

Contributions à la théorie des matroïdes : polytope des bases, orientations et algorithmes

Vanessa Chatelain

▶ **To cite this version:**

Vanessa Chatelain. Contributions à la théorie des matroïdes : polytope des bases, orientations et algorithmes. Théorie des représentations [math.RT]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT : 2011PA066253 . tel-00824903

HAL Id: tel-00824903

https://theses.hal.science/tel-00824903

Submitted on 22 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE
CURIE

Spécialité: Mathématiques

par

Vanessa CHATELAIN

Contributions à la théorie des matroïdes : Polytope des bases, Orientations et Algorithmes

Soutenue le 18 mars 2011 devant la Commission d'examen :

M.	Victor CHEPOI	(Rapporteur)
M.	David FORGE	(Examinateur)
M.	Michel LAS VERGNAS	(Examinateur)
M.	Michel POCCHIOLA	(Directeur du jury)
M.	Jorge Luis RAMIREZ ALFONSIN	(Directeur de thèse)
M.	Adrian SEBO	(Examinateur)

Rapporteur non présent à la soutenance :

M.	Jim Lawrence



Thèse préparée au
Département de Mathématiques de Pierre et Marie Curie
Laboratoire d'Optimisation et Combinatoire (UMR 7090)
Université Paris VI (Jussieu)
75 252 Paris CEDEX 05

Résumé

Dans cette thèse on étudie différents problèmes portant sur les matroïdes et les matroïdes orientés. On s'intéresse à trois sujets particuliers : la décomposition du polytope des bases d'un matroïde, l'orientation de matroïdes et le jeu de commutation de Shannon.

Plus précisément dans le chapitre 2 nous étudions une décomposition spéciale introduite par Lafforgue. Pour un matroïde M, une *décomposition du polytope des bases d'un matroïde* $P(M)$ est une décomposition de la forme $P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$ où chaque $P(M_i)$ est également un polytope des bases d'un matroïde pour un certain matroïde M_i, et pour chaque $1 \leq i \neq j \leq t$, l'intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ est une face de $P(M_i)$ et de $P(M_j)$. Dans cette thèse, nous étudions la *séparation par hyperplan*, autrement dit la décomposition du polytope quand $t = 2$. Nous donnons des conditions suffisantes sur M pour que $P(M)$ puisse avoir une séparation par hyperplan. Nous caractérisons également les cas où $P(M_1 \oplus M_2)$ a une séparation par hyperplan où $M_1 \oplus M_2$ dénote la *somme directe* des matroïdes M_1 et M_2. Nous montrons finalement que $P(M)$ n'a pas de séparation par hyperplan si M est binaire.

Dans le chapitre 3 nous étudions la classe des *matroïdes orientés du réseau*. Après avoir donné une caractérisation complète des matroïdes orientés du réseau en fonction de l'union de matroïdes orientés uniformes de rang un, nous montrons que cette classe est fermée par dualité et par mineurs. Nous étudions ensuite les simplexes de l'arrangement d'hyperplans découlant de matroïdes orientés du réseau. Nous présentons une caractérisation de ces simplexes et construisons un arrangement de n hyperplans en dimension d contenant $O(2^k(\frac{n}{k})^k)$ simplexes avec $n < k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Nous approfondissons une question posée par Grünbaum [Grünbaum, 1971] concernant les colorations des arrangements de pseudodroites. Nous prolongeons la question de Grünbaum à des arrangements d'hyperplans et répondons par l'affirmative à cette question généralisée pour les arrangements découlants de matroïdes orientés du réseau.

Dans le chapitre 4 nous nous sommes intéressés à une une version sur les matroïdes orientés du célèbre jeu de commutation de Shannon, version introduite par Y.O. Hamidoune et M.Las Vergnas[Hamidoune et Las Vergnas, 1997a] en 1986. Ils ont conjecturé que la classification du jeu de commutation sur les matroïdes orientés est identique à la classification de la version non orientée. Dans cette thèse, nous confortons cette conjecture en montrant sa validité pour la classe infinie de matroïdes orientés obtenues comme union de matroïdes orientés uniformes de rang 1 et/ou de rang 2.

Mots-clefs : Matroïde, Polytope de Bases de Matroïde, Décomposition de Polytope, Matroïde Orienté, Arrangement d'Hyperplans, Jeux de commutation.

Contributions in the matroid theory : Base polytope, Orientations, Algorithms

Abstract

In chapter 2, we study a special decomposition intoduced by Lafforgue. More precisely, let $P(M)$ be the matroid base polytope of a matroid M. A matroid base polytope decomposition of $P(M)$ is a decomposition of the form $P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$ where each $P(M_i)$ is also a matroid base polytope for some matroid M_i, and for each $1 \leq i \neq j \leq t$, the intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ is a face of both $P(M_i)$ and $P(M_j)$. In this thesis, we investigate hyperplane splits, that is, polytope decompositions when $t = 2$. We give sufficient conditions for M so $P(M)$ has a hyperplane split and characterize when $P(M_1 \oplus M_2)$ has a hyperplane split where $M_1 \oplus M_2$ denote the direct sum of matroids M_1 and M_2. We also prove that $P(M)$ has not a hyperplane split if M is binary. Finally, we show that $P(M)$ has not a decomposition if its 1-skeleton is the hypercube.

In chapitre 3 we investigate the class of *lattice oriented matroids*. After giving a complete characterization of lattice oriented matroids in terms of union of rank-1 uniform oriented matroids, we show that this class is closed under duality and minors. We then study the simplexes of the hyperplane arrangements arising from lattice oriented matroids. We present a characterization of these simplexes and contruct arrangements of n hyperplanes in dimension d containing $O(2^k(\frac{n}{k})^k)$ simplexes with $n < k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. We finally investigate a question by Grünbaum [Grünbaum, 1971] concerning colorings of pseudoline arrangements. We extend Grünbaum's question to arrangements of hyperplanes and answer affirmatively the generalized question for arrangements arising from lattice oriented matroids.

In chapitre 4 we are interested in an oriented matroid version of the well-known Shannon's switching game introduced by Hamidoune and Las Vergnas[Hamidoune et Las Vergnas, 1997a] in 1986. They conjectured that the classification of the directed switching game on an oriented matroids is identical to the classification of non-oriented version. In this thesis, we support this conjecture by showing its validity for an infinity class of oriented matroids obtained as unions of rank-1 and/or rank-2 uniform oriented matroids.

Keywords : Matroid, Matroid Base Polytope, Polytope Decomposition, Oriented Matroid, Arrangement of Hyperplanes, Switching Game.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et reconnaissance envers mon directeur de thèse Jorge Ramirez qui m'a guidé tout le long de ce travail en m'initiant à la recherche et en me proposant des pistes de réflexions toujours plus motivantes. Je lui dois de pouvoir continuer dans cette voie

Victor Chepoi et Jim Lawrence ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse et je les remercie du temps qu'ils ont bien voulu consacrer à la relire avec patience et à rédiger de si agréables rapports. Je remercie également tous les autres membres du jury, David Forge, Michel Pocchiola et Adrian Sebo pour s'être intéressé à mes travaux.

J'ai une pensée particulière pour Michel Las Vergnas, qui en plus d'être membre du jury m'a suivi de loin mais avec bienveillance tout le long de ma thèse. Il ne faut pas oublier non plus qu'il est à l'origine de nombreux questionnements sur lesquels j'ai eu le plaisir de travailler.

Ce fut une grande chance d'être accueillie par le laboratoire Optimisation et Combinatoire de Paris 6, l'ensemble de ces membres a su m'encourager pendant ma thèse et même auparavant, durant mon master où j'ai suivi des cours avec de si compétents professeurs. L'ambiance conviviale et chaleureuse de l'équipe m'a permis de m'intégrer facilement, je remercie en particulier Fabien, mon collègue thésard et le directeur du laboratoire Sylvain Sorin.

Je ne veux pas oublier non plus mes proches, Bernard qui m'a donné enfant le goût du raisonnement, Ophélie qui supporte de m'entendre parler mathématiques avec un calme olympien et Drice qui embellit ma vie tout simplement. Rien n'aurait été possible sans eux.

Table des matières

Introduction **9**

I Présentation des matroïdes et matroïdes orientés 11

1 Matroïdes **12**

1.1 Bases 12

1.2 Circuits et Fermés 12

1.3 Propriétés et Construction 13

1.4 Exemples importants 14

2 Matroïdes orientés **15**

2.1 Définition combinatoire 15

2.2 Dualité et Mineur 16

3 Constructions **17**

3.1 Graphes 17

3.2 Arrangement de pseudodroites 18

II Décomposition de Lafforgue 20

4 Introduction **21**

5 Décomposition **23**

5.1 Matroïdes uniformes 30

5.2 Matroïdes chemin du réseau 31

6 Somme directe **34**

7 Matroïdes binaires **39**

III Orientation des matroïdes chemins du réseau 43

8 Introduction 44

9 Matroïdes chemin du réseau et orientations 44

9.1 Orientation des matroïdes chemin du réseau 46

10 Simplexes dans les arrangements 50

10.1 Nombre de simplexes dans $\mathcal{LOM}$ 58

10.2 Problème de Grunbaum 62

IV Jeux de commutation sur les matroïdes 64

11 Introduction 65

12 Resultat principal 66

V Matroid Base Polytope Decomposition 72

A Abstract 73

B Introduction 73

C Decomposition 76

C.1 Uniform matroids 81

C.2 Lattice path matroids 82

D Direct sum 84

E Binary matroids 88

VI Lattice Oriented Matroids 92

F Abstract 93

G Introduction **93**

H Lattice path matroids and orientations **94**

H.1 Orienting lattice path matroids 95

I Simplexes in arrangements **100**

I.1 Counting simplexes in $\mathcal{LOM}$. 107

I.2 Grunbaum's problem. 110

VII The switching game on union of oriented matroids 113

J Abstract **114**

K Introduction **114**

L Main result **115**

Références **122**

Introduction

Les matroïdes orientés sont des objets à la fois combinatoires, géométriques et algébriques. Leur structure peut-être considérée comme une abstraction combinatoire des positions relatives dans les configurations de points ou d'hyperplans des espaces réels, ou bien des directions dans les cycles et cocycles d'un graphe orienté. La vingtaine d'axiomatiques issues de directions diverses qui existent aujourd'hui, ainsi qu'une notion omniprésente de dualité, confirment le caractère très naturel de cette structure. Les applications de plus en plus nombreuses, viennent de domaines très divers (voir l'appendice 'Some current frontiers of research dans la seconde édition de [Björner *et al.*, 1999]). La sous-section 52C40 de la classification AMS est consacrée entièrement aux matroïdes orientés depuis 2000.

Pour l'historique, en bref, les matroïdes orientés ont été introduits indépendamment et à peu près simultanément d'une part par Las Vergnas à partir de la théorie des graphes en tant que généralisation aux matroïdes de la notion d'orientation, d'autre part par Bland à partir de la programmation linéaire en tant que modèle combinatoire adapté à ce type de problèmes, et enfin par Folkman et Lawrence, qui partant de l'étude des polytopes ont abouti à la représentation topologique des matroïdes orientés par les arrangements de pseudosphères. Ces différentes motivations, toutes restées d'actualité, conduisent à des points de vue complémentaires, qui ont leur importance dans cette thèse. Un livre de référence sur le sujet 'Oriented Matroids' est paru en 1993, réédité en 1999, coécrit par Björner, Las Vergnas, Sturnfelds, White et Ziegler [Björner *et al.*, 1999]

Antérieurement, la structure de matroïde (1935) avait été obtenu en retenant les principales propriétés de la dépendance linéaire dans les espaces vectoriels, et en particulier dans l'espace des cycles d'un graphe, mais sans tenir compte des signes. Ils constituent du point de vue géométrique une généralisation des géométries projectives. De nombreux autres exemples naturels peuvent être construits à partir des graphes, des groupes, des corps(dépendance algébrique), des ensemble ordonnés, etc. Par exemple à tout matroïde on peut associer son polytope des indépendants qui est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques de ses indépendants. Pour plus de détails, on peut consulter les livres de référence [Oxley, 1992, Welsh, 1976] (ou [White, 1987] et [White, 1992]).

Les matroïdes et matroïdes orientés sont néanmoins des structures distinctes : tous les matroïdes orientés ont des matroïdes sous-jacent, mais plusieurs matroïdes orientés peuvent avoir le même matroïde sous-jacent, alors que certains matroïdes non-orientés ne sont jamais le matroïde sous-jacent d'aucun matroïde orienté.

Dans cette thèse nous étudierons plusieurs aspects, tout d'abord le premier chapitre rapellera quelques notions fondamentales sur les matroïdes et matroïdes orientés. Le second chapitre s'interessera aux matroïdes non orientés et en particulier au polytope

des bases qui est une face du polytope des indépendants. Le troisième chapitre consiste à orienter une classe de matroïde particuliére et à étudier les propriétés de celle-ci notemment les arrangements d'hyperplans qui correspondent. Le dernier chapitre étudie un jeu inventé sur les matroïdes orientés qui consiste à construire un circuit positif tandis que l'adversaire cherche à le détruire. Ces trois derniers chapitres sont écrits autant que possible pour être indépendants pour le lecteur et les appendices consistent à leurs équivalents sous forme d'article publié ou en voie de publication en anglais.

Première partie

Présentation des matroïdes et matroïdes orientés

Sommaire

1 Matroïdes **12**

1.1 Bases 12

1.2 Circuits et Fermés 12

1.3 Propriétés et Construction 13

1.4 Exemples importants 14

2 Matroïdes orientés **15**

2.1 Définition combinatoire 15

2.2 Dualité et Mineur 16

3 Constructions **17**

3.1 Graphes 17

3.2 Arrangement de pseudodroites 18

1 Matroïdes

Pour des renseignements géneraux sur la théorie des matroïdes nous référons le lecteur à [Oxley, 1992, Welsh, 1976].

Un matroïde est une structure combinatoire définie sur un ensemble fini par la donnée d'un ensemble de sous-ensembles qui peut être les bases, les circuits ou les cocircuits du matroïde.

1.1 Bases

Définition 1. *Un* matroïde $M = (E, \mathcal{B})$ *est un ensemble fini* $E = \{1, \ldots, n\}$ *(appelé* support *de* M*) associé à un ensemble non vide* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ *de sous-ensembles de* E *(appelés* bases *de* M*) satisfaisants l'*axiome d'échange de base *suivant :*

si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *et* $e \in B_1 \setminus B_2$ *alors il existe* $f \in B_2 \setminus B_1$ *de sorte que* $(B_1 - e) + f \in \mathcal{B}$.

Ces axiomes impliquent immédiatement que toutes les bases ont même cardinal, ce cardinal est appelé *rang* du matroïde et noté $r(M)$

L'ensemble des *indépendants* de M, dénoté par $\mathcal{I}(M)$ est donné par tous les sous-ensembles des bases de M. Il doivent donc vérifier la propriété suivante : si $B \in \mathcal{I}(M)$ et $A \subset B$ alors $A \in \mathcal{I}(M)$.

Nous remarquons ainsi que les matroïdes sont la structure naturelle de l'algorithme glouton, on peut calculer l'élément $\mathcal{I}(M)$ de poids minimal pour tout ordre total sur E, en partant de l'ensemble vide et en ajoutant à chaque fois l'élément de poids minimal pour lequel ls sous-ensemble obtenu reste dans $\mathcal{I}(M)$, si et seulement si les éléments maximaux de $\mathcal{I}(M)$ constituent les bases d'un matroïde.

Un *isthme* est un élément de E qui appartient à toutes les bases et une *boucle* est un élément n'appartenant à aucune base

L'ensemble des complémentaires des bases de M dans E vérifiant les mêmes axiomes, c'est aussi l'ensemble des bases d'un matroïde, appelé *matroïde dual* de M et noté M^*.

1.2 Circuits et Fermés

Définition 2. *Un* matroïde $M = (E, \mathcal{C})$ *est un ensemble fini* $E = \{1, \ldots, n\}$ *associé à un ensemble non vide* $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ *de sous-ensembles de* E *(appelés* circuits *de* M*) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $\emptyset \notin \mathcal{C}$
- *pour tout* $X, Y \in \mathcal{C}$ *si* $X \subset Y$ *alors* $X = Y$
- *pour tout* $X, Y \in \mathcal{C}, e \in X \cap Y$ *et* $f \in (X \setminus Y)$, *il existe* $Z \in \mathcal{C}$ *tel que* $Z \subset (X \cup Y) \setminus e$ *et* $f \in Z$

L'ensemble des *dépendants* de M, dénoté par $\mathcal{D}(M)$ est donné par tous les sous-ensembles contenant des circuits de M.

Définition 3. *Dans un matroïde* $M = (E, \mathcal{C})$, *la* fermeture *d'une partie* $A \subset E$ *notée* $cl(A)$ *est la plus petite partie de* E *contenant* A *et vérifiant*

pour tout circuit $C \in \mathcal{C}$ *et tout* $e \in E$, *si* $C \setminus e \subset A$ *alors* $e \in cl(A)$.

On apelle *rang* d'un fermé le cardinal d'un indépendant maximal contenu dans ce fermé, et le rang d'une partie est celui de sa fermeture.

Un *hyperplan* de M est un fermé de rang $r(M) - 1$ et l'ensemble des *cocircuits* de M est l'ensemble des complémentaires dans E des hyperplans de M.

1.3 Propriétés et Construction

Proposition 1. *Les circuits de* M *sont les cocircuits de* M^* *et les cocircuits de* M *sont les circuits de* M^*

Nous avons donc également les isthmes de M sont les boucles de M^* et les boucles de M sont les isthmes de M^*.

Proposition 2. *Soit* F *un fermé d'un matroïde,* $E \setminus F$ *est un fermé de* M^* *si et seulement si* F *est une union de circuits*

On peut définir les *mineurs* des matroïdes

Définition 4. *Pour un* matroïde $M = (E, \mathcal{B})$ *et* $A \subset E$ *on définit* $M \setminus A$ *comme un matroïde sur l'ensemble support* $E \setminus A$ *et dont les bases sont les* $\{B \in \mathcal{B} | B \cap A = \emptyset\}$. *On dit qu'il est obtenu par* suppression *de* A.

On définit M/A *comme un matroïde sur l'ensemble support* $E \setminus A$ *et dont les bases sont les* $\{B \setminus A | B \in \mathcal{B}, A \subset B\}$. *On dit qu'il est obtenu par* contraction *de* A.

Alors nous avons pour tout $A \subset E$,$(M/A)^* = M^* \setminus A$ et $(M \setminus A)^* = M^*/A$

Définition 5. *Soient* $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ *et* $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ *des matroïdes définis par leurs indépendants. L'* union, *notée* $M_1 \cup M_2$, *des matroïdes* M_1 *et* M_2 *a comme ensemble support l'union* $E_1 \cup E_2$ *et comme ensemble d'indépendants* $\{I \in E_1 \cup E_2 | I \cap E_1 \in \mathcal{I}_1, I \cap E_2 \in \mathcal{I}_2\}$.

Les bases de l'union $M_1 \cup M_2$ sont alors les indépendants maximums au sens de l'inclusion. Il existe un cas particulier où $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, l'union appelée *somme directe* peut alors être définie directement sur les bases. Soient $M_1 = (E_1, \mathcal{B}_1)$ et $M_2 = (E_2, \mathcal{B}_2)$ des matroïdes de rang r_1 et r_2 respectivement. La somme directe, notée $M_1 \oplus M_2$, des matroïdes M_1 et M_2 a comme ensemble support l'union disjointe $E_1 \cup E_2$ et comme ensembles de bases $\{B_1 \cup B_2 | B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$. En outre, le rang de $M_1 \oplus M_2$ est $r_1 + r_2$

1.4 Exemples importants

Les forêts maximales d'un graphe (V, E) sont les bases d'un matroïde sur E. Un tel matroïde est appelé *matroïde graphique*. Le rang de ce matroïde est donc $|V| - c(G)$ où $c(G)$ est le nombre de composantes connexes de G. Si le graphe est planaire, le matroïde défini à artir du graphe dual G^μ est le dual du matroïde défini à partir de G. Les indépendants sont les ensemble d'arêtes des forêts du graphe tandis que les dépendants sont les ensemble d'arêtes contenant les arêtes d'un cycle. Les cocircuits sont les coupes minimales pour l'inclusion

Si E est un ensemble fini de vecteurs d'un espace vectoriel sur un corps engendrant l'espace vectoriel V, alors les sous-ensemble de E qui sont les bases de V sont les bases d'un matroïde sur E. Un tel matroïde est appelé *matroïde vectoriel*. Le rang de ce matroïde est alors la dimension de V. Les indépendants sont donc les vecteurs indépendants au sens de la dépendance linéaire tandis que les dépendants sont les vectuers liés au sens de la dépendance linéaire. Les cocircuits sont, pour chaque sous-espace de dimension $r - 1$ engendré par des éléments de E, les éléments de E n'appartenant pas à cet espace.

Soit $\mathcal{A} = (A_j : j \in J)$ un système d'ensembles, c'est à dire un ensemble de sous-ensembles d'un ensemble fini E. Un transversal de $\mathcal{A}$ est un ensemble $\{x_j : j \in J\}$ de $|J|$ éléments diffèrents tels que $x_j \in A_j$ pour tout j. Un transversal partiel de $\mathcal{A}$ est un transversal d'un système d'ensemble de la forme $(A_k : k \in K)$ avec $K \subseteq J$. Un résultat fondamental de Edmonds et Fulkerson [Edmonds et Fulkerson, 1965] stipule qu'un transversal partiel d'un ensemble de systèmes $\mathcal{A} = (A_j : j \in J)$ est un indépendant d'un matroïde sur E. On dit que $\mathcal{A}$ est une présentation d'un *matroïde transversal*, les bases des matroïdes transversaux sont les transversaux partiels maximaux. Comme exemple $U_{n,r}$ dénote le *matroïde uniforme* sur n éléments et de rang r où les bases de $U_{n,r}$ se composent de tout les r sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$).

2 Matroïdes orientés

Définition 6. *Soit E un ensemble fini. Un sous-ensemble* signé *A de E est un sous-ensemble $\underline{A}$ de E munie d'une partition en éléments dits positifs et en éléments dits négatifs : $\underline{A} = A^+ \oplus A^-$. La partie $\underline{A}$ est alors appelée* support *de la partie signé A.*

De manière gébérale, un *matroïde orienté* M sur un ensemble fini E est défini par un ensemble de sous-ensemble signés de E, qui peut être l'ensemble des circuits, des cocircuits, des vecteurs, des covecteurs de M ou du signe des bases.

2.1 Définition combinatoire

Définition 7. *Un ensemble de sous-ensemble signé $\mathcal{C}$ est l'ensemble des circuits d'un matroïde orienté si et seulement si*

- $\emptyset \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{C} = -\mathcal{C}$
- *pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ si $\underline{X} \subset \underline{Y}$ alors $X = Y$ ou $X = -Y$*
- *pour tout $X, Y \in \mathcal{C}, X \neq Y, e \in X^+ \cap Y^-$ et $f \in (X^+ \setminus Y^-) \cup (X^- \setminus Y^+)$, il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $Z^+ \subset (X^+ \cup Y^+) \setminus e$, $Z^- \subset (X^- \cup Y^-) \setminus e$ et $f \in \underline{Z}$*

Si l'on ne tient pas compte des signes, les conditions obtenues sont l'axiomatique des circuits d'un matroïde comme dans la section précédente. Le matroïde dont les circuits sont les supports des circuits d'un matroïde orienté est appelé *matroïde sous-jacent* de ce matroïde orienté.

La réorientation de M selon A est le matroïde orienté ayant pour ensemble de circuits les circuits de M dans lesquels on change le signe des éléments de A. Toutes les réorientations de M forment se *classe de réorientation*. Elles ont toutes le même matroïde sous-jacent.

A un matroïde orienté, il est toujours associé un matroïde sous-jacent mais certains matroïdes orientés ne sont le matroïde sous-jacent d'aucun matroïde orienté (ils sont *non-orientables*. De plus plusieurs classes de réorientations de matroïdes orientés différents peuvent avoir le même matroïde sous-jacent.

Les bases de M sont les sous-ensemble maximaux de E qui ne contiennent pas de circuits, ce sont en fait les bases du matroïde sous-jacent $\underline{M}$.

Définition 8. *Une orientation des bases d'un matroïde orienté M est une fonction χ, apellée* chirotope de l'ensemble des bases de M sur $\{-1, 1\}$ satisfaisant les propriétés suivantes

- χ est alterné, ce qui signifie $\chi(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_r}) = sign(\sigma)\chi(x_1, \ldots, x_r)$ pour tout $x_1, \ldots, x_r \in E$ et chaque permutation σ

– pour toutes bases de M de la forme $(e, x_2, \ldots, x_r)$ et $(f, x_2, \ldots, x_r)$,$e \neq f$, nous avons $\chi(e, x_2, \ldots, x_r) = -C(e)C(f)\chi(f, x_2, \ldots, x_r)$ où C est l'un des deux circuits opposés de M contenu dans $\{e, f, x_1, \ldots, x_r\}$

Définition 9. *Un ensemble de sous-ensemble signé $\mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs d'un matroïde orienté si et seulement si*

– $\emptyset \in \mathcal{V}$
– $\mathcal{V} = -\mathcal{V}$
– *pour tout* $X, Y \in \mathcal{V}$ *on a* $X \circ Y \in \mathcal{V}$
– *pour tout* $X, Y \in \mathcal{V}, e \in X^+ \cap Y^-$ *et* $f \in (\underline{X} \setminus \underline{Y}) \cup (\underline{Y} \setminus \underline{X}) \cup (X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-)$ *il existe* $Z \in \mathcal{V}$ *tel que* $Z^+ \subset (X^+ \cup Y^+) \setminus e$, $Z^- \subset (X^- \cup Y^-) \setminus e$ *et* $f \in \underline{Z}$

Etant donné deux sous-ensemble signés A et B, on définit la *composition* $(A \circ B)^+ = (A^+ \cup (B^+ \setminus \underline{A})$ et $(A \circ B)^- = (A^- \cup (B^- \setminus \underline{A})$ c'est-à-dire que $A \circ B$ a pour support $\underline{A} \cup \underline{B}$, les éléments de A étant signés comme dans A, et les autres comme dans B.

2.2 Dualité et Mineur

On dit que deux sous-ensemble signés X et Y sont *orthogonaux* si $\underline{X} \cap \underline{Y} \neq \emptyset$ où il existe $e, f \in X \cap Y$ tel que $X(e)Y(e) = -X(f)Y(f)$.

Théorème 1. *L'ensemble des sous-ensemble signés orthogonaux à tous les circuits d'un matroïde orienté donne l'ensemble des circuits d'un autre matroïde orienté*

Ce matroïde orienté est le *dual* de M noté M^*. Son matroïde sous-jacent est le matroïde dual de celui de M. L'ensemble des covecteurs (resp vecteurs) de M^* est l'ensemble des vecteurs (resp covecteurs) de M. L'ensemble des cocircuits (resp circuits) de M^* est l'ensemble des circuits (resp cocircuits) de M.

Les mineurs d'un matroïde orientés ont pour matroïde sous-jacent les mineurs correspondant du matroïde sous-jacent. Les signes des éléments restant des circuits et des cocircuits sont inchangés.

Proposition 3. *Soit M un matroïde orienté sur E, et $A \subset E$*

Les circuits de $M \setminus A$ sont les circuits de M d'intersection vide avec A

Les circuits de M/A sont les parties minimales dans l'ensemble des circuits de M auxquels on enlève A.

3 Constructions

3.1 Graphes

Soit un graphe orienté $G = (V, E)$ dans le matroïde orienté M défini à partir de G
- -les circuits ont pour supports les ensembles d'arêtes des cycles élémentaires de G (cycles minimaux pour l'inclusion).
- -le signe d'un élément e d'un circit est + ou - selon que l'arête e est orientée ou non dans la direction d'un sens de parcours fixé.

De façon similaire :
- les cocircuits ont pour support les ensembles d'arêtes des cocycles élémentaires de G (coupes minimpales pour l'inclusion)
- le signe d'un élément e d'un cocircuit est + ou - selon que l'arête e est orientée ou non dans une direction fixée pour le cocycle

Un tel matroïde est dit *graphique*

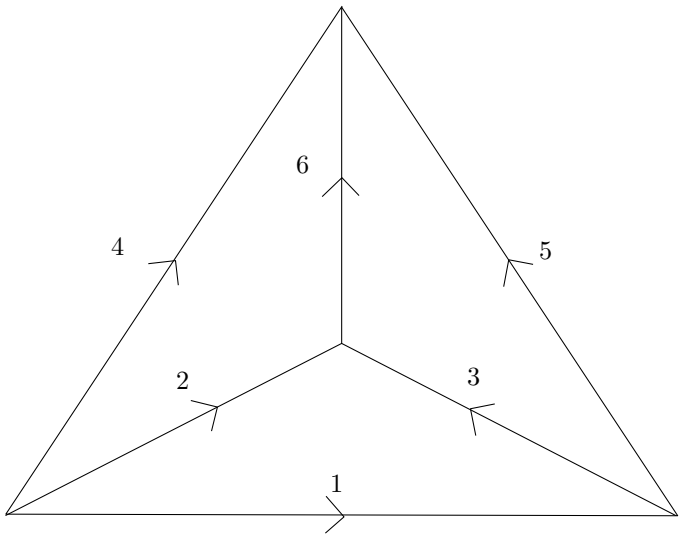


FIGURE 1 – orientation de référence K_4

Exemple 1. *Sur la figure 1 est representé un graphe K_4 orienté. Ses circuits sont* $1\overline{2}3, 2\overline{4}\overline{6}, 3\overline{5}6, 1\overline{4}5$ *et leurs opposés. Ses cocircuits sont* $123, \overline{1}35, 456, 23\overline{6}, 2345, 1\overline{3}46, 12\overline{5}6$ *et leurs opposés.*

Définition 10. *Si il existe un circuit positif, l'orientation est dite* cyclique*, si tout élément appartient à un circuit positif, l'orientation est dite* totalement cyclique*, si tout élément appartient à un cocircuit positif, alors aucun élément n'appartient à un circuit positif et l'orientation est* acyclique.

3.2 Arrangement de pseudodroites

On note S^d la sphère unité de l'espace réel de dimension $d+1$. On apelle *pseudosphère* de S^d une sphère S homéomorphe à S^{d-1}, il y a alors deux composantes connexes dans $S^d \setminus S$ que l'on appelera les *côtés* de S

Définition 11. *Un* arrangements de pseudosphères *est un ensemble fini $\mathcal{A}$ de pseudosphères $S_e, e \in E$ de S^d vérifiant*

- *$S_\mathcal{A} = \cap_{e\in\mathcal{A}} S_e$ est une sphère, pour tout $A \subset E$*
- *si $S_\mathcal{A} \notin S_e$ pour $\mathcal{A} \subset E, e \in E$ et S_e^+ et S_e^- sont les deux côtés de S_e alors $S_\mathcal{A} \cap S_e$ est une pseudosphère de $S_\mathcal{A}$ ayant pour côtés $S_\mathcal{A} \cap S_e^+$ et $S_\mathcal{A} \cap S_e^-$*
- *si $S_E = \emptyset$ l'arrangement est dit* essentiel

On dit que l'arrangement est *signé* lorsque l'on choisit pour chaque pseudosphère $S_e, e \in E$ un coté positif S_e^+ et un coté négatif S_e^-.

Les matroïdes orientés de rang $d+1$ sans boucles sont les classes d'équivalence des arrangements de pseudosphères essentiels signés de S^d.

Définition 12. *Etant donné un arrangement $\mathcal{A} = (S_e)_{e\in E}$ de pseudosphères de S^d représentant un matroïde orienté M, à chaque point a de S^d est associée une partie signée de E définie par $e \in A^+$ si et seulement si $a \in S_e^+$ et $e \in A^-$ si et seulement si $a \in S_e^-$. Ainsi $e \notin A$ si et seulement si $a \in S_e$, l'ensemble des parties signées ainsi obtenues est l'ensemble des* covecteurs *du matroïde orienté.*

Autrement dit l'ensemble des covecteurs s'obtient en considérant pour chaque face, l'ensemble $\mathcal{C}$ des éléments qui ne contiennent pas cette face, et en attribuant à chaque élément e de $\mathcal{C}$ le signe du côté de S_e dans lequel la face est contenue. Les cocircuits sont les covecteurs correspondant aux faces de dimension 0 appelées aussi *sommets*.

Un matroïde orienté est dit acyclique s'il existe un covecteur maximal positif c'est-à-dire si la signature des pseudosphères qui définit le matroïde orienté désigne une région.

Etant donné un ensemble d'hyperplans d'un espace vectoriel réel de dimension $d+1$, l'intersection de ces hyperplans avec la sphère unité S^d de l'espace définit un arrangement de pseudosphères, et donc, en choisissant une signature de référence, un matroïde orienté. Un tel matroïde est dit *réalisable*.

Pour représenter par une figure un arrangement de pseudocercles, on représentera un hémisphèrede S^2 dont le bord sera un des pseudocercles, la figure représentera le côté positif de 1. Bien sûr il n'apparaît ainsi que la moitié des régions de l'arrangement complet de pseudocercles, l'autre moitié se déduisant évidemment par symétrie centrale.

Exemple 2. *La figure 2 représente les cocircuits d'un arrangement de pseudodroites du plan projectif, c'est le même matroïde que dans 1*

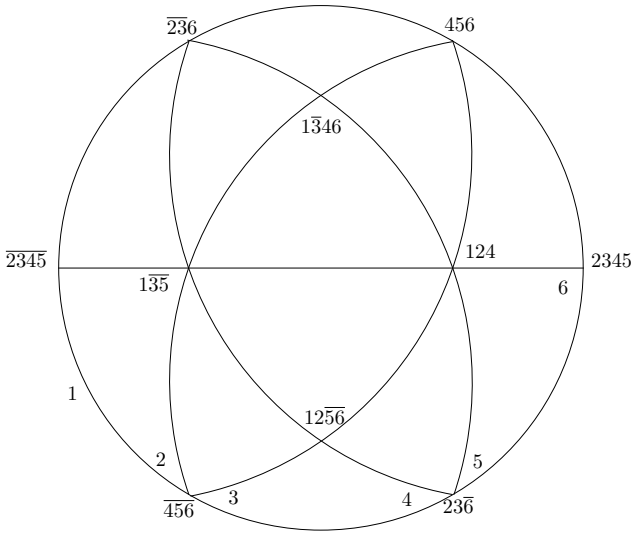


FIGURE 2 – orientation de référence K_4

Deuxième partie

Décomposition de Lafforgue

Sommaire

4 Introduction **21**

5 Décomposition **23**

5.1 Matroïdes uniformes 30

5.2 Matroïdes chemin du réseau 31

6 Somme directe **34**

7 Matroïdes binaires **39**

4 Introduction

Pour un matroïde $M = (E, \mathcal{B})$, le *polytope des bases* du matroïde M noté $P(M)$ est défini comme enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des bases de M, autrement dit,

$$P(M) := \text{conv}\left\{\sum_{i\in B} e_i : B \text{ une base de } M\right\},$$

où e_i dénote le $i^{\text{éme}}$ vecteur standard de base dans $\mathbb{R}^n$. $P(M)$ est un polytope de la dimension tout au plus $n-1$. Notons que $P(M)$ est une face du *polytope de l'ensemble des indépendants* $I(M)$ qui est obtenu comme enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des ensembles indépendants de M. Ces polytopes ont été étudiés pour la première fois par Edmonds [Edmonds, 2003, Edmonds, 1979] [1].

Billera, Jia et Reiner [Billera *et al.*, 2009] ont défini la *décomposition du polytope des bases d'un matroïde* $P(M)$ comme une décomposition

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$$

où chaque $P(M_i)$ est également un polytope des bases d'un matroïde pour un certain matroïde M_i, et pour chaque $1 \leq i \neq j \leq t$, l'intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ est une face de $P(M_i)$ et de $P(M_j)$.

$P(M)$ sera dit *décomposable* s'il existe une décomposition du polytope des bases du matroïde M avec $t \geq 2$, et *indécomposable* autrement. Une décomposition s'appelle *séparation par hyperplan* si $t = 2$.

Une séparation par hyperplan $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ est appelé *triviale* si l'un des deux polytopes $P(M_i)$, $i = 1, 2$ est une face de l'autre (c'est-à-dire, si un des $P(M_i)$ est une face de $P(M)$) et *non triviale* autrement. Nous notons que si $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ est une séparation par hyperplan non triviale alors $P(M_1) \cap P(M_2)$ doit être une facette de $P(M_1)$ et de $P(M_2)$, et la dimension de $P(M_i)$ pour $i = 1, 2$ est identique à celle de $P(M)$.

Une décomposition s'appelle *cohérente* si les $P(M_i)$ sont exactement les domaines maximaux des linéarités pour certaines fonctions convexes sur $P(M)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ linéaires par morceaux (les séparations par hyperplan sont toujours cohérentes). Comme remarqué dans [Billera *et al.*, 2009] les décompositions cohérentes de polytope des bases de matroïde apparaissent dans le travail de Lafforgue [Lafforgue, 1999, Lafforgue, 2003] sur des compactifications de la cellule fine du Grassmannian de Schubert correspondante au matroïde M.

1. Les résultats de ce chapitre ont données lieu la publication du papier [Chatelain et Ramirez Alfonsin, 2010a]

En particulier, le travail de Lafforgue implique que pour un matroïde M représenté par des vecteurs dans $\mathbb{F}^r$, si $P(M)$ est indécomposable, alors M sera *rigide*, c'est-à-dire, M aura un nombre finis de réalisations, augmentant proportionnelement sous l'action de $GL(r, \mathbb{F})$.

Il est connu que les faces non vides du polytope des bases d'un matroïde sont des polytopes des bases d'autres matroïde [Gel'fand et Serganova, 1987, théorème 2]. Ainsi, la face commune $P(M_i) \cap P(M_j)$ (dont les sommets correspondent aux éléments de $\mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{B}(M_j)$) doit également être un polytope des bases d'un matroïde. Afin d'étudier la non-existence de la décomposition du polytope des bases d'un matroïde, on peut considérer la version combinatoire suivante de la décomposition. Une *décomposition des bases* d'un matroïde M est une décomposition

$$\mathcal{B}(M) = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{B}(M_i)$$

où tous les $\mathcal{B}(M_k)$, pour $1 \leq k \leq t$ et tous les $\mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{B}(M_j)$, pour $1 \leq i \neq j \leq t$ sont les ensembles des bases de matroïde.

M est *combinatoirement décomposable* s'il existe une décomposition des bases du matroïde M. Nous disons que la décomposition est non triviale si $\mathcal{B}(M_i) \neq \mathcal{B}(M)$ pour tout i. Si $P(M)$ est décomposable alors M est clairement combinatoirement décomposable. Cependant, une décomposition des bases du matroïde M n'induit pas nécessairement une décomposition du polytope des bases de matroïde $P(M)$. Par exemple, le matroïde M^* de rang 2 où $\mathcal{B}(M^*) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ a une décomposition combinatoire donné par $\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ et $\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}\}$. En effet $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2)$ et $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{2,3\}$ sont des ensembles des bases de matroïde. Cependant les polytopes correspondants $P(M_1)$ et $P(M_2)$ ne font pas une décomposition de $P(M^*)$, voyez la figure 3 (a).

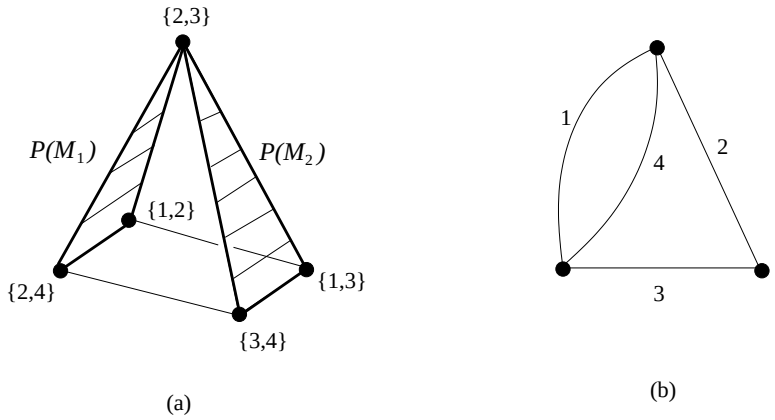


FIGURE 3 – (a) $P(M^*), P(M_1)$ and $P(M_2)$ (b) Un graphe G où chaque arbre couvrant correspond à une base de M^*.

Nous notons que M^* est réellement un matroïde *graphique* (rapellons qu'un matroïde $M(E, \mathcal{B})$ est dit *graphique* s'il existe un graphe G avec $|E|$ arêtes tels que il existe une bijection entre les éléments E de M et les arêtes de G de sorte que les éléments de chaque base de M correspondent à un ensemble d'arêtes d'une forêt couvrante de G). Le graphe exigé G pour M^* est donné dans la figure 3 (b).

Dans ce document, nous étudions l'existence et la non-existence de la séparation par hyperplan non triviale pour différentes classes de matroïde. Dans le but de prouver l'existence, nous montrons toujours d'abord l'existence d'une décomposition des bases du matroïde et montrons ensuite que ceci induit une séparation par hyperplan lorsque quelques conditions géométriques sont vérifiées (voir la proposition 4).

Dans la prochaine section, nous donnons des conditions suffisantes pour un matroïde M de sorte que $P(M)$ ait une séparation par hyperplan non triviale. Notre méthode constructive permet de montrer l'existence d'au moins $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *differentes* séparations par hyperplan de $P(U_{n,r})$ avec $n \geq r + 2 \geq 3$ où $U_{n,r}$ dénote le *matroïde uniforme* sur n éléments et de rang r (rappelons que $\mathcal{B}(U_{n,r})$ se composent de tout les r sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$). Dans la section 6, nous présentons une caractérisation complete pour que le matroïde $M_1 \oplus M_2$ ait une séparation par hyperplan non triviale où $M_1 \oplus M_2$ dénote la *somme directe* des matroïdes M_1 et M_2. Dans la section 7, nous prouvons que $P(M)$ n'a pas de séparation par hyperplan non triviale si M est un matroïde *binaire*, c'est-à-dire, si M est *représentable* sur $\mathbb{F}^2$.

5 Décomposition

Le *graphe des bases d'un matroïde* noté $G(M)$ est le graphe ayant comme ensemble de sommets les bases de M et avec une arête entre deux sommets (bases) B_1, B_2 si et seulement si il existe une paire d'éléments $e \in B_1$ et $f \in B_2$ de sorte que $B_2 = (B_1 \backslash e) + f$, c'est-à dire si la différence symétrique de B_1 et B_2, noté $\Delta(B_1, B_2)$, est égale à deux. Il est connu [Gel'fand *et al.*, 1987] que $G(M)$ est le 1-squelette de $P(M)$ (en d'autres termes, les arêtes de $P(M)$ représentent l'axiome d'échange de base) et que $G(M)$ est connecté. Nous présentons les résultats géométriques suivants utilisés dans le reste du document.

Proposition 4. *Soit P un polytope avec X comme ensemble de sommets . Soit H un hyperplan tel que $H \cap P \neq \emptyset$ avec H n'étant pas support de P. Ainsi, H divise P en deux polytopes P_1 et P_2, de sorte que $H \cap P = P_1 \cap P_2 = F \neq \emptyset$. H partitionne également X en deux ensembles X_1 et X_2 avec $X_1 \cap X_2 = W$. Ensuite, pour chaque arête $[u, v]$ de P nous avons $(u, v) \subset X_i$ avec $i = 1$ ou 2 si et seulement si $F = conv(W)$.*

Démonstration. Nous remarquons que $X_1, X_2 \neq \emptyset$ (car H n'est pas hyperplan de sup-

port). Soit $[u, v]$ une arête de P.

(*Nécessité*) Nous allons procéder par l'absurde. Supposons que $\{u, v\} \subset X_i$ avec $i = 1$ ou 2 et que $F \neq conv(W)$. Comme $conv(W) \subset F$ alors il existe un sommet x dans F tel que $x \notin W$ (et donc $x \notin X$). Ainsi, x est l'intersection de H, avec une arête $[u, v]$ de P de sorte que $u \in X_1 \setminus X_2$ et $v \in X_2 \setminus X_1$ ce qui est une contradiction.

