par le coefficient de frottement. Nous stockerons l'histoire du rotation sous la forme d'une variable $R_{x,0}$, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de rotation :

Si $R_x > \frac{\beta_{xya}^{Rd} * R_{x,0} - \frac{F_y}{E * L_R^2}}{\beta_{xya}^{Rd} - \beta_{xyb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{ya}}{E} = (R_x - R_{x,0}) * J_{xya}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xya}^{Rd} = \beta_{xya}^{Rd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xya}^{Rd} = 0.18 \tag{D.46}$$

À la fin de la décharge et l'effort diminue plus légèrement en fonction de la rotation $+R_x$. La pente de cette partie de la décharge est dépendante du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_x < \frac{\beta_{xya}^{Rd} * R_{x,0} - \frac{F_y}{E * L_R^2}}{\beta_{xya}^{Rd} - \beta_{xyb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{yb}}{E} = R_x * J_{xyb}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xyb}^{Rd} = \beta_{xyb}^{Rd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xyb}^{Rd} = 0.0135 * (1.6 * f + 1) \quad \text{(D.47)}$$

D.2.1.3 Rotation $+R_x$ vs force tangentielle F_z

Nous pouvons constater l'existence d'une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls. La courbe sera donc décomposée en trois droites. La phase de charge sera modélisée par une droite augmentant avec la rotation $+R_x$. La charge est peu influencée par le coefficient de frottement et évolue linéairement selon l'équation suivante :

$$\boxed{\beta_{xz}^{R} = -0.0108 * (10.58 * f + 1)} \qquad \text{(D.48)}$$

Quant à la décharge, elle obéit à la même raideur lorsque le coefficient de frottement est nul alors qu'en présence de friction, elle sera modélisée par deux droites. La seconde raideur représente le début de la décharge et augmente en fonction de la rotation $+R_x$ pour repasser au dessus de zéro. Dans la variable $R_{x,0}$, nous stockerons l'histoire de la rotation. À partir de cette variable, nous pourrons prédire l'évolution de l'effort après le changement du sens de rotation qui dans le cas présent n'est pas influencé par le coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_x > \frac{\beta_{xza}^{Rd} * R_{x,0} - \frac{F_z}{E * L_R^2}}{\beta_{xza}^{Rd} - \beta_{xzb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (R_x - R_{x,0}) * J_{xza}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xza}^{Rd} = \beta_{xza}^{Rd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xza}^{Rd} = -0.1 \qquad \text{(D.49)}$$

La fin de la décharge est modélisée par une troisième droite. Durant cette dernière partie, l'effort diminue en fonction de $+R_x$. Il est influencé par le coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_x < \frac{\beta_{xza}^{Rd} * R_{x,0} - \frac{F_z}{E * L_R^2}}{\beta_{xza}^{Rd} - \beta_{xzb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = R_x * J_{xzb}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xzb}^{Rd} = \beta_{xzb}^{Rd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xzb}^{Rd} = -0.0125 * (10.58 * f + 1) \qquad \text{(D.50)}$$

D.2.1.4 Rotation $+R_x$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure D.8d affiche la position du point d'application de la force selon Z au cours de la rotation R_x. Pendant la charge le point d'application de la force se déplace le long de l'axe Z selon l'équation suivante :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.22 * atan(42.84/(50 * \frac{D_x}{L_R} + 0.0016) * R_x)) * L_R} \tag{D.51}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_x \geq R_{x_{recoll}} = (-0.77 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.22 * atan(-25.89/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_x)) * L_R} \tag{D.52}$$

Le contact se fait donc entre le coin du bloc 2 et le haut de l'arête centrale du bloc 1. Le point revient au centre de l'interface au cours de la décharge selon la même équation. Le tableau D.7 résume les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour une rotation R_x. Dans le cas présent, δP_x et δP_y sont considérées comme négligeables. Toutes les autres lois appartiennent au second ordre sauf F_x et δP_z qui sont les lois ayant le plus d'influence et sont donc considérées comme du premier ordre.

F_x	1er ordre
F_y	2ème ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	1er ordre

TABLE D.7 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'une rotation R_x

D.2.1.5 Rotation $-R_x$ vs force normale F_x

En présence de frottement, on observe une hystérésis. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge. La première partie est la charge qui dépend faiblement de la friction et augmente linéairement en fonction de la rotation $-R_x$ avec le coefficient β_{xx}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{xx}^{Rm} = -0.23 * (-0.58 * f + 1)} \tag{D.53}$$

La courbe de décharge sans frottement obéit à la même équation. Par contre, si le coefficient de frottement est différent de zéro, on définit alors deux équations supplémentaires. La seconde partie modélise le début de la décharge et diminue légèrement en fonction de la rotation $-R_x$. L'histoire de la rotation sera stockée sous la forme d'une variable $R_{x,0}$, ce qui permettra de

décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de rotation. La pente de cette partie de la décharge est indépendante du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_x < \frac{\beta_{xxa}^{Rmd} * R_{x,0} - \frac{F_x}{E * L_R^2}}{\beta_{xxa}^{Rmd} - \beta_{xxb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{xa}}{E} = (R_x - R_{x,0}) * J_{xxa}^{Rmd} \quad \text{avec} \quad J_{xxa}^{Rmd} = \beta_{xxa}^{Rmd} * L_R^2 \quad \text{où} \quad \beta_{xxa}^{Rmd} = -0.05 \tag{D.54}$$

La troisième partie modélise la fin de la décharge et l'effort diminue plus vite en fonction de la rotation $-R_x$. La pente de cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_x > \frac{\beta_{xxa}^{Rmd} * R_{x,0} - \frac{F_x}{E * L_R^2}}{\beta_{xxa}^{Rmd} - \beta_{xxb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{xb}}{E} = R_x * J_{xxb}^{Rmd} \quad \text{avec} \quad J_{xxb}^{Rmd} = \beta_{xxb}^{Rmd} * L_R^2 \quad \text{où} \quad \beta_{xxb}^{Rmd} = -0.2355 * (0.80 * f + 1) \tag{D.55}$$

D.2.1.6 Rotation $-R_x$ vs force tangentielle F_y

Dans le cas d'un coefficient de frottement non nul, nous observons une hystérésis. La courbe peut alors donc se décomposer en trois équations. Une première pour la phase de charge et les deux suivantes pour la décharge.
La première partie modélise la charge dont l'effort qui dépend du frottement diminue linéairement en fonction de la rotation $-R_x$ avec le coefficient β_{xy}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{xy}^{Rm} = 0.0941 * (1.55 * f + 1)} \tag{D.56}$$

La variable $R_{x,0}$ aura pour rôle de stocker l'histoire de la rotation, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort qui n'est pas influencée par le coefficient de frottement après le changement du sens de la rotation :

Si $R_x < \frac{\beta_{xya}^{Rmd} * R_{x,0} - \frac{F_y}{E * L_R^2}}{\beta_{xya}^{Rmd} - \beta_{xyb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{ya}}{E} = (R_x - R_{x,0}) * J_{xya}^{Rmd} \quad \text{avec} \quad J_{xya}^{Rmd} = \beta_{xya}^{Rmd} * L_R^2 \quad \text{où} \quad \beta_{xya}^{Rmd} = 0.3 \tag{D.57}$$

La troisième partie représente la fin de la décharge dont l'effort diminue à nouveau en fonction de la rotation $-R_x$. La pente de cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_x > \frac{\beta_{xya}^{Rmd} * R_{x,0} - \frac{F_y}{E * L_R^2}}{\beta_{xya}^{Rmd} - \beta_{xyb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{yb}}{E} = R_x * J_{xyb}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xyb}^{Rmd} = \beta_{xyb}^{Rmd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xyb}^{Rmd} = 0.08 * (-2.0 * f + 1) \tag{D.58}$$

