



**HAL**  
open science

# Etudes semi-analytiques des conditions de déclenchement et de saturation des auto-oscillations dans des moteurs thermoacoustiques de géométries diverses

Matthieu Guédra

► **To cite this version:**

Matthieu Guédra. Etudes semi-analytiques des conditions de déclenchement et de saturation des auto-oscillations dans des moteurs thermoacoustiques de géométries diverses. Autre [cond-mat.other]. Université du Maine, 2012. Français. NNT : 2012LEMA1025 . tel-00821108

**HAL Id: tel-00821108**

**<https://theses.hal.science/tel-00821108>**

Submitted on 7 May 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ÉTUDES SEMI-ANALYTIQUES DES CONDITIONS DE DÉCLENCEMENT ET DE SATURATION DES AUTO-OSCILLATIONS DANS DES MOTEURS THERMOACOUSTIQUES DE GÉOMÉTRIES DIVERSES

---

Matthieu GUÉDRA

sous la direction de P. LOTTON, Directeur de Recherche CNRS,  
et G. PENELET, Maître de Conférences

Thèse de Doctorat en Acoustique  
Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine  
Le Mans, France, 2012



Académie de Nantes  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE  
UNIVERSITÉ DU MAINE, LE MANS, FRANCE

**THÈSE DE DOCTORAT**  
*Spécialité : ACOUSTIQUE*

présentée par

**Matthieu GUÉDRA**

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

---

**ÉTUDES SEMI-ANALYTIQUES DES CONDITIONS DE DÉCLENCHEMENT ET DE  
SATURATION DES AUTO-OSCILLATIONS DANS DES MOTEURS  
THERMOACOUSTIQUES DE GÉOMÉTRIES DIVERSES**

---

Thèse préparée au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine

soutenue le 19 Octobre 2012

devant le jury composé de :

<b>M. BRUNEAU</b>	Professeur Émérite, LAUM, Université du Maine	<i>Président du Jury</i>
<b>Ph. BLANC-BENON</b>	Directeur de Recherche, LMFA, École Centrale de Lyon	<i>Rapporteur</i>
<b>H. BAILLIET</b>	Maître de Conférences, Institut PPRIME, Université de Poitiers	<i>Rapporteur</i>
<b>J. GILBERT</b>	Directeur de Recherche, LAUM, Université du Maine	<i>Examineur</i>
<b>A. KUSIAK</b>	Maître de Conférences, TREFLE, Université de Bordeaux	<i>Examineur</i>
<b>A. ATCHLEY</b>	Professeur, College of Engineering, University of Pennsylvania	<i>Examineur</i>
<b>P. LOTTON</b>	Directeur de Recherche, LAUM, Université du Maine	<i>Directeur de Thèse</i>
<b>G. PENELET</b>	Maître de Conférences, LAUM, Université du Maine	<i>Co-directeur de Thèse</i>



## Remerciements

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR-CNRS 6613), et a bénéficié d'une bourse allouée par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. Je remercie M. Yves Aurégan, Directeur de Recherche CNRS et directeur du LAUM, de m'avoir offert cette opportunité et de m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

En premier lieu, j'aimerais remercier très chaleureusement mes directeurs de thèse, Pierrick Lotton, Directeur de Recherche CNRS, et Guillaume Penelet, Maître de Conférences, de m'avoir accordé une totale confiance tout au long de ces trois ans, pour leur implication quotidienne et pour toutes leurs idées originales qui ont nourri ce travail. Ces quelques lignes témoignent de ma reconnaissance, que ce soit pour les connaissances scientifiques qu'ils m'ont fait partager, ou pour leur aide et leur soutien dans l'exercice difficile qu'est la rédaction du mémoire. J'aimerais dire combien il m'a été précieux de pouvoir compter sur eux en toutes circonstances et combien il m'a été agréable de les côtoyer ; puissent-ils trouver ici l'expression de toute ma gratitude et de toute mon amitié.

J'adresse également un grand merci à M. Michel Bruneau, professeur émérite au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, pour l'attention bienveillante qu'il a portée à mon travail tout au long de ces trois années de doctorat, pour ses nombreux conseils et pour toutes les discussions agréables que nous avons pu avoir ensemble.

Je remercie M. Philippe Blanc-Benon, Directeur de Recherche CNRS à l'École Centrale de Lyon, et M<sup>me</sup> Hélène Bailliet, Maître de Conférences à l'institut PPRIME de Poitiers, d'avoir tous deux accepté le rôle de rapporteur de ce mémoire de thèse, ainsi que MM. les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.

Je remercie M. Jean-Pierre Dalmont, Professeur au LAUM, dont les qualités d'expérimentateur m'ont été d'une grande aide pour le développement du banc de mesure, et qui m'a fait profiter de toute son expérience concernant les méthodes multi-microphoniques.

Je remercie M. Denis Bruneau, Maître de Conférences au laboratoire TREFLE de Bordeaux, ainsi que M. Kosai Raouf et M. Laurent Simon, Professeurs à l'Université du Maine, pour le regard critique qu'ils ont porté sur le problème inverse. Cette problématique m'était, il faut l'avouer, totalement étrangère au début de mon doctorat ; il a été très important pour moi de pouvoir les consulter sur ce point et de m'appuyer sur leurs conseils.

Je remercie encore grandement M<sup>me</sup> Hélène Bailliet avec qui j'ai été très heureux de pouvoir discuter de vive voix ou par courriel, et qui m'a été d'une aide précieuse concernant le calcul du vent acoustique de Rayleigh. J'adresse aussi toute ma reconnaissance à M. Vitaliy Gusev, Professeur à l'IMMM, pour ses conseils avisés concernant le modèle de régime transitoire.

Je salue bien évidemment les membres actifs de l'équipe Thermoacoustique du LAUM que sont Gaëlle Poignand, Ingénieur de Recherche, et Flavio Bannwart, doctorant. L'ensemble de nos travaux, dissociés mais complémentaires, se sont auto-alimentés et ont joué un rôle moteur dans nos recherches respectives. J'ai eu plaisir à travailler et discuter avec eux lors de nos réunions (quasi-) hebdomadaires, mais c'est surtout l'amitié que je leur porte qui justifie pleinement ces quelques lignes.

Je remercie M. Emmanuel Brasseur, Ingénieur, de m'avoir aidé au début de ma thèse à mettre en place le pilotage informatique du banc de mesure, ainsi que M. Thibaut Devaux qui a réalisé les mesures en régime transitoire sur le moteur *quart d'onde* lors de son stage de 1<sup>ère</sup> année de Master.

Au cours de ce doctorat, j'ai également bénéficié d'une mission enseignement à l'UFR Sciences de l'Université du Maine. Je remercie tous les membres des équipes enseignantes avec qui j'ai eu la chance de travailler : M. Christophe Ayrault, M. Bertrand Lihoreau, M<sup>me</sup> Catherine Potel, M. Jean-Pierre Dalmont, M. Olivier Dazel. J'aimerais remercier tout particulièrement Guillaume Penelet qui m'a témoigné de la plus grande marque de confiance en me laissant assurer le cours de Thermoacoustique de 1<sup>ère</sup> année de Master lors de ma 3<sup>ème</sup> année de doctorat.

Un grand merci à tous ceux que j'ai pu côtoyer avant et pendant ma thèse, tous mes amis, doctorants ou autres, mes collègues de bureau, toute la bande du Mulli, et j'en passe mais tous se reconnaîtront bien

évidemment...

Enfin, j'aimerais surtout adresser un grand merci à ma famille pour leur soutien permanent. D'abord à Valeria, ma petite amie au début de cette thèse, qui m'a dit oui et est devenue ma femme deux mois avant ma soutenance! Ensuite à Lucile et Léo et mon adorable nièce Manon. Enfin à mes parents, Cécile et Michel, qui n'ont jamais cessé d'être fiers de moi, c'est certainement le plus beau cadeau qu'ils puissent me faire.

Je dédie cette thèse à mon père.

# Table des matières

Table des matières . . . . .	iii
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Conditions de stabilité et taux d'amplification</b>	<b>5</b>
1.1 Équations fondamentales de la thermoacoustique . . . . .	5
1.1.1 Équations fondamentales de l'acoustique en fluide dissipatif . . . . .	6
1.1.2 Hypothèses simplificatrices . . . . .	7
1.1.3 Équation de propagation pour la pression acoustique . . . . .	8
1.2 Équation caractéristique d'un système thermoacoustique . . . . .	10
1.2.1 Générateur d'ondes stationnaires . . . . .	10
1.2.2 Générateur d'ondes progressives . . . . .	13
1.3 Description de l'amplification/atténuation de l'onde acoustique . . . . .	16
1.4 Résultats et discussion . . . . .	18
1.4.1 Système à ondes stationnaires . . . . .	18
1.4.2 Système à ondes progressives . . . . .	20
1.5 Conclusion . . . . .	27
<b>2 Matrice de transfert expérimentale du noyau</b>	<b>29</b>
2.1 Présentation du noyau thermoacoustique étudié . . . . .	31
2.2 Présentation du banc de mesure . . . . .	32
2.3 Méthode à deux charges . . . . .	33
2.4 Mesure des coefficients de transfert . . . . .	38
2.4.1 En l'absence de chauffage . . . . .	38
2.4.2 Pour différentes conditions de chauffage . . . . .	41
2.5 Prédiction du seuil de déclenchement . . . . .	41
2.5.1 Calcul des conditions de déclenchement à partir des données expérimentales . . . . .	42
2.5.2 Système à ondes stationnaires . . . . .	43
2.5.3 Système annulaire couplé . . . . .	43
2.6 Conclusion . . . . .	46
<b>3 Modélisation du noyau thermoacoustique – méthode inverse</b>	<b>47</b>
3.1 Propagation acoustique dans le noyau . . . . .	48
3.1.1 Propagation d'ondes planes harmoniques . . . . .	48

3.1.2	Diffusion de la chaleur dans le noyau . . . . .	49
3.2	Formulation du problème inverse . . . . .	52
3.2.1	Critère des moindres carrés . . . . .	52
3.2.2	Méthode de minimisation . . . . .	53
3.3	Estimation de paramètres acoustiques . . . . .	55
3.3.1	Stack en céramique . . . . .	55
3.3.2	Autres matériaux . . . . .	61
3.4	Estimation de paramètres thermiques . . . . .	65
3.4.1	Analyse des sensibilités . . . . .	65
3.4.2	Estimations à partir des données expérimentales . . . . .	67
3.5	Conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Régime transitoire dans un moteur thermoacoustique quart d'onde</b>	<b>73</b>
4.1	Modélisation analytique du régime transitoire . . . . .	75
4.1.1	Équation caractéristique du système . . . . .	75
4.1.2	Seuil de déclenchement . . . . .	75
4.1.3	Amplification thermoacoustique des auto-oscillations . . . . .	77
4.2	Description des effets non-linéaires saturants . . . . .	77
4.2.1	Flux de chaleur thermoacoustique dans le stack . . . . .	77
4.2.2	Modèle simplifié de vitesse du vent acoustique . . . . .	78
4.2.3	Transferts de chaleur instationnaires . . . . .	87
4.3	Simulation numérique du régime transitoire . . . . .	89
4.3.1	Schéma de résolution numérique . . . . .	89
4.3.2	Résultats de simulation . . . . .	90
4.4	Conclusion . . . . .	94
	<b>Conclusion</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Matrices de transfert de biportes acoustiques</b>	<b>101</b>
A.1	Conventions utilisées . . . . .	101
A.2	Guide d'onde droit . . . . .	102
A.3	Élément poreux . . . . .	103
A.4	Guide d'onde conique . . . . .	104
A.5	Biporte soumis à une distribution inhomogène de température . . . . .	104
<b>B</b>	<b>Description analytique simplifiée du déclenchement et du taux d'amplification</b>	<b>107</b>
B.1	Détermination de $\Omega$ et $\epsilon_g$ en hypothèse quasi-statique . . . . .	107
B.1.1	Solution générale de l'équation caractéristique . . . . .	107
B.1.2	Expressions analytiques des fonctions $f_0$ et $f_1$ . . . . .	108
B.2	Système à ondes stationnaires . . . . .	111
B.3	Système annulaire . . . . .	117
B.3.1	Interaction quasi-adiabatique dans le résonateur . . . . .	117
B.3.2	Seuil de déclenchement pour un noyau compact . . . . .	119

---

<b>C</b>	<b>Caractéristiques du transducteur thermo-acousto-électrique</b>	<b>121</b>
<b>D</b>	<b>Méthode à deux charges – Résultats et influence des sources d’erreurs</b>	<b>123</b>
D.1	Résultats de mesure . . . . .	123
D.2	Estimation des incertitudes . . . . .	127
D.2.1	Incertitudes sur le nombre d’onde complexe $k$ . . . . .	127
D.2.2	Incertitudes sur les coefficients de la matrice de transfert . . . . .	130
<b>E</b>	<b>Expression analytique du coefficient d’échange <math>h_s</math></b>	<b>133</b>
<b>F</b>	<b>Méthode inverse – Erreurs dues aux paramètres connus</b>	<b>137</b>
<b>G</b>	<b>Calcul analytique de l’écoulement de Rayleigh</b>	<b>141</b>
G.1	Composante axiale de la vitesse de l’écoulement . . . . .	141
G.2	Composante radiale de la vitesse particulière . . . . .	143
G.3	Écoulement en l’absence de gradient de température . . . . .	144
	<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>



# Introduction

Ce travail de doctorat traite de la modélisation généralisée des processus de déclenchement et d'amplification des auto-oscillations dans les moteurs thermoacoustiques. Outre la volonté d'apporter sa contribution à la compréhension des phénomènes physiques qui entrent en jeu dans les systèmes thermoacoustiques, le but de ce travail est de fournir de nouveaux outils pour le dimensionnement de ces machines, basés sur des modèles analytiques et sur la caractérisation expérimentale des propriétés de transfert du noyau thermoacoustique.

Les machines thermoacoustiques font partie de la famille des machines thermodynamiques cycliques ayant pour vocation d'échanger de la chaleur et du travail avec leur environnement. Comme toute machine thermodynamique, elles possèdent deux modes de fonctionnement suivant le sens des échanges énergétiques : le mode *moteur* pour lequel le système exploite le transfert de chaleur d'une source chaude vers une source froide pour produire du travail acoustique, et le mode *pompe-à-chaleur* pour lequel le système utilise l'énergie acoustique d'une source externe pour produire un transfert de chaleur d'une source de chaleur vers une autre. L'*effet thermoacoustique* à l'origine du fonctionnement de ces moteurs naît de l'interaction entre les oscillations acoustiques d'un fluide et un gradient de température imposé le long des parois d'un matériau poreux (généralement appelé *stack* ou *régénérateur*, selon que le contact thermique est de nature *quasi-adiabatique* ou *quasi-isotherme*).

Si le phénomène de transduction thermo-acoustique peut être considéré au premier abord comme une curiosité scientifique [86], son application dans le domaine industriel n'en demeure pas moins un réel enjeu. En effet, leur simplicité de mise en oeuvre, leur robustesse ou encore l'utilisation de fluides respectueux de l'environnement sont autant d'avantages qui rendent les machines thermoacoustiques potentiellement intéressantes pour la génération d'énergie mécanique. Le facteur limitant principal pour la production industrielle est le rendement de ces systèmes qui, malgré le fait qu'il puisse atteindre un ordre de grandeur raisonnable, reste encore trop faible relativement au rendement d'autres machines thermiques. L'amélioration du rendement de ces systèmes constitue donc naturellement le principal enjeu en thermoacoustique. Depuis maintenant une trentaine d'années, un nombre important de moteurs thermoacoustiques de géométries diverses ont vu le jour. D'abord en 1979 lorsque Ceperley discute pour la première fois de la faisabilité d'un moteur thermoacoustique de Stirling [22]. Il imagine alors un système annulaire dans lequel peut se développer une onde acoustique progressive, dont le cycle acoustique peut être assimilé à un cycle de Stirling. Ce système atteint théoriquement un très bon rendement (proche de celui de Carnot); malheureusement, Ceperley échoue à faire fonctionner cette machine. C'est seulement en 1998 que l'idée de Ceperley est reprise par Yazaki *et al.* qui réussissent à

dimensionner la première machine thermoacoustique à ondes progressives [105]. Dès lors, on voit apparaître les premiers moteurs thermoacoustique “optimisés” et réellement efficaces : citons par exemple le moteur de Stirling développé en 1999 par S. Backhaus et G. Swift [9, 10], ou encore le prototype de transducteur thermo-acousto-électrique développé en 2004 par Backhaus *et al.* en vue d’une utilisation en aéro-spatial [11].

Le développement de moteurs thermoacoustiques de plus en plus performants est en grande partie attribuable aux travaux menés au Laboratoire National de Los Alamos (USA), et notamment au développement et à la mise à disposition en accès libre du logiciel *Delta-E* [100] (puis *Delta-EC* [101]), un outil robuste dédié au dimensionnement des systèmes thermoacoustiques et qui reste l’outil le plus utilisé à ce jour. Cependant, bien qu’il soit adapté au calcul du rendement des machines thermoacoustiques, *Delta-E* n’en possède pas moins quelques défauts implicitement liés à la théorie sur laquelle il repose. En premier lieu, *Delta-E* est basé sur une approche uni-dimensionnelle des effets thermoacoustiques et ne permet donc pas de prendre en compte des éventuelles variations transverses des champs, qui peuvent jouer un rôle non-négligeable dans le processus d’amplification de l’onde. Ensuite, la modélisation de l’instabilité thermoacoustique est décrite en régime stationnaire et ne tient pas compte du régime transitoire de l’onde qui peut cependant contenir des informations importantes concernant les processus non-linéaires responsables de la saturation [89, 111, 69]. Remarquons également que ce logiciel n’est, de fait, pas adapté au calcul des conditions marginales de stabilité des moteurs. Enfin, la modélisation sous *Delta-E* est basée sur la théorie linéaire de la thermoacoustique [83, 88] et les seuls processus saturants pris en compte de façon relativement fiable sont le flux de chaleur acoustiquement induit et les pertes de charge singulières en bord de stack. Ces quelques limitations soulevées ici amènent à se questionner sur le développement d’outils capables de décrire ce que *Delta-E* ne peut prédire : quelle formulation peut être adoptée pour la description de l’amplification thermoacoustique, depuis le déclenchement jusqu’à la saturation en amplitude ; quelles méthodes peuvent être envisagées pour s’affranchir des considérations uni-dimensionnelles et hypothèses simplificatrices concernant la distribution de température, la présence des échangeurs de chaleur ou encore les propriétés thermophysiques des régénérateurs ; enfin, comment prendre en compte certains processus de saturation qui interviennent dans l’établissement des transferts de chaleur et dans la déformation du champ de température (la présence d’un écoulement redressé, par exemple [72]).

L’un des objectifs de ce travail de thèse est donc de proposer une modélisation de l’amplification thermoacoustique, généralisable à plusieurs configurations de moteur et reposant sur un formalisme dédié aussi bien au calcul des conditions de stabilité qu’à la description de l’évolution temporelle de l’amplitude des auto-oscillations. Le second objectif concerne la caractérisation expérimentale et la modélisation fine du noyau thermoacoustique qui constitue l’élément-clé du système. En effet, les moteurs thermoacoustiques les plus récents intègrent de plus en plus d’éléments complexes dont la modélisation précise reste encore à développer. Ceci fait référence en particulier aux matériaux poreux utilisés comme *régénérateur* et dont les propriétés thermoacoustiques sont encore difficilement quantifiables. A l’heure actuelle, la prise en compte de ces matériaux dans la modélisation des moteurs ne peut se faire qu’au moyen de lois empiriques permettant d’ajuster les fonctions thermovisqueuses sur celles des géométries standards de type empilements de plaques ou pores cylindriques [80]. La connaissance précise du profil de température à l’intérieur du noyau est également de première importance ; il a

notamment été démontré lors d'études précédentes que la forme du champ de température peut influencer significativement le processus d'amplification thermoacoustique [73]. La mesure des propriétés de transfert du noyau constitue donc une approche originale qui présente un double intérêt : elle permet d'une part "d'emprisonner" les propriétés d'amplification du noyau dans une "boîte noire", et d'autre part de pouvoir remonter à certaines informations concernant ses propriétés internes.

Le premier chapitre de ce mémoire aborde la description du taux d'amplification et des conditions de stabilité des auto-oscillations pour différentes géométries de moteurs thermoacoustiques. Le formalisme adopté est basé sur l'écriture des matrices de transfert des éléments constituant le système. L'ajout de conditions aux limites permet de fermer le problème et d'en déduire une équation caractéristique dont la solution représente un point de fonctionnement du moteur. L'amplification de l'instabilité est alors modélisée par l'introduction d'un coefficient d'amplification défini comme la partie imaginaire de la pulsation acoustique : pour un profil de température donné dans l'ensemble du dispositif thermoacoustique, la résolution de l'équation caractéristique – en parties réelle et imaginaire – permet ainsi de calculer la pulsation des oscillations et le taux d'amplification de l'onde.

Le formalisme utilisé au chapitre 1 implique la connaissance des matrices de transfert du *stack* ou *régénérateur* et de la *partie passive* du noyau thermoacoustique, éléments le long desquels est maintenu le gradient de température. Des expressions analytiques de ces matrices peuvent être obtenues à partir de l'équation de propagation de la thermoacoustique linéaire [39, 48], qui nécessitent néanmoins de formuler des hypothèses sur la géométrie des pores du stack mais surtout sur le profil de température (et donc a fortiori des hypothèses concernant la présence d'échangeurs de chaleur, l'effet de conduction dans les parois du moteur, etc...). Le chapitre 2 présente un protocole expérimental pour la mesure des propriétés de transfert du noyau thermoacoustique complet<sup>1</sup> sous différentes conditions de chauffage. Dans ce chapitre, il est notamment démontré que les matrices de transfert mesurées introduites dans le modèle décrit au chapitre 1 permettent de retrouver les conditions de déclenchement de moteurs thermoacoustiques intégrant le noyau caractérisé expérimentalement. Cette approche pour déterminer le seuil de fonctionnement des systèmes thermoacoustiques exploite ainsi les propriétés de transfert du noyau ("boîte noire") sans avoir à décrire les éléments qui le constituent.

Si l'on souhaite aller au-delà de ce que les données expérimentales obtenues grâce à la méthode exposée au chapitre 2 peuvent nous fournir (à savoir, les conditions marginales de stabilité), il devient nécessaire d'aborder la description des transferts de chaleur qui s'établissent au sein du noyau thermoacoustique. Le chapitre 3 propose donc une modélisation complète du noyau thermoacoustique étudié au chapitre 2 et traite de l'exploitation des données expérimentales pour l'ajustement de paramètres acoustiques et thermiques du stack. L'estimation des paramètres est réalisée en usant d'une méthode inverse qui consiste à minimiser l'écart quadratique entre les points de mesure et la théorie. Cette méthode est utilisée pour estimer la porosité, le rayon des pores et la tortuosité, ainsi qu'une longueur caractéristique de diffusion de la chaleur dans le stack pour l'échantillon en céramique étudié au chapitre 2 ainsi que pour divers matériaux qui tiennent le rôle de *régénérateur*.

---

1. i.e. équipé du stack/régénérateur et des échangeurs de chaleur.

Enfin, le dernier chapitre du mémoire traite de la modélisation analytique de l'amplification et de la saturation par effets non-linéaires au cours du régime transitoire de l'instabilité. Cette modélisation est appliquée à une géométrie standard de moteur thermoacoustique, qui consiste en un résonateur droit ouvert à l'une de ses extrémités et fermé à l'autre (type *quart d'onde*). Outre l'effet du pompage de chaleur thermoacoustique dans le stack, ce modèle propose la prise en compte des effets de convection dus à la présence d'un écoulement redressé (vent acoustique de Rayleigh) qui s'établit dans ce système à ondes stationnaires. Il s'agit d'un travail préliminaire qui constitue, à notre connaissance, le premier modèle tentant de prendre en compte l'effet du vent acoustique de Rayleigh dans le calcul du régime transitoire des auto-oscillations thermoacoustiques. Ce modèle est basé sur le formalisme développé au chapitre 1 et sur le calcul à chaque instant  $t$  du coefficient d'amplification de l'onde à partir de l'évolution temporelle du champ de température. Celui-ci est calculé en usant d'une résolution par différences finies des équations de la chaleur en régime instationnaire qui intègrent les deux effets non-linéaires cités précédemment. Les simulations numériques (Runge-Kutta d'ordre 4) sont comparés aux mesures de pression acoustique réalisées sur ce dispositif.

Diverses annexes sont disponibles en fin de mémoire, qui ne sont pas indispensables à la compréhension des quatre chapitres mais qui peuvent s'avérer utiles pour une analyse plus approfondie de ces travaux de thèse.

# Chapitre 1

## Conditions de stabilité et taux d'amplification

Ce premier chapitre est dédié à la description analytique des conditions de déclenchement et du taux d'amplification de l'instabilité thermoacoustique. Parmi les systèmes thermoacoustiques étudiés, on distinguera les systèmes dits à *ondes stationnaires* – caractérisés par un résonateur “droit” – de ceux dits à *ondes progressives*, pour lesquels il existe une boucle de rétroaction (anneau, système coaxial...) favorable à l'amplification d'une onde à caractère progressif.

Le paragraphe 1.1 introduit les notations et conventions utilisées au travers des équations de la thermoacoustique linéaire. Dans le paragraphe 1.2, le formalisme général utilisé pour la description des systèmes thermoacoustiques est exposé et les équations caractéristiques des moteurs sont développées. Le paragraphe 1.3 introduit le coefficient d'amplification thermoacoustique traduisant l'état instationnaire du système et des résultats pour le calcul du coefficient d'amplification et des conditions de déclenchement sont exposés dans le paragraphe 1.4 pour différents cas de moteurs thermoacoustiques.

### 1.1 Équations fondamentales de la thermoacoustique

Dans ce premier paragraphe, les équations fondamentales de la thermoacoustique sont posées. Un certain nombre d'hypothèses sont retenues, qui permettent de développer des expressions analytiques pour les variables acoustiques ainsi que l'équation de propagation pour la pression.

La découverte du phénomène d'amplification par effet thermoacoustique est généralement attribuée aux souffleurs de verre du XVIII<sup>e</sup> siècle qui entendaient un son émis à l'extrémité ouverte du tube lorsque l'autre extrémité était portée à très hautes températures. Leur instrument de travail rassemblait en effet les caractéristiques principales des oscillateurs thermoacoustiques et constituait le support idéal à l'observation du phénomène. Ainsi, sans le savoir, les souffleurs de verre furent les premiers à mettre en évidence l'entrée en résonance d'une colonne d'air par effet thermoacoustique. Vers la fin du XVIII<sup>e</sup>, les travaux de Byron Higgins suscitèrent l'intérêt de la communauté scientifique lorsqu'il réussit à créer des oscillations acoustiques en plaçant une flamme sur la paroi d'un résonateur. En 1850, Sondhauss

observa également un phénomène d'amplification thermoacoustique dans un tube muni à son extrémité d'une cavité portée à hautes températures [86].

En 1868, Kirchhoff introduit la conduction de la chaleur et la prise en compte des effets visqueux dans les équations de l'acoustique. Quelques années plus tard, Lord Rayleigh donne une interprétation qualitative du fonctionnement du tube de Sondhauss sur la base des travaux de Kirchhoff [50] et souligne particulièrement l'importance du déphasage entre les oscillations de température et le déplacement de la particule de fluide. Entre les années 1970 et 1990, Nikolaus Rott établit finalement les bases de la thermoacoustique linéaire et faiblement non-linéaire et propose une description analytique de l'instabilité thermoacoustique dans les tubes de Sondhauss et de Taconis [83]. La théorie de Rott est également confortée en 1980 par les travaux expérimentaux de Yazaki *et coll.* portant sur les instabilités de Taconis au sein de systèmes cryogéniques [107, 108].

Dans le cadre du présent manuscrit, le développement des équations fondamentales de la thermoacoustique a principalement pour but d'introduire les notations, conventions et hypothèses récurrentes tout au long des chapitres suivants.

### 1.1.1 Équations fondamentales de l'acoustique en fluide dissipatif

Le mouvement d'une particule de fluide (en l'absence de sources) est décrit par l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $\vec{v}$  est la vitesse particulaire, l'équation vectorielle de Navier-Stokes traduisant la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \left( \Delta \vec{v} + \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right), \quad (1.2)$$

où  $p$  est la pression et où  $\mu$  et  $\mu_v$  représentent respectivement les viscosités dynamiques de cisaillement et de volume, et enfin l'équation de conservation de l'énergie

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \vec{\sigma} \cdot \nabla (\vec{v}) \quad (1.3)$$

où  $T$  est la température du fluide,  $S$  est l'entropie, et où  $\lambda$  et  $\vec{\sigma}$  représentent respectivement la conductivité thermique du fluide et le tenseur des contraintes.

Aux équations de conservation (1.1)-(1.3) s'ajoutent les relations d'état suivantes, pour un fluide considéré comme parfait :

$$d\rho = -\frac{\rho}{T} dT + \frac{\gamma}{c_0^2} dp, \quad (1.4)$$

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \frac{1}{\rho T} dp, \quad (1.5)$$

où  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  est le coefficient polytropique du fluide,  $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma R_g T}{M_{mol}}}$  est la célérité adiabatique du son ( $M_{mol}$  est la masse molaire du fluide et  $R_g = 8.31 J.mol^{-1}.K^{-1}$  pour un gaz parfait) et  $C_p$  et  $C_v$  sont respectivement les capacités calorifiques isobare et isochore du fluide.

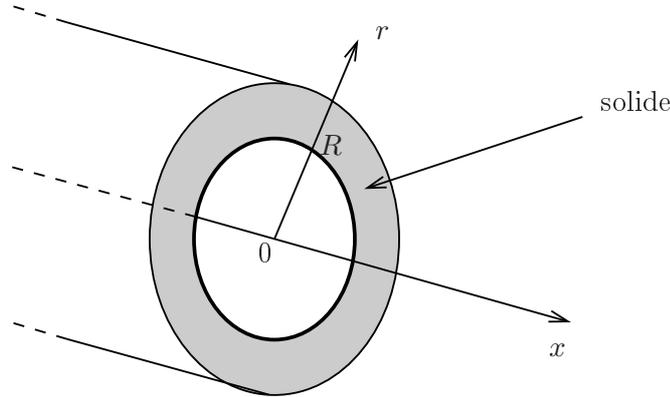


FIGURE 1.1 – Système de coordonnées utilisé pour le problème considéré.

### 1.1.2 Hypothèses simplificatrices

Le schéma donné en figure 1.1 présente la géométrie du problème considéré. La direction  $x$  représente la direction de propagation de l'onde acoustique dans un volume de fluide situé à l'intérieur d'un cylindre de rayon  $R$ . Pour la suite des calculs, on introduit alors la coordonnée transverse adimensionnée  $\eta$  définie selon :

$$\eta = \frac{r}{R} \quad (0 \leq \eta \leq +1). \quad (1.6)$$

Afin d'obtenir des expressions analytiques pour les variables acoustiques, un certain nombre d'hypothèses doivent être formulées. Dans le cadre de l'acoustique linéaire ou faiblement non-linéaire, les variables thermodynamiques sont exprimées sur la base d'une méthode par approximations successives sous la forme :

$$\xi = \xi_0 + \epsilon \xi_1 + \epsilon^2 \xi_2 + O(\epsilon^3), \quad (1.7)$$

où  $\xi$  représente indifféremment la pression  $p$ , la masse volumique  $\rho$ , la température  $T$ , l'entropie  $S$  ou les 3 composantes de la vitesse particulière  $\vec{v}$ , et où  $\epsilon$  est un petit paramètre ( $\epsilon \ll 1$ ) traduisant l'ordre de grandeur de chacun des termes.

Dans l'équation (1.7), les termes à l'ordre 0 (indexés 0) correspondent aux composantes statiques des variables thermodynamiques. Parmi ces composantes, la pression statique  $p_0$  est supposée constante et la température  $T_0(x)$  est supposée inhomogène dans la direction de propagation de l'onde  $x$ . La distribution spatiale de la température implique également la prise en compte des variations spatiales de la masse volumique  $\rho_0(x)$  et de l'entropie  $S_0(x)$ . Enfin le fluide est supposé initialement au repos en l'absence de perturbations acoustiques de sorte que  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ .

Les termes à l'ordre 1 dans l'équation (1.7) correspondent aux fluctuations acoustiques, très faibles devant les composantes statiques. Sous l'hypothèse d'une onde plane harmonique se propageant dans la direction  $x$  et en adoptant la convention temporelle  $-i\omega t$ , il est possible d'écrire les variables acoustiques sous la forme

$$p_1(x, t) = \Re \{ \tilde{p}_1(x) e^{-i\omega t} \}, \quad (1.8)$$

pour la pression acoustique, et

$$\xi_1(x, \eta, t) = \Re \left\{ \tilde{\xi}_1(x, \eta) e^{-i\omega t} \right\}, \quad (1.9)$$

où  $\xi_1$  représente la partie acoustique de la masse volumique  $\rho_1$ , la température  $\tau_1$ , l'entropie  $s_1$  ou les 3 composantes de la vitesse particulière  $\vec{v}_1$ . Dans les équations (1.8) et (1.9),  $\omega$  correspond à la pulsation acoustique et les amplitudes complexes des variables acoustiques sont indiquées par le symbole  $\sim$ .

Les termes à l'ordre 2 ne sont pas traités ici, mais doivent être considérés pour la prise en compte d'effets d'ordres supérieurs comme la présence d'un écoulement redressé par exemple [12]. Ce point sera discuté dans le dernier chapitre de ce manuscrit.

Enfin, sous l'approximation des couches limites, la composante transverse de la vitesse particulière est supposée très petite devant sa composante longitudinale ( $|v_{1,\eta}| \ll |v_{1,x}|$ ) et les variations longitudinales des variables  $\xi_1(x, \eta)$  sont supposées faibles devant les variations transverses ( $\partial_x \ll \partial_r$ ).

### 1.1.3 Équation de propagation pour la pression acoustique

Sous réserve des hypothèses formulées précédemment, il est possible d'exprimer les équations fondamentales (1.1)-(1.5) à l'ordre de grandeur des variables acoustiques.

L'équation de Navier-Stokes (1.2) appliquée à la composante suivant  $x$  de la vitesse particulière,  $\tilde{v}_{1,x}$ , se simplifie ainsi sous la forme

$$-i\omega\rho_0\tilde{v}_{1,x} = -\frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial x} + \frac{\mu}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\tilde{v}_{1,x}}{\partial\eta}\right). \quad (1.10)$$

L'intégration de l'équation (1.10) suivant la variable transverse, en tenant compte de la condition de non-glissement aux parois ( $\tilde{v}_{1,x}(\eta = 1) = 0$ ), conduit à la solution suivante pour la composante longitudinale de la vitesse acoustique

$$\tilde{v}_{1,x}(x, \eta) = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial x}(1 - F_\nu(\eta)), \quad (1.11)$$

exprimée en fonction du gradient de pression acoustique. La fonction  $F_\nu$  qui apparaît dans l'équation (1.11), et dont l'expression analytique dépend de la géométrie considérée, traduit le couplage entre fluide et paroi dû aux effets visqueux [83, 88, 5]. L'expression de  $F_\nu$  dans le cas d'un guide cylindrique de rayon  $R$  est notamment précisée ici :

$$F_\nu(\eta) = \frac{J_0\left((1+i)\frac{\eta R}{\delta_\nu}\right)}{J_0\left((1+i)\frac{R}{\delta_\nu}\right)} \quad \text{pour } 0 \leq \eta \leq 1, \quad (1.12)$$

où  $J_0$  représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0. Cette géométrie est davantage considérée dans le reste du manuscrit, mais des expressions équivalentes pour  $F_\nu$  peuvent être obtenues pour des guides à section rectangulaire ou triangulaire ou des empilements de plaques [5], notamment. L'expression (1.12) permet d'introduire un paramètre crucial en thermoacoustique, à savoir le rapport entre la dimension transverse du canal  $R$  et l'épaisseur de couche limite visqueuse  $\delta_\nu = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ , dépendant de la fréquence et de la viscosité cinématique du fluide  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ .

De la même façon que pour la vitesse particulaire  $\tilde{v}_{1,x}$  [éq. (1.11)], la linéarisation de l'équation de la chaleur (1.3) et des relations d'état (1.4) et (1.5) permet d'exprimer les variables acoustiques  $\tilde{\tau}_1$ ,  $\tilde{\rho}_1$  et  $\tilde{s}_1$  en fonction de la pression acoustique et de sa dérivée spatiale sous les formes suivantes :

$$\tilde{\tau}_1(x, \eta) = \frac{\tilde{p}_1}{\rho_0 C_p} [1 - F_\kappa(\eta)] - \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[ 1 - \frac{\sigma F_\nu(\eta) - F_\kappa(\eta)}{\sigma - 1} \right], \quad (1.13)$$

$$\tilde{\rho}_1(x, \eta) = \frac{\tilde{p}_1}{c_0^2} [1 + (\gamma - 1)F_\kappa(\eta)] + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} T_0^{-1} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[ 1 - \frac{\sigma F_\nu(\eta) - F_\kappa(\eta)}{\sigma - 1} \right], \quad (1.14)$$

$$\tilde{s}_1(x, \eta) = -\frac{\tilde{p}_1}{\rho_0 T_0} F_\kappa(\eta) - \frac{C_p}{\omega^2 \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} T_0^{-1} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[ 1 - \frac{\sigma F_\nu(\eta) - F_\kappa(\eta)}{\sigma - 1} \right]. \quad (1.15)$$

Dans les expressions (1.13), (1.14) et (1.15),  $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$  est le nombre de Prandtl et la fonction  $F_\kappa$  traduisant le couplage entre fluide et paroi dû aux effets thermiques est définie de la même façon que  $F_\nu$  [cf. éq. (1.12) pour un guide cylindrique], à ceci près que  $\delta_\nu$  doit être remplacé par l'épaisseur de couche limite thermique  $\delta_\kappa = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$ , où  $\kappa$  est la diffusivité thermique du fluide.

Finalement, à partir des relations (1.11), (1.13), (1.14) et (1.15), et en introduisant les fonctions thermovisqueuses moyennées sur la coordonnée transverse du guide

$$f_{\nu, \kappa} = 2 \int_0^1 F_{\nu, \kappa} \eta d\eta, \quad (1.16)$$

les variables acoustiques moyennées s'obtiennent aisément sous les formes suivantes :

$$\langle \tilde{v}_{1,x} \rangle(x) = \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} (1 - f_\nu), \quad (1.17)$$

$$\langle \tilde{\tau}_1 \rangle(x) = \frac{\tilde{p}_1}{\rho_0 C_p} [1 - f_\kappa] - \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[ 1 - \frac{\sigma f_\nu - f_\kappa}{\sigma - 1} \right], \quad (1.18)$$

$$\langle \tilde{\rho}_1 \rangle(x) = \frac{\tilde{p}_1}{c_0^2} [1 + (\gamma - 1)f_\kappa] + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} T_0^{-1} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[ 1 - \frac{\sigma f_\nu - f_\kappa}{\sigma - 1} \right], \quad (1.19)$$

$$\langle \tilde{s}_1 \rangle(x) = -\frac{\tilde{p}_1}{\rho_0 T_0} f_\kappa - \frac{C_p}{\omega^2 \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} T_0^{-1} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[ 1 - \frac{\sigma f_\nu - f_\kappa}{\sigma - 1} \right]. \quad (1.20)$$

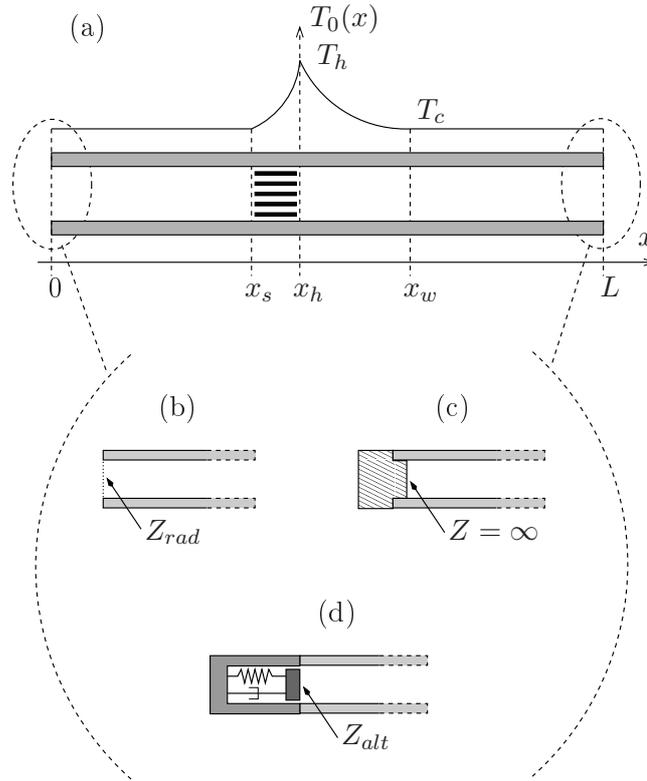
Dans le cas d'un guide cylindrique, le report de l'expression (1.12) dans l'équation (1.16) conduit à l'expression analytique pour les fonctions thermovisqueuses  $f_\nu$  et  $f_\kappa$  :

$$f_{\nu, \kappa} = \frac{2\delta_{\nu, \kappa}}{(1+i)R} \frac{J_1\left((1+i)\frac{R}{\delta_{\nu, \kappa}}\right)}{J_0\left((1+i)\frac{R}{\delta_{\nu, \kappa}}\right)}, \quad (1.21)$$

où  $J_1$  représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1.

Les expressions (1.17) et (1.19) introduites dans l'équation de conservation de la masse linéarisée et moyennée sur la coordonnée  $\eta$  conduisent à l'équation de propagation pour la pression acoustique en milieu dissipatif et en présence d'un gradient de température :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial x^2} + \left[ \frac{\partial_x T_0}{T_0} \left( 1 + \frac{f_\kappa - f_\nu}{(\sigma - 1)(1 - f_\nu)} \right) - \frac{\partial_x f_\nu}{1 - f_\nu} \right] \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} + k_0^2 \left( \frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu} \right) \tilde{p}_1 = 0, \quad (1.22)$$



**FIGURE 1.2** – (a) Représentation schématique d’un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires. (b) Extrémité ouverte. (c) Extrémité fermée. (d) Couplage avec un alternateur électrodynamique.

où  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$  représente le nombre d’onde sans pertes. Cette équation différentielle est équivalente à celle donnée par Rott [82] et par Swift [88, 90] pour un gaz parfait et en considérant que l’effusivité du fluide est négligeable devant celle du solide. Lorsque la distribution de température  $T_0(x)$  est connue, la solution de cette équation différentielle peut s’obtenir soit de manière numérique [100, 101], soit de manière analytique sous une forme implicite en transformant l’équation (1.22) en une équation intégrale de Volterra de seconde espèce [39, 48].

## 1.2 Équation caractéristique d’un système thermoacoustique

### 1.2.1 Générateur d’ondes stationnaires

Les systèmes thermoacoustiques dits à *ondes stationnaires* sont généralement constitués d’un guide d’onde droit permettant la résonance d’une colonne de fluide (cf. fig. 1.2). Bien qu’ils ne portent que peu d’intérêt pour des applications industrielles du fait de leur faible rendement, l’étude de ces systèmes reste essentielle d’un point de vue académique, afin de mieux comprendre les phénomènes complexes qui prennent part dans le fonctionnement des machines thermoacoustiques.

Le rendement peu élevé des moteurs à ondes stationnaires est implicitement lié au mouvement de la particule de fluide soumise à une onde stationnaire à proximité de la paroi solide. En effet, au cours d’un cycle acoustique, les transformations thermodynamiques subies par la particule de fluide sont similaires

à celles d'un cycle de Brayton (*compression adiabatique - expansion isobare - détente adiabatique - contraction isobare*), cycle dont le rendement est par nature inférieur à celui de Carnot. Il convient de noter que les compressions/détentes adiabatiques nécessitent un contact thermique imparfait entre le fluide et les parois solides, d'où l'emploi d'un *stack* dans ces machines, dont le rayon des pores reste de l'ordre de grandeur d'une épaisseur de couche limite thermique ( $r_s \sim \delta_\kappa$ ). Ce type de moteur a été largement étudié dans la littérature [90, 88, 89, 6, 7, 8, 24, 43] et bien qu'il soit potentiellement moins attractif que le système à *ondes progressives*, il reste un objet d'étude intéressant, mettant en jeu des phénomènes acoustiques complexes et encore difficilement prédictibles par la théorie.

Afin de décrire la propagation d'une onde acoustique dans l'ensemble du moteur représenté sur la figure 1.2-(a), chaque région distincte est vue comme un biporte acoustique, caractérisé par sa matrice de transfert [37, 99, 98]. En usant de ce formalisme, il est possible d'écrire l'équation reliant les pression et débit acoustiques en  $x = 0$  et en  $x = L$  sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_d \times \mathbf{M}_{\mathbf{NT}} \times \mathbf{M}_g \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(0) \\ \tilde{u}_{1,x}(0) \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

où  $\mathbf{M}_g$  et  $\mathbf{M}_d$  sont les matrices de transfert des portions de tube à température ambiante  $T_c$ , respectivement à gauche et à droite du noyau thermoacoustique, et où  $\mathbf{M}_{\mathbf{NT}}$  est la matrice de transfert du noyau thermoacoustique (i.e. la partie du système soumise à une distribution inhomogène de température), que l'on définit de la manière suivante :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{NT}} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{T}_{pu}(\omega, T_0(x)) \\ \mathcal{T}_{up}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{T}_{uu}(\omega, T_0(x)) \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

La matrice de transfert du noyau thermoacoustique,  $\mathbf{M}_{\mathbf{NT}}$ , dépend des propriétés géométriques et thermophysiques des éléments qui le constituent (stack, partie passive et échangeurs de chaleur). Elle dépend également de la distribution de température  $T_0(x)$  le long du stack ( $x \in [x_s, x_h]$ ) et de la partie passive ( $x \in [x_h, x_w]$ ), et de la pulsation acoustique  $\omega$ . Lorsque la distribution de température est connue et imposée le long du noyau, la matrice de transfert  $\mathbf{M}_{\mathbf{NT}}$  peut être obtenue de façon théorique ([48, 73, 68], cf. annexe A), mais elle peut également être mesurée sous différentes conditions de chauffage, comme il le sera présenté au chapitre 2.

A partir de la solution de l'équation de propagation (1.22) en l'absence de gradient de température ( $d_x T_0 = 0$  et  $d_x f_\nu = 0$ ) et de la relation (1.17), la matrice de transfert d'un guide cylindrique de longueur  $d$  s'obtient sous la forme classique :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(kd) & iZ_c \sin(kd) \\ iZ_c^{-1} \sin(kd) & \cos(kd) \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

expression faisant intervenir le nombre d'onde complexe

$$k = k_0 \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}} \quad (1.26)$$

qui tient compte des pertes viscothermiques pariétales, ainsi que l'impédance caractéristique du guide de section  $S$

$$Z_c = \frac{\rho_0 c_0}{S \sqrt{(1 - f_\nu)(1 + (\gamma - 1)f_\kappa)}}. \quad (1.27)$$

L'expression (1.25) de la matrice de transfert d'un tube est détaillée en annexe A, de même que des expressions analytiques de la matrice du noyau thermoacoustique et de différents éléments pouvant être intégrés au système thermoacoustique. Néanmoins, quelle que soit l'expression retenue pour la matrice de transfert du noyau thermoacoustique, l'équation matricielle (1.23) est réécrite de façon compacte sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{M}_{pu}(\omega, T_0(x)) \\ \mathcal{M}_{up}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{M}_{uu}(\omega, T_0(x)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(0) \\ \tilde{u}_{1,x}(0) \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp} & \mathcal{M}_{pu} \\ \mathcal{M}_{up} & \mathcal{M}_{uu} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_d \times \mathbf{M}_{NT} \times \mathbf{M}_g. \quad (1.29)$$

En introduisant les impédances acoustiques  $Z_0 = \frac{\tilde{p}_1(0)}{\tilde{u}_{1,x}(0)}$  et  $Z_L = \frac{\tilde{p}_1(L)}{\tilde{u}_{1,x}(L)}$  aux extrémités, la résolution du système d'équations (1.28) conduit à l'expression générale de l'équation caractéristique du système thermoacoustique :

$$Z_0 \mathcal{M}_{pp} - Z_L \mathcal{M}_{uu} + \mathcal{M}_{pu} - Z_0 Z_L \mathcal{M}_{up} = 0. \quad (1.30)$$

**Remarque 1** – De façon générale, l'équation (1.30) a ceci d'intéressant qu'elle permet de prendre en compte tout type de charge acoustique (paroi fermée, alternateur électrodynamique...) dès lors que l'on sait exprimer l'impédance ramenée associée à cette charge. Par exemple dans le cas d'un tube ouvert sur un espace infini [cf. fig. 1.2-(b)], le rayonnement acoustique peut être pris en compte par l'impédance définie selon [27]

$$\begin{aligned} \frac{Z_{rad}}{Z_c} &= i0.6133k\delta_0 - i(kR)^3 [0.036 - 0.034 \ln(kR) + 0.0187(kR)^2] \\ &\quad + \left(\frac{kR}{2}\right)^2 + (kR)^4 [0.0127 + 0.082 \ln(kR) - 0.023(kR)^2], \end{aligned} \quad (1.31)$$

avec

$$\delta_0 = 0.6133R \left( \frac{1 + 0.044(kR)^2}{1 + 0.19(kR)^2} - 0.02 \sin^2(2kR) \right). \quad (1.32)$$

Il convient de noter que l'expression approchée (1.31) de l'impédance de rayonnement est valide pour  $kR < 1,5$ , ce qui est généralement vérifié dans les moteurs thermoacoustiques. A l'instar du rayonnement en tube ouvert, l'équation caractéristique (1.30) permet également de prendre en compte le couplage du système thermoacoustique avec un alternateur électrodynamique caractérisé par son impédance acoustique [81] :

$$Z_{alt} = R_{ma} + \frac{i}{\omega C_{ma}} - i\omega M_{ma} + \frac{R_{ae}}{1 - i\omega C_{ae} R_{ae}}, \quad (1.33)$$

où

–  $R_{ma} = R_m S_d^{-2}$  est la résistance acoustique équivalente aux pertes mécaniques  $R_m$ ,

- $C_{ma} = C_m S_d^2$  est la compliance acoustique équivalente à la compliance des suspensions  $C_m$ ,
- $M_{ma} = M_m S_d^{-2}$  est la masse acoustique équivalente à la masse de l'équipage mobile  $M_m$ ,
- $R_{ae} = (Bl)^2 S_d^{-2} (R_e + R_{ch})^{-1}$  est la résistance acoustique équivalente à la somme de la résistance électrique de la bobine  $R_e$  et de la résistance de charge  $R_{ch}$ ,
- $C_{ae} = L_e S_d^2 (Bl)^{-2}$  est la compliance acoustique équivalente à l'inductance de la bobine  $L_e$ ,

$S_d$  et  $Bl$  représentant respectivement la surface émissive de l'alternateur et le facteur de force de la bobine.

**Remarque 2** – Si l'on considère les cas simplifiés pour lesquels les extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  sont caractérisées soit par une impédance de rayonnement nulle [cf. fig. 1.2-(b),  $Z_{rad} = 0, \tilde{p}_1 = 0$ ], soit par une impédance de paroi infiniment rigide<sup>1</sup> [cf. fig. 1.2-(c),  $\tilde{u}_1 = 0$ ], l'application des conditions aux limites réintroduites dans l'équation (1.28) permet d'obtenir l'équation caractéristique du système pour les quatre configurations possibles :

$$\mathcal{M}_{pp}(\omega, T_0(x)) = 0 \quad \text{pour un système fermé-ouvert,} \quad (1.34)$$

$$\mathcal{M}_{pu}(\omega, T_0(x)) = 0 \quad \text{pour un système ouvert-ouvert,} \quad (1.35)$$

$$\mathcal{M}_{up}(\omega, T_0(x)) = 0 \quad \text{pour un système fermé-fermé,} \quad (1.36)$$

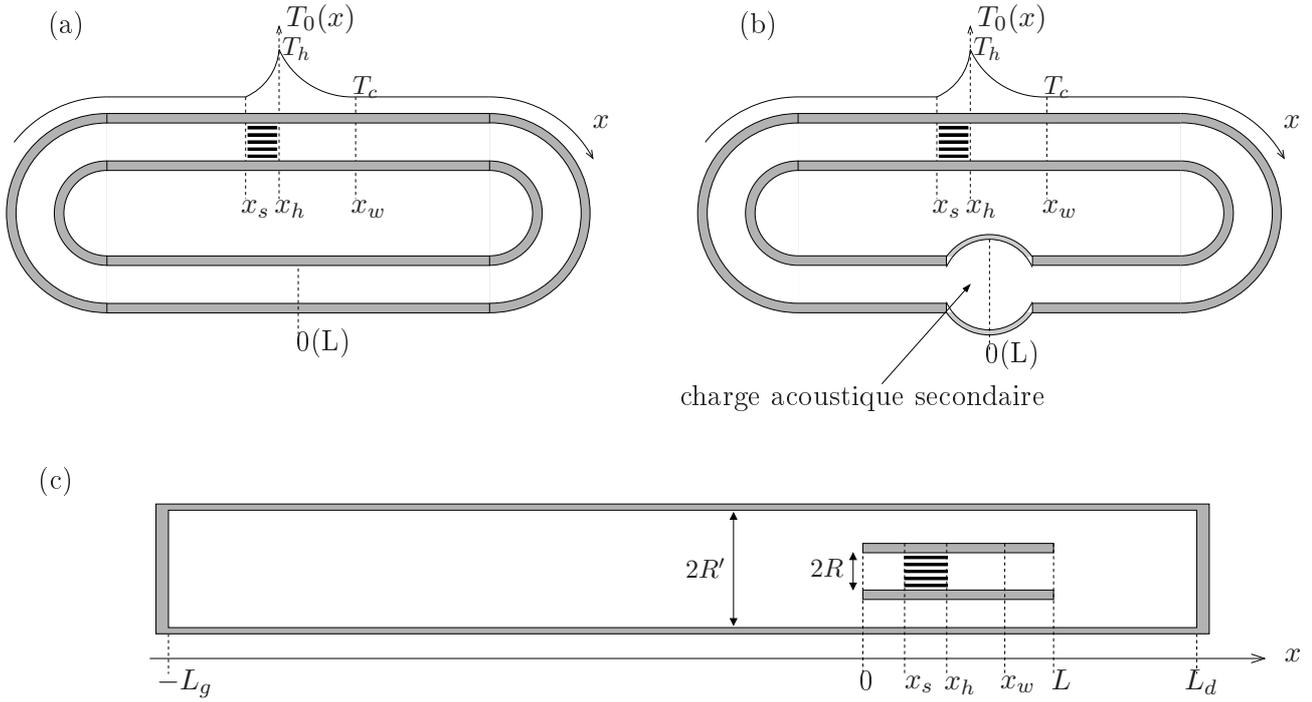
$$\mathcal{M}_{uu}(\omega, T_0(x)) = 0 \quad \text{pour un système ouvert-fermé.} \quad (1.37)$$

### 1.2.2 Générateur d'ondes progressives

Les systèmes thermoacoustiques dits à *ondes progressives* sont caractérisés par la présence d'une boucle de rétroaction favorisant l'amplification d'une onde progressive. L'intérêt porté à ces machines par la communauté des thermoacousticiens est principalement motivé par leur rendement, souvent bien supérieur à celui que pourrait atteindre une machine à ondes stationnaires. Ce rendement potentiellement élevé est une conséquence du mouvement de la particule de fluide soumise à une onde progressive à proximité de la paroi solide, mouvement dont le cycle thermodynamique s'apparente à un cycle de Stirling (*compression isotherme - réchauffement isochore - détente isotherme - refroidissement isochore*). De part la nature même des transformations thermodynamiques subies par la particule au cours d'un cycle acoustique, le rendement obtenu par effet thermoacoustique peut donc atteindre théoriquement le rendement de Carnot. Contrairement aux systèmes à ondes stationnaires, les systèmes à ondes progressives nécessitent l'utilisation d'un *régénérateur* dont le rayon des pores est faible devant l'épaisseur de couche limite thermique ( $r_s \ll \delta_\kappa$ ), afin d'assurer le contact isotherme entre la particule de fluide et la paroi.

Il existe plusieurs configurations de moteurs favorisant le déclenchement d'une onde à caractère progressif, la plus classique étant l'utilisation d'un résonateur annulaire [cf. fig. 1.3-(a,b)]. En 1979, P. Ceperley fut le premier à proposer cette idée afin de démontrer la possibilité de développer des moteurs thermoacoustiques de Stirling [22]. Depuis, ce type de moteur a été largement étudié [23, 105]. En 1999, Backhaus *et al.* ont notamment développé un prototype de moteur thermoacoustique de Stirling dans lequel la boucle de rétroaction est couplée à un résonateur droit [9, 10]. Un prototype de transducteur

1. on néglige également ici la correction de longueur due aux effets thermiques au niveau de la paroi.



**FIGURE 1.3** – Représentations schématiques de moteurs thermoacoustiques à ondes progressives. (a) Résonateur annulaire. (b) Résonateur annulaire couplé à une charge acoustique secondaire (résonateur secondaire, alternateur électrodynamique, etc...). (c) Résonateur co-axial.

thermo-acousto-électrique a également été développé par Backhaus *et al.* en 2004 [11], dans lequel la conversion acousto-électrique est assurée par un alternateur électrodynamique linéaire couplé au résonateur annulaire. Enfin, la figure 1.3-(c) présente une version schématique d'un système co-axial [14] dans lequel la boucle de rétroaction est réalisée en plaçant le noyau thermoacoustique dans un tube de plus grande section.

La description des systèmes à ondes progressives est effectuée en usant d'une approche équivalente à celle utilisée pour les systèmes à ondes stationnaires. Si l'on néglige l'effet du rayon de courbure de l'anneau sur la propagation des ondes, le système thermoacoustique annulaire représenté sur la figure 1.3-(a) est également décrit par l'équation (1.28), où la matrice de transfert totale

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp} & \mathcal{M}_{pu} \\ \mathcal{M}_{up} & \mathcal{M}_{uu} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_d \times \mathbf{M}_{\text{NT}} \times \mathbf{M}_g. \quad (1.38)$$

s'exprime de la même façon que dans le cas d'un résonateur droit. Dans le cas du résonateur en boucle, les points d'abscisses  $x = 0$  et  $x = L$  correspondent cependant à la même position au sein du système [cf. fig. 1.3-(a)]. Le report des relations de continuité des pressions et débits acoustiques

$$\tilde{p}_1(0) = \tilde{p}_1(L), \quad (1.39)$$

$$\tilde{u}_{1,x}(0) = \tilde{u}_{1,x}(L), \quad (1.40)$$

dans l'équation (1.28) conduit ainsi à l'équation :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_d \times \mathbf{M}_{\text{NT}} \times \mathbf{M}_g \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Lorsque qu'un élément secondaire est couplé à la boucle [cf. fig. 1.3-(b)], la conservation des pressions et débits acoustiques entre  $x = 0$  et  $x = L$  implique d'écrire dans ce cas :

$$\tilde{p}_1(0) = \tilde{p}_1(L), \quad (1.42)$$

$$\tilde{u}_{1,x}(0) = \tilde{u}_{1,x}(L) - Y_{ch}\tilde{p}_1(L), \quad (1.43)$$

où  $Y_{ch}$  est l'admittance acoustique présentée par la charge secondaire. Cette admittance peut être celle d'un tube fermé, d'un alternateur électrodynamique, ou d'une combinaison de tout élément acoustique caractérisé par son admittance ramenée. Les relations (1.42) et (1.43) introduites dans l'équation (1.28) conduisent alors à :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_d \times \mathbf{M}_{\text{NT}} \times \mathbf{M}_g \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Y_{ch} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Enfin, dans le cas d'un système co-axial [cf. fig. 1.3-(c)], l'équation matricielle (1.28) traduit les relations pression-débit aux extrémités du tube de petite section  $S$ . Les relations de continuité écrites en  $x = 0$  d'une part,

$$\tilde{p}_1(0) = \tilde{p}_a(0), \quad (1.45)$$

$$\tilde{u}_{1,x}(0) = Y_g\tilde{p}_a(0) - \tilde{u}_{a,x}(0), \quad (1.46)$$

et en  $x = L$  d'autre part,

$$\tilde{p}_1(L) = \tilde{p}_a(L), \quad (1.47)$$

$$\tilde{u}_{1,x}(L) = Y_d\tilde{p}_a(L) - \tilde{u}_{a,x}(L), \quad (1.48)$$

font intervenir les pression  $\tilde{p}_a$  et débit  $\tilde{u}_{a,x}$  dans l'anneau périphérique de section  $S_A = \pi(R'^2 - R^2)$  et les admittances  $Y_g$  et  $Y_d$  des tubes de large section  $S_L = S_A + S$  et de longueurs respectives  $l_g$  et  $l_d$  :

$$Y_{g,l} = -iZ_c^{(L)} \cot(k^{(L)}l_{g,d}). \quad (1.49)$$

A partir des relations (1.45)-(1.48) et de la matrice de transfert de l'anneau périphérique notée  $\mathbf{M}_A$ , une seconde équation matricielle reliant les pression et débit acoustiques en  $x = 0$  et  $x = L$  est alors obtenue sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(0) \\ \tilde{u}_{1,x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_g & -1 \end{pmatrix} \times \mathbf{M}_A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_d & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

où la matrice inverse de  $\mathbf{M}_A$  est introduite ici pour respecter l'axe des abscisses et les conventions définies en annexe A. Il convient de préciser que la matrice  $\mathbf{M}_A$  d'un tel élément étant symétrique et réciproque, son inverse est bien définie et aisément calculable. Le report de l'équation (1.50) dans (1.28) conduit donc à l'équation :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_d \times \mathbf{M}_{\text{NT}} \times \mathbf{M}_g \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_g & -1 \end{pmatrix} \times \mathbf{M}_A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_d & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

pour le moteur coaxial représenté schématiquement sur la figure 1.3-(c).

Finalement, quelle que soit l'expression de la matrice de transfert du système impliquée dans l'expression des équations (1.41), (1.44) ou (1.51), cette matrice relie les amplitudes complexes de pression et débit acoustiques par l'intermédiaire de la relation (1.28) au même point ( $x = L$ ), après avoir fait un tour complet de la boucle de rétroaction. Les équations (1.41), (1.44) et (1.51) peuvent notamment s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{M}_{pu}(\omega, T_0(x)) \\ \mathcal{M}_{up}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{M}_{uu}(\omega, T_0(x)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

équation admettant une solution non-triviale (non-nulle) si et seulement si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp} & \mathcal{M}_{pu} \\ \mathcal{M}_{up} & \mathcal{M}_{uu} \end{pmatrix} - \mathbf{I}_2 \quad (1.53)$$

est nul, où  $\mathbf{I}_2$  est la matrice identité  $2 \times 2$ . L'annulation du déterminant constitue l'équation caractéristique du système, qui peut se développer sous la forme :

$$1 + \mathcal{M}_{pp}\mathcal{M}_{uu} - \mathcal{M}_{pu}\mathcal{M}_{up} - (\mathcal{M}_{pp} + \mathcal{M}_{uu}) = 0, \quad (1.54)$$

et qui reste valide pour les trois systèmes décrits précédemment.

### 1.3 Description de l'amplification/atténuation de l'onde acoustique

Comme il l'est démontré dans le paragraphe 1.2, le point de fonctionnement d'un système thermoacoustique est décrit par son équation caractéristique

$$f(\omega, T_0(x)) = 0, \quad (1.55)$$

où la fonction  $f$  représente ici les termes de gauche des équations (1.30) ou (1.54), en fonction de la configuration considérée. Il est important de noter que toutes les équations précédentes sont écrites dans le domaine de Fourier, ce qui suppose implicitement que la pulsation  $\omega$  est purement réelle et que le système est décrit en régime stationnaire. Rigoureusement, une solution  $(\omega, T_0)$  de l'équation (1.55) dans le domaine de Fourier décrit soit le seuil de déclenchement (frontière entre les régimes stable et instable de la position d'équilibre), soit le régime établi de l'onde, et correspondant dans les deux cas à une onde ni amplifiée, ni atténuée.

Il est néanmoins possible, à partir de l'équation (1.55), de décrire l'amplification ou l'atténuation de l'instabilité thermoacoustique, sous réserve de l'hypothèse de quasi-stationnarité. Pour cela, la fréquence est supposée complexe [37, 99, 98, 67]

$$\omega = \Omega + i\epsilon_g, \quad (1.56)$$

de sorte que la pression acoustique

$$p_1(x, t) = \Re \{ \tilde{p}_1(x) e^{-i\omega t} \} = e^{\epsilon_g t} \Re \{ \tilde{p}_1(x) e^{-i\Omega t} \} \quad (1.57)$$

est supposée osciller à la pulsation  $\Omega = \Re\{\omega\}$ , tandis que l'amplification/atténuation de l'onde sonore est caractérisée par le taux d'amplification  $\epsilon_g = \Im\{\omega\}$ . Sous l'hypothèse de quasi-stationnarité, l'amplitude de pression acoustique et le champ de température  $T_0(x)$  sont supposés varier lentement à l'échelle de temps d'une période acoustique ( $\epsilon_g \ll \Omega$ ). De fait, si la distribution de température est supposée connue, la résolution de l'équation (1.55) réécrite sous la forme

$$f(\Omega, \epsilon_g) = 0, \quad (1.58)$$

permet de calculer la fréquence des oscillations et le taux d'amplification. La solution de l'équation (1.58) peut être obtenue soit de façon numérique, soit de façon analytique en usant de développements asymptotiques pour la fonction  $f$  (cf. annexe B).

Pour la résolution numérique, la solution de l'équation caractéristique (1.58) est obtenue en usant d'une méthode itérative de Newton-Raphson. Cette méthode très simple à implémenter est adaptée pour le calcul des racines d'une fonction complexe à variable complexe [54, 65]. La solution de l'équation (1.58) est obtenue au moyen de la relation de récurrence

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \frac{f(\omega_k)}{f'(\omega_k)}, \quad (1.59)$$

où la dérivée au premier ordre  $f'(\omega_k)$  est calculée simplement par différences finies

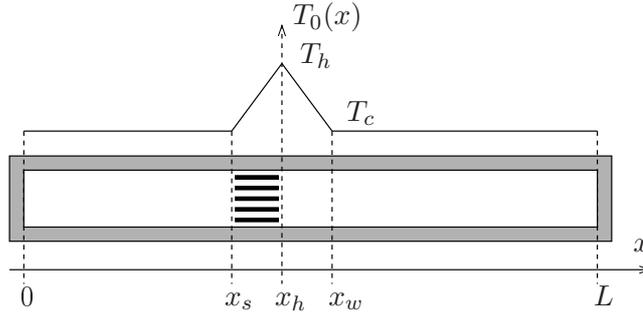
$$f'(\omega_k) = \left[ \frac{df}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_k} = \frac{f(\omega_k + \Delta\omega_k) - f(\omega_k)}{\Delta\omega_k}. \quad (1.60)$$

Lors des calculs, le pas de discrétisation est fixé à  $\Delta\omega_k = 1.10^{-3}\omega_k$  et le processus itératif est stoppé lorsqu'une précision  $e$  suffisante est atteinte sur la solution, i.e. lorsque

$$|\omega_{k+1} - \omega_k| = \left| \frac{f(\omega_k)}{f'(\omega_k)} \right| \leq e. \quad (1.61)$$

Pour l'ensemble des résultats présentés dans la suite du document, le seuil de précision  $e$  est fixé à  $e = 10^{-9} \text{ rad.s}^{-1}$ .

