



De la simplification et la résolution du modèle géométrique direct des robots parallèles

Luc Tancredi

► To cite this version:

Luc Tancredi. De la simplification et la résolution du modèle géométrique direct des robots parallèles. Géométrie algorithmique [cs.CG]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995. Français. NNT: . tel-00832501

HAL Id: tel-00832501

<https://theses.hal.science/tel-00832501>

Submitted on 10 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

THÈSE

préparée à l'INRIA Sophia Antipolis

présentée par

Luc TANCREDI

pour l'obtention du titre de Docteur en Sciences de

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE
PARIS

Spécialité : Informatique temps réel, Robotique et Automatique

DE LA SIMPLIFICATION ET LA RÉOLUTION DU MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT DES ROBOTS PARALLÈLES

Soutenue le 20 décembre 1995 devant le jury composé de :

Président :	M. Claude	LAURGEAU
-------------	-----------	----------

Rapporteurs :	M. Étienne	DOMBRE
	M. Clément	GOSSELIN

Examineurs :	M. Marc	RENAUD
	M. Pascal	RIDEAU
	M. Philippe	WENGER

	M. Jean-Pierre	MERLET
--	----------------	--------

A ma famille.

A tous ceux qui m'ont porté... et supporté.

Il n'existe aucun moyen de vérifier quelle décision est la bonne car il n'existe aucune comparaison. Tout est vécu tout de suite pour la première fois et sans préparation.

Milan KUNDERA – L'insoutenable légèreté de l'être.

Remerciements

Le professeur Claude LAURGEAU de l'École des Mines de Paris a accepté avec gentillesse la présidence de ce jury ; par ses questions il m'a fait prendre plus de recul sur ma thèse, qu'il en soit également remercié.

Je remercie Étienne DOMBRE, Directeur de Recherche CNRS au LIRMM, à qui incombe la tâche délicate de faire un rapport sur ces travaux, pour ses remarques constructives.

Le professeur Clément GOSSELIN de l'université Laval à Québec a accepté volontiers d'être rapporteur de mes travaux de recherche. J'ai pu apprécier son accueil et celui de son équipe, ainsi que sa disponibilité à l'égard de mes problèmes lors d'un stage en Novembre 1993 dans son département. Pour tout cela je le remercie.

Je remercie Marc RENAUD, professeur à l'INSA de Toulouse, Pascal RIDEAU, ingénieur à l'Aérospatiale Cannes, et Philippe WENGER, Chargé de Recherche à l'École Centrale de Nantes, d'avoir accepté de juger ces travaux.

Je remercie Jean-Pierre MERLET, Directeur de Recherche à l'INRIA Sophia-Antipolis, de m'avoir ouvert les portes de la robotique parallèle, de m'avoir permis de faire cette thèse et de la liberté qu'il m'a accordée.

Je remercie Jean-Daniel BOISSONNAT, Directeur de Recherche à l'INRIA Sophia-Antipolis, de m'avoir accueilli au sein de son équipe et d'avoir financé depuis novembre 1992, avec l'INRIA, ces trois années de recherche dans le projet PRISME de l'unité de Sophia-Antipolis.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monique TEILLAUD, Chargée de Recherche à l'INRIA de Sophia-Antipolis, pour le temps et l'énergie qu'elle a consacrés à mes travaux et sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est.

Olivier DEVILLERS, Ioannis EMIRIS et Bernard MOURRAIN, tous trois Chargés de Recherche à l'INRIA Sophia-Antipolis, ont toujours su trouver le temps et la patience de répondre à mes très nombreuses questions, je les en remercie vivement.

Je remercie Bernhard et Philipp GEIGER de rendre cette thèse un peu moins stricte grâce à leur sacré coup de crayon mis en œuvre sur les entêtes de chapitres.

J'ai beaucoup apprécié la qualité humaine, technique, scientifique des personnes et des moyens du projet PRISME et du centre de Sophia-Antipolis.

Je remercie le GDR Médecis qui m'a fourni gracieusement un accès aux machines dédiées aux lourds calculs, dans le site du groupe GAGE à l'École

Polytechnique.

Je remercie Fabrice ROUILLIER, de l'université de Rennes I, avec qui j'ai eu des échanges fructueux.

J'ai une pensée toute particulière pour Nicolas le pionnier, mes amis d'ici et de plus loin ;

pour ceux qui se lancent maintenant dans cette drôle d'aventure qu'est la thèse, ceux qui continuent ;

pour ceux, dans les associations et ailleurs, qui prennent de leur temps pour faire avancer les choses.

Tous ne sont pas cités, qu'ils m'en excusent : je ne les oublie pas pour autant.

Que tous soient remerciés ici à hauteur de leur soutien.

Table des matières

Liste des figures	v
Liste des tables	xi
Notations	xiii
Introduction	1
I Généralités	5
I.1 Architecture des robots parallèles	6
I.2 Terminologie et abus de langage	8
I.3 Problèmes des robots parallèles	10
I.3.1 Le modèle géométrique	10
I.3.1.1 Le modèle géométrique inverse des robots pa- rallèles	12
I.3.1.2 Le modèle géométrique direct des robots pa- rallèles	12
I.4 Le modèle géométrique direct	12
I.4.1 Intérêt	12
I.4.2 Méthodes numériques	13
I.4.3 Résultats antérieurs	14
I.4.4 Articulations et architectures	15
I.4.5 Mécanisme équivalent	18
I.5 Objectif	18
II Problème plan	19
II.1 Sans mesure additionnelle	20
II.2 Une mesure d'angle	22
II.2.1 Résolution géométrique	22
II.2.1.1 Position de B_2 quand B_1 et B_3 sont connus .	23
II.2.1.2 Une position double pour B_3	24

II.2.1.3	Deux positions pour B_3	24
II.2.1.4	Synthèse	25
II.2.1.5	Conclusion	26
II.2.2	Résolution par élimination	26
II.3	Deux mesures d'angle	29
II.4	Trois mesures d'angle	30
II.5	Conséquences pour la plate-forme de STEWART	30
II.6	Conclusion	32
III	Approche capteurs additionnels	35
III.1	Types de capteurs 3D	36
III.2	L'ajout de capteurs	37
III.2.1	Capteurs linéaires	38
III.2.1.1	Caractéristiques	38
III.2.1.2	Travaux antérieurs	38
III.2.2	Capteurs angulaires	39
III.2.2.1	Caractéristiques	39
III.2.2.2	Travaux antérieurs	40
III.2.3	Mesure des capteurs additionnels	42
III.3	Résolution avec 6 capteurs: cas 2^3	42
III.3.1	Retrouver un point de la plate-forme	43
III.3.2	Retrouver la position de la plate-forme	44
III.3.3	Retrouver l'orientation de la plate-forme	45
III.3.4	Temps de calcul	46
III.3.5	Conclusion	46
III.4	Résolution avec 4 capteurs: cas 2^2	47
III.4.1	Projection sur un plan	47
III.4.2	Nombre de solutions	48
III.4.3	Temps de calcul	49
III.4.4	Conclusion	49
III.5	Influence des erreurs de mesure	50
III.5.1	Sensibilité: Cas 2^2	52
III.5.2	Sensibilité: Cas 2^3	53
III.6	Conclusion	62
IV	Raisonnement géométrique	63
IV.1	Raisonnement naturel	64
IV.1.1	Avec 6 capteurs, cas 2^3	64
IV.1.2	Avec 4 capteurs, cas 2^2	64
IV.1.2.1	Nombre de solutions	64

IV.1.2.2	Application à un robot à plate-forme trian-	
	gulaire	66
IV.1.3	Avec 5 capteurs, cas $2^2 - 1^1$	67
IV.1.4	Avec 3 capteurs, cas $2^1 - 1^1$	68
IV.1.5	Avec 2 capteurs, cas 2^1	68
IV.2	Géométrie synthétique	69
IV.2.1	Homogénéisation simple	70
IV.2.1.1	Transformations projectives	70
IV.2.1.2	Dans le plan	72
IV.2.1.3	Dans l'espace	74
IV.2.1.4	Généralisation à d'autres courbes et surfaces .	74
IV.2.1.5	Applications	75
IV.2.2	Acabit d'un mécanisme articulé	77
IV.2.3	Surface décrite par un segment	79
IV.2.4	A propos du RSSR et de ses dérivés	80
IV.2.4.1	Analogies avec des robots parallèles particuliers	82
IV.2.4.2	Analogies avec des capteurs supplémentaires .	88
IV.2.5	Autres mécanismes	88
IV.2.6	Conclusion	90
V	Méthode géométrique et algébrique	91
V.1	Méthode	93
V.1.1	Formulation algébrique du problème	93
V.2	Trois articulations connues: cas 2^3	95
V.3	Deux articulations connues: cas 2^2	95
V.3.1	Choix des repères	95
V.3.2	Résolution des équations	97
V.3.3	Ajout d'un cinquième capteur angulaire: cas $2^2 - 1^1$. .	99
V.3.4	Ajout d'un sixième capteur angulaire: cas $2^2 - 1^2$. . .	100
V.4	Une articulation connue: cas 2^1	101
V.4.1	Plate-forme générale	101
V.4.2	Plate-forme plane	101
V.4.3	Ajout d'un troisième capteur: cas $2^1 - 1^1$	102
V.4.3.1	Plate-forme générale	102
V.4.3.2	Plate-forme plane	103
V.4.4	Ajout de plus de capteurs: cas $2^1 - 1^n$	103
V.5	Applications	103
V.5.1	Deux articulations connues: cas 2^2	103
V.5.2	Une articulation connue: cas 2^1	106
V.6	Conclusion	107

VI Méthodes algébriques	109
VI.1 Multi-homogénéisation et quaternions	110
VI.1.1 Multi-homogénéisation	110
VI.1.1.1 Systèmes multi-homogènes	111
VI.1.1.2 Nombre de Bézout	112
VI.1.2 Résolution avec les quaternions	113
VI.1.2.1 Trois capteurs additionnels ou plus	113
VI.1.2.2 Un capteur additionnel	114
VI.1.2.3 Deux capteurs additionnels	115
VI.1.2.4 Conclusion	115
VI.2 Volume mixte - borne BKK	115
VI.2.1 Les concepts	116
VI.2.2 Les applications	118
VI.3 Les bases standard (ou de GRÖBNER)	119
VI.3.1 Réduction en une dimension	120
VI.3.2 Ordres sur les monômes	120
VI.3.3 Les bases de Gröbner et leurs caractéristiques	121
VI.3.3.1 Leur définition	121
VI.3.3.2 Leur construction	121
VI.3.3.3 Propriétés	122
VI.3.4 Décompte de solutions	123
VI.3.5 Applications	124
VI.4 Évaluation dynamique	125
VI.5 Homotopie et continuation	127
VI.6 Décompte de racines réelles	129
VI.6.1 Méthodes de résolution	129
VI.6.2 24 solutions réelles	129
VI.7 Conclusion	135
VII Élimination et résultants	137
VII.1 Résultants	138
VII.1.1 Résultant de Sylvester	139
VII.1.2 Résultant homogène	139
VII.1.3 Résultant creux	140
VII.1.4 Propriétés	140
VII.2 Élimination dialytique	141
VII.2.1 Algorithme	141
VII.2.2 Exemple d'exécution	142
VII.2.3 Construction d'une matrice carrée	144
VII.3 Méthode symbolique	146
VII.3.1 Étape d'élimination	146

VII.3.1.1 Choix d'une variable cachée	146
VII.3.1.2 Construction d'une matrice carrée	148
VII.3.1.3 Borne du déterminant	148
VII.3.1.4 Amélioration de la borne	149
VII.3.2 Étape d'extension	151
VII.3.2.1 Problème	151
VII.3.2.2 Paramétrisation algébrique du problème	153
VII.3.2.3 Degré de $ \Delta(y) $ et nombre de postures solutions	158
VII.3.2.4 Conclusion	169
VII.4 Applications	169
VII.4.1 Mécanisme plan	169
VII.4.1.1 Plateau général	169
VII.4.1.2 Le robot rectiligne	171
VII.4.2 Robot parallèle spatial	172
VII.4.2.1 Discussion sur les représentations	172
VII.4.2.2 Application numérique	172
VII.4.3 Synthèse des résultats	175
VII.4.3.1 Plate-forme plane	175
VII.4.3.2 Plate-forme quelconque	176
VII.4.4 Difficultés	176
VII.5 Conclusion	178
Conclusion	179
Bibliographie	183
A Illustration de la circularité	193
A.1 Intersection d'une cubique et d'une quartique	193
A.2 Une surface: le tore	194
B Paramétrisation et élimination	195
B.1 Plateau général	195
B.2 Le robot rectiligne	196
B.2.1 Base quelconque	196
B.2.2 Base linéaire	197
B.2.3 Base linéaire et spéciale	197
B.2.3.1 Premier cas	197
B.2.3.2 Deuxième cas	197
B.2.4 Deux articulations confondues	198
Index	199

Table des figures

I.1	<i>Robot parallèle à actionneurs linéaires</i>	7
I.2	<i>Plate-forme de Stewart</i>	9
I.3	<i>Robot hybride LX4</i>	9
I.4	<i>Variables articulaires sur un robot sériel et sur un robot parallèle</i>	11
I.5	<i>Relation MGD/MGI</i>	11
I.6	<i>Exemple de solution multiple pour le modèle géométrique direct : deux solutions en miroir par rapport à une base plane.</i> .	13
I.7	<i>Trois types élémentaires de chaînes cinématiques possibles avec des articulations R, P et S</i>	16
I.8	<i>Architecture de robot parallèle à chaînes PRRS (ex. le poignet actif)</i>	17
I.9	<i>Architecture de robot parallèle à chaîne RRRS (ex. le robot Hera)</i>	17
II.1	<i>Notations pour un robot plan</i>	20
II.2	<i>Robot plan dont les articulations du plateau sont alignées, ainsi que celles de la base.</i>	21
II.3	<i>Localisation et mesure d'un capteur angulaire sur un robot plan.</i>	22
II.4	<i>Mécanisme plan avec un capteur additionnel : condition pour deux solutions</i>	25
II.5	<i>Angle $\widehat{B_2B_1B_3}$ indéfini (articulation double), mais capteur bien placé : deux solutions possibles quand A_1, B_2 et A_3 sont alignés.</i>	26
II.6	<i>Paramètres du robot plan avec 1 capteur</i>	27
II.7	<i>Installation et mesure de deux capteurs angulaires sur un robot plan</i>	29
II.8	<i>Installation et mesure de trois capteurs angulaires sur un robot plan</i>	30
II.9	<i>Mécanisme équivalent à la plate-forme de Stewart</i>	31
II.10	<i>Mécanisme équivalent de la plate-forme de Stewart après projection dans un plan ; placement d'un capteur</i>	31

III.1	Structure parallèle à pantographes et placement des capteurs [ITF85]	40
III.2	Mesures des capteurs angulaires situés sur le joint de Cardan.	43
III.3	Positions de B_3 et B_4 quand deux points de la plate-forme sont connus	47
III.4	Quatre capteurs additionnels suffisent pour déterminer la posture. Projection dans un plan perpendiculaire à (B_1B_2) .	48
III.5	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^2 : influence de α_1	54
III.6	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^2 : influence de α_2	54
III.7	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^2 : influence de β_1	55
III.8	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^2 : influence de β_2	55
III.9	Main gauche : norme du vecteur d'erreur de position, cas 2^2	56
III.10	Main gauche : norme du vecteur d'erreur de position, cas 2^3	56
III.11	Norme de l'erreur le long de l'axe x pour $y = -1, z = 55.0,$ $\psi = 0, \theta = 0, \phi = 0$.	57
III.12	Norme de l'erreur le long de l'axe x pour $y = 0, z = 55.0,$ $\psi = 0, \theta = 0, \phi = 0$.	57
III.13	Norme de l'erreur le long de l'axe x pour $y = 1, z = 55.0,$ $\psi = 0, \theta = 0, \phi = 0$.	58
III.14	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^3 : influence de α_1	59
III.15	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^3 : influence de α_2	59
III.16	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^3 : influence de α_3	60
III.17	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^3 : influence de β_1	60
III.18	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^3 : influence de β_2	61
III.19	Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2^3 : influence de β_3	61
IV.1	Cas 2^2 : projection dans le plan perpendiculaire à l'axe (B_1B_2)	65
IV.2	Robot à plate-forme triangulaire.	67
IV.3	Positions de B_3 dans le cas de 5 capteurs supplémentaires	67
IV.4	Structure parallèle 6-4 d' Innocenti et Parenti-Castelli	69
IV.5	Mécanisme à 4 barres et courbe du coupleur	76

IV.6 Mécanisme RSSR avec coupleur en B_3 .	81
IV.7 Mécanisme RSSR dont les axes des articulations rotoïdes sont confondus	82
IV.8 Mécanisme équivalent du RSSR	83
IV.9 Plate-forme avec 3 articulations doubles dont deux se déplacent sur des cercles parallèles : plate-forme de Stewart généralisée	85
IV.10 Plate-forme de Stewart généralisée à axes confondus	85
IV.11 Manipulateur avec une articulation triple sur la plate-forme	86
IV.12 Manipulateur à trois articulations doubles sur la plate-forme et une articulation triple sur la base.	87
IV.13 Robot sphérique à articulation triple virtuelle [GG95].	87
IV.14 Mécanisme à trois capteurs additionnels, une articulation double : considéré comme deux RSSR	89
IV.15 Mécanisme à trois capteurs additionnels, une articulation double : considéré comme un coupleur (M)	89
V.1 Notations	92
V.2 Définition des repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ respectant la condition (V.9)	96
V.3 Interprétation géométrique de la condition (V.15)	98
V.4 Architecture (ZHANG-SONG) avec deux solutions en général quand deux articulations de la plate-forme sont connues.	104
V.5 Architecture (base et plate-forme planes) avec une solution en général quand deux articulations de la plate-forme sont connues.	105
VI.1 Polytopes de Newton des équations des systèmes de l'exemple 4	117
VI.2 Somme de Minkowski pour chaque système de l'exemple 4	118
VII.1 Robot plan rectiligne	171

Liste des tableaux

I.1	<i>Comparaison des architectures série et parallèle.</i>	8
I.2	<i>Caractéristiques principales de manipulateurs sériels et parallèles.</i>	10
III.1	<i>Nombre d'opérations pour retrouver la posture à partir de 3 points</i>	44
III.2	<i>Cas 2^3 : temps de calcul pour retrouver position et orientation (en ms).</i>	45
III.3	<i>Cas 2^2 : temps de calcul pour retrouver position et orientation (en ms).</i>	47
III.4	<i>Main gauche : coordonnées des articulations.</i>	49
VI.1	<i>Robots à 24 postures réelles : architecture et coordonnées articulaires. A gauche robot 5 – 5 d'INNOCENTI, à droite robot 6 – 6.</i>	128
VI.2	<i>Les 24 postures réelles d'un robot parallèle d'architecture générale.</i>	133
VII.1	<i>Construction des équations pour le robot plan général.</i>	168
VII.2	<i>Construction des équations pour le robot plan à base et plateau rectilignes.</i>	169
VII.3	<i>Éliminer les équations linéaires diminue le nombre de monômes</i>	170
VII.4	<i>Bornes : représentation classique, plate-forme plane</i>	174
VII.5	<i>Bornes : représentation Lazard, plate-forme plane</i>	175
VII.6	<i>Temps de calcul pour l'évaluation du coefficient du terme de degré donné. Cas un capteur additionnel, plate-forme plane. (SS10 75 MHz)</i>	175
VII.7	<i>Bornes : représentation Lazard, plate-forme générale</i>	175
B.1	<i>Construction des équations pour le robot plan quelconque.</i>	193
B.2	<i>Construction des équations pour le robot dont les articulations sont alignées pour la base et pour le plateau.</i>	194

B.3	<i>Construction des équations pour le robot 2D à base spéciale et plateau linéaire.</i>	196
-----	---	-----

Notations

(AB)	Droite passant par les points A et B .
$[AB]$	Segment ayant pour extrémités les points A et B .
$\overrightarrow{AB}$	Demi-droite d'extrémité le point A et passant par B .
A_x, A_y, A_z	Désignent respectivement les première, deuxième et troisième coordonnées du point A .
$\overrightarrow{AB}$	Vecteur défini par les points A et B et orienté de A vers B .
$\ \overrightarrow{AB}\ $	Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$
$u \wedge v$	Produit vectoriel entre u et v .
$\widehat{AB}$	Pour deux plans donnés ayant une droite commune et passant l'un par A , l'autre par B . C'est l'angle entre ces plans.
$\mathcal{C}(C, R)$	Le cercle centré au point C et de rayon R .
$\mathcal{S}(C, R)$	La sphère centrée au point C et de rayon R .
$\mathcal{R}$	(O, X, Y, Z) Le repère de référence lié à la base.
$\mathcal{P}$	(C, x, y, z) Le repère mobile lié à la plate-forme.
A_i	Le centre de l'articulation sur la base pour le $i^{\text{ème}}$ segment.
a_i, b_i, c_i	Sont les coordonnées de A_i dans $\mathcal{R}$
B_i	Le centre de l'articulation sur la plate-forme pour le $i^{\text{ème}}$ segment.
p_i, q_i, r_i	Sont les coordonnées de B_i dans $\mathcal{P}$
ρ_i	La longueur du $i^{\text{ème}}$ segment entre A_i et B_i : variable articulaire.
P	Liaison à glissière prismatique.
R	Liaison rotoïde ou joint de cardan.
S	Liaison sphérique ou rotule.

$\Re(q)$	Est la partie réelle du quaternion q .
$q \star r$	Désigne le produit entre les quaternions q et r .

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$	Anneau des polynômes sur le corps $\mathbb{K}$.
$\langle f, g \rangle$	Idéal engendré par f et g .
$HT_{\prec}(f)$	Est le terme dominant de f relativement à la relation d'ordre $\prec$.

MGD	abréviation pour : modèle géométrique direct.
MGI	abréviation pour : modèle géométrique inverse.

$\text{card}(\mathbf{E})$	Est le cardinal de l'ensemble $\mathbf{E}$.
---------------------------	--

Introduction

Au cours de ce siècle, la première réalisation de structure de robot manipulateur est anthropomorphique, inspirée du bras humain : c'est un *robot sériel*. Par la suite, en 1947, la réalisation d'une architecture de robot manipulateur, fondamentalement différente, voit le jour dans une expérimentation pour tester des pneumatiques : c'est un *robot parallèle*, la plate-forme de GOUGH [Gou57].

Il y a encore quelques années, on imaginait un fort développement des robots parallèles dans leur utilisation en tant que manipulateurs industriels. Le temps s'est chargé de démentir cette idée et de montrer que d'autres applications étaient florissantes.

En effet, bien que STEWART [Ste65] ait proposé dès 1965 une application du robot parallèle en tant que plate-forme pour simulateur de vol, ce n'est que dernièrement que s'est produit l'essor vers la plate-forme de *simulation*. Pour celle-ci les domaines d'application sont très divers : de la simulation équestre pour l'École Nationale d'Équitation au cinéma dynamique de nombreux parcs d'attractions en passant par les simulations d'accostage de station orbitale et celles, classiques, de pilotage d'avions, de chars d'assaut, de navires et d'hélicoptères. Ces applications demandent des structures pouvant supporter et déplacer aisément de lourdes charges.

Leur utilisation est aussi le fait d'un autre domaine, que l'on pourrait qualifier de *positionnement*. Ceci nécessite une grande finesse dans le placement et l'orientation du manipulateur. Les manipulateurs parallèles servent à orienter très précisément des antennes paraboliques. Le synchrotron de l'ESRF¹ les utilise aussi afin d'orienter finement un miroir qui renvoie le faisceau de rayons X vers une chambre d'expérience. Au Québec,² dans le domaine de la vision active le but est d'orienter avec précision et rapidité une caméra.

Les débouchés industriels concernent essentiellement l'assemblage de précision, le suivi de contour, la dépose rapide ; mais elles n'ont pas encore abouti

1. *European Synchrotron Radiation Facility*, Grenoble

2. Département de Génie Mécanique, Université Laval, S^{te} Foy, QC, Canada

à une utilisation industrielle de masse.

Enfin, il existe un certain nombre d'applications originales comme l'utilisation en chirurgie d'un micro-robot, ou celle d'un mega-robot pour l'excavation minière conçu par le MEL.³ Citons aussi l'une des dernières en date, qui est la *Variax*, une machine outil à axe virtuel.

Un des problèmes fondamentaux pour les robots parallèles est la résolution du modèle géométrique direct. Il consiste à calculer la posture du robot connaissant un certain nombre de mesures. Ce problème est très complexe et admet plusieurs solutions. Actuellement, les méthodes numériques (par exemple celle de Newton) permettent de le résoudre; mais il n'y a pas de garantie sur la convergence, ni que l'algorithme mène à la bonne solution parmi toutes celles possibles et ce n'est pas très rapide. Les besoins actuels sont donc multiples :

- garantie de convergence des méthodes employées
- rapidité de calcul pour la commande en temps réel
- tri des solutions parmi l'ensemble des solutions admissibles s'il y en a plusieurs

Il manque aussi, des moyens de définir des architectures n'ayant qu'une solution unique.

L'objectif de cette thèse est de combler ces lacunes en proposant des méthodes permettant de simplifier puis de résoudre le modèle géométrique direct. La simplification consiste à utiliser des informations supplémentaires apportées par des capteurs. Nous nous sommes efforcés de faire une étude totalement symbolique afin de préserver aux résultats présentés, le caractère général et, autant que possible, indépendant de la géométrie du robot considéré. Quand cela est possible nous donnons les cas où la ou les solutions sont explicites, les conditions d'obtention d'une solution unique ou non et des bornes sur le nombre de solutions admissibles.

Pour commencer, le premier chapitre définit l'architecture robotique parallèle et introduit l'un des principaux problèmes qui lui sont inhérents: le modèle géométrique direct. Il décrit aussi les objectifs et les architectures auxquelles s'appliquent les résultats obtenus par la suite.

Le deuxième chapitre présente, pour un robot plan (mécanisme à trois degrés de liberté dont la plate-forme se déplace dans un plan) les concepts de simplification et de résolution pour le modèle géométrique direct. Ce chapitre

3. *Mechanical Engineering Laboratory*, Tsukuba, Japon

est une bonne entrée en matière pour le cas très complexe du robot spatial (robot à six degrés de liberté dont la plate-forme se déplace dans l'espace) qui sera étudié en détail dans tous les chapitres suivants. Certains résultats obtenus pour un robot plan sont directement utilisables pour un robot spatial particulier (la plate-forme de STEWART)

Le troisième chapitre détaille l'approche consistant à ajouter des capteurs pour simplifier le modèle géométrique direct. Quelques cas où les solutions sont alors obtenues sous forme explicite sont présentés. Cette formulation permet, outre un temps de calcul rapide, d'étudier l'influence des erreurs de mesures sur la qualité de la solution obtenue.

Le quatrième chapitre utilise deux approches géométriques pour la résolution. La première est applicable lorsque la position d'au moins un point de la plate-forme est connue ; des bornes sur le nombre de solutions sont obtenues, ainsi que leurs conditions d'obtention. La seconde, qualifiée de géométrie synthétique, n'a pas cette contrainte et apporte des résultats aussi bien pour des robots équipés de capteurs additionnels que pour d'autres non équipés.

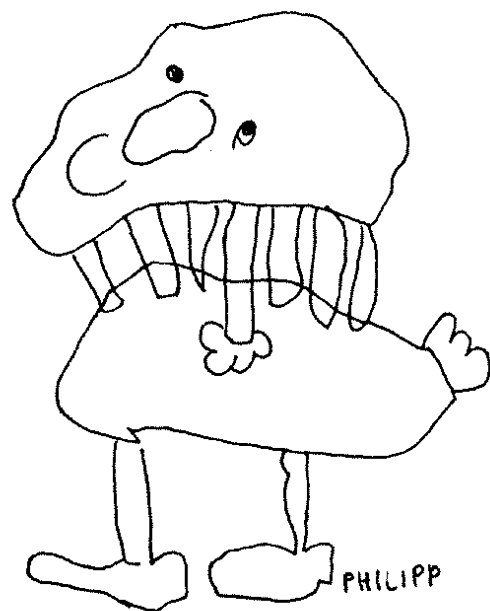
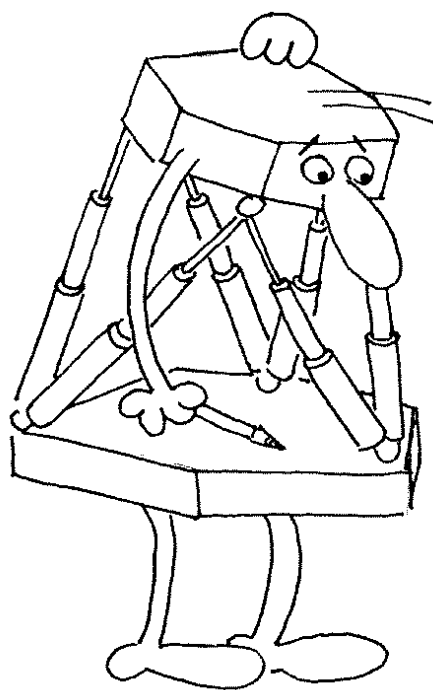
Le cinquième chapitre considère qu'au moins un point de la plate-forme est connu et retrouve de manière algébrique les conditions d'obtention des bornes sur le nombre de solutions du modèle géométrique direct.

Le sixième chapitre, quant à lui, introduit des méthodes et des outils algébriques puissants, pas toujours très répandus en robotique, pouvant mener à des résultats intéressants. En particulier, deux des méthodes décrites ont permis de montrer la borne effective sur le nombre de solutions au modèle géométrique direct d'un robot parallèle quelconque. De plus, le premier robot parallèle tout à fait général ayant 24 postures distinctes et réelles y est présenté.

Le septième et dernier chapitre étudie, dans le cadre des résultants, la méthode d'élimination dialytique, afin de lui donner un prolongement théorique par une adaptation symbolique permettant de résoudre de manière générale le problème. Des bornes significatives sont obtenues dans le cas d'un robot à plate-forme plane pour un placement des capteurs un par un sur les segments du manipulateur. Un théorème y est prouvé, indiquant que le nombre de postures du manipulateur est borné par le degré du déterminant d'une matrice de polynômes, spécifique, construite à partir des équations du modèle géométrique direct.

Chapitre I

Généralités





es robots manipulateurs forment une branche spécifique de la robotique. Ils sont composés de deux corps, dont un fixe, reliés entre eux par une chaîne cinématique équipée d'actionneurs. Leur fonction est de déplacer ou modifier des objets. Ces robots manipulateurs se subdivisent en deux classes : les robots sériels et les robots parallèles.

I.1 Architecture des robots parallèles

Les robots manipulateurs les plus répandus à l'heure actuelle sont ceux que l'on appelle les *robots sériels*. Par exemple ceux que l'on rencontre fréquemment dans l'industrie automobile et qui servent à peindre ou souder les châssis. Leur allure générale est assez voisine d'un bras humain. Le terme *sériel* vient du fait que tous les segments dont ils sont composés, sont reliés successivement les uns aux autres et forment ainsi une *chaîne cinématique ouverte* de leur socle jusqu'à l'organe terminal (ou effecteur). Ces segments sont motorisés et articulés entre eux deux à deux par une liaison à un degré de liberté. Les notions liées aux chaînes cinématiques et leur mobilité sont détaillées par GOSSELIN [Gos88] et CHARENTUS [Cha90] ; cette dernière référence fournit aussi des tables complètes des différents types d'articulations.

L'architecture sérielle présente des caractéristiques fondamentales. Sa précision de positionnement est très liée à la qualité de sa construction. Ainsi, un défaut par rapport au cahier des charges, même léger, dans l'orientation des axes du manipulateur entraîne des erreurs considérables et une dégradation importante des performances. En outre, chaque segment supporte le poids de la charge, mais aussi celui des segments suivants. Ce poids allié à l'effet de bras de levier engendre une flexion aggravant les erreurs de mesure des capteurs internes. La rigidité des architectures sérielles est plutôt faible : toute tentative pour l'augmenter les alourdit. Le poids transportable est très faible en regard du poids du manipulateur, entre 3 et 12% pour des manipulateurs industriels courants (2.85% pour le robot AID). Le grand avantage de cette structure est son important espace de travail.

Par opposition à l'architecture sérielle nous parlerons d'*architecture parallèle* (par exemple figure I.1), lorsque plusieurs *chaînes cinématiques élémentaires* (s chaînes) sont à la fois au contact de la base et de l'effecteur. Chaque chaîne cinématique élémentaire est indépendante des autres et ne relie pas plus de deux corps entre eux. L'architecture parallèle constitue ainsi une *chaîne cinématique fermée*. Un groupe d'articulations $A_i, (i = 1, \dots, s)$ est situé sur la base fixe. Un autre groupe $B_i, (i = 1, \dots, s)$ est situé sur la plate-forme qui est mobile par rapport au repère de référence lié à la

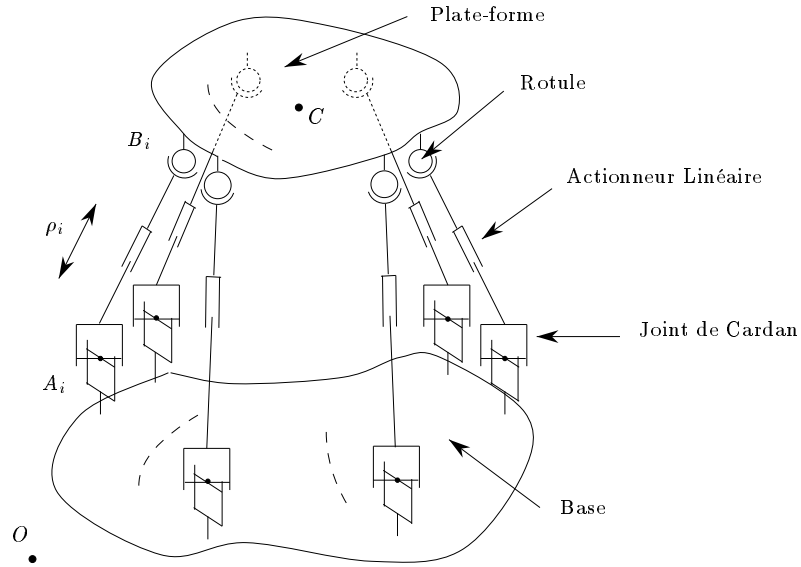


FIG. I.1 – Robot parallèle à actionneurs linéaires

base. Un couple d'articulations (A_i, B_i) , $(i = 1, \dots, s)$ est relié par une chaîne cinématique élémentaire équipée d'un seul moteur permettant de déplacer l'articulation correspondante de la plate-forme. Il faut bien remarquer que ce mouvement ne permet pas de découpler la position et l'orientation de l'organe terminal au contraire des robots sériels à poignet découplé.

Un manipulateur est *pleinement parallèle* s'il y a autant de chaînes que de degrés de liberté pour l'organe terminal. Un manipulateur n'est pas forcément pleinement parallèle [Pie91], un indice permet de mesurer le *degré de parallélisme* [Gos88]. Par la suite nous ne considérerons que les manipulateurs pleinement parallèles.

Pour un robot parallèle les caractéristiques sont pratiquement opposées à celles des robots sériels (voir la table (I.1)). Le rapport charge utile/poids est **inverse** (600/35 pour la *main gauche* INRIA) ce qui provient du fait que la charge est répartie sur chacun des actionneurs. La précision sera aussi plus intéressante que celle des manipulateurs sériels car l'effet de bras de levier et les flexions seront moins importants. Cette structure est moins sensible à la qualité de la construction. D'un autre côté, l'espace accessible par l'effecteur est plus réduit [Mer90].

Parmi les applications de ce type de structure, on trouve les simulateurs de vol (dont la plate-forme de STEWART [Ste65] qui est un cas particulier de robot parallèle, voir figure I.2), chirurgie de l'oeil [G⁺93], orientation de caméra en vision active [GG95], cinéma dynamique, positionneur dans un

Robot sériel

- = Succession de segments de la base vers l'effecteur
- = Chaîne cinématique ouverte
- + Important espace de travail
- Faible précision (amplification des erreurs)
- Faible charge transportable
- Faible rigidité

Robot parallèle

- = Tout segment au contact de la base et de l'effecteur
- = Chaîne cinématique fermée
- Espace de travail restreint
- + Grande précision
- + Lourde charge transportable (répartition des charges)
- + Très rigide (chaîne fermée)

TAB. I.1 – *Comparaison des architectures sérielle et parallèle.*

synchrotron [Com95], etc.

Dans le but de concilier les avantages de ces deux architectures, une nouvelle architecture a vu le jour : les robots *composés*. En général ils sont constitués d'un robot porteur, d'architecture sérielle, et d'une main, d'architecture parallèle [RP90]. Ces robots disposent ainsi d'une plus grande robustesse et d'une plus grande précision que le robot sériel et d'un plus grand espace de travail que le robot parallèle. Il existe aussi de tels robots constitués d'un assemblage en série de plusieurs robots parallèles : ils sont alors qualifiés de robots *hybrides*, le robot *LX4*¹ illustré sur la figure I.3 en est un exemple.

La table (I.2) donne les caractéristiques principales d'un manipulateur sériel (AID), de deux robots manipulateurs parallèles (la *main gauche* et l'*hexa*).

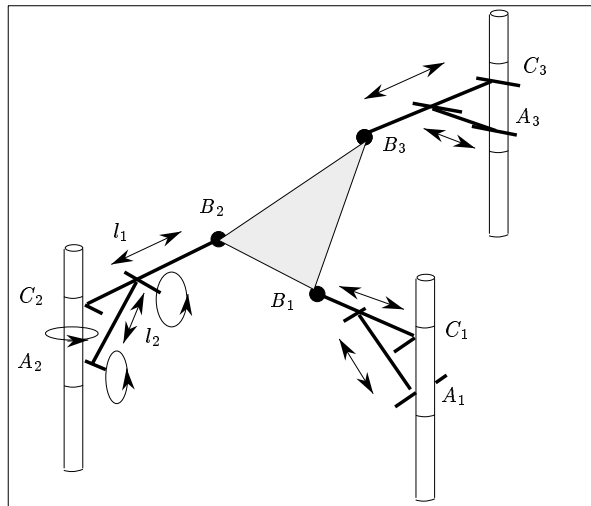
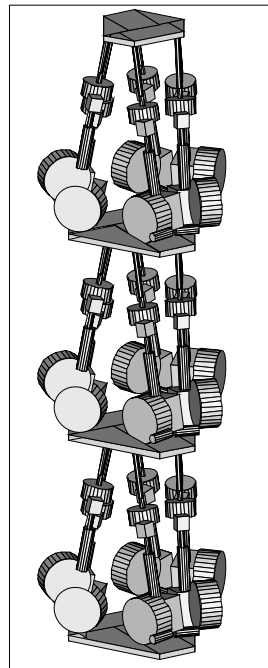
I.2 Terminologie et abus de langage

Dans ce mémoire, nous utiliserons régulièrement certains termes ou abréviations, parfois par abus de langage, pour parler d'objets ou de caractéristiques.

Robot parallèle ou manipulateur parallèle En fait c'est un robot manipulateur pleinement parallèle.

Plate-forme Il s'agit du corps mobile (effecteur) du robot parallèle. Ce terme ne fait aucune hypothèse sur la géométrie du corps.

1. © Société Logabex, Toulouse

FIG. I.2 – *Plate-forme de Stewart*FIG. I.3 – *Robot hybride LX4*

	AID	Main gauche	Hexa
Poids (<i>Kg</i>)	35	35	1, 3
Charge transportée (<i>Kg</i>)	1	600	1
Précision (<i>mm</i>)	0,5	0,01	0,01
Vitesse maximale (<i>cm s⁻¹</i>)	100	2	600
Translation maximale (<i>cm</i>)	± 100	± 8 (Ox,Oy) 2 (Oz)	± 50 (Ox,Oy) 50 (Oz)
Angle de rotation maximal (<i>degrés</i>)	± 90 (x,y) ± 180 (Oz)	± 10 (Ox,Oy) ± 80 (Oz)	45

TAB. I.2 – *Caractéristiques principales de manipulateurs sériels et parallèles.*

Base Il s'agit du corps immobile du robot, corps auquel le repère de référence est lié.

Segment C'est l'une des chaînes cinématiques élémentaires reliant la base à la plate-forme.

Segment actif C'est l'un des segments équipés d'un moteur, donc indispensable à la commande du robot.

Segment passif C'est un segment qui n'est pas équipé d'un moteur.

Architecture des manipulateurs Une notation couramment utilisée pour désigner un robot parallèle dont le nombre d'articulations sur la base est m et le nombre d'articulations sur la plate-forme est n , est la suivante : $m - n$. On note N le nombre de segments. On a $1 \leq m, n \leq N$.

I.3 Problèmes des robots parallèles

Parmi les divers problèmes classiques en robotique (configurations singulières, espace de travail, commande, etc.), il en est un d'intérêt particulier : l'établissement des modèles géométriques.

I.3.1 Le modèle géométrique

L'étude du modèle géométrique permet d'établir le lien entre les coordonnées articulaires et les coordonnées cartésiennes et angulaires de l'extrémité de l'effecteur. Les coordonnées articulaires sont les valeurs des variables de commande du robot sur lesquelles on peut influencer par l'intermédiaire des actionneurs (moteurs) afin de déplacer l'organe terminal (voir figure I.4). Le

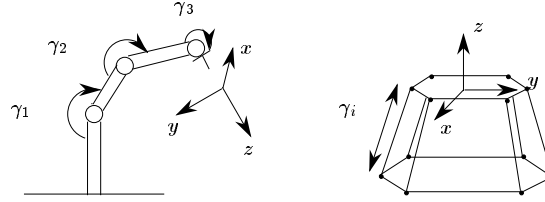


FIG. I.4 – La modification des variables articulaires γ_i permet de commander la position de l'organe terminal d'un robot sériel (à gauche) et d'un robot parallèle (à droite)

terme de *posture*² représentera à la fois la position (vecteur X à trois composantes) et l'orientation (vecteur Θ à trois composantes). Deux problèmes apparaissent dans l'étude des modèles géométriques :

- Modèle géométrique direct : trouver la posture à partir des variables articulaires
- Modèle géométrique inverse : trouver les variables articulaires à partir de la posture

Ces deux problèmes sont réciproques l'un de l'autre (voir figure I.5). Pour un manipulateur sériel, le problème le plus complexe des deux est le modèle inverse : le robot général constitué de six segments reliés en sériel par des articulations rotoïdes, robot dit 6R, a au plus 16 solutions [RR90]. Le modèle

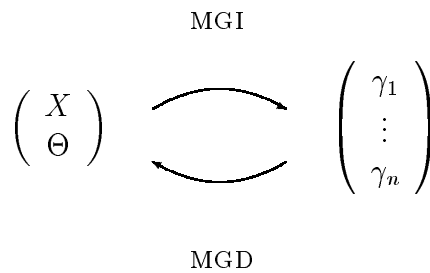


FIG. I.5 – Relation MGD/MGI

géométrique direct du robot sériel revient à calculer simplement une série

2. Les termes *pose* et *situation* sont aussi utilisés

de produit de matrices et d'additions de vecteurs. Pour un manipulateur parallèle, c'est au contraire le modèle géométrique direct le plus difficile.

I.3.1.1 Le modèle géométrique inverse des robots parallèles

Le calcul du modèle géométrique inverse (MGI) consiste à déterminer quelles sont les valeurs des variables articulaires lorsque sont données la position et l'orientation d'un repère lié à l'organe terminal. Dans le cas d'un robot parallèle à six degrés de liberté cette résolution est analogue, pour chaque chaîne, à celle du modèle géométrique inverse d'un robot sériel.

Si, d'une manière générale, pour un robot parallèle ce modèle est beaucoup plus simple à résoudre que sa réciproque, il convient de noter qu'il peut être malgré tout difficile. A l'origine de ce phénomène est la structure de la chaîne élémentaire reliant l'effecteur à la base. Si cette chaîne est composée de plusieurs branches, il peut y avoir plusieurs millions de solutions [Gos88, p. 134] (il est vrai que ce n'est pas un robot pleinement parallèle et qu'il n'entre donc plus dans le cadre de notre étude)! Dans la pratique courante des manipulateurs utilisés ce n'est heureusement pas le cas et on pourra admettre que la résolution de ce modèle ne pose pas de problème majeur.

I.3.1.2 Le modèle géométrique direct des robots parallèles

La solution de ce problème n'est pas unique en général, *i.e.* plusieurs modes de montage sont possibles pour le manipulateur lorsque la variable articulaire de chacun des segments est fixée. De plus, on ne sait pas exprimer sous forme analytique les coordonnées cartésiennes comme fonctions des coordonnées articulaires. De nombreux auteurs ont montré dernièrement qu'il ne peut y avoir plus de 40 solutions réelles à ce problème dans le cas d'un robot parallèle à plate-forme quelconque après avoir éliminé les solutions complexes à l'infini. Même dans des cas très simplifiés, comme le cas où la base est un plan (articulations coplanaires) et le mobile un triangle équilatéral (articulations confondues par paires), le nombre maximum de solutions réelles est encore de 16. Nous reviendrons sur les difficultés du modèle géométrique direct en section I.4.3.

I.4 Le modèle géométrique direct

C'est cet aspect du modèle géométrique que nous développerons.

I.4.1 Intérêt

En supposant que les valeurs des six variables articulaires sont données (configuration connue), le problème est de déterminer la posture du manipulateur. Il est clair que ce problème n'admet pas une solution unique (par exemple

voir la figure I.6).

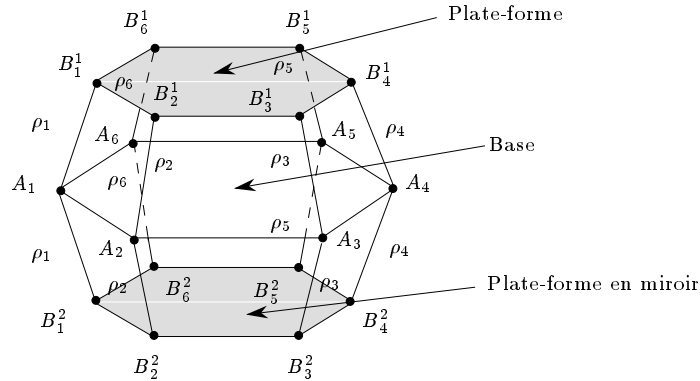


FIG. I.6 – Exemple de solution multiple pour le modèle géométrique direct : deux solutions en miroir par rapport à une base plane.

Il y a deux difficultés majeures dans la résolution du modèle géométrique direct. L'une est de déterminer l'ensemble des solutions admissibles. L'autre difficulté majeure est de découvrir quelle est la solution correspondant, parmi toutes les solutions possibles, à la posture courante pour un ensemble donné de valeurs articulaires. La formulation analytique des solutions, si elle existe, n'a pas encore été trouvée. Les diverses solutions admises par le robot sont autant de *modes d'assemblage*.

Parmi les applications, la relation du modèle géométrique direct permet au manipulateur d'assurer un suivi de trajectoire. Elle est très utile aussi, lorsque il n'existe aucune information sur la posture précédente et qu'il faut retrouver la posture courante en ne disposant que des coordonnées articulaires de la configuration courante. Dans le cadre d'une commande en vitesse, la matrice jacobienne inverse des vitesses est nécessaire mais n'est pas calculable à partir seulement des valeurs articulaires, cela nécessite aussi de savoir résoudre le modèle géométrique direct.

I.4.2 Méthodes numériques

Afin de résoudre ce problème, il devient nécessaire de calculer l'ensemble des solutions possibles puis d'en isoler la solution courante. Dans tous les cas, des méthodes numériques qui calculent toutes les solutions sont inutilisables en temps réel. En effet le temps de calcul est, de loin, trop élevé [Gug94]. En outre, sélectionner la solution effective (*i.e.* la posture actuelle de l'effecteur) dans l'ensemble de toutes les solutions possibles reste un problème difficile et ouvert.

Il reste les méthodes numériques qui permettent de trouver une seule solution. La méthode itérative de Newton trouve une solution sans aucune garantie que ce soit la plus proche de la solution effective, au contraire de la méthode des moindres carrés [RR85, IP91]. L'inconvénient principal de ces méthodes est qu'elles nécessitent une estimation initiale de la posture dont elles dépendent crucialement quant à la précision et à la rapidité de leur convergence.

I.4.3 Résultats antérieurs

Dans le cas d'un robot parallèle général, le nombre maximum de solutions dans l'espace des *réels* est inconnu. Mais une borne supérieure est 40 [Rag91, RV95, Laz93, Mou93b, Hus94]. Pour le moment seuls des exemples de manipulateurs avec au plus 24 solutions réelles ont pu être trouvés [IP93]. Pour un robot dont la base serait plane et la plate-forme triangulaire, il y en a encore 16 [CR89], et des exemples avec 16 solutions réelles ont été présentés ([CR89] d'après un exemple de MERLET, [IP90]). La plate-forme de STEWART, quant à elle, n'admet qu'au plus 12 solutions [LM94].

Les résultats concernant le nombre maximum de solutions que peut admettre un robot parallèle sont, somme toute, récents. C'est dû en partie au fait que les robots parallèles ont commencé à être étudiés tardivement en comparaison des robots sériels, mais aussi au fait que ce problème est très ardu. Il est remarquable que parmi les preuves, aucune ne donne encore de formulation explicite et exploitable des solutions. La première et la troisième preuves, [Rag91, Laz93] reposent à la fois sur un argument numérique et sur un argument théorique. Toutes deux montrent qu'il suffit de savoir compter le nombre de solutions d'un robot dont les paramètres géométriques sont tirés au hasard et ne vérifient aucune relation entre eux, pour que ce nombre soit le nombre maximum de solutions admissibles par n'importe quel robot. Pour compter les solutions d'un système générique la première utilise l'homotopie, la deuxième utilise les bases de Gröbner. La deuxième preuve [RV95] fait appel à une preuve mathématique très complexe basé sur la théorie des intersections. La quatrième preuve [Mou93b] repose sur un calcul de la dimension de la variété associée aux déplacements dans l'espace d'un solide lié par 6 attaches. La cinquième preuve [Hus94], la plus récente, est un algorithme dont certaines étapes intermédiaires peuvent contenir des coefficients énormes et est difficilement exploitable.

On ne compte plus les travaux qui, faute de pouvoir montrer quoi que ce soit pour tout robot, ont étudié des architectures spécialisées. Par spécialisation d'un robot est entendu le fait de lui donner certaines caractéristiques géométriques. Par exemple considérer une plate-forme plane, ou la présence

d'une articulation double ou même triple, etc. sont des spécialisations de l'architecture générale. L'objectif de ces spécialisations étant de pouvoir, sinon donner une formulation analytique des solutions, au moins déterminer une borne supérieure, meilleure que 40, sur le nombre de solutions. Citons quelques références parmi d'autres. Un manipulateur ayant une articulation triple sur la plate-forme admet 16 solutions [IP91]. Un robot dont 5 articulations sont alignées admet une solution analytique [ZS91]. Un manipulateur ayant deux articulation doubles sur sa plate-forme et une double sur sa base possède 24 solutions [IP93]. Au contraire de ces études sur des architectures spécialisées, une étude systématique de la borne sur le nombre de solutions des différentes classes de manipulateurs est faite dans [FL95].

I.4.4 Articulations et architectures

Nous ne nous intéressons qu'à des articulations courantes qui sont les articulations prismatique (R), rotoïde (P) et sphérique (S).³

Prismatique ou glissière - P C'est une articulation à un degré de liberté en translation.

Rotoïde ou pivot - R C'est une articulation à un degré de liberté en rotation.

Sphérique ou rotule - S C'est une articulation à trois degrés de liberté en rotation. On peut remarquer qu'elle est équivalente à trois articulations rotoïdes à axes concourants.

Il est alors possible de construire des robots parallèles dont les 6 chaînes élémentaires sont prises parmi les types RRPS, PRRS, R(RR)S (voir figure I.7). En général, les 6 chaînes d'un manipulateur seront du même type, mais rien n'empêche de mélanger les types.

Chaîne élémentaire RRPS Cette chaîne est probablement la plus répandue. Elle se retrouve par exemple dans le prototype *main gauche* de l'INRIA [Mer90]. L'articulation de la plate-forme peut se déplacer sur une sphère dont le centre et le rayon sont connus pour une configuration donnée. C'est la chaîne que nous utiliserons comme chaîne standard après avoir montré comment s'y ramener si l'on dispose d'autres types de chaînes.

Le modèle géométrique direct s'écrit alors sous la forme du système d'équations

$$\|A_i B_i\|^2 = \rho_i^2 \quad (\forall i \in \{1, \dots, 6\}) \quad (\text{I.1})$$

Ces équations sont quadratiques.