D.2.1.7 Rotation $-R_x$ vs force tangentielle F_z

On observe une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge.
La première partie modélise la charge et diminue en fonction de la rotation $-R_x$. La charge est influencée par le coefficient de frottement et évolue linéairement avec le coefficient β_{xz}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{xz}^{Rm} = 0.038 * (0.01 * f + 1)} \tag{D.59}$$

Cette équation est aussi valide pour une décharge sans frottement. Dans le cas contraire, on définit alors deux équations supplémentaires. La seconde partie donnera le comportement du début de la décharge et reste constante en fonction de la rotation $-R_x$. L'histoire du chargement sera stockée sous la forme d'une variable $D_{y,0}$, qui permettra de savoir où on se trouve sur la courbe après le changement du sens de rotation. La pente de cette partie de la décharge n'est pas influencée par la friction et a pour équation :

Si $R_x < \frac{\beta_{xza}^{Rmd} * R_{x,0} - \frac{F_z}{E * L_R^2}}{\beta_{xza}^{Rmd} - \beta_{xzb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (R_x - R_{x,0}) * J_{xza}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xza}^{Rmd} = \beta_{xza}^{Rmd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xza}^{Rmd} = -0.002 \tag{D.60}$$

Une dernière équation permettra de prédire la fin de la décharge qui dépend du coefficient de frottement. L'effort augmente en fonction de la rotation $-R_x$ en évoluant selon l'équation suivante :

Si $R_x > \frac{\beta_{xza}^{Rmd} * R_{x,0} - \frac{F_z}{E * L_R^2}}{\beta_{xza}^{Rmd} - \beta_{xzb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = R_x * J_{xzb}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad J_{xzb}^{Rmd} = \beta_{xzb}^{Rmd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{xzb}^{Rmd} = 0.070 * (0.01 * f + 1) \tag{D.61}$$

D.2.1.8 Rotation $-R_x$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

La figure D.8d affiche la position du point d'application de la force au cours du déplacement $-R_x$. Pendant la charge et la décharge le point d'application de la force se déplace le long de l'axe Z pour tendre très rapidement vers zéro selon l'équation suivante :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.57 * atan(15.11/(45 * \frac{D_x}{L_R} + 0.02) * R_x)) * L_R} \tag{D.62}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_x \leq mR_{x_{recoll}} = (0.745 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.6 * atan(-29.27/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.1) * R_x)) * L_R} \tag{D.63}$$

Ici, il a présence de deux points d'application. Le premier est le résultat du contact entre le coin du bloc 1 avec l'arête centrale du bloc 2. Le second est le résultat du contact entre le coin du bloc 2 et l'arête centrale du bloc 1. Abaqus effectue la moyenne entre ces deux points et le point est proche de zéro. De plus, on observe un effet de vis. Plus le bloc 1 tourne et plus il est entrainé en rotation. Le tableau D.8 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour une rotation $-R_x$ avec en orange, les lois du premier ordre F_x et δP_z et en bleu, les lois du second ordre F_y et F_z. δP_x et δP_y sont considérées comme négligeables.

F_x	1er ordre
F_y	2ème ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	négligeable
δP_y	négligeable
δP_z	1er ordre

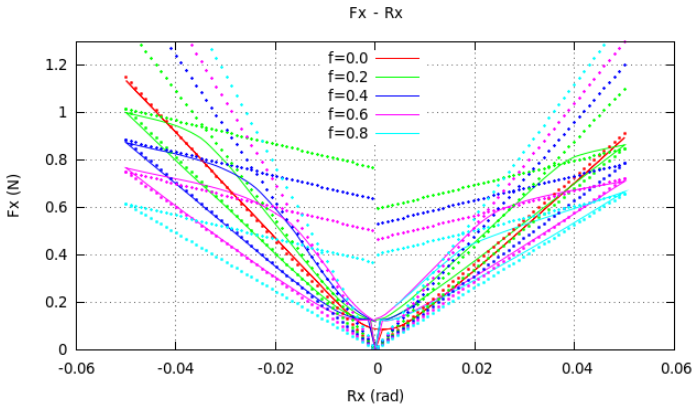
TABLE D.8 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'une rotation $-R_x$

D.2.2 Effet d'une rotation $\pm R_y$

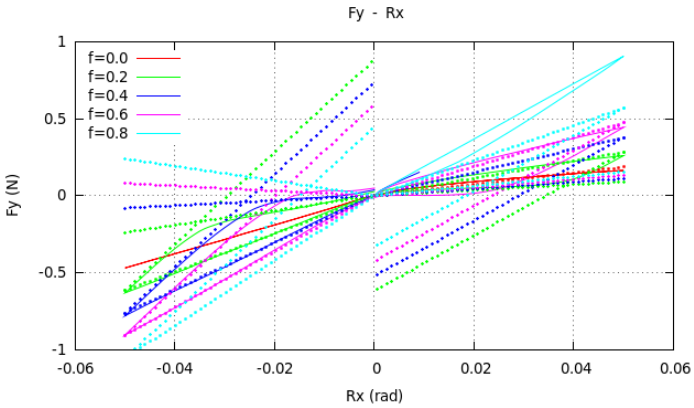
Les courbes de la figure D.9b et D.9c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'une rotation du bloc 1 par rapport au bloc 2 autour de Y. On constate alors que lors d'une rotation autour de Y, il y a des phénomènes de compression et de cisaillement, il y a donc une composante selon X, Y et aussi une faible composante selon Z. Les paragraphes suivants présentent les équations retenues pour représenter ces comportements.

D.2.2.1 Rotation $+R_y$ vs force normale F_x

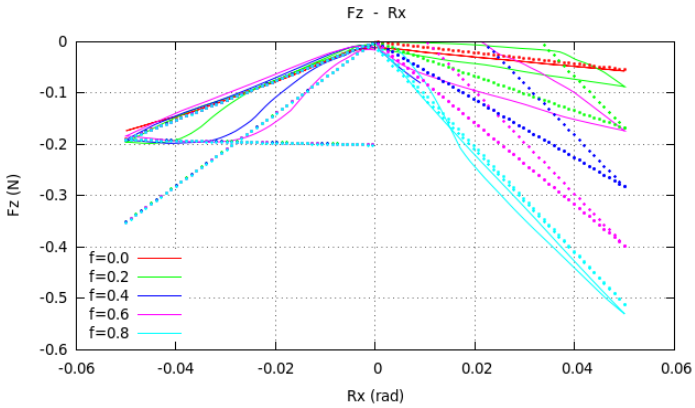
Des simulations avec différents coefficients de frottement (voir figure D.10a) montrent que la pente ne varie pas avec le coefficient de frottement. On peut constater que l'effort normal



