



HAL
open science

Proportionnalité et fonction linéaire Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire

Eugène Comin

► **To cite this version:**

Eugène Comin. Proportionnalité et fonction linéaire Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2000. Français. NNT : . tel-00827905

HAL Id: tel-00827905

<https://theses.hal.science/tel-00827905>

Submitted on 29 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2235

THESE

PRESENTÉE À

L'UNIVERSITE BORDEAUX 1

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITE : **Didactique des mathématiques**

par

Eugène COMIN

Proportionnalité et fonction linéaire
Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes
dans la scolarité obligatoire

Thèse soutenue le : 26 octobre 2000

Après avis de
Mme Marianna **BOSCH I CASABÓ**
Mme Marie-Jeanne **PERRIN-GLORIAN**
M. Gérard **SENSEVY** Rapporteurs

Devant la Commission d'examen formée de :

| | | |
|------------------------------------|--|---------------------------|
| | MM | |
| Michel MENDES-FRANCE | Professeur Université Bordeaux 1 | Président |
| Marianna BOSCH I CASABÓ | Professeur Université Ramón Llull | |
| Marie Jeanne PERRIN-GLORIAN | Professeur Université d'Artois | |
| Gérard SENSEVY | Professeur IUFM de Bretagne | |
| Guy BROUSSEAU | Professeur émérite Bordeaux 1 | Directeur de thèse |
| André ROUCHIER | Professeur IUFM d'Aquitaine | |
| André ANTIBI | Maître de conférence Université Paul-Sabatier Toulouse | |

RESUME

En France les concepts de rapport et de proportion ont disparu des programmes du secondaire depuis 1970 où la fonction linéaire est censée reformuler la proportionnalité entre grandeurs. Mais dans la nouvelle organisation des savoirs à enseigner la « fonction linéaire » n'est qu'un exemple banal de relation numérique de telle sorte qu'aujourd'hui les professeurs de tous les niveaux n'ont ni l'usage de la « fonction linéaire » ni celui des « rapports et proportions » pour traiter convenablement les problèmes de l'arithmétique élémentaire.

La recherche d'une articulation logique et fonctionnelle des notions de nombres, de variables et de fonctions pour un processus d'apprentissage à long terme fait apparaître qu'un traitement du milieu des grandeurs par une pratique des rapports, des mesures et de la proportionnalité est incontournable dans la genèse de ces concepts.

Actuellement, l'enseignement obligatoire principalement orienté vers la scolarité future des élèves tend à ignorer les notions qui ont tenu une place importante dans l'organisation des mathématiques encore en usage dans la culture et le monde du travail. L'abandon des concepts de rapport et proportion ne s'est pas accompagné des avancées supplétives escomptées nécessaires autant aux institutions scolaires que sociétales ou professionnelles. Le sentiment d'échec ressenti par la société à la suite de cette « rupture conceptuelle » de l'objet proportionnalité n'a pas de solution pédagogique ou psychologique. Les différentes institutions concernées ont à traiter ce problème par une approche scientifique, technique et politique avec des connaissances de micro didactique mais aussi de macro didactique dont l'ignorance a été probablement une des causes des difficultés engendrées par les réformes successives.

MOTS CLES

Scolarité obligatoire.

Grandeur, mesure, rapport, proportion, nombre, proportionnalité, fonction linéaire.

Situation et milieu, savoirs et connaissances, conception et concept, validation et institutionnalisation, microdidactique et macrodidactique.

REMERCIEMENTS

Je remercie le jury de cette thèse :

Michel Mendès France a accepté de présider la commission d'examen.
Marianna Bosch i Casabò m'a apporté aide et soutien dès les débuts de cette recherche.
Marie Jeanne Perrin-Glorian a manifesté à plusieurs reprises de l'intérêt pour ce que je faisais.
Gérard Sensevy a porté une attention toute particulière à ce travail.
André Rouchier a su m'écouter quand je lui expliquais mes difficultés.
André Antibì a fait part de son expérience.

Je remercie Guy Brousseau sans qui cette thèse ne serait pas. J'ai eu le privilège de travailler avec lui dans un climat de confiance entretenu par Nadine Brousseau à qui je tiens à témoigner toute ma gratitude.

Merci à toute l'équipe pédagogique de l'école Jules Michelet de Talence.
Les enseignants m'ont permis de réaliser la partie expérimentale de cette recherche.
Denise Greslard m'a fait profiter de son expérience.
Marie Hélène Salin m'a encouragé à persévérer dans les moments de doute.

Mireille Tenant a assuré avec patience et diligence un travail de relecture qui a conduit à plusieurs corrections et améliorations du texte.

J'ai beaucoup apprécié la cordialité des personnes que la didactique des mathématiques m'a fait rencontrer et en particulier la sympathie que m'ont témoignée Florence Génestoux, Dominique Woillez et Patrick Gibel.

Je sais gré à tous mes amis d'avoir su m'encourager dans ce travail.

Enfin, je remercie François, Arnaud et Nadine pour leur compréhension et le soutien affectif qu'ils m'ont apporté.

SOMMAIRE

| | |
|---|------------|
| INTRODUCTION | 5 |
| PUBLICATIONS ET TRAVAUX RÉCENTS SUR LA PROPORTIONNALITÉ | 9 |
| PARTIE 1 | 21 |
| LES CONCEPTIONS DES DIFFERENTS PARTENAIREs | 21 |
| 1 - 1 Les conceptions des élèves | 23 |
| 1 - 2 Les conceptions des professeurs. | 26 |
| 1-2-1 L'erreur d'un auteur ou le rapport au savoir de tous | 26 |
| 1-2-2 La préenquête | 31 |
| 1-2-3 Analyse a priori pour la construction du questionnaire | 46 |
| 1-2-4 L'enquête : hypothèses et résultats. | 54 |
| 1 - 3 Rapport entre les connaissances des élèves et celles des professeurs | 89 |
| 1 - 4 Bilan et hypothèses | 90 |
| PARTIE 2 | 93 |
| EVOLUTION DES CONDITIONS D'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE | 93 |
| 2 - 1 Introduction | 95 |
| 2 - 2 Structure mathématique de l'objet proportionnalité. | 96 |
| 2-2-1 Le modèle général | 96 |
| 2-2-2 Classification de différents rapports | 100 |
| 2-2-3 Classification des situations en fonction du milieu de référence | 102 |
| 2 - 3 Les répertoires scolaires de la proportionnalité | 106 |
| 2-3-1 Description des modèles scolaires | 106 |
| 2-3-2 Cadres arithmétique et algébrique | 144 |
| 2-3-3 Conclusions et hypothèses | 149 |
| 2 - 4 Evolution des programmes de collège de 1947 à 1985 | 150 |
| 2-4-1 Introduction et méthodologie | 150 |
| 2-4-2 Etude des programmes | 151 |
| 2-4-3 Conclusions et hypothèse | 162 |
| 2 - 5 Evolution de l'histoire de la proportionnalité | 163 |
| 2-5-1 Introduction | 163 |
| 2-5-2 Evolution des savoirs dans la sphère savante | 163 |
| 2-5-3 Les contraintes de la noosphère. | 168 |
| 2-5-4 Les répercussions sur l'école | 169 |
| 2-5-5 Conclusions et hypothèses | 169 |
| 2 - 6 Les différentes institutions et les répertoires associés | 171 |
| 2-6-1 Méthodologie | 171 |
| 2-6-2 Esquisse d'une étude de l'usage actuel de la proportionnalité | 171 |
| 2-6-3 Les institutions scolaires | 176 |
| 2-6-4 Conclusion et hypothèse | 179 |
| 2 - 7 Bilan et conséquences | 180 |
| SOMMAIRE | 3 |

| | |
|---|------------|
| PARTIE 3 | 181 |
| OBSERVATION D'UN ENSEIGNEMENT : DES GRAINES ET DES SOURIS | 181 |
| 3 – 1 Didactique de la proportionnalité | 183 |
| 3-1-1 Que peut-on enseigner à l'école primaire ? | 183 |
| 3-1-2 Etude des structures | 184 |
| 3-1-3 Méthodologie pour une ingénierie. | 195 |
| 3-1-4 Choix des caractères pour la situation fondamentale | 198 |
| 3-1-5 Les questions posées à l'expérimentation. | 201 |
| 3 - 2 Description du dispositif | 203 |
| 3-2-1 La situation « des graines et des souris » | 203 |
| 3-2-2 Les leçons | 204 |
| 3-2-3 Les questionnaires | 207 |
| 3 - 3 L'expérimentation et les observations | 213 |
| 3-3-1 Lieu et dispositif du travail | 213 |
| 3-3-2 Les organisations successives de 1997 à 1999 | 213 |
| 3-3-3 Les observations successives leçon par leçon | 215 |
| 3-3-4 Conclusions et nouvelles questions | 241 |
| 3 – 4 Les réponses aux deux questionnaires | 242 |
| 3-4-1 Méthodologie | 242 |
| 3-4-2 Résultats statistiques et premiers commentaires | 245 |
| 3-4-3 Evolution des comportements | 252 |
| 3 – 5 Conclusions | 294 |
| PARTIE 4 | 295 |
| LES CONDITIONS DE DIFFUSION DES CONNAISSANCES DE LA PROPORTIONNALITÉ | 297 |
| 4-1 Introduction | 297 |
| 4-1-1 Motivations | 297 |
| 4-1-2 Théories didactiques | 298 |
| 4-2 Les conditions microdidactiques | 300 |
| 4-2-1 Introduction | 300 |
| 4-2-2 La structuration du milieu | 300 |
| 4-2-3 Analyse ascendante et conceptions (genèse épistémique) | 303 |
| 4-2-4 Analyse descendante et concept (construction de situations) | 306 |
| 4-2-5 L'institutionnalisation et ses effets | 309 |
| 4-2-6 Les insuffisances de l'approche par la structuration du milieu ; les limites de la réflexivité. | 321 |
| 4-3 Conditions macrodidactiques | 323 |
| 4-3-1 Introduction | 323 |
| 4-3-2 Les groupements en champs | 323 |
| 4-3-3 Effets de la production mathématique et évolution des répertoires | 326 |
| 4-3-4 Distribution d'une population sur des niveaux de connaissances | 327 |
| 4-3-5 Tension didactique et percolation | 328 |
| CONCLUSION | 331 |

INTRODUCTION

La proportionnalité est une connaissance ancienne qui a joué un rôle moteur dans la construction des mathématiques jusqu'au XVIII^e siècle. Elle est un instrument universel de comparaison, elle décrit une relation de dépendance entre grandeurs avec les rapports. Jusqu'au XVI^e siècle les rapports n'avaient pas le statut d'objets mathématiques indépendamment des grandeurs physiques. A l'origine des mathématiques pythagoriciennes il y avait l'idée que tout est nombre entier de telle sorte que seuls étaient étudiés les rapports de grandeurs exprimables par des quantités. Parallèlement la théorie d'Euclide mettait l'accent sur l'égalité de deux rapports et abandonnait cette décomposition additive des « fractions » en quantités. Les proportions servaient à « numériser » les rapports de grandeurs incommensurables par une description qui permettait de les comparer.

La pratique des proportions reste à la base du travail mathématique jusqu'au XVIII^e siècle. Elle permet de décrire des relations fonctionnelles entre deux grandeurs. En particulier une telle relation est linéaire si les rapports scalaires homologues sont égaux, l'invariance de son coefficient est évoquée par l'écriture de proportions. Les mathématiciens utilisaient la proportionnalité comme moyen d'étendre la notion de fonction ; par exemple l'aire d'un disque est proportionnelle au carré qui a pour côté le diamètre de ce disque. Jusqu'au XVII^e siècle les différentes approches de l'idée de fonction tentent de décrire des covariances de grandeurs. Au XVIII^e siècle Euler renverse l'ordre de la construction des mathématiques pour une présentation proche de celle adoptée aujourd'hui où le concept de fonction est présenté indépendamment des grandeurs.

L'arrivée de l'algèbre au XVI^e siècle transforme le champ des possibilités mathématiques. Elle rend caduque l'usage et le vocabulaire de la proportionnalité sous la forme des proportions. Pourtant dans les siècles qui suivent, la théorie des proportions se précise et s'étoffe de notations spécifiques nouvelles et différentes de celles de l'algèbre : « $a.b::c.d$ » désigne une proportion arithmétique et « $a:b::c:d$ » une proportion géométrique. Au XVIII^e siècle D'Alembert écrit la théorie des rapports et proportions dans l'encyclopédie de Diderot en étayant son exposé de notations algébriques explicatives.

Cette théorie des rapports et proportions est enseignée dans les écoles primaires et secondaires jusqu'en 1970 ; elle contribue à la formation mathématique des futurs instituteurs en donnant un cadre théorique à la « règle de trois » qu'ils ont à enseigner. En effet dans l'enseignement obligatoire l'étude des grandeurs et de la proportionnalité est à la base des différents apprentissages. Mais les élèves connaissent des difficultés avec la « règle de trois » dont l'aspect algorithmique est décrié par la noosphère. Si certains élèves comprennent la structure mathématique des problèmes de proportionnalité avec « la règle de trois », d'autres ne tirent aucun profit d'un apprentissage automatique d'un tel algorithme.

C'est dans ce contexte de doute qu'arrivent les « mathématiques modernes ». Outre l'enthousiasme qu'elles suscitent, elles font naître l'espoir que la « fonction linéaire » va faciliter l'apprentissage de la proportionnalité y compris à l'école primaire où elle est introduite à partir de la notion d'opérateur dès le CM1¹. Mais les structures numériques de la linéarité ignorent les fonctions sociales de la proportionnalité qui reste le prototype du traitement des grandeurs.

¹ CM1 : cours moyen première année de l'école primaire.

La réforme des années soixante-dix exclut des programmes du secondaire l'étude des rapports, des proportions et des grandeurs. Le vide didactique laissé par leur disparition n'est pas comblé par un environnement idoine de la fonction linéaire. La réorganisation moderne des savoirs à enseigner au secondaire fait de l'ensemble des nombres un milieu de référence privilégié au service des structures de telle sorte que la fonction linéaire apparaît dans cet environnement comme une simple relation entre nombres. Or la culture maintient un rapport ancien au concept de proportionnalité par conséquent les vocabulaires perdurent et sont récupérés pour décrire des structures numériques. Mais nous avons relevé dans un ouvrage destiné aux instituteurs et professeurs des écoles un usage inapproprié du vocabulaire de la proportionnalité pour décrire des relations entre nombres qui a été à l'origine de cette recherche.

La proportionnalité a fait l'objet de travaux d'expérimentation en particulier dans le cadre des IREM² mais le nombre d'articles de recherche parus dans les revues spécialisées ne reflète pas l'importance et la place que tient la proportionnalité dans la genèse des savoirs mathématiques élémentaires. Ces recherches ne portent pas sur les difficultés soulevées à tous les niveaux d'enseignement par le changement de genèse suggérée par ces réformes. Un chapitre préliminaire présente une revue des travaux de recherche en psychologie et en éducation à partir des années soixante sur la notion de proportionnalité.

L'étude de l'objet de connaissance « proportionnalité » conduit à décrire la diversité des pratiques suivant les institutions et les époques.

La théorie des situations nous enjoint d'explorer : les connaissances des élèves, les connaissances des professeurs et leurs pratiques, les manuels et exercices qui régulent ces pratiques, l'évolution des différents répertoires scolaires, les programmes et instructions, l'histoire de la proportionnalité.

Mais il n'y a pas de méthode standard. Pour examiner les conceptions des élèves et celles des professeurs il faut analyser les situations qui font fonctionner les connaissances de la proportionnalité en les rapportant à une organisation générale du concept. Pour repérer les variables pertinentes de ces situations il faut regarder les évolutions historiques et didactiques ainsi que les nécessités et contraintes pour la genèse de ce savoir.

Dans la première partie de cette recherche (Les conceptions des différents partenaires) différentes enquêtes apportent des informations sur les connaissances des élèves et des professeurs. Elles révèlent en particulier des usages inappropriés de vocabulaires qui conduisent à une perte de sens allant jusqu'à des confusions dans les concepts de rapport, de proportion, de coefficient de proportionnalité, etc. Le nombre de questions concernées par ces difficultés et la fréquence des erreurs observées montrent qu'il ne s'agit pas d'accidents mais que ces dysfonctionnements sont autant d'indices d'un phénomène didactique plus général et plus profond en rapport avec la disparition de concepts anciens qui entraînent dans l'organisation des connaissances mathématiques à enseigner aux niveaux primaire et secondaire.

Dans la deuxième partie (Evolution des conditions d'enseignement de la proportionnalité) nous tentons d'expliquer certains phénomènes relatifs à l'école et à la société par une étude naïve de l'évolution des connaissances et des institutions. Nous avons soupçonné les programmes de collège d'être en partie responsables des dysfonctionnements observés lors des enquêtes menées auprès des maîtres du primaire car leur formation initiale en mathématique se limite pour beaucoup d'entre eux à ce qu'ils ont

² IREM : institut pour la recherche sur l'enseignement des mathématiques.

appris dans la scolarité obligatoire, c'est à dire principalement au collège. L'analyse des programmes successifs montre une évolution des contenus à enseigner qui va des grandeurs où le concept de rapport coordonne les savoirs élémentaires vers les nombres où cette notion a disparu. Ces changements ont des conséquences sur les pratiques d'enseignement, sur les connaissances des élèves et des professeurs. Pour suppléer à la disparition des rapports et proportions de nouveaux objets spécifiquement didactiques tels que « tableau de proportionnalité » et « suites proportionnelles » font leur apparition. Mais le rapport « algébrique » que les maîtres entretiennent actuellement à la « fonction linéaire » ne leur permet pas de se saisir de ces objets pour un traitement adéquat de la proportionnalité entre grandeurs. Or le milieu privilégié de l'activité mathématique en primaire est celui des grandeurs.

Si les formes nouvelles de connaissances sont moins adaptées que les anciennes à l'enseignement élémentaire, quelles sont les raisons de ces changements curriculaires ?

Pour tenter d'apporter des explications nous avons été conduits à interroger l'histoire de la proportionnalité. L'évolution des savoirs dans la sphère savante a eu des répercussions sur l'école via la noosphère. Les programmes de 1970 ont eu l'ambition de mettre au service de l'enseignement l'organisation moderne et unificatrice des savoirs savants contemporains. Il en est résulté des changements radicaux pour un enseignement des structures en rupture avec l'enseignement classique précédent qui reposait principalement sur l'étude des grandeurs.

Pourquoi ces changements n'ont-ils pas donné satisfaction ?

Pour préciser l'origine des difficultés nous ferons une étude didactique détaillée des structures numériques qui entrent dans les apprentissages à l'école primaire (partie 3). Mais on ne peut pas trouver une explication suffisante dans la seule étude de l'objet de savoir proportionnalité. Les relations que l'école entretient avec les autres institutions scolaires, professionnelles et sociétales expliquent les contraintes contradictoires qu'elle subit. Les enseignants du primaire doivent concilier des exigences scientifiques, culturelles et didactiques. L'évolution des relations entre les différentes institutions sociétales permet d'expliquer les conditions de diffusion des résultats et réorganisations mathématiques dans l'enseignement. Ces conditions ergonomiques viennent se superposer aux nécessités mathématiques et complexifient la recherche d'une articulation fonctionnelle des connaissances pour une heuristique adaptée aux élèves.

La troisième partie (Observation d'un enseignement : des graines et des souris) présente une situation qui a été expérimentée dans des classes de CM1. Nous souhaitons qu'à long terme la fonction linéaire apparaisse comme une abstraction qui résume et réfléchit les relations de proportionnalité entre grandeurs.

Pour comprendre les difficultés rencontrées dans l'enseignement élémentaire et en expliquer les origines nous avons souhaité construire une situation où la proportionnalité alimente une dialectique entre variable, fonction et nombre. Son élaboration a nécessité l'analyse mathématique des objets qui constituent l'environnement de la proportionnalité et qui entrent progressivement dans le répertoire des élèves en suivant une complexité croissante de leur structure. A l'école primaire les élèves apprennent les nombres entiers avant d'aborder les rationnels et les décimaux. Le milieu familier qu'ils peuvent traiter est celui des grandeurs et de leurs mesures. Leur répertoire s'enrichit progressivement de connaissances par une conversion des structures de ce milieu (mesures, rapports) en structures numériques (nombres entiers, décimaux, rationnels). L'apprentissage s'alimente des pratiques sur les rapports pour traiter les grandeurs. La proportionnalité, sous des formes adaptées aux connaissances des élèves joue un rôle fondamental dans la construction de ces objets dès le plus jeune âge.

Pour créer les conditions d'utilisation des techniques de la proportionnalité nous avons choisi de faire appel au sens que les élèves donnent à la notion d'équité. Cette raison est originale

mais la mise en œuvre de la situation peut échouer si l'idée que les élèves se font de la justice ne correspond pas à ce qu'on en attend.

Les observations successives leçon par leçon apportent des informations sur certains phénomènes d'apprentissage en particulier sur le caractère procédural de l'institutionnalisation.

Un questionnaire est proposé avant et après l'expérimentation de cette situation. Il tente d'évaluer les effets de cet enseignement sur les élèves et permet d'étudier les évolutions de leurs conceptions par la mise en œuvre d'une technique d'analyse qui regroupe des situations, des individus et des répertoires.

La quatrième partie (Les conditions de diffusion des connaissances de la proportionnalité) propose différents modèles pour une relecture des trois premières parties.

Les travaux de cette recherche sont principalement étayés par la théorie des situations et il convient de les replacer dans ce cadre pour leur donner une signification et faire apparaître la fonctionnalité des modèles existants mais aussi leurs limites. La « structuration du milieu » a joué un rôle important dans l'élaboration des situations mais aussi dans la lecture des phénomènes observés. L'institutionnalisation apparaît comme un processus complexe qui ne peut pas se réduire à une succession de « phases institutionnalisantes » limitées dans le temps.

L'analyse des savoirs permet d'apporter des solutions locales à leur enseignement mais la proportionnalité est attachée à un fonctionnement de société et les pratiques scolaires sont conditionnées par les rapports que l'école entretient avec les autres institutions sociétales. Une analyse (micro-didactique) de l'objet « proportionnalité » ne suffit pas à rendre compte de la complexité de l'organisation sociale d'une connaissance. La proportionnalité a des aspects différents suivant les institutions qui ne sont pas indépendants. L'étude de cette diversité nécessite une analyse (macro-didactique) des interactions entre les différentes institutions qui conditionnent la diffusion d'une connaissance dans la société.

PUBLICATIONS ET TRAVAUX RECENTS SUR LA PROPORTIONNALITE

La proportionnalité a tenu une place importante en mathématiques et en technologie, dans l'enseignement et la culture. Cette place a évolué brutalement dans une sorte d'indifférence quasi générale, laissant les institutions scolaires et sociétales concernées ignorer les conséquences de ces changements décisifs sur l'organisation des connaissances mathématiques dans l'enseignement et la société.

Les recherches ne donnent pas une image de l'ampleur de cette évolution. Peu de travaux s'intéressent à la question fondamentale de la détermination d'une heuristique des premiers apprentissages des mathématiques. Ils ne s'accompagnent pas d'une reprise systématique des fondements de la proportionnalité pour analyser les différents rôles qu'elle joue dans la construction des savoirs élémentaires : fonctions, variables, grandeurs, nombres, expressions et formules algébriques, ... Il n'y a pas une vision d'ensemble rénovée qui permettrait aux professeurs de la scolarité obligatoire de savoir ce qu'ils ont à enseigner et dans quels buts.

Nous tentons dans ce qui suit de décrire l'évolution des principales recherches concernant la proportionnalité (sans prétendre à l'exhaustivité).

Avant 1980, les chercheurs considèrent la proportionnalité comme un fait connu qui peut apporter des informations sur le développement psychogénétique et cognitif des sujets par leurs réactions face à un problème. Pour cela ils choisissent certains aspects de la proportionnalité qui seraient révélateurs de difficultés ou de comportements et vérifient sur des sujets des différences de réussites ou de pratiques sur des situations particulières.

Dans les travaux de **Jean Piaget** et de ses collaborateurs (Inhelder, Sinclair, ...) : les connaissances de la proportionnalité servent de marqueurs dans l'ontogenèse ; la « maîtrise » du raisonnement proportionnel correspond à une capacité globale qui caractérise le stade des opérations formelles.

Dans les années 1970, plusieurs recherches mettent en cause l'universalité du modèle des stades développé par Piaget avec des résultats parfois contradictoires : réussites précoces ou échecs tardifs. Trois idées se dégagent de ces travaux :

- « Il est possible de décrire des cheminements différents dans l'élaboration de la notion de proportion et non un seul comme le suppose en général la notion de stade avec son critère de l'ordre unique des acquisitions » (Longeot 1972).
- Les différents aspects de la situation et la plus ou moins grande familiarité des élèves avec la tâche à accomplir conditionnent la réussite ou l'échec.
- Les concepts de rapport et de proportion s'acquièrent sur toute la durée de l'adolescence.

Mais si certains chercheurs soulignent qu'il est important dans l'étude du développement cognitif de la proportionnalité de contrôler les difficultés propres à la tâche, les situations construites par Piaget et ses collaborateurs (expériences de la balance, des jetons, des anguilles, ...) restent encore largement utilisées.

Il semble que **Gerald Noelting**¹ (1980) soit un des rares chercheurs à défendre la théorie des stades de Piaget tout en y apportant des précisions et à cet égard son travail est assez représentatif de ces deux périodes. Il attire l'attention d'une part sur le fait que les stades de développement ne peuvent être définis que sur la variabilité d'un même univers de contenu (d'une même situation), d'autre part sur la nécessité d'analyser la complexité des concepts pour adapter leur enseignement au développement psychologique du sujet.

Son article : « Le développement du raisonnement proportionnel et le concept de rapport », comprend deux parties :

Dans la partie 1, « La différenciation des stades », il étudie le développement du raisonnement proportionnel sur un échantillon de 321 sujets allant de 6 à 16 ans. Il leur soumet 25 items où il demande de comparer la concentration en jus d'orange de différentes boissons obtenues en mélangeant des verres d'orange à des verres d'eau. Les fréquences de réussites aux différents items conduisent à une classification en 3 stades (notés I, II, III) qui suit le développement chronologique décrit par Piaget et qui distingue le niveau intuitif ou préopérateur, le niveau des opérations concrètes, le niveau des opérations formelles et aussi des sous stades (IA, IB, IC, IIA, IIB, IIIA, IIIB).

Gerald Noelting attire l'attention sur le fait que ces stades ne peuvent être constatés qu'en faisant varier la complexité d'une même situation. Les stades sont alors marqués par la structure mathématique du problème traité et par les stratégies de résolution utilisées.

Dans la partie 2, « La structure du problème aux stades successifs ; les stratégies de résolution et le mécanisme d'une « restructuration adaptative » », Gerald Noelting analyse les structures mathématiques impliquées et les stratégies utilisées à chaque stade, puis les mécanismes cognitifs qui permettent le passage d'un stade au suivant.

Un premier traitement des résultats conduit à classer les stratégies de résolution en deux catégories :

- Celles qui utilisent le rapport externe et qui vont progressivement conduire à un calcul de « pourcentage » ou de « quantité à l'unité ».
- Celles qui utilisent le rapport interne (scalaire) et qui mènent à « l'algorithme du dénominateur commun ».

L'analyse des structures mathématiques de chaque item fait apparaître que leur complexité croît avec la succession des stades.

Un deuxième traitement des résultats fait apparaître que les phases d'équilibration (centration, assimilation, différenciation) décrites par Piaget sont, en fait, des stades distincts définis par les structures correspondantes.

Gerald Noelting distingue deux périodes dans l'évolution du raisonnement proportionnel.

La première période contient les stades IA, IB, IC, IIA. Les stratégies utilisées contribuent à la construction du concept de rapport comme classe d'équivalence de couples d'entiers.

La deuxième période correspond aux stades IIA, IIB, IIIA, IIIB. L'usage combiné de l'addition et de la multiplication conduit à « l'algorithme du dénominateur commun ».

Enfin, le processus de « restructuration adaptative », décrit par Gerald Noelting, présente une double dimension du développement cognitif :

- L'une quantitative correspond à une adaptation par « assimilation et accommodation » au sein d'une phase.

¹ Gerald NOELTING ; 1980 ; The development of proportional reasoning and the ration concept ; Part I – Differentiation of stages ; Part II – Problem-structure at successive stages ; problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring ; Educational Studies in Mathematics.

- L'autre qualitative correspond à une adaptation par « différentiation et intégration » pour changer de phase.

A partir des années 1980, les recherches prennent davantage en compte les apprentissages scolaires des sujets.

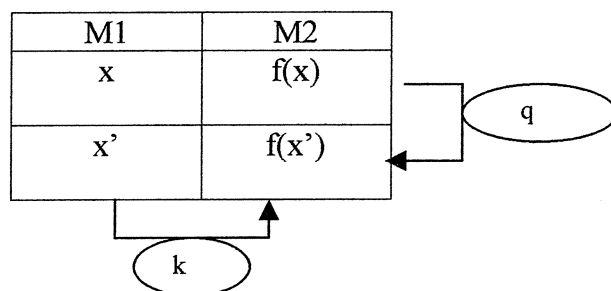
Gérard Vergnaud s'intéresse aux aspects plus spécifiquement mathématiques de l'enseignement de la proportionnalité, aux connaissances qu'il met en œuvre et aux erreurs qu'il engendre.

Ses travaux, en rupture avec l'étude des stades, présentent un double intérêt :

- Une classification systématique des problèmes multiplicatifs qui porte sur leur structure mathématique.
- Un regroupement en champs conceptuels des situations et des concepts.

La structure de proportion simple décrit une relation quaternaire ; pour Gérard Vergnaud elle est constitutive du champ de la multiplication. Voici ce qu'il écrit : « Il n'est pas superflu de remarquer que l'analyse des structures multiplicatives est profondément différente de celle des structures additives. Les relations de base les plus simples ne sont pas ternaires mais quaternaires parce que les problèmes les plus simples de multiplication et de division impliquent la proportion simple de deux variables l'une par rapport à l'autre. ».

Cette proportion simple met en jeu quatre quantités appartenant à deux espaces de mesures différents :



Pour résoudre les problèmes, les élèves peuvent utiliser un rapport scalaire (q) ou un rapport fonctionnel (k).

La relation de proportionnalité simple permet de générer quatre classes de problèmes :

| | |
|---|---|
| 1 | a |
| b | □ |

Multiplication

| | |
|---|---|
| 1 | □ |
| b | c |

Division partition

| | |
|---|---|
| 1 | a |
| □ | c |

Division quotient

| | |
|---|---|
| a | b |
| c | □ |

Quatrième proportionnelle

De plus, ces problèmes présentent des difficultés très inégales selon les valeurs numériques impliquées et selon le domaine d'expérience auquel ils font référence.

Les structures de proportion composée et de proportion multiple (en particulier produit de mesures) génèrent d'autres classes de problèmes.

Enfin, l'analyse dimensionnelle permet d'interpréter certains problèmes de type « isomorphisme de mesures » en terme de « produit de mesures » et inversement.

Mais un concept ne prend pas sa signification dans une seule situation et une situation met en œuvre simultanément et de manière composite plusieurs concepts. C'est pourquoi Gérard Vergnaud dit : « Il faut se donner comme objet de recherche des ensembles relativement larges de situations et de concepts, en classant les types de relations, les classes de problèmes, les schèmes de traitement, les représentations langagières et symboliques et les concepts mathématiques qui organisent cet ensemble ». D'où l'idée de regrouper ces différents objets en champs conceptuels : « Le champ conceptuel des structures multiplicatives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n linéaire, rapport scalaire direct et inverse, quotient et produit de dimensions, combinaison linéaire et application linéaire, fraction, rapport, nombre rationnel, multiple et diviseur, etc. » (Gérard Vergnaud, la théorie des champs conceptuels).

Jean Pierre Levain a travaillé sous la direction de Gérard Vergnaud ; son travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des champs conceptuels.

Dans la première partie de son ouvrage, « Faire des maths autrement » (1997), il fait le point sur les travaux en psychologie cognitive centrés sur la proportionnalité. Cette synthèse riche en situations et références bibliographiques est une aide considérable pour comprendre l'évolution des travaux de recherche sur la proportionnalité.

Dans la deuxième partie, il évalue les compétences des élèves de CM2 avec 35 problèmes construits à partir de la classification de Gérard Vergnaud. L'analyse des réussites ne fait pas apparaître de différence entre les problèmes qui nécessitent une multiplication et ceux qui nécessitent une division ; par contre, les élèves éprouvent des difficultés pour passer des problèmes qui nécessitent une seule opération à ceux qui nécessitent deux opérations.

Dans les chapitres suivants, Jean Pierre Levain prend en compte trois aspects :

- L'introduction d'une perspective génétique sur une large période de temps.
- L'utilisation complémentaire des approches clinique et expérimentale.
- L'utilisation de nouvelles tâches plus adaptées à l'étude de la construction progressive des concepts de rapport et de proportion.

Il y a une double nouveauté par rapport aux travaux décrits précédemment.

Jean Piaget et ses collaborateurs cherchaient à recueillir des données qualitatives à partir d'observations de sujets individuels, sans se soucier d'une validation statistique des résultats. Les regroupements en champs conceptuels de Gérard Vergnaud résultent principalement de l'analyse des structures mathématiques.

Dans son travail Jean Pierre Levain recherche des « profils cognitifs » en termes de groupes d'individus avec une analyse statistique des données. Une analyse clinique sous forme de dialogue entre l'examineur et le sujet vient en complément de l'analyse factorielle des correspondances pour tenter d'expliquer la constitution de certains de ces groupes.

Dans la partie 4, Jean Pierre Levain limite son champ d'expérimentation aux problèmes d'agrandissement et d'échelle². Il soumet 19 problèmes à 225 élèves (âgés de 11 à 15 ans) des classes de CM2, 6^e, 5^e, 4^e et 3^e.

L'analyse des données discrimine 5 groupes d'élèves suivant trois axes : « réussite-échec », « agrandissement-échelle », « plus ou moins grande familiarité avec le problème ».

Les conclusions de ces analyses sont les suivantes :

- L'usage du rapport externe contribue à la réussite dans les 3 groupes qui ont la plus forte fréquence de réussite.
- Il y a un écart important de réussite entre les problèmes d'agrandissement et les problèmes d'échelle.
- L'utilisation du rapport externe ou interne dépend plus de la tâche que des particularités cognitives du sujet.
- La maîtrise des problèmes d'agrandissement dépend pour une bonne part du développement psychologique du sujet alors que l'acquisition du concept de rapport est plus indépendante de cette maturation. Elle se fait précocement (dès le CM) et dépend davantage de l'acquisition scolaire.

Ce dernier résultat plaide pour un travail précoce pour l'acquisition des concepts de rapport et de nombres rationnels.

Au dernier chapitre, l'analyse clinique confirme les résultats issus du questionnaire et appelle quelques remarques supplémentaires :

- La conceptualisation que développent les élèves dépend assez largement des situations qui leurs sont proposées.
- Les élèves en difficultés ne considèrent pas vraiment les mathématiques comme des outils de compréhension et d'analyse du réel, mais plutôt comme un monde clos disposant de ses propres règles.
- Une conceptualisation spécifique de l'échelle semble différencier les « bons élèves » de ceux qui sont en difficultés. Le concept de rapport devient un outil de pensée bien avant de pouvoir être objectivé en terme d'échelle. L'échelle n'apparaît pas d'emblée comme un nombre.

Les travaux d'**André Rouchier** se situent dans la continuité de ceux de Gérard Vergnaud.

Il a travaillé en collaboration avec G. Vergnaud, G. Ricco, P. Marthe, R. Metregiste, A. Viala, E. Pilar-Grossi, G. Giacobbe à la création de situations didactiques qui font intervenir la proportionnalité.

Dans son article, « Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs ; 1980 ; RDM vol 1-2 », il attire l'attention sur la « pluridimensionnalité conceptuelle » de la proportionnalité : aspects numériques, dimensions des grandeurs, aspects fonctionnels. Les situations organisent l'activité du sujet en donnant une signification à ces différents objets de connaissance. Par exemple, le travail sur les grandeurs donne du sens aux nombres par les différentes fonctions qu'ils jouent dans la résolution des problèmes d'arithmétique classique : mesure, opérateur, rapport, produit.

² Un travail d'Antoine Bodin (« Les échelles » ; petit x n° 20 pp 35 à 49 ; 1989) dans le cadre des IREM attire l'attention sur la diversité des représentations du concept d'échelle en classe de cinquième en mathématiques et dans d'autres disciplines. Ces représentations sont prises en considération dans le travail de Jean Pierre Levain.

Les procédures de résolution des élèves sont étudiées dans trois situations-problèmes : « La ferme », « Les trains », « Les engrenages ». Elles mettent en évidence « des modèles du comportement (versant pratique) et des modèles des conceptions de l'élève relativement aux relations et concepts en cause (versant théorique) ».

Ces trois situations d'enseignement montrent qu'il est possible de créer « les conditions d'un début de théorisation en respectant la richesse d'aspects des situations et des concepts ». Elles sont des exemples d'approche « constructiviste » comme alternative aux conceptions « structuraliste » et « empirico-sensualiste ».

L'auteur rappelle que, d'une part le sens a une dimension sociale et historique, d'autre part qu'il est le produit de l'activité du sujet. Il termine son article en évoquant la nécessité « d'approfondir l'étude de l'évolution des conceptions des élèves par des études comparatives ».

Claire Dupuis et François Pluinage dans leur article, « La proportionnalité et son utilisation » (1981), s'intéressent à l'évolution de l'enseignement de la proportionnalité et distinguent trois périodes :

1. La « règle de trois » des « mathématiques traditionnelles »
2. Les fonctions linéaires des « mathématiques modernes »
3. Les tableaux de proportionnalité des « mathématiques concrètes ».

Une « analyse sommaire » les conduit à des conclusions un peu hâtives voire caricaturales. La règle de trois est présentée comme le « dressage correspondant au respect de certains rites après l'acquisition des quatre opérations ». La fonction linéaire est réduite à une relation $y=ax$ comme si la linéarité allait de soi. Le rôle du tableau de proportionnalité est limité à une présentation de suites proportionnelles finies qui facilite l'utilisation d'opérateurs et la formation d'équations algébriques.

Cette tentative d'analyse des différents choix didactiques successifs ne donne pas lieu à l'étude des variables didactiques qui conditionnent l'enseignement de la proportionnalité et des conceptions qui entrent dans les curriculums. Elle appelle une mise en perspective rapide³ des occasions de voir la proportionnalité dans la scolarité obligatoire.

1) Proportionnalité

A l'école élémentaire la multiplication (ou la division) est présentée aux élèves comme une opération :

- Sur des collections : pour énumérer une collection, les élèves comptent les classes équipotentes.
- Sur des nombres : la multiplication résume des additions répétées sous forme d'algorithme.
- Dans les problèmes : c'est une opération entre grandeurs. Les élèves travaillent explicitement sur une relation de la forme $a \times b = c$ (les nombres sont des mesures de grandeurs ou des opérateurs), mais implicitement cette égalité a sa source dans une relation entre grandeurs variables ($A \times b = C$).

Donc comprendre l'usage courant de la multiplication et de la division conduit à manipuler implicitement la proportionnalité entre grandeurs. Cette approche (implicite) de la

³ Une étude systématique est faite au fur et à mesure des besoins suscités par l'avancement de la thèse.

proportionnalité prend progressivement de la consistance dans les problèmes qui nécessitent un calcul en deux temps. Les élèves doivent anticiper et organiser deux opérations dans un ordre séquentiel (par exemple : division puis multiplication dans la méthode de réduction à l'unité). Ce calcul en deux temps peut présenter au moins deux obstacles⁴ :

- Le résultat intermédiaire n'est pas exprimable : grandeur non identifiée.
- Le résultat intermédiaire n'est pas calculable : nombre (scalaire ou mesure) non entier ou non décimal.

Les difficultés de calculabilité et d'intelligibilité conduisent à globaliser les deux calculs en « un temps » sous forme d'algorithme appelé « règle de trois ». On annonce les opérations dans l'ordre qui les rend intelligibles mais la présentation de l'algorithme permet d'envisager l'ordre opératoire qui rend les calculs possibles ou les facilite indépendamment du sens. En découplant raisonnement et ordre de calcul, la « règle de trois » permet aux élèves de travailler et de passer les difficultés inhérentes à la division tant qu'ils ne disposent pas des rationnels. Mais la « règle de trois » n'est qu'une réponse provisoire, la solution idoine et définitive passe par la création de nouveaux objets mathématiques (rapport, quotient, pourcentage, ...) que les élèves construisent progressivement dans des situations réflexives en attribuant des noms spécifiques aux grandeurs dérivées : vitesse, densité, ... et qui permettent de lire les rapports comme des nombres. Quand les élèves disposent des structures numériques convenables ils peuvent faire coïncider les calculs et le raisonnement ; la « règle de trois » perd de son intérêt didactique. Le nouvel objet d'étude est la proportionnalité en tant que relation entre grandeurs.

2) Fonction linéaire

La connaissance des structures numériques fait de l'algèbre une alternative à l'arithmétique mais l'usage de la fonction linéaire sur des mesures nécessite la reconnaissance directe d'une relation de proportionnalité entre grandeurs. Dans l'égalité $y = ax$ le rapport fonctionnel « a » perd sa dimension de grandeur dérivée, les lettres x et y désignent en même temps les grandeurs et leurs mesures ce qui rend difficile la gestion des unités.

3) Tableaux de proportionnalité.

Les tableaux de proportionnalité permettent de renvoyer les grandeurs avec leurs unités en tête de listes. En marge peuvent figurer différentes informations : les rapports scalaires sont des opérateurs sans mesure, les rapports fonctionnels accompagnés d'unités mesurent les grandeurs dérivées. Les tableaux ainsi « habillés » décrivent à la fois la relation fonctionnelle $Y=aX$ entre les grandeurs et la relation $y=ax$ entre leurs mesures.

Dans l'analyse du début de cet ouvrage les auteurs n'ont pas pris en considération les raisons didactiques de ces organisations successives.

Ils situent la suite de leur travail en continuité de deux recherches : celle de Gérald Noelting et celle de Gérard Vergnaud et André Rouchier.

⁴ Dans « Représentation et didactique du sens de la division » (1987) Guy Brousseau fait une classification des problèmes de division en fonction de la nature du diviseur et du quotient. Le taux de réussite est le plus faible dans le cas où diviseur et quotient sont compris entre 0 et 1.

Les élèves créent eux-mêmes des catégories de problèmes suivant des critères de plausibilité, de nature des nombres, de précision, d'intelligibilité.

Une enquête auprès d'élèves de cinquième des collèges (14 classes de 5^e) a pour objet d'évaluer l'influence des énoncés de problèmes et de la nature des nombres sur les procédures de résolution des élèves.

L'analyse statistique des résultats (analyse factorielle des correspondances) conduit aux conclusions suivantes :

- Les contraintes imposées par l'énoncé ont une influence sur le comportement des élèves, en particulier, la présence ou non d'un quotient fait varier le taux de réussite. Plus généralement, c'est la structure mathématique du problème qui est déterminante dans la réussite ou l'échec.
- Le contexte (géographie ou physique) n'a pas d'influence significative.
- L'hétérogénéité entre classes pourrait résulter de la diversité des enseignements ; les professeurs pouvant opter pour un apprentissage conforme à l'une des trois périodes. En particulier, le recours ou non au tableau semble discriminer les classes.

En conclusion, ce travail fait un constat sur l'enseignement de la proportionnalité mais ne propose pas d'alternative qui s'inscrirait dans un curriculum scolaire qui prendrait en considération les résultats de l'enquête.

L'ouvrage « La proportionnalité et ses problèmes » s'adresse aux enseignants de mathématiques et aux formateurs. Il ne présente pas une étude systématique dans un cadre théorique ; les auteurs (**Danièle Boisnard, Jean Houdebine, Jean Julo, Marie-Paule Kerboeuf, Maryvonne Merri**) soulignent que « ce livre ne se veut aucunement un travail scientifique exhaustif sur le sujet ». Ils souhaitent seulement apporter des éléments pratiques concernant les situations d'enseignement qu'ils proposent⁵. Les phénomènes relatés ne sont pas validés par des résultats statistiques.

La première partie est consacrée à un rappel historique très bref et à une description très succincte de l'évolution de cette notion dans l'enseignement. Les auteurs présentent la règle de trois comme un outil prototypique d'avant 1948, puis rappellent que le souci de « mathématiser » la proportionnalité est antérieur aux « mathématiques modernes ».

Une revue très rapide des programmes ne permet pas d'expliquer « le malaise des professeurs de mathématiques » qui est évoqué.

Dans la deuxième partie, les auteurs décrivent les procédures de résolution des élèves. Ils attirent l'attention sur le rôle des grandeurs. Ils classent les procédures en deux types : celles de type scalaire et celles de type fonction⁶. La classification des problèmes est celle de Gérard

⁵La COPREM (Commission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques créée en 1981 par le Ministère de l'Education Nationale) a édité en 1986 un article en direction des enseignants de l'enseignement obligatoire intitulé « L'enseignement de et autour de la proportionnalité » qui donne de nombreux conseils sur l'enseignement de différents objets qui font l'environnement de la proportionnalité du cours élémentaire à la classe de troisième.

⁶Dans son article « Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une étude de formulation » Sidi-Bekaye Sokona (1989) propose une situation de communication à deux classes de 3^e et une classe de 6^e qui est supposée conduire les élèves à passer des procédures analogiques aux procédures analytiques par un effet rétroactif ; mais les résultats de l'expérimentation ne sont pas significatifs.

Dans sa thèse : « Etude de l'influence des variables *indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données* sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans. » (1991), Sophie Ren de Cotret montre que la présence d'un troisième couple conduit les élèves à privilégier une procédure de type fonction ; de plus, ce troisième couple les aide à valider ou invalider leurs procédures.

Vergnaud. Ils expliquent que le modèle mathématique ne peut pas être source de méthodes mais qu'il permet de passer de « l'outil » à « l'objet de connaissance ».

La dernière partie est un recueil de conseils en direction des enseignants sur le choix des problèmes, sur les aides à apporter aux élèves, sur la nécessité d'agir sur les variables d'une même situation pour induire différentes procédures, sur la nécessité d'une institutionnalisation progressive.

En résumé cet ouvrage s'adresse aux professeurs à qui les auteurs proposent un « enseignement par les problèmes ». Plusieurs exemples étudiés dans les recherches sont repris et quelques résultats sont évoqués. L'intérêt de ce travail réside principalement dans la variété des nombreux problèmes proposés et dans les explications et conseils élaborés en direction des enseignants.

L'œuvre de **Nadine et Guy Brousseau**, « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire ; 1987 », est une reprise systématique des fondements des mathématiques à enseigner dans la scolarité obligatoire. La proportionnalité n'y est pas étudiée pour elle-même ; ses techniques spécifiques sont utilisées implicitement comme moyen d'action dans l'élaboration des nombres, puis progressivement explicitées en fonction des nécessités des différentes constructions : rationnels, similitudes, applications linéaires, ...

Dans les travaux précédemment évoqués, la proportionnalité était étudiée dans sa généralité et les domaines numériques étaient les lieux de son application. Or nous avons vu que la multiplication a des sens différents suivant qu'elle est utilisée pour énumérer des collections ou pour multiplier des rationnels ; la multiplication par un entier est une répétition d'additions alors que la multiplication dans les rationnels a sa source implicite dans une relation de proportionnalité.

Dans « rationnels et décimaux » la notion de rapport, avec ses acceptions différentes (scalaire, opérateur, mesure, application), est l'instrument privilégié pour articuler les enseignements précédemment évoqués.

Dans cette étude d'épistémologie expérimentale, Guy Brousseau a choisi d'introduire les rationnels avant les décimaux pour diverses raisons qui tiennent souvent aux limitations algébriques et topologiques de \mathbb{D} . Il écrit : « Par exemple, il nous paraît difficile de concevoir que la notion de rapport puisse être directement approchée par les rapports décimaux ». Or, le concept de « ratio » prend sa pleine signification et justification existentielle dans le rapport externe (le tant pour tant) où il ne peut pas être réduit à un fractionnement de grandeur tant que la grandeur dérivée correspondante n'est pas culturellement ou institutionnellement reconnue. La construction des rationnels (et des décimaux) qui s'en déduit suit le modèle « moderne » des classes d'équivalence. La progression des situations est contrôlée principalement par trois variables didactiques : la nature des nombres (\mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{D}), la fonction des rapports (scalaires, mesures, applications), le statut des connaissances mises en œuvre (implicites, explicites, formelles). La proportionnalité est un modèle implicite pour l'action ; elle n'est jamais formalisée en tant qu'objet de savoir.

Dans la première étape, les mesures entières sont explicitées ; les rapports scalaires naturels fonctionnent comme des connaissances implicites pour l'action, puis ils sont explicités pour expliquer et justifier ; les applications restent implicites.

La situation de « l'épaisseur d'une feuille de papier » est mise en œuvre pour que les couples (nombre de feuilles, épaisseur du tas en millimètres) soient considérés d'emblée comme des instruments de mesure (de l'épaisseur d'une feuille). La fonctionnalité de la proportionnalité réduite aux multiples et sous multiples de mesures entières permet, par un usage fréquent et souple de ses propriétés, d'introduire les « rationnels » en tant que classes d'équivalence. La conservation des rapports apparaît comme un instrument de gestion, de compréhension et d'explication.

La difficulté consiste ensuite à identifier ces rapports (ces couples) à des nombres car ces rapports ne servent pas à compter ; pourtant ils permettent de mesurer une grandeur : l'épaisseur d'une feuille. La proportionnalité est un convertisseur du couple vers le nombre mesure. Cette approche de la mesure des grandeurs continues par le rapport externe met à distance la possibilité pour les élèves d'avoir recours aux mesures naturelles par un changement opportun d'unités.

Dans la deuxième étape les mesures sont désignées par des fractions. La proportionnalité autorise différentes écritures des rationnels qui permettent aux élèves de faire des opérations sur ces rationnels : somme de mesures, multiplication et division d'une mesure par un entier.

Les mesures fractionnaires sont ensuite étendues à d'autres grandeurs : poids, capacités et longueurs.

Après avoir effectué des opérations sur des mesures rationnelles, les élèves doivent les comparer, faire des encadrements et des approximations par des décimaux. Ces comparaisons de mesures rationnelles mettent en scène des éléments des proportions.

Ces différentes activités donnent une double dimension sémantique aux rationnels : algébrique et topologique.

L'étape suivante consiste à « définir » les applications linéaires par leur rapport externe.

Avec le « puzzle » le rapport externe met en relation deux grandeurs de même nature. Les élèves doivent conserver ce rapport qui fonctionne comme modèle implicite de fonction. Ils manipulent des mesures (entières, fractionnaires, décimales) avec des rapports scalaires entiers.

Pour que les opérations sur les fonctions linéaires aient du sens il est utile qu'elles soient issues d'un univers homogène. Les différents agrandissements et rapetissements de « l'optimist » sont des applications linéaires repérées et désignées par la mesure agrandie ou réduite de l'unité (l'image de 1) ; ce qui permet de les comparer. Avec ces applications linéaires, la multiplication par une fraction (le rapport externe) donne un sens nouveau à la multiplication qui peut produire non seulement un agrandissement (comme avec les entiers), mais aussi une réduction.

La dernière étape consiste à travailler les différents sens de la division en prenant de la distance par rapport à la division euclidienne déjà pratiquée par les élèves. La division d'un « rationnel mesure » par un « rationnel application » permet d'identifier la division par un nombre à la multiplication par son inverse. La composition d'applications linéaires introduit une nouvelle représentation de la multiplication des rationnels et donc un sens nouveau pour la division.

L'unification de ces différentes approches de la division (partager, trouver le terme inconnu d'un produit, trouver le coefficient d'une application linéaire, trouver le rapport de deux nombres, approcher une fraction par un décimal, déterminer l'application réciproque d'une fonction linéaire, décomposer une application linéaire) nécessite de nombreuses activités qui font intervenir la proportionnalité.

En conclusion, cette revue extrêmement succincte de l'œuvre « Rationnels et décimaux » montre que la connaissance de la proportionnalité ne peut pas être contenue dans sa définition quand on prend en considération la genèse des connaissances mathématiques élémentaires. Tant que les élèves ne disposent que des naturels, le travail sur les mesures les conduit à considérer des rapports et des proportions. Ainsi, les pratiques scolaires rendent incontournable l'usage des connaissances de la proportionnalité sous des formes qui dépendent des situations envisagées.

La thèse de **Marianna Bosch i Casabò** (1994), « La dimensión ostensiva en la actividad matemática ; el caso de la proporcionalidad », se situe dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. La proportionnalité y est autant prétexte à l'analyse de la dialectique « ostensifs / non ostensifs » dans la genèse des savoirs mathématiques qu'objet d'étude. Les ostensifs sont les objets qui présentent une réalité perceptible (gestes, sons, graphismes, ...) et une certaine matérialité que les sujets manipulent pour évoquer les non-ostensifs que sont les objets de pensée (idées, concepts, ...). En conséquence, les objets ostensifs possèdent une double valence : instrumentale et sémiotique.

L'auteur explique aussi que la rencontre des pratiques algébriques (essentiellement écrites) et des pratiques de l'arithmétique traditionnelle (essentiellement orales) donne lieu à un travail régi par une syntaxe « hybride » qui s'accompagne d'une sémantique et d'une pratique incertaines.

Les différentes thèses développées dans cet ouvrage sont étayées par l'étude de quelques constructions prises dans des manuels et par l'analyse de microgenèses produites par plusieurs sujets à qui l'auteur soumet cinq exercices de proportionnalité multiple.

Le premier exemple de construction est pris dans le manuel, « P. Chenevier ; 1926 ; Précis d'arithmétique » ; il illustre le rôle des objets ostensifs dans l'élaboration d'un univers mathématique local : celui des fractions. C'est cet univers qui sert d'étayage à la construction des rapports et proportions relevée dans un autre ouvrage typique de l'organisation classique de l'arithmétique : « J. Dalmau ; 1938 ; Aritmética Razonada y nociones de Algebra ». Marianna Bosch i Casabò montre comment l'auteur de ce manuel paraphrase l'univers mathématique déjà construit pour différencier progressivement les rapports des fractions et définir les proportions qui instrumentalisent ces rapports. La notion culturelle de rapport apparaît comme une source de laquelle on extrait, par un jeu dialectique entre ostensifs et non-ostensifs, un univers d'objets et de relations qui constituent une sorte d'algèbre des proportions. Cette organisation pourrait rivaliser avec l'algèbre élémentaire mais l'enseignement réduit sa niche écologique aux situations de proportionnalité. Remarquons que cette construction prend appui sur un préconstruit numérique auquel le raisonnement proportionnel a déjà apporté sa contribution.

Dans cette même partie de la thèse, Marianna Bosch i Casabò décrit (avec le langage algébrique des fonctions) différentes modélisations des relations de proportionnalité. Le travail sur les « équations proportionnelles ($a : b : : c : d$) » nécessite le recours à la théorie des rapports et proportions et donne naissance à une technique classique que l'auteur appelle « Méthode des Proportions Classique ». Les manuels étudiés présentent la méthode de réduction à l'unité comme une version simplifiée de cette technique. Remarquons que ce raccourci nie les raisons et les conditions de la genèse de cette technique.

Marianna Bosch i Casabò attire l'attention sur un phénomène « d'opacification » des techniques dû au recours à la modélisation algébrique moderne et note que : « Deux univers se côtoient sans se rencontrer réellement ». Par exemple, pour maintenir intact l'univers de la

proportionnalité, les égalités de la forme $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ sont considérées et manipulées comme des proportions et non comme des égalités de fractions ou des équations du premier degré. Enfin le traitement de la proportionnalité multiple fait apparaître des limites technologiques de l'organisation classique. Le recours à la notion de fonction peut y remédier facilement mais les ostensifs qui lui sont propres cohabitent avec les « vestiges » de l'organisation classique, ce qui contribue à « l'opacification » déjà dénoncée.

La suite de la thèse est consacrée à l'étude de microgenèses fournies par des sujets et à leur exploration clinique.

Cinq problèmes de proportionnalité multiple ont été soumis à trois professeurs de mathématiques d'universités. L'analyse des solutions proposées fait apparaître que l'effort pour penser le système étudié se réalise moyennant la manipulation d'ostensifs qu'une succession d'événements dans le travail du sujet peut faire changer.

Les 3 productions étudiées montrent une diversité de techniques et des difficultés dans la formulation pour communiquer et expliquer ces techniques qui résultent du choix du modèle.

Un des sujets se place d'emblée à un niveau d'abstraction où le modèle proposé sous forme d'équation algébrique est supposé expliquer la situation. Un autre appuie sa technologie sur le système étudié lui-même puis change la présentation des solutions en remplaçant les valeurs numériques par des lettres, il s'ensuit une grande confusion dans le traitement des variables, des difficultés d'interprétation du système et des justifications obscures. Le choix du troisième sujet le conduit à un traitement « amalgamé » des variables qu'il ne peut pas contrôler sémantiquement dès lors que les produits des grandeurs ne sont pas reconnus culturellement ; il s'ensuit un bricolage ostensif dans lequel interfèrent discours et formalisme littéral, avec de nombreuses ambiguïtés syntaxiques et sémantiques.

L'expérience est renouvelée auprès d'un échantillon plus important (40 sujets) et hétérogène (professeurs, étudiants universitaires) afin de valider, par une analyse clinique du corpus recueilli, la représentativité des trois exemples précédemment étudiés.

Marianna Bosch i Casabò classe les réponses suivant un système défini par deux axes : le premier va des modèles « purement mathématiques » (algébriques) aux modèles qui se distinguent peu du système étudié ; le deuxième oppose les techniques qui réalisent un traitement séparé des variables aux techniques basées sur « l'amalgame » (les produits) des variables.

Cet important travail d'analyse clinique fait apparaître des difficultés liées à l'inadaptation des ostensifs et non-ostensifs arithmétiques et algébriques aux problèmes proposés. Les techniques de l'arithmétique souffrent de l'absence d'une « algèbre des grandeurs » et les techniques fondées sur la modélisation algébrique ne permettent pas de justifier l'adéquation du modèle au système étudié.

En conclusion Marianna Bosch i Casabò a identifié le problème général du traitement des grandeurs et de leurs mesures. Les sujets soumis à l'expérimentation ont tous pratiqué l'algèbre, donc les difficultés qu'ils ont à mettre en œuvre des solutions algébriques sont significatives d'une inadaptation. L'algèbre que l'on enseigne aujourd'hui « écrase » les autres modélisations mathématiques mais ne permet pas de traiter les problèmes concrets de l'arithmétique élémentaire de manière claire, simple et souple.

Les dysfonctionnements mis à jour par Marianna Bosch i Casabò, dans sa thèse, sont, en partie, à l'origine de notre travail de recherche où nous reprenons l'idée de l'importance de l'étude des grandeurs dans l'enseignement.

PARTIE 1

LES CONCEPTIONS DES DIFFERENTS PARTENAIRES

| | |
|---|-----------|
| 1 - 1 Les conceptions des élèves | 23 |
| 1 - 2 Les conceptions des professeurs. | 26 |
| 1-2-1 L'erreur d'un auteur ou le rapport au savoir de tous | 26 |
| Le concours de Professeurs des Ecoles de Bordeaux de 1995. | 26 |
| 1-2-2 La préenquête (juin 1996) | 31 |
| Objet de l'enquête | 31 |
| Présentation du questionnaire | 32 |
| Analyse des réponses | 32 |
| Analyses de données | 39 |
| 1) Connaissances, conceptions et pratiques. | 39 |
| 2) Savoirs déclarés et savoirs à enseigner. | 42 |
| Résumé et conséquences | 44 |
| 1-2-3 Analyse a priori pour la construction du questionnaire | 46 |
| Description des savoirs et connaissances scolaires | 46 |
| Les questions et conjectures | 51 |
| 1-2-4 L'enquête : hypothèses et résultats. | 54 |
| Le questionnaire (février 1997) | 54 |
| RAPPORTS et NOMBRES | 58 |
| PROPORTIONNALITE | 70 |
| NOMBRES et PROPORTIONNALITE | 77 |
| Résumé des résultats de l'enquête | 87 |
| 1 - 3 Rapport entre les connaissances des élèves et celles des professeurs | 89 |
| 1 - 4 Bilan et hypothèses | 90 |

PARTIE 1

LES CONCEPTIONS DES DIFFERENTS PARTENAIRES

1 - 1 Les conceptions des élèves

L'idée que les connaissances résultent des pratiques d'enseignement peut laisser croire que les conceptions des élèves sur la proportionnalité émergent de « points de vue » c'est à dire de découpages dans le corps des savoirs mathématiques sur cet objet¹.

En particulier « proportionnalité » et « fonction linéaire » sont deux approches de la linéarité qui se réfèrent à deux cultures différentes : l'arithmétique et l'algèbre. On peut s'attendre à ce que les élèves ne voient pas dans la fonction linéaire une reformulation, une abstraction ou un prolongement de la proportionnalité entre grandeurs, d'autant plus que les vocabulaires attachés aux deux points de vue cohabitent sans que l'un intègre l'autre.

On peut aussi envisager qu'une conception de la proportionnalité pourrait être corrélée à une des techniques, formulations ou propriétés qui la caractérisent ; celle retenue dans un projet d'enseignement ou choisie par un enseignant pour faire émerger l'idée qui va conduire au concept.

Ce sont ces différentes considérations qui ont été à l'origine du mémoire de D.E.A. de juin 1994² où nous avons formulé les hypothèses suivantes :

H1 : La connaissance parfaite des techniques de l'application linéaire n'induit pas la compréhension des problèmes.

H2 : Certains élèves ne font pas le lien entre proportions et applications linéaires.

H3 : L'élève qui ne perçoit pas la situation de proportionnalité ou la correspondance ne peut pas résoudre le problème.

H4 : On peut imaginer plusieurs conceptions que l'on peut caractériser par des patrons :

PK : (patron relatif à la variable K) l'élève privilégie le coefficient k de l'application linéaire dans la procédure de résolution.

PQ : (patron relatif à la variable Q) dans une situation de proportionnalité, l'élève exploite la conservation des rapports (internes).

PX : (patron relatif à la variable X) utilisation du produit en croix.

H5 : L'élève qui utilise systématiquement le coefficient de l'application linéaire oublie qu'il y a conservation des rapports (internes).

Pour tenter de valider ou invalider ces conjectures, un questionnaire constitué de 11 exercices a été soumis à une classe de seconde (32 élèves) du Lycée de Ribérac le 18 janvier 1994.

Les résultats

Les premiers résultats en termes de fréquences sur les stratégies montrent que les élèves interrogés font peu usage des « rapports internes » (11%) ; ils préfèrent le « produit en croix » (34%) au « rapport externe (fonctionnel) » (27,5%).

¹ C'est le sens donné par Corine Castela dans : « Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures » ; RDM vol 15 ; 1995.

² Eugène Comin ; Proportions et applications linéaires ; mémoire de D.E.A de didactique des mathématiques ; juin 1994 ; Université de Bordeaux 1.

Les analyses de données ne font pas apparaître de groupements d'individus autour d'une technique, ce qui a conduit à réfuter l'hypothèse 4. Le choix de la technique de résolution dépend autant de l'exercice que de l'élève ; un même élève peut changer de technique d'un exercice à l'autre.

Une analyse en composantes principales sur l'ensemble des caractères étudiés fait apparaître deux groupements : les caractères qui concernent trois exercices de géométrie (2 ; 6 ; 10) sur « agrandissement et réduction » d'une part et les caractères qui concernent deux exercices d'arithmétique (7 ; 9) d'autre part. Il semble donc que le cadre géométrique ou arithmétique soit un caractère plus discriminant que les techniques. Mais le cadre n'est pas nécessairement à l'origine de cette discrimination. Elle peut résulter du cloisonnement des différents enseignements. Les conceptions nées des différents apprentissages restent attachées aux situations qui les ont fait naître. Les élèves ne peuvent pas décontextualiser les savoirs par eux-mêmes. Le « transfert » des connaissances d'un cadre à un autre nécessite des situations adaptées pour que les élèves reconnaissent dans un milieu nouveau la pertinence des connaissances anciennes. Le cloisonnement apparent des connaissances sur « agrandissement réduction » d'une part et « proportionnalité en arithmétique » d'autre part résulte de l'indépendance des conceptions. Sans un travail de décontextualisation et d'institutionnalisation, les élèves ne peuvent pas réaliser que des pratiques différentes de l'arithmétique, de la géométrie ou de l'algèbre relèvent du même concept de proportionnalité.

Les techniques suivantes : (K) : utilisation du rapport externe (ou rapport fonctionnel) et (Q) : utilisation des rapports internes (à une grandeur) sont corrélées positivement ce qui réfute l'hypothèse 5 selon laquelle « l'élève qui utilise systématiquement le coefficient de l'application linéaire oublie qu'il y a conservation des rapports ». Encore une fois une technique n'exclut pas l'autre. Au contraire les élèves qui utilisent (Q) utilisent (K). Mais cette implication peut être révélatrice d'une conception chez certains élèves qui résulte d'un enseignement des fonctions linéaires. En général, au collège, la propriété $f(qx) = qf(x)$ n'est pas présentée comme une propriété caractérisant la linéarité d'une fonction f mais comme une conséquence de la relation fonctionnelle qui à x associe kx . Sous ces conditions l'utilisation de la conservation des rapports internes (Q) est subordonnée à la reconnaissance de l'invariance du rapport externe (K) ; ceci peut expliquer le faible taux de réussite aux exercices où ce rapport k n'est pas « calculable » ou « explicitable ».

Une analyse implicative fait apparaître la chaîne suivante : la réussite à l'exercice nécessite la reconnaissance de la correspondance entre grandeurs qui elle-même nécessite la reconnaissance d'une situation de proportionnalité, les réciproques n'étant pas vérifiées. De plus l'analyse implicative montre que l'usage d'une technique de résolution, quelle qu'elle soit, nécessite la reconnaissance de la correspondance. Ces résultats renforcent l'hypothèse 3 : « L'élève qui ne perçoit pas la situation de proportionnalité ou la correspondance ne peut pas résoudre le problème ».

Les questions qui avaient pour objet d'évaluer le « lien » que font les élèves entre « proportions » et « applications linéaires » ont des fréquences de réponses favorables variant de 40% à 57%. Globalement 1 élève sur 2 reconnaît dans l'application linéaire une formulation de la proportionnalité ; ce résultat renforce l'hypothèse 2. Plus précisément 40% des élèves interrogés ont reconnu une partie du graphe d'une application linéaire dans un tableau de proportionnalité et 53% de ces élèves savent qu'une application linéaire peut modéliser une situation de proportionnalité.

Enfin une analyse implicative sur les réussites montre que si la connaissance des algorithmes assure la réussite aux exercices prototypiques de l'arithmétique, elle ne suffit pas pour les autres exercices. Cette connaissance ne permet pas à elle seule de surmonter certaines difficultés telles que le repérage de la proportionnalité et de la correspondance. Ainsi cette analyse abonde dans le sens de l'hypothèse 1.

Conclusions et hypothèses

Les résultats précédents semblent indiquer que les élèves ne reconnaissent pas dans les différentes techniques étudiées (en particulier pour la conservation des rapports internes) le moyen de caractériser une relation de proportionnalité. La proportionnalité semble attachée à certaines situations prototypiques ou culturelles et les élèves ne disposent pas de moyens techniques pour adopter ou rejeter le modèle linéaire.

Les différentes analyses de données n'ont pas permis de repérer des conceptions en termes d'effectifs sur l'ensemble des exercices qui seraient spécifiques d'une technique. Un élève peut changer de technique de résolution d'un exercice à l'autre.

Par contre ces analyses ont fait apparaître des groupements d'exercices discriminés par le cadre arithmétique ou géométrique. Les élèves ne pouvant transposer d'eux-mêmes leurs connaissances d'un milieu à un autre on peut soupçonner que cette parcellisation a pour origine un cloisonnement des différents enseignements. Les conceptions locales aux apprentissages, à une situation, ne peuvent évoluer que si les savoirs qu'elles véhiculent sont décontextualisés et institutionnalisés.

Un autre résultat semble renforcer cette hypothèse : la moitié des élèves ne reconnaissent pas dans la fonction linéaire une modélisation de la proportionnalité. Si l'arithmétique fait obstacle à l'algèbre, il appartient à l'enseignement d'organiser ce passage difficile.

1 - 2 Les conceptions des professeurs.

1-2-1 L'erreur d'un auteur ou le rapport au savoir de tous

Le concours de Professeurs des Ecoles de Bordeaux de 1995.

Le document ci-joint (fiche en fin de paragraphe : « ACTIVITES PEDAGOGIQUES AVEC LA GALAXY 9 ») est tiré d'un journal professionnel d'enseignants. Il a servi à élaborer une partie du concours de professeurs des écoles de 1995 de Bordeaux. On demandait aux candidats de faire une analyse critique des questions 1c, 2 et 3.

Analyse de la fiche

Le commentaire introductif « faire comprendre » ne permet pas de situer les activités dans une progression ; le concept de proportionnalité est-il en cours d'acquisition ou la fiche sert-elle d'introduction à cette notion ?

Les activités faisant appel à la division euclidienne et aux opérateurs entiers, il semble raisonnable de les situer en CE2 ou CM1.

Activité 1

1a et 1b :

Les consignes 1 a) et 1 b) permettent à l'élève de voir s'il a bien fait ce qu'on attendait de lui, à savoir : multiplier tous les nombres de la première ligne par 2 pour obtenir ceux de la deuxième ligne puis multiplier tous les nombres de la deuxième ligne par 3 pour obtenir ceux de la troisième ligne. Mais aucune définition de la proportionnalité n'apparaît pour justifier l'activité 1.

1c :

* Si l'élève ne sait pas ce qu'est la proportionnalité, il ne peut pas la vérifier. Dans ce cas il ne peut que vérifier la justesse des calculs précédents, déjà "vérifiés" en 1a et 1b.

La formulation de la consigne laisse à l'élève le choix, pour chacun des calculs précédents, entre trois divisions.

Par exemple : $24 \div 8 = 3$ reste 0 ou $24 \div 3 = 8$ reste 0 ou $8 \div 24 = 0$ reste 8.

Dans les deux premiers calculs le reste est égal à zéro.

La phrase : "Quand le reste est égal à 0, les deux nombres sont proportionnels", ne permet pas de savoir lesquels des deux nombres pris parmi les trois nombres 24, 8, 3 sont proportionnels.

La phrase suivante : "Le coefficient de proportionnalité est indiqué par le quotient" pourrait laisser croire que la confusion n'est pas possible. Pourtant l'auteur fait lui-même cette confusion pour $42 \div 3 = 14$ reste 0, or 14 n'est pas le coefficient de proportionnalité.

On peut aussi croire à une erreur d'inattention... En effet au 1c on peut lire : "Pour vérifier la proportionnalité des nombres entre les lignes 3 et 2 ..." : ce sont donc les nombres qui figurent sur ces lignes qui sont proportionnels.

Si l'auteur avait utilisé les mots "dividende" et "diviseur", il aurait levé une autre ambiguïté en précisant la division à considérer. En effet, ou bien l'assertion : "Quand le reste est égal à 0, les 2 nombres sont proportionnels" est une définition, alors 24 et 8 sont proportionnels mais

pas 8 et 24 ... ou bien la conception de l'auteur se limite à l'implication : "(quand le reste est égal à 0) \Rightarrow (les deux nombres sont proportionnels)", la réciproque étant fautive ; dans ce cas, la division $8 \div 24$ ne permet pas de conclure que les nombres 8 et 24 sont "proportionnels".

On voit ici les effets pervers de l'imprécision des consignes, de la pauvreté du vocabulaire, de l'inadaptation de la formulation. De telles pratiques induisent des conceptions fausses de proportionnalité. Remarquons aussi qu'en privilégiant le rapport entier, l'auteur encourage l'élève à faire l'opération dans le sens qui « l'arrange » ; c'est vrai de la soustraction comme de la division et c'est une source d'erreurs bien connue.

On voit bien que les consignes ne sont pas adaptées au concept de proportionnalité. Cette activité suggère que « la proportionnalité » pourrait être une propriété des nombres (entiers). Plus précisément les formulations « Quand le reste est égal à 0, les 2 nombres sont proportionnels. Le coefficient de proportionnalité est indiqué par le quotient » laissent entendre que deux nombres naturels sont proportionnels quand ils sont dans un rapport multiple et que leur rapport entier est leur coefficient de proportionnalité. Mais aucune définition de la proportionnalité ne figure dans la fiche. Deux nombres ne pouvant pas être proportionnels, on peut croire à une maladresse de formulation de la part de l'auteur imputable au désir d'introduire une notion en utilisant une machine et un vocabulaire qui appartient au langage familier des élèves.

* Si l'élève a une conception juste de la proportionnalité alors il peut adopter une des deux attitudes suivantes :

. diviser tous les nombres de la troisième ligne par 3 et montrer qu'il retrouve bien les nombres de la deuxième ligne. Il pourra modifier la conclusion en écrivant par exemple : "Quand je divise tous les nombres de la troisième ligne par 3 j'obtiens bien ceux de la deuxième ligne. Un coefficient de proportionnalité entre ces deux suites de nombres est 3"

. diviser tous les nombres de la troisième ligne par ceux de la deuxième et constater qu'il retrouve toujours 3 au quotient (le reste étant 0). Il peut conclure : "Les lignes deux et trois sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité est le quotient commun à toutes les divisions, c'est à dire 3".

Activité 2

L'activité 2 confirme la confusion de l'auteur. En effet les couples de nombres disposés en colonnes ne donnent pas le même quotient. Les suites ne sont pas proportionnelles. La consigne « Colorie les coefficients de proportionnalité quand les deux nombres sont proportionnels » invite l'élève à entrer dans une conception fautive de proportionnalité en faisant synonymes des vocabulaires qui font référence à des concepts différents. Deux nombres ne peuvent pas être proportionnels même si l'un d'eux est un multiple de l'autre. Le rapport de deux nombres, même entier, n'est pas nécessairement un coefficient de proportionnalité.

* Si la fiche sert d'introduction à la proportionnalité, l'élève va colorier le quotient quand le reste est nul en raison de la conclusion de l'activité 1 qui tient lieu de définition. Il va donc retenir une définition erronée de la proportionnalité : « deux nombres sont proportionnels quand ils sont dans un rapport multiple ».

* Si l'élève a une idée juste de la proportionnalité, il va devoir dénoncer la fausseté de la consigne (s'il est courageux) en expliquant d'une part que si le reste est égal à zéro, l'un des

nombres, le dividende, est multiple du diviseur ; et d'autre part que les deux suites de nombres proposées ne sont pas proportionnelles puisque le quotient n'est pas toujours le même.

Activité 3

Le désir d'instrumentaliser la touche « **SIMP** » (simplification des fractions) entraîne l'auteur dans des considérations qui accroissent la confusion en y adjoignant de nouvelles erreurs.

Il y a deux manières de construire une fraction avec deux nombres. Ce manque de précision dans la consigne est corrigé en partie par "Le plus grand des deux nombres sera le numérateur".

L'auteur emploie l'expression « entièrement simplifiable » lorsque la fraction représente un entier.

Ses explications confirment qu'il emploie l'expression "nombres proportionnels" pour "nombres dans un rapport multiple" et que dans ce cas le "coefficient de proportionnalité" désigne leur rapport entier naturel.

La calculatrice, de par la spécificité de ses touches, étant adaptée au CE2, CM1, on peut comprendre que l'auteur veuille se limiter aux coefficients de proportionnalité entiers. Il n'est pas besoin de connaître les décimaux ou les irrationnels pour présenter des situations de proportionnalité en utilisant une formulation correcte. Bien sûr la méconnaissance des décimaux (et donc des réels) ne permet pas toujours de vérifier si deux suites sont proportionnelles en utilisant le rapport fonctionnel. On peut parfois esquiver la difficulté si les nombres d'une même suite sont dans des rapports scalaires connus des élèves; il suffit de vérifier l'égalité de ces rapports avec les rapports des nombres correspondants de l'autre suite.

Conclusions

Cette analyse pose la question suivante : ces erreurs sont-elles l'indice d'un dysfonctionnement dans les pratiques d'enseignement de la proportionnalité ?

Voici ce qu'écrit Guy Brousseau à ce sujet³ :

« Ces imprécisions de pensée et de formulation pourraient apparaître comme l'effet isolé d'une tentative maladroite pour introduire une machine aux propriétés intéressantes et une notion délicate auprès d'enfants jeunes.

Il semble au contraire que ces concessions soient banales et que leurs conséquences soient parfois admises comme conséquence d'un souci :

- de ne pas surcharger les phrases avec des précisions qui n'appartiennent pas au "langage courant" ;
- et/ou d'exclure des termes passés de mode : ceux de l'ancienne arithmétique, puis ceux du vocabulaire ensembliste etc.

Elles ne sont pas justifiées et sont lourdes de conséquences. Elles sont inacceptables. Un vocabulaire adéquat pour discerner les objets et les situations est une nécessité aussi incontournable en mathématiques que dans toutes les autres activités humaines. Il n'y a aucun avantage à refuser aux enfants l'usage d'un langage approprié à ce qu'on leur demande. Il semble que la culture didactique actuelle soit incapable de corriger les excès d'interprétation que les réformes successives, pour ou contre "le formalisme" ou "le sens", ont provoqués. »

³ Concours externe de Recrutement des Professeurs d'école; Annales 1995; p.218.

Voir aussi l'article de Guy Brousseau dans le bulletin APMEP n°400: "Les mathématiques à l'école".

Résultats du concours :

Les résultats au concours de professeurs des écoles de Bordeaux de 1995 nous confortent dans notre idée. Dans leur grande majorité (plus de 90%) les candidats ont accepté les formulations « Quand le reste est égal à 0, les 2 nombres sont proportionnels. Le coefficient de proportionnalité est indiqué par le quotient ».

Pourquoi les candidats n'ont-ils pas rejeté ces déclarations erronées et les conceptions fausses qu'elles suggèrent ?

On peut imaginer que les candidats ont cru à une formulation provisoire (ou nouvelle) pour des élèves qui ne connaissent que les entiers. Même si tel est le cas, cette formulation va inférer une conception fautive de la proportionnalité. Quand ces mêmes élèves connaîtront les rationnels, ils pourront dire que « deux rationnels sont toujours proportionnels ».

Une autre explication possible est que l'enjeu du concours est tel que les candidats ne veulent pas prendre de risque. C'est cette hypothèse qui paraît la plus plausible.

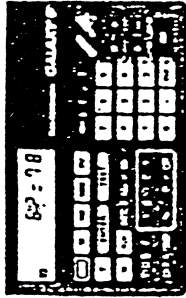
La question est donc de savoir si les maîtres en situation d'enseigner sont prêts à faire de telles concessions.

Pour vérifier s'il y a vraiment un écart entre ce qu'on pourrait penser être un fonctionnement orthodoxe et les pratiques d'enseignement dans le primaire nous avons élaboré un (premier) questionnaire que nous avons soumis en juin 1996 à des maîtres en activité.



ACTIVITÉS PÉDAGOGIQUES AVEC LA GALAXY 9

la calculatrice GALAXY 9, grâce à ses touches spécifiques



- OP** - programmation d'un opérateur
- F** - division euclidienne
- SIMP** - simplification de fractions

va nous aider à faire comprendre ici, un concept délicat à acquérir, celui de la proportionnalité.

1 Observe bien ce tableau et complète-le

| | | | |
|----------|----|----|----|
| \times | 7 | 5 | 11 |
| \div | 14 | 8 | 12 |
| \div | | 24 | 48 |

Tu vas vérifier avec ta GALAXY 9

- a) Tu programmes **OP** **2** **OP**
Tu entres les nombres de la première ligne : **7** **OP** , **5** **OP** , etc...
- b) Tu programmes **F** **3** **OP**
Tu entres les nombres de la deuxième ligne : **14** **OP** , **10** **OP** , etc...
- c) Pour vérifier la proportionnalité des nombres entre les lignes 3 et 2, utilise la touche division euclidienne : **F**

TU TAPES

4 **2** **OP** **3** **OP**

OP **OP** **OP**

.....

OP

.....

OP

TU VOIS

$\frac{14}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

O représente le :

.....

R représente le :

.....

Quand le reste est égal à 0, les 2 nombres sont proportionnels.

Le coefficient de proportionnalité est indiqué par le quotient.

2 Complète le tableau ci-dessous.

Colorie les coefficients de proportionnalité quand les nombres sont proportionnels

TU TAPES

6 **3** **OP** **7**

7 **2** **OP** **5**

1 **0** **5** **OP** **3** **5**

4 **9** **6** **OP** **6** **2**

1 **4** **4** **OP** **1** **2**

1 **5** **6** **OP** **8**

TU VOIS

Q R

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{R}$

3 La grande richesse de la GALAXY 9 nous donne un autre moyen de vérifier si des nombres sont proportionnels ou non.

Pour cela il suffit de les entrer sous forme de fractions. Si la fraction est entièrement simplifiable, les deux nombres sont proportionnels.

Le plus grand des deux nombres sera le numérateur. Plusieurs appuis successifs sur la touche **OP** montrent lorsque l'on obtient un nombre entier :

- a) que les nombres sont proportionnels
- b) le coefficient de proportionnalité.

1-2-2 La préenquête

Objet de l'enquête

1) On veut savoir si les imprécisions de pensée et de formulation relevées dans la fiche sont l'effet isolé d'une tentative maladroite ou si ces concessions sont devenues banales dans l'enseignement primaire.

2) On fait l'hypothèse que certains maîtres vont accepter les déclarations erronées de la fiche et souscrire aux conceptions fausses qui en découlent.

3) Les moyens :

Exploitation de la fiche :

Est-ce que les maîtres du primaire relèvent dans cette fiche les abus de langage suivants :

- « nombres proportionnels » pour « nombres dans un rapport multiple » ?
- « coefficient de proportionnalité » pour « rapport » ?
- « fraction simplifiable » pour « fraction représentant un entier » ?

Si les maîtres repèrent ces anomalies :

- acceptent-ils ces déclarations pour les élèves qui ne connaissent que les entiers ?
- proposent-ils des formulations en remplacement ?

Les maîtres qui acceptent ces déclarations sont-ils influencés :

- par leur formation initiale ou continue ?
- par leurs connaissances sur les nombres et les opérations ?
- par les systèmes ostensifs qu'ils connaissent ou utilisent ?
- par leur connaissance du vocabulaire de la proportionnalité ?
- par les programmes ?

Questionnaire :

On va soumettre un questionnaire à des professeurs d'écoles pour :

- faire une analyse statistique afin de vérifier les fréquences d'erreurs.
- faire une analyse de données pour:
 1. mettre en évidence des corrélations entre différentes questions.
 2. faire apparaître des sous populations spécifiques de certains comportements.

Présentation du questionnaire

Nous avons donc élaboré un premier questionnaire toujours à partir de cette fiche que nous avons soumis à des maîtres du primaire en activité.

Les questionnaires ont été distribués au mois de juin 1996. Chacun d'eux était accompagné d'une lettre explicative et d'une fiche⁴.

Les 15 maîtres qui ont répondu à cette enquête n'ont pas apporté toutes les informations souhaitées mais les principaux résultats que nous rapportons ici confirment l'existence de dysfonctionnements.

Pour l'exploitation du questionnaire, chacune des questions est affectée d'un nom de variable comportant au maximum trois signes alphanumériques. Le premier signe repère le cadre (donc la page) dans lequel se situe la question.

Ces variables vont permettre de continger les réponses dans un tableau. Elles feront l'objet d'une analyse statistique et d'une analyse de données.

Les fréquences de réponses qui figurent pour chaque question sont données en pourcentages. Elles sont calculées à partir des 15 questionnaires complétés par les maîtres.

Analyse des réponses

Les premières questions permettaient d'entrer dans la problématique de la fiche et invitaient les maîtres à formuler des opinions. Or il y a un écart entre les intentions et les réalisations effectives.

La fiche jointe suggère trois activités mathématiques avec une calculatrice pour des élèves de l'école primaire.

| F | Cette fiche appelle-t-elle des objections de votre part ? | OUI 60% | NON 33% |
|-----|---|---------|---------|
| | Si oui, de quel point de vue ? | | |
| FC | - de l'usage en général des calculatrices à l'école | 14% | |
| FG | - de l'usage de la GALAXY 9 à cause : | 50% | |
| | . de la touche [OP] | 21% | |
| | . de la touche [-] | 14% | |
| | . de la touche [SIMP] | 29% | |
| FP | - de la conception pédagogique | 50% | |
| FM | - du contenu mathématique | 36% | |
| FF | - de la formulation des notions mathématiques | 43% | |
| FN | - du choix des nombres | 7% | |
| FT | - de la précision dans la description du travail des élèves | 36% | |
| FPI | - des programmes et instructions officielles | 14% | |
| FA | - autres objections : | 7% | |

| Malgré ces objections à quel(s) niveau(x) pensez-vous que certaines de ces activités (ou toutes) pourraient-être proposées ? (Cochez les cases de votre choix) | | | | | | |
|---|---------|-----|-----|-----|-----|-------|
| | CP | CE1 | CE2 | CM1 | CM2 | Aucun |
| activité 1 | | | 93% | | 50% | 7% |
| activité 2 | | | 79% | | 71% | 7% |
| activité 3 | | | 21% | | 86% | 14% |
| | CP : 7% | | CE | | CM | CA |

⁴ Le document original se trouve en annexe.

| Si vous aviez à proposer ces activités à des élèves de primaire au niveau de votre choix, le feriez-vous : | | | | | |
|--|--|------------|------------|------------|------------|
| AG | - en raison des touches spécifiques de la GALAXY 9 | OUI | 53% | NON | 40% |
| AI | - pour introduire la notion de proportionnalité | OUI | 47% | NON | 53% |
| AV | - après avoir expliqué le vocabulaire technique et spécifique de la proportionnalité | OUI | 80% | NON | 20% |
| AFL | - pour introduire la notion de fonction linéaire | OUI | 27% | NON | 73% |
| AM | - après avoir apporté des modifications nécessaires quel que soit le niveau | OUI | 60% | NON | 33% |
| AFF | - en suivant la fiche fidèlement | OUI | 27% | NON | 67% |
| ANP | - pour habituer les élèves à associer les mots "nombre" et "proportionnalité" | OUI | 33% | NON | 53% |
| AC | - car la convivialité de la fiche s'inscrit dans votre conception de l'enseignement | OUI | 20% | NON | 47% |
| | - autres : | OUI | 0% | NON | 0% |

Si 60% des maîtres interrogés disent avoir des objections à formuler sur la fiche, il n'y en a que 7% qui apportent des modifications quand la possibilité leur en est donnée (questions 11, 12, 13, 2, 3).

Une majorité (80%) envisage d'expliquer le vocabulaire technique et spécifique de la proportionnalité avant l'utilisation de la fiche (AV). Or on va voir que :

67% acceptent de dire que deux nombres sont proportionnels (E1P)

40% acceptent l'expression « coefficient de proportionnalité » à la place de « rapport » (TA1)

27% acceptent qu'une fraction soit simplifiable lorsqu'elle représente un entier (S4).

L'analyse de la fiche a déjà montré que la consigne 1c) qui y figure n'est pas claire. Comment les maîtres l'ont-ils interprétée ?

A PROPOS DE L'ACTIVITE 1

| La consigne "Tu vas vérifier avec ta GALAXY 9" a-t-elle pour objet : | | | | | |
|--|---|------------|------------|------------|------------|
| GO | de vérifier l'exactitude des opérations effectuées par l'élève | OUI | 67% | NON | 27% |
| GP | de vérifier que le tableau est de proportionnalité | OUI | 67% | NON | 20% |
| GI | d'induire le concept de proportionnalité grâce à la touche [OP] | OUI | 40% | NON | 40% |

A ce stade du questionnaire, les fréquences de réponses laissent croire que les maîtres vont majoritairement manifester leur désaccord. En fait, les réponses aux questions suivantes montrent que les quelques modifications apportées ne corrigent en rien la conception (fausse) de l'auteur sur la proportionnalité.

| | | | | | |
|-----------|--|------------|------------|------------|------------|
| PT | La consigne 1c) décrit-elle avec suffisamment de précision le travail des élèves | OUI | 40% | NON | 40% |
|-----------|--|------------|------------|------------|------------|

Partie E

A PROPOS DE L'ACTIVITE 1

| | | | | |
|------------|--|------------|-------------|----------------|
| | Un élève fait : $30 \div 3 = 10$ reste 0 | | | |
| E1P | Il déclare : "les deux nombres 30 et 3 sont proportionnels" ; est-ce exact ? | OUI | 67% | NON 33% |
| E1D | Il dit encore : "en divisant tous les nombres de la dernière ligne par 3 je dois trouver tous les nombres de la deuxième ligne" ; est-ce exact ? | OUI | 87% | NON 13% |
| E1L | A-t-il ainsi "vérifié" la proportionnalité des 2 ^{ème} et 3 ^{ème} lignes du tableau ? | OUI | 80% | NON 20% |
| E1C | Il conclut "le coefficient de proportionnalité est le quotient" ; est-ce exact ? | OUI | 47% | NON 47% |
| | Un autre élève fait $30 \div 10 = 3$ reste 0 | | | |
| E2P | Il déclare : "les deux nombres 30 et 3 sont proportionnels" ; est-ce exact | OUI | 73% | NON 37% |
| E2D | Il dit "en divisant tous les nombres de la dernière ligne par ceux de la deuxième je dois trouver 3" ; est-ce exact | OUI | 100% | NON 0% |
| E2L | A-t-il ainsi "vérifié" la proportionnalité des 2 ^{ème} et 3 ^{ème} lignes du tableau ? | OUI | 80% | NON 20% |
| E2C | Il conclut "le coefficient de proportionnalité" est le quotient ; est-ce exact ? | OUI | 74% | NON 20% |

| | |
|-----------|---|
| 11 | S'il vous paraissait opportun de modifier la consigne de la fiche : 7% "Pour vérifier la proportionnalité des nombres entre les lignes 3 et 2 utilise la touche division euclidienne : ÷ " quelle nouvelle consigne donneriez-vous à vos élèves ? |
|-----------|---|

| | |
|-----------|--|
| 12 | S'il vous paraissait opportun de modifier la phrase : 7% "Quand le reste est égal à 0, les 2 nombres sont proportionnels" par quelle phrase la remplaceriez-vous ? |
|-----------|--|

| | |
|-----------|--|
| 13 | S'il vous paraissait opportun de modifier la phrase : 7% "Le coefficient de proportionnalité est indiqué par le quotient" par quelle phrase la remplaceriez-vous ? |
|-----------|--|

Parmi les maîtres interrogés, environ 70% acceptent de dire « deux nombres sont proportionnels » (E1P, E2P) et 80% que « deux lignes du tableau sont proportionnelles » (E1L, E2L). La moitié d'entre eux acceptent simultanément les deux déclarations. Les deux conceptions cohabitent. On va voir qu'elles sont indépendantes. Il semble que ce ne soient pas deux manières différentes de dire la même chose mais bien deux conceptions différentes.

Cette idée est renforcée par les réponses à la question E1C : pour 47% des maîtres « le coefficient de proportionnalité est le quotient » (c'est à dire 10).

Un seul maître apporte une correction qui réfute sans ambiguïté que deux nombres puissent être proportionnels. Il écrit : « Quand le reste est égal à 0, les 2 nombres sont multiples l'un de l'autre ou l'un est un diviseur de l'autre ».

Partie T

Le tableau T suivant est intéressant à deux égards : il confirme des fréquences d'erreurs importantes, il compare les connaissances des maîtres aux connaissances qu'ils projettent d'enseigner.

A PROPOS DE L'ACTIVITE 2

| | Les déclarations suivantes (issues d'une enquête préalable) sont-elles acceptables ? | pour le professeur | | de la part d'élèves qui ne connaissent que les entiers naturels | |
|-----|---|--------------------|------------|---|------------|
| | | OUI | NON | OUI | NON |
| TA1 | "Quand le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels est nul, le quotient est le coefficient de proportionnalité de ces deux nombres." | OUI 40% | NON 33% | OUI 60% | NON 20% |
| TA2 | | | | | |
| TB1 | "Quand le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels n'est pas nul, ils ne peuvent pas se correspondre dans un tableau de proportionnalité." | OUI 47% | NON 40% | OUI 67% | NON 13% |
| TB2 | | | | | |
| TC1 | "Quand le quotient de deux nombres est entier il évoque le coefficient de l'application linéaire qui met en correspondance ces deux nombres." | OUI 53% | NON 27% | OUI 40% | NON 33% |
| TC2 | | | | | |
| TD1 | "Si toutes les divisions ont un reste nul, la suite des dividendes et la suite des diviseurs sont deux suites proportionnelles." | OUI 53% | NON 13 | OUI 50% | NON 33% |
| TD2 | | | | | |

| | | |
|---|---|----|
| 2 | S'il vous paraissait opportun de modifier la consigne : "colorie les coefficients de proportionnalité quand les nombres sont proportionnels" quelle nouvelle consigne donneriez-vous à vos élèves ? | 7% |
|---|---|----|

Un maître n'a pas complété le tableau T ; 8 n'ont répondu que partiellement. On peut envisager au moins deux explications :

- . les questions sont mal formulées
- . les connaissances des maîtres ne leur permettent pas de décider et donc de répondre.

Plus de 40% des maîtres acceptent des déclarations fausses.

Nous suspicions que certains maîtres accepteraient pour leurs élèves des formulations incorrectes et provisoires mais qu'ils ne les accepteraient pas pour eux-mêmes. Or ceci s'est avéré juste aux questions TA et TB mais faux aux questions TC et TD.

TA : 40% des maîtres interrogés acceptent pour eux-mêmes d'appeler « coefficient de proportionnalité » le quotient entier de deux naturels dans un rapport multiple alors qu'ils sont 60% à l'accepter pour leurs élèves. 33% acceptent la déclaration pour leurs élèves mais pas pour le professeur.

TB : 47% des maîtres interrogés acceptent pour eux-mêmes que « 2 nombres naturels ne peuvent se correspondre dans un tableau de proportionnalité que dans le cas où ils sont dans un rapport multiple ». Ils sont 67% à l'accepter pour leurs élèves. 27% l'acceptent pour les élèves mais pas pour le professeur.

TC : 13% semblent refuser à leurs élèves l'usage de l'expression « application linéaire ».

TD : parmi les 53% qui ont répondu positivement peut-être certains n'ont pas pensé que les quotients pouvaient être différents. C'est pourtant le cas dans l'activité 2 de la fiche.

27% refusent la déclaration aux élèves alors qu'ils l'acceptent pour eux-mêmes, est-ce en raison de l'expression « suites proportionnelles » ?

Peut-être certains maîtres réservent-ils l'expression « nombres proportionnels » à leurs élèves et « suites proportionnelles » pour eux-mêmes.

(2) : Un seul maître propose une modification, mais elle n'est pas convaincante.

Partie S

A PROPOS DE L'ACTIVITE 3

| Partagez-vous les opinions suivantes : | | | | | |
|--|--|-----|-----|-----|-----|
| S1 | La touche [SIMP] donne un moyen de vérifier si deux nombres sont proportionnels tout en jouant avec la calculatrice | OUI | 60% | NON | 20% |
| S2 | La touche [SIMP] permet de comprendre comment on simplifie une fraction | OUI | 27% | NON | 60% |
| S3 | La touche [SIMP] montre aux élèves qu'une fraction n'est pas toujours un coefficient de proportionnalité | OUI | 53% | NON | 27% |
| S4 | Une fraction est simplifiable lorsqu'elle représente un entier : | OUI | 27% | NON | 60% |
| S5 | On ne peut pas vérifier que deux suites de nombres entiers sont proportionnelles avec les fractions | OUI | 27% | NON | 47% |
| S6 | Les fractions n'ont rien à voir avec le concept de proportionnalité | OUI | 13% | NON | 60% |
| 3 | S'il vous paraissait opportun de modifier la phrase : "Si la fraction est entièrement simplifiable, les deux nombres sont proportionnels" par quelle phrase la remplaceriez-vous ? | | | 7% | |

Deux maîtres n'ont pas complété cette partie.
Deux autres ne l'ont fait que partiellement.

S1 : 60% des maîtres interrogés acceptent de dire que deux nombres sont proportionnels. C'est en partie les mêmes qu'aux questions E1P, E2P, TA1.

S2 : peut-être la convivialité de la calculatrice influence-t-elle certains maîtres qui souhaitent utiliser la touche [SIMP].

S3 : est-ce que 53% des maîtres pensent qu'un coefficient de proportionnalité est nécessairement entier ? En fait cette question seule ne permet pas de savoir si ces maîtres appellent « coefficient de proportionnalité » un rapport entier. Or l'analyse des corrélations ne fait apparaître aucune corrélation entre S3, TA1, E1C.

S4 : un quart des maîtres acceptent qu'une fraction soit simplifiable lorsqu'elle représente un entier.

S5 et **S6** : ces deux questions évoquent l'émiettement des connaissances mathématiques des maîtres. Le pourcentage des maîtres qui ne voient pas de lien entre fractions et proportionnalité n'est pas négligeable. Il est d'autant plus à prendre en considération que 27% n'ont pas répondu ; peut-être parce qu'ils ne savaient pas répondre.

(3) : un seul maître apporte une modification. C'est le même qu'à la question (1).

Partie N

Comme au tableau T, la page 4 avait pour ambition de mettre en relation les connaissances des maîtres (questions N.1) avec les connaissances qu'ils projettent d'enseigner (questions N.E = N.2 ou N.3 ou N.4). Mais les questions de cette partie ne permettent de recueillir que des opinions. Or il y a un écart entre ce qui est énoncé et ce qui est effectif.

Cochez les cases de votre choix :

| N | Les notions ci-dessous | vous sont connues | sont familières à vos élèves | sont à introduire avant les activités sur la proportionnalité | sont à introduire après les activités sur la proportionnalité | sont hors programme | sont désuètes | sont mathématiquement incorrectes | ne concernent pas la proportionnalité |
|---|---------------------------------|-------------------|------------------------------|---|---|---------------------|---------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| A | situation de proportionnalité | 87% | 67% | 60% | 7% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| B | grandeurs proportionnelles | 33% | 7% | 0% | 13% | 7% | 7% | 7% | 0% |
| C | suites proportionnelles | 47% | 27% | 7% | 13% | 7% | 0% | 0% | 0% |
| D | variables proportionnelles | 7% | 7% | 0% | 0% | 7% | 0% | 0% | 0% |
| E | nombres proportionnels | 47% | 33% | 7% | 13% | 7% | 0% | 0% | 0% |
| F | proportions | 53% | 13% | 27% | 7% | 0% | 0% | 0% | 7% |
| G | fractions proportionnelles | 33% | 7% | 0% | 0% | 20% | 0% | 0% | 0% |
| H | tableau de proportionnalité | 80% | 67% | 33% | 13% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| I | tableau de non proportionnalité | 53% | 33% | 20% | 7% | 7% | 0% | 0% | 0% |
| J | coefficient de proportionnalité | 73% | 33% | 0% | 20% | 20% | 0% | 0% | 0% |
| K | quatrième proportionnelle | 13% | 0% | 0% | 0% | 7% | 0% | 0% | 0% |
| L | quotient | 80% | 73% | 47% | 0% | 0% | 0% | 0% | 7% |
| M | rapport | 67% | 13% | 0% | 20% | 7% | 7% | 0% | 0% |
| N | multiple | 87% | 73% | 60% | 7% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| P | fraction | 80% | 67% | 33% | 20% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| Q | rapport multiple | 7% | 0% | 0% | 0% | 13% | 0% | 0% | 0% |
| R | fonction linéaire | 73% | 27% | 0% | 20% | 13% | 0% | 0% | 0% |
| S | règle de trois | 80% | 13% | 0% | 13% | 27% | 20% | 0% | 0% |
| T | réduction à l'unité | 47% | 0% | 0% | 7% | 7% | 0% | 0% | 0% |
| U | raison | 7% | 0% | 0% | 0% | 13% | 7% | 0% | 0% |
| V | diviseur | 80% | 73% | 40% | 0% | 0% | 0% | 0% | 7% |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Néanmoins, sur les 19 expressions correctes proposées, en moyenne les maîtres disent en connaître 12 et souhaitent en enseigner 8. Il y a un écart de fréquence important entre ce que les maîtres disent connaître et ce qu'ils souhaitent enseigner à propos des notions suivantes : « coefficient de proportionnalité, rapport, fonction linéaire, règle de trois, réduction à l'unité ».

C'est l'expression « situation de proportionnalité » qui est la mieux connue. Elle couvre un vaste champ de savoirs et de vocabulaires mais manque de précision. Au moins la moitié des maîtres disent connaître les notions suivantes : « suites proportionnelles ; nombres proportionnels ; proportion ; tableau de proportionnalité ; tableau de non-proportionnalité ; quotient ; rapport ; multiple ; fraction ; fonction linéaire ; règle de trois ; réduction à l'unité ;

diviseur ». Seulement 14% connaissent l'expression « quatrième proportionnelle ». (Notons qu'elle figure dans le programme de 6^{ème} de 1995). Quant au mot « raison » il a pratiquement disparu du vocabulaire mathématique des maîtres (un seul maître dit connaître cette notion). 20% trouvent la règle de trois désuète.

50% disent connaître la notion de « nombres proportionnels » et 36% celle de « fractions proportionnelles ». On va voir que l'idée de « proportion » qui est derrière n'est pas si simple. Aucun maître ne trouve incorrectes ces deux expressions. Elles cohabitent avec celles qui sont correctes. Puisque les maîtres connaissent les mots « multiple » et « diviseur », pourquoi acceptent-ils de dire que deux nombres sont proportionnels ?

Les notions qu'ils projettent majoritairement d'enseigner sont « situation de proportionnalité, tableau de proportionnalité, multiple, diviseur, quotient, fraction ».

Seulement 40% des maîtres interrogés essaient de situer les notions par rapport aux programmes.

Partie V

Ce sont les situations qui déterminent le nom d'un objet. Le nombre « 5 » peut s'appeler : « coefficient de proportionnalité, opérateur, rapport, quotient, quotient exact, quotient euclidien, quotient entier, quatrième proportionnelle, raison, multiplicateur... » suivant la fonction qu'il occupe au sein de la situation considérée.

| Quel(s) nom(s) pensez-vous que les élèves à la sortie du primaire doivent donner au nombre 5 dans chacun des cas suivants : (rapport, quotient, quatrième proportionnelle...) | | | | | | | | | | | |
|---|--|----------|--|----|---|---|---|--|--|----|---|
| Cas 1 : | | nom(s) : | Cas 2 : | | | | | | | | |
| | <table border="1"> <tr> <td>35</td> <td>15</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>3</td> <td>8</td> </tr> </table> | 35 | 15 | 40 | 7 | 3 | 8 | | <table border="1"> <tr> <td>30</td> </tr> <tr> <td>6</td> </tr> </table> | 30 | 6 |
| 35 | 15 | 40 | | | | | | | | | |
| 7 | 3 | 8 | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | |
| Cas 3 : | $\frac{20}{4}$ | nom(s) : | Cas 4 : | | | | | | | | |
| | | | 45 : 9 nom(s) : | | | | | | | | |
| Cas 5 : | | nom(s) : | Cas 6 : | | | | | | | | |
| 35 est à 7 comme 45 est à 9. | | | $\frac{28}{20} = \frac{7}{5}$ nom(s) : | | | | | | | | |
| Cas 7 : | 48 ÷ 9 | nom(s) : | Cas 8 : | | | | | | | | |
| | | | 13 × 5 = 65 nom(s) : | | | | | | | | |

Le nom que le maître attribue au nombre 5 est le nom censé être connu de l'élève à la sortie du primaire. Or le nombre de non réponses ou de réponses erronées révèle les difficultés qu'il y a à attribuer un nom conforme à la situation. Seulement 53% des maîtres ont répondu à ces questions.

Partie M

Les questions de cette dernière partie étaient relatives à la situation du maître. Nous pensons que les conditions dans lesquelles il enseignait pouvaient influencer ses pratiques : niveau de la classe dans laquelle il enseigne, nature et niveau de la formation initiale, formation continuée, nombre d'années d'enseignement. Mais aucune analyse ne semble le confirmer.

Analyses de données

Deux analyses en composantes principales résument assez bien les différentes analyses qui ont été faites.

1) Connaissances, conceptions et pratiques.

Une opinion assez répandue est que les savoirs corrects s'opposent aux conceptions fausses. Or l'analyse didactique de la fiche fait soupçonner une conception fautive de la proportionnalité. La proportionnalité serait une "qualité des nombres", en particulier deux nombres seraient proportionnels quand ils sont dans un rapport multiple et ce rapport serait le coefficient de proportionnalité de ces deux nombres.

A cette conception fautive s'opposerait la conception correcte que traduisent les différentes formulations : suites proportionnelles, tableau de proportionnalité, fonction linéaire ...

Qu'en est-il ?

Les différentes analyses de données ont permis d'éviter une redondance de questions et de n'en retenir qu'un nombre raisonnable parmi les plus représentatives.

Dix d'entre elles traduisent une idée fautive de la proportionnalité :

E1P, E1C, E2P, TA1, TB1, TD1, S1, S3 concernent les pratiques des maîtres ;

NE1, NG1 visent des connaissances déclarées

Dix autres sont censées représenter des conceptions correctes de la proportionnalité :

E1L, E2L concernent les pratiques des maîtres

NA1, NB1, NC1, NK1, NH1, NR1, NS1, NT1 évoquent les connaissances qu'ils affirment avoir.

A chaque question correspond une variable booléenne qui prend la valeur 1 si la réponse est positive (ou si la case est cochée au tableau N) et la valeur 0 sinon. Pour les corrélations la valeur critique au seuil de 5% est 0,51.

Contrairement à ce qu'on aurait pu croire, l'analyse en composantes principales ne fait pas apparaître d'opposition entre ces deux groupes de questions. Les savoirs corrects ne s'opposent pas systématiquement aux conceptions fausses.

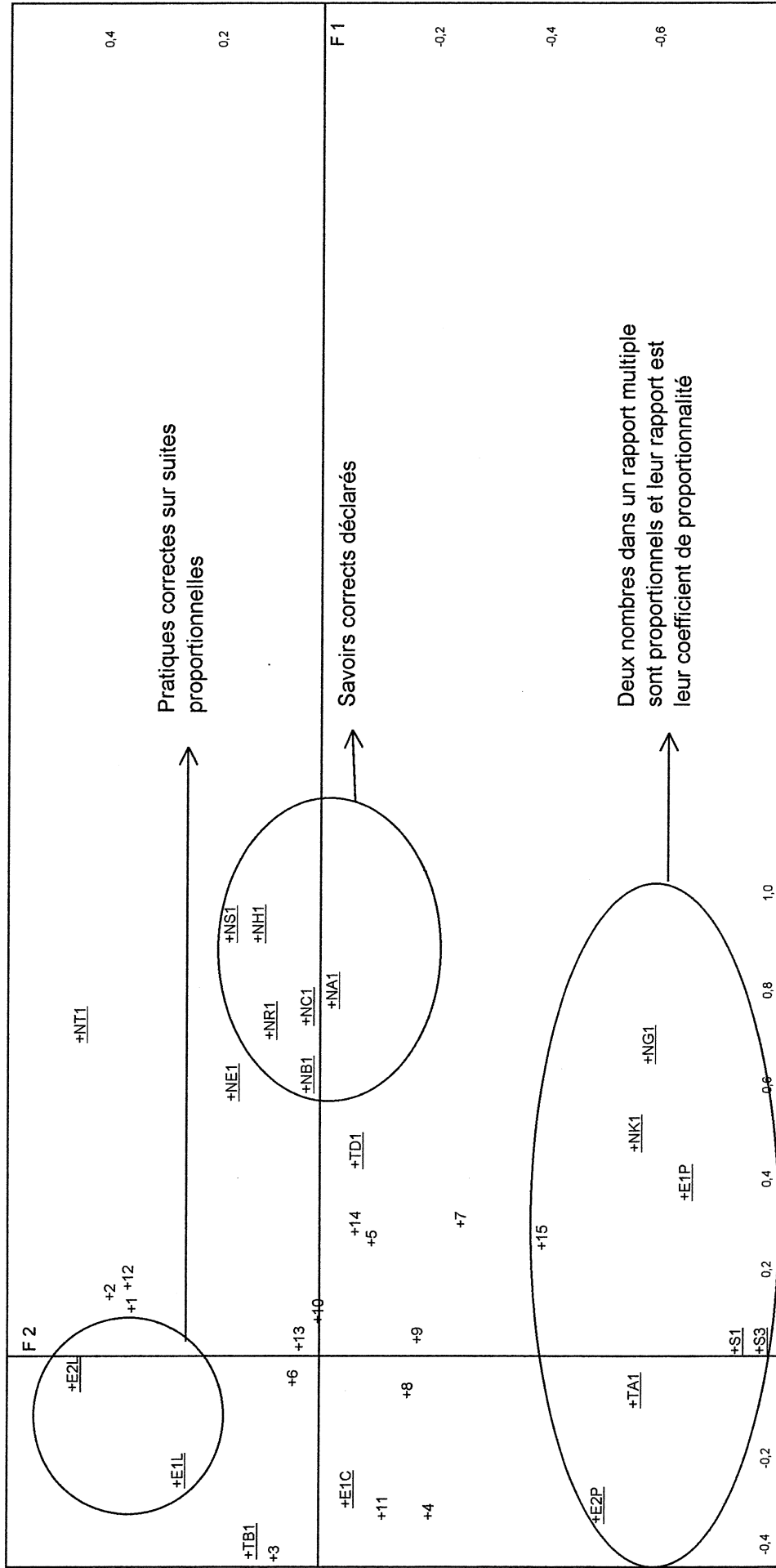
Le coefficient de corrélation entre E1L et E2L qui représentent des pratiques correctes sur les suites proportionnelles est 0,58 (La valeur critique au seuil de 5% est 0,53). E1L et E2L sont portées par l'axe 3.

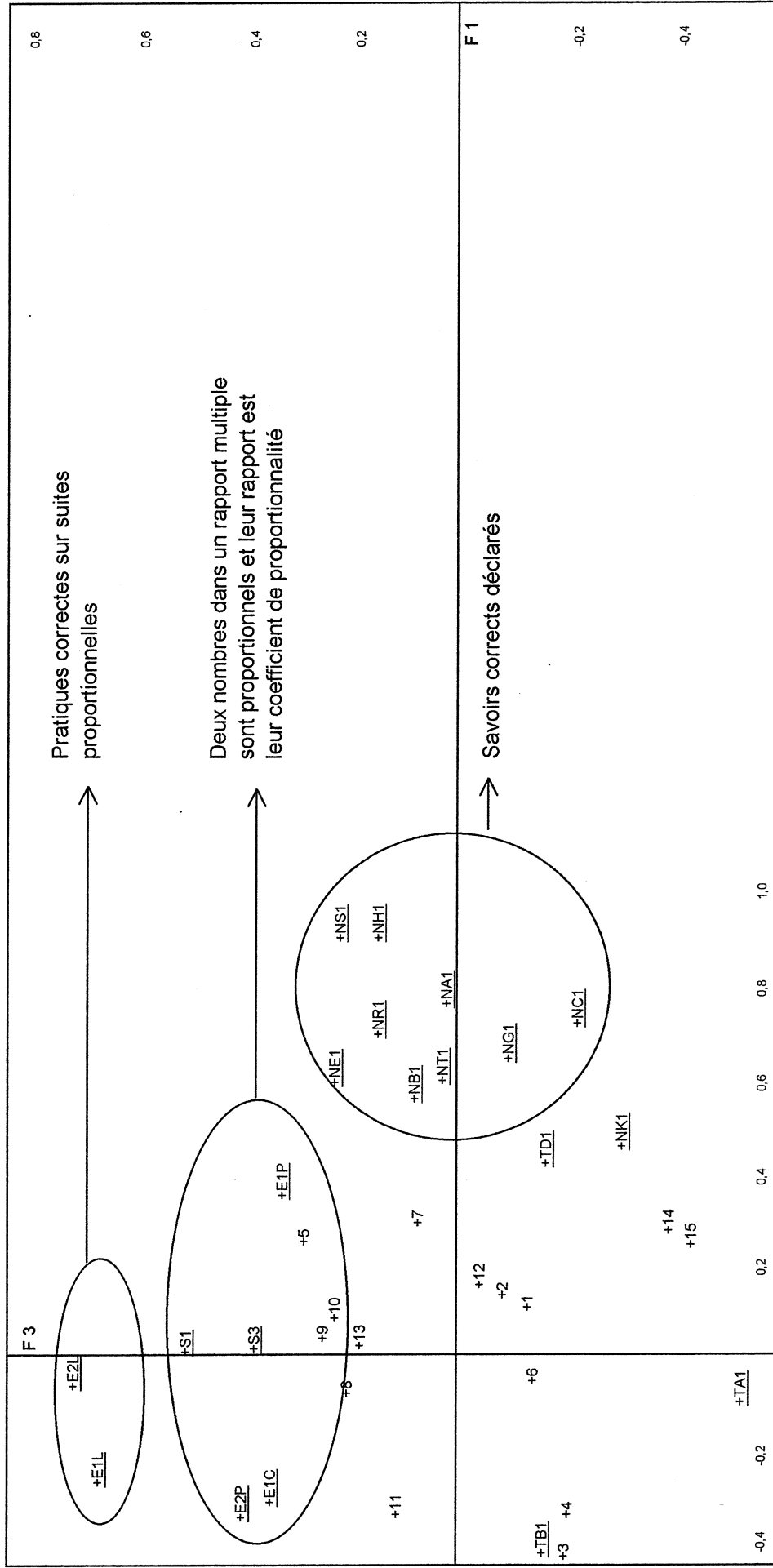
Le coefficient de corrélation entre E2L (suites proportionnelles) et TA1 (nombres proportionnels) est -0,61, ces deux caractères s'opposent sur l'axe 3 de la représentation graphique. Mais on ne peut pas rejeter l'indépendance de E1L et E2L avec les autres questions.

Plus précisément, l'axe 1 est déterminé par les variables qui traitent des « savoirs déclarés ».

Les questions sur les conceptions fausses sont dans le plan (2, 3) et plutôt portées par l'axe 2 ; de telle sorte que pratiques correctes, conceptions fausses et savoirs déclarés sont à peu près portés par des axes orthogonaux, ce qui laisse croire à leur indépendance.

Les représentations graphiques ne font pas apparaître de regroupements d'individus. Il n'y a pas ceux qui savent et ceux qui ne savent pas.





41

2) Savoirs déclarés et savoirs à enseigner.

Rappelons que la partie N du questionnaire ne recueille que des opinions. L'analyse en composantes principales fait néanmoins apparaître des particularités intéressantes. Sur la représentation graphique les variables N.1 (connaissances des maîtres) sont plutôt portées par l'axe 1 alors que les variables N.E (ce que les maîtres projettent d'enseigner) sont plutôt portées par l'axe 2. Globalement les maîtres estiment que ce qu'ils ont à enseigner ne dépend pas de ce qu'ils savent.

Trois types de corrélations peuvent présenter un intérêt.

La valeur critique au seuil de 5% est de 0,53.

Corrélations entre les différents savoirs des maîtres :

L'étude des corrélations fait apparaître un groupe de variables corrélées deux à deux :

NA1 NH1 NJ1 NL1 NP1 NS1 NV1

auxquelles on pourrait rajouter NM1 et NN1 dont les corrélations avec les variables précédentes sont proches du rejet d'indépendance.

Les notions correspondantes : "situation de proportionnalité, tableau de proportionnalité, coefficient de proportionnalité, quotient, fraction, règle de trois, diviseur", auxquelles on pourrait rajouter : "rapport et multiple", seraient aux dires des maîtres les plus connues.

Corrélations entre les savoirs que les maîtres projettent d'enseigner :

Les variables NLE, NNE, NPE, NVE sont corrélées deux à deux. NHE est corrélée à NAE et NAE qui est elle-même corrélée à NLE, NPE, NVE.

Il y a un consensus des maîtres pour enseigner les notions suivantes : "quotient, fraction, multiple, diviseur" ; ce sont des relations entre nombres. C'est moins clair pour NAE, NHE qui désignent : "situation de proportionnalité et tableau de proportionnalité" ; ce sont des relations entre suites de nombres.