3. *prismatic, revolute and spherical joints*

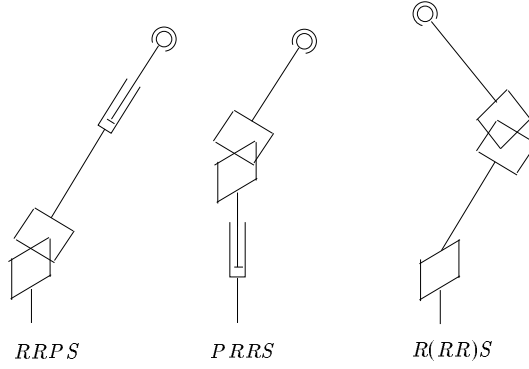


FIG. I.7 – Trois types élémentaires de chaînes cinématiques possibles avec des articulations R, P et S

Chaîne élémentaire PRRS Elle est utilisée dans le prototype *poignet actif* de l'INRIA [MG91, Mou93a] (voir figure I.8). Les articulations P relient M_i à A_i , les articulations RR (les joints de cardan) ont leur centre en les points A_i , enfin les articulations S ont leur centre en les points B_i . A partir de cette chaîne PRRS on peut se ramener au cas de la chaîne RRPS. En effet lorsque les variables articulaires sont connues, il est possible de déterminer la position (unique) des A_i . Dès lors on revient au cas de la chaîne RRPS, puisque l'on connaît le centre des articulations A_i de type RR et la longueur (fixe) des segments $[A_i B_i]$.

Chaîne élémentaire R(RR)S C'est la chaîne qui constitue les robots *Delta* et *Hexa* [Pie91]. Cette dernière architecture est une généralisation du concept du robot *Delta* [Pie91]. Elle est constituée de six branches fonctionnant sur le modèle du *Delta*, voir figure I.9. La première articulation M_i sur la base est l'articulation commandable ; elle ne laisse qu'un degré de liberté en rotation. Il est aisé à partir de la description des caractéristiques géométriques du manipulateur de connaître la position de A_i qui est le centre d'une articulation joint de cardan.

Conclusion On notera A_i le centre de l'articulation joint de cardan sur la base, B_i le centre de l'articulation sphérique, et ρ_i la distance entre A_i et B_i (voir figure I.1).

Le robot dont les chaînes sont de type PRRS se ramène au cas d'un robot à chaînes RRPS dont la base serait différente à *chaque* configuration. Lorsque la chaîne élémentaire est R(RR)S le MGD est identique à celui d'une chaîne RRPS où la position de l'articulation sur la base est variable suivant la confi-

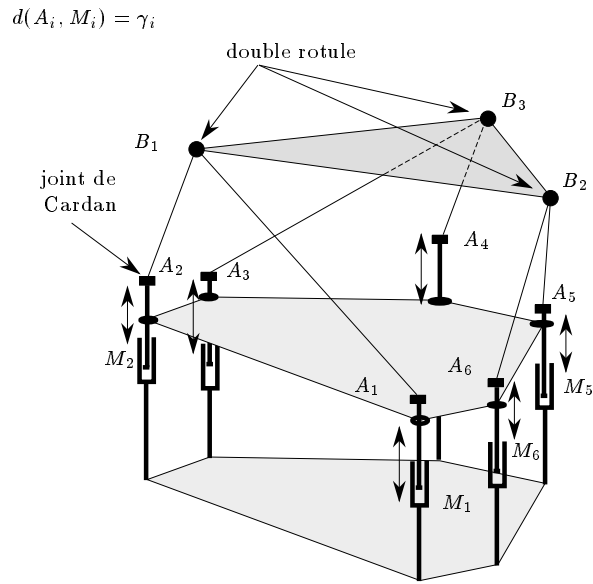


FIG. I.8 – Architecture de robot parallèle à chaînes PRRS (ex. le poignet actif)

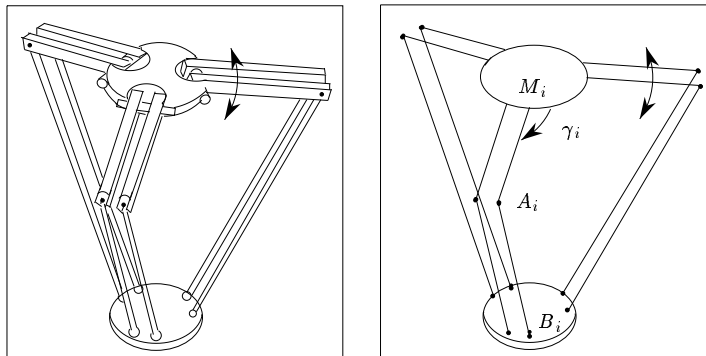


FIG. I.9 – Architecture de robot parallèle à chaîne RRRS (ex. le robot Hexa)

guration. Pour les deux types de chaînes cités ci-dessus, on peut ramener l'étude du modèle géométrique direct à l'étude d'un robot composé uniquement de chaînes RRPS. Pour une configuration donnée, on pourra considérer que la géométrie de la base comportant les joints de cardan, la géométrie de la plate-forme et la distance entre une articulation de la base et celle qui lui correspond sur la plate-forme sont connues.

I.4.5 Mécanisme équivalent

Il est indispensable quand on parle de modèle géométrique direct de parler de mécanisme équivalent. La notion de mécanisme équivalent pour un robot n'a de sens que du point de vue du modèle géométrique direct.

Le mécanisme équivalent d'un robot parallèle est un robot dont les possibilités de déplacement sont identiques. Considérons un point qui serait à l'extrémité de deux segments de longueurs fixées et relié au socle par un joint de cardan : ce point se déplace clairement sur un cercle contenu dans un plan perpendiculaire à la droite reliant les deux joints de cardan et dont le centre est situé sur cette même droite. Ce point est situé à la jonction de deux chaînes RRPS. Il est facile de remarquer que l'on peut obtenir strictement le même mouvement pour ce point en le plaçant au bout d'un segment fixé au socle au centre du cercle précédemment cité par une articulation rotoïde : soit une chaîne RPS. Ainsi le mécanisme équivalent de deux chaînes RRPS à extrémité commune est une chaîne RPS. Un robot dont les six chaînes cinématiques élémentaires sont RRPS et les articulations de la plate-forme sont confondues deux à deux a pour mécanisme équivalent un robot à trois chaînes RPS.

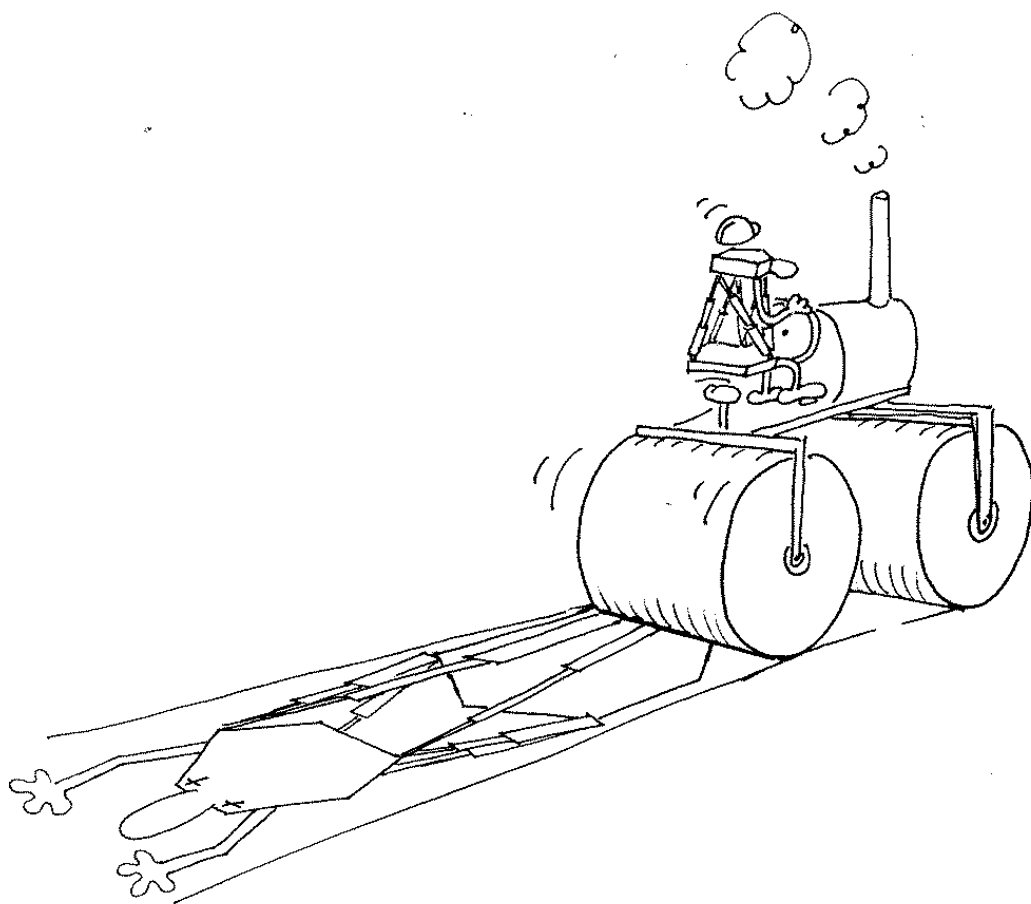
I.5 Objectif

L'étude de la bibliographie sur le modèle géométrique direct des robots parallèles amène au constat suivant. *Les informations dont nous disposons sont insuffisantes pour trouver une solution rapidement ou pour l'identifier parmi toutes les autres positions admissibles.* L'idée naturelle est alors d'ajouter de nouveaux capteurs en plus de ceux nécessaires à la commande du robot.

C'est donc le problème du modèle géométrique direct, d'un grand intérêt et très difficile, que nous nous efforcerons de résoudre dans la suite de cette thèse. Nous chercherons des conditions sur l'architecture des robots ou le placement des capteurs pour résoudre ce modèle ou pour au moins avoir une borne sur le nombre de solutions plus faible que celle du problème général.

Chapitre II

Problème plan



Dans ce chapitre, nous montrons de quelle manière le modèle géométrique direct est résolu dans le cas d'un robot dont le plateau se meut dans un plan; robot que nous qualifierons de mécanisme plan ou robot plan. Nous démontrons par des moyens géométriques et d'autres algébriques, combien de configurations différentes peuvent être obtenues et sous quelles conditions, et cela pour un même ensemble de valeurs des variables articulaires.

La plate-forme d'un robot plan, que nous appellerons *plateau*, est représentée par un triangle sans aucune perte de généralité. En effet un mouvement dans le plan n'a que trois degrés de liberté. Ainsi il suffit de trois chaînes cinématiques élémentaires, équipées d'un actionneur chacune, pour assurer la mobilité du plateau, selon la définition du robot pleinement parallèle. La connaissance de la géométrie du triangle reliant les articulations du plateau suffit pour étudier le modèle géométrique direct.

Afin de simplifier le modèle géométrique direct du robot parallèle plan, nous allons ajouter de l'information. Cette information provient de capteurs que l'on rajoute.

Dans la suite nous utiliserons plusieurs hypothèses. Les côtés et les angles du plateau triangulaire sont connus par construction. Les longueurs des segments reliant le plateau au socle sont mesurées lors de chaque déplacement, donc pour toute configuration.

II.1 Sans mesure additionnelle

Le robot parallèle plan a trois degrés de liberté: le problème du modèle géométrique direct a donc trois inconnues. Nous choisirons x et y pour définir la position du robot, ce sont les coordonnées de B_1 , et Φ pour définir l'orientation, tels que décrits sur la figure II.1. Ce triplet définit la posture

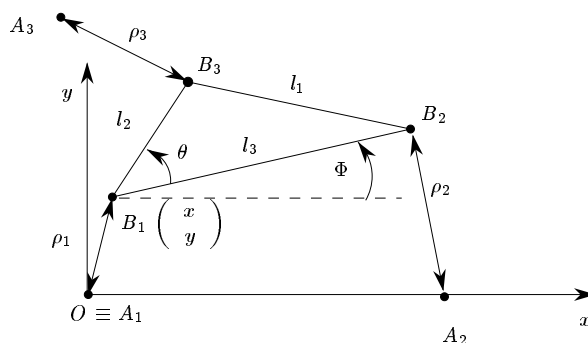


FIG. II.1 – Notations pour un robot plan

du robot. Le repère de référence choisi admet A_1 pour origine; l'axe des abs-

cisses est défini par la droite (A_1A_2) . Les coordonnées de A_2 sont $(a_2, 0)$ et celles de A_3 sont (a_3, b_3) . L'angle Φ est l'angle orienté fait entre l'axe (Ox) et le vecteur B_1B_2 du plateau. Le système d'équations correspondant au modèle géométrique direct s'écrit alors comme les équations de longueur des segments reliant le plateau à la base :

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 \quad (II.1)$$

$$\rho_2^2 = (x + l_3 \cos \Phi - a_2)^2 + (y + l_3 \sin \Phi)^2 \quad (II.2)$$

$$\rho_3^2 = (x + l_2 \cos(\Phi + \theta) - a_3)^2 + (y + l_2 \sin(\Phi + \theta) - b_3)^2 \quad (II.3)$$

La forme polynomiale de ce problème consiste à ramener le système non-linéaire multi-variable initial à une équation mono-variable. Une fois obtenues les racines de cette dernière équation, il suffit d'opérer par substitutions successives dans les équations initiales pour obtenir les valeurs des autres inconnues. GOSSELIN, SEFRIQUI et RICHARD [GSR92] ont établi cette forme, montrant que l'on obtenait un polynôme de degré au plus six.

Tout d'abord ils construisent un système équivalent composé de l'équation (II.1) elle-même et des équations (II.2) et (II.3) diminuées de l'équation (II.1). Les deux dernières équations obtenues sont linéaires en x et y , ce qui permet de résoudre en ces variables et en reportant dans (II.1) d'obtenir un polynôme mono-variable en Φ de degré six. Les conditions annulant le déterminant du système linéaire mentionné mènent à un polynôme mono-variable de degré quatre donnant ainsi au plus quatre solutions pour le MGD.

Ils montrent aussi que dans le cas d'un robot plan dont les articulations du plateau sont alignées, ainsi que celles de la base (voir figure II.2), un polynôme mono-variable de degré 3 en $\cos \Phi$ est obtenu, amenant ainsi au plus 6 solutions pour le modèle géométrique direct. Ensuite des raisonnements sur l'appartenance de $\cos \Phi$ à $[-1, +1]$ montrent qu'il y a au plus 4 solutions effectives.

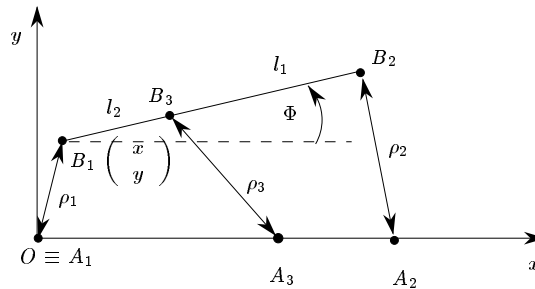


FIG. II.2 – Robot plan dont les articulations du plateau sont alignées, ainsi que celles de la base.

Nous allons étudier le nombre de solutions encore admissibles lorsque des capteurs additionnels sont utilisés. Le type de capteur additionnel utilisé permet de mesurer un angle orienté entre deux droites. En pratique ce capteur ne pourra être effectivement rajouté que sur l'un des trois segments existants du robot : sinon cela demanderait de rajouter un segment porteur passif uniquement pour pouvoir effectuer cette mesure. En résumé le capteur équipant le segment i , ($i \in \{1, 2, 3\}$) mesure l'angle orienté entre une demi-droite de référence Δ_i passant par A_i , l'articulation sur la base, et le vecteur $A_i B_i$.

II.2 Une mesure d'angle

Nous considérons maintenant l'ajout d'un capteur additionnel pour simplifier et résoudre le modèle géométrique direct du robot plan.

II.2.1 Résolution géométrique

A une renumérotation près des segments, on choisira d'installer le capteur additionnel sur une articulation correspondant au premier segment. Le capteur mesure l'angle orienté α entre une demi-droite de référence Δ_1 (qui passe par A_1), et le vecteur $A_1 B_1$. La figure II.3 illustre la localisation de ce capteur.

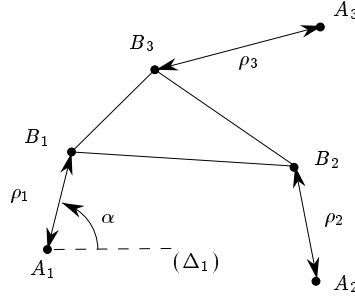


FIG. II.3 – Localisation et mesure d'un capteur angulaire sur un robot plan.

Dans le plan la mesure de l'angle α plus la longueur ρ_1 de ce même segment déterminent entièrement et *uniquement* la position de l'articulation B_1 . Dans la suite il est raisonnable de supposer que B_1 n'est pas confondu avec A_3 ni A_2 . Notons que seul B_1 joue un rôle particulier et que les rôles de B_2 et B_3 sont symétriques.

Dans un premier temps considérons les points B_1 et A_3 dont la position est bien connue. Le segment $[B_1 B_3]$ est un des côtés du robot et dès la construction sa longueur est connue. De plus un capteur d'élongation mesure la longueur $\|A_3 B_3\|$ qui peut varier suivant la configuration. Par conséquent l'articulation B_3 est à l'intersection de deux cercles ; l'un est centré en A_3

de rayon ρ_3 , l'autre est centré en B_1 de rayon $\|B_1B_3\|$. Nous noterons alors B_3^1 et B_3^2 les deux positions possibles pour B_3 résultant de cette intersection, et simplement B_3 s'il n'y a qu'un point double. Trois cas se présentent pour cette intersection :

Deux points réels Ce cas correspond à deux cercles se coupant dans le plan réel. La condition suivante doit être vérifiée

$$|\|B_1A_3\| - \rho_3| < \|B_1B_3\| < \|B_1A_3\| + \rho_3$$

Un point double Ce cas correspond à deux cercles tangents, donc au cas où B_1 , B_3 et A_3 alignés (ce sera réalisé uniquement pour des configurations particulières; ce n'est pas une condition sur l'architecture).

$$|\rho_3 \pm \|B_1A_3\|| = \|B_1B_3\|$$

Aucun point réel Ce cas correspond à un robot disloqué dont le segment 3 n'est pas attaché au corps du robot.

$$\|B_1A_3\| + \rho_3 < \|B_1B_3\| < |\|B_1A_3\| - \rho_3|$$

Nous ne traiterons pas le cas n'ayant aucune intersection réelle car il suppose un robot mal construit !

Dans un deuxième temps, nous allons compter le nombre de positions possibles pour la dernière articulation, B_2 , de la plate-forme du robot. Nous étudierons les deux cas présents, deux positions pour B_3 ou une seule. Et nous donnerons les conditions géométriques de leur existence.

II.2.1.1 Position de B_2 quand B_1 et B_3 sont connus

La troisième articulation B_2 est à l'intersection de trois cercles $\mathcal{C}(B_1, \|B_1B_2\|)$, $\mathcal{C}(B_3, \|B_3B_2\|)$ et $\mathcal{C}(A_2, \rho_2)$ (voir figure II.4). Supposons que la position de B_3 soit déterminée. L'intersection des deux cercles $\mathcal{C}(B_1, \|B_1B_2\|)$ et $\mathcal{C}(B_3, \|B_3B_2\|)$ donne deux points possibles pour B_2 . Mais ces deux points sont symétriques par rapport à la droite (B_1B_3) . Si on suppose, ce qui est légitime, que l'orientation du triangle $(B_1B_2B_3)$ est connue, alors un seul de ces points donne une solution acceptable pour B_2 .

II.2.1.2 Une position double pour B_3

Ce cas qui est peu courant n'intervient que lorsque les deux cercles déterminant B_3 , $\mathcal{C}(B_1, \|B_1B_3\|)$ et $\mathcal{C}(A_3, \rho_3)$, sont tangents : les trois articulations B_1 , B_3 et A_3 sont alignées. En section II.2.1.1, on a vu que lorsque B_1 et

B_3 sont connus de manière unique, il n'y a qu'une position possible pour B_2 . Par conséquent il n'y a qu'une seule posture pour le robot quand les points B_1, B_3 et A_3 sont alignées. En pratique cet alignement se détermine par l'égalité $|\rho_3 \pm \|B_1 A_3\|| = \|B_1 B_3\|$ puisque ces trois valeurs sont des données du problème. Cette unicité de la posture est obtenue sans faire intervenir le cercle $\mathcal{C}(A_2, \rho_2)$, d'où une plus grande simplicité des calculs.

II.2.1.3 Deux positions pour B_3

Nommons B_3^1 et B_3^2 ces deux possibilités. Ceci est le cas général. D'après l'argumentation de la section II.2.1.1, il y a une position pour B_2 pour chaque position de B_3 , soient B_2^1 et B_2^2 ; on a donc deux postures pour le robot. Pour savoir s'il est possible que les deux soient admissibles, faisons intervenir la contrainte d'appartenance au cercle $\mathcal{C}(A_2, \rho_2)$ qui n'était pas utilisée jusqu'ici. D'une manière générale, ce cercle ne passera que par l'une des possibilités de B_2 , et donc on n'aura qu'une seule posture pour le robot.

Étudions le cas moins fréquent où ce cercle contient les deux positions B_2^1 et B_2^2 , cas qui mène à deux postures différentes du robot (voir figure II.4). Faisons quelques remarques sur la géométrie du problème. D'abord B_3^1 et B_3^2 sont symétriques par rapport à la droite $(A_3 B_1)$. B_2^1 et B_2^2 sont symétriques par rapport à la droite $(A_2 B_1)$. En outre la rotation d'angle $\widehat{B_2 B_1 B_3}$ permet d'obtenir B_3^1 à partir de B_2^1 , et B_3^2 à partir de B_2^2 . Il en découle que pour avoir deux postures du robot, A_2 doit être situé sur une demi-droite passant par B_1 et faisant un angle $-\widehat{B_2 B_1 B_3}$ avec la demi-droite $(B_1 A_3)$. Cette condition dépend totalement de la posture courante par l'intermédiaire de la position de B_1 . L'information apportée par le capteur permet déjà de décider de l'unicité ou non de la posture.

Pour finir totalement il faut discuter sur les conditions de réelle définition de l'angle $\widehat{B_2 B_1 B_3}$ et de l'angle $\widehat{A_2 B_1 A_3}$. L'angle $\widehat{A_2 B_1 A_3}$ n'est pas bien défini quand $B_1 \equiv A_2$ ou $B_1 \equiv A_3$; or, par convention, B_1 ne peut être confondu ni avec A_2 ni avec A_3 . L'angle $\widehat{B_2 B_1 B_3}$ n'est pas bien défini si B_1 est confondue avec une autre des articulations du plateau, B_3 par exemple, alors le capteur situé sur le segment 1 n'est pas exploité au mieux car cela mène constamment (sauf si B_1, A_2, B_2 sont alignés qui est une configuration dégénérée car toutes les droites des segments actifs se coupent en un point) à deux solutions: en effet B_2 est à l'intersection du cercle $\mathcal{C}(B_1, l_3)$ et du cercle $\mathcal{C}(A_2, \rho_2)$. Si par contre on déplace le capteur sur le segment de l'articulation simple restante, disons le 2, alors il ne peut y avoir deux solutions que si A_3 est situé sur la droite $(A_1 B_2)$ (voir figure II.5).

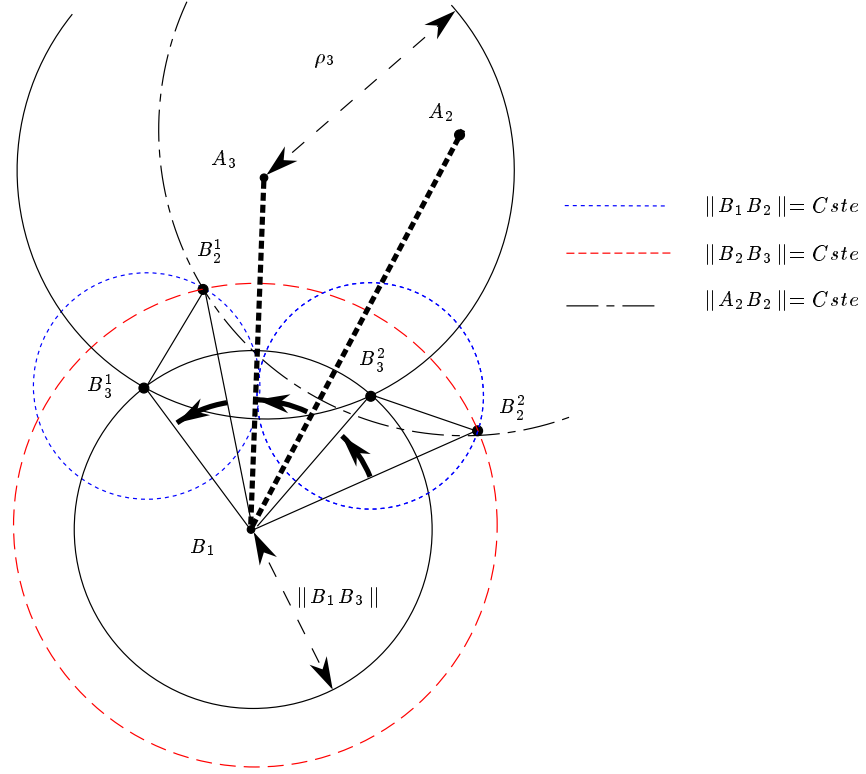


FIG. II.4 – Mécanisme plan avec un capteur additionnel : condition pour deux solutions

II.2.1.4 Synthèse

Des argumentations précédentes se déduit le théorème suivant donnant une condition nécessaire et suffisante d'unicité (voir figure II.4).

Théorème II.1 (Robot plan, cas 1¹) *Un robot plan équipé d'un capteur supplémentaire sur le premier segment dont l'articulation du plateau n'est pas double, admet une solution unique pour son modèle géométrique direct si et seulement si*

$$|\rho_2 \pm \|B_1A_2\|| = \|B_1B_2\| \quad \text{i.e. } B_1A_2B_2 \text{ sont alignés}$$

ou

$$|\rho_3 \pm \|B_1A_3\|| = \|B_1B_3\| \quad \text{i.e. } B_1A_3B_3 \text{ sont alignés}$$

ou

$$\widehat{B_2B_1B_3} \neq \widehat{A_2B_1A_3}$$

Sinon, deux solutions sont admissibles.

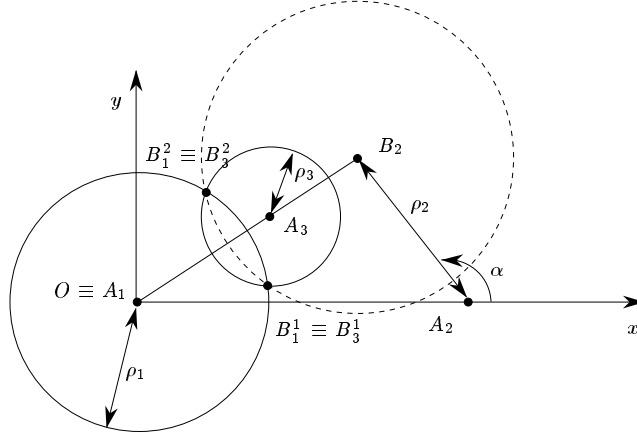


FIG. II.5 – Angle $\widehat{B_2 B_1 B_3}$ indéfini (articulation double), mais capteur bien placé : deux solutions possibles quand A_1, B_2 et A_3 sont alignés.

On notera la similitude de la condition d'angle avec celle du cas spatial dans le cadre du théorème V.1 en page 96.

Puisque cela est possible lors de la conception, on devra éviter de placer le capteur additionnel sur un segment correspondant à une articulation double (voir figure II.5).

Corollaire II.2 (Unicité pour robot à articulation double sur le plateau)

Un robot plan possédant une articulation double $B_1 \equiv B_3$ sur le plateau et équipé d'un capteur additionnel situé sur le segment 2 d'articulation simple, admet une solution unique si et seulement si $A_3 \notin (A_1 B_2)$. Sinon il y a deux solutions.

II.2.1.5 Conclusion

Nous venons de voir les conditions sur l'architecture de la base et du plateau où il pouvait y avoir ambiguïté sur la posture courante. Dans tous les autres cas, la connaissance de la position de A_2 et de celle de B_1 permettra de déterminer la position de chacune des articulations B_2 et B_3 .

II.2.2 Résolution par élimination

Nous voulons obtenir une solution polynomiale du modèle géométrique direct avec un capteur additionnel. Nous devons réduire le système à plusieurs équations et plusieurs variables en une équation mono-variable.

Il est dorénavant clair que l'utilisation d'un capteur angulaire permet de connaître la position de B_1 . Nous choisirons comme repère de référence, le repère orthonormé dont l'origine est situé en B_1 et l'axe (Ox) passe par A_2

de coordonnées $(x_2, 0)$ avec $x_2 > 0$. Les coordonnées de A_3 sont (a_3, b_3) . Les longueurs des côtés du plateau triangulaire seront notées par

$$l_i = \|B_j B_k\| \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \quad (\text{II.4})$$

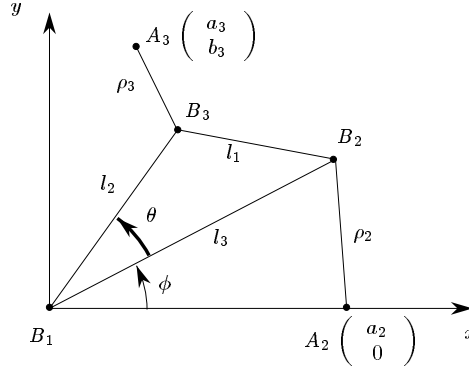


FIG. II.6 – Paramètres du robot plan avec 1 capteur

voir figure II.6. Le dernier degré de liberté encore indéfini est l'orientation ; c'est ce que représente l'angle Φ entre la demi-droite $[B_1 A_2)$ et le vecteur $B_1 B_2$. Les équations du modèle géométrique direct se réduisent à :

$$\|A_2 B_2\|^2 = \rho_2^2 \quad (\text{II.5})$$

$$\|A_3 B_3\|^2 = \rho_3^2 \quad (\text{II.6})$$

On note θ l'angle $\widehat{B_2 B_1 B_3}$. Étant données les notations (figure II.6) les équations deviennent :

$$(l_3 \cos \Phi - x_2)^2 + (l_3 \sin \Phi)^2 = \rho_2^2 \quad (\text{II.7})$$

$$(l_2 \cos(\Phi + \theta) - x_3)^2 + (l_2 \sin(\Phi + \theta) - y_3)^2 = \rho_3^2 \quad (\text{II.8})$$

Ce système n'est pas algébrique. On n'a qu'une seule posture dans le cas où B_1 , B_2 et A_2 sont alignés. Si B_1 , B_2 et A_2 ne sont pas alignés alors $\Phi \neq \pm\pi$, on peut alors opérer la substitution classique :

$$X = \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) \quad \cos \Phi = \frac{1 - X^2}{1 + X^2} \quad \sin \Phi = \frac{2X}{1 + X^2}$$

Après substitution, les équations (II.7) et (II.8) ont les mêmes solutions que le système suivant :

$$((a_2 + l_3)^2 - \rho_2^2) X^2 + (a_2 - l_3)^2 - \rho_2^2 = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{aligned}
& ((x_3 + l_2 \cos \theta)^2 + (y_3 + l_2 \sin \theta)^2 - \rho_3^2) X^2 \\
& + 4l_2(-b_3 \cos \theta + a_3 \sin \theta) X \\
& + (a_3 - l_2 \cos \theta)^2 + (b_3 - l_2 \sin \theta)^2 - \rho_3^2 = 0
\end{aligned} \tag{II.10}$$

Dans ce système, on a simplifié le dénominateur $X^2 + 1$, ce qui est légitime car $X^2 + 1$ ne s'annule jamais. En soustrayant (II.9) à (II.10) de manière à éliminer le terme de degré deux en X nous obtenons une équation linéaire dont le coefficient en X est :

$$-l_2(\rho_2 + x_2 + l_3)(\rho_2 - x_2 - l_3)(-y_3 \cos \theta + x_3 \sin \theta) \tag{II.11}$$

Si ce coefficient n'est pas nul, alors la solution est unique. Si ce coefficient est nul le système est dégénéré. Étudions un peu plus en détail ce qui se passe dans ce cas là. Il y a deux solutions car la résolution vient d'une des deux équations quadratiques (II.9) ou (II.10) au choix. Voici les cas d'obtention de ces deux solutions, *i.e.* quand le coefficient II.11 s'annule :

- $l_2 = 0$ • Alors B_1 et B_3 sont confondus. La deuxième équation du système est indépendante de Φ : mais elle est satisfaite par construction. Il reste à résoudre :

$$X^2 = -\frac{(\rho_2 + x_2 - l_3)(\rho_2 - x_2 + l_3)}{(\rho_2 + l_3 + x_2)(\rho_2 - l_3 - x_2)} \tag{II.12}$$

Remarquons que le dénominateur ne peut pas s'annuler car $\rho_2 = l_3 + a_2$ signifie que $\Phi = \pm\pi$, ce qui contredit l'hypothèse. Cette équation n'admet de solutions réelles que si le terme constant de droite est positif. Par construction, $l_3 \leq a_2 + \rho_2$ et $\rho_2 \leq l_3 + a_2$. Pour que le robot ait une existence, il faut donc que $\rho_2 + l_3 \geq a_2$. Il y a alors deux solutions distinctes sauf quand $\rho_2 = |a_2 - l_3|$ donnant la valeur nulle pour Φ : c'est l'alignement entre B_1, B_2 et A_2 . Remarquons que pour $\Phi = 0$ nous avons une configuration dégénérée. En effet, rappelons que si $B_1 \equiv B_3$, alors toutes les droites support se coupent en un même point.

- $(\rho_2 + a_2 + l_3)(\rho_2 - a_2 - l_3) = 0$ • Ceci contredit l'hypothèse sur l'angle Φ .
- $-y_3 \cos \theta + x_3 \sin \theta = 0$ • Cette condition traduit l'égalité entre l'angle des vecteurs B_1A_2 et B_1A_3 et l'angle $\widehat{B_2B_1B_3}$.

Le modèle géométrique direct d'un robot plan équipé d'un capteur additionnel a deux solutions dans les conditions détaillées ci-dessus, sinon une solution. Les conditions retrouvées pour l'unicité sont bien celles du théorème II.1.

II.3 Deux mesures d'angle

Supposons que les segments 1 et 2 soient équipés de capteurs supplémentaires (voir figure II.7). Il reste à déterminer la position de B_3 . Or il se

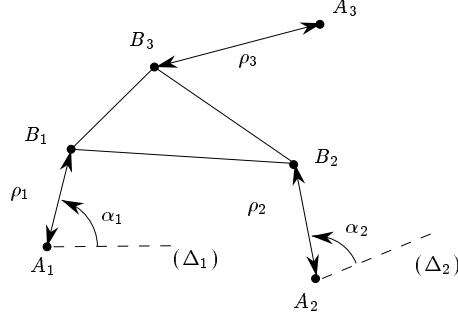


FIG. II.7 – Installation et mesure de deux capteurs angulaires sur un robot plan

trouve à l'intersection des cercles $\mathcal{C}(A_3, \rho_3)$, $\mathcal{C}(B_1, \|B_1B_3\|)$, $\mathcal{C}(B_2, \|B_2B_3\|)$. Ces cercles ont bien au moins une intersection commune car le robot est montable. On rappelle qu'un robot général n'a pas deux articulations de son plateau confondues ni une articulation du plateau pouvant venir percuter une des articulations de la base. En considérant uniquement les distances entre les articulations du plateau, il y a une unique configuration à moins que B_1 , B_2 et A_3 ne soient alignés; alors il y a deux configurations possibles. Néanmoins, l'utilisation de la géométrie du plateau permet de trier parmi ces deux configurations et de n'en obtenir plus qu'une.

Il existe cependant un cas dégénéré. C'est celui d'un robot dont le plateau est réduit à un segment, dont deux des articulations du plateau sont confondues et correspondent aux segments 1 et 2 qui sont équipés de capteurs supplémentaires. Ce cas est dégénéré car l'un des capteurs devient inutile et on se ramène au cas où un seul capteur équipe le robot. Ce cas peut être évité dès la conception du robot.

Théorème II.3 (Robot plan, cas 1²) *L'emploi de deux capteurs angulaires additionnels pour équiper deux segments différents permet de n'avoir qu'une solution au MGD de n'importe quel robot plan.*

II.4 Trois mesures d'angle

D'une manière analogue aux sections précédentes, on peut définir la position de chacune des trois articulations du plateau et par conséquent le MGD est

directement résolu (figure II.8). Il n'existe pas d'architecture ni de configuration échappant à cette règle.

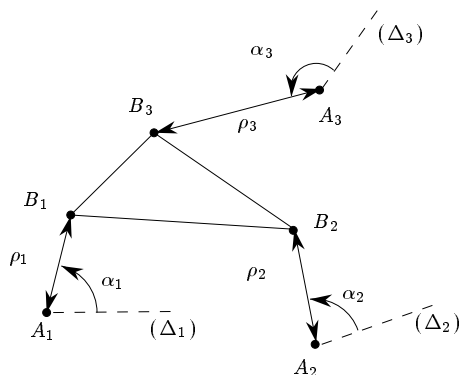


FIG. II.8 – Installation et mesure de trois capteurs angulaires sur un robot plan

II.5 Conséquences pour la plate-forme de Stewart

La plate-forme de Stewart (voir figure I.2 en page 9) est un manipulateur spatial à six degrés de liberté proposé en 1965 par STEWART pour une utilisation comme plate-forme de simulateur de vol. Le mécanisme équivalent de ce robot correspond au robot suivant de la figure II.9. Les articulations

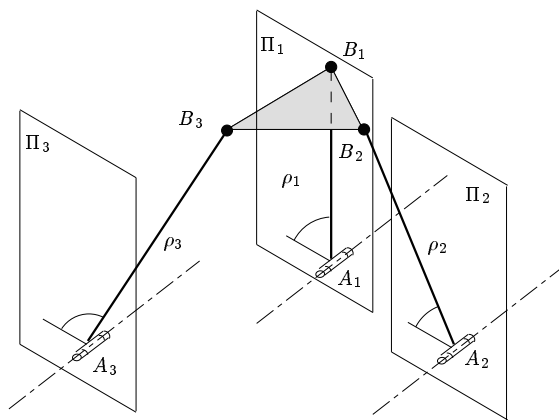


FIG. II.9 – Mécanisme équivalent à la plate-forme de Stewart

de la plate-forme sont confondues deux à deux et se déplacent donc sur des

cercles. Les articulations de la base sont placées de telle sorte que les cercles en question soient dans des plans parallèles.

LAZARD et MERLET [LM94] ont prouvé que la plate-forme de Stewart n'avait pas plus de douze solutions pour une configuration donnée. Ils se sont ramenés par projection à l'étude de deux robots parallèles plans à plateaux symétriques l'un de l'autre. Nous avons déjà vu qu'un robot plan admettait jusqu'à six solutions (voir II.1). Et comme l'étude du mécanisme de STEWART est équivalente à celle de deux robots plans, ils en ont déduit qu'il ne pouvait y avoir plus de douze solutions.

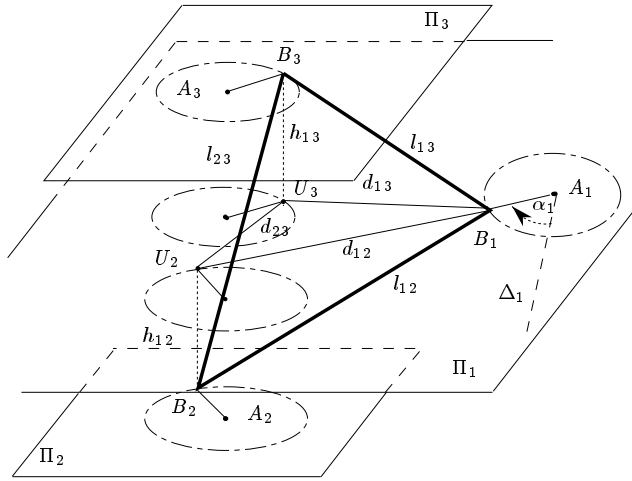


FIG. II.10 – Mécanisme équivalent de la plate-forme de Stewart après projection dans un plan ; placement d'un capteur

L'étude de la plate-forme de Stewart est illustrée sur la figure II.10. On considère la projection orthogonale du plateau triangulaire dans le plan Π_1 . La construction et l'observation du triangle $(B_2B_1U_2)$ (respectivement $(B_3B_1U_3)$) entraîne que la distance d_{12} (respectivement d_{13}) est constante. De même avec la quadrilatère $(U_2B_2B_3U_3)$ il résulte que la distance d_{23} est constante. Ainsi dans le plan Π_1 nous obtenons un triangle $(U_2B_1U_3)$ dont les côtés sont de longueur constante. Or il existe deux triangles d'orientation inverse vérifiant cette propriété. C'est ainsi que deux robots parallèles plans sont obtenus comme équivalence à la plate-forme de Stewart.

Il est tout à fait possible d'équiper ce robot de capteurs angulaires de manière à ce qu'ils permettent de mesurer les angles décrits dans les sections II.2, II.3 et II.4 (voir figure II.10). En effet les mesures des angles α_2 et α_3 dans les plans Π_2 et Π_3 seront conservées par projection orthogonale dans le

plan Π_1 car ces trois plans sont parallèles. Il devient alors aisé d'énoncer les résultats suivants.

Théorème II.4 (Plate-forme de Stewart : cas 1¹) *Il y a au plus deux (2) solutions au MGD de la plate-forme de STEWART lorsqu'elle est équipée d'un (1) capteur angulaire additionnel.*

Dans le cas où 2 capteurs additionnels sont utilisés, la position des 2 points B_i , ($i = 1, 2$) est connue. Deux triangles existent symétriques par rapport à (B_1B_2) . Ils ne sont admissibles tous les deux que si A_3 ne permet pas de faire la différence entre les deux positions possibles de B_3 , i.e. A_3 appartient à la droite de symétrie (B_1B_2) .

Théorème II.5 (Plate-forme de Stewart : cas 1²) *Il y a au plus deux (2) solutions au MGD de la plate-forme de STEWART lorsqu'elle est équipée de deux (2) capteurs angulaires additionnels. Il y a deux solutions si et seulement si $A_3 \in (B_1B_2)$.*

Dans le cas où 3 capteurs additionnels sont utilisés, la position des 3 points B_i , ($i = 1, 2, 3$) est connue. Il n'y a que deux triangles qui pourront correspondre à ces trois points, le plateau lui-même et son symétrique. Mais les points ne peuvent appartenir en même temps aux deux.

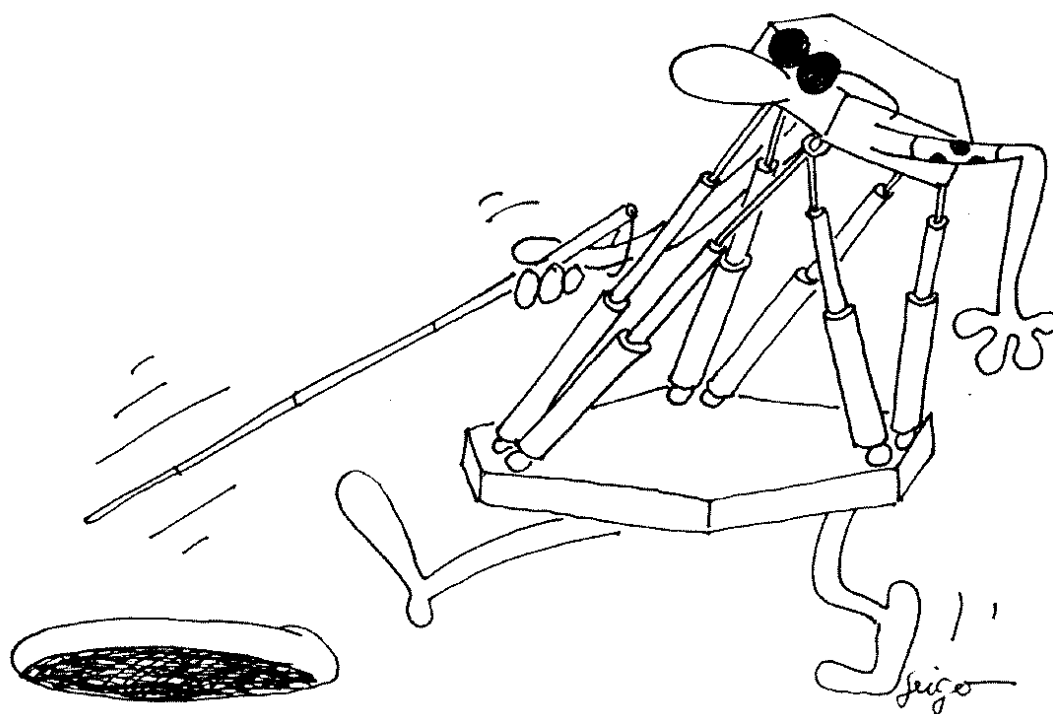
Théorème II.6 (Plate-forme de Stewart : cas 1³) *Il y a une solution unique au MGD de la plate-forme de STEWART lorsqu'elle est équipée de trois (3) capteurs angulaires additionnels.*

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé les principes de l'approche ajout de capteurs pour résoudre le modèle géométrique direct en l'appliquant au cas du robot en deux dimensions ; des bornes en ont été déduites pour la plate-forme de Stewart. Nous avons pu voir que les conditions, entraînant un nombre donné de postures pour le robot plan, obtenues par la méthode algébrique et par la méthode géométrique concordent totalement. Dans la suite de ce mémoire, il ne sera pas toujours aussi facile de faire la correspondance entre les conditions obtenues par les différentes méthodes. Cela est dû à la complexité du problème spatial qui au niveau de la résolution algébrique donne souvent des expressions difficilement interprétables.

Chapitre III

Approche capteurs additionnels





Puisque dans l'ensemble des solutions du modèle géométrique direct le nombre des données dont nous disposons est insuffisant pour faire un choix (rapide ou non), il semble indispensable d'obtenir d'autres informations sur la posture du robot pour lever l'indétermination, comme l'ont fait, en précurseurs semble-t-il, INOUE, TSUSAKA et FUKUIZUMI en 1985 [ITF85]. En utilisant des capteurs additionnels on produit des systèmes surcontraints qui en tant que tels ne devraient avoir en général aucune solution. Mais ici, par construction nous sommes sûrs de l'existence d'au moins une solution. Même si d'une manière générale ces problèmes n'auront qu'une solution, nous chercherons les conditions particulières pour lesquelles ce nombre peut dépasser un. La motivation de l'ajout de capteurs n'est pas seulement de trouver plus rapidement les solutions, mais aussi de trouver des systèmes plus simples et ayant moins de solutions. L'étude que nous proposons sur la nature, la position et le nombre des capteurs a pour but d'apporter quelques éléments de réponse sur les choix à faire.

III.1 Types de capteurs 3D

Au premier abord on peut envisager l'utilisation des capteurs qui donnent directement une information 3D complète sur la posture de la plate-forme, et par là même résoudrait immédiatement le modèle géométrique direct. Parmi ces types de capteurs, pourraient être proposés : les champs magnétiques, les ultrasons, les radars, etc. Seuls les capteurs à ultrasons et ceux à champs magnétique seront abordés car ils sont les plus couramment utilisés (vision, robotique mobile, etc.), bien que peu recommandables pour les robots manipulateurs [BC93].

– Capteurs magnétiques

Leur volume de travail est important puisqu'il est formé par une demi-sphère centrée sur l'émetteur. Pour des capteurs comme le *Fastrack*¹ (respectivement *Flock of Birds*²) le rayon d'action est de 75 cm (resp. 90 cm) avec une précision optimale ; les mesures pouvant aller jusqu'à 3m du capteur. Ils sont sensibles à la présence d'objets métalliques qui déforment localement le champ et y affaiblissent la précision. Néanmoins à l'aide de calibrages et de calculs il est possible d'en tenir compte. Ils permettent de mesurer la position et l'orientation d'un repère lié à l'objet mesuré. Le prix est très élevé. Mais surtout leur capacité d'échantillonnage est trop faible : 120 mesures par seconde, soit près de 8ms par

1. *Polhemus Navigation Sciences Division* - McDonnell Douglas Electronics Co. - Colchester, VT, USA

2. *Ascension Technologies* - Burlington, VT, USA

mesure. En outre la précision sur la posture est faible en comparaison du temps nécessaire à la mesure.

- Capteurs ultrasoniques

Les capteurs ultrasoniques comportent trois modules : émetteur, récepteur et une unité électronique de contrôle. Bien sûr il y aurait moins de problèmes d'encombrement. Par contre ils présentent d'autres inconvénients pénalisants. Tout obstacle situé entre l'émetteur et le récepteur fait perdre le signal. Il est nécessaire de les garder toujours pointés vers une cible dont justement, la position n'est pas connue. Enfin, ils sont peu précis. En comparaison des capteurs magnétiques ils représentent une alternative moins onéreuse.

Au vu de ces descriptions, nous constatons qu'il convient de se tourner vers d'autres types de capteurs que sont les capteurs linéaires et les capteurs angulaires.

III.2 L'ajout de capteurs

Il est possible de rajouter des capteurs soit en instrumentant des articulations passives existantes, soit en ajoutant des articulations passives instrumentées.

Une première méthode pour résoudre le problème du modèle géométrique direct est d'ajouter des segments passifs dont la longueur est mesurable [Nai92, Nai94]. Mais ces segments réduisent considérablement l'espace de travail du manipulateur en augmentant le risque de collisions entre segments.

Une autre méthode est de rajouter des capteurs de rotation. Ceux-ci mesurent un angle qui sera décrit plus en détail en section III.2.3. Dans le même temps, d'autres critères que la rapidité de calcul interviennent, tels que le coût financier ou l'encombrement. Énumérons les différents critères à prendre en compte pour savoir quels seront les capteurs à utiliser

- Type : encombrement, précision
- Localisation : encombrement, pertinence
- Nombre : encombrement, coût

Remarquons que l'encombrement est une préoccupation importante. En effet, il est regrettable de perdre une partie de l'espace de travail au profit de la connaissance de la position courante. De même, nous verrons par la suite que certaines caractéristiques recherchées ne peuvent être obtenues simultanément. Au moment de la conception d'un robot parallèle il est indispensable d'avoir défini clairement son cahier des charges. Celui-ci devra parfaitement

établir les objectifs, car un compromis est inévitable entre la complexité du manipulateur, la vitesse de résolution du modèle géométrique direct et la taille de l'espace de travail. Nous avons ici affaire à un problème délicat de choix multi-critères.

III.2.1 Capteurs linéaires

Par défaut les segments actifs sont déjà équipés de capteurs de longueur. Un segment actif relie A_i à B_i pour i de 1 à 6. Ainsi pour utiliser des capteurs linéaires additionnels, il convient de les placer sur des segments passifs qu'il faudra ajouter.

III.2.1.1 Caractéristiques

Mesure Longueur entre deux points de fixation, l'un sur la base et l'autre sur la plate-forme.

Encombrement important Ces capteurs doivent être placés sur des segments passifs additionnels, puisque les segments actifs sont déjà équipés. Ceci a pour effet de diminuer l'espace de travail à cause du risque accru d'intersection et des limitations supplémentaires qu'imposent leur élongation limitée.

Précision constante sur la mesure des positions $B_{i,i>6}$ Quelle que soit la configuration courante, la position des B_i sera calculée, à partir de la mesure, avec la même précision dépendant uniquement de la qualité du capteur.

III.2.1.2 Travaux antérieurs

NAIR [Nai92, Nai94] propose une méthode systématique pour résoudre le modèle géométrique direct lorsqu'on ajoute des segments sur un robot parallèle quelconque. Il arrive à un formalisme permettant de construire un système linéaire par changement de variable et d'obtenir dans certains cas des représentations polynomiales minimales. Compte tenu de la complexité des entrées des matrices manipulées, il ne peut que donner des résultats sur des robots dont la plate-forme et la base sont planes. Sous réserve que la matrice du système linéaire soit de rang maximal, trois capteurs permettent de n'obtenir que deux solutions, alors qu'avec deux capteurs il n'y en a que huit.

CHEOK, OVERHOLT et BECK [COB93] proposent deux façons de placer les capteurs sur un robot dont la base et la plate-forme sont planes. Dans la première ils ajoutent trois segments passifs ayant une articulation commune sur la plate-forme. Dans la deuxième ils ajoutent 6 segments passifs, mais

n'équipent de capteurs que 3 des segments actifs : ce qui leur permet de dire qu'ils n'utilisent que trois capteurs additionnels pour trouver une formulation explicite. Néanmoins, les étapes de calcul font intervenir l'inversion d'une matrice dépendant des coordonnées des articulations. Le rang de cette matrice peut ne pas être maximum, en particulier dans le cas d'articulations confondues ou de certaines configurations. Dans ces conditions le calcul n'aboutit plus.

III.2.2 Capteurs angulaires

Nous étudions ici l'ajout de capteurs angulaires sur les joints de Cardan attachés à la base. Ces capteurs permettent d'obtenir une information sur la position des articulations $B_{i,i=1,\dots,6}$ de la plate-forme.

