UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE
U.F.R. SCIENCE ET TECHNOLOGIE
LABORATOIRE DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR POUR L'ENVIRONNEMENT

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

Spécialité : Mécanique-Génie Civil
Présentée par

WALID MCHIRGUI

Modélisation des transferts hydriques dans les milieux poreux partiellement saturés par homogénéisation périodique - Application aux matériaux cimentaires

Soutenance prévue le 10/05/2012 devant le jury composé de :

M-S. EL YOUSSOUFI	Professeur, Université de Montpellier II	Rapporteur
D. HOXHA	Professeur, Polytech' Orléans	Rapporteur
J-L. AURIAULT	Professeur Emérite, Université Joseph Fourier, Grenoble	Examinateur
F. NICOT	Directeur de recherche, IRSTEA, Grenoble	Examinateur
K. AÏT-MOKHTAR	Professeur, Université de La Rochelle	Examinateur
R. BELARBI	Maître de Conférences HDR, Université de La Rochelle	Examinateur
O. MILLET	Professeur, Université de La Rochelle	Directeur de thèse
O. AMIRI	Maître de Conférences HDR, Université de La Rochelle	Co-directeur de thèse
B. HUET	Ingénieur de Recherche, Centre de Recherches LAFARGE	Invité

Table des matières

1 Synthèse bibliographique sur les transferts hydriques dans les milieux poreux partiellement saturés **5**

1.1 Introduction 5

1.2 Mécanisme de transferts hydriques dans les milieux poreux 6

1.2.1 Les milieux poreux 6

1.2.2 Mécanisme de transfert hydrique 9

1.3 Les modèles phénoménologiques 14

1.3.1 L'équation de Richards 14

1.3.2 Le modèle de Philip et de Vries 15

1.3.3 Le modèle de Luikov 19

1.4 Les modèles obtenus par homogénéisation 21

1.4.1 Les méthodes d'homogénéisation 21

1.4.2 Modèles obtenus par homogénéisation par prise de moyenne 23

1.4.3 Modèles obtenus par homogénéisation périodique 26

1.5 La difficulté de la modélisation du mouvement de l'interface 31

1.6 Conclusion 32

2 Méthode d'homogénéisation périodique appliquée à l'équation de Darcy généralisée **33**

2.1 Introduction 33

2.2 La méthode d'homogénéisation périodique 34

2.2.1 Les principes de la méthode 34

2.2.2 Cellule élémentaire et microstructure associée 34

2.3 Etablissement de la loi de Darcy dans un milieu partiellement saturé 39
2.3.1 Processus d'homogénéisation 40
2.3.2 Description à l'échelle microscopique 41
2.3.3 Analyse dimensionnelle des équations 42
2.3.4 Developpement asymptotique des équations 44
2.3.5 Etablisssement de la loi de Darcy par la méthode d'homogénéisation périodique 45
2.3.6 Simplification de la loi de Darcy généralisée dans la phase liquide . . 51
2.4 Conclusion 52

3 Transfert hydrique dans les milieux poreux partiellement saturés 53
3.1 Introduction 53
3.2 Hypothèses de la modélisation 54
3.3 Equations de transport dans les milieux poreux partiellement saturés 55
3.3.1 Equation de transport de l'eau liquide 56
3.3.2 Equation de transport de vapeur d'eau 57
3.3.3 Equation de transport d'humidité sous ses deux formes 58
3.3.4 Les conditions aux limites à l'interface liquide-gaz 59
3.4 Homogénéisation périodique des équations de transfert hydrique 60
3.4.1 Description de la microstructure périodique 60
3.4.2 Analyse dimensionnelle des équations de transfert hydrique 61
3.4.3 Réduction à un problème mono-échelle 65
3.4.4 Développement asymptotique 67
3.5 Diffusion prédominante de vapeur d'eau 68
3.6 Diffusion de la vapeur d'eau et convection de l'eau liquide du même ordre de grandeur 76
3.7 Convection prédominante de l'eau liquide à l'échelle macroscopique 89
3.8 Conclusion 94

4 Calcul des propriétés de transfert homogénéisées : mise en évidence de la condensation capillaire 97

4.1 Introduction . . . 97
4.2 Présentation du problème de diffusion de vapeur d'eau . . . 98
4.3 Modèles de pores cylindriques infinis . . . 100
4.3.1 Résolution analytique dans la région hygroscopique . . . 101
4.3.2 Résolution analytique dans la région super-hygroscopique . . . 103
4.4 Inclusions bidimensionnelles partiellement saturées - Mise en évidence du phénomène de condensation capillaire . . . 105
4.4.1 Résolution analytique dans la région hygroscopique . . . 105
4.4.2 Résolution analytique dans la région super-hygroscopique . . . 106
4.4.3 Résolution numérique dans la région super-hygroscopique . . . 113
4.5 Mise en évidence de la condensation capillaire pour d'autres géométries bi-dimensionnelles . . . 120
4.5.1 Condensation de vapeur entre 2 plaques . . . 120
4.5.2 Condensation capillaire entre deux particules solides voisines . . . 122
4.6 Condensation capillaire dans des pores cylindriques tridimensionnels . . . 124
4.6.1 Résolution sur un pore fermé en dimension 3 . . . 125
4.7 Conclusion . . . 128

5 Résolution numérique de l'équation de Richards homogénéisée 131
5.1 Introduction . . . 131
5.2 Rappel de l'équation de transfert hydrique homogénéisée pour une diffusion prédominante de vapeur d'eau . . . 132
5.3 Etude expérimentale . . . 133
5.3.1 Matériaux utilisés . . . 134
5.3.2 Mesure de la porosité . . . 135
5.3.3 Détermination des isothermes de sorption-désorption de la vapeur d'eau . . . 137
5.3.4 Analyse des résultats expérimentaux obtenus . . . 139
5.4 Modèle de pores cylindriques . . . 146
5.5 Résolution numérique pour des géométries 2D . . . 148
5.5.1 Inclusion carrée . . . 150

5.5.2 Inclusion bidimensionnelle plus complexe 153
5.6 Résolution numérique pour des cellules élémentaires tridimensionnelles . . . 155
5.6.1 Inclusion cubique 156
5.6.2 Inclusion tridimensionnelle plus complexe 158
5.6.3 Analyse et discussion 159
5.7 Résolution de l'équation de Richards homogénéisée 161
5.7.1 Calcul du coefficient de diffusion hydrique correspondant à la phase vapeur 164
5.7.2 Calcul du coefficient de transport hydrique de l'eau liquide 167
5.7.3 Résolution numérique de l'équation de Richards homogénéisée . . . 170
5.8 Conclusion 174

Conclusions générales et perspectives **175**

Bibliographie **187**

Table des figures

1.1 Description d'un milieu poreux avec les trois phases représentées 6
1.2 Forme générale de la courbe de sorption d'un matériau hygroscopique 9
1.3 Image en microscopie électronique à balayage de cristaux de portlandite [79] 12
1.4 Image en microscopie électronique à balayage de C-S-H [79][87] 13
1.5 Image en microscopie électronique à balayage de cristaux d'ettringite [79] . . 14
1.6 Volume élémentaire représentatif considéré [91] 25
1.7 Milieu poreux à double porosité [59] 29

2.1 Exemple de cellule élémentaire symétrique simple 35
2.2 Abscence de percolation pour des cellules non symétriques en entrée-sortie . 35
2.3 Exemple de microstructure périodique 36
2.4 Microstructure constituée de la répétition périodique de la cellule élémentaire de la Fig. 2.3 36
2.5 Distribution de taille des pores d'une pâte de ciment 38
2.6 Exemple de cellule élémentaire périodique dans un milieu poreux partiellement saturé 40

3.1 Modélisation du matériau hétérogène par une microstructure périodique . . . 62

4.1 Modèle d'inclusion cylindrique 100
4.2 Exemples de distribution de fluide dans la région hygroscopique. 101
4.3 Distribution de fluide particulière dans la région super-hygroscopique. . . . 104
4.4 Modèle d'une inclusion carrée 105
4.5 Exemples de distribution de fluide dans la région hygroscopique 106
4.6 Exemple de distribution de fluide dans la région super-hygroscopique 107

4.7 Zoom sur la distribution de vapeur dans la région super-hygroscopique . . . 107
4.8 Inclusion rectangulaire considérée . . . 113
4.9 Composante χ_1 tronquée au douzième terme . . . 114
4.10 Composante χ_1 obtenue par résolution numérique avec Comsol Multiphysics 115
4.11 Représentation de la composante Φ_{11} . . . 116
4.12 Représentation de la composante Φ_{21} . . . 117
4.13 Variation des coefficients de diffusion de vapeur d'eau homogénéisés relatifs D_{11}^{hom}/D_v^r et D_{33}^{hom}/D_v^r en fonction de la teneur en gaz pour une inclusion rectangulaire. . . . 118
4.14 Variation des coefficients de diffusion de vapeur d'eau homogénéisés relatifs D_{11}^{hom}/D_v^r et D_{33}^{hom}/D_v^r en fonction de la teneur volumique en eau θ_l pour une porosité $\varepsilon_p = 15\%$. . . . 119
4.15 Distribution d'eau liquide considérée . . . 120
4.16 Calcul numérique de la composante χ_1 pour la nouvelle distribution d'eau liquide considérée . . . 121
4.17 Calcul numérique de la composante Φ_{11} . . . 122
4.18 Cellule élémentaire contenant deux grains solides proches dont la surface est mouillée de liquide . . . 123
4.19 Calcul numérique de la composante Φ_{11} . . . 124
4.20 Pore cylindrique fermé en dimension 3 rempli d'eau . . . 125
4.21 Calcul numérique de la composante Φ_{11} dans un pore cylindrique fermé 3D 126
4.22 Pore cylindrique fermé rempli d'eau liquide occupant la majorité de son espace . . . 127
4.23 Calcul numérique de la composante Φ_{11} . . . 127

5.1 Courbe de distribution porale pour les bétons $C15$ et $C22$ [99] . . . 136
5.2 Courbe de distribution porale pour les bétons BHP $A1$ et BHP $A2$ [102] . . . 136
5.3 Sélection des matériaux étudiés [102] . . . 137
5.4 Dispositif expérimental utilisé pour les essais d'adsorption [102] . . . 138
5.5 Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau pour les bétons $C15$ et $C22$ suivant [102]. . . . 140

5.6 Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau pour le béton BHP $A1$ suivant [102]. 140
5.7 Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau pour le bétons BHP $A2$ suivant [102] 141
5.8 Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau reliant ρ_v et θ_l pour les bétons $C15$ et $C22$ 143
5.9 Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau reliant ρ_v et θ_l pour le béton BHP $A1$ 143
5.10 Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau reliant ρ_v et θ_l pour le béton BHP $A2$ 144
5.11 Modèle d'inclusion cylindrique 146
5.12 Modèle d'inclusion carrée 151
5.13 Modèle d'une cellule élémentaire plus complexe en 2D 153
5.14 Inclusion cubique considérée 156
5.15 Modèle de microstructure périodique plus complexe considérée. 158
5.16 Schéma associé au problème de diffusion hydrique pour le béton PHB A1 . . 161
5.17 Courbes expérimentales de désorption de la vapeur d'eau pour le béton PHB A1 164
5.18 Variation du coefficient de diffusion hydrique correspondant au transfert de vapeur d'eau $D^{hom}_{\theta,v}$ pour le béton BHP A1 166
5.19 Variations de la perméabilité relative et courbe de rétention pour le béton PHB A1 168
5.20 Variations du coefficient de diffusion hydrique correspondant au transfert de l'eau liquide $\mathbf{D}^{\mathbf{hom}}_{\theta,l}$ pour le béton PHB A1 169
5.21 Variations du coefficient de diffusion hydrique total $\mathbf{D}^{\mathbf{hom}}_{\theta}$ en fonction de HR pour le béton BHP A1 170
5.22 Variations du coefficient de diffusion hydrique total $\mathbf{D}^{\mathbf{hom}}_{\theta}$ en fonction de θ_l pour le béton BHP A1 171
5.23 Profil de teneur en eau volumique simulé avec $\mathbf{D}^{\mathbf{hom}}_{\theta}$ pour le béton BHP A1 à différentes étapes de séchage 172

5.24 Profil de teneur en eau volumique obtenu avec $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{exp}}$ pour le béton BHP A1 à différentes étapes du séchage 173

Liste des tableaux

1.1 Classification des matériaux d'après D. Quenard [84] 8

5.1 Composition et caractéristiques des bétons étudiés dans [102] 134
5.2 Porosité déterminées par porosimétrie à mercure [102] 135
5.3 Masse volumique de la phase solide ρ_0 142
5.4 Relations de changement de variables 142
5.5 Coefficients $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ obtenus pour les deux bétons $C15$ et $C22$ 144
5.6 Coefficients $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ obtenus pour les deux bétons BHP $A1$ et $A2$ 145
5.7 Coefficients de diffusion hydrique obtenus pour les bétons étudiés : $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ [102]. 145
5.8 Comparaison entre coefficients de diffusion expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (modèle de pores cylindriques) 147
5.9 Comparaison entre coefficients de diffusion hydriques expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (cellule élémentaire contenant une inclusion carrée) 152
5.10 Comparaison entre coefficients de diffusion hydriques expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (modèle de cellule élémentaire 2D plus complexe) 154
5.11 Comparaison entre coefficients de diffusion expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (modèle d'inclusion cubique) 157
5.12 Comparaison entre coefficients de diffusion expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (microstructure périodique 3D complexe) 159
5.13 Expressions de $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ considérées 163
5.14 Valeurs expérimentales de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ pour le béton BHP A1 165

5.15 Coefficients de diffusion hydrique homogénéisées correspondant à la diffusion de vapeur d'eau $D^{hom}_{\theta,v}$ pour le béton BHP $A1$ (modèle basé sur la cellule élémentaire complexe 3D de la Fig. 5.15) 165
5.16 Valeurs expérimentales de $\frac{\partial P^0_c}{\partial \theta_l}$ pour le béton BHP A1 168
5.17 Coefficients de diffusion hydrique homogénéisés correspondant à la convection de l'eau liquide $\mathbf{D}^{\mathbf{hom}}_{\theta,l}$ pour le béton BHP $A1$ 169
5.18 Valeurs calculées du coefficient de diffusion hydrique total $\mathbf{D}^{\mathbf{hom}}_{\theta}$ pour le béton BHP A1 170

Introduction générale

Le phénomène de corrosion des armatures du à la pénétration des ions chlorures est la cause principale de dégradation des structures en béton armé, notamment dans les zones côtières. Les coûts de maintenance et de rénovation sont très élevés. A titre d'exemple, le coût de surveillance et de réhabilitation des constructions en béton armé représente environ 45 milliards d'euros par an en France. D'où l'importance de pouvoir caractériser le comportement des matériaux cimentaires vis à vis des phénomènes de pénétration des chlorures.

Le transport ionique dans la solution interstitielle des matériaux cimentaires dépend de l'état de saturation de ces matériaux. Dans le cas des matériaux complètement saturés en eau, la diffusion est le phénomène principal de transport [29][99]. Dans les milieux partiellement saturés, deux mécanismes gouvernent le transport hydrique : la diffusion de vapeur d'eau et la convection de l'eau liquide [99], même si ce dernier cas reflète plus la réalité des ouvrages marins [100]. Notons également que le problème de transfert hydrique dans un milieu partiellement saturé est très peu abordé dans la littérature. De ce fait, la compréhension des mécanismes régissant la physique du transfert hydrique dans les milieux poreux revêt une importance considérable. La plupart des problématiques abordées tournent généralement autour de la question de l'influence des hétérogénéités sur le comportement macroscopique global du milieu poreux. Ainsi, la mise au point d'outils quantitatifs de description macroscopique fondés sur la connaissance de *la structure poreuse* apparaît le plus souvent comme un préalable, tant sur le plan de la modélisation que sur le plan expérimental.

Les milieux poreux réels possèdent généralement à l'échelle microscopique (échelle des pores), une structure complexe présentant un caractère aléatoire marqué, où le rôle des hé-

térogénéités devient fondamental dans la compréhension des phénomènes physiques en jeu et la prédiction du comportement. Néanmoins, ces hétérogénéités n'ont été que relativement peu prises en compte dans l'étude du transfert hydrique, par manque d'outils de modélisation pour les décrire, ou de moyens de calculs pour simuler rigoureusement tous les phénomènes physiques intervenant à cette échelle. Les méthodes d'homogénéisation permettent de surmonter en partie ces problèmes.

Dans cette thèse, nous nous intéresserons plus particulièrment à la méthode d'homogénéisation périodique basée sur la méthode des développements asymptotiques. Quand elle s'applique, cette méthode permet, moyennant l'hypothèse de la séparation d'échelle et de périodicité de la microstructure, d'établir des équations macroscopiques homogénéisées, capables de décrire de manière satisfaisante les écoulements polyphasiques en milieux poreux. Elle permet notamment, à la différence des approches classiques phénoménologiques qui utilisent une formulation directement macroscopique, de donner un fondement rigoureux aux variables macroscopiques qui s'intorduisent naturellement. Ces dernières sont claculées en tenant compte, entre autres, de la complexité géométrique de la microstructure. D'une manière générale, en partant des propriétés de transport hydrique écrites à l'échelle des pores (au sein des phases liquides, gazeuses et solides, et à travers leurs interfaces), il est possible de déduire les formulations macroscopiques associées (à l'échelle de l'élément de volume élémentaire représentatif). De façon plus précise, nous proposons dans ce travail :

- d'élaborer des modèles macroscopiques de transfert hydrique dans les milieux poreux partiellement saturés et d'en déterminer le domaine de validité
- de mettre en évidence les grandeurs macroscopiques pertinentes et d'en donner une expression analytique qui ne dépende que des paramètres physiques intervenant au niveau microscopique.

Ce travail de thèse se divise en cinq chapitres.

Le chapitre 1 est consacré à une étude bibliographique concernant notamment les travaux de modélisation du transfert hydrique dans les milieux poreux partiellement saturés. Les travaux de modélisation seront classés en deux catégories :

- ceux basés sur des modèles phénoménologiques,

– ceux basés sur des modèles obtenus par homogénéisation.

Une analyse des différents modèles existant dans la littérature, ainsi que de leurs limites et intérêts respectifs, est présentée.

Dans le chapitre 2, nous commençons par présenter les grandes lignes de la méthode d'homogénéisation périodique qui sera utilisée par la suite. La technique utilisée repose sur *la méthode des développements asymptotiques à échelles multiples*. En guise d'illustration, et compte tenu de l'utilisation qui en découle dans l'ensemble de nos travaux, nous présentons en détail le cas classique d'un écoulement de Stokes permettant de retrouver la loi de Darcy (1856) au niveau macroscopique [14].

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la modélisation du transfert hydrique dans les milieux poreux partiellement saturés en utilisant la méthode d'homogénéisation périodique. Nous procédons à une homogénéisation des équations de transfert écrites à l'échelle de la porosité capillaire, afin d'obtenir des modèles homogénéisés valables à l'échelle du matériau. La technique d'homogénéisation utilisée repose sur une analyse dimensionnelle des équations, qui fait apparaître naturellement les nombres adimensionnels caractérisant le transfert hydrique dans les matériaux poreux partiellement saturés. Selon l'ordre de grandeur de ces nombres sans dimension, la méthode d'homogénéisation périodique conduit à des modèles macroscopiques homogénéisés différents, couplant ou non la diffusion de vapeur d'eau et la convection de l'eau liquide. On montre que le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé est différent pour chaque régime de transfert considéré : il dépend de la microstructure du matériau et de son état hydrique. Dans ce travail, trois régimes de transfert hydrique seront considérés :

– un régime de transfert hydrique de vapeur d'eau, correspondant à un tranfert pour des humidités relatives faibles,
– un régime de transfert hydrique sous ses deux formes liquide et vapeur, correspondant à un tranfert pour des humidités relatives intermédiaires,
– un régime de transfert hydrique de l'eau liquide, correspondant à un tranfert pour des humidités relatives élevées.

Le chapitre 4 a pour objectif le calcul analytique et numérique du tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé sur des cellules élémentaires bidimensionnelles et tridimensionnelles, plus ou moins complexes, caractérisant la microstructure du milieu poreux. Deux problèmes locaux différents, correspondant aux régions hygroscopique ou super-hygroscopique, sont considérés. Une étude plus précise de la diffusivité de la vapeur permettra de mettre en évidence le phénomène de condensation capillaire dans la région super-hygroscopique.

Enfin, dans le chapitre 5, une confrontation des modèles proposés à des résultats expérimentaux est réalisée. Il s'agit notamment de comparer les coefficients de diffusion hydrique dans la région hygroscopique, calculés sur des cellules élémentaires plus ou moins complexes, avec les valeurs expérimentales obtenues pour ce même coefficient dans le cas de bétons testés en laboratoire. Enfin, une résolution de l'équation de Richards obtenue par homogénéisation périodique est effectuée, permettant de décrire l'évolution de l'humiditié de chaque phase (liquide et vapeur) dans chaque région (hygroscopique et super-hygroscopique).

Des conclusions et perspectives terminent ce manuscrit. Nous y revenons sur les principaux résultats obtenus et leur analyse. Des perspectives de recherche sont proposées afin d'affiner encore la démarche mise en œuvre et d'améliorer la modélisation.

Chapitre 1

Synthèse bibliographique sur les transferts hydriques dans les milieux poreux partiellement saturés

1.1 Introduction

Ce chapitre présente un état de l'art sur les transferts hydriques dans les matériaux poreux partiellement saturés. Dans un premier temps, nous présentons les principales grandeurs définissant le milieu poreux, ainsi qu'une description des mécanismes du transport liquide et gazeux mis en jeu lors des transferts hydriques. Dans un second temps, nous présentons certaines techniques d'analyse utilisées pour la caractérisation des transferts de masse et de chaleur dans les milieux poreux.

1.2 Mécanisme de transferts hydriques dans les milieux poreux

1.2.1 Les milieux poreux

On désigne par un milieu poreux, un milieu qui se compose d'une phase solide (appelée généralement matrice solide) et de son complément géométrique, l'espace poral, occupé par un ou plusieurs fluides. Ainsi, un milieu poreux est constitué de trois phases distinctes (Fig.1.1) :

- une phase solide qui est liée à la structure du matériau de masse m_s et de volume V_s,
- une phase liquide, de masse m_l et de volume V_l (en générale l'eau ou la solution porale contenue dans le matériau),
- une phase gazeuse, l'air humide, de masse m_g et de volume V_g.

La matrice solide est constituée d'un réseau formé de "pores capillaires". On appelle porosité ouverte ou percolante l'ensemble des pores connectés formant un réseau complexe et tortueux, communicant entre eux et avec l'extérieur du matériau, et permettant un transfert de masse à travers le matériau. Les autres réseaux qui n'ont pas d'ouverture avec l'extérieur, ou les pores qui sont isolés, constituent ce qu'on appelle la porosité fermée. La phase liquide est quant à elle constituée généralement d'eau contenue dans l'espace poral. Enfin, la phase gazeuse, contenue elle aussi dans l'espace poral, est constituée de vapeur d'eau et d'air sec.

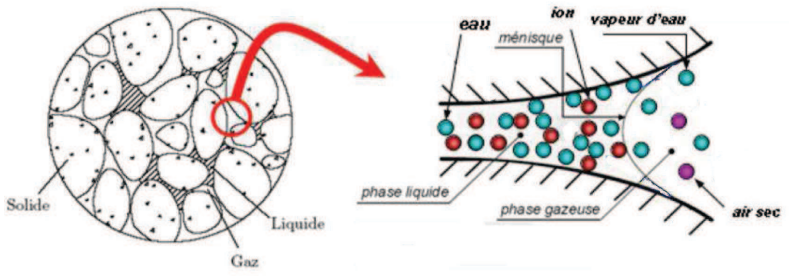


FIGURE 1.1 – Description d'un milieu poreux avec les trois phases représentées

Grandeurs caractéristiques des milieux poreux

Les grandeurs physiques suivantes sont les plus couramment utilisées pour caractériser un milieu poreux :

- **Porosité :** c'est le paramètre principal décrivant le milieu poreux. C'est une grandeur qui correspond à la fraction volumique du matériau occupée par les pores. La porosité totale du milieu poreux est le rapport entre le volume de fluide $V_f = V_l + V_g$ et le volume total V_t :

$$\varepsilon_t = \frac{V_l + V_g}{V_t}$$

  Comme les pores qui sont isolés n'ont pas d'influence sur les phénomènes de transport, on introduit également la notion de porosité ouverte ε_p, qui prend en compte uniquement le volume des pores accessibles V_p :

$$\varepsilon_p = \frac{V_p}{V_t}$$

  Beaucoup de phénomènes mis en jeu sont associés à cette porosité ouverte connectée. Cette dernière est considérée par exemple comme un indicateur de durabilité des structures en béton puisqu'elle représente l'espace dans lequel s'effectue la pénétration d'agents agressifs extérieurs au sein du béton [1].

- **Teneur en eau :** elle permet de quantifier la quantité d'eau dans un milieu donné. En pratique, on définit une teneur en eau, soit massique, soit volumique. La teneur en eau massique représente le rapport entre la masse d'eau liquide m_l et la masse de la matrice solide m_s :

$$u = \frac{m_l}{m_s}$$

  alors que la teneur en eau volumique θ_l est définie par le rapport entre le volume d'eau liquide V_l et le volume total V_t :

$$\theta_l = \frac{V_l}{V_t}$$

- **Humidité relative :** elle est noté HR, et correspond au rapport entre la pression de vapeur p_v et la pression de vapeur saturante $p_{v,sat}$ à la même température. Elle est définie par

la relation :

$$HR = \frac{P_v}{P_{v,sat}}$$

La fonction exprimant la variation de la pression de vapeur saturante en fonction de la température est valide pour $0 \leq T \leq 80^o\ C$ [80] :

$$P_{v,sat} = exp(23.5771 - \frac{4042.9}{T - 37.58})$$

où T est la température.

Pour l'étude des transferts hydriques, il convient de distinguer deux types de matériaux poreux :

- les matériaux hygroscopiques, comme le béton par exemple,
- les matériaux non-hygroscopiques, comme le polystyrène.

On classe souvent les matériaux selon le diamètre des pores par la loi de Kelvin. D. Quenard [84] propose la classification donnée dans le tableau 1.1.

Matériau hygroscopique	**Matériau non-hygroscopique**
Rayon des pores $< 1000\ A$	Rayon des pores $> 1000\ A$
Adsorption et condensation capillaire importante	Adsorption et condensation capillaire faible

Tableau 1.1 – Classification des matériaux d'après D. Quenard [84]

Par la suite, on s'intéressera principalement aux pores susceptibles d'être le siège de condensation capillaire, ou de façon équivalente aux matériaux hygroscopiques qui ont la capacité de fixer par adsorption (ou condensation) une quantité importante d'humidité. Les autres matériaux non-hygroscopiques, qui se chargent d'eau essentiellement par capillarité ne seront pas étudiés.

1.2.2 Mécanisme de transfert hydrique

Dans la suite de la thèse, nous parlerons de pore pour désigner seulement les pores dits *ouverts*, c'est-à-dire ceux communiquant entre eux et formant ainsi un réseau, au sein duquel les fuides (gaz, liquide) peuvent circuler. Le terme humidité englobera l'eau sous forme liquide et vapeur (la glace n'est pas considérée ici).

Courbe de sorption-désorption du matériau poreux

A l'échelle macroscopique, l'humidité accumulée dans un matériau, à l'équilibre, dépend de l'humidité relative ambiante. Cette capacité de stockage est décrite par la courbe de sorption du matériau (teneur en eau massique u en fonction de l'humidité relative HR). Pour un matériau hygroscopique, sa forme générale est donnée par la Figure 1.2. Cette courbe appelée isotherme de sorption/désorption décrit les états d'équilibre successifs du matériau avec le milieu ambiant, dans des conditions de température uniforme.

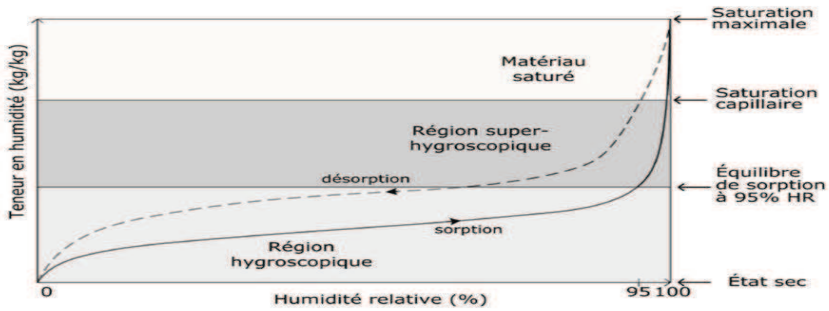


FIGURE 1.2 – Forme générale de la courbe de sorption d'un matériau hygroscopique

Trois domaines ou régions peuvent être distingués. Ils traduisent le comportement du matériau à l'échelle microscopique :

– **Région hygroscopique** : lorsque le matériau est exposé à de faibles humidités relatives (jusqu'à environ 40 %), l'eau est adsorbée sur les parois des pores, en couches mono- puis multi-moléculaires. La condensation capillaire apparaît lorsque tout l'espace d'un pore est rempli d'eau. Elle apparaît donc dans les plus petits pores en premier. Dans cette région (jusqu'à 95 % *HR*), l'eau est transportée essentiellement sous forme de vapeur.

– **Région super-hygrosopique** : au-delà d'une certaine humidité relative (95 % est souvent la limite considérée), c'est l'eau liquide qui occupe la majorité de l'espace poral, laissant des poches dans lesquelles la vapeur circule. Le matériau peut alors absorber de l'eau jusqu'à atteindre la saturation capillaire.

– **Région saturée** : si le matériau reste en contact suffisamment longtemps avec de l'eau liquide, les petites poches d'air résiduelles disparaissent, jusqu'à atteindre la saturation maximale. Le transfert d'air n'est alors plus possible au travers du matériau.

Le comportement diffère suivant le processus considéré (de sorption ou de désorption). L'histoire du matériau a donc une importance sur le taux réel d'humidité du matériau, celui-ci se trouvant toujours entre les deux courbes. Cette hystérésis (Fig.1.2) est toutefois fréquemment négligée, et c'est l'isotherme de sorption qui est alors utilisée. La forme de cette isotherme, et donc la capacité à emmagasiner de l'humidité, dépend fortement de la dimension moyenne des pores, ainsi que de la répartition de leur diamètre (porosimétrie).

Description macroscopique du flux de vapeur d'eau

Le transfert de vapeur d'eau est généralement décrit par une équation de diffusion obéissant à la loi de Fick modifiée [102]. Le coefficient D_v^m qui apparaît dans l'équation écrite directement à l'échelle macroscopique représente un coefficient de diffusion apparent. Il dépend de la teneur en eau et de la topologie du milieu. Généralement, le flux de vapeur s'écrit

sous la forme :

$$j_v = D_v^m(\theta_l)\ grad\ \rho_v \tag{1.1}$$

où j_v $[kg/m^2.s]$ est la densité de flux de vapeur d'eau, D_v^m $[m^2/s]$ le coefficient de diffusion apparent de vapeur d'eau, θ_l $[m^2_{eau}/m^3_{VER}]$ la teneur volumique en eau liquide du VER considéré, et ρ_v $[kg/m^3_{VER}]$ la masse volumique macroscopique de la vapeur d'eau. Le calcul du coefficient de diffusion de vapeur d'eau macroscopique D_v^m se fait généralement, dans le cas des matériaux cimentaires, par la relation empirique de Milligton [69] :

$$D_v^m = \varepsilon_p^2(\varepsilon_p - \theta_l)^{2n+2} D_v \tag{1.2}$$

où D_v désigne le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air, ε_p la porosité du matériau, θ_l la teneur en eau et n le paramètre de calage.
En plus de l'aspect empirique d'une telle relation, les travaux existant sur le sujet [63][77][99][101] ne sont pas unanimes quant au choix du paramètre n. Ceci constitue une limite importante au modèle.
Nous proposons dans cette thèse de donner une définition mathématique claire du coefficient de diffusion de vapeur $D_v^m(\theta_l)$ en fonction de la microstructure du milieu poreux (voir chapitre 3).

Description macroscopique du flux d'eau liquide

Le transfert par capillarité se produit en phase liquide par l'intermédiaire des forces capillaires d'interaction entre les phases fluides et la matrice solide. Il est décrit généralement par la loi de Darcy modifiée. La perméabilité dépend alors, non seulement de la structure du réseau poreux, mais aussi de la teneur en eau. Le vecteur densité de flux d'eau liquide s'exprime comme suit :

$$j_l = -K_l(\theta_l).\ grad\ P_c \tag{1.3}$$

où j_l $[kg/m^2.s]$ désigne la densité de flux de l'eau liquide, K_l $[m^2]$ la perméabilité apparente de l'eau liquide, P_c $[N/m^2]$ la pression capillaire.

Nous proposons également au cours de ce travail de retrouver cette loi macroscopique par homogénéisation périodique en partant des équations de Stokes qui régissent le transfert du liquide à l'échelle microscopique (voir chapitre 2 pour plus de détails).

Modélisation des transferts de masse et de chaleur

La modélisation des transferts de masse et de chaleur dans les milieux poreux peut s'effectuer à partir de deux grandes approches générales posssibles, en partant soit d'une description microscopique, soit macroscopique du matériau. A l'échelle microscopique, les matériaux poreux ont une structure géométrique très complexe [23][87]. A titre d'exemple, les figures 1.3 à 1.5 montrent des images de bétons standards à différentes échelles.

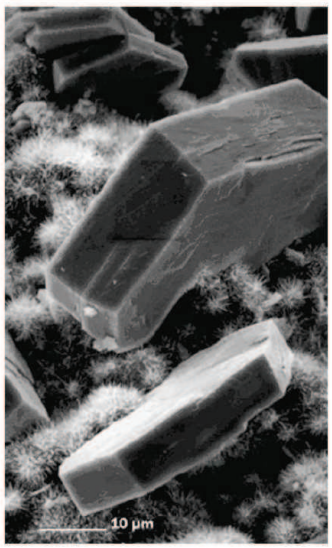


FIGURE 1.3 – Image en microscopie électronique à balayage de cristaux de portlandite [79]

Il est donc très difficile, voire quasi-impossible, de prédire avec précision les transferts par une description fine de la microstructure du matériau et des mécanismes physico-chimiques en jeu à cette échelle. La simulation numérique directe des transferts dans ces milieux poreux n'est pas envisageable à ces échelles. C'est pour cette raison que certains auteurs [88][35][60] préfèrent utiliser directement des modèles macroscopiques qui permettent de s'affranchir des

difficultés liées à la description complète de la microstructure. Enfin, d'autres auteurs proposent d'utiliser des méthodes d'homogénéisation [72][28][91] qui permettent de remplacer le milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent à l'échelle macroscopique. Les équations régissant la physique dans le milieu hétérogène à l'échelle microscopique sont remplacées à l'échelle macroscopique par des équations valables dans le milieu homogène équivalent, de sorte que le comportement global du milieu hétérogène soit équivalent au comportement du milieu homogène associé au niveau macroscopique.

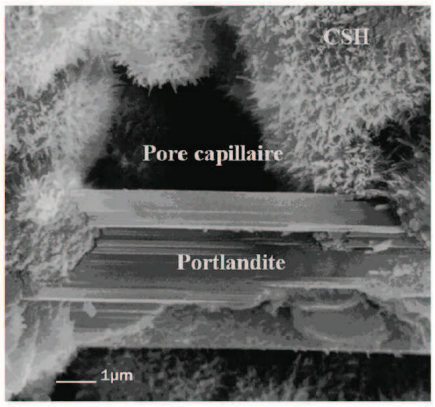


FIGURE 1.4 – Image en microscopie électronique à balayage de C-S-H [79][87]

Dans le cas non-isotherme, le transfert de masse est dû aussi au gradient de température. Ce phénomène est appelé thermodiffusion ou encore effet Soret. Ce phénomène joue un rôle très important dans certaines configurations. D'après Peuhkuri et al. [80], la contribution du flux massique dû au gradient thermique peut dépasser 30% du flux massique. Cependant, nous allons dans notre étude négliger l'effet de la température, et nous supposerons que les transferts de masse se font dans des conditions isothermes.

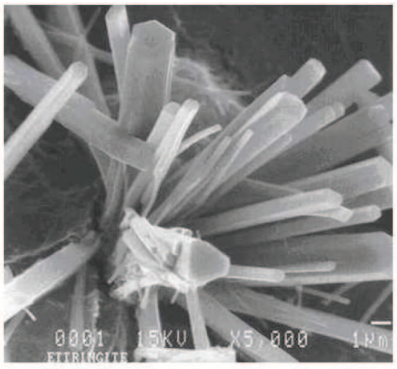


FIGURE 1.5 – Image en microscopie électronique à balayage de cristaux d'ettringite [79]

1.3 Les modèles phénoménologiques

1.3.1 L'équation de Richards

Richards [88] a fait partie des premiers auteurs à étudier les mécanismes de transport de l'eau dans les solides poreux partiellement saturés. En 1931, il a proposé l'équation suivante pour décrire l'écoulement de l'eau sous l'effet d'une succion capillaire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - div(K\ grad\ \Gamma) = 0 \tag{1.4}$$

où θ désigne la teneur en eau, K la perméabitilé du milieu poreux et Γ le potentiel capillaire. Cette relation connue par "équation de Richards " a été ensuite modifiée pour exprimer le transport de masse uniquement comme fonction du gradient de la teneur en eau. Cette modification est basée sur l'hypothèse suivant laquelle le potentiel capillaire Γ est une fonction différentiable de la teneur en humidité θ :

$$\Gamma = f(\theta) \tag{1.5}$$

Ceci permet d'écrire :

$$grad\ \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}\ grad\ \theta \tag{1.6}$$

En remplaçant (1.6) dans l'équation (1.4), on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - div(D_\theta \; grad \; \theta) = 0 \tag{1.7}$$

où $D_\theta = K\frac{d\Gamma}{d\theta}$ est le coefficient non linéaire de diffusion de l'eau. L'équation (1.7), appelée couramment équation de Richards, est largement utilisée pour modéliser l'évolution de la teneur en eau dans les matériaux poreux dans des conditions isothermes.

Bien que l'équation de Richards soit beaucoup utilisée dans la communauté scientifique pour modéliser le transport d'humidité dans les matériaux poreux partiellement saturés, les mécanismes mis en jeu lors de ce transport sont souvent passés sous silence. De plus, les définitions des variables d'état qui sont utilisées pour décrire les processus de transport varient d'une manière significative d'une étude à l'autre [91]. En effet, Richards a écrit son équation avec la teneur en eau exprimée en [cm^3 d'eau / gramme de matière sèche]. Cependant, la plupart des auteurs ont choisi d'exprimer la variable θ de manière traditionnelle [m^3 d'eau /m^3 de matériau] [31][33][37]. Enfin, de nombreux auteurs définissent la teneur en humidité en prenant en compte l'eau liquide et la vapeur d'eau, tandis que dans d'autres travaux, seule la phase liquide est considérée.

Nous proposons dans ce travail de thèse, et en particulier au chapitre 3, de clarifier un certain nombre d'aspects fondamentaux permettant d'établir l'équation macroscopique de Richards à partir de la description précise des phénomènes physiques intervenant à l'échelle microscopique. Son domaine de validité et la définition explicite des variables et des grandeurs intervenant, s'en trouveront précisés.

1.3.2 Le modèle de Philip et de Vries

Philip et de Vries ont caractérisé les transferts simultanés de chaleur et de masse dans les milieux poreux (dans les sols en particulier) [35][37]. Ils ont décrit les transferts d'humidité sous forme liquide et vapeur en les considérant comme des phénomènes de diffusion généralisant la loi de Darcy et la loi de Fick. Les hypothèses suivantes constituent le point de départ du modèle de Philip et de Vries [35][37] :

– les flux des deux phases (liquide et vapeur) sont supposés être dissociés, ce qui permet d'additionner les flux de la phase liquide et vapeur,
– l'écoulement liquide est visqueux laminaire, régi par la loi de Darcy,
– le transport de vapeur s'effectue par diffusion moléculaire pure (l'effusion et la diffusion mixte sont négligées),
– la vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait,
– la phase gazeuse est supposée être à pression uniforme et égale à la pression atmosphérique,
– tous les autres potentiels sont exclus (potentiel osmotique, électrique, électromagnétique,..)

D'autre part, les flux sont exprimés au moyen de deux variables indépendantes suivantes :

1. une grandeur caractéristique de l'état de l'humidité du matériau qui peut être l'humidité realive HR, le potentiel ψ, ou plus généralement la teneur en eau volumique θ_l,
2. la température T.

Transfert de masse en phase vapeur

La diffusion de la vapeur dans l'air libre est décrite par la loi de Fick (sous l'hypothèse que la vapeur est très diliuée) dont le flux de vapeur associé s'écrit :

$$q_v = -D_v \; grad \; \rho_v \tag{1.8}$$

où ρ_v est la masse volumique de la vapeur d'eau $[Kg\ m^-3]$, et D_v le coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air $[m^2\ s^{-1}]$ donnée par :

$$D_v = 2.17\ 10^{-5}\ \ \frac{P_{atm}}{P}(\frac{T}{273.5})^{1.88} \tag{1.9}$$

Dans le cas d'un milieu poreux partiellement saturé, la loi de Fick est reformulée en exprimant le flux de vapeur suivant :

$$q_v = -D_v \; \alpha \; \nu \; f(\theta_l) \; \frac{M_v}{RT} \;\; grad \; P_v \tag{1.10}$$

où

- α est un facteur de tortuosité,
- P_v est la pression du mélange air-vapeur d'eau $[pa]$,
- T est la température du milieu $[K]$,
- $f(\theta_l)$ est le facteur expérimental de Philip et De vries,
- $\nu = \frac{P}{P-P_v}$ est le facteur multiplicatif pour tenir compte de la diffusion de l'air dans le mélange air-vapeur.

En tenant compte des variations de P_v en fonction de θ_l et T, on obtient alors l'expression suivante du flux de vapeur :

$$q_v = -\rho_l (D_{\theta_v} \ grad\ P_v + D_{T_v}\ grad\ T) \tag{1.11}$$

avec

$$D_{\theta_v} = D_v \frac{\rho_v}{\rho_l}\ \alpha\ \nu\ f(\theta_l)\ \frac{g\ M_v}{RT}\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{1.12}$$

$$D_{T_v} = D_v\ \alpha\ \nu\ f(\theta_l)\ \zeta\ e^{\frac{g\psi}{RT}}\ \frac{1}{\rho_l}\ \frac{\partial \rho_v}{\partial T} \tag{1.13}$$

où

- D_{θ_v} est le coefficient de transport de vapeur associé à un gradient de teneur en eau $[m^2 s^{-1}]$,
- D_{T_v} est le coefficient de transport de vapeur associé à un gradient de temprérature $[m^2 s^{-1} k^{-1}]$,
- ζ est un facteur qui prend en compte la tortuosité.

Transfert de masse en phase liquide

La pression de l'eau liquide résulte de la somme des potentiels capillaire et gravitationnel, soit :

$$P_l = \rho_l g z + \rho_l g \psi \tag{1.14}$$

D'autre part, Philip et de Vries supposent que la variation de ψ avec la temprérature est entièrement induite par les variations de la tension superficielle $\sigma(T)$ exprimée à partir de la loi de Laplace. En omettant le terme de pesanteur, il en résulte la loi de transport de masse en phase liquide :

$$q_l = -\rho_l(D_{\theta_l}\ grad\ \theta_l + D_{T_l}\ grad\ T) \tag{1.15}$$

avec

$$D_{\theta_l} = K_l \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{1.16}$$

$$D_{T_l} = K_l\ \psi \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \tag{1.17}$$

où

- D_{θ_l} est le coefficient de transport de liquide associé à un gradient de teneur en eau $[m^2 s^{-1}]$,
- D_{T_l} est le coefficient de transport de liquide associé à un gradient de temprérature $[m^2 s^{-1} k^{-1}]$,
- σ est la tension superficielle à l'interface air-eau $[kgs^{-2}]$,
- K_l est la conductivité hydraulique de la phase liquide $[ms^{-1}]$.

Transfert de chaleur

Le transfert de chaleur prend généralement trois formes : transfert conductif, transfert convectif, transfert de chaleur latente portée par la vapeur. En négligeant le transfert convectif, suivant [35][37], le flux de chaleur s'écrit à l'échelle macroscopique :

$$q_c = -\lambda\ \ grad\ T + L_v\ q_v \tag{1.18}$$

où L_v désigne la chaleur latente de vaporisation de l'eau liquide, λ la conductivité pure qui dépend de la teneur en eau et des conductivités des trois phases présentes dans le milieu.

En reportant ces différentes expressions dans les équations de conservation de la masse et de l'énergie, Philip et de Vries ont obtenu pour le transport d'humidité l'équation suivante :

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} = div((D_{\theta_l} + D_{\theta_v})\ \ grad\ \theta_l + (D_{T_l} + D_{T_v})\ grad\ T) \tag{1.19}$$

et l'équation de la chaleur prend la forme :

$$C\,\frac{\partial T}{\partial t} = div(L_v D_{\theta_v}\ \ grad\ \theta_l + (\lambda + L_v D_{T_v})\nabla T) \tag{1.20}$$

où C désigne la capacité calorifique volumique $[Jm^{-3}K^{-1}]$ et t est le temps $[s]$.
D'autre part, on a :

$$D_\theta = D_{\theta_v} + D_{\theta_l} \tag{1.21}$$

$$D_T = D_{T_l} + D_{T_v} \tag{1.22}$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle ne fait intervenir que deux coefficients de transport (liquide et vapeur). Par contre, elle introduit des facteurs dépendant du milieu (ζ et $f(\theta_l)$) dont la determination pour un matériau donné est assez complexe.

Signalons que l'approche de Philip et de Vries a servi de support à de nombreux travaux expérimentaux [36][47][38][52][72][98], ce modèle semblant bien adapté pour des systèmes globalement isothermes. Cependant pour des systèmes non isothermes, des facteurs de corrections artificiels supplémentaires sont introduits afin de concilier la théorie et l'exprérience [47][98].
Enfin, il est important de signaler que le modèle de Philip et de Vries [35][37] fait intervenir différents paramètres effectifs, dont le fondement ne repose pas sur des considérations microscopiques clairement justifiées. En particulier, les facteurs ζ et $f(\theta_l)$ qui sont introduits ne prennent pas en compte les propriétés géométriques du milieu, et restent difficilement accessibles à la mesure. D'autre part, les coefficients de transport (liquide et vapeur) des équations (1.21) et (1.22) doivent être ajustés a posteriori pour rapprocher les points expérimentaux et les résultats des simulations numériques.

1.3.3 Le modèle de Luikov

Dans son travail, Luikov [60] met en évidence le phénomène de thermodiffusion et établit qu'un thermogradient provoque le déplacement de l'humidité à l'intérieur du matériau. Pour

modéliser les transferts de chaleur et de masse dans les milieux poreux, il propose de séparer les flux de liquide et de vapeur en deux parties, l'un induit par un gradient de concentration, et l'autre par un gradient thermique. Il obtient ainsi le système d'équations suivant :

$$q_l = -D_L\ \rho_s\ grad\ w - D_{LT}\ \rho_s\ grad\ T \tag{1.23}$$

$$q_v = -D_V\ \rho_s\ grad\ w - D_{VT}\ \rho_s\ grad\ T \tag{1.24}$$

où q_l désigne le flux massique de l'eau liquide $[kg/s.m^2]$, q_v le flux massique de vapeur d'eau $[kg/s.m^2]$, w la teneur en eau massique et ρ_s la masse volumique du solide $[kg/m^3]$. Enfin, D_L et D_V représentent respectivement les coefficients de diffusion de la vapeur et du liquide, D_{VT} étant le coefficient de thermomigration de la vapeur et D_{LT} est celui de l'eau.

Ce système d'équations est ensuite associé aux bilans d'énergie et de masse. Pour expliciter le terme de vaporisation-condensation, Luikov introduit le taux de changement de phase. La variation temporelle locale de la quantité de vapeur condensée est représentée par $\varepsilon\ \rho_s\ \frac{\partial w}{\partial t}$, où ε est le taux de changement de phase qui est une fonction inconnue. On obtient ainsi le système d'équations :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = div(D(\ grad\ w + \delta_s\ grad\ T)) \tag{1.25}$$

$$C_p\ \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = div(D_T(\ grad\ w) - L_v\ \varepsilon\ \rho_s\ \frac{\partial w}{\partial t} \tag{1.26}$$

où L_v désigne la chaleur latente de vaporisation, $D = D_L + D_v$ le coefficient de diffusion total et $\delta_s = \frac{D_{VT}+D_{VL}}{D_V+D_L}$ le coefficient de thermodiffusion.
Dans cette formulation, l'indétermination de ε rend le calcul du terme de changement de phase, et par conséquence celui du bilan énergétique tout à fait arbitraire.

1.4 Les modèles obtenus par homogénéisation

1.4.1 Les méthodes d'homogénéisation

Les matériaux poreux sont des matériaux comprenant un très grand nombre d'hétérogénéités [1], si bien que la description des processus physiques qui les concernent devient délicate, voir impossible, si toute les hétérogénéités sont prises en compte. Une solution possible, afin de décrire le comportement macroscopique de ces milieux hétérogènes, est de les assimiler à des milieux continus homogènes équivalents ayant le même comportement en moyenne. La description équivalente ainsi obtenue doit être intrinsèque au matériau et indépendante des conditions aux limites macroscopiques. C'est l'objectif des méthodes d'homogénéisation qui permettent, à partir d'une description microscopique des phénomènes physiques intervenant, d'obtenir un conportement macroscopique équivalent. L'échelle des hétérogénéités sera dite échelle microscopique ou locale, par opposition à l'échelle macroscopique, échelle où est défini le milieu continu homogène équivalent.