(*Suffisance*) Nous allons procéder par l'absurde. Supposons que $F = conv(W)$ et que $u \in X_1 \setminus X_2$ et $v \in X_2 \setminus X_1$. Alors, $u \in P_1 \setminus P_2$ et $v \in P_2 \setminus P_1$ et donc $[u, v] \cap F = s$ avec s un sommet de F différent de u et v. Alors, $conv(W)$ ne contient pas s (car s n'est pas un sommet de W) et ainsi $F \neq conv(W)$, qui est une contradiction. □

Nous avons la conséquence suivante facile de cette proposition.

Corollaire 1. *Soient P, P_1 et P_2 les polytopes comme dans la Proposition 4. Ainsi, $F = conv(W)$ si et seulement si $P_i = conv(X_i)$, $i = 1, 2$ (et donc $P = P_1 \cup P_2$ avec P_1 et P_2 polytopes de la même dimension que P et sui partagent une facette).*

Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde de rang r et soit $A \subseteq E$. Nous rappelons que l'ensemble des indépendants de la *restriction* du matroïde de M à A, représenté par $M|_A$, est donné par $\mathcal{I}(M|_A) = \{I \subseteq A : I \in \mathcal{I}(M)\}$.

Soit (E_1, E_2) une partition de E, c'est à dire, $E = E_1 \cup E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Soit $r_i > 1$, $i = 1, 2$ le rang de $M|_{E_i}$. On dit que (E_1, E_2) est une *bonne* partition si il existe des entiers $0 < a_1 < r_1$ et $0 < a_2 < r_2$ avec les propriétés suivantes :

(P1) $r_1 + r_2 = r + a_1 + a_2$ et

(P2) Pour tout $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ avec $|X| \leq r_1 - a_1$ et pour tout $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ avec $|Y| \leq r_2 - a_2$ on a $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

Lemme 1. *Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde de rang r et soit (E_1, E_2) une bonne partition de E. Soient*

$$\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1 - a_1\}$$

et

$$\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq r_2 - a_2\}.$$

où r_i est le rang du matroïde $M|_{E_i}$, $i = 1, 2$ et a_1, a_2 sont des entiers vérifiant les propriétés (P1) et (P2). Alors, $\mathcal{B}(M_1)$ et $\mathcal{B}(M_2)$ sont des ensembles des bases de matroïde.

Démonstration. On doit prouver que $\mathcal{B}(M_1)$ est l'ensemble des bases d'un matroïde (cela peut être fait de même pour $\mathcal{B}(M_2)$). On montre que les éléments dans $\mathcal{B}(M_1)$ verifient l'axiome d'échange de base. Soient $X, Y \in \mathcal{B}(M_1) \subset \mathcal{B}(M)$ et supposons que $e \in X \setminus Y$.

Comme M est un matroïde alors il existe $f \in Y \setminus X$ tel que $X - e + f \in \mathcal{B}(M)$. On a deux cas.

Cas 1) Supposons que $|X \cap E_1| < r_1 - a_1$ où $e \in E_1$. Alors, $|(X-e+f) \cap E_1| \leq r_1 - a_1$ et donc $X - e + f \in \mathcal{B}(M_1)$.

Cas 2) Supposons que $|X \cap E_1| = r_1 - a_1$ et $e \in E_2$. D'un coté, on a que $|(X-e) \cap E_2| = r - 1 - (r_1 - a_1) = r - r_1 + a_1 - 1$. De l'autre coté, on a que $|Y \cap E_1| \leq r_1 - a_1$ et donc $|Y \cap E_2| \geq r - (r_1 - a_1)$. Alors, il existe $g \in Y \setminus (X - e) = Y \setminus X$ avec $g \in E_2$ tel que $(X - e + g) \cap E_2 \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ et aussi, comme $g \notin E_1$, alors $(X - e + g) \cap E_1 \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$. De plus, $|(X - e + g) \cap E_1| = r_1 - a_1$ et $|(X - e + g) \cap E_2| = r - r_1 + a = r_2 - a_2$ et donc, d'après la Propriété (P1), $|X - e + g| = r_1 + r_2 - a_1 - a_2 = r$. Alors, d'après la Propriété (P2), on a $((X - e + g) \cap E_1) \cup (X - e + g) \cap E_2)) = X - e + g \in \mathcal{I}(M)$. Mais comme, $|X - e + g| = r$ alors $X - e + g \in \mathcal{B}(M)$ et comme $|(X - e + g) \cap E_1| = r_1 - a_1$ alors $X - e + g \in \mathcal{B}(M_1)$. □

Notons que la propriété (P2), nécessaire à la démonstration du Lemme 1, peut être remplacée par la condition suivante plus faible

(P2') pout tout $B_1 \in \mathcal{B}(M_1)$ et tout $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ avec $|Y| \leq r_2 - a_2$ on a $(B_1 \cap E_1) \cup Y \in \mathcal{I}(M)$ et pour tout $B_2 \in \mathcal{B}(M_2)$ et pour tout $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ avec $|Y| \leq r_1 - a_1$ on a $(B_2 \cap E_2) \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

(P2) est clairement une condition plus forte que (P2') car

$$\{B_1 \cap E_1 : B_1 \in \mathcal{B}(M_1)\} \subset \{X : |X| \leq r_1 - a_1, X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})\}$$

et

$$\{B_2 \cap E_2 : B_2 \in \mathcal{B}(M_2)\} \subset \{X : |X| \leq r_2 - a_2, X \in \mathcal{I}(M|_{E_2})\}.$$

Remarque 1. *En fait il n'est même pas nécessaire d'avoir une partition qui vérifie la propriété (P2) ou (P2') du Lemme 1 mais seulement l'existence d'une partition (E_1, E_2) de E vérifiant la propriété (P1) et telle que les ensembles $\mathcal{B}(M_1)$, $\mathcal{B}(M_2)$ et $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ soient des ensembles des bases de matroïde.*

Théorème 2. *Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde de rang r et soit (E_1, E_2) une bonne partition de E. Soient M_1 et M_2 les matroïdes donnés dans le Lemme 1. Alors, $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ est une séparation par hyperplan non triviale.*

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que $\mathcal{B}(M_1)$ et $\mathcal{B}(M_2)$ donnent une décomposition des bases non triviale d'un matroïde M. Pour cela, nous montrons

(i) $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)$,

(ii) $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2) \subset \mathcal{B}(M)$,

(*iii*) $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2) \not\subseteq \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$,

(*iv*) $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) \neq \emptyset$ et

(*v*) $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ est l'ensemble des bases pour un matroïde.

Nous montrons ensuite que cette décomposition des bases induit une séparation par hyperplan non triviale. Pour cela, nous montrons

(*vi*) il existe un hyperplan contenant les sommets correspondant aux $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$, et ne supportant pas $P(M)$,

(*vii*) chaque arête de $P(M)$ est aussi une arête de $P(M_1)$ ou $P(M_2)$.

Donc, par le corollaire 1, les éléments de $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ sont l'ensemble des sommets d'une facette de $P(M_1)$ et $P(M_2)$ et donc $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$.

Nous pouvons maintenant prouver les revendications ci-dessus..

(*i*) Nous affirmons que $\overline{\mathcal{B}(M)} = \emptyset$. En effet,
soit $B \in \overline{\mathcal{B}(M)} = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| > r_1 - a_1 \text{ et } |B \cap E_2| > r_2 - a_2\}$. Comme $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, alors $|B| > r_1 + r_2 - a_1 - a_2 = r$, ce qui n'est pas possible. Donc, $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)$.

(*ii*) Nous montrons que $\mathcal{B}(M_1) \subset \mathcal{B}(M)$ (il peut également être prouvé que $\mathcal{B}(M_2) \subset \mathcal{B}(M)$ en utilisant des arguments similaires). Soit B une base de $M|_{E_1}$ (et donc $|B| = r_1$). Nous avons deux cas.

Cas 1) Si $r_1 = r$, alors $B \in \mathcal{B}(M)$ et $B \notin \mathcal{B}(M_1)$ car $|B \cap E_1| = r > r_1 - a_1$.

Cas 2) Si $r_1 < r$, alors, il existe une base $B' \in \mathcal{B}(M)$ avec $B \subset B'$ comme $B \in \mathcal{I}(M)$. De plus, $|B' \cap E_1| \geq r_1 > r_1 - a_1$ et donc $B' \in \mathcal{B}(M)$ mais $B' \notin \mathcal{B}(M_1)$.

(*iii*) Si $\mathcal{B}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$, alors $\mathcal{B}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_2)$ et donc $\mathcal{B}(M_2) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2) = \mathcal{B}(M)$, contradisant ainsi (*ii*).

(*iv*) Soient $X, Y \in \mathcal{B}(M)$ tels que $|X \cap E_1| = r_1$ et $|Y \cap E_2| = r_2$ (nous avons vu dans (*ii*) que de telles bases existent toujours). Comme $G(M)$ est connexe, alors il existe un chemin $X = B_1, \ldots, B_m = Y$ connectant X et Y où $B_i \in \mathcal{B}(M)$ pour chaque $i = 1, \ldots, m$. Comme $|B_i \Delta B_{i+1}| = 2$, alors $|B_i \cap E_1| = |B_{i+1} \cap E_1| + k$ avec l'une des possibiliés $k = -1, 0, +1$,. De plus, $|B_1 \cap E_1| = r_1$ et $|B_m \cap E_1| = r - r_2 = r_1 - a_1 - a_2$. Donc, il doit exister un indice k tel que $|B_k \cap E_1| = r_1 - a_1$. Alors, $|B_k \cap E_2| = r - r_1 + a_1 = r_2 - a_2$. Ainsi, $B_k \in \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$.

(*v*) Cela peut être fait en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans le lemme 1.

(*vi*) Nous avons d'abord remarqué que si $B \in \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$, alors $B \in \mathcal{B}(M)$

(donc $|B| = r$) avec $|B \cap E_1| \leq r_1 - a_1$ et $|B \cap E_2| \leq r_2 - a_2 = r - r_1 + a_1$. Donc, si $B \in \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$, alors $|B \cap E_1| = r_1 - a_1$ et $|B \cap E_2| = r_2 - a_2$. Soit H l'hyperplan défini par

$$H(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle = r_1 - a_1 \text{ où } \mathbf{e} = \sum_{i \in E_1} e_i \right\}.$$

Si $B \in \mathcal{B}(M_1)$, alors $|B \cap E_1| \leq r_1 - a_1$ et donc $H(x_B) \leq r_1 - a_1$. Si $B \in \mathcal{B}(M_2)$, alors $|B \cap E_2| \leq r_2 - a_2$ et donc $|B \cap E_1| \geq r - r_2 + a_2 = r_1 - a_1$. Ainsi, $H(x_B) \geq r_1 - a_1$. De plus, H contient seulement les éléments $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$. Notons que $dim(P(M) \cap H) = d - 1$ où $d = dim(P(M))$. En effet, $dim(P(M) \cap H) \leq d$ et si $dim(P(M) \cap H) \leq d - 2$, alors $P(M)$ serait inclu dans le demi-espace clos $\overline{H}^+$ ou $\overline{H}^-$ ce qui est impossible selon (iii). Donc, on peut construire H' un hyperplan dans $\mathbb{R}^d$ contenant $P(M) \cap H$ qui ne supporte pas $P(M)$.

(vii) Supposons qu'il existe une arête dans $P(M)$ n'appartenant ni à $P(M_1)$ ni à $P(M_2)$. Alors, il existe $B_1 \in \mathcal{B}(M_1) \setminus \mathcal{B}(M_2)$ et $B_2 \in \mathcal{B}(M_2) \setminus \mathcal{B}(M_1)$ avec $\Delta(B_1, B_2) = 2$. Alors, $|B_1 \cap E_1| < r_1 - a_1$ et $|B_2 \cap E_1| > r_1 - a_1$. En combinant ces résultats avec le fait que $\Delta(B_1, B_2) = 2$, nous obtenons $|B_1 \cap E_1| = r_1 - a_1$, ce qui est une contradiction.

□

Exemple 1 : Prenons $U_{4,2}$ et une bonne partition $E_1 = \{1, 2\}$ et $E_2 = \{3, 4\}$ (et donc $r_1 = r_2 = 2$) avec $a_1 = a_2 = 1$.

Alors $\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$,
$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$
$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$, voir Figure 4.

Nous remarquons qu'il existe des matroïdes sur un ensemble support E qui n'ont pas de bonne partition. Par exemple, $M(K_4)$ le matroïde associé au graphe complet à quatre sommets, les bases de $M(K_4)$ sont tous les triplets, sauf $\{1,2,5\}, \{2,3,6\}, \{3,4,5\}$ et $\{1,4,6\}$ (correspondant à des circuits de K_4), voire Figure 5. Comme $1 < r_1, r_2 \leq 3$, alors $2 \leq |E_1|, |E_2| \leq 4$. Nous avons seulement les quatre possibilités suivantes (à une symétrie prés), celles-ci étant illustrées à la figure 5 (a)-(d).

(a) Si $E_1 = \{1,2,3\}$ et $E_2 = \{4,5,6\}$, alors $r_1 = 3, r_2 = 3$ et $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq 2\}$, $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq 1\}$. Nous avons que $\mathcal{B}(M_2)$ n'est pas un ensemble de bases d'un matroïde. En effet, $\{1,3,5\}, \{1,2,4\} \in \mathcal{B}(M_2)$ donc, par l'axiome d'échange de bases, on a que $\{1,2,5\}$ ou $\{1,4,5\}$ devrait être dans $\mathcal{B}(M_2)$. Mais, $\{1,2,5\} \notin \mathcal{B}(M(K_4))$ (et donc $\{1,2,5\} \notin \mathcal{B}(M_2)$) et $\{1,4,5\} \cap E_2 = \{4,5\}$ (et donc $\{1,4,5\} \notin \mathcal{B}(M_2)$).

(b) Si $E_1 = \{1,2,5\}$ et $E_2 = \{3,4,6\}$, alors $r_1 = 2, r_2 = 3$ et $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in$

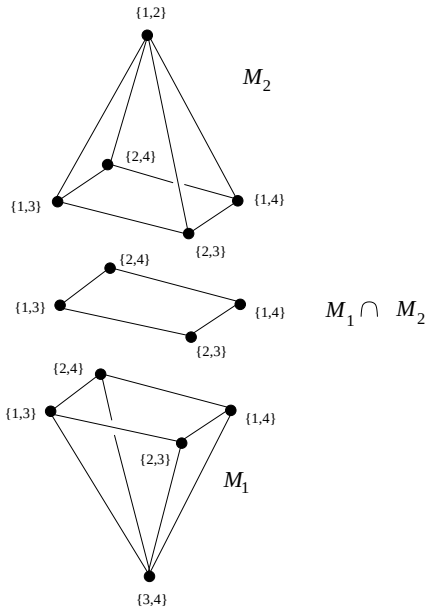


FIGURE 4 – Séparation par hyperplan de $P(U_{4,2})$

$\mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq 1\}$, $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq 2\}$. On a que $\mathcal{B}(M_1)$ n'est pas un ensemble de bases d'un matroïde. En effet, $\{1,3,4\}, \{2,4,6\} \in \mathcal{B}(M_1)$ donc, par l'axiome d'échange de bases, on a que $\{1,2,4\}$ ou $\{1,4,6\}$ devrait être dans $\mathcal{B}(M_1)$. Mais, $\{1,4,6\} \notin \mathcal{B}(M(K_4))$ (et donc $\{1,4,6\} \notin \mathcal{B}(M_1)$) et $\{1,2,4\} \cap E_1 = \{1,2\}$ (et donc $\{1,2,4\} \notin \mathcal{B}(M_1)$).

(c) Si $E_1 = \{1,2\}$ et $E_2 = \{3,4,5,6\}$, alors $r_1 = 2, r_2 = 3$ et $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq 1\}$, $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq 2\}$. On a que $\mathcal{B}(M_2)$ n'est pas un ensemble de bases d'un matroïde. En effet, $\{2,4,6\}, \{1,3,6\} \in \mathcal{B}(M_2)$ donc, par l'axiome d'échange de bases, on a que $\{1,4,6\}$ ou $\{3,4,6\}$ devrait être dans $\mathcal{B}(M_2)$. Mais, $\{1,4,6\} \notin \mathcal{B}(M(K_4))$ (et donc $\{1,4,6\} \notin \mathcal{B}(M_2)$) et $\{3,4,6\} \cap E_2 = \{3,4,6\}$ (et donc $\{3,4,6\} \notin \mathcal{B}(M_2)$).

(d) Si $E_1 = \{1,3\}$ et $E_2 = \{2,4,5,6\}$, alors $r_1 = 2, r_2 = 3$ et $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq 1\}$, $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq 2\}$. On a que $\mathcal{B}(M_2)$ n'est pas un ensemble de bases d'un matroïde. En effet, $\{1,4,5\}, \{3,4,6\} \in \mathcal{B}(M_2)$ donc, par l'axiome d'échange de bases, on a que $\{3,4,5\}$ ou $\{4,5,6\}$ devrait être dans $\mathcal{B}(M_2)$. Mais, $\{3,4,5\} \notin \mathcal{B}(M(K_4))$ (et donc $\{3,4,5\} \notin \mathcal{B}(M_2)$) et $\{4,5,6\} \cap E_2 = \{4,5,6\}$ (et donc $\{4,5,6\} \notin \mathcal{B}(M_2)$).

Il s'avère que $P(M(K_4))$ n'a pas de séparation par hyperplan non triviale (cela est justifié à la fin de la Section 7).

Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde de rang r, et soit $X \subset E$ à la fois un circuit et un hyperplan de M (rapellons qu'un *hyperplan* est un *drapeau*, tel que $X = cl(X)$, de rang $r-1$). Il est connu [Oxley, 1992, Proposition 1.5.13] que $\mathcal{B}(M') = \mathcal{B}(M) \cup X$ est

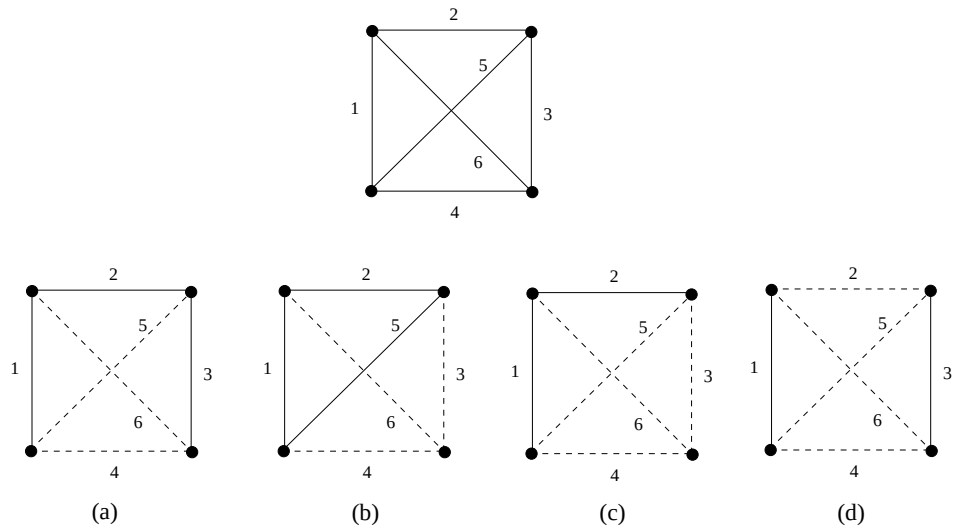


FIGURE 5 – K_4 et quatre partitions possible. Dans chaque cas, les éléments de E_1 (resp. de E_2) sont représentés par des arêtes solides (resp. pointillés) .

l'ensemble des bases d'un matroïde M' (apellé, *relaxation* de M).

Corollaire 2. *Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde et soit (E_1, E_2) une bonne partition de E. Alors, $P(M')$ a une séparation par hyperplan non triviale où M' est une relaxation de M.*

Démonstration. Soit (E_1, E_2) et a_1, a_2 une bonne partition de E qui induit la séparation par hyperplan de $P(M)$ avec $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1 - a_1\}$ et $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq r_2 - a_2\}$. . La propriété (P2) du Lemme 1 implique que, pour tout $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ avec $|X| \leq r_1 - a_1$ et pour tout $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ avec $|Y| \leq r_2 - a_2$, on a $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$. Or $\{X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})||X| \leq r_1 - a_1\} = \{X \in \mathcal{I}(M'|_{E_1})||X| \leq r_1 - a_1\}$, et $\{X \in \mathcal{I}(M|_{E_2})||X| \leq r_2 - a_2\} = \{X \in \mathcal{I}(M'|_{E_2})||X| \leq r_2 - a_2\}$. Donc la propriété (P2) est également vérifiée pour M' et la partition (E_1, E_2) est aussi une bonne partition pour M', qui a donc une séparation par hyperplan □

Bien que $P(M(K_4))$ n'a pas de séparation par hyperplan non triviale, les polytopes de bases de relaxations de $M(K_4)$ peuvent en avoir.

Exemple 2 : Soit W^3 le matroïde de rang 3 sur $E = \{1, \ldots, 6\}$ ayant comme ensemble des bases tous les 3-sous-ensembles de E sauf les triplets $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$ et $\{2, 3, 6\}$, voir Figure 6. Notons que W^3 est une relaxation de $M(K_4)$ (par relaxation du circuit $\{3, 4, 5\}$) mais il n'est pas graphique. Il peut être vérifié que $E_1 = \{1, 2, 6\}$ et $E_2 = \{3, 4, 5\}$ (et donc $r_1 = r_2 = 3$) avec $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$ est une bonne partition. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M_1) = \quad & \{\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\\ & \{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{4,5,6\}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M_2) = \quad & \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,6\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\\ & \{1,4,5\},\{1,5,6\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{2,4,6\},\\ & \{2,5,6\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{4,5,6\}\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M_1)\cap\mathcal{B}(M_2) = \quad & \{\{1,3,4\},\{1,3,5\},,\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\\ & \{2,4,5\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{4,5,6\}\}.\end{aligned}$$

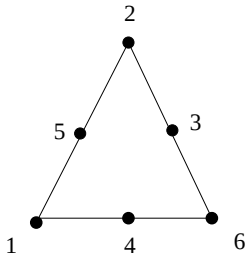


FIGURE 6 – Représentation euclidienne de W^3

5.1 Matroïdes uniformes

Nous disons que deux séparations par hyperplan $P(M_1)\cup P(M_2)$ et $P(M_1')\cup P(M_2')$ de $P(M)$ sont *équivalentes* si $P(M_i)$ est *combinatoirement equivalent* à $P(M_i')$ pour chaque $i=1,2$ (c'est-à-dire, le réseau des faces correspondantes est isomorphe). Elles sont *différentes* autrement.

Corollaire 3. *Soit $n \geq r+2 \geq 4$ un entier et soit $h(U_{n,r})$ le nombre de différentes séparations par hyperplan non triviales de $P(U_{n,r})$. Alors,*

$$h(U_{n,r}) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

Démonstration. Pour chaque $k = 2,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, on pose $E_1(k)=\{1,\ldots,k\}$ et $E_2(k)=\{k+1,\ldots,n\}$. Donc, $M|_{E_1(k)}$ est isomorphe à $U_{k,\min\{k,r\}}$ et $M|_{E_2(k)}$ est isomorphe à $U_{n-k,\min\{n-k,r\}}$. Soient r_1 et r_2 les rangs de $M|_{E_1(k)}$ et $M|_{E_2(k)}$ respectivement. Alors $r_1=\min\{k,r\}$ et $r_2=\min\{n-k,r\}$ donc

$$r_1+r_2=\min\{n,k+r,n-k+r,2r\}\geq r+2.$$

Ainsi, nous pouvons trouver des entiers $a_1,a_2\geq 1$ tels que $r_1+r_2=r+a_1+a_2$ et donc, $(E_1(k),E_2(k))$ est une bonne partition. □

Notons qu'il y a peut-être plusieurs choix pour les valeurs de a_1 et a_2 (dont chacune donne une bonne partition). Toutefois, il n'est pas clair si ces différents partitions donnent des séparations par hyperplan différentes .

Exemple 3 : Prenons $U_{n,3}$ avec $n \geq 6$ et la bonne partition $E_1(k) = \{1, \ldots, k\}$ et $E_2(k) = \{k+1, \ldots, n\}$ pour chaque $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (donc $r_1 = 2, r_2 = 3$). Si on pose $a_2 = 1$ et a_1 tel que $a_1 = r_1 - 1$ alors $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(U_{n,3}) : |B \cap E_1| \leq 1\}$ et $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(U_{n,3}) : |B \cap E_2| \leq 2\}$. Les matroïdes correspondants M_1, M_2 et $M_1 \cap M_2$ sont de rang 3, ils sont donnés à la Figure 7.

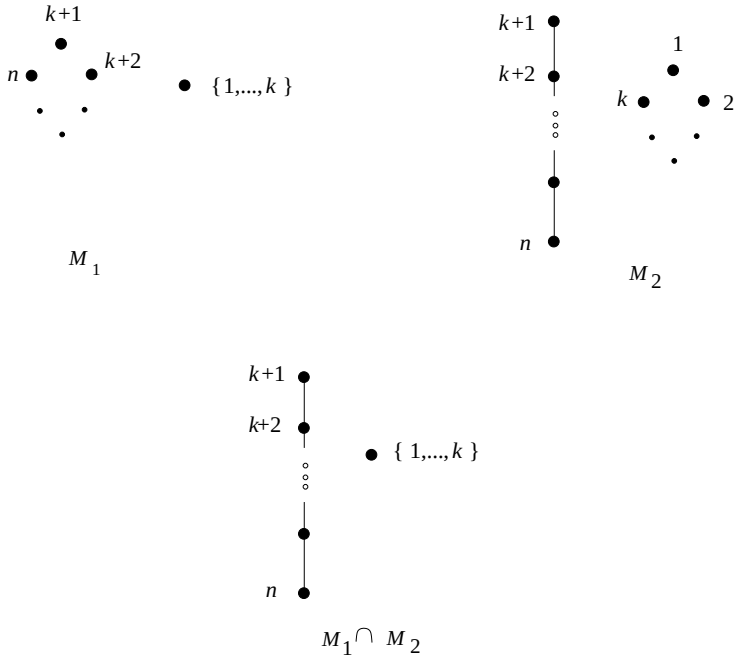


FIGURE 7 – Representations euclidiennes de M_1, M_2 et $M_1 \cap M_2$.

5.2 Matroïdes chemin du réseau

Un *chemin du réseau* commence au point $(0, 0)$ et utilise des étapes $(1, 0)$ et $(0, 1)$, apellé *Est* et *Nord*. Soient $P = p_1, \ldots, p_{r+m}$ et $Q = q_1, \ldots, q_{r+m}$ deux chemins du réseau de $(0, 0)$ à (m, r) avec P qui ne va jamais au dessus de Q. Soit $\{p_{s_1}, \ldots, p_{s_r}\}$ l'ensemble des étapes Nord de P avec $s_1 < \cdots < s_r$; de même, soit $\{q_{t_1}, \ldots, q_{t_r}\}$ l'ensemble des étapes Nord de Q avec $t_1 < \cdots < t_r$. Soit $M[P, Q]$ le matroïde transversal qui a comme ensemble support $\{1, \ldots, m+r\}$ et comme présentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, r\})$ où N_i denote l'intervalle d'entiers $[s_i, t_i]$. Les matroïdes transversaux décrits comme ci-dessus sont apellés *matroïde chemin du réseau*. Étant donné un sous-ensemble X de $\{1, \ldots, m+r\}$, on définit le chemin lattice par $P(X) = u_1, \ldots, u_{m+r}$ où u_i est une étape Nord si $i \in X$, et une étape Est autrement.

Dans [Bonin *et al.*, 2003] il a été prouvé qu'un sous-ensemble B de $\{1, \ldots, m+r\}$

avec $|B| = r$ est une base de $M[P,Q]$ si et seulement si le chemin associé $P(B)$ reste dans la région délimitée par P et Q.

Corollaire 4. *Soit $M[P,Q]$ le matroïde transversal sur $\{1,\ldots,m+r\}$ avec pour presentation $(N_i : i \in \{1,\ldots,r\})$ où N_i désigne l'intervalle d'entiers $[s_i,t_i]$. Supposons qu'il existe un entier x tel que $s_j < x < t_j$ et $s_{j+1} < x+1 < t_{j+1}$ pour un $1 \leq j \leq r-1$. Alors, $P(M[P,Q])$ a une séparation par hyperplan non triviale.*

Démonstration. Soient $E_1 = \{1,\ldots,x\}$ et $E_2 = \{x+1,\ldots,m+r\}$. Alors, $M|_{E_1}$ (resp. $M|_{E_2}$) est le matroïde transversal ayant pour présentation $(N_i^1 : i \in \{1,\ldots,r\})$ où $N_i^1 = N_i \cap E_1$ (resp. ayant pour présentation $(N_i^2 : i \in \{1,\ldots,r\})$ où $N_i^2 = N_i \cap E_2$). Soient r_1 et r_2 les rangs de $M|_{E_1}$ et $M|_{E_2}$ respectivement. Nous avons que $N_i^1 \neq \emptyset$ pour tout $i \leq j+1$ (comme le plus petit élément de N_i est strictement inférieur à $x+1$). Par conséquent, $r_1 \geq j+1$. De même, nous avons que $N_i^2 \neq \emptyset$ pour tout $i \geq r-j+1$ (comme le plus petit élément de N_i est supérieur à $x+1$). Par conséquent, $r_2 \geq r-j+1$. Ainsi, la partition (E_1,E_2) vérifie la propriété (P1) en prenant des entiers a_1 et a_2 tels que $r_1 - a_1 = j$ et $r_2 - a_2 = r-j$. En outre, les ensembles de $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1 - a_1\}$ et $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq r_2 - a_2\}$ sont les ensembles des bases des matroïdes M_1 et M_2 respectivement. En effet, M_1 est le matroïde transversal ayant pour présentation $(\overline{N}_i^1 : i \in \{1,\ldots,r\})$ où $\overline{N}_i^1 = N_i$ pour chaque $i = 1,\ldots,j$ et $\overline{N}_i^1 = N_i \cap E_2$ pour chaque $i = j+1,\ldots,r$. M_2 est le matroïde transversal avec pour présentation $(\overline{N}_i^2 : i \in \{1,\ldots,r\})$ où $\overline{N}_i^2 = N_i \cap E_1$ pour chaque $i = 1,\ldots,j$ et $\overline{N}_i^1 = N_i$ pour chaque $i = j+1,\ldots,r$. Enfin, $M_1 \cap M_2$ est le matroïde transversal ayant pour présentation $(\overline{N}_i : i \in \{1,\ldots,r\})$ où $\overline{N}_i = \overline{N}_i^1 \cap \overline{N}_i^2$ pour chaque $i = 1,\ldots,r$. Le résultat suit par la remarque 1 car $B(M_1)$ et $B(M_2)$ sont des e,sembles de bases de matroïdes. □

Notons qu'il y a peut-être plusieurs choix pour les valeurs de x, j, a_1 et a_2 (dont chacun donne une bonne partition). Toutefois, il n'est pas clair que ces partitions donnent des séparations par hyperplan différentes. Notons également que la partition proposée dans la preuve ci-dessus peut ne vérifier ni (P2) ni (P2'). Nous verrons cela, par exemple, dans l'exemple suivant.

Exemple 4 : Soient $m = 3$ et $r = 4$. Soit $P = p_1,\ldots,p_7$ le chemin du réseau où p_1,p_2,p_3,p_4 sont les étapes Est et p_5,p_6,p_7 sont les étapes Nord . Soit $Q = q_1,\ldots,q_7$ le chemin du réseau où q_2,q_4,q_6 sont les étapes Est et q_1,q_3,q_5,q_7 sont les étapes Nord. Soit $M[P,Q]$ le matroïde transversal sur $\{1,\ldots,7\}$ et avec comme présentation $(N_i : i \in \{1,\ldots,4\})$ où $N_1 = [1,2,3,4]$, $N_2 = [3,4,5]$, $N_1 = [5,6]$ et $N_1 = [7]$, voir Figure 8.

Rappelons qu'un sous-ensemble B de $\{1,\ldots,7\}$ avec $|B| = 4$ est une base de $M[P,Q]$ si et seulement si le chemin du réseau associé $P(B)$ reste dans la région bornée par P et Q. Alors,

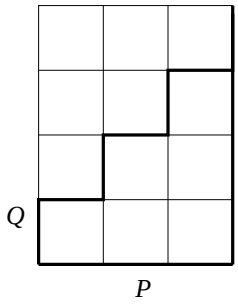


FIGURE 8 – Chemins du réseau P et Q

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M) = \quad & \{\{1,3,5,7\},\{1,3,6,7\},\{1,4,5,7\},\{1,4,6,7\},\{1,5,6,7\},\\ & \{2,3,5,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{2,4,6,7\},\{2,5,6,7\},\\ & \{3,4,5,7\},\{3,5,6,7\},\{4,5,6,7\}\}.\end{aligned}$$

Soient $x = 3$ et $j = 1$. Alors $E_1 = \{1,2,3\}$ et $E_2 = \{4,5,6,7\}$. Ainsi, la présentation de $M|_{E_1}$ (resp. $M|_{E_2}$) est donnée par $N_1^1 = [1,2,3]$ et $N_2^1 = [3]$ (resp. par $N_1^2 = [4,5]$,$N_2^2 = [4,5]$, $N_3^2 = [5,6]$ et $N_4^2 = [7]$) et, par conséquent $r_1 = 2$ et $r_2 = 4$. En fixant $a_1 = a_2 = 1$, nous obtenons que M_1 est un matroïde transversal ayant pour présentation $(\overline{N}_i^1 : i \in \{1,\ldots,4\})$ où $\overline{N}_1^1 = [1,2,3,4], \overline{N}_2^1 = [4,5], \overline{N}_3^1 = [5,6]$ et $\overline{N}_4^1 = [7]$. Et nous obtenons que M_2 est le matroïde transversal ayant pour présentation $(\overline{N}_i^2 : i \in \{1,\ldots,4\})$ où $\overline{N}_1^2 = [1,2,3], \overline{N}_2^2 = [3,4,5], \overline{N}_3^2 = [5,6]$ et $\overline{N}_4^2 = [7]$. Enfin, nous avons que $M_1 \cap M_2$ est le matroïde transversal ayant pour présentation $(\overline{N}_i : i \in \{1,\ldots,4\})$ où $\overline{N}_1 = [1,2,3], \overline{N}_2 = [4,5], \overline{N}_3 = [5,6]$ et $\overline{N}_4 = [7]$. Ces matroïdes sont illustrés à la figure 9. Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M_1) = \quad & \{\{1,4,5,7\},\{1,4,6,7\},\{1,5,6,7\},\{2,4,5,7\},\{2,4,6,7\},\\ & \{2,5,6,7\},\{3,4,5,7\},\{3,5,6,7\},\{4,5,6,7\}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M_2) = \quad & \{\{1,3,5,7\},\{1,3,6,7\},\{1,4,5,7\},\{1,4,6,7\},\{1,5,6,7\},\\ & \{2,3,5,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{2,4,6,7\},\{2,5,6,7\},\\ & \{3,4,5,7\},\{3,5,6,7\}\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M_1 \cap \mathcal{B}(M_2)) = \quad & \{\{1,4,5,7\},\{1,4,6,7\},\{1,5,6,7\},\{2,4,5,7\},\{2,4,6,7\},\\ & \{2,5,6,7\},\{3,4,5,7\},\{3,5,6,7\}\}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le corollaire 4, $M[P,Q]$ a une séparation par hyperplan non triviale. Nous remarquons que la partition ci-dessus ne vérifie pas non plus (P2) (par exemple, $\{3\} \in \mathcal{I}(M|_{E_1}), \{4,5,6\} \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ mais $\{3,4,5,6\} \notin \mathcal{I}(M[P,Q])$) ou (P2') (par exemple, $B = \{1,4,5,7\} \in \mathcal{B}(M_1), Y = \{4,5,6\} \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ mais $(B \cap E_1) \cup Y = \{1,4,5,6\} \notin \mathcal{I}(M[P,Q])$).

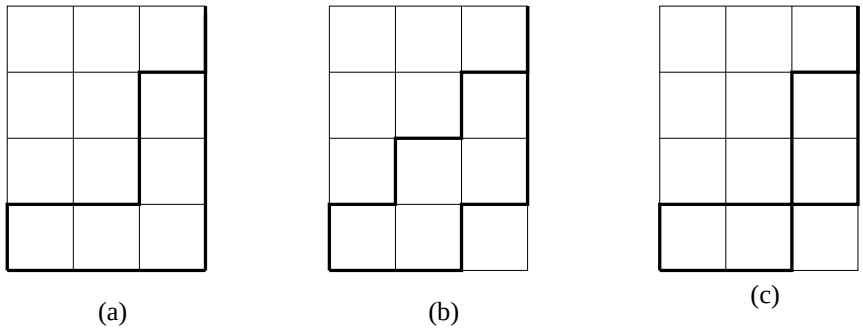


FIGURE 9 – Matroïdes transversaux (a) M_1 (b) M_2 et (c) $M_1 \cap M_2$

Exemple 5 : Soient $m \geq r \geq 2$ des entiers. Soit $P_1 = p_1, \ldots, p_{m+r}$ un chemin du réseau, où $p_1, \ldots, p_m$ sont les étapes Est et $p_{m+1}, \ldots, p_{m+r}$ sont les étapes Nord. Soit $Q_1 = q_1, \ldots, q_{m+r}$ un chemin du réseau, où $q_1, \ldots q_r$ sont les étapes Est et $q_{r+1}, \ldots, q_{r+m}$ sont les étapes Nord. Soit $M_1[P_1, Q_1]$ le matroïde transversal sur l'ensemble support $\{1, \ldots, m+r\}$ avec comme présentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, r\})$, où N_i désigne l'intervalle $[s_i = i, m+i = t_i]$. Ainsi, l'entier $x = 2$ est tel que $s_1 < x < t_1$ et $s_2 < x+1 < t_2$ et donc, d'après le Corollaire 4, $P(M_1)$ a une séparation par hyperplan non triviale. Notons que pour tout r le sous-ensemble de $\{1, \ldots, m+r\}$ est une base de M_1, en d'autres mots, M_1 est isomorphe à $U_{m+r,r}$ (et donc, nous avons trouvé un cas particulier du Corollaire 3).

Nous terminons cette section par la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Si $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ est une séparation par hyperplan non triviale de $P(M)$ alors les ensembles des bases des matroïdes M_1 et M_2 sont de la forme donnée dans le Lemme 1 pour une partition convenable de E vérifiant la propriété (P1).*

6 Somme directe

Notre résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3. *Soient $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ et $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ des matroïdes de rang r_1 et r_2 respectivement où $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Alors, $P(M_1 \oplus M_2)$ a une séparation par hyperplan non triviale si et seulement si soit $P(M_1)$ soit $P(M_2)$ a une séparation par hyperplan non triviale.*

Nous pouvons d'abord démontrer le lemme suivant nécessaire à la démonstration du théorème 3.

Lemme 2. *Soient $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ et $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ des matroïdes de rang r_1 et r_2 respectivement où $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Alors, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ est l'ensemble des bases d'un matroïde*

si et seulement si $\mathcal{A} = \{X \cup Y : X \in \mathcal{A}_1,\ Y \in \mathcal{A}_2\}$ *où* $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}(M_i)$ *est l'ensemble des bases d'un matroïde pour* $i = 1, 2$.

Démonstration. (*Suffisance*) Nous remarquons que $\mathcal{A} = \mathcal{B}(M(\mathcal{A}_1) \oplus M(\mathcal{A}_2))$ où $M(\mathcal{A}_i)$ est le matroïde donné par l'ensemble des bases $\mathcal{A}_i$ sur E_i, $i = 1, 2$. Ainsi, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ et, par définition de la somme directe, A est l'ensemble des bases d'un matroïde.

(*Necessité*) Nous supposons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ est l'ensemble des bases d'un matroïde, apellé $M(\mathcal{A})$. Nous posons

$$\mathcal{A}_1 = \{B \cap E_1 : B \in \mathcal{A}\} \text{ et } \quad \mathcal{A}_2 = \{B \cap E_2 : B \in \mathcal{A}\}.$$

Nous montrons d'abord que $\mathcal{A}_1$ est l'ensemble des bases d'un matroïde (il peut également être démontré que $\mathcal{A}_2$ est l'ensemble des bases d'un matroïde en utilisant des arguments similaires). Nous montrons ainsi que l'axiome d'échange de base est vérifié. Le cas où $|\mathcal{A}_1| = 1$ est clair. Supposons que $|\mathcal{A}_1| \geq 2$. Soit $D_1, D_2 \in \mathcal{A}_1$. Ainsi, il existe $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tel que $B_i \cap E_1 = D_i$, $i = 1, 2$. Comme $M(\mathcal{A})$ est un matroïde, alors si $e \in (B_1 \setminus B_2) \cap E_1 = D_1 \setminus D_2$ il existe $f \in B_2 \setminus B_1$ tel que $B_1 - e + f \in \mathcal{A}$. Comme $e \in E_1$, alors $|(B_1 - e) \cap E_2| = r_2$ ce qui implique que $f \notin E_2$ (sinon, $|(B_1 - e + f) \cap E_2| = r_2 + 1$, ce qui est impossible). Ainsi, $f \in E_1$ et donc $f \in D_2 \setminus D_1$. Par conséquent, $(B_1 - e + f) \cap E_1 = D_1 - e + f \in \mathcal{A}_1$. Nous constatons que cela implique la remarque suivante :

Remarque 2. *Pour tout* $e \in D_1 \setminus D_2$, *il existe* $f \in D_2$ *tel que si* $D_1 \cup Y \in \mathcal{A}$, *alors* $(D_1 - e + f) \cup Y \in \mathcal{A}$ *pour chaque* $Y \in \mathcal{B}(M_2)$.

Nous montrons maintenant que $\mathcal{A} = \{X \cup Y : X \in \mathcal{A}_1,\ Y \in \mathcal{A}_2\}$. Il est clair que $\mathcal{A} \subseteq \{X \cup Y : X \in \mathcal{A}_1,\ Y \in \mathcal{A}_2\}$. Soient $X' \in \mathcal{A}_1$ et $Y' \in \mathcal{A}_2$, nous allons montrer que $X' \cup Y' \in \mathcal{A}$, et donc $\{X \cup Y : X \in \mathcal{A}_1,\ Y \in \mathcal{A}_2\} \subseteq \mathcal{A}$. Nous remarquons d'abord que pour chaque $X' \in \mathcal{A}_1$ et chaque $Y' \in \mathcal{A}_2$, il existe $Y'' \in A_2$ et $X'' \in \mathcal{A}_1$ tel que

$$X' \cup Y'' \in \mathcal{A} \text{ et } X'' \cup Y' \in \mathcal{A}.$$

Si $X' = X''$, il est clair que $X' \cup Y' \in \mathcal{A}$. Supposons alors que $X' \neq X''$. D'après la Remarque 2, pour tout $e \in X'' \setminus X'$, il existe $f \in X'$ tel que $(X'' - e + f) \cup Y' \in \mathcal{A}$. Nous pouvons alors construire un chemin $X'' = D_1, \ldots, D_m = X'$ qui connecte X'' à X' tel que $D_i \cup Y' \in \mathcal{A}$ pour chaque $i = 1, \ldots, m - 1$. Comme $D_1 \cup Y' = X'' \cup Y' \in \mathcal{A}$, alors nous pouvons conclure que $D_m \cup Y' = X' \cup Y' \in \mathcal{A}$. □

Nous pouvons maintenant prouver le thèoréme 3.

Preuve du Theoreme 3. (*Necessité*) Nous supposons que $P(M_1 \oplus M_2) = P(A) \cup P(C)$ est une séparation par hyperplan non triviale pour des matroïdes particuliers A et C. Comme $\mathcal{B}(A), \mathcal{B}(C) \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$; alors d'après le Lemme 2, on a

$$\mathcal{B}(A) = \{X \cup Y : X \in \mathcal{A}_1, Y \in \mathcal{A}_2\} \text{ et } \mathcal{B}(C) = \{X \cup Y : X \in \mathcal{C}_1, Y \in \mathcal{C}_2\}$$

, où $\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ et $\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{B}(M_2)$ sont l'ensemble des bases d'un matroïde.