Corrélations entre les savoirs des maîtres et ceux qu'ils projettent d'enseigner :

NA1 --- NAE : situation de proportionnalité

NC1 --- NCE : suites proportionnelles

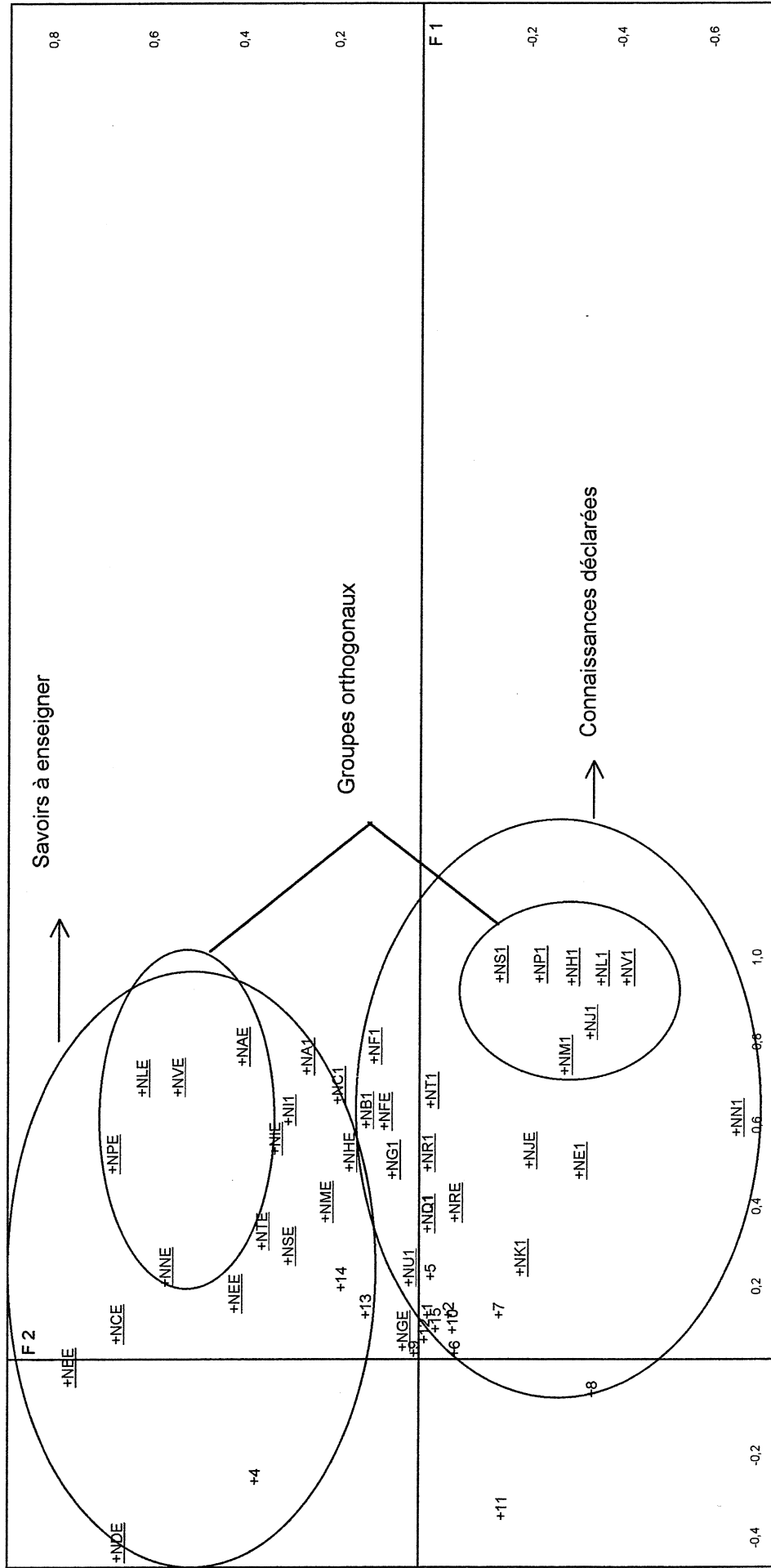
NE1 --- NEE : nombres proportionnels

NF1 --- NFE : proportions

NI1 ---- NIE : tableau de proportionnalité

Les maîtres estiment que leurs élèves doivent avoir les mêmes connaissances qu'eux sur les notions précédentes.

Nous avons remarqué dans l'étude des réponses qu'il n'en était pas de même en ce qui concerne : « coefficient de proportionnalité, rapport, fonction linéaire, règle de trois, réduction à l'unité ».



Résumé et conséquences

Est-ce que les maîtres repèrent les erreurs de la fiche ?

Les réponses aux premières questions de l'enquête montrent la place que les maîtres souhaitent accorder au langage dans l'apprentissage ; une majorité d'entre eux envisagent de préciser le vocabulaire. Pourtant beaucoup acceptent les formulations erronées de la fiche.

Rappelons quelques résultats statistiques :

- 50% à 70% des maîtres acceptent de dire que "deux nombres sont proportionnels" quand ils sont dans un rapport multiple (E1P, E2P, 1, 2, 3, TB1, S1, NE1, NG1).
- 40% à 50% d'entre eux semblent confondre, "rapport" et "coefficient de proportionnalité" (E1C, 13, 2, TA1, S3).
- 27% acceptent de dire qu'une fraction est simplifiable lorsqu'elle représente un entier (S4).

Conséquences :

Si on admet que deux entiers dans un rapport multiple sont proportionnels alors deux suites d'entiers seront proportionnelles lorsque les nombres homologues sont dans un rapport entier.

Quelles connaissances les maîtres projettent-ils d'enseigner ?

Les analyses de données confirment que les connaissances des maîtres diffèrent des connaissances qu'ils souhaitent enseigner. Certains d'entre eux refusent à leurs élèves des formulations qu'ils acceptent pour eux-mêmes, telles que « suites proportionnelles (TD), grandeurs proportionnelles (TB), coefficient de proportionnalité (NJ), quatrième proportionnelle (NK), rapport (NM), règle de trois (NS), réduction à l'unité (NT). Un tiers des maîtres acceptent une formulation incorrecte pour des élèves qui ne connaissent que les entiers alors qu'ils ne l'acceptent pas pour eux-mêmes (TA, TB). On peut supposer que cette acceptation n'est que provisoire.

Conséquences :

Si les élèves apprennent en primaire que deux entiers dans un rapport multiple sont proportionnels, en lycée, ils en inféreront que deux réels sont toujours proportionnels ; or une telle proportionnalité ne discrimine plus rien.

Il semble qu'il y ait un écart entre les savoirs déclarés et les pratiques effectives ; les analyses de données laissent croire à leur indépendance. Les maîtres disent connaître en moyenne 12 expressions correctes sur les 19 proposées à la page 4 (soit 63%) et souhaitent en enseigner 8 (soit 42%). Mais la présente étude montre qu'ils ont parfois des difficultés à les employer à bon escient. Nous avons eu l'occasion de le vérifier à propos de : rapport, coefficient de proportionnalité, quotient exact, quotient entier, quatrième proportionnelle, fraction, règle, opérateur...

Bien que les analyses de données fassent apparaître quelques oppositions entre variables, on ne peut pas affirmer que les savoirs corrects s'opposent aux conceptions fausses. Les deux conceptions "fausse" et "correcte" de la proportionnalité semblent indépendantes.

Il n'y a pas deux groupes de maîtres : ceux qui "savent" et ceux qui "ne savent pas". Il semble que les maîtres répondent "au coup par coup" se laissant plus ou moins influencer en fonction de leurs connaissances et de l'idée qu'ils se font de l'utilisation de la fiche : introduire ou non le concept de proportionnalité, exploiter ou non les touches de la Galaxy 9.

Conséquences :

Les analyses de données n'ayant pas fait apparaître d'opposition entre savoirs corrects et conceptions fausses, entre les maîtres qui savent et ceux qui ne savent pas, on peut inférer les hypothèses suivantes :

Les maîtres ne peuvent pas corriger et réguler d'eux-mêmes leur enseignement.

Ce que les maîtres enseignent ne dépend pas seulement de ce qu'ils ont appris.

Conclusion et nouvelles questions

Si les fréquences d'erreurs sont moindres que celles relevées lors du concours de professeurs des écoles de Bordeaux de 1995, elles restent importantes.

Les analyses et résultats précédents suggèrent plusieurs questions.

L'écrit faisant autorité, la présence d'une fiche influence-t-elle les enseignants ?

Les questions sont-elles suffisamment explicites ? Leur formulation ne permet pas toujours une interprétation objective des réponses.

L'échantillon, 15 maîtres seulement, est-il représentatif ?

Autant d'incertitudes qui justifient une nouvelle enquête. Au préalable, il est nécessaire de répertorier les différents savoirs et connaissances qui ont cours dans la scolarité obligatoire et les erreurs éventuelles qui les accompagnent.

Le questionnaire aura pour objet de mettre à jour les différentes connaissances et conceptions des maîtres sur la proportionnalité et sur les nombres et d'apporter des réponses aux questions suivantes :

Quelles relations y a-t-il entre ces deux champs de savoirs ?

Quel est l'écart entre les pratiques et les savoirs déclarés ?

Quel est le rapport entre connaissances privées et connaissances à enseigner ?

1-2-3 Analyse a priori pour la construction du questionnaire

Les résultats précédents nous enjoignent de faire l'hypothèse suivante :

Les maîtres ne disposent plus de termes précis pour décrire les notions de « rapport », de « proportionnalité » et les pratiques qui les incluent. Il en résulte une grande ambiguïté dans l'usage qu'ils font de certains termes comme « proportion, rapport, proportionnalité, coefficient de proportionnalité, fraction, ... » allant jusqu'à des confusions dans les concepts.

Description des savoirs et connaissances scolaires

Avant de construire un nouveau questionnaire à destination des maîtres du primaire nous nous proposons de répertorier différentes connaissances qui contribuent à l'environnement mathématique de la proportionnalité dans la scolarité obligatoire et nous essayons d'imaginer les erreurs que peuvent engendrer leurs utilisations compte tenu de cette hypothèse.

NOMBRES et OPERATIONS

| Connaissances évoquées par l'objet | Erreurs éventuelles |
|---|--|
| Un seul nombre | |
| <u>nombre concret</u> : Mesure avec unité, c'est un scalaire. Mesure approchée. Rapport de deux grandeurs. | Toute mesure est décimale. Toute mesure est un entier à un changement d'unité près. Tout rapport est une proportion. |
| <u>nombre abstrait</u> : Représentant d'une classe d'équivalence. Opérateur. Rapport de deux nombres. Résultat d'une opération. | Coefficient de proportionnalité pour rapport. Règle pour rapport. |
| <u>dans \mathbb{N} : un seul nombre entier</u> Ordinal, cardinal, rapport. Pair, impair, premier. Critères de divisibilité : par 2, 3, 5, 9. Décomposition en produit de facteurs premiers. | « Nombre irréductible » pour « nombre premier ». Un entier est un coefficient de proportionnalité. |
| <u>dans \mathbb{D} : un seul nombre décimal</u> Ecriture décimale d'un décimal. Ecriture fractionnaire d'un décimal. Fraction décimale. Critères de divisibilité dans \mathbb{D} . Tout décimal est divisible par 2 et 5. Tout décimal est rationnel. Tout réel admet une approximation décimale. | Les décimaux sont les entiers à un changement d'unité près ($\mathbb{D}_n = \mathbb{D}$). Il existe des nombres premiers dans \mathbb{D} . Tout nombre admet une écriture décimale. Confusion entre décimal et développement décimal illimité ($3,99\dots \neq 4$). |

| | |
|---|---|
| <p><u>dans \mathbb{Q} : un seul nombre rationnel</u> Une fraction est :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Un nombre. • Une écriture du rapport de deux entiers. <p>Fraction irréductible. Fraction simplifiable. Fraction entière.</p> <p>Fraction décimale : $\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$.</p> <p>Fraction non décimale : $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.</p> <p>Fractions équivalentes. Une fraction représente un rationnel. Un rationnel est une classe d'équivalence de fractions. Tout rationnel peut-être représenté par une fraction. Une fraction est une écriture du quotient exact de deux entiers. Tout rationnel est la limite d'une suite de décimaux Tout rationnel admet une écriture décimale périodique illimitée.</p> | <p>Toute écriture d'un rationnel est une écriture fractionnaire donc une fraction :</p> $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \frac{0,7}{0,3} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{300}$ $= \frac{233}{100} + \frac{1}{300} = 2,3\overline{3}\dots$ <p>Tout nombre fractionnaire admet une écriture décimale, exemple : $\frac{7}{3} = 2,33$.</p> <p>Tout rationnel est décimal ou « ensemble des rationnels » = « ensemble des décimaux ». Le quotient de deux décimaux est une fraction. Toute fraction est simplifiable. Une fraction est entièrement simplifiable si elle représente un entier. Tout nombre admet une écriture fractionnaire, exemple : $\pi = \frac{22}{7}$.</p> <p>Tout rapport peut s'écrire sous forme d'une fraction, exemple : $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ est une fraction. Tout rapport est une fraction. Toute fraction est une proportion.</p> |
| Deux nombres | |
| <p>Paire, couple, rapport. 2 nombres admettent deux rapports.</p> | <p>Deux nombres sont proportionnels.</p> |
| <p><u>Dans \mathbb{N} : deux nombres entiers</u> Multiple, diviseur d'un entier. 54 est un multiple de 6 (et de 9) 6 (ou 9) est un diviseur de 54. Le rapport de deux entiers est un rationnel.</p> | <p>Nombres proportionnels pour nombres dans un rapport entier, exemple : 54 et 9 sont proportionnels, leur coefficient de proportionnalité est 6. Tout quotient de deux entiers est un décimal.</p> |
| <p><u>Dans \mathbb{D} : deux nombres décimaux</u> 20 est un multiple de 8 et de 2,5 8 et 2,5 sont des diviseurs de 20 dans \mathbb{D}. Le quotient de deux décimaux peut être :</p> <p>Décimal, exemple : $\frac{3,9}{1,2}$</p> <p>ou non décimal, exemple : $\frac{5,24}{2,1}$</p> | <p>Deux décimaux sont proportionnels :</p> <ul style="list-style-type: none"> • s'ils sont dans un rapport entier : 20 et 2,5 sont proportionnels, leur coefficient de proportionnalité est 8. • si le quotient de l'un par l'autre est décimal : 20 et 8 sont proportionnels, leur coefficient de proportionnalité est 2,5. • Toujours. <p>Tout quotient de deux décimaux est un décimal. Tout quotient d'un décimal par un entier est un décimal, exemple : $\frac{5,6}{6} \in \mathbb{D}$.</p> |

| | |
|---|---|
| <p><u>Dans \mathbb{Q} : deux nombres rationnels</u> Le rapport de deux rationnels est un rationnel. \mathbb{Q} est le corps des fractions de \mathbb{D}.</p> | <p>Le rapport de deux fractions est une proportion. Deux fractions sont toujours proportionnelles car leur rapport est une fraction.</p> |
| Trois nombres | |
| <p>Proportion continue (arithmétique ou géométrique) Application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} et opérations.</p> | |
| <p><u>Dans \mathbb{N} : trois nombres entiers</u> PGCD(60;84) = 12 PPCM(60;84) = 420 Division euclidienne, 31 4 dividende, diviseur, 3 — quotient, reste. 7 $31 \div 4 = 7$ reste 3 Quotient exact : 28 4 4 est un diviseur de 0 — 28. 7</p> | <p>Le PGCD de deux nombres premiers entre eux n'existe pas. PPCM(60;84) = 5040 Confusion entre dividende, diviseur, quotient. Dans $31 \div 4 = 7$, 7 est le quotient exact, 4 est un diviseur de 31.</p> |
| <p><u>Dans \mathbb{D} : trois nombres décimaux</u> division exacte quotient exact 31,00 4 $31 = 4 \times 7,75$ 30 — $31 : 4 = 7,75$ 20 7,75 0 division avec 56 6 décimale 20 — quotient approché 020 9,33 2 $56 : 6 \approx 9,33$ 9,33 est le quotient décimal approché de 56 par 6 à 0,01 près</p> | <p>$31 : 4 = 7$. 31 et 4 sont proportionnels. 6 divise 56. 56 et 6 sont proportionnels. $56 : 6 = 9,33$ 9,33 est le quotient exact.</p> |
| <p><u>Dans \mathbb{Q} : trois nombres rationnels</u> Somme, différence, produit, quotient de deux fractions peuvent être représentés par une fraction. $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$ est un rationnel. Le quotient exact existe toujours.</p> | <p>$\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$ est une proportion.</p> |
| Quatre nombres | |
| <p>(3, 5, 11, 13) détermine une proportion arithmétique (8, 16, 12, 24) détermine une proportion géométrique</p> | <p>Un birapport est une proportion. Quatre nombres déterminent une proportion.</p> |

| | | | | | |
|---|--|----|----|----|--|
| <table border="1"> <tr> <td>8</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>24</td> </tr> </table> est un tableau de proportionnalité | 8 | 12 | 16 | 24 | |
| 8 | 12 | | | | |
| 16 | 24 | | | | |
| <p><u>Dans \mathbb{N} : quatre nombres entiers</u> $3 \cdot 5 :: 11 \cdot 13$ ou $5 - 3 = 13 - 11$ $8 : 16 :: 12 : 24$ ou $\frac{16}{8} = \frac{24}{12}$ $\frac{8}{16} = \frac{12}{24} \Leftrightarrow \frac{8}{12} = \frac{16}{24}$</p> <p>quatrième proportionnelle : $\frac{8}{16} = \frac{12}{x} ; x = \frac{12 \times 16}{8}$</p> | <p>$8 : 16 :: 12 : 24$ est la même proportion que $8 : 12 :: 16 : 24$.</p> <p>Trois entiers sont toujours trois termes d'une proportion où ne figurent que des entiers.</p> | | | | |
| <p><u>Dans \mathbb{D} : quatre nombres décimaux</u> Même situations que dans \mathbb{N}.</p> | | | | | |
| <p><u>Dans \mathbb{Q} : quatre nombres rationnels</u> Trois rationnels peuvent toujours être considérés comme trois termes d'une proportion.</p> | | | | | |
| Plus de quatre nombres dans $\mathbb{N}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. | | | | | |
| <p>Suites aléatoires Suites récurrentes (arithmétique, géométrique, ...) Deux (ou plusieurs) suites proportionnelles ou non proportionnelles. Tableaux de proportionnalité ou de non-proportionnalité. Graphe d'une fonction.</p> | <p>Deux suites d'entiers sont proportionnelles si les nombres homologues sont dans un rapport entier. Un tableau est de proportionnalité pourvu que les nombres homologues soient dans un rapport entier.</p> | | | | |

RAPPORTS et PROPORTIONS

| Connaissances évoquées par l'objet | Erreurs éventuelles |
|--|--|
| Rapports | |
| <p>Si A et B sont deux grandeurs de même nature, le rapport de A à B est le nombre qui mesure A si on prend B pour unité.</p> <p>Il existe des rapports entiers, des rapports commensurables (rationnels) et des rapports incommensurables.</p> <p>Le rapport de deux grandeurs mesurables est égal au rapport de leurs mesures.</p> | <p>Le rapport de deux grandeurs n'existe pas. On ne peut pas évaluer le rapport de deux grandeurs sans leurs mesures.</p> <p>Le rapport de deux grandeurs peut toujours être représenté par une fraction.</p> <p>L'écriture d'un rapport est une fraction.</p> <p>Un rapport est un coefficient de proportionnalité.</p> |

| | |
|--|---|
| Deux nombres (ou deux grandeurs) ont deux rapports. Le quotient de la division de deux nombres est un de ces rapports. | |
| Proportion | |
| Quatre grandeurs (ou quatre nombres) sont en proportion lorsque le rapport des deux premières (ou premiers) est égal au rapport des deux autres. | Une proportion est un rapport. Quatre grandeurs sont toujours en proportion. |

GRANDEURS et MESURES

| Connaissances évoquées par l'objet | Erreurs éventuelles |
|---|--|
| <p>Une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.</p> <p>Une mesure de grandeur est une fonction additive d'un domaine de grandeurs dans \mathbb{R}^+.</p> <p>Deux grandeurs de même nature sont commensurables quand elles ont une commune mesure contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles.</p> <p>Il existe des grandeurs incommensurables ; par exemple la diagonale d'un carré et son côté.</p> | <p>La mesure d'une grandeur est toujours un entier.</p> <p>La mesure d'une grandeur est toujours un rationnel.</p> <p>Deux grandeurs sont toujours commensurables.</p> |

PROPORTIONNALITE

| Connaissances évoquées par l'objet | Erreurs éventuelles |
|---|--|
| <p>Deux grandeurs variables (ou domaines de grandeurs) sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments d'une même grandeur est égal au rapport entre les éléments correspondants de l'autre grandeur.</p> <p>Deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si la correspondance entre leurs mesures est une fonction linéaire.</p> <p>Si deux grandeurs sont proportionnelles toute suite de mesures de l'une d'entre elles est proportionnelle à la suite des mesures correspondantes de l'autre.</p> <p>Si deux grandeurs sont proportionnelles tout tableau de mesures en correspondance est un tableau de proportionnalité.</p> | <p>Deux grandeurs ne peuvent pas être proportionnelles.</p> <p>Deux grandeurs sont toujours proportionnelles.</p> <p>Deux nombres sont proportionnels.</p> <p>Deux grandeurs sont proportionnelles si toute variation de l'une entraîne une variation de l'autre.</p> <p>Deux suites de nombres entiers sont proportionnelles si les rapports des nombres homologues sont dans un rapport entier.</p> <p>Un tableau de couples d'entiers dans des rapports entiers est un tableau de proportionnalité.</p> |

Les questions et conjectures

Le tableau suivant met en correspondance les conjectures qui sont à l'origine du questionnaire avec les noms des variables (des questions) susceptibles de les confirmer ou infirmer.

| GRANDEURS, PROPORTIONNALITE et RAPPORTS Quels sont les savoirs des maîtres sur la proportionnalité et les rapports ? | | VARIABLES du QUESTIONNAIRE concernées |
|---|--|--|
| Q1 | Certains maîtres n'utilisent pas le concept de grandeurs proportionnelles. | RP1, RP2, RP3 |
| Q2 | Certains maîtres ne connaissent pas les concepts de rapport de deux grandeurs ou de deux nombres. | DP11, LR3, LR1/3, MR9, MR1/3, NF7, ND7, NR7, RP6 |
| Q3 | Certains maîtres ne « savent » pas ce qu'est une proportion. | J1, P, RP5 |
| Q4 | Certains maîtres n'utilisent pas le concept de « rapport » pour exprimer que deux grandeurs sont proportionnelles : « Deux grandeurs sont proportionnelles si leur rapport est constant. » | RP6, RP7 |
| Q5 | Certains maîtres ne « savent » pas qu'une fonction linéaire peut modéliser une situation de proportionnalité. | RP4 |
| Q6 | Pour certains maîtres, une fonction linéaire « n'engendre » pas un tableau de proportionnalité. | Q |
| Q7 | Il ne reste plus que le « tableau de proportionnalité » à la disposition des maîtres, « méthode des proportions , méthode de réduction à l'unité, fonction linéaire » ont disparu. | MP, MRU, FL, TP |

| NOMBRES et OPERATIONS Quels sont les savoirs des maîtres sur les nombres et leurs structures ? | | |
|---|---|--------------------------------|
| Q8 | Certains maîtres ne distinguent pas le quotient exact du quotient euclidien. | AX, AU, E1, E4 |
| Q9 | Certains maîtres confondent fraction (rapport de deux entiers) et rapport de deux décimaux. | DP11, G2 |
| Q10 | Certains maîtres confondent les rationnels et les décimaux. | E4, F2, F3, G1, G4, G5, H2, H3 |
| Q11 | Certains maîtres confondent les mots « multiple » et « diviseur ». | BD, BM, I1, I2 |
| Q12 | Certains maîtres ne « savent » pas décomposer un nombre entier naturel en produit de facteurs premiers. | BF |
| Q13 | Certains maîtres ne connaissent pas le concept de « nombres premiers entre eux ». | C1 |
| Q14 | Certains maîtres ne reconnaissent pas une fraction simplifiable ou irréductible. | C2, C3, DP7, DP8 |
| Q15 | Certains maîtres disent qu'une fraction est simplifiable si elle représente un entier. | DP7, DP8, DP12 |

| | | |
|---|--|--|
| VOCABULAIRE | | |
| De quels mots disposent les maîtres pour désigner les objets qu'ils manipulent ? | | |
| Il semble que les maîtres empruntent au vocabulaire de la proportionnalité. | | |
| Q16 | Ils utilisent le mot « proportion » pour « rapport ». | J1, RP5 |
| Q17 | Certains disent que deux nombres dans un « rapport multiple » sont « proportionnels ». | DP4, DP9, I3, LU, LV, MN, NF2 |
| Q18 | Certains maîtres disent « coefficient de proportionnalité » pour « rapport ». | DP5, LP2, LP6, LP1/2, MP9, MP3, MP5, MP1/5, NF4, RP7 |
| Q19 | Certains maîtres utilisent le mot « fraction » à la place du mot « rapport ». | DP11, G2 |

| | | |
|---|--|---|
| Les maîtres disposent-ils de vocabulaire pour décrire et expliquer l'environnement d'un tableau. | | |
| Q20 | Ils empruntent au vocabulaire de la proportionnalité pour décrire un tableau. | LP2, LP6, LP1/2, LU, MP9, MP5, MR9, MR5, MN, NF2, NF4 |
| Q21 | Le vocabulaire manque pour distinguer les tableaux de proportionnalité et de non-proportionnalité. | LT, MT, NF2, NF4, NF7, NF8 |
| Q22 | Pour certains maîtres le tableau évoque une situation de proportionnalité | K4 |
| Q23 | Pour certains maîtres le tableau permet d'expliquer les propriétés de la proportionnalité. | K1 |

| | | |
|--|---|--|
| L'environnement a-t-il une influence sur l'utilisation du vocabulaire ? | | |
| Q24 | En présence d'un tableau certains maîtres se croient autorisés à utiliser le vocabulaire de la proportionnalité. Ils disent : | |
| | « nombres proportionnels » pour « nombres en correspondance dans un tableau » | LU, LV, MN, NF2, DP4, DP9, I3 |
| | « coefficient de proportionnalité » pour « rapport ». | DP5, LP2, LP6, LP3/2, LP1/2, MP9, MP3, MP5, MP1/3, MP1/5, NF4, RP7 |
| | « tableau de proportionnalité » pour « tableau de couples d'entiers dans un rapport multiple ». | MT |
| Q25 | Pour les élèves de CE, CM1 qui ne connaissent que les rapports entiers les maîtres acceptent de dire qu'un « coefficient de proportionnalité est un entier ». | DP10, DE10 |

| L'idéologie a-t-elle une influence sur les choix de vocabulaire ? | | |
|--|---|--|
| Q26 | Les maîtres ont le souci de ne pas surcharger les phrases avec un vocabulaire qui n'appartient pas au langage courant : <ul style="list-style-type: none"> à la place de « rapport » ils disent « règle » ou « fraction » ou « coefficient de proportionnalité » pour dire que deux nombres sont « multiples l'un de l'autre » ils disent que ces deux nombres sont « proportionnels ». | DP3, DP4, DP5, DP9, DP11, G2, I3, LP2, LP1/2, LU, LV, MP9, MP3, MP1/3, MP1/5, MN, NF2, NF4, NF8, RP7 |
| Q27 | Certains maîtres ont le souci d'exclure les termes passés de mode, qu'ils appartiennent à l'arithmétique ancienne ou au vocabulaire ensembliste tels que « rapport », « grandeur », « fonction linéaire », « variable ». | RP1, RP2, RP3, RP4 |
| Q28 | Enfin certains maîtres acceptent les formulations incorrectes (des élèves) et les conceptions fausses qui en résultent. | |

| INTERACTIONS. | | |
|--|--|--|
| Parcellisation ou indépendance. | | |
| Q30 | Certains maîtres ne « savent » pas utiliser les « rapports » pour vérifier la proportionnalité. | J1, J2, LS, MS, NR3, NR7 |
| Q31 | Les connaissances sur « fractions », « proportionnalité en arithmétique », « fonction linéaire » sont indépendantes. | DP11, G4, G5, H1, H2, J2, LR3, LR1/3, LS, LT, MR9, MR1/3, MT, ND3, ND7, O, P, Q, RP1, RP4 |
| Q32 | Les conceptions correctes et les conceptions fausses sur la proportionnalité sont indépendantes. | DP4, DP5, DP9, DP10, I3, J1, J2, LP1/3, LP6, LU, LV, LS, LT, MP9, MP5, MN, MT, NF2, NR3, NR7, O, P, Q, RP1, RP2, RP3, RP4, RP5 |

| Opposition | | |
|-------------------|---|---|
| Q33 | Les savoirs corrects sur « multiple, diviseur, quotient exact, quotient euclidien » s'opposent aux conceptions fausses sur « nombres proportionnels, coefficient de proportionnalité » pour les entiers dans un rapport multiple. | AU, BC, BF, C1, DP6, E1, E4, DP4, DP9, DP10, F2, I3, LP2, LU, LV, MN, MP9, NF2, NF4 |
| Q34 | Les savoirs sur « diviseur commun, multiple commun, nombres premiers entre eux » s'opposent aux conceptions fausses telles que : « rapport = fraction », « fraction simplifiable = fraction entière », « décimaux = rationnels » | BC, BF, C1, C2, DP6, DP8, DP11, DP12, G2, G5, H2, ND6, NF6 |

1-2-4 L'enquête : hypothèses et résultats.

Le questionnaire (février 1997)

Fréquences des réponses en pourcentages. Nombre de réponses : 38.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|---|---|--|-------|----|---|---|---|----------|--|--|--|--|-------------|--|--|--|--|-------------|--|--|--|--|--------------|--|--|--|--|--|
| A | Cochez les cases de votre choix : | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $\begin{array}{r} 31 \overline{) 4} \\ 3 \text{ ---} \\ 7 \end{array}$ L'opération ci-dessus est une : division exacte division euclidienne | OUI 11 NON 79 ? 11 OUI 82 NON 3 ? 16 | <table border="1"> <tr> <td>est ↙</td> <td>31</td> <td>4</td> <td>7</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>le reste</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>le diviseur</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>le quotient</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>le dividende</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> | est ↙ | 31 | 4 | 7 | 3 | le reste | | | | | le diviseur | | | | | le quotient | | | | | le dividende | | | | | |
| est ↙ | 31 | 4 | 7 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| le reste | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| le diviseur | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| le quotient | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| le dividende | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| AX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| AU | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | |
|---------------------|--|------------------------|------------------------------------|
| B BD BM BC BF | Donnez, lorsque cela est possible : | | |
| | un diviseur de 12 : 97 | un multiple de 25 : 95 | un diviseur commun à 12 et 25 : 55 |
| | une décomposition de 30 en produit de facteurs premiers : 82 | | |

| | | | | |
|---------------------|--|---------|---------|-------------------|
| C C1 C2 C3 | Pour chacune des affirmations suivantes cochez la case de votre choix : | | | |
| | Les nombres 12 et 25 sont premiers entre eux. | VRAI 68 | FAUX 13 | JE NE SAIS PAS 18 |
| | La fraction $\frac{12}{25}$ est irréductible. | VRAI 92 | FAUX 5 | JE NE SAIS PAS 3 |
| | La fraction $\frac{25}{12}$ est irréductible. | VRAI 92 | FAUX 3 | JE NE SAIS PAS 5 |

| D | Les déclarations suivantes (issues d'une enquête préalable) sont-elles acceptables : | pour le professeur | de la part d'élèves qui ne connaissent que les entiers |
|-----------|---|-----------------------|---|
| DP1 DE1 | "Le quotient de 54 par 9 est 6." | OUI 92 NON 3 | OUI 84 NON 3 |
| DP2 DE2 | "54 est un multiple de 9." | OUI 97 NON 0 | OUI 92 NON 0 |
| DP3 DE3 | "6 est la règle qui permet de passer de 9 à 54." | OUI 32 NON 58 | OUI 29 NON 50 |
| DP4 DE4 | "54 et 9 sont proportionnels." | OUI 55 NON 29 | OUI 42 NON 32 |
| DP5 DE5 | "6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54." | OUI 66 NON 21 | OUI 21 NON 50 |
| DP6 DE6 | "54 est le plus petit multiple commun à 6 et 9." | OUI 32 NON 63 | OUI 32 NON 50 |
| DP7 DE7 | "La fraction $\frac{54}{9}$ est simplifiable." | OUI 92 NON 3 | OUI 66 NON 13 |
| DP8 DE8 | "La fraction $\frac{9}{54}$ est simplifiable." | OUI 89 NON 5 | OUI 53 NON 26 |
| DP9 DE9 | "Quand le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels est nul, ces deux nombres sont proportionnels." | OUI 63 NON 26 | OUI 24 NON 47 |
| DP10 DE10 | "Un coefficient de proportionnalité est un entier." | OUI 16 NON 76 | OUI 37 NON 37 |
| DP11 DE11 | "Un rapport peut toujours être représenté par une fraction." | OUI 79 NON 11 | OUI 39 NON 32 |
| DP12 DE12 | "Une fraction est simplifiable si elle représente un entier." | OUI 32 NON 63 | OUI 34 NON 37 |

| | | | | |
|------------------|--|----|-----------------|----|
| E E1 E2 E3 E4 | Cochez les égalités correctes du point de vue mathématique: | | | |
| | $57 \div 6 = 9$ | 18 | $54 : 6 = 9$ | 97 |
| | $57 : 6 = 9,5$ | 89 | $56 : 6 = 9,33$ | 18 |

Fréquences des réponses en pourcentages.

Nombre de réponses : 38.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---|---------|--------------------------------|-------------------|---------------|---------------|----|---|--|--|--|--|--|---|---|---|---------------|---------------|---------------|------------------------------------|----|----|----|----|---|----|------------|----|---|---|----|----|----|-------------|----|---|---|----|---|---|
| F | Dans chacun des trois cas suivants, cochez la case si l'affirmation vous paraît juste : | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| F1 F2 F3 | Dans l'ensemble des décimaux, tout décimal est divisible : | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | par 10 | 97 | par 5 | 45 | par 3 | 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| G | Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case de votre choix : | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| G1 | $\frac{0,7}{0,5}$ est un nombre décimal. | VRAI 74 | FAUX 11 | JE NE SAIS PAS 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| G2 | $\frac{0,7}{0,5}$ est une fraction. | VRAI 53 | FAUX 29 | JE NE SAIS PAS 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| G3 | $\frac{7}{5}$ est une fraction décimale. | VRAI 61 | FAUX 26 | JE NE SAIS PAS 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| G4 | $\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel. | VRAI 42 | FAUX 11 | JE NE SAIS PAS 45 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| G5 | $\frac{5}{7}$ est un nombre décimal. | VRAI 50 | FAUX 37 | JE NE SAIS PAS 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| H | Le quotient de deux fractions (non nulles) peut toujours s'écrire avec une fraction. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| H1 | | VRAI 66 | FAUX 8 | JE NE SAIS PAS 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| H2 | Tout rationnel est décimal. | VRAI 11 | FAUX 47 | JE NE SAIS PAS 39 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| H3 | Tout décimal est rationnel. | VRAI 39 | FAUX 18 | JE NE SAIS PAS 39 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I | Si une fraction représente un entier alors : | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I1 | • le numérateur est un multiple du dénominateur. | VRAI 95 | FAUX 3 | JE NE SAIS PAS 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I2 | • le numérateur est un diviseur du dénominateur. | VRAI 13 | FAUX 82 | JE NE SAIS PAS 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I3 | • le numérateur et le dénominateur sont proportionnels. | VRAI 63 | FAUX 18 | JE NE SAIS PAS 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables : | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J1 | $\frac{4}{6}, \frac{18}{27}$ et $\frac{14}{21}$ déterminent la même proportion." | OUI 76 | NON 13 | JE NE SAIS PAS 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J2 | "Les suites (4, 18, 14) et (6, 27, 21) sont proportionnelles." | OUI 53 | NON 24 | JE NE SAIS PAS 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | Quels avantages trouvez-vous à utiliser un tableau ? | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Classez les réponses par ordre de priorité en inscrivant un numéro d'ordre dans la case correspondante. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K1 K2 | Il permet d'expliquer la proportionnalité. | 26 | Il facilite les calculs. | 42 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K3 K4 | Il permet de renvoyer les unités en tête de liste. | 18 | Il évoque la proportionnalité. | 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| L | Cochez les cases de votre choix: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr> <td>8</td> <td>12</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>24</td> <td>36</td> <td>48</td> </tr> </table> | 8 | 12 | 16 | 24 | 36 | 48 | <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr> <td>Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est :</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>6</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>$\frac{3}{2}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> </tr> <tr> <td>un coefficient de proportionnalité</td> <td>79</td> <td>18</td> <td>11</td> <td>37</td> <td>8</td> <td>11</td> </tr> <tr> <td>un rapport</td> <td>11</td> <td>3</td> <td>0</td> <td>50</td> <td>18</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>un quotient</td> <td>29</td> <td>5</td> <td>3</td> <td>16</td> <td>8</td> <td>5</td> </tr> </table> | | | | | Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est : | 3 | 2 | 6 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | un coefficient de proportionnalité | 79 | 18 | 11 | 37 | 8 | 11 | un rapport | 11 | 3 | 0 | 50 | 18 | 16 | un quotient | 29 | 5 | 3 | 16 | 8 | 5 |
| 8 | 12 | 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 36 | 48 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est : | 3 | 2 | 6 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| un coefficient de proportionnalité | 79 | 18 | 11 | 37 | 8 | 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| un rapport | 11 | 3 | 0 | 50 | 18 | 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| un quotient | 29 | 5 | 3 | 16 | 8 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| LPi | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables ? | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| LRi | "Les suites (8, 12, 16) et (24, 36, 48) sont proportionnelles" | OUI 74 | NON 8 | JE NE SAIS PAS 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| LQi | "Le tableau est de proportionnalité." | OUI 71 | NON 5 | JE NE SAIS PAS 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| LS | "Les deux nombres 8 et 24 sont proportionnels." | OUI 53 | NON 26 | JE NE SAIS PAS 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| LT | "Les deux nombres 8 et 12 sont proportionnels." | OUI 13 | NON 79 | JE NE SAIS PAS 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| LU | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| LV | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Fréquences des réponses en pourcentages.

Nombre de réponses : 38.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|--|-----|-----|---------------|---------------|--------------------------|----|-----|-----|--|--|--|---|---|---|---------------|---------------|
| M | Cochez les cases de votre choix: | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <table border="1"> <tr><td>7</td><td>35</td><td>31</td></tr> <tr><td>63</td><td>105</td><td>248</td></tr> </table> | | | 7 | 35 | 31 | 63 | 105 | 248 | Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est : | | | 9 | 3 | 5 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ |
| | 7 | 35 | 31 | | | | | | | | | | | | | | |
| | 63 | 105 | 248 | | | | | | | | | | | | | | |
| | un coefficient de proportionnalité | | | 29 | 13 | 8 | 3 | 5 | | | | | | | | | |
| un rapport | | | 16 | 5 | 5 | 18 | 16 | | | | | | | | | | |
| un quotient | | | 13 | 8 | 3 | 13 | 8 | | | | | | | | | | |
| MPi | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables ? | | | | | | | | | | | | | | | | |
| MRi | "Les deux nombres 7 et 63 sont proportionnels." | | | OUI 47 | NON 26 | JE NE SAIS PAS 13 | | | | | | | | | | | |
| MQi | "Le tableau est de proportionnalité." | | | OUI 5 | NON 66 | JE NE SAIS PAS 13 | | | | | | | | | | | |
| MN | "Les suites (7, 35, 31) et (63, 105, 248) sont | | | | | | | | | | | | | | | | |
| MT | proportionnelles." | | | OUI 3 | NON 71 | JE NE SAIS PAS 16 | | | | | | | | | | | |
| MS | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | |
|--------------------|--|---|----------------------|----------------------|----------------------|---|----|---|---|--|--|--|
| N | <table border="1"> <tr><td>7</td><td>1,5</td><td>3</td></tr> <tr><td>21</td><td>6</td><td>7</td></tr> </table> | | | 7 | 1,5 | 3 | 21 | 6 | 7 | Des élèves expliquent pourquoi le tableau ci-contre n'est pas de proportionnalité. Pour chacune de leurs déclarations, cochez les cases qui conviennent : | | |
| | 7 | 1,5 | 3 | | | | | | | | | |
| | 21 | 6 | 7 | | | | | | | | | |
| | | déclaration vraie | formulation correcte | raison suffisante | | | | | | | | |
| | ND1 NF1 NR1 | "1,5 n'est pas entier. " | OUI 63 NON 3 | OUI 39 NON 5 | OUI 13 NON 26 | | | | | | | |
| | ND2 NF2 NR2 | "3 et 7 ne sont pas proportionnels. " | OUI 58 NON 8 | OUI 37 NON 13 | OUI 37 NON 11 | | | | | | | |
| | ND3 NF3 NR3 | $\frac{7}{21} \neq \frac{1,5}{6}$." | OUI 66 NON 5 | OUI 45 NON 11 | OUI 53 NON 3 | | | | | | | |
| | ND4 NF4 NR4 | "1,5 et 3 n'ont pas le même coefficient de proportionnalité que 6 et 7. " | OUI 53 NON 3 | OUI 32 NON 13 | OUI 26 NON 13 | | | | | | | |
| | ND5 NF5 NR5 | " $7 \times 7 \neq 3 \times 21$." | OUI 61 NON 0 | OUI 45 NON 0 | OUI 42 NON 8 | | | | | | | |
| ND6 NF6 NR6 | "7 n'est pas un multiple de 3. " | OUI 71 NON 0 | OUI 39 NON 3 | OUI 16 NON 24 | | | | | | | | |
| ND7 NF7 NR7 | "1,5 et 3 n'ont pas le même rapport que 6 et 7." | OUI 53 NON 0 | OUI 26 NON 8 | OUI 29 NON 8 | | | | | | | | |
| ND8 NF8 NR8 | "1,5 et 6 n'obéissent pas à la même règle que 7 et 21." | OUI 47 NON 11 | OUI 21 NON 21 | OUI 39 NON 13 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|----------|---|---|----------------|----------------|--------------------------|------|--|--|--|
| O | Cochez les cases de votre choix: | | | | | | | | |
| | <table border="1"> <tr><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>12</td></tr> </table> | | 3 | 9 | 4 | 12 | Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité. VRAI 84 FAUX 3 JE NE SAIS PAS 0 | | |
| | 3 | 9 | | | | | | | |
| 4 | 12 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| P | $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ est une proportion | | VRAI 47 | FAUX 11 | JE NE SAIS PAS 29 | | | | |
| Q | <table border="1"> <tr><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>f(3)</td><td>f(7)</td></tr> </table> | | 3 | 7 | f(3) | f(7) | Si f désigne une fonction linéaire alors le tableau ci-contre est : un tableau de proportionnalité. VRAI 47 FAUX 11 JE NE SAIS PAS 32 | | |
| | 3 | 7 | | | | | | | |
| f(3) | f(7) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Fréquences des réponses en pourcentages.

Nombre de réponses : 38.

| | | | |
|------------------|---|-------------------------------|----------------------|
| R | Voici un exercice qui a été proposé à des élèves de CM2 : | | |
| | " Pour obtenir 10 kilogrammes de sel marin, il faut faire évaporer 310 litres d'eau de mer. Quelle quantité d'eau de mer faut-il faire évaporer pour obtenir 15 kilogrammes de sel marin ? " | | |
| | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables ? | pour le professeur | pour l'élève |
| RP1 RE1 | "Les grandeurs « sel » et « eau » sont proportionnelles." | OUI 50 NON 32 | OUI 53 NON 16 |
| RP2 RE2 | "Les variables « sel » et « eau » sont proportionnelles." | OUI 55 NON 13 | OUI 29 NON 26 |
| RP3 RE3 | "Le nombre de kilogrammes de sel marin est proportionnel au nombre de litres d'eau de mer." | OUI 74 NON 8 | OUI 63 NON 0 |
| RP4 RE4 | "Il existe une fonction linéaire qui au nombre de kilogrammes de sel marin associe le nombre de litres d'eau de mer." | OUI 74 NON 3 | OUI 24 NON 37 |
| RP5 RE5 | "La proportion de sel dans l'eau est 1 pour 31." | OUI 63 NON 13 | OUI 37 NON 26 |
| RP6 RE6 | "La situation est de proportionnalité : car le rapport des grandeurs « sel » et « eau » est constant." | OUI 58 NON 18 | OUI 37 NON 21 |
| RP7 RE7 | car le coefficient de proportionnalité des grandeurs « sel » et « eau » est constant. " | OUI 61 NON 11 | OUI 29 NON 24 |
| RP8 RE8 | car si le nombre de litres d'eau double ou triple alors le nombre de kilogrammes de sel marin double ou triple." | OUI 71 NON 5 | OUI 58 NON 3 |
| RP9 RE9 | car on peut trouver la réponse avec une règle de trois." | OUI 68 NON 11 | OUI 37 NON 24 |
| RP10 RE10 | car on peut faire un tableau de proportionnalité. " | OUI 74 NON 5 | OUI 58 NON 3 |
| RP11 RE11 | car on décide qu'il en est ainsi." | OUI 11 NON 47 | OUI 16 NON 29 |
| | Si vous aviez à rédiger une solution de l'exercice, que proposeriez-vous à vos élèves ? | | |
| MP | 0 | | |
| MRU | 21 | | |
| FL | 0 | | |
| TP | 34 | | |
| S | A propos de ce questionnaire, pensez-vous : | | |
| SE | que les questions sont en rapport avec votre enseignement ? | OUI 68 NON 21 | |
| SD | que les questions sont trop difficiles ? | OUI 74 NON 11 | |
| SL | que le questionnaire est trop long ? | OUI 58 NON 32 | |
| | Autres suggestions : | | |

RAPPORTS et NOMBRES

Hypothèse:

Le concept de rapport devient déliquescent. La disparition du mot « rapport » rend difficiles les explications qui permettent de différencier la nature des nombres et leurs fonctions dans les différentes situations.

Le mot « rapport » qui véhicule un concept ancien tend à disparaître du vocabulaire scolaire : seulement 26% des maîtres interrogés trouvent la formulation suivante correcte : « 1,5 et 3 n'ont pas le même rapport que 6 et 7 » (NF7) ; 8% ne la trouvent pas correcte, les autres ne se prononcent pas. Par contre ils sont 58% contre 18% à accepter l'expression « rapport de deux grandeurs » (RP6). Peut-on parler du rapport de deux grandeurs sans utiliser le mot « rapport »? Voilà une définition relevée dans un manuel⁵ :

« Deux grandeurs sont proportionnelles si on passe des valeurs numériques exprimant l'une de ces grandeurs à celles exprimant l'autre grandeur en multipliant par un facteur constant ».

On voit les contorsions linguistiques auxquelles s'adonne l'auteur ; pour éviter de parler de mesures de grandeurs il parle de « valeurs numériques exprimant l'une de ces grandeurs » et pour remplacer le mot « rapport » il écrit « si on passe ».

On va voir que l'utilisation du mot « rapport » est influencée par le contexte. Mais, dans certaines conditions, ce mot « rapport » est aussi remplacé par d'autres mots comme « règle », « proportion », « fraction », « coefficient de proportionnalité » ou « quotient ». Or dans certaines situations aucune de ces expressions ne peut le remplacer, pourtant certains maîtres acceptent de le faire, faisant fi malgré eux du sens des mots, au risque d'engendrer des conceptions erronées chez les élèves.

règle (DP3; NF8)

Le mot « règle » fait référence à des contraintes, principes ou lois dans des situations qui se renouvellent dans des conditions semblables.

La règle entre deux nombres d'un couple isolé n'a pas de sens; pourtant 32% des maîtres interrogés trouvent la déclaration suivante acceptable : « 6 est la règle qui permet de passer de 9 à 54 »

Dans la déclaration « 1,5 et 6 n'obéissent pas à la même règle que 7 et 21 », on ne peut pas savoir si « règle » désigne le quotient, la différence ou une autre relation ... Pourtant 21% des maîtres interrogés estiment que cette formulation est correcte.

proportion (J1; RP5; P)

En mathématiques, une proportion est l'égalité de deux rapports, mais plus de la moitié des maîtres interrogés utilisent le mot « proportion » pour désigner un rapport. C'est l'usage qui en est fait dans le langage courant.

76% des maîtres interrogés trouvent la déclaration suivante acceptable : « $\frac{4}{6}, \frac{18}{27}$ et $\frac{14}{21}$ déterminent la même proportion » et 63% acceptent de dire « La proportion de sel dans l'eau

⁵ Durrande 5°; Bordas ; 1987 ; page 250.

de mer est 1 pour 31 ». La polysémie effective du mot « proportion » dans le langage courant ne suffit pas à expliquer l'usage inapproprié du mot en mathématique. La différence entre l'idée de rapport et de proportion est plus subtile qu'il n'y paraît. On va voir quelques explications possibles de cette confusion.

① On confond l'élément et sa classe.

Les pratiques mathématiques modernes conduisent à identifier un élément et la classe à laquelle il appartient en référence à l'ensemble quotient. Par exemple, on confond une droite et sa direction, un bipoint et le vecteur correspondant, une fraction et le rationnel qu'elle représente (à tel point que l'on confond parfois dans les ouvrages scolaires « fractionnaire »

« commensurable » et « rationnel »). Les fractions : « $\frac{4}{6}$, $\frac{18}{27}$ et $\frac{14}{21}$ » déterminent le même

rationnel. Elles appartiennent à la même classe d'équivalence. Mais si on considère ces trois fractions comme trois rapports, ces trois rapports permettent d'écrire trois proportions :

« $\frac{4}{6} = \frac{18}{27}$; $\frac{18}{27} = \frac{14}{21}$; $\frac{14}{21} = \frac{4}{6}$ ». Si on considère deux quelconques de ces trois proportions,

elles ont en commun un « rapport » et les deux autres « rapports » déterminent la troisième proportion. Cette propriété renforce l'idée que ces trois proportions ont quelque chose de

commun : c'est le rapport « $\frac{2}{3}$ » ou « 2 pour 3 » ; et c'est ce « rapport commun » (ou nombre)

que les maîtres évoquent en disant la même « proportion ». Une proportion étant l'égalité de deux rapports, une proportion détermine un rapport. Un rapport ne détermine pas une proportion mais il évoque une « classe de proportions » qui ont ce rapport en commun. Ce n'est pas un hasard si dans le langage familier on utilise le mot « proportion » à la place du mot « rapport ». Le dictionnaire « Le Petit Larousse » donne plusieurs définitions de « proportion » ; entre autres, il distingue la définition "scientifique" : « Rapport ou ensemble de rapports de grandeurs » de la définition "mathématique" : « Egalité de deux rapports ».

② Les proportions ont permis de numériser les raisons incommensurables.

Une proportion est l'égalité de deux rapports et non de deux fractions. D'ailleurs le traitement des proportions est différent du traitement des fractions : pour des fractions on « réduit au même dénominateur », pour des proportions on « fait le produit des extrêmes et le produit des moyens ».

Le rapport de deux grandeurs est une relation de comparaison entre grandeurs ; la proportion est une relation d'égalité entre deux rapports. Le rapport de deux grandeurs n'a pas le statut de nombre indépendamment des grandeurs physiques. La proportion fait justement naître cette idée d'objet commun à deux rapports qu'est le nombre, d'où cette confusion entre rapport et proportion. Cette confusion est maintenant renforcée par le fait qu'on ne considère plus que des rapports numériques considérés eux-mêmes comme des nombres : les quotients. L'égalité de deux rapports est donc perçue comme l'égalité de deux représentants d'un même nombre. La disparition des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques rend obsolète la distinction entre le « rapport relation » et le « rapport nombre ». Dans l'égalité de deux fractions on ne voit plus quatre termes mais deux représentants du même nombre. L'utilisation du signe « = » en tant qu'objet algébrique renforce cette interprétation.

③ Rapports et mesures.

Remarquons qu'une proportion est la comparaison de deux rapports. Pour un objet donné une mesure est déjà un rapport (un scalaire en relation avec une échelle de grandeur) : c'est le rapport de la grandeur considérée dans l'objet à la grandeur unité de même nature.

« La mesure d'une grandeur est le rapport de cette grandeur à l'unité ».⁶

Donc le rapport des mesures de deux grandeurs du même objet est une comparaison de deux rapports scalaires. On appelle alors « proportions » les rapports entre les différentes mesures de grandeurs qui déterminent la forme de l'objet. Chez les Grecs, la divine proportion donnait le nombre d'or, symbole de l'harmonie en architecture.

Si on considère un agrandissement de cet objet, alors les rapports scalaires sont conservés, d'où l'expression « les proportions sont conservées ». Le « rapport d'agrandissement » évoque les proportions que l'on peut écrire en considérant deux grandeurs d'un même objet et les agrandissements correspondants.

④ Si on ajoute à toutes ces explications possibles le fait que la théorie des rapports et proportions a disparu de l'enseignement français depuis 1970, on comprend mieux cette confusion entre « rapport » et « proportion ».

47% des maîtres interrogés disent que « $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ est une proportion », 11% disent que c'est

faux et 29% disent ne pas savoir. Le mot « proportion », s'il ne fait pas référence à une organisation mathématique issue de la théorie des rapports et proportions (objet d'étude mais aussi outil de résolution des exercices sur la proportionnalité) se justifie d'autant moins que

les rapports sont rationnels : « $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ » est l'égalité de deux fractions (de deux nombres). Il faut connaître la théorie des rapports et proportions pour y voir une proportion.

Fraction (DP11, G2)

Une fraction est une notation où figurent deux entiers : le numérateur et le dénominateur séparés par un trait appelé « barre de fraction ».

« Une fraction est une notation qui indique combien une grandeur à mesurer contient de parties aliquotes de l'unité principale. »⁷

Une fraction peut désigner un nombre (rationnel), une mesure ou un rapport de deux entiers (ou de deux grandeurs commensurables), voire un opérateur (composée d'applications).

Une fraction peut être considérée comme un rapport mais tous les rapports ne sont pas des fractions. Pourtant la confusion entre « rapport » et « fraction » est fréquente ; 79% des maîtres interrogés acceptent l'affirmation : « Un rapport peut toujours être représenté par une fraction ». On peut y voir un obstacle épistémologique, les premiers rapports étudiés étant des rapports d'entiers. On peut aussi soupçonner une autre origine en relation avec l'évolution du vocabulaire en cours dans l'enseignement. Jusqu'en 1985 les auteurs de manuels semblaient d'accord pour dire que dans une fraction ne figuraient que des entiers. En introduisant l'expression « écritures fractionnaires » les programmes de 1985 n'ont pas contribué à différencier les deux concepts de fraction et de rapport. Les auteurs de manuels réussissent ce « tour de force » qui consiste à mettre en œuvre les activités sur les « écritures fractionnaires » sans jamais définir cette expression. Ce vocable désigne-t-il une fraction (c'est à dire une écriture avec une « barre de fraction », un numérateur et un dénominateur entiers) ou bien

⁶ H. Schaeffer, J. Lebaile ; Delagrave 1959 ; classe de 6^{ème}.

⁷ Ibidem.

toute écriture d'un rationnel (ce qui expliquerait que 53% des maîtres interrogés acceptent l'affirmation : « $\frac{0,7}{0,5}$ est une fraction ») ou bien encore toute écriture où figure une « barre de fraction » (comme $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$). Cette dernière acception de l'expression « écriture fractionnaire » expliquerait que 79% des maîtres interrogés souscrivent à la déclaration « Un rapport peut toujours être représenté par une fraction ». On peut encore poursuivre l'investigation des différentes écritures qui auraient qualité à être des « écritures fractionnaires » : les écritures décimales, les écritures telles que $2\frac{1}{3}$ ou $2 + \frac{1}{3}$, etc. ...

On peut soupçonner ici une réaction excessive à l'égard des structures enseignées dans les années soixante-dix. Il n'est plus question dans les programmes d'enseigner les différents ensembles de nombres et leurs structures. Mais pourquoi induire des confusions avec des expressions ambiguës là où existent les mots pour différencier les objets ? Est-ce qu'avant 1985 se posait la question de savoir ce qu'est une fraction ? Le langage héritait d'une culture qui garantissait le sens des mots. Les programmes s'inscrivaient dans cette culture qui rendait leur lecture transparente.

Coefficient de proportionnalité (DP5, NF4, NF7, RP6, RP7)

Un « coefficient de proportionnalité » désigne le coefficient d'une application linéaire ou un des rapports constants entre les nombres en correspondance de deux suites proportionnelles (ces deux suites pouvant être deux lignes ou deux colonnes d'un tableau de proportionnalité) ou un des rapports de deux grandeurs proportionnelles; en aucun cas il ne peut désigner le rapport de deux nombres isolés, l'expression « coefficient de proportionnalité » n'étant pas synonyme de « rapport ». Pourtant 66% des maîtres acceptent la déclaration "6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54" (DP5).

Le mot « rapport » ne figure plus dans les programmes du secondaire et n'est plus familier aux maîtres.⁸ Ces derniers vont parfois le remplacer par « coefficient de proportionnalité ». Pour justifier la proportionnalité entre deux grandeurs, 61% des maîtres interrogés déclarent que "le coefficient de proportionnalité de ces deux grandeurs est constant" (RP7). Pour expliquer qu'un tableau n'est pas de proportionnalité, 32% d'entre eux disent que "1,5 et 3 n'ont pas le même coefficient de proportionnalité que 6 et 7" (NF4). Si dans le cas des nombres on peut parler de « quotient » le mot « rapport » semble plus incontournable dans le cas des grandeurs. Si dans tous les cas, l'expression « coefficient de proportionnalité » se substitue au mot « rapport » comment différencier un rapport qui est un coefficient de proportionnalité d'un rapport qui n'en est pas un ? On ne peut pas discriminer une situation de proportionnalité d'une situation de non-proportionnalité en utilisant le vocabulaire de la proportionnalité. Ce sont les situations qui déterminent le choix du vocabulaire ; un rapport peut s'appeler : « coefficient de proportionnalité », « opérateur », « coefficient », « quotient », « multiplicateur », etc. ..., en fonction du rôle qu'il joue dans la situation. Or on va voir que les maîtres ont des difficultés à discriminer les rôles des nombres dans un tableau et à leur attribuer un nom adapté à leur fonction. Pour justifier qu'une situation est de proportionnalité le même maître peut dire que le « coefficient de proportionnalité » des deux grandeurs est constant ou que le « rapport » des deux grandeurs est constant (RP6, RP7). Il en est de même pour les rapports de nombres : le même maître peut dire "1,5 et 3 n'ont pas le même coefficient de proportionnalité que 6 et 7" (NF4) et "1,5 et 3 n'ont pas le même rapport que 6

⁸ Dans l'« Atlas des mathématiques » (Pochothèque 1997) le terme « rapport » apparaît deux fois sans définition.

et 7" (NF7). Cette imprécision de sens attribué aux différents termes peut aboutir à des difficultés de communication et de validation des concepts propres à la proportionnalité.

Quotient, coefficient de proportionnalité, rapport dans un tableau (L, M, N)

Généralement on définit le quotient d'un nombre a par un nombre b non nul comme étant le nombre qui multiplié par b redonne a . La définition de Joseph Bertrand en 1872 ne distinguait pas le quotient de deux nombres de leur rapport : « Le quotient de la division de deux nombres entiers ou fractionnaires se nomme leur rapport ». Il identifie donc le « nombre quotient » avec le « rapport entre le dividende et le diviseur » et prend soin de montrer « qu'il n'y a pas là contradiction avec le discours ».

Par contre il n'y a pas lieu d'appeler « coefficient de proportionnalité » n'importe quel quotient ou rapport.

Le questionnaire étudie l'usage de ces mots à propos de trois tableaux l'un étant de proportionnalité les deux autres non.

| | | | | | | | | | | |
|--|---|--|-------------|--|----|----|---------------|---------------|---------------|----|
| L LPi LRi LQi | Cochez les cases de votre choix: | | | | | | | | | |
| | 8 12 16 | | | Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est : | | | | | | |
| | 24 36 48 | | | 3 | 2 | 6 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| | | | | un coefficient de proportionnalité | 79 | 18 | 11 | 37 | 8 | 11 |
| | | | | un rapport | 11 | 3 | 0 | 50 | 18 | 16 |
| | | | un quotient | 29 | 5 | 3 | 16 | 8 | 5 | |

LP3 : 79% ; **LP2** : 18% ; **LP6** : 11% ; **LP1/3** : 37% ; **LP3/2** : 8% ; **LP1/2** : 11%

La première remarque qu'appellent ces résultats est que tous les nombres proposés ont été appelés « coefficients de proportionnalités », y compris « 6 » par 11% des maîtres.

Les colonnes étant proportionnelles deux à deux on peut concevoir que certains maîtres appellent « coefficient de proportionnalité » les nombres « 2, 1/2, 3/2 », mais pourquoi le nombre « 6 » serait-il un « coefficient de proportionnalité » ?

Un seul maître coche tous les LPi.

79% des maîtres disent que 3 est un coefficient de proportionnalité alors que seulement 37% disent que $\frac{1}{3}$ en est un. Les maîtres choisissent de préférence le coefficient entier.

LP1/3 et LP3 qui caractérisent une conception correcte du coefficient de proportionnalité sont indépendantes des autres LPi qui sont caractéristiques de conceptions fausses. Mais les autres formulations correctes et fausses ne sont pas indépendantes (Les LPi, LRi, LQi sont globalement corrélées, peut-être sous l'influence du tableau). Ce qui laisse entendre que les maîtres ont tendance à faire synonymes les trois expressions: « coefficient de proportionnalité », « rapport », « quotient ».

LR3 : 11% ; **LR2** : 3% ; **LR6** : 0% ; **LR1/3** : 50% ; **LR3/2** : 18% ; **LR1/2** : 16%.

Les fractions évoquent plus fréquemment la notion de rapport que les entiers.

Remarquons que « 6 » n'est jamais coché en tant que rapport alors qu'il l'était en tant que « coefficient de proportionnalité ».

LQ3 : 29% ; **LQ2** : 5% ; **LQ6** : 3% ; **LQ1/3** : 16% ; **LQ3/2** : 8% ; **LQ1/2** : 5%.

Les fréquences des LQi sont globalement inférieures aux autres fréquences. Pour certains maîtres, le mot « quotient » ne ferait pas partie du vocabulaire spécifique du tableau de

proportionnalité? La tendance est : « Les fractions sont des rapports, les entiers des quotients ».

Plus précisément, remarquons que lorsque le nombre est entier il est d'abord perçu comme un « coefficient de proportionnalité » puis comme un « quotient » enfin comme un « rapport » ($LP > LQ > LR$). Par contre si le nombre est une fraction (non entière) alors il est d'abord reconnu comme étant un « rapport » puis un « coefficient de proportionnalité » et enfin un « quotient » ($LR > LP \geq LQ$).

| | | | | | | | | | | |
|--|---|-----|------------------------------------|--|-----------|-----------|---------------|---------------|-----------|-----------|
| M MPi MRi MQi | Cochez les cases de votre choix: | | | | | | | | | |
| | | | | Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est : | | | | | | |
| | | | | 9 | 3 | 5 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | | |
| | 7 | 35 | 31 | 29 | 13 | 8 | 3 | 5 | | |
| 63 | 105 | 248 | un coefficient de proportionnalité | | | 16 | 5 | 5 | 18 | 16 |
| | | | un rapport | | | 13 | 8 | 3 | 13 | 8 |
| | | | un quotient | | | | | | | |

Les maîtres regardent en priorité la première colonne à gauche dans le tableau ce qui explique la différence de fréquence entre MP9 et MP3. Le « rapport scalaire 5 » est plus rarement appelé « coefficient de proportionnalité » que les « rapports fonctionnels 9 et 3 ». Quand le rapport n'est pas entier ($\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$) la fréquence diminue. Pour certains maîtres, un « coefficient de proportionnalité » est de préférence un entier (DP10) probablement en référence à une conception fautive de l'idée de proportionnalité.

Bien que les fréquences soient inférieures à celles observées dans le tableau L qui est de proportionnalité, elles ne sont pas négligeables. La nature du tableau a une influence sur la fréquence d'utilisation des mots. Le tableau n'étant pas de proportionnalité, les maîtres évitent de dire « coefficient de proportionnalité ».

Pour i entier, les variables MRi et MQi ont des fréquences inférieures à celles des MPi bien que le tableau ne soit pas de proportionnalité. Certains maîtres ne savent pas utiliser les mots appropriés aux situations, en particulier ils ont perdu l'usage du mot « rapport ».

Les rapports fractionnaires $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ sont plus souvent reconnus comme des « rapports » que les entiers. On retrouve la tendance déjà observée : si le rapport est un entier, c'est un « coefficient de proportionnalité », s'il est fractionnaire c'est un « rapport » ou un « quotient ».

Il faut aussi noter que les maîtres utilisent plus souvent les mots « rapport » et « quotient » quand le tableau est de proportionnalité (tableau L) que quand il ne l'est pas (tableau M).

| | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|-----|-------------------------|----------------------|-----|---|----|---|---|--|--|
| N | <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">1,5</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">21</td> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> </table> | | | 7 | 1,5 | 3 | 21 | 6 | 7 | Des élèves expliquent pourquoi le tableau ci-contre n'est pas de proportionnalité. Pour chacune de leurs déclarations, cochez les cases qui conviennent : | |
| | 7 | 1,5 | 3 | | | | | | | | |
| 21 | 6 | 7 | | | | | | | | | |
| | | | formulation correcte | raison suffisante | | | | | | | |
| NF4 NR4 | "1,5 et 3 n'ont pas le même coefficient de proportionnalité que 6 et 7. " | | OUI 32 NON 13 | OUI 26 NON 13 | | | | | | | |
| NF7 NR7 | "1,5 et 3 n'ont pas le même rapport que 6 et 7." | | OUI 26 NON 8 | OUI 29 NON 8 | | | | | | | |

Pour expliquer qu'un tableau n'est pas de proportionnalité 32% des maîtres interrogés ont accepté une formulation où l'expression « coefficient de proportionnalité » désigne des rapports différents (NF4). Mais le même maître peut accepter simultanément les deux formulations du tableau ci-dessus. (NF4 et NF7 sont corrélées). Or des termes faits synonymes ne peuvent plus discriminer les concepts. On verra que les maîtres ont des difficultés à trier les différentes explications de ce tableau N.

Les conditions d'utilisation du mot « rapport ».

L'utilisation du mot « rapport » est influencée par le cadre, le milieu, la nature du rapport, son écriture (nature de l'ostensif écrit), sa fonction au sein d'un même milieu :

- cadre : la notion de rapport de deux entiers (DP11, LR3, LR1/3, MR9, MR1/3) est indépendante de la notion de rapport de deux grandeurs (RP6).
- milieu : les maîtres utilisent plus souvent le mot « rapport » quand le tableau est de proportionnalité (LR1/3 : 50%) que quand il ne l'est pas (M, N : 26%).
- nature : un rapport fractionnaire (non entier) est plus souvent appelé « rapport » qu'un rapport entier. (tableaux L et M)
- écriture : le rapport de deux nombres est plus souvent appelé « rapport » quand il est écrit sous forme de fraction (LR1/3 : 50%) que quand il est évoqué par une phrase (NF7 : 32%).
- fonction : le « rapport fonctionnel » est plus souvent appelé « rapport » que le « rapport scalaire ». (par exemple : MR9 et MR5, LR3 et LR2)

Les conditions d'utilisation de l'expression « coefficient de proportionnalité ».

Dans un tableau tous les rapports sont appelés « coefficients de proportionnalité » avec des fréquences qui dépendent de la nature du rapport, de la nature du tableau, de la fonction du rapport dans le tableau.

1) Les entiers sont plus souvent appelés « coefficients de proportionnalité » que les fractions (LP3 et LP1/3; LP2 et LP1/2; MP3 et MP1/3; MP5 et MP1/5).

2) Un « rapport fonctionnel » est plus souvent appelé « coefficient de proportionnalité » dans un tableau de proportionnalité que dans un tableau de non-proportionnalité (LP et MP). Pour le « rapport scalaire » la nature du tableau semble avoir peu d'influence. (LP et MP)

3) Un « rapport fonctionnel » est plus souvent appelé « coefficient de proportionnalité » qu'un « rapport scalaire » que le tableau soit ou non de proportionnalité.

Le tableau fait prendre conscience que tous les rapports n'ont pas la même fonction mais certains maîtres ne disposent pas de termes précis pour distinguer ces différences de fonctionnalité; ils utilisent indifféremment « coefficient de proportionnalité », « rapport » ou « quotient ».

S'il n'y a pas de tableau (DP5 ; RP7), les maîtres interrogés disent plus fréquemment « coefficient de proportionnalité » pour « rapport » qu'en présence d'un tableau.

Le tableau fait prendre conscience de la nécessité d'un vocabulaire adapté à la situation, mais les fréquences de réponses montrent que tous les maîtres n'ont pas le contrôle du sens des mots.

Quelles conséquences sur l'organisation mathématique des nombres ?

Nous avons vu que la disparition du sens précis des mots engendre des confusions dans les concepts (proportion, fraction, coefficient de proportionnalité).

La technique est nécessaire pour fixer les savoirs, mais la technique seule n'y suffit pas. Il faut aussi des mots pour penser et dire les notions. Si le sens des mots dépend de la personne qui les emploie, elle ne peut pas communiquer ces notions.

Le questionnaire fait apparaître que les pratiques sont plus correctes que les discours et que les savoirs sur les entiers résistent mieux que les savoirs sur les rationnels et décimaux.

Les entiers et les fractions:

Les pratiques survivent alors que les savoirs tendent à s'affaiblir.

92% des maîtres interrogés affirment que les fractions $\frac{12}{25}$ et $\frac{25}{12}$ sont irréductibles mais seulement 68% disent que 12 et 25 sont premiers entre eux et il n'y en a que 55% qui proposent 1 comme diviseur commun à 12 et 25.

Si « $\frac{12}{25}$ est irréductible » équivaut à « 12 et 25 sont premiers entre eux », cette équivalence théorique ne se traduit pas dans la pratique. Les notions de PPCM, PGCD et nombres premiers entre eux ne figurent plus dans les programmes de collège. Il en résulte que les pratiques des maîtres sont plus correctes que leurs discours : « premiers entre eux » fait référence à un savoir d'arithmétique alors que « irréductible » fait référence à une pratique algorithmique encore enseignée.

| | |
|-----------------|---|
| B | Donnez, lorsque cela est possible : |
| BD BM BC | un diviseur de 12 : 97 un multiple de 25 : 95 un diviseur commun à 12 et 25 : 55 |
| BF | une décomposition de 30 en produit de facteurs premiers : 82 |

| | | | | |
|-----------|--|----------------|----------------|--------------------------|
| C | Pour chacune des affirmations suivantes cochez la case de votre choix : | | | |
| C1 | Les nombres 12 et 25 sont premiers entre eux. | VRAI 68 | FAUX 13 | JE NE SAIS PAS 18 |
| C2 | La fraction $\frac{12}{25}$ est irréductible. | VRAI 92 | FAUX 5 | JE NE SAIS PAS 3 |
| C3 | La fraction $\frac{25}{12}$ est irréductible. | VRAI 92 | FAUX 3 | JE NE SAIS PAS 5 |

Deux autres questions semblent confirmer que les pratiques résistent mieux que les savoirs :

89% des maîtres interrogés disent que « la fraction $\frac{9}{54}$ est simplifiable » mais 32% acceptent la déclaration: « une fraction est simplifiable si elle représente un entier ».

| | | |
|-------------|--|---------------------------|
| D | Les déclarations suivantes (issues d'une enquête préalable) sont-elles acceptables : | pour le professeur |
| DP7 | "La fraction $\frac{54}{9}$ est simplifiable. " | OUI 92 NON 3 |
| DP8 | "La fraction $\frac{9}{54}$ est simplifiable. " | OUI 89 NON 5 |
| DP12 | "Une fraction est simplifiable si elle représente un entier. " | OUI 32 NON 63 |

Remarquons que les notions de PPCM et PGCD sont de nouveau inscrites aux programmes de terminales S de 1998. Mais pour que les futurs élèves de ces classes puissent utiliser ces savoirs pour exprimer qu'une fraction est irréductible, encore faut-il que le concept de fraction soit clair; or nous avons vu que ce n'est pas le cas (si une fraction est l'écriture d'un rapport où figurent deux décimaux alors toute fraction est simplifiable, deux décimaux n'étant jamais premiers entre eux). Il faudrait donc réhabiliter ces connaissances sur les fractions et les entiers dans les classes élémentaires.

Il y a toute une organisation mathématique autour des structures sur les entiers qui nécessite un ensemble cohérent de connaissances pour survivre. L'effritement de ces savoirs suite aux changements curriculaires peut entraîner la disparition de tout ce pan de culture.

En fait aucun champ de savoirs sur les nombres ne semble épargné.

Le questionnaire montre que la moitié des maîtres interrogés ont connu des difficultés aux questions qui traitent des rationnels et des décimaux.

Rationnels et décimaux

Les causes de confusions entre rationnels et décimaux peuvent être multiples et bien que différentes, se conjuguer. Les conceptions sur les rationnels et les décimaux ont une origine épistémologique en relation avec les choix didactiques. Ces choix s'accompagnent de mots pour désigner les objets qui participent aux différentes constructions. Ce sont ces mots qui fixent les différents concepts et permettent de décrire les structures. Sans ces mots on ne peut ni communiquer les savoirs ni distinguer les objets.

Comment expliquer qu'un nombre est rationnel si on ne dispose pas du concept de fraction et de pratiques (opérations et calculs pour simplifier, réduire, ...) qui permettent d'écrire un rapport sous forme de fraction ?

Nous avons déjà vu que pour 79% des maîtres « Un rapport peut toujours être représenté par une fraction »

| | | |
|------|--|---------------|
| DP11 | "Un rapport peut toujours être représenté par une fraction." | OUI 79 NON 11 |
|------|--|---------------|

Les irrationnels ayant leur origine dans les rapports de grandeurs incommensurables, la confusion précédente peut laisser croire que tout nombre est rationnel.

De plus, 45% des maîtres interrogés disent que « $\frac{0,7}{0,5}$ est une fraction » et 32% semblent ignorer que « Le quotient de deux fractions (non nulles) peut toujours s'écrire avec une fraction ».

| G | Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case de votre choix : | | | |
|----|--|---------|---------|-------------------|
| G2 | $\frac{0,7}{0,5}$ est une fraction. | VRAI 53 | FAUX 29 | JE NE SAIS PAS 16 |
| H1 | Le quotient de deux fractions (non nulles) peut toujours s'écrire avec une fraction. | VRAI 66 | FAUX 8 | JE NE SAIS PAS 24 |

Donc un tiers des maîtres interrogés n'ont pas une idée claire de ce qu'est une fraction.

Il en résulte que le mot « rationnel » et le concept de « nombre rationnel » sont aussi mal connus. C'est ce que montrent les réponses aux questions suivantes :

| G | Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case de votre choix : | | | |
|----|--|---------|---------|-------------------|
| G4 | $\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel. | VRAI 42 | FAUX 11 | JE NE SAIS PAS 45 |
| G5 | $\frac{5}{7}$ est un nombre décimal. | VRAI 50 | FAUX 37 | JE NE SAIS PAS 11 |
| H2 | Tout rationnel est décimal. | VRAI 11 | FAUX 47 | JE NE SAIS PAS 39 |
| H3 | Tout décimal est rationnel. | VRAI 39 | FAUX 18 | JE NE SAIS PAS 39 |

45% des maîtres disent ne pas savoir si « $\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel », 11% affirment même que c'est faux et 50% affirment que « $\frac{5}{7}$ est un nombre décimal ».

39% répondent « JE NE SAIS PAS » aux deux affirmations « Tout rationnel est décimal » et « Tout décimal est rationnel ».

Globalement, moins de la moitié des maîtres interrogés fournissent la réponse attendue aux questions sur les rationnels et les décimaux. La fréquence de « JE NE SAIS PAS » est plus grande quand dans la question figure le mot « rationnel » : G4, H2, H3. Le vocabulaire manque pour désigner la nature des nombres.

Comment reconnaître qu'un rapport est décimal ou ne l'est pas ?

- Le rapport peut s'écrire avec une fraction décimale :
d'après les résultats suivants au moins un quart des maîtres interrogés n'utilisent pas cette méthode :

| G | Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case de votre choix : | | | |
|----|--|---------|---------|-------------------|
| G1 | $\frac{0,7}{0,5}$ est un nombre décimal. | VRAI 74 | FAUX 11 | JE NE SAIS PAS 13 |
| G3 | $\frac{7}{5}$ est une fraction décimale. | VRAI 61 | FAUX 26 | JE NE SAIS PAS 11 |
| G5 | $\frac{5}{7}$ est un nombre décimal. | VRAI 50 | FAUX 37 | JE NE SAIS PAS 11 |

- La division donne un quotient décimal :
18% des maîtres interrogés estiment l'égalité « $56 : 6 = 9,33$ » correcte d'un point de vue mathématique (E4). Bien sûr, on peut y voir un effet de contrat, mais on ne peut pas se satisfaire de cette unique explication.
Les réponses à la question suivante, bien que formulée de manière trop savante, révèlent des hésitations quant à la reconnaissance de la nature d'un quotient d'un décimal par un entier.

| F | Dans chacun des trois cas suivants, cochez la case si l'affirmation vous paraît juste : | | | |
|----------|---|----|-------|----|
| F1 F2 F3 | Dans l'ensemble des décimaux, tout décimal est divisible : | | | |
| | par 10 | 97 | par 5 | 45 |
| | | | par 3 | 8 |

Est-ce que les maîtres ont compris la question ? Les 97% de réponses positives à F1 semblent dire que oui.

Mais alors d'après F2 au moins la moitié des maîtres ignoreraient que le quotient d'un décimal par 5 est un décimal.

Les maîtres qui ont coché F3 ont coché F2 ; faut-il en déduire que ces maîtres pensent que tout quotient d'un décimal par un entier est un décimal?

La confusion entre rationnels et décimaux concerne la moitié des maîtres interrogés. Le vocabulaire est flottant et les savoirs sur les structures des nombres fragiles. Les mots manquent pour fixer leur nature. On va voir que ce vide va être en partie comblé par un usage inadéquat du vocabulaire de la proportionnalité, ce qui va engendrer des conceptions fausses de proportionnalité.

Question ?

Les maîtres qui appellent « fraction » le rapport de deux décimaux considèrent-ils (consciemment ou non) \mathbf{Q} comme le « corps des fractions de \mathbf{D} ». C'est ce que semble induire l'idée d'« écriture fractionnaire ». Peut-être cette conception de \mathbf{Q} contribue-t-elle à la confusion entre rationnels et décimaux? Elle pourrait cautionner la disparition de toute l'organisation mathématique autour des rapports d'entiers que l'on avait coutume d'appeler « calcul sur les fractions ».

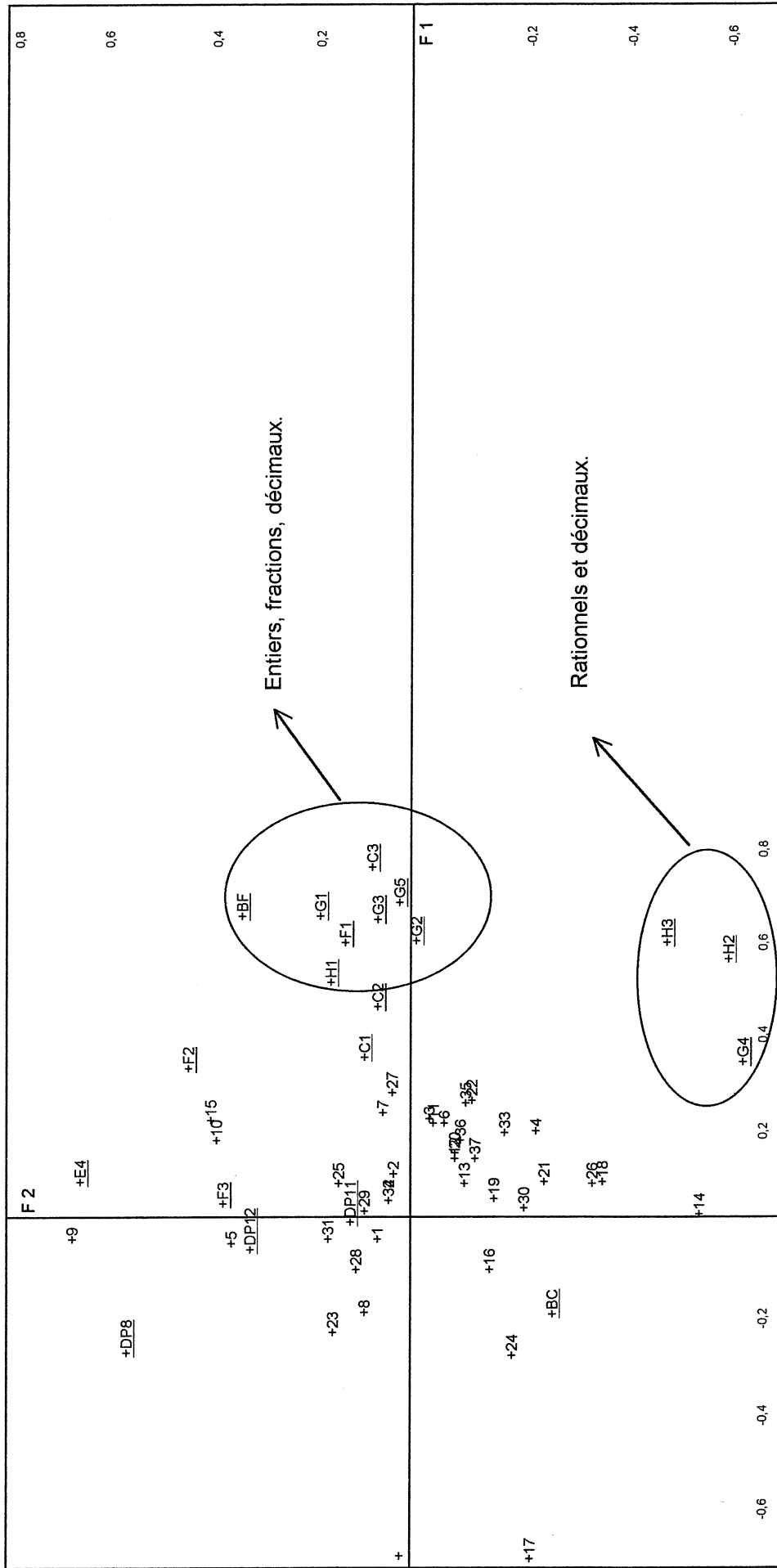
Analyse des données:

Une analyse en composantes principales fait apparaître deux groupes de questions:

① l'un sur les entiers, les fractions et les décimaux: BF, C3, F1, G1, G2, G3, G5, H1.

② l'autre sur les rationnels et décimaux: G4, H2, H3.

C'est la nature des nombres qui discrimine les questions, mais les questions ne discriminent pas les individus : il n'y a pas les maîtres qui savent et ceux qui ne savent pas.



PROPORTIONNALITE

Hypothèse:

La disparition des grandeurs comme objet d'enseignement en mathématiques limite la proportionnalité à l'étude des relations entre nombres.

Grandeurs proportionnelles

La distance que les programmes ont fait prendre aux mathématiques élémentaires par rapport aux grandeurs fait oublier que la proportionnalité a son origine dans l'étude des relations entre grandeurs. Si 50% des maîtres interrogés acceptent l'expression «grandeurs proportionnelles», 32% la rejettent (RP1). Pour exprimer qu'une situation est de proportionnalité, ils utilisent plus fréquemment les mesures de grandeurs que les grandeurs elles-mêmes ; 75% d'entre eux acceptent la déclaration : « Le nombre de kilogrammes de sel marin est proportionnel au nombre de litres d'eau de mer » (RP3).

La théorie des rapports et proportions accompagnait l'étude des grandeurs et permettait une organisation des calculs sur les rapports de grandeurs ou de nombres ; en même temps elle apportait une explication sur les techniques de résolution des problèmes, en particulier pour la méthode des proportions et la recherche d'une quatrième proportionnelle. Mais cette théorie des rapports et proportions ne fait plus partie des programmes de l'enseignement secondaire depuis 1970. Nous avons déjà vu que le mot « rapport » tend à disparaître du vocabulaire des maîtres qui le remplacent par d'autres expressions telles que « coefficient de proportionnalité, proportion, fraction, règle ». Cette ambiguïté dans l'usage des mots se traduit par une confusion dans les concepts; celui de rapport devient déliquescent.

Méthode des proportions

Avec les mots disparaissent les concepts mais aussi les techniques de résolution. Il semble que la méthode des proportions (pour la recherche d'une quatrième proportionnelle) ait disparu totalement des pratiques des maîtres précédant même la disparition du concept de proportion. En effet, 47% des maîtres interrogés affirment que « $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ » est une proportion contre 40% qui semblent ignorer ce qu'est une proportion (P). Mais aucun maître n'utilise la « méthode des proportions » pour la recherche de la quatrième proportionnelle à l'exercice de la page 4 du questionnaire (MP). Avec les théories disparaissent aussi les pratiques qui les accompagnent.

Méthode de réduction à l'unité

La méthode de réduction à l'unité est spécifique de l'arithmétique. Elle a son origine didactique dans la résolution de problèmes élémentaires sur des grandeurs familières accompagnées de leurs unités. Elle fait référence à des pratiques de calculs qui ne nécessitent pas de discours théorique. Ce qui explique qu'elle résiste mieux que la méthode des proportions. 21% des maîtres interrogés proposent cette méthode pour résoudre l'exercice de la page 4 du questionnaire (MRU).

La fonction linéaire :

Avec les programmes de 1968 la fonction linéaire était censée reformuler les savoirs en arithmétique sur la proportionnalité⁹. Or la fonction linéaire est une relation entre nombres ou mesures de grandeurs. Elle ne peut pas rendre compte de la proportionnalité entre grandeurs dans les mêmes conditions que la proportionnalité en arithmétique où on peut parler du rapport de deux grandeurs indépendamment des mesures et donc du choix de l'unité.

Aucun maître ne propose une stratégie qui fasse appel à la notion de fonction linéaire pour résoudre l'exercice de la page 4 du questionnaire. Pourtant 74% des maîtres interrogés trouvent la formulation suivante acceptable : « Il existe une fonction linéaire qui au nombre de kilogrammes de sel marin associe le nombre de litres d'eau de mer » (RP4). La fonction linéaire demeure un objet de savoir chez les maîtres. Elle est un objet d'enseignement au collège. Mais l'organisation mathématique autour de ce système ostensif n'a pas permis d'en faire l'outil que les programmes de 1968 voulait en faire à travers la notion d'opérateur. Les maîtres interrogés ne l'utilisent pas pour résoudre l'exercice. Il semble que les différents systèmes ostensifs ne soient pas interchangeables mais adaptés aux situations. A la question Q :

« Si f désigne une fonction linéaire alors le tableau

| | |
|--------|--------|
| 3 | 7 |
| $f(3)$ | $f(7)$ |

ci-contre est-il un tableau de proportionnalité ? »

47% des maîtres interrogés ont répondu « VRAI », 11% « FAUX », 32% « JE NE SAIS PAS ». Peut-être pour certains maîtres un tableau de proportionnalité ne doit contenir que des valeurs numériques explicites. $f(3)$ et $f(7)$ ne seraient pas reconnus comme étant des nombres mais comme étant les images de 3 et 7. Le statut didactique du tableau dépend de la situation évoquée. L'étude de la fonction linéaire n'est pas accompagnée de manipulations d'ostensifs

qui permettraient d'écrire des explications telles que $\frac{f(3)}{f(7)} = \frac{3}{7}$. La linéarité de la

correspondance à elle seule ne confère pas au tableau le statut de « tableau de proportionnalité ». Il faut que les autres éléments qui entrent dans le tableau rappellent sans trop de distorsion les situations déjà rencontrées. Un tableau où figurent des fonctions dans la première ligne et leurs dérivées dans la deuxième ligne est-il un tableau de proportionnalité ?

Le tableau de proportionnalité :

Le mot « tableau » apparaît dans les programmes de collège de 1968 (6^{ème}) à propos de relations et de leurs propriétés: « Représentations dans le cas d'ensembles finis par des tableaux de correspondance ou par des flèches ». Il apparaît de nouveau dans les programmes de 6^{ème} de 1985: « Décrire la situation par un tableau ou par des représentations graphiques ». Mais le « tableau de proportionnalité » n'apparaît pas comme un objet à enseigner. Ce sont les pratiques qui en ont fait un objet reconnu par les enseignants. La majorité des maîtres interrogés (environ 70%) distinguent un "tableau de proportionnalité" d'un "tableau de non-proportionnalité". Seulement 13% d'entre eux disent ne pas savoir (LT, MT, O).

Remarquons qu'ils sont plus nombreux à reconnaître un tableau de proportionnalité qui comporte 4 nombres qu'un tableau de proportionnalité qui comporte 6 nombres.

L'influence du troisième couple a été étudiée par Sophie René de Cotret en 1991¹⁰.

⁹ On pourra consulter le D.E.A. d'Alain Mercier de 1978 pour la notion « d'opérateur machine ».

¹⁰ Sophie René de Cotret ; Etude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez les élèves de 13-14 ans ; 1991.

Nous nous sommes interrogés sur ce que représentait un tableau de proportionnalité pour les maîtres.

| N | Des élèves expliquent pourquoi le tableau ci-contre n'est pas de proportionnalité. Pour chacune de leurs déclarations, cochez les cases qui conviennent : | | | raison suffisante | |
|-----|---|-----|---|-------------------|--------|
| | 7 | 1,5 | 3 | OUI | NON |
| | 21 | 6 | 7 | | |
| NR1 | "1,5 n'est pas entier. " | | | OUI 13 | NON 26 |
| NR3 | " $\frac{7}{21} \neq \frac{1,5}{6}$." | | | OUI 53 | NON 3 |
| NR5 | " $7 \times 7 \neq 3 \times 21$." | | | OUI 42 | NON 8 |
| NR6 | "7 n'est pas un multiple de 3. " | | | OUI 16 | NON 24 |
| NR7 | "1,5 et 3 n'ont pas le même rapport que 6 et 7." | | | OUI 29 | NON 8 |

13% des maîtres interrogés estiment que le tableau n'est pas de proportionnalité car « 1,5 n'est pas entier » (NR1), et 16% parce que « 7 n'est pas un multiple de 3 » (NR6). On va voir que ces réponses résultent d'une conception fautive de la proportionnalité entre entiers : « Deux entiers sont proportionnels s'ils sont dans un rapport entier ». Mais remarquons aussi que le même maître peut utiliser des arguments faux comme ceux qui précèdent et des arguments justes tels que « $\frac{7}{21} \neq \frac{1,5}{6}$ » (NR3) ou « 1,5 et 3 n'ont pas le même rapport que 6 et 7 » (NR7) ce qui laisse penser que les conceptions justes et fausses peuvent cohabiter chez un même individu. Remarquons aussi que le même maître peut utiliser simultanément des procédures « analogiques » et « analytiques », résultat déjà établi dans différentes recherches sur la proportionnalité.

Usage du tableau :

Les quatre questions ci-après interrogent les maîtres sur l'usage qu'ils font d'un tableau.

| K | | Quels avantages trouvez-vous à utiliser un tableau ? | | | |
|----|----|---|-----------------------------------|--|--|
| | | Classez les réponses par ordre de priorité en inscrivant un numéro d'ordre dans la case correspondante. | | | |
| K1 | K2 | Il permet d'expliquer la proportionnalité. 26 | Il facilite les calculs. 42 | | |
| K3 | K4 | Il permet de renvoyer les unités en tête de liste. 18 | Il évoque la proportionnalité. 21 | | |

Les fréquences relevées sont les fréquences de « 1 » pour chacune des quatre questions K1, K2, K3, K4. Elles révèlent que les maîtres voient dans le tableau d'abord un instrument de calcul (K2), mais aussi un « système ostensif » spécifique à la proportionnalité (K1, K4).

Est-ce que l'usage du tableau est réservé à l'étude de la proportionnalité? Le tableau serait à la proportionnalité un milieu qui se substitue à celui des grandeurs. Il serait un instrument pour expliquer ce qu'est la proportionnalité entre nombres.

La « fonction de clarté » que permet le renvoi des unités en tête de liste passe en dernier (K3). C'est pourtant une propriété qui permet au tableau d'être un « outil de conversion » des savoirs propres à l'arithmétique (méthode des proportions et méthode de réduction à l'unité) aux savoirs numériques spécifiques de la fonction linéaire.

A la page 4 du questionnaire, certains maîtres semblent utiliser le tableau de proportionnalité pour justifier la situation de proportionnalité:

Bien sûr on peut utiliser le tableau comme instrument d'organisation des calculs pour vérifier s'il y a proportionnalité ou non entre les mesures des grandeurs quand on les connaît. Ce n'est pas le cas ici. Or parmi les justifications proposées, c'est la possibilité de faire un tableau de proportionnalité qui a été le plus souvent retenue. Les maîtres ne semblent pas percevoir les difficultés technologiques que présente la justification du choix du modèle proportionnel. Le tableau ne peut pas justifier le choix de la relation de proportionnalité entre deux grandeurs puisqu'il ne peut prendre en compte qu'un nombre fini de mesures et non le « rapport entre les grandeurs ».

Pour résoudre l'exercice de la page 4 du questionnaire, c'est le tableau de proportionnalité qui a eu la faveur des maîtres: 34% l'utilisent (TP) contre 21% qui utilisent une méthode de réduction à l'unité (MRU). Le tableau de proportionnalité semble s'imposer comme outil, mais il est pourtant mal connu en tant qu'objet de savoir. Le vocabulaire manque pour y décrire les relations entre nombres et des difficultés apparaissent pour justifier sa nature.

Influence du tableau :

Nous avons déjà constaté l'influence du tableau sur l'usage du vocabulaire.

Dans un tableau tous les rapports sont appelés « coefficients de proportionnalité ».

La fréquence d'utilisation des mots « rapport, coefficient de proportionnalité, quotient » dépend:

- de la présence ou non d'un tableau
- de la nature du tableau
- de la fonction au sein du tableau.

Le tableau fait prendre conscience de la nécessité d'un vocabulaire adapté à la situation étudiée et montre que tous les rapports n'ont pas la même fonction.

Les fréquences de réponses mettent à jour les difficultés qu'il y a à décrire un tableau, à valider ou invalider une situation de proportionnalité quand les mots manquent ou sont ambigus.

Suites proportionnelles : (J2 ; LS ; MS)

A partir de 1970 les programmes font peu référence aux grandeurs et la théorie des rapports et proportions n'est plus un objet d'enseignement. L'organisation moderne des savoirs ne permet pas une reformulation de la proportionnalité satisfaisante du point de vue didactique. Il faut trouver un système ostensif autre que la fonction linéaire pour traduire la proportionnalité entre deux grandeurs qui permette de travailler sur leurs mesures. C'est ainsi qu'apparaît la notion de suites proportionnelles dans les programmes de sixième de 1977: « Suites finies proportionnelles ». C'est un objet spécifiquement didactique, il ne figure pas dans les savoirs savants.

Trois questions de l'enquête sont consacrées à cette notion : J2 ; LS ; MS.

D'après J1 au moins 76% des maîtres interrogés ont reconnu l'égalité des rapports $\frac{4}{6}, \frac{18}{27}, \frac{14}{21}$;

pourtant seulement 53% d'entre eux disent que les suites (4 ; 18 ; 14) et (6 ; 27 ; 21) sont proportionnelles. 24% disent qu'elles ne le sont pas et 21% ne savent pas. A deux exceptions près, les maîtres qui ont répondu " OUI " à J2 ont répondu " OUI " à J1.

| | | | |
|-----------|---|----------------------------------|--|
| J | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables : | | |
| J1 | $\frac{4}{6}, \frac{18}{27}$ et $\frac{14}{21}$ | déterminent la même proportion." | OUI 76 NON 13 JE NE SAIS PAS 11 |
| J2 | "Les suites (4, 18, 14) et (6, 27, 21) sont proportionnelles" | | OUI 53 NON 24 JE NE SAIS PAS 21 |

On peut conjecturer que 45% des maîtres interrogés:

- ne savent pas que des suites peuvent être proportionnelles.
- ne savent pas utiliser les fractions (ou les rapports) pour vérifier que les suites sont proportionnelles.
- croient qu'un des deux rapports doit être entier pour que les suites soient proportionnelles.
- préfèrent une autre formulation telle que « nombres proportionnels ».

La première conjecture semble contredite par les résultats aux questions LS et MS. En effet, a propos des tableaux L et M suivants :

| | | |
|----|----|----|
| 8 | 12 | 16 |
| 24 | 36 | 48 |

| | | |
|----|-----|-----|
| 7 | 35 | 31 |
| 63 | 105 | 248 |

74% souscrivent à la déclaration : "Les suites (8, 12, 16) et (24, 36, 48) sont proportionnelles".

71% rejettent la déclaration : "Les suites (7, 35, 31) et (63, 105 , 248) sont proportionnelles".

On a déjà noté l'influence du tableau. Sa présence induit l'usage du vocabulaire de la proportionnalité, ce qui peut expliquer les différences de fréquences de réponses entre la question LS qui concerne les lignes d'un tableau de proportionnalité et la question J2 qui concerne les numérateurs et dénominateurs de fractions égales. D'ailleurs l'analyse des corrélations fait apparaître que les questions LS et J2 sont indépendantes. Les maîtres ne perçoivent pas la question de la même manière suivant qu'il y a présence ou non d'un tableau. L'influence du milieu peut expliquer les différences de fréquences. Il détermine le découpage du savoir (les points de vue¹¹) et par conséquent l'adhésion aux différentes conceptions.

La deuxième conjecture a son origine dans la suppression de la théorie des rapports et proportions des programmes de l'enseignement secondaire. L'enseignement actuel ne privilégie pas la manipulation des rapports pour vérifier la proportionnalité. Les fractions et la proportionnalité sont traitées séparément. Il s'ensuit un cloisonnement des savoirs correspondants.

Les deux dernières font référence à la conception « Deux nombres proportionnels sont dans un rapport multiple. Leur coefficient de proportionnalité est leur rapport entier »; conception qui sera étudiée dans la partie « Nombres et proportionnalité ».

¹¹ Corine Castela ; Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures ; RDM 1995.

Analyse de données

Une analyse en composantes principales a été effectuée sur les questions qui ont fait l'objet de cette partie après élimination des individus qui n'ont pas répondu aux questions de la page 4. Elle fait apparaître des corrélations qui vont dans le sens des hypothèses qui ont motivé cette recherche.

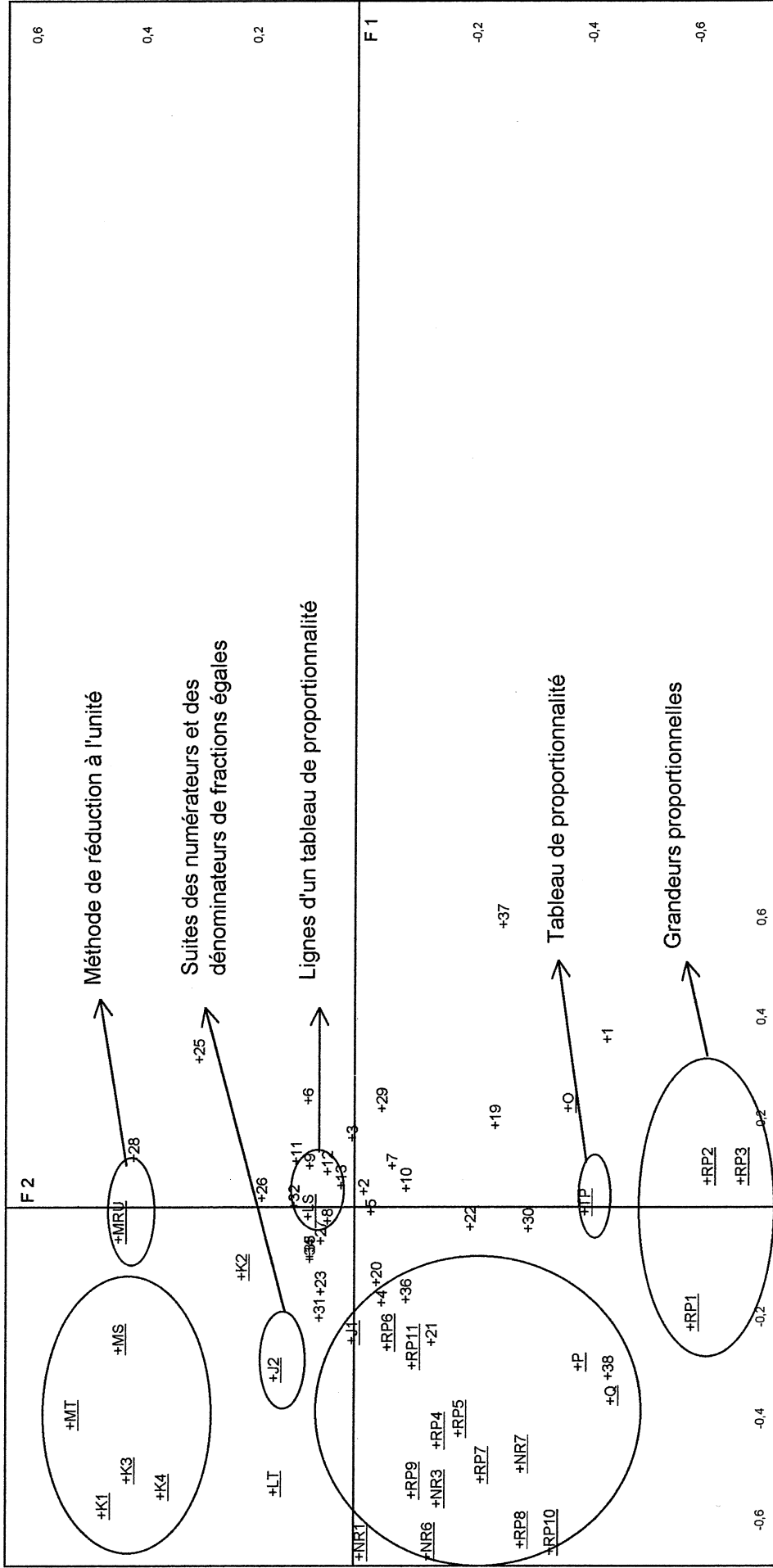
① Les questions RP1, RP2, RP3 sont corrélées deux à deux. Les maîtres considèrent les trois formulations correspondantes comme étant équivalentes. De même les maîtres qui reconnaissent le concept de « grandeurs proportionnelles » reconnaissent celui de rapport de deux grandeurs, ce qui explique la corrélation entre RP1 et RP6. Par contre RP4 est orthogonale à ces trois questions; ce qui confirme l'indépendance du modèle « fonction linéaire » avec les concepts de « proportionnalité en arithmétique ». La fonction linéaire n'a pas permis de reformuler ces savoirs contrairement à ce que laissaient croire les programmes de 1968.

② Il semble que le choix de la technique de résolution de l'exercice de la page 4 : méthode de réduction à l'unité (MRU) ou tableau de proportionnalité (TP) ne dépende ni de la manière de formuler la proportionnalité (RP1 à RP5) ni de la manière de la justifier (RP6 à RP11) car les variables MRU et TP ne sont pas corrélées aux variables RP_i , seule la corrélation entre TP et RP8 dépasse le seuil critique. Encore une fois, les connaissances permettent des pratiques adaptées à la situation sans que le discours laisse apparaître une organisation structurée des savoirs sur la proportionnalité.

③ Les corrélations entre les variables supposées justifier la proportionnalité laissent penser que les maîtres acceptent simultanément toutes ces justifications sauf RP11 (qui semble pourtant la plus raisonnable). Cet amalgame confirme les confusions entre les différentes formulations correctes ou non et explique les difficultés à communiquer les différents savoirs.

④ L'indépendance des questions LS et J2 confirme l'influence du milieu et l'émiettement des savoirs.

⑤ Les questions ne discriminent pas les individus.



NOMBRES et PROPORTIONNALITE

Hypothèse:

Le primaire étant le lieu privilégié de l'étude des entiers et de la proportionnalité, il s'ensuit l'idée que la proportionnalité doit décrire une relation particulière entre entiers.

Nombres proportionnels

La proportionnalité a son origine dans l'étude des grandeurs. Le concept de nombre réel a permis d'étudier directement les relations entre les mesures de ces grandeurs. Ce passage des grandeurs aux nombres concrets s'est accompagné d'une évaporation des unités puis d'un glissement du vocabulaire de la proportionnalité vers les nombres abstraits. Jusqu'en 1970 les manuels scolaires qui parlaient de « nombres proportionnels » le faisaient en référence aux mesures de grandeurs. Avec l'arrivée des mathématiques modernes, les grandeurs ne sont plus un objet d'enseignement en mathématiques, leur étude est « réservée » aux sciences physiques. Mais le vocabulaire de la proportionnalité continue de faire partie de la culture ; il va être utilisé pour décrire les relations entre familles de nombres abstraits telles que « suites proportionnelles ». Parallèlement, l'enseignement au collège n'accorde que peu de temps à l'étude des entiers et des relations entre entiers ; les notions de PGCD et PPCM ne figurent plus dans les programmes (32% des maîtres interrogés disent que « 54 est le plus petit multiple de 6 et 9 »). Par souci de simplification, tous les nombres sont considérés de la même manière sans que leur nature ne les discrimine. Or la nécessité épistémologique fait du primaire le lieu privilégié de l'étude des entiers. Si les notions de multiple et diviseur perdurent, le vocabulaire de la proportionnalité vient se superposer à celui spécifique de ces notions pour décrire les relations entre familles de nombres entiers. Il s'ensuit une confusion d'où va émerger une conception fautive de « nombres proportionnels » qui va cohabiter avec les concepts de multiples et diviseurs.

Les questions ci-après avaient pour objet de faire état de cette cohabitation.

| D | Les déclarations suivantes (issues d'une enquête préalable) sont-elles acceptables : | pour le professeur |
|-------------|---|-------------------------------|
| DP1 | "Le quotient de 54 par 9 est 6." | OUI 92 NON 3 |
| DP2 | "54 est un multiple de 9. " | OUI 97 NON 0 |
| DP4 | "54 et 9 sont proportionnels. " | OUI 55 NON 29 |
| DP5 | "6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54." | OUI 66 NON 21 |
| DP9 | "Quand le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels est nul, ces deux nombres sont proportionnels." | OUI 63 NON 26 |
| DP10 | "Un coefficient de proportionnalité est un entier." | OUI 16 NON 76 |

97% des maîtres interrogés disent que : "54 est un multiple de 9. " pourtant 55% acceptent de dire que « 54 et 9 sont proportionnels » et seulement 30% rejettent clairement cette formulation.

63% acceptent la déclaration : "Quand le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels est nul, ces deux nombres sont proportionnels."

Les maîtres acceptent encore plus souvent de dire que : "6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54."

L'analyse de données montre que les questions DP4, DP5, DP9 ont des coefficients de corrélation supérieurs à 0,53 alors que la valeur critique au seuil de 5% est de 0,32. C'est bien ce que nous attendions. Certains maîtres acceptent d'utiliser le vocabulaire de la proportionnalité pour dire que deux nombres sont dans un rapport multiple alors qu'ils connaissent les mots « diviseur » et « multiple ». Les différents vocabulaires cohabitent. Les fréquences de réponses aux questions suivantes ne font que confirmer ces résultats:

| | | | | |
|-----------|---|----------------|----------------|--------------------------|
| I | Si une fraction représente un entier alors : | | | |
| I1 | • le numérateur est un multiple du dénominateur. | VRAI 95 | FAUX 3 | JE NE SAIS PAS 3 |
| I2 | • le numérateur est un diviseur du dénominateur. | VRAI 13 | FAUX 82 | JE NE SAIS PAS 5 |
| I3 | • le numérateur et le dénominateur sont proportionnels. | VRAI 63 | FAUX 18 | JE NE SAIS PAS 13 |

Seulement 18% des maîtres rejettent clairement l'idée que deux nombres puissent être proportionnels.

A une exception près, les maîtres qui répondent « VRAI » à I3 ont répondu « VRAI » à I1. Les deux formulations ne s'excluent pas.

Des questions analogues ont été posées pour des nombres figurant dans un tableau de proportionnalité (L) ou de non-proportionnalité (M et N).

Quand le tableau est de proportionnalité :

| | | | | |
|-----------|--|---------------|---------------|--------------------------|
| L | Cochez les cases de votre choix: | | | |
| | 8 | 12 | 16 | |
| | 24 | 36 | 48 | |
| | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables ? | | | |
| LU | "Les deux nombres 8 et 24 sont proportionnels." | OUI 53 | NON 26 | JE NE SAIS PAS 13 |
| LV | "Les deux nombres 8 et 12 sont proportionnels." | OUI 13 | NON 79 | JE NE SAIS PAS 3 |

53% des maîtres acceptent la déclaration : "Les deux nombres 8 et 24 sont proportionnels." et seulement 13% la déclaration « Les deux nombres 8 et 12 sont proportionnels ».

Nous avons déjà noté l'influence de la disposition du couple dans un tableau. Mais remarquons aussi que 8 et 24 sont dans un rapport entier ce qui n'est pas le cas pour 8 et 12.

Quand le tableau n'est pas de proportionnalité :

| | | | | |
|-----------|---|---------------|---------------|--------------------------|
| M | Cochez les cases de votre choix: | | | |
| | 7 | 35 | 31 | |
| | 63 | 105 | 248 | |
| | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables ? | | | |
| MN | "Les deux nombres 7 et 63 sont proportionnels." | OUI 47 | NON 26 | JE NE SAIS PAS 13 |
| MT | "Le tableau est de proportionnalité." | OUI 5 | NON 66 | JE NE SAIS PAS 13 |
| MS | "Les suites (7, 35, 31) et (63, 105, 248) sont proportionnelles." | OUI 3 | NON 71 | JE NE SAIS PAS 16 |

47% des maîtres disent : "Les deux nombres 7 et 63 sont proportionnels."

Le fait que le tableau soit ou non de proportionnalité n'a pas beaucoup d'influence puisque au tableau L, 53% des maîtres trouvent acceptable une déclaration semblable.

Remarque : Une analyse en composantes principales montre que MN est indépendante de MT et MS. L'utilisation de l'expression "Les deux nombres 7 et 63 sont proportionnels" n'a pas d'influence sur la reconnaissance de non-proportionnalité du tableau ou des suites. Il y a bien un usage du vocabulaire de la proportionnalité indépendant du concept de proportionnalité. Les deux conceptions de "proportionnalité" cohabitent.

Au tableau N, la situation est différente puisqu'il est demandé aux maîtres de juger les formulations et justifications proposées par des élèves.

| N | Des élèves expliquent pourquoi le tableau ci-contre n'est pas de proportionnalité. Pour chacune de leurs déclarations, cochez les cases qui conviennent : | | | formulation correcte | raison suffisante |
|----------------|---|-----|---|----------------------|----------------------|
| | 7 | 1,5 | 3 | | |
| | 21 | 6 | 7 | | |
| NF1 NR1 | "1,5 n'est pas entier. " | | | OUI 39 NON 5 | OUI 13 NON 26 |
| NF2 NR2 | "3 et 7 ne sont pas proportionnels. " | | | OUI 37 NON 13 | OUI 37 NON 11 |
| NF6 NR6 | "7 n'est pas un multiple de 3. " | | | OUI 39 NON 3 | OUI 16 NON 24 |

37% des maîtres interrogés trouvent la formulation : "3 et 7 ne sont pas proportionnels. " correcte.

24% des maîtres ont répondu "OUI" simultanément à NF2 et NF6; il semble donc que pour eux "3 et 7 ne sont pas proportionnels" est synonyme de "7 n'est pas un multiple de 3". Or l'utilisation d'un vocabulaire inadapté peut être à l'origine de conceptions fausses. Par exemple si "7 n'est pas un multiple de 3" équivaut à "3 et 7 ne sont pas proportionnels" alors le tableau ne peut pas être de proportionnalité. D'ailleurs 16% des maîtres interrogés affirment que "7 n'est pas un multiple de 3" est une raison suffisante. Les corrélations entre les variables NF2, NR2, NF6, NR6 laissent entendre que certains maîtres souscrivent à l'idée suivante : " pour que deux nombres soient proportionnels, il faut qu'ils soient dans un rapport entier ". Il semble même que pour certains la proportionnalité ne concerne que les entiers car 16% d'entre eux affirment que 1,5 n'étant pas entier, le tableau ne peut pas être de proportionnalité (question NR1).

Mais l'adhésion à une conception dépend autant de la question que du maître. Il n'y a pas ceux qui savent et ceux qui ne savent pas. Pour expliquer que le tableau n'est pas de proportionnalité, le même maître peut souscrire simultanément à des arguments justes et à des arguments faux. C'est ce que confirme une analyse de données sur l'ensemble de ces questions. Les représentations graphiques ne font pas apparaître de groupements d'individus. Les différentes formulations ou conceptions ne discriminent pas les maîtres.

Et que penser des 30% de maîtres qui n'ont pas répondu aux questions du tableau N ? Bien sûr on peut imputer cette dérobade à la complexité du tableau et des questions ; mais peut-être aussi certains maîtres avaient-ils des difficultés à trier les différentes déclarations que l'ambiguïté des mots et les conceptions fausses contribuent à amalgamer.

En résumé, une partie importante des maîtres interrogés ont souscrit à la conception « Deux nombres dans un rapport multiple sont proportionnels » et ce dans des contextes différents: DP4 : 55% ; DP9 : 63% ; I3 : 63% ; LU : 53% ; LV : 13% ; MN : 47% ; NF2 : 37%.

Rappelons que les fréquences de réponses erronées sans la présence d'un tableau (DP4 : 55%, DP9 : 63%, I3 : 63%) sont supérieures aux fréquences avec présence d'un tableau (LU : 53%,

LV : 13%, MN : 47%, NF2 37%). **Il semble que la présence d'un tableau fasse prendre conscience de la nécessité d'un vocabulaire adapté.**

La disposition des couples dans le tableau (ou la nature du rapport) a une influence : les « nombres en correspondance » (LU) sont plus souvent appelés « nombres proportionnels » que les autres (LV).

Lors de la préenquête et en présence d'une fiche qui invitait les maîtres à utiliser le vocabulaire de la proportionnalité, 70% d'entre eux acceptaient de dire que « deux nombres sont proportionnels » ; et lors du concours de professeurs des écoles de Bordeaux de 1995, plus de 90% des candidats acceptaient cette formulation.

L'environnement a bien une influence sur l'usage du vocabulaire : conditions de concours, présence ou non d'une fiche didactique, structure des questions, présence ou non d'un tableau, fonction et nature du rapport.

Coefficient de proportionnalité :

Une utilisation erronée de l'expression « coefficient de proportionnalité » s'inscrit dans cette conception fautive de l'idée de proportionnalité : « Deux nombres entiers dans un rapport multiple sont proportionnels et leur rapport est leur coefficient de proportionnalité ». Ainsi 66% des maîtres interrogés contre 21% trouvent la déclaration suivante acceptable : "6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54." (DP5) ; 16% acceptent la déclaration "Un coefficient de proportionnalité est un entier." (DP10). Les questions DP4, DP5, DP9, DP10 sont corrélées; ce groupement caractérise cette conception de proportionnalité entre entiers.

Nous avons déjà remarqué que le mot « rapport » a presque disparu du vocabulaire scolaire et que pour le remplacer les maîtres interrogés empruntent d'autres expressions telles que « coefficient de proportionnalité » (LPi, MPi, NF4, RP7). Dans un tableau tous les rapports sont appelés coefficients de proportionnalité avec des fréquences variables. Or en présence d'un tableau cohabitent plusieurs points de vue de proportionnalité : "tableau de proportionnalité", "nombres proportionnels", "fonction linéaire". Il est difficile d'évaluer la part d'influence qui incombe à chacun d'eux pour l'adhésion à telle ou telle conception : « dans un tableau, un rapport est un coefficient de proportionnalité », « un rapport entier est un coefficient de proportionnalité ». A ces points de vue s'ajoutent d'autres variables didactiques telles que la nature du tableau, la nature du rapport, la fonction que joue le rapport dans le tableau : rapport scalaire ou rapport fonctionnel.

Quand le tableau est de proportionnalité :

| | | | | | | | | | |
|----------|--|----|----|--|--------|-------------------|---------------|---------------|---------------|
| L | Cochez les cases de votre choix: | | | | | | | | |
| | | | | Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est : | | | | | |
| | | | | 3 | 2 | 6 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | | | | 79 | 18 | 11 | 37 | 8 | 11 |
| LPi | 8 | 12 | 16 | un coefficient de proportionnalité | | | | | |
| LRi | 24 | 36 | 48 | un rapport | | | | | |
| LQi | | | | un quotient | | | | | |
| LS | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables ? | | | | | | | | |
| LT | "Les suites (8, 12, 16) et (24, 36, 48) sont proportionnelles" | | | OUI 74 | NON 8 | JE NE SAIS PAS 8 | | | |
| LU | "Le tableau est de proportionnalité." | | | OUI 71 | NON 5 | JE NE SAIS PAS 13 | | | |
| LV | "Les deux nombres 8 et 24 sont proportionnels." | | | OUI 53 | NON 26 | JE NE SAIS PAS 13 | | | |
| | "Les deux nombres 8 et 12 sont proportionnels." | | | OUI 13 | NON 79 | JE NE SAIS PAS 3 | | | |

79% des maîtres disent que 3 est un coefficient de proportionnalité alors que seulement 37% disent que $\frac{1}{3}$ en est un. Les maîtres choisissent de préférence le coefficient entier probablement à l'origine pour des raisons pédagogiques. Pourtant à une exception près, les maîtres qui ont répondu « OUI » à DP10 ont coché LP3. De même à une exception près, les maîtres qui ont coché LP1/3 ont coché LP3. Par contre aucun maître n'a répondu par l'affirmative simultanément à LP1/3 et DP10. Cette cohérence dans les réponses montre que les maîtres n'ont pas répondu au hasard et que certains d'entre eux (au moins 16%) pensent vraiment qu'un coefficient de proportionnalité est un entier.

L'analyse des corrélations montre que LP1/3 et LP3 qui caractérisent une conception correcte du coefficient de proportionnalité sont indépendantes des autres LPi qui caractérisent une conception fautive de la proportionnalité.

Quand le tableau n'est pas de proportionnalité :

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------|--|-----|---------------|---------------|--------------------------|----|----|-----|-----|--|--|---|---|---|---------------|---------------|
| M | Cochez les cases de votre choix: | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <table border="1"> <tr><td>7</td><td>35</td><td>31</td></tr> <tr><td>63</td><td>105</td><td>248</td></tr> </table> | | | 7 | 35 | 31 | 63 | 105 | 248 | Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est : | | 9 | 3 | 5 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ |
| | 7 | 35 | 31 | | | | | | | | | | | | | |
| | 63 | 105 | 248 | | | | | | | | | | | | | |
| un coefficient de proportionnalité | | | 29 | 13 | 8 | 3 | 5 | | | | | | | | | |
| un rapport | | | 16 | 5 | 5 | 18 | 16 | | | | | | | | | |
| un quotient | | | 13 | 8 | 3 | 13 | 8 | | | | | | | | | |
| MPi | Les déclarations suivantes sont-elles acceptables ? | | | | | | | | | | | | | | | |
| MRi | "Les deux nombres 7 et 63 sont proportionnels." | | OUI 47 | NON 26 | JE NE SAIS PAS 13 | | | | | | | | | | | |
| MQi | "Le tableau est de proportionnalité." | | OUI 5 | NON 66 | JE NE SAIS PAS 13 | | | | | | | | | | | |
| MN | "Les suites (7, 35, 31) et (63, 105, 248) sont proportionnelles." | | OUI 3 | NON 71 | JE NE SAIS PAS 16 | | | | | | | | | | | |
| MT | | | | | | | | | | | | | | | | |
| MS | | | | | | | | | | | | | | | | |

les rapports entiers sont plus souvent appelés coefficient de proportionnalité que les rapports fractionnaires : MP3 et MP1/3 ; MP5 et MP1/5. L'idée que le coefficient de proportionnalité est le rapport entier est prégnante.