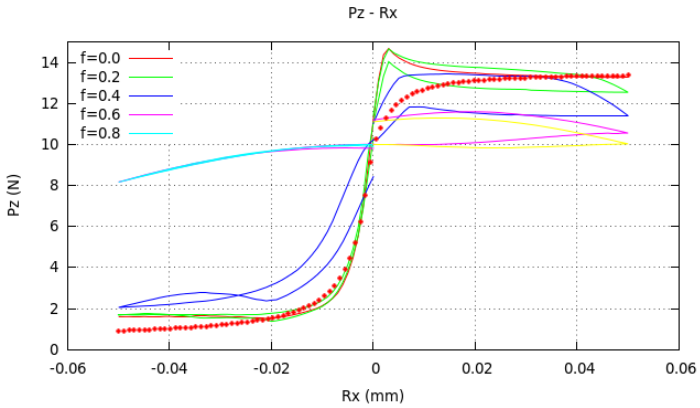
(a) Force normale



(b) Force selon Y

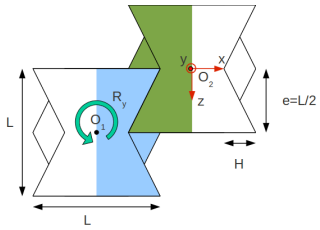


(c) Force selon Z

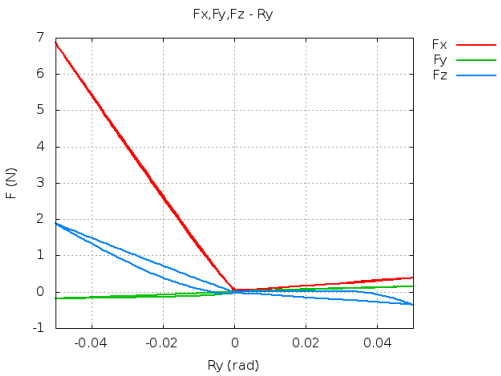


(d) Coordonnée Z du point d'application

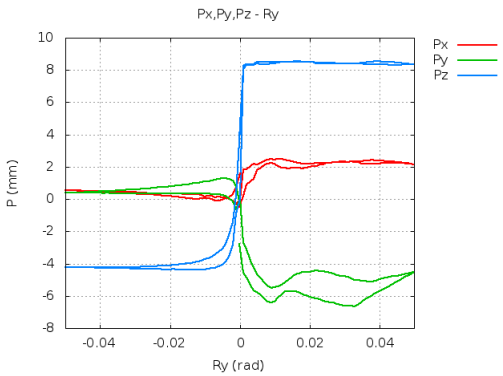
FIGURE D.8 – Lois de comportement dues à une rotation selon X pour un coefficient de frottement $f = 0.6$ dans le cas d'un contact entre surfaces réglées



(a) Rotation $+R_y$



(b) Force



(c) Déplacement du point d'application

FIGURE D.9 – Surfaces réglées - Effet d'une rotation selon Y

augmente de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient β_{yx}^{R} suivant :

$$\boxed{\beta_{yx}^{R} = 0.0777} \tag{D.64}$$

D.2.2.2 Rotation $+R_y$ vs force tangentielle F_y

La pente ne varie pas avec le coefficient de frottement (voir figure D.10b). Comme pour F_x, on peut constater que l'effort tangentiel selon Y augmente de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient β_{yy}^{R} suivant :

$$\boxed{\beta_{yy}^{R} = 0.035} \tag{D.65}$$

D.2.2.3 Rotation $+R_y$ vs force tangentielle F_z

En présence de friction, on observe une hystérésis. La courbe peut donc se diviser en trois droites. Une première correspondant à la charge et les deux suivantes à la décharge.
La charge diminue linéairement avec le coefficient β_{yz}^{R} en fonction de $+R_y$ et est influencée par le coefficient de frottement, on a donc :

$$\boxed{\beta_{yz}^{R} = -0.03} \tag{D.66}$$

Sans friction, la courbe de décharge suit la même équation que celle de la charge. Si le coefficient de frottement est différent de zéro, la courbe de décharge se décompose en deux équations supplémentaires. Durant la première partie de la décharge, la force augmente en fonction de la rotation $+R_y$ et repasse au dessus de zéro avec une pente ne dépendant pas du coefficient de frottement. Pour pouvoir décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de rotation, l'histoire de la rotation sera stockée sous la forme d'une variable $R_{y,0}$ qui interviendra dans l'équation suivante :

Si $R_y > \frac{\beta_{yza}^{Rd} * R_{y,0} - \frac{F_z}{E * L_R^2}}{\beta_{yza}^{Rd} - \beta_{yzb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (R_y - R_{y,0}) * J_{yza}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad J_{yza}^{Rd} = \beta_{yza}^{Rd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{yza}^{Rd} = -0.35 \tag{D.67}$$

Pendant, la seconde partie de la décharge, l'effort diminue à nouveau avec une pente plus grande en fonction de $+R_y$. Cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_y < \frac{\beta_{yza}^{Rd} * R_{y,0} - \frac{F_z}{E * L_R^2}}{\beta_{yza}^{Rd} - \beta_{yzb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = R_y * J_{yzb}^{Rd} \qquad \text{avec} \qquad J_{yzb}^{Rd} = \beta_{yzb}^{Rd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{yzb}^{Rd} = -0.0314 * (-2.2 * f + 1) \tag{D.68}$$

D.2.2.4 Rotation $+R_y$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Les figures D.10d, D.10e et D.10f affichent la position du point d'application de la force au cours du déplacement $+R_y$. Pendant la charge et la décharge, le point d'application de la force se déplace le long de l'axe X, Y et Z selon les équations suivantes :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_x = (0.1532 * atan(26.99/(30 * \frac{D_x}{L_R} + 0.015) * R_y)) * L_R} \tag{D.69}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_y \geq R_{y_{recoll}} = (-0.795 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_x = (0.21 * atan(-29.33/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_y)) * L_R} \tag{D.70}$$

Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_y = (-0.38 * atan(107.99/(70 * \frac{D_x}{L_R} + 0.04) * R_y)) * L_R} \tag{D.71}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_y \geq R_{y_{recoll}} = (-0.795 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_y = (0.57 * atan(29.33/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_y)) * L_R} \tag{D.72}$$

Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.54 * atan(33.56/(12.94 * \frac{D_x}{L_R} + 0.0039) * R_y)) * L_R} \tag{D.73}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_y \geq R_{y_{recoll}} = (-0.795 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.57 * atan(-29.33/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_y)) * L_R} \tag{D.74}$$

Le contact se fait donc entre le coin du bloc 2 et le haut de l'arête centrale du bloc 1. Le tableau D.9 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour une rotation R_y. Les lois que nous avons retenues apparaissent en orange dans le tableau, car elles sont du premier ordre et ont donc une grande importance. Dans le cas présent, toutes les lois sont considérées comme du premier ordre.

D.2.2.5 Rotation $-R_y$ vs force normale F_x

La pente est indépendante du coefficient de frottement (voir figure D.10a). On peut constater que l'effort normal augmente de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient β_{yx}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{yx}^{Rm} = -1.3664} \tag{D.75}$$

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	1er ordre
δP_x	1er ordre
δP_y	1er ordre
δP_z	1er ordre

TABLE D.9 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'une rotation R_y

D.2.2.6 Rotation $-R_y$ vs force tangentielle F_y

Le coefficient de frottement n'a aucune influence sur la pente (voir figure D.10b). On peut constater que l'effort tangentiel selon Y diminue de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient β_{yy}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{yy}^{Rm} = 0.215 * (-1.095 * f + 1)} \tag{D.76}$$

Il y a une hystérésis qui est très petite, la charge et la décharge ont donc la même équation.

D.2.2.7 Rotation $-R_y$ vs force tangentielle F_z

Des simulations avec différents coefficients de frottement (voir figure D.10c) montrent que la pente ne varie pas avec le coefficient de frottement. On peut constater que l'effort tangentiel selon Z évolue de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient β_{yz}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{yz}^{Rm} = -0.0547 * (10.0 * f + 1)} \tag{D.77}$$

Il y a une hystérésis qui est très petite, la charge et la décharge ont donc la même équation.