Il convient de remarquer que dans la plupart des moteurs thermoacoustiques, les oscillations auto-entretenues sont générées à la fréquence du mode le plus instable, généralement le premier mode de résonance du système. Cependant, puisque ces systèmes sont constitués de tubes de longueur finie, l'équation (1.58) possède en réalité une infinité de solutions et dans certaines circonstances, des modes d'ordres supérieurs peuvent devenir plus instables que le premier mode (voir par exemple les Refs. [105, 18]). Afin de faire converger la méthode numérique vers une solution stable et unique, la valeur initiale  $\omega_0$  est prise égale à la pulsation d'un mode de résonance sans pertes du système complet (de fait, la valeur initiale pour  $\epsilon_g$  est fixée à  $\epsilon_g = 0$ ). Dans le cas de modes de résonance résultant d'un couplage entre différents éléments du système, cette valeur initiale pour la pulsation peut être déterminée graphiquement à partir d'un minimum local du module  $|f(\Omega)|$ . Ce point sera illustré dans le paragraphe 1.4.2.



**FIGURE 1.4** – Représentation schématique du système à ondes stationnaires considéré au paragraphe 1.4.1.

## 1.4 Résultats et discussion

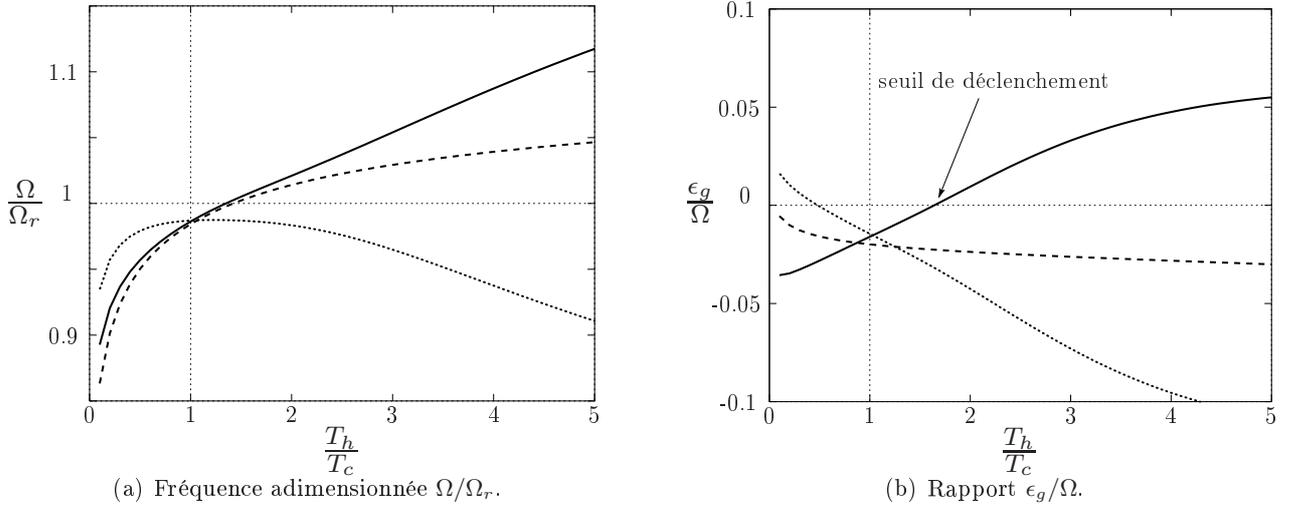
### 1.4.1 Système à ondes stationnaires

Dans ce paragraphe, l'étude porte sur un moteur à ondes stationnaires fermé à ses deux extrémités. Une représentation schématique de ce système est donnée en figure 1.4 : deux tubes de longueurs respectives  $d_1 = x_s$  et  $d_2 = L - x_w$  sont connectés au noyau thermoacoustique. Dans cet exemple, la longueur totale du résonateur est fixée à  $L = 1\text{ m}$  et les longueurs du stack et de la partie passive sont fixées à  $l_s = l_w = 5\text{ cm}$ . Les matrices de transfert qui interviennent dans l'équation (1.36) décrivant le fonctionnement de ce type de moteur sont données par les expressions (A.10) (pour les tubes) et (A.28) (pour le stack et la partie passive) données en annexe A de ce mémoire. Le fluide de travail utilisé est de l'air à pression atmosphérique et à température ambiante  $T_c = 293.15\text{ K}$  et le stack est modélisé par un réseau de canaux cylindriques. Le rayon du guide  $R$  et le rayon d'un pore du stack  $r_s$  sont fixés de telle sorte que  $R/\delta_\kappa = 10^2$  et  $r_s/\delta_\kappa = 4$ ,  $\delta_\kappa$  étant ici l'épaisseur de couche limite thermique calculée à température ambiante et à la fréquence du premier mode sans pertes du guide. Afin de simplifier le modèle, les échangeurs de chaleur sont supposés ponctuels et parfaits, et la température  $T_0$  est distribuée linéairement le long du stack et de la partie passive, variant de la température ambiante  $T_c$  à la température chaude  $T_h = T_0(x_h)$ .

Pour un rapport  $T_n = T_h/T_c$  fixé, la pulsation acoustique  $\Omega$  et le coefficient d'amplification  $\epsilon_g$  sont calculés à partir de l'équation caractéristique (1.58) en usant de la méthode de résolution numérique décrite au paragraphe 1.3. La valeur initiale de la relation de récurrence (1.59) est choisie égale à la pulsation naturelle d'un mode de résonance de l'anneau, multiple de la première pulsation de résonance  $\Omega_r = \pi c_0/L$ . De cette manière,  $\Omega$  et  $\epsilon_g$  peuvent être obtenus en fonction de la température à l'intérieur du système. Le seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique (illustré graphiquement sur les figures 1.5 et 1.7) est ainsi calculé en résolvant l'équation

$$\epsilon_g(T_0(x)) = 0. \quad (1.62)$$

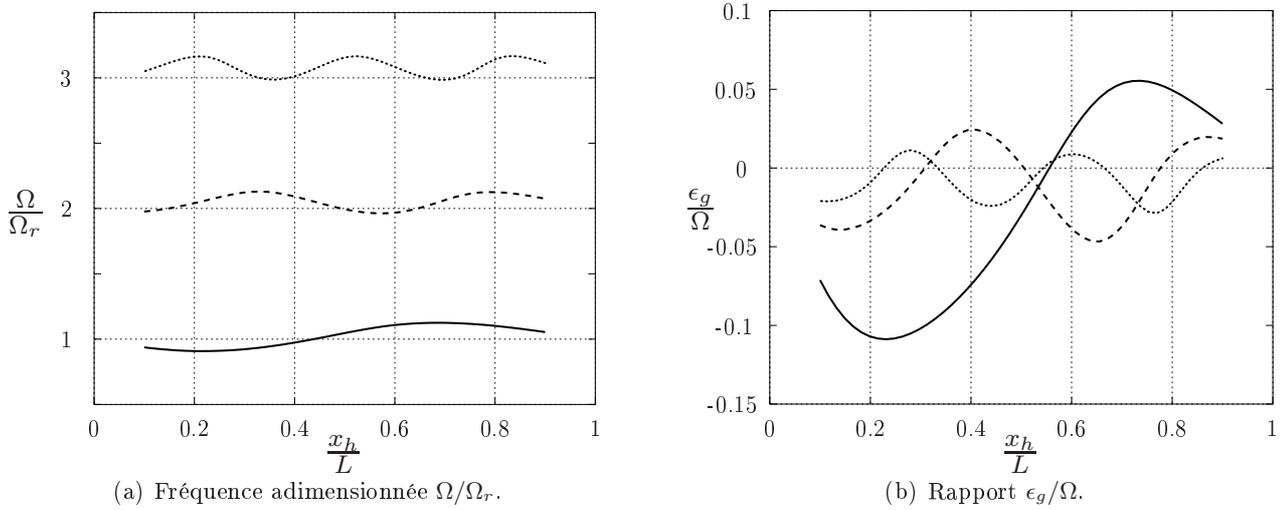
de façon numérique grâce à une simple méthode de recherche de zéros. Notons que sous réserve d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, il est possible d'obtenir une expression analytique simplifiée de la condition de seuil à partir de l'équation (1.62) (cf. §B.2 en annexe).



**FIGURE 1.5** – Fréquence et taux d’amplification en fonction de la température normalisée  $T_n = T_h/T_c$  pour trois positions du stack dans un résonateur demi-onde (système fermé-fermé) :  $x_h = L/4$  ( $\cdots$ ),  $x_h = L/2$  ( $---$ ) et  $x_h = 3L/4$  ( $---$ ). Pour  $x_h = 3L/4$ , le seuil de déclenchement correspond à  $T_n \simeq 1.6$ . La pulsation  $\Omega_r = \pi c_0/L$  représente la pulsation de résonance du premier mode demi-onde.

La figure 1.5 présente la pulsation  $\Omega$  [1.5(a)] et le coefficient d’amplification  $\epsilon_g$  [1.5(b)] en fonction du rapport  $T_n = T_h/T_c$  pour trois positions du stack dans le résonateur demi-onde :  $x_h = L/4$  ( $\cdots$ ),  $x_h = L/2$  ( $---$ ) et  $x_h = 3L/4$  ( $---$ ), lorsque la solution de l’équation (1.58) est cherchée proche du premier mode du résonateur demi-onde. Quelle que soit la position du stack,  $\Omega$  reste donc proche de la pulsation  $\Omega_r = \pi c_0/L$ , correspondant au premier mode du résonateur à vide. Pour les deux premières positions  $x_h = L/4$  et  $x_h = L/2$ , lorsque  $T_n > 1$ , le taux d’amplification  $\epsilon_g$  est négatif et décroît continûment, marquant ainsi l’effet d’amortissement (pertes/atténuation thermoacoustique) du stack pour ces positions. Au contraire, pour  $x_h = 3L/4$ , la condition de déclenchement de l’instabilité  $\epsilon_g = 0$  est obtenue pour  $T_{n,o} \simeq 1.6$ . Il convient également de noter que  $\epsilon_g < 0$  pour  $T_n < T_{n,o}$  – ce qui traduit une atténuation de l’onde – et  $\epsilon_g > 0$  pour  $T_n > T_{n,o}$  – ce qui traduit une amplification par effet thermoacoustique. Ces résultats sont ceux attendus classiquement pour ce type de système thermoacoustique [90], pour lequel l’amplification thermoacoustique n’est possible que lorsque le gradient de température le long du stack est du même signe que le gradient de pression acoustique. Pour un stack positionné en  $x_h = L/4$ , il est également intéressant d’observer sur la figure 1.5(b) que le déclenchement du système est obtenu pour un rapport  $T_n < 1$  correspondant à un changement de signe du gradient de température.

Rappelons que lors de la résolution de l’équation (1.58), la pulsation  $\Omega$  est recherchée proche d’une pulsation de résonance du système. En adaptant la valeur initiale de la relation de récurrence (1.59), il est donc possible de calculer  $\Omega$  et  $\epsilon_g$  pour différents modes de résonance. La figure 1.6 présente les résultats obtenus pour la pulsation  $\Omega$  [1.6(a)] et le coefficient d’amplification  $\epsilon_g$  [1.6(b)] en fonction de la position  $x_h$  du stack dans le moteur, pour les trois premiers modes du résonateur demi-onde. Pour cette étude, la température chaude est fixée à une valeur élevée ( $T_n = 5$ ). Sur la figure 1.6, il apparaît que  $\epsilon_g$  peut être positif pour certaines positions particulières  $x_h$  qui dépendent du mode



**FIGURE 1.6** – Fréquence et taux d'amplification en fonction de la position du stack  $x_h$  dans le résonateur pour les trois premiers modes du résonateur demi-onde :  $\Omega_r = \pi c_0/L$  (—),  $2\Omega_r$  (---) et  $3\Omega_r$  (···). Le rapport de température est fixé à  $T_h/T_c = 5$ .

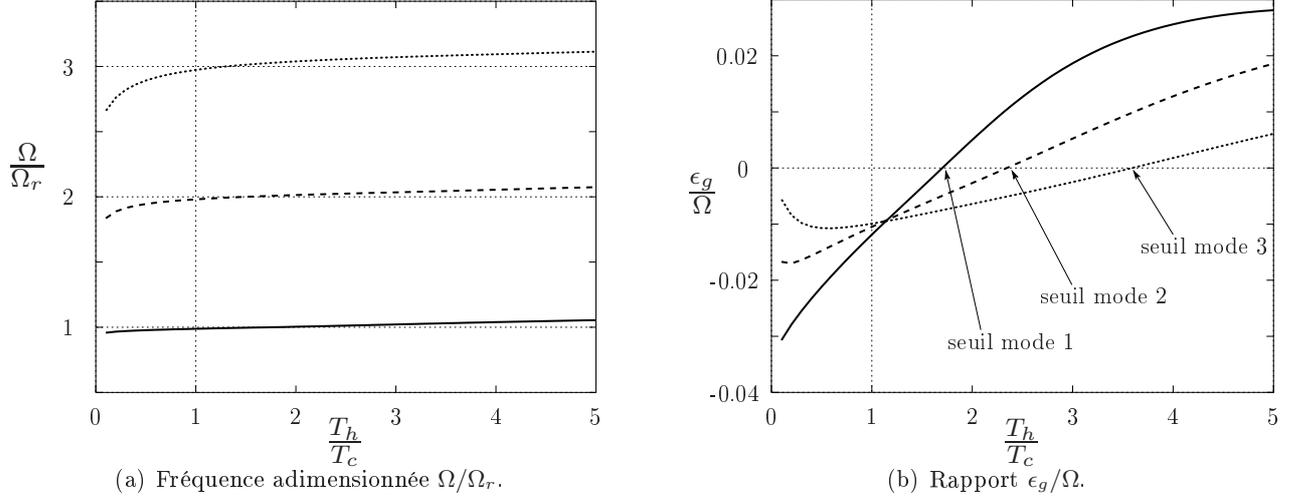
considéré. Il existe donc des positions du stack favorables au déclenchement d'un ou plusieurs modes. La comparaison entre la figure 1.6 et la distribution spatiale du champ de pression acoustique dans un résonateur demi-onde est relativement directe et confirme le fait que ces positions favorables sont celles pour lesquelles le gradient de température est du même signe que le gradient de pression.

Lorsque le stack est suffisamment proche de la paroi rigide en  $x = L$ , les trois premiers modes sont susceptibles de devenir instables. La figure 1.7 présente la pulsation  $\Omega$  [1.7(a)] et le coefficient d'amplification  $\epsilon_g$  [1.7(b)] pour  $x_h/L = 0.9$  et pour les trois premiers modes du résonateur demi-onde. Il apparaît clairement que pour cette position, plus l'ordre du mode est élevé et plus la température au déclenchement  $T_{n,o}$  est grande. Il est également intéressant d'observer que pour une température  $T_n$  suffisamment élevée, susceptible de déclencher les trois modes, les fréquences des trois instabilités sont inharmoniques, ce qui peut conduire à des comportements quasi-périodiques et chaotiques du système. Ce type de comportement a notamment été observé par Yazaki *et al.* [106] lors d'une étude expérimentale des oscillations de Taconis dans un système cryogénique (système dans lequel il est aisé d'obtenir des rapports  $T_h/T_c$  élevés).

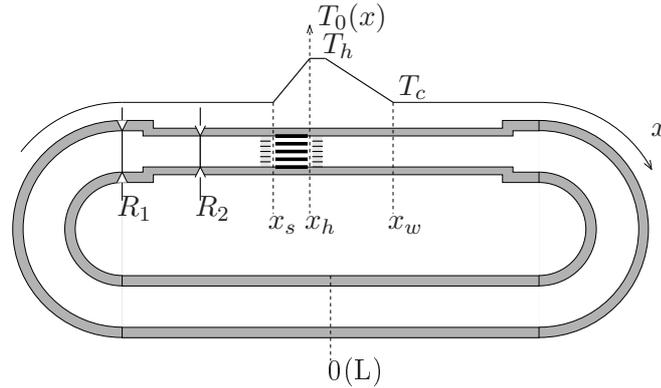
## 1.4.2 Système à ondes progressives

### Générateur d'ondes annulaire

En 1998, Yazaki *et coll.* ont mesuré les courbes de stabilité et la densité de puissance acoustique produite dans un moteur thermoacoustique annulaire [105]. Ils ont notamment observé que la fréquence des oscillations auto-entretenues amplifiées par effet thermoacoustique était proche de la fréquence du second mode ( $\lambda = L/2$ ) plutôt que de celle du premier mode ( $\lambda = L$ ). Parallèlement, ils ont également étudié le même système thermoacoustique sous sa version à *ondes stationnaires* en réalisant une rupture de la boucle avec une paroi rigide : de cette façon, ils ont observé le déclenchement de l'instabilité



**FIGURE 1.7** – Fréquence et taux d’amplification en fonction de la température normalisée  $T_n = T_h/T_c$  pour les trois premiers modes du résonateur demi-onde :  $\Omega_r = \pi c_0/L$  (—),  $2\Omega_r$  (---) et  $3\Omega_r$  (···). La position du stack  $x_h = 0.9L$  est choisie de telle sorte que le déclenchement des trois modes soit réalisable.



**FIGURE 1.8** – Représentation schématique du système étudié par Yazaki *et al.* [105]. Une paroi rigide peut être placée en  $x = 0(L)$  pour favoriser le déclenchement de l’onde sur un mode du résonateur “fermé-fermé”.

thermoacoustique sur le 4<sup>e</sup> mode du système à ondes stationnaires (pour lequel  $\lambda = L/2$ ).

La comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par Yazaki *et coll.* en 1998 semble être un bon moyen de valider le modèle présenté aux paragraphes 1.2 et 1.3. Le tableau 1.1 recense les paramètres géométriques utilisés pour dimensionner le système, sur la base des données fournies dans la Ref. [105]. Ce moteur est représenté de façon schématique en figure 1.8 : le noyau thermoacoustique est inséré dans un tube en verre<sup>2</sup> de rayon interne  $R_2$  inférieur au rayon du reste de l’anneau (noté ici  $R_1$ ). La position du stack est une donnée importante lorsque le cas à *ondes stationnaires* est étudié. Si l’on considère que la paroi rigide – utilisée par Yazaki pour favoriser le déclenchement d’une onde stationnaire – est située en  $x = 0$  (conformément au schéma de la figure 1.8), le centre du stack est

2. utilisé pour des mesures de vitesses particulières par Vélocimétrie Laser Doppler.

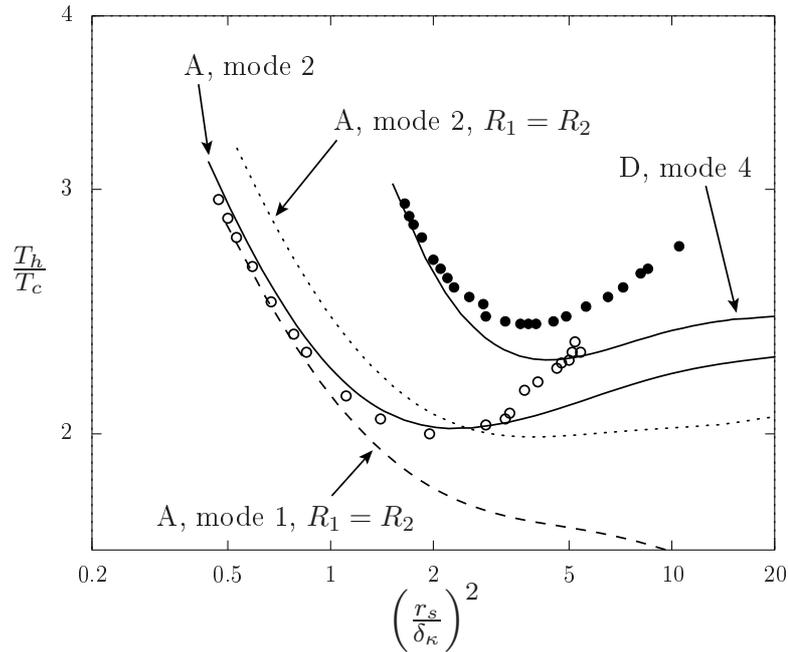
alors positionné à  $x = 0.5 \text{ m}$ , la longueur totale déroulée étant de  $2.58 \text{ m}$ . Dans le modèle, la présence des échangeurs de chaleur est prise en compte en introduisant les matrices de transfert de matériaux poreux dans l'expression (1.24) de la matrice de transfert du noyau. L'expression analytique de ces matrices de transferts est donnée par l'équation (A.11) en annexe A de ce manuscrit.

La température de déclenchement  $T_{n,o}$  est présentée en figure 1.9 en fonction du carré du rapport entre la dimension caractéristique transverse d'un pore du stack  $r_s$  et l'épaisseur de couche limite thermique  $\delta_\kappa$ . Concrètement, la variation du paramètre  $(r_s/\delta_\kappa)^2$  est implicitement obtenue par une variation de la pression statique  $p_0$  à l'intérieur du moteur. Les résultats expérimentaux obtenus par Yazaki *et coll.* [105] pour les deux configurations (  $\circ$  : système annulaire,  $\bullet$  : système droit) sont comparés aux courbes théoriques (traits pleins), lorsque la fréquence des oscillations est recherchée proche de la fréquence du mode  $\lambda = L/2$ . Cette fréquence correspond au 2<sup>e</sup> mode de l'anneau (noté "A" sur la figure 1.9) et au 4<sup>e</sup> mode du système droit (noté "D" sur la figure 1.9).

Le modèle reproduit relativement bien les courbes de stabilité pour des rapports  $r_s/\delta_\kappa$  faibles et prédit un rapport optimal (permettant le déclenchement le plus bas) proche de celui observé expérimentalement. Cependant, pour des rapports  $r_s/\delta_\kappa$  élevés, la température de déclenchement théorique est sous-estimée. Ces différences entre théorie et expérience peuvent notamment être expliquées par les points suivants. D'une part, la distribution de température  $T_0(x)$  est supposée linéaire en théorie le long du stack et de la partie passive du noyau, alors même que de récentes études ont démontré le rôle primordial de la forme réelle du champ de température dans les conditions de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique [73]. D'autre part, comme il l'est rapporté dans le tableau 1.1, un certain nombre de paramètres tels que les caractéristiques des échangeurs, la longueur de la partie passive ou la longueur du tube en verre ne sont pas détaillés dans la Ref. [105] et ont donc été fixés arbitrairement.

	Yazaki <i>et coll.</i> [105]	Modèle
Longueur totale	2.58m	2.58m
Rayon interne $R_1$	20.1mm	20.1mm
Longueur du tube en verre	inconnue	0.94m
Rayon interne du tube en verre $R_2$	18.5mm	18.5mm
Position du centre du stack	0.5m	0.5m
Longueur du stack	4cm	4cm
Longueur de la partie passive	inconnue	20cm
Longueur de l'échangeur ambiant	inconnue	2cm
Longueur de l'échangeur chaud	inconnue	2cm
Demi-épaisseur d'un pore du stack $r_s$	0.44mm	0.44mm
Porosité du stack	0.72	0.72
Demi-épaisseur d'un pore des échangeurs	inconnue	$2 \times 0.4\text{mm}$
Porosité des échangeurs	inconnue	0.88
Température ambiante $T_c$	inconnue	293K

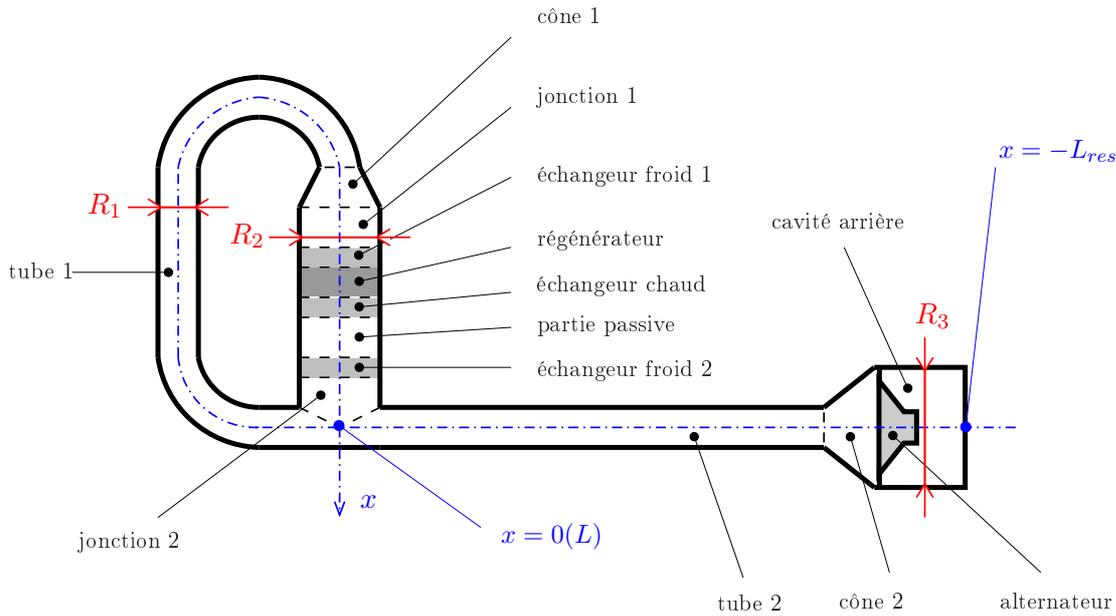
**TABLE 1.1** – Données géométriques et thermophysiques pour le moteur thermoacoustique annulaire dimensionné par Yazaki *et coll.* [105]



**FIGURE 1.9** – Courbes de stabilité pour le second mode de l’anneau (○) et le quatrième mode du système droit (●) obtenues par Yazaki *et coll.* [105], comparées aux courbes théoriques (traits pleins). Sont également représentées les courbes de stabilité obtenues grâce au modèle pour le premier mode (tirets) et le second mode (pointillés) de l’anneau lorsque le changement de section dû au tube en verre est négligé.

Le modèle est également utilisé pour donner une interprétation du phénomène de sélection de mode observé par Yazaki *et coll.*. Comme précisé précédemment, Yazaki a remplacé une partie du résonateur annulaire par un tube en verre de rayon interne plus petit pour effectuer des mesures de vitesses acoustiques particulières par Vélocimétrie Laser Doppler. Le changement de section résultant peut sembler négligeable (cf. tableau 1.1), mais les résultats de calcul indiquent clairement que ce changement de section est responsable du déclenchement du second mode, en “supprimant” le premier mode de l’anneau. En effet, lorsqu’aucun changement de section n’est introduit dans le modèle ( $R_1 = R_2$ ), le premier mode ( $\lambda = L$ , en tirets sur la figure 1.9) devient naturellement instable pour des rapports de température  $T_{n,o}$  inférieurs à ceux du second mode (en pointillés sur la figure 1.9). Cependant, lorsque le changement de section est pris en compte, le premier mode de l’anneau peut devenir instable pour des températures extrêmement élevées, physiquement irréalistes (e.g.  $T_{n,o} \simeq 20$  pour  $(r_s/\delta_\kappa)^2 \simeq 2.6$ ). Par souci de visibilité, la courbe de stabilité n’est pas représenté graphiquement pour ce mode, mais l’on peut raisonnablement conclure que le déclenchement sur le premier mode est impossible, simplement en raison de cette faible variation de section. L’introduction d’un changement de section pouvant se traduire par l’apparition de réflexions multiples au sein du système apporte une modification de la distribution des champs acoustiques. En conséquence, contrairement au système annulaire standard pour lequel les conditions de déclenchement sont invariantes par translation du stack dans la boucle<sup>3</sup>, la position du stack devient ici un paramètre important dès lors que la relation de phase entre les oscillations de pression et de débit acoustiques n’est plus nécessairement optimale le long de l’élément

3. dans la mesure où l’effet du rayon de courbure n’est pas pris en compte.



**FIGURE 1.10** – Représentation schématique du prototype thermo-acousto-électrique réalisé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine.

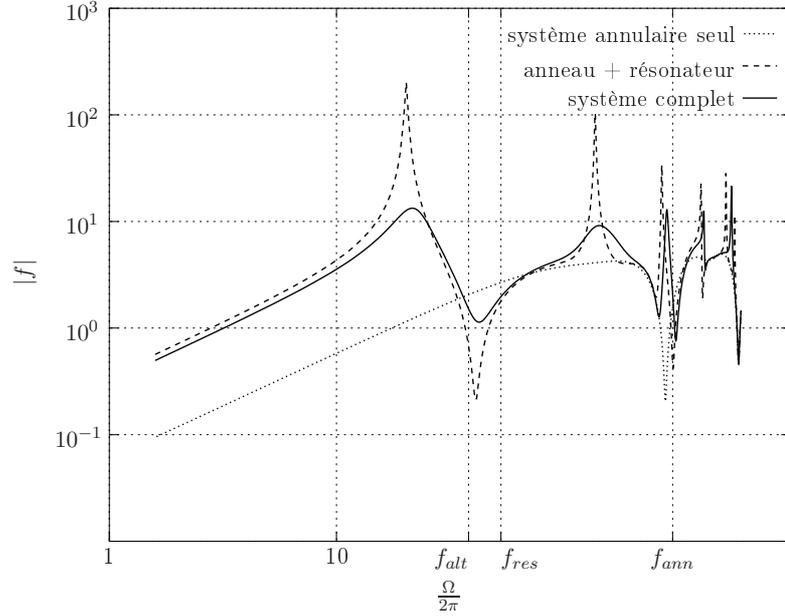
poreux.

### Dimensionnement d'une machine thermo-acousto-électrique

En parallèle des travaux présentés dans ce mémoire de thèse, un prototype de transducteur thermo-acousto-électrique a été dimensionné et réalisé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. Cette maquette d'étude, fonctionnant avec de l'air pressurisé, est représentée schématiquement sur la figure 1.10. Il s'agit d'un résonateur annulaire couplé à un résonateur droit. Le résonateur secondaire accueille un alternateur électrodynamique par l'intermédiaire d'un guide conique permettant d'adapter la surface interne du résonateur à la surface émissive plus grande du piston. L'alternateur électrodynamique, chargé à l'arrière par une cavité fermée, a pour rôle de transformer l'énergie acoustique produite par effet thermoacoustique en énergie électrique.

Le dimensionnement de ce système a été réalisé en usant parallèlement du modèle présenté aux paragraphes 1.2 et 1.3 et du logiciel libre DeltaEC développé au Laboratoire National de Los Alamos [100, 101]. Les paramètres géométriques et thermophysiques, ainsi que diverses informations concernant les éléments constitutifs du moteur, sont recensés en annexe C de ce document.

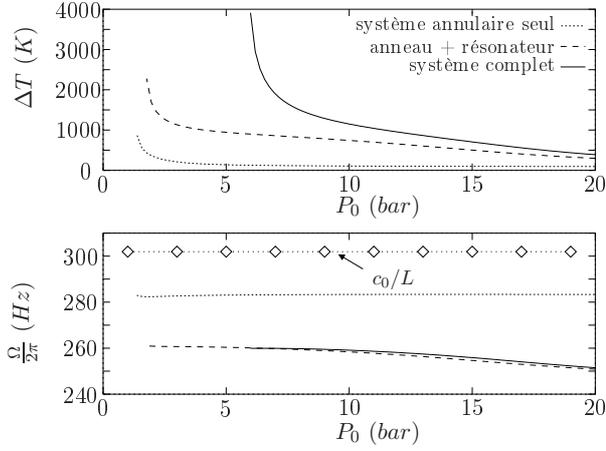
Les différents éléments constituant le système sont référencés sur le schéma donné en figure 1.10. Les expressions analytiques des matrices de transfert utilisées pour décrire la propagation acoustique dans ces éléments sont données en annexe A. Plus précisément, l'expression (A.10) est utilisée pour décrire la propagation d'ondes planes harmoniques dans les tubes, les jonctions et la cavité arrière, tandis que l'expression (A.14) décrit la propagation dans les guides coniques 1 et 2 (cf. fig. 1.10). Les échangeurs de chaleur sont traités comme des milieux poreux [éq. (A.11)] à température uniforme  $T_c$



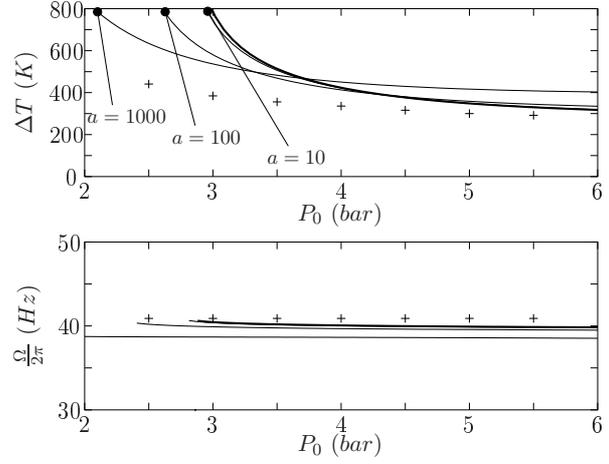
**FIGURE 1.11** – Module de la fonction  $f(\Omega, T_0(x) = T_c)$  en fonction de la fréquence, calculé pour l’anneau seul, l’anneau couplé au résonateur sans alternateur et le système complet. Sur l’axe des abscisses sont repérées les fréquences particulières correspondant respectivement à la résonance mécanique de l’alternateur  $f_{alt} = (2\pi\sqrt{M_{ma}C_{ma}})^{-1} \simeq 38Hz$ , au premier mode quart d’onde du résonateur secondaire  $f_{res} = c_0/(4L_{res}) \simeq 53Hz$  et au premier mode de l’anneau  $f_{ann} = c_0/L \simeq 302Hz$ .

(échangeurs froids) ou  $T_h$  (échangeur chaud) et l’expression analytique utilisée pour le régénérateur et la partie passive est celle donnée par l’équation (A.28), calculée pour une distribution linéaire de température. Enfin, l’alternateur est modélisé par son impédance acoustique définie précédemment par l’équation (1.33).

Comme il l’a été énoncé au paragraphe 1.3, l’estimation numérique du couple  $(\Omega, \epsilon_g)$  converge vers une solution locale de l’équation caractéristique (1.55) et le choix de la pulsation  $\omega_0$  autour de laquelle la pulsation acoustique  $\omega$  est calculée est important. Lorsque les modes potentiellement instables résultent d’un couplage complexe entre différents systèmes résonants, comme cela est le cas pour le moteur thermoacoustique considéré actuellement, cette pulsation particulière peut être déterminée graphiquement en traçant le module de la fonction  $f(\Omega)$  – définie comme le terme de gauche des équations (1.30) ou (1.54) – et en sélectionnant une fréquence proche d’un minimum local de  $|f|$ . La figure 1.11 illustre cette idée au travers de l’étude du transducteur thermo-acousto-électrique. Sur cette figure, le module  $|f(\Omega, T_0(x) = T_c)|$  est calculé en fonction de la fréquence lorsque seul l’anneau est pris en compte ( $\cdots$ ), lorsque l’anneau est couplé au résonateur sans alternateur ( $---$ ) et lorsque le système complet est considéré ( $---$ ). Ainsi, des modes autres que ceux propres à la résonance de l’anneau (pour lesquels  $\Omega = 2n\pi c_0/L$ ) apparaissent et peuvent potentiellement devenir un support à l’instabilité thermoacoustique, en particulier le premier mode couplé dont la pulsation est proche du premier mode quart d’onde du tube secondaire [ $\Omega_{res} = \pi c_0/(2L_{res})$ ] et de la résonance mécanique de l’alternateur [ $\Omega_{alt} = (M_{ma}C_{ma})^{-1/2}$ ]. De fait, il est alors possible d’étudier les conditions de stabilité et le processus d’amplification thermoacoustique sur n’importe quel mode résultant du couplage entre les différentes



**FIGURE 1.12** – Conditions de déclenchement de l'instabilité proche du premier mode de l'anneau ( $\Omega/2\pi \sim c_0/L$ ) en fonction de la pression statique à l'intérieur du système.



**FIGURE 1.13** – Conditions de déclenchement de l'instabilité proche du mode de résonance de l'alternateur ( $\Omega \sim (M_{ma}C_{ma})^{-1/2}$ ) en fonction de la pression statique à l'intérieur du système. La courbe en gras correspond aux résultats obtenus pour une distribution de température linéaire. Les courbes en traits fins sont obtenues pour une distribution de température exponentielle avec  $a = 10 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 100 \text{ m}^{-1}$  et  $a = 1000 \text{ m}^{-1}$ .

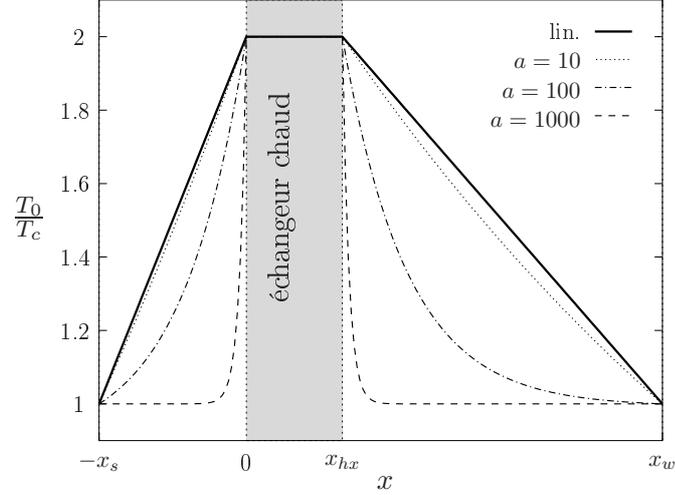
parties du système.

Lorsque le mode instable est recherché proche du premier mode de résonance de l'anneau ( $\Omega \sim 2\pi c_0/L$ ), l'ajout d'une charge secondaire entraîne une augmentation importante du seuil de déclenchement, comme il l'est montré en figure 1.12. L'introduction d'une charge acoustique supplémentaire signifie l'augmentation des pertes dans le système, ce qui se traduit par une température de déclenchement croissante. Sur la figure 1.13, le mode instable est à présent cherché proche du premier mode couplé observé sur la figure 1.11. Les croix (+) représentent des mesures des conditions de déclenchement du prototype sous plusieurs pressions statiques. Lorsque la distribution de température est supposée linéaire le long du stack et de la partie passive du noyau (courbe en gras), le modèle est capable de reproduire les données expérimentales, notamment concernant la fréquence de déclenchement pour laquelle l'écart entre expérience et théorie est inférieur à  $1 \text{ Hz}$ . Néanmoins on peut observer une nette différence concernant la température de déclenchement pour de faibles pressions statiques. Cette écart est cependant considérablement réduit lorsqu'un profil exponentiel est utilisé pour décrire la température dans le noyau :

$$T_0(x) = (T_h - T_c) \frac{e^{ax} - 1}{e^{al_s} - 1} + T_c \quad \text{pour } 0 \leq x \leq l_s \quad (\text{régénérateur}), \quad (1.63)$$

$$T_0(x) = (T_c - T_h) \frac{e^{-ax} - 1}{e^{-al_w} - 1} + T_h \quad \text{pour } 0 \leq x \leq l_w \quad (\text{partie passive}). \quad (1.64)$$

Des courbes relatives à ce profil de température sont données sur la figure 1.14 pour  $T_h = 2T_c$  et  $a = 10 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 100 \text{ m}^{-1}$  puis  $a = 1000 \text{ m}^{-1}$ . Comme énoncé précédemment, l'échangeur chaud est



**FIGURE 1.14** – Température  $T_0(x)$  (normalisée) le long du noyau thermoacoustique pour une distribution linéaire et pour trois profils exponentiels :  $a = 10 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 100 \text{ m}^{-1}$  et  $a = 1000 \text{ m}^{-1}$

supposé rester à température constante  $T_h$ . Il convient de noter que pour un coefficient  $a$  suffisamment petit de sorte que  $al_s \sim al_w \sim o(1)$ , le report des développements asymptotiques

$$e^{ax} = 1 + ax + O((ax)^2), \quad (1.65)$$

$$e^{al_s} = 1 + al_s + O((al_s)^2), \quad (1.66)$$

$$e^{al_w} = 1 + al_w + O((al_w)^2), \quad (1.67)$$

dans les équations (1.63)-(1.64) conduit naturellement à retrouver la distribution linéaire de température comme limite asymptotique du cas exponentiel :

$$T_0(x) \simeq (T_h - T_c) \frac{x}{l_s} + T_c \quad \text{pour } 0 \leq x \leq l_s, \quad (1.68)$$

$$T_0(x) \simeq (T_c - T_h) \frac{x}{l_w} + T_h \quad \text{pour } 0 \leq x \leq l_w. \quad (1.69)$$

Cette remarque est illustrée sur la figure 1.14 par le cas  $a = 10 \text{ m}^{-1}$  pour lequel le profil de température reste très proche d'un profil linéaire ; la courbe de stabilité obtenue sur la figure 1.13 marque ainsi une différence minime avec le cas linéaire. Néanmoins, on peut observer sur la figure 1.13 que la forme même du champ de température le long du noyau influence fortement les conditions de déclenchement du moteur. Ainsi, pour des valeurs de  $a$  suffisamment élevées (typiquement,  $a = 1000 \text{ m}^{-1}$ ), il est possible de reproduire, au moins qualitativement, les données expérimentales. Evidemment, il reste un écart non négligeable entre expérience et théorie et réduire cet écart impliquerait d'effectuer une étude paramétrique beaucoup plus complète que celle proposée ici. Cependant, les résultats présentés sur la figure 1.13 confortent le fait que le déclenchement de l'instabilité thermoacoustique dépend de façon non-triviale de la forme du champ de température qui s'établit le long du noyau [73].

## 1.5 Conclusion

Le modèle analytique proposé dans ce chapitre permet de décrire le fonctionnement de diverses configurations de systèmes thermoacoustique. Cependant, de par le fait même que cette théorie est

développée dans le domaine de Fourier, ce type de formalisme est en toute rigueur mathématiquement inadapté pour la description d'un régime instationnaire de l'instabilité thermoacoustique. La prise en compte du taux d'amplification de l'onde ne peut donc se faire que par l'introduction d'une fréquence supposée complexe et au moyen de l'hypothèse de quasi-stationarité selon laquelle l'amplitude de l'onde et le champ de température évoluent lentement, restant constant à l'échelle de temps acoustique.

La connaissance de la propagation acoustique dans le noyau thermoacoustique est implicite dans le calcul de  $\Omega$  et  $\epsilon_g$  et la complexité des expressions analytiques des matrices de transfert du stack et de la partie passive rend toute résolution analytique directe du problème irréalisable. C'est la raison pour laquelle une méthode numérique semble en premier lieu mieux adaptée pour la résolution de l'équation caractéristique. Néanmoins, comme il l'est présenté en annexe B, des expressions analytiques approchées peuvent être obtenues sous réserve d'hypothèses fortes concernant par exemple le régime d'interaction fluide-structure, l'épaisseur du noyau ou encore la forme du champ de température.

A la lumière des résultats et observations présentés dans ce premier chapitre, il est clair qu'une description précise des processus de déclenchement et d'amplification des oscillations auto-entretenues ne peut se faire sans aborder l'aspect des transferts thermiques qui régissent la forme du champ de température dans le noyau thermoacoustique. Le chapitre suivant aborde une approche pragmatique pour répondre à cette problématique, qui consiste à mesurer les propriétés acoustiques du noyau en usant d'une méthode à quatre microphones.

## Chapitre 2

# Matrice de transfert expérimentale d'un noyau thermoacoustique

Dans le chapitre précédent, le modèle permettant de décrire le déclenchement et le taux d'amplification de l'instabilité a été développé. Ce modèle est intimement lié à la connaissance des propriétés de transfert du noyau thermoacoustique. L'un des éléments clés d'un moteur thermoacoustique reste bien évidemment le matériau poreux au sein duquel l'effet thermoacoustique prend toute son importance. Lorsqu'il est utilisé en *stack* dans un moteur à ondes stationnaires, son rôle est d'assurer un contact thermique imparfait (quasi-adiabatique) entre le fluide et les parois solides ( $r_s \sim \delta_\kappa$ ). Lorsqu'il est utilisé en *régénérateur* dans une machine à ondes progressives, il permet au contraire d'assurer un contact quasiment isotherme entre les parois et le fluide oscillant ( $r_s \ll \delta_\kappa$ ). A l'origine des premiers moteurs thermoacoustiques, ces interactions thermiques fluide-structure furent réalisées au moyen de structures périodiques type empilements de plaques parallèles en acier inoxydable [6, 7] ou matériaux en nids d'abeilles [89]; cependant, les avancées récentes en thermoacoustique ont mis en évidence l'intérêt de l'utilisation de matériaux plus exotiques, tels que les réseaux de tiges fines [91], les mousses de carbone réticulé vitreux (RVC) [2] ou les empilements de grilles d'acier inoxydable [9].

Les structures périodiques basiques telles que les empilements de plaques parallèles ou les réseaux de canaux uniformes de diverses géométries peuvent être décrites au moyen de la théorie de la thermoacoustique en propagation guidée [83, 88, 5, 87]. Dans cette théorie, le couplage viscothermique entre le fluide oscillant et les parois solides d'un pore est introduit au moyen des fonctions thermovisqueuses  $f_\nu$  et  $f_\kappa$ , dont les expressions analytiques dépendent de la géométrie du pore. En 1991, Roh *et coll.* [79] ont notamment validé expérimentalement les calculs développés par Stinson dans le cas de pores à section rectangulaire [87]. Depuis, un nombre important de travaux, aussi bien expérimentaux qu'analytiques, ont été réalisés dans le but d'étendre cette théorie à des structures plus complexes. Dans une série d'articles [103, 75, 104, 74], Wilen et Petculescu ont mesuré ces fonctions thermovisqueuses pour différentes géométries de pores et différents matériaux (notamment des mousses RVC et des mousses d'aluminium), avec ou sans gradient de température. En 2005, Muehleisen *et coll.* [61] ont développé une méthode à quatre microphones pour la mesure de l'impédance caractéristique et du nombre d'onde complexes dans des mousses RVC, et ont comparé leurs résultats avec des modèles de propagation en milieu poreux semi-analytiques [29, 77] et analytiques [3]. Enfin, Roh *et coll.* [80] ont proposé un mo-

dèle mathématique de propagation en milieu poreux inhomogène en température, qui montre un bon accord avec les résultats expérimentaux de Wilen et Petculescu [104, 74], malgré un recalage nécessaire en usant de facteurs de forme  $n_\nu$  et  $n_\kappa$ <sup>1</sup> et de la tortuosité du matériau.

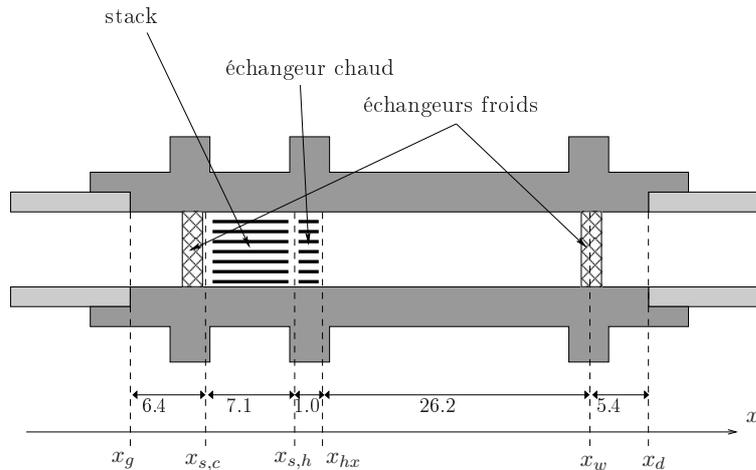
A l’instar des propriétés géométriques du stack (ou du régénérateur), de nombreux paramètres influent de façon cruciale sur le fonctionnement du moteur thermoacoustique. En particulier, la description fine du seuil de déclenchement requiert, outre la connaissance des caractéristiques du stack, la prise en compte des échangeurs de chaleurs (porosité, résistance au passage de l’air) mais aussi et surtout des transferts de chaleurs qui s’opèrent au sein du noyau thermoacoustique. En effet, il reste crucial d’avoir une connaissance précise du champ de température le long du noyau, dont la forme (notamment dans la partie passive) peut avoir un impact fort sur le processus d’amplification [73]. C’est pourquoi une description juste des processus de déclenchement et d’amplification de l’instabilité thermoacoustique nécessiterait en toute rigueur la description des échangeurs et une modélisation complète (à 3 dimensions) des transferts de chaleurs dans chaque partie constituant le noyau. Cette description précise est d’autant plus ardue qu’elle sous-entend la connaissance des propriétés thermophysiques – par exemple les conductivités thermiques axiale et transverse – des matériaux anisotropes qui constituent le stack ou le régénérateur. Notons également que le calcul du régime transitoire de l’instabilité, au-delà du déclenchement, nécessiterait également la prise en compte d’effets non-linéaires saturants, et cela sera discuté en chapitre 4 de ce manuscrit. Toutes les raisons explicitées ci-dessus justifient le fait que le dimensionnement et l’optimisation des machines thermoacoustiques actuelles se fassent en partie au moyen de logiciels basés sur la théorie de la thermoacoustique linéaire – ou faiblement non-linéaire – [100, 101], et en partie de façon empirique.

Les résultats présentés dans le paragraphe 1.4 du chapitre 1 illustrent bien les limites d’une modélisation théorique simplifiée du noyau thermoacoustique. Pour le calcul du taux d’amplification  $\epsilon_g$  et des conditions de stabilité propres aux différents systèmes thermoacoustiques modélisés, rappelons que les matrices de transfert du stack et du noyau sont calculées à partir de la relation (A.28) donnée en annexe A [73, 68], qui, malgré le fait qu’elle constitue une solution analytique exacte de l’équation de propagation de la thermoacoustique linéaire, est basée sur une hypothèse uni-dimensionnelle de la distribution de température  $T_0(x)$ . De plus, les transferts de chaleur n’étant pas pris en compte dans le modèle, les échangeurs sont supposés parfaits d’un point de vue thermique et  $T_0(x)$  est généralement supposée linéaire le long du stack et de la partie passive. C’est très probablement la raison pour laquelle les courbes de stabilité présentées au chapitre 1 peuvent marquer une différence notable avec les données expérimentales sous certaines conditions.

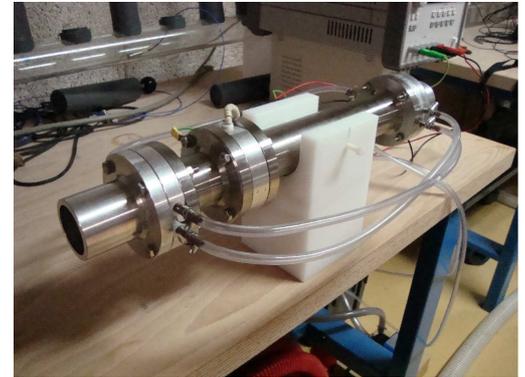
Le but des travaux exposés dans ce chapitre est donc de proposer une méthode semi-analytique pour la détermination des conditions de déclenchement des oscillations auto-entretenues. Cette méthode est basée sur une approche “boîte noire” du noyau thermoacoustique, dont la matrice de transfert est accessible par la mesure [38], sous différentes conditions de chauffage. L’avantage de cette approche est de faire abstraction d’une modélisation des échangeurs, de la géométrie (éventuellement complexe...) du stack et des transferts de chaleur qui s’opèrent entre les différents éléments du noyau. Le but de

---

1. ces facteurs sont utilisés pour ajuster les rapports  $(r/\delta_\nu)$  et  $(r/\delta_\kappa)$ .



**FIGURE 2.1** – Représentation schématique du noyau thermoacoustique étudié (les longueurs sont données en cm).



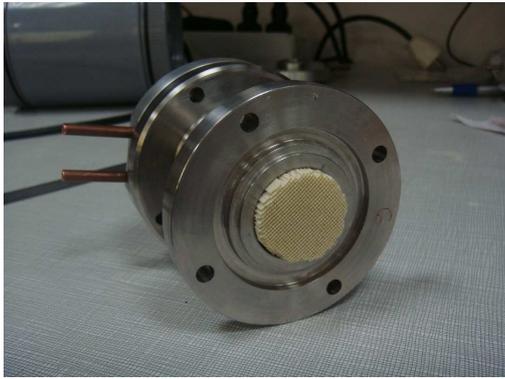
**FIGURE 2.2** – Photographie du noyau thermoacoustique étudié.

la mesure de la matrice de transfert du noyau est double. D'une part, les seuils de déclenchements peuvent être calculés à partir des données expérimentales en intégrant la matrice de transfert mesurée au modèle présenté au chapitre 1 (ceci fait l'objet du paragraphe 2.5 de ce chapitre). D'autre part, ces données expérimentales peuvent être exploitées pour ajuster le modèle théorique des transferts thermiques dans le noyau, comme il sera présenté au chapitre 3.

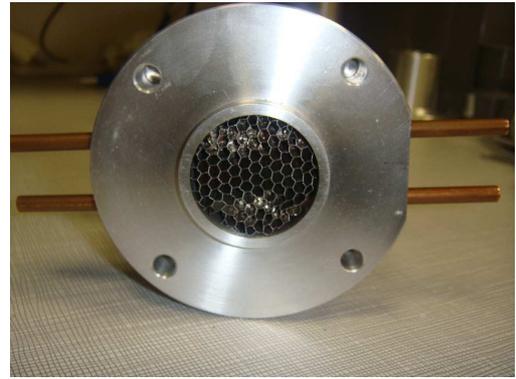
Dans le paragraphe 2.1, le noyau thermoacoustique étudié est entièrement décrit, et le banc de mesure développé pour la caractérisation expérimentale des propriétés de transfert de ce noyau est présenté en paragraphe 2.2. La méthode de mesure utilisée est une méthode à quatre microphones couramment utilisée en acoustique; le principe de cette méthode est développé au paragraphe 2.3. Les résultats de mesure sont exposés et discutés au paragraphe 2.4, ainsi que l'estimation des erreurs commises, inhérentes à l'utilisation d'une méthode multi-microphonique. Enfin au paragraphe 2.5, les données expérimentales sont exploitées pour la prédiction de seuils de déclenchement de moteurs intégrant le noyau thermoacoustique, et les prédictions semi-analytiques sont comparées aux seuils réellement observés lorsque les moteurs sont réalisés.

## 2.1 Présentation du noyau thermoacoustique étudié

Un schéma et une photographie du noyau thermoacoustique étudié sont donnés sur les figures 2.1 et 2.2. Il s'agit d'un guide d'onde cylindrique de rayon interne  $R = 16.7 \text{ mm}$  constitué de différentes pièces en aluminium et en acier inoxydable, totalisant une longueur de 46 cm entre les abscisses  $x_g$  et  $x_d$ . Le stack, dont une photographie est présentée en figure 2.3, est un élément poreux en céramique de 7.1 cm de long constitué de pores à section carrée, dont la densité surfacique est de 600 cellules par pouce carré (600 *Cells Per Square Inch*, ou 600 CPSI). La distribution de température est contrôlée par la présence d'un échangeur de chaleur chaud et de deux échangeurs froids. L'échangeur chaud est constitué d'un cylindre de 1 cm d'épaisseur réalisé à partir du même matériau que le stack (céramique à



**FIGURE 2.3** – Photographie du stack en céramique inséré dans la pièce en aluminium.



**FIGURE 2.4** – Photographie d'un échangeur froid.

pores carrés) à l'intérieur duquel est tressé un fil de Nichrome chauffant, de manière à couvrir la quasi-totalité de la surface et d'assurer au mieux l'homogénéité de la distribution transverse de température. La résistance de Nichrome est connectée à une source courant-tension stabilisée permettant d'apporter par effet Joule une puissance de chauffage  $Q$  au système. L'échangeur froid, dont une photographie est donnée en figure 2.4, est constitué de deux tubes de cuivre traversant une structure d'aluminium en nid d'abeilles. Les tubes de cuivre sont connectés à un circuit de refroidissement muni d'une pompe permettant de faire circuler de l'eau à température ambiante  $T_c$ .

## 2.2 Présentation du banc de mesure

La méthode de mesure est une méthode à quatre microphones, utilisée pour accéder à la matrice de transfert du biporte acoustique situé entre  $x_g$  et  $x_d$  sur le schéma 2.1, sur une gamme de fréquence  $[50; 200]Hz$  et pour plusieurs conditions de chauffage  $Q$ .

Une représentation schématique et une photographie du banc de mesure sont données en figures 2.5 et 2.6. Deux tubes en polychlorure de vinyle (PVC) sont connectés de part et d'autre du noyau thermoacoustique. Le tube de gauche est lui-même connecté à un haut parleur électrodynamique contrôlé par un ordinateur via une carte d'acquisition. Un signal de type *sinus glissant* est envoyé à la source, correspondant à une série de signaux sinusoïdaux de fréquences allant de 50Hz à 200Hz par incrément de 1Hz. Le tube de droite est quant à lui alternativement ouvert et fermé par une paroi rigide, pour effectuer les deux mesures nécessaires à la caractérisation du noyau, comme il sera détaillé dans le paragraphe 2.3.

Quatre microphones (modèle Bruel & Kjaer 4136) sont placés le long des tubes, de part et d'autre du noyau. Afin de s'assurer qu'aucune discontinuité géométrique ne puisse perturber le champ acoustique, les microphones sont placés dans des pièces adaptées (cf. fig. 2.7), usinées de manière à épouser le rayon de courbure des tubes, la jonction entre l'intérieur du banc de mesure et la membrane microphonique se faisant par un capillaire. Les signaux captés sont récupérés sur l'ordinateur via la carte d'acquisition,

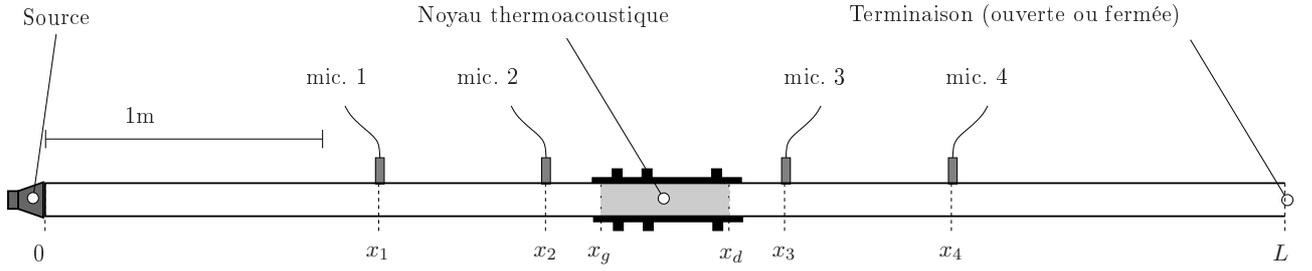


FIGURE 2.5 – Représentation schématique du banc de mesure (à l'échelle en  $x$ ).



FIGURE 2.6 – Photographie du banc de mesure.

avec une fréquence d'échantillonnage de  $10\text{ kHz}$ , et les informations utiles (amplitude et phase) sont obtenues au moyen d'un estimateur des moindres carrés.

En amont de la campagne de mesures, un étalonnage relatif des microphones est effectué afin de s'affranchir de leurs sensibilités respectives. Les microphones sont placés face-à-face au sein d'une cavité de très faibles dimensions devant les longueurs d'onde mises en jeu [55], de sorte que le champ de pression puisse être considéré comme spatialement uniforme dans la gamme de fréquences utilisée (cf. fig. 2.8). Les fonctions de transfert mesurées au moyen de cette méthode sont présentées sur la figure 2.9. Ces fonctions de transfert, notées  $\tilde{C}_{ij}$  et définies comme les rapports des sensibilités de chaque microphone dans l'hypothèse d'uniformité du champ de pression

$$\tilde{C}_{ij} \equiv \frac{S_i}{S_j}, \quad (2.1)$$

sont ensuite utilisées comme corrections sur les fonctions de transfert mesurées *in situ*.

## 2.3 Méthode à deux charges

Le banc de mesure développé et présenté dans le paragraphe précédent a pour objectif la détermination de la matrice de transfert du noyau définie par l'équation (1.24) et obtenue ici grâce à la

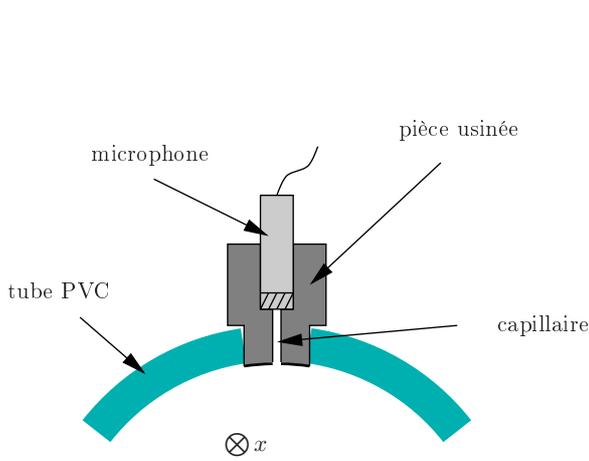


FIGURE 2.7 – Schéma de montage d'un microphone dans le banc de mesure.

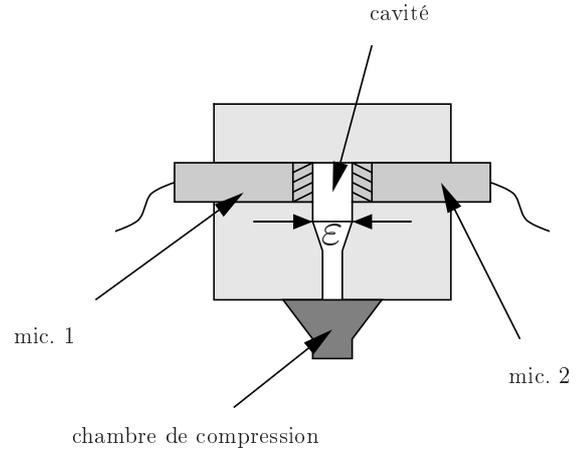


FIGURE 2.8 – Schéma du montage utilisé pour l'étalonnage relatif des microphones.

relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(x_d) \\ \tilde{u}_{1,x}(x_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{T}_{pu}(\omega, T_0(x)) \\ \mathcal{T}_{up}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{T}_{uu}(\omega, T_0(x)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(x_g) \\ \tilde{u}_{1,x}(x_g) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Le principe de base de la méthode consiste donc à calculer les amplitudes complexes de pression  $\tilde{p}_1(x_{g,d})$  et de débit acoustique  $\tilde{u}_{1,x}(x_{g,d})$  à partir des mesures de pression aux positions  $x_i$  [ $i = 1, 2, 3, 4$ , cf. fig. 2.5]. Cependant, la matrice de transfert du noyau n'étant en toute rigueur ni symétrique, ni réciproque (du fait de la distribution inhomogène de température), deux mesures sont nécessaires pour accéder aux quatre coefficients de transfert  $\mathcal{T}_{pp}$ ,  $\mathcal{T}_{pu}$ ,  $\mathcal{T}_{up}$  et  $\mathcal{T}_{uu}$ . La méthode à quatre microphones utilisée, qualifiée de *méthode à deux charges*, consiste donc à effectuer deux mesures pour deux charges

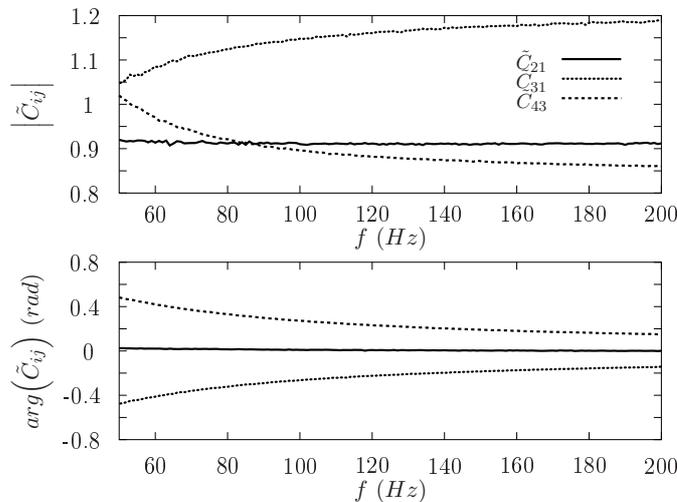


FIGURE 2.9 – Fonctions de transfert (module et argument) utilisées pour l'étalonnage relatif des microphones.

acoustiques différentes au niveau de la terminaison, correspondant à deux états du système linéairement indépendants : une première mesure est effectuée en tube ouvert, puis une seconde mesure est réalisée lorsque le tube est fermé par une paroi rigide.

Cette méthode de mesure a été largement étudiée et utilisée dans les domaines des ondes guidées et de l'aéroacoustique [95, 96, 56, 62]. Il convient de noter que des méthodes multi-microphoniques équivalentes ont déjà été exploitées en thermoacoustique [33, 76] : par exemple, Petculescu et Wilen [76] ont développé une méthode à quatre microphones pour mesurer la puissance acoustique en entrée et en sortie d'un régénérateur soumis à un gradient de température.