III.2.2.1 Caractéristiques

Mesure : angle de rotation sur les points d'articulation.

Encombrement limité. Ces capteurs placés sur les joints de Cardan ne réduisent éventuellement l'espace de travail qu'en limitant l'amplitude des déplacements.

Précision variable sur la mesure des positions B_i , puisque l'erreur sur la position du point mesuré est l'erreur angulaire amplifiée par la longueur du segment porteur.

Placement des capteurs Les segments seront toujours supposés équipés en standard d'un capteur mesurant la longueur de A_i à B_i . Pour préciser les cas dont nous serons amenés à parler, nous introduisons une notation sur le placement des capteurs additionnels. Pour signaler que m segments sont équipés de deux capteurs angulaires et que n autres segments sont équipés d'un seul capteur angulaire, nous écrirons :

$$cas\ 2^m - 1^n$$

Quand $m = 0$ nous noterons : cas 1^n ; et quand $n = 0$ nous noterons : cas 2^m .

Dans les paragraphes suivants nous discuterons du nombre de capteurs supplémentaires utilisés et du nombre correspondant de solutions du modèle géométrique direct.

III.2.2.2 Travaux antérieurs

INOUE, TSUSAKA et FUKUIZUMI en 1985 [ITF85] sont probablement les premiers à avoir utilisé des capteurs en quantité excédentaire sur un robot parallèle. Les segments manœuvrant la plate-forme sont dans ce cas précis trois pantographes (voir figure III.1). Trois encodeurs par pantographe sont alors utilisés pour mesurer les angles α , β et γ : les angles γ pour chaque pantographe étant les mesures additionnelles. Pour une chaîne donnée, la

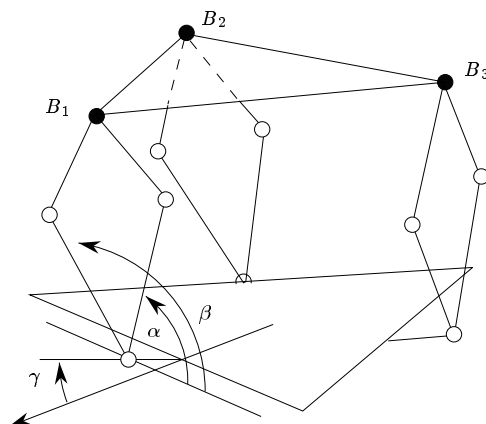


FIG. III.1 – *Structure parallèle à pantographes et placement des capteurs [ITF85]*

connaissance de ces trois angles permet de déterminer de manière unique la position de l'articulation correspondante de la plate-forme. Ainsi un ensemble de neuf capteurs (donc trois additionnels) détermine une solution unique. Par la suite, la solution obtenue à l'aide des informations des capteurs est utilisée comme point de départ pour une méthode numérique itérative de résolution. En effet la solution obtenue étant d'une précision plutôt faible, l'itération permet d'obtenir une meilleure solution.

ARAI et STOUGHTON [SA91], traitent du placement des capteurs et de la sensibilité de la solution par rapport à une erreur de mesure des capteurs ou même par rapport à une perte de capteurs. Bien que leur étude concerne une classe particulière de robots parallèles et soit ainsi trop restreinte pour notre étude, nous noterons que la localisation idéale est sur la base. En effet, placer les capteurs sur les articulations de la plate-forme demande des calculs supplémentaires. De plus il existe des problèmes de câblage qu'il convient d'éliminer en plaçant les capteurs au plus près du socle. C'est dans [SA91] qu'apparaît pour la première fois l'idée de traiter plusieurs cas d'ajout de capteurs pour résoudre le MGD, et donc d'envisager et d'étudier lorsque diverses

quantités de capteurs sont utilisées. Cette idée a un intérêt direct lorsque les capteurs sont susceptibles d'être détruits : il faut savoir traiter le cas où il y a moins de capteurs que prévus.

MERLET [Mer93] utilise 3 ou 4 capteurs pour obtenir des formulations explicites des solutions admissibles. Il introduit la notion de conditions sur l'architecture ou la configuration suivant lesquelles le nombre de solutions varie. On y reviendra en III.4.

BARON et ANGELES [BA94a, BA94b, BA95] s'intéressent aux cas où l'utilisation de capteurs additionnels permet d'obtenir un découplage entre la position et l'orientation ; ce découplage est par exemple obtenu pour les architectures étudiées dans [IP91] et [ZS91]. Ils remarquent qu'à l'instar du MGI des robots séries, le découplage simplifie grandement le MGD des robots parallèles. Ils exhibent trois conditions géométriques sous lesquelles le découplage est possible pour tout type de chaîne élémentaire composée en série d'articulations rotoïdes et prismatiques. Soit $\mathcal{K}$ la sous-chaîne maximale de la chaîne élémentaire qui ne contient pas d'articulations rotoïdes ayant leurs axes se coupant. Les équations du modèle géométrique deviennent linéaires et permettent un découplage position/orientation lorsque

Mesure 3D toutes les articulations de $\mathcal{K}$ sont mesurées : la position du point B_i à l'extrémité de la chaîne élémentaire est totalement connue.

Mesure 2D toutes les articulations de $\mathcal{K}$ sont mesurées sauf un mouvement selon une droite : on connaît la projection du point B_i sur un plan perpendiculaire à la droite du mouvement.

Mesure 1D toutes les articulations de $\mathcal{K}$ sont mesurées sauf un mouvement selon un plan : on connaît la projection du point B_i sur une droite perpendiculaire au plan du mouvement.

Dans la deuxième référence ([BA94b]), ces conditions sont mises en œuvre pour étudier, relativement au placement des capteurs et au type des articulations équipées, l'obtention ou non d'équations linéaires pour le MGD. Enfin dans la dernière référence ([BA95]), le problème n'est plus que d'estimer l'orientation *via* une méthode de moindres carrés qui tient compte des longueurs de tous les segments pour contrebalancer l'erreur provenant des mesures des capteurs ayant servi à connaître la position.

HAN, CHUNG et YOUM [HCY95] proposent d'ajouter les capteurs de manière à partitionner le manipulateur en plusieurs solides, dont la position de certains peut être connue à l'aide des capteurs supplémentaires. Ils montrent que deux capteurs additionnels placés sur un même segment pour un robot 6-6 à plate-forme et base planes, de même qu'un capteur pour un robot 3-3

ou un robot 6-3 à base plane, suffisent pour obtenir une formulation explicite des solutions. Le nombre de solutions admissibles est alors de deux. Le choix entre elles se fera de manière numérique. Dans la résolution du 6-6, il faut intervenir une élimination de Gauss sur une matrice. Or, *a priori*, le rang de cette matrice n'est pas forcément maximum, et il peut y avoir alors plus que les deux solutions annoncées. Nous verrons en V.4 que ce nombre peut être de huit.

NOTASH et PODHORODESKI [NP95] travaillent sur un manipulateur à trois segments à trois articulations R. Ce manipulateur, dit *3-branch*, n'est pas pleinement parallèle car il dispose de plus d'un actionneur par chaîne cinématique. Ils étudient de manière systématique le nombre de solutions pour chacune des combinaisons d'articulations équipées d'un capteur angulaire ou non.

III.2.3 Mesure des capteurs additionnels

Définissons un repère local à l'articulation (A_i, u, v, w) pour chacune des articulations i , pour i appartenant à $\{1, \dots, 6\}$, tel que $(A_i u)$ soit confondu avec le premier axe de rotation de l'articulation. Soit $(A_i w'')$ l'axe supportant le segment $[A_i B_i]$. Cet axe est obtenu à partir de $(A_i w)$ en appliquant une rotation d'angle α autour de $(A_i u)$ (matrice de rotation R_α) suivi d'une rotation autour de $(A_i v') = R_\alpha(A_i v)$ d'angle β (matrice de rotation R_β) (voir figure III.2). Les coordonnées dans le repère de l'articulation de $A_i B_i$ sont :

$$A_i B_i = \|A_i B_i\| R_\alpha R_\beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Puisque $\|A_i B_i\| = \rho_i$ est donnée par le capteur prismatique, la mesure de α et β permet de calculer les coordonnées de B_i dans le repère de l'articulation. Par conséquent, deux capteurs angulaires supplémentaires suffisent pour déterminer la position de B_i .

La mesure d'un angle seulement, α , permet de déterminer un plan contenant B_i et A_i .

Dans la suite nous travaillons avec un robot parallèle général en plaçant les capteurs par paires sur les segments. Les résultats qui suivent ont fait l'objet d'une publication [TM94].

III.3 Résolution avec 6 capteurs : cas 2^3

Dans ces conditions nous disposons des six longueurs des segments actifs ainsi que de six mesures d'angles effectuées par ces capteurs supplémentaires. Les

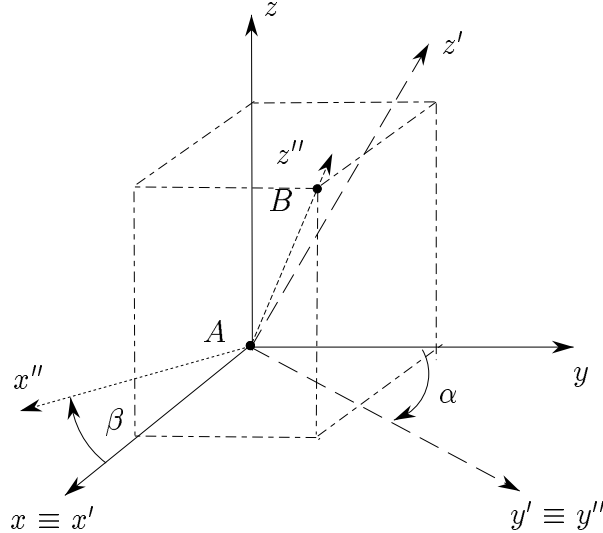


FIG. III.2 – Mesures des capteurs angulaires situés sur le joint de Cardan.

six mesures d'angles sont donc faites sur des articulations passives.

Trois segments étant instrumentés d'un couple de capteurs nous pouvons connaître la position de trois points de la plate-forme. Or il est clair que connaître la position de 3 points d'un corps solide et rigide suffit pour connaître entièrement sa posture. Néanmoins il est indispensable de faire attention à choisir les trois segments à instrumenter de telle sorte que les articulations correspondantes sur la plate-forme ne soient pas alignées. Dans ce dernier cas, la plate-forme serait libre de se déplacer suivant une rotation autour de l'axe formé par ces trois points alignés. Cette contrainte n'est pas très difficile à satisfaire puisque ceci peut se décider une fois pour toutes lors de la conception. Le placement de six capteurs en trois couples a été utilisé par SHI et FENTON [SF92] pour calculer la vitesse instantanée de la plate-forme.

III.3.1 Retrouver un point de la plate-forme

Comme nous venons de l'expliquer, connaître trois points de la plate-forme nous suffira à calculer sa position. Maintenant nous allons établir les formules analytiques pour la position de ces points. L'information $\|AB\| = \rho$ étant fournie par le capteur prismatique, la mesure de α, β permet de calculer les coordonnées de B dans le repère de l'articulation grâce à l'équation (III.1),

par :

$$B = \rho \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Soit R la matrice de rotation entre le repère de l'articulation (*i.e.* du cardan) considérée et le repère de référence $\mathcal{R}$, et $AB_{\mathcal{C}}$ le vecteur du segment exprimé dans le repère $\mathcal{C}$ du cardan. Ainsi nous obtenons

$$OB = R \cdot AB_{\mathcal{C}} + OA \quad (\text{III.3})$$

Ce qui mène aux coordonnées de l'articulation B dans le repère de la base :

$$B_{x\mathcal{R}} = A_x - \rho (\sin \beta (\cos \psi \cos \phi + \sin \psi \cos \theta \sin \phi) \\ + \sin \alpha (\cos \beta \cos \psi \sin \phi + \cos \beta \sin \psi \cos \theta \cos \phi) + \sin \psi \sin \theta \cos \alpha \cos \beta)$$

$$B_{y\mathcal{R}} = A_y - \rho (\sin \beta (\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi) \\ + \sin \alpha (\cos \beta \sin \psi \sin \phi - \cos \beta \cos \psi \cos \theta \cos \phi) - \cos \psi \sin \theta \cos \alpha \cos \beta)$$

$$B_{z\mathcal{R}} = A_z - \rho (\sin \theta \sin \phi \sin \beta - \sin \theta \cos \phi \sin \alpha \cos \beta + \cos \theta \cos \alpha \cos \beta)$$

Où (A_x, A_y, A_z) sont les coordonnées de A dans le repère de référence, et (ψ, θ, ϕ) est le triplet des angles d'Euler du repère du cardan par rapport au repère de base. En calculant pour trois articulations non alignées de la plate-forme leur position comme ci-dessus, la posture du robot est connue. Il est plus commode d'exprimer celle-ci sous la forme d'un sextuplet comprenant les coordonnées du centre et un triplet d'angles d'Euler reliant le repère de la plate-forme à celui de référence.

III.3.2 Retrouver la position de la plate-forme

Dans un premier temps nous allons retrouver le centre C de la plate-forme à partir des trois points B_1, B_2, B_3 déjà déterminés. On veillera à ne pas choisir trois points colinéaires, ce qui ne devrait pas poser de difficultés. Il est possible de trouver un triplet de valeurs μ_1, μ_2, μ_3 tel que l'égalité vectorielle III.4 soit vérifiée.

$$B_1 C = \mu_1 \cdot \frac{B_1 B_2}{\|B_1 B_2\|} + \mu_2 \cdot \frac{B_1 B_3}{\|B_1 B_3\|} + \mu_3 \cdot \frac{B_1 B_2 \wedge B_1 B_3}{\|B_1 B_2 \wedge B_1 B_3\|} \quad (\text{III.4})$$

Les valeurs μ_i , ($i = 1, 2, 3$) sont les coordonnées de C dans le repère

$$(B_1, (B_1 B_2, B_1 B_3, B_1 B_2 \wedge B_1 B_3))$$

Maintenant, considérons cette égalité du point de vue des coordonnées dans le repère mobile $\mathcal{P}$. Cela n'est rien d'autre qu'un système linéaire en μ_i , ($i = 1, 2, 3$). Puisque la géométrie de la plate-forme est fixée, l'équation (III.4) donne les valeurs des μ_i qui sont indépendantes de la posture actuelle.

Après calcul des coordonnées de B_1, B_2, B_3 dans le repère de référence à partir des mesures des capteurs, les coordonnées absolues du vecteur B_1C peuvent être obtenues en résolvant le système linéaire découlant de l'égalité III.4 quand on considère les coordonnées prises dans le repère $\mathcal{R}$. Finalement nous en déduisons la position de C dans le repère de base par :

$$OC = OB_1 + B_1C$$

Cette dernière équation peut aussi s'écrire

$$OC = \lambda_1 \cdot OB_1 + \lambda_2 \cdot OB_2 + \lambda_3 \cdot OB_3 \quad (\text{III.5})$$

qui est l'expression du point C dans le repère $(O, (OB_1, OB_2, OB_3))$, formulation dont on verra l'intérêt pour étudier l'influence des erreurs de mesures dans la section III.5.1. Ici encore cette équation, considérée dans le repère de référence donne un système linéaire dans les λ_i , ($i = 1, 2, 3$), qui sont les seules inconnues puisque désormais la position de C est parfaitement connue.

III.3.3 Retrouver l'orientation de la plate-forme

La position du centre de la plate-forme est dorénavant connue. Il nous manque encore son orientation pour obtenir la posture sous la forme du sextuplet recherché. Nous devons alors évaluer la matrice de rotation $R_{(\psi, \theta, \phi)}$ effectuant le passage du repère de base $\mathcal{R}$ au repère mobile $\mathcal{P}$. En utilisant une méthode analogue à celle vue précédemment au paragraphe III.3.2, il est possible de trouver un triplet de coefficients tels que pour chaque vecteur de la base (u_x, u_y, u_z) du repère mobile, on peut poser l'égalité vectorielle :

$$u_x = \nu_1 \frac{B_1 B_2}{\|B_1 B_2\|} + \nu_2 \frac{B_1 B_3}{\|B_1 B_2\|} + \nu_3 \frac{B_1 B_2 \wedge B_1 B_3}{\|B_1 B_2 \wedge B_1 B_3\|} \quad (\text{III.6})$$

$$u_y = \sigma_1 \frac{B_1 B_2}{\|B_1 B_2\|} + \sigma_2 \frac{B_1 B_3}{\|B_1 B_2\|} + \sigma_3 \frac{B_1 B_2 \wedge B_1 B_3}{\|B_1 B_2 \wedge B_1 B_3\|} \quad (\text{III.7})$$

$$u_z = \eta_1 \frac{B_1 B_2}{\|B_1 B_2\|} + \eta_2 \frac{B_1 B_3}{\|B_1 B_2\|} + \eta_3 \frac{B_1 B_2 \wedge B_1 B_3}{\|B_1 B_2 \wedge B_1 B_3\|} \quad (\text{III.8})$$

Ces relations sont les caractéristiques résultant des propriétés de la plate-forme qui est un solide indéformable. Les triplets ν_i, σ_i , et η_i sont extraits des équations précédentes qui sont des systèmes linéaires lorsqu'on considère les coordonnées dans le repère $\mathcal{P}$. Dans le repère de référence les relations donnent directement les composantes des vecteurs de base de la plate-forme

dans le repère de référence. Or, par définition, la matrice de rotation qui permet de passer du repère mobile au repère de référence s'écrit :

$$R = \begin{bmatrix} [u_x] & [u_y] & [u_z] \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Ceci est bien la matrice caractérisant la rotation du robot autour de son centre par rapport au repère de base.

III.3.4 Temps de calcul

Le nombre d'opérations va être évalué pour donner une idée du coût d'une telle méthode. Le temps de calcul des triplets de coefficients $\mu_i, \nu_i, \sigma_i, \eta_i$ ($i = 1 \dots 3$) est considéré comme négligeable en regard de celui de la posture. En effet ces coefficients ne dépendent que de l'architecture du robot et à ce titre sont invariables au cours d'un déplacement : ils ne doivent être calculés qu'une seule fois pour un robot donné et peuvent donc être précalculés. De la même façon, la norme des vecteurs B_1B_2, B_1B_3 et $B_1B_2 \wedge B_1B_3$ se calcule une fois pour toutes. A chaque nouvelle posture, en partant de trois points connus de la plate-forme, les équations III.4, III.6 – III.8 demandent chacune 21 additions, 24 multiplications, 9 divisions et 3 racines carrées, soit un total de :

Opération	+	*	÷	√
Nombre	84	96	36	12

TAB. III.1 – *Nombre d'opérations pour retrouver la posture à partir de 3 points*

La table suivante présente les temps mesurés sur des stations SUN 4 IPX et SUN SPARC 10, pour calculer 3 points de la plate-forme à partir des informations des capteurs, pour calculer uniquement la posture à partir des 3 points, et enfin, le total, pour calculer la posture à partir des informations des capteurs seulement. Les temps sont donnés en millisecondes (ms) et représentent une moyenne sur 100 000 itérations. A titre de comparaison, nous rappelons les temps obtenus pour le calcul du modèle géométrique direct : les méthodes numériques rapides calculent une posture en environ une à deux millisecondes sur un SUN 4 IPX.

III.3.5 Conclusion

Le paragraphe III.3 est de grande importance. Il détaille toutes les étapes qui se retrouveront dans les autres paragraphes. Nous ferons régulièrement référence aux notions qui y sont établies.

	SUN 4 IPX	SUN SPARC 10
position de 3 points	0.256	0.069
posture à partir de 3 points	0.097	0.027
Ensemble	0.341	0.102

TAB. III.2 – Cas 2³ : temps de calcul pour retrouver position et orientation (en ms).

III.4 Résolution avec 4 capteurs : cas 2²

Nous supposons que quatre capteurs additionnels équipent deux segments à raison de deux capteurs par segment, ce qui permet de calculer la position de deux articulations de la plate-forme, disons B_1 et B_2 . Avec cette architecture MERLET [Mer93] montre qu'il y a deux solutions au plus, et seulement une en général.

III.4.1 Projection sur un plan

Ainsi, la seule indéterminée restant pour la posture de la plate-forme est l'angle de sa rotation autour de l'axe (B_1B_2) . Par conséquent toute articulation, disons B_3 , se déplace sur un cercle C_3 situé dans un plan P perpendiculaire à (B_1B_2) . Mais B_3 appartient aussi à la sphère $S_3 = \mathcal{S}(A_3, \rho_3)$. Il en

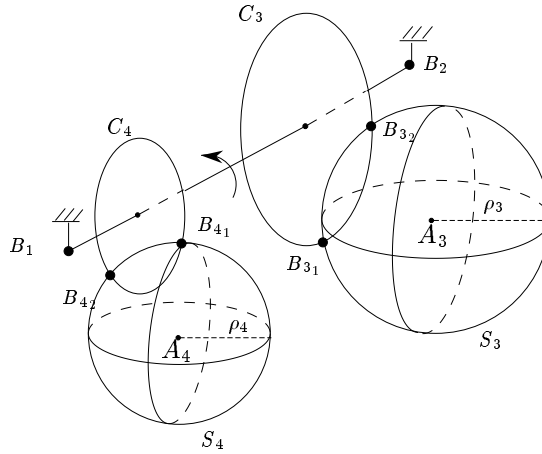


FIG. III.3 – Positions de B_3 et B_4 quand deux points de la plate-forme sont connus

découle que B_3 est à l'intersection de la sphère et du plan P : *i.e.* un cercle $C_3^{S_3}$. En définitive, les positions admissibles pour B_3 sont les intersections des

cercles C_3 et $C_3^{S_3}$, i.e. il y a deux positions pour B_3 (voir figure III.3). Un raisonnement analogue peut être fait pour B_4 et nous projetons les cercles C_4 et $C_4^{S_4}$ sur le plan P . Nous notons M_p la projection sur le plan P d'un point M de l'espace. Soient B_{41p} et B_{42p} les deux positions possibles pour B_4 , et δ_1

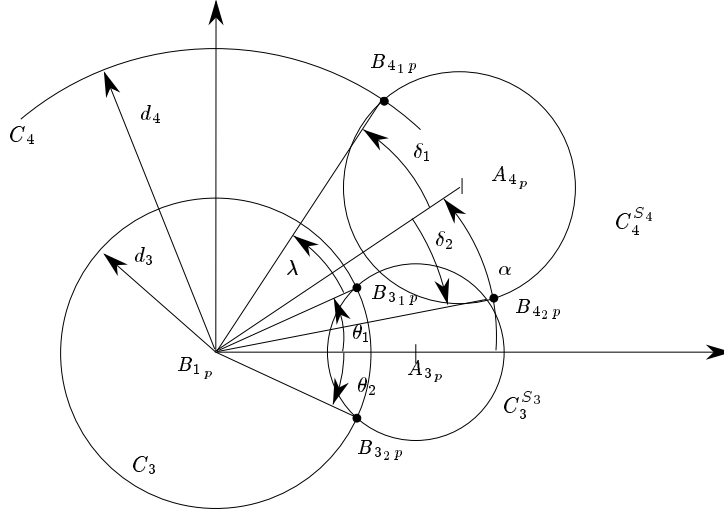


FIG. III.4 – Quatre capteurs additionnels suffisent pour déterminer la posture. Projection dans un plan perpendiculaire à (B_1B_2) .

(respectivement δ_2) l'angle entre $B_{1p}A_{4p}$ et $B_{1p}B_{41p}$ (respectivement $B_{1p}B_{42p}$ et $B_{1p}A_{4p}$).

Soit λ l'angle entre $B_{1p}B_{3p}$ et $B_{1p}B_{4p}$. D'après la figure III.4 nous avons :

$$\delta_1 = \theta_1 + \lambda - \alpha \quad (\text{III.10})$$

Des considérations purement géométriques montrent que $\delta_1 = -\delta_2$. Ainsi

$$\delta_2 = -\delta_1 = -\theta_1 - \lambda + \alpha \quad (\text{III.11})$$

Des équations (III.10) et (III.11) nous déduisons

$$\delta_2 = \theta_2 + \lambda - \alpha = -\theta_1 + \lambda - \alpha \quad (\text{III.12})$$

et $\theta_2 = -\theta_1$.

III.4.2 Nombre de solutions

D'après l'équation III.12, les deux positions de B_3 seront valides si et seulement si $\lambda = \alpha$ (cela doit être vérifié pour chaque articulation B_3, B_4, B_5, B_6).

Hormis ce cas particulier, une solution unique peut toujours être trouvée à l'aide de quatre capteurs supplémentaires. En pratique, une position parmi les deux pour B_4 est choisie au hasard, de telle sorte que δ , l'angle entre $B_{1p}A_{4p}$ et $B_{1p}B_{4p}$ est connu (voir équations III.13 et III.14). Cela donne quatre critères pour choisir laquelle parmi B_{3_1} et B_{3_2} est la position courante de B_3 .

$$B_3 = B_{3_1} \quad \text{si} \quad \delta = \theta_1 + \lambda - \alpha \quad \text{ou} \quad -\delta = \theta_1 + \lambda - \alpha \quad (\text{III.13})$$

$$B_3 = B_{3_2} \quad \text{si} \quad \delta = \theta_2 + \lambda - \alpha \quad \text{ou} \quad -\delta = \theta_2 + \lambda - \alpha \quad (\text{III.14})$$

III.4.3 Temps de calcul

La posture courante du manipulateur est calculée en deux étapes. Les temps de calcul, pour chaque étape puis au total, sont donnés dans la table (III.3). D'abord on détermine la position de trois points sur la plate-forme B_1, B_2, B_3 , ensuite à partir de ces trois points on sait retrouver la posture complète du manipulateur. Le point B_1 (respectivement B_2) est calculé directement à partir des mesures des angles α_1, β_1 (respectivement α_2, β_2) et de la longueur ρ_1 (respectivement ρ_2). Quant au troisième point, B_3 , il est calculé comme l'intersection de trois sphères. Le choix entre les deux positions possibles est fait à partir des équations III.13 et III.14.

	SUN 4 IPX	SUN SPARC 10
position de 3 points	1.621	0.616
posture à partir de 3 points	0.098	0.027
Ensemble	1.719	0.652

TAB. III.3 – Cas 2² : temps de calcul pour retrouver position et orientation (en ms).

III.4.4 Conclusion

Nous venons de voir que le problème du modèle géométrique direct auquel on ajoute quatre capteurs supplémentaires n'admet qu'une solution unique, sauf dans quelques cas particuliers où il y en a deux. Dans cette démonstration, seuls quatre segments interviennent. L'exploitation des cinquième et sixième segments permettront de réduire le nombre de cas où il peut y avoir deux solutions.

III.5 Influence des erreurs de mesure pour une solution explicite

Dans les sections III.3 et III.4 le fait de ne travailler qu'avec les informations de longueur des segments équipés de capteurs additionnels doit faire prendre conscience d'un problème. En effet, les capteurs additionnels étant imparfaits *a priori*, la posture que l'on calcule est entachée d'erreurs; et elle ne vérifie plus forcément les équations de longueur pour les trois segments non équipés.

Une première méthode pour pallier cet inconvénient serait d'utiliser le résultat de la position comme estimée initiale pour un algorithme itératif, ce qui assurerait une convergence sûre et rapide de celui-ci. Une autre méthode appliquée est celle qui consiste à faire une moyenne sur les trois orientations obtenues lorsqu'on permute les points B_i dans les équations III.6-III.8 (voir [SA91]).

Quoiqu'il en soit, nous recommandons de choisir avec soin, les deux ou trois (suivant le cas) segments qui seront équipés de capteurs additionnels. Il faudra choisir les segments dont les articulations sur la plate-forme sont le plus éloignées les unes des autres (cas 2^2 et 2^3) et le moins alignées possible (cas 2^3). Dans le cas contraire, les erreurs de mesure des capteurs auront un impact amplifié.

Ces observations indiquent qu'une étude de l'influence des erreurs de mesures sur la posture calculée est nécessaire. Nous venons de voir deux cas où les solutions sont explicites: le cas 2^3 et le cas 2^2 . Nous allons effectuer cette étude de sensibilité aux erreurs de mesures dans ces deux cas [TM94].

Nous décrivons maintenant les grandes étapes des calculs qui seront détaillées dans les sections suivantes. Dans la section III.3 (respectivement III.4) nous avons vu comment obtenir la position de trois points B_1, B_2, B_3 de la plate-forme à l'aide de six (respectivement quatre) capteurs. Il est possible d'exprimer dans le repère de base, les coordonnées du centre de la plate-forme comme combinaison linéaire (équation (III.5)) de ces trois points et d'en extraire une différentiation :

$$dOC = \lambda_1 \cdot dOB_1 + \lambda_2 \cdot dOB_2 + \lambda_3 \cdot dOB_3$$

Soient $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, N_e$ les angles mesurés par les capteurs supplémentaires sur le segment i , où N_e est le nombre de segments équipés de deux capteurs, 2 ou 3 dans notre étude. En faisant intervenir la matrice jacobienne de la position des points B_1, B_2, B_3 par rapport aux mesures d'angles

venant des capteurs supplémentaires, cette équation peut s'écrire :

$$dOC = J \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\beta_1 \\ \vdots \\ d\alpha_{N_e} \\ d\beta_{N_e} \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

où J est une matrice par blocs :

$$J = \begin{bmatrix} J^{\alpha_1} & J^{\beta_1} & \dots & J^{\alpha_{N_e}} & J^{\beta_{N_e}} \end{bmatrix}$$

Chacun de ses blocs (3x1) exprime l'influence de la mesure d'un seul angle, celui indiqué en exposant, sur le centre de la plate-forme par l'intermédiaire la combinaison linéaire (III.5) des trois points calculés. En particulier ces blocs sont totalement indépendants de la précision des capteurs. Enfin il est alors facile de calculer l'erreur sur la position pour une orientation fixée

$$\Delta OC = \sum_{i=1}^{N_e} J^{\alpha_i} \Delta \alpha_i + J^{\beta_i} \Delta \beta_i$$

Cette indépendance permet, pour un manipulateur donné, de calculer une seule fois ces blocs de matrice et de choisir la précision nécessaire sur les capteurs pour garantir une précision voulue sur la position pour une orientation et une altitude données.

Pour illustrer cette approche, nous allons étudier la sensibilité d'un robot en particulier. Ce robot, appelé *main gauche*, est un prototype INRIA dont l'architecture est définie par la table (III.4).

	Base			Plate-forme		
Points	x_B	y_B	z_B	x_P	y_P	z_P
1	-9.7	9.1	0	-3	7.3	0
2	9.7	9.1	0	3	7.3	0
3	12.76	3.9	0	7.822	-1.052	0
4	3	-13	0	4.822	-6.248	0
5	-3	-13	0	-4.822	-6.248	0
6	-12.76	3.9	0	-7.822	-1.052	0

TAB. III.4 – *Main gauche* : coordonnées des centres des articulations dans le repère de base et dans le repère mobile.

III.5.1 Sensibilité : Cas 2²

Dans ce cas $N_e = 2$. Nous utilisons une matrice jacobienne des données des capteurs supplémentaires.

$$dOC = \lambda_1 J_1 d\eta + \lambda_2 J_2 d\eta + \lambda_3 J_3 d\eta \quad (\text{III.16})$$

où $J_i = \frac{\partial OB_i}{\partial \eta}$, $i = 1 \dots 3$, $\eta = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$.

Les matrices J_1, J_2 représentent les matrices jacobienues de l'erreur sur la position des articulations B_1 et B_2 et peuvent s'écrire en fonction des matrices d'influence pure de chacun des capteurs :

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_1^{\alpha_1} & J_1^{\beta_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_2^{\alpha_2} & J_2^{\beta_2} \end{bmatrix}$$

où $J_1^{\alpha_1}, J_1^{\beta_1}, J_2^{\alpha_2}$ et $J_2^{\beta_2}$ sont les matrices (3×1) :

$$J_1^{\alpha_1} = \left[\frac{\partial OB_1}{\partial \alpha_1} \right] \quad J_1^{\beta_1} = \left[\frac{\partial OB_1}{\partial \beta_1} \right] \quad J_2^{\alpha_2} = \left[\frac{\partial OB_2}{\partial \alpha_2} \right] \quad J_2^{\beta_2} = \left[\frac{\partial OB_2}{\partial \beta_2} \right]$$

Chacune de ces matrices est en fait le vecteur dérivé du point B_i par rapport à l'angle α_i ou β_i :

$$J_i^{\alpha_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{B_i}}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial y_{B_i}}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial z_{B_i}}{\partial \alpha_i} \end{bmatrix} \quad J_i^{\beta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{B_i}}{\partial \beta_i} \\ \frac{\partial y_{B_i}}{\partial \beta_i} \\ \frac{\partial z_{B_i}}{\partial \beta_i} \end{bmatrix}$$

pour i valant 1 ou 2. Le point B_3 étant obtenu comme l'intersection de trois sphères dont deux sont centrées en B_1 et B_2 , l'expression de la jacobienne qui lui est associée est plus complexe. B_3 étant une fonction de B_1 et B_2 , on peut écrire :

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{\partial OB_3}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial OB_3}{\partial OB_1} \frac{\partial OB_1}{\partial \eta} + \frac{\partial OB_3}{\partial OB_2} \frac{\partial OB_2}{\partial \eta} \\ &= J_{31} \frac{\partial OB_1}{\partial \eta} + J_{32} \frac{\partial OB_2}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons une expression de la différentiation sur OC qui sépare l'influence de chacun des angles sur le résultat final : $dOC = J \cdot d\eta$ avec

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \lambda_1 J_1^{\alpha_1} + \lambda_3 J_{31} J_1^{\alpha_1} \\ \lambda_1 J_1^{\beta_1} + \lambda_3 J_{31} J_1^{\beta_1} \\ \lambda_2 J_2^{\alpha_2} + \lambda_3 J_{32} J_1^{\alpha_2} \\ \lambda_2 J_2^{\beta_2} + \lambda_3 J_{32} J_2^{\beta_2} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} J^{\alpha_1} & J^{\beta_1} & J^{\alpha_2} & J^{\beta_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

J est une matrice par blocs, dont chaque bloc ne dépend que d'un seul des angles.

Chaque carte des figures III.5–III.8 a les mêmes caractéristiques décrites dans ce paragraphe. Les coordonnées sur les axes x et y représentent les coordonnées du centre de la plate-forme pour une altitude et une orientation fixées. Les valeurs portées sur l'axe z sont la norme du vecteur d'erreur sur la position du centre de la plate-forme pour une unité de l'erreur sur le capteur correspondant. Ces cartes interprètent graphiquement des résultats que nous pouvons utiliser comme une table de référence. Puisque nous avons fait une approximation au premier ordre de l'erreur, il est possible d'interpoler linéairement une valeur pour un point qui ne se trouverait pas dans la table. En supposant que l'on dispose d'un maillage assez fin, cette approche ne demande qu'un seul calcul sur tout l'espace de travail du robot, indépendamment de la qualité des capteurs que l'on utilisera. Ainsi, pour une précision donnée l'erreur globale sur la position du centre est

$$\Delta OC = J^{\alpha_1} \Delta \alpha_1 + J^{\beta_1} \Delta \beta_1 + J^{\alpha_2} \Delta \alpha_2 + J^{\beta_2} \Delta \beta_2 \quad (\text{III.18})$$

Avec les cartes présentées, nous illustrons comment chaque angle influence la position du centre. Pour chaque figure III.11–III.13, le minimum de l'erreur se situe lorsque x vaut environ -8.00 cm . La figure III.9 indique pour une orientation et une altitude de la plate-forme fixées, pour chaque position en x, y du centre, la norme de l'erreur sur la position du centre de la plate-forme pour des capteurs ayant une erreur de mesure :

$$\Delta \alpha_1 = \Delta \beta_1 = \Delta \alpha_2 = \Delta \beta_2 = 0.0062 \text{ rd}$$

La norme de l'erreur est de l'ordre de 0.5 cm . Cette valeur est celle que l'on peut calculer à partir des influences des mesures d'angles illustrées par les figures III.5–III.8 et de l'équation (III.18). On pourra remarquer que les 0.53 cm de la norme de l'erreur en C (voir figure III.9) sont du même ordre de grandeur que l'erreur approximative calculée sur la position de B_1 ou de B_2 , soit environ 0.34 cm .

III.5.2 Sensibilité : Cas 2³

Dans ce cas $N_e = 3$. Nous utilisons une matrice jacobienne des données des capteurs supplémentaires.

$$dOC = \lambda_1 J_1 d\eta + \lambda_2 J_2 d\eta + \lambda_3 J_3 d\eta \quad (\text{III.19})$$

où $J_i = \frac{\partial OB_i}{\partial \eta}$, $i = 1 \dots 3$, $\eta = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3)$.

Les matrices J_1, J_2, J_3 représentent les matrices jacobienues de l'erreur sur

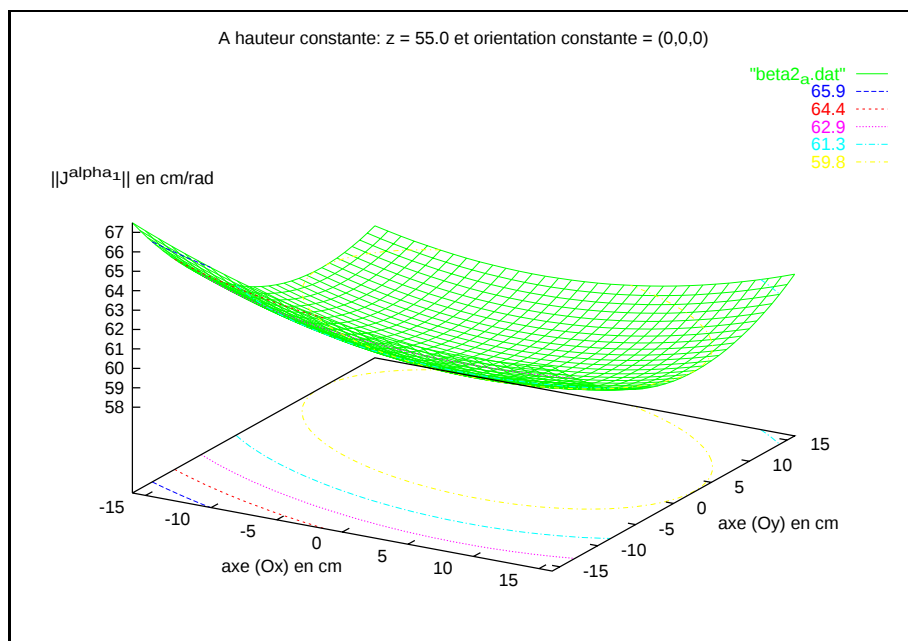


FIG. III.5 – Carte pour J^{α_1} . Main gauche: influence de la mesure d'angle, cas 2²: influence de α_1

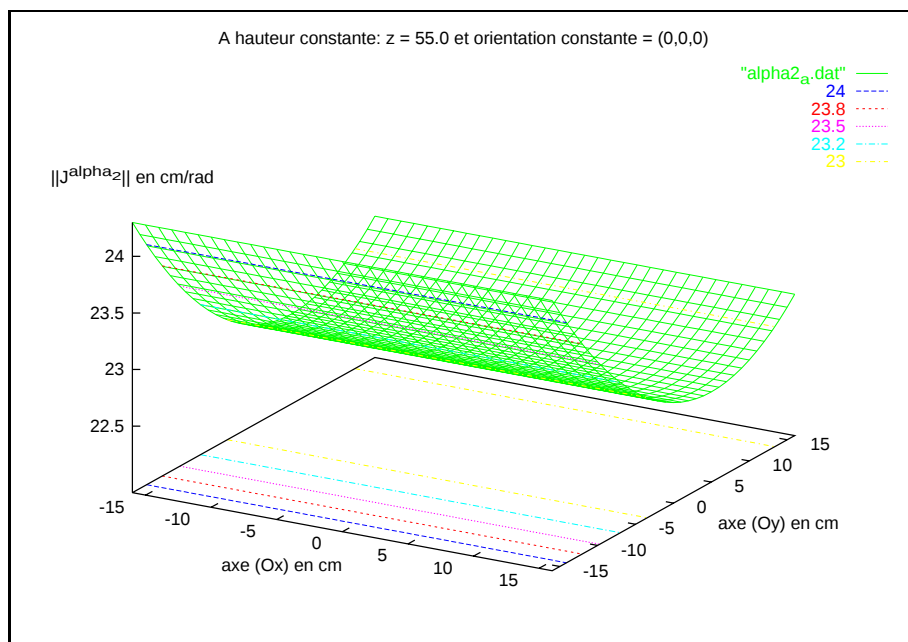


FIG. III.6 – Carte pour J^{α_2} . Main gauche: influence de la mesure d'angle, cas 2²: influence de α_2

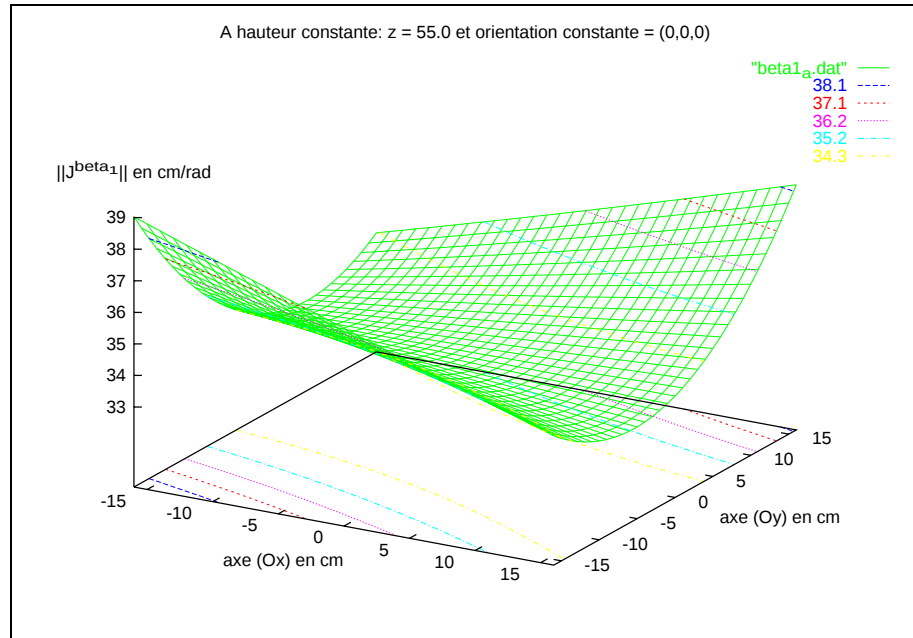


FIG. III.7 – Carte pour J^{β_1} . Main gauche: influence de la mesure d'angle, cas 2²: influence de β_1

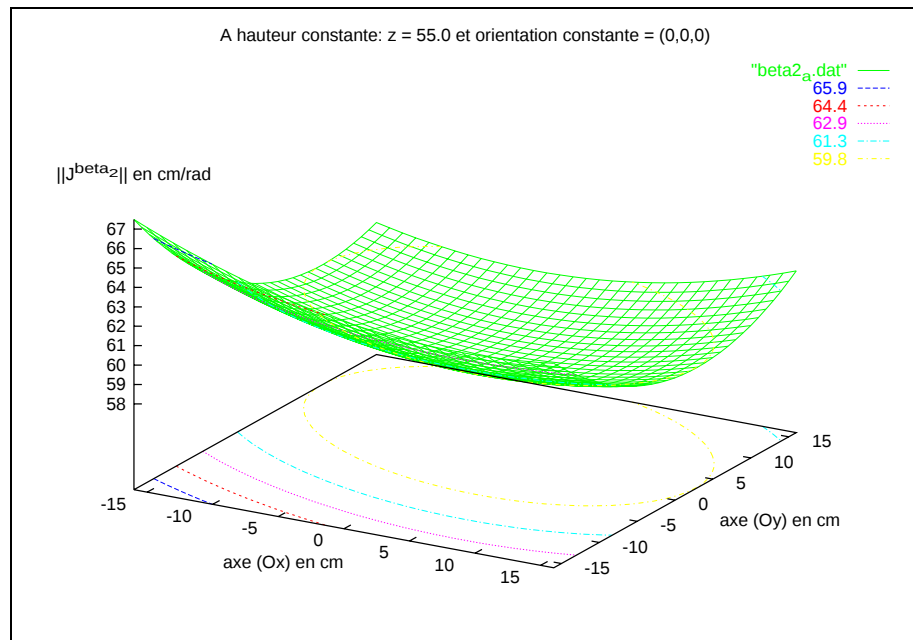


FIG. III.8 – Carte pour J^{β_2} . Main gauche: influence de la mesure d'angle, cas 2²: influence de β_2

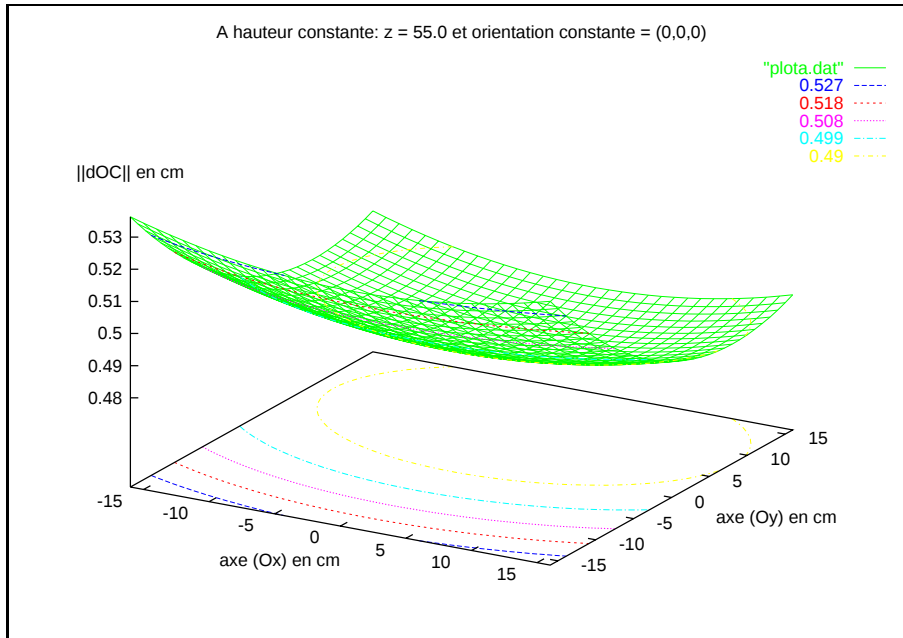


FIG. III.9 – Carte pour $\|\Delta OC\|$. Main gauche : norme du vecteur d'influence d'erreur de position, cas 2^2

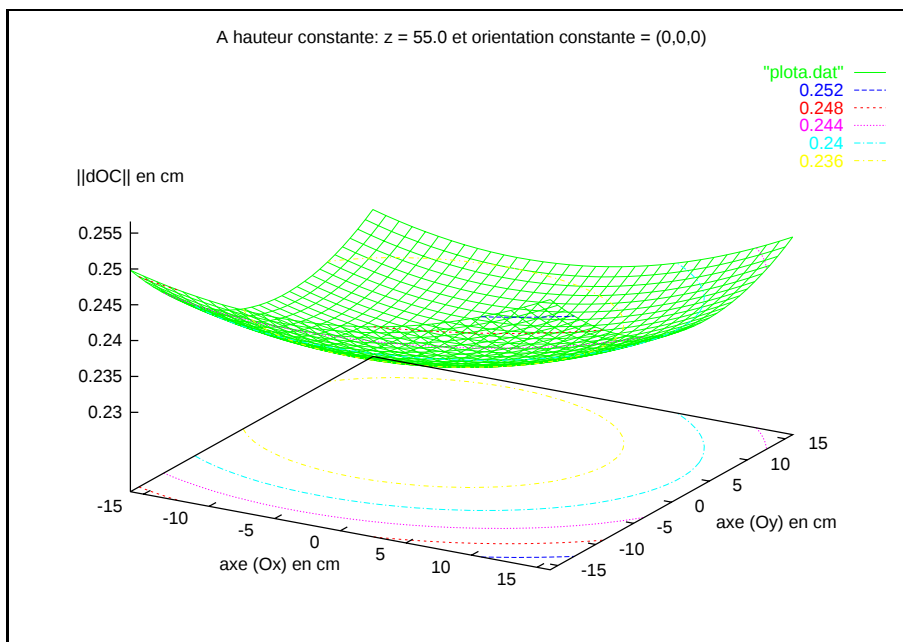


FIG. III.10 – Carte pour $\|\Delta OC\|$. Main gauche : norme du vecteur d'erreur de position, cas 2^3

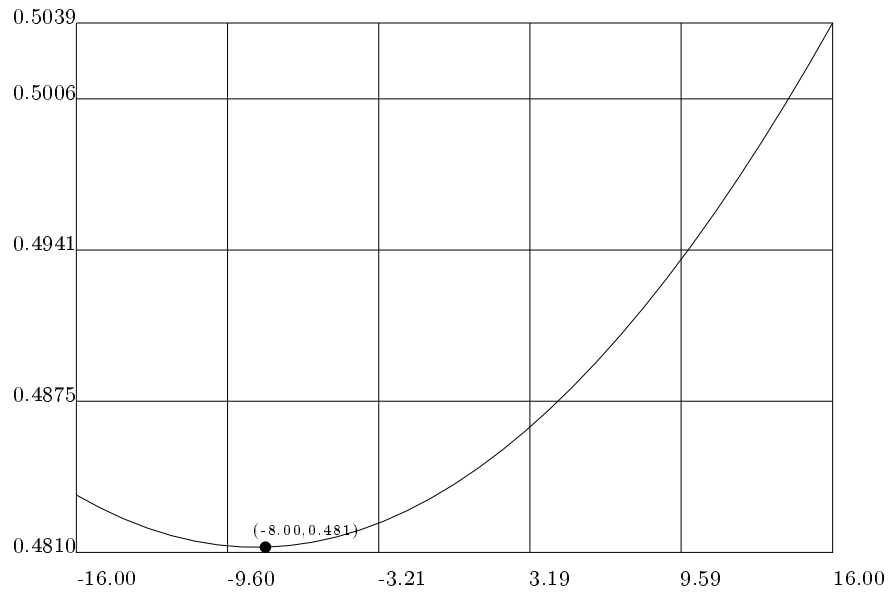


FIG. III.11 – Norme de l'erreur le long de l'axe x pour $y = -1$, $z = 55.0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$, $\phi = 0$.

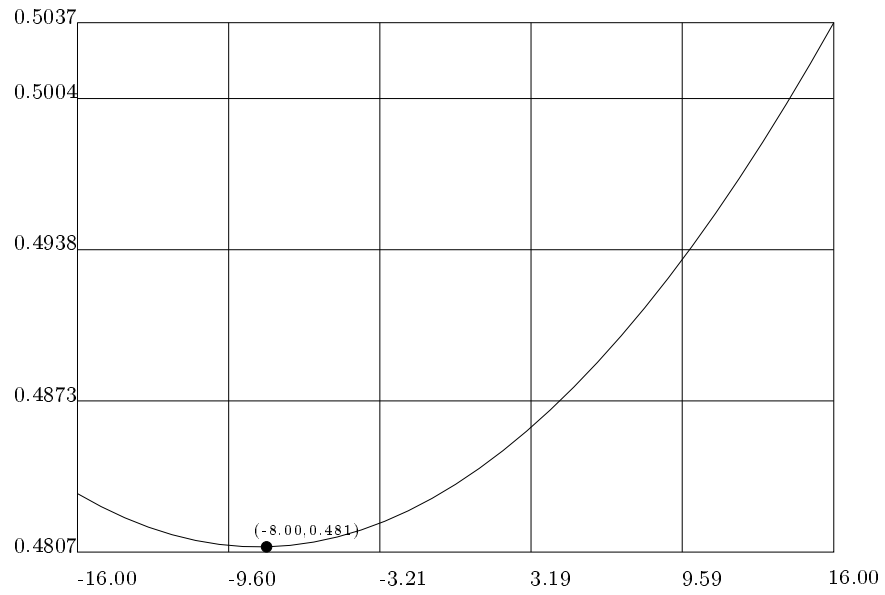


FIG. III.12 – Norme de l'erreur le long de l'axe x pour $y = 0$, $z = 55.0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$, $\phi = 0$.

