N° d'ordre :

Année 1998

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

préparée à l'**INRIA Sophia Antipolis**

présentée par

Stéphane Nullans

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

SCIENCES pour l'INGÉNIEUR

RECONSTRUCTION GEOMETRIQUE DE FORMES - APPLICATION A LA GEOLOGIE

Soutenue le 14 Décembre 1998 devant le jury composé de :

Président :	M.	Pierre	BERNHARD
Directeur de thèse :	M.	Jean-Daniel	BOISSONNAT
Rapporteurs :	M.	Patrick	LEDRU
	M.	Jean	SEQUEIRA
Examinateurs :	Mme.	Dominique	BECHMANN
	M.	Jean-Pierre	BRUN
	M.	Antonio	GUILLEN
	M.	Michel	PERRIN

Remerciements

Je remercie Jean-Daniel Boissonnat pour m'avoir accueilli à l'INRIA dans l'équipe PRISME, et pour m'avoir encadré et orienté efficacement.

Je suis très honoré que Messieurs Patrick Ledru et Jean Sequeira aient bien voulu être rapporteurs de cette thèse. Je remercie également tous les membres du jury d'avoir participé à la soutenance du Lundi 14 Décembre 1998 : Madame Bechmann Dominique, Messieurs Boissonnat Jean-Daniel, Brun Jean-Pierre, Guillen Antonio et Perrin Michel, et à M. Pierre Bernhard pour avoir accepté de présider le jury.

Merci également à toutes les personnes de l'équipe PRISME : Agnès Clément-Bessière, Mariette Yvinec, Monique Teillaud, Alexandra Fronville, Olivier Devillers, Sylvain Pion, Frédéric Cazals, Pierre-Marie Gandoin, François Rebufat, Franck Da, Hervé Brönnimann, qui m'ont soutenu et aidé dans ce travail, et avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler. Je n'oublie pas les "anciens" du projet, Frank Nielsen, Pascal Desnoguès, Luc Tancredi, David Daney, Jean-Pierre Merlet, Andreas Fabri, Francis Avnaim, Bernhard Geiger (notamment pour ces illustrations), Sylvain Lazard, Eelco de Lange, avec qui j'ai de bons souvenirs. Un salut particulier à Imed Zoghlami, Monica Crubezy, Myriam Ribière, Robert Stahr, pour leur soutien et leur amitié. Un grand merci à Agnès qui m'a bien épaulé ces dernières semaines, et à Cyrille Gauclin qui a eu le courage de lire le manuscrit à deux reprises !

Lors de cette thèse, j'ai eu l'occasion de collaborer pendant plus de trois ans avec une équipe du B.R.G.M. plus que sympathique; merci Antonio Guillen, Gabriel Courrioux, Xavier Renaud, Philippe Calcagno, et Murielle Thibaut pour m'avoir toujours acceuilli chaleureusement.

Je n'oublierai pas de dédier cette thèse à Katia, à Linda, à ma famille et à tous mes amis.

Résumé

Cette thèse s'articule autour de la reconstruction géométrique de formes. Plusieurs méthodes, basées sur les diagrammes de Voronoï, sont proposées pour la reconstruction automatique d'objets naturels. L'application principale est la modélisation et l'imagerie géologique.

Une première méthode permet la reconstruction de volumes et surfaces géologiques à partir de données incomplètes et hétérogènes : données ponctuelles sur des affleurements, portions de contours cartographiques, sondages, coupes incomplètes ou interprétées, modèles numériques de terrains.... L'idée majeure de la méthode consiste à assembler les objets différents selon leurs proximités, en utilisant le diagramme de Voronoï de ces objets. Les diagrammes de Voronoï sont des structures géométriques permettant de partitionner l'espace en régions d'influence. En pratique toutes les données sont discrétisées en un ensemble de points colorés, les couleurs représentant ici les caractéristiques géologiques ou géophysiques des données, que nous souhaitons imager. La partition "colorée" de ces points nous donne une première solution topologique au problème de reconstruction. Elle nous fournit en outre, une représentation du bord de l'objet géologique et de son intérieur. L'utilisation de courbes et de surfaces déformables sous contraintes (tension, courbure et respect de la topologie initiale) permet ensuite d'obtenir des interfaces plus lisses et plus conformes. Une étape particulière permet de prendre en compte des surfaces de discontinuité comme les failles.

Afin de représenter un objet S, non plus par des éléments discrets (polyèdres de Voronoi), mais par les valeurs positives d'une fonction continue, nous avons introduit une nouvelle méthode. L'objectif de la méthode est de définir une fonction interpolante σ telle que l'ensemble des zéros de σ passe exactement par les données de départ et soit une approximation cohérente et lisse de S par ailleurs. Dans un premier temps nous définissons, une fonction caractéristique locale en chaque donnée (point, contour ...) et l'objet volumique final résulte alors d'une interpolation de ces fonctions.

Abstract

Several methods based on the use of Voronoi diagrams, are proposed for the 3D and 2D reconstruction of natural objects. The main application domain is geology.

A first algorithm enables volumes to be constructed starting from the combined use of geological maps, cross-sections and drill-lines. Input data have associated colors (object characteristics), but may be sparse and heterogeneous, and do not need to be organized in any special way. The method is based on Voronoi diagrams and produces volumes. Attributing colors to data allows to reconstruct simultaneously objects that are known to be distinct. Our reconstruction method is based on "proximity" and therefore uses Voronoi diagrams. For simplicity, the heterogeneous data set S (points, lines, surfaces, ...) is discretized into a set of colored points S_d. The "colored" Voronoi diagram of S_d gives a partition of the space into regions R, which approximates the scene. In Addition, we smooth the boundaries of the regions of R, in such a way that the topology of the Voronoi regions is preserved, i.e. each new deformed region contains the same set of points as initially. Specific methods are added to allow the insertion of faults in the reconstruction process.

We propose an other way for representing reconstructed objects, using the combination of implicit functions, Voronoi diagrams and nearest neighbor interpolation. The goal of the method is to define a continuous and smooth function f, so that $f \geq 0$ approximates the expected shape. We define local functions in the neighborhood of the initial data, and the final shape results in interpolating those functions.

Table des matières

1 Introduction **1**
1.0.1 Encadrement de ce travail 2
1.0.2 L'objet de ce travail 3
1.0.3 Organisation de ce travail 4
1.1 Modélisation géologique 5
1.1.1 Objets géologiques 5
1.1.2 Outils de modélisation existants 6
1.2 Méthodes de reconstruction usuelles 8
1.2.1 Ensemble de points 8
1.2.2 Ensemble de contours 10
1.2.3 Position de ce travail 17

2 Les structures géométriques **19**
2.1 Complexes cellulaires : introduction 20
2.2 Partition pour un ensemble ponctuel 21
2.2.1 Diagramme de Voronoï 21
2.2.2 Triangulation de Delaunay 23
2.2.3 Dualité Delaunay/Voronoï 24
2.2.4 Algorithmes de construction 25
2.2.5 Dégénérescences 28
2.2.6 Autres métriques 29
2.3 Partitions pour un ensemble non ponctuel 29
2.3.1 Triangulations conformes d'objets linéaires 30
2.3.2 Diagramme de Voronoï généralisé 34

3 Reconstruction et diagrammes de Voronoï **37**
3.1 Introduction 38
3.1.1 Problème 38
3.1.2 Les données initiales 38
3.1.3 Méthode de reconstruction : vue générale 40
3.2 "Régions" de Voronoï 41

3.2.1 Points de couleurs 41
3.2.2 Régions de données non ponctuelles 44
3.2.3 Estimation de normales 49
3.3 Déformation lisse des régions de Voronoï 51
3.3.1 Lissage entre contacts 2D 51
3.3.2 Lissage de maillages 3D 58
3.3.3 Contraintes particulières 62
3.3.4 Zone de déformation 65
3.3.5 Quelques exemples de déformations 70
3.3.6 Conclusion (lissage) 73
3.4 Interrogation et localisation dans le modèle 73
3.5 Cas particulier des coupes parallèles 75
3.6 Conclusion 77
3.6.1 Analyse de la méthode 77
3.6.2 Conclusion générale 80

4 Application à la géologie : résultats 81
4.1 Les failles : une étape particulière 82
4.1.1 Les failles : introduction 82
4.1.2 Intersections des failles et des volumes géologiques . . . 83
4.1.3 Failles et diagramme de Voronoï 86
4.1.4 Conclusion 91
4.2 Ordre géologique de reconstruction 92
4.3 Le cas bidimensionnel: les coupes géologiques 96
4.4 Modèles tridimensionnels 98
4.4.1 Modèle Ardèche 98
4.4.2 Modèle de l'Aiguille de Morges 100
4.4.3 Modèle Armor 104
4.4.4 Modèle du bassin de Paris 109
4.5 Conclusion 110

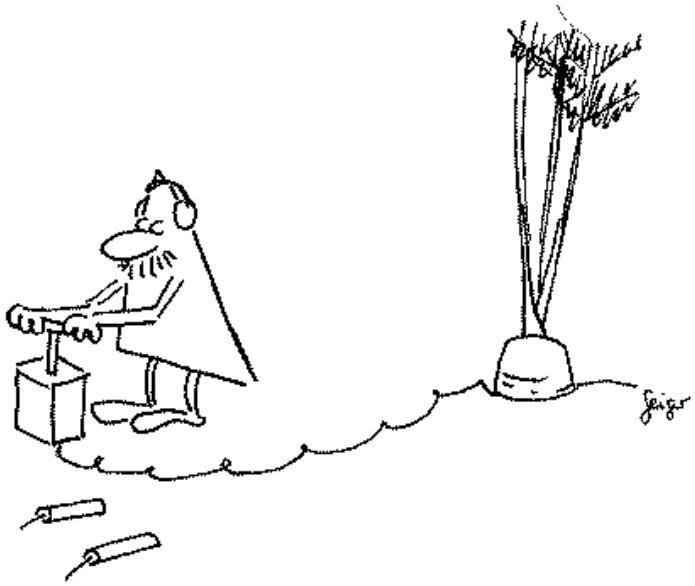
5 Interpolation fonctionnelle 111
5.1 Introduction 112
5.2 Reconstruction à partir de sections 112
5.2.1 Fonction caractéristique 113
5.2.2 Interpolation initiale I_0 114
5.2.3 Interpolation pondérée par les distances I_1 115
5.2.4 Exemples d'interpolations à partir de contours 1D . . . 120
5.2.5 Interpolation polyédrique 3D 123
5.2.6 Résultats sur des coupes 2D 128
5.3 Interpolation d'objets colorés 130

5.4 Application à des contours non fermés 132
5.5 Interpolation de points sur une surface 135
5.5.1 Interpolation au plus proche 135
5.5.2 Interpolation naturelle 136
5.5.3 Le cas de points avec des valeurs 139

6 Conclusion **141**

Chapitre 1

Introduction



1.0.1 Encadrement de ce travail

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une coopération entre trois équipes de recherche, dont les savoirs sont complémentaires :

- le "Laboratoire Géophysique" du B.R.G.M. (Bureau de Recherches Géologiques et Minières) dirigée par M. Guillen, familiarisée avec les problèmes de gestion de données et de mise en oeuvre des modèles, et détentrice de jeux de données très variés.
- une équipe de géologues de l'école des Mines de Paris (E.N.S.M.P) animée par M. Perrin, qui travaille sur les aspects spécifiques de la modélisation géologique (élaboration de règles syntaxiques, étude des déformations).
- une équipe d'informaticiens de l'I.N.R.I.A. (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique) spécialistes de géométrie algorithmique (projet Prisme dirigé par J-D. Boissonnat) dans laquelle la thèse s'est déroulée.

De nombreuses rencontres et visites, entre les différentes parties, ont permis à ce travail de prendre des directions guidées par des objectifs précis, et de répondre à des besoins réels et existants en modélisation géologique. Le B.R.G.M. a été le principal interlocuteur, et le pilote de ce projet.

Cette coopération a été faite dans le cadre du programme GéoFrance3D (dirigé par P. Ledru), qui est un programme scientifique national très ambitieux. GéoFrance3D a pris le relais de Géologie Profonde de la France en 1994, et son objectif global sur dix ans (entre 1995 et 2005) est l'imagerie géologique et l'étude de la croûte continentale de la France. Les grands axes de recherches et développements sont les suivants :

- déployer sur le territoire les outils d'imagerie géophysique nécessaires
- réaliser de nouvelles explorations du sous-sol, et de nouvelles expérimentations.
- constituer une base de données multi-sources sur le territoire et son sous-sol.
- développer les moyens et les méthodes d'inversion pour la réalisation de modèles 3D.

La contribution de ce travail au programme GéoFrance3D s'inscrit dans ce dernier objectif, auquel il doit apporter des méthodes de reconstruction automatique et d'aide à la construction de modèles tridimensionnels du sous-sol géologique. Les méthodes ont été testées sur des cibles régionales, comme par exemple sur le projet Armor dont les résultats de reconstruction sont présentés dans la partie 4.4.3.

1.0.2 L'objet de ce travail

Cette thèse s'articule autour de la reconstruction géométrique de formes naturelles dans les cas bidimensionnel et tridimensionnel. De façon générale cette thèse s'intéresse à des problèmes de reconstruction géométriques d'objets naturels, à partir de données partielles et hétérogènes. Les applications présentées dans ce manuscrit, sont principalement du domaine de la modélisation géologique, mais ce travail s'adresse de façon plus générale aux problèmes suivants :

- A quoi sert un objet 3D, la visualisation 3D, la modélisation 3D.
- Pourquoi et comment reconstruire une scène 3D à partir de données incomplètes.

L'objectif principal de cette thèse est de concevoir et réaliser un modeleur géologique tridimensionnel permettant de reconstruire des surfaces et des volumes géologiques à partir de données hétérogènes : données ponctuelles sur des affleurements, portions de contours cartographiques, sondages, ou coupes interprétées. La géométrie 3D réalisée grâce à ce modeleur doit permettre de visualiser les structures. Elle doit pouvoir servir aussi de base pour la réalisation de modèles quantitatifs et pour l'interprétation géodynamique.

Outre l'intérêt proprement scientifique, les enjeux d'une meilleure connaissance du sous-sol sont considérables. Ils concernent des domaines variés : exploration et exploitation des ressources du sous-sol (modèles de bassins, géométrie des corps minéralisés et des réservoirs), génie civil (études d'impacts pour les ouvrages d'art, nouveaux tunnels alpins...), environnement (étude des migrations de polluants dans le sous-sol, comportement mécanique des terrains et estimation des risques de dégâts de surface, stockage souterrain des déchets...).

Les outils disponibles actuellement s'appuient essentiellement sur des méthodes d'interpolation de surface à faible spécificité géologique. Ils sont surtout utiles en exploitation pétrolière pour l'interpolation à partir des coupes sismiques, c'est à dire dans le cas où la reconstruction se limite à une interpolation entre des plans discrets décrits de manière complète. Lorsque les données sont rares, irrégulièrement réparties et hétérogènes comme c'est le cas par exemple dans les régions fortement plissées, les méthodes d'interpolation ne suffisent plus et il faut véritablement reconstruire un modèle tridimensionnel à partir des données. L'utilisation des techniques de géométrie algorithmique qui ont fait leurs preuves en imagerie médicale et la prise en compte simultanée de règles syntaxiques propres au domaine géologique doivent permettre des avancées significatives. Plusieurs méthodes ont été testées, basées sur des structures géométriques qui caractérisent la proximité des

objets dans un modèle :les diagrammes de Voronoï. Les objets naturels reconstruits par ces méthodes sont représentés par des volumes, sous forme d'union de volumes élémentaires (polyèdres de Voronoï), ou définis par les valeurs positives d'une fonction continue.

1.0.3 Organisation de ce travail

L'organisation générale de ce manuscrit est la suivante. Dans le chapitre 1 nous introduisons le problème et quelques solutions existantes pour la reconstruction géométrique de formes et en particulier pour la modélisation d'objets géologiques. Les structures géométriques qui sont utilisées dans les différents algorithmes de reconstruction sont introduites dans le chapitre 2, avec notamment les définitions des diagrammes de Voronoï et des triangulations de Delaunay. Une méthode de reconstruction très générale est proposée dans le chapitre 3 permettant de reconstruire les surfaces et volumes d'un modèle à partir de données partielles et hétérogènes. Elle est basée sur l'utilisation des diagrammes de Voronoï, et fournit une représentation discrète du modèle, par un ensemble de volumes élémentaires. Son application plus particulière à des modèles géologiques est étudiée dans le chapitre 4, ou la méthode est testée et validée sur des modèles synthétiques et de nombreux modèles réels. Une approche à base de fonctions d'interpolation est introduite dans le chapitre 5 pour des reconstructions à partir de données plus spécifiques : points avec normales et contours dans des sections 2D planes.

1.1 Modélisation géologique

1.1.1 Objets géologiques

Un modèle ou scène géologique est une représentation en 2D ou 3D du sous-sol géologique et des objets qui le composent : formations, interfaces, et failles. Les entités géologiques élémentaires sont les formations géologiques qui sont des ensembles géologiques de nature, âge, ou composition homogènes. Elles sont séparées par des surfaces limites souvent appelées interfaces ou horizons. Les interfaces sont des frontières naturelles qui séparent les formations géologiques. Les failles sont des interfaces particulieres; ce sont des accidents qui naissent des différents mouvements des couches (compression ou écartement de celles-ci) et elles décalent les formations, le long de cet accident.

Les formations ont dans l'histoire de leur évolution été compressées, érodées, ou déformées, et en conséquence leur géométrie et topologie sont variées et très complexes (modèles plissés, modèles faillés, dômes de sel, ...). Néanmoins, lorsque les évènements sont connus, les déformations peuvent être caractérisées. Des efforts ont été faits pour établir des règles de syntaxe géologique qui permettent de classer et interpréter les différents phénomènes géologiques. Perrin et coll [PS95] ont défini de telles règles. On se rend vite compte que de nombreuses situations topologiques sont impossibles d'un point de vue géologique, et il devient important d'en tenir compte lors de la modélisation ou de la reconstruction. Dans une région sédimentaire par exemple, et avant déformation, l'âge des formations est croissant en fonction de la profondeur des couches (notamment une couche jeune est forcément au dessus d'une couche plus vieille) car les formations se sont déposées les unes après les autres.

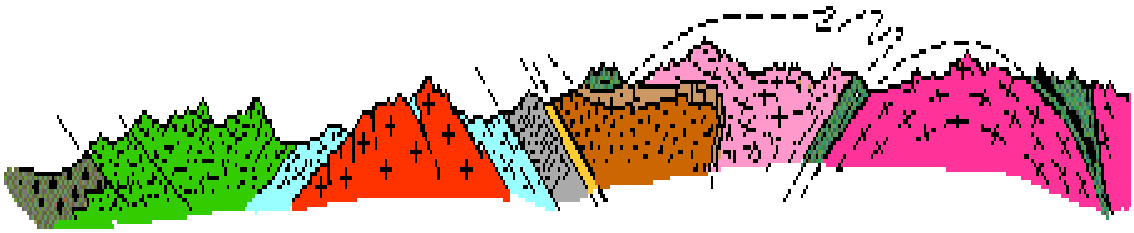


FIG. 1.1 – *Exemple de coupe géologique dans les Alpes.*

Lorsqu'il doit réaliser une interprétation, le géologue est capable d'estimer

une coupe géologique sur une certaine profondeur, à partir de la carte géologique d'une région par exemple. Mais pour des coupes plus précises et sur des profondeurs plus grandes, des informations supplémentaires sont nécessaires :

- des sondages locaux issus de forages.
- des informations sismiques.
- le champ gravimétrique.
- images RMN (résonnance magnétique nucléaire)

Ces informations lui permettent, soit de construire son propre modèle, soit de valider un modèle existant et les hypothèses réalisées.

Les représentations des objets géologiques qui sont encore les plus habituellement utilisées, sont les cartes et les coupes géologiques : images 2D de sections particulières de la scène par la surface topographique, ou par des plans verticaux particuliers. Mais l'imagerie 2D ne permet pas une compréhension suffisante de la complexité d'une scène géologique. La modélisation 3D apporte un nouveau souffle, car elle permet non seulement de créer des modèles 3D et de les visualiser, mais aussi de réaliser des calculs quantitatifs et qualitatifs sur ces modèles.

1.1.2 Outils de modélisation existants

Les outils de modélisation existants sont principalement basés sur des interpolations de surfaces [Mal89, PKR+92]. Nous présentons ici quelques outils disponibles pour la modélisation d'objets géologiques.

Gocad (voir http://www.ensg.u-nancy.fr/GOCAD) est un modeleur géologique développé au LIAD (Laboratoire d'Infographie et Analyse des Données) de L'ENSG (Ecole Nationale Supérieure de Géologie) sous la direction du Professeur Jean Laurent Mallet. Le moteur de Gocad est un interpolateur de surface appelé DSI (Discrete smooth interpolation, voir [Mal89]), qui permet de créer des surfaces triangulées "lisses" à partir d'un ensemble de points. De nombreux travaux existent autour de ce modeleur et notamment :

- Des travaux récents d'Olivier Mariez [Mar97] permettent de reconstruire des volumes géologiques à partir de coupes géologiques parallèles et complètement déterminées. Une première étape met en correspondance les failles (respectivement les interfaces) entre deux coupes consécutives, et des surfaces triangulées sont construites entre les contours associés avec le modeleur Gocad. Les interfaces et les failles sont construites une à une et les volumes sont ensuite déduits de l'arrangement (i.e. la partition) engendrée par ces surfaces.

– Joël Conraud s'est aussi intéressé aux maillages et reconstructions d'objets naturels à partir de coupes sériées [Con97], et a privilégié dans ce cas des méthodes de reconstruction interactives. Effectivement, lorsqu'on veut imposer des liens entre des contours, les méthodes de reconstruction automatique ne sont pas assez souples pour intégrer ce type de contraintes.

Polypli (voir http://www-sst.unil.ch/polypli.htm) est un logiciel original dédié à la construction et visualisation de modèles structurels. Il permet en particulier de créer des plis et des failles à partir de déformation d'un bloc initial composé de couches parallèles. La déformation se fait à partir d'une direction, et d'une fonction indiquant le profil de déformation (voir figure 1.2).

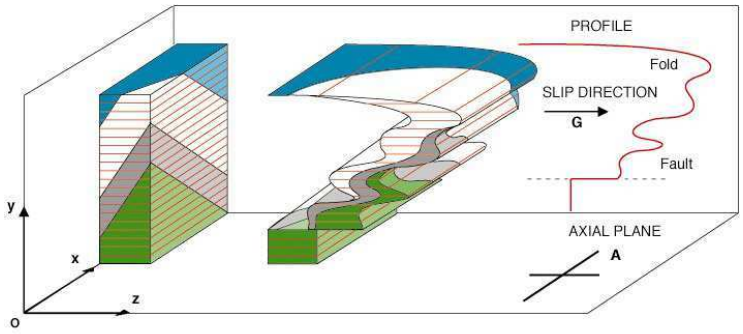


FIG. 1.2 – *Création de modèles plissé et faillé (image POLYPLI).*

Éditeur Géologique basé sur CAS.CADE CAS.CADE est un environnement de programmation développé par Matra Datavision, dédié à la création d'applications C.A.O. (Conception Assistée par Ordinateur). L'environnement CAS.CADE est notamment à la base de la nouvelle version d'EUCLID (EUCLID QUANTUM). En ce qui concerne les objets géométriques, le parti pris est celui du monde paramétrique et de la CSG (Constructive Solid Geometry). L'équipe Imagerie Géologique et Géophysique du BRGM se propose de développer un éditeur géologique tridimensionnel performant à partir du support CAS.CADE. Des soins particuliers sont apportés à la cohérence topologique des modèles construits. Un tel outil est indispensable au géologue pour créer et modifier des coupes, des surfaces et des volumes géologiques dans un environnement topologiquement clos. Il est aussi essentiel pour unifier les différents formats de données dans un même monde tridimensionnel. Une partie des algorithmes développés dans cette thèse est incorporée dans cet éditeur, et permet de tester et valider des hypothèses géologiques très rapidement.

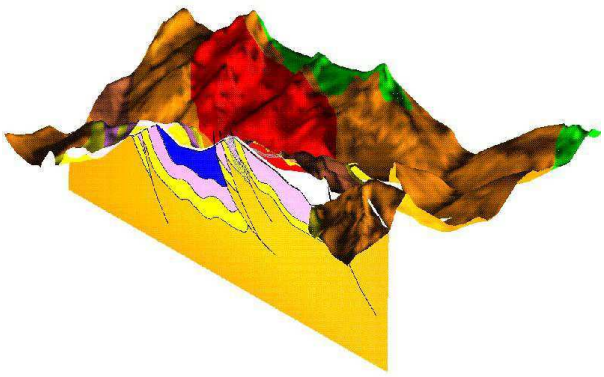


FIG. 1.3 – *Illustration de l'éditeur de coupes 3D.*

1.2 Méthodes de reconstruction usuelles

Les méthodes et outils d'acquisition de données ont énormément évolué et permettent aujourd'hui de représenter de nombreux objets naturels. De façon non exhaustive citons scanners, tomographes, appareils radio-magnétiques, ou lasers, qui sont autant d'appareils de mesures qui nous informent sur les corps étudiés, à travers des images de densités, réponses magnétiques, ou autres signaux. Mais les formes de données géométriques les plus répandues, avec lesquelles on est finalement amené à entreprendre une reconstruction, sont essentiellement de deux types différents :

- un ensemble de points sur le bord d'un objet.
- des contours sur le bord d'un l'objet, extraits d'images 2D (sections planes du corps étudié).

Déduire de ces données les surfaces et volumes 3D d'un objet est un domaine d'étude très vivant, et qui a donné lieu à de nombreuses méthodes et algorithmes de reconstruction. Nous introduisons ici, pour chaque type de données dans les sections 1.2.1 et 1.2.2 quelques méthodes efficaces pour construire "automatiquement" des modèles 3D.

1.2.1 Ensemble de points

Un objet M à reconstruire est déterminé par un ensemble S de points connus sur son bord. Le plus souvent ces points n'ont pas d'organisation particulière. Le but étant de trouver une surface ou triangulation passant par ces points et approchant l'objet originel (voir figure 1.4).

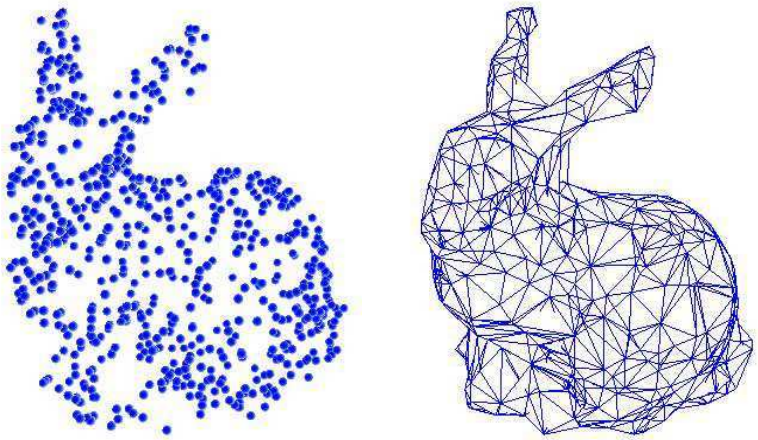


FIG. 1.4 – *Exemple de 650 points représentant un lapin et reconstruction par un maillage triangulaire (méthode $\alpha - Shape$).*

La littérature concernant ce type de reconstruction est très riche, et a vraiment engendré de nombreuses méthodes différentes pour résoudre ce problème. Nous introduisons de façon non exhaustive, quelques approches liées à ce problème. Pour un état de l'art complêt sur ce sujet, on pourra se référer à [MM98].

Un paramètre important pour ce type de problème, est la densité des points. Les méthodes dans [Boi84a, EM92, EM94, HV97, Vel94, Att97, Att95, Mel97, Mel96b] sont basées sur des hypothèses sur la densité des points, ou en dépendent fortement (S est $\rho-dense$: toute sphère de rayon ρ centrée en un point de S contient un autre point de S, ou encore S est un *r-échantillonnage*, voir définition 13).

Les $\alpha - Shape$ et $\alpha - Shape$ à poids multiples, sont introduit par Edelsbrunner et Mücke dans [EM92, EM94]. Ces formes sont très populaires grâce à la simplicité de leur définition. Les $\alpha - Shape$ sont en quelque sorte une généralisation des enveloppes convexes de points. En modifiant α on passe de l'enveloppe convexe des points S ($\alpha = \infty$), à l'ensemble de points S lui-même ($\alpha = 0$). Pour certaines valeurs de α, la forme reconstruite approche S de façon assez naturelle. De façon proche, Melkemi défini les $A - Shape$ dans [Mel96a, Mel97] qui sont des formes qui s'approchent récursivement de la forme voulue, en ajoutant des points dans l'ensemble de départ. Il démontre la convergence de ces formes dans le cas continu. Dans [Boi84b, Vel94] on trouve des méthodes basées sur la triangulation de Delaunay des points, et l'objet final est obtenu par sculpture de l'enveloppe convexe des points. Hoppe et coll [HDD+92, HDD+94] utilisent une approche à base d'une fonction distance $f(P)$. Une estimation des normales (plans tangents) à l'objet

M recherché, en chaque point de S est réalisée en utilisant un graphe de voisinage de S. La fonction $f(P)$ est approchée par les distances à ces plans tangents. L'ensemble $Z(f)$ qui représente les zéros de f est une surface qui approche M.

La plupart de ces méthodes utilisent, soit la triangulation de Delaunay, soit les diagrammes de Voronoï (voir chapitre 2, pour une introduction à ces structures), car se sont des partitions très utiles lorsque la proximité des données entre en jeu. Amenta et coll ont démontré dans [ABE97] et [ABK98] de nombreuses propriétés concernant ces structures, liées aux problèmes de reconstruction. Leur méthode fournit des garanties de reconstruction en fonction de la densité des points, et inversement, si on connaît l'objet S initial (courbe, surface, ...), elle nous permet aussi de déterminer un "bon" échantillonage de S (voir 2.3.1.1).

Certaines méthodes sont aussi liées aux caractéristiques connues de l'objet : la connaissance du genre, de la forme générale, ou du nombre de composantes connexes de l'objet, sont des éléments décisifs pour le succès de la reconstruction. Dans les méthodes à base de modèles déformables, par exemple, le principe est de définir une forme initiale M "proche" des données de départ S (souvent homotope à une sphère) ayant des caractéristiques intrinsèques de courbure et tension. On cherche alors à minimiser des contraintes liées aux courbures et tensions, associées à une contrainte de distance à M, pour obtenir une forme "lisse" approchant S. La connaissance du genre, et de la forme générale de l'objet est nécessaire pour une reconstruction cohérente de l'objet. Delingette [Del94] utilise des maillages simplexes 3D déformables pour approcher un ensemble de points.

1.2.2 Ensemble de contours

L'objet M à reconstruire est défini par des contours dans des sections de M planes et souvent parallèles. Le résultat doit être une surface d'interpolation (surface mathématique ou triangulation) passant exactement par les contours connus. Les difficultés principales dans ce genre de construction, sont liées aux appariements de contours entre les différentes sections, et aux embranchements multiples et complexes qui peuvent exister.

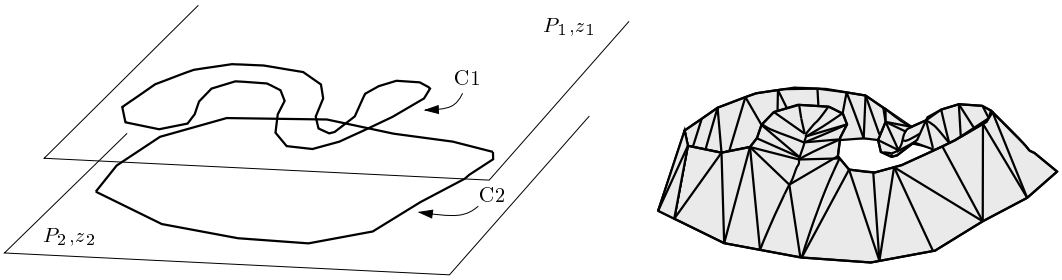


FIG. 1.5 – *Deux contours C_1 et C_2 dans deux plans P_1 et P_2 parallèles et une reconstruction possible.*

Les premières méthodes sont apparues dans les années 80 et étaient essentiellement motivées par les applications médicales. Plus récemment de nombreux travaux se sont aussi intéressés à la géologie, car dans les sciences de la terre, les coupes 2D sont couramment utilisées pour décrire des modèles géologiques. Les coupes ont d'ailleurs longtemps constitué les seuls supports de visualisation et d'interprétation pour le géologue.

Les sous-problèmes généralement relevés dans les méthodes de reconstruction à partir de contours sont les suivants :

- **correspondance** entre les contours : le problème est de trouver les adjacences topologiques entre les contours de sections consécutives. C'est une étape très importante car elle détermine complètement la topologie de l'objet final. De nombreuses solutions ont été proposées dans la littérature et une bonne synthèse de ces méthodes est présenté par Meyers et Skinner dans [MSS91, MSS92]. Les auteurs préconisent l'utilisation d'un graphe sur les contours de type M.S.T (Minimum spanning tree) afin d'en déduire les correspondances. Dans [OPC96] les auteurs utilisent simplement la projection des contours sur un plan médian, pour déduire les relations entre contours. La règle dans ce cas est très simple : deux contours S_1 et S_2 sont en correspondance s'ils appartiennent à deux sections consécutives, et si leurs projections se coupent. Dans d'autres méthodes encore [Boi88a, BG92], la correspondance n'est pas traitée à part, mais est imposée par l'algorithme de reconstruction.
- **branchement** entre contours : c'est la phase qui détermine la forme et les jonctions qui connectent les contours. Le problème est délicat surtout lors de correspondances multiples entre contours (lorsqu'un contour C_1 est en correspondance avec $n > 1$ contours C'_1,...,C'_n). Cette étape dépend du domaine d'application. Sequeira et coll [SES93] définissent des branchements à base de cylindres généralisés pour des objets

de formes tubulaires. La méthode du chapitre 5.2 décrit des branchements de façon automatique en fonction de la distance aux contours.

- **interpolation** des contours : c'est l'étape qui détermine la surface ou le volume final, en fonction des correspondances et des types de branchements entre contours. Parmi les méthodes d'interpolation à partir de contours on trouve les catégories suivantes :

  - Interpolation directe par des surfaces triangulées.
  - Interpolation volumique par des tétraèdres ou voxels.
  - Interpolation des contours par des fonctions implicites.

  Nous introduisons dans les sections 1.2.2.1, 1.2.2.2 et 1.2.2.3 des exemples de méthodes dans ces trois catégories.

Un traitement global et simultané des trois sous-problèmes, et une bonne introduction des méthodes existantes sont collectés dans [BCL96].

1.2.2.1 Triangulations

Les méthodes dans [FKU77] reprises dans [MSS92, Mar97, Tur92] séparent les différents traitements (correspondance, branchement et interpolation). Il faut donc trouver une triangulation pour les contours qui ont été associés. La méthode classique de triangulation de deux contours est illustrée en figure 1.6. On détermine la triangulation de deux contours S_Q et S_P, comme un chemin particulier dans le graphe formés par les sommets des contours. Plusieurs chemins sont possibles et on cherche celui qui minimise un critère métrique particulier (maximise le volume global, minimise l'aire des triangles, ...).

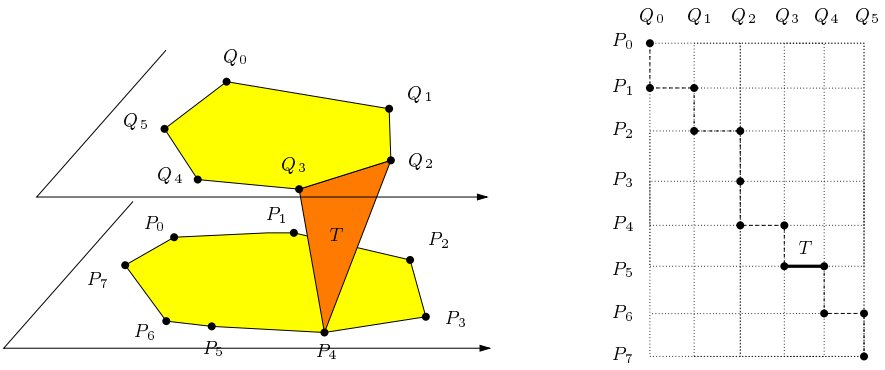


FIG. 1.6 – *Choix de la triangulation entre deux contours. Le triangle T correspond à une arête dans le graphe des sommets.*

Un avantage de ce type de méthode, est de pouvoir agir au niveau de la correspondance des objets, et de ne pas seulement se baser sur des associations automatiques qui peuvent parfois échouer. Par contre le traitement des branchements complexes entre les contours, relève souvent de l'astuce et est assez compliqué.

1.2.2.2 Interpolation volumique

Nous développons un peu plus les méthodes [Boi88a, BG92] et [OPC96] car les idées sont assez proches des travaux de cette thèse.

Boissonnat et Geiger ont élaboré un algorithme de reconstruction entièrement automatique qui décrit les volumes recherchés à partir de tétraèdres de Delaunay. Les données de départ sont des contours d'un objet dans plusieurs sections parallèles. Les contours (lignes polygonales) sont discrétisées et dans chaque section, on calcule la triangulation de Delaunay 2D de ces points. Il est parfois nécessaire d'ajouter des points, pour garantir que tous les contours soient entièrement dans la triangulation. Si un segment ne se trouve pas dans la triangulation, on ajoute le milieu de ce segment et on retriangule.

Les auteurs montrent dans [Boi88a, BG92] que la triangulation de Delaunay 3D de points contenus dans deux plans parallèles P_1 et P_2 peut se déduire des triangulations T_1 et T_2 (resp. triangulation de Delaunay 2D dans P_1 et P_2). En effet dans ce cas bien précis la triangulation 3D contient T_1 et T_2. L'objet solide (voir figure 1.7) est obtenu en éliminant les tétraèdres suivants :

- ceux qui ont une face à l'extérieur des contours (figure 1.7 gauche).
- ceux qui contiennent deux arêtes de contours, l'une dans P_1 et l'autre dans P_2 (figure 1.7 droite).

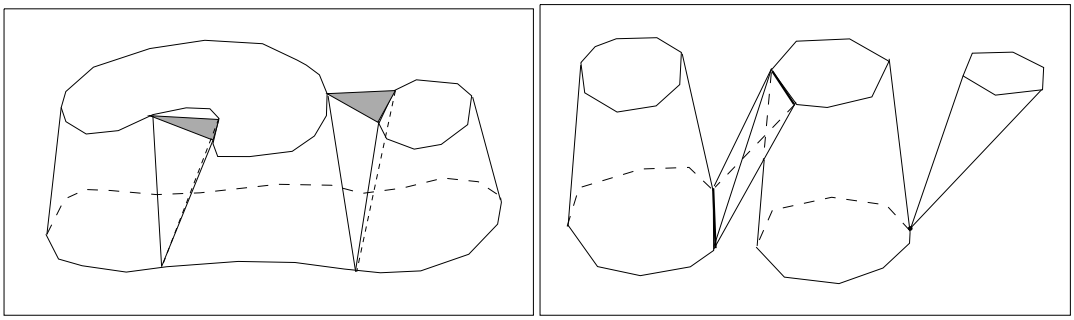


FIG. 1.7 – *Elimination des tétraèdres "extérieurs" et des connexions non solides.*

La gestion des variations complexes de contours entre deux sections "proches" et leurs embranchements, est réalisée de façon originale. On définit le squelette $EV(S_1)$ de S_1, comme le lieu des points à égale distance de deux points différents du bord de S_1. On calcule le squelette de Voronoï externe $EV(S_1)$ dans la section S_1 et on projette $EV(S_1)$ sur S_2 et réciproquement. Des points sont ajoutés sur les squelettes projetés $EV(S_1)'$ et $EV(S_2)'$ qui vont permettre de créer des embranchements plus complexes (voir figure 1.8).

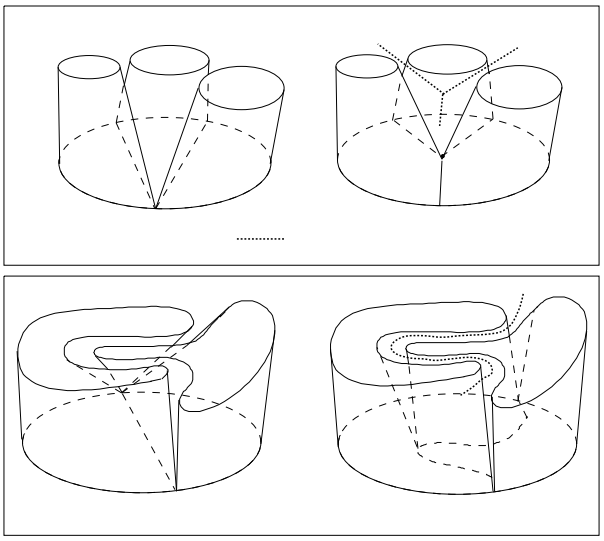


FIG. 1.8 – *Insertion des points sur les squelettes externes projetés et reconstructions améliorées.*

Cette méthode donne une représentation volumique à base de tétraèdres, de l'intérieur et de l'extérieur de l'objet, et permet des calculs et des traitements ultérieurs. Ces modèles ont, par exemple, servi à réaliser des endoscopies virtuelles [Gei93] ou encore des simulations d'accouchements [BG93a].

Oliva La méthode élaboré par Oliva dans sa thèse [OPC96] est intéressante car elle met en jeu des techniques à base de diagramme de Voronoï, et sa méthode a été testée sur des données géologiques. La connexion entre les contours S_a et S_b est établie selon que ces contours se recouvrent ou non sur un plan médian P. Il classe le recouvrement en les parties $S_a - S_b$, $S_b - S_a$, $S_a \cap S_b$ et $P - (S_a \cup S_b)$ (voir figure 1.9).

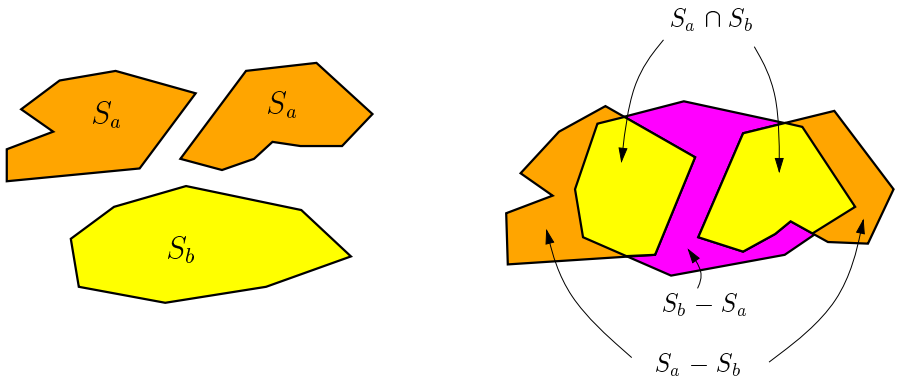


FIG. 1.9 – *Les zones "différence" (à droite) de deux contours (à gauche) dans un plan médian.*

Il fait les hypothèses suivantes :

– $S_a \cap S_b$ est à l'intérieur de l'objet.

– $P - (S_a \cup S_b)$ est à l'extérieur de l'objet.

Les zones $S_a - S_b$ et $S_b - S_a$ sont ce qu'il appelle les zones "différence" et il souhaite les trianguler. Une zone différence comprend une chaine d'arêtes ch_a de S_a et une chaine ch_b d'arêtes de S_b. La triangulation des zones "différence" consiste à trianguler les chaines ch_a et ch_b. Mais cette triangulation n'est pas toujours possible (si les chaines sont trop différentes) et la solution adoptée est de créer des chaines intermédiaires en utilisant des réseaux de bissecteurs. Le réseau bissecteur de deux chaînes est déterminé comme le squelette de Voronoï de ces deux chaînes. Cette construction permet de générer de façon itérative des chaînes de contours comprises entre ch_a et ch_b et qui convergent géométriquement de l'une vers l'autre.

Dolliazal La méthode introduite par Dolliazal [Dol96] comporte deux étapes principales :

– construction d'un volume de l'objet à partir des coupes.

– extraction de surfaces à partir du volume et des coupes.

Le critère de connexion entre les contours de deux sections adjacentes est comme pour [OPC96] un critère de recouvrement sur un plan médian. L'in-

terpolation volumique est réalisée à partir de "voxet" (ensemble de voxels 3D avec une propriété). Il classe les voxels en sous-ensembles intérieurs et extérieurs à l'objet. Cette classification se fait directement dans chaque coupe, et est interpolée entre les coupes en fonction du graphe de recouvrement. Une extraction d'une première surface frontière de son objet voxets est lissée grâce à l'interpolateur DSI [Mal89] et finalement une simplification de son maillage final est effectuée.

1.2.2.3 Fonctions implicites

Une fonction implicite f représentant un objet se définit généralement ainsi :

$$\begin{cases} f(M) > 0 & \text{pour } M \text{ à l'intérieur de l'objet.} \\ f(M) < 0 & \text{pour } M \text{ à l'extérieur de l'objet.} \\ f(M) = 0 & \text{pour } M \text{ sur le bord de l'objet.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Les méthodes de reconstruction à base de fonctions implicites, utilisent souvent des approximations d'opérations booléennes sur ces fonctions pour interpoler plusieurs fonctions élémentaires liées à des données différentes.

Les méthodes dans [GA98, SPOK95, JC94b, SK91] sont basées sur la caractérisation de fonctions implicites liées aux données (équivalent à des champs de potentiels naissant aux données) couplées avec ces opérateurs pour obtenir une fonction implicite globale approchant l'objet recherché. Jones et Chen ont élaboré une méthode dans [JC94a] très proche de la méthode décrite au chapitre 5, qui utilise une distance aux contours pour définir une fonction implicite f, et l'algorithme "marching cube" [LC87] pour extraire la surface $(f = 0)$ qui représente l'objet. Un état de l'art sur les méthodes à base de fonction implicite est décrit dans [PBT98, Men96].

1.2.3 Position de ce travail

La méthode de reconstruction que nous présentons est plus générale que les méthodes vues dans les sections précédentes, en cela qu'elle permet d'intégrer un plus grand éventail de données : des points sur une surface, des contours dans des sections, et des points à l'intérieur d'objets. Ce dernier type de donnée, n'est pas pris en compte dans la majeure partie des méthodes sus-citées.

Lorsqu'on veut reconstruire plusieurs objets différents d'une même scène, on est souvent amené à reconstruire les objets de façon indépendante, et risquer des intersections indésirables (voir figure 1.10).