De façon générale, on peut distinguer 3 grands types de méthodes d'homogénéisation :

- l'homogénéisation par prise de moyenne [85]-[86][90]-[91][104]-[105]
- l'homogénéisation périodique [9]-[10][19][57] [73][74][93][94]
- l'homogénéisation des milieux à microstructure aléatoire [40]-[41][62][83][92][107].

Dans cette thèse, nous nous intéresserons principalement à la méthode d'homogénéisation périodique, qui repose sur la technique des développements asymptotiques à échelles multiples [93].

Passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique

Précisons tout d'abord la terminologie qui sera utilisée par la suite, notamment la définition de microscopique ou "micro" et de macroscopique ou "macro". L'échelle microscopique

1. Tout matériau est hétérogène si on le regarde à une échelle suffisamment petite.

de longueur caractéristique [2] l n'est "microscopique " qu'en comparaison de l'échelle macroscopique de longueur caractéristique [3] L. Par exemple, si pour les argiles l est généralement choisi la taille des pores, de l'ordre de $50.10^{-10}m$, pour un composite d'une terre armée d'une fondation sur pieux, on pourra avoir $l \simeq 5m$.
On estime en général que l'homogénéisation devient performante pour [18] :

$$L > 10\, l\,, \quad \text{soit} \quad \varepsilon = \frac{l}{L} < 0.1$$

Une autre caractéristique générale de toutes les méthodes d'homogénéisation est qu'elles ont recours à des moyennes pour définir les grandeurs macroscopiques. Celles-ci sont introduites naturellement lors d'un passage micro-macro, de façon à obtentir des grandeurs physiques macroscopiques qui sont représentatives des hétérognéités locales. Ainsi, l'homogénéisation d'un milieu hétérogène quelconque n'a de sens que lorsqu'on considère des domaines contenant un grand nombre d'hétérogénités. Si l est une dimension caractéristique des hétérogénéités et L une dimension caractéristique du volume élémentaire représentatif du matériau étudié, la condition de séparation d'échelle

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1$$

doit être vérifiée. Dès lors que deux échelles bien séparées (l et L) coexistent au sein de notre matériau, on peut passer de l'une à l'autre par homogénéisation, avec toutefois des interférences possibles entre les échelles suivants les niveaux de séparation [20]. D'une façon générale, plus la séparation des échelles sera importante, meilleurs seront les résultats.

Pour revenir à l'objet de cette thèse, il n'existe que peu de travaux utilisant les techniques d'homogénéisation pour modéliser les phénomènes de transfert hydrique dans les milieux poreux partiellement saturés.
On trouve dans la littérature l'approche développée par Moyne et al. (1988) permettant d'obtenir un modèle homogénéisé (par prise de moyenne) couplant la diffusion de la vapeur d'eau

2. En général l correspond à la taille de la cellule élémentaire en homogénéisation périodique comme on va le voir par la suite.
3. Echelle (en général celle de la structure) à laquelle on souhaite homogénéiser le problème.

au transfert de chaleur conductif [72]. Dans les travaux de Whitaker (1977), un modèle couplant différents phénomènes de transfert (diffusion de vapeur, convection de liquide, diffusion de chaleur) a été obtenu par homogénéisation par prise de moyenne [104]. Il a été amélioré ensuite par Samson et al. (2005) dans le cas isotherme, en faisant apparaitre le gradient de la teneur en eau comme moteur du transfert [91].
Concernant la méthode d'homogénéisation périodique, il existe encore moins de travaux dans la littérature concernant le transfert hydrique dans les milieux partiellement saturés. En reprenant les calculs de [72] avec la méthode d'homogénéisation périodique, Bouddour et Auriault (1998) ont obtenu des modèles correspondant à différentes configurations physiques possibles (convection de chaleur prédominante, diffusion de vapeur prédominante, ...) [28]. Le tri des modèles macroscopiques homogénéisés en fonction de l'ordre de grandeur des nombres sans dimension introduits, se fait naturellement par la méthode d'homogénéisation périodique.
Citons enfin les travaux de Lewandowska et Laurent [58] qui ont appliqué la technique d'homogénéisation périodique dans le cas d'un transfert hydrique dans un milieu à double porosité. L'échelle de départ étant l'échelle mésoscopique (et non pas microscopique), l'équation de Richards a été le point de départ pour remonter à une équation homogénéisée ayant la même forme que l'équation de Richards, mais à une échelle macroscopique supérieure.
Dans les paragraphes suivants, nous allons détailler les principaux résultats qui ont été cités ci-avant, avec les différentes méthodes d'homogénéisation.

1.4.2 Modèles obtenus par homogénéisation par prise de moyenne

Homogénéisation par prise de moyenne du transfert de chaleur couplé à la diffusion de vapeur

Dans [72], les auteurs considèrent le transport conductif de la chaleur et la diffusion de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse (similaire à celui de Philip et de Vries [35]). En utilisant la technique de prise de moyenne à l'échelle des pores, afin d'obtenir une description

macroscopique équivalente, le modèle macroscopique suivant a été obtenu :

$$< \rho\ c_p > \frac{\partial < T >}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_{ij} \frac{\partial < T >}{\partial x_j})) - \Delta h_v < \dot{m} > \tag{1.27}$$

$$\rho_g \frac{\partial < \omega_v >^g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_g\ D f_{ij}\ \frac{\partial < \omega_v >^g >}{\partial x_j})) + < \dot{m} > \tag{1.28}$$

où

- $< T >$ désigne la température moyenne définie sur l'élément de volume représentatif (VER) $[K]$,
- $< \omega_v >^g$ est la valeur moyenne de la fraction intrinsèque ω_v définie sur la phase gazeuse,
- $< \dot{m} >$ est la masse d'eau évaporée par unité de volume et de temps $[kg\ m^{-3}\ s^{-1}]$,
- λ_{ij} est la conductivité thermique $[J\ m^{-1} K^{-1}\ s^{-1}]$,
- Δh_v est la chaleur latente de vaporisation pour l'eau $[J\ Kg^{-1}]$,
- $< \rho\ c_p >$ est la capacité calorifique volumique $[J\ m^{-3}\ K^{-1}]$.

Un facteur de résistance f_{ij} a été introduit dans le terme diffusif de la loi de Fick pour tenir compte de la présence des phases liquide et solide. Toutefois, les auteurs ne considèrent pas l'existence d'éventuels gradients de teneur en eau. Par ailleurs, l'air dans les pores est considéré comme étant saturé sur toute la gamme de teneur en eau, ce qui ne permet pas de prendre en compte la variation de l'humidité relative.

Homogénéisation par prise de moyenne des transferts hydriques

Dans leurs travaux [91], les auteurs ont obtenu un modèle macroscopique homogénéisé dans les milieux poreux partiellement saturés, dont le principal moteur est le gradient de la teneur en eau. Ce modèle a été obtenu par homogénéisation par prise de moyenne des équations de transport écrites à l'échelle "microscopique ou locale" (voir figure. 1.6), puis moyennées à l'échelle du matériau [21][25]. Afin de simplifier le problème, les auteurs considèrent que le matériau poreux est isotrope, rigide, que la pression du gaz est uniforme, et que le transport se fait dans des conditions isothermes.

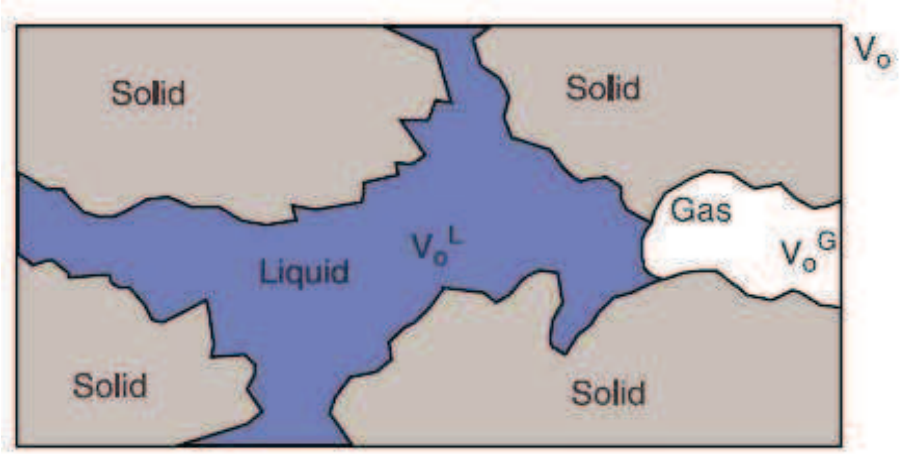


FIGURE 1.6 – Volume élémentaire représentatif considéré [91]

Après calculs, les auteurs obtiennent l'équation de transport d'humidité macroscopique en milieu partiellement saturé :

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \ div(D_\theta \ grad\theta_l) = 0 \tag{1.29}$$

avec

$$D_\theta = D_l + \frac{1}{\rho_l} D_v \frac{\partial \overline{\rho_v}^G}{\partial \theta_l} \tag{1.30}$$

où θ_l est la teneur volumique en eau liquide, ρ_l la masse volumique de l'eau liquide, ρ_v la masse volumique de la vapeur d'eau, D_l le coefficient de diffusion macroscopique de l'eau liquide. Le coefficient de diffusion macroscopique de vapeur d'eau D_v s'écrit :

$$D_v = \ \theta_g \ D \ \tau_g \tag{1.31}$$

où D est le coefficient de diffusion de vapeur à l'air libre et τ_g la tortuosité du matériau.

Il est clair que l'équation (1.29) prend la forme générale de l'équation de "Richards" (1.7). Elle permet de décrire complètement le mouvement de la vapeur et de l'eau liquide. L'influence des deux phases est prise en compte à travers le coefficient de diffusion hydrique D_θ. Cependant, la méthode utilisée ne permet pas de trier (ou de considérer) les différents régimes de transport hydrique que l'on peut avoir au cours de l'humidification et du séchage, ni de préciser le domaine de validité du modèle obtenu. De plus, la tortuosité τ_g introduite

artificellement dans l'équation de transfert de vapeur d'eau (1.31) n'a pas de définition mathématique consistante.

1.4.3 Modèles obtenus par homogénéisation périodique

Homogénéisation périodique du transfert de chaleur couplé avec la diffusion de vapeur

Dans [28], les auteurs considèrent les transports convectifs et conductifs de la chaleur, ainsi que la diffusion-convection de la vapeur dans la phase gazeuse. L'approche présentée se distingue des recherches antérieures par la démarche d'homogénéisation périodique mise en oeuvre, dont les grands étapes sont :

- écriture des équations de bilan à l'échelle du pore pour chacune des phases,
- homogénéisation des équations microscopiques permettant d'obtenir, suivant les ordres de grandeur relatifs des différents processus en présence, le comportement macroscopique équivalent du milieu poreux,
- détermination du domaine de validité des différentes descriptions macroscopiques obtenues et des coefficients effectifs associés.

L'application de la technique d'homogénéisation périodique a conduit à distinguer quatre modèles macroscopiques de transfert de masse, ainsi que quatre modèles macroscopiques de transfert de chaleur correspondant à différents ordres de grandeur des nombres adimensionnels introduits. Les effets de couplage entre les deux modes de transfert apparaissent par l'intermédiaire d'un terme de changement de phase.

Dans ce qui suit, on présente pour exemple deux équations générales obtenues, l'une caractérisant le transfert de masse en phase vapeur, et l'autre le transfert de chaleur.

Au premier ordre du développement asymptotique des équations, les auteurs ont obtenu le modèle suivant de diffusion-convection en présence d'évaporation-condensation :

$$n_g\,\rho_g^0\,\frac{\partial \omega_v^0}{\partial t}+\rho_g^0\,v_{gi}^{0eff}\,\frac{\partial \omega_v^0}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}(D_{ij}^*\,\rho_g^0\,\frac{\partial \omega_v^0}{\partial x_j})+\rho_a^0\,q_{v\Gamma_{gl}}=0 \tag{1.32}$$

Les différentes variables et paramètres intervenant sont :

- la fraction massique intrinsèque ω_v^0 définie sur la phase gazeuse au premier ordre,
- la masse volumique ρ_g^0 du gaz,
- la masse volumique ρ_a^0 de l'air,
- le champs de vitesse v_{gi}^{0eff} du mélange gazeux (relié à la loi de Darcy),
- le terme source de vapeur $q_{v\Gamma_{gl}}$ défini comme une moyenne de volume,
- la porosité de la phase gazeuse définie par $n_g=\frac{|\Omega_g|}{|\Omega|}$.

Le tenseur macroscopique (ou effectif) de diffusion D_{ij}^* est défini par :

$$D_{ij}^*=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega_g} D(\frac{\partial \xi_j}{\partial y_i}+I_{ij})d\Omega$$

où D est le coefficient de diffusion air-vapeur supposé isotrope, et ξ un champ de vecteur solution d'un problème aux limites linéaire local défini sur la cellule élementaire.

Le modèle macroscopique (1.32) ainsi obtenu décrit le transport de masse par diffusion-convection avec évaporation-condensation à l'interface liquide-gaz. Le terme $q_{v\Gamma_{gl}}$ est relié à la teneur en eau et peut s'exprimer en fonction des variables d'état du gaz.

Pour le transfert de chaleur, la mise en oeuvre du processus d'homogénéisation conduit au modèle macroscopique général de conduction-convection avec évaporation-condensation suivant :

$$(n_s(\rho c_p)_s+n_l(\rho c_p)_l)\,\frac{\partial T^0}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_{s_{ij}}^*+\lambda_{l_{ij}}^*)\,\frac{\partial T^0}{\partial x_j})+(\rho c_p)_l\,v_{li}^{0eff}\,\frac{\partial T^0}{\partial x_j}-L_v\,\rho_a^0\,q_{v\Gamma_{gl}}=0 \tag{1.33}$$

où

- T^0 est le champ de température,
- n_δ désigne la fraction volumique des phases solide et liquide respectivement (avec $\delta=\{s,l\}$),

- $(\rho c_p)_\delta$ est la capacité calorifique par unité de volume de la phase δ (avec $\delta = \{s,l\}$),
- v_{li}^{0eff} désigne le champs de vitesse du liquide (relié à la loi de Darcy),
- L_v est la chaleur latente de vaporisation.

Le tenseur $\lambda^*_{\delta_{ij}}$ représente la conductivité macroscopique (ou effective) de la phase δ défini classiquement par :

$$\lambda^*_{\delta ij} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega_g} \lambda_\delta (\frac{\partial \xi_{\delta_j}}{\partial y_i} + I_{ij}) d\Omega$$

où ξ_{δ_j} est solution d'un problème aux limites local.

Le couplage entre le transfert de masse et de chaleur apparaît à travers le terme de changement de phase $q_{v\Gamma_{gl}}$ intervenant dans les équations de transfert (1.32) et (1.33). Le transfert de masse a lieu par conduction et convection en présence d'évaporation-condensation à l'interface gaz-liquide. D'autres cas ont également été traités, suivant que la convection ou la diffusion de vapeur sont prédominantes ou non pour le transfert de vapeur, et suivant que la conduction ou la convection sont prédominantes ou non pour le transfert de chaleur. Ainsi, la méthode d'homogénéisation périodique permet d'obtenir différentes équations macroscopiques décrivant le transfert couplé de chaleur et de masse, suivant les ordres de grandeur des nombres adimentionnels contrôlant le comportement à l'échelle macroscopique.
Cependant, les modèles obtenus ne permettent pas de décrire d'une manière précise l'écoulement du liquide. Ils décrivent seulement le transfert de vapeur, et la variable d'état (la teneur volumique en eau liquide n_l) n'intervient pas explicitement dans les équations. De plus, les conditions aux limites de type Neumann associées au problème local (permettant de déterminer D^*_{ij} ou $\lambda^*_{\delta_{ij}}$) ne permettent pas de décrire certains phénomènes physiques, notamment le phénomène de condensation capillaire. Ce dernier peut être mis en évidence, comme on va le voir aux chapitres 3 et 4, par des conditions aux limites de type Dirichlet à l'interface liquide-gaz.

Homogénéisation périodique du transfert hydrique dans un milieu poreux à double porosité

Dans [58], les auteurs ont effectué l'homogénéisation périodique des équations de transfert hydrique dans un milieu poreux à double porosité, à partir de l'échelle mésoscopique appelée encore échelle de Darcy [6][30][51][85][89].

En considérant un milieu poreux à double porosité et en se plaçant à l'échelle de Darcy, de telle sorte que le volume élémentaire représentatif Ω considéré soit constitué de deux sous domaines poreux Ω_1 et Ω_2 séparés par une interface Γ, le transfert d'humidité capillaire dans

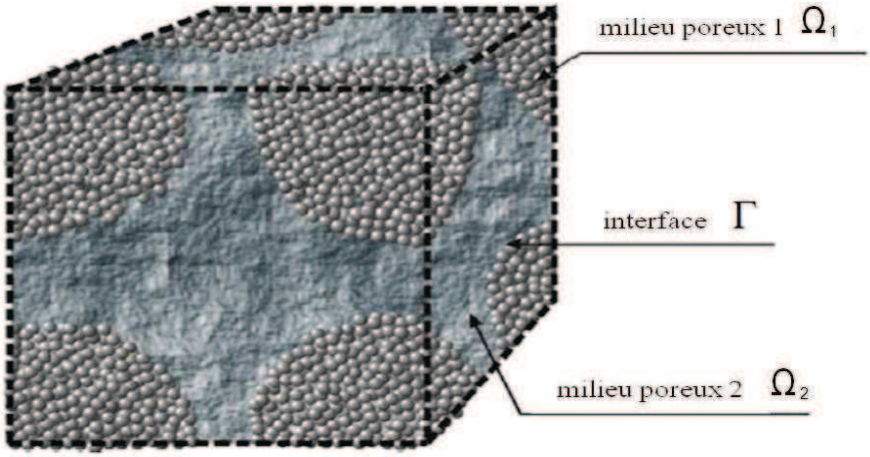


FIGURE 1.7 – Milieu poreux à double porosité [59]

les conditions isothermes peut être décrit par les équations suivantes de type Richards pour chacune des phases :

$$C_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - div(K_1\, grad\, \psi_1) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \tag{1.34}$$

$$C_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - div(K_2\, grad\, \psi_2) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_2 \tag{1.35}$$

Les conditions de continuité sur l'interface Γ entre les deux sous domaines sont exprimées

comme suit :

$$[\psi]_\Gamma = 0 \tag{1.36}$$

$$[(K\ grad\psi).N]_\Gamma = 0 \tag{1.37}$$

où ψ désigne la succion capillaire, $K(\psi)$ le tenseur de conductivité hydraulique, $C(\psi)$ la capacité de rétention de l'eau, N le vecteur normal unitaire à l'interface Γ et t le temps. Notons que les équations (1.34) et (1.35) sont fortement non linéaires à cause de la dépendance de K et C en la variable d'état ψ.
Dans la formulation des équations (1.34)-(1.37), il est supposé que les effects de capillarité dominent l'écoulement et que les effets de gravité sont négligés.

Par homogénéisation périodique des équations (1.34)-(1.37) [11][12][13], les auteurs obtiennent l'équation effective de transport au niveau macroscopique d'inconnue ψ^0 :

$$C^{eff}\ \frac{\partial \psi^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(K_{ij}\ \frac{\partial \psi^0}{\partial x_j}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{1.38}$$

où K^{eff} est le tenseur effectif de conductivité de l'eau définie par :

$$K_{ij}^{eff} = \frac{1}{|\Omega|}[\int_{\Omega_1} K_{1ik}(I_{kj} + \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k}) + \int_{\Omega_2} K_{2ik}(I_{kj} + \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k})]d\Omega \tag{1.39}$$

De façon classique, χ est solution d'un problème local défini à l'échelle de la cellule élémentaire. La capacité effective de rétention de l'eau C^{eff} quant à elle s'écrit :

$$C^{eff} = n_1\ C_1^0 + n_2 C_2^0 = n_1\ \frac{d\theta_1^0}{d\psi^0} + n_2\ \frac{d\theta_2^0}{d\psi^0} \tag{1.40}$$

où θ_1 et θ_2 sont les teneurs en eau des milieux 1 et 2 respectivement, $n_1 = \frac{|\Omega_1|}{|\Omega|}$ et $n_2 = \frac{|\Omega_2|}{|\Omega|}$ les porosités associées (des milieux 1 et 2).

L'équation (1.38) peut être complétée par des conditions aux limites à l'échelle macroscopique pour résoudre des problèmes pratiques. Cependant, le modèle macroscopique ainsi obtenu, a été déterminé à partir de l'échelle mésoscopique ou de Darcy où les phénomènes de transport dans les deux milieux sont supposés décrits par une équation de type Richards.

L'objectif de cette thèse sera de justifier rigoureusement par homogénéisation périodique (en partant d'une échelle microscopique plus petite) cette équation de Richards caractérisant les transferts hydriques en milieux poreux partiellement saturés.

1.5 La difficulté de la modélisation du mouvement de l'interface

Une des difficultés de la modélisation des transferts hydriques dans les milieux partiellement saturés, provient de la description physique précise du déplacement de l'interface liquide-gaz à l'échelle locale. En effet, une simplification généralement faite par la plupart des auteurs consiste à ne considérer que trois phases présentes dans le VER (liquide, gaz et solide), alors que des études ont montré que l'interface entre le liquide et l'air a des propriétés bien distinctes et doit être considérée comme une phase à part entière [44][46]. De plus, pour les problèmes diphasiques, et quelque soit la méthode d'homogénéisation utilisée, les problèmes locaux définis sur la cellule élémentaire qui permettent d'accéder aux propriétés macroscopiques homogénéisées dépendent de manière directe de la position (et donc du déplacement) de l'interface à l'échelle locale. Or, à notre connaissance, à part les travaux classiques portant sur la résolution de l'équation de Young-Laplace pour des géométries simples [56][70][71], valables en quasi-statique, il n'existe pas dans la littérature d'expression simple reliant par exemple la variation de la pression capillaire (lors de l'humidification ou du séchage) à la vitesse de l'interface liquide-gaz. D'autre part, compte tenu de l'existence d'une hystérésis lors d'un cycle d'humidification et de séchage (voir courbe 1.2, chapitre 1), une telle expression bi-univoque semble difficile à obtenir.

1.6 Conclusion

Les modèles de transfert hydrique dans les milieux poreux saturés et partiellement saturés existant dans la littérature sont nombreux et divers. Cependant, la majorité de ces modèles sont des modèles phénoménologiques qui considèrent le matériau poreux comme une boite noire. D'autre part, ces modèles phénoménologiques utilisent généralement des résultats expérimentaux afin de déterminer ou caler les paramètres intervenant dans le clacul des propriétés macroscopiques de transfert, par exemple le coefficient de diffusion hydrique macroscopique.

Une description fine et complète des phénomènes physiques mis en jeu à l'échelle microscopique est indispensable, afin de pouvoir obtenir ensuite, par des méthodes d'homogénéisation par exemple, le comportement macroscopique équivalent.

Les modèles basés sur la méthode d'homogénéisation par prise de moyenne existants, conduisent à une expression de la tortuosité qui ne prend pas en compte la microstructure interne du milieu poreux. D'autre part, la méthode d'homogénéisation par prise de moyenne utilisée ne permet pas de trier les différents régimes de transfert qui peuvent exister en fonction des ordres de grandeur des paramètres physiques intervenant. Or, ceci est possible en utilisant la méthode d'homogénéisation périodique, basée sur une analyse dimensionnelle des équations de transfert à l'échelle microscopique, faisant apparaître naturellement des nombres sans dimension caractérisant le problème. C'est l'objet du chapitre 2, consacré à la présentation de cette méthode, et à son application sur un exemple, afin d'obtenir l'équation de Darcy généralisée dans le cas partiellement saturé, qui nous sera utile pour les développements ultérieurs.

Chapitre 2

Méthode d'homogénéisation périodique appliquée à l'équation de Darcy généralisée

2.1 Introduction

Nous proposons dans ce chapitre de reprendre les calculs figurant dans [14][16], de façon à présenter la mise en oeuvre de la méthode d'homogénéisation périodique en utilisant une formulation locale des équations d'équilibre (ici du problème de Stokes pour les fluides en présence). C'est de cette façon que nous procéderons à l'homogénéisation des équations de bilan au chapitre 3. Aussi, ce chapitre, que l'on peut considérer comme bibliographique, contient tous les détails des calculs permettant de bien comprendre la mise en oeuvre de la méthode d'homogénéisation périodique dans le cas d'un écoulement de fluides en milieu partiellement saturé.

2.2 La méthode d'homogénéisation périodique

2.2.1 Les principes de la méthode

La méthode d'homogénéisation périodique permet, à partir des propriétés physiques à l'échelle microscopique, d'obtenir la description complète à l'échelle macroscopique sans hypothèse additionelle. Ainsi, on suppose connues à l'échelle microscopique les équations de conservation et la géométrie de la microstructure. Le processus d'homogénéisation (de passage micro-macro) permet de déduire les équations de conservation au niveau macroscopique ainsi que les grandeurs physiques pertinentes associées.
Il est important que le processus d'homogénéisation soit indépendant de toute hypothèse à l'échelle macroscopique, et ne dépende que de la physique à l'échelle microscopique, ainsi que de la géométrie de la microstructure. Par exemple, dans le cas de " la filtration dans un milieu poreux rigide ", à l'échelle des pores, l'écoulement des fluides est supposé régi par les équations de Stokes, alors qu'à l'échelle macroscopique, le comportement obéit à la loi de Darcy [8]. Nous allons voir dans la suite de ce chapitre, comment obtenir par homogénéisation périodique la loi de Darcy à l'échelle macroscopique pour les milieux poreux partiellement saturés.

2.2.2 Cellule élémentaire et microstructure associée

Dans les premiers travaux concernant l'homogénéisation périodique, la complexité géométrique de la cellule élémentaire était un aspect souvent négligé [9][27][93]. C'était l'aspect mathématique et la pertinence de la méthode qui constituait le point central de ces travaux. Initialement, des cellules élémentaires extrêmement simples, parfaitement symétriques, étaient considérées, comme celle de la figure. 2.1.

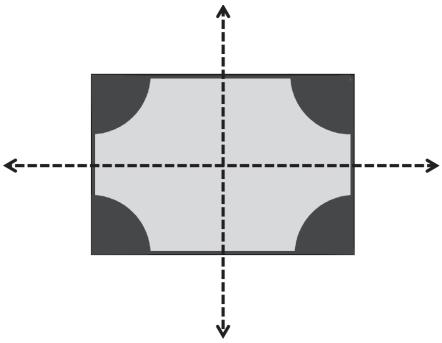


FIGURE 2.1 – Exemple de cellule élémentaire symétrique simple

En réalité, la cellule élémentaire constituant la microstructure du matériau, ne doit pas être nécessairement symétrique par rapport aux axes, ni d'ailleurs par rapport à l'origine. Par contre, afin d'assurer la périodicité des champs intervenant dans les équations, il est nécessaire qu'elle soit symétique en "entrée-sortie". Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut même physiquement rencontrer des problèmes de non percolation du matériau à microstructure périodique constituée à partir d'une telle cellule élémentaire. C'est l'exemple de la Fig. 2.2.

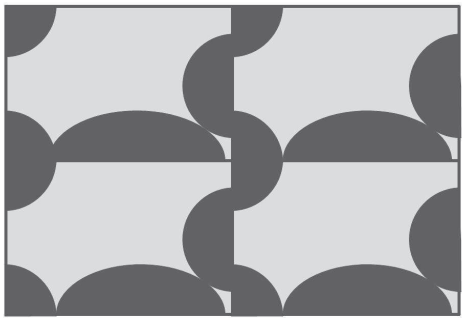


FIGURE 2.2 – Abscence de percolation pour des cellules non symétriques en entrée-sortie

Complexité de la cellule élémentaire

Maintenant, si l'on souhaite s'approcher au mieux de la microstructure réelle des matériaux poreux étudiés, il est nécessaire de considérer des cellules élémentaires relativement complexes, à condition qu'elles vérifient la condition géométrique de "symétrie en entrée-sortie". Considérons, pour exemple, la cellule élémentaire de la Fig. 2.3 constituant la microstructure du matériau étudié.



FIGURE 2.3 – Exemple de microstructure périodique

Si on répéte de façon périodique cette cellule, on obtient la microstructure représentée sur la Fig.2.4.

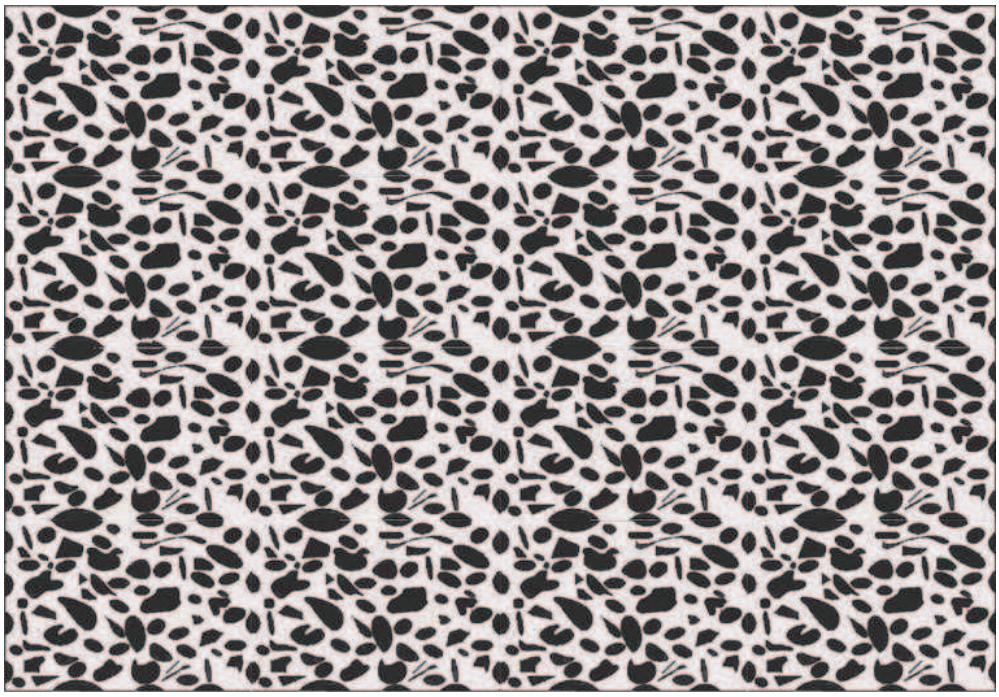


FIGURE 2.4 – Microstructure constituée de la répétition périodique de la cellule élémentaire de la Fig. 2.3

La figure 2.4 semble au premier abord posséder une microstructure aléatoire. Ainsi, plus la cellule élémentaire considérée sera complexe, plus on s'approchera de la microstructure réelle du milieu poreux étudié.

Séparation des échelles

Afin que le problème soit homogénéisable, il faut que les variables d'espace macroscopiques x^* et microscopiques y^* soient complètement indépendantes, ce qui revient à considérer la longueur caractéristique de la cellule élémentaire l beaucoup plus petite que la longueur caractéristique de la structure L :

$$l << L$$

C'est ce qu'on appelle *la condition d'homogénéisabilité* ou de séparation d'échelle. De façon équivalente, on introduit le paramètre de perturbation ε qui représente le rapport entre la taille caractéristique à l'échelle microscopique et la taille caractéristique à l'échelle macroscopique :

$$\varepsilon = \frac{l}{L}$$

La condition de séparation des échelles devient alors :

$$\varepsilon << 1$$

Choix des échelles

Il existe plusieurs façons de procéder à l'homogéisation périodique d'une équation d'équilibre ou de conservation (ou d'un système d'équations écrit à l'échelle microscopique). On peut, soit partir d'une formulation faible des équations écrite dans un cadre mathématique rigoureux (Sanchez Palencia [93], Bensoussan et al. [27], ...) et même démontrer ensuite certains résultats de convergence, soit partir d'une formulation locale des équations d'équilibre et utiliser une approache plus formelle. C'est cette deuxième approche qui sera utilisée ici. Elle repose sur une adimensionnalisation des équations d'équilibre en utilisant des grandeurs de référence [9][14][19][28][58][59]. Ensuite, les nombres sans dimension introduits doivent être reliés à ε, choisi comme paramètre de perturbation du problème, afin d'effectuer le développement asymptotique des équations. Cela peut se faire, soit de façon formelle en considérant a priori des relations de la forme $\mathscr{A} = \mathscr{O}(\varepsilon^p),\ p \in \mathbb{Z}$, où $\mathscr{A}$ est un nombre sans

dimension caractérisant le problème, soit en calculant précisément les valeurs des nombres sans dimension à partir des données du problème et en les reliant ensuite à ε^p. La valeur de ε est quant à elle fixée dès le départ par le choix des échelles microscopique et macroscopique, ou de façon équivalente par le choix de l'échelle l et de l'échelle L à laquelle on souhaite homogénéiser le problème.

Par exemple, si l'on désire comparer les résultats obtenus par homogénéisation à des résultats expérimentaux obtenus au laboratoire sur des éprouvettes en bétons, ou en pâte de ciment, de 1 cm d'épaisseur, on considérera que $L = 1$ cm correspond à l'échelle macroscopique. Le choix de la taille de la cellule élémentaire pourra être effecuté en se basant par exemple sur des courbes de porosimétrie à mercure (voir figure 2.5). Ces courbes montrent que le diamètre moyen des pores est de l'ordre de $0.1\mu m$ pour la pâte de ciment considérée. Ainsi, si

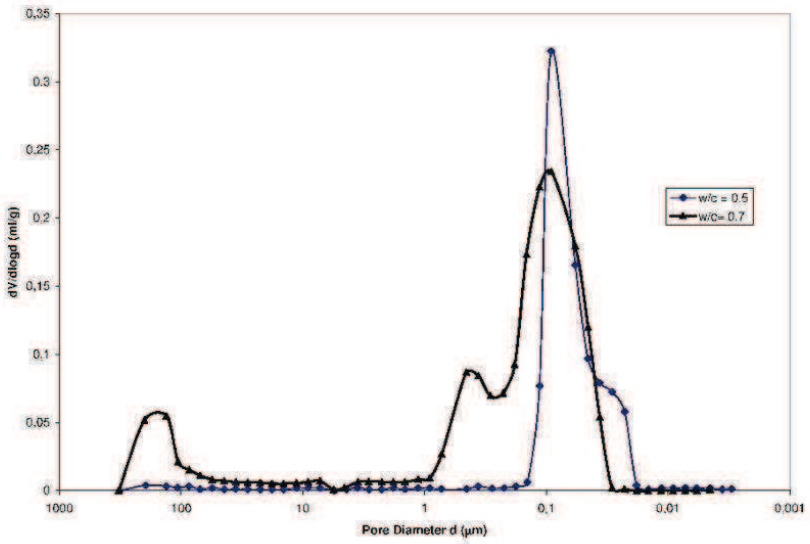


FIGURE 2.5 – Distribution de taille des pores d'une pâte de ciment

l'on désire saisir la physique et la géométrie de la microstructure à cette échelle, il convient de considérer une échelle microscopique l qui soit supérieure au diamètre moyen des pores pour que la cellule élémentaire soit représentative des hétérogénéités locales. Un choix de

$l = 10\ \mu m$, c'est-à-dire une centaine de fois le diamètre moyen des pores peut convenir. Avec cette façon de procéder, on en déduit une valeur de :

$$\varepsilon = \frac{l}{L} = 10^{-3} \tag{2.1}$$

Ensuite, les autres nombres sans dimension peuvent être reliés à $\varepsilon^p,\ p \in \mathbb{Z}$ par un calcul simple.

Remarque 2.1 *On aurait pu homogénéiser à une échelle plus petite en considérant* $l = 1\ \mu m$*, ou à une échelle plus grande avec* $l = 100\mu m$*. Dans ces cas là, on aurait des valeurs différentes du paramètre de perturbation* ε *(*10^{-4} *ou* 10^{-2}*).*

2.3 Etablissement de la loi de Darcy dans un milieu partiellement saturé

Le résultat de cette section est classique, le détail des calculs peut se trouver dans [14] et [16]. Les deux fluides (le liquide et le gaz) sont supposés être visqueux et newtoniens, et la matrice solide rigide indéformable. On va montrer, en utilisant la méthode d'homogénéisation périodique, que l'écoulement visqueux des deux fluides non miscibles est gouverné par des lois de Darcy couplées au niveau macroscopique.

Généralement, dans la littérature, la description macroscopique de l'écoulement simultané de deux fluides non miscibles à travers un milieu poreux est modélisé en utilisant la loi de Darcy pour chaque fluide, les deux pressions étant reliées l'une à l'autre par la pression capillaire P_c [50][76][97] :

$$P_c = P_g - P_l \tag{2.2}$$

où P_g est la pression du gaz et P_l celle du liquide. La pression capillaire P_c est généralement donnée par une relation de la forme :

$$P_c = P_c(\theta_l) \tag{2.3}$$

où θ_l est la teneur en eau. A cause de l'hystérésis capillaire (voir Fig. 1.2 page 9 du chapitre 1), différentes coubres $P_c = P_c(\theta_l)$ peuvent être obtenues, suivant que l'on est dans un cycle de séchage ou d'imbibition. La forme de la relation 2.3 est généralement postulée à partir des travaux expérimentaux, sans justification théorique précise [50].

On se propose, dans la suite de ce chapitre, de déterminer les équations macroscopiques

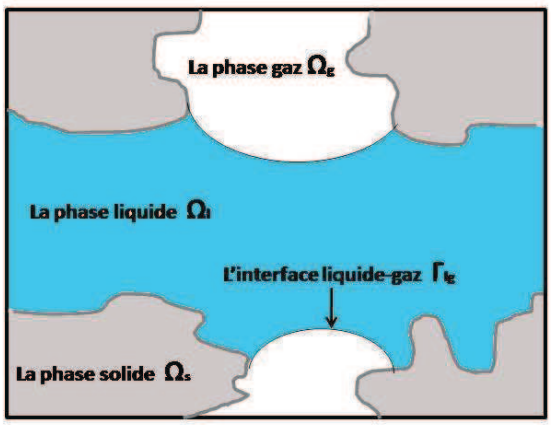


FIGURE 2.6 – Exemple de cellule élémentaire périodique dans un milieu poreux partiellement saturé

associées à l'écoulement diphasique de deux fluides non miscibles (un liquide et un gaz) en utilisant la méthode d'homogénéisation périodique [14][16].

2.3.1 Processus d'homogénéisation

On considère un milieu poreux rigide dont la microstrucutre est constituée de la répétition périodique d'une cellule élementaire de base. De façon classique, afin d'assurer la condition

de séparation d'échelle (condition d'homogénéisabilité), on suppose que :

$$\varepsilon = \frac{l}{L} << 1 \tag{2.4}$$

De plus, on suppose que les champs intervenant sont périodiques, ainsi que leurs dérivées. On introduit deux échelles d'espace définies par la variable lente x^* (variable macroscopique) et la variable rapide y^* (variable microscopique). Dans tout ce qui suit, les grandeurs avec $*$ désigneront des grandeurs dimensionnelles et les grandeurs sans $*$ des grandeurs adimensionnelles [1].

2.3.2 Description à l'échelle microscopique

On supposera par la suite que le milieu poreux est rigide, et que les deux fluides (l'eau et le gaz) sont visqueux, newtoniens et incompressibles. D'autre part, on supposera également que les effets d'inertie peuvent être négligés et que les deux fluides (liquide et gaz) sont en mouvement laminaire, permanent et isotherme. A l'échelle du pore, les nombres de Reynolds associés aux deux fluides sont supposés être petits, que l'on écrit :

$$R_{e_l} \leq O(\varepsilon), \quad R_{e_g} \leq O(\varepsilon) \tag{2.5}$$

où $\varepsilon = \frac{l}{L}$ est le paramètre de perturbation. On supposera enfin qu'il n'y a pas de transfert de masse entre les deux fluides, que les domaines Ω_l^* et Ω_g^* occupés par le liquide et le gaz sont connectés, et que l'interface Γ_{lg}^* se déplace lentement.
Ainsi, à l'échelle de la cellule élémentaire, le liquide est régi par l'équation de Stokes (écoulement laminaire incompressible) :

$$\begin{cases} \mu_l^* \Delta^* V_l^* = grad^* P_l^* \quad \text{dans} \quad \Omega_l^* \\ div\, V_l^* = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_l^* \end{cases} \tag{2.6}$$

La condition d'adhérence du liquide à la paroi solide est donnée par :

$$V_l^* = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls}^* \tag{2.7}$$

1. Notons que nous utiliserons dans cette thèse les mêmes notations que dans [29][66], alors que dans [16] les grandeurs avec $*$ désignent des grandeurs sans dimension et celle sans $*$ des grandeurs dimensionnelles.

où Γ_{ls}^* désigne l'interface liquide-solide dans la cellule élémentaire Ω^* . De façon similaire, l'équation de Stokes pour le gaz s'écrit :

$$\begin{cases} \mu_g^* \Delta V_g^* = grad^* P_g^* \quad \text{dans} \quad \Omega_g^* \\ div^* \, V_g^* = 0 \ \text{dans} \quad \Omega_g^* \end{cases} \tag{2.8}$$

La condition d'adhérence à la paroi solide s'écrit :

$$V_g^* = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs}^* \tag{2.9}$$

où Γ_{gs}^* désigne l'interface gaz-solide. Les conditions aux limites à l'interface liquide-gaz sont données par la continuité de la pression sur Γ_{lg}^* :

$$(\gamma_g^* - \gamma_l^*).n^* = P_c^*.n^* \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg}^* \tag{2.10}$$

où γ_l^* et γ_g^* désignent respectivement la contrainte du liquide et du gaz, P_c^* étant la pression capillaire, et n^* la normale unitaire à l'interface Γ_{lg}^*. Enfin, on suppose que Γ_{lg}^* se déplace lentement, ce que l'on traduit mathématiquement (voir [14][16]) par :

$$V_l^*.n^* = O(\varepsilon |V_l^*|) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg}^* \tag{2.11}$$

$$V_g^*.n^* = O(\varepsilon |V_g^*|) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg}^* \tag{2.12}$$

avec

$$V_l^*.n^* = V_g^*.n^* \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg}^* \tag{2.13}$$

2.3.3 Analyse dimensionnelle des équations

En suivant la procédure classique d'homogénisation périodique [9][19][73][74], on introduit les grandeurs adimensionnelles du problème :

$$\begin{aligned} y &= \frac{y^*}{l}, \quad x = \frac{x^*}{L}, \quad V_l = \frac{V_l^*}{V_l^r}, \quad V_g = \frac{V_g^*}{V_g^r}, \quad P_c = \frac{P_c^*}{P_c^r}, \quad P_l = \frac{P_l^*}{P_l^r} \\ P_g &= \frac{P_g^*}{P_g^r}, \quad \mu_l = \frac{\mu_l^*}{\mu_l^r}, \quad \mu_g = \frac{\mu_g^*}{\mu_g^r}, \quad \gamma_l = \frac{\gamma_l^*}{\gamma^r}, \quad \gamma_g = \frac{\gamma_g^*}{\gamma^r} \end{aligned} \tag{2.14}$$

où les variables indexées par r sont les variables de référence, et les nouvelles variables qui apparaissent (sans étoile) sont adimensionnelles. En introduisant ces variables adimensionnelles (2.14) dans les équations (2.6)-(2.13), on obtient le problème adimensionnel pour le liquide :

$$\begin{cases} \mu_l \Delta V_l = \mathscr{Q}_l \; grad \; P_l \quad \text{dans} \quad \Omega_l \\ div \; V_l = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_l \\ V_l = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \end{cases} \tag{2.15}$$

et de façon similaire pour le gaz :

$$\begin{cases} \mu_g \Delta V_g = \mathscr{Q}_g \; grad \; P_g \quad \text{dans} \quad \Omega_g \\ div \; V_g = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \\ V_g = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \end{cases} \tag{2.16}$$

Les conditions aux limites (2.10) à l'interface liquide-gaz deviennent :

$$(\gamma_g - \gamma_l).n = \mathscr{W} P_c.n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.17}$$

et les conditions (2.11)-(2.13) :

$$V_l.n = O(\varepsilon |V_l|) \tag{2.18}$$

$$V_g.n = O(\varepsilon |V_g|) \tag{2.19}$$

avec

$$V_l.n = V_g.n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.20}$$

Ainsi, l'analyse adimensionnelle a fait apparaître les nombres sans dimension suivants :

$$\mathscr{Q}_l = \frac{l P_l^r}{\mu_l^r V_l^r}, \qquad \mathscr{Q}_g = \frac{l P_g^r}{\mu_g^r V_g^r}, \qquad \mathscr{W} = \frac{P_c^r \, l}{\gamma_r} \tag{2.21}$$

qui peuvent être interprétés de la façon suivante :

- $\mathscr{Q}_l$ est le rapport du gradient de la pression liquide macroscopique $\frac{P_l^r}{L}$ sur les forces visqueuses du liquide au niveau microscopique $\frac{\mu_l^r V_l^r}{l^2}$ multiplié par le rapport des échelles $\frac{L}{l}$.

- $\mathscr{Q}_g$ est le rapport du gradient de la pression gazeuse macroscopique $\frac{P_g^r}{L}$ sur les forces visqueuses du gaz au niveau microscopique $\frac{\mu_g^r V_g^r}{l^2}$ multiplié par le rapport des échelles $\frac{L}{l}$.
- $\mathscr{W}$ est le nombre de Weber qui provient classiquement de l'adimensionnalisation de l'équation de Young-Laplace.

Réduction à un problème mono-échelle

Les nombres sans dimension doivent être maintenant reliés au paramètre de perturbation ε. En considérant que les écoulements du liquide et du gaz à l'échelle du pore sont dus à des gradients macroscopiques des pressions du liquide et du gaz qui vont équilibrer les forces visqueuses, on a :

$$\frac{P_l^r}{L} = \mathscr{O}(\frac{\mu_l^r V_l^r}{l^2}), \quad \frac{P_g^r}{L} = \mathscr{O}(\frac{\mu_g^r V_g^r}{l^2}) \tag{2.22}$$

ou de façon équivalente :

$$\mathscr{Q}_l = \mathscr{O}(\varepsilon^{-1}), \quad \mathscr{Q}_g = \mathscr{O}(\varepsilon^{-1}) \tag{2.23}$$

D'autre part, on supposera par la suite (voir [14][16]) que :

$$\mathscr{W} = O(1) \tag{2.24}$$

2.3.4 Developpement asymptotique des équations

En suivant la procédure classique d'homogénéisation périodique (Sanchez-Palencia [93], Auriault [14]), on cherche les inconnues V_l, P_l, V_g, P_g, P_c du problème comme des fonctions qui dépendent de la variable macroscopique x, de la variable microscopique y, et du temps t, où x et y sont considérés comme des variables indépendantes compte tenu de la condition de séparation des échelles $\varepsilon << 1$.

De plus, on suppose que les inconnues ρ_l, ρ_v et V_l du problème admettent un développement en série formelle par rapport au paramètre de perturabtaion ε :

$$\begin{aligned} V_l &= V_l^0(x,y) + \varepsilon V_l^1(x,y) + \varepsilon^2 V_l^2(x,y) + ... \\ P_l &= P_l^0(x,y) + \varepsilon P_l^1(x,y) + \varepsilon^2 P_l^2(x,y) + ... \\ V_g &= V_g^0(x,y) + \varepsilon V_g^1(x,y) + \varepsilon^2 V_g^2(x,y) + ... \\ P_g &= P_g^0(x,y) + \varepsilon P_g^1(x,y) + \varepsilon^2 P_g^2(x,y) + ... \\ P_c &= P_c^0(x,y) + \varepsilon P_c^1(x,y) + \varepsilon^2 P_c^2(x,y) + ... \end{aligned} \tag{2.25}$$

où V_l^i, V_g^i, P_l^i, P_g^i et P_c^i sont y-périodiques. Les opérateurs de dérivation, doivent aussi être considérés comme des dérivées composées de fonctions de plusieurs variables. Ainsi, en adoptant un point de vue microscopique [2], on a :

$$\begin{aligned} grad &= grad_y + \varepsilon\, grad_x = \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \\ div &= div_y + \varepsilon div_x \\ \Delta &= \Delta_y + 2\varepsilon\, (div_x(grad_y) + div_y(grad_x)) + \varepsilon^2 \Delta_x \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.3.5 Etablisssement de la loi de Darcy par la méthode d'homogénéisation périodique

Compte tenu tenu des ordres de grandeur (2.23)-(2.24) des nombres sans dimension, on obtient les équations de conservation suivantes :

- pour le liquide :

$$\begin{cases} \varepsilon\, \mu_l \Delta V_l = grad\, P_l \quad \text{dans} \quad \Omega_l \\ div\, V_l = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_l \\ V_l = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \end{cases} \tag{2.27}$$

2. Sinon, on aurait en adimensionnalisant les dérivées spatiales par rapport à L, $grad = \frac{1}{\varepsilon} grad_y + grad_x$ comme dans [14].