Les analyses de données ne permettent pas de rejeter l'indépendance des variables MP9 et MN. Le fait d'appeler « coefficient de proportionnalité » le rapport fonctionnel 9 dans le tableau n'a pas d'influence sur l'adhésion ou non à la déclaration : "Les deux nombres 7 et 63 sont proportionnels".

Par contre DP4 et DP5 sont corrélées. Ce qui semble confirmer l'existence de deux conceptions de coefficient de proportionnalité : "le coefficient de proportionnalité dans un tableau" (c'est un opérateur) et "le coefficient de proportionnalité de deux entiers" (c'est leur rapport entier quand il existe. Ce sera aussi confirmé par les analyses de données sur les questions concernées.

Quand le tableau n'est pas de proportionnalité :

| | | | | | | | | | | | | |
|----------------|--|-----|----------------------|----------------------|-----|---|----|---|---|--|--|--|
| N | <table border="1"> <tr><td>7</td><td>1,5</td><td>3</td></tr> <tr><td>21</td><td>6</td><td>7</td></tr> </table> | | | 7 | 1,5 | 3 | 21 | 6 | 7 | Des élèves expliquent pourquoi le tableau ci-contre n'est pas de proportionnalité. Pour chacune de leurs déclarations, cochez les cases qui conviennent : | | |
| | 7 | 1,5 | 3 | | | | | | | | | |
| 21 | 6 | 7 | | | | | | | | | | |
| | | | formulation correcte | raison suffisante | | | | | | | | |
| NF4 NR4 | "1,5 et 3 n'ont pas le même coefficient de proportionnalité que 6 et 7. " | | OUI 32 NON 13 | OUI 26 NON 13 | | | | | | | | |
| NF7 NR7 | "1,5 et 3 n'ont pas le même rapport que 6 et 7." | | OUI 26 NON 8 | OUI 29 NON 8 | | | | | | | | |

32% trouvent la formulation "1,5 et 3 n'ont pas le même coefficient de proportionnalité que 6 et 7. " correcte alors que le tableau n'est pas de proportionnalité. Les deux formulations

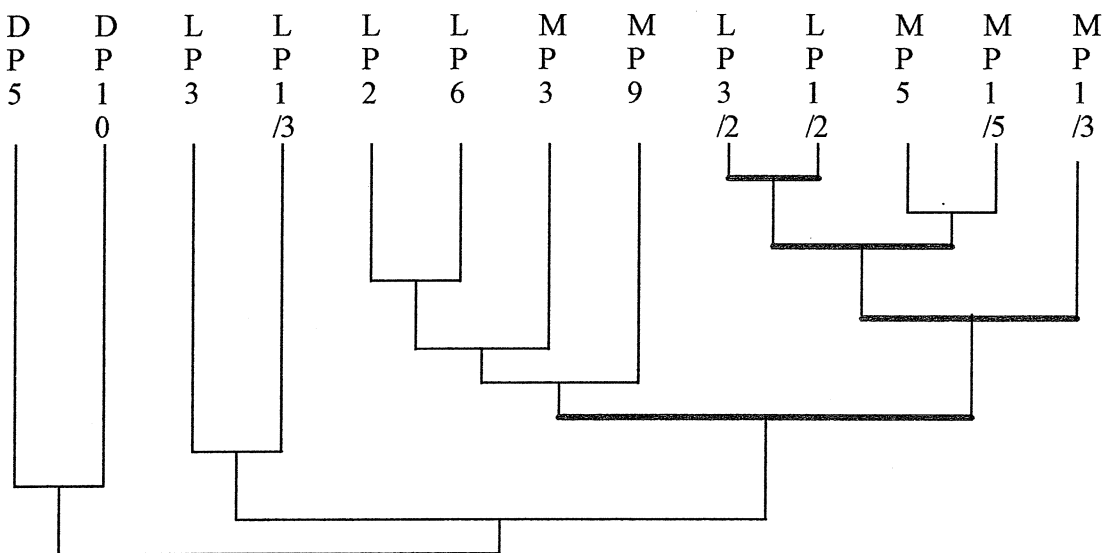
précédentes cohabitent : NF4 et NF7 sont corrélées. Il est clair que ces maîtres disent « coefficient de proportionnalité » pour « rapport ». Dans ces conditions, comment vont-ils expliquer à leurs élèves qu'un rapport même entier n'est appelé « coefficient de proportionnalité » que s'il a une fonction spécifique dans une situation de proportionnalité? Pour fixer les concepts les mots doivent être utilisés à bon escient. L'usage inapproprié du vocabulaire induit des conceptions fausses. Les expressions devenues synonymes ne peuvent plus discriminer les différents savoirs mathématiques. Les corrélations entre les questions NF, NR, I3, NF7 sont symptomatiques d'explications difficiles. Une analyse en composantes principales va faire apparaître un groupement de ces questions.

Analyses de données:

① Analyse des proximités au sens de I. C. LERMAN:

L'arbre de similarité suivant fait apparaître l'influence des différentes variables et milieux didactiques sur l'adhésion aux différentes conceptions.

Les variables sont booléennes, codées 1 si la réponse est « oui » 0 sinon.



Arbre de similarité : C:\STATBOX\DImp.csv

Hors présence d'un tableau

Un coefficient de proportionnalité est un rapport entier : DP5, DP10.

En présence d'un tableau

- LP3 et LP1/3 correspondent à une conception juste de coefficient de proportionnalité
- Dans un tableau tous les rapports sont des coefficients de proportionnalité:
 - les rapports entiers sont des coefficients de proportionnalité
 - rapports scalaires : LP2, LP6
 - rapports fonctionnels : MP3, MP9
 - les rapports fractionnaires sont des coefficients de proportionnalité
 - rapports scalaires :
 - tableau de proportionnalité : LP3/2, LP1/2
 - tableau de non-proportionnalité : MP5, MP1/5
 - rapports fonctionnels : MP1/3

Il semble qu'il y ait une hiérarchie dans la sensibilité aux milieux : présence d'un tableau, nature de ce tableau, nature du rapport, fonction du rapport. La présence d'un tableau fait prendre conscience que tous les rapports n'ont pas la même fonctionnalité. L'utilisation erronée de la formulation « coefficient de proportionnalité » est plus fréquente quand il n'y a pas de tableau.

La nature du tableau n'a que peu d'influence sur l'utilisation de l'expression « coefficient de proportionnalité » pour désigner un rapport scalaire. Par contre ce sont les rapports fonctionnels 3 et 1/3 du tableau de proportionnalité qui sont le plus souvent appelés « coefficients de proportionnalité ».

La nature du rapport (entier ou fractionnaire) tend aussi à discriminer les items.

② Analyse en composantes principales :

L'analyse des corrélations fait apparaître quatre groupements que l'on peut repérer sur la représentation graphique :

- Les questions DP4, DP5, DP9, LU, LV, MN déterminent l'axe F1. Exception faite de LV, elles sont caractéristiques de la conception : « Deux nombres dans un rapport entier sont proportionnels et leur rapport est un coefficient de proportionnalité » que ce soit dans un tableau ou non.
- Les questions LP2, LP1/2, LP3/2, MP5 déterminent l'axe F2 ; elles caractérisent l'idée selon laquelle dans un tableau les rapports scalaires sont des « coefficients de proportionnalité ». Cette conception est donc orthogonale (indépendante) de la première.
- MP9 et MP3 sont plutôt portées par l'axe F3; ce qui confirme que dans un tableau les rapports n'ont pas tous la même fonction. Le « rapport fonctionnel » et le « rapport scalaire » ont des sens différents mais aussi une instrumentalité différente.
- Les questions NF2, NF4, RP7 montrent comment certains maîtres utilisent le vocabulaire de la proportionnalité pour expliquer qu'il y a ou non proportionnalité. Nous avons déjà remarqué que NF2, NF4, NR2, NR4 étaient corrélées : pour montrer qu'un tableau n'est pas de proportionnalité certains maîtres disent que « 3 et 7 ne sont pas proportionnels » ou que « 1,5 et 3 n'ont pas le même coefficient de proportionnalité que 6 et 7 ».

La question NR6 donne une justification incorrecte et NR7 une raison juste. La question RP7 montre que certains maîtres disent « coefficient de proportionnalité » de deux grandeurs pour « rapport de deux grandeurs ».

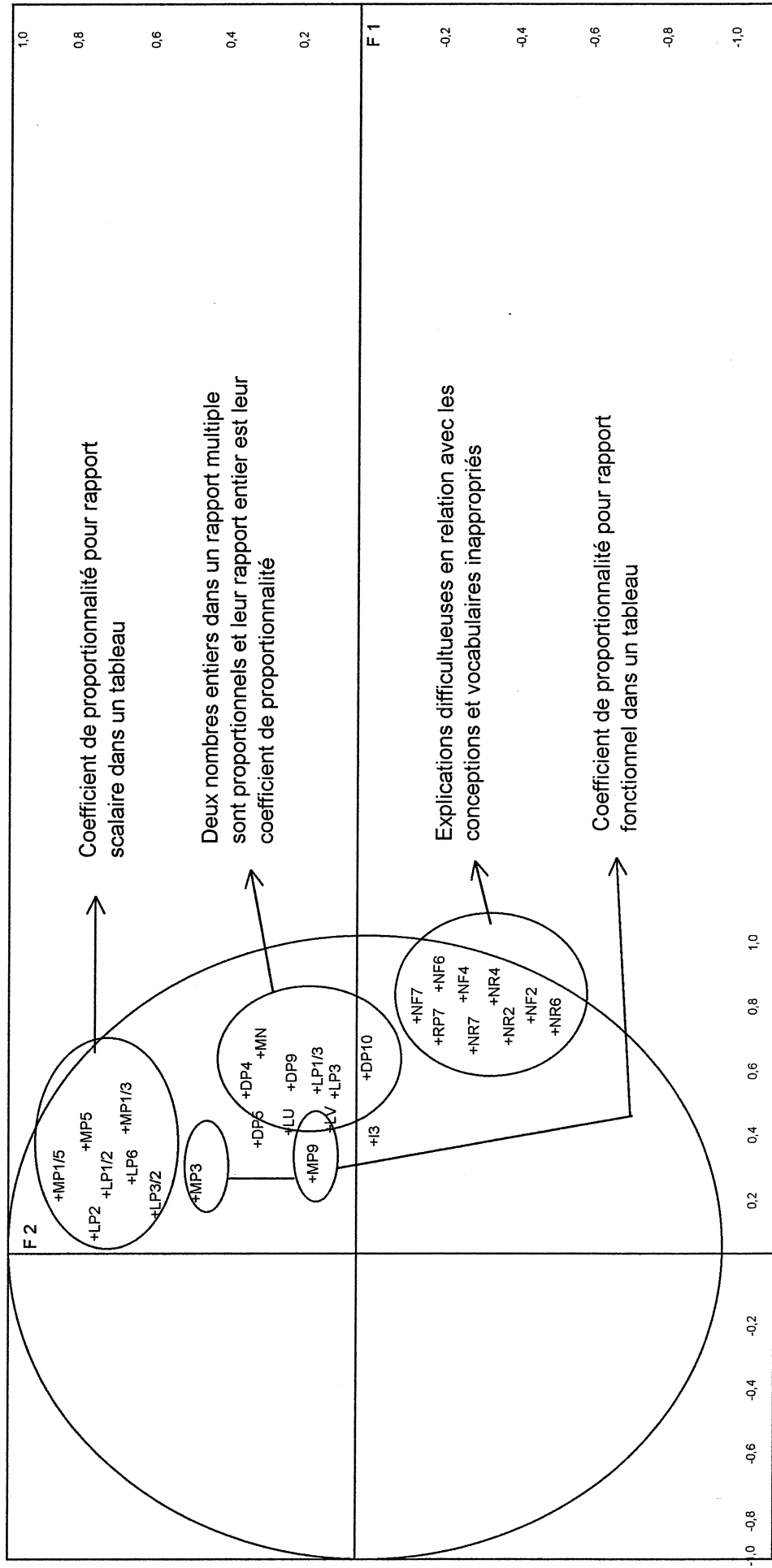
La question I3 indique la présence sournoise d'une conception fautive de proportionnalité entre entiers : « Deux entiers dans un rapport multiple sont proportionnels et leur rapport entier est leur coefficient de proportionnalité ».

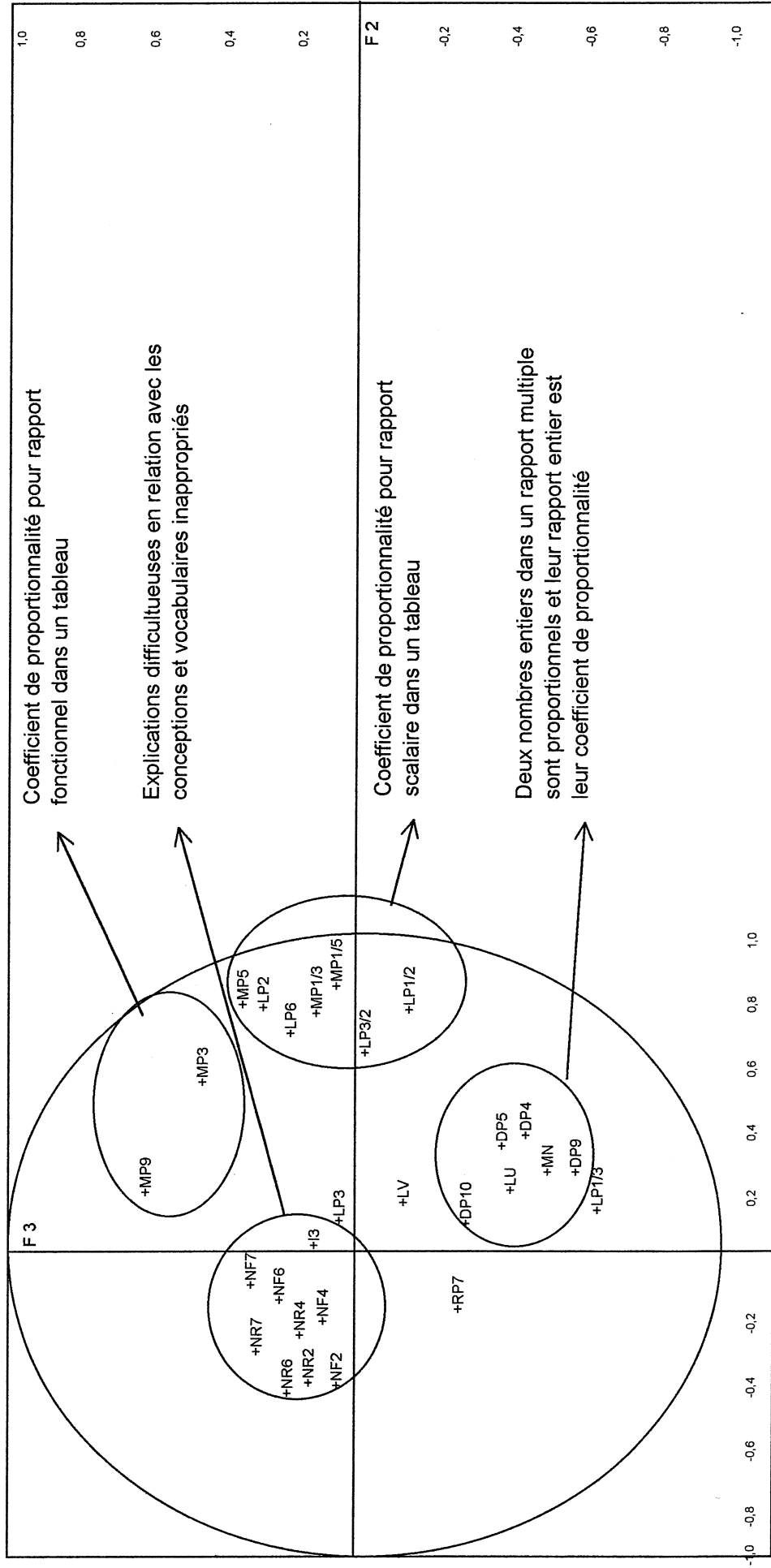
Ce groupement de questions révèle un amalgame caractéristique d'explications difficiles. Les maîtres interrogés ont des difficultés à trier les différents arguments.

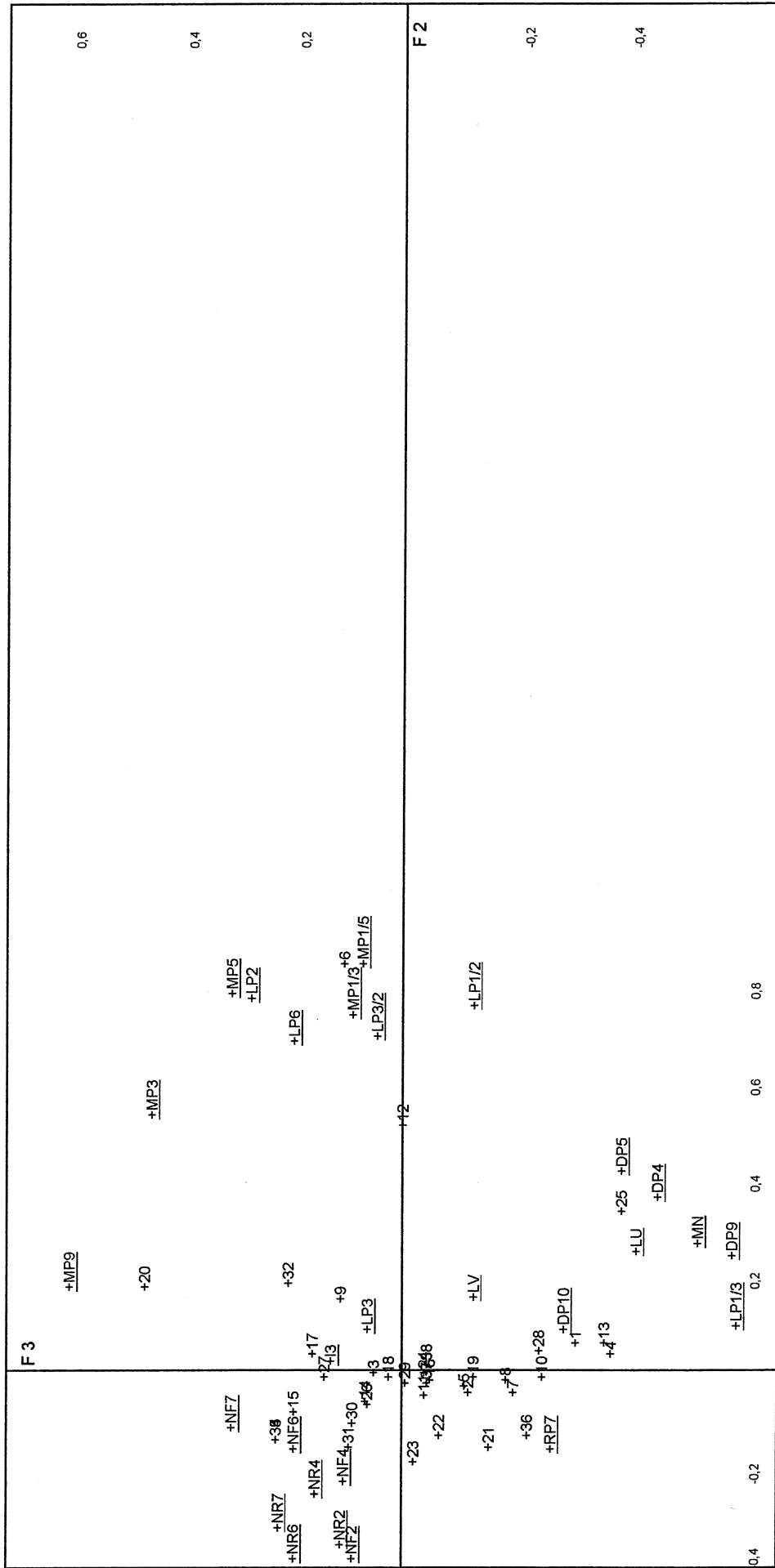
L'analyse précédente fait apparaître trois conceptions globalement indépendantes de « coefficient de proportionnalité » :

- le rapport entier de deux entiers
- le rapport scalaire dans un tableau
- le rapport fonctionnel dans un tableau.

Remarque : comme nous l'avons signalé précédemment la représentation graphique ne fait pas apparaître de regroupement d'individus autour d'un groupe de questions. Dans la majorité des cas il semble que l'adhésion à une conception dépende autant de la question que de l'individu. Autrement dit les conceptions ne discriminent pas les individus.







Résumé des résultats de l'enquête

Rapports et nombres

Entre 20% à 80% des maîtres interrogés tendent à faire synonymes les expressions suivantes dans des contextes divers : « rapport, règle, proportion, coefficient de proportionnalité, fraction ». Il s'ensuit des confusions entre les concepts de « proportion » et de « rapport », de « rapport » et de « fraction », de « rapport » et de « coefficient de proportionnalité ».

50% des maîtres interrogés ne distinguent pas les rationnels des décimaux.

Les savoirs sur les entiers résistent mieux mais nombreux sont les maîtres qui empruntent au vocabulaire de la proportionnalité pour décrire certaines de leurs relations.

Les pratiques des maîtres (en particulier sur les fractions) sont plus correctes que leurs discours. L'enquête ne fait pas apparaître une organisation structurée de leurs savoirs mathématiques. L'utilisation du mot « rapport » et de l'expression « coefficient de proportionnalité » est influencé par le cadre, le milieu, la nature et la fonction de l'objet. Le tableau a tendance à faire prendre conscience de la nécessité d'un vocabulaire adapté à la situation.

Il n'y a pas les maîtres qui savent et ceux qui ne savent pas.

Proportionnalité

Les différents modèles de la proportionnalité ne semblent pas être interchangeables mais plus ou moins bien adaptés aux différentes situations. En particulier pour la moitié des maîtres interrogés une fonction linéaire n'induit pas un tableau de proportionnalité et si 74% d'entre eux reconnaissent dans la fonction linéaire une reformulation de la proportionnalité entre grandeurs aucun d'eux n'utilise des ostensifs qui lui sont spécifiques pour résoudre l'exercice proposé.

30% des maîtres interrogés n'acceptent pas l'expression « grandeurs proportionnelles ».

40% ignorent ce qu'est une proportion.

Les analyses de données semblent montrer l'indépendance du modèle « fonction linéaire » avec les modèles arithmétiques de la proportionnalité.

Nombres et proportionnalité

Plus de la moitié des maîtres interrogés acceptent de dire que « deux nombres dans un rapport multiple sont proportionnels et que leur rapport entier est leur coefficient de proportionnalité ».

Les termes « multiple » et « diviseur » cohabitent avec la formulation « nombres proportionnels ».

Les analyses de données font apparaître que :

- Les différentes conceptions de « proportionnalité » sont indépendantes. Les savoirs corrects ne s'opposent pas aux conceptions fausses.
- Les différentes questions et conceptions ne discriminent pas les individus ; il n'y a pas ceux qui savent et ceux qui ne savent pas.

Quelques conséquences et conjectures

Les mélanges de vocabulaire conduisent à une perte de sens pour les mots préjudiciable à la communication et à des confusions dans les concepts qui sont autant d'obstacles pour la construction d'autres connaissances. Nous tentons de donner quelques exemples.

Il est clair que l'ambiguïté des mots est un obstacle à la communication. Si le sens des mots dépend de la personne qui les emploie, elle ne peut pas communiquer les notions

correspondantes ni même se faire comprendre. Pour débattre des questions mathématiques, résoudre des problèmes, il faut un vocabulaire adapté aux situations et compris des différents interlocuteurs. La perte de sens des mots conduit à un étranglement du champ des exercices possibles.

La complexité est plus grande quand les interlocuteurs sont issus d'institutions différentes. En effet le vocabulaire utilisé dépend des situations mais aussi des institutions ; donc émetteur et récepteur doivent avoir un répertoire commun indépendant de l'institution à laquelle ils appartiennent. Par exemple le mot « linéaire » utilisé en mathématiques ne l'est pas dans la vie courante où pour décrire une telle relation entre grandeurs on utilise le mot « proportionnel » : les prix sont (ou ne sont pas) proportionnels aux quantités.

Un vocabulaire inapproprié peut induire des conceptions fausses.

Si les élèves apprennent en primaire que deux entiers dans un rapport multiple sont proportionnels lorsqu'ils connaîtront les réels ils en inféreront que deux réels sont toujours proportionnels. Une telle « propriété » ne présenterait aucun intérêt puisqu'elle ne discrimine plus rien (tous les réels sont proportionnels).

Sous les mêmes conditions deux suites d'entiers sont proportionnelles pourvu que les nombres homologues soient dans un rapport entier.

Les élèves de terminales S qui choisissent la spécialité mathématique ont à étudier un chapitre d'arithmétique où les notions de multiple, diviseur, division euclidienne, nombre premier, etc. en sont le fondement. Des élèves qui auraient utilisé le vocabulaire de la proportionnalité pour décrire des relations entre entiers connaîtraient probablement des difficultés qui auraient des répercussions sur d'autres apprentissages. Les structures de \mathbf{N} puis \mathbf{Z} servent d'étayage au concept d'anneau euclidien. Le vocabulaire de la proportionnalité peut-il décrire des relations entre éléments de $\mathbf{Q}[x]$ (anneau des polynômes à coefficient dans \mathbf{Q}) ? Que seraient deux polynômes proportionnels ?

Les expressions devenues synonymes ne discriminent plus les savoirs correspondants. Nous avons vu que le concept de rapport perdait de sa consistance et le mot « rapport » de sa fonctionnalité. Le mot « rapport » peut être un outil pour décrire les objets, expliquer que chaque désignation caractérise la fonction qu'il occupe : un même nombre peut être un coefficient de proportionnalité, un scalaire, une mesure, un opérateur, un quotient, ...

Si les mots « rapport » et « fraction » sont faits synonymes alors tout réel est une fraction ce qui rend difficile la distinction entre rationnels et irrationnels.

Sans le concept correct de fraction il est difficile de distinguer la nature des nombres (réels, rationnels, décimaux, entier).

Si une fraction est le rapport de deux décimaux alors toute fraction est simplifiable et il n'y a plus de fraction irréductible.

Comment montrer que \mathbf{Q} est dénombrable sans l'idée que tout rationnel peut être représenté par un couple d'entiers (par une fraction) ?

Différentes manipulations sur les fractions rationnelles s'alimentent de pratiques sur les fractions, rapports et proportions. Sans ces concepts et les mots qui les désignent les enseignants du secondaire vont manquer d'outils pour communiquer et leurs élèves de connaissances pour travailler les fonctions rationnelles.

1 - 3 Rapport entre les connaissances des élèves et celles des professeurs

1 - Nous avons constaté que la moitié des élèves interrogés en seconde ne reconnaissaient pas dans la fonction linéaire une reformulation de la proportionnalité en arithmétique. Il faut nuancer pour ce qui concerne les maîtres interrogés. 75% d'entre eux savent qu'une fonction linéaire peut modéliser une relation de proportionnalité entre grandeurs mais ne l'utilisent pas pour résoudre l'exercice correspondant ; plus de 40% d'entre eux ne semblent pas accepter que les éléments homologues d'une fonction linéaire puissent constituer un tableau de proportionnalité.

2 - Les élèves que nous avons interrogés en seconde n'utilisaient pas les propriétés caractéristiques de la linéarité pour adopter ou rejeter le modèle proportionnel. Nous avons pu constater à plusieurs reprises qu'il en était de même pour certains enseignants. Plus de la moitié des professeurs interrogés reconnaissent qu'un tableau est de proportionnalité ou ne l'est pas ou bien que deux grandeurs sont proportionnelles mais ils ont des difficultés à expliquer pourquoi.

3 - Nous n'avons pas fait apparaître de conceptions en termes d'effectifs. En seconde, le même élève peut changer de technique d'un exercice à l'autre. Chez les enseignants du primaire les différentes connaissances ne discriminent pas les individus ; il n'y a pas ceux qui savent et ceux qui ne savent pas. Les différentes conceptions cohabitent. Les savoirs corrects ne s'opposent pas systématiquement aux conceptions fausses. Le même sujet peut utiliser un vocabulaire idoine ou emprunter le vocabulaire d'un autre concept, proposer un argument adapté à la situation ou issu d'une conception fausse de la structure étudiée.

Conséquences : L'analyse des praxéologies ne permet pas à elle seule de faire émerger des conceptions qui caractérisent certaines organisations cohérentes et consistantes de connaissances ; il faudra tenir compte simultanément des situations, des individus, des répertoires et de leurs évolutions.

4 - Nous avons constaté chez les maîtres interrogés que leurs pratiques étaient plus sûres que leurs discours (fractions irréductibles et nombres premiers entre eux ; tableaux de proportionnalité et justifications ; détermination d'une quatrième proportionnelle et grandeurs proportionnelles). Or les élèves ont besoin de mots pour décrire et distinguer les objets (ostensifs et non ostensifs) qu'ils auront à manipuler (rationnels et décimaux, proportionnalité, fonction linéaire, ...); les mélanges de vocabulaires conduisent à des confusions dans les concepts.

5 - Les maîtres interrogés estiment que ce qu'ils ont à enseigner n'est pas nécessairement ce qu'ils savent. Pour permettre aux élèves de travailler, il faut accepter de leur enseigner des connaissances provisoires à condition qu'elles n'engendrent pas des conceptions fausses en contradiction avec les concepts qu'ils auront à manipuler dans leur scolarité future. Si en primaire les élèves apprennent que deux entiers qui ont un rapport (entier pour les élèves qui ne connaissent que les entiers) sont proportionnels, ces mêmes élèves en lycée pourront dire que deux rationnels ou deux réels sont toujours proportionnels. La proportionnalité n'a pas pour objet de discriminer des rapports de nombres mais de décrire une relation entre grandeurs.

1 - 4 Bilan et hypothèses

Lors des différentes enquêtes nous avons constaté une parcellisation des connaissances et des usages inappropriés de vocabulaires allant jusqu'à induire des conceptions fausses.

La question fondamentale est maintenant de savoir s'il s'agit d'accidents ou si ces dysfonctionnements locaux sont autant d'indices d'un phénomène didactique plus général et plus profond.

Pour tenter d'évaluer l'importance de ces dysfonctionnements nous allons essayer d'en décrire différentes caractéristiques :

Ampleur :

Les erreurs portent sur plusieurs questions qui présentent différents aspects de la proportionnalité : grandeurs, mesures, rapports, proportions, nombres, tableau, fonction linéaire et différentes structures de nombres : fractions, entiers, décimaux, rationnels. Seules les questions qui se réfèrent à certaines pratiques opératoires ou connaissances sur les entiers sont correctement traitées par presque tous les maîtres interrogés.

Intensité :

Les fréquences d'erreurs (nombres de réponses erronées/nombres d'observations) sont plus ou moins importantes suivant les questions et varient de 30% à 80%. Plusieurs réponses ont des fréquences avoisinant 50% ce qui nous a permis de parler d'ambiguïté et de perte de sens.

Rémanence :

Certaines difficultés peuvent concerner les élèves, les professeurs et les universitaires.

Nous avons remarqué que la moitié des élèves de seconde que nous avons interrogés ne faisaient pas « le lien entre fonction linéaire et proportionnalité ». Nous avons dû nuancer en ce qui concerne les maîtres du primaire interrogés mais nous avons constaté que le modèle « fonction linéaire » était indépendant des modèles arithmétiques de la proportionnalité.

Nous avons émis l'hypothèse que cette parcellisation des connaissances peut avoir pour origine un cloisonnement des différents enseignements, hypothèse renforcée par le fait que le choix d'un modèle semblait conditionné par des situations prototypiques. Les connaissances de l'arithmétique n'ayant pas été décontextualisées et reformulées par l'algèbre il s'ensuivrait que la fonction linéaire ne peut pas apparaître comme une abstraction de la proportionnalité en arithmétique.

Les observations de Marianna Bosch i Casabò¹² dans la partie 4 de sa thèse renforcent cette idée. Pour voir comment sont utilisés différents ostensifs lors de microgenèses Marianna Bosch i Casabò propose des exercices classiques de proportionnalité multiple à des universitaires :

« ...L'objectif de cette quatrième partie est de montrer ce qui se passe lorsque des sujets bien que mathématiciens sont confrontés à des types de problèmes archaïques - les problèmes de proportionnalité multiple - pour lesquels ils ne disposent pas de techniques classiques qui leur permettraient de les résoudre. De cette manière les sujets ont dû inventer des techniques et avoir des recours aux mathématiques et à la culture sans grande relation a priori avec le type de tâche proposée. Le résultat est une intense activité de bricolage réalisée à l'aide d'une grande diversité de matériels

¹² Mariana Bosch i casabò ; La dimension ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad ; 1994.

ostensifs et non ostensifs et où se succèdent essais et erreurs, progrès et régressions en fonction du type d'outillage choisi ».

Pourquoi la résolution d'exercices élémentaires de l'arithmétique demande-t-elle une « intense activité » de la part d'universitaires ?

Marianna Bosch avance l'idée que les sujets interrogés font un effort d'explication pour donner du sens à la formulation de l'énoncé des problèmes. Si une explication interne à l'institution des mathématiciens demande un effort important qu'en serait-il si ces universitaires devaient communiquer leurs explications en dehors de leur communauté ? Les exercices proposés relevant de types de problèmes de la vie courante cette éventualité n'est pas exclue.

Pourquoi ces universitaires ne disposent-ils pas de techniques classiques de l'arithmétique élémentaire ?

Pourquoi les modèles dont ils disposent ne permettent-ils pas de résoudre simplement ces exercices ?

Là encore les connaissances des fonctions n-linéaires n'absorbent pas naturellement les connaissances élémentaires de la proportionnalité multiple. Pour mieux comprendre ces difficultés considérons un des exercices proposés par Marianna Bosch i Casabò et la solution suggérée :

« 26 hommes travaillant 9 heures par jour pendant 3 jours font 720 m de tissu. On suppose que la longueur de tissu produit est proportionnelle au nombre de travailleurs, au nombre de jours et au nombre d'heures travaillées par jour. Combien de mètres du même tissu feraient 14 hommes en 6 jours à raison de 8 heures par jour ? »

La solution proposée sous le nom de « modélisation fonctionnelle » est la suivante :

« Soit x le nombre de mètres de tissu fabriqués. Nous avons :

f est trilinéaire

$$f(26, 9, 3) = 720$$

$$x = f(14, 8, 6).$$

$$\text{Donc } x = f(14, 8, 6) = \frac{14}{26} \times \frac{8}{9} \times \frac{6}{3} f(26, 9, 3) = \frac{14}{26} \times \frac{8}{9} \times \frac{6}{3} 720 \approx 689. \text{ »}$$

Il n'est pas immédiat de voir dans cette solution l'équivalence avec la méthode de réduction à l'unité : calcul de $f(1, 1, 1)$ puis de $14 \times 8 \times 6 \times f(1, 1, 1)$ ou avec la méthode des proportions :

$$\frac{f(14,8,6)}{f(26,9,3)} = \frac{14 \times 8 \times 6}{26 \times 9 \times 3} \text{ d'autant plus que cette manipulation des ostensifs des fonctions n'est}$$

pas une pratique courante.

On peut se demander si l'enseignement à un niveau donné se préoccupe de reformuler les savoirs anciens en utilisant les savoirs nouveaux ? Les enseignants du collège proposent-ils une activité réflexive sur la proportionnalité étudiée en primaire pour introduire la fonction linéaire en quatrième ? L'instrumentalité potentielle (la manipulation des écritures) des fonctions linéaires est-elle mise en œuvre pour absorber les techniques de l'arithmétique ?

Les résultats de la thèse d'André Antibi¹³ nous confortent dans cette idée de rémanence. André Antibi soutient que c'est « notre enseignement » qui prépare les difficultés et erreurs

¹³ André Antibi ; Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstrations. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions ; 1988.

des étudiants et futurs enseignants. Il s'appuie sur de nombreuses enquêtes pour affirmer que les fréquences d'erreurs qui résultent d'obstacles didactiques ne dépendent pas du niveau de connaissance mais de l'influence du milieu et du contrat didactique.

Obsolescence et ancienneté :

Le vocabulaire de la proportionnalité a été rendu pérenne par une culture ancienne. Les connaissances en arithmétique élémentaire sont supposées stabilisées.

Avec la réforme des années soixante-dix la noosphère s'occupe de la transposition de la théorie des ensembles et de l'algèbre. Dans l'enseignement secondaire, la fonction linéaire est censée reformuler les savoirs du primaire sur la proportionnalité. Mais la fonction linéaire définit une relation entre nombres, donc les grandeurs disparaissent et le vocabulaire de la proportionnalité est utilisé pour décrire des relations entre nombres (suites proportionnelles, tableau de proportionnalité). Il en est résulté des mélanges de vocabulaires, des formulations inappropriées et des confusions dans les concepts.

Comme ces erreurs sont passées inaperçues, on peut supposer qu'elles sont aussi anciennes que les changements de programmes de 1970. Les effets de ce que font les maîtres ne se manifestent pas immédiatement.

Si on admet de plus que la qualité des apprentissages de la proportionnalité pour les élèves dépend des connaissances des professeurs à ce sujet on en déduit facilement des conséquences en chaîne qui peuvent expliquer les phénomènes de rémanence précédemment décrits. Les futurs enseignants recrutés parmi les élèves qui ont vécu ces confusions auront d'autant plus de difficultés à remettre de l'ordre dans leurs connaissances que les premiers apprentissages sont les plus prégnants.

Aveuglement :

Nous avons constaté qu'il n'y avait pas les maîtres qui savaient et ceux qui ne savaient pas ; que les savoirs corrects ne s'opposaient pas aux conceptions fausses. On en déduit que le système d'analyse des maîtres ne leur permet pas de corriger d'eux-mêmes. Les usages inappropriés que nous avons observés peuvent donc perdurer tant qu'ils passent inaperçus des institutions censées les corriger.

Conclusion et hypothèse :

Nous avons vu que la disparition du sens précis des mots rend difficiles les explications qui permettent de différencier la nature des nombres et leurs fonctions dans les diverses situations. Le concept de rapport est devenu déliquescent et le mot « rapport » est souvent remplacé par d'autres expressions (proportion, coefficient de proportionnalité, fraction) non adaptées à la situation étudiée. Il s'ensuit des confusions dans les concepts de fraction, de rapport, de proportionnalité, de rationnel, de décimal, de coefficient de proportionnalité...

La disparition des grandeurs comme objet d'enseignement en mathématiques dans le secondaire limite la proportionnalité à l'étude de relations numériques, ce qui favorise l'usage du vocabulaire de la proportionnalité pour décrire les notions de multiple, de rapport, de quotient, ... et induit des conceptions fausses. L'ampleur, l'intensité et la rémanence des erreurs observées donnent à penser qu'elles ne sont pas accidentelles, ce qui conduit à formuler l'hypothèse suivante :

Les usages inappropriés des connaissances mathématiques que nous avons observés sont des indices d'un phénomène didactique général.

C'est ce phénomène que nous allons tenter d'étudier dans la suite de ce travail.

PARTIE 2

EVOLUTION DES CONDITIONS D'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE

| | |
|--|------------|
| 2 - 1 Introduction | 95 |
| 2 - 2 Structure mathématique de l'objet proportionnalité. | 96 |
| 2-2-1 Le modèle général | 96 |
| 2-2-2 Classification de différents rapports | 100 |
| 2-2-3 Classification des situations en fonction du milieu de référence | 102 |
| 2 - 3 Les répertoires scolaires de la proportionnalité | 106 |
| 2-3-1 Description des modèles scolaires | 106 |
| 2-3-2 Cadres arithmétique et algébrique | 144 |
| 2-3-3 Conclusions et hypothèses | 149 |
| 2-4 Evolution des programmes de collège de 1947 à 1985 | 150 |
| 2-4-1 Introduction et méthodologie | 150 |
| 2-4-2 Etude des programmes | 151 |
| 2-4-3 Conclusions et hypothèse | 162 |
| 2 - 5 Evolution de l'histoire de la proportionnalité. | 163 |
| 2-5-1 Introduction | 163 |
| 2-5-2 Evolution des savoirs dans la sphère savante | 163 |
| 2-5-3 Les contraintes de la noosphère. | 168 |
| 2-5-4 Les répercussions sur l'école | 169 |
| 2-5-5 Conclusions et hypothèses | 169 |
| 2 - 6 Les différentes institutions et les répertoires associés | 171 |
| 2-6-1 Méthodologie | 171 |
| 2-6-2 Esquisse d'une étude de l'usage actuel de la proportionnalité | 171 |
| 2-6-3 Les institutions scolaires | 176 |
| 2-6-4 Conclusion et hypothèse | 179 |
| 2 - 7 Bilan et conséquences | 180 |

PARTIE 2

EVOLUTION DES CONDITIONS D'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE

2 - 1 Introduction

Les différentes enquêtes ont fait apparaître des difficultés dans l'usage du vocabulaire de la proportionnalité et l'utilisation des différents modèles de la linéarité. Les analyses de données semblent montrer que les professeurs des écoles n'en ont pas conscience, que leurs connaissances sont parcellisées et que leurs savoirs ne permettent pas de corriger des formulations erronées. Nous faisons les hypothèses suivantes :

- H1 : La culture des professeurs ne leur permet pas de traiter correctement la proportionnalité.
H2 : Les curriculums successifs ont fait disparaître de leur culture toute une organisation de savoirs et connaissances autour des notions de rapport et de proportionnalité.

La formation professionnelle peut-elle pallier cette disparition en fournissant aux professeurs les moyens d'enseigner à leurs élèves des savoirs qui leur permettraient de traiter correctement les questions de proportionnalité ? Nous avons plusieurs raisons d'en douter.

- H3 : Le curriculum actuel ne justifie pas qu'on fasse une place à l'étude de la proportionnalité.
H4 : Le curriculum seul ne suffit pas à entretenir une connaissance de la proportionnalité en primaire qui serait autonome.
H5 : Les mathématiciens eux-mêmes ont un rôle à jouer pour permettre l'existence d'une genèse de la linéarité qui rend compte de la culture de la proportionnalité.

Nos soupçons se portent principalement sur la formation générale et les contenus d'enseignement¹. Or les connaissances mathématiques communes aux professeurs des écoles ont leur origine dans la scolarité obligatoire c'est à dire principalement au collège. Pour mettre à l'épreuve les hypothèses précédentes nous nous proposons d'explorer les programmes de collège de 1947 à 1985.

Pour analyser l'évolution des notions de rapport, de proportionnalité et de linéarité il est nécessaire de déterminer leur fondement structurel en tant qu'objets mathématiques puis les fonctions qu'elles remplissent en tant qu'outils dans le cadre des différents milieux de référence.

Cette analyse va nous aider à répertorier les différents modèles de la proportionnalité qui ont eu cours dans la scolarité obligatoire.

Pour expliquer l'origine de ces évolutions nous serons conduits à interroger l'histoire des connaissances de la proportionnalité dans la sphère savante, à évaluer leurs répercussions sur l'école et sur les relations interinstitutionnelles. Pour comprendre les pratiques scolaires qui en résultent, il est nécessaire d'expliquer les différents assujettissements que vit l'école dans son environnement institutionnel et social.

¹ « ... (les) contenus d'enseignement ... ont été et sont encore un, sinon le levier privilégié de l'action sur le système éducatif. » ; Michèle Artigue ; réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994) ; Les sciences au lycée sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin ; Vuibert ; 1996.

2 - 2 Structure mathématique de l'objet proportionnalité.

Les connaissances mathématiques actuelles permettent de traiter la linéarité indépendamment des grandeurs ; les calculs sur les rapports et proportions peuvent être considérés comme de banales applications des connaissances sur les structures numériques. Mais la genèse des premières connaissances mathématiques va des grandeurs aux rapports et proportions, or il est difficile de prendre en compte ces objets directement en mathématiques. Les raisonnements d'arithmétique élémentaire utilisent les rapports de grandeurs et dans une égalité de tels rapports le produit des extrêmes ou des moyens n'a de sens que s'il est possible de définir les grandeurs produit correspondantes. La théorie des rapports et proportions échappe à ces contraintes en niant les grandeurs et leurs unités. L'algèbre « moderne » ignore les limites qu'imposent les règles de l'arithmétique, mais le traitement qu'elle fait des objets « ordinaires » sans une algèbre sur ces objets conduit à des erreurs². Il est donc nécessaire de modéliser la connaissance initiale de la linéarité dans son rapport avec les grandeurs.

2-2-1 Le modèle général

La proportionnalité met en œuvre au moins deux grandeurs³ variables (ou domaines de grandeurs) dans un système (physique, mathématique ou social) qui les rend dépendantes et détermine une correspondance (relation fonctionnelle⁴) entre leurs éléments.

Définition 1 : Pour définir la proportionnalité entre deux grandeurs variables G et G' il faut disposer d'un moyen de définir les rapports multiplicatifs dans chacun des deux domaines. Les grandeurs seront proportionnelles si tout rapport entre deux éléments d'une même grandeur est égal au rapport entre les deux éléments correspondants de l'autre grandeur.

La proportionnalité n'est ni une qualité d'un ou plusieurs éléments ni une comparaison d'éléments mais une relation fonctionnelle. Elle met en œuvre deux variables et exclut de ce fait les objets matériels et les ensembles amorphes de nombres. Si le milieu matériel est constitué d'objets physiques le milieu de référence ne peut être que des grandeurs attachées à ces objets. De même si le milieu matériel est constitué de deux familles de nombres alors le milieu de référence sera deux variables qui organisent ces familles et entre lesquelles on peut établir une correspondance.

La définition 6 du livre 5 des éléments d'Euclide⁵ due à Eudoxe de Cnide montre que la connaissance des entiers suffit pour comparer des rapports réels de grandeurs et décrire des proportions.

On peut définir les rapports multiplicatifs sans les mesures mais dans la pratique on considère des grandeurs mesurables⁶ ce qui permet de définir la proportionnalité grâce aux mesures.

² Hassler Witney propose une « algèbre des grandeurs » dans « The mathematics of physical quantities ».

³ Pour avoir des précisions sur les notions de grandeurs on pourra consulter le point d'histoire 1 en annexe.

⁴ Une analyse épistémologique succincte de la notion de fonction figure en annexe, point d'histoire 3.

⁵ Elle figure dans la partie suivante : « classification des différents rapports ».

⁶ On dit aussi grandeurs additives ; dans le présent exposé nous supposons que les grandeurs ont une structure de semi-groupe archimédien.

Définition 2 : Si les deux grandeurs sont mesurables alors on peut modéliser la situation de la manière suivante :

1) Le système présente :

- Deux grandeurs variables G et G' .
- Une correspondance C entre les éléments de G et ceux de G' .
- Une grandeur u élément de G et une grandeur u' élément de G' .
- Deux variables numériques additives X et Y définies respectivement sur G et G' à valeurs dans \mathbb{R}^+ telles que $X(u) = 1$ et $Y(u') = 1$.

2) Chaque état du système présente deux valeurs $x = X(g)$ et $y = Y(g')$ (où $g' = C(g)$).

3) Il existe un nombre k qui pour tout couple (x, y) correspondant à un état du système réalise l'égalité : $y = kx$.

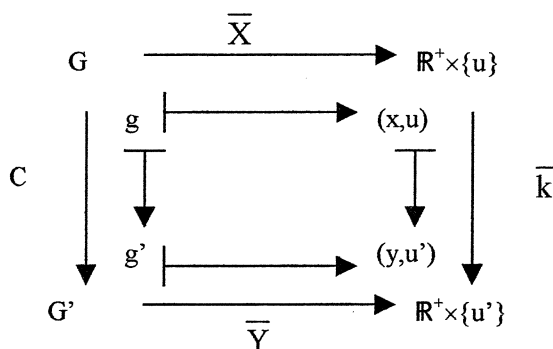
Sous ces trois conditions on dit que :

Les deux grandeurs G et G' sont proportionnelles.
 Les deux variables X et Y sont proportionnelles.
 La situation est « de proportionnalité ».

Exemple : Le poids et le volume d'un même « corps » sont proportionnels.

Remarque 1 :

L'existence du nombre k rend le diagramme suivant commutatif ; c'est à dire : pour tout g de G on a $\bar{Y} \circ C(g) = \bar{k} \circ \bar{X}(g)$ où $\bar{X}(g) = (X(g), u)$; $\bar{Y}(g') = (Y(g'), u')$; $\bar{k}(x, u) = (y, u')$.



Remarque 2 :

La définition précédente mobilise les mesures de grandeurs.

Le nombre k dépend des unités u et u' ; on le note $k_{(u, u')}$.

Propriété :

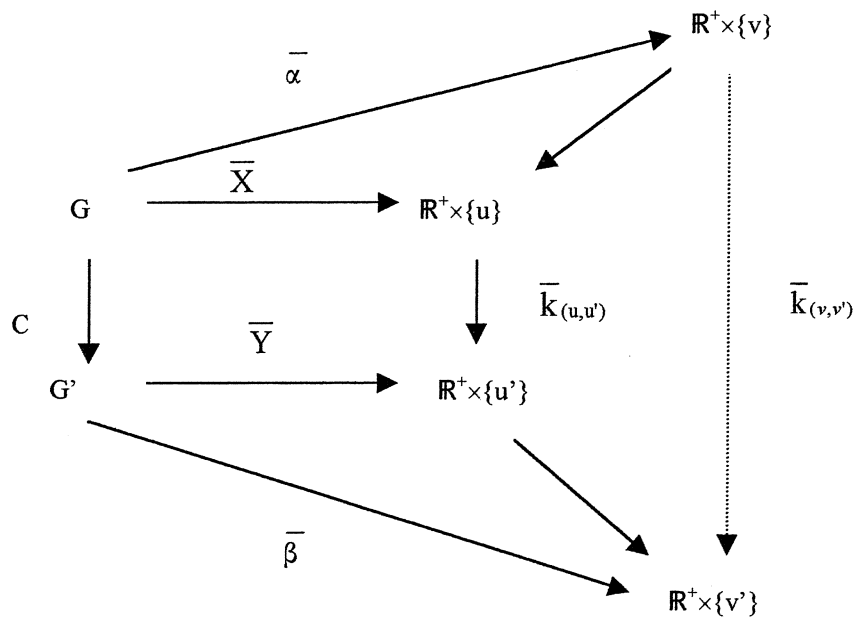
Si le nombre $k_{(u, u')}$ existe alors le nombre $k_{(v, v')}$ existe quelles que soient les unités de mesures v et v' dans G et G' (L'existence de k ne dépend pas des unités de mesures).

Preuve :

On suppose connu que le rapport des mesures de deux grandeurs de même nature est le même quel que soit le choix de la mesure (si μ et ν sont deux mesures sur le même domaine G alors quelles que soient les grandeurs A et B de G : $\frac{\mu(A)}{\mu(B)} = \frac{\nu(A)}{\nu(B)}$)⁷.

En particulier le rapport de deux grandeurs est égal au rapport de leurs mesures. Il suffit de prendre une des deux grandeurs comme unité pour s'en convaincre.

Appelons α et β les deux variables numériques additives définies respectivement sur G et G' telles que : $\alpha(v)=1$ et $\beta(v')=1$.



On peut écrire successivement :

$$Y(g') = k_{(u,u')} \times X(g)$$

$$\beta(g') = Y(g') \times \beta(u') = k_{(u,u')} \times X(g) \times \beta(u') = k_{(u,u')} \times \alpha(g) \times X(v) \times \beta(u')$$

$$\text{donc } k_{(v,v')} = k_{(u,u')} \times X(v) \times \beta(u').$$

Autre écriture :

Soit $Y(g') = \frac{g'}{u'} = k \times \frac{g}{u}$ où $\frac{g'}{u'}$ et $\frac{g}{u}$ désignent des rapports de grandeurs.

$$\beta(g') = \frac{g'}{v'} = \frac{g'}{u'} \times \frac{u'}{v'} = k \times \frac{g}{u} \times \frac{u'}{v'} = k \times \frac{g}{v} \times \frac{v}{u} \times \frac{u'}{v'} = k \times \frac{v}{u} \times \frac{u'}{v'} \times \alpha(g)$$

$$\text{donc } k_{(v,v')} = k_{(u,u')} \times \frac{v}{u} \times \frac{u'}{v'}.$$

⁷On pourra trouver une démonstration dans « Henri Lebesgue ; La mesure des grandeurs ; Albert Blanchard ; 1975 ; page 133 » ; ou bien dans J. Lelong Ferrand et J. M. Arnaudès ; cours de mathématiques ; tome 2 : analyse ; Dunod université ; 1974 ; page 24.

Propriété :

Pour des grandeurs mesurables les définitions 1 et 2 sont équivalentes.

Preuve :

Si les grandeurs G et G' sont proportionnelles au sens de la définition 2 alors elles le sont au sens de la définition 1.

En effet soient g_1 et g_2 deux éléments de G, g'_1 et g'_2 deux éléments de G' alors

$$\frac{g'_2}{g'_1} = \frac{Y(g'_2)}{Y(g'_1)} = \frac{k \times X(g_2)}{k \times X(g_1)} = \frac{g_2}{g_1}. \text{ En d'autres termes : } \frac{g'_2}{g'_1} = \frac{u'}{u'} = \frac{k \times \frac{g_2}{u}}{k \times \frac{g_1}{u}} = \frac{g_2}{g_1}.$$

Réciproquement si G et G' sont proportionnelles au sens de la définition 1 alors quelles que soient les grandeurs g_1 et g_2 de G on a :

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{g'_1}{g'_2} \text{ soit } \frac{X(g_1)}{X(g_2)} = \frac{Y(g'_1)}{Y(g'_2)} \text{ donc } Y(g'_1) = \frac{Y(g'_2)}{X(g_2)} \times X(g_1).$$

Soit $k = \frac{Y(g'_2)}{X(g_2)}$ alors pour tout g_1 de G on a $Y(g'_1) = k \times X(g_1)$.

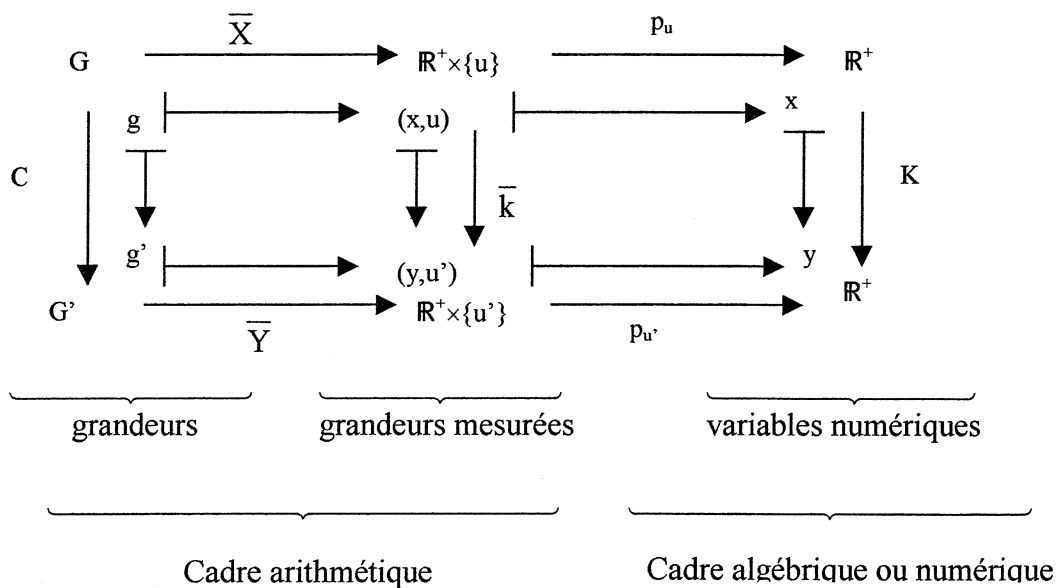
Autrement dit si G et G' sont proportionnelles au sens de la définition 1 alors la correspondance K qui à tout nombre x (mesure d'un élément de G) associe y (mesure de l'élément correspondant de G') est une fonction linéaire.

Conséquence :

Les grandeurs G et G' sont proportionnelles si et seulement si l'application notée K de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ qui à x (mesure d'un élément de G) associe y (mesure de l'élément correspondant de G') est linéaire.

On peut alors schématiser la situation fondamentale de proportionnalité par le diagramme commutatif suivant qui nous servira de système organisateur de connaissances (schéma MG) :

$p_u \circ \bar{X} = X$ et $p_{u'} \circ \bar{Y} = Y$.



Chaque modélisation de la proportionnalité fait référence à un de ces trois cadres (points de vue) : grandeurs, grandeurs mesurées, variables numériques.

En particulier l'application linéaire K apparaît comme une modélisation algébrique de la relation de proportionnalité entre les grandeurs G et G' .

Remarque: Les mesures de grandeurs permettent différentes modélisations de la proportionnalité mais les changements de milieu de référence nécessitent l'utilisation de différents types de rapports qu'il est utile de répertorier avant de recenser les différents modèles de la proportionnalité.

2-2-2 Classification de différents rapports

Dans les éléments, Euclide ne définit pas précisément la notion de grandeur, ni celle de rapport. Tout au plus donne-t-il une idée plutôt floue de ce qu'est une raison : "Une raison est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles suivant la quantité". (définition 3 du livre V)

Néanmoins Eudoxe de Cnide donne un cadre théorique permettant de manipuler des rapports non nécessairement rationnels grâce à la définition 6 du livre V :

"Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la deuxième, et la troisième à la quatrième, lorsque des equimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres equimultiples quelconques de la deuxième et de la quatrième sont tels, que les premiers equimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds equimultiples, ou leurs sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois."

La proportion sert ici d'ostensif au non ostensif qu'est le nombre réel.

Depuis le XVI^{ème} siècle, les rapports irrationnels sont reconnus comme des nombres sur lesquels peuvent opérer addition et multiplication. On peut classer les différents rapports obtenus à partir de grandeurs et de scalaires⁸.

Grandeur

Nous ne considérerons que des grandeurs mesurables⁹. Ainsi à toute grandeur on peut faire correspondre une valeur numérique, c'est à dire une mesure dès lors que l'on a choisi une unité.

exemples de grandeurs de base : longueur, masse, temps,...

exemples de grandeurs dérivées : vitesse, accélération, force, pression, travail, puissance,...

Rapport

Dans la suite :

- a et b désignent des scalaires (éléments du corps des réels). Ils peuvent être entiers, rationnels ou irrationnels.
- \mathcal{A} désigne une grandeur.
- A désigne une mesure de cette grandeur \mathcal{A} (A est une grandeur mesurée).
- \mathcal{B} désigne une autre grandeur de nature différente de celle de \mathcal{A} , non homogène à \mathcal{A} .
- B désigne une mesure de cette grandeur \mathcal{B} . (B est une grandeur mesurée).

⁸ Scalaire : de scala, échelle. Un rapport scalaire est un rapport de deux grandeurs de même nature (nous dirons aussi rapport interne) ; il est explicité par un nombre réel. Par extension on appelle le corps \mathbb{R} le « corps des scalaires ».

⁹ Pour plus de précision sur la notion de « grandeur » on pourra consulter en annexe le point d'histoire 1.

On peut alors rencontrer les différents types de rapports¹⁰ suivants :

R(a,b) : Le rapport de deux scalaires est un scalaire (naturel, rationnel ou irrationnel).

R($\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1$) : Le rapport de deux grandeurs de même nature est un scalaire, c'est la mesure de \mathcal{A}_2 lorsque \mathcal{A}_1 est prise pour unité.

R(A₂,A₁) : Le rapport des mesures de deux grandeurs homogènes est un scalaire qui ne dépend pas de l'unité de mesure : $R(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = R(A_2, A_1)$. On dira rapport interne.

R(\mathcal{B}, \mathcal{A}) : Le rapport de deux grandeurs de natures différentes n'est pas « explicitable » sans les mesures de ces grandeurs¹¹. C'est un objet nouveau. C'est une grandeur dérivée quand on peut lui donner un sens ; par exemple la vitesse est le rapport de la distance au temps, la masse volumique est le rapport de la masse au volume, ...

R(B,A) : c'est un scalaire accompagné des unités de mesures de \mathcal{A} et de \mathcal{B} , il mesure une grandeur dérivée : par exemple une vitesse exprimée en mètres par seconde. On le nommera rapport externe.

R(\mathcal{A}, s) : C'est une grandeur homogène à \mathcal{A} , de même nature que \mathcal{A} .

R(A,s) : C'est la mesure de $R(\mathcal{A}, s)$ avec la même unité que A.

R(s,A) : si on le considère comme étant $s \times \frac{1}{A}$, il faut pouvoir donner du sens à $\frac{1}{A}$ en considérant 1 comme mesure d'une grandeur unité ; exemple : une fréquence est le nombre de cycles identiques par unité de temps.

Proportions

Dans l'encyclopédie de Diderot (1751) d'Alembert donne la définition suivante :

"PROPORTIONS, comme on compare deux grandeurs d'où résulte un rapport ou une raison aussi on peut comparer deux rapports d'où résulte une proportion lorsque les rapports comparés, ou ce qui est la même chose, leurs exposants se trouvent égaux. Chaque rapport ayant deux termes, la proportion en a essentiellement quatre ; le premier et le dernier sont nommés extrêmes ; le second et le troisième moyens."

Puisqu'une proportion résulte de la comparaison de deux rapports et que nous avons distingué 3 types de rapports il y a 6 types de proportions :

$$1) R(a,b) = R(c,d)$$

$$2) R(a_2, a_1) = R(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1)$$

$$3) R(a_2, a_1) = R(A_2, A_1)$$

$$4) R(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = R(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$$

$$5) R(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = R(B_2, B_1)$$

$$6) R(A_2, A_1) = R(B_2, B_1)$$

¹⁰ Les notions de « rapport » et « proportion » ont fait l'objet d'un point d'histoire 2 en annexe.

¹¹ Les anciens ne considéraient que des rapports de grandeurs homogènes, ce qui créait un obstacle dit « obstacle de l'homogénéité ».

Remarque 1 :

En notation « classique » $R(a,b) = R(c,d)$ s'écrivait : « $a:b :: c:d$ » et se lisait : « a est à b comme c est à d ».

En notation moderne on écrit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Remarque 2 :

Une permutation des extrêmes ou des moyens peut donner des rapports qui n'ont pas de sens (sauf au cas 1).

Dans les cas 4, 5, 6, le produit des extrêmes ou des moyens n'a de sens que si on peut définir les grandeurs produit.

2-2-3 Classification des situations en fonction du milieu de référence

Nous allons tenter de décrire les moyens qui permettent de décider si une situation est de proportionnalité ou non dans chacun des trois cadres : grandeurs, grandeurs mesurées, variables numériques, la structure de la proportionnalité décrite précédemment (schéma MG) servant de système organisateur. Ces moyens seront la base des stratégies et techniques de calcul des éléments manquants dans une situation : grandeurs, mesures, rapports, nombres ... Une autre variable fondamentale fera l'objet d'une classification ultérieure pour l'analyse a priori d'une ingénierie ; il s'agit de la nature des nombres qui explicitent les mesures et les rapports.

Cadre des grandeurs :

Conformément à la première définition pour montrer que deux grandeurs G et G' sont proportionnelles il faut montrer que tout rapport de deux éléments d'une grandeur est égal au rapport des éléments correspondants de l'autre grandeur. La vérification de l'égalité de deux rapports conduit à considérer une proportion du type $\frac{g_1}{g_2} = \frac{g'_1}{g'_2}$. Si une telle égalité est fautive

alors les grandeurs G et G' ne sont pas proportionnelles ; mais pour que G et G' soient proportionnelles il faut que cette égalité soit vraie quels que soient g_1 et g_2 de G . La principale difficulté est la justification de cette universalité ; elle nécessite un raisonnement général sur les grandeurs. Il faut trouver une raison de décider l'égalité des rapports correspondants. Nous avons repéré trois types de raisons.

- Loi physique : l'observation d'un système physique peut induire une loi. La situation dite « de l'eau de mer »¹² en est un exemple. Accepter que les quantités de sel et d'eau soient proportionnelles c'est postuler que l'eau de mer est homogène.
- Nécessité mathématique ou logique : Les similitudes en sont des exemples. Dans « l'agrandissement du puzzle »¹³ les élèves doivent construire un puzzle « agrandi » sachant qu'un segment de 4 centimètres sur le modèle devra mesurer 7 centimètres sur la reproduction.
- Convention sociale : la décision d'attribuer des parts égales conduit à utiliser les techniques de la proportionnalité. C'est cette convention de « l'équité » qui sera le moteur de l'ingénierie décrite dans la partie 3 de cette thèse.

¹² Nadine et Guy Brousseau ; Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire , IREM de Bordeaux ; 1987.

¹³ Ibidem.

Eléments manquants :

Pour déterminer les éléments manquants dans une situation où deux grandeurs sont proportionnelles on est conduit à utiliser l'environnement des rapports :

- La connaissance du rapport de deux éléments d'une grandeur donne le rapport des éléments correspondants de l'autre grandeur.
- Pour déterminer l'élément correspondant à un élément d'une des grandeurs on utilise une proportion où trois éléments sont connus le quatrième étant l'élément cherché.

Cadre des grandeurs mesurées :

Ce qui est nouveau dans le cadre des grandeurs mesurées c'est la possibilité d'explicitier un rapport de deux grandeurs même si ces grandeurs ne sont pas homogènes.

Le rapport de deux grandeurs étant égal au rapport de leurs mesures, les moyens précédents s'enrichissent de possibilités de calculs sur les mesures. Si on « oublie » les unités on peut utiliser les propriétés des proportions. Le « produit en croix » permet de valider ou d'invalider l'égalité de deux rapports. La permutation des extrêmes (ou des moyens) permet d'obtenir une égalité de rapports externes à partir de l'égalité de rapports internes ou inversement.

La définition 2 donne un autre moyen de décider s'il y a proportionnalité ou non. Il s'agit de savoir s'il existe ou non un nombre k tel que $y=kx$ pour tout couple (x,y) correspondant à un état du système. Là encore il est plus facile d'invalider que de valider la proportionnalité entre les deux grandeurs ; l'existence de k pour un nombre fini de valeurs de la variable X et des valeurs correspondantes de la variable Y ne suffit pas. Il peut arriver que le nombre k soit donné (prix à l'unité) ou facile à déterminer (le périmètre d'un carré est égal à 4 fois son côté) mais il se peut aussi qu'il ne soit pas explicitable avec un rationnel (le rapport entre la longueur d'un cercle et son rayon est un irrationnel).

Eléments manquants :

Le calcul des éléments manquants dans le cadre de grandeurs mesurées proportionnelles est facilité par l'existence d'une relation numérique explicitable entre les mesures de deux grandeurs. En plus des méthodes décrites dans le cadre des grandeurs il est possible d'utiliser cette fonction numérique. La relation $y=kx$ montre que la connaissance d'un couple de grandeurs mesurées permet de déterminer k ou que la connaissance de k permet de calculer une des mesures de deux éléments correspondants connaissant l'autre.

Cadre numérique :

→ Il n'y a aucune raison pour que deux variables réelles soient proportionnelles mais on peut construire de manière formelle une relation du type $y=kx$ entre deux variables x et y . On définit ainsi une fonction linéaire dont les propriétés résultent de la structure algébrique ou topologique de \mathbb{R} . Si on appelle f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe kx (ou k est un réel fixé) alors :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = k(\lambda x) = \lambda(kx) = \lambda f(x)$. (On reconnaît la conservation des rapports internes en écrivant $\frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \frac{\lambda x}{x}$).

2. $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = f(x_1) + f(x_2)$. (C'est la propriété dite d'additivité).

La réciproque de la propriété 1 est immédiate :

Si $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R} f(\lambda x) = \lambda f(x)$ alors $f(x) = f(x \times 1) = xf(1)$ par conséquent $f(1)$ est le nombre k cherché.

La réciproque de 2 est fautive. On montre qu'il existe des fonctions additives qui ne sont pas \mathbb{R} linéaires¹⁴. Pour qu'une fonction additive soit \mathbb{R} linéaire il faut une condition supplémentaire, par exemple continue ou croissante. Nous utiliserons plus précisément la propriété suivante : « Toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui est \mathbb{N} linéaire et croissante est \mathbb{R} linéaire ».¹⁵

→ Si deux variables réelles n'ont pas lieu d'être proportionnelles à plus forte raison deux ensembles finis de nombres réels ne sont pas proportionnels. Mais si un système organisateur établit une correspondance entre ces deux ensembles telle que le rapport de deux nombres homologues soit constant alors on peut considérer que l'ensemble des couples ainsi obtenus est une partie du graphe d'une fonction linéaire. Si de plus ces nombres sont positifs alors on peut les considérer comme des mesures de deux domaines de grandeurs proportionnels. On peut construire arbitrairement ces deux domaines en choisissant la nature et l'unité mais il est peu probable qu'on puisse donner du sens à une telle relation arbitraire si les domaines de grandeurs n'ont aucune relation contingente entre eux.

→ Si X et Y sont les mesures de deux grandeurs G et G' alors on a vu que G et G' sont proportionnelles si et seulement si la correspondance appelée K qui à x associe y est linéaire. On est dans le cas où le milieu objectif est un système qui établit une relation fonctionnelle entre éléments de deux domaines de grandeurs (schéma MG).

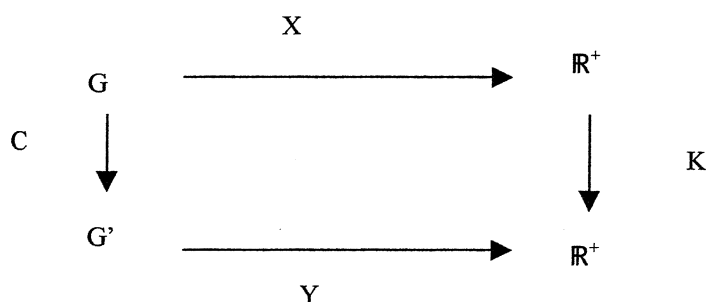
Comme nous l'avons vu précédemment la vérification sur un nombre fini de valeurs (ici ce sont des mesures) ne permet pas de valider la proportionnalité entre les deux grandeurs mais seulement de l'invalider dans le cas où deux rapports homologues sont différents.

Pour justifier la proportionnalité entre les deux grandeurs G et G' il faut prouver que la correspondance K est \mathbb{R} linéaire. D'après ce qui précède, il suffit que K soit \mathbb{N} linéaire et croissante ; c'est à dire que la correspondance C entre grandeurs vérifie les mêmes conditions puisque les mesures X et Y sont des morphismes strictement croissants.

Preuve :

G et G' sont des groupes additifs archimédiens.

$K \circ X(g) = Y \circ C(g)$



On suppose C additive et croissante il faut montrer que K est \mathbb{N} linéaire et croissante.

\mathbb{N} linéarité :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $X(g)=x$ on a :

d'une part : $K(nx)=K(nX(g))=K(X(ng))=Y(C(ng))$ en raison de la linéarité de X ;

¹⁴ On considère une base de \mathbb{R} sur \mathbb{Q} . A tout nombre réel on associe la somme de ses coordonnées sur cette base. Cette fonction est additive mais ne peut pas être \mathbb{R} linéaire car elle n'est pas continue puisqu'elle ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

¹⁵ Pour une démonstration de cette propriété on pourra consulter : J. Lelong Ferrand, J.M. Arnaudis ; cours de mathématiques ; tome 2 ; analyse ; Dunod ; 1974 ; pages 19 à 21.

et d'autre part : $nK(x) = nK(X(g)) = nY(C(g)) = Y(nC(g)) = Y(C(ng))$ en raison de la linéarité de Y et de la \mathbb{N} linéarité de C . Donc $K(nx) = nK(x)$.

Croissance :

Si $X(g_1) < X(g_2)$ alors $g_1 < g_2$ car X est croissante ; puisque C est croissante alors $C(g_1) < C(g_2)$ donc $Y(C(g_1)) < Y(C(g_2))$ puisque Y est croissante or $Y(C(g_1)) = K(X(g_1))$ et $Y(C(g_2)) = K(X(g_2))$ et finalement $K(X(g_1)) < K(X(g_2))$.

Finalement K étant \mathbb{N} linéaire et croissante elle est \mathbb{R} linéaire.

Dans la pratique si le milieu matériel indique clairement la croissance de C il suffit de vérifier que les rapports internes multiples sont conservés ; ce qu'on énonce en disant : « Si une grandeur est multipliée par 2 ; 3 ; ... alors la grandeur correspondante est multipliée par 2, 3, ... »

Eléments manquants :

→ si le milieu objectif est une fonction linéaire :

- pour déterminer son coefficient k il faut connaître un couple du graphe.
- si k est connu, on peut calculer l'image ou l'antécédent de n'importe quel réel.

→ Si le milieu objectif est deux ensembles finis « amorphes » E et F de nombres réels que l'on sait se correspondre dans une fonction linéaire, pour déterminer cette fonction il faut déterminer son coefficient k ou un couple du graphe.

Une fonction linéaire étant soit croissante soit décroissante, la correspondance cherchée associe au plus petit élément x_p de E soit le plus petit élément y_p de F soit le plus grand élément y_g de F . La détermination de la fonction nécessite deux calculs.

En utilisant le rapport interne on a :

$$\text{Soit } \frac{x_g}{x_p} = \frac{y_g}{y_p} ; \text{ soit } \frac{x_g}{x_p} = \frac{y_p}{y_g}.$$

En utilisant les rapports externes on a :

$$\text{Soit } \frac{y_g}{x_g} = \frac{y_p}{x_p} ; \text{ soit } \frac{y_g}{x_p} = \frac{y_p}{x_g}.$$

→ Si E et F sont deux ensembles finis de mesures de grandeurs proportionnelles alors la fonction linéaire qui établit la correspondance entre ces mesures est nécessairement croissante donc d'après ce qui précède, k est déterminé.

2 - 3 Les répertoires scolaires de la proportionnalité

2-3-1 Description des modèles scolaires

Introduction et méthodologie

Pour cette analyse descriptive nous utiliserons trois outils :

- Le modèle général « MG » décrit précédemment
- La notion de milieu issue de la théorie des situations
- Les notions de tâche, technique, technologie et théorie issues de la théorie anthropologique.

Nous avons vu que le milieu objectif conditionne les moyens de mise en œuvre de la proportionnalité pour la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et la détermination des éléments manquants (inconnus) dans une situation de proportionnalité.

Les modèles scolaires sont nés de pratiques qui dépendent du milieu objectif sur lesquels ils sont supposés agir mais aussi du milieu de référence sur lequel se fonde leur structure mathématique.

Deux autres variables conditionnent le choix du modèle : la nature des nombres (entiers ou rationnels) et la nature du rapport (interne ou externe).

Nous analyserons ces modèles en termes de tâches et de techniques pour objectiver les conditions pratiques et en termes de technologie et théorie pour décrire les références aux savoirs institutionnels.

Les modèles effectifs sont pris dans des manuels scolaires dont les références sont données en début de chaque exposé.

1 Méthode de réduction à l'unité : MRU

références bibliographiques :

René Jolly : L'arithmétique au cours moyen. Fernand Nathan. 1936.

a) Mise en place de la MRU :

« 7m de ruban valent 24f. Quel est le prix de 18m ?

7^m de ruban valent 24^f

1^m de ruban vaut $\frac{24^f}{7}$

18^m de ruban valent $\frac{24^f \times 18}{7} = 61^f,71$

Remarque : Cette manière de calculer s'appelle **méthode de réduction à l'unité**. Pourquoi ? »

Remarques : La méthode de réduction à l'unité est construite à partir d'exemples concrets. Les nombres sont des mesures de grandeurs accompagnées de leurs unités. Les manipulations que l'on effectue sur ces grandeurs véhiculent une culture de la proportionnalité.

A propos des unités, on peut remarquer qu'elles sont en exposant dans la solution et non dans l'énoncé. Sont-ce les prémices au phénomène d'évaporation des unités ?

Dans le texte examiné, l'auteur distingue la règle de trois de la méthode de réduction à l'unité. La règle de trois est une technique abrégée qui donne les opérations finales à effectuer sachant

que l'ordre d'exécution reste au choix de l'utilisateur averti (la multiplication d'abord sauf s'il apparaît une simplification). C'est un algorithme : on calcule une règle de trois.

Suivant les auteurs de manuels, la « règle de trois » peut désigner le concept de proportionnalité ou un problème de proportionnalité ou plus couramment une des techniques qui relèvent de la proportionnalité et en particulier la méthode de réduction à l'unité.

Technique :

La méthode de réduction à l'unité est une technique basée sur le discours (ostensifs oraux), discours mis par écrit dans la présentation qu'offrent les manuels.

Elle se fait en trois étapes, donc en trois lignes, à partir de trois nombres (entiers) d'où le nom de « règle de trois ». Dans une première approche les rapports internes sont entiers (ce n'est pas une nécessité mathématique mais la nature des rapports et des mesures doit être adaptée au développement et connaissances de l'élève).

Le positionnement des nombres est figé sur trois lignes et deux colonnes. Chaque colonne est affectée à une grandeur et une unité : la première à la longueur de ruban exprimée en mètres, la deuxième à un montant exprimé en francs. La première ligne rappelle les données du problème, ce sont des grandeurs exprimées avec leurs unités. La deuxième ligne indique une division à effectuer sur un des nombres concrets explicités précédemment. « L'écriture fractionnaire » n'est pas acceptée comme une réponse, elle est comprise comme un calcul. Néanmoins, l'élève peut concevoir cette fraction comme un résultat dans la mesure où elle correspond au prix unitaire, donc à une grandeur identifiée. La troisième ligne indique qu'il faut ensuite effectuer une multiplication.

En fait le résultat final est obtenu en effectuant d'abord la multiplication puis la division, l'écriture sous forme de quotient indique le programme de calcul. Dans le présent manuel, l'auteur explique le choix de l'ordre des opérations par la précision du résultat. Il aurait pu justifier l'équivalence des calculs comme le font certains auteurs de manuels : $24^f \times 18$ est le prix de 18 coupons de 7 mètres, donc le prix de 18m est 7 fois moindre. L'écriture $\frac{24^f \times 18}{7}$ est un résumé de la méthode de réduction à l'unité que l'auteur appelle « règle de trois ».

Technologie et explication de la MRU :

La justification s'appuie sur la connaissance des opérations : « diviser et multiplier des grandeurs par des opérateurs entiers » et sur la supposée familiarité culturelle avec les grandeurs des problèmes abordés. La MRU ne nécessite pas d'explication préalable de la proportionnalité.

Chaque ligne est une reprise d'une technique antérieure à laquelle les élèves savent donner un sens.

Plus précisément :

1) La méthode de réduction à l'unité réduit la structure nécessaire à la conception du calcul à des mesures naturelles (au moins dans une première approche) sur lesquelles opèrent des rapports scalaires naturels.

2) Elle est une réécriture du procédé de calcul enseigné aux élèves : on calcule la valeur correspondant à 1 puis la valeur cherchée ; ce qui correspond à deux lignes de calculs successives « ordinaires », qui satisfont a priori les contraintes du calcul arithmétique élémentaire :

1. Chaque ligne de calcul ne comprend qu'une seule opération prise parmi multiplication ou division.

2. Chaque opération porte sur des nombres connus, soit parce qu'ils sont donnés, soit parce qu'ils sont calculés précédemment.
3. Le résultat du calcul doit pouvoir être étiqueté dans le répertoire élémentaire des grandeurs. (Les résultats sont des nombres concrets, c'est à dire des mesures de grandeurs accompagnées d'unités)

3) Les opérateurs (c'est à dire les rapports scalaires opérant sur les mesures) sont des scalaires entiers et les résultats peuvent être des entiers ou des décimaux conformément au contrat.

4) Les fractions ne sont pas acceptées comme des réponses à cause de l'institutionnalisation des décimaux et dans le contrat elles sont des programmes de calculs.

5) Les rapports scalaires peuvent être acceptés comme des résultats de calculs dans la mesure où le résultat correspond à une pratique identifiée (prix à l'unité, poids spécifique, autre grandeur dérivée...). Il faut définir une grandeur nouvelle pour pouvoir accepter comme résultat ce scalaire en tant que mesure de cette nouvelle grandeur. (par exemple le prix à l'unité permet de comparer les prix à l'unité quand « le prix à l'unité » est considéré comme grandeur dans laquelle on peut faire des comparaisons).

Conséquence : le « calcul en deux coups » peut conduire soit à une impossibilité, soit buter sur les règles précédentes :

- a) la règle 4 conduit à effectuer et donner le résultat décimal, ce qui induit une erreur au calcul suivant.
- b) la valeur à l'unité n'a pas de statut.
- c) On ne peut pas opérer sur une fraction qui n'a pas été effectuée.

Le concept :

Dans la méthode de réduction à l'unité les opérations donnent un sens à chaque étape de calcul. La connaissance culturelle des questions envisagées permet de manipuler la proportionnalité sans la conceptualiser. Les problèmes sont des questions concrètes issues de la vie courante.

La méthode de réduction à l'unité ne nécessite pas d'explication préalable de proportionnalité. Cette méthode prototypique véhicule une connaissance de la proportionnalité sans jamais l'institutionnaliser en tant que savoir. L'organisation locale autour de la méthode de réduction à l'unité ne nécessite pas l'élaboration d'un discours technologique sur les grandeurs proportionnelles. Il n'y a pas à proprement parler de construction d'un modèle puisque celui-ci se confond avec la description du système étudié.

La méthode de réduction à l'unité reste en acte. Elle utilise la conservation des rapports multiples sans jamais l'explicitier.

Raison didactique d'employer la MRU :

Elle permet de descendre en primaire l'étude de la linéarité dès qu'on a la multiplication et la division par des entiers.

Elle fait apparaître l'opérateur rationnel comme un résumé de la méthode de réduction à l'unité (règle de trois), elle donne donc un sens et une fonctionnalité à l'opérateur rationnel.

Avantages :

La réduction à l'unité ne nécessite aucune définition mathématique ni explication préalable sur la proportionnalité. Elle s'appuie sur la connaissance et le sens des opérations et la culture de l'élève. Elle ne nécessite pas la mise en place d'un concept pour être opérationnelle.

La construction de cette technique présente un faible coût technologique et reste à la portée des élèves de cours élémentaire. Elle permet d'aboutir à condition de donner un statut à l'image de 1.

La variation technique qui consiste à remplacer le discours de la méthode de réduction à l'unité par l'algorithme de la règle de trois conduit à une technique d'exécution plus rapide et permet l'exécution des opérations dans l'ordre le plus favorable pour l'utilisateur averti. Elle permet d'introduire l'opérateur fractionnaire qui s'impose comme un résumé de la règle de trois.

Limites :

1) L'élève peut manipuler cette technique comme outil sans jamais percevoir d'objet théorique puisqu'il s'appuie sur des connaissances et traditions culturelles.

La méthode de réduction à l'unité issue de problèmes concrets ne fait manipuler que des mesures exprimées avec des entiers ou des décimaux. Elle trouve sa légitimité dans le sens et la compréhension des opérations sur les entiers et ne nécessite pas d'être reconnue comme un savoir nouveau par les élèves.

Elle oblige à passer par l'unité. Même si l'image de l'unité a un statut on ne peut pas justifier la multiplication par une fraction. Il est difficile d'expliquer pourquoi on peut faire la multiplication avant la division.

2) Le positionnement bloqué oblige à une manière de raisonner qui peut être réductrice et contraignante. La méthode de réduction à l'unité peut aboutir à un langage absurde car sa technologie ne permet pas de justifier certaines utilisations qui apparaissent alors comme « dénuées de sens ».

Exemple :

« Avec 90^f on peut acheter trois chemises. Combien pourrait-on acheter de chemises semblables avec 240^f ? »

Solution suggérée par la MRU :

« avec 90^f on peut acheter 3 chemises
avec 1^f on peut acheter $\frac{3}{90}$ chemises
avec 240^f on peut acheter $\frac{240 \times 3}{90}$ chemises. »

La deuxième ligne est dénuée de sens d'un point de vue culturel car $\frac{3}{90}$ est une fraction de grandeur, l'unité de grandeur étant la chemise. La méthode de réduction à l'unité ne permet pas d'interpréter $\frac{3}{90}$ comme un rapport externe opérant entre deux grandeurs.

3) La « règle de trois », technique simplifiée de la méthode de réduction à l'unité, est moins intelligible qu'elle. Le retour au sens de cet algorithme nécessite une nouvelle technologie basée en général sur une explication orale qui reprend la méthode de réduction à l'unité.

4) La méthode de réduction à l'unité est d'utilisation lourde pour résoudre des problèmes de proportionnalité composée bien qu'elle permette d'aboutir (voir l'exemple 3 de la partie méthode des proportions).

b) Résumé du modèle MRU

Le modèle scolaire

| |
|---|
| 7^m de ruban valent 24^f |
| 1^m de ruban vaut $\frac{24^f}{7}$ |
| 18^m de ruban valent $\frac{24^f \times 18}{7} = 61^f,71$ |

Règles :

Chaque colonne est affectée à une grandeur définie par l'exercice.

On calcule la valeur correspondant à une unité puis la valeur cherchée.

C'est à droite qu'il faut placer le but à atteindre.

Caractéristiques didactiques :

Le modèle « MRU » est une technique de résolution de problèmes de grandeurs mesurées (par des entiers ou des décimaux) qui utilise les rapports internes entiers en tant qu'opérateurs.

L'intérêt de la mesure est qu'elle permet un passage à l'unité qui est une grandeur étiquetée familière à l'élève mais elle n'est pas utilisée pour expliciter le rapport externe par un nombre.

La relation fonctionnelle est explicitée dans le langage familier.

Le but de la méthode de réduction à l'unité n'est pas de valider ou d'invalider la proportionnalité néanmoins le raisonnement arithmétique qui sous-tend cette technique peut aboutir à une contradiction qui permet de rejeter la possibilité d'utiliser cette technique et donc de rejeter la proportionnalité.

c) Exemple d'utilisation

« J'achète une bicyclette. Comme je la paie comptant, le marchand m'accorde une remise de 4% sur le prix marqué et je ne paie alors que 3.264 francs. Quel était le prix marqué ?

Quand je paie 96^f le prix marqué est 100^f

Quand je paie 1^f le prix marqué est $\frac{100^f}{96}$

Quand je paie 3264^f le prix marqué est $\frac{100^f \times 3264}{96}$ »

On ne s'intéresse au pourcentage de la remise et à la remise elle-même que pour la vérification. L'illustration du manuel montre que ce serait "une mauvaise route" que de chercher à calculer le montant de la remise. On ne peut pas le trouver, il manque des données.

| | |
|---|--|
| mauvaise route | |
| Sur 100^f la remise est 4^f | |
| Sur 1^f la remise est $\frac{4^f}{100}$ | |
| Sur $?^f$ la remise est $??^f$ | |

On veut déterminer le prix marqué, c'est donc lui qu'il faut placer en dernier lieu. Les grandeurs qui interviennent sont de même nature, ce sont des prix exprimés en francs. Mais chaque colonne indique une caractéristique de ces prix : la colonne de gauche est réservée aux prix payés, celle de droite aux prix marqués.

Mais comment sait-on que le prix marqué est proportionnel au prix payé ? Le manuel ne pose pas la question et fait comme si l'élève savait.

Il y a un environnement culturel bien spécifique à la méthode de réduction à l'unité. Il semble que dans cet exemple ce n'est plus le sens des opérations qui justifie la méthode à moins de faire apparaître le prix payé comme le « prix » du prix marqué. La classification par thèmes des différents problèmes dans le manuel (le tant pour cent ; le prix marqué la remise et le prix net,...) laisse entendre que l'élève doit reconnaître dans quelles circonstances concrètes il peut utiliser la méthode de réduction à l'unité. Il ne dispose pas de test de la proportionnalité, mais de différents environnements qui suggèrent l'utilisation de la méthode de réduction à l'unité.

2 Méthode des proportions : MP

Références bibliographiques :

M. Royer et P. Court : Arithmétique Cours Supérieur 2^{ème} Année et Classe de fin d'Etudes Primaires. Armand Colin 1938

a) Mise en place de la MP :

Il y a trois étapes dans la mise en place de ces systèmes d'ostensifs : Rapports et proportions, reconnaissance de grandeurs proportionnelles (TRM), algorithme de résolution de problèmes (MP).

« Rapport de deux grandeurs

Les pièces de ruban a et b sont de même qualité. L'une est de 5^m et l'autre de 3^m. La longueur de la pièce a contient 5 fois le tiers de la longueur de la pièce b ou $\frac{5}{3}$ de b, ce qu'on exprime de la façon suivante : $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$. $\frac{5}{3}$ est le rapport des grandeurs a et b.

On appelle rapport le résultat de la comparaison à l'aide d'une mesure commune, de deux grandeurs de même espèce. C'est le quotient exact des nombres qui mesurent ces grandeurs avec la même unité.

Une fraction peut toujours être considérée comme un rapport mais un rapport n'est pas toujours une fraction.

Les rapports qui se présentent sous forme de fractions (*quotients exacts*) jouissent des mêmes propriétés que les fractions et conduisent à des calculs identiques.

Proportions

Le ruban a coûte 15^f et le ruban b, 9^f. Le rapport du prix de a à celui de b est $\frac{15}{9}$, ou après simplification, $\frac{5}{3}$. Les prix sont donc dans le même rapport que les longueurs et on a : $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.

Deux rapports égaux forment une proportion.

Une proportion est donc l'égalité de deux rapports.

On écrira : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, (a , b , c , d) a et d sont les *termes extrêmes* et b et c sont les *termes moyens*.

Réduisons les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ au même dénominateur.

On obtient : $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$. Comme les deux dénominateurs $b \times d$ et $d \times b$ sont égaux, les numérateurs le sont aussi et on a : $a \times d = b \times c$.

Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. »

Concepts :

Cette partie consiste à mettre en place les notions de rapports et proportions.

La première définition permet d'identifier le rapport de deux grandeurs au rapport de leurs mesures, donc à un rapport de nombres qui est leur quotient exact.

La définition d'une proportion s'appuie sur la matérialité ostensive des écritures fractionnaires; l'organisation mathématique autour des fractions ayant été préalablement construite.

Tâches et techniques projetées :

L'écriture des proportions va permettre d'expliciter la proportionnalité entre deux grandeurs. La propriété « produit en croix » va permettre le calcul effectif de la quatrième proportionnelle.

Technologie :

L'organisation mathématique locale autour de ce type de technique inclut un discours technologique basé sur les notions de rapports et de proportions et de grandeurs proportionnelles.

On passe d'un rapport de deux grandeurs à un rapport de deux scalaires par l'intermédiaire d'une « mesure commune », ce qui permet de concevoir ce rapport comme le quotient exact de deux nombres, donc comme un nombre. L'utilisation des lettres permet d'entretenir une

certaine ambiguïté : $\frac{a}{b}$ peut représenter le rapport des grandeurs a et b ou le rapport de leurs

mesures ; ce qui justifie l'écriture $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$. L'auteur précise : « Une fraction peut toujours être

considérée comme un rapport, mais un rapport n'est pas toujours une fraction ». L'apparition des rapports est donc présentée comme un ajout conceptuel à l'univers des fractions. Les élèves ne connaissent pas les irrationnels, les rapports de deux grandeurs incommensurables vont rester dans l'ombre. La manipulation des rapports et proportions hérite alors de la manipulation des fractions : « Les rapports qui se présentent sous forme de fractions (quotient exact) jouissent des mêmes propriétés que les fractions et conduisent à des calculs identiques »; ce qui permet à l'auteur de manipuler une proportion comme l'égalité de deux fractions en utilisant les opérations et les vocabulaires connus des fractions: « simplification, réduction au même dénominateur,... ». Il faut noter une certaine habileté dans cette digression : nécessité oblige ; il faut mettre en place la propriété fondamentale des proportions « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ». Cette propriété accompagnée du vocabulaire spécifique aux proportions va contribuer à mettre de la distance avec les fractions; d'autant plus que ce discours technologique prend en compte de manière explicite l'univers des grandeurs : alors que le numérateur et le dénominateur des fractions sont des nombres, les rapports sont ici des rapports de deux grandeurs. Il est donc intéressant de noter le traitement fourni à ce sujet, le va et vient entre l'univers des grandeurs et celui purement numérique. Lorsqu'on en viendra à l'étude de la proportionnalité composée, les principales limitations techniques et technologiques proviendront précisément de la théorie des grandeurs sous-jacente à la construction : impossibilité de traiter des grandeurs produits si elles n'ont pas de statut, dans l'exemple 3 des applications il faudrait inventer le concept de « jour-élève ».

L'exemple suivant utilise ce concept dans le cas des grandeurs physiques pour la mise en place d'une technique de reconnaissance de la proportionnalité.

« Grandeurs directement proportionnelles :

1 dm³ de fer pèse 7^{kg,8} ; 2 dm³ de fer pèsent 2 fois 7^{kg,8} ou 15^{kg,6} ; 3 dm³ de fer pèsent 3 fois 7^{kg,8} ou 23^{kg,4} ; ... etc. Quand le volume du fer devient 2, 3, 4 ... fois plus grand, son poids devient 2, 3, 4 ... fois plus grand.

D'autre part, en considérant le rapport de deux volumes quelconques et le rapport des poids correspondants, on obtient toujours une proportion :

$$\frac{1(\text{dm}^3)}{2(\text{dm}^3)} = \frac{7(\text{kg})_{,8}}{15(\text{kg})_{,6}} ; \frac{2(\text{dm}^3)}{3(\text{dm}^3)} = \frac{15(\text{kg})_{,6}}{23(\text{kg})_{,4}}$$

On exprime ces faits en disant que le *volume* du fer et son *poids* sont *directement proportionnels*.

Test des rapports multiples directs : TRMD

Deux grandeurs sont directement proportionnelles quand l'une devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'autre devient le même nombre de fois plus grande ou plus petite.

Grandeurs inversement proportionnelles :

Si un piéton qui fait 5^{km} à l'heure met 8^h pour franchir une distance de 40^{km}, un cycliste qui va deux fois plus vite (10^{km} à l'heure) met deux fois moins de temps ou 4^h pour franchir la même distance...Un camion qui va quatre fois plus vite que le piéton (20^{km} à l'heure) met quatre fois moins de temps ou 2^h,...etc. Quand la vitesse devient 2, 3, 4 ...fois plus grande, la durée du trajet devient 2, 3, 4 ...fois plus petite.

Le rapport des vitesses du piéton et du cycliste est $\frac{5}{10}$. Le rapport inverse de la durée de leurs trajets respectifs est $\frac{4}{8}$. Or, remarquons que $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$.

De même, pour le camion et le piéton, le rapport des vitesses $\frac{5}{20}$ est égale au rapport inverse de la durée des trajets $\frac{2}{8}$. Or, remarquons que $\frac{5}{20} = \frac{2}{8}$.

On exprime ces faits en disant que la *vitesse* d'un mobile et la *durée* d'un trajet sont *inversement proportionnelles*.

Test des rapports multiples inverses : TRMI

Deux grandeurs sont inversement proportionnelles quand la première devenant un certain nombre de fois plus grande, la deuxième devient le même nombre de fois plus petite ou, au contraire, quand la première devenant un certain nombre de fois plus petite, la deuxième devient ce même nombre de fois plus grande. »

Les techniques :

Les tests permettent de valider ou invalider une proportionnalité directe ou inverse par rapport à la culture, donc d'écrire ou non une égalité de rapports. Ces tests n'utilisent que les rapports multiples mais l'auteur admet que deux grandeurs **quelconques** et les grandeurs correspondantes forment une proportion : "D'autre part, en considérant le rapport de deux volumes **quelconques** et le rapport des poids correspondants, on obtient toujours une proportion".

Technologie :

On peut noter une certaine habileté dans l'utilisation des différents concepts et outils.

L'auteur a défini le rapport de deux grandeurs grâce à leurs mesures; ce qui lui a permis de travailler sur les nombres. Il a défini une proportion avec les nombres. Les proportions de mesures (avec leurs unités) vont lui fournir un modèle pour traiter les grandeurs proportionnelles.

Les instruments ostensifs oraux que sont les expressions : « 2, 3, 4, ... fois plus grand ... », ou « l'une devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'autre devient le même nombre de fois plus grande ou plus petite » sont à la fois des outils de la technique « reconnaissance de la proportionnalité » et des instruments qui explicitent le travail de modélisation avec les rapports. Mais l'auteur ne peut pas justifier le passage de la conservation des rapports internes multiples (la \mathbb{N} linéarité) à la conservation de tous les rapports internes (la \mathbb{R} linéarité).

A partir de la situation concrète étudiée, l'auteur transforme ces ostensifs oraux en ostensifs écrits en écrivant l'égalité de ces rapports multiples. C'est ainsi qu'il explique le modèle « proportion » et sa manipulation en s'appuyant sur l'évidence culturelle du système étudié, et le passage du registre oral au registre écrit. Il n'y a pas de grande distance entre cette modélisation mathématique et le concret. Mais l'idée est bien de mettre la théorie des rapports et proportions au service de l'étude des grandeurs.

Avantages :

① La modélisation devenant plus explicite, la relation de proportionnalité qui allait de soi dans la MRU s'objective et apparaît comme une relation possible entre grandeurs pouvant être élargie à d'autres cas de figure : proportionnalité avec les carrés ou les cubes de grandeurs...

② Les TRM sont un outil qui permet de retenir ou rejeter le modèle proportionnel. Il n'y avait pas de test explicite indépendant de la technique MRU. Le discours qui est contenu dans la méthode de réduction à l'unité est ou n'est pas adapté à la situation : si on essaie de répondre à certaines questions avec la méthode de réduction à l'unité, on s'aperçoit que son utilisation n'est pas conforme au milieu ; exemple : « Un homme mesure 1m80 à 30 ans, quelle était sa taille à 20 ans ? »

③ On n'a pas besoin du rapport externe et donc de définir de nouvelles grandeurs telles que vitesse, densité,... Les rapports qui interviennent sont internes.

④ Les TRM sont bien adaptés à certains types d'exercices : voir exemple 1 pour son utilisation.

⑤ La théorie des rapports et proportions donne de la puissance à la MP.

Inconvénients :

La mise en place de ces ostensifs est lourde et nécessite tout un environnement mathématique nouveau ; en particulier les concepts de rapport et proportion.

Les TRM sont mal adaptés à certains types d'exercices : voir exemple d'utilisation 2. La méthode des proportions connaît aussi des difficultés de justification lors des règles de trois composées : voir exemple d'utilisation 3.

| |
|------------------------------|
| Méthode des proportions : MP |
|------------------------------|

| « Règle de trois directe :

Problème : Pour fabriquer 21^{kg} de beurre on a employé 525^l de lait. Combien faudra-t-il de litres de lait(x) pour fabriquer 45^{kg} de beurre?

Méthode des proportions.

Le nombre de litres de lait est directement proportionnel au nombre de kilogrammes de beurre et le rapport des poids (beurre) est égal au rapport des capacités (lait) :

Pour 21^{kg} de beurre, on emploie 525^l de lait

Pour 45^{kg} de beurre, on emploie x^l de lait

$$\frac{21}{45} = \frac{525}{x}$$

On a donc : $21x = 525 \times 45$

$$\text{et } x = \frac{525 \times 45}{21} \quad x = 1125^l$$

Règle de trois inverse :

Problème : Pour faire une course, j'ai mis, en marchant à pied, 42 minutes, à une vitesse de 5 km/h. Si j'avais pris un taxi qui parcourt en moyenne 54^{km/h}, quelle aurait été la durée du trajet ?

Méthode des proportions :

La durée du trajet est inversement proportionnelle à la vitesse. Le rapport des vitesses est donc égal à l'inverse du rapport des temps .

Pour une vitesse de 5^{km}, la durée du trajet est de 42^m

Pour une vitesse de 54^{km}, la durée du trajet est de x^m

$$\frac{5}{54} = \frac{x}{42}$$

$$42 \times 5 = 54x ; x = \frac{210}{54} = 3^m 53^s \text{ »}$$

Technique de la MP :

1) On retrouve un positionnement bloqué qui rappelle celui de la méthode de réduction à l'unité pour laquelle on écrirait :

Pour une vitesse de 5^{km/h}, la durée du trajet est de 42^{min}

Pour une vitesse de 1^{km/h}, elle serait 5 fois plus grande ou 42^{min} × 5

Pour une vitesse de 54^{km/h}, elle serait de : $\frac{42^{\text{min}} \times 5}{54} = 3^{\text{min}} 53^{\text{s}}$

2) L'égalité des rapports est devenue une technique de résolution (méthode des proportions) après avoir servi dans le discours technologique pour la reconnaissance des grandeurs proportionnelles. Associée à des techniques de calcul en particulier au « produit en croix », elle permet de déterminer la quatrième « mesure » dans une proportion lorsqu'on connaît les trois autres.

Technologie

La méthode des proportions utilise simultanément l'algèbre (écriture littérale, signe =) et les proportions : produits en croix et autres propriétés de la théorie des rapports et proportions (voir exemple 4). L'introduction de la variable x permet la « mise en équation

proportionnelle » du type $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ qui se résout par des produits en croix : $x = \frac{ab}{c}$. Mais le passage par ce produit en croix oblige à nier les grandeurs quand on ne peut pas donner de sens à leur produit. Par exemple à partir de $\frac{21^{\text{kg}}}{45^{\text{kg}}} = \frac{525^{\text{l}}}{x^{\text{l}}}$ (égalité de deux scalaires) on obtiendrait en conservant les unités $21^{\text{kg}} \times x^{\text{l}} = 45^{\text{kg}} \times 525^{\text{l}}$ puis $x^{\text{l}} = \frac{45^{\text{kg}} \times 525^{\text{l}}}{21^{\text{kg}}}$. Or on ne peut donner de sens ni à $21^{\text{kg}} \times x^{\text{l}}$ ni à $45^{\text{kg}} \times 525^{\text{l}}$ ni à $\frac{45^{\text{kg}} \times 525^{\text{l}}}{21^{\text{kg}}}$. Pour conserver la dimension sémantique des grandeurs il faudrait revenir à un calcul sur les rapports :

- Soit comme l'a fait l'auteur pour mettre en place les ostensifs des proportions : 45^{kg} est 45 fois le $1/21^{\text{èmes}}$ de 21^{kg} ou $45/21^{\text{èmes}}$ de 21^{kg} . Les rapports entre les deux masses et les deux volumes étant les mêmes, le nombre de litres cherché est les $45/21^{\text{èmes}}$ de 525^{l} soit $\frac{45}{21} \times 525^{\text{l}}$.
- Soit en transformant l'égalité « amorphe » des rapports $\frac{45^{\text{kg}}}{21^{\text{kg}}} = \frac{x^{\text{l}}}{525^{\text{l}}}$ en égalité

« opératoire » où le rapport scalaire « $\frac{45^{\text{kg}}}{21^{\text{kg}}}$ » apparaît comme opérateur :

$$x^{\text{l}} = \frac{45^{\text{kg}}}{21^{\text{kg}}} \otimes 525^{\text{l}}.$$

La méthode des proportions avec le produit en croix est un algorithme qui résume une de ces approches sémantiques de résolution comme la « règle de trois » est un résumé algorithmique de la méthode de réduction à l'unité.

L'organisation mathématique autour de la méthode des proportions est proche de la modélisation algébrique : analyse des systèmes étudiés, construction d'un modèle écrit sous forme « d'équation proportionnelle », travail du modèle jusqu'à obtenir une solution, retour au système pour l'interprétation du résultat. Les ostensifs ressemblent à ceux de l'algèbre des équations mais ils se manipulent différemment.

Raison d'utiliser la méthode des proportions

A la différence de ce que pourrait être une organisation algébrique ou fonctionnelle autour de ce type de problème, les proportions permettent d'articuler dans une même organisation des systèmes présentant des grandeurs directement proportionnelles avec des systèmes présentant des grandeurs inversement proportionnelles. Aujourd'hui on traite séparément les fonctions linéaires et les fonctions hyperboliques.

Les limites :

1) On vient de voir qu'en général on ne peut pas donner du sens au produit de deux grandeurs de nature différente.

2) Toute organisation mathématique autour de la méthode des proportions nécessite une pratique et donc une connaissance des fractions.

3) Elle n'est pas adaptée à des élèves du cours élémentaire. Dans le manuel elle est prévue pour des élèves du cours supérieur 2^{ème} année et classe de fin d'étude. Les limites d'une pratique ne dépendent pas seulement du savoir véhiculé mais aussi des conditions de son utilisation : niveau de connaissances des élèves, adaptabilité du modèle à l'exercice, connaissances antérieures, milieu matériel, milieu mathématique, etc...

b) Résumé du modèle MP

Le modèle scolaire

1 Définitions et propriété des proportions

« On appelle rapport le résultat de la comparaison à l'aide d'une mesure commune, de deux grandeurs de même espèce. C'est le quotient exact des nombres qui mesurent ces grandeurs avec la même unité. Deux rapports égaux forment une proportion. Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. »

2 Règle de trois directe :

Test des rapports multiples directs : TRMD.

« Deux grandeurs sont directement proportionnelles quand l'une devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'autre devient le même nombre de fois plus grande ou plus petite. »

Propriété

« On obtient alors une proportion en écrivant que le rapport de deux mesures d'une des grandeurs est égal au rapport des mesures correspondantes de l'autre grandeur. »

3 Règle de trois inverse :

Test des rapports multiples inverses : TRMI

« Deux grandeurs sont inversement proportionnelles quand la première devenant un certain nombre de fois plus grande, la deuxième devient le même nombre de fois plus petite ou, au contraire, quand la première devenant un certain nombre de fois plus petite, la deuxième devient ce même nombre de fois plus grande. »

Propriété

« On obtient alors une proportion en écrivant que le rapport de deux mesures d'une même grandeur est égal à l'inverse du rapport des mesures correspondantes de l'autre grandeur. »

Caractéristiques didactiques :

Le milieu sur lequel l'élève devra agir est l'univers des grandeurs mesurées.

Le rapport de deux grandeurs est défini par le rapport des mesures. L'environnement des fractions a servi d'étayage à cette définition et à l'égalité du produit des extrêmes et du produit des moyens d'une proportion.

La méthode de reconnaissance de la proportionnalité que nous appelons TRM consiste à comparer des rapports internes multiples.

Pour déterminer les éléments manquants on écrit une égalité de rapports internes (une proportion) puis on utilise l'algorithme du produit en croix pour calculer la quatrième proportionnelle.

Remarque :

La méthode des proportions n'utilise que des rapports internes. Les mesures ne sont pas utilisées pour « numériser » le rapport externe. Cette méthode ne nécessite pas l'explicitation d'une grandeur dérivée.

c) Exemples d'utilisation

Nous nous proposons de comparer la méthode des proportions à la méthode de réduction à l'unité sur quelques exemples choisis pour faire apparaître soit des ressemblances soit des différences.

Exemple 1 :

« Pour mettre en bouteilles le vin contenu dans un tonneau, on a employé 240 bouteilles de 60^{cl} l'une. Si la contenance de chaque bouteille avait été de 80^{cl}, combien aurait-on employé de bouteilles ? Donnez la réponse sans chercher la capacité du tonneau. »

Solution avec la MP : On fait un TRM.

Si le contenu de chaque bouteille avait été le double, le triple, ..., la mise en bouteilles aurait nécessité deux fois, trois fois, ..., moins de bouteilles. Le nombre de bouteilles est inversement proportionnel à la capacité d'une bouteille. On peut écrire : $\frac{60}{80} = \frac{x}{240}$ où x désigne le nombre de bouteilles.

$$\text{Donc } x = \frac{60 \times 240}{80} = 180 \text{ bouteilles.}$$

Il faut noter l'aide qu'apporte l'« algèbre des proportions » à cet algorithme; mais le produit en croix est un raccourci, une technique qui ne s'appuie ni sur le raisonnement ni sur le sens des opérations et donc échappe au contrôle de son utilisateur.

Solution avec une MRU :

Si la contenance d'une bouteille est 60 cl on emploie 240 bouteilles.

Si la contenance d'une bouteille est 1 cl on emploie 60 fois plus de bouteilles soit 240 x 60 bouteilles.

Si la contenance d'une bouteille est 80 cl on emploie 80 fois moins de bouteilles soit :

$$\frac{240 \times 60}{80} = 180 \text{ bouteilles.}$$

Les étapes 2 et 3 correspondent au TRMI et à l'écriture de la proportion appropriée.

Exemple 2 :

La méthode des proportions n'est pas adaptée à certaines questions. Dans l'exemple suivant le TRM nécessite l'utilisation d'un coefficient en plus des rapports.

|« Le périmètre d'un carré est-il directement proportionnel à son côté ? »

Ce qui permet de justifier que le périmètre double, triple, ..., lorsque le côté double, triple, ..., c'est le coefficient multiplicateur 4, c'est à dire le coefficient de l'application linéaire qui au côté du carré associe son périmètre :

$$c \mapsto 4c$$

$$2c \mapsto 4(2c) = 2(4c)$$

...

$$nc \mapsto 4(nc) = n(4c)$$

Exemple 3 :

« REGLES DE TROIS DITES COMPOSEES

Grandeurs directement proportionnelles.

Problème. - 32 élèves ont utilisé, en 60 jours de classe, 256 cahiers. Combien faudrait-il de cahiers semblables pour 40 élèves travaillant dans les mêmes conditions pendant une année scolaire de 210 jours de classe?

1° Méthode des proportions. - Le nombre de cahiers est directement proportionnel au nombre des élèves et à celui des jours de classe, **donc** à leur produit. On a donc :

32 élèves en 60 jours de classe ont utilisé 256 cahiers,

40 élèves en 210 jours de classe utiliseront x cahiers.

$$\frac{256}{x} = \frac{32}{40} \times \frac{60}{210} \text{ ou } x \times 32 \times 60 = 256 \times 40 \times 210$$

$$x = \frac{256 \times 40 \times 210}{32 \times 60} = 1120 \text{ cahiers.}$$

On peut effectivement vérifier avec le TRM que le nombre de cahiers est proportionnel au nombre des élèves et à celui des jours de classe, mais pourquoi alors serait-il proportionnel au produit des deux ? L'auteur ne justifie pas le "...donc à leur produit", et pour cause, la justification n'est pas aisée. Le discours technologique de la méthode des proportions ne peut pas intégrer directement la proportionnalité multiple. Pour justifier la proportionnalité de la première grandeur au « produit des deux autres » (jour-élève) il faut faire des calculs supplémentaires sur les rapports.¹⁶ La justification passe par des artifices de calculs et utilise, entre autre des rapports externes.

Sur cet exemple, on peut encore remarquer, que la méthode de réduction à l'unité ne nécessite pas cet environnement mathématique. Bien que la méthode soit lourde, le fait de manipuler séparément chacune des variables permet de résoudre l'exercice avec les connaissances antérieures :

¹⁶ On pourra consulter une justification dans : "Mon Professeur - Encyclopédie Autodidactique - QUILLET - 1910-1914 ; pages 19 et 20"

« 2° Méthode de réduction à l'unité. - On calcule successivement :
 1° le nombre de cahiers ou, mieux, la fraction de cahier utilisée par 1 élève en 1 jour;
 2° le nombre de cahiers utilisés par 40 élèves en 210 jours (*décomposition en plusieurs règles de trois simples*).

1° 32 élèves en 60 jours utilisent 256 cahiers,
 1 élève en 60 jours utilise $\frac{256}{32}$ cahiers,
 1 élève en 1 jour utilise $\frac{256}{32 \times 60}$
 2° 40 élèves en 1 jour utilisent $\frac{256 \times 40}{32 \times 60}$
 40 élèves en 210 jours utilisent $\frac{256 \times 40 \times 210}{32 \times 60}$
 Soit, après simplification : $16 \times 70 = 1120$ cahiers. »

Exemple 4 :

« La roue de devant d'un char a $3^m,20$ de circonférence et la roue de derrière $4^m,80$. Quelle est la distance parcourue par cette voiture si la petite roue a fait 1800 tours de plus que la grande? »

Une solution avec la méthode des proportions MP :

On fait un TRM :

Si la circonférence de la roue est 2, 3, ..., fois plus grande, le nombre de tours de roue est 2, 3, ..., fois moindre (pour parcourir une distance donnée). Le nombre de tours d'une roue est donc inversement proportionnel à sa circonférence.

Si la circonférence est $3^m,20$ le nombre de tours est N.

Si la circonférence est $4^m,80$ le nombre de tours est n.

On peut alors écrire : $\frac{3,20}{4,80} = \frac{n}{N}$

On utilise les propriétés sur les proportions, ce qui donne de la puissance à la MP :

$$\frac{N}{4,80} = \frac{n}{3,20} = \frac{N-n}{4,80-3,20} = \frac{1800}{1,6} = 1125$$

$$N = 4,80 \times 1125 = 5400$$

$$n = 3,20 \times 1125 = 3600$$

La distance parcourue est $5400 \times 3,20 = 3600 \times 4,80 = 17280$ m

Une solution avec la méthode de réduction à l'unité MRU :

Pour utiliser la méthode de réduction à l'unité on peut employer "la méthode de (fausse) supposition". C'est une variation technologique de la méthode de réduction à l'unité

La grande roue est 1,5 fois plus grande que la petite roue. On fait une (fausse) supposition : quand la grande roue fait 1 tour, la petite roue fait 1,5 tour, donc 0,5 tour de plus que la grande.

On cherche le nombre de tours que fait la grande roue avec la méthode de réduction à l'unité:

(Il faut placer ce qu'on cherche à droite.)

Si la petite roue fait 0,5 tour de plus, la grande roue en fait 1.

Si la petite roue fait 1 tour de plus, la grande roue en fait 2.

Si la petite roue fait 1800 tours de plus, la grande roue en fait $1800 \times 2 = 3600$.

La distance parcourue est donc $3600 \times 4,80 = 17280$ m.

On aurait pu aussi calculer directement la distance parcourue :

Si la petite roue fait 0,5 tour de plus, la grande roue en fait 1 et donc parcourt 4,80 m.

Si la petite roue fait 1 tours de plus, le char parcourt $4,80 \times 2$

Si la petite roue fait 1800 tours de plus, le char parcourt :

$4,80 \times 2 \times 1800 = 17280$ m.

3 Suites proportionnelles : SP et Tableau de proportionnalité : TP

a) Mise en place des modèles SP et TP :

Références bibliographiques :

Henri BAREIL et Christiane ZEHREN ; mathématique 6^e ; Hachette ; 1980.

« I DES SITUATIONS

Activité 1

Tu as ci-dessous divers tableaux.

Pour chaque tableau :

1° Précise, si c'est possible, **par quelle(s) opération(s) tu peux calculer :**

- les nombres de la 2^e ligne à partir de la 1^{re},
- les nombres de la 1^{re} ligne à partir de la 2^e.

2° Complète le tableau, en le recopiant, s'il y a lieu.

3° Fais un graphique à partir de deux demi-droites perpendiculaires dont le point commun, E, correspondra, pour chacune, au nombre zéro. Cf. figure 1 ci-dessous.

Tableau n° 1 : Partie de fléchettes (graphique : figure 2)

| | | | | | | | |
|----------------------------|----|----|----|----|----|----|---|
| Nombres de tirs par partie | 10 | 12 | 20 | 16 | 20 | 14 | 8 |
| Nombre de tirs réussis | 4 | 3 | 11 | 11 | 10 | 9 | 5 |

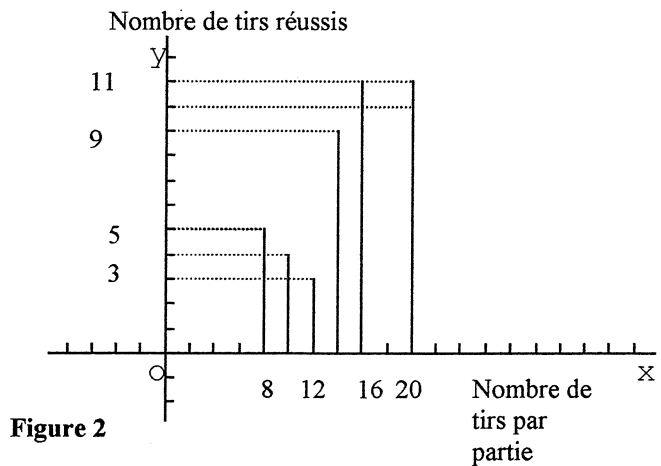
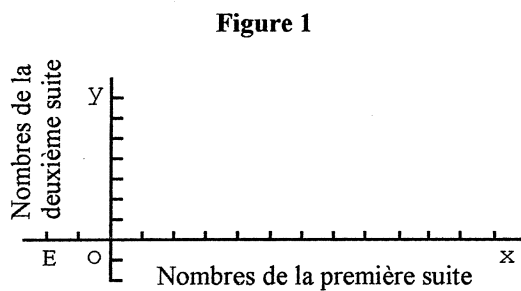


Tableau n° 2 : Eau minérale, reçue à domicile : 10 F de port (quelle que soit la livraison), et 2F par bouteille.

| | | | | | | |
|-----------------------|----|---|---|---|----|----|
| Nombres de bouteilles | 4 | 5 | 6 | 8 | | |
| Prix payé en F | 18 | | | | 16 | 24 |

Tableau n° 3 : Périmètre du carré.

| | | | | | | |
|----------------|---|-----|-----|---|-----|-------|
| Côté, en m | 2 | 2,5 | 3,5 | 4 | 4,5 | |
| Périmètre en m | 8 | | | | | 20 12 |

Tableau n° 4 : Aire du carré.

| | | | | | | | |
|------------------------|------|---|-----|---|-----|---|----|
| Côté en m | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | | |
| Aire en m ² | 0,25 | | | | | 9 | 16 |

Tableau n° 5 : Parcours, à la vitesse régulière de 3 km/h.

| | | | | | | |
|------------------|---|---|---|---|----|----|
| Durée, en heures | 1 | 2 | 6 | 3 | | |
| Distance en km | 3 | | | | 15 | 12 |

Tableau n° 6 : Ages : Catherine et Agnès comparent leurs âges respectifs à divers moments de leur existence.

| | | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|---|---|
| Age de Catherine en années | 4 | 5 | 6 | 8 | | |
| Age d'Agnès en années | 1 | | | | 7 | 6 |

Tableau n° 7 : Travail, pour Arthur, qui travaille 3 jours par semaine.

| | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|---|
| Nombres de semaines | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| Nombre de jours de travail | | 6 | | | |

II SUITES PROPORTIONNELLES

Activité 2

Chacun des tableaux précédents présente deux « suites » de nombres.