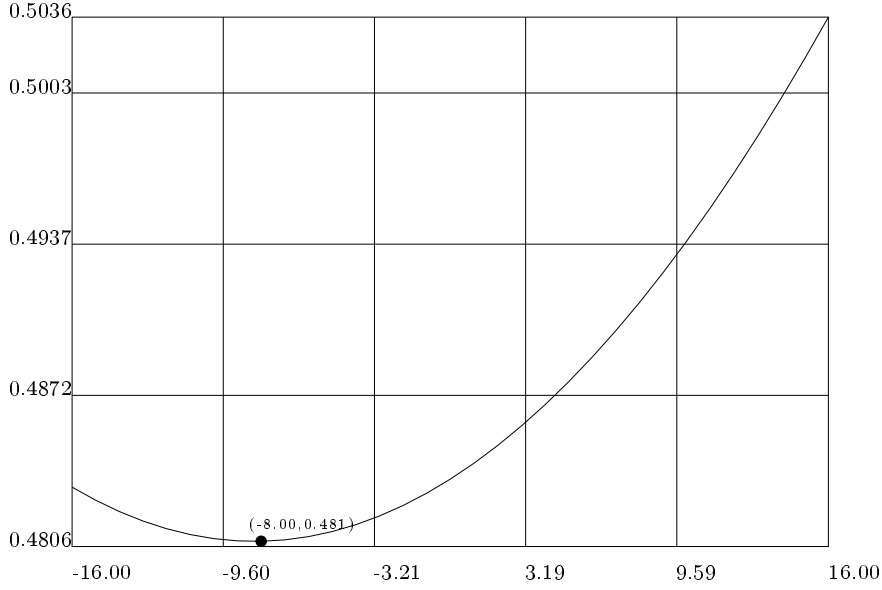


FIG. III.13 – Norme de l'erreur le long de l'axe x pour $y = 1$, $z = 55.0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$, $\phi = 0$.

la position des articulations B_1 , B_2 et B_3 et peuvent s'écrire en fonction des matrices d'influence pure de chacun des capteurs :

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_1^{\alpha_1} & J_1^{\beta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_2^{\alpha_2} & J_2^{\beta_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & J_3^{\alpha_3} & J_3^{\beta_3} \end{bmatrix}$$

où $J_1^{\alpha_1}$, $J_1^{\beta_1}$, $J_2^{\alpha_2}$, $J_2^{\beta_2}$, $J_3^{\alpha_3}$ et $J_3^{\beta_3}$ sont les matrices (3×1) :

$$J_1^{\alpha_1} = \left[\frac{\partial OB_1}{\partial \alpha_1} \right] \quad J_1^{\beta_1} = \left[\frac{\partial OB_1}{\partial \beta_1} \right] \quad J_2^{\alpha_2} = \left[\frac{\partial OB_2}{\partial \alpha_2} \right] \quad J_2^{\beta_2} = \left[\frac{\partial OB_2}{\partial \beta_2} \right]$$

$$J_3^{\alpha_3} = \left[\frac{\partial OB_3}{\partial \alpha_3} \right] \quad J_3^{\beta_3} = \left[\frac{\partial OB_3}{\partial \beta_3} \right]$$

Par conséquent nous obtenons $dOC = J \cdot d\eta$ avec

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 J_1^{\alpha_1} & \lambda_1 J_1^{\beta_1} & \lambda_2 J_2^{\alpha_2} & \lambda_2 J_2^{\beta_2} & \lambda_3 J_3^{\alpha_3} & \lambda_3 J_3^{\beta_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J^{\alpha_1} & J^{\beta_1} & J^{\alpha_2} & J^{\beta_2} & J^{\alpha_3} & J^{\beta_3} \end{bmatrix}$$

Ainsi, pour une précision donnée l'erreur globale sur la position du centre est

$$\Delta OC = J^{\alpha_1} \Delta \alpha_1 + J^{\beta_1} \Delta \beta_1 + \dots + J^{\alpha_3} \Delta \alpha_3 + J^{\beta_3} \Delta \beta_3 \quad (\text{III.20})$$

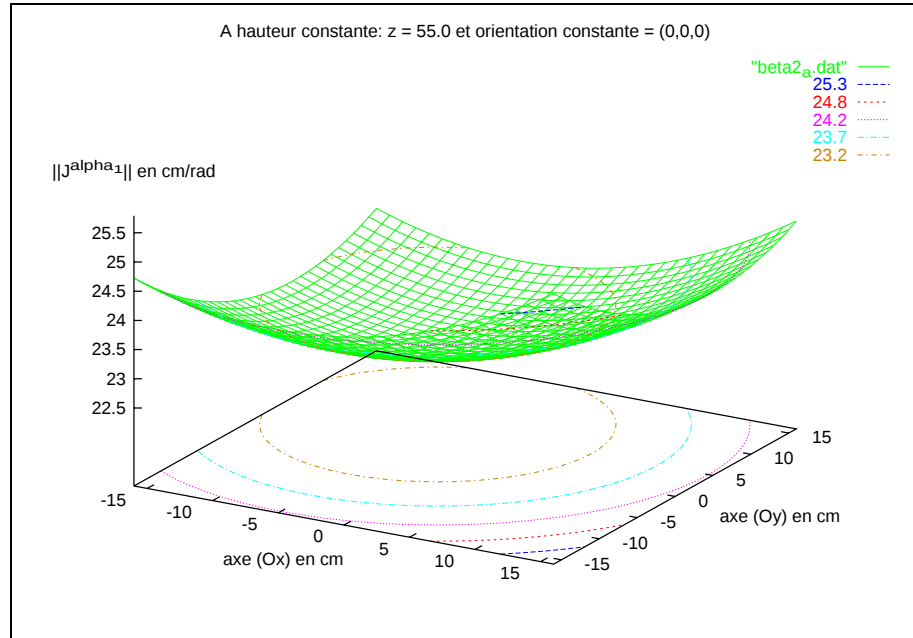


FIG. III.14 – Carte pour J^{α_1} . Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2³ : influence de α_1

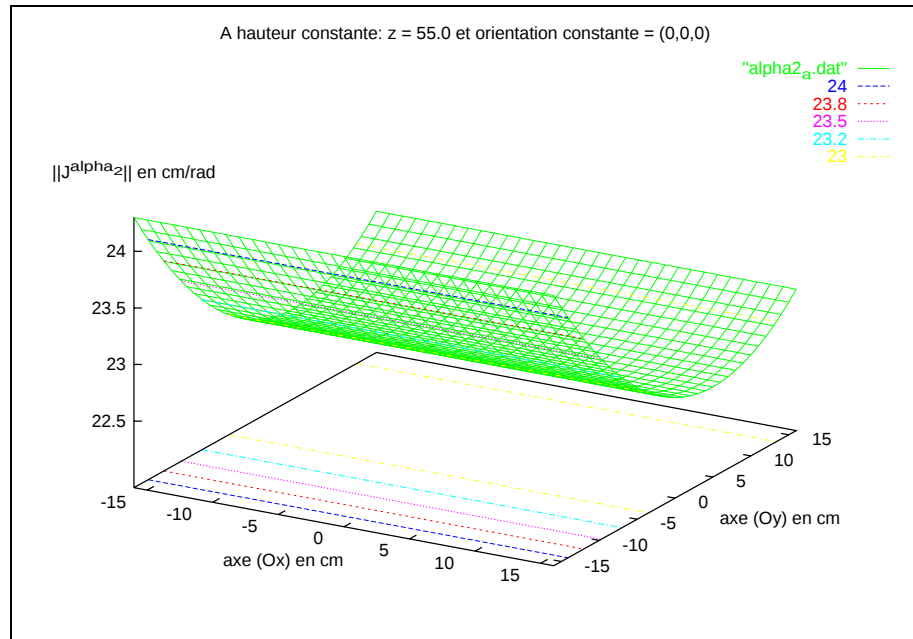


FIG. III.15 – Carte pour J^{α_2} . Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2³ : influence de α_2

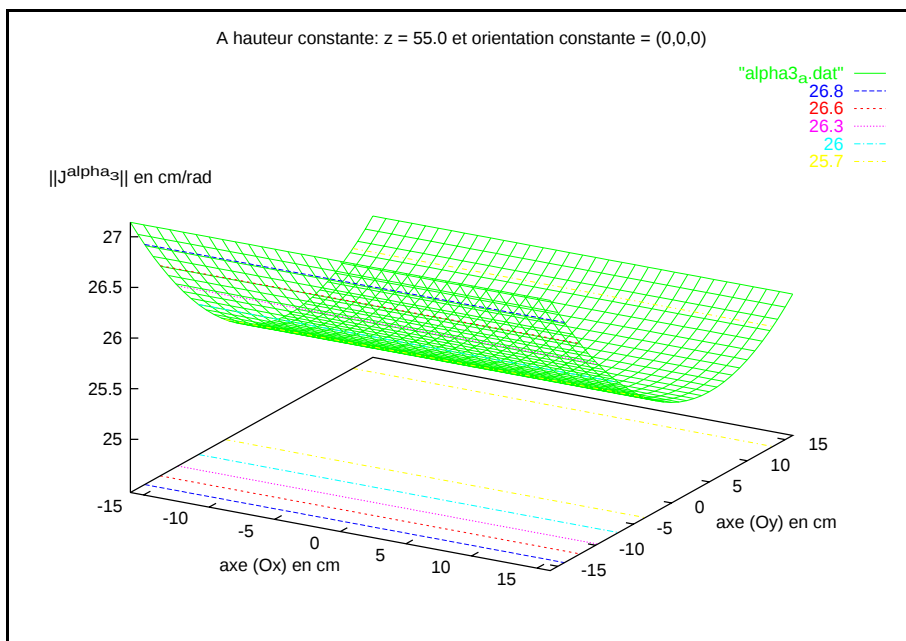


FIG. III.16 – Carte pour J^{α_3} . Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2³ : influence de α_3

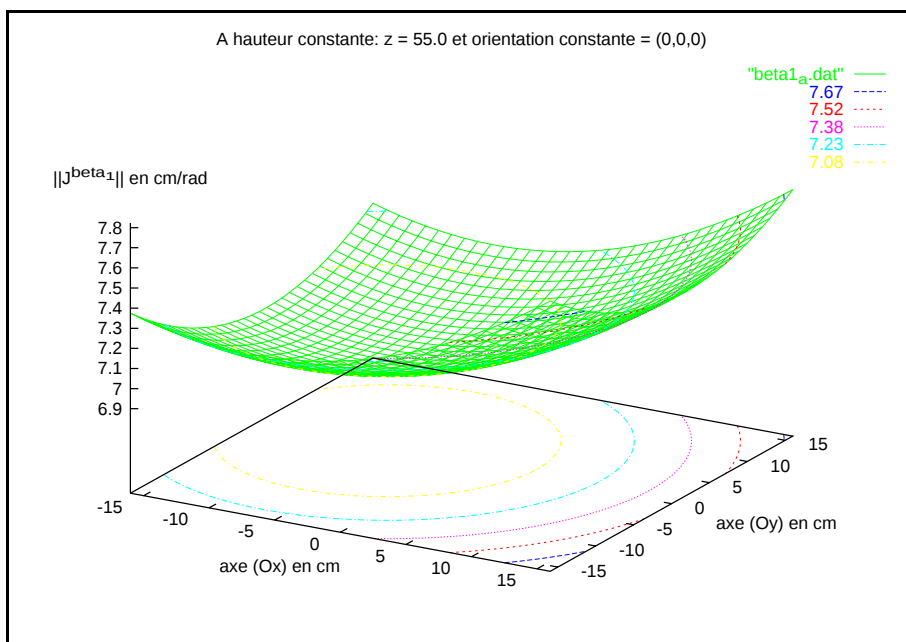


FIG. III.17 – Carte pour J^{β_1} . Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2³ : influence de β_1

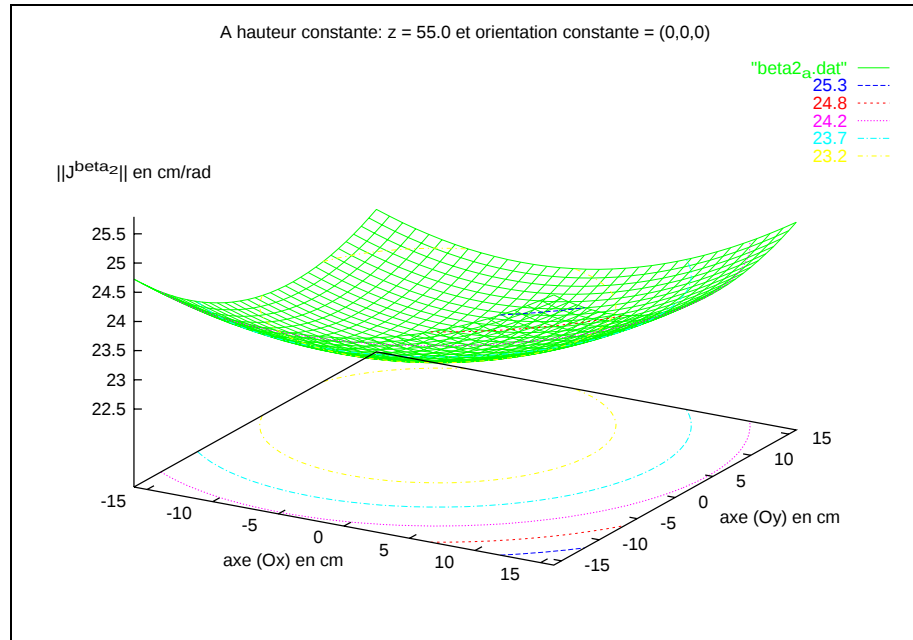


FIG. III.18 – Carte pour J^{β_2} . Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2³ : influence de β_2

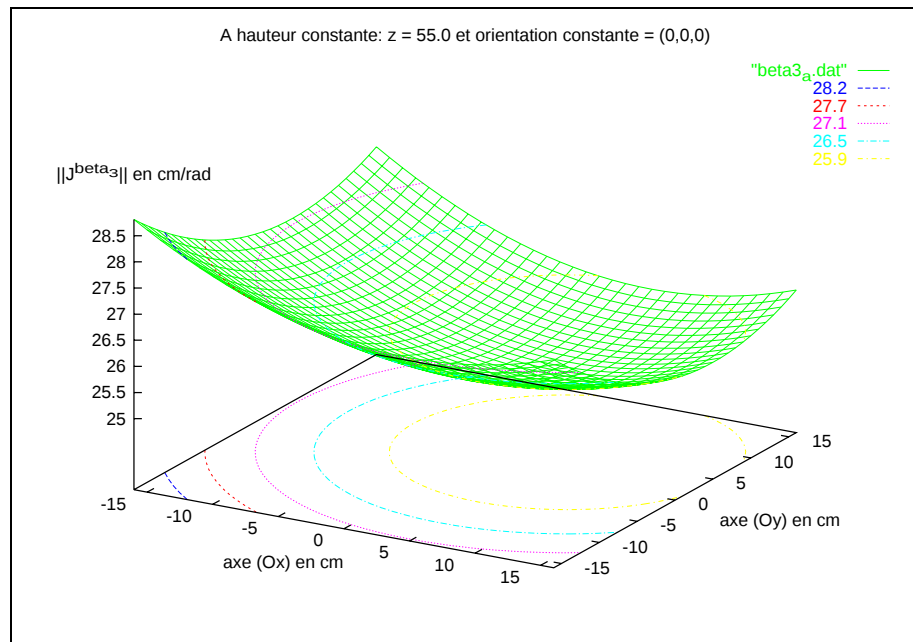


FIG. III.19 – Carte pour J^{β_3} . Main gauche : influence de la mesure d'angle, cas 2³ : influence de β_3

La figure *III.10* indique pour une orientation et une altitude fixées du centre de la plate-forme et pour chaque position en x, y du centre, la norme de l'erreur sur la position du centre de la plate-forme pour des capteurs ayant une erreur de mesure: $\Delta\alpha_1 = \Delta\beta_1 = \dots = \Delta\beta_3 = 0.0062 \text{ rd}$. La norme de l'erreur est de l'ordre de 0.5 cm . Cette valeur est celle que l'on peut calculer à partir des influences des mesures d'angles illustrées par les figures *III.5–III.8* et de l'équation (*III.18*). On rapprochera les 0.2 cm de la norme de l'erreur en C avec l'erreur sur la position de B_1 comme dans la section précédente.

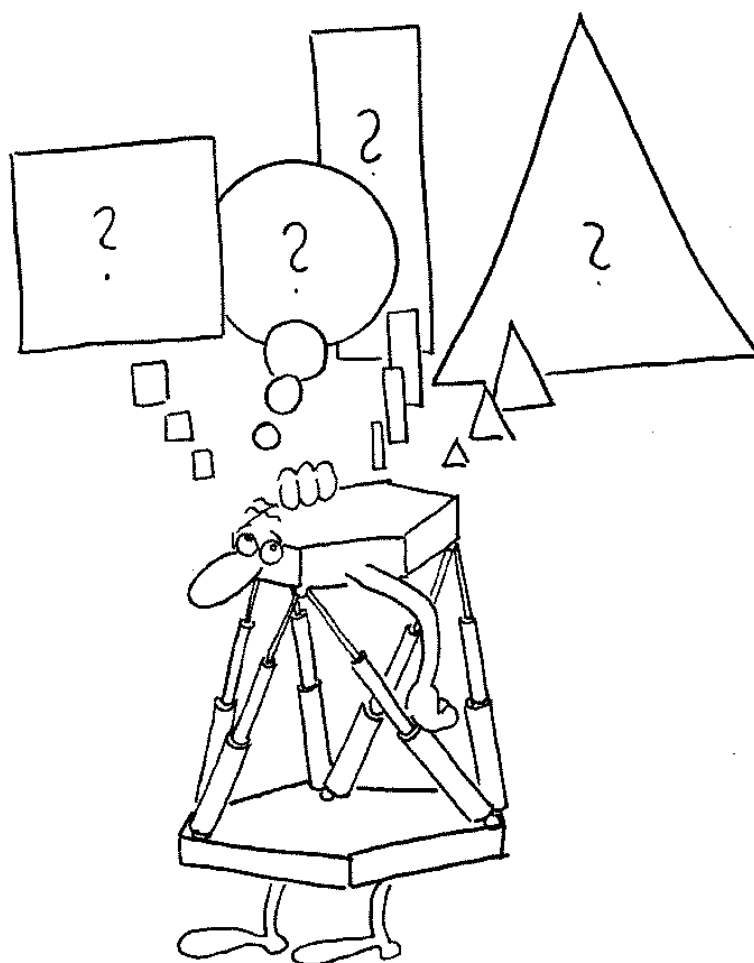
III.6 Conclusion

L'étude des cartes *III.5–III.8* et *III.14–III.19* indique que les capteurs les plus précis devront être utilisés pour mesurer les premiers angles $(\alpha_{i,i=1,\dots,N_e})$. Ils sont en effet ceux dont l'influence est la plus grande dans l'erreur de position du centre de la plate-forme.

L'étude de sensibilité faite, permet d'aider à la conception des robots manipulateurs parallèles. D'abord, elle permet de déterminer la précision des capteurs à utiliser pour obtenir une précision souhaitée dans l'espace de travail. De plus cela permet aussi de savoir quelle est la zone de l'espace de travail qu'il faut utiliser pour avoir une précision optimale. Ensuite nous avons étudié l'influence des erreurs de mesure des capteurs en produisant des cartes permettant de calculer l'erreur sur la position du centre de la plate-forme pour un ensemble donné d'erreurs.

Chapitre IV

Raisonnement géométrique



A partir de ce chapitre, le robot considéré est un robot parallèle spatial. Une méthode naturelle pour résoudre le modèle géométrique direct est d'essayer de compter le nombre de solutions à partir de raisonnements géométriques. D'abord nous ferons ce décompte en déterminant à l'aide de capteurs additionnels la position unique de certains points de la plate-forme afin de pouvoir compter une par une les postures. Ensuite nous utiliserons la géométrie synthétique pour compter ces solutions à partir de courbes sur lesquelles se déplacent certains points de la plate-forme.

IV.1 Raisonnement naturel

Nous allons étudier cas par cas suivant le nombre de capteurs, en commençant par six capteurs, les cas dont on pourra tirer des conclusions sur le nombre de solutions par des considérations sur les figures correspondantes. Il va être possible de dénombrer les solutions en particulier, si déjà les positions d'un ou de plusieurs point sont connues. Le placement de deux capteurs par segment permet de localiser la position de l'articulation sur le mobile.

IV.1.1 Avec 6 capteurs, cas 2^3

La situation où six capteurs sont placés par paires sur trois segments distincts a déjà été résolue géométriquement dans la section III.3.

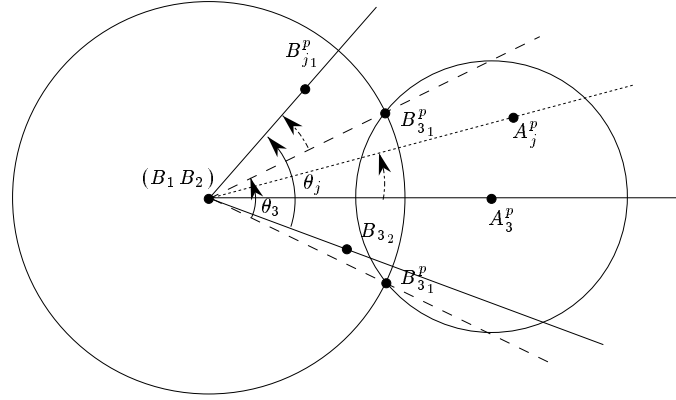
IV.1.2 Avec 4 capteurs, cas 2^2

Dans cette section nous établirons les conditions exactes dans lesquelles deux solutions ou une seule sont admissibles.

Le cas 2^2 élimine 2 capteurs par rapport au cas 2^3 du paragraphe IV.1.1. Les 4 capteurs placés sur les 2 segments (par exemple segments 1 et 2) permettent ainsi de calculer la position de B_1 et B_2 dans le repère de référence. Nous venons ainsi de fixer un axe de rotation B_1B_2 pour la plate-forme du robot. La difficulté vient de ce que B_3 peut se déplacer librement en rotation autour de l'axe B_1B_2 suivant le cercle C_{B_3} . Heureusement il existe une autre contrainte sur B_3 . Il est situé sur une sphère S_3 centrée en A_3 de rayon ρ_3 . Or l'intersection entre une sphère et un cercle comprend deux points. La solution n'étant *a priori* pas unique, les conditions d'unicité doivent être étudiées.

IV.1.2.1 Nombre de solutions

Pour trouver ces conditions plaçons nous, tout d'abord, dans le plan P du cercle C_{B_3} (voir figure IV.1). Notons M^p la projection du point M dans le plan P suivant la direction de (B_1B_2) . La sphère S_3 a pour intersection P un cercle centré en A_3^p . Dans ce plan nous avons alors l'intersection de

FIG. IV.1 – Cas 2² : projection dans le plan perpendiculaire à l'axe (B_1B_2)

deux cercles qui contiennent les solutions possibles de B_3 : soit au plus deux points. Par construction du robot il existe au moins une solution. Maintenant supposons que les deux solutions soient simultanément correctes ; quelles sont alors les implications ? Nous noterons par $(\widehat{MN})$ l'angle entre les points M et N autour de l'axe B_1B_2 soit $(\widehat{B_1^p M^p, B_1^p N^p})$. Si $B_{3_1}^p$ et $B_{3_2}^p$ sont les deux solutions, notons par θ_3 l'angle entre elles : $(\widehat{B_{3_1}^p B_{3_2}^p})$. Il en découle : $(\widehat{A_3^p B_{3_1}^p}) = \frac{\theta_3}{2} = -(\widehat{A_3^p B_{3_2}^p})$. L'angle $\frac{\theta_3}{2}$ est l'angle de rotation du plateau mobile autour de B_1B_2 , mesuré par rapport à A_3^p . Ensuite nous pouvons écrire des relations de CHASLES sur les angles

$$\begin{aligned} \forall j \in 3, \dots, 6 \quad (\widehat{A_3^p A_j^p}) &= (\widehat{A_3^p B_3^p}) + (\widehat{B_3^p B_j^p}) + (\widehat{B_j^p A_j^p}) \\ &= \frac{\theta_3}{2} + (\widehat{B_3^p B_j^p}) + (-\frac{\theta_3}{2}) \\ &= (\widehat{B_3^p B_j^p}) \end{aligned} \quad (IV.1)$$

Par le même raisonnement sur $\theta_j = (\widehat{A_j^p B_j^p})$, $j \in \{4, 5, 6\}$ on obtiendrait que l'angle de rotation mesuré par rapport à A_j^p serait $\frac{\theta_j}{2}$. Pour que la rotation d'angle $\frac{\theta_3}{2}$ conduise à deux solutions valides pour les B_j , $j > 3$ il est donc nécessaire que $\theta_j = \theta_3$, $\forall j > 3$. Nous noterons θ cet angle de rotation. Ceci donne l'implication

$$\exists 2 \text{ solutions} \Leftrightarrow (\widehat{A_3^p A_j^p}) = (\widehat{B_3^p B_j^p}) \quad \forall j \in \{3, \dots, 6\} \quad (IV.2)$$

La réciproque étant vraie, nous obtenons ainsi une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de deux postures. Le cas où $\theta = 0$ est à étudier en particulier. Lorsque θ vaut 0 les deux positions possibles pour chaque B_i

sont confondues : $B_{i_1} \equiv B_{i_2}$. Et il ne peut y avoir alors qu'une seule solution (double).

Théorème IV.1 *Avec deux segments équipés de deux capteurs additionnels chacun, deux postures sont obtenues si et seulement si*

$$\forall j \in \{3, \dots, 6\} \quad (\widehat{A_3^p A_j^p}) = (\widehat{B_3^p B_j^p}) [2\pi] \quad \text{et} \quad \theta = \widehat{A_3^p B_{3_1}^p} \neq 0 [2\pi]$$

Corollaire IV.2 *Avec deux segments équipés de deux capteurs additionnels chacun, une posture unique est obtenue si et seulement si*

$$\exists j \in \{3, \dots, 6\} \quad (\widehat{A_3^p A_j^p}) \neq (\widehat{B_3^p B_j^p}) [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta = \widehat{A_3^p B_{3_1}^p} = 0 [2\pi]$$

Plus exactement le corollaire donne la condition pour qu'il y ait au plus une solution. Mais puisque la construction du robot entraîne qu'il y ait au moins une solution et que l'on suppose être dans l'espace de travail, cela revient à dire une solution et une seule. En outre l'articulation numéro 3 ne joue pas de rôle particulier, ceci est vrai en prenant n'importe quelle articulation différente des deux articulations entièrement équipées de capteurs.

En particulier, pour un manipulateur dont la plate-forme et la base sont planes, deux solutions existent si le segment $B_1 B_2$ est situé dans le plan de la base. Ce cas est visiblement peu fréquent. Pour garantir qu'une seule solution existe quelle que soit la posture, il faut imposer à la plate-forme (resp. la base) d'être plane et à la base (resp. la plate-forme) de ne pas être plane.

IV.1.2.2 Application à un robot à plate-forme triangulaire

Un robot à plate-forme triangulaire est un manipulateur parallèle dont les articulations de la plate-forme sont confondues par paires et dont les articulations de la base ne sont pas forcément coplanaires (voir figure IV.2).

A une renumérotation près, supposons que B_2 est confondue avec B_1 , B_4 avec B_3 et enfin B_6 avec B_5 . De même supposons que les articulations équipées de deux capteurs soient la 1 et la 3. $B_5 \equiv B_6$ est la seule articulation en rotation autour de l'axe $B_1 B_3$. Pour que deux solutions existent, le théorème IV.1 impose que la relation $(\widehat{B_5 B_6}) = (\widehat{A_5 A_6})$ doit être vérifiée et que $\theta \neq 0 [2\pi]$. Or pour une plate-forme triangulaire, $B_5 \equiv B_6$ et donc $(\widehat{B_5 B_6}) = 0 = (\widehat{A_5 A_6})$. Cette dernière égalité revient à dire que nécessairement B_1, B_3, A_5 et A_6 sont coplanaires. Remarquons que le cas où B_5 est lui aussi coplanaire avec ces points, alors c'est une configuration singulière de HUNT.

Théorème IV.3 *Pour un robot dont les articulations de la plate-forme sont confondues deux à deux et ayant deux segments équipés de deux capteurs, deux*

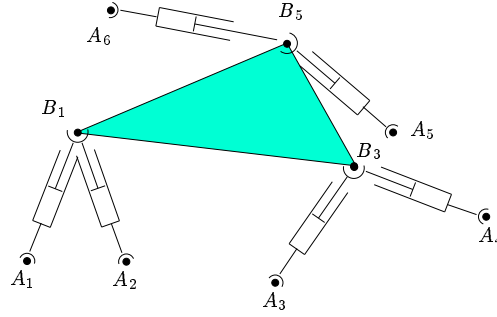


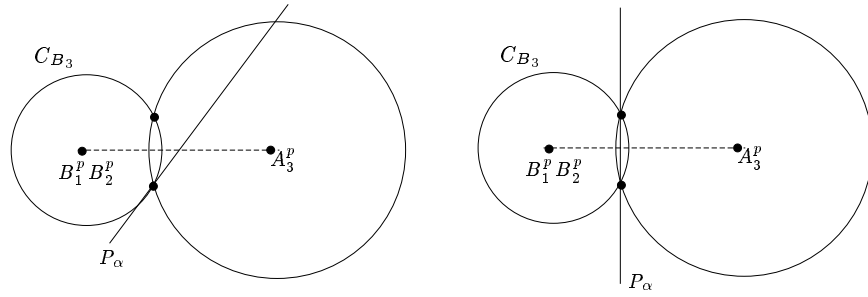
FIG. IV.2 – Robot à plate-forme triangulaire.

(2) solutions sont admissibles si et seulement si $B_1B_3A_5A_6$ sont coplanaires dans un plan $\mathcal{P}$ et $B_5 \notin \mathcal{P}$.

Corollaire IV.4 (Condition suffisante d'unicité) Si B_1, B_3, A_5, A_6 ne sont pas coplanaires alors la solution est unique.

IV.1.3 Avec 5 capteurs, cas $2^2 - 1^1$

Suivant l'étude faite au paragraphe III.2.3, cinq capteurs supplémentaires permettent d'équiper entièrement deux articulations et de mesurer l'angle entre le plan du cardan de l'articulation sur la base et celui de la solution pour une troisième articulation. Le cinquième capteur équipe le segment 3.

FIG. IV.3 – Positions de B_3 dans le cas de 5 capteurs supplémentaires

Cela ramène au cas ayant 4 capteurs (voir IV.1.2), mais avec un gain sensible de simplicité. En effet, la plate-forme dispose toujours d'un axe de rotation B_1B_2 autour duquel se déplacent les autres articulations (voir figure IV.3). Mais au lieu d'évaluer de même les 2 positions possibles pour B_3 et B_4 , ici il suffit de chercher les 2 positions pour B_3 seulement et de constater laquelle vérifie l'équation du plan P_α donnée par le cinquième capteur.

La figure IV.3 se place dans le plan passant par B_3 et perpendiculaire à la droite formée par les articulations B_1 et B_2 . Au niveau de cette coupe le plan P_α est représenté par la droite résultant de son intersection avec le plan de coupe.

Il est aisé de voir que les conditions d'obtention de deux postures sont celles du théorème IV.1 contraintes par la position du plan P_α . Si celui-ci est perpendiculaire au plan formé par B_1, B_2 et A_3 alors il peut encore y avoir deux solutions.

Théorème IV.5 *Pour un robot équipé de cinq capteurs additionnels (cas $2^2 - 1$) deux postures sont possibles si et seulement si*

$$\forall i \in \{3, \dots, 6\} \quad (\widehat{A_3^p A_j^p}) = (\widehat{B_3^p B_j^p}) \text{ et } \theta \neq 0 [2\pi] \text{ et } P_\alpha \perp (B_1 B_2 A_3)$$

IV.1.4 Avec 3 capteurs, cas $2^1 - 1^1$

Ces capteurs ne peuvent plus qu'équiper entièrement une articulation et donner l'orientation du premier plan de cardan pour une deuxième. Nous disposons donc d'un point fixé (soit B_1) et du plan dans lequel se trouve le deuxième (soit B_2). Or B_2 est situé sur un cercle formé par l'intersection de la sphère centrée en A_2 (condition sur l'élongation de la jambe) et d'une autre sphère centrée en B_1 (condition d'une plate-forme solide). La déduction s'impose que B_2 ne peut prendre que deux positions, soit l'intersection entre le cercle précédemment défini et le plan donné par le troisième capteur. Pour chaque position obtenue pour B_2 , cela se ramène au cas ayant 4 capteurs (voir IV.1.2).

Théorème IV.6 *Il existe au plus 4 solutions pour le problème de la cinématique directe d'un manipulateur parallèle équipé de 3 capteurs.*

Théorème IV.7 *Il existe au plus 2 solutions pour le problème de la cinématique directe d'un manipulateur parallèle équipé de 3 capteurs supplémentaires dans les mêmes conditions où il ne peut y avoir qu'une seule solution pour le cas ayant 4 capteurs.*

IV.1.5 Avec 2 capteurs, cas 2^1

Ce cas est à rapprocher d'une structure particulière étudiée dans [IP91]. Cette structure dispose de 6 points de fixations sur la base et 4 sur la plate-forme ; elle est alors dénommée 6-4 (voir figure IV.4). Néanmoins, elle est constituée de 6 segments de longueur variable qui lui assurent 6 degrés de liberté. Trois de ces segments vont avoir leurs articulations respectives sur la plate-forme confondues pour arriver à seulement 4 articulations distinctes sur la plate-forme. La position de l'articulation triple est connue. Nous obtenons nous

aussi une articulation connue en plaçant deux capteurs sur le même segment.

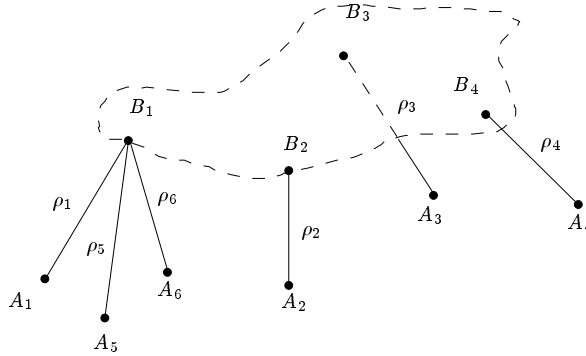


FIG. IV.4 – *Structure parallèle 6-4 d'Innocenti et Parenti-Castelli*

INNOCENTI et PARENTI-CASTELLI montrent que lorsque la position d'une articulation de la plate-forme est fixée et que seules 3 autres articulations sont sur la plate-forme, le problème de la cinématique directe admet au plus 8 solutions. Or notre problème est encore plus contraint, puisque nous avons deux autres articulations sur cette plate-forme qui doivent vérifier chacune une condition de distance par rapport à une articulation de la base. Pratiquement, notre cas revient à rajouter 2 segments supplémentaires $[A_5B_5]$ de longueur ρ_5 et $[A_6B_6]$ de longueur ρ_6 , reliant la base et la plate-forme. Le nombre de contraintes augmentant, il est clair que le nombre de solutions pour cette nouvelle structure ne pourra être qu'inférieur ou égal à 8, *i.e.* le nombre de solutions de [IP91]. Nous verrons dans la section IV.2.5 que le nombre effectif de solutions est de 5. Cela vient d'arguments tirés de [SP95] et qui ne seront définis que dans la section IV.2.

Théorème IV.8 *Il existe au plus cinq (5) solutions pour le problème de la cinématique directe d'un manipulateur parallèle équipé de deux (2) capteurs supplémentaires situés sur le même segment.*

IV.2 Géométrie synthétique

La géométrie synthétique est nommée ainsi pour des raisons historiques et pas forcément de manière judicieuse. Néanmoins nous utiliserons cette expression dans sa signification première. En effet les objets que nous utiliserons (surfaces, etc.) sont le résultat d'une synthèse à partir de points, de droites ou de plans.

Ce type de géométrie est utilisé par BURMESTER, PLÜCKER, CAYLEY, pour ne citer qu'eux. Au contraire des méthodes algébriques, la géométrie

du problème est totalement exploitée et n'est pas limitée par des équations complexes de degré élevé et difficilement manipulables. D'un autre côté cette méthode n'est pas constructive : elle ne permet pas de disposer explicitement des solutions. En outre, en géométrie synthétique il existe peu de méthodes systématiques ; il faut étudier au cas par cas.

FICHTER [Fic75] est allé rechercher cette approche, délaissée au profit de la géométrie analytique, en vue de l'appliquer à l'étude du mouvement des corps.¹ L'utilisation de la géométrie synthétique est particulièrement adaptée à l'étude du comportement des corps en mécanique du solide. FICHTER s'est attaché à l'étude de mécanismes ayant un ou deux degrés de liberté et aux lieux des points que peuvent décrire un de leurs points, droites ou plans. L'apport majeur de sa thèse consiste en les théorèmes *IV.13* et *IV.14*. Il est possible de résumer en quelques mots leurs concepts : pour des solides liés par une articulation d'un certain type, une catégorie d'objets géométriques solidaires du mécanisme décrit d'autres objets dont la classe, le degré ou l'ordre est une valeur identique pour tout objet de la catégorie. Ces travaux ont été suscités par l'observation que pour des mécanismes à un degré de mobilité la surface décrite par un cercle porté par le mécanisme a un ordre valant le double de l'ordre de la courbe décrite par le mécanisme lui-même.

IV.2.1 Homogénéisation simple

La théorie des nombres imaginaires a été introduite en analyse, en particulier par la théorie des équations et des fonctions à variables complexes. Son grand intérêt est d'avoir pu généraliser de nombreux théorèmes, sans restrictions dûes aux variables réelles, en éliminant les cas à distinguer. Nous verrons que la géométrie projective a introduit les points, droite et plan à l'infini à partir de considérations analogues.

IV.2.1.1 Transformations projectives

Une transformation géométrique est une généralisation de la notion de fonction. Analytiquement une transformation géométrique d'un point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) s'écrit :

$$\begin{cases} x' &= \Phi(x, y, z) \\ y' &= \Upsilon(x, y, z) \\ z' &= \Psi(x, y, z) \end{cases}$$

Bien que ce soit une représentation analytique, elle conserve un sens géométrique : à un point de l'espace est associé un autre point de l'espace dont les coordonnées sont exprimées comme ci-dessus.

1. *Kinematics* à différencier de la *cinématique* où la vitesse fait aussi l'objet d'étude.

Les transformations affines sont de telles transformations où les fonctions générales Φ, Υ, Ψ sont des fonctions linéaires de x, y, z . Elles conservent la notion de points infiniment distants. Les coordonnées du point transformé ne peuvent devenir infinies que si celles du point avant transformation le sont. Ce qui n'est pas le cas des transformations projectives.

Les fonctions générales de transformation deviennent, dans le cas d'une transformation projective, des fractions rationnelles linéaires ayant toutes le même dénominateur :

$$\begin{cases} x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \end{cases}$$

Ici la quatrième coordonnée classiquement introduite vaut $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4$. Cette formulation indique bien que tout point a une image finie sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas. Toute image d'un point se rapprochant du plan défini par l'équation :

$$a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$$

se déplace vers l'infini. On dit que les points appartenant à ce plan sont *envoyés* à l'infini. Son image est appelée *plan à l'infini* et les points lui appartenant, *points à l'infini*. Cette particularité amène à l'introduction de *coordonnées homogènes*. KLEIN [Kle39] a utilisé les coordonnées homogènes pour asseoir la géométrie projective sur des bases algébriques et éliminer toute dépendance vis-à-vis de la géométrie euclidienne. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n , que l'on plonge dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ de dimension n . Pour un point de $\mathbb{E}$ de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on associe les coordonnées homogènes $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ définies par

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_{n+1}} \quad x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_{n+1}} \quad \dots \quad x_n = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$$

où ξ_{n+1} est la variable d'homogénéisation. Ces valeurs varient indépendamment l'une de l'autre ; mais elles ne peuvent clairement pas s'annuler simultanément ; aucune ne peut être infinie. Tout point de l'espace affine correspond à un ensemble de points de l'espace $\mathbb{C}^{n+1}$ qui sont tous identiques à un facteur multiplicatif non-nul près et qui forment une droite passant par l'origine et que KLEIN appelle *rayon*. Réciproquement tout point de $\mathbb{P}^n$ défini à un facteur multiplicatif non-nul près, dont la dernière composante n'est pas nulle, correspond à un même point affine. Le cas où $\xi_{n+1} = 0$ transforme, par le biais

du quotient, les coordonnées affines en valeurs infinies : ce sera un point à l'infini. $\mathbb{P}^n$ est l'ensemble des droites passant par l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ privées de l'origine. Les solutions à l'infini et ayant une ou plusieurs composantes nulles sont indéfinies.

Le théorème fondamental lorsqu'il s'agit de connaître le nombre de points d'intersections dans un système polynomial est le théorème de Bézout.

Théorème IV.9 (Théorème de Bézout) *Un système d'équations polynomiales à n inconnues et n équations de degré $d_{i,i=1,\dots,n}$ admet $\prod_{i=1}^n d_i$ solutions si l'intersection est finie.*

L'homogénéisation est un concept algébrique qui a permis de donner une explication à l'incohérence géométrique apparente de l'intersection de deux cercles dans le plan. En effet le théorème de BÉZOUT prévoit qu'il y a en général quatre points d'intersection pour deux coniques, donc *a fortiori* pour deux cercles. Or chacun sait que deux cercles n'ont au plus que deux points en commun. Dans l'espace il semble que l'intersection de deux sphères présente le même type d'incohérence. Leur intersection (un cercle) n'est que de degré deux où on attendrait un degré égal à quatre.

L'homogénéisation a permis d'expliquer ce phénomène et d'identifier les solutions *manquantes*.

Définition IV.1 (Équation homogène) *On dira d'une équation qu'elle est homogène si et seulement si tous les monômes qu'elle contient sont de même degré.*

Le principe de l'homogénéisation est donc de faire un changement de variables pour que les monômes présents aient le même degré. Le changement de variables se fait à l'aide d'une nouvelle inconnue dite *variable d'homogénéisation* qui a un rôle de facteur d'échelle. Ces notions peuvent être retrouvées dans [Kle39, Fic75, Cox87, Hun90, Mou94].

IV.2.1.2 Dans le plan

En deux dimensions, dans l'espace projectif $\mathbb{P}^2$, nous étudions l'intersection de deux cercles.

L'équation d'un cercle de centre (a, b) et de rayon r en fonction des inconnues x et y , coordonnées cartésiennes d'un quelconque de ses points, s'écrit :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Soit w la variable d'homogénéisation. Ici l'ensemble des variables est $\{x, y\}$. L'équation précédente se réécrit :

$$\left(\frac{x}{w} - a\right)^2 + \left(\frac{y}{w} - b\right)^2 - r^2 = 0 \quad (\text{IV.4})$$

En faisant varier la valeur de w , il est aisé de se rendre compte qu'elle joue effectivement un rôle de facteur d'échelle sur le cercle considéré. Il ne reste maintenant plus qu'une étape pour disposer d'une équation homogène par rapport aux trois variables $\{x, y, w\}$; multiplions l'équation par w^2 :

$$(x - a w)^2 + (y - b w)^2 - r^2 w^2 = 0 \quad (\text{IV.5})$$

Tous les termes sont bien de degré deux. Le système de coordonnées $\{x, y, w\}$ définit un système de coordonnées planes homogènes.

L'axe $(Ow) \equiv w = 0$ correspond à la droite à l'infini (voir l'équation (IV.4)) et coupe aussi le cercle. A l'infini, $w = 0$, l'équation (IV.5) prend la forme :

$$x^2 + y^2 = (x + i y)(x - i y) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Ainsi la droite à l'infini coupe le cercle en deux points que l'on appellera les *points cycliques*² dont les coordonnées sont :

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ x = +iy \end{array} \right. \quad \mathcal{J} = \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ x = -iy \end{array} \right.$$

Remarquons l'indépendance de ces points par rapport aux paramètres définissant le cercle. Ces points appartiennent alors à tout cercle du plan. Ils seront donc dans l'intersection de deux cercles quelconques. Voilà les deux points manquant dans la borne de BÉZOUT. Il est important de remarquer que ces points sont indissociables. Ils ne peuvent appartenir individuellement (l'un sans l'autre) à une courbe algébrique réelle.

Nous venons d'expliquer, dans le cas de l'intersection de deux cercles, l'écart entre le nombre de solutions prévu par le théorème de BÉZOUT et le nombre de solutions réelles. Néanmoins la borne de BÉZOUT est juste puisque deux cercles ont effectivement **quatre** points d'intersection dans l'espace projectif.

IV.2.1.3 Dans l'espace

En passant à la troisième dimension, $\mathbb{P}^3$, les objets géométriques que nous considérons pour notre raisonnement sont les sphères. En effet nous avons déjà dit plus haut qu'elles semblent présenter une incohérence vis-à-vis du théorème de BÉZOUT.

L'équation d'une sphère de centre (a, b, c) et de rayon r s'écrit :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0 \quad (\text{IV.7})$$

2. *imaginary circular points*

Par un raisonnement totalement similaire à celui suivi en IV.2.1.2 nous allons homogénéiser cette équation et trouver l'objet qui faisait défaut dans l'intersection de deux sphères par rapport au décompte de BÉZOUT. L'équation homogène d'une sphère se traduit de (IV.7) en :

$$(x - a w)^2 + (y - b w)^2 + (z - c w)^2 - r^2 w^2 = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Un système de coordonnées spatiales homogènes est défini par (x, y, z, w) . Il est composé de quatre plans de référence avec le plan à l'infini $w = 0$. Le plan à l'infini et la sphère se coupent suivant une courbe produite par l'intersection des surfaces :

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Ici encore, cette intersection à l'infini est absolument indépendante de la sphère considérée. Le degré de cette courbe est deux et correspond bien à la valeur manquante pour l'intersection complète de deux sphères. Cette courbe imaginaire de degré deux et commune à toute sphère est appelée ombilic.³ En outre regardons ce qui se passe dans le plan $(xOy) \equiv z = 0$. L'équation (IV.9) est identique à l'équation (IV.6). De cette égalité il est aisé de déduire que les points imaginaires $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ appartiennent aussi à l'ombilic et donc à toute sphère.

IV.2.1.4 Généralisation à d'autres courbes et surfaces

FICHTER [Fic75] étend le décompte des solutions imaginaires à l'infini à des courbes et surfaces quelconques.

Définition IV.2 *La circularité d'une courbe (respectivement surface) réelle est la multiplicité de l'appartenance du couple de points cycliques ($\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$) dans la courbe (respectivement surface).*

Pratiquement, la valeur de la circularité est la multiplicité de l'ombilic ou des points cycliques lorsqu'on considère l'intersection du plan à l'infini avec l'équation homogène.

Théorème IV.10 (Bézout étendu, courbe/courbe) *Deux courbes de degrés respectifs n_1 et n_2 et de circularités respectives p_1 et p_2 , ont une intersection contenant un nombre de points réels d'au plus :*

$$n_1 n_2 - 2 p_1 p_2$$

3. imaginary spherical circle

(si le nombre de points d'intersection est fini)

Théorème IV.11 (Bézout étendu, courbe/surface) Une courbe et une surface de degrés respectifs n_1 et n_2 et de circularités respectives p_1 et p_2 , ont une intersection contenant un nombre de points réels d'au plus :

$$n_1 n_2 - 2 p_1 p_2$$

(si le nombre de points d'intersection est fini)

Théorème IV.12 (Bézout étendu, surface/surface) Deux surfaces de degrés respectifs n_1 et n_2 et de circularités respectives p_1 et p_2 , ont une intersection contenant une courbe d'ordre au plus :

$$n_1 n_2 - 2 p_1 p_2$$

(si la dimension de l'intersection est 1)

Notons que pour des courbes ou des surfaces dont la circularité est nulle, les théorèmes précédents sont cohérents avec la version usuelle du théorème de BÉZOUT, c'est à dire que la borne est atteinte. La notion de circularité permet d'éliminer un certain nombre de solutions à l'infini.

IV.2.1.5 Applications

Voici quelques exemples et résultats permettant d'illustrer l'intérêt de la circularité et de l'homogénéisation. D'autres applications sont à consulter en appendice A.

IV.2.1.5.1 Les coniques réelles Il est intéressant de connaître la circularité pour d'autres courbes de la famille des cercles : les coniques. L'équation réduite générale d'une conique peut se mettre sous la forme :

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

En homogénéisant en w :

$$ax^2 + by^2 + cw^2 = 0$$

Ce qui donne l'intersection avec la droite à l'infini :

$$ax^2 + by^2 = 0$$

Cela montre que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ ne peuvent appartenir à cette intersection que si $a = b$; c'est à dire si la conique considérée est un cercle. Parmi les coniques réelles, seul le cercle est de circularité non nulle.

Par un raisonnement analogue il est possible de montrer qu'aucune quadrique, hormis la sphère, ne contient l'ombilic. Parmi les quadriques réelles, seule la sphère est de circularité non nulle.

IV.2.1.5.2 Courbe du coupleur Nous avons vu en II.1 comment étudier de manière algébrique le nombre de solutions du MGD du robot plan. Maintenant nous allons montrer le même résultat en utilisant uniquement la notion de circularité et le théorème de BÉZOUT.

Considérons alors ce robot dont on aurait dissocié, par exemple, l'articulation B_3 du segment 3 (voir figure IV.5). Le mécanisme constitué des

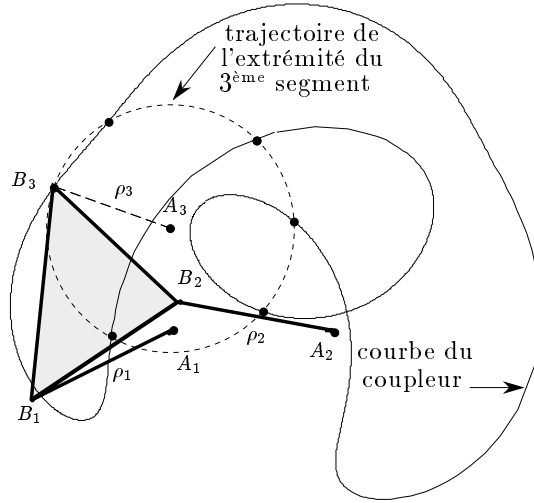


FIG. IV.5 – Mécanisme à 4 barres et courbe du coupleur

articulations A_1, A_2, B_1, B_2 et B_3 dont les longueurs ρ_1 et ρ_2 sont figées, est appelé *mécanisme à quatre barres*. Il n'a plus qu'un degré de liberté. Le MGD du robot plan a autant de solutions que n'en a l'intersection entre la courbe décrite par le mécanisme à quatre barres en B_3 et le cercle centré en A_3 de rayon ρ_3 . En effet le mécanisme a été dissocié en B_3 , mais le problème originel du robot parallèle ne l'est pas.

Nous allons essayer d'obtenir le nombre de solutions au MGD du robot plan en calculant l'intersection de deux courbes. La courbe tracée par B_3 appartenant au mécanisme à quatre barres est appelée *courbe du coupleur* et c'est une sextique [Hun90].⁴ L'autre courbe est un cercle banal. Il n'est pas nécessaire de redémontrer le calcul analytique menant à l'équation homogène de la courbe du coupleur, ce calcul est détaillé par HUNT dans [Hun90]. L'intersection de cette courbe avec le plan à l'infini est :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \|B_1B_2\|^2 = 0$$

4. courbe d'ordre six.

Hormis le cas où B_1 et B_2 sont confondus et où la courbe du coupleur est dégénérée, il apparaît que la circularité de cette courbe d'ordre six est trois. C'est une *sextique* tri-circulaire; elle est de circularité maximale.

Le nombre de solutions au MGD est donc le résultat donné par le théorème IV.10 pour une courbe d'ordre deux et de circularité un avec une courbe d'ordre six et de circularité trois, soit $2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$. Ce qui est bien cohérent avec les résultats déjà démontrés (voir section II.1). Il est même possible de trouver un exemple avec six solutions réelles comme la figure IV.5.

IV.2.1.5.3 Deux coupleurs associés En outre, les notions introduites offrent un moyen très élégant de résoudre un certain nombre de problèmes en théorie des mécanismes. Considérons le mécanisme composé de deux mécanismes à quatre barres coopérant. Ils sont joints par leur extrémité : $B_3 \equiv B'_3$. Ce problème est étudié par INNOCENTI [Inn93] qui utilise une méthode constructive et donc laborieuse. Il obtient un polynôme mono-variable de degré dix-huit, soit au plus autant de configurations possibles; de plus il présente un exemple ayant dix-huit solutions réelles.

En utilisant la notion de circularité, nous sommes en présence de deux courbes de degré six et de circularité trois ayant une intersection finie (voir paragraphe précédent). Par le théorème IV.10 il est immédiat de calculer le nombre de points appartenant à l'intersection de deux mécanismes à quatre barres : $6 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

IV.2.2 Acabit d'un mécanisme articulé

Pour commencer, nous nous intéressons au type d'articulation pour lequel nous étudierons la propriété d'acabit. Pour cela nous introduisons la notion de connexion algébrique.

Définition IV.3 (Connexion algébrique [Fic75]) *Une connexion entre deux solides est dite algébrique si tous les lieux des points tracés par n'importe quelle partie du mécanisme sont algébriques, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent pas de discontinuités et que l'articulation n'est pas hélicoïdale.*

Les résultats qui suivent ne portent que sur des connexions algébriques à un degré de liberté ou sur des connexions à deux degrés de liberté pouvant se ramener à deux connexions à un degré de liberté liées en série. Le degré de liberté d'une articulation entre deux corps est en fait le degré de liberté que l'un des deux corps a par rapport à l'autre.