- pour le gaz :

$$\begin{cases} \varepsilon\ \mu_g \Delta V_g = \ grad\ P_g \quad \text{dans} \quad \Omega_g \\ div\ V_g = 0 \ \text{ dans} \quad \Omega_g \\ V_g = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \end{cases} \tag{2.28}$$

Les conditions aux limites à l'interface liquide-gaz sont données par :

$$(\gamma_g - \gamma_l).n = P_c.n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.29}$$

où γ_l et γ_g sont définis comme suit :

$$\gamma_l = -P_l\ I + \varepsilon \mu_l (grad_y\ V_l + \overline{grad_y}\ V_l) \tag{2.30}$$

$$\gamma_g = -P_g\ I + \varepsilon \mu_g (grad_y\ V_g + \overline{grad_y}\ V_g) \tag{2.31}$$

où la barre désigne l'opérateur transposé.

Finalement, les équations (2.18)-(2.20) demeurent inchangées :

$$V_l.n = O(\varepsilon |V_l|) \tag{2.32}$$

$$V_g.n = O(\varepsilon |V_g|) \tag{2.33}$$

$$V_l.n = V_g.n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.34}$$

En remplaçant V_l, V_g, P_l, P_g et P_c par leurs développements (2.25) dans les équations adimensionnelles, et en annulant les différents facteurs successifs des puissances de ε, on obtient des problèmes en cascades couplés $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \ldots$ qui correspondent respectivement à l'annulation des facteurs de $\varepsilon^0, \varepsilon^1, ..$

Résultat 2.1

Dans un milieu partiellement saturé, l'homogénéisation des équations de Stokes dans le liquide et dans le gaz conduit aux lois de Darcy généralisées :

$$< V_l^0 >_l \ = \ -\Lambda_{ll}\ grad_x\ P_l^0 - \Lambda_{gl}\ grad_x\ P_g^0 \tag{2.35}$$

$$< V_g^0 >_g \ = \ -\Lambda_{lg}\ grad_x\ P_l^0 - \Lambda_{gg}\ grad_x\ P_g^0 \tag{2.36}$$

avec

$$\Lambda_{ll} =< \lambda_{ll} >_l, \quad \Lambda_{gl} =< \lambda_{gl} >_l, \quad \Lambda_{lg} =< \lambda_{lg} >_g, \quad \Lambda_{gg} =< \lambda_{gg} >_g$$

où λ_{ll}, λ_{lg}, λ_{gg} *et* λ_{gl} *sont des tenseurs du second ordre*[3] *qui dépendent de la variable microscopique* y *. Les moyennes sur le domaine liquide et sur le domaine gaz sont définies par*

$$< . >_l = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega_l} . \, dy \qquad < . >_g = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega_g} . \, dy$$

Démonstration

Problème $\mathscr{P}_0$

L'annulation du facteur de ε^0 dans le système d'équations (2.27) conduit au problème $\mathscr{P}_0$ dans la phase liquide :

$$grad_y \, P_l^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_l \tag{2.37}$$

$$div_y V_l^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_l \tag{2.38}$$

$$V_l^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ls} \tag{2.39}$$

On déduit de (2.37) que :

$$P_l^0(x,y) = P_l^0(x) \tag{2.40}$$

De façon similaire, à partir de (2.28), on obtient dans la phase gazeuse que :

$$P_g^0(x,y) = P_g^0(x) \tag{2.41}$$

Enfin, compte tenu de (2.29)-(2.34), l'annulation des facteurs de ε^0 conduit au problème $\mathscr{P}_0$ sur l'interface liquide-gaz :

$$P_c^0 = P_g^0 - P_l^0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.42}$$

$$V_l^0.n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.43}$$

$$V_g^0.n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.44}$$

$$V_l^0.n = V_g^0.n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.45}$$

3. Appelés coefficients de Darcy.

La pression du gaz et la pression du liquide étant indépendantes de la variable microscopique y (voir (2.40) et (2.41)), on déduit de (2.42) que :

$$P_c^0 = P_g^0(x) - P_l^0(x) = P_c^0(x) \tag{2.46}$$

Problème $\mathscr{P}_1$

L'annulation du facteur de ε dans l'équation de Stokes adimensionnelle pour le liquide et pour le gaz conduit aux problèmes suivants :

$$\mu_l \, \Delta_y V_l^0 = grad_y \, P_l^1 + grad_x \, P_l^0 \quad \text{dans } \Omega_l \tag{2.47}$$

$$div_y V_l^1 + div_x V_l^0 = \quad \text{dans } \Omega_l \tag{2.48}$$

$$V_l^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ls} \tag{2.49}$$

$$\mu_g \, \Delta_y V_g^0 = grad_y \, P_g^1 + grad_x \, P_g^0 \quad \text{dans } \Omega_g \tag{2.50}$$

$$div_y V_g^1 + div_x V_g^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_g \tag{2.51}$$

$$V_g^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{gs} \tag{2.52}$$

L'annulation du facteur de ε dans les conditions aux limites sur l'interface liquide-gaz (2.32)-(2.34), conduit au problème $\mathscr{P}_1$:

$$(\gamma_g^1 - \gamma_l^1).n = P_c^1.n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.53}$$

$$V_l^1.n \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.54}$$

$$V_g^1.n \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.55}$$

$$V_l^1.n = V_g^1.n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{2.56}$$

Afin de passer à une formulation faible de ces problèmes, on introduit l'espace $\mathscr{V}$ des vecteurs $y-$périodiques, définis sur $\Omega_f = \Omega_l \cup \Omega_g$, de divergence nulle, qui s'annulent sur la paroi solide Γ_{ls}, continus sur Γ_{lg}, de flux nul [4] sur l'interface liquide-gaz Γ_{lg}. Le produit scalaire

4. C'est à dire vérifiant $v.n = 0$ pour $v \in \mathscr{V}$ sur l'interface liquide-gaz Γ_{lg} d'après les conditions aux limites (2.43)-(2.44).

associé sur $\mathscr{V}$ s'écrit :

$$(u,v) = \int_{\Omega_f} \mu \;\; Tr(\; grad_y \, u \;\; grad_y \, v \;) \;\; dy \qquad \forall \, (u,v) \in \; \mathscr{V} \times \mathscr{V} \tag{2.57}$$

où Tr désigne l'opérateur trace, et $\mu = \mu_l$ pour le liquide ($\mu = \mu_g$ pour le gaz).

Maintenant réécrivons l'équation (2.47) sous la forme :

$$div_y \; \gamma_l^1 = grad_x \; P_l^0 \tag{2.58}$$

En faisant le produit scalaire de (2.58) par $v \in \mathscr{V}$ et en intégrant sur Ω_l, on obtient :

$$\int_{\Omega_l} div_y \gamma_l^1 \,.\, v \; dy = \int_{\Omega_l} grad_x \; P_l^0 \,.\, v \; dy \tag{2.59}$$

Or, on a :

$$\int_{\Omega_l} div_y \gamma_l^1 \,.\, v \; dy = \int_{\Omega_l} div_y (\gamma_l^1 v) \; dy - \int_{\Omega_l} Tr(\gamma_l^1 \; grad_y \; v) \; dy \tag{2.60}$$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} div_y \gamma_l^1 \,.\, v \; dy \;\; &= \;\; \int_{\Gamma_{ls}} (\gamma_l^1 \;\; v).n \; dy + \int_{\Gamma_{lg}} (\gamma_l^1 \;\; v).n \; dy + \int_{\Gamma_{ll}} (\gamma_l^1 v).n \; dy + \int_{\Omega_l} P_l^1 \, div_y(v) \; dy \\ &- \;\; \int_{\Omega_l} \mu_l Tr(grad_y \; V_l^0 \; grad_y \; v) \; dy \qquad \forall \; v \in \mathscr{V} \end{aligned} \tag{2.61}$$

Le premier terme du second membre de (2.61) s'annule à cause de la condition aux limites sur Γ_{ls}, le troisième terme s'annule pour des raisons de périodicité, alors que le quatrième terme s'annule par la condition de divergence nulle. Ainsi on obtient :

$$\int_{\Omega_l} div_y \gamma_l^1 \,.\, v \; dy = \int_{\Gamma_{lg}} (\gamma_l^1 \; n) \,.\, v \; dy - \int_{\Omega_l} \mu_l Tr(grad_y \; V_l^0 \; grad_y \; v) \; dy \qquad \forall \; v \in \mathscr{V} \tag{2.62}$$

En procédant de la même manière que pour l'équation (2.62), l'équation (2.50) peut se mettre sous la forme équivalente [5] :

$$\int_{\Omega_g} div_y \gamma_g^1 \,.\, v \; dy = - \int_{\Gamma_{lg}} (\gamma_g^1 \; n) \,.\, v \; dy - \int_{\Omega_g} \mu_g Tr(grad_y \; V_g^0 \;\; grad_y \; v) \; dy \qquad \forall \; v \in \mathscr{V} \tag{2.63}$$

Pour finir, on additionne les deux équations (2.62) et (2.63) membre à membre. En utilisant le fait que :

$$\int_{\Gamma_{lg}} [(\gamma_l^1 - \gamma_g^1)n] \,.\, v \; d\Gamma = \int_{\Gamma_{lg}} P_c^1 \; v \; .n \; d\Gamma = 0 \tag{2.64}$$

5. On a utilisé le fait que $\int_{\Gamma_{lg}} u.n \; dy = - \int_{\Gamma_{gl}} u.n \; dy$, à cause de l'orientation opposée de la normale, u étant un champ de vecteurs quelconque.

d'après (2.53) et la définition de l'espace $\mathscr{V}$, on obtient la forme variationnelle équivalente suivante :

$$\forall\, v \in \mathscr{V} \quad \int_{\Omega_l} \mu_l Tr(grad_y V_l^0\ grad_y v)\ dy + \int_{\Omega_g} \mu_g Tr(grad_y V_g^0\ grad_y v) dy \quad = \quad - \int_{\Omega_l} grad_x P_l^0 .\ v\ dy - \int_{\Omega_g} grad_x P_g^0 .\ v\ dy \tag{2.65}$$

L'équation (2.65) peut se réécrire sous la forme monolitique suivante :

$$\forall\, v \in \mathscr{V} \quad \int_{\Omega_f} \mu_\alpha Tr(grad_y V_\alpha^0\ grad_y v)\ dy = - \int_{\Omega_f} grad_x P_\alpha^0 .\ v\ dy \tag{2.66}$$

où $\Omega_f = \Omega_l \cup \Omega_g$, et $\alpha = l$ dans Ω_l ($\alpha = g$ dans Ω_g respectivement). La formulation (2.66) assure l'unicité de la solution V_α^0, avec :

$$V_\alpha^0 = \begin{cases} V_l^0\ dans\ \ \Omega_l \\ V_g^0\ dans\ \ \Omega_g \end{cases} \tag{2.67}$$

Le problème étant linéaire, la solution générale de (2.66) est donnée par :

$$V_l^0 = -\lambda_{ll}\ grad_x\ P_l^0 - \lambda_{gl}\ grad_x\ P_g^0 \tag{2.68}$$

$$V_g^0 = -\lambda_{lg}\ grad_x\ P_l^0 - \lambda_{gg}\ grad_x\ P_g^0 \tag{2.69}$$

où $\lambda_{ll}, \lambda_{gl}, \lambda_{lg}, \lambda_{gg}$ sont des tenseurs de second ordre qui dépendent de la variable microscopique y, solutions de problèmes locaux dont on trouvera le détail dans [14][16].

Finalement, en moyennant (2.68) sur le domaine liquide Ω_l et (2.69) sur Ω_g, on obtient la description macroscopique équivalente de l'écoulement du fluide dans un milieu poreux :

$$< V_l^0 >_l = -\Lambda_{ll}\ grad_x\ P_l^0 - \Lambda_{gl}\ grad_x\ P_g^0 \tag{2.70}$$

$$< V_g^0 >_g = -\Lambda_{lg}\ grad_x\ P_l^0 - \Lambda_{gg}\ grad_x\ P_g^0 \tag{2.71}$$

avec :

$$\Lambda_{ll} = <\ \lambda_{ll}\ >_l, \quad \Lambda_{gl} = <\ \lambda_{gl}\ >_l, \quad \Lambda_{lg} = <\ \lambda_{lg}\ >_g, \quad \Lambda_{gg} = <\ \lambda_{gg}\ >_g$$

Les équations (2.70)-(2.71) correspondent à la loi de Darcy généralisée dans un milieu poreux partiellement saturé.

On rappelle que les moyennes sur le domaine liquide et sur le domaine gazeux sont données respectivement par :

$$<\ .\ >_l = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_l} .\ dy \qquad <\ .\ >_g = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_g} .\ dy$$

Remarque 2.2

On peut montrer que les deux tenseurs Λ_{ll} et Λ_{gg} sont symétriques, et que les tenseurs de couplage Λ_{lg} et Λ_{gl} sont négligeables si on est dans les cas suivants :

- *La surface Γ_{lg} est petite (ou inexistante dans le cas limite des milieux complètement saturés).*
- *L'interface Γ_{lg} peut être considérée comme une surface rigide, tel que sur Γ_{lg}, $V_l = V_g = 0$.*

2.3.6 Simplification de la loi de Darcy généralisée dans la phase liquide

On a établi dans la section précédente la loi de Darcy généralisée dans un milieu partiellement saturé qui s'écrit :

$$< V_l^0 >_l = -\Lambda_{ll}\ grad_x\ P_l^0 - \Lambda_{gl}\ grad_x\ P_g^0 \tag{2.72}$$

Une hypothèse souvent admise dans la littérature [24][81] consiste à supposer que la pression du gaz est quasiment uniforme à tout instant et égale à la pession atmosphérique. La loi de Darcy dans le liquide (2.72) devient alors :

$$< V_l^0 >_l = -\Lambda_{ll}\ grad_x\ P_l^0 \tag{2.73}$$

D'autre part, expérimentalement, de nombreux auteurs [105] s'accordent à dire que la relation :

$$\Lambda_{ll} = \frac{K_{rl}(\theta_l)\ K_l}{\mu_l} \tag{2.74}$$

est une bonne approximation de Λ_{ll}, où $K_{rl}(\theta_l)$ est la perméabilité relative de la phase liquide qui dépend de la teneur volumique en eau $\theta_l = \frac{|\Omega_l|}{|\Omega|}$, K_l la perméabilité intrinsèque du matériaux et μ_l la viscosité du liquide.

De plus, le fait que la pression du gaz soit supposée constante, en utilisant la relation (2.42), on a :

$$grad_x\ P_l^0 = grad_x\ (P_g^0 - P_c^0) = -grad_x\ P_c^0 \tag{2.75}$$

En remplaçant (2.74) et (2.75) dans (2.73), on obtient la relation suivante reliant la vitesse moyenne du liquide au gradient macroscopique de la pression capillaire :

$$< V_l^0 >_l = \frac{K_{rl}(\theta_l)\, K_l}{\mu_l}\, grad_x\, P_c^0 \tag{2.76}$$

La relation (2.76) constitue une simplification de Loi de Darcy généralisée pour le transport de l'eau liquide dans le cas où la pression du gaz est supposée constante.

2.4 Conclusion

Ce deuxième chapitre a été consacré à la présentation et à la mise en oeuvre de la méthode d'homogénéisation périodique dans le cas d'un écoulement de Stokes pour deux fluides non miscibles (dans un milieu poreux partiellement saturé). L'approche choisie repose sur une adimensionnalisation des équations d'équilibre écrites sous forme locale, de façon à faire apparaître des nombres sans dimension gouvernant le problème. Ensuite, le développement asymptotique des équations conduit au modèle macroscopique homogénéisé recherché. L'exemple présenté, qui reprend les travaux de Auriault [14][16], illustre le fait que la description macroscopique peut être complètement différente de la description à l'échelle locale. L'équation de Darcy généralisée, qui a été retrouvée par homogénéisation périodique, va nous être utile pour relier la vitesse de l'eau liquide à la variation de la pression capillaire dans les différents modèles de transfert hydrique dans les milieux partiellement saturés qui seront obtenus au chapitre 3.

Chapitre 3

Transfert hydrique dans les milieux poreux partiellement saturés

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des transferts hydriques dans les milieux poreux, en particulier dans les matériaux cimentaires. Nous nous focaliserons sur l'obtention de modèles de transfert homogénéisés valables au niveau du VER ou du matériau, à partir des équations de transfert écrites au niveau local ou microscopique. La méthode d'homogénéisation adoptée est la méthode d'homogénéisation périodique présentée au chapitre 2. Elle permettra d'obtenir les équations homogénéisées macroscopiques contenant de façon explicite les paramètres de transfert, comme le coefficient de diffusion hydrique homogénéisé.

Dans la section 3.2, nous commençons par présenter les équations de transfert de l'eau liquide et de vapeur d'eau à l'échelle microscopique pour un milieu poreux partiellement saturé. On suppose, pour simplifier le problème, qu'il n'y a pas de liquide contenu dans la phase solide. Notre développement ne tiendra donc pas compte ici de ce que certains auteurs appellent "humidité au bord" [61]. La section 3.3 est consacrée à l'homogénéisation périodique des

équations de transfert hydrique présentées à la section 3.2. Une analyse dimensionnelle de ces équations permet de mettre en évidence les nombres sans dimensions caractérisant le problème. Ensuite, de façon classique [15][19][48][49][66][68], on se ramène à un problème mono-échelle où le paramètre ε (rapport entre les échelles microscopique et macroscopique) est choisi comme le paramètre de perturbation principal du problème. Cette réduction à un problème mono-échelle nous conduira naturellement à distinguer trois régimes de transfert hydrique :

- un régime de transfert hydrique de vapeur d'eau, correspondant à un tranfert pour des humidités relatives faibles,
- un régime de transfert hydrique sous ses deux formes liquide et vapeur, correspondant à un tranfert pour des humidités relatives intermédiaires,
- un régime de transfert hydrique de l'eau liquide, correspondant à un tranfert pour des humidités relatives élevées.

Pour des humidités relatives faibles, on montre que le développement asymptotique des équations de transfert hydrique conduit à un modèle macroscopique homogénéisé de diffusion de vapeur uniquement. Pour des humidités relatives intermédiaires, on obtient un modèle homogénéisé de transfert hydrique couplant la diffusion de vapeur d'eau et la convection de l'eau liquide aux mêmes ordres de grandeurs. Enfin, pour des humidités relatives élevées, on abtient un modèle macroscopique homogénéisé de convection pure de l'eau liquide.
Dans les trois cas, on obtient une expression semi-explicite du tenseur de diffusion hydrique homogénéisé qui diffère selon le régime de tranfert hydrique, et qui dépend de la géométrie de la microstructure du matériau.

3.2 Hypothèses de la modélisation

Le milieu poreux est supposé constitué de trois phases : une phase solide Ω_s^*, une phase liquide Ω_l^* et une phase gazeuse Ω_g^*. Les principales hypothèses de travail sont les suivantes :

– la phase solide est indéformable et non réactive : les surpressions capillaires dues à la déformation du squelette solide ainsi que les modification structurales et les termes puits dus aux réactions chimiques sont négligés,
– les différentes phases en présence sont supposées en équilibre thermique et les transferts de masse se font dans des conditions isothermes,
– la phase liquide est constituée uniquement d'eau pure : les constantes thermophysiques sont celles de l'eau pure,
– la phase gazeuse est constituée d'air sec et de vapeur d'eau. Sa pression totale est égale à la pression atmosphérique : on néglige le mouvement de masse dû à un gradient de pression totale,
– l'air est considéré comme un composant inerte, qui n'est suceptible ni de se condenser sur la matrice poreuse, ni d'interagir avec la phase condensée,
– le passage d'un état liquide ou gazeux à un état solide n'est pas possible : on néglige les phénomènes de changement de phase, qui peuvent avoir lieu dans les phases gel/dégel,
– les fluides composant le milieu poreux sont incompressibles,
– les effets de gravité sont négligeables devant les autres modes de transfert.

3.3 Equations de transport dans les milieux poreux partiellement saturés

Dans un milieu poreux partiellement saturé, on s'intéresse généralement à la modélisation de la teneur en humidité en fonction de l'espace et du temps. Cette quantité va être déterminée par homogénéisation périodique, à partir des équations de continuité de l'eau liquide et de vapeur d'eau avec les conditions aux limites associées.
Dans tout ce qui suit, les variables indexées par $(*)$ désigneront les variables dimensionnelles, et celles sans étoile les variables adimensionnelles. De plus, $grad^*$ et div^* désigneront respectivement le gradient et la divergence par rapport aux variables dimensionnelles.

3.3.1 Equation de transport de l'eau liquide

L'équation de continuité de l'eau liquide dans la phase liquide Ω_l^* est donnée classiquement par [55][91][104] :

$$\frac{\partial^* \rho_l^*}{\partial t^*} + div^*(\rho_l^* V_l^*) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_l^* \tag{3.1}$$

où ρ_l^* est la densité volumique de l'eau liquide occupant le domaine Ω_l^*, et V_l^* la vitesse de convection associée.
L'interface liquide-solide Γ_{ls}^* est considérée comme une surface passive. La condition aux limites sur Γ_{ls}^* associée à l'équation (3.1) s'écrit alors [75][106] :

$$V_l^*.n_{ls}^* = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls}^* \tag{3.2}$$

où n_{ls}^* est le vecteur unitaire normal dirigé du domaine liquide Ω_l^* vers le domaine solide Ω_s^*.

D'autre part, rappelons la relation de moyenne suivante qui va être utilisée dans les développements ultérieurs [21][25] :

$$< \frac{\partial^* \rho_l^*}{\partial t^*} >_l = \frac{\partial^*}{\partial t^*}(< \rho_l^* >_l) - \frac{1}{|\Omega^*|}\int_{\Gamma_{lg}^*} \rho_l^* \ \omega_{lg}^*.n_{lg}^* d\Gamma^* - \frac{1}{|\Omega^*|}\int_{\Gamma_{ls}^*} \rho_l^* \ \omega_{ls}^*.n_{ls}^* d\Gamma^*$$

où n_{lg}^* désigne le vecteur unitaire normal dirigé du domaine liquide Ω_l^* vers le domaine gazeux Ω_g^* et ω_{lg}^* (respectivement ω_{ls}^*) la vitesse de l'interface liquide-gaz (respectivement la vitesse de l'interface liquide-solide).

On suppose que les déformations de la matrice solide sont négligeables. On a alors $\omega_{ls}^* = 0$ et le dernier terme de l'équation (3.3) s'annule. Finalement, on obtient :

$$< \frac{\partial^* \rho_l^*}{\partial t^*} >_l = \frac{\partial^*}{\partial t^*}(< \rho_l^* >_l) - \frac{1}{|\Omega^*|}\int_{\Gamma_{lg}^*} \rho_l^* \ \omega_{lg}^*.n_{lg}^* d\Gamma^* \tag{3.3}$$

3.3.2 Equation de transport de vapeur d'eau

On considère la phase gazeuse comme un système composé de vapeur d'eau et d'air (système à deux phases). Afin de simplifier le problème, comme on a supposé que la pression du gaz est uniforme dans la phase gazeuse, le mouvement de l'air peut être négligé au sein de la phase gazeuse. Par conséquence, il n'y a pas de transport convectif de vapeur d'eau au sein du matériau [91]. D'autre part, on néglige également la contribution de la gravité lors du transport de la vapeur d'eau.
L'équation de continuité de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse occupant le domaine Ω_g^* s'écrit [91][104] :

$$\frac{\partial^* \rho_v^*}{\partial t^*} + div^*(\rho_v^* V_v^*) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g^* \tag{3.4}$$

où ρ_v^* est la densité volumique de vapeur d'eau et V_v^* sa vitesse.

Une autre manière d'écrire l'équation de continuité de la vapeur d'eau est de considérer le mouvement de cette dernière comme résultat de son agitation thermique (et donc d'un processus de diffusion). Selon Daian [54], le flux de vapeur d'eau dans ce cas est donné par :

$$\rho_v^* \, V_v^* = -D_v^* \, grad^* \rho_v^* \quad \text{sur} \quad \Omega_g^* \tag{3.5}$$

où D_v^* est le coefficient de diffusion de vapeur d'eau dans l'air libre. En combinant la dernière relation (3.5) à l'équation (3.4), on obtient une nouvelle équation de transport de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse :

$$\frac{\partial^* \rho_v^*}{\partial t^*} - div^*(D_v^* \, grad^* \, \rho_v^*) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g^* \tag{3.6}$$

qui peut être considérée comme une équation de diffusion par rapport à ρ_v^*.

L'interface solide-gaz Γ_{gs}^* étant considérée comme une interface passive, la condition aux limites associée à l'équation (3.6) s'écrit alors [106] :

$$D_v^* \, grad^* \rho_v^* . n_{gs}^* \quad = \quad 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs}^* \tag{3.7}$$

où n^*_{gs} désigne le vecteur unitaire normal dirigé du domaine gazeux Ω^*_g vers le domaine solide Ω^*_s.

Remarque 3.1 *La condition aux limites de type Neumann (3.7) signifie qu'il n'y a pas d'échange de vapeur d'eau entre les phases gazeuse et solide. Les conditions aux limites à l'interface liquide-gaz vont être spécifiées dans la section suivante.*

Finalement, de la même manière que dans la phase liquide, on définit la moyenne temporelle dans la phase gazeuse comme suit [21][25] :

$$< \frac{\partial^* \rho^*_v}{\partial t^*} >_g = \frac{\partial^*}{\partial t^*}(< \rho^*_v >_g) - \frac{1}{|\Omega^*|}\int_{\Gamma^*_{gl}} \rho^*_v \ \omega^*_{gl}.n^*_{lg} d\Gamma^* \tag{3.8}$$

3.3.3 Equation de transport d'humidité sous ses deux formes

Jusqu'à maintenant, on a traité les équations de continuité de l'eau liquide et de la vapeur d'eau séparemment. Afin d'obtenir une description complète du transport d'humidité sous ses deux formes (eau liquide et vapeur d'eau) à l'échelle microscopique, on additionne les deux équations (3.1) et (3.6). On obtient alors :

$$\frac{\partial^* \rho^*_l}{\partial t^*} + \frac{\partial^* \rho^*_v}{\partial t^*} - div^*(D^*_v \ grad^* \ \rho^*_v) + div^*(\rho^*_l V^*_l) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^*_f \tag{3.9}$$

où $\Omega^*_f = \Omega^*_l$ dans l'eau liquide, $\Omega^*_f = \Omega^*_g$ dans la vapeur d'eau, et $\rho^*_v = 0$ (respectivement $\rho^*_l = 0$) dans Ω^*_l (respectivement dans Ω^*_g). On appellera par la suite cette équation "équation de transport d'humidité".

Remarque 3.2 *La relation (3.9) va nous permettre de garder le couplage qui peut exister entre la phase liquide et la phase vapeur lors du développement asymptotique des équations.*

3.3.4 Les conditions aux limites à l'interface liquide-gaz

Les conditions aux limites à l'interface liquide-gaz Γ^*_{lg} sont plus compliquées que celle à l'interface liquide-solide Γ^*_{ls} ou à l'interface solide-gaz Γ^*_{gs}.
Selon la région où l'on se trouve (région hygroscopique ou super-hygroscopique), on va considérer une condition aux limites plutôt qu'une autre.
Dans la région hygroscopique, où l'on a une faible humidité relative, on écrit comme condition aux limites une relation reliant le flux à la vitesse d'évaporation-condensation (similaire à (3.5)) :

$$-D^*_v \, grad^* \rho^*_v . n^*_{gl} = \rho^*_v \, V^*_v . n^*_{gl} \qquad \text{sur} \qquad \Gamma^*_{lg} \tag{3.10}$$

Dans la région super-hygroscopique, on a de fortes humidités relatives (plus que 95 %) et l'eau liquide occupe la majorité de l'espace des pores. Dans ce cas, on va considérer que la densité de vapeur d'eau est égale à la densité de vapeur d'eau à l'équilibre $\rho_v^{eq^*}$ sur l'interface liquide-gaz [72] :

$$\rho^*_v = \rho_v^{eq^*} \qquad \text{sur} \qquad \Gamma^*_{lg} \tag{3.11}$$

On supposera ici que la densité de vapeur à l'équilibre $\rho_v^{eq^*}$ est une constante locale (à l'échelle microscopique), mais qui peut varier à l'échelle macroscopique à cause de la variation de température.

Remarque 3.3 *On va voir qu'à la suite du processus d'homogénéisation, la condition aux limites* (3.11) *va nous permettre, dans la région super-hygroscopique, de modéliser le phénomène de "condensation capillaire" lié au transport de vapeur.*

D'autre part, dans les deux régions (hygroscopique et super-hygroscopique), on écrit l'équation de continuité à l'interface liquide-gaz associée aux équations (3.1) et (3.4) (lorsque l'adsorption et les réactions chimiques sont négligées) [106] :

$$\rho^*_l (V^*_l - \omega^*_{lg}) . n^*_{lg} = \rho^*_v (V^*_v - \omega^*_{gl}) . n^*_{lg} \qquad \text{sur} \qquad \Gamma^*_{lg} \tag{3.12}$$

Maintenant, en remplaçant (3.10) dans (3.12), on obtient la nouvelle relation à l'interface liquide-gaz Γ^*_{lg} :

$$(\rho_l^* V_l^* - \rho_l^* \ \omega_{lg}^*).n_{lg}^* = (D_v^* grad^* \rho_v^* + \rho_v^* \ \omega_{gl}^*).n_{gl}^* \tag{3.13}$$

où l'on a utilisé le fait que $n_{lg}^* = -n_{gl}^*$. La condition aux limites (3.13) représente la continuité du flux à l'interface liquide-gaz Γ^*_{lg}. Elle va nous permettre, à la fin du processus d'homogénéisation de vérifier la consistance physique des modèles obtenus.

On rappelle les relations de moyenne suivantes qui vont être utilisées par la suite :

$$< . >_\alpha = \frac{1}{|\Omega^*|} \int_{\Omega_\alpha^*} . \ d\Omega^*, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = f, l, g \tag{3.14}$$

En outre, comme les champs associés à la phase liquide s'annulent dans la phase gazeuse, et ceux associés à la partie gazeuse s'annulent dans la phase liquide, on a :

$$\begin{aligned} < \xi_l >_f &= < \xi_l >_l, \quad \text{lorsque} \quad \xi_l \ \text{est un champs défini dans le liquide} \\ < \xi_g >_f &= < \xi_g >_g, \quad \text{lorsque} \quad \xi_g \ \text{est un champ défini dans le gaz} \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.4 Homogénéisation périodique des équations de transfert hydrique

3.4.1 Description de la microstructure périodique

La méthode d'homogénéisation périodique repose sur l'hypothèse suivant laquelle la microstructure du matériau peut être représentée par la répétition d'une cellule élémentaire périodique, dont la taille et la complexité dépendent du matériau considéré. Même si cette hypothèse n'est jamais vérifiée exactement, pour des cellules élémentaires suffisamment complexes, elle peut être considérée comme une bonne approximation de la microstructure réelle du matériau. La taille de la cellule élémentaire doit être suffisamment grande par rapport aux

longueurs caractéristiques des hétérogénéités du matériau afin d'avoir une bonne représentativité de la microstructure. On suppose, dans tout ce qui suit, que la taille l de la cellule élémentaire est très petite devant la longueur caractéristique L du matériau considéré (échantillon de pâte de ciment par exemple). Comme on l'a vu au chapitre 2, c'est une condition d'homogénéisabilité du problème. On définit alors le paramètre de perturbation ε qui vérifie :

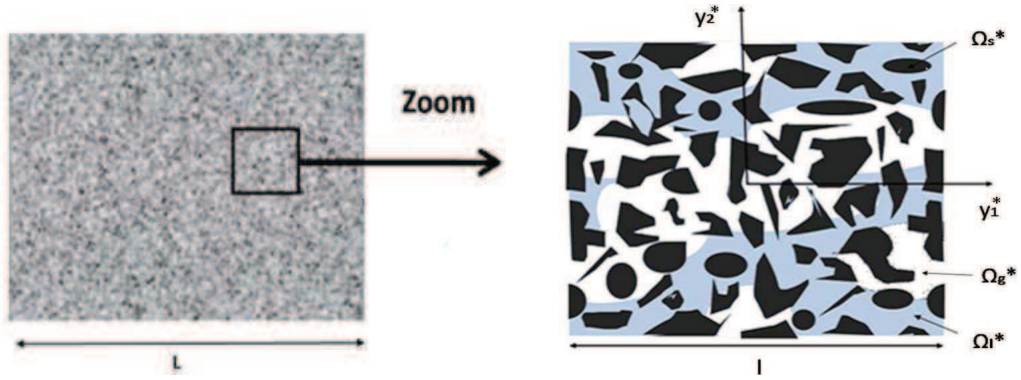
$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1 \tag{3.16}$$

Considérons un milieu poreux S^* (Fig. 3.1(a)) dont la microstructure périodique est constituée de la répétition de la cellule élémentaire de la Fig. 3.1(b). Soit $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ la variable d'espace du milieu occupant le domaine S^* à l'échelle macroscopique, et $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ la variable d'espace de la cellule élementaire à l'échelle microscopique.
La cellule élementaire est définie par $\Omega^* = \Omega_l^* \cup \Omega_g^* \cup \Omega_s^*$. La frontière Γ_l^* de Ω_l^* est constituée de la frontière Γ_{ls}^* entre la phase liquide Ω_l^* et solide Ω_s^*, de la frontière Γ_{lg}^* entre la phase liquide Ω_l^* et gazeuse Ω_g^*, et de la frontière Γ_{ll}^* entre phases liquides de deux cellules élémentaires voisines. La frontière Γ_g^* de Ω_g^* est constituée de la frontière Γ_{gs}^* entre la phase gazeuse Ω_g^* et solide Ω_s^*, de la frontière Γ_{gl}^* entre la phase gazeuse Ω_g^* et liquide Ω_l^*, et de la frontière Γ_{gg}^* entre phases gazeuses de deux cellules élémentaires voisines.

D'autre part, rappelons que la méthode d'homogénéisation périodique repose sur l'hypothèse de périodicité des différents champs intervenant dans les équations (densité de l'eau liquide et de la vapeur d'eau, vitesse de l'eau liquide, ...) et de leurs dérivées sur la cellule élémentaire de base, dont la répétition constitue la microstructure périodique.

3.4.2 Analyse dimensionnelle des équations de transfert hydrique

Dans ce qui suit, on adoptera un "point de vue microscopique", c'est-à-dire que les variables d'espace ($grad^*$ et div^*) seront dans un premier temps adimensionalisées par rapport



(a) Echantillon du milieun poreux considéré

(b) Exemple d'une microstructure périodique partiellement saturé

FIGURE 3.1 – Modélisation du matériau hétérogène par une microstructure périodique

à l [9][19][48][49][66][67][68]. Définisons les grandeurs de référence et les grandeurs adimenssionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} y &= \frac{y^*}{l}, \quad x = \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{t^*}{T_r}, \quad \rho_l = \frac{\rho_l^*}{\rho_r^l}, \quad \rho_v = \frac{\rho_v^*}{\rho_r^v} \\ D_v &= \frac{D_v^*}{D_v^r}, \quad V_l = \frac{V_l^*}{V_l^r}, \quad V_v = \frac{V_v^*}{V_v^r}, \quad \omega_{lg} = \frac{\omega_{lg}^*}{\omega_{lg}^r} \end{aligned} \tag{3.17}$$

où les variables indexées par "r" sont les variables de référence et les nouvelles variables (sans étoile) qui apparaissent sont les variables adimensionnelles.

L'adimensionnalisation des équations (3.1)(3.2)(3.6)(3.7)(3.10)(3.11) et (3.13) conduit aux équations adimensionnelles suivantes caractérisant le tranport de l'eau liquide dans la phase liquide Ω_l :

$$\tau_l \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + div\,(\,\rho_l\, V_l\,) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_l \tag{3.18}$$

et le tranport de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse Ω_g :

$$\tau_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t} - div\,(\,D_v\, grad\rho_v\,) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{3.19}$$

L'équation de transfert d'humidité sous ses deux formes (liquide et vapeur) devient alors [1] :

$$\psi_l \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \tau_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t} - div\,(\,D_v\, grad\rho_v\,) + div\,(\,\lambda\ \rho_l\, V_l\,) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \tag{3.20}$$

1. L'adimensionnalisation de l'équation de transport d'humidité sous ses deux formes (3.9) permettra de conserver le couplage entre le liquide et la vapeur dans l'équation d'équilibre (3.20) au cours du développement asymptotique, lorsque les phénomènes (diffusion de vapeur, convection du liquide) ne sont pas du même ordre de grandeur. Notons que ce couplage est présent dans la condition de continuité (3.25).

Les conditions aux limites associées sur Γ_{ls} et Γ_{gs} sont données par :

$$V_l.n_{ls} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \tag{3.21}$$

$$D_v\ grad\ \rho_v.n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{3.22}$$

La condition aux limites sur Γ_{lg} dans la région hygroscopique s'écrit :

$$-D_v\ grad\rho_v.n_{gl} = \gamma\ \rho_v\ V_v.n_{gl} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.23}$$

alors que, dans la région super-hygroscopique, elle est donnée par :

$$\rho_v = \rho_v^{eq} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.24}$$

Enfin, la condition de continuité du flux (3.13) sur Γ_{lg} s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$(\ \lambda\ \rho_l\ V_l - \ \zeta\ \rho_l\ \omega_{lg}\ ).n_{lg} = (\ D_v\ grad\rho_v + \ \delta\ \rho_v\ \omega_{gl}\ ).n_{gl} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.25}$$

Ainsi, l'analyse dimensionnelle des équations de transport de l'eau liquide et de la vapeur d'eau fait apparaître naturellement les nombres sans dimension suivants, caractérisant le transfert hydrique dans les milieux poreux partiellement saturés :

$$\begin{aligned} \tau_v &= \frac{l^2}{D_v^r\ T^r}, \qquad \tau_l = \frac{l}{V_l^r\ T^r}, \qquad \psi_l = \frac{\rho_l^r}{\rho_v^r}\frac{l^2}{D_v^r\ T^r}, \qquad \lambda = \frac{\rho_l^r}{\rho_v^r}\frac{V_l^r l}{D_v^r} \\ \delta &= \frac{\omega_{gl}^r l}{D_v^r}, \qquad \zeta = \frac{\rho_l^r}{\rho_v^r}\ \delta, \qquad \gamma = \frac{V_v^r l}{D_v^r} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Notons que l'on a introduit le temps caractéristique T^r qui représente le temps caractéristique à l'échelle macroscopique correspondant au phénomène de transport d'humidité que l'on souhaite décrire.

En suivant la même démarche que dans [17], il est pertinent de définir deux temps caractéristiques à l'échelle microscopique qui vont jouer un rôle fondamental dans la description du phénomène de transport. Il s'agit des temps caractéristiques de convection de l'eau liquide et de diffusion de la vapeur d'eau à l'échelle microscopique :

$$t_l^{conv} = \frac{l}{V_l^r}, \qquad t_v^{dif} = \frac{l^2}{D_v^r}, \tag{3.27}$$

Les flux associés sont donnés par :

$$\lambda_l^{conv} = \rho_l^r V_l^r, \qquad \lambda_v^{dif} = \frac{\rho_v^r D_v^r}{l}, \tag{3.28}$$

De plus, notons le rapport des densités de l'eau liquide et de la vapeur d'eau comme suit :

$$Q = \frac{\rho_l^r}{\rho_v^r} \tag{3.29}$$

Enfin, en utilisant (3.27)(3.28) et (3.29), les nombres sans dimension (3.26) peuvent être exprimés différement comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_v &= \frac{t_v^{dif}}{T^r}, \quad \tau_l = \frac{t_l^{conv}}{T^r}, \quad \psi_l = Q\ \tau_v, \quad \lambda = \frac{\lambda_l^{conv}}{\lambda_v^{dif}} \\ \delta &= \frac{\omega_{gl}^r l}{D_v^r}, \quad \zeta = Q\ \delta, \quad \gamma = \frac{V_v^r}{\omega_{gl}^r l}\ \delta \end{aligned} \tag{3.30}$$

- τ_v représente le rapport entre le temps caractéristique de diffusion de la vapeur d'eau $t_v^{dif} = \frac{l^2}{D_v^r}$ à l'échelle microscopique, et le temps caractéristique d'observation T^r à l'échelle macroscopique.
- τ_l représente le rapport entre le temps caractéristique de convection de l'eau liquide $t_l^{conv} = \frac{l}{V_l^r}$ à l'échelle microscopique, et le temps caractéristique d'observation T^r à l'échelle macroscopique.
- ψ_l est le rapport des densités Q multiplié par le nombre sans dimension τ_v.
- λ est le rapport entre le flux convectif de l'eau liquide et le flux diffusif de vapeur d'eau.
- δ est l'équivalent d'un nombre de Péclet rapporté à la vitesse d'interface ω_{gl}.
- ζ est le nombre sans dimension δ multiplié par le rapport des densités Q.
- γ est le rapport des vitesses V_v^r et ω_{gl}^r mutliplié par le nombre sans dimension δ.

Enfin, l'adimensionnalisation des équations (3.3) et (3.8) conduit à :

$$< \frac{\partial\ \rho_l}{\partial t} >_l = \frac{\partial}{\partial t}(<\ \rho_l\ >_l) - \frac{\varphi_l}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} \rho_l\ \omega_{lg}.n_{lg}d\Gamma \tag{3.31}$$

$$< \frac{\partial\ \rho_v}{\partial t} >_g = \frac{\partial}{\partial t}(<\ \rho_v\ >_g) - \frac{\varphi_v}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} \rho_v\ \omega_{gl}.n_{lg}d\Gamma \tag{3.32}$$

Ainsi, deux nombres sans dimension supplémentaires φ_l et φ_v apparaissent dans le problème :

$$\varphi_l = \frac{T^r\ \omega_{lg}^r}{l}, \quad \varphi_v = \frac{T^r\ \omega_{gl}^r}{l} \tag{3.33}$$

Ces derniers peuvent être exprimés en fonction des autres nombres sans dimension comme suit :

$$\varphi_l = \frac{\omega_{lg}^r}{V_l^r}\,\frac{1}{\tau_l}, \qquad \varphi_v = \frac{\delta}{\tau_v} \tag{3.34}$$

3.4.3 Réduction à un problème mono-échelle

Dans le processus d'homogénéisation, les ordres de grandeur des nombres sans dimension (3.30) et (3.34) doivent être reliés à ε, plus précisément à ε^p $(p \in \mathbb{Z})$ choisi comme échelle de comparaison. Premièrement, de façon évidente, la densité de l'eau liquide ρ_l^r est beaucoup plus grande que la densité de vapeur d'eau ρ_v^r. Ainsi on a :

$$Q = \frac{\rho_l^r}{\rho_v^r} = \mathscr{O}(\frac{1}{\varepsilon}) \tag{3.35}$$

De plus, on suppose comme dans [106] que l'on a :

$$\frac{|\omega_{lg}^r.n_{lg}|}{|V_l^r.n_{lg}|} = \mathscr{O}(1)\ , \qquad \frac{|\omega_{gl}^r.n_{lg}|}{|V_v^r.n_{lg}|} = \mathscr{O}(1) \tag{3.36}$$

ce qui est physiquement raisonnable dans la plupart des situations rencontrées.

De façon évidente, les temps caractéristiques de diffusion et convection à l'échelle microscopique (t_v^{dif} et t_l^{conv} respectivement) sont très inférieurs aux temps caractéristiques de diffusion et convection à l'échelle macroscopique (T_V^{dif} et T_L^{conv} respectivement). Dans l'analyse effectuée ici, nous supposerons, comme dans [19], que l'on a :

$$\frac{t_l^{conv}}{T_L^{conv}} = \mathscr{O}(\varepsilon)\ , \qquad \frac{t_v^{dif}}{T_V^{dif}} = \mathscr{O}(\varepsilon^3) \tag{3.37}$$

Le paramètre "clé" est alors le rapport entre les deux temps caractéristiques :

$$\frac{T_V^{dif}}{T_L^{conv}} = \mathscr{O}(\varepsilon^p) \qquad \text{avec } \ p = -1, 0, 1 \tag{3.38}$$

En faisant vairer p, différents problèmes de transport d'humidité peuvent être traités. Pour chaque valeur de p correspond un modèle macroscopique différent, ce qui nous amène à envisager les situations suivantes :

1. *Diffusion prédominante de vapeur d'eau*

$$\frac{T_V^{dif}}{T_L^{conv}} = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{3.39}$$

Afin de capturer le phénomène mis en jeu, on choisit comme temps "d'observation" T^r le temps le plus petit. On utilise alors comme temps caractéristique T^r le temps de diffusion de vapeur macroscopique : $T^r = T_V^{dif}$. En utilisant les équations (3.30)(3.34)-(3.37) et (3.39), on obtient les ordres de grandeur suivants des nombres sans dimension caractérisant le phénomène de transfert d'humidité :

$$\begin{aligned} \psi_l &= \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \quad \tau_v = \mathcal{O}(\varepsilon^3)\,, \quad \lambda = \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \quad \zeta = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \delta &= \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \gamma = \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \varphi_l = \mathcal{O}(1), \quad \varphi_v = \mathcal{O}(1) \end{aligned} \tag{3.40}$$

2. *Diffusion de vapeur d'eau et convection de l'eau liquide du même ordre de grandeur*

$$\frac{T_V^{dif}}{T_L^{conv}} = \mathcal{O}(1) \tag{3.41}$$

On choisit comme temps caractéristique $T^r = T_L^{conv} = T_V^{dif}$. Dans ce cas, on a le choix entre travailler avec "l'équation de transport d'humidité" (3.20), ou bien de considérer les deux équations (3.18) et (3.19) séparément. Afin de simplifier la présentation des calculs, nous opterons pour la deuxième solution [2]. Les ordres de grandeur des nombres sans dimension correspondant sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} \tau_l &= \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \quad \tau_v = \mathcal{O}(\varepsilon^3)\,, \quad \lambda = \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \quad \zeta = \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \delta &= \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \gamma = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varphi_l = \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon}), \quad \varphi_v = \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon}) \end{aligned} \tag{3.42}$$

3. *Convection prédominante de l'eau liquide*

$$\frac{T_V^{dif}}{T_L^{conv}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}) \tag{3.43}$$

Dans ce dernier cas, on utilise comme temps caractéristique $T^r = T_L^{conv}$. L'ordre de grandeur des nombres sans dimensions associés devient :

$$\begin{aligned} \psi_l &= \mathcal{O}(\varepsilon)\,, \quad \tau_v = \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \quad \lambda = \mathcal{O}(1)\,, \quad \zeta = \mathcal{O}(1) \\ \delta &= \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \gamma = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varphi_l = \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon}), \quad \varphi_v = \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon}) \end{aligned} \tag{3.44}$$

2. Dans ce cas, nous utiliserons le nombre sans dimension τ_l plutôt que ψ_l.

3.4.4 Développement asymptotique

On rappelle que la méthode classique d'homogénéisation périodique [9][27][93] consiste à chercher les inconnues du problème ρ_l, ρ_v, V_l et ω_{lg} sous la forme d'un développement en série formelle en fonction du paramètre de perturbation ε (Sanchez Palencia [93]) :

$$\begin{aligned}
\rho_l &= \rho_l^0(x,y,t) + \varepsilon\, \rho_l^1(x,y,t) + \varepsilon^2\, \rho_l^2(x,y,t) + \dots \\
\rho_v &= \rho_v^0(x,y,t) + \varepsilon\, \rho_v^1(x,y,t) + \varepsilon^2\, \rho_v^2(x,y,t) + \dots \\
V_l &= V_l^0(x,y,t) + \varepsilon\, V_l^1(x,y,t) + \varepsilon^2\, V_l^2(x,y,t) + \dots \\
V_v &= V_v^0(x,y,t) + \varepsilon\, V_v^1(x,y,t) + \varepsilon^2\, V_v^2(x,y,t) + \dots \\
\omega_{lg} &= \omega_{lg}^0(x,y,t) + \varepsilon\, \omega_{lg}^1(x,y,t) + \varepsilon^2\, \omega_{lg}^2(x,y,t) + \dots
\end{aligned} \tag{3.45}$$

où les inconnues $\rho_l^i,\ \rho_v^i(x,y,t),\ V_l^i(x,y,t),\ V_v^i(x,y,t),\ \omega_{lg}^i(x,y,t)$ dépendent a priori de x, y et t considérés comme des variables indépendantes. Un point important concerne le calcul des opérateurs dérivés *grad* et *div* appliqués aux fonctions $\rho_l^i(x,y,t), \rho_v^i(x,y,t), V_l^i(x,y,t)$ et $\omega_{lg}^i(x,y,t)$, pour $i \in \mathbb{N}$. Comme ces fonctions dépendent des variables d'espace *indépendantes* x et y, les dérivées doivent être considérées comme des dérivées composées de fonctions de plusieurs variables. En d'autre termes, compte tenu de la séparation des échelles et de l'analyse dimensionnelle effectuée, on a :

$$grad = \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, \qquad div = div_y + \varepsilon div_x \tag{3.46}$$

où :

$\frac{\partial}{\partial y}$ et div_y désignent respectivement le gradient et la divergence par rapport à la variable microscopique y,

$\frac{\partial}{\partial x}$ et div_x désignent respectivement le gradient et la divergence par rapport à la variable macroscopique x.

Remplaçant ρ_l, ρ_v, V_l, V_v et ω_{lg} par leurs développements (3.45) dans les équations adimensionnelles, on obtient une succession de problèmes en cascade couplés $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \dots$ correspondant à l'annulation des facteurs des différentes puissances $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots$

3.5 Diffusion prédominante de vapeur d'eau

Considérons dans un premier temps un régime de transfert correspondant à une diffusion prédominante de vapeur d'eau. Dans ce cas, le temps caractérisitique T^r à considérer est le temps caractéristique de diffusion à l'échelle macroscopique : $T^r = T_V^{dif}$. Etant dans la région hygroscopique (faibles humidités relatives), c'est la condition aux limites de type Neumann (3.23) qui sera utilisée.