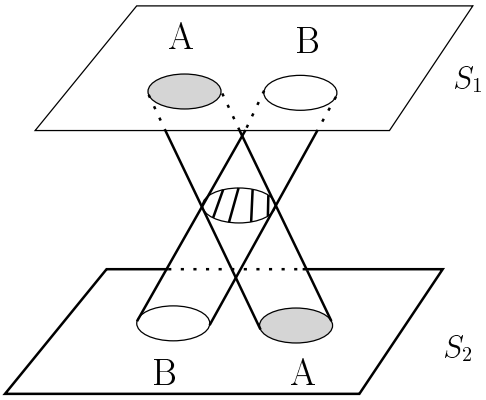


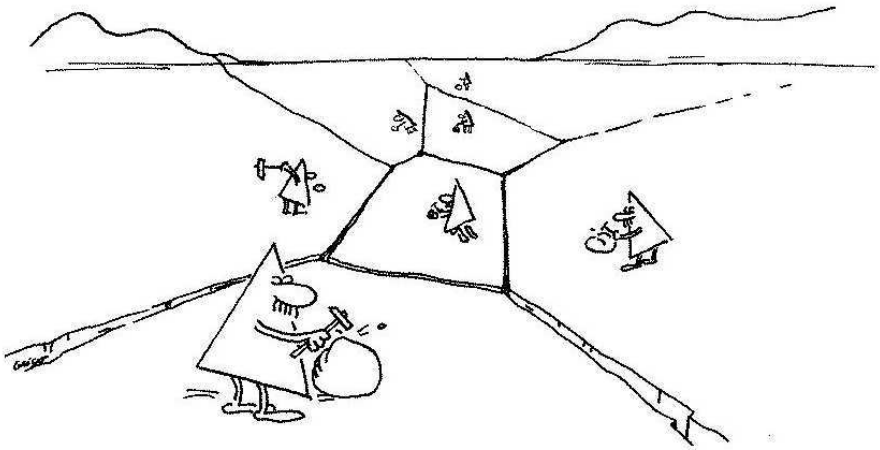
FIG. 1.10 – *La reconstruction indépendante des objets A et B conduit à un problème d'intersection des objets reconstruits.*

Une des originalité de la méthode du chapitre 3, réside dans le fait de reconstruire des objets différents d'une même scène, simultanément. Du coup, les volumes d'objets différents ne s'intersectent pas, mais partagent des bords en commun. Les représentations que nous avons choisies sont multiples : volumes discrets élémentaires (polyèdres de Voronoï), ou valeurs positives d'une fonction continue (voir chapitre 5).

Bien qu'ayant testé les algorithmes de reconstruction sur divers types d'objets, l'application dominante dans ce manuscrit concerne la géologie. Des méthodes spécifiques, notamment concernant les failles (voir section 4.1) ont été développées dans ce travail, pour une modélisation d'objets géologiques.

Chapitre 2

Les structures géométriques



Nous définissons ici, les éléments et structures géométriques qui vont servir dans les algorithmes de reconstruction décrits dans les chapitres 3 et 5. Ce sont des structures très utiles dès que la notion de proximité entre en jeu. Nous décrirons les diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay d'un ensemble de points S dans la section 2.2. Nous verrons comment généraliser ces structures à un ensemble de données G non ponctuel dans la section 2.3. Nous nous bornerons aux cas 2D et 3D qui suffisent à la représentation des objets statiques, mais la plupart des structures géométriques définies ici se généralisent à toutes les dimensions.

Pour une synthèse approfondie sur ces structures on pourra se référer à des ouvrages plus généraux [Aur91, BY95, Kle88] et y découvrir d'autres applications.

2.1 Complexes cellulaires : introduction

On suppose que l'on travaille dans un espace $\mathbb{R}^d$ de dimension d. Nous allons introduire quelques définitions sur les objets linéaires d'un espace E^d (voir aussi [BY95]). Ces notations seront utilisées dans les sections suivantes.

Définition 1 *On appelle k-cellule un élément linéaire de E^d de dimension k.*

Les $k-cellules$ qui sont formées d'exactement k éléments linéairement indépendants, sont aussi appelées $k-simplexes$ et en particulier :

1. un sommet est un $0-simplexe$ de $\mathbb{R}^d$.
2. une arête non réduite à un point est un $1-simplexe$ de $\mathbb{R}^d$.
3. une face plane d'aire non nulle est une $2-cellule$ de $\mathbb{R}^d$.
4. une face triangulaire d'aire non nulle est un $2-simplexe$ de $\mathbb{R}^d$.
5. un polyèdre de volume non nul est une $3-cellule$ de $\mathbb{R}^d$.
6. un tétraèdre de volume non nul est un $3-simplexe$ de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2 *On appelle k-complexe cellulaire de $\mathbb{R}^d$ tout ensemble formé de $p-cellules$ avec $p \leq k$.*

Un exemple de complexe cellulaire est illustré en figure 2.1.

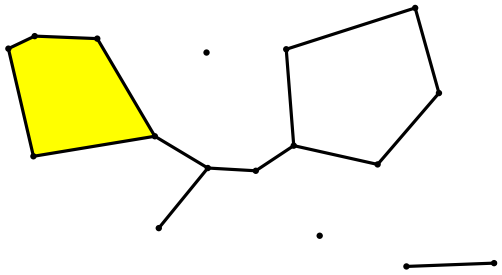


FIG. 2.1 – *Un 3-complexe de $\mathbb{R}^2$ formé de faces, arêtes et points.*

On définit à présent les notions d'adjacence et d'incidence entre les éléments cellulaires. La figure 2.2 illustre l'adjacence de deux 3-cellules et de k 2-cellules respectivement, par une face et par une arête.

Définition 3 *Deux k-cellules A et B sont adjacentes par une p-cellule C (ou $p-adjacentes$) si C appartient aux deux cellules A et B.*

Définition 4 *Une p-cellule A est incidente à une k-cellule B ($p \leq k$) si B est une face de A.*

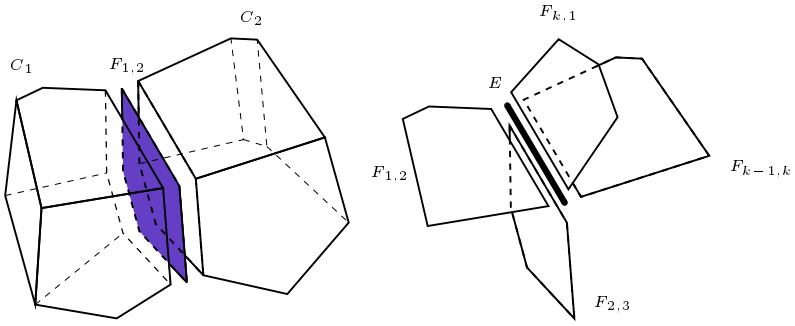


FIG. 2.2 – *Deux 3-cellules C_1 et C_2 sont adjacentes par la face $F_{1,2}$ (figure de gauche). Les faces $F_{i,j}$ sont adjacentes par l'arête E (figure de droite). L'arête E est incidente à toutes les faces $F_{i,j}$.*

2.2 Partition pour un ensemble ponctuel

On note E^d l'espace euclidien (ou l'espace métrique) de dimension d, et S un ensemble particulier de points de E^d, que l'on appellera sites pour les distinguer des autres points de E^d. On note par δ la distance sur E^d. Nous allons dans cette section construire des structures géométriques basées sur l'ensemble S, qui partitionne l'espace E^d selon des critères de proximité liés aux sites de S.

2.2.1 Diagramme de Voronoï

Les diagrammes de Voronoï sont des structures très intéressantes dès que la notion de proximité entre en jeu. Les définitions et les propriétés principales sont décrites ici, dans le cas où S est un ensemble de points associé à une métrique euclidienne (δ représente la distance euclidienne).

Définition 5 *Soit S un ensemble de sites de l'espace E^d. La* **cellule de Voronoï** *d'un site particulier $p \in S$ est la région formée de tous les points de E^d plus proches de p que des autres sites de S.*

On notera par $Vor(p) = \{x \in E^d, \forall q \in S \setminus p, \delta(x,p) \leq \delta(x,q)\}$ la région ou cellule de Voronoï du site p. La cellule $Vor(p)$ est l'intersection des demi-espaces contenant p et limités par les hyperplans médiateurs des segments $[p,q]$ avec $q \in S$ et $q \neq p$.

Définition 6 *On appelle diagramme de Voronoï de S, noté $Vor(S)$, l'ensemble des cellules $Vor(p)$ $p \in S$ et de leurs faces. $Vor(S)$ forme une partition de E^d.*

Un exemple de diagramme de Voronoï de points en métrique euclidienne est donné en figure 2.3.

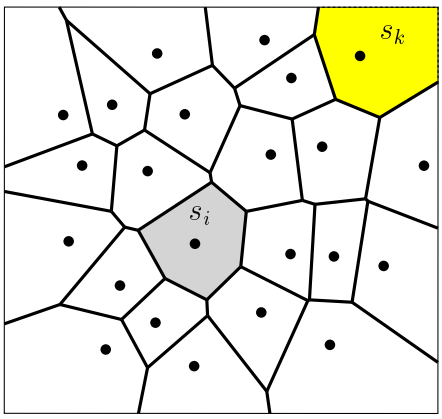


FIG. 2.3 – *Diagramme de Voronoï de points dans le plan. Les régions grises sont les cellules de s_i (finie) et s_k (infinie).*

Définition 7 *On dit que S vérifie l'hypothèse de position générale PG, si $d+2$ sites quelconques de S ne sont pas cosphériques.*

Quelques propriétées intéressantes des diagrammes de Voronoï :

- le diagramme de Voronoï est formé de polytopes convexes. Les sites de S qui sont sur l'enveloppe convexe de S forment les cellules de Voronoï infinies. Les sites strictement à l'intérieur de l'enveloppe convexe forment les cellules finies et convexes du diagramme.
- la face commune entre deux cellules adjacentes de centre x_i et x_j a pour support le plan médiateur du segment $[x_i,x_j]$ et représente les points de E^d à égale distance de x_i et x_j.

Si de plus, S vérifie l'hypothèse PG alors :

- les sommets du diagramme $Vor(S)$ sont les centres de sphères passant par $d+1$ sites exactement.
- En 2D, pour un ensemble S de n sites, la partition $Vor(S)$ est formée de n cellules, $2n-5$ sommets et $3n-6$ arêtes.
- En 3D, le diagramme de Voronoï est une partition de l'espace en polyèdres convexes. Les sommets de ce diagramme sont à égale distance et plus proches de quatre sites, les arêtes sont équidistantes à trois sites et les faces médiatrices à deux sites.

2.2.2 Triangulation de Delaunay

Définition 8 *Soit S un ensemble de sites de l'espace E^d, on appelle simplexe de Delaunay tout p-simplexe $[q_0,...,q_p]$ ($q_i \in S$) pouvant être circonscrit par une boule qui ne contient pas de points de S en son intérieur.*

On appelle $Del(S)$ le complexe formé des simplexes de Delaunay de l'ensemble S (points, arêtes, faces,...). Sous l'hypothèse de position générale PG, le complexe $Del(S)$ est une triangulation $DT(S)$ formée de triangles en 2D ou de tétraèdres en 3D, dont les sommets sont les sites de S (voir figure 2.4). Les triangulations de Delaunay ont de multiples propriétés très intéressantes :

- 1) La triangulation de Delaunay est le graphe dual du diagramme de Voronoï : deux sites de S sont reliés dans la triangulation si et seulement si leurs cellules sont adjacentes dans le diagramme de Voronoï.
- 2) En 2D, $DT(S)$ est parmi toutes les triangulations possibles de S, celle qui maximise l'angle minimum de ces triangles. En d'autres termes c'est celle dont les triangles sont les plus équilatéraux possibles. En pratique ce résultat est très apprécié pour le calcul d'éléments finis, car on obtient des triangles moins plats que pour les autres triangulations.
- 3) Les faces extérieures à la triangulation de Delaunay de S forment la frontière de l'enveloppe convexe de S.

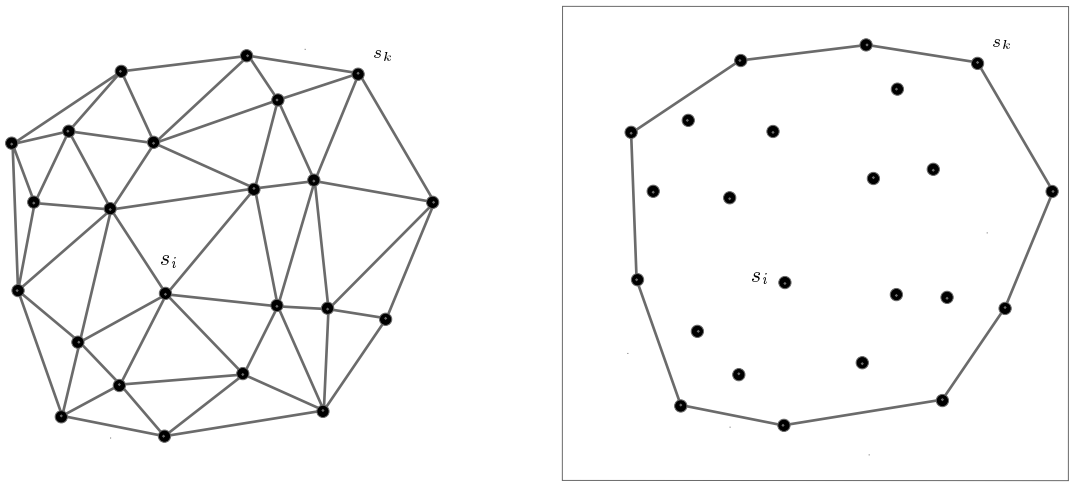


FIG. 2.4 – *Triangulation de Delaunay de points dans le plan et enveloppe convexe des points. Le sommet s_i qui correspond à une cellule finie dans Vor, est à l'intérieur de l'enveloppe convexe. Et s_k qui correspond à une cellule infinie, est sur l'enveloppe convexe.*

2.2.3 Dualité Delaunay/Voronoï

Soit $DT(S)$ et $Vor(S)$ respectivement, la triangulation de Delaunay et le diagramme de Voronoï d'un ensemble de sites S qui vérifie la propriété PG. En 2D, la dualité est illustrée en figure 2.5.

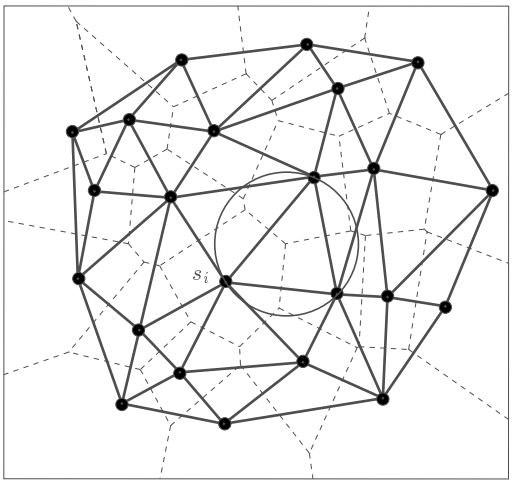


FIG. 2.5 – *Dualité Delaunay/Voronoï.*

La dualité de $DT(S)$ et $Vor(S)$ dans E^3 se traduit sur leurs éléments de la façon suivante :

- un sommet de $DT(S)$ correspond à une cellule (polyèdre) de $Vor(S)$.
- une arête de $DT(S)$ correspond à une face de $Vor(S)$.
- une face de $DT(S)$ correspond à une arête de $Vor(S)$.
- un tétraèdre de $DT(S)$ correspond à un sommet de $Vor(S)$.

De manière générale une q-cellule de Delaunay correspond à une $(d-q)$-cellule de Voronoï dans E^d.

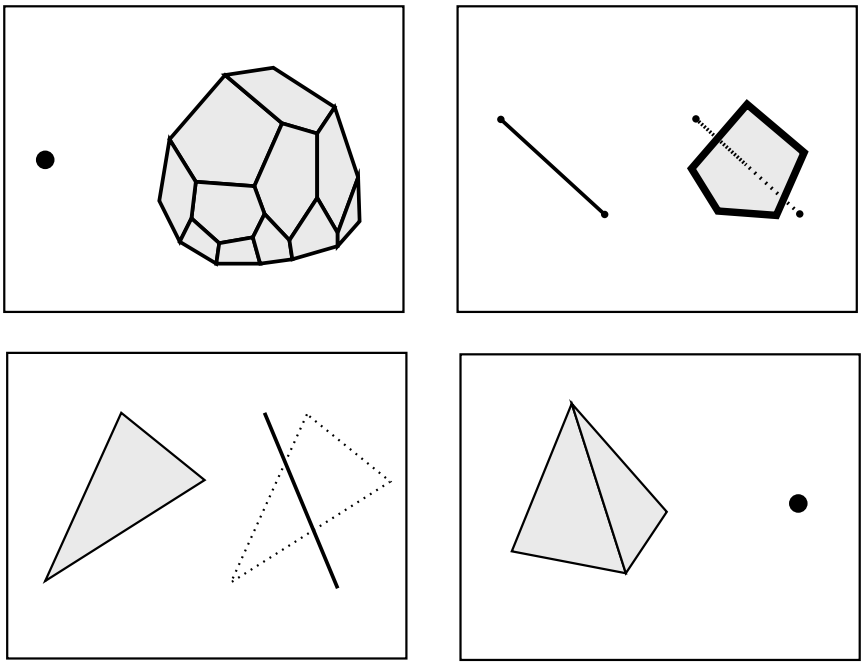


FIG. 2.6 – *Dualité en 3D des simplexes de Delaunay et Voronoï.*

Une conséquence directe de la dualité est que la construction et la structure de données utilisées pour les diagrammes de Voronoï, peuvent se déduire de celles de la triangulation de Delaunay. Parcourir une triangulation est souvent plus simple que de parcourir un complexe quelconque. En effet les simplexes d'une triangulation ont un nombre fixe de voisins (trois en 2D et quatre en 3D) alors que pour un complexe général le nombre de voisins est variable. Ainsi l'adjacence dans $Vor(S)$ de cellules par une face, ou de faces par une arête, se déduit facilement des incidences de sommets et arêtes dans $DT(S)$.

2.2.4 Algorithmes de construction

Les algorithmes de construction de ces structures géométriques sont divers et variés. Nous noterons néanmoins trois classes principales de méthodes (méthodes incrémentales, méthodes "divide and conquer", et méthodes de balayage). Des comparaisons et des informations supplémentaires sont disponibles dans [Des96] pour les triangulations.

- **Algorithmes "Divide and Conquer"**
  Les algorithmes du type "diviser pour régner" (voir [SH75]) consistent à diviser le problème général en sous-problèmes de plus petites tailles. La

division se fait de façon récursive jusqu'à obtenir des problèmes simples à résoudre (lorsqu'il ne reste plus que trois points par exemple). Chaque sous problème est traité de façon indépendante, et une étape de fusion est nécessaire pour unifier les sous-problèmes.

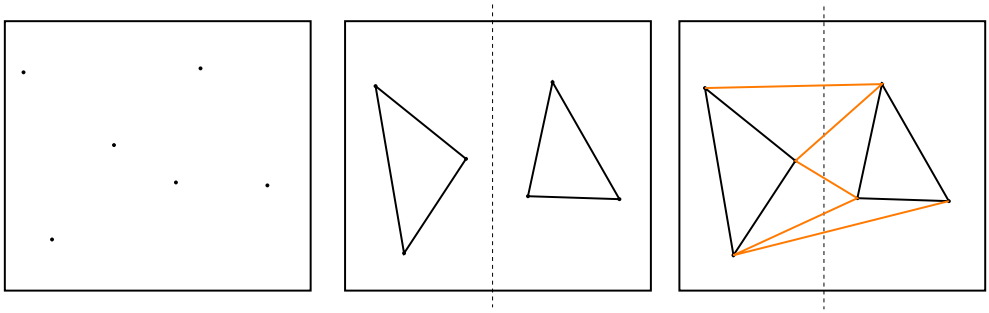


FIG. 2.7 – *Illustration d'un algorithme de triangulation de type diviser pour régner.*

- **Algorithmes de balayage**
  Ces algorithmes construisent les structures géométriques en balayant l'espace des données par une droite ou un plan suivant un axe privilégié, et mettent à jour la structure à chaque fois qu'un point est rencontré. Fortune [For86] a adapté cette méthode pour calculer des diagrammes de Voronoï dans le plan. Cet algorithme n'a pas été généralisé au cas tridimensionnel.
- **Algorithmes incrémentaux**
  Les algorithmes incrémentaux consistent à insérer les sites, les uns après les autres, et à modifier la structure à chaque itération. La modification ne se fait que de façon locale. Pour la triangulation de Delaunay incrémentale, lors de l'insertion d'un point p, seuls les triangles dit "en conflit" avec p sont modifiés.

Définition 9 *On dira qu'un triangle T est en conflit avec un site p, si p se trouve à l'intérieur du cercle circonscrit à T.*

Soit DT_t la triangulation de Delaunay à l'instant t. Lorsqu'on insère un point p à l'étape $t+1$, on recherche dans DT_t l'ensemble des triangles en conflit avec p. Celui-ci forme une région connexe $R_t(p)$ contenant p (voir figure 2.8).

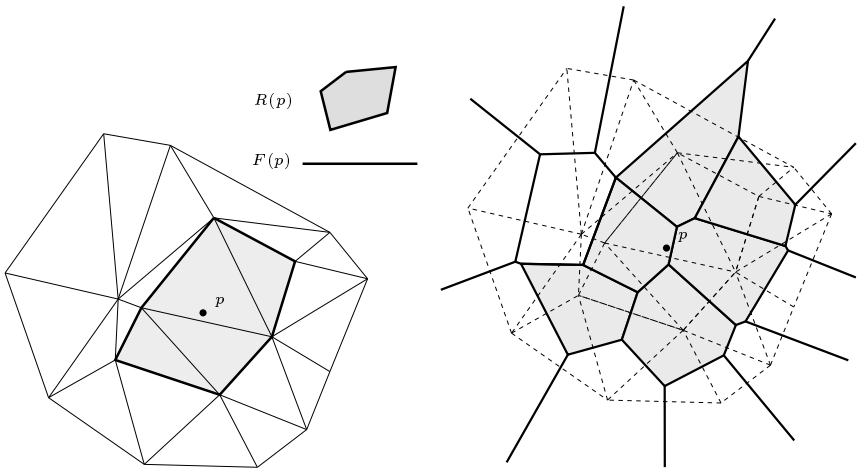


FIG. 2.8 – *Simplexes de Delaunay en conflit avec p (région grisée $R(p)$) et la région duale.*

La région $R(p)$ est la seule à être modifiée dans la nouvelle triangulation DT_{t+1} : on forme les nouveaux triangles à partir d'une face sur le bord de $R_t(p)$ et du point p. On en déduit de même la nouvelle cellule de Voronoï créée par p (voir figure 2.9 à droite).

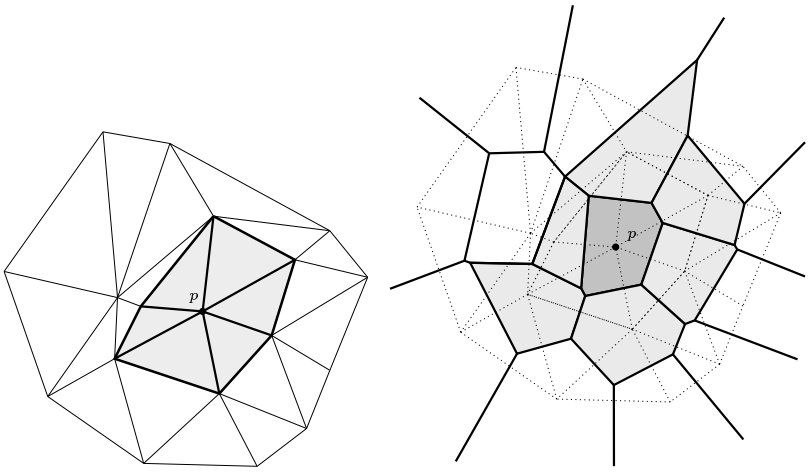


FIG. 2.9 – *Triangulation de $R(p)$ et nouvelle cellule de Voronoï $Vor(p)$ (en gris foncé).*

Remarque: les algorithmes incrémentaux permettent aussi de retirer des points de la triangulation. C'est une opération locale et dynamique, inverse de l'insertion : on crée la région $R(p)$ des triangles contenant p et on retriangule $R(p)$ après élimination de p.

Ces méthodes sont en outre beaucoup plus simples à implémenter que les précédentes.

2.2.5 Dégénérescences

Les cas dégénérés représentent des configurations de données bien précises qui empêchent un algorithme géométrique de prendre une décision, ou de réaliser un calcul précis. Ces configurations imposent une construction spéciale, et sont classées de la façon suivante :

- $n > 2$ points confondus.
- $n > 2$ premiers points insérés sont colinéaires ou $n > 3$ premiers points sont coplanaires : on ne peut pas déterminer le centre du cercle ou de la sphère circonscrite.
- $n > d+1$ points cocycliques ou cosphériques : il n'y a plus unicité de la triangulation. Il y a plusieurs triangulations valides (voir figure 2.10).

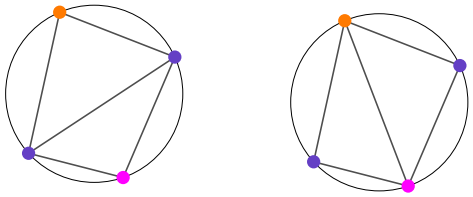


FIG. 2.10 – *Quatre points cocycliques en 2D : plusieurs triangulations de ces points sont possibles.*

Dans le cas d'une construction incrémentale d'une partition, il existe des solutions pour traiter ou contourner les dégénérescences :

- refuser le point : si l'ensemble des points de données est suffisamment dense.
- retarder son insertion : l'insertion d'un point "dégénéré" ne conduit plus forcément, dans une tentative ultérieure, à une dégénérescence sauf si tous les points de S sont alignés (cas 2D) ou coplanaires (cas 3D).
- perturber les coordonnées de ce point : c'est une solution qui permet de traiter le point directement (au moment de son insertion). Par contre la garantie d'obtenir toujours la même triangulation pour ce même ensemble de points S n'est plus assurée.

2.2.6 Autres métriques

Les diagrammes de Voronoï se généralisent aussi à d'autres métriques. On pourra consulter [BY95] pour de plus amples détails.

Définition 10 *On appelle métrique L_k dans un espace de dimension d, la métrique définie par la distance suivante :*

$$d_k(p,q) = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{d} |p_i - q_i|^k}$$

La métrique L_2 est la métrique euclidienne classique.

On peut aussi construire des diagrammes en fonction d'une métrique locale. Les diagrammes de puissance [Aur87] permettent d'affecter un poids différent à chaque site, et ainsi de donner à chaque site une influence différente sur la partition totale. Ces diagrammes sont utilisés par Edelsbrunner pour construire des $\alpha - shape$ à poids multiples [Ede92]. Cette construction est efficace lorsque la densité des points de données n'est pas la même sur tout l'objet.

2.3 Partitions pour un ensemble non ponctuel

Pour les besoins de reconstruction dans les domaines d'applications (géologie, médecine), il est nécessaire de pouvoir construire des partitions à partir de données non exclusivement ponctuelles : segments, lignes polygonales, contours, ou surfaces.

La majeure partie des algorithmes décrits précédemment se généralise à des données non ponctuelles. On sait construire par exemple, des diagrammes de Voronoï de segments [BMS94, Yap87] ou de polygones [AGSS89, KL96]. Néanmoins, ces constructions sont souvent plus difficiles que pour des points, et conduisent à des algorithmes différents pour chaque type de données.

Nous préférerons approcher les données G initiales par un ensemble de points G_d, et déduire une partition de G de celle de G_d ($Vor(G_d)$ ou $DT(G_d)$). Nous nous appliquerons à définir et à évaluer la qualité d'une discrétisation G_d et de sa partition associée. Nous nous intéresserons principalement à la conformité de $Vor(G_d)$ ou de $DT(G_d)$ par rapport à G.

Nous nous restreindrons aux cas 2D et 3D, et au cas où G est linéaire (c'est-à-dire que les éléments de G sont des points, des segments et des faces polygonales planes). Pour les triangulations la notion de conformité est définie et détaillée dans la section 2.3.1. Dans la partie 2.3.2 cette notion est étendue aux diagrammes de Voronoï.

2.3.1 Triangulations conformes d'objets linéaires

Le problème que nous souhaitons résoudre est le suivant : on dispose d'un ensemble G initial composé de points, de segments et de faces. On suppose que les éléments de G ne se coupent pas, sauf éventuellement sur leurs bords. A partir de G, on souhaite réaliser une triangulation de Delaunay d'un ensemble de points G_d, qui "contienne" G.

Définition 11 *On dira qu'un ensemble G d'objets linéaires est contenu dans un complexe τ (ou que τ est conforme à G), si $\forall x \in G$ on a :*

- *soit $x \in \tau$*
- *soit $\exists y_1,...,y_k \in \tau$ tel que $x = \bigcup_{i=1}^{k} y_i$*

En d'autres termes, τ est conforme à G si tous les éléments de G sont dans τ comme l'union d'un ou plusieurs éléments de τ. Dans le cas où τ est la triangulation de Delaunay de G_d, il ne suffit pas comme le montre la figure 2.11, de prendre pour G_d les points de G et les sommets des faces et segments de G, car alors τ ne "contient" pas, en général, tous les éléments de G.

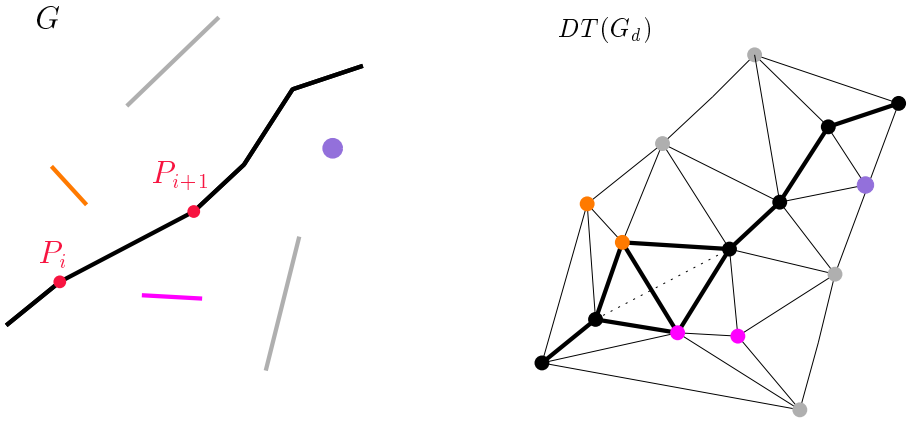


FIG. 2.11 – *Les données 2D initiales G sont composées de points et d'arêtes. La triangulation de Delaunay des points et extrémités de G ne contient pas toutes les arêtes de G (en l'occurence $[P_i,P_{i+1}]$ n'est pas dans $DT(G_d)$).*

2.3.1.1 Cas 2D

En 2D, G est formé de points et de segments. Pour construire une triangulation de Delaunay basée sur G nous nous basons sur la définition 8 reformulée ici pour le cas 2D : un segment $e \in G$ est contenu dans la triangulation de Delaunay de G s'il existe un disque passant par les extrémités de e ne contenant pas d'autre site ou extrémité de G.

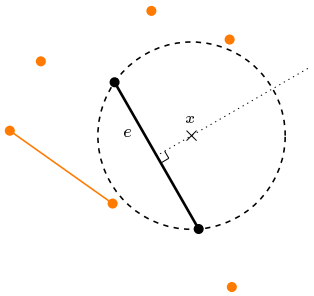


FIG. 2.12 – *L'arête e est de Delaunay car il existe un disque vide (en pointillés), passant par les extrémités de e, et de centre x sur la médiatrice de e.*

Nous présentons plusieurs solutions possibles, pour obtenir une triangulation conforme à G :

A) Triangulations adaptées à un terme de distance

Amenta et al pour leur algorithme de reconstruction [ABE97] ont démontré, sous des conditions de densité locale, qu'une certaine triangulation de Delaunay basée sur G, comprend tous les éléments de G. Quelques définitions sont nécessaires.

Définition 12 *On appelle LFS en un point p sur une courbe G, $LFS_G(p)$, la distance euclidienne de p à l'axe médian de G; l'axe médian d'un objet G étant le lieu des points de $\mathbb{R}^2$ à égale distance de plusieurs points différents de G.*

Définition 13 *Un ensemble de points $E \subset G$ est un r-échantillon d'une surface S, si $\forall p \in G$ on a $d(p,E) \leq r * LFS_G(p)$.*

Les auteurs prouvent dans [ABE97] la propriété suivante :

Propriété 1 *Si G_r est un r-échantillon de G dans le plan avec $r \leq 1$, alors la triangulation de Delaunay $DT(G_r)$ contient une arête pour toute paire de points de G_r consécutifs sur G.*

En d'autres termes, $DT(G_r)$ est conforme à G pour $r \leq 1$. Lorsque l'axe médian n'est pas connu, ou ne se déduit pas facilement de G, Amenta suggère d'approcher l'axe médian par le diagramme de Voronoï de points sur G avec une forte densité (voir aussi [Att97, Att95] pour le calcul d'axes médians à partir du diagramme de Voronoï). Ce qui est intéressant dans cette méthode, c'est qu'on peut trouver à partir d'un critère sur la distance des objets de G, un "bon" échantillon de G qui garantie la conformité pour Delaunay. Néanmoins, le nombre de points

insérés est souvent important, et non utile dans la plupart des cas (voir figure 2.13). La propriété est suffisante, mais pas nécessaire.

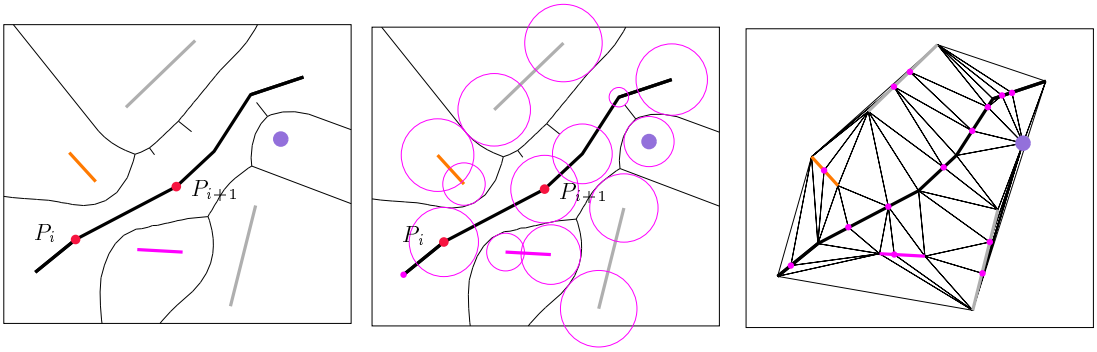


FIG. 2.13 – *Axe médian de G. Un 1-échantillon de G et sa triangulation de Delaunay (conforme à G).*

B) Triangulations contraintes

La triangulation de Delaunay contrainte basée sur G, est la triangulation des sommets et extrémités de G, contrainte par les arêtes de G (on force les arêtes à faire partie de DT(G)). Elle n'est pas en général une triangulation de Delaunay (voir figure 2.14).

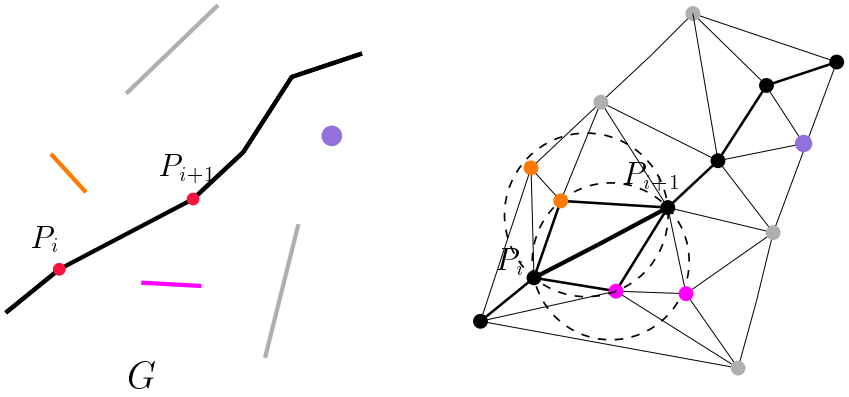


FIG. 2.14 – *Triangulation de Delaunay contrainte par les données initiales (en gras sur le dessin). Les cercles circonscrits aux triangles peuvent contenir d'autres points (cercles en pointillés par exemple).*

La triangulation de Delaunay contrainte n'a pas encore été étendue aux dimensions supérieures à deux. En effet, sans ajout de nouveaux points, certains polyèdres de dimension $d \geq 3$ ne sont pas triangulables.

C) Triangulations dynamiques avec ajout de points

Pour construire une triangulation $DT(G_d)$ conforme à G, contrairement aux triangulations contraintes, on s'autorise à ajouter de nouveaux points (souvent appelés points de Steiner). Ces points sont insérés sur les arêtes de G, pour affiner la triangulation et garantir que tous les éléments de G sont compris dans la triangulation.

Les applications et travaux dans ce domaine sont relativement récents et les résultats théoriques sont encore peu nombreux, surtout dans le cas tridimensionnel. Néanmoins, Edelsbrunner et Tan ont démontré dans [ET92] une borne supérieure sur le nombre de points à insérer dans le cas 2D. Pour un ensemble G composé de n points et m segments il existe un ensemble G_d de $O(m^2n)$ points, tel que la triangulation de Delaunay $DT(G_d)$ de l'ensemble G_d est conforme à G. En pratique, cette borne est loin d'être nécessaire.

Des méthodes simples dues à Boissonnat [Boi88a], Ruppert [Rup93] ou Shewchuk [She96] consistent à insérer un point I sur chaque segment "accroché". Un segment "accroché" pour Shewchuk, est un segment dont le cercle centré en I (son milieu), contient un autre point ou un autre segment de G. Un segment est plus généralement dit "accroché", s'il ne vérifie pas la propriété de Delaunay (propriété 8).

On construit une liste L de toutes les arêtes de G. Chaque segment "accroché" est coupé en plusieurs petits segments qui sont rajoutés dans la liste L. On itère l'opération tant qu'il y a des segments "accrochés" dans L (voir figure 2.15). La borne théorique sur le nombre de points à insérer est très grande, mais en pratique la méthode est très performante.

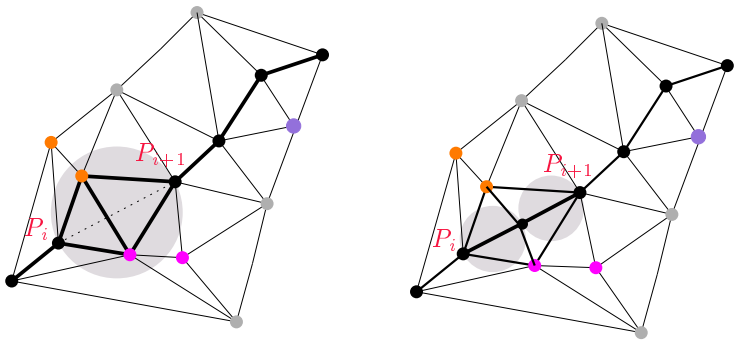


FIG. 2.15 – *Triangulation de Delaunay des extrémités de G avec un segment* $[P_i,P_{i+1}]$ *accroché. Triangulation de Delaunay conforme, de l'ensemble G après insertion d'un point sur* $[P_i,P_{i+1}]$. *En effet les deux nouveaux segments ne sont plus accrochés.*

Le grand intérêt de ce type de méthode par rapport aux méthodes précédentes est sa simplicité de mise en œuvre.

2.3.1.2 Cas 3D

Pour déterminer si une face 3D est de Delaunay on se base sur la définition 8 qui nous donne le critère suivant : une face $f \in G$ est contenue dans la triangulation 3D de Delaunay de G s'il existe une boule passant par les extrémités de f ne contenant pas d'autre point, arête ou face de G.

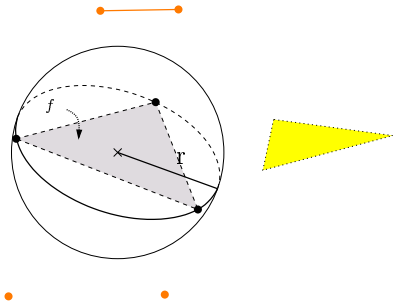


FIG. 2.16 – *La face f est de Delaunay car il existe une sphère vide passant par les extrémités de f.*

Remarque : si une face f est de Delaunay alors ses arêtes sont toutes de Delaunay. Par contre la réciproque n'est pas vraie, en général.

On opère de la même façon que dans le cas 2D, en itérant sur une liste L des faces et arêtes de G. En pratique on itère d'abord sur les arêtes de G, car malgré la remarque précédente, on élimine une grande partie des faces "accrochées" en ajoutant des points sur les arêtes "accrochées".

2.3.2 Diagramme de Voronoï généralisé

On introduit ici une définition analogue de la conformité (voir section 2.3.1) pour les diagrammes de Voronoï d'objets linéaires. Soit un ensemble G et G_d une discrétisation de G contenant au moins les sommets de G. Soit $Vor(G_d)$ le diagramme de Voronoï des points de G_d. On appellera e_d l'ensemble des points de G_d situés sur l'élément e de G.

Définition 14 *On dira que la partition $Vor(G_d)$ est conforme à G si toute arête ou face $e \in G$ est contenue dans l'union des cellules des points de e_d dans $Vor(G_d)$.*

Il ne suffit pas, comme pourrait le laisser penser la dualité entre Delaunay et Voronoï, de construire une triangulation conforme de G pour en déduire

une partition de Voronoï conforme (voir illustration en figure 2.17). En effet, les deux cellules $Vor(v_1)$ et $Vor(v_2)$ formées par les extrémités du segment e_1 sont bien adjacentes, c'est-à-dire qu'une arête de Delaunay relie les extrémités, mais les cellules ne contiennent pas entièrement e_1.

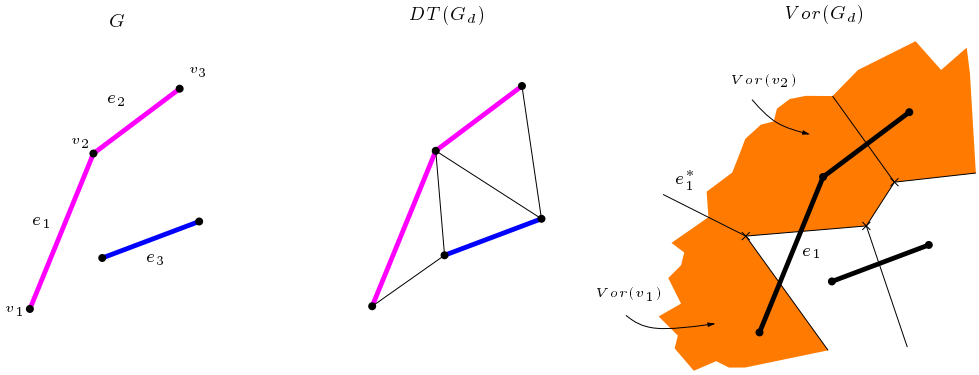


FIG. 2.17 – *Partition $Vor(G_d)$ non conforme à G formée de trois segments e_1, e_2 et e_3, alors que $DT(G_D)$ est conforme à G.*

Définition 15 *Pour toute arête ou face $e \in G$ on appelle e^* le simplexe dual de e dans $Vor(G_d)$ défini comme suit :*

1. *si e est une arête de sommets v_1 et v_2, alors e^* est la face (en 3D) ou l'arête (en 2D) incidente à $Vor(v_1)$ et $Vor(v_2)$.*
2. *en 3D, si e est une face de sommets v_1, v_2 et v_3, alors e^* est l'arête incidente à $Vor(v_1)$, $Vor(v_2)$ et $Vor(v_3)$.*

Propriété 2 *La partition $Vor(G_d)$ est conforme à G si et seulement si $\forall e \in G$, e coupe son simplexe dual e^*.*

Sur la figure 2.17 e_1^* et e_1 ne se coupent pas, on insère alors un nouveau point sur e_1 (voir figure 2.18).

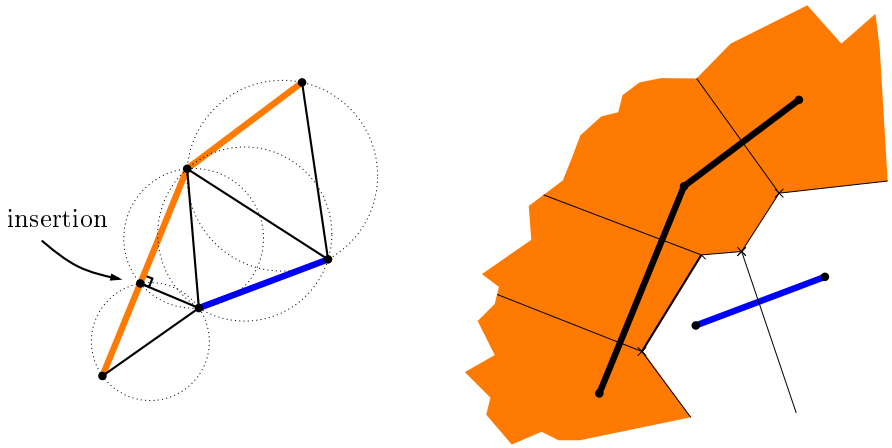


FIG. 2.18 – *Partition $Vor(G_d)$ conforme à G après insertion d'un nouveau point.*

On construit un graphe de Voronoï conforme de façon itérative, en insérant des points sur $e \in G$ si :

1. e ne vérifie pas la propriété 8 2D ou en 3D.
2. e ne vérifie pas la propriété 2.

Cette construction est très utile et peut servir à garantir que le squelette d'un objet polyédrique est bien à l'intérieur de l'objet ([Att95, BG93b]). Nous l'utilisons dans la méthode de reconstruction du chapitre 3, pour garantir que les données de départ sont bien dans l'objet reconstruit final.

Chapitre 3

Reconstruction à base de diagrammes de Voronoï

3.1 Introduction

3.1.1 Problème

On dispose d'un ensemble de données géométriques et topologiques d'une scène géologique S (voir section 3.1.2). Cet ensemble ne décrit pas la scène de façon complète, mais à partir de sa géométrie partielle, on veut déduire une interprétation complète de la scène, et reconstruire un modèle tridimensionnel à partir des données.

En outre nous souhaitons pouvoir répondre aux interrogations suivantes :

- quelles sont les formations géologiques présentes dans le modèle ?
- quelle est la géométrie des formations et interfaces géologiques ?
- quelle est la topologie de la scène ?
- si je suis placé en un point quelconque M de l'espace, dans quel volume (objet) de la scène S suis-je ?

Ceci nécessite une interpolation des données initiales, dans les zones vides de données. La méthode décrite dans ce chapitre utilise les diagrammes de Voronoï introduits dans le chapitre 2.

3.1.2 Les données initiales

Le géologue pour construire un modèle, dispose de données partielles, irrégulières et hétérogènes (voir coupe partielle en figure 3.1) parmi les différents objets géologiques suivants : les formations géologiques, les interfaces entre formations et les failles (ou contacts anormaux). Les différentes formes de données avec lesquelles il peut démarrer la modélisation sont généralement :

- le M.N.T (modèle numérique de terrain) qui est souvent sous la forme d'une grille régulière de points avec une élévation.
- une carte géologique, qui représente sur une carte planaire, les différentes entités géologiques afleurantes.
- des coupes géologiques, qui sont des images de la géologie du sous-sol par un plan particulier (vertical en général).
- informations locales : sondages, tunnels, ... qui décrivent la géologie sur une ligne particulière.