L'idée repose sur l'étude systématique du comportement des objets géométriques que sont le point, la droite et le plan, quand le corps auquel ils sont solidaires a un mouvement. Des considérations sur l'analogie que l'on

peut faire entre l'ordre d'une courbe, le degré d'une surface et la classe d'une 1-enveloppe de plans amènent à regrouper ces termes sous celui d'*acabit*⁵ car ils sont du même acabit.⁶ Avant de développer plus loin cette idée, il devient indispensable d'introduire certaines définitions.

Définition IV.4 (Ordre d'une courbe) *L'ordre d'une courbe est le nombre de points d'intersection entre cette courbe et un plan quelconque.*

Définition IV.5 (Degré d'une surface réglée) *Le degré d'une surface réglée est le nombre de droites génératrices coupant une droite quelconque.*

Définition IV.6 (1-enveloppe de plans et sa classe) *Une 1-enveloppe de plans est l'enveloppe de lieux de plans à un paramètre. Sa classe est le nombre de plans qui lui sont tangents et contiennent un même point quelconque.*

Pour arriver à la démonstration il est, en outre, fait usage de quelques théorèmes de DARBOUX (voir [Koe97]). Le théorème suivant énonce le résultat que l'acabit est une propriété invariante d'une connexion algébrique à un degré de liberté.

Théorème IV.13 (Acabit à 2 corps [Fic75, HP93]) *Soit deux solides $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ reliés par une connexion algébrique à un degré de liberté. Le lieu des points tracés dans l'un des solides par*

- *un point de l'autre solide donne une courbe d'ordre n*
- *une droite de l'autre solide donne une surface réglée de degré n*
- *un plan de l'autre solide donne une 1-enveloppe de plans de classe n*

Tous ces objets ont la même valeur (dite acabit)

$$F_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = n = F_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$$

Maintenant, intéressons nous à un mécanisme reliant trois corps en série à l'aide de deux connexions algébriques à un degré de liberté ou du moins pouvant s'y ramener. L'acabit global du mécanisme est le produit des acabits des corps liés deux à deux.

Théorème IV.14 (Acabit à 3 corps [Fic75, HP93]) *Soit trois solides $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ reliés en série par des connexions algébriques à un degré de liberté. La relation suivante est vérifiée :*

$$F_{\mathcal{A}\mathcal{G}} = F_{\mathcal{A}\mathcal{B}}F_{\mathcal{B}\mathcal{G}}$$

5. *feather* est la dénomination de FICHTER

6. *birds of a feather*

FICHTER (voir [Hun90]) a obtenu un résultat pour une liaison à trois degrés de liberté décomposable en trois liaisons à un degré de liberté. L'acabit du système ainsi construit serait le double du produit des acabits entre les corps pris deux à deux. Pour les corps $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$:

$$F_{\mathcal{AG}} = 2 F_{\mathcal{AB}} F_{\mathcal{BF}} F_{\mathcal{FG}}$$

Nous verrons dans la suite que ce résultat n'est pas exploitable pour nos objectifs. Par contre, aucun travail n'a pu établir l'invariance de l'acabit pour une connexion qui n'est pas décomposable en série en connexions à un degré de liberté.

Il existe une propriété fondamentale à propos de la circularité de certaines surfaces et qui nous permettra de déduire la circularité de surfaces dont on viendra de déterminer l'acabit.

Propriété IV.1 (Circularité maximale [HP93]) *Dans un mécanisme spatial général constitué par des articulations R ou S , une surface engendrée par un mouvement circulaire autour d'une courbe ou d'une surface est de circularité maximale.*

IV.2.3 Surface décrite par un segment

Jusqu'ici, les résultats établis semblent indiquer que l'approche géométrique s'est arrêtée. En effet, l'utilisation des théorèmes précédents nécessite la connaissance de l'ordre des courbes décrites et donc parfois du calcul explicite d'une équation analytique. Or il n'en est rien, il existe encore d'autres théorèmes qui permettent de déterminer l'ordre, qui correspondra à l'acabit sans pour autant avoir à calculer une expression abominable. A partir des travaux de CAYLEY, FICHTER a introduit deux théorèmes très utiles.

Théorème IV.15 (Cayley [Fic75]) *Un segment de longueur fixée, dont chacune des deux extrémités est liée à une courbe i , $i = 1, 2$ d'ordre n_i et de circularité p_i , est supporté par une droite décrivant une surface réglée de degré :*

$$2n_1(n_2 - p_2) + 2n_2(n_1 - p_1)$$

si les courbes n'appartiennent pas à des plans parallèles.

Le second théorème permet quant à lui de traiter le cas complémentaire du précédent, lorsque les courbes porteuses sont dans des plans parallèles, en donnant une valeur de l'acabit encore plus petite puisqu'il est alors possible de décompter encore les points cycliques.

Théorème IV.16 (Cayley [Fic75]) *Un segment de longueur fixée, dont chacune des extrémités est liée à une courbe plane i , $i = 1, 2$ d'ordre n_i et de circularité p_i , est supporté par une droite décrivant une surface réglée de degré*

$$2n_1(n_2 - p_2) + 2n_2(n_1 - p_1) - 2p_1p_2$$

si les courbes appartiennent à des plans parallèles distincts. Si ces plans ne sont pas distincts, alors il s'agit du lieu plan d'une droite ayant ce degré.

Il va de soi que ces théorèmes ne valent que pour des mécanismes généraux, et que certains cas, comme un segment de longueur nulle, n'auront pas le même degré. Comme le note HUNT [Hun90], les théorèmes de Cayley ne donnent malheureusement aucune information quant à la circularité de la surface réglée obtenue. Et cela même dans le cas de deux courbes appartenant au même plan. Il n'existe pas de théorème largement applicable permettant de connaître la circularité sans nécessiter un calcul à part.

IV.2.4 A propos du RSSR et de ses dérivés

Le RSSR est un mécanisme spatial largement étudié dans la littérature [PF69] : il est aussi qualifié de mécanisme à quatre barres spatial (voir la figure IV.6). Sa première dénomination vient de ce qu'il est constitué en série d'une articulation rotoïde, de deux sphériques et enfin d'une autre rotoïde.

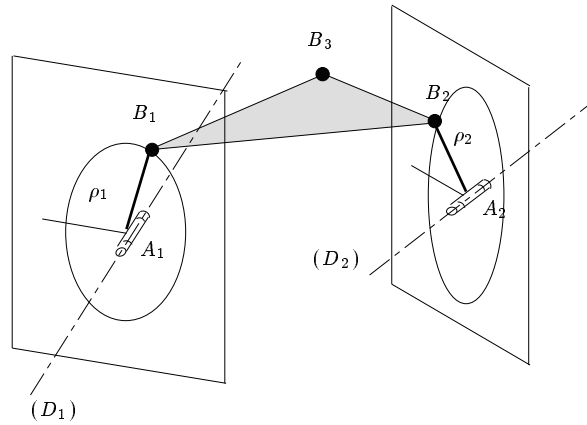


FIG. IV.6 – Mécanisme RSSR avec coupleur en B_3 .

Les articulations rotoïdes ont pour centres A_1 et A_2 et pour axe de rotation (D_1) et (D_2) (voir la figure IV.6). Les articulations sphériques ont pour centres B_1 et B_2 . Du fait des articulations chaque B_i ($i = 1, 2$) décrit un

cercle centré en A_i respectivement et dont le plan est perpendiculaire à l'axe (D_i). Par construction le segment $[B_1B_2]$ a donc ses extrémités assujetties sur des courbes qui sont justement ces cercles, et donc de degré deux et de circularité un. Ce sont exactement les conditions du théorème de CAYLEY IV.15. Il est alors aisé de déduire que tout point du segment $]B_1B_2[$ est situé sur une surface dont le degré est :

$$2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 8$$

De plus sa circularité est maximale d'après la propriété IV.1. Il est remarquable que cette démonstration ne demande pas plus de quelques lignes : *le segment SS d'un mécanisme RSSR décrit une surface de degré huit et de circularité quatre.*

De plus, à l'aide de l'autre théorème de CAYLEY IV.16, il est aussi rapide de déduire que si les plans des articulations rotoïdes sont parallèles, alors le degré de la surface décrite n'est plus que de six :

$$2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 2 \cdot (2 - 1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

Mieux encore, en poussant à peine plus loin, on remarque que si les deux plans sont identiques alors ce n'est plus une courbe spatiale qui est décrite par un point, mais bien une courbe plane de degré six. Or, ce mécanisme n'est autre que le mécanisme à quatre barres plan (voir IV.2.1.5.2). Il est bien établi que celui-ci décrit une sextique.

Il y a encore un cas qui mérite d'être étudié. Il s'agit du cas où les axes des cercles sont confondus (voir figure IV.7). FICHTER [Fic75] remarque qu'un point de la droite (B_1B_2) est situé sur un cercle et donc que le point B_3 du mécanisme est sur un tore. En annexe A.2 on peut voir que cette surface a un degré de quatre et une circularité de deux. En utilisant le théorème IV.11, il est immédiat de trouver que B_3 ne peut prendre que quatre positions différentes.

Maintenant, quittons les mécanismes généraux pour nous orienter un peu plus dans le domaine des robots parallèles tout en gardant le bénéfice des stratégies étudiées. En combinant un certain nombre d'articulations il est possible de contraindre les mouvements sur des courbes bien connues puisqu'il s'agit de cercles. En particulier, si l'on veut essayer de retrouver un cas analogue au RSSR, il devient nécessaire de contraindre deux des articulations de la plate-forme à se déplacer uniquement sur un cercle. Ce que l'on cherchera est le nombre maximum de montages admissibles.

IV.2.4.1 Analogies avec des robots parallèles particuliers

Il existe des architectures parallèles telles qu'effectivement deux articulations de la plate-forme soient sur des cercles. On a déjà vu (section I.4.5) que

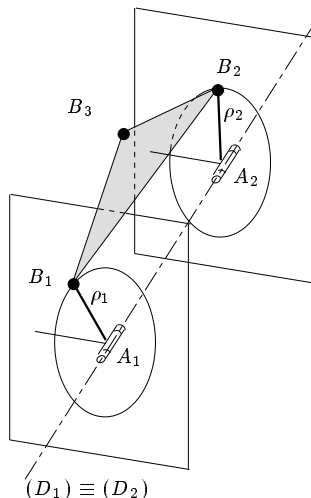


FIG. IV.7 – Mécanisme RSSR dont les axes des articulations rotoïdes sont confondus

lorsque deux articulations de la plate-forme sont confondues, *i.e.* quand une articulation est double, alors cette articulation ne peut se déplacer que sur un cercle. Rappelons que nous ne traitons à la fois qu'une configuration et que donc les longueurs des segments sont fixées et connues.

IV.2.4.1.1 Avec trois articulations doubles Ainsi, un robot où $B_1 \equiv B_4$ et $B_2 \equiv B_5$ et où on ne considérerait que ces segments $\{1, 2, 4, 5\}$ est un mécanisme équivalent du RSSR (voir figure IV.8).

En se basant sur les résultats précédents ou en reprenant le théorème de

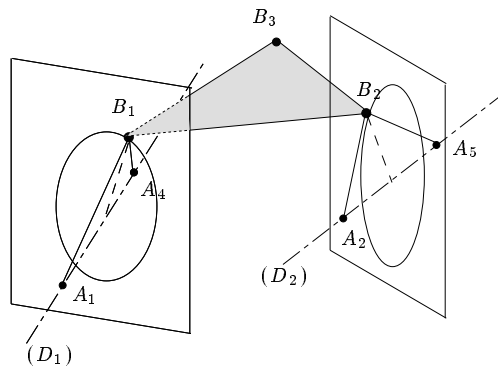


FIG. IV.8 – Mécanisme équivalent du RSSR

CAYLEY, le segment $]B_1B_2[$ décrit une surface de degré huit. Trouver l'acabit

pour B_3 donnerait une borne sur le nombre de montages. Ici, on aimerait savoir sur quelle surface se trouve B_3 quand on le considère lié uniquement à B_1 et B_2 . En effet, fort de ce savoir et de celui de l'appartenance de B_3 à une seconde courbe il devient alors possible d'utiliser le théorème étendu de BÉZOUT IV.10 qui donnera le nombre maximal de positions possibles pour B_3 et donc de solutions au modèle géométrique direct.

En première étape, B_3 en tant que partie intégrante du mécanisme équivalent au RSSR, est sur une surface dont le degré peut être obtenu à l'aide d'un des théorèmes de FICHTER. En l'occurrence les trois corps sont la base, l'axe (B_1B_2) et la plate-forme dont on supposera qu'elle n'est pas liée à la base par B_3 et B_6 . Il est important de signaler que B_3 a pour axe de révolution (B_1B_2) et pour centre un *point* sur cet axe. Cela signifie que nous ne nous intéressons pas à la surface décrite par (B_1B_2) ; mais bien à la *courbe* engendrée par un des points de cet axe et dont le degré est identique. Cela revient à dire que B_3 est connecté à la base via deux liaisons en série à un degré de liberté. En calculant le degré de mobilité [Hun90], on verrait aussi qu'il y a effectivement seulement deux degrés de liberté dont un est une révolution autour de (B_1B_2) . Il découle de ces observations et du théorème IV.14 que B_3 est sur une surface d'ordre seize. D'après la propriété essentielle IV.1, sa circularité est de huit. En définitive afin d'exploiter ce résultat en le combinant à une utilisation d'un théorème étendu, il convient d'imposer à B_3 d'être lié à la base par une courbe et non pas par une sphère comme c'est le cas pour le moment. De même que pour les deux précédents couples d'articulations sur la plate-forme, on peut imposer à B_3 d'être sur un cercle en confondant B_6 et B_3 . Cette articulation est donc à l'intersection d'une surface de degré seize et de circularité huit et d'un cercle. Finalement, le théorème IV.11 indique qu'il y a au plus

$$16 \cdot 2 - 2 \cdot 8 \cdot 2 = 16$$

points dans cette intersection (si elle est finie).

Un tel robot ayant de plus les articulations de sa base coplanaires est un TSSM. La borne de 16 est donc validée par le fait qu'elle se retrouve pour le TSSM, en outre elle s'applique à une classe de robots plus large [Mer89].

Théorème IV.17 (TSSM généralisé) *Un manipulateur parallèle ayant les articulations de sa plate-forme confondues deux à deux admet au plus seize (16) solutions pour le modèle géométrique direct.*

Jusqu'à présent seul le théorème IV.16 de CAYLEY a été utilisé. Qu'en est-il si le second est utilisé? Dans ce cas le RSSR se spécialise un peu en ayant ses deux segments $[A_iB_i](i = 1, 2)$ décrivant des cercles situés dans

des plans parallèles. Le théorème mène directement à une valeur de six pour l'acabit du segment $[B_1B_2]$. Ensuite par un raisonnement analogue à celui des paragraphes précédents, il vient que le modèle géométrique direct admet un maximum de 12 solutions. Or, un tel robot dont les articulations de la plate-forme sont doubles et sont cantonnées à des cercles contenus par trois plans parallèles est une plate-forme de STEWART (voir II.5). Voilà une démonstration élégante de plus à mettre au bénéfice de la géométrie synthétique, qui est utilisée dans [LM94].

Dans la démonstration précédente, aucune hypothèse sur le troisième plan n'est faite. On peut donc déduire le théorème suivant qui concerne l'architecture du robot de la figure IV.9.

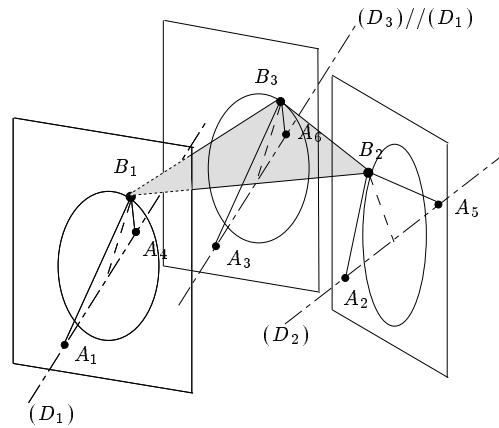


FIG. IV.9 – Plate-forme avec 3 articulations doubles dont deux se déplacent sur des cercles parallèles : plate-forme de Stewart généralisée

Théorème IV.18 (Plate-forme de Stewart généralisée) *Un manipulateur parallèle ayant les articulations de sa plate-forme confondues deux à deux et dont au moins deux paires décrivent des cercles appartenant à des plans parallèles, admet au plus douze (12) solutions pour le modèle géométrique direct.*

Enfin, dernier cas particulier, pour un robot dont quatre articulations de la base sont alignées et dont les articulations sur la plate-forme sont confondues deux à deux (voir figure IV.10), il n'y a pas plus de quatre solutions au modèle géométrique direct. Cela découle directement de l'étude du RSSR dans le cas où les deux axes sont confondus.

Théorème IV.19 (PFS généralisée à deux axes confondus) *Un manipulateur parallèle ayant les articulations de sa plate-forme confondues deux*

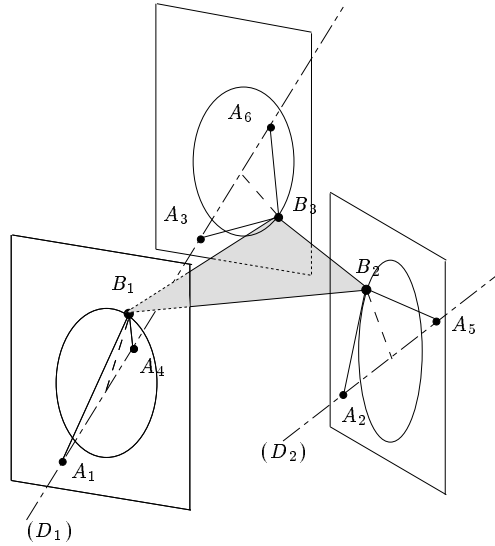


FIG. IV.10 – Plate-forme avec 3 articulations doubles dont deux se déplacent sur des cercles parallèles ayant leurs axes confondus : plate-forme de Stewart généralisée à axes confondus.

à deux et dont quatre articulations de la base (correspondant à deux articulations seulement de la plate-forme) sont alignées, n'admet que quatre (4) solutions pour son modèle géométrique direct.

IV.2.4.1.2 Avec une articulation triple Soit un manipulateur dont trois des articulations de la plate-forme, B_1, B_5, B_6 , sont confondues en une articulation triple (voir figure IV.11). Cette articulation ne peut avoir que

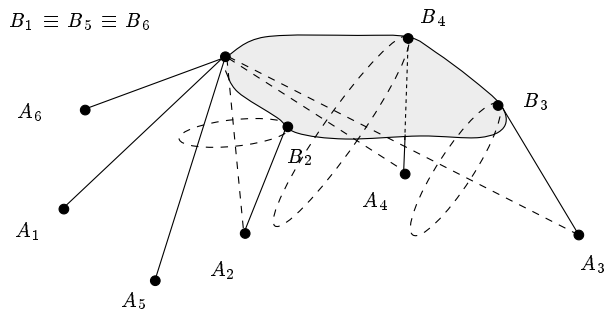


FIG. IV.11 – Manipulateur avec une articulation triple sur la plate-forme
deux positions symétriques l'une de l'autre par rapport au plan défini par les

points A_1, A_5, A_6 . Choisissons l'une de ces deux positions. Une articulation de la plate-forme est connue et impose donc aux autres de se déplacer sur des sphères concentriques. Or ces mêmes articulations se déplacent chacune sur une autre sphère centrée en A_i , $i = 2, 3, 4$. En conclusion, ces articulations sont confinées à un déplacement circulaire. Et là sont retrouvées les conditions intéressantes d'applications des théorèmes de FICHTER : des solides en mouvement les uns par rapport aux autres et certains points contraints à un déplacement sur une courbe. En fait on retrouve un mécanisme sphérique à quatre barres [PF69]. Supposons pour le moment, que ce manipulateur ne soit pas connecté en B_4 à la base. Par le théorème IV.15, B_2 et B_3 étant sur des cercles, le segment qu'ils composent décrit une surface réglée d'ordre huit. Et comme B_1 est un point fixe, il ne reste plus qu'un degré de liberté à la plate-forme. En application du théorème de l'acabit à deux corps IV.13, le point B_4 a aussi un acabit de huit. Soit en utilisant la propriété IV.1, soit en appliquant le théorème étendu de Bézout à B_4 situé à l'intersection de l'objet précédent et de la sphère $\mathcal{S}(B_1, B_1B_4)$, la circularité est alors de quatre. Enfin, pour avoir le nombre de solutions il suffit d'exprimer que B_4 est malgré tout aussi sur le cercle $\mathcal{C}(A_4, \rho_4)$. Ainsi avec le théorème étendu de Bézout, la borne sur le nombre de solutions est de huit. Or au début du raisonnement, il a été vu que B_1 pouvait prendre deux positions, ce qui veut dire que le nombre de solutions double et peut atteindre seize. Il est à noter, toutefois que les solutions se partagent en deux ensembles découplés de huit solutions.

En regardant plus attentivement ce manipulateur, il est possible de tirer une spécialisation ayant un nombre de solutions maximum de huit. En effet, supposons que l'articulation B_1 de la plate-forme appartienne plutôt à la base. On aurait alors une spécialisation des mécanismes étudiés en IV.2.4.1.1 où trois des articulations de la base sont confondues (voir figure IV.12). Et

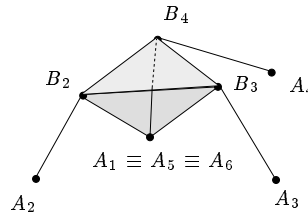


FIG. IV.12 – Manipulateur à trois articulations doubles sur la plate-forme et une articulation triple sur la base.

cette architecture a deux fois moins de solutions que celle⁷ dont elle est

7. TSSM

tirée. D'ailleurs c'est en fait cette architecture, plate-forme triangulaire et articulation triple, qui est utilisée dans le robot *œil agile*⁸ par GOSSELIN et GAGNÉ [GG95] pour orienter une caméra. A la nuance près que dans ce ma-

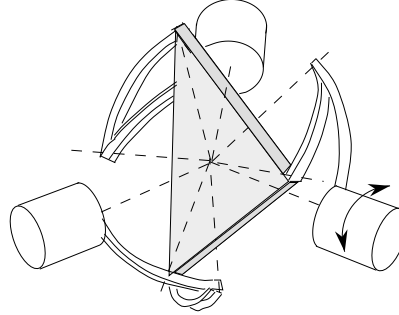


FIG. IV.13 – Robot sphérique à articulation triple virtuelle [GG95].

nipulateur, la triple articulation est virtuelle et réalisée par une intersection des axes des articulations rotoïdes (voir figure IV.13).

IV.2.4.2 Analogies avec des capteurs supplémentaires

Pour avoir, sur des robots sans articulations confondues, des raisonnements semblables à ceux étudiés précédemment, il est possible d'utiliser des capteurs additionnels. En particulier, l'ajout d'un capteur angulaire sur une articulation de la base combiné avec la connaissance de la longueur du segment place sur un cercle l'articulation correspondante de la plate-forme.

Ainsi pour simuler le mécanisme composé de trois articulations doubles vu en IV.2.4.1.1, il suffit de placer trois capteurs sur trois segments, un par segment (cas 1^3). Le système obtenu admet au plus seize solutions comme cela a été vu. Toutefois toute combinaison d'ajout de capteurs et d'articulations doubles permettant d'avoir trois articulations en mouvement sur un cercle (cas $2^i - 1^{3-i}$) est valable et a ce nombre de solutions. En fait ce mécanisme est encore plus contraint. En effet les trois segments qui étaient rattachés à une articulation double ont vu leur rôle coercitif rempli par les capteurs supplémentaires. Néanmoins les trois autres segments sont toujours là et imposent donc des contraintes que toutes les postures solutions doivent aussi vérifier.

L'ajout de deux capteurs angulaires sur une même articulation de la base combiné avec la connaissance de la longueur du segment permet de déterminer la position de cette articulation. On se rapproche ainsi du mécanisme

8. Département de génie mécanique, Université Laval, S^{te} Foy, Québec, Canada

vu en IV.2.4.1.2. Les deux segments qui auparavant se joignaient à un troisième n'ont plus cette particularité de jonction. C'est donc un mécanisme plus contraint en terme de nombre de solutions admissibles. Ce qui amène au résultat suivant : deux capteurs additionnels équipant un même segment, font que le manipulateur parallèle n'a pas plus de huit solutions pour son modèle géométrique direct.

IV.2.5 Autres mécanismes

Fort de ces résultats intéressants qui ne demandent que de bien définir les solides avec lesquels on travaille, étudions d'autres cas pour les manipulateurs parallèles.

Soit un manipulateur où $B_5 \equiv B_6$ et dont les segments 1, 2 et 3 sont équipés d'un capteur additionnel (voir figure IV.14). Il est possible de voir ce robot sous la forme de deux RSSR, un composé de B_1 et B_2 , l'autre com-

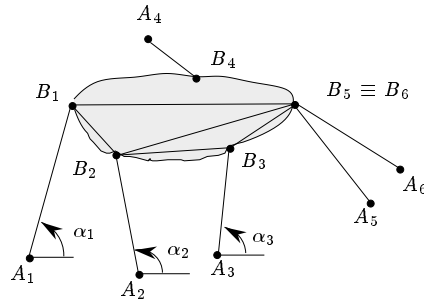


FIG. IV.14 – Mécanisme à trois capteurs additionnels, une articulation double : considéré comme deux RSSR

posé de B_2 et B_3 , tout deux ayant pour point de coupleur B_5 . D'après le premier RSSR on sait maintenant (voir IV.2.4) que B_5 est sur une surface de circularité maximale et d'ordre seize. B_5 est aussi à l'intersection de cette surface et du cercle créé par le fait que B_5 est une articulation double, ainsi il y a 16 positions possibles. En considérant le second RSSR il y a aussi 16 positions possibles. Seules les positions communes parmi les deux ensembles de 16 solutions seront admissibles. Mais on ne peut rien dire de mieux sur la borne supérieure sinon qu'elle est de 16. Il est clair que cette approche n'est pas très utilisable pour décomposer un manipulateur parallèle en plusieurs mécanismes élémentaires d'acabits connus.

Gardons le même manipulateur ; mais voyons le maintenant sous une autre forme de mécanisme (voir figure IV.15). Considérons alors un point quelconque M du segment $]B_1B_2[$ et le segment qu'il forme avec B_3 . Par le théorème, désormais bien assimilé, de Cayley IV.15, le segment $[MB_3]$ décrit

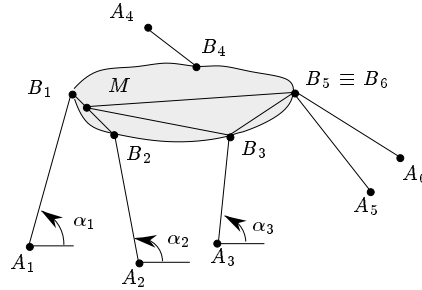


FIG. IV.15 – Mécanisme à trois capteurs additionnels, une articulation double : considéré comme un coupleur (M)

une surface réglée de degré 32. Il est clair (IV.13) que B_5 aussi décrira une surface d'un tel degré ce qui implique qu'il y a 32 solutions possibles. . . On vient de montrer qu'avec plus d'information sur la pose du robot, la borne obtenue est encore plus élevée.

Pour revenir au cas 2^1 étudié dans la section IV.1.5, celui où la position d'une articulation de la plate-forme est connue, nous considérons les travaux de SARKISSIAN et PARIKIAN [SP95]. Ils supposent qu'un des segments a son orientation connue et ils déconnectent l'articulation correspondante (disons B_6) du reste de la plate-forme. Ils obtiennent ainsi une courbe de coupleur devant passer au moins cinq fois par la position de B_6 . Ils remarquent alors que le système obtenu est analogue au problème de BURMESTER. Ainsi, la position de B_6 est de multiplicité 5 sur la courbe du coupleur et il y a donc 5 modes de montages qui partagent cette position pour B_6 .

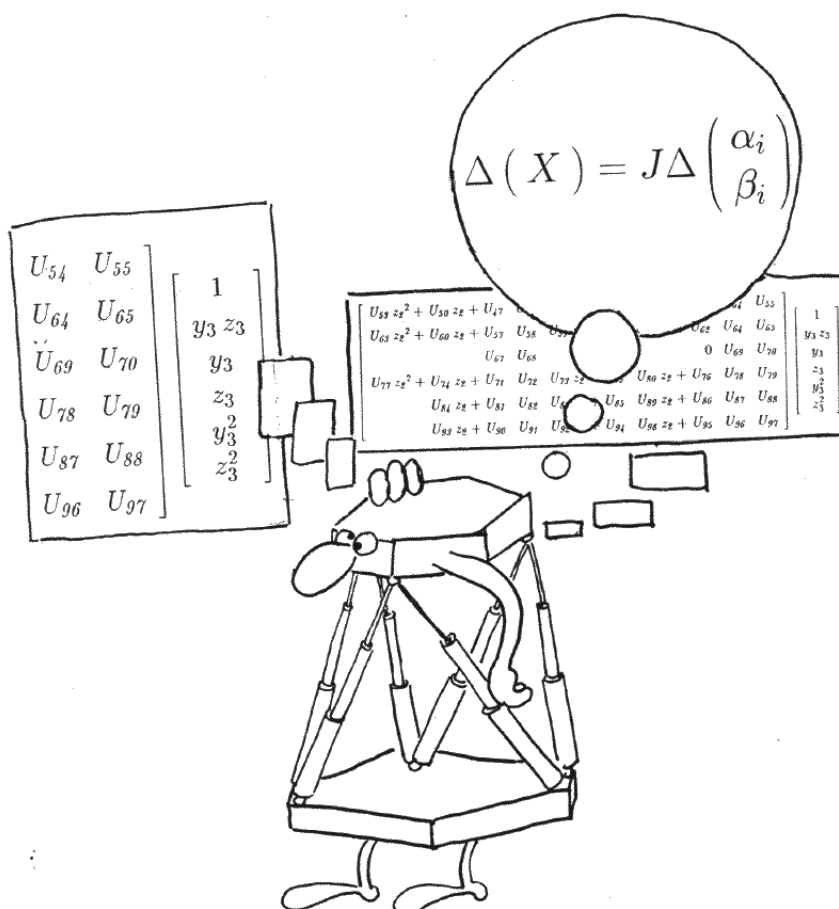
IV.2.6 Conclusion

La géométrie synthétique permet de faire des démonstrations très élégantes et sobres. D'un autre côté, il n'a pas été possible de l'utiliser pour beaucoup d'architectures. Ce sont les premiers résultats obtenus avec des capteurs supplémentaires dans le cas de robots spatiaux. De plus ces résultats sont valides pour une plate-forme quelconque et ne traitent que les parties réelles des objets géométriques considérés. Cet aspect de la géométrie pourrait être redoutablement efficace si l'on disposait de théorèmes spécialement adaptés à nos mécanismes, ou pour des architectures de robot ayant des chaînes plus spécifiques (tel le robot *Delta*) contraignant les déplacements sur des courbes bien identifiées au lieu de sphères.

En outre, des résultats très récents [SP95] montrent que cette voie est étudiée et que son application aux robots parallèles semble prometteuse.

Chapitre V

Méthode géométrique et algébrique





Nous introduisons d'abord dans la section V.1 la méthode utilisée ; les capteurs supplémentaires sont ajoutés de deux façons différentes, un ou deux par segment. Nous y proposons une représentation algébrique du problème. Ensuite nous considérons dans les sections V.2, V.3 et V.4, respectivement, les cas où les capteurs supplémentaires permettent de connaître la position de trois, deux ou une articulation de la plate-forme. Quand les coordonnées de certaines articulations sont connues, nous choisissons les repères de la base et de la plate-forme de manière à obtenir un système plus simple d'équations exprimant les longueurs des segments. Dans la discussion nous ne considérerons jamais les cas où aucune solution n'existe. En fait, nous supposerons toujours que le robot est *bien* construit et situé à l'intérieur de son espace de travail, *i.e.* le problème admet au moins une solution. Par des méthodes classiques d'élimination nous déterminons le nombre de solutions pour le MGD dans chaque cas et les conditions sous lesquelles une solution unique peut être trouvée. Cela permet de déduire certaines règles de conception garantissant une solution unique compte tenu du nombre de capteurs supplémentaires. Les résultats sont appliqués à des architectures particulières en V.5. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [TTM95b].

Notations Les notations principales sont illustrées dans la figure V.1. Soit

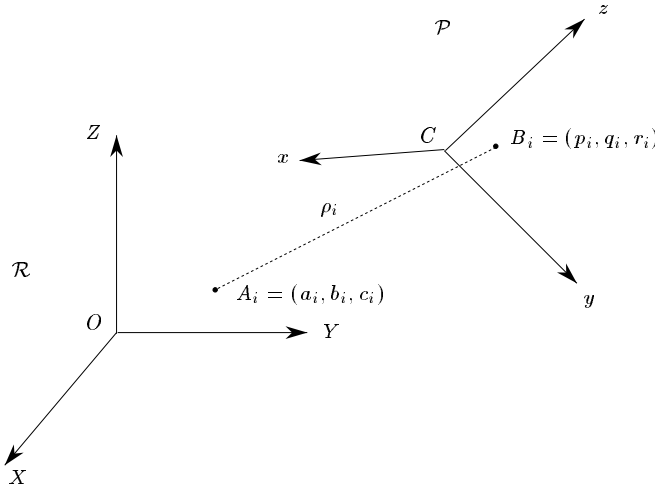


FIG. V.1 – Notations

$\mathcal{R} = (O, X, Y, Z)$ le repère de référence lié à la base. Soit $\mathcal{P} = (C, x, y, z)$ le repère mobile lié à la plate-forme. Les coordonnées du point C dans $\mathcal{R}$ sont

(C_X, C_Y, C_Z) . A_i notera le centre de la $i^{\text{ème}}$ articulation sur la base. Ses coordonnées sont (a_i, b_i, c_i) dans le repère $\mathcal{R}$. B_i notera le centre de l'articulation sur la plate-forme du $i^{\text{ème}}$ segment. Ses coordonnées sont (p_i, q_i, r_i) dans $\mathcal{P}$. Le paramètre ρ_i est la longueur du segment $[A_i B_i]$ mesurée par un capteur d'élongation. Enfin, nous appellerons $\mathcal{S}_i$ la sphère centrée en A_i de rayon ρ_i .

V.1 Méthode

Notre méthode est basée sur deux aspects principaux. Le premier est le type de capteurs utilisés et leur placement sur le robot. Le second est la façon dont le problème est posé. Rappelons qu'un joint de Cardan peut être équipé de deux capteurs rotatifs : un par axe de rotation de l'articulation (voir section III.2.3).

V.1.1 Formulation algébrique du problème

Une façon d'exprimer algébriquement le problème du modèle géométrique direct est d'écrire les expressions des longueurs des segments qui sont connues par les mesures des capteurs. Puisque les coordonnées des articulations de la plate-forme sont seulement connues dans le repère de la plate-forme $\mathcal{P}$, nous devons transformer leurs coordonnées dans le repère de la base $\mathcal{R}$. Ce qui peut être fait en appliquant un déplacement au repère de la plate-forme à partir d'une pose initiale, qui est la pose du repère de la base, vers sa position actuelle. Ce déplacement de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{P}$ est une composition de la translation de O vers C avec une rotation de manière à faire coïncider les deux repères.

$$A_i B_i = C B_i + O C - O A_i$$

Dans le repère de la base cela donne :

$$\rho_i^2 = \|A_i B_i\|^2 = \left(R \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ r_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} \right)^2$$

où R est

$$R = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

une matrice de rotation, *i.e.* elle vérifie les équations suivantes :

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1 \quad (\text{V.1})$$

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1 \quad (\text{V.2})$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (\text{V.3})$$

$$l_x m_x + l_y m_y + l_z m_z = 0 \quad (\text{V.4})$$

$$l_x n_x + l_y n_y + l_z n_z = 0 \quad (\text{V.5})$$

$$m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z = 0 \quad (\text{V.6})$$

Les inconnues du problème sont les composantes de la matrice R et celles du vecteur OC . Avec les équations (V.1) à (V.6), l'équation de la longueur ρ_i du segment i , i appartenant à $\{1, \dots, 6\}$ est :

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & 2 (p_i C_x - a_i p_i) l_x + 2 (p_i C_y - b_i p_i) l_y + (2 p_i C_z - 2 c_i p_i) l_z \\ & + 2 (q_i C_x - a_i q_i) m_x + 2 (q_i C_y - b_i q_i) m_y + 2 (q_i C_z - c_i q_i) m_z \\ & + 2 (r_i C_x - a_i r_i) n_x + 2 (r_i C_y - b_i r_i) n_y + 2 (r_i C_z - c_i r_i) n_z \\ & + a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 - 2 C_x a_i - 2 C_y b_i - 2 C_z c_i \\ & + p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Quand un capteur angulaire est rajouté sur un segment i , nous obtenons une équation linéaire parce que la mesure du capteur définit un plan $\mathcal{E}_i$ contenant A_i et B_i (voir III.2.3). Supposons que la normale à ce plan soit connue. Ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont

$$N_i = \begin{bmatrix} N_{i_X} \\ N_{i_Y} \\ N_{i_Z} \end{bmatrix}$$

alors nous avons

$$\begin{aligned} A_i B_i \cdot N_i &= 0 \\ &= (q_i m_x + p_i l_x + r_i n_x + C_X - a_i) N_{i_X} \\ &\quad + (q_i m_y + p_i l_y + r_i n_y + C_Y - b_i) N_{i_Y} \\ &\quad + (q_i m_z + p_i l_z + r_i n_z + C_Z - c_i) N_{i_Z} \end{aligned}$$

Le système d'équations alors obtenu, qui comprend des équations quadratiques à douze inconnues, est très difficile à utiliser. Nous étudierons des cas particuliers pour lesquels le système se simplifie. Plus précisément, nous considérons des cas où la position d'au moins une articulation est connue à l'aide de capteurs supplémentaires. Alors les coordonnées de C sont connues. En effet il est toujours possible de placer le centre du repère de la plateforme sur l'articulation dont la position sera connue par ce moyen. Ainsi les équations quadratiques (V.7) deviennent linéaires et trois des inconnues disparaissent.

V.2 Trois articulations connues : cas 2³

Avec deux capteurs angulaires par segment sur chacun des 3 segments, la position d'un point B_i est déterminée pour chacun des segments : ces capteurs donnent la direction et le sens du segment $[A_i B_i]$ et la valeur de ρ_i donne sa longueur (voir section III.2.3). La connaissance de trois points non alignés sur la plate-forme est suffisante pour en déduire la pose du robot (voir [SF92, TM94]). Ainsi, ce cas admet une solution unique au problème du MGD. Le cas où les articulations de la plate-forme dont les segments sont équipés de capteurs supplémentaires sont alignées est dégénéré. Il est semblable au cas considéré en section V.3 quand la position de seulement deux points est connue et qu'une troisième articulation est alignée avec.

V.3 Deux articulations connues : cas 2²

Quand les positions de deux points de la plate-forme, différents, sont connus, et quand les longueurs de seulement deux autres segments sont données, il existe au plus deux poses possibles pour le robot et en général qu'une seule, ainsi que démontré dans [Mer93]. Ici, nous étudions systématiquement les cas où il y a exactement une, deux poses (ou une infinité dans les cas dégénérés) quand la position de deux articulations de la plate-forme est connue et que la longueur des quatre autres segments est mesurée.

La position de deux articulations de la plate-forme peuvent être déterminées par le biais de quatre capteurs angulaires placés sur deux segments. Au besoin en renumérotant les articulations, nous pouvons supposer que ces deux articulations sont B_1 et B_2 . Elles déterminent un axe de rotation pour la plate-forme. Chaque point de la plate-forme se déplace alors sur un cercle (pouvant être réduit au point lui-même s'il est situé sur l'axe) centré sur la droite $(B_1 B_2)$. Nous noterons $\mathcal{C}_i$ le cercle associé à B_i , pour $i = 3, \dots, 6$. Les contraintes imposées par les longueurs des segments font que B_i est en plus situé sur la sphère $\mathcal{S}_i$ centrée sur A_i . Dans le cas général quand $\mathcal{C}_i$ n'est pas inclus dans $\mathcal{S}_i$, B_i a au plus deux positions.

V.3.1 Choix des repères

Comme les positions de B_1 et B_2 sont connues, nous pouvons choisir C et O tels qu'ils soient confondus avec B_1 , et les axes (OX) de $\mathcal{R}$ et (Ox) de $\mathcal{P}$ confondus avec la droite $(B_1 B_2)$.

La matrice de rotation permettant de passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{P}$ s'écrit ainsi :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & -m_z \\ 0 & m_z & m_y \end{bmatrix} \quad \text{où } m_y^2 + m_z^2 = 1 \quad (\text{V.8})$$

S'il existe $i \in \{3, \dots, 6\}$, disons $i = 3$ sans perte de généralité, tel que A_3 n'est pas situé sur la droite (B_1B_2) , nous pouvons choisir l'axe (OY) de $\mathcal{R}$ tel que A_3 définisse le plan (XOY) . D'une manière analogue, si B_3 n'appartient pas à (B_1B_2) , nous choisissons (Oy) tel que B_3 définisse le plan (xOy) .

Considérons la propriété suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Il existe } i, \text{ disons } i = 3, \text{ tel que} \\ &\text{ni } A_i = A_3 \text{ ni } B_i = B_3 \text{ n'appartiennent à } (B_1B_2). \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

Dans ce qui suit, toutes les fois où la condition (V.9) est vérifiée, nous choisirons (OY) et (Oy) comme vu ci-dessus (voir aussi figure V.2); donc $c_3 = r_3 = 0$, et les équations (V.7) deviennent :

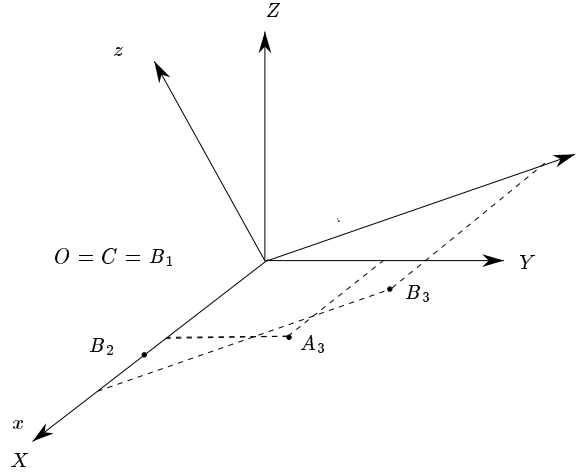


FIG. V.2 – Définition des repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ respectant la condition (V.9)

$$\rho_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \quad (\text{V.10})$$

$$\rho_2^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + p_2^2 - 2a_2p_2 \quad (\text{V.11})$$

$$\rho_3^2 = a_3^2 + b_3^2 + p_3^2 + q_3^2 - 2a_3p_3 - 2b_3q_3m_y \quad (\text{V.12})$$

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & 2(-c_ir_i - b_iq_i)m_y + 2(-c_iq_i + b_ir_i)m_z \\ & + a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 - 2a_ip_i \quad i \in \{4, 5, 6\} \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

Les inconnues m_y et m_z n'apparaissent pas dans les équations (V.10) et (V.11). De plus m_y est la seule inconnue apparaissant dans l'équation (V.12).

Si la condition (V.9) n'est pas vérifiée, nous choisirons les axes (OY) et (Oy) arbitrairement. Pour chaque i appartenant à $\{3, \dots, 6\}$, A_i ou B_i est sur (B_1B_2) , ce qui implique que le coefficient des inconnues m_y et m_z disparaît dans les équations (V.7) :

$$\rho_i^2 = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 - 2a_ip_i \quad i \in \{3, \dots, 6\} \quad (\text{V.14})$$

N'importe quelle rotation sera solution du système, entraînant que le robot est dans une configuration où une singularité apparaît, correspondant à une variété de GRASSMAN de rang cinq [Mer88].

Propriété V.1 *Si, pour chaque $i \in \{3, \dots, 6\}$, A_i ou B_i est sur (B_1B_2) , alors le robot est dans une configuration singulière.*

Dans la suite de la section V.3, nous supposons toujours que la condition (V.9) est vérifiée.

V.3.2 Résolution des équations

Puisque $b_3q_3 \neq 0$ (d'après la condition (V.9)), nous pouvons calculer une valeur unique pour m_y à partir de l'équation (V.12).

Ensuite une équation (V.13) nous permettra de déduire m_z , pourvu qu'il existe un i dans l'ensemble $\{4, 5, 6\}$ tel que le coefficient $-c_iq_i + b_ir_i$ de m_z ne soit pas nul.

Maintenant étudions la signification géométrique de l'équation suivante, pour $i \in \{4, 5, 6\}$:

$$-c_iq_i + b_ir_i = 0. \quad (\text{V.15})$$

Pour tout couple de points P et Q qui ne sont pas sur (B_1B_2) , notons par $\widehat{PQ}$ l'angle orienté entre les deux plans (B_1B_2P) et (B_1B_2Q) . Visiblement l'équation (V.15) est vérifiée quand A_i ou B_i sont sur (B_1B_2) , car dans ce cas là $b_i = c_i = 0$ ou $q_i = r_i = 0$. Supposons que ni A_i ni B_i n'appartiennent à (B_1B_2) . Alors (V.15) peut être réécrite comme $\frac{c_i}{b_i} = \frac{r_i}{q_i}$, où les deux termes représentent la tangente de l'angle orienté entre les plans. Plus précisément $\frac{c_i}{b_i}$ est la tangente de l'angle $\widehat{A_3A_i}$ entre les plans $(B_1B_2A_3)$ et $(B_1B_2A_i)$, compte tenu de notre choix de repère de référence $\mathcal{R}$. Et d'une manière analogue $\frac{r_i}{q_i}$ est la tangente de l'angle $\widehat{B_3B_i}$ entre $(B_1B_2B_3)$ et $(B_1B_2B_i)$ (voir figure V.3). Remarquons que ces angles sont bien définis lorsqu'aucun des points A_i, B_i, A_3, B_3 n'appartient à (B_1B_2) . Ainsi la condition (V.15) est vérifiée si et seulement si la condition suivante est remplie :

$$\left(\begin{array}{l} \text{soit } A_i \text{ ou } B_i \text{ est sur } (B_1B_2) \\ \text{ou bien } \widehat{A_3A_i} = \widehat{B_3B_i} \end{array} \right) \quad (\text{V.16})$$

Supposons que pour chaque i in $\{4, 5, 6\}$ (V.16) est remplie; alors aucune des équations (V.13) ne nous permet de calculer m_z . Dans ce cas, une autre équation sera nécessaire. Nous utiliserons l'équation (V.8): $m_y^2 + m_z^2 = 1$. Cette équation admet en général deux solutions. Elle admet une solution

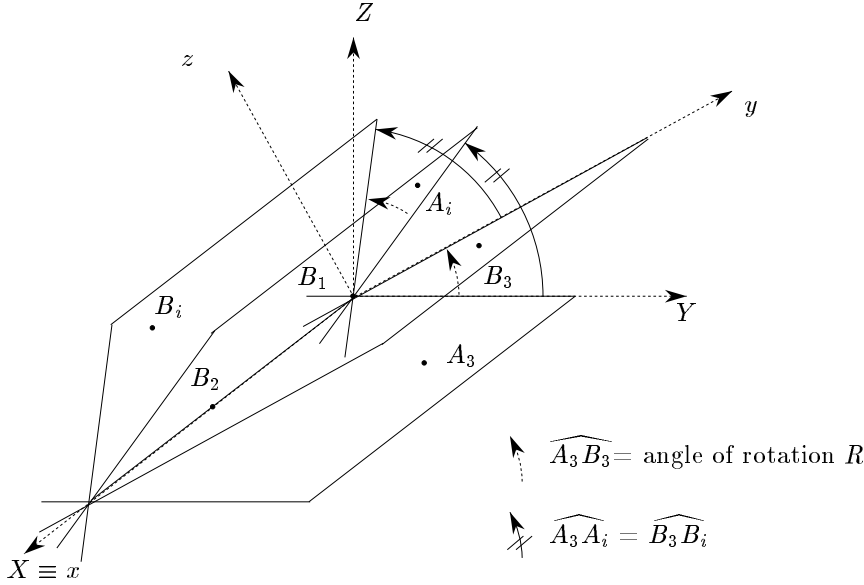


FIG. V.3 – Interprétation géométrique de la condition (V.15)

double $m_z = 0$ si et seulement si $m_y = \pm 1$, correspondant à une rotation d'angle $\widehat{A_3B_3} = 0 \pmod{\pi}$, ce qui signifie que B_1, B_2, A_3, B_3 sont coplanaires.

En résumé nous avons :

Théorème V.1 [Unicité, cas 2²] Soit deux points, disons B_1 et B_2 , dont la position est connue. Alors le problème du MGD admet une solution unique si et seulement si

- il existe i , disons $i = 3$, tel que ni $A_i (= A_3)$ ni $B_i (= B_3)$ ne soient sur (B_1B_2)
- et

$$\exists i \in \{4, 5, 6\} \text{ tel que } \left(\begin{array}{c} \text{ni } A_i \text{ ni } B_i \text{ ne sont sur } (B_1B_2) \\ \text{et} \\ \widehat{A_3A_i} \neq \widehat{B_3B_i} \end{array} \right)$$

ou

B_1, B_2, A_3, B_3 sont coplanaires

Théorème V.2 Soient deux points, disons B_1 et B_2 , dont la position est connue. Alors le problème du MGD admet deux solutions distinctes si et seulement si

- il existe i , disons $i = 3$, tel que ni $A_i (= A_3)$ ni $B_i (= B_3)$ ne soient sur (B_1B_2)

- et $\forall i \in \{4, 5, 6\}$, $\left(\begin{array}{l} \text{soit } A_i \text{ ou } B_i \in (B_1 B_2) \\ \text{ou sinon } \widehat{A_3 A_i} = \widehat{B_3 B_i} \end{array} \right)$
- et B_1, B_2, A_3, B_3 sont coplanaires.

Ces conditions sont plutôt contraignantes, ce qui indique que, dans la plupart des cas, il n'y aura qu'une seule solution. On pourra remarquer la similitude de la condition d'angle avec celle du théorème II.1 en page 25. Quelques applications de ce cas sont proposées en section V.5.1.

V.3.3 Ajout d'un cinquième capteur angulaire : cas $2^2 - 1^1$

Nous supposons toujours que les positions de B_1 et B_2 sont connues, et que la condition (V.9) est remplie.

Maintenant, un capteur angulaire supplémentaire, situé sur un troisième segment mesure l'angle entre un plan de référence et un plan contenant ce segment. Quand les conditions du théorème V.1 sont satisfaites, l'information donnée par ce capteur est redondante. Dans cette section nous supposerons que les conditions du théorème V.2 sont remplies, et nous étudions les conditions sous lesquelles nous pouvons déterminer s'il y aura une posture unique.

Les repères sont toujours définis comme en figure V.2. Le capteur situé sur le i^{e} segment, pour une valeur de i dans $\{3, \dots, 6\}$, donne un plan $\mathcal{E}_i$ contenant A_i et B_i . Soit N_i son vecteur normal, alors

$$(N_{i_Y} q_i + N_{i_Z} r_i) m_y + (N_{i_Z} q_i - N_{i_Y} r_i) m_z + (p_i - a_i) N_{i_X} - b_i N_{i_Y} - c_i N_{i_Z} = 0 \quad (\text{V.17})$$

Cette équation est linéaire dans les deux inconnues m_y et m_z . Rappelons que, sous les hypothèses actuelles, m_y est déterminé de manière unique par l'équation (V.12). Si B_i est aligné avec B_1 et B_2 , *i.e.* $q_i = r_i = 0$, alors le coefficient de m_z dans l'équation (V.17) s'annule, et l'information fournie par le capteur est redondante. En fait, elle ne peut déterminer la posture du robot puisque elle donne la position d'un troisième point qui est aligné avec deux autres déjà connus.

D'un autre côté, si B_1, B_2, B_i ne sont pas alignés alors le coefficient de m_z dans (V.17) est nul si et seulement si l'angle orienté $\widehat{B_3 B_i}$ (*i.e.* l'angle orienté entre les plans $(B_1 B_2 B_3)$ et $(B_1 B_2 B_i)$ comme défini in V.3.2) est le même que l'angle orienté entre le plan $(B_1 B_2 A_3)$ et le plan parallèle à N_i contenant la droite $(B_1 B_2)$. Cette condition sur les angles est exactement la condition pour laquelle le plan orthogonal à N_i et contenant A_i coupe le cercle $\mathcal{C}_i$ en les

deux points possibles pour B_i déjà obtenus par l'intersection entre $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{S}_i$. Dans ce cas, le cinquième capteur ne donne aucune information pertinente, et nous aurons encore l'ambiguïté entre les deux solutions obtenues.