Nous savons que $\mathcal{B}(A) \cup \mathcal{B}(C) = \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$. Alors nous affirmons que $\mathcal{A}_2 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{B}(M_2)$ et $\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(M_1)$ (ou, symétriquement, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{C}_1 = \mathcal{B}(M_1)$ et $\mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}(M_2)$). En effet, si $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{B}(M_1)$, alors il existe $X' \in \mathcal{B}(M_1)$ avec $X' \notin \mathcal{A}_1$ tel que pour tout $Y \in \mathcal{B}(M_2)$, on a $X' \cup Y \in \mathcal{B}(A) \cup \mathcal{B}(C)$. En outre, comme $X' \cup Y \notin \mathcal{B}(A)$, alors $X' \cup Y \in \mathcal{B}(C)$. De plus, $\{X' \cup Y : Y \in \mathcal{B}(M_2)\} \subseteq \mathcal{B}(C)$, et donc $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}(M_2)$, ce qui implique que $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{B}(M_1)$ (comme $\mathcal{B}(C) \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$). De même, nous pouvons également obtenir que $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(M_2)$. Maintenant, si $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}(M_1)$, alors $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{B}(M_2)$ (car $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$). Nous obtenons, en utilisant des arguments semblables à ceux susmentionnés, que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}(M_1)$ et $\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{B}(M_2)$.

Donc, supposons que $\mathcal{A}_2 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{B}(M_2)$, et $\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(M_1)$. Nous avons

$$\mathcal{B}(A) \cup \mathcal{B}(C) = \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2) = \{X \cup Y : X \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{C}_1,\ Y \in \mathcal{B}(M_2)\}$$

et ainsi, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{C}_1 = \mathcal{B}(M_1)$. Alors,

$$\mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C) = \{X \cup Y : X \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_1,\ Y \in \mathcal{B}(M_2)\} \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$$

donc, comme $\mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C)$ est un ensemble des bases d'un matroïde alors, d'après le lemme 2, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_1$ est un ensemble des bases d'un matroïde. En outre, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{C}_1$ forment une décomposition des bases non triviale de M_1.

Nous allons montrer que cette décomposition des base d'un matroïde induit une séparation par hyperplan non triviale. À cette fin, nous montrons d'abord qu'il existe un hyperplan contenant les éléments $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_1$ et qui ne soutient pas $P(M_1)$. Soit H l'hyperplan correspondant à la séparation par hyperplan non triviale $P(M_1 \oplus M_2) = P(A) \cup P(C)$. Notons que $dim(H) \leq |E_1| + |E_2| - 2$ comme $dim(P(M_1 \oplus M_2)) \leq |E_1| + |E_2|$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $dim(H) = |E_1| + |E_2| - 2$, sinon nous considérons $P(M_1 \oplus M_2)$ inclus dans $\mathbb{R}^{|E_1|+|E_2|}$ et étendons proprement l'équation de H. Ainsi, l'équation de H peut être écrite comme

$$H(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|E_1|+|E_2|} : \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{x} \rangle = p \text{ où } \mathbf{e}^i = \sum_{j \in E_i} \alpha_j^i e_j \text{ avec } \alpha_j^i \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{N} \right\}$$

où e_j^i désigne le $j^{\text{éme}}$ vecteur de base standard de $\mathbb{R}^{|E_i|}$ pour chaque $i = 1, 2$.

L'hyperplan H contient la facette commune de $P(A)$ et $P(C)$ (qui est formée à partir des éléments de $\mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C)$). Maintenant, il existe $X' \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_1$ tel que pour tout

$Y \in \mathcal{B}(M_2)$ on a $X' \cup Y \in \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C)$ et $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x}' \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{y} \rangle = p$. Donc, pour tout $Y \in \mathcal{B}(M_2)$

$$\langle \mathbf{e}^2, \mathbf{y} \rangle = p - \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x}' \rangle = p - p' \tag{1}$$

où $p' \in \mathbb{N}$. Maintenant, il existe $Y \in \mathcal{B}(M_2)$ tel que $X \cup Y \in \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C)$ pour tout $X \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_1$, donc

$$\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{y} \rangle = p$$

et alors, par (1),

$$\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle = p'. \tag{2}$$

Comme $P(A) \cup P(C)$ est une séparation par hyperplan non triviale alors il existe $B_1 = X_1 \cup Y_1 \in \mathcal{B}(A)$ avec $X_1 \in \mathcal{A}_1$ et $Y_2 \in \mathcal{B}(M_2)$ tel que $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{x}' \rangle > p$. Alors, par (2), on a $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + p - p' > p$ et donc,

$$\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle > p'. \tag{3}$$

De même, il existe $B_2 = X_2 \cup Y_2 \in \mathcal{B}(C)$ avec $X_1 \in \mathcal{C}_1$ et $Y_2 \in \mathcal{B}(M_2)$ tel que $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{x}' \rangle < p$. Alors, par (2), on a $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + p - p' < p$ et,

$$\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle < p'. \tag{4}$$

Par conséquent, d'aprés (2), l'hyperplan

$$H'(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|E_1|+|E_2|} : \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle = p' \text{ où } \mathbf{e}^1 = \sum_{j \in E_1} \alpha_j^1 e_j \text{ with } \alpha_j^1 \in \mathbb{R} \right\}$$

contient les éléments de $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_1$. En outre, H' ne soutient pas $P(M_1)$ par (3) et (4).

Nous allons montrer que n'importe quelle arête de $P(M_1)$ est aussi une arête de $P(M(A_1))$ ou $P(M(C_1))$. Nous faisons cela par contradiction. Soit $B_A \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{C}_1$ et $B_C \in \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{A}_1$ avec $\Delta(B_A, B_C) = 2$. Il existe $Y \in \mathcal{B}(M_2)$ tel que $B_A \cup Y \in \mathcal{B}(A) \setminus \mathcal{B}(C)$ et $B_C \cup Y \in \mathcal{B}(C) \setminus \mathcal{B}(A)$. Comme $\Delta(B_A \cup Y, B_C \cup Y) = \Delta(B_A, B_C) = 2$, alors l'arête de $P(M_1 \oplus M_2)$ reliant $B_A \cup Y$ à $B_C \cup Y$ n'est une arête ni de $P(A)$ ni de $P(C)$, ce qui est une contradiction comme $P(A) \cup P(C)$ est une séparation par hyperplan non triviale.

Par conséquent, d'après la Proposition 4, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_1$ est l'ensemble des sommets d'un facette commune de $P(M(\mathcal{A}_1))$ et $P(M(\mathcal{C}_1))$ et, par Corollaire 1, $P(M_1) = P(M(\mathcal{A}_1)) \cup P(M(\mathcal{C}_1))$.

(*Suffisance*) Sans perte de généralité, nous supposons que $P(M_1) = P(N_1) \cup P(N_2)$ est une séparation par hyperplan non triviale pour certains matroïdes N_i, $i = 1, 2$. Soient

$$L_1 = N_1 \oplus M_2,\ L_2 = N_2 \oplus M_2 \text{ et } L_1 \cap L_2 = (N_1 \cap N_2) \oplus M_2,$$

Comme N_1, N_2 et $N_1 \cap N_2$ sont des matroïdes alors L_1 et L_2 et $L_1 \cap L_2$ sont également des matroïdes où l'ensemble des bases de L_1 et L_2 sont

$$\mathcal{B}(L_1) = \{X \cup Y : X \in \mathcal{B}(N_1),\ Y \in \mathcal{B}(M_2)\} \text{ et } \mathcal{B}(L_2) = \{X \cup Y : X \in \mathcal{B}(N_2),\ Y \in \mathcal{B}(M_2)\}$$

Par ailleurs, $\mathcal{B}(L_1) \cup \mathcal{B}(L_2) = \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ (comme $\mathcal{B}(N_1) \cup \mathcal{B}(N_2) = \mathcal{B}(M_1)$), $\mathcal{B}(L_i) \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ (comme $\mathcal{B}(N_i) \subset \mathcal{B}(M_1)$ pour chaque $i = 1, 2$) et $\mathcal{B}(L_1) \cap \mathcal{B}(L_2) \neq \emptyset$ (comme $\mathcal{B}(N_1) \cap \mathcal{B}(N_2) \neq \emptyset$). Ainsi, les matroïdes donnés par l'ensemble des bases de $\mathcal{B}(L_1)$ et $\mathcal{B}(L_2)$ forment une décomposition des bases non triviale de $\mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$.

Nous allons montrer que cette décomposition de base induit une séparation par hyperplan non triviale. À cette fin, nous montrons d'abord qu'il existe un hyperplan contenant les éléments de $\mathcal{B}(L_1) \cap \mathcal{B}(L_2)$ et ne soutenant pas $P(M_1 \oplus M_2)$. Soit H l'hyperplan dans $\mathbb{R}^d$ où d est la dimension de $P(M_1)$ contenant une facette commune à $P(N_1)$ et $P(N_2)$. On suppose que $P(N_1)$ réside dans le demi-espace fermé $\overline{H}^+$ et que $P(N_2)$ réside dans l'autre demi-espace fermée $\overline{H}^-$ (H existe comme $P(N_1) \cup P(N_2)$ est une séparation par hyperplan non triviale). En outre, il existe $B_1 \in \mathcal{B}(N_1)$ et $B_2 \in \mathcal{B}(N_2)$ tel que B_1 réside dans le demi-espace ouvert H^+ tandis que B_2 réside dans le demi-espace ouvert H^-. Soit H_1 l'hyperplan défini par la même équation que H dans $\mathbb{R}^{d'}$ où d' est la dimension de $P(M_1 \oplus M_2)$ (notons que $d' > d$). Alors, H_1 contient les éléments de $\mathcal{B}(L_1) \cap \mathcal{B}(L_2)$. En outre, H_1 ne soutient pas $P(M_1 \oplus M_2)$ comme $B_1 \cup Y \in \mathcal{B}(L_1)$ réside dans le demi-espace ouvert H_1^+ et $B_2 \cup Y \in \mathcal{B}(L_2)$ réside dans le demi-espace ouvert H_1^- pour certains $Y \in \mathcal{B}(M_2)$.

Nous allons montrer que n'importe quelle arête de $P(M_1 \oplus M_2)$ est aussi une arête de $P(L_1)$ ou $P(L_2)$. Nous faisons cela par contradiction, soient $B_1 \in \mathcal{B}(L_1) \setminus \mathcal{B}(L_2)$ et $B_2 \in \mathcal{B}(L_2) \setminus \mathcal{B}(L_1)$ avec $\Delta(B_1, B_2) = 2$. Comme $B_1 = X_1 \cup X_2$ avec $X_1 \in \mathcal{B}(N_1), X_1 \notin \mathcal{B}(N_2)$ et $B_2 = Y_1 \cup Y_2$ avec $Y_1 \notin \mathcal{B}(N_1), Y_1 \in \mathcal{B}(N_2)$ alors $X_1 \neq Y_1$. Donc, $X_2 = Y_2$ (comme $\Delta(B_1, B_2) = 2$).

Par conséquent, d'après le corollaire 1, $\mathcal{B}(L_1) \cap \mathcal{B}(L_2)$ est l'ensemble des sommets d'une facette de $P(L_1)$ et $P(L_2)$ et $P(M_1 \oplus M_2) = P(L_1) \cup P(L_2)$.

Exemple 6 : Nous savons [Bonin *et al.*, 2003] que la classe des matroïdes chemin du réseau est close par somme directe, ceci est illustré à la figure 10.

Soient $M[P_1, Q_1]$ et $M[P_2, Q_2]$ deux matroïdes chemin du réseau. Alors, d'après le corollaire 4, $P(M[P_1, Q_1])$ (ou $P(M[P_2, Q_2])$) a une séparation par hyperplan non triviale et donc, d'après le théorème 3, $P(M[P_1, Q_1] \oplus M[P_2, Q_2])$ en a une également.

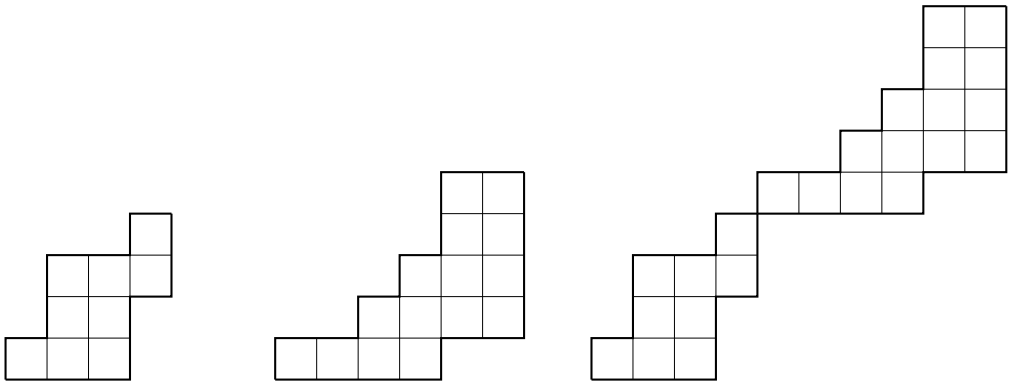


FIGURE 10 – Somme directe de deux matroïdes chemin du réseau

7 Matroïdes binaires

Maurer [Maurer, 1973a, Theorem 2.1] a donné une caractérisation complète de ces graphes que sont les graphes des bases de matroïde. Soient X, Y deux sommets et soit $\delta(X, Y)$ la distance entre X et Y dans $G(M)$. Si $\delta(X, Y) = 2$ (c'est à dire, X et Y ne sont pas adjacent mais ils sont reliés par un chemin de longueur deux), alors leur *voisinage commun* est défini comme l'ensemble des sommets adjacents à la fois à X et à Y. Maurer a montré que X, Y plus leurs voinsins forment un carré, une pyramide ou octaèdre, voir la figure 11.

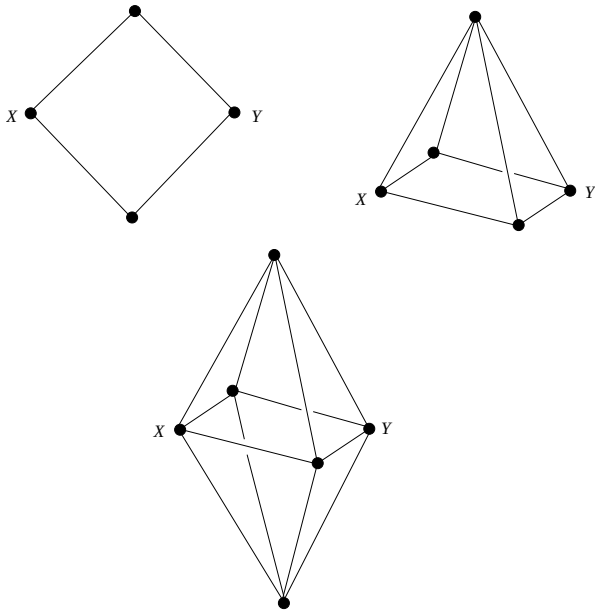


FIGURE 11 – un carré, une pyramide ou un octaèdre

Dans [Maurer, 1973b, Theorem 4.1] Maurer a prouvé qu'un matroïde M est binaire si et seulement si $G(M)$ ne contient pas d'octaèdre induit. Notons que $G(U_{4,2})$ est donné par un octaèdre (voir Figure 4) et que les octaèdres induits dans $G(M)$ correspondent

à des *mineurs* de M isomorphique à $U_{4,2}$.

Corollaire 5. *Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde binaire et soient $X, Y \in \mathcal{B}$ avec $\delta(X, Y) = 2$. Alors, il existe un unique couple $U, V \in \mathcal{B}$ tel que X, U, V, Y forment un* carré induit *dans $G(M)$, ce qui correspond à, X, U, V, Y forment un cycle de longueur quatre sans diagonale.*

Démonstration. L'existence d'un carré induit résulte de la caractérisation de Maurer. En effet, pour chaque paire de sommets X, Y avec $\delta(X, Y) = 2$ nous avons que leurs voisins communs forment un carré ou une pyramide. Dans les deux cas, nous pouvons trouver le carré désiré induit. Pour l'unicité, supposons qu'il y a deux carrés induits, par exemple X, U, V, Y et X, U', V', Y avec $\{U, V\} \neq \{U', V'\}$. Si exactement un de U, V est dans $\{U', V'\}$, mettons $V = V'$, voir Figure 12 (a) (respectivement, si aucun des éléments U, V n'appartient à $\{U', V'\}$, voir Figure 12 (b)) alors, par l'axiome d'échange de base $\{X, V = V', U, U', Y\}$ doit induire une pyramide, et donc ni X, U, V, Y ni X, U', V', Y ne forment un carré induit (respectivement, $\{X, V = V', U, U', Y\}$ doit induire un octaèdre ce qui n'est pas possible comme M est binaire).

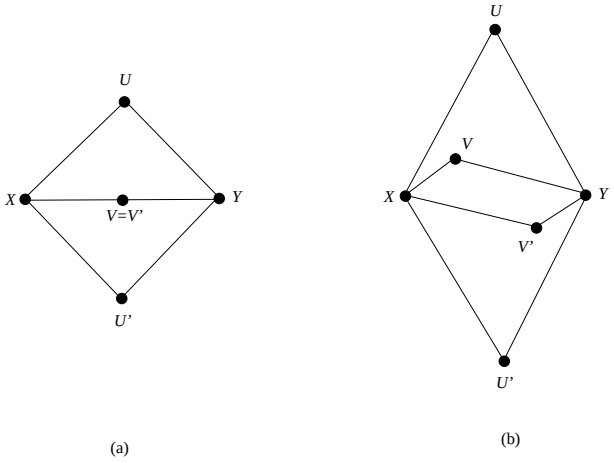


FIGURE 12 – Carré vide possible

□

Lemme 3. *Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde binaire et soit $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}_1$ est l'ensemble des bases d'un matroïde, disons M_1. Si $X \in \mathcal{B}_1$ et le voisinage de X (c'est-à-dire l'ensemble des sommets de $G(M)$ adjacent à X) sont des éléments de $\mathcal{B}_1$ alors $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$.*

Démonstration. Nous remarquons d'abord que M_1 est binaire et, comme M est binaire, nous considérons les colonnes de la matrice de la représentation de M correspondantes aux éléments de $\mathcal{B}_1$. Soit $X \in \mathcal{B}_1$ et soit $\delta_i(X) = \{Y \in \mathcal{B}(M) | \delta(X, Y) = i\}$. Nous allons utiliser l'induction sur i. Les cas $i = 0, 1$ sont vérifiées par hypothèse. Supposons que $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_i(X) \subset \mathcal{B}_1$ et soit $Y \in \delta_{k+1}(X)$. Comme $G(M)$ est connexe, alors il existe un

chemin joignant X à Y et il existe donc $Z \in \delta_{k-1}(X)$ tel que $\delta(Z,Y) = 2$. D'après le Corollaire 5, il existe un unique couple $U, V \in \mathcal{B}$ tel que Z, U, V, Y forment un carré induit dans $G(M)$. Donc, $\delta(X,U) = \delta(X,V) = k$ implique que $U, V \in \delta_k(X)$. Ainsi, comme $\delta_k(X) \in \mathcal{B}_1$ et M_1 est binaire alors, d'après le Corollaire 5, il existe un unique couple $Z', Y' \in \mathcal{B}_1$ tel que Z', U, V, Y' forment un carré induit dans $G(M_1)$. Comme Z', U, V, Y' est aussi un carré induit dans $G(M)$ alors (par unicité), nous devons avoir $Z' = Z$ et $Y' = Y$. Par conséquent, $Y \in \mathcal{B}_1$. □

Théorème 4. *Soit M un matroïde binaire. Alors, $P(M)$ n'a pas de séparation par hyperplan non triviale.*

Démonstration. Par contradiction, supposons que $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ est une séparation par hyperplan non triviale pour certains matroïdes M_1, M_2 (et donc $P(M_1), P(M_2) \neq P(M)$). Cela induit la décomposition des bases du matroïde donc $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)$. Pour une séparation par hyperplan nous devons de toute façon avoir la condition (vii) du Théorème 2 c'est à dire que toutes les arêtes de $P(M)$ sont inclues dans $P(M_1)$ ou $P(M_2)$. Pour avoir une séparation non triviale il faut de plus un sommet S de $P(M_1)$ qui n'appartient pas à $P(M_2)$. Donc toutes les arêtes ayant pour sommet S appartiennent à $P(M_1)$, ce qui implique que $P(M_1)$ contient le sommet S et tous ses voisins. Mais alors, d'après le lemme 3, $M_1 = M$ ce qui est une contradiction comme la séparation par hyperplan n'est pas triviale.

□

Notons que le théorème 4 peut être généralisé à des décompositions $P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$ avec $t \geq 2$ si au moins un des $P(M_i)$ contient un sommet de $P(M)$ et tous ses voisins.

Exemple 7 : Le matroïde *Fano*, désigné par F_7, est matroïde de rang 3 avec 7 éléments ayant comme ensemble des bases tous les triplets, sauf $\{1,5,3\}, \{1,2,6\}, \{1,4,7\}, \{2,3,4\}, \{2,5,7\}, \{3,6,7\}$ et $\{4,5,6\}$, voir Figure 13.

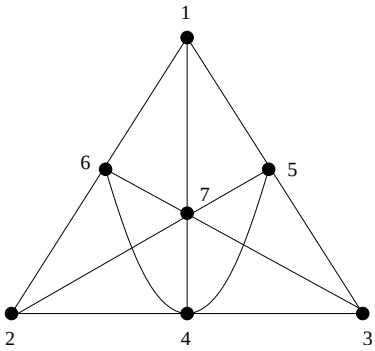


FIGURE 13 – Représentation euclidienne de F_7.

Il est connu que F_7 est binaire, par exemple, il peut être représenté par la matrice suivante sur $\mathbb{F}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, d'après le théorème 4, F_7 n'a pas de séparation par hyperplan non triviale. Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 4 car tous les matroïdes graphiques sont binaires.

Corollaire 6. *$P(M)$ n'a pas de séparation par hyperplan non triviale si M est un matroïde graphique.*

En particulier, le matroïde $M(K_4)$ n'a pas de séparation par hyperplan non triviale.

Troisième partie

Orientation des matroïdes chemins du réseau

Sommaire

8 Introduction **44**

9 Matroïdes chemin du réseau et orientations **44**

9.1 Orientation des matroïdes chemin du réseau 46

10 Simplexes dans les arrangements **50**

10.1 Nombre de simplexes dans $\mathcal{LOM}$ 58

10.2 Problème de Grunbaum 62

8 Introduction

Soit $\mathcal{M}$ un matroïde orienté sur l'ensemble support $\{1, \ldots, n\}$. Nous notons $\mathcal{C}(\mathcal{M}), \mathcal{B}(\mathcal{M})$ et $r(\mathcal{M})$ l'ensemble des circuits, l'ensemble des bases et le rang de $\mathcal{M}$ respectivement [2].

Dans cette partie, nous étudions la classe des *matroïdes orientés du réseau*, noté $\mathcal{LOM}$. Cette classe découlent naturellement des *matroïdes chemin du réseau* qui sont connus pour être des *matroïdes transversaux* [Piff et Welsh, 1970] et donc representables. Nous allons voir qu'un matroïde de la classe $\mathcal{LOM}$ peut être vu comme l'union de matroïdes orientés (pas nécessairement uniforme) de rang un. Cela nous permet de donner une représentation particulière de la matrice de ces matroïdes à partir de laquelle ils peuvent être étudiés. $\mathcal{LOM}$ contient la classe que l'on appelle *matroïdes orientés de Lawrence* (dans le cas particulier où les matroïdes de rang un sont tous uniformes) qui, à son tour, contient un cas très particulier bien connu comme le *matroïde orienté alterné* .

Après une brève discussion sur les matroïdes chemin du réseau, dans la section suivante, nous allons définir les matroïdes orientés du réseau. Nous présentons ensuite une caractérisation des matroïdes orientés appartenants à $\mathcal{LOM}$ (Théorème 5) et montrons que la classe $\mathcal{LOM}$ est fermée par mineur et par dualité (Théorème 6). En particulier (dans le cas uniforme) cela implique un résultat (non publié) [Lawrence, 1984] indiquant que la classe des matroïdes orientés de Lawrence est fermée par mineur et par dualité. Dans la section 10, nous étudions les arrangements d'hyperplans obtenus à partir des matroïdes orientés du réseau, notés $\mathcal{LOM}$-arrangements. En étendant certains résultats de Forge et Ramírez Alfonsín [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] , nous sommes en mesure de caractériser les simplexes des $\mathcal{LOM}$-arrangements (Theorem 7). Nous utilisons ces arrangements pour la construction d'un arrangement de n hyperplans en dimension d avec $O(2^k(\frac{n}{k})^k)$ simplexes pour $n < k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ (Theorem 9). Nous discutons ensuite d'une conjecture due à Grunbaum concernant les 2-colorations des arrangements de pseudodroites [Grünbaum, 1971]. Nous allons généraliser cette conjecture en dimension supérieure et montrons que la conjecture généralisée est valable pour les $\mathcal{LOM}$-arrangements.

9 Matroïdes chemin du réseau et orientations

Rapellons la définition classique : un *chemin réseau* commence au point $(0, 0)$ et utilise des étapes $(1, 0)$ et $(0, 1)$, appelées *Est* et *Nord*. Soient $P = p_1, \ldots, p_{r+m}$ et

2. Les résultats de ce chapitre ont données lieu à la publication du papier [Chatelain, 2010]

$Q = q_1, \ldots, q_{r+m}$ deux chemins du réseau de $(0,0)$ à (m,r) avec P qui ne va jamais au dessus de Q. Soit $\{p_{s_1}, \ldots, p_{s_r}\}$ l'ensemble des étapes Nord de P avec $s_1 < \cdots < s_r$; de même, soit $\{q_{t_1}, \ldots, q_{t_r}\}$ l'ensemble des étapes Nord de Q avec $t_1 < \cdots < t_r$. Soit $M[P,Q]$ le matroïde transversal qui a comme ensemble support $\{1, \ldots, m+r\}$ et comme présentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, r\})$ où N_i désigne l'intervalle d'entiers $[s_i, t_i]$. Les matroïdes transversaux construits comme ci-dessus sont appelés *matroïdes chemin du réseau*. Étant donné un sous-ensemble X de $\{1, \ldots, m+r\}$, on définit le chemin du réseau $P(X) = u_1, \ldots, u_{m+r}$ où u_i est une étape Nord si $i \in X$, une étape Est autrement. Dans [Bonin *et al.*, 2003] il a été prouvé qu'un sous-ensemble B de $\{1, \ldots, m+r\}$ avec $|B| = r$ est une base de $M[P,Q]$ si et seulement si le chemin du réseau associé $P(B)$ reste dans la région délimitée par P et Q.

Nous allons maintenant donner une autre définition uniquement grace à l'union de matroïdes de rang 1, celle ci sera plus pratique pour chercher une orientation de ce type de matroïde.

Soient $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_k$ des matroïdes sur le même ensemble support $\{1, \ldots, n\}$ de rangs r_i respectivement et soit $\mathcal{I}_i$ les ensembles des indépendants de $\mathcal{M}_i$ pour chaque i. Nous rappelons que *l'union* de $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_k$, notée $\mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_k$, est un matroïde sur $\{1, \ldots, n\}$ avec comme ensemble des indépendants $\mathcal{I}(\mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_k) = \{I_1 \cup \cdots \cup I_k : I_i \in \mathcal{I}_i\}$. Cette opération est associative et commutative. L'union de matroïdes de rang 1 est un matroïde transversal dont la présentation est l'ensemble des bases de chaque matroïde de rang 1.

Proposition 5. *Soient P et Q deux r-sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ avec $P(i) \leq Q(i)$ pour chaque $i = 1, \ldots, r$. Alors, le matroïde chemin du réseau $M[P,Q]$ est isomorphe à $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ où $\mathcal{M}_i$ est un matroide de rang 1 sur $\{1, \ldots, n\}$ où $\mathcal{B}(\mathcal{M}_i) = \{x : P(i) \leq x \leq Q(i)\}$ pour chaque $i = 1, \ldots, r$.*

Ce dernier résultat est une conséquence immédiate de ce qui suit.

Proposition 6. *Soient P et Q deux r-sous-ensemble ordonnés de $\{1, \ldots, n\}$ avec $P(i) \leq Q(i)$ pour chaque $i = 1, \ldots, r$. Alors,*

(a) le rang de $M[P,Q]$ esr r, et

(b) si $B = \{x_1, \ldots, x_r\}$ avec $x_1 < \cdots < x_r$ alors $B \in \mathcal{B}(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i)$ si et seulement si $x_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ pour chaque $i = 1, \ldots, r$.

Démonstration. (a) Nous avons que $r(M[P,Q]) = r$ puisque pour chaque $i = 1, \ldots, r-1$, $P(i) < P(i+1)$ donc $\{P(1), \ldots, P(r)\}$ forme une base de $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$.

(b) (Suffisance) Il est clair que si $x_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ pour tout $i = 1, \cdots, r$ alors $B = \{x_1, \ldots, x_r\}$ est une base de $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$.

(Necessité) Nous procèdons par contradiction. Supposons que $\{x_1, \ldots, x_r\}$ est une base de $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ avec $x_i \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ pour au moins un i. Alors,

$id \notin \Sigma = \{\sigma : \text{ permutation de } \{1, \cdots, r\} : x_{\sigma(i)} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)\}$.

Nous choisissons σ' la permutation de Σ qui maximise le nombre de points invariants (qui sont, l'ensemble des indices j tel que $\sigma(j) = j$), alors $\sigma' \neq id$. Soit k le minimum de $\{i : \sigma'(i) \neq i\}$, alors $\sigma'(k) > k$ et donc $x_{\sigma'(k)} > x_k$ avec $x_{\sigma'(k)} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_k)$. Nous remarquons qu'il existe $l = \sigma'^{-1}(k) > k$ tel que $x_k \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_l)$. Par conséquent $P(k) < P(l) \leq x_k < x_{\sigma'(k)} \leq Q(k) < Q(l)$. Nous pouvons définir σ'' la permutation où, pour tout $i \notin \{k, l\}$ nous avons $\sigma''(i) = \sigma'(i)$ et $\sigma''(k) = k$ et $\sigma''(l) = \sigma'(k)$. Les inégalités précédentes prouvent que $\sigma'' \in \Sigma$ et σ'' a plus de points invariants que σ' ce qui est une contradiction. □

9.1 Orientation des matroïdes chemin du réseau

Pour l'union de deux matroïdes orientés $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sur le même ensemble support, Las Vergnas [Las Vergnas, 1978a] a proposé une construction telle que $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ est un matroïde orientable avec $\underline{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2} = \underline{\mathcal{M}_1} \cup \underline{\mathcal{M}_2}$, et donc

$$r(\underline{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2}) = r(\underline{\mathcal{M}_1} \cup \underline{\mathcal{M}_2}) \leq r(\underline{\mathcal{M}_1}) + r(\underline{\mathcal{M}_2}). \tag{5}$$

Lawrence et Weinberg [Lawrence et Weinberg, 1981] ont prouvé que si l'égalité est atteinte dans (5) nous avons

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2}(e_1, \ldots, e_{r(\mathcal{M}_1)}, f_1, \ldots, f_{r(\mathcal{M}_2)}) = \chi_{\mathcal{M}_1}(e_1, \ldots, e_{r(\mathcal{M}_1)}) \\ \times \chi_{\mathcal{M}_2}(f_1, \ldots, f_{r(\mathcal{M}_2)}) \end{aligned} \tag{6}$$

pour chaque $\{e_1, \ldots, e_{r(\mathcal{M}_1)}, f_1, \ldots, f_{r(\mathcal{M}_2)}\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$, tel que pour toutes les permutations lexicographiques antérieures $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{r(\mathcal{M}_1)}, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{r(\mathcal{M}_2)})$, soit

$\chi_{\mathcal{M}_1}(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{r(\mathcal{M}_1)}) = 0$ soit $\chi_{\mathcal{M}_2}(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{r(\mathcal{M}_2)}) = 0$.

Notons que l'opération de l'union est aussi associative, mais, contrairement au cas non-orienté, elle n'est pas commutative en raison de l'ordre lexicographique

Nous définissons le *matroïde orienté du réseau*, $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$, comme le matroïde obtenu par l'union de matroïdes orientés de rang un $\mathcal{M}_i$ où $\mathcal{B}(\mathcal{M}_i) = \{x : P(i) \leq x \leq Q(i)\}$ pour des P et Q r-sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ totalement ordonnés avec $P(i) \leq Q(i)$.

Proposition 7. *Soit $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ un matroïde orienté du réseau sur $\{1, \ldots, n\}$. Alors,*

(a) le rang de $\mathcal{M}$ est r, et

(b) si $B = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \{1, \ldots, n\}^r$, $x_1 < \cdots < x_r$, alors $\chi_{\mathcal{M}}(B) = \prod_{i=1}^{r} \chi_{\mathcal{M}_i}(x_i)$.

Démonstration. (a) Le rang de $\mathcal{M}$ est donné par le rang de $\underline{\mathcal{M}}$ qui, d'après la proposition 6, est égal à r.

(b) Soit $B = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \{1, \ldots, n\}^r$ avec $x_1 < \cdots < x_r$, nous avons deux cas

Case 1) Si $B \notin \mathcal{B}(\mathcal{M})$, alors d'après la Proposition 6, il existe k tel que $x_k \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_k)$ pour un certain $1 \leq k \leq r$. Donc, $\chi_{\mathcal{M}_k}(x_k) = 0$ et alors $\chi_{\mathcal{M}}(B) = 0$.

Cas 2) Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ alors, par la proposition 6, pour tout $i = 1, \ldots, r$ nous avons $x_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$. Le chirotope de l'union des matroïdes orientés (6) donne $\chi_{\mathcal{M}}(B) = \chi_{\bigcup_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_i}(x_1, \ldots, x_{r-1})\chi_{\mathcal{M}_r}(x_r)$ et le résultat suit de manière récursive.

□

Nous désignerons par $\mathcal{LOM}$ la classe des matroïdes orientés du réseau. Nous rappelons qu'un *matroide uniforme* $\mathcal{U}_r^n$ est un matroïde avec comme ensemble de bases tous les r-sous-ensembles d'un ensemble de n elements. Un *matroïde orienté de Lawrence* [Lawrence et Weinberg, 1981] est obtenu par l'union de r matroïdes orientés uniformes de rang un sur le même ensemble support. Nous remarquons que les matroïdes orientés de Lawrence appartiennent à $\mathcal{LOM}$.

Nous pouvons représenter un matroïde orienté du réseau $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ sur $\{1, \ldots, n\}$ par une $(r \times n)$-matrice $M = (m_{i,j})$ où $m_{i,j} = \chi_{\mathcal{M}_i}(j)$, ce qui veut dire que la $i^{\text{éme}}$ ligne de M correspond au chirotope de $\mathcal{M}_i$. D'après la Proposition 7, pour $B = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \{1, \ldots, n\}^r$ avec $x_1 < \cdots < x_r$,

$$\chi_{\mathcal{M}}(B) = \prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i}. \tag{7}$$

Nous pouvons présenter cette représentation matricielle en gardant les signes et les zéros.

Exemple 3. *Le matroïde orienté alterné est le matroïde uniforme avec la propriété que les chirotope des bases sont tous positifs (ou tous négatifs). Une représentation matricielle pour un matroïde orienté alterné de rang* 3 *sur* 8 *éléments est donnée ci-dessous.*

1	2	3	4	5	6	7	8
+	+	+	+	+	+	0	0
0	+	+	+	+	+	+	0
0	0	+	+	+	+	+	+

Exemple 4. *Soit $M[P, Q]$ le matroïde orienté du réseau de rang* 3 *sur* 8 *éléments defini par $Q(\{1, 2, 3\})$ et $P(\{1, 7, 8\})$. Une orientation de $M[P, Q]$ est donnée par la représen-*

tation matricielle suivante .

1	2	3	4	5	6	7	8
+	0	0	0	0	0	0	0
0	+	+	+	+	+	+	0
0	0	+	+	−	−	+	+

Théorème 5. *Soit $\mathcal{M}$ un matroïde orienté sur $\{1,\dots,n\}$ de rang r. Alors, $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ si seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $\underline{\mathcal{M}}$ est un matroïde chemin du réseau

(b) soient $X = \{x_1,\dots,x_r\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $x_1 < \cdots < x_r$ et $Y = \{y_1,\dots,y_r\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $y_1 < \cdots < y_r$. Pour chaque $k = 1,\dots,r$, nous posons X'_k et Y'_k tels que $X'_k(i) = X(i)$ (resp. $Y'_k(i) = Y(i)$) pour $i \neq k$ et $X'_k(k) = y_k$ (resp. $Y'_k(k) = x_k$). Alors, si X'_k et Y'_k sont également dans l'ordre lexicographique, $\chi_{\mathcal{M}}(X)\chi_{\mathcal{M}}(Y) = \chi_{\mathcal{M}}(X'_k)\chi_{\mathcal{M}}(Y'_k)$.

Démonstration. (Nécessité) Si $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ alors la condition (a) est clairement vérifiée. Soit $M = (m_{i,j})$ la représentation matricielle de $\mathcal{M}$. D'après l'équation (7),

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{M}}(X)\chi_{\mathcal{M}}(Y) &= \textstyle\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} \prod_{i=1}^{r} m_{i,y_i} \\ &= \textstyle\prod_{i=1,i\neq k}^{r} m_{i,x_i} m_{k,y_k} \prod_{i=1,i\neq k}^{r} m_{i,y_i} m_{k,x_k} \\ &= \chi_{\mathcal{M}}(X'_k)\chi_{\mathcal{M}}(Y'_k)\end{aligned}$$

et donc la condition (b) est également satisfaite.

(Suffisance) Soit $\underline{\mathcal{M}}$ le matroïde chemin du réseau défini avec P, Q. Soit $M = (m_{i,j})$ la $(r \times n)$-matrice definie comme suit.

$i = r$	pour $j < P(r)$ or $j > Q(r)$	$m_{r,j} = 0$
	pour $P(r) \le j \le Q(r)$	$m_{r,j} = \chi_{\mathcal{M}}(P(1),\cdots,P(r-1),j)$
$i \notin \{1,r\}$	pour $j < P(i)$ ou $j > Q(i)$	$m_{i,j} = 0$
	pour $j = P(i)$	$m_{i,P(i)} = 1$
	pour $P(i) < j \le Q(i)$	$m_{i,j} = \prod_{p=i+1}^{r} m_{p,Q(p)} \times$
	$\chi_{\mathcal{M}}(P(1),\cdots,P(i-1),j,Q(i+1),\cdots,Q(r))$	
$i = 1$	pour $j < P(1)$ ou $j > Q(1)$	$m_{1,j} = 0$
	pour $j = P(1)$	$m_{1,P(1)} = 1$
	pour $P(1) < j \le Q(1)$	$m_{i,j} = \prod_{p=2}^{r} m_{p,Q(p)} \times$
	$\chi_{\mathcal{M}}(j,Q(2),\cdots,Q(r))$	

Nous affirmons que la matrice ci-dessus M représente $\mathcal{M}$ (et donc $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{LOM}$). Car, nous allons montrer que l'équation (7) est respectée. Soit $B = \{x_1,\dots,x_r\} \in \{1,\dots,n\}^r$ avec $x_1 < \cdots < x_r$, nous avons deux cas.

Cas 1) Si $B \notin \mathcal{B}(\mathcal{M})$, alors $\chi_M(B) = 0$. Par la Proposition 6, il existe $k \in \{1,\dots,r\}$ tel que $x_k < P(k)$ ou $Q(k) < x_k$, de sorte que la construction ci-dessus donne $m_{k,x_k} = 0$

et donc $\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = 0$.

Cas 2) Si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, alors

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = \; & \prod_{i=1}^{r}\prod_{p=i+1}^{r} m_{p,Q(p)}\chi_{\mathcal{M}}(x_1, Q(2), \ldots, Q(r))\chi_{\mathcal{M}}(P(1), x_2, Q(3), \ldots, Q(r)) \\ & \chi_{\mathcal{M}}(P(1), P(2), x_3, Q(4), \ldots, Q(r)) \cdots \chi_{\mathcal{M}}(P(1), \ldots, P(r-1), x_r).\end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que $\{x_1, Q(2), \ldots, Q(r)\}$ et $\{P(1), x_2, Q(3), \ldots, Q(r)\}$ sont des bases de $\mathcal{M}$ et $x_1 < x_2 \leq Q(2) < Q(3)$, donc l'ordre lexicographique est préservé si nous changeons x_2 par $Q(2)$. Par conséquent, par la condition (b) nous avons

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = \; & \prod_{i=1}^{r}\prod_{p=i+1}^{r} m_{p,Q(p)}\chi_{\mathcal{M}}(P(1), Q(2), \ldots, Q(r))\chi_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, Q(3), \ldots, Q(r)) \\ & \chi_{\mathcal{M}}(P(1), P(2), x_3, Q(4), \ldots, Q(r)) \cdots \chi_{\mathcal{M}}(P(1), \ldots, P(r-1), x_r).\end{aligned}$$

Mais alors, nous pouvons répéter la même procédure avec $\{x_1, x_2, Q(3), \ldots, Q(r)\}$ et $\{P(1), P(2), x_3, Q(4), \ldots, Q(r)\}$ qui sont également des bases avec $x_2 < x_3 \leq Q(3) < Q(4)$. En outre, par construction, nous avons

$$\chi_{\mathcal{M}}(P(1), Q(2), \ldots, Q(r)) = \prod_{p=2}^{r} m_{p,Q(p)}$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = \; & \prod_{i=2}^{r}\prod_{p=i+1}^{r} \chi_{\mathcal{M}}(P(1), P(2), Q(3), Q(4), \ldots, Q(r)) \\ & \chi_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, x_3, Q(4), \ldots, Q(r)) \cdots \chi_{\mathcal{M}}(P(1), \ldots, P(r-1), x_r).\end{aligned}$$

En continuant cette procédure, on obtient $\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = \chi_{\mathcal{M}}(x_1, \cdots, x_r)$. □

Théorème 6. *La classe $\mathcal{LOM}$ est fermé par mineur et par dualité.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ un matroïde orienté du réseau sur $\{1, \ldots, n\}$. Nous allons d'abord prouver que $\mathcal{M}^* \in \mathcal{LOM}$. En effet, nous montrons que $\mathcal{M}^*$ vérifie les conditions (a) et (b) du théorème 5. Dans [Bonin et De Mier, 2006], il est prouvé que $\underline{\mathcal{M}}^*$ est également un matroïde chemin du réseau, et donc la condition (a) est vérifiée.

Pour (b), soient $X = \{x_1, \ldots, x_{r^*}\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}^*)$, $x_1 < \cdots < x_r$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_{r^*}\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}^*)$, $y_1 < \cdots < y_{r^*}$. Pour chaque k nous définissons X'_k et Y'_k tel que pour tout $i \neq k$ $X'_k(i) = X(i)$ (resp. $Y'_k(i) = Y(i)$) et $X'_k(k) = y_k$ (resp. $Y'_k(k) = x_k$). Si X'_k et Y'_k sont également dans l'ordre lexicographique alors on peut supposer que $x_k < y_k$. Nous notons $\overline{X}_{<x_k} = \{1, \cdots, x_k - 1\} \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ (resp. $\overline{Y}_{<x_k} = \{1, \cdots, x_k - 1\} \setminus \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$) et $\overline{X}_{>y_k} = \{y_k + 1, \cdots, n\} \setminus \{x_{k+1}, \cdots, x_r\}$ (resp. $\overline{Y}_{>y_k} = \{y_k + 1, \cdots, n\} \setminus \{y_{k+1}, \cdots, y_r\}$)

Nous calculons le chirotope du dual

$$\chi_{\mathcal{M}^*}(X) = \chi_{\mathcal{M}}(\overline{X}_{<x_k}, x_k+1, \cdots, y_k, \overline{X}_{>y_k}) sign(X, \overline{X}_{<x_k}, x_k+1, \cdots, y_k, \overline{X}_{>y_k})$$

où *sign* désigne la signature de la permutation. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{M}^*}(X) = \; & \chi_{\bigcup_{i=1}^{x_k-k}\mathcal{M}_i}(\overline{X}_{<x_k}) \prod_{i=x_k+1}^{y_k} \chi_{\mathcal{M}_{i-k}}(i) \chi_{\bigcup_{i=y_k-k-1}^{r}\mathcal{M}_i}(\overline{X}_{>y_k}) \\ & (-1)^{x_k+r-2k} sign(X \setminus x_k, \overline{X}_{<x_k}, x_k, \cdots, y_k, \overline{X}_{>y_k}).\end{aligned}$$

De même, nous avons également que

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{M}^*}(X'_k) = \; & \chi_{\bigcup_{i=1}^{x_k-k}\mathcal{M}_i}(\overline{X}_{<x_k}) \prod_{i=x_k}^{y_k-1} \chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i) \chi_{\bigcup_{i=x_k-k+1}^{r}\mathcal{M}_i}(\overline{X}_{>y_k}) \\ & (-1)^{x_k+r-2k} sg(X'_k \setminus x_k \overline{X}_{<x_k}, x_k, \cdots, y_k, \overline{X}_{>y_k}).\end{aligned}$$

Donc, $\chi_{\mathcal{M}^*}(X)\chi_{\mathcal{M}^*}(X'_k) = \prod_{i=x_k}^{y_k-1} \chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i)\chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i+1)(-1)^{y_k+x_k}$. Comme

$\chi_{\mathcal{M}^*}(Y)\chi_{\mathcal{M}^*}(Y'_k) = \prod_{i=x_k}^{y_k-1} \chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i)\chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i+1)(-1)^{y_k+x_k}$ alors

$\chi_{\mathcal{M}^*}(X)\chi_{\mathcal{M}^*}(X'_k) = \chi_{\mathcal{M}^*}(Y)\chi_{\mathcal{M}^*}(Y'_k)$. Pour cette raison la condition (b) du théorème 5 est vérifiée.