L'algorithme développé dans ce chapitre doit donc être capable de considérer une grande variété de données, pour décrire l'ensemble de ces informa-

tions. Néanmoins nous supposerons que ces données d'entrées sont composées de trois types d'informations :

- une composante géométrique : Les données géométriques sont des points, des contours, des lignes et surfaces .... Nous nous restreindrons à des objets géométriques linéaires pour simplifier la description.
- une description topologique : Les données topologiques sont essentiellement de trois types. Une donnée est soit à l'intérieur d'un objet X, soit sur le bord d'un objet, ou bien sur l'interface de deux objets X et Y.
- une caractéristique de l'objet : Les caractéristiques représentent les informations sur la nature des données : formation géologique, âge, composition, densité, etc ....

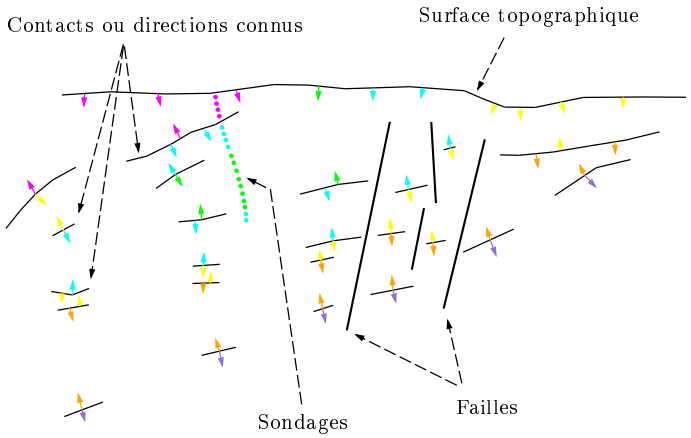


FIG. 3.1 – *Exemple de données sur une coupe géologique 2D : les données initiales sont composées de portions de contours (interfaces et failles) et de points de données (sondages).*

3.1.3 Méthode de reconstruction : vue générale

Soit D l'ensemble des données géométriques d'une scène S qui est composée de plusieurs objets. Les objets géométriques sont hétérogènes et composés de points, de lignes, ou de surfaces représentant le bord ou l'intérieur d'objets géologiques. Pour distinguer les différents objets dans l'algorithme de reconstruction nous leur attribuons à chacun une ou plusieurs couleurs. La couleur représente par exemple la nature des formations géologiques, une caractéristique géophysique de l'objet, la densité d'un corps quelconque ou encore dans le cas de données médicales, l'absorption d'un corps soumis aux rayons X.

Les différentes étapes de la méthode sont décrites ici de façon générale. Elles seront détaillées dans les parties 3.2.1, 3.3, 4.1. L'algorithme est aussi décrit dans les publications [Nul95, BN96a, BN96b] pour la version 2D et [BN98, NB98] pour la généralisation 3D de la méthode.

Algorithme général :

- Etape 1: discrétisation des données hétérogènes D initiales en l'ensemble discret D_d formé de points colorés et conforme à D (au sens décrit dans 2.3.2).
- Etape 2: construction du diagramme de Voronoï de D_d et partition de l'espace en régions de couleurs $Vor(D_d) = \bigcup_i R_i$. Cette partition nous fournit une première approximation de la scène géologique, et surtout une structure topologique de notre modèle.
- Etape 3: déformation lisse de $Vor(D_d)$. Les volumes R_i sont déformés, de façon à respecter des contraintes géométriques lisses (courbures et tensions), tout en respectant la topologie initiale de $Vor(D_d)$.
- Etape particulière: insertion des discontinuités (failles et contacts anormaux). Cette étape est discutée dans la section 4.1.

Résultat : Le résultat final de la reconstruction est une partition de l'espace de travail, en volumes polyédriques représentant les objets de la scène. Des reconstructions de modèles géologiques réels sont illustrées dans le chapitre 4.4.

3.2 "Régions" de Voronoï

Cette partie détaille les étapes 2 et 1 de la méthode de reconstruction, et constitue l'idée principale de notre méthode : assembler les objets géologiques selon leur proximité.

3.2.1 Points de couleurs

On suppose ici que les données sont représentées par un ensemble D_{color} de sites $M_i(x_i,y_i,z_i,c_i)$ ayant, outre les coordonnées x, y et z, un attribut supplémentaire c qui désigne la couleur de l'objet représenté (voir figure 3.3). On souhaite à partir de cet ensemble D_{color} de sites colorés interpoler tout l'espace : déterminer en chaque point $M \in \mathbb{R}^d$ la couleur de M en fonction des sites de D_{color}.

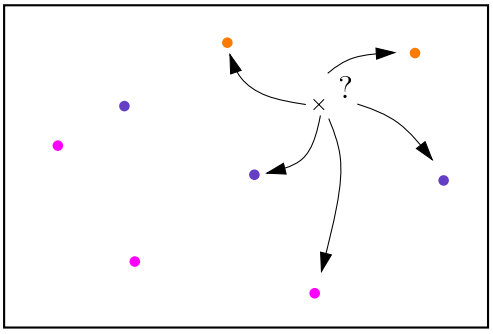


FIG. 3.2 – *Interrogation dans un modèle incomplet.*

On construit le diagramme de Voronoï $Vor(D_{color})$ des points de D_{color}. Comme à chaque cellule de Voronoï correspond une donnée initiale exactement, on en déduit la partition coloriée Vor^* avec la règle simple suivante :

Règle 1 *Toute cellule $Vor(x)$ de la partition $Vor(D_{color})$ est coloriée suivant la couleur du site $x \in D_{color}$ qui la crée.*

De ces cellules colorées on construit les régions de Voronoï :

Définition 16 *La région de Voronoï R_i de couleur c_i est l'union des cellules de Voronoï de couleur c_i.*

La région R_i forme un polyèdre qui n'est pas convexe en général, bien qu'union de cellules convexes (figure 3.3).

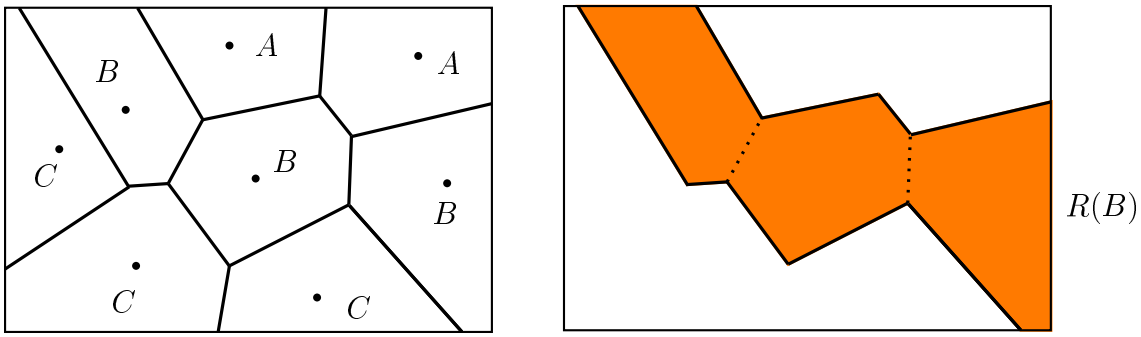


FIG. 3.3 – *Partition totale de points de couleurs* $\{A,B,C\}$ *et la région* $R(B)$.

La structure de la partition obtenue nous permet des représentations multiples de la scène :

- volumique : régions polyédriques formées d'union de polyèdres convexes.
- surfacique : interfaces formées de surfaces polygonales.

L'exemple des données 3D de la figure 3.4 comprend un ensemble de points de quatre couleurs différentes. La reconstruction finale en figure 3.4 est formée de quatre régions de couleurs R_1, R_2, R_3 et R_4. Les différents éléments géométrique et topologique de la scène, s'obtiennent par des interrogations simples de cette structure :

- le bord $\gamma(R_i)$ de la région R_i est l'ensemble des faces adjacentes à une cellule de couleur c_i et à une autre de couleur $c \neq c_i$.
- à partir des cellules élémentaires d'une région R_i de couleur c_i on peut déduire toutes les régions adjacentes à R_i. Et donc la topologie de la scène peut être entièrement déterminée.
- l'interface entre deux régions R_1 et R_2 adjacentes est l'ensemble des faces de R_1 incidentes à une cellule de couleur c_2 (figure 3.5). Cette interface est réellement partagée par R_1 et R_2 dans le modèle géométrique et dans la structure combinatoire sous-jacente.
- en 3D, l'interface entre trois régions R_1, R_2 et R_3 est une ligne brisée formée des segments incidents à au moins une cellule de couleur c_1, une de couleur c_2 et une de couleur c_3 (figure 3.5 en bas à droite).

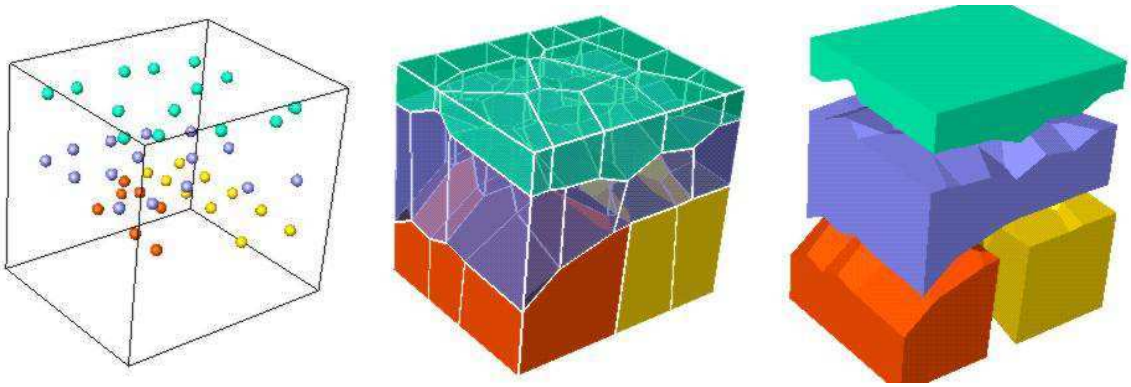


FIG. 3.4 – *Données initiales 3D. Partition de Voronoï d'une scène composée de quatre éléments de couleurs. Vue éclatée des quatre régions de Voronoï.*

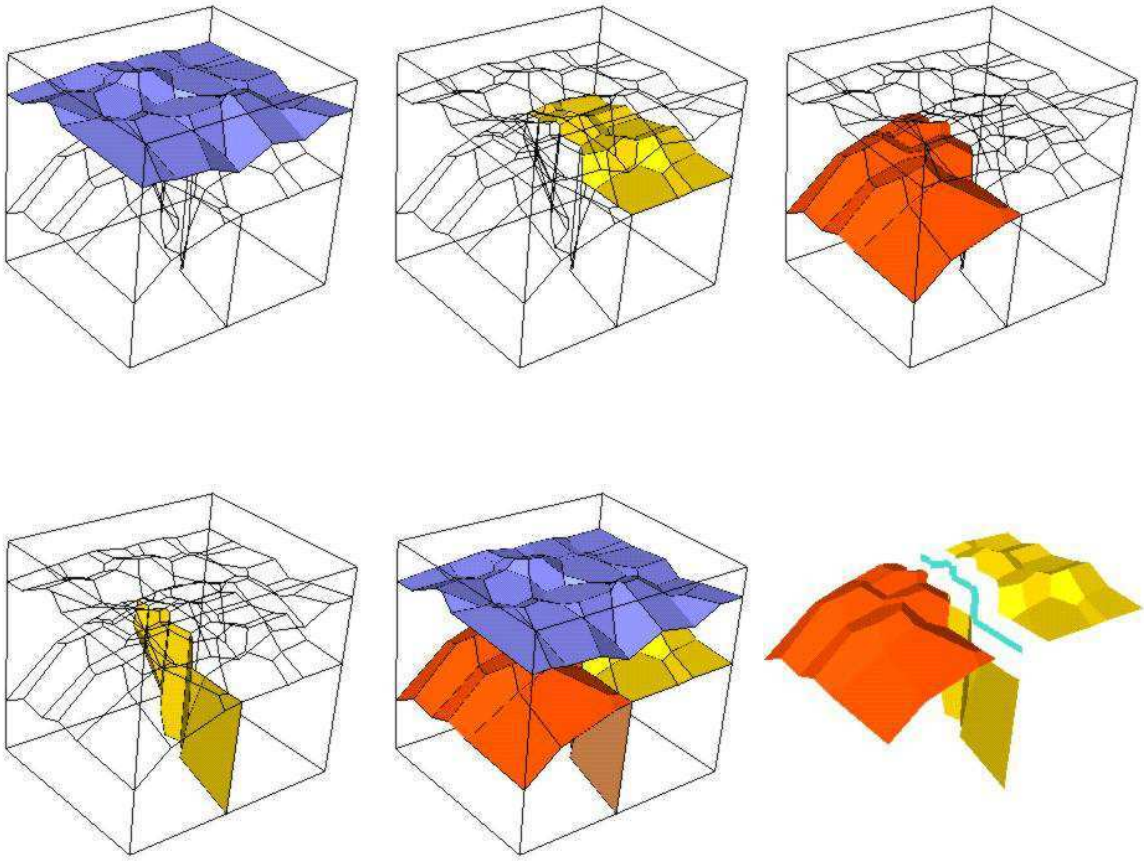


FIG. 3.5 – *Surfaces représentant l'interface entre deux régions. En bas à droite, la vue éclatée de trois interfaces 2D et l'interface 1D en commun.*

3.2.2 Régions de données non ponctuelles

Cette section présente une généralisation de la précédente. Les données géométriques dont nous disposons (dans les applications géologiques et médicales) ne sont pas des données ponctuelles en général, mais un ensemble souvent hétérogène D composé de points, lignes polygonales, contours, surfaces polygonales, etc.... Nous souhaitons trouver une partition aussi simple qu'en 3.2.1 pour décrire le modèle 3D à partir de ces données. Pour cela il faudrait construire des diagrammes de Voronoï généralisés sachant prendre en compte un grand éventail de données. Devant une telle diversité de données, et par souci de simplicité, nous préferons nous aussi discrétiser cet ensemble de données D (voir section 3.2.2.1) afin d'approcher $Vor(D)$. On pourra se reporter à [Sug93] pour une approche analogue.

3.2.2.1 Discrétisation

Soit D l'ensemble des données initiales d'une scène S composée de N objets de couleurs c_1,...,c_N. L'ensemble D est remplacé par un ensemble de points D_d conforme à D au sens décrit dans 2.3.2 (tout objet de D est représenté de façon discrète dans $Vor(D_d)$). Dans D_d nous distinguons trois catégories principales de points :

- D_1 est l'ensemble des points de D_d à l'intérieur d'un objet.
- D_2 est l'ensemble des points M de D_d sur une surface limite S entre deux objets X et Y dont on connait la normale $N_S(M)$ en ce point.
- D_3 est l'ensemble des points de D_d sur une surface limite sans information sur la normale.

Dans le cas d'un point de données p sur la frontière d'un objet ($p \in D_2$ ou $p \in D_3$), attribuer une seule couleur à p ne suffit pas à décrire la signature de ce bord. Il faut donc lui attribuer deux couleurs (les deux formations séparées) ou bien le remplacer par deux points de couleurs différentes. Nous définissons donc les règles suivantes pour l'attribution des couleurs :

Règle 2 (attribution des couleurs en un point p)

1) $p \in D_1$ à l'intérieur d'un objet X est simplement colorié selon la couleur c_X.

2) $p \in D_2$ sur l'interface e entre deux objets X et Y. Pour représenter le bord de deux objets en p on remplace p par deux nouveaux points de couleur c_X et c_Y respectivement. Ces points sont placés de part et d'autre de l'interface e (figure 3.6) suivant la normale $\vec{n}(e)$ et selon une distance ϵ.

3) pour $p \in D_3$ il faut estimer la normale en ce point et utiliser le cas 2.

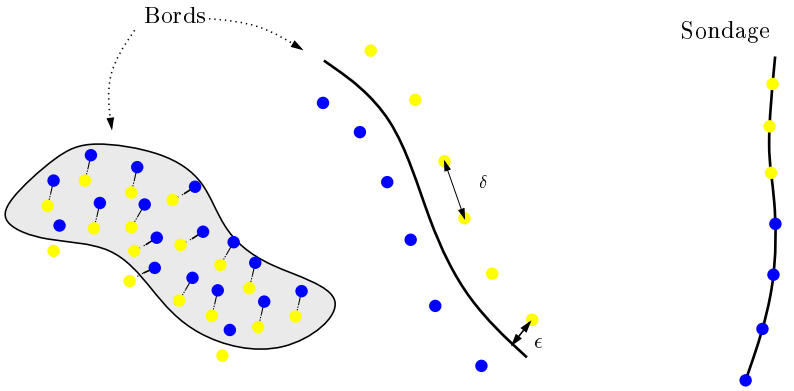


FIG. 3.6 – *Duplication (selon la normale) et discrétisation de données non ponctuelles.*

Garantir les angles des contours Pour respecter l'angle en un sommet P incident à deux objets linéaires adjacents (pour les contours par exemple) on place les points sur la sphère de centre P, de rayon ϵ (voir figure 3.7).

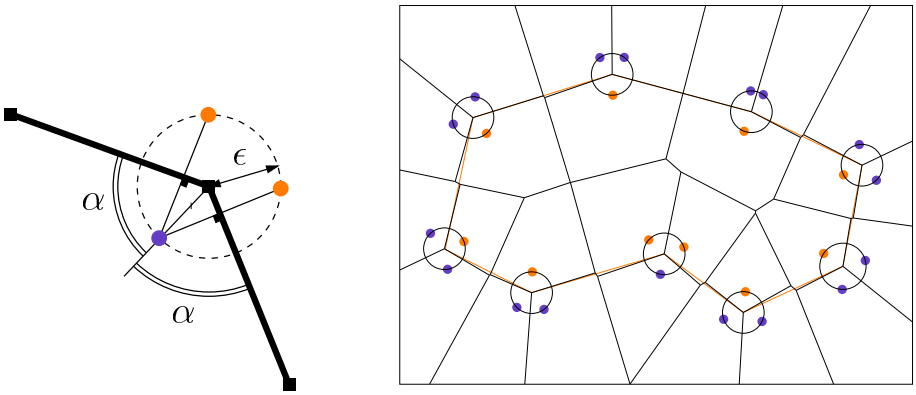


FIG. 3.7 – *Discrétisation des sommets anguleux.*

Exemples de partitions Les exemples en figures 3.8 et 3.9 illustrent des cas de fermetures classiques à partir de données de contacts.

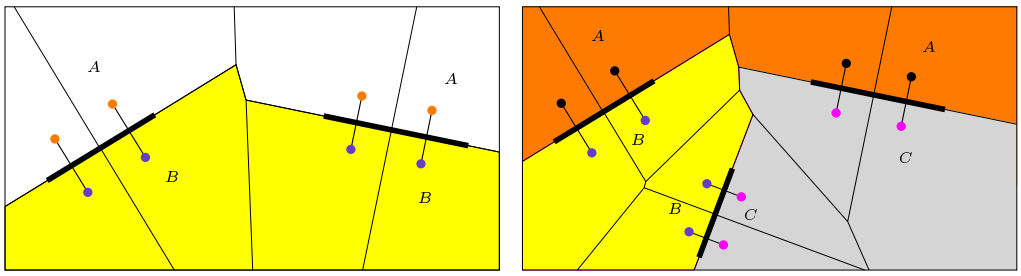


FIG. 3.8 – *Fermetures des données (données en gras) entre plusieurs interfaces.*

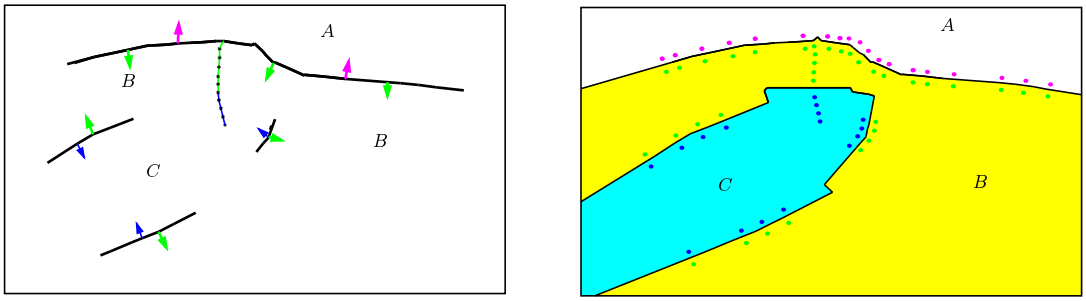


FIG. 3.9 – *Fermetures des données entre sondages et contacts.*

Pour illustrer cette discrétisation sur un cas plus complexe, reprenons les données hétérogènes de la coupe géologique de la figure 3.1. Le diagramme de Voronoï des points est construit (voir figure 3.10) et finalement une première approximation de la coupe (figure 3.11) est obtenue à partir des régions de Voronoï colorées.

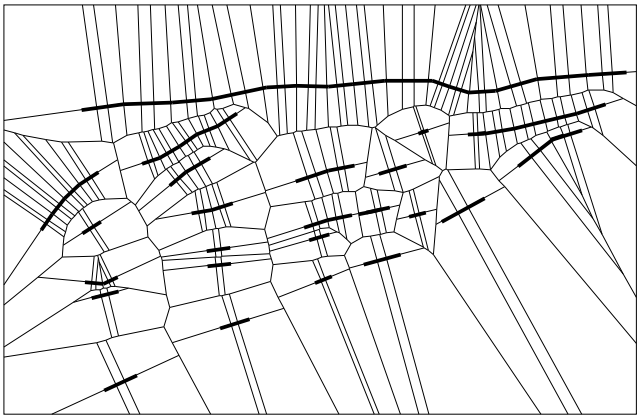


FIG. 3.10 – *Diagramme de Voronoï complet des données discrétisées et dupliquées. Le diagramme est conforme aux données initiales (en gras).*



FIG. 3.11 – *Régions de Voronoï approchant les structures géologiques de la coupe.*

3.2.2.2 Duplication symbolique

Nous avons vu dans la section précédente comment, grâce à la duplication des données, il était possible de représenter des surfaces limites dans une partition volumique des données initiales. Les inconvénients de l'opération qui consiste à "doubler" des points sont clairs : l'information est redondante et les points doublés conduisent à des situations dégénérées lors de la construction de la partition. Nous montrons ici que la duplication peut se faire de façon symbolique.

Soit $C = \{c_1,...,c_n\}$ l'ensemble des formations (couleurs) présentes dans notre modèle. Les points de D_1 sont les points colorés de la méthode pré-

cédente. Un point M de D_2 ou D_3 est à présent identifié par un couple de couleurs $(c_i,c_j) \in C^2$ et possède éventuellement une information sur la normale à la surface en ce point. Par convention la normale est dirigée vers l'objet de couleur c_i. La construction de la partition R_0 à partir de ces données est la suivante :

Reconstruction R_0 Soit V_0 le diagramme de Voronoï de tous les points de $D_d = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. On construit la partition en régions de couleurs R_0 en réalisant les opérations suivantes :

1. les cellules de V_0 créées par un site M de D_1 sont coloriées selon la couleur de M.
2. une cellule $V_0(M)$ née de $M \in D_2$ est coupée en deux nouvelles cellules $V_0^+(M)$ et $V_0^-(M)$ par le plan de normale $N_S(M)$ passant par M. Les nouvelles cellules créées sont toujours convexes et coloriées sans ambiguïté (voir figure 3.12).

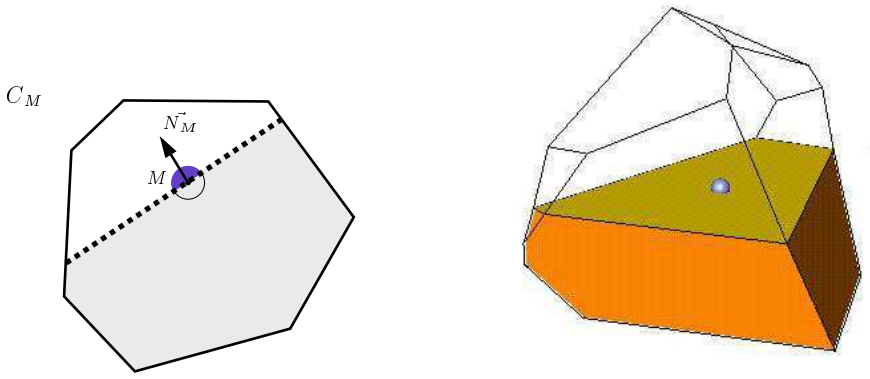


FIG. 3.12 – *La cellule de M est subdivisée par le plan de normale N_M en deux nouvelles cellules convexes auxquelles on attribue les couleurs des objets séparés.*

3. le cas des cellules $V_0(M)$ avec $M \in D_3$ est plus complexe, car il faut estimer la normale en ces points, au risque de ne pas pouvoir subdiviser ces cellules. Une fois la normale estimée (voir 3.14) la cellule est subdivisée comme précédemment (voir cas 2).

Toutes les cellules sont à présent colorées et la région $R_0(c_i)$ de couleur c_i se construit simplement comme l'union des cellules de couleur c_i (figure 3.13).

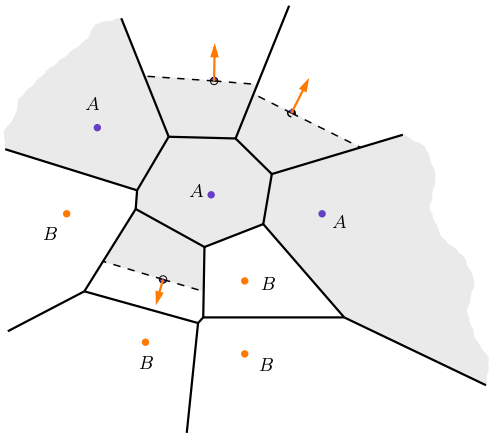


FIG. 3.13 – *Les données sont formées de points de couleur A et B, et de données sur le bord de A et B avec une normale (orientée vers B). La région en gris sur la figure est la région de A obtenue par la méthode.*

Les avantages de cette construction sont d'une part de réduire le nombre de points en entrée (mais pas le nombre de cellules crées) et d'autre part d'offrir une structure moins figée que la précédente. Modifier une normale par exemple, n'a pas de conséquence sur V_0. En effet V_0 ne dépend pas des normales aux points, mais uniquement de leurs coordonnées, et donc seule une modification locale de R_0 est nécessaire.

3.2.3 Estimation de normales

Nous nous plaçons ici dans le cas où $M \in E_3$ c'est à dire sur le bord S d'un ou plusieurs objets mais la normale à S en ce point M n'est pas connue. Plusieurs solutions à ce problème ont été décrites dans la littérature; nous en donnons ici deux :

– Interpolation de la normale en un point M par son k-voisinage : on détermine $\Gamma_k(M)$ le graphe des k-voisins de M; on construit le plan moyen des k-voisins passant par M et finalement on estime $\overrightarrow{N(M)}$ comme la normale à ce plan. Cette méthode est par exemple utilisée par Hoppe et coll [HDD+92].

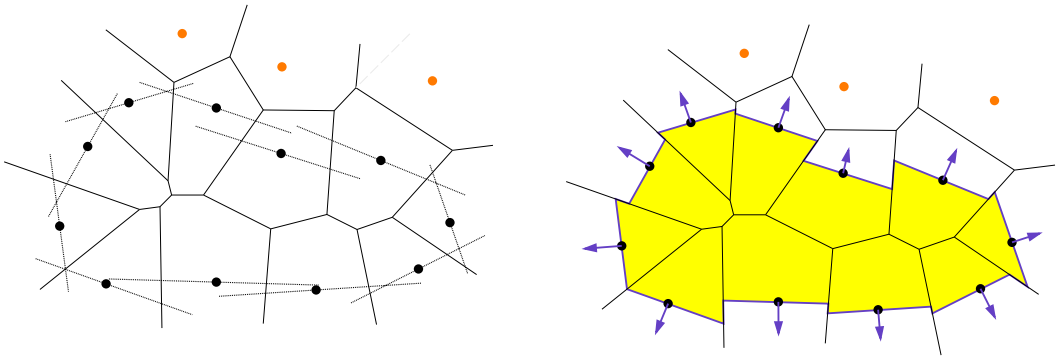


FIG. 3.14 – *Estimation de la normale de l'ensemble des points noirs de la figure par un 2-voisinage et la reconstruction associée.*

- Lorsque la distribution des points d'un ensemble S est suffisamment dense, Amenta et coll [ABE97] suggèrent d'approcher la normale en un point à partir du diagramme de Voronoi $Vor(S)$. Pour cela, en chaque point $x \in S$ ils utilise le critère local suivant :
  - si $Vor(x)$ est une cellule finie alors $\overrightarrow{N(x)}$ est approchée par le vecteur $\overrightarrow{xp_1}$ tel que p_1 est le sommet de $Vor(x)$ le plus éloigné de x.
  - si $Vor(x)$ est une région non bornée, p_1 n'est pas défini. Le point x est nécessairement sur l'enveloppe convexe de S et $\overrightarrow{N(x)}$ est approchée par la moyenne des normales aux faces de l'enveloppe convexe partageant x.

3.3 Déformation lisse des régions de Voronoï

Les volumes géologiques déterminés à partir du diagramme de Voronoï ne sont pas lisses en général, et nécessitent un lissage supplémentaire sous les contraintes géométriques et topologiques suivantes :

- minimiser la tension et la courbure d'une interface de Voronoï.
- respecter la topologie initiale du modèle.

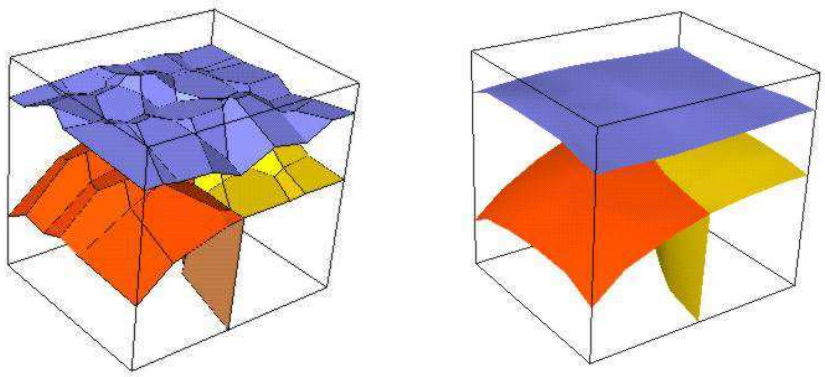


FIG. 3.15 – *Modèle surfacique initial et lissé de l'exemple synthétique analysé dans la section 3.2.1.*

Nous introduisons ici deux méthodes de lissage sensiblement différentes dans les sections 3.3.1 et 3.3.2. La première convient bien à des contours 2D et la seconde s'adapte plus facilement à des maillages 3D. La partie originale et nouvelle du lissage que nous proposons, est celle définie dans la section 3.3.4 et qui nous permet de garantir la topologie, non seulement de chaque objet géologique initial, mais aussi de la scène entière (voir figure 3.15).

3.3.1 Lissage entre contacts 2D

Nous nous plaçons ici dans le cas de l'interpolation dans un plan (le plan d'une coupe géologique par exemple) entre deux points appartenant à la même surface, et dont on connaît la normale (voir figure 3.16). La reconstruction à partir des diagrammes de Voronoï a associé ces deux points comme étant sur la même surface, mais l'interpolation initiale entre ces deux points n'est pas lisse.

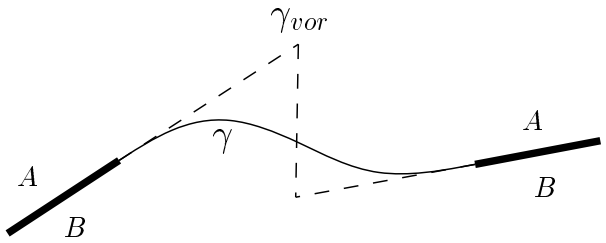


FIG. 3.16 – *Deux portions de contacts connues (en gras), l'interpolation de Voronoï (en pointillé) et le lissage attendu (ligne continue).*

On souhaite donc remplacer une interface de Voronoï γ_{vor} par une courbe lisse γ qui respecte les critères suivants :

- passer par les points initiaux (deux extrémités de γ_{vor}).
- respecter les tangentes aux deux extrémités (dictées par les données connues).
- minimiser les variations de tension et courbure sur γ.
- ne pas perdre la propriété de frontière : par définition la courbe à reconstruire sépare les points de couleurs différentes.

Les deux premières conditions garantissent une transition lisse entre les données de départ et la nouvelle frontière γ. La troisième, contraint le lissage de γ, et la dernière condition garantit la topologie globale de la scène.

Des travaux concernant le lissage de courbes avec contraintes ont été réalisés dans [TKW87, GA93, Del94] et ont inspiré la méthode choisie. Ces méthodes sont essentiellement utilisées pour déterminer et suivre des contours dans des images. Nous avons adapté ces méthodes à notre problème de lissage. Nous définissons tout d'abord les courbes déformables dans la partie 3.3.1.1.

3.3.1.1 Snakes - Courbes déformables 2D : définitions

Nous introduisons ici quelques définitions pour décrire des courbes déformables. On appelle $\gamma(s,t) = (x(s,t),y(s,t))$ la courbe déformable ou snake. On a $s \in \Omega$ et $t \in [0,1]$ avec $\Omega = [0,1]$ l'espace des abscisses curvilignes normalisés de γ et γ_{vor}, et $[0,1]$ est l'intervalle de temps normalisé représentant le passage de l'état initial à l'état final du snake.

Le snake est une courbe déformable considérée comme un corps physique, qui subit des forces liées aux contraintes que l'on veut imposer. Le snake se déforme au cours du temps vers un état stable. Cet état stable est un compromis entre lissage et distance à la courbe initiale.

Pour obtenir le lissage souhaité il nous faut considérer deux types de déformations :

- internes : liées aux contraintes géométriques (courbure et tension).
- externes : attractions/répulsions liées aux données extérieures à la courbe (données initiales).

Dans le but de réaliser ces déformations on va associer à la courbe un ensemble d'énergies :

- l'énergie cinétique Pour simplifier le problème nous considérerons que la courbe $\gamma(s,t)$ a une masse nulle, le snake n'aura pas d'accélération et donc une énergie cinétique nulle.
- l'énergie potentielle E_p(t) à l'instant t est décomposable en deux parties : $E_p(t) = E_{interne}(t) + E_{externe}(t)$

  - **L'énergie interne** correspond aux contraintes géométriques d'une courbe physique (élasticité, rigidité). Nous ne nous intéressons qu'aux termes de courbure et tension de la courbe γ.

    $$E_{interne}(t) = E_{tension}(t) + E_{courbure}(t)$$

    La tension d'une courbe dépend des variations des positions de γ (en fonction de l'abscisse curviligne) d'où l'expression de son énergie :

    $$E_{tension}(t) = \int_\Omega \frac{1}{2} w_1(s) \left|\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s,t)\right|^2 ds \tag{3.1}$$

    La courbure d'une courbe dépend des variations des tangentes de γ d'où son énergie :

    $$E_{courbure}(t) = \int_\Omega \frac{1}{2} w_2(s) \left|\frac{\partial^2 \gamma}{\partial^2 s}(s,t)\right|^2 ds \tag{3.2}$$

    Les paramètres $w_1(s)$ et $w_2(s)$ sont les poids attribués à la tension et à la courbure. Ils sont ici uniquement fonction de l'abscisse curviligne, car nous ne souhaitons pas modifier ces contraintes au cours du temps. C'est utile, uniquement si l'objet recherché est modifié dans le temps.
  - **L'énergie externe**

    $$E_{externe}(t) = \int_\Omega E_{vor}(s,t) ds \tag{3.3}$$

Le terme $E_{vor}(s,t)$ représente une valeur relative du snake en s par rapport à la courbe initiale γ_{vor} à l'instant t. Dans les algorithmes de détection de contours dans des images [Bas92, GA93, TKW87, KWT87] les auteurs définissent ce potentiel de telle façon que les primitives auxquelles ils s'intéressent dans l'image correspondent à des puits de ce potentiel. Donc si l'on veut que γ approche γ_{vor}, il nous faut définir une énergie qui tend à minimiser une distance $\delta(\gamma,\gamma_{vor})$ entre le snake γ et γ_{vor}. Le poids attribué à ce terme d'énergie est w_3 .

$$E_{vor}(s,t) = \frac{1}{2} w_3(s)\delta(\gamma(s,t),\gamma_{vor}(s)); \tag{3.4}$$

Il semble naturel de prendre $\delta(\gamma(s,t),\gamma_{vor}(s))$ comme la distance euclidienne d'un point de γ à γ_{vor}, mais en pratique la distance $\delta(\gamma,\gamma_{vor}) = (\gamma(s,t) - \gamma_{vor}(s))^2$ qui consiste à calculer la distance entre deux points de même abscisse curviligne s, convient mieux. En effet dans de nombreuses situations la distance euclidienne n'est pas adaptée (voir figure 3.17).

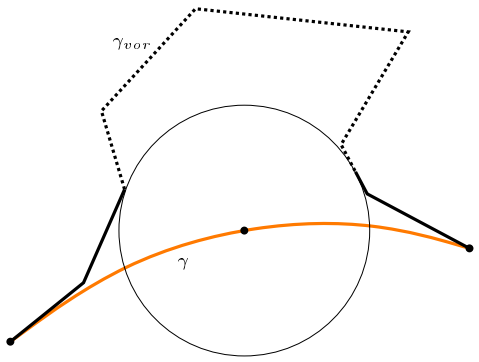


FIG. 3.17 – *Distance euclidienne non adaptée. Des parties de γ_{vor} (en pointillé sur γ_{vor}) n'ont aucune influence sur γ.*

3.3.1.2 Équations dynamiques

On simplifie le problème en supposant que le système est conservatif (pas de force de frottement). La dynamique d'un corps peut être décrite à l'aide des équations d'Euler-Lagrange (voir [TKW87, Del94]). Comme l'ensemble de ces énergies ne dépend que de la position de la courbe, c'est à dire des coordonnées (x,y) des points de la courbe, on peut alors exprimer les dérivées successives de cette énergie en fonction de x et y. Les équations dynamiques d'Euler-Lagrange deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(w_1 x) + \dfrac{\partial^4}{\partial s^4}(w_2 x) = -\dfrac{\partial}{\partial x}(E_{vor}) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(w_1 y) + \dfrac{\partial^4}{\partial s^4}(w_2 y) = -\dfrac{\partial}{\partial y}(E_{vor}) \end{cases} \tag{3.5}$$

Les équations dynamiques donnent la position du snake dans l'espace. On considère maintenant l'approximation numérique de ce système d'équations. Le snake est modélisé par une suite discrète de N points $(x_i,y_i)_{i=1}^N$ et on discrétise de la même façon la courbe γ_{vor} par $(x_{\gamma_{vor},i},y_{\gamma_{vor},i})_{i=1}^N$. On calcule ensuite les approximations discrètes des dérivées spatiales par des différences finies. Les équations écrites ci-après en x sont aussi valables en y.

En utilisant la méthode d'Euler inverse : $\frac{\partial}{\partial s}(x_i) = x_i - x_{i-1}$, les termes d'énergie deviennent :

- Terme de tension : $\frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_1 x) = w_1 x_{i-1} - 2w_1 x_i + w_1 x_{i+1}$
- Terme de courbure :
  $\frac{\partial^4}{\partial s^4}(w_2 x) = w_2 x_{i-2} - 4w_2 x_{i-1} + 6w_2 x_i - 4w_2 x_{i+1} + w_2 x_{i+2}$
  D'après les approximations ci-dessus, le terme de tension et de courbure de l'équation dynamique du snake devient:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_1 x) + \frac{\partial^4}{\partial s^4}(w_2 x) & = & w_2 x_{i-2} \\ & + & [-4w_2 + w_1]x_{i-1} \\ & + & 6w_2 x_i - 2w_1 x_i \\ & + & [-4w_2 + w_1]x_{i+1} \\ & + & w_2 x_{i+2} \end{array} \tag{3.6}$$

- L'énergie externe discrète : $\frac{\partial}{\partial x}E_{vor} = w_3(x_i - x_{\gamma_{vor},i})$

On définit les vecteurs colonne $X = (x_i)_{i=1}^N$ et $Y = (y_i)_{i=1}^N$, ainsi que les constantes suivantes :

$$\begin{cases} a = w_2 \\ b = -4w_2 + w_1 \\ c = 6w_2 - 2w_1 - w_3 \end{cases} \tag{3.7}$$

Considérons la matrice K:

$$K = \begin{pmatrix} c & b & a & 0 & \cdot & 0 & a & b \\ b & c & b & a & 0 & \cdot & 0 & a \\ a & b & c & b & a & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & a & b & c & b & a & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & 0 & a & b & c & b & a \\ a & 0 & \cdot & 0 & a & b & c & b \\ b & a & 0 & \cdot & 0 & a & b & c \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

On appelle K la matrice de déformation, et K ne dépend que de a,b et γ_{vor}, c'est-à-dire des coefficients w_1 et w_2 et w_3. La matrice K exprime donc le poids de l'énergie de déformation (ou interne) du snake par rapport à son énergie externe. Le snake discret est finalement la solution du système d'équations :

$$\begin{cases} KX = 0 \\ KY = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

3.3.1.3 Déformations liées aux paramètres

Les paramètres modifiables de ce système sont w_1, w_2 et w_3 avec la restriction $\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$. Les valeurs w_1 et w_2 déterminent les termes de tension et courbure dans le processus de lissage. La figure 3.18 montre les variations d'une courbe en fonction de ces paramètres : augmenter la valeur de w_1 a pour effet de tendre la courbe; si on augmente la valeur de w_2 alors la courbe cherche à accentuer sa courbure.

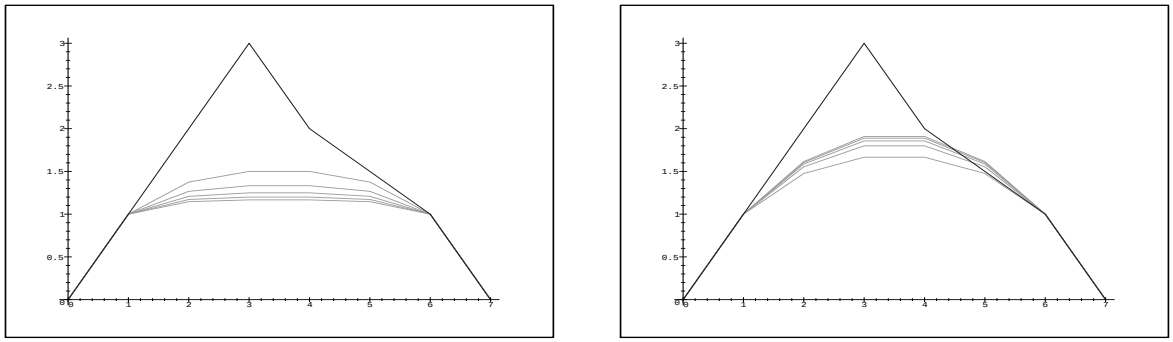


FIG. 3.18 – *Tensions et courbures différentes (courbes Maple).*

L'énergie externe a pour but de minimiser l'écart entre le snake et la courbe initiale $\gamma_{vor}(s)$. En modifiant le poids w_3, qui détermine l'importance

de cette énergie par rapport aux autres, on peut soit s'éloigner, soit se rapprocher de la courbe initiale (voir figure 3.19). Si on fait tendre w_3 vers l'infini on retrouve $\gamma(s,t) = \gamma_{vor}(s)$. Si on prend $w_3 = 0$, alors $\gamma(s,t)$ est la courbe la plus "lisse" possible, au sens des contraintes, qui ne tient pas compte de la courbe initiale $\gamma_{vor}(s)$.

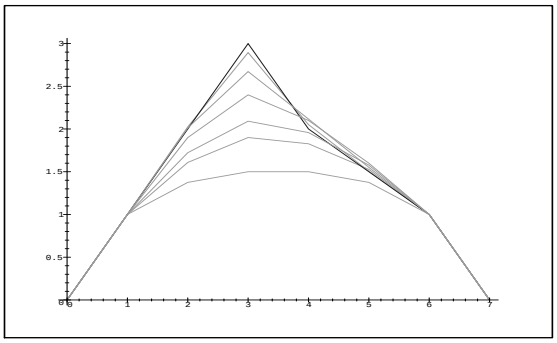


FIG. 3.19 – *Déformations externes (courbes Maple).*

3.3.1.4 Algorithme général

L'initialisation du snake est faite en négligeant les forces externes, c'est à dire en prenant $w_3 = 0$ (voir figure 3.20). Si $\gamma(s,t,w_1,w_2,0)$ est dans la zone de déformation autorisée (voir 3.3.4) alors on retient γ comme lissage de γ_{vor}, sinon on augmente la valeur du paramètre w_3 jusqu'à ce que la condition 1 (voir section 3.3.4) soit vérifiée.

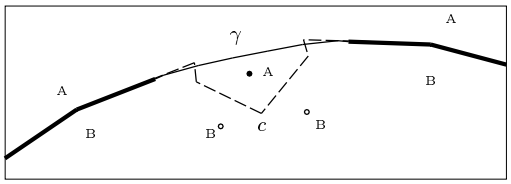


FIG. 3.20 – *Les données sont formées de deux portions d'interfaces A/B (en gras). L'interpolation de Voronoï (ligne en pointillé) - La courbe lisse initiale (ligne continue).*

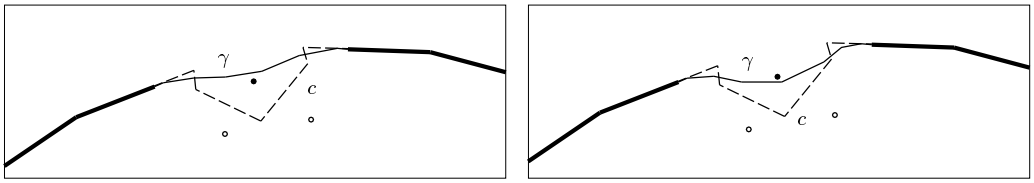


FIG. 3.21 – *Rapprochement successif de $\gamma(s,t,w_1,w_2,w_3)$ vers $\gamma_{vor}(s)$ jusqu'à séparation des données de nature différente.*

Au plus mauvais des cas on garde $\gamma_{vor}(s)$ qui convient toujours par définition. En pratique sur les exemples 2D testés dans la section 4.3 la courbe la plus "lisse" convient la plupart du temps.

3.3.2 Lissage de maillages 3D

Cette section décrit la méthode de lissage utilisée dans le cas d'une scène S tridimensionnelle. Le bord de tout volume géologique S_k de la scène S reconstruit par la méthode décrite dans le chapitre 3, est une surface fermée composée de faces polygonales convexes. Le lissage introduit ici ne concerne que le bord des objets de S et suit les étapes suivantes :

Principe général (lissage du volume S_k):

- Etape 1 : Du volume au maillage de son bord $\underline{S_k -> M_k}$.
  Cette étape consiste à extraire du volume S_k, le maillage M_k composé des arêtes et sommets du bord de S_k. Le maillage M_k peut être vu comme un sous-graphe de la partition de Voronoï totale V.
- Etape 2 : Déformation du maillage $\underline{M_k -> \gamma(M_k)}$.
  La deuxième étape est la déformation proprement dite. Le maillage M_k est déformé en un nouveau maillage $\gamma(M_k)$ lisse (au sens des contraintes). Le modèle de déformation utilisé dans notre méthode est inspiré des maillages 3D déformables [Del94].
- Etape 3 : Retour à la description volumique $\underline{\gamma(M_k) -> S'_k}$.
  Transformation du maillage déformé en le volume final S'_k. Remarquons que les sommets d'une face plane et polygonale de S_k ne forment plus une face plane dans S'_k. En effet, les sommets d'une face de S_k ne sont plus forcément coplanaires après déplacement, et une triangulation de ces faces est nécessaire, pour passer du maillage $\gamma(M_k)$ à l'objet 3D déformé S'_k.