En remplaçant alors les nombres adimensionnels par leurs ordres de grandeur donnés par (3.40) dans les équations de transfert hydrique (3.20)-(3.23) et (3.25), on obtient dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \varepsilon^3 \frac{\partial \rho_v}{\partial t} - div\,(D_v\, grad \rho_v) + div\,(\varepsilon^2\, \rho_l\, V_l) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \tag{3.47}$$

avec les conditions aux limites :

$$D_v\, grad\, \rho_v.n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{3.48}$$

$$-D_v\, grad \rho_v.n_{gl} = \varepsilon^3\, \rho_v\, V_v.n_{gl} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.49}$$

$$V_l.n_{ls} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \tag{3.50}$$

La conservation de la masse à l'interface liquide-gaz Γ_{lg} s'écrit :

$$\varepsilon^2(\rho_l\, V_l - \rho_l\, \omega_{lg}).n_{lg} = (D_v\, grad \rho_v + \varepsilon^3\, \rho_v\, \omega_{gl}).n_{gl} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.51}$$

Finalement, les équations (3.31) et (3.32) deviennent :

$$< \frac{\partial\, \rho_l}{\partial t} >_l = \frac{\partial}{\partial t}(< \rho_l >_l) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{lg}} \rho_l\, \omega_{lg}.n_{lg} d\Gamma \tag{3.52}$$

$$< \frac{\partial\, \rho_v}{\partial t} >_g = \frac{\partial}{\partial t}(< \rho_v >_g) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{lg}} \rho_v\, \omega_{gl}.n_{lg} d\Gamma \tag{3.53}$$

Résultat 3.1

Dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau, la teneur volumique en eau liquide $\theta_l = \frac{|\Omega_l|}{|\Omega|}$ *est solution de l'équation de transfert hydrique homogénéisée [65] :*

$$\frac{\partial\, \theta_l}{\partial t} - div_x(\boldsymbol{D}_{\theta,v}^{\boldsymbol{hom}} \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) = 0 \tag{3.54}$$

où

$$\boldsymbol{D}_{\theta,v}^{\boldsymbol{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{3.55}$$

est le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé et $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{hom}}$ *le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé défini par :*

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{hom}} = \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega_g} D_v(I+\overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})dy \tag{3.56}$$

Le vecteur $\chi(y)$ *est périodique, de moyenne nulle sur* Ω_g*, et solution du problème aux limites local :*

$$\begin{cases} div_y(D_v\ (I+\overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})) = 0 \quad dans \quad \Omega_g \\ D_v\ (I+\frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gs} = 0 \quad sur \quad \Gamma_{gs} \\ D_v\ (I+\frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gl} = 0 \quad sur \quad \Gamma_{gl} \end{cases} \tag{3.57}$$

où I désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$ *et la barre l'opérateur de transposition.*

Démonstration :

La démonstration du Résultat 3.1 est décomposée en 2 grandes étapes.

(I) Modèle marcoscopique de transport d'humidité pour une diffusion de vapeur prédominante

Problème $\mathscr{P}_0$

En annulant le facteur de ε^0 dans les équations (3.47)-(3.50), on obtient le problème ($\mathscr{P}_0$) :

$$div_y(D_v\ \frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{3.58}$$

$$D_v\ \frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}.n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{3.59}$$

$$D_v\ \frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}.n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.60}$$

$$V_l^0.n_{ls} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \tag{3.61}$$

où ρ_v^0 et V_l^0 sont $y-$périodique. Les équations (3.58)-(3.60) constituent un problème de Neumann pour la variable ρ_v^0 dont la solution est donnée par :

$$\rho_v^0(x,y,t) = \rho_v^0(x,t) \tag{3.62}$$

Ainsi, la densité de vapeur ρ_v^0 ne dépend pas de la variable y.

Problème $\mathscr{P}_1$

Compte tenu de (3.62), l'annulation du facteur de ε dans les équations du transport d'humidité (3.47) et dans les conditions aux limites associées (3.48)-(3.50) conduit au problème $\mathscr{P}_1$:

$$div_y(D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{3.63}$$

$$D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}).n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{3.64}$$

$$D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}).n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.65}$$

$$V_l^1.n_{ls} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \tag{3.66}$$

où ρ_v^1 and V_l^1 sont $y-$periodiques. En considérant $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}$ a comme un terme source, la solution du problème linéaire (3.63)-(3.65) s'écrit classiquement sous la forme (voir [93][19]) :

$$\rho_v^1(x,y,t) = \overline{\rho_v^1(x,t)} + \chi(y).\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x} \tag{3.67}$$

où $\overline{\rho_v^1(x,t)}$ est une fonction arbitraire qui ne dépend pas de la variable y et χ est un vecteur $y-$périodique de moyenne nulle sur Ω_g. Ensuite, en remplaçant l'expression (3.67) de ρ_v^1 dans les équations (3.63)-(3.65), on obtient le problème local caractérisant $\chi(y)$:

$$\begin{cases} div_y(D_v\ (I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})) = 0 & \text{dans} \quad \Omega_g \\ D_v\ (I + \frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gs} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \\ D_v\ (I + \frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gl} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \end{cases} \tag{3.68}$$

Problème $\mathscr{P}_2$

L'annulation du facteur de ε^2 dans les équations (3.47)-(3.50) conduit au problème $\mathscr{P}_2$:

$$\frac{\partial\ \rho_l^0}{\partial t} - div_x(D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})) - div_y(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})) + div_y(\rho_l^0 V_l^0) = 0 \quad (3.69)$$

$$D_v\ (\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gs} = 0 \quad (3.70)$$

$$D_v\ (\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gl} = 0 \quad (3.71)$$

$$V_l^2.n_{ls} = 0 \quad (3.72)$$

L'équation macroscopique du transport d'humidité est obtenue en moyennant l'équation (3.69) sur le domaine fluide $\Omega_f = \Omega_l \cup \Omega_g$. On obtient alors :

$$< \frac{\partial\ \rho_l^0}{\partial t} >_f \ - \ < div_x(D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})) >_f \ - < div_y(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})) >_f \quad (3.73)$$
$$+ \ < div_y(\rho_l^0 V_l^0) >_f \ = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f$$

En utilisant la définition (3.15) pour calculer la moyenne sur Ω_f, on obtient :

$$< \frac{\partial\ \rho_l^0}{\partial t} >_f = < \frac{\partial\ \rho_l^0}{\partial t} >_l, \qquad < div_x(D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})) >_f = < div_x(D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})) >_g$$

$$< div_y(\rho_l^0 V_l^0) >_f = < div_y(\rho_l^0 V_l^0) >_l, \qquad < div_y(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})) >_f = < div_y(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})) >_g$$

D'autre part, l'annulation du facteur de ε^0 dans l'équation (3.52) donne :

$$< \frac{\partial\ \rho_l^0}{\partial t} >_l = \frac{\partial(< \rho_l^0 >_l)}{\partial t} - \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} \rho_l^0\ \omega_{lg}^0.n_{lg} d\Gamma \quad (3.74)$$

En utilisant la formule de Stokes, le troisième terme de l'équation (3.73) devient :

$$< div_y(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})) >_g = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{gl}} (D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gl}\ d\Gamma + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{gs}} (D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gs}\ d\Gamma$$
$$+ \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{gg}} (D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gg}\ d\Gamma \quad (3.75)$$

Le deuxième terme du second membre de l'équation (3.75) s'annule à cause de la condition aux limites (3.70), alors que le troisième terme s'annule pour des raisons de périodicité. Ainsi l'équation (3.75) se réduit à :

$$< div_y(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})) >_g = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{gl}} (D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gl}\ d\Gamma \quad (3.76)$$

Remarque 3.4 *La condition de périodicité des champs est importante pour simplifier l'intégrale sur* Γ_{gg} *dans l'équation* (3.75). *Celle-ci disparaît grâce à la symétrie de la cellule (les frontières*[3] Γ_{gg} *sont supposées être symétriques en entrée-sortie de la cellule élémentaire), lorsque les champs intervenant sont périodiques. La même condition de périodicité s'applique pour les champs dans la phase liquide à la frontière liquide-liquide* Γ_{ll}. *Par la suite, cette étape de calcul ne sera plus détaillée et nous annulerons directement les termes de frontière sur* Γ_{gg} *et* Γ_{ll}.

De même, en utilisant le théorème de la divergence, la condition aux limites (3.61) et la condition de périodicité, le quatième terme de l'équation (3.73) devient :

$$< div_y(\rho_l^0 V_l^0) >_l = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} \rho_l^0 V_l^0 . n_{lg}\, d\Gamma \tag{3.77}$$

Maintenant, remplaçant ρ_v^1 par son expression (3.67), le second terme de l'équation (3.73) se réduit à :

$$- < div_x(D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})) >_g = -div_x(\mathbf{D_v^{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}) \tag{3.78}$$

où

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega_g} D_v(I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}}) d\Omega \tag{3.79}$$

est le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé. Le vecteur χ est solution du problème local (3.68).

Finalement, en utilisant (3.74) à (3.78), l'équation (3.73) conduit à l'équation de tranfert hydrique à l'échelle macroscopique :

$$\frac{\partial (< \rho_l^0 >_l)}{\partial t} - div_x(\mathbf{D_v^{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}) + m_l - m_g = 0 \tag{3.80}$$

où les termes m_l et m_g sont définis par :

$$m_l = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} \rho_l^0\, (V_l^0 - \omega_{lg}^0).n_{lg}\, d\Gamma\,, \quad m_g = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{gl}} D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gl}\, d\Gamma \tag{3.81}$$

3. On rappelle que $\partial\Omega_g = \Gamma_{gl} \cup \Gamma_{gs} \cup \Gamma_{gg}$

Notons que m_l peut être interprété comme le taux d'évaporation ou de condensation (par unité de volume) de la phase liquide et m_g comme le taux d'évaporation ou de condensation (par unité de volume) de la phase gazeuse.

Remarque 3.5 *Il est important de remarquer que le tenseur de diffusion homogénéisé* $\boldsymbol{D_v^{hom}}$*, donné par* (3.79)*, dépend uniquement de la variable locale* $\chi(y)$ *(périodique et de moyenne nulle sur* Ω_g*), qui elle même dépend fortement de la géométrie de la microstructure par l'intermédiaire du problème aux limites* (3.68)*. Ainsi, le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé, dans le cas d'un transfert de vapeur d'eau prédominant, est purement géométrique : il ne dépend que de la géométrie de la microstructure périodique (construite à partir de la cellule élémentaire* Ω*) et de la position de l'interface* Γ_{lg}*.*

Maintenant, on propose d'exprimer l'équation macroscopique (3.80) en fonction de la seule teneur volumique en eau liquide θ_l. Tout d'abord, il est possible d'exprimer la densité macroscopique de la vapeur d'eau ρ_v^0 comme une fonction de θ_l [54][91] :

$$\rho_v^0 = f(\theta_l) \tag{3.82}$$

La relation (3.82) correspond à la courbe classique de sorption/désorption obtenue expérimentalement.
De façon évidente, en écrivant $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x} = \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_l}{\partial x}$, l'équation (3.80) devient :

$$\frac{\partial(< \rho_l^0 >_l)}{\partial t} - div_x(\mathbf{D_v^{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) + m_l - m_g = 0 \tag{3.83}$$

Quand la densité marcoscopique de l'eau liquide ρ_l^0 est supposée constante à l'échelle macroscopique [91][106], l'équation (3.148) se réduit à :

$$\rho_l^0 \frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x(\mathbf{D_v^{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) + m_l - m_g = 0 \tag{3.84}$$

où $\theta_l = \frac{|\Omega_l|}{|\Omega|}$ désgine la teneur volumique de l'eau liquide. En divisant par ρ_l^0 (car $\rho_l^0 \neq 0$), on obtient :

$$\frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x(\mathbf{D_{\theta,v}^{hom}} \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) + \frac{1}{\rho_l^0}(m_l - m_g) = 0 \tag{3.85}$$

où

$$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0}\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{3.86}$$

est le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé.

(II) Consistance physique du modèle homogénéisé obtenu

Maintenant, après avoir homogénéisé les équations de transfert d'humidité dans le cas d'une diffusion forte de vapeur d'eau, il convient de vérifier la consistance physique du modèle obtenu. De façon équivalente, cela revient à homogénéiser l'équation de conservation de la masse à l'interface liquide-gaz et à vérifier la consistance des résultats obtenus.

Problème $\mathscr{P}_0$

L'annulation du facteur en ε^0 dans l'équation de conservation de la masse (3.51) conduit au problème $\mathscr{P}_0$:

$$D_v \frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}.n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.87}$$

qui correspond à la condition aux limites (3.60).

Problème $\mathscr{P}_1$

L'annulation du facteur en ε^1 dans l'équation (3.51) conduit au problème $\mathscr{P}_1$:

$$D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}).n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.88}$$

qui est trivialement vérifié compte tenu de (3.65).

Problème $\mathscr{P}_2$

Maintenant, en annulant le facteur ε^2 dans l'équation de conservation de la masse (3.51),

on obtient le prolème $\mathscr{P}_2$:

$$D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gl} = \rho_l^0\ (V_l^0 - \omega_{lg}^0).n_{lg} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.89}$$

Intégrons cette équation sur l'interface liquide-gaz Γ_{lg} et divisons par le volume total $|\Omega|$. On obtient :

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gl}\ d\Gamma = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{gl}} \rho_l^0\ (V_l^0 - \omega_{lg}^0).n_{lg}\ d\Gamma \tag{3.90}$$

L'équation (3.90) est équivalente à :

$$m_l = m_g \tag{3.91}$$

où m_l et m_g sont donnés par (3.81). Physiquement, cette égalité traduit l'équation de conservation de la masse à l'interface liquide-gaz à l'ordre 2. Elle peut être interprétée d'une manière équivalente par l'équilibre thermodynamique à l'intérieur du milieu poreux, à savoir «ce qui est perdu dans l'eau liquide est récupéré dans la vapeur d'eau et vice versa". Par conséquent, la consistance physique du modèle macroscopique homogénéisé est bien vérifiée.

Remarque 3.6 *L'égalité* (3.90) *est analogue à celle obtenue par la technique d'homogénéisation par prise de moyenne, en moyennant la condition aux limites à l'interface liquide-gaz* (3.51) *sur un volume élementaire représentatif (voir [106]).*

Enfin, en utilisant (3.91), l'équation macroscopique (3.85) de transport hydrique dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau se réduit à :

$$\frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x(\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}\ \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) = 0 \tag{3.92}$$

où on a posé :

$$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0}\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{3.93}$$

Notons que sous cette forme, l'expression (3.93) de $\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$ ne contient que des grandeurs accessibles du matériau partiellement saturé considéré :

– la courbe de sorption/désorption $\rho_v^0 = f(\theta_l)$
– le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé $\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}}$ de la phase vapeur qui peut être déterminé comme solution du problème aux limites local (3.68).

Nous remarquons dans l'équation de transport hydrique homogénéisée (3.92) que seul le terme lié au transfert de vapeur d'eau apparaît dans l'expression du tenseur de diffusion hydrique (3.93). Cela est dû aux ordres de grandeur des nombres sans dimensions considérés correspondant à un transfert hydrique dans la région hygroscopique (pour des humidités relatives relativement faibles), où la diffusion de vapeur d'eau est le mécanisme physique qui prédomine. Ainsi, compte tenu des temps caractéristiques de convection de l'eau liquide (beaucoup plus grands que ceux liés à la diffusion de vapeur d'eau), le phénomène de convection de l'eau liquide n'apparaît pas dans les équations de transfert homogénéisées macroscopiques (3.92). La méthode d'homogénéisation périodique utilisée permet de "trier les régimes", et de ne garder que le régime de transfert qui prédomine à l'ordre principal dans les équations homogénéisées (ici le régime de diffusion de vapeur d'eau).

Remarque 3.7 *Au lieu d'une définition empirique de la tortuosité que l'on trouve classiquement dans la littérature (voir [53][91] par exemple), nous obtenons ici par homogénéisation périodique une définition mathématique rigoureuse de celle-ci. Avec cette définition, la tortuosité est directement liée au vecteur $\chi(y)$ caractérisant la microstructure du matériau.*

3.6 Diffusion de la vapeur d'eau et convection de l'eau liquide du même ordre de grandeur

Dans la section (3.5), nous nous sommes intéressés à l'homogénéisation des équations de transfert hydrique, dans le cas où la diffusion de vapeur d'eau est prédominante. L'ordre de grandeur des nombres sans dimension a été determiné en se basant sur le rapport des temps caractéristiques de diffusion de vapeur et de convection de l'eau liquide, qui correspondait à

un état hydrique du matériau soumis à de faibles humidités relatives (région hygroscopique). Au résultat 3.1, nous avons obtenu un modèle macroscopique homogénéisé ne faisant intervenir que la diffusion de vapeur d'eau.

Intéressons nous maintenant au cas d'un transfert hydrique où la diffusion de vapeur d'eau et la convection de l'eau liquide sont du même ordre de grandeur. Dans ce cas, le temps caractéristique "d'observation" T^r peut être, soit le temps caractéristique de diffusion de vapeur d'eau T_V^r, soit le temps caractéristique de convection de l'eau liquide T_L^r à l'échelle macroscopique. D'autre part, les deux phénomènes (de diffusion et de convection) étant du même ordre de grandeur, il est possible (et même préférable pour simplifier la présentation et les calculs) de découpler les deux équations de continuité de l'eau liquide et de la vapeur d'eau. Enfin, les résultats obtenus dans ce cas étant valables dans les deux régions hygroscopique et super-hygroscopique, les deux conditions aux limites (3.23) et (3.24) seront prises en compte. Pour des humidités relatives intermédiaires dans la région hygroscopique, c'est la condition de Neumann classique (3.23) qui sera considérée. Pour des humidités relatives élevées dans la région super-hygroscopique, quand l'espace poral est majoritairement rempli par l'eau liquide, c'est la condition aux limites de Dirichlet (3.24) qui sera considérée.

Compte tenu de l'ordre de grandeur (3.42) des nombres sans dimension correspondant au cas traité ici, les équations adimensionnelles (3.18) et (3.19) s'écrivent respectivement :

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + div(\rho_l V_l) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_l \tag{3.94}$$

$$\varepsilon^3 \frac{\partial \rho_v}{\partial t} - div(D_v \, grad \rho_v) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{3.95}$$

Les conditions aux limites associées (3.21)-(3.22) sur Γ_{ls} et Γ_{gs} demeurent inchangées :

$$V_l.n_{ls} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \tag{3.96}$$

$$D_v \, grad \rho_v.n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{3.97}$$

La condition aux limites sur Γ_{lg} dans la région hygroscopique devient :

$$-D_v \, grad \rho_v.n_{gl} = \varepsilon^2 \ \rho_v \, V_v.n_{gl} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.98}$$

alors que dans la région super-hygroscopique, on a :

$$\rho_v = \rho_v^{eq} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.99}$$

Enfin, l'équation de conservation de la masse sur Γ_{lg} s'écrit :

$$\varepsilon(\ \rho_l V_l - \ \rho_l\ \omega_{lg}).n_{lg} = (D_v\ grad\rho_v + \ \varepsilon^2\ \rho_v\ \omega_{gl}).n_{gl} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.100}$$

Finalement, la moyenne des termes instationnaires (3.31) et (3.32) devient :

$$\varepsilon < \frac{\partial\ \rho_l}{\partial t} >_l = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(<\ \rho_l\ >_l) - \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} \rho_l\ \omega_{lg}.n_{lg} d\Gamma \tag{3.101}$$

$$\varepsilon < \frac{\partial\ \rho_v}{\partial t} >_g = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(<\ \rho_v\ >_g) - \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} \rho_v\ \omega_{gl}.n_{lg} d\Gamma \tag{3.102}$$

Le processus d'homogénéisation périodique que nous allons mettre en oeuvre est le même que dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau traité précédemment. Les inconnues du problème ρ_l, ρ_v, V_l, V_v et ω_{lg} sont recherchées sous la forme d'un développement en série formelle en puissance de ε suivant (3.45). En remplaçant les développements des inconnues du problème dans les équations de transfert hydrique (3.94)-(3.102), nous obtenons une nouvelle série de problème couplés $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 ...$ correpondant à l'annulation des facteurs en puissance de ε.

Résultat 3.2

Pour une diffusion de vapeur d'eau et une convection d'eau liquide du même ordre de grandeur, la teneur volumique en eau liquide θ_l est solution de l'équation de transfert hydrique homogénéisée [64] :

$$\frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x(\boldsymbol{D}_\theta^{\boldsymbol{hom}}\ \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) = 0 \tag{3.103}$$

où

$$\boldsymbol{D}_\theta^{\boldsymbol{hom}} = -\ \Lambda_{ll}\ \frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} + \frac{1}{\rho_l^0}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{3.104}$$

est le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé. Λ_{ll} est le tenseur de perméabilité de Darcy, P_c^0 la pression capillaire macroscopique et $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{hom}}$ le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé donné par :

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{hom}} = \frac{1}{|\ \Omega\ |}\int_{\Omega_g} D_v(I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})dy \tag{3.105}$$

ou I désigne la matrice identité et la barre l'opérateur de transposition. Le vecteur $\chi(y)$ est périodique et solution du problème aux limites local :

$$\begin{cases} div_y(D_v\ (I+\overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})) = 0 & dans \quad \Omega_g \\ D_v\ (I+\frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gs} = 0 & sur \quad \Gamma_{gs} \end{cases} \tag{3.106}$$

La condition aux limites supplémentaire sur l'interface liquide-gaz Γ_{gl} est une condition de type Neumann dans la région hygroscopique :

$$D_v\ (I+\frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gl} = 0 \quad sur \quad \Gamma_{gl} \tag{3.107}$$

et une condition de Dirichlet dans la région super-hygroscopique :

$$\chi = 0 \quad sur \quad \Gamma_{gl} \tag{3.108}$$

De plus, dans la région hygroscopique, le problème local doit être complété par la condition de moyenne[4] *nulle du vecteur χ dans Ω_g.*

Démonstration :

La démonstration de ce résultat est divisée en 4 étapes numérotées de I) to IV).

(I) Modèle macroscopique de transport de l'eau liquide

Problème $\mathscr{P}_0$

L'équation de continuité de l'eau liquide (3.94) et la condition aux limites associée (3.96) s'écrivent à l'ordre ε^0 :

$$div_y(\ \rho_l^0\ V_l^0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_l \tag{3.109}$$

$$V_l^0.n_{ls} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \tag{3.110}$$

4. Pour assurer l'unicité de la solution du problème local (3.106)-(3.107).

Problème $\mathscr{P}_1$

L'annulation du facteur ε dans les équations (3.94) et (3.96) conduit au problème $\mathscr{P}_1$ qui s'écrit :

$$\frac{\partial\ \rho_l^0}{\partial t} + div_y(\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0) + div_x(\rho_l^0 V_l^0) = 0 \text{ dans } \Omega_l \tag{3.111}$$

$$V_l^1.n_{ls} = 0 \text{ sur } \Gamma_{ls} \tag{3.112}$$

L'équation macroscopique du transport de l'eau liquide est obtenue en moyennant l'équation (3.111) sur le domaine liquide Ω_l. On obtient :

$$< \frac{\partial \rho_l^0}{\partial t} >_l + < div_y(\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0) >_l + < div_x(\rho_l^0 V_l^0) >_l = 0 \tag{3.113}$$

L'annulation du facteur en ε^1 dans l'équation (3.101) donne par ailleurs :

$$< \frac{\partial\ \rho_l^0}{\partial t} >_l = \frac{\partial(<\ \rho_l^0\ >_l)}{\partial t} - \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} (\rho_l^0\ \omega_{lg}^1 + \rho_l^1\ \omega_{lg}^0).n_{lg} d\Gamma \tag{3.114}$$

En utilisant le théorème de la divergence, le second terme de l'équation (3.113) devient :

$$\int_{\Omega_l} div_y(\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0)\, dy = \int_{\Gamma_{lg}} (\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0).n_{lg}\, d\Gamma$$
$$+ \int_{\Gamma_{ls}} (\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0).n_{ls}\, d\Gamma \quad + \int_{\Gamma_{ll}} (\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0).n_{ll}\, d\Gamma \tag{3.115}$$

Le deuxième terme au second membre de l'équation (3.115) s'annule à cause des conditions aux limites (3.110) et (3.112). Le troisième terme s'annule pour des raisons de périodicité. Ainsi le second terme de l'équation (3.113) se réduit à :

$$< div_y(\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0) >_l = \int_{\Gamma_{lg}} (\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0).n_{lg}\, d\Gamma \tag{3.116}$$

A cause de la séparation des variables, $< . >_l$ et div_x permutent. Par conséquent, le troisième terme de l'équation (3.113) s'écrit :

$$< div_x(\rho_l^0\ V_l^0) >_l = div_x(<\ \rho_l^0\ V_l^0\ >_l) \tag{3.117}$$

En remplaçant (3.114),(3.116) et (3.117) dans l'équation (3.113), on obtient l'équation de transport de l'eau liquide homogénéisée :

$$\frac{\partial(< \rho_l^0 >_l)}{\partial t} + div_x(< \rho_l^0 V_l^0 >_l) + m_l = 0 \tag{3.118}$$

où m_l est défini par :

$$m_l = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} [\rho_l^0 (V_l^1 - \omega_{lg}^1) + \rho_l^1 (V_l^0 - \omega_{lg}^0)].n_{lg}\, d\Gamma \tag{3.119}$$

On rappelle que m_l peut être interprété comme le taux d'évaporation par unité de volume de la phase liquide à l'interface liquide-gaz (dans le cas d'un séchage).

Maintenant, nous proposons d'exprimer l'équation macroscopique de transfert de l'eau liquide (3.118) comme fonction de la seule quantité θ_l (teneur volumique en eau liquide), lorsque la densité de l'eau liquide ρ_l^0 est supposée constante [91][106]. Dans ce cas, l'équation (3.118) devient :

$$\rho_l^0 \frac{\partial\, \theta_l}{\partial t} + \rho_l^0\, div_x(< V_l^0 >_l) + m_l = 0 \tag{3.120}$$

D'autre part, d'après la loi de Darcy dans les milieux poreux non saturés classiquement donnée par [14] (voir également chapitre 2), on a :

$$< V_l^0 >_l = -\Lambda_{ll} \frac{\partial\, P_l^0}{\partial x} - \Lambda_{lg} \frac{\partial\, P_g^0}{\partial x} \tag{3.121}$$

où Λ_{ll} et Λ_{lg} sont des tenseurs de second ordre qui ne dépendent pas de la variable microscopique y.

Introduisons maintenant la pression capillaire P_c^0 définit comme suit [50][76][97] :

$$P_c^0 = P_g^0 - P_l^0 \tag{3.122}$$

où P_g^0 et P_l^0 désignent respectivement la pression du gaz et la pression du liquide à l'ordre principal. Lorsque la pression du gaz P_g^0 est supposée constante (ce qui est le cas ici), l'équation (3.121) se réduit à :

$$< V_l^0 >_l = \Lambda_{ll} \frac{\partial\, P_c^0}{\partial x} \tag{3.123}$$

Maintenant, en remplaçant l'expression (3.123) dans l'équation (3.120), on obtient :

$$\rho_l^0 \frac{\partial\, \theta_l}{\partial t} + \rho_l^0\, div_x(\Lambda_{ll} \frac{\partial\, P_c^0}{\partial x}) + m_l = 0 \tag{3.124}$$

La pression capillaire est généralement directement liée à la teneur volumique en eau liquide θ_l par une relation de type :

$$P_c^0 = f(\theta_l) \tag{3.125}$$

qui constitue l'inverse de la courbe de rétention [14][91][104]. Généralement, la courbe de rétention peut être considérée comme une donnée du problème (pour un matériau poreux donné). De façon évidente, $\frac{\partial P_c^0}{\partial x} = \frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l}\,\frac{\partial \theta_l}{\partial x}$, et l'équation (3.124) devient :

$$\rho_l^0\,\frac{\partial\,\theta_l}{\partial t} + \rho_l^0\;\; div_x(\,\Lambda_{ll}\,\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l}\,\frac{\partial \theta_l}{\partial x}) + m_l = 0 \tag{3.126}$$

Remarque 3.8 *L'équation* (3.126) *peut s'écrire sous la forme d'une équation de diffusion :*

$$\rho_l^0\,\frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \rho_l^0\;div_x(\,\Phi_l\,\frac{\partial \theta_l}{\partial x}) + m_l = 0 \tag{3.127}$$

où

$$\Phi_l = -\,\Lambda_{ll}\,\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} \tag{3.128}$$

peut être assimilé à un tenseur de diffusion de l'eau liquide. Cependant, il convient de souligner que le mouvement de l'eau liquide se fait par succion capillaire, et non par un phénomène de diffusion.

(II) Modèle macroscopique de transport de vapeur d'eau

Problème $\mathscr{P}_0$

L'annulation du facteur en ε^0 dans le développement asymptotique de l'équation de continuité de vapeur d'eau (3.95) et dans la condition aux limites associée (3.97) conduit au problème $\mathscr{P}_0$ qui s'écrit :

$$div_y(-D_v\,\frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{3.129}$$

$$D_v\,\frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}.n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{3.130}$$

La condition aux limites sur Γ_{gl}, qui provient de (3.98) dans la région hygroscopique, s'écrit :

$$D_v \frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}.n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.131}$$

D'autre part, dans la région super-hygroscopique, la condition aux limites associée sur Γ_{gl} qui provient de (3.99) est donnée par :

$$\rho_v^0 = \rho_v^{eq} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.132}$$

De façon évidente, la solution du problème (3.129)-(3.130) et (3.131) dans la région hygroscopique est indépendante de la variable microscopique y :

$$\rho_v^0(x,y,t) = \rho_v^0(x,t) \tag{3.133}$$

Dans la région super-hygroscopique, la solution du problème (3.129)-(3.130) et (3.132) est indépendante de y et est donnée par :

$$\rho_v^0(x,y,t) = \rho_v^{eq}(x,t) \tag{3.134}$$

Ainsi $\rho_v^0(x,t)$ est égal partout à la densité de vapeur à l'équilibre, ce qui est cohérent avec le fait d'avoir une humidité relative très élevée ($HR > 95\%$) dans la région super-hygroscopique.

Problème $\mathscr{P}_1$

En utilisant (3.133) et (3.134), les équations (3.95) et (3.97) à l'ordre 1 se réduisent à :

$$div_y(-D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{3.135}$$

$$D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}).n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{3.136}$$

La condition aux limites associée sur Γ_{gl} dans la région hygroscopique s'écrit :

$$D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}).n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.137}$$

alors que celle dans la région super-hygroscopique est donnée par :

$$\rho_v^1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.138}$$

Dans la région hygrosocopique, le problème (3.135)-(3.136) et (3.137) conduit à l'expression de ρ_v^1 :

$$\rho_v^1(x,y,t) = \overline{\rho_v^1(x,t)} + \chi(y).\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x} \tag{3.139}$$

où $\overline{\rho_v^1(x,t)}$ ne dépend pas de y. Dans la région super-hygroscopique, le problème (3.135)-(3.136) et (3.138) a pour solution :

$$\rho_v^1(x,y,t) = \chi(y).\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x} \tag{3.140}$$

où $\chi(y)$ est nul sur l'interface liquide-gaz Γ_{lg}. Dans les deux expressions (3.139) et (3.140) de ρ_v^1, χ est un vecteur périodique de la variable y. Dans la région hygroscopique, la condition aux limites (3.139) doit être complétée par une condition de moyenne nulle pour χ pour assurer l'unicité de la solution.

En remplaçant maintenant l'expression (3.139) de ρ_v^1 dans les équations (3.135)-(3.137) pour le problème hygroscopique, et l'expression (3.140) dans les équations (3.135)-(3.136) et (3.138) pour le problème super-hygroscopique, on obtient le problème local suivant caractérisant le vecteur $\chi(y)$:

$$\begin{cases} div_y(D_v\ (I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \\ D_v\ (I + \frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \end{cases} \tag{3.141}$$

où on rappelle que I désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$ et la barre l'opérateur de transposition.

La condition aux limites supplémentaire sur l'interface liquide-gaz Γ_{gl} est une condition de type Neumann dans la région hygroscopique :

$$D_v\ (I + \frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.142}$$

et une condition de Dirichlet dans la région super-hygroscopique :

$$\chi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.143}$$

Il est important de noter que le problème local (3.141)-(3.142) avec des condition aux limites de type Neumann, obtenu dans le cas d'une diffusion de vapeur d'eau et d'une convection de l'eau liquide du même ordre de grandeur dans la région hygroscopique, est identique à celui obtenu pour une diffusion prédominante de vapeur d'eau (voir (3.57)). Cependant, dans

la région super-hygroscopique, on obtient un nouveau problème local (3.141) et (3.143) avec des conditions aux limites mixtes de type Neumann-Dirichlet.

Problème $\mathscr{P}_2$

L'annulation du facteur en ε^2 dans l'éqution (3.95) et dans les conditions aux limites associées (3.97) conduit au problème $\mathscr{P}_2$ qui s'écrit :

$$-div_x(D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}))-div_y(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})) = 0 \text{ dans } \Omega_g \tag{3.144}$$

$$D_v\,(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gs} = 0 \text{ sur } \Gamma_{gs} \tag{3.145}$$

La condition aux limites associée sur Γ_{gl} dans la région hygroscopique s'écrit :

$$-D_v\,(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^1}{\partial x}).n_{gs}=\rho_v^0 V_v^0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.146}$$

alors que celle dans la région super-hygroscopique est donnée par :

$$\rho_v^2=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.147}$$

L'équation macroscopique de diffusion de vapeur d'eau est obtenue en intégrant l'équation (3.144) sur Ω_g. Par un calcul similaire à celui développé précédemment, en utilisant le théorème de la divergence, la condition aux limites (3.145), les conditions de périodicité des champs, on obtient :

$$-div_x(\mathbf{D_v^{hom}}\,\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}\,\frac{\partial \theta_l}{\partial x})-m_g=0 \tag{3.148}$$

où $\mathbf{D_v^{hom}}$ est le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé donné par :

$$\mathbf{D_v^{hom}}=\frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega_g} D_v(I+\overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})dy \tag{3.149}$$

Le vecteur χ est solution du problème aux limites (3.141) avec la condition aux limites (3.142) ou (3.143) suivant la région considérée (hygroscopique ou super-hygroscopique).
Le terme m_g défini ici par :

$$m_g=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{gl}} D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})\,d\Gamma \tag{3.150}$$

s'interprète toujours comme le taux d'évaporation de l'eau liquide par unité de volume à l'interface liquide-gaz (dans le cas d'un séchage).

Il est important de noter que l'expression (3.149) de $\mathbf{D_v^{hom}}$ est identique à celle obtenue à la section 3.5 dans le cas d'une diffusion de vapeur d'eau prédominante (voir résultat 3.1). Cependant le vecteur χ s'exprime différemment dans les deux régions hygroscopique et super-hygroscopique. En effet, la vapeur d'eau ne diffuse pas de la même manière dans les deux régions. Dans la région super-hygroscopique, le phénomène de condensation capillaire joue un rôle important, comme on va le voir plus en détails au chapitre 4 dans les exemples qui seront présentés.

Remarque 3.9 *Comme pour le transport de l'eau liquide, l'équation* (3.148) *peut être écrite sous la forme d'une équation de diffusion :*

$$- div_x(\Phi_v \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) - m_g = 0 \tag{3.151}$$

où

$$\Phi_v = \boldsymbol{D_v^{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{3.152}$$

peut être assimilé à un tenseur de diffusion de vapeur d'eau modifié.

(III) Consistance physique du modèle homogénéisé obtenu

Maintenant, il convient également de vérifier, comme dans le cas précédent, la consistance physique du modèle obtenu. Pour cela, vérifions la cohérence des résultats obtenus avec l'équation de conservation de la masse à l'interface liquide-gaz (3.100).

Problème $\mathscr{P}_0$

L'annulation du facteur en ε^0 dans l'équation de conservation de la masse (3.100) conduit au problème $\mathscr{P}_0$:

$$D_v \frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}.n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.153}$$

qui est trivialement vérifiée compte tenu de (3.133) ou (3.134).

Problème $\mathscr{P}_1$

L'annulation du facteur en ε^1 dans l'équation (3.100) conduit au problème $\mathscr{P}_1$:

$$D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}).n_{gl}=\rho_l^0(V_l^0-\omega_{lg}^0).n_{lg} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.154}$$

En utilisant la condition aux limites (3.137) dans la region hygroscopique, on déduit la relation qui relie la vitesse d'interface ω_{lg}^0 à la vitesse du liquide V_l^0 à l'interface liquide-gaz :

$$\omega_{lg}^0.n_{lg}=V_l^0.n_{lg} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.155}$$

Dans la région super-hygroscopique, on a (comme ρ_l^0 est différent de zéro) :

$$\omega_{lg}^0.n_{lg}=[V_l^0+\frac{1}{\rho_l^0}D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})].n_{lg} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.156}$$

qui peut être réécrit en utilisant la relation (3.140) comme suit :

$$\omega_{lg}^0=[V_l^0+\frac{1}{\rho_l^0}D_v\,(I+\overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}].n_{lg} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.157}$$

Les relations (3.155) et (3.157) peuvent être interprétées comme suit : dans la région hygroscopique, le mouvement de l'interface Γ_{lg} est essentiellement dû à la variation de la vitesse de l'eau liquide (Eq. (3.155)), alors que dans la région super-hygroscopique, elle peut être également due aux effets de condensation capillaire liés au gradient de vapeur d'eau (Eq. (3.157)).

Problème $\mathscr{P}_2$

Maintenant, en annulant le facteur ε^2 dans l'équation (3.100), on obtient le problème $\mathscr{P}_2$ sur Γ_{lg} :

$$[\rho_l^0\,(V_l^1-\omega_{lg}^1)+\rho_l^1\,(V_l^0-\omega_{lg}^0)].n_{lg}=[(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})+\rho_v^0\,\omega_{gl}^0].n_{gl} \tag{3.158}$$

En intégrant cette équation sur l'interface liquide-gaz Γ_{lg} et en divisant par le volume total $|\Omega|$, on obtient :

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}}[\rho_l^0\,(V_l^1-\omega_{lg}^1)+\rho_l^1\,(V_l^0-\omega_{lg}^0)].n_{lg}\,d\Gamma=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{gl}}[(D_v(\frac{\partial \rho_v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^1}{\partial x})+\rho_v^0\,\omega_{gl}^0].n_{gl}\,d\Gamma \tag{3.159}$$

D'autre part, l'annulation du facteur en ε^0 dans l'équation (3.102) donne :

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} \rho_v^0 \ \omega_{gl}^0 . n_{lg} d\Gamma = 0 \tag{3.160}$$

D'après les équations (3.159) et (3.160), on conclut que :

$$m_l = m_g \tag{3.161}$$

où m_l et m_g sont données par (3.119) et (3.150), à savoir « ce qui perdu dans l'eau est récupérée dans le gaz et vice versa». Ainsi, la consistance physique du modèle homogénéisé obtenu au résultat 3.2 est vérifiée.

(IV) Equation macroscopique du tranfert hydrique

Les équations de transport pour l'eau liquide et la vapeur d'eau (respectivement (3.126) et (3.148)) ont été exprimées en fonction de la teneur volumique de l'eau liquide θ_l. Pour avoir une description complète du transport d'humidité, les deux équations doivent être sommées. En utilisant l'égalité (3.161), on obtient :

$$\rho_l^0 \frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x((-\ \rho_l^0\ \Lambda_{ll}\ \frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} + \ \mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l})\ \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) = 0 \tag{3.162}$$

En divisant l'équation (3.162) par ρ_l^0 qui est considéré ici comme constant et différent de zéro, on obtient :

$$\frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x((-\ \ \Lambda_{ll}\ \frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} + \ \frac{1}{\rho_l^0}\ \mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l})\ \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) = 0 \tag{3.163}$$

Cette dernière équation s'écrit d'une manière équivalente :

$$\frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x(\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}\ \frac{\partial \theta_l}{\partial x}\ ) = 0 \tag{3.164}$$

où l'on a posé :

$$\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}} + \mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} \tag{3.165}$$

avec :

$$\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}} = -\ \ \Lambda_{ll}\ \frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} = \ \frac{1}{\rho_l^0}\ \mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{3.166}$$

Sous cette forme, l'équation (3.164) est généralement appelée "équation de Richards". Elle décrit complètement le mouvement de l'eau liquide et de la vapeur d'eau en fonction de la seule variable θ_l (teneur volumique en eau liquide). L'influence des deux phases est prise en compte à travers le tenseur de diffusion homogénéisé $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$, qui contient un premier terme $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$ lié au transport de l'eau liquide, et un second terme $\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$ lié à la diffusion de vapeur d'eau (voir expressions (3.166)).

En utilisant maintenant l'approximation Λ_{ll} du tenseur de Darcy introduit dans le chapitre 2 (voir équation (2.74)), le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé prend la forme :

$$\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = - \frac{K_{rl}(\theta_l)\, K_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} + \frac{1}{\rho_l^0} \mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{3.167}$$

Notons que sous cette forme, l'expression (3.167) de $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ fait intervenir des données du matériau partiellement saturé accessibles expérimentalement (perméabilité relative $K_{rl}(\theta_l)$, perméabilité intrinséque K_l, viscosité de la phase liquide μ_l, courbe de rétention $P_c^0 = f(\theta_l)$, courbe de sorption/désorption $\rho_v^0 = g(\theta_l)$,..), ainsi que le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé $\mathbf{D}_{v}^{\mathbf{hom}}$ qui peut être determiné comme solution des problèmes aux limites (3.106)-(3.107) ou (3.106) et (3.108).

3.7 Convection prédominante de l'eau liquide à l'échelle macroscopique

On considère maintenant pour finir, le cas d'une convection prédominante d'eau liquide. Le temps caractéristique d'observation T^r est alors le temps caractéristique de convection de l'eau liquide à l'échelle macroscopique T_L^{conv}. Ce cas correspondant à un état super-hygroscopique du matériau, la condition aux limites de type Dirichlet (3.24) est adoptée pour le transport de vapeur d'eau à l'interface liquide-gaz. Les ordres de grandeur des nombres sans dimension sont alors donnés par (3.44), et les équations (3.20)-(3.25) prennent la forme

adimensionnelle suivante :

$$\varepsilon \ \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \varepsilon^2 \ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \ - \ div\ (\ D_v \ grad \rho_v\ ) + \ div\ (\ \rho_l \ V_l\ ) \ \ = \ \ 0 \ \ \text{dans} \ \ \ \Omega_f \tag{3.168}$$

avec les conditions aux limites associées :

$$V_l.n_{ls} \ \ = \ \ 0 \quad \text{sur} \quad \ \Gamma_{ls} \tag{3.169}$$

$$D_v \ grad \ \rho_v.n_{gs} \ \ = \ \ 0 \quad \text{sur} \quad \ \Gamma_{gs} \tag{3.170}$$

$$\rho_v \ \ = \ \ \rho_v^{eq} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{lg} \tag{3.171}$$

La conservation de la masse sur l'interface Γ_{gl} s'écrit :

$$(\ \rho_l \ V_l - \rho_l \ \omega_{lg}\ ).n_{lg} \ \ = \ \ (\ D_v \ grad \rho_v + \ \varepsilon \ \rho_v \ \omega_{gl}\ ).n_{gl} \ \ \text{sur} \ \ \ \Gamma_{lg} \tag{3.172}$$

Finalement, la moyenne des termes insatationnaires (3.31) et (3.32) devient :

$$\varepsilon < \frac{\partial \ \rho_l}{\partial t} >_l = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(< \ \rho_l \ >_l) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{lg}} \rho_l \ \omega_{lg}.n_{lg} d\Gamma \tag{3.173}$$

$$\varepsilon < \frac{\partial \ \rho_v}{\partial t} >_g = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(< \ \rho_v \ >_g) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{lg}} \rho_v \ \omega_{gl}.n_{lg} d\Gamma \tag{3.174}$$

Les développements (3.45) des inconnues du problème ainsi que les opérateurs dérivées donnés par (3.46) sont remplacés dans les équation de transfert (3.168)-(3.174). En annulant les facteurs des différentes puissances de ε, on obtient une nouvelle série de problèmes en cascades couplés $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ ....

Résultat 3.3

Dans le cas d'une convection prédominante d'eau liquide, la teneur volumique en eau liquide θ_l est solution de l'équation de transfert hydrique homogénéisée :

$$\frac{\partial \ \theta_l}{\partial t} - div_x(\boldsymbol{D}_{\theta,l}^{\boldsymbol{hom}} \ \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) = 0 \tag{3.175}$$

où

$$\boldsymbol{D}_{\theta,l}^{\boldsymbol{hom}} = - \ \Lambda_{ll} \ \frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} \tag{3.176}$$

est le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé. Λ_{ll} *est le tenseur de perméabilité de Darcy et* P_c^0 *la pression capillaire macroscopique.*

Démonstration

La démonstration de ce résultat est divisée en 2 étapes numérotées de *(I)* à *(II)*.

(I) Equation macroscopique de transport de l'eau liquide

Problème $\mathscr{P}_0$

Les équations de transfert hydrique (3.168)-(3.171) s'écrivent à l'ordre ε^0 :

$$div_y(-D_v \frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}) + div_y(\rho_l^0 V_l^0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \tag{3.177}$$

$$V_l^0.n_{ls} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{ls} \tag{3.178}$$

$$D_v \frac{\partial \rho_v^0}{\partial y}.n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{3.179}$$

$$\rho_v^0 = \rho_v^{eq} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.180}$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, la solution du problème (3.177)-(3.180) est indépendante de y :

$$\rho_v^0(x,y,t) = \rho_v^{eq}(x,t) \tag{3.181}$$

Comme on est dans la région super-hygroscopique, ρ_v^0 est égal à la densité de vapeur à l'équilibre ρ_v^{eq}.

Problème $\mathscr{P}_1$

Les équations de transfert hydrique (3.168)-(3.171) s'écrivent à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial\ \rho_l^0}{\partial t} - div_y(-D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})) + div_y(\rho_l^0 V_l^1 + \rho_l^1 V_l^0) + div_x(\rho_l^0 V_l^0) = 0 \text{ dans } \Omega_f \quad (3.182)$$

$$V_l^1.n_{ls} = 0 \text{ sur } \Gamma_{ls} \quad (3.183)$$

$$D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}).n_{gs} = 0 \text{ sur } \Gamma_{gs} \quad (3.184)$$

$$\rho_v^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_{gl} \quad (3.185)$$

La description macroscopique est obtenue en intégrant l'équation (3.182) sur le domaine fluide. En utilisant le théorème de la divergence, l'équation (3.173) à l'ordre 1 et les conditions aux limites (3.178) (3.183) et (3.184), ainsi que la périodicité des champs impliqués, on obtient :

$$\frac{\partial(<\ \rho_l^0\ >_l)}{\partial t} + div_x(<\ \rho_l^0\ V_l^0\ >_l) + (m_l - m_g) = 0 \quad (3.186)$$

où m_l et m_g sont définis dans ce cas par :

$$m_l = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} [\rho_l^0\ (V_l^1 - \omega_{lg}^1) + \rho_l^1\ (V_l^0 - \omega_{lg}^0)].n_{lg}\ d\Gamma \quad (3.187)$$

et

$$m_g = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}} D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_v^0}{\partial x}).n_{gl}\ d\Gamma \quad (3.188)$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, en supposant que ρ_l^0 est constant, on obtient :

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} + div_x(<\ V_l^0\ >_l) + \frac{1}{\rho_l^0}(m_l - m_g) = 0 \quad (3.189)$$

Exprimant maintenant la vitesse de l'eau liquide $<\ V_l^0\ >_l$ en fonction de la pression capillaire P_c^0 suivant (3.123), on obtient :

$$\frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x(\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}\ \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) + \frac{1}{\rho_l^0}(m_l - m_g) = 0 \quad (3.190)$$

où

$$\mathbf{D}^{\mathbf{hom}}_{\theta,l} = -\ \Lambda_{ll}\ \frac{\partial P^0_c}{\partial \theta_l} \tag{3.191}$$

(II) Consistance physique du modèle homogénéisé obtenu

Nous allons maintnenant vérifier la coéhrence (ou la consistance) du modèle homogénéisé obtenu avec l'équation de conservation de la masse à l'interface liquide-gaz.

Problème $\mathscr{P}_0$

L'annulation du facteur en ε^0 dans l'équation de conservation de la masse (3.172) conduit au problème $\mathscr{P}_0$:

$$D_v\ \frac{\partial \rho^0_v}{\partial y}.n_{gl} \quad = \quad \rho^0_l(V^0_l - \omega^0_{lg}).n_{lg} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.192}$$

Compte tenu de (3.181), on en déduit la relation suivante qui relie la vitesse d'interface ω^0_{lg} à la vitesse de l'eau liquide V^0_l sur l'interface Γ_{gl} :

$$\omega^0_{lg}.n_{lg} = V^0_l.n_{lg} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.193}$$

Remarque 3.10 *La relation* (3.193) *signifie que le mouvement de l'interface liquide-gaz* Γ_{lg} *est du essentiellement à la vitesse de l'eau liquide.*

Problème $\mathscr{P}_1$

L'annulation du facteur en ε^1 dans l'équation (3.172) conduit au problème $\mathscr{P}_1$:

$$[D_v(\frac{\partial \rho^1_v}{\partial y} + \frac{\partial \rho^0_v}{\partial x}) + \rho^0_v\ \omega^0_{gl}].n_{gl} = [\rho^0_l\ (V^1_l - \omega^1_{lg}) + \rho^1_l\ (V^0_l - \omega^0_{lg})].n_{lg} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{3.194}$$

En intégrant cette équation sur l'interface liquide-gaz Γ_{lg} et en divisant par le volume total $|\Omega|$, on obtient :

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}}[D_v(\frac{\partial \rho_v^1}{\partial y}+\frac{\partial \rho_v^0}{\partial x})+\rho_v^0\ \omega_{gl}^0].n_{gl}\ d\Gamma=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}}[\rho_l^0\ (V_l^1-\omega_{lg}^1)+\rho_l^1\ (V_l^0-\omega_{lg}^0)].n_{lg}\ d\Gamma \tag{3.195}$$

D'autre part, l'annulation du facteur en ε^0 dans l'équation (3.174) donne :

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Gamma_{lg}}\rho_v^0\ \omega_{gl}^0.n_{lg}d\Gamma=0 \tag{3.196}$$

En utilisant (3.195) et (3.196), on obtient de façon évidente que :

$$m_l=m_g \tag{3.197}$$

où m_l et m_g sont donnés par (3.187) et (3.188), ce qui achève la démonstration du résultat 3.3.