D.2.2.8 Rotation $-R_y$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Les figures D.10d, D.10e et D.10f affichent la position du point d'application de la force au cours du déplacement $-R_y$. Pendant la charge et la décharge, le point d'application de la force se déplace le long de l'axe X, Y et Z selon les équations suivantes :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_x = (-0.03 * atan(0.21/(-0.175 * \frac{D_x}{L_R} + 0.01) * R_y)) * L_R} \tag{D.78}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_y \leq mR_{y_{recoll}} = (0.25 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_x = (0.825 * atan(-48.2/(8 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_y + 0.2) + 1.31) * L_R} \tag{D.79}$$

Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_y = (-0.21 * atan(65.97/(34 * \frac{D_x}{L_R} + 0.02) * R_y + 0.3466) - 0.2078) * L_R} \tag{D.80}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_y \leq mR_{y_{recoll}} = (0.25 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_y = (0.12 * atan(29.33/(-3.14 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_y)) * L_R} \tag{D.81}$$

Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.2258 * atan(134.17/(120 * \frac{D_x}{L_R} + 0.015) * R_y)) * L_R} \tag{D.82}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_y \leq mR_{y_{recoll}} = (0.25 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_z = (-0.65 * atan(-48.2/(20 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_y + 0.2) - 1.4) * L_R} \tag{D.83}$$

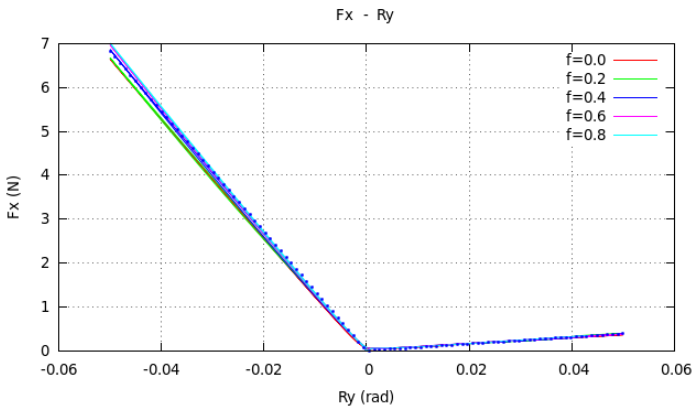
Le contact se fait donc entre le coin du bloc 1 et le haut de l'arête centrale du bloc 2. Le tableau D.10 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour un déplacement $-R_y$. Les lois que nous avons retenues sont du premier ordre et apparaissent en orange. Ici, toutes les lois sont considérées comme du premier ordre.

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	1er ordre
δP_x	1er ordre
δP_y	1er ordre
δP_z	1er ordre

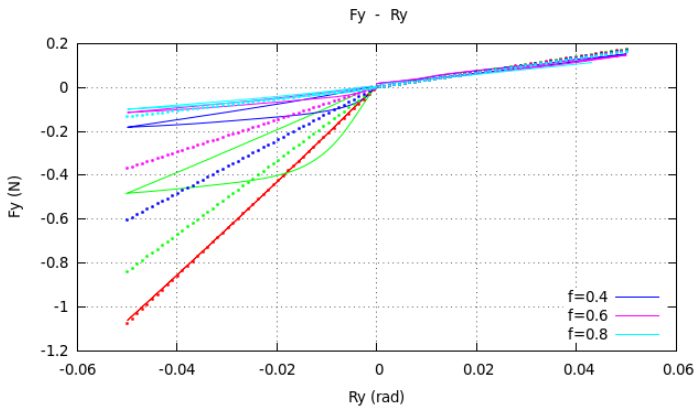
TABLE D.10 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'une rotation $-R_y$

D.2.3 Effet d'une rotation $\pm R_z$

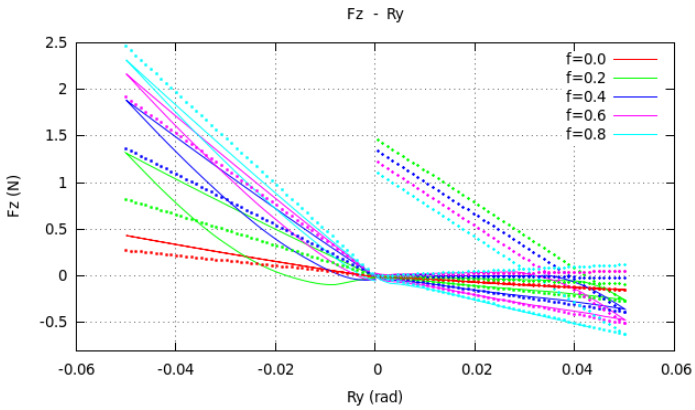
Les courbes de la figure D.11b et D.11c montrent respectivement l'évolution de la force résultante et de la position du point d'application lors d'une rotation du bloc 1 autour de Z. On constate alors que lors d'une rotation autour de Y, il y a des phénomènes de compression et de cisaillement, il y a donc une composante selon X, Y et aussi une faible composante selon Z. Les paragraphes suivants présentent les formules analytiques retenues pour représenter ces comportements.