Grâce à la structure des objets reconstruits, la première étape est plus ou moins directe; nous allons nous baser sur le maillage induit par Voronoï.

Nous allons donc considérer le maillage M_k composé des sommets et arêtes du bord de S_k. Sachant que le degré de tout sommet de Voronoï est 4 [1], M_k comme sous-graphe de $Vor(S_k)$ a des sommets de degré $d \in \{3,4\}$. Nous allons nous restreindre pour la suite à un maillage M_k dont tous les sommets sont de degré 3 (on peut faire cette supposition car un noeud de degré 4 peut toujours être scindé en deux noeuds de degré 3).

Pour l'étape de déformation, l'objectif est de transformer le maillage M_k en le maillage lisse $\gamma(M_k)$. En partant du maillage initial M_k nous allons déplacer ses sommets sous l'influence de forces de lissage et de contraintes topologiques (voir section 3.3.4) jusqu'à ce qu'un équilibre des forces soit atteint. En pratique on itère les étapes de lissage, jusqu'à ce que le déplacement total des sommets de M_k soit plus petit qu'un ε_d fixé. Les contraintes géométriques que nous souhaitons imposer au maillage, sont décrites dans la section 3.3.2.1.

La méthode diffère de la méthode décrite en section 3.3.1 sur plusieurs points :

- la position initiale du volume déformable γ est la reconstruction de Voronoï et non plus le volume le plus lisse (au sens des contraintes).
- les forces de lissage sont calculées de façon locale (voir section 3.3.2.1) et en chaque noeud du maillage.

Dans le cas 3D, des contraintes locales permettent de simplifier la caractérisation du lissage. De plus, lorsqu'il y a beaucoup de données, les méthodes globales [TKW87, GA93] nécessitent la résolution de trop grands systèmes d'équations.

3.3.2.1 Caractéristiques géométriques discrètes d'un maillage

Nous appellerons par $P_i(t)$ le noeud déformable associé au sommet de Voronoï V_i à l'instant t ($P_i(0) = V_i$) et $M_k(t)$ le maillage déformé à ce même instant t. On définit par $Vois(V_i) = \{V_{i,1},V_{i,2},V_{i,3}\}$ l'ensemble des voisins de V_i dans $Vor(S_k)$ et de la même façon $Vois(P_i) = \{P_{i,1},P_{i,2},P_{i,3}\}$ avec $P_{i,j}(t)$ le noeud déformable associé à $V_{i,j}$.

Nous allons à présent définir en tout P_i des propriétés locales et discrètes concernant la géométrie du maillage : normales, courbures et angles solides discrets.

- Approximation de la normale $\overrightarrow{N_i} = \overrightarrow{N}(P_i)$: la normale $\overrightarrow{N}(P_i)$ du maillage M_k au point P_i est approchée par la normale au plan π_i définie par les points de $Vois(P_i)$.

1. En 3D et lorsque les points sont en position générale.

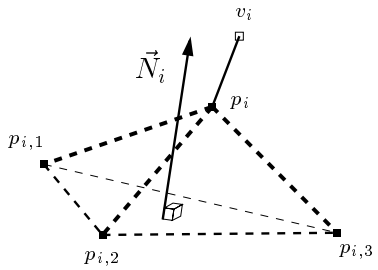


FIG. 3.22 – *Normale* $\overrightarrow{N(P_i)}$ *au point* P_i.

– Courbure discrète κ_i : la courbure est approchée par $1/R$ ou R désigne le rayon de la sphère passant par $P_{i,1}$, $P_{i,2}$, $P_{i,3}$ et P_i.

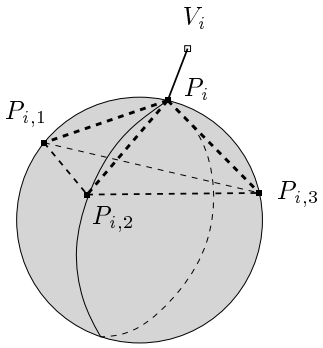


FIG. 3.23 – *Sphère passant par* P_i, $P_{i,1}$, $P_{i,2}$ *et* $P_{i,3}$

Un autre façon de représenter la courbure d'un maillage en un point, est de l'approcher par son angle simplexe en ce point : en 2D c'est l'angle ϕ_i entre les segments $[P_{i-1}P_i)]$ et $[P_iP_{i+1}]$. Cet angle est lié à la courbure discrète en $P_i \in M_k$ par la relation $\kappa_i = \frac{\sin(\phi_i)}{r_i}$.

En 3D c'est l'angle défini par :

Définition 17 *L'angle simplexe au point* $P_i \in M_k$ *est l'angle* $\phi_i = \phi(P_i)$ *avec* $\phi_i \in [-\pi,\pi]$ *défini par les relations :*

$$sin(\phi_i) = \frac{r_i}{R_i} signe(\overrightarrow{P_iP_{i,1}}.\overrightarrow{N}(P_i))$$

$$cos(\phi_i) = \frac{O_iC_i}{R_i} signe(\overrightarrow{O_iC_i}.\overrightarrow{N}(P_i))$$

où r_i *désigne le rayon du cercle circonscrit aux points de* $Vois(P_i)$ *de centre* C_i, R_i *le rayon de la sphère circonscrite aux points de* $Vois(P_i) \cup \{P_i\}$ *de centre* O_i,

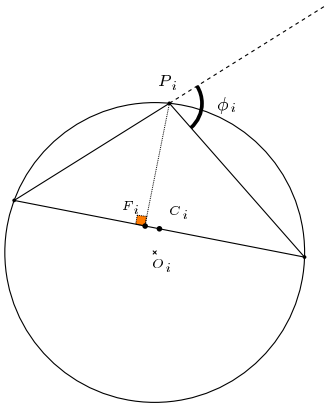


FIG. 3.24 – *Angle simplexe 3D : c'est l'angle 2D dans le plan contenant P_i, C_i et O_i.*

3.3.2.2 Représentation du maillage

Delingette [Del94] a donné une représentation originale de maillages simplexes en fonction de l'angle simplexe. Un sommet P_i du maillage est représenté par ces trois voisins et de l'angle simplexe en P_i.

Soit F_i la projection orthogonale de P_i sur Π_i le plan contenant les points de $Vois(P_i)$, et soit C_i le centre du cercle circonscrit à $Vois(P_i)$ de rayon r_i. Alors P_i peut s'écrire :

$$P_i = \alpha_1 \; P_{i,1} + \alpha_2 \; P_{i,2} + \alpha_3 \; P_{i,3} + \alpha_4 \; N_i$$

où les α_i $(i = 1..3)$ sont les coefficients barycentriques de F_i dans le triangle $(P_{i,1},P_{i,2},P_{i,3})$, et α_4 est la hauteur F_iP_i. Cette hauteur α_4 peut s'écrire comme une fonction de ϕ_i, r_i et $d_i = \|\overrightarrow{F_iC_i}\|$.

$$\alpha_4(\phi_i,r_i,d_i) = \frac{(r_i^2 - d_i^2)tan(\phi_i)}{\epsilon\sqrt{r_i^2 + (r_i^2 - d_i^2)tan^2(\phi_i)} + r_i}$$

L'angle simplexe et les coefficients barycentriques permettent donc de repérer P_i en fonction de ses voisins. En d'autres termes, P_i est le sommet de $M_k(t)$ de coefficients métriques α_1, α_2 et α_3 et d'angle simplexe ϕ_i.

3.3.2.3 Déplacements lisses des sommets du maillage

Nous allons déplacer les noeuds $P_i \in M_k$ en fonction de l'angle simplexe. On cherche à déterminer en fonction du voisinage de P_i un nouvel angle simplexe ϕ^* et ainsi déduire une nouvelle position P_i^* de P_i. Les critères d'interpolation de ϕ sont nombreux (voir [Del94]). Nous choisissons l'interpolateur simple et classique suivant :

$$\phi_i^* = \frac{1}{3} \sum_{Q \in Vois(p_i)} \phi(Q)$$

Le déplacement de P_i en P_i^* est donc décrit par :

$$P_i^* = \alpha_1 P_{i,1} + \alpha_2 P_{i,2} + \alpha_3 P_{i,3} + \alpha(\phi^*) N_i$$

3.3.2.4 Triangulation finale

Une face originale f_i du bord de S_k est une face plane. Mais après déformation les sommets de f_i, sur le maillage $\gamma(M_k)$, ne sont plus sur un même plan et ne peuvent donc plus définir une face.

Chaque face $f_i \in S_k$ est triangulée de façon indépendante : on calcule le barycentre s_O des n sommets $s_{i,1}$,...,$s_{i,n}$ de f_i et on crée les triangles $\{f_{i,1},...,f_{i,n-1}\}$ tel que $f_{i,j}$ est formée des sommets $\{s_O; s_{i,j}; s_{i,j+1}\}$. La triangulation de $\gamma(M_k)$ obtenue, définit une hiérarchie simple entre f_i et $\{f_{i,1},...,f_{i,n}\}$, et assure que $\gamma(M_k)$ est inclue dans la triangulation (voir figure 3.25).

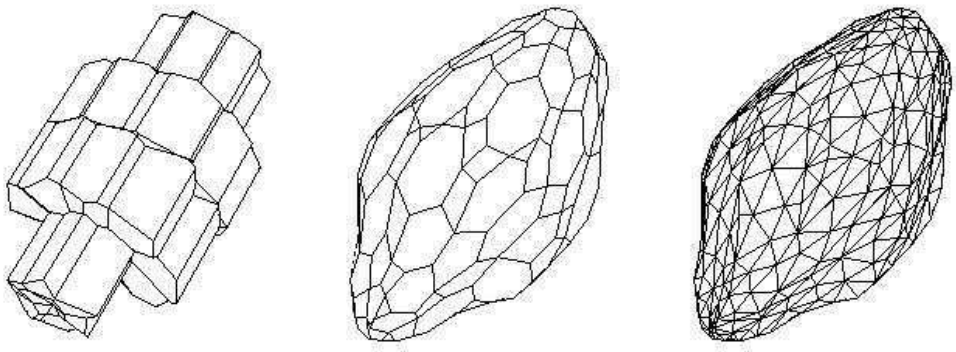


FIG. 3.25 – *Maillage initial de Voronoï V_k, maillage déformé $\gamma(M_k)$ et triangulation de $\gamma(M_k)$.*

3.3.3 Contraintes particulières

Le lissage présenté en section 3.3.2 déforme les bords des objets reconstruits en des surfaces plus lisses, mais ne tient pas compte de certaines conditions aux limites :

- le bord des surfaces n'est pas lissé
- les interfaces de dimension 1, sur ces surfaces ne sont pas lissées.

Le bord d'un objet A est généralement une interface avec plusieurs objets A_1,...,A_n. Mais le lissage global de la surface $Vor(A)$ ne permet pas de lisser les interfaces A_l/A_k sur cette surface (voir figure 3.27 gauche). Soit P_i un sommet du maillage M_A de A. Si P_i est aussi sur $I(A_l/A_k)$ une interface 2D (voir figure 3.26), alors il faut pouvoir en tenir compte lors de la déformation.

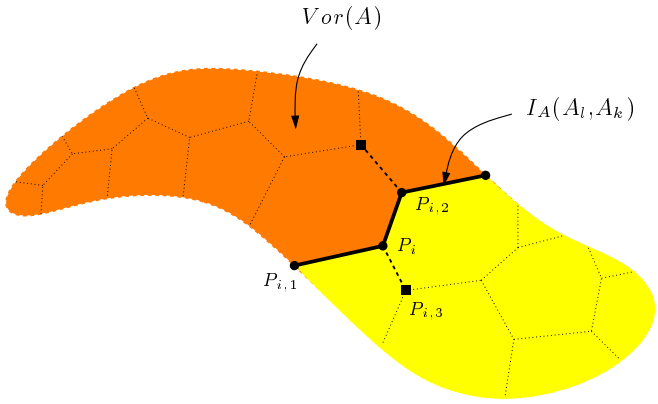


FIG. 3.26 – *Interface $I(A_l/A_k)$ non lissée sur le maillage de A, alors que la surface est lisse.*

Pour lisser le volume A et les différents interfaces $I(A_l/A_k)$ sur A, on calcule P_i^* comme une combinaison de deux déplacements :

$$P_i^* = \epsilon_1 * P_i^1 + \epsilon_2 * P_i^2 \ \ (\epsilon_1 + \epsilon_2 = 1)$$

et P_i^1 et P_i^2 sont les points suivants :

- $P_i^1 = \alpha_1\ P_{i,1} + \alpha_2\ P_{i,2} + \alpha_3\ P_{i,3} + \alpha_{\phi^1}\ N_i$ (contrainte sur la surface)
- $P_i^2 = \beta_1\ P_{i,1} + \beta_2\ P_{i,2} + \beta_{\phi^2}\ n_i$ (contrainte sur l'interface 2D) où n_i est la normale au vecteur $\overrightarrow{P_{i,1}P_{i,2}}$, et $P_{i,1}$, $P_{i,2}$ sont les deux voisins de P_i sur $I(A_l/A_k)$.

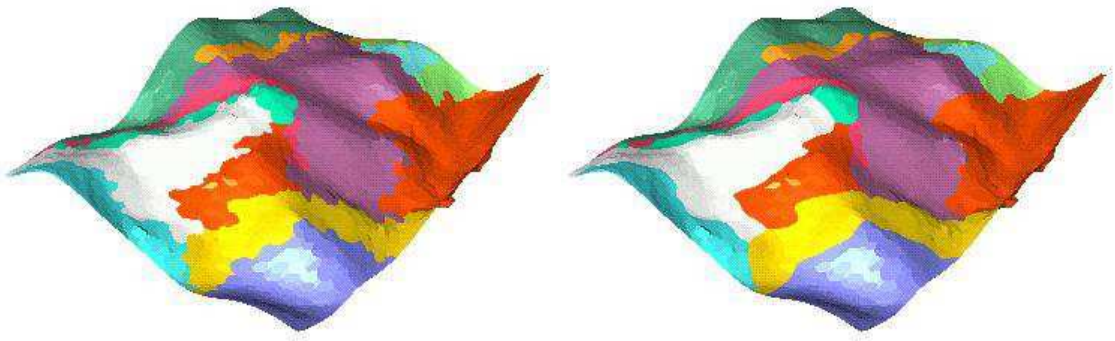


FIG. 3.27 – *Interface entre l'atmosphère et le sous-sol. A gauche, sans lissage contraint les interfaces géologiques 2D sur la surface topographique ne sont pas lisses. A droite, amélioration des interfaces 2D avec le lissage contraint.*

3.3.4 Zone de déformation

Dans le but de maintenir la topologie de la scène reconstruite S lors du lissage, nous allons définir et construire pour chaque objet S_k de S une zone de déformation $Z(S_k)$: région autour du bord de S_k, dans laquelle la déformation des surfaces est contrainte. Cette zone doit nous permettre de contrôler le lissage de chaque objet reconstruit, et en outre de respecter la condition suivante :

Condition 1 *Tout volume déformé S'_k d'un volume de Voronoï initial S_k contient exactement le même ensemble de points de données que S_k.*

Pour construire $Z(S_k)$ nous allons définir tout d'abord une région $Z^*(S_k)$ vide de données autour du bord de S_k (voir section 3.3.4.1). Pour deux objets S_k et S_j de la même scène S, les zones $Z^*(S_k)$ et $Z^*(S_j)$ ne sont pas disjointes en général et il faut définir des contraintes supplémentaires (voir section 3.3.4.2) pour définir entièrement Z.

3.3.4.1 Zone vide de données (Z^*)

Nous allons montrer qu'il existe pour tout sous-ensemble G_V d'un diagramme de Voronoï $Vor(S)$, une région $Z^*(G_V)$ qui ne contient aucune donnée initiale en son intérieur (des données sont éventuellement sur le bord de cette zone), et qui préserve la connexité de G_V. La zone $Z^*(G_V)$ se déduit des propriétés suivantes :

- Toute sphère (cercle en 2D) circonscrite à un tétraèdre (triangle en 2D) d'une triangulation de Delaunay ne contient aucun autre sommet de la triangulation. Nous appellerons ces sphères, les sphères vides de Delaunay. Elles seront associées indifféremment aux simplexes de Delaunay ou à leurs duals : les sommets de Voronoï correspondants (figure 3.28 (a)).
- les sommets de Voronoï sont les centres de ces sphères (figure 3.28 (b)).
- une arête de Voronoï est contenue dans l'union des sphères vides de ces deux sommets O_1 et O_2. Une arête de Voronoï correspond par dualité à deux tétraèdres de Delaunay adjacents en une face. Les sphères vides correspondantes sont non disjointes et contiennent l'arête $[O_1O_2]$ (figure 3.28 (c)).
- la cellule de Voronoï d'un point P est contenue dans l'union des sphères vides de ses sommets O_i. Le dual d'une cellule de $Vor(S)$ est l'ensemble de tous les tétraèdres de Delaunay ayant P pour sommet (figure 3.28 (d)).

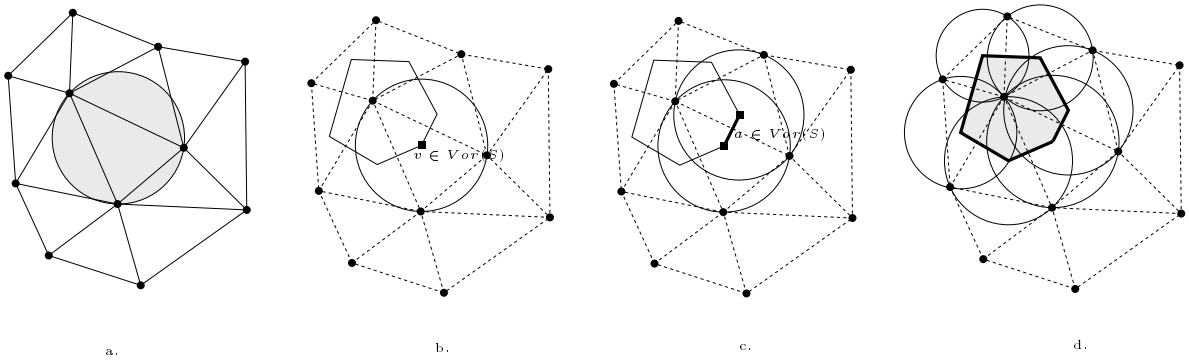


FIG. 3.28 – *(a) Sphère de Delaunay vide. (b)(c)(d) Sommet, arête et face inclus dans l'union des sphères vides correspondantes.*

Définition 18 *On appelle $Z^*(G_V)$ la zone formée par l'union des sphères de Voronoï vides de tous les sommets de G_V.*

De façon plus générale, la propriété suivante est vérifiée :

Propriété 3 *Tout sous-ensemble G_V formé d'éléments de $Vor(S)$ est entièrement contenu dans $Z^*(G_V)$.*

La propriété 3 nous permet de lisser de telle façon que G'_V le déformé de G_V, est homéomorphe à G_V. On maintient, durant la phase de lissage, les sommets, les arêtes et les faces de G_V à l'intérieur de $Z^*(G_V)$, et en particulier si x' représente le déplacé de x :

$$\forall x \in G_v, \text{ on a } x' \in Z^*(x)$$

En d'autres termes tout sommet est contraint par sa sphère, toute arête par l'union de deux sphères, et ainsi de suite.

La condition 1 est donc vérifiée pour un opérateur de lissage restreint sur $Z^*(G_V)$.

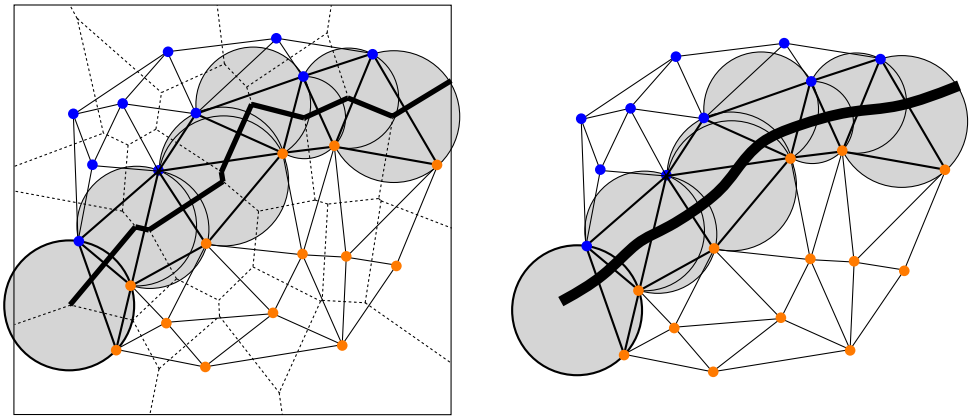


FIG. 3.29 – *G initial (en gras à gauche) et déformé (à droite). G sépare toujours le même ensemble de points.*

La condition 1 est néanmoins insuffisante pour préserver la topologie d'une scène entière, lors de la déformation de ses éléments $\{S_k\}_{i=1}^{N}$ sur Z^*, car l'intersection $Z^*(S_k) \cap Z^*(S_l)$ pour $S_k \neq S_l$ est non vide en général. Une solution est proposée dans la section suivante 3.3.4.2.

3.3.4.2 Zone vide disjointe

Pour deux sous-graphes G_V et G'_V de $Vor(S)$, $Z^*(G_V)$ et $Z^*(G'_V)$ ne sont pas disjoints. Et donc, les déplacements (lors du lissage de G_V) peuvent aboutir à des situations topologiquement interdites (voir figure 3.30).

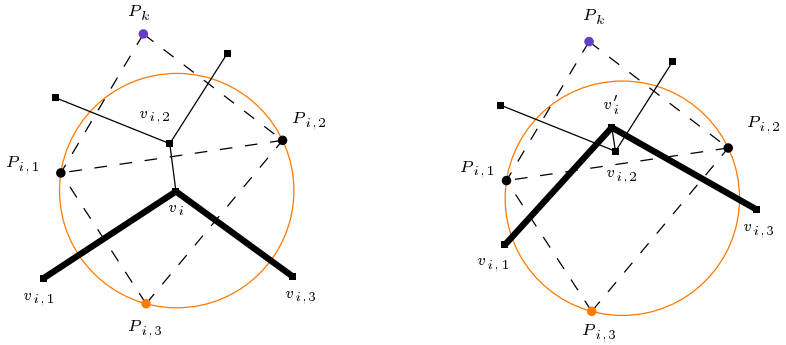


FIG. 3.30 – *Si G_V (en gras) n'est contraint que par les données, i.e. par $Z^*(G_V)$: le déplacement de $v_i \in G_V$ peut créer des problèmes topologiques (b). En effet la sphère $Z^*(v_i)$ contient aussi $V_{i,2}$.*

Il nous faut donc une contrainte plus forte sur le déplacement des noeuds du maillage, qui doivent être contraints par leurs voisins dans V.

Soit v_i un sommet du sous-graphe de Voronoï G_V, et soient $\{v_{i,k}\}_{k=1}^{d}$ les voisins de v dans le graphe complet $Vor(S)$. Soit δ_v le rayon de la sphère vide associée à v. On contraint v par la boule $Z(v)$ de centre v et de rayon $R_{Z(v)}$:

$$R_{Z(v)} = min\{\ \{\delta_v\} \cup \{\delta(v,v_i)\ ,i \in [1,4]\}\ \}$$

où $\delta(v,v_i)$ est la distance euclidienne de v à v_i, et

$$Z(G_V) = \cup_{e \in G_V} Z(e)$$

Propriété 4 *Pour des sous-ensembles G_i $(i = 1..k)$ disjoints deux à deux d'un graphe V $(\bigcap_i G_i = \emptyset)$ on a une intersection vide des $Z(G_i)$ et $i = 1..k$:*

$$\forall i,j\ G_i \cap G_j = \emptyset \text{ alors } Z(G_i) \cap Z(G_j) = \emptyset$$

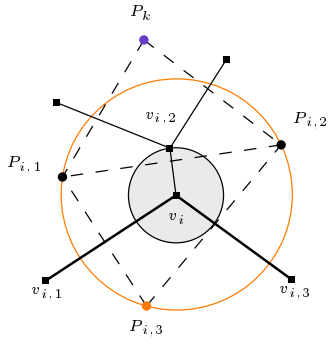


FIG. 3.31 – *Boule minimale $Z(v_i)$ ne contenant ni données de S, ni sommets du graphe $Vor(S)$ autre que v_i en son intérieur.*

3.3.4.3 Autre solution

Les principaux inconvénients de la méthode précédente pour construire $Z(G \subset Vor(S))$ sont les suivants :

1.) pour garantir la propriété 4, $Z(G)$ impose une contrainte très forte sur G. Notamment $\cup_i Z(G_i)$ ne couvre pas l'espace E, même si $\cup_i G_i = V$ et V est une partition totale de E.
2.) de plus $Z(G)$ n'est pas constant pour des variations dans le temps de la géométrie de G : $Z(G_{t_1}) \neq Z(G_{t_2})$ pour $t_1 \neq t_2$ deux instants distincts.

Il est possible de construire des zones fixes (pour des données fixes), disjointes (pour des sous-ensembles disjoints) et des partitions (pour des partitions de V). Cette méthode consiste à insérer de nouveaux points dans les triangles ou tétraèdres ne contenant pas le centre de leur sphère circonscrite. L'insertion de ces nouveaux points à pour conséquence que tout sommet de Voronoï est à présent contenu dans son dual de Delaunay (ce qui n'est pas le cas en général). La zone de déformation la plus naturelle devient :

$$Z(v \in G) = \{x, x \in DT(v)\}$$
$$Z(G) = \cup_{e \in G} DT(e)$$

Toutes les zones de déformation élémentaires (les simplexes de Delaunay) sont ici disjointes, et ainsi deux sous-ensembles disjoints sont associés à deux zones disjointes. Cette méthode est plus simple que la précédente, mais nécessite l'insertion de points supplémentaires, en nombre souvent important. De plus, les points insérés ne provenant pas directement des données, ne possèdent pas de couleur (caractéristique) associée et une interpolation supplémentaire est nécessaire.

3.3.4.4 Lissage et convexité

Nous avons vu comment transformer un sous-ensemble de Voronoï $G \subset Vor(S)$ en un sous-ensemble homéomorphe lissé $\gamma(G)$. Si toutes les cellules élémentaires de G sont convexes par définition et construction, en revanche celles de $\gamma(G)$ ne le sont plus en général. Dans l'optique d'une partition en éléments volumiques convexes, il faut donc trianguler les cellules non convexes, et ceci est non trivial et parfois impossible (certains polyèdres 3D ne sont pas tétraédrisable sans insertion de nouveaux points dit de "Steiner").

Néanmoins des efforts pour la conservation de la convexité sont utiles, si le modèle final est soumis, par exemple, à des localisations intensives, la localisation dans des éléments convexes sera plus rapide. De même, les algorithmes de lancer de rayons sur des objets polyédriques, sont plus stables si les faces de l'objet sont convexes.

Une solution que nous proposons ici est de contrôler encore un peu plus le déplacement des sommets de Voronoï, dans le but de contraindre la convexité de toutes les cellules, pendant le lissage. Soit v un sommet de $Vor(S)$ et $C(v)$ l'ensemble des cellules de $Vor(S)$ partageant v. Les déplacements de v qui garantissent la convexité des cellules de $C(v)$ sont ceux inscrits dans le tétraèdre $T_{vois}(v)$, ou triangle en 2D, formé par les voisins de v dans $Vor(S)$[2] ($T_{vois}(v)$ est en pointillés sur la figure 3.32). En effet chaque face de $T_{vois}(v)$

2. lorsque les points sont en position générale

est la limite, dans une cellule particulière, que ne doit pas franchir v pour que cette cellule reste convexe (voir figure 3.32).

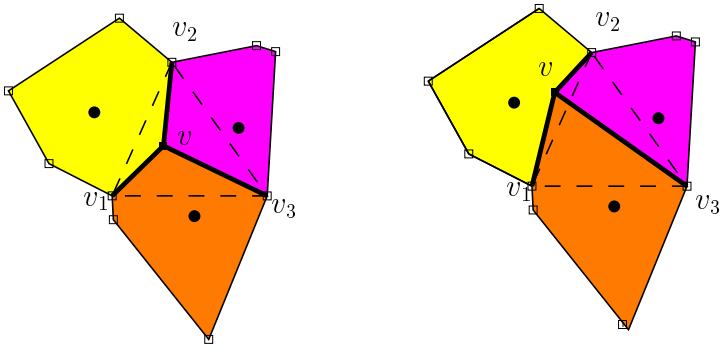


FIG. 3.32 – *Zone de convexité de v : l'intérieur du triangle $T_{vois} = [v_1 v_2 v_3]$ (triangle en pointillés). Si le déplacement de v sort de la zone par le segment $[v_1 v_2]$ la cellule contenant v_1 et v_2 n'est plus convexe.*

Si $Conv(v)$ désigne le triangle (ou tétraèdre) formé par les voisins de v dans $Vor(S)$, alors pour un ensemble G connexe, $Conv(G)$ est connexe (voir figure 3.33).

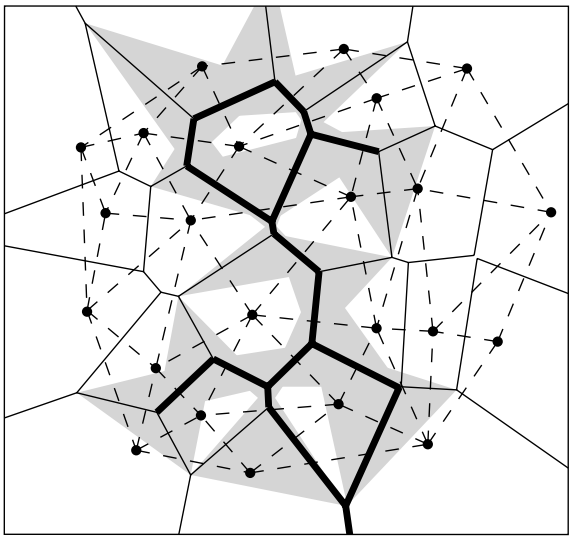


FIG. 3.33 – *Zone de convexité d'un complexe $G \in Vor(S)$ (en gras).*

3.3.5 Quelques exemples de déformations

La figure 3.34 illustre des résultats de lissage sur une partition colorée 2D. Le bord de chaque région de couleur (figure 3.34 (a)) est lissée de la façon

suivante :

- en préservant la convexité de toutes les cellules (figure 3.34(b)).
- sans critère de convexité (figure 3.34(c)).

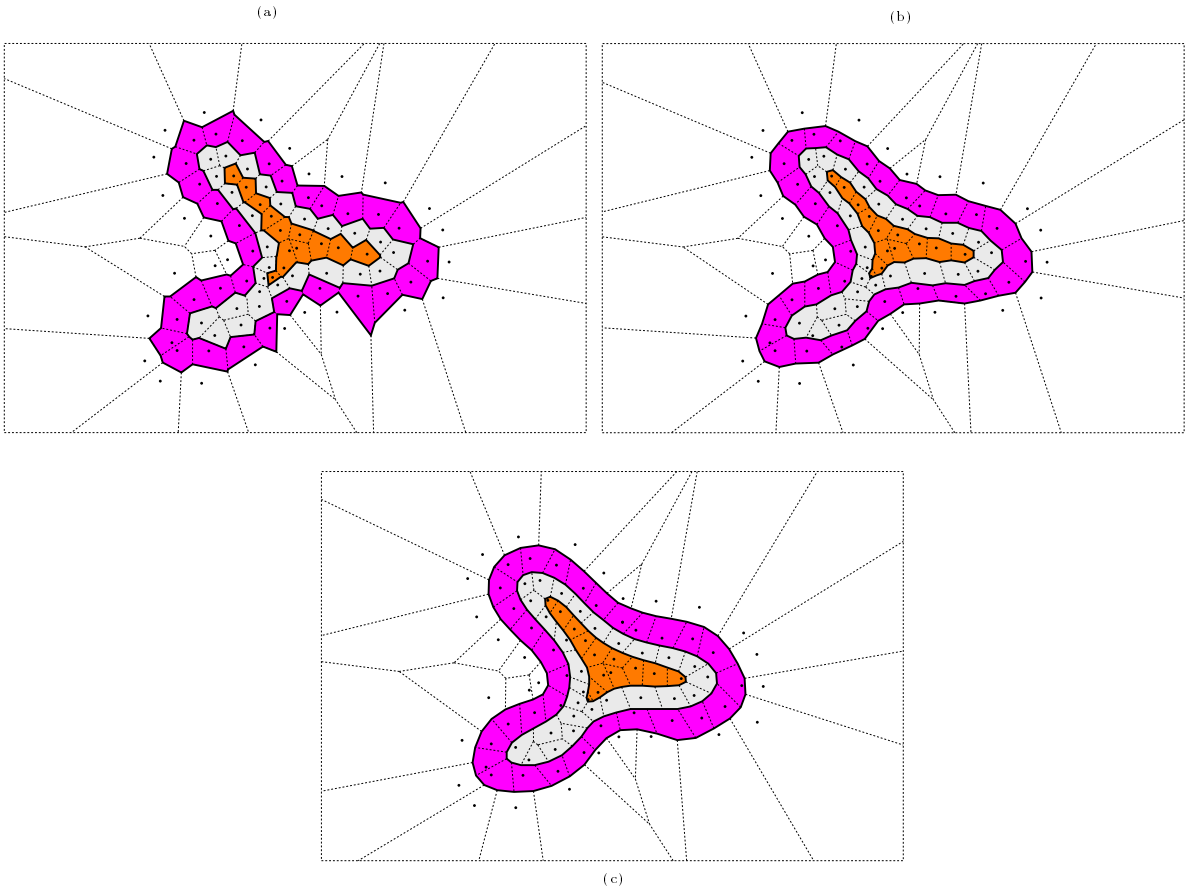


FIG. 3.34 – *Régions de Voronoï d'un ensemble de points (a). Lissage avec critère de convexité (b). Lissage sans critère de convexité (c).*

Le critère de convexité impose en chaque sommet d'une interface, le signe de la courbure et interdit son inversion. Sous ce critère les régions apparaissent moins lisses que dans la partition en figure 3.34(c).

A travers les prochains exemples (synthétiques) nous souhaitons montrer la rapidité de convergence vers un volume lisse et stable d'un objet reconstruit. La stabilité et la rapidité de ce processus sont dues principalement à deux choses :

- La déformation est restreinte dans une zone de déformation Z.

– L'objet initial (volume de Voronoï) est déjà proche de l'objet final, et il suffit souvent de très peu d'étapes de lissage (3 à 10) pour obtenir un objet satisfaisant (voir figure 3.35).

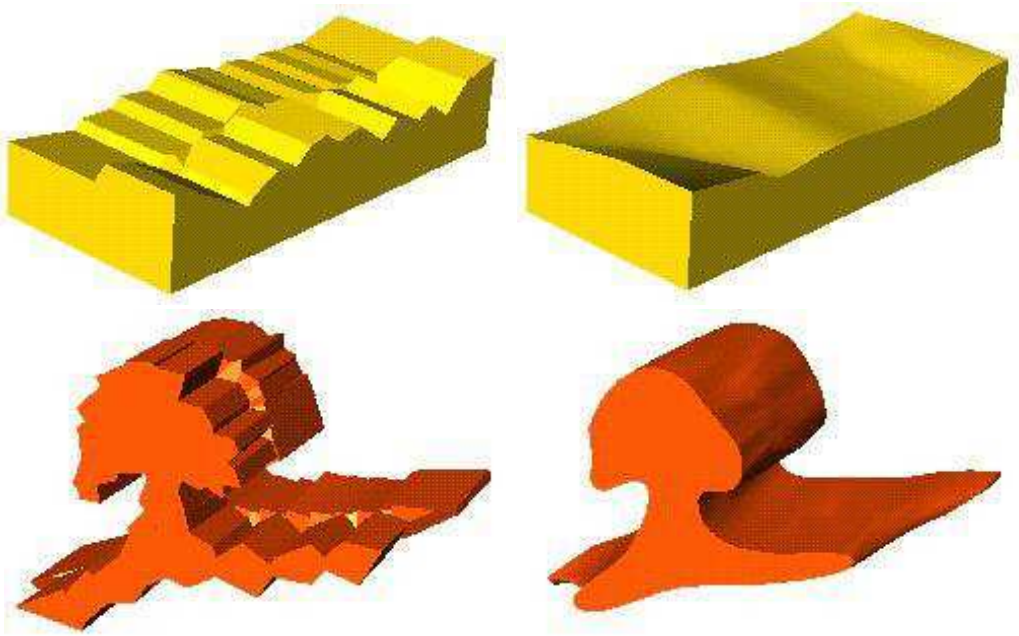


FIG. 3.35 – *Lissage contraint d'un bloc volumique horizontal (5 étapes). Lissage contraint d'un volume de type "dôme de sel" (8 étapes)*

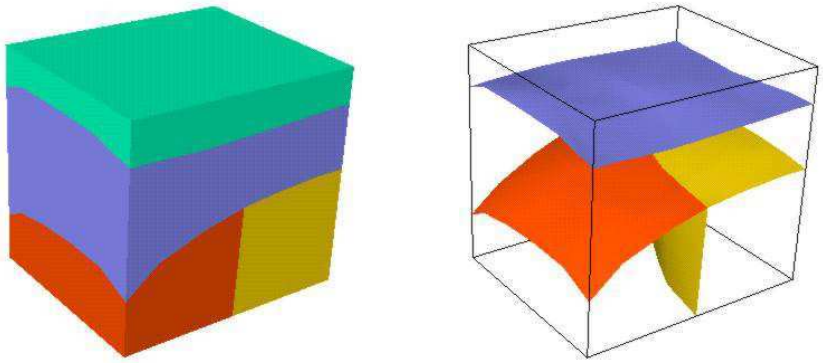


FIG. 3.36 – *Modèles volumique et surfacique lissées de l'exemple synthétique analysé en 3.2.1*

3.3.6 Conclusion (lissage)

Le lissage introduit ici, permet donc de lisser une partition de Voronoï en une nouvelle partition $\gamma(Vor)$ telle que les structures dans $\gamma(Vor)$ qui correspondent à des interfaces de la scène, soient lisses. L'originalité de la méthode utilisée, réside dans la possibilité de contraindre la topologie d'un objet reconstruit et de toute une scène, par une zone de déformation Z. La densité des données a un impact direct sur la zone de déformation. En effet Z est beaucoup plus restreinte là où les données sont denses, et large ailleurs (voir figure 3.37). En d'autres termes, on a une grande liberté d'interpolation dans les zones peu contraintes, et peu ou pas de liberté dans les zones bien connues.

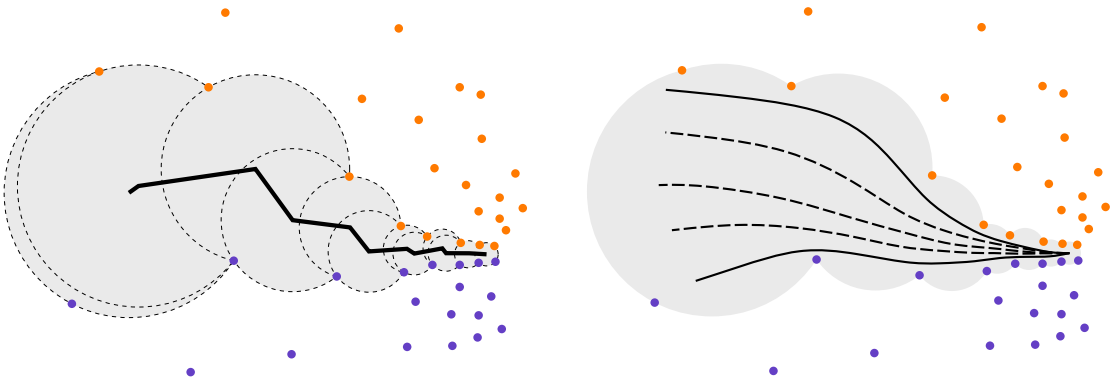


FIG. 3.37 – *Influences de la densité sur la zone de déformation.*

Toutes les contraintes peuvent se définir de façon locale (en chaque noeud du maillage) et donc simplifient la caractérisation du lissage. Lorsqu'il y a beaucoup de données, les méthodes globales [TKW87, GA93] nécessitent la résolution de trop grands systèmes d'équations.

Le fait de ne pas autoriser des raffinements locaux du maillage, ne nous permet pas d'obtenir des reconstructions lisses et satisfaisantes dans les régions de forte courbure.

3.4 Interrogation et localisation dans le modèle

On veut répondre au problème suivant : on dispose d'un point $M \in \mathbb{R}^3$ et l'on souhaite savoir "rapidement" dans quel volume géologique il se trouve. La structure de notre reconstruction nous permet des localisations rapides. La localisation d'un point dans une stucture géométrique peut se faire de

plusieurs façons :

- marche dans la structure ($O(\sqrt{(n)})$ en dimension 2, et $O(\sqrt{^3(n)})$ en dimension 3) en moyenne pour des distributions uniformes, et n le nombre de cellules de la structure).
- structure de recherche par un graphe hiérarchique [BT93] ($O(\log n)$ en moyenne pour des distributions randomisées)

La localisation dans notre modèle reconstruit déformé, n'est pas plus difficile. Nous allons utiliser ici la dualité entre Voronoï et Delaunay de notre reconstruction et la localisation d'un point dans Delaunay.

Lors des diverses phases de reconstruction (lissage, failles, ...), phases qui modifient le diagramme de Voronoï Vor initial, seule la géométrie de Vor a été modifiée. Le graphe topologique (incidences, adjacences) de Vor n'a pas changé. En d'autres termes, le graphe de Delaunay n'a jamais été modifié, il reste toujours le graphe dual de notre reconstruction, et un outil efficace pour interroger notre modèle. La localisation dans l'arbre de Delaunay [BT93, Dev92] nécessite en moyenne $O(\log(n))$ opérations, avec n le nombre de cellules de la partition.

La première étape consiste donc à localiser p dans DT. Soit T le tétraèdre de DT qui contient le point p. Il y a ensuite de multiples possibilités pour trouver la cellule de Voronoi contenant p :

- On choisit une cellule duale C de l'un des sommets de T et on marche dans la partition de Voronoï Vor.
- On construit l'ensemble des tétraèdres Tp en conflit (au sens de Delaunay) avec p qui induit l'ensemble dual Cp des cellules de Voronoï duales des sommets de Tp. La cellule contenant p est forcément dans Cp.

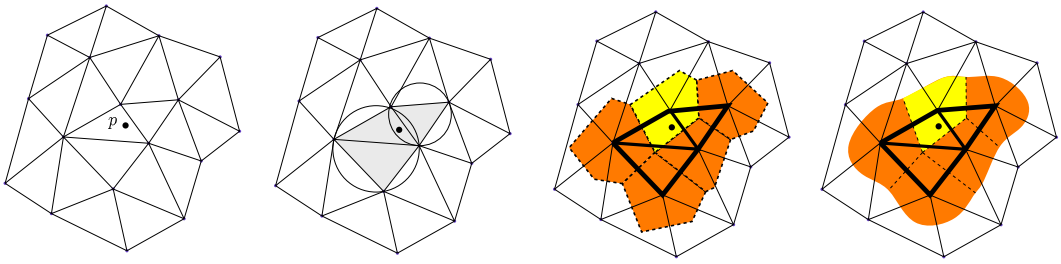


FIG. 3.38 – *Localisation du point p à travers la structure duale: la triangulation de Delaunay.*

3.5 Cas particulier des coupes parallèles

Nous avons appliqué dans cette partie, la méthode sur le cas particulier de données dans des sections parallèles. Les données sont discrétisées et dupliquées dans leurs sections respectives. Des exemples de reconstruction ont été réalisés sur un coeur (figure 3.39), un visage (figure 3.40) et un bassin (figure 3.41). Le dual de Delaunay que nous avons considéré, n'est plus exactement Voronoï, car les sommets choisis sont les centres des tétraèdres de Delaunay, et non plus les centres des sphères de Delaunay. En effet, pour les tétraèdres plats, les centres des sphères de Delaunay sont souvent trop éloignés de la surface recherchée. Des extrapolations indésirables apparaissent néanmoins (voir figure 3.41), mais sont atténuées par le lissage.

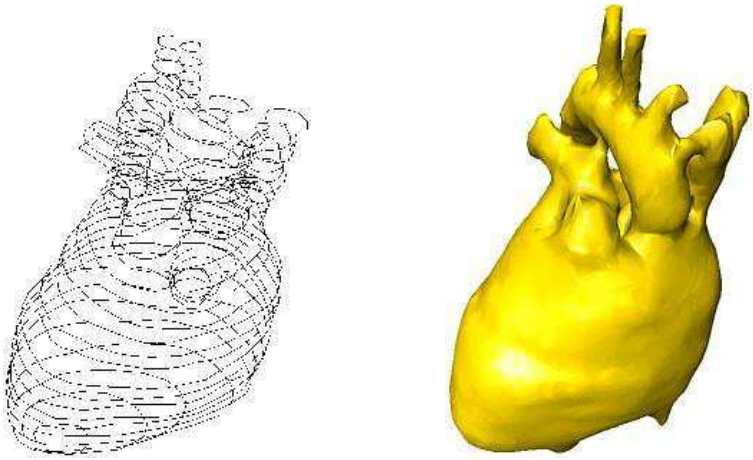


FIG. 3.39 – *Reconstruction d'un coeur humain.*

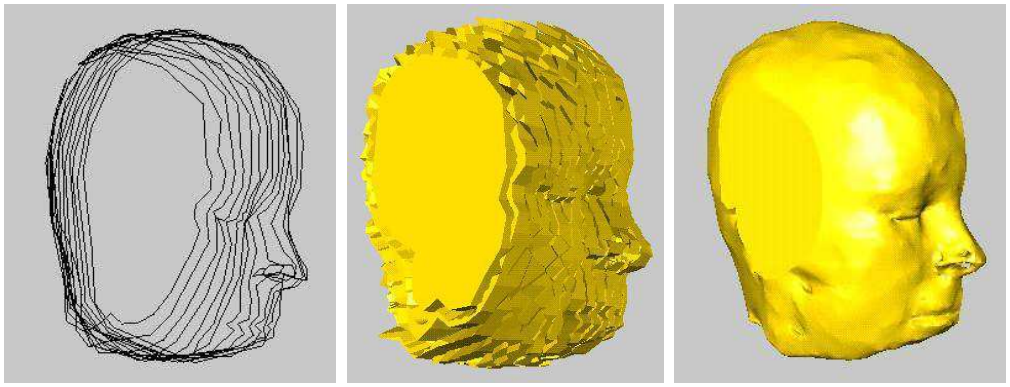


FIG. 3.40 – *Coupes d'un visage, reconstruction initiale et lisse.*

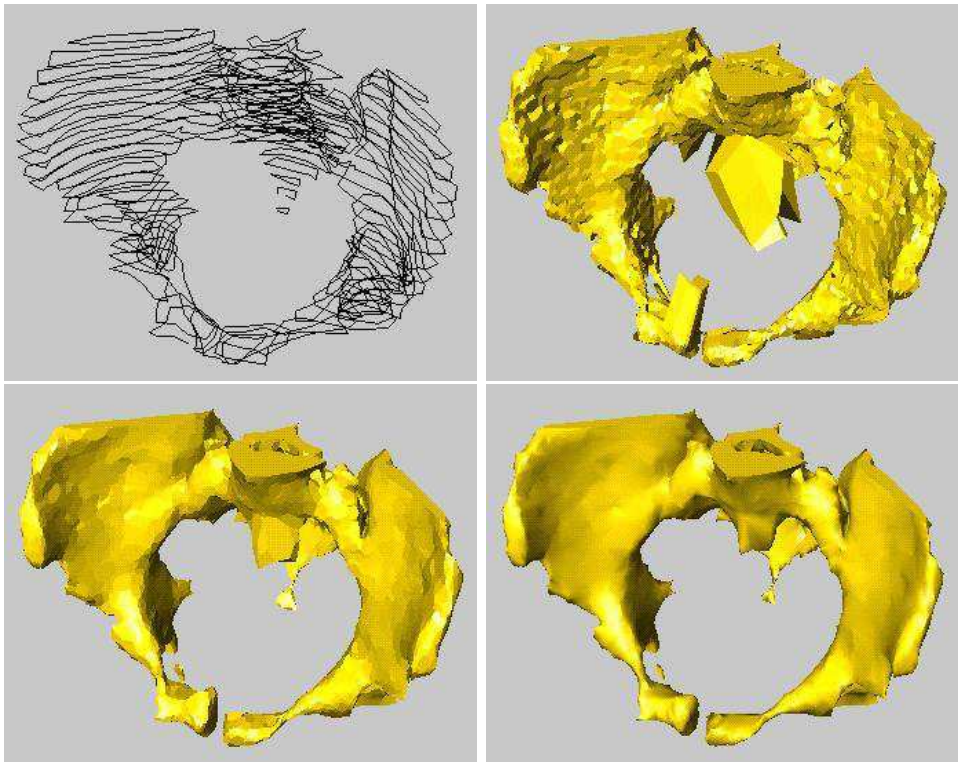


FIG. 3.41 – *Contours polyédriques d'un bassin. La reconstruction initiale (Voronoï) comprend des extrapolations dans les zones vides de données. Les figures du bas montrent la reconstruction lisse (modèle polyédrique et modèle avec rendu lisse). Les extrapolations se sont résorbées facilement, car ces zones étaient peu contraintes.*

Des améliorations de la méthode dans ce cas particulier, sont possibles, en construisant de façon indépendante, les volumes entre les sections consécutives.