1° Pour quels tableaux peux-tu passer d'une suite à l'autre **en multipliant toujours par un même nombre, ou en divisant toujours par un même nombre** ? Précise alors ce multiplicateur ou ce diviseur.

Deux suites de nombres sont proportionnelles si on passe de l'une à l'autre :

- en **multipliant** par un même nombre ;
- ou en **divisant** par un même nombre ;
- ou par une **succession de telles opérations.** »

Concept et technologie

Pour introduire des suites proportionnelles l'auteur propose plusieurs tableaux où les données sont des mesures de grandeurs. C'est la familiarité de ces grandeurs qui suggère aux élèves le « bon » algorithme qui permet de compléter ces tableaux (Pour un couple donné il y a plusieurs algorithmes qui transforment un nombre en un autre nombre donné). Cet algorithme explicite une relation entre grandeurs.

Après ces exemples introductifs sur les grandeurs l'auteur définit des suites de nombres proportionnelles grâce à des opérateurs de multiplication ou de division qui déterminent la correspondance entre les nombres homologues. Il s'appuie sur ces quelques exemples familiers (qu'il appelle situations) pour justifier une définition formelle sur des suites de nombres concrets ou abstraits. Par rapport à la méthode de réduction à l'unité ou la méthode des proportions, un pas est franchi vers une modélisation numérique.

Techniques :

Trois tâches peuvent être demandées aux élèves : décider de l'algorithme à utiliser pour calculer les mesures d'une grandeur connaissant les mesures de l'autre grandeur, vérifier que deux suites de nombres donnés sont proportionnelles, calculer une valeur manquante sachant que les suites sont proportionnelles. Pour les auteurs le choix de l'algorithme relève uniquement de la culture et ne repose que sur les connaissances des élèves (aucune aide, aucun test n'est proposé).

A l'issue de la définition la seule technique qui permet de vérifier que deux suites sont proportionnelles consiste à comparer tous les rapports externes. Pour effectuer cette comparaison les élèves peuvent soit calculer tous les rapports et vérifier qu'ils sont égaux, soit en calculer un et vérifier qu'il permet de « passer » d'une suite à l'autre pour tous les couples de valeurs homologues.

Dans un tableau où les têtes de listes désignent des grandeurs, les rapports de deux mesures correspondantes sont externes, de type $R(A, B)$. La connaissance de la grandeur dérivée correspondante peut aider à concevoir ces rapports et à les utiliser.

Dans un tableau numérique où les nombres sont abstraits, les rapports des valeurs homologues sont de type $R(a, b)$ et ne peuvent apparaître que comme des opérateurs abstraits. Les tâches précédemment décrites se résument à des calculs sans qu'un raisonnement en référence aux grandeurs puisse les étayer.

Explication du modèle « suites proportionnelles » :

Les suites proportionnelles privilégient l'usage d'algorithmes qui ne nécessitent que des entiers, les opérateurs fractionnaires pouvant être décomposés en deux opérateurs entiers conformément à la définition.

L'usage du rapport externe, à condition qu'il soit entier, est d'un usage simple et efficace pour les différentes tâches à effectuer.

La « relation de proportionnalité » apparaît d'emblée comme une « relation fonctionnelle » entre nombres.

Les limites :

Le mot « suite » n'est pas approprié, il s'agit plutôt de « listes » car il n'y a pas a priori de système générateur de ces nombres.

La définition de deux suites proportionnelles donnée en trois étapes :

- « en multipliant par un même nombre,
- ou en divisant par un même nombre,
- ou par une succession de telles opérations. »

induit fortement l'usage d'opérateurs entiers et peut laisser croire que les nombres homologues doivent être dans un rapport multiple.

Si on compose des opérateurs entiers pour définir « l'opérateur fractionnaire » :

- on ne peut pas justifier la commutativité des opérateurs.
- on ne peut pas identifier la « fraction opérateur » à la « fraction mesure de grandeur ».

Si les deux suites de nombres sont des mesures de grandeurs de natures différentes, on ne peut pas donner du sens à la décomposition du rapport externe fractionnaire en deux opérateurs entiers ; cette composition d'opérateurs ne peut pas être la mesure d'une grandeur dérivée.

Le test de proportionnalité avec le rapport externe ne peut se faire que sur un nombre fini de mesures. Il manque un raisonnement plus global pour affirmer que les grandeurs sont proportionnelles et que les suites proposées ne sont que des exemples de mesures possibles de ces grandeurs.

Les élèves ne disposent que d'une seule technique, l'usage du rapport externe (aux variantes de décomposition près). Si ce rapport n'est pas calculable (pour les élèves) ils ne peuvent pas recourir aux rapports internes même lorsque ceux-ci sont entiers.

Conclusion :

Ces remarques montrent la nécessité de construire d'autres algorithmes et justifient la suite de la leçon qui figure dans le manuel.

« III TABLEAU DE PROPORTIONNALITE ET CALCULS

Activité 4

1° Monsieur Trevars me propose des livres, **tous au même prix**. J'ai donc un tableau de proportionnalité :

| | | | |
|--------------------------|---|------------------|-----|
| \times prix d'un livre | → | Nombre de livres | ... |
| | → | Prix, en F | ... |

2° Monsieur Trevars ajoute que, pour 11F, je peux avoir deux livres.

3° Je décide d'acheter 34 livres (c'est à dire 2×17).

Je désigne par x le prix, en F, de ces 34 livres.

Je complète mon tableau :

| | | |
|------------------|----------|-----|
| | \times | |
| Nombre de livres | 2 | 34 |
| Prix, en F | 11 | x |

Comment déterminer la valeur de x ?

4° Pour calculer x , nous avons, Monsieur Trevars et moi, chacun notre méthode :

Méthode n° 1

Prix d'un livre, en F = $11 : 2$
= 5,5

Donc, d'une ligne à l'autre :

| | | | | | |
|--------------|---|----|-----|---|--------------|
| $\times 5,5$ | → | 2 | 34 | ← | $\times 5,5$ |
| | | 11 | x | | |

$x = \dots \times \dots$
= ...

Termine sur ton cahier

Méthode n° 2

Si le nombre de livres a été multiplié par 17, le prix aussi !
Donc, d'une colonne à l'autre :

| | | |
|---|-------------|-----|
| | $\times 17$ | |
| → | 2 | 34 |
| | 11 | x |
| | $\times 17$ | ← |

$x = \dots \times \dots$
= ...

Termine sur ton cahier

PROPRIETE « D'ADDITIVITE »

Activité 7

Sur un exemple, celui de l'activité 4, avec des livres :

| | | | | | | |
|------------|---|------|----|-----|----|--|
| $\times a$ | → | | | | | |
| | | 5 | 8 | ... | 13 | |
| | | 27,5 | 44 | ... | | |

Recopie et termine en expliquant, sans utiliser $\times a$.

Concept et technologie

L'auteur utilise l'expression « tableau de proportionnalité » sans explication comme s'il s'agissait d'une expression familière. L'écriture en caractères gras de « tous au même prix » lui semble une justification suffisante puisqu'il écrit : « J'ai donc un tableau de proportionnalité », tableau illustré aussitôt par un dessin.

En fait c'est encore la familiarité avec les grandeurs proposées dans l'exemple qui permet à l'auteur d'introduire l'utilisation du rapport interne. Mais il ne peut pas justifier l'équivalence entre la conservation des rapports internes et l'invariance du rapport externe. Il lui manque une théorie ; les élèves ne disposent pas de la théorie des rapports et proportions ; ils n'ont pas de connaissances suffisantes sur les fractions qui ont été introduites comme « chaînes de multiplications et de divisions (*par des entiers*), quand les divisions tombent juste ».

Techniques

Le tableau accompagné de flèches devient un ostensif écrit qui permet de visualiser les différentes techniques : invariance du rapport fonctionnel, conservation des rapports scalaires, utilisation de sommes ou de différences. L'usage des rapports scalaires permet de faire « un retour à l'unité » au sein du tableau et de composer des rapports scalaires entiers pour obtenir un opérateur fractionnaire qui agit sur une grandeur pour donner une grandeur de même nature.

Raisons didactiques d'utiliser le tableau de proportionnalité

Le « tableau de proportionnalité » a un environnement plus riche que les « suites proportionnelles ». Il sert à recueillir les données. Si ces données sont des mesures de grandeurs, le tableau aide à organiser le travail sur les unités en les renvoyant en tête de liste. Il permet de réorganiser des procédés de calculs élémentaires déjà connus des élèves, d'en introduire d'autres, de les résumer, de les visualiser en combinant différents ostensifs graphiques tels que : \rightarrow , \square , \bigcirc , \times , $+$, ... En particulier les opérations inconnues et les valeurs numériques cherchées peuvent être représentées par des lettres, ce qui permet d'écrire des équations intermédiaires avec des lettres.

Le « tableau de proportionnalité » peut être un lien transactionnel entre la proportionnalité des grandeurs et les fonctions linéaires. Un tableau à deux listes peut être interprété comme une partie du graphe d'une fonction numérique. Cette partie du graphe permet d'élaborer un algorithme qui explicite la relation fonctionnelle et grâce auquel les élèves peuvent proposer d'autres valeurs possibles. Si le tableau recueille des mesures de grandeurs proportionnelles, le coefficient de proportionnalité devient le coefficient d'une fonction linéaire par cette extension. Un travail réflexif peut faire apparaître la fonction linéaire comme une modélisation numérique d'une relation de proportionnalité entre grandeurs, et son coefficient de proportionnalité comme un résumé qui renvoie à cette relation entre grandeurs. Le tableau avec les têtes de listes facilite ce travail de va et vient entre le domaine numérique et celui des grandeurs. Pour le maître il est un outil privilégié pour une pratique d'ostension et de communication. Il a une matérialité propre qui en fait un support au raisonnement et à la formulation.

Les limites

Le tableau de proportionnalité peut être adapté au passage de l'arithmétique à l'algèbre à condition d'en faire un outil de transaction entre les techniques et technologies de l'arithmétique et celles de l'algèbre et non un objet d'étude (risque d'effet Diènes). Ceci suppose de la part du maître une conduite avertie qui suggère aux élèves de faire des hypothèses sur les valeurs, variations et relations possibles au-delà des quelques nombres que

contient le tableau. Le risque consiste à faire compléter un tableau numérique par des calculs élémentaires sans faire référence aux objets qui justifient son usage ; le tableau apparaîtrait alors comme un simple ostensif opératoire venant se rajouter à ceux déjà connus.

Le renvoi en tête de liste des unités réduit l'étude des situations de proportionnalité à des vérifications calculatoires, ce qui tend à dénaturer le concept de proportionnalité. En particulier le « produit en croix » ignore les calculs élémentaires qui donnent du sens aux opérateurs.

Ce glissement d'une perception concrète de la proportionnalité vers un modèle purement numérique induit des dérives qui font perdre le sens originel du concept et du vocabulaire de la proportionnalité. On passe des grandeurs à leurs mesures via les unités qu'on "oublie" ; et il ne reste plus que les nombres. On va voir que cette "évaporation de l'unité" fait du coefficient de proportionnalité entre deux grandeurs " le coefficient de proportionnalité qui permet de « passer » du nombre décimal a au nombre décimal b".

De là à dire que deux nombres sont proportionnels il n'y a plus qu'un pas à franchir ; c'est ce que nous avons vu dans la première partie de cette thèse.

b) Résumé du modèle TP

Le modèle scolaire

références bibliographiques :R. Delors - G Vinrich
mathématiques 5^e. Hachette Collèges. 1991.

« 1. Proportionnalité dans un tableau ?

A Le "test du double" (ou du triple, ou du quart, etc.)

Pour le **double** de ... a-t-on le **double** de ... ?
Pour le **triple** de... a-t-on le **triple** de... ?
Pour le **quart** de... a-t-on le **quart** de... ?

Exemple

| | | | |
|--------------------------|-----|------------|------------|
| | | $\times 2$ | $\times 3$ |
| 1 ^{re} grandeur | 25 | 50 | 150 |
| 2 ^e grandeur | 1,6 | 3,2 | 9,6 |
| | | $\times 2$ | $\times 3$ |

Proportionnalité

Contre exemple

| | | | |
|--------------------------|----|-------|------------|
| | | $: 4$ | $\times 3$ |
| 1 ^{re} grandeur | 20 | 5 | 15 |
| 2 ^e grandeur | 12 | 3 | 10 |
| | | $: 4$ | $\times 3$ |

Non proportionnalité

Il y a proportionnalité entre deux grandeurs si le "test du double" (ou du triple, ou du quart, etc.) est vérifié.

B Existence d'un coefficient de proportionnalité

Exemple

| | | | | |
|--------------------------|-----|-----|-----|----------------|
| 1 ^{re} grandeur | 25 | 50 | 150 | $\times 0,064$ |
| 2 ^e grandeur | 1,6 | 3,2 | 9,6 | |

Contre exemple

| | | | | |
|--------------------------|----|---|----|--------------|
| 1 ^{re} grandeur | 20 | 5 | 15 | $\times 0,6$ |
| 2 ^e grandeur | 12 | 3 | 10 | |

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{51}{34} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{7,2}{12} = \frac{72}{120} = 0,6$$

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\frac{28}{35} = \frac{4}{5} = 0,8$$

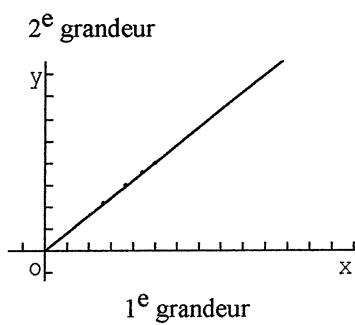
Proportionnalité : **il faut** que tous les quotients soient égaux

Non proportionnalité: **il suffit** qu'un quotient ne soit pas égal aux autres

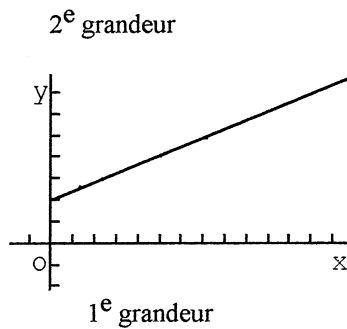
Il y a proportionnalité entre deux grandeurs, lorsqu'on obtient les nombres de la seconde grandeur en **multipliant par un même nombre** ceux de la première grandeur. Autrement dit, tous les couples de nombres qui correspondent donnent le même quotient.

Un tel quotient s'appelle **coefficient de proportionnalité**.

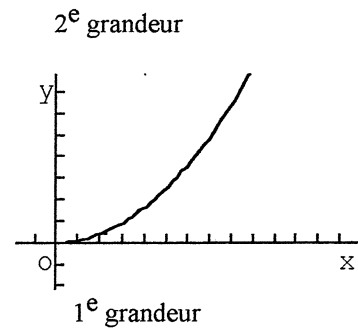
2. Proportionnalité sur un graphique ?



proportionnalité



Non proportionnalité



Il y a proportionnalité entre deux grandeurs, lorsque tous les points du graphique sont **alignés avec l'origine du repère**

3. Calculs dans un tableau de proportionnalité ?

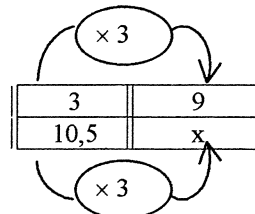
Calculer x, y et z dans le tableau de proportionnalité :

| | | | | |
|-------------------------|------|---|----|----|
| Valeurs correspondantes | 3 | 9 | 14 | z |
| | 10,5 | x | y | 77 |

- calcul de x : basé sur le principe du test du triple

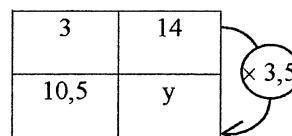
$$x = 10,5 \times 3$$

$$x = 31,5$$



- calcul de y : on recherche le coefficient

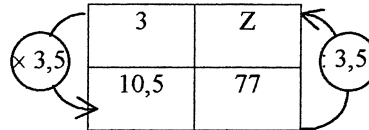
de proportionnalité $m = \frac{10,5}{3} = 3,5$



$$y = 14 \times 3,5 ; y = 49$$

- calcul de z : en utilisant le coefficient
 $m = 3,5$

$$z = \frac{77}{3,5} ; z = 22$$



Pour calculer dans un tableau de proportionnalité, il faut connaître deux valeurs correspondantes (non nulles).

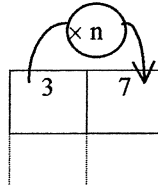
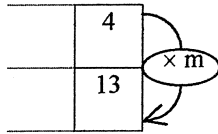
POUR RESOUDRE DES PROBLEMES

1 Trouver un coefficient de proportionnalité

$$4 \times m = 13$$

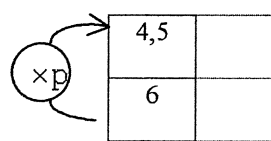
$$m = \frac{13}{4}$$

$$m = 3,25$$



$$3 \times n = 7$$

$$n = \frac{7}{3}$$



$$6 \times p = 4,5$$

$$p = \frac{4,5}{6}$$

$$p = 0,75$$

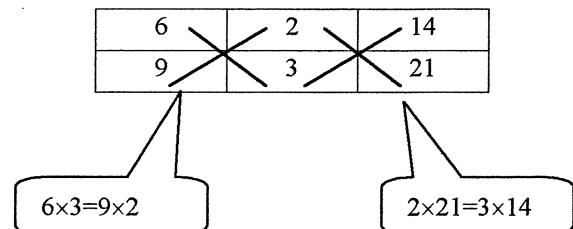
Important ! Le coefficient de proportionnalité qui permet de « passer » d'un nombre décimal a (non nul) à un

nombre décimal b est le quotient $\frac{b}{a}$. $a \times \frac{b}{a} = b$

2 Déterminer une quatrième proportionnelle avec la règle des produits en croix

1° De quoi s'agit-il ?

En observant un tableau de proportionnalité (voir ci-contre), on constate que les produits en croix sont égaux.



Important ! La règle de l'égalité des produits en croix est générale dans un tableau de proportionnalité.

2° Comment utiliser cette règle ?

Enoncé « Cinquante et un francs les douze... Combien les cinq ? »

Solution

- Affichage des données (en admettant que le prix est proportionnel au nombre d'objets).

| | | |
|--------|----|---|
| nombre | 12 | 5 |
| prix | 51 | x |

- Egalité des produits en croix $\rightarrow 12 \times x = 51 \times 5$
 Pour trouver x, on résout l'équation $12x = 255$

$$x = \frac{255}{12} = 21,25$$

« Les cinq coûtent 21,25 F. »

Principales caractéristiques didactiques :

« Tableau de proportionnalité » et « suites proportionnelles » sont deux variantes d'une même présentation de la proportionnalité qui visent les mêmes objectifs : se « débarrasser » des grandeurs et de leurs unités en les renvoyant en tête de liste pour travailler sur des valeurs numériques de manière algorithmique et sans utiliser les notions de rapports. Les rapports externes entiers (ou décimaux) sont utilisés comme des opérateurs. L'opérateur rationnel est obtenu par composition d'opérateurs entiers.

Les techniques qui permettent de définir la proportionnalité entre grandeurs sont montrées avec le tableau et nommées : « test du double (rapport interne), coefficient de proportionnalité (rapport externe), proportionnalité sur un graphique ». Elles ne sont pas justifiées et aucun lien n'est fait entre elles.

Les techniques de « reconnaissance de la proportionnalité » et de « résolution de problèmes » sont les mêmes que celles qui ont servi à modéliser le système auxquelles se rajoute le « produit en croix ». Elles sont explicitées sur le tableau avec des flèches ; le « produit en croix » est utilisé sans preuve.

Le tableau de proportionnalité peut couvrir un champ de référence allant des grandeurs aux nombres mais il ne peut pas se substituer aux structures issues de ces différents cadres. Il ne peut être qu'un « outil transactionnel » entre ces différents milieux de référence.

c) Exemples d'utilisation

Exemples uniquement numériques :

1) Pour chacun des quatre tableaux, dire s'il y a proportionnalité ou non entre les nombres des deux lignes.

Justifier la réponse.

a)

| | | |
|----|----|----|
| 26 | 13 | 39 |
| 18 | 9 | 26 |

b)

| | | |
|-----|-----|------|
| 2,5 | 7,5 | 10 |
| 3,1 | 9,3 | 12,5 |

c)

| | | |
|-----|----|----|
| 12 | 20 | 35 |
| 7,2 | 12 | 21 |

d)

| | | |
|------|----|----|
| 12 | 20 | 35 |
| 13,2 | 22 | 45 |

2) Reproduire et compléter le tableau de proportionnalité suivant:

| | | | | |
|---|-----|---|----|-----|
| 4 | 2,8 | 6 | | |
| | | | 39 | 5,2 |

Exemple issu d'une situation concrète

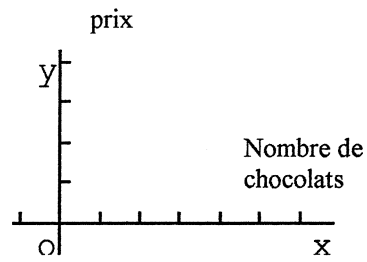
3) Le prix des chocolats

| | | | |
|---------------------|----|----|------|
| nombre de chocolats | 20 | 32 | 70 |
| prix (en F) | 25 | 40 | 87,5 |

1° Le prix est-il proportionnel au nombre de chocolats ?

2° Faire un graphique sur du papier millimétré en s'inspirant du modèle ci-contre.

Comment contrôler le résultat de la 1^{ère} question ?



3° Déterminer par le calcul et graphiquement :

- a) le prix de 44 chocolats ;
- b) le nombre de chocolats pour 70 F.

4 Fonctions linéaires : FL

Références bibliographiques : Transmath 4^E Nathan avril 1988

a) Mise en place du modèle « fonction linéaire »

I La fonction linéaire

« Au-delà de la proportionnalité : les fonctions linéaires

1 Allongement d'un ressort en fonction de la masse de l'objet suspendu.

Lorsqu'on suspend un objet à l'extrémité d'un ressort, le ressort s'allonge. L'allongement d'un ressort dépend de la masse de l'objet suspendu; on dit que l'allongement est fonction de la masse. Les physiciens savent par expérience que l'allongement est proportionnel à la masse. Le coefficient de proportionnalité s'appelle le coefficient de raideur du ressort. Donc l'allongement y produit par une masse x est égal à kx .

a) Pour un certain ressort, quelques mesures ont donné les résultats suivants :

| | | | | |
|------------------------------------|------|-----|-----|-----|
| masses, en kilogrammes | 0,05 | 0,2 | 0,3 | 0,5 |
| allongement, en centimètres | 0,6 | 2,4 | 3,6 | 6 |

- **Quel est** le coefficient de raideur du ressort ?
- **Donner** la représentation graphique qui illustre la situation ; les mesures de la grandeur variable (la masse) seront placées sur l'axe des abscisses : prendre un centimètre pour représenter 0,1 kilogramme ; les mesures des allongements seront portées sur l'axe des ordonnées.

b) De l'avantage des formules

Est-il nécessaire d'effectuer d'autres mesures pour connaître les allongements correspondant à d'autres masses ? Certainement non, puisqu'on connaît le coefficient de proportionnalité.

- **Quel est** l'allongement du ressort correspondant à une masse de 0,350 kg ?
- **Même question** avec 0,6 kg ?
- **Quelle masse** faut-il placer pour obtenir un allongement de 9,6 cm ?

Ainsi, à tout nombre positif x qui est une valeur possible de la masse (en kg), on associe le nombre $12x$, qui est l'allongement y correspondant (en cm).

$$y = 12x$$

La relation qui lie y et x est du type $y = ax$, où a est un nombre donné (ici $a = 12$).

Pour cette raison on dit que l'allongement est une **fonction linéaire** de la masse.

2. En mathématique, la fonction linéaire de coefficient 12.

Les mathématiciens eux, ne travaillent pas directement sur des phénomènes physiques; les nombres des mathématiciens ne sont pas forcément des résultats de mesures. Pour eux, il n'y a donc pas de problèmes d'unités de mesure. Les mathématiciens trouvent avantage à travailler sur tous les nombres, positifs ou négatifs, grands ou petits.

Pour eux, ils fabriquent (ou ils définissent) la fonction linéaire de coefficient 12, lorsqu'à chaque nombre x , on associe le nombre $12x$. En mathématique, on dit que $12x$ est l'image de x par cette fonction.

On note $f : x \mapsto 12x$ cette fonction.

Et l'image de x par cette fonction s'écrit $f(x)$.

$$\text{Soit } f(x) = 12x$$

Une situation de proportionnalité se prolonge par une fonction linéaire.

La fonction linéaire de coefficient a fait correspondre à chaque nombre x le nombre ax . »

Technologie de l'ostensif $y = ax$:

Le discours technologique pour la construction de l'ostensif $y = ax$ s'appuie sur les connaissances du tableau de proportionnalité. Le passage d'un « discours arithmétique » à un « discours algébrique » passe par la nomination des mesures de grandeurs avec les lettres « x » et « y » et le changement de dénomination du coefficient de proportionnalité de « k » (rapport externe de type $R(A,B)$) en « a » (rapport de nombres de type $R(a,b)$). Les "mesures de grandeurs variables" deviennent des "variables numériques" et la relation de proportionnalité que décrit le tableau est résumée dans une formule standardisée « $y = ax$ » ; x désigne une mesure possible en kilogrammes d'une masse et y la mesure de l'allongement correspondant en centimètres, donc « a » dépend des unités de mesures des deux grandeurs alors que la proportionnalité entre les grandeurs « masse » et « allongement » est indépendante des unités.

Technologie de l'ostensif $y = f(x)$:

1) Le milieu matériel.

L'évocation de l'expérience physique avec le ressort sert de milieu matériel à la mise en place de la notion de fonction. Elle suggère que l'allongement du ressort dépend de la masse. La masse est la cause ; l'allongement est l'effet. C'est cette dépendance qui est traduite par le mot fonction : "l'allongement est fonction de la masse". Mais elle induit aussi l'idée de correspondance entre deux grandeurs de natures différentes : masse et longueur. La masse agit sur la longueur.

La nature linéaire de cette fonction est définie grâce au concept de proportionnalité et à sa traduction par un tableau de proportionnalité que l'on a résumé par la formule $y = ax$.

2) Le milieu de référence : physique et mathématique.

Pour manipuler cette proportionnalité l'auteur se réfère à des grandeurs physiques mais il renvoie aux physiciens la "responsabilité" du choix du modèle "proportionnel" qui décrit le phénomène physique. Ce sont eux qui savent...

Les physiciens disent : "l'allongement est proportionnel à la masse" ; les mathématiciens disent : "l'allongement est FONCTION LINEAIRE de la masse". Les physiciens s'intéressent à la correspondance entre les grandeurs; les mathématiciens s'intéressent à la correspondance entre nombres dépourvus de leurs unités. En d'autres termes, les fonctions linéaires soutenues par les ostensifs $f(x) = ax$ n'apparaissent que comme des outils de modélisation de systèmes préalablement modélisés par une relation de proportionnalité explicitée par un tableau et un coefficient de proportionnalité (k) ou une formule ($y = ax$).

3) Le "saut informationnel".

Il y a plusieurs niveaux de difficulté pour la mise en place de la fonction linéaire. Ils résultent de l'utilisation de l'algèbre pour traduire une relation de proportionnalité entre grandeurs physiques. On passe du concret à l'abstrait, de l'arithmétique à l'algèbre.

Pour percevoir le concept de proportionnalité avec la fonction linéaire, il faut comprendre que x et y désignent deux grandeurs différentes, mais aussi que x désigne les différentes mesures possibles d'une des grandeurs et y les mesures correspondantes de l'autre grandeur (sans les unités). On traduit cette dépendance par $y = f(x)$. Puis on décrit cette

dépendance : on obtient y en multipliant x par un paramètre a qui désigne un nombre fixe, d'où l'ostensif $y = ax$. Le signe $=$ joue un rôle instrumental : il évoque comment se construit la correspondance.

La technique $y = ax$:

Il semble que l'auteur réduise l'instrumentalité de l'ostensif « $y = ax$ » à l'introduction d'un nouvel ostensif « $y = f(x)$ ». La matérialité de cette écriture algébrique n'est pas exploitée alors qu'on pourrait passer de l'égalité fonctionnelle « $y = ax$ » à une égalité de rapports « $\frac{y}{x} = a$ » pour conclure que les rapports sont constants, ou inversement.

La relation $y = ax$ permet de calculer un nombre y connaissant son correspondant x par une fonction linéaire et inversement. Mais l'auteur ne semble pas souhaiter faire de la formule « $y = ax$ » une technique institutionnelle de résolution de problèmes.

Cette égalité peut être utilisée comme un test dans une situation concrète. La grandeur y est proportionnelle à la grandeur x s'il existe une relation du type $y = ax$ entre leurs mesures. Bien que la détermination du coefficient a , donc de la fonction linéaire, dépende du choix des unités de mesure de ces grandeurs, la connaissance de ce coefficient permet d'adopter le modèle linéaire. Par contre, la preuve de son existence, dans des situations concrètes, peut nécessiter un environnement plus riche. Par exemple, la fonction linéaire qui associe au diamètre d'un cercle sa longueur utilise le nombre π . Or ce nombre est défini comme étant le rapport de la longueur du cercle à son rayon les mesures étant exprimées avec la même unité. Encore faut-il savoir que ce rapport est constant. C'est la connaissance de cette proportionnalité qui légitime le nombre π et non le contraire. Dans ce cas, on ne peut pas renvoyer aux physiciens la responsabilité du choix du modèle linéaire.

Pratiquement dans les exercices on affirme que les grandeurs sont proportionnelles ou on donne un indice (par exemple : à vitesse constante).

La technique « fonction linéaire » :

Dans le manuel la notation fonctionnelle a une instrumentalité réduite (les écritures $f : x \mapsto -3x$ et $f(x) = -3x$ sont introduites tardivement). Elle sert à désigner l'image de x et à formuler les propriétés de linéarité $f(x + x') = f(x) + f(x')$ et $f(kx) = kf(x)$. Mais pour résoudre un exercice on recourt à une technique tabulaire et non aux écritures précédentes. Dans l'exemple d'utilisation 3, pour calculer la distance parcourue en 4 heures connaissant celle parcourue en 1,5 heure et 2,5 heures on aurait pu écrire $f(4) = f(1,5) + f(2,5)$ soit $f(4) = 78 + 130$ finalement $f(4) = 208$.

Avantages :

La relation $y = ax$ est simple et facile à utiliser et permet de justifier les propriétés de linéarité avec les propriétés d'associativité et de distributivité étudiées avec les structures de nombres.

Limites :

La variable désigne en même temps la grandeur et une mesure éventuelle de cette grandeur.

Le test " $y = ax$ " permet plus facilement de rejeter le modèle linéaire que de l'adopter.

Les fonctions linéaires introduites pour modéliser les situations de proportionnalité contribuent à faire disparaître les grandeurs des modèles mathématiques pour se situer dans un univers purement numérique (ce qui est dit dans le manuel).

La fonction linéaire introduit une dissymétrie : la variable universelle x est clairement différenciée de son image $f(x)$, alors que si deux grandeurs sont proportionnelles la première l'est autant à la seconde que la seconde l'est à la première.

II La représentation graphique :

« Représentation graphique d'une fonction linéaire

L'objectif de cette activité est de tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire. Qu'est-ce que cela signifie?

Considérons par exemple la fonction linéaire de coefficient 2 : à chaque nombre x , elle associe le nombre $2x$.

Dans un repère, la représentation graphique de cette fonction est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x; 2x)$, lorsque x prend toutes les valeurs possibles.

Il y a donc une infinité de points à placer. Comment faire? Pour le savoir, répondre aux questions suivantes.

Fonction linéaire de coefficient 2

a/ Donner à x les valeurs -3; -2; -1; -1/2; 0; 1/2; 2; 4 et placer les points de coordonnées $(x; 2x)$ correspondant dans un repère.

b/ Quelle constatation peut-on faire pour ces points?

On peut démontrer que tous les points de coordonnées $(x; 2x)$ sont vraiment alignés; autrement dit, qu'ils sont *tous* sur une *même droite*. Nous ne ferons pas ici cette démonstration, mais nous retiendrons et utiliserons ce résultat admis :

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite et cette droite passe par l'origine.

Utilisation de la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Exemple pratique : le débit

On admet en général que le volume d'eau fourni par une source est proportionnel au temps d'écoulement de l'eau; le coefficient de proportionnalité est appelé le **débit** de la source

$$\text{Volume} = \text{débit} \times \text{temps.}$$

il faut, bien sûr, choisir des unités de mesure. Les unités les plus utilisées sont celles-ci.

| Unité de volume | Unités de temps | Débit exprimé en |
|-----------------------------|-----------------|---|
| litre : l | minute : min | litres par min(l/min) |
| litre : l | seconde : s | litres par seconde(l/s) |
| mètre cube : m ³ | heure : h | mètres cubes par heure(m ³ /h) |

1. "cela coule de source"

Prenons l'exemple d'une source qui fournit 10 litres d'eau par minute.

a) Donner le coefficient de la fonction linéaire qui rend compte de cette situation de proportionnalité.

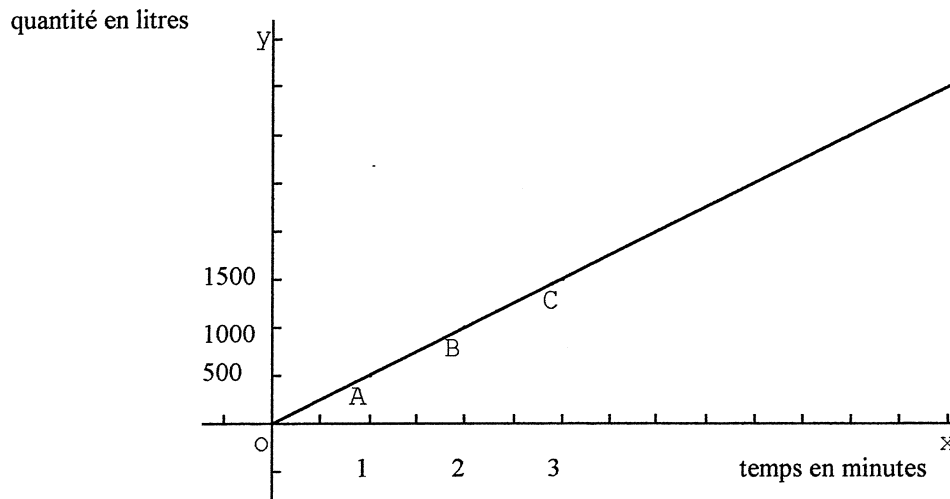
b) Dessiner la représentation graphique de cette fonction linéaire.

c) Quelle est l'image de 60? de 90? de 120?

Quelle est l'interprétation de ces questions et des réponses dans la réalité de la situation?

2. Lecture graphique

Lorsqu'une pompe à eau fonctionne, le volume d'eau pompée est proportionnel au temps de fonctionnement de la pompe. Le graphique représente les variations du volume d'eau pompée en fonction du temps, par une certaine pompe.



- Quelles sont les coordonnées des points A, B, C?
- Quelle quantité d'eau est pompée en 1 minute? en 4 minutes et demie?
- Quel temps faudra-t-il pour vider une citerne de 1500 litres? »

Les techniques de la représentation graphique :

On perçoit à travers cet exemple la volonté d'instrumentaliser la représentation graphique pour la résolution d'exercices. Il y a plusieurs utilisations possibles :

Si on connaît un couple de nombres qui se correspondent dans une fonction linéaire, on peut tracer la droite qui la représente; on peut faire alors une lecture rapide mais approximative des couples de nombres en correspondance.

Si on connaît quelques couples du graphe d'une fonction, on place les points correspondants dans un repère:

- le non alignement de ces points permet de rejeter le modèle linéaire.

- l'alignement apparent des points ne permet pas de valider une situation de proportionnalité. Il suggère le modèle linéaire mais c'est le calcul qui va permettre de décider.

Si des relevés expérimentaux donnent un nuage de points qui semblent alignés avec l'origine, on peut penser que le modèle linéaire est une traduction mathématique possible du phénomène concret.

Dans l'exemple précédent on utilise la représentation graphique uniquement pour faire des lectures. On ne fait qu'une utilisation limitée de l'ostensif graphique.

A travers cet exemple l'auteur souligne la difficulté qu'il y a à gérer les unités. Il en rappelle les différents choix possibles ; le coefficient de l'application linéaire en dépend ainsi que la représentation graphique.

III Les propriétés :

« Des propriétés intéressantes des fonctions linéaires. Utilisation dans la pratique.

Un automobiliste roule à vitesse constante sur le circuit automobile du Mans. A certains moments, on a noté les distances parcourues. On a obtenu le tableau suivant :

| | | | | | | |
|------------------|------|------|------|-------|-----|-----|
| durée t, en min | 15 | 25 | 45 | 65 | 80 | 110 |
| distance d en km | 31,5 | 52,5 | 94,5 | 136,5 | 168 | 231 |

a) Comment faire, sans calculer v, pour calculer le plus rapidement possible la distance parcourue en 55 minutes?

b) Pour calculer la distance parcourue en 70 minutes, une personne dit ceci : "je sais que la distance est une fonction linéaire du temps ; d'après le tableau, l'image de 25 est 52,5 ; l'image de 45 est 94,5 .

Or je remarque que $25 + 45 = 70$.

Donc l'image de 70 est : $52,5 + 94,5 = 147$.

Ainsi, en 70 minutes, l'automobile a parcouru 147 km"

Pour vérifier que cela est bien vrai:

calculer d'abord la vitesse v du mobile;

puis, à l'aide de v, calculer la distance parcourue pendant 70 minutes.

c) Essayons de prouver que ce procédé est général.

Cette personne a finalement dit que : l'image de la somme $25 + 45$ est la somme de l'image de 25 et de l'image de 45.

Essayons de prouver que cela est toujours vrai, c'est à dire que pour la fonction linéaire de coefficient v :

$$(\text{image de } t + t') = (\text{image de } t) + (\text{image de } t').$$

Pour cela :

quelle est l'image de t? de t'?

quelle est l'image de $t + t'$?

vérifier alors l'égalité ci-dessus.

d) En utilisant seulement le tableau et l'égalité démontrée ci-dessus (et non pas la formule $d = vt$) dire quelle sera la distance parcourue en 40 minutes; en 145 minutes.

e) De mieux en mieux!

La même personne dit ceci : "l'image de 25 est 52,5 ; or $50 = 25 \times 2$; donc l'image de 50 est $2 \times 52,5 = 105$.

Ainsi la distance parcourue en 50 minutes est 105 km."

Vérifier que le résultat est exact.

Démontrer qu'il est encore exact dans le cas général, c'est-à-dire que pour la fonction linéaire de coefficient v

$$(\text{image de } kt) = k \times (\text{image de } t)$$

où k est un nombre quelconque.

de façon générale, pour une fonction linéaire :

$$(\text{image de } x) + (\text{image de } x') = (\text{image de } x + x')$$

$$\text{et } (\text{image de } kx) = k \times (\text{image de } x) \gg$$

Remarque :

L'auteur s'appuie sur un exemple concret marqué culturellement .

$d = vt$ est déjà une modélisation linéaire d'une situation concrète que tous les élèves sont censés connaître.

Pour ne pas utiliser directement le tableau de proportionnalité et son environnement ostensif qu'il sollicite par la suite, l'auteur lui substitue une tierce personne hypothétique qui elle, sait... Il évite ainsi de traduire directement en termes de fonction les propriétés que les élèves ont déjà rencontrées avec le tableau de proportionnalité, et leur fait croire qu'ils sont en train de les découvrir.

Commentaires :

1) Alternance des ostensifs et technologie :

L'auteur s'appuie sur le tableau de proportionnalité. Il utilise l'algèbre, parenthèses et signe « = », qu'il combine à la langue française. Pour lui chaque parenthèse donne du sens à son écriture. Son intention est de privilégier la correspondance et ses propriétés avec les notations :

$$f(t + t') = f(t) + f(t') \text{ et } f(kt) = kf(t).$$

A travers l'exemple concret du manuel ces propriétés apparaissent comme des connaissances culturelles. La distance est proportionnelle au temps.

La distributivité $v(t + t') = vt + vt'$ et l'associativité $v(kt) = k(vt)$ servent de preuve mais ne sont pas explicitées par l'auteur qui les laisse à titre de vérification.

L'auteur est imprégné d'algèbre avec probablement une conception associée à chaque notation algébrique (par exemple la parenthèse correspond à une priorité). Il n'est pas sûr qu'il en soit de même pour l'élève. L'algèbre considérée comme un langage transparent sert de base commune pour la communication de ce nouveau savoir. On l'utilise comme support pour le transfert du modèle « tableau de proportionnalité » au modèle « fonction linéaire ». Il n'est pas certain que l'élève se soit approprié ces conventions d'écriture algébrique.

2) Rôle des propriétés :

Il est clair que pour l'auteur c'est un outil qui permet de calculer des images sans repasser par l'ostensif « $y = ax$ ». Il n'utilise aucune de ces propriétés comme propriété caractéristique de la fonction linéaire. Il ne les utilise pas non plus comme tests. Il cherche à modéliser avec le vocabulaire des fonctions l'organisation mathématique construite autour du tableau de proportionnalité.

IV Bilan

1) La fonction :

* " $y = f(x)$ " est un ostensif moderne du concept de fonction. Il exprime une relation de dépendance avec l'idée de cause à effet que l'on interprète en termes de correspondance, ce qui induit une dissymétrie dans le concept de proportionnalité.

Les variables x et y peuvent désigner des grandeurs en même temps que leurs mesures ou des nombres.

* " $y = ax$ " est un résumé du tableau de proportionnalité; c'est une explication de la dépendance entre les grandeurs x et y grâce à la relation entre leurs mesures notées aussi x et y .

C'est un ostensif qui permet la justification des propriétés de la linéarité avec la distributivité.

C'est aussi l'écriture d'un algorithme qui permet d'obtenir une valeur de y connaissant celle de x (et réciproquement).

La constante a (bien que dépendant des unités) exprime la proportionnalité.

2) La représentation graphique :

Elle nécessite la connaissance du repère cartésien qui dans le cas d'exemples concrets doit prendre en charge la question des unités.

C'est un ostensif graphique qui permet une lecture rapide des couples de mesures en correspondance.

Dans le cas d'une situation concrète l'alignement approximatif des points avec l'origine pourrait permettre d'envisager la fonction linéaire comme modèle mathématique approprié à la situation.

La représentation graphique d'une fonction permet de rejeter le modèle linéaire quand les points ne sont pas alignés.

3) Les propriétés :

Elles ne sont utilisées que comme outils de calcul.

Les propriétés $f(x + x') = f(x) + f(x')$ et $f(kx) = kf(x)$

permettent de calculer des images sans utiliser le coefficient de proportionnalité.

b) Résumé du modèle fonction linéaire

Le modèle scolaire

Fonction linéaire de coefficient a.

La fonction linéaire de coefficient a fait correspondre, à chaque nombre x, le nombre ax.
Autrement dit, lorsqu'à chaque nombre x on associe le nombre ax, on définit (on fabrique) la fonction linéaire de coefficient a.
On dit que le nombre ax est l'image de x par cette fonction.

Représentation graphique d'une fonction linéaire.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine.

Propriétés d'une fonction linéaire.

Par une fonction linéaire de coefficient a :

- * L'image d'une somme est la somme des images.
(image de $x + x'$) = (image de x) + (image de x')
ce que l'on note : $f(x+x') = f(x) + f(x')$
- * L'image d'un produit :
(image de kx) = k(image de x).
ce que l'on note : $f(kx) = kf(x)$.

Principales caractéristiques didactiques :

Le milieu objectif est l'ensemble des nombres ou des mesures de grandeurs. Pour agir l'élève peut se référer aux propriétés des opérations sur les nombres.

Le concept de proportionnalité entre grandeurs est supposé connu.

Le modèle « fonction linéaire » se situe dans le cadre numérique ; l'idée est d'abstraire de la proportionnalité des grandeurs un modèle numérique qui privilégie le rapport externe en oubliant les grandeurs et leurs unités. Ce rapport externe est explicité par un nombre. Il permet de modéliser la proportionnalité avec la relation $f(x) = ax$ ou la relation $y = ax$. La conservation des rapports internes est modélisée par la relation $f(kx) = kf(x)$ mais la

fonctionnalité du rapport externe tend à occulter l'instrumentalité de cette propriété comme celle de l'additivité.

On ne demande pas aux élèves de manipuler ces ostensifs pour reconnaître une relation de proportionnalité. Les exercices consistent à calculer le coefficient de proportionnalité d'une fonction linéaire connaissant un couple de son graphe et à déterminer les images ou les antécédents de nombres connus.

c) Exemples d'utilisation

1 - Fonction linéaire de coefficient a

« Déterminer une fonction linéaire par la donnée d'un nombre non nul et de son image

On sait que, par une fonction linéaire f , l'image de 3 est 12.

- Quelle est cette fonction linéaire?
- Tracer sa représentation graphique. »

Remarque :

Autant demander à l'élève par quoi il faut multiplier 3 pour obtenir 12. Détachée d'un contexte concret, la fonction linéaire perd de son intérêt. Il est difficile de proposer un exercice consistant qui illustre le concept de fonction linéaire si on reste sur un plan purement numérique.

En fait on n'attend pas de l'élève qu'il manipule la proportionnalité. On lui demande de traduire l'énoncé avec le vocabulaire et les ostensifs de la fonction linéaire : $y = ax$ et $f : x \mapsto 4x$ comme le montre la solution proposée.

« Solution...

a) Si on note a le coefficient, inconnu pour l'instant, de cette fonction linéaire, on sait qu'entre chaque nombre x et son image y , on a la relation : $y = ax$.

Ici, avec $x = 3$ on a $y = 12$. Donc on peut écrire :

$$12 = a \times 3 ; \text{ donc } a = 4$$

En conclusion, la fonction linéaire cherchée est la fonction qui, à chaque nombre x , fait correspondre le nombre $4x$; ce que l'on peut noter par

$$f : x \mapsto 4x.$$

b) On sait que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

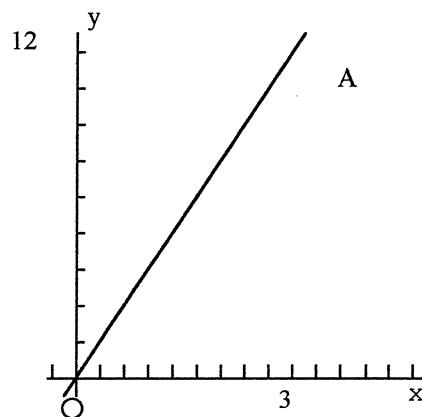
Or une droite est déterminée par deux points.

Il reste donc à placer un autre point de cette droite.

Puisque l'on sait que 3 a pour image 12, on place le point A de coordonnées (3 ; 12).

La droite (OA) est la représentation graphique de la fonction linéaire :

$$x \mapsto 4x. »$$



Commentaires :

On veut donner du sens au nombre 4 en rappelant son statut, le rôle qu'il joue dans la correspondance. Mais en restant dans un cadre purement numérique il n'y a plus les grandeurs pour donner du sens à ce coefficient. Le concept de fonction linéaire n'a plus la consistance que lui conféraient les grandeurs. y est fonction de x ; x et y ne désignent plus des grandeurs mais seulement des nombres abstraits.

2 - Représentation graphique

Il y a trois types d'activité :

Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire quand on connaît son coefficient : c'est ce qui a été fait dans l'exemple précédent.

Déterminer des couples de nombres en correspondance à partir de la représentation graphique.

Retrouver le coefficient de la fonction linéaire à partir de sa représentation graphique.

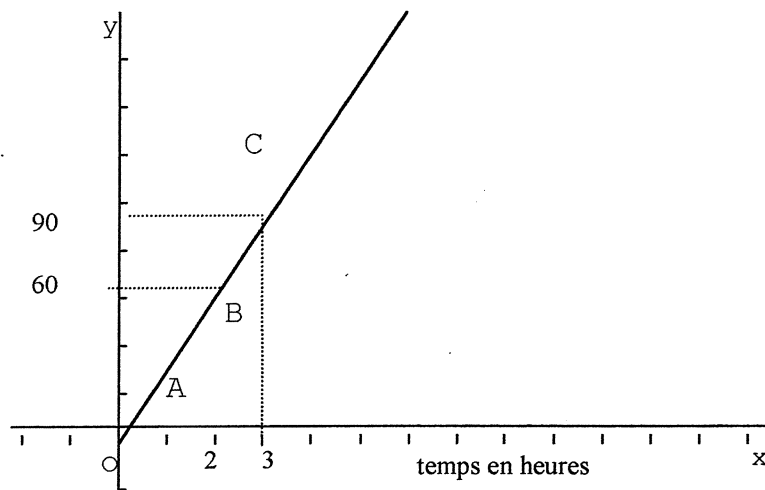
« Lire une représentation graphique

Le graphique représente les variations en fonction du temps, de la distance parcourue par un mobile à vitesse constante.

utiliser ce graphique pour dire :

- Quelle est la distance parcourue en 2 heures?
- Quel a été le temps mis pour parcourir 90 km?

distance en km



Commentaires :

On se réfère à un exercice très marqué culturellement avec des grandeurs qui redonnent du sens à la représentation graphique. Le graphique permet une lecture rapide de la correspondance entre le temps et la distance.

Solution ...

a) La distance d parcourue par un mobile à vitesse constante v est une fonction linéaire du temps t :

$$t \mapsto vt = d$$

Par cette fonction linéaire, l'image du nombre t est vt .

Chercher la distance parcourue en deux heures, c'est donc chercher l'image de 2 par cette fonction linéaire. Si on appelle y cette image, on sait que le point de coordonnées $(2; y)$ est sur la droite D qui représente la fonction linéaire... sur le graphique on lit $y = 60$.

Donc en deux heures, le mobile a parcouru 60 km.

b) Quel temps le mobile a-t-il mis pour parcourir 90 km?

Poser cette question revient à se demander quel nombre a pour image 90?

En notant x ce nombre, on sait que le point de coordonnées $(x; 90)$ est sur la droite D ... Sur le graphique on lit $x = 3$.

Donc le mobile a mis 3 heures pour parcourir 90 km. »

Commentaires :

La solution laisse entendre que le graphique n'est pas un ostensif suffisant puisqu'on réécrit la formule $d = vt$.

L'intention didactique de la solution est de décrire la correspondance en utilisant le vocabulaire qui environne la fonction linéaire : fonction, image,...

3 - Propriétés d'une fonction linéaire

Exemple

Lorsqu'un mobile est en mouvement, à vitesse constante v , la distance parcourue d est fonction linéaire du temps :

$$t \mapsto vt = d.$$

Pour un certain mobile en mouvement à vitesse constante, on sait que la distance parcourue en 1 heure et demie est de 78 km; que la distance parcourue en 2 heures et demie est de 130 km.

Sans calculer la vitesse, on peut calculer, par exemple, la distance parcourue en 4 heures et en 5 heures. Il suffit de dire :

| | | | |
|---|-----|-----|------------|
| t | 1,5 | 2,5 | 1,5+2,5=4 |
| d | 78 | 130 | 78+130=208 |

| | | |
|---|-----|-----------|
| t | 2,5 | 2,5×2=5 |
| d | 130 | 130×2=260 |

En 4 heures ce mobile parcourt donc 208 km et en 5 heures il parcourt 260 km.

Commentaires :

L'expression "à vitesse constante v " indique qu'on adopte le modèle linéaire ; c'est à dire que la distance est proportionnelle au temps, est fonction linéaire du temps. La vitesse est alors le coefficient de cette fonction linéaire.

Pour obliger l'élève à utiliser les propriétés, on lui dit "sans calculer la vitesse". Mais on revient au "tableau de proportionnalité", on n'utilise pas les écritures :

$$f(1,5 + 2,5) = f(1,5) + f(2,5) \text{ et } f(2 \times 2,5) = 2f(2,5).$$

Soit pour l'auteur le tableau de proportionnalité est plus parlant que $f(x + x') = f(x) + f(x')$, correspond à une conception qu'il s'est faite de la proportionnalité.

Soit il pense que c'est le cas pour l'élève.

Dans les deux cas, il nie l'ostensif qu'il s'est tant attaché à mettre en place. Il ne faut pas s'attendre à ce que l'élève fasse lui même le transfert d'écriture.

2-3-2 Cadres arithmétique et algébrique

Le modèle général de la proportionnalité avec ses variables d'environnement : cadre, nature des rapports, nature des nombres a permis de caractériser et de classer les différents modèles scolaires. Le tableau suivant résume partiellement cette classification :

| Milieu → | grandeurs | Grandeurs mesurées | nombres |
|-------------------|-----------|--------------------|--------------|
| Rapports internes | MP | MP ; MRU ; TP | TP |
| Rapports externes | | TP | TP ; SP ; FL |

La méthode de réduction à l'unité et la méthode des proportions ont leur origine dans le milieu des grandeurs ou des grandeurs mesurées qui sont le fondement de l'arithmétique élémentaire. La fonction linéaire décrit une relation entre nombres qu'on explicite avec l'écriture littérale et les propriétés opératoires qu'on puise dans le cadre de l'algèbre élémentaire. Nous allons tenter de donner quelques caractéristiques de ces deux cadres pour pouvoir les comparer.

α) Cadre arithmétique de la proportionnalité

Milieux :

Les milieux matériels sont constitués par les objets physiques, les grandeurs discrètes ou continues, les mesures de grandeurs, les unités de mesures. Les mesures et les opérateurs sont des nombres positifs, entiers, décimaux ou rationnels suivant les connaissances des élèves.

Les rapports sont soit des rapports de grandeurs de même nature (on dit qu'ils sont internes ou scalaires) soit des rapports de grandeurs de natures différentes (on dit qu'ils sont externes ou fonctionnels ou analytiques).

Opérations :

Les opérations élémentaires sont les additions ou soustractions de grandeurs, les multiplications ou les divisions de grandeurs par des opérateurs. Les produits et quotients de grandeurs sont des grandeurs dérivées familières. Les produits et rapports d'opérateurs sont des résumés de compositions d'opérateurs.

Vocabulaire :

Les mots utilisés sont ceux du langage courant auxquels on adjoint quelques termes spécifiques à l'arithmétique comme « grandeur, mesure, unité, rapport, proportionnel ».

Techniques :

Elles peuvent être standardisées (méthode de réduction à l'unité, méthode des proportions, méthode de fausse supposition) ou opportunistes (fractionnements de grandeurs). Elles peuvent être des indices de conceptions chez les élèves.

Les compétences des élèves dépendent de leur niveau de connaissances et sont limitées aux quelques modèles standardisés ci-après résumés :

La méthode de réduction à l'unité (notée MRU)

Dans la MRU le passage de l'état initial à l'état final se fait en trois étapes ordonnées :

- On écrit la valeur correspondant à une certaine quantité
- On calcule la valeur correspondant à l'unité
- On calcule la valeur cherchée.

La MRU se résume en une «**règle de trois**» qui donne les opérations finales à effectuer :

$a \times \frac{b}{c}$ ou $\frac{a}{c} \times b$ ou $\frac{a \times b}{c}$; l'ordre d'exécution est dicté par les simplifications éventuelles.

La **méthode des proportions** (notée MP)

La méthode des proportions n'utilise que les rapports internes.

La résolution d'un exercice passe par une "mise en équation proportionnelle" du type $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$

qui s'apparente à une résolution algébrique (utilisation de lettre et du signe =). Mais :

- Les données sont des mesures de grandeurs (les nombres sont donc positifs).
- L'écriture de la proportion suppose un test préalable sur les grandeurs étudiées.
- le traitement de la proportion (de l'égalité) appelle des techniques propres aux proportions comme le produit en croix, la permutation des extrêmes et des moyens, l'addition ou la soustraction des antécédents et des conséquents correspondants, etc.
- Le résultat est une mesure de grandeur.

Les **méthodes de fausses suppositions** s'appuient sur les méthodes précédentes.

Technologie :

Les justifications s'appuient sur les rapports et les proportions (qui sont une modélisation mathématique de la physique des grandeurs) et sur le raisonnement arithmétique.

Raisonnement arithmétique élémentaire

La résolution d'un problème consiste à passer d'un état initial à un état final par une suite finie d'opérations. Le vocabulaire est issu de la langue naturelle.

- A l'état initial les données sont des mesures de grandeurs ou des rapports étiquetés dans le langage courant.
- A l'état final les nombres produits sont des mesures de grandeurs ou des rapports institutionnellement reconnus et étiquetés.
- Le passage de l'état initial à l'état final est une suite ordonnée de calculs élémentaires :
Chacun des calculs porte sur deux nombres.
Ces nombres sont énoncés ou calculés ou supposés.
Chaque calcul utilise une des quatre opérations : addition, soustraction, multiplication, division.

β) Cadre algébrique de la linéarité

Milieux :

Les nombres (dits abstraits) sont structurés en ensembles : \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} . L'ensemble de référence dépend du niveau des élèves.

Chaque variable algébrique, désignée par une lettre, est un élément générique de l'ensemble numérique de référence pris parmi : \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} . Autrement dit, une variable algébrique (ou numérique) représente un de ces ensembles.

Les lettres peuvent aussi représenter des constantes appartenant à l'ensemble de référence.

Opérations :

Les lois « + » et « × » définissent les structures précédentes.

Le calcul littéral est principalement construit avec :

La distributivité : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$.

L'usage des parenthèses : $a - (b + c) = a - b - c$

Les règles de priorité $\begin{cases} 2 \times 3 + 7 = 6 + 7 \\ 2 \times (3 + 7) = 6 + 14 \end{cases}$

Vocabulaire et ostensifs :

Les ostensifs les plus utilisés sont les lettres, les symboles d'opérations : « +, -, ×, : », les parenthèses : « (...) », les flèches : « →, ↦ », les écritures de nombres avec symboles ou lettres, les formules élémentaires telles que « $y = ax$ » ou « $f(x) = ax$ », les équations simples du premier degré. Dans les explications apparaissent principalement les mots ou expressions : « variable, linéaire, fonction, opérateur, coefficient, coefficient de proportionnalité ».

Techniques :

Nous avons vu que l'organisation mathématique autour du tableau de proportionnalité peut intégrer quelques éléments d'algèbre comme des équations élémentaires ou des formules du type « $y = ax$ ».

Mais le modèle algébrique standard est la **fonction linéaire** (notée FL). Elle privilégie le rapport externe (noté k ou a).

1. Elle suppose déjà construites les variables donc au moins un des ensembles de nombres structurés.
2. Elle définit une correspondance entre nombres par une formule : « $y = ax$ » ou « $y = f(x)$ » ou « $f(x) = ax$ » ou par un opérateur multiplicatif qui s'apparente à un rapport externe « $x \mapsto 3 \times x$ ».
3. Dans la résolution d'un problème le passage de l'état initial à l'état final se fait en une séquence d'égalités :
 - La ou les premières égalités sont explicitées dans l'énoncé ou établies à partir des données (mise en équation) et la connaissance du milieu objectif.
 - Le passage d'un état à un autre se fait
 - Soit par des techniques institutionnelles sur les égalités : opérer avec le même nombre sur les deux membres d'une égalité, additionner membres à membres.
 - Soit en utilisant les propriétés de la linéarité : « $f(kx) = kf(x)$ » ou « $f(x + x') = f(x) + f(x')$ ».
 - La dernière égalité donne un résultat numérique ou littéral.

Technologie :

Les justifications s'alimentent des règles du calcul et du raisonnement algébrique.

Calcul algébrique

Les élèves disposent du calcul sur les nombres et du calcul littéral qui résultent de la structure de l'ensemble de référence (anneau ou corps).

L'utilisation des lettres permet de passer des nombres rationnels aux nombres irrationnels et de modéliser la linéarité par les formules :

$$y = ax, y = f(x), f(x) = ax, f(x + y) = f(x) + f(y), f(kx) = kf(x).$$

Raisonnement algébrique élémentaire¹⁷

La résolution d'un problème est une séquence d'égalités ou d'inégalités entre nombres, variables ou formules.

- **Etat initial**
Les données sont des variables, des constantes, des formules, des égalités ou inégalités entre ces différents objets.
Les constantes sont des nombres appartenant à un des ensembles : \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} .
Les variables prennent leurs valeurs dans un ensemble de référence explicite ou implicite.
Les fonctions en présences sont des fonctions linéaires, affines, quadratiques ou leurs inverses
- **Etat final**
Le résultat attendu est une ou des égalités ou inégalités.
- Le passage de l'état initial à l'état final est une suite ordonnée d'égalités (ou d'inégalités).
 - Ces égalités sont soit données soit établies.
 - Le passage d'une égalité à une autre se fait
 - En appliquant la même opération aux deux termes de l'égalité.
 - Par l'utilisation d'un théorème.
 - En transformant un terme en un terme équivalent : soit en calculant sur les constantes, soit en utilisant les propriétés algébriques des opérations.
 - En substituant dans un théorème un terme par un terme équivalent.

γ) Comparaison des deux cadres

On cherche ce qu'il y a de commun ou de différent dans les deux cadres.

Milieux :

Les idées de nombres et de variation sont communes aux deux milieux, le nombre permettant d'explicitier les variations. En arithmétique les nombres concrets sont des mesures de grandeurs avec unités ; en algèbre les nombres abstraits sont les éléments d'un ensemble déjà structuré (préconstruit). Dans le premier cas l'idée de grandeur variable est perceptible par les sens, dans l'autre cas l'idée de variable n'est accessible que par la pensée.

Opérations

Le mathématicien reconnaît dans les deux cadres les « mêmes » opérations « + » et « × ». Mais en arithmétique on additionne des grandeurs de même nature, l'addition est une opération interne ; on multiplie ou on divise des grandeurs par des « nombres abstraits entiers », ces nombres opèrent sur des grandeurs, la multiplication est une opération externe. En algèbre « + » et « × » sont des lois internes qui font de \mathbb{D} un anneau et de \mathbb{Q} un corps.

Vocabulaire et ostensifs

Les signes opératoires et les écritures de nombres sont communs aux deux cadres mais leurs significations sont différentes. En arithmétique le langage courant explique les relations entre

¹⁷ Le raisonnement algébrique fait partie du travail de recherche de Dominique Woillez.

grandeurs et les opérations à effectuer sur ces grandeurs. En algèbre la syntaxe utilise des ostensifs (=, →, ↦, f(x)) déjà doués d'une signification spécifique.

Techniques et raisonnements

On a vu que raisonnements arithmétique et algébrique avaient des fondements différents.

La méthode de réduction à l'unité est un exemple caractéristique du raisonnement arithmétique.

La fonction linéaire réduit un problème de proportionnalité à la résolution d'une équation élémentaire du type « $y=ax$ » où un seul des trois termes y , a , x est inconnu, nécessitant une division ou une multiplication.

La méthode des proportions emprunte à l'algèbre le signe « = » et l'écriture littérale pour faire une « mise en équation » du type $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Le **tableau de proportionnalité** (noté TP) n'est pas une technique de résolution mais un support graphique à diverses techniques. Le maître peut se limiter à montrer avec un tableau une ou des procédures adaptées aux connaissances des élèves. Il sert de répertoire pour organiser les données et les différentes techniques de la proportionnalité :

- Calculs et comparaisons de rapports pour "vérifier la proportionnalité" : test des rapports multiples ou vérification de l'égalité des rapports externes.
- Utilisation des rapports ou des additions et soustractions ou du produit en croix pour déterminer une valeur numérique manquante.
- Recueil des données d'un énoncé pour faciliter la recherche des éléments manquants.

Les valeurs numériques peuvent être des mesures de grandeurs étiquetées en tête de liste ou des nombres abstraits.

L'instrumentalité du tableau de proportionnalité s'adapte aux différents niveaux de connaissances des élèves : les nombres peuvent être concrets ou abstraits, entiers, rationnels ou irrationnels, éventuellement représentés par des lettres en particulier pour des élèves qui savent résoudre des équations algébriques élémentaires.

Le tableau est un répertoire qui peut être mis à la disposition de l'arithmétique ou de l'algèbre. Il permet de traiter « proprement » les grandeurs en écrivant les unités en tête de liste. Il peut être utilisé pour décrire une technique de l'arithmétique élémentaire comme la méthode de réduction à l'unité ou la recherche d'une quatrième proportionnelle mais peut aussi servir à définir des fonctions numériques, des suites proportionnelles qui ne sont autres qu'une partie du graphe d'une fonction linéaire.

Un tableau contenant deux listes de nombres peut être compris comme l'écriture d'une partie du graphe d'une fonction numérique. Le tableau de proportionnalité peut être un outil transactionnel pour abstraire la fonction linéaire de la proportionnalité des grandeurs. Les suites de valeurs qu'il contient si elles sont proportionnelles peuvent être des mesures de deux grandeurs proportionnelles ou une partie du graphe d'une fonction linéaire. Une fonction linéaire peut résumer une situation de proportionnalité ou en être une extension aux nombres réels quelconques.

2-3-3 Conclusions et hypothèses

Le modèle général de la proportionnalité a permis une classification des modèles scolaires en fonction de différents milieux. L'étude des cadres arithmétique et algébrique a montré que l'algèbre moderne ne prend pas en charge l'étude des grandeurs. Réciproquement l'approche des connaissances mathématiques élémentaires avec la proportionnalité des grandeurs rend difficile toute autre approche qu'on voudrait faire avec l'algèbre. Le saut de complexité nécessaire pour abstraire la « fonction linéaire » de la « proportionnalité des grandeurs » semble incontournable car l'algèbre telle qu'elle est conçue ne laisse pas de place :

- à l'arithmétique élémentaire qui est remplacée par le calcul algébrique élémentaire.
- à la proportionnalité qui est remplacée par l'étude des fonctions.
- aux grandeurs qui ne peuvent figurer dans les structures algébriques actuelles.
- à la théorie des rapports et proportions qui est rendue caduque par le calcul algébrique.

Nous nous proposons de mettre à l'épreuve les deux hypothèses suivantes par une analyse des programmes des collèges de 1947 à 1985.

Hypothèse 1 : Dans le nouveau cursus scolaire, la fonction linéaire est supposée absorber et reformuler les connaissances de la proportionnalité.

Hypothèse 2 : Les grandeurs ont disparu de l'enseignement secondaire.

2-4 Evolution des programmes de collège de 1947 à 1985

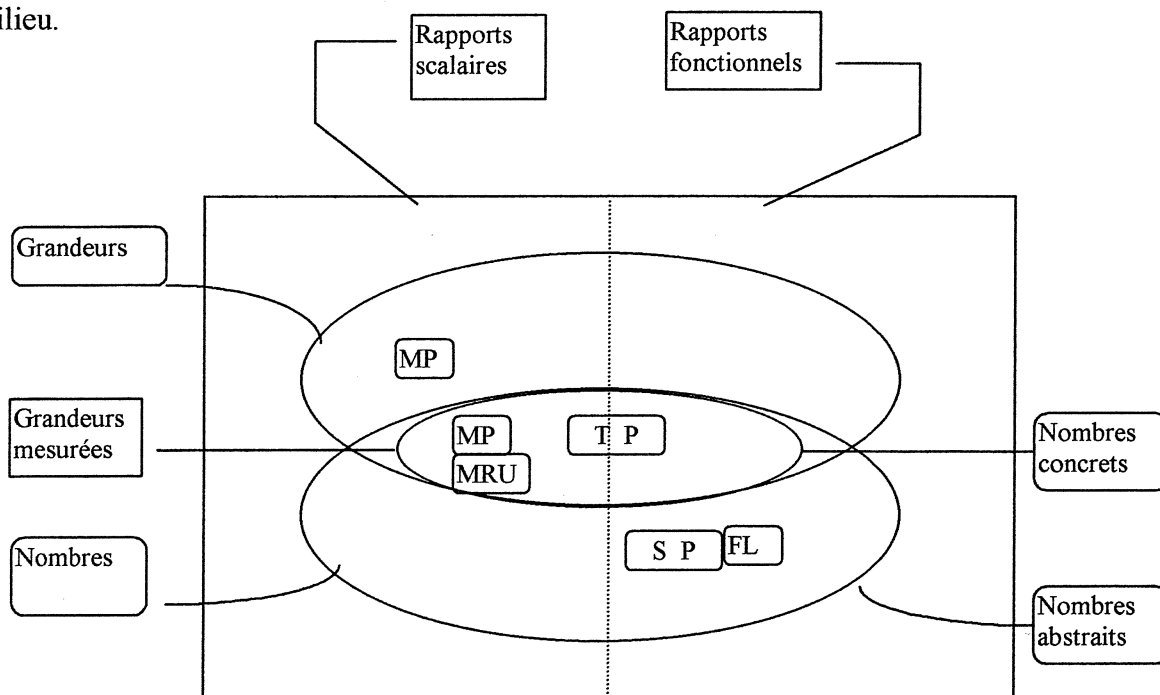
2-4-1 Introduction et méthodologie

Nous avons soupçonné les programmes de collège d'être en partie responsables des dysfonctionnements observés lors de l'enquête auprès des maîtres du primaire (déliquescence de certains concepts tels que rapport, rationnel et décimaux, glissement du vocabulaire et émiettement des connaissances de la proportionnalité) car la formation générale initiale en mathématiques se limite pour certains d'entre eux à ce qu'ils ont appris dans leur scolarité jusqu'à la classe de seconde. Les programmes sont une trace écrite d'une transposition du savoir savant vers le savoir à enseigner. Ils reflètent le projet de l'institution scolaire au moment de leur parution. La première difficulté consiste à lire ce projet à travers leurs rédactions. La deuxième difficulté est de percevoir et de décrire l'évolution de ce projet avec uniquement les libellés des programmes.

La proportionnalité est une relation entre grandeurs. Pour traiter les situations de proportionnalité les élèves utilisent leurs connaissances sur les nombres. Réciproquement ces relations de proportionnalité peuvent faire apparaître la nécessité de construire de nouveaux nombres. Ainsi d'objet d'étude les grandeurs deviennent un moyen d'enrichir les répertoires de connaissances des élèves sur les nombres. Donc on ne peut pas dissocier l'étude de la proportionnalité de celles des nombres et des grandeurs. La proportionnalité apparaît comme un outil de transaction entre le répertoire des grandeurs et celui des nombres, entre arithmétique et algèbre.

La fonction linéaire est une relation entre nombres concrets lorsqu'elle modélise une relation de proportionnalité entre grandeurs. Elle peut aussi être définie formellement comme relation entre ensembles structurés de nombres abstraits.

Pour décrire les contenus des programmes nous étudierons le vocabulaire utilisé dans leur libellé, nous repérerons les techniques et les milieux sur lesquels elles sont censées agir, ce qui peut aussi donner une idée des tâches qui seront demandées aux élèves. Nous avons vu que certaines expressions et certaines techniques sont spécifiques à l'arithmétique, d'autres à l'algèbre. Les tâches suggérées peuvent faire référence aux grandeurs, à leurs mesures ou aux nombres abstraits. Certaines techniques utilisent les rapports internes d'autres les rapports externes. Le schéma suivant illustre la grille de lecture qui est en arrière plan de cette étude, il contient le modèle général en même temps que les modèles scolaires particuliers à chaque milieu.



MP : méthode des proportions
 MRU : méthode de réduction à l'unité.
 TP : tableau de proportionnalité

SP : suites proportionnelles
 FL : fonction linéaire

2-4-2 Etude des programmes

Nous essayons de repérer dans la rédaction de chacun des programmes de 1947 à 1985 les mots ou expressions qui permettent de décrire l'environnement de la proportionnalité et de la linéarité. Le tableau suivant donne leurs fréquences d'utilisation.

| Les mots | 1947 | 1957 | 1968 | 1977 | 1985 |
|---------------------------------|------|------|------|------|------|
| Grandeur | 10 | 2 | 2 | 1 | 5 |
| Mesure | 10 | 18 | 5 | 4 | 6 |
| Unité | 8 | 9 | 2 | 3 | 1 |
| Proportion | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Proportionnel | 9 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| Proportionnalité | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| Rapport | 8 | 7 | 4 | 2 | 0 |
| | | | | | |
| nombre fractionnaire | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| Fraction | 9 | 7 | 0 | 1 | 0 |
| écriture fractionnaire | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| quotient | 5 | 9 | 3 | 1 | 5 |
| concret | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| abstrait | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| nombre | 11 | 37 | 51 | 13 | 13 |
| formule | 1 | 8 | 0 | 0 | 1 |
| table | 2 | 10 | 2 | 2 | 0 |
| tableau | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| situation | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| situation-problème | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | | | | |
| variable | 5 | 9 | 0 | 0 | 0 |
| équation | 10 | 5 | 5 | 6 | 9 |
| ensemble | 0 | 0 | 15 | 7 | 0 |
| | | | | | |
| relatif (nombre) | 0 | 5 | 14 | 9 | 5 |
| rationnel (nombre) | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| réel (nombre) | 0 | 0 | 19 | 3 | 0 |
| | | | | | |
| fonction | 4 | 3 | 9 | 0 | 5 |
| linéaire | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| fonction linéaire | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| application | 0 | 0 | 5 | 8 | 8 |
| application linéaire | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| coefficient de proportionnalité | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| opérateur | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| Suites proportionnelles | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| | | | | | |
| nombre de mots | 1503 | 2857 | 2314 | 1306 | 1544 |

Commentaires :

Globalement les fréquences d'apparition des mots « grandeur, mesure, unité, rapport, proportion » diminuent nettement à partir de 1968. Les mots « proportionnel » ou « proportionnalité » figurent 10 fois en 1947, disparaissent en 1957, réapparaissent 2 fois en 1977 et 6 fois en 1985. On pressent déjà avec les fréquences de ces mots que les milieux de référence pour l'enseignement au collège ne seront plus les grandeurs à partir de 1968.

En 1968 et 1977 le mot « rapport » ne figure que dans l'expression « rapport de projection orthogonale » et en 1985 il a complètement disparu. L'expression « nombre fractionnaire » figure seulement dans les programmes de 1957, elle désigne la nature de certains nombres en opposition aux nombres entiers. L'expression « écriture fractionnaire » apparaît pour la première fois en 1985. Elle désigne une écriture que les auteurs de ces programmes semblent vouloir opposer à « écriture décimale » au vu des expressions telles que : « nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire ». On ne parle presque plus de « fraction » à partir de 1968.

Le mot « ensemble » figure emblématique des « math modernes » fait son apparition en force en 1968. Il est moins utilisé en 1977 et disparaît des programmes de 1985. Cette disparition progressive résulte des corrections apportées aux programmes d'après 1968 suite au malaise que ces derniers ont suscité.

Le mot « variable » disparaît des programmes à partir de 1968. En 1947 il évoquait l'idée de variation des grandeurs dans l'expression : « Notion de variables et de fonctions données à partir de grandeurs usuelles ». En 1957 il désigne encore des « grandeurs variables » dans l'expression « ...tables de correspondance entre mesures de grandeurs variables... » mais aussi des variables numériques dans : « Représentation graphique d'une fonction d'une variable. ». Sa disparition en 1968 semble être l'indice qu'on s'intéresse moins aux variations de grandeurs liées qu'à la correspondance terme à terme entre valeurs numériques. Nous verrons que cette dernière approche purement logico-mathématique propre au XIX^{ème} et XX^{ème} siècles suppose le sacrifice de l'idée de causalité. C'est d'ailleurs dans les programmes de 1968 qu'apparaît le mot « application » lui-même caractéristique de cette approche des mathématiques. Il se substitue complètement au mot « fonction » en 1977. C'est aussi en 1977 et 1985 que l'expression « application linéaire » remplace l'expression « fonction linéaire ». Le mot fonction réapparaît dans les programmes de 1985. Les programmes d'après 1968 voulaient réhabiliter l'idée de « fonction de ... » en opposition à l'idée de fonction définie par un graphe.¹⁸

C'est dans les programmes de 1957 et surtout 1968 que le mot « nombre » figure le plus souvent. Il faut tempérer l'importance de ces fréquences car c'est en 1957 et 1968 que les rédactions des programmes sont les plus longues. Néanmoins c'est en 1968 qu'apparaît l'étude des nombres rationnels et réels et de leurs structures comme en témoignent les quelques citations suivantes :

« Énumération des principales propriétés qui structurent l'ensemble \mathbb{R} des réels : addition, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif ;

... groupe des puissances d'un nombre réel non nul.

... Un nombre réel r est dit rationnel s'il existe deux entiers $a \neq 0$ et b tels que $ar = b$. Corps des nombres rationnels. »

Il semble à peu près clair que les milieux de référence à partir de 1968 sont principalement les nombres au détriment des grandeurs et de leurs mesures.

¹⁸ Dans le « Complément aux Programmes et Instructions » du BO du 30 juillet 1987 on peut lire : « Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que « en fonction de », « est fonction de » seront utilisées. »

Quelques remarques :

- L'expression « coefficient de proportionnalité » ne figure dans aucun programme (mais dans les manuels dès 1947)¹⁹.
- Le mot « opérateur » apparaît seulement en 1985.
- Le mot « table » figure en 1947 dans « Tables des carrés » en 1957 dans « Construction de tables de valeurs numériques ou de correspondance »
- Le mot « tableau » apparaît en 1957 dans « tableau de valeurs », en 1968 dans « tableaux de correspondance » et en 1985 dans « Décrire la situation par un tableau ou par des représentations graphiques ».
- L'expression « tableau de proportionnalité » ne figure dans aucun de ces programmes.
- C'est en 1968 qu'apparaît le mot « situation » dans l'expression « ... à partir de situations concrètes... » et en 1985 en plus du mot « situation » figure l'expression « situation-problème ».

Nous essayons maintenant d'extraire de chaque programme les objets qui semblent intervenir dans l'organisation mathématique de la proportionnalité ou de la linéarité ; ceux qui semblent en constituer la « niche écologique ». Les techniques et milieux décrits dans les programmes évoquent les théories et les modèles qui sous-tendent les contenus d'enseignement et éventuellement les tâches qui seront soumises aux élèves.

Extraits des Programmes du 18 avril 1947 :

Classe de 6^{ème} classique et moderne.

Exercices de calcul sur les nombres entiers et les nombres décimaux en liaison avec la mesure des grandeurs : système métrique, quotient, règle de trois.
Mesure des poids : poids spécifique et volume spécifique.
Monnaies : prix unitaire d'une marchandise et quantité de marchandise correspondant à l'unité de monnaie.
Vitesse dans le cas d'un mouvement uniforme ; espace parcouru pendant l'unité de temps et temps nécessaire au parcours de l'unité d'espace.
Pourcentage, intérêts simples.

Classe de 5^{ème} des cours complémentaires.

I ... Multiplication et division d'une grandeur par une fraction. Rapport de deux grandeurs. Fractions égales. Opérations sur les fractions...

II Programme particulier à la classe.
.....Changement d'unité. Emploi d'une lettre pour désigner l'inconnue. ...

Classe de 4^{ème} des cours complémentaires.

Arithmétique et algèbre
Notions de variable et de fonction données à partir de grandeurs usuelles ; graphique ; grandeurs proportionnelles ; relation $y = ax$; grandeurs à accroissements proportionnels ; relation $y = ax + b$ (a et b désignant des valeurs numériques).
Proportions et partages proportionnels.

¹⁹ voir par exemple R. Maillard & Millet ; classe de 4^{ème} ; Classique Hachette ; 1954 ; page 115.

Géométrie ...

.... Produit d'un segment par une fraction. Rapport de deux segments. ... Proportionnalité d'un segment projeté et de sa projection : application à la construction du produit d'un segment par une fraction, d'une quatrième proportionnelle, des points d'une droite dont le rapport des distances à deux points de cette droite est donné.

Classe de 3^{ème} classique A et B et 3^{ème} moderne

Arithmétique

Rapports. Proportions. Grandeurs directement ou inversement proportionnelles ; exemples. Partages proportionnels.

Algèbre

Notions de variable et de fonction données à partir de grandeurs usuelles : graphiques. Etude de la fonction linéaire. (grandeurs proportionnelles et grandeurs à accroissements proportionnels) ; représentation graphique.

Géométrie

II Rapport de deux segments. Points divisant un segment dans un rapport donné.

Théorème de Thalès.

Application à la construction du produit d'un segment par une fraction, d'une quatrième proportionnelle, des points divisant un segment dans un rapport donné.

.....

V Rapport des aires de deux triangles semblables

Commentaires

En sixième, on ne fait que de l'arithmétique élémentaire. L'étude des grandeurs familières aux élèves constitue l'essentiel du programme. La « règle de trois » est annoncée avec les mesures de grandeurs. La technique de la « règle de trois » n'est pas décrite mais des expressions telles que « prix unitaire d'une marchandise et quantité de marchandise correspondant à l'unité de monnaie » révèlent que les élèves auront à calculer des « quantités à l'unité » et à utiliser la « méthode de réduction à l'unité ». L'expression précédente met l'accent sur la symétrie de la relation de proportionnalité ; « la quantité de marchandise correspondant à l'unité de monnaie » donne du sens à l'unité de monnaie par la valeur marchande qui lui est attribuée.

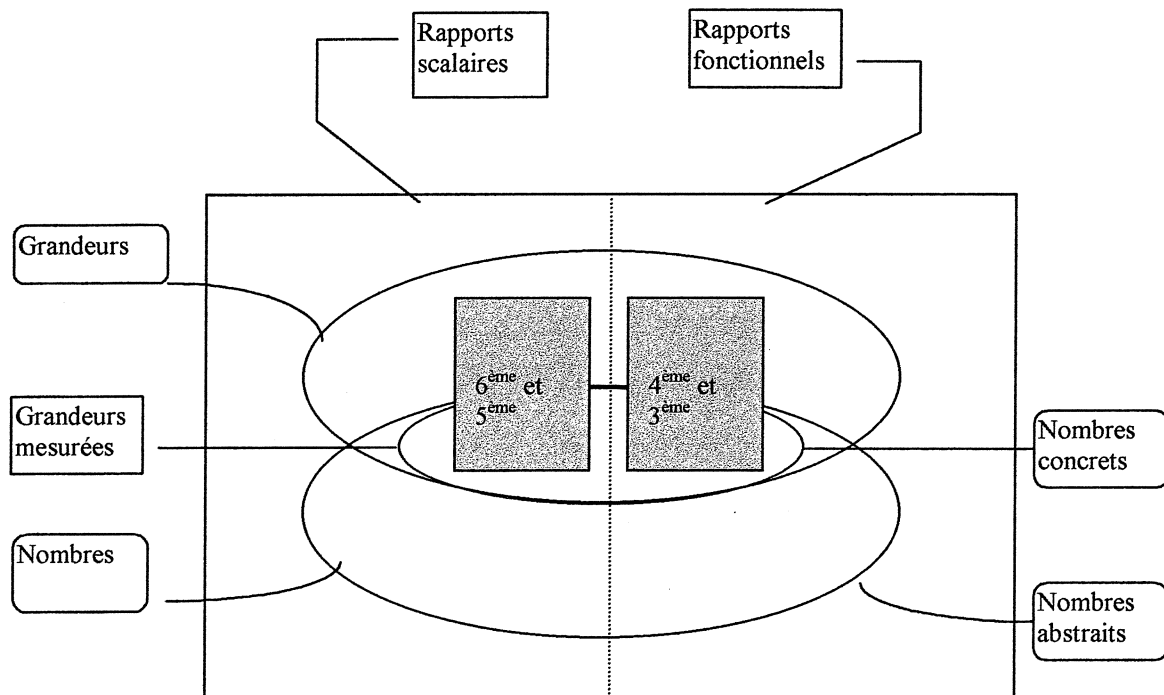
En cinquième on introduit le rapport de deux grandeurs en relation avec les fractions.

En quatrième et troisième les notions de variables et de fonctions sont données à partir des grandeurs usuelles. L'idée de fonction est attachée aux variations de grandeurs et la relation de proportionnalité est résumée par la formule $y = ax$ où x et y représentent des mesures de grandeurs. Le passage de la méthode de réduction à l'unité à la relation $y = ax$ s'accompagne d'un passage du rapport scalaire au rapport fonctionnel qui n'est pas décrit dans les programmes. Mais l'étude des rapports et proportions et les propriétés qui s'en dégagent autorisent les calculs nécessaires à ce passage. Quelle que soit la méthode²⁰ les programmes laissent entendre que l'étude de la fonction linéaire et de la relation $y = ax$ doivent se dégager de la relation de proportionnalité entre grandeurs.

²⁰ En général, les auteurs des manuels partent d'un exemple familier aux élèves où le rapport fonctionnel est une grandeur dérivée connue puis généralisent. Les différentes manipulations nécessaires à l'obtention de l'écriture $y = ax$ se réfèrent à l'étude des rapports et proportions faite dans un chapitre précédent.

Conclusion :

Il est à peu près clair que les tâches des élèves vont s'alimenter des grandeurs qui leur sont familières et que le discours technologique s'appuie sur la théorie des rapports et proportions. Les mots clé de ces programmes sont « grandeurs, variable, rapport, proportion, fonction ». En sixième et cinquième la technique fondamentale est la « méthode de réduction à l'unité ». En quatrième et troisième la phrase « Les notions de variables et de fonctions sont données à partir des grandeurs usuelles » indique que la relation « $y=ax$ » doit être extraite de la proportionnalité des grandeurs. Même si ce n'est pas explicite dans les programmes, c'est la théorie des rapports et proportions qui sous tend leur organisation mathématique et qui permet le passage des rapports scalaires aux rapports fonctionnels, des grandeurs proportionnelles aux fonctions linéaires.



Extraits des Programmes du 12 août 1957, du 31 juillet 1958 et du 9 avril 1960 :

Classe de 6^{ème}.

Mesures des poids ; balance. Poids spécifique.
Mouvements uniformes. Vitesse.

La notion d'échelle d'un dessin ou d'un plan sera introduite à l'occasion d'exercices de représentation de figures ou d'objets.

... constructions de tables de valeurs numériques, ou de tables de correspondance entre des mesures de grandeurs variables liées, les nombres mis en jeu provenant soit d'opérations pratiques effectivement réalisées (mesures de longueurs, pesées, repérages d'une durée...), soit de calculs faits à partir d'une formule littérale, dans laquelle on a donné aux lettres diverses valeurs numériques.

... notions sur les monnaies, sur les prix, ou sur les intérêts simples.

Classe de 5^{ème}.

Fractions de grandeurs

Note. - L'étude des diverses questions concernant les nombres entiers et les nombres fractionnaires a donné lieu, bien entendu, à une introduction progressive de l'emploi des lettres (*arithmétique littérale*). Il est recommandé, à la fin de cette étude, de faire le bilan des résultats essentiels ainsi acquis, de les énoncer avec précision, et de les résumer en quelques formules, accompagnées d'une légende rappelant la signification des lettres qui y figurent.

... construction de tables de valeurs numériques et de tables de correspondance...

Classe de 4^{ème}.

Notions de variable et de correspondance entre variables.

Classe de 3^{ème} (des cours complémentaires).

Rapports, proportions ; propriétés élémentaires.

Notions de variable et de fonction : exemples.

Représentation graphique d'une fonction d'une variable.

Fonction $ax + b$ de la variable x ; sens de variation.

Représentation graphique. Mouvement rectiligne uniforme.

Rapport de deux segments ... Division d'un segment dans un rapport donné ... Théorème de Thalès.

Commentaires :

Il n'y a plus la « règle de trois » dans les programmes de 1957.

Le programme de 6^{ème} est toujours découpé en fonction des objets à étudier : « segments, angles, cercles, sphères, temps, polygones... ». Il met en avant les objets à partir desquels les travaux pratiques devront dégager les mesures de grandeurs. La géométrie y occupe une place privilégiée. Il reste les notions de « poids spécifique, vitesse, échelle, intérêts simples ».

En 5^{ème} on étudie les fractions de grandeurs. Il n'y est plus question de proportionnalité mais d'introduction progressive de l'emploi de lettres (*arithmétique littérale*).

En 4^{ème} l'expression « notion de variables et de correspondance entre variables » est le seul vestige d'une éventuelle relation de proportionnalité. Elle remplace « Notions de variable et de fonction données à partir de grandeurs usuelles » et met ainsi l'accent sur la correspondance entre variables au détriment de l'idée de dépendance entre grandeurs variables. Le milieu de référence n'est plus le domaine des grandeurs mais celui des nombres.

En 3^{ème} (des cours complémentaires) la théorie des rapports et proportions est maintenue mais la distance par rapport aux grandeurs est confirmée. L'étude de la fonction linéaire ne modélise pas une relation de proportionnalité, elle est un cas particulier de « fonction $ax+b$ ».

Conclusion :

Les programmes de 1957 mettent l'accent sur la construction de « tables de correspondances » et l'usage de « formules ». « L'arithmétique littérale » fait son apparition de manière explicite. L'expression « grandeurs proportionnelles » a disparu et aucune technique relative à la proportionnalité des grandeurs n'est explicitée. Bien que certains commentaires tentent de rappeler que le « point de départ » des notions d'arithmétique est le « domaine concret » on perçoit dans ces programmes une tendance à détacher les

mathématiques de l'étude des grandeurs et de la physique. Les mathématiques du collège s'acheminent progressivement vers l'étude des nombres et des relations entre nombres. La citation suivante relevée dans les instructions de janvier 1957 semble indiquer les intentions de ces programmes : « Toute la théorie des proportions n'est-elle pas contenue dans la définition du quotient exact d'un nombre par un autre, et ne peut-on lui faire prendre corps à partir de là ? »

Extraits des Programmes du 29 juillet 1968 et 22 juillet 1971 :

Classe de 6^{ème}.

Toujours sur des exemples concrets, description précise de relations et de leurs propriétés. Représentation dans le cas d'ensembles finis par des tableaux de correspondance ou par des flèches.

Exemples et représentations graphiques de relations numériques.

... masses volumiques.

Durées. Vitesse d'un mouvement uniforme. Débits.

Classe de 5^{ème}.

Révision des notions étudiées dans le § 1 « relations » du programme de Sixième. Produit cartésien. Application ; bijection.

Classe de 4^{ème}.

Révision des notions présentées dans les classes antérieures et compléments : produit cartésien, relation, application, composition des applications ; bijection d'un ensemble sur un ensemble et bijection réciproque.

Enoncé de Thalès. Rapport de projection, ...

Classe de 3^{ème}.

Fonction linéaire et fonction affine.

Commentaires :

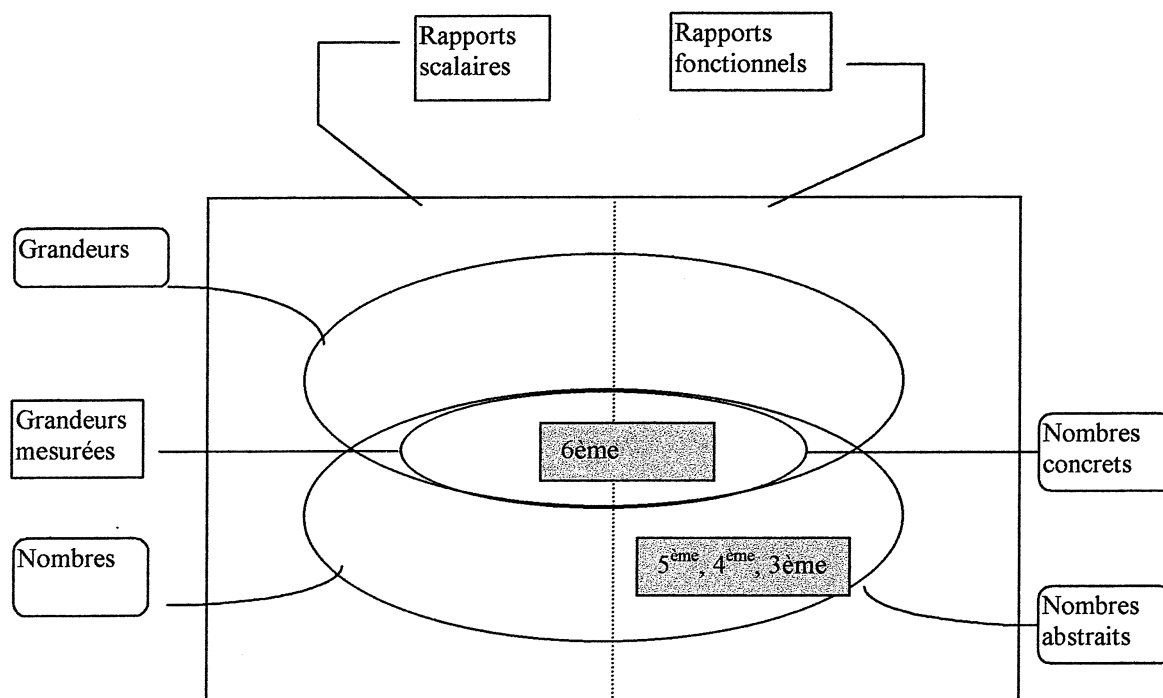
La lecture de ces programmes fait apparaître une rupture par rapport aux programmes antérieurs.

En 6^{ème} le programme commence par l'étude des « relations » représentées par « des tableaux de correspondance ou des flèches ». « Masses volumiques, durées, vitesses et débits » sont les seuls vestiges de la proportionnalité des grandeurs. « L'étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures » arrive après l'étude des relations et des nombres comme lieu d'utilisation et non comme milieu pour leur construction.

Dans les programmes de 5^{ème} et 4^{ème} il n'y a aucune référence aux grandeurs ou à la proportionnalité ou aux fonctions linéaires. Les « applications et des bijections d'un ensemble sur un ensemble » sont proposées avec l'étude des « Relations ». La rubrique géométrie décrit une géométrie affine ou analytique. L'expression « proportionnalité entre un segment projeté et sa projection » qui figurait dans les programmes de 1947 est devenue « rapport de projection » dans ceux de 1968 et met en avant le rapport fonctionnel.

En 3^{ème} on retrouve « Fonction linéaire et fonction affine ». La fonction linéaire n'est qu'un exemple de fonction numérique. Elle est complètement détachée de l'étude des grandeurs et donc ne peut pas apparaître comme une modélisation d'une relation de proportionnalité.

En conclusion on peut dire que les structures de nombres sont les fondements des programmes de 1968. L'étude des grandeurs et de la proportionnalité a disparu. La fonction linéaire apparaît comme un cas banal de fonction numérique et non comme une technique de la proportionnalité. Il est probable que dans ces conditions les tâches des élèves se limitent à des manipulations de nombres pour faire fonctionner les propriétés de la linéarité.



Extraits des Programmes du 17 mars 1977 et 16 novembre 1978 :

Classe de 6^{ème}.

Suites finies proportionnelles (1) ; calculs de pourcentages, exercices de changements d'unité.

(1) Deux suites sont proportionnelles si on passe de l'une à l'autre par une multiplication ou par une division, ou par une succession de telles opérations.

Classe de 5^{ème}.

agrandissement et réduction d'un dessin.

(En liaison avec la physique.) Masse ; masse volumique. Durées ; unités de temps et de vitesse. Débits.

Classe de 3^{ème}.

Construction, sur des exemples, de la représentation graphique d'une application d'une partie de IR dans IR.

Applications linéaires et applications affines de IR dans IR ; leurs représentations graphiques.

Propriété de Thalès ... Rapport de projection orthogonale, symétrie de ce rapport.

Commentaires :

Comme dans les programmes de 1968, l'étude des nombres précède celle des objets géométriques et physiques.

En classe de 6^{ème} apparaissent pour la première fois les suites proportionnelles. En fait, elles étaient déjà présentes dans certains manuels scolaires.²¹ On définit la proportionnalité entre deux suites de nombres, indépendamment des grandeurs, en utilisant les opérations « multiplier » et « diviser » qui permettent de « passer » de l'une à l'autre. Il y a plusieurs remarques à faire sur cette approche de la « proportionnalité » :

- Ce sont des suites qui sont proportionnelles et non des grandeurs (ni des nombres).
- Le mot « suites » n'est pas très approprié, il s'agit plutôt de « listes » car il n'y a pas a priori de système générateur de ces suites.
- La seule technique pour vérifier si deux suites sont proportionnelles consiste à comparer tous les rapports externes ; il n'y a aucune raison ergonomique d'aller comparer des rapports scalaires ; les suites sont des listes de nombres indépendants de toute contrainte de milieu. (Seule la précision « exercices de changement d'unité » permet d'imaginer que ces nombres peuvent être aussi des mesures de grandeurs).
- Nous avons vu que la définition de deux suites proportionnelles en trois étapes induit l'usage des entiers (l'opérateur fractionnaire est la composée de deux opérateurs entiers). Les opérateurs qui permettent de « passer d'une suite à l'autre » seront de manière privilégiée les entiers ; deux nombres homologues seront sous ces conditions dans un rapport entier.
- La décomposition des entiers en produits de facteurs figure dans les programmes de 5^{ème}. Il sera tentant d'utiliser le vocabulaire de la proportionnalité pour décrire les relations entre nombres entiers et dire que « deux entiers dans un rapport multiple sont proportionnels ».

En 5^{ème} l'expression « En liaison avec la physique » sous-entend que l'étude des grandeurs est de la responsabilité de la physique et que le choix éventuel du modèle proportionnel lui incombe²². Les mathématiques se cantonnent à l'étude des nombres, de leurs structures, des relations entre ensembles de nombres. Les programmes de 5^{ème} reprennent néanmoins (en liaison avec la physique) : « masse volumique, durée, vitesse, débit ». C'est la seule partie qui évoque la proportionnalité en plus de « agrandissement et réduction d'un dessin ».

Les programmes de 4^{ème} consacrent une grande partie du travail mathématique à la mise en place du calcul numérique sur les rationnels et les réels. Il n'y a rien sur la proportionnalité et les grandeurs sont totalement absentes.

En 3^{ème} les applications linéaires et affines sont des exemples d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On est plongé dans le domaine numérique, celui des grandeurs est totalement ignoré.

Conclusion :

Il semble que le programme de 6^{ème} manifeste une volonté de reprendre l'étude de la proportionnalité mais en restant dans un cadre numérique ce qui pourrait expliquer au moins en partie les dysfonctionnements observés dans l'usage du vocabulaire de la proportionnalité. Les milieux de références sont les nombres et leurs structures ; on étudie les applications d'un ensemble dans un ensemble, l'application linéaire n'étant qu'un cas particulier de telles applications. Dans ces conditions elle ne peut pas reformuler la proportionnalité entre grandeurs ni apparaître comme une technique de la proportionnalité.

²¹ Queysanne et Revuz ; 3^{ème} ; Fernand-Nathan ; 1972 ; page 97 ou Mauguin ; 3^{ème} ; Istra 1972 ; page 66.

²² Dans le manuel « Transmath 4^{ème} ; Nathan ; 1988 » nous avons déjà relevé la phrase suivante : « Les physiciens savent par expérience que l'allongement du ressort est proportionnel à la masse ».

Extraits des Programmes du 14 novembre 1985 :

Classe de 6^{ème}.

3. Organisation et gestion de données. Fonctions

Exemples issus d'activités :

1. A base numérique :

Application d'un pourcentage à une valeur ; relevés statistiques ; opérateurs, et en particulier usage des opérateurs constants d'une calculatrice.

On se servira de ces exemples, selon les cas, pour :

Décrire la situation par un tableau ou par des représentations graphiques.

Reconnaître, s'il y a lieu, une proportionnalité.

Déterminer une quatrième proportionnelle.

Effectuer un changement d'unité.

Classe de 5^{ème}.

3. Organisation et gestion de données. Fonctions

Exemples de fonctions, avec :

Description, traduction en tableaux ou par des représentations graphiques.

Reconnaissance, s'il y a lieu, d'une proportionnalité.

Ces exemples seront notamment issus d'activités :

1. A base numérique :

Calcul d'un pourcentage, d'une vitesse moyenne ; relevés statistiques ; activités proposées en paragraphe 2, ci-dessus.

2. A base géométrique :

Échelles.

Classe de 4^{ème}.

3. Organisation et gestion de données. Fonctions

1. Applications linéaires et proportionnalité :

Représentation graphique d'une application linéaire.

Notion de coefficient directeur, de pente.

3. Application aux pourcentages et aux indices (base 100 pour...) :

Mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs (vitesse en km/h, débit...).

Classe de 3^{ème}.

1. Travaux géométriques

Enoncé du théorème de Thalès.

3. Organisation et gestion de données. Fonctions

Mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou sur des grandeurs-produits.

Commentaires :

Chacun des programmes de 1985 est découpé en trois parties :

1. Travaux géométriques.
2. Travaux numériques.
3. Organisation et gestion de données. Fonctions.

Il y a donc deux nouveautés par rapport à 1977 :

- Le libellé de chaque programme commence par la géométrie.
- La troisième rubrique est nouvelle. C'est cette rubrique qui décrit l'environnement éventuel de la proportionnalité (le mot proportionnel y figure aux 4 niveaux scolaires) en le séparant de la construction des nombres.

En 6^{ème} les suites proportionnelles ont disparu mais les grandeurs restent absentes de la construction des nombres. L'expression « On se servira de ces exemples pour reconnaître, s'il y a lieu, une proportionnalité » montre que l'objet d'étude n'est pas la proportionnalité mais suppose au contraire que ce concept fait partie des acquis du primaire. Le mot « opérateur » est introduit dans les activités à base numérique, la formulation de cette rubrique met en avant son usage et révèle le rôle privilégié qu'on veut attribuer au « rapport fonctionnel ». Peut-être que l'utilisation des calculatrices de poche et des ordinateurs renforce le rôle du rapport fonctionnel et l'usage des opérateurs.

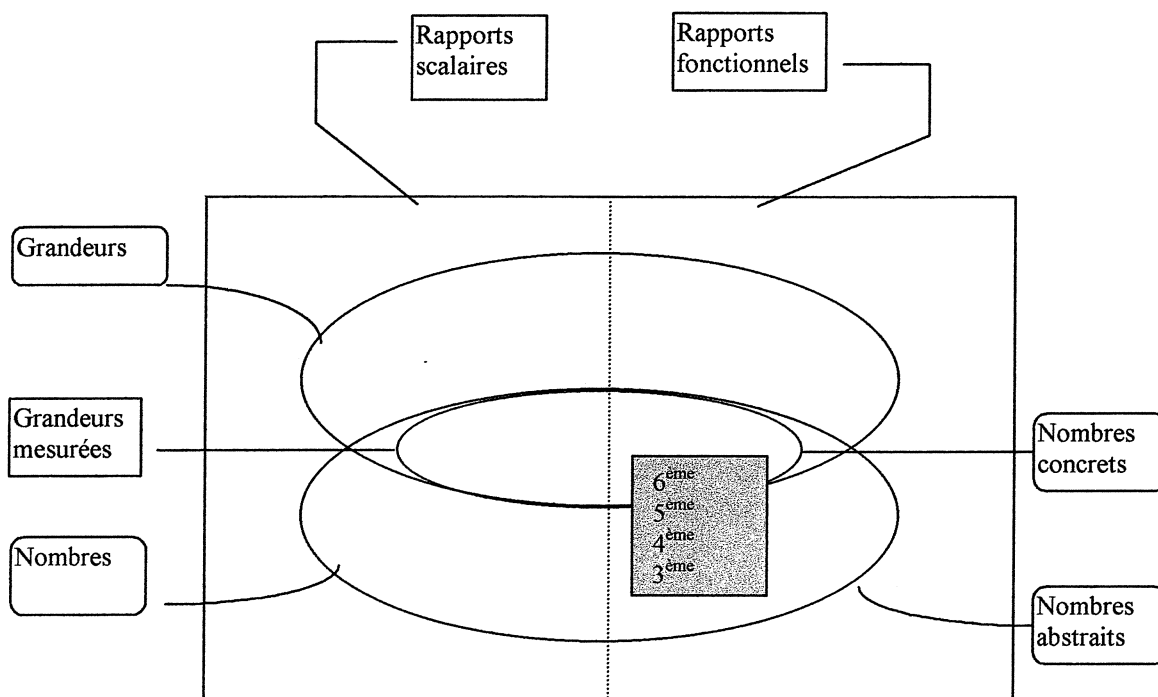
En 5^{ème} on doit aussi « reconnaître s'il y a lieu une proportionnalité » dans des exemples de fonctions. Les seuls exemples issus d'activités à base numérique qui font implicitement référence aux grandeurs sont « pourcentage, vitesse moyenne, échelle ». Dans les compléments du 30 juillet 1987 aux programmes et instructions de 5^{ème} figure la précision suivante : « reconnaître, s'il y a lieu, la proportionnalité sur un tableau complet de nombres ou sur un graphique ». Ce sont donc les nombres qui constituent le milieu matériel sur lequel les élèves auront à travailler. La précision apportée par le programme ignore les grandeurs. D'autres précisions confirment que les élèves auront à utiliser le rapport fonctionnel : « Les élèves retiendront que dans une relation de proportionnalité, la correspondance est déterminée par la connaissance d'un couple de valeurs homologues non nulles ».

Dans les programmes de 4^{ème} figurent « Application linéaire et proportionnalité » et « Mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs (vitesse en km/h, débit, ...) » et dans les programmes de 3^{ème} figure « Mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou des grandeurs-produits ». Le retour aux grandeurs se fait en fin de programme et l'expression « mise en œuvre » semble indiquer qu'il s'agit d'appliquer un savoir déjà acquis.

Conclusion :

Ces programmes semblent vouloir réhabiliter la « proportionnalité ». Dans l'expression « application linéaire et proportionnalité » on peut y voir un rapprochement des concepts de « proportionnalité » et « linéarité » mais aucune articulation n'est explicitée.

L'ordre d'apprentissage des concepts est inversé par rapport aux programmes de 1947. Les constructions mathématiques ne s'appuient pas sur la « matérialité » des grandeurs mais sur celles des nombres et de leurs structures. Les textes de 1985 font apparaître la proportionnalité en fin de programme comme exemple ou illustration de relations numériques. Les tâches décrites dans les commentaires supposent l'usage du rapport fonctionnel et les possibilités de calcul qui l'accompagnent sont données par les propriétés des structures numériques (distributivité, associativité, ...).



2-4-3 Conclusions et hypothèse

Les changements de programmes se sont accompagnés d'un glissement du milieu de référence : des grandeurs et de leurs structures intrinsèques vers les nombres et leurs structures algébriques.

Le vide laissé par la disparition des grandeurs et la théorie des rapports et proportions a fait prendre conscience de la nécessité de construire d'autres objets didactiques pour travailler sur la proportionnalité : « tableau de proportionnalité » et « suites proportionnelles » qui ne figurent pas dans les savoirs savants.

L'idée d'utiliser les structures numériques pour décrire les relations entre grandeurs fait apparaître la proportionnalité comme une simple illustration de la fonction linéaire. Les mots et les autres objets ostensifs qui permettaient de décrire les grandeurs se sont dilués dans les répertoires courants actuels mais les usages qui en sont faits pour décrire les structures numériques ne coïncident pas avec le sens que la culture leur avait assigné.

Pour comprendre l'origine de cette évolution nous nous proposons d'explorer l'histoire des mathématiques, d'analyser l'évolution des savoirs savants et leurs répercussions sur l'école. Nous faisons l'hypothèse que :

Les changements de programmes résultent de l'évolution des connaissances mathématiques dans la sphère savante et de leurs répercussions sur les relations interinstitutionnelles.

2 – 5 Evolution de l'histoire de la proportionnalité.

2-5-1 Introduction

Il est connu que chaque institution adapte ses instruments mathématiques aux problèmes qu'elle traite et aux conditions dans lesquelles elle le fait. En particulier l'école essaie d'adapter ses pratiques et ses conceptions de la proportionnalité à la nouvelle organisation des savoirs savants tout en assurant la pérennité des connaissances anciennes sous le contrôle de la noosphère. Les notions de didactique nous suggèrent l'hypothèse suivante :

Hypothèse : Les dysfonctionnements que nous avons observés sont l'indice d'une évolution non régulée des rapports entre l'institution savante, l'institution scolaire et la noosphère

Une approche mathématique est un choix dans l'organisation des connaissances. Elle doit être prise en charge par un discours épistémologique ou didactique qui lui donne une place. On s'attend à ce que la noosphère en relation avec la sphère savante joue ce rôle pour ce qui est enseigné à l'école. Ainsi les pratiques scolaires ne sont pas seulement le résultat de l'évolution des pratiques antérieures au sein de l'école. Ce qui s'y fait à un moment donné essaie de conjuguer les évolutions internes dues aux réformes et les influences et décisions récentes et anciennes venues de la noosphère. Les relations entre institutions se modifient avec l'évolution des connaissances de chacune d'elles. Les progrès enregistrés dans la sphère savante semblent déterminants pour l'école. Or l'évolution du savoir savant l'a conduit à ne plus utiliser le concept de proportionnalité qui de ce fait ne fait plus l'objet de transformations du savoir savant vers le savoir enseigné. La noosphère n'est plus chargée de réguler l'enseignement de la proportionnalité. Les programmes de 1968 pour le secondaire remplacent cet enseignement par celui de la fonction linéaire, mais le vocabulaire ancien de la proportionnalité demeure.

Si l'école fonctionnait indépendamment des autres institutions la rupture au niveau du savoir savant n'aurait pas d'influence sur les connaissances développées à l'école. Mais l'école essaie d'adapter ses pratiques et ses conceptions de la proportionnalité à un certain nombre d'injonctions venues d'autres institutions et aux difficultés qu'elle peut rencontrer elle-même. La manière qu'elle a de corriger les erreurs et difficultés des élèves est limitée par le recours qu'elle peut avoir aux connaissances venues des autres institutions. Or certaines connaissances que les professeurs ont à enseigner ne figurent plus dans les contenus d'enseignement parce qu'elles n'intéressent plus le savoir savant.

2-5-2 Evolution des savoirs dans la sphère savante

Hypothèses :

- 1) Le savoir savant n'utilise plus le concept de proportion.**
- 2) La sphère savante ignore l'enseignement de la proportionnalité.**

La proportionnalité a été utilisée pour construire des savoirs et établir des résultats en mathématiques jusqu'à la fin du XVIII^{ème} siècle.

a) La proportionnalité dans la construction des nombres²³

Jusqu'au XV^{ème} siècle, la pratique des proportions cherche à apprivoiser une numérisation des rapports car seuls les entiers et les quantités sont reconnus être des nombres exprimables.

La proportionnalité a été un moyen d'homogénéiser \mathbb{N} et \mathbb{Q} . Pour simplifier disons que la multiplication basée sur la compréhension d'un nombre de fois ne permet pas de définir « $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8}$ » par une addition répétée. Au lieu de dire que 12 est le produit de 3 et de 4 on dira

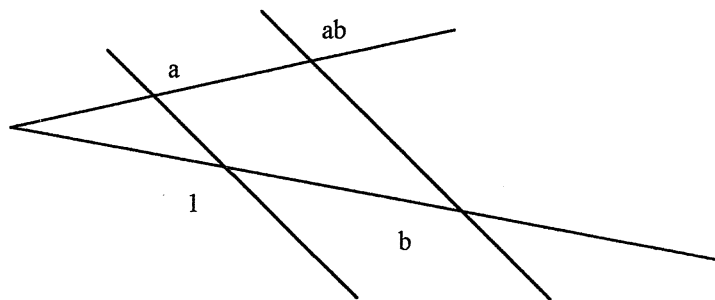
que 12 est à 4 comme 3 est à 1. De même $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8}$ est à $\frac{7}{8}$ comme $\frac{3}{5}$ est à 1.

La proportionnalité permet d'approcher les irrationnels par des rapports entiers. Euclide traite séparément les rapports de nombres entiers (livre VII des éléments) et les rapports de grandeurs (livre V) car les raisons de grandeurs incommensurables n'avaient pas le statut d'objets mathématiques indépendamment des grandeurs. La définition 6 du livre 5 que nous rappelons ci-après permet de comparer de tels rapports irrationnels : « Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la deuxième, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la deuxième et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois ».

Au XVII^{ème} siècle Descartes utilise les proportions pour définir géométriquement le produit de deux raisons incommensurables :

« Ainsi n'a-t-on autre chose à faire, en géométrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres ou en ôter, ou bien, en ayant une que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication. » (extrait de géométrie 1636)

L'explication géométrique repose sur le théorème de Thalès :



On reconnaît chez Descartes le souci de rattacher l'utilisation des nombres à la géométrie. On peut percevoir dans l'explication précédente une protostructure du corps des réels. Le segment était le paradigme du nombre. Descartes définit l'addition, la soustraction et la multiplication avec les segments. On reconnaît la commutativité du produit dans l'expression : « ... qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité... »

²³ Pour plus d'informations on pourra consulter le point d'histoire 2 en annexes.

Au XIX^{ème} siècle l'arrivée de l'algèbre des structures rend les proportions caduques pour la construction des nombres : si a, b, c, d désignent des rationnels tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux représentants d'un même nombre rationnel inversible s'il n'est pas nul. Les structures algébriques permettent de considérer les nombres indépendamment des grandeurs. Les constructions de \mathbb{R} sont de plus en plus formelles : « coupures de Dedekind, suites de Cauchy, corps archimédien parfait, ... »

b) La proportionnalité pour modéliser les fonctions²⁴

Il est coutumier aujourd'hui de considérer les fonctions comme des relations particulières entre ensembles de nombres et de définir une fonction par son graphe. Mais pour comprendre la genèse de l'idée de fonction il est utile de rappeler comment certaines connaissances mathématiques se sont érigées en obstacles pour cette notion.

L'obstacle de l'homogénéité

La fonction a son origine dans l'idée de dépendance entre les variations de deux grandeurs. Or nous avons vu que jusqu'à l'apparition de l'algèbre seuls étaient reconnus comme nombres les entiers et les quantités ; les mesures de grandeurs continues n'étaient pas exprimables. Donc il n'était pas possible d'explicitier avec des nombres une relation, un rapport fonctionnel entre les mesures de deux grandeurs de natures différentes. C'est pourquoi les grandeurs étaient traitées avec les proportions car une proportion établit une relation entre des rapports internes qui tiennent lieu de mesures. Ainsi la proportionnalité a été le moyen de modéliser les fonctions car les proportions permettaient d'évoquer la relation, le rapport externe, fonctionnel entre deux grandeurs éventuellement de nature différente sans l'explicitier avec des nombres mesures. Exemple : si D et D' sont les aires de deux disques et L et L' leurs diamètres alors D est à D' comme L^2 est à L'^2 . Les aires sont dans le même rapport que les carrés des diamètres.

Mais par la même occasion, les proportions d'outils sont devenues obstacles à l'émergence d'une écriture explicite d'un lien fonctionnel entre deux grandeurs, obstacle renforcé par la nécessité d'homogénéité (deux grandeurs de natures différentes n'étant pas comparables).

L'obstacle de l'incommensurabilité

Pour les Anciens, il n'y avait que les nombres entiers et les quantités. La comparaison de deux grandeurs en utilisant les nombres (les mesures) n'est alors possible que si elles ont une partie aliquote, c'est à dire s'il existe une grandeur unité qui permet de mesurer chacune d'elles à l'aide d'un nombre entier.

La conception pythagoricienne de la nature qui attribuait un nombre entier à toute chose laissait supposer qu'on pouvait déterminer cette partie aliquote. Sous cette hypothèse, les proportions suffisent à comparer le rapport de deux grandeurs au rapport de deux nombres puisque le rapport de deux grandeurs est le rapport de deux entiers. Mais la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté par les pythagoriciens a conforté dans leur pensée ceux qui ne partageaient pas la devise pythagoricienne : « Tout est nombre » (par nombre il faut entendre nombre entier).

La découverte de l'incommensurabilité et les paradoxes de Zénon contribuèrent à séparer l'étude des nombres de celle des grandeurs, car les nombres sont discrets et les grandeurs continues.

Or les proportions permettaient de comparer deux rapports de grandeurs y compris pour des grandeurs incommensurables sans utiliser les nombres grâce à la définition d'Eudoxe de

²⁴ Pour plus d'informations on pourra consulter le point d'histoire 3 en annexes.

Cnide (livre V, définition 6, les éléments d'Euclide). Ainsi l'usage des proportions se trouve conforté et l'obstacle à l'émergence d'une explicitation d'une relation fonctionnelle avec les nombres renforcé.

Les fonctions en référence à la géométrie et à la cinématique

On ne peut pas expliciter une fonction entre grandeurs de natures différentes par des « opérations numériques » tant qu'on n'a pas les mesures (donc les nombres continus), sauf à les représenter de manière géométrique, c'est ce que va faire Nicole d'Oresme (1323-1382).

C'est encore en termes de rapports et de proportions que Napier (1550-1617) décrit sa définition de fonction logarithme.

La méthode scientifique expérimentale de Galilée (1564-1642) marque le point de départ de la pensée scientifique moderne car Galilée dispose des nombres réels. Pourtant l'approche géométrique des grandeurs avec les proportions reste prégnante chez Galilée (elle rappelle celle de Nicole d'Oresme) et semble un obstacle à l'usage de l'algèbre. Au XVII^{ème} siècle l'approche des fonctions se fait par analogie à la cinématique toujours avec l'aide des proportions.

Avec Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716) commence une période où les notions mathématiques vont se dégager progressivement de considérations physiques.

Newton expose sa conception du calcul différentiel et intégral dans « La méthode des fluxions et des suites infinies » publié en 1736. Le temps y apparaît comme **la variable continue universelle**. Dans cette œuvre, les proportions n'interviennent plus dans la construction proprement dite des fonctions. Elles y apparaissent comme un étayage à l'écriture algébrique dans les démonstrations et les résolutions de problèmes. La notation « classique » $(a:b :: c:d)$

d'une proportion cohabite avec les écritures algébriques des rapports sous la forme $\frac{a}{b}$.

Une rupture épistémologique se prépare avec **Leibniz** (1646-1716) qui construit des différentielles douées de propriétés formelles de nature algébrique : « $d(x+y) = dx + dy$; $d(xy) = ydx + xdy$ ».

Jean Bernouilli (1667-1748) écrit dans les « Comptes rendus de l'Académie des sciences » (1718) que les fonctions sont « les quantités composées de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable x et de constantes ».

L'ordre logico-mathématique et la disparition des proportions

Enfin **Léonhard Euler** renverse l'ordre logique de la construction des mathématiques pour une présentation proche de celle adoptée aujourd'hui : éléments d'algèbre, étude des fonctions et des suites puis calcul différentiel et intégral. Son « Introduction à l'analyse des infinis » parue en 1748 est le premier traité dans lequel le concept de fonction est à la base de l'exposé. Il est construit indépendamment des grandeurs et des proportions. La notion de variable apparaît comme élément générique d'un ensemble de nombres :

« Une quantité variable est une quantité indéterminée ou universelle qui englobe complètement en elle toutes les valeurs indéterminées. »

Léonhard Euler ; *Introductio in analysin infinitorum* ; 1748

et une fonction est une combinaison quelconque d'opérations connues à son époque et applicables aux nombres :

« La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable et des quantités constantes, qui les forment.