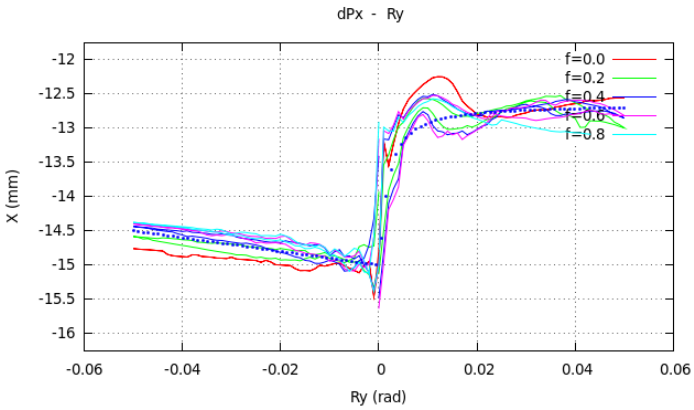
(a) Force normale



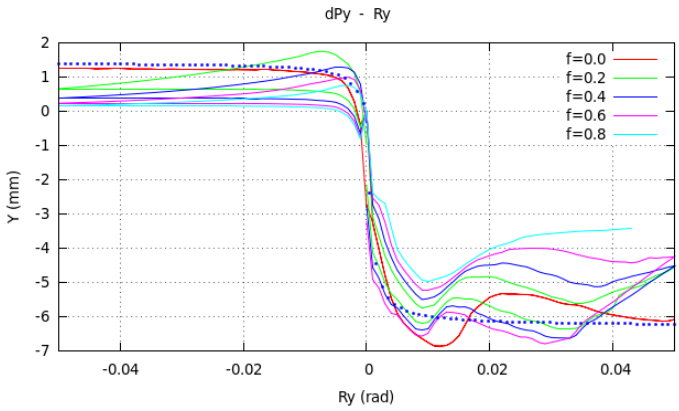
(b) Force selon Y



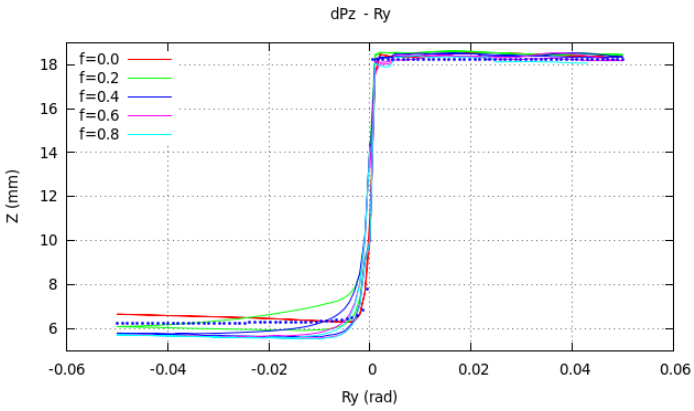
(c) Force selon Z



(d) Coordonnée X du point d'application

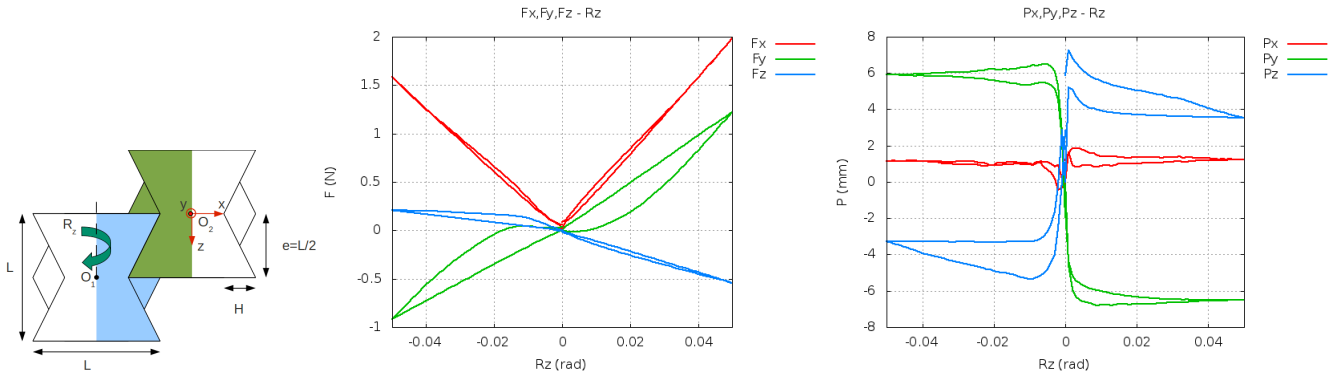


(e) Coordonnée Y du point d'application



(f) Coordonnée Z du point d'application

FIGURE D.10 – Lois de comportement dues à une rotation selon Y pour un coefficient de frottement $f = 0.4$



(a) Rotation $+R_z$ (b) Force (c) Déplacement du point d'application

FIGURE D.11 – Surfaces réglées - Effet d'une rotation selon Z

D.2.3.1 Rotation $+R_z$ vs force normale F_x

Le coefficient de frottement n'influence pas la pente (voir figure D.12a). On peut constater que l'effort normal augmente de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient β^R_{zx} suivant :

$$\boxed{\beta^R_{zx} = 0.46} \tag{D.84}$$

D.2.3.2 Rotation $+R_z$ vs force tangentielle F_y

Nous pouvons constater l'existence d'une hystérésis pour des coefficients de frottement non nuls. La courbe sera donc décomposée en trois droites. La phase de charge sera modélisée par une droite augmentant avec la rotation $+R_z$. La charge est peu influencée par le coefficient de frottement et évolue linéairement selon l'équation suivante :

$$\boxed{\beta^R_{zy} = 0.1094 * (2.7 * f + 1)} \tag{D.85}$$

Quant à la décharge, elle obéit à la même raideur lorsque le coefficient de frottement est nul alors qu'en présence de friction, elle sera modélisée par deux droites. La seconde raideur β^{Rd}_{zya} représente le début de la décharge et diminue en fonction de la rotation $+R_z$ et passe au dessus de zéro. Dans la variable $R_{z,0}$, nous stockerons l'historique de la rotation. À partir de cette variable, nous pourrons prédire l'évolution de l'effort après le changement du sens de rotation qui dans le cas présent n'est pas influencé par le coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_z > \frac{\beta^{Rd}_{zya} * R_{z,0} - \frac{F_y}{E * L^2_R}}{\beta^{Rd}_{zya} - \beta^{Rd}_{zyb}}$:

$$\frac{F_{ya}}{E} = (R_z - R_{z,0}) * J^{Rd}_{zya} \qquad \text{avec} \qquad J^{Rd}_{zya} = \beta^{Rd}_{zya} * L^2_R \qquad \text{où} \qquad \beta^{Rd}_{zya} = 0.4 \tag{D.86}$$

La fin de la décharge est modélisée par une troisième droite. Durant cette dernière partie, l'effort augmente à nouveau en fonction de $+R_z$. Il est influencé par le coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_z < \frac{\beta_{zya}^{Rd} * R_{z,0} - \frac{F_y}{E * L_R^2}}{\beta_{zya}^{Rd} - \beta_{zyb}^{Rd}}$:

$$\frac{F_{yb}}{E} = R_z * J_{zyb}^{Rd} \quad \text{avec} \quad J_{zyb}^{Rd} = \beta_{zyb}^{Rd} * L_R^2 \quad \text{où} \quad \beta_{zyb}^{Rd} = 0.0135 * (1.6 * f + 1) \tag{D.87}$$

D.2.3.3 Rotation $+R_z$ vs force tangentielle F_z

La pente ne varie pas avec le coefficient de frottement (voir figure D.12c). On peut constater que l'effort tangentiel selon Z diminue de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient β_{zz}^R suivant :

$$\boxed{\beta_{zz}^R = -0.145 * (-0.65 * f + 1)} \tag{D.88}$$

Il y a une hystérésis qui est très petite, la charge et la décharge ont donc la même équation.

D.2.3.4 Rotation $+R_z$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Les figures D.12d, D.12e et D.12f affichent la position du point d'application de la force au cours du déplacement R_z. Le point d'application de la force se déplace selon les axes X, Y et Z selon les équations suivantes qui sont valides aussi bien pendant la charge et la décharge :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_x = (0.087 * atan(81.19/(90.26 * \frac{D_x}{L_R} + 0.1) * R_z)) * L_R} \tag{D.89}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_z \geq R_{z_{recoll}} = (-0.399 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_x = (-0.985 * atan(-48.2/(8 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_z + 0.2) + 1.68) * L_R} \tag{D.90}$$

Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_y = (-0.33 * atan(2763.04/(2165.3 * \frac{D_x}{L_R} + 1) * R_z) - 0.1) * L_R} \tag{D.91}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_z \geq R_{z_{recoll}} = (-0.399 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_y = (0.42 * atan(132.55/(-3.34 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_z)) * L_R} \tag{D.92}$$

Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.32 * atan(17.44/(12.99 * \frac{D_x}{L_R} + 0.005) * R_z)) * L_R} \tag{D.93}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_z \geq R_{z_{recoll}} = (-0.399 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.41 * atan(-63.69/(-3.3 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_z)) * L_R} \tag{D.94}$$

Le contact se fait donc entre le coin du bloc 1 et le haut de l'arête centrale du bloc 2. Le tableau D.11 rassemble les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour une rotation R_z. Dans le cas présent, aucune loi n'est considérée comme négligeable. F_z, δP_x et δP_z sont considérées comme du second ordre (en bleu dans le tableau). F_x, F_y et δP_y sont les lois ayant le plus d'influence et sont donc considérées comme du premier ordre (orange dans le tableau).

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	2ème ordre
δP_y	1er ordre
δP_z	2ème ordre

TABLE D.11 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'une rotation R_z

D.2.3.5 Rotation $-R_z$ vs force normale F_x

Ici, la pente ne varie pas avec le coefficient de frottement (voir figure D.12a). On peut constater que l'effort normal augmente de la même façon pendant la charge et la décharge avec le coefficient β_{zx}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{zx}^{Rm} = -0.3148 * (-0.018 * f + 1)} \tag{D.95}$$

D.2.3.6 Rotation $-R_z$ vs force tangentielle F_y

En présence de frottement, on observe une hystérésis. La courbe peut donc se représenter par trois droites. Une première simulant la phase de charge et les deux suivantes la décharge. La première partie est la charge qui dépend faiblement de la friction et diminue linéairement en fonction de la rotation $-R_z$ avec le coefficient β_{zy}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{zy}^{Rm} = 0.0755 * (3.4 * f + 1)} \tag{D.96}$$