Théorème V.3 (Unicité, cas $2^2 - 1^1$) *Supposons que les conditions données dans le théorème V.2 soient vérifiées, un cinquième capteur, placé sur un segment $[A_i B_i]$, pour tout choix de $i \in \{3, \dots, 6\}$ permettra de n'avoir qu'une seule solution au problème du MGD si et seulement si*

- B_i n'est pas aligné avec B_1 et B_2 ,
- et l'angle entre le plan $(B_1 B_2 A_3)$ et le vecteur normal à $\mathcal{E}_i$ est différent de $\widehat{B_3 B_i}$.

V.3.4 Ajout d'un sixième capteur angulaire : cas $2^2 - 1^2$

Si le sixième capteur est ajouté sur le même segment que le cinquième nous sommes dans le cas étudié en V.2.

Considérons le cas où le cinquième et le sixième capteurs sont situés respectivement sur deux segments différents $[A_i B_i]$ et $[A_j B_j]$ avec une articulation commune sur la plate-forme, *i.e.* $A_i \neq A_j$ et $B_i = B_j$. Nous voulons déterminer les conditions sous lesquelles le problème admet encore deux solutions. Les deux capteurs doivent être redondants, ce qui signifie, comme vu précédemment que le plan $\mathcal{E}_i$ de vecteur normal N_i coupe $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j$ en deux points $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{C}_i$. De même, $\mathcal{E}_j$ doit couper $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j$ en les deux points $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{C}_j$. De plus, les deux points obtenus de cette manière $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{C}_i \cap \mathcal{S}_i$ et $\mathcal{E}_j \cap \mathcal{C}_j \cap \mathcal{S}_j$ doivent coïncider, ce qui est possible si et seulement si N_i , N_j et $A_i A_j$ sont des vecteurs linéairement dépendant.

Pour le cas général où $A_i \neq A_j$ et $B_i \neq B_j$, le même raisonnement qu'en V.3.3 nous permet de conclure ce qui suit :

Théorème V.4 *Supposons que les conditions données dans le théorème V.2 soient vérifiées, deux capteurs supplémentaires placés respectivement sur les segments $[A_i B_i]$ et $[A_j B_j]$, pour $i, j \in \{3, \dots, 6\}$, ne donnent pas encore de solution unique au MGD si et seulement si*

- $B_i = B_j$, $A_i \neq A_j$, et les vecteurs N_i , N_j et $A_i A_j$ sont dépendants, avec N_i (resp. N_j) notant le vecteur normal au plan $\mathcal{E}_i$ (resp. $\mathcal{E}_j$) donné par le capteur,

- ou $B_i \neq B_j$ et, pour $k = i, j$
 - B_k est aligné avec B_1 et B_2 ,
 - ou l'angle entre le plan $(B_1B_2A_3)$ et le vecteur N_k est égal à $\widehat{B_3B_k}$.

Dans les autres cas, six capteurs donneront toujours une solution unique.

V.4 Une articulation connue : cas 2¹

Dans cette section nous équipons le robot avec deux capteurs angulaires supplémentaires, situés tous les deux sur le segment 1. Comme nous l'avons vu dans III.2.3, cela permet la détermination totale des coordonnées de B_1 . À moins que toutes les articulations sur la plate-forme soient confondues, il est possible de renuméroter les segments de façon à ce que B_2 soit différent de B_1 . Nous choisissons O et C confondus avec B_1 , le vecteur B_1A_2 pour définir les axes (OX) (puisque $A_2 \neq B_1$), et B_1B_2 pour définir (Ox) . Ainsi les équations (V.7) donnent :

$$\rho_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \quad (\text{V.18})$$

$$\rho_2^2 = -2a_2p_2l_x + a_2^2 + p_2^2 \quad (\text{V.19})$$

$$\begin{aligned} \rho_i^2 = & -2p_i(a_il_x + b_il_y + c_il_z) - 2q_i(a_im_x + b_im_y + c_im_z) \\ & - 2r_i(a_in_x + b_in_y + c_in_z) + \|OA_i\| + \|CB_i\| \quad i \in \{3, \dots, 6\} \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

V.4.1 Plate-forme générale

La positions d'une articulation de la plate-forme est connue, et nous disposons de cinq autre segments. Dans [IP91, HP93] est traité le cas d'un robot manipulateur avec la position d'une de ses articulations de la plate-forme déterminée par trois segments connectée à cette articulation et seulement trois segments connectés à d'autres articulations. Ils montrent que ce cas admet au plus huit solutions (pour une posture ne correspondant pas à une singularité). Ainsi, dans notre cas, qui est plus contraint encore, le MGD ne peut pas avoir plus de huit solutions.

V.4.2 Plate-forme plane

Pour ce robot particulier nous choisissons le plan de la plate-forme comme le plan (xOy) . Ce cas mène à un système d'équations (V.19)–(V.20) qui se révèle être un système d'équations avec seulement six inconnues (puisque $r_i = 0$, pour chaque i). Donnons quelques conditions suffisantes pour que ce système devienne dégénéré, *i.e.* pour que le déterminant s'annule.

- il existe i tel que $A_i = B_1$ (impossible par construction)

- il existe i tel que $B_i = B_1$
- $B_3, \dots, B_6$ sont alignés avec B_1 (robot de ZHANG et SONG[ZS91])
- $A_2, \dots, A_6, B_1$ sont coplanaires

Si le système est linéairement indépendant, alors nous avons cinq équations linéaires qui permettent de résoudre en cinq inconnues. L'inconnue restante est trouvée à l'aide d'une des équations d'orthonormalité de la matrice de rotation R . Puisque cette dernière est de degré deux, il peut y avoir jusqu'à deux solutions. Les conditions qui déterminent s'il existe une ou deux solutions sont très complexes. Quand le rang du système n'est pas maximum et diminue de un, nous avons besoin d'ajouter une équation quadratique de plus pour résoudre notre problème : en conséquence le nombre de solutions double à chaque fois que le rang diminue d'une unité. Or nous ne disposons que d'un nombre limité, trois, de telles équations quadratiques. Ainsi, pour un rang diminué de trois ou plus, il n'y a plus assez d'équations pour résoudre entièrement le problème.

Suivant le rang du système, le nombre de solutions pour le MGD peut être ainsi deux (système de plein rang), quatre (rang = 4), huit (rang = 3) ou une infinité (rang < 3). Remarquons que seulement $B_1 B_2 A_2$ jouent un rôle particulier. Toute autre articulation peut être renumérotée. Des applications de ces résultats sont étudiées en section V.5.2.

V.4.3 Ajout d'un troisième capteur : cas $2^1 - 1^1$

Ici nous considérons un segment équipé de deux capteurs (segment 1) et un autre équipé seulement d'un capteur angulaire (segment 2).

V.4.3.1 Plate-forme générale

Au contraire de V.3, nous utilisons une approche géométrique pour résoudre ce premier cas. D'abord, nous déterminons la position de B_2 . Ensuite, utilisant ce résultat V.3, nous considérons les postures pour la plate-forme en entier. L'articulation B_2 est située à l'intersection de la sphère $\mathcal{S}_2$ centrée en A_2 de rayon ρ_2 , et de la sphère centrée en B_1 de rayon $\|B_1 B_2\|$, et le plan $\mathcal{E}_2$ indiqué par le troisième capteur. Il est clair que cette intersection donne deux solutions pour la position B_2 . Puisqu'il y a au plus deux positions au MGD quand les positions de B_1 et B_2 sont connues (voir V.3), il peut y avoir jusqu'à quatre solutions au MGD dans ce cas.

Quand B_1, A_2, B_2 sont alignés, la position de B_2 est déterminée de manière unique. Sinon il y a deux solutions pour l'articulation B_2 . Quand les coordonnées de deux articulations sont connues, nous avons vu en V.3 que

dans des conditions admet une solution. Le MGD admet alors deux solutions dans le cas le plus général, mais il est très difficile de donner exactement les conditions menant à trois ou quatre solutions.

V.4.3.2 Plate-forme plane

Utilisons de nouveau la méthode décrite en V.1. Le troisième capteur ajoute une sixième équation linéaire à un système à six inconnues.

$$-N_{2x}a_2 + N_{2x}p_2l_x + N_{2y}p_2l_y + N_{2z}p_2l_z = 0$$

Quand ce système est de rang maximum, le MGD a une solution unique. Ce système est dégénéré quand le déterminant du sous-système (V.19), (V.20) basé sur les 5 segments s'annule (voir section V.4.2) ou quand le troisième capteur donne une information redondante. De la section V.4.2 nous savons qu'il y a jusqu'à deux solutions pour la posture quand le sous-système (V.19)-(V.20) n'est pas dégénéré. Le troisième capteur ne donne pas d'information utile quand le plan qu'il mesure contient les deux positions possibles pour B_2 trouvées précédemment. Cela se produit par exemple quand la normale N_2 est parallèle à l'axe (B_1A_2) , *i.e.* A_2 est aussi le centre du cercle formé de l'intersection de $\mathcal{S}_2$ et de la sphère centrée en B_1 de rayon $\|B_1B_2\|$. En général il n'y aura qu'une solution pour cette architecture.

V.4.4 Ajout de plus de capteurs : cas $2^1 - 1^n$

Comme cela a été déjà vu dans la section précédente, l'architecture comprenant une plate-forme plane aura une solution unique si le système demeure de plein rang, donc l'ajout d'autres capteurs diminue le risque d'avoir un cas dégénéré. Mais pour une architecture avec une plate-forme quelconque, il sera nécessaire d'ajouter six capteurs pour obtenir un système dont toutes les équations sont linéaires. Cette architecture admet une solution unique hormis pour les cas dégénérés.

V.5 Applications

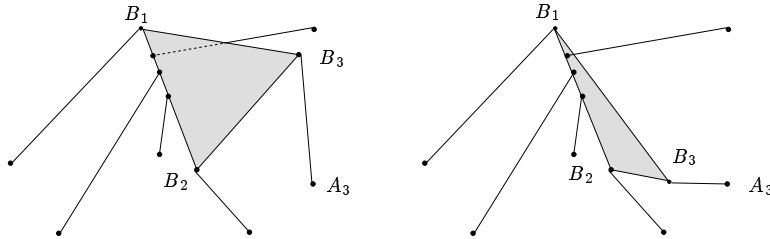
Il serait intéressant d'étudier quelques architectures de robots parallèles spécifiques pour lesquels le nombre de solutions au MGD est presque indépendant de la posture.

V.5.1 Deux articulations connues : cas 2^2

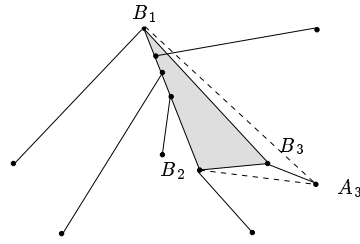
Soit B_1 et B_2 les deux articulations entièrement déterminées.

- D'abord considérons une architecture (voir figure V.4) dans laquelle la plate-forme mobile a cinq de ses articulations alignées, *i.e.* B_4, B_5, B_6 appartiennent à la droite (B_1B_2) . C'est le robot décrit dans [ZS91]. À partir

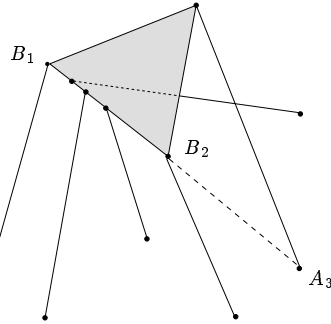
des théorèmes V.1 et V.2, nous déduisons que, en général, nous obtiendrons deux postures pour ce robot. Les deux positions de B_3 sont symétriques par rapport au plan $(B_1B_2A_3)$, et ces solutions se réduisent à une solution double quand B_1, B_2, A_3, B_3 sont coplanaires ; mais cela correspond à une configuration singulière.



Deux solutions dans une configuration générale



Une solution double si B_1, B_2, A_3, B_3 sont coplanaires



Configuration singulière si B_1, B_2, A_3 sont alignés

FIG. V.4 – Architecture (ZHANG-SONG) avec deux solutions en général quand deux articulations de la plate-forme sont connues.

- Considérons le robot particulier ayant une plate-forme plane dont aucune de ses articulations n'est alignée avec (B_1B_2) . Il y a deux solutions pour le MGD si et seulement si A_3 n'est pas dans le plan de la plate-forme et si tous les points A_4, A_5, A_6 sont soit coplanaires avec A_3, B_1, B_2 soit alignés

avec B_1 et B_2 . Dans le cas spécial où la plate-forme est plane mais la base ne l'est pas il y a le plus souvent une seule solution.

• Étudions maintenant un robot dont la plate-forme et la base (figure V.5) sont planes. Il peut être facilement déduit du théorème V.1 que, dans la plupart des cas, il n'y aura qu'une seule solution pour ce robot (nous supposons encore que la condition (V.9) est vérifiée). À l'aide du théorème V.2, on voit qu'il y a deux solutions si et seulement si B_1 et B_2 sont dans le plan de la base. Le cas d'une solution double est rencontré quand la base et la plate-forme sont dans le même plan; cela correspond à une configuration singulière classique [Mer88].

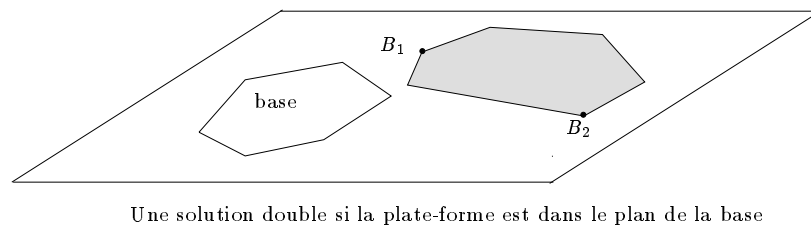
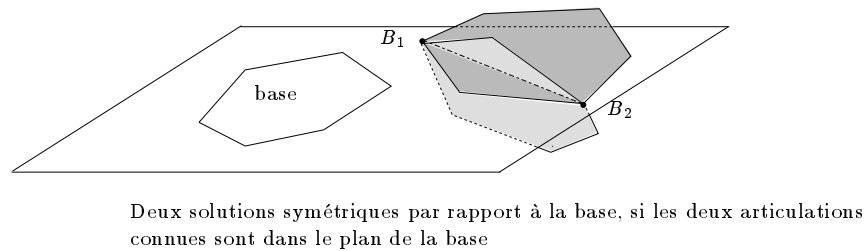
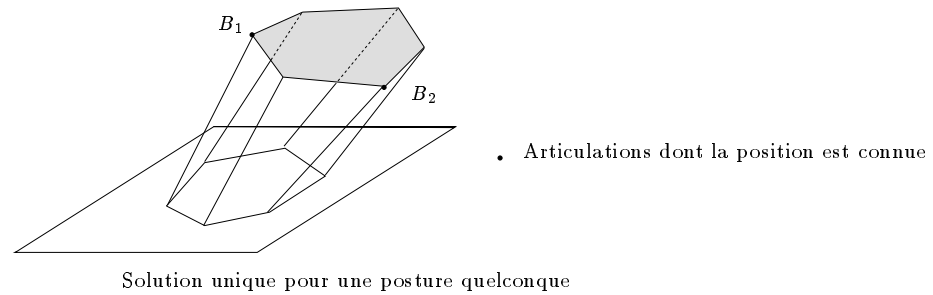


FIG. V.5 – Architecture (base et plate-forme planes) avec une solution en général quand deux articulations de la plate-forme sont connues.

• Soit le robot dont la plate-forme est triangulaire. Les articulations sont confondues deux à deux ($B_1 \equiv B_4$, $B_2 \equiv B_5$, $B_3 \equiv B_6$). Le problème du

modèle géométrique direct admet deux solutions si et seulement si B_1, B_2, A_3 et A_6 sont coplanaires. En fait, quand cette dernière condition est vérifiée et de plus B_3 est coplanaire avec B_1, B_2, A_3 et A_6 , le MGD admettrait une solution double. Mais ce dernier cas est bien connu sous le nom de *configuration singulière de HUNT* [Mer88], une droite coupe les 6 segments.

• D'une manière générale, il est possible de donner les conditions suffisantes d'unicité suivantes :

Théorème V.5 *Dans le cas 2^2 , où 4 capteurs sont ajoutés par paires sur deux segments, le modèle géométrique direct du robot parallèle n'admet qu'une seule solution si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- *La plate-forme est plane*
- *Les articulations de la base A_4, A_5, A_6 ne sont pas alignées*
- *Les articulations de la base A_3, A_4, A_5, A_6 ne sont pas coplanaires*

V.5.2 Une articulation connue : cas 2^1

De manière à obtenir le plus petit nombre de solutions pour le MGD, nous devrions concevoir le robot avec une plate-forme plane tel que les conditions suffisantes V.4.2 ne soient pas remplies. Avec une plate-forme plane et une base *non plane* nous minimisons le risque de rencontrer un cas dégénéré. Il est recommandé de ne pas choisir d'équiper de capteurs supplémentaires des articulations alignées ou confondues. Une indication est que placer deux capteurs supplémentaires sur un segment dont l'articulation sur la plate-forme est une articulation multiple n'est pas une bonne idée. En effet dans ce cas une équation linéaire devient indépendante de toutes les inconnues et le nombre de solutions possibles devient quatre au lieu de deux. Géométriquement, cela s'explique par le fait que B_i se déplace sur un cercle du fait de l'articulation double et a donc un seul degré de liberté ; par conséquent l'un des deux capteurs additionnels est redondant. Cela arrive en particulier dans le cas d'un TSSM.¹ En d'autres termes ce n'est pas le meilleur moyen de placer les capteurs puisque l'un d'entre eux deviendra inutile. Il y aura une solution pour une plate-forme quelconque dont la position d'une articulation est connue et quatre capteurs supplémentaires ; pour une plate-forme plane un capteur supplémentaire suffit, sauf pour les cas dégénérés. En résumé, les conditions suffisantes d'unicité lorsque la position d'une articulation est connue sont écrites dans le théorème suivant.

Théorème V.6 (Conditions suffisantes d'unicité (cas 2^1)) *Un robot équipé de deux capteurs supplémentaires sur un même segment permettant de*

1. Triangular Symmetric Simplified Manipulator

connaître la position de l'articulation associée sur la plate-forme admet une solution unique pour son modèle géométrique direct si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément :

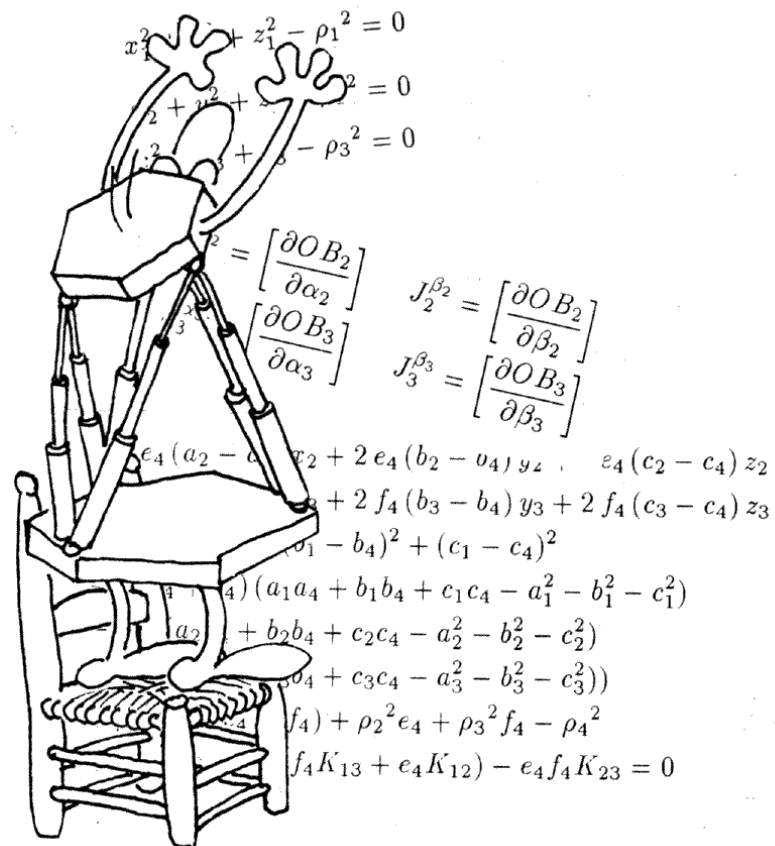
- Plate-forme plane,*
- base non plane,*
- pas de capteur additionnel sur une articulation multiple de la plate-forme*
- pas de capteur additionnel sur des articulations alignées*

V.6 Conclusion

Nous avons montré sous quelles conditions le problème du modèle géométrique direct admet différents nombres de solutions quand au moins la position d'un des points de la plate-forme est déterminée par les informations provenant de capteurs additionnels. Ces conditions sont géométriques aussi bien qu'analytiques. Elles permettent de calculer les solutions et les postures associées du robot. L'étude de ces différents cas est particulièrement adaptée quand les capteurs ne sont pas fiables à cause par exemple d'un environnement dangereux. Ainsi la perte de capteurs est moins dommageable pour le calcul du MGD et le système est plus fiable. Trois capteurs angulaires conjointement avec les longueurs des segments permettent encore la détermination du MGD d'un robot manipulateur parallèle. Ces résultats permettent de fournir des informations utiles lors de la conception d'un manipulateur en vue d'obtenir un MGD le plus simple possible. Néanmoins, il est encore difficile de déterminer, dans le cas où seule une articulation est bien définie, les conditions nécessaires d'unicité ou bien même quand les bornes sont-elles atteintes.

Chapitre VI

Méthodes algébriques





La résolution du modèle géométrique direct des robots parallèles a, par le biais de sa représentation algébrique, été l'objet de l'application de nombreuses méthodes algébriques. C'est ce que nous aborderons dans ce chapitre, en laissant les méthodes d'élimination pour plus tard. En premier lieu nous étudierons la multi-homogénéisation elle-même et la généralisation du théorème de Bézout (voir la section IV.2.1). Puis la borne de BKK.¹ Enfin nous montrerons l'intérêt des bases standard dans le cas générique.

VI.1 Multi-homogénéisation et quaternions

La création de la multi-homogénéisation est la conséquence logique de l'insuffisance de l'homogénéisation classique (voir la section IV.2.1). L'homogénéisation s'applique à la résolution de systèmes d'équations algébriques. Son insuffisance provient du fait que dans de nombreux cas le décompte des solutions infinies n'est pas optimal : la borne supérieure après multi-homogénéisation sur le nombre de solutions d'un système est meilleure que la borne après homogénéisation.

VI.1.1 Multi-homogénéisation

La notion de circularité a été introduite dans la section IV.2.1 pour que le nombre de solutions prévues par le théorème de Bézout soit le plus fidèle possible au nombre effectif. Néanmoins, cela ne suffit pas et il est nécessaire d'être encore plus précis. Le théorème de Bézout ne tient pas compte de deux phénomènes :

- l'intersection peut être infinie
- il peut y avoir des solutions à l'infini, outre les points cycliques.

Pour illustrer ces deux aspects qui prennent en défaut le théorème de Bézout, prenons l'exemple de [WMS88], c'est à dire l'intersection de deux droites du plan. Leur intersection doit contenir un point, car 1 est le produit des degrés des équations des droites. Or dans le cas où elles sont parallèles, cette valeur ne correspond plus. Si elles sont confondues, leur intersection est la droite elle-même, objet de dimension non nulle et contenant donc une infinité de solutions. Si elles sont distinctes, alors elles n'ont plus d'intersection sinon en un point à l'infini. Par contre pour peu que l'on perturbe, même très légèrement, leur parallélisme, on retrouve bien un point unique d'intersection.

1. acronyme tiré du nom des auteurs BERNSTEIN, KUSHNIRENKO, KHOVANSKI

MORGAN, SOMMESE et WAMPLER [MS87, WMS88, Wam94] ont beaucoup travaillé sur la multi-homogénéisation dans le cadre des méthodes d'homotopies pour résoudre des systèmes d'équations algébriques non-linéaires. Pour aborder la multi-homogénéisation, il convient de définir la structure d'un système multi-homogène et ensuite le nombre de solutions qu'il admet et qui est appelé le nombre de Bézout du système.

VI.1.1.1 Systèmes multi-homogènes

Tout d'abord il est possible d'écrire tout système d'équations homogènes comme appartenant à une famille plus large. Considérons que les variables n'appartiennent plus à un seul et même groupe, mais au contraire qu'elles sont séparées en m groupes. On parlera alors de m -homogénéisation. Dans la IV.2.1 nous avons vu l'intérêt de l'introduction de l'espace projectif. En multi-homogénéisation, il est tout aussi intéressant de l'utiliser, mais en allant plus loin. Ainsi chaque groupe de variables est plongé dans un espace projectif séparé. C'est à dire que nous plongeons $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_m}$ où $\sum_{i=1}^m n_i = n$. De cette façon, une solution à l'infini est une solution dont au moins une des variables d'homogénéisation a une valeur nulle. Pour illustrer ces notions, il convient de les appliquer sur le système de l'exemple 1 suivant.

Exemple 1 [WMS88] Soit le système d'équations

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ce système a quatre solutions selon le théorème de Bézout. Mais seulement deux sont finies, les points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Appliquons une homogénéisation simple à ce système, il devient :

$$\begin{aligned} x^2 - w^2 &= 0 \\ x y - w^2 &= 0 \end{aligned}$$

Outre les solutions finies précédentes, ce système a aussi la solution double et infinie $(x, y, w) = (0, 1, 0)$. Maintenant, rendons le système 2-homogène ($m = 2$); les variables sont réparties en deux groupes comme suit : $E_1 = \{x, w_1\}$, $E_2 = \{y, w_2\}$, où w_1 et w_2 sont les variables d'homogénéisation. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} x^2 - w_1^2 &= 0 \\ x y - w_1 w_2 &= 0 \end{aligned}$$

Et puisque les solutions $(x = 0, w_1 = 0)$ ou $(y = 0, w_2 = 0)$ sont interdites car indéfinies (voir IV.2.1.1), ce dernier système n'admet pas d'autres solutions

que les solutions finies ($x = 1, w_1 = 1; y = 1, w_2 = 1$) et ($x = -1, w_1 = 1; y = -1, w_2 = 1$), car travaillant en homogène on peut imposer $w_1 = w_2 = 1$. ■

Ce traitement différent de la partie infinie de l'espace entraîne un nombre plus petit de solutions à l'infini et justifie ainsi l'intérêt de la multi-homogénéisation. Notons qu'un système (respectivement une équation) 1-homogène est un système (respectivement une équation) homogène.

VI.1.1.2 Nombre de Bézout

La version en dimension n du théorème de Bézout n'est effective que pour une intersection finie (ce que les algébristes appellent un problème 0-dimensionnel) et ne sait pas décompter les solutions à l'infini.

Théorème VI.1 (Bézout dimension n) *Un système à n équations homogènes de degrés respectifs $d_i, i = 1 \dots n$, d'intersection finie, admet un nombre de solutions de*

$$\prod_{i=1}^n d_i$$

L'objectif est de définir une notion équivalente à la borne de Bézout qui puisse être appliqué dans le cas multi-homogène. C'est ce que l'on appellera le *nombre de Bézout*.

Soit un système m -homogène dont les groupes de variables sont nommés $E_1, E_2, \dots, E_m$. Par définition, un polynôme multi-homogène est de même degré relativement aux groupes de variables définis. Notons d_{ij} ce degré, dit aussi m -degré [Wam], qui est la somme des exposants des variables appartenant à un même groupe E_j dans l'équation i . Le nombre de solutions d'un système multi-homogène est donné par le nombre de Bézout.

Théorème VI.2 (Nombre de Bézout [MS87]) *le nombre de Bézout d'un système d'équations polynomiales m -homogènes est égal au coefficient du terme $\prod_{j=1}^m \alpha_j^{\text{card}(E_j)-1}$ dans le produit*

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m d_{ij} \alpha_j \right)$$

Utilisons le nombre de Bézout sur un exemple.

Exemple 2 *Reprenons le système 2-homogène de l'exemple 1. Deux groupes de même cardinalité sont présents et les 2-degrés sont $(d_{1,1}, d_{1,2}) = (2, 0)$ pour la première équation et $(d_{2,1}, d_{2,2}) = (1, 1)$ pour la seconde. Nous devons chercher le coefficient du terme $\alpha_1 \alpha_2$ dans le produit $(2 \alpha_1 + 0 \alpha_2)(1 \alpha_1 + 1 \alpha_2)$. Celui-ci vaut deux et on retrouve ainsi le nombre de solutions effectives. ■*

Il est intéressant de remarquer que le nombre de Bézout d'un système 1-homogène est identique à la borne de Bézout, c'est donc une notion qui la généralise.

VI.1.2 Résolution avec les quaternions

Dans cette section, l'espace euclidien à trois dimensions est identifié avec l'espace des quaternions purs, en identifiant un point M ou un vecteur OM de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, au quaternion $q_M = q_{OM} = (0, x, y, z)$ [Cas87]. La base des quaternions est définie par $(1, i, j, k)$ et les règles de produit dans cette base sont

$$\begin{aligned} j \star k &= -k \star j = i \\ k \star i &= -i \star k = j \\ i \star j &= -j \star i = k \end{aligned}$$

Les quaternions sont souvent utilisés pour représenter les rotations. Une rotation R est associée à un quaternion unitaire r , c'est-à-dire $r = (r_0, r_1, r_2, r_3)$ tel que $r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$. L'image $R \cdot OM$ d'un vecteur OM par R est donnée par le quaternion $r \star q_M \star r'$, où le conjugué de r est noté $r' = (r_0, -r_1, -r_2, -r_3)$. Trois paramètres déterminent r puisque ses quatre coordonnées sont telles que r est un quaternion unitaire, et puisque r et $-r$ représentent la même rotation. Les résultats de cette section sont parus dans [TTM95a].

VI.1.2.1 Trois capteurs additionnels ou plus

Nous verrons ici que si nous avons trois capteurs supplémentaires, il n'y a pas plus de huit solutions complexes pour le problème du modèle géométrique direct. Ce résultat est indépendant du choix de l'emplacement des capteurs.

Les trois capteurs produisent trois équations qui sont linéaires en les coordonnées du centre de la plate-forme C . Pour peu que les données en provenance des capteurs soient pertinentes, nous pouvons résoudre ce système linéaire 3×3 . Une fois que les coordonnées de ce point sont éliminées, le problème revient à trouver une rotation. En utilisant trois des équations de longueurs (V.7), r est l'intersection de trois surfaces quadratiques spatiales. Par le théorème de BÉZOUT sur l'intersection de surfaces nous déduisons que le nombre de solutions est au plus huit.

Théorème VI.3 *Pour un robot parallèle général équipé de trois capteurs additionnels angulaires fournissant une information pertinente, le MGD admet au plus huit solutions.*

VI.1.2.2 Un capteur additionnel

WAMPLER [Wam94] formule le problème en utilisant les coordonnées de *soma* (qui sont équivalentes aux quaternions duaux [Cas87]). Le déplacement transformant $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}$, qui consiste en une rotation R composée avec la translation de vecteur OC , est représentée par ses coordonnées de *soma* qui sont deux quaternions r et c . r est le quaternion unitaire vu précédemment représentant R , et c est donné par $q_{OC} = c \star r'$.

En utilisant ce paramétrage, les équations (V.7) deviennent

$$(q_{B_i} \star q'_{B_i} + q_{A_i} \star q'_{A_i} - \rho_i^2 + \rho_1^2)(r \star r') + 2\Re(c \star q'_{B_i} \star r' - c \star r' \star q'_{A_i} - r \star q_{B_i} \star r' \star q'_{A_i}) = 0 \quad (\text{VI.1})$$

$\Re$ est notre notation désignant la partie réelle d'un quaternion.

WAMPLER modifie alors ces équations par un changement de coordonnées non singulier de (r, c) à $(x, \hat{x})$. Il obtient six équations qui sont bilinéaires en x et $\hat{x}$. En outre, il obtient deux équations qui sont quadratiques respectivement en x et $\hat{x}$, signifiant que le quaternion r représentant R est un quaternion unitaire. Ainsi, le nombre de BÉZOUT 2-homogène est le coefficient de $\alpha^4\beta^4$ dans le produit combinatoire $(\alpha + \beta)^6(2\alpha)(2\beta)$, qui est

$$\binom{6}{3} 2^2 = 80$$

Finalement il déduit la borne de 40 sur le nombre de solutions en remarquant que (r, c) et $(-r, -c)$ correspondent en fait au même déplacement.

Maintenant si nous ajoutons un capteur angulaire, placé sur le segment 1 (sans perte de généralité), ce capteur indique un plan contenant A_1 et B_1 , dont le vecteur normal est représenté par un quaternion pur n . Nous obtenons une équation supplémentaire :

$$\Re(n \star c \star r' + n \star r \star q_{B_1} \star r' - n \star q_{A_1}) = 0 \quad (\text{VI.2})$$

En utilisant le même changement de repère, nous avons une nouvelle équation bi-linéaire en x et $\hat{x}$. Nous abandonnons alors une des équations quadratiques et obtenons un système dont le nombre de BÉZOUT 2-homogène est le coefficient de $\alpha^4\beta^4$ dans le produit combinatoire $(\alpha + \beta)^7(2\alpha)$. Ce nombre est

$$\binom{7}{3} 2 = 70$$

d'où nous déduisons que le nombre de solutions du modèle géométrique direct avec un capteur angulaire additionnel est borné par 35. Cette borne est probablement surestimée puisque nous ne tenons plus compte d'une des équations quadratiques.

Théorème VI.4 *Pour un robot parallèle général équipé d'un capteur additionnel angulaire fournissant une information pertinente, le MGD admet au plus 35 solutions.*

VI.1.2.3 Deux capteurs additionnels

Dans ce cas nous ajoutons un second capteur additionnel par rapport à la section ci-dessus, que nous plaçons sur le segment 2 (toujours sans perte de généralité). Ceci nous permet d'utiliser une équation tout à fait similaire à l'équation (VI.2)

$$\Re(n \star c \star r' + n \star r \star q_{B_2} \star r' - n \star q_{A_2}) = 0 \quad (\text{VI.3})$$

Ensuite, le même fameux changement de repère transforme cette équation en une forme bilinéaire en x et $\hat{x}$. Le système devant être carré, il nous faut encore abandonner une autre équation quadratique pour introduire cette nouvelle équation provenant d'un capteur additionnel. La structure multi-homogène du système ne change pas, c'est donc le coefficient du même terme qu'en VI.1.2.2, $\alpha^4\beta^4$, que nous devons chercher dans le produit combinatoire $(\alpha + \beta)^8$. Ce coefficient est encore 70. Ainsi, avec deux capteurs supplémentaires, le nombre de solution obtenues par cette paramétrisation n'est pas plus intéressant que s'il y en avait qu'un. Tout au plus peut-on raisonnablement conclure que cela diminue toutefois le risque que le capteur n'apporte pas d'information pertinente.

VI.1.2.4 Conclusion

Il n'est pas surprenant d'obtenir une borne impaire sur le nombre de solutions, ni la même borne en ayant un ou deux capteurs. En effet pour le premier point, gardons en mémoire le fait que la valeur trouvée n'est qu'une borne supérieure et qu'elle n'est pas forcément atteinte. Quant au second point, il provient du fait que le système que nous n'utilisons pas toutes les contraintes. En effet la méthode utilisée ne peut travailler que sur des systèmes carrés et non pas surcontraints. Les contraintes rajoutées sont des équations de même degré que les équations qui ont été enlevées, préservant ainsi le nombre de solutions.

Les bornes trouvées dans cette section sont valables pour des robots tout a fait généraux. Le revers est que nous ne pouvons pas obtenir de meilleures bornes en spécialisant l'architecture.

VI.2 Volume mixte - borne BKK

Le *volume mixte* est une notion qui joue un rôle important pour l'évaluation du nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales. C'est

une notion qui est aussi à la base de la théorie de l'élimination creuse (section VII.1.3).

Les *polytopes de Newton* sont utilisés dans le but de résoudre efficacement les systèmes de polynômes car ils modélisent fidèlement la structure du système polynomial [Emi94, Ver94]. La borne de BKK est le nom donné au calcul des volumes mixtes sur les polytopes de Newton.

VI.2.1 Les concepts

L'élimination creuse travaille sur $\mathbb{C}^{*n}$ pour ne pas tenir compte des solutions sans signification physique [Emi94]. Les racines dans $\mathbb{C}^{*n}$ sont ce qu'on appelle les racines *toriques*. Considérons sur cet espace, les *polynômes de Laurent*. Ces polynômes sont définis comme une somme de monômes dont les puissances des variables sont des entiers relatifs. Ils sont définis sur l'anneau polynomial $\mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$. Une de leur propriétés est qu'ils peuvent être multipliés par des monômes sans que cela change leurs racines. Un monôme peut être assimilé à un point dans l'espace des variables, où la puissance de chacune des variables correspond à la coordonnée selon l'axe associé.

Exemple 3 Soit un polynôme sur $\mathbb{K}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$

$$a x^2 y + b x y + c x y^2 z^3$$

Le premier monôme, $x^2 y$ est associé au point $(2, 1, 0)$ dans $\mathbb{Z}^3$. Le deuxième est associé à $(1, 1, 0)$ et le dernier est associé à $(1, 2, 3)$. Tout terme constant est associé à $(0, 0, 0)$ ■

Le *support* d'un polynôme est l'ensemble des points associés aux monômes *présents* (leur coefficient ne doit pas être nul) dans ce polynôme. Enfin nous pouvons définir la notion de polytope de Newton d'un polynôme qui est l'*enveloppe convexe* du support de ce polynôme. Notons $V(A)$ le volume du polytope.

Une fois que ces notions préliminaires sont présentées, la notion essentielle qu'est le volume mixte peut être introduite. Le volume mixte est une forme multi-linéaire par rapport à la somme de Minkowski (notée $\oplus$). La somme de Minkowski (voir [GRS83]) de deux ensembles A et B est définie par :

$$A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Elle est très utilisée en robotique pour l'évitement d'obstacle notamment.

Définition VI.1 (Volume mixte [Emi94, Ver94]) Le volume mixte $\mathcal{V}(P_1, \dots, P_n)$ de n polytopes de Newton $P_1, \dots, P_n$ vaut

$$\mathcal{V}(P_1, \dots, P_n) = n! V(P_1)$$

$$\mathcal{V}(P_1, \dots, P_n) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-\text{card}(I)} V\left(\bigoplus_{i \in I} P_i\right)$$

Le volume mixte ne change pas lorsqu'une équation est multipliée par un monôme. Ce qui montre l'intérêt de l'extension aux polynômes de Laurent. Cette multiplication correspond à une translation du polytope de Newton associé.

Exemple 4 Soient les systèmes

$$\begin{aligned} P_1 \quad x^2 + y^2 x^2 + x &= 0 \\ P_2 \quad x^2 + x^2 y + y &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q_1 \quad x + y^2 x + 1 &= 0 \\ Q_2 \quad x^2 + x^2 y + y &= 0 \end{aligned}$$

où la première équation des deux systèmes sont liées par le facteur x . Les supports des équations des systèmes sont indiqués sur la figure VI.1. Ces

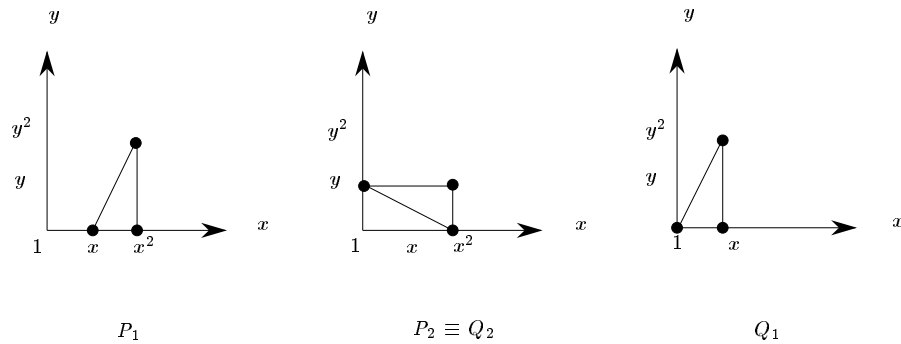


FIG. VI.1 – Polytopes de Newton des équations des systèmes de l'exemple 4

deux systèmes ont même volume mixte (5) que l'on peut trouver à partir de la figure VI.2. ■

Finalement la borne de BKK est établie par le théorème :

Théorème VI.5 (Borne de BKK [Ber75]) *Le nombre de solutions communes dans $\mathbb{C}^{*n}$ aux polynômes $f_1, \dots, f_n$ de polytopes de Newton $P_1, \dots, P_n$, est soit infini, soit inférieur ou égal à $\mathcal{V}(P_1, \dots, P_n)$.*

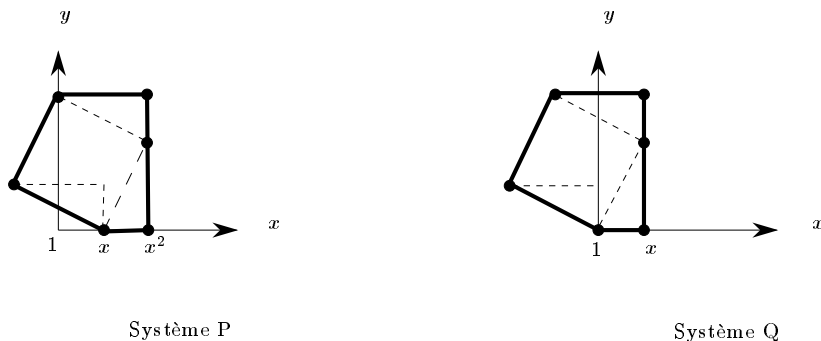


FIG. VI.2 – Somme de Minkowski pour chaque système de l'exemple 4

Plusieurs travaux ont suivi ce théorème pour l'affiner et en particulier pour ne plus exclure les composantes nulles dans les racines. Une table comparative [Ver94] montre que sur la plupart des problèmes traités, (problème classiques en résolutions de systèmes) la borne de BKK est inférieure ou égale à la borne de Bézout. Dans de nombreux systèmes provenant de cas concrets, la borne de BKK sera bien moins grande. Il y a égalité entre ces deux bornes lorsque, pour chaque polynôme du système, tous les monômes possibles sont présents avec un coefficient non nul [Emi94]. Autrement, la borne de BKK est plus avantageuse. Ce qui veut dire que dans le cas de polynômes à coefficients génériques, les bornes sont identiques.

VI.2.2 Les applications

Pour appliquer cette théorie à nos problèmes de modèle géométrique direct, nous avons utilisé le programme en langage C de Ioannis EMIRIS disponible en FTP anonyme.² EMIRIS applique le calcul du volume mixte au modèle géométrique direct d'un robot parallèle général. La représentation standard le mène, d'abord, à 160 solutions, ce qui est bien meilleur que la borne de Bézout, mais encore quatre fois supérieur à la vraie valeur. Ensuite en utilisant une représentation basée sur les quaternions et sur sept équations, la borne descend à 84. Finalement c'est une représentation à dix équations qui lui donne la meilleure valeur, soit 54, malgré tout encore au dessus du 40 désormais établi.

Une forte contrainte d'utilisation est que le système doit comporter autant d'équations que d'inconnues, ce qui n'est pas notre cas. Au contraire nous avons même toujours plus d'équations que d'inconnues puisque c'est, par définition, notre façon de simplifier le problème. Néanmoins, il existe un

². [ftp://robotics.eecs.berkeley.edu/pub/MixedVolume](http://robotics.eecs.berkeley.edu/pub/MixedVolume)

moyen de s'en sortir par le biais d'ajout de capteurs. A défaut de pouvoir exploiter totalement le système, nous pourrions au moins exploiter un sous-système de degré total moindre. Il conviendra de choisir autant d'équations quadratiques à enlever du système qu'il y a d'équations linéaires provenant des capteurs additionnels à introduire. En particulier on pourra choisir d'éliminer en priorité les équations d'orthonormalité de la rotation.

Localisation 2-1ⁿ Dans cette situation, on peut considérer que la position du centre du repère lié à la plate-forme est connue. Il ne reste plus que les neuf composantes de la matrice de rotation comme inconnues. Cinq équations provenant des longueurs des segments, les autres équations (pour compléter à neuf) sont, au choix, des équations provenant des capteurs supplémentaires s'il y en d'autres que ceux qui ont servi à connaître la position de C , ou des équations d'orthonormalité.

Localisation 1ⁿ Ce placement des n capteurs, un par segment du robot, laisse la totalité des variables, soit 12.

Conclusion Comme nous travaillons avec des équations génériques pour essayer d'en tirer des conditions d'obtention des bornes, les supports contiennent tous les monômes. Les systèmes provenant des équations du MGD sont denses. Cette approche n'est pas très adaptée à une analyse détaillée suivant les architectures considérées. En effet, l'architecture ne va jouer sur le résultat final que dans la mesure où elle fait apparaître ou disparaître un monôme parmi les équations du modèle. De plus, le fait que nous travaillons avec un modèle restreint a une conséquence directe sur les bornes obtenues qui sont trop élevées comme le montrent les résultats obtenus dans d'autres sections.

VI.3 Les bases standard (ou de Gröbner)

Un des problèmes fondamentaux en algèbre est de trouver la solution d'un système d'équations polynomiales. Plus précisément, ce qui nous intéresse est de compter le nombre de solutions de ce système. Pour les notions discutées dans cette section on pourra se reporter à [CLO92, BW93]. Tout système polynomial F est associé à un idéal $I(F)$. C'est pourquoi nous travaillerons sur les idéaux. L'objectif est donc de trouver une représentation des idéaux la plus "réduite" possible et contenant, malgré tout, toutes les informations. En particulier dans l'anneau des polynômes à une variable, l'idéal est engendré le *pgcd* des polynômes qui le définissent, calculé par l'algorithme d'EUCLIDE. Dans l'anneau des polynômes à n variables, une base de l'idéal possédant

de bonnes propriétés est appelée *base de Gröbner* ou *base standard* : elle est calculée par l'algorithme de BUCHBERGER.

VI.3.1 Réduction en une dimension

En une dimension, l'anneau de travail $\mathbb{K}[x]$ est un anneau principal. Cela signifie que tout idéal de cet anneau peut se mettre sous la forme $\langle f \rangle$. f est le polynôme de degré minimal de l'idéal et est défini à une constante multiplicative près.

Exemple 5 Ainsi l'idéal défini par

$$\langle x^2 + xa + 2x + 2a, x^2 + (a+b)x + ab \rangle$$

est engendré par $\langle x + a \rangle$. ■

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le plus grand commun diviseur (*pgcd*) de plusieurs polynômes. Il est intéressant de remarquer pour la suite, qu'il n'est effectif qu'une fois qu'est défini un ordre sur les monômes ; en l'occurrence ils sont ordonnés suivant leurs puissances décroissantes. Le *pgcd* de plusieurs polynômes est le polynôme engendrant leur idéal.

Exemple 6 En reprenant l'idéal de l'exemple 5, il apparaît qu'il peut s'écrire aussi sous la forme

$$\langle (x+a)(x+b), (x+a)(x+2) \rangle$$

où, clairement, le *pgcd* des polynômes l'engendrant vaut $x + a$. ■

Désormais nous nous intéresserons au cas général, où l'on a n variables, qui mène aux bases standard et auparavant aux ordres possibles sur les monômes.

VI.3.2 Ordres sur les monômes

Bien que plusieurs choix d'ordres soient possibles, et cela en fonction du contexte, certaines propriétés sont indispensables. Cet ordre doit être total pour que tous les monômes soient comparables deux à deux, qu'il préserve la structure de l'anneau, et enfin qu'il existe un élément minimal pour toute suite décroissante. Voici une liste des définitions des ordres les plus couramment utilisés :

lex-lexicographique il ne dépend que de l'ordre alphabétique pris sur les variables.

grlex-lexicographique gradué le classement se fait à partir des degrés, les cas d'égalité sont tranchés à l'aide de l'ordre lexicographique.

grevlex-lexicographique gradué inverse le classement se fait à partir des degrés, les cas d'égalité sont tranchés en regardant la plus petite puissance de la plus petite variable pour l'ordre alphabétique.

Exemple 7 Prenons le même polynôme, écrit suivant chacun des ordres précédents :

$$\begin{array}{ll} -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xy^2z + 4z^2 & \text{lex} \\ 7x^2z^2 + 4xy^2z - 5x^3 + 4z^2 & \text{grlex} \\ 4xy^2z + 7x^2z^2 - 5x^3 + 4z^2 & \text{grevlex} \end{array}$$

■

Le problème lié aux ordres sur les monômes est que le reste de la division d'un polynôme par d'autres polynômes en dépend : il n'est pas unique. Que le reste soit nul n'est pas une propriété invariante de la division.

VI.3.3 Les bases de Gröbner et leurs caractéristiques

Elles ont été introduites pour que le reste de la division entre polynômes soit unique.

VI.3.3.1 Leur définition

Les bases de Gröbner étant très liées au terme de plus haut degré des polynômes considérés, cela n'a pas de sens de parler d'une base de Gröbner sans fixer une relation d'ordre. Notons $HT_{\prec}(f)$ le monôme dominant de f relativement à la relation d'ordre $\prec$.

Définition VI.2 (Base de Gröbner) Soit I un idéal, il admet la base de Gröbner (ou base standard) $G = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subset I$ si

$$\langle HT_{\prec}(I) \rangle = \langle HT_{\prec}(g_1), \dots, HT_{\prec}(g_s) \rangle$$

VI.3.3.2 Leur construction

Il existe plusieurs versions améliorées de l'algorithme de BUCHBERGER. Néanmoins, nous ne présenterons que la version de base, qui suffit amplement pour appréhender le mécanisme de leur construction. L'idée principale repose sur la diminution du degré des équations présentes dans l'idéal. C'est analogue à la division euclidienne dans la mesure où à chaque étape on réduit par rapport à l'un des monômes. L'opération essentielle est alors de construire à partir de deux polynômes un polynôme appelé *S-polynôme*.

Définition VI.3 (S-polynôme) Notons γ le plus petit multiple commun de $HT_{\prec}(f)$ et de $HT_{\prec}(g)$. Le *S-polynôme* de f et g , deux polynômes non nuls

dans $\mathbb{K}$, est

$$S(f, g) = \frac{\gamma}{HT_{\prec}(f)} \cdot f - \frac{\gamma}{HT_{\prec}(g)} \cdot g$$

L'algorithme de BUCHBERGER introduit dans la base qu'il construit tous les S-polynômes qui ne sont pas identiquement nuls. Soit un idéal engendré par les polynômes $f_1, \dots, f_n$ alors sa base de Gröbner est construite par

$G := \{f_1, \dots, f_n\}$

Répéter

$G' := G$

Pour $(\{p, q\} \in G', p \neq q)$ **Faire**

$S := S(p, q)$

Si $S \neq 0$ **Alors** $G := G \cup \{S\}$ **FinSi**

FinPour

Jusqu'à $G = G'$

La complexité théorique de cet algorithme est très élevée. C'est $O(d^{n^2})$ où d est le degré des équations et n le nombre de variables (doublement exponentiel!).

Certains des éléments du résultat final obtenu par cet algorithme sont inutiles. Il convient alors de définir la réduction d'une base de Gröbner. Une base de Gröbner *réduite* G , est telle que pour tout polynôme p de G

- le coefficient de son terme dominant est égal à 1
- aucun de ses monômes n'est dans $\langle HT_{\prec}(G \setminus \{p\}) \rangle$

La base réduite est unique pour un idéal donné.

VI.3.3.3 Propriétés

Propriété VI.1 (Système soluble) *Un système d'équations polynomiales est soluble si et seulement si 1 n'appartient pas à la base de Gröbner du système.*

Exemple 8 *Considérons le système soluble*

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

La base de Gröbner de ce système est le singleton $\{x+1\}$. Ensuite, modifions le légèrement pour qu'il n'admette plus de solutions

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ 1000x + 1001 &= 0\end{aligned}$$

L'idéal engendré par ces deux polynômes a le singleton $\{1\}$ pour base de Gröbner. ■

Une base standard par rapport à l'ordre lexicographique donne une base triangulaire du système très pratique pour l'élimination.

Propriété VI.2 (Idéaux d'élimination) Soit l'ordre lexicographique sur les variables, noté $\prec$. Alors pour tout ensemble de polynômes F et $1 \leq i \leq n$, on a : l'ensemble $G(F) \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_i]$ est une base de Gröbner pour le $i^{\text{ème}}$ idéal d'élimination engendré par F , i.e. pour $I(F) \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_i]$

Cette propriété conduit à une méthode générale de résolution par substitutions successives pour tout système polynomial ayant un nombre fini de solutions. Pour le cas qui nous concerne, i.e. la résolution de systèmes polynômiaux, nous serons toujours avec des problèmes dont le nombre de solutions est fini ; l'idéal considéré est 0-dimensionnel.