Dans ce qui suit, les équations permettant de calculer les coefficients de transfert à partir des pressions mesurées au niveau des microphones sont développées. Afin de ne pas alourdir les notations, les indices 1 et  $x$  présents dans l'équation (2.2) sont supprimés. Ainsi,  $\tilde{p}$  et  $\tilde{u}$  correspondent aux amplitudes complexes des composantes acoustiques de la pression et du débit, et  $\tilde{u}$  est la composante axiale du débit acoustique. Sous l'hypothèse d'onde plane harmonique se propageant en amont du noyau thermoacoustique, la pression acoustique peut être écrite comme la combinaison linéaire de deux composantes contrapropagatives :

$$\tilde{p}(x) = \tilde{p}^+(x) + \tilde{p}^-(x), \quad (2.3)$$

$$= \tilde{p}^+(x_g)e^{ik(x-x_g)} + \tilde{p}^-(x_g)e^{-ik(x-x_g)}, \quad \forall x \in [0, x_g], \quad (2.4)$$

où le nombre complexe  $k$  défini par la relation (1.26) tient compte des pertes viscothermiques pariétales dans le tube en PVC. De la même façon, la pression acoustique en aval du noyau prend la forme suivante :

$$\tilde{p}(x) = \tilde{p}^+(x) + \tilde{p}^-(x), \quad (2.5)$$

$$= \tilde{p}^+(x_d)e^{ik(x-x_d)} + \tilde{p}^-(x_d)e^{-ik(x-x_d)}, \quad \forall x \in [x_d, L]. \quad (2.6)$$

Les pressions acoustiques au niveau de chacun des microphones sont exprimées en usant des relations (2.4) et (2.6) et, après quelques calculs, les quatre composantes contrapropagatives de pression à gauche et à droite du noyau sont obtenues par les équations :

$$\tilde{p}^+(x_g) = \frac{\tilde{p}_1 e^{-ik(x_2-x_g)} - \tilde{p}_2 e^{-ik(x_1-x_g)}}{2i \sin(k(x_1-x_2))}, \quad (2.7)$$

$$\tilde{p}^-(x_g) = \frac{\tilde{p}_2 e^{ik(x_1-x_g)} - \tilde{p}_1 e^{ik(x_2-x_g)}}{2i \sin(k(x_1-x_2))}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{p}^+(x_d) = \frac{\tilde{p}_3 e^{-ik(x_4-x_d)} - \tilde{p}_4 e^{-ik(x_3-x_d)}}{2i \sin(k(x_3-x_4))}, \quad (2.9)$$

$$\tilde{p}^-(x_d) = \frac{\tilde{p}_4 e^{ik(x_3-x_d)} - \tilde{p}_3 e^{ik(x_4-x_d)}}{2i \sin(k(x_3-x_4))}, \quad (2.10)$$

où  $\tilde{p}_i = \tilde{p}(x_i)$  sont les pressions mesurées par les microphones [ $i = 1, 2, 3, 4$ , cf. fig. 2.5]. Lorsque les relations (2.7)-(2.10) sont introduites dans les équations (2.4) et (2.6) appliquées respectivement aux

abscisses  $x_g$  et  $x_d$ , les pressions acoustiques sont alors données par

$$\tilde{p}(x_g) = \frac{\tilde{p}_2 \sin(k(x_1 - x_g)) - \tilde{p}_1 \sin(k(x_2 - x_g))}{\sin(k(x_1 - x_2))}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{p}(x_d) = \frac{\tilde{p}_4 \sin(k(x_3 - x_d)) - \tilde{p}_3 \sin(k(x_4 - x_d))}{\sin(k(x_3 - x_4))}, \quad (2.12)$$

et, en notant  $\tilde{H}_{ij}$  la fonction de transfert inter-microphonique définie selon

$$\tilde{H}_{ij} \equiv \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_j}, \quad (2.13)$$

ces relations deviennent

$$\tilde{p}(x_g) = \tilde{p}_1 \frac{\tilde{H}_{21} \sin(k(x_g - x_1)) - \sin(k(x_g - x_2))}{\sin(k(x_2 - x_1))}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{p}(x_d) = \tilde{p}_3 \frac{\sin(k(x_4 - x_d)) - \tilde{H}_{43} \sin(k(x_3 - x_d))}{\sin(k(x_4 - x_3))}. \quad (2.15)$$

D'autre part, le report des relations (2.4) et (2.6) dans l'équation (1.17) pour la vitesse particulaire moyenne, sachant que  $\tilde{u} = S\langle\tilde{v}\rangle$ , conduit aux expressions suivantes pour le débit acoustique :

$$\tilde{u}(x) = Z_c^{-1} \left[ \tilde{p}^+(x_g) e^{ik(x-x_g)} - \tilde{p}^-(x_g) e^{-ik(x-x_g)} \right], \quad \forall x \in [0, x_g], \quad (2.16)$$

$$\tilde{u}(x) = Z_c^{-1} \left[ \tilde{p}^+(x_d) e^{ik(x-x_d)} - \tilde{p}^-(x_d) e^{-ik(x-x_d)} \right], \quad \forall x \in [x_d, L], \quad (2.17)$$

où l'impédance caractéristique complexe  $Z_c$  est définie par la relation (1.27). En introduisant les relations (2.7)-(2.10) dans les équations (2.16) et (2.17) appliquées respectivement aux abscisses  $x_g$  et  $x_l$ , les débits acoustiques sont finalement donnés par

$$\tilde{u}(x_g) = \tilde{p}_1 \frac{\tilde{H}_{21} \cos(k(x_g - x_1)) - \cos(k(x_g - x_2))}{iZ_c \sin(k(x_2 - x_1))}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{u}(x_d) = \tilde{p}_3 \frac{\tilde{H}_{43} \cos(k(x_3 - x_d)) - \cos(k(x_4 - x_d))}{iZ_c \sin(k(x_4 - x_3))}. \quad (2.19)$$

Les relations (2.14)-(2.15) et (2.18)-(2.19) peuvent donc être utilisées dans l'équation (2.2) pour calculer les coefficients de la matrice de transfert. Cependant, il apparaît évident que la relation (2.2) constitue un système de deux équations à quatre inconnues, d'où la nécessité d'effectuer deux mesures pour deux états différents du système : ces deux mesures sont indiquées dans la suite par les exposants (1) et (2). Partant du principe que ces deux mesures sont réalisées, l'équation (2.2) conduit à l'écriture de deux systèmes matriciels "découplés", soit

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}^{(1)}(x_g) & \tilde{u}^{(1)}(x_g) \\ \tilde{p}^{(2)}(x_g) & \tilde{u}^{(2)}(x_g) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp} \\ \mathcal{T}_{pu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}^{(1)}(x_d) \\ \tilde{p}^{(2)}(x_d) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

pour la détermination de  $\mathcal{T}_{pp}$  et  $\mathcal{T}_{pu}$ , et

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}^{(1)}(x_g) & \tilde{u}^{(1)}(x_g) \\ \tilde{p}^{(2)}(x_g) & \tilde{u}^{(2)}(x_g) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{up} \\ \mathcal{T}_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^{(1)}(x_d) \\ \tilde{u}^{(2)}(x_d) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

pour la détermination de  $\mathcal{T}_{up}$  et  $\mathcal{T}_{uu}$ . Notons que la raison pour laquelle les deux états de mesure (1) et (2) doivent être nécessairement linéairement indépendants apparaît ici de façon triviale puisque la matrice  $2 \times 2$  impliquée dans les deux relations précédentes doit obligatoirement être à déterminant non-nul. Posons alors les six termes de phases  $\Phi_{21} = k(x_2 - x_1)$ ,  $\Phi_{g1} = k(x_g - x_1)$ ,  $\Phi_{g2} = k(x_g - x_2)$ ,  $\Phi_{43} = k(x_4 - x_3)$ ,  $\Phi_{3d} = k(x_3 - x_d)$  et  $\Phi_{4d} = k(x_4 - x_d)$ , pour lesquels toutes les distances sont définies positives, et les fonctions  $D_1$  et  $D_2$  définies selon

$$D_1\left(\tilde{H}_{ij}, \Phi_1, \Phi_2\right) = \tilde{H}_{ij} \sin \Phi_1 - \sin \Phi_2, \quad (2.22)$$

$$D_2\left(\tilde{H}_{ij}, \Phi_1, \Phi_2\right) = \tilde{H}_{ij} \cos \Phi_1 - \cos \Phi_2, \quad (2.23)$$

de sorte que les relations de pression et débit acoustiques (2.14), (2.15), (2.18) et (2.19) appliquées aux mesures (1) et (2) s'écrivent

$$\tilde{p}(x_g)^{(1,2)} = \tilde{p}_1^{(1,2)} \frac{D_1\left(\tilde{H}_{21}^{(1,2)}, \Phi_{g1}, \Phi_{g2}\right)}{\sin \Phi_{21}}, \quad (2.24)$$

$$\tilde{p}(x_d)^{(1,2)} = \tilde{p}_3^{(1,2)} \frac{-D_1\left(\tilde{H}_{43}^{(1,2)}, \Phi_{3d}, \Phi_{4d}\right)}{\sin \Phi_{43}}, \quad (2.25)$$

$$\tilde{u}(x_g)^{(1,2)} = \tilde{p}_1^{(1,2)} \frac{D_2\left(\tilde{H}_{21}^{(1,2)}, \Phi_{g1}, \Phi_{g2}\right)}{iZ_c \sin \Phi_{21}}, \quad (2.26)$$

$$\tilde{u}(x_d)^{(1,2)} = \tilde{p}_3^{(1,2)} \frac{D_2\left(\tilde{H}_{43}^{(1,2)}, \Phi_{3d}, \Phi_{4d}\right)}{iZ_c \sin \Phi_{43}}. \quad (2.27)$$

Sous ces conditions et après quelques développements, on peut ainsi montrer que les solutions des systèmes d'équations (2.20) et (2.21) conduisent aux expressions suivantes pour les coefficients de transfert :

$$\mathcal{T}_{pp} = \frac{\tilde{H}_{31}^{(2)} D_1\left(\tilde{H}_{43}^{(2)}\right) D_2\left(\tilde{H}_{21}^{(1)}\right) - \tilde{H}_{31}^{(1)} D_1\left(\tilde{H}_{43}^{(1)}\right) D_2\left(\tilde{H}_{21}^{(2)}\right)}{\sin \Phi_{43} \left[ \tilde{H}_{21}^{(2)} - \tilde{H}_{21}^{(1)} \right]}, \quad (2.28)$$

$$(iZ_c)^{-1} \mathcal{T}_{pu} = \frac{\tilde{H}_{31}^{(1)} D_1\left(\tilde{H}_{43}^{(1)}\right) D_1\left(\tilde{H}_{21}^{(2)}\right) - \tilde{H}_{31}^{(2)} D_1\left(\tilde{H}_{43}^{(2)}\right) D_1\left(\tilde{H}_{21}^{(1)}\right)}{\sin \Phi_{43} \left[ \tilde{H}_{21}^{(2)} - \tilde{H}_{21}^{(1)} \right]}, \quad (2.29)$$

$$(iZ_c) \mathcal{T}_{up} = \frac{\tilde{H}_{31}^{(1)} D_2\left(\tilde{H}_{43}^{(1)}\right) D_2\left(\tilde{H}_{21}^{(2)}\right) - \tilde{H}_{31}^{(2)} D_2\left(\tilde{H}_{43}^{(2)}\right) D_2\left(\tilde{H}_{21}^{(1)}\right)}{\sin \Phi_{43} \left[ \tilde{H}_{21}^{(2)} - \tilde{H}_{21}^{(1)} \right]}, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{T}_{uu} = \frac{\tilde{H}_{31}^{(2)} D_2\left(\tilde{H}_{43}^{(2)}\right) D_1\left(\tilde{H}_{21}^{(1)}\right) - \tilde{H}_{31}^{(1)} D_2\left(\tilde{H}_{43}^{(1)}\right) D_1\left(\tilde{H}_{21}^{(2)}\right)}{\sin \Phi_{43} \left[ \tilde{H}_{21}^{(2)} - \tilde{H}_{21}^{(1)} \right]}, \quad (2.31)$$

expressions dans lesquelles apparaît encore une fois la condition d'indépendance des deux états du système ( $\tilde{H}_{21}^{(2)} \neq \tilde{H}_{21}^{(1)}$ ).

La méthode à deux charges permet donc de calculer les coefficients de la matrice de transfert du biporte acoustique à partir des mesures de fonctions de transfert entre microphones grâce aux relations (2.28)-(2.31), et ce pour différentes conditions de chauffage. Il convient néanmoins de préciser qu'il s'agit d'une méthode relativement indirecte, qui nécessite donc beaucoup de précautions pour éviter la propagation importante d'erreurs sur les résultats finaux. Hormis le procédé d'étalonnage des microphones décrit dans le paragraphe 2.2 de ce chapitre, une attention particulière est portée sur différents facteurs susceptibles de perturber la mesure. Il est important par exemple d'assurer la parfaite étanchéité du dispositif aux endroits où les tubes, le noyau et les microphones sont connectés, afin d'éviter toute fuite d'air (ceci est réalisé au moyen de graisse à vide). La distance  $\Delta x$  entre microphones est également un paramètre crucial pour ce type de mesure qui dépend de la gamme de fréquence d'analyse ; elle est fixée à  $\Delta x = 60 \text{ cm}$  de manière à respecter le critère donné par Åbom dans ses travaux [20, 1] :

$$0.1\pi < k\Delta x < 0.8\pi, \quad (2.32)$$

qui se traduit en l'occurrence dans la fenêtre d'analyse utilisée ici par

$$34 \text{ cm} \lesssim \Delta x \lesssim 272 \text{ cm} \quad \text{pour } f = 50 \text{ Hz}, \quad (2.33)$$

$$8.5 \text{ cm} \lesssim \Delta x \lesssim 68 \text{ cm} \quad \text{pour } f = 200 \text{ Hz}. \quad (2.34)$$

Enfin, précisons que les incertitudes sur les variables d'environnement (pression statique  $p_0$  et température ambiante  $T_c$ ), les dimensions des tubes, les distances entre microphones et les mesures de fonctions de transfert sont estimées et leur répercussion sur les coefficients de transfert est prise en compte dans une loi de propagation des erreurs (les détails de ces calculs sont fournis en annexe D de ce document).

## 2.4 Mesure des coefficients de transfert

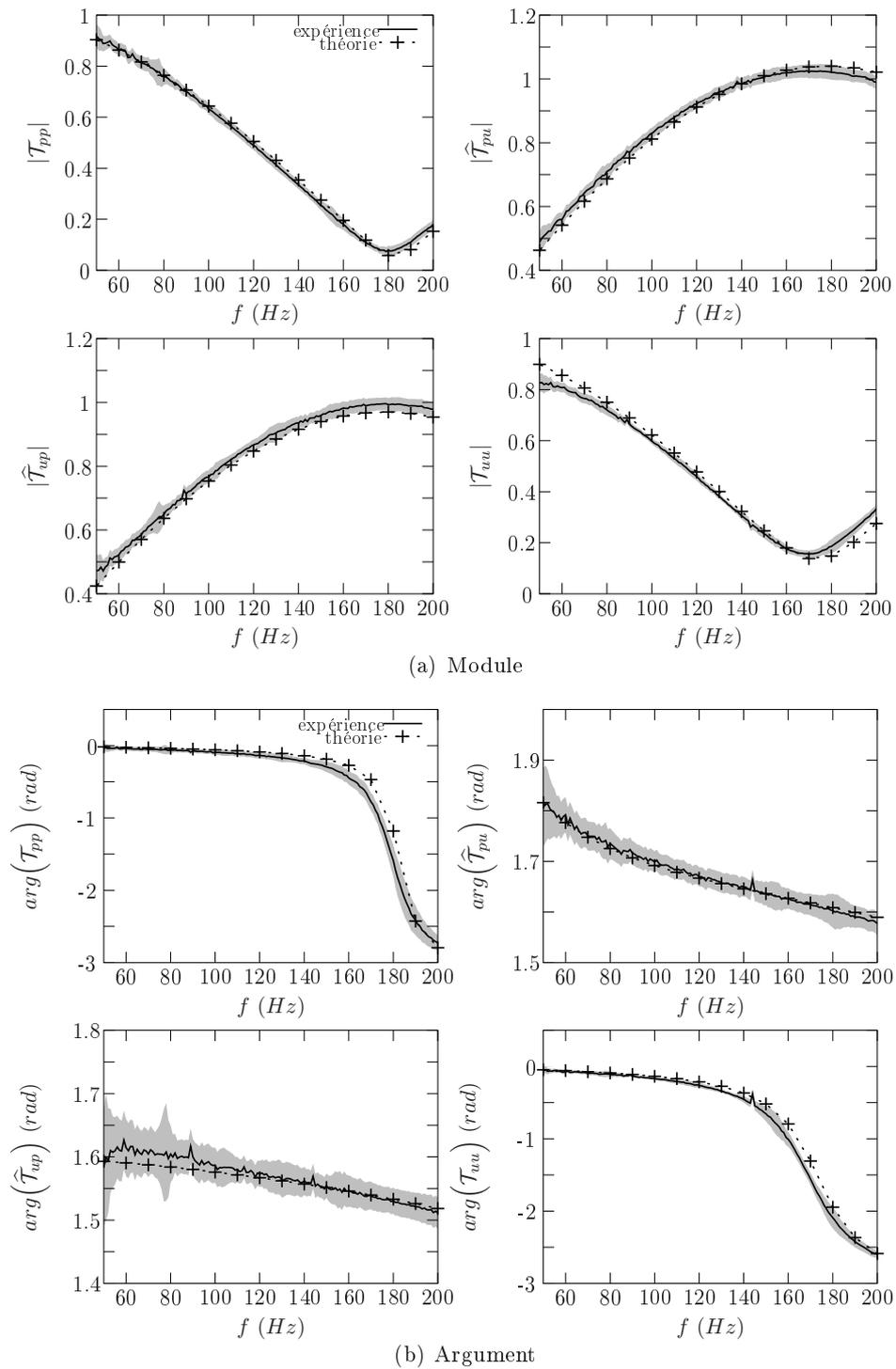
### 2.4.1 En l'absence de chauffage

La première campagne de mesure est réalisée pour une puissance de chauffage nulle et une distribution de température supposée constante et égale en tout point à la température  $T_c$ . Les résultats obtenus pour les coefficients de transfert sont présentés en module et en argument sur les figures 2.10(a) et 2.10(b), respectivement. Sur ces figures, les coefficients transverses sont adimensionnés et définis selon

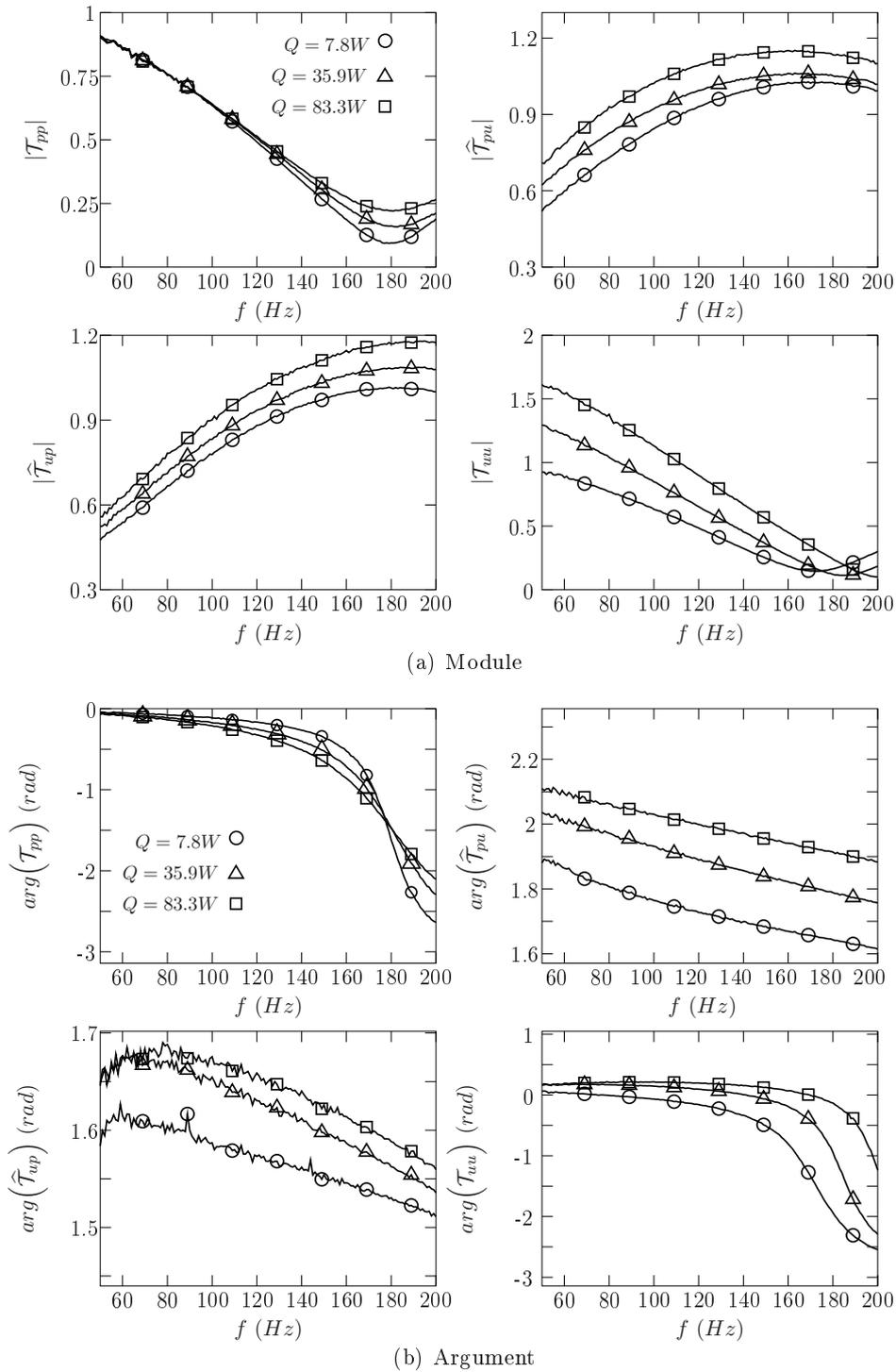
$$\widehat{\mathcal{T}}_{pu} = Z_c^{-1} \mathcal{T}_{pu}, \quad (2.35)$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{up} = Z_c \mathcal{T}_{up}. \quad (2.36)$$

Les résultats de mesure, indiqués en traits pleins, sont comparés à une solution analytique (+) développée en détails dans le chapitre 3. Cette solution est obtenue via la modélisation du stack et de l'échangeur chaud par un milieu poreux de porosité  $\phi = 0.9$  et de rayon de pores  $r_s = 0.5 \text{ mm}$  et la modélisation des zones annexes (échangeurs froids et tubes) par des tubes larges [cf. éqs. (A.10) et (A.11) de l'annexe A]. Afin de ne pas surcharger les graphiques par des barres d'erreurs, les incertitudes de mesure sont présentées sous forme d'enveloppes grisées. Le détail du calcul de ces incertitudes est donné en annexe D. Le faible pourcentage d'erreurs et le bon accord entre la mesure et la théorie



**FIGURE 2.10** – Modules et arguments des quatre coefficients de transfert mesurés (en trait continu) et calculés analytiquement (+) en l’absence de chauffage ( $Q = 0W$ ). Les incertitudes de mesure sont présentées sous forme d’enveloppes (zones grisées). La solution analytique est obtenue pour un stack de porosité  $\phi = 0.9$  et de rayon de pores  $r_s = 0.5 \text{ mm}$ .

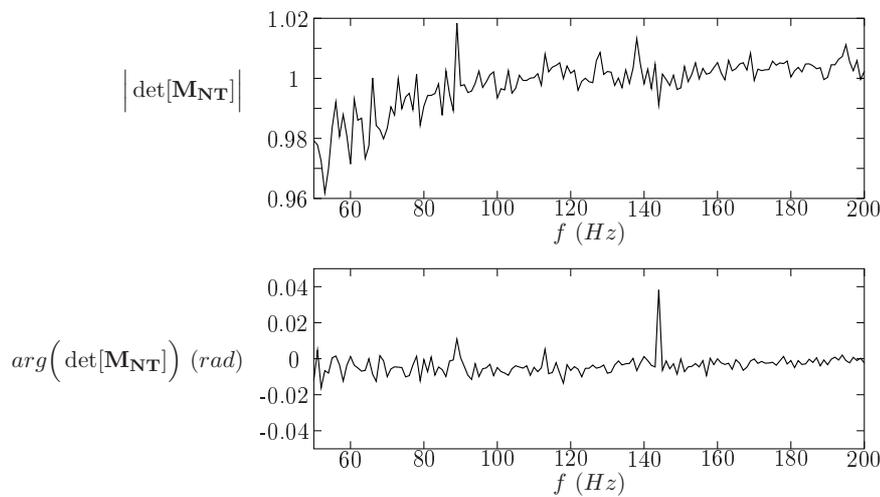


**FIGURE 2.11** – Modules et arguments des quatre coefficients de transfert mesurés pour différentes puissances de chauffage  $Q$  dissipées dans l'échangeur chaud :  $Q_{min} = 7.8W$  ( $\circ$ ),  $Q = 35.9W$  ( $\triangle$ ) et  $Q_{max} = 83.3W$  ( $\square$ ).

sont des conséquences des nombreuses précautions prises lors de l'expérience. La figure 2.12 présente le calcul du déterminant de la matrice du noyau

$$\det[\mathbf{M}_{\text{NT}}] \equiv \mathcal{T}_{pp}\mathcal{T}_{uu} - \widehat{\mathcal{T}}_{pu}\widehat{\mathcal{T}}_{up}, \quad (2.37)$$

en fonction de la fréquence. Pour  $Q = 0W$ , la valeur moyenne du module du déterminant sur la gamme de fréquence est de 0.998 ( $\simeq 1$ , avec un écart-type correspondant de  $9 \cdot 10^{-3}$ ) et la valeur moyenne de l'argument est de  $-3.7 \cdot 10^{-3}$  rad ( $\simeq 0$  rad, avec un écart-type correspondant de  $5.2 \cdot 10^{-3}$  rad) ce qui confirme le fait que la matrice de transfert du biporte est bien réciproque lorsqu'aucun gradient de température n'est imposé.



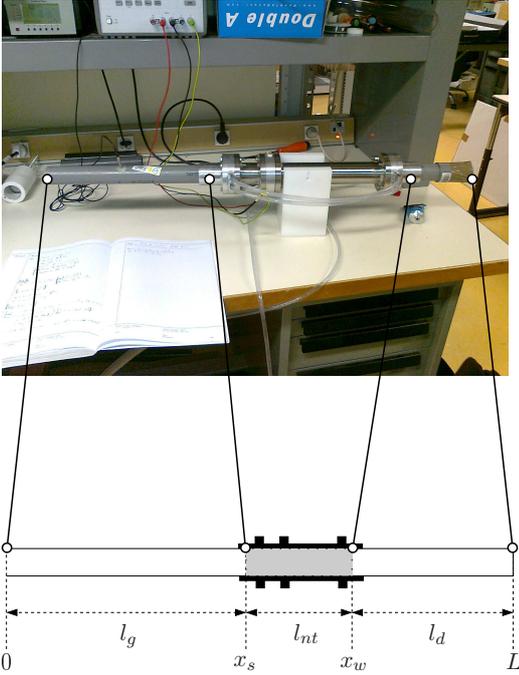
**FIGURE 2.12** – Module et argument du déterminant de la matrice de transfert expérimentale du noyau en l'absence de chauffage ( $Q = 0W$ ).

#### 2.4.2 Pour différentes conditions de chauffage

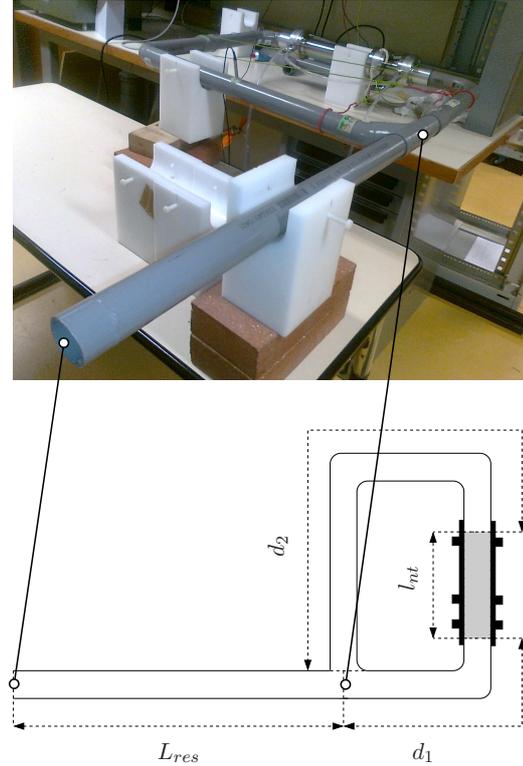
Les résultats obtenus pour différentes puissances de chauffage  $Q$  sont donnés sur les figures 2.11(a) et 2.11(b). Par souci de visibilité, seuls trois cas sont présentés ici, correspondant à des puissances de chauffage  $Q_{\min} = 7.8W$  ( $\circ$ ),  $Q = 35.9W$  ( $\triangle$ ) et  $Q_{\max} = 83.3W$  ( $\square$ ). L'ensemble des données expérimentales regroupant 25 valeurs de  $Q$ , incrémentées de  $7.8W$  à  $83.3W$  de façon quadratique (incrément linéaire de tension aux bornes de la résistance chauffante) est donnée en annexe D de ce document. Il convient de noter que pour chaque incrément de chauffage, un délai d'attente de 5min. a été respecté pour atteindre le régime stationnaire des transferts de chaleur dans le noyau.

## 2.5 Prédiction du seuil de déclenchement

Une fois déterminée expérimentalement, la matrice de transfert du noyau thermoacoustique  $\mathbf{M}_{\text{NT}}$  est à présent introduite dans les équations (1.30) et (1.54) pour déterminer les conditions de déclenchement de deux configurations de moteurs thermoacoustiques : un système à *ondes stationnaires* ouvert-fermé de type *quart d'onde* [cf. fig. 2.13], puis un système à *ondes progressives* constitué d'une



**FIGURE 2.13** – Photographie et représentation schématique du prototype de moteur à ondes stationnaires intégrant le noyau thermoacoustique caractérisé par la méthode à deux charges.



**FIGURE 2.14** – Photographie et représentation schématique du prototype de moteur à ondes progressives intégrant le noyau thermoacoustique caractérisé par la méthode à deux charges.

boucle couplée à un résonateur droit [cf. fig. 2.14]. Afin de juger de la précision de ce modèle analytico-expérimental, chacun des systèmes simulés a été construit et les conditions ont été mesurées, en terme de fréquence de déclenchement  $f_o$  et de puissance de déclenchement  $Q_o$ .

### 2.5.1 Calcul des conditions de déclenchement à partir des données expérimentales

Pour calculer les conditions de déclenchement, la matrice de transfert expérimentale est introduite dans les équations caractéristiques (1.30) et (1.54). Il est néanmoins important de préciser que, du fait que l'équation caractéristique est obtenue pour des valeurs discrètes  $(\omega_i, Q_j)$ , la dérivée intervenant dans la relation de récurrence (1.59) ne peut se faire qu'au moyen d'une interpolation des données, et par conséquent, la résolution numérique par la méthode de Newton-Raphson ne peut pas être directement appliquée ici.

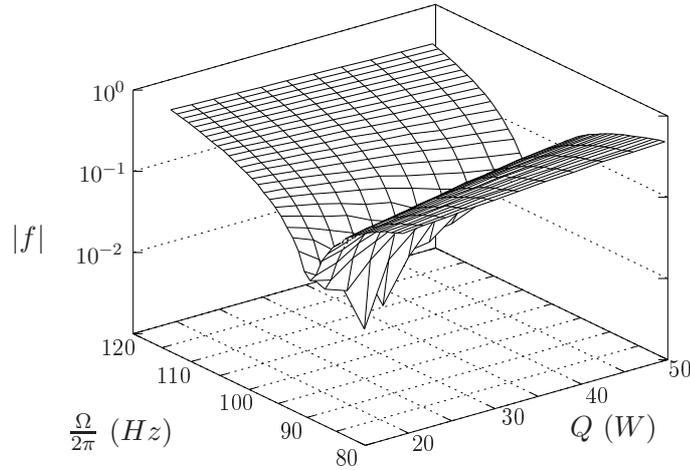
En toute rigueur, les conditions de déclenchement peuvent être déterminées simplement à partir de la résolution de l'équation caractéristique (1.58) à l'ordre 0 en  $\epsilon_g$  ( $\epsilon_g = 0$ ), ce qui revient à déterminer

le couple  $(\Omega_o, Q_o)$  solution du système d'équations

$$\Re \{f(\Omega, Q)\} = 0, \quad (2.38)$$

$$\Im \{f(\Omega, Q)\} = 0. \quad (2.39)$$

Concrètement, cela est réalisé en recherchant le minimum du module  $|f(\Omega, Q)|$  dans le plan  $(\Omega, Q)$ , comme l'illustre la figure 2.15. Aucune interpolation n'est faite sur les mesures ; le pas de résolution fréquentiel et le pas d'incrément de chauffage permettent de donner une estimation de l'erreur commise sur le calcul de  $\Omega_o$  et  $Q_o$ .



**FIGURE 2.15** – Module de la fonction  $f$  en fonction de la fréquence et de la puissance de chauffage pour le système à ondes stationnaires “ouvert-fermé” décrit dans le paragraphe 2.5.2, avec  $l_g = 33.5$  cm. Le seuil de déclenchement correspond au couple  $(\Omega_o, Q_o)$  qui minimise  $|f|$ .

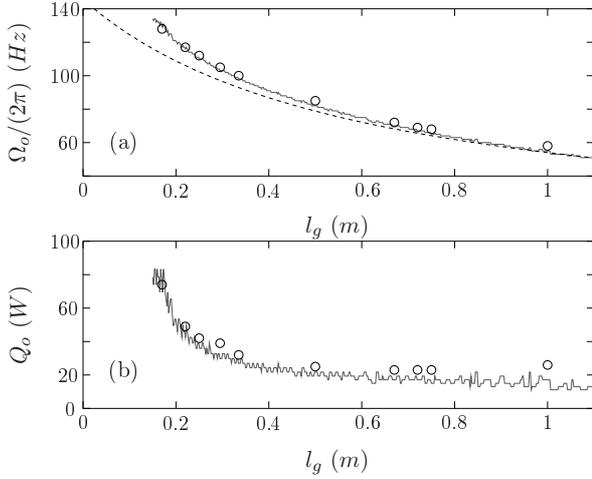
### 2.5.2 Système à ondes stationnaires

L'étude est réalisée dans un premier temps sur un moteur droit “ouvert-fermé” [cf. fig. 2.13]. Le noyau thermoacoustique caractérisé précédemment est à présent connecté à deux guides cylindriques en PVC de rayon interne identique à celui du noyau. Le tube à droite est fermé par une paroi rigide et sa longueur est gardée constante de sorte que  $l_d = L - x_w = 10$  cm. Le tube de gauche est ouvert sur l'extérieur et sa longueur  $l_g$  varie de 17 cm à 1 m.

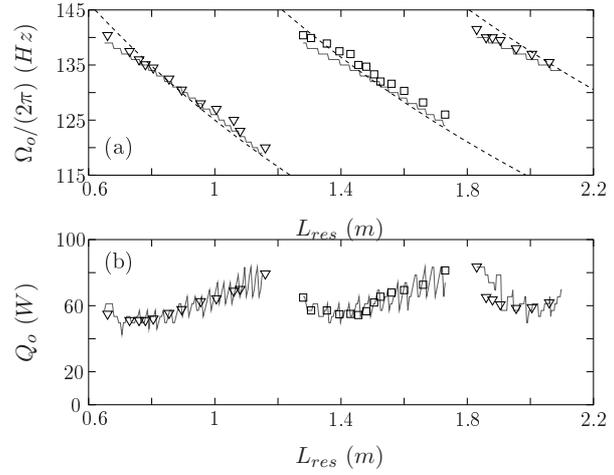
La figure 2.16 présente la fréquence de déclenchement  $\Omega_o/(2\pi)$  [2.16-(a)] et la puissance de déclenchement  $Q_o$  [2.16-(b)] en fonction de la longueur  $l_g$  du tube de gauche. Les résultats obtenus par le modèle semi-analytique, représentés en traits pleins, sont comparés aux conditions réelles de déclenchement (o). On peut noter que la fréquence de déclenchement diminue avec la longueur, restant proche de la fréquence du premier mode quart d'onde du tube [ $\Omega = \pi c_0/(2L)$ , en trait tireté sur la figure 2.16-(a)].

### 2.5.3 Système annulaire couplé

Les prédictions du modèle semi-analytique sont à présent comparées avec les conditions de déclenchement réellement observées dans un système annulaire couplé à un résonateur secondaire droit [cf.



**FIGURE 2.16** – Conditions de déclenchement du système à ondes stationnaires “ouvert-fermé” en fonction de la longueur  $l_g$  du tube à gauche du noyau. Les données expérimentales (o) sont comparées aux résultats issus du modèle semi-analytique (traits pleins). La fréquence théorique du premier mode quart d’onde ( $\Omega = \pi c_0/(2L)$ ) est également indiquée en trait tireté.

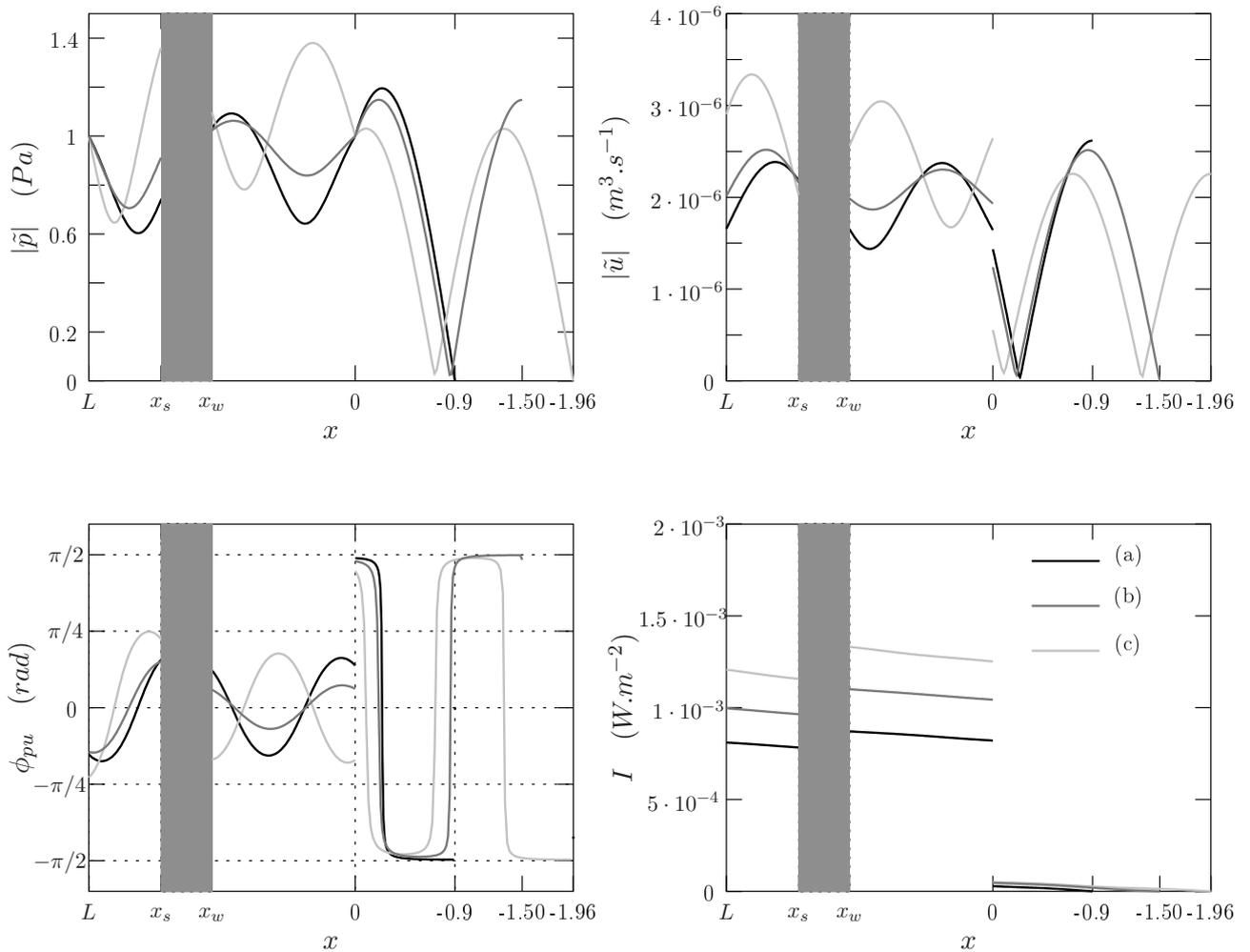


**FIGURE 2.17** – Conditions de déclenchement du système à ondes progressives en fonction de la longueur  $L_{res}$  du résonateur droit. Les données expérimentales sont représentées par des symboles, lorsque le résonateur est ouvert ( $\nabla$ ) et lorsque le résonateur est fermé ( $\square$ ), et comparées aux résultats issus du modèle semi-analytique (traits pleins). Les fréquences théoriques ( $\Omega = 2\pi c_0/\lambda$ ) sont également indiquées en trait tireté, pour (de gauche à droite)  $\lambda = L \equiv (l_{nt} + d_2 + L_{res})$ ,  $\lambda = (4/5) \times L$  et  $\lambda = (2/3) \times L$ .

fig. 2.13]. La longueur déroulée totale de l’anneau est de  $2.4\text{ m}$  et la distance  $d_1$  séparant l’échangeur froid et la jonction en T est de  $65\text{ cm}$ .

En figure 2.17, les conditions de déclenchement sont présentées en fonction de la longueur  $L_{res}$  et de l’impédance terminale du résonateur secondaire. En chaque point de mesure – correspondant à une valeur donnée de  $L_{res}$  – deux conditions d’impédances terminales ont été testées : sur la figure 2.17, les triangles ( $\nabla$ ) correspondent à une terminaison ouverte, tandis que les carrés ( $\square$ ) correspondent à une condition de paroi rigide. Pour chacune de ces deux conditions d’impédance, l’absence de résultats pour certaines longueurs est simplement due à un seuil de déclenchement trop élevé (aussi bien théoriquement qu’expérimentalement), supérieur à la puissance de chauffage maximale  $Q_{max} = 83\text{ W}$  pouvant être apportée à l’échangeur chaud. Selon la valeur de  $L_{res}$ , l’éventuelle amplification de l’instabilité thermoacoustique est donc régie par l’impédance terminale du résonateur droit : une terminaison ouverte est davantage favorable au déclenchement de l’onde pour  $L_{res} \simeq [0.6, 1.2] \cup [1.8, 2.1]\text{ m}$ , tandis qu’une terminaison fermée est plus favorable pour  $L_{res} \simeq [1.2, 1.8]\text{ m}$ .

Cette influence de l’impédance terminale du résonateur secondaire sur les conditions de déclenchement est directement liée à la distribution des champs acoustiques dans le moteur. Afin d’illustrer ces propos, les champs de pression et débit acoustiques sont reconstruits à partir des propriétés de transfert du noyau et du modèle de propagation linéaire décrivant les éléments externes au noyau. La



**FIGURE 2.18** – Distributions de la pression acoustique  $\tilde{p}$ , du débit acoustique  $\tilde{u}$  et de l'intensité active  $I = \Re\{\tilde{p}\tilde{u}^*\}/(2\pi R^2)$  dans l'ensemble du système, obtenues pour 3 longueurs du résonateur secondaire : (a)  $L_{res} = 0.9m$ , terminaison ouverte; (b)  $L_{res} = 1.50m$ , terminaison fermée; (c)  $L_{res} = 1.96m$ , terminaison ouverte. Les champs acoustiques sont calculés de sorte que la pression acoustique soit de  $1Pa$  au niveau de la connection entre la boucle et le résonateur droit [ $x = 0(L)$ ].

figure 2.18 propose un exemple de reconstruction des champs acoustiques dans l'ensemble du système. La zone grisée correspond au noyau thermoacoustique à l'intérieur duquel la propagation acoustique est inconnue. Les champs sont calculés de sorte que la pression acoustique soit de  $1Pa$  au niveau de la connection entre la boucle et le résonateur droit [ $x = 0(L)$ ]. Trois cas différents sont représentés sur la figure 2.18 : (a)  $L_{res} = 0.9m$ , terminaison ouverte [cf. fig. 2.17, branche de gauche] ; (b)  $L_{res} = 1.50m$ , terminaison fermée [cf. fig. 2.17, branche au centre] ; (c)  $L_{res} = 1.96m$ , terminaison ouverte [cf. fig. 2.17, branche de droite]. On peut notamment observer que le taux d'ondes stationnaires est très important dans le résonateur secondaire, l'intensité active transportée par l'onde étant principalement confinée dans la boucle.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un banc de mesure pour la caractérisation des propriétés de transfert d'un noyau thermoacoustique est développé. La méthode à quatre microphones utilisée permet d'obtenir de bons résultats pour la mesure de la matrice de transfert du noyau intégrant le stack en céramique. Il convient de préciser que cette méthode de mesure est adaptée pour la caractérisation de matériaux à pores assez larges et de faible résistance au passage de l'air, idéale donc pour traiter des matériaux type *stack*, mais s'avère inefficace pour la caractérisation de matériaux à pores plus réduits type *régénérateur* [13]. En effet, l'insertion d'un matériau possédant une grande résistance au passage de l'air induit des réflexions importantes dans le tube en amont du noyau, et très peu de transmission en aval, ce qui rend la méthode extrêmement sensible aux sources de bruit et de biais. Pour la caractérisation de ces matériaux plus complexes, Bannwart *et al.* ont notamment développé une méthode basée sur la mesure des impédances d'entrée et de transfert, qui permet d'obtenir de meilleurs résultats que la méthode à deux charges classique [13, 25, 26].

Les données expérimentales sont directement exploitables pour la prédiction des conditions de déclenchement lorsque la matrice de transfert du noyau est utilisée dans le modèle développé au chapitre 1. Ceci permet notamment de valider à la fois la qualité des mesures et le modèle utilisé pour la description de moteurs thermoacoustiques. L'avantage de cette approche analytico-expérimentale est de pouvoir décrire le comportement du noyau sans avoir à modéliser les éléments qui le constituent, ce qui permet de s'affranchir d'un certain nombre d'hypothèses concernant par exemple la géométrie des pores ou la description uni-dimensionnelle du champ de température.

Les données expérimentales peuvent également être exploitées pour ajuster les paramètres acoustiques et thermiques d'un modèle de noyau thermoacoustique. Dans le chapitre 3, la description en régime stationnaire des transferts thermiques qui s'établissent dans le noyau est développée et une méthode inverse est exposée, qui vise à estimer des paramètres physiques mal connus à partir des mesures acoustiques.

## Chapitre 3

# Modélisation du noyau thermoacoustique et estimation de paramètres par une méthode inverse

La méthode à quatre microphones présentée au chapitre 2 permet de mesurer la matrice de transfert d'un noyau thermoacoustique sous différentes conditions de chauffage. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures D.5 et D.6 en annexe de ce mémoire pour le cas d'un stack en céramique (cordiérite) à pores carrés de densité surfacique 600 CPSI. Dans le paragraphe 2.5, il est démontré notamment que la prédiction des conditions de déclenchement est possible à partir de ces résultats expérimentaux, constituant ainsi une méthode "pragmatique" pour la description de moteurs thermoacoustiques basée sur une approche "boîte noire" pour laquelle il n'est pas nécessaire de décrire les différents éléments du noyau.

Les limites d'une approche aussi directe paraissent en revanche évidentes. La précision du modèle est intimement liée au nombre de points de mesure (résolution fréquentielle, incrément de chauffage) et aux incertitudes sur ces points. De plus, les mesures étant effectuées à bas niveau sonore, en l'absence d'écoulement et en régime de conduction thermique stationnaire, il est clair que ces mesures reflètent la propagation linéaire des ondes acoustiques dans le noyau et ne peuvent pas être exploitées pour une description de l'amplification et de la saturation de l'instabilité thermoacoustique en régime non-linéaire. En l'état actuel des choses, la description des phénomènes physiques mis en jeu au-delà du seuil de déclenchement passe donc obligatoirement par une description des transferts thermiques qui s'opèrent au sein du système, y compris ceux générés par l'acoustique (vent acoustique, transport de chaleur thermoacoustique).

Une seconde approche est donc exposée dans ce chapitre, qui consiste à exploiter les données expérimentales pour ajuster un modèle décrivant la propagation d'ondes acoustiques dans le noyau soumis à un gradient de température. Le recalage du modèle avec les données expérimentales est réalisé par l'estimation numérique de paramètres acoustiques et thermiques et relève du domaine des problèmes inverses. Tout problème inverse, quel que soit son type, consiste à rapprocher l'observation expérimentale d'un phénomène physique à un modèle théorique, appelé *problème direct*, décrivant au mieux le

phénomène observé [45]. Ici, il s'agit concrètement de proposer un modèle théorique décrivant la matrice de transfert du noyau thermoacoustique, et d'estimer des paramètres acoustiques et thermiques afin d'ajuster les coefficients de transfert  $\mathcal{T}_{ij}$  théoriques et expérimentaux :

- Dans un premier temps, le cas sans chauffage est étudié. Seuls les résultats expérimentaux pour  $Q = 0W$  sont exploités et un modèle analytique de propagation acoustique (cf. §3.1.1) est développé. La méthode inverse est appliquée pour l'estimation de la porosité  $\phi$  et du rayon des pores  $r_s$  (et éventuellement la tortuosité  $\alpha_t$  de l'échantillon, cf. §3.3.2) pour différents matériaux.
- Dans un second temps, le cas avec chauffage est étudié. Le problème direct est alors défini par un modèle décrivant les transferts thermiques qui s'établissent le long des éléments du noyau thermoacoustique et la méthode inverse est appliquée pour l'estimation d'une longueur caractéristique  $l_q$  traduisant la diffusion de la chaleur dans le stack/régénérateur.

Dans le paragraphe 3.1, la propagation d'ondes planes harmoniques dans le noyau en présence ou non d'un gradient de température est développée et constitue ainsi le *problème direct* associé à la méthode inverse. Cette modélisation reste basée sur des considérations extrêmement simplifiées de la physique du problème<sup>1</sup>, le but étant principalement de mettre à l'épreuve l'utilisation de la méthode inverse dans cette première approche. Le modèle utilisé est donc volontairement simplifié et il sera important de rester critique sur une quelconque interprétation quantitative des résultats. Dans le paragraphe 3.2, la formulation générale du problème inverse et la méthode de résolution sont développées. Cette méthode inverse est appliquée dans un premier temps aux résultats expérimentaux sans chauffage pour l'estimation des paramètres acoustiques  $\phi$ ,  $r_s$  et  $\alpha_t$  ; ceci fait l'objet du paragraphe 3.3. Enfin, le paragraphe 3.4 présente l'exploitation des données avec chauffage pour l'estimation de la longueur de diffusion  $l_q$ .

## 3.1 Propagation acoustique dans le noyau – problème direct

### 3.1.1 Propagation d'ondes planes harmoniques

Le formalisme utilisé pour décrire la propagation acoustique dans le noyau reste en tout point identique à celui abordé dans les chapitres précédents, selon lequel chaque élément constituant la cellule thermoacoustique est caractérisé par sa matrice de transfert. Afin de ne pas surcharger ces pages par des propos redondants, il sera donc fait référence principalement aux expressions analytiques développées en annexe A.

Une représentation schématique du noyau thermoacoustique est donnée sur la figure 2.1. Dans le modèle proposé pour décrire ce noyau, les échangeurs ambiants sont supposés ponctuels et de résistance au passage de l'air nulle de sorte qu'ils puissent être intégrés aux portions de guide de large section (i.e. hors stack et échangeur chaud).

---

1. Par anticipation sur la suite du mémoire, citons simplement le fait que l'on néglige la présence des échangeurs ambiants, la conduction de la chaleur dans les parois du guide et la dépendance en température des propriétés thermo-physiques du fluide et des matériaux.

Lorsqu'aucune puissance de chauffage n'est dissipée dans l'échangeur chaud, la distribution de température  $T_0(x) = T_c$  est considérée comme homogène et constante dans l'ensemble du noyau ; ce dernier correspondant au biporte acoustique situé entre  $x = x_g$  et  $x = x_d$  (cf. fig. 2.1) est donc équivalent à l'association en série de quatre biportes distincts et sa matrice de transfert totale est alors définie par le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp}(\omega, T_c) & \mathcal{T}_{pu}(\omega, T_c) \\ \mathcal{T}_{up}(\omega, T_c) & \mathcal{T}_{uu}(\omega, T_c) \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\mathbf{g},2} \times \mathbf{T}_{\mathbf{hx}} \times \mathbf{T}_{\mathbf{s}} \times \mathbf{T}_{\mathbf{g},1}, \quad (3.1)$$

où les matrices  $\mathbf{T}_{\mathbf{g},1}$  et  $\mathbf{T}_{\mathbf{g},2}$  correspondent aux tubes de large section (rayon interne  $R$ ) de longueurs respectives  $d_1 = x_{s,c} - x_g$  et  $d_2 = x_d - x_{hx}$  et où les matrices  $\mathbf{T}_{\mathbf{s}}$  et  $\mathbf{T}_{\mathbf{hx}}$  correspondent respectivement au stack de longueur  $l_s = x_{s,h} - x_{s,c}$  et à l'échangeur chaud de longueur  $l_{hx} = x_{hx} - x_{s,h}$  (cf. fig. 2.1). Conformément aux conventions retenues en annexe A de ce document, les expressions analytiques des matrices  $\mathbf{T}_{\mathbf{g},1}$  et  $\mathbf{T}_{\mathbf{g},2}$  sont données par l'équation (A.10) et celles des matrices  $\mathbf{T}_{\mathbf{s}}$  et  $\mathbf{T}_{\mathbf{hx}}$  sont obtenues par l'équation (A.11). Le stack est caractérisé par sa porosité, notée  $\phi$ , et par le rayon moyen interne  $r_s$  d'un pore. Il convient de noter qu'à ce stade des calculs, la distinction est faite entre le stack et l'échangeur chaud, les caractéristiques de ce dernier étant notées de façon analogue  $\phi_{hx}$  et  $r_{hx}$ . Dans le cadre de la campagne de mesures réalisée et présentée au chapitre 2, l'échangeur chaud est constitué du même matériau que le stack (céramique à pores carrés), soit donc  $\phi_{hx} = \phi$  et  $r_{hx} = r_s$ . En usant d'une méthode acoustique différente de celle proposée au chapitre 2 de ce mémoire, Bannwart *et al.* ont également mesuré les propriétés de transfert relatives à différents matériaux jouant le rôle de stack/régénérateur dans ce même noyau thermoacoustique [13]. Pour ces données supplémentaires, il est nécessaire de faire la distinction entre les caractéristiques du stack et de l'échangeur chaud.

Lorsqu'une puissance de chauffage  $Q$  est dissipée dans l'échangeur chaud, une distribution inhomogène de température  $T_0(x)$  prend place dans le stack, l'échangeur chaud et la partie passive (ou "thermal buffer tube"), de sorte que la matrice de transfert totale du noyau est redéfinie par le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{T}_{pu}(\omega, T_0(x)) \\ \mathcal{T}_{up}(\omega, T_0(x)) & \mathcal{T}_{uu}(\omega, T_0(x)) \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\mathbf{g},3} \times \mathbf{T}_{\mathbf{tbt}}(T_0(x)) \times \mathbf{T}_{\mathbf{hx}}(T_0(x)) \times \mathbf{T}_{\mathbf{s}}(T_0(x)) \times \mathbf{T}_{\mathbf{g},1}. \quad (3.2)$$

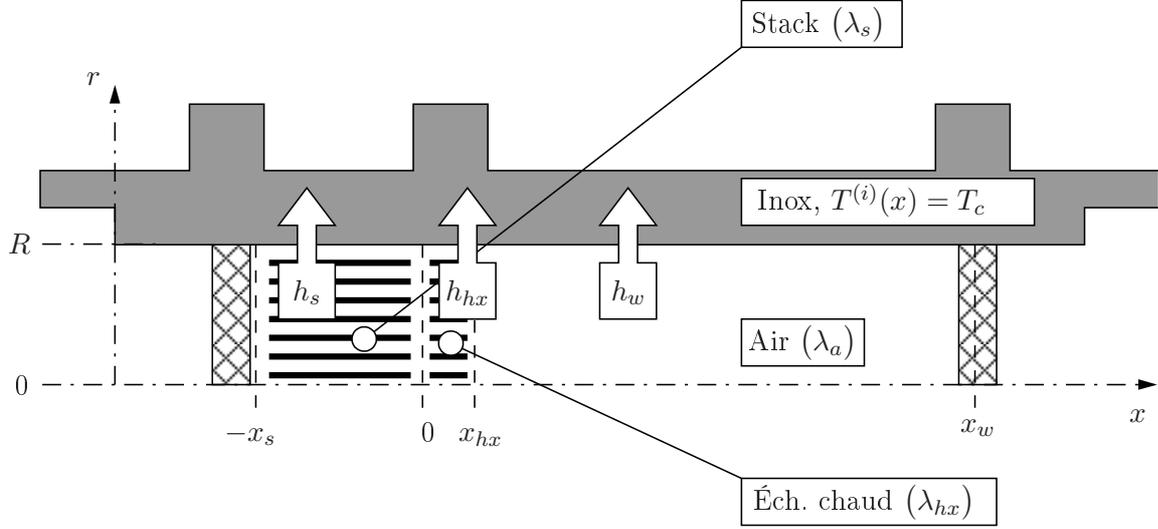
Dans l'équation (3.2), la matrice  $\mathbf{T}_{\mathbf{g},3}$  correspond à présent au tube de longueur  $d_3 = x_d - x_w$  [éq. (A.10), annexe A] et les expressions analytiques des matrices de transfert  $\mathbf{T}_{\mathbf{s}}$ ,  $\mathbf{T}_{\mathbf{hx}}$  et  $\mathbf{T}_{\mathbf{tbt}}$  sont alors données par l'équation (A.28) décrivant la propagation d'ondes planes harmoniques dans un biporte soumis à une distribution quelconque de température.

### 3.1.2 Diffusion de la chaleur dans le noyau

Une représentation schématique du noyau thermoacoustique est donnée sur la figure 3.1. Le fluide à l'intérieur du noyau (air) est caractérisé par sa conductivité thermique  $\lambda_a$ . Le stack et l'échangeur chaud, constitués à la fois de fluide et de solide, sont considérés comme des milieux homogènes équivalents de porosités respectives  $\phi$  et  $\phi_{hx}$  et de conductivités thermiques équivalentes :

$$\lambda_s = \lambda_a \phi + \lambda_m (1 - \phi), \quad (3.3)$$

$$\lambda_{hx} = \lambda_a \phi_{hx} + \lambda_{mx} (1 - \phi_{hx}), \quad (3.4)$$



**FIGURE 3.1** – Représentation schématique du noyau thermoacoustique constitué de quatre milieux distincts : l’air dans la partie passive du noyau, les parois en acier inoxydable, le stack/régénérateur et l’échangeur chaud (milieux supposés homogènes).

où  $\lambda_m$  (resp.  $\lambda_{mx}$ ) est la conductivité thermique du matériau qui constitue le squelette solide du stack (resp. de l’échangeur).

Afin de décrire les transferts de chaleur qui s’opèrent dans ces différents milieux, on considère d’une part que l’apport de chaleur  $Q$  se traduit par un terme de source volumique dans l’échangeur chaud, et d’autre part que les parois en inox sont de parfaits puits thermiques à température constante  $T^{(i)} = T_c$ . En régime stationnaire, les équations de la chaleur sont alors écrites dans chaque domaine de la façon suivante :

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda_s \frac{dT_0}{dx} \right) - \frac{h_s}{D} (T_0 - T_c) = 0 \quad \forall x \in [-x_s, 0], \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda_{hx} \frac{dT_0}{dx} \right) - \frac{h_{hx}}{D} (T_0 - T_c) = \frac{Q}{l_{hx} \pi R^2} \quad \forall x \in [0, x_{hx}], \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda_a \frac{dT_0}{dx} \right) - \frac{h_w}{D} (T_0 - T_c) = 0 \quad \forall x \in [x_{hx}, x_w], \quad (3.7)$$

où  $D = \frac{R}{2}$  est la dimension caractéristique des ailettes (rapport section / périmètre “mouillé” [92]) et où  $h_s$ ,  $h_{hx}$  et  $h_w$  sont des coefficients traduisant les échanges de chaleur latéraux entre les parois en inox et les milieux “stack”, “échangeur” et “partie passive”, respectivement (cf. fig. 3.1). A partir de considérations simplifiées des effets de conduction et de convection dans les parties fluide et solide, il est possible d’obtenir des expressions analytiques de ces coefficients d’échanges pour des cas académiques. En particulier dans le cas d’un cylindre horizontal de rayon  $R$ , le coefficient d’échange  $h_w$  peut s’écrire sous la forme suivante :

$$h_w = \frac{\lambda_a N_u}{2R}, \quad (3.8)$$

où  $N_u$  est le nombre de Nusselt ( $N_u = 3.66$  en régime laminaire [44, 16]). Les coefficients  $h_s$  et  $h_{hx}$  sont cependant plus difficiles à estimer car ils nécessitent la description précise des flux de chaleur dans le

squelette solide et dans le fluide saturant. Dans le cas d'un matériau à pores carrés droits (cas du stack en céramique), Penelet *et al.* proposent une expression analytique pour le coefficient  $h_s$  [71, 68]. Sur la base de ces travaux, une expression équivalente est présentée en annexe E et développée ici selon :

$$h_s = \frac{\lambda_{s,\perp}}{\ln(2)R} \left[ 1 + \frac{\lambda_{s,\perp}}{\lambda_i} \left( \frac{\ln(R_e/R + 1)}{\ln(2)} - 1 \right) \right]^{-1}, \quad (3.9)$$

où  $\lambda_i$  et  $R_e$  représentent respectivement la conductivité thermique des parois en inox et le rayon externe du guide<sup>2</sup>, et où  $\lambda_{s,\perp}$  représente la conductivité thermique radiale équivalente du stack :

$$\lambda_{s,\perp} = \left( \frac{1 - \sqrt{\phi}}{\lambda_m} + \frac{1}{4N_u\lambda_a + \lambda_m \frac{1 - \sqrt{\phi}}{\sqrt{\phi}}} \right)^{-1}. \quad (3.10)$$

Dans le cas présent où la conduction dans les parois du guide n'est pas prise en compte, la résistance thermique associée à l'inox est négligée et l'expression (3.9) se simplifie sous la forme :

$$h_s = \frac{\lambda_{s,\perp}}{\ln(2)R}. \quad (3.11)$$

Cette expression peut notamment se déduire de (3.9) en considérant des parois infiniment conductives ( $\lambda_i \gg \lambda_{s,\perp}$ ) où infiniment fines ( $R_e \rightarrow R$ ). Les expressions (3.9)-(3.11) peuvent également être utilisées pour le coefficient d'échange  $h_{hx}$  entre l'échangeur chaud et les parois sous réserve que la géométrie interne de l'échangeur soit celle d'un matériau à pores carrés.

Dans ce qui suit, les propriétés thermophysiques des milieux fluide et solide sont supposées indépendantes de la température et les équations de la chaleur (3.5)-(3.7) se réécrivent selon

$$\frac{d^2T_0}{dx^2} - \frac{h_s}{\lambda_s D} (T_0 - T_c) = 0 \quad \forall x \in [-x_s, 0], \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2T_0}{dx^2} - \frac{h_{hx}}{\lambda_{hx} D} (T_0 - T_c) = \frac{Q}{\lambda_{hx} l_{hx} \pi R^2} \quad \forall x \in [0, x_{hx}], \quad (3.13)$$

$$\frac{d^2T_0}{dx^2} - \frac{h_w}{\lambda_a D} (T_0 - T_c) = 0 \quad \forall x \in [x_{hx}, x_w]. \quad (3.14)$$

Aux trois équations (3.12)-(3.14) sont associées les conditions aux limites suivantes :

- température imposée en  $x = -x_s$  et  $x = x_w$  :<sup>3</sup>

$$T_0(-x_s) = T_0(x_w) = T_c, \quad (3.15)$$

- continuité de la température et du flux de chaleur en  $x = 0$  :

$$T_0(0^-) = T_0(0^+), \quad (3.16)$$

$$\lambda_s \frac{dT_0}{dx} \Big|_{0^-} = \lambda_{hx} \frac{dT_0}{dx} \Big|_{0^+}, \quad (3.17)$$

2. Notons que puisque le noyau thermoacoustique étudié est assemblé par des pièces de diamètres différents (cf. fig. 3.1), le rayon externe  $R_e$  est défini à partir d'un rayon moyen ( $R_e \simeq 3.2cm$ ).

3. Les échangeurs de chaleurs sont considérés ici comme des échangeurs thermiques parfaits qui imposent la température froide  $T_c$  au fluide, quelles que soient les conditions de chauffage.

– continuité de la température et du flux de chaleur en  $x = x_{hx}$  :

$$T_0(x_{hx}^-) = T_0(x_{hx}^+), \quad (3.18)$$

$$\lambda_{hx} \frac{dT_0}{dx} \Big|_{x_{hx}^-} = \lambda_a \frac{dT_0}{dx} \Big|_{x_{hx}^+}. \quad (3.19)$$

Le problème thermique est ainsi entièrement défini par l'ensemble des équations (3.12)-(3.19). Une résolution par différences finies permet donc de calculer la température  $T_0(x)$  qui est ensuite introduite dans l'équation (3.2) pour obtenir les coefficients de la matrice de transfert du noyau.

## 3.2 Formulation du problème inverse

### 3.2.1 Critère des moindres carrés

Le *problème direct* est entièrement défini par les équations (3.1) et (3.2) pour les conditions  $Q = 0$  et  $Q \neq 0$ , respectivement. Les paramètres à estimer sont rangés dans un vecteur  $\mathbf{\Upsilon}$  à  $p$  composantes et le problème inverse consiste à trouver le vecteur  $\hat{\mathbf{\Upsilon}}$  qui minimise l'écart quadratique  $S$  entre les résultats expérimentaux et le modèle :

$$\begin{aligned} S(\mathbf{\Upsilon}) = & \sum_{i=1}^n |\mathcal{T}_{pp,exp}(\omega_i) - \mathcal{T}_{pp}(\omega_i, \mathbf{\Upsilon})|^2 + \sum_{i=1}^n |\hat{\mathcal{T}}_{pu,exp}(\omega_i) - \hat{\mathcal{T}}_{pu}(\omega_i, \mathbf{\Upsilon})|^2 \\ & + \sum_{i=1}^n |\hat{\mathcal{T}}_{up,exp}(\omega_i) - \hat{\mathcal{T}}_{up}(\omega_i, \mathbf{\Upsilon})|^2 + \sum_{i=1}^n |\mathcal{T}_{uu,exp}(\omega_i) - \mathcal{T}_{uu}(\omega_i, \mathbf{\Upsilon})|^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

où  $n$  est le nombre de points expérimentaux et où la notation *exp* permet de faire la distinction entre les coefficients de transfert expérimentaux et théoriques. L'écriture de l'équation (3.20) signifie que la minimisation s'effectue sur les quatre coefficients de la matrice de transfert. En d'autres termes, cela peut être considéré comme la minimisation d'une fonction continue par morceaux. Afin de simplifier l'écriture des équations développées dans la suite, on introduit alors les vecteurs colonnes  $\mathcal{T}_{exp}$  et  $\mathcal{T}$  à

$4n$  composantes, obtenus par combinaison des quatre coefficients de transfert :

$$\mathcal{T}_{exp} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp,exp}(\omega_1) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{pp,exp}(\omega_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{T}}_{pu,exp}(\omega_1) \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{T}}_{pu,exp}(\omega_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{T}}_{up,exp}(\omega_1) \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{T}}_{up,exp}(\omega_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{uu,exp}(\omega_1) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{uu,exp}(\omega_n) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp}(\omega_1) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{pp}(\omega_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{T}}_{pu}(\omega_1) \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{T}}_{pu}(\omega_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{T}}_{up}(\omega_1) \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{T}}_{up}(\omega_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{uu}(\omega_1) \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{uu}(\omega_n) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

et l'écart quadratique est réécrit sous la forme suivante :

$$S(\boldsymbol{\Upsilon}) = \sum_{i=1}^{4n} |\mathcal{T}_{exp,i} - \mathcal{T}_i(\boldsymbol{\Upsilon})|^2. \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Méthode de minimisation

De manière générale, le problème de minimisation est non-linéaire au sens des paramètres (que ce soit pour le cas avec chauffage ou sans chauffage) :

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \Upsilon_p} = f(\boldsymbol{\Upsilon}), \quad (3.23)$$

ce qui implique l'utilisation d'une méthode itérative pour sa résolution. La méthode utilisée est une méthode dérivative de type Gauss-Newton. Il s'agit d'une méthode de minimisation relativement robuste et rapide pour l'estimation de paramètres, mais qui a le désavantage de diverger si l'on fixe des conditions initiales trop éloignées de la solution recherchée. Ce point est notamment discuté au travers d'une simulation d'expérience proposée au paragraphe 3.3.1.