3.6 Conclusion

3.6.1 Analyse de la méthode

Les limites de la méthode dans sa description actuelle sont essentiellement imposées par le choix de la métrique. La métrique utilisée (la métrique euclidienne) ne suffit pas à décrire correctement toute évolution, ou processus naturel. En effet les milieux naturels et le sous-sol géologique en particulier, ne sont pas des milieux isotropes en général. La méthode construira avec difficulté des modèles anisotropes (des couches plissées par exemple), si les données sont peu nombreuses. Même en milieu sédimentaire la topologie d'un diagramme de Voronoï euclidien, ne donne pas toujours la reconstruction souhaitée (voir figure 3.42).

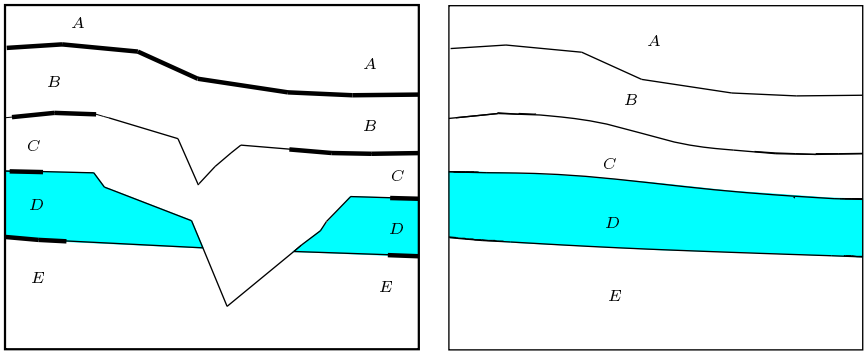


FIG. 3.42 – *Les données (en gras) sur les formations supérieures peuvent avoir une influence trop importante en profondeur.*

Une solution possible, et qui a été testée par Courrioux, est de combiner une méthode de reconstruction [LCM98] basée sur des données structurelles (points de passage et orientations) et la méthode présentée ici.

D'autres solutions ont été apportées dans [BN96a, BN96b] qui se basent sur un ordre géologique de reconstruction. Soit $\{Form_i\}_{i=1}^{N}$ un ensemble ordonné de données sur les formations géologiques du modèle; l'algorithme procède de façon itérative sur cet ensemble. A l'étape e_k le volume géologique R_k représentant la formation $Form_k$, est reconstruit à partir du diagramme de Voronoï de $\{Form_i\}_{i=k}^{N}$. La formation $Form_k$ est ensuite retirée des données et un nouveau diagramme de Voronoï est construit avec les données restantes $\{Form_i\}_{i=k+1}^{N}$. Une phase finale consiste à effectuer des opérations booléennes sur les blocs reconstruits $\{R_i\}_{i=1}^{N}$ et les régions finales sont :

$$R_k^* = R_k - \bigcup_{i=0}^{k-1} R_i$$

En construisant les formations dans un ordre particulier, discuté en section 4.2, la cohérence géologique est améliorée (voir figure 3.42). Néanmoins ces solutions nécessitent le calcul d'intersections supplémentaires et coûteuses, et une connaissance préalable de la topologie de la scène géologique est indispensable. Cette méthode n'a pas été généralisée à la dimension 3.

Une solution plus générale, consiste à construire des diagrammes de Voronoï avec des métriques anisotropes. Dans le cas précédent (couches sédimentaires) une anisotropie globale suffit : remplacer le disque unité de la métrique euclidienne par une ellipse, dont l'axe principal est parallèle aux directions des couches. Ceci revient de façon équivalente à effectuer une transformation anisotrope T sur les données de départ D . Si $\vec{u}$ représente la direction de stratification, on décrit tout point M comme le couple (λ,μ) dans le repère (O,$\vec{u}$,$\vec{u^\perp}$). On considère alors la transformation suivante :

$$T = k\lambda\vec{u} + \mu\vec{u^\perp}$$

Cette transformation permet en choisissant $k < 1$ de donner une influence plus grande à la direction $\vec{u}$. Les couches orientées suivant cet axe, se connectent plus facilement (voir figure 3.43). Si on prends $k > 1$ l'effet est inversé.

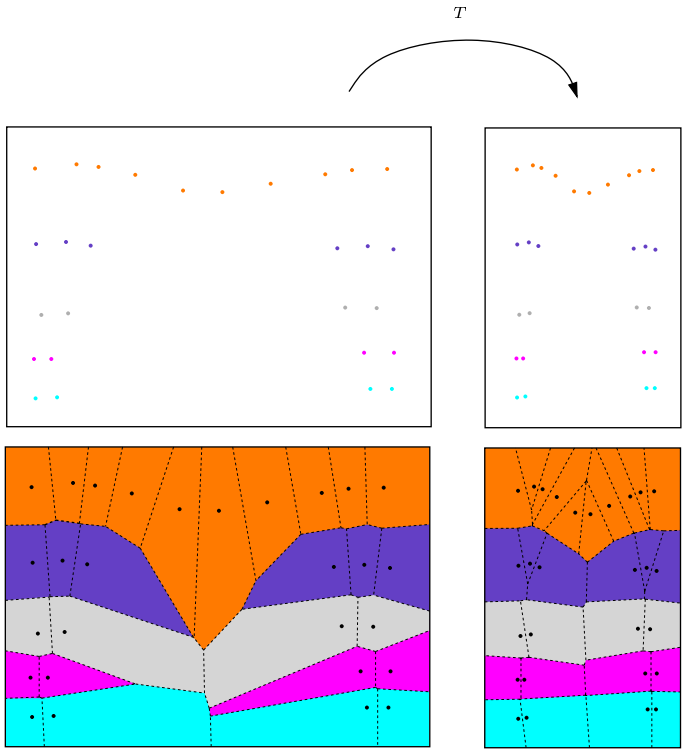


FIG. 3.43 – *Transformation anisotrope suivant une direction horizontale privilégiée. Les couches horizontales sont à présent connectées.*

Une transformation inverse T^{-1} sur la partition permet de reproduire la partition anisotrope dans le référentiel de départ (voir figure 3.44).

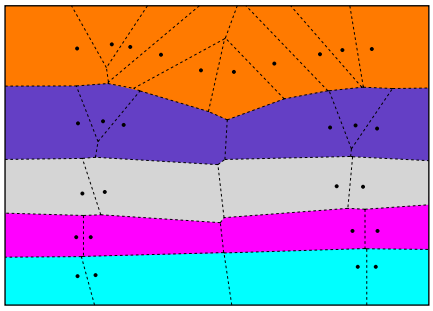


FIG. 3.44 – *Transformation inverse* T^{-1}.

Lorsque l'anisotropie est locale, et différente en tout point du milieu géologique, il faut déterminer des transformations locales.

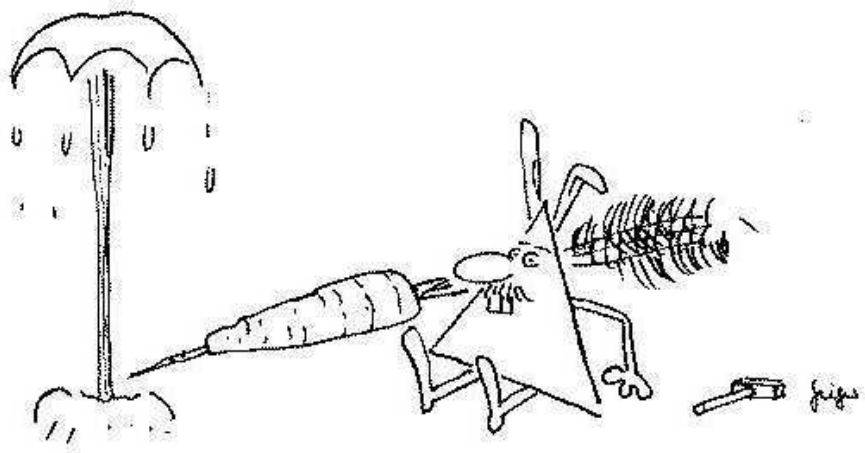
3.6.2 Conclusion générale

L'idée qui consiste à attribuer des couleurs aux objets d'une même scène, permet de reconstruire simultanément des objets distincts. Une construction indépendante des différents objets de la scène provoque généralement des intersections non souhaitées. La méthode décrite ici, permet au contraire de partager les bords entre les différentes entités du modèle. Cette méthode s'adapte donc bien aux corps denses, où tous les volumes (objets) partagent l'espace : modèles géologiques, corps humain. Une des originalités de la méthode est qu'elle ne nécessite pas de géométrie d'acquisition des données particulière, contrairement à la majeure partie des méthodes existantes. L'utilisation de métriques appropriées permettent de prendre en compte des anisotropies locales.

Les éléments de base sont des volumes polyédriques décrits par leurs bords (pour la visualisation par exemple) ou bien comme unions d'éléments volumiques plus petits, qui peuvent servir à des calculs ultérieurs (interprétation géodynamique, tracé de rayons, ...). Les représentations de la scène sont multiples (volumes ou surfaces), et la structure géométrique des objets permet des interrogations et des opérations ultérieures. C'est une méthode essentiellement géométrique, qui doit servir à valider les interprétations du géologue.

Chapitre 4

Application à la géologie : résultats



Dans ce chapitre nous nous intéressons à différents résultats de la méthode de reconstruction du chapitre 3, et aux aspects particuliers du cas géologique. En l'occurence les failles qui sont des surfaces particulières dans un modèle géologique, nécessitent un traitement particulier (voir section 4.1). Nous discutons aussi dans la section 4.2 de la détermination d'un ordre de reconstruction en fonction de règles géologiques, pour améliorer la reconstruction finale. Enfin, nous appliquons la méthode de reconstruction, sur des coupes géologiques 2D (voir section 4.3) et sur des modèles 3D réels (voir section 4.4).

4.1 Les failles : une étape particulière

Nous présentons ici, des méthodes pour partitionner un modèle volumique initial, par un ensemble de failles connues.

4.1.1 Les failles : introduction

Les failles sont des discontinuités géologiques qui résultent des différents mouvements de la croûte terrestre. Elles accommodent ces mouvements en créant des décalages des couches géologiques de part et d'autre. Une déformation interne des couches plus ou moins importante peut également contribuer à accommoder ce mouvement.

- les failles dites "inverses": elles accommodent des mouvements compressifs.
- les failles dites "normales" : elles accommodent des mouvements distensifs.
- les failles dites "transcurrentes" elles accommodent des mouvements horizontaux.

La figure 4.1 illustre les grandes classes de discontinuité, et montre que pour une même géométrie de faille, on peut rencontrer des situations géologiques complètement différentes.

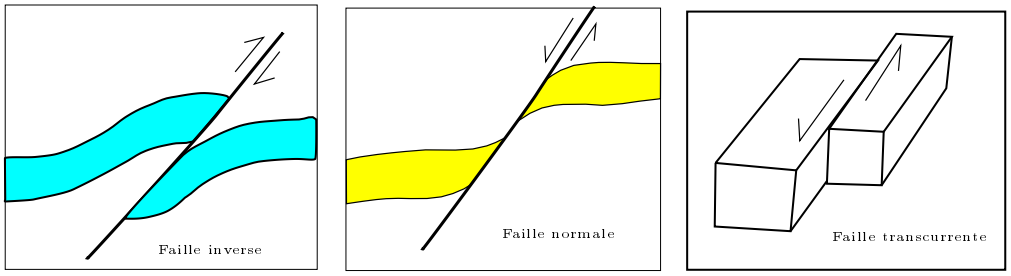


FIG. 4.1 – *Failles inverses, failles normales et failles transcurrentes.*

Nous allons essayer dans cette partie, d'une part, d'insérer les failles dans le modèle géométrique des données, et d'autre part, de recréer le décalage induit par ces fractures sur les couches géologiques et les surfaces qui les délimitent.

Si une faille est complètement décrite, cela signifie que l'on connaît non seulement la liste des formations qu'elle décale, mais aussi la géométrie de ces formations sur la faille (comme une section particulière du sous-sol géologique par exemple). Dans ce cas, il est alors possible de la représenter comme

union d'interfaces connues séparant deux formations, et l'introduire dans l'algorithme de reconstruction.

Par contre, et c'est la majeure partie des cas, si une faille n'est connue que par sa géométrie propre (surface 3D ou contours ouverts dans des sections 2D) elle n'est pas une donnée valide pour notre algorithme, et il faut réellement effectuer un traitement supplémentaire pour insérer la faille dans le modèle géométrique.

Nous avons considéré deux solutions pour insérer les failles dans les modèles géologiques:

- la première méthode (voir 4.1.2) construit le modèle de "Voronoï" sans les failles (éventuellement lissées) et coupe dans une étape ultérieure les volumes géologiques par les surfaces de failles.
- la seconde méthode (voir 4.1.3) insère les failles directement dans l'algorithme général. La discrétisation des failles utilise des couleurs particulières.

Les deux méthodes supposent que la géométrie des failles est connue et constitue donc une donnée d'entrée à la reconstruction. Les avantages et inconvénients respectifs des deux méthodes seront ensuite discutés.

4.1.2 Intersections des failles et des volumes géologiques

La méthode que nous allons décrire ici consiste à construire dans un premier temps un modèle volumique sans failles V_0. Dans une seconde étape, on construit toutes les intersections entre les failles F_i et les volumes géologiques élémentaires $V_0(A_i)$ (formations A_i) de notre modèle. Les volumes $V_0(A_i)$ sont coupés en plusieurs blocs indépendants que l'on peut re-déformer pour réaliser un décalage géométrique au niveau de la faille.

En 2D, toutes les surfaces considérées ainsi que les failles sont représentées par des lignes polygonales (approximation de courbes par des segments). La recherche des intersections entre interfaces et failles, se réduira donc, aux intersections de segments. Soit N le nombre de failles présentes dans la coupe à reconstruire. Pour chaque portion de surface reconstruite on cherche toutes les intersections avec les failles en présence.

Pour traduire cette discontinuité sur les interfaces, nous allons revenir sur les données initiales non reconstruites, et selon le nombre d'intersections obtenues effectuer diverses actions :

- *0 intersection* : Il n'y a pas de failles intervenant sur cette surface.

– *1 intersection* : La portion de surface est coupée au niveau de l'intersection, en deux nouvelles parties indépendantes (voir figure 4.2). Les nouvelles contraintes que subissent ces morceaux d'interfaces sont :
  – respecter la tangente imposée par les données de départ (si elle existe).
  – l'extrémité coupée du contact reste obligatoirement sur la faille.

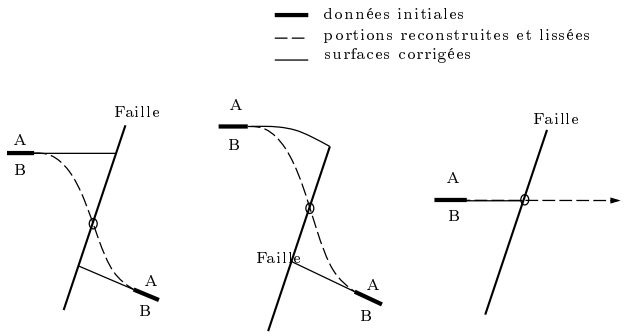


FIG. 4.2 – *Différents cas d'intersections avec une faille.*

– *k>1 intersections* : la portion de surface rencontre un réseaux de failles, et va être scindée en $k+1$ morceaux de surface indépendants (voir figure 4.3). Le premier et le dernier morceau se construisent comme dans le cas ($k = 1$) . Par contre, à l'intérieur du réseau de fractures, les constructions possibles sont nombreuses (solution possible : marche en escaliers).

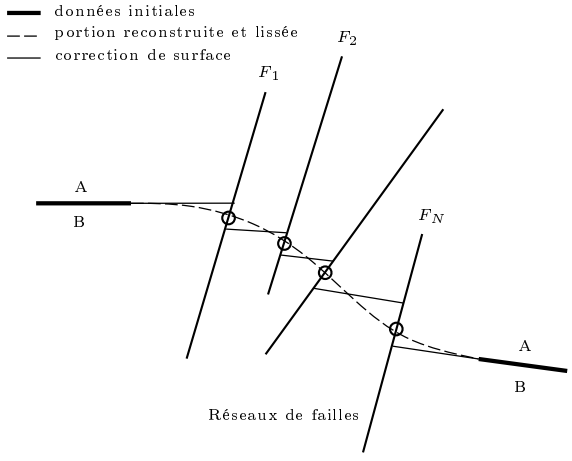


FIG. 4.3 – *Intersection d'une interface avec plusieurs failles.*

Le cas 3D est une généralisation du cas précédent. Les surfaces polyédriques sont coupées par les surfaces de failles connues, et ensuite redéformées et contraintes par la faille (voir figure 4.4).

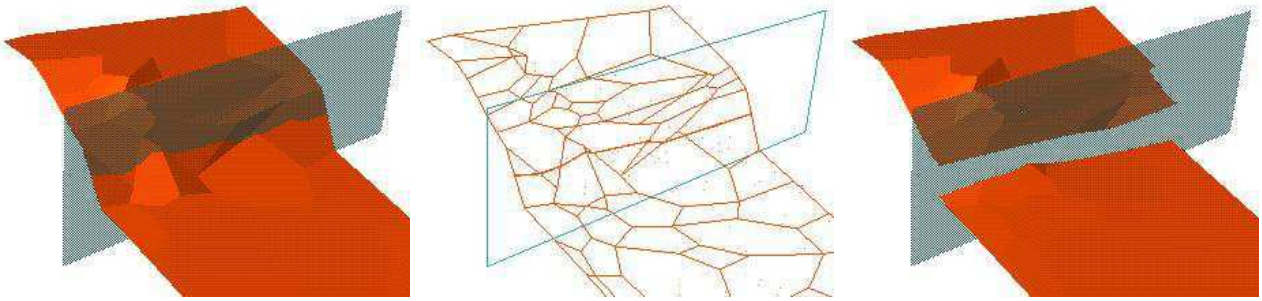


FIG. 4.4 – *Intersection 3D d'une interface avec une faille. Décalage induit par le lissage sur la faille.*

Cette solution pose beaucoup de problèmes. Notamment, elle nécessite de calculer des intersections de surfaces 3D, qui sont difficiles à calculer de façon robuste. De plus, la structure qui fait la force de notre modèle (les diagrammes de Voronoï) est perdue, et de nouvelles opérations (localisations, insertions) ne sont plus possibles, de façon aussi simple, sur la scène ainsi construite.

4.1.3 Failles et diagramme de Voronoï

Nous montrons dans cette partie qu'il est possible de partitionner un modèle volumique par des surfaces de failles, sans perdre la structure de Voronoï. Les décalages induits par les failles, sont souvent bien ressentis dans la partition de Voronoï : lorsque des données sont décalées géométriquement (voir figure 4.5) le décalage est visible dans la reconstruction de Voronoï, et s'effectue le long de l'axe médian des données décalées. Néanmoins lorsque la position exacte de la faille est connue, il est indispensable de pouvoir l'insérer comme une donnée à part entière dans l'algorithme de reconstruction.

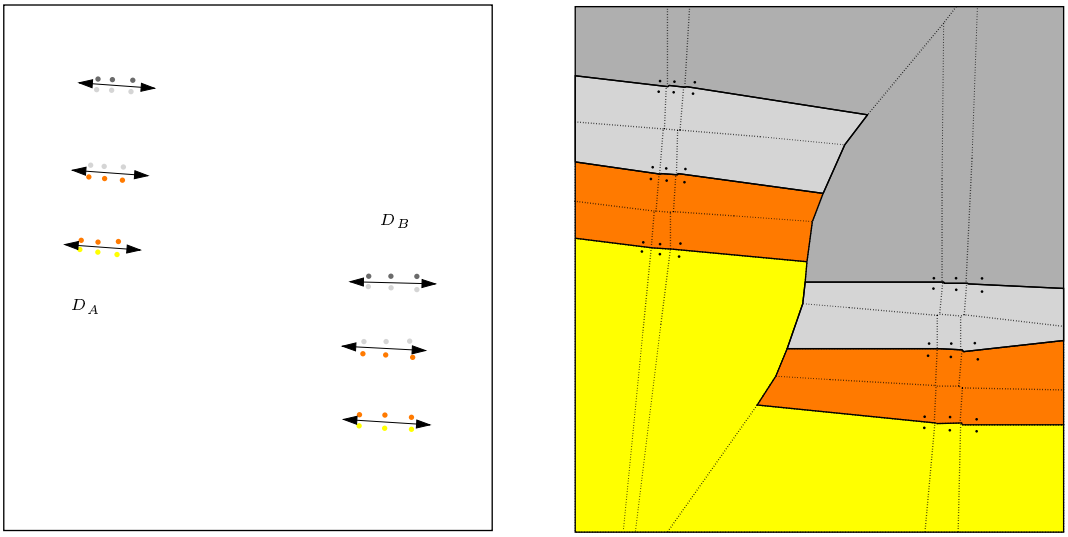


FIG. 4.5 – *Deux ensembles de points D_A et D_B colorés autour d'une zone probable de faille. Le décalage dans les données provoque un effet de discontinuité dans le diagramme de Voronoï. La faille géométrique créée est la "médiatrice" des ensembles D_A et D_B.*

Pour éviter cette fois-ci des calculs d'intersections supplémentaires, coûteux et difficiles à implémenter nous allons essayer d'insérer les failles dans la partition initiale V_0 des données colorées. La faille est simplement considérée comme une surface limite F (interface) non informée sur les couches (couleurs) qu'elle sépare. Elle est discrétisée comme les autres interfaces de formations en un ensemble de points D_F, mais les points sont identifiés par une couleur spéciale "sans couleur". Pour assurer l'indépendance des côtés A et B d'une même faille, on utilise deux couleurs spéciales c_A et c_B différentes. On insère D_F dans V_0 et on obtient la nouvelle partition V_1. Les cellules adjacentes à la faille F sont incolores (voir figure 4.6) et déterminent ce que nous appellerons la "zone d'influence" Z_F de la faille F dans le modèle. On

déterminera par la suite pour chaque cellule de Z_F une couleur associée par "interpolation" des couleurs des cellules directement adjacentes.

Nous supposons que les côtés A et B d'une faille sont indépendants et donc une cellule de couleur c_A dans V_1 est influencée uniquement par des cellules colorées du côté A et vice-versa.

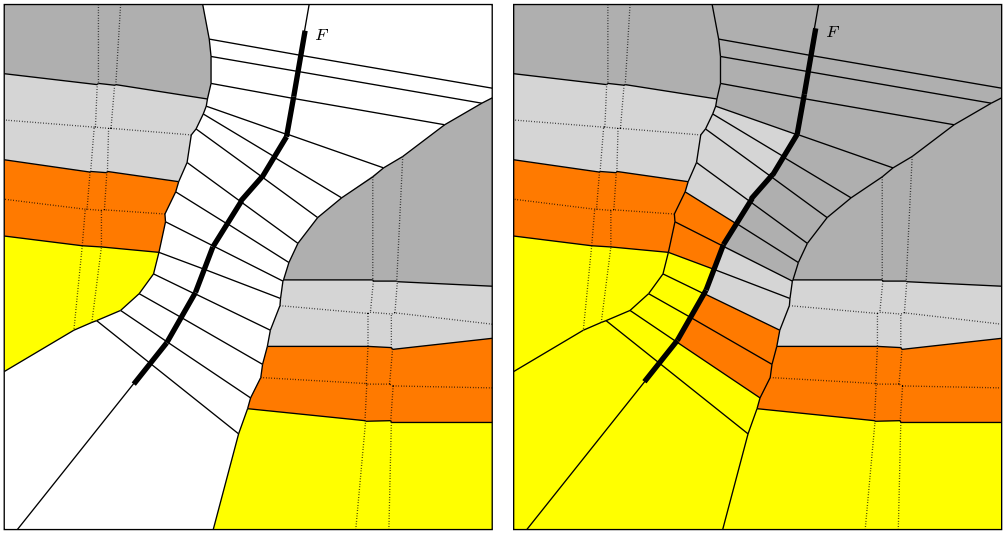


FIG. 4.6 – *Partition de Voronoï partiellement colorée - Interpolation des cellules non colorées en fonction des cellules voisines informées.*

4.1.3.1 Cas d'une faille

Soit C_{inc} une cellule de centre p_{inc} et de couleur $c_{inc} \in c_A,c_B$. $K_1,..,K_n$ sont les n cellules de couleurs adjacentes, de centres $q_1,..,q_n$. On peut imaginer de nombreux critères pour colorier la cellule C_{inc} :

- C_{inc} est coloriée selon le point q_i le plus proche.
- C_{inc} est coloriée à partir des points de couleurs voisins en fonction des distances $d(p_{inc},q_i)_{i=1..n}$ aux points.
- C_{inc} est coloriée à partir des points de couleurs voisins en fonction de l'aire des faces de contact entre les cellules C_{inc} et $(K_i)_{i=1..n}$ $Surf(C_{inc},K_i)_{i=1..n}$.
- C_{inc} est coloriée en fonction de l'aire des cellules K_i voisines colorées.

Cette méthode garantit les règles ϕ suivantes :

Propriété 5 *Propriétés de l'interpolation*

1) la faille est une partie inhérente du diagramme de Voronoï.

2) chaque coté de la faille est indépendant : un point de couleur d'un côté de la faille, n'affecte pas une cellule incolore du côté opposé.

3) les structures géologiques connues de part et d'autre de la faille F sont prolongées sur F sans changer leur disposition.

4.1.3.2 Cas d'un réseau de failles

Considérons à présent le cas d'un ensemble de failles dit "réseau de failles" et soient F_1,..,F_n les n failles de notre modèle. Il n'y a pas de règle aussi simple que dans le cas d'une faille. Il n'est pas raisonnable par exemple, d'interpoler des zones sous-informées au coeur même d'un réseau de failles (voir figure 4.7).

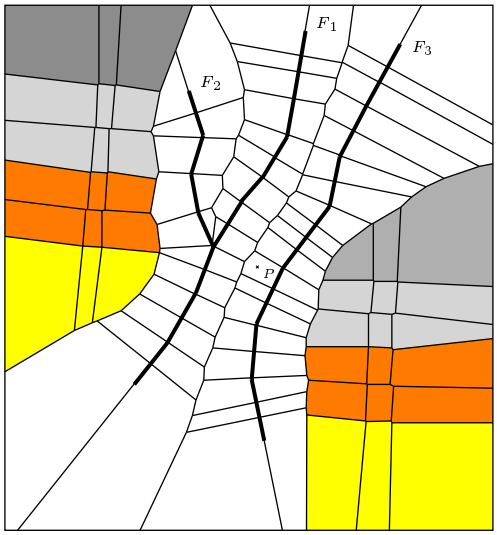


FIG. 4.7 – *Réseau de failles dans une zone sans données. Il n'y a pas de règle géologique assez générale qui permette d'interpoler un point isolé tel que le point P. Ici l'interprétation d'un géologue est nécessaire.*

Néanmoins nous proposons une méthode qui préserve au moins les règles ϕ ci-dessus. Nous allons utiliser l'algorithme précédent (qui traite le cas d'une faille) de façon itérative, en insérant les failles F_i les unes après les autres et l'interpolation des couleurs est réalisée à chaque étape (voir figure 4.8). A l'insertion de F_i, la zone Z_{F_i} est colorée ainsi que les points de D_{F_i}. Dans l'exemple la méthode d'interpolation utilisée est celle qui associe à chaque élément (cellule ou point) incolore la couleur du plus proche voisin coloré.

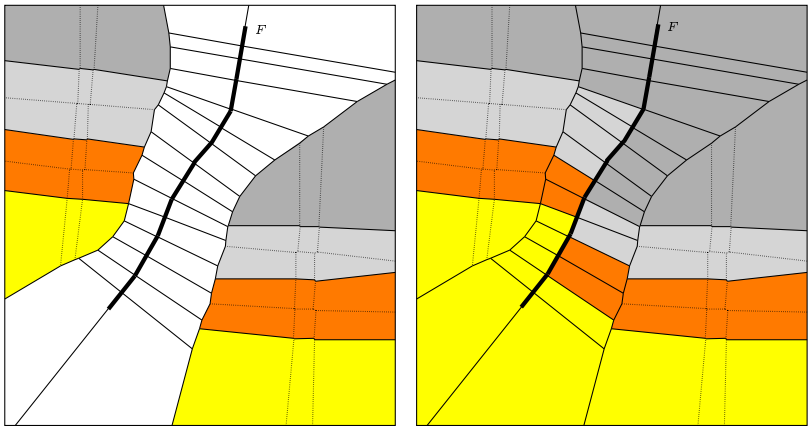


FIG. 4.8 – *Insertion de la première faille F_1 et interpolation des cellules non colorées. Les points de F_1 ont à présent une couleur associée.*

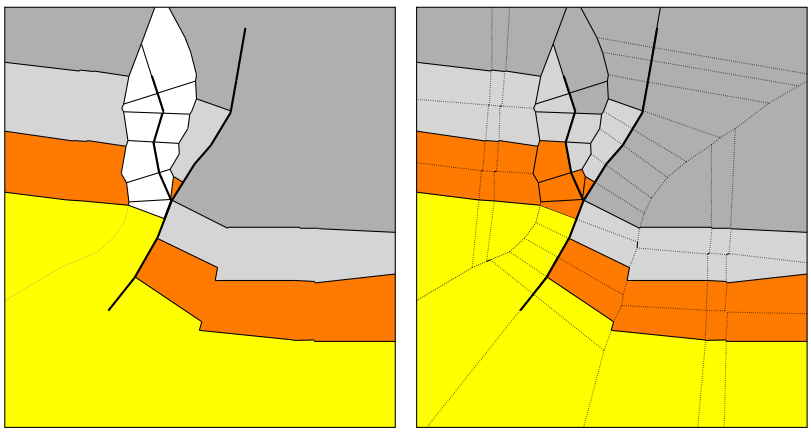


FIG. 4.9 – *Insertion de la faille F_2 et interpolation.*

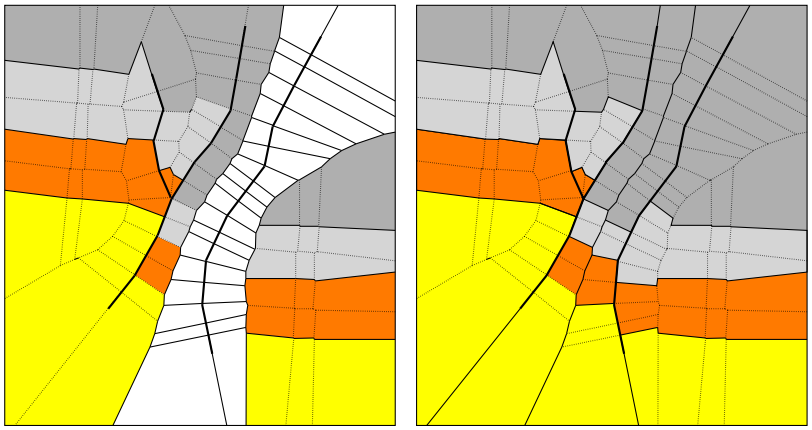


FIG. 4.10 – *Insertion de la faille F_3 et interpolation finale non lissée.*

Le lissage des frontières de chaque formation est toujours possible, mais il est contraint par une nouvelle règle : *les noeuds déformables représentant des points sur la faille F, ne peuvent se déplacer que sur F*. La structure finale lissée est donnée en figure 4.11.

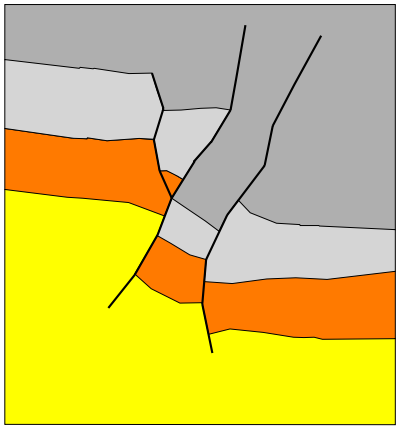
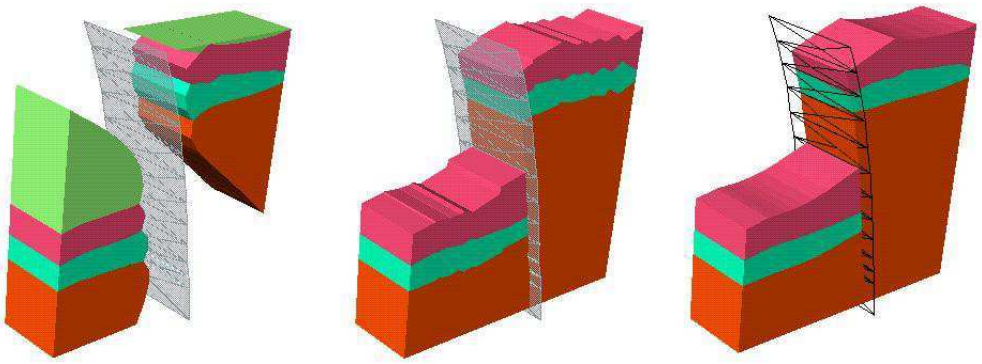


FIG. 4.11 – *Reconstruction finale lissée.*

4.1.3.3 Exemple synthétique 3D

L'exemple suivant représente un modèle synthétique 3D, reconstruit à partir de points de couleurs, auquel on insère une surface représentant une faille. La figure 4.12 fait apparaitre la zone d'influence de cette faille dans le modèle des points. L'attribution des couleurs et la nouvelle partition sont représentées en figure 4.12 (b). La partition finale lissée est contrainte par la faille (figure 4.12 (c)).



(a) (b) (c)

FIG. 4.12 – *(a) Insertion d'une surface de faille F (surface transparente sur la figure) dans un modèle de couleurs. La zone vide est la zone d'influence de la faille. (b) Interpolation de Z_F. (c) Lissage des surfaces et des volumes du modèle. Les points initialement sur la faille F restent sur F.*

4.1.4 Conclusion

Deux méthodes différentes ont été testées dans cette partie. La première, plus classique, coupe les surfaces géologiques (pré-construites sans les failles) par les surfaces de failles et nécessite des calculs d'intersections. La seconde méthode, insère les failles avec les autres données et interpole la zone d'influence de ces failles dans le modèle des données. Cette dernière méthode présente de nombreux avantages par rapport aux intersections de volumes:

- pas de calculs d'intersection coûteux et difficiles à mettre en oeuvre, surtout en 3D (cas dégénérés multiples).
- la structure duale utile pour les interrogations de notre modèle n'est pas perdue : c'est le graphe de Delaunay des points de données. Des interrogations ou nouvelles insertions sont toujours possibles.

4.2 Ordre géologique de reconstruction

Basée sur une proposition très complète concernant la syntaxe des scènes géologiques dans [PS95, Per98], nous allons définir une hiérarchie dans la reconstruction des formations en raisonnant sur l'âge relatif des couches géologiques, et sur la façon dont elles se raccordent. Ces règles ont été utilisées dans [BN96a] et ont permis une amélioration de la cohérence géologique des reconstructions.

Une première étape consiste à donner un âge (au moins relatif) aux différents éléments géométriques (surfaces et volumes) d'un modèle géologique : c'est l'âge de création des différents éléments géologiques. Dans des contextes géologiques bien précis, il y a des correspondances entre l'âge et la topologie d'un objet géologique dans une scène. Dans les régions sédimentaires par exemple, les formations se sont déposées les unes après les autres, et donc les couches jeunes sont au dessus des couches plus vieilles.

La deuxième étape consiste à caractériser les différentes façons dont les surfaces géologiques (respectivement les volumes) se coupent dans un modèle.

Définition 19 *Lorsque deux surfaces géologiques S_a et S_b (S_a étant la plus jeune) se coupent, on dira que la surface S_a est discordante sur S_b si elle interrompt S_a (figure 4.13 droite).*

Définition 20 *On dira que S_a (surface jeune) est concordante avec S_b (surface ancienne) si S_a s'arrete sur S_b*

Les exemples de la figure 4.13 illustrent les relations de concordance et discordance pour des surfaces S_a et S_b.

Associer à une surface le volume géologique adjacent (le plus jeune par exemple, voir [PS95]) est une façon d'orienter les surfaces. Les surfaces non-orientables (les failles en général) sont discordantes sur toutes les autres surfaces. On peut ainsi à partir des relations sur les surfaces, définir des relations similaires sur les volumes géologiques. Pour une surface S_i, on note B_i son volume géologique associé et la définition devient :

Définition 21 *Pour deux surfaces géologiques S_a et S_b. Si S_a est discordante sur S_b alors B_a est discordante sur B_b. Si S_a est concordante avec S_b alors B_a est concordante avec B_b.*

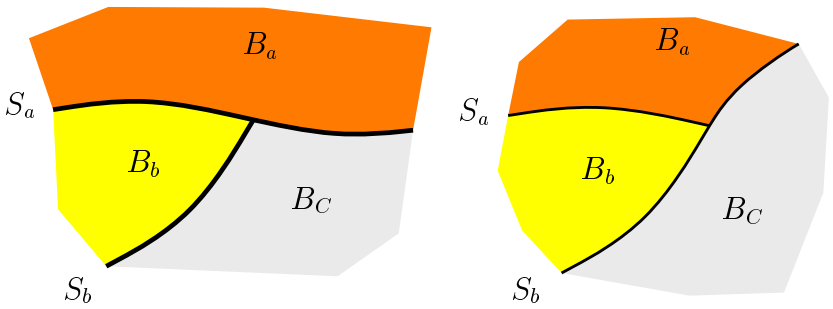


FIG. 4.13 – *(a) B_a est discordante sur B_b et B_c. Les volumes B_b et B_c sont concordants. (b) B_b et B_a sont concordants et B_c est discordant sur B_a et B_b.*

Le problème de fermeture suivant est indéterminé : on souhaite interpoler trois données de surfaces représentant des interfaces B_a/B_b, B_b/B_c et B_c/B_a; les interfaces prolongées localement concourent (voir figure 4.14). La reconstruction suivie du lissage peut donner lieu à trois solutions différentes (figure 4.15) selon que l'ordre de reconstruction des volumes géologiques est $\{B_b,B_a,B_c\}$, $\{B_a,B_b,B_c\}$ ou $\{B_c,B_b,B_a\}$.

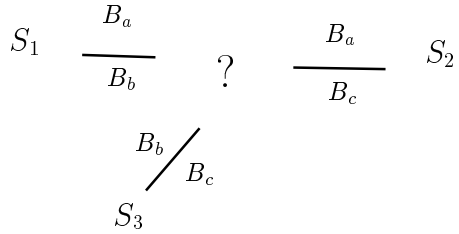


FIG. 4.14 – *Problème de fermeture indécis.*

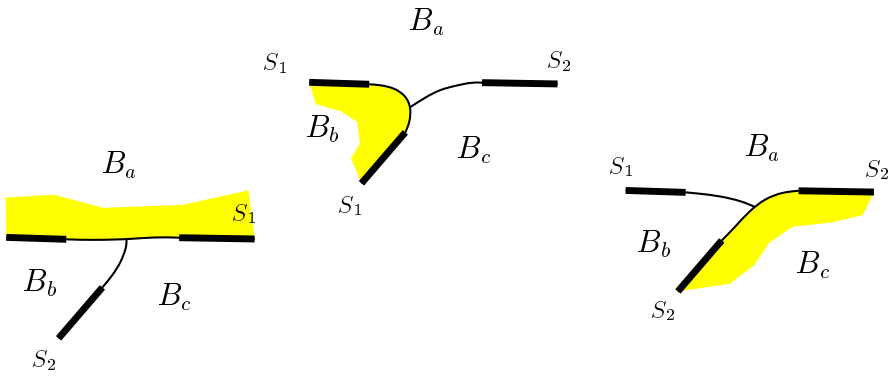


FIG. 4.15 – *Différentes solutions possibles selon l'ordre de reconstruction des objets B_a,B_b,B_c.*

On remarque ici qu'il est important de reconstruire la formation dont le bord est discordant en premier. La première règle (sur les surfaces) est donc la suivante :

Règle 1 *Construire les surfaces discordantes avant les surfaces concordantes.*

Pour déterminer un ordre total sur les formations, il reste à ordonner entre-elles celles dont les interfaces sont de même type (concordantes ou discordantes) et pour cela on considère l'âge relatif des surfaces entre-elles. Cet âge correspond à l'âge de création des couches et interfaces géologiques. Les couches supérieures (les plus jeunes dans la majeure partie des cas) sont souvent les mieux renseignées, par contre plus les surfaces sont profondes et plus les données sont rares et incertaines. L'ordre de reconstruction des formations sera alors :

Règle 2 *Construire le modèle de la formation discordante la plus jeune, à la formation concordante la plus vieille.*

Cet ordre est total si l'on considère que le cas particulier de la figure 4.16 n'est pas une situation géologique valide.

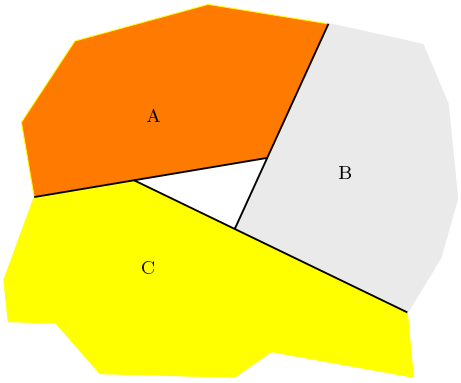


FIG. 4.16 – *Les formations A,B et C sont toutes discordantes et ont été créées en même temps.*

Raisonnons sur la coupe suivante (figure 4.17) :

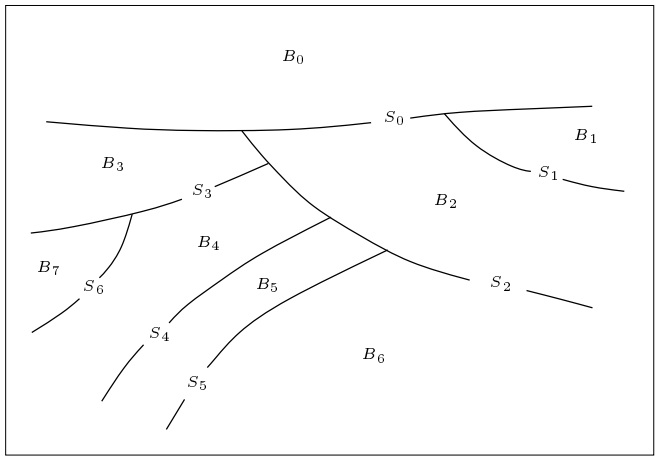


FIG. 4.17 – *Coupe géologique composée de sept surfaces S_0, ... ,S_6 délimitant huit blocs de formations B_0, ... , B_7*

L'arbre des discordances pour cet exemple est illustré sur la figure 4.18.

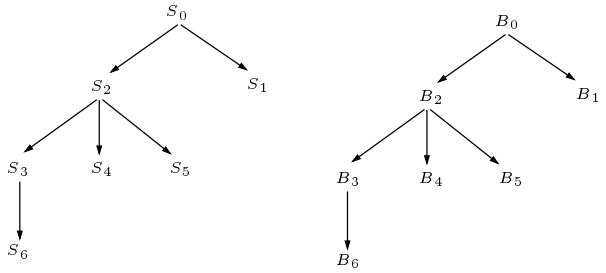


FIG. 4.18 – *Arbre des discordances pour les surfaces et les formations de la coupe.*

Cette arbre ne permet pas d'ordonner les volumes qui sont les feuilles dans l'arbre d'un même niveau (B_3, B_4 et B_5 par exemple). On va se servir de l'âge de ces volumes géologiques pour déterminer l'ordre total. En supposant que l'âge de création des couches géologiques, nous donne les relations suivantes :

- B_1 plus jeune que B_2
- B_3 plus jeune que B_4 et B_4 plus jeune que B_5

Alors la hiérarchie finale de reconstruction des formations sera :

$$B_0 > B_1 > B_2 > B_3 > B_4 > B_5 > B_6$$

4.3 Le cas bidimensionnel: les coupes géologiques

Le cas des coupes 2D, a été introduit dans [BN96a, BN96b]. Nous illustrons ici, des exemples de coupes 2D, reconstruites avec la méthode.