La courbe de décharge sans frottement obéit à la même équation. Par contre, si le coefficient de frottement est différent de zéro, on définit alors deux équations supplémentaires. La seconde

partie modélise le début de la décharge et augmente en fonction de la rotation $-R_z$ et passe au dessus de zéro. L'histoire de la rotation sera stockée sous la forme d'une variable $R_{z,0}$, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort après le changement du sens de rotation. La pente de cette partie de la décharge est indépendante du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_z < \frac{\beta_{zya}^{Rmd} * R_{z,0} - \frac{F_y}{E * L_R^2}}{\beta_{zya}^{Rmd} - \beta_{zyb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{ya}}{E} = (R_z - R_{z,0}) * J_{zya}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad J_{zya}^{Rmd} = \beta_{zya}^{Rmd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{zya}^{Rmd} = 0.37 \tag{D.97}$$

La troisième partie modélise la fin de la décharge et l'effort diminue à nouveau en fonction de la rotation $-R_z$. La pente de cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_z > \frac{\beta_{zya}^{Rmd} * R_{z,0} - \frac{F_y}{E * L_R^2}}{\beta_{zya}^{Rmd} - \beta_{zyb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{yb}}{E} = R_z * J_{zyb}^{Rmd} \qquad \text{avec} \qquad J_{zyb}^{Rmd} = \beta_{zyb}^{Rmd} * L_R^2 \qquad \text{où} \qquad \beta_{zyb}^{Rmd} = 0.0135 * (1.6 * f + 1) \tag{D.98}$$

D.2.3.7 Rotation $-R_z$ vs force tangentielle F_z

Dans le cas d'un coefficient de frottement non nul, nous observons une hystérésis. La courbe peut alors donc se décomposer en trois équations. Une première pour la phase de charge et les deux suivantes pour la décharge.
La première partie modélise la charge dont l'effort qui dépend du frottement augmente linéairement en fonction de la rotation $-R_z$ avec le coefficient β_{zz}^{Rm} suivant :

$$\boxed{\beta_{zz}^{Rm} = -0.08 * (-1.1 * f + 1)} \tag{D.99}$$

Dans le cas d'un coefficient de frottement non nul, nous observons une hystérésis. La courbe peut alors donc se décomposer en trois équations. Une première pour la phase de charge et les deux suivantes pour la décharge.
La seconde partie modélise le début de la décharge et diminue en fonction de la rotation $-R_z$. La variable $R_{z,0}$ aura pour rôle de stocker l'histoire de la rotation, ce qui permettra de décrire l'évolution de l'effort qui n'est pas influencée par le coefficient de frottement après le changement du sens de la rotation :

Si $R_z < \frac{\beta_{zza}^{Rmd} * R_{z,0} - \frac{F_z}{E * L_R^2}}{\beta_{zza}^{Rmd} - \beta_{zzb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{za}}{E} = (R_z - R_{z,0}) * J_{zza}^{Rmd} \quad \text{avec} \quad J_{zza}^{Rmd} = \beta_{zza}^{Rmd} * L_R^2 \quad \text{où} \quad \beta_{zza}^{Rmd} = -0.002 \tag{D.100}$$

La troisième partie représente la fin de la décharge dont l'effort diminue à nouveau avec une plus grande pente en fonction de la rotation $-R_z$. La pente de cette partie de la décharge dépend du coefficient de frottement et évolue selon l'équation suivante :

Si $R_z > \frac{\beta_{zza}^{Rmd} * R_{z,0} - \frac{F_z}{E * L_R^2}}{\beta_{zza}^{Rmd} - \beta_{zzb}^{Rmd}}$:

$$\frac{F_{zb}}{E} = R_z * J_{zzb}^{Rmd} \quad \text{avec} \quad J_{zzb}^{Rmd} = \beta_{zzb}^{Rmd} * L_R^2 \quad \text{où} \quad \beta_{zzb}^{Rmd} = -0.0914 * (1.0 * f + 1) \tag{D.101}$$

D.2.3.8 Rotation $-R_z$ vs déplacement du point d'application de la force $\delta\vec{P}$

Les figures D.12d, D.12e et D.12f affichent la position du point d'application de la force au cours du déplacement R_z. Pendant la charge et la décharge, le point d'application de la force se déplace le long de l'axe X, Y et Z selon les équations suivantes :
Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_x = (-0.067 * atan(429.58/(465.398 * \frac{D_x}{L_R} + 1.189) * R_z)) * L_R} \tag{D.102}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_z \leq mR_{z_{recoll}} = (0.399 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_x = (0.95 * atan(-48.2/(11 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_z - 0.1) + 1.6) * L_R} \tag{D.103}$$

Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_y = (-0.36 * atan(2696.8/(2195 * \frac{D_x}{L_R} + 2) * R_z + 0.36) + 0.0116) * L_R} \tag{D.104}$$

Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_z \leq mR_{z_{recoll}} = (0.399 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_y = (0.42 * atan(132.55/(-3.34 * \frac{D_x}{L_R} - 0.10) * R_z)) * L_R} \tag{D.105}$$

Dans le cas d'une compression $+D_x$:

$$\boxed{\delta P_z = (0.299 * atan(18.71/(12.96 * \frac{D_x}{L_R} + 0.008) * R_z)) * L_R} \tag{D.106}$$

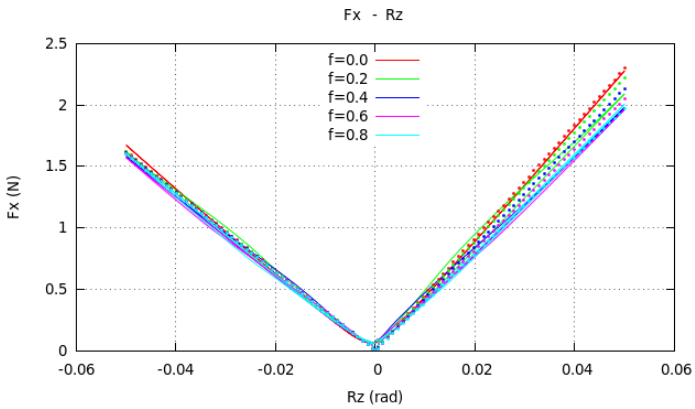
Dans le cas d'un décollement $-D_x$, si $R_z \leq mR_{z_{recoll}} = (0.399 * \frac{D_x}{L_R})$:

$$\boxed{\delta P_z = (-0.75 * atan(-48.202/(28 * \frac{D_x}{L_R} - 0.0025) * R_z - 0.1) - 1.6) * L_R} \tag{D.107}$$

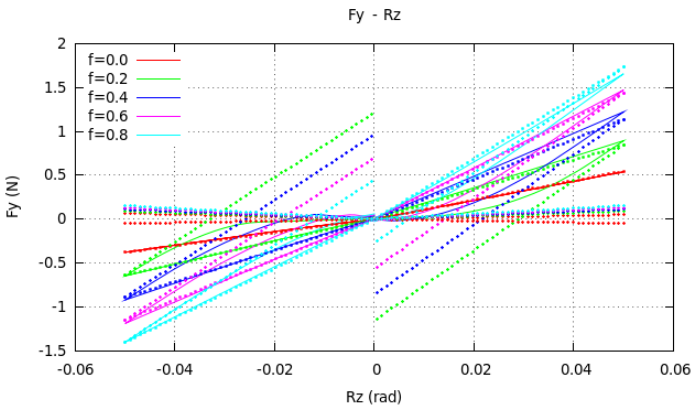
Le contact se fait donc entre le coin du bloc 2 et le haut de l'arête centrale du bloc 1. Les résultats obtenus dans le cas d'un contact entre surfaces réglées pour un déplacement $-R_z$ sont affichés dans le tableau D.12. Dans le cas présent, aucune loi n'est considérée comme négligeable. F_z, δP_x et δP_z sont considérées comme du second ordre et apparaissent en bleu dans le tableau. F_x, F_y et δP_y sont les lois ayant le plus d'influence et sont donc considérées comme du premier ordre (orange).