Introduisons le vecteur complexe  $\mathbf{e}_{\mathbf{T}}$  à  $4n$  composantes

$$e_{T,i} = \mathcal{T}_{exp,i} - \mathcal{T}_i(\boldsymbol{\Upsilon}), \quad (3.24)$$

correspondant à l'erreur de prédiction (ou d'estimation), c'est à dire l'écart entre valeur mesurée et valeur calculée par le modèle. L'équation (3.22) peut alors être réécrite sous la forme d'un produit scalaire :

$$S(\boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{e}_{\mathbf{T}}^\dagger \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^{4n} e_{T,i}^* e_{T,i}, \quad (3.25)$$

où  $*$  représente le complexe conjugué et  $\dagger$  représente l'opérateur adjoint (transposé conjugué). La minimisation de l'écart quadratique se traduit alors par la résolution d'un système à  $p$  équations :

$$\frac{\partial S}{\partial \Upsilon_j} = 0, \quad \text{avec } j = 1, \dots, p. \quad (3.26)$$

A partir des équations (3.24) et (3.25), la dérivée première de  $S$  par rapport au  $j^{\text{e}}$  paramètre  $\Upsilon_j$  s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial \Upsilon_j} = - \sum_{i=1}^n (e_{T,i}^* X_{ij} + e_{T,i} X_{ij}^*), \quad (3.27)$$

soit sous forme matricielle :

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial \Upsilon_j} \right] = - \left( \mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_T^* + \mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_T \right), \quad (3.28)$$

$$= - \left( \left( \mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_T \right)^* + \mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_T \right), \quad (3.29)$$

$$= -2\Re \left( \mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_T \right). \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{X}$  est la matrice de sensibilité ( $4n \times p$ ) dont les coefficients sont définis comme

$$X_{ij} = \frac{\partial \mathcal{T}_i(\Upsilon)}{\partial \Upsilon_j} \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, 4n \quad \text{et } j = 1, 2, \dots, p. \quad (3.31)$$

Finalement, le système d'équations définies par (3.26) se réécrit au moyen de l'équation (3.30) sous la forme matricielle suivante :

$$\Re \left( \mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_T \right) = 0. \quad (3.32)$$

**Remarque** – Au vu des équations (3.1) et (3.2) décrivant le problème direct, les expressions analytiques des coefficients de la matrice de sensibilité sont généralement relativement difficiles à obtenir. Les sensibilités du modèle aux paramètres sont donc estimées numériquement avec une approximation au premier ordre (différences finies) :

$$\frac{\partial \mathcal{T}_i(\Upsilon)}{\partial \Upsilon_j} = \frac{\mathcal{T}_i(\Upsilon + \delta_{jl} \Delta \Upsilon) - \mathcal{T}_i(\Upsilon)}{\delta_{jl} \Delta \Upsilon}, \quad (3.33)$$

où  $\Delta \Upsilon$  est une petite variation du vecteur  $\Upsilon$  ( $\Delta \Upsilon = 1 \cdot 10^{-5} \times \Upsilon$ ) et où  $\delta_{jl}$  est le symbole de Kronecker.

Le problème direct étant non-linéaire au sens des paramètres, l'équation (3.32) est résolue de manière itérative et le vecteur  $\hat{\Upsilon}$  qui minimise le critère des moindres carrés  $S$  est alors obtenu à l'itération  $(k+1)$  en usant de la relation de récurrence :

$$\hat{\Upsilon}^{(k+1)} = \left[ \hat{\Upsilon} + \left( \Re \left( \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} \right) \right)^{-1} \Re \left( \mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_T \right) \right]^{(k)}. \quad (3.34)$$

Dans cette relation, la matrice carrée  $\Re \left( \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} \right)$  de dimension  $(p \times p)$  est appelée Hessien de la matrice de sensibilité. Afin d'alléger les écritures, cette matrice est notée  $\mathbf{H}$  dans la suite de ce mémoire :

$$\mathbf{H} = \Re \left( \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} \right). \quad (3.35)$$

Il est important de noter que la relation de récurrence (3.34) fait intervenir des matrices purement réelles, confirmant ainsi le fait que même si la minimisation s'effectue sur des quantités complexes, le vecteur paramètre estimé reste quant à lui bien réel à chaque itération.

**Critère d'arrêt** En règle générale, lorsque l'erreur d'estimation provient principalement d'une source de bruit sur les données expérimentales, l'algorithme d'inversion est arrêté lorsque l'écart entre théorie et expérience est comparable à l'écart-type du bruit de mesure [32, 45]. Dans le cas présent, cet écart à minimiser est davantage marqué par la présence d'un biais systématique plutôt que par un bruit aléatoire des données et ce critère d'arrêt ne peut pas être retenu. Le processus itératif est donc stoppé lorsque la variation relative du vecteur  $\hat{\mathbf{Y}}$  est inférieure à 0.1% d'une itération à l'autre :<sup>4</sup>

$$\left| \frac{\hat{\mathbf{Y}}^{(k)} - \hat{\mathbf{Y}}^{(k-1)}}{\hat{\mathbf{Y}}^{(k-1)}} \right| < 10^{-4}. \quad (3.36)$$

**Stabilité de l'estimation** Pour vérifier la nature inversible de  $\mathbf{H}$  qu'implique l'utilisation de la relation (3.34), il convient de s'assurer d'une part qu'il n'existe pas de relation linéaire entre les coefficients de la matrice de sensibilité  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_j}$ , et d'autre part que les sensibilités restent du même ordre de grandeur [84]. Avant toute chose, il est donc nécessaire d'effectuer une étude de sensibilité afin d'identifier le jeu de paramètres qui pourront être estimés par la méthode inverse.

Le degré de convergence de la méthode de Newton dépend également de façon cruciale du choix du vecteur initial  $\hat{\mathbf{Y}}^{(0)}$  ; il est parfois nécessaire de relancer plusieurs fois le processus itératif pour différentes conditions initiales afin de converger vers une solution satisfaisante. Pour l'ensemble des résultats issus de cette méthode et présentés dans la suite, afin de s'assurer de la stabilité des solutions obtenues, la procédure suivante a été adoptée :

1. Le vecteur initial est fixé arbitrairement, avec des valeurs "proches" du résultat attendu (physiquement réaliste).
2. La solution  $\hat{\mathbf{Y}}$  obtenue à la fin du processus itératif est écartée de 20% et l'algorithme est relancé avec ce nouveau vecteur initial pour vérifier que l'on retrouve bien la même solution.

### 3.3 Estimation de paramètres acoustiques

Dans cette partie du chapitre, le problème inverse est appliqué à la mesure de la matrice de transfert du noyau en l'absence de chauffage. Le modèle acoustique utilisé pour le calcul du *problème direct* est alors donné par l'équation (3.1). Dans le paragraphe 3.3.1, la méthode inverse est utilisée pour l'exploitation des données expérimentales obtenues lors de la caractérisation du stack en céramique (cf. chap. 2). Son utilisation est ensuite étendue à divers matériaux au paragraphe 3.3.2 : un empilement de grilles en acier inoxydable, une mousse de Nichrome et une mousse RVC [13].

#### 3.3.1 Stack en céramique

##### Simulation d'expérience – analyse des sensibilités et convergence de l'algorithme

La méthode inverse est utilisée pour estimer la porosité  $\phi$  et le rayon  $r_s$  des pores du stack dont une photographie est donnée sur la figure 3.6(a). Afin de vérifier la robustesse de l'algorithme de minimisation, la méthode d'identification est appliquée dans un premier temps à une simulation d'expérience.

---

4. ce critère a été retenu après plusieurs essais de la méthode.

L'équation (3.1) (*problème direct*) est utilisée pour simuler les données expérimentales<sup>5</sup>. Les paramètres  $\phi$  et  $r_s$  à estimer sont définis comme les composantes du vecteur  $\Upsilon_{\mathbf{v}}$  (indice  $\mathbf{v}$  pour “vrai”) et fixés aux valeurs suivantes :

$$\Upsilon_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{v,1} = \phi = 0.9 \\ \Upsilon_{v,2} = r_s = 0.5 \text{ mm} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Les courbes théoriques représentées par des croix (+) sur les figures 2.10(a) et 2.10(b) du chapitre 2 sont notamment obtenues à partir de l'équation (3.1) pour ces mêmes valeurs de  $\phi$  et  $r_s$ .

Les coefficients de sensibilité aux deux paramètres  $\phi$  et  $r_s$  obtenus par la relation (3.33) sont présentés sur la figure 3.2, sous une forme réduite :

$$\bar{X}_j = \Upsilon_j \frac{\partial \mathcal{T}(\Upsilon)}{\partial \Upsilon_j} \quad \text{avec} \quad j = 1, 2 \quad \text{et} \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \phi \\ r_s \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Les quatre branches dissociées correspondent aux quatre coefficients de la matrice de transfert. L'allure des courbes obtenues marque bien l'absence d'une quelconque dépendance linéaire entre les coefficients de sensibilité, ce qui signifie que les deux paramètres pourront être estimés grâce à la méthode inverse. En outre sont indiqués sur la figure 3.2 le facteur de corrélation

$$\sigma_{\phi, r_s} = \frac{\mathbf{H}_{12}^{-1}}{\sqrt{\mathbf{H}_{11}^{-1} \mathbf{H}_{22}^{-1}}}, \quad (3.39)$$

et le déterminant du Hessien. Le facteur de corrélation  $\sigma_{\phi, r_s}$  respecte le critère donné par Beck *et al.* selon lequel la procédure d'inversion échouera si le coefficient de corrélation est supérieur à 0.9 (en valeur absolue) [15]. Le déterminant de  $\mathbf{H}$  constitue également un bon indicateur de la stabilité de la procédure d'inversion. En effet, plus  $\det[\mathbf{H}]$  est proche de 0, plus  $\mathbf{H}$  est singulière et plus le calcul de  $\mathbf{H}^{-1}$  peut conduire à des instabilités numériques.

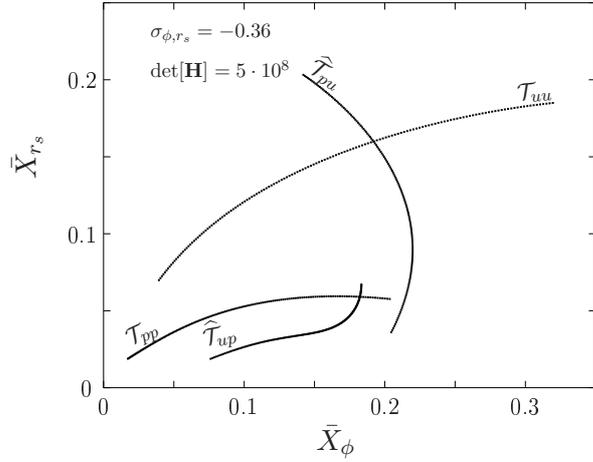
Afin de quantifier le degré de convergence de l'algorithme, la méthode de minimisation est testée pour différentes conditions initiales  $\hat{\Upsilon}^{(0)}$  de la relation de récurrence (3.34), plus ou moins éloignée de la solution réelle  $\Upsilon_{\mathbf{v}}$ . Les erreurs relatives obtenues sur  $\phi$  (o) et  $r_s$  (□) sont représentées sur la figure 3.3 en fonction du rapport  $\hat{\Upsilon}_j^{(0)}/\Upsilon_{v,j}$  entre la valeur initiale du  $j^{\text{e}}$  paramètre et la valeur “vraie”<sup>6</sup>. Pour l'ensemble des conditions initiales imposées à l'algorithme, la valeur réelle de  $\phi$  et  $r_s$  est retrouvée avec une erreur relative inférieure au critère d'arrêt.

### Simulation d'expérience – Influence du bruit de mesure sur l'estimation des paramètres

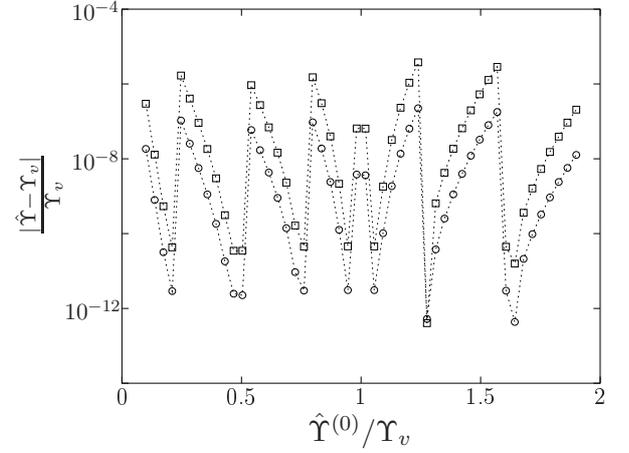
Afin de simuler la présence de bruit sur les données expérimentales, les signaux de pression au niveau des quatre microphones (cf. chapitre 2) sont reconstruits à partir de la matrice de transfert du noyau définie par l'équation (3.1) (*problème direct*). Pour cela, le signal du microphone 1 situé le plus

5. Rappelons que pour le stack en céramique, l'échangeur chaud est constitué du même matériau, et donc que  $\phi_{hx} = \phi$  et  $r_{hx} = r_s$ . Le produit  $\mathbf{T}_{\mathbf{hx}} \times \mathbf{T}_{\mathbf{s}}$  intervenant dans l'équation (3.1) est équivalent à la matrice d'un biporte poreux de longueur  $l_s + l_{hx}$ .

6. Lors de chaque estimation, le rapport  $\hat{\Upsilon}_j^{(0)}/\Upsilon_{v,j}$  est le même pour les deux paramètres.



**FIGURE 3.2** – Coefficients de sensibilité réduits pour la porosité  $\phi$  et le rayon d'un pore  $r_s$ . Les quatre branches dissociées correspondent aux quatre coefficients de la matrice de transfert. Sont également indiqués le coefficient de corrélation  $\sigma_{\phi,r_s}$  et le déterminant du Hessien associés à ces deux paramètres.



**FIGURE 3.3** – Erreur obtenue sur l'estimation de  $\phi$  et  $r_s$  en fonction de la condition de départ  $\hat{\Upsilon}^{(0)}$  de l'algorithme (normalisée par rapport aux valeurs réelles des paramètres).

proche de la source est considéré comme signal de référence et les trois signaux restants sont déduits du calcul des fonctions de transfert  $\tilde{H}_{ij}$ , connaissant la matrice du noyau et le type de charge acoustique au niveau de la terminaison. Sachant que les RSB relatifs à chaque microphone sont connus (cf. figures D.1 et D.2), un bruit gaussien de variance égale à celle du bruit de mesure est ajouté à ces signaux microphoniques reconstruits et la matrice de transfert est recalculée suivant le même protocole que celui utilisé lors des expériences. L'algorithme de minimisation est alors appliqué sur la matrice de transfert bruitée pour estimer l'erreur commise sur l'identification des paramètres.

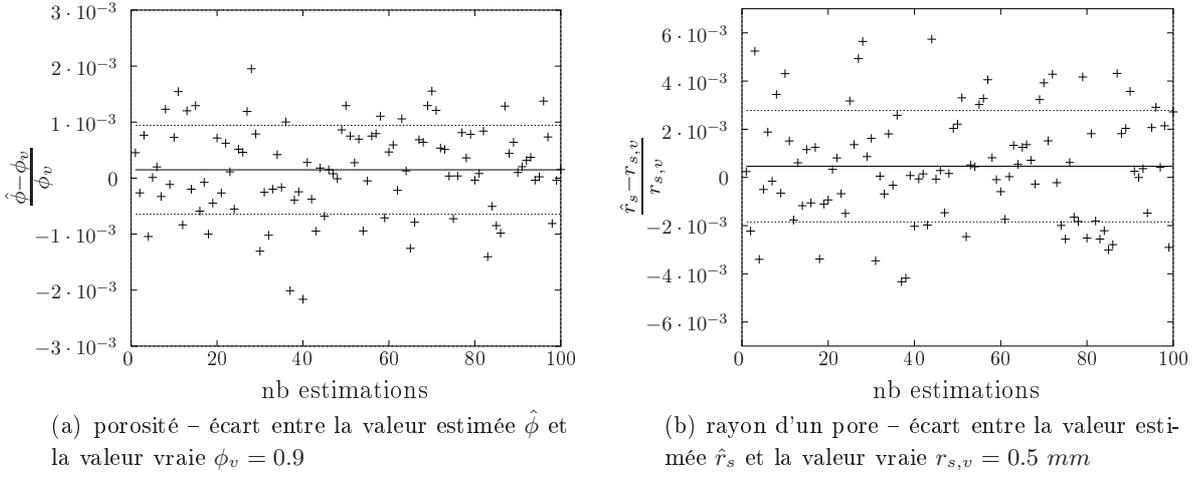
Sur la figure 3.4 sont présentées les erreurs relatives obtenues sur  $\phi$  [fig. 3.4(a)] et  $r_s$  [fig. 3.4(b)] pour 100 estimations sur des simulations de mesures bruitées. La moyenne des estimations est tracée en trait plein : les estimations restent très proches des valeurs réelles, avec un écart de l'ordre de 0.01% pour les deux paramètres. A partir de l'écart-type obtenu sur les résultats [en pointillés sur les courbes 3.4(a,b)], il est donc possible de quantifier les incertitudes sur l'estimation de  $\phi$  et  $r_s$  :

$$\sigma_{\phi} \simeq 7 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\phi}{\phi} \simeq 0.3\%, \quad (3.40)$$

$$\sigma_{r_s} \simeq 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta r_s}{r_s} \simeq 0.7\%. \quad (3.41)$$

### Simulation d'expérience – Quantification des erreurs

Outre la présence de bruit sur les données expérimentales, l'existence d'un biais persistant entre le modèle et la mesure est également responsable d'erreurs lors de l'identification de paramètres. Ce biais se traduit par une courbe de résidu en sortie de l'algorithme de minimisation. Parmi les sources de



**FIGURE 3.4** – Erreur sur l'estimation de  $\phi$  et  $r_s$  pour 100 estimations lorsqu'un bruit gaussien est ajouté aux signaux de pressions simulés. Conjointement sont tracés la **moyenne** (en trait plein) et l'**écart-type** (en pointillés) associés aux 100 estimations.

biais, on en distinguera deux types : le biais relatif aux incertitudes de mesure – concernant par exemple la connaissance a priori des variables d'environnement, la sensibilité des microphones, les distances, etc... – et le biais *naturel* qui existe entre le modèle et l'expérience, implicitement lié aux paramètres d'environnement que l'on suppose connus<sup>7</sup> et aux hypothèses formulées au départ<sup>8</sup>. Tandis que le premier peut être quantifié grâce à une loi de propagation des erreurs (sous réserve que l'on connaisse les sources d'erreurs et les incertitudes associées, cf. annexe D), le second est totalement inaccessible de façon directe du fait que l'on ne peut pas connaître l'erreur commise sur les paramètres du modèle. L'analyse du biais dû aux paramètres "connus" est discutée en annexe F.

Supposons que le modèle exact est connu, et que ce modèle est perturbé par des sources de bruit et de biais dues aux mesures :

$$\mathcal{T}_{exp} = \mathcal{T}(\mathbf{Y}_v) + \mathbf{e}_{br} + \mathbf{e}_M, \quad (3.42)$$

où  $\mathbf{Y}_v$  représente les paramètres réels du modèle exact, et où  $\mathbf{e}_{br}$  représente le bruit de mesure (variable stochastique) de moyenne nulle sur l'ensemble des données tandis que  $\mathbf{e}_M$  traduit le biais de mesure (erreurs systématiques). D'autre part, le modèle imparfait utilisé pour le *problème direct* peut être relié au modèle exact en formulant l'hypothèse selon laquelle les paramètres estimés  $\hat{\mathbf{Y}}$  restent proches des paramètres réels  $\mathbf{Y}_v$ , de sorte que l'on peut faire l'approximation suivante :

$$\mathcal{T}(\hat{\mathbf{Y}}) \simeq \mathcal{T}(\mathbf{Y}_v) + \mathbf{X}(\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}_v). \quad (3.43)$$

Le report des équations (3.42) et (3.43) dans (3.24) permet donc d'écrire l'erreur de prédiction sous la forme :

$$\mathbf{e}_T = \mathbf{e}_{br} + \mathbf{e}_M - \mathbf{X}\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{Y}}}, \quad (3.44)$$

7. Le calcul du *problème direct* nécessite obligatoirement de fixer certains paramètres "connus" tels que la température ambiante, la pression statique, la longueur des différents éléments, etc...

8. Rappelons que le modèle est basé sur des considérations simplifiées, comme par exemple la transparence des échangeurs ambiants à la propagation de l'onde acoustique.

avec  $\mathbf{b}_{\hat{\Upsilon}} = \hat{\Upsilon} - \Upsilon_v$ .

De façon générale, sous réserve de connaître les sources d'erreurs  $\mathbf{e}_{\mathbf{br}}$  et  $\mathbf{e}_{\mathbf{M}}$ , il est donc possible d'estimer l'erreur  $\mathbf{b}_{\hat{\Upsilon}}$  commise sur les paramètres estimés à partir du résidu  $\mathbf{e}_{\mathbf{T}}$  obtenu après minimisation. En principe,  $\mathbf{e}_{\mathbf{br}}$  et  $\mathbf{e}_{\mathbf{M}}$  sont accessibles par l'analyse des mesures et des incertitudes. Par ailleurs, l'influence du bruit de mesure ayant déjà été étudiée précédemment, on s'affranchira ici de cette source d'erreur ( $\mathbf{e}_{\mathbf{br}} = 0$ ). En l'absence de bruit, l'équation (3.44) devient donc :

$$\mathbf{X}\mathbf{b}_{\hat{\Upsilon}} = \mathbf{e}_{\mathbf{M}} - \mathbf{e}_{\mathbf{T}}, \quad (3.45)$$

et par suite, en multipliant par la transposée conjuguée  $\mathbf{X}^\dagger$  et en prenant la partie réelle de chaque terme, il vient :

$$\Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}) \mathbf{b}_{\hat{\Upsilon}} = \Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_{\mathbf{M}}) - \Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_{\mathbf{T}}). \quad (3.46)$$

Or, d'après la définition du problème de minimisation donnée par l'éq. (3.32), le premier terme du membre de droite de l'équation (3.46) est nul, ce qui conduit à écrire le biais  $\mathbf{b}_{\hat{\Upsilon}}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{b}_{\hat{\Upsilon}} = \mathbf{H}^{-1} \Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_{\mathbf{M}}). \quad (3.47)$$

Pour représenter l'incertitude obtenue sur les paramètres, il est utile d'introduire la matrice de covariance définie par

$$\mathbf{cov}(\hat{\Upsilon}) = \mathbf{b}_{\hat{\Upsilon}} \mathbf{b}_{\hat{\Upsilon}}^\dagger, \quad (3.48)$$

dont les éléments diagonaux correspondent aux variances  $\sigma_j = \text{var}(\hat{\Upsilon}_j)$  relatives à chacun des paramètres estimés.

Le biais  $\mathbf{e}_{\mathbf{M}}$  étant directement relié à l'incertitude sur le coefficient de transfert mesuré, par simple identification dans la relation (3.42),

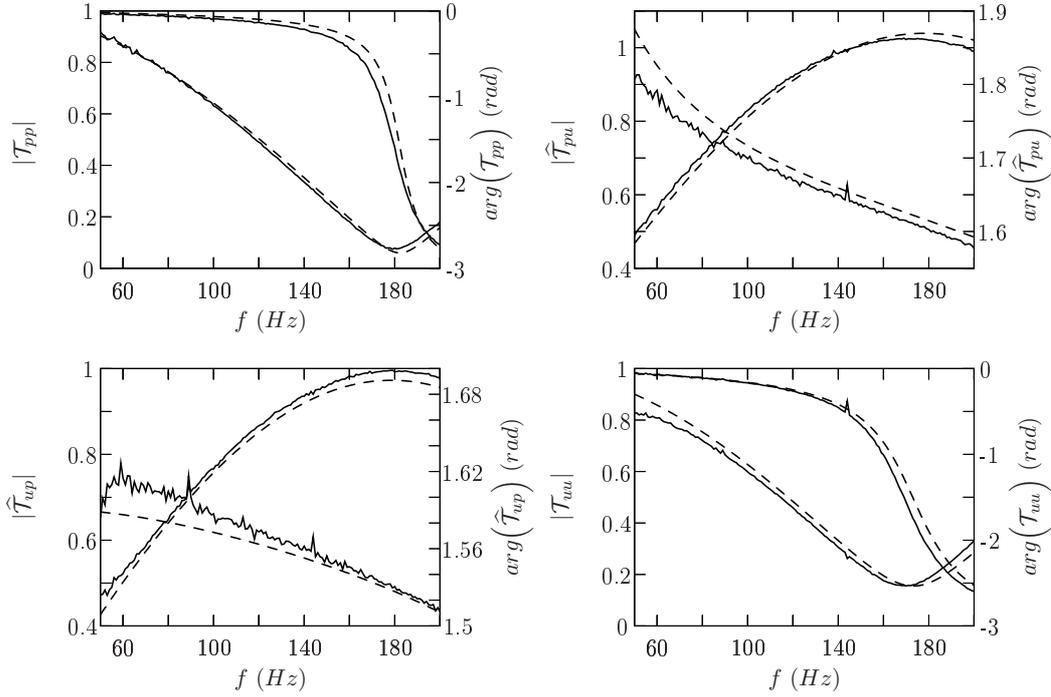
$$\mathbf{e}_{\mathbf{M}} = \pm \Delta \mathcal{T}_{exp}, \quad (3.49)$$

son expression est donnée en fonction des incertitudes sur le module et l'argument à partir d'une loi de propagation des erreurs classique, conduisant par exemple pour le coefficient  $\mathcal{T}_{pp}$  à la relation :

$$\mathbf{e}_{\mathbf{M},pp} = \pm \sqrt{\left(\cos(\phi_{pp})\Delta|\mathcal{T}_{pp}|\right)^2 + \left(\sin(\phi_{pp})|\mathcal{T}_{pp}|\Delta\phi_{pp}\right)^2} \quad (3.50)$$

$$\pm i \sqrt{\left(\sin(\phi_{pp})\Delta|\mathcal{T}_{pp}|\right)^2 + \left(\cos(\phi_{pp})|\mathcal{T}_{pp}|\Delta\phi_{pp}\right)^2}, \quad (3.51)$$

avec ici  $\phi_{pp} = \text{Arg}(\mathcal{T}_{pp})$ . Notons que des relations équivalentes sont obtenues sur les autres coefficients de transfert. A partir des incertitudes estimées sur les coefficients de la matrice de transfert (voir par exemple la fig. D.7 de l'annexe D), il est donc possible de quantifier l'erreur commise sur l'identification des paramètres en usant des relations (3.47) et (3.48).



**FIGURE 3.5** – Stack en céramique. Module et argument des quatre coefficients de transfert mesurés (en trait continu) et calculé analytiquement (éq. 3.1, en trait tireté), après estimation des paramètres :  $\phi = 0.90$ ,  $r_s = 0.47 \text{ mm}$ .

### Estimations à partir des données expérimentales

La matrice de transfert expérimentale est présentée en figures 2.10(a) et 2.10(b) du chapitre 2 pour le stack en céramique 600 CPSI. L'estimation des paramètres  $\hat{\mathbf{Y}} = [\phi; r_s]$  est alors obtenue au moyen de la relation de récurrence (3.34) et les incertitudes sur ces estimations sont calculées à partir des résultats (3.40)-(3.41) et de l'équation (3.48) :

$$\phi = 0.90 \pm 0.01, \quad (3.52)$$

$$r_s = 0.47 \pm 0.05 \text{ mm}. \quad (3.53)$$

La figure 3.5 présente une comparaison entre la matrice de transfert expérimentale et la matrice théorique calculée après estimation des paramètres. Afin de juger de la cohérence des résultats issus de la méthode inverse, ceux-ci peuvent être comparés aux données issues du travail de thèse de S. Duffourd qui traite, entre autres, de l'utilisation du même stack en céramique 600 CPSI dans un réfrigérateur thermoacoustique [31]. Pour ce matériau, S. Duffourd mesure en effet une arête  $a$  du pore carré de  $0.92 \text{ mm}$  et une épaisseur  $e$  des parois en céramique de  $0.12 \text{ mm}$ . A partir de ces mesures, on peut donc aisément remonter à la porosité et au rayon équivalent du pore, soit :

$$\phi = \left( \frac{a}{a+e} \right)^2 \simeq 0.78, \quad (3.54)$$

$$r_s = \frac{h}{2} \simeq 0.46 \text{ mm}. \quad (3.55)$$



(a) céramique



(b) grilles d'inox



(c) mousse de Nichrome



(d) mousse de carbone

**FIGURE 3.6** – Photographies des différents matériaux caractérisés au moyen de la méthode à deux charges [38] et de la méthode d'impédance [13]

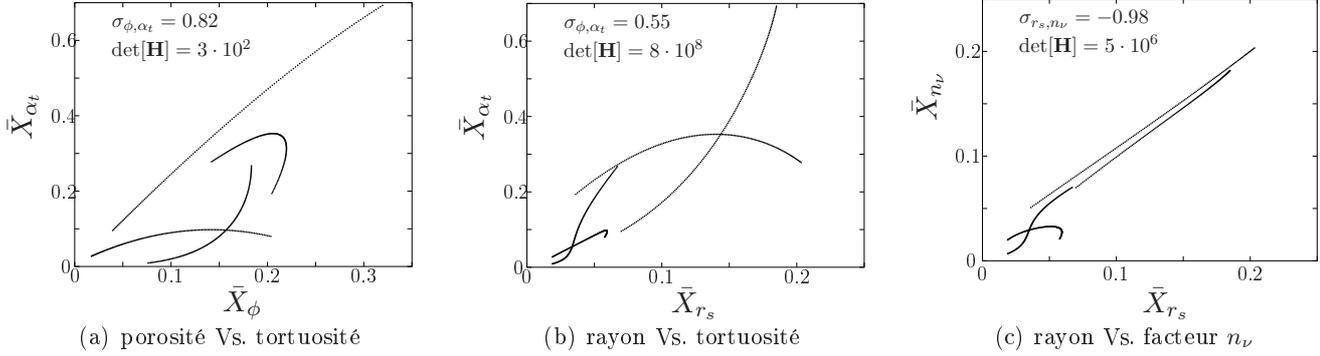
Bien que l'on obtienne un rayon de pore identique, il existe un écart non négligeable entre la valeur de porosité issue de [31] et celle trouvée par la technique inverse. L'hypothèse la plus probable reste celle du biais important qui existe entre le modèle proposé et la réalité physique de l'expérience, qui persiste à l'issue de la procédure d'inversion. Ce biais est issu des erreurs sur les paramètres supposés connus du modèle qui demeurent très difficiles à quantifier, mais également des erreurs provenant des hypothèses faites par exemple sur la transparence acoustique des échangeurs ambiants. Reste que les valeurs obtenues pour  $\phi$  et  $r_s$  par la méthode de minimisation sont celles pour lesquelles le modèle choisi retranscrit de la façon la plus fidèle les observations expérimentales.

### 3.3.2 Autres matériaux

#### Analyse de sensibilités

A présent validée pour le cas du stack en céramique [cf. fig. 3.6(a)], la méthode inverse est utilisée pour l'estimation des paramètres acoustiques d'autres matériaux jouant le rôle de régénérateur dans le noyau thermoacoustique. Au moyen d'une méthode de mesure différente de celle qui fait l'objet du chapitre 2, Bannwart *et al.* [13] ont caractérisé les propriétés de transfert pour trois matériaux plus complexes<sup>9</sup> : un empilement de grilles en acier inoxydable, une mousse de Nichrome et une mousse de carbone (RVC). Des photographies de ces différents matériaux sont données en fig. 3.6.

9. Cette méthode est basée sur la mesure des impédances d'entrée et de transfert du noyau thermoacoustique.



**FIGURE 3.7** – Coefficients de sensibilité réduits. Les paramètres analysés ici sont la porosité  $\phi$ , le rayon d'un pore  $r_s$ , la tortuosité  $\alpha_t$  et le facteur de forme  $n_\nu$ . Les quatre branches dissociées correspondent aux quatre coefficients de la matrice de transfert. Sont également indiqués le coefficient de corrélation  $\sigma_{x,y}$  et le déterminant du Hessien associés à chaque couple de paramètre.

Pour ces matériaux, la méthode inverse est utilisée pour identifier trois paramètres : la porosité  $\phi$ , le rayon  $r_s$  des pores et la tortuosité  $\alpha_t$  de l'échantillon. La tortuosité est introduite dans les équations régissant le *problème direct* de la même manière que dans la théorie développée en 2007 par Roh *et al.* [80], qui ont proposé une extension de la théorie de la thermoacoustique linéaire<sup>10</sup> aux matériaux poreux. Dans ce modèle théorique, la tortuosité joue d'une part le rôle de correction de longueur dans l'expression (A.12) du nombre d'onde  $k_{eq}$  :

$$k_{eq} = \alpha_t k_0 \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}}, \quad (3.56)$$

et apporte d'autre part une modification du gradient local de pression, intervenant ainsi dans l'expression (A.13) de l'impédance caractéristique  $Z_{eq}$  :

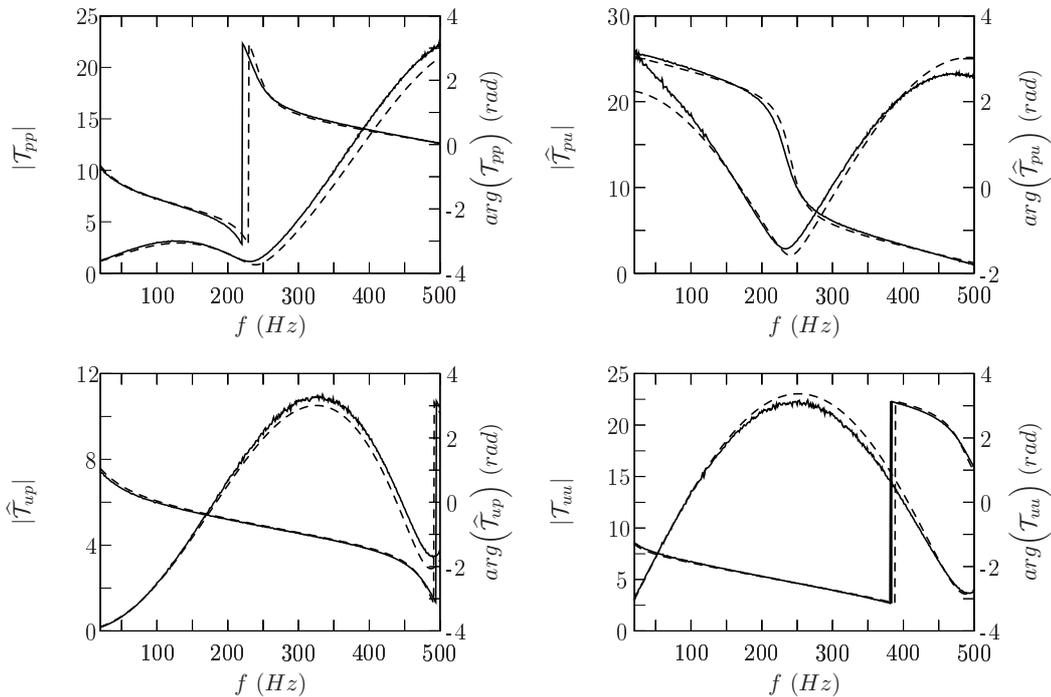
$$Z_{eq} = \frac{\alpha_t \rho_0 c_0}{\phi S \sqrt{(1 - f_\nu)(1 + (\gamma - 1)f_\kappa)}}. \quad (3.57)$$

La sensibilité à ce troisième paramètre est présentée sur les figures 3.7(a) et 3.7(b) en fonction des sensibilités réduites à la porosité et au rayon des pores, respectivement. Il n'existe pas de dépendance linéaire marquée entre les coefficients de sensibilités relatifs à ces trois paramètres, et les facteurs de corrélation  $\sigma_{\phi, \alpha_t}$  et  $\sigma_{r_s, \alpha_t}$  sont inférieurs à 0.9 : l'ajout de la tortuosité comme paramètre supplémentaire dans la procédure d'estimation ne conduit donc pas à une instabilité de la méthode inverse.

Notons malgré tout que l'estimation sur plus de trois paramètres peut rendre l'algorithme instable. C'est particulièrement le cas lorsque des facteurs de forme  $n_\nu$  et  $n_\kappa$  sont ajoutés à la méthode d'identification. Les facteurs de forme  $n_\nu$  et  $n_\kappa$  sont introduits par Roh *et coll.* dans les expressions des fonctions  $f_\nu$  et  $f_\kappa$  comme une correction aux épaisseurs de couches limites. En d'autres termes, l'ajout de ces deux paramètres se traduit par les expressions nouvelles :

$$f_{\nu, \kappa}(r_s) \rightarrow f_{\nu, \kappa}(n_{\nu, \kappa} r_s), \quad (3.58)$$

10. Théorie initialement écrite pour des réseaux de capillaires droits [83, 88, 5].



**FIGURE 3.8** – Empilement de grilles en acier inoxydable. Module et argument des quatre coefficients de transfert mesurés (en trait continu) et calculé analytiquement (éq. 3.1, en trait tireté), après estimation des paramètres :  $\phi = 0.68$ ,  $r_s = 40 \mu m$ ,  $\alpha_t = 1.06$ .

qui interviennent dans le calcul des pertes dans les pores du stack. Le mauvais conditionnement du Hessien, responsable d'une instabilité lors de la procédure d'inversion, est illustré sur la figure 3.7(c) et se traduit par une dépendance quasi-linéaire entre les coefficients de sensibilité  $\bar{X}_{n\nu}$  et  $\bar{X}_{r_s}$  ( $\sigma_{r_s, n\nu} = -0.98$ ).

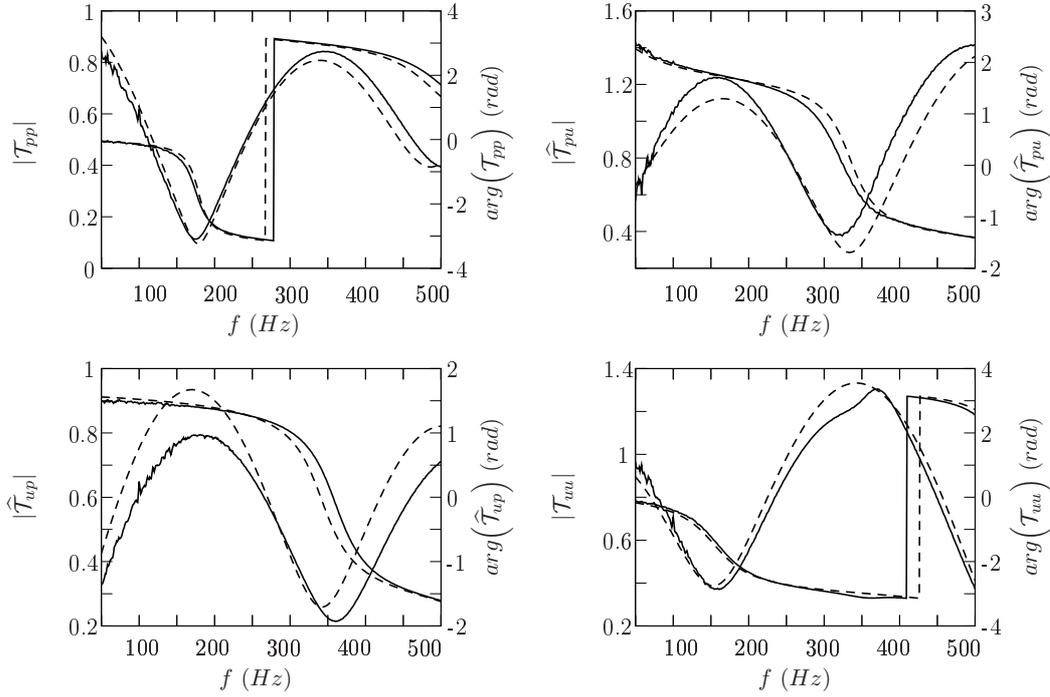
### Estimations à partir des données expérimentales

Lors de l'estimation des paramètres acoustiques des différents matériaux étudiés par Bannwart *et al.* [cf. figs. 3.6(b,c,d)], les paramètres du stack en céramique identifiés au paragraphe 3.3.1 sont utilisés comme caractéristiques géométriques de l'échangeur chaud. L'estimation des paramètres  $\hat{\mathbf{Y}} = [\phi; r_s; \alpha_t]$  est alors réalisée en usant de la relation de récurrence (3.34). Les résultats obtenus sont recensés dans le tableau 3.1 et les figures 3.8, 3.9 et 3.10 présentent la comparaison entre la matrice de transfert expérimentale et la matrice théorique pour l'empilement de grilles, la mousse de Nichrome et la mousse de carbone, respectivement.

Les résultats issus de l'estimation par la méthode inverse sont en bon accord avec les données fournies par les constructeurs et présentées dans le tableau 3.2 pour la porosité et le rayon des pores des échantillons. Les grilles en acier inoxydable<sup>11</sup> sont fournies avec une demi-arête nominale de  $45 \mu m$  et une porosité de 0.46. La mousse de Nichrome<sup>12</sup> est fournie avec un rayon moyen estimé de  $0.3 mm$ .

11. référence Gantois® Inox 316L 102083

12. référence RECEMAT® RCM-NCAX-2733.10



**FIGURE 3.9** – Mousse de Nichrome. Module et argument des quatre coefficients de transfert mesurés (en trait continu) et calculé analytiquement (éq. 3.1, en trait tireté), après estimation des paramètres :  $\phi = 0.91$ ,  $r_s = 0.31 \text{ mm}$ ,  $\alpha_t = 1.29$ .

	grilles [fig. 3.6(b)]	mousse NiCr [fig. 3.6(c)]	mousse RVC [fig. 3.6(d)]
$\phi$	$0.68 \pm 0.01$	$0.91 \pm 0.01$	$0.97 \pm 0.01$
$r_s$	$40 \pm 4 \mu\text{m}$	$0.31 \pm 0.03 \text{ mm}$	$0.17 \pm 0.02 \text{ mm}$
$\alpha_t$	$1.06 \pm 0.03$	$1.29 \pm 0.04$	$1.13 \pm 0.03$

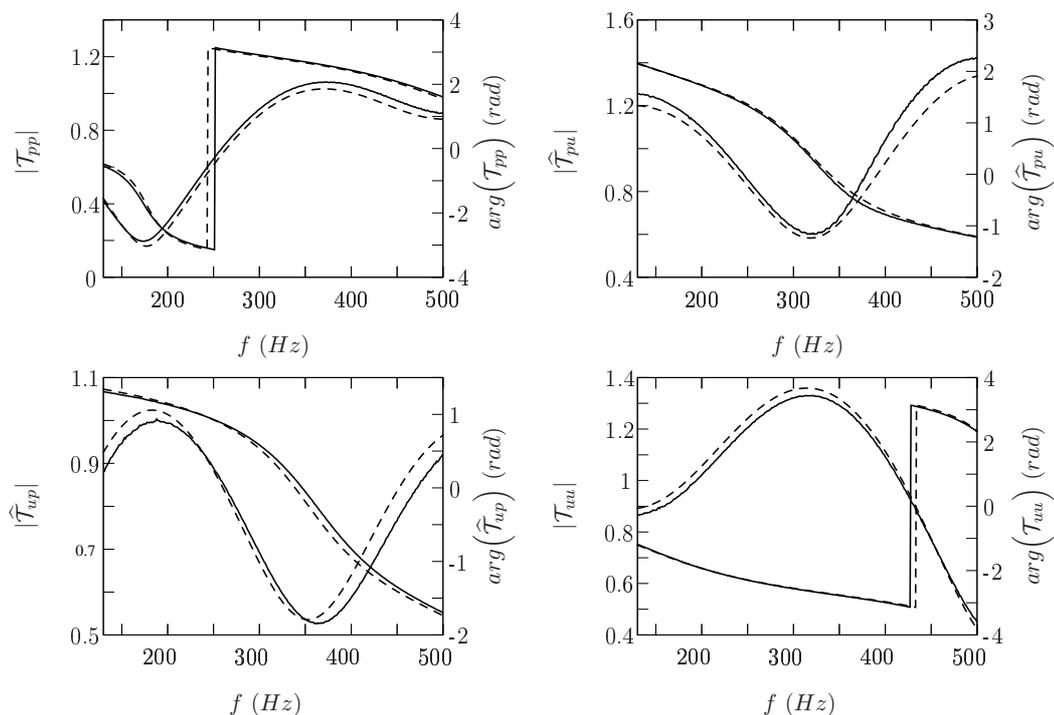
**TABLE 3.1** – Paramètres acoustiques estimés au moyen d’une méthode inverse pour les trois matériaux présentés sur les figures 3.6(b,c,d)

	grilles	mousse NiCr	mousse RVC
$\phi$	0.46	–	0.97
$r_s$	$45 \mu\text{m}$	$0.3 \text{ mm}$	$0.13 \text{ mm}$
$\alpha_t$	–	–	–

**TABLE 3.2** – Données constructeur pour les trois matériaux présentés sur les figures 3.6(b,c,d)

La mousse de carbone<sup>13</sup> est fournie avec un nombre de pores de 100 *ppi* (pores per inch), soit un rayon moyen de l’ordre de 0.13 *mm* et une densité de 3% ( $\phi = 0.97$ ). En revanche, la tortuosité des mousses n’est pas fournie avec ces données et une comparaison directe n’est pas possible. Observons néanmoins qu’en 2007, Roh *et al.* ont proposé une comparaison entre théorie et expérience pour une mousse de carbone et une mousse d’Aluminium, en ajustant la tortuosité de manière à reproduire les fonctions thermovisqueuses expérimentales [80], typiquement  $\alpha_t = 1.04$  (RVC) et  $\alpha_t = 1.10$  (Al). Bien qu’il n’y ait aucune raison pour que les matériaux issus de [80] soient sensiblement identiques à ceux référencés dans ce mémoire, une similitude peut néanmoins être observée concernant la tortuosité de la mousse métallique effectivement plus élevée que celle de la mousse RVC.

13. référence GoodFellow® LS 364679/1



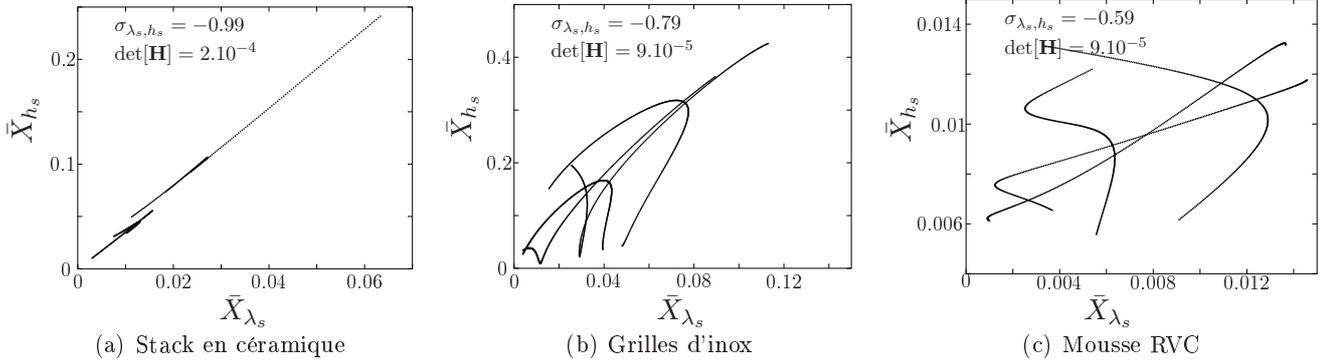
**FIGURE 3.10** – Mousse de carbone (RVC). Module et argument des quatre coefficients de transfert mesurés (en trait continu) et calculé analytiquement (éq. 3.1, en trait tireté), après estimation des paramètres :  $\phi = 0.97$ ,  $r_s = 0.17 \text{ mm}$ ,  $\alpha_t = 1.13$ .

L'ensemble des résultats présentés dans le paragraphe 3.3 permet de valider la méthode de minimisation utilisée. Bien que la technique inverse soit rigoureusement fiable, il convient de rester prudent sur les résultats issus des estimations. En effet, le modèle utilisé n'est pas direct, implique la connaissance d'un grand nombre de grandeurs d'environnement et son écriture sous-entend la prise en compte d'hypothèses simplificatrices. Tous ces points tendent à expliquer la présence d'un biais important entre la théorie et les observations expérimentales qui persiste à l'issue du recalage (fort résidu). Ce biais se repercute naturellement lors du passage au problème incluant les transferts de chaleur. Dans le paragraphe 3.4, il sera notamment démontré que le biais dû au modèle de propagation acoustique peut être considérablement réduit au moyen d'une correction du résidu.

## 3.4 Estimation de paramètres thermiques

### 3.4.1 Analyse des sensibilités

Lorsqu'une puissance de chauffage  $Q$  est dissipée dans l'échangeur chaud, le profil de température  $T_0(x)$  est calculé via une résolution numérique par différences finies des équations (3.12)-(3.19) qui décrivent les transferts de chaleur à l'intérieur de la cellule thermoacoustique. Ce modèle thermique combiné à l'équation (3.2) forme le *problème direct* de la méthode inverse. Dans cette approche unidimensionnelle des transferts thermiques, la prise en compte des pertes de chaleur vers les parois du guide passe obligatoirement par l'introduction de coefficients d'échanges latéraux  $h_s$ ,  $h_{hx}$  et  $h_w$ . Les expressions analytiques de ces coefficients d'échanges, tout comme celles des conductivités thermiques



**FIGURE 3.11** – Sensibilités à la conductivité thermique équivalente  $\lambda_s$  et au coefficient d'échange  $h_s$  calculées à partir du modèle thermique pour le stack en céramique, l'empilement de grilles en inox et la mousse de carbone.

équivalentes  $\lambda_s$  et  $\lambda_{hx}$ , restent basées sur des considérations très simplifiées des échanges de chaleur [voir par exemple les expressions (3.3), (3.4), (3.9), (3.10) et (3.11)]. Pour des matériaux tortueux dont la géométrie des pores demeure complexe, tels que ceux décrits au paragraphe 3.3 de ce chapitre, il est impossible de donner des expressions analytiques exactes de ces paramètres thermiques.

La méthode inverse proposée au paragraphe 3.2 constitue donc une approche intéressante pour l'identification des caractéristiques thermiques des matériaux pouvant être utilisés comme *stack* ou *régénérateur* dans des machines thermoacoustiques. L'idée initiale de cette approche réside donc dans l'estimation de la conductivité thermique longitudinale  $\lambda_s$  de l'échantillon ainsi que du coefficient d'échange  $h_s$  avec les parois. Cependant, une étude de sensibilité sur ces deux paramètres démontre clairement que la méthode de Gauss-Newton utilisée jusqu'ici est mal conditionnée pour ce type d'estimation. Par exemple sur la figure 3.11(a), on observe une dépendance linéaire très forte entre les coefficients de sensibilité  $\bar{X}_{\lambda_s}$  et  $\bar{X}_{h_s}$  pour le stack en céramique, avec un facteur de corrélation très proche de 1 (en valeur absolue). Bien que cette dépendance linéaire soit moins marquée pour l'empilement de grilles et la mousse de carbone [cf. figs. 3.11(b) et 3.11(c)], les deux paramètres restent encore fortement corrélés, et pour chacun des cas, le déterminant du Hessian est très proche de 0. Notons que cette dépendance quasi-linéaire entre les sensibilités à  $\lambda_s$  et  $h_s$  est explicitement donnée par l'écriture même du terme de  $\frac{h_s}{\lambda_s D}$  dans l'équation de conduction (3.12). Le fait que cette linéarité soit imparfaite est dû à la présence de la conductivité thermique dans la condition à l'interface (3.17).

En conclusion, l'identification commune de ces deux paramètres ne peut pas être réalisée à partir des mesures avec chauffage des matrices de transfert. Une solution pour contourner cette difficulté consiste donc à réduire le nombre de paramètres estimés à 1 [84]. Deux alternatives peuvent alors être envisagées. La première consiste simplement à fixer la valeur du second paramètre, soit indépendamment du premier, soit en imposant une relation de contrainte entre ces deux paramètres. Dans les deux cas, cela nécessite une expression analytique de  $\lambda_s$  ou  $h_s$ , ce qui n'est pas envisageable pour des matériaux complexes pour lesquels la théorie serait trop éloignée des valeurs réelles. La seconde alternative repose

sur l'identification d'une longueur caractéristique de diffusion de la chaleur :

$$l_q = \sqrt{\frac{\lambda_s D}{h_s}}, \quad (3.59)$$

ce qui revient, en d'autres termes, à estimer le rapport entre la quantité de chaleur diffusée le long de l'échantillon ( $\lambda_s$ ) et la quantité de chaleur évacuée vers les parois du guide d'onde ( $h_s$ ). L'avantage de cette approche est de pouvoir comparer objectivement différents matériaux au travers de leur capacité à transférer la chaleur le long de l'axe de propagation plutôt que de manière radiale.

### 3.4.2 Estimations à partir des données expérimentales

Pour une puissance de chauffage  $Q$  donnée, les paramètres acoustiques  $\phi$ ,  $r_s$  et  $\alpha_t$  qui interviennent dans le calcul du *problème direct* sont ceux obtenus dans le paragraphe 3.3 en usant de la méthode inverse. La tortuosité  $\alpha_t$  intervient à présent dans l'expression (A.28) utilisée pour le calcul des matrices  $\mathbf{T}_{\text{tbt}}$ ,  $\mathbf{T}_{\text{hx}}$  et  $\mathbf{T}_{\text{s}}$  de l'équation (3.2). De la manière dont est prise en compte cette tortuosité, celle-ci joue le rôle de facteur correctif devant le troisième terme du membre de gauche de l'équation de propagation (A.15) et dans l'expression du gradient de pression (A.27). De fait, la résolution analytique de l'équation de propagation de la thermoacoustique linéaire décrite au paragraphe A.5 reste valide et la matrice de transfert d'un matériau tortueux soumis à une distribution de température  $T_0(x)$  est donnée conformément à la relation (A.28) simplement en réécrivant le nombre d'onde naturel  $k_0$  sous la forme :

$$k_0 = \frac{\alpha_t \omega}{c_0}, \quad (3.60)$$

et la quantité  $Z(x)$  définie par l'équation (A.29) sous la forme

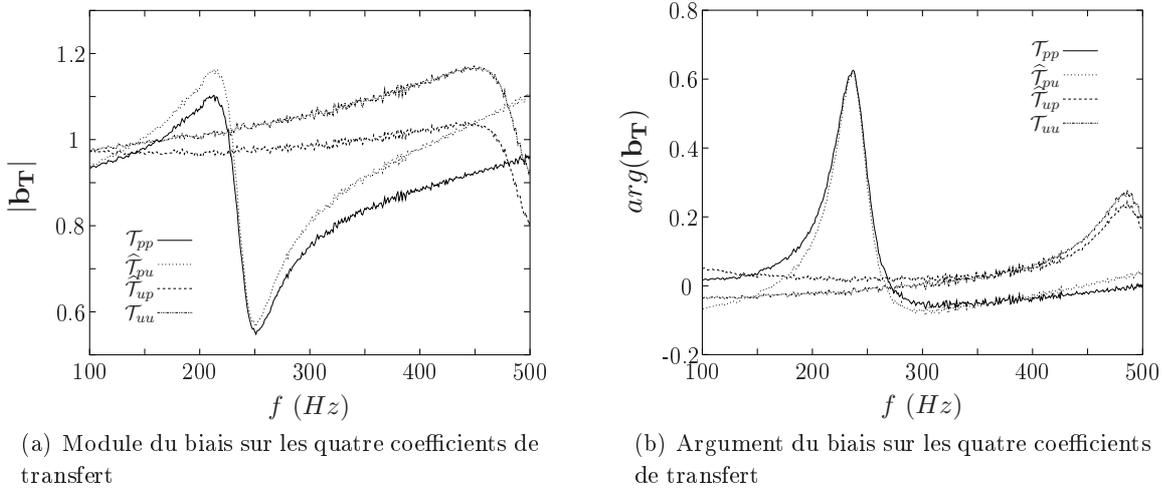
$$Z(x) = \frac{\alpha_t \rho_0(x) c_0}{S(1 - f_\nu)}. \quad (3.61)$$

En analysant les résultats obtenus au paragraphe 3.3, on peut observer qu'il persiste un écart non-négligeable entre les données expérimentales et celles issues du modèle après estimation des paramètres acoustiques. Cet écart est clairement visible sur les figures 3.5 à 3.10. A titre d'exemple, la figure 3.12 présente les courbes de résidus obtenues sur les quatre coefficients de transfert pour l'empilement de grilles en inox. Ce résidu  $\mathbf{b}_{\mathbf{T}}$  est défini ici comme le rapport entre le coefficient de transfert théorique et le coefficient expérimental, dont les composantes s'écrivent :

$$b_{T,i} = \frac{\mathcal{T}_i(\mathbf{\Upsilon})}{\mathcal{T}_{exp,i}}, \quad \text{avec } i = 1, \dots, 4n. \quad (3.62)$$

Lorsque les résultats de la méthode inverse pour  $\phi$ ,  $r_s$  et  $\alpha_t$  sont reportés dans le modèle avec chauffage, il est évident que ce biais persiste lors de l'estimation de la longueur  $l_q$ . Afin de minimiser l'effet de ce biais résiduel dû au "modèle acoustique" sur le problème inverse associé aux transferts thermiques, il est donc plus judicieux d'effectuer la méthode de minimisation sur le vecteur  $\mathbf{e}_{\mathbf{T}}$  [éq. 3.24] "corrigé", défini à présent selon :

$$\bar{e}_{T,ij} = \mathcal{T}_{exp}(\omega_i, Q_j) b_{T,i} - \mathcal{T}(\omega_i, Q_j \mathbf{\Upsilon}). \quad (3.63)$$

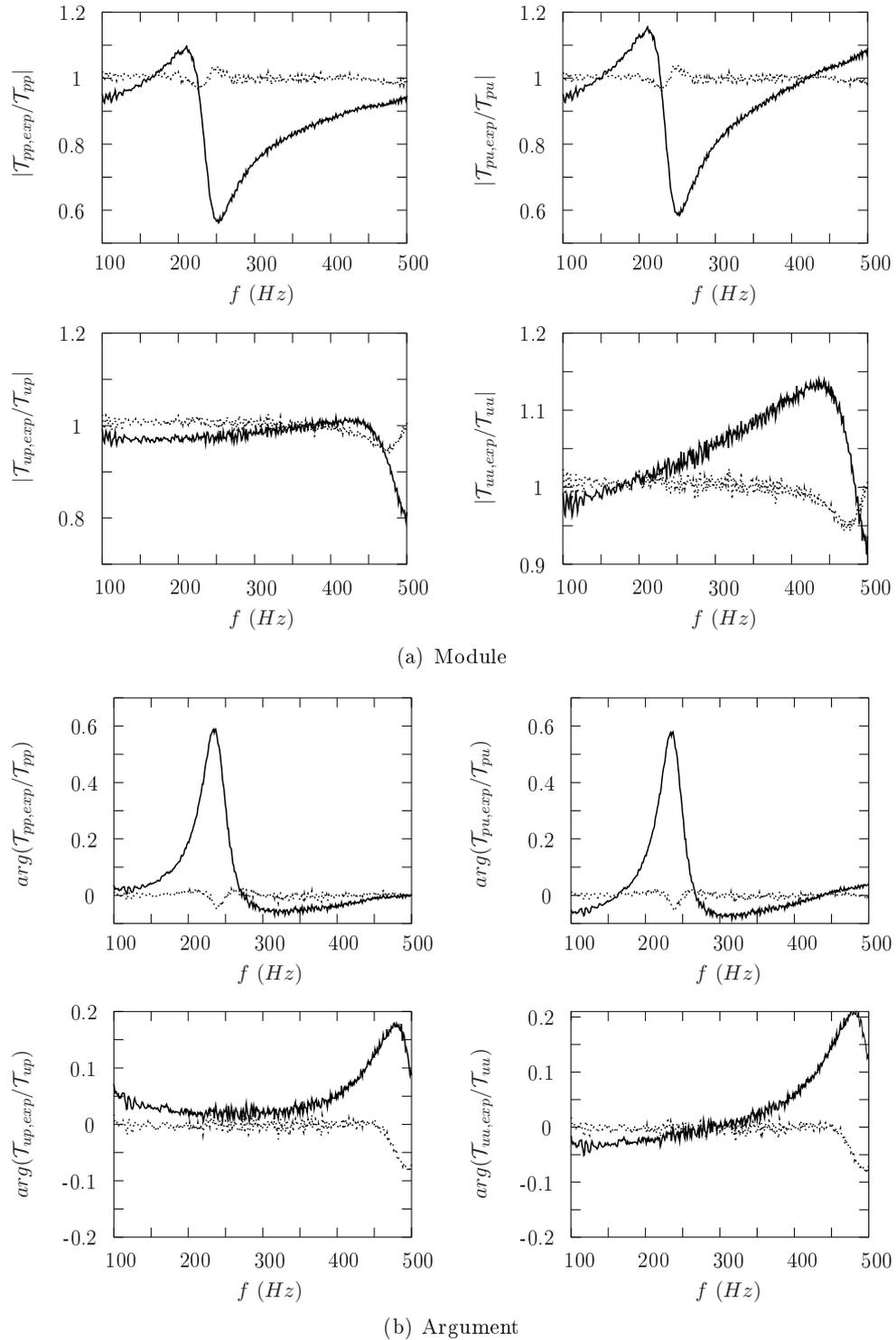


**FIGURE 3.12** – Module (a) et argument (b) du rapport  $\mathcal{T}_{exp}/\mathcal{T}$  obtenu après estimation des paramètres acoustiques  $\phi$ ,  $r_s$  et  $\alpha_t$  pour l’empilement de grilles d’innox. L’écart par rapport à 1 (module) et 0 (argument) traduit le biais important qui existe entre les données expérimentales et le modèle ajusté par méthode inverse. Ces résultats sont utilisés pour corriger les données avec chauffage.

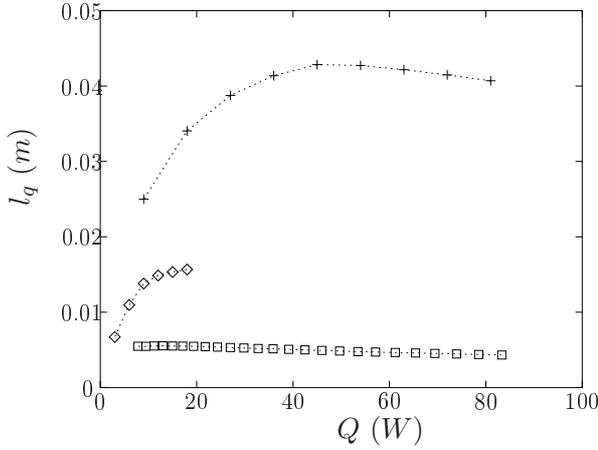
La figure 3.13 présente les courbes de résidus obtenues après estimation de la longueur  $l_q$  pour l’empilement de grilles d’innox avec  $Q = 9 \text{ W}$ . Les résultats issus de l’estimation sans correction, tracés en lignes continues, sont caractérisés par un biais très marqué entre théorie et expérience. La correction du biais introduite dans l’équation (3.63) permet d’obtenir de bien meilleurs résultats, avec des courbes de résidus en moyenne proches de 1 en module et de 0 en argument. Notons que cette tendance reste valide pour des puissances de chauffage plus élevées, ce qui prévient d’une quelconque amplification anormale des erreurs avec l’augmentation de la puissance de chauffage et apporte une certaine cohérence au modèle thermique utilisé.

La figure 3.14 donne la longueur de diffusion  $l_q$  estimée pour trois échantillons en fonction de la puissance de chauffage  $Q$ . Pour le stack en céramique ( $\square$ ),  $l_q$  décroît avec  $Q$  : cela signifie que le coefficient d’échange latéral  $h_s$  augmente plus rapidement avec le chauffage que la conductivité longitudinale  $\lambda_s$ . Plus la puissance de chauffage est élevée et plus la quantité de chaleur dissipée dans les parois est importante vis-à-vis de celle diffusée le long du stack. Pour l’empilement de grilles et la mousse RVC, les symboles  $+$  et  $\diamond$  montrent un comportement à l’opposé du stack céramique pour de faibles puissances de chauffage : la longueur  $l_q$ , initialement faible (davantage de pertes radiales), augmente rapidement avec  $Q$ , marquant ainsi le fait que la conductivité thermique longitudinale du matériau augmente plus rapidement avec le chauffage, proportionnellement aux pertes latérales  $h_s$ . Pour les grilles en inox, cette tendance se stabilise puis un comportement similaire à celui du stack céramique est retrouvé pour des puissances de chauffage plus élevées. En raison d’une gamme de chauffage plus réduite, cette décroissance n’est pas visualisée pour la mousse de carbone. Néanmoins, à la vue de ces premiers résultats, on peut subodorer une tendance identique à celle des autres matériaux.

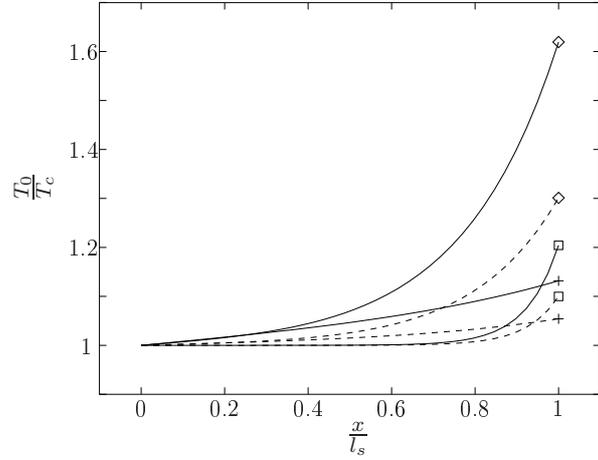
De façon générale, la longueur de diffusion de l’empilement de grilles est plus élevée que celle des autres matériaux. Ceci se traduit naturellement par un profil de température davantage linéaire le long



**FIGURE 3.13** – Empilement de grilles d’inoxy. Rapport  $\mathcal{T}_{exp}/\mathcal{T}$  après estimation de la longueur de diffusion  $l_q$  pour  $Q = 9 \text{ W}$ . Les résultats issus du modèle ajusté sur les données de base  $\mathcal{T}_{exp}$  sont présentés en trait continu ; les résultats issus du modèle ajusté sur les données corrigées  $\mathcal{T}_{exp} \cdot b_T$  sont présentés en pointillés.



**FIGURE 3.14** – Longueur caractéristique de diffusion  $l_q$  en fonction de la puissance de chauffage  $Q$  estimée par la méthode inverse pour le stack en céramique ( $\square$ ), l’empilement de grilles (+) et la mousse de carbone ( $\diamond$ ).



**FIGURE 3.15** – Température  $T_0(x)$  le long du stack en céramique ( $\square$ ), de l’empilement de grilles (+) et de la mousse de carbone ( $\diamond$ ). Les profils sont calculés pour  $Q = 9 \text{ W}$  (---) et  $Q = 18 \text{ W}$  (—).

de ce type de régénérateur, comme le montre la figure 3.15. Cette observation semble en accord avec les valeurs de conductivité thermique du squelette et de la porosité de l’échantillon. En effet, les grilles en acier inoxydable<sup>14</sup> de porosité  $\phi = 0.67$  peuvent a priori paraître plus conductives que la mousse RVC<sup>15</sup> et que la céramique<sup>16</sup>, de porosités respectives  $\phi = 0.97$  et  $\phi = 0.90$  plus élevées. Notons que la conductivité du squelette<sup>14,15,16</sup> qui apparaît dans l’expression de la conductivité équivalente du poreux [éq. (3.3)] joue également un rôle dans la condition à l’interface (3.17). Ceci influence directement le gradient local de température à l’extrémité chaude du stack (en  $x = l_s$  sur la fig. 3.15).