Théorème VI.6 (Idéal 0-dimensionnel [BW93]) Il existe une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ algébriquement close telle que l'idéal I a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{L}^n$ si et seulement si

$$\dim(I) = 0$$

Dans le cas d'idéaux 0-dimensionnels, les bases de Gröbner ont une certaine propriété que l'on réutilisera pour dénombrer les solutions :

Propriété VI.3 (Terme dominant univarié) Toute base de Gröbner de I contient n polynômes $g_1, \dots, g_n$ tels que le terme dominant de g_i soit une puissance de X_i .

VI.3.4 Décompte de solutions

Ce qui nous intéresse ici dans les bases standard est surtout le fait de pouvoir compter le nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales. Le théorème VI.7 permet de compter le nombre de solutions d'un idéal. En fait il relie le nombre de solutions à la dimension de l'anneau quotienté par l'idéal lui-même et aux termes dominants d'un polynôme g_i relativement à un ordre $\prec$ notés $HT_{\prec}(g_i)$.

Théorème VI.7 (Nombre de zéros d'un idéal [BW93]) *Si un idéal I est 0-dimensionnel et $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$ algébriquement close alors le nombre de solutions de l'idéal est inférieur ou égal à la dimension de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$. Si de plus G est une base de Gröbner de I relativement à un ordre $\prec$ telle que pour tout i de 1 à n , il y a un g_i dans G avec $HT_{\prec}(g_i) = X^{d_i}$ et $d_i \in \mathbb{N}^*$ (voir propriété VI.3), alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I) = \prod_{i=1}^n d_i$$

VI.3.5 Applications

BUCHBERGER [Buc87] voit dans cette méthode la solution appropriée à la géométrie algorithmique qui traite traditionnellement d'objets linéaires et d'autres objets simples non-linéaires. Parmi les applications possibles, il cite quelques problèmes ardues dont la résolution du modèle géométrique inverse d'un robot série. Quelques années plus tard, les bases de Gröbner se sont largement attaquées à la résolution du problème dual : la résolution du modèle géométrique direct des robots parallèles.

FAUGÈRE et LAZARD [FL95] ont fait une étude intéressante sur le nombre de modes d'assemblage des manipulateurs parallèles en fonction de leur classe. Les classes de manipulateurs considérées sont celles qui dépendent du nombre d'articulations distinctes sur la plate-forme et sur la base et du graphe de leurs connexions. Cependant d'autres classes fondées sur d'autres relations géométriques sur les articulations pourraient être étudiées, comme par exemple des alignements d'articulations.

La classification retenue dans [FL95] contient 35 éléments distincts. L'objectif est de déterminer le nombre maximum de modes d'assemblage possibles. Les classes de manipulateurs présentées se répartissent en deux catégories : la première voit les bornes obtenues par des démonstrations géométriques classiques, la deuxième est moins standard et donne lieu à une discussion sur la validité d'une preuve mathématique.

En particulier la preuve de la borne de 40 solutions pour le modèle géométrique direct d'un robot parallèle général fait partie de la deuxième catégorie. La démonstration repose sur la notion de *généricité* et sur un calcul de base de Gröbner. La généricité est appliquée aux configurations des robots.

Définition VI.4 (Configuration générique [FL95]) *Une configuration est générique pour une classe de robots, si les paramètres géométriques ne satisfont pas d'autres relations que celles propres à la définition même de la classe.*

Cette définition intervient dans le théorème fondamental suivant.

Théorème VI.8 ([FL95]) *Toutes les configurations génériques d'une classe*

ont le même nombre de modes d'assemblage.

Cela signifie qu'il suffit de savoir compter les solutions pour une configuration bien choisie pour en déduire le nombre de solutions de toute la classe de manipulateurs. Il n'est pas si facile en pratique de manipuler une telle configuration : ce qui mène à la notion de configuration pseudo-générique.

Définition VI.5 (Configuration pseudo-générique [FL95]) *Une configuration est pseudo-générique pour une classe de robots, si le système d'équations dont les modes d'assemblages sont les solutions a autant de solutions complexes qu'une configuration générique.*

L'intérêt des configurations pseudo-génériques est qu'elles forment un sous-ensemble dense ouvert de l'ensemble de toutes les configurations de la classe. Il faut remarquer que cette propriété repose en partie sur le fait que le nombre d'équations du système est identique au nombre d'inconnues. Cette remarque signifie que nous ne pourrons pas utiliser cette méthode de dénombrement dans notre approche où le système contient plus d'équations que d'inconnues.

Quoiqu'il en soit poursuivons la résolution. Il vient un théorème qui s'applique aux configurations pseudo-génériques.

Théorème VI.9 ([FL95]) *Presque toutes les configurations sont pseudo-génériques. Elles forment un ensemble ouvert dense dans l'espace des configurations. Ceci implique qu'un choix aléatoire des paramètres de la configuration donne le nombre maximum de solutions complexes au modèle géométrique direct des robots parallèles.*

Toute la théorie est désormais en place. Il suffit maintenant de résoudre de manière numérique pour une configuration pseudo-générique d'une classe donnée et de compter le nombre de solutions. Ces calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel dédié *GB*³ développé par J.C. FAUGÈRE dans le cadre du projet européen PoSSo.⁴

VI.4 Évaluation dynamique

L'évaluation dynamique est une autre théorie qui permet de faire la résolution de systèmes polynômiaux. Ce n'est pas la seule application de l'évaluation dynamique mais nous n'entrerons pas dans les détails. Cette méthode a été programmée par DUVAL et GOMEZ-DIAZ dans le système de calcul formel *Axiom*. Dans cette approche, les paramètres et les inconnues sont considérés

3. <ftp://posso.ibp.fr/>

4. *POLynomial System Solving*

au même titre et regroupés sous le terme de *paramètres* [Duv94, Góm94]. Les paramètres ont trois caractéristiques :

- un symbole
- un type
- des contraintes

Les deux premières sont fixes, la troisième peut évoluer au cours du temps. Les équations sont des contraintes que doivent vérifier les paramètres. L'idée est basée sur un éclatement des calculs (et des résultats) en plusieurs branches lorsque les paramètres peuvent prendre des valeurs critiques. Il est plus parlant de détailler un exemple.

Exemple 9 *Considérons deux cercles $\mathcal{C}((0, 0), 1)$ et $\mathcal{C}((a, 0), 1)$ et déterminons leur intersection. Il convient d'identifier le problème sous la forme de l'évaluation dynamique. Il s'écrit comme un système polynomial à trois paramètres (a, x, y) où (x, y) désigne les coordonnées des points d'intersection. Les équations sont les contraintes sur les paramètres. L'intersection est tout point qui vérifie à la fois la contrainte du premier cercle et celle du premier cercle.*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ (x - a)^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

*value is true in case $y = 0$ and $x^2 - 1 = 0$ and $a = 0$,
value is true in case $y = 0$ and $x = \frac{a}{2}$ and $a^2 - 4 = 0$,
value is false in case $y = 0$ and $x^2 - 1 = 0$ and $a \neq 0, a^2 - 4 \neq 0$,
value is true in case $y^2 + x^2 - 1 = 0$ and $x^2 - 1 \neq 0$ and $a = 0$,
value is false in case $y^2 + x^2 - 1 = 0$ and $x^2 - 1 \neq 0$ and $a^2 - 4 = 0$,
value is true in case $y^2 + \frac{a^2}{4} - 1 = 0$ and $x = \frac{a}{2}$ and $a \neq 0, a^2 - 4 \neq 0$
Le programme renvoie la liste des cas où les deux contraintes sont vérifiées et les cas où elles ne le sont pas. ■*

Il est remarquable que tous les cas identifiés sont effectivement les cas où les paramètres prennent des valeurs bien particulières correspondant à la géométrie du problème, comme les conditions de tangence et celles de fusion dans deux cercles. Néanmoins cette résolution souffre de deux problèmes dont la résolution n'est pas aisée, mais dont il est intéressant de guetter la réalisation.

Le premier point est que certaines sous-branches sont redondantes : du point de vue mathématique leur présence n'est pas justifiée. Il y a des branches qui devraient être regroupées à l'intérieur d'autres.

Exemple 10 *En particulier, la première branche est contenue dans la quatrième. Cela correspond au cas où les centres sont confondus. Les cercles étant de même rayon, l'intersection est le cercle en entier.*

Sinon, on retrouve bien tous les cas, avec les deux possibilités de tangence ($a = \pm 2$), l'intersection générale ($x = \frac{a}{2}, y^2 = 1 - \frac{a^2}{4}$). ■

Le second point est la limitation en nombre de paramètres. Dans l'état actuel, le programme ne peut traiter dans des temps raisonnables que des problèmes comportant cinq paramètres.

L'évaluation dynamique appliquée à un cas concret de robot plan et à une configuration précise a donné la formulation polynomiale mono-variable de son modèle géométrique direct (voir section II.1). Cette formulation indique que le modèle géométrique direct du robot est vérifié seulement lorsque x est solution d'un polynôme de degré 6. Les deux dernières inconnues y et T sont exprimées comme polynômes mono-variables de degré 5 en x . Il suffit de résoudre par une méthode numérique de résolution d'équation pour obtenir les racines en x puis substituer pour avoir celles en y et T .

VI.5 Homotopie et continuation

Les méthodes d'homotopie et de continuation sont des méthodes numériques qui permettent de calculer des approximations des solutions isolées de systèmes polynômiaux à plusieurs inconnues dans $\mathbb{C}$. La continuation fait appel au principe de déformation : des systèmes voisins ont des solutions voisines, *i.e.* une légère perturbation d'un système n'entraîne qu'une faible perturbation des solutions. L'homotopie reporte à la famille de systèmes à laquelle appartient le système à résoudre. VERSCHELDE [Ver94] propose une très large bibliographie sur le domaine.

Le principe repose sur trois points détaillées par WAMPLER, MORGAN et SOMMESE [WMS88, WMS90]. Le premier point est de choisir un système polynomial dont les solutions sont connues ; il est appelé le système *initial*. Le deuxième point est de savoir transformer par étapes le système initial vers le système que l'on cherche à résoudre (dit système *cible*). Enfin le dernier point est de savoir suivre l'évolution des solutions du système initial vers le système cible.

Choix du système initial Ce système doit vérifier certaines propriétés. Toutes les racines du système initial doivent être connues, distinctes et non

singulières. Il doit avoir la même structure multi-homogène que le système cible, c'est-à-dire le même nombre de Bézout, autant de groupes de variables ayant le même nombre d'éléments et des équations de même degré (voir VI.1.1).

Homotopie proprement dite C'est la transformation par étapes successives du système initial vers le système cible. L'homotopie choisie devra produire un nombre constant de solutions tout au long des étapes. Une solution suivie depuis le système initial vers le système cible devra former un chemin régulier et sans singularités. Une homotopie vérifiant les propriétés demandées est établie dans [MS87] ; il s'agit de

$$H(y, t) = (1 - t) e^{i\theta} G(y) + t F(y) \quad (\text{VI.4})$$

Dans cette homotopie, $G(y)$ est le système initial et $F(y)$ est le système cible. L'ensemble des nouvelles variables obtenues après homogénéisation est noté y . Le paramètre θ est non nul et tiré au hasard. On vérifie aisément que lorsque t vaut 0 on a bien le système initial, et lorsque t vaut 1 c'est le système cible. En faisant varier t de 0 à 1, le nombre de Bézout du système H reste constant. Toute solution non singulière a exactement un chemin qui converge vers elle.

Suivi de chemin C'est donc la manière de suivre l'évolution des solutions du système de départ vers le système cible. Dans le cas de l'homotopie citée ci-dessus c'est lorsque t croît de 0 à 1. Les solutions forment des *chemins de continuation*. Leur nombre est le nombre de Bézout du système : on a vu que l'homotopie était choisie pour préserver ce nombre. Le suivi de chemin se fait par des méthodes de prédiction/correction. La solution est prédite à $t + \Delta t$ par la formule de Taylor et ensuite corrigée par la méthode de Newton.

La démonstration de Raghavan RAGHAVAN démontre pour la première fois que le robot parallèle général n'admet pas plus de 40 modes d'assemblages [Rag91]. Cette démonstration repose sur l'homotopie, la continuation et l'argument de généricité (voir VI.3.5).

Son système initial comporte quatre groupes de variables (système 4-homogène) et a un nombre de Bézout de 960. Ce qui veut dire que 960 chemins devront être suivis lors de l'homotopie. L'homotopie utilisée est celle décrite par l'équation VI.4. Les chemins mènent à 80 solutions finies et distinctes ou à des solutions à l'infini. Il remarque qu'une symétrie dans les solutions entraîne une diminution de moitié du nombre de solutions effectives. Pour conclure, le nombre de 40 solutions étant trouvé pour des robots et des configurations

tirées au hasard, il déduit que cette valeur est une borne supérieure au nombre de modes d'assemblage du robot parallèle.

VI.6 Décompte de racines réelles

En robotique la résolution de systèmes d'équations polynomiales est un problème fréquent comme nous avons pu le constater. Pour résoudre ces systèmes, diverses méthodes existent. Par contre il n'existait pas jusqu'à ces dernières années de méthode pratique pour déterminer le nombre de solutions réelles d'un système. Or, les applications robotiques s'intéressent spécialement à cette catégorie de solutions. Le but est de compter de manière exacte le nombre de racines réelles d'un système polynomial.

VI.6.1 Méthodes de résolution

Il existe deux stratégies pour dénombrer les racines réelles. La première est basée sur la méthode de HERMITE qui calcule en $O(n^3)$ (n est le nombre d'indéterminées) une forme quadratique dont la signature indique, en particulier le nombre de racines réelles du système. La seconde méthode [ABRW94] est basée sur le *Generalized Shape Lemma* qui détermine un polynôme mono-variable ayant le même nombre de solutions réelles que le système considéré, et une *séquence de Sturm-Habicht* les dénombre, en $O(n^2)$. Bien que moins rapide asymptotiquement, la première méthode peut avoir parfois un meilleur comportement que la seconde [Rou95] grâce à un meilleur contrôle de la taille des coefficients intervenant. Ces deux méthodes sont intégrées dans la bibliothèque logicielle du projet POSSO. Néanmoins la grande différence entre les deux, est que la méthode d'Hermite ne permet pas de calculer les racines mais seulement de les dénombrer.

Le programme de résolution des racines réelles RS^5 , développé par F. ROUILLIER dans le cadre du projet européen POSSO, travaille à partir d'une représentation simplifiée du système polynomial à résoudre : la base de Gröbner. La réduction se fait à l'aide de GB dont nous avons déjà parlé en section VI.3.5.

VI.6.2 24 solutions réelles

INNOCENTI [IP93] a présenté un robot parallèle admettant, dans une certaine configuration, 24 solutions réelles. C'est à ce jour la plus haute valeur obtenue. Le robot considéré dispose d'une articulation double sur la base et d'une autre sur la plate-forme, les deux étant reliées par un segment. Le robot fait partie de la classe 5-5.

Au cours d'une collaboration avec F. ROUILLIER,⁶ il a été possible de modifier ce robot de manière à le rendre quelconque et à lui conserver ses 24 solutions réelles. Par *quelconque* est entendu que plus aucune de ses articulation n'est double. En outre les propriétés de la méthode basée sur le théorème du *Generalized Shape Lemma* décrit dans [ABRW94, Rou95] permettent de garantir l'exactitude de ce résultat, puisque tout le calcul est effectué en précision infinie.

La configuration considérée est décrite dans la table VI.1 où les coordonnées des A_i , ($i = 1, \dots, 6$) sont données dans le repère de référence et celles des B_i , ($i = 1, \dots, 6$) sont données dans le repère de la plate-forme ; la troisième colonne correspond à la longueur des segments. Ce robot est tiré

i	A_i	B_i	ρ_i	i	A_i	B_i	ρ_i
1	0	0	1.0925	1	0	0	1.092
	0	0			0	0	
	0	0			0	0	
2	1	-2.5073	2.2804	2	1	-2.507	2.280
	0	0			0	0	
	0	0			0	0	
3	-0.1	-0.333	2.03125	3	-0.1	-0.333	2.031
	1.7982	0.5913			1.799	0.591	
	0	0			0	0	
4	0.5439	-0.1948	2.5243	4	0.544	-0.195	2.524
	-0.0176875	-0.9060375			-0.0177	-0.906	
	1.8184	0.5692			1.818	0.569	
5	-1.036	-0.9234	3.1355	5	-1.036	-0.923	3.135
	1.3698	0.1692			1.370	0.169	
	-1.8127	-1.9444			-1.813	-1.944	
6	0	-2.5073	1.844974	6	0	-2.508	1.845
	0	0			0	0	
	0	0			0.001	0	

TAB. VI.1 – Robots à 24 postures réelles : architecture et coordonnées articulaires. A gauche robot 5 – 5 d'INNOCENTI, à droite robot 6 – 6.

de l'architecture de INNOCENTI [Inn94] en arrondissant les longueurs de segments et les coordonnées des articulations à 10^{-3} près. Pour le rendre plus général, nous avons disjoint l'articulation double de la base en deux articulations distinctes à un millièmè près sur une des coordonnées. Nous avons

6. IRMAR, Université de Rennes I, 35042 Rennes Cedex

fait de même pour l'articulation double de la plate-forme. Diverses tentatives ont montré que modifier le robot d'INNOCENTI de plus d'un millièmè faisait perdre un nombre considérable de solutions réelles; les observations faites montrent des pertes de 8 solutions réelles.

La table VI.2 indique les coordonnées en x , y et z dans le repère de référence des six articulations de la plate-forme. Ces coordonnées ne sont données qu'à 10^{-12} près pour des raisons de mise en page, bien qu'elles soient disponibles de manière exacte. Néanmoins, cela suffit pour vérifier les équations du modèle géométrique direct :

$$|||A_i B_i|| - \rho_i^2| \leq 10^{-10}$$

Voici le premier robot parallèle général ayant une configuration à 24 modes d'assemblage réels.

Posture	Segment	Coordonnées		
		x	y	z
$n^{\circ}1$	1	-0.867623369926	-0.377982322121	0.546816287359
	2	-0.400293293569	1.116399201463	-1.411110029359
	3	-1.240137490446	0.182098988881	0.458997410800
	4	-0.535784055382	-1.111913364042	-0.183834036002
	5	0.446776300340	1.286407357816	0.949043213515
	6	-0.400106883486	1.116995285039	-1.411891013132
$n^{\circ}2$	1	-0.859246366084	0.556848869299	-0.382444792265
	2	-0.398216340546	-1.673480639677	0.665472474002
	3	-0.712958395207	0.026385912228	-0.779154863667
	4	-1.507037365616	0.613305836655	0.489221102308
	5	1.225067204756	0.109841988896	-0.042668708227
	6	-0.398032443448	-1.674370280487	0.665890470518
$n^{\circ}3$	1	-0.858293952126	-0.121499923392	0.665746393426
	2	-0.400544643695	0.687937932409	-1.662412735205
	3	-0.234426431318	-0.186186728008	0.407337930351
	4	-1.547702924872	0.717816165150	0.612027013203
	5	-1.000789210036	-1.623255075477	-0.878291353736
	6	-0.400362055219	0.688260803512	-1.663341398599
$n^{\circ}4$	1	-0.850564653556	0.601601987508	-0.330550780891
	2	-0.397588018392	-1.253471040544	1.293815319651
	3	-0.776310044623	-0.032078540134	-0.560996527084
	4	-1.396396311214	0.964591476825	0.537163706798
	5	1.231677801806	0.103096053443	-0.055988964920
A suivre ...				

Posture	Segment	x	y	z
	6	-0.397407333655	-1.254210997875	1.294463251881
$n^{\circ 5}$	1	-0.834815044357	0.592130151685	0.383555374334
	2	-0.399227167767	-1.766777942180	-0.345049324022
	3	-0.816127368760	0.098179171068	0.848133892486
	4	-0.181810665595	0.768485364376	-0.467976257652
	5	-2.595737216926	-0.611376978064	0.051366134893
	6	-0.399053419113	-1.767718870818	-0.345339952142
$n^{\circ 6}$	1	-0.815372742431	0.337488844018	0.644916716379
	2	-0.400680806956	-0.039847045859	-1.798584301600
	3	-0.395756178907	-0.159047247435	0.451154363219
	4	-0.904079634600	1.355396991401	0.272604897101
	5	-2.054433247858	-1.168964695989	-0.279719858546
	6	-0.400515393340	-0.039997558779	-1.799558972927
$n^{\circ 7}$	1	-0.791863438873	0.648396929955	-0.383643995653
	2	-0.397290046111	-0.843955066837	1.591766431421
	3	-0.882572921890	-0.020740855392	-0.448423729459
	4	-1.086522189805	1.313222002163	0.424938618470
	5	1.173635280549	-0.237270614582	-0.273945388086
	6	-0.397132657442	-0.844550340869	1.592554389310
$n^{\circ 8}$	1	-0.746787616417	0.586101433912	-0.541703207608
	2	-0.398712199280	-1.792555968372	0.169550239867
	3	-0.614603332977	0.114218965963	-1.010770635227
	4	-1.408854377509	0.541316782165	0.319855808841
	5	1.310240231533	0.003341151658	-0.243956862229
	6	-0.398573357869	-1.793504774675	0.169833946867
$n^{\circ 9}$	1	-0.635956079266	0.213065050560	-0.863024999334
	2	-0.397997836044	-1.569371050097	0.883785357161
	3	-1.141888532259	0.107838716061	-0.423559674722
	4	0.436830938066	0.252344299961	-0.689222939474
	5	-1.488652351070	-1.702327573897	-1.376645639714
	6	-0.397902918516	-1.570082033783	0.884482130339
$n^{\circ 10}$	1	-0.513980976622	-0.402527661946	0.876609398215
	2	-0.399273874268	1.757018495105	-0.391559232621
	3	-0.190965912289	0.127550877568	1.150193042025
	4	-1.461935325974	-0.438057192945	0.344874310064
	5	1.273456134428	-0.116541434476	-0.299361031574
	6	-0.399228119541	1.757879901629	-0.392065083690
A suivre ...				

Posture	Segment	x	y	z
$n^{\circ}11$	1	-0.471909798597	-0.267697392949	-0.948835205816
	2	-0.398271783349	1.694513292879	0.609803837430
	3	-0.896657149921	0.251966386626	-1.047370700646
	4	0.585255999995	-0.260704436842	-0.693936063306
	5	-1.885467217975	-0.330303077475	0.681367833804
	6	-0.398242410388	1.695295985614	0.610425552246
$n^{\circ}12$	1	-0.455485077126	-0.690676058824	0.714247104497
	2	-0.400649380249	-0.337391536680	-1.767129951244
	3	-0.662962599776	-0.098006122490	0.457604504446
	4	-0.651948179329	-1.702936482083	0.368771946237
	5	1.313897668580	0.289404974377	-0.039644046503
	6	-0.400627507215	-0.337250617445	-1.768119730684
$n^{\circ}13$	1	-0.453994117414	-0.807952575623	-0.579440227201
	2	-0.397080091438	-0.025487056377	1.801643035694
	3	-0.489344553234	-0.143736514810	-0.446258504558
	4	0.183565126351	-1.570765120777	-0.138694005838
	5	-2.383677408207	-0.480041385523	0.330737035007
	6	-0.397057389393	-0.025174944084	1.802592809632
$n^{\circ}14$	1	-0.200332114419	0.111188503728	-1.068715659364
	2	-0.398189994280	-1.662898103889	0.691545107695
	3	-0.787039599925	0.035438732739	-0.736742319100
	4	0.818378977744	0.099462356754	-0.688305080937
	5	-1.031223403087	-1.765113532015	-1.738593511723
	6	-0.398268916450	-1.663605757103	0.692247246014
$n^{\circ}15$	1	0.428240019740	-0.682616191635	-0.738440668172
	2	-0.397254679870	-0.773937319401	1.626991206251
	3	0.066433456120	-0.164522290747	-0.491773442168
	4	1.229878995183	-1.252080077059	-0.273997091137
	5	-1.585296143055	-1.420352362525	-0.491370914298
	6	-0.397583955777	-0.773973745858	1.627934737115
$n^{\circ}16$	1	0.647394775394	-0.166550813603	-0.864748420803
	2	-0.398544018625	1.768756471975	0.337602089472
	3	0.073111231551	0.103408725562	-1.104519683646
	4	1.536290356733	0.325694271362	-0.477215942418
	5	-0.896894234233	-0.685355576556	0.551457451478
	6	-0.398961225962	1.769528433397	0.338081686803
$n^{\circ}17$	1	0.741493917733	-0.729322654751	0.336042014088
A suivre ...				

Posture	Segment	x	y	z
	2	-0.400679576324	-0.074657800302	-1.797476825254
	3	0.396032685228	-0.146162970324	0.308631809873
	4	0.478750834336	-1.710105189866	-0.053385374447
	5	1.874477531231	0.579572545087	-0.953441404721
	6	-0.401135170059	-0.074396665538	-1.798327849920
$n^{\circ}18$	1	0.821253163545	0.650195507580	0.312150674019
	2	-0.400679868615	0.066991475001	-1.797778642640
	3	0.980349204250	0.079265088525	-0.017844638720
	4	0.622206960181	1.645079695992	-0.079267338562
	5	-0.864745461688	-0.675131980669	0.558202872964
	6	-0.401167277084	0.066758844753	-1.798620257844
$n^{\circ}19$	1	0.925157907701	-0.563312331415	-0.146325196376
	2	-0.400227630871	1.194483275099	-1.345723703906
	3	0.991275038459	0.086481617030	0.036886019394
	4	0.027848382317	-1.127586355145	-0.389332278164
	5	1.951558753671	0.417454494141	-1.772432123143
	6	-0.400756304799	1.195184430107	-1.346202123734
$n^{\circ}20$	1	0.949621976770	0.517840046903	0.157190289330
	2	-0.397618137598	-1.283605906712	1.263890587713
	3	1.079697220827	0.353489884237	0.802356512031
	4	0.747581266004	-0.126235483994	-0.695434048637
	5	-0.744296847494	1.205344074820	1.305059283773
	6	-0.398155528948	-1.284324473108	1.264332031789
$n^{\circ}21$	1	0.981428826202	0.403121712354	-0.262563028867
	2	-0.397080690512	0.048487780555	1.801170308254
	3	1.289659108461	0.357398994651	0.339992799405
	4	0.166816963527	-0.189858810067	-0.671712895318
	5	0.457839615937	2.197398223087	0.817275913719
	6	-0.397630554699	0.048346323063	1.801993496661
$n^{\circ}22$	1	0.994092454665	0.435764744521	-0.128601240319
	2	-0.397156742631	-0.519746070415	1.725171602713
	3	1.262146855571	0.374967192802	0.491576553430
	4	0.375950410596	-0.262105287292	-0.688511797508
	5	-0.018261701458	1.886938338962	1.107869649504
	6	-0.397711688462	-0.520127207557	1.725911041422
$n^{\circ}23$	1	1.025320689295	0.037462825878	0.376779804104
	2	-0.400164453773	1.262358378289	-1.282338031547
A suivre ...				

Posture	Segment	x	y	z
	3	0.380638402226	-0.153384855171	0.286602692946
	4	1.776493694063	0.313326698691	-0.359603411746
	5	-0.190082502108	1.622058680199	1.196216843050
	6	-0.400733055745	1.262846968458	-1.282999825658
$n^{\circ}24$	1	1.061239896255	-0.244008948505	-0.094225875676
	2	-0.399049747331	1.792455426680	-0.167819390593
	3	1.098719805414	0.210941526589	0.407556269902
	4	0.187559414010	-0.648711512373	-0.599715984129
	5	1.974465657867	1.516290192838	-0.946863923921
	6	-0.399632232231	1.793267737958	-0.167848745805

TAB. VI.2 – Les 24 postures réelles d'un robot parallèle d'architecture générale.

Les postures trouvées vérifient la conservation des distances entre les articulations de la plate-forme à 10^{-10} près (toujours en prenant les solutions à 10^{-12} près).

Il est très difficile d'établir quelle est la borne véritable (entre 24 et 40) sur le nombre de solutions réelles pour le modèle géométrique direct des robots parallèles. Il n'y a pas encore de moyen de construire de manière systématique un manipulateur dont toutes les postures d'une configuration sont réelles. Un argument abondant dans ce sens est la démonstration de ROTH [Rot67]. Pour chaque posture d'un robot parallèle correspondant à une configuration donnée, une articulation de la plate-forme prend une position sur une sphère unique. ROTH montre que si l'on choisit 7 postures quelconques pour un solide donné il existe au plus 20 points qui peuvent leur correspondre; dans le cas de 8 postures, il n'y a aucun point. Or le problème du MGD revient à imposer 40 postures et trouver encore 6 points qui les vérifient. Ce qui est beaucoup plus contraint que ce que ROTH montre et ne pourra être vérifié que dans des circonstances exceptionnelles.

VI.7 Conclusion

Nous avons présenté ici, des méthodes algébriques formelles et numériques de grand intérêt. Certaines ne se sont pas révélées utiles pour notre problème.

Quant aux logiciels (et à la théorie sous-jacente) concernant l'évaluation dynamique, les bases de Gröbner, le décompte et calcul de racines réelles et l'homotopie, les améliorations constantes dont ils font preuve donnent l'espoir de les voir un jour applicables en temps réel ou/et aptes à manier plus d'information symbolique.

Nous avons franchi un pas de plus vers la borne sur le nombre de solutions réelles en montrant de manière exacte un robot d'architecture générale ayant 24 solutions réelles.

Des bornes nouvelles ont été obtenues en ce qui concerne un robot quelconque ayant de un à trois capteurs additionnels.

Chapitre VII

Élimination et résultants





La plupart des méthodes abordées jusqu'à présent se sont révélées mal adaptées à la recherche de bornes sur le nombre de solutions, et cela pour des raisons diverses. Soit la dimension du problème est trop grande pour être traitée dans des délais raisonnables. Soit il y a des contraintes fortes sur le type du problème, comme par exemple placer les capteurs par paires sur les segments.

Les méthodes d'élimination sont très largement répandues dans le domaine de la théorie des mécanismes. Elles ne présentent pas les inconvénients des méthodes numériques d'itérations successives : comme le traitement des solutions à l'infini, les problèmes typiquement numériques et le manque d'information sur le comportement des solutions [Rot93]. En outre, les méthodes de résultants possèdent un net avantage en rapidité par rapport aux bases de Gröbner et aux méthodes d'homotopies [Emi94].

VII.1 Résultants

La théorie de l'élimination est un aspect fondamental de la géométrie algébrique. Elle étudie les moyens de transformer des systèmes en d'autres systèmes en éliminant des variables.

L'élimination s'applique à résoudre un système d'équations polynomiales. Soient les équations $f_1 = f_2 = \dots = f_s = 0$ sur l'anneau $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$. L'élimination consiste en deux étapes, une d'élimination et une autre d'extension. L'étape d'élimination établit une conséquence $f_{s+1} = 0$ qui ne contient qu'une seule variable. L'étape d'extension considère $f_{s+1} = 0$ comme résolue et étend ses solutions en des solutions du système complet. Du point de vue géométrique l'élimination correspond à une projection sur une variété de dimension inférieure.

Un polynôme de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$ est irréductible sur $\mathbb{K}$ s'il n'est pas le produit de deux autres polynômes non constants de l'anneau. Tout polynôme peut s'écrire comme un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$. Ceci est une factorisation, et elle est unique à une constante près. Se demander si plusieurs polynômes ont une solution commune sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos est équivalent à poser la question : ont-ils un facteur commun ? La notion de résultant est venue de ce qu'effectuer la décomposition des polynômes est très coûteuse et que l'on veut éviter de calculer le *pgcd* à cause de ses divisions dans $\mathbb{K}$.

Exemple 11 *Si le corps n'est pas clos, alors il peut exister un facteur commun sans qu'il y ait de racine commune. Sur $\mathbb{R}$ c'est le cas de*

$$(x^2 + 1)(x - 1) \quad \text{et} \quad (x^2 + 1)(x + 1)$$



VII.1.1 Résultant de Sylvester

Considérons l'anneau des polynômes à une variable dans le corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. Soient deux polynômes f et g , de degré respectif n et m , factorisés selon leurs racines :

$$\begin{aligned} f &= a \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \\ g &= b \prod_{i=1}^m (x - \beta_i) \end{aligned}$$

Par définition, le résultant de deux polynômes s'écrit :

$$\text{Res}(f, g) = a^m b^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$$

Ce résultant s'annule si f et g ont une racine commune.

La *matrice de Sylvester* est définie comme étant la matrice des coefficients des monômes pour l'ensemble des équations

$$f, x f, x^2 f, \dots, x^m f, g, x g, x^2 g, \dots, x^n g$$

Cette matrice est de taille $n + m$ et son déterminant correspond au résultant de f et g . Cette expression du résultant est appelée *résultant de Sylvester*.

VII.1.2 Résultant homogène

Le résultant de n polynômes homogènes en n variables est aussi appelé *résultant multivarié*¹ [Can88] pour le différencier du cas à deux variables introduit par SYLVESTER. Le résultant s'annule quand le système a dans la clôture algébrique de $\mathbb{K}$ une solution non nulle. Il est à coefficients entiers, irréductible et homogène en chacun des coefficients de tout polynôme f_i de degré d_i , avec un degré valant [vdW48, Emi94]

$$\prod_{j=1, j \neq i}^n d_j$$

Il fournit une condition exacte pour la solubilité du système homogène, bien qu'il puisse s'annuler s'il n'existe aucune solution affine.

EMIRIS [Emi94] montre que ce résultant est une classe particulière de résultant creux lorsque les coefficients sont génériques. Des coefficients sont dits génériques lorsqu'ils ne vérifient aucune relation particulière entre eux.

1. *multivariate resultant*

VII.1.3 Résultant creux

Cette généralisation du résultant homogène tient compte de la structure des polynômes que sont les polytopes de Newton (voir VI.2); un peu de la même manière que la borne de BKK généralise la borne de Bézout. Le terme *creux* ne signifie pas qu'il y a une contrainte sur les polynômes considérés; mais que le degré du résultant est lié à la répartition des monômes dans le polytope.

L'élimination creuse travaille dans l'espace $\mathbb{C}^{*k}$ alors que le résultant homogène est établi dans l'espace $\mathbb{P}^k$. Ici on peut énoncer une définition analogue à celle du résultant homogène. Le résultant creux est un polynôme à coefficients entiers, irréductible, homogène en chacun des coefficients de tout polynôme f_i de polytope Q_i , avec un degré valant [Emi94]

$$\mathcal{V}(Q_1, \dots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \dots, Q_s)$$

où $\mathcal{V}$ désigne le volume mixte, voir VI.2. La matrice M associée aux équations est construite à partir d'équations dont le support est pris dans la somme de tous les polytopes moins un (à chaque fois différent).

Il est possible de contourner la difficulté que les composantes nulles des solutions ne sont pas comptées puisque l'étude porte sur les variétés toriques $\mathbb{C}^{*k}$. Il suffit alors de considérer que le support du polynôme contient $(0, \dots, 0)$ en perturbant légèrement le système. Le monôme constant peut en effet être introduit en considérant qu'il dispose d'un coefficient infiniment petit.

Il existe à l'heure actuelle un logiciel d'EMIRIS qui permet de calculer le résultant creux d'un système de polynômes homogènes.² Il n'y a pas encore de version qui pourrait traiter un système ayant plus d'équations que d'inconnues telle que notre problème se pose. C'est pourquoi et au vu de toutes les méthodes précédemment abordées il est devenu nécessaire d'implanter un algorithme qui puisse tirer parti de la structure de notre système. La méthode d'élimination dialytique est la candidate idéale de par son large domaine d'application.

VII.1.4 Propriétés

Les méthodes de résultant sont basées essentiellement sur la recherche d'une matrice M de taille minimale, associée au système d'équations polynomiales, et qui vérifie trois caractéristiques très désirées

- M est carrée
- son déterminant n'est pas identiquement nul $|M| \neq 0$

2. [ftp://robotics.eecs.berkeley.edu/pub/emiris/res_solver](http://robotics.eecs.berkeley.edu/pub/emiris/res_solver)

– $|M|$ est un multiple du résultant

Les lignes de cette matrice sont construites à partir des polynômes f_i initiaux et des variables. Les colonnes sont indexées par les monômes X_i .

$$M \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \forall i f_i(x_1, \dots, x_k) = 0 \quad (\text{VII.1})$$

Il existe différentes méthodes pour construire une matrice M , comme celles vues ci-dessus (VII.1.2 et VII.1.3).

VII.2 Élimination dialytique

L'élimination dialytique de SYLVESTER, menant au résultant de Sylvester, a été introduite au siècle dernier pour résoudre des systèmes d'équations non-linéaires. Cette méthode d'élimination ne peut traiter que des problèmes à une ou deux inconnues [Sal85] et un faible nombre d'équations. Récemment, ROTH [Rot93] a présenté les caractéristiques (voir VII.2.1) d'une extension la rendant plus adaptée aux problèmes comportant plusieurs inconnues et de nombreuses équations. Les idées les plus intéressantes reposent dans les étapes 2 et 3. Par rapport à la méthode telle qu'elle est présentée, nous avons interverti ces étapes par commodité. Cela ne change rien au résultat final, ni aux étapes intermédiaires.

VII.2.1 Algorithme

Globalement le concept original est de transformer un système non-linéaire, que l'on ne sait pas bien résoudre, en système linéaire, pour lequel la littérature abonde quant à sa résolution. Cette transformation étonnante s'opère en considérant chaque monôme comme une nouvelle inconnue et en faisant abstraction des liens pouvant exister entre les inconnues. La méthode d'élimination dialytique peut se découper en un algorithme en six étapes.

1. Considérer une des variables des équations comme un paramètre : cacher une variable
2. Construire autant de nouvelles équations que nécessaire pour avoir un système carré linéaire et homogène par rapport aux monômes
3. Renommer les monômes présents comme de nouvelles variables
4. Le déterminant de ce système linéaire est un polynôme en la variable cachée

5. Résoudre ce polynôme donne toutes les solutions pour la variable cachée
6. Substituer chaque solution dans les équations et résoudre le système ainsi obtenu, linéaire par rapport aux monômes.

La plupart de ces étapes seront détaillées dans les section suivantes. Mais auparavant, étudions le comportement de l'algorithme sur un exemple simple.

VII.2.2 Exemple d'exécution de l'algorithme

Soit le système suivant à deux équations et deux inconnues x et y :

$$\begin{aligned} a x^2 y + b x + c &= 0 \\ d x^2 y + e x y + f x y^2 + g &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.2})$$

La borne de Bézout donne un maximum de six solutions pour ce système.

1 - Cacher une variable

Après suppression de y en tant que variable nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_1 x^2 + U_2 x + U_3 &= 0 \\ U_4 x^2 + U_5 x + U_6 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.3})$$

où

$$U_1 = a y, U_2 = b, U_3 = c, U_4 = d y, U_5 = e y + f y^2, U_6 = g$$

2 - Construire de nouvelles équations

Une fois que la variable y est considérée comme un paramètre, trois monômes restent :

$$x^2, x, 1$$

En multipliant les deux équations (VII.3) par x nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_1 x^3 + U_2 x^2 + U_3 x &= 0 \\ U_4 x^3 + U_5 x^2 + U_6 x &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.4})$$

De cette manière nous créons un monôme supplémentaire x^3 . Cela ne porte pas plus à conséquence car par la même occasion nous avons obtenu deux équations supplémentaires, ce qui conduit à quatre monômes pour quatre équations.

3 - Renommer les monômes

Les monômes présents dans l'ensemble des équations sont

$$x^2, x, 1, x^3$$

qui sont renommés en

$$X_1, X_2, X_3, X_4$$

Après avoir dissimulé une des variables puis regroupé les coefficients constants et enfin renommé les monômes présents, les équations de départ (VII.2) peuvent se réécrire

$$\begin{aligned} U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 &= 0 \\ U_4 X_1 + U_5 X_2 + U_6 X_3 &= 0 \end{aligned}$$

et les équations ajoutées

$$\begin{aligned} U_1 X_4 + U_2 X_1 + U_3 X_2 &= 0 \\ U_4 X_4 + U_5 X_1 + U_6 X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Enfin on obtient un système linéaire dans les nouvelles inconnues X_i , ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$), homogène et *carré*.

4 - Le Déterminant est un polynôme en la variable cachée

Le système construit s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} ay & b & c & 0 \\ dy & ey + fy^2 & g & 0 \\ b & c & 0 & ay \\ ey + fy^2 & g & 0 & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = 0$$

Après avoir renommé les monômes, le système précédent devient :

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & 0 \\ U_4 & U_5 & U_6 & 0 \\ U_2 & U_3 & 0 & U_1 \\ U_5 & U_6 & 0 & U_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = 0$$

Comme l'une des variables a la valeur 1, il est clair que la solution triviale correspondant au vecteur nul n'est pas solution du système. Par conséquent pour que ce système admette une solution, son déterminant $\Delta(y)$ doit s'annuler. Le déterminant est fonction de y car les coefficients U_i sont eux-mêmes des fonction de y . On cherche alors quelle valeur de y est racine du déterminant.

$$\Delta(y) = 0$$

5 - Solutions pour la variable cachée

Dans cet exemple, la petite taille du système permet de calculer entièrement son déterminant. Celui-ci est un polynôme en y de degré 5.

$$\Delta = U_7 y^5 + U_8 y^3 + U_9 y^2 + U_{10} y$$

Il peut donc y avoir cinq solutions pour y . En particulier une de ces solutions est simple bien que nous travaillions avec des coefficients formels ; cette racine est 0.

6 - Substituer les racines

Pour le cas où $y = 0$ la matrice du système et les équations deviennent :

$$\begin{bmatrix} 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{rcl} c X_3 + b X_2 & = & 0 \\ g X_3 & = & 0 \\ c X_2 + b X_1 & = & 0 \\ g X_2 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} c + b x & = & 0 \\ g & = & 0 \\ c x + b x^2 & = & 0 \\ g x & = & 0 \end{array}$$

entraînant la solution

$$x = -\frac{c}{b} \quad \text{si } b \neq 0$$

$$g = 0$$

Ainsi le couple $(-\frac{c}{b}, 0)$ est solution de la famille de systèmes ayant $g = 0$. Cette opération se répète pour chacune des racines en y du déterminant.

VII.2.3 Construction d'une matrice carrée

C'est ici qu'intervient la spécificité de cette méthode. Le fait de considérer les monômes comme de nouvelles variables rend les équations linéaires par rapport à ces monômes. Pour préserver la caractéristique linéaire du système, il ne doit pas être tenu compte des relations existant entre les monômes.

Exemple 12 Si les monômes renommés sont $1 \equiv X_1$, $x \equiv X_2$, $x^2 \equiv X_3$, alors la relation $x X_2 = X_3$ ne doit pas être retenue. ■

Les nouvelles équations sont *linéairement* indépendantes. Le revers est qu'il est indispensable, désormais, d'avoir autant d'équations que de nouvelles variables (monômes). Dans la très grande majorité des cas, le nombre de monômes existant est supérieur au nombre d'équations du système.

En ajoutant des équations supplémentaires pour compenser l'écart entre le nombre de monômes présents et le nombre d'équations présentes, il est essentiel de veiller à maintenir la régularité du système. Ce qui se fait en ajoutant des combinaisons *non*-linéaires des équations et de monômes. Les

nouvelles équations sont effectivement dépendantes de celles d'origine, mais pas de manière *linéaire*.

Exemple 13 Dans l'exemple 15 avec la variable y cachée, une équation a dû être rajoutée pour combler le déficit en équation : il y avait 3 monômes et seulement 2 équations. L'équation additionnelle a été construite à partir de la deuxième équation multipliée par le monôme x

$$(d y + f) x^2 + (e y + g) x = 0 \quad (\text{VII.5})$$

■

Multiplier par un monôme, qui est en fait réduit à une variable, est la manière la plus usitée d'ajouter des équations. Suivant les cas, il peut être intéressant de multiplier par un monôme dont le degré n'est pas 1.

Il faut prendre conscience du fait qu'ajouter une équation peut entraîner l'introduction de nouveaux monômes. La difficulté réside dans le choix des équations introduites afin de converger le plus rapidement possible vers une matrice carrée. Il n'y a pas non plus de résultat général sur la meilleure manière, au sens de celle qui donnera la matrice carrée la plus petite, d'ajouter une équation. La encore, la structure du système de départ a son importance. ROTH [Rot93] propose deux façons. La première utilise les propriétés des formules trigonométriques. La seconde utilise la jacobienne de la matrice des équations initiales.

Équations trigonométriques Dans le cas d'équations trigonométriques à deux inconnues (un robot $2R$), il faut tirer parti des propriétés qui permettent d'éliminer les termes de degré deux en cosinus et sinus ou de les combiner.

Exemple 14 [Rot93] Soient

$$f_1 = a \cos \phi + b \cos \phi \cos \theta - b \sin \phi \sin \theta \quad (\text{VII.6})$$

$$f_2 = a \sin \phi + b \sin \phi \cos \theta + b \cos \phi \sin \theta \quad (\text{VII.7})$$

$$f_1^2 + f_2^2 = a^2 + b^2 + 2 a b \cos \theta \quad (\text{VII.8})$$

Voilà une équation qui n'introduit pas de nouveau monôme par rapport à ceux déjà présents dans f_1 et f_2 . ■

Avec la jacobienne La seconde méthode qu'il propose est basée sur un résultat de SALMON [Sal85] : *Les dérivées, par rapport à chacune des variables, du déterminant d'un système d'équations que l'on a homogénéisées*

ont les mêmes solutions que celles du système lui-même. Dans le cas de l'intersection de trois quadriques, les dérivées n'introduisent pas de nouveaux monômes. Mais il semble bien que ce soit l'un des rares cas (sinon le seul) où cela se produit. Le nombre de variables et d'équations doit rester assez faible. En particulier pour des équations quadratiques ayant plus d'inconnues, de nombreux nouveaux monômes sont introduits.

VII.3 Méthode symbolique

La méthode que nous avons développée en *Maple*³ est basée sur l'élimination dialytique vue en VII.2. Néanmoins, les problèmes que nous rencontrons sont différents car nous nous intéressons au cas symbolique en essayant de donner des bornes sur le nombre de solutions admissibles [Tan95].

Nous nous intéressons particulièrement à une étape qui est assez directe au niveau de la résolution numérique, mais qui mérite une grande attention au niveau symbolique. Elle est implicite dans la description de ROTH, mais nous l'extrayons pour en faire une étape à part en plus des six étapes déjà décrites dans la section VII.2.1.

- 7 Résoudre en les variables d'origine les équations données par le système linéaire en les monômes.

L'anneau polynomial sur lequel nous allons travailler est $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_t]$.

VII.3.1 Étape d'élimination

VII.3.1.1 Choix d'une variable cachée

Cette première étape est relativement importante. Elle consiste à considérer une des variables comme un paramètre *i.e.* continuer la résolution comme si sa valeur était connue. Comme il est possible de le deviner sur l'algorithme et de le constater sur l'exemple d'exécution la variable cachée va influencer directement la résolution du problème. En effet l'étape 4 nécessite la résolution d'un polynôme monovarié dont le degré dépendra du choix fait, puisque les termes qui entrent dans la composition du déterminant sont les puissances de la variable cachée qui apparaissent dans les équations de départ. Néanmoins, ce choix a aussi une influence (voir 15), bien qu'indirecte, sur la taille du système d'équations qu'il faudra construire. Nous avons vu (VII.1.4) que l'intérêt est d'obtenir un système de taille minimale. Montrons sur un exemple que le meilleur degré du déterminant n'est pas entièrement déterminé *a priori* par le choix de la variable cachée.

3. © Université de Waterloo (Canada) et *Waterloo Maple Software*

Exemple 15 Soit le système à deux variables x et y à coefficients quelconques :

$$a x^2 y + b y + c = 0 \quad (\text{VII.9})$$

$$d x y + e y + f x + g = 0 \quad (\text{VII.10})$$

Choisissons x comme variable cachée. Le système s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} c & ax^2 + b \\ fx + g & dx + e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = 0$$

La matrice a un déterminant de degré 3 en x . Maintenant choisissons y comme variable cachée. L'élimination dialytique construit une troisième équation pour compenser la présence de 3 monômes dans le système initial. La troisième équation est construite à partir de la deuxième multipliée par x . Le système s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} by + c & 0 & ay \\ ey + g & dy + f & 0 \\ 0 & ey + g & dy + f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} = 0$$

Ici encore le déterminant est de degré 3 en y .

Les indéterminées x et y ont un degré maximal différent dans le système d'équations de départ. Pourtant, que l'on cache x ou y le déterminant aura le même degré en la variable cachée, 3. En outre les systèmes carrés finaux que l'on a construits ne sont pas de même dimension. ■

En l'état actuel des connaissances sur ce sujet, tout ce qu'il est possible de faire est de proposer et d'étudier des heuristiques de choix.

- la variable de plus petit degré parmi toutes les équations
- la variable dont la somme des degrés parmi toutes les équations est la plus petite
- la variable qui, cachée, réduira le plus le nombre de monômes présents

Sur les systèmes que nous avons été amenés à manipuler, nous avons constaté que l'heuristique la plus efficace est la deuxième.

VII.3.1.2 Construction d'une matrice carrée

Il n'y a pas de règle générale comme dit précédemment, sinon de vérifier que l'équation choisie n'introduit pas de dépendance linéaire. Par contre, certains choix mènent à des tailles raisonnables. A chaque choix, un couple équation/monôme sélectionné. La sélection peut se faire sur le nombre de nouveaux monômes apportés ; choisir le plus faible. Elle peut aussi se faire en fonction du degré maximum des nouveaux monômes apportés. Notons que dans le cas où un couple n'apporte aucun monôme supplémentaire, il est choisi par les deux stratégies et d'ailleurs devrait l'être quelle que soit la stratégie employée car il permet de faire converger le processus vers un système carré. Une méthode inspirée de la construction de matrice de Bézout, le *bézoutien* [Dix08], est de faire des combinaisons entre deux équations f_i et f_j de manière à éliminer le terme de plus haut degré de ces équations.

La recherche d'une matrice de taille minimale a deux motivations. La première, calculatoire, est que pour des dimensions trop grandes, nous ne pouvons plus calculer le déterminant. La seconde est que si la dimension obtenue n'est pas la plus petite, alors des solutions parasites sont présentes car le déterminant calculé est un multiple du résultant.

VII.3.1.3 Borne du déterminant

Le problème qui consisterait à travailler sur une configuration particulière d'un robot donné est calculable numériquement. Par contre dans la suite du chapitre nous chercherons à fournir des bornes sur le nombre de solutions pour une configuration et une architecture quelconques du manipulateur. Ce but demande d'utiliser des moyens de calcul formel.

Puisque y est la variable cachée et X_i , ($i \in \{1, \dots, n\}$) représentent les monômes apparus dans les équations, le problème revient à résoudre un système linéaire :

$$[\Delta_{i,j}(y)]_{1 \leq i,j \leq n} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{VII.11})$$

$\Delta(y) = [\Delta_{i,j}]_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ est une matrice carrée de taille $n \times n$ dont les coefficients sont des polynômes en y . Si pour y_0 donné, le déterminant $|\Delta(y_0)|$ est non nul, alors la seule solution du système est le vecteur $(X_1, \dots, X_n) = (0, \dots, 0)$. Or le monôme X_1 (par exemple) est le monôme constant égal à 1. Ceci est donc impossible, et la matrice est de rang au plus $n - 1$, c'est-à-dire que y_0 est nécessairement une solution de l'équation $|\Delta(y)| = 0$.

En pratique nous avons des matrices de grande taille ($\geq 16 \times 16$) à termes symboliques. En conséquence de quoi aucun système actuel de calcul formel

ne peut calculer explicitement le déterminant (comme avec la méthode de BAREISS [GCL92]). Alors pour obtenir une borne sur le nombre de solutions, il convient de ne calculer que le degré de la variable cachée de ce déterminant.

Il n'y aurait pas de problème majeur pour calculer ce déterminant numériquement, des méthodes éprouvées sont disponibles dans [HS75], ou encore une méthode de calcul de valeurs propres [ZA94].

Maintenant nous désirons savoir comment cette matrice mènera à une borne sur le nombre de solutions. Une entrée $\Delta_{i,j}(y)$ est le coefficient du monôme X_j dans l'équation i . Chaque entrée est un polynôme monovarié dans la variable cachée.

$$|\Delta(y)| = |\Delta_{i,j}(y)|_{1 \leq i,j \leq n}$$

Il est facile de donner rapidement une borne triviale sur le degré du déterminant : c'est la somme des degrés maximum en y de chaque colonne (ou de chaque ligne).

$$\deg(|\Delta|) \leq \sum_{j=1}^n \max_i \deg \Delta_{i,j}$$

Cette borne est une très large surestimation de la valeur effective du degré.

VII.3.1.4 Amélioration de la borne

Jusqu'ici nous avons vu comment obtenir une valeur initiale pour la borne sur le degré et ensuite comment calculer le coefficient du terme d'un degré donné. Maintenant nous avons les outils pour améliorer cette borne.

VII.3.1.4.1 Représentation des informations Une amélioration est indispensable pour deux raisons. La borne triviale n'est, très souvent, même pas atteinte. De plus la matrice contient un nombre conséquent de 0.