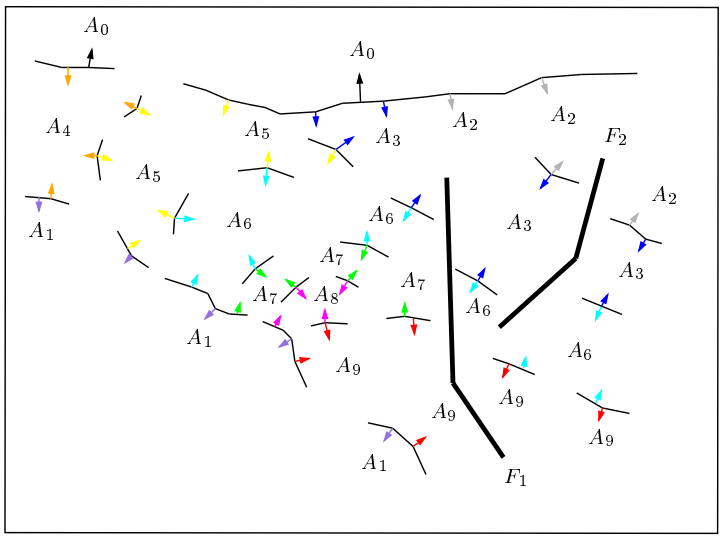


FIG. 4.19 – *Coupe synthétique proposée par M. Perrin. L'ordre d'insertion des formations est A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9.*

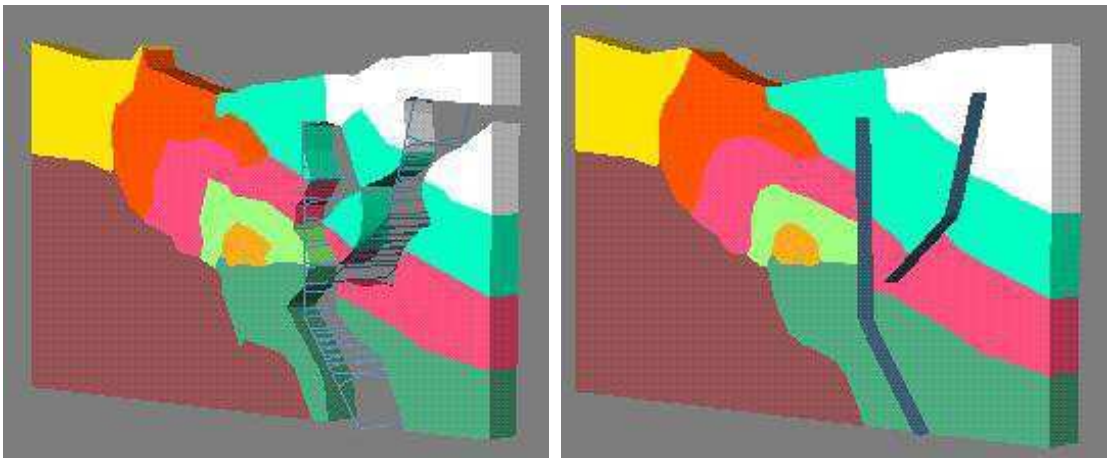


FIG. 4.20 – *A gauche la partition de Voronoï avec la zone d'influence de la faille (zone vide) et la reconstruction finale à droite.*

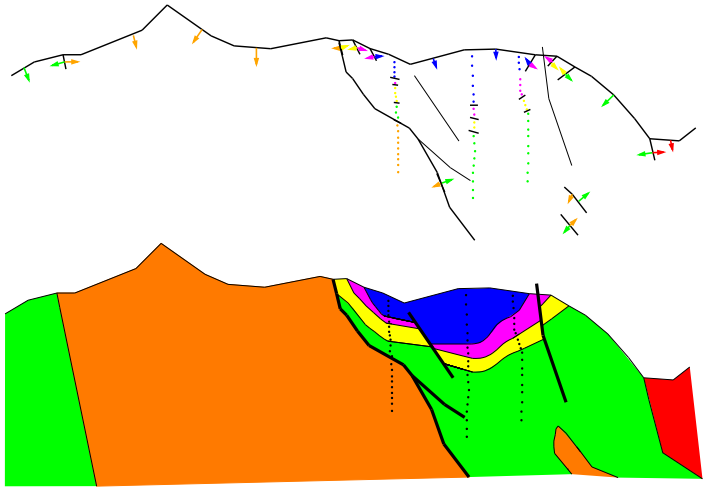


FIG. 4.21 – *Coupe partielle "Alpes" fournie par le BRGM et reconstruction.*

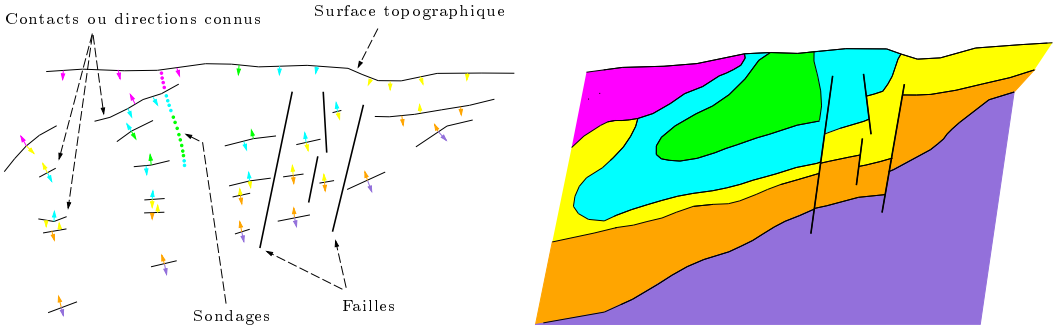


FIG. 4.22 – *Coupe synthétique fourni par le BRGM et sa reconstruction.*

4.4 Modèles tridimensionnels

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats 3D sur des modèles de données réels, provenant du B.R.G.M. et de GéoFrance 3D.

4.4.1 Modèle Ardèche

Le modèle que nous allons reconstruire ici, est basé sur un terrain sédimentaire de la marge ardéchoise. Les données proviennent du B.R.G.M. et sont composées d'interfaces 2D contenus dans trois coupes géologiques (voir figure 4.23 à droite). Les coupes (1) et (2) ont approximativement la même normale, et la coupe (3) est située entre les deux autres, de normale perpendiculaire. La description des coupes n'est pas complète : seules sont connues des portions d'interfaces (contours 2D) entre les différentes couches sédimentaires. Ces portions interfaces ont été déterminées à partir de données sismiques. Ne connaissant pas les pendages particuliers de chaque interface, nous supposerons dans tout le modèle, que la direction des couches est horizontale, et imposerons pour chaque interface connu un pendage horizontal.

Si la complexité géologique de ce modèle n'est pas très grande (modèle sédimentaire), cet exemple est intéressant car il illustre une reconstruction à partir de données géométriques originales : les trois sections sont non planes et l'une coupe les deux autres. Cet exemple montre la souplesse de la méthode de reconstruction par rapport à la géométrie d'acquisition des données.

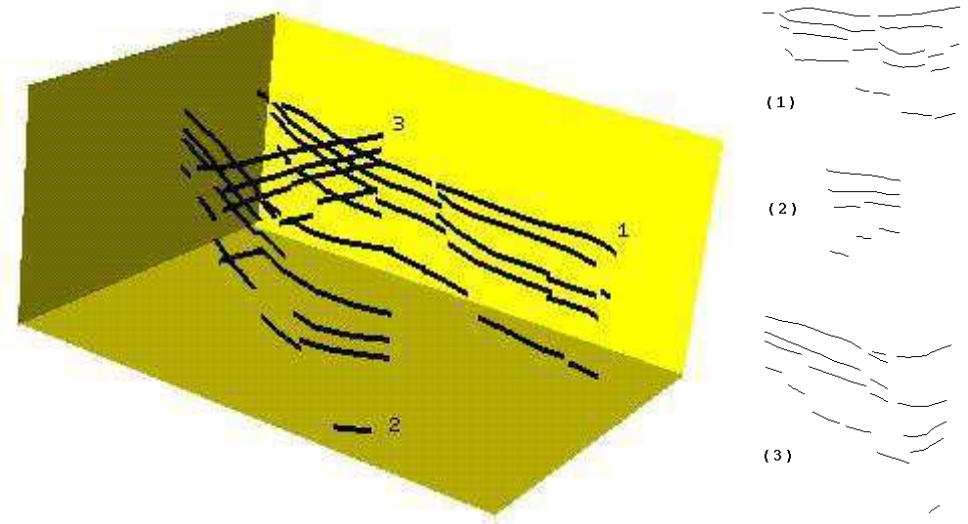


FIG. 4.23 – *Données du modèle Ardèche composées d'interfaces 2D dans des sections non parallèles.*

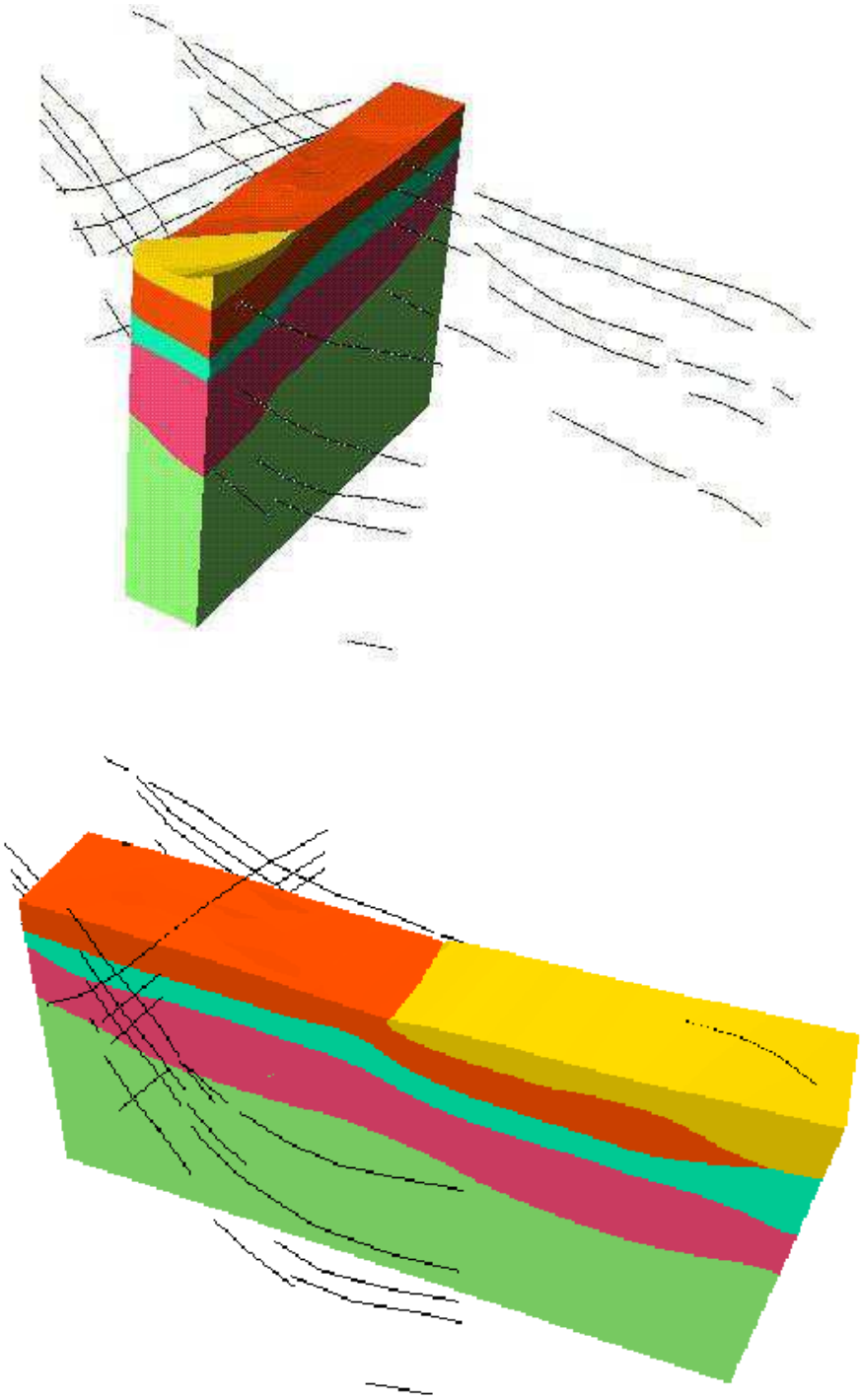


FIG. 4.24 – *Reconstruction et coupes diverses dans le modèle.*

4.4.2 Modèle de l'Aiguille de Morges

La méthode de reconstruction est ici appliquée au massif de l'Aiguille de Morges (Massifs du Pelvoux, Alpes occidentales françaises). Le bloc à reconstruire s'étend sur 12km (Est-Ouest) et 8.5km (Nord-Sud) avec une altitude variant de 1000m à 3000m. Des constructions tridimensionnelles de ce modèle ont déjà été réalisées, et notamment par Calcagno et coll [CLC97] qui ont construit les surfaces 3D des principales interfaces et failles à partir d'un interpolateur de surfaces.

Les données utilisées pour construire le modèle volumique final proviennent de différentes sources : cartes topographiques (Institut géographique national :IGN), cartes géologiques (BRGM), modèle numérique de terrain (IGN), photographies aériennes (IGN), etc. La mise en commun de toutes données (règles de structuration et géoréférencement) a été faite par un géologue [CLC97]. Les données géométriques considérées pour la reconstruction sont illustrées sur la figure 4.25 et sont :

- huit coupes géologiques avec des contours incomplets (les contours ou interfaces connaissent les formations qu'ils séparent).
- une grille de points sur le M.N.T. (modèle numérique de terrain)
- la carte géologique numérisée.

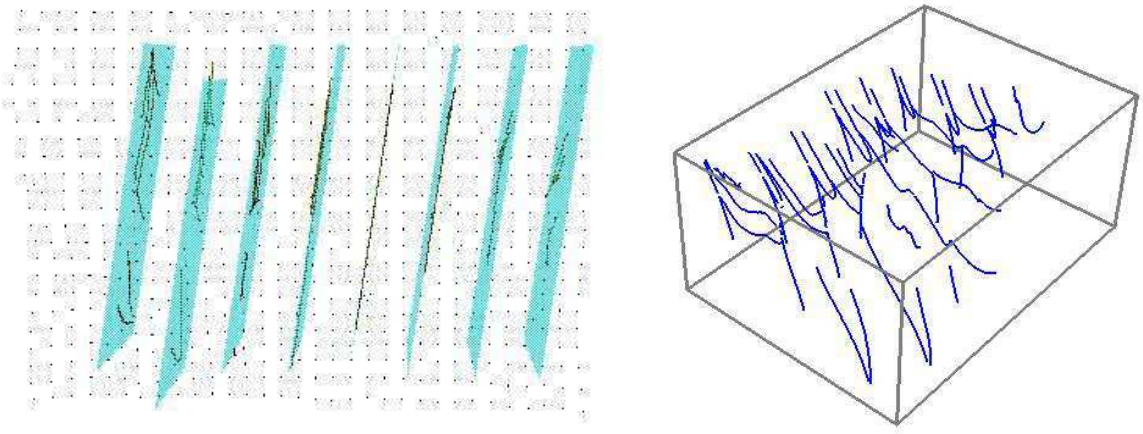


FIG. 4.25 – *Ensemble des points du MNT (grille régulière de points), et géométrie des coupes géologiques (vue de dessus et perspective).*

Surface topographique Le M.N.T. est connu sous la forme d'une grille de points (ici régulière) de taille 201*201. On ne connait pour l'instant que les coordonnées de ces points sur la surface topographique. Avec l'aide de

la carte géologique, il va être possible de leur attribuer une caractéristique géologique (couleur). En pratique on projette verticalement chaque point du M.N.T. sur la carte géologique et on récupère la valeur géologique du point projeté. La normale en ce point est estimée en fonction des points voisins sur la grille : elle est choisie comme la moyenne des normales des faces incidentes au point (voir figure 4.26).

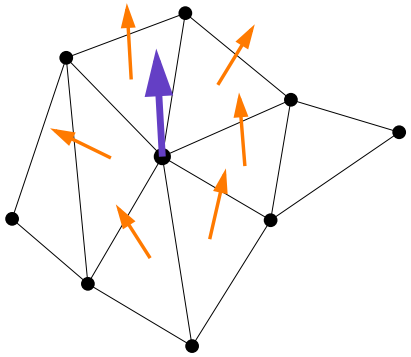


FIG. 4.26 – *Estimation de la normale en un point du MNT, en fonction de ses voisins sur la grille.*

L'atmosphère est considérée comme un bloc géologique particulier et une couleur lui est attribuée. Donc en tout point du MNT on sait attribuer deux couleurs (couches géologique et atmosphère) et la normale estimée à la surface en ce point. Ces données à présent valides pour l'algorithme de reconstruction du chapitre 3 nous permettent d'obtenir la surface topographique comme l'interface particulier de toutes les couches géologiques avec l'atmosphère (voir figure 4.27).

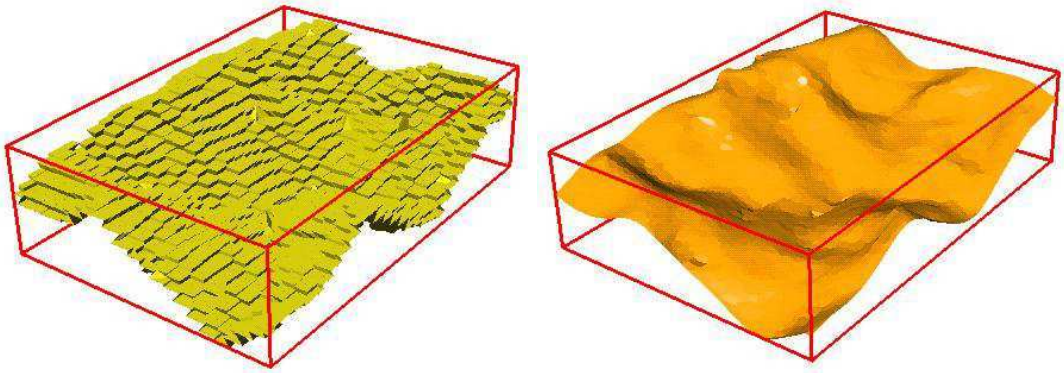


FIG. 4.27 – *Reconstruction de la surface topographique : initiale et lissée (vue de dessous).*

L'atmosphère est en contacts avec toutes les formations afleurantes et donc doit être reconstruite en premier. La reconstruction volumique finale est illustrée en figures 4.28 et 4.29.

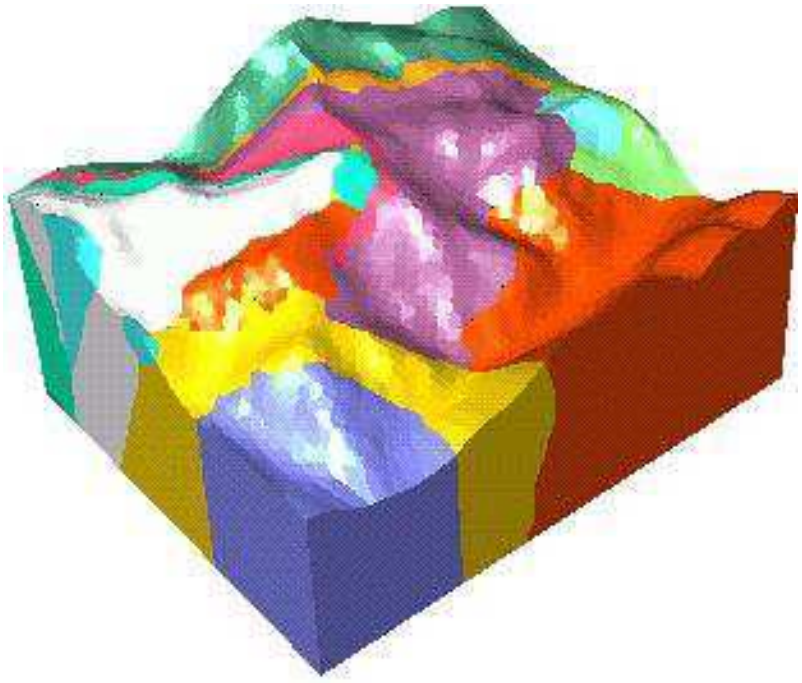


FIG. 4.28 – *Résultat complet final, coupé dans un bloc 3D englobant toutes les données.*



FIG. 4.29 – *Une coupe 3D arbitraire dans le modèle volumique, permet de visualiser de façon plus locale les structures géologiques.*

4.4.3 Modèle Armor

Dans le cadre du programme GéoFrance 3D [Led98], la méthode de reconstruction a été appliquée à des données géologiques concernant la région de St-Brieuc dans le massif armoricain [NCG+98]. Nous reprenons ici, les résultats 3D de cet article.

4.4.3.1 Contexte géologique

La couche cadomienne de Bretagne est composée d'unités majeures, qui sont largement décrites dans [BB90, EGG+96]. On y retrouve :

- (1) L'unité de Trégor
- (2) L'unité de St Brieuc
- (3) L'unité de St Malo - Guingamp
- (4) L'unité de Mancellia

Ces blocs sont séparés par de grandes discontinuités :

- la faille de Lézardrieux sépare (1) de (2)
- la faille de Fresnaye sépare (2) de (3)
- la faille de Cancale sépare (3) de (4)

4.4.3.2 Données initiales

Les données sources sont composées d'une carte géologique (voir figure 4.30) et de dix coupes géologiques orientées perpendiculairement à l'arc géométrique que forment les éléments géologiques à cet endroit (voir figure 4.30 de gauche). Les données ont été digitalisées sur les différentes coupes et les principales failles ont été considérées comme des interfaces particulières, car elles séparent des unités distinctes et connues. Tous les points digitalisés représentant les formations géologiques rencontrées, ont des couleurs associées.

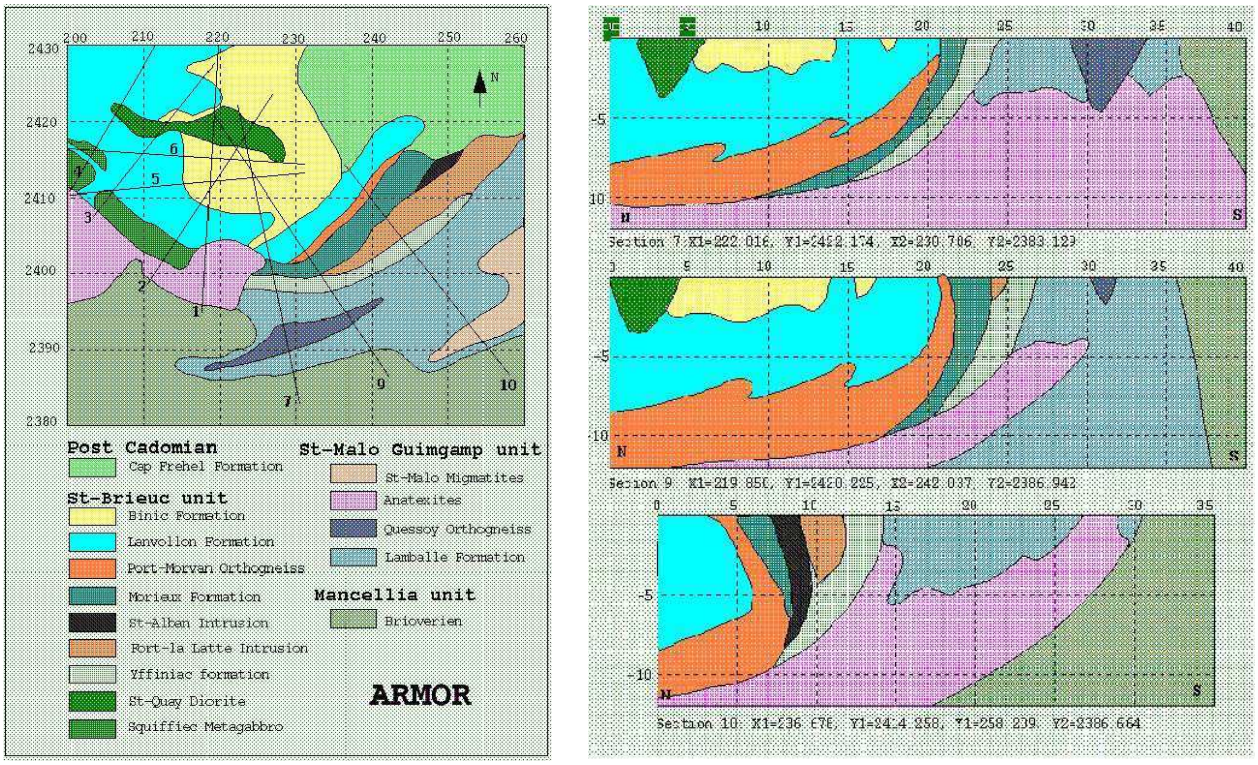


FIG. 4.30 – *Données initiales du modèle Armor : la carte géologique à gauche sur laquelle on distingue la trace 2D des dix coupes géologiques disponibles; et trois coupes particulières à droite (les coupes 7, 9 et 10).*

Une première reconstruction ne prenant en compte que les quatre unités majeures est illustrée dans les figures 4.31 et 4.32. La géométrie en arc des formations est déjà bien visible.

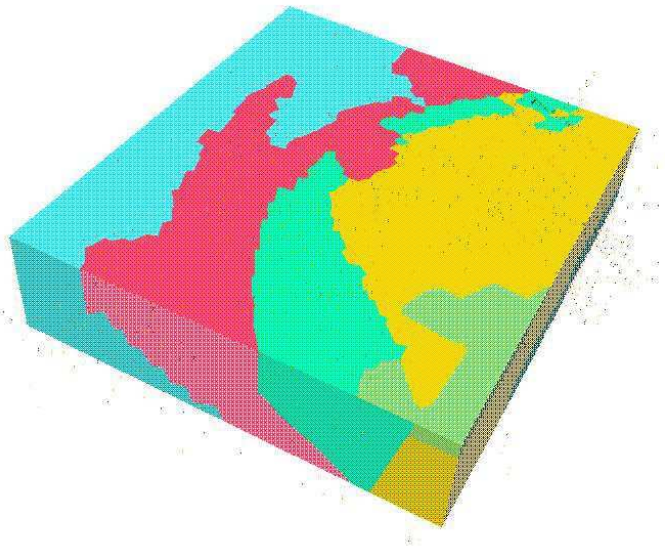


FIG. 4.31 – *Volumes de Voronoï représentant les quatre unités principales.*

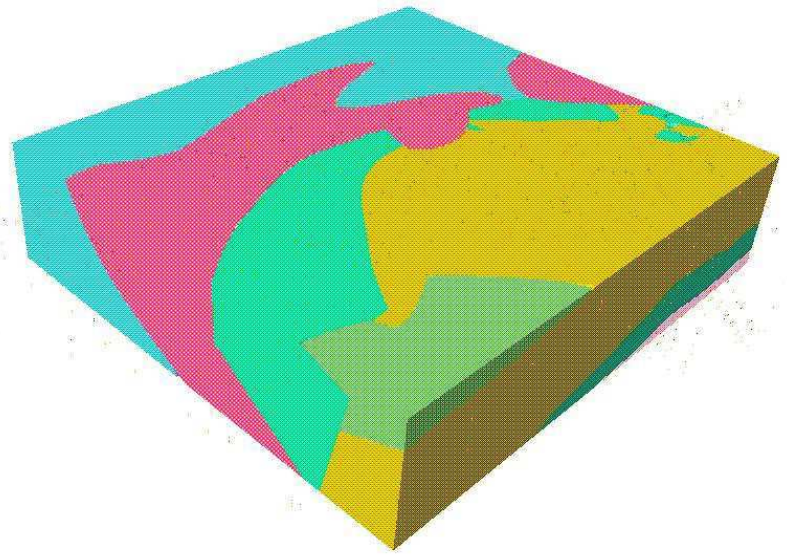


FIG. 4.32 – *Volumes lissés des quatre unités principales.*

La figure 4.34 montre une reconstruction plus détaillée de l'unité de St Brieuc divisée en :

– la formation sédimentaire de Binic

- la formation volcanique de Lanvollon
- la diorite de St Quay
- l'orthogneiss de Port-Morvan , la formation de Morieux et le métagabbros de Squiffiec sont représentés comme un seul bloc.
- l'intrusion de Fort-Lalatte et le complexe d'Yffiniac sont aussi regroupés.

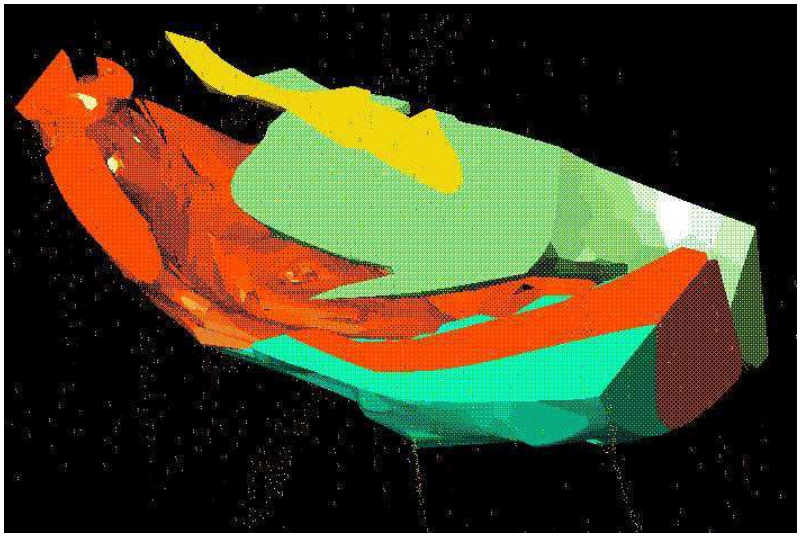


FIG. 4.33 – *Reconstruction plus détaillée de l'unité de St Brieuc.*

Des travaux ont été réalisés sur ce modèle, pour calculer l'anomalie gravimétrique du modèle reconstruit, et la comparer avec le champ gravimétrique réellement observé (voir [TEG+98] et la figure 4.35). La figure 4.34 montre une reconstruction des différentes formations mais avec des coupes corrigées en fonction de profils gravimétriques 2,5D à l'aplomp des coupes de départ. Ces travaux ont permis de corriger les données de départ, et ainsi de construire un nouveau modèle beaucoup plus cohérent (voir figure 4.34). Réussir à automatiser ce type de processus de validation, est l'étape ultérieure qu'il faudra envisager. Chercher à minimiser le coût d'un modèle, sur un grand nombre d'interprétations différentes, est une solution que Bosch [Bos98] a étudié sur des modèles 2D avec des résultats très intéressants.

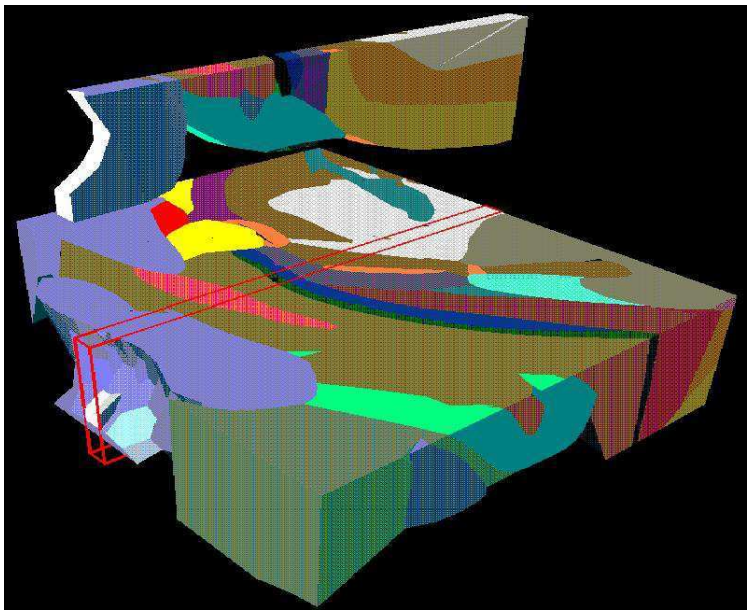


FIG. 4.34 – *Modèle Armor plus détaillé et corrigé.*

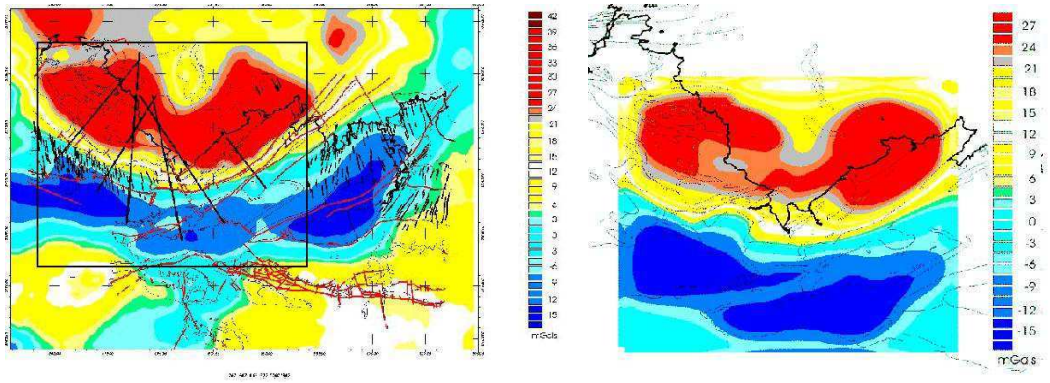


FIG. 4.35 – *Anomalie gravimétrique observée et calculée du modèle de la figure 4.34.*

4.4.4 Modèle du bassin de Paris

Les données pour ce modèle, concernant le bassin parisien, sont encore différentes des cas précédents, car ici nous ne disposons que de forages pour déterminer le modèle 3D. Les données sont issues du programme Géofrance 3d projet 1/1000000e fournies par Francois Guillocheau, (Université de Rennes) et une interpolation de type géostatistique (krigeage) supplémentaire a été réalisée par Gilles Grandjean (BRGM). La coordonnée Z correspondant à la profondeur des données, et a été exagérée 50 fois, pour mieux voir les variations des couches dans ce modèle.

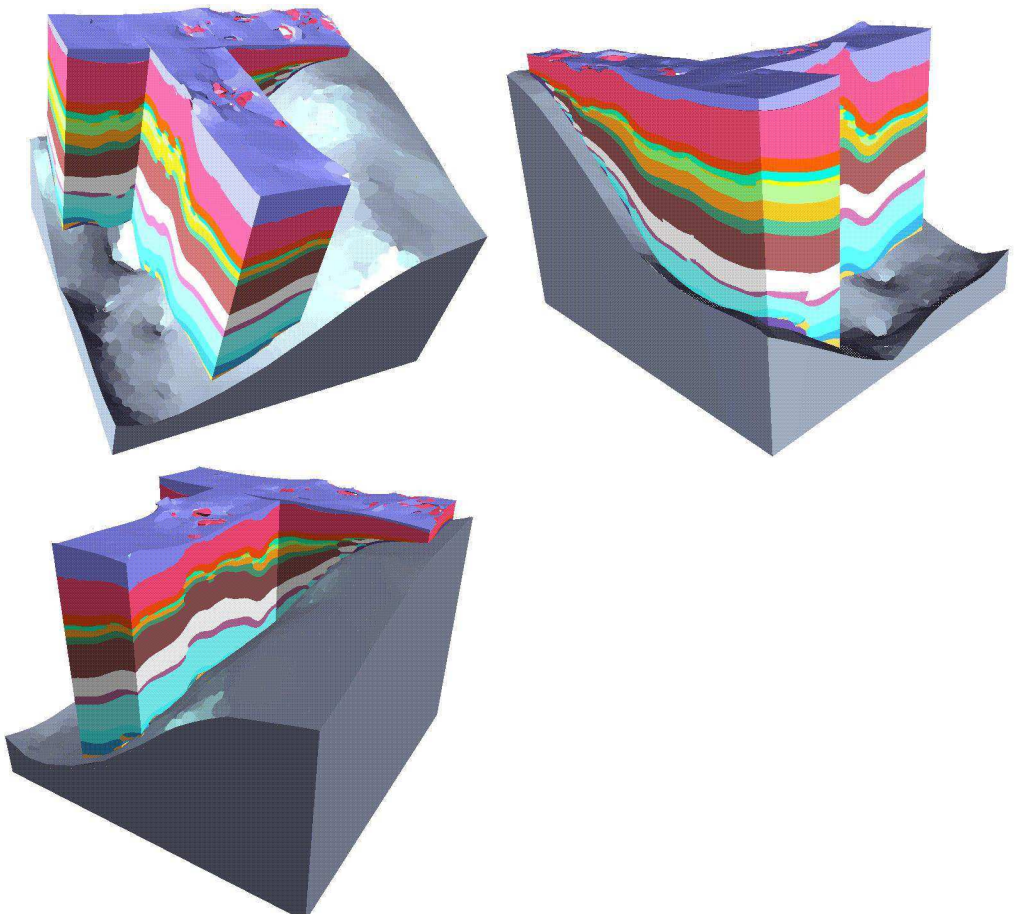


FIG. 4.36 – *Bassin de Paris, avec* $Z = 50 * Z_{reel}$.

4.5 Conclusion

La méthode de reconstruction du chapitre 3 a été testée avec succès sur de multiples données géologiques. Les modèles de ce chapitre ont été reconstruits à partir de données différentes et hétérogènes : ensemble de sondages (Bassin de Paris), coupes géologiques parallèles (Morges), ou encore à partir de sections géologiques qui s'intersectent (Armor, Ardèche); et illustrent la variété de données qui sont prises en compte par la méthode. Les résultats encourageants sur ces modèles, montrent que la méthode est bien adaptée au domaine géologique. En outre, l'analyse gravimétrique sur le modèle Armor à montrer que c'était un moyen de validation des modèles reconstruits. De nouvelles méthodes doivent être considérées. Le processus de validation devrait aboutir à une méthode d'inversion plus automatique. Des idées similaires à l'inversion automatique de modèles 2D [Bos98], sont à envisager couplées avec la méthode de reconstruction.

Toutes les données de ce chapitre proviennent de méthodes d'acquisition, de supports et de formats non homogènes, qui nécessitent un travail long et pénible de mise en forme des données, avant de pouvoir les utiliser dans un même environnement de modélisation. Ce problème sera résolu lorsque le géologue aura la possibilité de créer des coupes géologiques, des surfaces, et des cartes au sein d'un même éditeur géologique réellement tridimensionnel. Cet outil ainsi que l'outil développé en parallèle au B.R.G.M. permettent d'unifier modélisation et reconstruction. Une prochaine étape devra s'intéresser à la validation des modèles.

Chapitre 5

Interpolation fonctionnelle

Dans cette partie, nous allons présenter une approche et une formulation différente, pour des problèmes de reconstruction similaires aux précédents chapitres. Nous allons chercher à approcher un ensemble de données géométriques incomplètes (contours 2D dans des sections planes, points sur le bord d'un objet), par les isovaleurs d'une fonction continue. Les idées sont très proches de celles de la méthode discrète (voir chapitre 3), mais la représentation des objets reconstruits, sous forme d'interpolation de fonctions analytiques, est différente et originale.

5.1 Introduction

Nous allons présenter dans cette partie des méthodes originales d'interpolation d'un objet S connu à partir de données diverses :

- contours dans des sections 2D de S.
- ensemble de points 3D sur le bord de S connaissant les normales au bord en ces points.

L'objectif de la méthode est de définir une fonction interpolante σ telle que l'ensemble des zéros de σ $\{X,\sigma(X) = 0\}$ passe exactement par les données de départ et soit une approximation cohérente de S.

Des approches à base de fonctions implicites ont déjà été étudiées dans le cas d'interpolations de surfaces à partir d'un ensemble de points et de contours. La fonction de Hoppe [HDD+92] par exemple, qui cherche à approcher des points non structurés, est très simple et s'adapte à de nombreux cas, mais elle n'est pas continue en tout point. Les méthodes décrites dans [GA98, SPOK95, JC94b, SK91] sont basées sur la caractérisation de fonctions implicites liées aux données, couplées avec des opérateurs sur ces fonctions (union, intersection, ...), qui permettent de déduire une fonction implicite globale approchant l'objet recherché.

Les fonctions d'interpolation que nous allons définir dans les sections 5.2 et 5.5 se basent encore une fois sur des notions de proximité liées aux données. Elles sont continues sur tout le domaine et s'adaptent bien à l'interpolation à partir de contours et de points. Comme dans la plupart des méthodes citées, nous définissons des fonctions locales (associées aux sections ou aux voisinages des points) ainsi que des règles d'interpolation de ces fonctions. Mais contrairement à ces méthodes, la structure utilisée ne nécessite pas une évaluation de la fonction point par point sur une grille, ni une construction de type "marching cube" [LC87], pour obtenir l'objet final. L'objet se déduit directement de la structure de reconstruction : en l'occurrence les diagrammes de Voronoï.

L'interpolation de contours (fermés et ouverts) est considérée dans la section 5.2 et des idées similaires sont étudiées dans la section 5.5 pour des points sur une surface S dont on connait les normales.

5.2 Reconstruction à partir de sections

Dans cette partie nous présentons une méthode d'interpolation d'un objet S, définie à partir de sections planes S_1,...,S_m de S par des plans π_1,...,π_m ($S_i = S \cap \pi_i$). Dans cette partie, les bords de ces sections sont des contours

fermés, mais une généralisation à des contours ouverts est proposée dans la section 5.4.

On appellera $I(S)$ le résultat de l'interpolation. Dans un premier temps, nous définissons dans chaque section une fonction caractéristique (voir section 5.2.1) relative aux données (les contours). L'objet volumique $I(S)$ résulte ensuite, de l'interpolation de ces fonctions entre les coupes successives (voir les sections 5.2.2 et 5.2.3). La méthode produit des branchements automatiques très naturels entre les contours, sans intervention ou traitement particulier, et uniquement à partir de critères métriques. En l'occurence, elle ne nécessite aucune insertion de points supplémentaires à l'inverse de [BG92], ni l'ajout de contours intermédiaires contrairement à [OPC96] pour permettre des branchements complexes.

Pour simplifier la description de la méthode, nous nous restreindrons au cas de deux sections S_0 et S_1 de supports π_0 et π_1. En outre, π_0 et π_1 sont considérés comme des plans parallèles d'équations $z = z_i$ $(i = 1,2)$. La méthode peut se généraliser à des plans non parallèles : dans [BCDT96, BY95] les auteurs définissent une structure combinatoire équivalente à celle de la méthode de ce chapitre, afin de reconstruire des volumes à base de tétraèdres de Delaunay pour des contours dans des sections planes.

5.2.1 Fonction caractéristique

On notera par $\partial(S_i)$ le bord de la section S_i (les contours) et par $\overline{S_i}$ l'intérieur de S_i. La fonction caractéristique de S_i est définie par :

Définition 22 *On définit $\sigma(X,i)$ comme la* fonction caractéristique *du support π_i qui vérifie :*

$$\sigma(X,i) = \begin{cases} 1 & si\ X \in \overline{S_i} \\ 0 & si\ X \in \partial\{S_i\} \\ -1 & sinon \end{cases} \tag{5.1}$$

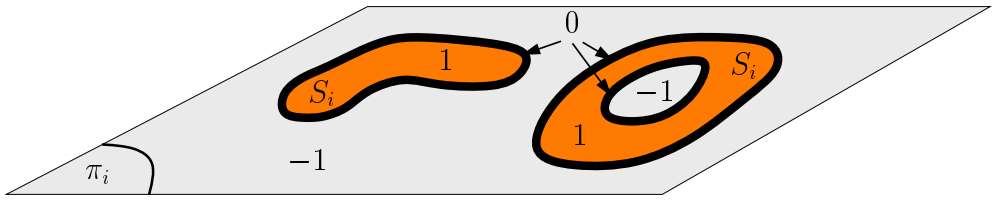


FIG. 5.1 – *Exemple de valeurs prises par $\sigma(X,i)$.*

Le résultat de la reconstruction finale dépend en grande partie de l'interpolation de σ entre les sections successives S_i et S_{i+1}. C'est elle qui précise entièrement le branchement des contours. Nous n'étudierons pas la complexité des branchements et des différents appariements possibles entre deux contours, mais on pourra se reporter à d'autres travaux [MSS91]. Nous décrirons la méthode pour une interpolation isotrope très simple : deux sections d'un objet sont mises en correspondance si leurs projections sur un même plan (suivant un axe pré-défini) ont une intersection commune (voir figure 5.2). Cette hypothèse est similaire à celles de [OPC96] et [GA98].

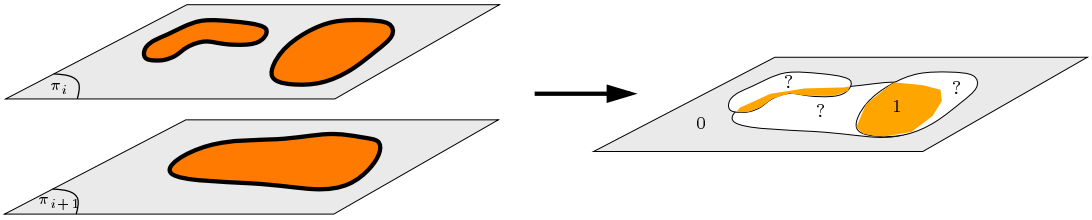


FIG. 5.2 – *Deux sections et leurs projections sur un même plan.*

5.2.2 Interpolation initiale I_0

Soit $E_{0,1}$ l'espace limité par les plans π_0 et π_1 d'équations $z = z_0$ et $z = z_1$ ($z_1 > z_0$). Dans $E_{0,1}$, on représente un point M par le couple (X,z), formé de la hauteur z du point et de ces coordonnées $X = (x,y)$ dans le plan π_0. Nous appellerons $I_0(S)$ une première interpolation de S qui dépend simplement d'un critère de proximité aux sections. Le critère utilisé est le suivant :

La valeur $\sigma(M)$ d'un point $M \in E_{0,1}$ correspond à une pondération des valeurs $\sigma(M_1)$ et $\sigma(M_0)$ (avec M_1 et M_0 les points les plus proches de M sur π_1 et π_0) du point P le plus proche de M dans $\pi_0 \cup \pi_1$. Dans ce cas bien précis si $M = (X,z)$ alors $M_1 = (X,z_1)$ et $M_0 = (X,z_0)$. La fonction $\sigma(X,z)$ qui traduit cette interpolation sur $E_{0,1}$ est :

$$\sigma(X,z) = \sigma(X,z_1)\,\frac{z_0 - z}{z_1 - z_0} + \sigma(X,z_0)\,\frac{z_1 - z}{z_1 - z_0} \tag{5.2}$$

$$\sigma(X,z) = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \begin{cases} \sigma(X,z_1) \geq 0 \text{ et } z \in [\frac{z_0+z_1}{2}, z_1] \\ \sigma(X,z_0) \geq 0 \text{ et } z \in [z_0, \frac{z_0+z_1}{2}] \end{cases} \\ \leq 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.3}$$

L'objet interpolé $I_0(S)$ est alors défini comme l'ensemble de tous les points X tel que $\sigma(X,z) \geq 0$ (voir figure 5.3). Le bord de $I_0(S)$ est l'ensemble des zéros de la fonction $\sigma(X,z)$. La structure combinatoire de $I_0(S)$ est déduite

de l'arrangement formé par les projections verticales des bords de S_0 et S_1 (voir équation (5.4) et les secteurs en pointillés de la figure 5.3).

$$I_0(S) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \sigma(X,0) = \sigma(X,1) = -1 \\ [z_0,z_1] & \text{si } \sigma(X,0) = \sigma(X,1) = 1 \\ \left[\frac{z_0+z_1}{2},z_1\right] & \text{si } \sigma(X,0) = -1 \text{ et } \sigma(X,1) = 1 \\ \left[z_0,\frac{z_0+z_1}{2}\right] & \text{si } \sigma(X,0) = 1 \text{ et } \sigma(X,1) = -1 \end{cases} \tag{5.4}$$

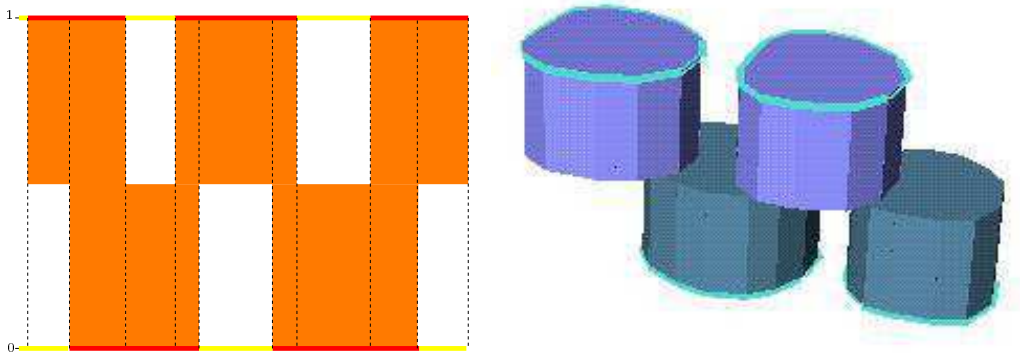


FIG. 5.3 – *Interpolation $I_0(S)$ pour des contours 1D (extrémités des segments sombres) et pour quatre contours 2D (figure de droite).*

Si l'interpolation I_0 est acceptable au niveau topologique, elle ne produit pas des formes géométriques très acceptables. Dans la section 5.2.3 suivante, nous allons lisser cette interpolation par une fonction distance à l'objet.