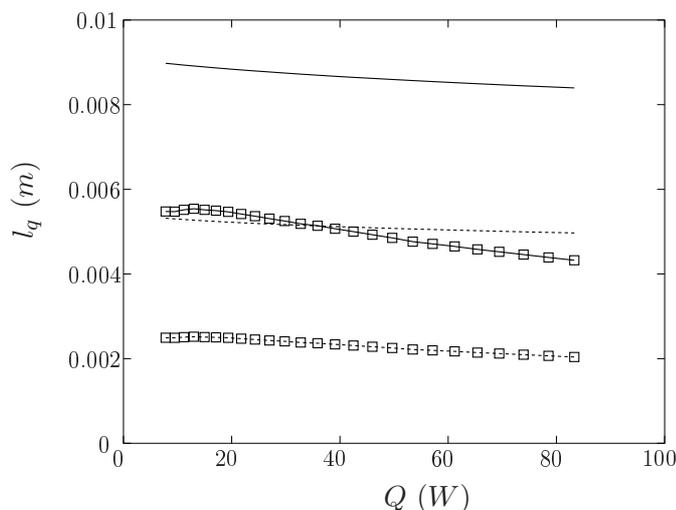
Notons que pour la mousse de Nichrome, il n’existe pas de solution localement stable du problème de minimisation vers laquelle l’algorithme peut converger. En effet, pour une puissance de chauffage donnée, l’écart quadratique  $S$  est une fonction monotone décroissante du paramètre  $l_q$ . Ceci est implicitement lié au fait que le modèle thermique utilisé ne semble pas pouvoir décrire le comportement expérimental avec justesse. Deux explications peuvent être avancées : soit la modélisation des transferts thermiques n’est pas adaptée à la description des flux de chaleur dans la mousse de Nichrome, soit les données expérimentales obtenues pour cet échantillon sont accompagnées d’un biais trop important. Dans les deux cas, l’influence du chauffage sur les propriétés de transfert du noyau n’est pas quantifiable.

La comparaison des résultats donnés sur la figure 3.14 avec la théorie est délicate du fait que l’on ne connaît pas d’expression analytique exacte de  $\lambda_s$  et  $h_s$ , en particulier pour l’empilement de grilles et la mousse RVC. Dans le cas du stack céramique (cf. fig. 3.16), la longueur de diffusion  $l_q$  estimée par la méthode inverse est comparée à la théorie pour laquelle  $\lambda_s$  et  $h_s$  sont définis respectivement par

14.  $\lambda_m \simeq 13.4 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  pour l’Inox 316L.

15.  $\lambda_m \simeq 6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  pour le carbone.

16.  $\lambda_m \simeq 5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  pour la céramique de cordièrite.



**FIGURE 3.16** – Longueur caractéristique de diffusion  $l_q$  du stack en céramique en fonction de la puissance de chauffage  $Q$  estimée par la méthode inverse (symboles  $\square$ ) et théorique (lignes seules). Les résultats sont donnés pour 2 valeurs de la conductivité thermique de la céramique :  $\lambda_m = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (---) et  $\lambda_m = 5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (—).

les relations 3.3 et 3.9. Il existe une différence remarquable entre la théorie et l'expérience, néanmoins la décroissance de  $l_q$  avec  $Q$  est également prédite par le modèle. Notons également que la longueur caractéristique  $l_q$  dépend fortement de la conductivité thermique du matériau qui constitue le squelette ; or celle de la céramique de cordiérite est généralement évaluée dans une gamme assez large, pouvant varier de  $1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  à  $5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  [34, 63]. Les courbes de la figure 3.16 sont données pour ces deux valeurs limites, que ce soit pour les résultats théoriques ou pour ceux issus de la méthode inverse<sup>17</sup>.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le noyau thermoacoustique caractérisé expérimentalement au chapitre 2 est modélisé via le formalisme des matrices de transfert et la description des transferts de chaleur qui s'établissent en régime de conduction stationnaire. Une méthode inverse est proposée pour l'identification de paramètres acoustiques et thermiques, qui permet d'ajuster ce modèle sur les données expérimentales. Cette méthode inverse constitue ainsi un premier pas vers une description plus fine des propriétés d'amplification du noyau.

La méthode de minimisation utilisée est validée au travers de simulations d'expérience. Bien qu'il nécessite d'effectuer au préalable une analyse de sensibilité et d'apporter une attention particulière à la condition de démarrage, l'algorithme implémenté est stable et converge vers des solutions physiquement réalistes lorsque ces conditions sont remplies. En revanche, il convient de remarquer que la difficulté majeure réside ici dans le caractère fortement indirect et multi-paramétrique du modèle utilisé pour

<sup>17</sup>. Rappelons que la conductivité thermique du stack apparaît également dans la formulation du problème inverse, au niveau de la condition de continuité du flux de chaleur (3.19) à l'interface stack/air.

reproduire l'expérience. En effet, chacune des variables d'environnement fixée et supposée connue induit un biais qui se répercute dans le problème de minimisation, et malgré les nombreuses précautions prises lors des mesures, la méthode reste trop indirecte et les sources d'incertitudes restent trop grandes pour obtenir des résultats réellement satisfaisants.

Afin d'obtenir des résultats parfaitement exploitables, il conviendrait de repenser le banc de mesure pour l'orienter directement vers l'utilisation de la méthode inverse. Par exemple, la caractérisation d'un échantillon *isolé* (i.e. sans échangeurs) en l'absence d'une distribution inhomogène de température permettrait de s'affranchir d'une minimisation sur les quatre coefficients  $\mathcal{T}_{pp}$ ,  $\mathcal{T}_{pu}$ ,  $\mathcal{T}_{up}$  et  $\mathcal{T}_{uu}$  en usant des propriétés de symétrie et de réciprocity de sa matrice de transfert. Notons qu'il existe à l'heure actuelle des méthodes très précises pour la caractérisation de matériaux poreux. Ces méthodes acoustiques bien plus fiables que celle présentée dans ce chapitre pourraient permettre de déterminer la porosité et la tortuosité des échantillons poreux utilisés comme stacks ou régénérateurs avec davantage de justesse ; néanmoins elles ne sont pas dédiées à la caractérisation d'une cellule thermoacoustique complète (munie de ses échangeurs de chaleur et soumise à un gradient de température) et l'approche inverse développée ici peut s'avérer être une alternative intéressante pour la caractérisation thermique du noyau. Cette méthode inverse requiert à l'évidence certaines améliorations. En effet, l'estimation efficace de paramètres thermiques semble ne pas pouvoir être dissociée de mesures de température le long de l'échantillon. L'instrumentation en thermocouples du noyau thermoacoustique permettrait ainsi de rédéfinir le *problème direct* associé au problème inverse et de propager beaucoup moins d'erreurs sur l'identification des paramètres, voire d'estimer plusieurs paramètres à la fois.

## Chapitre 4

# Etude du régime transitoire dans un moteur thermoacoustique quart d'onde

Ce dernier chapitre aborde l'étude théorique des processus d'amplification et de saturation par effets non-linéaires des auto-oscillations dans un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires. A l'heure actuelle, la description du régime transitoire de l'instabilité thermoacoustique fait encore l'objet de nombreuses recherches. En effet, si la théorie de la thermoacoustique linéaire permet de dimensionner correctement des systèmes thermoacoustiques avec une précision suffisante [100, 101], la littérature dans ce domaine recense un certain nombre d'observations expérimentales d'effets complexes qui apparaissent lors du régime transitoire de l'onde et qui ne peuvent être prédits par une théorie stationnaire. Par exemple, l'existence d'une boucle hystérétique a été rapportée aussi bien dans les systèmes à ondes stationnaires [24] que dans les systèmes à ondes progressives [47]. Cette boucle hystérétique apparaît dans un système thermoacoustique dès lors que le chemin suivi par l'amplitude stationnaire de pression acoustique au passage d'une puissance de chauffage  $Q_i$  à une puissance  $Q_f$  n'est pas identique au chemin inverse de  $Q_f$  vers  $Q_i$ . Des comportements dynamiques non-triviaux de l'amplitude des auto-oscillations ont également été mis en évidence, tels que les déclenchements-arrêts périodiques de l'onde [89, 111, 72, 70], le processus de double déclenchement [69] et les instabilités en "arêtes de poisson" [110]. Tous ces effets semblent indiquer l'existence de différentes échelles de temps caractéristiques dans les processus d'amplification et de saturation de l'onde. C'est la raison pour laquelle des outils de simulation adaptés sont encore à développer pour la description de l'évolution temporelle de l'amplitude des oscillations au-delà du seuil de déclenchement.

Le calcul numérique direct [41, 53] semble être le seul moyen de reproduire quantitativement les effets mentionnés précédemment, mais il reste encore fortement limité par des temps de calculs très importants, inhérents aux différentes échelles temporelles et spatiales qui entrent en jeu dans la modélisation des phénomènes thermoacoustiques. La modélisation analytique ne peut quant à elle faire l'économie d'approximations fortes pour rendre le problème soluble, mais elle est généralement motivée par le besoin d'une compréhension plus fondamentale du fonctionnement des moteurs thermoacoustiques. Plusieurs approches différentes ont été introduites concernant la description analytique du régime transitoire. Dans une série de papiers, Karpov, Yuan et Prosperetti [112, 51, 52] proposent une description dans le domaine temporel combinée à une méthode multi-échelle pour calculer l'amplifica-

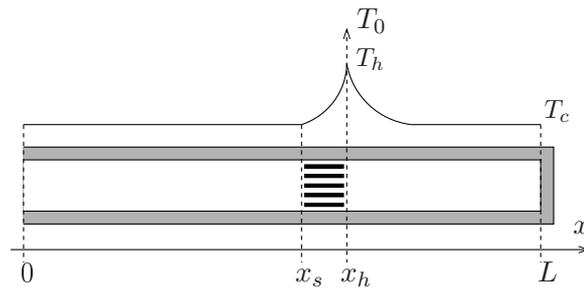


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du moteur à ondes stationnaire quart d'onde étudié.

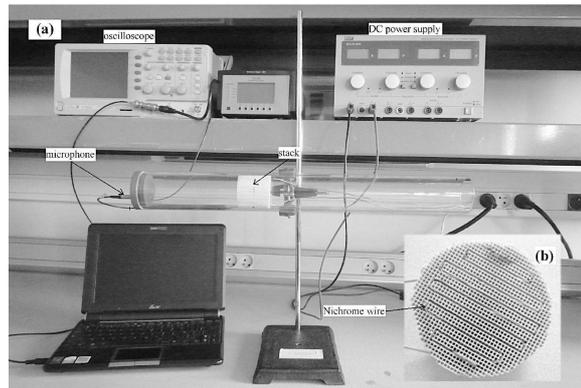


FIGURE 4.2 – (a) Photographie du dispositif expérimental. Le moteur thermoacoustique est constitué d'un tube en verre (longueur  $L = 49 \text{ cm}$ , rayon interne  $R = 2.6 \text{ cm}$ ) ouvert à une extrémité et fermé de l'autre par une paroi rigide. Le stack est réalisé à partir d'un échantillon de céramique 600 CPSI à pores carrés. (b) Photographie de l'extrémité chaude du stack. La chaleur est apportée au système via un fil de Nichrome chauffant, tressé de façon régulière sur la surface du stack. (issu de [70])

tion de l'instabilité thermoacoustique et sa saturation due à la génération d'harmoniques supérieurs. En 2009, De Waele [28] présente un modèle basé sur la description en constantes localisées des moteurs thermoacoustiques, dans lequel l'effet responsable de la saturation de l'onde est le pompage de chaleur dû aux oscillations acoustiques dans le régénérateur. Enfin, Penelet *et al.* [71, 72] développent un modèle dans lequel l'équation d'évolution de l'amplitude de pression acoustique est couplée aux équations des transferts thermiques instationnaires dans le noyau thermoacoustique. Ce modèle est spécialement écrit pour le cas d'un moteur annulaire, et les auteurs prennent en compte l'influence d'un certain nombre d'effets non-linéaires tels que les pertes mineures en bord de stack, la génération d'harmoniques supérieurs, le flux d'enthalpie transporté par l'onde acoustique et l'effet de convection thermique dû au vent acoustique de Gedeon [35].

Seules quelques références présentes dans la littérature fournissent une comparaison directe entre théorie et expérience (voir par exemple les refs. [71, 52, 72]) et à l'heure actuelle, aucun modèle n'est capable de reproduire les comportements dynamiques complexes cités précédemment, même pour le plus simple système thermoacoustique que l'on puisse étudier. L'objectif de ce chapitre est de proposer une modélisation analytique simplifiée pour le calcul du régime transitoire des auto-oscillations dans un moteur à ondes stationnaires quart d'onde standard, représenté schématiquement sur la figure 4.1.

Le paragraphe 4.1 présente la modélisation analytique utilisée pour simuler l'évolution temporelle de l'amplitude des oscillations acoustiques. Il permet notamment de rappeler quelques notions abordées au chapitre 1 et qui sont utilisées à nouveau dans ce chapitre. Le paragraphe 4.2 aborde la description de deux processus non-linéaires, à savoir le flux de chaleur acoustiquement induit et l'écoulement redressé de Rayleigh. Ces deux effets – au second ordre des perturbations acoustiques – sont responsables d'une déformation du profil de température, entraînant ainsi la saturation de l'instabilité thermoacoustique : la manière dont ils sont pris en compte dans les équations du transport de la chaleur est explicitée à la fin du paragraphe 4.2. Enfin, la méthode de résolution et des résultats de simulations sont présentés au paragraphe 4.3. Dans ce dernier paragraphe, les résultats théoriques sont comparés aux mesures de pression acoustique en régime transitoire réalisées sur ce système (cf. fig. 4.2). Le lecteur pourra se référer à l'article de Penelet *et al.* [70] pour plus de détails concernant le dispositif expérimental et les dimensions du système.

## 4.1 Modélisation analytique du régime transitoire

### 4.1.1 Équation caractéristique du système

Le système thermoacoustique modélisé est représenté schématiquement sur la figure 4.1. En se référant au formalisme développé au chapitre 1, la propagation d'ondes planes harmoniques est formulée au moyen de matrices de transfert :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(L) \\ \tilde{u}_{1,x}(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp}(\omega, T_0) & \mathcal{M}_{pu}(\omega, T_0) \\ \mathcal{M}_{up}(\omega, T_0) & \mathcal{M}_{uu}(\omega, T_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(0) \\ \tilde{u}_{1,x}(0) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

où la matrice de transfert reliant les amplitudes complexes de pression et débit acoustiques est définie ici comme le produit de trois matrices :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp}(\omega, T_0) & \mathcal{M}_{pu}(\omega, T_0) \\ \mathcal{M}_{up}(\omega, T_0) & \mathcal{M}_{uu}(\omega, T_0) \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\text{tbt}}(T_0) \times \mathbf{T}_{\text{s}}(T_0) \times \mathbf{T}_{\text{1}}. \quad (4.2)$$

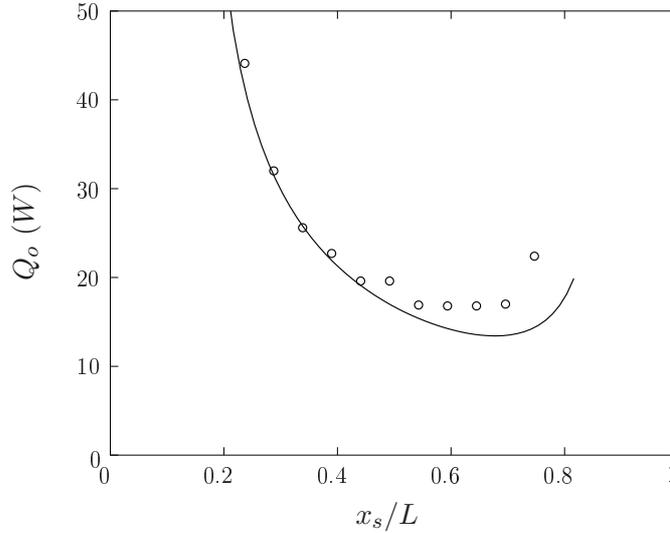
Dans l'équation (4.2), la matrice  $\mathbf{T}_{\text{1}}$  correspond au tube situé entre  $x = 0$  et  $x = x_s$  [cf. éq. (A.10), annexe A] et les matrices  $\mathbf{T}_{\text{s}}$  et  $\mathbf{T}_{\text{tbt}}$  décrivent la propagation acoustique dans le stack ( $x \in [x_s, x_h]$ ) et dans la partie de résonateur inhomogène en température ( $x \in [x_h, L]$ ), respectivement [cf. éq. (A.28), annexe A].

Le rayonnement acoustique est négligé en  $x = 0$  et la paroi rigide en  $x = L$  est supposée parfaitement rigide et n'apportant pas de dissipation visco-thermique supplémentaire. Les conditions aux limites correspondantes reportées dans l'équation (4.1) conduisent alors à l'équation caractéristique du système quart d'onde [cf. éq. (1.37)] :

$$\mathcal{M}_{uu}(\omega, T_0) = 0. \quad (4.3)$$

### 4.1.2 Seuil de déclenchement

Au chapitre 1, il a été démontré que le caractère atténué ou amplifié de l'instabilité thermoacoustique peut être décrit par le taux d'amplification  $\epsilon_g$ , défini comme la partie imaginaire de la pulsation



**FIGURE 4.3** – Puissance au seuil de déclenchement du système thermoacoustique quart d'onde représenté schématiquement sur la figure 4.1, en fonction de la position du stack dans le résonateur. Les résultats numériques (—) sont obtenus à partir de l'éq. (4.4) et d'une solution par différences finies pour le champ de température  $T_0(x)$ . Des résultats de mesure sont donnés par les symboles  $\circ$ .

$\omega$ . Cette hypothèse permet de résoudre l'équation caractéristique (4.3) du système, même si la distribution de température  $T_0$  ne permet pas de satisfaire les conditions marginales de stabilité ( $\epsilon_g = 0$ ). Dès lors, si l'on suppose que la température  $T_0$  est connue, la résolution de l'équation caractéristique du système peut être réalisée en usant de la méthode numérique explicitée au paragraphe 1.3, de manière à obtenir le taux d'amplification thermoacoustique instantané  $\epsilon_g[T_0]$  et la pulsation des auto-oscillations  $\Omega[T_0]$  correspondante.

En régime linéaire, l'équation

$$\epsilon_g[T_0(x)] = 0 \quad (4.4)$$

décrit naturellement le seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique, frontière entre l'état stable et l'état instable de l'onde. La solution  $T_0(x)$  correspondant à la température de déclenchement peut ensuite être réintroduite dans (4.3) pour déterminer la pulsation  $\Omega_o$  des oscillations au seuil. Notons que la température le long du système est calculée à partir de la puissance de chauffage  $Q$  dissipée en  $x = x_h$  en résolvant le problème des transferts thermiques dans le stack et le résonateur. Ces transferts de chaleurs sont écrits en régime stationnaire<sup>1</sup> et la température  $T_0(x)$  est alors obtenue par différences finies. La figure 4.3 présente la puissance de déclenchement  $Q_o$  en fonction de la position du stack dans le résonateur. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux ( $\circ$ ) obtenus grâce au dispositif expérimental décrit dans les refs. [36, 70], montrant ainsi que le modèle reproduit bien les conditions réelles de déclenchement du système étudié.

1. Les équations du transport de la chaleur en régime stationnaire ne sont pas explicitées ici. Elle peuvent cependant être aisément déduites des équations en régime instationnaire développées au §4.2.3, en posant  $\partial_t = 0$  et en supprimant tous les termes liés aux processus non-linéaires de saturation (flux de chaleur induit par les oscillations acoustiques, vent acoustique).

### 4.1.3 Amplification thermoacoustique des auto-oscillations

En régime instationnaire, la distribution de température  $T_0(x, t)$  dépend des coordonnées d'espace et de temps. La résolution de l'équation caractéristique (4.3) du système à un instant  $t$  donné permet donc de calculer le taux d'amplification thermoacoustique instantané  $\epsilon_g[T_0(x, t)]$  et la pulsation des auto-oscillations  $\Omega[T_0(x, t)]$  correspondante.

D'autre part, conformément à l'équation (1.57), la pression acoustique s'écrit

$$p_1(x, t) = e^{\epsilon_g t} \Re \{ \tilde{p}_1(x) e^{-i\Omega t} \}, \quad (4.5)$$

de sorte qu'en usant de l'hypothèse de quasi-stationnarité selon laquelle l'échelle de temps associée à l'amplification de l'onde peut être parfaitement dissociée de l'échelle de temps relative aux oscillations ( $\epsilon_g \ll \Omega$ ), il est possible de décrire l'évolution temporelle de l'enveloppe des auto-oscillations  $P_1(x) = |\tilde{p}_1(x)|$  sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dP_1}{dt} - \epsilon_g(t)P_1 = 0. \quad (4.6)$$

Cette équation différentielle à coefficient non-constant dépend du taux d'amplification à chaque instant  $t$  et donc implicitement de l'évolution temporelle de la température  $T_0(x, t)$ . Au paragraphe 4.2, les transferts de chaleur en régime instationnaire sont donc développés et les processus non-linéaires responsables d'une déformation du champ de température sont introduits.

## 4.2 Description des effets non-linéaires saturants

### 4.2.1 Flux de chaleur thermoacoustique dans le stack

Dans toute machine thermodynamique, la production de travail induit nécessairement un transfert de chaleur depuis la source chaude vers la source froide. Les moteurs thermoacoustiques ne faisant pas exception à la règle, la production de travail acoustique s'accompagne d'un transport de chaleur acoustiquement induit qui tend à réduire le gradient de température imposé le long du stack [88].

Le flux de chaleur induit par les oscillations acoustiques est défini comme le produit de l'entropie par la vitesse particulaire [109, 97] moyenné sur une période acoustique, soit :

$$\varphi_{ac} = \frac{1}{2} \rho_0 T_0 \Re \{ \tilde{s}_1 \tilde{v}_{1,x}^* \}, \quad (4.7)$$

où  $\tilde{v}_{1,x}$  et  $\tilde{s}_1$  sont respectivement donnés par les expressions (1.11) et (1.15) du chapitre 1. Le gradient de pression exprimé à partir de l'équation (1.17) permet notamment de réécrire la vitesse particulaire et la variation d'entropie en fonction de la vitesse particulaire moyenne sur la section du guide :

$$\tilde{v}_{1,x} = \langle \tilde{v}_{1,x} \rangle \frac{1 - F_\nu}{1 - f_\nu}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{s}_1 = -\frac{\tilde{p}_1}{\rho_0 T_0} F_\kappa - i \frac{C_p}{\omega} \frac{d_x T_0}{T_0} \frac{\langle \tilde{v}_{1,x} \rangle}{1 - f_\nu} \left[ 1 - \frac{\sigma F_\nu - F_\kappa}{\sigma - 1} \right]. \quad (4.9)$$

Par suite, en usant des relations (4.8) et (4.9) dans l'expression (4.7), le flux de chaleur thermoacoustique moyen sur la section du guide prend alors la forme suivante :

$$\langle \varphi_{ac} \rangle = -\Re(g)\mathcal{I} + \Im(g)\mathcal{J} - \lambda_{ac} \frac{dT_0}{dx}, \quad (4.10)$$

$$= \langle \varphi_{ac,0} \rangle - \lambda_{ac} \frac{dT_0}{dx}, \quad (4.11)$$

où  $\mathcal{I} = \frac{1}{2}\Re\{\tilde{p}_1\langle\tilde{v}_{1,x}\rangle^*\}$  et  $\mathcal{J} = \frac{1}{2}\Im\{\tilde{p}_1\langle\tilde{v}_{1,x}\rangle^*\}$  représentent respectivement les intensités acoustiques active et réactive de l'onde, et où les quantités  $g$  et  $\lambda_{ac}$  sont définies par les expressions suivantes :

$$g = \frac{f_\kappa - f_\nu^*}{(\sigma + 1)(1 - f_\nu)^*}, \quad (4.12)$$

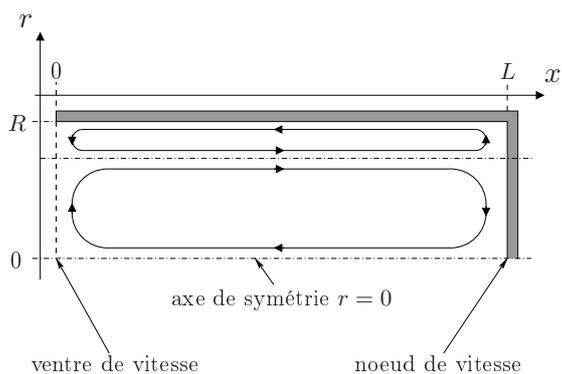
$$\lambda_{ac} = \rho_0 C_p \frac{\Im(f_\kappa - \sigma f_\nu)}{(1 - \sigma^2)|1 - f_\nu|^2} \frac{|\langle\tilde{v}_{1,x}\rangle|^2}{2\omega}. \quad (4.13)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (4.11) correspond au flux transporté par l'onde en l'absence de gradient de température, tandis que le second terme fait apparaître la quantité  $\lambda_{ac}$  qui a la dimension d'une conductivité thermique. En particulier, lorsque le gradient de température est important – comme dans le cas d'un stack court, par exemple –  $\langle\varphi_{ac,0}\rangle$  est négligeable devant le second terme et l'effet de pompage de chaleur induit par l'onde acoustique est généralement assimilé à une conductivité thermique acoustiquement induite équivalente qui se superpose à la conductivité thermique initiale du stack [109].

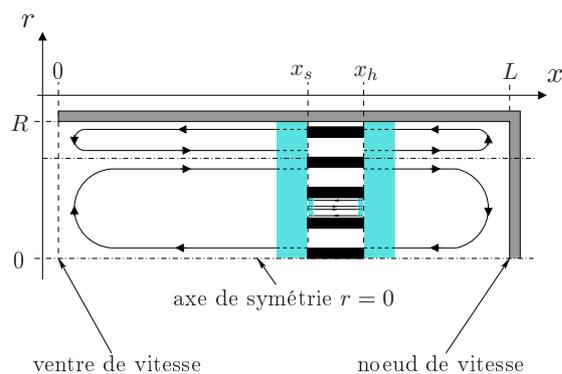
#### 4.2.2 Modèle simplifié de vitesse du vent acoustique

Le terme de *vent acoustique* fait généralement référence à un écoulement du second ordre tirant son origine des contraintes de Reynolds dans les couches limites visqueuses du fluide et qui se superpose aux perturbations acoustiques. Dans des systèmes inhomogènes en température tels que les moteurs thermoacoustiques, l'existence d'un écoulement stationnaire est de première importance car il agit naturellement comme une source de convection forcée interne, responsable d'une déformation du champ de température. La problématique du vent acoustique en thermoacoustique est relativement complexe et fait l'objet de nombreux travaux, aussi bien expérimentaux [93, 94, 59, 60, 30] que théoriques [40, 12, 58, 42, 4]. La distinction doit être faite entre les systèmes thermoacoustiques fermés dans lesquels l'écoulement est nécessairement à flux de masse moyen nul sur la section (*écoulement de Rayleigh*) et les systèmes annulaires pour lesquels l'écoulement n'est pas sujet à cette restriction (*écoulement de Gedeon* [35]).

La modélisation développée dans ce chapitre étant directement appliquée au cas d'un moteur à ondes stationnaires, l'attention est portée sur le vent acoustique de Rayleigh. Dans les systèmes fermés, l'interaction entre un fluide visqueux soumis à une onde acoustique stationnaire et les parois solides d'un guide conduit au développement de cellules de recirculation [21] dont les dimensions sont liées à la longueur d'onde acoustique, comme représenté schématiquement sur la figure 4.4. Pour ce type d'écoulement, chaque cellule s'établit entre un ventre et un noeud de vitesse acoustique et possède donc une longueur égale au quart de la longueur d'onde. Lord Rayleigh fut le premier à donner une expression analytique de la vitesse de l'écoulement pour un fluide situé entre deux plaques infinies [49].



**FIGURE 4.4** – Orientation des cellules de recirculation du vent acoustique de Rayleigh dans un résonateur quart d'onde de longueur  $L = \lambda/4$ .



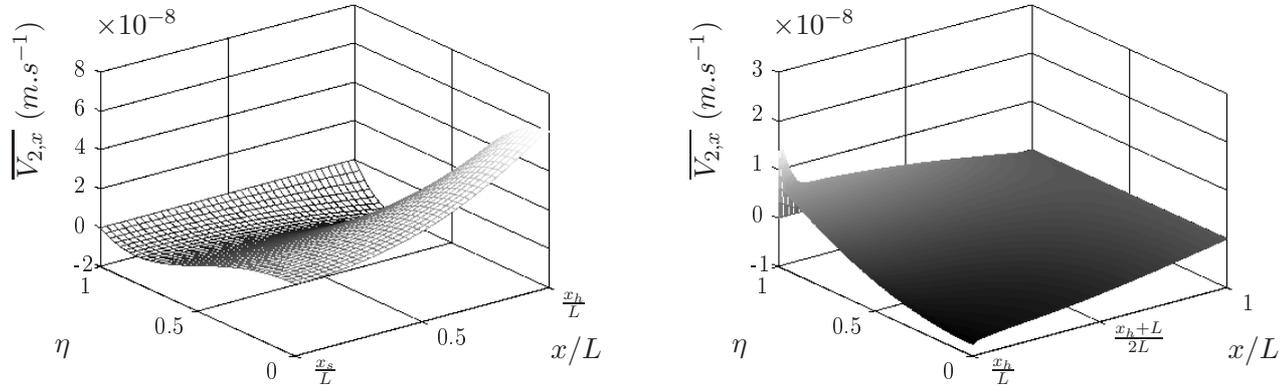
**FIGURE 4.5** – Considération simplifiée de l'effet de la présence du stack sur le vent acoustique de Rayleigh. À l'interface résonateur / stack, l'écoulement redressé ne pénètre pas à l'intérieur du stack mais retourne dans le résonateur. De la même façon, l'écoulement généré dans un pore du stack ne peut s'échapper de l'espace inter-plaques.

Il démontra notamment que lorsqu'une onde stationnaire entre deux parois immobiles est à l'origine de l'établissement du vent acoustique, le mouvement du fluide au centre du résonateur est alors invariablement dirigé du noeud vers le ventre de vitesse acoustique<sup>2</sup>. En 1940, Schuster et Matz traitèrent le même problème pour un guide d'onde cylindrique [85]. L'expression analytique de la vitesse de l'écoulement qu'ils obtinrent ne permet cependant pas de reproduire le profil de vitesse pour les cellules de recirculation proches des parois.

Basés sur des considérations simplifiées des couches limites acoustiques, les modèles de Rayleigh [49] et de Schuster et Matz [85] ne sont valides que pour des guides d'onde larges. Pour des géométries de dimension transverse comparable à l'épaisseur d'une couche limite de fluide, telles que les stacks/régénérateurs, la description de l'écoulement en présence d'un gradient de température est alors donnée en 2001 par Waxler [102], qui se place dans le cas d'un fluide aux propriétés thermophysiques indépendantes de la température. Enfin, la modélisation analytique proposée par Bailliet *et al.* [12], valide quel que soit le régime d'interaction fluide/parois (i.e. quel que soit le rayon du guide considéré), tient compte de la dépendance en température de la viscosité et de la masse volumique du fluide. Ce dernier modèle est celui qui sera utilisé dans la suite de ce chapitre pour calculer la vitesse de l'écoulement au cours du régime transitoire. Les équations qui conduisent à l'expression analytique de la vitesse axiale du vent acoustique sont explicitées en coordonnées cylindriques en annexe G.

Dans un système thermoacoustique, la présence du stack modifie la distribution du vent acoustique de Rayleigh. A notre connaissance, les seuls travaux expérimentaux dédiés à l'étude de l'influence du stack sur la vitesse de l'écoulement dans des systèmes à ondes stationnaires sont ceux de Moreau *et*

<sup>2</sup>. Le sens de l'écoulement est inversé pour le cas d'un fluide initialement au repos et excité par les vibrations des parois, le fluide au centre étant alors dirigé du ventre vers le noeud de vibration. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à l'article de revue de Boluriaan et Morris [21].



(a) Vitesse de l'écoulement dans un pore du stack ( $x_s \leq x \leq x_h$ , cf. fig. 4.1).  $\eta = \frac{r}{r_s}$ , où  $r_s$  est le rayon d'un pore du stack.

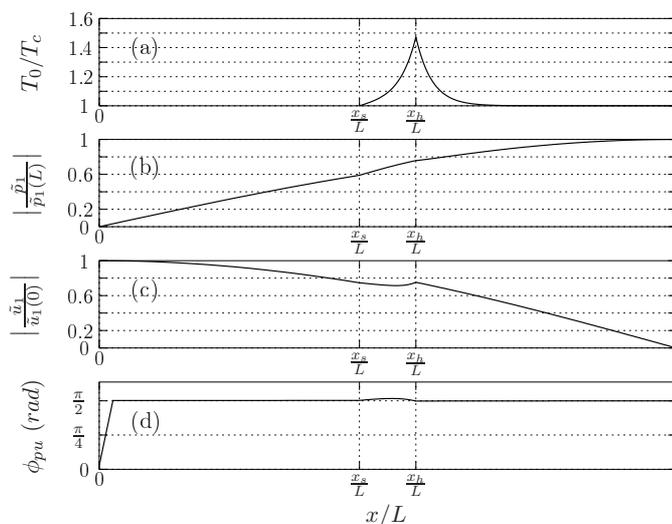
(b) Vitesse de l'écoulement dans la région du résonateur inhomogène en température ( $x_h \leq x \leq L$ , cf. fig. 4.1).  $\eta = \frac{r}{R}$ , où  $R$  est le rayon du guide.

**FIGURE 4.6** – Composante axiale  $\overline{V_{2,x}}$  de la vitesse de l'écoulement dans les deux régions inhomogènes en température du système, en fonction de  $x/L$  et de la variable transverse adimensionnée  $\eta$ . La distribution de température est fixée au seuil de déclenchement et les champs acoustiques sont calculés pour  $|\tilde{p}_1(x=L)| = 1 \text{ Pa}$  (cf. fig. 4.7).

*al.* [60] et ce problème n'a jamais été étudié de manière théorique. A partir de mesures par Vélocimétrie Laser Doppler (VLD), Moreau *et al.* ont observé de fortes perturbations de la distribution du vent acoustique au voisinage des bords du stack, notamment lorsque celui-ci est placé proche du maximum de vitesse d'écoulement (i.e. au centre du résonateur quart d'onde, ici), pouvant conduire à la génération de nouvelles cellules de recirculation [60]. La méconnaissance à l'heure actuelle de l'influence précise du stack sur le vent acoustique de Rayleigh nous oblige donc à décrire les processus de transferts de masse à partir de considérations extrêmement simplifiées. Une reproduction des effets observés expérimentalement par Moreau *et al.* à proximité immédiate de l'empilement n'est pas envisageable et ces effets sont par conséquent négligés. La modification de la distribution des cellules de recirculation est illustrée sur la figure 4.5 : dans l'approche qui est présentée ici, le stack et le résonateur sont traités comme des systèmes isolés pour lesquels la distribution de l'écoulement est contrôlée par la dimension transverse du canal considéré. Autrement dit, l'écoulement de fluide généré par l'onde acoustique dans le résonateur est supposé ne pas avoir d'influence sur le mouvement du fluide dans les pores du stack (le vent acoustique ne pénètre pas à l'intérieur des pores), de même que l'écoulement généré dans les pores du stack ne modifie pas l'écoulement dans le résonateur. De cette façon, l'hypothèse retenue concernant le mouvement du fluide consiste à supposer que toute quantité de fluide arrivant au niveau de l'interface résonateur/stack est nécessairement retournée.

### Distribution de la vitesse axiale au déclenchement

Avant de proposer une modélisation du vent acoustique dans les équations du transport de la chaleur, il est nécessaire d'estimer son amplitude et sa distribution spatiale dans le système thermoacoustique considéré. En usant du formalisme développé par Bailliet *et al.* [12], la composante axiale de



**FIGURE 4.7** – (a) : Profil de température dans l’ensemble du système au seuil de déclenchement, pour  $(x_s + x_h) = L/2$  et pour une puissance de chauffage  $Q_o = 18.6 W$ . (b,c,d) : Distribution des champs acoustiques calculés pour  $T_0(x)$  au seuil de déclenchement et pour  $|\tilde{p}_1(x = L)| = 1 Pa$ . Ces résultats sont ceux utilisés pour le calcul des vitesses du vent acoustique présenté sur la figure 4.6.

la vitesse de l’écoulement  $\overline{V_{2,x}}$  est obtenue au moyen de la relation (G.12) :

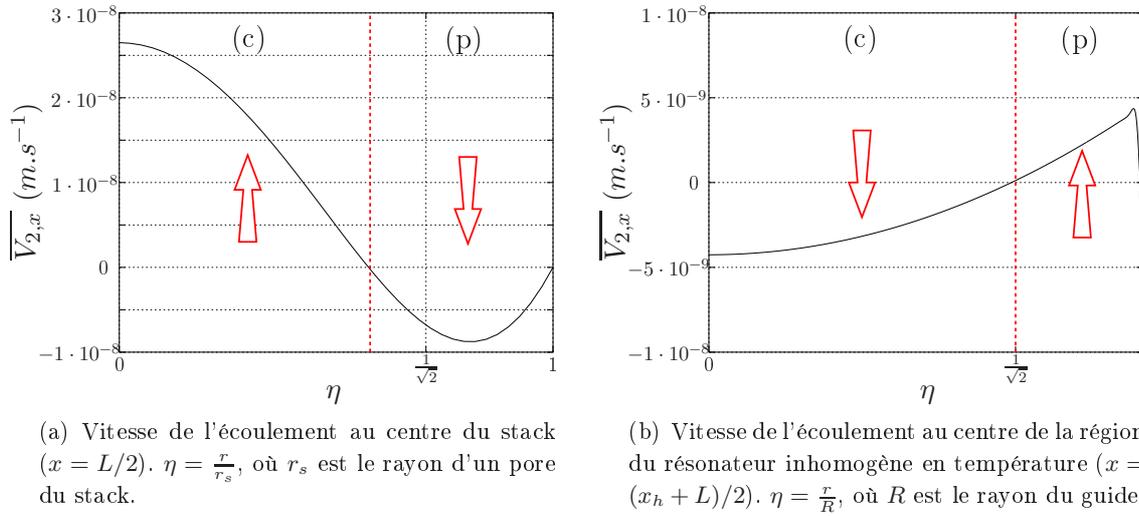
$$\overline{V_{2,x}} = \overline{v_{2,x}} + \frac{\overline{\rho_1 v_{1,x}}}{\rho_0}, \quad (4.14)$$

où  $\overline{\dots}$  représente la moyenne temporelle sur une période des oscillations, où le produit des deux perturbations acoustiques  $\overline{\rho_1 v_{1,x}}$  s’écrit simplement sous la forme :

$$\overline{\rho_1 v_{1,x}} = \frac{1}{2} \Re\{\tilde{\rho}_1 \tilde{v}_{1,x}^*\}, \quad (4.15)$$

et où  $\overline{v_{2,x}}$  est la composante suivant  $x$  de la vitesse eulérienne du second ordre, qui peut s’exprimer en fonction des variables acoustiques d’ordre 1 [cf. éq. (G.11)]. La figure 4.6 présente les distributions spatiales de la composante axiale de vitesse  $\overline{V_{2,x}}$  dans les deux régions du système inhomogène en température, lorsque le stack est placé au centre du résonateur : la figure 4.6(a) correspond au vent acoustique dans un pore du stack ( $x \in [x_s, x_h]$ ) et la figure 4.6(b) correspond au vent acoustique dans la partie passive ( $x \in [x_h, L]$ ). Ces distributions de l’écoulement redressé sont calculées à partir de la distribution de température  $T_0(x)$  obtenue au seuil de déclenchement [cf. fig. 4.7(a)], correspondant à une puissance de déclenchement théorique  $Q_o = 18.6 W$  pour cette position particulière du stack. La distribution du vent acoustique dépendant de la distribution des champs acoustiques à l’intérieur du système, ceux-ci sont calculés pour une pression au niveau de la paroi  $|\tilde{p}_1(x = L)| = 1 Pa$  et indiqués sur les figures 4.7(b,c,d)<sup>3</sup>. On peut observer sur la figure 4.6(b) que le flux de masse au centre de la section du résonateur ( $\eta = 0$ ) est dirigé dans le sens des  $x$  négatifs, donc vers le ventre

3. Le choix qui consiste à imposer une pression acoustique  $P_1(L) = |\tilde{p}_1(L)| = 1 Pa$  au niveau de la paroi peut sembler arbitraire ici, en plus du fait que l’amplitude de l’onde doit en toute rigueur tendre vers 0 au seuil de déclenchement. En réalité, le calcul des vitesses d’écoulement pour  $P_1(L) = 1 Pa$  est motivé ici par l’estimation des quantités  $\Gamma_s$  et  $\Gamma_e$  qui seront introduites par la suite dans les éqs. (4.30) et (4.31).



**FIGURE 4.8** – Composante axiale  $\overline{V}_{2,x}$  de la vitesse de l'écoulement au centre des deux régions inhomogènes en température du système, en fonction de la coordonnée transverse  $\eta$ . La droite d'abscisse  $\eta = 1/\sqrt{2}$  sur la fig. 4.8(b) correspond à la condition de vitesse nulle  $\overline{V}_{2,x} = 0$  dans la cellule de recirculation externe (*vent de Rayleigh*). Cette condition est décalée dans le pore du stack ( $\eta < 1/\sqrt{2}$ , fig. 4.8(a)) dans lequel se développe uniquement la cellule de recirculation interne (*vent de Schlichting*). La section transverse de chacune des deux régions est séparée en deux zones distinctes (c) et (p) dans lesquelles les flèches symbolisent le sens de l'écoulement moyen.

de vitesse acoustique ( $x = 0$ ), ce qui est conforme à la théorie de Rayleigh. La figure 4.6(a) montre en revanche que le sens de l'écoulement est opposé au centre d'un pore du stack, et le flux de masse est alors dirigé vers le noeud de vitesse acoustique. Cela est implicitement lié au fait qu'il n'existe qu'une seule cellule de recirculation dans le stack, qui correspond à la zone *interne* de l'écoulement (cette zone interne fait généralement référence au *vent acoustique de Schlichting* [21]), contrairement aux deux cellules présentes dans le résonateur qui correspondent aux écoulements *interne* (Schlichting) et *externe* (Rayleigh).

### Modélisation des transports de masse dans le système

Il apparaît clairement sur la figure 4.6 que la distribution de l'écoulement redressé est bi-dimensionnelle<sup>4</sup>. Afin de prendre en compte l'effet de cet écoulement dans un modèle mono-dimensionnel des transferts de chaleur, nous sommes donc contraints de l'introduire à partir de considérations très simplifiées. Considérons les deux profils transverses de la vitesse axiale  $\overline{V}_{2,x}$  donnés sur les figures 4.8(a) et 4.8(b) et correspondant respectivement au centre du stack ( $x = L/2$ ) et au centre de la partie passive ( $x = (x_h + L)/2$ ). Pour reproduire la cellule de recirculation à l'intérieur du canal sans considérer en détail la distribution transverse de vitesse, la section du guide est séparée en deux zones distinctes, de part et d'autre de la ligne nodale  $\overline{V}_{2,x} = 0$ , indiquée par une ligne discontinue sur les figures 4.8-(a,b).

4. Le caractère tri-dimensionnel de l'écoulement se simplifie ici du fait de la symétrie de révolution.

Dans le résonateur, la ligne nodale  $\overline{V_{2,x}} = 0$  de la cellule de recirculation externe est donnée pour  $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , ce qui est conforme au résultat trouvé par Schuster et Matz pour une géométrie cylindrique [85]. La section du guide est alors subdivisée en une zone centrale (c) correspondant à  $\eta \in [0, 1/\sqrt{2}]$  à l'intérieur de laquelle l'écoulement se dirige vers le ventre de vitesse, et une zone périphérique (p) correspondant à  $\eta \in [1/\sqrt{2}, 1]$  à l'intérieur de laquelle l'écoulement se dirige vers le noeud de vitesse. Le sens des écoulements dans chacune des deux zones est symbolisé par des flèches sur la figure 4.8(b).

**Remarque** – En toute rigueur, l'existence d'une cellule de recirculation interne (*Schlichting*) dans le résonateur nécessiterait d'introduire une troisième zone au voisinage immédiat de la paroi à l'intérieure de laquelle le fluide se déplace vers le ventre de vitesse acoustique – ceci est légèrement visible sur la figure 4.8(b) pour  $\eta \sim 1$ . Cependant, il ne semble pas raisonnable d'ajouter cette couche de fluide dans cette modélisation simplifiée du vent acoustique, qui mériterait alors une description beaucoup plus détaillée des processus de convection complexes pouvant s'établir dans les couches limites. Notons que l'effet de ce transport de masse "retour" est implicitement pris en compte dans l'estimation de la vitesse moyenne d'écoulement (4.21) du fait de l'intégration sur la section totale du guide.

Pour prendre en compte les variations transverses de  $\overline{V_{2,x}}$  dans un écoulement supposé uniforme, la vitesse d'écoulement du fluide  $v_e$  est alors donnée dans chaque zone par les vitesses moyennes :

$$v_e^{(c)} = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \overline{V_{2,x}} \eta d\eta, \quad (4.16)$$

$$v_e^{(p)} = 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \overline{V_{2,x}} \eta d\eta, \quad (4.17)$$

sur les surfaces centrale et périphérique, respectivement. Le profil de la vitesse axiale de l'écoulement au centre du stack [cf. fig. 4.8(a)] montre en revanche que la ligne nodale dans la cellule interne correspond à

$$\eta_0 \equiv \eta(\overline{V_{2,x}} = 0) < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.18)$$

et la vitesse moyenne du fluide doit être calculée dans chacune des zones :

$$v_s^{(c)} = \frac{2}{\eta_0^2} \int_0^{\eta_0} \overline{V_{2,x}} \eta d\eta, \quad (4.19)$$

$$v_s^{(p)} = \frac{2}{1 - \eta_0^2} \int_{\eta_0}^1 \overline{V_{2,x}} \eta d\eta. \quad (4.20)$$

Dans cette modélisation simplifiée du vent de Rayleigh, chaque région du système (stack ou résonateur) est ainsi subdivisée en une zone centrale et une zone périphérique, caractérisées par un déplacement du fluide dans des directions opposées : la figure 4.9-(a) illustre schématiquement ces considérations, dans le guide large et dans un pore du stack.

**Remarque** – Dans le résonateur, du fait de l'annulation de la vitesse en  $\eta = 1/\sqrt{2}$ , les sections transverses des zones centrale et périphérique ont la même surface  $S^{(c)} = S^{(p)} = \frac{\pi R^2}{2}$  et les vitesses moyennes du fluide peuvent être calculées simplement à partir du module de

la vitesse du vent acoustique :

$$v_e^{(p)} = -v_e^{(c)} = v_e \equiv 2 \int_0^1 |\overline{V_{2,x}}| \eta d\eta. \quad (4.21)$$

A l'intérieur d'un pore du stack, on a  $S^{(c)} < S^{(p)}$  et donc  $v_s^{(c)} > v_s^{(p)}$ , respectant la condition de flux moyen nul sur la section totale du canal. On fera néanmoins l'hypothèse  $S^{(c)} = S^{(p)} = \frac{\pi R^2}{2}$  de manière à exprimer la vitesse du vent acoustique dans le stack sous une forme équivalente à (4.21) :

$$v_s^{(c)} = -v_s^{(p)} = v_s \equiv 2 \int_0^1 |\overline{V_{2,x}}| \eta d\eta, \quad (4.22)$$

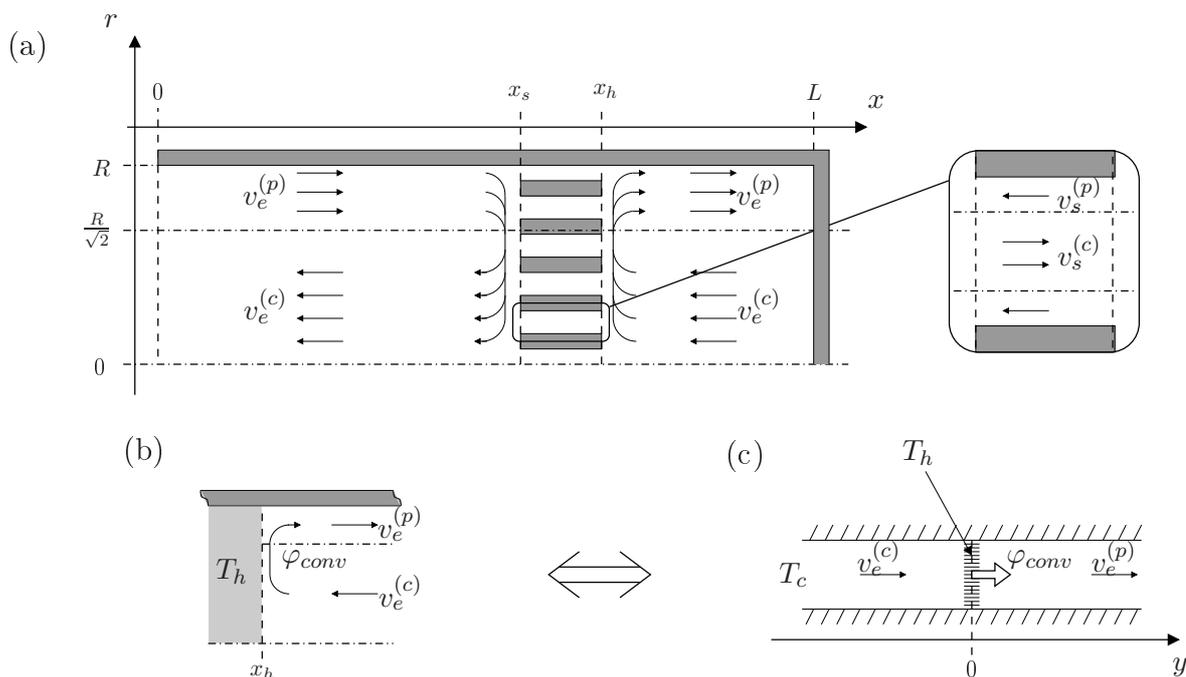
ce qui revient à considérer la zone centrale (resp. périphérique) du stack de section plus grande (resp. plus petite) qu'elle ne l'est en réalité, correspondant à une vitesse du fluide plus faible (resp. plus élevée) qu'elle ne l'est en réalité.

### Convection de la chaleur à l'extrémité chaude du stack

La présence d'un écoulement de fluide dans le stack et dans le résonateur induit un transport de chaleur par convection au niveau de l'extrémité chaude  $x_h$  du stack. Ceci se traduit par la présence de termes de convection supplémentaires dans la condition de continuité du flux à l'interface stack/résonateur<sup>5</sup>. Cependant, estimer ces termes de convection n'est pas trivial car cela implique de connaître précisément les distributions de température et de vitesse du vent acoustique au voisinage des bords du stack. Or, si de nombreuses simulations numériques et observations expérimentales (voir par exemple les refs. [19, 46, 60]) se rejoignent pour affirmer que ces effets de bord sont importants, aucune théorie actuelle n'est capable de décrire avec précision les phénomènes qui se créent en entrée du stack. Dans le cas du vent acoustique de Rayleigh, la génération de nouvelles cellules au voisinage immédiat de l'empilement [60] laisse à penser que des transferts de chaleur par convection peuvent être très importants dans cette région du système.

La quantité de chaleur prise par le vent acoustique au niveau de l'extrémité chaude du stack est donc estimée de manière approchée en considérant que le problème réel – à savoir la présence de deux cellules de part et d'autre de l'interface – est équivalent à deux problèmes découplés dans lesquels chaque cellule est déroulée. Cette approche est illustrée sur les schémas des figures 4.9(b) et 4.9(c) : pour la cellule de recirculation située dans le résonateur ( $x \geq x_h$ ), nous supposons alors que le fluide se déplaçant vers la gauche à la vitesse  $v_e^{(c)}$ , réfléchi au niveau de l'interface à température  $T_h$ , et repartant vers la droite à la vitesse  $v_e^{(p)}$ , transporte la même quantité de chaleur qu'un fluide se déplaçant vers la droite dans un tube de longueur infini et traversant une surface isotherme à température fixe  $T_h$ . En d'autres termes, le flux de chaleur  $\varphi_{conv}$  pris par convection à l'interface  $x = x_h$  [fig. 4.9(b)] est supposé être égal au flux pris par le fluide dans le problème (soluble analytiquement) présenté sur la figure 4.9(c).

5. Cette condition de continuité sera donnée au §4.2.3 par l'éq. (4.48).



**FIGURE 4.9** – (a) : représentation schématique des zones centrales et périphériques dans le résonateur et dans un pore du stack. (b) et (c) : estimation simplifiée du flux de convection à l'interface. La chaleur convectée à l'interface stack/résonateur est quantifiée à partir de la cellule déroulée, en considérant que l'interface est équivalente à une surface isotherme à température fixe traversée par un écoulement stationnaire.

En considérant les parois du tube comme parfaitement adiabatiques et en introduisant la nouvelle coordonnée d'espace  $y$ , le problème défini sur la figure 4.9(c) prend alors la forme suivante :

$$\kappa_a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - v_e \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \forall y \leq 0, \quad (4.23)$$

$$T(y) = T_h, \quad \forall y \geq 0, \quad (4.24)$$

où  $\kappa_a = \frac{\lambda_a}{\rho_0 C_p}$  est la diffusivité thermique de l'air. Si l'on suppose que le fluide à l'infini est initialement à température ambiante  $T_c$ , le report de cette condition dans la solution de l'équation (4.23) conduit à :

$$T(y) = T_c + (T_h - T_c) e^{\frac{v_e y}{\kappa_a}}, \quad \forall y \leq 0, \quad (4.25)$$

$$T(y) = T_h, \quad \forall y \geq 0. \quad (4.26)$$

Par suite, les expressions (4.25) et (4.26) peuvent être reportées dans l'équation de continuité du flux en  $y = 0$  :

$$\lambda_a \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{0-} - \lambda_a \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{0+} + \varphi_{conv} = 0, \quad (4.27)$$

où  $\varphi_{conv}$  correspond à la puissance calorifique fournie par la surface isotherme pour maintenir le champ de température stationnaire implicitement lié à l'équation de conduction (4.23). Cela conduit finalement à l'expression suivante pour le flux de chaleur :

$$\varphi_{conv} = \rho_0 C_p v_e (T_h - T_c), \quad (4.28)$$

traduisant l'effet de convection à l'extrémité chaude du stack dû à l'écoulement de fluide dans le résonateur. De la même façon, le flux de convection pris par l'écoulement dans le stack de porosité  $\phi_s$  peut être estimé sous la forme suivante :

$$\varphi_{conv}^{(s)} = \phi_s \rho_0 C_p v_s (T_h - T_c). \quad (4.29)$$

### Temps d'établissement du vent acoustique

Les équations utilisées par Bailliet *et al.* [12] et reprises ici pour décrire la vitesse de l'écoulement de Rayleigh ne sont valides qu'en régime stationnaire des phénomènes physiques mis en jeu, mais il est clair que l'établissement des cellules de recirculation après déclenchement de l'instabilité n'est pas instantané [4, 93]. En d'autres termes, la réponse du vent acoustique à un échelon de pression acoustique se fait avec un certain retard, et l'évolution temporelle de la vitesse de l'écoulement peut être décrite par les équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$\tau_c^{(s)} \frac{dv_s}{dt} + v_s = \Gamma_s P_1^2, \quad \forall x \in [x_s, x_h], \quad (4.30)$$

$$\tau_c \frac{dv_e}{dt} + v_e = \Gamma_e P_1^2, \quad \forall x \in [x_h, L], \quad (4.31)$$

où  $\tau_c^{(s)}$  et  $\tau_c$  sont les temps caractéristiques d'établissement du vent acoustique dans le stack et dans le résonateur, respectivement. Dans ces équations,  $\Gamma_s$  et  $\Gamma_e$  correspondent aux vitesses d'écoulement calculées à partir des équations (4.21) et (4.22) pour une distribution de température  $T_0(x) = T_{0,d}(x)$  correspondant au seuil de déclenchement et pour une pression acoustique de 1 Pa :

$$\Gamma_s = 4 \int_0^1 \left| \overline{V_{2,x}}(T_{0,d}(x), P_1 = 1 \text{ Pa}) \right| \eta d\eta, \quad \forall x \in [x_s, x_h], \quad (4.32)$$

$$\Gamma_e = 4 \int_0^1 \left| \overline{V_{2,x}}(T_{0,d}(x), P_1 = 1 \text{ Pa}) \right| \eta d\eta, \quad \forall x \in [x_h, L]. \quad (4.33)$$

Les temps  $\tau_c^{(s)}$  et  $\tau_c$  peuvent être estimés à partir des travaux d'Amari *et al.* qui proposent une modélisation analytique complète en régimes stationnaire et instationnaire du vent acoustique de Gedeon qui s'établit dans un résonateur annulaire [4]. Ils montrent notamment que le temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire peut s'écrire en première approximation sous la forme :

$$\tau_c = \frac{4a^2}{\pi^2 \nu_a}, \quad (4.34)$$

pour un canal de rayon  $a$ , où  $\nu_a$  est la viscosité cinématique du fluide. Dans le cas présent, les données du problème – en termes de rayons  $R$  et  $r_s$  et du fluide de travail (air) – permettent d'estimer  $\tau_c^{(s)}$  et  $\tau_c$  à partir de l'équation (4.34) :

$$r_s = 0.45 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \tau_c^{(s)} = \frac{4r_s^2}{\pi^2 \nu_a} \simeq 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad (4.35)$$

$$R = 2.6 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \tau_c = \frac{4R^2}{\pi^2 \nu_a} \simeq 18 \text{ s}. \quad (4.36)$$

Il n'existe pas de travaux théoriques équivalents à ceux d'Amari dans le cas d'un écoulement redressé au sein d'un système fermé. En revanche, Thompson *et al.* ont réalisé des mesures de vitesse de vent

acoustique par VLD dans un système fermé de rayon comparable à celui utilisé dans le cas présent<sup>6</sup>, mesures qui leur ont permis d'estimer un temps d'établissement du régime stationnaire de l'ordre de 5.2s dans leur dispositif [93]. Il convient donc de rester prudent sur la valeur (4.36) de  $\tau_c$  qui est probablement surestimée par rapport à sa valeur réelle.

Notons enfin que le temps caractéristique  $\tau_c^{(s)}$  [éq. (4.35)] est très faible : l'établissement des cellules de recirculation peut raisonnablement être considéré comme instantané dans le stack et l'équation (4.30) se réduit simplement à :

$$v_s = \Gamma_s P_1^2, \quad \forall x \in [x_s, x_h]. \quad (4.37)$$

### 4.2.3 Transferts de chaleur instationnaires

À présent que les processus non-linéaires de saturation ont été décrits, ils sont introduits dans les équations du transport de la chaleur qui permettent de calculer la distribution de température instantanée  $T_0(x, t)$  dans l'ensemble du système. Le modèle des transferts thermiques est développé à partir de l'écriture des équations de diffusion de la chaleur dans les zones *centrale* (c) et *périphérique* (p) pour la région du stack et la région du résonateur inhomogène en température. Les parois du moteur thermoacoustique sont supposées être de parfaits puits thermiques à température ambiante  $T_c$  et le stack est considéré comme un milieu fluide équivalent de conductivité thermique :

$$\lambda_s = \lambda_a \phi_s + \lambda_m (1 - \phi_s), \quad (4.38)$$

et de capacité calorifique par unité de volume :

$$\rho_s C_p^s = \rho_0 C_p \phi_s + \rho_m C_p^m (1 - \phi_s), \quad (4.39)$$

où  $\lambda_m$ ,  $\rho_m$  et  $C_p^m$  sont les propriétés thermophysiques du matériau constituant le squelette solide. Ces propriétés sont supposées indépendantes de la température, contrairement aux propriétés thermophysiques du fluide (air) dont la dépendance par rapport à  $T_0(x)$  est prise en compte grâce aux relations suivantes :

$$\lambda_a = \lambda_a(T_c) \left( \frac{T_0}{T_c} \right)^\beta, \quad (4.40)$$

$$\rho_0 = \rho_0(T_c) \left( \frac{T_0}{T_c} \right), \quad (4.41)$$

avec  $\beta = 0.73$  pour l'air [83]. Dans la région du stack ( $x \in [x_s, x_h]$ ), les équations de la chaleur pour la zone centrale (c) et la zone périphérique (p) prennent alors les formes suivantes :

$$\rho_s^{(c)} C_p^{s,(c)} \left[ \frac{\partial T_0^{(c)}}{\partial t} + \phi_s \frac{\rho_0^{(c)} C_p}{\rho_s^{(c)} C_p^{s,(c)}} v_s^{(c)} \frac{\partial T_0^{(c)}}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( (\lambda_s^{(c)} + \lambda_{ac}) \frac{\partial T_0^{(c)}}{\partial x} \right) - \frac{2h_s}{R} (T_0^{(c)} - T_c) - \frac{\partial \langle \varphi_{ac,0} \rangle}{\partial x}, \quad (4.42)$$

$$\rho_s^{(p)} C_p^{s,(p)} \left[ \frac{\partial T_0^{(p)}}{\partial t} + \phi_s \frac{\rho_0^{(p)} C_p}{\rho_s^{(p)} C_p^{s,(p)}} v_s^{(p)} \frac{\partial T_0^{(p)}}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( (\lambda_s^{(p)} + \lambda_{ac}) \frac{\partial T_0^{(p)}}{\partial x} \right) - \frac{2h_s}{R} (T_0^{(p)} - T_c) - \frac{\partial \langle \varphi_{ac,0} \rangle}{\partial x}, \quad (4.43)$$

---

6. Le tube en verre utilisé par Thompson *et al.* [93] possède un rayon de 2.3cm, soit légèrement plus petit que celui du moteur thermoacoustique étudié dans ce chapitre ( $R = 2.6cm$ ).

équations dans lesquelles apparaissent les vitesses d'écoulement  $v_s^{(c)}$  et  $v_s^{(p)}$  associées au vent acoustique et définies par l'équation (4.22), ainsi que la conductivité  $\lambda_{ac}$  et le flux de chaleur moyen  $\langle \varphi_{ac,0} \rangle$  induits par les oscillations acoustiques [cf. éq. (4.11)]. La quantité  $\phi_s \frac{\rho_0 C_p}{\rho_s C_p}$  devant le terme de convection dans les équations (4.42) et (4.43) traduit le fait que la vitesse associée au transport de masse est une vitesse effective qui résulte du seul mouvement du fluide dans les pores du stack. Dans la région du résonateur ( $x \in [x_h, L]$ ), les équations de la chaleur pour la zone centrale (c) et la zone périphérique (p) prennent également les formes suivantes :

$$\rho_0^{(c)} C_p \left[ \frac{\partial T_0^{(c)}}{\partial t} + v_e^{(c)} \frac{\partial T_0^{(c)}}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_a^{(c)} \frac{\partial T_0^{(c)}}{\partial x} \right) - \frac{2h_w}{R} (T_0^{(c)} - T_c), \quad (4.44)$$

$$\rho_0^{(p)} C_p \left[ \frac{\partial T_0^{(p)}}{\partial t} + v_e^{(p)} \frac{\partial T_0^{(p)}}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_a^{(p)} \frac{\partial T_0^{(p)}}{\partial x} \right) - \frac{2h_w}{R} (T_0^{(p)} - T_c), \quad (4.45)$$

équations dans lesquelles apparaissent les vitesses d'écoulement  $v_e^{(c)}$  et  $v_e^{(p)}$  associées au vent acoustique et définies par l'équation (4.21). Dans l'ensemble des équations (4.42)-(4.45), les coefficients phénoménologiques  $h_s$  et  $h_w$  traduisent les échanges de chaleurs latéraux avec les parois du guide et sont définis de la même façon qu'au chapitre 3 par les équations (3.8) et (3.11).

A ce stade, deux remarques importantes méritent d'être formulées. Premièrement, on peut remarquer que les équations (4.42) et (4.43) [de même que (4.44) et (4.45)] sont découplées, ce qui signifie qu'aucun échange de chaleur n'est pris en compte entre la zone centrale et la zone périphérique. En toute rigueur, des transferts thermiques pourraient être introduits par l'intermédiaire d'un terme de couplage du type  $\pm h (T_0^{(c)} - T_0^{(p)})$ ; cependant, il n'est pas raisonnable de donner une expression analytique de  $h$  du fait que l'on ne sait pas exprimer ce coefficient phénoménologique pour le cas de deux couches de fluide se déplaçant dans des directions opposées. La seconde remarque concerne la présence de termes en  $h_s$  et  $h_w$  dans les équations (4.42) et (4.44) alors même que la zone centrale n'est pas en contact direct avec les parois du guide. Cette forme d'écriture ne semble pas rigoureuse au premier abord; elle se justifie néanmoins du fait qu'en l'absence d'écoulement, on retrouve bien  $T_0^{(c)} = T_0^{(p)} = T_0$ .

Finalement, aux équations de la chaleur (4.42)-(4.45) sont associées les conditions aux limites suivantes :

- température imposée en  $x = x_s$  et  $x = L$  :

$$T_0^{(c)}(x_s) = T_0^{(p)}(x_s) = T_0^{(c)}(L) = T_0^{(p)}(L) = T_c, \quad (4.46)$$

- continuité des températures en  $x = x_h$  :

$$T_0^{(c)}(x_h) = T_0^{(p)}(x_h), \quad (4.47)$$

- continuité du flux de chaleur moyen en  $x = x_h$  :

$$\lambda_s \frac{\partial T_0}{\partial x} \Big|_{x_h^-} - \lambda_a \frac{\partial T_0}{\partial x} \Big|_{x_h^+} + \varphi_{conv} + \varphi_{conv}^{(s)} = \frac{Q}{\pi R^2} + \langle \varphi_{ac} \rangle(x_h), \quad (4.48)$$

avec les quantités moyennes  $\lambda_s = \frac{\lambda_s^{(c)} + \lambda_s^{(p)}}{2}$ ,  $\lambda_a = \frac{\lambda_a^{(c)} + \lambda_a^{(p)}}{2}$  et  $T_0 = \frac{T_0^{(c)} + T_0^{(p)}}{2}$ , et où  $\varphi_{conv}$  et  $\varphi_{conv}^{(s)}$  représentent les flux de convection associés à l'écoulement de Rayleigh [cf. éqs. (4.28)-(4.29)],  $Q$  est la puissance de chaleur apportée au système et  $\langle \varphi_{ac} \rangle$  est le flux de chaleur moyen acoustiquement induit [cf. éq. (4.10)].