F_x	1er ordre
F_y	1er ordre
F_z	2ème ordre
δP_x	2ème ordre
δP_y	1er ordre
δP_z	2ème ordre

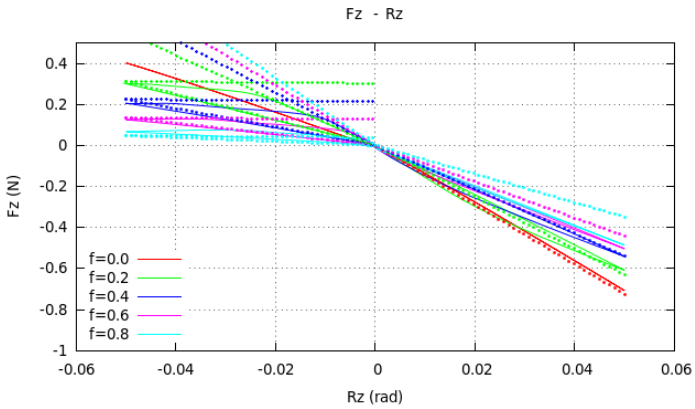
TABLE D.12 – Récapitulatif des lois de contact entre surfaces réglées dans le cas d'une rotation $-R_z$



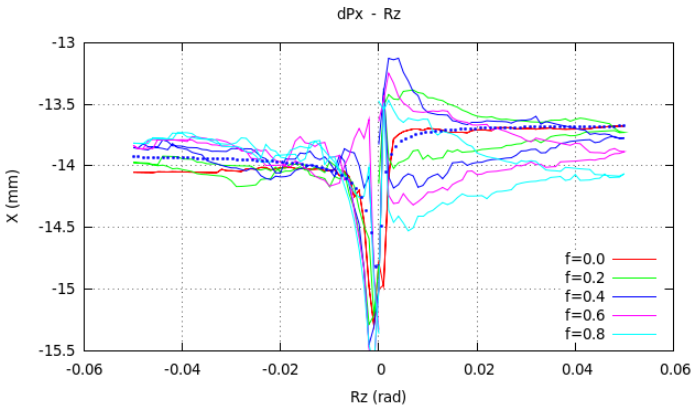
(a) Force normale



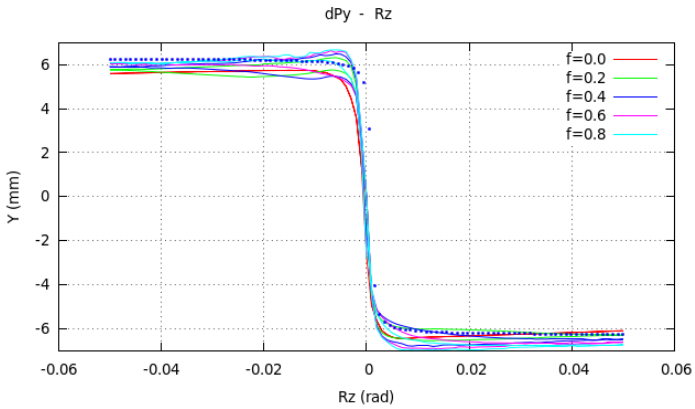
(b) Force selon Y



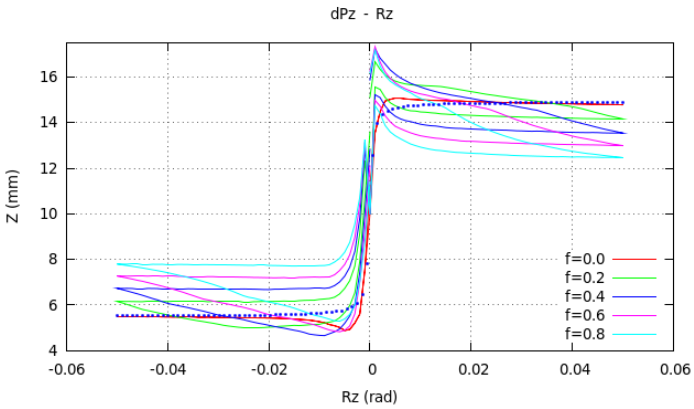
(c) Force selon Z



(d) Coordonnée X du point d'application



(e) Coordonnée Y du point d'application



(f) Coordonnée Z du point d'application

FIGURE D.12 – Lois de comportement dues à une rotation selon Z pour un coefficient de frottement $f = 0.4$ dans le cas d'un contact entre surfaces réglées

Bibliographie

3DS Simulia. Abaqus. *Abaqus/Standard User's Manual v6.11*. 2011.

M.F. Ashby. On the engineering properties of materials. *Acta Metal*, 37 :1273–1293, 1989.

M.F. Ashby. *Materials selection in mechanical design*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN 9780750661683. URL http://bks9.books.google.co.ke/books?id=5q24vUQBD44C.

M.F. Ashby and Y.J.M. Bréchet. Designing hybrid materials. *Acta Materialia*, 51(19) : 5801 – 5821, 2003. ISSN 1359-6454. doi : 10.1016/S1359-6454(03)00441-5. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645403004415. The Golden Jubilee Issue. Selected topics in Materials Science and Engineering : Past, Present and Future.

A. Autruffe, F. Pelloux, C. Brugger, P. Duval, Y. Bréchet, and M. Fivel. Indentation behaviour of interlocked structures made of ice : Influence of the friction coefficient. *Advanced Engineering Materials*, 9(8) :664–666, 2007. ISSN 1527-2648. doi : 10.1002/adem.200700111. URL http://dx.doi.org/10.1002/adem.200700111.

C. Brugger. *Mécanique des matériaux à topologie autobloquante : expériences et simulations par la méthode des éléments discrets*. PhD thesis, Grenoble INP, 2008.

M. Carlesso, A. Molotnikov, T. Krause, K. Tushtev, S. Kroll, K. Rezwan, and Y. Estrin. Enhancement of sound absorption properties using topologically interlocked elements. *Scripta Materialia*, 66(7) :483 – 486, 2012. ISSN 1359-6462. doi : 10.1016/j.scriptamat.2011.12.022. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359646211007706.

Loïc Courtois, Eric Maire, Michel Perez, David Rodney, Olivier Bouaziz, and Yves Brechet. Mechanical properties of monofilament entangled materials. *Advanced Engineering Materials*, pages n/a–n/a, 2012. ISSN 1527-2648. doi : 10.1002/adem.201100356. URL http://dx.doi.org/10.1002/adem.201100356.

J. Dirrenberger, S. Forest, D. Jeulin, and C. Colin. Homogenization of periodic auxetic materials. *Procedia Engineering*, 10(0) :1847 – 1852, 2011. ISSN 1877-7058. doi : 10.1016/j.proeng.2011.04.307. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705811004954. 11th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials (ICM11).

J. Dirrenberger, S. Forest, and D. Jeulin. Elastoplasticity of auxetic materials. *Computational Materials Science*, 64(0) :57 – 61, 2012a. ISSN 0927-0256. doi : 10.1016/j.commatsci.2012.03.036. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927025612001838. Proceedings of the 21st International Workshop on Computational Mechanics of Materials (IWCMM 21).

Justin Dirrenberger, Samuel Forest, and Dominique Jeulin. Effective elastic properties of auxetic microstructures : anisotropy and structural applications. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, pages 1–13, 2012b. ISSN 1569-1713. URL http://dx.doi.org/10.1007/s10999-012-9192-8. 10.1007/s10999-012-9192-8.

A. V. Dyskin, Y. Estrin, A. J. Kanel-Belov, and E. Pasternak. Toughening by fragmentation—how topology helps. *Advanced Engineering Materials*, 3(11) :885–888, 2001a. ISSN 1527-2648. doi : 10.1002/1527-2648(200111)3:11⟨885::AID-ADEM885⟩3.0.CO;2-P. URL http://dx.doi.org/10.1002/1527-2648(200111)3:11<885::AID-ADEM885>3.0.CO;2-P.