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées et combinées entre elles. Ces opérations sont l'addition et la soustraction ; la multiplication et la division ; l'élevation aux puissances et l'extraction des racines ; à quoi il faut ajouter encore la résolution des équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendentes : comme les exponentielles, les logarithmiques, et d'autres sans nombre, que le calcul intégral fait connaître. »

Léonhard Euler ; *Introductio in analysin infinitorum* ; 1748

Pour **Bernhard Bolzano** (1781-1848), les mathématiques pures sont l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse ; la géométrie n'en est plus qu'une application. Une vérité valable pour toutes les grandeurs doit être établie indépendamment des grandeurs ; une démonstration doit être purement analytique.

Le tableau suivant tente de résumer ces évolutions historiques :

| | Jusqu'au XV ^{ème} | XVI ^{ème} -XVII ^{ème} | XVIII ^{ème} -XIX ^{ème} | XX ^{ème} |
|-----------|---|---|--|---|
| | Antiquité et moyen âge | Epoque classique de Stevin à Leibniz | Epoque algébrique de Euler à Cantor | Epoque logico-mathématique de Bourbaki |
| Nombres | Entiers, rapports et proportions | Les rapports sont des nombres. Numérisation des raisons par la géométrie | Constructions des réels à partir des entiers avec Cantor et Dedekind | Théorie des ensembles Structures et morphismes |
| Fonctions | Relations entre grandeurs grâce aux proportions | Représentations géométriques des fonctions Référence à la cinématique (le temps est la variable universelle) | Les fonctions comme relations entre nombres grâce aux opérations algébriques (la variable est élément générique d'un ensemble) | Les ensembles de fonctions. La fonction comme élément d'un ensemble structuré. |

c) L'obsolescence mathématique de la proportionnalité

Avec le développement moderne des mathématiques, la rupture des mathématiques « pures » avec les grandeurs est consommée. La construction moderne des nombres et des fonctions ignore totalement la proportionnalité et les grandeurs. La proportionnalité n'a plus de fondement scientifique, elle a disparu du savoir savant.

Les mathématiciens définissent les nombres par les structures algébriques des ensembles.

La définition formelle de fonction privilégie l'idée de correspondance terme à terme entre éléments de deux ensembles. Après avoir défini une fonction par son graphe voici ce que dit Jean Dieudonné en 1972 : « Habituellement, on parle d'une application et d'un graphe fonctionnel comme s'il s'agissait de deux sortes d'objets distincts en correspondance biunivoque et l'on dit alors "le graphe d'une application", mais il s'agit là seulement d'une distinction psychologique (correspondant aux deux points de vue, géométrique ou analytique, auxquels on peut se placer pour considérer *une fonction*) ».

L'algèbre rend caduque l'usage et le vocabulaire de la proportionnalité. La fonction linéaire décrit toutes les relations de proportionnalité ; elle n'est qu'un exemple banal de fonction et dans l'écriture moderne d'une proportion il n'y a plus lieu de distinguer les antécédents des

conséquents ni les extrêmes des moyens car $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Pour les mathématiciens la proportionnalité est contextuelle et naturalisée. Elle ne fait plus l'objet d'un savoir à travailler et doit être remplacée par la fonction linéaire. La proportionnalité est trivialisée, elle n'est plus qu'une application folklorisée de la linéarité qui elle s'intègre dans le savoir unifié de l'algèbre. Les mathématiques modernes s'imposent à la noosphère et à l'école avec les réformes des années 1970.

2-5-3 Les contraintes de la noosphère.

Jusqu'au siècle des lumières, les mathématiciens étaient autant « noosphériens » que « chercheurs ». Mersenne Marin animait la vie scientifique du XVII^e : « Mersenne est en effet, d'abord connu pour avoir été le « secrétaire de l'Europe savante », le correspondant de Descartes, Galilée, Constantin et Christiaan, Huygens, Fermat, Torricelli, Gassendi, Hobbes, Crusius. »²⁵ Ces savants se préoccupaient autant de mathématiques appliquées que de mathématiques pures, ce qui permettait une extension du champ des mathématiques.

C'est ce qui devient difficile avec la complexification qu'apportent les connaissances mathématiques du XIX^e siècle. Les mathématiciens contemporains semblent avoir des difficultés à sortir de leur champ de recherche. Sous ces conditions la transposition de leurs travaux est difficile et eux-mêmes n'accordent que peu d'intérêt à l'usage que les corps intermédiaires peuvent faire de leurs savoirs.

La proportionnalité n'étant plus un objet d'étude les mathématiciens ne se sont plus préoccupés de la place qu'elle peut ou doit tenir dans l'enseignement ou dans d'autres institutions : physiciens, ingénieurs, économistes... La sphère savante a donc ignoré l'évolution des connaissances de la proportionnalité et de ses pratiques dans l'école. La noosphère et la sphère savante ne s'intéressent plus aux informations relatives à cet objet culturel venues des autres institutions et donc l'école ne peut plus faire remonter d'informations vers la sphère savante.

Les mathématiques modernes rejettent l'arithmétique et les sujets populaires. La noosphère, sous l'influence de la sphère savante n'a plus été en mesure d'assurer son rôle de régulateur entre l'ancien et le nouveau, entre les savoirs savants et les connaissances folklorisées, entre les concepts et les conceptions provisoires des élèves. Les connaissances de la proportionnalité ne font plus l'objet de transpositions et ont ainsi disparu de l'enseignement mais une certaine inertie et des pressions sociales et culturelles font perdurer le vocabulaire qui les accompagnait.

²⁵ Encyclopaedia Universalis ; 1995.

2-5-4 Les répercussions sur l'école

Les maîtres du primaire et du secondaire n'ont pas d'autre alternative que de s'adapter à l'hégémonie des « mathématiques modernes ».

Les enseignants subissent des exigences contradictoires :

- Exigences scientifiques : s'adapter aux connaissances modernes.
- Exigences culturelles : le professeur doit garder et transmettre la mémoire du monde des connaissances. Les mots restent longtemps dans la langue avec leur sens ancien qui s'impose aux institutions les plus faibles. Les usages plus libres par rapport à la culture sont réservés aux institutions fortes qui sont habilitées à transformer la culture. Ainsi les sciences fabriquent des termes modernes qui viennent s'ajouter au répertoire ancien. L'enseignement est chargé de transmettre l'ensemble des répertoires. Changer le sens des mots anciens est difficile et peut être lourd de conséquences comme l'a montré l'enquête. Les enseignants sont susceptibles d'être interpellés sur des formes de connaissances d'une époque quelconque ; ils doivent préserver la cohérence de la société malgré les forces divergentes. La proportionnalité a disparu du savoir savant mais reste présente dans de nombreuses institutions.
- Exigences didactiques : Ainsi les professeurs sont confrontés à un problème presque insurmontable qui est de conserver la proportionnalité sans l'enseigner ; et ils ne bénéficient d'aucune régulation de la noosphère. C'est dans cet isolement que l'enseignement de la proportionnalité a évolué. Dans les classes du primaire l'usage de la proportionnalité dans la construction des mathématiques semble pourtant incontournable. Dans le secondaire, faut-il seulement évoquer la proportionnalité aux moments opportuns puis l'ignorer ou bien l'intégrer en la reformulant au risque de renforcer le premier modèle au lieu de l'affaiblir. Si les professeurs veulent récupérer les raisonnements de la proportionnalité en enseignant la fonction linéaire ils vont renforcer les raisonnements arithmétiques et rendre plus difficile l'apprentissage de l'algèbre. Ces changements de contenus à enseigner auraient nécessité l'explication des réformes correspondantes pour une transposition d'une genèse axiomatique en une genèse épistémologique avérée. Les didacticiens²⁶ se sont intéressés au passage de l'arithmétique à l'algèbre mais aucune institution n'a pris en charge son organisation effective dans l'enseignement. Or la proportionnalité est à la base du raisonnement arithmétique qui est totalement différent du raisonnement algébrique.

2-5-5 Conclusions et hypothèses

Nous venons de voir comment la proportionnalité a fait obstacle à l'apparition de l'algèbre et en particulier à celle des fonctions. Réciproquement l'étude des cadres arithmétique et algébrique a montré que l'algèbre actuelle ne laisse pas de place à l'arithmétique élémentaire. Nous en inférons l'hypothèse suivante :

Hypothèse : **Algèbre et proportionnalité sont incompatibles.**

Dans la sphère savante la proportionnalité a cessé d'être un objet d'étude avec l'arrivée de l'algèbre et des structures. La théorie de la mesure et de l'intégration rend caduques les mesures de grandeurs. L'étude des fonctions disqualifie l'étude des relations de

²⁶ Le passage de l'arithmétique à l'algèbre a alimenté plusieurs travaux de didactique, en particulier ceux de Yves Chevallard, Sophie René de Cotteret, Josep Gascón, Dominique Woillez.

proportionnalité. Les grandeurs sont rejetées par le savoir savant qui remplace la proportionnalité par la fonction linéaire, exemple banal de fonction.

Avec l'arrivée des « math modernes » la proportionnalité ne figure plus dans les contenus d'enseignement du secondaire car cet objet est obsolète pour les mathématiques et les mathématiciens. Mais la culture a fait de la proportionnalité un objet pérenne et naturalisé que l'enseignement est supposé transmettre avec la fonction linéaire. Or :

Hypothèse : Il n'y a pas de théorie qui unifie les connaissances de l'arithmétique et de l'algèbre.

Il s'ensuit une désorganisation des connaissances et un émiettement des savoirs. En particulier les connaissances sur la proportionnalité et la fonction linéaire cohabitent tout en restant indépendantes. La connaissance folklorisée de la proportionnalité conforte les enseignants dans des pratiques qu'ils croient orthodoxes. Les habitus et pratiques entretiennent l'illusion que l'enseignement est régulé par différentes relations interinstitutionnelles sous l'effet de besoins sociaux et nécessités culturelles. Il en résulte un quiproquo entre noosphériens et enseignants qui permet au système didactique lato sensu de fonctionner :

- Les uns croient que la « fonction linéaire » (respectivement l'algèbre) reformule la « proportionnalité des grandeurs » (respectivement l'arithmétique) dans des conditions idoines.

- Les autres pensent que les « erreurs observées » sont des « formes de savoirs » adaptées aux connaissances mathématiques modernes.

Probablement est-ce ce « malentendu didactique » qui a fait dire à un maître chevronné à qui on soumettait la formulation : « Quand le reste (de la division) est égal à zéro, les deux nombres sont proportionnels. Le coefficient de proportionnalité est le quotient » :

« Ah, bon ! On dit comme ça maintenant ? »

Dans ce qui suit, nous nous proposons de chercher les causes de cet « aveuglement » dans les relations entre institutions et les assujettissements qui en résultent pour l'école.

2 – 6 Les différentes institutions et les répertoires associés

2-6-1 Méthodologie

Conformément à la théorie des situations et à la théorie de la transposition didactique c'est l'absence d'une connaissance à un niveau ou à un autre de l'organisation relative à l'institution scolaire qui fait qu'elle n'est pas enseignée. Nous formulons l'hypothèse :

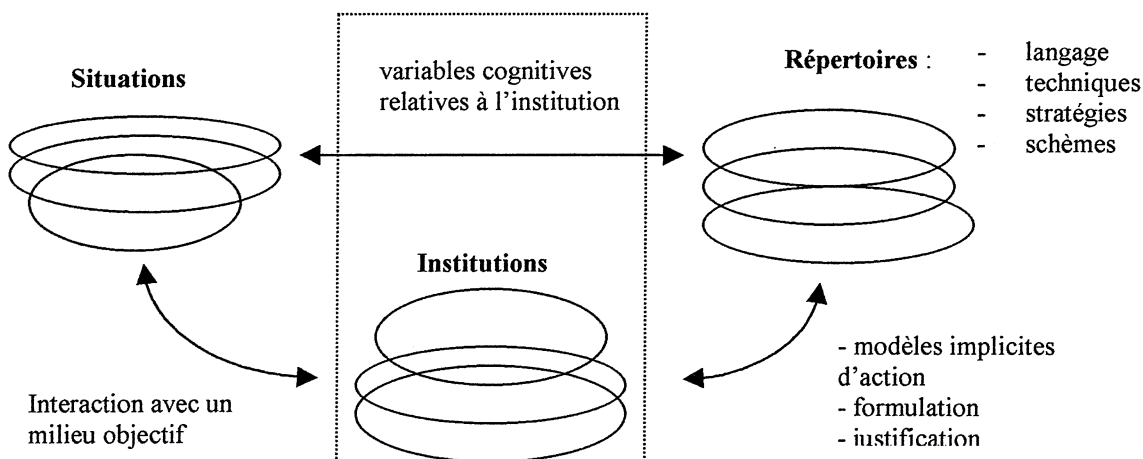
Quand un savoir n'intervient plus dans les relations interinstitutionnelles il meurt !

Cette hypothèse nous enjoint de chercher quelles sont les attentes des différentes institutions. La théorie des situations fournit une base pour la recherche de pratiques, savoirs et connaissances relatifs à des situations typiques de diverses institutions. On convient qu'il existe des groupements d'institutions autour de pratiques communes d'une connaissance relativement à une famille de situations avec des répertoires proches. Nous dirons qu'un tel regroupement est caractéristique d'une conception.

Il y a au moins trois entrées possibles à l'étude de la proportionnalité :

1. les institutions
2. les répertoires de connaissances
3. les situations

Dans ce chapitre nous privilégions les institutions avec leur rapport aux connaissances de la proportionnalité



2-6-2 Esquisse d'une étude de l'usage actuel de la proportionnalité

a) Un exemple de compromis « épistémologique »

Nous avons tenté de décrire l'évolution des connaissances et d'en expliquer les répercussions sur l'enseignement. L'exemple suivant a eu cours après la réforme Haby (1977-1980). Il décrit une possible introduction à la proportionnalité en CM2 et semble assez caractéristique d'une recherche d'adaptation à l'hégémonie des « math modernes ». L'auteur du manuel recherche un compromis entre « *proportionnalité des grandeurs* » et « *fonction linéaire* » en faisant un usage des opérateurs pour obtenir des « *suites proportionnelles* ».

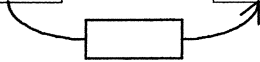
1) L'échangeur de monnaie

Lorsqu'on introduit une pièce de 1 F dans un échangeur automatique, il en sort deux pièces de 50 c.

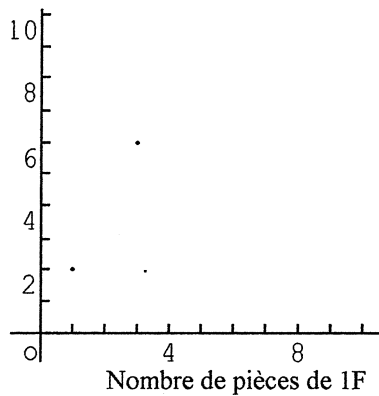
a) Complète le tableau.

Nombre de pièces de 1F Nombre de pièces de 50c

| | |
|----|----|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 3 | 6 |
| 4 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | 20 |



Nombre de pièces de 50 c



b) Place les points sur le quadrillage.

Que peux-tu dire des points obtenus ?

c) Jean introduit 3 pièces de 1 F.

Combien de pièces aurait-il eues s'il avait introduit :

- cinq fois plus de pièces de 1 F ?
- neuf fois plus de pièces de 1 F ?

d) Combien de pièces de 50 c obtient-il s'il échange

- d'abord 2 pièces de 1 F puis 3 pièces de 1 F ?
- d'abord 8 pièces de 1 F puis 9 pièces de 1 F ?

e) Trouve de différentes façons le nombre de pièces qu'il faut introduire pour obtenir :

- 24 pièces de 50 c ?
- 30 pièces de 50 c ?

2) Une offre publicitaire :

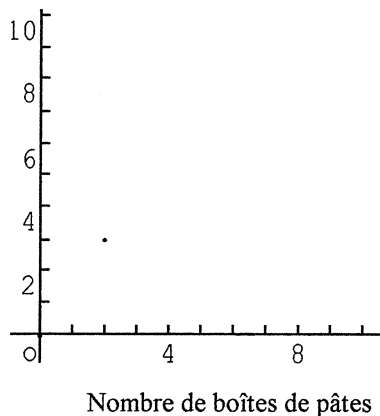
Pour tout achat de deux grandes boîtes de pâtes, un grand magasin offre trois petites boîtes de sauce tomate.

a) Complète le tableau.

Nombre de boîtes de pâtes Nombre de boîtes de sauce

| | |
|----|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 3 |
| 4 | |
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 12 | |
| 14 | |
| 16 | |

Nombre de boîtes de sauce



- b) Place les points sur le quadrillage
Que peux-tu dire des points obtenus ?

Dans les situations 1 et 2 les nombres d'une des deux listes sont obtenus en multipliant ou en divisant les nombres correspondants de l'autre liste par un même nombre. Il s'agit de situations de proportionnalité.

Prérequis

Avant le chapitre sur la proportionnalité l'auteur a construit les fractions élémentaires par fractionnement de longueurs. Les fractions décimales en sont des cas particuliers. L'ordre est déterminé par la position des points sur la droite graduée. Les opérations sur les décimaux (addition, soustraction et multiplication) sont traitées avant la division euclidienne et la recherche des multiples et diviseurs d'un entier. Les seules grandeurs qui font l'objet de chapitres sont les longueurs et les masses.

Situation, concept et technologie

Les deux exemples proposés par le manuel ne laissent pas d'alternative aux élèves. Le coefficient de proportionnalité est imposé ; dans le premier cas il faut deux demi-unités pour faire une unité, dans le deuxième cas l'auteur impose le rapport entre le nombre de boîtes de sauce et le nombre de boîtes de pâtes. Le milieu matériel supposé familier aux élèves (les pièces de monnaie ou les boîtes de conserves) ne crée pas des conditions qui conduiraient l'élève à choisir un modèle qui expliciterait une relation entre grandeurs. Dans la définition il est question de « situation de proportionnalité » et non de « grandeurs proportionnelles ». Les propriétés de linéarité apparaissent dans les deux exemples comme des propriétés de calcul.

Techniques

Dans le premier exemple le fait de proposer la suite des premiers nombres entiers peut conduire les élèves à construire la deuxième suite en ajoutant systématiquement « 2 » à un terme pour obtenir le terme suivant. Dans le deuxième exemple les élèves peuvent compléter la deuxième colonne en ajoutant « 3 » à un terme de la suite pour obtenir le terme suivant. Mais ce qui pourrait apparaître comme un début de technologie n'est pas poursuivi par une explication qui déboucherait sur l'usage du rapport interne ou de l'addition.

Dans le premier exemple la présence de la flèche est une manière ostensive d'inviter l'élève à faire usage du coefficient « 2 ». Puis les formulations (cinq fois plus, d'abord 2 puis 3...) des questions c, d, e, conduisent l'élève à utiliser le rapport interne et la somme sans autre alternative.

Dans le deuxième exemple la remarque « tu peux faire les calculs de différentes manières » invite l'élève à réutiliser les techniques rencontrées dans le premier exemple. Mais ici le rapport externe n'est pas entier et son usage n'est pas directement sollicité par la présence d'une flèche. On ne peut pas préjuger de la technique qui sera utilisée par les élèves pour répondre aux questions c et d de ce deuxième exemple.

Enfin la représentation graphique n'apparaît pas comme un outil mais comme une illustration.

Remarques

Dans les pages suivantes le manuel propose des contre-exemples : fonction en escalier et fonction affine.

Dans les exercices et par un « glissement » de vocabulaire l'auteur passe des « tableaux qui indiquent une situation de proportionnalité » aux « tableaux de proportionnalité ».

Raisons didactiques d'utiliser cette présentation.

- On définit des situations de proportionnalité grâce à un opérateur qui établit une correspondance entre nombres de deux listes. Ce qui est conforme au programme de 1980 qui dit « de mettre en évidence et d'utiliser la proportionnalité, propriété caractéristique des fonctions $n \mapsto n \times a$, a étant un naturel ou un décimal, voire une fraction simple ».
- Le tableau ou les suites permettent de caractériser une situation de proportionnalité avec un rapport fonctionnel.
- Le tableau apparaît ainsi comme une introduction, une approche de la fonction linéaire.
- Le tableau a un rôle instrumental à l'égard des opérateurs fractions qui apparaissent comme un résumé de fonctions composées.

Les limites :

- Dans la définition seuls les rapports fonctionnels permettent de reconnaître une situation de proportionnalité. Donc le test de proportionnalité ne peut se faire que sur un nombre fini de mesures. Il manque un raisonnement plus global pour affirmer que les grandeurs sont proportionnelles et que le tableau de proportionnalité modélise cette relation de proportionnalité entre grandeurs.
- Dans les exemples les techniques résultent de contraintes calculatoires et non d'un besoin conceptuel en réponse à une question.
- On ne peut pas identifier la « fraction opérateur » à la « fraction mesure » construite dans les chapitres précédents.

b) Les connaissances de la proportionnalité sont nécessaires à l'intégration sociale et professionnelle.

La proportionnalité est attachée à une conception et un fonctionnement de société. Les algorithmes anciens qui lui sont attachés permettent à tout citoyen de comprendre l'usage des mathématiques élémentaires dans les tâches quotidiennes.

L'art, la fabrication, l'économie ou le commerce en donnent des exemples fréquents. Dans les compositions picturales, le nombre d'or semble jouer un rôle de premier plan. Les recettes de cuisine supposent que les quantités d'ingrédients sont proportionnelles aux nombres de convives. Les quantités de matières utilisées sont proportionnelles aux quantités d'objets fabriqués. Souvent les prix ne sont pas proportionnels aux quantités car un commerçant cherche à optimiser son gain en baissant le prix de vente (pas trop) pour augmenter la quantité vendue. Mais l'acheteur peut comparer le montant annoncé (affiché) par le vendeur à ce que serait ce montant si les prix étaient proportionnels aux quantités.

La proportionnalité est factuelle dans bien des secteurs d'activité. Elle est utilisée implicitement ou explicitement pour évaluer (le temps nécessaire pour parcourir une distance donnée), vérifier (l'homogénéité d'un corps), comparer (des densités), ...

L'exemple de la « leçon de CM2 » étudiée précédemment propose une « entrée dans la proportionnalité » qui n'est pas résolutoire. Or certains problèmes même élémentaires que chaque citoyen peut avoir à résoudre supposent recherche et raisonnement pour le choix d'un modèle avant l'usage d'une technique. L'exemple suivant suffit à s'en convaincre.

Le marchand de tissu.

Un commerçant vend une pièce de tissu. Il espère faire un bénéfice de 20% sur cette vente. Mais lorsqu'il a vendu tout son tissu, il s'aperçoit que le bénéfice n'est que de 19%. Il incrimine la longueur de la règle qui lui sert de mesure. Quelle est la longueur réelle de cette règle supposée mesurer un mètre ?

La proportionnalité peut être utile dans beaucoup de secteurs professionnels parfois par un usage classique qui semble échapper au conformisme culturel actuel de la proportionnalité. Le problème suivant a été posé par le responsable d'un laboratoire de recherche en biologie qui avait à vérifier l'abaque décrivant le fonctionnement d'un appareil. Le problème se résume à la question suivante :

On veut exprimer la concentration molaire d'une solution de NaCl en fonction du temps, dans les conditions ci-après décrites :

Un appareil de laboratoire permet de rajouter de manière continue une solution de NaCl à concentration constante (2 moles par litre) à une solution de NaCl à concentration variable qui s'écoule à débit constant, de telle manière que son volume reste constamment égal à 100 ml. Ces 100 ml sont initialement constitués d'eau déminéralisée.

Cet appareil rajoute 2 ml de la solution de NaCl à 2 mol/l par minute tout en maintenant la solution homogène grâce à un agitateur perfectionné.

Un raisonnement qui utilise la proportionnalité des quantités en jeu sur des temps infinitésimaux conduit à une équation différentielle du premier ordre avec second membre résoluble au niveau d'une classe de terminale S.

c) Attente de certaines institutions

L'implosion de la proportionnalité n'a pas encore atteint toutes les institutions. Certaines d'entre elles exercent une pression pour maintenir un rapport ancien à la proportionnalité.

Dans l'enseignement obligatoire la proportionnalité est la trace d'une activité mathématique très ancienne et d'un travail didactique très long. Il est légitime de croire que les connaissances correspondantes ont acquis une certaine stabilité. Par exemple, les professeurs de physique ou de sciences économiques font encore usage des connaissances anciennes de la proportionnalité. Ils pensent qu'elles font toujours partie du cours de mathématique et qu'ils peuvent donc les utiliser pour communiquer avec leurs élèves. Les commerçants ont des pratiques qui font référence à ces connaissances folklorisées supposées entretenues dans la culture par la scolarité obligatoire.

Les institutions ne sont pas indépendantes des répertoires qu'elles utilisent. Chaque institution a un répertoire auquel elle se réfère pour ses propres activités mais aussi pour communiquer avec d'autres institutions. La complexité d'une praxéologie de la proportionnalité dépend de l'institution qui utilise cette connaissance. Les situations disent quelles sont les formes de connaissances qui conviennent à l'institution, les savoirs nécessaires à la justification, les répertoires utiles à la formulation.

Exemples :

- Ce ne sont pas les mêmes institutions qui utilisent la proportionnalité comme loi physique (professeurs de physique, ...) ou comme convention sociale (commerçants, juristes, ...).
- Le vocabulaire que le professeur utilise avec ses élèves est celui qu'il est lui-même capable de mobiliser, mais les professeurs n'utilisent pas le langage des élèves ni celui des experts.

- Les universitaires utilisent des répertoires propres à la sphère savante.²⁷

On peut essayer de faire un catalogue des institutions dont les pratiques sont typiques :

a) Les mathématiciens ont des répertoires révélés par la publication de leurs œuvres ou les ouvrages d'histoire des mathématiques.

b) Les professeurs de mathématiques puisent leurs techniques et vocabulaire dans les manuels, les programmes, les sujets de C.A.P.E.S ou d'agrégation.

Il en est de même pour les professeurs de physique et les professeurs de sciences économiques et sociales

c) Les professeurs des écoles tirent leurs répertoires des manuels et des annales du concours de professeurs des écoles.

d) Les élèves des différents niveaux se réfèrent aux programmes correspondants.

e) Les commerçants ont plutôt des répertoires folklorisés.

f) Les juristes, les médecins, les ingénieurs, etc. ont leur propre langage.

g) Les répertoires des différentes catégories d'ouvriers sont issus des programmes de C.A.P. (certificat d'aptitude professionnelle) ou baccalauréats professionnels ou brevets de techniciens, etc.

Ces différentes institutions renvoient donc aux différents ouvrages professionnels dans lesquels on peut trouver les répertoires correspondants.

On admet que les connaissances de la proportionnalité sous leurs différentes formes sont exigées par un public cultivé : les professeurs de physique, les professeurs de sciences économiques et sociales, certaines formations professionnelles, etc.

Nous limitons notre étude aux institutions scolaires.

2-6-3 Les institutions scolaires

Imputer la responsabilité des difficultés d'enseignement à la formation initiale a pour conséquence une remise en question du fonctionnement de nos institutions scolaires. De quelles autres institutions dépendent-elles ? Quels répertoires utilisent ces différentes institutions et quelles sont leurs attentes ?

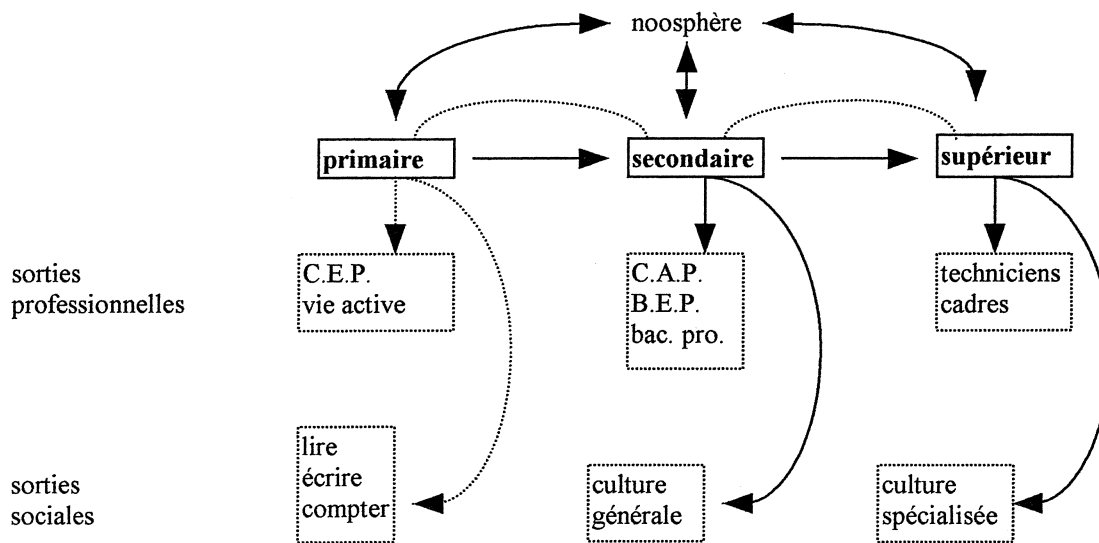
Une tentative d'étude systémique conduit à formuler l'hypothèse suivante :

L'enseignement de la proportionnalité est conditionné par les attentes des différentes institutions scolaires et parascolaires.

a) Les régulations externes

Elles résultent d'interactions entre institutions illustrées par le schéma suivant :

²⁷ L'étude de microgènes que fait Mariana Bosch à la partie 4 de sa thèse montre quels répertoires les universitaires mettent en œuvre pour résoudre des problèmes de proportionnalité multiple. L'un d'eux (Pau) propose des solutions algébriques en référence aux fonctions n-linéaires. Deux autres (Lluis et Gabriel) optent pour des raisonnements arithmétiques classiques.
Mariana Bosch i Casabò ; La dimensión ostensiva en la actividad matemática, el caso de la proporcionalidad ; octobre de 1994.



Le savoir enseigné dans une institution doit être adapté aux différentes sorties sociales, professionnelles et scolaires. Une connaissance se transforme quand elle change d'institution pour s'adapter aux assujettissements et conceptions de l'institution qui la reçoit.

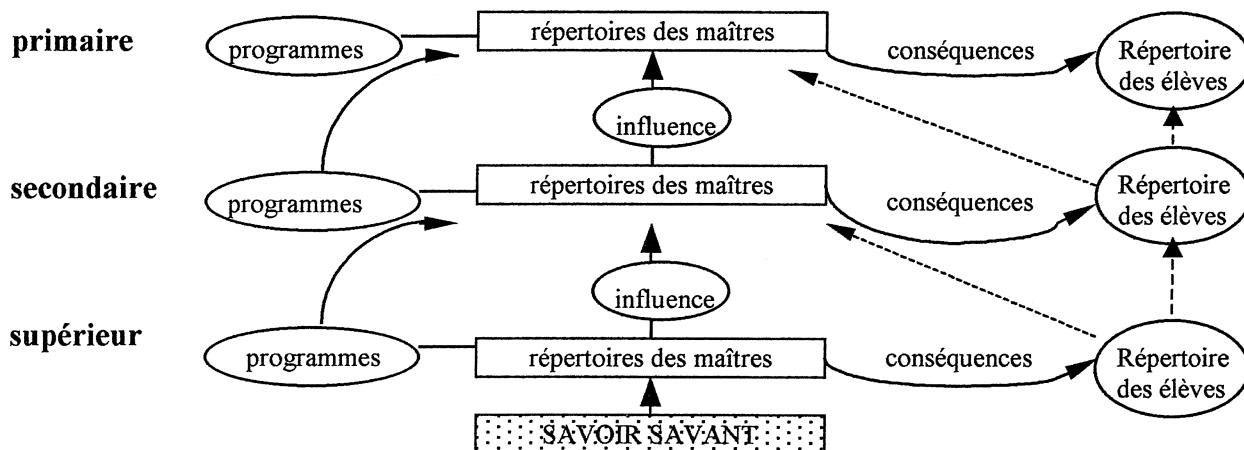
Avant la scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans l'école élémentaire devait se préoccuper des élèves qui quittaient le primaire pour la vie active. L'enseignement était adapté aux institutions qui accueillaient ces élèves. L'arithmétique et la proportionnalité étaient des outils appropriés aux différentes professions des milieux populaires, à l'artisanat, au commerce, etc. ... L'école primaire regroupait des institutions autour d'un champ de connaissances, de pratiques, de savoirs qui permettaient de résoudre des situations propres à ces institutions. Les différentes sorties professionnelles qu'elle assurait lui conféraient un statut social, une identité culturelle, une importance reconnue par les autres niveaux scolaires qui de ce fait portaient un regard attentif sur les pratiques et les contenus de l'enseignement élémentaire.

Le secondaire devait assurer la formation des futurs instituteurs et donc tenir compte des contenus d'enseignement du primaire. L'arithmétique avait une place importante dans l'enseignement secondaire. La théorie des rapports et proportions a été maintenue dans les écoles normales jusqu'en 1970. En même temps le secondaire préparait les élèves à l'enseignement supérieur, lieu privilégié de l'algèbre. Ainsi arithmétique et algèbre devaient «cohabiter» dans le secondaire. Certains manuels scolaires traitaient le même problème séparément par l'arithmétique puis par l'algèbre.

La société a changé. Tous les élèves entrent en classe de sixième et 80% d'une classe d'âge doit atteindre le niveau du baccalauréat. La seule sortie du primaire est le collège. L'école primaire n'est plus que la propédeutique du collège ; ce qu'elle fait ou ce qu'elle devrait faire « va de soi » pour les autres institutions scolaires qui de ce fait l'ignorent ou pire lui reprochent de ne pas remplir sa mission. Les enseignants du primaire sont livrés à eux-mêmes, les autres institutions ne les aident plus à adapter leur enseignement. Or le primaire ne peut traiter correctement la proportionnalité que si elle est présente dans le secondaire car les connaissances des professeurs des écoles dépendent de ce qu'ils apprennent dans le secondaire. Mais le secondaire lui-même assujéti au supérieur n'a aucune raison d'enseigner l'arithmétique élémentaire. Les professeurs du secondaire n'ont pas les connaissances nécessaires relatives à l'enseignement primaire : nous avons vu que les modèles arithmétiques

élémentaires de la proportionnalité ne figurent plus dans les programmes du secondaire d'où ils ont été évacués depuis 1968 or l'étude des cadres arithmétique et algébrique a montré que les connaissances modernes de l'algèbre n'intègrent pas les connaissances élémentaires de la proportionnalité.

Le schéma ci-après illustre les dépendances entre institutions et répertoires scolaires :



L'objectif pour la majorité des jeunes (80%) est d'accéder à l'enseignement supérieur. Ainsi ce qui est appris au primaire doit permettre de comprendre ce qui est enseigné au secondaire et ce qui est appris au secondaire doit permettre de comprendre ce qui est enseigné au supérieur. L'assujettissement de chaque niveau d'enseignement au niveau supérieur a des conséquences :

- Pour gagner du temps, on fait descendre un vocabulaire dans un milieu non adéquat : nous appelons ce phénomène la perméabilité didactique. En particulier on assiste à une intrusion rampante de l'algèbre dans le primaire car les maîtres ne connaissent que les formulations qui lui sont spécifiques.
- On ne laisse pas suffisamment d'espace à la « niche didactique proportionnalité ».
- L'enseignement des mathématiques prend de la distance à l'égard de la physique et des grandeurs.
- Les anciennes unités de mesures sont devenues démodées ; avec elles disparaissent les occasions de pratiquer des changements d'unités et de donner du sens aux opérations et à la proportionnalité.
- Les différentes institutions restent isolées ce qui les oblige à un fonctionnement autonome. Les réformes sont récupérées et utilisées par les professeurs pour rejeter les difficultés liées aux apprentissages longs.

b) Régulations internes :

Nous avons vu que l'école primaire se retrouve isolée et ses enseignants livrés à eux-mêmes n'ont pour seul recours que leur formation initiale toute imprégnée d'algèbre. Chaque maître essaie dans sa pratique de réguler son enseignement après avoir interprété les programmes avec les moyens dont il dispose : les instructions et libellés des programmes, les manuels scolaires, ses propres connaissances mathématiques. Mais cette régulation est aussi conditionnée par d'autres contraintes que Marie Jeanne Perrin-Glorian²⁸ a classées en assujettissements externes (manuels de la classe, organisation de l'établissement, les autres

²⁸ Marie Jeanne Perrin-Glorian ; actes de la VIIIème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques : 1995.

professeurs, l'emploi du temps, le niveau des élèves, ...) et internes (la représentation que le maître se fait de ce qu'il a à enseigner, ses conceptions sur l'apprentissage et les mathématiques, son passé d'élève et de professeur, ...).

L'idée que le professeur se fait de ce qu'on attend de lui est conditionnée par des effets de mode. Les différents slogans qui les accompagnent comme « placer l'élève au centre du système éducatif » ou « apprendre à apprendre » peuvent être des alibis pour ignorer des connaissances et rejeter des apprentissages. L'opinion selon laquelle l'enseignement prématuré des algorithmes occulte le sens a pour effet le renoncement de l'apprentissage correspondant, de la structure correspondante sous prétexte que les enfants ne peuvent pas comprendre. L'ontogenèse devient prétexte ; il y aurait un âge pour toute chose y compris pour apprendre certains mots. L'adaptation des mots à la pensée suivrait l'ordre génétique suivant : on place le concept et les mots viennent quand l'élève est apte à les assimiler.

On peut pourtant aborder des notions mathématiques en primaire (par exemple les décimaux, les fractions élémentaires, l'algèbre) en sachant pertinemment qu'elles ne seront pas comprises dans toutes leurs potentialités, mais que ces concepts naissants arriveront progressivement à maturité au fil des années scolaires par l'apport de savoirs nouveaux qui interagiront et se compléteront. Un concept s'étoffe petit à petit ; un apprentissage n'est jamais définitif.²⁹

2-6-4 Conclusion et hypothèse

La proportionnalité ayant disparu du champ scientifique, son enseignement ne trouve plus de légitimité dans le savoir savant. L'école primaire et le collège n'ont plus à assurer de formation professionnelle. La majorité des élèves étant supposée accéder au baccalauréat l'enseignement primaire et secondaire doivent les préparer à l'apprentissage de l'algèbre moderne. L'étude des grandeurs n'a plus de raison d'être en mathématiques, elle disparaît de l'enseignement secondaire avec l'arrivée des « math modernes » sous l'influence de la sphère savante pour qui la « proportionnalité » est un objet obsolète pour les mathématiques.

Hypothèse :

Les changements curriculaires se sont faits sur la base de convictions idéologiques générées par une réorganisation des savoirs savants au détriment d'une réflexion sur ce qui est nécessaire à la culture, à la société, à la genèse des premiers savoirs mathématiques.

²⁹ Plusieurs études ont montré qu'une notion se construit peu à peu. On pourra consulter à ce sujet : André RAFFESTIN, 1989, Le mythe de la maîtrise de la notion : La proportionnalité.

2 - 7 Bilan et conséquences

L'étude des conditions d'enseignement de la proportionnalité a fait apparaître plusieurs contraintes qui expliquent les difficultés d'enseignement actuelles révélées par les quelques dysfonctionnements observés au premier chapitre.

Les changements curriculaires résultent de l'évolution des savoirs savants mais aussi des attentes des différentes institutions scolaires et sociétales. Les textes nouveaux proposent des modifications supposées améliorer les connaissances anciennes sans pour autant les effacer mais les institutions concernées par ces modifications en font une lecture avec leur culture ancienne et leurs contraintes contemporaines en oubliant les savoirs qui ne sont pas mis en évidence par ces modifications. Pour comprendre les pratiques scolaires, il ne suffit pas de décrire l'évolution des répertoires mais il est nécessaire de regarder le contexte et son évolution, d'évaluer les différents assujettissements que vit l'école compte tenu de son environnement institutionnel et social.

Ce qui est écrit dans les réformes ne suffit pas à éclairer les enseignants et à réguler leurs pratiques. La vigilance épistémique ne peut pas leur incomber. C'est aux autres institutions du système éducatif de réguler la genèse des savoirs scolaires. La noosphère peut y avoir un rôle déterminant mais pour répondre aux attentes des autres institutions l'école a aussi besoin de l'approbation, du soutien et de la complicité de toute la société.

La distance que les mathématiques ont prise à l'égard des grandeurs et de leurs mesures a plusieurs causes :

- Les choix d'inspiration idéologique des années soixante-dix se sont faits au détriment d'une réflexion sur ce qui est observable.
- La disparition des sorties sociales et professionnelles du primaire a contribué à assujettir le primaire au secondaire. Or ce sont les applications qu'on peut faire des mathématiques qui leur donnent une légitimité. Il s'ensuit un dédain de l'arithmétique élémentaire en faveur d'une algébrisation précoce.

Mais cette algébrisation n'ayant pas pris en compte l'œuvre déjà existante a eu pour effets :

- La disparition de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire.
- Une prégnance de l'algèbre chez les maîtres du primaire.
- Un écrasement des savoirs sur la proportionnalité en arithmétique par la fonction linéaire.

L'algèbre de par sa nature ignore la dimension physique des nombres et des variables. L'algèbre est efficace parce qu'elle permet des opérations formelles en oubliant la dimension sémantique des variables et des constantes : un nombre (abstrait), une mesure, un rapport, un scalaire peuvent être représentés par une même lettre. Mais la compréhension des relations et des grandeurs en jeu exige de distinguer ces objets. Nous émettons l'hypothèse suivante :

L'algèbre ne peut être à ses débuts qu'une abstraction qui modélise une œuvre déjà existante : l'arithmétique élémentaire.³⁰

³⁰L'introduction prématurée de l'algèbre s'accompagne d'un usage incorrect des ostensifs qui lui sont spécifiques. On pourra consulter l'exemple proposé par Dominique Woillez dans les actes de l'université d'été de la Rochelle ; analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques ; juillet 1998 ; page 65.

PARTIE 3

OBSERVATION D'UN ENSEIGNEMENT

DES GRAINES ET DES SOURIS

| | |
|--|------------|
| 3 – 1 Didactique de la proportionnalité | 183 |
| 3-1-1 Que peut-on enseigner à l'école primaire ? | 183 |
| 3-1-2 Etude des structures | 184 |
| 3-1-3 Méthodologie pour une ingénierie | 195 |
| 3-1-4 Choix des caractères pour la situation fondamentale | 198 |
| 3-1-5 Les questions posées à l'expérimentation. | 201 |
| 3 - 2 Description du dispositif | 203 |
| 3-2-1 La situation « des graines et des souris » | 203 |
| 3-2-2 Les leçons | 204 |
| 3-2-3 Les questionnaires | 207 |
| 3 - 3 L'expérimentation et les observations | 213 |
| 3-3-1 Lieu et dispositif du travail | 213 |
| 3-3-2 Les organisations successives de 1997 à 1999 | 213 |
| 3-3-3 Les observations successives leçon par leçon | 215 |
| 3-3-4 Conclusions et nouvelles questions | 241 |
| 3 – 4 Les réponses aux deux questionnaires | 242 |
| 3-4-1 Méthodologie | 242 |
| 3-4-2 Résultats statistiques et premiers commentaires | 245 |
| 3-4-3 Evolution des comportements | 252 |
| 1 – Evolutions des réussites | 254 |
| 2 – Evolutions des techniques | 266 |
| 3 – Evolutions des références aux grandeurs et aux nombres | 280 |
| 4 – Evolution de l'usage des opérations | 288 |
| 3 – 5 Conclusions | 294 |

PARTIE 3

OBSERVATION D'UN ENSEIGNEMENT Des graines et des souris

3 – 1 Didactique de la proportionnalité

3-1-1 Que peut-on enseigner à l'école primaire ?

Les différentes enquêtes ont révélé que « proportionnalité » et « fonction linéaire » sont souvent perçues comme deux objets de savoirs indépendants. Une explication est qu'ils font partie d'organisations mathématiques différentes : l'arithmétique élémentaire et l'algèbre moderne qui présentent certaines incompatibilités.

Doit-on pour autant mépriser la proportionnalité et enseigner la fonction linéaire dès l'école élémentaire ?

Guy Brousseau a montré qu'il est possible d'enseigner directement l'algèbre en prenant comme exemple la soustraction. Mais les conditions culturelles actuelles ne permettent pas d'envisager un tel enseignement à l'échelle de l'institution scolaire.

La précipitation dans laquelle se sont fait les différentes réformes n'a pas laissé de temps à la recherche en didactique des mathématiques pour une réflexion sur ce qui est observable. L'algébrisation volontariste des années 1970 n'a pas pris en compte les grandeurs. Les élèves de l'école primaire ne connaissent pas les nombres abstraits ; pour qu'ils puissent donner du sens aux différents objets que représentent les nombres il faut qu'ils réalisent des opérations sur des objets matériels. Par conséquent le milieu de référence pour l'école primaire est le domaine des grandeurs.

De plus une organisation algébrique qui prend en compte les connaissances élémentaires de l'arithmétique suppose un vocabulaire adapté. Dans la première partie on a vu qu'emprunter le vocabulaire spécifique d'une connaissance (la proportionnalité) pour en décrire une autre (les relations entre entiers) n'est pas sans conséquence¹.

Les maîtres du primaire ne disposent pas de connaissances qui leur permettraient d'enseigner les savoirs élémentaires avec l'algèbre et aucune formation n'est envisageable tant que les différentes institutions en relation avec l'école élémentaire ne reconnaîtront pas la nécessité d'une réorganisation des connaissances qui intègre les savoirs savants en les adaptant à chaque niveau d'enseignement.

L'école primaire déstabilisée par les réformes de 1970 peut comme toute institution chercher un rééquilibrage en acceptant d'enseigner des connaissances provisoires qui permettraient sur des processus à long terme l'intégration des savoirs savants.

Les conditions ergonomiques actuelles (écologie des connaissances mathématiques, attentes des différentes institutions scolaires et professionnelles, nécessités sociales et psychogénétiques) suggèrent que l'algèbre ne peut être à ses débuts qu'une modélisation d'une œuvre déjà existante : l'arithmétique élémentaire. Nous cherchons une organisation mathématique qui laisse une niche didactique à la proportionnalité et qui conduise au

¹ « Il faut des mots pour penser et dire les choses et leur choix quand il résulte d'une culture ancienne et concertée, n'est ni innocent ni facile à remettre en question » ; Guy Brousseau ; bulletin APMEP n° 400 ; 1995.

traitement des grandeurs par les fonctions. Nous envisageons un processus d'apprentissage qui à long terme fera apparaître la fonction linéaire comme une modélisation d'une relation de proportionnalité entre grandeurs.

Pour donner à leurs élèves les moyens de contrôler les savoirs mathématiques visés, les enseignants du primaire n'ont pas d'autre alternative que de s'appuyer sur des métaconnaissances antérieurement acquises. En particulier la dimension sémantique des nombres et des opérations élémentaires sur ces nombres est donnée par des connaissances prélogiques sur les grandeurs, les rapports et la proportionnalité. Il s'ensuit l'hypothèse qu'il faut organiser un enseignement provisoire qui traite l'arithmétique avant l'algèbre tant que les maîtres ne disposent pas de solution à l'enseignement direct de l'algèbre.

L'apprentissage de l'algèbre doit mettre à la disposition des élèves les moyens de résoudre des problèmes de la vie sociale, professionnelle et scolaire. Il faut déterminer le minimum de connaissances de la proportionnalité nécessaire à cet apprentissage dans la scolarité obligatoire en même temps que le maximum compatible avec l'algèbre pour éviter des obstacles inutiles. Pour y parvenir, il nous faudra faire une analyse des savoirs mathématiques qui permettra de cibler et de contrôler les savoirs à enseigner.

3-1-2 Etude des structures

a) Résumés d'épistémologie²

Proportions

Les prémices des proportions sont contenues dans ce que Spearman appelle un corrélat : « Le bec est au corbeau comme le museau est au renard ». On peut y percevoir une comparaison de la position du bec sur le corbeau avec celle du museau sur le renard. Mais c'est aussi une analogie entre fonctions car le bec du corbeau et le museau du renard jouent les mêmes rôles physiologiques. Ce corrélat préfigure ce que sera la comparaison de deux rapports. Le « rapport » (la relation) du bec au corbeau est le même que celui du museau au renard d'un certain point de vue. On voit combien il est difficile d'expliquer la complexité d'un « rapport », d'une relation entre deux objets matériels ; cette relation ne peut pas donner lieu à un traitement opératoire car on ne peut pas attribuer un nombre au bec (pris isolément) et un autre nombre au corbeau. L'explicitation de ce « rapport » (de la relation qui lie les deux objets) passe par une sorte de métaphore qui préfigure la proportion.

Nombres

Il est plus facile d'étudier le rapport de deux objets qui ont une « qualité » commune (variable). On peut alors leur associer une « quantité » qui est l'idée de grandeur (longueur, volume, masse, ...) et évaluer le rapport scalaire de ces deux quantités. Dans la pensée Pythagoricienne où « Tout est nombre *entier* » ce rapport scalaire est alors comparable au rapport de deux entiers. Mais la découverte de l'incommensurabilité (de la diagonale d'un carré à son côté) apportait une contradiction à laquelle échappe Euclide en traitant séparément les rapports de nombres (livre VII) et les rapports de grandeurs (livre V).

² Des précisions historiques figurent en annexe.

La proportion résulte de la comparaison de deux rapports. Elle permet de modéliser la proportionnalité. Elle a été pendant plusieurs siècles l'outil qui a permis de numériser les grandeurs. Les nombres ont leur origine dans l'étude des rapports et les rapports dans l'étude des grandeurs.

Fonctions

Les fonctions ont, elles aussi, leur origine dans l'étude des grandeurs, plus précisément dans l'idée que la variation d'une grandeur a pour cause (ou pour effet) la variation d'une autre grandeur. Or les relations de cause à effet s'établissent naturellement dans le temps. C'est pourquoi, jusqu'à Newton, le temps est apparu comme la variable universelle. Avec Euler débute une présentation algébrique des fonctions où la variable apparaît comme élément générique d'un ensemble numérique.

Variables et grandeurs

Une « variable numérique » est l'élément arbitraire de l'ensemble des nombres réels noté \mathbb{R} . Une telle variable prise isolément est isomorphe à \mathbb{R} . La distinction entre une telle variable et \mathbb{R} est une nécessité psychologique pour construire des relations numériques. On imagine deux variables représentées par deux lettres différentes qui prennent fictivement leurs valeurs dans \mathbb{R} . Deux telles variables n'ont aucune raison d'être « proportionnelles » si on ne les relie pas par une « fonction linéaire ». C'est alors le caractère linéaire de la fonction qui rend « proportionnelles » les suites des valeurs « prises » par ces deux variables. Mais il faut l'œil d'un expert pour voir dans ces valeurs numériques quand elles sont positives les mesures potentielles de deux grandeurs proportionnelles. Ceci suppose que « l'expert » a déjà rencontré des grandeurs proportionnelles et qu'il sait modéliser avec la linéarité une telle dépendance entre grandeurs.

b) Contraintes et nécessités ergonomiques

L'enseignement se doit de rechercher un compromis entre des nécessités institutionnelles, sociales et épistémologiques. Les savoirs visés doivent faire partie du répertoire prévu par l'institution scolaire. Les connaissances qui en résultent doivent permettre aux élèves de s'adapter aux pratiques sociales en cours et de s'insérer dans la vie professionnelle. La construction in abstracto d'un processus d'apprentissage doit s'alimenter de la complexité croissante des structures mathématiques en restant adaptée au développement psychogénétique du sujet. Pour que les élèves puissent objectiver une situation il faut que le milieu matériel leur soit familier.

L'apprentissage de la proportionnalité a fait l'objet d'études en psychologie génétique. Elles n'ont pas révélé que les connaissances sur la proportionnalité sont inadaptées au développement cognitif des élèves. D'après Piaget les activités ne nécessitant que des opérations concrètes peuvent débiter dès l'âge de 7 ou 8 ans. Ainsi certains aspects de la proportionnalité peuvent être enseignés dès le cours préparatoire avec l'apprentissage des entiers. Les opérations formelles nécessitent de 11 à 12 ans d'âge. Il faut donc attendre le collège pour abstraire des connaissances de la proportionnalité une formalisation telle que la fonction linéaire. On peut dès l'école primaire organiser un enseignement qui prépare les élèves au saut de complexité que suppose cette abstraction. Celle-ci nécessite une

connaissance même modeste sur les nombres rationnels (les fractions), une pratique des techniques de la proportionnalité, une familiarité dans l'usage implicite des relations fonctionnelles en relation avec l'idée de variable.

Une approche logico mathématique ne peut satisfaire aux conditions d'une genèse des notions de fonctions, de nombres et de variables. Nous souhaitons proposer des situations qui créent les conditions d'une heuristique raisonnable de ces concepts.

Le répertoire des enfants de l'école primaire est limité aux entiers et aux opérations élémentaires sur ces entiers. Les milieux qui leur sont familiers sont des objets physiques ou des grandeurs (en tant que connaissances protomathématiques). Pour que les enfants aient des raisons d'étudier des relations entre nombres, il faut que ces nombres soient des mesures de grandeurs dépendantes telles que la variation de l'une d'elles soit la cause physique ou intellectuelle de la variation de l'autre. L'explicitation d'une relation fonctionnelle avec des « nombres opérateurs » nécessite la connaissance de ces nombres. Par conséquent l'émergence de la notion de fonction doit se faire simultanément avec celle de nombres, l'une étayant l'autre.

Les calculs élémentaires de la proportionnalité relèvent de la connaissance des rapports entre objets familiers (par exemple, si un objet vaut « tant » alors deux objets valent le double). Dans le processus envisagé nous essaierons de partir d'une connaissance sociale pour construire un savoir qui institutionnalise successivement les techniques de la proportionnalité, le concept de proportionnalité, les différentes écritures d'un rapport externe (les couples qui représentent un même rationnel) comme représentants d'un même rationnel. C'est ce nombre rationnel abstrait qui déterminera la fonction linéaire.

c) Structures mathématiques

La proportionnalité peut être un outil pour la genèse des notions de variables, de fonctions, de nombres. La recherche d'une articulation logique et fonctionnelle d'un processus d'apprentissage de ces notions nécessite une analyse de leurs structures mathématiques.

Variables

On peut distinguer trois types de variables : les grandeurs variables, les variables numériques, les variables algébriques. L'idée de grandeur comme « qualité variable d'un objet » (par exemple : la longueur d'un crayon) semble être un des premiers objets de pensée chez les enfants. Dans les situations envisagées pour des élèves du cours moyen, les milieux matériels seront des collections d'objets physiques et les mesures des cardinaux. Différents objets relatifs aux grandeurs et aux nombres interviennent dans une relation didactique pour une genèse de l'idée de variable. L'ordre d'apparition de ces objets dans un processus d'apprentissage est dicté par leur complexité mathématique croissante. On peut les décrire en termes d'action pour des élèves en situation adidactique :

- Utiliser une mesure de grandeur connue pour en déterminer une autre.
- Utiliser plusieurs mesures connues de grandeurs de même nature (les comparer, les ordonner, les combiner, ...)
- Déterminer dans une situation une mesure manquante réalisant certaines contraintes.

- Proposer des mesures possibles de grandeurs satisfaisant aux contraintes de la situation.
- Proposer des mesures hypothétiques de grandeurs faisant fonctionner le modèle de la situation.
- Evaluer qualitativement l'effet de la variation d'une grandeur (sur une autre grandeur).
- Evaluer quantitativement l'effet de la variation des mesures d'une grandeur sur d'autres mesures (des calculs sont possibles).
- Proposer des nombres (scalaires) hypothétiques dans une relation fonctionnelle entre nombres. (On oublie que ces nombres peuvent être des mesures de grandeurs pour faire fonctionner uniquement le modèle algorithmique)
- Evaluer l'effet d'une variation de valeurs numériques sur leurs images dans une application.

Fonctions

On perçoit à travers cette tentative de description que l'idée de « variable » est étroitement liée à celle de « fonction ». Les situations d'action suivantes peuvent s'articuler avec celles décrites précédemment :

- Considérer un couple de mesures de grandeurs comme élément d'une relation entre grandeurs.
- Considérer plusieurs couples de mesures de grandeurs
 - Donnés au « hasard » mais avec une intention didactique
 - Réalisant une relation fonctionnelle implicite entre grandeurs.
- Rechercher un couple de mesures de grandeurs répondant à des contraintes dans une relation entre grandeurs.
- Proposer un couple de mesures de grandeurs possible dans la situation étudiée (réalisant les contraintes matérielles de la situation de référence).
- Proposer des couples de mesures de grandeurs hypothétiques (possibles ou imaginaires) satisfaisant aux contraintes relationnelles de la situation étudiée (par exemple fixée par un rapport externe).
- Proposer des couples de valeurs numériques faisant partie du graphe d'une fonction numérique définie par un algorithme.
- Déterminer cet algorithme (ou le graphe de la fonction)
- Etudier l'effet des variations des antécédents sur les images dans une application (définie algorithmiquement).

Nombres

Derrière ces tentatives de description des différents objets qui peuvent intervenir dans une relation didactique, il y a toujours la présence des nombres qui est à la base de toute activité mathématique. Les nombres naissent de l'étude des rapports. Un nombre (rationnel) est une famille, une classe de rapports équivalents d'où le rôle privilégié joué par les proportions et la proportionnalité.

La complexité des rapports dépend des objets comparés et de la nature du rapport qui en résulte (entier, rationnel non entier ou irrationnel). Les objets peuvent être des objets physiques, des grandeurs discrètes ou continues, des mesures, des nombres abstraits. Si on considère le rapport de deux grandeurs de même nature on dira qu'il s'agit d'un rapport

interne ou scalaire sinon le rapport sera dit externe ou fonctionnel. On peut distinguer 3 types de rapports externes :

- le tant pour tant (tant d'euros pour tant d'objets)
- le tant dans tant (mélange, alliage, ...)
- le tant sur tant (prix TTC, intérêts cumulés, ...)

Nous avons donc à traiter des grandeurs et des nombres (entiers ou fractionnaires). Suivant la situation, les nombres seront des opérateurs, des mesures ou des rapports.

Le tableau suivant tente de décrire ces différents rôles du nombre en suivant une complexité mathématique croissante et en distinguant « rapport interne » et « rapport externe ».

Rapports internes :

Toutes les grandeurs A, U, B sont de même nature.

| mesures | opérateurs | rapports | explications |
|---|---|--|---|
| $n \in \mathbb{N}$ n mesure A avec U | $A = n \otimes U = U \oplus \dots \oplus U$ | $\frac{A}{U} = \frac{n}{1}$ | U peut être considérée comme une grandeur unité |
| $m \in \mathbb{N}$ m mesure U avec I $n \times m$ mesure A avec I | $U = m \otimes I$ $A = n \otimes (m \otimes I)$ $A = (n \times m) \otimes I$ $A = m \otimes (n \otimes I)$ | $\frac{U}{I} = \frac{m}{1}$ $\frac{A}{I} = \frac{n \times m}{1}$ | I est une fraction de grandeur $I = \frac{U}{m}$ C'est une nouvelle grandeur unité. |
| $\frac{n}{m}$ mesure B avec U | $B = n \otimes I$ $B = n \otimes \frac{U}{m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{m} * U$ Remarque : $B = \frac{A}{m} = \frac{n \otimes U}{m}$ donc $n \otimes \frac{U}{m} = \frac{n \otimes U}{m} = \frac{n}{m} * U$ | $\frac{B}{U} = \frac{n \otimes I}{m \otimes I}$ ou $\frac{B}{U} = \frac{n}{m}$ | La proportion $\frac{B}{U} = \frac{n}{m}$ permet de comparer un rapport de grandeurs de même nature à un rapport de nombres entiers. Remarque : $\frac{B}{U}$ ne dépend pas de I |

Rapports externes :

Les grandeurs A et L sont de natures différentes ainsi que les grandeurs S, G, B.

Le rapport externe ne peut s'exprimer par un « nombre » que si chaque grandeur est exprimée par une mesure c'est à dire par un couple (nombre, unité) noté $n \otimes U$. Le rapport externe apparaît ainsi comme un rapport de rapports internes.

| Opérateur linéaire | Grandeur A U : unité | Grandeur L V : unité | Rapport externe | Explications | |
|--|--|--|---|---|--|
| $n \in \mathbf{N}$ opérateur : n | Si $A = 1 \otimes U$ alors $n \otimes A = n \otimes U$ | $L = n \otimes V$ | Rapport de $\frac{L}{V}$ à $\frac{A}{U} : n$ | $\frac{n \otimes A}{U} = \frac{L}{V} = n$ $n \times \frac{A}{U} = \frac{L}{V}$ | |
| $n \in \mathbf{N}$ $m \in \mathbf{N}$ opérateur : $\frac{n}{m}$ | Si $A = m \otimes U$ alors $n \otimes A = n \otimes (m \otimes U)$ $n \otimes A = (n \times m) \otimes U$ | Si $L = n \otimes V$ alors $m \otimes L = m \otimes (n \otimes V)$ $m \otimes L = (m \times n) \otimes V$ | Rapport de $\frac{L}{V}$ à $\frac{A}{U} : \frac{n}{m}$ | $\frac{n \otimes A}{U} = \frac{m \otimes L}{V}$ $n \times \frac{A}{U} = m \times \frac{L}{V}$ $\frac{n}{m} \times \frac{A}{U} = \frac{L}{V}$ | |
| $n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}$ $p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}$ opérateur : $\frac{q}{p} \circ \frac{n}{m}$ = $\frac{n \times q}{m \times p}$ | Grandeur S Unité : U S' = $m \otimes U$ S = $(m \times p) \otimes U$ | Grandeur G Unité : V G' = $n \otimes V$ G'' = $p \otimes V$ G = $(n \times p) \otimes V$ | Grandeur B Unité : W B' = $q \otimes W$ B = $(n \times q) \otimes W$ | Rapport de $\frac{G'}{V}$ à $\frac{S'}{U} : \frac{n}{m}$ Rapport de $\frac{B'}{W}$ à $\frac{G''}{V} : \frac{q}{p}$ Rapport de $\frac{B}{W}$ à $\frac{S}{U} :$ $\frac{n \times q}{m \times p}$ | Si S = $p \otimes (m \otimes U) = (p \times m) \otimes U$ G = $p \otimes (n \otimes V) = n \otimes (p \otimes V)$ B = $n \otimes (q \otimes W)$ B = $(n \times q) \otimes W$ alors $\frac{B}{W} = \frac{n \times q}{m \times p} \times \frac{S}{U}$ ou $\frac{B}{W} = \left(\frac{q}{p} \circ \frac{n}{m} \right) \times \frac{S}{U}$ |

Remarques :

- On peut définir le produit de deux rationnels abstraits par : $\frac{n}{m} \bullet \frac{q}{p} = \frac{n \times q}{m \times p}$, ce qui permet d'identifier $\mathcal{L}(\mathbf{Q})$ et \mathbf{Q} .
- Pour pouvoir éventuellement définir $\frac{n}{m} + \frac{p}{q}$ avec des opérateurs linéaires il faut que ces opérateurs aient un statut de grandeur dérivée de même nature (Ex : vitesse, ration, ...)

Il s'agit maintenant d'articuler logiquement ces différentes notions de rapports, de fonctions, de variables dans une progression de l'enseignement de la proportionnalité qui tient compte des complexités croissantes précédemment décrites. Le plan de cette articulation résumé dans le tableau suivant donne une classification des différentes situations.

Relation fonctionnelle et proportionnalité.

| Graphe ou partie du graphe de la correspondance | Relations internes (structures) | Statut du rapport externe et nature | Nature des valeurs en correspondance : variables numériques ou constantes, connues ou inconnues. | Intérêt didactique ou problématique | Répertoires des techniques | | | | | | | | |
|--|---------------------------------|-------------------------------------|--|-------------------------------------|----------------------------|-----|--|---|--|--|--|--|-----------------------------------|
| Un couple (objet ; image) <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>G1</td><td>3</td></tr> <tr><td>G2</td><td>6</td></tr> </table> Ou <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>G1</td><td>3</td></tr> <tr><td>G2</td><td>7</td></tr> </table> | G1 | 3 | G2 | 6 | G1 | 3 | G2 | 7 | aucune | Opérateur entier ou fractionnaire | Deux mesures de grandeurs connues | Aucun si le milieu matériel n'est pas problématisé | |
| G1 | 3 | | | | | | | | | | | | |
| G2 | 6 | | | | | | | | | | | | |
| G1 | 3 | | | | | | | | | | | | |
| G2 | 7 | | | | | | | | | | | | |
| Ensemble de couples <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>G1</td><td>a</td><td>c</td></tr> <tr><td>G2</td><td>b</td><td>d</td></tr> </table> | G1 | a | c | G2 | b | d | Rapports entiers $q = \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ $q \in \mathbb{N}$ | Il peut être implicite ou explicite, entier ou fractionnaire $k = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ | Les mesures de grandeurs sont connues | Poser la proportionnalité é comme hypothèse : trouver des raisons pour que $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ | Pour que le rapport externe soit constant il faut que les rapports internes soient conservés | | |
| G1 | a | c | | | | | | | | | | | |
| G2 | b | d | | | | | | | | | | | |
| hypothèse de proportionnalité <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>G1</td><td>a</td><td>c</td></tr> <tr><td>G2</td><td>b</td><td>x</td></tr> </table> | G1 | a | c | G2 | b | x | Un des deux rapports externe ou interne est entier. Le rapport externe a un statut social ou institutionnel | | Une des mesures constante est inconnue | Recherche d'une quatrième proportionnelle | Utilisation des rapports interne ou externe | | |
| G1 | a | c | | | | | | | | | | | |
| G2 | b | x | | | | | | | | | | | |
| hypothèse de proportionnalité <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>G1</td><td>a</td><td>c</td><td></td></tr> <tr><td>G2</td><td>b</td><td>d</td><td></td></tr> </table> | G1 | a | c | | G2 | b | d | | $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ | La connaissance implicite ou explicite de la grandeur dérivée détermine la correspondance | Couples de mesures de grandeurs connus et inconnus | Faire des hypothèses : construire ou imaginer des couples de grandeurs possibles | N'importe quelle technique connue |
| G1 | a | c | | | | | | | | | | | |
| G2 | b | d | | | | | | | | | | | |
| Hypothèse de proportionnalité G1 <table border="1" style="margin-left: 20px;"><tr><td>a</td><td>c</td><td>a+c</td></tr></table> G2 <table border="1" style="margin-left: 20px;"><tr><td>b</td><td>d</td><td>b+d</td></tr></table> | a | c | a+c | b | d | b+d | Conservation de l'addition | Le rapport externe peut être implicite ou explicite | Mesure de grandeurs connues | Reconnaître la propriété additive ou la construire | Propriété additive de la linéarité | | |
| a | c | a+c | | | | | | | | | | | |
| b | d | b+d | | | | | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|--|---|--------------------------------|---|---------------------------------------|
| Tous les couples de mesures entières de deux grandeurs proportionnelles | Celles qui sont connues des élèves | L'écriture du rapport externe explicite la grandeur dérivée | Mesures de grandeurs variables | Notion de grandeurs variables dans une relation fonctionnelle | Celles qui sont connues des élèves |
| Tous les couples d'éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ générés par un rapport fonctionnel défini par un algorithme | Elles dépendent de la connaissance des nombres | Le nombre abstrait « k » définit la fonction linéaire | Variabes numériques | La fonction linéaire est une abstraction de la proportionnalité | Toutes les techniques de la linéarité |

Les degrés de liberté didactique :

1. Le rapport externe peut être entier ou fractionnaire dès les premières leçons.
2. On peut permuter l'apprentissage des différentes techniques avec la recherche de couples hypothétiques.
3. Il n'y a pas d'ordre privilégié dans l'introduction des différentes techniques : rapports interne ou externe, addition ou soustraction.

d) Didactique pour une genèse de la proportionnalité, articulation fonctionnelle

On veut trouver des situations d'**action** qui conduisent les élèves à utiliser les techniques de la proportionnalité pour une genèse de l'idée de fonction (linéaire) et de nombre rationnel. Nous avons vu que cette idée de fonction doit émerger de manière dialectique avec l'idée de variables dans des situations où **communication et validation** nécessiteront l'explicitation des rapports. Une tentative de genèse didactique basée sur l'ordination des structures mathématiques nécessite l'explication détaillée des situations.

ACTION

La proportionnalité prend ses racines dans le comptage.

Le cardinal :

A l'école primaire, les enfants commencent par mettre en correspondance biunivoque des collections d'objets. Ils construisent ainsi leur premier répertoire de nombres cardinaux, les entiers naturels, avec lesquels ils vont compter des objets physiques.

L'opérateur :

Les actions suivantes consistent à compter des groupes d'objets. L'entier naturel apparaît comme un opérateur (implicite). C'est le fondement de la numération.

La mesure :

Quand les enfants comptent des « unités de grandeurs » (longueurs, masses, etc.) l'entier naturel devient une mesure.

FORMULATION

Pour communiquer son action de comptage l'élève doit donner un couple : « nombre de fois, unités ». Le nombre naturel mesure devient un opérateur explicite, un élément de (\mathbf{N}, \times) . Même si les enfants ne perçoivent pas le passage des objets aux grandeurs puis à leurs mesures, ces différentes structures font jouer aux entiers des rôles différents : de cardinal l'entier devient opérateur, puis mesure or une mesure est déjà un rapport (implicite). Ainsi s'enrichit le répertoire de l'élève par les différents sens qu'il donne aux mêmes nombres.

PROBLEMATISATION

Rapport de deux grandeurs

C'est en problématisant une situation que le nombre va apparaître comme un rapport explicite. L'élève contraint de comparer deux grandeurs de même nature dans un problème doit trouver combien de fois l'une est contenue dans l'autre. L'opérateur « nombre de fois » qui servait à formuler devient un objet d'étude et de recherche : c'est le rapport explicite de deux grandeurs (le nombre de parts ou d'unités). (\mathbf{N}, \times) devient un répertoire pour traiter une nouvelle « structure objet » : le rapport de deux grandeurs.

Exemple 1 : On cherche dans 20 mètres de tissu combien il y a de coupons de 4 mètres. On peut écrire : $1\text{m} \times 20 = 1\text{m} \times (4 \times 5)$ puis $1\text{m} \times (4 \times 5) = (1\text{m} \times 4) \times 5$.

Dans $1\text{m} \times 20$ et $1\text{m} \times 4$ les opérateurs 20 et 4 donnent la mesure du tissu et celle d'un coupon. Dans $(1\text{m} \times 4) \times 5$, 5 est un rapport (le rapport de la pièce de tissu au coupon ou le rapport de leurs mesures). Devenu objet d'étude et de justification, le nombre de fois est passé au niveau d'un savoir : le rapport devient explicite. Le rapport « 5 » est un nombre de « parts » et la valeur d'une « part » $1\text{m} \times 4$ est une mesure.

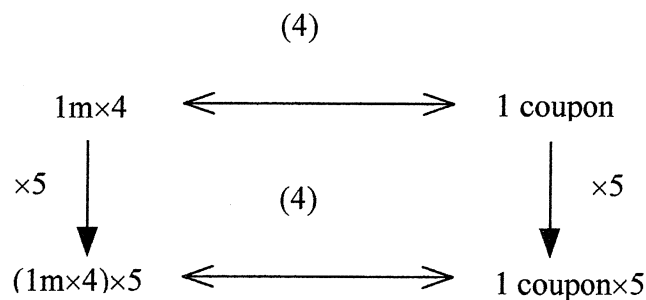
Remarque: « 5 » peut aussi être la mesure de la pièce de tissu quand on prend le coupon comme unité ; mais on sort de la question initiale pour entrer dans le problème des changements d'unités.

On voit sur cet exemple comment le statut du nombre dépend du milieu à traiter. Les différences didactiques du même objet mathématique (ici le nombre naturel) résultent des différents rôles que joue cet objet en situation.

Ainsi le sujet apprenant établit une « dialectique » entre les structures numériques de son répertoire et les structures mathématiques du milieu (antagoniste) qu'il a à traiter.

Rapport naturel opérant sur des rapports « quelconques »

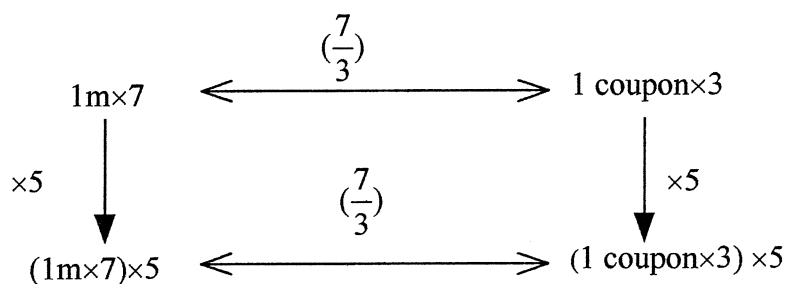
Dans l'exemple précédent, le rapport 5 opère sur deux grandeurs différentes : des mètres et des coupons de la manière suivante :



Il y a bien un rapport entre le nombre de mètres et le nombre de coupons : c'est « 4 ». On l'appellera « rapport externe » en opposition au rapport « 5 » dit interne. (On peut remarquer que « 4 » a un nouveau statut.)

Dans certains cas les élèves auront à utiliser, avec des pratiques sur les naturels, des rapports qui ne sont pas naturels et pour lesquels ils n'ont pas encore de vocabulaire. Mais les connaissances précédentes leur permettent de manipuler des « rapports » qu'ils ne peuvent pas désigner. Ils disposent d'un modèle implicite d'action qui leur permet d'utiliser les naturels comme rapports internes pour manipuler un rapport qui lui peut ne pas être naturel.

Exemple 2 : si avec 7 m de tissu on fabrique 3 coupons, dans 35 m de tissu combien y a-t-il de coupons ? Le rapport externe n'est pas explicitable par des élèves qui ne connaissent que les entiers.



La mesure d'un coupon ($1\text{m} \times \frac{7}{3}$) n'est pas explicitable. On ne peut pas écrire comme précédemment $1\text{m} \times 35 = 1\text{m} \times \left(\frac{7}{3} \times 15\right) = \left(1\text{m} \times \frac{7}{3}\right) \times 15$ où ($1\text{m} \times \frac{7}{3}$) est la mesure d'un coupon et 15 le nombre de coupons. Mais on peut faire opérer l'entier naturel 5 sur chacun des termes du rapport externe. On est donc conduit à utiliser la proportionnalité, ce qui nécessite un vocabulaire nouveau.

Remarque : Une formulation classique de proportions « 35 est à 7 comme 15 est à 3 » permettait d'expliciter des rapports externes (numériques) qui n'étaient pas explicitable avec des entiers.

Il y a là encore une « dialectique » entre un usage d'objets connus et d'objets non connus mais qu'on peut traiter avec les objets connus que sont les entiers. Cette dialectique permet la création explicite d'un nouvel objet qu'on utilisait implicitement : le rapport de 7 à 3. Ce problème d'extension du rapport à d'autres nombres sert de moteur à la fabrication de \mathbb{Q} qui entrera dans le nouveau répertoire des élèves.

Comparaison de deux rapports (externes) « quelconques ».

C'est encore en problématisant une situation que les rapports internes naturels vont permettre de comparer des rapports externes (non entiers).

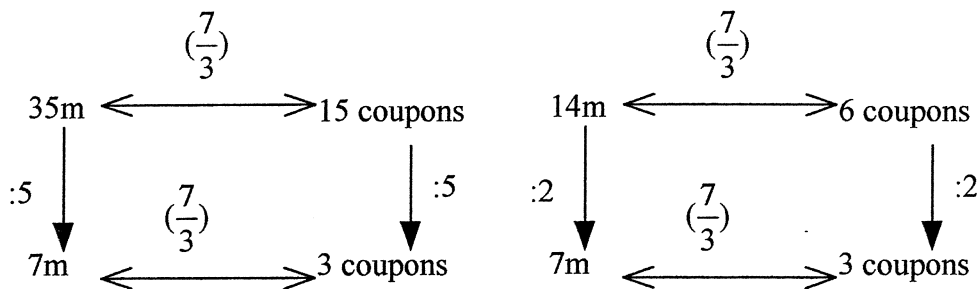
Exemple 3 :

Avec 35 mètres de tissu un tailleur T a fabriqué 15 coupons.

Avec 14 mètres de tissu un tailleur θ a fabriqué 6 coupons.

Lequel des deux tailleurs a utilisé le plus de tissu pour fabriquer chaque coupon ?

La mesure d'un coupon n'est explicitable dans aucun des deux cas. L'élève est contraint de chercher un diviseur commun ou un multiple commun à deux mesures de grandeurs.



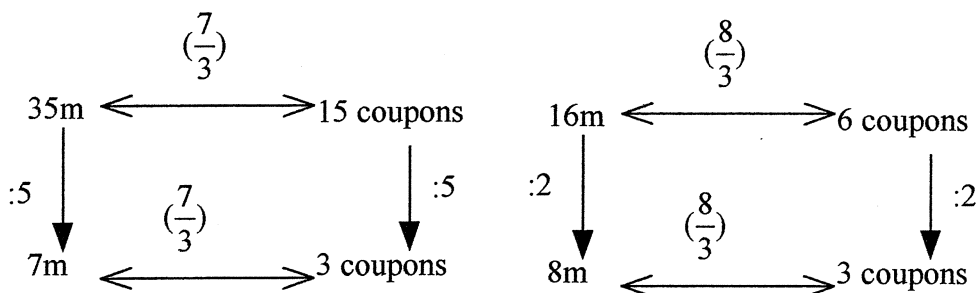
L'élève est conduit à repérer des couples équivalents représentant le même rapport : 7 mètres pour 3 coupons ; ce rapport n'est pas identifiable à un élément de \mathbb{Q} , mais il est quand même un représentant d'une classe d'équivalence.

Exemple 4 :

Avec 35 mètres de tissu un tailleur T a fabriqué 15 coupons.

Avec 16 mètres du même tissu un tailleur θ a fabriqué 6 coupons.

Lequel des deux tailleurs a utilisé le plus de tissu pour fabriquer chaque coupon ?



On peut comparer les rapports externes et faire de l'espace quotient précédent une grandeur variable dérivée mesurée par le nombre de mètres par coupon.

On peut alors nommer cette grandeur (par exemple : « longueur du coupon ») et désigner chaque mesure par un couple : 7 pour 3 ou $\frac{7}{3}$. Le rapport $\frac{7}{3}$ est devenu une mesure.

Remarque 1 :

Les élèves perçoivent bien une correspondance entre deux grandeurs variables : le nombre de mètres de tissu et le nombre de coupons mais il faut une autre problématique pour faire expliciter le rapport $\frac{7}{3}$ en tant qu'opérateur.

Remarque 2 :

On a relevé à plusieurs reprises la dualité entre les structures numériques qui entrent (progressivement) dans le répertoire des élèves et les différentes structures du milieu que les élèves ont à traiter. Ce qui conduit à considérer le tableau croisé suivant où les structures numériques apparaissent comme répertoires explicites permettant d'agir sur des milieux d'objets eux-mêmes structurés.

| structures numériques répertoire explicite structures du milieu (connaissances) | N | D | Q | R |
|---|---|---|---|---|
| les objets physiques | | | | |
| les grandeurs | | | | |
| les mesures | | | | |
| les rapports | | | | |
| les proportions | | | | |
| les fonctions linéaires | | | | |
| l'ensemble des applications linéaires | | | | |

Il y a des conversions d'objets en outils et d'outils en objets suivant que la situation met la connaissance en milieu ou en moyen. Dans le premier exemple le naturel « 4 » qui figure dans « 4×5 » devient une mesure dans « 4m » puis un rapport externe (4). Dans le deuxième exemple le rapport externe implicite (objet d'étude) va être explicité par un couple (7m pour 3 coupons) puis désigné par une écriture du type « $\frac{7}{3}$ » avant de devenir élément de \mathbb{Q} .

Remarque 3 :

L'étude précédente montre pourquoi la proportionnalité a son origine dans une nécessité créée par une pratique préférentielle des entiers. On retrouve des conditions de travail semblables à celles des Grecs qui ne reconnaissaient comme nombres que les entiers. Aujourd'hui les rapports non entiers ne sont plus inexprimables et la proportionnalité est un objet obsolète en mathématique. Mais les étapes précédentes sont incontournables pour le développement cognitif du sujet et le temps d'étude à y consacrer est déterminant dans le processus d'institutionnalisation.

3-1-3 Méthodologie pour une ingénierie

Nous souhaitons proposer aux élèves des situations propices à l'émergence de raisonnements arithmétiques :

- qui s'inscrivent dans un processus d'algébrisation à long terme.
- qui apportent à chaque élève les connaissances nécessaires à son intégration sociale et professionnelle.
- qui soient adaptées aux développements génétique et cognitif du sujet.

Nous avons vu que la complexité de la structure mathématique joue un rôle dans la genèse. L'exploration de cette structure en termes de variables, fonctions et rapports a permis d'ordonner cette complexité. La construction des nombres rationnels passe par l'étude des rapports et les rapports prennent du sens dans la manipulation des grandeurs. La proportionnalité entre grandeurs permet d'établir une relation dialectique entre les notions de fonction, de variable et de nombre, favorable à leur genèse. Dans la notion de grandeur, il y a l'idée de comparaison et de variation. La notion de fonction a son origine dans l'idée qu'il existe une relation de dépendance entre deux grandeurs telle que toute variation de l'une entraîne ou accompagne une variation de l'autre ; ainsi toute idée de fonction contient l'idée

de variable. Dans le processus envisagé la fonction linéaire (en tant qu'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) résulte d'une abstraction réfléchissant les relations de proportionnalité entre grandeurs.

Dans la recherche de situations, l'action objective est le fondement de la situation de référence. La mise en place d'une heuristique nécessite un milieu matériel qui problématise cette action de telle sorte que les techniques de la proportionnalité apparaissent comme moyens pertinents de résoudre le problème.

La proportionnalité à l'école primaire.

Avant la mise en place des leçons sur la proportionnalité à l'école primaire, nous essayons d'adapter la complexité mathématique à ses différents cycles pour une genèse de cette notion du cours préparatoire au cours moyen.

Qu'est-ce que concevoir la proportionnalité ?

La proportionnalité est un modèle arithmétique qui décrit une relation de dépendance entre deux grandeurs. La proportion permet de l'explicitier indépendamment des mesures grâce aux rapports scalaires. Mais l'explicitation de cette relation entre grandeurs par une relation numérique nécessite l'usage des mesures et la fonction linéaire qui s'en déduit dépend du choix des unités.

Au C.E.³, les sources de « relation de proportionnalité » sont la multiplication (éventuellement la division) ; mais les quantités en relation ne sont pas perçues comme des variables où l'une serait fonction de l'autre ; par exemple pour faire une distribution équitable en utilisant une ration, il suffit d'effectuer des multiplications.

Au C.M., nous souhaitons trouver des situations où il y a obligation de considérer un terme comme une valeur particulière d'une grandeur qui varie en fonction d'une autre grandeur, ces deux grandeurs pouvant être ou non proportionnelles.

Il ne suffit pas de donner quelques valeurs particulières à une grandeur mais de faire prendre conscience aux élèves de tous les « possibles » d'une variable. Pour eux, une variable sera l'ensemble des mesures possibles d'une grandeur. Cet ensemble doit donc être engendré par quelque chose qui agit sur cette grandeur. L'hypothèse heuristique dans les situations envisagées est que l'idée de variable va émerger, dans une relation dialectique avec l'idée de fonction, de l'obligation de faire des prévisions sur les mesures à obtenir. Pour avoir quelques chances de succès, l'élève devra poser la proportionnalité comme hypothèse. Les différentes mesures possibles apparaîtront alors comme une nécessité pour faire fonctionner et vérifier le modèle envisagé.

Qu'est-ce que résoudre un exercice de proportionnalité ?

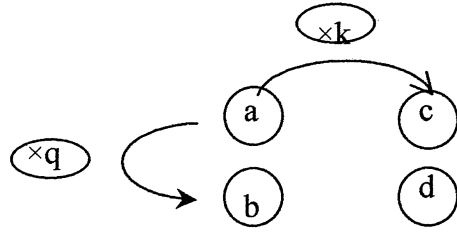
Le modèle de base est la conservation des rapports scalaires ou rapports internes. La structure mathématique standard est donc la proportion. La question standard est la détermination de la quatrième proportionnelle (d). Pour effectuer cette action l'élève est conduit à repérer et trier les variables et les constantes. La détermination d'une inconnue peut nécessiter une action différente de l'action objective décrite par l'énoncé du problème ; par exemple la réalisation

³ C.P. cours préparatoire ; enfants de 6 à 7 ans.

C.E. : cours élémentaire ; enfants de 7 à 9 ans.

C.M. : cours moyen ; enfants de 9 à 11 ans.

d'une distribution équitable peut nécessiter le calcul de la ration. La difficulté de passage du déclaratif au procédural dépend de la nature des rapports scalaire (q) et fonctionnel (k) :



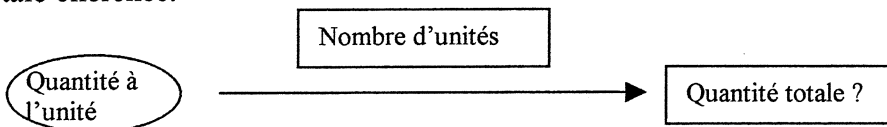
Les stratégies de résolution vont dépendre de la nature de ces rapports et des répertoires des élèves. Réciproquement les techniques résolutives vont engendrer des connaissances qui vont enrichir ces répertoires.

Au CP et CE la base des calculs est la multiplication.

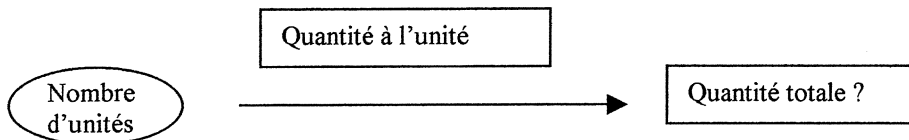
La multiplication permet de construire des relations de proportionnalité entre grandeurs sans que le vocabulaire et les autres techniques de la proportionnalité soient mobilisés.⁴

Elle donne deux situations standard :

- 1) La quantité à l'unité est fixée, le nombre d'unités (variable) permet le calcul de la quantité totale cherchée.



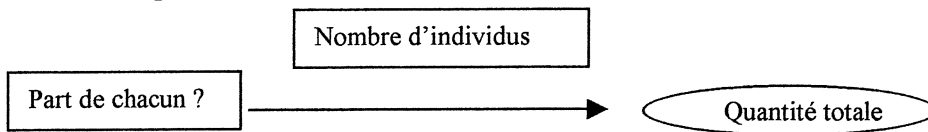
- 2) Le nombre d'unités est fixé ; la quantité à l'unité (variable) permet le calcul de la quantité totale cherchée.



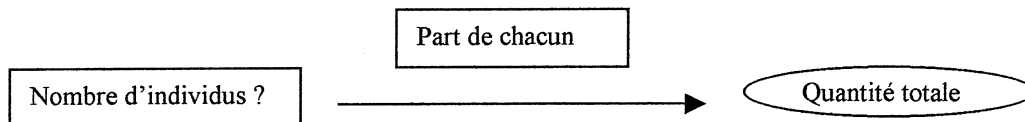
Au CE1-CE2, la base des calculs est la division.

La quantité totale étant constante on retrouve deux situations standard :

- 1) Chercher la part de chacun connaissant le nombre d'individus.



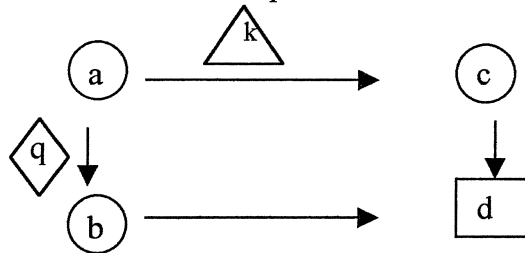
- 2) Chercher le nombre d'individus connaissant la part de chacun.



⁴ Rose Foucaud a élaboré des « situations de distribution et de comptage » qui mettent en œuvre des correspondances biunivoques de collections d'objets faisant apparaître les premiers entiers comme cardinaux et opérateurs : « Rose Foucaud ; situations didactiques pour l'apprentissage des nombres naturels ; I.R.E.M.de Bordeaux ; 1992 ».

Au CM1-CM2, la base des calculs est la proportion.

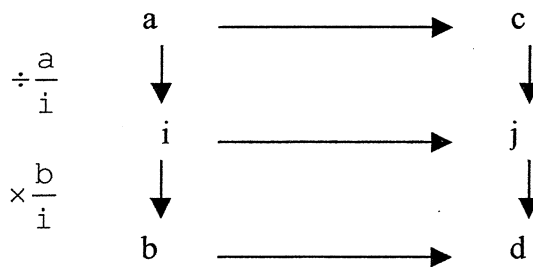
Le problème standard est la recherche d'une équirépartition. Il s'agit de déterminer des quantités pour des groupes d'effectifs différents. La question de base est la recherche d'une quatrième proportionnelle.



Son calcul nécessite l'explicitation soit du rapport fonctionnel, soit du rapport scalaire.

Trois cas peuvent se présenter :

- le rapport scalaire est calculable ; c'est un entier : $q = \frac{b}{a}$ alors $d = q \times c$.
- le rapport fonctionnel est calculable ; c'est un entier : $k = \frac{c}{a}$ alors $d = k \times b$.
- Aucun de ces deux rapports n'est calculable :
- S'il existe un diviseur commun « i » à a et b pour lequel on peut déterminer la valeur homologue j grâce à la première procédure alors on peut ensuite déterminer le correspondant de b en réitérant cette même procédure :



- Sinon on ne peut pas aboutir.

Remarque : Dans les trois premiers cas on peut calculer $b \times c$ d'abord puis diviser par a donc $d = \frac{c \times b}{a}$ car le produit $b \times c$ est divisible par a mais on ne peut pas attacher de grandeur au produit $b \times c$.

3-1-4 Choix des caractères pour la situation fondamentale

Les raisons d'utiliser la proportionnalité

Il y a au moins trois raisons d'utiliser la proportionnalité : nécessité logique, loi physique, convention sociale.

Dans la situation de « l'agrandissement du puzzle » les élèves doivent calculer les différentes dimensions d'un puzzle agrandi sachant qu'un segment qui mesure 4 centimètres sur le modèle devra mesurer 7 centimètres sur la reproduction. Le modèle linéaire apparaît dans l'expérimentation comme une nécessité logique pour réaliser l'agrandissement.

Dans la situation de « l'épaisseur d'une feuille de papier » les différents codages d'une même épaisseur (l'équivalence des couples) résultent d'une loi physique simple : l'épaisseur de n tas identiques de feuilles est n fois l'épaisseur d'un tas de ces mêmes feuilles. L'épaisseur des feuilles est une notion perceptive par la vue et le toucher. Les opérations effectives sur les objets permettent d'envisager les opérations sur les mesures de grandeurs desquelles dérive la grandeur « épaisseur ». Mais les élèves sont confrontés aux difficultés de mesurages. Ces difficultés se manifestent davantage dans la situation de « l'eau de mer » et sont moindres dans la situation de « l'agrandissement du puzzle ».⁵

Nous avons souhaité expérimenter une nouvelle loi physique qui a fait l'objet d'une situation dite « des plaques et des clous »⁶. Les élèves devaient équilibrer des plaques métalliques avec des clous à l'aide d'une balance de Roberval. Une première expérimentation a fait apparaître plusieurs difficultés lors de la vérification sur les objets physiques du modèle linéaire : gestion de l'erreur de mesurage, de la dispersion des résultats, de l'hétérogénéité des méthodes de calcul, ...

Pour échapper aux contraintes de mesurage nous avons choisi de faire émerger le modèle linéaire d'une convention sociale. Dans la situation « des graines et des souris », on demande aux élèves de distribuer des graines à des souris ; on attend d'eux qu'ils utilisent de manière implicite les propriétés de la proportionnalité pour réaliser l'équité.

Le concept d'équité.

L'idée d'utiliser la proportionnalité comme modèle social pour réaliser l'équité nécessite un premier niveau d'abstraction de la part des élèves (qu'est-ce que l'équité ?) avant même l'élaboration du modèle mais elle permet d'éviter les difficultés liées aux imprécisions de mesurages.

La notion de ration n'est pas perceptible dans la réalité physique. Elle est un concept issu d'une réflexion sur l'idée d'équité, idée qui n'est pas nécessairement la même chez les enfants et chez les adultes. En effet l'équité ne fait pas référence à une règle universelle ; elle résulte d'une réflexion morale et d'une convention sociale. Aristote distinguait la « justice distributive » de la « justice corrective ». Selon lui la justice distributive repose sur une égalité non absolue, mais proportionnelle qui intègre l'idée de mérite. Déjà Platon dans Les Lois (-757) avait distingué « deux égalités, qui portent le même nom, mais qui en pratique s'opposent presque sous bien des rapports. ...la plus vraie et la plus excellente attribue davantage au plus grand et moins au plus petit, donnant à chacun en proportion de sa nature ». Les premières expérimentations de la situation étudiée montrent que chez les enfants l'équité c'est « l'égalisation des parts », c'est le premier palier d'abstraction.

Pour égaliser les parts les élèves vont élaborer les techniques de la proportionnalité. C'est en réalisant une distribution "régulière" que naît l'idée de **ration**. Le concept de ration nécessite donc un deuxième palier d'abstraction qui doit réfléchir l'idée de régularité, de « quantité de nourriture par souris » même quand cette quantité n'est pas un nombre entier de graines, c'est à dire n'est pas un nombre pour les élèves de cet âge. Il y a une nécessité de relation circulaire entre les idées de ration, d'équité, de distribution régulière. La validation d'une distribution

⁵ On pourra trouver une description de ces différentes situations dans : « Nadine et Guy Brousseau ; rationnels et décimaux ; IREM de Bordeaux ; 1987 » ou dans « Guy Brousseau ; Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques ; Thèse présentée à l'université de Bordeaux I ; 1986 ».

⁶ Cette expérimentation est décrite dans : « Nadine Brousseau ; La mesure au cours moyen première année ; IREM de Bordeaux ; 1987 ».

équitable en référence à l'idée d'équité ne peut être que raisonnée. Elle se réfère à la conservation des structures (rapport et addition).

Le concept de ration

L'usage de l'équité pour construire les rationnels rappelle du point de vue mathématique la situation de « l'épaisseur d'une feuille de papier ». Les deux situations conduisent à construire des couples équivalents qui représentent le même rationnel : dans un cas l'épaisseur d'une feuille de papier dans l'autre cas la ration. Mais ces deux notions s'accompagnent de contraintes didactiques différentes.

L'épaisseur d'une feuille de papier est une notion perceptible au toucher qui mobilise des connaissances sur les longueurs. Le concept d'épaisseur résulte d'une abstraction simple issue directement des objets. Son codage nécessite des mesurages avec le cortège de difficultés liées aux manipulations et aux approximations. Il en résulte qu'à une épaisseur de feuilles de papier correspond un intervalle de \mathbb{Q} . Les élèves choisissent un couple (nombre de feuilles, nombre de millimètres) représentant un rationnel de cet intervalle pour coder l'épaisseur d'une feuille.

La validation du codage est assurée par un comptage et un mesurage. On peut dire que c'est une validation perceptive.

Dans une distribution équitable, la ration est une quantité, une grandeur, qui peut être codée par différents couples (nombre de souris, nombre de graines) équivalents ; deux couples sont équivalents s'ils forment une proportion. La classe d'équivalence est le nombre qui mesure cette ration. La ration est une grandeur dérivée, sa mesure est aussi le coefficient de l'application linéaire qui au nombre de souris associe le nombre de graines.

Il n'y a pas dans ce milieu géré par l'équité de difficultés de mesurage ; mais le concept de ration nécessite un niveau d'abstraction de plus que dans la situation de « l'épaisseur d'une feuille de papier ». Le codage d'une ration ne peut pas être validé par un mesurage. Il ne peut être validé que par un raisonnement qui s'appuie sur l'équité de la distribution étudiée.

Comparaison de deux rations

L'idée que des souris peuvent manger plus ou moins de graines suggère que la ration soit une grandeur variable. Les stratégies de comparaison dérivent de raisonnements sur ces variations. La ration d'une distribution est supérieure à la ration d'une autre distribution si chaque souris de la première mange plus que chaque souris de la seconde. Or la mesure d'une ration étant une classe d'équivalence, les élèves sont conduits à élaborer des techniques de comparaison de deux couples (nombre de souris, nombre de graines) ; la ration dépend du nombre de graines et du nombre de souris. Les élèves vont construire un préordre sur les couples grâce au raisonnement de base suivant : la ration est d'autant plus grande qu'il y a plus de graines

ou moins de souris. En d'autres termes : $\frac{g}{n} \geq \frac{g'}{n'} \Leftrightarrow gn' \geq ng'$. Les cas particuliers sont ceux

où les couples ont soit un même nombre de souris soit un même nombre de graines (même numérateur ou même dénominateur pour les fractions correspondantes).

On peut rencontrer d'autres stratégies qui dérivent de l'étude des variations. Par exemple : si on augmente également le nombre de graines et de souris alors la ration augmente si elle était

inférieure à 1 (une graine pour une souris) et elle diminue si elle était supérieure à 1 (elle tend vers 1).

Somme de deux rations

C'est l'idée spontanée d'équité qui est à l'origine du concept de ration et qui permet la comparaison de deux rations.

Mais la somme de deux rations correspond à la somme de deux fonctions linéaires puisque le nombre qui mesure une ration est aussi le coefficient d'une fonction linéaire.

On peut imaginer des situations pour engendrer la somme de deux rations, mais ce n'est plus l'équité qui contrôle cette opération. Il faut que les mêmes souris mangent deux fois. Par exemple, comment additionner les rations (3 graines pour 7 souris) et (8 graines pour 13 souris) ?

Remarquons que la tentation serait grande chez les élèves de dire que 20 souris mangent 11 graines puisque additionner c'est grouper les objets.

On peut raisonner de la manière suivante : la première ration peut être définie par 13 équipes de 7 souris (soit 91 souris) qui s'approprient 13 parts de 3 graines. La deuxième ration peut être définie par 7 équipes de 13 souris qui s'octroient 7 parts de 8 graines. Il faut ensuite expliquer que les mêmes 91 souris mangent 3×13 graines puis 8×7 graines soit en deux fois $39 + 56 = 95$ graines. La ration somme est donc représentée par 91 souris qui mangent 95 graines.

Reste la question de la compatibilité de l'addition avec la relation d'équivalence. Exemple : le couple (21 souris ; 9 graines) représente la même ration que le couple (7 souris ; 3 graines) et le couple (26 souris ; 16 graines) représente la même ration que le couple (13 souris ; 8 graines). La procédure précédente donne : 21×26 souris ou 26×21 souris mangent $(9 \times 26 + 16 \times 21)$ graines, donc 546 souris mangent 570 graines. De même 7×13 souris ou 13×7 souris mangent $(3 \times 13 + 8 \times 7)$ graines, donc 91 souris mangent 95 graines. L'idée d'équité permet de vérifier l'équivalence des deux couples (91 souris; 95 graines) et (546 souris ; 570 graines) puisque les rapports internes $\frac{546}{91}$ et $\frac{570}{95}$ sont égaux.

Les contraintes

Le choix de l'équité pour construire des rationnels crée des contraintes didactiques différentes de celles rencontrées dans la situation de « l'épaisseur d'une feuille de papier ». On peut matérialiser la somme de deux épaisseurs en collant deux feuilles. L'addition des mesures s'accompagne d'une « addition d'objets physiques ». Les difficultés de validation sont alors inhérentes aux difficultés habituelles de mesurage. Dans la situation « des graines et des souris » la complexité mathématique s'accompagne d'une complexité didactique décrite précédemment qui nous a fait renoncer à la construction de la somme de deux rations.

3-1-5 Les questions posées à l'expérimentation.

Nous souhaitons créer des conditions pour que l'idée de fonction émerge de manière dialectique avec la notion de variable à travers le modèle linéaire. Ces apprentissages

s'inscrivent dans un processus à long terme (du primaire au secondaire) ; il est difficile de les apprécier sur une expérimentation d'un mois.

Dans la situation « des graines et des souris » la notion d'équité doit être le moteur de la construction des techniques de la proportionnalité. Cette raison sociale permet d'échapper aux contraintes de mesurage mais risque de ne pas créer des conditions suffisamment fortes pour que la proportionnalité apparaisse comme la réponse adéquate à la situation. Depuis Platon, l'équité n'est pas une notion immuable et universelle. Des raisons sociales (idée de mérite) ou économique (loi de l'offre et de la demande) peuvent s'opposer à l'idée « d'égaliser les parts ». Si ces différents modèles d'équité préexistent chez les élèves, ils risquent d'entrer en conflit au moment de la mise en situation.

La proportionnalité est aussi un outil privilégié pour la construction des rationnels. La situation envisagée doit permettre la construction d'un préordre et d'une relation d'équivalence sur des couples mais la complexité que suppose l'addition des rations nous a fait renoncer à l'addition des rationnels.

Nous essaierons d'évaluer l'effet de l'expérimentation de la situation « des graines et des souris » sur les répertoires des élèves. Dans la théorie des situations, les connaissances sont interprétées comme des moyens pour traiter un milieu et sont donc repérables à travers les productions des élèves. On se propose d'estimer l'apprentissage des techniques et du vocabulaire, d'apprécier les différentes formulations pour justifier, vérifier, prouver, démontrer, de repérer les erreurs typiques de la situation telles que l'usage inadéquat d'une opération ou d'une technique, de juger l'évolution des conceptions.⁷

Une conception résulte d'une relation entre apprentissage et compréhension et se manifeste chez l'élève par l'utilisation d'un certain répertoire (techniques et vocabulaire) sous certaines conditions (dans certaines situations) pour traiter un milieu (une question). Nous nous proposons de repérer ces conceptions et de jauger leur consistance.

Une conception suppose une certaine cohérence dans le comportement de l'élève face à un type de tâche mettant en jeu le même concept mathématique. On peut s'attendre à ce que ce comportement se manifeste à l'occasion de plusieurs exercices sous certaines conditions et nécessite la mise en œuvre de plusieurs techniques. De plus l'intérêt d'une conception augmente avec le nombre d'individus qui y adhèrent. Nous serons donc conduits à chercher des groupements d'individus qui utilisent une collection de techniques pour résoudre une famille de situations.

Une conception peut être persistante et faire obstacle à de nouveaux apprentissages ou se modifier sous l'effet de nouvelles leçons. Les nouvelles situations obligent l'élève à avoir une activité réflexive sur sa propre conception : à revoir son raisonnement, à adapter ou modifier ses techniques de résolution, à enrichir son répertoire ... Il va en résulter de nouvelles productions, de nouvelles erreurs, de nouvelles réussites.

En résumé, nous nous proposons de chercher des groupements « saturés » de situations, d'individus, de répertoires et d'étudier leurs évolutions.

⁷ Le mot conception désigne ici l'idée qu'un élève se fait d'une construction ou d'une connaissance mathématique (manière de concevoir ou de juger cet objet mathématique). Elle se manifeste par un comportement modélisable par le chercheur en termes de structures mathématiques.

3 - 2 Description du dispositif

Nous souhaitons construire des situations pour une genèse de la proportionnalité qui répondent aux conditions précédemment décrites mais aussi évaluer leur efficacité sur le développement cognitif des élèves en comparant entre eux les résultats à deux questionnaires de structure mathématique identique. Le premier questionnaire sera soumis aux élèves avant la mise en œuvre des situations et le deuxième questionnaire après l'expérimentation de ces situations.

3-2-1 La situation « des graines et des souris »

L'objectif général de la situation est de faire apparaître le modèle proportionnel comme une convention socialement équitable. Pour que les élèves puissent réaliser l'idée qu'ils se font de l'équité on leur demande de distribuer des paquets de graines à des groupes de souris d'effectifs différents (ou projeter de le faire).

Pourquoi des souris ?

On pourrait impliquer plus directement les élèves en leur demandant par exemple de se répartir des sucreries ; mais ce serait prendre le risque de les entraîner dans des querelles qui même après une issue favorable ne seraient pas sans laisser une certaine amertume. Pour qu'ils soient directement impliqués nous avons tenté de les placer en position de « législateur ». En même temps il est nécessaire de « dramatiser » la situation pour éveiller chez les élèves un sentiment de justice sociale qui fasse naître la nécessité d'élaborer des règles tout en gardant une certaine distance par rapport au milieu de référence qui oblige à objectiver ces règles.

Pourquoi des groupes de souris ?

Si on demande aux élèves de distribuer des graines à l'ensemble des souris, leur tâche se résume à effectuer une division euclidienne (comme au CE). Dans la situation considérée il y a obligation de faire correspondre une quantité de graines à chaque groupe de souris, la quantité de graines étant fonction du nombre de souris.

Pourquoi des paquets de graines ?

Les paquets de graines contribuent à matérialiser la correspondance entre des « grandeurs ». Chaque paquet concrétise la « quantité » que l'élève doit prévoir pour un groupe de souris afin de réaliser l'idée qu'il se fait de l'équité. L'élève doit calculer le nombre de graines à attribuer à un groupe de souris sans se préoccuper de ce que font les souris entre elles au sein d'un même groupe. C'est cette obligation de faire des prévisions sur des quantités qui contribue à construire l'idée de « variable » et de « fonction ». La « dépendance d'origine intellectuelle » dictée par l'équité entre les deux types de variables « quantité de graines » et « quantité de souris » conduit à considérer la « fonction » comme l'explicitation d'une dépendance entre deux grandeurs et non comme une simple correspondance terme à terme.

Pourquoi des graines ?

Pour obliger l'élève à expliciter un nombre rationnel avec un couple d'entiers, il faut que ces entiers soient des mesures de grandeurs discrètes (non fractionnables). Les élèves ont des difficultés à concevoir que 3 souris puissent se partager équitablement 7 graines. Il serait plus confortable pour eux d'imaginer que 3 souris se partagent 7 biscuits car les biscuits sont sécables. Mais sous ces conditions les élèves pourraient expliciter la ration sous la forme

« deux biscuits et un tiers de biscuit par souris ». Or ce n'est pas l'écriture standard à laquelle nous voulons aboutir. Nous souhaitons obliger les élèves à expliciter cette ration par un couple : 7 graines pour 3 souris.

Pourquoi 5 leçons ?

L'articulation logique dans la construction des connaissances de la proportionnalité est dictée par la complexité croissante des différents objets didactiques décrits dans les analyses précédentes. L'ordination des différentes tâches de type « relation fonctionnelle » conduisant à la genèse de l'idée de fonction linéaire et de variable a fait apparaître 3 degrés de liberté didactique :

- 1 Le rapport externe (la ration) peut être entier ou fractionnaire dès les premières leçons.
- 2 On peut permuter les apprentissages des différentes techniques avec les recherches de couples possibles ou hypothétiques.
- 3 Il n'y a pas d'ordre privilégié dans l'introduction des différentes techniques : rapports interne ou externe, addition ou soustraction, recherche de couples intermédiaires.

Nous nous proposons d'expliquer les choix qui ont conduit à la construction de cinq leçons⁸. La longueur des 3 premières nécessite deux séquences d'une heure, les deux autres sont réalisables en une heure chacune.

3-2-2 Les leçons

Leçon 1 :

La proportionnalité comme élément de justice ; coefficient de proportionnalité.

Dans cette leçon on attend des élèves qu'ils choisissent à la suite d'un débat la « proportionnalité » comme modèle d'équité. Dans une première approche les élèves cherchent à égaliser les parts. On pourrait créer la nécessité d'utiliser les rapports internes dès la première leçon en imposant une ration non entière. La complexité de la situation nous a conduit à choisir une progression où les élèves découvrent en premier lieu l'efficacité du coefficient de proportionnalité (la ration est entière) pour réaliser ce modèle. Les raisons en sont les suivantes :

- Les élèves sont confrontés à un milieu nouveau avec lequel ils doivent se familiariser.
- La mise en scène est complexe, certains élèves ne comprennent pas ce qu'on attend d'eux.
- La tâche des élèves comprend deux étapes : concevoir l'équité puis la réaliser.
- Les élèves doivent s'approprier un vocabulaire nouveau et précis pour communiquer :
 - L'idée qu'ils se font de l'équité.
 - Les raisons de leurs actions pour la réaliser.

Par exemple la différence entre « part » et « ration » est délicate ; si ces « parts » et « rations » sont entières alors les élèves pourront utiliser ces nombres entiers pour les désigner à l'occasion des exemples traités. Quand ces concepts seront institutionnalisés les élèves pourront utiliser les mots « part » et « ration » pour désigner, expliquer, décrire les rapports non entiers correspondants.

Dans la première phase de cette leçon on provoque un débat entre élèves qui les conduit à produire des arguments pour rejeter une répartition inéquitable. Dans la phase suivante les élèves réalisent des répartitions équitables en utilisant une quantité fixe de graines par souris

⁸ Le libellé complet de chaque leçon (fiche didactique) est en annexe.

qu'on appellera « ration ». Ces deux premières phases font l'objet d'une séquence d'une heure.

Dans la séquence suivante on fait varier les grandeurs « nombre de souris », « nombre de graines », « ration ». L'une des trois grandeurs étant fixée, la variation d'une autre grandeur détermine la variation de la troisième grandeur.

Leçon 2 :

La conservation des structures pour réaliser l'équité : les rapports internes.

On veut obliger les élèves à transporter les structures d'une grandeur sur une autre grandeur. Les élèves n'ont pas la possibilité d'utiliser le coefficient de proportionnalité car il n'est pas entier.

Dans une première phase on leur demande d'ajuster une distribution pour qu'elle respecte la croissance. Dans la phase suivante, la non-conservation des rapports internes permet de vérifier que la croissance ne suffit pas pour réaliser l'équité d'une distribution. Les élèves doivent alors répartir un maximum de graines entre les lots de souris en respectant les rapports internes. Le rapport externe n'étant pas entier, la ration est définie par un couple (nombre de souris ; nombre de graines). La phase 3 doit rassurer les élèves en leur donnant la possibilité d'appliquer les rapports multiples. Ces trois phases occupent une séquence d'une heure.

Une deuxième séquence permet au maître de contrôler l'acquisition de ces connaissances et aux élèves de réinvestir leurs découvertes pour qu'elles entrent dans un processus d'apprentissage qui en feront des savoirs.

Leçon 3 :

La conservation des structures pour réaliser l'équité : additions et soustractions.

Dans cette leçon on veut encore obliger les élèves à transporter les structures d'une grandeur sur une autre grandeur en privilégiant l'usage des sommes ou des différences. Les groupements de grandeurs se traduisent numériquement par des sommes de mesures.

Dans la phase 1, les élèves sont obligés de passer par un couple intermédiaire pour vérifier l'équité d'une distribution ce qui nécessite la recherche d'un multiple ou d'un diviseur commun à deux mesures. Ils peuvent ensuite faire des regroupements pour compléter une distribution équitable. Dans la phase 2 les élèves doivent comparer les rations des deux distributions équitables qu'ils viennent de construire.

Dans une deuxième séquence, le maître demande aux élèves de faire des attributions équitables à des lots de souris hypothétiques (notion de variable) de manière à préparer la recherche d'un couple intermédiaire pour construire une distribution équitable ou prouver qu'une distribution est équitable ou inéquitable. Les techniques et le vocabulaire sont institutionnalisés afin de faciliter les explications.

Leçon 4 :

L'équité pour la genèse des rationnels : comparer des rations.

L'équité va servir de prétexte pour construire des rationnels. L'idée de ration est présente tout au long du processus. Les élèves se sont familiarisés avec cette notion et ont appris à la désigner avec différents couples équivalents. Ils ont aussi comparé les rations de deux distributions équitables (leçon 3) et découvert deux techniques : comparer les quantités de graines attribuées à deux lots de souris de même effectif ou comparer les effectifs de deux lots de souris à qui on a attribué la même quantité de graines.

Ces comparaisons nécessitent la recherche de couples intermédiaires donc de faire varier les nombres de souris et de graines avec la contrainte de respecter l'équité. Il y a là l'idée de variable et de fonction. On essaie d'habituer les élèves à considérer des quantités arbitraires

de graines ou de souris pour pouvoir faire des comparaisons de rations en utilisant les stratégies décrites précédemment.

Leçon 5 :

Institutionnalisation de la proportionnalité

On souhaite maintenant abstraire de la situation « des graines et des souris » le « concept de proportionnalité », on veut construire une connaissance sur des connaissances.

Pour permettre aux élèves d’avoir une activité réflexive sur la « situation des graines et des souris » on leur propose d’autres milieux objectifs qui nécessitent ou non l’usage des techniques déjà rencontrées dans cette situation. C’est une nécessité d’origine logique, physique ou sociale qui permet de décider s’il y a lieu ou non de conserver les rapports internes et donc d’utiliser ces techniques. C’est en référence à l’invariance de ces rapports que les élèves comparent des situations et donnent un sens au concept de proportionnalité.

Plan des dépendances des leçons

| ↗ | Leçon 1 | Leçon 2 | Leçon 3 | Leçon 4 | Leçon 5 |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Leçon 1 | × | | | | |
| Leçon 2 | | × | | | |
| Leçon 3 | | × | × | | |
| Leçon 4 | × | × | × | × | |
| Leçon 5 | × | × | × | × | × |

Plan d’institutionnalisation dans l’évolution du processus.

L’institutionnalisation est une nécessité pour fixer les idées et communiquer les concepts. Le plan suivant décrit le vocabulaire et les techniques qui doivent être connues des élèves et reconnues officiellement dans la classe à l’issue de chacune des leçons.

Leçon 1 :

Une part est une quantité de graines que mange une souris.

Une répartition ou distribution est équitable si toutes les parts sont égales.

Chacune des parts d’une distribution équitable représente la ration. La ration est caractéristique d’une distribution équitable : c’est la quantité de graines que mange chaque souris.

Leçon 2 :

Les élèves doivent savoir utiliser les rapports internes pour construire une distribution équitable, valider l’équité d’une distribution, expliquer qu’une distribution est inéquitable.

Une ration est maintenant désignée par un couple (nombre de souris, nombre de graines).

Leçon 3 :

A l’issue de cette leçon les élèves doivent savoir :

- Construire des couples équivalents hypothétiques
- Rechercher un « couple intermédiaire » pour vérifier l’équité d’une distribution avec les rapports internes.
- Additionner ou soustraire des couples d’une distribution équitable pour obtenir un autre couple de cette distribution.

Leçon 4 :

Pour comparer les rations de deux distributions équitables il suffit de comparer un couple d'une distribution à un couple de l'autre distribution.

On peut faire l'hypothèse qu'un couple provient d'une distribution équitable donc peut désigner la ration de cette distribution.

Pour comparer deux rations désignées chacune par un couple il peut s'avérer nécessaire d'utiliser un couple intermédiaire.

Leçon 5 :

A l'issue de cette leçon les élèves doivent savoir :

- Accepter ou rejeter le modèle proportionnel sur des grandeurs familières en essayant d'utiliser les techniques de la linéarité, en particulier les rapports internes comme le double.
- Formuler en utilisant le mot « proportionnel ».

3-2-3 Les questionnaires

Analyse a priori pour la construction des questionnaires :

On souhaite évaluer l'effet d'un enseignement de la proportionnalité sur les élèves de CM1.

On va donc poser les mêmes questions avant et après cet enseignement. Pour simplifier ces évaluations il nous a paru souhaitable de ne poser que des exercices standard et en petit nombre.

Pour évaluer les pré requis nous nous limitons à la recherche de l'élément inconnu d'un produit : « valeur d'une part » ou « nombre de parts ». C'est le premier exercice.

Les trois exercices suivants sont consacrés à la recherche d'une quatrième proportionnelle.

En agissant sur la variable « nature du rapport » nous espérons faire apparaître différents algorithmes et justifications. Les élèves sont susceptibles d'utiliser des méthodes de calculs directs : « méthode de réduction à l'unité ; produit en croix ; usage d'un rapport multiple » ou des méthodes de décompositions opportunistes et contextuelles (en produits, quotients ou sommes) adaptées à chaque exercice. Le champ des grandeurs se limite au discret dans les deux tests (les mesures sont des entiers naturels).

- Dans le deuxième exercice la quantité à l'unité est entière :

| | |
|----|----|
| 5 | 20 |
| 17 | |

Méthode suggérée : $\frac{20}{5} \times 17$

- Dans le troisième exercice le rapport scalaire est entier.

| | |
|----|----|
| 7 | 15 |
| 21 | |

Méthode suggérée : $\frac{21}{7} \times 15$

- Dans le quatrième exercice aucun de ces deux rapports n'est entier mais la quatrième proportionnelle est entière.

| | |
|----|----|
| 12 | 15 |
| 28 | |

Méthode suggérée : $\frac{28 \times 15}{12}$

Trois exercices sont ensuite consacrés à la « reconnaissance » d'une situation de proportionnalité ou de non proportionnalité. Dans chaque énoncé, les données sont reprises sous forme de tableau. Aux cinquième et sixième exercices les élèves ont à valider ou invalider les valeurs proposées. Le septième exercice propose de compléter un « tableau de proportionnalité ».

Après les cinq leçons, le deuxième test reprendra les mêmes exercices avec des données numériques différentes.

Protocole pour la passation du questionnaire.

Feuilles élève :

Il est prévu une feuille par exercice⁹. Chaque feuille sera codée en tête de page par un couple m/n où m désigne le numéro d'ordre du test et n celui de l'exercice : $m = 1$ ou 2 et $1 \leq n \leq 7$.

La présentation des feuilles est standardisée comme suit :

| | |
|---|--|
| NOM : | |
| PRENOM | |
| CLASSE | |
| <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">énoncé</div> | |
| Brouillon | |
| Mise au propre | |
| | |
| | |

Chaque élève complètera le cartouche en haut à gauche réservé à son identification. Le cartouche en haut à droite sera complété par le maître qui précisera le sexe, l'âge de l'élève et s'il est redoublant ou non.

Outre l'énoncé, la feuille comporte deux parties à la disposition de l'élève. Une partie est destinée à la recherche, nous l'avons intitulée « brouillon ».