La suppression d'un élément garde évidemment la propriété de $\mathcal{LOM}$ car cela correspond à supprimer une colonne de sa représentation matricielle. En outre, comme $\mathcal{M}/e = (\mathcal{M}^* \setminus e)^*$ alors $\mathcal{LOM}$ est fermée par mineur □

Le théorème ci-dessus implique le résultat suivant [Lawrence, 1984] dans le cas où chaque matroïde orienté M_i est uniforme (voir aussi [Björner *et al.*, 1999, Proposition 7.6.7]).

Corollaire 7. *Les matroïdes orientés de Lawrence sont fermés par dualité et par mineur*

10 Simplexes dans les arrangements

Dans cette section, nous étudions les simplexes de l'arrangement d'hyperplans associé à un matroïde orienté du réseau. Pour cela, nous allons étendre les résultats utilisés dans [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] où les simplexes de l'arrangement d'hyperplans associés aux matroïdes de Lawrence ont été étudiés. Nous étudions tout d'abord les circuits de matroïdes chemin du réseau.

Proposition 8. *Soit $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ un matroïde chemin du réseau sur $\{1, \ldots, n\}$. Soit $C = \{j_0, \ldots, j_k\} \in \{1, \ldots, n\}^{k+1}$, $j_0 < \cdots < j_k$, et soit $m = \min\{i | j_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i),\ 1 \leq i \leq r\}$. Alors, C est un circuit si seulement si pour tout $i = 0, \ldots, k-1$ nous avons $\{j_i, j_{i+1}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{m+i})$ et $m + k - 1 = \max\{i | j_k \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)\}$.*

La proposition ci-dessus est essentiellement donné dans [Bonin et De Mier, 2006, Theorem 3.9]. Toutefois, la présentation ci-dessus (avec une autre preuve) est plus commode pour ce que nous proposons.

Preuve de la Proposition 8. (Suffisance) Par définition des matroïdes chemin du réseau, pour chaque $i = 0, \ldots, k$ nous avons $C \setminus \{j_i\}$ est un ensemble indépendant, tandis que C ne l'est pas, et donc C est un circuit.

(Nécessité) Nous allons montrer que $C = \{j_0, \ldots, j_k\}$ est un circuit implique que $\{j_i, j_{i+1}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{m+i})$, l'idée générale étant que cela est nécessaire pour obtenir tous les ensembles libres induits par ce circuit. Nous allons donc chercher des bases qui incluent les indépendants $C \setminus j_k$ et identifier l'emplacement des éléments constituants ces bases dans chaque matroïde de rang un.

Supposons que C est un circuit. Alors, $C \setminus \{j_0\}$ est un indépendant de $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$, nous pouvons, si nécessaire, le compléter en une base $B = C \setminus \{j_0\} \cup \{j'_1, \ldots, j'_{r-k}\}$. Supposons que après un étiquetage approprié dans l'ordre lexicographique, nous obtenons

$$B = (j'_{i_0+1}, \ldots, j'_{i_1-1}, j_1, j'_{i_1+1}, \ldots, j'_{i_2-1}, j_2, j'_{i_2+1}, \ldots, j'_{i_k-1}, j_k, j'_{i_k+1}, \ldots, j'_{i_{k+1}-1})$$

avec $i_0 = 0$ et $i_{k+1} = r + 1$. Notons que les éléments entre j_i et j_{i+1} pour $i = 1, \ldots, k$ (ou les éléments avant j_1 et après j_k) peuvent ne pas exister. Par la Proposition 6, si l'indice $i \in \cup_{j=0}^{k} \{i_j + 1, \ldots, i_{j+1} - 1\}$, alors $j'_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$, et donc $j_0 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ (autrement, $B \setminus \{j'_i\} \cup \{j_0\}$ serait une base de $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ et C ne serait pas un circuit, ce qui est une contradiction).

Nous affirmons que $j_k \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_{k+1}})$. Nous montrons d'abord cela pour $k = 0$, ce qui correspond à $j_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1})$. Car, si $j_0 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1})$, alors $j_0 < P(i_1)$ (comme $j_0 < j_1 \leq Q(i_1)$). Ainsi, $j_0 < P(i_1) < \cdots < P(r)$ et donc $j_0 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ pour chaque $i = i_1, \ldots, r$. Toutefois, nous avons vu plus haut que $j_0 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, i_1 - 1$ donc j_0 devrait être un circuit, ce qui est impossible. Donc, nous avons $i_1 = \min\{i : j_0 \in \mathcal{M}_i\}$ et $\{j_0, j_1\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1})$ avec $B \setminus \{j_1\} \cup \{j_0\}$ une base. Montrons maintenant le cas où $k = 1$, ce qui correspond à $j_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_2})$. Nous avons les éléments suivants qui forment une base

$$(j'_{i_0+1}, \ldots, j'_{i_1-1}, j_0, j'_{i_1+1}, \ldots, j'_{i_2-1}, j_2, j'_{i_2+1}, \ldots, j'_{i_k-1}, j_k, j'_{i_k+1}, \ldots, j'_{i_{k+1}-1}),$$

Pour la même raison que ci-dessus pour tout les $i \in \cup_{j=0}^{k} \{i_j + 1, \ldots, i_{j+1} - 1\}$ nous avons $j_1 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ et donc $\{j_1, j_2\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_2})$ (la condition $j_1 < P(i_2)$ est impossible, car cela impliquerait que $\{j_0, j_1\}$ serait un circuit).

Maintenant $j_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_2})$, donc $P(i_2) \leq j_1 \leq Q(i_1)$ et l'ensemble $\{j'_{i_1+1}, \ldots, j'_{i_2-1}\}$ est vide parce que pour tout $i = i_1+1, \ldots, i_2-1$ nous avons $j_1 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$, alors $P(i) < P(i_2)$ et $Q(i_1) < Q(i)$.

En exploitant l'argument ci-dessus, nous obtenons pour tout $i = 0, \ldots, k-1$, $\{j_i, j_{i+1}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1+i})$ et $i_1 + k - 1 = \max\{i : j_k \in \mathcal{M}_i\}$.

Donnons maintenant un moyen d'obtenir la signature d'éléments d'un circuit $C = \{j_0, \ldots, j_k\}$ avec $j_0 < \cdots < j_k$ dans un matroïde orienté du réseau $\mathcal{M} = M[P, Q]$. Pour chaque $i = 0, \ldots, k-1$, nous considérons que les bases

$$B' = (P(1), \ldots, P(m-1), j_0, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_k, Q(m+k), \ldots, Q(r))$$

et

$$B'' = (P(1), \ldots, P(m-1), j_0, \ldots, j_i, j_{i+2}, \ldots, j_k, Q(m+k), \ldots, Q(r)).$$

Notons que $|B'| = m - 1 + k + r - (m-k) + 1 = r$ (si $m + k > r$, alors nous ne considérons pas les éléments dans Q). Nous remarquons aussi que leur union contient le circuit C. Rappelons que le signe $C(j_{i+1})$ de l'element j_{i+1} dans le circuit de C est donnée par $C(j_{i+1}) = -C(j_i)\chi_{\mathcal{M}}(B')\chi_{\mathcal{M}}(B'')$. Ainsi, par (7), nous avons

$$C(j_{i+1}) = -C(j_i)m_{i+m,j_i}m_{i+m,j_{i+1}}. \tag{8}$$

Exemple 4 (cont.) Nous pouvons trouver la signature des circuits (sous-ensembles à 3 éléments ne contenant pas de 1) du matroïde orienté du réseau donné dans l'exemple ref 4. Par exemple, si $C = \{j_0, j_1, j_2\} = \{2, 3, 5\}$, alors $m = 2$ et $k = 2$. Soit $i = 1$, alors $B' = \{P(1), 2, 5, Q(4)\} = \{P(1), 2, 5\} = \{1, 2, 5\}$ et $B'' = \{P(1), 2, 3, Q(4)\} = \{P(1), 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$. Donc, si nous avons mis $C(2) = +$ alors, par l'équation 8, nous obtenons

$$C(j_1) = C(3) = -C(j_0)m_{2,j_0}m_{2,J_1} = -C(2)m_{2,2}m_{2,3} = -(+)(+) = -$$

et $C(5) = -$ (ou l'inverse).

Étant donné une matrice $M = (m_{i,j}) : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ représentant $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$, nous définissons la matrice $M' = (m'_{i,j}) : 0 \leq i \leq r+1, 1 \leq j \leq n$ avec la première et la dernière ligne qui ont des zéros comme entrées et les autres lignes qui sont les mêmes que dans M. Nous allons construire un ensemble de *Chemin Haut* [CH] et un ensemble de *Chemin Bas* [CB] sur les entrées de M', formés par des mouvements horizontaux et verticaux selon la procédure suivante .

Procedure

(1) CH (CB) commence à $m'_{1,1}$ ($m'_{r,n}$)

(2) Lorsque CH (CB) arrive à $m'_{i,j}$

Si $m'_{i,j}m'_{i,j+1} = +$ ($m'_{i,j}m'_{i,j-1} = +$), alors :

CH va à $m'_{i,j+1}$ (horizontalement)

(CB va à $m'_{i,j-1}$ (horizontalement)

Si $m'_{i,j}m'_{i,j+1} = -$ ($m'_{i,j}m'_{i,j-1} = -$), alors :

CH va à $m'_{i+1,j+1}$ (d'abord horizontalement puis verticalement)

(CB va à $m_{i-1,j-1}$ (d'abord horizontalement puis verticalement)

Si $m'_{i,j}m'_{i,j+1} = 0$ ($m'_{i,j}m'_{i,j-1} = 0$), alors :

CH va soit à $m'_{i,j+1}$ (horizontalement) ou à $m'_{i+1,j+1}$ (d'abord horizontalement puis verticalement)

(CB va soit à $m'_{i,j-1}$ (horizontalement) ou à $m'_{i-1,j-1}$ (d'abord horizontalement puis verticalement)

(3) CH (CB) s'arrête quand il arrive à la ligne $r+1(0)$ ou à la colonne n (1).

Nous écrivons CH=$[t_0, \cdots, t_1]\,[t_1, \cdots, t_2] \cdots [t_{l-1}, \cdots, t_l]$ où $[t_{i-1}, \cdots, t_i]$ désigne les entrées $\left[m'_{i,t_{i-1}}, \cdots, m'_{i,t_i}\right]$ avec $1 \leq x \leq l \leq r+1$ (à l'instar de BT). Nous utilisons également la notation CH=$(m'_{1,1}, \cdots, m'_{1,t_1}, m'_{2,t_1}, \cdots, m'_{2,t_2}, \cdots, m'_{l,t_{l-1}}, \cdots, m'_{l,t_l})$

Nous allons illustrer un CH et un CB de la matrice M à la figure 4.

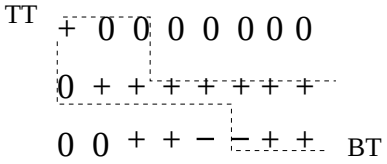


FIGURE 14 – Chemins Haut et Bas.

Les Chemins Haut et Bas ont été introduits dans le papier [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] pour un matroïde $\mathcal{M}$ de Lawrence. Dans ce cas, nous avons clairement un unique Chemin Haut et Bas car les M_i sont uniformes (et donc la représentation matricielle correspondante est constituée uniquement d'éléments non-nuls). L'unicité est perdue dans le cas général puisque l'on peut avoir des zéros dans la représentation matricielle. Le résultat suivant généralise l'étude figurant dans [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001, Lemma 2.1] pour le cas du matroïde de Lawrence.

Lemme 4. *Soit $M = (m_{i,j}), 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ la représentation matricielle de $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *$\mathcal{M}$ est cyclique*
2. *il existe un CH qui arrive à la ligne $r+1$*
3. *il existe un CB qui arrive à la ligne 0*

Démonstration. Nous montrons l'équivalence entre (1) et (2) (l'équivalence entre (1) et (3) est analogue).

(Nécessité) Soit $C = (j_0, \ldots, j_k)$ un circuit positif. La Proposition 8 indique

que pour $m = \min\{i | j_0 \in \mathcal{M}_i\}$, nous avons que $\{j_i, j_{i+1}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{m+i})$ et $j_k \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_{m+k})$ pour tout $i = 0, \ldots, k-1$. Alors, nous pouvons déterminer CH=$[t_0, \cdots, t_1]\,[t_1, \cdots, t_2] \cdots [t_{l-1}, \cdots, t_l]$ tel que :

- pour tout $i = 1, \ldots, m-1$ nous pouvons choisir que CH va à la verticale quand il arrive à 0 et alors $t_i \leq Q(i) + 1$ car $m'_{i,Q(i)+\ 1} = 0$
- pour tout $i = m, \ldots, m+k-1$ CH va à la verticale quand il arrive à un des signes différents. Nous avons $t_{m-1} \leq Q(m-1) + 1 \leq j_0$ et par (8) $m'_{i,j_{i-m}} m'_{i,j_{i-m+1}} = -$ alors nous avons toujours $t_i \leq j_{i-m+1}$
- pour tout $i = m+k, \ldots, r$ nous avons $t_{m+k-1} < j_k < P(m+k)$ et comme $m'_{i,t_{i-1}} = 0$ nous pouvons toujours choisir $t_i = t_{i-1} + 1$

(Suffisance) Nous prenons $a = \max\{i | j_i \in T$ et $m'_{i,j_i} = 0\}$ et $b = \min\{i | j_i \in T, m'_{i+1,j_i} = 0\}$. Par la définition de CH et (8), nous avons que $(j_a, j_{a+1}, \ldots, j_{b-1}, j_b)$ est un circuit positif. □

Nous pouvons maintenant utiliser les résultats ci-dessus pour étudier les simplexes des $\mathcal{LOM}$-arrangements d'hyperplans. Nous savons que les circuits de 2 éléments donnent deux copies du même hyperplan. Nous ne considérerons que les matroïdes orientés $\mathcal{M}$ sur $\{1, \ldots, n\}$ sans circuits de 2 éléments. Rappelons qu'un matroïde orienté est appelé *acyclique* s'il ne contient pas de circuit positif (c'est-à-dire de circuit dont tous les éléments sont du même signe). Nous disons que $e \in \{1, \ldots, n\}$ est un élément *intérieur* s'il existe un circuit $C = (C^+, C^-)$ avec $C^- = \{e\}$ (ou avec $C^+ = \{e\}$). Il est équivalent de définir les points intérieurs et les éléments dont la réorientation donne un matroïde cyclique.

Nous disons que CH et CB sont *parallèles* dans la colonne k dans une représentation matricielle M si il existe

a) CH passant par $m'_{i,k-1}, m'_{i,k}, m'_{i,k+1}$ et CB traversant soit $m'_{i,k+1}, m'_{i,k}, m'_{i,k-1}$ soit $m'_{i+1,k+1}, m'_{i+1,k+1}, m'_{i+1,k-1}$ avec $2 \leq k \leq n-1$.

b) CH passant par $m'_{r,n-1}, m'_{r,n}$ pour $k = n$ et

c) CB passant par $m'_{1,2}, m'_{1,1}$ pour $k = 1$.

Nous remarquons, dans la figure 4, que les éléments 2,4,5 et 7 sont parallèles dans M. Dans [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001, Lemma 2.2], il est prouvé qu'un élément e d'un matroïde de Lawrence est intérieur si et seulement si les Chemins Haut et Bas sont parallèles dans la colonne correspondant à l'élément e. La preuve de ce dernier résultat peut être généralisé au matroïde orienté du réseau.

Lemme 5. *Soit M une représentation matricielle d'un matroïde orienté du réseau $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}$ est acyclique. Alors, k est un élément intérieur de $\mathcal{M}$ si et seulement si il existe un Chemin Haut et un Chemin Bas qui sont parallèles dans la colonne k de M.*

Démonstration. Nous désignons par $M_{\overline{k}}$ la matrice obtenue en inversant le signe de la colonne k et $CH_{\overline{k}}$ et $CB_{\overline{k}}$ les Chemins Hauts et Bas correspondants. Par le Lemme 4, k est un élément intérieur de $\mathcal{M}$ si et seulement si il n'existe pas de CH (ou CB) arrivant à la ligne $r+1$ (ou 0) dans M' mais il y a un CH (ou CB) qui le fait dans $M'_{\overline{k}}$. Comme $\mathcal{M}$ est acyclique CH et CB n'arrivent pas sur les lignes de $r+1$ et 0 respectivement.

Cas 1) $k = n$. S'il existe CH passant par $m'_{r,n-1}, m'_{r,n}$ alors $m'_{r,n-1}m'_{r,n} = +$ Ainsi, après la réorientation de n, nous avons $m'_{r,n-1}m'_{r,n} = -$ et $CH_{\overline{n}}$ arrive à la ligne $r+1$. En sens inverse, si dans $M'_{\overline{n}}$ il existe $CH_{\overline{n}}$ qui arrive à la ligne $r+1$, CH n'arrive pas à la ligne $r+1$, alors TT passe par $m'_{r,n-1}, m'_{r,n}$.

Cas 2) $k = 1$. Analogie avec le cas 1 en utilisant que CB passe par $m'_{1,2}, m'_{1,1}$.

Cas 3) $1 < k < n$. Pour CH=$[t_0, \ldots, t_1]\,[t_1, \ldots, t_2] \ldots [t_{l-1}, \ldots, t_l]$ avec $1 \leq l \leq r+1$ on partitionne les entrées de M' (qui n'appartiennent pas à CH) dans des ensembles $P_1(CH)$ et $P_2(CH)$ où $P_1(CH) = \{m'_{i,j} |\ j < t_{i-1}$ pour chaque $i = 1, \ldots, l\}$ et $P_2(CH) = \{m'_{i,j} |\ j > t_{i-1}$ pour chaque $i = 1, \ldots, l\}$.

Étant donné un CN, nous posons $CB(m'_{i,k})$ le chemin dans M', à partir de $m'_{i,k}$ et formé selon les règles ci-dessus pour CB. Si $m'_{i,k} \in P_2(TT)$, nous pouvons choisir le chemin $CB(m'_{i,k})_{\overline{k}}$ où tous les éléments appartiennent soit à $P_2(CH)$ soit à CH, et arrivant à la ligne 0 puisque, pour tout $i = k, \ldots, 1$, $m'_{i,t_i}m'_{i,t_i-1} = -$ ou 0. Si $m'_{i,k} \in \left]m'_{i,t_{i-1}}, \ldots, m'_{i,t_i}\right[$ pour un $1 \leq i \leq r$, dans M' nous avons $m'_{i,k}m'_{i,k-1} = +$ ou 0 alors dans $M'_{\overline{k}}$, nous avons $m'_{i,k}m'_{i,k-1} = -$ ou 0 et le premier mouvement de $CB(m'_{i,k})_{\overline{k}}$ va à $m'_{i-1,k-1}$ alors que tous les éléments précédents appartiennent soit à $P_2(CH)$ soit à CH et il arrive à la ligne 0.

Nous remarquons d'abord que si k est un élément intérieur, alors $CH_{\overline{k}}$ (ou $CB_{\overline{k}}$) arrive à la ligne $r+1$ (ou 0) et fait un mouvement vertical à k dans $M'_{\overline{k}}$ et CH (ou CB) n'est pas dans M'. Supposons qu'il existe CH passant par $m'_{i,k-1}, m'_{i,k}, m'_{i,k+1}$ et CB passant par $m'_{j,k+1}, m'_{j,k}, m'_{j,k-1}$ avec $2 \leq k \leq n-1$. Maintenant, clairement $CB_{\overline{k}}$ peut être considéré comme CB de $m'_{r,n}$ jusqu'à $m'_{j,k}$ puis il est suivi par $m'_{j-1,k}$ et $CB(m'_{j-1,k})_{\overline{k}}$. Ainsi, après la réorientation de la colonne k, nous avons $m'_{j-1,k}$ dans $P_2(CH)$ ou $\left]m'_{i,t_{i-1}}, \ldots, m'_{i,t_i}\right[$ si et seulement si $j-1 \leq i$ alors $j = i$ ou $j = i+1$ parce que CB ne peut pas être au-dessus de CH si matroïde est acyclique. □

Soit $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ l'arrangement d'hyperplans en dimension d associé au matroïde orienté $\mathcal{M}$. Nous désignons par e_i l'élément de $\mathcal{M}$ correspondant à l'hyperplan h_i. Il est bien connu qu'une réorientation acyclique de $\mathcal{M}$ ayant $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_l}\}$ $l \leq n$ comme éléments intérieurs correspond à une cellule dans $\mathcal{H}$ qui est délimitée par les hyperplans $\{h_{i_1}, \ldots, h_{i_l}\}$. Un *simplexe* est une cellule de $\mathcal{H}$ délimitée par $r = d+1$ hyperplans et donc correspondant à une orientation de $\mathcal{M}$ avec $n-r$ éléments intérieurs

.

Soit $M = (m_{i,j}), 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ une représentation d'un matroïde orienté du réseau. Nous allons associer un graphe orienté à M. Pour cela, nous définissons d'abord les ensembles suivants. Pour chaque $i = 1, \ldots, r-1$, posons

$$A_i^1 = \{j | m_{i,j} \neq 0, m_{i+1,j} = 0\}, \quad A_i^2 = \{j | m_{i,j} = 0, m_{i+1,j} \neq 0\},$$

$$X_i^1 = \{j | m_{i,j} = m_{i+1,j} \neq 0\} \text{ et } \quad X_i^2 = \{j | m_{i,j} = -m_{i+1,j} \neq 0\}.$$

Les ensembles correspondants pour le matroïde dans l'exemple 4 (avec $r = 3$) sont les suivants :

$A_1^1 = \{1\}, A_2^1 = \{2\}, X_1^1 = \emptyset, X_2^1 = \{3, 4, 7\}, A_1^2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A_2^2 = \{8\}, X_1^2 = \emptyset$ et $X_2^2 = \{5, 6\}$.

Soit $G_i(M)$ le graphe orienté (appelé *graphe des simplexes*) obtenu à partir de M comme suit : chaque élément de A_i^1 est joint à chaque élément de A_i^2 par deux chemins, l'un à travers les sommets de l 'ensemble X_i^1 (dans l'ordre), et le deuxième à travers les sommets de l 'ensemble X_i^2 (dans l'ordre) ; voir la figure 15.

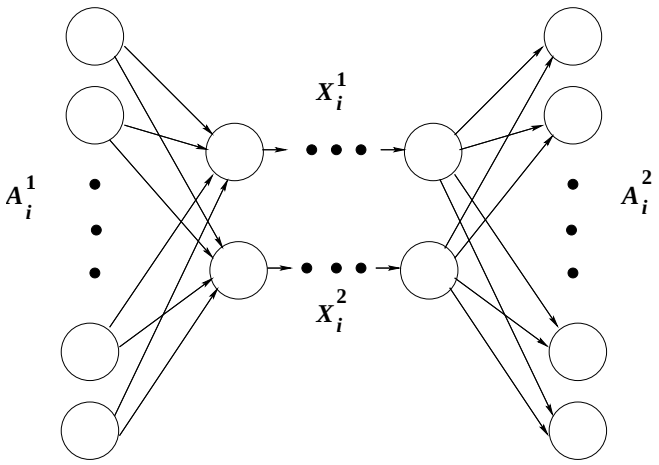


FIGURE 15 – Graphe des simplexes $G_i(M)$

$G_i(M)$ est une généralisation du graphe défini dans l'article[Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] pour le matroïde de Lawrence (dans ce cas, nous avons $|A_i^1| = |A_i^2| = 1$).

Remarque 3. *Soient $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ et M sa représentation matricielle correspondante.*

(a) Comme $\mathcal{M}$ ne contient aucun circuit à deux éléments alors, par la Proposition 8, M vérifie la propriété suivante : pour tout j_0, j_1 s'il existe i tel que $m_{i,j_0} \neq 0$ et $m_{i,j_1} \neq 0$ alors il existe $k \neq i$ tel que $m_{k,j_0} \neq 0$ ou $m_{k,j_1} \neq 0$. I En d'autres termes, en termes le graphe $G_i(M)$ où $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ ne contient pas de circuits de 2 élément si $|A_1^1| = 1$, $\left|A_{r-1}^2\right| = 1$ et $\left|A_i^2 \cap A_{i+1}^1\right| < 2$ pour chaque $i = 1, \ldots, r-2$.

(b) $X_i^1 \cup X_i^2 \cup A_i^2 = A_{i+1}^1 \cup X_{i+1}^1 \cup X_{i+1}^2$ pour tout $i = 1, \ldots, r-1$. Le tableau suivant illustre le cas générique.

			A_i^1		$X_i^1 \cup X_i^2$					A_i^2					
1	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i-1$	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0
$i+1$	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$
					A_{i+1}^1			$X_{i+1}^1 \cup X_{i+1}^2$				A_{i+1}^2			

(c) Par (a), $m_{1,1}m_{r,n} \neq 0$, et donc $1 \in A_1^1$ et $n \in A_{r-1}^2$.

Théorème 7. *Soit M une representation matricielle de $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ sans circuit de 2 éléments. Alors, les hyperplans $\{j_1, \ldots, j_r\}$, $j_1 < \cdots < j_r$, forment un simplexe dans l'arrangement obtenu à partir de $\mathcal{M}$ si et seulement si j_i et j_{i+1} sont adjacents dans $G_i(M)$ pour tout $i = 1, \ldots, r-1$.*

Démonstration. Nous allons essayer d'identifier les cas où CH et CB sont paralléles sur $n-r$ éléments, car ainsi les r éléments restants forment un simplexe. Le but est alors de trouver le lien avec le graphe des simplexes pour identifier ceux ci plus facilement.

D'après le Lemme 5, il existe une réorientation de $\mathcal{M}$ avec $n-r$ éléments intérieurs si et seulement si il existe des éléments $\{j_1, \ldots, j_r\}$ et un CT faisant un mouvement vertical à la colonne $\{j_2, \ldots, j_r\}$ et un CB faisant un mouvement vertical à $\{j_{r-1}, \ldots, j_1\}$. Nous avons quatre cas pour tout $i = 1, \ldots, r-1$.

Cas 1) $m_{i,j_i} = \cdots = m_{i,j_{i+1}-1} = -m_{i,j_{i+1}}$ et $-m_{i+1,j_i} = m_{i+1,j_i+1} = \cdots = m_{i+1,j_{i+1}}$. Ainsi $-m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = m_{i,j_i+1}m_{i+1,j_i+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}-1}m_{i+1,j_{i+1}-1} = -m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}}$. Alors j_i et j_{i+1} sont adjacents dans X_i^1 ou X_i^2.

Cas 2) Il existe j tel que $m_{i,j_i} = \cdots = m_{i,j}$, $m_{i,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}} = 0$ et $-m_{i+1,j_i} = m_{i+1,j_i+1} = \cdots = m_{i+1,j_{i+1}}$. Ainsi, $-m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = m_{i,j_i+1}m_{i+1,j_i+1} = \cdots = m_{i,j}m_{i+1,j}$ et $m_{i,j+1}m_{i+1,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}} = 0$. Par conséquent, j_i est le dernier élément soit de X_i^1 soit de X_i^2 et il est adjacente à j_{i+1} dans A_i^2.

Cas 3) Il existe j tel que $m_{i,j_i} = \cdots = m_{i,j_{i+1}-1} = -m_{i,j_{i+1}}$ et $m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i+1,j} = 0$, $m_{i+1,j+1} = \cdots = m_{i+1,j_{i+1}}$. Ainsi $m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i,j}m_{i+1,j} = 0$ et $m_{i,j+1}m_{i+1,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}-1}m_{i+1,j_{i+1}-1} = -m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}}$. Par conséquent, j_i est en A_i^1 et il est adjacent à j_{i+1} le premier élément de X_i^1 ou X_i^2.

Cas 4) Il existe j tel que $m_{i,j_i} = \cdots = m_{i,j}$, $m_{i,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}} = 0$ et j' tel que $m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i+1,j'} = 0$, $m_{i+1,j'+1} = \cdots = m_{i+1,j_{i+1}}$.

Si $j \leq j'$, $m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}} = 0$ alors j_i est dans A_i^1 et elle est adjacente à j_{i+1} in A_i^2 (X_i^1 et X_i^2 n'existe pas).

Si $j > j'$,$m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i,j'}m_{i+1,j'} = 0$, $m_{i,j'+1}m_{i+1,j'+1} = \cdots = m_{i,j}m_{i+1,j}$ et $m_{i,j+1}m_{i+1,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}} = 0$ alors j_i est dans A_i^1 et il est adjacent à j_{i+1} dans A_i^2 (X_i^1 ou X_i^2 n'existe pas). □

La Figure 16 illustre le graphe des simplexes correspondant à l'exemple 4.

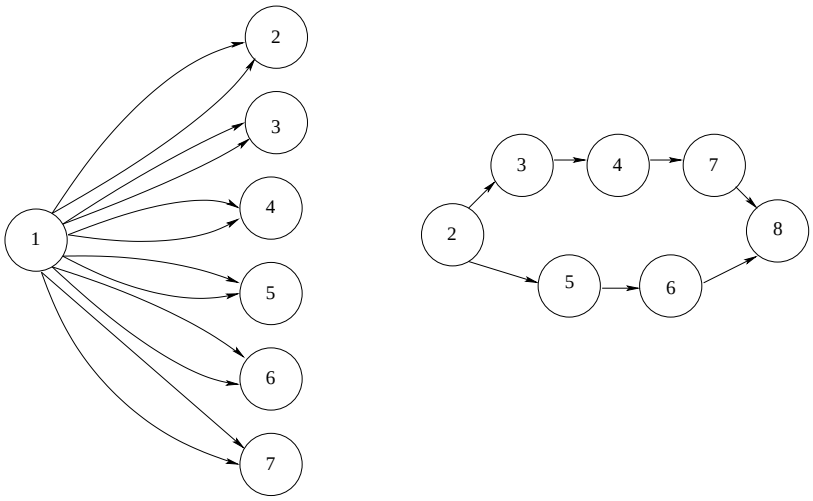


FIGURE 16 – $G_1(M)$ et $G_2(M)$

D'après le Théorème 7, nous avons que les simplexes obtenus dans l'arrangeement de pseudodroites de l'Exemple 4 sont donnés par les triplets suivants (voir la figure 17) :

$$\{1,2,3\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,4,7\}, \{1,5,6\}, \{1,6,8\} \text{ et } \{1,7,8\}.$$

Notons qu'il existe deux simplexes pour chaque triplet en raison des double arêtes du graphe $G_1(M)$.

10.1 Nombre de simplexes dans $\mathcal{LOM}$

Les résultats ci-dessus permettent de construire des arrangements d'hyperplans dans lesquels le nombre de simplexes peuvent être calculés. Soient $\mathcal{M}_1 = (E_1, \mathcal{B})$ et $\mathcal{M}_2 = (E_2, \mathcal{B})$ des matroïdes de rang r_1 et r_2 respectivement, où $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. La *somme directe*, notée $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, des matroïdes $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ a comme ensemble support l'union disjointe $E(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) = E(\mathcal{M}_1) \cup E(\mathcal{M}_2)$ et comme ensemble de bases $\mathcal{B}(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) = \{B_1 \cup B_2 | B_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1), B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_2)\}$. En outre, le rang de $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ est $r_1 + r_2$.

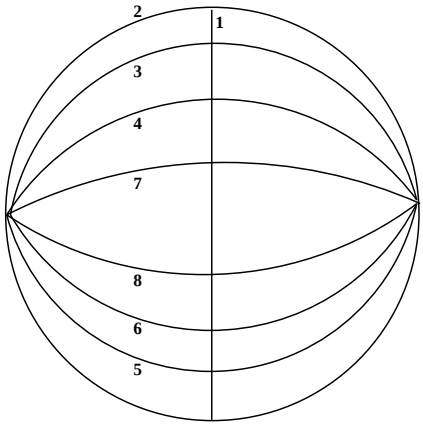


FIGURE 17 – Arrangement de pseudodroites obtenu à partir de l'exemple 4.

Théorème 8. *Soit $\mathcal{M}_1 = \bigcup_{i=1}^{r_1} \mathcal{M}_i^1$ un matroïde orienté du réseau sur E_1 avec N_1 simplexes et $\mathcal{M}_2 = \bigcup_{i=1}^{r_2} \mathcal{M}_i^2$ un matroïde orienté du réseau sur E_2 avec N_2 simplexes. Si E_1 et E_2 sont supposés être disjoints, alors $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ a exactement $2N_1N_2$ simplexes*

Démonstration. Soient $E_1 = \{1, \ldots, n\}$ et $E_2 = \{n+1, \ldots, m\}$ et supposons, sans perte de généralité que $n = \max(E_1) = \min(E_2) - 1$.

Pour $G_{r_1-1}(\mathcal{M}_1)$, nous supposons que $A^1_{r_1-1} = \{k_1, \ldots, k_j\}$, et $X^1_{r_1-1} \cup X^2_{r_1-1} = \{k_{j+1}, \ldots, n-1\}$ et nous avons que $A^2_{r_1-1} = \{n\}$. En effet, il n'est pas possible d'avoir plusieurs éléments dans $A^2_{r_1-1}$ sinon on aurait un cycle de 2 éléments par la remarque 3. D'après le théorème 7, tous les simplexes dans $\mathcal{M}_1$ finissent par un élément dans $\{k_{j+1}, \ldots, n\}$ et chacun de ces simplexes forment le début d'un simplex dans $\mathcal{M}$.

De la même façon, pour $G_1(\mathcal{M}_2)$, nous avons $A^1_1 = \{n+1\}$ et supposons que $X^1_1 \cup X^2_1 = \{n+2, \ldots, k'_0\}$, $A^2_1 = k'_1, \ldots, k'_j$. D'après le Théorème 7, tous les simplexes de $\mathcal{M}_2$ commencent par un élément de $\{n+1, \ldots, k'_0\}$ et chacun de ces simplexes forme la fin d'un simplexe dans $\mathcal{M}$.

Nous illustrons ci-dessous une partie de la représentation matricielle de $\mathcal{M}$ où $*$ indique une entrée non nulle.

	$\cdots$	k_1	$\cdots$	k_j	k_{j+1}	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	k'_0	k'_1	$\cdots$	$k'j$	$\cdots$
1	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_1-1	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_1	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0
r_1+1	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0
r_1+2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0
$\vdots$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$
r_1+r_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$

Notons que $G_{r-1}(\mathcal{M}) = G_{r-1}(\mathcal{M}_1)$ et $G_{r+1}(\mathcal{M}) = G_1(\mathcal{M}_2)$. Par ailleurs nous trouvons $G_r(\mathcal{M})$ avec $A_r^1 = \{k_{j+1}, \ldots, n\}$, $X_r^1 \cup X_r^2 = \emptyset$ et $A_r^2 = \{n+1, \ldots, k'_0\}$.

Ainsi, les N_1 simplexes dans $\mathcal{M}_1$ peuvent être prolongés avec 2 arêtes de $G_r(\mathcal{M})$ et se terminent par un élément de $\{n+1, \ldots, k'_0\}$. Par conséquent, étant donné qu'il existe N_2 simplexes dans $\mathcal{M}_2$ (commençants par des éléments de $\{n+1, \ldots, k'_0\}$) alors il peut être construit $2N_1N_2$ simplexes dans $\mathcal{M}$. □

Théorème 9. *Soient $n \geq r \geq 2$ des entiers positifs. Alors, il existe un arrangement d'hyperplans avec $s(n,r)$ simplexes où*

$$s(n,r) = \begin{cases} 2^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{k-p} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil^{p} & si\ r = 2k, \\ 2^{k} \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor^{k-p} \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil^{p} & si\ r = 2k+1, \end{cases}$$

et $n = qk + p$ pour un certain entier q et $0 \leq p < k$.

Démonstration. Nous avons deux cas :

Cas 1) $r = 2k$. Soit $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ où chaque M_i est un matroïde orienté de rang un avec des bases (ensembles de un seul élément, toutes signées de façon positive), données dans ce qui suit. Pour chaque $i = 1, \ldots, p$

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{2i-1}) = \left\{ (i-1) \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1, \ldots, i \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 \right\}$$

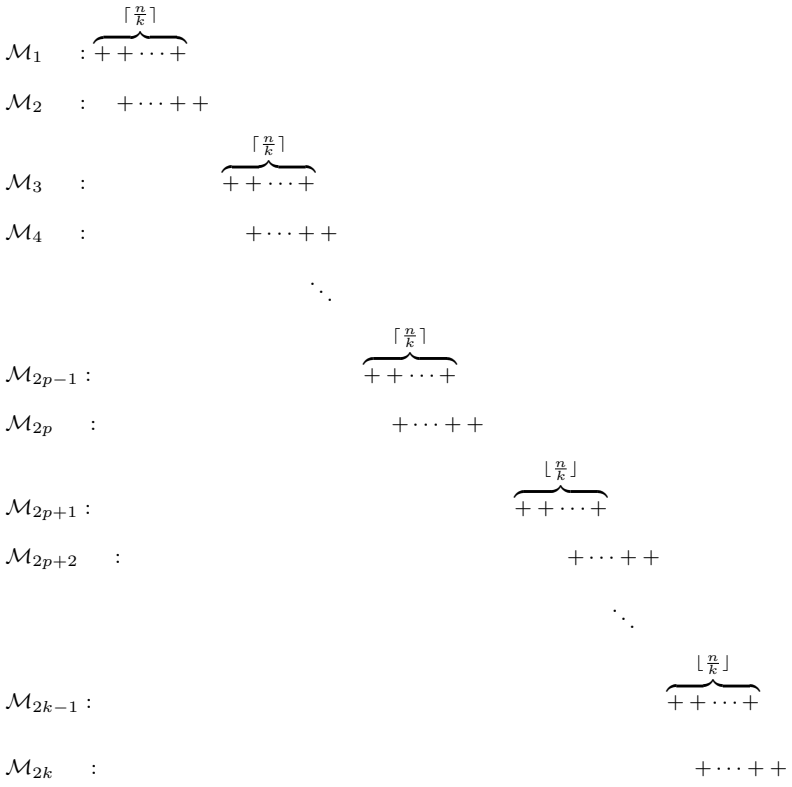
$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{2i}) = \left\{ (i-1) \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 2, \ldots, i \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \right\},$$

et, pour chaque $i = p+1, \ldots, k$

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{2i-1}) = \left\{ p \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + (i-p-1) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1, \ldots, p \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + (i-p) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right\}$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{2i}) = \left\{ p \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + (i-p-1) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 2, \ldots, p \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + (i-p) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Soit M la représentation matricielle de $\mathcal{M}$ ci-dessous (les entrées zéros ont été omises).



Notons que le nombre de colonnes dans M (i.e., elements dans $\mathcal{M}$) est $p\lceil \frac{n}{k} \rceil + (k-p)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = p(q+1) + (k-p)q = n$. Maintenant, si $r = 2$ alors $\mathcal{M}$ est un matroïde de Lawrence sur n éléments et dans ce cas, il est connu [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] que le nombre de ses simplexes est n. Si $k \geq 2$ alors le résultat suit par le Théorème 8.

Case 2) $r = 2k + 1$. Dans ce cas, nous construisons $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_i$ sur un ensemble de $n-1$ éléments comme dans le cas ci-dessus et nous alors prendre la somme directe $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}_r$ où $\mathcal{B}(\mathcal{M}_r) = \{n\}$. Par conséquent, nous avons le nombre de simplexes de $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}_r$ qui est deux fois plus que dans le cas 1.

□

Notons que la valeur de $s(n, r)$ dans le théorème 9 n'est pas optimale en général. Toutefois, il atteint la maximalité dans certains cas. Par exemple, la classe $\mathcal{LOM}$-arrangement obtenu à l'exemple 4 (avec $n = 8, r = 3, k = 1$ et $p = n - 1 \bmod 1 = 0$) a le nombre maximum de triangles.

Conjecture 2. *Le nombre de simplexes donnés dans le théorème 9 est maximal pour la classe de $\mathcal{LOM}$-arrangements.*

10.2 Problème de Grunbaum

Une coloration non triviale est une coloration où chaque classe de couleur n'est pas vide. Dans [Grünbaum, 1971], Grunbaum a posé la question suivante. Est-il vrai que pour toutes 2-colorations non trivales de pseudodroites dans un arrangement de pseudodroites, il y a toujours un triangle (simplexe de taille 3)*bichromatique* (c'est à dire un triangle dont les côtés n'ont pas tous la même couleur) ? Ramírez Alfonsín a conjecturé (communication personnelle) que, en fait il y a au moins trois triangles bichromatiques. Notons que trois est le maximum possible, car nous pouvons construire un arrangement de pseudodroites dans lequel une seule pseudodroite, par exemple l, est adjacente à exactement trois triangles (et alors, nous pouvons coulorier la ligne l avec une couleur et le reste des lignes avec l'autre couleur).

Prenons une généralisation en dimension supérieure. Est-il vrai que pour toutes 2-colorations non trivales des hyperplans dans un arrangement d'hyperplans de dimension d il y a toujours $d+1$ simplexes *bichromatiques* (c'est à dire des simplexes bordés par des hyperplans de différentes couleurs) ? Nous répondons à cette question de façon positive pour les $\mathcal{LOM}$-arrangements.

Théorème 10. *Soit $r \geq 2$ un nombre entier et soit $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ un matroïde orienté du réseau. Alors, pour toutes 2-coloration non triviales des hyperplans dans l'arrangement obtenu à partir de $\mathcal{M}$ il existe toujours au moins r simplexes bichromatique.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur le rang r. Pour $r = 2$, le graphe des simplexes d'un matroïde orienté du réseau sans circuits à 2 éléments, est donné par le circuit de la figure 18.

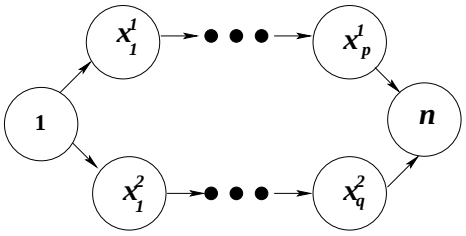


FIGURE 18 – $G_i(M)$ lorsque $r = 2$.

Ainsi, toutes 2-colorations non trivales des éléments a au moins deux arêtes avec des extrêmités de couleurs différentes, ce qui donne deux simplexes bichromatiques.

Pour simplifier, on peut supposer que dans le graphe des simplexes si $\max\{A_{i-1}^2\} \notin A_i^1$ alors $\max\{A_{i-1}^2\} \in X_i^1$ pour tout i. Soit m le premier élément (dans l'ordre lexicographique) dont la couleur est différente de celle donnée à l'élément 1. Nous avons trois cas.

Cas 1) Supposons que $m = n$. Alors, par la Remarque 3 il y a des simplexes ayant comme derniers éléments ceux des listes suivantes

$$\big\{\max\{X_i^2\}(or\ \max\{A_i^1\}\ si\ X_i^2 = \emptyset), \max\{A_i^2\}, \ldots, \max\{A_{r-1}^2\}, m\big\}$$

pour chaque $i = 1, \ldots, r-1$ et

$$\big\{\max\{X_1^1\}(ou\ 1\ si\ X_1^1 = \emptyset), \max\{A_1^2\}, \ldots, \max\{A_{r-1}^2\}, m\big\}\,.$$

Par conséquent, il existe r simplexes ayant $n = m$ comme dernier élément (une couleur différente de tous les éléments précédents) et il y a donc r simplexes bichromatiques.

Cas 2) $\min\{A_{r-2}^2\} < m \leq n-1$. Alors, comme ci-dessus, on peut trouver $r-1$ simplexes dont l'avant dernier élément est m.

En outre, nous avons aussi un simplexe dont le dernier élément est m. En effet, comme $m > \min\{A_{r-2}^2\} \geq \max\{A_{r-1}^1\}$, alors $m \in X_r^1 \cup X_r^2$. Par conséquent, nous avons également r simplexes bichromatiques.