### 4.3 Simulation numérique du régime transitoire

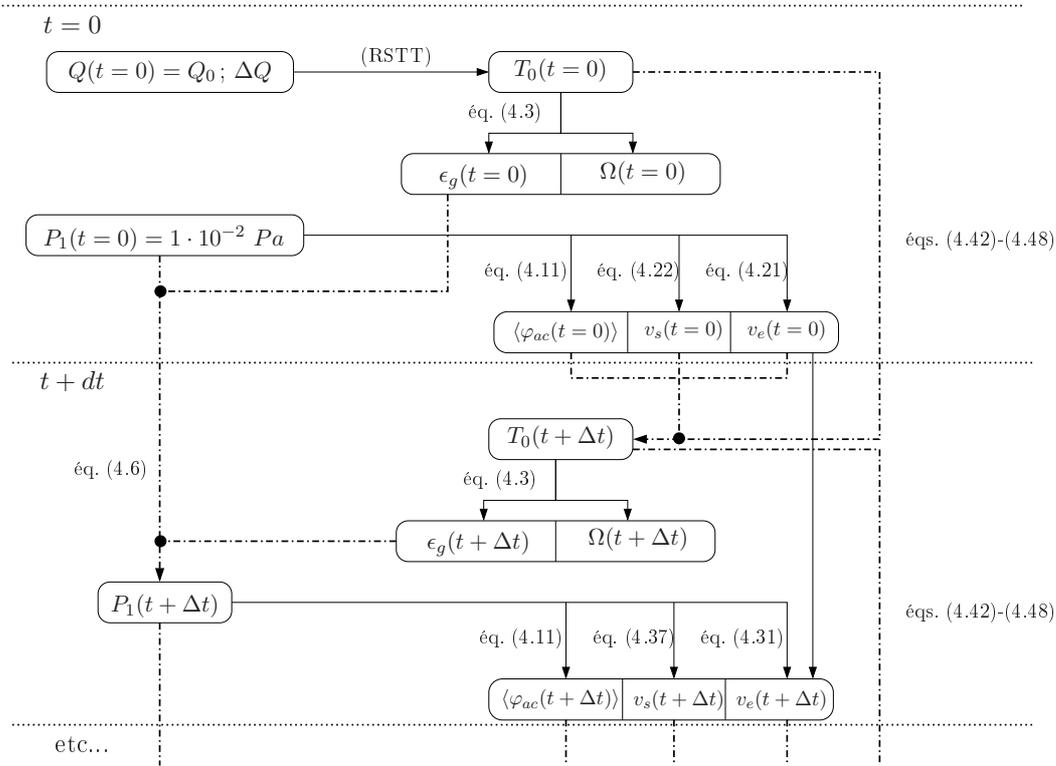
#### 4.3.1 Schéma de résolution numérique

L'ensemble des équations exposées au §4.2.3 permet de calculer la distribution de température  $T_0(x, t)$  dans le moteur thermoacoustique. Ce jeu d'équations est résolu numériquement à chaque itération temporelle grâce à une méthode de Crank-Nicholson [66]. Le choix du pas temporel  $\Delta t$  est implicitement déterminé à chaque itération par l'utilisation d'une méthode à pas variable pour l'intégration numérique de l'équation différentielle (4.6). Le pas de discrétisation spatiale  $\Delta x$  est obtenu après une étude de convergence simple qui consiste à multiplier par 2 le nombre de points dans chaque domaine (stack ou partie passive) jusqu'à atteindre un écart suffisamment faible entre les résultats obtenus à mesure que le pas spatial est réduit. Une fois obtenue, la température  $T_0(x, t)$  est introduite dans le calcul des matrices de transferts [cf. éq. 4.2] et l'équation caractéristique (4.3) est résolue par la méthode décrite au paragraphe 1.3 de manière à obtenir le coefficient d'amplification  $\epsilon_g [T_0(x, t)]$  et la pulsation des auto-oscillations  $\Omega [T_0(x, t)]$  à l'instant  $t$ .

L'équation d'évolution de la pression acoustique (4.6) est résolue en usant d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Le pas temporel  $\Delta t$  est adapté automatiquement en s'assurant qu'en une itération  $\Delta t$ , la pression calculée reste peu différente de celle obtenue pour deux itérations de pas  $\Delta t/2$  (extrapolation de Richardson, [64]). De cette manière, le pas  $\Delta t$  est optimisé à chaque itération en assurant un critère de convergence selon lequel l'erreur commise pour  $\Delta t$  par rapport à deux itérations  $\Delta t/2$  est inférieure à 0.1% de l'amplitude de pression acoustique : ce critère de 0.1% a été retenu après augmentation successive de la précision demandée, jusqu'à atteindre un écart suffisamment faible entre les résultats. Par suite, la connaissance à chaque instant  $t$  de l'amplitude de pression, de la pulsation  $\Omega$  et de la distribution de température permet de calculer la distribution des champs acoustiques dans le système et donc les effets non-linéaires associés. Notons que l'équation différentielle (4.31) décrivant l'évolution temporelle de l'amplitude du vent acoustique dans le résonateur est résolue au moyen d'une simple méthode d'Euler explicite.

La procédure de calcul est schématisée sur la figure 4.10 :

- A l'instant  $t = 0$ , une puissance de chauffage  $Q_0$  est appliquée et la distribution de température initiale  $T_0(x, t = 0)$  est calculée à partir du régime stationnaire des transferts thermiques (RSTT). L'amplitude de pression acoustique  $P_1 = |\tilde{p}_1(L)|$  à l'extrémité fermée du moteur est fixée à une valeur proche de 0 ( $1 \cdot 10^{-2} Pa$ ), la distribution des champs acoustiques est calculée dans l'ensemble du dispositif et les effets non-linéaires sont obtenus au moyen des relations (4.10), (4.21) et (4.22).
- Un incrément de chauffage  $\Delta Q$  est appliqué et la distribution de température à l'itération suivante est calculée par une méthode de Crank-Nicholson. Le taux d'amplification est ensuite obtenu par



**FIGURE 4.10** – Procédure de calcul du régime transitoire. A l’instant  $t = 0$ , une puissance de chauffage  $Q_0$  est appliquée et le régime stationnaire des transferts thermiques est calculé. Un incrément de puissance  $\Delta Q$  est ensuite appliqué et le régime transitoire est alors résolu pas à pas jusqu’à atteindre le régime stationnaire de l’instabilité thermoacoustique.

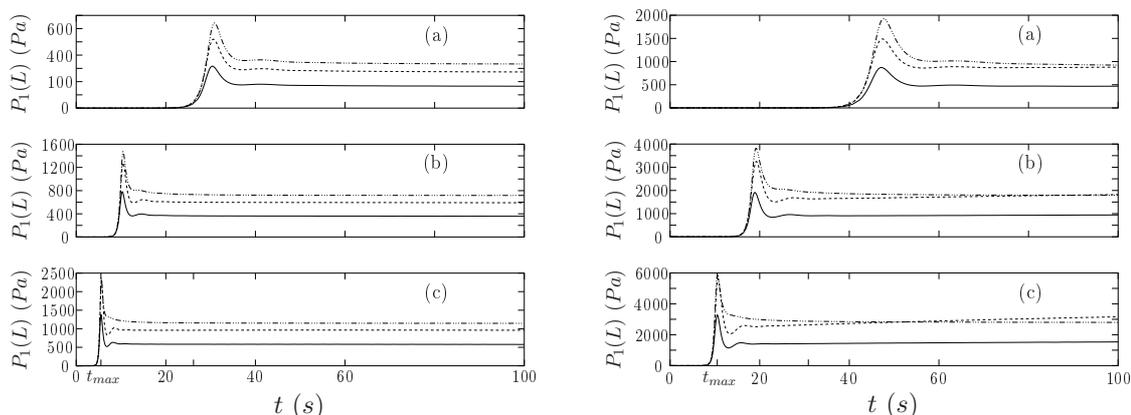
résolution de l’équation caractéristique et l’amplitude de pression  $P_1$  est calculée par une méthode de Runge-Kutta. Les effets non-linéaires sont à nouveau estimés au moyen des relations (4.10), (4.31) et (4.37).

- Cette opération est répétée jusqu’à atteindre le régime stationnaire de l’instabilité thermoacoustique.

### 4.3.2 Résultats de simulation

#### Processus non-linéaires dans le stack

Dans ce paragraphe, seuls les effets du flux de chaleur thermoacoustique et du vent acoustique de Rayleigh dans les pores du stack sont pris en compte. Les figures 4.11(a) et 4.11(b) présentent l’évolution temporelle de l’amplitude de pression  $P_1(L)$  au niveau de l’extrémité fermé du moteur pour deux positions du stack :  $L/4$  et  $3L/4$ , respectivement. Le régime transitoire est marqué par la présence d’un “overshoot” (pic d’amplitude) avant saturation de l’instabilité. Ce comportement est reproduit aussi bien par l’effet du vent acoustique que par l’effet du flux de chaleur transporté par l’onde dans le stack, et semble davantage marqué au fur et à mesure que la puissance de chauffage augmente. Le flux de chaleur acoustiquement induit apparaît comme l’effet saturant prédominant, mais il est clair que l’écoulement de Rayleigh apporte une contribution non-négligeable au niveau de pression final en



(a) Centre du stack positionné au quart de la longueur du résonateur.

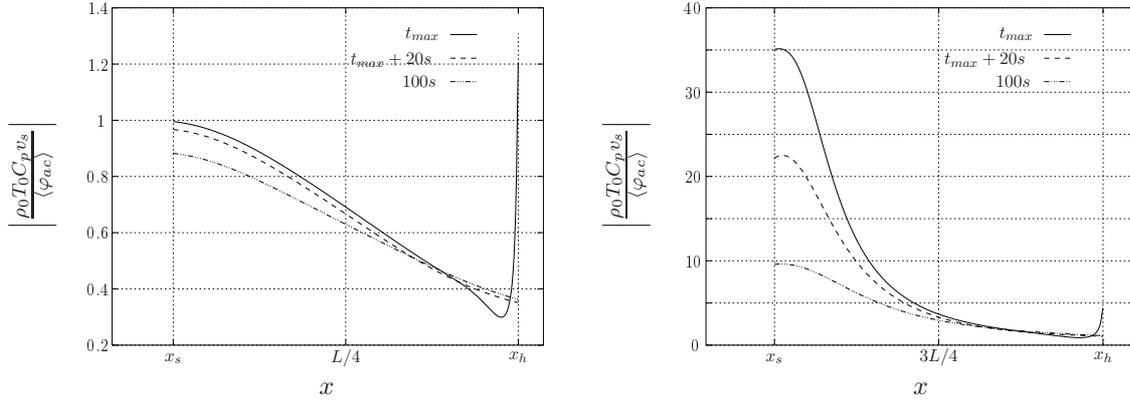
(b) Centre du stack positionné aux trois quarts de la longueur du résonateur.

**FIGURE 4.11** – Simulations numériques du régime transitoire pour différents incréments de puissance de chauffage au dessus du seuil de déclenchement  $Q_o$  (du haut vers le bas) :  $\Delta Q/Q_o = 5\%$  (a),  $\Delta Q/Q_o = 20\%$  (b) et  $\Delta Q/Q_o = 50\%$  (c). Les différentes courbes représentent les résultats obtenus selon que les processus non-linéaires dans le stack sont pris en compte ou non : vent acoustique seul (tiretés-pointillés), flux de chaleur thermoacoustique seul (tiretés), les deux effets (lignes continues).

régime établi et cet effet ne peut donc pas être négligé. L'importance du vent acoustique par rapport au flux de chaleur dépend naturellement de la position du stack dans le système, comme on peut l'observer en comparant les figures 4.11(a) et 4.11(b). Ceci peut s'expliquer par le fait que pour ces deux positions particulières du stack, la vitesse du streaming est globalement la même et le flux de chaleur dû à l'écoulement est identique (si on fait abstraction de l'effet du gradient de température), tandis que le flux de chaleur acoustiquement induit est beaucoup plus important lorsque le stack est placé en  $L/4$  (proche du ventre de vitesse acoustique) que lorsqu'il est placé en  $3L/4$  (proche du noeud). Ceci est illustré sur les figures 4.12(a) et 4.12(b) donnant les rapports entre le flux de convection induit par le streaming ( $\simeq \rho_0 C_p v_s T_0$ ) et le flux acoustiquement induit  $\langle \varphi_{ac} \rangle$  le long du stack. Ces rapports correspondent à une puissance de chauffage  $\Delta Q/Q_o = 50\%$  et sont donnés à différents instants  $t$  au cours du transitoire :  $t_{max}$  [instant auquel l'amplitude de l'“overshoot” est maximale, repéré sur l'axe des abscisses des figures 4.11-(a,b)],  $t_{max} + 20s$  puis  $100s$ . On peut observer que le flux acoustiquement induit est supérieur au flux de convection en  $L/4$  mais nettement inférieur en  $3L/4$ .

Notons également que les variations longitudinales des flux de chaleurs jouent un rôle important dans la dynamique du transitoire, et ces variations sont prise en compte ici grâce au calcul par différences finies. En effet, une modélisation analytique plus simplifiée qui consiste à faire l'hypothèse d'une distribution exponentielle de température et à calculer l'amplitude des effets non-linéaires à une température donnée<sup>7</sup> ne permet pas de reproduire l'“overshoot” avant saturation, que ce soit par le flux de chaleur thermoacoustique ou par l'effet du vent acoustique [70]. Il est donc certain que la distribution longitudinale des flux de chaleurs induits par les effets non-linéaires est responsable d'une partie des phénomènes mis en jeu lors du régime transitoire de l'onde.

7. Cette température correspond à une longueur caractéristique, représentative en moyenne des variations spatiales et temporelles du champ de température. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à l'article de Penelet *et al.*[70].



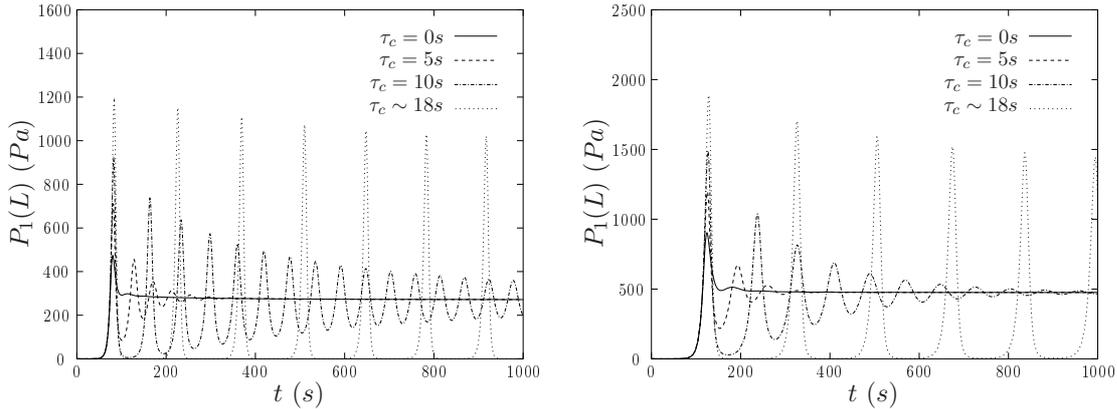
(a) Centre du stack positionné au quart de la longueur du résonateur.

(b) Centre du stack positionné aux trois quarts de la longueur du résonateur.

**FIGURE 4.12** – Rapport des flux de chaleur transporté par l’écoulement et acoustiquement induit (en valeur absolue) le long du stack, pour  $\Delta Q/Q_o = 50\%$  et à trois instants  $t$ . L’instant noté  $t_{max}$  correspond à l’amplitude maximum de pression au niveau de l’“overshoot” : cet instant est repéré sur l’axe des abscisses des figures 4.11(a) et 4.11(b).

### Vent acoustique dans le résonateur

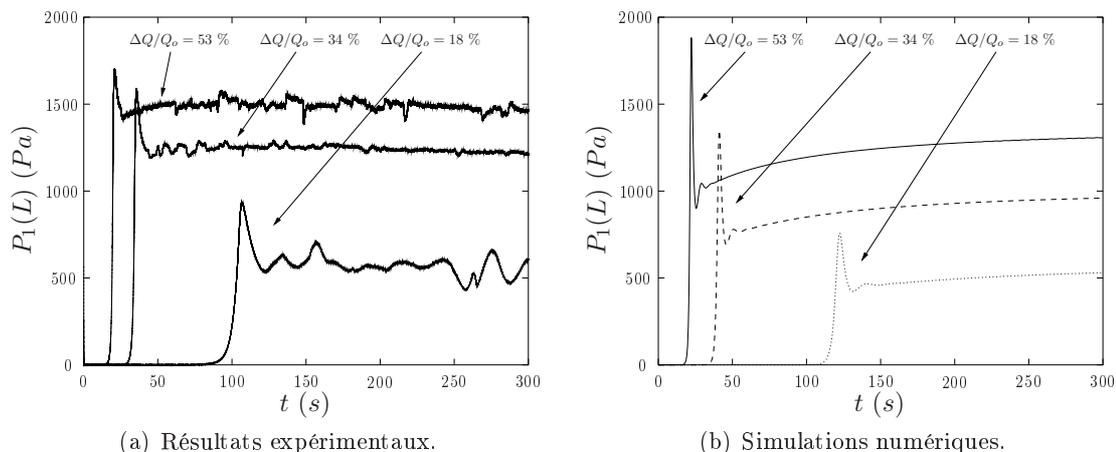
L’effet du vent acoustique dans la partie du résonateur inhomogène en température dépend fortement du retard à l’établissement des cellules de recirculation. Les figures 4.13(a) et 4.13(b) présentent des résultats de simulations numériques de l’évolution temporelle de l’amplitude de pression  $P_1(L)$  lorsque le vent acoustique dans le résonateur est le seul effet non-linéaire introduit dans le modèle. Les différentes courbes correspondent à plusieurs valeurs du temps caractéristique  $\tau_c$  d’établissement du vent acoustique intervenant dans l’équation différentielle (4.31). Lorsque l’établissement de l’écou-



(a) Stack en  $L/4$ .

(b) Stack en  $3L/4$ .

**FIGURE 4.13** – Simulations numériques du régime transitoire pour différentes valeurs du temps caractéristique  $\tau_c$  d’établissement du vent acoustique dans le résonateur. La puissance de chauffage est fixée juste au-dessus du déclenchement ( $\Delta Q/Q_o = 1\%$ ) et seul le vent acoustique dans la partie chauffée du résonateur est pris en compte ( $\varphi_{ac} = v_s = 0$ ). Les courbes en pointillées ( $\tau_c \simeq 18s$ ) correspondent au temps caractéristique estimé à partir des travaux d’Amari *et al.*[4].



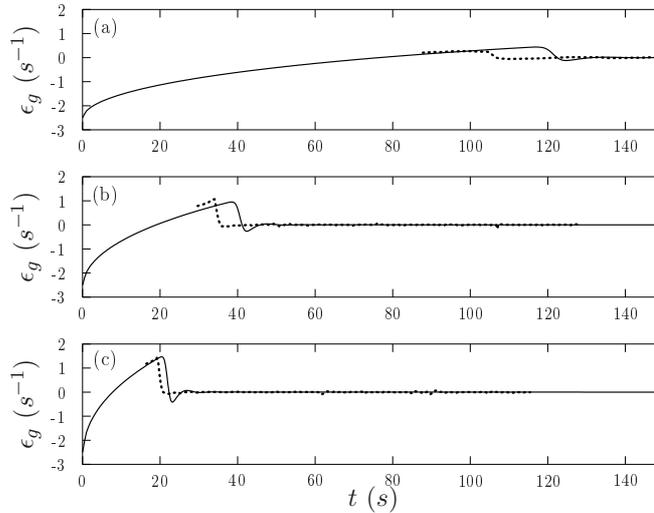
**FIGURE 4.14** – Régimes transitoires de l’amplitude de pression acoustique  $P_1$  mesurés et théoriques obtenus pour  $x_s = 34.1\text{cm}$  et pour différents incréments de puissance de chauffage au dessus du seuil de déclenchement  $Q_o$  :  $\Delta Q/Q_o = 18\%$  ( $\cdots$ ),  $\Delta Q/Q_o = 34\%$  ( $---$ ) et  $\Delta Q/Q_o = 53\%$  ( $—$ ).

lement se fait instantanément ( $\tau_c = 0$ ), l’amplitude de pression acoustique présente un comportement dynamique similaire à ceux obtenus lorsque le flux de chaleur et le vent acoustique dans le stack sont pris en compte, comportement caractérisé par un “overshoot” suivi d’un régime stationnaire saturé. En revanche, la prise en compte d’un retard fait apparaître des oscillations du niveau de pression dont l’amplitude s’intensifie avec l’augmentation de  $\tau_c$  et pouvant conduire à une dynamique de “déclenchements-arrêts” périodiques au-delà d’une certaine valeur critique du temps d’établissement.

### Comparaisons avec l’expérience

Des régimes transitoires de l’amplitude de pression acoustique mesurés et théoriques obtenus pour un stack placé en  $x_s = 34.1\text{cm}$  et pour différents incréments de puissance de chauffage sont donnés en figures 4.14(a) et 4.14(b). Le dispositif expérimental utilisé est présenté sur la figure 4.2. Les simulations numériques sont effectuées en intégrant tous les processus non-linéaires décrits précédemment. L’analyse comparative de ces figures montrent que le modèle reproduit qualitativement les résultats expérimentaux, même si l’amplitude de l’“overshoot” (relative au niveau de pression final) semble être surestimée par la théorie.

Le taux d’amplification  $\epsilon_g$  théorique est également en bon accord avec les estimations du taux de croissance de l’onde, tracées en pointillés gras sur la figure 4.15. Ces estimations du taux de croissance sont obtenues à partir des enveloppes de pression acoustique mesurées, en usant d’interpolations affines successives sur l’évolution logarithmique de pression : l’instant  $t_i$  pour lequel l’amplitude mesurée devient suffisante (hors du bruit de mesure) et l’instant  $t_f$  précédant la saturation définissent une durée  $\Delta t$  découpée en 100 intervalles de temps. Une interpolation affine de  $\ln(P_1)$  est alors effectuée sur chacun des intervalles  $\Delta t/100$  et le taux d’amplification instantané de l’onde est donné par le coefficient directeur du polynôme d’ordre 1.



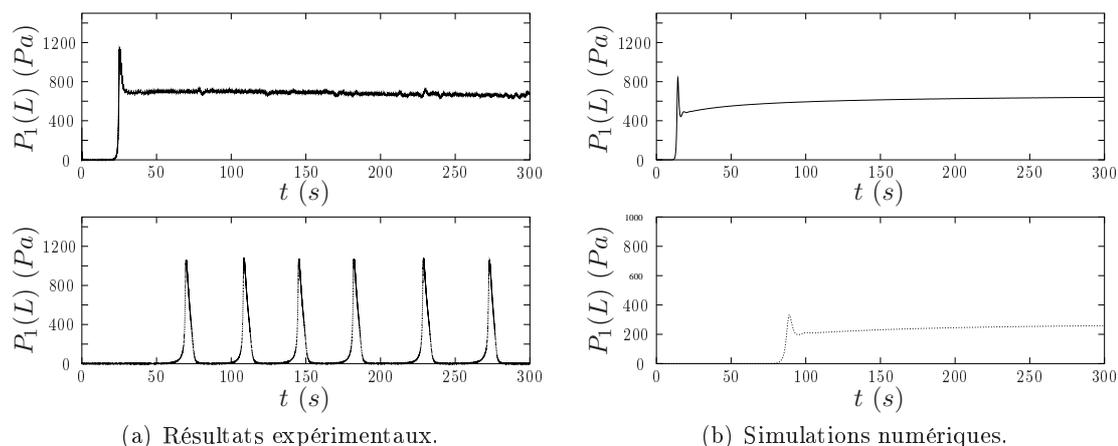
**FIGURE 4.15** – Taux d’amplification mesuré (en pointillés gras) et théorique (traits fins) pour  $x_s = 34.1\text{cm}$  et pour différents incréments de puissance de chauffage au dessus du seuil de déclenchement  $Q_o$  :  $\Delta Q/Q_o = 18\%$  (a),  $\Delta Q/Q_o = 34\%$  (b) et  $\Delta Q/Q_o = 53\%$  (c). Les estimations sont effectuées à partir d’interpolations affines de l’évolution logarithmique de l’amplitude de pression mesurée.

Si le modèle reproduit bien la présence d’un “overshoot” et la saturation de l’instabilité thermoacoustique, il est en revanche incapable de reproduire le processus de déclenchement et arrêts périodiques de l’onde. Ceci est clairement visible sur les figures 4.16(a) et 4.16(b) donnant les résultats expérimentaux et théoriques pour un stack placé en  $x_s = 21.6\text{cm}$ . Même si l’étude du vent acoustique dans le résonateur a montré qu’en raison du retard qui peut exister entre l’évolution des champs acoustiques et l’établissement de l’écoulement, ce dernier pourrait être responsable du phénomène de déclenchement/arrêts, il apparaît que l’effet de l’écoulement dans le guide large est bien plus faible que l’effet combiné du flux de chaleur et de l’écoulement dans le stack. On peut donc s’interroger quant à la validité de la considération simplifiée des écoulements dans ce modèle uni-dimensionnel. Rappelons notamment que de récents travaux expérimentaux ont mis en évidence une augmentation importante de l’amplitude de vitesse de l’écoulement ainsi que l’existence de nouvelles cellules de recirculation dans les zones à proximité du stack [60]. On peut donc aisément imaginer que la différence entre modèle et observations expérimentales provient essentiellement d’un manque de détail dans la modélisation des écoulements, et de leur impact sur les mécanismes de transport de la chaleur au cours du transitoire.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle analytique pour le calcul de régime transitoire de l’instabilité thermoacoustique dans un moteur à ondes stationnaires a été développé. Ce modèle repose sur une description uni-dimensionnelle des transferts thermiques et des processus non-linéaires responsables de la saturation en amplitude de l’onde sonore.

Dans ce modèle, le flux de chaleur acoustiquement induit dans le stack et le vent acoustique de Rayleigh sont les deux processus non-linéaires responsables d’une saturation en amplitude de l’onde sonore.



**FIGURE 4.16** – Régimes transitoires de l'amplitude de pression acoustique  $P_1$  mesurés et théoriques obtenus pour  $x_s = 21.6\text{cm}$  et pour  $\Delta Q/Q_o = 18\%$  ( $\cdots$ ) et  $\Delta Q/Q_o = 34\%$  ( $—$ ). Si le modèle reproduit qualitativement l'évolution de la pression pour des puissances de chauffage élevées, il est en revanche incapable de retrouver le comportement périodique de l'onde observé expérimentalement pour des puissances de chauffage plus faibles.

Les résultats de simulations numériques montrent que ces deux processus peuvent être à l'origine d'un "overshoot" de l'onde avant stabilisation. Le vent acoustique dans le résonateur – et en particulier le temps mis par l'écoulement pour atteindre son régime stationnaire – semble jouer un rôle dans le phénomène de déclenchements/arrêts périodiques de l'instabilité thermoacoustique ; cependant l'effet du vent acoustique dans le guide large est sensiblement plus faible que les effets non-linéaires qui s'établissent instantanément dans le stack et les oscillations d'amplitude ne sont alors plus visibles lorsque tous les processus non-linéaires sont pris en compte dans les calculs. On peut cependant raisonnablement imaginer que le phénomène de déclenchements/arrêts s'explique par la mise en jeu de plusieurs échelles de temps différentes lors du régime transitoire de l'instabilité.

En l'état actuel, le modèle proposé dans ce chapitre ne permet donc pas de reproduire l'ensemble des phénomènes complexes qui apparaissent dans la dynamique du régime transitoire. A la lumière des résultats discutés au paragraphe 4.3.2, il semble que l'effet de convection de la chaleur dû à la présence d'un écoulement redressé soit sous-estimé dans cette approche uni-dimensionnelle. La description précise du régime transitoire nécessite a priori une modélisation fine des variations transverses du champ de température et des effets de convection au voisinage immédiat du stack. Enfin, précisons que ce modèle pourrait être affiné par l'ajout d'autres processus non-linéaires comme les effets de bord aux extrémités du stack (pertes mineures) et la génération d'harmoniques supérieurs, responsables d'une dissipation thermo-visqueuse supplémentaire.



# Conclusion

Ce travail de doctorat fait suite aux nombreuses études déjà initiées en thermoacoustique par le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine depuis maintenant une vingtaine d'années. Il vise essentiellement à apporter une contribution à la compréhension des phénomènes physiques qui entrent en jeu lors du fonctionnement d'un moteur thermoacoustique. Le rôle majeur des études réalisées pendant cette thèse est de pouvoir proposer de nouveaux outils de modélisation et de réduire la part d'empirisme encore très présente dans le dimensionnement des systèmes thermoacoustiques.

Une modélisation basée sur le formalisme des matrices de transferts, telle que celle présentée au chapitre 1 de ce mémoire, a l'avantage d'être aisément transposable à n'importe quelle configuration de système thermoacoustique, du moteur à ondes stationnaires le plus simple au moteur plus complexe faisant intervenir le couplage de plusieurs résonateurs acoustiques. Quelle que soit sa géométrie, le système thermoacoustique est en effet entièrement défini par son équation caractéristique. Pour une distribution de température donnée dans le dispositif, la solution de l'équation caractéristique correspond alors une pulsation complexe dont la partie réelle représente la pulsation acoustique des auto-oscillations et la partie imaginaire correspond au taux d'amplification (ou d'atténuation) de l'onde. Cette modélisation de l'amplification de l'instabilité est également bien adaptée pour la détermination du seuil de déclenchement pour lequel le coefficient d'amplification est nécessairement nul (en dehors du régime non-linéaire de l'onde) : les résultats théoriques montrent un bon accord avec les courbes de stabilités expérimentales pour un cas issu de la littérature [109] et pour un prototype de moteur de Stirling développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. L'adéquation qualitative mais non quantitative des résultats met cependant l'accent sur l'importance de la description fine du noyau thermoacoustique, et particulièrement sur la forme du champ de température.

Un banc de mesure basé sur une méthode à quatre microphones est présenté au chapitre 2. Ce banc fait usage d'une méthode dite à *deux charges* pour mesurer les propriétés de transfert du noyau thermoacoustique sur une gamme de fréquence  $[50-200]$  Hz et pour différentes conditions de chauffage. Un noyau thermoacoustique constitué de trois échangeurs de chaleur et muni d'un stack en céramique à pores carrés est caractérisé au moyen de cette méthode de mesure. De cette façon, la matrice de transfert ainsi obtenue est introduite dans le modèle développé au chapitre 1 pour déterminer les conditions de déclenchement de systèmes thermoacoustiques intégrant ce noyau. Le bon accord qui existe entre les résultats de cette méthode *semi-analytique* et les conditions réelles de déclenchement valide d'une part la méthode de mesure et le modèle utilisés, et prouve d'autre part que le détail du champ de température (implicitement inclus dans les propriétés de transfert mesurées) est d'une

importance capitale dans la détermination des conditions de seuil.

Le chapitre 3 de ce mémoire est consacré à l'exploitation des données expérimentales obtenues à partir du banc de mesure présenté au chapitre précédent pour l'ajustement des paramètres acoustiques et thermiques d'un modèle en usant d'une méthode inverse. La modélisation du noyau thermoacoustique est basée sur une description de la propagation d'ondes planes couplée aux équations des transferts de chaleur dans les différents éléments qui constituent le noyau. Le problème inverse (problème de minimisation) est résolu de manière itérative en usant d'une méthode dérivative de Gauss-Newton. Cette méthode est très sensible au choix des paramètres à estimer et à la connaissance *a priori* de leurs valeurs réelles ; un test sur des simulations d'expérience est effectué, qui permet de vérifier la convergence et la stabilité de l'algorithme, et une étude de sensibilité est réalisée, qui permet d'identifier les paramètres pouvant être ajustés grâce à la méthode inverse. Celle-ci est appliquée dans un premier temps à partir des données expérimentales sans chauffage obtenues au chapitre 2 pour l'ajustement de la porosité et le rayon des pores du stack en céramique à pores carrés, puis pour l'ajustement de la porosité, du rayon et de la tortuosité de matériaux plus complexes pouvant jouer le rôle de *régénérateur* [13]. Les données avec chauffage sont également exploitées pour l'estimation d'une longueur caractéristique de diffusion thermique traduisant le rapport entre la quantité de chaleur transportée le long du *stack/régénérateur* et celle transférée latéralement vers les parois. Les résultats obtenus pour les différents paramètres acoustiques et thermiques permettent une comparaison qualitative des différents échantillons à disposition ; en revanche, une analyse quantitative de ces résultats n'est pas envisageable en raison du biais qui persiste en sortie de l'algorithme de minimisation.

Le chapitre 4 est dédié à la modélisation du régime transitoire de l'instabilité thermoacoustique dans un système à ondes stationnaires "quart d'onde". L'évolution de l'amplitude de pression acoustique est décrite par une équation différentielle d'ordre 1 faisant intervenir le coefficient d'amplification introduit au chapitre 1. Deux processus non-linéaires – à savoir, le flux de chaleur thermoacoustique et le vent acoustique de Rayleigh – sont pris en compte dans les équations du transport de chaleur en régime instationnaire afin de simuler la saturation en amplitude de l'onde acoustique. Une attention particulière est portée sur la modélisation des écoulements, de sorte que leur caractère bi-dimensionnel puisse être intégré au modèle à une dimension des transferts de chaleur et de propagation acoustique. Les résultats théoriques démontrent la présence de comportements particuliers lors du transitoire, qui sont qualitativement retrouvés dans les mesures de pression acoustique : le modèle reproduit en effet l'existence d'un "overshoot" (pic d'amplitude) de l'amplitude des auto-oscillations avant saturation. Les résultats expérimentaux montrent également la présence d'un processus de déclenchements/arrêts périodiques de l'onde pour des conditions expérimentales particulières, mais cet effet n'est reproduit, de manière purement qualitative, que lorsque seul le vent acoustique dans le résonateur est pris en compte dans les équations, sous réserve de considérer également un retard à l'établissement de l'écoulement.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse constituent, à notre sens, un pas supplémentaire vers la compréhension fine du fonctionnement des moteurs thermoacoustiques et vers le développement de nouveaux outils pour la prédiction des performances de ces systèmes. Suite à ce travail, il n'en demeure pas moins qu'un certain nombre d'études peuvent être menées. En premier lieu, il serait intéressant d'appliquer les différents outils théoriques et expérimentaux étudiés dans ce mémoire au nouveau

prototype de moteur thermo-acousto-électrique récemment développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (cf. fig. 1.10). L'étude de ce dispositif serait en effet un bon moyen de valider (et d'améliorer) ces méthodes sur un système thermoacoustique complexe. La caractérisation expérimentale (par une méthode à deux charges) des propriétés de transfert acoustique du noyau équipant cette machine a déjà été initiée et sera poursuivie à l'avenir. Concernant ces travaux, le développement d'un banc de mesure adapté et l'instrumentation du noyau en thermocouples devraient permettre d'améliorer la méthode inverse pour l'estimation des paramètres internes du noyau. Néanmoins, au vu des résultats exposés au chapitre 3, les limites d'une telle approche sont réelles et indiscutables, en tout cas en ce qui concerne la caractérisation fréquentielle des propriétés de transfert du noyau. Cependant, il est clair que l'usage d'une méthode inverse constitue un enjeu important qui permettrait, à partir de la caractérisation de plusieurs échantillons, de pouvoir comparer objectivement les performances de divers matériaux utilisés en lieu et place du *stack*. Enfin, en référence au chapitre 4, le travail réalisé sur l'étude du transitoire reste un travail préliminaire et innovant, qui constitue un premier essai de la prise en compte de l'écoulement de Rayleigh dans le processus d'amplification et de saturation de l'instabilité thermoacoustique. Des améliorations peuvent être apportées à ce modèle, comme la prise en compte d'autres effets saturants (pertes mineures, cascade harmonique...), et des études purement analytiques (analyse de stabilité) peuvent également être envisagées, qui pourraient permettre de mieux cerner le rôle de chaque effet dans la saturation des auto-oscillations.



## Annexe A

# Expressions analytiques des matrices de transfert de biportes acoustiques

La description des conditions de déclenchement et d'amplification thermoacoustique exposée au chapitre 1 est basée sur le formalisme des matrices de transfert. Un système thermoacoustique peut donc être vu comme un assemblage de plusieurs éléments qualifiés de *biportes acoustiques*. Dans sa version la plus simple, le moteur est une combinaison d'un noyau thermoacoustique (i.e. l'élément caractérisé par une distribution inhomogène de température) et de tubes à section définie (cylindrique, rectangulaire...). Evidemment, les moteurs thermoacoustiques actuels ne sont pas seulement constitués d'éléments aussi basiques mais intègrent des géométries plus complexes [9, 10, 11] dont le rôle peut être de limiter de façon semi-empirique les pertes non-linéaires (*jet pumps, tapered tubes...*) ou d'assurer la transduction acousto-électrique (couplage avec un alternateur électrodynamique...). Dans la mesure où les propriétés de transfert de ces éléments "complexes" peuvent être obtenues analytiquement, il devient alors possible de les intégrer dans le modèle proposé en chapitre 1.

### A.1 Conventions utilisées

L'hypothèse d'une onde plane harmonique (convention  $-i\omega t$ ) se propageant dans le biporte permet d'exprimer les matrices de transfert dans le domaine de Fourier, reliant les amplitudes complexes des variables acoustiques.

De façon générale, la dimension longitudinale du biporte est notée  $d$  et le repère de coordonnées est défini de sorte que l'entrée du biporte soit placée à l'origine  $x = 0$  et sa sortie en  $x = d$ , la propagation de l'onde plane se faisant suivant l'axe  $\vec{Ox}$ . Le formalisme utilisé ici est basé sur une écriture en pression et débit acoustiques,  $\tilde{p}_1$  et  $\tilde{u}_{1,x}$ , et la prise en compte des éventuels changements de section est donc intégrée dans l'expression même des matrices de transfert. Comme illustré sur la figure A.1, le débit acoustique en entrée  $\tilde{u}_{1,x}(0)$  est compté positif s'il rentre dans le quadripôle et le débit acoustique en sortie  $\tilde{u}_{1,x}(d)$  est compté positif s'il sort du quadripôle (orientation anti-symétrique).



**FIGURE A.1** – Convention pression-débit utilisée pour la description des quadripôles. Orientation anti-symétrique.

La matrice de transfert du biporte représenté en figure A.1 est ainsi définie grâce à la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(d) \\ \tilde{u}_{1,x}(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(0) \\ \tilde{u}_{1,x}(0) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

## A.2 Guide d'onde droit

L'équation (1.22) définie au paragraphe 1.1 décrit la propagation d'une onde plane guidée en présence d'une distribution longitudinale quelconque de température. Lorsque la température est supposée constante et égale à la température ambiante  $T_c$  ( $d_x T_0 = 0$  et  $d_x f_\nu = 0$  du fait que la viscosité dynamique  $\mu$  et la masse volumique  $\rho_0$  du fluide ne dépendent pas de  $x$ ), cette équation, traduisant alors la propagation de l'onde plane guidée en présence de pertes viscothermiques pariétales, devient

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial x^2} + k^2 \tilde{p}_1 = 0, \quad (\text{A.2})$$

où le nombre d'onde complexe

$$k = k_0 \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}} \quad (\text{A.3})$$

tient compte du couplage viscothermique entre le fluide et les parois du guide au travers des fonctions  $f_\nu$  et  $f_\kappa$ . La solution générale de l'équation (A.2) s'écrivant

$$\tilde{p}_1 = \tilde{A}e^{+ikx} + \tilde{B}e^{-ikx}, \quad (\text{A.4})$$

le report de cette solution dans l'expression (1.17) permet d'écrire la composante axiale de la vitesse particulière moyennée sur la section du guide sous la forme

$$\langle \tilde{v}_{1,x} \rangle = \frac{\sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}}}{\rho_0 c_0} (1 - f_\nu) (\tilde{A}e^{+ikx} - \tilde{B}e^{-ikx}). \quad (\text{A.5})$$

Introduisant la section transverse du guide  $S$  et sachant que  $\tilde{u}_{1,x} = S \langle \tilde{v}_{1,x} \rangle$ , le débit acoustique est alors donné par la relation

$$\tilde{u}_{1,x} = \frac{1}{Z_c} (\tilde{A}e^{+ikx} - \tilde{B}e^{-ikx}). \quad (\text{A.6})$$

où  $Z_c$  est l'impédance caractéristique complexe du guide d'onde définie par

$$Z_c = \frac{\rho_0 c_0}{S \sqrt{(1 - f_\nu)(1 + (\gamma - 1)f_\kappa)}}. \quad (\text{A.7})$$

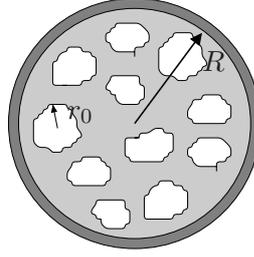


FIGURE A.2 – Dimensions caractéristiques transverses d'un réseau de capillaires.

Finalement, les relations (A.4) et (A.6) exprimées en  $x = 0$  conduisent à la détermination des amplitudes complexes  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  :

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{p}_1(0) + Z_c \tilde{u}_{1,x}(0)}{2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{p}_1(0) - Z_c \tilde{u}_{1,x}(0)}{2}, \quad (\text{A.9})$$

et le report de ces relations dans les relations (A.4) et (A.6) exprimées en  $x = d$  permettent d'en déduire l'expression analytique de la matrice de transfert du guide définie par la relation (A.1) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(kd) & iZ_c \sin(kd) \\ iZ_c^{-1} \sin(kd) & \cos(kd) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

### A.3 Elément poreux

Afin d'assurer l'établissement d'un gradient de température le long du stack, les moteurs thermoacoustiques intègrent généralement des échangeurs de chaleurs souvent constitués de matériaux poreux traversés par un système de chauffage ou un circuit de refroidissement. Contrairement au stack, le gradient thermique dû à la conduction de la chaleur dans les échangeurs peut être négligé en première approximation sans engendrer d'erreurs grossières dans les modèles. Les échangeurs sont donc généralement modélisés comme des éléments poreux à température constante chaude  $T_h$  ou ambiante  $T_c$ . Un tel élément, de la façon dont il est considéré dans ces travaux, est représenté schématiquement sur la figure A.2 : un réseau de capillaires de rayon géométrique  $r_0$  est inséré dans un guide d'onde de longueur  $d$  et de section  $S$  (rayon  $R$ ). La géométrie des pores est choisie volontairement indéfinie sur le schéma, et les équations qui suivent restent valides pour les différents cas particuliers généralement considérés (empilements de plaques, pores cylindriques...), sous réserve de connaître les expressions des fonctions  $f_\nu$  et  $f_\kappa$  [5].

La matrice de transfert d'un tel élément est définie de la même manière que la matrice (A.10) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(k_{eq}d) & iZ_{eq} \sin(k_{eq}d) \\ iZ_{eq}^{-1} \sin(k_{eq}d) & \cos(k_{eq}d) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

avec le nombre d'onde équivalent

$$k_{eq} = k_0 \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_{\kappa}^{(r_0)}}{1 - f_{\nu}^{(r_0)}}} \quad (\text{A.12})$$

et l'impédance caractéristique

$$Z_{eq} = \frac{\rho_0 c_0}{\phi S \sqrt{(1 - f_{\nu}^{(r_0)})(1 + (\gamma - 1)f_{\kappa}^{(r_0)})}}, \quad (\text{A.13})$$

où  $\phi$  est la porosité et où les fonctions  $f_{\nu}^{(r_0)}$  et  $f_{\kappa}^{(r_0)}$  traduisent le couplage viscothermique entre le fluide et les parois d'un pore de dimension caractéristique transverse  $r_0$ . Par exemple, pour un réseau de pores cylindriques, les expressions analytiques de ces fonctions sont données par l'équation (1.21) en remplaçant  $R$  par  $r_0$ .

#### A.4 Guide d'onde conique

Depuis une dizaine d'années, la plupart des prototypes de moteurs thermoacoustiques étudiés intègrent des pièces adaptatives coniques reliant des guides d'ondes de sections différentes [24, 10, 17, 111, 43], qui influent sur la distribution des champs acoustiques.

En respectant les notations utilisées jusqu'à présent, le cône est défini comme un guide d'onde dont le rayon  $R$  varie linéairement entre les valeurs  $R_0 = R(0)$  et  $R_d = R(d)$  (cf. fig. A.1). L'expression analytique de la matrice de transfert d'un biporte conique peut être trouvée dans la référence [57] pour des conventions d'écriture différentes de celles adoptées dans ce manuscrit. Par souci de clarté, cette expression analytique est réécrite à partir de [57] sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{z_1}{z_2} \cos(kd) + \frac{\sin(kd)}{kz_2} & iZ_c \frac{z_2}{z_1} \sin(kd) \\ iZ_c^{-1} \left[ \frac{z_1}{z_2} \left( 1 + \frac{1}{k^2 z_1 z_2} \right) \sin(kd) - \left( 1 - \frac{z_1}{z_2} \right) \frac{\cos(kd)}{kz_2} \right] & \frac{z_2}{z_1} \cos(kd) - \frac{\sin(kd)}{kz_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

avec  $z_1 = \frac{R_0}{R_0 - R_d} d$ ,  $z_2 = z_1 + d$  et où le nombre d'onde  $k$  et l'impédance caractéristique  $Z_c$  sont respectivement données par les équations (A.3) et (A.7) [avec  $S = \pi R_d^2$  dans l'éq. (A.7)]. Néanmoins, il convient de préciser que l'expression (A.14) issue de [57] est initialement déduite de l'équation de Webster sans pertes. La prise en compte des pertes (qui dépendent en toute rigueur de  $R$ ) impliquerait la résolution d'une équation de propagation comparable à celle de la thermoacoustique linéaire [éq. (1.22)], dont la solution serait moins triviale que l'expression (A.14). Autrement dit, l'expression analytique (A.14) est une approximation de la propagation dans un cône avec pertes pariétales, les fonctions  $f_{\nu}$  et  $f_{\kappa}$  intervenant dans les expressions (A.3) et (A.7) étant évaluées pour  $R = (R_0 + R_d)/2$ .

#### A.5 Biporte soumis à une distribution inhomogène de température

Pour décrire la propagation d'ondes planes harmoniques dans un biporte acoustique soumis à une distribution inhomogène de température  $T_0(x)$ , il convient de résoudre l'équation différentielle du

second ordre à coefficients non-constants (1.22) définie au paragraphe 1.1. Gusev *et coll.* ont proposé une solution analytique exacte de cette équation sous la forme d'une série infinie d'opérateurs intégraux [39, 48, 73, 68]. Pour cela, l'équation (1.22) est réécrite sous la forme

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial x^2} + \frac{d\Phi_1}{dx} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \Phi_0 \tilde{p}_1 = 0, \quad (\text{A.15})$$

où  $c_0 = c_0(T_c)$  est la célérité adiabatique du son à température ambiante, et où les fonctions

$$\frac{d\Phi_1}{dx} = \frac{d_x T_0}{T_0} \left(1 + \frac{f_\kappa - f_\nu}{(\sigma - 1)(1 - f_\nu)}\right) - \frac{d_x f_\nu}{1 - f_\nu}, \quad (\text{A.16})$$

$$\Phi_0 = \frac{T_c}{T_0} \left(\frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}\right), \quad (\text{A.17})$$

dépendent de  $x$  au travers de la température  $T_0$  (et des propriétés thermophysiques du fluide).

En introduisant la variable spatiale  $\zeta$  définie selon

$$\frac{d\zeta}{dx} = \zeta_x = e^{(\Phi_1(0) - \Phi_1(x))}, \quad (\text{A.18})$$

et la fonction

$$F(\zeta) = \Phi_0(x(\zeta)) \zeta_x^{-2}, \quad (\text{A.19})$$

l'équation de propagation (A.15) devient

$$\frac{d^2 \tilde{p}_1}{d\zeta^2} + k_0^2 F(\zeta) \tilde{p}_1 = 0, \quad (\text{A.20})$$

avec  $k_0 = \omega/c_0(T_c)$ . Par intégrations successives sur la coordonnée  $\zeta$ , l'équation (A.20) est réécrite sous la forme d'un système d'équations intégrales

$$\tilde{p}_1(\zeta) = \tilde{p}_1(0) + \int_0^\zeta \frac{d\tilde{p}_1}{d\zeta'} d\zeta', \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d\tilde{p}_1}{d\zeta} = \frac{d\tilde{p}_1}{d\zeta} \Big|_0 - k_0^2 \int_0^\zeta F(\zeta') \tilde{p}_1(\zeta') d\zeta', \quad (\text{A.22})$$

système d'équations qui fait apparaître deux opérateurs intégraux que l'on peut noter

$$\Omega_1(y) \equiv ik_0 \int_0^\zeta F(\zeta') y(\zeta') d\zeta', \quad (\text{A.23})$$

$$\Omega_2(y) \equiv ik_0 \int_0^\zeta y(\zeta') d\zeta'. \quad (\text{A.24})$$

Finalement, en usant d'approximations successives pour le calcul des termes de gauche des équations (A.21) et (A.22), la solution exacte de ce système peut être écrite sous forme matricielle en faisant apparaître des séries infinies des opérateurs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  [73, 68] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1(\zeta) \\ \frac{d\tilde{p}_1}{d\zeta}(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \frac{\Omega_2}{ik_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \\ ik_0 \Omega_1 \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2 \Omega_1)^n & \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1 \Omega_2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(0) \\ \frac{d\tilde{p}_1}{d\zeta}(0) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

où les termes des séries infinies sont définis de la façon suivante<sup>1</sup> :

$$(\Omega_2\Omega_1)^n y = \Omega_2 \left( \underbrace{\Omega_1 \left( \dots \Omega_2(\Omega_1(y)) \right)}_{n \text{ fois}} \right). \quad (\text{A.26})$$

En usant de la relation (1.17) du chapitre 1 pour la vitesse particulaire moyenne et de l'équation (A.18), il vient :

$$\frac{d\tilde{p}_1}{d\zeta} = ik_0 \frac{\rho_0 c_0}{S(1-f_\nu)} \zeta_x^{-1} \tilde{u}_{1,x}, \quad (\text{A.27})$$

ce qui permet de réécrire l'équation matricielle (A.25) en terme de pression et débit acoustiques et donc d'obtenir l'expression analytique exacte du biporte sous la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2\Omega_1)^n & Z(0)\Omega_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1\Omega_2)^n \\ \frac{\Omega_1\zeta_x}{Z(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_2\Omega_1)^n & \frac{Z(0)\zeta_x}{Z(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_1\Omega_2)^n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

où la quantité  $Z(x)$  est définie par

$$Z(x) = \frac{\rho_0(x)c_0}{S(1-f_\nu)}. \quad (\text{A.29})$$

L'expression (A.28) est valide aussi bien pour un stack que pour la partie passive<sup>2</sup> du noyau, en évaluant simplement les fonctions thermovisqueuses pour un canal (fin) de rayon  $r_s$  ou un canal (large) de rayon  $R$ , respectivement (avec  $S \mapsto \phi S$  pour un poreux). Il convient de préciser que l'expression (A.28) pour un guide large ou un stack tend asymptotiquement vers les expressions (A.10) et (A.11) lorsque la température est constante le long du biporte.

---

1. Il est important de noter que pour un gradient de température non-nul, les opérateurs intégraux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  ne sont pas commutatifs et les éléments diagonaux de la matrice définie en eq. (A.25) ne sont pas égaux. Cette égalité apparaît néanmoins dès lors que  $d_x T_0 = 0$ , cas particulier pour lequel  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont définis à une constante multiplicative près.

2. également appelée "thermal buffer tube" dans la littérature anglophone.

## Annexe B

# Description analytique simplifiée du déclenchement et du taux d'amplification

Les équations permettant de décrire le seuil de déclenchement et de calculer le taux d'amplification des auto-oscillations sont écrites de façon générale dans le chapitre 1. Devant la complexité des expressions, notamment concernant la matrice de transfert du noyau thermoacoustique, une résolution numérique de l'équation caractéristique est requise pour le calcul de la pulsation  $\Omega$  et du coefficient d'amplification  $\epsilon_g$ . Néanmoins, sous réserve d'un certain nombre d'hypothèses concernant par exemple la compacité du noyau, le type d'interaction fluide-parois ou la forme du champ de température, il est possible de développer des expressions analytiques approchées de  $\Omega$ , du coefficient  $\epsilon_g$  et du seuil de déclenchement.

### B.1 Détermination de $\Omega$ et $\epsilon_g$ en hypothèse quasi-statique

#### B.1.1 Solution générale de l'équation caractéristique

Dans le chapitre 1, il est démontré de façon générale que le point de fonctionnement d'un système thermoacoustique est donné par la solution d'une équation caractéristique du type

$$f(\omega, T_0(x)) = 0, \quad (\text{B.1})$$

où la fonction  $f$  représente ici le terme de gauche des équations (1.30), (1.34), (1.35), (1.36), (1.37) ou (1.54), en fonction du système thermoacoustique considéré. D'autre part, l'amplification ou l'atténuation de l'instabilité thermoacoustique est introduite comme la partie imaginaire d'une fréquence complexe [37, 99, 98, 67]

$$\omega = \Omega + i\epsilon_g, \quad (\text{B.2})$$

où  $\Omega$  est la fréquence réelle d'oscillation et  $\epsilon_g$  est le taux d'amplification. L'hypothèse de quasi-stationnarité ( $\epsilon_g \ll \Omega$  et  $T_0(x)$  supposé constant à l'échelle de temps de quelques périodes acoustiques) permet de réécrire l'équation caractéristique générale (1.58) sous la forme

$$f_0(\Omega, T_0(x)) + \epsilon_g f_1(\Omega, T_0(x)) + O(\epsilon_g^2) = 0, \quad (\text{B.3})$$

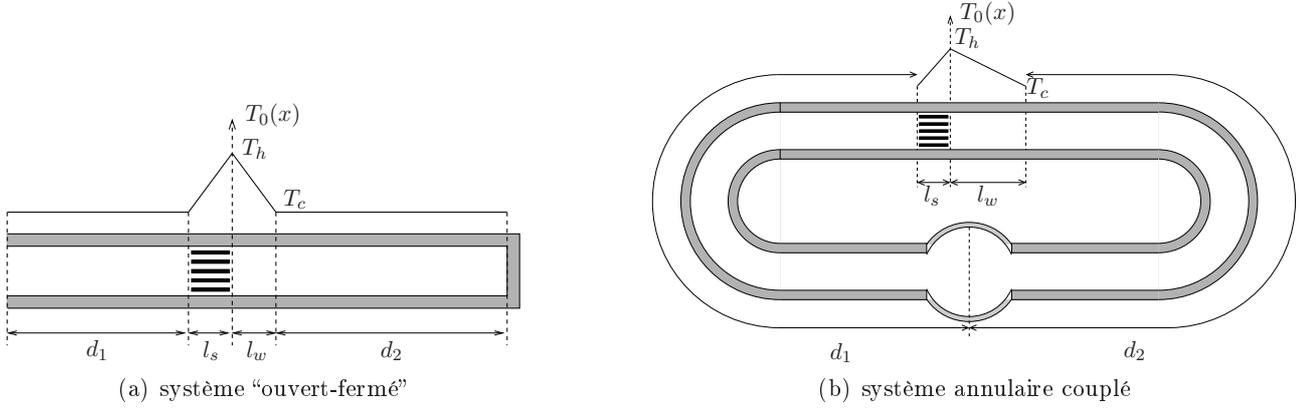


FIGURE B.1 – Représentations schématiques des systèmes considérés en annexe B.

dont la résolution au premier ordre en  $\epsilon_g$  conduit à

$$\epsilon_g = -\frac{\Re\{f_0\}}{\Re\{f_1\}} = -\frac{\Im\{f_0\}}{\Im\{f_1\}}, \quad (\text{B.4})$$

soit

$$\Re\{f_0\} \Im\{f_1\} - \Re\{f_1\} \Im\{f_0\} \equiv \Im\{f_0^* f_1\} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Le terme de gauche de l'équation (B.5) ne dépend que de la fréquence réelle de l'onde  $\Omega$  et de la température  $T_0$ . Une fois  $\Omega$  calculé à partir de l'équation (B.5), le taux d'amplification de l'onde  $\epsilon_g$  est obtenu grâce à la relation (B.4).

### B.1.2 Expressions analytiques des fonctions $f_0$ et $f_1$

#### Système à ondes stationnaires "ouvert-fermé"

Le premier cas considéré est celui d'un moteur "à ondes stationnaires", dont une représentation schématique est donnée en figure 1.2 du chapitre 1. En l'absence de rayonnement et de couplage avec d'autres systèmes acoustiques, les quatre configurations possibles pour ce moteur sont décrites par les équations caractéristiques (1.34)-(1.37). Afin de ne pas surcharger les pages qui suivent par des développements mathématiques lourds, seule la configuration "ouvert-fermé" est développée [cf. fig. B.1(a), éq. (1.37)]. Il convient de noter que les écritures pour les autres configurations se déduisent tout aussi facilement des équations (1.34)-(1.36).

La matrice de transfert totale du système définie par l'équation (1.29) est détaillée ici en usant de l'expression de la matrice de transfert d'un tube [Eq. (1.25)]

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp} & \mathcal{M}_{pu} \\ \mathcal{M}_{up} & \mathcal{M}_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{x}_2) & iZ_c \sin(\mathbf{x}_2) \\ iZ_c^{-1} \sin(\mathbf{x}_2) & \cos(\mathbf{x}_2) \end{pmatrix} \times \mathbf{M}_{\text{NT}} \times \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{x}_1) & iZ_c \sin(\mathbf{x}_1) \\ iZ_c^{-1} \sin(\mathbf{x}_1) & \cos(\mathbf{x}_1) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

où, afin d'alléger les écritures, on note  $\mathbf{x}_1 = kd_1$  et  $\mathbf{x}_2 = kd_2$  les termes de phase associés aux longueurs  $d_1$  et  $d_2$  [cf. fig. B.1(a)]. Le développement de l'expression (B.6) combiné à l'équation caractéristique

(1.37) conduit alors à l'expression suivante pour la fonction  $f(\omega, T_0)$

$$f = -\mathcal{T}_{pp} \sin(x_2) \sin(x_1) + i\widehat{\mathcal{T}}_{pu} \sin(x_2) \cos(x_1) + i\widehat{\mathcal{T}}_{up} \cos(x_2) \sin(x_1) + \mathcal{T}_{uu} \cos(x_2) \cos(x_1), \quad (\text{B.7})$$

où les coefficients de transfert anti-diagonaux du noyau sont introduits ici sous leurs formes adimensionnées, soit  $\widehat{\mathcal{T}}_{pu} = Z_c^{-1}\mathcal{T}_{pu}$  et  $\widehat{\mathcal{T}}_{up} = Z_c\mathcal{T}_{up}$ .

Chacun des termes présents dans l'équation (B.7) dépend en toute rigueur du coefficient d'amplification  $\epsilon_g$ . Néanmoins, on peut considérer en première approximation que les propriétés acoustiques du noyau et les pertes viscothermiques pariétales ne dépendent pas du caractère amplifié ou atténué de l'onde, de sorte que

$$\mathcal{T}_{pp}(\omega, T_0) = \mathcal{T}_{pp}(\Omega, T_0), \quad (\text{B.8})$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{pu}(\omega, T_0) = \widehat{\mathcal{T}}_{pu}(\Omega, T_0), \quad (\text{B.9})$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{up}(\omega, T_0) = \widehat{\mathcal{T}}_{up}(\Omega, T_0), \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{T}_{uu}(\omega, T_0) = \mathcal{T}_{uu}(\Omega, T_0), \quad (\text{B.11})$$

$$Z_c(\omega) = Z_c(\Omega), \quad (\text{B.12})$$

$$k(\omega) = k_0(\omega)\xi(\Omega) = \frac{\Omega\xi(\Omega)}{c_0} + i\epsilon_g \frac{\xi(\Omega)}{c_0}, \quad (\text{B.13})$$

avec  $\xi = \sqrt{\frac{1+(\gamma-1)f_\kappa}{1-f_\nu}}$ . Par suite, les développements à l'ordre 1 en  $\epsilon_g$  des fonctions  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ ,

$$\cos(kd) = \cos\left(\frac{\Omega\xi(\Omega)}{c_0}\right) - i\xi(\Omega)\frac{\epsilon_g d}{c_0} \sin\left(\frac{\Omega\xi(\Omega)}{c_0}\right) + O(\epsilon_g^2), \quad (\text{B.14})$$

$$\sin(kd) = \sin\left(\frac{\Omega\xi(\Omega)}{c_0}\right) + i\xi(\Omega)\frac{\epsilon_g d}{c_0} \cos\left(\frac{\Omega\xi(\Omega)}{c_0}\right) + O(\epsilon_g^2), \quad (\text{B.15})$$

réintroduits dans l'expression (B.7) de  $f(\omega, T_0)$  conduisent aux expressions suivantes pour les fonctions  $f_0$  et  $f_1$

$$f_0 = -\mathcal{T}_{pp} \sin(x_2) \sin(x_1) + i\widehat{\mathcal{T}}_{pu} \sin(x_2) \cos(x_1) + i\widehat{\mathcal{T}}_{up} \cos(x_2) \sin(x_1) + \mathcal{T}_{uu} \cos(x_2) \cos(x_1), \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} f_1 c_0 \xi^{-1} = & -i [d_2 \sin(x_1) \cos(x_2) + d_1 \cos(x_1) \sin(x_2)] \mathcal{T}_{pp} \\ & - [d_2 \cos(x_1) \cos(x_2) - d_1 \sin(x_1) \sin(x_2)] \widehat{\mathcal{T}}_{pu} \\ & - [d_1 \cos(x_1) \cos(x_2) - d_2 \sin(x_1) \sin(x_2)] \widehat{\mathcal{T}}_{up} \\ & - i [d_1 \sin(x_1) \cos(x_2) + d_2 \cos(x_1) \sin(x_2)] \mathcal{T}_{uu}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

où, naturellement, les termes de phase  $x_1 = k(\Omega)d_1 = \frac{\Omega\xi(\Omega)d_1}{c_0}$  et  $x_2 = k(\Omega)d_2 = \frac{\Omega\xi(\Omega)d_2}{c_0}$  sont évalués à la pulsation réelle des oscillations.

Le report des équations (B.16) et (B.17) dans les équations (B.4) et (B.5) permet donc de calculer la pulsation réelle  $\Omega$  et le taux d'amplification  $\epsilon_g$  pour un système quart d'onde "ouvert-fermé". Précisons encore que des expressions du même type sont obtenues lorsque l'on considère les trois autres configurations de moteur à ondes stationnaires.

### Système annulaire

Pour un système annulaire couplé à une charge acoustique secondaire [cf. fig. B.1(b)], en notant  $x_1 = kd_1$  et  $x_2 = kd_2$ , l'expression de la matrice de transfert définie par l'équation (1.44) est détaillée ici sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{pp} & \mathcal{M}_{pu} \\ \mathcal{M}_{up} & \mathcal{M}_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_2) & iZ_c \sin(x_2) \\ iZ_c^{-1} \sin(x_2) & \cos(x_2) \end{pmatrix} \times \mathbf{M}_{\mathbf{NT}} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos(x_1) & iZ_c \sin(x_1) \\ iZ_c^{-1} \sin(x_1) & \cos(x_1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Z_{ch}^{-1}(\omega) & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

où  $Z_{ch}$  est l'impédance acoustique présentée par la charge. Le report de l'expression (B.18) dans l'équation caractéristique (1.54) conduit, après quelques développements, aux expressions suivantes pour  $f_0$  et  $f_1$  :

$$f_0 = 1 + \det(\mathbf{M}_{\mathbf{NT}}) - \cos(x) (\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{uu}) - i \sin(x) (\widehat{\mathcal{T}}_{pu} + \widehat{\mathcal{T}}_{up}) + \Psi_0, \quad (\text{B.19})$$

$$f_1 = \frac{\xi L_w}{c_0} \left[ i \sin(x) (\mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{uu}) + \cos(x) (\widehat{\mathcal{T}}_{pu} + \widehat{\mathcal{T}}_{up}) \right] + \Psi_1, \quad (\text{B.20})$$

où  $x = kL_w - L_w$  étant la longueur de la portion d'anneau à température ambiante – et où  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$  sont des termes traduisant le couplage de l'anneau avec la charge secondaire :

$$\Psi_0 = \frac{Z_c}{Z_{ch}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ A_{ij}^{(0)} \mathbf{M}_{\mathbf{NT}ij} \right], \quad (\text{B.21})$$

$$\Psi_1 = -\frac{Z_c}{Z_{ch}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \left( \frac{\xi}{c_0} A_{ij}^{(1)} + \frac{Z_{ch}^{(1)}}{Z_{ch}} A_{ij}^{(0)} \right) \mathbf{M}_{\mathbf{NT}ij} \right]. \quad (\text{B.22})$$

Il est important de préciser que lorsque  $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ , les équations (B.19) et (B.20) donnent les expressions des fonctions  $f_0$  et  $f_1$  pour le cas d'un moteur annulaire non-couplé. Dans les expressions de  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$ , les coefficients  $A_{ij}^{(0)}$  et  $A_{ij}^{(1)}$  sont issues des matrices respectives

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos(x_2) \\ i \sin(x_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i \sin(x_1) \\ \cos(x_1) \end{pmatrix}^T, \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = d_1 \begin{pmatrix} \cos(x_2) \\ i \sin(x_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(x_1) \\ i \sin(x_1) \end{pmatrix}^T + d_2 \begin{pmatrix} i \sin(x_2) \\ \cos(x_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i \sin(x_1) \\ \cos(x_1) \end{pmatrix}^T, \quad (\text{B.24})$$

où T symbolise la transposée du vecteur, et  $Z_{ch}^{(1)}$  est issu du développement asymptotique de l'impédance de charge  $Z_{ch}(\omega)$  sur le petit paramètre  $\epsilon_g$ . En particulier, si la charge secondaire est constituée d'un résonateur droit de longueur  $L_r$  et fermé à son extrémité, l'impédance de charge est définie selon

$$Z_{ch} = +iZ_c \cot(kL_r), \quad (\text{B.25})$$

et après quelques calculs, on montre que

$$\frac{Z_{ch}^{(1)}}{Z_{ch}} = -i \frac{\xi L_r}{c_0} \frac{1}{\sin(kL_r) \cos(kL_r)}, \quad (\text{B.26})$$

soit encore

$$\Psi_0 = -i \tan(kL_r) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ A_{ij}^{(0)} \mathbf{M}_{\mathbf{NT}ij} \right], \quad (\text{B.27})$$

$$\Psi_1 = +i \tan(kL_r) \frac{\xi}{c_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \left( A_{ij}^{(1)} - \frac{L_r}{\sin(kL_r) \cos(kL_r)} A_{ij}^{(0)} \right) \mathbf{M}_{\mathbf{NT}ij} \right]. \quad (\text{B.28})$$

Il convient de remarquer, en observant la forme des équations (B.19) et (B.20), que lorsque  $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ , les fonctions  $f_0$  et  $f_1$ , et donc *a fortiori* les propriétés de déclenchement et d'amplification, ne dépendent en aucun cas de la position du stack dans le résonateur annulaire, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de départ selon laquelle l'effet du rayon de courbure est négligé. Aussi, les expressions des termes de couplage  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$  présentent une dépendance logique au rapport ( $d_1/d_2$ ) qui montre toute l'importance de la position de la charge secondaire par rapport au noyau dans ce type de moteur.

## B.2 Expression analytique simplifiée du seuil de déclenchement et de l'amplification dans un système thermoacoustique à ondes stationnaires

Au paragraphe B.1, il est démontré que sous réserve de l'hypothèse de quasi-stationnarité ( $\epsilon_g \ll \Omega$ ), la résolution de l'équation caractéristique conduit aux équations (B.5) et (B.4). La résolution de l'équation (B.5), pour un champ de température  $T_0(x)$  donné, permet de calculer la fréquence réelle d'oscillation  $\Omega$  qui, lorsqu'elle est réintroduite dans l'expression (B.4), conduit à la détermination du coefficient d'amplification  $\epsilon_g$ . Dans le cas particulier d'un système à ondes stationnaires "ouvert-fermé" [cf. fig. B.1(a)], les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  intervenant dans les équations (B.5) et (B.4) sont données par les expressions (B.16) et (B.17).