3.8 Conclusion

Les résultats obtenus dans ce chapitre ont mis en évidence l'intérêt de la technique d'homogénéisation périodique dans l'étude du transfert hydrique dans les matériaux poreux partiellement saturés, en clarifiant et en précisant un certain nombre d'aspects fondamentaux du problème. D'une part, la méthode d'homogénéisation périodique a permis de préciser la variable d'état θ_l (teneur volumique en eau liquide) qui intervient dans l'équation macroscopique de transfert hydrique homogénéisée obtenue. D'autre part, la méthode utilisée permet de "trier" les régimes à l'ordre principal du développement asymptotique des équations, en ne conservant que celui qui prédomine, en fonction des ordres de grandeur des nombres sans dimension.

Avec la méthode d'homogénéisation périodique utilisée, la microstructure hétérogène du matériau a été modélisée par une distribution périodique d'une cellule élémentaire de base.

L'adimensionalisation des équations de continuité de l'eau liquide et de vapeur d'eau avec les conditions aux limites associées, a fait appararaître naturellement des nombres sans dimension caractérisant le transfert hydrique. Selon l'ordre de grandeur de ces nombres adimensionnels, l'homogénéisation périodique a conduit à des modèles macroscopiques différents, couplant ou non la convection de l'eau liquide et la diffusion de vapeur d'eau.

Dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau, nous avons obtenu un modèle macroscopique homogénéisé de diffusion pure de vapeur d'eau où le tenseur de diffusion homogénéisé est donné au résultat 3.1 par :

$$\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0}\,\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$$

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés au cas d'une diffusion de vapeur d'eau et d'une convection d'eau liquide du même ordre de grandeur, dans les deux régions hygroscopique et super hygroscopique. Le modèle macroscopique alors obtenu au résultat 3.2 est un modèle où la diffusion et la convection de l'eau en phase vapeur et liquide sont couplées au même ordre de grandeur à l'échelle macroscopique :

$$\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0}\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} - \frac{K_{rl}(\theta_l)\,K_l}{\mu_l}\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l}$$

Dans un troisième temps, nous avons considéré le cas où la convection de l'eau liquide prédomine dans le processus de transfert hydrique. Nous avons obtenu un modèle macroscopique homogénéisé où le tenseur de diffusion homogénéisé est donné au résultat 3.3 par :

$$\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \; - \frac{K_{rl}(\theta_l)\,K_l}{\mu_l}\,\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l}$$

Pour chaque modèle macroscopique homogénéisé de transport hydrique obtenu, l'expression du tenseur de diffusion hydrique homogénéisé est différente. De plus, pour chaque région ou état du matériau considéré (hygroscopique ou super-hygroscopique), le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé obtenu est également différent. Ceci explique en grande partie la forte non linéarité du tenseur de diffusion hydrique macroscopique $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$.

Enfin, notons que les tenseurs de diffusion macroscopiques homogénéisés obtenus peuvent être reliés aux données expérimentales du matériau (courbe de rétention, courbe de sorption/désorption, perméabilité relative,....). Seul le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}$ reste à calculer analytiquement ou numériquement. C'est l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre 4

Calcul des propriétés de transfert homogénéisées : mise en évidence de la condensation capillaire

4.1 Introduction

Nous avons obtenu au chapitre 3, trois modèles de transfert hydrique homogénéisés différents suivant l'ordre de grandeur des nombres sans dimension apparaissant naturellement dans les équations adimensionnelles.

Le premier modèle de diffusion macroscopique homogénéisé a été obtenu dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau correspondant à des faibles humidités relatives dans la région hygroscopique (résultat 3.1). Le second modèle a été obtenu dans le cas où la diffusion de vapeur d'eau et la convection de l'eau liquide sont du même ordre de grandeur (résultat 3.2). Il est valable pour des humidités relatives élevées dans la région hygroscopique ou pour des humidités relatives faibles dans la région super-hygroscopique. Un troisième modèle macroscopique homogénéisé a été également obtenu au résultat 3.3 dans le cas

d'une convection d'eau liquide prédominante, correspondant à des humidités relatives élevées dans la région super-hygroscopique. Pour chaque modèle macroscopique homogénéisé de transport hydrique, nous avons obtenu une expression du tenseur de diffusion hydrique homogénéisé différente. Les paramètres intervenant dans le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$, écrit sous sa forme la plus générale au résultat 3.2, peuvent être reliés aux données expérimentales, sauf le tenseur de diffusion de vapeur d'eau $\mathbf{D}_\mathbf{v}^{\mathbf{hom}}$. Ce dernier est solution du problème aux limites classique (3.106)-(3.107) dans la région hygroscopique, et d'un nouveau problème (3.106) et (3.108) dans la région super-hygroscopique. Excepté dans des cas très simples où il peut être calculé analytiquement, le recours à la résolution numérique est nécessaire.

La première partie de ce chapitre est consacrée au rappel des expressions obtenues pour le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé, en distinguant bien les deux problèmes aux limites correspondant aux deux régions hygroscopique et super-hygroscopique considérées. Dans la seconde partie du chapitre, on considérera différentes distributions de fluide dans le cas d'un modèle de pores cylindriques, où le tenseur de diffusion de vapeur homogénéisé admet une solution analytique. Le reste du chapitre sera consacré au calcul du tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé dans la région super-hygroscopique pour des matériaux à microstructure bidimensionnelle et tridimensionnelle périodique.

Les diffusivités calculées correspondant aux deux régions hygroscopique et super-hygroscopique seront comparées et le phénomème de condensation capillaire sera mis en évidence.

4.2 Présentation du problème de diffusion de vapeur d'eau

On rapelle que le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé obtenu au chapitre précédent dépend de la géométrie de la microstructure du milieu considéré et s'exprime de la même manière dans les deux régions (hygroscopique et super-hygroscopique). Pour simplifier le problème, si on suppose que la diffusion dans la phase gazeuse Ω_g est isotrope et que le coefficient de diffusion microscopique D_v est constant, le tenseur de diffusion de vapeur

d'eau homogénéisé s'exprime simplement :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \frac{D_v}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega_g}(I+\overline{\frac{\partial\chi}{\partial y}})dy \tag{4.1}$$

Le vecteur local χ est solution de deux problèmes aux limites locaux différents selon la région considérée (hygroscopique ou super-hygroscopique).

- **Diffusivité dans la région hygroscopique**

  On rappelle que dans cette région, le matériau est exposé à de faibles humidités relatives. L'eau est transportée essentiellement sous forme vapeur. Dans ce cas, le vecteur χ est solution d'un problème local classique donné par des conditions aux limites de type Neumann aux interfaces Γ_{gs} et Γ_{gl} [28] :

$$\begin{cases} \Delta_y\chi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \\ \frac{\partial\chi}{\partial y}.n = -n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \\ \frac{\partial\chi}{\partial y}.n = -n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \end{cases} \quad \text{dans la région hygroscopique} \tag{4.2}$$

- **Diffusivité dans la région super-hygroscopique**

  Dans cette région, c'est l'eau liquide qui occupe la majorité de l'espace, laissant des poches dans lesquelles la vapeur circule. Dans ce cas, le vecteur de localisation χ est solution d'un nouveau problème local, avec une condition aux limites de type Neumann à l'interface gaz-solide Γ_{gs} et une condition aux limites de type Dirichlet à l'interface gaz-liquide Γ_{gl} :

$$\begin{cases} \Delta_y\chi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \\ \frac{\partial\chi}{\partial y}.n = -n \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \\ \chi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \end{cases} \quad \text{dans la région super-hygroscopique} \tag{4.3}$$

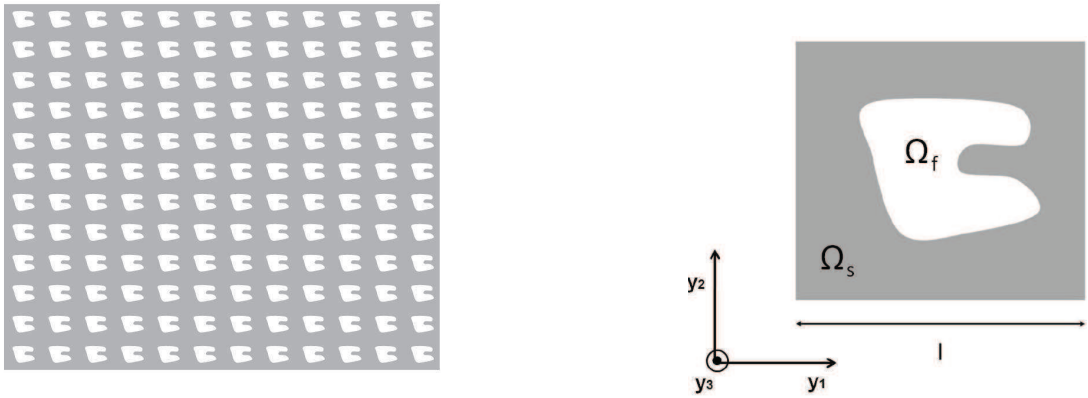
On propose dans la suite de ce chapitre de calculer le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé $\mathbf{D_v^{hom}}$, qui s'écrit de manière générale :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \begin{pmatrix} D_{11}^{hom} & D_{12}^{hom} & D_{13}^{hom} \\ D_{21}^{hom} & D_{22}^{hom} & D_{23}^{hom} \\ D_{31}^{hom} & D_{32}^{hom} & D_{33}^{hom} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

La résolution du problème local (4.2) ou (4.3) sera effectuée suivant la région considérée (hygroscopique ou super-hygroscopique) pour différentes cellules élémentaires bidimensionnelles et tridimensionnelles. Les résultats obtenus seront ensuite comparés.

4.3 Modèles de pores cylindriques infinis

Considérons pour commencer le cas très simple d'un milieux poreux dont la microstructure (Fig. 4.1(a)) est constituée de la répétition de la cellule élémentaire périodique de taille $l \times l$ représentée sur la Fig. 4.1(b). Cette cellule élémentaire est elle même composé d'une inclusion cylindrique représentant le domaine fluide (liquide et gaz) $\Omega_f = \Omega_l \cup \Omega_g$, où les problèmes aux limites (4.2) et (4.3) seront résolus suivant la région considérée. Le domaine extérieur à l'inclusion cylindrique représente la phase solide Ω_s.



(a) Microstructure périodique associée (b) Cellule élémentaire contenant une inclusion cylindrique

FIGURE 4.1 – Modèle d'inclusion cylindrique

On suppose que le solide est indéformable et que l'interface liquide-gaz reste immobile. On va considérer une distribution différente du liquide et de la vapeur d'eau selon la région considérée (hygroscopique ou super-hygroscopique).

4.3.1 Résolution analytique dans la région hygroscopique

Dans le cas d'une géométrie peu complexe de la microstructure composée de pores cylindriques, il existe une solution analytique simple au problème (4.2). Cela n'est pas toujours le cas, notamment pour des géométries plus complexes.
La phase gazeuse étant infinie dans la direction y_3, nous cherchons une solution $\chi(y_1, y_2)$ du problème (4.2) qui ne dépende pas de la variable y_3, et dont les composantes χ sont solutions de :

$$\Delta_y \chi_i = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \quad \text{pour} \quad i = 1,2,3 \tag{4.5}$$

Les conditions aux limites associées sur Γ_{gs} et sur Γ_{gl} sont données par :

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2}.n_2 = -n_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \cup \Gamma_{gl} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}.n_2 = -n_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \cup \Gamma_{gl} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial \chi_3}{\partial y_2}.n_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \cup \Gamma_{gl} \tag{4.8}$$

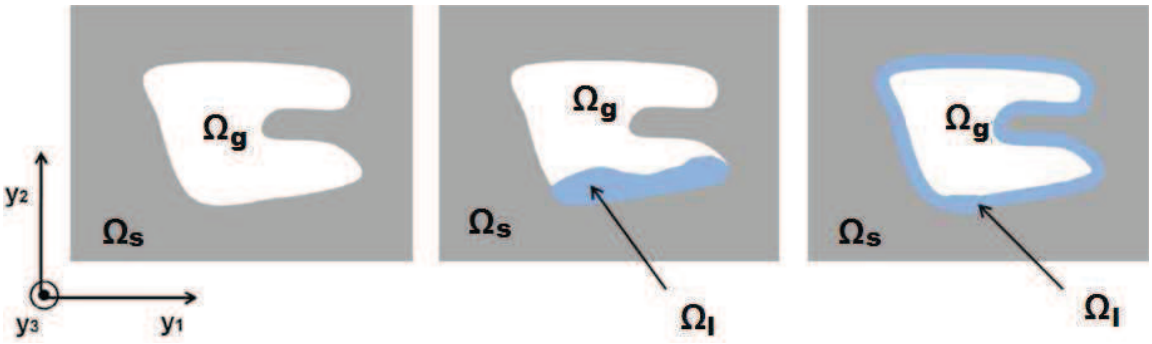


FIGURE 4.2 – Exemples de distribution de fluide dans la région hygroscopique.

Quelque soit la distribution du fluide (Fig. 4.2) (aussi bien pour un pore partiellement mouillé par le fluide que totalement mouillé sur sa surface latérale), la solution du problème

(4.2) dans la région hygroscopique est donnée par :

$$\chi_1 = -y_1 + \alpha_1 \tag{4.9}$$

$$\chi_2 = -y_2 + \alpha_2 \tag{4.10}$$

$$\chi_3 = \alpha_3 \tag{4.11}$$

où α_1, α_2 et α_3 sont des constantes réelles arbitraires, qui peuvent être déterminées à partir de la condition de moyenne nulle de χ sur le domaine Ω_g. Cependant, ces constantes n'ont pas d'influence sur le tenseur de diffusion homogénéisé $\mathbf{D_v^{hom}}$.

Pour analyser les effets de la tortuosité sur la diffusion de vapeur d'eau, on définit "le tenseur de tortuosité local" ϕ, associé au vecteur χ, par :

$$\phi = (I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}}) \tag{4.12}$$

Dans le cas simple considéré ici, on a trivialement :

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Ainsi, compte tenu de la géométrie considérée (pores cylindriques dans la direction y_3), la diffusion de vapeur d'eau est complètement stoppée dans les deux directions y_1 et y_2 (le domaine gazeux Ω_g de deux cellules voisines n'est pas connecté). Par contre, la tortuosité n'a aucune influence sur la diffusion de vapeur d'eau dans la direction semi-infinie y_3.
Une fois le tenseur de tortuosité local ϕ calculé, il est facile de déduire le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé dans la région hygroscopique :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \frac{D_v}{|\,\Omega\,|} \int_{\Omega_g} \phi \, d\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_g D_v \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

où $\theta_g = \frac{|\Omega_g|}{|\Omega|}$ désigne la teneur volumique en vapeur d'eau du milieu poreux. Il est important de remarquer que le résultat obtenu ici est général : quelque soit la forme du cylindre (non nécessairement circulaire), et quelque soit la distribution du fluide dans le pore cylindrique,

le tenseur de diffusion de vapeur d'eau $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}$ est identique et est donné par (4.14). On n'a de transfert que dans la direction y_3 des pores cylindriques infinis. Dans cette direction, le coefficient de diffusion de vapeur vaut $D_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} = \theta_g \, D_v$.

4.3.2 Résolution analytique dans la région super-hygroscopique

Rappelons d'abord que, dans cette région, c'est l'eau liquide qui occupe la majorité de l'espace des pores, laissant des poches dans lesquelles la vapeur circule. Les pores étant infinis dans la direction y_3, nous cherchons à nouveau une solution $\chi(y_1, y_2)$ qui ne dépende pas de la variable y_3, et dont les composantes vérifient :

$$\Delta_y \chi_i = 0 \quad \text{dans} \quad \text{pour} \quad \Omega_g \quad i = 1,2,3 \tag{4.15}$$

Les conditions aux limites associées sur Γ_{gs} sont données par :

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2}.n_2 = -n_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}.n_2 = -n_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial \chi_3}{\partial y_2}.n_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{4.18}$$

Celles sur Γ_{gl} sont données par :

$$\chi_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1,2,3 \tag{4.19}$$

On considère dans cette section le cas particulier où l'eau liquide mouille toute l'interface solide (Fig. 4.3), une résolution dans un cas plus général sera considérée dans la section suivante.

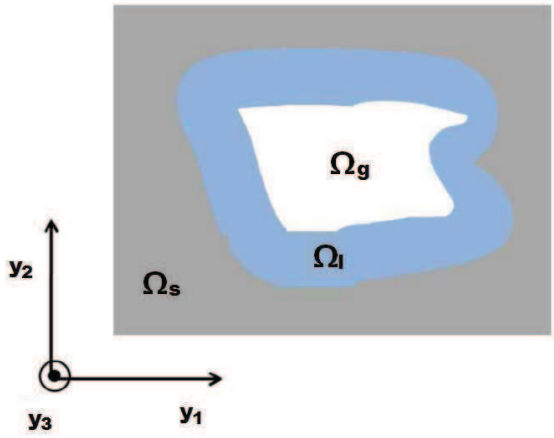


FIGURE 4.3 – Distribution de fluide particulière dans la région super-hygroscopique.

Dans ce cas particulier, où l'eau liquide mouille toute l'interface solide, il est évident que la solution du problème (4.15)-(4.19) est donnée par :

$$\chi = 0 \tag{4.20}$$

Anisi, le tenseur de tortuosité local ϕ s'écrit :

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

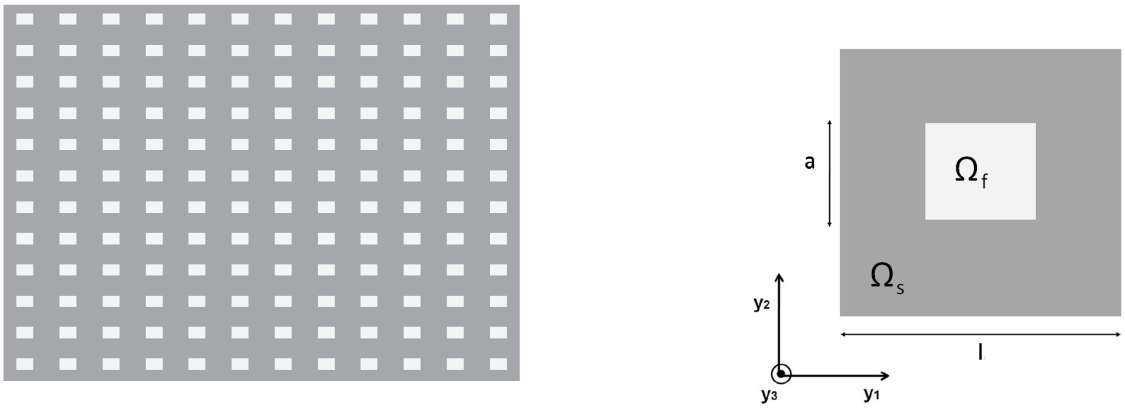
Il n'y a aucun effet de tortuosité sur le processus de diffusion de vapeur d'eau, et la diffusion est maximale dans tout le domaine gazeux. On en déduit directement le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé dans la région super-hygroscopique :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \frac{D_v}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega_g} \phi \; d\Omega = \begin{pmatrix} \theta_g D_v & 0 & 0 \\ 0 & \theta_g D_v & 0 \\ 0 & 0 & \theta_g D_v \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Dans le cas particulier où l'eau liquide mouille toute l'interface solide, la diffusion de vapeur d'eau est maximale en tout point et n'est pas affectée par les effets de la tortuosité. Des cas plus complexes seront considérés dans les sections suivantes.

4.4 Inclusions bidimensionnelles partiellement saturées - Mise en évidence du phénomène de condensation capillaire

De façon similaire au cas précédent, on considère un milieu poreux (Fig. 4.4(a)) dont la microstructure est constituée de la répétition périodique d'une cellule élémentaire de taille $l \times l$. Cette dernière est composée d'une phase solide Ω_s (en gris), contenant une inclusion carrée de taille $a \times a$ située au centre, contenant elle-même les phases liquide et vapeur (Fig. 4.4(b)). La répartition des phases liquide et vapeur au sein de cette inclusion dépend de la nature (hygroscopique ou super-hygroscopique) du matériau que l'on va considérer par la suite.



(a) Microstructure périodique associée (b) Cellule elementaire contenant une inclusion carrée

FIGURE 4.4 – Modèle d'une inclusion carrée .

4.4.1 Résolution analytique dans la région hygroscopique

De même que dans le cas abordé à la section (4.3.1), la résolution du problème (4.2) dans la région hygroscopique, quelque soit la distribution du fluide à l'interieur de l'inclusion

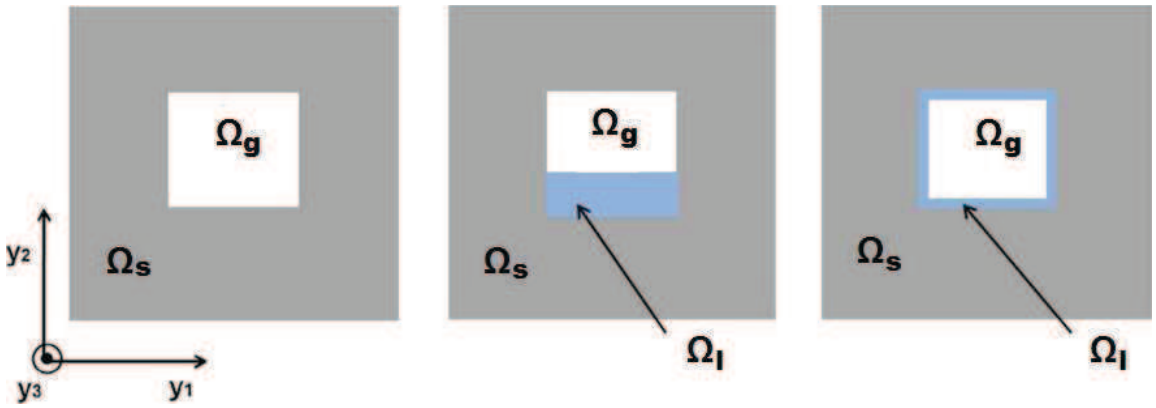


FIGURE 4.5 – Exemples de distribution de fluide dans la région hygroscopique .

carrée (Fig. 4.5), conduit à :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega_g} D_v\ \phi\ d\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_g D_v \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

4.4.2 Résolution analytique dans la région super-hygroscopique

Dans la région super-hygroscopique, l'eau liquide est supposée occuper la majorité de l'espace du pore. Pour simplifier le problème, on suppose que ce petit espace est une inclusion rectangulaire de taille $a \times b$ avec $a \gg b$ (Fig. 4.6).

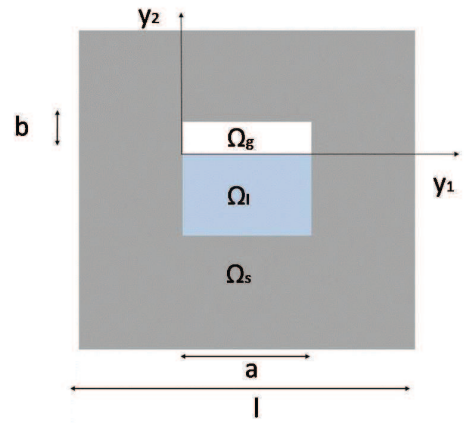


FIGURE 4.6 – Exemple de distribution de fluide dans la région super-hygroscopique

Calcul du vecteur local χ dans la région super-hygroscopique

Pour déterminer la solution χ du problème (4.3), on utilise la méthode de séparation des variables. Les conditions aux limites sont définies sur $\partial\Omega_g = \Gamma_{gl} \cup \Gamma_{gs}$, où $\Gamma_{gl} = \Gamma_2$ et $\Gamma_{gs} = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ dans l'exemple considéré (Fig. 4.7)

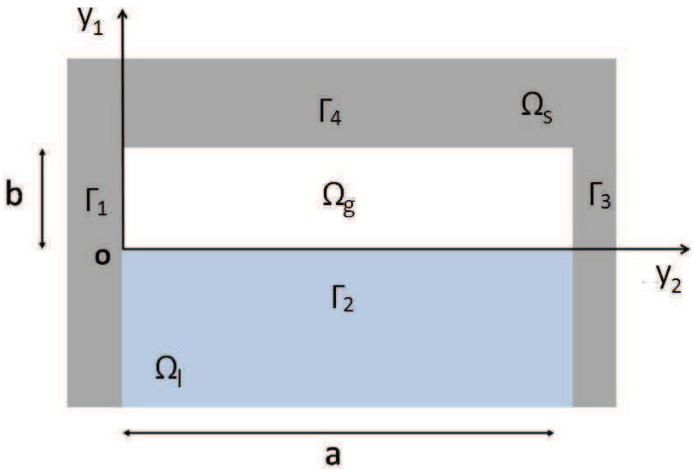


FIGURE 4.7 – Zoom sur la distribution de vapeur dans la région super-hygroscopique

Commençons tout d'abord par calculer χ_1 qui est solution du problème :

$$\frac{\partial^2\chi_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\chi_1}{\partial y_2^2} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial y_1}.n_1+\frac{\partial\chi_1}{\partial y_2}.n_2 = -n_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{4.25}$$

$$\chi_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{4.26}$$

En écrivant explicitement les conditions aux limites (4.25) et (4.26), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi_1}{\partial y_1}(0,y_2) &= -1 \ sur \ \Gamma_1 \ ; \quad \chi_1(y_1,0)=0 \quad sur \ \Gamma_2 \\ \frac{\partial\chi_1}{\partial y_1}(a,y_2) &= -1 \ sur \ \Gamma_3 \ ; \quad \frac{\partial\chi_1}{\partial y_2}(y_1,b)=0 \ sur \ \Gamma_4 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Cherchons χ_1 comme la somme de deux contribution χ_{11} et χ_{12} :

$$\chi_1(y_1,y_2)=\chi_{11}(y_1,y_2)+\chi_{12}(y_1,y_2)$$

où χ_{11} vérifie le problème (4.24)-(4.27) avec des conditions aux limites homogènes sur Γ_3, c'est-à-dire données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi_{11}}{\partial y_1}(0,y_2) &= -1 \ sur \ \Gamma_1 \ ; \quad \chi_{11}(y_1,0)=0 \quad sur \ \Gamma_2 \\ \frac{\partial\chi_{11}}{\partial y_1}(a,y_2) &= 0 \quad sur \ \Gamma_3 \ ; \quad \frac{\partial\chi_{11}}{\partial y_2}(y_1,b)=0 \ sur \ \Gamma_4 \end{aligned} \tag{4.28}$$

χ_{12} est solution du même problème avec des conditions aux limites homogénes sur Γ_1 données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi_{12}}{\partial y_1}(0,y_2) &= 0 \quad sur \ \Gamma_1 \ ; \quad \chi_{12}(y_1,0)=0 \quad sur \ \Gamma_2 \\ \frac{\partial\chi_{12}}{\partial y_1}(a,y_2) &= -1 \ sur \ \Gamma_3 \ ; \quad \frac{\partial\chi_{12}}{\partial y_2}(y_1,b)=0 \ sur \ \Gamma_4 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Cherchons pour commencer χ_{11} en utilisant la méthode de séparation des variables. Dans notre cas, χ_{11} est recherché sous de la forme :

$$\chi_{11}(y_1,y_2)=f(y_1)g(y_2)$$

En remplaçant cette expression dans (4.24) et en divisant par χ_{11} (supposé non nul), on obtient :

$$\frac{f''(y_1)}{f(y_1)}=-\frac{g''(y_2)}{g(y_2)}$$

De façon classique, il existe un nombre réel non nul p appelé "constante de séparation" tel que :

$$f''(y_1) \;=\; p^2\, f(y_1)\,, \qquad g''(y_2) \;=\; -\,p^2\, g(y_2)$$

En prenant en compte la géométrie du problème et les conditions aux limites (4.28), la forme générale de χ_{11}, solution du problème (4.24) et (4.28), s'écrit :

$$\chi_{11}(y_1,y_2) = (A\ cosh(p\ (a-y_1)) + B\ sinh(p\ (a-y_1)))(C\ cos(p\ y_2) + D\ sin(p\ y_2)) \tag{4.30}$$

où A, B, C et D sont des constantes réelles, déterminées par les conditions aux limites. On remarque tout d'abord que $\chi_{11}(y_1,0) = 0$ implique que $C = 0$. Ensuite, la condition aux limites $\frac{\partial \chi_{11}}{\partial y_1}(a,y_2) = 0$ implique que $B = 0$. En absorbant la constante D en A, la forme générale de χ_{11} se réduit à :

$$\chi_{11}(y_1,y_2) \;=\; A\ cosh(p\ (a-y_1))\ sin(p\ y_2) \tag{4.31}$$

D'autre part, la condition aux limites $\frac{\partial \chi_{11}}{\partial y_2}(y_1,b) = 0$ implique que $cos(p\ b) = 0$, soit :

$$p = \frac{(2n+1)\pi}{2\ b} \qquad \text{où } n \text{ est un entier positif.}$$

Notons $p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ b}$. En utilisant le principe de superposition, la solution générale χ_{11} qui vérifie les conditions aux limites (4.28) s'écrit :

$$\chi_{11}(y_1,y_2) \;=\; \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\ cosh(p_n\ (a-y_1))\ sin(p_n\ y_2) \tag{4.32}$$

où A_n sont des constantes à déterminer en utilisant la dernière condition $\frac{\partial \chi_{11}}{\partial y_1}(0,y_2) = -1$. Ainsi, les constantes A_n doivent vérifier :

$$1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\ p_n\ sinh(p_n\ a)\ sin(p_n\ y_2) \tag{4.33}$$

Posons $m = (2n+1)$, $l = 2b$ et $\alpha_m = A_m\ p_m\ sinh(p_m\ a)$. L'expression (4.32) devient :

$$1 = \sum_{m=1}^{m=\infty} \alpha_m\ sin(\frac{m\pi}{l}\ y_2) \tag{4.34}$$

Cette expression correspond au développement en série de fourier de la fonction constante 1 (qui peut être considérée comme une fonction périodique de période l). Les coefficients α_m dans (4.34) sont donnés par :

$$\alpha_m = \frac{2}{l}\int_0^l sin(\frac{m\pi}{l}\ y_2)\ dy_2 = \frac{2}{m\pi}(1-(-1)^m) \tag{4.35}$$

Comme $m = 2n+1$, il vient :

$$\alpha_n = \frac{4}{(2n+1)\pi}$$

et par conséquence, on obtient :

$$A_n = \frac{2}{b\ p_n^2\ sinh(p_n\ a)}$$

Finalement, on obtient comme solution analytique pour χ_{11} :

$$\chi_{11}(y_1,y_2) \ = \ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{b\ p_n^2\ sinh(p_n\ a)}\ cosh(p_n(a-\ y_1))\ sin(p_n\ y_2) \tag{4.36}$$

Par translation et par symétrie, il est facile de démontrer que $\chi_{12}(y_1,y_2)$, solution de (4.24) et (4.29), est de la même forme que $\chi_{11}(y_1,y_2)$ et s'écrit :

$$\chi_{12}(y_1,y_2) \ = \ -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{b\ p_n^2\ sinh(p_n\ a)}\ cosh(p_n\ y_1)\ sin(p_n\ y_2) \tag{4.37}$$

Ainsi, la solution complète χ_1 du problème (4.24)-(4.26) est donnée par :

$$\chi_1(y_1,y_2) \ = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{b\ p_n^2\ sinh(p_n\ a)}\ \ sin(p_n\ y_2)(cosh(p_n\ (a-\ y_1)) - cosh(p_n\ y_1)) \tag{4.38}$$

avec $p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ b}$.

Cherchons maintenant à calculer χ_2, qui est solution du problème :

$$\frac{\partial^2\chi_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\chi_2}{\partial y_2^2} \ = \ 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial\chi_2}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial\chi_2}{\partial y_2}.n_2 \ = \ -n_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{4.40}$$

$$\chi_2 \ = \ 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{4.41}$$

En écrivant explicitement les conditions aux limites (4.40) et (4.41), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi_2}{\partial y_1}(0,y_2) \ &= \ 0\ \ sur\ \ \Gamma_1 \ \ ; \quad \chi_2(y_1,0) = 0 \qquad sur\ \ \Gamma_2 \\ \frac{\partial\chi_2}{\partial y_1}(a,y_2) \ &= \ 0\ \ sur\ \ \Gamma_3 \ \ ; \quad \frac{\partial\chi_2}{\partial y_2}(y_1,b) = -1\ \ sur\ \ \Gamma_4 \end{aligned} \tag{4.42}$$

qui conduit trivialement à la solution :

$$\chi_2(y_1,y_2) = -y_2 \tag{4.43}$$

Finalement, de façon évidente

$$\chi_3 = 0 \tag{4.44}$$

est une solution du problème :

$$\frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y_2^2} = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial \chi_3}{\partial y_2}.n_2 = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{4.46}$$

$$\chi_3 = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{4.47}$$

Par conséquence, la solution χ du problème (4.3) dans la région super-hygroscopique s'écrit :

$$\chi_1(y_1,y_2) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{b\ p_n^2\ sinh(p_n\ a)}\ sin(p_n\ y_2)(cosh(p_n\ (a-\ y_1)) - cosh(p_n\ y_1)) \tag{4.48}$$

$$\chi_2(y_1,y_2) = -y_2 \tag{4.49}$$

$$\chi_3(y_1,y_2) = 0 \tag{4.50}$$

Calcul du tenseur de tortuosité local dans la région super hygroscopique

Pour analyser les effets de la tortuosité sur la diffusion de vapeur d'eau, on calcule le tenseur de tortuosité local associé :

$$\Phi = (I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})$$

On obtient ainsi :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ \Phi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

avec :

$$\Phi_{11} = 1 - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{b\ p_n\ sinh(p_n\ a)}\ sin(p_n\ y_2)(sinh(p_n\ (a-\ y_1)) + sinh(p_n\ y_1)) \tag{4.52}$$

$$\Phi_{12} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2}{b\ p_n\ sinh(p_n\ a)}\ cos(p_n\ y_2)(cosh(p_n\ (a-\ y_1)) - cosh(p_n\ y_1)) \tag{4.53}$$

Contrairement au cas considéré précédemment à la section 4.3.1, des effets de tortuosité apparaissent dans l'expression de Φ. En effet, Φ_{11} et Φ_{21} ne s'annulent pas (comme c'était

le cas dans l'exemple précédent). On peut donc s'attendre à ce qu'il y ait une différence en termes de diffusisvité dans la direction y_1.

Calcul du tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé dans la région super hygroscopique

A partir de (4.51), il est aisé de calculer le tenseur de diffusivité de vapeur d'eau homogénéisé :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \frac{D_v}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega_g} \Phi\, d\Omega$$

Dans la région super-hygroscopique, il est donné par :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \begin{pmatrix} D_v\,\theta_g - \frac{D_v}{|\Omega|}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{4}{b\,p_n^3}\,\frac{(cosh(p_n\,a)-1)}{sinh(p_n\,a)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_v\,\theta_g \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

Il est clair que le tenseur $\mathbf{D_v^{hom}}$ ainsi obtenu est symétrique et positif. L'expression (4.54) montre que la vapeur d'eau diffuse intégralement dans la direction y_3, et partiellement dans la direction y_1, alors qu'elle est stoppée dans la direction y_2.

La diffusion partielle dans la direction y_1 peut sembler à première vue surprenante, car la cellule considérée est censée stopper toute diffusion "au sens classique" dans le sens y_1 (Fig. 4.6). Afin de mettre en évidence cette diffusivité "non classique", on s'intéressera dans la suite au tenseur de tortuosité local Φ. Comme l'interprétation physique de ce dernier sous sa forme (4.51)-(4.52) n'est pas évidente, nous aurons recours à la résolution numérique dans la section suivante.

4.4.3 Résolution numérique dans la région super-hygroscopique

Intéressons nous maintenant à la résolution numérique du problème (4.3) dans la région super-hygroscopique. Pour cela, nous avons utilisé le logiciel COMSOL Multiphysics. La résolution numérique des équations aux dérivées partielles (4.3) a été effectuée par la méthode des éléments finis.

Dans l'exemple considéré, seule la composante χ_1 est intéressante à simuler, la solution pour χ_2 et χ_3 étant triviale (voir (4.49) et (4.50)). Considérons comme cellule élementaire une inclusion rectangulaire tel que $a = 5$ et $b = 1$ (Fig. 4.8).

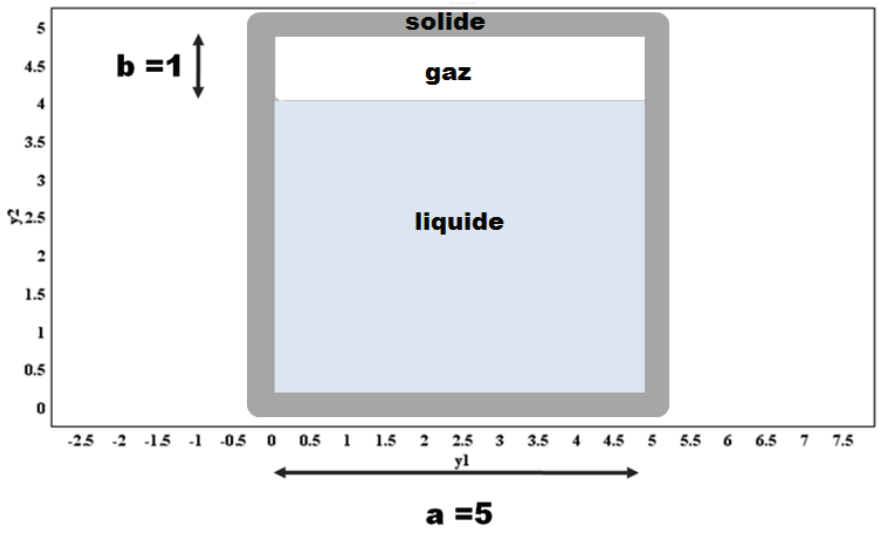


FIGURE 4.8 – Inclusion rectangulaire considérée

La résolution numérique du problème suivant dont χ_1 est solution :

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y_2^2} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \tag{4.55}$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}.n_1 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2}.n_2 = -n_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \tag{4.56}$$

$$\chi_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{4.57}$$

est effectuée avec Comsol Multiphysics.

Comparaison entre les solutions analytique et numérique pour la composante χ_1

La solution analytique que nous avons obtenue pour χ_1 en (4.48) est représentée sur la Fig. 4.9 tronquée au douzième termes, i.e :

$$\chi_1(y_1,y_2) = \sum_{n=0}^{n=12} \frac{2}{b\ p_n^2\ sinh(p_n\ a)}\ \ sin(p_n\ y_2))(cosh(p_n\ (a-\ y_1)) - cosh(p_n\ y_1))$$

avec $p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ b}$.

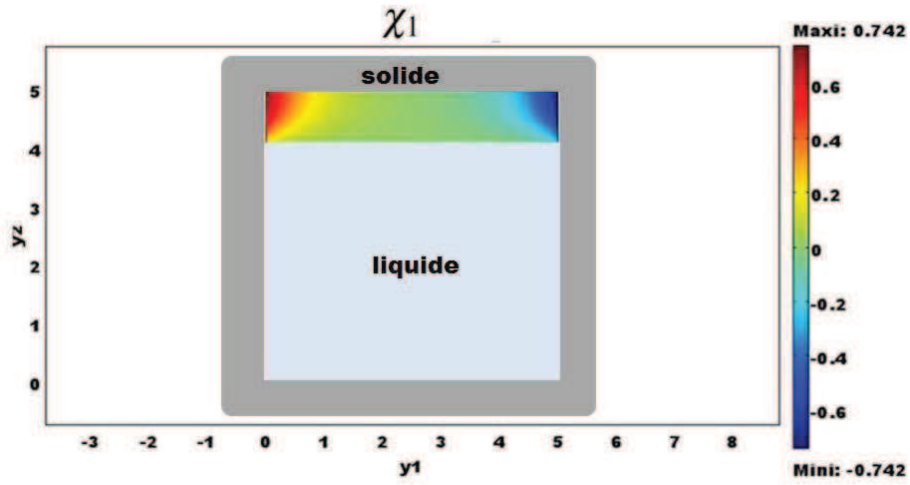


FIGURE 4.9 – Composante χ_1 tronquée au douzième terme

La solution numérique de problème (4.55)-(4.57), effectuée avec Comsol Multiphysics, est représentée à la Fig. 4.10.

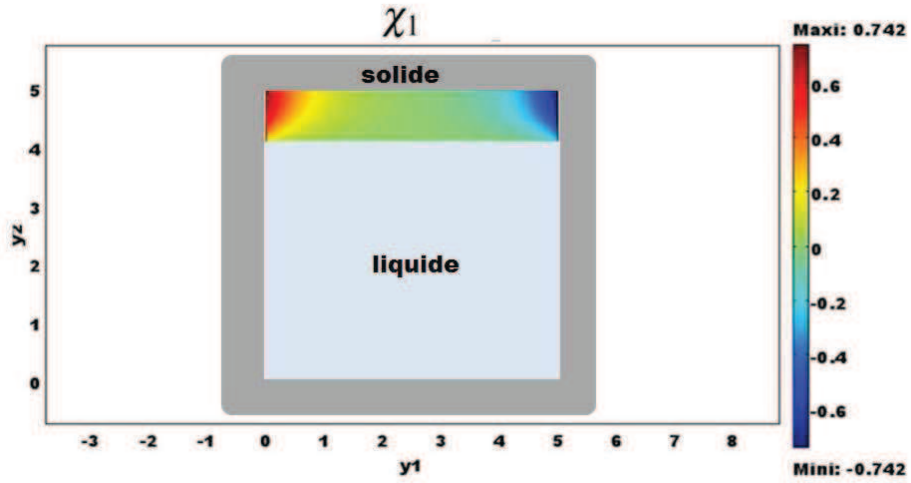


FIGURE 4.10 – Composante χ_1 obtenue par résolution numérique avec Comsol Multiphysics

La comparaison entre la solution numérique et la solution analytique pour la composante χ_1 montre un très bon accord (Figs 4.9 et 4.10). Maintenant que la résolution numérique avec Comsol Multiphysics a été validée, nous proposons de calculer le tenseur de tortuosité local ϕ afin d'essayer d'expliquer et d'interpréter le processus de diffusion de vapeur d'eau à l'échelle macroscopique (composante $D_{11}^{\mathbf{hom}}$ donnée par (4.54)).

Tenseur de tortuosité local

Représentons maintenant le tenseur de tortuosité local $\phi = (I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})$ qui a comme expression analytique (4.51)-(4.53). Toutes les composantes de Φ sont nulles sauf Φ_{11}, Φ_{21} et Φ_{33} (qui est trivialement égale à 1).
Une fois que χ_1 a été calculé numériquement, la composante $\Phi_{11} = 1 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}$ est représentée sur la Fig. 4.11.

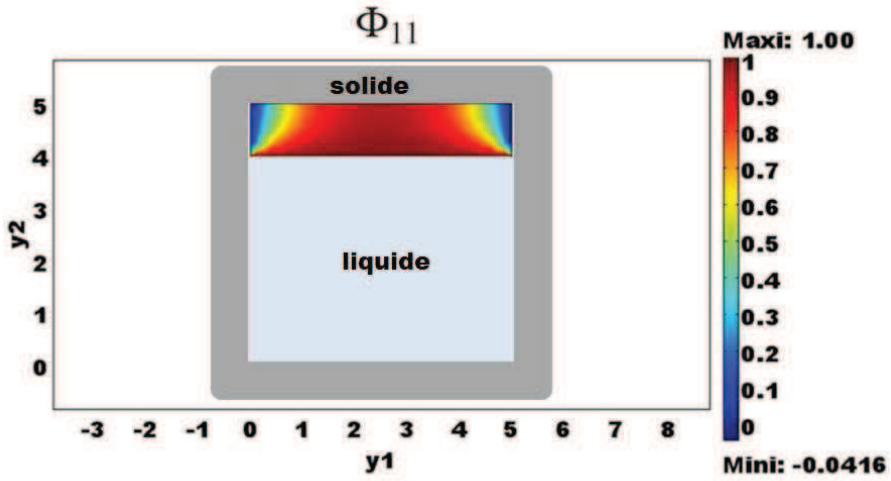


FIGURE 4.11 – Représentation de la composante Φ_{11}

Nous observons que dans la direction y_1, près du domaine solide (aux alentours des frontières Γ_1 et Γ_3 représentées plus explicitement sur la Fig. 4.7), Φ_{11} s'annule, ce qui correspond à une diffusion de vapeur d'eau nulle près de l'interface gaz-solide Γ_{gs}. Par contre, plus on se rapproche du centre du domaine liquide, plus la composante Φ_{11} croit et s'approche de sa valeur maximale. Ainsi, les variations de Φ_{11} peuvent être interprétées comme un phénomène de condensation capillaire qui apparait dans la région super hygroscopique.

Les variations de Φ_{11} traduisent l'agitation de la vapeur d'eau quand l'eau liquide remplit l'espace poral. On arrive même à distinguer des "ponts capillaires" qui se créent en faisant varier la position du front capillaire (Fig. 4.11). De plus, nous remarquons l'existence d'un nouveau terme de couplage Φ_{21} dont les variations sont représentées sur la Fig. 4.12.

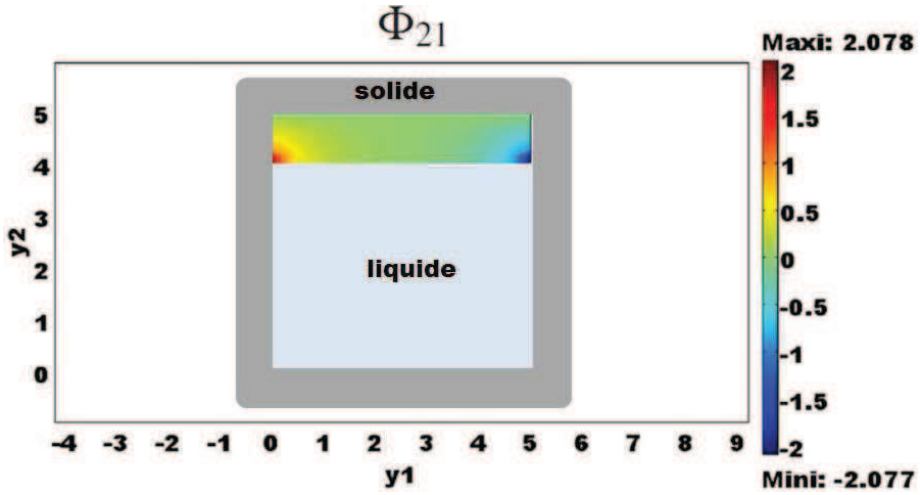


FIGURE 4.12 – Représentation de la composante Φ_{21}

L'interprétation physique de ce terme de couplage n'est pas évidente. Il semble lié à la rotation des directions principales du tenseur de tortuosité local de la vapeur d'eau. Notons que ce terme s'annule une fois que nous moyennons Φ sur le domaine gazeux Ω_g pour obtenir le tenseur de difussion de vapeur d'eau homogénéisé (voir (4.54)).

Etude paramétrique du tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé

Nous proposons pour finir de comparer les résultats obtenus dans le cas d'une inclusion rectangulaire, pour la diffusivité dans la direction y_3 (diffusion classique sans effet de tortuosité) et dans la direction y_1 (diffusion avec condensation capillaire). Pour cela, nous calculons numériquement les coefficients de diffusion de vapeur d'eau homogénéisés relatifs [1] D_{11}^{hom}/D_v^r et D_{33}^{hom}/D_v^r en fonction de la teneur en gaz θ_g que l'on fait varier dans l'intervale $[0\%, 20\%]$. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 4.13.

1. Il suffit d'intégrer le tenseur de tortuosité local sur le domaine gazeux Ω_g et de diviser par le volume total $|\Omega|$ pour obtenir D_{11}^{hom} et D_{33}^{hom}.