Cas 3) $m \leq \min\{A_{r-2}^2\}$. Pour un matroïde orienté du réseau $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ sur $\{1, \ldots, n\}$. Soit $\bar{A}_{r-2}^2 = A_{r-2}^2 \backslash \min\{A_{r-2}^2\}$, nous avons $\mathcal{M}' = \bigcup_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_i \backslash \bar{A}_{r-2}^2 \in \mathcal{LOM}$ de rang $r-1$ et sans circuit à 2 elements. $m \leq \min\{A_{r-2}^2\}$, alors $m \in \mathcal{M}'$ et, par induction, il existe $r-1$ simplexes dans $\mathcal{M}'$. Il est possible d'ajouter à chacun de ces simplexes un élément de $X_r^1 \cup X_r^2 \cup \{n\}$ dans le but d'avoir les $r-1$ simplexes bichromatiques souhaités dans $\mathcal{M}$.

Sous-cas 3.1) Si $m \leq \max\{A_{r-1}^1\}$ alors il existe i tel que $m \in A_i^1$ pour $i = 1, \ldots r-1$. Le simplexe ayant comme derniers éléments la liste suivante est bichromatique dans $\mathcal{M}'$

$\{m, \min\{X_i^1\}$ *(or* $\min\{A_i^2\}$ *if* $X_i^1 = \emptyset$*),* $\min\{X_{i+1}^1\}$*(ou* $\min\{A_{i+1}^2\}$ *si* $X_{i+1}^1 = \emptyset$*),*$\ldots, \min\{X_{r-2}^1\}$*(ou* $\min\{A_{r-2}^2\}$ *si* $X_{r-2}^1 = \emptyset)\big\}$*. Dans $\mathcal{M}$, il existe deux simplexes ayant ces éléments car on peut ajouter* $\min\{X_{r-1}^1\}$*(ou* $\min\{A_{r-1}^2\}$ *si* $X_{r-1}^1 = \emptyset$*) et* $\min\{X_{r-1}^2\}$*(ou* $\min\{A_{r-1}^2\}$ *si* $X_{r-1}^2 = \emptyset$*).*

Alors nous avons r simplexes bichromatiques dans $\mathcal{M}$ parceque nous pouvons ajouter deux éléments à l'un des $r-1$ simplexes bichromatiques dans $\mathcal{M}'$

Sous-cas 3.2) Si $m > \max\{A_{r-1}^1\}$ alors $m \in X_r^1 \cup X_r^2$ et nous avons donc une nouveau simplexe avec m comme dernier élément comme dans le Cas 2 □

Quatrième partie

Jeux de commutation sur les matroïdes

Sommaire

11 Introduction **65**

12 Resultat principal **66**

11 Introduction

En 1960, C.E. Shannon a introduit le jeu suivant [3].

Jeu de commutation pour les graphes. Soit G un graphe et e une arête de G. Deux joueurs, *Constructeur* et *Destructeur*, jouent alternativement. Un coup de Constructeur consiste à rendre une arête non jouée invulnérable à la suppression, (l'objectif de Constructeur est de construire un chemin entre les extrémités de l'arête injouable e). Un coup de Destructeur consiste à supprimer une arête non jouée (l'objectif de Breaker est d'empêcher Maker de réussir). Le jeu continue jusqu'à ce qu'un des joueurs est atteint son objectif.

Cela a été généralisée et élégamment résolu pour les matroïdes par [Lehman, 1964]. En 1986, Hamidoune et Las Vergnas [Hamidoune et Las Vergnas, 1997a] ont introduit le jeu de commutation sur les graphes orientés (voir [Hamidoune et Las Vergnas, 1997b] pour une variante *arborescence enracinée*). Ils ont également examiné naturellement cette question pour une version sur les matroïdes orientés.

Jeux de commutation pour les matroïdes orientés. Soit $\mathcal{M}$ un matroïde orienté et e un des éléments de son ensemble support. Constructeur et Destructeur jouent alternativement en choisissant un élément non joué de $\mathcal{M}$ différent de e, Constructeur fixe un élément de l'ensemble support ainsi que l'orientation de cet élément. Destructeur lui supprime l'élément. A la fin de la partie nous obtenons un matroïde orienté qui est un mineur de celui d'origine et qui a éventuellement eu une réorientation de certains de ces éléments. Constructeur gagne la partie si l'orientation finale de $\mathcal{M}$ contient un circuit positif contenant e. Destructeur gagne dans les autres cas.

Hamidoune et Las Vergnas [Hamidoune et Las Vergnas, 1997a] présentent une solution complète pour les matroïdes orientés graphiques et cographiques et conjecturent que la classification du jeu orienté est identique à la classification d'une version non orienté.

Conjecture 3. *[Hamidoune et Las Vergnas, 1997a, Conjecture 8.1] Soit $\mathcal{M}$ un matroïde orienté sur E. Si E est l'union de deux bases disjoints, alors le jeu de commutation orienté sur $\mathcal{M}$ est gagnante pour Constructeur jouant en premier.*

Récemment, Forge et Vieilleribière [Forge et Vieilleribière, 2009] ont prouvé cette conjecture pour la classe des matroïdes de *Lawrence*. Dans cette partie nous montrons que la Conjecture 3 est vraie pour les matroïdes orientés obtenus comme l'union de matroïdes orientés uniformes de rang 1 et / ou de rang 2 (voir le Théorème 11). Celui-ci contient le résultat de Forge and Vieilleribière dans le cas particulier où l'union se

3. Les résultats de ce chapitre ont données lieu à la publication du papier [Chatelain et Ramirez Alfonsin, 2010b]

compose de matroïdes orientés uniformes de rang 1.

12 Resultat principal

Soit $\mathcal{M}$ un matroïde orienté sur l'ensemble support $\{1, \ldots, n\}$. On note $\mathcal{C}(\mathcal{M}), \mathcal{B}(\mathcal{M})$ et $r(\mathcal{M})$ l'ensemble des circuits, l'ensemble des bases et le rang de $\mathcal{M}$ respectivement. L'opération *union* pour les matroïdes orientés est une extension de l'union des matroïdes ordinaires. La version orientée est d'abord paru dans un cas particulier d'un résultat plus général de Las Vergnas [Las Vergnas, 1978b] qui prouve que les extensions principales des matroïdes orientés peuvent être orientées. Las Vergnas [Las Vergnas, 1975] utilisa cela pour montrer que les images des matroïdes orientables sont aussi orientables (et donc l'union des matroïdes orientables est orientable).

Lawrence et Weinberg [Lawrence et Weinberg, 1981] ont montré que l'opération de l'union peut être décrite en termes d'orientations des bases (ou chirotopes). Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ des matroïdes orientés sur un ensemble support totalement ordonné E avec n elements de rang r_1 et r_2 respectivement, et soient $\chi_{\mathcal{M}_1}$ et $\chi_{\mathcal{M}_2}$ qui représentent leur chirotopes correspondants. Nous supposons que $r_1 + r_2 \leq n - 1$. Soit

$$\chi_{\mathcal{M}}(j_1, \ldots, j_{r_1+r_2}) = \chi_{\mathcal{M}_1}(j_1, \ldots, j_{r_1}) \cdot \chi_{\mathcal{M}_2}(j_{r_1+1}, \ldots, j_{r_1+r_2}) \tag{9}$$

pour tout $(r_1 + r_2)$-tuple $j_1 < \cdots < j_{r_1+r_2}$ de E. Lawrence et Weinberg [Lawrence et Weinberg, 1981, Theorem 3] ont prouvé que $\chi_{\mathcal{M}}$ est l'orientation des bases d'un matroïde orienté de rang $r_1 + r_2$ sur l'ensemble support E, apellé *union* de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ (et noté $M = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$). Si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont uniformes (nous rapellons qu'un *matroïde uniforme*, noté $\mathcal{U}_{r,n}$, est un matroïde avec comme ensemble de bases tous les r sous-ensembles d'un ensemble de n éléments) alors $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ est uniforme.

Proposition 9. *Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ où $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont des matroïdes orientés uniformes de rang r_1 et r_2 respectivement. Soit $C = (i_1, \ldots, i_{r_1}, j_1, \ldots, j_{r_2+1})$ un circuit de $\mathcal{M}$ tel que $C_1 = (i_1, \ldots, i_{r_1}, j_1)$ (resp. $C_2 = (j_1, \ldots, j_{r_2+1})$) est un circuit de $\mathcal{M}_1$ (resp. un circuit de $\mathcal{M}_2$) tel que $C_1(j_1) = C_2(j_1) = C(j_1)$. Alors,*

$$C_1(i_k) = C(i_k) \text{ pour chaque } 1 \leq k \leq r_1 \text{ et } C_2(j_k) = C(j_k) \text{ pour chaque } 1 \leq k \leq r_2 + 1$$

où $C(k)$ représente le signe de l'élément k dans C.

Démonstration. Comme $\mathcal{M}$ est uniforme alors,

$$\chi_{\mathcal{M}}(B_j) \cdot \chi_{\mathcal{M}}(B_{j+1}) = -C(i_j) \cdot C(i_{j+1}) \tag{10}$$

où $B_j = C \setminus \{i_j\}$ et $B_{j+1} = C \setminus \{i_{j+1}\}$ sont les bases de $\mathcal{M}$. Donc,

$$\chi_{\mathcal{M}}(i_1, \ldots, i_{r_1-1}, j_1, \ldots, j_{r_2+1}) \cdot \chi_{\mathcal{M}}(i_1, \ldots, i_{r_1}, j_2, \ldots, j_{r_2+1}) = -C(i_{r_1}) \cdot C(j_1). \tag{11}$$

Maintenant, par l'équation (9), nous avons

$$\chi_{\mathcal{M}}(i_1,\ldots,i_{r_1-1},j_1,\ldots,j_{r_2+1}) = \chi_{\mathcal{M}_1}(i_1,\ldots,i_{r_1-1},j_1)\cdot\chi_{\mathcal{M}_2}(j_2,\ldots,j_{r_2+1}) \tag{12}$$

et

$$\chi_{\mathcal{M}}(i_1,\ldots,i_{r_1},j_2,\ldots,j_{r_2+1}) = \chi_{\mathcal{M}_1}(i_1,\ldots,i_{r_1-1},i_{r_1})\cdot\chi_{\mathcal{M}_2}(j_2,\ldots,j_{r_2+1}). \tag{13}$$

En combinant les équations (10), (11), (12) et (13) nous obtenons

$$C(i_{r_1})\cdot C(j_1) = -\chi_{\mathcal{M}_1}(i_1,\ldots,i_{r_1-1},j_1)\cdot\chi_{\mathcal{M}_1}(i_1,\ldots,i_{r_1-1},i_{r_1}) = C_1(i_{r_1})\cdot C_1(j_1).$$

Comme $C_1(j_1) = C(j_1)$ alors $C(i_{r_1}) = C_1(i_{r_1})$. Le resultat suit récursivement en utilisant l'argument précédent. □

Lemme 6. *Le jeu de commutation orienté sur $\mathcal{U}_{2,4}$ est gagnant pour Constructeur jouant en premier. En outre, il y a deux choix gagnant pour le premier coup de Constructeur.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous supposons que l'élément donné est le 1 et ainsi l'objectif de Constructeur est de créer un circuit positif contenant 1. Nous affirmons que l'objectif de Constructeur peut être atteint si il existe un élément $f \in \{2,3,4\}$ tel que le signe de $C(1)\cdot C(f)$ est le même pour tout circuit C contenant 1 et f. En effet, supposons que $C(1)\cdot C(f) = +$, et que C est un circuit contenant 1 et f. Dans ce cas, Constructeur conserve le signe $C(f)$ et pour chaque choix de Destructeur l'élément restant g appartient à un circuit de C' contenant 1 et f. Constructeur oriente alors g de façon que $C'(1) = C'(f) = C'(g)$ et donc le circuit C' est positif. Dans le cas où $C(1)\cdot C(f) = -$, on peut procéder comme ci-dessus, sauf que au début Constructeur change le signe de f.

Nous allons montrer qu'il y a deux éléments vérifiant la condition ci-dessus. Supposons qu'il y a deux circuits différents $C_1 = \{1,2,3\}$ and $C_2 = \{1,2,4\}$ (contenant à la fois 1 et 2) de sorte que $C_1(1) = C_2(1) = +$. Alors, $C_1(1)\cdot C_1(2) \neq C_2(1)\cdot C_2(2)$ et $C_1(2) \neq C_2(2)$. Sans perte de généralité, nous supposons que $C_1(2) = +$. Comme $C_1 \neq C_2$ et $2 \in C_1^+ \cap C_2^-$ alors il existe un circuit C_3 tel que $C_3^+ \subset (C_1^+ \cup C_2^+)\setminus\{2\}$ et $C_3^- \subset (C_1^- \cup C_2^-)\setminus\{2\}$. Donc, $C_3 = \{1,3,4\}$ avec $C_3(1) = C_1(1) = C_2(1)$, $C_3(3) = C_1(3)$ et $C_3(4) = C_2(4)$. Par conséquent, les deux éléments 3 et 4 vérifient les conditions ci-dessus. □

Théorème 11. *Soit $\mathcal{M} = \cup_{i=1}^{p}\mathcal{M}_i$ où $\mathcal{M}_i$ est un matroïde orienté uniforme sur E de rang $r_i = 1$ ou 2 pour chaque $1 \leq i \leq p$. Ensuite, le jeu de commutation orienté sur $\mathcal{M}$ est gagnant pour Constructeur jouant en premier si et seulement si $|E| \geq 2r$ où $r = \sum_{i=1}^{p} r_i$ est le rang de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit e un élément de $\mathcal{M}$. Si $|E| < 2r$ alors il n'y a pas suffisamment d'éléments pour que Constructeur puissent créer le circuit positif escompté de r éléments et donc Constructeur perd. Supposons que $|E| = 2r$. La stratégie gagnante de Constructeur serait de construire un circuit positif C_i dans $\mathcal{M}_i$ pour chaque $1 \leq i \leq p$ tel que

(a) $C_i \cap C_j = \emptyset$ pour tout $1 \leq i < j \leq p$ et $j \neq i+1$,

(b) le dernier élément de C_i est le premier élément de C_{i+1} pour chaque $1 \leq i \leq p-1$, (et c'est le seul élément en commun),

et (c) $e \in C_i$ pour un certain $1 \leq i \leq p$.

La précédente stratégie est gagnante pour Constructeur car d'après la proposition 9, elle retourne un circuit positif $C = \cup_{i=1}^{p} C_i$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ contenant e.

Nous partitionnons E en intervalles $I_i = [n_{i-1}, n_i]$ où $n_i = 2r_i + n_{i-1}$ pour chaque $1 \leq i \leq p$ avec $n_0 = 0$ (notons que $n_p = 2r$ et que I_i contient $2r(\mathcal{M}_i)$ éléments). Nous supposons que $n_{i-1} \leq e \leq n_i$ pour un certain $1 \leq i \leq p$. Nous avons deux cas.

Cas A) Si $r_i = 1$, alors $e = n_i$ où $n_i - 1$. Constructeur choisit soit $e_M = n_i - 1$ soit n_i. Cela permet à Constructeur de signer n_i ou $n_i - 1$ de façon que $\chi_{\mathcal{M}_i}(n_i) \cdot \chi_{\mathcal{M}_i}(n_i - 1) = -1$. Bien sur, par l'équation (10), cela est dans le but d'avoir $C_i(n_i) = C_i(n_i - 1)$ et donc de construire un circuit positif $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$.

Maintenant, si Destructeur joue un élément $e_B > n_i$ (resp. $e_B < n_i - 1$) alors nous recommencons la procedure en posant $E' = E \setminus \{e_M, e_B\}$ et $e = n_i$ (resp. $e = n_i - 1$). Donc, dans la prochaine étape, Constructeur fabriquera un circuit positif $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ dont le premier élément sera le dernier élément de C_i (resp. un circuit positif $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ dont le dernier élément sera le premier élément de C_i).

Cas B) Si $r_i = 2$, alors nous avons quatre sous-cas.

Sous-cas 1) Si $e = n_i$ alors Constructeur choisit soit $n_i - 2$ soit $n_i - 1$. Par le Lemme 6, il y a deux choix gagnants parmi $n_i - 1, n_i - 2, n_i - 3$ et donc soit $n_i - 2$ soit $n_i - 1$ est un choix gagnant pour faire un circuit positif $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. Cet élément gagnant $e_M^1 \in \{n_i - 1, n_i - 2\}$ est choisit par Constructeur.

Maintenant, le prochain mouvement de Constructeur depend de l'élément qui sera joué par Destructeur.

(i) Si Destructeur joue un élément $e_B^1 < n_i$, alors Constructeur choisira $e_M^2 = \max\{j \mid j < n_i\}$ creant ainsi le circuit positif désiré $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. En outre, si Destructeur joue par la suite $e_B^2 < e_M^2 < n_i$ (resp. $e_B^2 > n_i$) alors nous posons $E' = E \setminus \{e_M^1, n_i, e_B^1, e_B^2\}$ et $e' = e_M^2$ (resp. $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ et $e' = n_i$), et recommençons notre stratégie avec E' et e'. Cela est fait de sorte que à l'étape suivante, Constructeur poura fabriquer

un circuit positif $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ dont le dernier élément sera le premier de C_i (resp. $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ dont le premier élément sera le dernier de C_i)

(*ii*) Si Destructeur joue $e_B^1 > n_i$, alors nous posons $E' = E \setminus \{e_M^1, e_B^1\}$ et $e' = n_i$ et redemarrons notre stratégie avec E' et e'. A nouveau cela est fait de sorte que dans la prochaine étape, Constructeur fabriquera un circuit positif $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ dont le premier élément est le dernier élément de C_i. Dans ce cas, le circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$ sera complété par un élément $e_M^2 \in \{n_i - 1, n_i - 2, n_i - 3\} \setminus \{e_M^1\}$ dès que Destructeur jouera $e_B^2 < n_i$. Le choix final de l'élément dépendra de l'élément joué par Destructeur $e_M^2 \neq e_B^2$.

Le sous-cas suivant est complètement symétrique, en respectant l'intervalle $[n_i - 3, n_i - 2, n_i - 1, n_i]$, et donc analogue au sous-cas 1).

Sous-cas 2) Si $e = n_i - 3$, alors Constructeur choisit soit $n_i - 2$ soit $n_i - 1$. Par le Lemme 6, il y a deux choix gagnants parmi $n_i - 1, n_i - 2, n_i - 3$ et donc soit $n_i - 2$ soit $n_i - 1$ est un choix gagnant pour faire un circuit positif $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. Cet élément gagnant, disons $e_M^1 \in \{n_i - 1, n_i - 1\}$ est choisi par Constructeur.

Maintenant, la prochaine étape de Constructeur dépent de l'élément qui sera joué par Destructeur.

(*i*) Si Destructeur joue un élément $e_B^1 > n_i - 3$, alors Constructeur choisira $e_M^2 = \min\{j \mid j > n_i - 3\}$ créant ainsi le circuit positif désiré $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. En outre, si Destructeur joue par la suite $e_B^2 < e_M^2 < n_i - 3$ (resp. $e_B^2 > n_i - 3$) alors nous posons $E' = E \setminus \{e_M^1, n_i - 3, e_B^1, e_B^2\}$ et $e' = e_M^2$ (resp. $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ et $e' = n_i - 3$), et nous redémarrons notre stratégie avec E' et e'. Cela est fait de sorte que à la prochaine étape Constructeur fabriquera un circuit positif $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ dont le premier élément est le dernier élément de C_i (resp. $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ dont le dernier élément est le premier élément de C_i).

(*ii*) Si Destructeur joue un élément $e_B^1 < n_i - 3$, alors nous posons $E' = E \setminus \{e_M^1, e_B^1\}$ et $e' = n_i - 3$ et nous redémarrons notre stratégie avec E' et e'. A nouveau cela est fait de sorte que dans la prochaine étape, Constructeur fabriquera un circuit positif $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ dont le dernier élément est le premier élément de C_i. Dans ce cas, le circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$ sera complété par un élément $e_M^2 \in \{n_i, n_i - 1, n_i - 2\} \setminus \{e_M^1\}$ dès que Destructeur jouera $e_B^2 > n_i - 3$. Le choix final de l'élément dépendra de l'élément joué par Destructeur $e_M^2 \neq e_B^2$.

Sous-cas 3) Si $e = n_i - 1$, alors Constructeur choisit soit $n_i - 2$ soit n_i. Par le Lemme 6, il y a deux choix gagnants parmi $n_i, n_i - 2, n_3$ et donc soit $n_i - 2$ soit n_i est un choix gagnant pour faire un circuit positif $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. Cet élément gagnant, disons $e_M^1 \in \{n_i, n_i - 2\}$ est choisi par Constructeur.

Si $e_M^1 = n_i$, alors nous revenons au sous-cas 1). Supposons que $e_M^1 = n_i - 2$. Si Destructeur joue un élément $e_B^1 < n_i - 2$ (resp. $e_B^1 > n_i - 1$), alors Constructeur choisira $e_M^2 = n_i$ (resp. $e_M^2 = n_i - 3$). En outre, si Destructeur joue par la suite $e_B^2 > n_i$ (resp. $e_B^2 < n_i - 3$) alors nous posons $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ et $e' = n_i$ (resp. $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ et $e' = n_i - 3$) et nous redémarrons notre stratégie avec E' et e'. Cela est fait de sorte que à la prochaine étape Constructeur fabriquera un circuit positif $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ dont le premier élément est le dernier élément de C_i (resp. $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ dont le dernier élément est le premier élément de C_i).

Le sous-cas suivant est complètement symétrique, en respectant l'intervalle $[n_i - 3, n_i - 2, n_i - 1, n_i]$, et donc analogue au sous-cas 3).

Subcase 4) Si $e = n_i - 2$, alors Constructeur choisit soit $n_i - 3$ soit $n_i - 1$. Par le lemme 6, il y a deux choix gagnants parmi $n_i, n_i - 2, n_3$ et donc soit $n_i - 3$ soit $n_i - 1$ est un choix gagnant pour faire un circuit positif $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. Cet élément gagnant, disons $e_M^1 \in \{n_i - 1, n_i - 3\}$ est choisi par Constructeur.

Si $e_M^1 = n_i - 3$, alors nous revenons au sous-cas 2). Supposons que $e_M^1 = n_i - 1$. Si Destructeur joue un élément $e_B^1 > n_i - 2$ (resp. $e_B^1 < n_i - 1$), alors Constructeur choisira $e_M^2 = n_i - 3$ (resp. $e_M^2 = n_i$). En outre, si Destructeur joue par la suite $e_B^2 < n_i - 3$ (resp. $e_B^2 > n_i$) alors nous posons $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ et $e' = n_i - 3$ (resp. $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ et $e' = n_i$) et nous redémarrons notre stratégie avec E' et e'. Cela est fait de sorte que à la prochaine étape Constructeur fabriquera un circuit positif $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ dont le dernier élément est le premier élément de C_i (resp. $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ dont le premier élément est le dernier élément de C_i).

Notons que après r mouvements de Constructeur, un circuit positif est formé. Nous remarquons finalemment que dans le cas où $|E| > 2r$, alors Constructeur sélectionne un sous-ensemble A de $\{1, \ldots, |E|\}$ tel que $|A| = 2r$ et $e \in A$ et donc utilise des mouvements *fictitifs* comme cela est fait dans [Hamidoune et Las Vergnas, 1997a]. C'est à dire, Constructeur applique la stratégie précédente à A en choisissant un élément de Destructeur si Destructeur joue en dehors de A. □

Remarque 4. *En se servant de la liste des matroïdes orientés uniformes de rang 3 (resp. 4) à 6 éléments (resp.8 éléments), nous avons trouvé par calcul sur ordinateur que le jeu de Shannon reste gagnant pour Constructeur. De plus dans ces cas aussi il y a plusieurs choix pour le premier élément, nous pensons donc qu'il serait possible de faire un raisonnement analogue à celui ci-dessus pour l'union avec des matroïdes de rang 1,2,3 ou 4.*

Cinquième partie

Matroid Base Polytope Decomposition

Sommaire

A Abstract **73**

B Introduction **73**

C Decomposition **76**

C.1 Uniform matroids 81

C.2 Lattice path matroids 82

D Direct sum **84**

E Binary matroids **88**

A Abstract

Let $P(M)$ be the matroid base polytope of a matroid M. A matroid base polytope decomposition of $P(M)$ is a decomposition of the form $P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$ where each $P(M_i)$ is also a matroid base polytope for some matroid M_i, and for each $1 \leq i \neq j \leq t$, the intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ is a face of both $P(M_i)$ and $P(M_j)$. In this paper, we investigate hyperplane splits, that is, polytope decompositions when $t = 2$. We give sufficient conditions for M so $P(M)$ has a hyperplane split and characterize when $P(M_1 \oplus M_2)$ has a hyperplane split where $M_1 \oplus M_2$ denote the direct sum of matroids M_1 and M_2. We also prove that $P(M)$ has not a hyperplane split if M is binary. Finally, we show that $P(M)$ has not a decomposition if its 1-skeleton is the hypercube [4].

B Introduction

For general background in matroid theory we refer the reader to [Oxley, 1992, Welsh, 1976]. A *matroid* $M = (E, \mathcal{B})$ of *rank* r is a finite set $E = \{1, \ldots, n\}$ (called the *ground* set of M) together with a nonempty collection $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ of r-subsets of E (called the *bases* of M) satisfying the following *basis exchange axiom* :

if $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ and $e \in B_1 \setminus B_2$ then there exists $f \in B_2 \setminus B_1$ such that $(B_1 - e) + f \in \mathcal{B}$.

The family of *independent* sets of M, denoted by $\mathcal{I}(M)$ consists of all subsets of bases of M. For a matroid $M = (E, \mathcal{B})$, let $P(M)$ be the *matroid base polytope* of M defined as the convex hull of the incidence vectors of bases of M, that is,

$$P(M) := \text{conv}\left\{\sum_{i \in B} e_i : B \text{ a base of } M\right\},$$

where e_i denotes the i^{th} standard basis vector in $\mathbb{R}^n$. $P(M)$ is a polytope of dimension at most $n - 1$. Notice that $P(M)$ is a face of the *independent set polytope* $I(M)$ which is obtained as the convex hull of the incidence vectors of the independent sets of M. These polytopes were first studied by Edmonds [Edmonds, 2003, Edmonds, 1979].

A *matroid base polytope decomposition* of $P(M)$ is a decomposition

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$$

4. This paper corresponds to the article [Chatelain et Ramirez Alfonsin, 2010a]

where each $P(M_i)$ is also a matroid base polytope for some matroid M_i, and for each $1 \leq i \neq j \leq t$, the intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ is a face of both $P(M_i)$ and $P(M_j)$.

$P(M)$ is said to be *decomposable* if it has a matroid base polytope decomposition with $t \geq 2$, and *indecomposable* otherwise. A decomposition is called *hyperplane split* if $t = 2$.

Matroid base polytope decomposition have appeared in many different contexts. For instance, they are treated in the work by Hacking, Keel and Tevelev [Hacking *et al.*, 2006, Section 3.3] in relation with the compactification of the moduli space of hyperplane arrangements (see also [Kaprano, 1993] and [Keel et Tevelev, 2004, Section 2.6]), in Speyer's work [Speyer, 2008, Speyer, 2009] concerning tropical linear spaces, and in Lafforgue's work [Lafforgue, 1999, Lafforgue, 2003] while studying the compactifications of the fine Schubert cell of the Grassmannian. In particular, Lafforgue's work implies that for a matroid M represented by vectors in $\mathbb{F}^r$, if $P(M)$ is indecomposable, then M will be *rigid*, that is, M will have only finitely many realizations, up to scaling and the action of $GL(r, \mathbb{F})$. Recently, Billera, Jia and Reiner [Billera *et al.*, 2009] (see also the closely related results due to Luoto [Luoto, 2008]), Speyer [Speyer, 2008, Speyer, 2009], Derksen [Derksen, 2010] and Ardila, Fink and Rincon [Ardila *et al.*, pear] have showed that different interesting matroids functions (as quasisymmetric functions and Tutte's polynomials) behave like *valuations* on the the associated matroid base polytope decomposition.

It is therefore of interest to know whether a given matroid base polytope is decomposable or not. Unfortunately, there is not much known about the existence or nonexistence of such decompositions (even for the case $t = 2$). Kapranov [Kaprano, 1993, Section 1.3] showed that all decompositions of a (appropriately parametrizied) rank two matroid can be achieved by a sequence of hyperplane splits. In [Billera *et al.*, 2009], Billera, Jia and Reiner found five rank three matroids on 6 elements for which the corresponding polytope is indecomposable. They also showed that $P(M)$ can be split into three indecomposable pieces where M is the rank three matroid on $\{1, \ldots, 6\}$ having every triple but $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}$ and $\{3, 5, 6\}$ as bases. Moreover, they showed that this decomposition cannot be obtained via hyperplane splits. In this paper, we show the existence and nonexistence of hyperplane splits for some infinite classes of matroids. We also give a special family of matroid base polytopes that are indecomposable.

It is known that nonempty faces of matroid base polytope are matroid base polytopes [Gel'fand et Serganova, 1987, Theorem 2]. So, the common face $P(M_i) \cap P(M_j)$ (whose vertices correspond to elements of $\mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{B}(M_j)$) must also be a matroid base polytope. Thus, in order to investigate the nonexistence of base polytope decomposition, one may consider the following combinatorial decomposition version. A *matroid*

base decomposition of a matroid M is a decomposition

$$\mathcal{B}(M) = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{B}(M_i)$$

where $\mathcal{B}(M_k)$, $1 \leq k \leq t$ and $\mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{B}(M_j)$, $1 \leq i \neq j \leq t$ are collections of bases of matroids.

M is said to be *combinatorial decomposable* if it has a matroid base decomposition. We say that the decomposition is nontrivial if $\mathcal{B}(M_i) \neq \mathcal{B}(M)$ for all i. If $P(M)$ is decomposable then M is clearly combinatorial decomposable. However, a matroid base decomposition do not necessarily induce a matroid base polytope decomposition. For instance, the rank 2 matroid M^* where $\mathcal{B}(M^*) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ has a combinatorial decomposition given by $\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ and $\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}\}$ since $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2)$ and $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{2,3\}$ are collections of bases of matroids. However the corresponding polytopes $P(M_1)$ and $P(M_2)$ do not decompose $P(M^*)$, see Figure 19.

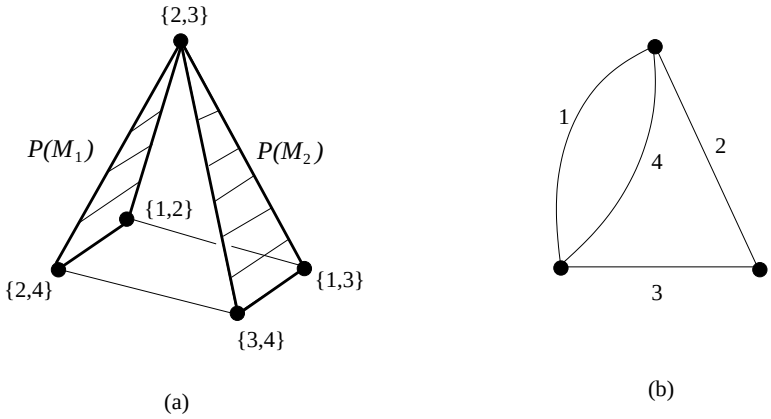


FIGURE 19 – $P(M^*), P(M_1)$ and $P(M_2)$

In order to prove the existence of nontrivial hyperplane splits, we always first show the existence of matroid base decompositions and then prove that this induces a hyperplane split since some geometric conditions (see Proposition 1) are satisfied.

In next section, we shall give sufficient conditions for a matroid M so that $P(M)$ has a nontrivial hyperplane split. Our constructive method allows us to show the existence of at least $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *different* hyperplane splits of $P(U_{n,r})$ with $n \geq r+2 \geq 3$ where $U_{n,r}$ denotes the *uniform matroid* on n elements of rank r (recall that $\mathcal{B}(U_{n,r})$ consist of all r-subsets of $\{1,\ldots,n\}$). In Section D, we present a complete characterization for matroid $M_1 \oplus M_2$ so $P(M_1 \oplus M_2)$ has a nontrivial hyperplane split where $M_1 \oplus M_2$ denotes the *direct sum* of matroids M_1 and M_2. In Section E, we will show that $P(M)$ has not a nontrivial hyperplane split if M is a *binary* matroid, that is, if M is *representable*

over $\mathbb{F}^2$. We finally prove that if the 1-skeleton of $P(M)$ is the hypercube then $P(M)$ is indecomposable.

C Decomposition

The *matroid base graph* $G(M)$ of a matroid M is the graph having as its set of vertices the bases of M and there is an edge between two vertices (bases) B_1, B_2 if and only if there exist a pair of elements $e \in B_1$ and $f \in B_2$ such that $B_2 = (B_1 \setminus e) + f$, that is, the symmetric difference of B_1 and B_2, denoted by $\Delta(B_1, B_2)$, has cardinality two. It is known [Gel'fand *et al.*, 1987] that $G(M)$ is the 1-skeleton of $P(M)$ (in other words, the edges of $P(M)$ represent the basis exchange axiom) and that $G(M)$ is connected. We present the following geometric result used throughout the rest of the paper.

Proposition 1. *Let P be a d-polytope with set of vertices X. Let H be a hyperplane such that $H \cap P \neq \emptyset$ with H not supporting P. So, H splits P into polytopes P_1 and P_2, that is, $H \cap P = P_1 \cap P_2 = F \neq \emptyset$. H also partition X into sets X_1 and X_2 with $X_1 \cap X_2 = W$. Then, for each edge $[u, v]$ of P we have that $\{u, v\} \subset X_i$ with either $i = 1$ or 2 if and only if $F = conv(W)$.*

Démonstration. We notice that $X_1, X_2 \neq \emptyset$ (since H is not supporting). and let $[u, v]$ be an edge of P.

(*Necessity*) We shall proceed by contradiction. Suppose that $\{u, v\} \subset X_i$ with $i = 1$ or 2 and that $F \neq conv(W)$. Since $conv(W) \subset F$ then there exists a vertex x in F such that $x \notin W$ (and thus $x \notin X$). So, x is the intersection of H with an edge $[u, v]$ of P with $u \in X_1 \setminus X_2$ and $v \in X_2 \setminus X_1$ which is a contradiction.

(*Sufficiency*) We shall proceed by contradiction. Suppose that $F = conv(W)$ and that $u \in X_1 \setminus X_2$ and $v \in X_2 \setminus X_1$. So, $u \in P_1 \setminus P_2$ and $v \in P_2 \setminus P_1$ and therefore $[u, v] \cap F = s$ with s a vertex of F different from u and v. Then, $conv(W)$ does not contain s (since s is not a vertex of W) and so $F \neq conv(W)$, which is a contradiction. □

We have the following easy consequence of this proposition.

Corollary 1. *Let P, P_1 and P_2 be the polytopes as in Proposition 1. Then, $F = conv(W)$ if and only if $P_i = conv(X_i)$, $i = 1, 2$ (and thus $P = P_1 \cup P_2$ with P_1 and P_2 polytopes of the same dimension as P sharing a facet).*

Let $M = (E, \mathcal{B})$ be a matroid of rank r and let $A \subseteq E$. We recall that the independent sets of the *restriction* matroid of M to A, denoted by $M|_A$, are given by $\mathcal{I}(M|_A) = \{I \subseteq A : I \in \mathcal{I}(M)\}$.

Let (E_1, E_2) be a partition of E, that is, $E = E_1 \cup E_2$ and $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Let $r_i > 1$, $i = 1, 2$ be the rank of $M|_{E_i}$. We say that (E_1, E_2) is a *good* partition if there exist integers $0 < a_1 < r_1$ and $0 < a_2 < r_2$ with the following properties :

(P1) $r_1 + r_2 = r + a_1 + a_2$ and

(P2) for all $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ with $|X| \leq r_1 - a_1$ and all $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ with $|Y| \leq r_2 - a_2$ we have $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

Lemma 1. *Let $M = (E, \mathcal{B})$ be a matroid of rank r and let (E_1, E_2) be a good partition of E. Let*

$$\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1 - a_1\}$$

and

$$\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq r_2 - a_2\}.$$

where r_i is the rank of matroid $M|_{E_i}$, $i = 1, 2$ and a_1, a_2 are integers satisfying Properties (P1) and (P2). Then, $\mathcal{B}(M_1)$ and $\mathcal{B}(M_2)$ are the collections of bases of matroids M_1 and M_2 respectively.

Démonstration. We shall prove that $\mathcal{B}(M_1)$ is the collection of bases of a matroid (this can be done similarly for $\mathcal{B}(M_2)$). We show that the elements in $\mathcal{B}(M_1)$ satisfy the basis exchange axiom. Let $X, Y \in \mathcal{B}(M_1) \subset \mathcal{B}(M)$ and suppose that $e \in X \setminus Y$. Since M is a matroid then there exists $f \in Y \setminus X$ such that $X - e + f \in \mathcal{B}(M)$. We have two cases.

Case 1) Suppose that either $|X \cap E_1| < r_1 - a_1$ or $e \in E_1$. Then, $|(X - e + f) \cap E_1| \leq r_1 - a_1$ and thus $X - e + f \in \mathcal{B}(M_1)$.

Case 2) Suppose that $|X \cap E_1| = r_1 - a_1$ and $e \in E_2$. On one hand, we have that $|(X - e) \cap E_2| = r - 1 - (r_1 - a_1) = r - r_1 + a_1 - 1$. On the other hand, we have that $|Y \cap E_1| \leq r_1 - a_1$ and thus $|Y \cap E_2| \geq r - (r_1 - a_1)$. So, there exists $g \in Y \setminus (X - e) = Y \setminus X$ with $g \in E_2$ such that $(X - e + g) \cap E_2 \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ and also, since $g \notin E_1$, then $(X - e + g) \cap E_1 \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$. Moreover, $|(X - e + g) \cap E_1| = r_1 - a_1$ and $|(X - e + g) \cap E_2| = r - r_1 + a - 1 = r_2 - a_2$ and thus, by Property (P1), $|X - e + g| = r_1 + r_2 - a_1 - a_2 = r$. So, by Property (P2), we have $((X - e + g) \cap E_1) \cup ((X - e + g) \cap E_2) = X - e + g \in \mathcal{I}(M)$. But since, $|X - e + g| = r$ then $X - e + g \in \mathcal{B}(M)$ and since $|(X - e + g) \cap E_1| = r_1 - a_1$ then $X - e + g \in \mathcal{B}(M_1)$. □

Notice that property (P2), needed for the proof of Lemma 1, can be replaced by the following weaker condition.

(P2') for all $B_1 \in \mathcal{B}(M_1)$ and all $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ with $|Y| \leq r_2 - a_2$ we have $(B_1 \cap E_1) \cup Y \in \mathcal{I}(M)$ and for all $B_2 \in \mathcal{B}(M_2)$ and all $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ with $|Y| \leq r_1 - a_1$ we have $(B_2 \cap E_2) \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

(P2) is a stronger condition that (P2') since

$$\{B_1 \cap E_1 : B_1 \in \mathcal{B}(M_1)\} \subset \{X : |X| \leq r_1 - a_1, X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})\}$$

and

$$\{B_2 \cap E_2 : B_2 \in \mathcal{B}(M_2)\} \subset \{X : |X| \leq r_2 - a_2, X \in \mathcal{I}(M|_{E_2})\}.$$

For instance, let us consider the rank 3 matroid M on $E = \{1, \ldots, 5\}$ where $\mathcal{B}(M) = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\}\}$ (an Euclidean representation of M is given by representing element 1 as an isolated point and elements 2,3,4,5 on a line). We take $E_1 = \{1,2,3\}$, $E_2 = \{4,5\}$ and $a_1 = 1, a_2 = 1$. It can be checked that (P2') holds while (P2) does not.

Theorem 1. *Let $M = (E, \mathcal{B})$ be a matroid of rank r and let (E_1, E_2) be a good partition of E. Let M_1 and M_2 be matroids given in Lemma 1. Then, $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ is a nontrivial hyperplane split.*

Démonstration. We will first show that $\mathcal{B}(M_1)$ and $\mathcal{B}(M_2)$ give a nontrivial matroid base decomposition of M. For this, we show

(*i*) $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)$,

(*ii*) $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2) \subset \mathcal{B}(M)$,

(*iii*) $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2) \not\subseteq \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$,

(*iv*) $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) \neq \emptyset$ and

(*v*) $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ is the collection of bases of a matroid.

We then show that this matroid base decomposition induces a nontrivial hyperplane split. For this, we show

(*vi*) there exists an hyperplane containing the vertices corresponding to $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$, and not supporting $P(M)$,

(*vii*) any edge of $P(M)$ is also an edge of either $P(M_1)$ or $P(M_2)$.

So, by Corollary 1, $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ is the set of vertices of a facet of $P(M_1)$ and $P(M_2)$ and thus $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$.

We may now prove the above claims.

(*i*) We claim that $\overline{\mathcal{B}(M)} = \emptyset$. Indeed, let $B \in \overline{\mathcal{B}(M)} = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| > r_1 - a_1$ and $|B \cap E_2| > r_2 - a_2\}$. Since $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ then $|B| > r_1 + r_2 - a_1 - a_2 = r$ which is not possible. So, $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)$.

(*ii*) We show that $\mathcal{B}(M_1) \subset \mathcal{B}(M)$ (it can also be proved that $\mathcal{B}(M_2) \subset \mathcal{B}(M)$ by using similar arguments). Let B be a base of $M|_{E_1}$ (and so $|B| = r_1$). We have two cases.

Case 1) If $r_1 = r$ then $B \in \mathcal{B}(M)$ but $B \notin \mathcal{B}(M_1)$ since $|B \cap E_1| = r > r_1 - a_1$.

Case 2) If $r_1 < r$ then there exists a base $B' \in \mathcal{B}(M)$ with $B \subset B'$ since $B \in \mathcal{I}(M)$. Moreover, $|B' \cap E_1| \geq r_1 > r_1 - a_1$ and thus $B' \in \mathcal{B}(M)$ but $B' \notin \mathcal{B}(M_1)$.

(*iii*) If $\mathcal{B}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ then $\mathcal{B}(M_1) \subseteq \mathcal{B}(M_2)$ and thus $\mathcal{B}(M_2) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2) = \mathcal{B}(M)$ contradicting (*ii*).

(*iv*) Let $X, Y \in \mathcal{B}(M)$ such that $|X \cap E_1| = r_1$ and $|Y \cap E_2| = r_2$ (we have seen in (*ii*) that such bases always exist). Since $G(M)$ is connected then there exists a path $X = B_1, \ldots, B_m = Y$ connecting X and Y where $B_i \in \mathcal{B}(M)$ for each $i = 1, \ldots, m$. Since $|B_i \Delta B_{i+1}| = 2$ then $|B_i \cap E_1| = |B_{i+1} \cap E_1| + k$ with either $k = -1, 0, +1,$. Moreover, $|B_1 \cap E_1| = r_1$ and $|B_m \cap E_1| = r - r_2 = r_1 - a_1 - a_2$. So, there must exist an index k such that $|B_k \cap E_1| = r_1 - a_1$. Moreover $|B_k \cap E_2| = r - r_1 + a_1 = r_2 - a_2$. So, $B_k \in \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$.

(*v*) This can be done by using similar arguments as those used in Lemma 1.

(*vi*) We first notice that if $B \in \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ then $B \in \mathcal{B}(M)$ (so $|B| = r$) and $|B \cap E_1| \leq r_1 - a_1$, $|B \cap E_2| \leq r_2 - a_2 = r - r_1 + a_1$. So, if $B \in \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ then $|B \cap E_1| = r_1 - a_1$ and $|B \cap E_2| = r_2 - a_2$. Let H be the hyperplane defined by

$$H(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle = r_1 - a_1 \text{ where } \mathbf{e} = \sum_{i \in E_1} e_i \right\}.$$

If $B \in \mathcal{B}(M_1)$ then $|B \cap E_1| \leq r_1 - a_1$ and thus $H(x_B) \leq r_1 - a_1$. If $B \in \mathcal{B}(M_2)$ then $|B \cap E_2| \leq r_2 - a_2$ and so $|B \cap E_1| \geq r - r_2 + a_2 = r_1 - a_1$. Then, $H(x_B) \geq r_1 - a_1$. Therefore, H contains only elements in $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$. Notice that $dim(P(M) \cap H) = d - 1$ where $d = dim(P(M))$. Indeed, $dim(P(M) \cap H) \leq d$ and if $dim(P(M) \cap H) \leq d - 2$ then $P(M)$ would be contained in the closed-half space $\overline{H}^+$ or in $\overline{H}^-$ which is impossible by (*iii*). So, the affine space H' containing $P(M) \cap H$ is a hyperplane in $\mathbb{R}^d$ not supporting $P(M)$.