A. V. Dyskin, Y. Estrin, A. J. Kanel-Belov, and E. Pasternak. A new principle in design of composite materials : reinforcement by interlocked elements. *Composites Science and Technology*, 63(3-4) :483 – 491, 2003a. ISSN 0266-3538. doi : 10.1016/S0266-3538(02)00228-2. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353802002282.

A. V. Dyskin, Y. Estrin, A. J. Kanel-Belov, and E. Pasternak. Interlocking properties of buckyballs. *Physics Letters A*, 319(3-4) :373 – 378, 2003b. ISSN 0375-9601. doi : 10.1016/j.physleta.2003.10.027. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960103015561.

A. V. Dyskin, Y. Estrin, A.J. Kanel-Belov, and E. Pasternak. Topological interlocking of platonic solids : A way to new materials and structures. *Philosophical Magazine Letters*, 83 (3) :197–203, 2003c. doi : 10.1080/0950083031000065226. URL http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0950083031000065226.

A. V. Dyskin, Y. Estrin, E. Pasternak, H.C. Khor, and A. J. Kanel-Belov. The principle of topological interlocking in extraterrestrial construction. *Acta Astronautica*, 57 (1) :10 – 21, 2005. ISSN 0094-5765. doi : 10.1016/j.actaastro.2004.12.005. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576504004084.

A.V Dyskin, Y Estrin, A.J Kanel-Belov, and E Pasternak. A new concept in design of materials and structures : assemblies of interlocked tetrahedron-shaped elements. *Scripta Materialia*, 44(12) :2689 – 2694, 2001b. ISSN 1359-6462. doi : 10.1016/S1359-6462(01)00968-X. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S135964620100968X.

A.V. Dyskin, Y. Estrin, E. Pasternak, H.C. Khor, and A.J. Kanel-Belov. Fracture resistant structures based on topological interlocking with non-planar contacts. *Advanced Engineering Materials*, 5(3) :116–119, 2003d. ISSN 1527-2648. doi : 10.1002/adem.200390016. URL http://dx.doi.org/10.1002/adem.200390016.

Y. Estrin, A. V. Dyskin, E. Pasternak, H. C. Khor, and A. J. Kanel-Belov. Topological interlocking of protective tiles for the space shuttle. *Philosophical Magazine Letters*, 83(6) :351–355, 2003. doi : 10.1080/0950083031000120873. URL http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0950083031000120873.

Y. Estrin, A. V. Dyskin, E. Pasternak, S. Schaare, S. Stanchits, and A. J. Kanel-Belov. Negative stiffness of a layer with topologically interlocked elements. *Scripta Materialia*, 50(2) :291 – 294, 2004. ISSN 1359-6462. doi : 10.1016/j.scriptamat.2003.09.053. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359646203006249. Viewpoint Set No.33. Shape Memory Alloys.

Y. Estrin, A. V. Dyskin, and E. Pasternak. Topological interlocking as a material design concept. *Materials Science and Engineering : C*, 31(6) :1189 – 1194, 2011. ISSN 0928-4931. doi : 10.1016/j.msec.2010.11.011. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0928493110002882. Principles and Development of Bio-Inspired Materials.

A. Fallet, P. Lhuissier, L. Salvo, and Y.J.M. Bréchet. mechanical behaviour of metallic hollow spheres foam. *Adv. Eng. Mater.*, 10-9(19) :858–862, 2008.

M. Glickman. The g-block system of vertically interlocking paving. *Proc. 2nd Int. Conf. On Concrete Block Paving*, pages 345–348, 1984.

R. E. Goodman and G.-H. Shi. Block theory and its application to rock engineering. *Prentice-Hall, London*, 1985.

A J Kanel-Belov, A V Dyskin, Y Estrin, E Pasternak, and I A Ivanov-Pogodaev. Interlocking of convex polyhedra : towards a geometric theory of fragmented solids. Technical Report arXiv :0812.5089, Dec 2008. Comments : 15 pages, 11 figures.

M. Lewandowski, M. Amiot, and A. Perwuelz. Development and characterization of 3d nonwoven composites. *Materials Science Forum*, 714 :131–137, 2012. doi : 10.4028/www.scientific.net/MSF.714.131. URL http://www.scientific.net/MSF.714.131.

C.L Martin, D Bouvard, and S Shima. Study of particle rearrangement during powder compaction by the discrete element method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(4) :667 – 693, 2003. ISSN 0022-5096. doi : 10.1016/S0022-5096(02)00101-1. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509602001011.

L. Mezeix, C. Bouvet, J. Huez, and D. Poquillon. Mechanical behavior of entangled fibers and entangled cross-linked fibers during compression. *Journal of Materials Science*, 44 : 3652–3661, 2009. ISSN 0022-2461. URL http://dx.doi.org/10.1007/s10853-009-3483-y. 10.1007/s10853-009-3483-y.

A. Molotnikov, Y. Estrin, A. V. Dyskin, E. Pasternak, and A. J. Kanel-Belov. Percolation mechanism of failure of a planar assembly of interlocked osteomorphic elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(8) :1222 – 1232, 2007. ISSN 0013-7944. doi : 10.1016/j.engfracmech.2006.07.012. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794406002785.

D.A. Robson. *Deutsches Patent*. 1978. ISBN DE-AS 25 54 516.

S. Schaare. *Charakterisierung und Simulation topologisch verzahnter Strukturen*. PhD thesis, TU Clausthal, 2008.

S. Schaare, A. V. Dyskin, Y. Estrin, S. Arndt, E. Pasternak, and A. Kanel-Belov. Point loading of assemblies of interlocked cube-shaped elements. *International Journal of Engineering Science*, 46(12) :1228 – 1238, 2008. ISSN 0020-7225. doi : 10.1016/j.ijengsci.2008.06.012. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722508001079.

D. Yong. *Utilisation of topologically-interlocking osteomorphic blocks for multi-purpose civil construction*. PhD thesis, Université de Western Australia, 2011.

Expériences et simulations de structures autobloquantes

Résumé :

Les structures autobloquantes sont des assemblages de blocs disposés périodiquement. La géométrie des blocs et les frottements entre blocs ainsi que la compression appliquée aux bords de l'assemblage jouent un rôle central dans la cohésion de l'ensemble de l'assemblage.

Des expériences d'indentation ont été menées pour étudier la réponse mécanique de matériaux autobloquants constitués de cubes en alumine et de blocs ostéomorphes enpolymère. Ces résultats ont été reproduits en utilisant deux méthodes numériques : la méthode des éléments finis et la méthode des éléments discrets utilisant un code dédié.

Différentes variables de conception ont pu être étudiées par simulations numériques et les expériences nous ont permis de connaître la réponse d'un assemblage endommagé. De nouveaux assemblages à structure hierarchique ont été proposés et testés ouvrant de nouvelles perspectives.

Mots-clés : Matériaux autobloquants, éléments discrets, éléments finis

Experiments and simulations of interlocked materials

Abstract :

Interlocked materials are periodic paving of elementary blocks. The cohesion is insured by the boundary conditions applied on the edge of the assembly as well as the topology of the blocks and the friction between the blocks.

Experiments were performed to study the mechanical response of interlocked assemblies built with cubes in alumina and osteomophic blocs in polymer. Those results have been reproduced using two numerical methods : the finite element method and the discret element method with the help of a dedicated code.

Differents design parameters have been studied with numerical methods and experiments allowed us to know the response of a dammage assembly. New assemblies having a hierachical structure were proposed and tested opening new perspectives.

Keywords : Interlocked materials, discret elements, finite elements