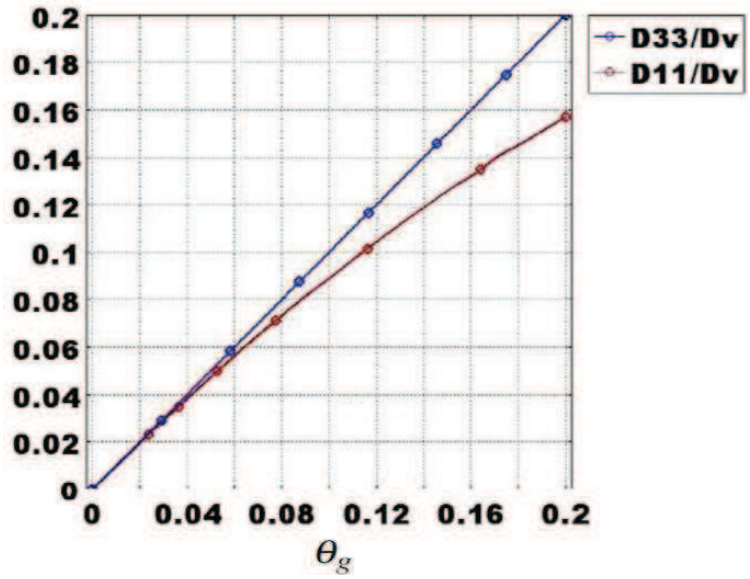


FIGURE 4.13 – Variation des coefficients de diffusion de vapeur d'eau homogénéisés relatifs D_{11}^{hom}/D_v^r et D_{33}^{hom}/D_v^r en fonction de la teneur en gaz pour une inclusion rectangulaire.

Nous observons que les coefficients de diffusion homogénéisés relatifs D_{11}^{hom}/D_v^r et D_{33}^{hom}/D_v^r augmentent lorsque la teneur en gaz θ_g augmente. En effet, lorsque la teneur en gaz θ_g augmente, le volume du domaine gazeux augmente aussi, ouvrant un espace plus grand à la diffusion de vapeur d'eau qui devient plus importante. Si nous comparons les deux coefficients de diffusion homogénéisés calculés dans les directions y_1 et y_3, nous remarquons que pour $\theta_g < 8\%$, il n'y a quasiment pas de différence entre les deux courbes. Ceci s'explique par le fait que la condensation capillaire pour des teneurs en gaz faibles (et donc des teneurs en eau élevées) est assez forte. Par contre, pour une teneur en gaz $\theta_g > 8\%$, on remarque une différence notable entre les deux courbes. On obtient des valeurs plus faibles de D_{11}^{hom}/D_v^r. En effet, plus la teneur en gaz est grande, moins la condensation capillaire (liée à D_{11}^{hom}) est importante. Ainsi, les valeurs de la teneur en gaz ont une influence importante sur le type de diffusivité de la vapeur d'eau (diffusion classique dans la direction y_3 ou diffusion liée à la condensation capillaire dans la direction y_1).

D'une manière équivalente, en fixant la porosité du matériau $\varepsilon_p = 15\%$, et en faisant varier la teneur en eau liquide θ_l dans l'intervalle $[0\%, 15\%]$, nous obtenons les variations des coefficients de diffusion de vapeur d'eau homogénéisés relatifs D_{11}^{hom}/D_v^r et D_{33}^{hom}/D_v^r en fonction de θ_l représentées sur la figure 4.14.

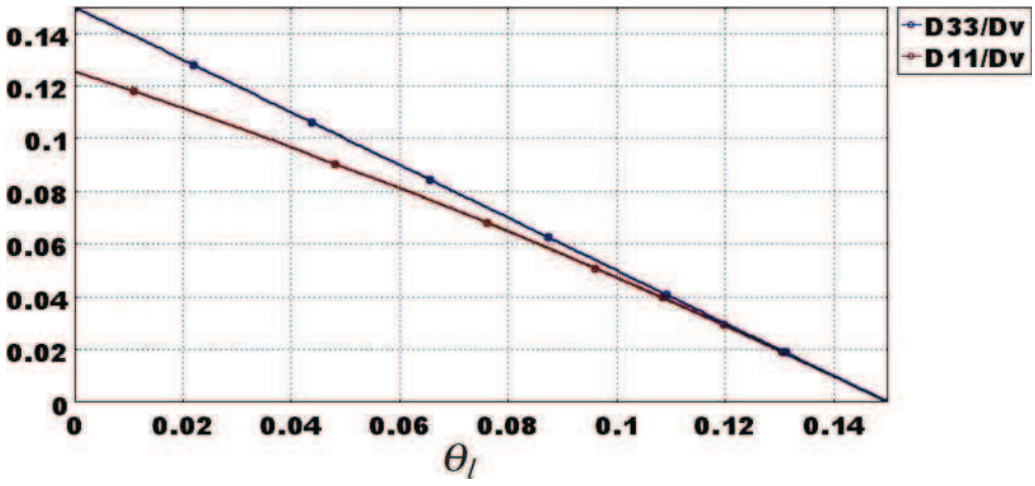


FIGURE 4.14 – Variation des coefficients de diffusion de vapeur d'eau homogénéisés relatifs D_{11}^{hom}/D_v^r et D_{33}^{hom}/D_v^r en fonction de la teneur volumique en eau θ_l pour une porosité $\varepsilon_p = 15\%$.

Nous remarquons que les coefficients de diffusion de vapeur d'eau homogénéisés D_{11}^{hom}/D_v^r et D_{33}^{hom}/D_v^r diminuent quand la teneur volumique en eau liquide θ_l augmente. Pour des teneurs volumique en eau liquide faibles, la diffusion classique dans le sens y_3 est plus importante que la diffusion liée à la condensation capillaire dans la direction y_1. Cependant, quand la majorité de l'espace poral se remplit d'eau, pour des teneurs volumiques en eau liquide importantes, les deux courbes coicident presque, traduisant une forte condensation capillaire dans cette région.

4.5 Mise en évidence de la condensation capillaire pour d'autres géométries bidimensionnelles

4.5.1 Condensation de vapeur entre 2 plaques

Le phénomène de condensation capillaire peut être mis en évidence de façon simple en considérant deux plaques parallèles (solide Ω_s), entre lesquelles il y a de la vapeur d'eau, à une pression inférieure à la pression de saturation. Expérimentalement, on remarque que si le liquide mouille le solide, et que si les parois sont suffisamment rapprochées, l'espace entre les deux plaques se remplit de liquide : c'est le phénomène de condensation capillaire.
Pour illustrer ce phénomène, considérons une distrubution d'eau liquide représentant les deux plaques mouillées : l'eau liquide mouille les interfaces solides supérieure et inférieure de l'inclusion (Fig. 4.15).

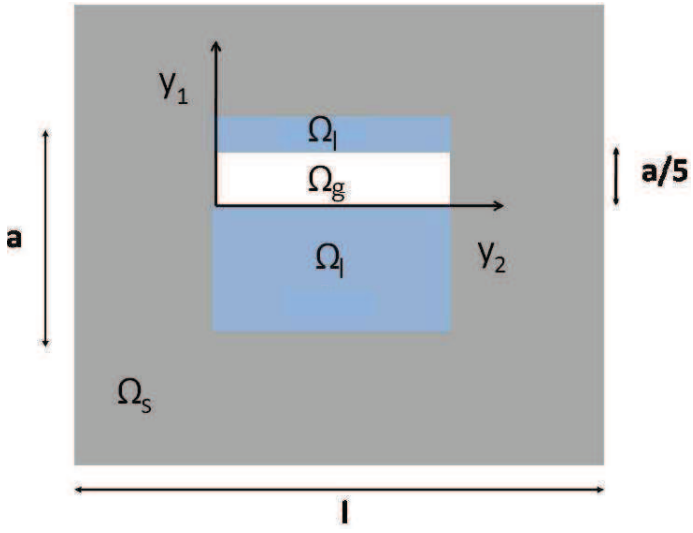


FIGURE 4.15 – Distribution d'eau liquide considérée

Maintenant, pour cette nouvelle géometrie, on résoud à nouveau numériquement le problème local de Neumann-Dirichlet (4.3). On s'intéresse plus particulièrement à la solution χ_1 représentée sur la figure 4.16. La première composante du tenseur de tortuosité local

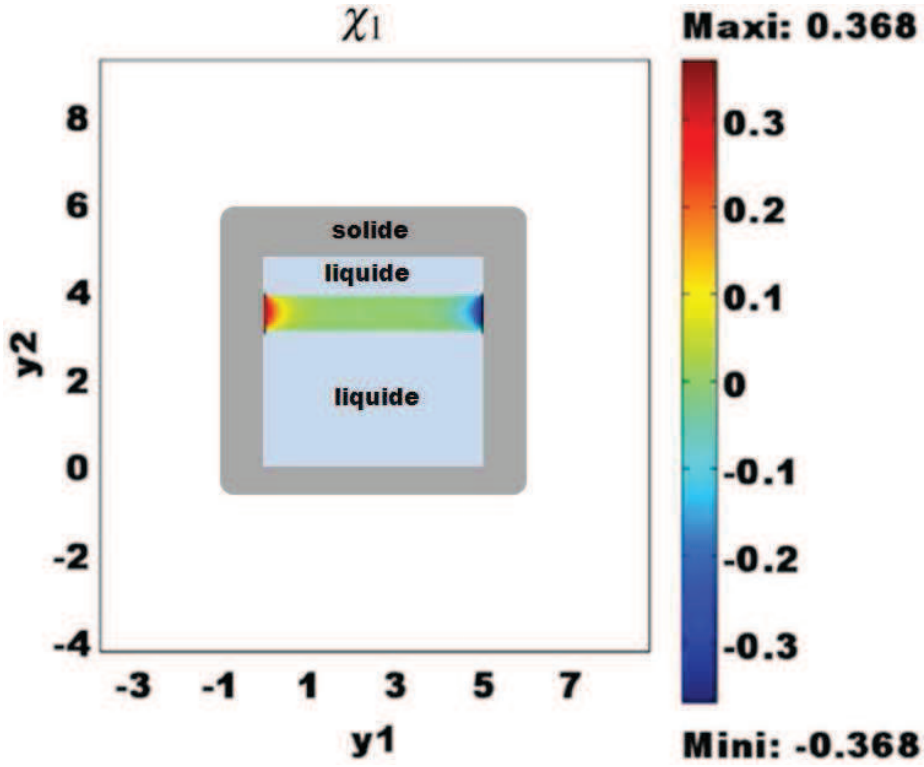


FIGURE 4.16 – Calcul numérique de la composante χ_1 pour la nouvelle distribution d'eau liquide considérée

$\Phi_{11} = 1 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}$ est représentée sur la figure 4.17.

Dans cette nouvelle configuration, nous constatons encore mieux la formation de "ponts capillaires" liée à la composante Φ_{11}. Le tenseur de tortuosité local Φ_{11} prend des valeurs maximales au centre du domaine gazeux, qui diminuent lorsque l'on se rapproche de l'interface solide. Ainsi, le tenseur de tortuosité local Φ (en particulier sa composante Φ_{11}), semble décrire, à partir d'une distribution d'eau liquide donnée, la condensation de la vapeur d'eau à l'échelle locale du pore. Nous proposons dans ce qui suit de vérifier cette constatation sur d'autres géométries.

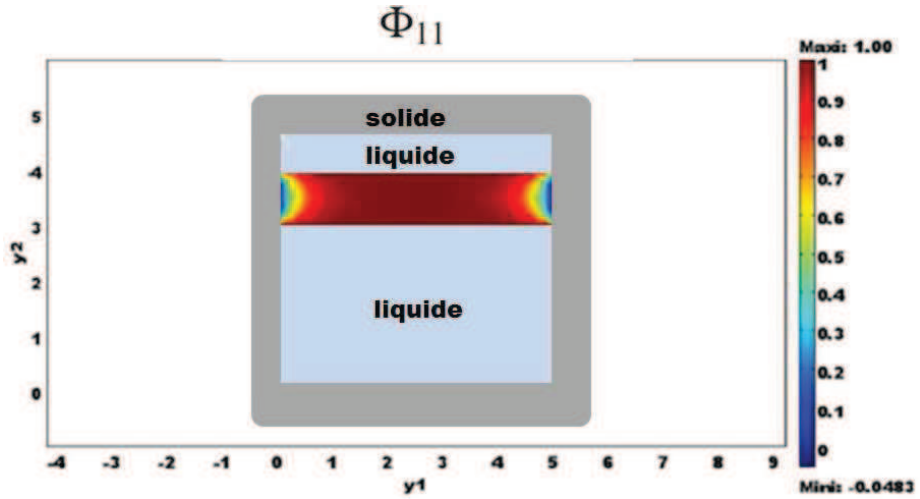


FIGURE 4.17 – Calcul numérique de la composante Φ_{11}

4.5.2 Condensation capillaire entre deux particules solides voisines

Considérons maintenant une cellule élémentaire 2D dont la dimension est la même que précédemment (carré de coté l). Cette cellule élémentaire contient une inclusion (carré de coté a) dont les parois supérieure et inférieure sont entièrement mouillées par le liquide, et au centre deux disques solides également mouillés sur leurs surfaces extérieures (Fig. 4.18). Cette configuration modélise l'empilement de grains solides au niveau microscopique dans un milieu granulaire partiellement saturé. L'espace entourant les grains solides est rempli de vapeur d'eau.

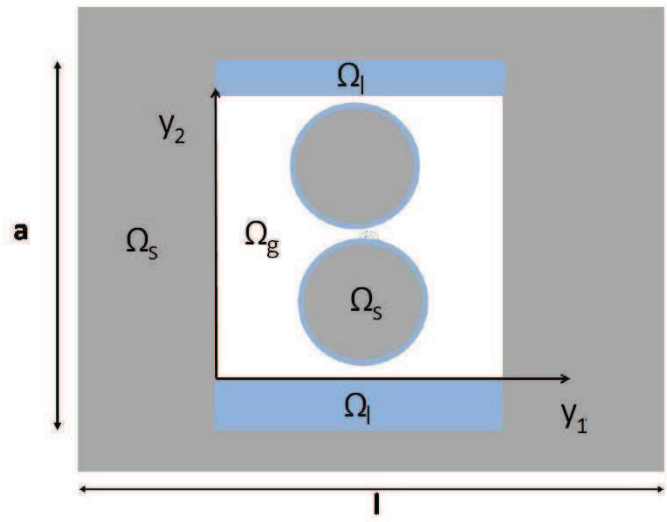


FIGURE 4.18 – Cellule élémentaire contenant deux grains solides proches dont la surface est mouillée de liquide

Comme précédemment, nous résolvons le problème local mixte Neumann-Dirichlet (4.3) avec Comsol Multiphysics. La première composante du tenseur de tortuosité local $\Phi_{11} = 1 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}$ est représentée sur la figure 4.19.

Nour observons une distribution maximale de Φ_{11} (en rouge) entre les deux grains, ainsi qu'entre les grains et l'interface solide mouillée. Cette distribution des valeurs maximales de Φ_{11} semble correspondre (au moins qualitativement) à la position (et à la formation) des ponts capillaires entre les corps solides voisins. Ainsi le tenseur de tortuosité local semble décrire assez bien le transfert de vapeur d'eau à l'échelle microscopique et la formation de ponts capillaires associés pour des cellules élémentaires de dimension 2. Dans la section suivante, nous allons traiter le même problème pour des pores cylindriques en dimension 3.

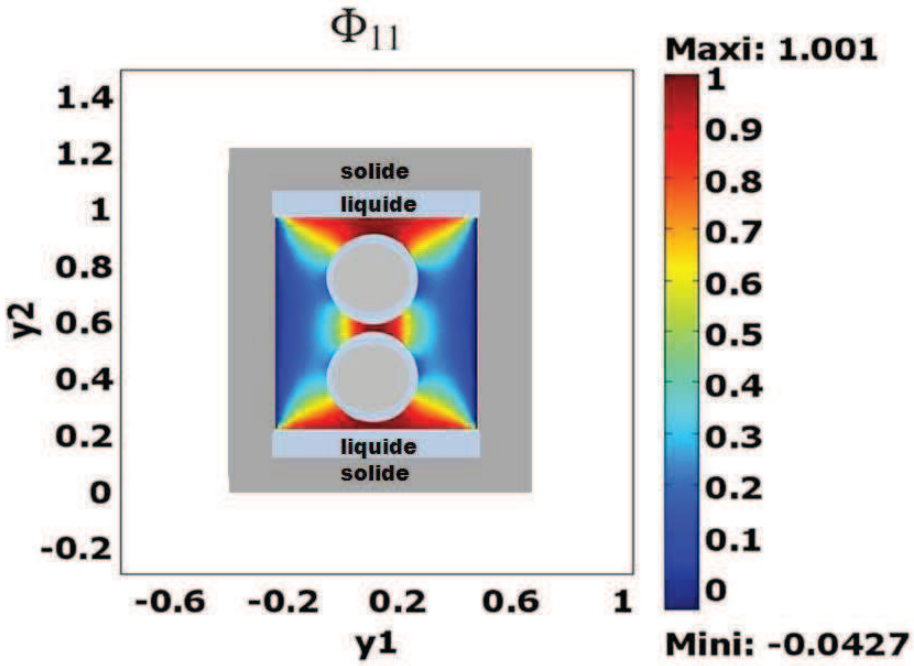


FIGURE 4.19 – Calcul numérique de la composante Φ_{11}

4.6 Condensation capillaire dans des pores cylindriques tridimensionnels

Afin de mieux visualiser le phénomène de condensation de vapeur prédit par notre modèle, plaçons nous en dimension 3. Le problème à résoudre dans la région super-hygroscopique est toujours le problème de Neumann-Dirichlet donné par les équations (4.3). Le vecteur χ est cette fois tridimensionnel, ses trois composantes χ_1, χ_2 et χ_3 dépendent de y_1, y_2 et y_3. Le tenseur de diffusion homogénéisé $\mathbf{D_v^{hom}}$ est toujours donné par :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \frac{D_v}{|\Omega|}\int_{\Omega_g}(I+\overline{\frac{\partial\chi}{\partial y}})dy = \frac{D_v}{|\Omega|}\int_{\Omega_g}\Phi(y)dy \tag{4.58}$$

où on rappelle que Φ est le tenseur de tortuosité local.

4.6.1 Résolution sur un pore fermé en dimension 3

Afin de pouvoir observer le phénomène de condensation capillaire en dimension 3, nous considérons, comme cellule élémentaire particulière, un pore cylindrique tridimensionnel semi-infini du côté du liquide (pour z<0). La vapeur d'eau occupe l'espace fermé au dessus de l'eau (Fig. 4.20), supposé faible dans la configuration super-hygroscopique considérée. Même si cette géométrie caractérise plutôt les pores non connectés dans un milieu poreux, elle nous permet néanmoins de bien visualiser la distribution de vapeur d'eau quand cette dernière est emprisonnée.

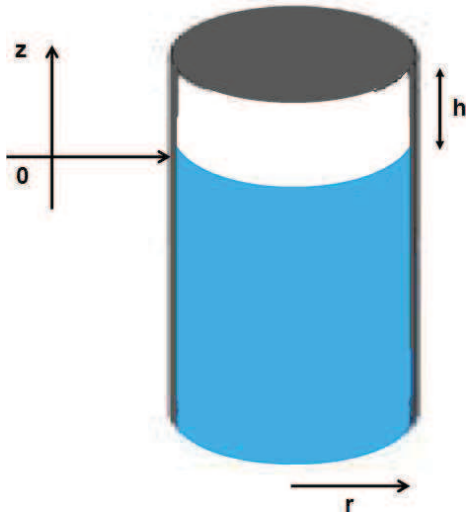


FIGURE 4.20 – Pore cylindrique fermé en dimension 3 rempli d'eau

La résolution numérique du problème (4.3) et le calcul de Φ et $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}$ est effectué à nouveau avec le logiciel Comsol Mutliphysics. Le maillage utilisé est composé d'éléments tétraédriques de degré 1 à 4 nœuds. On considère un rayon du pore cylindrique $r = 1$ et une hauteur $h = 2$ du domaine Ω_g contenant la vapeur d'eau (les valeurs de r et h sont adimensionnelles). Les isosurfaces de la première composante du tenseur de tortuosité local $\Phi_{11} = 1 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}$ sont représentées sur la figure 4.21.

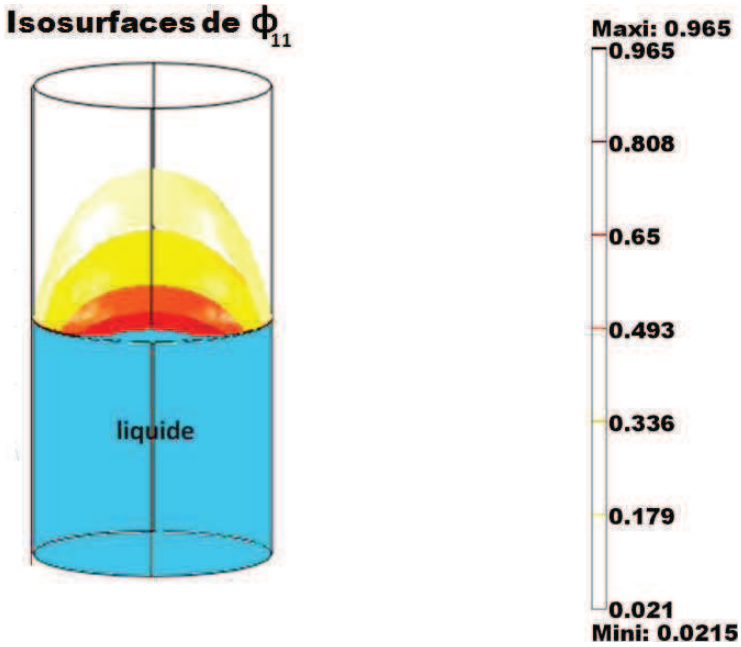


FIGURE 4.21 – Calcul numérique de la composante Φ_{11} dans un pore cylindrique fermé 3D

Nous pouvons observer la "condensation" de la vapeur d'eau matérialisée par les courbes de niveau du tenseur de tortuosité local qui prend des valeurs importantes au centre du domaine gazeux, maximales en s'approchant de l'interface liquide-gaz. Nous pouvons interpréter ce phénomène comme un début de condensation capillaire qui normalement devrait aboutir à la création de "ponts capillaires" entre la surface liquide et la surface solide.
Intéressons nous maintenant au même pore fermé, mais en le remplissant d'avantage d'eau liquide (Fig. 4.22).

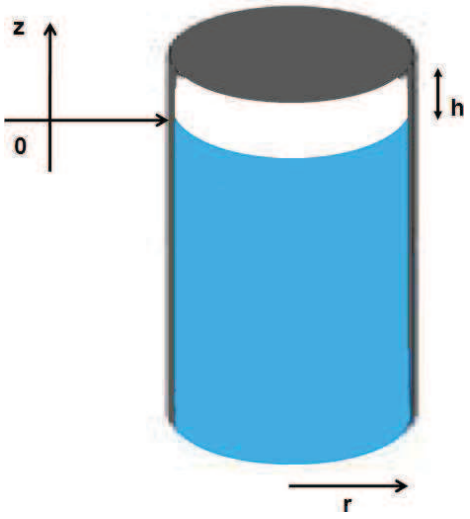


FIGURE 4.22 – Pore cylindrique fermé rempli d'eau liquide occupant la majorité de son espace

Le domaine Ω_g (en blanc) contenant la phase vapeur a maintenant pour dimension $r = 1$ avec $h = 1$. Nous résolvons comme précédemment le problème local Neumann-Dirichlet (4.3), puis nous représentons les isosurfaces de la première composante du tenseur de tortuosité local Φ_{11} sur la figure 4.23.

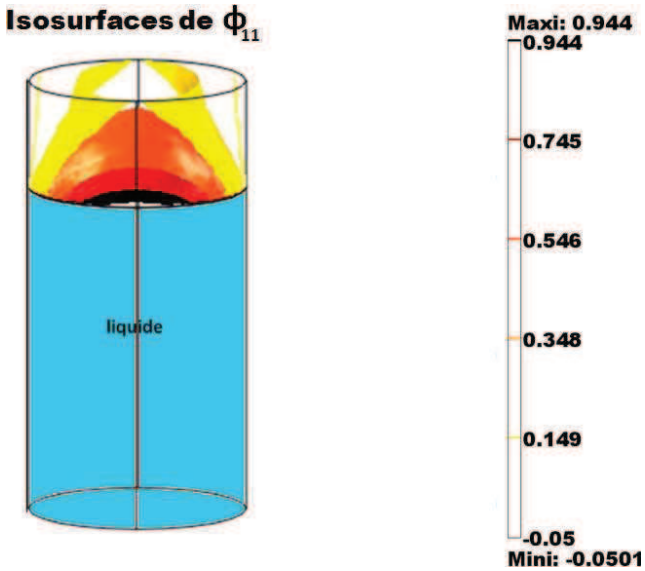


FIGURE 4.23 – Calcul numérique de la composante Φ_{11}

Dans cette configuration (Fig. 4.23) où l'eau liquide occupe presque tout l'espace du pore, nous pouvons visualiser les "ponts capillaires" qui se créent entre l'interface liquide-gaz et l'interface gaz-solide (à l'extrémité supérieure du pore). Les valeurs maximales de Φ_{11} obtenues près de l'interface liquide-gaz semblent représenter les ponts capillaires en formation. Ainsi, plus l'espace poral est rempli d'eau liquide, plus la formation des ponts capillaires liée à la condensation de vapeur est visible. Il semble donc que le nouveau problème local Neumann-Dirchlet (4.3) que nous avons obtenu dans ce travail, permette de décrire le phénomène de condensation capillaire (via le tenseur de tortuosité local) qui se manifeste dans la région super-hygroscopique. Le problème local classique de type Neumann (3.106)-(3.107) ne permet pas de représenter ce phénomène de condensation capillaire qui ne se manifeste pas pour des humidités relatives plus faibles, correspondant à la région hygroscopique.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au calcul analytique (lorsque cela était possible) et numérique du tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé dans les deux régions hygroscopique et super-hygroscopique. Tout d'abord, dans le cas de pores cylindriques infinis, une solution analytique a été trouvée dans la région hygroscopique et dans la région super-hygroscopique. Le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé obtenu dans la région super-hygroscopique semble montrer que la vapeur d'eau s'agite et diffuse dans tous les sens à l'intérieur de l'espace poral lorsque l'eau liquide mouille tout le pore. Dans le cas où l'eau liquide mouille partiellement l'espace solide, la solution obtenue dans des cas plus complexe a permis de mettre en évidence le phénomène de condensation capillaire qui se crée au sein du domaine gazeux, entre l'interface gaz-liquide d'un coté, et gaz-solide de l'autre. Le tenseur de tortuosité local Φ semble décrire assez bien ce phénomène de condensation capillaire dans Ω_g, et ceci aussi bien en dimension 2 qu'en dimension 3.
En conclusion, il semble que le problème local classique avec des conditions aux limites de type Neumann, obtenu dans la région hygroscopique, ne permette pas de représenter le phé-

nomène de condensation capillaire, qui n'a lieu que dans la région super-hygroscopique. Le nouveau problème local avec des conditions aux limites mixtes de type Neumann-Dirichlet obtenu dans la région super-hygroscopique, semble quant à lui représenter assez bien, par l'intermédiaire du tenseur de tortuosité local Φ, ce phénomène de condensation capillaire que l'on a pu mettre en évidence sur les exemples traités.

Chapitre 5

Résolution numérique de l'équation de Richards homogénéisée

5.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous nous sommes interessés à l'homogénéisation périodique des équations de transfert hydrique dans un matériau poreux en distinguant deux régions (hygroscopique et super-hygroscopique). Nous avons obtenu trois modèles macroscopiques homogénéisés de transfert hydrique qui font intervenir trois tenseurs homogénéisés $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ différents. Les deux modèles faisant intervenir la convection de l'eau liquide contiennent une expression semi-empirique du tenseur de diffusion homogénéisé [1], alors que dans le modèle obtenu pour une diffusion prédominante de vapeur d'eau, la diffusivité macroscopique ne dépend que de la géométrie de la cellule élémentaire constituant la microstructure et de la position de l'interface liquide-gaz Γ_{gl}.

Nous proposons dans ce chapitre, de comparer les valeurs des tenseurs de diffusion hydriques homogénéisés obtenus au chapitre 3 aux valeurs expérimentales existant dans la littérature

1. Provenant d'une simplification de la loi de Darcy pour les milieux partiellement saturés.

pour un même matériau. Une des difficultés de cette comparaison provient du fait que l'on n'a généralement pas accès à toutes les valeurs expérimentales nécessaires (isotherme de sorption, porosité, perméabilité relative, perméabilité intrinsèque,...) pour un même matériau. D'autre part, pour des bétons ayant des caractéristiques relativement proches, on trouve fréquemment des rapports entre les coefficients de diffusion hydrique de l'ordre de 10, ou de 20, et pouvant même aller jusqu'à 100 [4][45][102].

Nous proposons, dans la première partie de ce chapitre, de calculer sur des cellules bidimensionnelles et tridimensionnelles les propriétés de transfert hydrique homogénéisées pour des faibles humidités relatives correspondant à la région hygroscopique, et de comparer les résultats obtenus à des résultats expérimentaux. Dans la seconde partie, nous allons résoudre numériquement l'équation de Richards homogénéisée dans le cas du béton haute performance (BHP A1), et comparer l'évolution de la teneur en eau liquide avec des résultats expérimentaux accessibles dans la littérature.

5.2 Rappel de l'équation de transfert hydrique homogénéisée pour une diffusion prédominante de vapeur d'eau

On rappelle l'équation de transfert hydrique homogénéisée obtenue précédemment au chapitre 3, dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau [2] (résultat 3.1) :

$$\frac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x(\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}\ \frac{\partial \theta_l}{\partial x}) = 0 \tag{5.1}$$

où

$$\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0}\mathbf{D}_\mathbf{v}^{\mathbf{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{5.2}$$

2. Compte tenu des faibles humidités relatives considérées, qui correspondent aux données expérimentales, nous considérerons que nous sommes dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau.

représente le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé.

Le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé $\mathbf{D_v^{hom}}$ est donné par :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \frac{1}{\mid \Omega \mid} \int_{\Omega_g} D_v (I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}}) dy \tag{5.3}$$

où le vecteur $\chi(y)$, périodique et de moyenne nulle sur Ω_g, est solution du problème aux limites local :

$$\begin{cases} div_y(D_v\ (I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})) = 0 & \text{dans} \quad \Omega_g \\ D_v\ (I + \frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gs} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \\ D_v\ (I + \frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gl} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \end{cases} \tag{5.4}$$

Rappelons que les équations de transfert hydrique homogénéisées (5.1)-(5.4) dépendent du vecteur local χ caractérisant la géométrie de la microstructure considérée, ainsi que du terme $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ caractérisant les propriétés hygroscopiques du même matériau. Ainsi, afin de calculer le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé $\mathbf{D_\theta^{hom}}$ associé à une géométrie donnée de la cellule élémentaire, il est nécessaire de résoudre le problème local (5.4) pour déterminer le vecteur local χ et calculer ensuite $\mathbf{D_v^{hom}}$, et d'autre part de déduire à partir de la courbe expérimentale de sorption-désorption du matériau considéré les valeurs de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$.

5.3 Etude expérimentale

Nous rappelons dans cette section l'étude expérimentale du transfert hydrique dans les matériaux cimentaires qui a été réalisée dans le cadre de la thèse de Trabelsi [102]. Nous présenterons la démarche mise en place afin de collecter les données expérimentales qui seront nécessaires afin de comparer les résultats expérimentaux aux résultats théoriques obtenus au chapitre 3. Il s'agit principalement des isothermes de sorption et des valeurs expérimentales du coefficient de diffusion hydrique macroscopique.

5.3.1 Matériaux utilisés

Les propriétés des matériaux de construction du génie civil (pâte de ciment, mortiers, bétons,...) diffèrent suivant leurs caractéristiques géométriques, mécaniques ou encore thermophysiques. Dans le travail de thèse de Trabelsi [102], un grand nombre de matériaux différents ont été étudiés. Nous nous contenterons dans cette partie de rappeler la démarche et les résultats expérimentaux obtenus pour deux bétons ordinaires $C15$ et $C22$, ainsi que pour deux bétons haute performance BHP $A1$ et $A2$. Les rapports E/C $(eau/ciment)$ et la composition de ces bétons sont présentés dans le tableau 5.1.

Composition du béton	**Gravier** (Kg)	**Sable** (Kg)	**Ciment** (Kg)	**Eau** (Kg)	**E/C**
C15	1085	729	275	222	0.8
C22	1099	709	330	208	0.63
BHP A1	950	900	350	174	0.49
BHP A2	955	880	355	186	0.52

Tableau 5.1 – Composition et caractéristiques des bétons étudiés dans [102]

Les transferts hydriques dans les matériaux poreux dépendent étroitement de la nature et de la microstructure de ces derniers. Plusieurs études ont mis l'accent sur le lien étroit existant entre la topologie de la microstructure et les tranferts au sein de ces matériaux [3][7][26][82][95]. Les paramètres les plus influents sur les transferts hydriques sont la porosité et la distribution de la taille des pores, dont la caractérisation est rappelée dans la section suivante.

5.3.2 Mesure de la porosité

La technique de porosimétrie au mercure est une des méthodes permettant de déterminer la porosité et la distribution des tailles de pores des matériaux cimentaires ($C15$, $C22$, BHP $A1$ et BHP $A2$ pour ceux qui nous intéressent ici). Les échantillions de béton sur lesquels est réalisé l'essai de porosimétrie ont été prélevés et séchés dans une étuve à 40^oC jusqu'à stabilisation de la masse. Les mesures ont été effectuées avec un porosimètre à mercure de type AutoPore III 9420 pouvant atteindre une pression supérieure à 400 MPa. Cette pression permet au mercure de pénétrer dans des pores de diamètre d'environ 0.003 μm, selon la loi de Laplace donnée par :

$$d = \frac{-4\sigma\ cos\ \Theta}{p}$$

où d est le diamètre de pore équivalent, σ la tension superficielle du mercure ($0.485 Nm^{-1}$), Θ l'angle de contact entre le mercure et la parois du pore (130^o), et p la pression sous laquelle le mercure pénètre dans les pores [2].

Les valeurs de la porosité obtenues pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et BHP $A2$ sont présentées dans le tableau 5.2, et les distributions des tailles des pores sur les figures 5.1 et 5.2.

Type de béton	**E/C**	**porosité Hg (%)**
C15	0.8	15
C22	0.63	14
BHP A1	0.49	12
BHP A2	0.52	13

Tableau 5.2 – Porosité déterminées par porosimétrie à mercure [102]

La figure 5.1 montre que le béton $C22$ de rapport $E/C = 0.63$ possède une distribution monomodale de taille des pores qui correspond à la porosité capillaire. Par contre, le béton $C15$ de rapport $E/C = 0.8$ présente une distribution polymodale traduisant sa faible micro-porosité. Le béton BHP $A1$ de rapport $E/C = 0.49$ présente une distribution bimodale de taille des pores aux alentours des diamètres $0.09\mu m$ et $0.5\mu m$, alors que le BHP $A2$ de rapport

$E/C = 0.52$ présente une distribution trimodale aux alentours des diamètres $0.05\mu m$, $0.3\mu m$ et $0.8\mu m$.

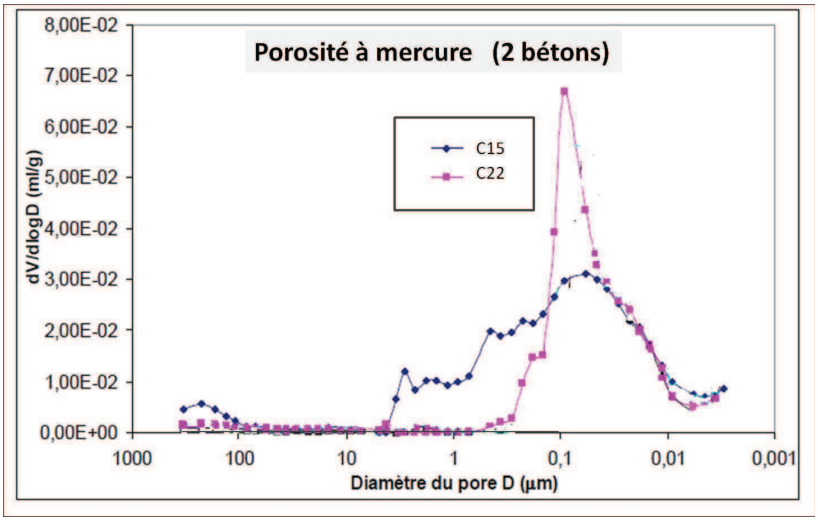


FIGURE 5.1 – Courbe de distribution porale pour les bétons $C15$ et $C22$ [99]

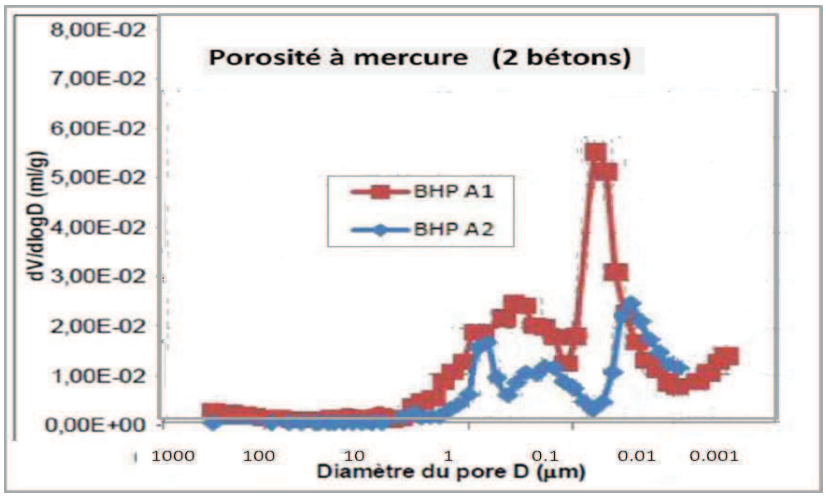


FIGURE 5.2 – Courbe de distribution porale pour les bétons BHP $A1$ et BHP $A2$ [102]

5.3.3 Détermination des isothermes de sorption-désorption de la vapeur d'eau

L'étude présentée dans cette partie résume la contribution expérimentale du LEPTIAB au projet APPLET "Durée de vie des ouvrages : Approche Prédictive Performantielle et probabiliste" de l'ANR-RGCU [5]. L'objectif de ce projet était de proposer une quantification de la variabilité des propriétés des bétons dans les structures du genie civil. La contribution du LEPTIAB a porté sur l'évaluation de la variabilité des isothermes d'adsorption de bétons BHP [102].



FIGURE 5.3 – Sélection des matériaux étudiés [102]

L'étude effectuée au sein du LEPTIAB s'est focalisée entre autres sur la détermination des isothermes de désorption de la vapeur d'eau pour deux types de béton hautes performances BHP $A1$ et $A2$, ainsi pour différents types de bétons plus classique : C15, C22, C30 ... (voir Fig. 5.3) par la méthode aux "solution saline saturées [3]".

Trois éprouvettes 11×22 cm par gâchée ont été confectionnées. Après 24 h de confection,

3. Les deux bétons BHP $A1$ et $A2$ ont été prélevés directement. Le premier (BHP $A1$) était destiné au chantier

les éprouvettes ont été conservées sous l'eau pendant 4 mois au minimum afin d'assurer leur saturation. Après 1 mois de cure, les éprouvettes ont été sciées en disques de 0.5 et 1 *cm* d'épaisseur et percées d'un trou de 4 mm de diamètre de manière à pouvoir les accrocher pour les peser.



FIGURE 5.4 – Dispositif expérimental utilisé pour les essais d'adsorption [102]

Méthode aux solutions Salines.

Les essais d'adsorption ont été réalisés dans une salle climatique à 23^oC. Après saturation, les échantillions sont placés dans des enceintes hermétiquement fermées où l'humidité est régulée à l'aide de solutions salines saturées (Figs. 5.4). L'essai commence par une phase de désorption en balayant les paliers d'humidité relative de 100 à 3 %. Les échantillons sont pesés régulièrement, pour chaque palier d'humidité, jusqu'à atteindre l'équilibre. La pesée est effectuée avec une précision de 0.01 *g*, d'abord une fois par jour au début de l'essai, puis

de l'autoroute *A*86 et le second (BHP *A*2) a été utilisé dans la réalisation de Viaduc Compiègne. La campagne expérimentale a duré 40 semaines, ce qui correspond à 40 gâchées différentes. La confection des éprouvettes a été réalisée sous la responsabilité de VINCI Construction France.

une fois par semaine à la fin de l'essai [102]. Le critère d'équilibre adopté est le suivant :

$$\frac{m(t)-m(t+24h)}{m(t+24h)} \leq 0.005\%$$

où $m(t)$ désigne la masse mesurée à l'instant t et $m(t+24h)$ la masse mesurée 24 heures plus tard.

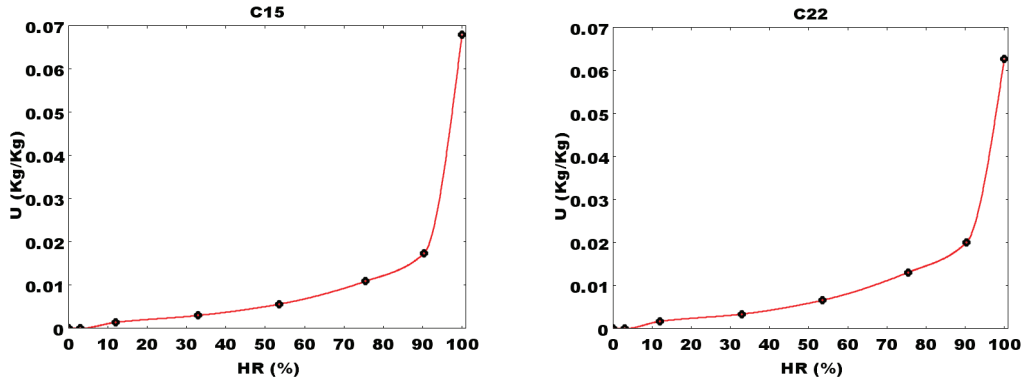
5.3.4 Analyse des résultats expérimentaux obtenus

On rappelle que notre objectif est d'avoir accès aux valeurs de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ nécessaires pour déterminer le coefficient de diffusion hydrique $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ donné par (5.2). Cette valeur de $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ sera comparée aux valeurs expérimentales du coefficient de diffusion hydrique macroscopique $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}$ obtenu au laboratoire sur les échantillons de bétons testés. Etant donné que notre modèle ne prend pas en compte le mouvement de l'air, et son emprisonnement, nous proposons de comparer $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ avec le coefficient de diffusion hydrique expérimental $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}$ lorsque ce dernier est très peu influencé par l'effet d'emprisonnement d'air, c'est-à-dire lorsqu'il atteint son maximum dans la région hygroscopique. C'est le cas pour le béton $C15$ pour une humidité relative $HR = 33\%$ et pour les bétons $C22$, BHP $A1$ et BHP $A2$ pour une humidité relative $HR = 12\%$.
Dans ce qui suit, nous présentons la démarche expérimentale et d'analyse des résultats qui permettent de remonter aux variations de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$, correspondant aux isothermes de sorption.

Isotherme d'adsorption

Pour les bétons $C15$ et $C22$, nous ne disposons que d'une seule courbe pour chaque béton représentant sur les Fig.5.5 (a) et Fig.5.5 (b), les évolutions de la masse relative d'eau $U = m_l/m_0$ en fonction de l'humidité relative HR en désorption. On rappelle que m_l désigne la masse d'eau liquide et m_0 la masse de la matrice solide.
Pour les bétons BHP $A1$ et BHP $A2$, nous disposons de 10 courbes expérimentale différentes

pour chaque béton, qui sont représentées sur les figures 5.6 et 5.7, chacune de ces courbes correspondant à un essai différent. Ces résultats expérimentaux ont été obtenus en utilisant la méthode des "solutions salines" décrite précédemment au paragraphe 5.3.3. Les courbes 5.5 (a), 5.5 (b), 5.6 et 5.7 sont généralement appeléess les isothermes de désorption.



(a) C15 (b) C22

FIGURE 5.5 – Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau pour les bétons $C15$ et $C22$ suivant [102].

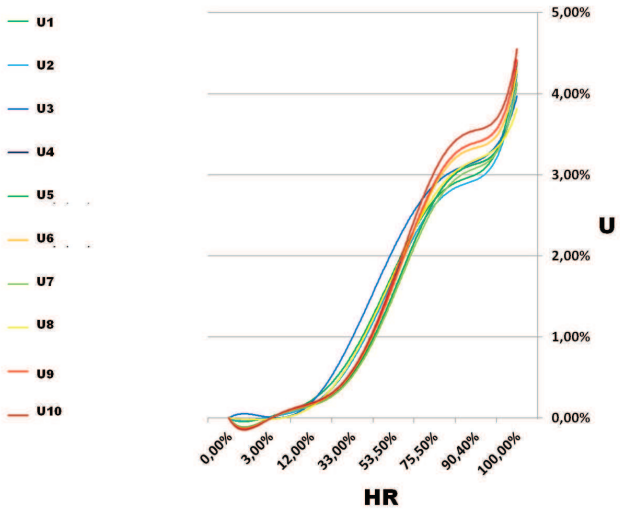


FIGURE 5.6 – Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau pour le béton BHP $A1$ suivant [102].

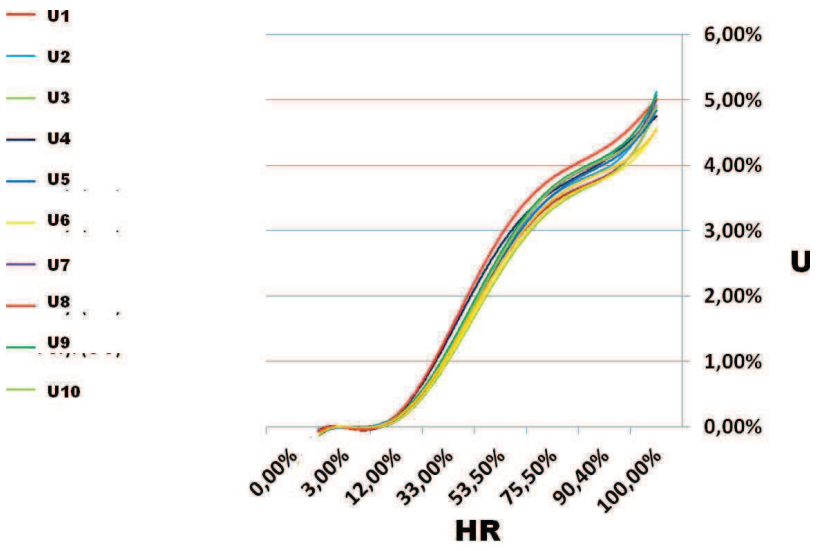


FIGURE 5.7 – Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau pour le bétons BHP *A*2 suivant [102]

Afin de déterminer les variations de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ utiles pour calculer $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$, il est nécessaire de faire un changement de variable dans la représentation des courbes de désorption. Ecrivons d'abord les relations suivantes :

$$\theta_l = \frac{V_l}{V_0} = \frac{m_l}{m_0}\frac{\rho_0}{\rho_l} = U.\frac{\rho_0}{\rho_l} \quad et \quad \rho_v = HR.\rho_v^{sat}$$

où on rappelle que U représente la teneur en eau massique, m_l la masse d'eau liquide, m_0 la masse de la matrice solide, ρ_l la masse volumique de l'eau liquide, ρ_0 la masse volumique de la phase solide, et ρ_v^{sat} la masse volumique de la vapeur d'eau saturante. Dans les conditions isothermes on a $\rho_l = 1000\ [Kg/m^3]$ et $\rho_v^{sat} = 0.017\ [Kg/m^3]$. D'autre part, la masse volumique de la phase solide ρ_0 des bétons étudiés est donnée dans le tableau 5.3.

Type de béton	ρ_0 ($[Kg/m^3]$)
C15	2320
C22	2320
BHP A1	2454
BHP A2	2380

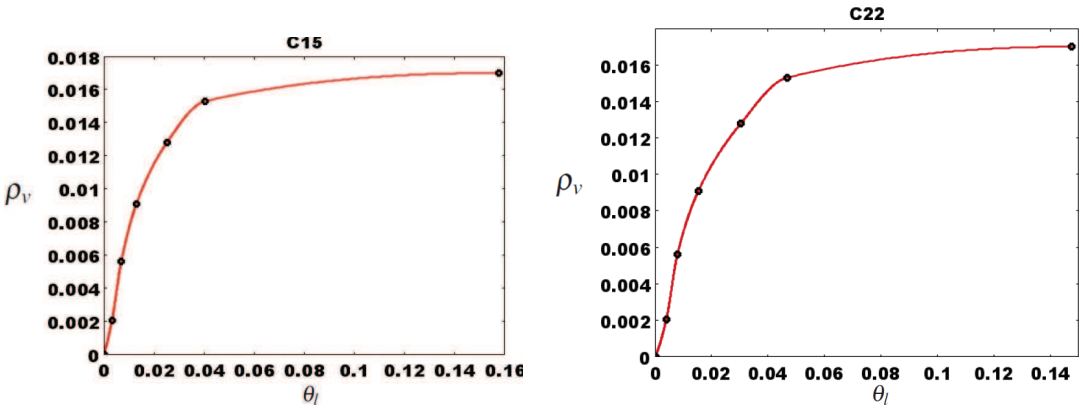
Tableau 5.3 – Masse volumique de la phase solide ρ_0

On en déduit alors les relations suivantes figurant sur le tableau 5.4.

Béton C15	$\theta_l = 2,32\ U$	$\rho_v^0 = 0.017\ HR$
Béton C22	$\theta_l = 2,32\ U$	$\rho_v^0 = 0.017\ HR$
Béton BHP A1	$\theta_l = 2,45\ U$	$\rho_v^0 = 0.017\ HR$
Béton BHP A2	$\theta_l = 2,38\ U$	$\rho_v^0 = 0.017\ HR$

Tableau 5.4 – Relations de changement de variables

A partir des courbes 5.5(a), 5.5(b), 5.6 et 5.7, et en utilisnat les relations du tabeau 5.4, les variations de ρ_v en fonction de θ_l sont représentées sur les Figs 5.8(a), 5.8(b), 5.9 et 5.10 pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et BHP $A2$.