(*vii*) Suppose that there exists an edge in $P(M)$ belonging to neither $P(M_1)$ nor $P(M_2)$. So, there exist $B_1 \in \mathcal{B}(M_1) \backslash \mathcal{B}(M_2)$ and $B_2 \in \mathcal{B}(M_2) \backslash \mathcal{B}(M_1)$ with $\Delta(B_1, B_2) = 2$. Then, $|B_1 \cap E_1| < r_1 - a_1$ and $|B_2 \cap E_1| > r_1 - a_1$. Combining the latter with the fact that $\Delta(B_1, B_2) = 2$, then we must have $|B_1 \cap E_1| = r_1 - a_1$ which is a contradiction.

□

Remark 1. *It is not necessary to have a good partition in the hypothesis of Theorem 1*

but only the existence of a partition (E_1, E_2) *of* E *satisfying property (P1) and such that the sets* $\mathcal{B}(M_1)$*,* $\mathcal{B}(M_2)$ *and* $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ *be collections of bases of matroids. Indeed, this is the case if the partition satisfies either (P2) or (P2').*

Example 1 : Let us consider $U_{4,2}$ and the good partition $E_1 = \{1, 2\}$ and $E_2 = \{3, 4\}$ (and so $r_1 = r_2 = 2$) with $a_1 = a_2 = 1$. Then $\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$, $\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ and $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$, see Figure 20.

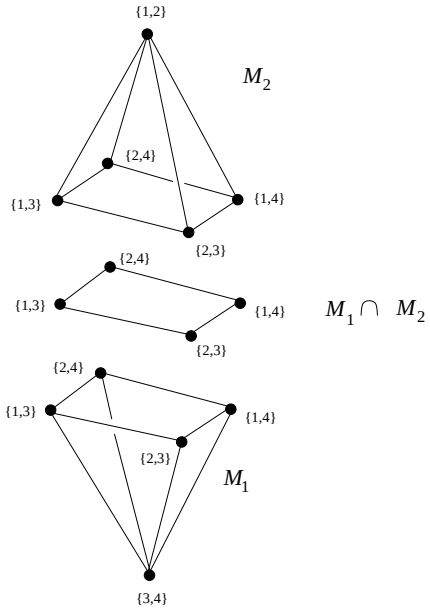


FIGURE 20 – Hyperplane split of $P(U_{4,2})$

We remark that there exist matroids with ground set E not having a good partition. For instance, let $M(K_4)$ be the matroid associated to the complete graph on four vertices. We leave this as an exercise to the reader.

It turns out that $P(M(K_4))$ has not a nontrivial hyperplane split (this is justified at the end of Section E).

Let $M = (E, \mathcal{B})$ be a matroid of rank r and let $X \subset E$ be both a circuit and a hyperplane of M (recall that a *hyperplane* is a *flat*, that is $X = cl(X)$, of rank $r - 1$). It is known [Oxley, 1992, Proposition 1.5.13] that $\mathcal{B}(M') = \mathcal{B}(M) \cup X$ is the collection of bases of a matroid M' (called, *relaxation* of M).

Corollary 2. *Let* $M = (E, \mathcal{B})$ *be a matroid and let* (E_1, E_2) *be a good partition of* E*. Then,* $P(M')$ *has a nontrivial hyperplane split where* M' *is a relaxation of* M*.*

Démonstration. It can be checked that the desired hyperplane split of $P(M')$ can be obtained by using the same given good partition (E_1, E_2) of E. □

Although $P(M(K_4))$ has not a nontrivial hyperplane split, base polytopes of relaxations of $M(K_4)$ may have one.

Example 2 : Let W^3 be the matroid of rank 3 on $E = \{1, \ldots, 6\}$ having as set of bases all 3-subsets of E except the triples $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$ and $\{2, 3, 6\}$. Notice that W^3 is a relaxation of $M(K_4)$ (by relaxing circuit $\{3, 4, 5\}$) but it is not graphic. It can be checked that $E_1 = \{1, 2, 6\}$ and $E_2 = \{3, 4, 5\}$ (and so $r_1 = r_2 = 3$) with $a_1 = 2$ and $a_2 = 1$ is a good partition.

C.1 Uniform matroids

We say that two hyperplane splits $P(M_1) \cup P(M_2)$ and $P(M_1') \cup P(M_2')$ of $P(M)$ are *equivalent* if $P(M_i)$ is *combinatorial equivalent* to $P(M_i')$ for each $i = 1, 2$ (that is, the corresponding face lattices are isomorphic). They are *different* otherwise.

Corollary 3. *Let $n \geq r + 2 \geq 4$ be integers. Let $h(U_{n,r})$ be the number of different hyperplane splits of $P(U_{n,r})$. Then,*

$$h(U_{n,r}) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

Démonstration. For each $k = 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, we let $E_1(k) = \{1, \ldots, k\}$ and $E_2(k) = \{k + 1, \ldots, n\}$. So, $M|_{E_1(k)}$ is isomorphic to $U_{k,\min\{k,r\}}$ and $M|_{E_2(k)}$ is isomorphic to $U_{n-k,\min\{n-k,r\}}$. Let r_1 and r_2 be the ranks of $M|_{E_1(k)}$ and $M|_{E_2(k)}$ respectively. Then, an easy analysis shows that

$$r_1 + r_2 = \min\{n, k + r, n - k + r, 2r\} \geq r + 2.$$

So, we can find integers $a_1, a_2 \geq 1$ such that $r_1 + r_2 = r + a_1 + a_2$ and thus $(E_1(k), E_2(k))$ is a good partition. □

Notice that there might be several choices for the values of a_1 and a_2 (each of which arises from a good partition). However, it is not clear if these partitions give different hyperplane splits.

Example 3 : Let us consider $U_{n,3}$ with $n \geq 6$. We take the good partition $E_1(k) = \{1, \ldots, k\}$ and $E_2(k) = \{k + 1, \ldots, n\}$ for any $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (and thus $r_1 = 2, r_2 = 3$). If we set $a_2 = 1$ and a_1 such that $r_1 - a_1 = 1$ then $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(U_{n,3}) : |B \cap E_1| \leq 1\}$ and $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(U_{n,3}) : |B \cap E_2| \leq 2\}$.

C.2 Lattice path matroids

Let $\mathcal{A} = (A_j : j \in J)$ be a set system, that is, multiset of subsets of a finite set E. A *transversal* of $\mathcal{A}$ is a set $\{x_j : j \in J\}$ of $|J|$ distinct elements such that $x_j \in A_j$ for all j. A *partial transversal* of $\mathcal{A}$ is a transversal of a set system of the form $(A_k : k \in K)$ with $K \subseteq J$. A fundamental result due to Edmonds and Fulkerson [Edmonds et Fulkerson, 1965] states that the partial transversals of a set of system $\mathcal{A} = (A_j : j \in J)$ are the independent sets of a matroid on E. We say that $\mathcal{A}$ is a *presentation* of the transversal matroid. The bases of a transversal matroid are the maximal partial transversals.

A *lattice path* starts at point $(0, 0)$ and uses steps $(1, 0)$ and $(0, 1)$, called *East* and *North*. Let $P = p_1, \ldots, p_{r+m}$ and $Q = q_1, \ldots, q_{r+m}$ be two lattice paths from $(0, 0)$ to (m, r) with P never going above Q. Let $\{p_{s_1}, \ldots, p_{s_r}\}$ be the set of North steps of P with $s_1 < \cdots < s_r$; similarly, let $\{q_{t_1}, \ldots, q_{t_r}\}$ be the set of North steps of Q with $t_1 < \cdots < t_r$. We clearly have that $t_i \leq s_i$ for all $1 \leq i \leq r$. Let $M[P, Q]$ be the transversal matroid that has ground set $\{1, \ldots, m + r\}$ and presentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, r\})$ where N_i denotes the interval $[t_i, s_i]$ of integers. Transversal matroids arising as above are called *lattice path matroids*. Given a subset X of $\{1, \ldots, m + r\}$, we define the lattice path $P(X) = u_1, \ldots, u_{m+r}$ where u_i is a North step if $i \in X$, an East step otherwise.

In [Bonin *et al.*, 2003] it was proved that a subset B of $\{1, \ldots, m + r\}$ with $|B| = r$ is a base of $M[P, Q]$ if and only if the associated path $P(B)$ stays in the region bounded by P and Q.

Corollary 4. *Let $M[P, Q]$ be the transversal matroid on $\{1, \ldots, m+r\}$ and presentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, r\})$ where N_i denotes the interval $[t_i, s_i]$ of integers. Suppose that there exists integer x such that $t_j < x < s_j$ and $t_{j+1} < x + 1 < s_{j+1}$ for some $1 \leq j \leq r - 1$. Then, $P(M[P, Q])$ has a nontrivial hyperplane split.*

Démonstration. Let $E_1 = \{1, \ldots, x\}$ and $E_2 = \{x + 1, \ldots, m + r\}$. Then, $M|_{E_1}$ (resp. $M|_{E_2}$) is the transversal matroid with representation $(N_i^1 : i \in \{1, \ldots, r\})$ where $N_i^1 = N_i \cap E_1$ (resp. with representation $(N_i^2 : i \in \{1, \ldots, r\})$ where $N_i^2 = N_i \cap E_2$). Let r_1 and r_2 be the ranks of $M|_{E_1}$ and $M|_{E_2}$ respectively. We have that $N_i^1 \neq \emptyset$ for all $i \leq j + 1$ (since the smallest element in N_i is strictly smaller than $x + 1$). Therefore, $r_1 \geq j + 1$. Similarly, we have that $N_i^2 \neq \emptyset$ for all $i \geq r - j + 1$ (since the smallest element in N_i is larger than $x+1$). Therefore, $r_2 \geq r - j + 1$. So, the partition (E_1, E_2) satisfies property (P1) by taking integers a_1 and a_2 such that $r_1 - a_1 = j$ and $r_2 - a_2 = r - j$. Moreover, the sets $\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1 - a_1\}$ and $\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq r_2 - a_2\}$ are the collections of bases of matroids M_1 and M_2 respectively. Indeed, M_1 is the transversal matroid with representation $(\overline{N}_i^1 : i \in \{1, \ldots, r\})$ where $\overline{N}_i^1 = N_i$ for each $i = 1, \ldots, j$ and $\overline{N}_i^1 = N_i \cap E_2$ for each $i = j + 1, \ldots, r$. M_2 is

the transversal matroid with representation $(\overline{N}_i^2 : i \in \{1, \ldots, r\})$ where $\overline{N}_i^2 = N_i \cap E_1$ for each $i = 1, \ldots, j$ and $\overline{N}_i^1 = N_i$ for each $i = j+1, \ldots, r$. Finally, $M_1 \cap M_2$ is the transversal matroid with representation $(\overline{N}_i : i \in \{1, \ldots, r\})$ where $\overline{N}_i = \overline{N}_i^1 \cap \overline{N}_i^2$ for each $i = 1, \ldots, r$. The result follows by Remark 1. □

Notice that there might be several choices for the values of x, j, a_1 and a_2 (each of which gives rise to a good partition). However, it is not clear if these partitions give different hyperplane splits. Also notice that the partition proposed in the above proof may satisfy neither (P2) nor (P2'). We shall see this, for instance, in the following example.

Example 4 : Let $m = 3$ and $r = 4$. Let $P = p_1, \ldots, p_7$ be the lattice path where p_1, p_2, p_3 are East steps and p_4, p_5, p_6, p_7 are North steps . Let $Q = q_1, \ldots, q_7$ be the lattice path where q_2, q_4, q_6 are East steps and q_1, q_3, q_5, q_7 are North steps. Let $M[P, Q]$ be the transversal matroid on $\{1, \ldots, 7\}$ and presentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, 4\})$ where $N_1 = [1, 2, 3, 4]$, $N_2 = [3, 4, 5]$, $N_3 = [5, 6]$ and $N_4 = [7]$, see Figure 21.

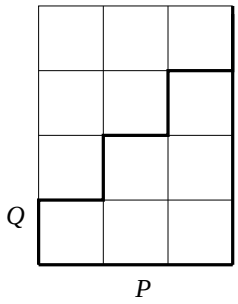


FIGURE 21 – Lattice paths P and Q

Recall that a subset B of $\{1, \ldots, 7\}$ with $|B| = 4$ is a base of $M[P, Q]$ if and only if the associated path $P(B)$ stays in the region bounded by P and Q.

Let us take $x = 3$ and $j = 1$, then $E_1 = \{1, 2, 3\}$ and $E_2 = \{4, 5, 6, 7\}$. So, the presentation of $M|_{E_1}$ (resp. $M|_{E_2}$) is given by $N_1^1 = [1, 2, 3]$ and $N_2^1 = [3]$ (resp. by $N_1^2 = [4]$,$N_2^2 = [4, 5]$, $N_3^2 = [5, 6]$ and $N_4^2 = [7]$) and thus, $r_1 = 1$ and $r_2 = 4$. By setting $a_1 = a_2 = 1$, we obtain that M_1 is the transversal matroid with representation $(\overline{N}_i^1 : i \in \{1, \ldots, 4\})$ where $\overline{N}_1^1 = [1, 2, 3, 4], \overline{N}_2^1 = [4, 5], \overline{N}_3^1 = [5, 6]$ and $\overline{N}_4^1 = [7]$. And, M_2 is the transversal matroid with representation $(\overline{N}_i^2 : i \in \{1, \ldots, 4\})$ where $\overline{N}_1^2 = [1, 2, 3], \overline{N}_2^2 = [3, 4, 5], \overline{N}_3^2 = [5, 6]$ and $\overline{N}_4^2 = [7]$. Finally, we have that $M_1 \cap M_2$ is the transversal matroid with representation $(\overline{N}_i : i \in \{1, \ldots, 4\})$ where $\overline{N}_1 = [1, 2, 3], \overline{N}_2 = [4, 5], \overline{N}_3 = [5, 6]$ and $\overline{N}_4 = [7]$. These matroids are illustrated in Figure 22.

So, by Corollary 4, $M[P, Q]$ has a nontrivial hyerplane split. We notice that the above partition do not satisfy either (P2) (for instance, $\{3\} \in \mathcal{I}(M|_{E_1}), \{4, 5, 6\} \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$

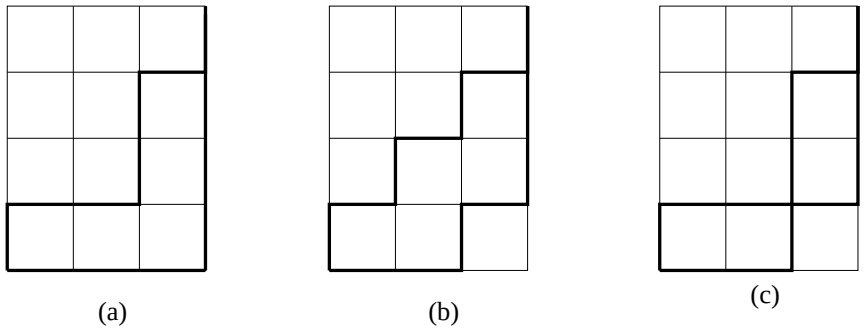


FIGURE 22 – Transversal matroids (a) M_1 (b) M_2 and (c) $M_1 \cap M_2$

but $\{3,4,5,6\} \notin \mathcal{I}(M[P,Q]))$ or (P2') (for instance, $B = \{1,4,5,7\} \in \mathcal{B}(M_1), Y = \{4,5,6\} \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ but $(B \cap E_1) \cup Y = \{1,4,5,6\} \notin \mathcal{I}(M[P,Q]))$.

Example 5 : Let $m \geq r \geq 2$ be integers. Let $P_1 = p_1, \ldots, p_{m+r}$ be the lattice path where $p_1, \ldots, p_m$ are East steps and $p_{m+1}, \ldots, p_{m+r}$ are North steps. Let $Q_1 = q_1, \ldots, q_{m+r}$ be the lattice path where $q_1, \ldots q_r$ are North steps and $q_{r+1}, \ldots, q_{r+m}$ are East steps. Let $M_1[P_1, Q_1]$ be the transversal matroid on $\{1, \ldots, m+r\}$ and presentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, r\})$ where N_i denotes the interval $[s_i = i, m+i = t_i]$. So, integer $x = 2$ is such that $s_1 < x < t_1$ and $s_2 < x+1 < t_2$ and thus, by Corollary 4, $P(M_1)$ has a nontrivial hyperplane split. Notice that any r-subset of $\{1, \ldots, m+r\}$ is a base of M_1, in other words, M_1 is isomorphic to $U_{m+r,r}$ (and thus, we found a particular case of Corollary 3).

D Direct sum

Let $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ and $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ be matroids of rank r_1 and r_2 respectively where $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. The *direct sum*, denoted by $M_1 \oplus M_2$, of matroids M_1 and M_2 has as ground set the disjoint union $E(M_1 \oplus M_2) = E(M_1) \cup E(M_2)$ and as set of bases $\mathcal{B}(M_1 \oplus M_2) = \{B_1 \cup B_2 | B_1 \in \mathcal{B}(M_1), B_2 \in \mathcal{B}(M_2)\}$. Further, the rank of $M_1 \oplus M_2$ is $r_1 + r_2$. Our main result in this section is the following.

Theorem 2. *Let $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ and $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ be matroids of rank r_1 and r_2 respectively where $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Then, $P(M_1 \oplus M_2)$ has a nontrivial hyperplane split if and only if either $P(M_1)$ or $P(M_2)$ has a nontrivial hyperplane split.*

We first prove the following lemma needed for the proof of Theorem 2.

Lemma 2. *Let $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ and $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ be matroids of rank r_1 and r_2 respectively where $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Then, $A \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ is the collection of bases of a matroid if and only if $A = \{X \cup Y : X \in A_1,\ Y \in A_2\}$ where $A_i \subseteq \mathcal{B}(M_i)$ is the collection of bases of a matroid for each $i = 1, 2$.*

Démonstration. (*Sufficiency*) We notice that $A = \mathcal{B}(M(A_1) \oplus M(A_2))$ where $M(A_i)$ is the matroid given by the collection of bases A_i on E_i, $i = 1, 2$. Thus, $A \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ and, by definition of the direct sum, A is indeed the collection of bases of a matroid.

(*Necessity*) We suppose that $A \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ is the collection of bases of a matroid, say $M(A)$. We set

$$A_1 = \{B \cap E_1 : B \in A\} \text{ and } \quad A_2 = \{B \cap E_2 : B \in A\}.$$

We first show that A_1 is the collection of bases of a matroid (it can also be shown that A_2 is the collection of bases of a matroid by using similar arguments). We thus show that the basis exchange axiom is satisfied. The case when $|A_1| = 1$ is clear. Let us suppose that $|A_1| \geq 2$. Let $D_1, D_2 \in A_1$. So, there exist $B_1, B_2 \in A$ such that $B_i \cap E_1 = D_i$, $i = 1, 2$. Since $M(A)$ is a matroid if $e \in (B_1 \setminus B_2) \cap E_1 = D_1 \setminus D_2$ then there exists $f \in B_2 \setminus B_1$ such that $B_1 - e + f \in A$. Since $e \in E_1$ then $|(B_1 - e) \cap E_2| = r_2$ implying that $f \notin E_2$ (otherwise, $|(B_1 - e + f) \cap E_2| = r_2 + 1$, which is impossible). Thus, $f \in E_1$ and so $f \in D_2 \setminus D_1$. Therefore, $(B_1 - e + f) \cap E_1 = D_1 - e + f \in A_1$. We observe that the latter implies the following :

Remark 2. *For all $e \in D_1 \setminus D_2$ there exists $f \in D_2$ such that if $D_1 \cup Y \in A$ then $(D_1 - e + f) \cup Y \in A$ for any $Y \in \mathcal{B}(M_2)$.*

We now show that $A = \{X \cup Y : X \in A_1,\ Y \in A_2\}$. It is clear that $A \subseteq \{X \cup Y : X \in A_1,\ Y \in A_2\}$. Let $X' \in A_1$ and $Y' \in A_2$, we shall show that $X' \cup Y' \in A$ and so $\{X \cup Y : X \in A_1,\ Y \in A_2\} \subseteq A$. We first observe that for any $X' \in A_1$ and any $Y' \in A_2$ there exist $Y'' \in A_2$ and $X'' \in A_1$ such that

$$X' \cup Y'' \in A \text{ and } X'' \cup Y' \in A.$$

If $X' = X''$ then we clearly have $X' \cup Y' \in A$. Let us suppose then that $X' \neq X''$. By Remark 2, for all $e \in X'' \setminus X'$ there exists $f \in X'$ such $(X'' - e + f) \cup Y' \in A$. We can then construct a path $X'' = D_1, \ldots, D_m = X'$ connecting X'' to X' such that $D_i \cup Y' \in A$ for each $i = 1, \ldots, m - 1$. Since, $D_1 \cup Y' = X'' \cup Y' \in A$ then we may conclude that $D_m \cup Y' = X' \cup Y' \in A$. □

We may now prove Theorem 2.

Proof of Theorem 2. (*Necessity*) We suppose that $P(M_1 \oplus M_2) = P(A) \cup P(C)$ is a nontrivial hyperplane split for some matroids A and C. Since $\mathcal{B}(A), \mathcal{B}(C) \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ then, by Lemma 2, we have

$$\mathcal{B}(A) = \{X \cup Y : X \in A_1, Y \in A_2\} \text{ and } \mathcal{B}(C) = \{X \cup Y : X \in C_1, Y \in C_2\}$$

where $A_1, C_1 \subseteq \mathcal{B}(M_1)$ and $A_2, C_2 \subseteq \mathcal{B}(M_2)$ are the collection of bases of matroids.

We know that $\mathcal{B}(A) \cup \mathcal{B}(C) = \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$. We claim that $A_2 = C_2 = \mathcal{B}(M_2)$ and $A_1, C_1 \subset \mathcal{B}(M_1)$ (or, symmetrically, $A_1 = C_1 = \mathcal{B}(M_1)$ and $A_2, C_2 \subset \mathcal{B}(M_2)$). Indeed, if $A_1 \neq \mathcal{B}(M_1)$ then there exists $X' \in \mathcal{B}(M_1)$ with $X' \notin A_1$ such that for all $Y \in \mathcal{B}(M_2)$ we have $X' \cup Y \in \mathcal{B}(A) \cup \mathcal{B}(C)$. Moreover, since $X' \cup Y \notin \mathcal{B}(A)$ then $X' \cup Y \in \mathcal{B}(C)$. Therefore, $\{X' \cup Y : Y \in \mathcal{B}(M_2)\} \subseteq \mathcal{B}(C)$ and so $C_2 = \mathcal{B}(M_2)$ implying that $C_1 \neq \mathcal{B}(M_1)$ (since $\mathcal{B}(C) \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$). Similarly, we may also obtain that $A_2 = \mathcal{B}(M_2)$. Now, if $A_1 = \mathcal{B}(M_1)$ then $A_2 \neq \mathcal{B}(M_2)$ (since $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$). We obtain, by using similar arguments as above, that $C_1 = \mathcal{B}(M_1)$ and $C_2 \neq \mathcal{B}(M_2)$.

So, suppose that $A_2 = C_2 = \mathcal{B}(M_2)$ and $A_1, C_1 \subset \mathcal{B}(M_1)$. We have that

$$\mathcal{B}(A) \cup \mathcal{B}(C) = \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2) = \{X \cup Y : X \in A_1 \cup C_1,\ Y \in \mathcal{B}(M_2)\}$$

and thus, $A_1 \cup C_1 = \mathcal{B}(M_1)$. Also,

$$\mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C) = \{X \cup Y : X \in A_1 \cap C_1,\ Y \in \mathcal{B}(M_2)\} \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$$

so, since $\mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C)$ is a collection of bases of a matroid then, by Lemma 2, $A_1 \cap C_1$ is a collection of bases of a matroid. Therefore, A_1 and C_1 is a nontrivial matroid base decomposition of M_1.

We now show that this matroid base decomposition induces a nontrivial hyperplane split. To this end, we first show that there exists a hyperplane containing the elements corresponding to $A_1 \cap C_1$ not supporting $P(M_1)$. Let H be the hyperplane corresponding to the nontrivial hyperplane split $P(M_1 \oplus M_2) = P(A) \cup P(C)$. Notice that $dim(H) \leq |E_1| + |E_2| - 2$ since $dim(P(M_1 \oplus M_2)) \leq |E_1| + |E_2|$. Without loss of generality, we may suppose that $dim(H) = |E_1| + |E_2| - 2$, otherwise we consider $P(M_1 \oplus M_2)$ embedded in $\mathbb{R}^{|E_1|+|E_2|}$ and properly extend the equation of H. Thus, H can be written as

$$H(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|E_1|+|E_2|} : \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{x} \rangle = p \text{ where } \mathbf{e}^i = \sum_{j \in E_i} \alpha_j^i e_j \text{ with } \alpha_j^i \in \mathbb{R} \text{ and } p \in \mathbb{N} \right\}$$

where e_j^i denotes the j^{th} standard basis vector in $\mathbb{R}^{|E_i|}$ for each $i = 1, 2$.

H contains the common facet of $P(A)$ and $P(C)$ (that is, the elements in $\mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C)$). Now, there exists $X' \in A_1 \cap C_1$ such that for all $Y \in \mathcal{B}(M_2)$ we have $X' \cup Y \in \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C)$ and $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x}' \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{y} \rangle = p$. So, for all $Y \in \mathcal{B}(M_2)$

$$\langle \mathbf{e}^2, \mathbf{y} \rangle = p - \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x}' \rangle = p - p' \tag{14}$$

where $p' \in \mathbb{N}$. Now, there exists $Y \in \mathcal{B}(M_2)$ such that $X \cup Y \in \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(C)$ for all $X \in A_1 \cap C_1$, so

$$\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{y} \rangle = p$$

and thus, by (1),

$$\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle = p'. \tag{15}$$

Since $P(A) \cup P(C)$ is a nontrivial hyperplane split then there exists $B_1 = X_1 \cup Y_1 \in \mathcal{B}(A)$ with $X_1 \in A_1$ and $Y_2 \in \mathcal{B}(M_2)$ such that $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{x}' \rangle > p$. Then, by (2), we have $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + p - p' > p$ and so,

$$\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle > p'. \tag{16}$$

Similarly, there exists $B_2 = X_2 \cup Y_2 \in \mathcal{B}(C)$ with $X_1 \in C_1$ and $Y_2 \in \mathcal{B}(M_2)$ such that $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{e}^2, \mathbf{x}' \rangle < p$. Then, by (2), we have $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle + p - p' < p$ and so,

$$\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle < p'. \tag{17}$$

Therefore, by (2), the hyperplane

$$H'(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|E_1|+|E_2|} : \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{x} \rangle = p' \text{ where } \mathbf{e}^1 = \sum_{j \in E_1} \alpha_j^1 e_j \text{ with } \alpha_j^1 \in \mathbb{R} \right\}$$

contains the elements corresponding to $A_1 \cap C_1$. Moreover, H' does not support $P(M_1)$ by (3) and (4).

We now show that any edge of $P(M_1)$ is also an edge of either $P(A_1)$ or $P(C_1)$. We do this by contradiction, let $B_A \in A_1 \setminus C_1$ and $B_C \in C_1 \setminus A_1$ with $\Delta(B_A, B_C) = 2$. There exists $Y \in \mathcal{B}(M_2)$ such that $B_A \cup Y \in \mathcal{B}(A) \setminus \mathcal{B}(C)$ and $B_C \cup Y \in \mathcal{B}(C) \setminus \mathcal{B}(A)$. Since $\Delta(B_A \cup Y, B_C \cup Y) = \Delta(B_A, B_C) = 2$ then the edge in $P(M_1 \oplus M_2)$ joining $B_A \cup Y$ to $B_C \cup Y$ is an edge of neither $P(A)$ nor $P(C)$, which is a contradiction since $P(A) \cup P(C)$ is a nontrivial hyperplane split.

Therefore, by Proposition 1, $A_1 \cap C_1$ are the set of vertices of a common facet of $P(A_1)$ and $P(C_1)$ and, by Corollary 1, $P(M_1) = P(A_1) \cup P(C_1)$.

(*Sufficiency*) Without loss of generality, we suppose that $P(M_1) = P(N_1) \cup P(N_2)$ is a nontrivial hyperplane split for some matroids N_i, $i = 1, 2$. Let

$$L_1 = N_1 \oplus M_2, \ L_2 = N_2 \oplus M_2 \text{ and } L_1 \cap L_2 = (N_1 \cap N_2) \oplus M_2,$$

Since N_1, N_2 and $N_1 \cap N_2$ are matroids then L_1 and L_2 and $L_1 \cap L_2$ are also matroids where the collection of bases of L_1 and L_2 are

$$\mathcal{B}(L_1) = \{X \cup Y : X \in \mathcal{B}(N_1),\ Y \in \mathcal{B}(M_2)\} \text{ and } \mathcal{B}(L_2) = \{X \cup Y : X \in \mathcal{B}(N_2),\ Y \in \mathcal{B}(M_2)\}$$

Moreover, $\mathcal{B}(L_1) \cup \mathcal{B}(L_2) = \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ (since $\mathcal{B}(N_1) \cup \mathcal{B}(N_2) = \mathcal{B}(M_1)$), $\mathcal{B}(L_i) \subset \mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$ (since $\mathcal{B}(N_i) \subset \mathcal{B}(M_1)$ for each $i = 1, 2$) and $\mathcal{B}(L_1) \cap \mathcal{B}(L_2) \neq \emptyset$ (since $\mathcal{B}(N_1) \cap \mathcal{B}(N_2) \neq \emptyset$). Thus, the matroids given by the collection of bases $\mathcal{B}(L_1)$ and $\mathcal{B}(L_2)$ is a nontrivial matroid base decomposition of $\mathcal{B}(M_1 \oplus M_2)$.

We now show that this matroid base decomposition induces a nontrivial hyperplane split. To this end, we first show that there exists an hyperplane containing the elements in $\mathcal{B}(L_1) \cap \mathcal{B}(L_2)$ not supporting $P(M_1 \oplus M_2)$. Let H be the hyperplane in $\mathbb{R}^d$ where d is the dimension of $P(M_1)$ containing a common facet of $P(N_1)$ and $P(N_2)$. We suppose that $P(N_1)$ lies in the closed half-space $\overline{H}^+$ and that $P(N_2)$ lies in the other closed half-space $\overline{H}^-$ (H exists since $P(N_1) \cup P(N_2)$ is a nontrivial hyperplane split). Moreover, there exist $B_1 \in \mathcal{B}(N_1)$ and $B_2 \in \mathcal{B}(N_2)$ such that B_1 lies in the open half-space H^+ while B_2 lies in the open half-space H^-. Let H_1 be the hyperplane defined by the same equation as H in $\mathbb{R}^{d'}$ where d' is the dimension of $P(M_1 \oplus M_2)$ (notice that $d' > d$). Then, H_1 contains the elements in $\mathcal{B}(L_1) \cap \mathcal{B}(L_2)$. Moreover, H_1 does not support $P(M_1 \oplus M_2)$ since $B_1 \cup Y \in \mathcal{B}(L_1)$ lies in open half-space H_1^+ and $B_2 \cup Y \in \mathcal{B}(L_2)$ lies in the open half-space H_1^- for some $Y \in \mathcal{B}(M_2)$.

We now show that any edge of $P(M_1 \oplus M_2)$ is also and edge of either $P(L_1)$ or $P(L_2)$. We do this by contradiction, let $B_1 \in \mathcal{B}(L_1) \setminus \mathcal{B}(L_2)$ and $B_2 \in \mathcal{B}(L_2) \setminus \mathcal{B}(L_1)$ with $\Delta(B_1, B_2) = 2$. Since $B_1 = X_1 \cup X_2$ with $X_1 \in \mathcal{B}(N_1), X_1 \notin \mathcal{B}(N_2)$ and $B_2 = Y_1 \cup Y_2$ with $Y_1 \notin \mathcal{B}(N_1), Y_1 \in \mathcal{B}(N_2)$ then $X_1 \neq Y_1$. So, $X_2 = Y_2$ (since $\Delta(B_1, B_2) = 2$).

Therefore, by Corollary 1, $\mathcal{B}(L_1) \cap \mathcal{B}(L_2)$ are the set of vertices of a facet of $P(L_1)$ and $P(L_2)$ and $P(M_1 \oplus M_2) = P(L_1) \cup P(L_2)$.

It is known [Bonin *et al.*, 2003] that lattice path matroids are closed under direct sums. Let $M[P_1, Q_1]$ and $M[P_2, Q_2]$ be two lattice path matroids. Then, by Corollary 4, $P(M[P_1, Q_1])$ (or $P(M[P_2, Q_2])$) has a nontrivial hyperplane split and so, by Theorem 2, $P(M[P_1, Q_1] \oplus M[P_2, Q_2])$ also does.

E Binary matroids

Maurer [Maurer, 1973a, Theorem 2.1] gave a complete characterization of those graphs that are matroid base graphs. Let X, Y be two vertices and let $\delta(X, Y)$ be the

distance between X and Y in $G(M)$. If $\delta(X,Y)=2$ (that is, X and Y are not adjacent but they are joined by a path of length two) then their *common neighbor* is defined as the set of vertices adjacent to both X and Y. Maurer showed that each common neighbor is a square, pyramid or octahedron, see Figure 23.

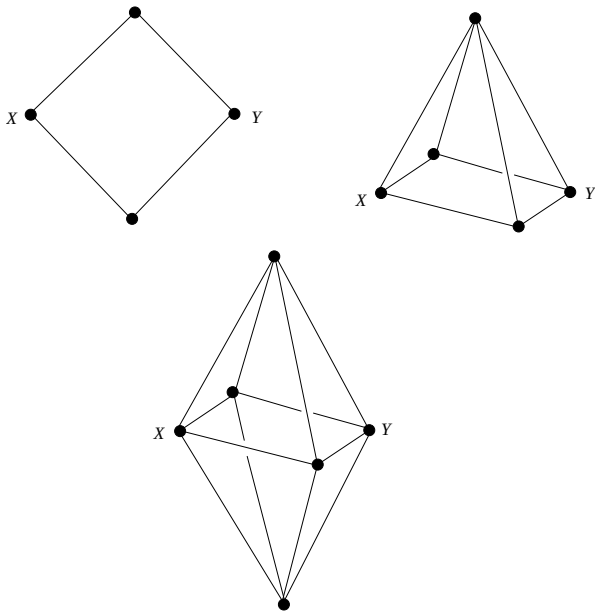


FIGURE 23 – A square, a pyramid and an octahedron

In [Maurer, 1973b, Theorem 4.1] Maurer proved that a matroid M is binary if and only if $G(M)$ contains no induced octahedra. Notice that $G(U_{4,2})$ is given by an octahedron (see Figure 20) and that induced octahedra in $G(M)$ correspond to *minors* of M isomorphic to $U_{4,2}$.

Corollary 5. *Let $M=(E,\mathcal{B})$ be a binary matroid and let $X,Y\in\mathcal{B}$ with $\delta(X,Y)=2$. Then, there exists a unique couple $U,V\in\mathcal{B}$ such that X,U,V,Y form an* empty square *in $G(M)$, that is, X,U,V,Y form a cycle of length four without diagonals.*

Démonstration. The existence of an empty square follows from Maurer's characterization. Indeed, for each pair of vertices X,Y with $\delta(X,Y)=2$ we have that their common neighbor is either a square or a pyramid. In both cases we can find the desired empty square. For uniqueness, suppose that there are two empty squares, say X,U,V,Y and X,U',V',Y with $\{U,V\}\neq\{U',V'\}$. If exactly one of U,V is in $\{U',V'\}$, say $V=V'$, see Figure 10 (a) (respectively, if none of U,V belongs to $\{U',V'\}$, see Figure 10 (b)) then, by the basis exchange axiom $\{X,V=V',U,U',Y\}$ must induce a pyramid, and thus neither X,U,V,Y nor X,U',V',Y form an empty square (respectively, $\{X,V=V',U,U',Y\}$ induce an octahedron which is not possible since M is binary).

□

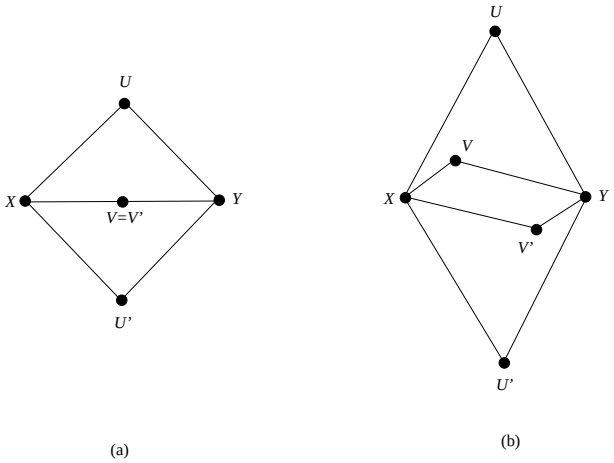


FIGURE 24 – Possible empty squares

Lemma 3. *Let $M = (E, \mathcal{B})$ be a binary matroid and let $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ such that $\mathcal{B}_1$ are the set of bases of a matroid, say M_1. If $X \in \mathcal{B}_1$ and the neighborhood of X (that is, the set of vertices in $G(M)$ adjacent to X) are elements of $\mathcal{B}_1$ then $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$.*

Démonstration. We first notice that M_1 is binary. Indeed, since M is binary, we consider the columns of the matrix representation of M corresponding to those elements used in $\mathcal{B}_1$. Let $X \in \mathcal{B}_1$ and let $\delta_i(X) = \{Y \in \mathcal{B}(M) | \delta(X, Y) = i\}$. We shall use induction on i. The cases $i = 0, 1$ are true by hypothesis. Suppose that $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_i(X) \subset \mathcal{B}_1$ and let $Y \in \delta_{k+1}(X)$. Since $G(M)$ is connected then there exists a path joining X to Y and thus there is $Z \in \delta_{k-1}(X)$ such that $\delta(Z, Y) = 2$. By Corollary 5, there exists a unique couple $U, V \in \mathcal{B}$ such that Z, U, V, Y form an empty square in $G(M)$. So, $\delta(X, U) = \delta(X, V) = k$ implying that $U, V \in \delta_k(X)$. Thus, since $\delta_k(X) \in \mathcal{B}_1$ and M_1 is binary then, by Corollary 5, there exists a unique couple $Z', Y' \in \mathcal{B}_1$ such that Z', U, V, Y' form an empty square in $G(M_1)$. Since Z', U, V, Y' is also an empty square in $G(M)$ then (by uniqueness) we must have that $Z' = Z$ and $Y' = Y$. Therefore, $Y \in \mathcal{B}_1$. □

Theorem 3. *Let M be a binary matroid. Then, $P(M)$ has not a nontrivial hyperplane split.*

Démonstration. By contradiction, let us suppose that $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ is a nontrivial hyperplane split for some matroids M_1, M_2 (and thus $P(M_1), P(M_2) \neq P(M)$). The latter induces the matroid base decomposition of $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)$. By Corollary 1, $P(M_1)$ contains a vertex of $P(M)$ together with all its neighbors. But then, by Lemma 3, $M_1 = M$ which is a contradiction since the hyperplane split is nontrivial. □

Corollary 6. *Let M be a binary matroid. If $G(M)$ contains a vertex X having exactly d neighbours (that is, with $|\delta_1(X)| = d$) where $d = dim(P(M))$ then $P(M)$ is indecomposable.*

Démonstration. By contradiction, let $P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$, $t \geq 2$ be a decomposition. Notice that $d = dim(P(M)) = dim(P(M_i))$ for all i. We claim that if vertex X belongs to $P(M_i)$ for some i then $\delta_1(X)$ also does. Indeed, any vertex in $P(M_i)$ (and in a general in a d-polytope) must have at least d neighbours since $dim(P(M_i)) = d$. So if X belongs to $P(M_i)$ then all its d neigbours must also belong to $P(M_i)$. Thus, since M is binary and by using Lemma 3, we have that $M_i = M$ which is a contradiction since $t \geq 2$. □

Maurer [Maurer, 1975] has proved that the d-dimensional hypercube is the base matroid graph of a binary matroid. We have the following immediate consequence.

Corollary 7. *Let $P(M)$ be the base matroid polytope having as 1-skeleton the hypercube. Then, $P(M)$ is indecomposable.*

Démonstration. It follows by Corollary 6 since any vertex in the d-dimensional hypercube has precisely d neighbours. □

The following corollary is an immediate consequence of Theorem 3 since any graphic matroid is binary.

Corollary 8. *$P(M)$ has not a nontrivial hyperplane split if M is a graphic matroid.*

In particular, the matroid $M(K_4)$ has not a nontrivial hyperplane split.

Note : One of the referees informed us that a complete characterization for the existence of hyperplane splits is given by Kim [Kim, 2009]. However, our necessary conditions (Theorem 1) are easier to satisfy than those given by Kim and allow us to construct families of matroid base polytopes having a hyperplane split (Corollary 2), to give examples without such splits ($P(M(K_4))$) and to give different hyperplane splits for the same base matroid polytope (Corollary 1). None of the latter is discussed in [Kim, 2009]. Also, our arguments used to prove Theorem 1 are different from those given in [Kim, 2009]. We finally mention that our results in Sections D and E are not discussed in [Kim, 2009] at all. We were also informed that Hermann and Joswig [Herrmann et Joswig, 2008] studied the splits of general polytopes. They rediscovered Kim's characterization in the special case when the matroid base polytope is the entire hypersimplex.

Acknowledgement

We would like to thank an anonymous referee for many valuable remarks.

Sixième partie

Lattice Oriented Matroids

Sommaire

F Abstract **93**

G Introduction **93**

H Lattice path matroids and orientations **94**

H.1 Orienting lattice path matroids 95

I Simplexes in arrangements **100**

I.1 Counting simplexes in $\mathcal{LOM}$. 107

I.2 Grunbaum's problem. 110

F Abstract

We investigate the class of *lattice oriented matroids*. After giving a complete characterization of lattice oriented matroids in terms of union of rank-1 uniform oriented matroids, we show that this class is closed under duality and minors. We then study the simplexes of the hyperplane arrangements arising from lattice oriented matroids. We present a characterization of these simplexes and contruct arrangements of n hyperplanes in dimension d containing $O(2^k(\frac{n}{k})^k)$ simplexes with $n < k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. We finally investigate a question by Grünbaum [Grünbaum, 1971] concerning colorings of pseudoline arrangements. We extend Grünbaum's question to arrangements of hyperplanes and answer affirmatively the generalized question for arrangements arising from lattice oriented matroids [5].

G Introduction

We assume that the reader is familiar with matroid theory [Oxley, 1992] and oriented matroid theory [Björner *et al.*, 1999].

Let $\mathcal{M}$ be an oriented matroid on the ground set $\{1, \ldots, n\}$. We denote by $\mathcal{C}(\mathcal{M}), \mathcal{B}(\mathcal{M})$ and $r(\mathcal{M})$ the set of circuits, the set of bases and the rank of $\mathcal{M}$ respectively.

In this paper, we investigate the class of *lattice oriented matroids*, denoted by $\mathcal{LOM}$. This class naturally arise from *lattice path matroids* that are known to be *transversal matroids* and so representables [Piff et Welsh, 1970] (from which the oriented matroid is obtained). We shall see that $\mathcal{LOM}$ can be though of the union of rank one (not necessarily uniform) oriented matroids. This allow us to give a particular matrix representation of such matroids from which they can be studied. $\mathcal{LOM}$ contains the so-called *Lawrence oriented matroids* (in the particular case when the rank one matroids are all uniform) which, in turn, contains as a very special case the well-known *alternating oriented matroid*.