Une autre partie est réservée à la rédaction de la solution. Il semble que cette partie ne fait pas l'objet d'une institutionnalisation standard ; les exigences des maîtres varient d'une école à l'autre, voire d'un maître à l'autre. C'est pourquoi nous l'avons volontairement intitulée « mise au propre » pour laisser un espace de liberté suffisant à toutes les réponses standardisées auxquelles les élèves ont été habitués.

Nous supposons que la requête minimale est une phrase qui répond directement à la question.

Consignes pour le présentateur :

1) Explications de la disposition de la feuille.

2) Temps de lecture :

« Avant de répondre vous lisez l'énoncé. Posez vos crayons. »

⁹ Les fiches intégrales sont en annexe.

- 3) « Maintenant vous pouvez reprendre vos stylos. Vous écrivez tout sur la feuille que je vous ai distribuée. Vous n'effacez pas. Si ce que vous avez écrit ne convient pas vous le barrez. »
- 4) « Si vous ne savez pas faire vous écrivez : "Je ne sais pas faire" »

Remarque :

La requête maximale peut-être plus consistante, comme par exemple :

- 1) Annonce standard de la solution.

Exemple : *Je cherche combien il y a d'élèves dans la classe.*

- 2) Programme des opérations. (C'est une exigence didactique qui montre si l'élève a compris) Il peut-être explicité

- Par une égalité.

Exemple : $76 : (20 : 5) = 19$

- Par un programme de calculs

Exemple : *prix d'un petit pain :*

$$20 : 5 = 4$$

nombre de petits pains achetés par la maîtresse :

$$76 : 4 = 19$$

- 3) Opérations.

Exemple :

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 76 & 4 \\ 36 & 19 \\ 0 & \end{array}$$

- 4) Justifications ou explications de l'organisation de résolution, des résultats.

Exemple :

- *Pour trouver le prix d'un petit pain je divise le prix total par le nombre de petits pains.*
- *Le nombre d'élèves est le même que le nombre de petits pains.*
- *Pour trouver le nombre d'élèves je divise la dépense de la maîtresse par le prix d'un petit pain.*

- 5) Preuves d'arithmétiques : vérification, preuve par 9, ...

Exemple :

- $4 \times 5 = 20$, le prix d'un petit pain est bien 4 francs.

ou

$$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 2 & \times & 2 \\ & 4 & \end{array}$$

- $4 \times 19 = 76$, la maîtresse a bien dépensé 76 francs.

ou

$$\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 4 & \times & 4 \\ & 1 & \end{array}$$

Le premier questionnaire

Exercice 1 :

Dans une boulangerie on peut lire :

5 petits pains au raisin pour 20 francs

- 1) Quel est le prix d'un pain au raisin ?
- 2) Une maîtresse dépense 76 francs dans cette boulangerie pour offrir un pain au raisin à chacun des élèves d'une classe de CM1.
Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Exercice 2 :

Une maîtresse donne 20 bonbons à un groupe de 5 élèves.

Elle ne veut pas faire d'injustice, combien doit-elle donner de bonbons à un groupe de 17 élèves ?

Exercice 3 :

Un maître distribue des billes à ses élèves.

Il donne 15 billes à un groupe de 7 élèves.

Combien doit-il donner de billes aux 21 élèves restants pour que la distribution soit équitable ?

Exercice 4 :

Dans un élevage, 12 escargots mangent 15 salades en une semaine.

Combien faut-il prévoir de salades pour nourrir 28 escargots dans les mêmes conditions ?

Exercice 5 :

Des enfants d'une colonie de vacances partent en excursion pour 5 jours. Une équipe de 7 enfants a reçu 3 boîtes de poudre de chocolat pour leurs déjeuners. Combien de boîtes de chocolat faut-il donner à 14 enfants ?

Paul a fait le tableau suivant :

| | | |
|------------------|---|----|
| Nombre d'enfants | 7 | 14 |
| Nombre de boîtes | 3 | 6 |

Il répond : 6 boîtes. Sa réponse est-elle juste ? Pourquoi ?

Exercice 6 :

Avec une certaine quantité de poudre de chocolat, on peut préparer les déjeuners de 6 enfants pendant 2 jours. Pendant combien de jours pourra-t-on préparer les déjeuners de 12 enfants avec cette même quantité de poudre de chocolat ?

Paul a fait le tableau suivant :

| | | |
|------------------|---|----|
| Nombre d'enfants | 6 | 12 |
| Nombre de jours | 2 | 4 |

Il répond : « Pendant 4 jours ». Sa réponse est-elle juste ? Pourquoi ?

Exercice 7 :

Les enfants d'une colonie de vacances partent en équipes, pour une excursion de 5 jours. L'équipe de 12 enfants a reçu 20 tablettes de chocolat.

Jacques a commencé un tableau pour montrer le nombre d'enfants de chaque équipe et le nombre de tablettes de chocolat qu'il faut leur donner.

| | | | | |
|---------------------|----|----|----|---|
| Nombre d'enfants | 12 | 9 | | 3 |
| Nombre de tablettes | 20 | 15 | 35 | |

Complète ce tableau

Le deuxième questionnaire

Exercice 1 :

Dans une boulangerie on peut lire :

6 petits pains au raisin pour 30 francs

1) Quel est le prix d'un pain au raisin ?

2) Une maîtresse dépense 85 francs dans cette boulangerie pour offrir un pain au raisin à chacun des élèves d'une classe de CM1.

Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Exercice 2 :

Une maîtresse donne 24 bonbons à un groupe de 8 élèves.

Elle ne veut pas faire d'injustice, combien doit-elle donner de bonbons à un groupe de 19 élèves ?

Exercice 3 :

Un maître distribue des billes à ses élèves.

Il donne 17 billes à un groupe de 5 élèves.

Combien doit-il donner de billes aux 20 élèves restants pour que la distribution soit équitable ?

Exercice 4 :

Dans un élevage, 15 escargots mangent 20 salades en une semaine.

Combien faut-il prévoir de salades pour nourrir 33 escargots dans les mêmes conditions ?

Exercice 5 :

Des enfants d'une colonie de vacances partent en excursion pour 5 jours. Une équipe de 11 enfants a reçu 7 boîtes de poudre de chocolat pour leurs déjeuners. Combien de boîtes de chocolat faut-il donner à 22 enfants ?

Paul a fait le tableau suivant :

| | | |
|------------------|----|----|
| Nombre d'enfants | 11 | 22 |
| Nombre de boîtes | 7 | 14 |

Il répond : 14 boîtes. Sa réponse est-elle juste ? Pourquoi ?

Exercice 6 :

Avec une certaine quantité de poudre de chocolat, on peut préparer les déjeuners de 12 enfants pendant 4 jours. Pendant combien de jours pourra-t-on préparer les déjeuners de 24 enfants avec cette même quantité de poudre de chocolat ?

Paul a fait le tableau suivant :

| | | |
|------------------|----|----|
| Nombre d'enfants | 12 | 24 |
| Nombre de jours | 4 | 8 |

Il répond : « Pendant 8 jours ». Sa réponse est-elle juste ? Pourquoi ?

Exercice 7 :

Les enfants d'une colonie de vacances partent en équipes, pour une excursion de 5 jours. L'équipe de 21 enfants a reçu 39 tablettes de chocolat.

Jacques a commencé un tableau pour montrer le nombre d'enfants de chaque équipe et le nombre de tablettes de chocolat qu'il faut leur donner.

| | | | | |
|---------------------|----|----|----|---|
| Nombre d'enfants | 21 | 14 | | 7 |
| Nombre de tablettes | 39 | 26 | 65 | |

Complète ce tableau.

3 - 3 L'expérimentation et les observations

3-3-1 Lieu et dispositif du travail

Les différentes leçons élaborées pour le processus précédemment décrit ont été expérimentées à l'école Jules Michelet de Talence dans le cadre du C.O.R.E.M.¹⁰ de 1997 à 1999. Plusieurs contraintes matérielles (disponibilité, distance entre les lieux d'activité professionnelle et de rencontre des chercheurs, ...) nous ont obligé à concentrer toutes nos activités d'observation le mardi.

Chaque leçon a été expérimentée, observée et filmée le mardi matin après une présentation succincte à l'intention des observateurs (chercheurs et enseignants). Chaque expérimentation était suivie d'une « analyse à chaud » ; l'enseignant qui avait conduit la leçon donnait son impression ; chaque observateur rendait compte de ses notes avant de les remettre au chercheur. Ces comptes rendus et commentaires étaient suivis d'un débat sur le contenu de la leçon, les conditions de son expérimentation, les comportements des élèves, etc.

Les différents commentaires, critiques et arguments de ce débat alimentaient le travail de réflexion des chercheurs du mardi après-midi sur les modifications à apporter à la leçon pour améliorer les conditions de découverte pour les élèves, le fonctionnement de la classe et la conduite pour le professeur.

Le mardi soir enseignants et chercheurs se retrouvaient après la classe pour s'expliquer sur les modifications de la leçon avant de l'expérimenter à nouveau le jeudi sur une classe de même niveau. Mais le temps consacré à ce travail d'explication était insuffisant ; les enseignants n'ayant pas participé à la réflexion de l'après-midi avaient besoin de reparler de l'expérimentation du matin ce qui était constructif pour le chercheur mais laissait peu de temps à la présentation des modifications et aux raisons de ces modifications.

3-3-2 Les organisations successives de 1997 à 1999

Les leçons et observations présentées dans le paragraphe suivant sont le résultat d'un travail d'ingénierie sur deux ans.

Année 1997-98 ; classe de CM1

La première situation avait pour but de conduire les élèves à poser la proportionnalité comme loi physique et à utiliser ses propriétés pour faire des prévisions sur les mesures à obtenir afin de faire naître l'idée de variable et de dépendance entre variables. Pour faire fonctionner le modèle linéaire les élèves devaient équilibrer des plaques métalliques avec des clous à l'aide d'une balance de Roberval. Le pari consistait à gérer une situation sans instruments numériques, sans théorie de mesurage, sans explicitation du modèle utilisé. Les élèves de CM1 ont déjà rencontré le modèle linéaire sur des exemples avec un vocabulaire contextuel et seulement pour déterminer quelques valeurs particulières. On espérait faire réinvestir ce modèle pour prévoir des équilibres après avoir réalisé quelques pesées. Une première expérimentation a fait apparaître plusieurs difficultés et nécessités contradictoires. Plus les élèves font de pesées avec les approximations que cela suppose, plus

¹⁰ COREM : centre d'observation et de recherche pour l'enseignement des mathématiques.

ils ont de résultats expérimentaux et plus ils ont de possibilités de calcul pour faire des prévisions ce qui aboutit à une hétérogénéité des méthodes de calculs et à une dispersion des résultats. Dans ces conditions, les élèves ne peuvent pas savoir si les écarts entre les prévisions et les résultats sont dus aux difficultés de manipulation, au manque de fiabilité de la balance, aux erreurs de calculs ou aux méthodes de calcul. Si trop de dévolution augmente l'hétérogénéité des comportements et disperse les opinions des élèves qui ne savent plus ce qui est légitime ou pas, une fermeture excessive de la partie expérimentale réduit la leçon à un travail formel sur le modèle linéaire. Il est donc apparu nécessaire de problématiser l'expérience en institutionnalisant la dispersion des résultats pour que les élèves puissent valider ou invalider les écarts entre les prévisions issues du modèle linéaire et les mesurages avec leurs fourchettes de possibles. Mais dans cette nouvelle problématique la validation du modèle linéaire est plus raisonnée que révélée par une expérimentation avec une balance. Pour échapper aux difficultés liées aux mesurages est née l'idée d'invoquer une raison sociale d'utiliser la proportionnalité. Nous avons élaboré les premières leçons sur la « situation des graines et des souris » pour faire apparaître la proportionnalité comme réponse à une « attente sociale ». Parallèlement à cette construction, il y a en filigrane l'idée de fonction. D'un point de vue épistémologique, l'idée de fonction fait allusion à une « règle » qui définit une dépendance entre deux variables. Ce n'est pas le fait de faire correspondre un paquet de graines à un lot de souris qui définit une fonction mais la contrainte qu'impose l'idée d'équité entre les nombres de souris et les quantités de graines.

Année 1998-99

Classe de CM2

A la rentrée scolaire 1998-99 nous avons cru opportun de réactiver les connaissances sur la proportionnalité des élèves de CM2 en réitérant les leçons de CM1. Les différentes observations ont montré qu'on ne peut pas faire appel à la mémoire des élèves à propos d'une situation vécue sans en rappeler les consignes, sinon les élèves ne distinguent plus clairement les questions des réponses apportées l'année précédente. Par exemple l'élève à qui on demande ce qu'est une distribution équitable ne sait pas s'il doit faire appel à son appréciation de la « justice naturelle » ou s'il doit retrouver et réutiliser les propriétés de la proportionnalité établies l'année précédente. Il semble préférable de mobiliser les objets institutionnels à propos d'une nouvelle situation ce qui permet à tous les élèves (y compris les nouveaux) de faire fonctionner les techniques de la proportionnalité comme connaissances dans les situations d'action. Leur « remathématisation » dans de nouveaux contextes leur redonne un statut officiel dans la classe.

Classes de CM1

Enfin c'est au mois de mars 1999 que nous avons remis en œuvre le processus expérimental dans deux classes de CM1 avec les questionnaires avant et après les leçons pour tenter d'évaluer l'effet de cet enseignement sur les répertoires des élèves. Dans ce qui suit nous nous proposons de rendre compte de l'expérimentation de ces leçons.

3-3-3 Les observations successives leçon par leçon¹¹

Leçon 1 La proportionnalité comme élément de justice ; coefficient de proportionnalité.

Phase 1 : Répartition inéquitable

a) Présentation de la situation :

Dans cette phase nous avons choisi de provoquer les élèves en leur proposant une répartition « aléatoire » inéquitable de graines à des groupes de souris pour les inciter à manifester leur désaccord et à plaider pour une distribution équitable.

Les élèves travaillent par paire de groupes. Chaque groupe compare les quantités de graines et de souris qui lui sont confiées à celles de l'autre groupe et élabore un argument qui explique pourquoi un groupe de souris est désavantagé par rapport à l'autre. Puis les deux groupes confrontent leurs arguments pour en débattre avant la phase collective où seul un rapporteur présentera un argument à la classe entière.

Lors du recueil des différents arguments le maître note au tableau les paires de couples (nombre de graines, nombre de souris) avec en vis-à-vis l'argument présenté par les élèves.

On espère quelques-uns des arguments suivants :

- Toutes les souris doivent avoir le même nombre de graines à manger.
- Le même nombre de souris doit avoir le même nombre de graines.
- S'il y a plus de souris il faut plus de graines.
- S'il y a le double de souris il faut le double de graines.

b) Commentaires

Pourquoi faire travailler les élèves en groupes ?

Il y a des raisons d'ordre didactique, pédagogique et idéologique.

La situation doit permettre l'élaboration d'arguments et l'organisation d'une plaidoirie où chaque groupe est partie plaignante et doit élaborer son réquisitoire. Le groupe joue un rôle de tri et de mise au point en écrivant les arguments qui entreront dans le débat collectif.

Par ailleurs, la difficulté à gérer un débat avec la classe entière contribue à choisir une autre organisation démocratique où chaque individu peut participer à la recherche de l'équité en confrontant ses arguments à ceux des camarades du groupe avant de les soumettre au jugement du savoir scientifique de la classe. Cette procédure a en outre l'avantage de limiter le nombre de propositions à traiter par le maître face à la classe entière.

Pourquoi faire travailler les groupes d'élèves par paires ?

Dans une première expérimentation nous avons demandé aux élèves de comparer « les graines et les souris » qui leur étaient confiées à toutes les autres attributions de la classe. Cette situation avait deux défauts : il faut beaucoup de temps aux élèves pour se familiariser avec l'ensemble des attributions de la classe ; le débat collectif sur les arguments proposés par les élèves est entièrement à la charge du professeur, il est très lourd à gérer quand il n'y a pas dans la classe une culture du débat scientifique.

On veut faire postuler aux élèves que l'équité passe par l'égalisation des parts, tout en évitant un usage algorithmique prématuré du coefficient de proportionnalité qui nie la raison sociale du choix de la proportionnalité. On va faire en sorte que ce coefficient ne soit pas apparent en choisissant des couples (nombre de graines, nombre de souris) où ce rapport n'est pas entier.

¹¹ On pourra trouver le texte intégral des leçons en annexe.

c) Déroulement et remarques

1. Certains élèves imaginent une répartition équitable entre les souris d'un même groupe et ne comparent pas les deux groupes.
2. Si on accepte les restes on peut toujours faire des répartitions équitables avec un coefficient entier.
3. Les arguments des élèves sont très contextualisés et formulés avec les mesures qui sont à leur disposition. Il en résulte deux conséquences :
 - La conception qui se construit chez l'élève (microgenèse) est très dépendante des valeurs numériques qui lui sont proposées. Elle doit donc être provisoire.
 - Le maître est obligé de généraliser pour institutionnaliser mais certains élèves n'écourent ni les propositions de leurs camarades ni celles du maître.

d) Productions des élèves

| Groupe | Gaëtan, Séda | Jérémy, Quentin |
|---------|--------------|-----------------|
| Souris | 5 | 3 |
| Graines | 19 | 19 |

Jérémy : Le groupe de 3 aura plus à manger que le groupe de 5.

Séda : Ce serait 4 et 4 ce serait pareil.

Procédure : Les élèves ont repéré qu'à un même nombre de graines doit correspondre un même nombre de souris.

| Groupe | Oumar, Alix | Céline, Youssouph |
|---------|-------------|-------------------|
| Souris | 3 | 6 |
| Graines | 17 | 19 |

Céline et Youssouph : « Les trois souris auront 6 graines chacune. Les 6 n'en auront que 3 chacune. »

Oumar : « On a fait les tables. »

Alix : « Dans ce groupe 6 disons 5 chacune, dans ce groupe $3 \times 6 = 18$ donc 3 chacune ; inéquitable. »

Procédure : Les élèves utilisent une **quantité à l'unité** approximative.

Maîtresse : « Si 3 souris ont 17 graines, vous ne voyez pas combien il faudrait de graines ? »

La maîtresse essaie de faire une institutionnalisation différentielle locale¹² du double qui échoue car les élèves ne sont pas prêts.

| Groupe | Pierre, Marika | Thibaud, Amélie |
|---------|----------------|-----------------|
| Souris | 7 | 8 |
| Graines | 31 | 26 |

Marika : « Nous avons moins de souris mais plus de graines. Par contre eux ont plus de souris mais moins de graines. C'est injuste. »

Pierre : « Toutes les souris n'auront pas la même quantité de graines. »

Thibaud et Pierre : « Quand on est en plus grand nombre, nous devons avoir une plus grande quantité de graines que ceux qui sont moins que nous. »

Procédures :

Marika semble privilégier la **croissance**.

Pierre utilise la **quantité à l'unité**.

Mais Thibaud et Pierre souscrivent aussi à la **croissance**.

| Groupe | Hugo, Sunay | Marion, Benaacher |
|---------|-------------|-------------------|
| Souris | 6 | 7 |
| Graines | 19 | 35 |

Sunay : « 3 graines par souris et il en reste 1 »

Hugo : « Eux ils en ont 2 graines de plus. »

¹² Cette notion sera développée dans la partie 4 page 300.

Hugo : « Ce n'est pas équitable parce que le groupe de Marion et Benaacher ont 2 graines de plus que le groupe de Hugo et Sunay. »

Sunay : « 54 graines et $6+7=13$; 54 divisé en 13 ... »

Marion : « $6 \times 3=18 \rightarrow 19$; on ne peut pas partager une graine en 6. »

Benaacher : « $7 \times 5 = 35$ »

Marion et Benaacher : « Parce que dans notre groupe les souris auront cinq graines chacune et dans l'autre elles n'en auront que trois chacune. »

Procédure : Les élèves cherchent à déterminer une quantité à l'unité.

e) Résultats

La méthode la plus utilisée est l'usage d'une part invariante de graines par souris ; c'est cette « quantité à l'unité » que nous appellerons « ration ».

La principale limite de cette première phase est que tous les élèves ne travaillent pas sur toutes les attributions inéquitables et donc ne peuvent pas élaborer tous les arguments. La phase collective de communication ne peut pas remplacer la phase d'action, la possibilité d'entendre les arguments ne remplace pas leur découverte. Néanmoins tous les élèves ont vécu une expérience et ont conscience d'avoir contribué au rejet de cette répartition inéquitable. Ils auront l'occasion de voir les différentes techniques de la proportionnalité dans les leçons suivantes.

Remarque : Il est plus facile pour les élèves de faire référence à des règles de calcul que de rechercher des « raisons sociales » pour leur argumentation. Les arguments issus de cette phase 1 doivent être des prétextes pour l'élaboration d'une distribution équitable et non des techniques pour construire cette distribution. Or le fait de recopier ces arguments au tableau pour les soumettre à la critique de la classe entière a un effet institutionnalisant qui tend à les faire apparaître d'emblée comme des règles de calcul qui occultent les raisons sociales desquelles ils sont issus.

Phase 2 : vers une répartition équitable qui utilise le maximum de graines

a) Présentation de la situation

Après avoir provoqué « l'indignation » des élèves avec une répartition inéquitable on leur demande de réaliser une distribution équitable puis de chercher celle qui utilise le maximum de graines disponibles.

Les enfants restent en équipes comme à la fin de la phase 1, un seul rapporteur présentera au tableau noir la méthode utilisée par son groupe.

b) Consigne et déroulement

Au début de cette phase le maître ramasse les « groupes de souris » et les affiche au tableau afin que les élèves comprennent bien que leur tâche consiste à attribuer un paquet de graines à chacun de ces groupes.

Le maître :

Puisque la distribution des graines avec les paquets n'est pas équitable, on va ouvrir les paquets pour les refaire. (On ne change pas la constitution des groupes de souris)

*Nous voulons distribuer le plus de graines possible, toutes si on peut. Comment faut-il **refaire les paquets** pour que la distribution soit équitable et utilise le plus de graines possible ? Vous faites les calculs sur vos feuilles. Quand vous aurez fini, on recueillera vos propositions au tableau.*

Procédures envisagées (après calculs du nombre de souris (43) et du nombre de graines (137)) :

- Avec 2 graines par souris et 43 souris on utilise 86 graines. On peut donc donner une graine de plus par souris et utiliser 129 graines.
- Avec 4 graines par souris, pour nourrir 43 souris il faudrait 172 graines. Il faut donc donner une graine de moins par souris car il n'y a que 137 graines.
- Il y a 43 souris et 137 graines en tout. Il faut donc $137 \div 43 = 3$ graines par souris (il reste 8 graines).

Institutionnalisation:

La définition de l'équité n'incombe pas aux élèves et le maître peut l'induire en posant des questions.

Le maître :

1. Est-ce que «équitable» signifie que toutes les équipes ont le même nombre de graines ?
Non, s'il y a plus de souris dans une équipe, il leur faut plus de graines.
2. Est-ce que deux groupes égaux de souris doivent avoir le même nombre de graines ? Oui.

Si toutes les souris mangent la même quantité de graines alors la distribution est équitable.

Le maître : Est-ce que maintenant toutes les souris mangent la même quantité de graines ?
Est-ce que toutes les souris ont la même part ?

Dans une distribution équitable, la part de graines qui revient à chaque souris est appelée la « ration » de cette distribution.

c) Commentaires

1. L'idée de globaliser apparaît comme en rupture par rapport à la première phase car elle s'oppose aux petits arrangements locaux éventuellement élaborés dans chaque groupe.
2. Le fait de demander d'emblée aux élèves de construire une répartition équitable qui utilise le maximum de graines induit fortement l'idée de sommer les nombres de graines. Mais certains élèves ne savent plus quoi faire de cette somme ; d'autres se lancent à diviser le nombre total de graines par le nombre total de souris sans donner de sens à ce calcul et sans savoir quoi faire du résultat. Ces comportements se sont manifestés de nouveau dans les exercices d'entraînement. Pour éviter d'induire l'usage de la division euclidienne, on peut demander aux élèves de faire une distribution équitable avant de chercher celle qui utilise le maximum de graines.
3. Un autre point faible de cette phase 2 en relation avec le point précédent est l'absence de rétroaction dans la situation. Si la validation d'une conception de l'équité ne peut être que raisonnée (c'est un concept qui peut être débattu en classe) sa réalisation pourrait être soumise à une validation perceptive par des manipulations sur des dessins de souris ; mais le nombre important de groupes de souris ne facilite pas la tâche.

d) Production des élèves

Groupe Gaëtan, Séda, Jérémy, Quentin

| | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|---------------|
| Souris | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | |
| Graines | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 10 | 10 | 11 | 11 | 13 | Proposition 1 |
| Graines | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 15 | 15 | 19 | 19 | 23 | Proposition 2 |

Dans la première proposition l'élève ajoute une graine à chaque fois qu'on augmente d'une souris. Dans la deuxième proposition et après avoir additionné les nombres de graines qu'il a utilisées dans la première proposition (soit 89) il semble qu'il réajuste en augmentant le nombre de graines avec le nombre de souris.

Procédure : C'est une **procédure par ajustements**.

Groupe Kevin, Julien, Roxanne, Remziye

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| Souris | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| Graines | 40 | 40 | 30 | 30 | 20 | 15 | 15 | 10 | 10 | 5 |

Cette distribution respecte la **croissance** mais a été recopiée à l'envers.

Plusieurs élèves attribuent un nombre arbitraire de graines pour le plus petit lot de souris puis construisent une suite arithmétique de raison 5 ou 2 ou 4 en ajoutant cette raison à chaque souris supplémentaire.

Groupe : Pierre, Marika, Thibaud, Amélie.

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Souris | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| Graines | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| Graines | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 12 | 12 | 14 | 14 | 16 |
| Graines | 9 | 9 | 12 | 12 | 15 | 18 | 18 | 21 | 21 | 24 |
| Graines | 12 | 12 | 16 | 16 | 20 | 24 | 24 | 28 | 28 | 32 |

Pierre et Marika attribuent une graine à chaque souris puis soustraient les 53 graines : $235 - 53 = 182$; puis réitèrent le procédé. Pierre écrit successivement les tableaux correspondants.

Procédure : c'est une **attribution répétée d'une graine** par souris.

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Souris | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| Graines | 12 | 12 | 16 | 16 | 20 | 24 | 24 | 28 | 28 | 32 |

Thibaud et Amélie : « On va additionner toutes les souris et on va diviser et on va voir combien de graines pour chaque souris et on va répartir. »

Thibaud : « Chaque souris doit avoir 4 graines mais il en reste 23. ». Il complète ensuite le tableau :

Procédure : C'est une **recherche de la quantité à l'unité (méthode de réduction à l'unité)**.

Groupe : Hugo, Sunay, Marion, Benacher

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Souris | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| Graines | 12 | 12 | 16 | 16 | 20 | 24 | 24 | 28 | 28 | 32 |

Marion attribue 8 graines par souris au premier essai. Au deuxième essai elle compte de tête le nombre total de souris (53) puis fait des additions partielles pour calculer le nombre de graines et trouve 235 puis fait la division juste et écrit «chaque souris aura 4 graines» et complète le tableau :

Procédure : c'est une **méthode de réduction à l'unité (MRU)**.

Groupe : Oumar, Alix, Céline, Youssouph.

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Souris | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| Graines | 12 | 12 | 16 | 16 | 20 | 24 | 24 | 28 | 28 | 32 |

Oumar et Alix font des essais successifs :

$$53 \times 12 = 636. \text{ Si c'est } 10 \rightarrow 530. \text{ Donc on essaie } 5 :$$

$$5 \times 53 = 265. \text{ On essaie } 3$$

$$3 \times 53 = 159. \text{ On va essayer plus, } 4$$

$$4 \times 53 = 212$$

Procédure : Ces deux élèves recherchent la **quantité à l'unité par encadrements**.

e) Résultats

Trois procédures sont prépondérantes :

- Certains élèves attribuent une quantité de graines arbitraire au groupe de souris de plus petit effectif puis ajoutent un nombre fixe de graines à chaque souris supplémentaire. Ils

construisent ainsi une suite arithmétique ; cette procédure additive va réapparaître par la suite.

- D'autres essaient d'utiliser une part invariante arbitraire de graines par souris puis ajustent cette ration pour essayer d'utiliser le maximum de graines possible.
- Enfin d'autres encore divisent le nombre total de graines par le nombre total de souris pour déterminer la ration.

A l'issue de cette leçon les élèves disposent d'un vocabulaire précis : « part, ration, équitable, inéquitable ».

Prolongement de la leçon 1 : deuxième séquence.

a) Présentation de la situation

Dans ces deux phases on fait varier les grandeurs : nombre de souris, nombre de graines, ration. L'une des trois étant fixée, la variation de l'une des deux restantes détermine la variation de l'autre. La perception de cette dépendance devrait peu à peu conduire les élèves à rejeter les procédures par approximations successives.

b) Déroulement résumé

Phase 3 : on a davantage de graines ; il faut rechercher la nouvelle ration.

Le nombre total de souris est fixé. En faisant varier le nombre total de graines la ration varie et apparaît ainsi comme une grandeur variable.

Phase 4 : La ration est fixe, les autres grandeurs sont variables

Dans cette phase la ration est entière et donnée par un couple : 28 graines pour 7 souris. Pour trouver la ration 4 les élèves réutilisent les différentes procédures rencontrées dans les phases précédentes, la division n'est pas la seule technique utilisée.

On veut faire naître l'idée de variable et de fonction (de grandeurs dépendantes) en demandant aux élèves les valeurs homologues à différentes quantités de graines ou de souris. La fonctionnalité du coefficient 4 apparaît à travers différents calculs des élèves.

c) Commentaires

La quantité à l'unité étant fixée, elle devient le coefficient d'une fonction linéaire entre deux variables. Bien sûr, cet usage répété du coefficient de proportionnalité va s'ériger en obstacle. Les leçons suivantes auront pour objet de le combattre en mettant les élèves dans l'obligation de « transporter les structures ».

d) Résultats

Il est difficile de savoir ce que les élèves ont réellement appris avec les productions de ces deux phases. Il y a probablement des apprentissages implicites qui prennent de la consistance sur plusieurs leçons et nécessitent un processus long, de quelques semaines à plusieurs mois voire plusieurs années. Les notions de variable et de fonction ne peuvent pas prendre corps sur une leçon. On ne peut espérer qu'une conception protomathématique de ces objets à l'issue de ce processus. Par contre les jeux des enfants dans la cour de récréation ont montré que le mot « équitable » était institutionnalisé dès la première leçon.

Remarque : Ces apprentissages à long terme risquent d'être négligés car ils ne se manifestent pas de manière suffisamment immédiate pour être gratifiants. Certains enseignants des classes en aval en les « récupérant » peuvent avoir l'illusion d'être les seuls responsables de ces connaissances chez leurs élèves.

Leçon 2 La conservation des structures pour réaliser l'équité : les rapports internes.

Phase 1 : Croissance d'une distribution

a) Présentation de la situation

On demande aux élèves d'ajuster une répartition pour qu'elle respecte la croissance, condition qui est nécessaire mais ne suffit pas à satisfaire l'idée que les élèves se sont faite de l'équité. Les lots de souris et les paquets de graines sont dessinés sur des cartons pour pouvoir les afficher au tableau.

Cette phase n'est pas indispensable pour la compréhension de la leçon mais elle donne l'occasion de réactiver la situation et de rappeler les résultats de la leçon 1 tout en préparant la leçon 2.

b) Consigne et déroulement

Le maître : *Aujourd'hui nous allons aider 4 groupes de souris à se répartir 4 paquets de graines.*

Le maître les montre et les affiche au tableau noir, sans les ordonner.

Le maître : *Pour commencer nous allons attribuer aux groupes de souris ces paquets de graines (sans ouvrir les paquets et sans modifier les groupes de souris), de la façon la moins injuste possible. Ecrivez sur vos feuilles une répartition qui soit la moins inéquitable possible.*

c) Production des élèves

Certains enfants comparent les paires de couples mais n'ont pas une vision globale de la distribution, de telle sorte qu'ils ne peuvent pas respecter la croissance de la correspondance.

Par exemple :

| | | | | |
|-------------------|---|----|----|----|
| nombre de souris | 6 | 21 | 3 | 15 |
| nombre de graines | 8 | 31 | 20 | 54 |

Phase 2 et 3 : Utilisation des rapports internes

a) Présentation de la situation

Les données matérielles et numériques sont celles de la phase 1.

On veut conduire les élèves à réaliser une distribution équitable en utilisant les rapports internes. La difficulté est la suivante : si on accepte les restes de graines, il est toujours possible de réaliser une distribution équitable en utilisant une ration entière. Mais le choix des valeurs numériques est tel que la ration de la distribution équitable qui utilise le maximum de graines disponibles n'est pas entière. Les élèves devront formuler et valider des raisonnements corrects à partir de la règle d'équité suivante : « Un même nombre de souris doit toujours manger une même quantité de graines ». Une telle règle conduit les élèves à additionner des lots de souris de même effectif et donc à utiliser les rapports multiples.

b) Consigne et déroulement

Le maître : *On peut maintenant ouvrir les paquets. Trouvez une distribution équitable qui utilise le plus possible de ces graines et écrivez la sur votre feuille.*

Recueil des distributions proposées :

Le maître choisira en premier lieu une distribution inéquitable s'il y en a une et la fera critiquer par les élèves. **Il suffit d'un seul argument pour prouver qu'une distribution est inéquitable** mais l'enseignant pourra laisser les élèves en fournir plusieurs.

Puis le maître montrera le cas d'un élève qui ne tient pas compte du nombre de graines disponibles :

| | | | | |
|----------------------------|---|----|----|----|
| nombre de souris à nourrir | 3 | 6 | 15 | 21 |
| nombre de graines | 9 | 18 | 45 | 63 |

Le maître fait expliciter par l'élève la construction de ce tableau ; il est possible que l'élève ait utilisé le rapport externe 3.

Le maître :

Est-ce que cette répartition est équitable ? Est-ce qu'il y a assez de graines pour la réaliser ?

Commentaire : le maître peut compter effectivement les graines ou simuler de le faire.

Le maître : *Alors, qui parmi vous a trouvé une répartition équitable qui n'utilise pas plus de 113 graines ?*

Remarque : S'il n'y a que quelques élèves dans ce cas, le maître relance l'activité et propose : *Maintenant, vous savez qu'il faut faire une distribution équitable avec 113 graines au maximum, essayez à nouveau.*

Le maître choisit une distribution équitable qui n'utilise pas le maximum de graines :

| | | | | |
|----------------------------|---|----|----|----|
| nombre de souris à nourrir | 3 | 6 | 15 | 21 |
| nombre de graines | 6 | 12 | 30 | 42 |

Comme précédemment, le maître fait expliciter par l'élève la construction de ce tableau.

Le maître : *Est-ce que quelqu'un a pu distribuer encore plus de graines sans dépasser 113 ?*

On peut espérer la distribution suivante :

| | | | | |
|----------------------------|---|----|----|----|
| nombre de souris à nourrir | 3 | 6 | 15 | 21 |
| nombre de graines | 7 | 14 | 35 | 49 |

Le maître fera alors expliciter la méthode ; on attend la technique suivante : envisager pour le plus petit lot de souris un certain nombre de graines puis utiliser les rapports internes pour les autres lots de souris. On compte alors le total des graines :

- s'il y en a trop on enlève une graine au plus petit lot et on complète le tableau comme précédemment.

- s'il reste des graines on en ajoute une au plus petit lot de souris et on complète le tableau.

Il faut faire valider la distribution voulue par un raisonnement sur la conservation des rapports. C'est au maître d'organiser le débat pour obtenir une validation raisonnée :

Le maître : *Est-ce que toutes les souris mangent la même quantité de graines ?*

Est-ce que 14 graines pour 6 souris c'est la même chose que 7 graines pour 3 souris ou que 35 graines pour 15 souris ou que 49 graines pour 21 souris ?

Recueil des réponses : Réponse espérée : « oui car dans chaque groupe 3 souris ont toujours 7 graines. »

(6 souris = 3 souris + 3 souris et 14 graines = 7 graines + 7 graines).

c) Commentaires :

Un des objectifs de la leçon précédente était de valider l'idée que l'équité passe par l'égalisation des parts. Les élèves avaient découvert à cet effet l'efficacité du coefficient de proportionnalité quand il est entier pour réaliser une distribution équitable. En appelant « ration » chaque part d'une telle distribution, les élèves disposaient dès la première leçon du

concept et du vocabulaire. Nous savions que cette ration entière allait s'ériger en obstacle pour les rations non entières. Il est difficile pour des enfants de concevoir que 3 souris puissent se partager équitablement 7 graines. C'est un paradoxe de la situation : nous souhaitons créer l'obligation d'explicitier une ration (non entière) par un couple d'entiers, ce qui explique le choix des paquets de graines et des lots de souris mais la réalisation de l'équité suppose qu'il est possible de fabriquer des parts égales. Pour permettre aux élèves d'imaginer que c'est possible le maître leur demandera d'accepter qu'au sein de chaque groupe les souris se débrouillent entre elles parce que les graines sont écrasées avant la distribution effective. La possibilité de faire des distributions équitables entre lots de souris sans que la ration soit un entier est un saut informationnel incontournable dans la situation envisagée. La contrainte « attribuer des graines à des lots de souris » et non à des souris est l'instrument ad hoc pour faire apparaître les propriétés de la linéarité comme conditions nécessaires et adaptées à une répartition équitable.

d) Productions des élèves

L'effet observé de la nature des rapports et des valeurs numériques sur les décisions des élèves confirme qu'il s'agit là de variables didactiques fondamentales.

Comme prévu beaucoup d'élèves cherchent une ration entière. Exemple :

James :

| | | | | |
|-------------------|---|----|----|----|
| Nombre de souris | 3 | 6 | 9 | 12 |
| Nombre de graines | 6 | 12 | 18 | 24 |

On ne peut pas donner plus de graines à chaque souris car $75 : 30 = 2 \text{ r } 15$

Lors d'une première expérimentation une phrase maladroite : « Chaque souris mange le même nombre de graines » a renforcé l'obstacle de la ration entière pour le passage à la ration rationnelle. De plus le choix des valeurs numériques a fait apparaître fréquemment le rapport 2. Le double était devenu un modèle que les élèves essayaient de réutiliser dans les rapports externes ou internes, attitude renforcée par une accélération de la leçon qui tendait à instaurer le calcul mental comme outil privilégié et renforçait la recherche de relations entre nombres et la construction de suites numériques. Par exemple :

Céline :

| | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|
| Nombre de souris | 7 | 6 | 4 | 10 |
| Nombre de graines | 35 | 13 | 10 | 14 |

On peut suspecter le « jeu » suivant : $7+6=13$; $6+4=10$; $4+10=14$

Nous avons observé lors de la première leçon que certains élèves ont tendance à vouloir utiliser un rapport arithmétique. Cette idée a été renforcée par un choix maladroit des effectifs souris : « 3, 6, 9, 12 ». La suite attendue des quantités de graines est une suite arithmétique ; elle ne permet pas de savoir si l'élève l'a construite avec une raison arithmétique ou avec des rapports géométriques internes. Mais certains exemples ne laissent pas de doute :

Sophie :

| | | | | |
|-------------------|---|----|----|----|
| Nombre de souris | 3 | 6 | 9 | 12 |
| Nombre de graines | 8 | 10 | 12 | 14 |

D'autres procédures plus archaïques sont réapparues : Julien fait des dessins, Marika distribue une graine par souris et réitère sa technique, Quentin fait des « partitions » :

$$\begin{array}{r}
 15 + 3 + 3 = 21 \text{ graines} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 5 + 1 + 1 = 7 \text{ souris}
 \end{array}$$

Après quelques essais infructueux environ un tiers des élèves finissent par construire la distribution attendue avec les rapports internes et font la somme des graines utilisées pour vérifier s'il y en a assez. Nous avons aussi noté une procédure particulière. Voici les essais successifs de Thomas :

| | | | | |
|-------------------|---|----|----|----|
| Nombre de souris | 3 | 6 | 9 | 12 |
| Nombre de graines | 5 | 10 | 15 | 20 |
| Nombre de graines | 6 | 12 | 18 | 24 |
| Nombre de graines | 7 | 14 | 21 | 28 |

Thomas :

« J'ai rajouté 1 graine de plus au plus petit groupe. Après j'ai mis 2 graines de plus :

1 graine à 3 souris

2 graines à 6 souris car le nombre de souris est plus élevé et on multiplie par 2.

3 graines à 9 souris car c'est $3+3+3$.

Ça fait 70 en tout. »

e) Remarques

Il y a beaucoup d'implicite chez les enfants qui ont compris. Ils ne disposent pas de vocabulaire pour communiquer comment ils égalisent les parts et pourquoi ils le font. Ainsi apparaît dans la classe l'idée que la leçon consiste à construire un « jeu de règles sur les nombres » et empêche une argumentation contradictoire des élèves sur la notion d'équité.

La recherche d'arguments oblige les élèves à raisonner. Il est souhaitable qu'ils valident à plusieurs reprises les règles pour « égaliser les parts » avant de les institutionnaliser en tant que théorèmes locaux à la situation.

L'un des exercices d'entraînement permet aux élèves d'utiliser à leur guise le coefficient de proportionnalité ou les rapports internes et de comparer les deux méthodes. Il donne aussi l'occasion de rappeler que la ration entière n'est qu'un cas particulier de ration et qu'elle peut être codée avec des couples (nombre de graines, nombre de souris), l'un de ces couples ne comportant qu'une seule souris.

Le maître : J'ai donné 15 graines à 3 souris.

Complétez le tableau suivant pour que la distribution soit équitable :

| | | | | |
|----------------------------|---|---|----|---|
| nombre de souris à nourrir | 7 | 6 | 3 | 1 |
| nombre de graines | | | 15 | |

Prolongement de la leçon 2 : deuxième séquence (Le contrôleur).

f) Résumé

L'observation d'une première expérimentation a fait apparaître la nécessité d'une séquence institutionnalisante.

Ce prolongement va permettre aux élèves de se familiariser avec le vocabulaire et les techniques rencontrées : usage des rapports internes ou du coefficient de proportionnalité. Dans cette séquence tous les élèves font les mêmes exercices. Les élèves travaillent par deux, chacun contrôlant la technique et les arguments de l'autre. Ce contrôle réciproque permet une rétroaction qui valide ou invalide les propositions de chaque élève. Le recueil des arguments au tableau à l'issue de chaque exercice et sous le contrôle de la classe entière est une phase institutionnalisante. Les exercices ont été choisis pour permettre à tous les élèves de faire le point des savoirs.

g) Résultats

C'est le rapport au réel qui non seulement illustre mais explique les conditions de l'équité sociale. Il permet d'engager les élèves sur l'idée fondamentale « à un même nombre de souris doit correspondre le même nombre de graines », propriété qui va engendrer et valider celles de ration et de linéarité. C'est donc cet argument qu'il faut officialiser car il sert de référence tout au long du débat. L'institutionnalisation permet à l'élève de distinguer les savoirs de ses propres connaissances, l'équité institutionnelle de l'idée qu'il s'en faisait. Le maître peut l'y aider en manifestant son soutien aux efforts d'appropriation des différents répertoires ; mais le respect de l'individu est contraire à l'idée de connivence et c'est au maître qu'incombe l'institutionnalisation des savoirs.

A l'issue de cette leçon nous pensons avoir rendu opérationnel le répertoire suivant :

Une distribution est équitable si toutes les souris mangent la même quantité de graines.

Quand une distribution est équitable, le double, le triple,... de souris mangent le double, le triple,... de graines.

La quantité de graines que mange chaque souris d'une distribution équitable est appelée la ration de cette distribution.

Pour désigner une ration il faut deux nombres, le nombre de souris et le nombre de graines que mangent ces souris. Par exemple : 7 graines pour 3 souris ou 14 graines pour 6 souris ou 21 graines pour 9 souris, etc.

Leçon 3 La conservation des structures pour réaliser l'équité : additions et soustractions.

Phase 1 : Utilisation de l'addition et de la soustraction

a) Présentation de la situation

Après avoir conduit les élèves à utiliser le rapport externe ou les rapports internes nous souhaitons créer les conditions qui les obligent à additionner ou soustraire terme à terme des couples équivalents de graines et de souris pour construire des distributions équitables. On ne peut pas exiger des élèves qu'ils complètent une distribution sans leur demander au préalable de vérifier l'équivalence des couples qui y figurent. Or pour effectuer cette vérification les élèves vont utiliser un couple intermédiaire dont les termes sont diviseurs (ou multiples) communs des termes homologues de deux autres couples. La connaissance de ce couple intermédiaire permet alors de construire les couples cherchés grâce aux rapports multiples, ce qui rend inutile l'addition et la soustraction. Pour palier à cette contradiction on va demander aux élèves de faire des manipulations (soustraire ou additionner) de graines et de souris équitablement nourries en créant de nouvelles contraintes.

b) Consignes et déroulement

Les élèves vont travailler sur deux exemples qui seront utilisés dans la phase 2.

Le maître demande aux élèves de compléter les distributions suivantes pour qu'elles soient équitables.

Le premier exemple :

| | | | |
|-------------------|----|---|----|
| Nombre de souris | 4 | 8 | 16 |
| Nombre de graines | 10 | | |

ne pose aucune difficulté et peut être l'occasion pour le maître de rappeler ce qu'est une ration et comment la coder.

Le maître :

On doit transporter ces souris et ces graines avec 3 cages qui contiennent au plus 10 souris chacune. On veut que pendant le transport la distribution reste équitable. Ecrivez sur vos feuilles une distribution équitable qui permet ce transport.

Recueil des réponses et des méthodes :

Il y a deux étapes :

1. Enlever 6 souris au lot de 16 souris et les graines correspondantes. Le passage par le couple intermédiaire (2 ; 5) est incontournable pour déterminer combien de graines mangent 6 souris.
2. Rajouter les souris et les graines correspondantes au lot de 4 souris.

| | | | |
|-------------------|----|----|----|
| nombre de souris | 10 | 8 | 10 |
| nombre de graines | 25 | 20 | 25 |

Deuxième exemple :

Le maître : *Nous avons maintenant 4 lots de souris à nourrir.*

Le maître affiche au tableau :

| | | | | |
|----------------------------|----|----|----|---|
| nombre de souris à nourrir | 6 | 15 | 21 | 9 |
| nombre de graines | 14 | 35 | | |

Le maître : *Peut-on compléter cette distribution pour qu'elle soit équitable ? Ecrivez vos calculs et explications sur vos feuilles.*

Recueil des justifications :

La justification complète pour les deux premiers couples, passe par le calcul du nombre de graines pour 3 souris (ou 30 souris). Les élèves peuvent ensuite utiliser l'addition et la soustraction ou les rapports multiples.

Un élève vient donner les réponses de son groupe en expliquant et justifiant les techniques utilisées. Les groupes qui ont utilisé des méthodes différentes délèguent un représentant pour les expliquer devant la classe.

Le maître : *On doit transporter ces souris et ces graines avec 4 cages qui contiennent au plus 15 souris chacune. On veut que pendant le transport la distribution reste équitable. Ecrivez sur vos feuilles une distribution équitable qui permet ce transport.*

Recueil des réponses :

| | | | | |
|----------------------------|-------|----|-------|----|
| nombre de souris à nourrir | 6+6 | 15 | 21-6 | 9 |
| nombre de graines | 14+14 | 35 | 49-14 | 21 |

Institutionnalisation : **Si une distribution est équitable alors tout groupement qui conserve les correspondances (les attributions) donne une distribution équitable.**

c) Commentaires

Pour modifier la distribution afin de permettre le transport les élèves peuvent utiliser le couple (2 ;5) au premier exemple et (3 ;7) au deuxième exemple puis les rapports internes. Mais la réalisation effective sur les graines et les souris va nécessiter des manipulations qui vont inférer des soustractions et des additions de graines et de souris.

d) Productions des élèves

Les obstacles de la ration entière et du rapport double se manifestent encore.

Certains élèves s'aident de dessins pour partitionner un groupe de souris en sous-groupes afin de faire apparaître un couple intermédiaire de souris et de graines. Par exemple le dédoublement de 6 souris et 14 graines donne le couple (3 souris, 7 graines).

Phase 2 Introduction à la grandeur « ration » : comparaison de deux distributions.

a) Présentation de la situation

Le rapport entre le nombre de graines et le nombre de souris (le coefficient de proportionnalité) est une grandeur variable : la ration. Cette ration n'est pas calculable par des élèves de CM1 quand elle n'est pas entière. On veut quand même leur faire comparer deux rations. Ils vont devoir chercher des mesures communes aux deux distributions précédentes.

b) Consignes et déroulement

Le maître : *Nous avons fabriqué deux distributions équitables.*

(Le maître montre ces distributions au tableau)

| | | | |
|----------------------------|----|----|----|
| nombre de souris à nourrir | 4 | 8 | 16 |
| nombre de graines | 10 | 20 | 40 |

| | | | | |
|----------------------------|----|----|----|----|
| nombre de souris à nourrir | 6 | 15 | 21 | 9 |
| nombre de graines | 14 | 35 | 49 | 21 |

Le maître : *Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ?*

Laquelle de ces deux distributions donne le plus à manger à chaque souris ?

Recueil des méthodes :

La première distribution donne plus à manger aux souris que la deuxième distribution car :

1. Pour 4+2 souris la première distribution donne 10+5 graines donc 15 graines pour 6 souris alors que la seconde distribution en donne 14 graines pour 6 souris.
2. Dans la première distribution 70 graines nourrissent 28 souris alors que dans la seconde distribution 70 graines nourrissent 30 souris.
3. Etc. ...

La formulation de la consigne a beaucoup d'importance, en effet certains élèves comparent les quantités totales de graines des deux distributions. Il faut donc choisir des nombres qui ne permettent pas de répondre juste avec un argument faux : le nombre total de graines de la distribution qui utilise la plus grande ration doit être inférieur au nombre total de graines de la distribution qui utilise la plus petite ration.

c) Productions des élèves et résultats

Deux méthodes de comparaison apparaissent lors de la phase 2 :

→comparer les quantités de graines attribuées à deux lots de même effectif.

→comparer les effectifs de deux lots de souris qui ont un même nombre de graines.

d) Commentaires

- On a choisi les données des tableaux de telle sorte que les élèves soient obligés de passer par un ou plusieurs couples intermédiaires afin de faire fonctionner les connaissances antérieures de multiples manières. Les possibilités sont nombreuses et peuvent être confrontées.
- Il y a une symétrie dans la manière de comparer les rations : on peut comparer les quantités de graines attribuées à un même nombre de souris ou bien les nombres de souris que nourrit une même quantité de graines. (Pour comparer deux fractions on peut réduire au même dénominateur ou au même numérateur).

Prolongement de la leçon 3 : deuxième séquence

Résumé de la séquence

L'usage d'un « couple intermédiaire » n'est pas spontané chez les élèves. Les différentes situations étudiées ont fait apparaître des distributions avec un nombre fini de couples. Les contraintes matérielles s'opposent à l'idée que l'ensemble des couples possibles est infini. La recherche d'un « couple intermédiaire » suppose que les élèves ont compris que l'équité ne dépend pas du nombre de souris ou du nombre de graines mais de l'invariance du rapport entre ces deux grandeurs l'une d'elle pouvant être choisie arbitrairement. Pour familiariser les élèves avec l'idée que ces grandeurs peuvent varier arbitrairement pourvu que ce rapport soit conservé on demande aux élèves de proposer des couples imaginaires qui font fonctionner le modèle indépendamment des contraintes matérielles qui ont donné naissance à la situation. C'est l'objet de la première partie de cette deuxième séquence. La deuxième partie conduit les élèves à chercher le couple irréductible qui permet d'engendrer tous les autres en le multipliant par des entiers.

Cette séquence contribue en outre à valider et institutionnaliser les différentes techniques déjà rencontrées, l'accent étant mis sur la recherche d'un couple intermédiaire et l'usage d'un vocabulaire précis.

Leçon 4 L'équité pour la genèse des rationnels : comparer des rations

Explications de la leçon

Dans le langage ordinaire, la ration peut désigner plusieurs objets qui dans la situation étudiée correspondent à la quantité de graines par souris, la quantité de graines pour un lot de souris, etc. ... Pour que le maître et les élèves puissent s'exprimer, il faut que le vocabulaire désigne les objets avec précision. Nous avons choisi d'étiqueter la quantité de graines que mange chaque souris d'une distribution équitable par le mot « ration » et de coder cette ration par n'importe quel couple de cette distribution.

La comparaison est à la base de la construction de l'égalité et de l'ordre sur les rations. Les couples d'entiers équivalents (nombre de souris, nombre de graines) représentent une même grandeur « ration » en même temps que la mesure de cette grandeur qui est un nombre rationnel. Comparer deux rations consiste donc à comparer les deux classes d'équivalence de couples qui représentent ces rations. Pour réaliser cette tâche complexe les élèves doivent disposer officiellement des techniques de la linéarité sans avoir à justifier systématiquement leur usage.

Phase 1 Comparer deux distributions équitables

a) Présentation de la situation

L'équité relève plus de la pensée que de l'action. Elle a nécessité raisonnements, confrontations d'idées et débats entre élèves pour justifier le choix du modèle linéaire. Ce modèle est maintenant un moyen de réaliser des extensions hypothétiques de distributions équitables nécessaires aux activités de cette leçon. On demande aux élèves de proposer des couples de graines et de souris qui pourraient figurer dans deux distributions puis de comparer les rations de ces distributions. Ils doivent faire l'hypothèse que le nombre de souris et le nombre de graines peuvent varier pourvu que leur rapport soit conservé. On espère que les élèves vont trouver des couples qui leur permettront d'utiliser les méthodes rencontrées dans la leçon précédente en particulier :

- comparer les quantités de graines attribuées à deux lots de même effectif.
- comparer les effectifs de deux lots de souris qui ont un même nombre de graines.

b) Consignes et déroulement

Première étape :

Organisation : On partage la classe en deux. Chaque moitié de classe complète un tableau.

Le maître : *Dans chaque groupe vous vous mettez d'accord pour proposer un couple (nombre de souris, nombre de graines) (60 souris maximum) qui représente la même ration que le couple que je vous propose et vous l'écrivez sur vos feuilles. Cette moitié de classe complète le tableau bleu et celle-ci le tableau vert.*

| | | | | | | | | | |
|------|-------------------|--|--|----|--|--|--|--|--|
| BLEU | nombre de souris | | | 12 | | | | | |
| | nombre de graines | | | 28 | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|------|-------------------|--|--|--|--|----|--|--|--|
| VERT | nombre de souris | | | | | 20 | | | |
| | nombre de graines | | | | | 45 | | | |

Recueil des propositions et justifications.

Le maître : *Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ? Est-ce qu'il vaut mieux être souris dans la distribution bleue ou dans la distribution verte ?*

Ecrivez une explication sur vos feuilles.

Recueil des méthodes :

1. On compare le nombre de graines attribuées à deux lots de souris de même effectif.
2. On compare le nombre de souris de deux lots qui ont reçu le même nombre de graines.
3. Si à un couple qui représente une ration inférieure à 1 on ajoute 1 graine et 1 souris alors on augmente la ration.
4. Si à un couple qui représente une ration supérieure à 1 on ajoute 1 graine et 1 souris alors on diminue la ration.
5. Autres méthodes opportunistes.

Deuxième étape :

Consigne pour le maître : Il faut faire vérifier rapidement en maïeutique l'équité de chaque distribution.

Le maître affiche au tableau les deux distributions suivantes :

| | | | |
|-------------------|---|----|---|
| nombre de souris | 2 | 5 | 3 |
| nombre de graines | 6 | 15 | 9 |

| | | | |
|-------------------|---|----|---|
| nombre de souris | 3 | 5 | 4 |
| nombre de graines | 6 | 10 | 8 |

Le maître : *Je prétends que ces deux distributions équitables utilisent la même ration.
Ecrivez « vrai » ou « faux » sur vos feuilles.*

Recueil des justifications.

Même jeu avec :

| | | | |
|-------------------|----|----|--|
| nombre de souris | 4 | 12 | |
| nombre de graines | 10 | 30 | |

| | | | |
|-------------------|----|----|--|
| nombre de souris | 16 | 8 | |
| nombre de graines | 40 | 20 | |

Même jeu avec :

| | | | |
|-------------------|----|--|--|
| nombre de souris | 9 | | |
| nombre de graines | 21 | | |

| | | | |
|-------------------|----|--|--|
| nombre de souris | 16 | | |
| nombre de graines | 28 | | |

Institutionnalisation des méthodes standards de comparaison de deux distributions

Le maître : *Pour comparer deux distributions :*

1. *On compare le nombre de graines attribuées à deux lots de souris de même effectif.*
2. *On compare le nombre de souris de deux lots qui ont reçu le même nombre de graines.*

c) Commentaires

Si une découverte n'est pas validée et institutionnalisée dans un laps de temps assez court elle est perdue. Dans la première étape les élèves ont découvert qu'il faut chercher des couples hypothétiques adaptés pour comparer deux distributions. Les exemples de la deuxième étape donnent l'occasion aux élèves de mettre à l'épreuve leur stratégie et de construire un discours pour l'explicitier.

d) Productions des élèves

La phase 1 avait pour objet d'induire cette idée de variation hypothétique en demandant aux élèves de proposer de manière arbitraire des couples équivalents à ceux de l'énoncé. Les élèves sont alors conduits à rechercher des multiples et des diviseurs, à faire du calcul mental et à réduire la situation à un jeu sur les entiers au détriment du sens. On est donc confronté à deux nécessités contradictoires :

- Eviter un recours excessif aux algorithmes qui risquent d'occulter le sens que donne la situation.
- Multiplier les occasions de faire des calculs pour habituer les élèves à faire des hypothèses sur les grandeurs.

Certains élèves ont cherché à comparer chaque couple d'une distribution à tous les couples de l'autre distribution. On ne peut pas en déduire pour autant qu'ils n'ont pas compris ; peut-être cherchent-ils à se rassurer ou à « jouer avec les valeurs numériques proposées ».

Deux groupes d'élèves additionnent toutes les graines et toutes les souris sans aboutir à une conclusion.

Au moins la moitié des élèves semblent familiarisés avec l'usage des rapports multiples et de l'addition.

Phase 2 Comparer deux couples

a) Présentation de la situation

Un couple (nombre de graines, nombre de souris) représente une distribution potentielle (ou formelle) et sa ration. Comparer deux rations consiste à comparer deux couples. Pour réaliser cette comparaison il peut-être nécessaire de comparer ces deux couples à un couple

intermédiaire dont l'un des termes est un multiple ou un diviseur commun aux termes homologues des deux autres couples. Nous proposons trois étapes correspondant à trois cas différents : le rapport fonctionnel est entier, le rapport interne est entier, il faut déterminer un couple intermédiaire.

b) Commentaires

La technique qui consiste à passer par un couple intermédiaire doit être institutionnelle pour que les élèves puissent s'y référer sans avoir recours à une explication fondée sur l'équité. L'institutionnalisation des techniques permet aux élèves de concentrer leur effort intellectuel sur la comparaison de deux rations.

c) Consignes et déroulement

Organisation : Dans les trois étapes, le maître confie à chacun des dix groupes un couple (lot de souris, paquet de graines). Il y a 5 rations différentes représentées chacune par deux couples. Chaque groupe d'élèves doit trouver le couple (nombre de souris ; nombre de graines) équivalent au sien (qui représente la même ration). Pour faciliter la tâche, on peut partager la classe en deux.

Première étape : La ration est entière.

Le maître :

*Je vais confier à chaque groupe un lot de souris et un paquet de graines. Vous devez trouver le couple (nombre de souris ; nombre de graines) qui représente la même **ration** que votre couple parmi les couples que j'affiche au tableau.*

Consigne pour le maître :

Affichage des couples (nombre de souris ; nombre de graines) au tableau noir.

Attribution des couples aux élèves qui les recopient sur leurs feuilles.

Le maître :

Quand vous aurez trouvé ce couple, vous irez voir les élèves qui ont ce lot de souris et ces graines pour voir s'ils sont d'accord :

- *S'ils sont d'accord vous devez désigner un rapporteur qui viendra au tableau expliquer*
- *S'ils ne sont pas d'accord vous revenez à votre place et vous recommencez.*

| | | |
|---|-------------------|----|
| A | Nombre de souris | 5 |
| | Nombre de graines | 15 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| F | Nombre de souris | 9 |
| | Nombre de graines | 45 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| B | Nombre de souris | 3 |
| | Nombre de graines | 12 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| G | Nombre de souris | 2 |
| | Nombre de graines | 12 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| C | Nombre de souris | 7 |
| | Nombre de graines | 35 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| H | Nombre de souris | 8 |
| | Nombre de graines | 24 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| D | Nombre de souris | 6 |
| | Nombre de graines | 36 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| I | Nombre de souris | 11 |
| | Nombre de graines | 77 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| E | Nombre de souris | 4 |
| | Nombre de graines | 28 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| J | Nombre de souris | 7 |
| | Nombre de graines | 28 |

Deuxième étape : Le rapport interne est entier.

Même activité qu'à la première étape avec les données suivantes.

| | | |
|---|-------------------|---|
| A | Nombre de souris | 2 |
| | Nombre de graines | 5 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| F | Nombre de souris | 20 |
| | Nombre de graines | 45 |

| | | |
|---|-------------------|---|
| B | Nombre de souris | 3 |
| | Nombre de graines | 7 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| G | Nombre de souris | 21 |
| | Nombre de graines | 24 |

| | | |
|---|-------------------|---|
| C | Nombre de souris | 4 |
| | Nombre de graines | 9 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| H | Nombre de souris | 14 |
| | Nombre de graines | 35 |

| | | |
|---|-------------------|---|
| D | Nombre de souris | 7 |
| | Nombre de graines | 8 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| I | Nombre de souris | 15 |
| | Nombre de graines | 33 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| E | Nombre de souris | 5 |
| | Nombre de graines | 11 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| J | Nombre de souris | 18 |
| | Nombre de graines | 42 |

Troisième étape : Il faut passer par un couple intermédiaire.

Même activité qu'à la première étape avec les données suivantes.

Remarque : Si besoin est, on pourra aider les élèves en leur rappelant qu'il est possible d'utiliser un couple intermédiaire.

| | | |
|---|-------------------|----|
| A | Nombre de souris | 10 |
| | Nombre de graines | 16 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| F | Nombre de souris | 9 |
| | Nombre de graines | 21 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| B | Nombre de souris | 12 |
| | Nombre de graines | 28 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| G | Nombre de souris | 9 |
| | Nombre de graines | 15 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| C | Nombre de souris | 8 |
| | Nombre de graines | 18 |

| | | |
|---|-------------------|---|
| H | Nombre de souris | 6 |
| | Nombre de graines | 9 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| D | Nombre de souris | 12 |
| | Nombre de graines | 20 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| I | Nombre de souris | 12 |
| | Nombre de graines | 27 |

| | | |
|---|-------------------|---|
| E | Nombre de souris | 4 |
| | Nombre de graines | 6 |

| | | |
|---|-------------------|----|
| J | Nombre de souris | 15 |
| | Nombre de graines | 24 |

Institutionnalisation :

Le maître : *Pour comparer deux couples il est parfois nécessaire de passer par un couple intermédiaire.*

d) Production des élèves et résultats

Les exemples avec la ration entière sont les mieux réussis.

Certains élèves qui ont eu l'occasion d'utiliser un couple intermédiaire n'en voient pas l'intérêt quand c'est la maîtresse qui propose d'y recourir ; c'est le cas de Marion :

| Marion | souris | graines | Production des élèves |
|--------|--------|---------|----------------------------------|
| | 10 | 16 | Pas équitable (sans explication) |
| | 25 | 40 | |

La maîtresse rajoute le couple (5 souris ; 8 graines) mais Marion et Gaëtan ne comprennent pas.

Quelques obstacles subsistent : usage de l'addition, recherche d'une raison arithmétique ou d'une ration entière, utilisation systématique du double. Quelques exemples :

| | | | |
|-----------------|--------|---------|--------------------------------|
| Hugo et Roxanne | souris | graines | Production des élèves |
| | 12 | 15 | De 12 pour aller à 15 il y a 3 |
| | 8 | 10 | de 8 pour aller à 10 il y a 2 |

| | | | |
|------------------|--------|---------|--|
| Marika et Céline | souris | graines | Production des élèves |
| | 10 | 15 | C'est équitable car $15g=10+5$ et $25g=20+5$ |
| | 20 | 25 | |

| | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|--|
| Marika et Céline | | | | | Productions des élèves |
| Souris | 6 | 15 | 21 | 9 | $6+3=9$ |
| graines | 14 | 35 | 63 | 28 | $14+14=28$ Il faudrait 12 pour mettre le double. Ça ne va pas. |
| | | | 49 | 27 | |

Les élèves font une autre tentative :

« $3 \times 15 = 35$ donc $3 \times 21 = 63$. »

La maîtresse corrige $3 \times 15 = 45$.

Marika : « Ah ! ce n'est pas bon. » Elle change 63 pour 49.

Plus de la moitié des groupes d'élèves utilisent correctement les différentes techniques rencontrées et 3 groupes sur 10 combinent l'usage des rapports internes et de l'addition. Exemples :

| | | | | | |
|-----------------|----|----|----|----|--|
| Hugo et Roxanne | | | | | Productions des élèves |
| Souris | 18 | 27 | 45 | 9 | $36=2 \times 18(s)$, puis $36+9=45(s)$ ce qui permet de trouver 75g. Autre méthode : $45s=18+18+9$ et pour les graines $30+30+15$ |
| graines | 30 | 45 | 75 | 15 | |

| | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|---|
| Kevin et Quentin | | | | | Productions des élèves |
| Souris | 12 | 30 | 42 | 18 | Ils passent par la moitié de 12 puis font $12+6=18(s)$ et |
| graines | 28 | 70 | 98 | 42 | $28+14=42(g)$ |

e) Conclusion

Cette leçon a attiré notre attention sur la nécessité de l'institutionnalisation et ses difficultés.

Les techniques

Pour comparer des rations les élèves doivent disposer librement des techniques de la linéarité pour libérer leur pensée. Nous sommes alors confrontés à un paradoxe : en institutionnalisant « prématurément » les algorithmes on encourage les élèves à y recourir de manière excessive au risque d'occulter le sens ; mais si on renonce à institutionnaliser on doit aussi renoncer à certains apprentissages. Par exemple il est difficile pour les élèves de percevoir que la ration est une grandeur variable, que tout couple qui code cette ration est aussi une mesure de cette ration et que pour comparer deux mesures de rations on compare deux couples quelconques (nombre de graines, nombre de souris), mais qu'en fait il faut les choisir de telle sorte que la comparaison soit possible. Ces différents objets ne peuvent pas être appréhendés simultanément. L'apprentissage de chacun d'eux nécessite une situation spécifique indépendante des autres ou perçue comme telle ; on peut y parvenir par des institutionnalisations locales. Mais l'institutionnalisation ne se décrète pas, elle ne peut se réaliser que sous certaines conditions, parfois indépendamment de la volonté du maître, de

manière fortuite. Par exemple l'usage impromptu des flèches surmontées des opérations facilite la description de la technique utilisée, prend rapidement un caractère institutionnel, tend à se substituer aux explications et peut cacher un jeu sur les nombres au dépend du sens porté par la situation.

Le vocabulaire

Les moments de formulation permettent aux élèves de communiquer leurs découvertes, d'expliquer ce qu'ils ont compris, de préciser et d'ajuster les résultats de leurs recherches. Le manque de vocabulaire les oblige à utiliser les valeurs numériques et les algorithmes pour expliquer, débattre et communiquer. Il y a alors beaucoup d'implicite chez les élèves qui ont compris, cet implicite augmente avec la complexité mathématique des tâches. L'explication de cette complexité mathématique induit une complexité syntaxique. Il faut donc institutionnaliser des mots précis pour désigner les objets et faciliter la communication dans la classe et les explications qui vont permettre de faire partager les découvertes aux élèves en difficulté. Mais il faut trouver un équilibre entre des nécessités contradictoires. Une exigence excessive ou prématurée dans l'énonciation conduit les élèves à utiliser des phrases stéréotypées. Elles résument et réfléchissent la complexité mathématique pour ceux qui ont compris mais contribuent à occulter le sens pour ceux qui sont en phase d'apprentissage. Le maître ne peut pas faire la différence entre l'élève qui utilise une phrase correcte en ayant compris sa signification mathématique et l'élève qui fournit la même phrase sous l'effet du contrat didactique. Les contraintes institutionnelles ne produisent pas que du savoir, elles peuvent aussi avoir des effets Jourdain.

La difficulté dans l'institutionnalisation est de déterminer et de percevoir des indices qui disent quand le sens est acquis pour faire un plan d'usage et de fixation des techniques et du vocabulaire qui facilite l'énonciation, la prise en compte de la complexité mathématique sans entraver les apprentissages.

Dans les leçons précédentes les apprentissages successifs avaient permis de fixer les mots et expressions suivantes : « distribution équitable, distribution inéquitable, ration, couple » et les techniques : « nombre de fois, addition et soustraction ». Les instruments de pensée se traduisent par des énonciations qui puisent dans les registres institutionnalisés.

Le tableau et les flèches qui sont apparus de manière diffuse restent des instruments de communication et ne sont pas considérés comme des ostensifs de travail de recherche ou de construction de concepts. Il est donc souhaitable d'en éviter l'utilisation avant que les élèves comprennent la question à résoudre. Ils ont pour raisonner d'autres ostensifs à leur disposition tels que dessins et opérations et des stratégies standard ou opportunistes suivant les situations et leur niveau de connaissance ou de compréhension. Bien sûr il n'est pas question de rejeter une proposition d'élève qui utiliserait un tableau. Nous l'avons déjà utilisé comme moyen pour communiquer ou résumer. Après avoir raisonné sur le milieu objectif et déterminé les calculs à faire, on pourra utiliser le tableau et les flèches comme instruments pour expliquer et résumer mais non comme instruments de pensée.

Leçon 5 Institutionnalisation de la proportionnalité

Explication de la leçon.

L'institutionnalisation est une activité réflexive sur les connaissances qui contribue à fermer la situation d'apprentissage. Elle ne peut réussir que si les élèves ont conscience de leurs connaissances. En construisant une connaissance sur les connaissances, elle libère les élèves de l'environnement didactique des apprentissages antérieurs et leur permet de concentrer leur effort sur le nouvel objet d'apprentissage.

On souhaite dans cette leçon institutionnaliser la proportionnalité, c'est à dire conduire les élèves à abstraire de la « situation des graines et des souris » des techniques pour agir, un vocabulaire pour communiquer et valider leurs actions mais aussi les moyens de déterminer leurs domaines d'utilisation.

Comment ?

La situation « des graines et des souris » a fait apparaître les techniques de la proportionnalité (usage des rapports internes ou externes, de l'addition ou de la soustraction, d'un couple intermédiaire) comme moyen de réaliser l'équité. Si les techniques de calculs pour résoudre une autre question sont les mêmes que pour cette situation alors les grandeurs étudiées sont proportionnelles. En particulier on demande aux élèves s'il y a lieu ou non de conserver les rapports internes pour les grandeurs correspondantes (nous l'appelons « test des rapports multiples directs » ou TRMD). Les élèves doivent aussi connaître les termes qui accompagnent ces calculs ainsi que leur usage. Or à l'issue des quatre premières leçons, les techniques et le vocabulaire sont très contextualisés. Il s'agit donc de ménager des transitions en proposant aux élèves d'autres milieux qui nécessitent l'usage des techniques étudiées dans la situation des graines et des souris. On leur demandera de reconnaître ces techniques et de les accompagner d'un vocabulaire général ou adapté à chacun de ces nouveaux milieux. Par exemple « proportionnel » va remplacer « équitable » mais le « coefficient de proportionnalité » ou la « quantité à l'unité » est désigné par un nom de grandeur dérivée spécifique à chaque situation.

Le choix du milieu est délicat. Par exemple : le prix est-il proportionnel à la quantité¹³ ? La convention sociale voudrait que oui : le prix de n objets devrait être n fois le prix d'un objet si la base du prix des choses est la matière et le travail qu'il faut pour leur fabrication. Mais des raisons commerciales font que non : n clients qui prennent un objet induisent un coût de vente supérieur à un client qui prend n objets en même temps ; de plus un commerçant gagne d'autant plus qu'il vend plus, donc il va essayer de vendre plus en agissant sur le prix. Dans le prix dégressif les quantités interviennent dans le prix à l'unité. Il y a donc un conflit entre les deux idées.

Dans la fabrication d'objets, les quantités des ingrédients sont proportionnelles aux nombres d'objets fabriqués. On a donc choisi un exemple de fabrication coutumier à beaucoup d'enfants : la fabrication de gâteaux.

¹³ Remarquons que le mot prix désigne deux objets :

→ la quantité de francs pour une quantité donnée de marchandise.

→ le prix à l'unité qui est une grandeur dérivée.

Phase 1 La fabrication de tartelettes.

a) Présentation de la situation

On souhaite conduire les élèves à réutiliser implicitement les techniques de la proportionnalité en particulier les rapports internes en raisonnant sur un milieu matériel nouveau mais familier qui étend le champ d'utilisation de la proportionnalité en remobilisant l'attention des élèves.

b) Consignes et déroulement

Le maître :

Pour faire 15 tartelettes toutes pareilles un restaurateur a employé 6 œufs.

Combien doit-il prévoir d'œufs pour fabriquer 45 tartelettes ?

Faites les calculs sur vos feuilles.

Recueil des réponses :

Pour éviter un effet Topaze le maître ne propose pas de tableau mais il ne le refuse pas si c'est un élève qui le propose.

La méthode standard consiste à chercher le nombre de fois que 15 est contenu dans 45.

Il est souhaitable de faire un dessin pour accompagner l'explication :

« Pour 15 tartelettes il faut 6 œufs,

Pour 15 autres tartelettes il faut 6 œufs de plus,

Pour 15 autres tartelettes il faut encore 6 œufs,

Donc en tout il faut 3 fois 6 œufs soit 18 œufs pour faire 45 tartelettes. »

Le maître : En fait le restaurateur s'est trompé, il doit fabriquer 50 tartelettes. Combien doit-il prévoir d'œufs ? Faites les recherches sur vos feuilles.

Recueil des réponses :

Le maître aura repéré les différentes stratégies des élèves pour les inviter à venir les présenter au tableau avec leurs justifications.

Réponse attendue :

Il faut 18 œufs pour 45 tartelettes. Il faut déterminer le nombre d'œufs nécessaires à la fabrication de 5 tartelettes : 15 tartelettes c'est 3 fois 5 tartelettes et 6 œufs c'est 3 fois 2 œufs. Pour 5 tartelettes il faut 2 œufs donc pour 50 tartelettes il faut 20 œufs (2×10 ou $18 + 2$).

Remarque : La question précédente devrait induire différentes stratégies qui conduisent à la recherche du nombre d'œufs nécessaires à la fabrication de 5 tartelettes.

Le maître : Ce restaurateur fait cuire les tartelettes dans un grand four de boulanger. Pour faire cuire 15 tartelettes il a fallu 30 minutes. Le restaurateur met les 50 tartelettes dans le four en même temps. Combien de minutes de cuisson doit-il prévoir ?

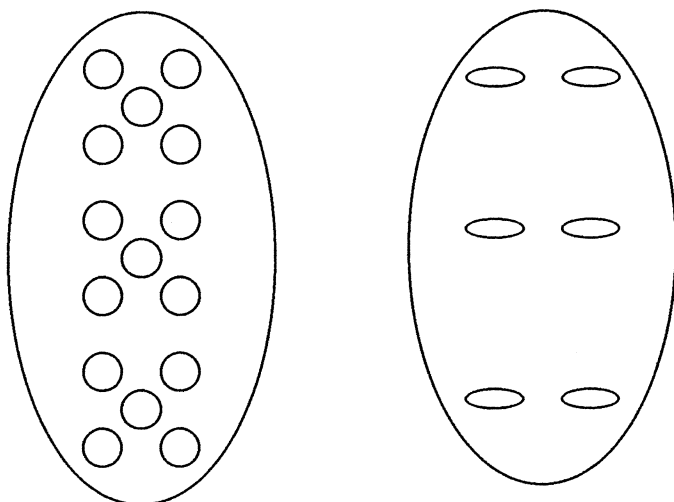
Commentaires : *Il faut un peu de mise en scène pour faire comprendre aux élèves que toutes les tartelettes cuisent en même temps.*

c) Commentaires

Les contraintes didactiques ne produisent pas toujours les effets didactiques attendus ; exemples :

Le dessin

Pour illustrer la première situation des tartelettes la maîtresse fait le dessin suivant :



Elle produit ensuite des gestes qui miment la production de la collection des 45 tartelettes et la collection des 18 œufs correspondant. Elle illustre ainsi la multiplication par 3. Bien sûr, la disposition choisie rend le dessin opératoire et procure une aide aux élèves et certains d'entre eux utilisent le dessin directement ; mais d'autres refont les calculs « $15 : 3 = 5$ et $6 : 3 = 2$ (ou dans 15 il y a 3 fois 5, dans 6 il y a 3 fois 2) donc il faut 2 œufs pour 5 tartelettes ». L'élève qui passe au tableau pour la correction entoure 5 dessins de tartelettes et 2 dessins d'œufs pour montrer la correspondance et donc réinvestit au sein du dessin un modèle opératoire indépendant des ostensifs de la maîtresse. Autrement dit les ostensifs graphiques et gestuels de la maîtresse n'ont pas été utilisés directement comme pouvait le laisser penser ce processus d'ostension. Il semble que certains élèves ne voient dans l'ostension que ce qu'ils ont déjà compris.

Le signe « = »

Un élève écrit au tableau : « $15+15=30+15=$ », la maîtresse intervient, efface et écrit

12

« $15+15+15 =$ ». Une autre élève réécrit au tableau : « $30+15=45$ et $\frac{+6}{18}$ »

L'usage algébrique que veut faire la maîtresse du signe = n'est pas compris par les élèves qui utilisent le signe = comme un sténogramme de l'arithmétique.

d) Production des élèves et résultats

Beaucoup d'élèves semblent avoir été aidés par le dessin de la maîtresse qui fait apparaître la correspondance entre 2 œufs et 5 tartelettes.

A peu près 50% des élèves utilisent la linéarité pour calculer le temps de cuisson, 10% répondent 30 minutes, beaucoup ne répondent pas. Quelques exemples :

Marion et Remziye

Les tartelettes et les œufs

| | | |
|--------------------|--------------|---------------|
| $15 \times 2 = 30$ | $15 : 3 = 5$ | $50 = 45 + 5$ |
| $30 + 15 = 45$ | $6 : 3 = 2$ | $20 = 18 + 2$ |
| $15 \times 3 = 45$ | | |
| $6 \times 3 = 18$ | | |

Le dessin les a aidés.

Le temps de cuisson :

$$15 : 3 = 5 \quad 15 \times 3 = 45 \quad 50 = 45 + 5 \quad 1 \text{h}40$$

$$30 : 3 = 10 \quad 30 \times 3 = 90 \quad 90 + 10 = 100$$

Marion reproduit la même procédure que précédemment.

Roxane et Thibaud

Les tartelettes et les œufs

Thibaud fait le tableau :

| | | | | |
|---|----|--------------|---|----|
| T | 15 | 5 | 5 | 45 |
| O | 6 | 2 | 2 | 18 |

Puis barre le couple (5 ; 2). Il a repéré le rapport 3 dans $45 = 15 \times 3$ pour la première question. Par contre il réécrit ce couple pour la deuxième question et fait un autre tableau :

| | |
|---|----|
| T | 50 |
| O | 20 |

Thibaud : « On a cherché dans la table de 5. Au début on a trouvé le couple (5 ; 2) donc on multiplie par 10.

Le temps de cuisson

Thibaud fait le tableau :

| | | |
|---|----|-----|
| T | 5 | 50 |
| m | 10 | 100 |

Et dit « 15 tartelettes on a divisé par 3 et aussi 30 minutes et $5 \times 10 = 50$ et $10 \times 10 = 100$ ».

Pierre et Quentin

Les tartelettes et les œufs

Pierre : $15 \times 2 = 30$ et $30 + 15 = 45$ ou $3 \times 15 = 45$ et $3 \times 6 = 18$.

Quentin a été aidé par le dessin qui lui permet d'associer 2 œufs à 5 tartelettes :

$$3 \times 6 = 18 + 2 = 20$$

$$15 \times 2 = 30 + 15 = 45 + 5 = 50$$

Le temps de cuisson

Pierre : « 15 → 30 min »

Alix et Julien

Les tartelettes et les œufs

« $15 \times 3 = 45$; $6 \times 3 = 18$ »

Alix : « Combien une tartelette peut avoir d'œufs ? $15 : 3 = 5$ tartelettes.

Julien : « 50 il y en a 5 en plus. $6 : 3 = 2$ œufs. Il faut 20 œufs pour 50 tartelettes »

Le temps de cuisson

Les élèves font le tableau :

| | | |
|----|----|-----|
| 5 | 45 | 50 |
| 15 | 90 | 100 |

Il faut cuire 50 tartelettes pendant 1 heure 40 »

Phases 2 et 3 Reconnaître les conditions d'usage de la proportionnalité

a) Présentation de la situation

On souhaite que les élèves essaient le « test des rapports multiples » pour accepter ou rejeter le modèle proportionnel et qu'ils formulent en utilisant le mot « proportionnel ».

Dans la phase 2 le maître tente d'institutionnaliser le « test des rapports multiples » et le mot « proportionnel » par une maïeutique adaptée. La phase 3 propose 4 exercices d'entraînement et d'application.

b) Consignes et déroulement

Phase 2 : reconnaître les conditions d'usage de la proportionnalité.

Le maître : *Récapitulons.*

1. Si dans un four 15 tartelettes cuisent en 30 minutes alors 15 autres tartelettes qui sont dans le four en même temps sont cuites pendant les mêmes 30 minutes. Le temps de cuisson est le même pour 15, 30, 45 ou 50 tartelettes (pourvu que ces tartelettes soient mises dans le four en même temps).
2. Si pour faire 15 tartelettes il faut 6 œufs pour faire 15 autres tartelettes il faut encore 6 œufs. On recommence autant de fois qu'il faut. Pour faire le double, le triple, ... , de tartelettes il faut le double, le triple, ... , d'œufs.
3. Est-ce qu'on a eu l'occasion de faire ce genre de calcul avec autre chose que des œufs et des tartelettes ?

Réponse attendue : « Avec des graines et des souris. »

Le maître :

Si on donne 7 graines à 3 souris alors combien faut-il donner de graines à 6 souris ? à 9 souris pour que la distribution soit équitable ?

Recueil des réponses.

Le maître : Si on a le double, le triple, ... , de souris il faut le double, le triple, ... , de graines pour que la distribution soit équitable.

Institutionnalisation :

Quand une distribution de graines à des souris est **équitable**, on dit que **les quantités de graines sont proportionnelles aux nombres de souris**.

Dans la fabrication des tartelettes les **quantités d'œufs sont proportionnelles aux nombres de tartelettes** mais les **temps de cuisson ne sont pas proportionnels aux nombres de tartelettes**.

Consigne : Le maître écrira ces trois phrases au tableau.

Phase 3 : grandeurs proportionnelles ou non.

Exemple 1 :

Le maître :

Dans un élevage de lapins, 5 lapins ont reçu 8 carottes et 15 lapins ont reçu 24 carottes.

La distribution est-elle équitable ?

Réponse attendue : « oui car 5 est contenu 3 fois dans 15 et 8 est contenu 3 fois dans 24 ».

Le maître : Au lieu de dire que la distribution est équitable, comment peut-on dire ?

Réponse attendue :

« **Les quantités de carottes sont proportionnelles aux nombres de lapins** ».

Exemple 2 :

Le maître :

L'an dernier, pour la fête de l'école, une classe de 30 élèves a mis 2 heures pour préparer 300 programmes. Cette année la directrice a décidé que deux classes de 30 élèves se réuniraient pour fabriquer 300 programmes comme l'an dernier. Combien de temps faut-il prévoir ?

Réponse attendue : « une heure »

Le maître : Les temps pour préparer les 300 programmes sont-ils proportionnels aux nombres d'élèves ?

Réponse attendue : « non car s'il y a le double d'élèves il ne faut pas le double de temps mais la moitié de temps ».

Exemple 3 :

Le maître : Pour traverser un lac, chaque bateau met 10 minutes. Deux bateaux partent ensemble de la même rive. Combien de temps leur faut-il pour traverser ce lac ?

Recueil des réponses puis explications du maître. Le maître pourra faire expérimenter les élèves en faisant traverser la classe à un élève puis deux élèves, etc. ...

Le maître : Les temps de traversée sont-ils proportionnels aux nombres de bateaux ?

Exemple 4 :

Une directrice veut distribuer des biscuits proportionnellement aux nombres d'élèves des différentes classes de l'école. Compléter le tableau suivant :

| | | | |
|--------------------------------|----|----|----|
| Nombre d'élèves dans la classe | 18 | 24 | 26 |
| Nombre de biscuits | 45 | | |

c) Commentaires

C'est en essayant d'utiliser les techniques de la linéarité que les élèves décident d'accepter ou de rejeter le modèle proportionnel. Par conséquent la validation ne peut-être que « locale », contextualisée aux grandeurs étudiées dans chaque exemple.

Le tableau et la table de multiplication par 9

Le tableau fermé du dernier exercice a été une entrave à la recherche du couple intermédiaire (2 ;5). Les élèves n'osent pas rajouter un couple dans un tableau fermé :

| | | | |
|--------------------|----|----|----|
| Nombre d'élèves | 18 | 24 | 26 |
| Nombre de biscuits | 45 | | |

Les élèves semblent donner un statut différent à ce couple intermédiaire qu'ils écrivent souvent en dehors du tableau (en marge). La maîtresse consciente du blocage essaie d'aider les élèves en privé en évoquant la table de multiplication par 9. Mais certains élèves ne voient pas quel usage ils peuvent bien faire de cette table et restent perplexes. La tentative de la maîtresse qui cherche à induire ou à rappeler l'usage d'un algorithme de calcul échoue car les élèves ne peuvent pas lui attribuer de sens tant qu'ils n'ont pas vu la finalité de son usage.

d) productions des élèves

Les exemples 1 et 2 sont réussis par 90% des élèves.

Le manque de temps a contraint la maîtresse à proposer l'exercice 4 dans la précipitation. Pour « gagner du temps » elle tente de faire utiliser un « couple intermédiaire » mais les élèves à qui elle s'adresse ne sont pas suffisamment « rompus » à cette technique, il s'ensuit les effets mentionnés dans le commentaire précédent. Exemples :

Youssouph et Sunay

Les biscuits :

Il y a un jeu de calculs encouragé par les propositions de la maîtresse mais pas de techniques maîtrisées.

La maîtresse : « Dans la table de 9 il y a 18 et 45 »

Sunay ne sait pas quoi faire de cette table de 9. Elle écrit « 2×9 et 9×5 », demande « C'est 9 ou c'est 2 ? », finit par trouver (2 élèves ; 9 biscuits), hésite puis se décide pour (2 élèves ; 5 biscuits) et complète un tableau où figurent les couples suivants et autres valeurs numériques :

| | | | | |
|---|----|----|----|----|
| E | 5 | 2 | 4 | 8 |
| B | 9 | 5 | 10 | 20 |
| | 14 | 8 | 16 | |
| | 35 | 20 | 40 | |

Puis écrit « $4 \times 6 = 24$ et $4 \times 15 = 60$; $24 + 2 = 26$ et $60 + 10 = 70$ » puis barre 70 et le remplace par 65.

Kevin et Céline

Les biscuits

Céline essaie le double : « $18 \times 2 = 36$ »

Kevin : « On peut faire un couple intermédiaire. Il faut trouver pour 6. Ah non ? Qu'est-ce qui fait 24 dans la table de 6 ?

Céline : « oui mais $6 \times 4 = 24$ »

Kevin : $18 + 6 = 24$; $45 + 4 = 49$

| | | |
|---|----|----|
| E | 18 | 24 |
| B | 45 | 49 |

La maîtresse : « 18 existe dans la table de 9 ? et 45 ? »

Les élèves font le tableau suivant :

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| 2 | 12 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 5 | 30 | 10 | 15 | 20 | 25 |

Kevin : « $24=12+12$ pour 24 $30+30=60$ », pour 26 « $10+10+6=26$ donc $25+25+15=65$; mais j'aurais pu faire $24+2$ donc $60+5$ ».

e) Résultats

A partir de contextes familiers on attendait des élèves :

- Qu'ils réutilisent les techniques de la linéarité et reconnaissent qu'ils les ont déjà utilisées
- Qu'ils réutilisent des formulations déjà institutionnalisées dans la situation des graines et des souris
- Qu'ils investissent une nouvelle formulation intégrant le mot « proportionnel ».

Le déroulement de la leçon et le comportement des élèves ont été proches de ces attentes. Certains élèves ont comparé les techniques de calculs avec celles utilisées dans la situation des graines et des souris : « On a fait comme pour les graines et les souris » ou « C'est pas comme les graines et les souris ».

L'appropriation du mot « proportionnel » comme englobant et unifiant les différentes situations de proportionnalité semble réussi ; certains élèves ont repris les formulations de la maîtresse en les adaptant aux nouveaux milieux matériels. On peut quand même regretter un manque de vocabulaire d'accompagnement des techniques.

Dans la culture de la classe, il y a « la conception du double » et « la conception du couple intermédiaire » qui n'ont pas la même origine.

L'usage répété du rapport « 2 » et de la phrase « s'il y a le double de souris, il faut le double de graines » a auto-institutionnalisé « la règle du double » qui fait obstacle à la recherche d'autres rapports. Par contre l'usage d'un couple intermédiaire n'est pas le résultat d'une heuristique des élèves mais a souvent été « parachuté » par la maîtresse. Quand les élèves échouent, ils font allusion « au couple intermédiaire » mais souvent ne le trouvent pas.

3-3-4 Conclusions et nouvelles questions

Nous avons noté à propos des différentes leçons la nécessité de l'institutionnalisation et ses difficultés. Elle joue un rôle fondamental dans la construction des conceptions en s'inscrivant dans un processus complexe avec des effets sur les apprentissages difficiles à décrypter. L'étude clinique de l'évolution de microgenèses suppose le recueil de tous les indices perceptibles dans les comportements et productions de chaque élève à chaque leçon. Or les moyens en temps et en observateurs ont manqué pour organiser un travail aussi systématique. Néanmoins les différentes observations ont montré que les connaissances des élèves ont évolué. Quelques indices laissent penser que les notions de variable et de relation fonctionnelle ont été « perçues » : plusieurs élèves ont proposé des couples hypothétiques en respectant le rapport externe ; les comparaisons de rations sont moins bien réussies mais les élèves ont compris que le mot « ration » désigne une grandeur variable.

Il est plus facile d'analyser l'évolution des techniques et stratégies des élèves. Les résultats statistiques des deux questionnaires vont faire apparaître des changements de répertoires et les analyses de données vont dévoiler des évolutions dans les conceptions des élèves.

3 – 4 Les réponses aux deux questionnaires

3-4-1 Méthodologie

Déroulement :

Chacun des deux questionnaires a été soumis aux deux classes de CM1 de l'école Jules Michelet de Talence. Pour éviter des phénomènes de lassitude, la passation était programmée sur plusieurs jours.

Les élèves avaient travaillé sur la division euclidienne avant le premier questionnaire qui leur a été proposé les 17, 18, 19 février 1999. Les élèves, un peu déroutés par les questions qui n'entraient pas dans leur champ d'étude du moment, ont néanmoins réussi à produire des réponses grâce aux encouragements prodigués par le « présentateur ».

Les leçons issues de la situation « des graines et des souris » ont été expérimentées du 9 mars au 13 avril 1999. Elles ont été suivies par le deuxième questionnaire le 15 et 16 avril 1999. Lors de sa passation les élèves ont eu une impression de déjà fait et une illusion de facilité ; ils ont fait des remarques du type : « Mais on les a déjà fait » ; « Avant j'arrivais pas, maintenant c'est simple » ; « C'est vraiment facile, c'est comme les souris ».

Analyse a priori des réponses :

Nous nous limiterons à répertorier les techniques et les opérations utilisées pour chaque exercice des deux questionnaires ainsi que les milieux auxquels les élèves font référence dans leurs explications : grandeurs ou nombres puis nous tenterons d'évaluer l'évolution dans l'utilisation de ces répertoires d'un questionnaire à l'autre.

Nous essaierons d'explicitier les rapports entre comportements, milieux objectifs et structures mathématiques par des analyses de corrélations. Les analyses de données vont permettre de réaliser des regroupements de questions, de répertoires et d'individus. Le schéma de la page suivante tente de résumer et d'illustrer les rapports entre ces différents objets.

Les caractères retenus pour l'analyse des réponses :

La comparaison des fréquences de réussites entre les deux questionnaires sera la première évaluation de l'effet de l'enseignement « les graines et les souris ».

L'opération (+ ou \times) utilisée par l'élève est un premier indicateur de la compréhension qu'il a de l'exercice traité. L'opération dépend de la stratégie envisagée.

Pour le traitement de la proportionnalité on peut classer les techniques en deux catégories : celles qui utilisent les relations internes et celles qui utilisent les relations externes.

L'usage du tableau apparaît dans le deuxième questionnaire. Dans les leçons nous avons essayé d'en faire un ostensif pour la communication et non un outil de pensée.

Enfin nous essaierons d'évaluer l'influence d'une référence aux grandeurs ou aux nombres dans les productions des élèves.

Désignation des variables :

Pour chaque question on étudie les variables suivantes :

- Echec ou réussite : R
- Techniques ou stratégies : P, U, Q, K, DO, RA, FA, Ci, CL, X, T,
- Opérations : division, multiplication, addition, soustraction : M, D, A, S.
- Milieu objectif : grandeurs ou nombres : G, N.

Chaque variable est nommée avec 3 ou 4 caractères.

Le premier caractère désigne le numéro d'ordre du test (A pour le premier test).

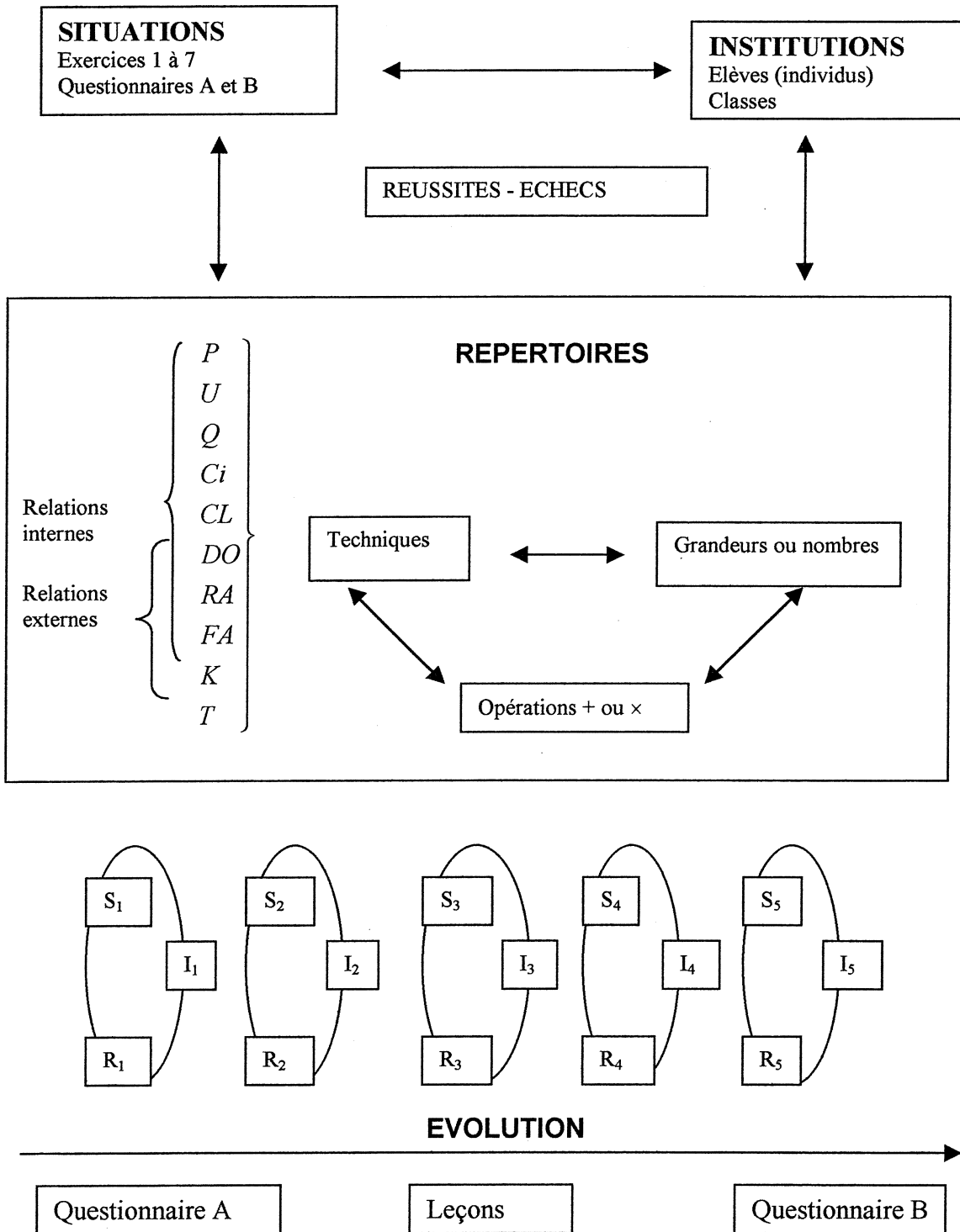
Le deuxième caractère désigne le numéro de l'exercice (de 1 à 7).

Le troisième caractère désigne le numéro de la question dans l'exercice quand il y a deux questions.

Le quatrième caractère est approprié à la variable que l'on souhaite identifier et étudier relativement au répertoire et comportement des élèves.

Par exemple **---R** désigne la réussite et prend les valeurs :

- 0 si l'élève ne fait aucune proposition
- 1 si l'élève a réussi (fournit une des réponses attendues)
- 2 si l'élève a échoué.



Codage des variables :

Dans chaque exercice les variables ---**M**, ---**D**, ---**A**, ---**S** permettent d'identifier l'opération utilisée par l'élève (multiplication, division, addition, soustraction) ; chacune de ces variables prend pour valeurs :

- 0 si aucune écriture ne fait apparaître cette opération
- 1 si l'opération est utilisée explicitement par l'élève

Remarque : le codage n'est pas toujours immédiat. Par exemple, la division peut apparaître dans la partie « brouillon » mais il est difficile de savoir si elle a permis d'obtenir la réponse car souvent d'autres opérations apparaissent en même temps. Certains élèves ne font que des multiplications dans la partie « brouillon » et concluent en écrivant une division dans la partie « mise au propre », dans ce cas **M** et **D** sont codées 1.

$$\mathbf{P} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève utilise une procédure de partage (fractionnement d'une grandeur).} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{U} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève calcule le prix à l'unité.} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève utilise un rapport interne} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{K} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève utilise explicitement un rapport externe.} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{DO} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève utilise des doubles ou des moitiés} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{RA} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève utilise une raison arithmétique} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{FA} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève utilise un rapport (fonction) affine comme: "2 \times 21 + 1 = 43"} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{Ci} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève essaie d'utiliser un "couple intermédiaire" de nombres en correspondance.} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

CL =

$$\begin{cases} 1 \text{ si l'élève utilise la propriété additive de la linéarité (sommés ou différences homologues)} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{X} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève fait un "produit en croix".} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{T} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève utilise un tableau.} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

G =

$$\begin{cases} 1 \text{ si dans la recherche et les procédures apparaissent explicitement des grandeurs : unités ou dessins.} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{N} = \begin{cases} 1 \text{ si dans les productions des élèves ne figurent que des calculs numériques.} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3-4-2 Résultats statistiques et premiers commentaires

39 élèves de CM1 de Michelet ont participé aux questionnaires. Les pourcentages sont donc calculés sur la base de 39 réponses.

Questionnaire A

Exercice 1 :

Fréquence des « 1 »

A11R : 85% ; **A11P** : 26% ; **A11M** : 38% ; **A11D** : 33% ; **A11A** : 13% .

A12R : 41% ; **A12U** : 46% ; **A12P** : 28% ;

A12M : 31% ; **A12D** : 33% ; **A12A** : 13% ; **A12S** : 21%

A1G : 51% ; **A1N** : 49%

Commentaires

question 1

A11R : Les élèves venaient de travailler sur la division, pourtant les élèves utilisent autant la multiplication que la division pour répondre à cette première question.

A11M : Pour déterminer le prix d'un pain, 38% des élèves effectuent une multiplication à trou (recherche du facteur manquant dans la table de multiplication par 5 ou recherche par encadrements).

A11D : La procédure standard (division par 5) n'est utilisée que par 33% des élèves interrogés

A11A : 13% des élèves effectuent des additions répétées. C'est une stratégie de partage par essais successifs et approximations.

question 2

A12R : 41% des élèves ont réussi ; 5% des élèves ont utilisé un prix à l'unité faux ; 8% ont fait une opération fautive.

A12M : 31% utilisent une multiplication

A12D : 33% utilisent une division

A12A : 13% font des additions répétées

A12S : 21% font des soustractions répétées.

Avec les différentes opérations utilisées apparaissent différentes stratégies. La méthode standard, suggérée par la première question consiste à utiliser le prix d'un pain (méthode de réduction à l'unité). Elle est utilisée par 46% des élèves. L'autre procédure dite de partage est utilisée par 28% des élèves interrogés.

A1G et **A1N** : Dans leurs explications les élèves font autant référence aux nombres qu'aux grandeurs.

Exercice 2

Fréquence des « 1 »

A2R : 23% ; **A2U** : 62% ; **A2P** : 33% ;

A2M : 41% ; **A2D** : 23% ; **A2A** : 10% ; **A2S** : 15%

A2G : 26% ; **A2N** : 69%

Commentaires

A2R : La réussite de 23% est bien moindre qu'à l'exercice précédent. Les grandeurs sont différentes. L'énoncé de l'exercice ne demande pas explicitement la « quantité à l'unité ».

A2U : 62% des élèves pensent à calculer la quantité à l'unité, mais seulement 23% réussissent.

A2P : La méthode de réduction à l'unité n'est pas la seule procédure proposée. Certains élèves essaient de partager 17 élèves en groupes de 5 élèves puis procèdent par ajustement.

Exercice 3

Fréquence des « 1 »

A3R : 36% ; **A3U** : 26% ; **A3Q** : 36% ; **A3DO** : 3% ; **A3P** : 41 ; **A3RA** : 3% ; **A3FA** : 8%

A3M : 59% ; **A3D** : 18% ; **A3A** : 33% ; **A3S** : 13%.

A3G : 26% ; **A3N** : 72%.

Commentaires

Trois procédures nouvelles sont apparues à cet exercice :

- **FA** : « $15 = 2 \times 7 + 1$ donc $2 \times 21 + 1 = 43$ billes pour 21 élèves ». Le rapport externe n'étant pas entier l'élève utilise une fonction affine.
- **RA** : l'élève utilise une raison arithmétique
- **DO** : l'élève utilise le rapport double.

Il semble que lorsque la difficulté augmente les élèves cherchent plus une relation entre nombres qu'une relation entre grandeurs.

Exercice 4

Codage des variables

$$A4Ci = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève essaie d'utiliser le " couple intermédiaire" (4 escargots; 5salades).} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$A4X = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève calcule } 15 \times 28. \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Fréquence des « 1 »

A4R : 5% ; **A4U** : 5% ; **A4Q** : 15% ; **A4Ci** : 3% ; **A4DO** : 5% ; **A4P** : 28% ; **A4RA** : 10% ;

A4FA : 10% ; **A4X** : 15%

A4M : 54% ; **A4D** : 8% ; **A4A** : 23% ; **A4S** : 13%.

A4G : 28% ; **A4N** : 67%.

Commentaires

Le pourcentage de réussite correspond à deux réussites sur 39 réponses.

Une des deux revient à un élève qui a recherché un couple intermédiaire (4 escargots mangent 5 salades) et des procédures de regroupement.

Un autre élève a procédé par approximations après regroupement comme suit :

$$\ll 12 + 12 = 24$$

$$15 + 15 = 30 + 4 = 34 + 1 = 35$$

Il faut 35 salades pour les 28 escargots. »

Interprétation : Pour 12 escargots, il faut 15 salades. Pour 24 escargots il faut 30 salades.

Si on attribue une salade à chacun des 4 escargots restants il faut 34 salades. Mais si 12 escargots mangent 15 salades, un escargot mange un peu plus d'une salade donc il faut rajouter une salade aux 4 salades et on obtient 35 salades.

Il semble qu'il y ait des effets de contrat. Les élèves effectuent des opérations avec les nombres 12, 15, 28 ; ces opérations ne sont pas faciles à interpréter.

Exemple :

- $12+15+28=55$. Il faut 55 salades pour nourrir 28 escargots.
- $15 \times 28=420$. Peut-être que l'élève donne 15 salades à chaque escargot ?
- $4 \times 7 = 28$. $7 \times 15 = 105$. Il devra prévoir 105 salades.

Exercice 5

Codage des variables

$$A5CL = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève décrit 14 comme somme de 7 et de 7, 6 comme somme de 3 et de 3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fréquence des « 1 »

A5R : 64% ;

A5J : 56% ; **A5Q** : 56% ; **A5DO** : 31% ; **A5CL** : 26% ; **A5RA** : 5% ; **A5P** : 10% ;

A5M : 31% ; **A5D** : 3% ; **A5A** : 38%.

A5G : 46% ; **A5N** : 54%.

Commentaires :

A5R : 64% des élèves affirment que la réponse est juste.

A5J : 56% le justifie correctement.

A5Q : 56% justifient avec le rapport double :

Soit par une phrase qui décrit ce rapport

Soit avec une multiplication (**A5M** : 31%)

Soit avec une addition (**A5A** : 38%)

Il a paru intéressant de distinguer ceux qui utilisent directement le coefficient multiplicatif 2 (**A5DO**) de ceux qui calculent la somme $7+7$ et en déduisent la somme $3+3$ (**A5CL**), cette technique s'apparente d'avantage à une stratégie de partition.

A5P : sur 4 élèves qui essaient une procédure de partage, un seul réussit mais en utilisant un rapport interne.

Exercice 6

Codage des variables

$$A6J = \begin{cases} 0 & \text{si aucune justification} \\ 1 & \text{si la justification est correcte} \\ 2 & \text{si la justification est fautive} \end{cases}$$

Fréquence des « 1 »

A6R : 26% ; **A6J** : 8% ; **A6Q** : 67% ; **A6DO** : 28% ; **A6CL** : 31% ;

A6M : 21% ; **A6A** : 41%

A6G : 44% ; **A6N** : 51%.

Commentaires

A6R : 26% des élèves ont dit que la réponse de Paul était fausse.

A6J : seulement 8% ont justifié correctement. Un seul élève a dit qu'avec la même quantité de chocolat on pouvait préparer les déjeuners de 12 enfants pendant 1 jour.

A6Q : 67% des élèves justifient avec le rapport double ; parmi eux seule l'élève citée précédemment a utilisé ce rapport à bon escient.

Exercice 7

Codage des variables

$$\mathbf{A71R} = \begin{cases} 0 & \text{si aucune réponse} \\ 1 & \text{si l'élève répond "21"} \\ 2 & \text{si l'élève donne une autre réponse} \end{cases}$$

$$\mathbf{A72R} = \begin{cases} 0 & \text{si aucune réponse} \\ 1 & \text{si l'élève répond "5"} \\ 2 & \text{si l'élève donne une autre réponse} \end{cases}$$

Fréquence des « 1 »

A71R : 15% ; **A71J** : 0% ; **A71Q** : 3%

A72R : 15% ; **A72J** : 0% ; **A72Q** : 3% ; **A7RA** : 33% ; **A7P** : 3%

A7M : 5% ; **A7A** : 21% ; **A7S** : 18%.

A7G : 13% ; **A7N** : 33%.

Commentaires :

A71R et **A72R** : 15% des élèves ont donné la bonne réponse à chacune de ces questions; mais ce ne sont pas les mêmes aux deux questions.

A71J et **A72J** : de 13% à 26% des élèves ont essayé de justifier mais personne n'a donné d'explication satisfaisante.

A7RA : Il est intéressant de noter qu'un élève sur trois essaie de justifier en calculant un rapport arithmétique interne ou externe ; ce qui se traduit dans les calculs par des additions ou des soustractions.

Questionnaire B.

Exercice 1

Question 1 :

Fréquences des « 1 »

B11R : 85% ; **B11P** : 10% ; **B11T** : 10% ; **B11M** : 51% ; **B11D** : 18% .

Commentaires

La fréquence de réussite est la même qu'au premier questionnaire.

Les élèves qui ont fait un tableau ont réussi.

Si on compare les opérations utilisées à ce questionnaire avec celles utilisées au premier questionnaire , on constate une diminution de la fréquence d'utilisation de la division et une augmentation de celle de la multiplication. On peut y voir des effets de l'enseignement : le questionnaire A faisait suite à un enseignement sur la division euclidienne alors que ce

questionnaire B arrive après l'enseignement de la proportionnalité où les élèves privilégiaient les opérateurs multiplicatifs.

Question 2

Fréquences des « 1 »

B12R : 51% ; **B12U** : 28% ; **B12P** : 38% ; **B12T** : 5%
B12M : 38% ; **B12D** : 10% ; **B12A** : 28% ; **B12S** : 23%.
B1G : 36% ; **B1N** : 59%

Commentaires

La réussite a augmenté de 10% par rapport au premier questionnaire.

Seulement 28% des élèves interrogés utilisent le prix d'un pain contre 46% au premier questionnaire.

Les changements de fréquence dans l'utilisation de la multiplication et de la division se confirment. Ce sont majoritairement les élèves qui font des partitions qui utilisent des additions et des soustractions.

Seulement 5% des élèves font un tableau et contrairement à la première question ceux qui ont fait un tableau ont échoué.

Exercice 2

Codage des caractères

$$\mathbf{B2K} = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève utilise explicitement le rapport externe "3".} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{B2RA} = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève conserve la raison arithmétique "11".} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fréquence des « 1 »

B2R : 49% ; **B2U** : 33% ; **B2P** : 26% ; **B2T** : 41% ; **B2Q** : 41% ; **B2DO** : 41% ; **B2K** : 13% ;
B2RA : 18%
B2M : 36% ; **B2D** : 5% ; **B2A** : 41% ; **B2S** : 5%
B2G : 56% ; **B2N** : 36%

Commentaires

Le pourcentage de réussite est passé de 23% au premier questionnaire à 49% au deuxième questionnaire.

Rares sont les élèves (5%) qui utilisent la division dans leurs calculs. Il semble que les acquis sur la division soient évanescents. La multiplication a plus de succès.

Beaucoup d'élèves utilisent des procédures de partitions avec souvent des additions réitérées qui prennent appui sur des dessins. Les procédures les plus anciennes parce que peut-être plus élémentaires sont prégnantes et peut-être s'opposent à l'usage des rapports.

Le tableau fait son apparition forte dans cet exercice. Parmi les élèves qui font un tableau, beaucoup utilisent les rapports internes et parmi ceux-ci presque tous utilisent les rapports double ou moitié.

Exercice 3

Fréquence des « 1 »

B3R : 62%
B3T : 36% ; **B3U** : 8% ; **B3Q** : 49% ; **B3DO** : 13% ; **B3P** : 18% ; **B3RA** : 18% ;
B3M : 49% ; **B3D** : 3% ; **B3A** : 26%
B3G : 49% ; **B3N** : 46%

Commentaires

Le taux de réussite est passé de 36% au premier questionnaire à 62% au deuxième questionnaire.

36% des élèves interrogés font un tableau mais il ne semble pas que l'usage du tableau ait une influence sur la réussite.

49% des élèves utilisent un rapport interne et à l'exception d'un d'entre eux réussissent (B3Q⇒B3R).

13% des élèves utilisent le double donc un rapport interne mais pas directement le rapport « 4 ».

18% des élèves conservent la raison arithmétique « 15 » et trouvent 32 billes.

La multiplication est l'opération la plus utilisée. Souvent les élèves qui font ou essaient de faire des partitions (par exemple 4 groupes de 5 élèves) utilisent l'addition.

Exercice 4

Fréquence des « 1 »

B4R : 21% de réussite

B4T : 59% ; **B4U** : 5% ; **B4Q** : 38% ; **B4Ci** : 28% ; **B4DO** : 36% ; **B4P** : 5% ; **B4CL** : 31% ;

B4RA : 18% ; **B4FA** : 13% ;

B4M : 15% ; **B4D** : 8% ; **B4A** : 31% ; **B4S** : 13%.

B4G : 56% ; **B4N** : 41%

Commentaires

Le taux de réussite est passé de 5% au premier questionnaire à 21% au deuxième questionnaire. C'est le taux le plus bas des quatre premiers exercices. Tous ceux qui ont réussi ont utilisé le couple intermédiaire (3 ; 4) ; mais seulement 28% y ont pensé. Peut-être les élèves ont-ils des difficultés à imaginer des mesures de grandeurs hypothétiques.

59% des élèves ont fait un tableau. Presque tous les élèves (sauf 2) qui ont essayé d'utiliser un couple intermédiaire ont fait un tableau. Presque tous les élèves (sauf 1) qui utilisent un rapport interne ont fait un tableau.

Il faut noter encore une prégnance du double ; 36% des élèves utilisent ce rapport. Ici il était une aide car il permettait de faire apparaître le couple (30 ; 40) puis le couple (3 ; 4).

Les méthodes de retour à l'unité n'apparaissent que chez 5% des sujets.

La méthode dite de combinaison linéaire (B4CL) ressemble à une procédure de partition mais les élèves calculent directement sur les nombres sans faire nécessairement référence aux grandeurs.

Cinq élèves (2, 10, 15, 19, 36) utilisent un « rapport interne affine ». Le rapport géométrique n'étant pas entier, ils font le calcul suivant : puisque $33=15 \times 2 + 3$ alors il faut $20 \times 2 + 3$ salades.

Quelques élèves semblent « jouer » avec les nombres entiers et les opérations.

Le sujet (35) semble utiliser une procédure d'approximation.

Exercice 5

Codage des variables

$$B5CL = \begin{cases} 1 & \text{si l'élève écrit ou évoque les sommes } 11 + 11 \text{ ou } 7 + 7. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fréquence des « 1 »

B5R : 95% ; **B5J** : 95% ; **B5Q** : 95% ; **B5DO** : 51% ; **B5CL** : 51% ; **B5RA** : 3% ;

B5M : 31% ; **B5A** : 54% ; **B5G** : 33% ; **B5N** : 67%

Commentaires

Le pourcentage de réussite est passé de 64% au premier questionnaire à 95% au deuxième questionnaire.

Tous les élèves justifient avec le rapport interne ; mais certains écrivent clairement qu'ils utilisent le double ou la moitié alors que d'autres font des sommes (11+11 ; 7+7). Peut-être ces deux manières de dire correspondent-elles à deux conceptions différentes, l'une se réfère à la multiplication et l'autre à l'addition.

Exercice 6

Fréquence des « 1 »

B6R : 15% ; **B6J** : 13% ; **B6Q** : 92% ; **B6DO** : 49% ; **B6CL** : 33% ; **B6K** : 3%
B6M : 36% ; **B6A** : 46% ; **B6G** : 31% ; **B6N** : 69%

Commentaires

Le pourcentage de réussite est passé de 26% au premier questionnaire à 15% au deuxième questionnaire. Est-ce le résultat d'un conditionnement ?

Le pourcentage de justifications est passé de 8% à 13%. Dans cet exercice les élèves qui ont répondu « non » ont justifié correctement ce qui permet de penser qu'ils n'ont pas répondu au hasard.

Exercice 7

Codage des variables

$$\mathbf{B71R} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève a répondu 35.} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{B72R} = \begin{cases} 1 \text{ si l'élève a répondu 13.} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Fréquence des « 1 »

B71R : 67% ; **B71J** : 38% ; **B71Q** : 8% ; **B71CL** : 44%
B72R : 85% ; **B72J** : 28%
B72Q : 26% ; **B72CL** : 13% ; **B7RA** : 3%
B7M : 36% ; **B7D** : 13% ; **B7A** : 49% ; **B7S** : 8%.
B7G : 21% ; **B7N** : 62%

Commentaires

Les pourcentages de réussite passent de 15% au premier questionnaire à 67% et 85% au deuxième questionnaire.

Beaucoup d'élèves savent compléter un tableau de proportionnalité en utilisant les rapports, les sommes ou les différences. On peut regretter que 30% à 50% des élèves ne donnent pas de justification, on ne peut pas savoir quelles techniques ils utilisent.

3-4-3 Evolution des comportements

Après ce premier aperçu des résultats statistiques, nous tentons d'analyser l'effet de l'enseignement sur le comportement des élèves.