Dans l'hypothèse d'un noyau thermoacoustique compact ( $l_s + l_w \ll L$ ), les longueurs des guides respectivement à gauche et à droite du noyau sont écrites de la façon suivante :

$$d_1 = \bar{x}L, \quad (\text{B.29})$$

$$d_2 \simeq L - d_1 = (1 - \bar{x})L, \quad (\text{B.30})$$

où  $\bar{x}$  représente la position du noyau dans le système ( $0 < \bar{x} < 1$ ). La matrice de transfert du noyau thermoacoustique est définie de façon générale par l'équation (A.28) donnée en annexe A. Cependant, lorsque le noyau est supposé compact, chaque application des opérateurs intégraux définis par les équations (A.23) et (A.24) introduit une correction de l'ordre de grandeur du paramètre  $k_0(l_s + l_w) = k_0l$  [48], ce qui permet de tronquer les séries infinies impliquées dans l'expression (A.28). De cette façon, si l'on ne conserve que les termes à l'ordre 0 du paramètre  $k_0l$ , la matrice de transfert du noyau thermoacoustique peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{pp} & \widehat{\mathcal{T}}_{pu} \\ \widehat{\mathcal{T}}_{up} & \mathcal{T}_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta_{uu} \end{pmatrix} + O(k_0l). \quad (\text{B.31})$$

Par suite, l'hypothèse de compacité du noyau permet de simplifier grandement les expressions (B.16) et (B.17) selon

$$f_0 = -\sin(x_2) \sin(x_1) + \Delta_{uu} \cos(x_2) \cos(x_1), \quad (\text{B.32})$$

$$f_1 c_0 \xi^{-1} = -i \left( [d_2 \sin(x_1) \cos(x_2) + d_1 \cos(x_1) \sin(x_2)] \right. \\ \left. + [d_1 \sin(x_1) \cos(x_2) + d_2 \cos(x_1) \sin(x_2)] \Delta_{uu} \right), \quad (\text{B.33})$$

avec ici  $x_1 = \bar{x}kL$  et  $x_2 = (1 - \bar{x})kL$ .

Dans ces équations, le nombre d'onde complexe  $k$  prend en compte les pertes viscothermiques pariétales et son expression [éq. 1.26, chap. 1] fait donc intervenir les fonctions thermovisqueuses  $f_\nu^{(w)}$  et  $f_\kappa^{(w)}$  qui caractérisent le couplage entre le fluide et les parois du résonateur, avec le terme de couplage noté

$$\xi = \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa^{(w)}}{1 - f_\nu^{(w)}}}. \quad (\text{B.34})$$

De la même façon, l'expression de  $\Delta_{uu}$  fait intervenir les fonctions thermovisqueuses  $f_\nu^{(w)}$  et  $f_\kappa^{(w)}$  dans la partie passive du noyau de rayon  $R$ , mais également les fonctions notés  $f_\nu^{(s)}$  et  $f_\kappa^{(s)}$  dans les pores du stack de rayon  $r_s$ . Les expressions de ces fonctions thermovisqueuses dépendent en toute rigueur de la géométrie de guide d'onde considérée et restent difficiles à manipuler sans une approximation adéquate. Cependant, lorsque le fluide et la paroi du résonateur/pore sont supposés en *interaction quasi-adiabatique* de sorte que  $\delta_\nu \ll (R, r_s)$ , les fonctions visqueuse et thermique se simplifient sous la forme suivante [90, 39] :

$$f_\nu^{(w,s)} \simeq (1 + i) x_\nu^{(w,s)}, \quad (\text{B.35})$$

$$f_\kappa^{(w,s)} \simeq (1 + i) \frac{x_\nu^{(w,s)}}{\sqrt{\sigma}}, \quad (\text{B.36})$$

où  $x_\nu^{(w)} = \frac{\delta_\nu}{R} \ll 1$  (resp.  $x_\nu^{(s)} = \frac{\delta_\nu}{r_s} \ll 1$ ) est le rapport entre l'épaisseur de couche limite visqueuse et le rayon du guide (resp. le rayon du pore)<sup>1</sup>. Sur la base de ces approximations, il est possible d'écrire les développements asymptotiques du terme de couplage  $\xi$  et du nombre d'onde  $k$  de la façon suivante :

$$\xi = 1 + c_K (1 + i) x_\nu^{(w)} + O((x_\nu^{(w)})^2), \quad (\text{B.37})$$

$$k = k_0 \xi = k_0 \left( 1 + c_K (1 + i) x_\nu^{(w)} + O((x_\nu^{(w)})^2) \right), \quad (\text{B.38})$$

où  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$  est le nombre d'onde naturel (sans pertes) et où

$$c_K = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\sigma}} \right) \quad (\text{B.39})$$

1. le paramètre  $x_\nu$  est équivalent à l'inverse du nombre d'onde de cisaillement introduit par N. Rott [83] ou encore R. Raspet et al. [78] dans leurs travaux

est la constante de Kirchoff [83, 48]. A partir de l'expression (B.38), il vient

$$\cos(kL) = \cos(k_0L) - k_0L \sin(k_0L)c_K(1+i)x_\nu^{(w)} + O((x_\nu^{(w)})^2), \quad (\text{B.40})$$

$$\sin(kL) = \sin(k_0L) + k_0L \cos(k_0L)c_K(1+i)x_\nu^{(w)} + O((x_\nu^{(w)})^2). \quad (\text{B.41})$$

De la même façon, on peut montrer [48] qu'en régime quasi-adiabatique,  $\Delta_{uu}$  se développe à l'ordre 1 en  $x_\nu$  sous la forme

$$\Delta_{uu} = 1 + (1+i) \left( x_\nu^{(s)} - x_\nu^{(w)} \right) [2c_K + c_{Kr} - 1] \left( T_n^{\frac{\beta+1}{2}} - 1 \right) + O((x_\nu^{(w,s)})^2), \quad (\text{B.42})$$

avec  $\beta = 0.73$  pour l'air [83], et où  $c_{Kr}$  est la constante de Krammer, définie par

$$c_{Kr} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left( \frac{2}{(1+\beta)(1+\sqrt{\sigma})} - (\gamma - 1) \right). \quad (\text{B.43})$$

Notons qu'en régime quasi-adiabatique, le coefficient  $\Delta_{uu}$  est indépendant de la forme du champ de température.

Finalement, les équations (B.40), (B.41) et (B.42) sont introduites dans (B.32) et (B.33) et les expressions asymptotiques au premier ordre en  $x_\nu^{(w,s)}$  des fonctions  $f_0$  et  $f_1$  sont alors données par

$$f_0 \simeq \cos(k_0L) - (1+i)k_0L \sin(k_0L)c_K x_\nu^{(w)} + (1+i)x_\nu \Delta_{uu}^{(1)} \cos(\bar{x}k_0L) \cos((1-\bar{x})k_0L), \quad (\text{B.44})$$

$$f_1 \simeq \frac{-iL}{c_0} \left\{ \sin(k_0L) + (1+i)c_K x_\nu^{(w)} [k_0L \cos(k_0L) + \sin(k_0L)] \right. \\ \left. + (1+i)x_\nu \Delta_{uu}^{(1)} [\bar{x} \sin(\bar{x}k_0L) \cos((1-\bar{x})k_0L) + (1-\bar{x}) \cos(\bar{x}k_0L) \sin((1-\bar{x})k_0L)] \right\}, \quad (\text{B.45})$$

avec

$$x_\nu \Delta_{uu}^{(1)} \equiv \left( x_\nu^{(s)} - x_\nu^{(w)} \right) [2c_K + c_{Kr} - 1] \left( T_n^{\frac{\beta+1}{2}} - 1 \right). \quad (\text{B.46})$$

Les expressions analytiques approchées de  $f_0$  et  $f_1$ , éqs. (B.44) et (B.45), peuvent donc être utilisées dans les équations (B.4) et (B.5) pour déterminer la pulsation  $\Omega$  des oscillations auto-entretenuées et le taux d'amplification  $\epsilon_g$ . Dans un premier temps, l'équation (B.5) est développée sous la forme

$$\sin(2k_0L) + c_K x_\nu^{(w)} [2k_0L \cos(2k_0L) + \sin(2k_0L)] \\ + x_\nu \Delta_{uu}^{(1)} \left\{ \sin(2k_0L) (\cos(2\bar{x}k_0L) + 1) - \cos(2k_0L) \sin(2\bar{x}k_0L) \right. \\ \left. + \bar{x} (\cos(2k_0L) + 1) \sin(2\bar{x}k_0L) - \bar{x} \sin(2k_0L) \cos(2\bar{x}k_0L) \right\} = 0. \quad (\text{B.47})$$

Pour la configuration de moteur considérée actuellement (résonateur quart d'onde), on considère que la fréquence réelle des oscillations reste proche de celle d'un mode de résonance du guide seul sans pertes, de sorte que l'on peut écrire

$$k_0L = \frac{n\pi}{2} (1 + \alpha), \quad \text{avec } \alpha \ll 1 \text{ et } n \text{ impair}, \quad (\text{B.48})$$

ce qui permet d'écrire, à l'ordre le plus bas en  $\alpha$ ,

$$\cos(2k_0L) \simeq -1, \quad (\text{B.49})$$

$$\sin(2k_0L) \simeq -n\pi\alpha, \quad (\text{B.50})$$

$$\cos(2\bar{x}k_0L) \simeq \cos(\bar{x}n\pi) - \bar{x}n\pi\alpha \sin(\bar{x}n\pi), \quad (\text{B.51})$$

$$\sin(2\bar{x}k_0L) \simeq \sin(\bar{x}n\pi) + \bar{x}n\pi\alpha \cos(\bar{x}n\pi). \quad (\text{B.52})$$

Le report de ces relations dans l'équation (B.47) conduit finalement à l'expression analytique approchée

$$\alpha \simeq -c_K x_\nu^{(w)} + \varsigma \left( x_\nu^{(s)} - x_\nu^{(w)} \right) [2c_K + c_{Kr} - 1] \left( T_n^{\frac{\beta+1}{2}} - 1 \right) \frac{\sin(\bar{x}n\pi)}{n\pi}, \quad (\text{B.53})$$

qui donne l'écart fréquentiel par rapport à la résonance en fonction du rapport des températures  $T_n = T_h/T_c$ , des propriétés du fluide et du rapport entre l'épaisseur d'une couche limite et des dimensions transverses du système.

**Remarque** – Un paramètre supplémentaire, noté  $\varsigma$ , est introduit dans l'expression (B.53) de  $\alpha$ . Ce paramètre peut prendre les valeurs  $\varsigma = \pm 1$ ; il est introduit ici de manière à établir l'expression (B.53) de  $\alpha$  **générale pour les quatre configurations possibles** de moteur. En effet, on peut montrer aisément, à partir des équations (1.34), (1.35) et (1.36) et des mêmes hypothèses retenues jusqu'à présent, que l'expression de  $\alpha$  reste identique au signe de  $\varsigma$  près. Autrement dit, la relation (B.53) reste valide en adoptant les règles suivantes :

- système "fermé-ouvert" :  $n$  impair,  $\varsigma = -1$ ,
- système "ouvert-ouvert" :  $n$  pair,  $\varsigma = +1$ ,
- système "fermé-fermé" :  $n$  pair,  $\varsigma = -1$ ,
- système "ouvert-fermé" :  $n$  impair,  $\varsigma = +1$ ,

À présent que la fréquence réelle  $\Omega$  des oscillations auto-entretenues est déterminée par l'intermédiaire de l'équation (B.53), les expressions (B.44) et (B.45) sont introduites dans l'équation (B.4) et, en ne gardant que les termes à l'ordre 1 en  $x_\nu$ , l'expression approchée du taux d'amplification  $\epsilon_g$  est obtenue selon :

$$\epsilon_g \simeq -c_K x_\nu^{(w)} k_0L + x_\nu \Delta_{uu}^{(1)} \frac{\cos(\bar{x}k_0L) \cos((1-\bar{x})k_0L)}{\sin(k_0L)}. \quad (\text{B.54})$$

En posant  $k_0L = \frac{n\pi}{2}(1+\alpha)$  avec  $\alpha$  défini par l'équation (B.53), on obtient, tous calculs faits, l'expression analytique approchée du coefficient d'amplification sous la forme :

$$\epsilon_g \simeq \frac{n\pi\alpha c_0}{2L}, \quad (\text{B.55})$$

$$\simeq \frac{n\pi c_0}{2L} \left( -c_K x_\nu^{(w)} + \varsigma \left( x_\nu^{(s)} - x_\nu^{(w)} \right) [2c_K + c_{Kr} - 1] \left( T_n^{\frac{\beta+1}{2}} - 1 \right) \frac{\sin(\bar{x}n\pi)}{n\pi} \right). \quad (\text{B.56})$$

De fait, la température au seuil de déclenchement ( $\epsilon_g = 0$ ) se déduit de la relation précédente et s'écrit

$$T_{n,o} = \left( 1 + \varsigma \frac{n\pi}{\sin(\bar{x}n\pi)} \frac{c_K}{2c_K + c_{Kr} - 1} \frac{1}{\frac{R}{r_s} - 1} \right)^{\frac{2}{\beta+1}}. \quad (\text{B.57})$$

**Remarque** – En l'absence de noyau thermoacoustique ( $\Delta_{uu} = 1$ ), l'expression (B.53) de  $\alpha$ ,

$$\alpha \simeq -c_K x_\nu^{(w)}, \quad (\text{B.58})$$

traduit l'écart fréquentiel par rapport à la résonance dû aux pertes viscothermiques au niveau des parois du résonateur seul, conjointement à l'équation (B.56) qui devient

$$\epsilon_g \simeq -\frac{n\pi}{2} c_K x_\nu^{(w)}, \quad (\text{B.59})$$

et qui traduit la décroissance temporelle exponentielle des ondes atténuées. Ce résultat, somme toute relativement basique, s'obtient bien évidemment de la même manière en remplaçant la matrice du noyau thermoacoustique (B.31) par la matrice identité dans l'équation (B.6), ou bien en considérant le facteur de qualité du résonateur

$$Q = \frac{\omega \int_V \overline{e_{em}} dV}{W_{diss}}, \quad (\text{B.60})$$

où  $\overline{e_{em}}$  est la densité d'énergie acoustique moyenne sur un cycle acoustique et où  $W_{diss}$  représente la puissance acoustique dissipée dans le résonateur. En effet, en régime harmonique, la densité d'énergie acoustique

$$e_{em} = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{\rho_0 c_0^2} + \frac{1}{2} \rho_0 v_{1,x}^2 \quad (\text{B.61})$$

moyennée sur une période acoustique s'écrit

$$\overline{e_{em}} = \frac{1}{T} \int_0^T e_{em} dt = \frac{1}{4} \left( \frac{|\tilde{p}_1|^2}{\rho_0 c_0^2} + \rho_0 |\langle \tilde{v}_{1,x} \rangle|^2 \right). \quad (\text{B.62})$$

D'autre part, on peut aisément démontrer, à partir des équations (1.17) et (1.19), que la densité de puissance [88]

$$w_{diss} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \simeq i \frac{\omega}{\rho_0} \tilde{p}_1 \langle \tilde{\rho}_1 \rangle \quad (\text{B.63})$$

moyennée sur une période acoustique s'écrit

$$\overline{w_{diss}} = \frac{1}{T} \int_0^T w_{diss} dt = -\frac{\omega}{2\rho_0} \Re \{ i \tilde{p}_1 \langle \tilde{\rho}_1 \rangle^* \}. \quad (\text{B.64})$$

Si l'on considère une onde purement stationnaire et en usant de la relation (1.14) dans (B.64), le calcul de l'énergie totale emmagasinée dans le résonateur  $\int_V \overline{e_{em}} dV$  et de l'énergie dissipée aux parois  $W_{diss} = \int_V \overline{w_{diss}} dV$  conduit à l'expression suivante pour le facteur de qualité :

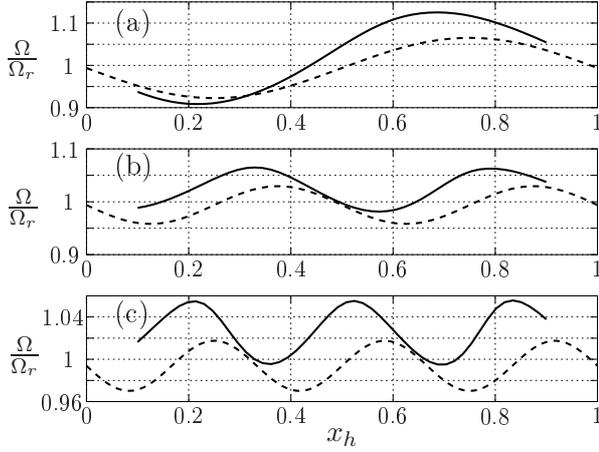
$$Q = \frac{1}{(\gamma - 1) \Im \{ f_\kappa \} + \frac{\Im \{ f_\nu \}}{|1 - f_\nu|^2}}. \quad (\text{B.65})$$

Dans le cadre d'oscillations amorties, le facteur de qualité est relié au facteur d'atténuation ( $\epsilon_g < 0$ ) par la relation

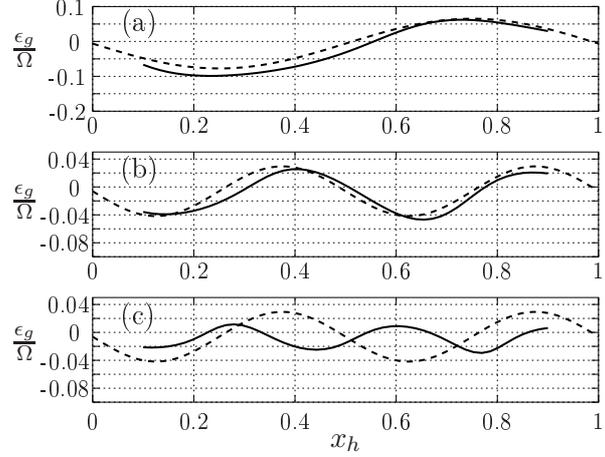
$$Q = -\frac{\Omega_r}{2\epsilon_g}. \quad (\text{B.66})$$

En posant  $\Omega_r = \frac{n\pi}{2} \frac{c_0}{L}$  et en usant de l'expression (B.65) pour le facteur de qualité, le coefficient d'atténuation est alors donné par la relation :

$$\frac{\epsilon_g L}{c_0} = -\frac{n\pi}{4} \left( (\gamma - 1) \Im \{ f_\kappa \} + \frac{\Im \{ f_\nu \}}{|1 - f_\nu|^2} \right), \quad (\text{B.67})$$



**FIGURE B.2** – Pulsation des oscillations en fonction de la position du stack  $x_h$  dans le résonateur pour les trois premiers modes du résonateur demi-onde :  $\Omega_r = \pi c_0/L$  (a),  $2\Omega_r$  (b) et  $3\Omega_r$  (c). Le rapport de température est fixé à  $T_h/T_c = 5$ . Les résultats analytiques [éq. (B.53),  $n = 2, 4, 6$ ,  $\varsigma = -1$ ] sont présentés en trait tireté; les résultats issus d'une résolution numérique de l'éq. (1.36) sont présentés en trait plein.



**FIGURE B.3** – Taux d'amplification en fonction de la position du stack  $x_h$  dans le résonateur pour les trois premiers modes du résonateur demi-onde :  $\Omega_r = \pi c_0/L$  (a),  $2\Omega_r$  (b) et  $3\Omega_r$  (c). Le rapport de température est fixé à  $T_h/T_c = 5$ . Les résultats analytiques [éq. (B.56),  $n = 2, 4, 6$ ,  $\varsigma = -1$ ] sont présentés en trait tireté; les résultats issus d'une résolution numérique de l'éq. (1.36) sont présentés en trait plein.

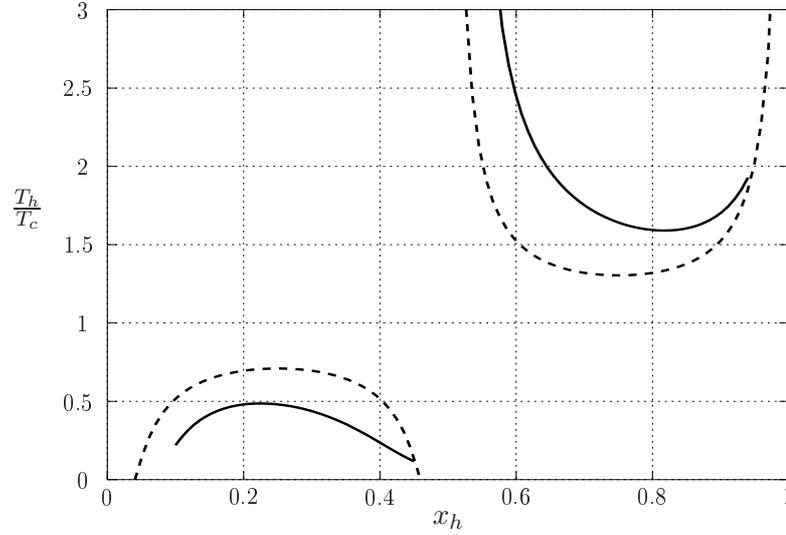
qui se simplifie, en régime *quasi-adiabatique* [cf. éqs. (B.35) et (B.36)], sous la forme :

$$\frac{\epsilon_g L}{c_0} \simeq -\frac{n\pi}{2} c_K x_\nu^{(w)}, \quad (\text{B.68})$$

resultat équivalent à (B.59).

Les figures B.2 et B.3 présentent les résultats analytiques obtenus pour  $\Omega = \Omega_r(1 + \alpha)$  [éq. (B.53)] et  $\epsilon_g$  [éq. (B.56)] pour un moteur thermoacoustique fermé aux deux extrémités ( $\varsigma = -1$ ) en fonction de la position du stack dans le guide. Les résultats, obtenus ici pour les trois premiers modes du système demi-onde ( $n = 2, 4, 6$ ), sont comparés à ceux obtenus par résolution numérique de l'équation (1.36). Les expressions analytiques simplifiées permettent bien de retrouver les estimations numériques issues du modèle complet en première approximation. Cependant on peut observer une détérioration de la qualité des résultats à mesure que l'ordre du mode augmente. En effet, plus l'ordre du mode considéré est élevé et plus l'hypothèse de compacité du noyau devient critique (la longueur du noyau n'étant alors plus négligeable en regard de la longueur d'onde). Pour obtenir un meilleur accord entre les résultats analytiques et numériques, il conviendrait alors de prendre en considération les termes d'ordre supérieur dans l'expression B.31 de la matrice de transfert du noyau.

La température de déclenchement obtenue en fonction de la position du stack dans le résonateur [cf. éq. (B.57)] est présentée en figure B.4 pour la même configuration de moteur. Les estimations numériques issues d'une résolution de l'équation (1.62) sont également indiquées en trait plein. Bien



**FIGURE B.4** – Température  $T_{n,o}$  au seuil de déclenchement du premier mode en fonction de la position  $x_h$  du stack dans le résonateur. La solution analytique approchée (B.57) est présentée en trait tireté; les estimations numériques sont présentées en trait plein.

évidemment, l'hypothèse de compacité retenue à l'ordre le plus bas dans l'expression B.31 se traduit par une parfaite symétrie des courbes de stabilité par rapport au centre du guide, les effets inhérents à la présence du noyau étant localisés en un point du système.

## B.3 Expression analytique simplifiée du seuil de déclenchement dans un système annulaire

### B.3.1 Interaction quasi-adiabatique dans le résonateur

Pour un système à ondes progressives, les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  intervenant dans les équations (B.5) et (B.4) sont données par les expressions (B.19) et (B.20). Considérons le cas d'un résonateur annulaire non-couplé [cf. fig. 1.3(a)], de sorte que  $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ . Les expressions des fonctions  $f_0$  et  $f_1$  sont réécrites ici sous la forme

$$f_0 = 1 + \Delta - \cos(x)\Delta_{xx} - i \sin(x)\Delta_{xy}, \quad (\text{B.69})$$

$$f_1 = \frac{\xi L w}{c_0} [i \sin(x)\Delta_{xx} + \cos(x)\Delta_{xy}], \quad (\text{B.70})$$

où les quantités suivantes sont introduites :

$$\Delta = \det(\mathbf{M}_{\text{NT}}), \quad (\text{B.71})$$

$$\Delta_{xx} = \mathcal{T}_{pp} + \mathcal{T}_{uu}, \quad (\text{B.72})$$

$$\Delta_{xy} = \widehat{\mathcal{T}}_{pu} + \widehat{\mathcal{T}}_{up}. \quad (\text{B.73})$$

Lorsque le fluide est supposé en interaction quasi-adiabatique avec les parois du résonateur, les expressions (B.40) et (B.41) présentées au paragraphe B.2 peuvent être utilisées pour obtenir un dé-

veloppement asymptotique au premier ordre en  $x_\nu^{(w)} = \delta_\nu/R$  de la fonction  $f_0$  [Eq. (B.69)] :

$$f_0 \simeq 1 + \Delta - \cos(x_0)\Delta_{xx} - i \sin(x_0)\Delta_{xy} + (1+i)c_K x_\nu^{(w)} \left( x_0 \sin(x_0)\Delta_{xx} - i x_0 \cos(x_0)\Delta_{xy} \right), \quad (\text{B.74})$$

avec ici  $x_0 \equiv k_0 L_w$  et où  $c_K$  est la constante de Kirchhoff [83, 48]. Au seuil de déclenchement, l'annulation des parties réelle et imaginaire de l'équation (B.74) conduit donc au système d'équations

$$\begin{aligned} \Re \{1 + \Delta\} - \cos(x_0) \left( \Re \{\Delta_{xx}\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} (\Re \{\Delta_{xy}\} + \Im \{\Delta_{xy}\}) \right) \\ + \sin(x_0) \left( \Im \{\Delta_{xy}\} + x_0 c_K x_\nu^{(w)} (\Re \{\Delta_{xx}\} - \Im \{\Delta_{xx}\}) \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

$$\begin{aligned} \Im \{1 + \Delta\} - \cos(x_0) \left( \Im \{\Delta_{xx}\} + x_0 c_K x_\nu^{(w)} (\Re \{\Delta_{xy}\} - \Im \{\Delta_{xy}\}) \right) \\ - \sin(x_0) \left( \Re \{\Delta_{xy}\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} (\Re \{\Delta_{xx}\} + \Im \{\Delta_{xx}\}) \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

dont l'écriture sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \Re \{\Delta_{xx}\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \times & -\Im \{\Delta_{xy}\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \times \\ \left( \Re \{\Delta_{xy}\} + \Im \{\Delta_{xy}\} \right) & \left( \Re \{\Delta_{xx}\} - \Im \{\Delta_{xx}\} \right) \\ \Im \{\Delta_{xx}\} + x_0 c_K x_\nu^{(w)} \times & \Re \{\Delta_{xy}\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \times \\ \left( \Re \{\Delta_{xy}\} - \Im \{\Delta_{xy}\} \right) & \left( \Re \{\Delta_{xx}\} + \Im \{\Delta_{xx}\} \right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(x_0) \\ \sin(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re \{1 + \Delta\} \\ \Im \{1 + \Delta\} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.77})$$

conduit aux solutions classiques

$$\cos(x_0) \simeq \frac{\Re \{(1 + \Delta)\Delta_{xy}^*\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \left( \Re \{(1 + \Delta)\Delta_{xx}^*\} - \Im \{(1 + \Delta)\Delta_{xx}^*\} \right)}{\Re \{\Delta_{xx}^* \Delta_{xy}\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \left( |\Delta_{xx}|^2 + |\Delta_{xy}|^2 \right)}, \quad (\text{B.78})$$

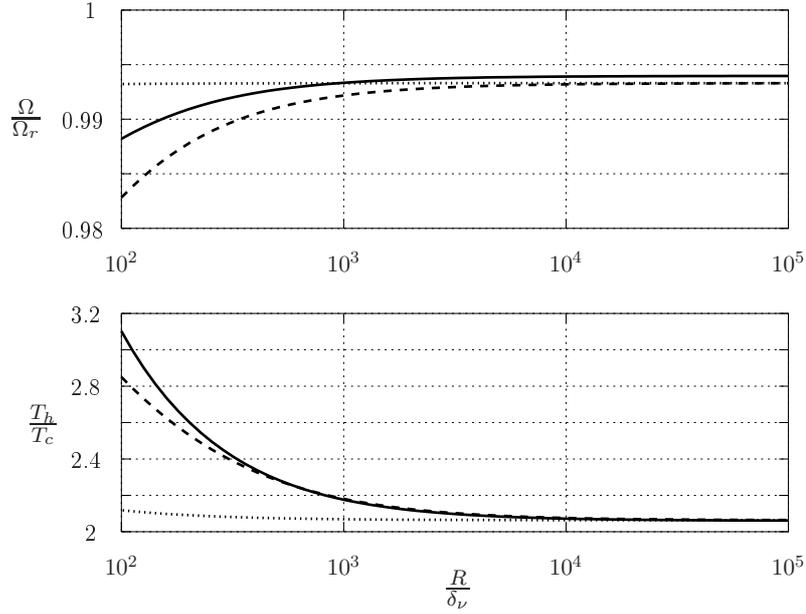
$$\sin(x_0) \simeq \frac{\Im \{(1 + \Delta)\Delta_{xx}^*\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \left( \Re \{(1 + \Delta)\Delta_{xy}^*\} + \Im \{(1 + \Delta)\Delta_{xy}^*\} \right)}{\Re \{\Delta_{xx}^* \Delta_{xy}\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \left( |\Delta_{xx}|^2 + |\Delta_{xy}|^2 \right)}. \quad (\text{B.79})$$

En usant de la propriété mathématique  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  et en approximant  $x_0$  par  $2n\pi$  (résonance de l'anneau), on montre alors que la température de déclenchement est solution de l'équation

$$\begin{aligned} \Re \{(1 + \Delta)\Delta_{xy}^*\}^2 + \Im \{(1 + \Delta)\Delta_{xx}^*\}^2 - \Re \{\Delta_{xx}^* \Delta_{xy}\}^2 + \\ + (4n\pi)c_K x_\nu^{(w)} \Re \{\Delta_{xx}^* \Delta_{xy}\} \left( |\Delta_{xx}|^2 + |\Delta_{xy}|^2 - |1 + \Delta|^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

et la fréquence de déclenchement est obtenue par la relation

$$\Omega_o \simeq \frac{c_0}{L_w} \arctan \left( \frac{\Im \{(1 + \Delta)\Delta_{xx}^*\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \left( \Re \{(1 + \Delta)\Delta_{xy}^*\} + \Im \{(1 + \Delta)\Delta_{xy}^*\} \right)}{\Re \{(1 + \Delta)\Delta_{xy}^*\} - x_0 c_K x_\nu^{(w)} \left( \Re \{(1 + \Delta)\Delta_{xx}^*\} - \Im \{(1 + \Delta)\Delta_{xx}^*\} \right)} \right). \quad (\text{B.81})$$



**FIGURE B.5** – Seuils de déclenchements du premier mode de l’anneau ( $\Omega_r = 2\pi c_0/L$ ) en fonction du rapport  $R/\delta_\nu$ . Les solutions analytiques sans pertes [ $\dots$ ,  $x_\nu^{(w)} = 0$ ] et en interaction quasi adiabatique [—, éq. (B.80)] sont comparées à l’estimation numérique [—].

La convergence des seuils de déclenchements est donnée en figures B.5 et B.6 pour la solution approchée (B.80), en fonction du critère de quasi-adiabaticité  $R/\delta_\nu$  et du critère de compacité du noyau  $(l_s + l_w)/L$ . La fréquence de déclenchement est obtenue grâce à la relation (B.81). Sur la figure B.5, les expressions asymptotiques permettent bien de retrouver les valeurs de  $\Omega$  et  $T_n$  lorsque  $(R/\delta_\nu) \rightarrow \infty$  et l’hypothèse de quasi-adiabaticité permet de retrouver la solution du problème non simplifié. Les résultats présentés sur la figure B.6 mettent en évidence l’importance de la prise en compte des pertes dans le résonateur lorsque  $(l_s + l_w) \rightarrow 0$ , résultat somme toute logique pour un système au sein duquel la quasi-totalité de la dissipation d’énergie se fait par propagation dans l’anneau. De façon tout aussi logique, les solutions analytiques se superposent aux estimations numériques lorsque  $(l_s + l_w) \rightarrow L$  puisque la quasi-totalité du système est occupée par le noyau et très peu de dissipation se fait dans le reste du guide.

### B.3.2 Seuil de déclenchement pour un noyau compact

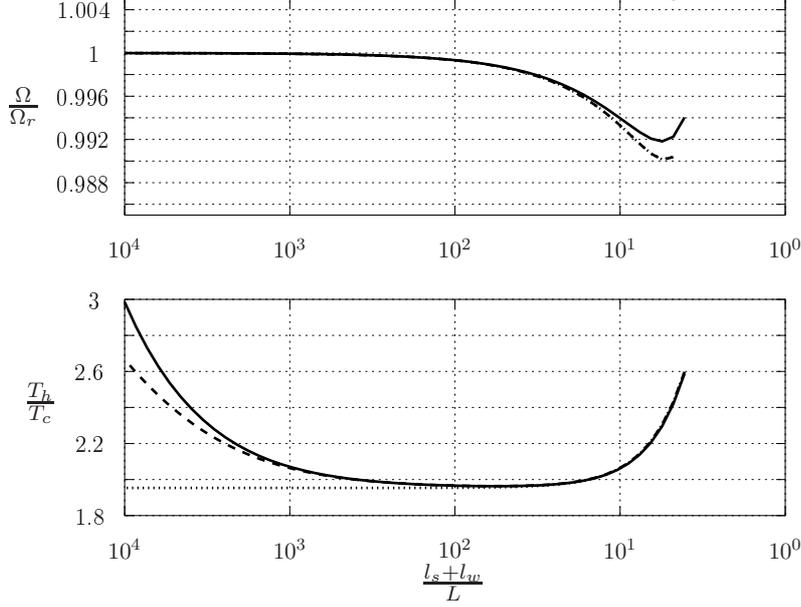
Dans ses travaux de thèses [48], S. Job a démontré que l’hypothèse de compacité du noyau (i.e. de longueur très faible devant la longueur d’onde) permet de tronquer la solution implicite de Volterra, et d’exprimer les coefficients de la matrice de transfert de façon approchée selon

$$\mathcal{T}_{pp} = 1 - \mu^2 \mathcal{T}_{pp}^{(2)} + o(\mu^4), \quad (\text{B.82})$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{pu} = i\mu \mathcal{T}_{pu}^{(1)} + o(\mu^3), \quad (\text{B.83})$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{up} = i\mu \mathcal{T}_{up}^{(1)} + o(\mu^3), \quad (\text{B.84})$$

$$\mathcal{T}_{uu} = \mathcal{T}_{uu}^{(0)} - \mu^2 \mathcal{T}_{uu}^{(2)} + o(\mu^4), \quad (\text{B.85})$$



**FIGURE B.6** – Seuils de déclenchements du premier mode de l’anneau ( $\Omega_r = 2\pi c_0/L$ ) en fonction du rapport  $(l_s + l_w)/L$ . Les solutions analytiques sans pertes [ $\dots, x_\nu^{(w)} = 0$ ] et en interaction quasi adiabatique [—, éq. (B.80)] sont comparées à l’estimation numérique [—].

où  $\mu \sim (l_s + l_w)/L$  est un petit paramètre symbolique traduisant l’ordre de compacité du noyau. En usant de ces relations, on démontre facilement qu’à l’ordre 0 en  $\mu$ , la quantité  $\Im \{(1 + \Delta) \Delta_{xx}^*\}$  s’annule du fait que

$$\Im \{(1 + \Delta) \Delta_{xx}^*\} \simeq \Im \left\{ (1 + \mathcal{T}_{uu}^{(0)})(1 + \mathcal{T}_{uu}^{(0)*}) \right\}, \quad (\text{B.86})$$

$$\simeq \Im \left\{ |1 + \mathcal{T}_{uu}^{(0)}|^2 \right\}, \quad (\text{B.87})$$

$$\simeq 0, \quad (\text{B.88})$$

et qu’à l’ordre 1 en  $\mu$ , les quantités  $\Re \{(1 + \Delta) \Delta_{xy}^*\}^2$  et  $\Re \{\Delta_{xx}^* \Delta_{xy}\}^2 \equiv \Re \{(1 + \Delta) \Delta_{xy}^*\}^2$  se compensent dans l’écriture de l’équation (B.80). D’après ces considérations, il apparaît donc que garantir l’expression à l’ordre 2 en  $\mu$  des coefficients de la matrice de transfert est une condition nécessaire pour décrire le déclenchement dans un moteur annulaire [48].

## Annexe C

# Caractéristiques du transducteur thermo-acousto-électrique

Le prototype d'étude développé au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine a été dimensionné pour un fonctionnement avec de l'air pressurisé sous quelques bars. Les paramètres géométriques et thermophysiques du système sont listés dans le tableau C.1. Un haut-parleur électrodynamique du commerce (modèle Monacor SPH-170C) est utilisé comme alternateur pour récupérer la puissance électrique, dont les paramètres de Thiele & Small sont présentés dans le tableau C.2.

Résonateur principal (boucle)		Régénérateur / échangeurs	
Longueur du tube 1	91.5 cm	Rayon d'un pore du régénérateur	50 $\mu\text{m}$
Longueur du cône 1	3.5 cm	Porosité du régénérateur	0.85
Longueur de la jonction 1	5.1 cm	Rayon d'un pore de l'échangeur ambiant	1 mm
Longueur des échangeurs	1.5 cm	Porosité de l'échangeur ambiant	0.6
Longueur du régénérateur	2.3 cm	Rayon d'un pore de l'échangeur chaud	0.3 mm
Longueur du "thermal buffer tube"	5 cm	Porosité de l'échangeur chaud	0.89
Longueur de la jonction 2	5.1 cm	Résonateur secondaire	
Rayon interne $R_1$	2.215 cm	Longueur du tube 2	155 cm
Rayon interne $R_2$	2.815 cm	Longueur du cône 2	12.1 cm
Pression statique $P_0$	1-5 bar	Longueur de la cavité arrière	26.5 cm
Température ambiante $T_c$	293.15 K	Rayon interne $R_3$	9 cm

TABLE C.1 – Paramètres géométriques et thermophysiques du système (cf. fig. 1.10)

Surface émissive $S_d$	127 $\text{cm}^2$
Résistance $R_m$ due aux pertes mécaniques	0.55 $\text{N.s.m}^{-1}$
Masse de la partie mobile $M_m$	16.43 g
Compliance des suspensions $C_m$	1060.10 <sup>-6</sup> $\text{m.N}^{-1}$
Facteur de force $Bl$	9.44 T.m
Résistance de la bobine $R_e$	6.5 $\Omega$
Inductance de la bobine $L_e$	0.8 mH

TABLE C.2 – Paramètres électromécaniques de l'alternateur (Monacor SPH-170C)

## Annexe D

# Méthode à deux charges – Résultats et influence des sources d'erreurs

La méthode à deux charges développée au chapitre 2 permet de mesurer la matrice de transfert de façon indirecte. Afin de juger de la qualité et de la cohérence des résultats expérimentaux, il est important d'effectuer une analyse des erreurs qui se répercutent sur les quantités mesurables. Les fonctions de transferts et le Rapport Signal sur Bruit (RSB) des microphones sont exposés au paragraphe D.1, ainsi que l'ensemble des mesures réalisées sur la gamme de fréquence  $[50, 200]$  Hz et pour 26 valeurs de puissance de chauffage. Dans le paragraphe D.2, l'analyse des sources d'erreurs est effectuée et les incertitudes sur les résultats expérimentaux sont estimées.

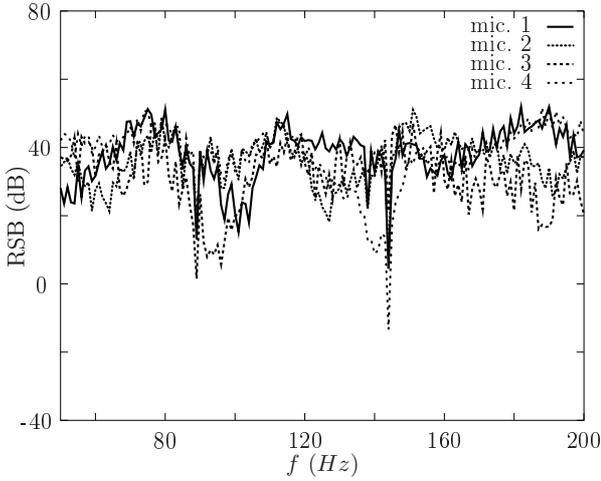
### D.1 Résultats de mesure

Pour effectuer la mesure de la matrice de transfert, quatre microphones placés de part et d'autre du noyau thermoacoustique sont connectés à un ordinateur via une carte d'acquisition. Afin de minimiser l'effet des erreurs aléatoires (bruit de fond) auxquelles sont sensibles les signaux captés par les microphones, l'amplitude sonore de la source est fixée à un niveau suffisant<sup>1</sup>. L'estimateur des moindres carrés utilisé pour le traitement des signaux de pression permet d'évaluer le Rapport Signal sur Bruit relatif à chaque microphone. Les figures D.1 et D.2 présentent par exemple les RSB obtenus pour chacun des microphones lors des deux mesures effectuées en l'absence de chauffage dans le noyau. Hormis quelques fréquences particulières, le signal de pression se situe en moyenne entre 20 et 40 dB au-dessus du niveau de bruit de fond, ce qui explique le faible taux de bruit observé sur les résultats finaux. Il convient d'ajouter que les résultats présentés sur les figures D.1 et D.2 sont également exploités lors de la simulation d'expérience exposée dans le paragraphe 3.3.1 du chapitre 3.

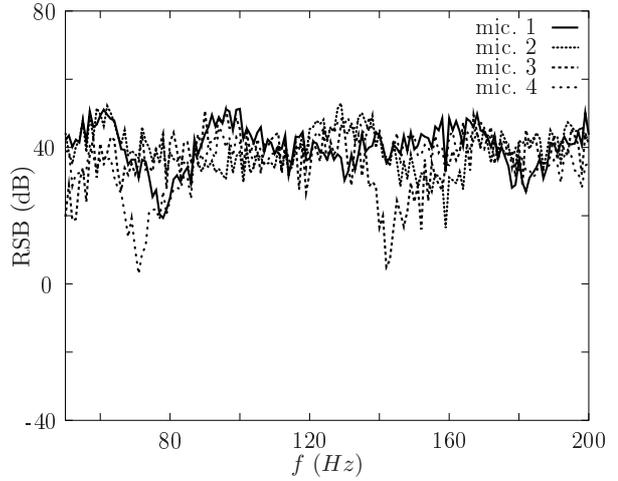
Les erreurs aléatoires ne sont pas seules responsables de l'écart entre la mesure et la réalité physique et des sources de biais peuvent également s'ajouter à ces perturbations. La méthode d'étalonnage décrite au paragraphe 2.2 du chapitre 2 est un moyen de minimiser l'effet des erreurs systématiques

---

1. lors des mesures, les amplitudes des signaux captés se situaient entre 0.1 et 8 Pa (amplitude maximale mesurée au niveau d'une des résonances du système complet). Il convient également de noter que les niveaux sonores doivent être suffisamment faibles pour rester dans le domaine de validité de l'acoustique linéaire.



**FIGURE D.1** – Rapport Signal sur Bruit obtenu pour chacun des microphones lors de la première mesure en terminaison ouverte.



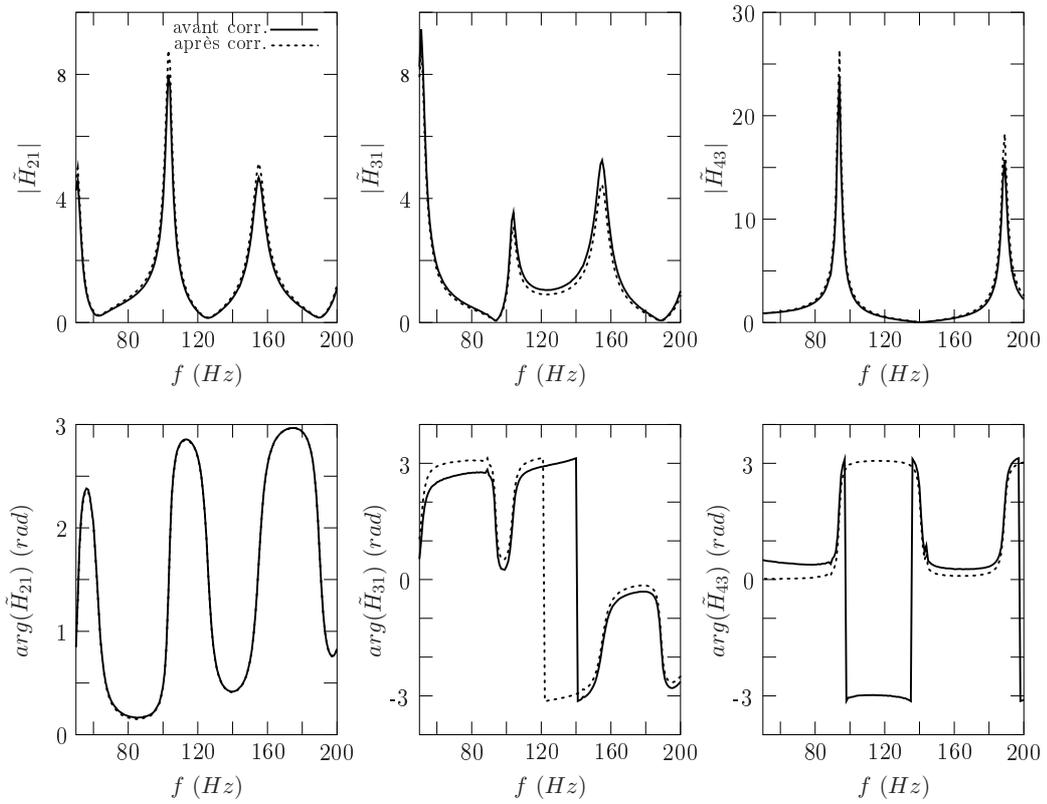
**FIGURE D.2** – Rapport Signal sur Bruit obtenu pour chacun des microphones lors de la seconde mesure en terminaison fermée.

intrinsèques à la nature propre de chaque microphone. Le principe d’étalonnage consiste à mesurer la fonction de transfert notée  $\tilde{C}_{ij}$  [cf. éq. (2.1)] entre le microphone  $i$  et le microphone  $j$  placés face-à-face dans une cavité de faibles dimensions. Avec l’hypothèse selon laquelle le champ de pression est uniforme dans la cavité, cette fonction de transfert  $\tilde{C}_{ij}$  traduit donc directement le rapport des sensibilités des microphones. La fonction d’étalonnage est ensuite appliquée à la fonction de transfert  $\tilde{H}_{ij}$  mesurée *in situ* pour obtenir une fonction de transfert “corrigée” :

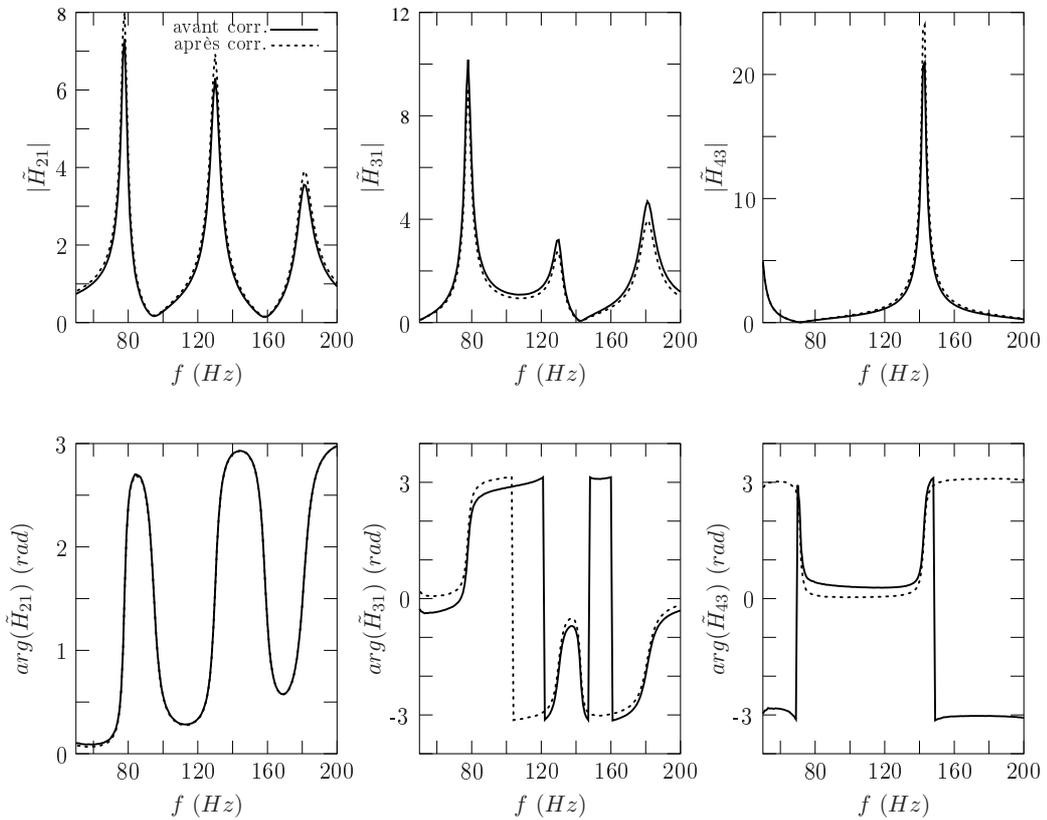
$$\tilde{H}_{ij,corr} = \frac{\tilde{H}_{ij}}{\tilde{C}_{ij}}, \quad \text{avec } (i, j) = (1, 2, 3, 4). \quad (\text{D.1})$$

Lorsque l’on s’intéresse au détail des expressions (2.28)-(2.31), on s’aperçoit que seules trois fonctions de transfert sont nécessaires pour calculer les coefficients de la matrice de transfert. Les figures D.3 et D.4 présentent les résultats de mesure obtenus pour ces trois fonctions de transfert  $\tilde{H}_{21}$ ,  $\tilde{H}_{31}$  et  $\tilde{H}_{43}$  lors des deux mesures effectuées à  $Q = 0W$ . Les fonctions de transfert sont représentées en module (graphes supérieurs) et en argument (graphes inférieurs) en fonction de la fréquence. En trait plein sont tracées les fonctions de transfert directement mesurées et en trait pointillé les fonctions de transfert “corrigées” définies par l’équation (D.1).

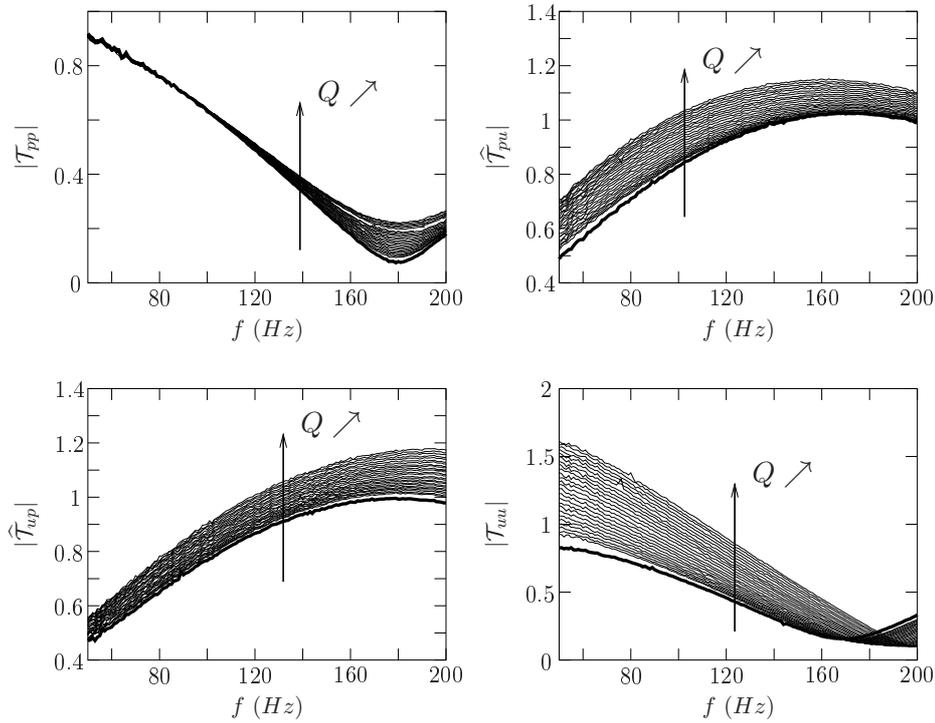
En usant de la méthode à deux charges explicitée au chapitre 2, la matrice de transfert du noyau thermoacoustique est mesurée pour un total de 26 conditions de chauffage différentes. Par souci de clarté, seules trois conditions de chauffage sont visibles sur les figures 2.11(a) et 2.11(b) et l’ensemble des données obtenues lors de la campagne de mesure sont représentées sur les figures D.5 et D.6. Sur ces graphes, la courbe en gras correspond au cas sans chauffage,  $Q = 0W$ , les autres courbes correspondant aux 25 valeurs de  $Q$  incrémentées de  $7.8 W$  à  $83.3 W$  de façon quadratique (incrément linéaire de la tension aux bornes de la résistance chauffante). L’augmentation de la puissance de chauffage  $Q$  est symbolisée par une flèche : l’évolution qualitative des coefficients de transfert en fonction du chauffage est directe.



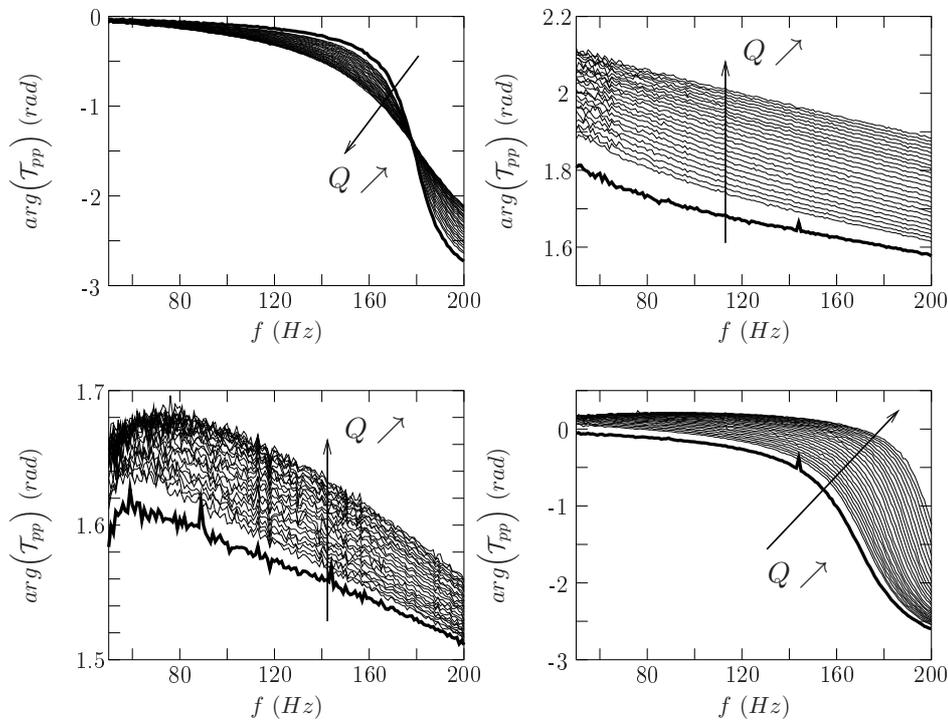
**FIGURE D.3** – Fonctions de transfert intermicrophoniques obtenues lors de la première mesure en terminaison ouverte, avant puis après correction par les courbes d'étalonnage  $\tilde{C}_{ij}$  [cf. fig. 2.9].



**FIGURE D.4** – Fonctions de transfert intermicrophoniques obtenues lors de la seconde mesure en terminaison fermée, avant puis après correction par les courbes d'étalonnage  $\tilde{C}_{ij}$  [cf. fig. 2.9].



**FIGURE D.5** – Module des quatre coefficients de transfert mesurés sur la plage de fréquence  $[50, 200]$   $Hz$ , en fonction de la puissance de chauffage  $QW$  dissipée dans l'échangeur chaud. La courbe en gras correspond au cas  $Q = 0W$ .



**FIGURE D.6** – Argument des quatre coefficients de transfert mesurés sur la plage de fréquence  $[50, 200]$   $Hz$ , en fonction de la puissance de chauffage  $QW$  dissipée dans l'échangeur chaud. La courbe en gras correspond au cas  $Q = 0W$ .

## D.2 Estimation des incertitudes

Comme il l'est présenté au paragraphe précédent, la méthode à deux charges utilisée pour mesurer les coefficients de la matrice de transfert du noyau est une méthode fortement indirecte qui peut être entachée d'un certain nombre d'erreurs. Pour estimer les incertitudes sur les résultats finaux, il convient donc d'identifier les sources d'erreurs et d'étudier leur propagation sur les quantités mesurables en utilisant une loi classique de propagation des erreurs :

$$\Delta y = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{D.2})$$

où  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une fonction de  $n$  variables.

Lors des mesures, les fonctions de transfert inter-microphoniques sont obtenues en module et en argument (cf. fig. D.3 et D.4), et un certain nombre de paramètres d'environnement sont relevés. Les coefficients de la matrice de transfert du noyau sont ensuite calculés au moyen des relations (2.28)-(2.31) dans lesquelles apparaissent les fonctions  $D_1$  et  $D_2$  définies dans les équations (2.22) et (2.23).

Parmi les sources d'erreurs, on distinguera celles commises directement sur la mesure des fonctions de transfert entre microphones et celles qui interviennent dans le modèle de propagation acoustique utilisé. Dans le paragraphe D.2.1, l'estimation des incertitudes sur le module et l'argument du nombre d'onde complexe  $k$  est obtenue à partir des incertitudes sur les paramètres d'environnement (température, pression statique, rayon des tubes). Dans le paragraphe D.2.2, les incertitudes sur la matrice de transfert du noyau sont ensuite estimées à partir des incertitudes obtenues sur  $k$ , sur les fonctions de transfert  $\tilde{H}_{ij}$  et sur les distances entre microphones.

### D.2.1 Incertitudes sur le nombre d'onde complexe $k$

La méthode à quatre microphones utilisée permettant de remonter aux coefficients de transfert repose sur un modèle de propagation d'ondes acoustiques guidées en fluide dissipatif. Hormis les erreurs commises directement sur les signaux de pression captés par les microphones, il existe donc naturellement des erreurs inhérentes à la mesure des distances entre microphones et à la connaissance du nombre d'onde  $k$ . Concernant ce dernier point, les incertitudes sur  $k$  peuvent être estimées à partir des incertitudes portant sur les valeurs mesurées de  $R$  (rayon interne des tubes),  $p_0$  (pression statique) et  $T_c$  (température ambiante). Dans les tubes en PVC, l'hypothèse de quasi-adiabaticité est vérifiée du fait que le rayon  $R$  est effectivement largement supérieur à l'épaisseur de couche limite visqueuse  $\delta_\nu$  dans la gamme de fréquence considérée :

$$\delta_\nu \simeq 3.1 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad \text{à } 50 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_\nu}{R} \simeq 1.8 \cdot 10^{-2}, \quad (\text{D.3})$$

$$\delta_\nu \simeq 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad \text{à } 200 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_\nu}{R} \simeq 9.10^{-3}. \quad (\text{D.4})$$

Sachant que les fonctions thermovisqueuses prennent la forme  $f_{\nu,\kappa} \simeq (1+i)\frac{\delta_{\nu,\kappa}}{R}$  en interaction quasi adiabatique, le nombre d'onde  $k$  défini initialement par l'équation (1.26) se réécrit sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left( \frac{1 + (\gamma - 1)(1 + i)\frac{\delta_{\nu,\kappa}\sigma^{-1/2}}{R}}{1 - (1 + i)\frac{\delta_{\nu,\kappa}}{R}} \right), \quad (\text{D.5})$$

où

$$c_0^2 = \frac{\gamma R_{gp} T_c}{M_{mol}} \quad (\text{D.6})$$

est la célérité adiabatique du son,

$$\delta_{\nu} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} = \left( \frac{2\mu_0 R_{gp}}{300^\beta \omega M_{mol}} \right)^{1/2} \left( \frac{T_c^{\beta+1}}{p_0} \right)^{1/2} \quad (\text{D.7})$$

est l'épaisseur de couche limite visqueuse,  $\sigma = \frac{C_p \mu_0}{\lambda_0}$  est le nombre de Prandtl du fluide et  $\gamma$  est le coefficient polytropique (1.4 pour l'air).  $R_{gp}$  est la constante des gaz parfaits,  $M_{mol}$  est la masse molaire du fluide et  $\beta = 0.73$  pour l'air [83].

Posons les quantités

$$C_1 = \frac{\omega^2 M_{mol}}{\gamma R_{gp}}, \quad (\text{D.8})$$

$$C_2 = \left( \frac{2\mu_0 R_{gp}}{300^\beta \omega M_{mol}} \right)^{1/2}, \quad (\text{D.9})$$

$$\Lambda = (\gamma - 1)\sigma^{-1/2}, \quad (\text{D.10})$$

et la fonction

$$\vartheta(R, p_0, T_c) = \frac{1}{R} \left( \frac{T_c^{\beta+1}}{p_0} \right)^{1/2} \quad (\text{D.11})$$

de sorte que l'expression (D.5) du carré de  $k$  se réécrit sous une forme condensée :

$$k^2 = C_1 T^{-1} \left( \frac{1 + (1 + i)C_2 \Lambda \vartheta}{1 - (1 + i)C_2 \vartheta} \right). \quad (\text{D.12})$$

Après quelques lignes de calculs, on peut alors montrer que les dérivées de  $k^2$  par rapport aux trois paramètres s'écrivent :

$$\frac{\partial k^2}{\partial R} = \frac{k^2}{R} \tilde{\Gamma} \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial p_0} = \frac{k^2}{2p_0} \tilde{\Gamma} \quad (\text{D.14})$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial T_c} = -\frac{k^2}{T_c} \tilde{\Gamma} \left( \frac{\beta + 1}{2} + \frac{1}{\tilde{\Gamma}} \right) \quad (\text{D.15})$$

où  $\tilde{\Gamma}$  est une fonction complexe qui dépend essentiellement du rapport entre l'épaisseur de couche limite et le rayon du tube :

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1 + \Lambda}{\Lambda(1 + i)\frac{\delta_{\nu,\kappa}}{R} + (1 - \Lambda) - ((1 + i)\frac{\delta_{\nu,\kappa}}{R})^{-1}}. \quad (\text{D.16})$$

Par suite, comme  $\frac{\partial k^2}{\partial x_i} = 2k \frac{\partial k}{\partial x_i}$ , on obtient :

$$\frac{\partial k}{\partial R} = \frac{k}{2R} \tilde{\Gamma}, \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{\partial k}{\partial p_0} = \frac{k}{4p_0} \tilde{\Gamma}, \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{\partial k}{\partial T_c} = -\frac{k}{2T_c} \tilde{\Gamma} \left( \frac{\beta + 1}{2} + \frac{1}{\tilde{\Gamma}} \right). \quad (\text{D.19})$$

Afin de dissocier les incertitudes sur le module et sur l'argument du nombre d'onde  $k$ , il convient de repartir de la définition d'une fonction complexe  $z$  dont le module et l'argument dépendent d'une variable  $x_i$  :

$$z = |z|e^{j\phi_z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial |z|}{\partial x_i} + j|z| \frac{\partial \phi_z}{\partial x_i} \right) e^{j\phi_z} \quad (\text{D.20})$$

ce qui se traduit par

$$\frac{\partial |z|}{\partial x_i} = |z| \Re \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right), \quad (\text{D.21})$$

$$\frac{\partial \phi_z}{\partial x_i} = \Im \left( \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right). \quad (\text{D.22})$$

Finalement, en combinant les éqs. (D.21) et (D.22) avec les expressions des dérivées (D.17)-(D.19), le développement de la loi de propagation des incertitudes (D.2) permet d'écrire les incertitudes obtenues sur le module et l'argument de  $k$  selon :

$$\Delta |k| = \frac{|k|}{2} \left[ \left( \Re(\tilde{\Gamma}) \frac{\Delta R}{R} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \Re(\tilde{\Gamma}) \frac{\Delta p_0}{p_0} \right)^2 + \left( \Re \left( \frac{\beta + 1}{2} \tilde{\Gamma} + 1 \right) \frac{\Delta T_c}{T_c} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{D.23})$$

$$\Delta \phi_k = \frac{1}{2} \left[ \left( \Im(\tilde{\Gamma}) \frac{\Delta R}{R} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \Im(\tilde{\Gamma}) \frac{\Delta p_0}{p_0} \right)^2 + \left( \Im \left( \frac{\beta + 1}{2} \tilde{\Gamma} + 1 \right) \frac{\Delta T_c}{T_c} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{D.24})$$

Il est intéressant de remarquer que dans le contexte de l'expérience pour lequel le rapport  $\delta_\nu/R$  reste petit devant l'unité, les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{\Gamma}$  sont telles que

$$\Re(\tilde{\Gamma}) \ll 1, \quad (\text{D.25})$$

$$\Im(\tilde{\Gamma}) \ll 1, \quad (\text{D.26})$$

ce qui signifie que pour des incertitudes relatives comparables sur  $R$ ,  $p_0$  et  $T_c$ , l'incertitude sur la température ambiante aura davantage d'influence sur  $\Delta |k|$ .