5.2.3 Interpolation pondérée par les distances I_1

Nous souhaitons à présent composer la fonction précédente (voir équation (5.2)) avec une fonction "distance à l'objet" qui doit permettre une interpolation plus lisse du bord de l'objet.

5.2.3.1 Distance d'un point M à S

La distance d'un point $M(x,y,z)$ à l'objet S est notée $\rho(M,S)$, et elle est définie comme suit :

A) ($M \in \pi_i$) Pour un point M dans un plan de coupe π_i, la distance de M à l'objet S se définit comme la distance $\rho_i = \rho(M,S_i)$ de M au bord de S_i. Dans la section 5.2.5 cette distance est définie pour le cas particulier des contours polyédriques. Dans le cas général $\rho(M,S_i)$ est

simplement le rayon de la sphère maximale centrée en M ne coupant pas $\partial(S_i)$ (voir figure 5.4).

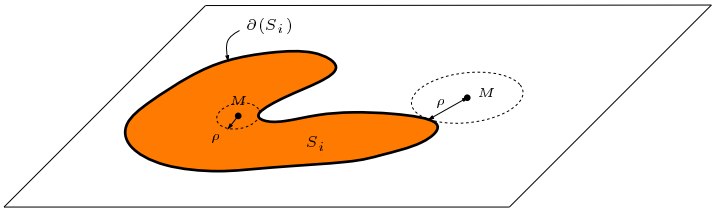


FIG. 5.4 – *Distance d'un point M à un contour quelconque.*

B) ($M \in \overline{E_0^1}$) Pour un point M dans l'espace limité par les plans de coupe π_0 et π_1, la distance $\rho(M,S)$ est interpolée en fonction des distances positives $\rho_0 = \rho(M_0,S_0)$ et $\rho_1 = \rho(M_1,S_1)$, avec $M_0 = M(X,0)$ et $M_1 = M(X,1)$ sur π_0 et π_1 (voir figure 5.5).

$$\rho(M,S) = \frac{\mid h_0\rho_1 + h_1\rho_0 \mid}{h_0 + h_1} \tag{5.5}$$

Les termes $h_1 = z_1 - z$ et $h_0 = z - z_0$ sont les hauteurs relatives de M par rapport à π_1 et π_2 (voir figure 5.5). On en déduit l'expression de $\rho(M,S)$ suivante :

$$\rho(M,S) = \frac{z_1 - z}{z_1 - z_0}\rho_0 + \frac{z_0 - z_1}{z_1 - z_0}\rho_1 \tag{5.6}$$

Cette distance interpolée vérifie bien les conditions aux limites suivantes :

1. pour $M \in \pi_0$ on a $h_0 = 0$ et donc $\rho(M,S) = \rho_0$
2. pour $M \in \pi_1$ on a $h_1 = 0$ et donc $\rho(M,S) = \rho_1$

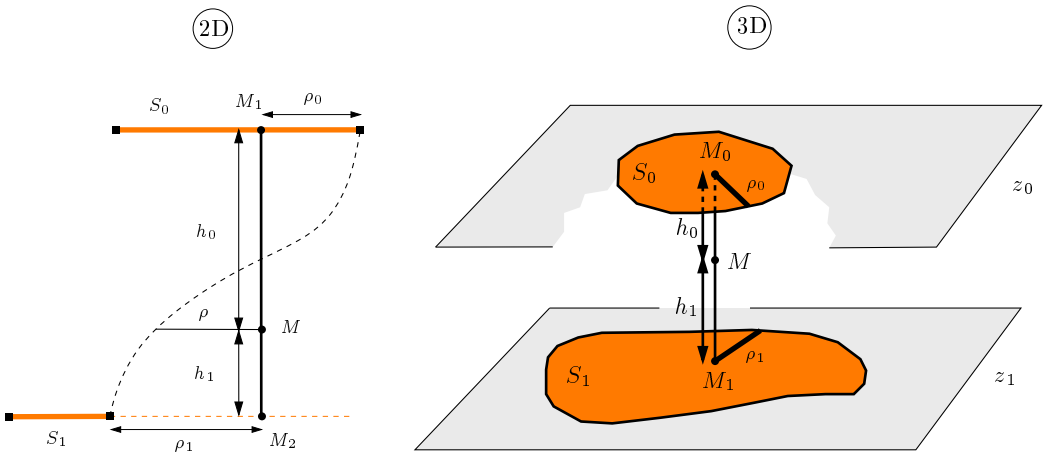


FIG. 5.5 – *Distance interpolée entre deux sections S_0 et S_1 (cas 2D et 3D).*

5.2.3.2 Fonction distance signée

Soit f_ρ une fonction croissante et monotone quelconque de ρ, qui vérifie $f_0 \equiv 0$. En composant la fonction distance avec la fonction caractéristique (5.2), on obtient la fonction distance signée f_ρ suivante, pour $z_1 - z_0 = 1$:

$$f_\rho(X,z) = \sigma(X,1) f_\rho(X,1)\,(z - z_0) + \sigma(X,0) f_\rho(X,0)\,(z_1 - z) \tag{5.7}$$

et $f_\rho(X,i)$ est une fonction de la distance ρ ($\sqrt{\rho}$, ρ, ρ^2, $\gamma_i\rho$, ...).

L'objet recherché répond à l'inégalité $f_\rho(X,z) \geq 0$, et l'ensemble $Z(X)$ des valeurs de z vérifiant cette inégalité en $X = (x,y)$ est :

$$I_1(X) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \sigma(X,0) = \sigma(X,1) = -1 \\ [z_0, z_1] & \text{si } \sigma(X,0) = \sigma(X,1) = 1 \\ \left[\frac{f_\rho(X,1)z_0 + f_\rho(X,0)z_1}{f_\rho(X,1)+f_\rho(X,0)}, z_1\right] & \text{si } \sigma(X,0) = 1 \text{ et } \sigma(X,1) = -1 \\ \left[z_0, \frac{f_\rho(X,0)z_1 + f_\rho(X,1)z_0}{f_\rho(X,1)+f_\rho(X,0)}\right] & \text{si } \sigma(X,0) = -1 \text{ et } \sigma(X,1) = 1 \end{cases} \tag{5.8}$$

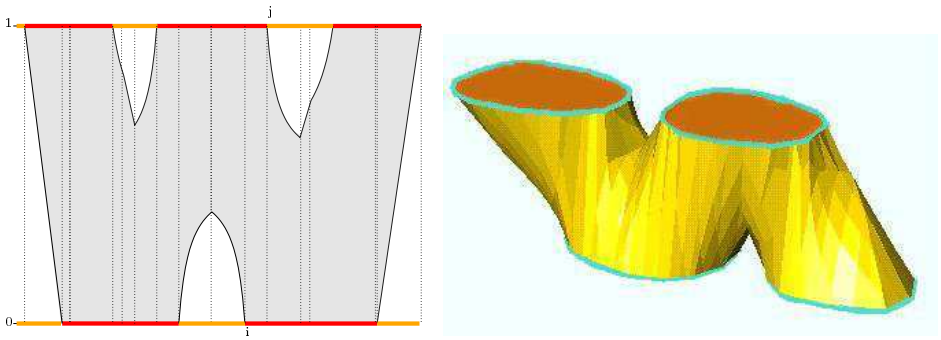


FIG. 5.6 – *Interpolation $I_1(S)$ avec $f_\rho = \rho$.*

La structure topologique de I_1 est la même que celle de I_0, puisqu'elle est définie par les changements de valeurs de σ_0 et σ_1 (voir 5.8).

Définition 23 *Soit R_0 et R_1 deux partitions dans les plans π_0 et π_1 parallèles. On appelle et on note $R_0 \diamond R_1$ la partition sur un plan $\pi_{0,1}$ parallèle à π_0 et π_1, qui résulte de la superposition de R_0 et R_1 sur $\pi_{1,2}$.*

Nous appellerons structure combinatoire de f_ρ ou de $I(S)$, la partition A_0^1 sur laquelle f_ρ a une expression analytique fixe, et est de signe constant. Cette structure combinatoire se déduit des partitions suivantes :

- la partition S_0^1 qui représente l'intersection des bords $\partial(S_0)$ et $\partial(S_1)$ des deux sections S_0 et S_1 et qui nous fournit la partition des signes de f_ρ. Les signatures possibles pour les cellules de S_0^1 sont $++$, $--$, $+-$ ou $-+$.
- la partition V_0^1 qui est la superposition $Vor(S_0) \diamond Vor(S_1)$ des diagrammes de Voronoï généralisés $Vor(S_0)$ et $Vor(S_1)$ des éléments géométriques (points, segments, courbes, ...) de S_0 et S_1. Une cellule $V_0^1(e_i,e_j)$ de V_0^1 est l'ensemble des points M de $E_{0,1}$ tel que $e_i \in \partial(S_0)$ et $e_j \in \partial(S_1)$ sont les éléments les plus proches de M parmi ceux de $\partial(S_0)$ et $\partial(S_1)$. En d'autres termes, dans toute une cellule $V_0^1(e_i,e_j)$ de V_0^1 l'expression analytique de la distance ρ est définie de façon constante et unique. Il en de même pour f_ρ.

Finalement, $A_0^1 = V_0^1 \diamond S_0^1$ représente la partition finale, telle que la fonction signée f_ρ est définie de façon simple, unique et de signature constante. Un exemple d'arrangement A_0^1 pour des contours 1D est illustré en figure 5.6 par les secteurs en pointillés. Une description plus complète de la structure combinatoire dans le cas particulier de contours polyédriques est faite en section 5.2.5.

5.2.3.3 Continuité de f_ρ

La fonction est continue sur tout le domaine :

1. dans toutes les cellules de l'arrangement A_0^1, on a continuité de $f_\rho(X,z)$ si les distances élémentaires $\rho(X,0)$ et $\rho(X,1)$ sont continues.
2. on passe continuement d'une cellule à l'autre :

   Soit C_1 et C_2 deux cellules adjacentes de A_0^1 par la face T. Il y a deux possibilités pour T :

   - soit T est une face de S_0^1 et l'expression analytique de f_ρ ne change pas.
   - soit T est une face de V_0^1 et f_ρ possède deux expressions analytiques différentes : les restrictions $f_{\rho|C_1}$ et $f_{\rho|C_2}$ de f_ρ sur C_1 et C_2. Par définition de V_0^1, on a $f_{\rho|C_1}(X) = f_{\rho|C_2}(X)\ \forall X \in T$.

5.2.3.4 Dérivabilité de f_ρ

La fonction n'est pas dérivable sur tout le domaine, elle l'est uniquement par morceaux : à l'intérieur de chaque cellule de l'arrangement.

Pour des contours 1D, une façon de lisser les dérivées de la fonction aux bords des cellules est d'utiliser la fonction distance $f_\rho = \rho\rho^*$ avec $\rho^*(M,S_i)$ la distance de M à un autre élément dans S_i. La détermination de ce second élément est réalisée ainsi : il y a trois situations différentes qui nécessitent réellement une interpolation des valeurs de $f_\rho(X,0)$ et $f_\rho(X,1)$, font intervenir au maximum quatre extrémités de contours $\{u_0,v_0,u_1,v_1\}$ (voir figure 5.7) avec u_i et v_i les extrémités dans S_i telles que $M \in [u_i,v_i]$.

Ces situations correspondent à des cellules telles que $\sigma(X,0) \neq \sigma(X,1)$ et peuvent être classées selon que :

- $[u_0,v_0] \subset [u_1,v_1]$
- $[u_1,v_1] \subset [u_0,v_0]$
- $[u_0,v_0] \cap [u_1,v_1] \neq \emptyset$.

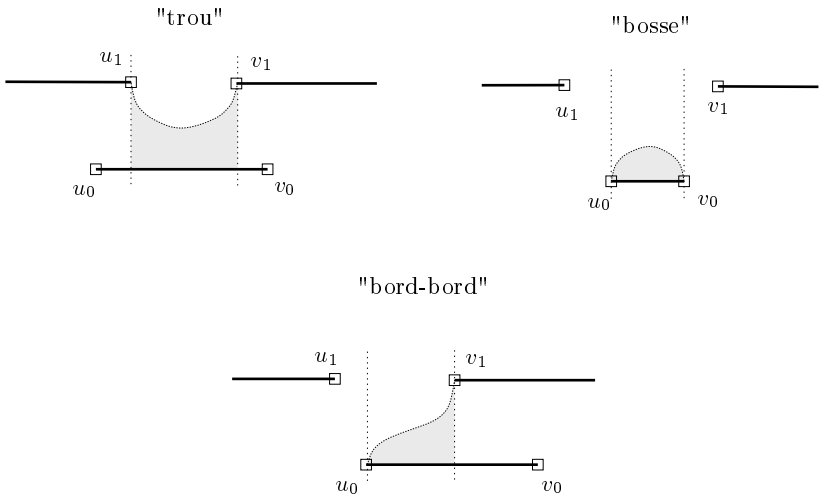


FIG. 5.7 – *Les principaux cas d'interpolation 2D*

Dans ce cas on prend ρ comme la distance à u_1 et ρ^* est la distance à v_1. L'expression analytique de $f_{\rho\rho^*}$ est fixe sur toute la zone à interpoler, c'est-à-dire sur $[u_0,v_0] \cap [u_1,v_1]$.

En 2D, l'arrangement A_0^1 est une partition du plan. Chaque cellule à un nombre arbitraire k, de cellules voisines. La généralisation directe à des contours 2D de la méthode "lisse" serait de définir une fonction d'interpolation f dépendant de tous ces voisins. Des travaux récents de [MT97] ont montré que l'utilisation des "voisins naturels" (Sibson [Sib81]) permet d'obtenir des interpolations lisses sur des structures équivalentes. D'une certaine façon, il faut considérer à la place de A_0^1, l'arrangement des disques vides de Delaunay (le lieu des points de $\mathbb{R}^2$ ayant les mêmes voisins dans S_0 et S_1). Lorsqu'on traverse deux cellules adjacentes de cet arrangement, on ne modifie qu'un seul de ces voisins.

5.2.4 Exemples d'interpolations à partir de contours 1D

Les contours 1D sont décrits sur la figure 5.8 et les reconstructions ci-après (figures 5.9, 5.10 et 5.11) illustrent les propriétés des différentes fonctions d'interpolation du type :

$$f_\rho(X,z) = \sigma(X,1) f_\rho(X,1)\, z + \sigma(X,0) f_\rho(X,0)\,(1-z) \tag{5.9}$$

avec des expressions de f_ρ différentes : ρ, ρ^2, $\gamma_i\rho$ et $\rho\rho^*$.

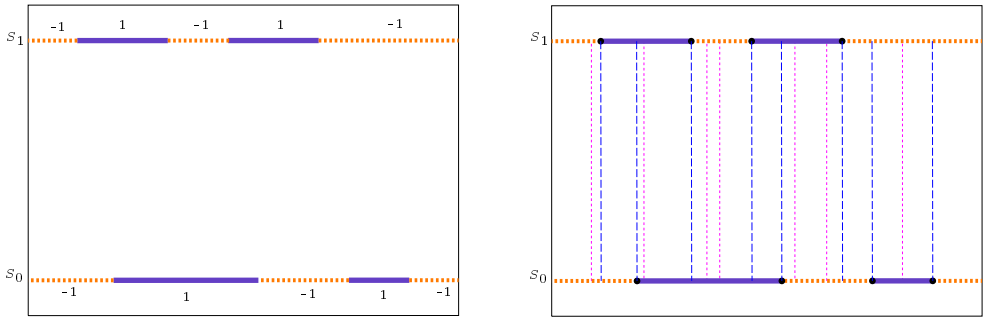


FIG. 5.8 – *Contours 1D initiaux (à gauche) et l'arrangement (à droite) A_0^1 des cellules de Voronoï signées des extrémités de S_0 et S_1.*

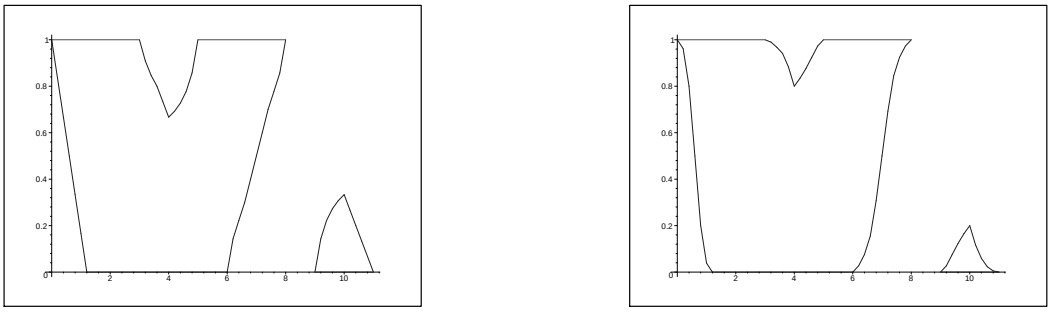


FIG. 5.9 – *Résultats de l'interpolation avec $f_\rho = \rho$ et $f_\rho = \rho^2$*

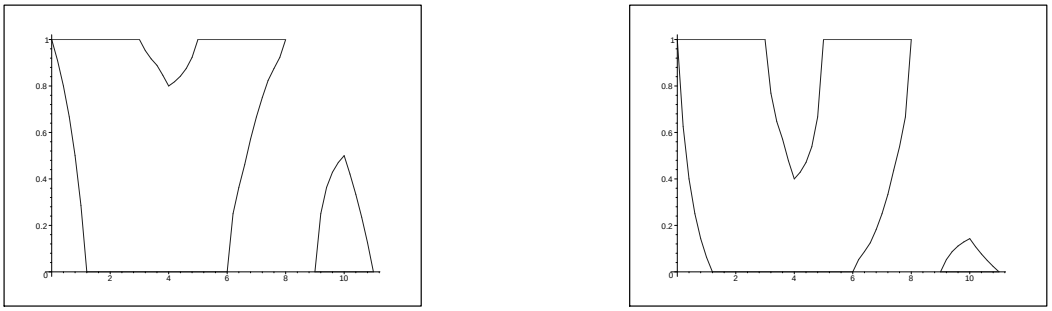


FIG. 5.10 – *Résultats de l'interpolation avec $f_\rho = \gamma_i * \rho$ où $\gamma_0 = 2$ et $\gamma_1 = 1$. Et $f_\rho = \gamma_i * \rho$ avec $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_1 = 2$.*

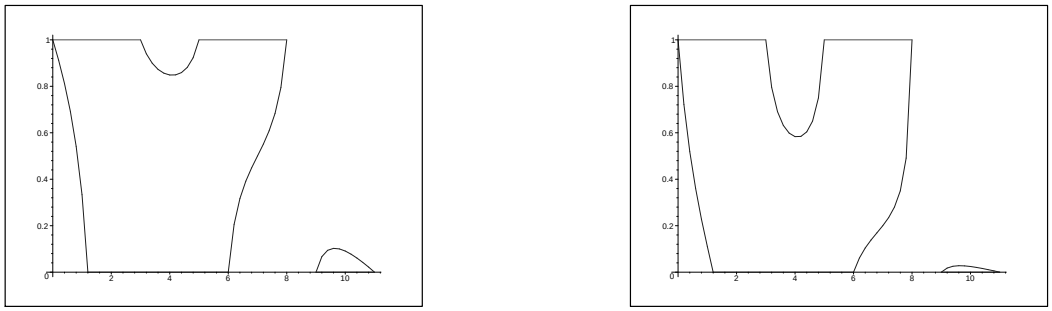


FIG. 5.11 – $f_\rho = \rho\rho^*$ *et* $f_\rho = \gamma_i\rho\rho^*$, *avec* ρ^* *la distance définie précédemment.*

On remarque sur les figures 5.9 et 5.10 que les fonctions ne sont pas dérivables en certains points. Des changements de courbure sont visibles au bord de l'arrangement. En figure 5.11 l'interpolation avec $f_\rho = \rho\rho^*$ est lisse. En affectant un poids à chaque terme de distance, on peut donner plus d'importance à un contour qu'à un autre, et en pratique, modifier la taille des trous et des bosses dans le cas de branchements complexes (voir figures 5.10 et 5.11).

5.2.5 Interpolation polyédrique 3D

Nous allons à présent considérer le cas particulier où les sections de S sont formées de polygones fermés. Les polygones sont quelconques, orientés, et peuvent contenir des trous (autres polygones avec une orientation différente). Nous appellerons éléments de ∂S_i, les arêtes et sommets (extrémités des arêtes) du contour ∂S_i.

Nous allons définir une distance $\delta(M,S)$, d'un point quelconque M au bord de l'objet recherché S, qui est une spécialisation au cas polygonal de la distance introduite en section 5.2.3. Pour cela, définissons tout d'abord la restriction de $\delta(M,S)$ dans une section particulière S_i.

5.2.5.1 Distance à un contour polygonal ∂S_i

La distance $\delta(M,S_i)$ d'un point quelconque M à S dans une section S_i, est la distance de M à l'élément de ∂S_i le plus proche.

$$\delta(M,S_i) = min_{e \in \partial S_i} \delta(M,e) \tag{5.10}$$

et $\delta(M,e)$ pour $e \in S_i$ est la distance euclidienne du point M à e (e étant une arête ou un sommet).

Comme remarqué dans la section précédente, le diagramme de Voronoï Vor des segments et sommets de ∂S_i, nous fournit la subdivision du plan (contenant S_i) dans laquelle $\delta(M,S_i)$ garde la même expression analytique. Dans une cellule $Vor(e \in S_i)$ de cette subdivision, la distance $\delta(M,S_i)$ est définie de façon constante : $\delta(M,S_i) = \delta(M,e)$. Les arêtes et sommets de cette subdivision Vor sont à égale distance de deux, respectivement trois, éléments de ∂S_i et garantissent une transition continue de $\delta(M,S_i)$ entre les cellules adjacentes de Vor.

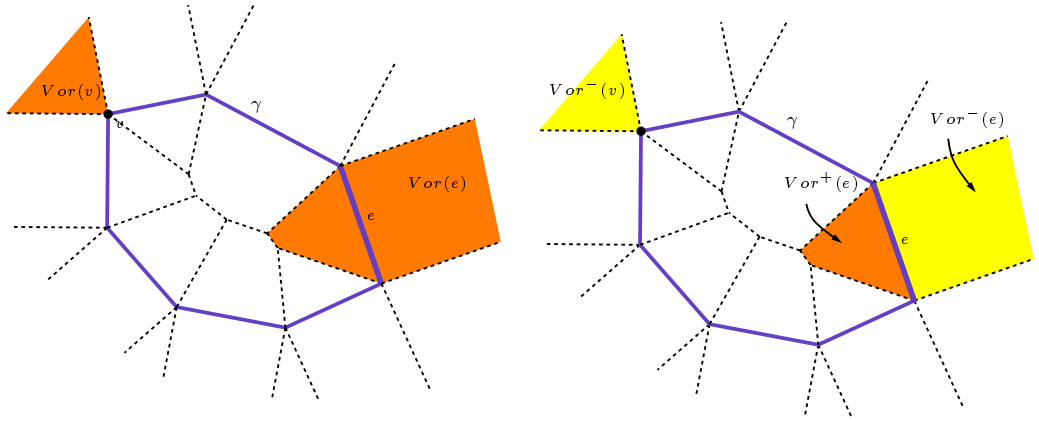


FIG. 5.12 – *Partition de Voronoï de segments sur un contour. La cellule grise $Vor(e)$ est la région de e. L'arête e coupe cette région, en deux nouvelles cellules intérieure et extérieure ($Vor^+(e)$ et $Vor^-(e)$).*

Les cellules de $Vor(e \in \partial S_i)$ sont scindées en une cellule positive $Vor^+(e)$ et négative $Vor^-(e)$ correspondant à l'intérieur et l'extérieur du contour (voir figure 5.12). On appellera $A(S_i)$ la partition de Voronoï ainsi signée de S_i.

Pour deux sections consécutives S_0 et S_1 et leurs diagrammes de Voronoï signés $A(S_0)$ et $A(S_1)$, l'arrangement $A_0^1 = A(S_0) \diamond A(S_1)$ est défini par la superposition des deux subdivisions $A(S_0)$ et $A(S_1)$ (voir figure 5.13 pour l'arrangement issue de deux contours).

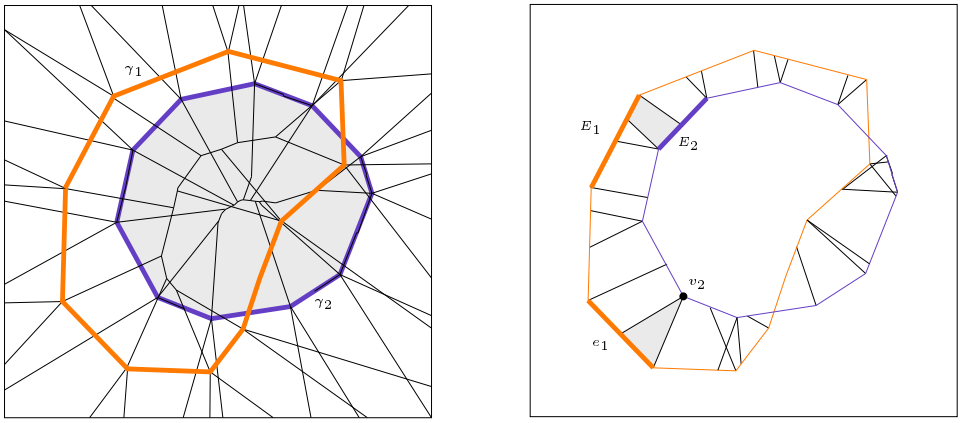


FIG. 5.13 – *A gauche : superposition des diagrammes de Voronoï $Vor(\gamma_1)$ et $Vor(\gamma_2)$ des deux contours γ_1 et γ_2. A droite : arrangement $A_0^1(*,*,\epsilon,-\epsilon)$ de deux contours, et cellules particulières $A_0^1(E_1,E_2,+,-)$ et $A_0^1(e_1,v_2,+,-)$.*

Chaque cellule C de A_0^1 est donc l'intersection de deux cellules particulières $V^{\epsilon_i}(e)$ et $V^{\epsilon_j}(f)$, avec $e \in S_0$ et $f \in S_1$. Les paramètres ϵ_1 et ϵ_2 sont

les signes des deux cellules. La cellule C est donc indexée par un 4-uplet, et nous la noterons $A_0^1(e,f,\epsilon_1,\epsilon_2)$.

Le critère d'interpolation est défini par les règles suivantes :

Règle 3 *(Règle d'interpolation)*

Les éléments e_0 et e_1 sont des sommets ou arêtes quelconques de ∂S_0 et ∂S_1.

- *les cellules $A_0^1(e_0,e_1,-,-)$ sont considérées extérieures à l'objet.*
- *les cellules $A_0^1(e_0,e_1,+,+)$ sont à l'intérieur de l'objet. Le cylindre généralisé de base la cellule $A_0^1(e,f,+,+)$ et de hauteur $z_0 - z_0$ est la restriction de $I(S)$ sur $A_0^1(e,f,+,+)$.*
- *les cellules $A_0^1(e_0,e_1,\epsilon_0,\epsilon_1)$ avec $\epsilon_0 \neq \epsilon_1$ sont les seules cellules où une interpolation est nécessaire. La restriction de $I(S)$ sur une cellule de ce type est un cylindre généralisé de base la cellule, et borné par une quadrique ($f_\rho(X) = 0$). Voir la section 5.2.5.2 pour une description détaillée de $I(S)$ sur ces cellules.*

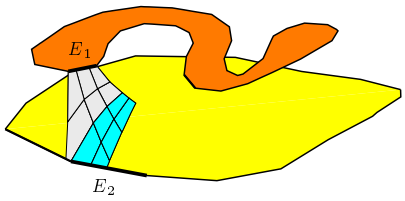


FIG. *5.14* – Quadrique générée par deux segments E_0 et E_1.

5.2.5.2 Interpolation dans une cellule

Pour chaque cellule de A_0^1 la fonction d'interpolation (5.7) est définie de façon unique et son expression analytique est constante. Les seules cellules où une interpolation est nécessaire sont celles de signes $+-$ ou $-+$. Dans la suite de cette section on peut donc considérer $\sigma(X,0) = -\sigma(X,1)$. Le plus proche élément de ∂S_i à un point M est soit une extrémité de ∂S_i, soit un point sur une arête de ∂S_i. On comptabilise donc quatre types de cellules particulières dans $A_0^1(*,*,+,-)$ et $A_0^1(*,*,-,+)$:

1. type sommet-sommet : $M \in A_0^1(v_0,v_1)$ est une cellule de l'arrangement indexée par deux sommets $v_0 \in Vor(S_0)$ et $v_1 \in Vor(S_1)$. La restriction de $I(S)$ sur $A_0^1(v_0,v_1)$ est donnée par :

$$\sigma(X,1)\ \left(\|Mv_1\|^2\, z\ -\ \|Mv_0\|^2\,(1-z)\right) \geq 0.$$

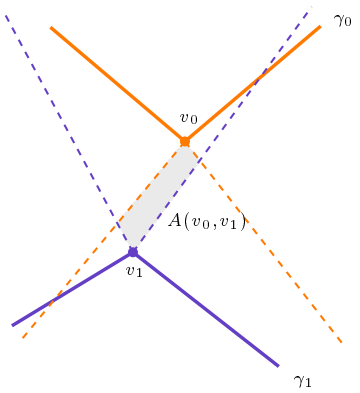


FIG. 5.15 – *La cellule $A_0^1(v_0,v_1)$ correspondant à deux sommets v_0 et v_1.*

2. type sommet-arête : $M \in A_0^1(v,e)$ est une cellule de l'arrangement indexée par un sommet $v \in Vor(S_0)$ et une arête $e \in Vor(S_1)$.

$$\sigma(X,1)\ \left(\|MH_1\|^2\, z\ -\ \|Mv_0\|^2\,(1-z)\right) \geq 0.$$

où H_1 est la projection orthogonale de M sur e.

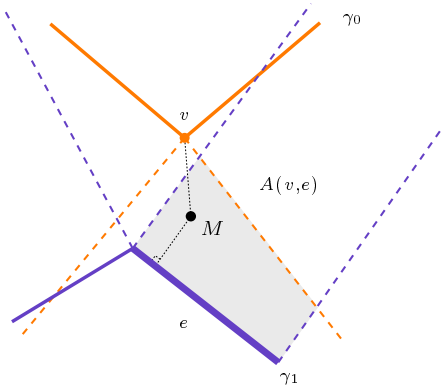


FIG. 5.16 – *La cellule $A_0^1(v,e)$ correspondant à un sommet v et une arête e.*

3. type arête-sommet : cas symétrique du précédent.
4. type arête-arête : $M \in A_0^1(e_0,e_1)$ est une cellule de l'arrangement indexée par deux arêtes $e_0 \in Vor(S_0)$ et $e_1 \in Vor(S_1)$.

$$\sigma(X,1)\ \left(\|MH_1\|^2\, z\ -\ \|MH_0\|^2\,(1-z)\right) \geq 0.$$

où H_0 et H_1 sont les projections orthogonales de M sur e_0 et e_1.

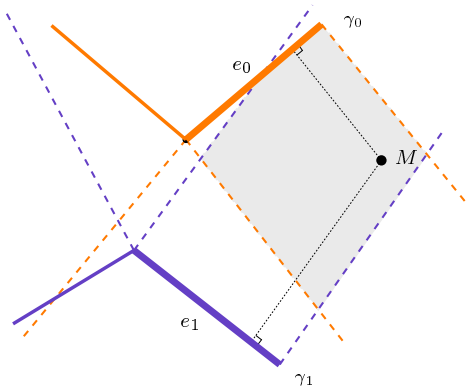


FIG. 5.17 – *La cellule grisée $A_0^1(e_0,e_1)$ correspondant à deux arêtes e_0 et e_1.*

5.2.5.3 Construction de l'arrangement A_0^1

L'arrangement A_0^1 de deux sections S_0 et S_1, correspond à la partition de deux diagrammes de Voronoï signés $Vor(S_0)$ et $Vor(S_1)$ projetés sur un même plan. Nous présentons ici sa construction à partir d'une discrétisation des contours Δ_0 et Δ_1 de S_0 et S_1, et de la triangulation de Delaunay 3D de l'ensemble des points (voir aussi [Boi88b, BG92]).

Correspondance entre A_0^1 et $Del(S_0 \cup S_1)$ La correspondance entre $Del(S_0 \cup S_1)$ et A_0^1 a été notée dans [Boi88b]. La construction de $Del(S_0 \cup S_1)$ peut se faire à partir des triangulations de Delaunay bidimensionnelles $Del_0 = Del(S_0)$ et $Del_1 = Del(S_1)$, de chaque section. Les tétraèdres obtenus sont de trois types, ceux ayant une face dans Del_0 sont notés t_1, ceux ayant une face dans Del_1 sont notés t_1 et enfin ceux ayant un arête dans Del_0 et une arête dans Del_1 sont notés t_{12}. Il n'y a pas d'autres cas possibles. La correspondance entre les sommets de A_0^1 et les tétraèdres de $Del(S_0 \cup S_1)$ se définit en fonction de ces types, et de la dualité entre Delaunay et Voronoï. Les sommets de A_0^1 sont formés par :

- les sommets de $Vor(S_0)$ qui correspondent à un tétraèdre de type t_1 dans $Del(S_0 \cup S_1)$.
- les sommets de $Vor(S_1)$ qui correspondent à un tétraèdre de type t_1 dans $Del(S_0 \cup S_1)$.
- les sommets $e_0 \cap e_1$ avec $e_i \in Vor(S_i)$ qui correspondent à un tétraèdre de type t_{12} dans $Del(S_0 \cup S_1)$.

Les cellules de A_0^1 correspondent aux tétraèdres de $Del(S_0 \cup S_1)$ adjacents à une même arête $[v_0,v_1]$ telle que $v_0 \in S_0$ et $v_1 \in S_1$.

5.2.6 Résultats sur des coupes 2D

Les reconstructions dans les figures ci-après, montrent des branchements très naturels entre des contours pourtant complètement différents. Une application possible et directe de ce type d'interpolation est bien sûr le morphing entre deux formes différentes.

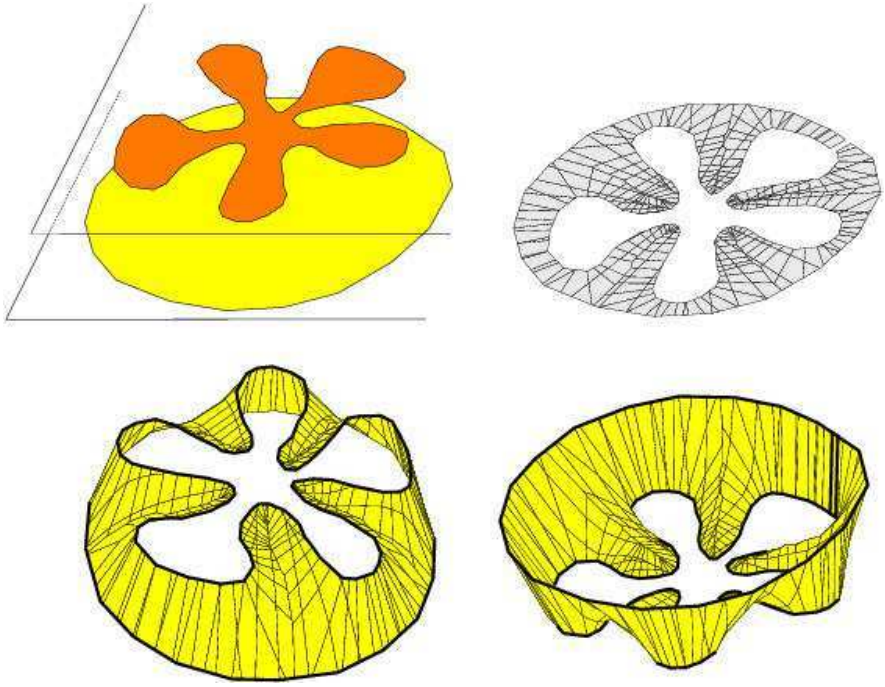
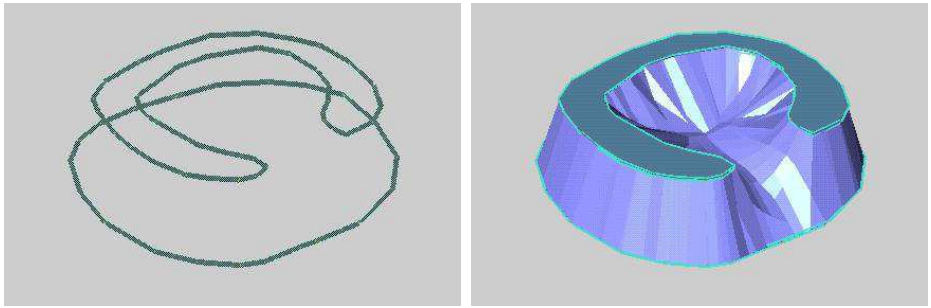


FIG. 5.18 – *Données, subdivisions A_0^1 et interpolations.*



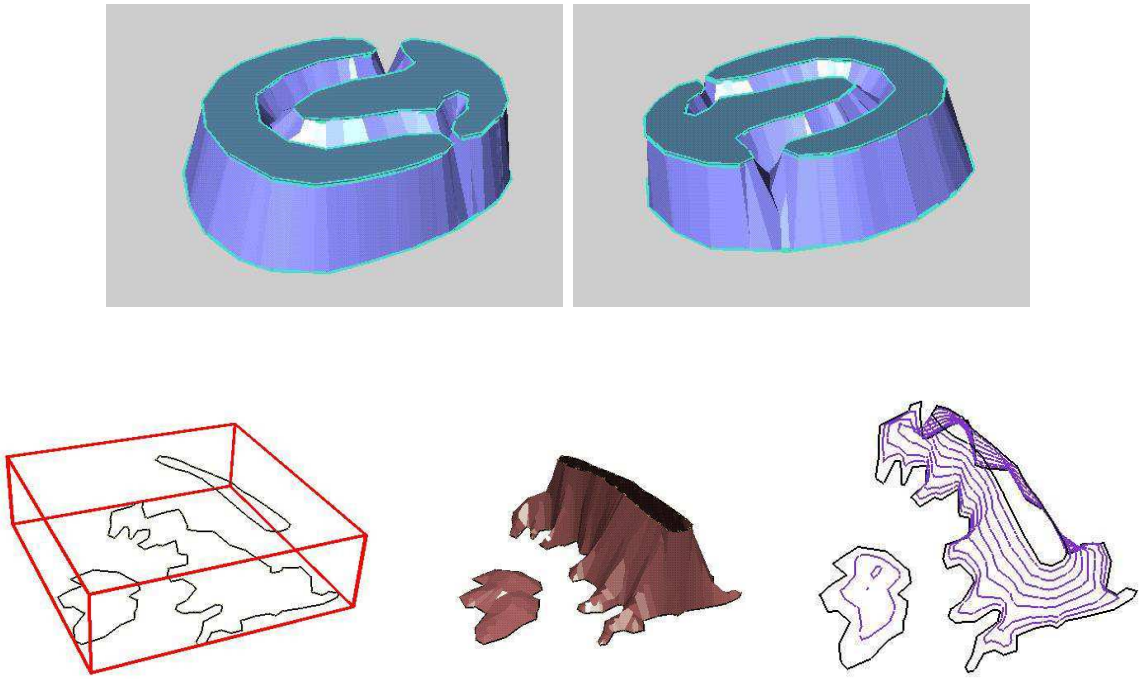


FIG. 5.19 – *Interpolations de contours divers. Quelques isovaleurs sont illustrées sur le dernier exemple.*

5.3 Interpolation d'objets colorés

Plaçons nous à présent dans le cas où notre scène S comprend plusieurs objets différents. Plutôt que de reconstruire chaque objet de façon indépendante et risquer des intersections indésirables, nous allons reconstruire tous les objets en même temps, en utilisant de façon itérative la méthode sans couleur.

Reconstruction itérative Soit S une scène comprenant n objets "colorés" O_i différents. Soit $C = \{c_1,...,c_n\}$ l'ensemble de ces couleurs.

Les contours "colorés" γ_1 et γ_2 (bords d'objets colorés) d'une même section S_i ne se coupent pas, et sont de deux types :

1. les contours γ_1 et γ_2 sont complètement disjoints.
2. les contours γ_1 et γ_2 sont confondus sur des portions de leurs contours (interface commune à plusieurs objets).

On note par $I(\gamma_1,\gamma_2)$ le résultat de l'interpolation des contours γ_1 et γ_2.

Propriété 6 *Soit A et B deux objets distincts. Soit S_1 et S_2 deux sections planes qui coupent les bords de A et B en les contours γ_1^A, γ_2^A, γ_1^B et γ_2^B. Si $\gamma_1^A \subseteq \gamma_1^B$ et $\gamma_2^A \subseteq \gamma_2^B$ alors $I(\gamma_1^A,\gamma_2^A) \subseteq I(\gamma_1^B,\gamma_2^B)$.*

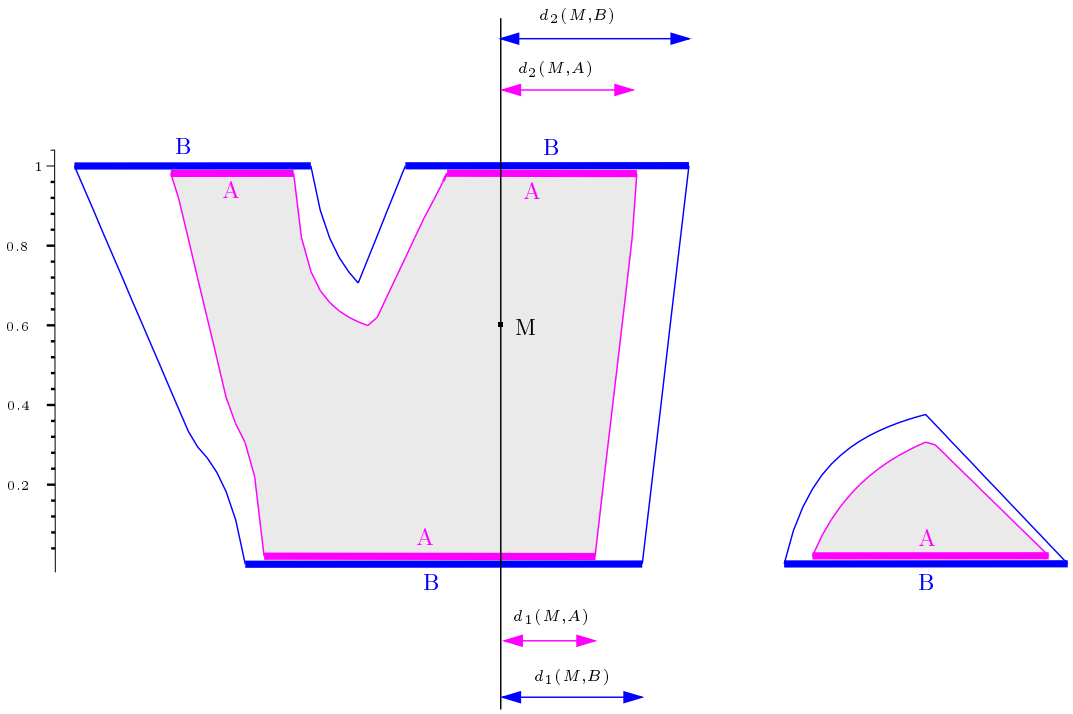


FIG. 5.20 – *L'inclusion des contours induit l'inclusion des objets interpolés.*

Preuve:
Soit $M \in S_1$, et supposons que $\gamma_1^A \subseteq \gamma_1^B$, il y a trois possibilités pour M:

– si $M \in \gamma_1^A$ alors on a forcément $M \in \gamma_1^B$ et donc $\sigma_A(M,1) = \sigma_B(M,1) = 1$. L'inclusion des contours $\gamma_1^A \subseteq c_1^B$ nous donne l'inégalité sur les distances : $\rho_1(M,A) \leq \rho_1(M,B)$
– si $M \notin \gamma_1^A$ **et** $M \in \gamma_1^B$ alors $\sigma_A(M,1) = -1$ et $\sigma_B(M,1) = 1$.
– si $M \notin \gamma_1^A$ **et** $M \notin \gamma_1^B$ alors $\sigma_A(M,1) = -1$ et $\sigma_B(M,1) = -1$. On a l'inégalité sur les distances : $\rho_1(M,A) \geq \rho_1(M,B)$.

Dans tous les cas on a :

$$\sigma_A(M,1)\rho_1(M,A) \leq \sigma_B(M,1)\rho_1(M,B)$$

Et pour $z \in [z_1,z_2]$ on a $(z - z_1) \geq 0$ et $(z_2 - z) \geq 0$ d'où :

$$\sigma_A(M,1)\rho_1(M,A)(z - z_1) \leq \sigma_B(M,1)\rho_1(M,B)(z - z_1)$$

De même $\sigma_A(M,2)\rho_2(M,A) \leq \sigma_B(M,2)\rho_2(M,B)$
et

$$\sigma_A(M,2)\rho_2(M,A)(z_2 - z) \leq \sigma_B(M,2)\rho_2(M,B)(z_2 - z)$$

Finalement on arrive à $f_{\rho,A}(M) \leq f_{\rho,B}(M)$ pour tout $M \in E_{1,2}$.
Et on a bien $I(\gamma_1^A,\gamma_2^A) \subseteq I(\gamma_1^B,\gamma_2^B)$.

Cette propriété va nous servir à construire les objets O_i de façon itérative. Le but étant de séparer ces objets en deux sous-ensembles distincts, l'un positif et l'autre négatif pour pouvoir utiliser la méthode d'interpolation précédente. Les objets se déduisent finalement par des opérations booléennes simples sur ces sous-ensembles.