Nous allons comparer les fréquentations des différents caractères aux deux questionnaires. Le tableau suivant récapitule les fréquences des 1 (en pourcentage sur l'ensemble des élèves) pour l'ensemble des variables des exercices aux questionnaires A et B.

| | R | J | P | U | Q | DO | RA | FA | Ci | X | CL | K | T | M | D | A | S | G | N | |
|-----------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|--|
| A11 | 85 | 0 | 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 38 | 33 | 13 | 0 | 51 | 49 | |
| A12 | 41 | 0 | 28 | 46 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 31 | 33 | 13 | 21 | | | |
| A2 | 23 | 0 | 33 | 62 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 41 | 23 | 10 | 15 | 26 | 69 | |
| A3 | 36 | 0 | 41 | 26 | 36 | 3 | 3 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 59 | 18 | 33 | 13 | 26 | 72 | |
| A4 | 5 | 0 | 28 | 5 | 15 | 5 | 10 | 10 | 3 | 15 | 0 | 0 | 0 | 54 | 8 | 23 | 15 | 28 | 67 | |
| A5 | 64 | 56 | 10 | 0 | 56 | 31 | 5 | 0 | 0 | 0 | 26 | 0 | 0 | 31 | 3 | 38 | 0 | 46 | 54 | |
| A6 | 26 | 8 | 0 | 0 | 67 | 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 | 21 | 0 | 41 | 0 | 44 | 51 | |
| A71 | 15 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 21 | 18 | 13 | 33 | |
| A72 | 15 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 33 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |
| mA | 34 | 7,1 | 19 | 15 | 20 | 7,4 | 5,7 | 2 | 0,3 | 1,7 | 6,3 | 0 | 0 | 35 | 15 | 24 | 10 | 33 | 56 | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| B11 | 85 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 51 | 18 | 0 | 0 | | | |
| B12 | 51 | 0 | 38 | 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 38 | 10 | 28 | 23 | 36 | 59 | |
| B2 | 49 | 0 | 26 | 33 | 41 | 41 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 13 | 41 | 36 | 5 | 41 | 5 | 56 | 36 | |
| B3 | 62 | 0 | 18 | 8 | 49 | 13 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 36 | 49 | 3 | 26 | 0 | 49 | 46 | |
| B4 | 21 | 0 | 0 | 5 | 38 | 36 | 18 | 13 | 28 | 0 | 31 | 0 | 59 | 15 | 8 | 31 | 13 | 56 | 41 | |
| B5 | 95 | 95 | 0 | 0 | 95 | 51 | 3 | 0 | 0 | 0 | 51 | 0 | 0 | 31 | 0 | 54 | 0 | 33 | 67 | |
| B6 | 15 | 13 | 0 | 0 | 92 | 49 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 | 3 | 0 | 36 | 0 | 46 | 0 | 31 | 69 | |
| B71 | 67 | 38 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 44 | 0 | 0 | | | | | | | |
| B72 | 85 | 28 | 0 | 0 | 26 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 13 | 0 | 0 | 36 | 13 | 49 | 8 | 21 | 62 | |
| mB | 59 | 19 | 10 | 8,2 | 39 | 21 | 6,7 | 1,4 | 3,1 | 0 | 19 | 1,8 | 17 | 37 | 7,1 | 34 | 6,1 | 40 | 54 | |

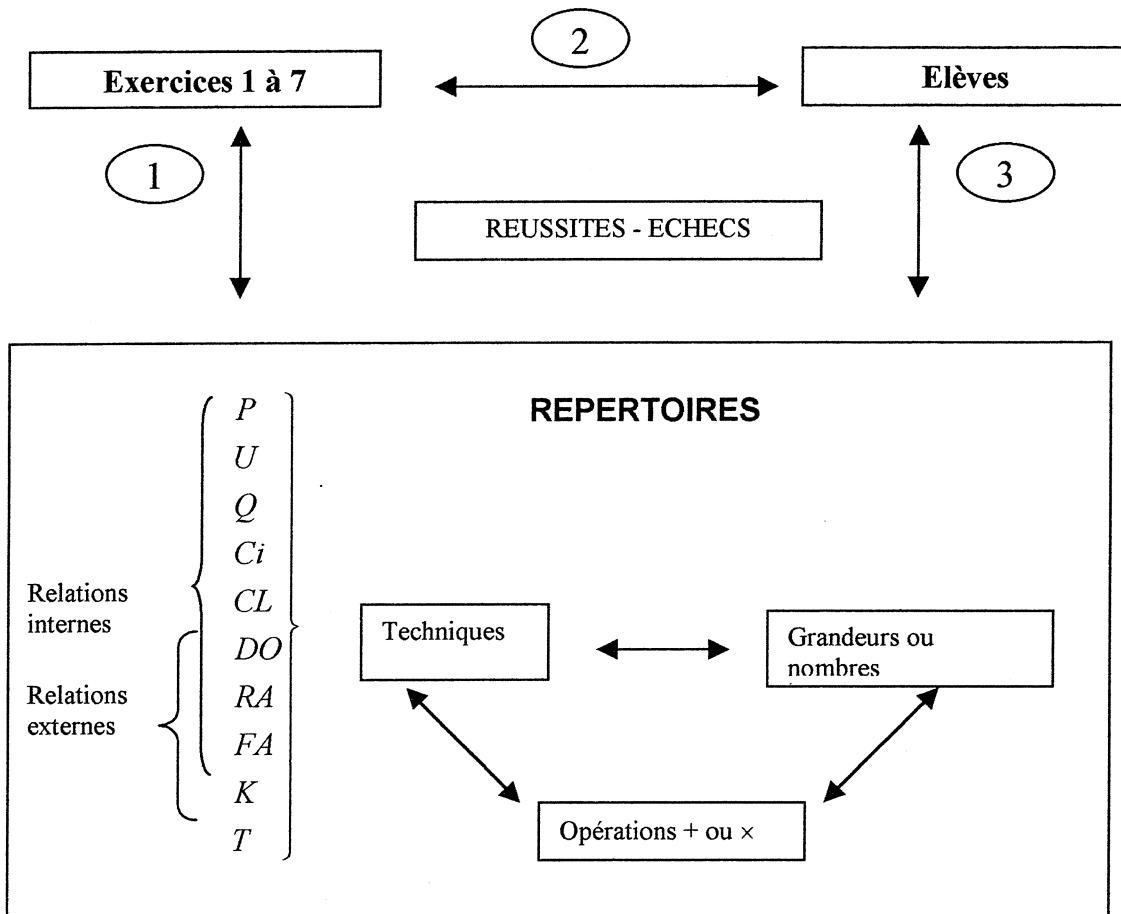
Nous allons aussi tenter de comparer les différents comportements des élèves en faisant apparaître des conceptions par des regroupements « saturés » d'exercices, d'élèves et de répertoires aux deux questionnaires.

Les analyses a priori précédentes suggèrent au moins trois entrées possibles :

- Regrouper des exercices (relativement à un caractère, par exemple la réussite) et les répertoires utilisés dans ces exercices puis déterminer les groupes d'élèves qui ont contribué à ces regroupements.

- Rechercher des regroupements d'élèves par une typologie sur l'ensemble des exercices (relativement à un caractère) et déterminer les exercices qui discriminent ces groupes d'individus puis les répertoires mis en œuvre dans les différents regroupements obtenus.
- Chercher des regroupements de répertoires et d'individus puis les exercices concernés par ces répertoires.

Le schéma suivant illustre ces trois entrées :



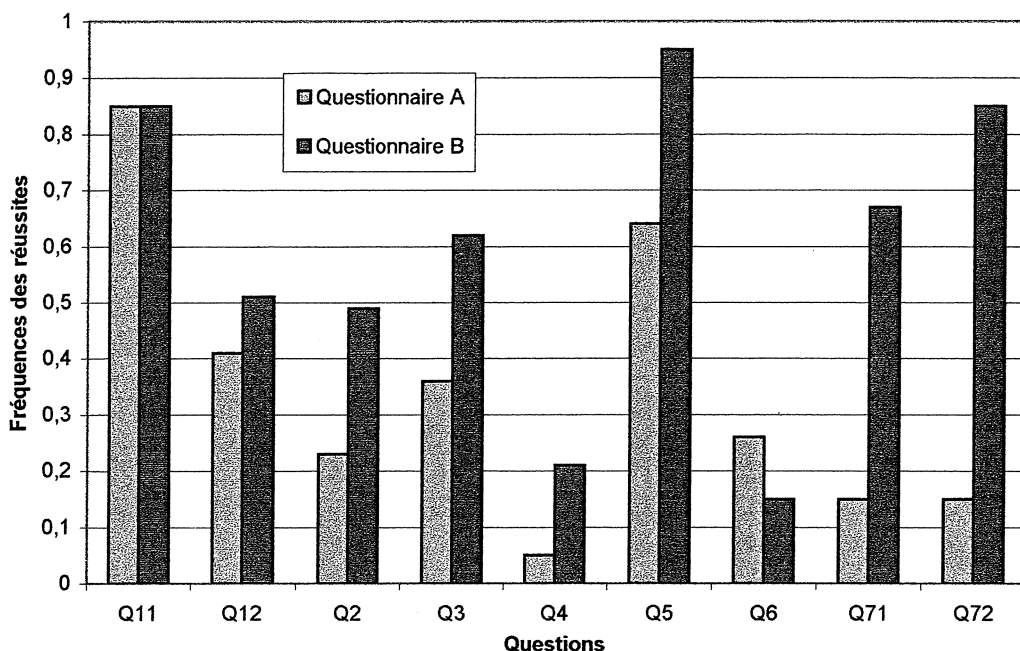
1 – Evolutions des réussites

a) Comparaison des fréquences

On veut comparer les fréquences de réussites avant et après le processus expérimental. Au premier questionnaire les élèves ont réussi en moyenne 3 questions sur 9 alors qu'au deuxième questionnaire ils en ont réussi plus de 5 sur 9. Les résultats bruts sont résumés dans le tableau et le graphique suivants :

| Questions | q11 | q12 | q2 | q3 | q4 | q5 | q6 | q71 | q72 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Questionnaire A | 0,85 | 0,41 | 0,23 | 0,36 | 0,05 | 0,64 | 0,26 | 0,15 | 0,15 |
| Questionnaire B | 0,85 | 0,51 | 0,49 | 0,62 | 0,21 | 0,95 | 0,15 | 0,67 | 0,85 |

Comparaison des réussites



Pour décider si l'écart de fréquence entre les questionnaires A et B est significatif on fait un test (Test de Student) sur les deux échantillons appariés que forme l'ensemble des élèves avant et après le processus expérimental.

Hypothèse nulle :

Le processus expérimental a été sans effet sur la réussite des élèves (la différence observée entre les deux fréquences n'est pas significative, elle est due aux fluctuations aléatoires habituelles).

Chacun des tableaux suivants donne les moyennes de réussites au questionnaire A (moyenne 1) et au questionnaire B (moyenne 2) ainsi que la valeur de t (t de Student) avec la probabilité P d'être dépassée en valeur absolue. Si cette valeur de P est inférieure à 0,05 on écarte l'hypothèse nulle (on estime alors que la différence de réussite est significative), dans le cas contraire on ne peut pas rejeter l'hypothèse que l'enseignement a été sans effet.

Le premier tableau concerne l'ensemble des exercices, puis un tableau est consacré à chaque question.

Somme des réussites : ARS et BRS.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 3,103 |
| Moyenne 2 | 5,282 |
| Ecart-type1 | 1,930 |
| Ecart-type2 | 2,235 |

| DII | t | Probab. |
|-----|--------|-------------|
| 38 | 10,678 | 5,34708E-13 |

Exercice 1 ; question 2 : A12R et B12R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,410 |
| Moyenne 2 | 0,513 |
| Ecart-type1 | 0,498 |
| Ecart-type2 | 0,506 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-------|----------|
| 38 | 1,160 | 0,253366 |

Exercice 3 : A3R et B3R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,359 |
| Moyenne 2 | 0,615 |
| Ecart-type1 | 0,486 |
| Ecart-type2 | 0,493 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-------|-------------|
| 38 | 2,693 | 0,010479264 |

Exercice 5 : A5R et B5R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,641 |
| Moyenne 2 | 0,949 |
| Ecart-type1 | 0,486 |
| Ecart-type2 | 0,223 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-------|-----------|
| 38 | 3,689 | 0,0007011 |

Exercice 7, question 1 : A71R et B71R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,154 |
| Moyenne 2 | 0,667 |
| Ecart-type1 | 0,366 |
| Ecart-type2 | 0,478 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-------|-----------|
| 38 | 6,325 | 2,044E-07 |

Exercice 1 ; question 1 : A11R et B11R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,846 |
| Moyenne 2 | 0,846 |
| Ecart-type1 | 0,366 |
| Ecart-type2 | 0,366 |

| DII | t | Probab. |
|-----|---|---------|
| 38 | 0 | 1 |

Exercice 2 : A2R et B2R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,231 |
| Moyenne 2 | 0,487 |
| Ecart-type1 | 0,427 |
| Ecart-type2 | 0,506 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-------|-----------|
| 38 | 3,213 | 0,0026738 |

Exercice 4 : A4R et B4R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,051 |
| Moyenne 2 | 0,205 |
| Ecart-type1 | 0,223 |
| Ecart-type2 | 0,409 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-------|-----------|
| 38 | 2,226 | 0,0319976 |

Exercice 6 : A6R et B6R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,256 |
| Moyenne 2 | 0,154 |
| Ecart-type1 | 0,442 |
| Ecart-type2 | 0,366 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-------|----------|
| 38 | 1,275 | 0,210044 |

Exercice 7, question 2 : A72R et B72R.

| | |
|-------------|-------|
| Moyenne 1 | 0,154 |
| Moyenne 2 | 0,846 |
| Ecart-type1 | 0,366 |
| Ecart-type2 | 0,366 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-------|-----------|
| 38 | 9,247 | 2,874E-11 |

Le premier test sur l'ensemble des exercices (sommées des réussites avant et après) montre sans équivoque que l'enseignement a eu un effet sur la réussite des élèves. Par contre l'analyse exercice par exercice appelle des explications.

Exercice 1 : Le test indique une stabilité dans la réussite qui évoque une sorte de saturation. Les élèves n'ont pas fait de progrès dans la recherche de l'élément inconnu d'un produit : « valeur d'une part » ou « nombre de parts ». Cet exercice appartient à un assortiment, une classe de situations pour lesquelles les élèves sont supposés disposer dans leur répertoire des connaissances nécessaires à leur résolution (compétences de CE : recherche d'un facteur inconnu d'une multiplication). Les situations proposées dans les leçons ne visaient pas ces savoirs spécifiques de CE ; elles ne créaient pas des conditions qui auraient permis aux élèves de se les approprier. Ceci explique qu'il n'y a pas eu de progrès en termes d'effectifs entre le questionnaire A et le questionnaire B sur cet exercice.

Exercice 6 : Plus surprenante est la régression à l'exercice 6 où les élèves passent de 26% de réussite à 15%. Probablement la cause en incombe pour partie au conditionnement de tout apprentissage. La répétition des raisonnements de proportionnalité dans les « bons cas » conduit les élèves à être moins vigilants sur les « mauvais cas ». Certains élèves ont pu appliquer par habitude leurs stratégies sans examiner si elles étaient valides. On ne peut pas en déduire pour autant que l'enseignement n'a été que conditionnement. Il y a eu aussi un effet de surprise chez les élèves ; c'est une rupture de contrat que de poser un exercice qui ne répond pas aux mêmes conditions que les autres exercices du questionnaire. La présence du tableau à cet exercice a pu renforcer l'idée qu'il fallait utiliser les techniques de la proportionnalité.

Pour tous les autres exercices (2, 3, 4, 5, 7), la différence de fréquences est significative au seuil de 5%.

Au delà de ce constat en termes de fréquences de réussites nous essaierons de déterminer quels facteurs sont liés à la réussite au questionnaire A puis au questionnaire B puis au progrès. Est-ce que les élèves renforcent leurs stratégies ou en changent et dans quels exercices ?

L'analyse des corrélations ne fait pas apparaître de facteurs qui assureraient globalement la réussite. Pour chaque exercice, les contraintes didactiques font que certaines techniques sont adéquates et d'autres non. Le tableau suivant résume les contributions significatives au seuil de 5% dans l'analyse des corrélations sur l'ensemble des élèves :

| Caractères qui contribuent | | A la réussite | A l'échec |
|----------------------------|------|-------------------|------------|
| Questionnaire A | A11R | | |
| | A12R | | |
| | A2R | A2M | |
| | A3R | A3Q | A3U |
| | A4R | A4A | |
| | A5R | A5Q ; A5DO ; A5CL | |
| | A6R | | A6Q ; A6CL |
| | A71R | | A7RA ; A7N |
| | A72R | | A7S ; A7N |
| | | | |

| | | | |
|-----------------|------|-----------------------------|------------|
| Questionnaire B | B11R | | |
| | B12R | | B12S |
| | B2R | B2U ; B2Q ; B2K ; B2G ; B2M | B2RA |
| | B3R | B3Q | B3U ; B3RA |
| | B4R | B4Ci ; B4M | |
| | B5R | B5Q | B5RA |
| | B6R | B6G | B6N |
| | B71R | | |
| | B72R | | B7RA |

Il apparaît que les facteurs de réussite ou d'échec dépendent de l'exercice.

En ce qui concerne les techniques : la réussite à l'exercice 2 nécessite l'usage du rapport externe (K) ou la méthode de réduction à l'unité (U) ; la réussite aux exercices 3 et 5 nécessite l'usage du rapport interne (Q) ; la réussite à l'exercice 4 nécessite l'usage d'un couple intermédiaire (Ci).

Il y a une évolution entre les questionnaires A et B dans l'utilisation de ces différentes techniques. Au questionnaire A, seule A2M est corrélée à A2R ; au questionnaire B les élèves qui réussissent à l'exercice 2 essaient plusieurs techniques y compris Q qui n'est pas adaptée. Par contre à l'exercice 5, les élèves qui réussissent essaient plusieurs techniques au questionnaire A alors qu'ils semblent utiliser directement Q au questionnaire B.

On peut aussi noter que la raison arithmétique (RA) contribue à l'échec à plusieurs exercices.

La référence aux grandeurs ou aux nombres ne semble décisive qu'à l'exercice 6.

Les opérations ne semblent pas avoir un rôle déterminant sur l'ensemble des exercices.

b) Recherche de regroupements

Dans l'analyse en composantes principales pour les questionnaires A puis B le premier axe factoriel discrimine les individus suivant les réussites et les échecs. Une typologie en fonction des trois modalités « réussite », « échec », « non-réponse » sur l'ensemble des exercices, permet dans les deux cas de constituer deux groupes d'élèves relativement stables par l'algorithme de partitionnement dit des « moyennes mobiles ».

Les deux graphiques des pages suivantes illustrent les corrélations significatives au seuil de 5% entre les variables réussites et font apparaître les groupes d'élèves « échec », « réussite ».

La répartition en effectifs de ces groupes est résumée dans le tableau suivant :

| Questionnaire A → Questionnaire B ↓ | Echec | Réussite | Total |
|--|-------|----------|-------|
| Echec | 12 | 3 | 15 |
| Réussite | 13 | 11 | 24 |
| Total | 25 | 14 | 39 |

Remarques : sur 39 élèves :

A 3 élèves près les élèves qui réussissent au questionnaire A réussissent au questionnaire B.

36 élèves sur 39 augmentent leur nombre de réussites du questionnaire A au questionnaire B.

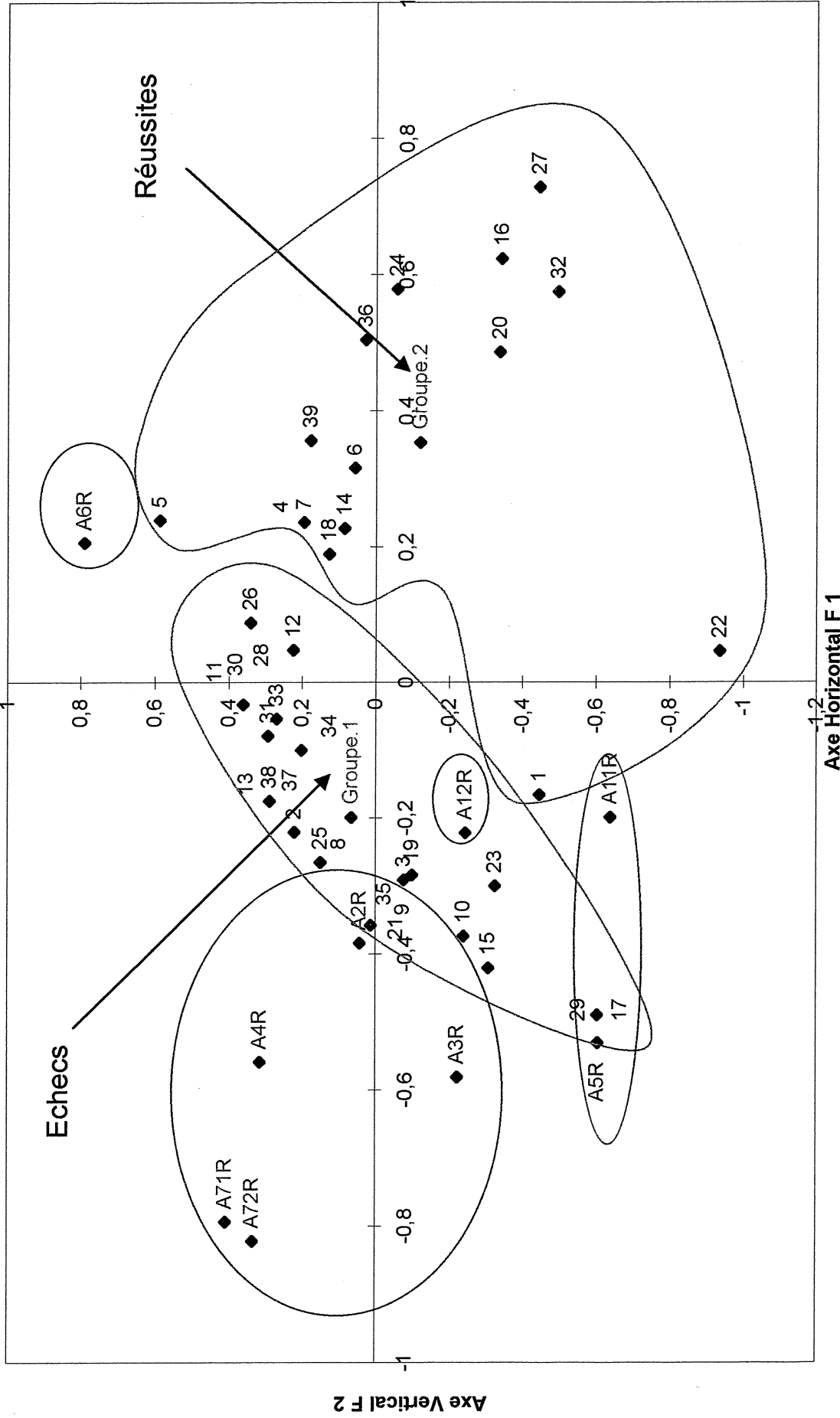
1 élève réussit 6 questions sur 9 aux deux questionnaires.

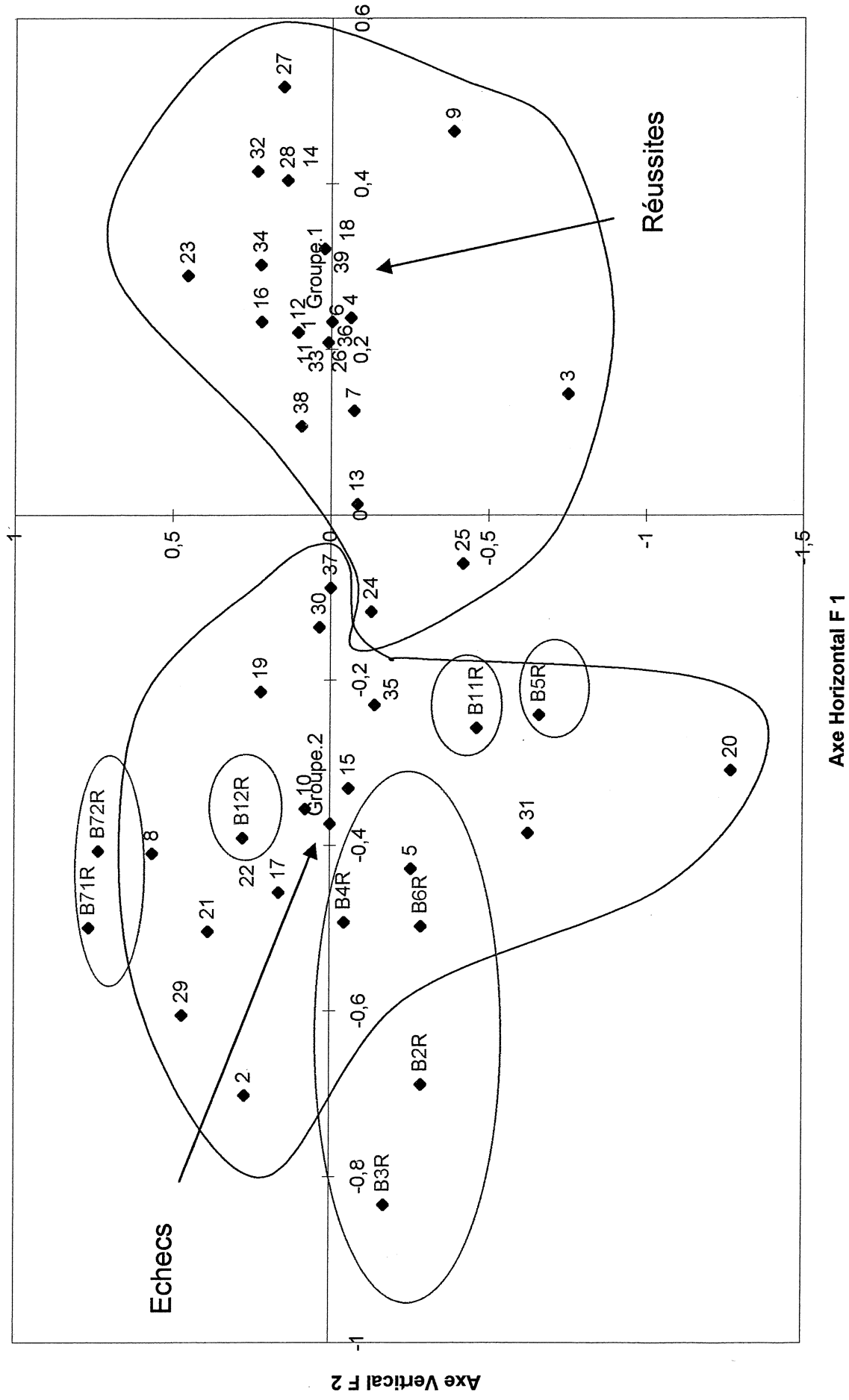
1 élève a zéro réussite aux deux questionnaires.

1 seul élève régresse en passant de 2 réussites à 1 réussite.

Au questionnaire A le groupe « réussite » comprend 14 élèves alors qu'au questionnaire B il en comprend 24.

Ces statistiques confirment les progrès des élèves en termes de fréquences.





Une analyse discriminante fait apparaître que ce sont les exercices 2, 3, 4, 6 qui pèsent le plus dans la constitution des groupes. Nous essayons de déterminer sur ces exercices quels sont les facteurs d'échec ou de réussite pour chacun des 3 groupes d'élèves : élèves en progrès (groupe « échec – réussite »), élèves en échec (groupe « échec – échec »), élèves en réussite (groupe « réussite – réussite »).

Groupe « échec - réussite » (ER) (élèves en progrès)
13 individus : 3, 9, 11, 12, 13, 14, 23, 25, 26, 28, 33, 34, 38.

Comparons les fréquences de réussites calculées en % sur les 13 élèves de ce groupe :

| | Exercice 2 | Exercice 3 | Exercice 4 | Exercice 6 |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|
| Questionnaire A | 38 | 31 | 8 | 8 |
| Questionnaire B | 77 | 92 | 15 | 31 |

On cherche à déterminer sur les exercices 2, 3, 4, 6 quels sont les facteurs de progrès pour les 13 élèves qui passent du groupe « échec » au groupe « réussite » : changement de techniques, de référence, d'opérations.

Une analyse en composantes principales sur les 13 observations du questionnaire A puis B fait apparaître des corrélations significatives au seuil de 5%. Le tableau suivant résume les contributions significatives :

| Caractères qui contribuent | | A la réussite | A l'échec |
|----------------------------|-----|---------------|-----------------------|
| Questionnaire A | A2R | A2M | |
| | A3R | A3Q A3P | |
| | A4R | A4Q A4Ci A4D | |
| | A6R | | |
| Questionnaire B | B2R | | B2RA B2A B4RA B4A B4S |
| | B3R | | B2RA B3RA B4RA |
| | B4R | B4Ci | |
| | B6R | B6G | B6N |

Pour les exercices 2 et 3 l'usage de la raison arithmétique (RA) s'oppose au progrès. A l'exercice 4 l'usage du couple intermédiaire est déterminant dans le progrès de ces élèves. A l'exercice 6 où les grandeurs ne sont pas proportionnelles, les élèves réussissent quand ils font référence aux grandeurs (B6G) et échouent quand ils ne travaillent que sur les nombres (B6N).

Multiplication et division contribuent à la réussite (A2R, A4R) alors que addition et soustraction contribuent à l'échec (B2R).

Les élèves qui progressent choisissent les techniques en fonction des exercices.

Une classification hiérarchique sur les caractères du questionnaire B semble montrer que les élèves ne se limitent pas à utiliser une technique mais des classes de techniques : B2U, B2T, B2Q, B2DO, B2K pour l'exercice 2 ; B3T, B3Q, B3P, B3DO pour l'exercice 3 ; B4T, B4Q pour l'exercice 4. C'est la spécificité didactique de chacun des exercices qui discrimine ces groupes de techniques: rapport externe entier ou interne entier ou aucun rapport entier.

Groupe « échec – échec » (EE) (élèves en échec)
12 individus : 2, 8, 10, 15, 17, 19, 21, 29, 30, 31, 35, 37.

On cherche à déterminer les raisons pour lesquelles ces 12 élèves n'ont pas fait de progrès.

Le tableau suivant permet de comparer les fréquences de réussites en pourcentages calculés sur ces 12 élèves :

| | Exercice 2 | Exercice 3 | Exercice 4 | Exercice 6 |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|
| Questionnaire A | 0 | 17 | 0 | 42 |
| Questionnaire B | 17 | 17 | 0 | 0 |

On constate un léger « progrès » à l'exercice 2, une stabilité aux exercices 3 et 4 et une régression à l'exercice 6.

L'analyse des corrélations effectuée avec ces 12 individus ne fait pas apparaître de facteurs significatifs d'échec pour l'ensemble des exercices. Le tableau suivant résume les contributions significatives au seuil de 5% :

| Caractères qui contribuent | | A la réussite | A l'échec |
|----------------------------|------------------|---------------|-----------|
| Questionnaire A | Exercice 3 : A3R | A3Q ; A3M | |
| | Exercice 6 : A6R | | A6Q |
| Questionnaire B | Exercice 2 : B2R | B2K ; B2M | |
| | Exercice 3 : B3R | B3DO ; B3Q | |

Au questionnaire A, les élèves qui réussissent à l'exercice 3 utilisent A3Q ou A3M. A l'exercice 6, A6Q fait échouer les élèves.

Au questionnaire B, B2K, B2M contribuent à la réussite de l'exercice 2 et B3DO, B3Q à celle de l'exercice 3.

Groupe « réussite – réussite » (RR) (élèves en réussite)

11 individus : 1, 4, 6, 7, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 39.

Comparons les fréquences de réussites calculées en % sur les 11 élèves de ce groupe :

| | Exercice 2 | Exercice 3 | Exercice 4 | Exercice 6 |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|
| Questionnaire A | 36 | 73 | 9 | 27 |
| Questionnaire B | 64 | 91 | 55 | 18 |

Ces élèves progressent sur les exercices 2, 3, 4 et régressent à l'exercice 6.

L'analyse des corrélations ne fait pas apparaître de facteurs de réussite sur l'ensemble des exercices. Le tableau suivant résume les contributions significatives au seuil de 5% :

| Caractères qui contribuent | | A la réussite | A l'échec |
|----------------------------|------------------|---------------|------------|
| Questionnaire A | Exercice 3 : A3R | A3Q | A3U |
| | Exercice 4 : A4R | A4Q ; A4A | |
| | Exercice 6 : A6R | | A6Q ; A6CL |
| Questionnaire B | Exercice 2 : B2R | B2M | |
| | Exercice 4 : B4R | B4Q ; B4Ci | |

Les techniques les plus utilisées sont Q, U, CL.

Aux exercices 3 et 4 la variable Q est corrélée à la réussite ; la situation crée la nécessité d'utiliser le rapport interne. C'est cette même variable qui fait échouer à l'exercice 6.

Les corrélations font apparaître un groupe de variables (B2R, B2M, B2T, B2G, B2DO, B2U, B2Q) qui s'oppose au groupe (B2A, B2P, B2N). Deux corrélations positives B2T↔B2G et B3T↔B3G montre que l'usage du tableau n'exclut pas la référence aux grandeurs chez ces élèves et une corrélation négative B3N>—<B3T montre que le tableau n'induit pas non plus une référence systématique aux nombres sans souci des grandeurs. Pour ces élèves le tableau ne semble pas influencer leur comportement. Dans ce groupe comme dans le groupe ER, ceux qui réussissent l'exercice 6 font référence aux grandeurs.

Conclusions

Ces analyses de corrélations confirment que les facteurs de réussite ou d'échec dépendent de l'exercice mais révèlent aussi qu'ils peuvent être différents d'un groupe à l'autre ; les corrélations significatives au seuil de 5% ne sont pas les mêmes dans les trois groupes d'élèves et sont l'indice de comportements spécifiques à chaque groupe.

Mais ces seules corrélations ne permettent pas de déterminer les raisons pour lesquelles certains élèves progressent et d'autres restent en échec. Il semble que pour chaque exercice ce soit une famille de caractères qui contribuent à la réussite ou au progrès. Par exemple pour l'exercice 2 les corrélations font apparaître un groupement de caractères pour le groupe RR (B2R, B2M, B2T, B2G, B2DO, B2U, B2Q) et un groupement de caractères pour le groupe ER (B2U, B2T, B2Q, B2DO, B2K) qui ont des caractères en commun. On ne trouve pas un tel groupement pour le groupe EE, les élèves de ce groupe ne semblent pas mobiliser ces différentes techniques. Pour en avoir confirmation et essayer de cerner les différences de comportements entre groupes d'élèves nous allons comparer les fréquences d'utilisation des différents répertoires exercice par exercice.

c) Comparaison des variations de fréquences dans l'utilisation des différents répertoires.

On va comparer les fréquences d'utilisation des différents répertoires entre les trois groupes : « échec – échec » (EE), « échec – réussite » (ER), « réussite – réussite » (RR) et leurs évolutions.

Les fréquences de « 1 » sont calculées en pourcentages sur l'effectif de chaque groupe.

Exercice 2 :

| Questionnaire A | R | P | U | Q | Ci | CL | DO | RA | FA | K | T | M | D | A | S | G | N |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Groupe EE | 0 | 25 | 67 | | | | | | | | | 42 | 17 | 8 | 25 | 50 | 50 |
| Groupe ER | 38 | 23 | 69 | | | | | | | | | 46 | 38 | 15 | 8 | 15 | 85 |
| Groupe RR | 36 | 45 | 55 | | | | | | | | | 36 | 18 | 9 | 18 | 9 | 82 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Questionnaire B | R | P | U | Q | Ci | CL | DO | RA | FA | K | T | M | D | A | S | G | N |
| Groupe EE | 17 | 33 | 17 | 17 | | | 17 | 33 | | 8 | 17 | 33 | 8 | 50 | | 50 | 42 |
| Groupe ER | 77 | 23 | 38 | 46 | | | 38 | 15 | | 23 | 54 | 38 | 8 | 46 | 15 | 62 | 31 |
| Groupe RR | 64 | 27 | 55 | 64 | | | 73 | | | 9 | 45 | 45 | | 27 | | 64 | 36 |

Au questionnaire A :

Les trois groupes utilisent P et U. Les élèves utilisent leurs connaissances du cours élémentaire.

Le groupe EE fait autant référence aux grandeurs qu'aux nombres alors que le groupe RR se réfère plutôt aux nombres.

Au questionnaire B :

La fréquence de U diminue fortement pour le groupe EE, beaucoup moins pour le groupe ER et reste inchangée pour le groupe RR.

De nouvelles techniques apparaissent y compris la technique RA qui est inadéquate ; mais les élèves du groupe RR ne l'utilisent jamais et ceux du groupe ER l'utilisent moins que ceux du groupe EE. Les tendances sont inversées pour les techniques Q, DO, T : les élèves du groupe

RR les utilisent plus que les élèves du groupe ER qui eux-mêmes les utilisent plus que les élèves du groupe EE.

La référence aux grandeurs est stable pour le groupe EE et augmente de 50% pour les deux autres groupes.

La conception des groupes ER et RR évolue en utilisant Q, DO, K, T qui sont des techniques nouvelles. Le groupe en progrès utilise K au détriment de U. La conception du groupe en échec évolue en utilisant Q et DO moins fréquemment que les deux autres groupes par contre les élèves de ce groupe utilisent RA qui est inadéquat.

Exercice 3 :

| Questionnaire A | R | P | U | Q | Ci | CL | DO | RA | FA | K | T | M | D | A | S | G | N |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|
| Groupe EE | 17 | 67 | 33 | 17 | | | 8 | | | | | 33 | 8 | 50 | 25 | 42 | 58 |
| Groupe ER | 31 | 23 | 23 | 31 | | | | 8 | 8 | | | 62 | 15 | 31 | 8 | 23 | 77 |
| Groupe RR | 73 | 45 | 18 | 73 | | | | | 9 | | | 91 | 27 | 18 | 9 | 9 | 91 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Questionnaire B | R | P | U | Q | Ci | CL | DO | RA | FA | K | T | M | D | A | S | G | N |
| Groupe EE | 17 | 25 | 17 | 17 | | | 8 | 42 | | | 25 | 25 | | 42 | | 58 | 42 |
| Groupe ER | 92 | 23 | | 69 | | | 23 | 8 | | | 54 | 54 | | 23 | | 54 | 38 |
| Groupe RR | 91 | 9 | | 73 | | | 9 | | | | 27 | 73 | | 18 | | 36 | 55 |

Au questionnaire A :

Les techniques P, U, Q sont les plus utilisées.

Les élèves du groupe EE utilisent plus souvent P, A et G que ceux du groupe RR ; les tendances sont contraires pour Q, M, N.

Au questionnaire B :

Globalement les techniques P et U sont moins utilisées, U n'est plus utilisé par les groupes ER et RR.

T apparaît avec des fréquences proches de celles de l'exercice 2.

42% des élèves du groupe EE utilisent RA contre 8% pour le groupe ER et 0% pour le groupe RR.

C'est dans le groupe ER qu'il y a le plus de changements : U disparaît, Q augmente considérablement, DO et T font leur apparition avec des fréquences importantes et la référence aux grandeurs augmente au détriment de la référence aux nombres.

Ce qui semble caractériser le groupe EE c'est l'apparition de RA au détriment de P et une stabilité pour Q.

73% des élèves du groupe RR utilisent la technique adaptée Q dès le questionnaire A.

Exercice 4 :

| Questionnaire A | R | P | U | Q | Ci | CL | DO | RA | FA | K | T | M | D | A | S | G | N |
|-----------------|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Groupe EE | 0 | 42 | | 17 | | | | | 8 | 25 | | 50 | 8 | 25 | 8 | 25 | 75 |
| Groupe ER | 8 | 23 | 8 | 8 | 8 | | | 31 | 8 | 15 | | 54 | 8 | 31 | 31 | 38 | 54 |
| Groupe RR | 9 | 27 | 9 | 18 | | | 18 | | 18 | | | 45 | | 18 | | 27 | 64 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Questionnaire B | R | P | U | Q | Ci | CL | DO | RA | FA | K | T | M | D | A | S | G | N |
| Groupe EE | 0 | | 8 | 25 | 8 | 25 | 25 | 33 | 33 | | 33 | 25 | 8 | 50 | 17 | 50 | 50 |
| Groupe ER | 15 | | | 46 | 15 | 23 | 38 | 15 | | | 69 | 15 | 15 | 38 | 23 | 54 | 46 |
| Groupe RR | 55 | | 9 | 55 | 73 | 55 | 55 | | 9 | | 82 | 9 | | | | 73 | 27 |

Au questionnaire A :

Les techniques utilisées sont P, Q, FA, K.

Les élèves font plutôt référence aux nombres et utilisent plus la multiplication que l'addition.

U est très peu utilisé ; K figure au questionnaire A puis disparaît au questionnaire B.

Au questionnaire B :

Comme dans les exercices précédents T fait son apparition.

Il semble que P disparaisse au profit de CL alors que la référence aux grandeurs augmente au détriment de la référence aux nombres. Donc P et CL joueraient la même fonction technique indépendamment de la référence aux grandeurs ou aux nombres.

Globalement les fréquences de Q, Ci, DO augmentent plus pour les groupes ER et RR que pour le groupe EE. Les élèves de ce groupe EE essaient les techniques RA et FA non pertinentes au détriment de Ci qui est la technique adaptée à cet exercice.

Les fréquences d'utilisation de Q, Ci, CL, DO, T, G augmentent avec la fréquence de réussite R alors que celle de N varie dans le sens contraire

Exercice 6 :

| Questionnaire A | R | P | U | Q | Ci | CL | DO | RA | FA | K | T | M | D | A | S | G | N |
|-----------------|----|---|---|-----|----|----|----|----|----|---|---|----|---|----|---|----|----|
| Groupe EE | 42 | | | 50 | | 8 | 25 | | | | | 25 | | 42 | | 33 | 58 |
| Groupe ER | 8 | | | 77 | | 38 | 38 | | | | | 31 | | 31 | | 46 | 54 |
| Groupe RR | 27 | | | 82 | | 55 | 18 | | | | | 0 | | 55 | | 55 | 45 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Questionnaire B | R | P | U | Q | Ci | CL | DO | RA | FA | K | T | M | D | A | S | G | N |
| Groupe EE | 0 | | | 83 | | 25 | 50 | | | 8 | | 42 | | 50 | | 25 | 75 |
| Groupe ER | 31 | | | 92 | | 38 | 38 | | | | | 31 | | 54 | | 23 | 77 |
| Groupe RR | 18 | | | 100 | | 36 | 55 | | | | | 36 | | 36 | | 45 | 55 |

Les trois techniques utilisées sont Q, CL, DO avec des fréquences différentes au questionnaire A et B.

Le plus surprenant dans cet exercice est que le groupe EE passe de 42% à 0% de réussite.

Nous avons vu que dans cet exercice, la référence aux grandeurs était corrélée à la réussite au questionnaire B pour le groupe ER ; elle est une nécessité pour la reconnaissance de la non-proportionnalité et la réussite ; pourtant la fréquence de G diminue. Pour le groupe ER qui augmente en réussite les fréquences de CL et DO sont invariantes alors qu'elles augmentent pour le groupe EE. Peut-être les élèves du groupe EE sont-ils ceux qui ont le plus subi l'effet de conditionnement lors de l'apprentissage des nouvelles techniques, apprentissage qui se serait fait au détriment du sens. La fréquence d'utilisation de DO augmente dans les groupes EE et RR alors que la fréquence de réussite diminue.

Résumé de l'évolution des conceptions entre les questionnaires A et B

De nouvelles techniques apparaissent aux exercices du questionnaire B y compris des techniques inadéquates.

Les trois groupes évoluent dans l'utilisation des techniques : diminution dans la fréquentation des anciennes techniques et augmentation de celle des nouvelles.

Pour les exercices 2, 3, 4 les techniques porteuses de réussite (Q, DO, Ci, K) augmentent plus en fréquences dans les groupes ER et RR que dans le groupe EE. La tendance est inversée pour les techniques (RA, FA) source d'échec ; la genèse, en situation adidactique, de l'usage

d'une raison arithmétique se manifeste davantage chez les élèves du groupe EE que ceux du groupe ER, elle n'apparaît pas chez les élèves du groupe RR.

La référence aux grandeurs augmente de manière plus sensible dans les groupes ER et RR que dans le groupe EE ; paradoxalement elle diminue à l'exercice 6 où elle est une nécessité pour le sens.

En conclusion :

Les trois groupes évoluent avec deux tendances :

- D'une part, les élèves des différents groupes suivent des « cheminements d'apprentissage » similaires mais avec des décalages qui se manifestent dans les fréquences d'utilisation des différents répertoires.
- D'autre part les techniques pertinentes et institutionnelles sont plus souvent utilisées par les élèves des groupes ER et RR que par ceux du groupe EE alors que les techniques non pertinentes (RA et FA) sont plus souvent utilisées par le groupe EE que par les deux autres groupes.

Les élèves des groupes ER et RR savent mieux choisir les techniques adaptées à l'exercice, rejeter les techniques inadéquates, retrouver le sens avec les grandeurs que les élèves du groupe EE. En d'autres termes, le système réflexif de l'apprentissage fonctionne mieux chez les élèves des groupes ER et RR que chez les élèves du groupe EE.

2 – Evolutions des techniques

a) Comparaison des fréquences

Au questionnaire A les techniques les plus utilisées sont P, U, Q alors qu'au questionnaire B ce sont P, Q, DO, CL, T. Après l'étude des techniques rares ou nouvellement utilisées au questionnaire B, nous ferons un test de significativité pour chacune des variables P, U, Q, CL, DO sur les exercices concernés.

Techniques rares ou nouvelles au questionnaire B :

X : A l'exercice 4 du questionnaire A quelques élèves ont fait un « produit en croix », mais cette technique a complètement disparu au questionnaire B.

Deux stratégies nouvelles K et T apparaissent au questionnaire B.

K : Le rapport externe n'est utilisable qu'à l'exercice 2. Il caractérise une fonction linéaire entière, relation entre deux grandeurs de natures différentes. 13% des élèves utilisent K au questionnaire B ; il serait excessif de dire que ces élèves ont perçu la notion de fonction avec l'expérimentation des leçons pourtant cette « relation numérique » n'est pas utilisée au questionnaire A.

T : Son usage en tant qu'outil de résolution ou support de techniques de calcul n'apparaît qu'au questionnaire B et ne concerne que les exercices 1, 2, 3, 4. Le tableau a fait l'objet d'une institutionnalisation diffuse à travers des pratiques de classe sans qu'il n'y ait jamais eu d'institutionnalisation objective spécifique à son sujet. Pourtant 59% des élèves l'utilisent à l'exercice 4. On ne peut pas savoir si les élèves ont utilisé le tableau comme outil dans les exercices 5, 6, 7 puisqu'il figure déjà dans les énoncés de ces exercices.

Ci : Seul l'exercice 4 crée les conditions nécessaires à l'utilisation de la technique Ci (couple intermédiaire). C'était un des objectifs des leçons. La fréquence d'utilisation de Ci passe de 3% à 28%. Ci est facteur de réussite à l'exercice 4 du questionnaire B.

FA : En analysant les productions des élèves nous avons constaté que certains élèves qui ne trouvaient pas de rapport géométrique (Q ou K) recherchaient un rapport arithmétique (RA) ou un « rapport affine » (FA). La recherche d'un tel « rapport affine » peut être induite par la division euclidienne récemment institutionnalisée.

Dans l'exercice 3, c'est la relation entre les deux grandeurs de natures différentes qui peut être « expliquée » par une « fonction affine » ou « rapport affine externe » alors que le rapport interne est entier. Cette stratégie apparaît dans A3 ($15 = 7 \times 2 + 1$) mais n'apparaît plus dans B3 ($17 = 5 \times 3 + 2$). Trois élèves sont concernés par A3FA ce sont les individus 5, 32, 33. A l'exercice B3 l'individu 5 utilise une raison arithmétique et fait l'exercice faux, les individus 32 et 33 font un tableau et utilisent Q avec succès.

Dans l'exercice 4 la recherche d'un tel rapport entre les deux grandeurs de même nature peut être renforcée par l'institutionnalisation du double et un effet de contrat ; dans A4 : $28 = 2 \times 12 + b$ et dans B4 : $33 = 2 \times 15 + b$. Les trois élèves qui utilisent A4FA (individus 18, 21, 23) changent de technique à l'exercice B4. Deux d'entre eux utilisent T et Ci avec succès, le troisième utilise T et DO mais échoue.

Il semble donc que certains élèves n'aient qu'une conception temporaire et fragile qui correspond à une « certaine compréhension » à un moment donné mais que de nouvelles situations font facilement évoluer.

Les cinq élèves qui utilisent FA à l'exercice B4 le font pour la première fois (2, 10, 15, 19, 36). Ils avaient tous les 5 échoué à l'exercice A4, trois d'entre eux en utilisant P, X, DO, deux d'entre eux n'avaient rien fait. On voit bien que certains élèves sont à la recherche de schèmes productifs mais qu'ils échouent tant qu'ils n'ont pas trouvé un algorithme adéquat. Heureusement leur conception n'est pas stable et évolue avec les nouvelles situations.

RA : sont concernés les exercices 2, 3, 4, 5, 7. Les variations de fréquences d'utilisation de RA entre les questionnaires A et B peuvent être très différentes d'un exercice à l'autre ; à l'exercice 7 elles passent de 33% à 3% mais sont stables à l'exercice 5.

Techniques fréquentes :

Comme pour les réussites, on veut comparer les fréquences d'utilisations des techniques P, U, Q, CL, DO avant et après le processus expérimental. Pour chacune de ces techniques on fait un test de Student sur les deux échantillons appariés que constitue l'ensemble des élèves de Michelet de CM1 avant et après les leçons.

Hypothèse nulle : Le processus expérimental est sans effet sur l'utilisation des techniques P, U, Q, CL, DO.

Les tableaux suivants donnent pour chaque exercice concerné les fréquences d'utilisation au questionnaire A (moyenne 1) puis au questionnaire B (moyenne 2) de la technique considérée ainsi que la valeur t de Student avec la probabilité P d'être dépassée en valeur absolue. Si cette valeur P est inférieure à 0,05 on écarte l'hypothèse nulle, sinon on ne peut pas rejeter cette hypothèse au seuil de 5%.

Sur l'ensemble des exercices les écarts de fréquences entre le questionnaire A et le questionnaire B des variables P, U, Q, CL, DO sont significatifs au seuil de 5%. Globalement l'enseignement a eu un effet sur l'usage de ces techniques mais les écarts d'utilisation varient d'un exercice à l'autre et d'une technique à l'autre.

P : La stratégie de « partitionnement » qui figurait aux exercices A4 et A5 n'apparaît plus aux exercices B4 et B5. Sa fréquence d'utilisation diminue significativement aux questions B11 et B3 mais pas aux questions B12 et B2.

Variables somme : APS et BPS

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 1,69230771 |
| Moyenne 2 | 0,92307693 |
| Ecart-type1 | 1,25977954 |
| Ecart-type2 | 1,26459098 |

| | | |
|-----|------------|------------|
| DII | t | Probab. |
| 38 | 3,73315263 | 0,00061786 |

Exercice 1 ; question 2 : A12P et B12P.

| | |
|-----------|------------|
| Moyenne 1 | 0,2820513 |
| Moyenne 2 | 0,38461539 |

Exercice 1 ; question 1 : A11P et B11P.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,25641027 |
| Moyenne 2 | 0,1025641 |
| Ecart-type1 | 0,44235908 |
| Ecart-type2 | 0,30735479 |

| | | |
|-----|------------|-----------|
| DII | t | Probab. |
| 38 | 2,22632432 | 0,0319977 |

Exercice 2 : A2P et B2P.

| | |
|-----------|------------|
| Moyenne 1 | 0,33333334 |
| Moyenne 2 | 0,25641027 |

| | |
|-------------|------------|
| Ecart-type1 | 0,45588086 |
| Ecart-type2 | 0,49286413 |

| | |
|-------------|------------|
| Ecart-type1 | 0,47756686 |
| Ecart-type2 | 0,44235905 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,07105982 | 0,29089832 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 0,82870197 | 0,41244814 |

Exercice 3 : A3P et B3P.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,41025642 |
| Moyenne 2 | 0,17948718 |
| Ecart-type1 | 0,4983102 |
| Ecart-type2 | 0,38877637 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,68800211 | 0,01060979 |

U : La fréquence d'utilisation de U diminue de manière significative aux exercices 1, 2, 3. A l'exercice 4 seulement deux élèves essaient cette technique au questionnaire A et deux élèves au questionnaire B mais ce ne sont pas les mêmes.

Les élèves qui renoncent à U au questionnaire B optent pour une autre technique (P, T, K, Q, DO, RA) ou ne font rien paraître même s'ils réussissent. Il semble que certains élèves familiarisés avec certaines questions effectuent directement une opération sans expliciter ni leur raisonnement ni leur technique.

Variables sommes : AUS et BUS.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 1,38461542 |
| Moyenne 2 | 0,74358976 |
| Ecart-type1 | 0,93514372 |
| Ecart-type2 | 0,75106767 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 4,43402719 | 7,6388E-05 |

Exercice 1 ; question 2 : A12U et B12U.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,46153846 |
| Moyenne 2 | 0,2820513 |
| Ecart-type1 | 0,50503541 |
| Ecart-type2 | 0,45588083 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,01630855 | 0,05087647 |

Exercice 3 : A3U et B3U.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,25641027 |
| Moyenne 2 | 0,07692308 |
| Ecart-type1 | 0,44235908 |
| Ecart-type2 | 0,26995273 |

Exercice 2 : A2U et B2U.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,61538464 |
| Moyenne 2 | 0,33333334 |
| Ecart-type1 | 0,49286416 |
| Ecart-type2 | 0,4775669 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,91262674 | 0,00597128 |

Exercice 4 : A4U et B4U.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,05128205 |
| Moyenne 2 | 0,05128205 |
| Ecart-type1 | 0,22345589 |
| Ecart-type2 | 0,22345591 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,21359444 | 0,03293356 |

| DII | t | Probab. |
|-----|---|---------|
| 38 | 0 | 1 |

Q : Dans l'exercice 2, c'est le rapport externe (K) qui est entier. Au questionnaire A aucun élève n'essaie la technique Q mais au questionnaire B, 41% des élèves essaient d'utiliser le rapport interne. Il semble qu'il y ait eu un effet d'institutionnalisation ; sur les questions 4, 5, 6 et 72 l'écart de fréquence est significatif.

Variables somme : AQS et BQS.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 1,79487181 |
| Moyenne 2 | 3,48717952 |
| Ecart-type1 | 1,23925882 |
| Ecart-type2 | 1,41182604 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 6,57066965 | 9,4229E-08 |

Exercice 3 : A3Q et B3Q.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,35897437 |
| Moyenne 2 | 0,48717949 |
| Ecart-type1 | 0,48597045 |
| Ecart-type2 | 0,50636967 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,30247021 | 0,20059461 |

Exercice 5 : A5Q et B5Q.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,56410259 |
| Moyenne 2 | 0,94871795 |
| Ecart-type1 | 0,50235607 |
| Ecart-type2 | 0,22345589 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 4,41820621 | 8,0166E-05 |

Exercice 7, question 1 : A71Q et B71Q.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,02564103 |
| Moyenne 2 | 0,07692308 |
| Ecart-type1 | 0,16012811 |
| Ecart-type2 | 0,26995265 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,00000036 | 0,32363591 |

Exercice 4 : A4Q et B4Q.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,15384616 |
| Moyenne 2 | 0,38461539 |
| Ecart-type1 | 0,36551776 |
| Ecart-type2 | 0,49286411 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,47126317 | 0,01806067 |

Exercice 6 : A6Q et B6Q.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,66666669 |
| Moyenne 2 | 0,92307693 |
| Ecart-type1 | 0,47756691 |
| Ecart-type2 | 0,26995269 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,69293666 | 0,01047927 |

Exercice 7, question 2 : A72Q et B72Q.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,02564103 |
| Moyenne 2 | 0,25641027 |
| Ecart-type1 | 0,16012811 |
| Ecart-type2 | 0,44235906 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 3,37638879 | 0,00170535 |

CL : La stratégie CL est plus particulièrement efficace à l'exercice 7 où elle apparaît seulement au questionnaire B. Il semble que CL et Q augmentent la réussite à l'exercice 7.

Variables sommes : ACLS et BCLS.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,56410259 |
| Moyenne 2 | 1,71794868 |
| Ecart-type1 | 0,82061831 |
| Ecart-type2 | 1,19094635 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|-----------|
| 38 | 5,98531723 | 5,963E-07 |

Exercice 5 : A5CL et B5CL.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,25641027 |
| Moyenne 2 | 0,51282054 |
| Ecart-type1 | 0,44235906 |
| Ecart-type2 | 0,50636967 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,91893458 | 0,00587376 |

Exercice 6 : A6CL et B6CL.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,30769232 |
| Moyenne 2 | 0,33333334 |
| Ecart-type1 | 0,46757194 |
| Ecart-type2 | 0,4775669 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 0,27404159 | 0,78553687 |

DO : L'écart de fréquence à l'exercice 3 n'est pas significatif.

La stratégie DO apparaît à la question B2 alors qu'elle n'est pas efficace. C'est un effet didactique qui résulte d'une institutionnalisation diffuse de « la règle du double ». Elle est efficace à l'exercice 5 mais induit une erreur à l'exercice 6 si elle ne s'accompagne pas d'un raisonnement sur les grandeurs.

Variables sommes : ADOS et BDOS.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,66666669 |
| Moyenne 2 | 1,8974359 |
| Ecart-type1 | 0,83770775 |
| Ecart-type2 | 1,37256711 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 5,54840612 | 2,3701E-06 |

Exercice 3 : A3DO et B3DO.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,02564103 |
| Moyenne 2 | 0,12820514 |
| Ecart-type1 | 0,16012814 |
| Ecart-type2 | 0,33868845 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,67002726 | 0,10313249 |

Exercice 5 : A5DO et B5DO.

| | |
|-----------|------------|
| Moyenne 1 | 0,30769232 |
| Moyenne 2 | 0,51282054 |

Exercice 4 : A4DO et B4DO.

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,05128205 |
| Moyenne 2 | 0,35897437 |
| Ecart-type1 | 0,22345587 |
| Ecart-type2 | 0,48597045 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 4,10961008 | 0,00020371 |

Exercice 6 : A6DO et B6DO.

| | |
|-----------|------------|
| Moyenne 1 | 0,2820513 |
| Moyenne 2 | 0,48717949 |

| | |
|-------------|------------|
| Ecart-type1 | 0,46757191 |
| Ecart-type2 | 0,50636964 |

| | |
|-------------|------------|
| Ecart-type1 | 0,45588084 |
| Ecart-type2 | 0,50636967 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,08395267 | 0,04394018 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,95241153 | 0,05828535 |

b) Recherche de regroupements

Questionnaire A

L'analyse des corrélations (analyse en composantes principales ou classification hiérarchique) sur l'ensemble des techniques du questionnaire A fait apparaître quelques groupes de techniques :

A3Q-A5Q-A6Q-A5CL-A6CL-A5DO-A6DO

A2P-A5RA-A5P-A3U-A7RA

A4P-A4Q-A4Ci

A4U-A4FA

A3DO-A4X-A71Q-A72Q

A3RA-A4RA

On cherche à grouper des individus qui utiliseraient les techniques de certains de ces groupes.

Une typologie sur l'ensemble des techniques mise en œuvre au questionnaire A permet de constituer deux groupes d'individus stables par l'algorithme de partitionnement dit des moyennes mobiles. Le groupe 1 comprend 22 élèves (3, 4, 6, 7, 11, 13, 14, 16, 18, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39) et le groupe 2 en comprend 17 (1, 2, 5, 8, 9, 10, 12, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 29, 35).

Le graphique de la page suivante illustre ces groupements.

Une analyse discriminante permet de sélectionner les techniques qui pèsent le plus dans la constitution de ces groupes d'individus. Les groupes de techniques obtenues ne coïncident pas avec les groupes fournis par les corrélations précédentes.

Pour le groupe 1 et par ordre décroissant de poids on obtient : A5Q, A6Q, A12U, A2U, A3Q, A5DO, A3P, A5CL, A6DO, A6CL. On retrouve plusieurs techniques du premier groupe de corrélations.

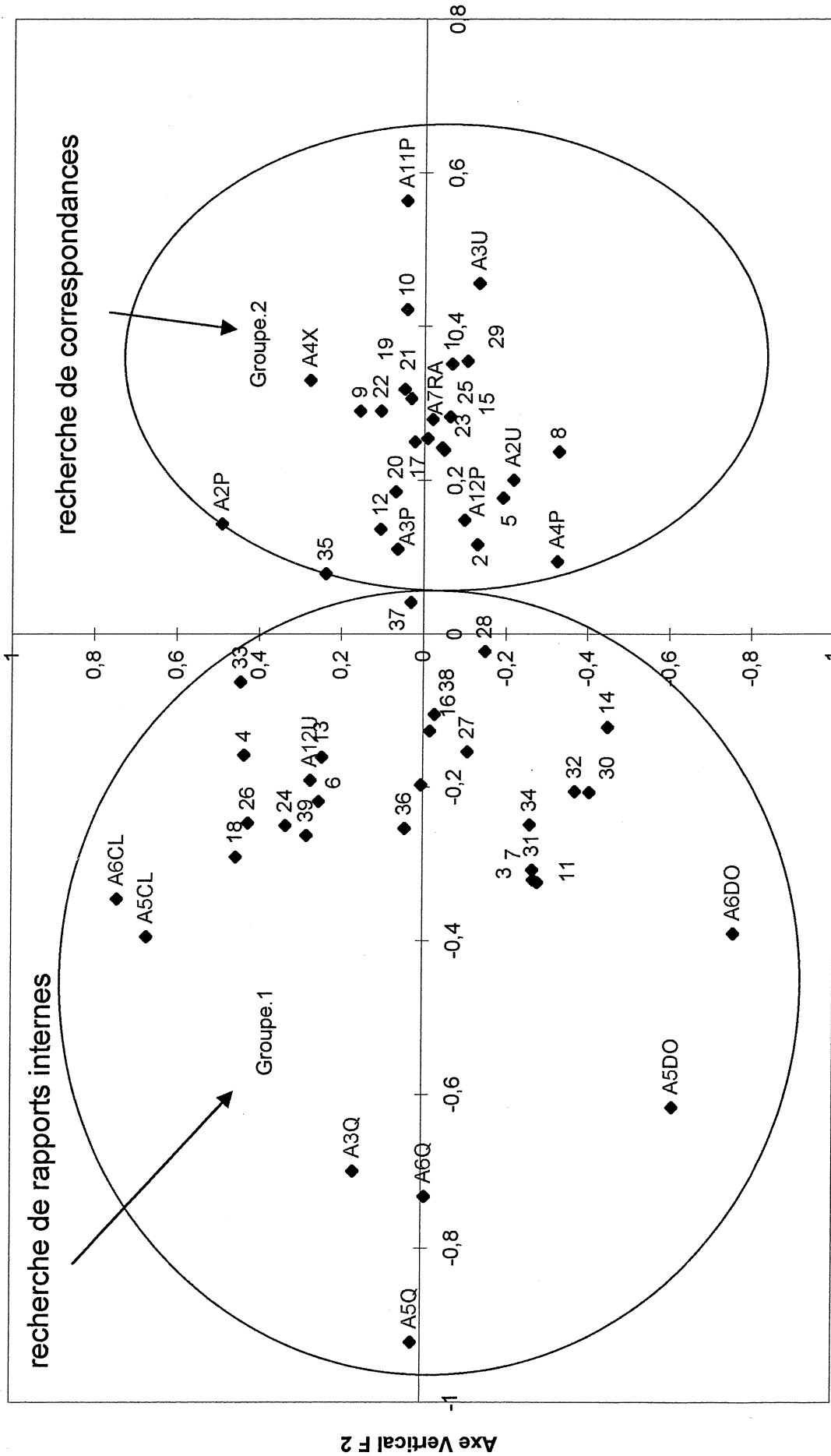
Pour le groupe 2 et par ordre décroissant de poids on obtient : A2U, A11P, A2P, A3U, A3P, A7RA, A12U, A12P, A4P, A4X, A6Q.

Pour le groupe 1 sont principalement concernées les techniques Q, DO, CL et les exercices 3, 5, 6 alors que pour le groupe 2 sont surtout concernées les techniques P, U et les exercices 1, 2, 3, 4.

Une analyse en composantes principales limitée à ces techniques donne un graphique qui illustre ces deux groupements (voir page suivante) correspondant à deux conceptions différentes : les élèves du groupe 1 cherchent à utiliser Q, DO, CL donc des relations internes à chaque grandeur aux exercices 3, 5, 6 alors que les élèves du groupe 2 essaient d'utiliser P ou U donc des correspondances entre les deux grandeurs étudiées sur les exercices 1, 2, 3, 4.

Remarques :

- La moitié des élèves du groupe 1 cherchent aussi à utiliser U ou P aux exercices 1, 2, 3, 4 avec des fréquences importantes. Une conception n'exclut pas l'autre.
- Dans le groupe 2 trois élèves (17, 20, 35) utilisent une seule fois une des techniques P ou U mais ces élèves n'utilisent pas plus souvent les techniques Q, CL, DO.



Axe Horizontal F 1

Questionnaire B

La recherche de corrélations au seuil de 5% (classification hiérarchique et analyse en composantes principales) sur l'ensemble des techniques du questionnaire B fait apparaître les groupements suivants :

B3U-B12P-B3P-B2P-B11P-B4U-B4FA

B2U-B2Q-B2T-B2DO-B3T-B3Q-B4T-B4DO-B4CL-B4Q-B4Ci

B2RA-B3RA-B4RA-B5RA-B7RA-B6K

B5CL-B6CL

B5DO-B6DO

Remarquons que le couple de variables (corrélées positivement) B5CL-B6CL s'oppose (corrélation négative) au couple de variables B5DO-B6DO (corrélées positivement).

Le graphique de la page suivante illustre ces groupements.

Une typologie sur l'ensemble de ces techniques permet de constituer des groupes d'individus par l'algorithme de partitionnement dit des « moyennes mobiles ». Une partition en trois groupes est stable à deux individus près.

Le groupe 1 comprend 15 élèves : 1, 7, 9, 11, 14, 16, 21, 23, 27, 32, 34, 35, 36, 38, 39.

Le groupe 2 comprend 15 élèves : 2, 3, 5, 8, 10, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 28, 29, 30, 31.

Le groupe 3 comprend 9 élèves : 4, 6, 12, 18, 24, 25, 26, 33, 37.

Une analyse discriminante permet de sélectionner les techniques qui contribuent le plus à la constitution de ces groupes.

Pour le groupe 1 et par ordre décroissant de poids sont concernés les caractères :

B5Q, B6Q, B4T, B5DO, B6DO, B2DO, B3Q, B4Q, B12U, B2Q, B2U, B2T, B4DO, B4CL, B71CL, B72Q. Les élèves de ce groupe utilisent les techniques U, Q, CL, DO, T aux exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 comme l'indique le tableau suivant :

| | | | | | | |
|------------|---|-------------|---|----------|-------|-------|
| Exercices | 1 | 2 | 3 | 4 | 5, 6 | 7 |
| Techniques | U | DO, Q, U, T | Q | T, Q, DO | Q, DO | Q, CL |

Pour le groupe 2 et par ordre décroissant de poids sont concernés les caractères :

B5Q, B6Q, B5CL, B2RA, B3RA, B4RA, B6DO. Les élèves de ce groupe utilisent les techniques Q, CL, DO uniquement aux exercices 5 et 6 et la technique RA aux exercices 2, 3, 4.

| | | |
|------------|---------|-----------|
| Exercices | 2, 3, 4 | 5, 6 |
| Techniques | RA | Q, CL, DO |

Pour le groupe 3 et par ordre décroissant de poids sont concernés les caractères :

B5Q, B5CL, B6Q, B6CL, B12P, B4T, B4DO, B3Q, B4Ci, B2U, B2Q, B2DO, B4Q. Les élèves de ce groupe utilisent les techniques P, U, Q, DO, T, Ci, CL aux exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme indiqué dans le tableau suivant :

| | | | | | |
|------------|---|----------|---|--------------|-------|
| Exercices | 1 | 2 | 3 | 4 | 5, 6 |
| Techniques | P | U, Q, DO | Q | T, DO, Q, Ci | Q, CL |

Commentaires :

Les trois groupes ont 3 techniques communes : Q, CL, DO.

Seul le groupe 2 utilise RA et uniquement aux exercices 2, 3, 4.

Il y a peu de variables qui distinguent les groupes 1 et 3. Aux exercices 5 et 6 les élèves du groupe 1 utilisent Q et DO alors que les élèves du groupe 3 utilisent Q et CL. Nous avons

constaté que les techniques CL et DO s’opposaient. A l’exercice 1, les élèves du groupe 1 utilisent U alors que ceux du groupe 3 utilisent P. A l’exercice 4, les élèves du groupe 3 utilisent Ci.

Le tableau suivant résume la répartition des techniques en fonction des exercices et selon les groupes : ① ② ③ désignent les groupes 1, 2, 3.

| Exercices→ Techniques↓ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------------------------|---|-----|-----|-----|-------|-------|---|
| P | ③ | | | | | | |
| Ci | | | | ③ | | | |
| U | ① | ① ③ | | | | | |
| T | | ① | | ① ③ | | | |
| DO | | ① ③ | | ① ③ | ① | ① | |
| Q | | ① ③ | ① ③ | ① ③ | ① ② ③ | ① ② ③ | ① |
| CL | | | | | ② ③ | ② ③ | ① |
| RA | | ② | ② | ② | | | |

Le graphique de la page suivante illustre ces groupements.

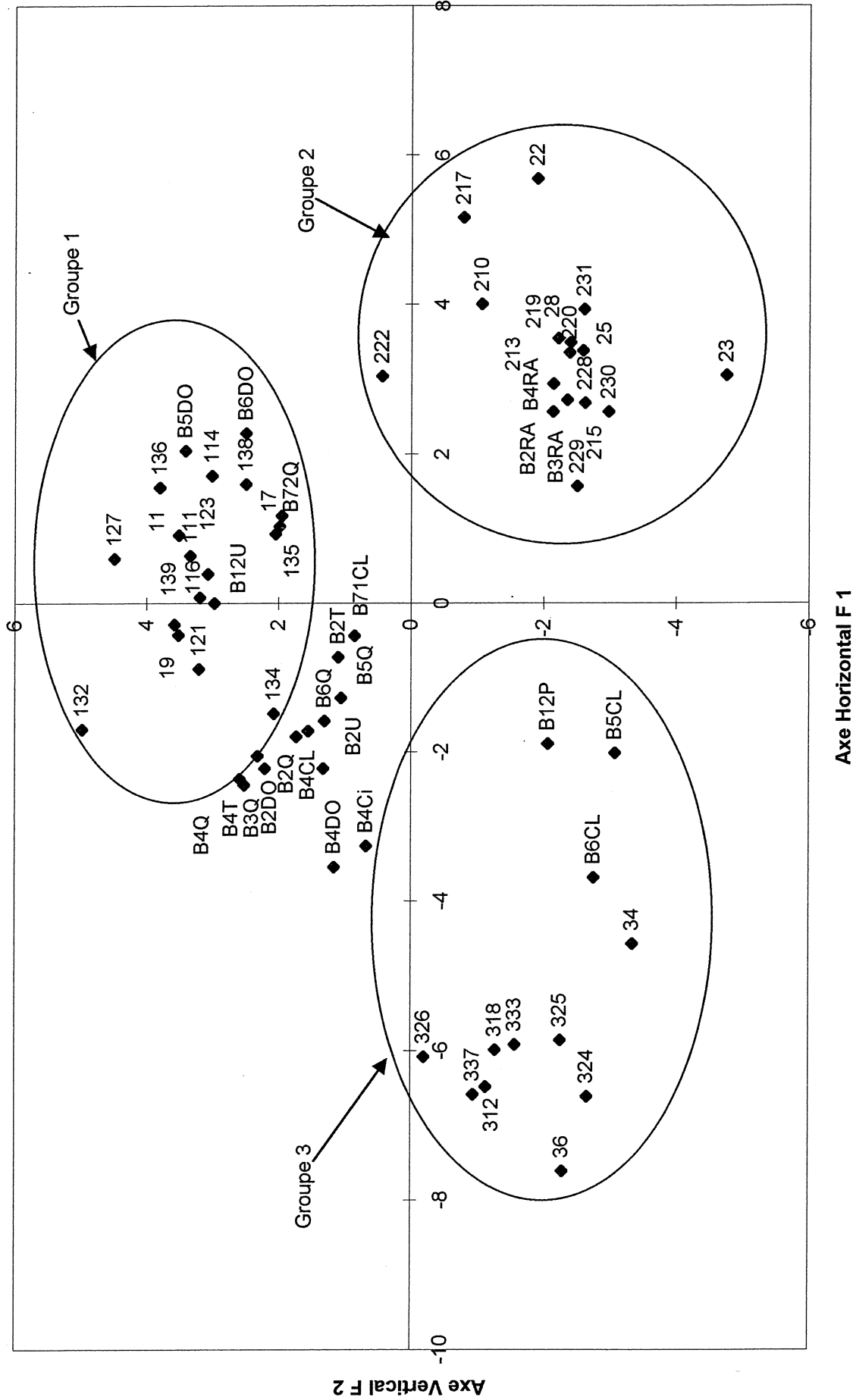
Comparaison des conceptions aux questionnaires A et B

Tri croisé des effectifs et calcul des χ_2 .

| Questionnaire B | Questionnaire A | | Total |
|-----------------|-----------------|--------------|-------|
| | QA. Groupe 1 | QA. Groupe 2 | |
| QB .groupe 1 | 10 | 5 | 15 |
| QB. Groupe 2 | 5 | 10 | 15 |
| QB. Groupe 3 | 7 | 2 | 9 |
| Total | 22 | 17 | 39 |

| | | |
|-------------|-----------------|-------------|
| Chi-2 | deg. de liberté | Probabilité |
| 5,561497211 | 2 | 0,06199208 |

L’ensemble des χ_2 n’est pas significatif au seuil de 5% ; néanmoins le χ_2 global a une probabilité de 0,06. On ne peut pas rejeter l’hypothèse que les conceptions du questionnaire B sont indépendantes de celles du questionnaire A au seuil de 5%, mais on ne peut pas nier que l’enseignement a eu un effet sur les conceptions des élèves. Ces résultats confirment ceux rencontrés précédemment sur les comparaisons des fréquences d’utilisation des techniques entre le questionnaire A et le questionnaire B ; les évolutions des techniques dépendent des élèves et des exercices.



777

c) Influence de ces conceptions sur les réussites

Tri croisé des conceptions relatives aux techniques avec les groupes relatifs au réussites des questionnaires A et B.

On veut savoir si la réussite et l'échec sont influencés par les conceptions relatives aux techniques décrites précédemment. Un tri croisé sur ces deux variables fait apparaître un χ^2 significatif au questionnaire B alors qu'il ne l'est pas au questionnaire A. De plus le deuxième tableau ci-dessous indique que 12 élèves sur les 15 du groupe TechB2 sont dans le groupe échec du deuxième questionnaire ; or ce qui caractérise les élèves du groupe TechB2 c'est surtout le recours à une raison arithmétique pour les exercices 2, 3, 4.

| Groupes AR | Groupes TechA | | Total |
|------------------------|-----------------|-----------------|-------|
| | Groupes TechA.1 | Groupes TechA.2 | |
| GroupesAR.1 ; échec | 12 | 13 | 25 |
| GroupesAR.2 ; réussite | 10 | 4 | 14 |
| Total | 22 | 17 | 39 |

| Chi-2 | deg. de liberté | Probabilité |
|-------------|-----------------|-------------|
| 1,163817883 | 1 | 0,28067536 |

| Groupes BR | Groupes TechB | | | Total |
|------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|
| | Groupes TechB.1 | Groupes TechB.2 | Groupes TechB.3 | |
| Groupes BR.1; réussite | ++ 13 | --- 3 | 8 | 24 |
| Groupes BR.2; échec | -- 2 | (+++) 12 | 1 | 15 |
| Total | 15 | 15 | 9 | 39 |

| Chi-2 | deg. de liberté | Probabilité |
|-------------|-----------------|-------------|
| 17,78111076 | 2 | 0,00013768 |

Tri croisé des conceptions relatives aux techniques avec les groupes RR, ER, EE.

On veut savoir si les conceptions relatives aux techniques ont une influence sur l'évolution des réussites, c'est à dire sur les groupes RR, ER, EE. Un tri croisé fait apparaître un χ^2 significatif au questionnaire A (Au questionnaire B on obtient un effectif théorique inférieur à 5). De plus au questionnaire B ce sont encore les élèves de la conception TechB2 (usage d'une raison arithmétique) qui constituent majoritairement le groupe EE.

| Groupes TechA | Groupes évolution | | | Total |
|-----------------|-------------------|-----------|-----------|-------|
| | Groupe RR | Groupe ER | Groupe EE | |
| Groupes TechA.1 | 10 | 9 | -- 3 | 22 |
| Groupes TechA.2 | 4 | 4 | (++) 9 | 17 |
| Total | 14 | 13 | 12 | 39 |

| Chi-2 | deg. de liberté | Probabilité |
|--------------------|-----------------|-------------|
| 6,968010426 | 2 | 0,03068427 |

| Groupes évolution | | | | |
|--------------------------|------------------|------------------|------------------|--------------|
| Groupes TechB | Groupe RR | Groupe ER | Groupe EE | Total |
| Groupes TechB.1 | 7 | 6 | 2 | 15 |
| Groupes TechB.2 | 3 | 3 | (+++) 9 | 15 |
| Groupes TechB.3 | 4 | 4 | 1 | 9 |
| Total | 14 | 13 | 12 | 39 |

| Chi-2 | deg. de liberté | Probabilité |
|-------------------|-----------------|-------------|
| 9,83491993 | 4 | 0,04330216 |

Effectif théorique < 5

3 – Evolutions des références aux grandeurs et aux nombres

Nous faisons l'hypothèse qu'il y a deux conceptions chez les élèves. Certains font référence aux grandeurs pour résoudre les exercices d'autres font directement les calculs sur les valeurs numériques. C'est pourquoi, pour chaque exercice nous avons étudié les variables A.G et A.N pour le questionnaire A, puis B.G et B.N pour le questionnaire B.

a) Comparaison des fréquences

Comme pour les techniques, on veut comparer les fréquences de référence aux grandeurs ou aux nombres avant et après le processus expérimental.

Hypothèse nulle :

Les références aux grandeurs et aux nombres sont les mêmes avant et après le processus expérimental.

Grandeurs

Les fréquences des variables grandeurs varient de 0,13 à 0,56 avec une moyenne de 0,37 sur l'ensemble des exercices des deux questionnaires ; aucun des exercices proposés ne conduit l'ensemble des élèves à exclure une référence aux grandeurs.

Un test de Student va révéler si les changements de références sont significatifs ou non au seuil de 5%. Dans les tableaux suivants la moyenne 1 concerne le questionnaire A et la moyenne 2 celle du questionnaire B.

Variables sommes : AGS et BGS

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 2,33333325 |
| Moyenne 2 | 2,82051277 |
| Ecart-type1 | 1,47493683 |
| Ecart-type2 | 1,78991039 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,77419674 | 0,08404361 |

Exercice 2 : A2G et B2G

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,25641027 |
| Moyenne 2 | 0,56410259 |
| Ecart-type1 | 0,44235905 |
| Ecart-type2 | 0,50235604 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 3,13152575 | 0,00333955 |

Exercice 4 : A4G et B4G

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,2820513 |
| Moyenne 2 | 0,56410259 |
| Ecart-type1 | 0,45588088 |
| Ecart-type2 | 0,50235607 |

Exercice 1 : A1G et B1G

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,51282054 |
| Moyenne 2 | 0,35897437 |
| Ecart-type1 | 0,5063697 |
| Ecart-type2 | 0,48597042 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,52529728 | 0,13546564 |

Exercice 3 : A3G et B3G

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,25641027 |
| Moyenne 2 | 0,48717949 |
| Ecart-type1 | 0,44235908 |
| Ecart-type2 | 0,50636964 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,29970837 | 0,02705088 |

Exercice 5 : A5G et B5G

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,46153846 |
| Moyenne 2 | 0,33333334 |
| Ecart-type1 | 0,50503541 |
| Ecart-type2 | 0,47756683 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,43418503 | 0,01973447 |

Exercice 6 : A6G et B6G

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,43589744 |
| Moyenne 2 | 0,30769232 |
| Ecart-type1 | 0,50235607 |
| Ecart-type2 | 0,46757188 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,53345549 | 0,13344811 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-----------|------------|
| 38 | 1,2202574 | 0,22988609 |

Exercice 7 : A7G et B7G

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,12820514 |
| Moyenne 2 | 0,20512821 |
| Ecart-type1 | 0,33868845 |
| Ecart-type2 | 0,40907385 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 0,90237772 | 0,37254079 |

Le test de Student sur les variables sommes $AGS = \sum_{i=1}^7 AiG$ et $BGS = \sum_{i=1}^7 BiG$ (i désigne le numéro de l'exercice) ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle. Globalement la référence aux grandeurs est la même avant et après le processus expérimental. Ce n'est pas le cas pour les exercices 2, 3, 4.

Le processus expérimental n'a pas eu d'effet sur la référence aux grandeurs à l'exercice 1 qui évalue les pré requis du cours élémentaire.

Ce qui différencie les exercices 2, 3, 4 des exercices 5, 6, 7 c'est la présence d'un tableau dans l'énoncé. Il semble donc que pour l'ensemble des élèves la présence du tableau ne favorise pas un changement de référence aux grandeurs. Ceci explique peut-être l'absence de progrès à l'exercice 6 qui lui nécessite cette référence aux grandeurs. Nous avons remarqué que pour le groupe des élèves qui réussissent aux deux questionnaires A et B (groupe réussite – réussite, RR) le tableau n'empêchait pas de faire référence aux grandeurs. On ne peut pas conclure à une loi générale. Tous les élèves ne réagissent pas de la même manière devant les mêmes exercices.

Nombres

Les fréquences des variables nombres varient de 0,33 à 0,72 avec une moyenne de 0,55 sur l'ensemble des exercices des deux questionnaires.

Comme pour les grandeurs, un test de Student va permettre ou non de rejeter l'hypothèse nulle : les références aux nombres sont les mêmes avant et après le processus expérimental.

Variables sommes : ANS et BNS

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 3,94871783 |
| Moyenne 2 | 3,79487181 |
| Ecart-type1 | 1,62138206 |
| Ecart-type2 | 1,90814721 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 0,51730573 | 0,60794109 |

Exercice 2 : A2N et B2N

| | |
|-----------|------------|
| Moyenne 1 | 0,69230771 |
| Moyenne 2 | 0,35897437 |

Exercice 1 : A1N et B1N

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,48717949 |
| Moyenne 2 | 0,58974361 |
| Ecart-type1 | 0,50636967 |
| Ecart-type2 | 0,49831017 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 0,94143403 | 0,35242921 |

Exercice 3 : A3N et B3N

| | |
|-----------|------------|
| Moyenne 1 | 0,71794873 |
| Moyenne 2 | 0,46153846 |

| | |
|-------------|------------|
| Ecart-type1 | 0,46757194 |
| Ecart-type2 | 0,48597045 |

| | |
|-------------|------------|
| Ecart-type1 | 0,45588088 |
| Ecart-type2 | 0,50503541 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 3,14324689 | 0,00323547 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,36394453 | 0,02329621 |

Exercice 4 : A4N et B4N

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,66666669 |
| Moyenne 2 | 0,41025642 |
| Ecart-type1 | 0,47756691 |
| Ecart-type2 | 0,4983102 |

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,53846157 |
| Moyenne 2 | 0,66666669 |
| Ecart-type1 | 0,50503541 |
| Ecart-type2 | 0,47756691 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,13200736 | 0,03953066 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 1,22025728 | 0,22988614 |

Exercice 6 : A6N et B6N

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,51282054 |
| Moyenne 2 | 0,69230771 |
| Ecart-type1 | 0,50636967 |
| Ecart-type2 | 0,46757188 |

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,33333334 |
| Moyenne 2 | 0,61538464 |
| Ecart-type1 | 0,47756691 |
| Ecart-type2 | 0,49286416 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,01630926 | 0,05087639 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,43418503 | 0,01973447 |

Le test sur les variables sommes $ANS = \sum_{i=1}^7 AiN$ et $BNS = \sum_{i=1}^7 BiN$ (i désigne le numéro de

l'exercice) ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle. Sur l'ensemble du questionnaire la référence aux nombres est la même avant et après le processus expérimental.

Le test à l'exercice 1 confirme que les leçons expérimentées ont été sans effet sur les pré requis de CE.

Aux exercices 2, 3, 4 il y a eu une baisse significative de la référence aux nombres au profit des grandeurs. Aux exercices 6 et 7 il y a eu une augmentation significative de la référence aux nombres mais pas nécessairement au détriment des grandeurs. On peut y voir l'effet du tableau qui aurait eu des conséquences néfastes sur la réussite à l'exercice 6. Mais nous avons déjà remarqué qu'on ne pouvait pas conclure à une loi générale. Une étude des corrélations avec les variables réussites a montré que la référence aux grandeurs a été facteur de réussite seulement à l'exercice 6. Seul cet exercice nécessitait un retour au sens avec les grandeurs pour éviter l'écueil d'un usage non réfléchi des techniques de la proportionnalité.

b) Recherche de regroupements

Analyse des corrélations

Rappelons que pour chaque exercice les caractères N (nombres) et G (grandeurs) sont opposés aux non-réponses près. Les tableaux suivants résument les corrélations significatives au seuil de 5% entre les variables N_i et G_i des questionnaires A et B.

| Questionnaire A | |
|-----------------|---------|
| A1G | A1N |
| A2G↔A3G | A2N↔A3N |
| A4G | A4N |
| A5G↔A6G | A5N↔A6N |
| | A7N ↑ |

| Questionnaire B | |
|-----------------|---------|
| B1G | B1N |
| B2G↔B3G | B2N↔B3N |
| B4G | B4N |
| B5G↔B6G | B5N↔B6N |
| B7G | ↑ B7N |

Le processus expérimental n'a pas provoqué de changement important dans la configuration des corrélations.

Questionnaire A

Dans l'analyse en composantes principales, la représentation graphique des variables et des individus (voir page suivante) fait apparaître sur le premier axe factoriel les variables grandeurs des exercices 2, 3, 4, 5, 6 qui s'opposent aux variables nombres de ces mêmes exercices. Sur l'axe 2 s'opposent A1N et A1G.

Une typologie sur l'ensemble des exercices permet de créer trois groupes d'individus qui semblent discriminer ces deux directions.

Le groupe 1 comprend 12 élèves : 1, 2, 7, 11, 12, 19, 22, 23, 27, 32, 34, 36.

Le groupe 2 comprend 15 élèves : 3, 5, 6, 8, 10, 14, 18, 21, 25, 28, 29, 30, 31, 33, 37.

Le groupe 3 comprend 12 élèves : 4, 9, 13, 15, 16, 17, 20, 24, 26, 35, 38, 39.

Une analyse discriminante permet de sélectionner les variables qui contribuent le plus à la constitution de ces groupes.

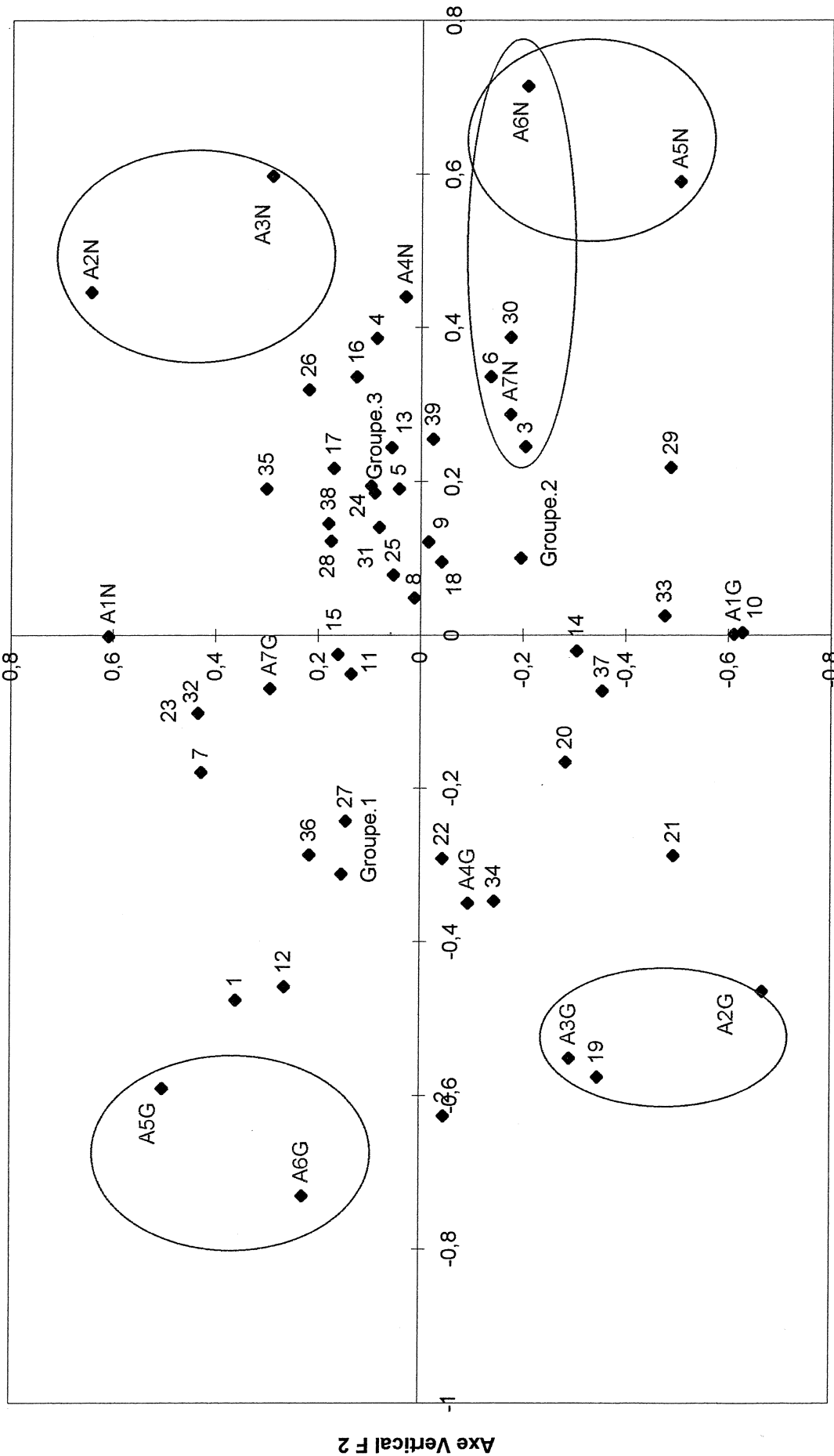
Pour le groupe 1 sont concernées par ordre décroissant de poids : A5G, A6G, A1N, A2N, A3N.

Pour le groupe 2 sont concernées par ordre décroissant de poids : A1G, A3N, A2N, A4N, A5N, A6N.

Pour le groupe 3 sont concernées par ordre décroissant de poids : A1N, A2N, A3N, A4N, A5N, A6N.

On constate que c'est l'exercice 1 qui sépare les élèves des groupes 2 et 3. Les élèves du groupe 3 font plutôt référence aux nombres y compris à l'exercice 1. Les élèves du groupe 2 font aussi référence aux nombres sauf à l'exercice 1 où ils se réfèrent aux grandeurs.

Il n'y a pas de groupe d'élèves qui se réfèrent aux grandeurs sur l'ensemble des exercices. Les élèves du groupe 1 se réfèrent aux grandeurs aux exercices 5 et 6 (pour ces exercices figure un tableau dans l'énoncé) et aux nombres aux exercices 1, 2, 3.



Questionnaire B

Comme au questionnaire A une analyse en composantes principales fait apparaître une opposition des variables G et N sur le premier axe factoriel (voir représentation graphique page suivante). Une typologie sur l'ensemble des exercices ne fournit pas de groupes homogènes quel que soit le nombre de groupes choisi.

Le premier facteur qui absorbe 31% de l'inertie est assez représentatif de la ventilation des individus en fonction de leur référence aux grandeurs ou aux nombres. Une segmentation de la population en trois groupes suivant cet axe donne les groupes suivants :

Groupe 1 (11 élèves) : 1, 7, 8, 10, 16, 18, 19, 21, 22, 27, 32.

Groupe 2 (17 élèves) : 2, 3, 5, 9, 11, 12, 13, 14, 23, 25, 26, 30, 33, 34, 36, 37, 38.

Groupe 3 (11 élèves) : 4, 6, 15, 17, 20, 24, 28, 29, 31, 35, 39.

Les élèves du groupe 1 font plutôt référence aux grandeurs, ceux du groupe 3 font plutôt référence aux nombres.

Comparaison des conceptions relatives aux grandeurs et aux nombres aux questionnaires A et B

Tri croisé des effectifs et calcul des χ_2 .

| Questionnaire A | Questionnaire B | | | Total |
|------------------------|------------------------|--------------|----------------------|-------|
| | QB. groupe 1 grandeurs | QB. Groupe 2 | QB. Groupe 3 nombres | |
| QA. groupe 1 grandeurs | 6 | 6 | (--) 0 | 12 |
| QA. Groupe 2 nombres | 4 | 7 | 4 | 15 |
| QA. Groupe 3 nombres | 1 | 4 | (++) 7 | 12 |
| Total | 11 | 17 | 11 | 39 |

| Chi-2 | deg. de liberté | Probabilité |
|-------------|-----------------|-------------|
| 11,40802193 | 4 | 0,0223416 |

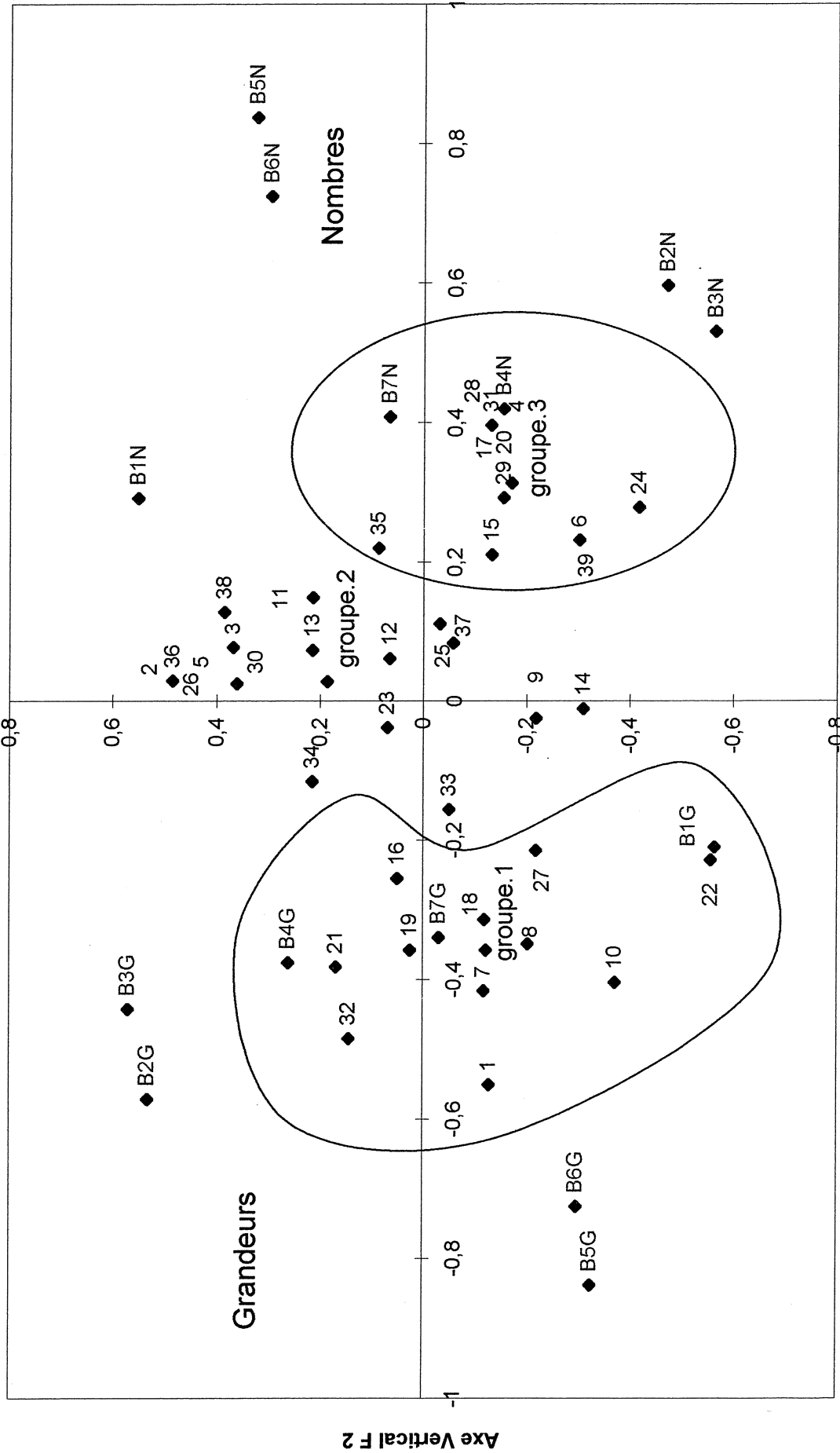
Effectif théorique < 5

L'effectif théorique d'une case étant inférieur à 5 le test du χ_2 n'est pas possible.

Néanmoins les effectifs des différentes cases du tableau montrent que peu d'élèves passent du groupe « grandeurs » au groupe « nombres » ou inversement.

c) Influence de ces conceptions sur les réussites

Les tris croisés des conceptions relatives aux grandeurs et aux nombres avec les différents groupes réussite ou échec des questionnaires A et B ne donnent aucun χ_2 significatif au seuil de 5%. Sur l'ensemble des exercices on ne peut pas conclure quant à l'influence de la référence aux grandeurs ou aux nombres sur la réussite. Rappelons que la référence aux grandeurs est déterminante à l'exercice 6. Là encore on ne peut pas conclure à une loi générale.



4 – Evolution de l'usage des opérations

a) Comparaison des fréquences

Comme pour les autres répertoires on veut comparer les fréquences d'utilisations des différentes opérations avant et après le processus expérimental.

Pour décider si les différences sont significatives au seuil de 5% on fait un test de Student sur les deux échantillons appariés que constitue l'ensemble des élèves avant et après le processus expérimental.

Hypothèse nulle : Les différences constatées dans l'utilisation des opérations entre les deux questionnaires ne sont pas significatives.

Dans chacun des tableaux suivants la moyenne 1 désigne la moyenne d'utilisation de l'opération étudiée sur l'ensemble des exercices du questionnaire A et la moyenne 2 désigne la moyenne d'utilisation de l'opération étudiée sur l'ensemble des exercices du questionnaire B.

Multiplication

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 2,79487181 |
| Moyenne 2 | 2,92307687 |
| Ecart-type1 | 1,47218918 |
| Ecart-type2 | 1,78273343 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 0,36548173 | 0,71677846 |

Division

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 1,17948723 |
| Moyenne 2 | 0,56410259 |
| Ecart-type1 | 1,33518765 |
| Ecart-type2 | 0,88242706 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,66148353 | 0,01133732 |

Addition

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 1,17948723 |
| Moyenne 2 | 0,56410259 |
| Ecart-type1 | 1,33518765 |
| Ecart-type2 | 0,88242706 |

| DII | t | Probab. |
|-----|------------|------------|
| 38 | 2,66148353 | 0,01133732 |

Soustraction

| | |
|-------------|------------|
| Moyenne 1 | 0,82051283 |
| Moyenne 2 | 0,48717949 |
| Ecart-type1 | 0,96985594 |
| Ecart-type2 | 0,68332767 |

| DII | t | Probab. |
|-----|-----------|------------|
| 38 | 2,1794498 | 0,03556513 |

Pour l'ensemble des exercices on peut donc rejeter l'hypothèse nulle pour la division, l'addition et la soustraction. Le processus expérimental semble avoir été sans effet sur l'usage de la multiplication.

Remarques :

1. Beaucoup d'élèves ne font pas figurer leurs calculs dans les réponses ; il faut donc émettre des réserves quant aux conclusions qu'on peut tirer des différentes analyses sur l'usage des opérations.
2. Rappelons que, sur l'ensemble des exercices, l'usage d'une de ces opérations ne semble pas déterminant dans la réussite, l'échec ou le progrès des élèves mais que la multiplication contribue plus souvent à la réussite que l'addition. Nous avons aussi remarqué que l'utilisation d'une raison arithmétique était source d'échec en particulier aux

exercices 2, 3, 5 et 7 et que cette utilisation s'accompagnait de celle de l'addition ou de la soustraction.

b) Recherche de regroupements

Questionnaire A

L'analyse des corrélations fait apparaître quelques regroupements de variables corrélées positivement.

Pour l'addition et la soustraction :

$A2S \leftrightarrow A6A \leftrightarrow A5A$

$A12A \leftrightarrow A4A$

$A3A \leftrightarrow A4S \leftrightarrow A2A \leftrightarrow A3S$

Pour la multiplication et la division :

$A2M \leftrightarrow A3M$

$A4D \leftrightarrow A3D \leftrightarrow A11D \leftrightarrow A2D \leftrightarrow A7M \leftrightarrow A5M$

$A11M \leftrightarrow A12M$

Plusieurs corrélations négatives montrent que l'utilisation de l'addition et de la soustraction tend à s'opposer à celle de la multiplication et de la division.

La représentation graphique du premier plan factoriel de l'analyse en composantes principales (voir page suivante) fait apparaître cette opposition sur le premier plan factoriel. Est-ce que les champs conceptuels de l'addition et de la multiplication discriminent les individus en deux groupes ? Une typologie en deux groupes ne donne pas une partition stable. Pour que l'algorithme de partitionnement donne des groupes stables il faut faire 4 groupes. Une analyse discriminante fait apparaître les variables qui pèsent le plus dans la constitution de ces groupes.

Groupe 1 : 8 individus

Elèves : 7, 18, 21, 23, 27, 32, 33, 35.

Variables : A2M, A3M, A11D, A12D.

Groupe 2 : 8 individus

Elèves : 2, 5, 14, 30, 31, 34, 36, 38.

Variables : A11M, A2M, A3M.

Groupe 3 : 12 individus

Elèves : 3, 8, 9, 11, 12, 15, 17, 20, 22, 25, 28, 39.

Variables : A4M, A5M, A2D.

Groupe 4 : 11 individus

Elèves : 1, 4, 6, 10, 13, 16, 19, 24, 26, 29, 37.

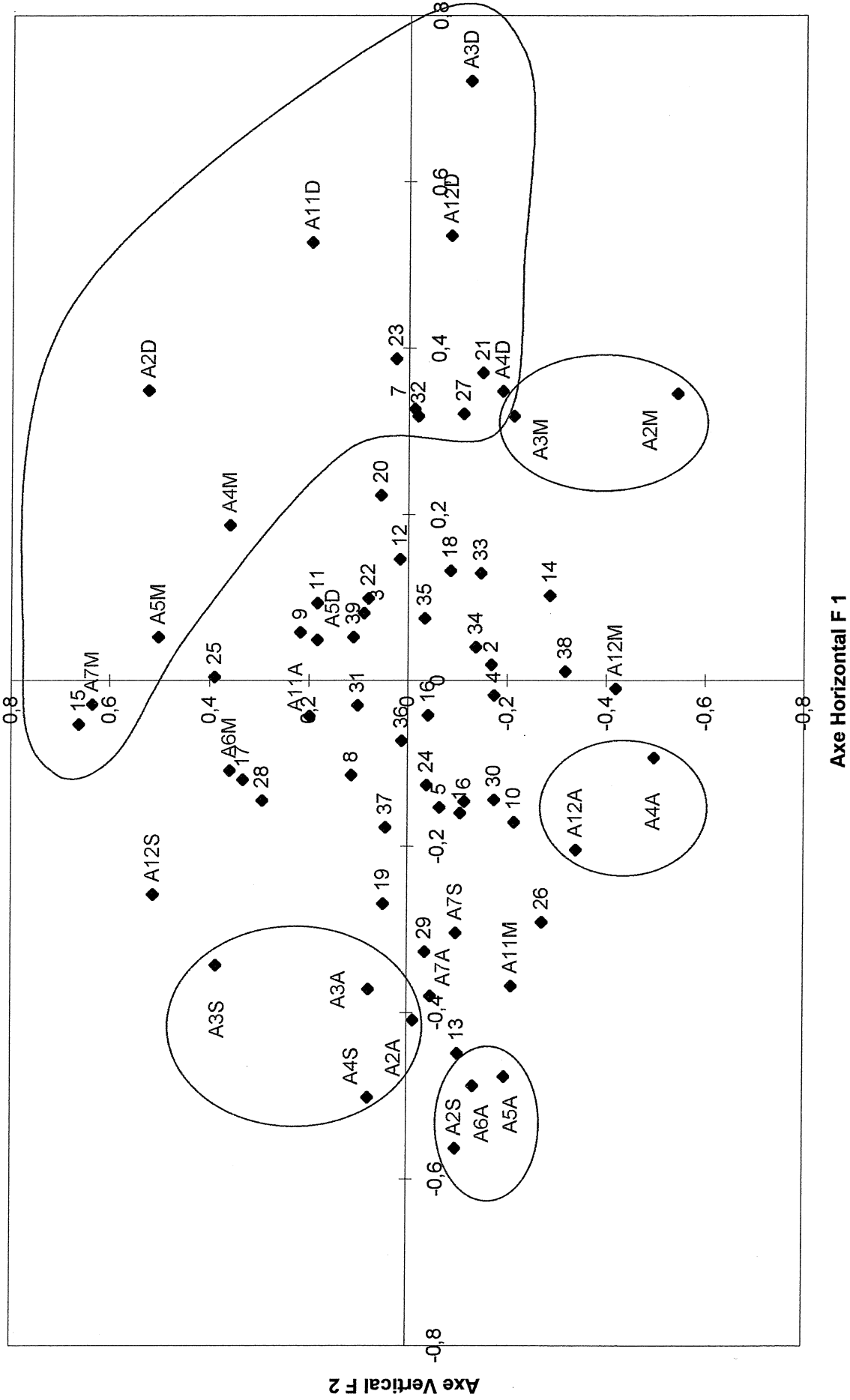
Variables : A6A, A5A, A2S.

Par conséquent le groupe 4 relève du champ conceptuel de l'addition, les trois autres groupes du champ conceptuel de la multiplication.

Les exercices 4 et 5 discriminent le groupe 3 des groupes 1 et 2.

Les élèves du groupe 1 utilisent la division à l'exercice 1 alors que les élèves du groupe 2 utilisent préférentiellement la multiplication.

La représentation graphique de la page suivante illustre ces regroupements.



Questionnaire B

Comme au questionnaire A, le premier plan factoriel de l'analyse en composantes principales fait apparaître un groupe de variables « addition, soustraction » (B2A, B3A, B4A, B5A, B6A, B12S, B2S, B4S) qui s'oppose à un groupe de variables « multiplication, division » (B12M, B2M, B3M, B6M, B7M, B11D, B12D, B7D) sur le premier axe factoriel (voir la représentation graphique de la page suivante).

Une typologie en deux groupes donne une partition relativement stable de l'ensemble des individus. Une analyse discriminante donne les caractères qui contribuent le plus à discriminer ces deux groupes. On retrouve les champs conceptuels de l'addition et de la multiplication.

Groupe 1 : 22 individus

Elèves : 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 37, 39.

Variables : B5A, B6A, B2A, (B11M).

Groupe 2 : 17 individus

Elèves : 1, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 21, 22, 23, 27, 32, 34, 35, 36, 38.

Variables : B12M, B3M, B7M, B2M.

Comparaison des conceptions

Tri croisé des effectifs et calculs des χ_2 .

| Questionnaire B | Questionnaire A | | | | Total |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|-------|
| | Questionnaire A.1 Multiplication | Questionnaire A.2 Multiplication | Questionnaire A.3 Multiplication | Questionnaire A.4 Addition | |
| Questionnaire B.1 Addition | 2 | 4 | 8 | 8 | 22 |
| Questionnaire B.2 Multiplication | 6 | 4 | 4 | 3 | 17 |
| Total | 8 | 8 | 12 | 11 | 39 |
| Chi-2 | deg. de liberté | Probabilité | | | |
| 5,048007011 | 3 | 0,16831538 | | | |
| Effectif théorique < 5 | | | | | |

Un effectif théorique étant inférieur à 5 le test du chi.2 n'est pas possible.

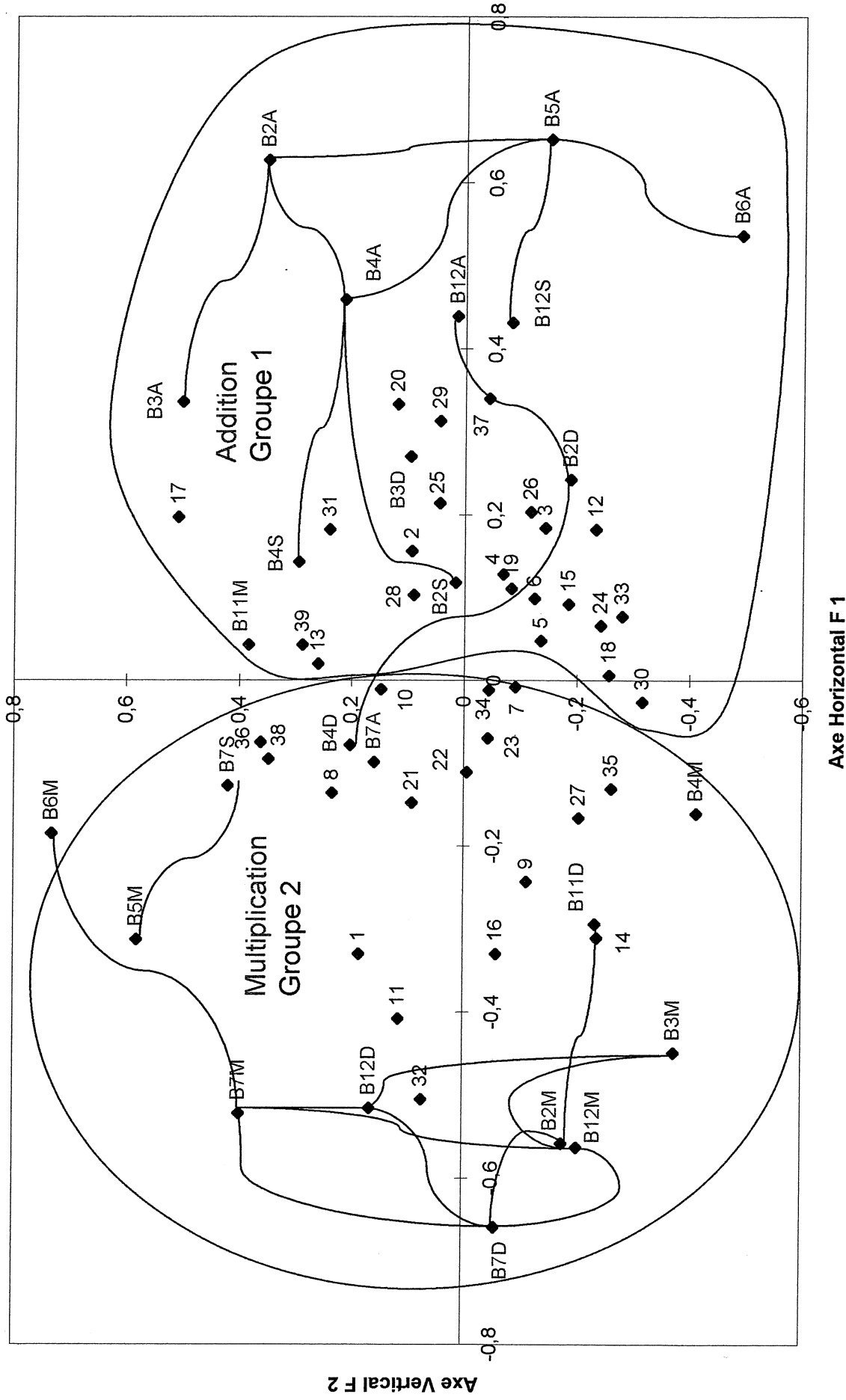
Au questionnaire A, 11 élèves relevaient du champ conceptuel de l'addition pour les exercices 2, 5, 6 (groupe 4). Au questionnaire B, 3 de ces élèves changent de conception et 8 n'en changent pas.

Au questionnaire A, les élèves des groupes 1 et 2 relevaient du champ conceptuel de la multiplication pour les exercices 1, 2, 3. Au questionnaire B, seulement 2 élèves du groupe 1 changent de conception, mais pour le groupe 2 la moitié des élèves en changent.

Pour ces groupes 1, 2, 4 du questionnaire A, 9 élèves sur 27, soit un tiers, changent de conception.

Les 12 élèves du groupe 3 du questionnaire A utilisaient la multiplication ou la division aux exercices 2, 4, 5. 8 d'entre eux utilisent l'addition ou la soustraction aux mêmes exercices du questionnaire B ; donc deux tiers changent de conception.

Il est difficile de tirer des conclusions générales de ces résultats statistiques. Il semble que les conceptions relatives aux opérations ne soient pas stables ; globalement la moitié des élèves en changent du questionnaire A au questionnaire B. Les évolutions conceptuelles semblent dépendre des exercices donc des situations.



c) Influence de ces conceptions sur les réussites

Comme pour les conceptions précédentes, on veut savoir si les champs conceptuels de l'addition et de la multiplication ont une influence sur la réussite ou l'échec. Or aucun des tris croisés entre les groupes réussite ou échec et les conceptions relatives aux opérations ne donne de χ_2 significatif. On ne peut pas rejeter l'indépendance de la réussite ou de l'échec avec les champs conceptuels de l'addition ou de la multiplication.

3 – 5 Conclusions

Les observations et analyses ont fait apparaître des évolutions dans les différentes conceptions des élèves mais ces évolutions ne semblent répondre à aucune loi générale. La référence aux grandeurs ou aux nombres, l'usage de la multiplication ou de l'addition n'y ont aucun caractère décisif. Il n'y a pas de techniques qui assureraient plus la réussite que d'autres mais des familles de techniques plus ou moins adaptées à certains exercices ; par contre l'usage d'une raison arithmétique a systématiquement contribué à l'échec.

Les élèves qui réussissent ou qui progressent semblent être ceux qui ont une plus grande attitude réflexive par rapport aux techniques institutionnalisées.

Les idées de variables et de fonctions ne peuvent prendre de la consistance que sur des processus d'apprentissage longs.

Enfin la détermination de conceptions au moyen de groupements de situations, d'individus et de répertoires pourrait être un outil adapté au traitement de l'hétérogénéité des classes.

PARTIE 4

LES CONDITIONS DE DIFFUSION DES CONNAISSANCES DE LA PROPORTIONNALITÉ

| | |
|--|------------|
| 4-1 Introduction | 297 |
| 4-1-1 Motivations | 297 |
| 4-1-2 Théories didactiques | 298 |
| 4-2 Les conditions microdidactiques | 300 |
| 4-2-1 Introduction | 300 |
| 4-2-2 La structuration du milieu | 300 |
| 4-2-3 Analyse ascendante et conceptions (genèse épistémique) | 303 |
| 4-2-4 Analyse descendante et concept (construction de situations) | 306 |
| 4-2-5 L'institutionnalisation et ses effets | 309 |
| 4-2-6 Les insuffisances de l'approche par la structuration du milieu ; les limites de la réflexivité | 321 |
| 4-3 Conditions macrodidactiques | 323 |
| 4-3-1 Introduction | 323 |
| 4-3-2 Les groupements en champs | 323 |
| 4-3-3 Effets de la production mathématique et évolution des répertoires | 326 |
| 4-3-4 Distribution d'une population sur des niveaux de connaissances | 327 |
| 4-3-5 Tension didactique et percolation | 328 |

PARTIE 4

LES CONDITIONS DE DIFFUSION DES CONNAISSANCES DE LA PROPORTIONNALITE

4-1 Introduction

4-1-1 Motivations

Les « erreurs » observées dans la première partie (ambiguïté dans l'usage de certains mots et confusion de certains concepts) et les travaux qui s'en sont suivis ont soulevé plusieurs questions. Rappelons en les principales :

- 1) Pourquoi la fonction linéaire n'a-t-elle pas absorbé les connaissances de la proportionnalité en arithmétique ?
- 2) Peut-on enseigner la proportionnalité sans les notions de grandeurs et de mesures ? Sans le langage des rapports et proportions ?
- 3) Comment les connaissances de la proportionnalité interviennent-elles dans l'apprentissage des autres connaissances (nombres, opérations, fonctions, ...) ?
- 4) Peut-on enseigner l'algèbre sans l'arithmétique à l'école primaire ?
- 5) Quel est le minimum de connaissances de la proportionnalité nécessaire pour la formation commune des élèves dans la scolarité obligatoire ?
- 6) Quel est le maximum de connaissances de la proportionnalité compatible avec l'apprentissage de l'algèbre dans la scolarité obligatoire ?
- 7) Pourquoi les modèles scolaires de la proportionnalité ont-ils changé ?
- 8) Pourquoi l'étude des grandeurs et de la proportionnalité a-t-elle disparu de l'enseignement secondaire ? Quelles en sont les conséquences ?
- 9) Quelle légitimité et nécessité appuient le maintien des pratiques anciennes ?
- 10) Quels sont les obstacles à la diffusion des résultats et réorganisations mathématiques dans l'enseignement ?
- 11) Dans quelle mesure la qualité des apprentissages de la proportionnalité pour les élèves dépend-elle des connaissances des professeurs à ce sujet ?
- 12) Dans quelle mesure les connaissances des professeurs dépend-elle de leur formation initiale (primaire, secondaire, supérieure) ou de leur formation continue ?
- 13) Les maîtres peuvent-ils avoir le contrôle de ce qu'ils enseignent ?
- 14) De quoi et de qui dépend la régulation des pratiques d'enseignement ?
- 15) L'école primaire peut-elle entretenir une connaissance de la proportionnalité qui serait autonome ?
- 16) Les opinions de la noosphère jouent-elles un rôle dans la détermination des comportements scolaires et universitaires ?
- 17) Pourquoi et comment l'enseignement à l'école primaire dépend-il des pratiques des autres institutions scolaires ou sociétales ?
- 18) Comment une connaissance diffuse-t-elle dans la société ?

Les travaux de cette recherche ont apporté quelques éléments de réponse :

Une identification prématurée entre grandeurs et nombres favorise un mélange des vocabulaires et une confusion dans les concepts.

L'arithmétique est incontournable car la dimension sémantique des nombres et des opérations élémentaires sur ces nombres est donnée par une pratique des grandeurs.

De par leur nature l'algèbre et l'arithmétique présentent des incompatibilités mais l'obstacle de l'arithmétique n'est pas une fatalité et nous avons proposé un processus d'enseignement de

la linéarité qui va des grandeurs aux nombres où la fonction linéaire est abstraite des relations de proportionnalité entre grandeurs.

Nous avons ainsi montré que l'analyse didactique des savoirs à enseigner permet d'apporter des solutions au sein de l'institution scolaire mais nous avons observé que les pratiques des maîtres résultaient aussi de l'influence d'autres institutions scolaires et sociétales. La régulation des enseignements ne peut pas incomber aux maîtres et il convient d'étudier les conditions de diffusion des connaissances non seulement au sein d'une institution mais aussi entre les institutions car l'évolution des connaissances dans une institution a des conséquences sur les institutions voisines.