After a brief discussion on lattice path matroids, in the next section, we will define the lattice oriented matroids. We then present a characterization for an oriented matroid for being $\mathcal{LOM}$ (Theorem 4) and show that $\mathcal{LOM}$ is closed under minors and duality (Theorem 5). In particular (in the uniform case) the latter implies a (unpublished) result due to Lawrence [Lawrence, 1984] stating that the class of Lawrence oriented matroids are closed under minors and duality. In Section I, we study the arrangements of hyperplanes obtained from lattice oriented matroids, denoted by

5. This paper corresponds to the article [Chatelain, 2010]

$\mathcal{LOM}$-arrangements. By extending some results due to Forge and Ramírez Alfonsín [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] , we are able to characterize the simplexes in $\mathcal{LOM}$-arrangements (Theorem 6). We use this to construct arrangements of n hyperplanes in dimension d with $O(2^k(\frac{n}{k})^k)$ simplexes for $n < k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ (Theorem 8). We finally discuss a conjecture due to Grunbaum concerning 2-colorings of arrangements of pseudolines [Grünbaum, 1971]. We shall generalize this conjecture in higher dimensions and show that the generalized conjecture holds for $\mathcal{LOM}$-arrangements.

H Lattice path matroids and orientations

Let $\mathcal{A} = (A_j : j \in J)$ be a set system, that is, multiset of subsets of a finite set E. A *transversal* of $\mathcal{A}$ is a set $\{x_j : j \in J\}$ of $|J|$ distinct elements such that $x_j \in A_j$ for all j. A *partial transversal* of $\mathcal{A}$ is a transversal of a set system of the form $(A_k : k \in K)$ with $K \subseteq J$. A fundamental result due to Edmonds and Fulkerson [Edmonds et Fulkerson, 1965] states that a partial transversal of a set of system $\mathcal{A} = (A_j : j \in J)$ are the independent sets of a matroid on E. We say that $\mathcal{A}$ is a *presentation* of the transversal matroid. The bases of a transversal matroid are the maximal partial transversals.

A *lattice path* starts at point $(0, 0)$ and uses steps $(1, 0)$ and $(0, 1)$, called *East* and *North*. Let $P = p_1, \ldots, p_{r+m}$ and $Q = q_1, \ldots, q_{r+m}$ be two lattice paths from $(0, 0)$ to (m, r) with P never going above Q. Let $\{p_{s_1}, \ldots, p_{s_r}\}$ be the set of North steps of P with $s_1 < \cdots < s_r$; similarly, let $\{q_{t_1}, \ldots, q_{t_r}\}$ be the set of North steps of Q with $t_1 < \cdots < t_r$. Let $M[P, Q]$ be the transversal matroid that has ground set $\{1, \ldots, m+r\}$ and presentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, r\})$ where N_i denotes the interval $[s_i, t_i]$ of integers. Transversal matroids arising as above are called *lattice path matroids*. Given a subset X of $\{1, \ldots, m + r\}$, we define the lattice path $P(X) = u_1, \ldots, u_{m+r}$ where u_i is a North step if $i \in X$, an East step otherwise. In [Bonin *et al.*, 2003] was proved that a subset B of $\{1, \ldots, m + r\}$ with $|B| = r$ is a base of $M[P, Q]$ if and only if the associated path $P(B)$ stays in the region bounded by P and Q.

Let $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_k$ be matroids on the same ground set $\{1, \ldots, n\}$ of ranks r_i respectively and let $\mathcal{I}_i$ be the sets of independents of $\mathcal{M}_i$ for each i. We recall that the *union* of $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_k$, denoted by $\mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_k$, is a matroid on $\{1, \ldots, n\}$ with set of independents $\mathcal{I}(\mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_k) = \{I_1 \cup \cdots \cup I_k : I_i \in \mathcal{I}_i\}$. This operation is associative and commutative. The union of rank 1 matroids is a transversal matroid whose presentation is the set of bases of each rank 1 matroid.

Proposition 2. *Let P and Q be two ordered r-subsets of $\{1, \ldots, n\}$ with $P(i) \leq Q(i)$ for each $i = 1, \ldots, r$. Then, the lattice path matroid $M[P, Q]$ is isomorphic to $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ where $\mathcal{M}_i$ is a rank 1 matroid on $\{1, \ldots, n\}$ where $\mathcal{B}(\mathcal{M}_i) = \{x : P(i) \leq x \leq Q(i)\}$ for each $i = 1, \ldots, r$.*

The latter is an immediate consequence of the following.

Proposition 3. *Let P and Q be two ordered r-subsets of $\{1,\ldots,n\}$ with $P(i) \leq Q(i)$ for each $i = 1,\ldots,r$. Then,*

(a) The rank of $M[P,Q]$ is r, and

(b) if $B = \{x_1,\ldots,x_r\}$ with $x_1 < \cdots < x_r$ then $B \in \mathcal{B}(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i)$ if and only if $x_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ for each $i = 1,\ldots,r$.

Démonstration. (a) We have that $r(M[P,Q])$ is r since for each $i = 1,\ldots,r-1$, $P(i) < P(i+1)$ therefore $\{P(1),\ldots,P(r)\}$ form a base of $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$.

(b) $\Leftarrow$] It is clear that if $x_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ for all $i = 1,\cdots,r$ then $B = \{x_1,\ldots,x_r\}$ is a base of $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$.

$\Rightarrow$] We proceed by contradiction. Let us suppose that $\{x_1,\ldots,x_r\}$ is a base of $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ with $x_i \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ for at least one i. Then,

$$id \notin \Sigma = \{\sigma : \text{ permutation of } \{1,\cdots,r\} : x_{\sigma(i)} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)\}$$

We choose σ' the permutation in Σ which maximize the number of invariant points (that is, the set of indices j such that $\sigma(j) = j$) then $\sigma' \neq id$. Let k be the minimum of $\{i : \sigma'(i) \neq i\}$ then $\sigma'(k) > k$ and so $x_{\sigma'(k)} > x_k$ with $x_{\sigma'(k)} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_k)$. We notice that it exists $l = \sigma'^{-1}(k) > k$ such that $x_k \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_l)$. Therefore $P(k) < P(l) \leq x_k < x_{\sigma'(k)} \leq Q(k) < Q(l)$. We may define σ'' the permutation where for all $i \notin \{k,l\}$ we have $\sigma''(i) = \sigma'(i)$ and $\sigma''(k) = k$ and $\sigma''(l) = \sigma'(k)$. The previous inequalities prove that $\sigma'' \in \Sigma$ and σ'' has more invariant points than σ' which is a contradiction. □

H.1 Orienting lattice path matroids

For the union of two oriented matroids $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ on the same ground set, Las Vergnas [Las Vergnas, 1978a] proposed a construction such that $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ is an orientable matroid with $\underline{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2} = \underline{\mathcal{M}_1} \cup \underline{\mathcal{M}_2}$, and therefore

$$r(\underline{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2}) = r(\underline{\mathcal{M}_1} \cup \underline{\mathcal{M}_2}) \leq r(\underline{\mathcal{M}_1}) + r(\underline{\mathcal{M}_2}). \tag{18}$$

Lawrence and Weinberg [Lawrence et Weinberg, 1981] proved that if equality is attained in (18) then we have

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2}(e_1,\ldots,e_{r(\mathcal{M}_1)},f_1,\ldots,f_{r(\mathcal{M}_2)}) = \chi_{\mathcal{M}_1}(e_1,\ldots,e_{r(\mathcal{M}_1)}) \\ \times \chi_{\mathcal{M}_2}(f_1,\ldots,f_{r(\mathcal{M}_2)})\end{aligned} \tag{19}$$

for any $\{e_1,\ldots,e_{r(\mathcal{M}_1)},f_1,\ldots,f_{r(\mathcal{M}_2)}\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$ such that for all lexicographic earlier permutations $(\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_{r(\mathcal{M}_1)},\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_{r(\mathcal{M}_2)})$ either

$\chi_{\mathcal{M}_1}(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{r(\mathcal{M}_1)}) = 0$ or $\chi_{\mathcal{M}_2}(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{r(\mathcal{M}_2)}) = 0$.

Notice that here the union operation is associative but, contrary to the non-oriented case, it is not commutative due to the lexicographical order.

We define the *lattice oriented matroid*, $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$, as the matroid obtained by the union of the rank one oriented matroids $\mathcal{M}_i$ where $\mathcal{B}(\mathcal{M}_i) = \{x : P(i) \leq x \leq Q(i)\}$ for some P and Q totally ordered r-subsets of $\{1, \ldots, n\}$ with $P(i) \leq Q(i)$.

Proposition 4. *Let $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ be a lattice oriented matroid on $\{1, \ldots, n\}$. Then,*

(a) the rank of $\mathcal{M}$ is r, and

(b) if $B = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \{1, \ldots, n\}^r$, $x_1 < \cdots < x_r$ then $\chi_{\mathcal{M}}(B) = \prod_{i=1}^{r} \chi_{\mathcal{M}_i}(x_i)$.

Démonstration. (a) The rank of $\mathcal{M}$ is given by the rank of $\underline{\mathcal{M}}$ which, by Proposition 3, is equals to r.

(b) Let $B = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \{1, \ldots, n\}^r$ with $x_1 < \cdots < x_r$, we have two cases.

Case 1) If $B \notin \mathcal{B}(\mathcal{M})$ then, by Proposition 3, there exists k such that $x_k \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_k)$ for some $1 \leq k \leq r$. Therefore, $\chi_{\mathcal{M}_k}(x_k) = 0$ and so $\chi_{\mathcal{M}}(B) = 0$.

Case 2) If $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ then, by the Proposition 3, for all $i = 1, \ldots, r$ we have $x_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$. The chirotope of the union of oriented matroids (19) gives that $\chi_{\mathcal{M}}(B) = \chi_{\bigcup_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_i}(x_1, \ldots, x_{r-1}) \chi_{\mathcal{M}_r}(x_r)$ and the result follows recursively. □

We shall denote by $\mathcal{LOM}$ the class of lattice oriented matroids. We recall that an *uniform matroid* $\mathcal{U}_r^n$ is a matroid with set of bases all r-subsets of a set of n elements. A *Lawrence oriented matroid* [Lawrence et Weinberg, 1981] is the uniform oriented matroid obtained as the union of r uniform oriented matroids of rank 1 on the same ground set. We remark that Lawrence oriented matroids belong to $\mathcal{LOM}$.

We may represent a lattice oriented matroid $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ on $\{1, \ldots, n\}$ by a $(r \times n)$-matrix $M = (m_{i,j})$ where $m_{i,j} = \chi_{\mathcal{M}_i}(j)$, that is, the i^{th} row of M correspond to the chirotope of $\mathcal{M}_i$. By Proposition 4, for $B = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \{1, \ldots, n\}^r$ with $x_1 < \cdots < x_r$,

$$\chi_{\mathcal{M}}(B) = \prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i}. \tag{20}$$

We may present this matrix representation by keeping signs and zeroes.

Example 1. *The alternating oriented matroid is the uniform matroid with the property that the chirotope of the bases are all positive (or all negative). A matrix representation*

for a rank 3 *alternating oriented matroid on* 8 *elements is given below.*

1	2	3	4	5	6	7	8
+	+	+	+	+	+	0	0
0	+	+	+	+	+	+	0
0	0	+	+	+	+	+	+

Example 2. *Let $M[P,Q]$ be the rank 3 lattice matroid matroid on 8 elements defined by $Q(\{1,2,3\})$ and $P(\{1,7,8\})$. An orientation of $M[P,Q]$ is given by the following matrix representation.*

1	2	3	4	5	6	7	8
+	0	0	0	0	0	0	0
0	+	+	+	+	+	+	0
0	0	+	+	−	−	+	+

Theorem 4. *Let $\mathcal{M}$ be an oriented matroid on $\{1,\ldots,n\}$ of rank r. Then, $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ if only if the following two conditions are verified.*

(a) $\underline{\mathcal{M}}$ is a lattice path matroid and

(b) Let $X = \{x_1,\ldots,x_r\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $x_1 < \cdots < x_r$ and $Y = \{y_1,\ldots,y_r\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $y_1 < \cdots < y_r$. For each $k = 1,\ldots,r$, we let X'_k and Y'_k be such that $X'_k(i) = X(i)$ (resp. $Y'_k(i) = Y(i)$) for $i \neq k$ and $X'_k(k) = y_k$ (resp. $Y'_k(k) = x_k$). If X'_k and Y'_k are also in lexicographical order then $\chi_{\mathcal{M}}(X)\chi_{\mathcal{M}}(Y) = \chi_{\mathcal{M}}(X'_k)\chi_{\mathcal{M}}(Y'_k)$.

Démonstration. $\Rightarrow$] If $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ then condition (a) is clearly verified. Let $M = (m_{i,j})$ be the matrix representation of $\mathcal{M}$, from equation (20),

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{M}}(X)\chi_{\mathcal{M}}(Y) &= \textstyle\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} \prod_{i=1}^{r} m_{i,y_i} \\ &= \textstyle\prod_{i=1,i\neq k}^{r} m_{i,x_i} m_{k,y_k} \prod_{i=1,i\neq k}^{r} m_{i,y_i} m_{k,x_k} \\ &= \chi_{\mathcal{M}}(X'_k)\chi_{\mathcal{M}}(Y'_k)\end{aligned}$$

and thus condition (b) is also satisfied.

$\Leftarrow$] Let $\underline{\mathcal{M}}$ the lattice path matroid defined with P, Q. Let $M = (m_{i,j})$ be the $(r \times n)$-matrix defined as follows.

$$
\begin{array}{lll}
i = r & \text{for } j < P(r) \text{ or } j > Q(r) & m_{r,j} = 0 \\
 & \text{for } P(r) \leq j \leq Q(r) & m_{r,j} = \chi_{\mathcal{M}}(P(1), \cdots, P(r-1), j) \\
i \notin \{1, r\} & \text{for } j < P(i) \text{ or } j > Q(i) & m_{i,j} = 0 \\
 & \text{for } j = P(i) & m_{i,P(i)} = 1 \\
 & \text{for } P(i) < j \leq Q(i) & m_{i,j} = \prod_{p=i+1}^{r} m_{p,Q(p)} \times \\
 & \chi_{\mathcal{M}}(P(1), \cdots, P(i-1), j, Q(i+1), \cdots, Q(r)) & \\
i = 1 & \text{for } j < P(1) \text{ or } j > Q(1) & m_{1,j} = 0 \\
 & \text{for } j = P(1) & m_{1,P(1)} = 1 \\
 & \text{for } P(1) < j \leq Q(1) & m_{i,j} = \prod_{p=2}^{r} m_{p,Q(p)} \times \\
 & \chi_{\mathcal{M}}(j, Q(2), \cdots, Q(r)) &
\end{array}
$$

We claim that the above matrix M represents $\mathcal{M}$ (and therefore $\mathcal{M}$ is in $\mathcal{LOM}$). For, we shall show that equation (20) holds. Let $B = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \{1, \ldots, n\}^r$ with $x_1 < \cdots < x_r$, we have two cases.

Case 1) If $B \notin \mathcal{B}(\mathcal{M})$ then $\chi_M(B) = 0$. By Proposition 3, there exists $k \in \{1, \ldots, r\}$ such that $x_k < P(k)$ or $Q(k) < x_k$, so the above construction gives $m_{k,x_k} = 0$ and therefore $\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = 0$.

Case 2) If $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ then

$$
\begin{array}{rl}
\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = & \prod_{i=1}^{r} \prod_{p=i+1}^{r} m_{p,Q(p)} \chi_{\mathcal{M}}(x_1, Q(2), \ldots, Q(r)) \chi_{\mathcal{M}}(P(1), x_2, Q(3), \ldots, Q(r)) \\
 & \chi_{\mathcal{M}}(P(1), P(2), x_3, Q(4), \ldots, Q(r)) \cdots \chi_{\mathcal{M}}(P(1), \ldots, P(r-1), x_r).
\end{array}
$$

Now, it is clear that $\{x_1, Q(2), \ldots, Q(r)\}$ and $\{P(1), x_2, Q(3), \ldots, Q(r)\}$ are bases of $\mathcal{M}$ and $x_1 < x_2 \leq Q(2) < Q(3)$ thus the lexicographical order holds if we change x_2 by $Q(2)$. Therefore, by condition (b) we have

$$
\begin{array}{rl}
\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = & \prod_{i=1}^{r} \prod_{p=i+1}^{r} m_{p,Q(p)} \chi_{\mathcal{M}}(P(1), Q(2), \ldots, Q(r)) \chi_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, Q(3), \ldots, Q(r)) \\
 & \chi_{\mathcal{M}}(P(1), P(2), x_3, Q(4), \ldots, Q(r)) \cdots \chi_{\mathcal{M}}(P(1), \ldots, P(r-1), x_r).
\end{array}
$$

But then, we can repeat the same procedure with $\{x_1, x_2, Q(3), \ldots, Q(r)\}$ and $\{P(1), P(2), x_3, Q(4), \ldots, Q(r)\}$ which are also bases with $x_2 < x_3 \leq Q(3) < Q(4)$. Futhermore, by construction, we have

$$
\chi_{\mathcal{M}}(P(1), Q(2), \ldots, Q(r)) = \prod_{p=2}^{r} m_{p,Q(p)}
$$

So, we have

$$
\begin{array}{rl}
\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = & \prod_{i=2}^{r} \prod_{p=i+1}^{r} \chi_{\mathcal{M}}(P(1), P(2), Q(3), Q(4), \ldots, Q(r)) \\
 & \chi_{\mathcal{M}}(x_1, x_2, x_3, Q(4), \ldots, Q(r)) \cdots \chi_{\mathcal{M}}(P(1), \ldots, P(r-1), x_r).
\end{array}
$$

By carrying on this procedure we obtain $\prod_{i=1}^{r} m_{i,x_i} = \chi_{\mathcal{M}}(x_1, \cdots, x_r)$. □

Theorem 5. *The class $\mathcal{LOM}$ is closed under minors and duality.*

Démonstration. Let $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ be a lattice path oriented matroid on $\{1, \ldots, n\}$. We shall first prove that $\mathcal{M}^* \in \mathcal{LOM}$. For, we show that $\mathcal{M}^*$ verifies conditions (a) and (b) of Theorem 4. In [Bonin et De Mier, 2006], it is proved that $\underline{\mathcal{M}^*}$ is also a lattice path matroid, and therefore condition (a) holds.

For (b), let $X = \{x_1, \ldots, x_{r^*}\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}^*)$, $x_1 < \cdots < x_r$ and $Y = \{y_1, \ldots, y_{r^*}\} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}^*)$, $y_1 < \cdots < y_r$. For each $k = 1, \cdots, r$ we define X'_k and Y'_k such that for all $i \neq k$ $X'_k(i) = X(i)$ (resp. $Y'_k(i) = Y(i)$) and $X'_k(k) = y_k$ (resp. $Y'_k(k) = x_k$). If X'_k and Y'_k are also in lexicographical order then we can suppose by similarity that $x_k < y_k$. We denote by $\overline{X}_{<x_k} = \{1, \cdots, x_k - 1\} \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ (resp. $\overline{Y}_{<x_k} = \{1, \cdots, x_k - 1\} \setminus \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$) and $\overline{X}_{>y_k} = \{y_k + 1, \cdots, n\} \setminus \{x_{k+1}, \cdots, x_r\}$ (resp. $\overline{Y}_{>y_k} = \{y_k + 1, \cdots, n\} \setminus \{y_{k+1}, \cdots, y_r\}$)

We compute the chirotope of the dual

$$\chi_{\mathcal{M}^*}(X) = \chi_{\mathcal{M}}(\overline{X}_{<x_k}, x_k + 1, \cdots, y_k, \overline{X}_{>y_k}) sg(X, \overline{X}_{<x_k}, x_k + 1, \cdots, y_k, \overline{X}_{>y_k})$$

where sg denotes the signature of the permutation. We have that

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{M}^*}(X) = \; & \chi_{\bigcup_{i=1}^{x_k - k} \mathcal{M}_i}(\overline{X}_{<x_k}) \prod_{i=x_k+1}^{y_k} \chi_{\mathcal{M}_{i-k}}(i) \chi_{\bigcup_{i=y_k-k-1}^{r} \mathcal{M}_i}(\overline{X}_{>y_k}) \\ & (-1)^{x_k + r - 2k} sg(X \setminus x_k, \overline{X}_{<x_k}, x_k, \cdots, y_k, \overline{X}_{>y_k}). \end{aligned}$$

Similary, we also have that

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{M}^*}(X'_k) = \; & \chi_{\bigcup_{i=1}^{x_k - k} \mathcal{M}_i}(\overline{X}_{<x_k}) \prod_{i=x_k}^{y_k - 1} \chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i) \chi_{\bigcup_{i=x_k-k+1}^{r} \mathcal{M}_i}(\overline{X}_{>y_k}) \\ & (-1)^{x_k + r - 2k} sg(X'_k \setminus x_k \overline{X}_{<x_k}, x_k, \cdots, y_k, \overline{X}_{>y_k}). \end{aligned}$$

So, $\chi_{\mathcal{M}^*}(X)\chi_{\mathcal{M}^*}(X'_k) = \prod_{i=x_k}^{y_k-1} \chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i)\chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i+1)(-1)^{y_k+x_k}$. Since

$\chi_{\mathcal{M}^*}(Y)\chi_{\mathcal{M}^*}(Y'_k) = \prod_{i=x_k}^{y_k-1} \chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i)\chi_{\mathcal{M}_{i-k+1}}(i+1)(-1)^{y_k+x_k}$ then

$\chi_{\mathcal{M}^*}(X)\chi_{\mathcal{M}^*}(X'_k) = \chi_{\mathcal{M}^*}(Y)\chi_{\mathcal{M}^*}(Y'_k)$. And thus condition (b) of Theorem 4 holds.

The suppression of an element keep obviously the property of $\mathcal{LOM}$ since it correspond to delete a column of its matrix representation. Moreover, since $\mathcal{M}/e = (\mathcal{M}^* \setminus e)^*$ then $\mathcal{LOM}$ is closed under minors. □

The above theorem implies the following result due to Lawrence [Lawrence, 1984] in the case when each oriented matroid M_i is uniform (also see [Björner *et al.*, 1999, Proposition 7.6.7].

Corollary 9. *Lawrence oriented matroids are closed under duality and minors.*

I Simplexes in arrangements

In this section, we study the simplexes of the hyperplane arrangement associated to lattice oriented matroids. For, we will extend results used in [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] where the simplexes for arrangements associated to Lawrence matroid were investigated. We first study circuits of lattice path matroids.

Proposition 5. *Let $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ be a lattice path matroid on $\{1, \ldots, n\}$. Let $C = \{j_0, \ldots, j_k\} \in \{1, \ldots, n\}^{k+1}$, $j_0 < \cdots < j_k$, and let $m = \min\{i | j_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i),\ 1 \leq i \leq r\}$. Then, C is a circuit if only if for all $i = 0, \ldots, k-1$ we have $\{j_i, j_{i+1}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{m+i})$ and $m + k - 1 = \max\{i | j_k \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)\}$.*

The above proposition is essentially given in [Bonin et De Mier, 2006, Theorem 3.9]. However, the above presentation (with different proof) is more convenient for our propose.

Proof of Proposition 5. $\Leftarrow$] By definition of lattice path matroid, for each $i = 0, \ldots, k$ we have that $C \setminus j_i$ is an independent set while C is not, and thus C is a circuit.

$\Rightarrow$] Suppose that C is a circuit. Then, $C \setminus j_0$ is an independent of $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$, we can, if necessary, complete on a base $B = C \setminus j_0 \cup \{j'_1, \ldots, j'_{r-k}\}$. Let us suppose that after a suitable labeling in lexicographical order

$$B = (j'_{i_0+1}, \ldots, j'_{i_1-1}, j_1, j'_{i_1+1}, \ldots, j'_{i_2-1}, j_2, j'_{i_2+1}, \ldots, j'_{i_k-1}, j_k, j'_{i_k+1}, \ldots, j'_{i_{k+1}-1})$$

with $i_0 = 0$ and $i_{k+1} = r + 1$. Note that elements between j_i and j_{i+1} for $i = 1, \ldots, k$ (or elements before j_1 and after j_k) may not exist. By Proposition 3, if the index $i \in \cup_{j=0}^{k} \{i_j + 1, \ldots, i_{j+1} - 1\}$ then $j'_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$, and so $j_0 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ (otherwise, $B \setminus j'_i \cup j_0$ would be a base of $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ and C were not a circuit, which is a contradiction).

We claim that $j_k \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_{k+1}})$. We first show this for $k = 0$, that is, $j_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1})$. For, if $j_0 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1})$ then $j_0 < P(i_1)$ (since $j_0 < j_1 \leq Q(i_1)$). Thus, $j_0 < P(i_1) < \cdots < P(r)$ and therefore $j_0 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ for each $i = i_1, \ldots, r$. However, we have seen above that $j_0 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ for all $i = 1, \ldots, i_1 - 1$ so j_0 should be a loop, which is impossible. So, we have $i_1 = \min\{i : j_0 \in \mathcal{M}_i\}$ and $\{j_0, j_1\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1})$ with $B \setminus j_1 \cup j_0$ a base. Let us now show the claim for $k = 1$, that is, $j_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_2})$. We have the base

$$(j'_{i_0+1}, \ldots, j'_{i_1-1}, j_0, j'_{i_1+1}, \ldots, j'_{i_2-1}, j_2, j'_{i_2+1}, \ldots, j'_{i_k-1}, j_k, j'_{i_k+1}, \ldots, j'_{i_{k+1}-1}),$$

for the same reason as above for all $i \in \cup_{j=0}^{k} \{i_j + 1, \ldots, i_{j+1} - 1\}$ we have $j_1 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ and thus $\{j_1, j_2\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_2})$ (the condition $j_1 < P(i_2)$ is impossible since this would imply that $\{j_0, j_1\}$ were a circuit).

Now $j_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_2})$ so $P(i_2) \leq j_1 \leq Q(i_1)$ and $\{j'_{i_1+1}, \ldots, j'_{i_2-1}\}$ does not exist because for any $i = i_1 + 1, \ldots, i_2 - 1$ we have $j_1 \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ while $P(i) < P(i_2)$ and $Q(i_1) < Q(i)$.

By carry on the above argument we have that for all $i = 0, \ldots, k-1$, $\{j_i, j_{i+1}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{i_1+i})$ and $i_1 + k - 1 = \max\{i : j_k \in \mathcal{M}_i\}$.

Let us now show a way to obtain the signature of elements of a circuit $C = \{j_0, \ldots, j_k\}$ with $j_0 < \cdots < j_k$ in a lattice oriented matroid $\mathcal{M} = M[P, Q]$ For any $i = 0, \ldots, k-1$, we consider the bases

$$B' = (P(1), \ldots, P(m-1), j_0, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_k, Q(m+k), \ldots, Q(r))$$

and

$$B'' = (P(1), \cdots, P(m-1), j_0, \ldots, j_i, j_{i+2}, \ldots, j_k, Q(m+k), \cdots, Q(r)).$$

Notice that $|B'| = m - 1 + k + r - (m-k) + 1 = r$ (if $m + k < r$ then we do not consider the corresponding $Q's$ elements (similar for B''). We also notice that their union contains circuit C. Recall that the sign $C(j_{i+1})$ of elements j_{i+1} in circuit C is given by $C(j_{i+1}) = -C(j_i)\chi_{\mathcal{M}}(B')\chi_{\mathcal{M}}(B'')$. Hence, by (20), we have

$$C(j_{i+1}) = -C(j_i)m_{i+m,j_i}m_{i+m,j_{i+1}}. \tag{21}$$

Exemple 2 cont. We may find the signature of the circuits (3-element subsets not containing 1) corresponding to the oriented lattice matroid given in Exemple 2. For instance, if $C = \{j_0, j_1, j_2\} = \{2, 3, 5\}$, then $m = 2$ and $k = 2$. Let $i = 1$, then $B' = \{P(1), 2, 5, Q(4)\} = \{P(1), 2, 5\} = \{1, 2, 5\}$ and $B'' = \{P(1), 2, 3, Q(4)\} = \{P(1), 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$. So, if we set $C(2) = +$ then, by equation 21, we obtain

$$C(j_1) = C(3) = -C(j_0)m_{2,j_0}m_{2,J_1} = -C(2)m_{2,2}m_{2,3} = -(+)(+) = -$$

and $C(5) = -$ (or the opposite).

Given a matrix $M = (m_{i,j}) : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ representing $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$, we define matrix $M' = (m'_{i,j}) : 0 \leq i \leq r+1, 1 \leq j \leq n$ where the first and last rows have zeroes entries and the other rows are the same as in M. We shall construct a set of *Top Travel* [TT] (and a a set of *Bottom Travel* [BT]) on the entries of M', formed by horizontal and vertical movements according to the following procedure.

Procedure

(1) TT (BT) starts at $m'_{1,1}$ ($m'_{r,n}$)

(2) When TT (BT) arrives at $m'_{i,j}$

If $m'_{i,j}m'_{i,j+1} = +$ ($m'_{i,j}m'_{i,j-1} = +$) then

TT goes to $m'_{i,j+1}$ (horizontally)

(BT goes to $m'_{i,j-1}$ (horizontally))

If $m'_{i,j}m'_{i,j+1} = -$ ($m'_{i,j}m'_{i,j-1} = -$) then

TT goes either to $m'_{i+1,j+1}$ (horizontally and vertically)

(BT goes either to $m_{i-1,j-1}$ (horizontally and vertically)

If $m'_{i,j}m'_{i,j+1} = 0$ ($m'_{i,j}m'_{i,j-1} = 0$) then

TT goes either to $m'_{i,j+1}$ (horizontally) or to $m'_{i+1,j+1}$ (horizontally and vertically)

(BT goes either to $m'_{i,j-1}$ (horizontally) or to $m'_{i-1,j-1}$ (horizontally and vertically)

(3) TT (BT) stops when it arrives at line $r+1(0)$ or at column n (1).

We write TT=$[t_0, \cdots, t_1]\,[t_1, \cdots, t_2] \cdots [t_{l-1}, \cdots, t_l]$ where $[t_{i-1}, \cdots, t_i]$ denote the entries $\left[m'_{i,t_{i-1}}, \cdots, m'_{i,t_i}\right]$ with $1 \leq x \leq l \leq r+1$ (similar for BT). We use also the notation TT=$(m'_{1,1}, \cdots, m'_{1,t_1}, m'_{2,t_1}, \cdots, m'_{2,t_2}, \cdots, m'_{l,t_{l-1}}, \cdots, m'_{l,t_l})$

We illustrate one TT and one BT of matrix M in Figure 4.

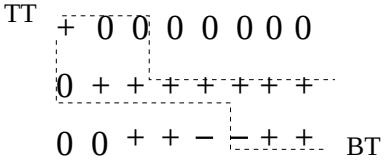


FIGURE 25 – Top and bottom travels.

Top and Bottom travels were introduced in [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] when $\mathcal{M}$ was a Lawrence oriented matroid. In that case, we clearly have just one Top travel and one Bottom travel since the M_i are uniforms (and therefore, the corresponding matrix representation consists of only non-zero entries). The unicity is lost in the general case since we may have zero entries in the matrix representation. The following result generalizes the corresponding one given in [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001, Lemma 2.1] for the Lawrence oriented matroid case.

Lemma 4. *Let $M = (m_{i,j}), 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ be the matrix representation of $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$. Then, the following conditions are equivalent*

1. *$\mathcal{M}$ is cyclic*
2. *there exists TT which arrives at line $r+1$*
3. *there exists BT which arrives at line 0*

Démonstration. We show only the equivalence between (1) and (2) (the equivalence between (1) and (3) is analogous).

$\Rightarrow$] Let $C = (j_0, \ldots, j_k)$ be a positive circuit. Proposition 5 states that for $m = \min\{i | j_0 \in \mathcal{M}_i\}$, we have that $\{j_i, j_{i+1}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_{m+i})$ and $j_k \notin \mathcal{B}(\mathcal{M}_{m+k})$ for all $i = 0, \ldots, k-1$. Then, we can determine TT=$[t_0, \cdots, t_1]\,[t_1, \cdots, t_2] \cdots [t_{l-1}, \cdots, t_l]$ such that :

- for all $i = 1, \ldots, m-1$ we can choose that TT goes vertically when it arrives at 0 and then $t_i \leq Q(i) + 1$ because $m'_{i,Q(i)+\ 1} = 0$
- for all $i = m, \ldots, m+k-1$ TT goes vertically when it arrives at an different signs. We have $t_{m-1} \leq Q(m-1) + 1 \leq j_0$ and by (21) $m'_{i,j_{i-m}} * m'_{i,j_{i-m+1}} = -$ then we have always $t_i \leq j_{i-m+1}$
- for all $i = m+k, \ldots, r$ We have $t_{m+k-1} < j_k < P(m+k)$ and because $m'_{i,t_{i-1}} = 0$ we can always choose $t_i = t_{i-1} + 1$

$\Leftarrow$] We take $a = \max\{i | j_i \in T$ and $m'_{i,j_i} = 0\}$ and
$b = \min\{i | j_i \in T, m'_{i+1,j_i} = 0\}$. By the definition of $TT(M)$ and (21), we have that $(j_a, j_{a+1}, \ldots, j_{b-1}, j_b)$ is a positive circuit. □

We may now use the above results to investigate the simplies of $\mathcal{LOM}$-arrangements of hyperplans. We know that 2-elements circuits give two copies of the same hyperplan. We shall only consider oriented matroids $\mathcal{M}$ on $\{1, \ldots, n\}$ without 2-element circuits. Recall that an oriented matroid is called *acyclic* if it does not contain positive circuits (that is, circuits containg elements all with the same sign). We say that $e \in \{1, \ldots, n\}$ is a *interior* element if there exists a circuit $C = (C^+, C^-)$ with $C^- = \{e\}$ (or with $C^+ = \{e\}$). It is equivalent to define the interior points as the elements whose reorientation gives a cyclic matroid.

We say that TT and BT are *parallel* at column k in a matrix representation M if it exists

a)
TT goes through $m'_{i,k-1}, m'_{i,k}, m'_{i,k+1}$ and BT goes through either $m'_{i,k+1}, m'_{i,k}, m'_{i,k-1}$ or $m'_{i+1,k+1}, m'_{i+1,k+1}, m'_{i+1,k-1}$ with $2 \leq k \leq n-1$.

b) TT goes through $m'_{r,n-1}, m'_{r,n}$ for $k = n$ and

c) BT goes through $m'_{1,2}, m'_{1,1}$ for $k = 1$.

We notice, from Figure 4, that elements 2,4,5 and 7 are parallels in M. In [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001, Lemma 2.2], it is proved that an element e of a Lawrence oriented matroid is interior if and only if the Top and Botton travels are parallel at the column corresponding to element e. The proof of the latter can be generalized to lattice oriented matroids

Lemma 5. *Let M be a matrix representation of a lattice oriented matroid $\mathcal{M}$ such that $\mathcal{M}$ is acyclic. Then, k is an interior element of $\mathcal{M}$ if and only if there exist one top*

travel and one bottom travel that are parallel at column k in M.

Démonstration. We denote by $M_{\overline{k}}$ the matrix obtained by reversing all the sign of column k and let $TT_{\overline{k}}$ and $BT_{\overline{k}}$ be the corresponding travels. By Lemma 4, k is an interior element of $\mathcal{M}$ if and only if there is not a TT (or BT) arriving at line $r+1$ (or 0) in M' but there is a TT (or BT) that does in $M'_{\overline{k}}$. Since $\mathcal{M}$ is acyclic then no TT and BT arrive at lines $r+1$ and 0 respectively.

Case 1) $k = n$. If there exists TT going through $m'_{r,n-1}, m'_{r,n}$ then $m'_{r,n-1}m'_{r,n} = +$ so after reorientation of n, we have $m'_{r,n-1}m'_{r,n} = -$ and $TT_{\overline{n}}$ arrives at line $r+1$. In the opposite sense if in $M'_{\overline{n}}$ it exists $TT_{\overline{n}}$ which arrives at line $r+1$, TT does not arrive at line $r+1$ then TT goes through $m'_{r,n-1}, m'_{r,n}$.

Case 2) $k = 1$. Analogous as case 1 by using that that BT goes through $m'_{1,2}, m'_{1,1}$.

Case 3) $1 < k < n$. For TT$=[t_0, \ldots, t_1]\,[t_1, \ldots, t_2] \ldots [t_{l-1}, \ldots, t_l]$ with $1 \leq l \leq r+1$ we partition the entries of M' (not lying in TT) into sets $P_1(TT)$ and $P_2(TT)$ where $P_1(TT) = \{m'_{i,j} | j < t_{i-1}$ for each $i = 1, \ldots, l\}$ and $P_2(TT) = \{m'_{i,j} | j > t_{i-1}$ for each $i = 1, \ldots, l\}$.

Given a BT, we let $BT(m'_{i,k})$ be travel in M', starting at $m'_{i,k}$ and formed according the above rules for BT. If $m'_{i,k} \in P_2(TT)$, we can choose a travel $BT(m'_{i,k})_{\overline{k}}$ where all elements belong to either $P_2(TT)$ or TT and arriving at line 0 since for all $i = k, \ldots, 1$, $m'_{i,t_i}m'_{i,t_i-1} = -$ or 0. If $m'_{i,k} \in \left]m'_{i,t_{i-1}}, \ldots, m'_{i,t_i}\right[$ for some $1 \leq i \leq r$, in M' we have $m'_{i,k}m'_{i,k-1} = +$ or 0 then in $M'_{\overline{k}}$, we have $m'_{i,k}m'_{i,k-1} = -$ or 0 and the first mouvement of $BT(m'_{i,k})_{\overline{k}}$ goes to $m'_{i-1,k-1}$ and as previously all elements belong to either $P_2(TT)$ or TT and arrives at line 0.

We first remark that if k is an interior element, then $TT_{\overline{k}}$ (or $BT_{\overline{k}}$) arrives at line $r+1$ (or 0) and makes a vertical mouvement at k in $M'_{\overline{k}}$ and TT (BT) does not in M'. Let us suppose that there exists TT going through $m'_{i,k-1}, m'_{i,k}, m'_{i,k+1}$ and BT going through either $m'_{j,k+1}, m'_{j,k}, m'_{j,k-1}$ with $2 \leq k \leq n-1$. Now, clearly $BT_{\overline{k}}$ can be seen as BT from $m'_{r,n}$ until $m'_{j,k}$ is followed by $m'_{j-1,k}$ and $BT(m'_{j-1,k})_{\overline{k}}$. So after reorienting column k, we have $m'_{j-1,k}$ in $P_2(TT)$ or $\left]m'_{i,t_{i-1}}, \ldots, m'_{i,t_i}\right[$ if and only if $j-1 \leq i$ then $j = i$ or $j = i+1$ because BT can not be above TT if the matroid is acyclic. □

Let $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ be the d-arrangement of hyperplanes associated to the oriented matroid $\mathcal{M}$. We denote by e_i the element of $\mathcal{M}$ correponding to hyperplane h_i. It is well known that an acyclic reorientation of $\mathcal{M}$ having $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_l}\} l \leq n$ as interior elements corresponds to a cell in $\mathcal{H}$ which is bounded by hyperplanes $\{h_{i_1}, \ldots, h_{i_l}\}$. A *simplex* is a cell in $\mathcal{H}$ bounded by $r = d+1$ hyperplanes and so corresponding to an orientation of $\mathcal{M}$ with $n-r$ interiors elements.

Let $M = (m_{i,j}), 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$ be a representation of a lattice oriented

matroid. We shall associate an oriented graph to M. For, we first define the following sets. For each $i = 1, \ldots, r-1$, let

$$A_i^1 = \{j | m_{i,j} \neq 0, m_{i+1,j} = 0\}, \quad A_i^2 = \{j | m_{i,j} = 0, m_{i+1,j} \neq 0\},$$

$$X_i^1 = \{j | m_{i,j} = m_{i+1,j} \neq 0\} \text{ and } X_i^2 = \{j | m_{i,j} = -m_{i+1,j} \neq 0\}.$$

The corresponding sets for the matroid in Exemple 2 (with $r = 3$) are : $A_1^1 = \{1\}, A_2^1 = \{2\}, X_1^1 = \emptyset, X_2^1 = \{3,4,7\}, A_1^2 = \{2,3,4,5,6,7\}, A_2^2 = \{8\}, X_1^2 = \emptyset$ and $X_2^2 = \{5,6\}$.

Let $G_i(M)$ be the oriented graph (called, *simplex graph*) obtained from M as follows : each element in A_i^1 is joined to each element in A_i^2 by two paths, the first going through the vertices in the set X_i^1 (in order), and the second going through those in X_i^2 (in order) ; see Figure 26.

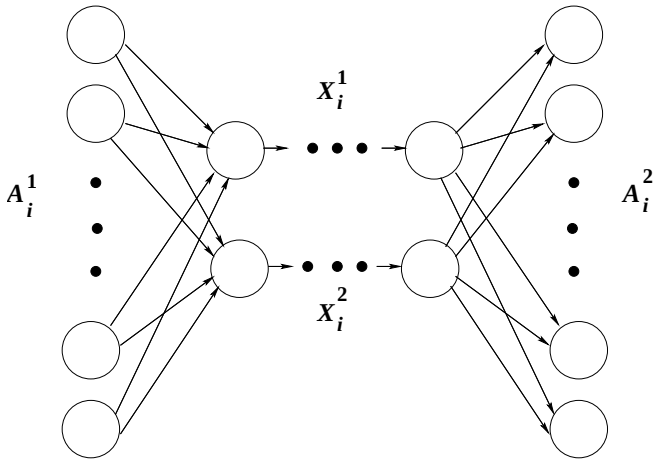


FIGURE 26 – Simplex graph $G_i(M)$

$G_i(M)$ is a generalization of the graph defined in [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] for Lawrence oriented matroids (in this case we have $|A_i^1| = |A_i^2| = 1$).

Remark 3. *Let $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ and M its corresponding matrix representation.*

(a) Since $\mathcal{M}$ contains no 2-element circuits then, by the Proposition 5, the M verifies the follows : for all j_0, j_1 if there exists i such that $m_{i,j_0} \neq 0$ and $m_{i,j_1} \neq 0$ then there exists $k \neq i$ such that $m_{k,j_0} \neq 0$ or $m_{k,j_1} \neq 0$. In other words, in terms of the graphs $G_i(M)$, $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ contains no 2-element circuits if $|A_1^1| = 1$, $\left|A_{r-1}^2\right| = 1$ and $\left|A_i^2 \cap A_{i+1}^1\right| < 2$ for any $i = 1, \ldots, r-2$.

(b) $X_i^1 \cup X_i^2 \cup A_i^2 = A_{i+1}^1 \cup X_{i+1}^1 \cup X_{i+1}^2$ for all $i = 1, \ldots, r-1$. The following table illustrates the generic case of the latter.

			A_i^1		$X_i^1 \cup X_i^2$					A_i^2					
1	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i-1$	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0
$i+1$	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$
			A_{i+1}^1		$X_{i+1}^1 \cup X_{i+1}^2$					A_{i+1}^2					

(c) By (a), $m_{1,1}, m_{r,n} \neq 0$, and so $1 \in A_1^1$ and $n \in A_{r-1}^2$.

Theorem 6. *Let M be a matrix representation of $\mathcal{M} \in \mathcal{LOM}$ without 2-element circuits. Then, the hyperplanes $\{j_1, \ldots, j_r\}$, $j_1 < \cdots < j_r$, form a simplex in the arrangement obtained from $\mathcal{M}$ if only if j_i and j_{i+1} are adjacent in $G_i(M)$ for all $i = 1, \ldots, r-1$.*

Démonstration. By Lemma 5, there exists an reorientation of $\mathcal{M}$ with $n - r$ interiors elements if and only if there exist elements $\{j_1, \ldots, j_r\}$ and a TT making a vertical mouvement at columns $\{j_2, \ldots, j_r\}$ and a BT making a vertical mouvement at $\{j_{r-1}, \ldots, j_1\}$. We have four cases for all $i = 1, \ldots, r-1$.

Case 1) $m_{i,j_i} = \cdots = m_{i,j_{i+1}-1} = -m_{i,j_{i+1}}$ and $-m_{i+1,j_i} = m_{i+1,j_i+1} = \cdots = m_{i+1,j_{i+1}}$. Hence $-m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = m_{i,j_i+1}m_{i+1,j_i+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}-1}m_{i+1,j_{i+1}-1} = -m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}}$. Then j_i and j_{i+1} are adjacent in either X_i^1 or X_i^2.

Case 2) There exists j such that $m_{i,j_i} = \cdots = m_{i,j}$, $m_{i,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}} = 0$ and $-m_{i+1,j_i} = m_{i+1,j_i+1} = \cdots = m_{i+1,j_{i+1}}$. So, $-m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = m_{i,j_i+1}m_{i+1,j_i+1} = \cdots = m_{i,j}m_{i+1,j}$ and $m_{i,j+1}m_{i+1,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}} = 0$. Therefore, j_i the last element of either X_i^1 or X_i^2 and it is adjacent to j_{i+1} in A_i^2.