**Evaluation de  $\Delta R$ ,  $\Delta p_0$  et  $\Delta T_c$ .** Deux sources d'erreur interviennent principalement dans l'incertitude  $\Delta R$  sur le rayon des tubes : l'erreur systématique de l'appareil de mesure (pied à coulisse,  $\pm 2.10^{-3} \text{ cm}$ ) et l'erreur due à un défaut de circularité des tubes, qui peut être évaluée sur la moyenne de plusieurs mesures de  $R$ . Il apparait que la première source d'erreur est négligeable devant la seconde. On donne ici :

$$R = 1.70 \pm 0.01 \text{ cm} \Leftrightarrow \frac{\Delta R}{R} = 0.6\%. \quad (\text{D.27})$$

Les erreurs commises sur  $p_0$  et  $T_c$  sont également de deux types. Cependant, comme pour la mesure de  $R$ , l'erreur systématique due à l'appareil de mesure (station météo) peut être considérée comme négligeable devant l'erreur due aux variations lentes des valeurs de  $p_0$  et  $T_c$ , ces variations lentes étant dues à la durée de la campagne de mesures. Ainsi les valeurs de  $p_0$  et  $T_c$  sont relevées plusieurs fois au cours de l'ensemble de la série de mesure et leur moyenne nous donne une estimation de l'incertitude sur ces deux paramètres :

$$p_0 = 1015 \pm 1 \text{ mbar} \Leftrightarrow \frac{\Delta p_0}{p_0} = 0.1\%. \quad (\text{D.28})$$

$$T_c = 294.6 \pm 0.5 \text{ K} \Leftrightarrow \frac{\Delta T_c}{T_c} = 0.2\%. \quad (\text{D.29})$$

### D.2.2 Incertitudes sur les coefficients de la matrice de transfert

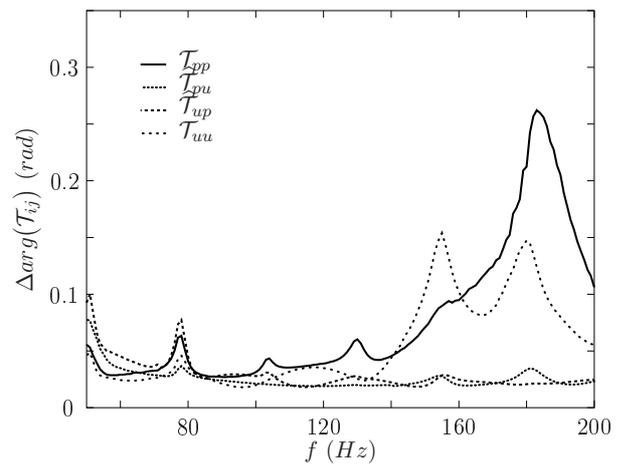
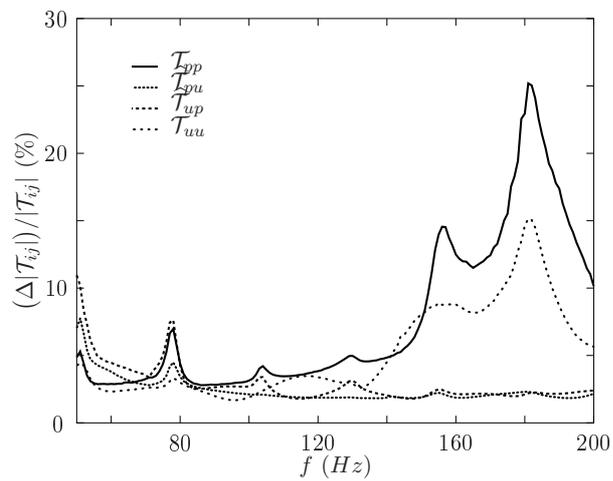
Les incertitudes sur les coefficients de la matrice de transfert du noyau sont estimées à partir des incertitudes sur  $k$  discutées précédemment, des incertitudes  $\Delta|\tilde{H}_{ij}|$  et  $\Delta\phi_{ij}$  sur le module et l'argument des fonctions de transfert mesurées et de l'incertitude  $\Delta d$  sur les distances entre microphones ( $\Delta d = 0.5 \text{ mm}$  ici). A partir des expressions (2.28)-(2.31) des coefficients de transfert et de la relation (D.2), il est possible d'obtenir des expressions analytiques de ces incertitudes. Ces expressions nécessitent néanmoins des développements relativement longs qu'il n'est pas utile d'explicitier ici, ce qui ne ferait qu'alourdir les propos.

Bien qu'il soit possible de réduire la part des erreurs aléatoires et systématiques lors de la mesure des fonctions de transfert  $\tilde{H}_{ij}$ , l'estimation quantitative des incertitudes associées n'est pas triviale. En général, une fonction de transfert traitée à l'aide d'un analyseur est accompagnée d'une incertitude de l'ordre de 1% sur le module et  $0.6^\circ$  sur la phase [1]. Les incertitudes  $\Delta|\tilde{H}_{ij}|$  et  $\Delta\phi_{ij}$  obtenues via l'estimateur des moindres carrés sont supposées être du même ordre de grandeur, voire inférieures à celles obtenues par l'analyseur, de sorte que

$$\frac{\Delta|\tilde{H}_{ij}|}{|\tilde{H}_{ij}|} = 1\%, \quad (\text{D.30})$$

$$\Delta\phi_{ij} = 0.6^\circ = 1 \cdot 10^{-2} \text{ rad}. \quad (\text{D.31})$$

Les incertitudes sur le module et l'argument des coefficients de la matrice de transfert obtenues à l'issue de cette analyse sont finalement données sur la figure D.7. Ces résultats sont obtenus pour une condition de chauffage nulle au niveau de l'échangeur chaud, mais il convient de préciser que l'ajout d'un chauffage et donc une distribution inhomogène de température ne modifient en rien l'ordre de grandeur des erreurs commises sur les mesures. Les courbes observables sur la figure D.7 illustrent bien le caractère indirect de la méthode de mesure. En effet des incertitudes initialement faibles peuvent conduire à des incertitudes relativement élevées – du moins à certaines fréquences – sur les résultats finaux et il reste nécessaire d'apporter le maximum de précautions lors des mesures. Néanmoins, le bon accord entre expérience et modélisation semi-analytique obtenu sur les figures 2.16 et 2.17 du chapitre 2 montre qu'en dépit de ce risque d'erreurs important, la qualité des résultats est satisfaisante pour la détermination des seuils de déclenchement.



**FIGURE D.7** – Incertitudes estimées sur le module et l'argument des coefficients de la matrice de transfert du noyau thermoacoustique.



## Annexe E

# Expression analytique approchée de coefficient d'échange latéral $h_s$

Dans le modèle thermique uni-dimensionnel présenté au chapitre 3, les transferts de chaleur latéraux sont introduits sous forme de coefficients d'échanges. Il est naturellement inconcevable de chercher à exprimer le coefficient d'échange  $h_s$  (tout comme le coefficient  $h_{hx}$  relatif à l'échangeur de chaleur) lorsque le stack est constitué d'un matériau fibreux ou d'un empilement aléatoire de grilles. Pour un matériau poreux ordonné, comme un réseau de pores carrés par exemple, le coefficient  $h_s$  peut néanmoins être estimé à partir de considérations simplifiées des flux de chaleur et de l'écriture de résistances thermiques [68].

Pour cela, considérons la région constituée du stack ( $r \in [0, R]$ ) et des parois en inox ( $r \in [R, R_e]$ , où  $R_e$  est le rayon externe du noyau). Le coefficient d'échange  $h_s$  est représentatif du flux de chaleur latéral  $\varphi_s$  pouvant être approximé par le flux conductif qui s'établit entre les deux isothermes  $T_0$  et  $T_0^{(i)}$ , comme illustré sur la figure E.1. Le flux de chaleur surfacique  $\varphi_s$  qui s'établit entre les deux ailettes au travers de la surface de contact  $2\pi Rl_s$  :

$$\varphi_s = h_s (T_0^{(i)} - T_0), \quad (\text{E.1})$$

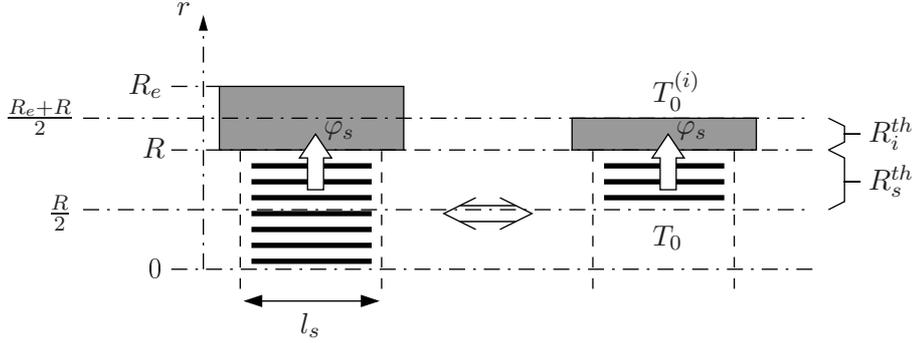
peut alors s'écrire en fonction des résistances thermiques  $R_s^{th}$  et  $R_i^{th}$  relatives au stack et à la paroi en inox, sous la forme :

$$\varphi_s = \frac{1}{2\pi Rl_s} \frac{T_0^{(i)} - T_0}{R_s^{th} + R_i^{th}}, \quad (\text{E.2})$$

et par combinaison des relations (E.1) et (E.2), on obtient alors le coefficient d'échange  $h_s$  sous la forme :

$$h_s = \frac{1}{2\pi Rl_s} \frac{1}{R_s^{th} + R_i^{th}}. \quad (\text{E.3})$$

La résistance thermique  $R_s^{th}$  correspond au manchon cylindrique de rayons interne  $R/2$  et externe  $R$ , de conductivité thermique  $\lambda_{s,\perp}$  (conductivité thermique transverse du stack) et de longueur  $l_s$ ; son



**FIGURE E.1** – Flux de conduction latéral. Le coefficient d'échanges est estimé à partir de l'association en série des deux résistances thermiques  $R_s^{th}$  et  $R_i^{th}$ .

expression tirée de [92] est donnée ici selon

$$R_s^{th} = \frac{\ln\left(\frac{R}{R/2}\right)}{2\pi l_s \lambda_{s,\perp}}, \quad (\text{E.4})$$

$$= \frac{\ln(2)}{2\pi l_s \lambda_{s,\perp}}. \quad (\text{E.5})$$

De la même façon, la résistance thermique  $R_i^{th}$  du manchon cylindrique de rayons interne  $R$  et externe  $(R + R_e)/2$ , de conductivité thermique  $\lambda_i$  (conductivité thermique de l'inox) et de longueur  $l_s$  est donnée par :

$$R_i^{th} = \frac{\ln\left(\frac{(R+R_e)/2}{R}\right)}{2\pi l_s \lambda_i}, \quad (\text{E.6})$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R} + 1\right) - \ln(2)}{2\pi l_s \lambda_i}. \quad (\text{E.7})$$

Le report des expressions (E.5) et (E.7) des résistances thermiques dans l'équation (E.3) permet finalement d'écrire le coefficient d'échange  $h_s$  sous la forme suivante :

$$h_s = \frac{\lambda_{s,\perp}}{\ln(2)R} \left[ 1 + \frac{\lambda_{s,\perp}}{\lambda_i} \left( \frac{\ln(R_e/R + 1)}{\ln(2)} - 1 \right) \right]^{-1}. \quad (\text{E.8})$$

L'expression (E.8) fait apparaître la conductivité thermique transverse  $\lambda_{s,\perp}$  du stack, nécessairement différente de sa conductivité longitudinale  $\lambda_s$  en raison de l'anisotropie du matériau. Cette conductivité transverse peut être estimée dans le cas d'un pore à section carrée à partir de la résistance thermique  $R_{pore}^{th}$  donnée par l'association en série des résistances  $R_1^{th}$  et  $R_2^{th}$ , comme illustré sur la figure E.2 :

$$R_{pore}^{th} = 2R_1^{th} + R_2^{th}, \quad (\text{E.9})$$

où la résistance  $R_1^{th}$  traduit la conduction dans les parois en céramique,

$$R_1^{th} = \frac{e/2}{\lambda_m(h+e)l_s}, \quad (\text{E.10})$$

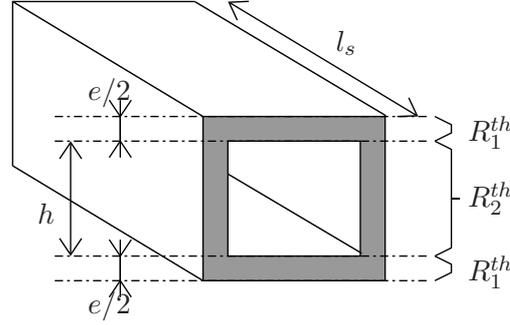


FIGURE E.2 – Représentation schématique d'un pore à section carrée.

tandis que la résistance  $R_2^{th}$  est donnée par l'association en parallèle de la résistance  $R_{fluide}^{th}$  traduisant la convection à l'intérieur du pore (surface mouillée  $4hl_s$ ),

$$R_{fluide}^{th} = \frac{1}{4N_u \lambda_a l_s}, \quad (E.11)$$

et de la résistance  $R_{solide}^{th}$  traduisant la conduction dans les parois :

$$R_{solide}^{th} = \frac{h}{\lambda_m l_s (e/2)}. \quad (E.12)$$

Compte tenu des expressions (E.11) et (E.12), l'association en parallèle de  $R_{fluide}^{th}$  et  $R_{solide}^{th}$  conduit à :

$$\frac{1}{R_2^{th}} = \frac{1}{R_{fluide}^{th}} + \frac{2}{R_{solide}^{th}} = l_s^{-1} \left[ 4N_u \lambda_a + \frac{\lambda_m l_s e}{h} \right]^{-1}, \quad (E.13)$$

dont le report dans l'expression (E.9), conjointement à l'expression (E.10) de  $R_1^{th}$ , permet d'écrire :

$$R_{pore}^{th} = l_s^{-1} \left[ \frac{e}{\lambda_m (h + e)} + \frac{1}{4N_u \lambda_a + \frac{\lambda_m l_s e}{h}} \right], \quad (E.14)$$

et donc la conductivité transverse du stack sous la forme :

$$R_{pore}^{th} \equiv \frac{(h + e)}{\lambda_{s,\perp} (h + e) l_s} \Leftrightarrow \lambda_{s,\perp} = \frac{1}{R_{pore}^{th} l_s} = \left( \frac{e}{\lambda_m (h + e)} + \frac{1}{4N_u \lambda_a + \frac{\lambda_m l_s e}{h}} \right)^{-1}. \quad (E.15)$$

Finalement, en usant de l'expression de la porosité du stack :

$$\phi = \left( \frac{h}{h + e} \right)^2, \quad (E.16)$$

on obtient, après quelques calculs, l'expression suivante pour la conductivité transverse :

$$\lambda_{s,\perp} = \left( \frac{1 - \sqrt{\phi}}{\lambda_m} + \frac{1}{4N_u \lambda_a + \lambda_m \frac{1 - \sqrt{\phi}}{\sqrt{\phi}}} \right)^{-1}. \quad (E.17)$$



## Annexe F

# Méthode inverse – Discussion sur la quantification des erreurs dues aux paramètres connus du modèle

Lorsqu'une méthode inverse est utilisée pour l'estimation de paramètres à partir de données expérimentales, le biais sur les résultats de l'identification est lié à plusieurs sources d'erreurs. L'une d'elles réside dans le fait qu'un certain nombre (parfois non-négligeable) de paramètres du modèle utilisé pour reproduire l'expérience sont *connus a priori* et fixés à des valeurs qui peuvent différer de la réalité. Ces paramètres sont donc accompagnés d'un certain degré d'incertitude. Dans le cas d'un modèle impliquant la connaissance d'un grand nombre de paramètres d'environnement, comme c'est le cas du modèle thermo-acoustique développé au chapitre 3, toutes ces incertitudes cumulées peuvent conduire à des résultats d'estimation difficilement interprétables, accompagnés d'un résidu important en sortie de l'algorithme.

En toute rigueur, le biais dû aux paramètres *connus* du modèle peut être estimé à partir des courbes de résidu qui persiste après estimation des paramètres<sup>1</sup> [84]. Si l'on suppose que le modèle exact est connu, et que ce modèle est perturbé par des sources de bruit et de biais dues aux mesures, alors

$$\mathcal{T}_{exp} = \mathcal{T}(\mathbf{Y}_v) + \mathbf{e}_{br} + \mathbf{e}_M, \quad (\text{F.1})$$

où  $\mathbf{Y}_v$  représente les paramètres réels du modèle exact, et où  $\mathbf{e}_{br}$  représente le bruit de mesure (variable stochastique) de moyenne nulle sur l'ensemble des données tandis que  $\mathbf{e}_M$  traduit le biais de mesure (erreurs systématiques). D'autre part, le modèle imparfait utilisé pour le *problème direct* peut être relié au modèle exact en émettant l'hypothèse que les paramètres estimés  $\hat{\mathbf{Y}}$  et supposés connus  $\mathbf{Y}_c$  restent proches des paramètres réels  $\mathbf{Y}_v$  et  $\mathbf{Y}_{c,v}$ , de sorte que l'on peut faire l'approximation suivante :

$$\mathcal{T}(\hat{\mathbf{Y}}) \simeq \mathcal{T}(\mathbf{Y}_v) + \mathbf{X} \left( \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}_v \right) + \mathbf{X}_c (\mathbf{Y}_c - \mathbf{Y}_{c,v}), \quad (\text{F.2})$$

où  $\mathbf{X}_c$  est la matrice de sensibilité relative aux paramètres à estimer, et où  $\mathbf{X}$  est la matrice de sensibilité relative aux paramètres connus. Le report des équations (F.1) et (F.2) dans (3.24) permet

---

1. Les figures 3.12(a,b) sont une bonne illustration du biais final pouvant être obtenu en sortie de l'algorithme de minimisation.

donc d'écrire l'erreur de l'estimation sous la forme

$$\mathbf{e}_T = \mathbf{e}_{br} + \mathbf{e}_M - \mathbf{X}b_{\hat{\Upsilon}} - \mathbf{X}_c b_{\Upsilon_c}, \quad (\text{F.3})$$

avec  $b_{\hat{\Upsilon}} = \hat{\Upsilon} - \Upsilon_v$  et  $b_{\Upsilon_c} = \Upsilon_c - \Upsilon_{c,v}$ .

De façon générale, sous réserve de connaître les sources d'erreurs  $\mathbf{e}_{br}$ ,  $\mathbf{e}_M$  et  $\mathbf{X}_c b_{\Upsilon_c}$ , il est donc possible d'estimer l'erreur  $b_{\hat{\Upsilon}}$  commise sur les paramètres estimés à partir du résidu  $\mathbf{e}_T$  obtenu après minimisation. En principe,  $\mathbf{e}_{br}$  et  $\mathbf{e}_M$  sont accessibles par l'analyse des mesures et des incertitudes. Par ailleurs, l'influence du bruit de mesure ayant déjà été étudiée précédemment, on s'affranchira ici de cette source d'erreur ( $\mathbf{e}_{br} = 0$ ). En revanche, la quantification des erreurs  $\mathbf{X}_c b_{\Upsilon_c}$  n'est pas directement accessible du fait que l'on ne connaît pas l'écart entre les paramètres supposés connus du modèle et les valeurs vraies de ces paramètres. Pour quantifier cette erreur, on peut avoir recours à une méthode approchée [84].

Pour cela, supposons à présent que les données expérimentales ne sont ni bruitées, ni biaisées et qu'elles reproduisent parfaitement le modèle exact ( $\mathbf{e}_{br} = \mathbf{e}_M = 0$ ). L'équation (F.3) permet d'écrire dans ce cas

$$\mathbf{X}b_{\hat{\Upsilon}} = -\mathbf{e}_T - \mathbf{X}_c b_{\Upsilon_c}, \quad (\text{F.4})$$

soit encore, en multipliant par la transposée conjuguée  $\mathbf{X}^\dagger$  et en prenant la partie réelle de chaque terme :

$$\Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}) b_{\hat{\Upsilon}} = -\Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{e}_T) - \Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}_c) b_{\Upsilon_c}. \quad (\text{F.5})$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (F.5) est nul, d'après la définition même du problème de minimisation [cf. éq. (3.32)] et le biais  $b_{\hat{\Upsilon}}$  devient alors :

$$b_{\hat{\Upsilon}} = -\mathbf{H}^{-1} \Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}_c) b_{\Upsilon_c}, \quad (\text{F.6})$$

dont le report dans l'équation F.4 conduit à

$$\mathbf{e}_T = \mathbf{X} \mathbf{H}^{-1} \Re(\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}_c) b_{\Upsilon_c} - \mathbf{X}_c b_{\Upsilon_c}. \quad (\text{F.7})$$

Cette équation faisant intervenir des quantités complexes, sa solution implique de résoudre un système de deux équations, qui s'écrit ici sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \Re(\mathbf{X}) \mathbf{H}^{-1} \Re(\mathbf{X}^\dagger) - \mathbf{I}_n & \Re(\mathbf{X}) \mathbf{H}^{-1} \Im(\mathbf{X}^\dagger) \\ \Im(\mathbf{X}) \mathbf{H}^{-1} \Re(\mathbf{X}^\dagger) & \Im(\mathbf{X}) \mathbf{H}^{-1} \Im(\mathbf{X}^\dagger) - \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{X}_c) b_{\Upsilon_c} \\ \Im(\mathbf{X}_c) b_{\Upsilon_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{e}_T) \\ \Im(\mathbf{e}_T) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.8})$$

Finalement, tous calculs faits, le biais dû aux paramètres connus se déduit de la solution de ce système :

$$\Re(\mathbf{X}_c) b_{\Upsilon_c} = [\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_4^{-1} \mathbf{M}_3]^{-1} \times (\Re(\mathbf{e}_T) - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_4^{-1} \Im(\mathbf{e}_T)), \quad (\text{F.9})$$

où  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}_3$  et  $\mathbf{M}_4$  sont les quatre composantes de la matrice à gauche du système (F.8). On peut cependant montrer que la matrice  $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_4^{-1} \mathbf{M}_3$  qui apparaît dans l'expression du biais  $\Re(\mathbf{X}_c) b_{\Upsilon_c}$  est singulière et possède trois valeurs propres proches de zéro. Bien qu'il soit possible de régulariser cette matrice par une décomposition en valeurs singulières, il reste que la solution du

problème [éq. (F.4)] n'est pas unique. Pour remédier à cela, Rémy et André proposent une estimation du biais à partir d'un intervalle sur les données expérimentales [84]. Supposons que l'estimation de paramètres soit réalisée sur les deux ensembles de points  $[0, n - 1]$  et  $[0, n]$ , différenciés alors par les indices 1 et 2. L'erreur sur les paramètres estimés s'écrit pour les deux cas à partir de l'équation (F.6) :

$$\mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}},1} = -\mathbf{H}_1^{-1} \mathfrak{R} \left( \mathbf{X}_1^\dagger \mathbf{X}_{c,1} \right) \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}_c}, \quad (\text{F.10})$$

$$\mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}},2} = -\mathbf{H}_2^{-1} \mathfrak{R} \left( \mathbf{X}_2^\dagger \mathbf{X}_{c,2} \right) \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}_c}. \quad (\text{F.11})$$

Par suite, en usant de l'approximation

$$\mathbf{H}_1 \simeq \mathbf{H}_2, \quad (\text{F.12})$$

pour un intervalle de fréquence suffisamment petit, il est possible d'en déduire l'expression du biais  $\mathbf{X}_c \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}_c}$  en fonction de l'écart obtenu entre les deux estimations, soit  $\Delta \mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_2 - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1$ . Malheureusement dans le cas présent, il apparaît que le pas fréquentiel utilisé lors de l'expérience est suffisamment large pour que l'erreur due à l'approximation (F.12) (bien que de l'ordre de seulement 2%) se répercute de façon dramatique sur le calcul de  $\mathbf{X}_c \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}_c}$ . Cette méthode d'estimation des erreurs s'avère donc inefficace ici et l'erreur due au biais sur les paramètres connus du modèle ne peut pas être quantifiée.



## Annexe G

# Calcul analytique de l'écoulement de Rayleigh dans un résonateur quart d'onde

Un résonateur quart d'onde à l'intérieur duquel résonne une onde stationnaire de grande amplitude est un support à l'établissement de cellules de recirculation du fluide [cf. fig. 4.4]. En 2001, Bailliet *et al.* [12] proposent un modèle analytique complet pour la vitesse de l'écoulement qui s'établit en régime stationnaire dans ce type de système fermé. Ce modèle, développé en coordonnées cartésiennes (plaques) et cylindriques (tubes), prend notamment en compte l'influence d'un gradient de température sur la vitesse d'écoulement du fluide ainsi que la dépendance en température des propriétés thermophysiques du fluide.

Le modèle de Bailliet *et al.* est celui retenu pour le calcul du vent acoustique à l'intérieur du résonateur et des pores du stack, utilisé pour la description du moteur thermoacoustique quart d'onde étudié au chapitre 4. Les équations développées dans cette annexe sont donc largement inspirées de celles présentées dans la Ref. [12], et certains développements mathématiques ne sont pas explicités ici de manière à rester le plus concis possible. Dans le paragraphe G.3, des résultats de calcul du vent acoustique sont notamment présentés et comparés aux modèles analytiques simplifiés de Rayleigh [49] et de Schuster et Matz [85] en l'absence de gradient de température.

### G.1 Composante axiale de la vitesse de l'écoulement

En adoptant le système de coordonnées cylindriques<sup>1</sup>, la composante suivant  $x$  de l'équation de Navier-Stokes (1.2) est écrite sous la forme suivante :

$$\rho \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x \right] = -\partial_x p + \partial_x \left[ \mu \left( 2\partial_x v_x - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \right] + \frac{1}{r} \partial_r \left[ r \mu \left( \frac{1}{r} \partial_r (r v_x) + \partial_x v_r \right) \right]. \quad (\text{G.1})$$

---

1. En raison de la symétrie du problème considéré, rappelons que toutes les variables sont invariantes selon la coordonnée orthoradiale  $\theta$  ( $\partial_\theta = 0$ ).

Le report de l'équation de conservation de la masse (1.1) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_x(\rho v_x) + \frac{1}{r} \partial_r(r \rho v_r) = 0, \quad (\text{G.2})$$

dans la relation (G.1) conduit alors à

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_x) + \partial_x(\rho v_x^2) + \frac{1}{r} \partial_r(r \rho v_x v_r) = \\ -\partial_x p + \partial_x \left[ \mu \left( 2\partial_x v_x - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \right] + \frac{1}{r} \partial_r \left[ r \mu \left( \frac{1}{r} \partial_r(r v_x) + \partial_x v_r \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Afin de décrire l'écoulement redressé induit par les perturbations acoustiques, il est nécessaire de prendre en compte les termes d'ordre 2 dans le développement (1.7) des variables thermodynamiques. En ne conservant que les termes d'ordre 2 dans l'équation (G.3), la moyenne sur une période acoustique des termes restants – en notant que  $\overline{\partial_t(\rho_1 v_{1,x})} = 0$  du fait du caractère harmonique  $-i\omega t$  des variables acoustiques d'ordre 1 – conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\mu}{R^2} \frac{1}{\eta} \partial_\eta \left( \eta \partial_\eta \overline{v_{2,x}} \right) = \partial_x p_2 + \partial_x \left( \overline{\rho_0 v_{1,x}^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{1}{\eta} \partial_\eta \left( \eta \rho_0 \overline{v_{1,x} v_{1,\eta}} \right) - \frac{\beta \mu}{T_0 R^2} \frac{1}{\eta} \partial_\eta \left( \overline{\eta \tau_1 \partial_\eta v_{1,x}} \right), \quad (\text{G.4})$$

avec la coordonnée radiale adimensionnée  $\eta = \frac{r}{R}$ , et où  $v_{1,\eta}$  est la composante radiale de la vitesse particulière acoustique et  $v_{2,x}$  est la composante axiale de la vitesse du second ordre. L'expression analytique de la vitesse  $v_{1,\eta}$  est notamment développée au paragraphe G.2 de cette annexe. Notons que l'équation (G.4) est parfaitement équivalente à l'éq. (4) de la Ref. [12] mais écrite ici spécifiquement en coordonnées cylindriques et pour laquelle on a déjà usé de la relation

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \beta \frac{\tau_1}{T_0}, \quad (\text{G.5})$$

explicitant la dépendance en température de la viscosité de cisaillement [83]. En intégrant l'équation (G.4) successivement de 0 à  $\eta$  usant de la condition  $\partial_\eta v_{2,x}(0) = 0$ , puis de 1 à  $\eta$  usant de la condition  $v_{2,x}(1) = 0$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \overline{v_{2,x}} = \frac{R^2}{4\mu} \partial_x p_2 (\eta^2 - 1) + \frac{R^2}{\mu} \int_1^\eta \frac{1}{\eta'} \left[ \int_0^{\eta'} \partial_x \left( \rho_0 \overline{v_{1,x}^2} \right) \eta'' d\eta'' \right] d\eta' \\ + \frac{R \rho_0}{\mu} \int_1^\eta \overline{v_{1,x} v_{1,\eta}} d\eta' - \frac{\beta}{T_0} \int_1^\eta \overline{\tau_1 \partial_\eta v_{1,x}} d\eta'. \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

D'autre part, la moyenne temporelle de la vitesse axiale d'ordre 2,  $\overline{v_{2,x}}$ , est liée à la densité de flux de masse dû à l'écoulement du second ordre, définie selon

$$\dot{m}_2 = \rho_0 \overline{v_{2,x}} + \overline{\rho_1 v_{1,x}}, \quad (\text{G.7})$$

dont la moyenne sur la section transverse doit être nécessairement nulle dans le cas présent,

$$\langle \dot{m}_2 \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \dot{m}_2 r dr d\theta = 0, \quad (\text{G.8})$$

puisque l'on considère ici un système fermé et qu'un flux massique moyen non-nul impliquerait obligatoirement une accumulation de masse à un endroit donné du système. Le report de (G.7) dans (G.8) conduit à la relation

$$\int_0^1 \overline{v_{2,x}} \eta d\eta = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^1 \overline{\rho_1 v_{1,x}} \eta d\eta, \quad (\text{G.9})$$

qui, introduite dans l'équation (G.6) (après intégration de 0 à 1), permet d'exprimer le gradient de pression hydrodynamique  $\partial_x p_2$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_x p_2 = & \frac{16\nu}{R^2} \int_0^1 \overline{\rho_1 v_{1,x}} \eta d\eta + 16 \int_0^1 \eta \left[ \int_1^\eta \frac{1}{\eta'} \left[ \int_0^{\eta'} \partial_x (\rho_0 \overline{v_{1,x}^2}) \eta'' d\eta'' \right] d\eta' \right] d\eta \\ & + \frac{16\rho_0}{R} \int_0^1 \eta \left[ \int_1^\eta \overline{v_{1,x} v_{1,\eta}} d\eta' \right] d\eta - \frac{16\beta\mu}{R^2 T_0} \int_0^1 \eta \left[ \int_1^\eta \overline{\tau_1 \partial_\eta v_{1,x}} d\eta' \right] d\eta. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Le relation précédente introduite dans l'équation (G.6) conduit finalement à l'expression de la vitesse axiale  $v_{2,x}$  moyennée sur un cycle acoustique :

$$\begin{aligned} \overline{v_{2,x}}(x, \eta) = & \frac{4}{\rho_0} (\eta^2 - 1) \int_0^1 \overline{\rho_1 v_{1,x}} \eta d\eta + \frac{4R^2}{\mu} (\eta^2 - 1) \int_0^1 \eta \left[ \int_1^\eta \frac{1}{\eta'} \left[ \int_0^{\eta'} \partial_x (\rho_0 \overline{v_{1,x}^2}) \eta'' d\eta'' \right] d\eta' \right] d\eta \\ & + \frac{4R}{\nu} (\eta^2 - 1) \int_0^1 \eta \left[ \int_1^\eta \overline{v_{1,x} v_{1,\eta}} d\eta' \right] d\eta - \frac{4\beta}{T_0} (\eta^2 - 1) \int_0^1 \eta \left[ \int_1^\eta \overline{\tau_1 \partial_\eta v_{1,x}} d\eta' \right] d\eta \\ & + \frac{R^2}{\mu} \int_1^\eta \frac{1}{\eta'} \left[ \int_0^{\eta'} \partial_x (\rho_0 \overline{v_{1,x}^2}) \eta'' d\eta'' \right] d\eta' + \frac{R}{\nu} \int_1^\eta \overline{v_{1,x} v_{1,\eta}} d\eta' - \frac{\beta}{T_0} \int_1^\eta \overline{\tau_1 \partial_\eta v_{1,x}} d\eta'. \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

La vitesse moyenne  $\overline{v_{2,x}}$  correspond à la vitesse de l'écoulement en description Eulérienne. Son expression analytique donnée par l'éq. (G.11), reportée dans l'éq. (G.7), permet donc de calculer le flux de masse associé au vent acoustique de Rayleigh. Cependant, il est plus commode pour la suite des calculs d'introduire la vitesse Lagrangienne totale de l'écoulement :

$$\overline{V_{2,x}} = \frac{\dot{m}_2}{\rho_0} = \overline{v_{2,x}} + \frac{\overline{\rho_1 v_{1,x}}}{\rho_0}. \quad (\text{G.12})$$

## G.2 Détail des expressions pour la composante radiale de la vitesse particulaire

Le calcul de la vitesse de second ordre  $\overline{v_{2,x}}$  [éq. (G.11)] nécessite la connaissance de la composante transverse  $v_{1,\eta}$  de la vitesse particulaire acoustique, ou dans le cas présent de son amplitude complexe  $\tilde{v}_{1,\eta}$  en régime harmonique. Son expression est déduite de l'équation de conservation de la masse (1.1) linéarisée à l'ordre 1 dans le domaine de Fourier :

$$-i\omega \tilde{\rho}_1 + \partial_x (\rho_0 \tilde{v}_{1,x}) + \frac{\rho_0}{R} \frac{1}{\eta} \partial_\eta (\eta \tilde{v}_{1,\eta}) = 0. \quad (\text{G.13})$$

En remplaçant  $\tilde{v}_{1,x}$  et  $\tilde{\rho}_1$  par leurs expressions respectives (1.11) et (1.14) dans l'équation (G.13) puis en intégrant de 0 à 1 sur la variable transverse  $\eta$ , la vitesse particulaire radiale est alors obtenue sous

la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{1,\eta} = & \frac{iR}{\omega\rho_0} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial x^2} \left( \frac{\eta}{2} - \Phi_\nu \right) + k_0^2 \tilde{p}_1 \left( \frac{\eta}{2} + (\gamma - 1)\Phi_\kappa \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} \frac{d_x T_0}{T_0} \left( \frac{\eta}{2} + \frac{\Phi_\kappa - \sigma\Phi_\nu}{\sigma - 1} + \frac{\beta + 1}{2} \left\{ \eta F_\nu - 2\Phi_\nu + i \frac{R}{\delta_\nu} \Phi_\nu f_\nu \right\} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

où les fonctions  $\Phi_\nu$  et  $\Phi_\kappa$  sont respectivement définies comme suit :

$$\Phi_\nu = \frac{\delta_\nu}{(1+i)R} \frac{J_1 \left( (1+i) \frac{\eta R}{\delta_\nu} \right)}{J_0 \left( (1+i) \frac{R}{\delta_\nu} \right)}, \quad (\text{G.15})$$

$$\Phi_\kappa = \frac{\delta_\kappa}{(1+i)R} \frac{J_1 \left( (1+i) \frac{\eta R}{\delta_\kappa} \right)}{J_0 \left( (1+i) \frac{R}{\delta_\kappa} \right)}, \quad (\text{G.16})$$

et où la dérivée seconde de la pression acoustique,  $\frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial x^2}$ , est simplement déduite de l'équation de propagation (1.22), réécrite ici sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_1}{\partial x^2} = -k_0^2 \left( \frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu} \right) \tilde{p}_1 - \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} \frac{d_x T_0}{T_0} \left[ 1 + \frac{f_\kappa - f_\nu}{(\sigma - 1)(1 - f_\nu)} + (\beta + 1) \left( \frac{1 + i \frac{f_\nu^2}{2} - f_\nu}{1 - f_\nu} \right) \right], \quad (\text{G.17})$$

du fait qu'en géométrie cylindrique, la dérivée de la fonction visqueuse s'écrit :

$$d_x f_\nu = -(\beta + 1) \frac{d_x T_0}{T_0} \left( 1 + i \frac{f_\nu^2}{2} - f_\nu \right). \quad (\text{G.18})$$

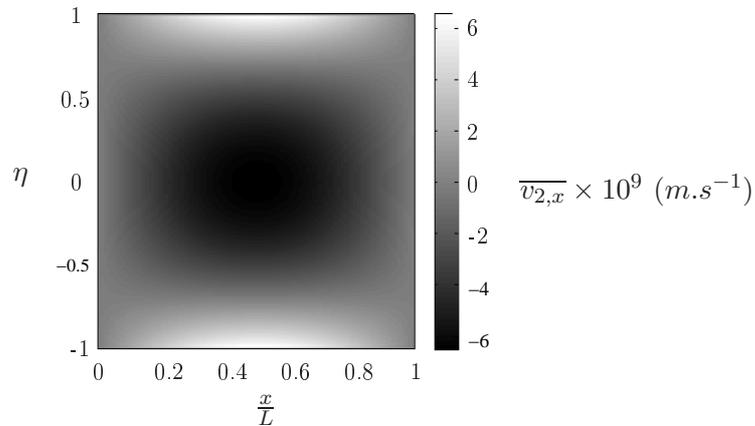
### G.3 Exemples de calculs de vitesses d'écoulement en l'absence de gradient de température

La figure G.1 présente un exemple de calcul pour la vitesse  $\overline{v_{2,x}}$  dans un résonateur quart d'onde, sans gradient de température<sup>2</sup>. Pour ce calcul, le résonateur possède les mêmes dimensions que celui présenté au chapitre 4, correspondant au moteur thermoacoustique sans stack. La fréquence est calculée numériquement en usant de la méthode exposée au paragraphe 1.3 du chapitre 1 et correspond à la première fréquence de résonance atténuée par les pertes aux parois :

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2\pi} = 174 \text{ Hz} & \Rightarrow \frac{\delta_\nu}{R} = 6.4 \cdot 10^{-3}, \\ |\epsilon_g^{-1}| = 0.2 \text{ s}. & \end{aligned}$$

La distribution de la vitesse axiale  $\overline{v_{2,x}}$  reste conforme à la théorie de Rayleigh [49] : la figure G.1 montre une vitesse d'écoulement négative au centre du résonateur, indiquant un transfert de masse vers le ventre de vitesse acoustique ( $x = 0$ ), et une vitesse positive dans la zone périphérique, indiquant un transfert de masse vers le noeud de vitesse acoustique ( $x = L$ ). Pour une position  $x$  donnée

2. Bien qu'il ne soit pas rigoureux de faire varier la variable transverse  $\eta$  de  $-1$  à  $1$  conformément au système de coordonnées choisi, les figures sont présentées ainsi pour illustrer le caractère symétrique de l'écoulement.



**FIGURE G.1** – Vitesse du second ordre  $\overline{v_{2,x}}$  dans un résonateur quart d'onde à température constante [éq. (G.11),  $d_x T_0 = 0$ ]. Le calcul est effectué avec un pas de discrétisation  $\Delta\eta$  correspondant à 10 points par épaisseur de couche limite visqueuse.

correspondant au centre du résonateur ( $x = L/2$ ), le profil de vitesse  $\overline{v_{2,x}}$  est donné sur la figure G.2(a) en fonction de la coordonnée transverse adimensionnée  $\eta$ . L'existence d'un changement de signe de  $\overline{v_{2,x}}$  pour  $\eta = 1/\sqrt{2}$  est caractéristique de la géométrie cylindrique du guide [21]. Le modèle développé par Bailliet *et al.* et présenté dans cette annexe est comparé à la solution donnée par Rayleigh [49] pour une géométrie cartésienne (plaques infinies) :

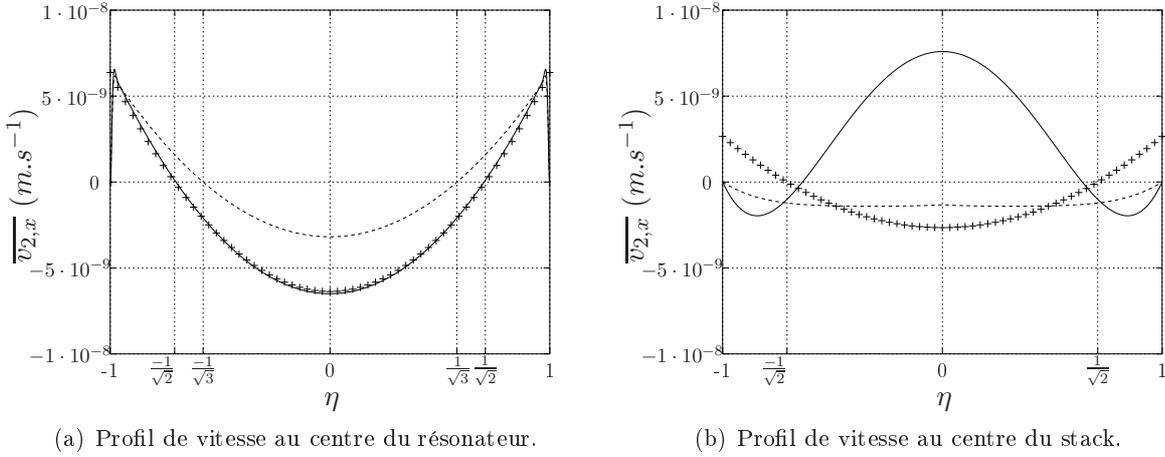
$$\begin{aligned} \overline{v_{2,x}}(x, \eta) = -\frac{V^2}{4c_0} \sin(2k_0 x) & \left[ \frac{1}{2} e^{-2\frac{R}{\delta_\nu}(1-\eta)} + e^{-\frac{R}{\delta_\nu}(1-\eta)} \cos\left(\frac{R}{\delta_\nu}(1-\eta)\right) \right. \\ & \left. + 2e^{-\frac{R}{\delta_\nu}(1-\eta)} \sin\left(\frac{R}{\delta_\nu}(1-\eta)\right) + \frac{3}{4} - \frac{9\eta^2}{4} \right], \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

où  $V$  est l'amplitude maximale de vitesse acoustique. Cette solution est présentée en trait tireté sur la figure G.2(a). Bien que l'allure du profil dans les couches limites du fluide soit sensiblement la même pour les deux solutions, le changement de signe de  $\overline{v_{2,x}}$  est donné pour  $\eta = 1/\sqrt{3}$  pour la solution de Rayleigh, caractéristique de la géométrie type *plaques* considérée [cf. Ref. [21], éq. (19)]. Enfin, les croix (+) représentent la solution analytique obtenue par Schuster et Matz [85] pour une géométrie cylindrique :

$$\overline{v_{2,x}}(x, \eta) = -3\frac{V^2}{8c_0} \sin(2k_0 x) [1 - 2\eta^2], \quad (\text{G.20})$$

solution valide uniquement hors des couches limites et qui satisfait bien la condition  $\overline{v_{2,x}}(\eta = 1/\sqrt{2}) = 0$ .

Un exemple de calcul de  $\overline{v_{2,x}}$  dans un pore du stack en l'absence de gradient de température est également donné sur la figure G.2(b). Pour ce calcul, les caractéristiques du stack sont celles utilisées dans le modèle de moteur thermoacoustique étudié au chapitre 4. Lorsque le stack est introduit dans le résonateur, la fréquence des oscillations et le taux d'atténuation sont naturellement modifiés du fait



**FIGURE G.2** – Vitesses moyennes  $\overline{v_{2,x}}$  en fonction de la coordonnée transverse adimensionnée  $\eta$ . Les calculs sont effectués avec un pas de discrétisation  $\Delta\eta$  correspondant à 10 points (resp. 60 points) par épaisseur de couche limite visqueuse dans le résonateur (resp. dans le stack). Les courbes en trait continu sont les résultats obtenus par le modèle de Bailliet *et al.* [12] [cf. éq. (G.11)]. Les courbes en traits tiretés présentent les résultats obtenus par le modèle de Rayleigh [49] [cf. éq. (G.19)]; les croix (+) présentent les résultats obtenus par le modèle de Schuster et Matz [85] [cf. éq. (G.20)].

de l'ajout de pertes thermovisqueuses dans le système :

$$\frac{\Omega}{2\pi} = 173 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_\nu}{R} = 0.37,$$

$$|\epsilon_g^{-1}| = 0.03s.$$

Il est intéressant d'observer sur la figure G.2(b) que le sens des écoulements est inversé par rapport aux écoulements à l'intérieur du résonateur de grande section et que la condition  $\overline{v_{2,x}}(\eta = 1/\sqrt{2}) = 0$  n'est plus vérifiée dans un pore du stack. Notons également que les solutions analytiques approchées (G.19) et (G.20), valides uniquement pour des guides de larges sections, ne permettent pas de retrouver le profil de vitesse du vent acoustique dans le stack.

# Bibliographie

- [1] M. Abom and H. Boden. Error analysis of two-microphone measurements in ducts with flow. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83(6) :2429–2438, 1988.
- [2] J.A. Adeff, T.J. Hoffer, A.A. Atchley, and W.C. Moss. Measurements with reticulated vitreous carbon stacks in thermoacoustic prime movers and refrigerators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104(1) :32–38, 1998.
- [3] J.-F. Allard, P. Herzog, D. Lafarge, and M. Tamura. Recent topics concerning the acoustics of fibrous and porous materials. *Applied Acoustics*, 39(1–2) :3 – 21, 1993.
- [4] M. Amari, V. Gusev, and N. Joly. Temporal dynamics of the sound wind in acoustitron. *Acust. Acta Acust.*, 89(6) :1008–1024, 2003.
- [5] W.P. Arnott, H.E. Bass, and R. Raspet. General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross sections. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(6) :3228–3237, 1991.
- [6] A.A. Atchley. Standing wave analysis of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(5) :2907–2914, 1992.
- [7] A.A. Atchley, H.E. Bass, T.J. Hoffer, and H.-T. Lin. Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(2) :734–743, 1992.
- [8] A.A. Atchley and F. Kuo. Stability curves for a thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(3) :1401–1404, 1994.
- [9] S. Backhaus and G.W. Swift. A thermoacoustic Stirling heat engine. *Nature*, 399 :335–338, 1999.
- [10] S. Backhaus and G.W. Swift. A thermoacoustic-Stirling heat engine : Detailed study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6) :3148–3166, 2000.
- [11] S. Backhaus, E. Tward, and M. Petach. Traveling-wave thermoacoustic electric generator. *Appl. Phys. Lett.*, 85(6) :1085–1087, 2004.
- [12] H. Bailliet, V. Gusev, R. Raspet, and R.A. Hiller. Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(4) :1808–1821, 2001.
- [13] F. Bannwart, G. Penelet, P. Lotton, and J.-P. Dalmont. Methods for transfer matrix evaluation applied to thermoacoustics. In *Acoustics 2012, Nantes*, 2012.
- [14] K.J. Bastyr and R.M. Keolian. High-frequency thermoacoustic-Stirling heat engine demonstration device. *ARLO*, 4(2) :37–40, 2003.
- [15] J.V. Beck and K.J. Arnold. *Parameters estimation in engineering and science*. John Wiley & Sons, 1977.

- [16] A.-M. Bianchi, Y. Fautrelle, and J. Etay. *Transferts thermiques*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.
- [17] T. Biwa, Y. Ueda, T. Yazaki, and U. Mizutani. Work flow measurements in a thermoacoustic engine. *Cryogenics*, 41(5-6) :305 – 310, 2001.
- [18] T. Biwa, Y. Ueda, T. Yazaki, and U. Mizutani. Thermodynamical mode selection rule observed in thermoacoustic oscillations. *Europhysics Letters*, 60(3) :363, 2002.
- [19] Ph. Blanc-Benon, E. Besnoin, and O. Knio. Experimental and computational visualization of the flow field in a thermoacoustic stack. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(1) :17 – 24, 2003.
- [20] H. Boden and M. Abom. Influence of errors on the two-microphone method for measuring acoustic properties in ducts. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79(2) :541–549, 1986.
- [21] S. Boluriaan and P.J. Morris. Acoustic streaming : from Rayleigh to today. *Intern. Journ. of Aeroacoustics*, 2(3) :255–292, 2003.
- [22] P.H. Ceperley. A pistonless Stirling engine—the traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(5) :1508–1513, 1979.
- [23] P.H. Ceperley. Gain and efficiency of a short traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(3) :1239–1244, 1985.
- [24] G.B. Chen and T. Jin. Experimental investigation on the onset and damping behavior of the oscillation in a thermoacoustic prime mover. *Cryogenics*, 39(10) :843 – 846, 1999.
- [25] J.-P. Dalmont. Acoustic impedance measurement, Part I : a review. *J. Sound Vib.*, 243(3) :427 – 439, 2001.
- [26] J.-P. Dalmont. Acoustic impedance measurement, Part II : a new calibration method. *J. Sound Vib.*, 243(3) :441 – 459, 2001.
- [27] J.-P. Dalmont, C.J. Nederveen, and N. Joly. Radiation impedance of tubes with different flanges : numerical and experimental investigations. *J. Sound Vib.*, 244(3) :505 – 534, 2001.
- [28] A.T.A.M. de Waele. Basic treatment of onset conditions and transient effects in thermoacoustic Stirling engines. *J. Sound Vib.*, 325(4-5) :974 – 988, 2009.
- [29] M.E. Delany and E.N. Bazley. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Appl. Acoust.*, 3(2) :105 – 116, 1970.
- [30] C. Desjouis, G. Penelet, P. Lotton, and J. Blondeau. Measurement of acoustic streaming in a closed-loop traveling wave resonator using laser Doppler velocimetry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126(5) :2176–2183, 2009.
- [31] S. Duffourd. *Réfrigérateur thermoacoustique : études analytiques et expérimentales en vue d'une miniaturisation*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, Lyon, FRANCE, mars 2001.
- [32] V. Feuillet. *Développement d'outils d'analyse thermique pour la conception de composants électroniques de puissance*. PhD thesis, Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes, Nantes, FRANCE, Octobre 2006.
- [33] A.M. Fusco, W.C. Ward, and G.W. Swift. Two-sensor power measurements in lossy ducts. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(4) :2229–2235, 1992.

- [34] E. García, M. I. Osendi, and P. Miranzo. Thermal diffusivity of porous cordierite ceramic burners. *Journ. Appl. Phys.*, 92(5) :2346–2349, 2002.
- [35] D. Gedeon. DC gas flows in Stirling and pulse tube cryocoolers. *Cryocoolers*, 9 :385, 1997.
- [36] M. Guedra, T. Devaux, G. Penelet, and P. Lotton. Amplification and saturation of the thermoacoustic instability in a standing-wave prime mover. In *Acoustics 2012, Nantes*, 2012.
- [37] M. Guedra and G. Penelet. On the use of a complex frequency for the description of thermoacoustic engines. *Acust. Acta Acust.*, 98(2) :232–241, 2012.
- [38] M. Guedra, G. Penelet, P. Lotton, and J.-P. Dalmont. Theoretical prediction of the onset of thermoacoustic instability from the experimental transfer matrix of a thermoacoustic core. *J. Acoust. Soc. Am.*, 130(1) :145–152, 2011.
- [39] V. Gusev, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Asymptotic theory of nonlinear acoustic waves in a thermoacoustic prime mover. *Acust. Acta Acust.*, 86 :25–38, 2000.
- [40] V. Gusev, S. Job, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Acoustic streaming in annular thermoacoustic prime-movers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(3) :934–945, 2000.
- [41] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and E.A. Zabolotskaya. Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(5) :2076–2086, 2002.
- [42] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and E.A. Zabolotskaya. Thermal effects on acoustic streaming in standing waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114(6) :3092–3101, 2003.
- [43] X.H. Hao, Y.L. Ju, U. Behera, and S. Kasthuriengan. Influence of working fluid on the performance of a standing-wave thermoacoustic prime mover. *Cryogenics*, 51(9) :559 – 561, 2011.
- [44] F. P. Incropera and D. P. DeWitt. *Introduction to heat transfer*. John Wiley & Sons, 1985.
- [45] Y. Jarny and D. Maillet. Problèmes inverses et estimation de grandeurs en thermique. Presses Universitaires de Perpignan, Font-Romeu, 1999. Eurotherm Winter School METTI 1999.
- [46] A.J. Jaworski, X. Mao, X. Mao, and Z. Yu. Entrance effects in the channels of the parallel plate stack in oscillatory flow conditions. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 33(3) :495 – 502, 2009.
- [47] T. Jin, C.S. Mao, and K. Tang. Characteristics study on the oscillation onset and damping of a traveling-wave thermoacoustic prime mover. *Journ. Zhejiang Univ. Science A*, 9 :944 – 949, 2008.
- [48] S. Job. *Etudes théoriques et expérimentales d’un générateur thermoacoustique annulaire à ondes progressives*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, FRANCE, Octobre 2001.
- [49] J.W. Strutt (Lord Rayleigh). On the circulation of air observed in Kundt’s tubes, and on some allied acoustical problems. *Pilos. trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, 175 :1 – 21, 1883.
- [50] J.W. Strutt (Lord Rayleigh). *The theory of sound*. Dover, 2 edition, 1945.
- [51] S. Karpov and A. Prosperetti. Linear thermoacoustic instability in the time domain. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(6) :3309–3317, 1998.
- [52] S. Karpov and A. Prosperetti. Nonlinear saturation of the thermoacoustic instability. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6) :3130–3147, 2000.

- [53] S. Karpov and A. Prosperetti. A nonlinear model of thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(4) :1431–1444, 2002.
- [54] D. Kincaid and W. Cheney. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, 2<sup>nd</sup> edition, 1996.
- [55] G. Krishnappa. Cross-spectral method of measuring acoustic intensity by correcting phase and gain mismatch errors by microphone calibration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69(1) :307–310, 1981.
- [56] T.Y. Lung and A.G. Doige. A time-averaging transient testing method for acoustic properties of piping systems and mufflers with flow. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(3) :867–876, 1983.
- [57] F.P. Mechel. *Formulas of Acoustics*. Springer, 2008.
- [58] M. Mironov, V. Gusev, Y. Auregan, P. Lotton, M. Bruneau, and P. Piatakov. Acoustic streaming related to minor loss phenomenon in differentially heated elements of thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(2) :441–445, 2002.
- [59] S. Moreau, H. Bailliet, and J.-C. Valière. Measurements of inner and outer streaming vortices in a standing waveguide using laser doppler velocimetry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(2) :640–647, 2008.
- [60] S. Moreau, H. Bailliet, and J.-C. Valière. Effect of a stack on Rayleigh streaming cells investigated by laser Doppler velocimetry for application to thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(6) :3514–3517, 2009.
- [61] R.T. Muehleisen, C.W. Beamer IV, and B.D. Tinianov. Measurements and empirical model of the acoustic properties of reticulated vitreous carbon. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(2) :536–544, 2005.
- [62] M.L. Munjal and A.G. Doige. Theory of a two source-location method for direct experimental evaluation of the four-pole parameters of an aeroacoustic element. *J. Sound Vib.*, 141(2) :323 – 333, 1990.
- [63] G. Neuer, R. Brandt, K. Maglič, N. Milošević, G. Groboth G, and S. Rudtsch. Thermal diffusivity of the candidate standard reference material cordierite. *High Temperatures - High Pressures*, 31(5) :517 – 524, 1999.
- [64] J.-P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique – Fonctions, équations aux dérivées partielles*, volume 1. Hermès Science, Paris, FRANCE, 2001.
- [65] J.-P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique – Systèmes d'équations*, volume 1. Hermès Science, Paris, FRANCE, 2001.
- [66] M.N. Ozisik. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC Press, 1994.
- [67] J.E. Parker, M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and E.A. Zabolotskaya. Use of complex frequency to analyze thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(5) :2297–2297, 2002.
- [68] G. Penelet. *Etude expérimentale et théorique des processus non linéaires de saturation dans un générateur d'ondes thermoacoustique annulaire*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, FRANCE, Novembre 2004.
- [69] G. Penelet, E. Gaviot, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Experimental investigation of transient nonlinear phenomena in an annular thermoacoustic prime-mover : observation of a double-threshold effect. *Cryogenics*, 42(9) :527 – 532, 2002.

- [70] G. Penelet, M. Guedra, V. Gusev, and T. Devaux. Simplified account of rayleigh streaming for the description of nonlinear processes leading to steady state sound in thermoacoustic engines. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 55(21-22) :6042–6053, 2012.
- [71] G. Penelet, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Experimental and theoretical study of processes leading to steady-state sound in annular thermoacoustic engines. *Phys. Rev. E*, 72(1) :016625, Jul 2005.
- [72] G. Penelet, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Nontrivial influence of acoustic streaming on the efficiency of annular thermoacoustic prime movers. *Phys. Lett. A*, 351(4-5) :268 – 273, 2006.
- [73] G. Penelet, S. Job, V. Gusev, P. Lotton, and M. Bruneau. Dependence of sound amplification on temperature distribution in annular thermoacoustic engines. *Acust. Acta Acust.*, 91(3) :567–577, 2005.
- [74] A. Petculescu and L.A. Wilen. Lumped-element technique for the measurement of complex density. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(4) :1950–1957, 2001.
- [75] G. Petculescu and L.A. Wilen. Thermoacoustics in a single pore with an applied temperature gradient. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(2) :688–694, 1999.
- [76] G. Petculescu and L.A. Wilen. Traveling-wave amplification in a variable standing wave ratio device. *ARLO*, 3(2) :71–76, 2002.
- [77] W. Qunli. Empirical relations between acoustical properties and flow resistivity of porous plastic open-cell foam. *Appl. Acoust.*, 25(3) :141 – 148, 1988.
- [78] R. Raspet, J. Brewster, and H.E. Bass. A new approximation method for thermoacoustic calculations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(5) :2395–2402, 1998.
- [79] H.-S. Roh, W.P. Arnott, J.M. Sabatier, and R. Raspet. Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(6) :2617–2624, 1991.
- [80] H.-S. Roh, R. Raspet, and H.E. Bass. Parallel capillary-tube-based extension of thermoacoustic theory for random porous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121(3) :1413–1422, 2007.
- [81] M. Rossi. *Electroacoustique – Traité d’électricité de l’école polytechnique fédérale de Lausanne*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1986.
- [82] N. Rott. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 20 :230–243, 1969.
- [83] N. Rott. “Thermoacoustics”. *Advances in Applied Mechanics*, 20 :135 – 175, 1980.
- [84] B. Rémy and S. André. *Thermal measurements and inverse techniques*, chapter Nonlinear Estimation Problems, pages 315–354. CRC Press, 2011.
- [85] V.K. Schuster and W. Matz. Über stationäre strömungen im kundtschen rohr (on stationary streaming in kundt’s tubes). *Akust. Zeitschrift*, 5 :349–352, 1940.
- [86] C. Sondhauss. Über die schallswingungen der luft in erhitzten glasrohren und gedeckten pfeifen von ungleicher weite. *Ann. Phys.*, 79 :1–34, 1850.
- [87] M.R. Stinson. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(2) :550–558, 1991.

- [88] G.W. Swift. Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(4) :1145–1180, 1988.
- [89] G.W. Swift. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(3) :1551–1563, 1992.
- [90] G.W. Swift. *Thermoacoustics - A unifying perspective for some engines and refrigerators*. Acoustical Society of America, Melville, NY, 2002.
- [91] G.W. Swift and R.M. Keolian. Thermoacoustics in pin-array stacks. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2) :941–943, 1993.
- [92] J. Taine and J.-P. Petit. *Transferts thermiques – Mécanique des fluides anisothermes*. Dunod, Paris, FRANCE, 2<sup>nd</sup> edition, 1998.
- [93] M.W. Thompson and A.A. Atchley. Simultaneous measurement of acoustic and streaming velocities in a standing wave using laser Doppler anemometry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(4) :1828–1838, 2005.
- [94] M.W. Thompson, A.A. Atchley, and M.J. Maccarone. Influences of a temperature gradient and fluid inertia on acoustic streaming in a standing wave. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(4) :1839–1849, 2005.
- [95] C.W.S. To and A.G. Doige. A transient testing technique for the determination of matrix parameters of acoustic systems, I : Theory and principles. *J. Sound Vib.*, 62(2) :207 – 222, 1979.
- [96] C.W.S. To and A.G. Doige. A transient testing technique for the determination of matrix parameters of acoustic systems, II : Experimental procedures and results. *J. Sound Vib.*, 62(2) :223 – 233, 1979.
- [97] A. Tominaga. Thermodynamic aspects of thermoacoustic theory. *Cryogenics*, 35(7) :427 – 440, 1995.
- [98] Q. Tu, Q. Li, F. Wu, and F.Z. Guo. Network model approach for calculating oscillating frequency of thermoacoustic prime mover. *Cryogenics*, 43(6) :351 – 357, 2003.
- [99] Y. Ueda and C. Kato. Stability analysis of thermally induced spontaneous gas oscillations in straight and looped tubes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(2) :851–858, 2008.
- [100] W.C. Ward and G.W. Swift. Design environment for low-amplitude thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(6) :3671–3672, 1994.
- [101] W.C. Ward, G.W. Swift, and J.P. Clark. Interactive analysis, design, and teaching for thermoacoustics using DeltaEC. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(5) :3546–3546, 2008.
- [102] R. Waxler. Stationary velocity and pressure gradients in a thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(6) :2739–2750, 2001.
- [103] L.A. Wilen. Measurements of thermoacoustic functions for single pores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(3) :1406–1412, 1998.
- [104] L.A. Wilen. Dynamic measurements of the thermal dissipation function of reticulated vitreous carbon. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(1) :179–184, 2001.
- [105] T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa, and A. Tominaga. Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.*, 81(15) :3128–3131, 1998.

- 
- [106] T. Yazaki, S. Takashima, and F. Mizutani. Complex quasiperiodic and chaotic states observed in thermally induced oscillations of gas columns. *Phys. Rev. Lett.*, 58(11) :1108–1111, 1987.
- [107] T. Yazaki, A. Tominaga, and Y. Narahara. Experiments on thermally driven acoustic oscillations of gaseous Helium. *Journal of low temperature physics*, 41(1) :45–60, 1980.
- [108] T. Yazaki, A. Tominaga, and Y. Narahara. Thermally driven acoustic oscillations : second harmonic. *Physics Letters*, 79(5,6) :407–409, 1980.
- [109] T. Yazaki, A. Tominaga, and Y. Narahara. Large heat transport due to spontaneous gas oscillation induced in a tube with steep temperature gradients. *J. Heat Transfer*, 105(4) :889–894, 1983.
- [110] Z. Yu, A.J. Jaworski, and A.S. Abduljalil. Fishbone-like instability in a looped-tube thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(4) :188–194, 2010.
- [111] Z. B. Yu, Q. Li, X. Chen, F. Z. Guo, X. J. Xie, and J. H. Wu. Investigation on the oscillation modes in a thermoacoustic stirling prime mover : mode stability and mode transition. *Cryogenics*, 43(12) :687 – 691, 2003.
- [112] H. Yuan, S. Karpov, and A. Prosperetti. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. Part II. Nonlinear oscillations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(6) :3497–3506, 1997.



# Résumé

Les moteurs thermoacoustiques sont des oscillateurs autonomes constitués d'un résonateur acoustique partiellement occupé par un matériau poreux (*stack*) soumis à un important gradient de température grâce à un apport de chaleur externe. Lorsque le gradient de température imposé le long du *stack* devient supérieur à un certain gradient critique, appelé *seuil de déclenchement*, l'interaction fluide-parois se traduit par l'amplification d'une onde acoustique auto-entretenu de fort niveau sur le mode le plus instable du résonateur. L'objet des travaux présentés dans ce mémoire est double. D'une part, il est de proposer un formalisme pour la description du fonctionnement de moteurs thermoacoustiques facilement généralisable à l'ensemble de ces systèmes, qu'ils soient à *ondes stationnaires* ou à *ondes progressives*. D'autre part, il est de proposer une approche expérimentale pour la caractérisation du noyau thermoacoustique (incluant le *stack* et la portion de guide inhomogène en température), qui permette de décrire le comportement de systèmes thermoacoustiques sans formuler d'hypothèses sur la forme du champ de température ou la géométrie du *stack*.

Une modélisation analytique des conditions marginales de stabilité et du taux d'amplification de l'onde est tout d'abord proposée, basée sur l'écriture des matrices de transfert des différents éléments qui constituent le moteur. Ces matrices de transfert associées aux conditions aux limites du système étudié conduisent à une équation caractéristique dont la forme dépend de la géométrie de moteur considérée. La solution de cette équation est une pulsation acoustique complexe dont la partie imaginaire correspond au coefficient d'amplification thermoacoustique.

La mesure de la matrice de transfert du noyau thermoacoustique constitue la partie expérimentale des travaux exposés. Elle est réalisée pour différentes conditions de chauffage au moyen d'une méthode à quatre microphones. Dans un premier temps, les résultats expérimentaux sont introduits dans le modèle développé précédemment pour prédire le seuil de déclenchement de divers moteurs thermoacoustiques équipés de ce noyau. Les résultats obtenus grâce à cette méthode sont très proches des observations expérimentales, validant ainsi le banc de mesure et le modèle décrivant les conditions de stabilité. Dans un second temps, les données expérimentales sont utilisées pour affiner un modèle analytique décrivant les mécanismes couplés de propagation acoustique et de transport de la chaleur dans le noyau thermoacoustique : ceci permet notamment d'ajuster les valeurs de paramètres acoustiques et thermiques au moyen d'une méthode inverse.

Au-delà du seuil de déclenchement, l'amplification et la saturation de l'onde résultent pour une bonne part du transport de chaleur thermoacoustique et de la convection forcée liée à la génération d'un écoulement redressé (vent acoustique), ces deux mécanismes étant généralement responsables d'une dynamique d'évolution complexe de l'amplitude de pression acoustique au cours du régime transitoire. La dernière partie de ces travaux est consacrée à l'introduction de ces deux effets dans le modèle décrit ci-avant, donnant ainsi accès à la description du régime transitoire de l'onde. Une modélisation simplifiée des transports de chaleur associés au vent acoustique de Rayleigh est notamment proposée, qui permet de montrer que cet effet joue vraisemblablement un rôle important dans la dynamique des régimes transitoires observés expérimentalement dans un générateur thermoacoustique quart d'onde.

**Mots clés :** thermoacoustique, instabilité, seuil de déclenchement, saturation non-linéaire, ondes guidées, matrice de transfert, méthode à deux charges, problème inverse, vent acoustique.

## Abstract

Thermoacoustic engines are autonomous oscillators generally made of an acoustic resonator, partially filled with a porous material (*stack*) submitted to a strong, externally supplied, temperature gradient. When the imposed temperature gradient along the *stack* becomes larger than a critical value, called the *onset threshold*, the interaction between the fluid and the solid plates leads to a high-level self-sustained acoustic wave at the frequency of the most unstable mode of the resonator. The purpose of the work presented in this report can be separated into two parts. On the one hand, a theoretical modelling is proposed for the description of thermoacoustic engines, which is derived for *standing-wave* thermoacoustic systems as well as for *travelling-wave* systems. On the other hand, an experimental approach is proposed for the characterisation of the thermoacoustic core (corresponding to the *stack* and the thermal buffer tube), allowing to describe the behaviour of thermoacoustic systems without making any assumptions concerning the shape of the temperature profile or the *stack* geometry.

An analytical network modelling of thermoacoustic engines is proposed for the calculation of the threshold conditions and the amplification rate of the acoustic wave. The transfer matrices, combined with appropriate boundary conditions, lead to the derivation of the characteristic equation of the system. The solution of this equation is a complex angular frequency whose imaginary part represents the thermoacoustic amplification coefficient.

The experimental part of this work consists in measuring the transfer matrix of the thermoacoustic core. This is realized for several heat supply conditions, by means of a four-microphones method. First, these experimental results are used for the prediction of onset conditions of standard thermoacoustic engines equipped with the thermoacoustic core. The results obtained with this method are very close to the experimental observations, which allow to judge of the consistency of the experimental apparatus and of the model describing the stability conditions. Second, the experimental data are used in order to fit an analytical model describing the coupled mechanisms of acoustic propagation and heat transfers in the thermoacoustic core : this allows to estimate the values of acoustic and thermal parameters using an inverse method.

Beyond the onset threshold, the amplification and saturation of the wave essentially result from the thermoacoustic heat flux and the convection coming from the generation of a mass flow (acoustic streaming). Both these mechanisms are generally responsible of complicated dynamics for the transient acoustic pressure amplitude. The last part of this work is dedicated to the introduction of both these effects in the previously described model, which leads to the calculation of the transient regime. A simplified modelling of Rayleigh streaming enhanced heat transfers is proposed, which allows to show that this effect may play an important role in the transient dynamics observed in an experimental quarter-wavelength thermoacoustic engine.

**Keywords :** thermoacoustic, instability, onset threshold, nonlinear saturation, guided waves, transfer matrix, two-loads method, inverse problem, acoustic streaming.