(a) C15 (b) C22

FIGURE 5.8 – Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau reliant ρ_v et θ_l pour les bétons $C15$ et $C22$

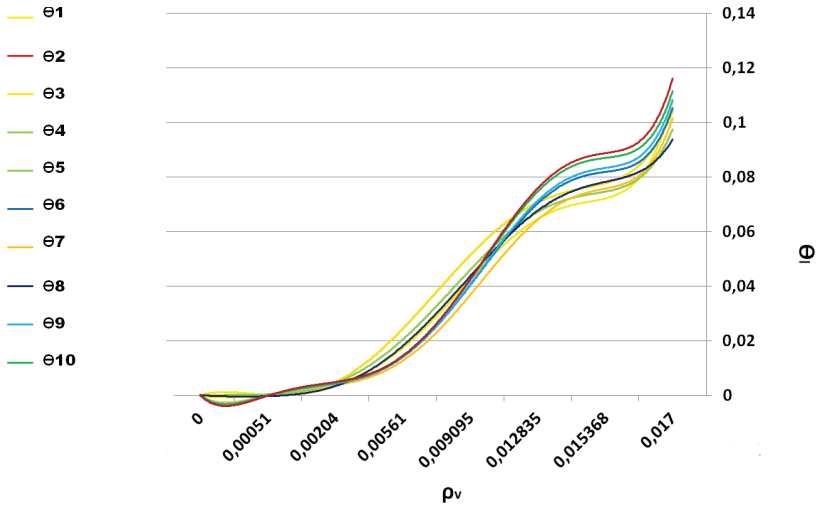


FIGURE 5.9 – Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau reliant ρ_v et θ_l pour le béton BHP $A1$

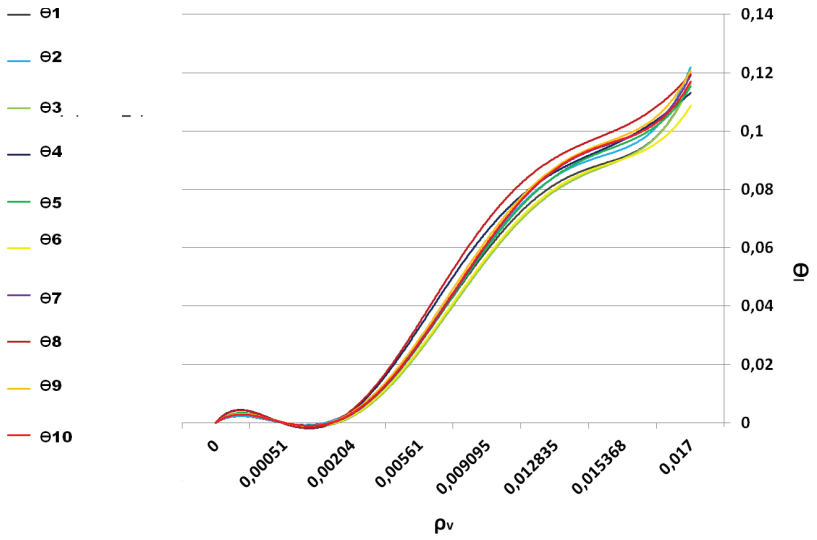


FIGURE 5.10 – Courbe expérimentale de désorption de la vapeur d'eau reliant ρ_v et θ_l pour le béton BHP $A2$

Finalement, pour les deux bétons $C15$ et $C22$, en calculant les pentes correpondantes aux humidités relatives $HR = 12\%$ et $HR = 33\%$ à partir des courbes 5.8 (a) et 5.8 (b), on en déduit les valeurs correspondantes de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ figurant dans le tableau 5.5.

Type de béton	béton **C15** avec HR = 33 %	béton **C22** avec HR = 12 %
$\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$	0.733	0.669

Tableau 5.5 – Coefficients $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ obtenus pour les deux bétons $C15$ et $C22$

Pour les deux bétons $C15$ et $C22$, étant donné que nous ne disposons que d'une seule courbe expérimentale de désorption, nous n'avons accès, pour une valeur de HR donné, qu'à une seule valeur de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$.
Pour les deux bétons BHP $A1$ et BHP $A2$, pour chaque courbe expérimentale, il est possible de déterminer la pente $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$. Les valeurs minimales et maximales du coefficient $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ obtenues pour chaque béton sont indiquées dans le tableau 5.6.

Type de béton	béton **BHP** $A1$ avec HR = 12 %	béton **BHP** $A2$ avec HR = 12 %
$\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ Min	0.24	0.21
$\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ Max	0.32	0.25

Tableau 5.6 – Coefficients $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ obtenus pour les deux bétons BHP $A1$ et $A2$

Notons que les valeurs obtenues dans les tableaux 5.5 et 5.6 dépendent de l'interpolation choisie. Dans notre cas, nous avons utilisé une interpolation polynomiale.

Coefficient de diffusion hydrique expérimental

Une des difficultés inhérente à la détermination expérimentale du coefficient de diffusion hydrique $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}$ réside dans l'incapacité d'y accéder directement. On ne peut le déduire des mesures expérimentales effectuées qu'en utilisant un modèle de diffusion hydrique macroscopique. C'est ce qui a été effectué dans [102].
A partir des résultats expérimentaux obtenus durant les essais de sorption-désorption (Figs. 5.5(a), 5.5(b) , 5.6 et 5.7), les coefficients de diffusion hydriques macroscopiques expérimentaux calculés sont donnés dans le tableau 5.7.

Type de béton	**C15** (HR=33%)	**C22** (HR=12%)	BHP A1 (HR=12%)	BHP A2 (HR=12%)
$\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}$ $(m^2.s^{-1})$	$7,71\ 10^{-11}$	$1,03\ 10^{-10}$	$0.17\ 10^{-10}$	$0.15\ 10^{-10}$

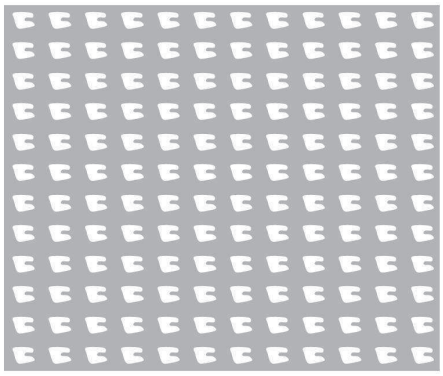
Tableau 5.7 – Coefficients de diffusion hydrique obtenus pour les bétons étudiés : $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ [102].

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons de calculer le tenseur de diffusion hydrique homogénéisé pour des microstrcutrues périodiques plus ou moins complexes, sur des cellules bidimensionnelles et tridimensionnelles. Les résultats obtenus seront comparés aux valeurs

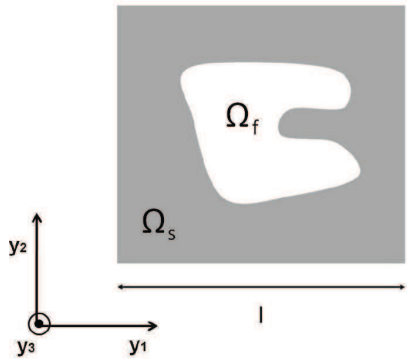
expérimentales du tableau 5.7. Compte tenu des faibles humidités relatives considérées, qui correspondent aux données expérimentales, nous considérerons que nous sommes dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau.

5.4 Modèle de pores cylindriques

Nous considérons tout d'abord le cas très simple d'un matériau poreux dont la microstructure est constituée de pores cylindriques infinis dans la direction y_3 (voir section 4.3 du chapitre 4). La microstructure représentée sur la Fig. 5.11(a) est constituée de la répétition périodique de la cellule élémentaire de taille $l \times l$ (Fig. 5.11(b)). Cette cellule élémentaire est elle même composée du domaine fluide Ω_f (en blanc) constitué du liquide et du gaz se trouvant à l'intérieur des pores, et de la phase solide Ω_s (en gris) entourant Ω_f.



(a) Microstructure périodique associée



(b) Cellule elementaire constituée d'un pore infini

FIGURE 5.11 – Modèle d'inclusion cylindrique

Nous avons démontré à la section 4.3 du chapitre 4, que quelque soit la forme du cylindre (non nécessairement circulaire), et quelque soit la distribution du fluide à l'intérieur des pores,

le tenseur de diffusion de vapeur d'eau $\mathbf{D_v^{hom}}$ est identique et est donné par :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_g D_v \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

où $\theta_g = \frac{|\Omega_g|}{|\Omega|}$ désigne la teneur volumique en gaz du milieu poreux. Ainsi, on n'a de transfert que dans la direction y_3, et le coefficient de diffusion hydrique dans cette direction vaut :

$$D_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} = \theta_g D_v$$

On en déduit alors que :

$$D_\theta^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0} \theta_g D_v \frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{5.6}$$

Sachant que le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air est donné par $D_v = 2.56\ 10^{-5}$ $[m^2.s^{-1}]$, et connaissant θ_g, nous pouvons maintenant comparer les résultats expérimentaux obtenus à la section 5.3.4 (tableau 5.7) avec ceux obtenus analytiquement (ou semi-analytiquement[4]) par homogénéisation (équation 5.6). Le tableau 5.8 présente une comparaison des coefficients de diffusion hydriques expérimentaux D_θ^{exp} et théoriques D_θ^{hom} obtenus pour les quatres bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$.

Type de béton	$C15$ (HR=33%)	$C22$ (HR=12%)	BHP A1 (HR=12%)	BHP A2 (HR=12%)
$D_\theta^{\mathbf{exp}}$ $(10^{-10}\ m^2.s^{-1})$	0.771	1,03	0.17	0.15
$D_\theta^{\mathbf{hom}}$ $(10^{-10}\ m^2.s^{-1})$	26,83	23,29	$7 \leq D_\theta^{hom} \leq 9.34$	$6.77 \leq D_\theta^{hom} \leq 8.06$
$\frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{\mathbf{exp}}}$	34	22	$41 \leq \frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}} \leq 54$	$45 \leq \frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}} \leq 53$

Tableau 5.8 – Comparaison entre coefficients de diffusion expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (modèle de pores cylindriques)

On rappelle que pour les bétons $C15$ et $C22$, nous n'avons pu calculer qu'un seul coefficient de diffusion hydrique homogénéisé (à partir de l'unique courbe de sorption-désorption

4. Même si l'on dispose d'une expréssion analytique (5.6), la valeur de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ ne peut être calculée qu'à partir des isothermes de sorption-désorption obtenues expérimentalement dans la section 5.3.4.

dont nous disposions), alors que pour les bétons BHP $A1$ et $A2$, nous avons pu calculer plusieurs valeurs du même coefficient à partir des différentes courbes de sorption-désorption à notre disposition (tableau 5.6). Les valeurs minimales et maximales du coefficient de diffusion hydrique homogénéisé relatif $\frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}}$ sont représentées dans le tableau 5.8 pour les bétons BHP $A1$ et $A2$. Nous constatons que le rapport entre le coefficient de diffusion hydrique théorique $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ et le coefficient de diffusion hydrique expérimental $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}$ est relativement important pour tous les bétons étudiés ($C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$). A ce niveau d'analyse, on peut penser que cette différence est due principalement à la forme géométrique extrêmement simpliste de la microstructure modélisée par des pores cylindriques infinis dans la direction y_3. Dans ce cas, la géométrie de la microstructure considérée ne présente aucune tortuosité, contrairement aux matériaux cimentaires où l'aspect tortueux a une influence importante sur le transfert hydrique. Dans le cas considéré ici (modèle simple de pores cylindriques), seule la teneur en gaz θ_g a une influence sur le coefficient de diffusion hydrique homogénéisé, ce qui ne reflète pas la réalité beaucoup plus complexe du phénomène de transfert hydrique.
Dans les sections suivantes, nous allons considérer des cellules élémentaires plus complexes, ayant une tortuosité plus importante, d'abord en deux dimensions, puis en trois dimensions.

5.5 Résolution numérique pour des géométries 2D

Considérons maintenant dans cette section un milieu poreux dont la microstructure est constituée de cellules élémentaires bidimensionnelles de géométrie plus complexe, et calculons numériquement [5] le tenseur de diffusion hydrique $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ correspondant. Pour se faire, nous devons tout d'abord résoudre numériquement le problème aux limites (5.4) pour déterminer χ, puis calculer ensuite le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé $\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}}$ donné par (5.3), pour enfin remonter au tenseur de diffusion hydrique homogénéisé $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$. Dans tous les cas considérés, nous supposons que la phase gazeuse est isotrope et que le coefficient de diffusion de vapeur d'eau dans l'air libre D_v est constant. Dans la région hy-

5. Dans le cas de géométries plus complexes, il n'existe pas de solution analytique simple.

groscopique, décrite par le problème de Neumann classique, et dans le cas d'un transfert bidimensionnel dans le plan (y_1, y_2), le vecteur χ est indépendant de la variable y_3. Le problème (5.4) se simplifie alors et les inconnues du problème sont les deux composantes χ_i avec $i = 1, 2$, qui sont solutions du problème :

$$\begin{cases} \Delta_y \chi_i = 0 & \text{dans} \quad \Omega_g \\ \frac{\partial \chi_i}{\partial y}.n = -n_i & \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \\ \frac{\partial \chi_i}{\partial y}.n = -n_i & \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \end{cases} \quad \text{dans la région hygroscopique} \tag{5.7}$$

En utilisant le théorème de la divergence et les conditions aux limites sur Γ_{gg}, l'expression (5.3) de $\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}}$ devient :

$$\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}} = \theta_g \, D_v \, (I + \frac{1}{|\Omega_g|} \int_{\Gamma_{gl} \cup \Gamma_{gs}} \chi \otimes n \, d\Gamma) \tag{5.8}$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel. Rappelons que la dernière expression (5.8) peut être réécrite de façon classique [32][39] :

$$\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}} = \theta_g \, D_v \, \tau \tag{5.9}$$

ce qui permet de faire apparaitre explicitement le tenseur de tortuosité τ défini par :

$$\tau = I + \frac{1}{|\Omega_g|} \int_{\Gamma_{gl} \cup \Gamma_{gs}} \chi \otimes n \, d\Gamma \tag{5.10}$$

Notons que par cette approche, on obtient une expression analytique exacte du tenseur de tortuosité τ, ce qui n'est pas toujours le cas dans la littérature.

Dans le cas d'une cellule élémentaire bidimensionnelle, où le transfert a lieu dans le plan (y_1, y_2), $\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}}$ est un tenseur d'ordre 2 qui s'écrit d'une façon générale :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} = \begin{pmatrix} D_{\mathbf{11}}^{\mathbf{hom}} & D_{\mathbf{12}}^{\mathbf{hom}} \\ D_{\mathbf{21}}^{\mathbf{hom}} & D_{\mathbf{22}}^{\mathbf{hom}} \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Les différentes composantes $D_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{hom}}$, avec $i, j \in \{1, 2\}$, sont calculées numériquement à partir de l'équation (5.8). Nous considérerons, dans tout ce qui suit, des cellules élémentaires symétriques, si bien que les tenseurs de diffusion homogénéisés seront de la forme $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} = D_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} \, I$.

Dans cette partie, nous considérerons des cellules bidimensionnelles contenant des inclusions

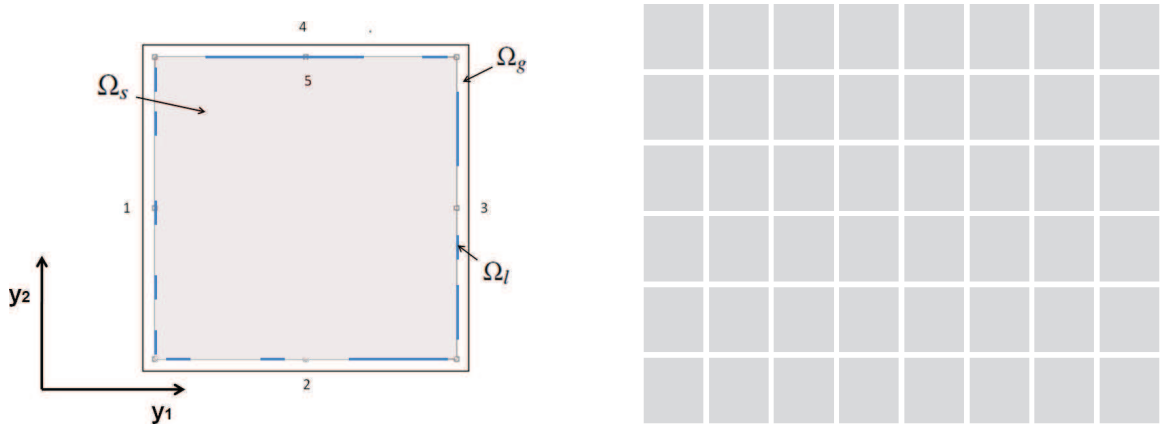
carrées, puis des inclusions circulaires plus complexes. La résolution numérique du problème (5.7) sera effectuée en utilisant le logiciel Comsol Multiphysics [42].

Remarque 5.1 *Notons que les bétons étudiés C*15*, C*22*, BHP A*1 *et A*2 *ont une faible porosité (de l'ordre de* 12% *à* 15%*). Une cellule élémentaire simple constituée d'une seule inclusion circulaire ne permet pas d'atteindre de si faibles porosités. Ce n'est pas le cas des cellules élémentaires constituées d'une inclusion carrée, considérées dans le section suivante.*

5.5.1 Inclusion carrée

Considérons un milieu poreux dont la microstructure (Fig. 5.12(b)) est constituée de la répétition périodique de la cellule élémentaire de taille 1×1 représentée sur la Fig. 5.12(a). Cette cellule élémentaire est elle-même composée d'une inclusion carrée de dimension $a \times a$, située au centre de la cellule représentant la phase solide Ω_s (en gris). On suppose que la phase liquide Ω_l (en bleu) se dépose sur la phase solide Ω_s, et que la phase gazeuse Ω_g (en blanc) entoure Ω_s et Ω_l.
Pour simplifier le problème, comme on est dans la région hygroscopique, pour de faibles teneurs en eau, on considère que la phase liquide Ω_l est constituée d'un film mince, de volume négligeable par rapport aux volumes des deux autres phases (gaz et solide), le liquide mouillant partiellement (ou complètement) le solide Ω_s. La distinction entre les interfaces Γ_{gl} et Γ_{gs} dans la région hygroscopique n'a pas d'importance pour la résolution du problème 5.7, car la même condition aux limites de Neumann est imposée à l'interface Γ_{gl} et à l'interface Γ_{gs}. Enfin, comme on a supposé que le gaz entoure complètement le solide et le liquide, l'interface entre deux cellules voisines se limite à Γ_{gg}.

Les frontières (1 à 4) représentent l'interface gaz-gaz Γ_{gg}, séparant les cellules élémentaires voisines, sur laquelle on a imposé une condition de périodicité pour le vecteur local



(a) Cellule elementaire contenant une inclusion carrée (b) Microstructure périodique associée

FIGURE 5.12 – Modèle d'inclusion carrée

χ :

$$\chi_1|\Gamma_1 = \chi_1|\Gamma_3 \tag{5.12}$$

$$\chi_2|\Gamma_2 = \chi_2|\Gamma_4 \tag{5.13}$$

La même condition aux limites de type Neumann est imposée sur la frontière 5 (Γ_{gs} et Γ_{gl}) et l'épaisseur de liquide entourant Ω_s est négligée dans la résolution numérique. De plus, afin d'assurer l'unicité de la solution, on impose pour chaque composante χ_i du vecteur χ une condition de nullité en un point du domaine gazeux Ω_g.

Pour une humidité relative HR donnée, on obtient la teneur en eau massique U par les courbes de désorption (5.5(a), 5.5(b), 5.6 et 5.7), puis on calcule θ_l par les relations données dans le tableau 5.4. Ensuite, $\varepsilon_p = \theta_l + \theta_g$ étant donné, on en déduit θ_g puis la valeur de a correspondante. La résolution numérique est réalisée en utilisant Comsol Multiphyics avec des éléments finis triangulaires, et un maillage raffiné sur les frontières Γ_{gs} et Γ_{gl}.

Comme la cellule élémentaire est symétrique, le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé sera isotrope. On a alors $D_{\mathbf{11}}^{\mathbf{hom}} = D_{\mathbf{22}}^{\mathbf{hom}} = D_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}$.

Le tableau 5.9 présente les résultats obtenus par résolution numérique du problème (5.7) sur une cellule élémentaire contenant une inclusion carrée. Pour chaque valeur de l'humidité relative HR, correspondant à une teneur en gaz θ_g, on calcule le coefficient de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé relatif associé $D_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}$, puis on remonte au coeficient de diffusion

hydrique homogénéisé associé en utilisant (5.2).

Type de béton	$C15$ (HR=33%)	$C22$ (HR=12%)	BHP A1 (HR=12%)	BHP A2 (HR=12%)
a	0.924	0.9295	0.9415	0.9348
θ_g	0.143	0.136	0.114	0.126
ε_p	0.15	0.14	0.12	0.13
$D_\theta^{\mathbf{exp}}$ $(10^{-10}\, m^2.s^{-1})$	0.771	1.03	0.17	0.15
$D_\theta^{\mathbf{hom}}$ $(10^{-10}\, m^2.s^{-1})$	14.23	12.34	$3.6 \leq D_\theta^{hom} \leq 4.8$	$3.5 \leq D_\theta^{hom} \leq 4.6$
$\frac{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}}{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}}$	18	11	$21 \leq \frac{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}}{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}} \leq 28$	$23 \leq \frac{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}}{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}} \leq 30$

Tableau 5.9 – Comparaison entre coefficients de diffusion hydriques expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (cellule élémentaire contenant une inclusion carrée)

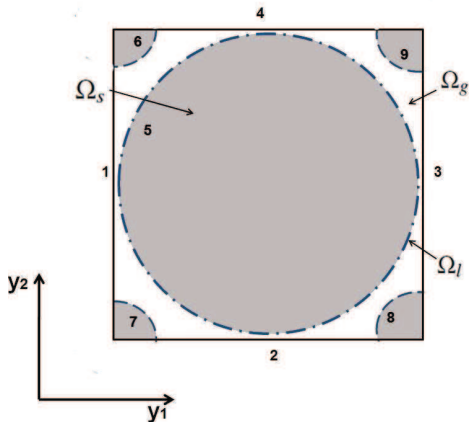
Le tableau (5.9) présente, sur la quatrième ligne, les valeurs du coefficient de diffusion hydrique expérimental obtenus dans [102], et sur la cinquième ligne, les valeurs du coefficient de diffusion hydrique homogénéisé obtenues à partir de la cellule élémentaire bidimensionnelle considérée ici. Pour le béton $C15$ et pour une humidité relative $HR = 33\%$, on obtient un rapport de 18 entre les valeurs expérimentales et théoriques. Pour le béton $C22$, avec une humidité relative $HR = 12\%$, ce rapport n'est que de 11. Pour les bétons BHP $A1$ et $A2$, le rapport $\frac{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}}{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}}$ varie entre 20 et 30, compte tenu des différentes valeurs expérimentales dont on dispose.

Par rapport au précédent cas étudié (pores cylindriques infinis), qui ne tenait pas compte de la tortuosité, la microstructure considérée ici (cellule élémentaire 2D contenant une inclusion carrée) permet de réduire considérablement la différence entre valeurs expérimentales et théoriques pour le coefficient de diffusion hydrique. Ceci provient notamment du fait que cette géométrie permet de tenir compte de la torutosité (voir Fig. 5.12). On se propose maintenant de construire une microstructure plus complexe toujours en 2D, qui permettra de prendre

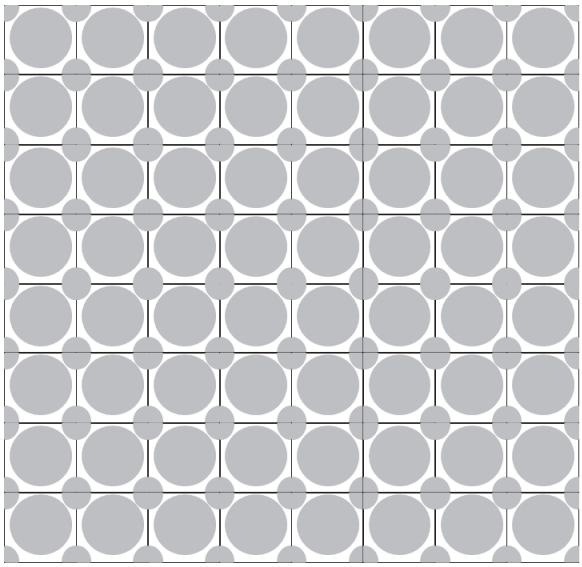
encore mieux en compte la tortuosité importante des matériaux cimentaires considérés.

5.5.2 Inclusion bidimensionnelle plus complexe

Considérons maintenant une cellule élémentaire bidimensionnelle plus complexe que celles considérées précédemment (Figs. 5.13(a) et 5.13(b)). Elle est composée d'un disque de rayon $r_c = 0.495$ situé au centre, et de quarts de disques de rayon r_s situés aux quatre sommets de la cellule élémentaire. On procède d'une manière similaire aux cas précédents. La taille de la cellule élémentaire restant inchangée (elle est toujours carrée de côté égale à 1), on fait varier le rayon des quarts de disque $r_s \in \{0.167, 0.173\}$ afin d'avoir les teneurs en gaz correspondant aux bétons ($C15$ et $C22$) étudiés, ainsi qu'aux humidités relatives que l'on s'est fixées pour la comparaison ($HR = 12\%$ et $HR = 33\%$).



(a) Cellule elementaire contenant une inclusion complexe



(b) Microstructure périodique associée

FIGURE 5.13 – Modèle d'une cellule élémentaire plus complexe en 2D

Les frontières (1 à 4) sur la figure 5.13(a) représentent l'interface gaz-gaz Γ_{gg}, où les conditions de périodicité du vecteur local χ sont appliquées. Les frontières 5 à 9 représentent l'interface gaz-solide Γ_{gs} ainsi que l'interface Γ_{gl}. La non distincition entre ces deux interfaces

(Γ_{gs} et Γ_{gl}) provient toujours du fait que l'on a la même condition aux limites de Neumann imposée sur Γ_{gs} et Γ_{gl} [6]. Après avoir résolu numériquement le problème aux limites (5.7) pour chaque teneur en gaz θ_g correspondant à l'hudimité relative fixée pour chaque béton, on calcule le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé $\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}}$ donné par son expression (5.8). On remonte enfin au tenseur de diffusion hydrique $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ par la relation (5.2).
Notons que pour la résolution numérique sur cette cellule élémentaire plus complexe, un raffinement du maillage a été effectuée au voisinage des interfaces Γ_{gs} et Γ_{gl}, où la condition aux limites de type Neumann est appliquée. La géométrie de la cellule élémentaire représentée sur la figure 5.13(a) étant symétrique, le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé sera isotrope. Les résultats obtenus pour les cofficients de diffusion hydriques théoriques et numériques sont résumés dans le tableau 5.10.

Type de béton	$C15$ (HR=33%)	$C22$ (HR=12%)	BHP A1 (HR=12%)	BHP A2 (HR=12%)
r_s	0.167	0.173	0.192	0.182
r_c	0.495	0.495	0.495	0.495
θ_g	0.143	0.136	0.114	0.126
ε_p	0.15	0.14	0.12	0.13
$D_\theta^{\mathbf{exp}}$ $(10^{-10}\, m^2.s^{-1})$	0.771	1.03	0.17	0.15
$D_\theta^{\mathbf{hom}}$ $(10^{-10}\, m^2.s^{-1})$	8.106	7.6	$2.2 \leq D_\theta^{hom} \leq 3.03$	$2.1 \leq D_\theta^{hom} \leq 2.5$
$\frac{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}}{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}}$	10	7	$12 \leq \frac{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}}{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}} \leq 17$	$14 \leq \frac{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}}{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}} \leq 16$

Tableau 5.10 – Comparaison entre coefficients de diffusion hydriques expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (modèle de cellule élémentaire 2D plus complexe)

Nous remarquons une diminution notable du rapport $\frac{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}}{\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}}$ par rapport aux autres cas étudiés. Cela est dû, en grande partie, à la complexité géométrique de la cellule élémentaire considérée, présentant une plus forte tortuosité et constructivité. D'autre part, compte tenu de la faible porosité des bétons étudiés (de l'ordre de 12% à 15%), et des faibles teneurs en

6. On rappelle que notre problème est résolu dans la région hygroscopique.

gaz associées, les disques r_c et r_s sont presque tangents, si bien que l'on est à la limite de la percolation, ce qui fait chuter fortement les valeurs de la diffusivité de vapeur d'eau homogénéisé obtenues.
Un des intérêts de cette cellule élémentaire 2D est qu'elle permet d'atteindre des porosités ε_p faibles, proches de celles des bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ étudiés, tout en ayant une microstructe relativement complexe. Ainsi la comparaison des valeurs des coefficients de diffusion hydriques $D_\theta^{\mathbf{hom}}$ obtenues avec les valeurs expérimentales (tableau (5.10)) sont plus pertinentes.

On a pu constater de façon générale dans cette section, que la topologie du milieu poreux considéré joue un rôle important dans les résultats obtenus. Cependant, étant donné que les géométries 2D considérées ne reflètent pas complètement la topologie des milieux réels qui sont tridimensionnels, nous proposons de généraliser cette étude pour des cellules élémentaires tridimensionnelles dans la section suivante.

5.6 Résolution numérique pour des cellules élémentaires tridimensionnelles

Le problème à résoudre est maintenant le problème de Neumann tridimensionnel :

$$\begin{cases} \Delta_y \chi_i = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \ \text{ pour } \ i = 1,2,3 \\ \frac{\partial \chi_i}{\partial y}.n = -n_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \\ \frac{\partial \chi_i}{\partial y}.n = -n_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \\ < \chi_i >_{\Omega_g} = 0 \\ \chi_i \ \ est\, priodique\ sur\ \Gamma_{gg} \end{cases} \tag{5.14}$$

Le vecteur local χ est tridimensionnel, ses trois composantes χ_1, χ_2 et χ_3 dépendent a priori de y_1, y_2 et y_3. Le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé $\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}}$ est toujours donné par :

$$\mathbf{D}_v^{\mathbf{hom}} = \theta_g \, D_v \, \tau \tag{5.15}$$

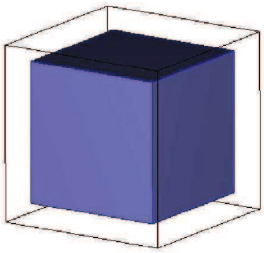
où le tenseur de tortuosité τ est calculé d'après (5.10). Le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé dans le cas tridimensionnel s'écrit de manière générale :

$$\mathbf{D_v^{hom}} = \begin{pmatrix} D_{\mathbf{11}}^{hom} & D_{12}^{hom} & D_{13}^{hom} \\ D_{21}^{hom} & D_{22}^{hom} & D_{23}^{hom} \\ D_{31}^{hom} & D_{32}^{hom} & D_{33}^{hom} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

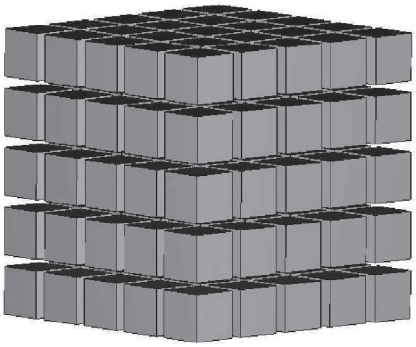
Les cellules élémentaires qui seront étudiées dans cette section étant symétriques, le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé sera isotrope. Il s'écrira $\mathbf{D_v^{hom}} = D_v^{hom} I$ où D_v^{hom} désigne le coefficient de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé qui sera calculé numériquement.

5.6.1 Inclusion cubique

Nous commençons par étudier une cellule élémentaire simple. Considérons la cellule élémentaire de la Fig. 5.14(a) engendrant la microstructure périodique représentée sur la figure 5.14(b). La taille de la cellule élémentaire est un cube de côté 1. L'inclusion cubique de coté



(a) Cellule elementaire contenant une inclusion cubique



(b) Microstructure périodique associée

FIGURE 5.14 – Inclusion cubique considérée

a, située au centre de la cellule élémentaire, représente la phase solide Ω_s. Comme en 2D, on suppose ici que le liquide mouille l'inclusion solide Ω_s de façon aléatoire, en y déposant un film très mince (domaine Ω_l) dont l'épaisseur sera négligée dans la résolution numérique

du problème (5.14). Cette hypothèse se justifie pour le régime hygroscopique étudié, compte tenu des faibles teneurs en eau mises en jeu.

Pour chaque type de béton ($C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$), la taille a de l'inclusion solide est déterminée de façon à respecter la teneur en gaz donnée choisie pour la comparaison. Le coefficient de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé relatif associé est calculé par (5.15) après résolution numérique du problème (5.14). Les paramètres de la simulation numérique (teneur en gaz θ_g, taille de l'inclusion a), et les résultats obtenus (coefficients de diffusion de vapeur d'eau homogénéisés) sont présentés dans le tableau (5.11).

Type de béton	$C15$ (HR=33%)	$C22$ (HR=12%)	BHP A1 (HR=12%)	BHP A2 (HR=12%)
a	0.95	0.9525	0.9605	0.9562
θ_g	0.143	0.136	0.114	0.126
ε_p	0.15	0.14	0.12	0.13
D_θ^{exp} $(10^{-10}\ m^2.s^{-1})$	0.771	1.03	0.17	0.15
D_θ^{hom} $(10^{-10}\ m^2.s^{-1})$	17.075	16.33	$4.9 \leq D_\theta^{hom} \leq 6.3$	$4.6 \leq D_\theta^{hom} \leq 5.5$
$\frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}}$	23	15	$28 \leq \frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}} \leq 37$	$30 \leq \frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}} \leq 36$

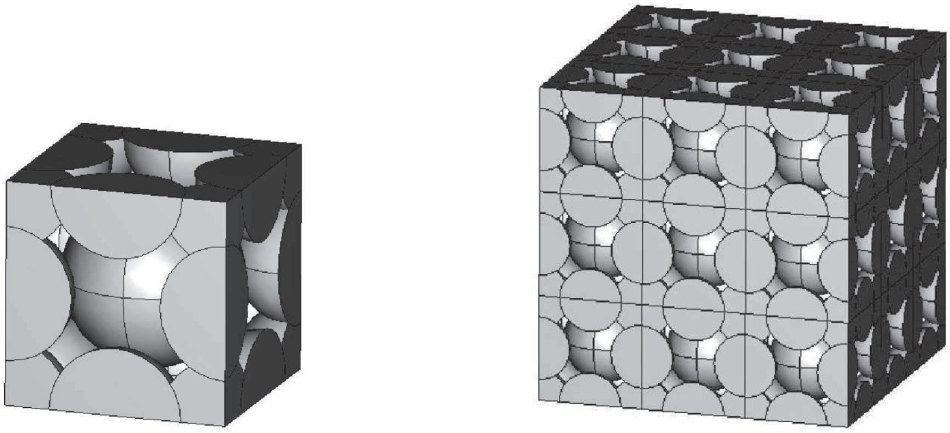
Tableau 5.11 – Comparaison entre coefficients de diffusion expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (modèle d'inclusion cubique)

On observe un écart légèrement plus important entre valeurs théoriques et expérimentales que dans le cas d'une inclusion carrée en 2D, pour les mêmes valeurs de la porosité et de l'humidité relative. Cela peut s'expliquer par le fait qu'en dimension 2, pour les faibles porosités considérées, on était à la limite de la percolation (les distances entre deux inclusions solides étaient très faibles). Ainsi, la diffusion d'humidité pouvait se trouver freinée ou bloquée à certains endroits, ce qui n'est pas le cas en 3D compte tenu de la topologie.

Par la suite, afin d'essayer d'approcher de façon plus pertinente la microstructure réelle des matériaux cimentaires étudiés, nous allons considérer des cellules élémentaires tridimen-

sionnelles plus complexes, présentant une forte tortuosité et constrictivité.

5.6.2 Inclusion tridimensionnelle plus complexe



(a) Cellule elementaire plus complexe (b) Microstructure périodique associée

FIGURE 5.15 – Modèle de microstructure périodique plus complexe considérée.

Considérons pour finir, une cellule élémentaire encore plus complexe géométriquement que les précédentes, représentée sur la figure 5.15(a). Elle est constituée d'une sphère de rayon r_c située au centre de la cellule élémentaire, de huitièmes de sphères de rayon r_s situés aux sommets, et de quarts de sphères de même rayon r_s situés aux milieux des arrêtes des côtés. Les rayons des sphères r_c et r_s sont choisis de façon adéquate en suivant la même démarche que précédemment, afin de s'approcher au mieux des données (porosité et humidité relative des matériaux). On obtient les résultats numériques présentés dans le tableau (5.12).

Nous constatons que l'on obtient des valeurs de $\frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}}$ qui sont plus proches des valeurs expérimentales que dans le cas d'une cellule contenant une inclusion cubique 3D. L'écart existant encore entre les valeurs théoriques et expérimentales peut s'expliquer entre autres par le phénomène d'emprisonnement de l'air qui n'est pas pris en compte par notre modèle et qui réduit la cinétique du transfert hydrique.

Type de béton	$C15$ (HR=33%)	$C22$ (HR=12%)	BHP A1 (HR=12%)	BHP A2 (HR=12%)
r_s	0.36	0.36	0.36	0.36
r_c	0.3805	0.386	0.403	0.3935
θ_g	0.143	0.136	0.114	0.126
ε_p	0.15	0.14	0.12	0.13
D_θ^{exp} $(10^{-10}\ m^2.s^{-1})$	0.771	1.03	0.17	0.15
D_θ^{hom} $(10^{-10}\ m^2.s^{-1})$	11.2	9.43	$2.7 \leq D_\theta^{hom} \leq 6.4$	$2.59 \leq D_\theta^{hom} \leq 3.09$
$\frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}}$	14	9	$15 \leq \frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}} \leq 20$	$17 \leq \frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{exp}} \leq 20$

Tableau 5.12 – Comparaison entre coefficients de diffusion expérimentaux et théoriques pour les bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$ (microstructure périodique 3D complexe)

5.6.3 Analyse et discussion

La comparaison effectuée à la section 5.4 entre la valeur du coefficient de diffusion hydrique théorique obtenue à partir d'une modélisation simple de pores cylindrique infinis, et la valeur obtenue par détermination expérimentale au laboratoire, a montré un écart important entre expérience et théorie. Cet écart important était dû au modèle très simple de pores cylindriques considéré, où aucune tortuosité ni constrictivité géométrique n'était prise en compte. Par la suite, nous avons considéré des cellules élémentaires bidimensionnelles et tridimensionnelles plus complexes géométriquement, présentant une certaine tortuosité et constrictivité. Le calcul du coefficient de diffusion homogénéisé n'a été possible que numériquement en utilisant le logiciel Comsol Multiphysics. La dernière cellule élémentaire tridimensionnelle considérée dans la section 5.6.2 était la plus réaliste en terme de représentativité géométrique du matériau cimentaire réel d'une part, et d'autre part permettrait d'obtenir des porosités faibles (de l'ordre de celles correspondant aux matériaux réels étudiés), ainsi qu'une

tortuosité et une constrictivité importante (géométrie complexe).

Cependant, les résultats obtenus sur ces cellules élémentaires bidimensionnelles et tridimensionnelle, montrent que la complexité géométrique de la microstructure du milieu poreux (avec une forte tortuosité et constructivité) est un paramètre important, mais pas suffisant pour retrouver les valeurs expérimentales du coefficient de diffusion hydrique $D_\theta^{\mathbf{exp}}$.
Même dans le cas où les valeurs théoriques et expérimentales restent assez éloignées, on remarque la même tendance générale pour les résultats obtenus. Les valeurs de D_θ^{hom} pour le béton $C22$ sont toujours inférieures à celles obtenus pour le béton $C15$, qui elle-mêmes sont du même ordre de grandeur (correspondant au minimum obtenu) pour les bétons BHP. Cette tendance générale peut s'expliquer par le fait que le phénomène d'emprisonnement de l'air, qui réduit la cinétique de transfert, n'est pas prise en compte dans notre modèle. Or, les bétons $C15$, BHP $A1$ et BHP $A2$ présentent une distribution de porosité polymodale traduisant leur faible micro-porosité (voir Figs. 5.1 et 5.2). Comme l'eau commence à occuper par condensation les petits pores, même pour une d'humidité relative assez faible, l'air emprisonné s'oppose à la saturation, ce qui explique un rapport assez élevé de $\frac{D_\theta^{hom}}{D_\theta^{epx}}$ pour ces bétons. Par contre, le béton $C22$, qui présente une distribution monomodale de taille de pores, contient beaucoup moins de petit pores que les autres bétons, ce qui rend l'emprissonnement de l'air moins important, et par conséquence le rapport $\frac{\mathbf{D_\theta^{hom}}}{\mathbf{D_\theta^{epx}}}$ obtenu est moins élevé.

D'autre part, notons que la détermination expérimentale du coefficient de diffusion hydrique expérimental $D_\theta^{\mathbf{exp}}$, avec lequel nous comparons nos résultats, peut également être discutée, dans la mesure où il s'agit d'une détermination indirecte reposant sur un modèle contenant lui même certaines hypothèses qui n'ont pas été présentées ni discutées ici.

Enfin, signalons le caractère relatif des comparaisons effectuées, vu le peu de valeurs expérimentales dont nous disposons dans la littérature, et compte tenu des écarts importants existant entre les coefficients de diffusion hydrique pour des bétons ayant des caractéristiques relativement proches [4][45][102].

5.7 Résolution de l'équation de Richards homogénéisée

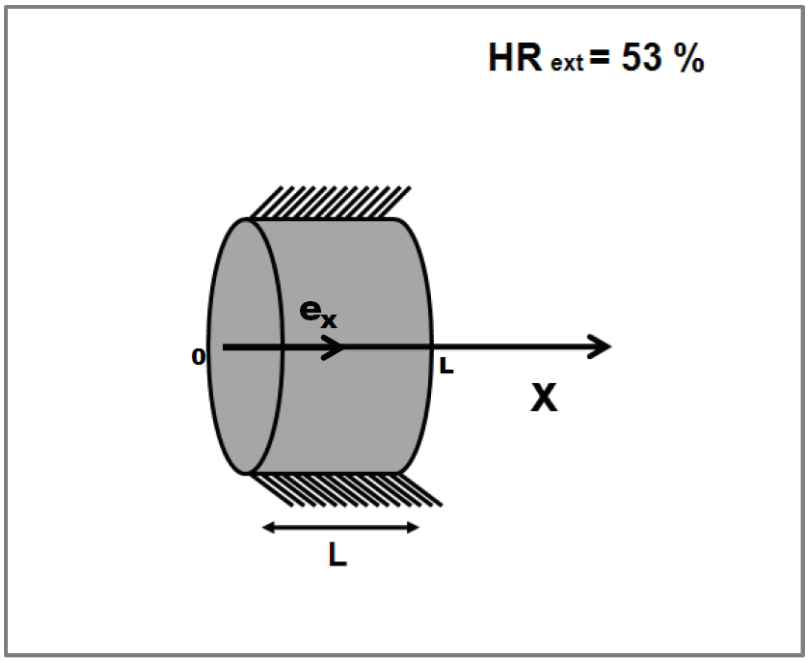


FIGURE 5.16 – Schéma associé au problème de diffusion hydrique pour le béton PHB A1

Nous proposons dans cette section de simuler le séchage d'une éprouvette cylindrique d'un béton BHP A1 d'épaisseur $L = 10\ cm$ dans le cas isotherme (voir Fig. 5.16). L'échantillon est initialement saturé et exposé à une humidité relative de 53.5% correspondant aux epériences réalisées dans [102]. D'autre part, sa surface latérale est recouverte de résine, de façon à avoir une diffusion hydrique unidimensionnelle à travers l'épaisseur, dans la direction e_x. Le problème d'évolution unidimensionnel à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\ \theta_l}{\partial t} - div_x(\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}\ \dfrac{\partial \theta_l}{\partial x}) = 0 \\ \theta_l(x,0) = \theta_{sat} \\ \theta_l(0,t) = \theta_b \\ \theta_l(L,t) = \theta_b \end{cases} \tag{5.17}$$

où θ_{sat} est la teneur en eau à la saturation pour $HR = 100\%$, θ_b la teneur en eau au bord correspondant à l'humidité relative extérieure $HR = 53.5\%$. D'après les résultats obtenus au chapitre 3, le coefficient de diffusion hydrique $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ est donné, suivant le régime de diffusion hydrique considéré, par des expressions différentes :

- Dans le cas d'une diffusion prédominante de vapeur d'eau, on a $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$ avec :

$$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0}\,\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} \tag{5.18}$$

- Dans le cas d'une diffusion de vapeur d'eau et d'une convection d'eau liquide du même ordre de grandeur, on a :

$$\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{\rho_l^0}\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l} - \frac{K_{rl}(\theta_l)\,K_l}{\mu_l}\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} \tag{5.19}$$

- Dans le cas d'une convection d'eau liquide prédominante dans le processus de transport hydrique, on a $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$ avec :

$$\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}} = -\frac{K_{rl}(\theta_l)\,K_l}{\mu_l}\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} \tag{5.20}$$

On rappelle que le tenseur de diffusion de vapeur d'eau homogénéisé $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}$ est donné par :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}} = \frac{1}{|\,\Omega\,|}\int_{\Omega_g} D_v(I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})dy \tag{5.21}$$

où le vecteur $\chi(y)$ est périodique, de moyenne nulle sur Ω_g, et solution du problème aux limites local :

$$\begin{cases} div_y(D_v\,(I + \overline{\frac{\partial \chi}{\partial y}})) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_g \\ D_v\,(I + \frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gs} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gs} \end{cases} \tag{5.22}$$

Les conditions aux limites associées sur l'interface Γ_{gl} dépendent du régime de transfert hydrique dans lequel on se trouve. Dans la région hygroscopique, la condition aux limites est de type Neumann sur Γ_{gl} :

$$D_v\,(I + \frac{\partial \chi}{\partial y}).n_{gl} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{5.23}$$

alors que dans la région super-hygroscopique, elle est de type Dirichlet sur Γ_{gl} :

$$\chi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{gl} \tag{5.24}$$

On se basera dans notre étude sur les valeurs expérimentales moyennées de l'isotherme de désorption [102] qui sont résumées dans le tableau 5.13. Notons que nous avons considéré que pour $HR = 12\%$ et 33%, nous sommes dans la région hygroscopique et la diffusion de vapeur

d'eau est prédominante (on aura $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$). Pour $HR = 53.5\%$ et 75.5%, on considère que les transferts hydriques ont lieu dans la région hygroscopique et que la diffusion de vapeur et la convection de liquide sont du même ordre de grandeur (on aura $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} + \mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$). Enfin pour $HR = 90\%$, on considérera que le matériau est dans un état super-hygroscopique, et que la diffusion de vapeur et la convection de liquide sont du même ordre de grandeur. Pour finir, pour $HR = 100\%$, les transferts ont lieu dans la région super-hygroscopique, où la convection de l'eau liquide prédomine (on aura $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}} = \mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$).

HR	U (Kg/Kg)	θ_l (m^3/m^3)	Région considérée	$\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$
100%	4.2%	10.3%	super-hygroscopique	$\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$
90.4%	3.5%	7.48%	super-hygroscopique	$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} + \mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$
75.5%	2.7%	6.62%	hygroscopique	$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} + \mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$
53.5%	1.93%	4.73%	hygroscopique	$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}} + \mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$
33%	0.77%	1.8%	hygroscopique	$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$
12%	0.22%	0.53%	hygroscopique	$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$

Tableau 5.13 – Expressions de $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ considérées

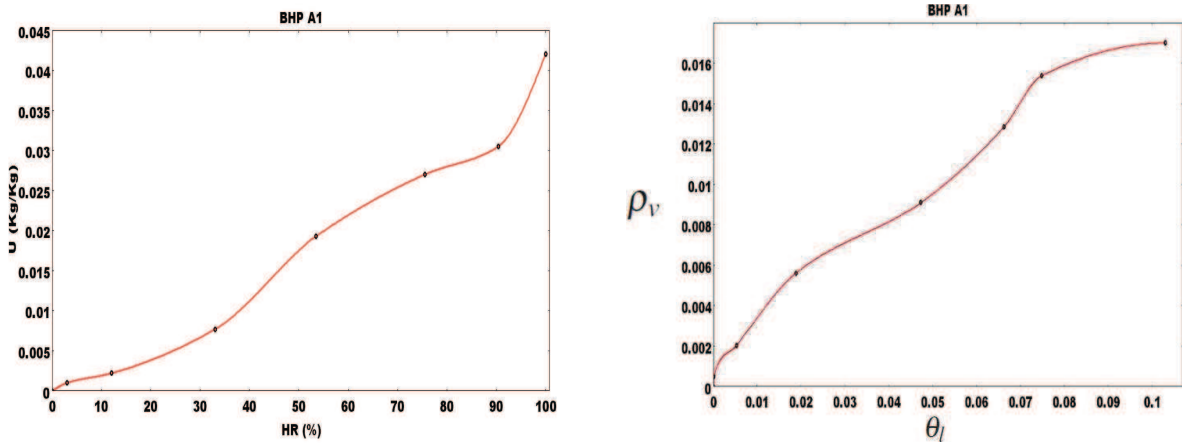
Nous pouvons déduire, à partir du tableau 5.13, la valeur de la teneur en eau saturante [7] $\theta_{sat} = 0.103$ et la valeur de la teneur en eau au bord [8] $\theta_b = 0.473$.