Case 3) There exists j such that $m_{i,j_i} = \cdots = m_{i,j_{i+1}-1} = -m_{i,j_{i+1}}$ and $m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i+1,j} = 0$, $m_{i+1,j+1} = \cdots = m_{i+1,j_{i+1}}$. Hence $m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i,j}m_{i+1,j} = 0$ and $m_{i,j+1}m_{i+1,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}-1}m_{i+1,j_{i+1}-1} = -m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}}$. Therefore, j_i is in A_i^1 and it is adjacent to j_{i+1} the first element of either X_i^1 or X_i^2.

Case 4) There exists j such that $m_{i,j_i} = \cdots = m_{i,j}$, $m_{i,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}} = 0$ and j' such that $m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i+1,j'} = 0$, $m_{i+1,j'+1} = \cdots = m_{i+1,j_{i+1}}$.

If $j \leq j'$, $m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}} = 0$ then j_i is in A_i^1 and it is adjacent at j_{i+1} in A_i^2 (X_i^1 and X_i^2 do not exist).

If $j > j'$,$m_{i,j_i}m_{i+1,j_i} = \cdots = m_{i,j'}m_{i+1,j'} = 0$, $m_{i,j'+1}m_{i+1,j'+1} = \cdots = m_{i,j}m_{i+1,j}$ and $m_{i,j+1}m_{i+1,j+1} = \cdots = m_{i,j_{i+1}}m_{i+1,j_{i+1}} = 0$ then j_i is in A_i^1 and it is adjacent to j_{i+1} in A_i^2 (X_i^1 or X_i^2 do not exist). □

Figure 27 illustrates the simplex graph corresponding to Exemple 2.

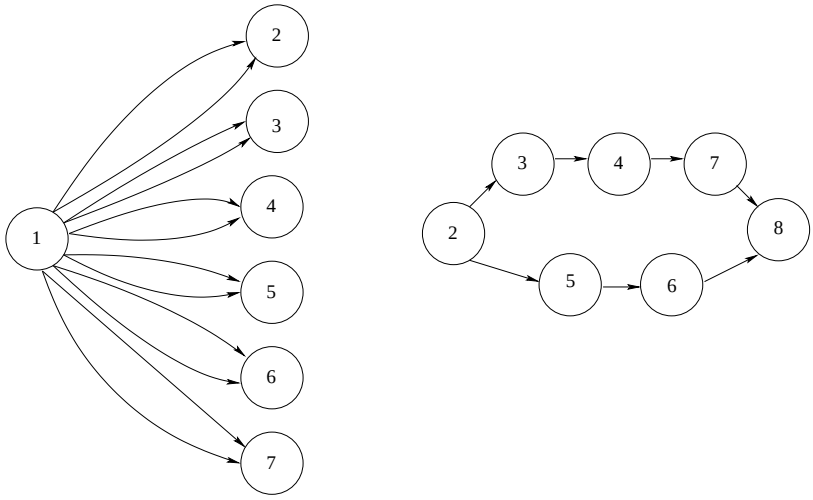


FIGURE 27 – $G_1(M)$ and $G_2(M)$

By Theorem 6, we have that the simplexes of the arrangement obtained from Exemple 2 are given by the following triples (see Figure 28) :

$$\{1,2,3\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,4,7\},\{1,5,6\},\{1,6,8\} \text{ and } \{1,7,8\}.$$

Notice that there exist two simplexes for each triple because of the edges in the component $G_1(M)$.

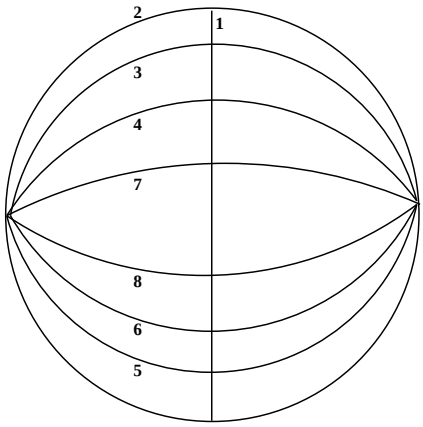


FIGURE 28 – Arrangement of pseudolines obtained from Exemple 2.

I.1 Counting simplexes in $\mathcal{LOM}$.

The above results allows to construct arrangements of hyperplanes in which the number of simplexes can be calculated. Let $\mathcal{M}_1 = (E_1, \mathcal{B})$ and $\mathcal{M}_2 = (E_2, \mathcal{B})$ be matroids

of rank r_1 and r_2 respectively where $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. The *direct sum*, denoted by $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, of matroids $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ has as ground set the disjoint union $E(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) = E(\mathcal{M}_1) \cup E(\mathcal{M}_2)$ and as set of bases $\mathcal{B}(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) = \{B_1 \cup B_2 | B_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1), B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_2)\}$. Further, the rank of $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ is $r_1 + r_2$.

Theorem 7. *Let $\mathcal{M}_1 = \bigcup_{i=1}^{r_1} \mathcal{M}_i^1$ be a lattice oriented matroid on E_1 with N_1 simplexes and $\mathcal{M}_2 = \bigcup_{i=1}^{r_2} \mathcal{M}_i^2$ a lattice oriented matroid on E_2 with N_2 simplexes. If E_1 and E_2 are assumed to be disjoint, then $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ has exactly $2N_1N_2$ simplicies*

Démonstration. Let $E_1 = \{1, \ldots, n\}$ and $E_2 = \{n+1, \ldots, m\}$ and suppose, without lost of generality that $n = \max(E_1) = \min(E_2) - 1$.

For $G_{r_1-1}(\mathcal{M}_1)$, we assume that $A^1_{r_1-1} = \{k_1, \ldots, k_j\}$, and $X^1_{r_1-1} \cup X^2_{r_1-1} = \{k_{j+1}, \ldots, n-1\}$ and we have that $A^2_{r_1-1} = \{n\}$. Indeed it is not possible to have several elements in $A^2_{r_1-1}$ otherwise we would have a cycle of 2 elements by Remark 3. By Theorem 6, all simplexes in $\mathcal{M}_1$ end by an element in $\{k_{j+1}, \ldots, n\}$ and each of these simplexes form the beginning of a simplex in $\mathcal{M}$.

In the same way, for $G_1(\mathcal{M}_2)$, we have $A^1_1 = \{n+1\}$ and assume that $X^1_1 \cup X^2_1 = \{n+2, \ldots, k'_0\}$, $A^2_1 = k'_1, \ldots, k'_j$. By Theorem 6, all simplexes in $\mathcal{M}_2$ begin by an element in $\{n+1, \ldots, k'_0\}$ and each of these simplexes form the end of a simplex in $\mathcal{M}$

We illustrate below part of the matrix representation of $\mathcal{M}$ where $*$ denotes a nonzero entry.

	$\cdots$	k_1	$\cdots$	k_j	k_{j+1}	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	k'_0	k'_1	$\cdots$	$k'j$	$\cdots$
1	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$r_1 - 1$	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_1	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0	0	0	0	0
$r_1 + 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0
$r_1 + 2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0
$\vdots$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$	$*$
$r_1 + r_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$*$	$*$

Notice that $G_{r-1}(\mathcal{M}) = G_{r-1}(\mathcal{M}_1)$ and $G_{r+1}(\mathcal{M}) = G_1(\mathcal{M}_2)$. Futhermore we find $G_r(\mathcal{M})$ with $A^1_r = \{k_{j+1}, \ldots, n\}$, $X^1_r \cup X^2_r = \emptyset$ and $A^2_r = \{n+1, \ldots, k'_0\}$.

So, the N_1 simplexes in $\mathcal{M}_1$ can be extended by 2 edges in $G_r(\mathcal{M})$ and ending with an element in $\{n+1, \ldots, k'_0\}$. Therefore, since there are N_2 simplexes in $\mathcal{M}_2$ (beginning with elements in $\{n+1, \ldots, k'_0\}$) then it can be constructed $2N_1N_2$ simplexes in $\mathcal{M}$. $\square$

Theorem 8. *Let $n \geq r \geq 2$ be positive integers. Then, there exists a hyperplane arrangement with $s(n,r)$ simplexes with*

$$s(n,r) = \begin{cases} 2^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{k-p} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil^{p} & \text{if } r = 2k, \\ 2^{k} \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor^{k-p} \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil^{p} & \text{if } r = 2k+1, \end{cases}$$

where $n = qk + p$ for some integer q and $0 \leq p < k$.

Démonstration. We have two cases.

Case 1) $r = 2k$. Let $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ where each M_i is an oriented matroid of rank one with bases (sets of one elements, all signed positively), given as follows. For each $i = 1, \ldots, p$

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{2i-1}) = \left\{ (i-1) \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1, \ldots, i \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 \right\}$$
$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{2i}) = \left\{ (i-1) \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 2, \ldots, i \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \right\},$$

and, for each $i = p+1, \ldots, k$

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{2i-1}) = \left\{ p \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + (i-p-1) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1, \ldots, p \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + (i-p) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right\}$$
$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{2i}) = \left\{ p \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + (i-p-1) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 2, \ldots, p \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + (i-p) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Let M be the matrix representation of $\mathcal{M}$ given below (zeroes entries are omitted).

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_1 & : & \overbrace{+ + \cdots +}^{\lceil \frac{n}{k} \rceil} \\
\mathcal{M}_2 & : & + \cdots + + \\
\mathcal{M}_3 & : & \overbrace{+ + \cdots +}^{\lceil \frac{n}{k} \rceil} \\
\mathcal{M}_4 & : & + \cdots + + \\
 & & \ddots \\
\mathcal{M}_{2p-1} & : & \overbrace{+ + \cdots +}^{\lceil \frac{n}{k} \rceil} \\
\mathcal{M}_{2p} & : & + \cdots + + \\
\mathcal{M}_{2p+1} & : & \overbrace{+ + \cdots +}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \\
\mathcal{M}_{2p+2} & : & + \cdots + + \\
 & & \ddots \\
\mathcal{M}_{2k-1} & : & \overbrace{+ + \cdots +}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \\
\mathcal{M}_{2k} & : & + \cdots + +
\end{array}$$

Notice that the number of columns in M (i.e., elements in $\mathcal{M}$) is $p\lceil\frac{n}{k}\rceil+(k-p)\lfloor\frac{n}{k}\rfloor = p(q+1)+(k-p)q = n$. Now, if $r=2$ then $\mathcal{M}$ is a Lawrence oriented matroid on n elements and in this case, it is known [Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] that its number of simplexes is n. If $k \geq 2$ then the result follows by Theorem 7.

Case 2) $r = 2k+1$. In this case, we construct $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_i$ on a set with $n-1$ elements as in the above case and we then take a direct sum $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}_r$ where $\mathcal{B}(\mathcal{M}_r) = \{n\}$. Therefore, we have the number of simplexes of $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}_r$ is two times as much as in Case 1. □

Notice that the value of $s(n,r)$ in Theorem 8 is not optimal in general. However, it attains maximality in some cases. For instance, the $\mathcal{LOM}$-arrangement obtained from Exemple 2 (with $n=8, r=3, k=1$ and $p = n-1 \bmod 1 = 0$) has a maximal number of triangles.

Conjecture 1. *The number of simplexes given in Theorem 8 is maximal for the class of $\mathcal{LOM}$-arrangements.*

I.2 Grunbaum's problem.

In [Grünbaum, 1971], Grunbaum posed the following question. Is it true that for any non-trivial 2-coloring (a coloring where each class of color is not empty) of the pseudolines of an arrangement there is always a *bichromatic* triangle (that is, a triangle which all sides have not all the same color) ? [6]

Let us consider a higher dimension generalization. Is it true that for any non-trivial 2-coloring of the hyperplanes of any d-dimensional arrangement there is always $d+1$ *bichromatic* simplexes ? We answer the latter positively for $\mathcal{LOM}$-arrangements.

Theorem 9. *Let $r \geq 2$ be an integer and let $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ be a lattice oriented matroid. Then, for any non-trivial 2-coloring of the hyperplanes in the arrangement obtained from $\mathcal{M}$ there always exist at least r bichromatic simplexes.*

Démonstration. We proceed by induction on the rank r. For $r=2$, the simplex graphs of a lattice oriented matroid, without 2-element circuits, is given by circuit in Figure 29.

So, any non-trivial 2-coloring of the vertices gives at least two edges, each with extremes having different colors, yielding to two bichromatic simplexes.

6. Ramírez Alfonsín conjectured (personal communication) that in fact there are at least three bichromatic triangles. Notice that three is the best possible since we can construct an arrangement of lines in which one line, say l, is adjacent to exactly three triangles (and so, we may color line l with one color and the rest of the lines with the other color).

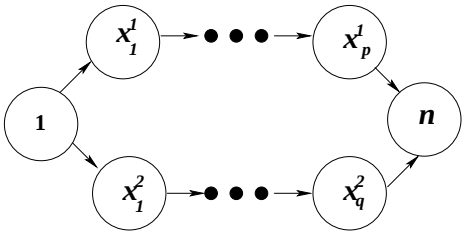


FIGURE 29 – $G_i(M)$ when $r = 2$.

For simplicity, we may suppose that in the simplexes graph if $\max\{A^2_{i-1}\} \notin A^1_i$ then $\max\{A^2_{i-1}\} \in X^1_i$ for any i. Let m be the first element (in lexicographic order) whose color is different from the one given to element 1. We have three cases.

Case 1) Suppose that $m = n$. Then, by Remark 3 there is a simplexe having as last elements the following set

$$\left\{\max\{X^2_i\}(\text{or } \max\{A^1_i\} \text{ if } X^2_i = \emptyset), \max\{A^2_i\}, \ldots, \max\{A^2_{r-1}\}, m\right\}$$

for each $i = 1, \ldots, r-1$ and

$$\left\{\max\{X^1_1\}(\text{or } 1 \text{ if } X^1_1 = \emptyset), \max\{A^2_1\}, \ldots, \max\{A^2_{r-1}\}, m\right\}.$$

Therefore, there are r simplexes having $n = m$ as their last element (colored differently from any previous element) and thus there are r bichromatic simplexes.

Case 2) $\min\{A^2_{r-2}\} < m \leq n-1$. Then, as above, we can find $r-1$ simplexes which the first element, among the last ones, is m.

Moreover, we also have a simplex which last element is m. Indeed, since $m > \min\{A^2_{r-2}\} \geq \max\{A^1_{r-1}\}$ then $m \in X^1_r \cup X^2_r$. Therefore, we also have r bichromatic simplexes.

Case 3) $m \leq \min\{A^2_{r-2}\}$. Let $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$ a lattice oriented matroid on $\{1, \ldots, n\}$ and let $\bar{A}^2_{r-2} = A^2_{r-2} \setminus \min\{A^2_{r-2}\}$. We have taht $\mathcal{M}' = \bigcup_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_i \setminus \bar{A}^2_{r-2} \in \mathcal{LOM}$ of rank $r-1$ not containing 2-element circuits. Since $m \leq \min\{A^2_{r-2}\}$ then $m \in \mathcal{M}'$ and, by induction, there exist $r-1$ simplexes in $\mathcal{M}'$. So, by adding to each of these simplexes an element in $X^1_r \cup X^2_r \cup n$ we obtain $r-1$ bichromatic simplexes in $\mathcal{M}$. Let us construct the last required bichromatic simplex of $\mathcal{M}$, we have two subcases.

Subcase 1) If $m \leq \max\{A^1_{r-1}\}$ then there exists $1 \leq i \leq r-1$ such that $m \in A^1_i$. The simplex in $\mathcal{M}'$ having as last elements the following set is bichromatic

$\{m, \min\{X^1_i\}$ (or $\min\{A^2_i\}$ if $X^1_i = \emptyset$), $\min\{X^1_{i+1}\}$(or $\min\{A^2_{i+1}\}$ if $X^1_{i+1} = \emptyset$),$\ldots$, $\min\{X^1_{r-2}\}$(or $\min\{A^2_{r-2}\}$ if $X^1_{r-2} = \emptyset$)$\}$

Therefore, we may construct two simplexes in $\mathcal{M}$ containing these elements by adding either $\min\{X^1_{r-1}\}$ (or $\min\{A^2_{r-1}\}$ if $X^1_{r-1} = \emptyset$) or $\min\{X^2_{r-1}\}$ (or $\min\{A^2_{r-1}\}$ if $X^2_{r-1} = \emptyset$).

And so, we have r bichromatic simplexes in $\mathcal{M}$.

Subcase 2) If $m > \max\{A^1_{r-1}\}$ then $m \in X^1_r \cup X^2_r$ and so we have a new simplex in $\mathcal{M}$ having m as last element (as in Case 2). □

Septième partie

The switching game on union of oriented matroids

Sommaire

J Abstract **114**

K Introduction **114**

L Main result **115**

Références **122**

J Abstract

In 1986, Hamidoune and Las Vergnas [Hamidoune et Las Vergnas, 1997a] introduced an oriented matroid version of the well-known Shannon's switching game. They conjectured that the classification of the directed switching game on an oriented matroids is identical to the classification of non-oriented version. In this note, we support this conjecture by showing its validity for an infinity class of oriented matroids obtained as unions of rank-1 and/or rank-2 uniform oriented matroids [7].

K Introduction

In 1960, C.E. Shannon introduced the following game.

> **Switching game for graphs.** Let G be a graph and e and edge of G. Two players, *Maker* and *Breaker*, play alternatively. A move of Maker consists of making an unplayed edge invulnerable to deletion, (the objective of Maker is to construct a path between the end points of the unplayable edge e). A move of Breaker consists of deleting an unplayed edge (the objective of Breaker is to prevent Maker to succeed). The game proceed until one of the players reaches its objective.

This above game has been generalized and elegantly solved for matroids by Lehman [Lehman, 1964]. In 1986, Hamidoune and Las Vergnas [Hamidoune et Las Vergnas, 1997a] introduced the directed switching game on graphs (see [Hamidoune et Las Vergnas, 1997b] for a *arborescence rooted* variant). They also naturally considered the following oriented matroid version.

> **Directed switching game for oriented matroids.** Let $\mathcal{M}$ be an oriented matroid and e one of its elements. Maker and Breaker alternatevly play by choosing an unplayed element of $\mathcal{M}$ different from e, Maker signs it and Breaker deletes it. Maker wins the game if the final orientation of $\mathcal{M}$ contains a positive circuit containing e. Breaker wins otherwise.

Hamidoune and Las Vergnas [Hamidoune et Las Vergnas, 1997a] presented a complete solution for graphic and cographic oriented matroids and conjectured that the classification of the oriented game is identical to the classification of non-oriented version.

Conjecture 2. *[Hamidoune et Las Vergnas, 1997a, Conjecture 8.1] If $\mathcal{M}$ be an oriented*

7. This paper corresponds to the article [Chatelain et Ramirez Alfonsin, 2010b]

matroid on E. If E is the union of two disjoint bases, then the directed switching game on $\mathcal{M}$ is winning for Maker playing first.

Recently, Forge and Vieilleribière [Forge et Vieilleribière, 2009] proved above the conjecture for the class of *Lawrence* oriented matroids. In this note we show that Conjecture 2 holds for oriented matroids obtained as union of rank-1 and/or rank-2 uniform oriented matroids (see Theorem 10). The latter contains Forge and Vieilleribière's result in the particular case when the union consist of only rank-1 uniform oriented matroids.

L Main result

We assume that the reader is familiar with basic oriented matroid theory [Björner *et al.*, 1999]. Let $\mathcal{M}$ be an oriented matroid on the ground set $\{1, \ldots, n\}$. We denote by $\mathcal{C}(\mathcal{M}), \mathcal{B}(\mathcal{M})$ and $r(\mathcal{M})$ the set of circuits, the set of bases and the rank of $\mathcal{M}$ respectively. The *union* operation for oriented matroids is the oriented analogue to the union of (ordinary) matroids. The oriented version has first appeared as a particular case of a more general result due to Las Vergnas [Las Vergnas, 1978b] who proved that principal extensions of oriented matroids can be oriented. las Vergnas [Las Vergnas, 1975] used this to show that images of orientable matroids are also orientable (and thus unions of orientable matroids are orientable).

Lawrence and Weinberg [Lawrence et Weinberg, 1981] have shown that the union operation can be described in terms of the bases orientations (or chirotopes). Let $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ be oriented matroids on a totally ordered set E with n elementsof rank r_1 and r_2 respectively, and let $\chi_{\mathcal{M}_1}$ and $\chi_{\mathcal{M}_2}$ denote their corresponding chirotopes. We assume that $r_1 + r_2 \leq n - 1$. Let

$$\chi_{\mathcal{M}}(j_1, \ldots, j_{r_1+r_2}) := \chi_{\mathcal{M}_1}(j_1, \ldots, j_{r_1}) \cdot \chi_{\mathcal{M}_2}(j_{r_1+1}, \ldots, j_{r_1+r_2}) \tag{22}$$

for all $(r_1 + r_2)$-tuple $j_1 < \cdots < j_{r_1+r_2}$ of E. Lawrence and Weinberg [Lawrence et Weinberg, 1981, Theorem 3] proved that $\chi_{\mathcal{M}}$ is the base orientation of a oriented matroid of rank $r_1 + r_2$ on E, called *union* of $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ (and denoted by $M = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$). If $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ are uniform [8] then $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ is uniform.

Proposition 6. *Let $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ where $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$ are uniform oriented matroids of rank r_1 and r_2 respectively. Let $C = (i_1, \ldots, i_{r_1}, j_1, \ldots, j_{r_2+1})$ be a circuit of $\mathcal{M}$ such that $C_1 = (i_1, \ldots, i_{r_1}, j_1)$ (resp. $C_2 = (j_1, \ldots, j_{r_2+1})$) is a circuit of $\mathcal{M}_1$ (resp. a circuit of $\mathcal{M}_2$) such that $C_1(j_1) = C_2(j_1) = C(j_1)$. Then,*

8. An *uniform matroid*, denoted by $\mathcal{U}_{r,n}$, is a matroid with set of bases all r-subsets of a set of n elements.

$C_1(i_k) = C(i_k)$ *for each* $1 \leq k \leq r_1$ *and* $C_2(j_k) = C(j_k)$ *for each* $1 \leq k \leq r_2 + 1$

where $C(k)$ *denotes the sign of element* k *in* C.

Démonstration. Since $\mathcal{M}$ is uniform then, it is known that,

$$\chi_{\mathcal{M}}(B_j) \cdot \chi_{\mathcal{M}}(B_{j+1}) = -C(i_j) \cdot C(i_{j+1}) \tag{23}$$

where $B_j = C \setminus \{i_j\}$ and $B_{j+1} = C \setminus \{i_{j+1}\}$ are bases of $\mathcal{M}$. Therefore,

$$\chi_{\mathcal{M}}(i_1, \ldots, i_{r_1-1}, j_1, \ldots, j_{r_2+1}) \cdot \chi_{\mathcal{M}}(i_1, \ldots, i_{r_1}, j_2, \ldots, j_{r_2+1}) = -C(i_{r_1}) \cdot C(j_1). \tag{24}$$

Now, by equation (22), we have

$$\chi_{\mathcal{M}}(i_1, \ldots, i_{r_1-1}, j_1, \ldots, j_{r_2+1}) = \chi_{\mathcal{M}_1}(i_1, \ldots, i_{r_1-1}, j_1) \cdot \chi_{\mathcal{M}_2}(j_2, \ldots, j_{r_2+1}) \tag{25}$$

and

$$\chi_{\mathcal{M}}(i_1, \ldots, i_{r_1}, j_2, \ldots, j_{r_2+1}) = \chi_{\mathcal{M}_1}(i_1, \ldots, i_{r_1-1}, i_{r_1}) \cdot \chi_{\mathcal{M}_2}(j_2, \ldots, j_{r_2+1}). \tag{26}$$

Combining equations (23), (24), (25) and (26) we obtain

$$C(i_{r_1}) \cdot C(j_1) = -\chi_{\mathcal{M}_1}(i_1, \ldots, i_{r_1-1}, j_1) \cdot \chi_{\mathcal{M}_1}(i_1, \ldots, i_{r_1-1}, i_{r_1}) = C_1(i_{r_1}) \cdot C_1(j_1).$$

Since $C_1(j_1) = C(j_1)$ then $C(i_{r_1}) = C_1(i_{r_1})$. The result follows by recursively carrying on the above argument. □

Lemma 6. *The directed switching game on* $\mathcal{U}_{2,4}$ *is winning for Maker playing first. Moreover, there are two winning choices for the first move of Maker.*

Démonstration. Without loss of generality, we suppose that the given element is 1 and so Maker's goal is to create a positive circuit containing 1. We claim that Maker's goal can be achieved if there exists an element $f \in \{2, 3, 4\}$ such that either $C(1) \cdot C(f) = +$ or $C(1) \cdot C(f) = -$ for any circuit C containing 1 and f. Indeed, suppose that $C(1) \cdot C(f) = +$ and let C be a circuit containing 1 and f. In this case, Maker keeps the sign $C(f)$ and

for every choice of Breaker the remaining element g belongs to a circuit C' containing 1 and f. Maker then signs g such that $C'(1) = C'(f) = C'(g)$ and thus circuit C' is positive. In the case when $C(1) \cdot C(f) = -$ we may proceed as above except that at the beginning Maker changes the sign of f.

We now show that there are two elements verifying the above condition. Let us suppose that there are two different circuits $C_1 = \{1, 2, 3\}$ and $C_2 = \{1, 2, 4\}$ (containing both 1 and 2) such that $C_1(1) = C_2(1) = +$ Then, $C_1(1) \cdot C_1(2) \neq C_2(1) \cdot C_2(2)$ and $C_1(2) \neq C_2(2)$. Without loss of generality we suppose that $C_1(2) = +$. Since $C_1 \neq C_2$ and $2 \in C_1^+ \cap C_2^-$ then there exists circuit C_3 such that $C_3^+ \subset (C_1^+ \cup C_2^+) \setminus \{2\}$ and $C_3^- \subset (C_1^- \cup C_2^-) \setminus \{2\}$. So, $C_3 = \{1, 3, 4\}$ with $C_3(1) = C_1(1) = C_2(1)$, $C_3(3) = C_1(3)$ and $C_3(4) = C_2(4)$. Therefore, both 3 and 4 verify the above conditions. □

Theorem 10. *Let $\mathcal{M} = \cup_{i=1}^{p} \mathcal{M}_i$ where $\mathcal{M}_i$ is a uniform oriented matroid on E of rank $r_i = 1$ or 2 for each $1 \leq i \leq p$. Then, the directed switching game on $\mathcal{M}$ is winning for Maker playing first if and only if $|E| \geq 2r$ where $r = \sum_{i=1}^{p} r_i$ is the rank of $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Let e be an element in $\mathcal{M}$. If $|E| < 2r$ then there are not enough elements for Maker to create the desired positive circuit and so Maker loses. Suppose that $|E| = 2r$. Maker's winning strategy would be to construct a positive circuit C_i in $\mathcal{M}_i$ for each $1 \leq i \leq p$ such that

(a) $C_i \cap C_j = \emptyset$ for all $1 \leq i < j \leq p$ and $j \neq i + 1$,

(b) the last element of C_i is the first element of C_{i+1} for each $1 \leq i \leq p-1$ (and this is the only element in common) and

and (c) $e \in C_i$ for some $1 \leq i \leq p$.

The above strategy is winning for Maker since, by Proposition 6, it yields to the positive circuit $C = \cup_{i=1}^{p} C_i$ in $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ containing e.

We partition E into intervals $I_i = [n_{i-1}, n_i]$ where $n_i = 2r_i + n_{i-1}$ for each $1 \leq i \leq p$ with $n_0 = 0$ (notice that $n_p = 2r$ and that I_i contains $2r(\mathcal{M}_i)$ elements). Let us suppose that $n_{i-1} \leq e \leq n_i$ for some $1 \leq i \leq p$. We have two cases.

Case A) If $r_i = 1$ then either $e = n_i$ or $n_i - 1$. Maker chooses either $e_M = n_i - 1$ or n_i. This permits Maker to sign n_i or $n_i - 1$ such that $\chi_{\mathcal{M}_i}(n_i) \cdot \chi_{\mathcal{M}_i}(n_i - 1) = -1$. Of course, by equation (23), the latter is done in order to have at the end $C_i(n_i) = C_i(n_i - 1)$ and thus constructing a positive circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$.

Now, if Breaker plays an element $e_B > n_i$ (resp. $e_B < n_i - 1$) then we set $E' = E \setminus \{e_M, e_B\}$ and $e = n_i$ (resp. $e = n_i - 1$). So, in the next step, Maker will construct a positive circuit $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ whose first element will be the last element of C_i (resp. a positive circuit $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ whose last element will be the first element of C_i).

Case B) If $r_i = 2$ then, we have four subcases.

Subcase 1) If $e = n_i$ then Maker chooses either $n_i - 2$ or $n_i - 1$. By Lemma 6, there are two winning choices among $n_i - 1, n_i - 2, n_i - 3$ and thus either $n_i - 2$ or $n_i - 1$ is a winning choice for making a positive circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. This winning element, say $e_M^1 \in \{n_i - 1, n_i - 2\}$ is chosen by Maker.

Now, the next move of Maker depend on the element that will be played by Breaker.

(i) If Breaker plays an element $e_B^1 < n_i$ then Maker will choose $e_M^2 = \max\{j \mid j < n_i\}$ creating the desired positive circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. Moreover, if Breaker plays next $e_B^2 < e_M^2 < n_i$ (resp. $e_B^2 > n_i$) then we set $E' = E \setminus \{e_M^1, n_i, e_B^1, e_B^2\}$ and $e' = e_M^2$ (resp. $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ and $e' = n_i$) and restart our strategy with E' and e'. The latter is done so that in the next step, Maker will construct a positive circuit $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ whose last element will be the first element of C_i (resp. $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ whose first element will be the last element of C_i)

(ii) If Breaker plays an element $e_B^1 > n_i$ then we set $E' = E \setminus \{e_M^1, e_B^1\}$ and $e' = n_i$ and restart our strategy with E' and e'. Again the latter is done so that in the next step, Maker will construct a positive circuit $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ whose first element will be the last element of C_i. In this case, circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$ will be completed by an element $e_M^2 \in \{n_i - 1, n_i - 2, n_i - 3\} \setminus \{e_M^1\}$ as soon as Breaker plays an element $e_B^2 < n_i$. The final choice of will depend on the element played by Breaker since $e_M^2 \neq e_B^2$.

The following subcase is completely symmetric, with respect to the interval $[n_i - 3, n_i - 2, n_i - 1, n_i]$, and thus analogue to subcase 1).

Subcase 2) If $e = n_i - 3$ then Maker chooses either $n_i - 2$ or $n_i - 1$. By Lemma 6, there are two winning choices among $n_i - 1, n_i - 2, n_i - 3$ and thus either $n_i - 2$ or $n_i - 1$ is a winning choice for making a positive circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. This winning element, say $e_M^1 \in \{n_i - 1, n_i - 1\}$ is chosen by Maker.

Now, the next move of Maker depend on the element that will be played by Breaker.

(i) If Breaker plays an element $e_B^1 > n_i - 3$ then Maker will choose $e_M^2 = \min\{j \mid j > n_i - 3\}$ creating the desired positive circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. Moreover, if Breaker plays next $e_B^2 < e_M^2 < n_i - 3$ (resp. $e_B^2 > n_i - 3$) then we set $E' = E \setminus \{e_M^1, n_i - 3, e_B^1, e_B^2\}$ and $e' = e_M^2$ (resp. $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ and $e' = n_i - 3$) and restart our strategy with E' and e'. The latter is done so that in the next step, Maker will construct a positive circuit $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ whose first element will be the last element of C_i (resp. $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ whose last element will be the first element of C_i)

(*ii*) If Breaker plays an element $e_B^1 < n_i - 3$ then we set $E' = E \setminus \{e_M^1, e_B^1\}$ and $e' = n_i - 3$ and restart our strategy with E' and e'. Again the latter is done so that in the next step, Maker will construct a positive circuit $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ whose last element will be the first element of C_i. In this case, circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$ will be completed by an element $e_M^2 \in \{n_i, n_i - 1, n_i - 2\} \setminus \{e_M^1\}$ as soon as Breaker plays an element $e_B^2 > n_i - 3$. The final choice of will depend on the element played by Breaker since $e_M^2 \neq e_B^2$.

Subcase 3) If $e = n_i - 1$ then Maker chooses either $n_i - 2$ or n_i. By Lemma 6, there are two winning choices among $n_i, n_i - 2, n_3$ and thus either $n_i - 2$ or n_i is a winning choice for making a positive circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. This winning element, say $e_M^1 \in \{n_i, n_i - 2\}$ is chosen by Maker.

If $e_M^1 = n_i$ then we are back to subcase 1). Let us suppose then that $e_M^1 = n_i - 2$. If Breaker plays element $e_B^1 < n_i - 2$ (resp. $e_B^1 > n_i - 1$) then Maker plays $e_M^2 = n_i$ (resp. $e_M^2 = n_i - 3$).

Moreover, if Breaker plays next $e_B^2 > n_i$ (resp. $e_B^2 < n_i - 3$) then we set $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ and $e' = n_i$ (resp. $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ and $e' = n_i - 3$) and restart our strategy with E' and e'. The latter is done so that in the next step, Maker will construct a positive circuit $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ whose first element will be the last element of C_i (resp. $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ whose last element will be the first element of C_i)

The following subcase is completely symmetric, with respect to the interval $[n_i - 3, n_i - 2, n_i - 1, n_i]$, and thus analogue to subcase 3)

Subcase 4) If $e = n_i - 2$ then Maker chooses either $n_i - 3$ or $n_i - 1$. By Lemma 6, there are two winning choices among $n_i, n_i - 2, n_3$ and thus either $n_i - 3$ or $n_i - 1$ is a winning choice for making a positive circuit $C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. This winning element, say $e_M^1 \in \{n_i - 1, n_i - 3\}$ is chosen by Maker.

If $e_M^1 = n_i - 3$ then we are back to subcase 2). Let us suppose then that $e_M^1 = n_i - 1$. If Breaker plays element $e_B^1 > n_i - 2$ (resp. $e_B^1 < n_i - 1$) then Maker plays $e_M^2 = n_i - 3$ (resp. $e_M^2 = n_i$).

Moreover, if Breaker plays next $e_B^2 < n_i - 3$ (resp. $e_B^2 > n_i$) then we set $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ and $e' = n_i - 3$ (resp. $E' = E \setminus \{e_M^1, e_M^2, e_B^1, e_B^2\}$ and $e' = n_i$) and restart our strategy with E' and e'. The latter is done so that in the next step, Maker will construct a positive circuit $C_{i-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ whose last element will be the first element of C_i (resp. $C_{i+1} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i+1})$ whose first element will be the last element of C_i).

Notice that after r moves of Maker, a positive circuit is formed. We finally notice that in the case when $|E| > 2r$ then Maker first select a subset A from $\{1, \ldots, |E|\}$ such that $|A| = 2r$ and $e \in A$ and then uses *fictitious* moves as done

in [Hamidoune et Las Vergnas, 1997a]. That is, Maker applies the above strategy to A by choosing an element for Breaker in the case Breaker plays outside A. □

Remark 4. *We have checked by computer that there isalways a winning strategy for Maker (playing first) for any oriented matroid of rank 3 and rank 4with 6 and 8 elements respectively (and thus supporting Conjecture 6). Moreover, we noticed thatin each case there is always at least two winning choices for the first move of Maker. The latter lead usto a possible extension of Theorem 10 by considering union of uniform oriented matroids ofrank 1, 2, 3 or 4 (work in progress).*

Table des figures

1 orientation de référence K_4 . . . 17

2 orientation de référence K_4 . . . 19

3 (a) $P(M^*), P(M_1)$ and $P(M_2)$ (b) Un graphe G où chaque arbre couvrant correspond à une base de M^*. . . . 22

4 Séparation par hyperplan de $P(U_{4,2})$ . . . 28

5 K_4 et quatre partitions possible. Dans chaque cas, les éléments de E_1 (resp. de E_2) sont représentés par des arêtes solides (resp. pointillés) . . . 29

6 Représentation euclidienne de W^3 . . . 30

7 Representations euclidiennes de M_1, M_2 et $M_1 \cap M_2$. . . . 31

8 Chemins du réseau P et Q . . . 33

9 Matroïdes transversaux (a) M_1 (b) M_2 et (c) $M_1 \cap M_2$ . . . 34

10 Somme directe de deux matroïdes chemin du réseau . . . 39

11 un carré, une pyramide ou un octaèdre . . . 39

12 Carré vide possible . . . 40

13 Représentation euclidienne de F_7. . . . 41

14 Chemins Haut et Bas. . . . 53

15 Graphe des simplexes $G_i(M)$ . . . 56

16 $G_1(M)$ et $G_2(M)$ . . . 58

17 Arrangement de pseudodroites obtenu à partir de l'exemple 4. . . . 59

18 $G_i(M)$ lorsque $r = 2$. . . . 62

19 $P(M^*), P(M_1)$ and $P(M_2)$ . . . 75

20 Hyperplane split of $P(U_{4,2})$ . . . 80

21 Lattice paths P and Q . . . 83

22 Transversal matroids (a) M_1 (b) M_2 and (c) $M_1 \cap M_2$ . . . 84

23 A square, a pyramid and an octahedron . . . 89

24 Possible empty squares . . . 90

25 Top and bottom travels. . . . 102

26 Simplex graph $G_i(M)$ . . . 105

27 $G_1(M)$ and $G_2(M)$ 107

28 Arrangement of pseudolines obtained from Exemple 2. 107

29 $G_i(M)$ when $r = 2$. 111

Références

[Ardila *et al.*, pear] Ardila, F., Fink, A. et Rincon, F. (to appear). Valuations for matroid polytope subdivisions. *Canadian Math. Bulletin*.

[Billera *et al.*, 2009] Billera, L. J., Jia, N. et Reiner, V. (2009). A quasisymmetric function for matroids. *European Journal of Combinatorics*, 30:1727–1757.

[Björner *et al.*, 1999] Björner, A., Las Vergnas, M., Sturmfels, B., White, N. et Ziegler, G. (1999). *Oriented Matroids*, volume 46 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, New York.

[Bonin et De Mier, 2006] Bonin, J. et De Mier, A. (2006). Lattice path matroids : Structural properties. *European Journal of Combinatorics*, 27:701–738.

[Bonin *et al.*, 2003] Bonin, J., De Mier, A. et Noy, M. (2003). Lattice path matroids : Enumerative aspects and tutte polynomials. *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 104:63–94.

[Chatelain, 2010] Chatelain, V. (2010). Lattice oriented matroids. *Discrete Mathematics*, submitted.

[Chatelain et Ramirez Alfonsin, 2010a] Chatelain, V. et Ramirez Alfonsin, J. L. (2010a). Matroid base polytope decomposition. *Advances in Applied Mathematics to appear*.

[Chatelain et Ramirez Alfonsin, 2010b] Chatelain, V. et Ramirez Alfonsin, J. L. (2010b). The switching game on union of oriented matroids. to be submitted.

[Derksen, 2010] Derksen, H. (2010). Symmetric and-quasi-symmetric functions associated to polymatroids. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 30:29–35.

[Edmonds, 1979] Edmonds, J. (1979). Matroids and the greedy algorithm. *Mathematical Programming*, 1:127–136.

[Edmonds, 2003] Edmonds, J. (2003). Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. *Combinatorial optimization Eureka, you shrink !*, 2570:11–26.

[Edmonds et Fulkerson, 1965] Edmonds, J. et Fulkerson, D. R. (1965). Transversals and matroid partition. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 69B:147–153.

[Forge et Ramirez Alfonsin, 2001] Forge, D. et Ramirez Alfonsin, J. L. (2001). On reconstructing arrangements from their sets of simplicies. *Discrete Mathematics*, 226: 175–190.

[Forge et Vieilleribière, 2009] Forge, D. et Vieilleribière, A. (2009). Directed switching games on graphs and matroids. *European Journal of Combinatorics*, 30:1833–1834.

[Gel'fand et Serganova, 1987] Gel'fand, I. M. et Serganova, V. V. (1987). Combinatorial geometries and torus strata on homogeneous compact manifolds. *Russian Mathematical Surveys*, 42:133–168.

[Gel'fand *et al.*, 1987] Gel'fand, I. M., Serganova, V. V., MacPherson, R. et Goresky, M. (1987). Combinatorial geometries convex polyhedra, and schubert cells. *Advances in Mathematics*, 63:301–316.

[Grünbaum, 1971] Grünbaum, B. (1971). Arrangements and spreads. *In CBMS Regional Conference*, numéro 10 de Conference Board of the Mathematical Sciences, University of Oklahoma. National Science Foundation, American Mathematical Society.

[Hacking *et al.*, 2006] Hacking, P., Keel, S. et Tevelev, J. (2006). Compactification of the moduli space of hyperplane arrangements. *Journal of Algebraic Geometry*, 15:657–680.

[Hamidoune et Las Vergnas, 1997a] Hamidoune, O. Y. et Las Vergnas, M. (1997a). Directed switching games ii the arborescence game. *Discrete Mathematics*, 165/166: 395–402.

[Hamidoune et Las Vergnas, 1997b] Hamidoune, O. Y. et Las Vergnas, M. (1997b). Directed switching games ii the arborescence game. *Discrete Mathematics*, 165/166: 395–402.

[Herrmann et Joswig, 2008] Herrmann, S. et Joswig, M. (2008). Splitting polytopes. *Munster Journal of Mathematics*, 1:109–141.

[Kaprano, 1993] Kaprano, M. (1993). Chow quotients of grassmannians i. *Soviet Math.*, 16:29–110.

[Keel et Tevelev, 2004] Keel, S. et Tevelev, J. (2004). Chow quotients of grassmannians ii. *ArXiv :math/0401159*.

[Kim, 2009] Kim, S. (2009). Flag enumerations of matroid base polytopes. *ArXiv :0901.3534v2*.

[Lafforgue, 1999] Lafforgue, L. (1999). Pavages des simplexes, schémas de graphes recollés et compactification des pgln+1 r. /pglr. *Inventiones Mathematicae*, 136:233–271.

[Lafforgue, 2003] Lafforgue, L. (2003). *Chirurgie des grassmanniennes*. CRM Monograph Series.

[Las Vergnas, 1975] Las Vergnas, M. (1975). Sur les extensions principales d'un matroïde. *Acad. Sci. Paris Ser. A*, pages 187–190.

[Las Vergnas, 1978a] Las Vergnas, M. (1978a). Extensions ponctuelles d'une géométrie combinatoire orinetée. *Problèmes combinatoires et Théorie des Graphes (actes coll. Orsay 1976)*, 260:265–270.

[Las Vergnas, 1978b] Las Vergnas, M. (1978b). Extensions pontuelles d'une géométrie combinatoire orientée. *In Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*, pages 265–270. CNRS.

[Lawrence, 1984] Lawrence, J. (1984). Some dual pairs of simple oriented matroids by concatenation. *unpublished (7 pages)*.

[Lawrence et Weinberg, 1981] Lawrence, J. et Weinberg, L. (1981). Unions of oriented matroids. *Linear Algebra and its Applications*, 41:183–200.

[Lehman, 1964] Lehman, A. (1964). A solution to the shannon switching game. *SIAM J.*, 12:687–725.

[Luoto, 2008] Luoto, K. (2008). A matroid-friendly basis for the quasisymmetric functions. *Journal of Combinatorial Theory, Serie A*, 115:777–798.

[Maurer, 1973a] Maurer, S. B. (1973a). Matroid basis graphs l. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, 14:216–240.

[Maurer, 1973b] Maurer, S. B. (1973b). Matroid basis graphs ll. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, 15:121–145.

[Maurer, 1975] Maurer, S. B. (1975). Intervals in matroid basis graphs. *Discrete Mathematics*, 11:147–159.

[Oxley, 1992] Oxley, J. (1992). *Matroid Theory*, volume 3 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, New York.

[Piff et Welsh, 1970] Piff, M. et Welsh, D. (1970). On the vector representation of matroids. *Journal London Mathematical Society*, 2:284–288.

[Speyer, 2008] Speyer, D. (2008). Tropical linear spaces, siam j. disc. math. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 22:1527–1558.

[Speyer, 2009] Speyer, D. (2009). A matroid invariant via k-theory of the grassmannian. *Advances in Mathematics*, 221:882–913.

[Welsh, 1976] Welsh, D. J. A. (1976). *Matroid Theory*, volume 8. London Mathematical Society Monographs.

[White, 1987] White, N. (1987). *Combinatorial Geometries*. Cambridge University Press.

[White, 1992] White, N. (1992). *Matroid Applications*. Cambridge University Press.