Itération Soit $O_1^1 = \bigcup_0^{n-1} O_i$ et $O_1^0 = \{O_n\}$.
On construit O_1^1 en utilisant l'algorithme précédent.
On construit de façon itérative les objets $O_1^k = \bigcup_0^{n-k} O_i$.
Pour $k < l$ on a $O_1^k \subseteq O_1^l$ on a $I(O_1^k) \subseteq I(O_1^l)$.
L'objet O_i de couleur c_i est finalement décrit par :

$$I(O_i) = I(O_1^i) - I(O_1^{i-1})$$

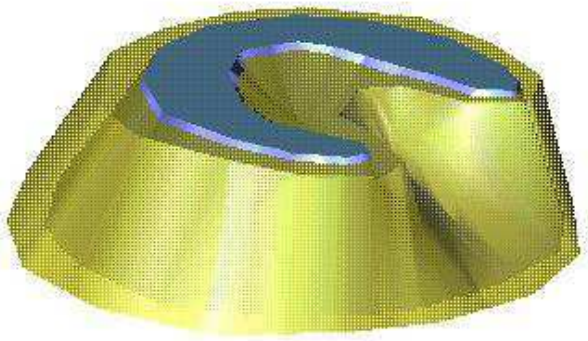


FIG. 5.21 – *Inclusion de deux objets 3D obtenus par interpolation.*

5.4 Application à des contours non fermés

Nous allons nous intéresser à présent à la reconstruction de surfaces à partir de lignes courbes γ_1 et γ_2 définies dans des plans parallèles π_1 et π_2. L'élaboration d'une telle méthode permettrait de reconstruire, par exemple, des surfaces de failles, connaissant leurs traces 2D dans plusieurs sections géologiques parallèles. Une faille ne définit pas un volume géologique et de ce fait sa trace par une section quelconque, n'est pas un contour *fermé*. La méthode vue précédemment ne se généralise donc pas directement à ces données.

Nous nous intéressons, au cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur les correspondances entre les contours : tous les contours de π_1 et ceux de π_2 sont associés à un même objet et sont tous en correspondance. Nous orientons tous les contours selon un axe privilégié (Oz par exemple), qui induit une polarisation de chacun des côtés d'une ligne. Cette polarisation nous permet de faire le lien avec la méthode 5.2 à partir de contours fermés. En effet les plans π_1 et π_2 sont partitionnés en régions positives et négatives. La subdivision de ces partitions est composée de cellules $++$, $--$, $+-$ et $-+$ (voir figure 5.22). Les cellules qui nous intéressent, comme dans le cas fermé, sont celles à la fois à l'intérieur de l'objet (dans une section) et à l'extérieur (dans l'autre), c'est à dire celles identifiées $+-$ et $-+$.

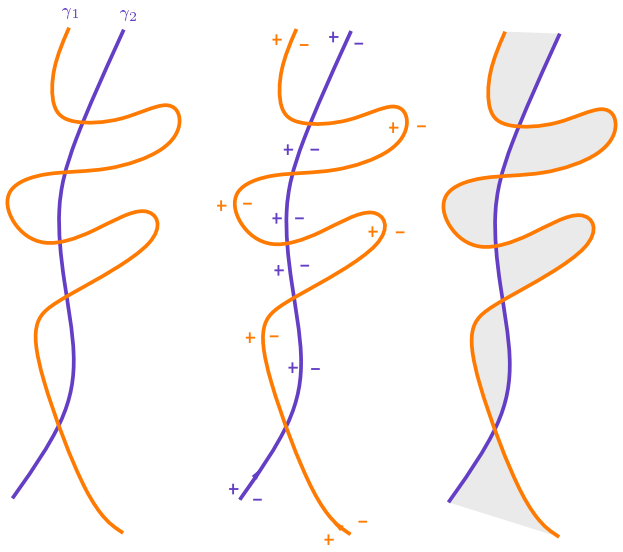


FIG. 5.22 – *Contours ouverts et polarisation.*

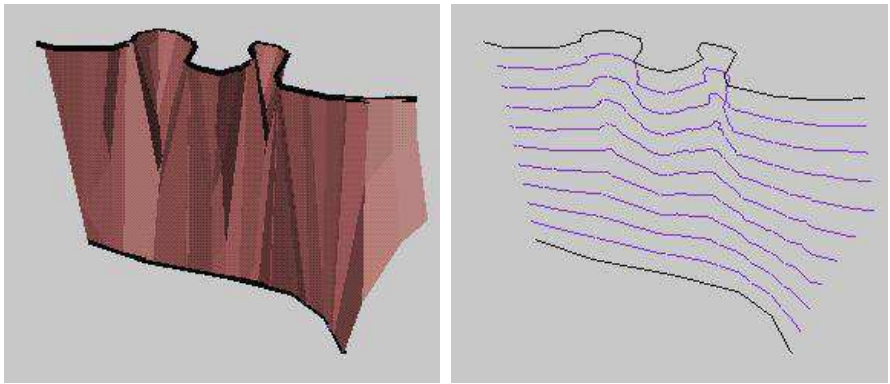


FIG. 5.23 – *Interpolation polyédrique, et quelques isolignes pour* $z \in [z_1,z_2]$.

Remarque: les correspondances peuvent être réalisées de façons automatiques si la projection de γ_1 sur π_2 est dans la région de Voronoï $Vor(\gamma_2)$ et vice-versa.

5.5 Interpolation de points sur une surface

Cette partie présente une méthode d'interpolation fonctionnelle, appliquée à un ensemble de points E sur le bord d'un objet S de $\mathbb{R}^d$. On suppose que l'on connaît la normale à S (ou une approximation) en tout point de E. Elle indiquera par convention l'extérieur de l'objet. On cherche donc une fonction h tel que $h(X \in E) = 0$ et l'ensemble $\psi = \{X, h(X) \geq 0\}$ approche S.

5.5.1 Interpolation au plus proche

En première approximation de S, nous supposons qu'en chaque point $X \in E$ de normale $\vec{n}(X)$ et dans un voisinage à définir, que le bord de S est restreint au plan $\pi(X)$ passant par X et de normale $\vec{n}(X)$. Cette interpolation est similaire à celle étudiée dans la reconstruction discrète du chapitre 3. Pour un point X, on appelle $N_1(X)$ le point de donnée le plus proche de X. La fonction $h(X)$ qui illustre cette approximation est définie de la façon suivante:

$h(X) = h_1(X)$, avec $h_1(X) = \overrightarrow{XN_1}(X) \cdot \overrightarrow{n}(N_1(X))$.

La forme interpolée ψ_0 est définie comme la fermeture du sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ qui vérifie $h(X) \geq 0$ (voir figures 5.24 et 5.25). La détermination de $\psi_0 = \{X, h(X) \geq 0\}$ revient à faire la construction suivante. On construit la partition de Voronoï $Vor(E)$ des points de E. Les normales induisent la partition volumique signée $V^*(E)$ de l'objet : chaque cellule est coupée (voir 3.2.2.2) par le plan de normale $\vec{n}(p)$ passant par p, en deux cellules $V^+(p)$ et $V^-(p)$ respectivement intérieure et extérieure à l'objet (voir figure 5.24). Et donc $\psi_0 = \{X, X \in V^+(E)\}$.

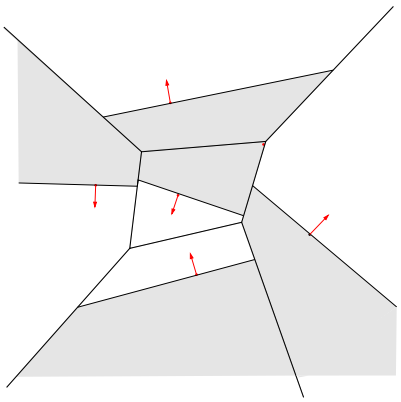


FIG. 5.24 – *Interpolation au plus proche.*

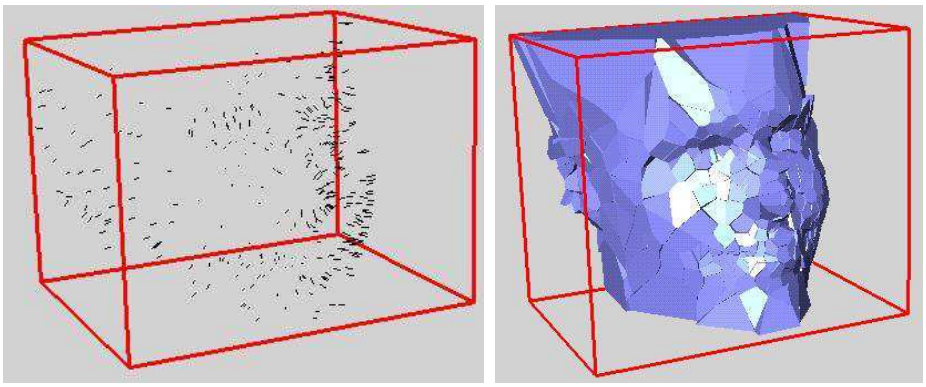


FIG. 5.25 – *Interpolation au plus proche de points et normales sur un visage humain. Peu de points sont nécessaires pour approcher la forme donnée.*

5.5.2 Interpolation naturelle

Etant donné un ensemble de points E et un point $X \in \mathbb{R}^d$, on appelle voisins naturels (natural neighbors) de X sur E, les voisins de X dans la triangulation de Delaunay de $E \cup X$. De façon équivalente, les voisins naturels de X sont les points de E ayant leurs cellules de Voronoï en conflit avec X (i.e. sont modifiés en cas d'insertion de X).

Soit M un point de E, on note $V(M)$ la cellule de M dans le diagramme de Voronoï de E, et soit $V'(X)$ la cellule de X dans $Vor(E \cup X)$ et $V(M,X) = V(M) \cap V'(X)$. Si $V(M,X) \neq \emptyset$, alors M est un voisin naturel de X. On note par $Nat_E(X)$ l'ensemble des voisins naturels de X sur E.

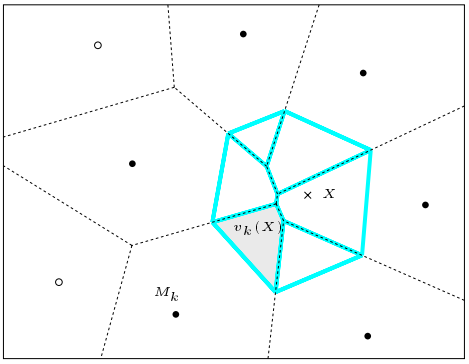


FIG. 5.26 – *Voisins naturels de X (cercle pleins). En gris l'aire "volée" par X à $V(M_k)$. Le diagramme de Voronoï sans le point X est la partition en pointillés.*

Les voisins naturels sont généralement utilisés pour interpoler un en-

semble de valeurs associées aux points de E (voir [Sib81]). Nous allons adapter ces idées au cas des normales.

On considère $Vor(E)$ la partition de Voronoï (non signée) de E.

Notons $v_i(X)$ l'aire de $V(M_i,X)$, $v(X)$ la somme des aires $v_i(X)$ pour tous les voisins naturels de X, $M_i \in Nat_E(X)$. Nous définissons le poids relatif de M_i, noté $w_i(X)$, comme la quantité suivante :

$$w_i(X) = \frac{v_i(X)}{v(X)}$$

On définit comme précédemment $h_i(X) = \overrightarrow{XM_i} \cdot \overrightarrow{n}(M_i)$. Nous appellerons interpolation "naturelle" de E, l'interpolation des h_i en fonction des voisins naturels, qui se définit de la façon suivante :

$$h(X) = \sum_{i/M_i \in Nat_E(X)} w_i(X)\ h_i(X)$$

La forme "naturelle" approchant S est donc définie par l'ensemble $\psi_{nat} = \{X, h(X) \geq 0\}$.

Comme l'a montré Sibson (voir [Sib81]), $w_i(X)$ est une fonction continue de X, et qui est continuement dérivable partout sauf en les sites $M_i \in E$. Le problème aux sites est résolu par la connaissance des normales aux points. On obtient facilement que $h(X)$ est une fonction d'interpolation des points et normales de E, qui a les propriétés suivantes :

- h est définie partout.
- h est continue partout.
- h est dérivable en tout point, même en les sites $M_i \in E$ (voir illustration 5.27).

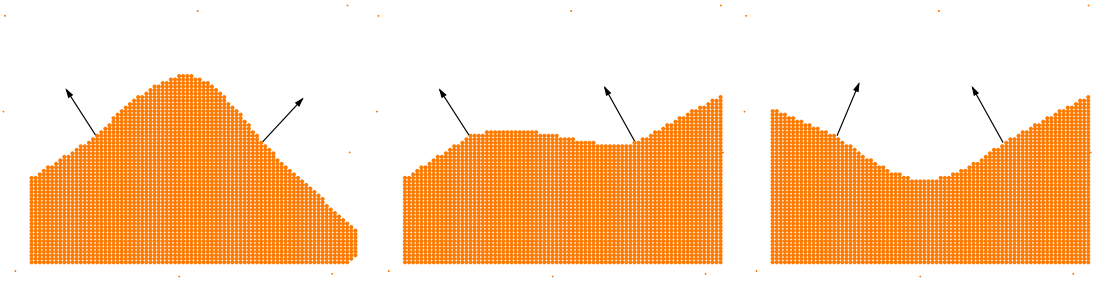


FIG. 5.27 – *Normales orientées de façons différentes et les interpolations "naturelles" correspondantes.*

Sur les exemples suivants, des points et normales ont été saisis sur le bord d'objets courbes 2D (voir figures 5.28, 5.29 et 5.30). On a ajouté d'autres points sur le dilaté de l'enveloppe convexe de E, afin de ne pas considérer les cellules de Voronoï infinies, qui faussent le calcul des régions naturelles $v_i(X)$. Peu de points sont nécessaires pour obtenir une forme cohérente (voir figure 5.30).

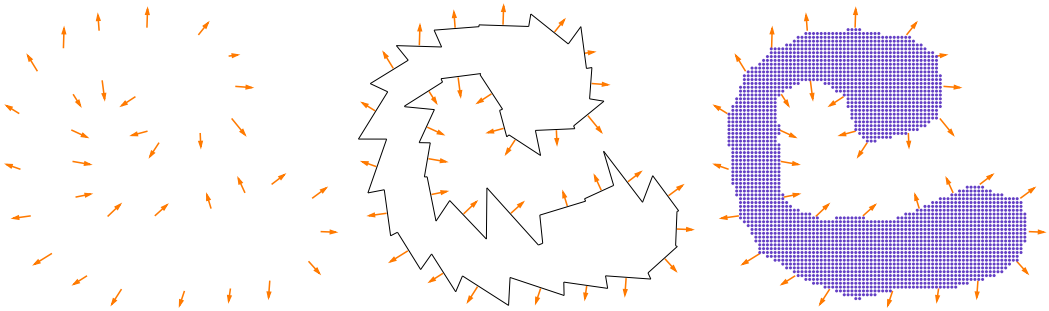


FIG. 5.28 – *Points et normales. Interpolation au plus proche et naturelle.*

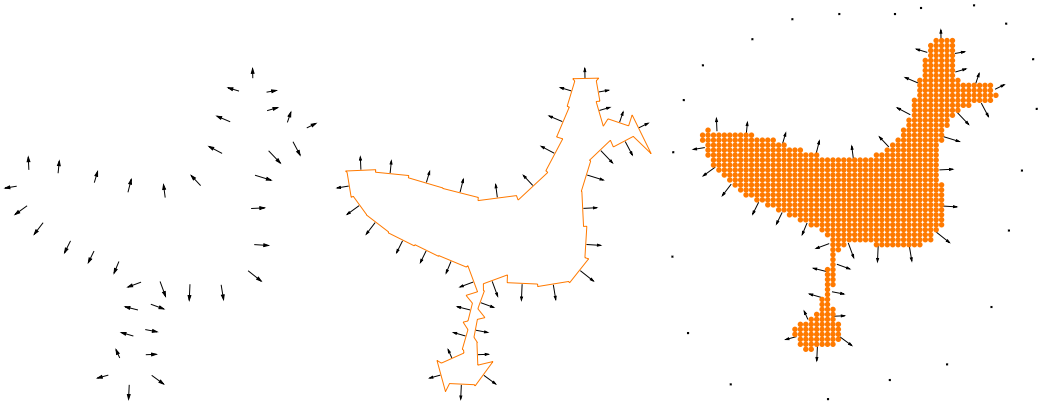


FIG. 5.29 – *Points et normales. Interpolation au plus proche et naturelle.*

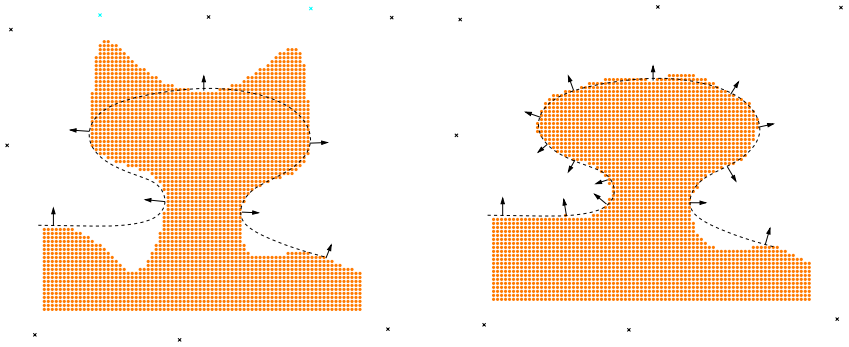


FIG. 5.30 – *Points et normales sur le bord d'un dôme de sel et interpolations naturelles.*

5.5.3 Le cas de points avec des valeurs

Une des originalités de la méthode discrète décrite dans les chapitres précédents, est la possibilité de prendre en compte des données à l'intérieur des objets, et non pas seulement sur leurs bords.

Dans cette optique on considère en plus des normales, des points p_i auxquels des valeurs $\sigma(p_i)$ sont associées :

- $\sigma(p_i) < 0$ si p_i est à l'extérieur de l'objet.
- $\sigma(p_i) > 0$ si p_i est à l'intérieur de l'objet.

Nous allons définir une fonction h plus générale, interpolant les données $E = E_1 \cup E_2$, avec E_1 l'ensemble des points avec normales, et E_2 celui des points avec une valeur. On définit h par l'interpolation suivante :

$$h(X) = \sum_{i/M_i \in Nat_{E_1}(X)} w_i(X)\, h_i(X) \; + \sum_{i/M_i \in Nat_{E_2}(X)} w_i(X)\, \sigma(M_i)$$

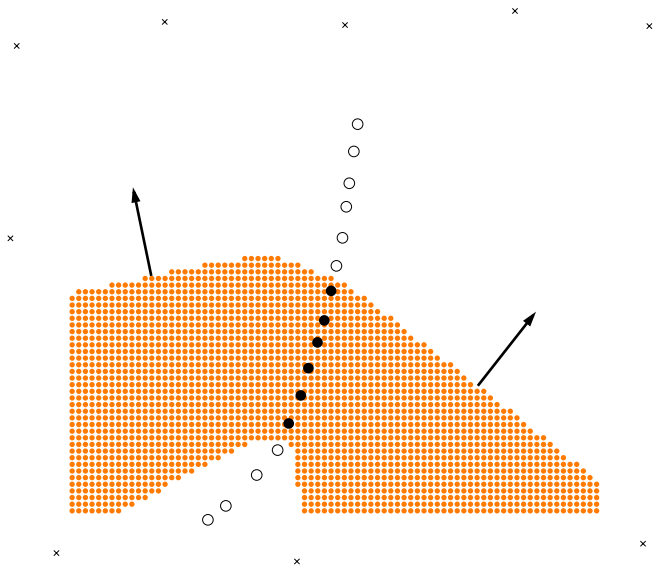


FIG. 5.31 – *Deux normales et un ensemble de points étiquetés intérieurs (cercles pleins) et extérieurs (cercles vides) représentant par exemple un sondage et l'interpolation "naturelle".*

Remarque: le choix des valeurs $\sigma(M_i)$ est arbitraire, et dépend de l'importance du point dans le modèle. Par exemple, pour des sondages, un bon choix de $\sigma(M_i)$ semble être la distance au bord de l'objet sur le sondage.

Chapitre 6

Conclusion

La géométrie algorithmique fournit des structures et algorithmiques utiles pour la modélisation de formes dans des domaines variés. Les résultats et applications de cette thèse sont essentiellement axés sur les géosciences, mais trouvent aussi des applications à l'imagerie médicale. Ils montrent l'utilité des algorithmes de reconstruction "automatique" pour la modélisation tridimensionnelle de formes naturelles. Les modèles reconstruits de façon automatique ou semi-automatique, même s'ils ne sont parfois qu'une ébauche de l'objet recherché, forment une bonne approximation et un point de départ pour une modélisation plus complète.

Les solutions proposées dans cette thèse utilisent des interpolations de proximité, et se basent sur les diagrammes de Voronoï. Les diagrammes de Voronoï sont des structures très intéressantes dès lors que la notion de proximité est un caractère essentiel dans le modèle. De manière générale, lorsque les données ne sont connues que par leur géométrie propre, les diagrammes de Voronoï (ou leurs structures duales, les triangulations de Delaunay) semblent la solution la plus naturelle, pour interpoler ces données, ou tout du moins pour les structurer. Ils offrent une alternative aux méthodes qui utilisent des éléments réguliers (voxels, grilles régulières), en fournissant une partition de l'espace moins régulière et moins coûteuse et basée directement sur les données.

L'accent a été mis sur une méthode la plus générale possible. En effet il "suffit" de pouvoir exprimer les données de départ par un ensemble de points colorés, pour pouvoir effectuer une reconstruction. Par contre, cette souplesse de la reconstruction ne permet pas de juger une reconstruction en dehors de son contexte applicatif. La structure géométrique et topologique des diagrammes de Voronoï, nous permet des interrogations efficaces du modèle reconstruit (localisation d'un point 3D quelconque dans le modèle, calcul du volume d'un objet, voisinage topologique des objets de la scène, etc...),

et donc des mesures de qualité sont possibles sur ces modèles. Si c'est surtout l'oeil des scientifiques qui nous a guidé au début, d'autres méthodes de validation ont été utilisées par la suite. Des méthodes de validation géophysique ont été effectuées par les scientifiques du B.R.G.M., sur le modèle géologique du massif Armoricain par exemple (voir 4.4.3), et ont montré des correspondances très satisfaisantes entre le modèle calculé et le modèle réel. Néanmoins, d'autres méthodes de validation doivent être prises en compte et testées. Des efforts sur des inversions plus automatiques devraient aboutir à un modeleur très complet, permettant d'automatiser tout le processus de construction.

Toujours dans un souci de généralité, les contraintes de la méthode de reconstruction sont essentiellement des contraintes géométriques (passage par des points, normales, contraintes de courbure, tension) et tiennent peu compte du domaine d'application. Il est clair que pour obtenir de meilleurs résultats, de nouvelles contraintes doivent être considérées, qui se basent sur le domaine d'application et sur le type de milieu rencontré. Par exemple, pouvoir ajouter des informations sur l'épaisseur des formations géologiques serait très utile pour la modélisation; de plus ce sont des informations souvent connues. De nouvelles recherches sont aussi nécessaires, dans le cas d'une reconstruction dans des milieux anisotropes, pour permettre et améliorer, par exemple, la construction de modèles géologiques fortement plissés lorsque les données sont peu nombreuses ou mal réparties. Il faut alors pouvoir tenir compte d'une information sur le champ d'anisotropie comme dans [LCM98]. Ceci est possible en prenant en compte d'autres métriques respectant l'anisotropie du milieu à étudier. Par exemple modifier la boule unité par une ellipse permettrait de privilégier des directions particulières. C'est un axe de recherche essentiel pour améliorer la cohérence des scènes reconstruites, et les diagrammes de Voronoï s'y prêtent bien.

La dernière partie de ce manuscrit présente des méthodes nouvelles et une formulation un peu différente des méthodes de reconstruction discrète, qui se basent cette fois-ci sur l'élaboration de fonctions implicites approchant les données de départ. Lorsque les données sont des sections particulières de l'objet, l'interpolation tenant compte des distances aux contours, offre des formes et branchements très naturels. Les méthodes très prometteuses dans le cas de points avec valeurs (intérieur, extérieur, normale) doivent être généralisées à la dimension supérieure et testées sur de multiples exemples. Bien que basées sur les mêmes structures que pour le cas discret, elles introduisent une autre formulation du même problème. L'association entre les fonctions implicites et les structures géométriques telles que les diagrammes de Voronoï est une idée qu'il faut continuer à explorer et une direction de recherche pour des travaux futurs.

Table des figures

1.1 Exemple de coupe géologique dans les Alpes. 5
1.2 Création de modèles plissé et faillé (image POLYPLI). 7
1.3 Illustration de l'éditeur de coupes 3D. 8
1.4 Reconstruction à partir de points 9
1.5 Reconstruction à partir de contours 11
1.6 Choix de la triangulation entre deux contours 12
1.7 Elimination des tétraèdres "extérieurs" 14
1.8 Insertion de nouveaux points 14
1.9 Les zones "différence" 15
1.10 Reconstruction indépendante 17

2.1 Un 3-complexe de $\mathbb{R}^2$ 20
2.2 3-cellules adjacentes 21
2.3 Diagramme de Voronoï de points dans le plan 22
2.4 Triangulation de Delaunay de points dans le plan 23
2.5 Dualité Delaunay/Voronoï. 24
2.6 Dualité en 3D des simplexes de Delaunay et Voronoï. 25
2.7 Triangulation (diviser pour régner) 26
2.8 Simplexes de Delaunay en conflit 27
2.9 Etape de la triangulation 27
2.10 Points cocycliques en 2D 28
2.11 Données initiales : points et arêtes 30
2.12 Critère de Delaunay 2D 31
2.13 Delaunay conforme (crust) 32
2.14 Delaunay conforme (contraint) 32
2.15 Delaunay conforme avec insertion de points 33
2.16 Critère de Delaunay 3D 34
2.17 Partition non conforme 35
2.18 Partition conforme 36

3.1 Exemple de données 2D 39
3.2 Interrogation dans un modèle incomplet. 41

3.3 Partition et régions 42
3.4 Données initiales 3D 43
3.5 Interfaces 2D et 1D 43
3.6 Duplication des données 45
3.7 Discrétisation des sommets anguleux. 45
3.8 Fermetures des données entre plusieurs interfaces 46
3.9 Fermetures des données entre sondages et contacts. 46
3.10 Diagramme de Voronoï complet des données 47
3.11 Régions de Voronoï 47
3.12 Subdivision d'une cellule par la normale au point 48
3.13 Région d'une donnée A 49
3.14 Estimation de la normale 50
3.15 Déformation attendue 51
3.16 Déformation 2D 52
3.17 Distance euclidienne non adaptée 54
3.18 Tensions et courbures différentes 56
3.19 Déformations externes 57
3.20 Déformation initiale 57
3.21 Déformations successives 58
3.22 Normale $\overrightarrow{N(P_i)}$ au point P_i. 60
3.23 Sphère passant par P_i, $P_{i,1}$, $P_{i,2}$ et $P_{i,3}$ 60
3.24 Angle simplexe 3D 61
3.25 Maillage initial de Voronoï 62
3.26 Interface 2D non lisse 63
3.27 Interface entre l'atmosphère et le sous-sol 64
3.28 Sphères vides 66
3.29 Zone d'un ensemble G 67
3.30 Problème topologique 67
3.31 Boule minimale 68
3.32 Zone de convexité d'un sommet 70
3.33 Zone de convexité d'un complexe 70
3.34 Régions de Voronoï d'un ensemble de points 71
3.35 Lissage contraint d'un bloc volumique 72
3.36 Modèles volumique et surfacique lissées 72
3.37 Influences de la densité sur la zone de déformation. 73
3.38 Localisation d'un point 74
3.39 Reconstruction d'un coeur humain. 75
3.40 Coupes d'un visage, reconstruction initiale et lisse. 75
3.41 Contours polyédriques d'un bassin et reconstruction 76
3.42 Problème de la métrique euclidienne 77
3.43 Transformation anisotrope 79

3.44 Transformation inverse T^{-1}. 79

4.1 Failles inverses, failles normales et failles transcurrentes. . . . 82
4.2 Différents cas d'intersections avec une faille. 84
4.3 Intersection d'une interface avec plusieurs failles. 84
4.4 Intersection 3D d'une interface avec une faille 85
4.5 Discontinuité dans le diagramme de Voronoï 86
4.6 Partition de Voronoï partiellement colorée 87
4.7 Réseau de failles dans une zone sans données 88
4.8 Insertion de la première faille 89
4.9 Insertion de la faille F_2 89
4.10 Insertion de la faille F_3 90
4.11 Reconstruction finale lissée. 90
4.12 Exemple synthétique 3D 91
4.13 Concordance et discordance 93
4.14 Problème de fermeture indécis. 93
4.15 Ordres possibles 93
4.16 Cas impossible 94
4.17 Ordre sur un exemple 95
4.18 Arbre des discordances 95
4.19 Données sur une coupe 2D 96
4.20 Reconstruction de la coupe 96
4.21 Données sur une coupe 2D 97
4.22 Reconstruction de la coupe 97
4.23 Données Ardèche 98
4.24 Reconstructions du modèle Ardèche 99
4.25 Données Morges 100
4.26 Estimation de la normale sur un MNT 101
4.27 Reconstruction du MNT 101
4.28 Reconstruction du modèle Morges 103
4.29 Coupe arbitraire du modèle Morges 103
4.30 Données Armor 105
4.31 Unités principales (Voronoï) 106
4.32 Unités principales (lisses) 106
4.33 Reconstruction plus détaillée de l'unité de St Brieuc. 107
4.34 Modèle Armor plus détaillé et corrigé. 108
4.35 Anomalie gravimétrique 108
4.36 Bassin de Paris 109

5.1 Exemple de valeurs prises par $\sigma(X,i)$ 113
5.2 Deux sections et leurs projections sur un même plan. 114

5.3 Interpolation $I_0(S)$ 115
5.4 Distance d'un point M à un contour quelconque. 116
5.5 Distance interpolée entre deux sections 117
5.6 Interpolation $I_1(S)$ 118
5.7 Les principaux cas d'interpolation 2D 120
5.8 Contours 1D initiaux 121
5.9 Résultats de l'interpolation avec $f_\rho = \rho$ et $f_\rho = \rho^2$ 121
5.10 Résultats de l'interpolation avec $f_\rho = \gamma_i * \rho$ 121
5.11 Résultats de l'interpolation avec $f_\rho = \rho\rho^*$ 122
5.12 Partition de Voronoï de segments sur un contour 124
5.13 Superposition des diagrammes de Voronoï 124
5.14 Quadrique générée par deux segments E_0 et E_1. 125
5.15 La cellule $A_0^1(v_0,v_1)$ correspondant à deux sommets v_0 et v_1. . 126
5.16 La cellule $A_0^1(v,e)$ correspondant à un sommet v et une arête e. 126
5.17 La cellule grisée $A_0^1(e_0,e_1)$ correspondant à deux arêtes e_0 et e_1. 127
5.18 Données, subdivisions A_0^1 et interpolations. 128
5.19 Interpolations de contours divers 129
5.20 Inclusion des contours 131
5.21 Inclusion d'objets 3D 132
5.22 Contours ouverts et polarisation. 133
5.23 Interpolation polyédrique, et quelques isolignes 133
5.24 Interpolation au plus proche. 135
5.25 Interpolation de points sur un visage 136
5.26 Voisins naturels d'un point 136
5.27 Interpolations "naturelles" 137
5.28 Interpolation sur un exemple 138
5.29 Interpolation sur un exemple 138
5.30 Interpolation sur un exemple 139
5.31 Interpolations naturelles de données diverses 140

Bibliographie

[ABE97] Amenta (N.), Bern (M.) et Eppstein (D.). – *The Crust and the β-Skeleton: Combinatorial Curve Reconst ruction.* – Research Report, Xerox PARC, 1997. |http://www.geom.umn.edu/ nina/papers/crust.ps.gz|.

[ABK98] Amenta (N.), Bern (M.) et Kamvysselis (M.). – A new voronoi-based surface reconstruction algorithm. *SIGGRAPH 98*, 1998.

[AGSS89] Aggarwal (A.), Guibas (Leonidas J.), Saxe (J.) et Shor (P. W.). – A linear-time algorithm for computing the Voronoi diagram of a convex polygon. *Discrete Comput. Geom.*, vol. 4, n6, 1989, pp. 591–604.

[Att95] Attali (D.). – *Squelettes et graphes de Voronoï 2-d et 3-d.* – Grenoble, Thèse de PhD, Univ. Joseph Fourier, octobre 1995.

[Att97] Attali (D.). – r-regular shape reconstruction from unorganized points. *In : Proc. 13th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pp. 248–253.

[Aur87] Aurenhammer (F.). – Power diagrams: properties, algorithms and applications. *SIAM J. Comput.*, vol. 16, 1987, pp. 78–96.

[Aur91] Aurenhammer (F.). – Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Comput. Surv.*, vol. 23, n 3, septembre 1991, pp. 345–405.

[Bas92] Bascle (Bénédicte). – *Contributions et applications des modèles déformables en vision par ordinateur.* – France, Thèse de doctorat en sciences, L'Université de Nice-Sophia Antipolis, 1992.

[BB90] Brun (J.P.) et Balé (P.). – Cadomian tectonics in northern brittany. *Geological Sociaty of London Special Publication*, vol. 51, 1990, pp. 95–114.

[BCDT96] Boissonnat (J.-D.), Cérézo (A.), Devillers (O.) et Teillaud (M.). – Output-sensitive construction of the Delaunay triangulation of points lying in two planes. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, vol. 6, n1, 1996, pp. 1–14.

[BCL96] Bajaj (Chandrajit L.), Coyle (Edward J.) et Lin (Kwun-Nan). – Boundary and 3d triangular meshes from planar cross sections. *In : Proc. 5th International Meshing Roundtable*. pp. 169–178. – PO Box 5800, MS 0441, Albuquerque, NM, 87185-0441, 1996. Also Sand. Report 96-2301.

[BG92] Boissonnat (J.-D.) et Geiger (B.). – *Three-dimensional reconstruction of complex shapes based on the Delaunay triangulation.* – Report n 1697, Valbonne, France, INRIA Sophia-Antipolis, avril 1992.

[BG93a] Boissonnat (J.-D.) et Geiger (B.). – 3d simulation of delivery. *In : Visualization 93*, éd. par Nielson (G. M.) et Bergeron (D.). pp. 416–419. – San Jose CA, 1993.

[BG93b] Boissonnat (J.-D.) et Geiger (B.). – Three dimensional reconstruction of complex shapes based on the Delaunay triangulation. *In : Biomedical Image Processing and Biomedical Visualization*, éd. par Acharya (R. S.) et Goldgof (D. B.). pp. 964–975. – SPIE.

[BMS94] Burnikel (C.), Mehlhorn (K.) et Schirra (S.). – How to compute the Voronoi diagram of line segments: Theoretical and experimental results. *In : Proc. 2nd Annu. European Sympos. Algorithms*. pp. 227–239. – Springer-Verlag.

[BN96a] Boissonnat (J.-D.) et Nullans (S.). – Reconstruction of geological structures from heterogeneous and sparse data. *In : Proc. 4th ACM Workshop Adv. Geogr. Inform. Syst.*

[BN96b] Boissonnat (J.-D.) et Nullans (S.). – *Reconstruction of Geological Structures from Heterogeneous and Sparse Data.* – Research Report n3069, INRIA, 1996.

[BN98] Boissonnat (J.D.) et Nullans (S.). – Reconstruction of 3d volumic models. *3D Modeling of Natural Objects: A Challenge for 2000's - ENSG, NANCY*, june 1998.

[Boi84a] Boissonnat (J.-D.). – Geometric structures for three-dimensional shape representation. *ACM Trans. Graph.*, vol. 3, n 4, 1984, pp. 266–286.

[Boi84b] Boissonnat (J.-D.). – Geometric structures for three-dimensional shape representation. *ACM Trans. Graph.*, vol. 3, n 4, 1984, pp. 266–286.

[Boi88a] Boissonnat (J.-D.). – Shape reconstruction from planar cross-sections. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, vol. 44, 1988, pp. 1–29.

[Boi88b] Boissonnat (J.-D.). – Shape reconstruction from planar cross-sections. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, vol. 44, n1, octobre 1988, pp. 1–29.

[Bos98] Bosch (M.). – Lithologic tomography: Method and application to the côte d'armor region (france). *3D Modeling of Natural Objects: A Challenge for 2000 's - ENSG, NANCY*, june 1998.

[BT93] Boissonnat (J.-D.) et Teillaud (M.). – On the randomized construction of the Delaunay tree. *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 112, 1993, pp. 339–354.

[BY95] Boissonnat (J.-D.) et Yvinec (M.). – *Géométrie algorithmique.* – Paris, Ediscience international, 1995.

[CLC97] Calcagno (Philippe), Lazarre (Joëlle) et Courrioux (Gabriel). – *Modélisation géométrique tridimensionnelle du massif de l'Aiguille de Morges.* – Note geofr3d-phc/jb-97/26, Orléans, France, BRGM, janvier 1997.

[Con97] Conraud (Joel). – *Génération de maillages de simplexes pour la modélisation d'objets naturels.* – France, Thèse de doctorat en informatique, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1997.

[Del94] Delingette (Hervé). – *Modélisation, déformation et reconnaissance d'objets tridimensionnels à l'aide de maillages simplexes.* – France, Thèse de doctorat en sciences, Ecole Centrale de Paris, 1994.

[Des96] Desnoguès (P.). – *Triangulations et quadriques.* – France, Thèse de doctorat en sciences, université de Nice-Sophia Antipolis, 1996.

[Dev92] Devillers (O.). – *Robust and efficient implementation of the Delaunay tree.* – Rapport de recherche n1619, INRIA, 1992.

[Dol96] Dolliazal (Mohamed). – *Modélisation géométrique des objets du sous-sol.* – France, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996.

[Ede92] Edelsbrunner (H.). – *Weighted alpha shapes.* – Technical Report n UIUCDCS-R-92-1760, Urbana, IL, Dept. Comput. Sci., Univ. Illinois, 1992.

[EGG+96] Egal (E.), Guerrot (C.), Goff (E. Le), Thieblemont (D.) et Chantraine (J.). – The cadomian orogeny revisited in northern brittany (france). *Geological Society America Special Paper*, 1996, pp. 281–318.

[EM92] Edelsbrunner (H.) et Mücke (E. P.). – *Three-dimensional alpha shapes.* – Manuscript n UIUCDCS-R-92-1734, Urbana-Champaign, IL, Dept. Comput. Sci., Univ. Illinois, 1992.

[EM94] Edelsbrunner (H.) et Mücke (E. P.). – Three-dimensional alpha shapes. *ACM Trans. Graph.*, vol. 13, n1, janvier 1994, pp. 43–72.

[ET92] Edelsbrunner (H.) et Tan (T. S.). – An upper bound for conforming Delaunay triangulations. *In : Proc. 8th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pp. 53–62.

[FKU77] Fuchs (H.), Kedem (Z. M.) et Uselton (S. P.). – Optimal surface reconstruction from planar contours. *Commun. ACM*, vol. 20, 1977, pp. 693–702.

[For86] Fortune (S.). – A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. *In : Proc. 2nd Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pp. 313–322.

[GA93] Guéziec (A.) et Ayache (N.). – Curve smoothing and matching. *Research Report*, 1993.

[GA98] Galin (Eric) et Akkouche (Samir). – Fast surface reconstruction from contours using implicit surfaces. *Implicit Surfaces'98 Conference*, 1998.

[Gei93] Geiger (B.). – *Three-dimensional modeling of human organs and its application to diagnosis and surgical planning.* – France, Thèse de doctorat en sciences, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1993.

[HDD+92] Hoppe (H.), DeRose (T.), Duchamp (T.), McDonald (J.) et Stuetzle (W.). – Surface reconstruction from unorganized points. *Comput. Graphics*, vol. 26, n 2, 1992, pp. 71–78. – Proc. SIGGRAPH '92.

[HDD+94] Hoppe (H.), DeRose (T.), Duchamp (T.), Halstead (M.), Jin (H.), McDonald (J.), Schweitzer (J.) et Stuetzle (W.). – Piecewise smooth surface reconstruction. *In : Proc. SIGGRAPH 94*, pp. 295–302.

[HV97] Hagedoorn (M.) et Veltkamp (R.). – A general method for partial point set matching. *In : Proc. 13th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pp. 406–408.

[JC94a] Jones (M. W.) et Chen (M.). – A new approach to the construction of surfaces from contour data. *Comput. Graph. Forum*, vol. 13, n3, 1994, pp. 75–84.

[JC94b] Jones (Mark W.) et Chen (Min). – A new approach to the construction of surfaces from contour data. *EUROGRAPHICS '94*, vol. 13, n3, 1994, pp. 181–188.

[KL96] Klein (R.) et Lingas (A.). – A linear-time randomized algorithm for the bounded Voronoi diagram of a simple polygon. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, vol. 6, 1996, pp. 263–278.

[Kle88] Klein (R.). – Abstract Voronoi diagrams and their applications. *In : Computational Geometry and its Applications*, pp. 148–157. – Springer-Verlag, 1988.

[KWT87] Kass (M.), Whitkin (A.) et Terzopoulos (D.). – Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, vol. 1, 1987, pp. 321–331.

[LC87] Lorensen (W.) et Cline (H.). – Marching cubes: a high resolution 3d surface construction algorithm. *Comput. Graph.*, vol. 21, n4, 1987, pp. 163–170.

[LCM98] Lajaunie (Ch.), Courrioux (G.) et Manuel (L.). – Foliations fields and 3d cartography in geology : Principles of a method based on potential interpolation. *Math. Geology*, 1998.

[Led98] Ledru (P.). – The geofrance 3d program, the geological and geophysical 3d imaging of france. *Tectonophysics*, 1998.

[Mal89] Mallet (J.L.). – Discrete smooth interpolation. *ACM Transactions on Graphics*, vol. 8(2), 1989, pp. 121–144.

[Mar97] Mariez (Olivier). – *Modélisation de solides: vers une synthèse des modèles à base de surface.* – France, Thèse de doctorat en informatique, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1997.

[Mel96a] Melkemi (M.). – *A-shapes of a finite point set.* – Technical Report nLIGIM-TR.02.96, LIGIM Université Claude Bernard Lyon, 1996.

[Mel96b] Melkemi (M.). – *Computing the shape of a planar point set.* – Technical Report n LIGIM-TR.01.96, LIGIM Université Claude Bernard Lyon, 1996. Submitted to Pattern Recognition Journal.

[Mel97] Melkemi (M.). – A-shapes and their derivatives. *In : Proc. 13th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pp. 367–369.

[Men96] Menon (Jai). – An introduction to implicit techniques. *SIGGRAPH Course Notes on Implicit Surfaces for Geometric Modeling and Computer Graphics*, 1996.

[MM98] Mencl (Robert) et Muller (Heinrich). – Interpolation and approximation of surfaces from three-dimensional scattered data points. *State of The Art Report, EUROGRAPHIC'S 98*, 1998.

[MSS91] Meyers (D.), Skinner (S.) et Sloan (K.). – Surfaces from contours: the correspondence and branching problem. *In : Proc. Graphics Interface '91*, pp. 246–254.

[MSS92] Meyers (David), Skinner (Shelley) et Sloan (Kenneth). – Surfaces from contours. *ACM Trans. Graph.*, vol. 11, n3, juillet 1992, pp. 228–258.

[MT97] Moccozet (L.) et Thalmann (N. Magnenat). – Dirichlet free-form deformation and their application to hand simulation. *Computer Animation'97 (CA'97)*, 1997.

[NB98] Nullans (S.) et Boissonnat (J.D.). – Reconstruction of 3d colored data. *Eurographics 1998 - Short Presentation*, 1998, pp. 3.6.1 – 3.6.2.

[NCG+98] Nullans (S.), Courrioux (G.), Guillen (A.), Boissonnat (J.-D.), Repusseau (P.), Renaud (X.) et Thibaut. (M.). – 3d volumic modeling of cadomian terranes (northern brittany, france): an automatic method using voronoi diagrams. *Tectonophysics*, 1998.

[Nul95] Nullans (S.). – *Reconstruction de coupes incomplètes.* – Strasbourg, Rapport de DEA, université Louis Pasteur, 1995.

[OPC96] Oliva (J.M.), Perrin (M.) et Coquillard (S.). – 3d reconstruction of complex polyhedral shapes from contours using a simplified generalized voronoi diagram. *Eurographics*, vol. 15(3), 1996, pp. 397–408.

[PBT98] Peyre (H.), Bechmann (D.) et Tellier (P.). – Etude des surfaces implicites. *Rapport CNRS - LSIIT - UPRES-A 7005*, Juillet 1998.

[Per98] Perrin (M.). – Geological consistency : an opportunity for sale assembly and quick model exploration. *3D Modeling of Natural Objects: A Challenge for 2000's - ENSG, NANCY*, june 1998.

[PKR+92] Pflug (R.), Klein (H.), Ramshorn (Ch.), Genter (M.) et Stärk (A.). – 3d visualization of geologic structures and processes. *Computer Graphics in Geology, Lect. Notes in Geol. 41, Springer*, 1992, pp. 28–39.

[PS95] Perrin (M.) et Stab (O.). – Modélisation 3d en géologie : Quelques pistes de réflexion - rapport interne cgi - cges. 1995.

[Rup93] Ruppert (J.). – A new and simple algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *In : Proc. 4th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, pp. 83–92.

[SES93] Sequeira (Jean), Ebel (René) et Schmitt (Francis). – Three-dimensional modeling of tree-like anatomical structures. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, vol. 17, 4/5, 1993.

[SH75] Shamos (M. I.) et Hoey (D.). – Closest-point problems. *In : Proc. 16th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.*, pp. 151–162.

[She96] Shewchuk (J. R.). – Triangle: engineering a 2d quality mesh generator and Delaunay triangulator. *In : First Workshop on Applied Computational Geometry.* Association for Computing Machinery.

[Sib81] Sibson (R.). – A brief description of natural neighbour interpolation. *In : Interpreting Multivariate Data*, éd. par Barnet (Vic), pp. 21–36. – Chichester, Wiley, 1981.

[SK91] Shinagawa (Yoshihisa) et Kunii (Tosiyasu L.). – The homotopy model: a generalized model for smooth surface generation from cross sectional data. *Visual Computer*, vol. 7, 1991, pp. 72–86.

[SPOK95] Savchenko (V.V.), Pasko (A.A.), Okunev (O.G.) et Kunii (T.L.). – Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours. *Computer Graphics Forum*, vol. 14, n4, 1995, pp. 181–188.

[Sug93] Sugihara (K.). – Approximation of generalized Voronoi diagrams by ordinary Voronoi diagrams. *CVGIP: Graph. Models Image Process.*, vol. 55, 1993, pp. 522–531.

[TEG+98] Truffert (C.), Egal (E.), Goff (E. Le), Courrioux (G.) et Guennoc (P.). – Determining standard geometry through 2.5d gravimetric modelling : the cadomian active margin of northern brittany. *Tectonophysics*, 1998.

[TKW87] Terzopoulos (D.), Kass (M.) et Whitkin (A.). – Symmetry-seeking models and 3d object reconstruction. *International Journal of Computer Vision*, vol. 1, 1987.

[Tur92] Turk (G.). – Re-tiling polygonal surfaces. *Comput. Graphics*, vol. 26, n2, 1992, pp. 55–64. – Proc. SIGGRAPH '92.

[Vel94] Veltkamp (R. C.). – *Closed Object Boundaries from Scattered Points.* – Springer-Verlag, 1994, *Lecture Notes Comput. Sci.*, volume 885.

[Yap87] Yap (C. K.). – An $O(n \log n)$ algorithm for the Voronoi diagram of a set of simple curve segments. *Discrete Comput. Geom.*, vol. 2, 1987, pp. 365–393.