Nous proposons, dans la suite de notre travail, de calculer le coefficient de diffusion hydrique correspondant au transfert de vapeur d'eau $\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$, et le coefficient de diffusion hydrique correspondant au transfert d'eau liquide $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$, pour en déduire le coefficient de diffusion hydrique total de vapeur $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$. La connaissance de ce dernier est indispensable pour pouvoir résoudre l'équation de Richards homogénéisée (5.17) qui est une équation de diffusion non linéaire.

7. Correspondant à $HR = 100\%$.
8. Correspondant à $HR = 53.5\%$, donné par les conditions aux limites extérieures.

5.7.1 Calcul du coefficient de diffusion hydrique correspondant à la phase vapeur

Nous proposons dans cette section de calculer le coefficient de diffusion hydrique $\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$ correspondant au transfert de la vapeur d'eau défini par (5.18). Nous rappelons que $\rho_l = 1000[Kg/m^3]$, $D_v = 2.56\ 10^{-5}[m^2/s]$.
En utilisant les valeurs expérimentales du tableau 5.13, ainsi que les relations $\theta_l = 2.45\ U$ et $\rho_v^0 = 0.017\ HR$ pour le béton BHP $A1$, nous obtenons les courbes de désorption (voir Fig. 5.17).



(a) Courbe de désorption en fonction de U et HR (b) Courbe de désorption en fonction de θ_l et ρ_v^0

FIGURE 5.17 – Courbes expérimentales de désorption de la vapeur d'eau pour le béton PHB A1

En calculant les pentes correspondant aux humidités relatives données, nous en déduisons les valeurs de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ qui figurent dans le tableau 5.14.

Maintenant, pour calculer $\mathbf{D}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{hom}}$, nous choisissons la cellule élémentaire 3D la plus complexe (Fig. 5.15), approchant au mieux la microstructure réelle des matériaux cimentaires présentée à la section 5.6.2. On rappelle que les rayons des sphères r_c et r_s sont choisis de façon à approcher au mieux la porosité (fixée ici à 12%), pour une humidité relative HR don-

$\theta_l(m^3/m^3)$	$\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$
10.3%	0.004
7.48%	0.109
6.62%	0.244
4.73%	0.153
1.8%	0.174
0.53%	0.28

Tableau 5.14 – Valeurs expérimentales de $\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$ pour le béton BHP A1

née. Afin de simplifier le problème, le domaine liquide est supposé être un film plus ou moins mince, suivant les humidités relatives, se déposant sur le domaine solide. En suivant la même démarche qu'à la section 5.6.2 , nous obtenons les résultats présentés dans le tableau 5.15.

	$HR = 12\%$	HR=33%	HR=53.5%	HR=75.5%	HR=90.4%	HR=100 %
r_s	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	
r_c	0.403	0.413	0.439	0.457	0.4658	
θ_g	0.1147	0.1012	0.0727	0.0538	0.0452	
$\frac{\partial \rho_v^0}{\partial \theta_l}$	0.28	0.174	0.153	0.244	0.109	0.004
D_v^{hom}	$10.8\ 10^{-10}$	$9.16\ 10^{-10}$	$5.6\ 10^{-10}$	$3.8\ 10^{-10}$	$9.8\ 10^{-10}$	0
$D_{\theta,v}^{hom}$	$30.24\ 10^{-11}$	$15.94\ 10^{-11}$	$8.74\ 10^{-11}$	$9.36\ 10^{-11}$	$10.12\ 10^{-11}$	0

Tableau 5.15 – Coefficients de diffusion hydrique homogénéisées correspondant à la diffusion de vapeur d'eau $D_{\theta,v}^{hom}$ pour le béton BHP $A1$ (modèle basé sur la cellule élémentaire complexe 3D de la Fig. 5.15)

Notons que pour la résolution numérique du problème (5.22) et (5.24) avec Comsol Mutliphysics, lorsque $HR = 90\%$ (correpondant à la région super-hygroscopique), nous avons supposé que les interfaces Γ_{gl} et Γ_{gs} sont réparties aléaloirement de façon à constituer chacune 50% de la surface totale de l'interface gazeuse. A l'interface gaz-liquide Γ_{gl}, une condition

aux limites de type Dirichlet (5.24) est appliquée, alors qu'à l'interface gaz-solide Γ_{gs}, c'est une condition de type Neumann (5.23). On a pu vérifier sur d'autres simulations numériques qu'une répartition différente des conditions aux limites de type Neumann et Dirichlet sur les interfaces Γ_{gl} et Γ_{gs} n'a que très peu d'influence sur le résultat final.

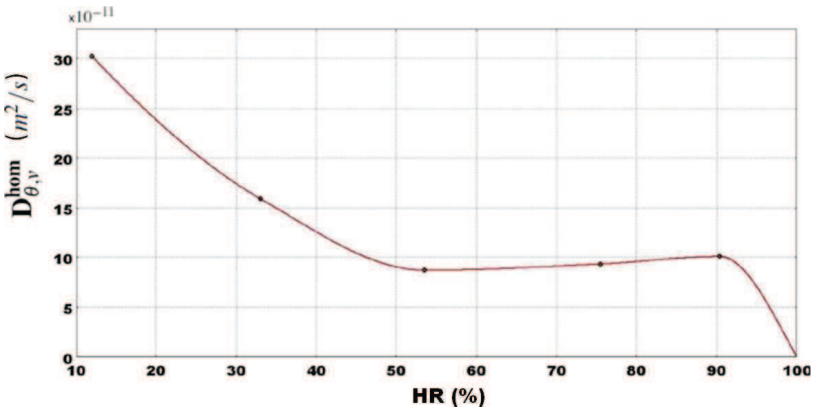


FIGURE 5.18 – Variation du coefficient de diffusion hydrique correspondant au transfert de vapeur d'eau $D^{hom}_{\theta,v}$ pour le béton BHP A1

Maintenant, il est possible de représenter sur la Fig. 5.18 la variation du coefficient de diffusion hydrique correspondant au transfert de vapeur d'eau $D^{hom}_{\theta,v}$ (donné par (5.18)) en fonction de l'humidité relative HR. On constate qu'au début du séchage (pour $HR = 100\%$), la diffusivité liée à la vapeur d'eau est quasiment nulle, et qu'elle augmente progressivement lorsque l'humidité relative diminue. En effet, lorsque HR diminue, la phase gazeuse occupe un volume plus important, ce qui favorise la diffusion de vapeur d'eau. Notons que dans le palier $HR \in [53.5\%, 90.4\%]$, $D^{hom}_{\theta,v}$ reste assez faible, avec une légère augmentation dans la région super-hygroscopique (aux alentours de $HR = 90\%$), qui s'explique par la condensation capillaire favorisant le déplacement de la vapeur d'eau. Nous retrouvons ainsi l'augmentation de la diffusion de la vapeur d'eau due à la condensation capillaire déjà observé dans la littérature [103]. A partir de $HR = 53.5\%$ et jusqu'à la fin du séchage, une baisse de l'humidité relative HR induit une augmentation importante du coefficient de diffusion hydrique $D^{hom}_{\theta,v}$. Ceci s'explique par les très faibles teneurs en eau θ_l lorsque HR est faible, rendant le domaine liquide discontinu au sein du matériau poreux. Par conséquence, les teneurs en gaz θ_g seront

plus importantes induisant une augmentation de la mobilité de la vapeur d'eau.

5.7.2 Calcul du coefficient de transport hydrique de l'eau liquide

Nous proposons dans cette section de calculer le coefficient de diffusion hydrique :

$$D_{\theta,l}^{hom} = -\frac{K_{rl}(\theta_l)\ K_l}{\mu_l}\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l} \tag{5.25}$$

où μ_l désigne la viscosité de l'eau liquide supposée constante ($\mu_l = 1.002\ 10^{-3}\ Kg/(m\ s)$). Les mesures expérimentales de la perméabilité intrinsèque sur des bétons courants montrent des différences de valeurs de la perméabilité mesurées [34]. Généralement K_l varie entre 10^{-20} et $10^{-22}\ m^2$ [22] [43]. La valeur moyenne intermédiaire de $K_l = 5\ 10^{-21}\ m^2$ [99] sera considérée dans la suite de notre étude.

La perméabilité relative du liquide K_{rl} (qui dépend de la teneur en eau liquide) est généralement décrite par la relation [99] :

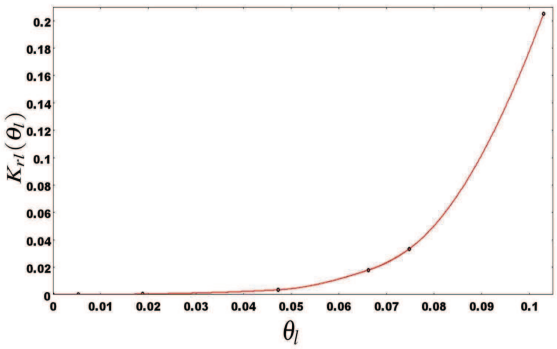
$$K_{rl} = \sqrt{\frac{\theta_l}{\varepsilon_p}}(1-(1-(\frac{\theta_l}{\varepsilon_p})^{\frac{1}{m}})^m)^2 \tag{5.26}$$

où ε_p désigne la porosité du matériau considéré. Même si à l'origine, la relation (5.26) était utilisée pour les sols, des études ont montré que cette expression était également applicable aux matériaux cimentaires [96] . D'après [78], la valeur à considérer pour le coefficient m pour les Bétons à Hautes Performances (BHP) est $m = 0.485$ [34].

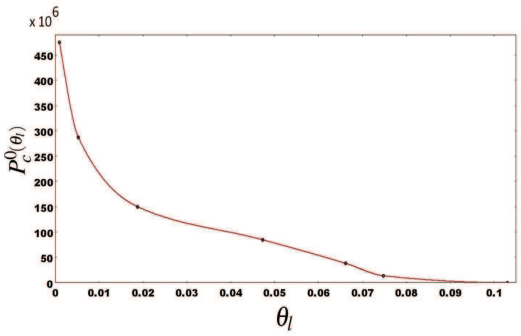
Rappellons maintenant la loi de Kelvin :

$$P_c^0 = -\rho_l\ R_v\ T\ ln(HR) \tag{5.27}$$

où ρ_l est la masse volumique de l'eau liquide supposée constante ($1000\ Kg/m^3$), R_v la constante des gaz parfait relative à la vapeur d'eau ($461.93\ J/Kg\ K$) et T la température supposée constante ($293\ K$). A partir de la relation (5.26) et de la loi de Kelvin (5.27), nous pouvons représenter sur la Fig. 5.19 les variation de K_{rl} en fonction de θ_l et la courbe de rétention, correspondant au béton BHP A1. En calculant les pentes correspondant aux hu-



(a) Variations de K_{rl} en fonction de θ_l



(b) Courbe de rétention (P_c^0 en fonction de θ_l)

FIGURE 5.19 – Variations de la perméabilité relative et courbe de rétention pour le béton PHB A1

midités relatives données (Fig. 5.19(b)), nous déduisons les valeurs recherchées de $\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l}$ qui figurent dans le tableau 5.16.

$\theta_l(m^3/m^3)$	$\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l}$
10.3%	$-2.52\ 10^6$
7.48%	$-879.56\ 10^6$
6.62%	$-2660.7\ 10^6$
4.73%	$-2369\ 10^6$
1.8%	$-4093.9\ 10^6$
0.53%	$-12806.71\ 10^6$

Tableau 5.16 – Valeurs expérimentales de $\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l}$ pour le béton BHP A1

Finalement, en utilisant les relations (5.25) à (5.27), ainsi que le tableau (5.16), il est possible de calculer les coefficients de diffusion hydrique correspondant au tranfert de l'eau liquide $D_{\theta,l}^{hom}$. Les valeurs obtenus figurent dans le tableau (5.17), et les variations de $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$ sont représentées sur la Fig. 5.20 en fonction de HR.

	$HR = 12\%$	HR=33%	HR=53.5%	HR=75.5%	HR=90.4%	HR=100 %
θ_l	0.0053	0.0188	0.0473	0.0662	0.0704	0.103
$\frac{\partial P_c^0}{\partial \theta_l}$	12806.71 10^6	4093.9 10^6	2369 10^6	2660.7 10^6	879.56 10^6	2.52 10^6
$\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$	0	0	4.13 10^{-11}	23.76 10^{-11}	14.65 10^{-11}	0.257 10^{-11}

Tableau 5.17 – Coefficients de diffusion hydrique homogénéisés correspondant à la convection de l'eau liquide $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$ pour le béton BHP $A1$

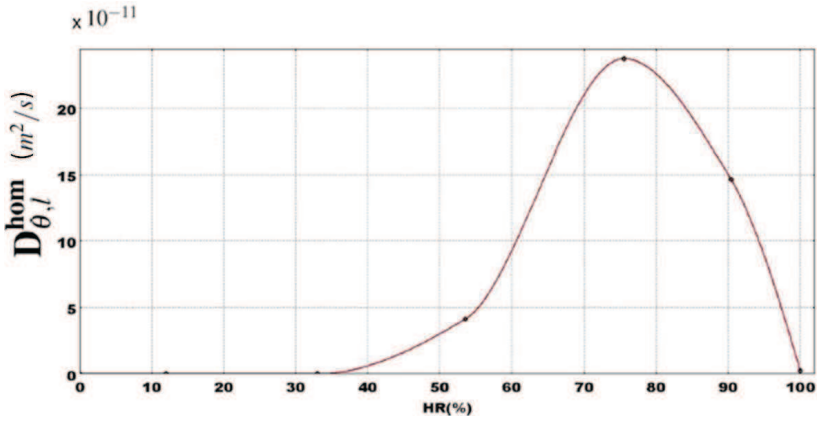


FIGURE 5.20 – Variations du coefficient de diffusion hydrique correspondant au transfert de l'eau liquide $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$ pour le béton PHB A1

Au début de séchage, on remarque que le coefficient de diffusion augmente de façon importante lorsque HR diminue. Celà est dû à l'augmentation de la pression capillaire lorsque la vitesse de séchage s'accélère. A partir de $HR = 75\%$ environ, la valeur du coefficient de diffusion commence à chuter, à cause principalement de la diminution de la perméabilité relative K_{rl} provoquée par la discontinuité de la phase liquide. A terme, la phase liquide sera complètement discontinue, conduisant à un coefficient de diffusion hydrique $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$ nul à partir de $HR = 33\%$.

5.7.3 Résolution numérique de l'équation de Richards homogénéisée

Une fois que le coefficient de diffusion correspondant au transfert de vapeur d'eau $\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$ et au transfert d'eau liquide $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$ ont été calculés (Figs. 5.18 et 5.20), nous pouvons en déduire la valeur du coefficient de diffusion hydrique homogénéisé total $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ dans chaque région et pour chaque palier d'humidité relative associée. Les résultats sont résumés dans le tableau (5.18) et représentés graphiquement sur la Fig. 5.21.

HR	$\theta_l\ (m^3/m^3)$	**Région considérée**	$\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}\ (m^2.s^{-1})$	$\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}\ (m^2.s^{-1})$	$\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}\ (m^2.s^{-1})$
100%	10.3%	super-hygroscopique	0	$0.257\ 10^{-11}$	$0.257\ 10^{-11}$
90.4%	7.48%	super-hygroscopique	$10.12\ 10^{-11}$	$14.65\ 10^{-11}$	$24.77\ 10^{-11}$
75.5%	6.62%	hygroscopique	$9.36\ 10^{-11}$	$23.76\ 10^{-11}$	$33.12\ 10^{-11}$
53.5%	4.73%	hygroscopique	$8.74\ 10^{-11}$	$4.13\ 10^{-11}$	$12.87\ 10^{-11}$
33%	1.8%	hygroscopique	$15.94\ 10^{-11}$	0	$15.94\ 10^{-11}$
12%	0.53%	hygroscopique	$30.24\ 10^{-11}$	0	$30.24\ 10^{-11}$

Tableau 5.18 – Valeurs calculées du coefficient de diffusion hydrique total $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ pour le béton BHP A1

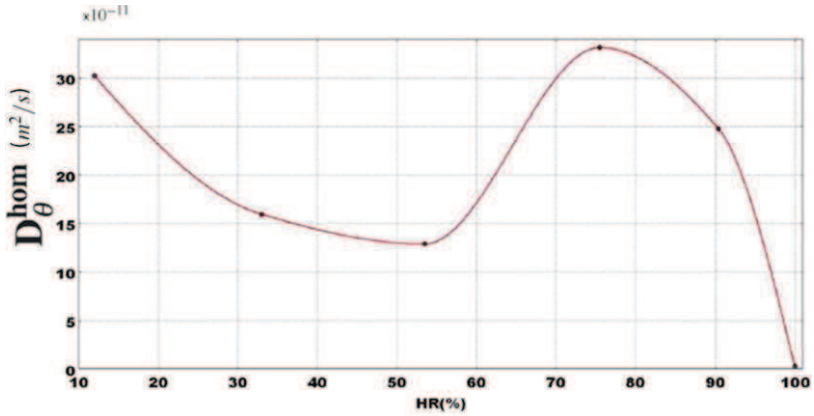


FIGURE 5.21 – Variations du coefficient de diffusion hydrique total $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ en fonction de HR pour le béton BHP A1

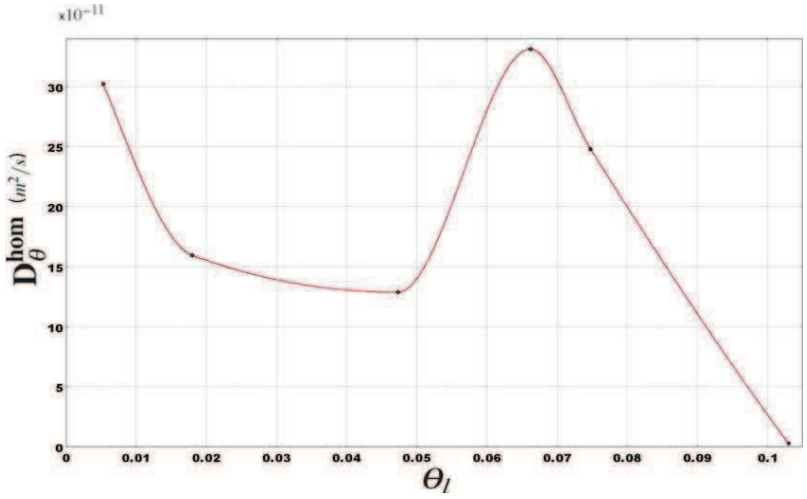


FIGURE 5.22 – Variations du coefficient de diffusion hydrique total $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ en fonction de θ_l pour le béton BHP A1

Les variations de $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ en fonction de HR présentent trois parties bien distinctes. La première, pour $HR \in [90\%, 100\%]$, correspond à de l'eau liquide occupant la majorité de l'espace des pores. La cinétique associée au transport de l'humidité sous forme liquide l'emporte sur le transfert de vapeur d'eau. Notons que la condensation capillaire dans cette région super-hygroscopique joue un rôle non négligable dans le transfert de l'humidité sous forme vapeur dans les petites poches du domaine gazeux (voir tableau 5.15).

Lorsque $HR \in [53.5\%, 90\%]$, les deux diffusivités sont du même ordre de grandeur, avec une prédominance de la partie liée à l'eau liquide pour $HR = 90\%$, et une prédominance de la partie liée à la vapeur d'eau pour $HR = 53.5\%$. Notons que dans cet intervalle, la cinétique de séchage sous forme liquide s'accélère, jusqu'à environ $HR = 75\%$. A cette humidité relative, la phase liquide commence à être discontinue, ce qui fait chuter le coefficient de diffusion hydrique de l'eau liquide $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathbf{hom}}$. L'eau liquide occupe alors une place plus réduite, et la condensation capillaire ne se manifeste plus, ce qui fait chuter également le coefficient de diffusion hydrique liée à la partie vapeur $\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$. Ainsi on constate une chute importante du coefficient de diffusion hydrique homogénéisé total $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$. A partir de $HR = 53.5\%$ et jusqu'à la fin du séchage, la discontinuité de la phase liquide augmente. Le domaine gazeux occupe un volume plus important, et la cinétique liée au transport de l'humidité sous forme

vapeur $\mathbf{D}_{\theta,v}^{\mathbf{hom}}$ l'emporte sur le transfert de l'eau liquide qui devient quasiment nul. De ce fait, le coefficient de diffusion homogénéisé total $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ augmente à nouveau lorsque HR varie de 53.5% à 12%. On constate finalement une courbe en forme de cloche inversée (Fig 5.21), que l'on retrouve classiquement dans la littérature [102].

Avec la connaissance de $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$, nous pouvons maintenant résoudre l'équation de Richards homogénéisée correspondant au problème physique réel de séchage considéré (5.17). Le problème à résoudre est un problème unidimensionnel de diffusion (instationnaire) non linéaire, la dépendance de $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ en fonction de θ_l étant donné par les variations représentées sur la Figs. 5.22. La résolution a été effectuée en utilisant le solveur itératif de Comsol Multipysics. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 5.23.
La seule comparaison expérimentale dont on dispose figure dans [102]. Elle a été obtenue en considérant une valeur moyenne constante du coefficient de diffusion hydrique homogénéisé $D_\theta = 1.5\ 10^{-11}\ m^2/s$. A différents instants du séchage (pour t=1 mois, 3 mois, 6 mois et 1 an), on a représenté sur la Fig. 5.24 les profils d'évolution de θ_l dans l'échantillion de matériau en fonction de $x \in [0, L]$, avec $L = 0.1m$, avec cette valeur constante de D_θ considérée.

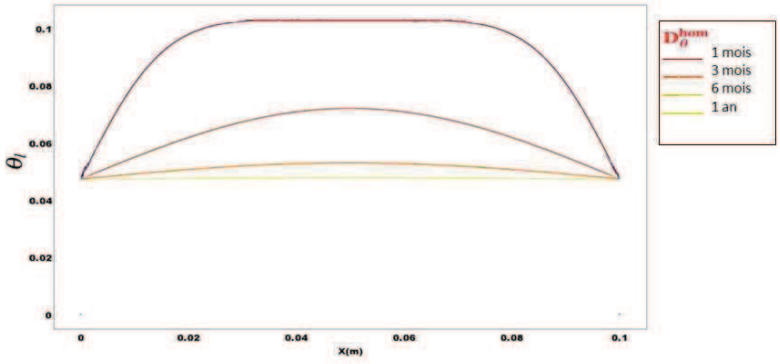


FIGURE 5.23 – Profil de teneur en eau volumique simulé avec $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathbf{hom}}$ pour le béton BHP A1 à différentes étapes de séchage

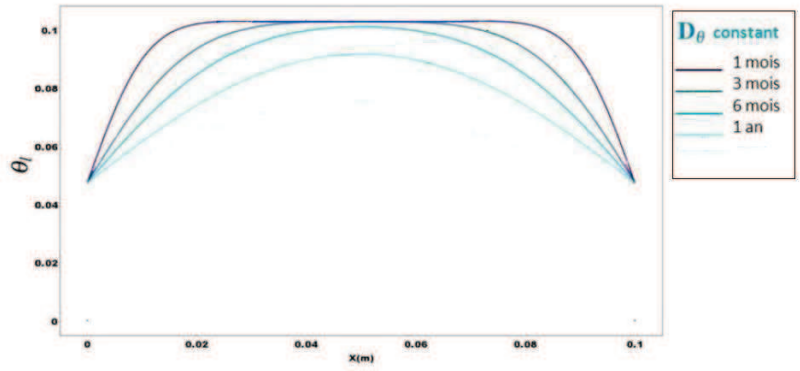


FIGURE 5.24 – Profil de teneur en eau volumique obtenu avec $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{exp}}$ pour le béton BHP A1 à différentes étapes du séchage

La première constatation (évidente) est que la cinétique du transfert est contrôlée par le coefficient de diffusion hydrique $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$. Les résultats révèlent des écarts plus ou moins importants des valeurs de la teneur en eau volumique θ_l entre les deux courbes (Figs. 5.23 et 5.24). A court terme (1 mois), les écarts sont très faibles, voire même inexistants à l'intérieur de l'échantillion. En effet, le coefficient de diffusion hydrique homogénisé $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ est assez faible au début de séchage, et l'humidité est transportée essentiellement sous forme liquide (humidité relative importante dans la région super-hygroscopique). La variation de la pression capillaire associée est très faible, ce qui explique les valeurs proches obtenues entre les deux courbes. Au bout de 3 mois, un écart important entre les résultats théoriques et expérimentaux est constaté, écart qui va en augmentant au cours du séchage. En effet, les valeurs de $\mathbf{D}_\theta^{\mathbf{hom}}$ obtenues par homogénéisation prennent en compte l'accélération du transfert hydrique sous ses deux formes, liquide et vapeur, à travers la variation de la pression capillaire qui devient de plus en plus importante. D'autre part, la diffusion de vapeur d'eau augmente également lors du séchage, et ceci malgré une diminution importante du coefficient de diffusion hydrique à partir de $HR = 75\%$ (Figs. 5.21 et 5.22) due à la discontinuité croissante du domaine liquide.

Ainsi, notre modèle de tranfert hydrique homogénéisé permet de prendre en compte des ciné-

tiques de diffusion différentes selon l'état hydrique du matériau et la région considérée (hygroscopique et super-hygroscopique), ce qui semble être plus proche de la réalité physique. La résolution du problème de diffusion non linéaire associé donne des résultats très différents de ceux existant dans la littérature en considérant un coefficient de diffusion hydrique moyen constant.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au calcul numérique du tenseur de diffusion hydrique homogénéisé pour différentes cellules élémentaires bidimensionnelles et tridimensionelles plus ou moins complexes, représentant la microstructure périodique des milieux poreux considérés.

Nous avons constaté que le calcul en 2D donne des valeurs sous-estimées du coefficient de diffusion hydrique homogénéisé. Nous avons également constaté que plus la cellule élémentaire est complexe (en 3D notamment), plus le coefficient de diffusion hydrique homogénéisé s'approche du coefficient de diffusion hydrique expérimental.

Cependant, des écarts existent encore entre les coefficients de diffusion hydriques homogénéisés calculés numériquement, même pour des cellules élémentaires tridimensionnelles complexes, et ceux determinés expérimentalement pour les matériaux cimentaires étudiés (bétons $C15$, $C22$, BHP $A1$ et $A2$). Ce résultat met en évidence le fait que la géométrie, même complexe de la cellule élémentaire, n'est pas suffisante pour modéliser de façon précise le transfert hydrique au sein des matériaux cimentaires. La prise en compte du mouvement de l'air, qui a été négligé ici, pourra constituer une amélioration du modèle. Une étude des variations des coefficients de diffusion hydriques a permis de mettre en évidence le caractère fortement non linéarie de l'équation de Richards homogénéisée, dont la résolution numérique a été effectuée sur un exemple concret de séchage d'un échantillon de béton.

Conclusions générales et perspectives

L'objectif de ce travail était d'obtenir des modèles macroscopiques homogénéisés pertinents de transfert hydrique dans les matériaux poreux partiellement saturés, et de justifier rigoureusement l'équation de Richards souvent établie de manière phénoménologique dans la littérature. Pour atteindre cet objectif, nous sommes partis des équations de continuité liées au transfert de l'eau liquide et de la vapeur d'eau à l'échelle microsocopique. L'analyse dimensionnelle des équations, qui constitue la première étape de la méthode d'homogénéisation périodique utilisée, nous a permis de mettre en évidence naturellement les nombres sans dimension pertinents caractérisant le problème. Ces derniers ont ensuite été reliés au paramètre de perturbation ε, rapport entre les échelles microscopique et macroscopique.

Nous avons été conduits à distinguer trois régimes de transfert différents : un régime de transfert hydrique correspondant à une diffusion prédominante de vapeur d'eau, un régime couplant les deux transferts de liquide et de vapeur au même ordre, et un régime de transfert hydrique sous forme liquide correspondant à une convection prédominante de l'eau liquide. De plus, suivant la région considérée (hygroscopique ou super-hygroscopique), la mise en œuvre de la méthode d'homogénéisation périodique basée sur le développement asymptotique des équations, a conduit, soit à une expression classique du tenseur de diffusion hydrique homogénéisé (correspondant à la résolution d'un problème local classique avec des conditions aux limites de type Neumann), soit à une nouvelle expression du tenseur de diffusion hydrique homogénéisé (correspondant à la résolution d'un nouveau problème local avec des conditions aux limites mixtes de type Neumann-Dirichlet).

Des résolutions analytiques et des simulations numériques effectuées sur des microstructures

périodiques plus ou moins complexes, ont clairement mis en évidence les différences qualitatives et quantitatives existant entre ces deux tenseurs, surtout en ce qui concerne la prise en compte du phénomène de condensation capillaire qui apparait pour des humidités relatives élevées. En particulier, le tenseur de tortuosité local introduit semble décrire l'agitation de la vapeur ainsi que la création de ponts capillaires au niveau microscopique. Ensuite, nous avons effectué des simulations numériques sur des microstrucutres bidimensionnelles puis tridimensionnelles, afin de comparer les valeurs des tenseurs de diffusion homogénéisés ainsi calculés, à ceux obtenus expérimentalement pour des matériaux cimentaires étudiés au laboratoire. Nous avons constaté que plus la microstructure est complexe, plus les résultats obtenus par homogénéisation sont proches de ceux obtenus expérimentalement. Ce résultat met en évidence l'importance de la tortuosité et la constructivité dans les phénomènes de transfert hydrique. Néanmoins, un écart non négligeable a été constaté entre les valeurs théoriques et expérimentales, même pour des microstructures tridimensionnelles complexes. Cela peut s'expliquer par le fait qu'un certain nombre de phénomènes physiques n'ont pas été pris en compte, notamment l'emprisonnement de l'air dans les pores qui peut freiner de façon importante les transferts hydriques dans un matériau cimentaire.

Nous avons enfin résolu l'équation de Richards homogénéisée, en s'appuyant sur des données expérimentales accessibles au laboratoire (isotherme de sorption-désorption, perméabilité relative, ...). Nous avons mis en évidence le caractère fortement non linéaire du coefficient de diffusion hydrique homogénéisé (et de l'équation de Richards associée), qui varie d'une manière significative selon le régime considéré (diffusion de vapeur prédominante, couplage diffusion-convection, et convection de l'eau liquide prédominante), et selon l'état hydrique du matériau (hygroscopique ou super-hygroscopique).

Perspectives

Parmi les perspectives que nous envisageons par la suite afin d'enrichir la modélisation effectuée dans ce travail, il serait intéressant de prendre en compte un certain nombre de phénomènes physiques qui ont été négligés ici, mais qui peuvent avoir une influence (dont l'importance reste à étudier) dans les mécanismes des transferts hydriques en milieux partiellement saturés. Il s'agit en particulier de la prise en compte :

- du mouvement de l'air, qui est responsable du freinage du transport d'humidité, notamment lors du séchage.
- des effets thermiques associés qui ont été négligés ici, de façon à se placer dans ces anisothermes plus complexes.
- de l'hystérésis dans les cycles d'humidification et de séchage.

Il serait également intéressant d'élargir cette étude au transfert ionique en milieu partiellement saturé où le couplage transfert ionique et transfert hydrique devra être pris en compte. Les modèles macroscopiques homogénéisés obtenus pourront ensuite être utilisés pour la prédiction de la durée de vie des ouvrages en façade maritime.

Bibliographie

[1] A.W. Adamson and A.P. Gast. Grandubé-grandeurs associées à la durabilité des bétons. *Presse de l'Ecole nationale des ponts et chaussées*, 2007.

[2] A. Ait-Mokhtar, O. Amiri, P. Dumargue, and A. Bouguerra. On the applicability of washburn law : study of mercury and water flow properties in cement-based materials. *Materials and Structures, RILEM.*, 37 :107–113, 2004.

[3] O. Amiri, A. Ait-Mokhtar, and M. Sarhani. Tri-dimensional modelling of cementitious materials permeability from polymodal pore size distribution obtained by mercury intrusion porosimetry tests. *Advances in Cement and Concret Research*, 17(1) :39–45, 2005.

[4] A. Anderberg and L. Wadso. Method for simultaneous determination of sorption isotherms and diffusivity of cement-based materials. *Cement and Concrete Research*, 38 :89–94, 2008.

[5] APPLET. Durée de vie des ouvrages : Approche prédictive performantielle et probabiliste. *Rap.tech, LCPC*, 2009.

[6] T. Arbogast. Gravitational forces in dual-porosity systems : I. model derivation by homogenization. *Transport in Porous Media*, 13 :179–203, 1993.

[7] G.S. Armatas. Determination of the effects of the pore size distribution and pore connectivity distribution on the pore tortuosity and diffusive transport in model porous networks. *Chemical Engineering Science*, 61(14) :4662–4675, 2006.

[8] J. L. Auriault. *Mécanique des Milieux Poreux Saturés Déformables*. Cours de 3 cycle MMGE Grenoble, pages 1-71, 1986.

[9] J. L. Auriault. Heterogeneous medium. is an equivalent macroscopique description possible ? *International Journal of Engineering Science*, 29 :785–795, 1991.

[10] J. L. Auriault and P. M. Adler. Taylor dispersion in porous media : Analysis by multiple scale expansions. *Advances in Water Resources*, 18(4) :217–226, 1995.

[11] J.-L. Auriault and J. Lewandowska. Homogenization analysis of diffusion and adsorption macrotransport in porous media : macrotransport in the absence of advection. *Géothechnique XLIII*, 3 :457–469, 1993.

[12] J. L. Auriault and J. Lewandowska. Diffusion non lineaire en milieux poreux. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 324(5) :293–298, March 1997.

[13] J.-L. Auriault and J. Lewandowska. Scale separation in diffusion/dispersion tests in porous media. *Proc. the biot Conference on Poromechanics, Balkema*, pages 599–604, 1998.

[14] J.L Auriault. Nonsaturated deformable porous media : Quasistatics. *Transport in Porous Media 2*, pages 45–64, 1987.

[15] J.L. Auriault. Heteregeneous medium ; is an equivalent macroscopic description possible ? *International Journal of Engeneering Science*, 29 :785–795, 1991.

[16] J.L Auriault. Transport in porous media : Upscaling by multi-scale asymptotic expansions. Technical report, "Upplied micromechanics of porous materials", Udine, 2005.

[17] J.L. Auriault and P.M. Adler. Taylor dispersion in porous media : Analysis by multiple scale expansions. *Advances in Water Resources*, 18(4) :211–226, 1995.

[18] J.L. Auriault and Geindreau C. Boutin, C. *Homogénéisation de phénomènes couplés en milieux hétérogènes 1*. Lavoisier, 2009.

[19] J.L Auriault and J. Lewandowska. Diffusion/adsorption/advection macrotransport in soils. *European journal of mechanics*, 15 :681–704, 1996.

[20] Boutin C. Auriault J.L. Deformable porous media with double porosity. quasi-statics : I coupling effects. *T.I.P.M.,7*, pages pages 63–82, 1992.

[21] Y. Bachmat and J. Bear. Macroscopic modelling of tranport phenomena in porous media :1. the continuum approach. *Transp. Porous Media*, 1 :213–240, 1986.

[22] V. Baroghel Bouny. Caractérisation des pâtes de ciment et des bétons. méthodes, analuse, interprétations. *Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, 1994.

[23] V. Baroghel-Bouny. La durabilité des bhp. synthèse des travaux du projet national bhp 2000 sur les bétons à hautes perfermances. 2005.

[24] Z. Bazant and L. Najjar. Drying of concrete as a nonlinear diffusion problems. *Cement and Concrete Research*, 1 :461–73, 1971.

[25] J. Bear and Y. Bachmat. *Introduction to modeling of tranport Phenomena in Porous Media*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1991.

[26] S. Bejaoui and B. Bary. Modeling of the link between microstructure and effective diffusivity of cement pastes using a simplified composite model. *Cement and Concret Research*, 37(3) :469–480, 2007.

[27] A. Bensoussan, J. L . Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Studies in Mathematics and its applications, 1978.

[28] A. Bouddour, J.L. Auriault, and M. Mhamdi-Alaoui. Heat and mass transfer in wet porous media in presence of evaporation-condensation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41 :2263–2277, 1998.

[29] K. Bourbatache. *Modélisation du transfert des ions chlorures dans les matériaux cimentaires par homogénéisation périodique*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2009.

[30] A. Bourgeat. Homogenization behaviour of two-phase in naturally fractured reservoirs with uniform distribution. *Comp. Mech. Appl. Mech. Eng*, 47 :205–216, 1984.

[31] T.A. Carpenter, E.S Davies, C. Hall, L.D. Hall, Hall, W.D. Hoff, and M.A. Wilson. Capillary water migration in rock : process and material properties examined by nmr imaging. *Mat. Struct.*, 26 :286–292, 1993.

[32] H. C. Chang. Effective diffusion and conduction in tow through spatially periodic porous media : a unified approch. *AIChE Journal*, 29 :846–853, 1983.

[33] J.F. Daian. Condensation and isothermal water transfer in cement mortar :1. pore size distribution, equilibrium water condensation and imbibition. *Transp. Porous Media 3*, pages 563–589, 1988.

[34] S. Dal Pont. *Lien entre la perméabilité et l'endommagement dans les bétons á haute température*. PhD thesis, Ecole nationale des ponts et chaussées, Paris, 2004.

[35] D.A. de Vries. A nonstationary method for determining thermal conductivity of soil. *in situ Soil Sci*, 73 :83–89, 1952a.

[36] D.A. de Vries. The thermal conductivity of soil. *Meded. Landbouwhogesch. Wageningen*, page 52 :72, 1952b.

[37] D.A. de Vries. Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 39 :909–916, 1958.

[38] J. Van der Kooi. *Moisture transport in cellular concrete roofs*. PhD thesis, University of Technology, Waltman, Delft, 1971.

[39] E. Dormieux, L.and Bourgeois. *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*. 2002.

[40] L. Dormieux, E. Lemarchand, and O. Coussy. Macroscopic and micromechanical approaches to the modelling of the osmotic swelling in clays. *Transport in Porous Media*, 50(1) :75–91, January 2003.

[41] Fritzen Félix, Forest Samuel, Bohlke Thomas, Kondo Djimédo, and Kanit Toufik. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. *International Journal of Plasticity*, pages 102–119, 2012.

[42] Comsol France. Comsol multiphysics user guide. version 3.4, 2008.

[43] O. Francy. *Modélisation de la pénétration des ions chlorures dans les mortiers partiellement saturés*. PhD thesis, INSA-UPS Toulouse, 1998.

[44] D.G. Fredlund and H. Mogenstern. Soil mechanics for unsaturated soils. *John Wiely and Sons Inc., New York*, 1993.

[45] H. Garbalinska. Measurement of the mass diffusivity in cement mortar : Use of initial rates of water absortion. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(6) :1353–1357, 2002.

[46] Jean-Philippe Gras. *Approche micromécanique de la capillarité dans les milieux granulaires : rétention d'eau et comportement mécanique*. PhD thesis, Université Montpellier 2.

[47] A. Hadas. Evaluation of theoretically predicted thermal conductivities of soils under field and laboratory conditions. *Soil Sci. Soc. J.*, 41 :460–466, 1977.

[48] A. Hamdouni and O. Millet. Classification of thin shell models deduced from the non-linear three-dimensional elasticity. part i : the shallow shells. *Archives of Mechanics*, 55, n 2 :135 – 175, 2003.

[49] A. Hamdouni and O. Millet. Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. part ii : the strongly curved shells. *Archives of Mechanics*, 55, n 2 :177–219, 2003.

[50] E.J. Hinch. The recovery of oil from underground reservoirs. *Theorical and Applied Mechanics Research Communications*, pages 135–161, 1985.

[51] U. Hornung. *Homogenization and Porous Media*. Springer, 1997.

[52] R. Horton and P. J. Wierenga. The effect of column wetting on soil thermal conductivity. *Soil Sci..*, 138 :102–108, 1977.

[53] D. Jaguste and S. Bhatia. Combined surface and viscous flow of condensable vapor in porous media. *Chemical Engineering Science*, 50 :167–182, 1995.

[54] C.Hall L.D. Hall W.D. Hoff M.A. Wilson J.F. Daian, E.S. Davies. Capillary water migration in rock : process and material properties examined by nmr imaging. *Mat. Strct. 26*, pages 286–292, 1993.

[55] D.L. Landau and I.M. Lifshitz. previous termfluidnext term mechanics. *Pergamon Press, Oxford*, 1987.

[56] J. Lehman and N. Lu. Capillary force and water retention between two uneven-sized particles. *Journal of Engineering Mechanics*, page 374, 2008.

[57] T. Lemaire, C. Moyne, and D. Stemmelen. Modelling of electro-osmosis in clayey materials including ph effects. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, 32(1-7) :441–452, 2007.

[58] J. Lewandowska and J-P Laurent. Homogenization modelling and parametric study of moisture transfer in an unsaturated heteregeneous porous medium. *Transport in Porous Media*, 45 :321–345, 2001.

[59] J. Lewandowska, A. Szymkiewicz, and J. L. Auriault. Upscaling of richards' equation for soils containing highly conductive inclusions. *Advances in Water Resources*, 28(11) :1159–1170, November 2005.

[60] A. V. Luikov. *Heat and mass transfer*. Mir Publishers, Moskow, 1980.

[61] A.V. Luikov. *Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies*. Pergamon, Oxford, 1966.

[62] S. Maghous, Z. Saada, L. Dormieux, J. Canou, and J.C. Dupla. A model for in situ grouting with account for particle filtration. *Computers and Geotechnics*, 34(3) :164–174, May 2007.

[63] M. Mainguy. *Modèles de diffusions non-linéaires en milieux poreux, applications à la dissolution et au séchage des matériaux cimentaires*. PhD thesis, Ecole nationale de ponts et chaussées, Paris, 1999.

[64] W. Mchirgui, O. Millet, and O Amiri. Modeling moisture transport by periodic homogenization in unsaturated porous media. *10 ème congrès de mécanique*, Numéro spécial 1/2011, 2011.

[65] W. Mchirgui, O. Millet, and O Amiri. Modeling moisture transport for a predominant water vapor diffusion in a partially saturated porous media. *EJECE*, 2011.

[66] O. Millet, A. Ait-Mokhtar, and O. Amiri. Determination of the macroscopic chloride diffusivity in cementitious porous materials by coupling periodic homogenization of Nernst-Planck equation with experimental protocol. *International Journal of Multiphysics*, 2 :129–145(17), 2008.

[67] O. Millet, A. Cimetiere, and A. Hamdouni. An asymptotic elastic-plastic plate model for moderate displacements and strong strain hardening. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 22(3) :369–384, 2003.

[68] O. Millet, A. Hamdouni, and A. Cimetière. A classification of thin plate models by asymptotic expansion of non-linear three-dimensional equilibrium equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36(1) :165–186, January 2001.

[69] R.J. Millington and J.P. Quirk. Permeability of porous solids. *Transactions of the Faraday Society*, pages 1200–1207, 1961.

[70] F. Molenkamp and A.H. Nazemi. Interaction between two rough spheres, water bridge and water vapor. *Géothechnique*, 53 :255–264, 2003.

[71] J. Mouette. Physique des surfaces et des interfaces. Technical report, 2000.

[72] C. Moyen, C. Bastal, and A. Degiovanni. Approche expérimentale et théorique de la conductivité thermique des milieux poreux humides-ii. théorie. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31 :2319–2330, 1988.

[73] C. Moyne and M. Murad. A two-scale model for coupled electro-chemo-mechanical phenomena and onsager' s reciprocity relations in expansive clays : I homogenization analysis. *Transport in Porous Media*, 62(3) :333–380, March 2006.

[74] C. Moyne and M. A. Murad. Electro-chemo-mechanical couplings in swelling clays derived from a micro/macro-homogenization procedure. *International Journal of Solids and Structures*, 39(25) :6159–6190, December 2002.

[75] B.R Munson, D.F. Young, and T.H. Okiishi. Fundamentales of fluids mechanics. *John Wiely and Sons, Canada*, 1990.

[76] M. Muskat. The flow of homogeneous fluids through porous media. *Edwards J.W., Ann Harbor*, 1946.

[77] T. Nguyen. *Modélisations physico-chimiques de la pénétration des ions chlore dans les matériaux cimentaires.* PhD thesis, ENPC Paris, 2007.

[78] L.O. Nilson. On the role of moisture in degradation of concret structure. in r.k. dhir, m.r. jones et l. zheng, eds : Proceedings of the international conference on repair and renovation of concrete structure. *International Congress-Global Construction : Ultimate Concrete Opportunities*, 2005.

[79] J. P. Ollivier and A. Vichot. *La durabilité des bétons - Bases scientifiques pour la formulation de bétons durables dans leur environnement.* Paris France, 2008.

[80] R. Peuhkuri, C. Rode, and K.K. Hansen. Non-isothermal moisture transport through insulation materials. *Building and Environment*, 43(5) :811–822, 2008.

[81] J.R. Philip and D.A. De vries. Moisture mouvement in porous materials under temperature gradients. *Transaction Americain Geophysical Union*, 38 :222–232, 1957.

[82] B. Pradhan, M. Nagesh, and Bhattachariee. Prediction of the hydraulic diffusivity from pore size distribution of concret. *Cement and Concret Research*, 35(9) :1724–1733, 2005.

[83] Zhu Qizhi, Kondo Djimédo, and Shao Jian-Fu. Homogenization-based analysis of anisotropic damage in brittle materials with unilateral effect and interactions between microcracks. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 33(5) :749–772, 2009.

[84] D. Quenard. *Adsorption et tranfert d'humidité dans les matériaux hygroscopiques, approche du type percolation et exprérimentation.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1989.

[85] M. Quintard and S. Whitaker. Two-phase flow in heteregneous porous media : the method of large-scale averaging. *Transport in Porous Media*, 3 :356–413, 1989.

[86] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in chemically and mechanically heterogeneous porous media iv : large-scale mass equilibrium for solute transport with adsorption. *Advances in Water Resources*, 22(1) :33–57, September 1998.

[87] M. Regourd and H. Hornain. Applications de la microscopie électronique à balayage. *Revue des matériaux de construction*, 693 :73–87, 1975.

[88] L.A. Richards. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1 :318–333, 1931.

[89] A.E. Saez, C.J. Otero, and I. Rusinek. The effective homogeneous behaviour of heteregneous porous media. *Transport in Porous Media*, 4 :231–238, 1989.

[90] E. Samson, J. Marchand, and J. J. Beaudoin. Describing ion diffusion mechanisms in cement-based materials using the homogenization technique. *Cement and Concrete Research*, 29(8) :1341–1345, August 1999.

[91] E. Samson, J. Marchand, K.A. Snyder, and J.J. Beaudoin. Modeling ion and fluid transport in unsaturated cement systems in isothermal conditions. *Cement and Concrete Research*, 35(1) :141–153, January 2005.

[92] J. Sanahuja, L. Dormieux, and G. Chanvillard. Modelling elasticity of a hydrating cement paste. *Cement and Concrete Research*, 37(10) :1427–1439, October 2007.

[93] E. Sanchez Palencia. *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*. Volume lecture notes in Physics, 1980.

[94] E. Sanchez-Palencia. Einstein-like approximation for homogenization with small concentration. i–elliptic problems. *Nonlinear Analysis*, 9(11) :1243–1254, November 1985.

[95] J.C. Santamarina, K. Klein, Y.H. Wang, and E. Prencke. Specific surface : Determination and relevance. *Canadian Geotechnical Journal*, 39(1) :2002, 2002.

[96] B.M. Savage and D.J. Jansen. Soil physics principles validated for use in predicting unsaturated moisture movement in portland cement concrete. *ACI materials journal*, 94 :63–70, 1997.

[97] A.E. Scheidegger. The physics of flow through porous media. *University of Toronto Press*, 1963.

[98] R. Shephered and R.J. Wiltshire. An analytical approach to coupled heat and moisture transport in soil. *Transport in Porous Media*, 20 :281–304, 1995.

[99] Hassan Sleiman. *Etude du transport des chlorures dans les matériaux cimentaires non saturés : Validation expérimentale sur bétons en situation de marnage.* PhD thesis, Université de La Rochelle, 2008.

[100] M. Tahlaiti. *Etude de la pénétration des chlorures et de l'amorçage de la corrosion en zone saturée et en zone de marnage*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2010.

[101] M. Thiery, Baroghel-Bouny, N. Bourneton, G. Villain, and C. Stéfani. Modélisation du séchage des bétons. analyse des différents modes de transfert hydrique. *Revue eurpoéenne de génie civil*, 11 :541–577, 2007.

[102] Abdelkarim Trabelsi. *Etude numérique et expérimentale des transferts hygrothermiques dans les matériaux poreux de construction*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2010.

[103] Adam Z. Weber and John Newman. Coupled thermal and water management in polymer electrolyte fuel cells. *Journal of The Electrochemical Society*, 153 :A2205–A2214, 2006.

[104] S. Whitaker. Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media : A theory of drying. volume Volume 13, pages 119–203. Elsevier, 1977.

[105] S. Whitaker. Flow in porous media ii : The governing equations for immiscible, two-phase flow. *Transport in Porous Media*, 1 :105–125, 1986.

[106] S. Whitaker. Coupled transport in multiphase systems : A theory of drying. *Advances in Heat Transfer*, 31 :1–104, 1998.

[107] A. Zaoui. Matériaux hétérogène et composites. *Ecole Polytechnique*, 1997.