Les tentatives d'explications des relations interinstitutionnelles nous ont conduits à considérer des champs de connaissances, de situations et d'institutions mais pour tenter d'éclairer les raisons et conditions de ces regroupements il est utile de se placer dans un cadre théorique.

4-1-2 Théories didactiques

La didactique des mathématiques étudie comment des répertoires de connaissances mathématiques sont employés pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société.

Elle s'intéresse :

- D'une part à la création, à la diffusion et à la transformation de ces répertoires pour les adapter aux besoins spécifiques des individus et des sociétés
- D'autre part aux institutions et aux activités qui ont pour objet de faciliter l'élaboration de décisions, de communications et de réorganisations des connaissances.

La microdidactique décrit les conditions d'usage d'une connaissance dans une institution et permet de les modéliser par la situation non didactique spécifique de cette connaissance.

Mais ces conditions ne représentent pas toutes celles qui permettent à cette connaissance d'exister dans cette institution. Une connaissance fonctionne au sein d'une institution si elle répond à une demande faite à cette institution par d'autres institutions.

La macrodidactique décrit les relations entre institutions et les conditions qui font qu'une connaissance existe et circule entre institutions.

Les institutions et les réseaux

Avant d'être un instrument, la théorie est le résultat d'une réflexion sur ce qui a été observé. Nous avons vu que l'étude des répertoires de connaissances d'une institution ne permet pas de décrire les régulations qui s'exercent de l'extérieur. Il y a des conditions ergonomiques autres que logiques et fonctionnelles qui régulent les échanges entre institutions.

L'étude de l'évolution des conditions d'enseignement de la proportionnalité à l'école primaire nous a conduits à considérer les relations entre différentes institutions pour comprendre quels sont les assujettissements qui s'exercent sur chacune d'elles. Pour tenter d'expliquer les conditions de diffusion des connaissances mathématiques nous envisagerons une organisation des institutions en réseau.

Modèles microdidactiques

L'étude de l'objet « proportionnalité » a permis de comprendre ses fonctions dans les constructions mathématiques savantes et scolaires.

L'analyse didactique des différents modèles scolaires qui ont eu cours dans la deuxième moitié du XX^e siècle rend compte de l'évolution des pratiques d'enseignement de la

proportionnalité. Les problèmes techniques que pose l'enseignement de la proportionnalité dépendent des fonctions que joue cette connaissance dans la construction du répertoire des élèves.

La théorie des situations nous a fourni des modèles pour la construction d'un processus d'apprentissage de la proportionnalité qui prend en considération des nécessités logiques, cognitives, génétiques, sociales et fonctionnelles. Le choix d'une fonction de l'objet proportionnalité induit la structure d'une situation in abstracto puis les raisons de faire fonctionner cette situation déterminent le choix d'un milieu matériel. La « structuration du milieu didactique » permet une analyse a priori du fonctionnement de la connaissance visée par la situation didactique. Nous nous proposons de reprendre cette théorie en montrant comment un milieu structuré crée les conditions pour que la proportionnalité soit utilisée comme moyen d'action, de preuve, d'apprentissage ou de construction explicite d'autres connaissances.

Modèles macrodidactiques

La tradition culturelle ayant rendu tellement familières les connaissances de la proportionnalité laisse croire qu'elles sont toujours enseignées dans l'état. Leur remplacement effectif par une autre organisation de savoirs ne se décrète pas. Le fonctionnement social de la connaissance ne peut pas être considéré seulement du point de vue de la transposition des savoirs savants. Il dépend de l'usage réel qu'en font les différents partenaires sociaux.

Les phénomènes de diffusion des connaissances de la proportionnalité dans la société sont soumis à d'autres conditions que celles qui commandent leur acquisition par un sujet ou un groupe de sujets.

L'usage qui est fait d'une connaissance dans une institution ne suffit pas à assurer son maintien. Il faut qu'elle soit reconnue par la société et donc qu'elle diffuse entre plusieurs institutions. Mais les conditions pour qu'une connaissance de la proportionnalité diffuse d'une institution à une autre résultent des multiples assujettissements de chacune d'elles.

Nous avons tenté d'expliquer de manière naïve les différents assujettissements que vit l'école primaire et leurs évolutions. Pour rendre compte de manière générale des phénomènes sociaux qui régulent les relations entre institutions il est nécessaire de construire des modèles que nous appellerons macrodidactiques. Ils ont pour objet de décrire le fonctionnement des institutions dans leur ensemble, l'effet de ce fonctionnement sur chacune d'elles, les conditions pour qu'une connaissance existe et circule dans le réseau qu'elles constituent.

4-2 Les conditions microdidactiques

4-2-1 Introduction

Les travaux de cette recherche résultent parfois d'une approche naïve des connaissances mais ils ont souvent été étayés par la théorie des situations. Il est donc utile de les replacer dans ce cadre pour leur donner une signification, faire apparaître la fonctionnalité des modèles existants et leurs limites. Il n'est pas question de faire une relecture systématique de la composante microdidactique de cette thèse. Il est clair que la théorie des situations a joué un rôle fondamental dans l'étude de l'objet « proportionnalité » et dans l'élaboration des situations non didactiques.

La proportionnalité est un objet qui s'inscrit dans les pratiques scolaires dès le cours élémentaire et jusque dans l'enseignement supérieur mais la mise en œuvre d'une connaissance de la proportionnalité dépend du niveau d'enseignement et de la fonction qu'elle joue à ce niveau. Après avoir rappelé les fondements de la « structuration du milieu » nous illustrerons son usage par une analyse a priori de situations didactiques puisées dans « la situation des graines et des souris ». L'analyse « ascendante » du milieu didactique décrit les conditions de genèse d'une conception alors que l'analyse « descendante » prévoit la construction de ces conditions pour une heuristique conforme au concept. Le moment le plus propice à l'institutionnalisation est celui où la conception « montante » et le concept « descendant » sont le plus proche mais nous verrons que l'institutionnalisation est un processus complexe dont il convient de décrire les différents aspects.

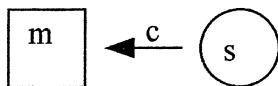
4-2-2 La structuration du milieu

Avant de discriminer les différentes fonctions de la proportionnalité par des situations didactiques nous nous proposons de rappeler le fondement de la structuration du milieu. Toute connaissance y est interprétée comme un moyen (c) pour un sujet (s) de traiter un milieu (m). Le milieu est donc la « chose antagoniste » dont s'occupe le sujet.

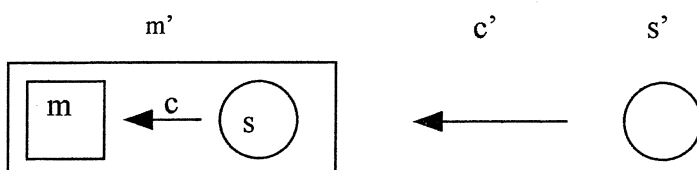
Une situation est un milieu simplifié modélisable sous forme d'un jeu formel tel que (c) est déterminante d'une stratégie efficace dans ce jeu. Pour simplifier la présentation de la structure on peut inclure la règle du jeu au milieu (m).

La théorie des situations envisage donc des triplets $\langle m, s, c \rangle$ que nous appellerons éléments et qui entrent dans la structuration du milieu avec les conditions suivantes :

a) tout élément est un triplet $\langle m, s, c \rangle$ que nous représenterons comme suit :



b) tout élément peut être un milieu (m') pour un autre sujet (s') (éventuellement le même dans une autre position d'actant) qui utilise un nouveau répertoire de connaissances (c') comme moyen nouveau pour traiter (m') :



→ sauf si $c = c'$; c'est à dire si la connaissance (c') n'apparaît pas comme un moyen nouveau pour le sujet (s') de se mettre en position réflexive par rapport à (m'). On a alors atteint la borne supérieure de la structure pour le sujet (s) relativement au savoir visé par la situation.

c) tout milieu peut être un élément $\langle m, s, c \rangle$

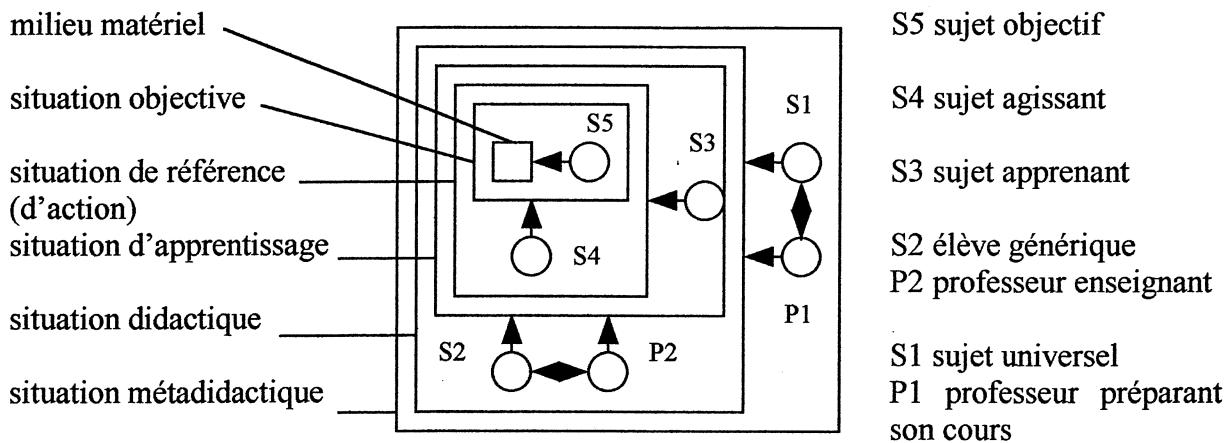
→ sauf si s n'est pas effectif ; c'est à dire si le sujet évoqué ne peut pas être actant. Le milieu correspondant est un milieu matériel. C'est la borne inférieure dans la structuration du milieu pour le sujet (s).

Guy Brousseau a mis en évidence 5 types de situations pour rendre compte des relations « effectives/invoquées » qui s'établissent entre l'élève, le maître et le milieu :

- situation a-didactique objective
- situation a-didactique de référence
- situation a-didactique d'apprentissage
- situation didactique (d'enseignement)
- situation métadidactique.

L'élève peut s'identifier aux différentes positions du sujet épistémique. Chaque niveau exprime des différences dans le comportement réflexif de l'élève. Le rôle et le sens des connaissances y sont différents.

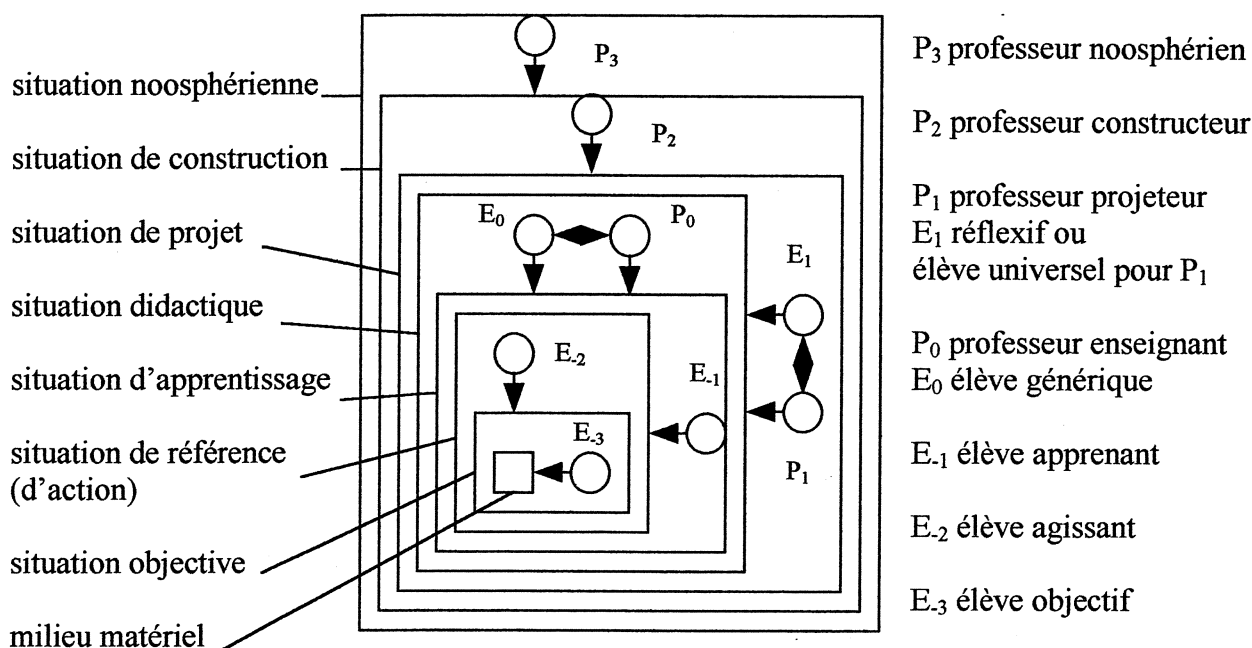
Les différentes situations sont emboîtées selon le schéma global suivant pour faire apparaître l'activité réflexive du sujet sur ses actions et apprentissages :



Cet emboîtement fait apparaître chacune des situations comme milieu pour le sujet actant de la situation au niveau immédiatement supérieur.

Pour tenter de décrire les différents rôles du maître, Claire Margolinas¹ distingue 3 niveaux « surdidactiques » dans la situation métadidactique : la situation de projet, la situation de construction, la situation noosphérique.

Cette modélisation conduit à distinguer 7 types de situations dans la structuration du milieu. La fermeture du processus de décomposition en éléments $\langle m, s, c \rangle$ est déterminée par la borne inférieure relativement à l'élève et par la borne supérieure relativement au professeur.



Les possibilités offertes au professeur sont limitées par les répertoires de connaissances de l'élève. Pour que l'élève puisse agir, il faut que les structures implicites engagées dans le milieu objectif lui suggèrent l'usage de moyens (numériques) issus de son répertoire explicite de connaissances. L'émergence de moyens résolutifs suppose que la distance entre les structures du milieu et les connaissances de l'élève n'est pas trop grande.

Les possibilités offertes à l'élève de jouer ou de simuler les différents rôles décrits précédemment contribuent à la formation des sens de la connaissance engagée dans le milieu.

Rappelons que cette structure n'a pas pour objet de décrire des situations qui se succèdent dans le temps mais des rôles effectifs ou intériorisés des sujets dans leur métier d'élève ou de professeur. Voici ce qu'écrit Claire Margolinas² :

« Il ne s'agit pas d'une description de situations temporellement successives, mais de positions que les sujets peuvent prendre, de façon effective ou intériorisée, dans le temps de la situation didactique (non nécessairement réduite à une leçon en classe). »

¹ Margolinas Claire, 1995, La structuration du milieu et ses effets dans l'analyse a posteriori des situations, Les débats de didactique des mathématiques, annales 1993-94.

Margolinas Claire, 1998, Etude de situations didactiques « ordinaires » à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur, Actes de la 9^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.

² Ibidem page 96.

Nous pensons que cette structure du milieu est un outil pertinent pour l'analyse des conditions microdidactiques d'existence d'une connaissance parce qu'elle permet de décrire les contraintes et libertés d'une relation didactique, les choix possibles ou nécessaires pour une heuristique du savoir visé, les différentes fonctions d'une même connaissance.

Nous nous proposons de décrire les analyses ascendante et descendante en les illustrant avec quelques exemples puisés dans la situation « des graines et des souris ». La proportionnalité y apparaît comme moyen d'action, comme moyen implicite d'apprentissage (pour les techniques de la linéarité), comme moyen explicite de construire d'autres connaissances (nombres, variables, fonctions), comme moyen de preuve.

4-2-3 Analyse ascendante et conceptions (genèse épistémique)

L'analyse ascendante de la structuration du milieu s'intéresse à la genèse épistémique c'est à dire à l'ordre suivi par l'élève pour construire ses connaissances.

Les niveaux a-didactiques : situations objective, de référence, d'apprentissage.

Par rapport à l'élève la borne inférieure de la structuration du milieu est atteinte avec la situation objective (S₃), l'élève (E₃) étant un observateur du milieu matériel.

L'énoncé d'un problème, les consignes d'une leçon décrivent ce milieu dont l'élève doit s'occuper. La proportionnalité peut y être évoquée sous une des formes décrites dans les chapitres précédents pour activer une action. C'est la connaissance nécessaire à cette action, pour la résolution du problème, qui est un moyen (c) pour l'élève agissant E₂.

A chacun des niveaux de l'action (S₂) et de l'apprentissage (S₁), l'élève est supposé avoir dans son répertoire les connaissances qui figurent dans (m) mais ce sont celles qui figurent dans (c) qui sont résolutoires.

En situation a-didactique l'élève a la charge de mobiliser des connaissances comme moyen de prendre des décisions et d'organiser une stratégie. Celles qui ne figurent ni dans l'énoncé ni dans le répertoire de l'élève sont supposées productibles par le sujet en conflit cognitif avec le milieu antagoniste. Elles naissent d'une dialectique qui s'établit entre la situation d'action et la situation d'apprentissage ; cette dialectique génère un « processus d'équilibration » où l'élève agit, puis juge son action, la corrige pour une meilleure adaptation à la situation.

Dans les situations a-didactiques la proportionnalité peut avoir au moins deux fonctions.

- Les connaissances implicites de la proportionnalité permettent l'action et sont un premier étayage à l'apprentissage. Elles permettent à l'élève de porter un jugement sur ses premières actions, de les corriger ou de les adapter. C'est cette attitude réflexive sur l'action qui contribue à l'apprentissage et qui permet un raisonnement pour la validation des techniques de la linéarité.
- Les connaissances explicites de la proportionnalité permettent de construire d'autres connaissances et de les valider (nombres, fonctions, variables). Les formes utilisées dépendent du niveau des élèves.

Le niveau didactique

L'élève (E_0) en situation réflexive sur la situation adidactique essaie d'en abstraire ce qu'il pense être attendu du professeur (P_0) avant de communiquer sa manière de comprendre, reflet de sa conception. Les productions de l'élève (E_0) vont être interprétées en termes de structures mathématiques par le professeur (P_0) qui va y reconnaître ou non les concepts issus de la situation noosphérique. Réciproquement l'élève reconnaît ou non dans l'objet que le maître essaie d'institutionnaliser le résultat de son apprentissage.

Dans les situations didactiques les connaissances ou savoirs de la proportionnalité entrent dans la relation professeur élève comme moyen de preuve. L'élève utilise ses connaissances et apprentissages de la proportionnalité pour justifier son action, pour communiquer ses découvertes, pour les confronter à celles des autres élèves, pour vérifier leur conformité aux attentes du professeur.

Les niveaux métadidactiques

La situation S_{+1} est réflexive pour l'élève et pour le professeur.

L'élève réflexif E_{+1} peut « revisiter mentalement » les situations didactiques et adidactiques qu'il a vécues. La situation didactique ayant contribué à valider ou invalider sa conception (née des situations adidactiques), il doit maintenant s'approprier les savoirs institutionnalisés en corrigeant éventuellement sa conception pour l'adapter à la situation vécue conformément aux attentes du professeur, pour la rendre résolutoire dans les futures activités. C'est cet espoir (même illusoire) qui fait entrer l'élève dans chaque nouveau contrat didactique pour un nouvel apprentissage.

Le professeur projeteur P_{+1} évalue les résultats de la leçon, juge son efficacité et repère les « insuffisances » éventuelles. A l'issue de cette réflexion, il projette de nouvelles situations didactiques pour permettre aux élèves de corriger leurs erreurs ou pour poursuivre le processus d'apprentissage.

Le professeur constructeur P_{+2} doit alors choisir un nouveau milieu matériel conforme à son projet d'enseignement.

Le professeur noosphérique P_{+3} ne dispose pas d'autres moyens de connaissances que ceux utilisés en situation de construction (S_{+2}). La situation noosphérique peut être considérée comme la borne supérieure relativement au professeur.

Exemple 1 : La proportionnalité comme connaissance implicite pour réaliser l'équité.
(« Des graines et des souris » ; Leçons 1, 2, 3).

Le mot « proportionnalité » n'apparaît pas dans un énoncé avant un certain âge. En primaire les élèves travaillent dans des contextes empruntés à la vie courante où l'usage de la proportionnalité fait partie de la culture populaire (ex : quantité de marchandise et prix). Le concept de proportionnalité ne fonctionne pas dans une situation a-didactique avant que les élèves aient eu la possibilité de le construire, de se l'approprier avec un vocabulaire adapté

pour l'identifier ; mais les techniques de la proportionnalité peuvent fonctionner comme moyens de résolution implicites avant d'être identifiées comme moyens spécifiques de ce concept.

Dans la situation étudiée on demande aux élèves de répartir ou de distribuer des graines à des souris sous certaines contraintes. La structure du milieu permet de faire une analyse a priori de cette situation in abstract³.

S.₃) Situation objective

Le milieu matériel (les graines et les souris) est évoqué. Il est représenté par des dessins de souris groupées en lots et objectivé par la présence effective de boîtes contenant des graines. L'élève objectif imagine que les souris vont se nourrir de ces graines.

S.₂) Situation de référence (d'action)

Le milieu objectif problématisé est : « Le sujet réalise une distribution équitable de graines à des souris ».

L'élève agissant doit construire une répartition équitable des graines disponibles entre les différents lots de souris. Il doit tenir compte du nombre de souris de chaque lot. Pour faire les calculs il utilise implicitement des règles qui correspondent à l'idée qu'il se fait de l'équité : « Plus il y a de souris et plus il faut de graines ; s'il y a le double de souris il faut le double de graines ; ... ». L'élève ne peut pas soupçonner que ces théorèmes en actes relèvent d'un savoir mathématique. La proportionnalité apparaît comme une connaissance satisfaisant à des nécessités psychologiques ou sociales pour réaliser l'équité.

S.₁) Situation d'apprentissage

L'élève apprenant juge l'équité de sa répartition (milieu de référence), éventuellement rectifie sa proposition de distribution tant que les effets de son action (de ses calculs) ne correspondent pas à son attente. Il prend conscience de ce qu'il est en train de faire. Il contrôle les procédures de calcul qu'il va pouvoir ou devoir expliciter en situation didactique. Il apprend l'usage de la linéarité.

S₀) Situation didactique

Il a besoin des propriétés de la proportionnalité mais pour les décrire il ne dispose que du vocabulaire emprunté au contexte des grandeurs qu'il manipule. Il peut parler de quantités de graines et de souris et des opérations que les contraintes de la situation le conduisent à faire sur ces graines et ces souris qu'il traduit par des calculs sur les mesures.

Le professeur gère les débats dans la classe pour la validation du concept d'équité (égalité des parts) et des techniques (usage des rapports) qui permettent cette réalisation compte tenu des contraintes matérielles (regroupements des souris en lots). C'est à lui qu'incombe l'institutionnalisation des techniques et du vocabulaire (équité, ration, distribution équitable).

S.₊₁) Situation de projet

L'élève E₊₁ par une réflexion sur l'ensemble de la leçon essaie d'abstraire l'essentiel, il va retenir ce qu'il croit être opérationnel pour la suite des leçons. « L'équité c'est l'égalisation des parts ». S'il peut calculer la ration (si elle est entière) alors il peut calculer le nombre de graines à attribuer à chaque lot de souris, sinon il doit déterminer le nombre de fois qu'un lot de souris est contenu dans un autre ou bien grouper des lots de souris et les graines correspondantes, etc.

³ Il est peut-être utile de rappeler qu'une analyse a priori ne dépend pas des faits expérimentaux. On pourra trouver une explication dans : Claire Margolinas ; Eléments pour l'analyse du rôle du maître ; RDM vol. 12.

Le professeur P_{+1} évalue les résultats et juge l'efficacité de la leçon : les élèves ont-ils atteint les objectifs projetés ? Les techniques de la linéarité sont-elles acquises ? Quelles sont les erreurs à corriger, les améliorations à apporter, les nouvelles potentialités ?

Les nouveaux projets dépendent de cette analyse réflexive. Par exemple à l'issue de la première leçon nous avons estimé nécessaire de faire fonctionner l'idée de variation et de fonction, ce qui justifie la deuxième séquence de la première leçon ; à l'issue de la deuxième leçon une deuxième séquence s'est avérée nécessaire pour familiariser les élèves avec l'usage des rapports internes ...

S₊₂) Situation de construction

La construction d'un milieu matériel qui réalise les contraintes nécessaires à une heuristique idoine est délicate. Dans les deux premières leçons la contrainte essentielle est l'obligation faite aux élèves de répartir un maximum des graines disponibles. Dans la troisième leçon pour obliger les élèves à additionner ou soustraire des « lots de souris » nous avons imaginé de transporter les souris dans des cages.

Le professeur P_{+2} est confronté aux difficultés d'analyses mathématiques, ergonomiques, fonctionnelle que nous tentons de décrire dans l'analyse descendante.

4-2-4 Analyse descendante et concept (construction de situations)

Dans cette analyse descendante nous essayons de décrire l'activité du professeur dans l'élaboration d'une situation didactique S_0 . Cette activité en positions surdidactiques peut avoir lieu avant, pendant ou après la leçon.

Professeur noosphérique P_{+3} .

En situation S_{+3} on peut considérer le professeur noosphérique comme sujet objectif. Son action d'enseignant commence en position (+2).

Professeur constructeur P_{+2} .

Dans la construction d'une situation qui doit satisfaire l'objectif d'apprentissage, le professeur P_{+2} est en interaction avec le milieu projet M_{+2} sous des contraintes objectives : structure mathématique de l'objet de savoir visé, programmes et instructions, manuel de la classe, choix de la progression pour l'année scolaire, écologie des connaissances dans la classe, etc. et des contraintes subjectives projetées par le professeur lui-même en position P_{+1} .

Sa première activité consiste en une analyse mathématique et fonctionnelle du savoir visé. Il dispose de moyens mathématiques et de son expérience d'enseignant. Ses connaissances sont celles qu'il a acquises en formation générale ou professionnelle et les informations qu'il détient de la noosphère.

La deuxième activité consiste à déterminer un milieu qui réponde aux conditions fonctionnelles mises à jour par l'analyse précédente.

Professeur projeteur P_{+1} .

Le professeur projeteur interagit avec un milieu didactique évoqué ou déjà vécu. Il évalue les effets possibles de la « situation construite » sur les élèves. Il a une connaissance de la classe qui lui permet de prévoir leurs réactions.

Son activité en situation S_{+1} consiste principalement en une analyse ergonomique et fonctionnelle de la situation didactique. Elle est conditionnée principalement par des

contraintes subjectives⁴ : conceptions du professeur sur la discipline, sur l'apprentissage, sur le contenu à enseigner, sur les prérequis, sur les préacquis et niveau psychogénétique supposés des élèves, ...

Commentaire :

Dans l'élaboration d'une situation d'enseignement il y a une dialectique entre le professeur projeteur et le professeur constructeur ; les contraintes ergonomiques limitent les possibilités fonctionnelles suggérées par l'analyse mathématique et réciproquement l'analyse mathématique tend à s'imposer et à s'affranchir des contraintes ergonomiques. La recherche d'un équilibre nécessite une analyse didactique approfondie des objets mathématiques qui constituent l'environnement du savoir visé, de la structure mathématique de l'objet lui-même et des conditions de sa mise en situation pour une genèse fonctionnelle. Dans l'élaboration d'un processus d'apprentissage on peut distinguer au moins trois articulations : logique (mathématique), ergonomique et fonctionnelle. La situation « des graines et des souris » résulte d'une analyse didactique (partie 3) pour un processus d'apprentissage à long terme de la linéarité qui illustre la « descente » dans les différentes « articulations » décrites précédemment.

Professeur P₀.

Nous avons déjà vu que la rencontre entre le concept mathématique « descendu » par le professeur et la conception de l'élève issue des situations adidactiques se fait en situation didactique S₀. C'est un moment sensible du temps didactique où le professeur exerce sa fonction d'enseignant « à découvert » ; il doit évaluer la distance qui sépare la conception de l'élève de l'objet à enseigner et juger de l'opportunité d'officialiser un savoir nouveau dans la classe. Ce moment didactique s'inscrit dans un processus complexe d'institutionnalisation que nous nous proposons d'analyser dans la partie suivante.

Exemple 2 : La proportionnalité comme moyen de construire des connaissances : « L'équité pour la genèse des rationnels ; comparaison de rations ». (Des graines et des souris, leçon 4).

Il s'agissait dans cette leçon d'utiliser les propriétés de la proportionnalité pour une approche des rationnels. Le vocabulaire est contextuel mais les élèves savent l'utiliser pour décrire les techniques de conservation des structures qu'ils ont apprises.

L'exposé suivant tente de résumer l'analyse a priori de cette leçon par une « descente » dans la structure du milieu. Rappelons que la structuration du milieu ne décrit pas une temporalité des situations, mais l'exposé écrit n'échappe pas à un ordre de présentation qui rend difficile l'explication de la dialectique qui s'établit entre les situations de construction et de projet.

S₊₂) Situation de construction

A l'issue des trois premières leçons de la situation « Des graines et des souris » les techniques qui permettent la réalisation d'une distribution équitable sont institutionnalisées. On veut maintenant les utiliser pour « construire les rationnels » ; c'est à dire faire fonctionner implicitement une relation d'équivalence et une relation d'ordre sur l'ensemble des couples

⁴ Cette distinction est faite par Marie-Jeanne Perrin-Glorian dans « Gestion didactique des moments adidactiques ; école d'été de didactique des mathématiques ; 1995. »

(nombre de graines, nombre de souris). Pour comparer des rations représentées par de tels couples les élèves disposent de deux stratégies de base :

1. Comparer deux couples ayant le même nombre de souris.
2. Comparer deux couples ayant le même nombre de graines.

Compte tenu des questions soulevées par la situation de projet S_{+1} nous avons construit une première phase où les élèves sont invités à proposer des couples équivalents hypothétiques, ce qui fait fonctionner l'idée de « fonction et de variable ». Dans la deuxième phase chaque groupe d'élèves doit trouver le couple équivalent au couple qui lui a été confié.

S_{+1}) Situation de projet

La situation didactique projetée S_0 soulève au moins deux questions.

1. Est-ce que tous les élèves ont compris ce que désigne le mot « ration » ?

Si la formulation du professeur P_0 en situation S_0 dépend de l'idée qu'il se fait de cette compréhension par les élèves, la présentation qui en résulte va elle-même influencer le comportement des élèves.

Pour la phase 1 nous avons retenu la formulation suivante : « Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ? Est-ce qu'il vaut mieux être souris dans la distribution bleue ou dans la distribution verte ? »

2. Est-ce que pour comparer deux rations les élèves vont penser à utiliser des couples intermédiaires équivalents aux couples donnés (phase 2) ?

Il faut les y préparer par la phase 1.

S_0) Situation didactique

Le caractère public de la situation didactique S_0 permet à l'élève E_0 de valider les couples proposés en phase 1. Cette « validation raisonnée » s'appuie sur les techniques institutionnalisées qui servent de critères de validité⁵.

Avant d'institutionnaliser les deux stratégies de base : « comparer deux couples qui ont un même nombre de souris ou un même nombre de graines » le professeur P_0 doit s'assurer que les élèves ont bien compris ce que veut dire « comparer deux rations ». Les interventions du professeur sont déterminantes ; la réussite dépend de la distance qui sépare la conception de l'élève du concept de ration visé par la situation S_0 .

S_{-1}) Situation d'apprentissage

L'élève apprenant ne peut comparer deux couples (nombre de graines, nombre de souris) que s'ils ont une mesure homologue commune. Si dans les constructions réalisées en S_{-2} l'élève ne trouve pas deux tels couples il doit recommencer son action. Ainsi s'établit une dialectique entre « action » et « apprentissage » qui permet à l'élève de construire l'ordre et l'équivalence sur les couples (nombre de graines, nombre de souris).

S_{-2}) Situation de référence (d'action)

En phase 1 l'élève agissant construit « arbitrairement » des couples équivalents ; il dispose des techniques apprises dans les leçons précédentes.

En phase 2 son action est validée ou invalidée lors de la rencontre avec les élèves du groupe supposé détenir le couple équivalent.

S_{-3}) Situation objective

Le milieu matériel des graines et des souris est évoqué. Une ration est représentée par un lot de souris qui reçoit un paquet de graines.

⁵ L'expression est empruntée à Claire Margolinas : *Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusions* ; RDM vol. 12.

4-2-5 L'institutionnalisation et ses effets

a) Observations

Lors de différentes observations à Michelet, nous avons constaté que l'institutionnalisation est un moment sensible pour le maître. C'est le moment où il exerce pleinement sa fonction d'instituteur⁶. L'institutionnalisation joue un rôle important dans la construction des savoirs. Elle peut prendre plusieurs formes. La diversité de la manifestation de la proportionnalité à différents niveaux de connaissance et dans différents cadres nécessite des institutionnalisations contextualisées qui sont source d'émiettement des savoirs.

Au moment de l'institutionnalisation, le maître a conscience d'agir en tant que représentant légal du savoir. Cette légitimité lui a été officiellement accordée par ses pairs et par l'institution scolaire. Il doit exercer le droit de dire aux élèves ce qu'ils ont à apprendre et à retenir, ce qui est socialement reconnu comme savoir. Par cet acte il pérennise un savoir qui est censé être opérationnel au-delà de l'institution scolaire et qui permettra à l'élève d'être à son tour socialement reconnu comme détenteur du savoir officiel. Le maître est supposé avoir la culture suffisante pour se porter garant des choix qu'il fait. Or c'est une responsabilité qui est parfois mal assumée. Nous avons constaté que certains maîtres essaient de renvoyer aux élèves la charge de cette institutionnalisation. Pourquoi ?

Les conditions actuelles d'enseignement de la proportionnalité ne permettent pas de distinguer les savoirs des connaissances, d'identifier ce qui doit être institutionnalisé.

Les programmes ont subi plusieurs changements, les commentaires qui les accompagnent peuvent parfois paraître contradictoires d'une réforme à l'autre, les formulations anciennes sont rejetées et les vocabulaires modernes n'ont pas atteint la stabilité espérée.

Or c'est le poids de la culture qui régule la transmission des savoirs. Aucune institution isolée ne peut y suppléer. Les programmes sont nécessairement très généraux dans leur formulation. La reconnaissance des savoirs à institutionnaliser est à la charge du maître car le système éducatif laisse à chacun la responsabilité de reconnaître ce qui relève du savoir ou de la connaissance. L'idéologie entretenue par le slogan « Il faut placer l'élève au centre du système éducatif » conforte le maître dans des pratiques qui font passer les contenus au second plan. Elle laisse croire que les activités sont autoinstitutionnalisantes.

Dans un tel contexte le maître joue un rôle d'animateur, au mieux de médiateur mais l'institutionnalisation n'apparaît pas comme une nécessité. Or l'institutionnalisation est un processus complexe qui mérite une attention particulière car elle conditionne non seulement l'apprentissage mais aussi la stabilité culturelle des objets de savoir.

b) L'institutionnalisation

Les observations précédentes nous ont conduit à reprendre l'analyse de l'institutionnalisation car elle revêt différentes formes suivant les besoins d'un projet curriculaire, les intentions et

⁶ Définitions relevées dans « Le nouveau petit Robert ; 1996 » :

instituteur : personne qui institue.

instituer : établir d'une manière durable.

institutionnaliser : donner à quelque chose le caractère officiel d'une institution.

objectifs d'une leçon, les comportements des élèves, les nécessités d'un moment didactique, les résultats et nouvelles prescriptions, ...

Avant d'étudier les différentes composantes de l'institutionnalisation il est utile de préciser à quoi on reconnaît qu'un objet, une pratique, une tâche, une technique, une technologie ou une théorie sont institutionnelles dans la classe à un instant donné.

Dans l'institutionnalisation il y a quelque chose de potentiellement collectif mais il n'est pas évident d'identifier ce qui est institutionnalisé dans un acte public.

Comparons par exemple les deux questions suivantes :

a) Combien de fois y-a-t-il 10 mois dans 10 ans ?

b) Combien de fois y-a-t-il 3 mois dans 7 ans et 9 mois ?

Dans a) il y a une opportunité d'utilisation de la proportionnalité qui ne vient pas de la structure de la question mais du choix des valeurs. La question b) qui a la même forme ne guide pas vers la proportionnalité. La question a) permet à quelques élèves d'exercer leur sagacité ou de manifester leur compréhension mais n'a pas de caractère collectif qui puisse faire penser à une institutionnalisation. C'est une mobilisation de la proportionnalité originale mais pas universelle. Un professeur ne va pas institutionnaliser un objet aussi particulier.

L'institutionnalisation est la reconnaissance collective du statut qu'on attribue à un objet. Or il y a différents niveaux d'institutionnalisation qui dépendent de la fonction de l'objet institutionnel dans l'organisation didactique des savoirs et connaissances de la classe.

De manière générale l'institutionnalisation présente au moins quatre aspects : une intention, des conditions, une réalisation, un usage.

L'intention : L'institutionnalisation s'inscrit dans un projet didactique. Dans la classe le maître a l'intention de donner un statut à un objet relativement à l'organisation didactique qu'il projette. Cette organisation fictive dépend de l'épistémologie du professeur, de l'importance qu'il attribue à l'objet, de l'interprétation qu'il fait des programmes, de l'organisation déjà existante des savoirs mathématiques à laquelle il se réfère.

Les conditions : Pour qu'un objet puisse être institutionnalisé, il faut qu'il présente une certaine importance soit mathématique soit didactique. Dans le premier cas, l'objet est déjà reconnu par une institution comme élément d'une organisation praxéologique et le maître se sent légitimé à lui donner un statut dans la classe car cet objet joue un rôle important dans l'organisation des savoirs mathématiques. Dans le deuxième cas, l'objet apparaît comme un maillon nécessaire dans une heuristique organisée par le maître ou comme un outil utile à un moment donné d'une progression ou d'une leçon. On va voir qu'il y a différentes circonstances d'institutionnalisation. Dans tous les cas l'institutionnalisation d'un objet suppose une genèse, un vocabulaire, un usage standard, une reconnaissance collective pendant un certain temps.

La réalisation : C'est un contrat implicite ou explicite entre le maître et les élèves. Il ne peut être effectif que si les élèves ont perçu l'importance, la consistance, l'enjeu, la pertinence, la fonctionnalité de l'objet à institutionnaliser. La reconnaissance de ces caractéristiques résulte d'un processus complexe qui accompagne l'objet de sa genèse à l'institutionnalisation de sa signification en référence à des situations d'action, de communication, de validation.

L'usage : L'institutionnalisation ne se limite pas à une déclaration publique du maître. Il vérifie que les élèves savent reconnaître et identifier l'objet institutionnel, qu'ils disposent d'un vocabulaire pour le désigner, qu'ils savent l'utiliser dans des conditions d'emploi

reconnues comme typiques de cet objet. C'est en prescrivant aux élèves des exercices dont la résolution nécessite un usage standard de cet objet que le maître peut évaluer l'effectivité de son institutionnalisation.

c) Les objets institutionnalisables

Dans une théorie, il y a les axiomes, les théorèmes, les problèmes.

Les axiomes sont les principes premiers explicités ou non. Le consensus sur le sens à donner à ces prémisses peut résulter de différentes formes d'institutionnalisation (intentionnelles ou diffuses). Ils servent de références dès qu'ils sont collectivement reconnus dans une institution comme des évidences (par exemple, l'équité c'est « l'égalisation des parts »).

Les théorèmes sont étudiés collectivement au moment de leur introduction au sein de la classe. Ils sont institutionnalisés en tant que résultats après avoir été validés. Ils font partie du répertoire de la classe. Les élèves peuvent légitimement s'y référer à tout moment pour expliquer, justifier, valider. Le maître est lui aussi légitimé à s'en servir pour travailler la théorie.

Les problèmes ont des statuts différents suivant la place qu'ils occupent au sein de l'organisation didactique de la classe.

Il y a les problèmes résolus. Ils ont une fonction didactique plus large que les théorèmes mais différente.

Les problèmes type sont rendus publics par une institutionnalisation du professeur. Mais lui seul peut y faire référence pour manifester ses intentions didactiques, pour expliquer ou rappeler une technique, pour justifier le choix de tel ou tel théorème. Ils peuvent aussi se substituer aux explications du maître. Ils apparaissent comme des justifications raccourcies. L'élève n'est pas autorisé à s'en servir comme théorèmes. Ils ne sont pas pour l'élève des outils légitimes pour expliquer ou justifier (sauf peut-être à titre privé) ; il ne peut pas les utiliser publiquement.

Les autres exercices ont une vertu. Ils sont supposés utiles pour comprendre, pour apprendre, pour s'entraîner, pour pouvoir faire d'autres exercices. Ils permettent de savoir si les élèves ont compris. Ils ont eux aussi une valeur institutionnelle puisqu'ils ont été posés publiquement. Les élèves savent que le maître avait une intention d'enseigner en proposant ces exercices. Ils sont une aide dans l'activité de l'élève en tant qu'exemple ou modèle. Leur évocation permet de retrouver ou de découvrir cette intention qui peut être l'utilisation d'un théorème, la réitération d'une tâche, la mise en place d'une technique, ...

Les habitudes du maître, la fréquence d'apparition des exercices, la place qu'ils occupent dans une leçon ou une progression sont autant d'indices qui permettent à l'élève d'attribuer un statut à chacun d'eux. Il s'agit là d'une institutionnalisation diffuse, implicite mais qui donne un potentiel didactique à ces objets, une consistance, un point d'appui, ...

Il y a les problèmes non faits. Ni les élèves ni le maître ne peuvent s'y référer puisqu'ils sont nouveaux.

Dans les problèmes non faits il y a ceux qui peuvent être investis avec les connaissances déjà institutionnalisées dans la classe. Leur consigne est intelligible pour les élèves car formulée avec le langage du répertoire de la classe. Les différentes institutionnalisations précédentes mettent à la disposition des élèves les instruments nécessaires à la production d'explications

et de justifications : axiomes, théorèmes, techniques. Les exercices déjà faits peuvent être une aide à la découverte de cette technologie même si les élèves ne sont pas autorisés à y faire référence publiquement dans la classe. Ces problèmes peuvent être légitimement posés par le maître qui peut rendre compte de l'intelligibilité de l'énoncé et de la faisabilité d'une construction technologique en référence au répertoire de la classe. Ils ont une position institutionnelle particulière dans l'organisation didactique de la classe qui permet au professeur de les soumettre légitimement aux élèves.

Il y a les problèmes qui restent infaisables par les élèves à un moment donné de la construction des savoirs. Dans l'énoncé figurent des mots non enseignés et non répertoriés. La théorie n'est pas suffisamment travaillée, il manque des techniques, des théorèmes. L'état des connaissances ne permet pas aux élèves de comprendre les intentions de l'énoncé. Les élèves sont éventuellement en mesure de s'en expliquer et le maître ne peut pas rendre compte de la légitimité référentielle d'un tel problème. Ces problèmes ont un statut institutionnel qui les exclut au moins provisoirement des activités potentielles de la classe.

Un des aspects de l'institutionnalisation est un changement dans le champ de référence. On reconnaît qu'un objet a été institutionnalisé quand il a changé de rôle référentiel.

Par exemple un problème peut subir plusieurs changements de statut qui sont autant d'institutionnalisations. Un problème infaisable va rentrer dans l'institution scolaire à la suite d'un cours ou d'une définition qui va le rendre intelligible par les élèves. Il a ainsi subi une première institutionnalisation en entrant dans les pratiques potentielles des élèves tout en restant non fait. Si ce problème non fait devient un problème fait, il change une nouvelle fois de statut. Il peut être un problème type auquel le professeur pourra faire référence, c'est une institutionnalisation factuelle. Il peut aussi être institutionnalisé comme théorème sous certaines conditions ; il faut qu'il soit une réponse à une question forte, qu'il soit consistant par rapport au reste de la théorie et opérationnel. Le maître le fait alors passer du statut de problème au statut universel de théorème. Ces différents niveaux d'institutionnalisation jouent un rôle important dans la construction des savoirs.

Les techniques :

Lors de résolution de problèmes on rencontre des techniques et des technologies.

Pour réifier une pratique, une technique de raisonnement, on est conduit à l'institutionnaliser.

Si c'est une habitude figée et utilisée spontanément, elle s'est autoinstitutionnalisée.

Si on en fait un objet d'étude (parce qu'on a repéré des erreurs récurrentes ou un usage non standard, ou parce qu'on veut changer son statut, la décontextualiser pour la rendre universelle) alors on est conduit à identifier la technique, à décrire ses conditions d'emploi, à l'expliquer, à la justifier, à l'accompagner d'un vocabulaire et d'une technologie. Elle entre alors dans un processus d'institutionnalisation pour être répertoriée avec les autres objets institutionnels.

d) Les différentes circonstances de l'institutionnalisation au sein de la classe.

Après avoir vu à quoi on reconnaît qu'un objet a été institutionnalisé, on va étudier où, quand et comment apparaît l'institutionnalisation dans le déroulement d'une leçon ordinaire.

Les exemples qui figurent dans cette partie sont extraits de leçons qui ont été réalisées à l'école Jules Michelet de Talence sous l'étiquette « situation des graines et des souris ».

1) Les consignes

Les consignes sont en général importées par le professeur sauf dans le cas d'un processus de création d'un jeu qui conduit les élèves à fabriquer des consignes pour poursuivre le jeu.

Pour qu'une leçon puisse avoir un déroulement idoine il faut créer les conditions des comportements relativement au but visé. La consigne y contribue pleinement. Son énoncé est un élément essentiel du contrat didactique dans lequel le professeur indique ce que l'élève doit faire. C'est un moment didactique institutionnalisant puisqu'on s'accorde sur les tâches à effectuer. Pour une tâche déterminée :

- Le maître donne tous les renseignements qui vont jouer un rôle dans la solution officielle.
- Il s'assure que tous les élèves concernés par cette tâche ont eu accès à ces renseignements.
- Il garantit que ces renseignements sont adaptés aux objectifs.

La consigne suppose la prise en charge par le maître de la signification didactique des activités. Elle rend compte aux élèves du rôle de l'activité organisée pour l'apprentissage.

2) Les objectifs

Parmi les objectifs d'une leçon figurent les résultats visés par la situation. Il peut s'agir de vocabulaire, de concepts, de techniques, de preuves, ... , tout ce qui est nouveau à retenir, tout ce qui va enrichir le répertoire commun à la classe. Ce sont les objets d'enseignement. Dans le déroulement de la leçon, le maître peut réserver un temps pour l'institutionnalisation de ces objets finalisés. « *Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le "cours". Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut aux concepts qui, jusque là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer.* » (R. Douady, M.J. Perrin, ESM 20 1989).

Mais la reconnaissance par l'élève d'un objet de savoir ne se décrète pas. L'institutionnalisation ne peut pas être un acte didactique isolé. Elle est l'aboutissement d'un processus de reconnaissance par les élèves du nouveau statut de l'objet cognitif visé.

3) Les institutionnalisations relatives à un événement.

Entre ce que l'institution autorise et ce qu'elle interdit, il y a un espace de liberté qui permet à l'élève d'agir, à la classe de fonctionner. Dans cet espace se fait l'histoire de la leçon où apparaissent des opportunités que le maître doit gérer. A propos d'un événement, le maître peut être obligé de positionner la classe pour clarifier la situation, ajuster la consigne et poursuivre la leçon. Chacune de ses décisions est une institutionnalisation locale et contextuelle qui conditionne le comportement des élèves. Elle peut faire « jurisprudence » et être ainsi à la disposition du professeur pendant un certain temps. Elle peut être décisive pour l'interprétation que les élèves vont faire de la situation et le sens qu'ils vont lui donner.

Voici un exemple où le maître est obligé de procéder à des institutionnalisations locales parce que l'espace de liberté est trop grand.

Dans la situation des graines et des souris on veut conduire les élèves à utiliser la proportionnalité pour réaliser l'équité sociale. Le maître distribue à chaque groupe d'élèves un lot de souris et un paquet de graines ; mais le nombre de graines de chaque paquet n'est pas proportionnel au nombre de souris du lot correspondant. On espère ainsi faire naître un

sentiment d'injustice chez les élèves qui devraient réagir en choisissant la linéarité comme modèle satisfaisant l'idée d'équité.

Le maître : *Vous voulez que vos souris soient toutes bien nourries.*

Un élève : *Il suffit de partager les graines du paquet entre les 7 souris.*

Le maître ajuste la consigne : *Vous voulez que dans votre groupe les souris n'aient pas moins à manger que dans un autre groupe.*

Un autre élève : *Il faut que tous les groupes aient le même nombre de graines.*

Le maître réajuste : *Il faut que dans la classe chaque équipe puisse nourrir ses souris de la même façon que dans les autres équipes ; sinon il y en a qui vont devenir énormes et d'autres qui vont rester toutes maigres. Il faut que toutes les souris soient traitées de la même façon ..., on dira dans ce cas que la distribution est équitable.*

Chaque intervention d'élève apparaît comme un événement auquel le maître répond par une institutionnalisation qui restreint de plus en plus l'espace de liberté.

Si pendant la leçon le professeur découvre que la situation adidactique ne fournit pas les rétroactions qui permettent de limiter le champ d'action des élèves, il est obligé de réduire leur espace de liberté par des interventions improvisées. La difficulté pour le maître est de choisir dans ces conditions ce qui va être l'objet du travail des élèves par rapport au savoir visé. Il doit éliminer certains faits qui n'ont pas de rapport direct avec les objectifs et qui peuvent changer l'incertitude et modifier chez l'élève son rapport à l'objet d'étude. Par exemple dans la situation des graines et des souris, le maître précise que toutes les souris sont identiques, ont la même taille. Il crée ainsi une condition nécessaire pour faire émerger l'idée que toutes les souris doivent manger la même quantité de graines sans le dire. C'est cet argument qui fonde l'usage de la proportionnalité entre le nombre de souris et le nombre de graines.

C'est parce que l'ingénieur ne peut pas prévoir dans le détail l'histoire d'une leçon que le maître est obligé de prendre des décisions pendant le déroulement des activités pour fermer la porte à des aventures, à des évolutions non désirées du système.

4) Les institutionnalisations différentielles et diffuses

Un élève dit quelque chose. Le maître répète ce que l'élève a dit à l'intention de tous les autres. La différence entre ce que l'élève a dit et ce que le maître a dit comporte une institutionnalisation différentielle. Dans ce que l'élève a dit le maître a reconnu ce qui peut-être pris en charge par l'institution puis a provoqué une reconnaissance collective d'un changement de référentiel.

Exemple : Un élève dit : « 3 souris ont 5 graines, ici il y a 6 souris donc il faut 10 graines. ». Le maître reprend : « 6 souris c'est le double de 3 souris donc il faut 2 fois 5 graines, soit 10 graines ». C'est une institutionnalisation différentielle provisoire. Elle n'est peut-être pas perçue comme telle par les élèves à la première redite. D'autres occasions pourront permettre de nouvelles reprises pour une validation progressive qui entre dans un processus d'institutionnalisation de la règle du double : « S'il y a le double de souris il faut le double de graines ». Mais l'institutionnalisation de cette propriété n'est elle-même qu'une étape vers l'institutionnalisation d'une propriété plus générale de conservation des rapports internes. D'institutionnalisations différentielles en institutionnalisations différentielles le maître approche le savoir visé par la situation.

Il est difficile de décrire l'institutionnalisation diffuse qui résulte de l'attitude du maître, de ce qu'il dit ou ne dit pas, de l'usage qu'il fait des ostensifs gestuels. Il peut effectivement institutionnaliser un objet par un geste de la main, un signe de la tête ou en ignorant ostensiblement ce qu'un élève vient de dire alors que tous les élèves savent qu'il a bien entendu. Cette institutionnalisation diffuse peut concerner un élève ou groupe d'élèves lors d'un entretien privé ou la classe entière pendant une phase maïeutique collective. Elle accompagne l'institutionnalisation différentielle.

5) Des résultats aux nouvelles prescriptions

Le but d'une leçon est d'établir des résultats mais tous les résultats ne sont pas contenus dans les objectifs. Des intentions aux résultats puis à leur utilisation, il y a tout un travail d'institutionnalisation qui va de la consigne aux nouvelles perspectives.

On a vu que l'institutionnalisation correspond à un changement dans le champ de référence.

Si ce champ est une situation, l'institutionnalisation est contextuelle, conditionnée par la situation et limitée à la durée de vie de la situation effective. C'est le cas de la consigne qui est nécessaire à l'action et des institutionnalisations différentielles ou diffuses qui ajustent cette consigne, limitent le champ de liberté des élèves et diminuent ainsi l'incertitude liée à la situation adidactique.

Si l'acte institutionnalisant sort du cadre d'une situation effective, fictive ou théorique alors l'institutionnalisation est universelle. C'est le plus souvent cette forme d'institutionnalisation qui est visée par les objectifs mais certaines institutionnalisations locales peuvent aussi être non conjoncturelles.

Nous avons déjà noté qu'identifier l'objet ne suffit pas à l'institutionnaliser. L'usage que les élèves vont en faire va lui donner du sens et ainsi renforcer son institutionnalisation.

Cet usage peut être spontané ou suscité par le professeur sans qu'il le réclame explicitement mais en demandant de reproduire des techniques, des raisonnements, des technologies. Tout en fonctionnant comme une connaissance l'objet subit une institutionnalisation différentielle progressive par glissements successifs dans le temps.

Cet usage peut aussi être réclamé par le professeur sur le mode de la chose due parce que l'objet a été identifié, explicité avec un vocabulaire adapté et rajouté au répertoire de la classe (par exemple un théorème).

L'institutionnalisation consiste aussi à se mettre d'accord collectivement sur la lecture de ce qui a été fait, sur les résultats obtenus et leurs potentialités, sur la position de la leçon dans une progression, sur les conséquences et les nouvelles perspectives. Il faut extraire des activités ce qui est utile, réutilisable, efficace, simplificateur et qui va rentrer dans les mœurs des élèves.

Les nouvelles prescriptions du maître vont permettre aux élèves de trouver une place à l'objet institutionnel dans leur propre organisation des savoirs et connaissances. Chaque nouvelle prescription est une occasion donnée à l'élève de revisiter ses connaissances, de mettre à l'épreuve ses savoirs et de les réorganiser. La signification du nouvel objet institutionnel sera renforcée par les prolongements qu'il permet : nouveaux exercices, nouvelles leçons. Le sens que l'élève attribue à l'objet est révélé par l'usage qu'il en fait dans ces nouvelles activités et l'évaluation qu'il fait de cet usage participe de l'institutionnalisation

6) Le processus d'institutionnalisation.

« *L'institutionnalisation consiste à donner un statut culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances. L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action, que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir.* » (Brousseau, Angers 87).

Cette déclaration ne concerne que certains aspects de l'institutionnalisation.

On a vu que l'institutionnalisation est un travail du maître. Il donne la consigne, rappelle ce qui s'est passé pour les besoins de l'action, donne le statut de savoir à ce que l'élève doit apprendre. Entre la consigne et l'adjonction au répertoire de la classe du savoir visé, le maître est obligé de prendre des décisions qui sont autant d'institutionnalisations locales, différentielles ou diffuses. Les tentatives d'institutionnalisation qu'il fait quand ce n'est pas le moment échouent. Le maître doit savoir profiter de l'histoire de la leçon pour changer le statut des productions des élèves. Il doit attendre les indices de maturation de l'objet visé pour l'institutionnaliser. Or son rôle d'acteur, de présentateur, de médiateur ne lui laisse pas le temps de la réflexion. Il est obligé de réagir à chaud et sa décision résulte de sa spécificité personnelle et professionnelle, de ses propres conceptions.

L'institutionnalisation est un processus de création de moyens collectifs reconnus pour faire quelque chose. Dans ce processus de création de permissions et d'interdictions, il y a des interprétations contradictoires :

- il est nécessaire pour l'apprentissage que les élèves considèrent que tout ce qui n'est pas interdit est permis. C'est cet espace de liberté qu'ils s'accordent qui leur permet d'agir.
- pour le maître, dans ce qui n'est pas prévu tout n'est pas permis.

L'institutionnalisation a pour objet d'aménager un cadre à l'intérieur duquel la liberté de l'élève va s'exercer, elle a un rôle régulateur. Elle laisse ouvert le faisable entre le prescrit et l'interdit, c'est ce qui permet l'histoire. Une idée peut devenir un fait de classe par rapport auquel les élèves doivent se positionner et décréter une règle commune. C'est seulement des connaissances relatives à un fait qui peuvent être extraites, dites dans le registre des professeurs, manipulées dans le registre des élèves, puis institutionnalisées. De l'induction à la reconnaissance de l'objet, il y a tout un travail intermédiaire d'institutionnalisations diffuses et provisoires qui portent sur les situations d'action, de formulation, de validation et qui aboutit à la maturation de cet objet. Ce que le maître rappelle pour l'institutionnalisation finale doit pouvoir être identifié par les élèves. Le maître ne peut institutionnaliser que ce qui a pris du sens pour l'élève, il institutionnalise la signification. Il faut donc que l'élève ait établi un rapport entre l'événement et la chose qu'on veut lui faire retenir pour que l'institutionnalisation soit effective pour l'élève.

Exemple de processus d'institutionnalisation défailant

En début d'année scolaire lors d'une reprise de leçon de l'année précédente sur la situation des graines et des souris, nous avons constaté que le maître avait des difficultés à se positionner par rapport à ce qui était supposé être une institutionnalisation raisonnable. Lors de cette réitération de leçon, le maître fait appel aux souvenirs des élèves pour pouvoir les faire travailler sur des répartitions équitables ou inéquitables. Mais les élèves ne comprennent

pas ce que le maître veut leur faire dire. Doivent-ils rappeler la définition d'une répartition équitable ou leur conception de l'équité ou les raisons de réaliser cette équité ou les techniques qui permettent de réaliser cette équité ou la consigne, Les élèves ne distinguent plus les questions des réponses apportées l'année précédente. Ils ne peuvent pas comprendre les attentes du professeur. Finalement ils ne parviennent pas à donner de définition mais à propos d'une répartition inéquitable ils rappellent quelques raisons qui permettent de rejeter une telle distribution. C'est dans ce flou institutionnel que le maître poursuit sa leçon.

Le maître : *Nous avons 4 lots de souris et 4 paquets de graines répartis comme indiqué dans ce tableau :*

| | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|
| nombre de souris | 9 | 3 | 12 | 6 |
| nombre de graines | 20 | 10 | 50 | 40 |

Le maître : *Comment vous allez voir si cette distribution est équitable ? Est-ce que tout le monde peut dire si c'est équitable ou pas ? Est-ce que tout le monde peut voir si c'est équitable ou pas ?*

Une élève : *J'ai vu que pour 9 souris il y avait que 20 graines et pour 6 souris il y a 40 graines alors c'est pas équitable.*

Le maître : *Est-ce que tout le monde a entendu ce qu'a dit Léa ? Elle a dit qu'elle savait pas voir et puis en fait elle sait voir. Est-ce que tu peux répéter ?*

Léa : *Pour 9 souris il y a que 20 graines et 6 souris ont 40 graines. Quand il y a plus de souris il faut plus de graines.*

Le maître : *Quand il y a plus de souris il y a plus de graines.*

Le maître fait une institutionnalisation différentielle de la croissance de la relation de proportionnalité.

Un élève : *3 (souris) dans 12 (souris) ça y est 4 fois et 10 (graines) dans 50 (graines) ça y est 5 fois. Donc c'est pas équitable.*

Le maître : *3 souris mangent 10 graines. Si on prenait 4 fois plus de souris, on aurait dû avoir 4 fois plus de graines.*

La formulation du maître n'est qu'une variation grammaticale pour mobiliser les rapports. Elle les explicite moins bien que celle de l'élève mais le maître essaie de mettre l'accent sur la nécessité de conserver le rapport 4. C'est une tentative d'institutionnalisation différentielle de la conservation des rapports internes.

Un élève : *Et aussi on peut faire : 6 souris + 3 souris ça fait 9 souris et 40 (graines) + 10 (graines) ça fait 50 (graines).*

Le maître : *Or ici on avait trouvé que 9 souris mangeaient 20 graines (institutionnalisation différentielle de l'image de la somme est la somme des images). Je vois que ça revient. Eh bien, maintenant est-ce que vous seriez capables de rendre cette distribution équitable en utilisant le maximum de graines. Vous le faites.*

Le processus amorcé n'a pas abouti à la définition d'une distribution équitable mais ces quelques institutionnalisations différentielles permettent de poursuivre l'activité. Les travaux des élèves qui suivent conduisent à rejeter quelques distributions inéquitables puis un élève propose la répartition attendue :

| | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|
| nombre de souris | 9 | 3 | 12 | 6 |
| nombre de graines | 36 | 12 | 48 | 24 |

Le maître : *Est-ce que c'est équitable ? Tu nous le prouves ?*

Un élève : *36 + 12 ça fait 48 ...*

Le maître : *Alors 36 + 12 ça fait 48 et 9 + 3 ça fait 12. Donc ça, ça marche. Avec 3 par rapport à 6 ? Comment on peut passer de 3 souris à 6 souris ?*

Un élève : *3 + 3*

Le maître : *3 + 3 ça fait 6. Donc ça veut dire qu'on ajoute ça et ça, 12 et 12 et ça fait 24.*

Puis le maître institutionnalise l'équité de cette distribution alors que les arguments précédents auraient pu être satisfaits avec une distribution inéquitable ; par exemple :

| | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|
| nombre de souris | 9 | 3 | 12 | 6 |
| nombre de graines | 40 | 12 | 52 | 24 |

Cet exemple montre comment une défaillance du prescrit (insuffisance de la consigne) peut conduire à institutionnaliser un résultat justifié partiellement et engendrer un raisonnement faux chez les élèves. Ce n'est pas parce que des arguments qui permettent de rejeter l'équité d'une distribution dans certains cas, ne sont pas opérationnels dans ce cas, que la distribution est équitable. En d'autres termes $nonA \Rightarrow nonB$ n'est pas équivalent à $A \Rightarrow B$.

On peut soupçonner un manque de vigilance de la part du maître or c'est la fiche didactique qui est défaillante car elle n'a pas prévu la définition d'une distribution équitable. Le maître ne dispose que des arguments proposés par les élèves et institutionnalisés localement. Faute d'autres références, il conclut que la distribution est équitable parce qu'il n'a pas réussi à prouver le contraire ...

e) Les difficultés d'institutionnalisation de la proportionnalité

Caractère contradictoire de l'institutionnalisation de la proportionnalité

La proportionnalité se présente en bien des endroits de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie, sous des formes diverses cachées ou évidentes : multiplication, division, changement d'unités, mélanges, fonction linéaire, pourcentages, fractions, barycentres, similitudes, trigonométrie, théorème de Thalès,... Elle s'étend sur beaucoup d'objets (grandeurs, mesures, nombres abstraits, vecteurs,...) avec des fonctions différentes (relations entre grandeurs, fonctions mesures, échelles, construction de nombres, construction de grandeurs dérivées, construction de fonctions,...).

La diversité des approches (points de vue, conceptions, techniques, systèmes ostensifs,...) multiplie les possibilités et oblige aux connaissances de fonctionner de manière contextuelle.

Lorsqu'un objet est le même à travers des contextes très différents, son enseignement conduit à développer une genèse et des vocabulaires adaptés à chacun d'eux, à institutionnaliser le même objet dans des circonstances et sous des formes différentes, nombreuses, complexes et contradictoires.

Dans l'enseignement primaire, on ne peut pas développer un vocabulaire général de la proportionnalité car les élèves auraient des difficultés à y rattacher un sens. Le maître est obligé d'institutionnaliser la proportionnalité dans quelques contextes très particuliers avec une forme et un vocabulaire adaptés à chaque situation. Quand apparaît une erreur dans un contexte il est difficile de faire appel au vocabulaire développé dans un autre contexte pour l'expliquer. L'institutionnalisation de nouveaux vocabulaires ou de nouvelles techniques est nécessaire pour identifier collectivement cette erreur et construire un répertoire commun à la classe qui permet de l'expliquer. Ces institutionnalisations vont faire obstacle aux technologies relatives aux nouvelles situations. Ce processus oblige à faire des institutionnalisations diverses et nombreuses qui provoquent une croissance de la complexité.

Hypothèse : L'institutionnalisation est une nécessité qui crée des obstacles.

Il en résulte une croissance de la complexité qui peut être schématisée de la manière suivante : diversité \Rightarrow nombreuses institutionnalisations \Rightarrow obstacles \Rightarrow nouvelles institutionnalisations. Un traitement formel nécessite une abstraction qui n'est pas possible en primaire pour des raisons ontogéniques et difficile dans le secondaire en raison de la multiplicité des objets institutionnels.

Phénomènes liés aux réformes

A l'entrée au collège, la proportionnalité est encombrée par toutes les traces de ces approches différentes et qui toutes demanderaient de plus en plus d'institutionnalisations. Ces institutionnalisations sont mal venues pour les professeurs des classes de quatrième et troisième qui souhaitent traiter formellement la proportionnalité avec la fonction linéaire. Or la proportionnalité est spécifique de l'étude des grandeurs. La proportionnalité entre nombres abstraits n'a pas de sens hors de l'algèbre. Mais les élèves n'ont pas la culture algébrique qui leur permettrait de rattacher ce concept à une relation entre deux variables « algébriques » sans référence à des grandeurs variables. Rappelons que l'étude de la proportionnalité entre grandeurs est à l'origine de l'étude des fonctions mais ce passage a nécessité des siècles de travail ; il suppose un saut informationnel et une abstraction réfléchissante hors de portée des élèves de collège. Croire que la fonction linéaire peut apparaître spontanément comme une généralisation de la proportionnalité est une méprise. L'étude empirique en première partie a montré qu'une partie importante des maîtres interrogés ne voyaient pas que la fonction linéaire pouvait être une reformulation de la proportionnalité. Les mathématiques modernes n'ont pas effacé les contradictions qui résultent des diverses institutionnalisations contextuelles de la proportionnalité. Les structures ont permis d'expliquer des savoirs mathématiques indépendamment des grandeurs ; mais d'un point de vue didactique, la distributivité qui entre dans la structure d'anneau diffère de la fonction linéaire qui elle-même n'apparaît pas comme une reformulation de la proportionnalité. Vouloir faire de la proportionnalité un objet algébrique est une réduction qui vide ce concept du sens que l'étude des grandeurs lui a fait prendre. L'institutionnalisation de la fonction linéaire est plus facile, mais dans cette formulation les élèves ne reconnaissent pas nécessairement une abstraction qui reformule et résume les connaissances de la proportionnalité. Les savoirs de la fonction linéaire tendent à écraser les connaissances de la proportionnalité.

Les effets de l'autoinstitutionnalisation.

Nous avons vu que la multiplicité rend difficile une institutionnalisation convenable des vocabulaires, des conceptions, des savoirs sur la proportionnalité. A travers les différents systèmes ostensifs, l'institutionnalisation reste allusive tant qu'elle n'est pas réglée par un vocabulaire adapté. Les quelques techniques connues des élèves ne leur permettent pas de dire ce qu'est la proportionnalité. Avec le tableau de proportionnalité les élèves font des calculs mais n'ont ni le vocabulaire de la proportionnalité ni celui du tableau pour expliquer ce qu'ils font. On ne sait pas quelles sont leurs conceptions ; ils disposent seulement de quelques techniques comme l'usage du produit en croix ou des opérateurs. La proportionnalité relève plus des connaissances que des savoirs.

L'hypothèse implicitement admise que toute activité est autoinstitutionnalisante ajoute de la confusion à la complexité décrite précédemment. Une relation algébrique du type $y = ax$ ne peut pas évoquer spontanément une relation de proportionnalité entre grandeurs variables sans une volonté didactique et une intervention éclairée du maître. Pour que la fonction linéaire apparaisse comme une abstraction réfléchissant les différentes situations de la proportionnalité, il faut qu'il y ait une volonté didactique de réorganisation des savoirs. Ce saut informationnel nécessite un accompagnement didactique que les mathématiques modernes ont ignoré. Finalement le vocabulaire algébrique moderne n'a pas absorbé les formulations anciennes et n'a pas permis d'expliquer, de décrire les techniques anciennes. L'étude de la proportionnalité dans le cadre algébrique a provoqué un glissement du vocabulaire propre aux grandeurs sur les nombres. L'usage inapproprié des mots pour décrire des relations entre nombres résulte d'un manque de vigilance didactique.

Le coefficient de proportionnalité

La multiplicité des statuts et usages du coefficient de proportionnalité est une illustration des difficultés décrites précédemment.

Dans les rapports externes il faut distinguer :

- le tant pour tant : prix des marchandises, changement d'unités de mesure, situation de « l'épaisseur d'une feuille de papier », situation « des graines et souris », ...
- le tant dans tant : mélange, concentration, ...
- le tant sur tant : intérêts cumulés, prix toutes taxes comprises, ...

Les usages qu'on peut faire des rapports externes sont nombreux. Ils peuvent concerner :

- les objets : étude de l'homogénéité d'un corps, échelle de rapports, ...
- les grandeurs : définition des grandeurs dérivées, comparaison de deux grandeurs, ...
- les fonctions : construction d'une fonction entre grandeurs de même nature ou de natures différentes (équations aux dimensions).
- les nombres : construction des rationnels et décimaux, des nombres réels.

On a donc besoin de noms pour identifier tous ces objets. La multiplicité des noms qu'on donne aux coefficients de proportionnalité pour en faire des grandeurs dérivées collectivement reconnues : échelles, taux, pourcentages, masse volumique, vitesse, densité, concentration, ... montre que l'étendue de la proportionnalité est trop vaste pour être institutionnalisée dans sa globalité d'emblée et nécessite des institutionnalisations contextuelles.

En primaire, le coefficient de proportionnalité ne devrait pas être mobilisé indépendamment des grandeurs étudiées. Chaque situation fait apparaître le rapport externe comme la mesure d'une grandeur dérivée. Au collège, les vocabulaires des échelles, des pourcentages, des densités, des pentes, ... sont des tentatives de simplification de l'usage du coefficient de proportionnalité et de comparaison de fonctions dans des cas particuliers. Une

institutionnalisation du vocabulaire de la proportionnalité dans toute sa généralité ignorerait les statuts de ces différents objets. Il n'y a pas un champ de référence universelle de la proportionnalité.

L'exemple suivant sur les pourcentages montre que même les généralisations que l'on fait après différentes études sont abusives.

Le cadre des grandeurs donne de nombreuses occasions de travailler sur les pourcentages. Il y a plusieurs explications possibles de la phrase : « Le bénéfice est 20% du prix d'achat ». L'une fait référence à la proportionnalité (le tant pour tant) : « chaque achat d'un montant de 100 francs s'accompagne de 20 francs de bénéfice », l'autre fait référence au fractionnement :

« le bénéfice est $\frac{20}{100}$ (vingt centièmes) du prix d'achat ». Dans ces deux champs de référence

le bénéfice désigne une somme en francs. Souvent les maîtres insistent par des institutionnalisations différentielles pour que les élèves utilisent le pourcentage comme fractionnement d'une grandeur. Mais alors quelle interprétation vont-ils faire de « La pente est 20%. »? Si les élèves ont étudié la trigonométrie, le maître va les mettre en garde car il faut distinguer la pente d'une droite en repère orthonormé qui est une tangente, de la pente d'une route indiquée sur un panneau de signalisation qui est un sinus. Mais l'élève qui a étudié les pourcentages dans le cadre des grandeurs a l'habitude de calculer le pourcentage d'une grandeur et peut se demander : « La pente est 20% de quoi ? ». Or le mot « pente » désigne uniquement un rapport et la pente n'est pas accompagnée d'une unité.

Notons qu'elle peut aussi être considérée comme une grandeur dérivée et que les élèves peuvent être conduits à comparer des pentes et donc à considérer les pourcentages comme des mesures. Il y a là encore un changement de champ référentiel souvent non explicité mais que les élèves doivent percevoir.

Il y a donc des contradictions qui résultent des différentes institutionnalisations contextuelles et diffuses du pourcentage et plus généralement du coefficient de proportionnalité.

4-2-6 Les insuffisances de l'approche par la structuration du milieu ; les limites de la réflexivité

La théorie des situations permet de ne pas interpréter de manière monolithique un rapport à une connaissance. Elle permet de faire correspondre à des objets mathématiques des fonctions en interprétant leurs structures en termes de rôles dans une situation. Si deux objets sont différents on peut leur trouver des situations qui les différencient en leur faisant jouer des rôles différents. Par exemple les connaissances implicites de la proportionnalité ont permis de valider l'usage des rapports naturels en les rendant résolutoires dans un milieu adapté. Le rapport entre le « nombre de souris » et le « nombre de graines » préfigure un couple (objet, image) d'une fonction à venir mais qui ne fait pas encore partie du répertoire des élèves. Par contre ce couple a servi à définir puis à désigner puis à mesurer la grandeur « ration ». Puis la comparaison de ces couples « mesures de rations » préfigure la construction des rationnels. Ces différents rôles joués par les rapports ont nécessité des situations didactiques différentes.

La théorie des situations permet de transformer une genèse mathématique en une genèse épistémique qui détermine le passage des objets physiques aux grandeurs, aux mesures, aux rapports, aux proportions, aux fonctions linéaires. Par exemple la relation d'équivalence est une connaissance mathématique qui détermine un moyen d'action sur les objets physiques grâce à un algorithme (sur les rapports (nombre de graines, nombre de souris)) de production de classes d'équivalences. Une classe devient un élément d'un ensemble de classes (les

rations). La relation d'ordre est une autre connaissance mathématique qui fait de cet ensemble de classes une « grandeur ordonnée ». On est passé des objets physiques aux grandeurs par deux classifications mathématiques :

- la relation d'équivalence permet de grouper les objets physiques en classes d'équivalences.
- la relation d'ordre permet de concevoir l'ensemble des classes en grandeur variable.

La difficulté réside dans la transposition de cette genèse mathématique en une heuristique didactiquement acceptable.

Par les explications qu'elle apporte, la théorie des situations permet de réguler les choix d'enseignement :

- ne s'écarter de toute construction « axiomatique » ou « culturelle » que sous contrôle mathématique.
- ne suivre une construction classique que sous le contrôle d'une conversion en une genèse didactique.

La structuration du milieu permet de mettre le sujet en scène localement après un découpage culturel de la proportionnalité. Mais ce modèle isolé ne permet pas de relier les connaissances et les savoirs en champs.

Il faut subsumer la structuration du milieu sous des champs de connaissances plus vastes pour pouvoir décrire la discrétisation des savoirs et l'opposer au continuum des connaissances. La recherche d'agrégats peut simplifier cette étude à condition de respecter certaines règles ergonomiques. Il faut déterminer les raisons de grouper des connaissances, des situations, des sujets pour décrire des phénomènes tels que l'émiettement des savoirs, la disparition des grandeurs, les incompatibilités didactiques de l'institutionnalisation, ...

Comment isoler les conceptions et les champs qu'engendrent les règles logiques, ergonomiques, fonctionnelles, heuristiques ?

4-3 Conditions macrodidactiques

4-3-1 Introduction

Rappelons que si les contenus d'enseignement sont le levier privilégié de l'action sur le système éducatif, les programmes à eux seuls ne peuvent pas assurer la régulation de l'enseignement de la proportionnalité ni la diffusion de cette connaissance dans la société.

Les connaissances de la proportionnalité prennent des formes conformes aux besoins de chaque institution. La « fonction linéaire » a un environnement scientifique riche mais certains secteurs sociaux ou professionnels maintiennent un rapport ancien à la proportionnalité : commerce, gestion, comptabilité, techniques industrielles.

La proportionnalité est attachée à un fonctionnement de société et les pratiques d'une institution sont conditionnées par ses rapports avec d'autres institutions. Or les relations interinstitutionnelles se modifient avec l'évolution des connaissances de chacune d'elles. Nous avons vu que l'école primaire essaie d'adapter ses pratiques de la proportionnalité à un certain nombre d'injonctions venues de la sphère savante via la noosphère et que la disparition des sorties sociales et professionnelles la conduit à s'assujettir au secondaire. L'enseignement de la proportionnalité à l'école primaire est conditionné par les attentes des différentes institutions qui interagissent avec elle. Pour comprendre la signification de ces observations il faut les replacer dans le cadre d'une théorie didactique.

Pour tenter de cerner les phénomènes qui naissent des interactions entre institutions nous proposons l'ébauche de quelques modèles :

- 1) Les groupements de connaissances diffèrent suivant qu'ils sont basés sur des relations logico mathématiques (champs conceptuels) ou sur des fréquences d'usage et de proximité (champs conceptionnels).
- 2) La production de mathématiques dans une institution peut avoir des effets sur les institutions voisines et conditionner l'évolution de leurs répertoires.
- 3) Les évolutions de connaissances au cours des diffusions ont été décrites dans le cadre de la « transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné »⁷.
- 4) La distribution d'une population sur des niveaux de connaissances contribue à décrire les conditions d'une transposition du savoir savant vers la société.
- 5) La diffusion d'une connaissance dans le réseau des institutions est conditionnée par des besoins d'interactions composites et la proximité de leurs répertoires. Les travaux sur la percolation dans l'étude de la communication (et des milieux poreux en physique) pourraient apporter des éléments pour une modélisation de la circulation des savoirs mathématiques dans la société.

4-3-2 Les groupements en champs

a) Les champs conceptuels

Des problèmes ergonomiques interviennent dès la genèse des savoirs et l'étude de l'articulation logique des connaissances est une première approche pour la recherche de

⁷ Voir Yves Chevallard ; La transposition didactique ; La pensée sauvage ; 1991.

solutions. La microdidactique tend à proposer des solutions isolées par le découpage des connaissances actuelles. Elle regarde une connaissance isolée en portant une attention sur ce qu'elle a de spécifique et tente de la modéliser en termes de situations.

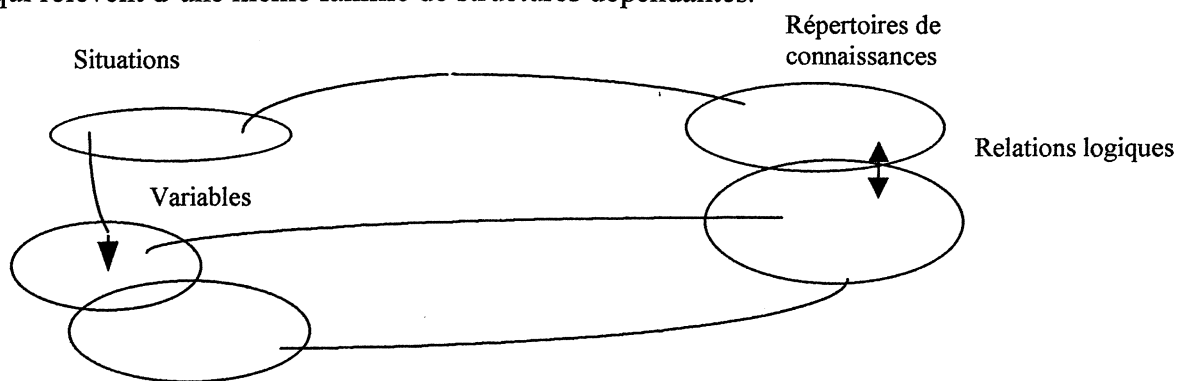
Si on considère les connaissances du point de vue de la transposition des savoirs savants et de leur diffusion, on peut les découper relativement à leurs structures logiques. Mais une compréhension plus globale du fonctionnement cognitif d'un sujet suppose des rapprochements de connaissances et de situations. Gérard Vergnaud a modélisé ces découpages :

- en concepts qui regroupent des « invariants opératoires », des « situations » et des « signifiants ».
- en champs conceptuels qui regroupent des situations (ou tâches) et des concepts spécifiques de ces structures mathématiques : « ...Le champ conceptuel (d'une structure) est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique (cette structure) et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques. »⁸

Dans la théorie des champs conceptuels les propriétés de la proportionnalité sont constitutives du champ de la multiplication.

L'idée que la difficulté d'appropriation des connaissances chez un sujet est assez bien décrite par la complexité mathématique conduit à adapter cette classification au développement psychogénétique de l'élève : champs conceptuels de l'addition, de la multiplication, des classes, de l'algèbre, etc. ... Les analyses de données sur les productions des élèves à l'occasion de l'expérimentation de la situation « des graines et des souris » ont fait apparaître que les structures de l'addition et de la multiplication discriminent les individus et éventuellement les exercices. Mais l'expérimentation sur un mois n'a pas fait apparaître une évolution significative d'une éventuelle hiérarchie de ces structures cognitives.

Pour le chercheur il y a deux entrées dans un champ conceptuel : celle des « situations » et celle des « concepts et théorèmes » mais ce sont les structures mathématiques qui délimitent les champs conceptuels : les paquets de situations sont reliés à des paquets de connaissances qui relèvent d'une même famille de structures dépendantes.



Ces agrégats de situations et de répertoires ne répondent pas à toutes nos questions. Ils ne permettent pas de prévoir des agrégats d'individus ou d'institutions. La théorie des champs conceptuels ne permet pas d'expliquer les phénomènes de régulation qui résultent d'interactions entre institutions.

⁸ Gérard Vergnaud ; La théorie des champs conceptuels ; R.D.M. vol. 10 ; p147 ; 1990.

b) Les champs conceptionnels

Dans le cadre d'activités interinstitutionnelles, le milieu⁹ est un objet plus vaste que la situation. C'est un champ de connaissances et de situations qui peuvent être reliées entre elles non seulement par des relations logiques ou fonctionnelles mais aussi par d'autres relations ergonomiques : proximités sémantiques, pratiques culturelles, coprésences fréquentes, etc.

Par exemple les grandeurs avec les relations qui les lient, forment un champ de connaissances folklorisées. Ce champ de connaissances est un milieu qui porte en lui des informations directement accessibles à l'élève lui permettant ainsi la pratique des opérations de l'arithmétique élémentaire. Par cette fonction le milieu des grandeurs regroupe plusieurs connaissances, plusieurs situations et plusieurs relations. L'arithmétique élémentaire s'en saisit pour porter directement à la connaissance des élèves des relations de proportionnalité par des moyens ostensifs

Un milieu est un ensemble de situations et de répertoires proches d'un certain point de vue :

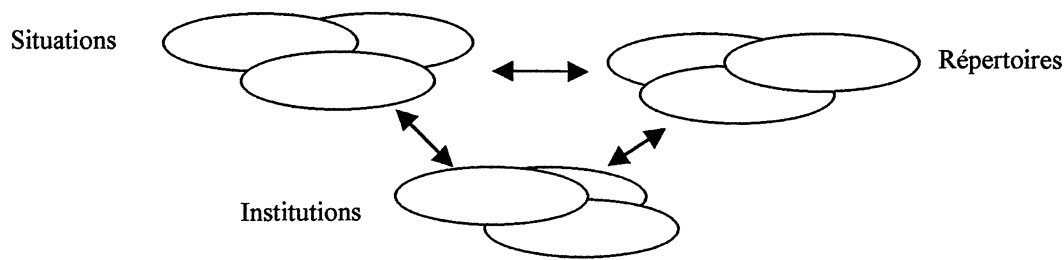
1. Rapprochements entre savoirs et situations par des relations logiques.
2. Voisinage de savoirs mathématiques reliés par la culture qui les a fabriqués.
3. Rapports que le sujet établit entre des connaissances en position réflexive sur des situations grâce aux moyens que ces connaissances lui apportent.
4. Voisinage folklorisé de règles, de connaissances, d'usages avec une coprésence fréquente de ces mêmes objets dans certaines situations.

Dans le champ conceptuel, ce sont les concepts, les relations logiques et la culture mathématique qui contribuent aux agrégations de situations. Ainsi le chercheur peut déterminer des regroupements a priori par une analyse et une classification des structures mathématiques qui interviennent dans les situations.

Dans la recherche d'une conception, c'est le rapport des sujets ou des institutions aux situations et aux connaissances qui est déterminant. Le sujet traite certains milieux d'une certaine manière avec un certain répertoire « de réflexivité » plus ou moins vaste, plus ou moins juste ou erroné, avec un usage non nécessairement conforme au savoir savant. Une conception est d'autant plus intéressante qu'elle regroupe plusieurs sujets ou institutions. C'est pourquoi nous avons tenté de modéliser une conception par un triplet d'ensembles : des situations (S), des individus ou des institutions (I), des répertoires de connaissances (R). S'il y a une « fermeture » c'est le champ de cette conception.

Un champ conceptionnel peut regrouper plusieurs conceptions reliées par au moins une des trois variables précédentes S, I, R. La fréquence avec laquelle une institution utilise une connaissance joue un rôle sur la place de la connaissance dans le champ conceptionnel. Il y a des proximités d'usage qui modifient le statut des connaissances, leurs possibilités et leur organisation. Par conséquent les groupements obtenus dans les champs conceptionnels peuvent être différents de ceux obtenus dans les champs conceptuels. Cette approche est une tentative pour traiter la complexité des champs de connaissances, de situations et d'institutions.

⁹ Un exemple est donné en géométrie dans la thèse de Dilma Fregona : Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie ; Bordeaux 1 ; 1995.



L'expérimentation menée à l'école Jules Michelet nous a donné l'occasion de mettre à l'épreuve ce modèle et d'étudier des évolutions de conceptions chez des élèves grâce aux outils disponibles pour les analyses de données (paragraphe 3-4-3). Mais cette expérimentation a soulevé plusieurs questions et remarques.

- 1) Les agrégats obtenus lors de cette expérimentation semblent dépendre de l'entrée dans le système « S, I, R ».
- 2) Les analyses de données ne permettent de traiter que ce qui est contingent.
- 3) Les outils informatiques pour faire ces analyses sont d'une utilisation lourde et complexe.
- 4) Le modèle « S, I, R » est-il adapté à la recherche d'agrégats à l'échelle d'une société ? Les situations disent quels répertoires sont utiles à l'action, la justification, la formulation mais comment déterminer a priori quelles institutions sont intéressées par quelles situations ou connaissances ?
- 5) Nous n'avons pas élaboré de méthodes a priori d'agrégation de situations et d'institutions qui permettraient de prévoir quelles formes de connaissances de la proportionnalité vont diffuser dans la société ?

4-3-3 Effets de la production mathématique et évolution des répertoires

Lors de l'institutionnalisation nous avons montré la nécessité d'aménager un espace de liberté à l'élève dans la situation didactique pour qu'il puisse exercer une activité mathématique favorable à l'apprentissage. Plus on met de mathématiques dans le milieu et moins l'élève a la possibilité d'en construire puisqu'il utilise celles qui figurent dans la situation. Dans le cas extrême l'élève doit seulement exécuter des algorithmes (ou pire encore connaître le mode d'emploi de sa calculatrice). La « démathématisation » de l'activité rend service à l'utilisateur qui est d'autant plus soulagé que le milieu est « mathématisé ». Mais un tel « service prématuré » se fait au détriment de l'apprentissage.

Exemple :

L'école primaire doit traiter le milieu des grandeurs avec des savoirs élémentaires sur les entiers. Pour construire une connaissance de la proportionnalité les élèves sont conduits à faire un raisonnement typique de l'arithmétique : « la méthode de réduction à l'unité ». Mais la reconstruction systématique de ce raisonnement s'avère coûteuse ; le maître « démathématise » cette connaissance en institutionnalisant l'algorithme de « la règle de trois ». Pour l'intégrer à leur répertoire de référence les élèves doivent l'enrichir d'un environnement mathématique qui décrit les conditions d'utilisation de cet algorithme et donc réorganiser leur répertoire.

Si le maître ne donne pas assez de mathématiques l'élève ne peut pas agir et apprendre mais s'il en donne trop alors l'élève n'a plus rien à faire. Donc le maître doit entretenir cet espace

qui permet à l'élève de transformer ses outils pour l'action en objets de savoir avant leur institutionnalisation. Ces changements de champ de référence sont des indices d'une activité mathématique entre deux institutions : le professeur et l'élève.

Si on considère que l'enseignement est une forme d'information alors on peut étendre ce processus de « mathématisation et démathématisation » à l'ensemble des institutions et le considérer comme moyen de contrôle d'une institution sur une autre.

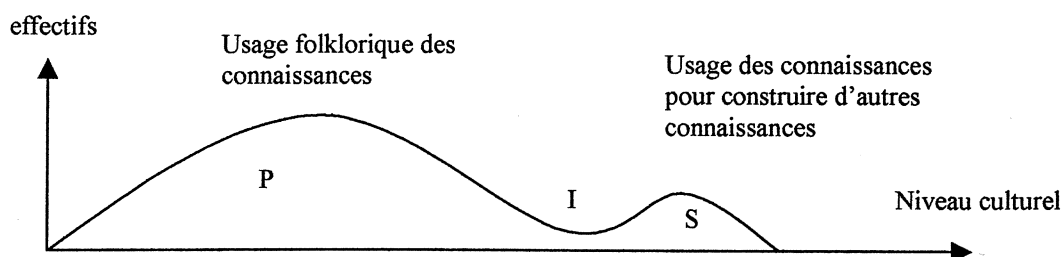
Exemple :

Avant l'apparition de l'algèbre il y avait un champ énorme : la proportionnalité était une référence pour toutes les activités humaines qu'elles soient sociales, industrielles ou scientifiques. Actuellement le travail des mathématiciens n'a plus rien à voir avec les grandeurs et la proportionnalité. Une relation de proportionnalité entre grandeurs est modélisée par une fonction linéaire. La disparition de l'étude de la proportionnalité dans le secondaire et son remplacement par la fonction linéaire résulte d'une « démathématisation » de la « proportionnalité des grandeurs » souhaitée par les autres institutions scolaires en aval. Par contre la société n'a pas remplacé les pratiques anciennes de la proportionnalité des grandeurs par un usage populaire de la fonction linéaire. Les institutions qui ne nécessitent pas de mathématiques « savantes » n'ont pas de raison de restructurer leur répertoire de référence pour y intégrer la fonction linéaire. L'économie que procure à une institution la « remathématisation » de son répertoire n'est pas intrinsèque au savoir ; elle dépend de l'adaptation des connaissances aux milieux à traiter, de la fréquence de rencontre avec différentes situations, de la nécessité d'interactions composites avec d'autres institutions.

L'évolution des répertoires des différentes institutions peut révéler des changements pour une adaptation à certains types de tâches ou un rapprochement entre institutions. Déterminer les champs conceptionnels de la proportionnalité c'est comprendre l'organisation des équilibres entre répertoires de connaissances pour une adaptation aux besoins d'interactions composites entre institutions.

4-3-4 Distribution d'une population sur des niveaux de connaissances

Les spécialisations nécessaires pour assurer certaines tâches augmentent les différences de répertoires. Par exemple les mathématiciens ne peuvent pas résoudre leurs problèmes avec les mathématiques de tout le monde. Ils développent des savoirs spécifiques à leurs travaux de recherche. Nous avons vu quel a été le rôle fondamental de la proportionnalité dans la construction des savoirs mathématiques mais l'algèbre plus efficace a pris un essor qui a relégué les connaissances de l'arithmétique au second plan pour un usage folklorique. Dès lors le développement rapide des savoirs mathématiques a contribué à isoler la sphère savante du reste de la société. On peut imaginer un classement des individus suivant leur niveau de connaissances mathématiques qui ferait apparaître une distribution bimodale illustrée comme suit :



La fonction des connaissances n'est pas la même dans les deux classes P et S. Les milieux à traiter et les connaissances mises en œuvre sont différentes.

L'arithmétique est restée populaire parce qu'elle permet de résoudre un vaste champ de problèmes avec des techniques élémentaires variées et adaptées. Par ailleurs l'efficacité de l'algèbre renforce la spécialisation de la « cité savante » (S). Si les effectifs des classes intermédiaires (I) qui assurent la transposition des connaissances diminuent alors « l'étranglement » à ce niveau est accru limitant les possibilités de communication entre la sphère savante (S) et le reste de la population (P). Or pour que les mathématiciens puissent être reconnus comme partie intégrante de la société il faut que les savoirs construits soient potentiellement accessibles au reste de la société, c'est à dire que leur diffusion soit rendue possible. La société a besoin de comprendre pour cautionner les activités spécifiques des différentes institutions.

On peut interpréter le phénomène des années soixante-dix comme une tentative de « démocratisation » des savoirs algébriques. Mais pour être résolutoire à un niveau donné une connaissance doit acquérir de la consistance en prenant en charge un champ de problèmes suffisamment vaste. Or dans l'enseignement obligatoire la fonction linéaire reste une connaissance isolée de l'arithmétique mais aussi des autres connaissances algébriques qui ne sont enseignées qu'à des niveaux supérieurs. Elle n'a pas contribué à la construction d'un champ conceptionnel populaire en participant à des remathématisations de répertoires pour une réorganisation des connaissances mathématiques plus efficace et mieux adaptée aux milieux à traiter par les différentes institutions constitutives de cette population (P). L'insertion d'un nouvel objet de savoir dans un répertoire de connaissances ne se fait pas spontanément. Il faut des conditions ergonomiques favorables et suppose un coût didactique. Les conditions dans lesquelles s'est faite cette tentative des années soixante-dix n'ont pas permis de faire de la fonction linéaire un outil naturel de résolution des exercices de la proportionnalité des grandeurs.

4-3-5 Tension didactique et percolation

a) Besoin et tension didactiques

C'est l'usage effectif d'une connaissance à travers des pratiques communes à différentes institutions qui assure sa diffusion dans la société. Des conditions extérieures au savoir et à l'enseignement imposent aux institutions des fréquences d'apparition de problèmes porteurs de connaissances qui tendent à développer certaines conceptions. Par exemple les professeurs de mathématiques et les commerçants traitent des problèmes différents avec des connaissances différentes. L'équilibre des connaissances entre institutions est commandé par les situations qu'elles rencontrent en commun, par des intérêts ou des nécessités qui les lient. Deux situations peuvent être proches soit parce que c'est la même connaissance qui sert à les résoudre soit parce qu'elles sont fréquemment coprésentes, soit parce que les connaissances qui y figurent sont liées par le sens, la fonction, les pratiques, etc.

Pour tenter de comprendre le fonctionnement social de la connaissance il faut trouver des moyens de décrire les contraintes qui régulent les interactions entre institutions. Nous avons vu que des institutions différentes face à des situations de structure identique ne développent pas nécessairement la même conception. Pour que deux institutions développent un répertoire commun il faut qu'elles aient à traiter la même situation avec des besoins d'interactions

composites pour communiquer, justifier, décider ensemble. La fréquence d'apparition de ces situations communes conditionne le « besoin » d'utilisation ou de création d'un répertoire commun. La relation entre les deux institutions concernées par ces situations est d'autant plus « tendue » que leurs répertoires respectifs sont différents et que ce « besoin » se manifeste fréquemment. On peut dire que la « tension didactique » entre deux institutions est comme le produit de l'écart entre leurs répertoires respectifs avec la fréquence d'interactions composites. Cette « tension didactique » évalue la nécessité d'intervention didactique pour la circulation des connaissances.

Pour tenter d'expliquer des phénomènes macrodidactiques il faut au moins prendre en considération l'évolution des différents répertoires culturels, les interactions composites rendues nécessaires par les tâches communes envisagées et les institutions concernées.

b) Percolation

La diffusion des connaissances dans la société n'est pas uniquement conditionnée par la transposition des savoirs savants vers des institutions populaires et l'étude de la distribution d'une population suivant des niveaux de connaissances ne peut apporter que des explications partielles au fonctionnement social de la connaissance.

On ne peut pas établir un « ordre total » sur l'ensemble des institutions relativement à des connaissances ; une approche en termes de réseau semble plus pertinente pour tenter une modélisation de la diffusion des connaissances entre institutions. La théorie de la percolation permet de la décrire en termes de communication :

« La percolation est un problème de communication qui se pose dans un milieu étendu dans lequel sont distribués régulièrement un grand nombre de « sites » susceptibles de relayer localement une information...

La caractéristique de la percolation réside dans le fait qu'il s'agit d'un phénomène critique : au-dessous du seuil, une information reste confinée dans le petit îlot où elle est née ; sitôt dépassé le seuil, l'information « percole » et se retrouve aussi loin de son point de départ qu'on aille la chercher... »¹⁰

Le regroupement en « amas » des « sites » du réseau dépend de la probabilité p de création d'un lien entre sites. Au-dessus d'un seuil critique p_c l'amas est infini, au voisinage de ce seuil et pour $p < p_c$ la dimension de l'amas suit une formule du type $d = d_0 \times |p - p_c|^{-\nu}$.

Si la « circulation » des connaissances mathématiques suit une telle loi on a alors un modèle pour prévoir si une connaissance va diffuser dans toute la société ou rester confinée à une ou quelques institutions. La difficulté est d'évaluer la probabilité qu'une connaissance a d'être transposée d'une institution à une autre. Les fréquences de situations composites et les proximités de répertoires pourraient être des éléments qui entrent dans le calcul de cette probabilité.

L'approche de percolation dans l'étude des propriétés de « transport » a fait l'objet de nombreux travaux. Leurs résultats pourraient apporter quelques éléments pour l'étude de la diffusion des connaissances mathématiques dans la société.

¹⁰ Source : Encyclopédie Universalis ; 1995.

CONCLUSIONS

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés aux caractères causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.

Dans la première partie, les différentes enquêtes font apparaître que maîtres et élèves connaissent des difficultés dans le traitement de la proportionnalité et l'usage de la fonction linéaire.

Nous avons montré que le concept de rapport est devenu déliquescent et que la disparition du mot « rapport » oblige à utiliser d'autres mots pour différencier la nature des nombres (entiers, décimaux, rationnels) et leurs fonctions (mesures, opérateurs, rapports scalaires ou fonctionnels).

L'usage du vocabulaire de la proportionnalité pour décrire des relations entre nombres conduit à des confusions dans les concepts.

Les différents modèles de la proportionnalité ne sont pas interchangeables, en particulier la fonction linéaire n'est pas toujours reconnue comme une possible reformulation d'une relation de proportionnalité entre grandeurs.

Nous avons mis en évidence que les erreurs observées ne peuvent pas être accidentelles mais qu'elles résultent d'un phénomène didactique plus général que nous avons étudié dans la deuxième partie de cette thèse.

La détermination de l'objet « proportionnalité » dans le cadre des grandeurs, des grandeurs mesurées et des variables numériques a permis une classification des modèles de la proportionnalité et des situations qui les font fonctionner. L'étude des répertoires arithmétique et algébrique a montré que les pratiques algébriques actuelles ne prennent pas en charge l'étude des grandeurs.

L'analyse des programmes de collège de 1947 à 1985 fait clairement apparaître un glissement du milieu des grandeurs vers celui des nombres. Le vide laissé par la disparition des grandeurs, des rapports et des proportions est comblé par des présentations « algébriques » de la fonction linéaire qui, sous ces conditions, ne peut pas apparaître comme une abstraction des connaissances de la proportionnalité.

Cette approche de la fonction linéaire a deux conséquences :

- Elle ne permet pas aux maîtres du primaire de traiter correctement la proportionnalité des grandeurs avec les élèves.
- Elle induit un traitement « numérique » de la proportionnalité qui conduit à un usage inapproprié du vocabulaire qui lui est spécifique.

Nous avons cherché quels étaient les obstacles à la diffusion des innovations mathématiques. L'étude des contraintes ergonomiques de l'enseignement de la proportionnalité a fourni plusieurs explications. Les changements curriculaires résultent de l'évolution des savoirs savants mais aussi des attentes des différentes institutions scolaires et sociétales.

Les novateurs des années soixante ont eu l'ambition de mettre l'organisation moderne des savoirs mathématiques au service de l'école.

Avec le prolongement de la scolarité obligatoire et le projet de conduire 80% d'une classe d'âge au baccalauréat, les sorties sociales et professionnelles de l'école primaire et du collège sont devenues presque inexistantes. L'enseignement à ces niveaux est principalement orienté vers les études longues et les maîtres n'ont pas eu d'autre alternative que de s'adapter à l'hégémonie des « mathématiques modernes ».

Mais la proportionnalité est attachée à un fonctionnement de société où elle est un moyen basique de compréhension des relations entre grandeurs. Certaines institutions maintiennent un rapport ancien à cette connaissance qui s'oppose à la transposition actuelle de la linéarité. Pour répondre à leurs attentes sans renoncer aux réorganisations mathématiques nécessaires aux apprentissages futurs des élèves, l'enseignement doit trouver un équilibre entre un minimum de connaissances de la proportionnalité nécessaire à la formation commune des élèves dans la scolarité obligatoire et un maximum compatible avec l'algèbre.

Les enseignants ne peuvent pas assumer ce passage de l'ancien au nouveau sans le soutien et la complicité de la société. La régulation des apprentissages ne peut pas leur incomber. Or les novateurs des « mathématiques modernes » n'ont pas suffisamment pris en considération les différentes nécessités fonctionnelles de l'enseignement élémentaire et les attentes des autres institutions sociétales en relation avec l'école.

La « rupture conceptuelle » de l'objet proportionnalité a été perçue comme un échec dans la société. Une approche mathématique est un choix dans l'organisation des connaissances ; changer de genèse est un travail didactique long et difficile. Nous avons expliqué que le choix d'une épistémologie doit prendre en considération les nécessités logiques et fonctionnelles mais aussi les attentes des différentes institutions. Le travail d'ingénierie que nous avons proposé dans la troisième partie de cette thèse s'inscrit dans la recherche d'un équilibre entre l'existence provisoire et limitée des notions de rapport et de proportionnalité et les usages algébriques qui abordent progressivement les savoirs mathématiques récents. Nous souhaitons faire apparaître l'algèbre comme une abstraction qui résume et réfléchit les connaissances de l'arithmétique des grandeurs.

Pour atteindre cet objectif il semble qu'il n'y ait pas de règle générale. Pour entrer dans un projet d'apprentissage cohérent chaque savoir doit faire l'objet d'une analyse didactique détaillée de sa structure mathématique pour adapter sa complexité fonctionnelle au développement psychologique et cognitif du sujet.

Une analyse micro-didactique des objets qui entrent dans les structures mathématiques enseignées en primaire nous a conduit à construire une situation qui génère de manière dialectique les notions de variables, de fonctions et de nombres. Le milieu familial des élèves en primaire est celui des grandeurs. Nous avons attiré l'attention sur l'intérêt que présente pour eux le travail sur les grandeurs. Il les conduit à manipuler des mesures et des rapports et justifie les constructions mathématiques élémentaires en leur donnant du sens. En particulier la proportionnalité décrit une « covariance » entre grandeurs qui permet une première approche de l'idée de fonction.

Pour actionner les techniques de la proportionnalité nous avons choisi de faire appel à l'idée spontanée que les élèves se font de l'équité. Outre le fait que ce choix permet d'éviter les difficultés liées aux mesurages qu'engendre la vérification d'une loi physique, la nécessité d'équité montre aux élèves le rôle social des mathématiques dans la société et contribue à leur éducation à la citoyenneté.

Les techniques d'analyse de données ont permis d'étudier l'évolution des conceptions des élèves en termes de regroupements de situations, d'individus (ou institutions) et de répertoires. Cette même stratégie pourrait permettre d'étudier les relations entre institutions sociétales. La diffusion d'une connaissance dans la société résulte d'interactions entre institutions et des lois qui les régissent et pour lesquelles nous avons esquissé quelques modèles (tension didactique, percolation). Ces tentatives ouvrent un nouveau champ de recherche. L'ignorance de certains phénomènes « macro-didactiques » a probablement été une des causes des difficultés engendrées par les réformes successives.

Les différentes institutions concernées par l'enseignement ont à traiter des questions scientifiques, techniques et politiques. Les connaissances de « micro-didactique » ne suffisent pas à rendre compte de la complexité de l'organisation sociale d'un objet de connaissance. L'explication des conditions de sa diffusion dans la société nécessite une modélisation « macro-didactique » des relations entre institutions.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie Générale

- ANTIBI André ; 1988 ; Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions.
- ASTOLFI Jean Pierre ; 1989 ; Didactique des sciences ; Que sais-je.
- BACHELARD Gaston ; 1965 ; La formation de l'esprit scientifique ; J. Vrin.
- BAREIL Henri ; 1987 ; Attendus et intentions des nouvelles propositions de programmes en France ; petit x n° 13 pp 7 à 19.
- BELHOSTE Bruno, GISPERT Hélène et HULIN Nicole ; 1996 ; Les sciences au lycée ; INRP.
- BODIN Antoine ; 1987 ; La proportionnalité en classe de sixième ; petit x n° 13 pp. 55 à 77.
- BOISNARD Danièle, HOUDEBINE Jean, JULO Jean, KERBOEUF Marie Paule, MERRI Maryvonne ; 1994 ; La proportionnalité et ses problèmes ; Hachette éducation.
- BOSCH I CASABO Marianna ; 1994 ; La dimensión ostensiva en la actividad matemática ; el caso de la proporcionalidad.
- BROUSSEAU Guy et CENTENO Julia ; 1991 ; Rôle de la mémoire didactique d'un enseignant ; RDM vol. 11 n° 2.3.
- BROUSSEAU Guy et Nadine ; 1987 ; Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire ; IREM de Bordeaux.
- BROUSSEAU Guy et Nadine ; 1991-92 ; Le poids d'un récipient, étude des problèmes de mesurages en CM ; Grand N n° 50 pp. 65 à 87.
- BROUSSEAU Guy et PERES Jacques ; 1981 ; Etude d'un enfant en difficulté en mathématiques : le cas Gaël ; IREM de Bordeaux.
- BROUSSEAU Guy ; 1976 ; Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques ; compte rendu de la C.I.E.A.E.M. de Louvain-la-Neuve.
- BROUSSEAU Guy ; 1981 ; Problème de didactique des décimaux ; RDM vol. 2.3.
- BROUSSEAU Guy ; 1981 ; Rôle d'un IREM dans l'aide aux professeurs de l'enseignement élémentaire ; IREM de Bordeaux.
- BROUSSEAU Guy ; 1983 ; Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques ; RDM vol 4.2.
- BROUSSEAU Guy ; 1986 ; Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques ; RDM vol 7.2.
- BROUSSEAU Guy ; 1986 ; Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques ; Thèse présentée à l'université de Bordeaux I.
- BROUSSEAU Guy ; 1987 ; Les différents rôles du maître ; Colloque des P.E.N. Angers.
- BROUSSEAU Guy ; 1987 ; Représentation et didactique du sens de la division ; Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques ; Colloque GRECO, Paris.
- BROUSSEAU Guy ; 1988 ; Le contrat didactique : le milieu ; RDM vol 9.3
- BROUSSEAU Guy ; 1989 ; Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège ; petit x n° 21 pp. 47 à 68.
- BROUSSEAU Guy ; 1995 ; Promenade avec Thalès entre la Maternelle et l'Université.
- BROUSSEAU Guy ; 1995 ; Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Bulletin A.P.M.E.P. n° 400.
- BROUSSEAU Guy ; 1998 ; L'apprentissage et l'enseignement des mesurages, des mesures et de la mesure ; Montréal.
- BROUSSEAU Nadine ; 1987 ; La mesure au cours moyen première année ; IREM de Bordeaux.
- BRUN Jean ; 1996 ; Didactique des mathématiques ; Delachaux et Nieslé.
- CASTELA Corine ; 1995 ; Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures ; R.D.M. vol. 15 n° 1 pp. 7-47.
- CHALMERS Alan F. ; 1987 ; Qu'est-ce que la science ? La Découverte ; Paris.

- CHEVALLARD Yves ; 1986 ; Les programmes et la transposition didactique ; illusion, contraintes et possibles ; IREM d'Aix-Marseille ; bulletin A.P.M.E.P. n° 352.
- CHEVALLARD Yves ; 1989-90 ; Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège ; Première partie : L'évolution de la transposition didactique ; petit x n° 5, pp. 51 à 94. Deuxième partie : Perspectives curriculaires : La notion de modélisation ; petit x n° 19 pp. 43 à 72. Troisième partie : Voies d'attaque et problèmes didactiques ; petit x n° 23 pp. 5 à 38.
- CHEVALLARD Yves ; 1991 ; La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné ; La pensée sauvage, Editions.
- CHEVALLARD Yves ; 1992 ; Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique ; RDM ; vol 12, n°1, pp. 73-112.
- CHEVALLARD Yves ; 1995 ; Familiale et problématique, la figure du professeur, VIII^{ème} école d'été de didactique des mathématiques.
- CHEVALLARD Yves ; 1995-96 ; Les outils sémiotiques du travail mathématique ; petit x n° 42 pp. 33 à 57.
- CHEVALLARD Yves ; Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique, IREM d'Aix-Marseille
- CHRYSAL G. ; 1964 ; Algebra ; an elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for collèges ; Chelsea publishing company ; 1886 ; New York, N. Y. ; seventh edition 1964 ; Chapter XIII.
- CLERO Jean Pierre ; 1990 ; Epistémologie des mathématiques ; Nathan.
- COMIN Eugène ; 1994 ; Proportions ; applications linéaires ; Mémoire de D.E.A. de didactique des mathématiques ; Bordeaux 1.
- COPREM ; 1985 ; L'enseignement de et autour de la proportionnalité ; Bulletin de liaison des Professeurs de Mathématiques numéro 38.
- DANTZIG Tobias ; 1974 ; Le nombre, langage de la science ; Albert Blanchard.
- DE COTRET Sophie René ; 1985 ; Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique ; Université du Québec.
- DE COTRET Sophie René ; 1991 ; Etude de l'influence des variables *indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données* sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez les élèves de 13-14 ans ; thèse présentée à l'université Joseph Fourier, Grenoble I.
- DEDRON Pierre ; 1959 ; Jean ITARD ; Mathématiques et mathématiciens ; Magnard.
- FREGONA Dilma ; 1995 ; Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques ; thèse de l'université de Bordeaux 1.
- GASCON Josep ; 1993-94 ; Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée » ; petit x n° 37, pp. 43 à 63.
- IREM DE LIMOGES ; La proportionnalité.
- IREM ; 1987 ; Groupe Epistémologie et Histoire ; Jean DHOMBRES, Amy DAHAN-DALMEDICO, Rudolf BKOUCHE, Christian HOUZEL et Michel GUILLEMOT ; Mathématiques au fil des âges ; Gauthier-Villars.
- LAKATOS ; 1985 ; Preuves et réfutations ; Hermann ; Paris.
- LEBESGUE Henri ; 1975 ; La mesure des grandeurs ; Albert Blanchard.
- LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J. M. ; 1974 ; Cours de mathématiques ; tome 2 : analyse ; Dunod.
- LEVAIN Jean Pierre et VERGNAUD Gérard ; 1994-95 ; Proportionnalité simple et proportionnalité multiple ; Grand N n° 56, pp 55 à 66.
- LEVAIN Jean Pierre ; 1992 ; La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire ; Educational Studies in mathematics 23, pp 139 à 161.

- LEVAIN Jean Pierre ; 1997 ; Faire des maths autrement ; développement cognitif et proportionnalité ; L'Harmattan.
- LEVAIN Jean-Pierre ; 1992-93 ; Proportionnalité, agrandissement et échelle ; petit x n° 31 pp. 15 à 34.
- MARGOLINAS Claire ; 1995 ; La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations ; Les débats de didactiques des mathématiques.
- MARGOLINAS Claire ; 1998 ; Etude de situations didactiques « ordinaires » à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur ; actes de la 8^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques.
- MARGOLINAS Claire ; 1998 ; Le milieu et le contrat pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement, cours de l'université d'été de La Rochelle.
- MARGOLINAS Claire ; Eléments pour l'analyse du rôle du maître : Les phases de conclusions ; RDM vol. 12.
- MATHERON Yves ; 1993-94 ; Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès ; petit x n° 34 pp. 59 à 87.
- MAURICE Jean Jacques ; 1996 ; Problèmes multiplicatifs : l'expérience de l'enseignant, l'action effective de l'élève ; RDM vol.16, n°3, pp. 323-348.
- MERCIER Alain ; 1978 ; Etude des notions « opérateur » et « machine » ; mémoire de D.E.A.
- MON PROFESSEUR ; 1910-14 ; Encyclopédie Autodidactique ; Quillet.
- MOPONDI Bendeko Alexandre ; 1986 ; Le rôle de l'institutionnalisation dans l'algorithme de la proportionnalité ; thèse université de Bordeaux 1.
- MOPONDI Bendeko Alexandre ; Rôle de la compréhension dans l'apprentissage : notion de proportionnalité en 5^{ième} et 6^{ième} au Zaïre ; thèse université de Bordeaux 1.
- NEWTON ; 1811 ; Méthode des fluxions et des suites infinies ; œuvres complètes DE BUFFON ; tome trente trois ; Paris.
- NOELTIN Gerald. ; 1980 ; The development of proportionnal reasoning and the ratio concept ; Educational Studies in Mathématiques, 11-2.
- PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne ; 1989-90 ; L'aire et la mesure ; petit x n° 24 pp 5 à 36.
- PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne ; 1995 ; Gestion didactique des moments adidactiques ; Enseignement de la valeur absolue en classe de seconde ; actes de l'école d'été de didactique des mathématiques.
- PIAGET Jean ; 1946 ; Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant.
- PIAGET Jean ; 1950 ; Introduction à l'épistémologie génétique ; Presse Universitaire de France.
- PIAGET Jean ; 1968 ; Jean Blaise Grize, Alina Szeminska ; Vin Bang ; Epistémologie et psychologie de la fonction ; Presse Universitaire de France.
- PIAGET Jean ; 1977 ; Recherche sur l'abstraction réfléchissante ; 1/ L'abstraction des relations logico-arithmétiques ; Presse Universitaire de France.
- PIAGET Jean ; 1977 ; Recherche sur l'abstraction réfléchissante ; 2/ L'abstraction de l'ordre des relations spatiales ; Presses universitaire de France.
- PLUVINAGE F. et DUPUIS C. ; 1980 ; La proportionnalité et son utilisation ; IRMA ; Université Louis Pasteur ; Strabourg.
- RAFFESTIN André ; 1989 ; Le mythe de la maîtrise de la notion : la proportionnalité ; Petite encyclopédie de la pédagogie ; chapitre 4 ; ISTRAS ; Paris.
- ROUCHE Nicolas ; 1992 ; Le sens de la mesure ; Didier Hatier.
- ROUCHE Nicolas ; 1994 ; Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique ; Repères-Irem n° 15.
- ROUCHIER André ; 1991 ; Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récurrentes, institutionnalisation ; thèse université d'Orléans.

- ROUCHIER André ; 1980 ; Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs ; RDM vol 1-2 ; p 225.
- SENSEVY Gérard ; 1996 ; Le temps didactique et la durée de l'élève ; RDM vol 16/1.
- SOKONA Sidi-Bekaye ; 1989 ; Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation ; petit x n° 19 ; pp 5 à 27.
- VERGNAUD Gérard ; 1981 ; L'enfant la mathématique et la réalité ; ed. Peter Lang, Berne.
- VERGNAUD Gérard ; 1990 ; La théorie des champs conceptuels ; RDM vol. 10 n°2.3 ; pp. 133-170.
- VERGNAUD Gérard ; 1991 ; Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques ; Revue Française de Pédagogie ; n° 96.
- VIENNOT Laurence ; Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire.
- WHITNEY Hassler ; 1968 ; The mathematics of physical quantities. Part I : mathematical models for measurement. Part II : quantity structures and dimensional analysis.
- WOILLEZ Dominique ; 1998 ; Rapport entre raisonnement arithmétique et utilisation de l'algèbre en quatrième : étude du cas d'un élève prénommé Simon ; actes de l'université d'été de La Rochelle.
- YOUSCHKEVITCH Adolf P ; 1976 ; Les mathématiques arabes (VIII^e – XV^e siècles) ; VRIN Paris.

Manuels scolaires

Ecoles primaires

- GIROD Félicien ; 1901 ; Nouvelle arithmétique des écoles primaires ; Paris.
- JOLLY René ; 1936 ; L'arithmétique au cours moyen ; Fernand Nathan.
- ROYER M. et COURT P. ; 1938 ; Arithmétique ; Cours supérieur 2^{me} Année et Classe de fin d'études primaires ; Librairie Armand Colin.
- PAITRAULT P. ; 1958 ; Mon arithmétique ; cours moyen 1^{re} et 2^e années ; Fernand Nathan.
- BODARD-MATRAT ; 1962 ; Le calcul quotidien ; cours élémentaire et cours moyen ; Fernand Nathan.
- CAPARROS Gérard ; 1973 ; La mathématique au CM1 et 2 ; Bordas.
- EILLER R. ; 1981 ; math et calcul ; cm2 ; Classiques Hachette.

Collèges

programmes de 1947

LEBOSSE et HEMERY ; arithmétique, algèbre et géométrie ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Fernand Nathan – éditeur.

MAILLARD R. & MILLET A. ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Classique Hachette.

programmes de 1957

LEBOSSE et HEMERY ; arithmétique, algèbre et géométrie ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Fernand Nathan.

SCHAEFFER H., LEBAILLE J. ; classe de 6^{ème} ; Delagrave.

WATTIAUX R., WATTIAUX L., MAS A., DELPLANCHE E., LEGRAIN G. ; Cours Bredif ; mathématiques 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Classique Hachette.

programmes de 1968

MAUGUIN A. ; mathématique ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Istra.

QUEYSANNE Michel et REVUZ André ; mathématique ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Fernand Nathan – éditeur et « série rouge » ; Fernand Nathan.

MONGE M., GUINCHAN M., PELLE J.-P. ; mathématiques ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Belin.

BOURSIN J.-L., CAPARROS G., GITTON R., PISOT C., STOULS J., CHAZAL R. ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} ; mathématiques ; Bordas.

programmes de 1977

IREM Strasbourg ; mathématiques ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Istra.

DELEDICQ A. et LASSAVE C. ; « faire des mathématiques » ; classes de 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Cedic Diffusion Fernand Nathan.

BLAQUIERE G., BOURSIN J.-L., PISOT C. ; STOULS J. ; classes de 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Bordas.

CREPIN R., MILLET J.-L., CISTERNE P., JAMIN D. ; classe de 6^{ème} ; Bordas.

MAUGUIN A. ; mathématiques ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} ; Istra.

BAREIL H., ZEHREN C. ; Mathématique ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème} ; Hachette.

programmes de 1985

TRANSMATH ; Maths ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Nathan.

DURRANDE ; Mathématiques ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Bordas.

DELORD R., VINRICH G., TERRACHER P. ; Mathématiques ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Hachette Collèges.