Améliorer la borne supérieure consiste à calculer les coefficients du terme de degré d , vérifier s'ils sont nuls et si c'est le cas recommencer pour le degré $d-1$, et ainsi de suite. Chacun de ces coefficients est un déterminant construit à partir des coefficients de Δ , ce qui va être précisé ci-dessous.

VII.3.1.4.2 Coefficient du monôme de degré d Maintenant, définissons un autre type de matrice. Le terme $a_{i,j}^{(d_j)}$ est le coefficient de y^{d_j} du monôme numéro j dans l'équation numéro i .

$$a_{i,j}^{(d_j)} = \text{coeff}(\Delta_{i,j}(y), y, d_j)$$

$$\Delta_{i,j}(y) = \sum_{d_j} a_{i,j}^{(d_j)} y^{(d_j)}$$

Il en découle que le coefficient du monôme de degré d dans la matrice Δ est la somme des déterminants de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}^{(d_1)} & \cdots & a_{1,j}^{(d_j)} & \cdots & a_{1,n}^{(d_n)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}^{(d_1)} & \cdots & a_{n,j}^{(d_j)} & \cdots & a_{n,n}^{(d_n)} \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad \sum_{j=1}^n d_j = d$$

Au départ d est la borne triviale. Ensuite, tant qu'il n'existe pas un déterminant comme ci-dessus non-nul le degré d est diminué de 1. Comme cette évaluation se fait de manière symbolique, il est tout à fait possible que l'itération s'arrête trop tôt car plusieurs des déterminants ne sont pas nuls alors que leur somme l'est.

VII.3.1.4.3 Pseudo pivot de Gauss Pour calculer si chaque déterminant est nul, nous utilisons une méthode que nous qualifions de pseudo-gaussienne car elle applique une méthode pivot sur des entrées symboliques. Cet algorithme travaille sur une matrice dont l'entrée à la colonne i et à la ligne j représente le coefficient de y^{d_j} dans le coefficient du monôme X_j dans l'équation i .

Les entrées (i, j) sont symbolisées par

0 si le terme $a_{i,j}^{(d_j)}$ est effectivement 0

★ sinon

Une permutation des lignes permet de choisir une ligne dont le pivot est non nul. Cette ligne est soustraite de toutes les autres, situées en dessous d'elle dans la matrice, de manière à introduire des valeurs nulles dans tous les éléments de la colonne en dessous du pivot. Ceci est classique pour un pivot de Gauss. La nuance réside dans la soustraction qui est définie de façon particulière puisque la matrice est formelle. Trois relations sont alors définies :

★ − ★ = ★ Sur toutes les colonnes sauf celle du pivot

★ − ★ = 0 Sur la colonne du pivot ($\boxed{\star}$)

★ − 0 = ★ = 0 − ★

0 − 0 = 0

Les règles de soustraction ci-dessus sont illustrées sur la matrice suivante.

$$\left| \begin{array}{ccccccc} \star & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \star & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \boxed{\star} & 0 & \star & \star & \cdots \\ 0 & 0 & \star & 0 & 0 & \star & \cdots \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & & 0 & 0 & \star & \star & \end{array} \right|$$

L'algorithme s'arrête lorsque la matrice est triangularisée ou lorsqu'il n'existe pas de pivot non nul. À cause du cas $\star - \star = \star$ nous ne pouvons pas garantir que nous trouverons tous les coefficients nuls. Ainsi quand nous arrêterons de diminuer le degré parce que nous aurons *trouvé* un déterminant qui a la possibilité d'être non nul, le degré réel pourrait être plus petit. Parce que nous n'exploitons pas toutes les relations entre coefficients la somme des déterminants donnant le coefficient du terme de degré d peut être nul sans que cela soit détecté par l'algorithme. Pour éviter de surestimer le degré, il faut

- soit calculer effectivement le coefficient du terme de degré considéré de manière symbolique, ce qui est impossible à l'heure actuelle
- soit calculer le coefficient en numérique après avoir tiré au hasard les caractéristiques du robot.

VII.3.2 Étape d'extension

Nous avons vu que le problème était ramené à la résolution du système linéaire homogène (VII.11) dont le rang est nécessairement au plus égal à $n-1$. Les X_i sont des monômes en les variables $x_j, y_j, z_j, (j \in \mathbf{B} \subseteq \{1, \dots, 4\})$ avec la paramétrisation qui sera introduite à la section VII.3.2.2.

VII.3.2.1 Problème

Nous savons qu'il y aura au plus $\deg(|\Delta(y)|)$ valeurs de la variable cachée y qui annuleront ce déterminant. Cependant, ceci ne nous donne *a priori* pas automatiquement une borne sur le nombre de solutions globales du problème en les variables car une même valeur de y peut faire partie de plusieurs solutions du système total. Ce problème est illustré par l'exemple suivant :

Exemple 16 *Considérons le système d'équations*

$$\begin{aligned} x^2y - 6y + 1 &= 0 \\ x^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

Si on cache la variable y , on obtient un système carré en les monômes 1 et x^2 , il n'est donc pas nécessaire de rajouter des équations. Son déterminant est le polynôme $|\Delta(y)| = y^2 - 6y + 1$, de degré deux, qui admet deux racines distinctes y_1 et y_2 positives. Pour chacune de ces valeurs, on résout ensuite l'équation $x^2 = y$ qui donne deux valeurs opposées. Le système a donc quatre solutions distinctes (x_1, y_1) , $(-x_1, y_1)$, (x_2, y_2) , $(-x_2, y_2)$, bien que $|\Delta(y)|$ soit de degré deux. Les quatre couples solutions sont

$$(\sqrt{2} - 1, 3 - 2\sqrt{2}); (1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$$

$$(\sqrt{2} + 1, 3 + 2\sqrt{2}); (-1 - \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$$

■

Le lien entre le nombre de solutions d'un système polynomial et le degré d'un polynôme mono-variable associé a été étudié dans le cas du résultant creux [Emi94]. Il a été démontré que si le réseau engendré par les polytopes de Newton des polynômes du système était égal à $\mathbb{Z}^n$, alors le problème ne se posait pas, c'est-à-dire que le degré du résultant creux était égal au volume mixte des polytopes associés aux polynômes du système; le degré donne alors une borne sur le nombre de solutions du système. Illustrons cette remarque en revenant à l'exemple précédent.

Exemple 17 Sur le même exemple, on peut calculer le résultant par rapport à x , qui vaut

$$\begin{vmatrix} y & 0 & -6y + 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & -6y + 1 \\ 1 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y \end{vmatrix} = (y^2 - 6y + 1)^2$$

Les racines du résultant sont les mêmes que celles de notre polynôme $|\Delta(y)|$, mais cette fois elles sont doubles. Le nombre de solutions coïncide avec le degré du résultant, qui est égal à la somme des multiplicités de ses racines.

Sur cet exemple, comme en règle générale, la différence entre $|\Delta(y)|$ et le résultant est due au fait que pour calculer le résultant, on considère tous les monômes 1, x , x^2 , ce qui n'est pas fait pour calculer $|\Delta(y)|$.

Si le résultant n'est pas nul pour un support donné, alors c'est un multiple du résultant. ■

Dans le cas de l'élimination dialytique (ou dans d'autres cas de méthodes d'élimination *ad hoc*), ce problème n'a, à notre connaissance, jamais été abordé dans sa généralité. Dans la littérature, même sur des systèmes bien précis, la question est éludée, et il est en général conclu très rapidement, sans justification, que le degré du polynôme mono-variable obtenu par une élimination quelconque fournit nécessairement une borne sur le nombre de solutions. Ceci qui pourrait être faux comme nous venons de le constater sur l'exemple 16, et même si certaines propriétés des équations assurent peut-être que c'est réalisé dans ces cas particuliers précis, l'affirmation n'est en tout cas pas immédiate.

Il n'est pas de notre ressort de développer ici une étude complète permettant d'obtenir autant de résultats généraux sur le polynôme que nous obtenons ici, qu'il n'en existe sur les résultants creux par exemple [Emi94]. Néanmoins nous allons établir que dans le cas des équations du modèle géométrique direct des robots parallèles, le degré du polynôme $|\Delta(y)|$ fournit une borne sur le nombre de postures solutions. Ceci sera démontré dans le cas d'un robot à plate-forme plane.

La remarque effectuée sur l'exemple 17 au sujet des multiplicités des racines du résultant suggère une réflexion plus approfondie. Rien ne permet de dire *a priori* que notre déterminant est un multiple du résultant. C'est même faux sur l'exemple. Nous savons que, pour un système générique, l'existence d'une racine du résultant est équivalente à l'existence d'une solution au système. Ici, l'existence d'une solution du système entraîne l'existence d'une racine de $|\Delta(y)|$. Ceci nous permet de conclure, sous l'hypothèse de généralité, que toute racine du résultant est racine de $|\Delta(y)|$. Mais, de la même façon que dans l'exemple 16-17, la multiplicité d'une racine dans $|\Delta(y)|$ peut être inférieure à sa multiplicité dans le résultant, ce qui a pour conséquence que le degré de $|\Delta(y)|$ est plus faible, pour un même nombre de solutions au système, nombre qui peut donc lui être supérieur.

Toutefois, il faut tenir compte du fait que dans notre système, toutes les variables du problème apparaissent en tant que monômes, puisqu'elles apparaissent dans les équations de départ (section VII.3.2.2), ceci permettant trivialement de remplir la condition mentionnée ci-dessus sur les polytopes de Newton. Dans ce cas, $|\Delta(y)|$ sera en fait un multiple du résultant. Nous allons voir que son degré nous permettra de conclure en donnant une borne sur le nombre de postures solutions.

VII.3.2.2 Paramétrisation algébrique du problème

Dans cette formulation nous ne prendrons plus comme inconnues un vecteur position et un vecteur orientation. Mais nous lui préférons une formulation

proposée par LAZARD [Laz93] qui a l'avantage d'introduire des équations ayant un faible nombre de monômes et des équations linéaires. Celle-ci fait intervenir des inconnues associées à certains segments du robot. Certaines articulations de la plate-forme sont choisies pour former un ensemble de base $\mathbf{B}$ et permettre de retrouver la position de n'importe quel point. Ainsi les inconnues seront les coordonnées des vecteurs porteurs des segments reliant ces articulations avec leur articulation correspondante sur la base, coordonnées prises dans le repère de référence :

$$\forall i \in \mathbf{B} \quad A_i B_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

Les équations se présentent différemment suivant que la plate-forme est plane ou non. Nous utiliserons la notation d'ensemble complémentaire suivante. Pour un robot disposant de s segments connectant la base et la plate-forme, $\mathbb{C}\mathbf{B}$ désigne l'ensemble $\{1, \dots, s\} \setminus \mathbf{B}$.

VII.3.2.2.1 Plate-forme quelconque Lorsque la plate-forme est un solide quelconque, il existe deux façons d'écrire le système. Cela dépend du nombre d'équations et du degré qu'il est souhaitable d'avoir. La première dispose de deux équations linéaires parmi douze équations quadratiques alors que la seconde ne comporte que neuf équations dont une est cubique et les autres sont quadratiques.

Première représentation Lorsque la plate-forme a une forme tout à fait générale, quatre points peuvent être utilisés pour la décrire. Dans le paragraphe suivant, nous verrons comment n'utiliser que trois points. Pour ces points il est plus pratique de choisir certaines des articulations. Supposons sans perte de généralité que l'ensemble de base des articulations soit composé des quatre premières articulations :

$$\mathbf{B}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

Nous disposons alors de douze inconnues qui sont les coordonnées des vecteurs $A_i B_i$, $i \in \mathbf{B}_4$

Il est possible de distinguer alors, quatre types d'équations intervenant dans la modélisation du problème. Le premier type exprime que la longueur des quatre premiers segments est une constante connue car mesurée par les capteurs standards de mesure d'élongation. Le second fait de même pour les segments restants, en ramenant les vecteurs en fonction des équations du premier type contenant les inconnues. Le troisième traduit la propriété de

solide indéformable de la plate-forme et que la distance séparant deux de ses points est une constante connue. Enfin le dernier type est celui que nous introduisons en rajoutant des capteurs supplémentaires.

I. Les segments de $\mathbf{B}_4$ sont de longueur connue :

$$\|A_i B_i\|^2 = \rho_i^2 \quad (\forall i \in \mathbf{B}_4) \quad (\text{VII.12})$$

II. La plate-forme est un solide :

$$(\forall (i, j) \in \mathbf{B}_4^2 \ i \neq j) \quad \|B_i B_j\|^2 = K_{ij} \quad (\text{VII.13})$$

Ces distances sont aussi des constantes géométriques propres à une architecture donnée de robot.

III. Les segments de $\mathbf{CB}_4$ sont de longueur connue et sont exprimés en fonction de ceux de $\mathbf{B}_4$

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= \|A_i B_i\|^2 \quad (\forall i \in \mathbf{CB}_4) \\ &= (-A_1 A_i + A_1 B_1 + e_i B_1 B_2 + f_i B_1 B_3 + g_i B_1 B_4)^2 \end{aligned}$$

Les termes $e_i, f_i, g_i, (i \in \mathbf{CB}_4)$ sont les coordonnées des points B_i dans le repère $(B_1, B_1 B_2, B_1 B_3, B_1 B_4)$. Ce sont des constantes géométriques de la plate-forme calculables une fois pour toute dans le repère lié à la plate-forme. Elles permettent d'écrire la position de B_i à partir des points de l'ensemble de base, indépendamment du repère.

$$\forall i \in \mathbf{CB}_4 \quad B_1 B_i = e_i B_1 B_2 + f_i B_1 B_3 + g_i B_1 B_4$$

Les termes non linéaires apparaissant dans l'équation sont simplement des combinaisons linéaires des termes non linéaires des types *I* et *II*. En définitive ces équations deviennent linéaires.

IV. Information linéaire provenant des capteurs supplémentaires :

$$(i \in \{1, \dots, 6\}) \quad A_i B_i \cdot N_i = 0 \quad (\text{VII.14})$$

Le capteur supplémentaire donne une information que l'on peut représenter comme la normale à un plan particulier contenant $A_i B_i$ (cf. *III.3*).

Deuxième représentation Dans ce cas, seuls trois points de la plate-forme seront utilisés pour définir l'ensemble de base. La troisième dimension sera introduite à l'aide du produit vectoriel. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que l'ensemble de base des articulations est composé des trois premières articulations :

$$\mathbf{B}_3 = \{1, 2, 3\}$$

Nous disposons alors de neuf inconnues qui sont les coordonnées des vecteurs $A_i B_i$, $i \in \mathbf{B}_3$. Les types I, III, II changent d'expression, puisque l'ensemble de base a un élément de moins. Seul le type IV est conservé.

I Les segments de $\mathbf{B}_3$ sont de longueur connue :

$$\|A_i B_i\|^2 = \rho_i^2 \quad (\forall i \in \mathbf{B}_3) \quad (\text{VII.15})$$

II La plate-forme est un solide :

$$(\forall (i, j) \in \mathbf{B}_3^2, i \neq j) \quad \|B_i B_j\|^2 = K_{ij} \quad (\text{VII.16})$$

III Les segments de $\mathcal{CB}_3$ sont de longueur connue et sont exprimés en fonction de ceux de $\mathbf{B}_3$:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= \|A_i B_i\|^2 \quad (\forall i \in \mathcal{CB}_3) \\ &= (-A_1 A_i + A_1 B_1 + e_i B_1 B_2 + f_i B_1 B_3 + g_i B_1 B_2 \wedge B_1 B_3)^2 \end{aligned}$$

Les termes e_i, f_i, g_i , ($i \in \mathcal{CB}_3$) sont les coordonnées des points B_i dans le repère $(B_1, B_1 B_2, B_1 B_3, B_1 B_2 \wedge B_1 B_3)$. Ces trois équations sont cubiques, et deux d'entre elles peuvent être ramenées à des équations quadratiques à l'aide de la troisième.

Cette représentation donne des équations de degrés élevés et ne sera pas appliquée.

VII.3.2.2.2 Plate-forme plane Considérons une plate-forme plane. Pour former une base vectorielle de son plan il suffira de choisir trois des articulations lui appartenant. Ainsi, comme dans la deuxième représentation du cas précédent, neuf inconnues sont présentes. Et les types de contraintes à vérifier sont les mêmes, hormis le type III qui est simplifié car la planarité de la plate-forme se traduit par l'égalité $g_i = 0$ pour $i \in \mathbf{B}_3$.

III Les segments de $\mathcal{CB}_3$ sont de longueur connue et sont exprimés en fonction de ceux de $\mathbf{B}_3$:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= \|A_i B_i\|^2 \quad (\forall i \in \mathcal{CB}_3) \\ &= (-A_1 A_i + A_1 B_1 + e_i B_1 B_2 + f_i B_1 B_3)^2 \end{aligned}$$

Équations Les équations obtenues à l'aide de cette paramétrisation sont les suivantes :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho_1^2 = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \rho_2^2 = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - \rho_3^2 = 0$$

La constante K_{ij} désignera dans ces équations la norme $\|B_i B_j\|$, pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Rappelons que (a_i, b_i, c_i) désignent les coordonnées de l'articulation A_i sur la plate-forme, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned} & -2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 \\ & + 2(a_1 - a_2)x_1 + 2(b_1 - b_2)y_1 + 2(c_1 - c_2)z_1 \\ & + 2(a_2 - a_1)x_2 + 2(b_2 - b_1)y_2 + 2(c_2 - c_1)z_2 \\ & + \rho_1^2 + \rho_2^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 - K_{12} = 0 \end{aligned}$$

Deux équations similaires faisant intervenir les couples d'indices $(2, 3)$ et $(3, 1)$ se déduisent de la précédente par permutation sur les indices.

$$\begin{aligned} & 2(a_4 - a_1)(f_4 + e_4 - 1)x_1 + 2(b_4 - b_1)(e_4 + f_4 - 1)y_1 \\ & + 2(c_4 - c_1)(e_4 + f_4 - 1)z_1 \\ & + 2e_4(a_2 - a_4)x_2 + 2e_4(b_2 - b_4)y_2 + 2e_4(c_2 - c_4)z_2 \\ & + 2f_4(a_3 - a_4)x_3 + 2f_4(b_3 - b_4)y_3 + 2f_4(c_3 - c_4)z_3 \\ & + (a_1 - a_4)^2 + (b_1 - b_4)^2 + (c_1 - c_4)^2 \\ & + 2(e_4 + f_4)(a_1a_4 + b_1b_4 + c_1c_4 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2) \\ & - 2e_4(a_2a_4 + b_2b_4 + c_2c_4 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) \\ & - 2f_4(a_3a_4 + b_3b_4 + c_3c_4 - a_3^2 - b_3^2 - c_3^2) \\ & + \rho_1^2(1 - e_4 - f_4) + \rho_2^2e_4 + \rho_3^2f_4 - \rho_4^2 \\ & + (f_4 + e_4 - 1)(f_4K_{13} + e_4K_{12}) - e_4f_4K_{23} = 0 \end{aligned}$$

Deux équations similaires sont obtenues en remplaçant successivement l'indice 4 par un 5 puis un 6. Ces équations linéaires sont indépendantes par définition sinon cela est caractéristique d'une configuration singulière.

VII.3.2.2.3 Capteurs de longueurs et capteurs angulaires Au long de ce mémoire nous avons vu plusieurs fois que les capteurs angulaires amènent des équations additionnelles linéaires. Il se trouve que les capteurs de longueurs amènent clairement des équations quadratiques qui peuvent être

ramenées à des équations linéaires elles aussi. Cela est possible avec la première représentation. Les capteurs sont portés par des segments additionnels et passifs. Il suffit de prendre pour ensemble de travail: $\{1, \dots, s\}$ où s est le nombre total de segments, actifs et passifs. Afin d'obtenir une expression linéaire de leurs équations, il convient de les considérer comme des équations de type III. Cette remarque est là pour signaler que tous les résultats avancés dans la suite sont valables aussi bien pour les capteurs d'élongation que pour des capteurs d'angles.

VII.3.2.3 Degré de $|\Delta(y)|$ et nombre de postures solutions

Nous voulons démontrer que le degré de $|\Delta(y)|$ nous permet de donner une borne sur le nombre de postures solutions.

Cette démonstration s'effectue en deux temps: on commence par établir une relation entre la multiplicité d'une racine y_0 du polynôme $|\Delta(y)|$ et le rang de la matrice $\Delta(y_0)$.

Ensuite, on montrera, en utilisant la forme des monômes intervenant dans notre système, que, pour chaque racine y_0 du polynôme, le nombre de postures solutions pour lesquelles la variable cachée y prend la valeur y_0 est majoré par la multiplicité de y_0 dans $|\Delta(y)|$.

Exemple 18 Prenons un exemple pour illustrer le lien entre la multiplicité des racines du déterminant et le rang de la matrice. Soit le système d'équations

$$\begin{aligned} a x^2 y + b y + c &= 0 \\ d x y + e y &= 0 \end{aligned}$$

Par élimination dialytique on aboutit à une matrice dont le déterminant est :

$$\begin{vmatrix} by + c & 0 & ay \\ ey & dy & 0 \\ 0 & ey & dy \end{vmatrix} = y^2 (ybd^2 + ye^2a + cd^2)$$

Au vu du déterminant, il existe une racine double pour $y = 0$ et la matrice pour cette racine est de rang $1 = 3 - 2$.

$$\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Lorsque le rang de la matrice décroît encore pour devenir nul, on a de plus $c = 0$, et on s'aperçoit qu'alors la multiplicité de la racine $y = 0$ augmente et devient 3. ■

Démontrons donc le lemme généralisant cet exemple.

Lemme VII.1 *Si le rang de la matrice $\Delta(y_0)$ est inférieur ou égal à $n - \nu$, alors la multiplicité de y_0 dans le polynôme $|\Delta(y)|$ est au moins égale à ν .*

Preuve : Dans le cas où ν vaut 1, nous avons déjà remarqué que trivialement, si la matrice est de rang inférieur ou égal à $n - 1$, alors y_0 est racine, donc de multiplicité au moins égale à 1.

Démontrons tout d'abord le résultat dans le cas d'une matrice $\Delta(y_0)$ de rang inférieur ou égal à $n - 2$ pour une valeur y_0 donnée. $\Delta(y)$ est la matrice d'une application linéaire dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ fixée. $\Delta(y_0)$ est non inversible, donc il existe un vecteur v_0 non nul dans son noyau. Par le théorème de la base incomplète, on peut trouver $n - 1$ vecteurs dans la base de départ, disons $e_1, \dots, e_{n-1}$ à une renumérotation près, permettant de former une nouvelle base avec v_0 . Dans la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, v_0)$ ainsi obtenue, la matrice $\Delta(y)$ devient

$$\Delta_0(y) = P_0 \Delta(y) P_0^{-1}$$

où P_0 est la matrice de passage entre les deux bases. On a bien sûr l'égalité

$$|\Delta_0(y)| = |\Delta(y)|$$

La matrice $\Delta_0(y)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot & p_1(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & p_n(y) \end{pmatrix}$$

Puisque v_0 est un vecteur du noyau de $\Delta_0(y_0)$ les polynômes $p_1(y), \dots, p_n(y)$ ont tous la racine y_0 , ils sont donc divisibles par $y - y_0$.

Développons le déterminant de $\Delta_0(y)$ par rapport à la dernière ligne. Si $M_i(y)$ désigne le mineur associé à $p_i(y)$, c'est-à-dire le mineur obtenu en supprimant la dernière colonne et la $i^{\text{ème}}$ ligne dans la matrice $\Delta_0(y)$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\Delta_0(y)| &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i-1} p_i(y) M_i(y) \\ &= (y - y_0) \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i-1} \frac{p_i(y)}{y - y_0} M_i(y) \end{aligned}$$

Par hypothèse, le rang de $\Delta_0(y_0)$ est strictement inférieur à $n - 1$, donc tous les mineurs extraits de cette matrice sont nuls, en particulier tous les polynômes $M_i(y)$ s'annulent en y_0 , ils sont donc divisibles par $y - y_0$, ce qui entraîne :

$$|\Delta_0(y)| = (y - y_0)^2 \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i-1} \frac{p_i(y)}{y - y_0} \frac{M_i(y)}{y - y_0}$$

y_0 est donc racine double, au moins, du polynôme $|\Delta(y)|$.

Reprenons la même démonstration en supposant à présent que le rang de la matrice $\Delta(y_0)$ est inférieur ou égal à $n - \nu$. Cette fois nous obtenons une base $v_1, \dots, v_\nu$ de son noyau, que l'on complète en la base $(e_1, \dots, e_{n-\nu}, v_1, \dots, v_\nu)$, à une renumérotation près des vecteurs de la base de départ. Alors

$$\Delta_0(y) = P_0 \Delta(y) P_0^{-1}$$

et la matrice $\Delta_0(y)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot & p_{1,1}(y) & p_{1,2}(y) & \cdots & p_{1,\nu}(y) \\ \cdot & \cdots & \cdot & p_{2,1}(y) & p_{2,2}(y) & \cdots & p_{2,\nu}(y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & p_{n,1}(y) & p_{n,2}(y) & \cdots & p_{n,\nu}(y) \end{pmatrix}$$

où les polynômes $p_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, \nu\}$ s'annulent tous en y_0 puisque $v_1, \dots, v_\nu$ sont des vecteurs du noyau de $\Delta_0(y_0)$.

Calculons à présent le déterminant $|\Delta_0(y)|$ en utilisant la définition classique utilisant toutes les permutations de l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\{1, \dots, n\}$. $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ .

$$\begin{aligned} |\Delta_0(y)| &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \Delta_{\sigma(1),1} \Delta_{\sigma(2),2} \cdots \Delta_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} [\varepsilon(\sigma) \Delta_{\sigma(1),1} \Delta_{\sigma(2),2} \cdots \Delta_{\sigma(n-\nu),n-\nu} \\ &\quad \cdot \Delta_{\sigma(n-\nu+1),n-\nu+1} \cdots \Delta_{\sigma(n),n}] \end{aligned}$$

Nécessairement, les ν derniers éléments

$$\Delta_{\sigma(n-\nu+1),n-\nu+1}, \Delta_{\sigma(n-\nu+2),n-\nu+2}, \dots, \Delta_{\sigma(n),n}$$

de la matrice sont des polynômes qui ont pour racine y_0 puisque ce sont des polynômes pris parmi $p_{1,1}(y), \dots, p_{1,\nu}(y), \dots, p_{n,1}(y), \dots, p_{1,\nu}(y)$. On peut donc mettre $y - y_0$ en facteur dans chacun de ces ν éléments, ce qui permet de mettre $(y - y_0)^\nu$ en facteur dans le déterminant $|\Delta(y)|$, y_0 est donc une racine de $|\Delta(y)|$ de multiplicité supérieure ou égale à ν (elle peut éventuellement être strictement supérieure). $\square$

Il s'agit maintenant de lier le rang de la matrice $\Delta(y_0)$ au nombre de solutions globales, en les variables (et non les monômes), du système de départ, pour lesquelles la variable cachée y a la valeur y_0 . Pour fixer les idées, supposons que y est l'une des coordonnées du vecteur $A_1 B_1$. Il est intéressant de distinguer deux cas, lorsque, pour $y = y_0$, on obtient plusieurs solutions globales.

Dans le premier cas, les solutions globales ainsi obtenues font intervenir plusieurs solutions correspondant à au moins deux positions distinctes pour B_1 , c'est-à-dire que le choix des axes de coordonnées est tel que deux positions solutions pour B_1 se trouvent dans un même plan parallèle à un plan de coordonnées. Nous pouvons perturber les axes légèrement pour que ceci ne se produise pas. Remarquons qu'alors notre étude restera valide, car nous n'avons fait aucune supposition sur le choix des axes, et tous les raisonnements sont parfaitement indépendants de ce choix.

Dans le second cas, celui dans lequel nous nous placerons dorénavant, si plusieurs solutions globales sont possibles pour la posture du robot, étant donnée une valeur y_0 pour y , alors dans toutes ces postures solutions, le point B_1 aura la même position. Le fait de fixer la valeur y_0 pour y , et de perturber les axes, nous permet ainsi de nous ramener au cas où un point de la plate-forme est connu.

Nous voulons montrer que le degré de $|\Delta(y)|$ donne une borne sur le nombre de postures solutions. Énonçons la conjecture suivante :

Conjecture : Si le rang de $\Delta(y_0)$ est $n - \nu$, alors le système admet au plus ν solutions pour la valeur y_0 de la variable cachée.

Toute racine conduisant alors à un nombre de solutions au plus égal à sa multiplicité dans le polynôme, en sommant les multiplicités, on obtient le résultat voulu.

La démonstration de cette conjecture n'a pas été effectuée. Cependant le résultat voulu est établi dans la suite de cette section. Le raisonnement est le suivant :

Si l'on se place en une racine y_0 de $|\Delta(y)|$, alors B_1 est connu comme on l'a vu précédemment. Le chapitre V donne alors une borne ν_0 sur le nombre de solutions dépendant de l'architecture du robot.

Il est suffisant pour notre but de démontrer la conjecture pour $\nu < \nu_0$. En effet pour les valeurs de ν supérieures ou égales à ν_0 , le nombre de postures solutions sera de toutes façons borné par ν_0 , et donc *a fortiori* par ν .

Lorsque le robot a une plate-forme plane, on sait que, dans le cas le plus général, la borne sur le nombre de solutions est égale à deux (sections V.4.2 et V.5.2). Certains cas particuliers pour lesquels cette borne peut être quatre ou huit sont donnés à la section V.4.2. Lorsqu'on ajoute un capteur sur un autre segment, apportant des informations non redondantes, alors on a en général une unique solution, même si la borne démontrée est quatre (section V.4.3.2). Les cas pour lesquels cette borne dépasse deux, avec un capteur additionnel, sont rares (section V.5.2). Pour le cas général il suffit de démontrer la conjecture pour le rang $n - 1$.

Lorsque la plate-forme est quelconque, si on rajoute un capteur supplémentaire sur un segment, et que ce capteur apporte une information non redondante, on sait que la borne sur le nombre de solutions du modèle géométrique direct est égale à quatre (section V.4.3.1). La conjecture sera alors démontrée jusqu'au rang $n - 3$. Nous verrons qu'il faudra supposer que la variable cachée n'est pas choisie parmi les variables relatives au segment sur lequel est placé le capteur additionnel.

Dans les deux cas, nous établissons donc un théorème résumant le résultat voulu.

Le lemme suivant fournit le premier résultat intermédiaire dans le cas où la matrice est de rang $n - 1$.

Lemme VII.2 *Pour un système dans lequel tous les monômes de degré 0 et 1 sont présents, si le rang de $\Delta(y_0)$ est égal à $n - 1$, alors il y a au plus une solution globale du système pour laquelle la variable y a la valeur commune y_0 .*

Preuve : En effet, si $\text{rang}(\Delta(y_0)) = n - 1$ pour la valeur y_0 de la variable y , alors le noyau de $\Delta(y_0)$ est un espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, où les u_i dépendent de la valeur y_0 .

Revenons à présent aux variables contenues dans les monômes. Dans notre cas (voir section VII.3.2.2) tous les monômes composés des variables seules sont présents. Supposons que le monôme X_1 soit la constante 1, X_2 la variable x_2 , X_3 la variable

$y_2, \dots$ par une renumérotation éventuelle des monômes. Dire que $(X_1, \dots, X_n)$ est un élément du noyau s'exprime par l'existence d'un scalaire λ tel que

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda u_1 \\ x_2 &= \lambda u_2 \\ y_2 &= \lambda u_3 \\ \vdots &\vdots \end{aligned}$$

$u_1(y_0)$ est donc nécessairement non nul, ce qui permet de déduire une unique valeur de λ . En reportant cette valeur dans les équations suivantes, on obtient au plus (il peut y avoir des équations contradictoires) une solution unique pour chacune des variables du problème. $\square$

Le lemme précédent est assez général, puisque la seule hypothèse faite sur le système concerne la présence des variables et du monôme constant. Les autres lemmes qui seront démontrés utiliseront l'architecture des robots parallèles.

La suite de la démonstration est donnée tout d'abord (section VII.3.2.3.1) dans le cas d'une plate-forme plane. Nous verrons dans la section VII.3.2.3.2 que la démonstration est plus délicate dans le cas général.

VII.3.2.3.1 Cas d'une plate-forme plane Nous savons, comme rappelé en page 160, que, en général, dans le cas d'une plateforme plane, on n'a pas plus de deux postures solution lorsque le point B_1 est connu.

En résumé, si le rang de la matrice $\Delta(y_0)$ est $n - 1$, alors la racine y_0 est simple dans le polynôme $|\Delta(y_0)|$, et on n'a pas plus d'une posture solution. Et lorsque le rang est inférieur ou égal à $n - 2$, alors la racine est au moins double, et on n'a pas plus de deux postures solutions.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème VII.3 *Le nombre de solutions du système, et donc le nombre de postures possibles pour le robot, dans le cas d'un robot à plate-forme plane (sauf certaines configurations signalées), est borné par le degré en la variable y du déterminant $|\Delta(y)|$.*

VII.3.2.3.2 Cas d'une plate-forme quelconque Dans le cas d'une plate-forme quelconque, nous avons rappelé en page 160 que lorsqu'une articulation est connue, on a au plus quatre postures solutions dès lors qu'on

ajoute une information donnée par un capteur supplémentaire sur l'un des autres segments.

Nous devons donc encore montrer que, pour $\nu = 2, 3$, si le rang de $\Delta(y_0)$ est égal à $n - \nu$, alors le nombre de solutions du modèle géométrique direct pour $y = y_0$ est majoré par ν .

Le théorème VII.3 est alors généralisé au cas d'une plate-forme quelconque.

Lemme VII.4 *Sur les équations du modèle géométrique direct des robots parallèles, si le rang de $\Delta(y_0)$ est égal à $n - 2$, alors il y a au plus deux solutions globales du système pour laquelle la variable y a la valeur commune y_0 .*

Preuve : Si $\text{rang}(\Delta(y_0)) = n - 2$, cette fois le noyau de $\Delta(y_0)$ est de dimension 2, engendré par des vecteurs $U(y_0) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $V(y_0) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dont les coordonnées dépendent de y_0 . On peut écrire, de la même façon que dans le lemme précédent, les égalités suivantes, dans lesquelles nous nous intéressons en priorité aux variables représentant les coordonnées du vecteur A_2B_2

$$1 = \lambda u_1 + \mu v_1 \quad (\text{VII.17})$$

$$x_2 = \lambda u_2 + \mu v_2 \quad (\text{VII.18})$$

$$y_2 = \lambda u_3 + \mu v_3 \quad (\text{VII.19})$$

$$z_2 = \lambda u_4 + \mu v_4 \quad (\text{VII.20})$$

$$x_3 = \lambda u_5 + \mu v_5 \quad (\text{VII.21})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Ceci bien sûr suppose une renumérotation éventuelle des monômes.

Dans la première égalité, u_1 et v_1 ne peuvent être nuls simultanément. Supposons que par exemple v_1 soit non nul. On peut alors déduire

$$\mu = \frac{1 - \lambda u_1}{v_1} \quad (\text{VII.22})$$

Ce qui permet d'écrire :

$$x_2 = \lambda \left(u_2 - \frac{u_1}{v_1} v_2 \right) + \frac{v_2}{v_1} \quad (\text{VII.23})$$

$$y_2 = \lambda \left(u_3 - \frac{u_1}{v_1} v_3 \right) + \frac{v_3}{v_1} \quad (\text{VII.24})$$

$$z_2 = \lambda \left(u_4 - \frac{u_1}{v_1} v_4 \right) + \frac{v_4}{v_1} \quad (\text{VII.25})$$

Deux cas se présentent alors :

o Premier cas : les équations (VII.23), (VII.24), (VII.25) définissent l'équation paramétrique d'une droite. Cette droite donne la direction du vecteur A_2B_2 .

Remarquons que nous avons défini les vecteurs $U(y_0)$ et $V(y_0)$ sans utiliser la forme des équations du système polynomial donné par le modèle géométrique direct. Nous avons seulement regardé le rang de la matrice, mais pas exploité sa forme, directement liée aux équations du problème.

Si nous utilisons à présent l'équation de longueur du segment 2, $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \rho_2^2$, et les expressions précédentes obtenues pour x_2, y_2, z_2 , nous obtenons une équation du second degré en λ . Notons que cette équation n'est pas l'équation triviale $0 = 0$, elle admet donc au plus deux solutions en λ . Ceci revient à dire que le vecteur A_2B_2 peut prendre deux positions seulement, si on connaît sa direction et sa longueur. Les deux valeurs au plus de λ ainsi calculées nous permettent de déduire μ par l'égalité (VII.22), puis, en reportant dans les équations (VII.21) et suivantes, de déterminer au plus deux postures solutions pour le robot.

o Second cas : les équations (VII.23), (VII.24), (VII.25) définissent un point unique (lorsque les coefficients de λ sont tous nuls). Dans ce cas, les positions de B_1 et B_2 sont connues, il y a donc au plus deux postures solutions, sauf si le robot se trouve en configuration singulière (voir section V.3).

Dans tous les cas, le nombre de postures est majoré par deux. $\square$

Jusqu'ici la présence d'un capteur additionnel n'a pas été requise. Pour la démonstration du lemme suivant, elle sera supposée.

Lemme VII.5 *Sur les équations du modèle géométrique direct des robots parallèles, pour un robot à plate-forme quelconque (sauf certaines configurations signalées), lorsqu'on rajoute un capteur supplémentaire sur un segment, si le rang de $\Delta(y_0)$ est égal à $n - 3$, alors il y a au plus trois solutions globales du système pour laquelle la variable y a la valeur commune y_0 .*

Comme on le verra dans la démonstration, ce résultat est valable pour tous les robots dès que les articulations A_3 , A_4 , A_5 et A_6 ne sont pas coplanaires.

Preuve : Les grandes lignes de la démonstration sont tout à fait similaires à celles du lemme précédent.

Si $\text{rang}(\Delta(y_0)) = n - 3$, on écrit les équations suivantes, dans lesquelles $U(y_0) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $V(y_0) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ et $W(y_0) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ forment une base du noyau de $\Delta(y_0)$:

$$1 = \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1 \quad (\text{VII.26})$$

$$x_2 = \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2 \quad (\text{VII.27})$$

$$y_2 = \lambda u_3 + \mu v_3 + \nu w_3 \quad (\text{VII.28})$$

$$z_2 = \lambda u_4 + \mu v_4 + \nu w_4 \quad (\text{VII.29})$$

$$x_3 = \lambda u_5 + \mu v_5 + \nu w_5 \quad (\text{VII.30})$$

$$y_3 = \lambda u_6 + \mu v_6 + \nu w_6 \quad (\text{VII.31})$$

$$z_3 = \lambda u_7 + \mu v_7 + \nu w_7 \quad (\text{VII.32})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Par une renumérotation éventuelle des indices, on supposera que le segment 2 est le segment équipé d'un capteur supplémentaire, ce qui est possible s'il existe un capteur supplémentaire sur un segment dont aucune variable n'est la variable cachée y_0 .

w_1 , par exemple, est non nul. D'où

$$\nu = \frac{1 - \lambda u_1 - \mu v_1}{w_1} \quad (\text{VII.33})$$

Ce qui permet d'écrire :

$$x_2 = \lambda \left(u_2 - \frac{u_1}{w_1} w_2 \right) + \mu \left(v_2 - \frac{v_1}{w_1} w_2 \right) + \frac{w_2}{w_1} \quad (\text{VII.34})$$

$$y_2 = \lambda \left(u_3 - \frac{u_1}{w_1} w_3 \right) + \mu \left(v_3 - \frac{v_1}{w_1} w_3 \right) + \frac{w_3}{w_1} \quad (\text{VII.35})$$

$$z_2 = \lambda \left(u_4 - \frac{u_1}{w_1} w_4 \right) + \mu \left(v_4 - \frac{v_1}{w_1} w_4 \right) + \frac{w_4}{w_1} \quad (\text{VII.36})$$

Ces équations définissent un plan, une droite, ou un point.

o Premier cas : les équations (VII.34), (VII.35), (VII.36) définissent l'équation paramétrique d'un plan P contenant le vecteur A_2B_2 . Comme toujours, l'équation de longueur du segment 2, et l'équation exprimant que $\|B_1B_2\|$ est une constante permettent de dire que B_2 est contenu dans un cercle $\mathcal{C}_2$. Il est possible *a priori* que ce cercle soit contenu dans le plan P . Mais alors, si le plan donné par le capteur nous donne de l'information, ce plan n'est pas le plan P . Dans tous les cas, l'intersection de P avec le cercle fournit au plus deux points.

Ceci s'exprime de façon équivalente sur λ et μ en disant que ces paramètres vérifient à la fois une équation du second degré (équation d'une sphère pour B_2) et une équation du premier degré (équation du plan du capteur). Ce qui nous fournit pour λ , après élimination de μ grâce à l'équation linéaire, une équation du second degré, donc deux solutions au plus pour le couple (λ, μ) . Les équations (VII.30) et suivantes, avec l'égalité (VII.33), fournissent alors au plus deux postures solutions pour le robot.

o Second cas : les équations (VII.34), (VII.35), (VII.36) définissent une droite. Ceci se produit lorsque les deux vecteurs directeurs du plan ci-dessus ne sont plus indépendants, c'est-à-dire, sans perte de généralité, lorsqu'il existe une constante k telle que

$$\begin{aligned} \left(u_2 - \frac{u_1}{w_1}w_2\right) &= k \left(v_2 - \frac{v_1}{w_1}w_2\right) \\ \left(u_3 - \frac{u_1}{w_1}w_3\right) &= k \left(v_3 - \frac{v_1}{w_1}w_3\right) \\ \left(u_4 - \frac{u_1}{w_1}w_4\right) &= k \left(v_4 - \frac{v_1}{w_1}w_4\right) \end{aligned}$$

La droite contenant B_2 a donc pour équation :

$$\begin{aligned} x_2 &= (k\lambda + \mu) \left(v_2 - \frac{v_1}{w_1}w_2\right) + \frac{w_2}{w_1} \\ y_2 &= (k\lambda + \mu) \left(v_3 - \frac{v_1}{w_1}w_3\right) + \frac{w_3}{w_1} \\ z_2 &= (k\lambda + \mu) \left(v_4 - \frac{v_1}{w_1}w_4\right) + \frac{w_4}{w_1} \end{aligned}$$

L'intersection de cette droite et du cercle $\mathcal{C}_2$ (défini comme dans le premier cas) donne au plus deux points B_2^1 et B_2^2 , correspondant à deux valeurs α^1 et α^2 du paramètre $k\lambda + \mu$. On écrira donc

$$\begin{aligned}\mu^1 &= \alpha^1 - k\lambda \\ \mu^2 &= \alpha^2 - k\lambda\end{aligned}$$

Ce qui permet d'éliminer μ dans les équations (VII.30), (VII.31) et (VII.32), équations correspondant au point B_3 . On sait déjà (voir section V.3) que lorsque les positions de deux articulations de la plate-forme sont connues, il n'y a pas plus de deux postures. On aura donc au plus deux positions $B_3^{i'}$ et $B_3^{i''}$ lorsque la position de B_1 et la position B_2^i de B_2 sont connues, pour $i = 1, 2$, ce qui donne au plus quatre postures pour le robot. Étudions dans quels cas ces quatre postures peuvent être effectivement solutions.

On vérifie facilement que les équations (VII.30), (VII.31) et (VII.32), pour chaque valeur μ^1 et μ^2 deviennent alors respectivement les équations paramétriques des droites D_3^1 (contenant les points $B_3^{1'}$ et $B_3^{1''}$) et D_3^2 (contenant $B_3^{2'}$ et $B_3^{2''}$), et que ces deux droites sont parallèles.

D'autre part on sait que B_3 doit se trouver sur le cercle $\mathcal{C}_3$, intersection de la sphère de centre A_3 et de rayon ρ_3 , et de la sphère de centre B_1 et de rayon $\|B_1B_3\|$. $B_3^{i'}$ et $B_3^{i''}$ appartiennent aussi à la sphère de centre B_2^i et de rayon $\|B_2B_3\|$, pour $i = 1, 2$. Les points B_1 , B_2^1 et A_3 appartiennent donc au plan médiateur de $B_3^{1'}$ et $B_3^{1''}$. De la même façon, B_1 , B_2^2 et A_3 appartiennent au plan médiateur de $B_3^{2'}$ et $B_3^{2''}$. Or, les droites D_3^1 et D_3^2 sont parallèles, donc ces deux plans médiateurs sont confondus. Les points B_1 , B_2^1 , B_2^2 et A_3 sont donc coplanaires.

Si on répète le raisonnement précédent pour les points B_4 , B_5 , B_6 , on conclut que nécessairement, pour qu'il y ait quatre postures solutions, B_1 , B_2^1 , B_2^2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 doivent être coplanaires.

Dans tous les autres cas, il n'y aura pas plus de trois postures solutions.

o Troisième cas : les équations (VII.34), (VII.35), (VII.36) définissent un point unique. On conclut alors comme dans le lemme précédent.

Dans tous les cas, le nombre de postures est donc majoré par trois. $\square$

Nous pouvons donc finalement déduire le théorème final :

Théorème VII.6 *Le nombre de solutions du système, et donc le nombre de postures possibles pour le robot, dans le cas d'un robot à plate-forme quelconque (sauf certaines configurations signalées), est borné par le degré en la variable y du déterminant $|\Delta(y)|$.*

VII.3.2.4 Conclusion

Les théorèmes démontrés nous permettent de lier le degré du polynôme obtenu par élimination à une borne sur le nombre de postures solutions du modèle géométrique direct des robots parallèles.

Nous allons appliquer ce résultat dans la section VII.4.2 pour le cas d'un robot à plate-forme plane équipé de 1 à 6 capteurs supplémentaires : nous évaluerons symboliquement le degré du polynôme et nous en déduirons des bornes sur le nombre de postures solutions.

Bien sûr ce degré n'est qu'une borne supérieure, et pour deux raisons. D'une part, le nombre de racines *réelles* du polynôme peut être inférieur à son degré. D'autre part, comme d'autres polynômes obtenus par d'autres méthodes d'élimination, le polynôme $|\Delta(y)|$ peut être un multiple strict du résultant, donc posséder des racines qui ne fourniront aucune solution globale au système d'équations, et donc aucune posture pour le robot.

VII.4 Applications

Dans cette section nous appliquons la méthode précédente en premier lieu au robot plan, en second lieu au robot spatial. Nous verrons que les résultats obtenus, s'ils ne sont pas probants dans le cas du robot plan pour lequel des méthodes moins systématiques aboutissent mieux, sont en revanche intéressants dans le cas du robot spatial.

VII.4.1 Mécanisme plan

Maintenant nous revenons au robot plan présenté dans le chapitre II. Nous souhaitons étudier les résultats que peuvent donner cette méthode dans ce cas. Le problème initial, résoudre le MGD sans capteurs additionnels, pour un robot plan ne comporte que trois variables. Ce problème est déjà accessible aux méthodes classiques d'élimination. C'est pourquoi nous travaillerons sans ajouter de capteurs.

VII.4.1.1 Plateau général

Le système d'équations considéré est celui défini dans la section II.1, équations (II.1) à (II.3). Il est tout de même modifié en deux points, un chan-

gement de variable est fait et une équation est ajoutée. On va rendre les équations algébriques en posant

$$\cos\phi = c_\phi \quad (\text{VII.37})$$

$$\sin\phi = s_\phi \quad (\text{VII.38})$$

$$c_\phi^2 + s_\phi^2 = 1 \quad (\text{VII.39})$$

Une autre paramétrisation est effectuée en appendice B ; mais elle donne des degrés plus élevés pour le déterminant.

A ce niveau là, treize monômes sont présents :

$$1, x, y, c_\phi, s_\phi, x^2, y^2, c_\phi^2, s_\phi^2, x s_\phi, x c_\phi, y s_\phi, y c_\phi$$

Parmi les quatre choix possibles pour la variable cachée, le plus avantageux est de prendre y . L'algorithme développé construit un système à 29 équations et 29 monômes en introduisant les équations produits des équations de départ par la liste de monômes indiquée dans la table (VII.1). Ce système n'admet

Équation de base	Monômes
1	$y \ s_\phi \ c_\phi \ s_\phi^2 \ c_\phi s_\phi \ y s_\phi \ c_\phi^2 \ y c_\phi \ y^2$
2	$y \ s_\phi \ c_\phi \ y s_\phi \ y c_\phi \ s_\phi^2 \ c_\phi s_\phi \ c_\phi^2$
3	$y \ s_\phi \ c_\phi \ s_\phi^2 \ c_\phi s_\phi$
4	$y \ s_\phi \ c_\phi$

TAB. VII.1 – Construction des équations pour le robot plan général.

de solutions que si son déterminant s'annule pour une valeur de la variable cachée y . Le déterminant est un polynôme de degré sept en y .

$$A_7 (x + A_8) (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6)$$

Le robot admet alors au plus sept configurations différentes pour un triplet de valeurs des longueurs de segments ρ_i , $i = 1, 2, 3$. Il n'est pas très surprenant de trouver un degré plus grand que celui trouvé (six) en II.1. En effet, pour des systèmes de petite taille (peu d'équations de départ et peu d'inconnues) il est clair que cet algorithme est difficilement concurrentiel vis-à-vis de manipulations au cas par cas des équations. L'algorithme est sensible à la structure du système donné en entrée. C'est pourquoi des manipulations préliminaires sur les équations, quand c'est raisonnable, ont une incidence bénéfique sur le nombre final de solutions.

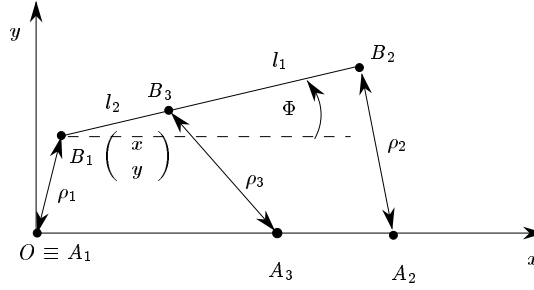


FIG. VII.1 – Robot plan rectiligne

VII.4.1.2 Le robot rectiligne

Maintenant, reprenons le robot dont la base et le plateau ont chacun leurs articulations alignées (voir figure VII.1). Il y a neuf monômes présents :

$$1, x, c_\phi, x c_\phi, y s_\phi, c_\phi^2, s_\phi^2$$

La méthode d'élimination permet de construire un système de taille 28. Les équations construites sont indiquées dans la table (VII.2). La matrice

Équation de base	Monômes
1	$y \quad s_\phi \quad c_\phi \quad s_\phi^2 \quad c_\phi s_\phi \quad y s_\phi \quad c_\phi^2 \quad c_\phi y \quad y^2$
2	$y \quad s_\phi \quad c_\phi \quad y s_\phi \quad y c_\phi \quad s_\phi^2 \quad c_\phi s_\phi$
3	$y \quad s_\phi \quad c_\phi \quad s_\phi^2 \quad c_\phi s_\phi$
4	$y \quad s_\phi \quad c_\phi$

TAB. VII.2 – Construction des équations pour le robot plan à base et plateau rectilignes.

construite a un déterminant de degré 7 s'écrivant :

$$-64 l_3^4 l_2^2 (a_2 - a_3)^2 (x - a_2) (A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0)^2 \quad (\text{VII.40})$$

Les coefficients $A_{i,i=0,\dots,3}$ regroupent des termes faisant intervenir les paramètres géométriques du robot et de la configuration considérée. On s'est ainsi ramené à un polynôme mono-variable de degré 7, n'ayant que 4 racines distinctes en x . La racine $x = a_2$ est probablement une racine parasite introduite par le processus. On rappelle que pour un tel robot, le polynôme mono-variable obtenu en section II.1 a 3 racines distinctes.

VII.4.2 Robot parallèle spatial

Ici, nous appliquons la méthode d'élimination décrite sur un robot parallèle spatial d'architecture *a priori* quelconque.

VII.4.2.1 Discussion sur les représentations

Malgré les avantages indéniables des méthodes d'élimination, il est clair qu'elles sont sensibles au nombre d'inconnues et dans une certaine mesure au degré des équations impliquées. L'objectif est de disposer d'un système ayant le moins de variables possibles.

Une remarque de prime abord est qu'il est judicieux d'éliminer un certain nombre d'inconnues à partir des équations linéaires quand elles sont présentes. Le tableau VII.3 confirme la pertinence de cette remarque ; il indique, dans le cas d'une plate-forme plane et suivant le nombre de capteurs utilisés, le nombre de monômes différents présents dans les équations avant et après résolution des équations linéaires. Cette opération est liminaire à la méthode dialytique. Deux systèmes équivalents dont un a moins d'inconnues grâce à

Capteurs	3	2	1
Avant résolution linéaire	28		
Après résolution linéaire	10	15	21

TAB. VII.3 – *Nombre de monômes présents dans les équations avant et après la résolution des équations linéaires*

l'élimination des équations linéaires ne mèneront pas à des matrices de taille égale. Cela vient du fait qu'il est important, pour l'efficacité de l'élimination dialytique, d'avoir un système de départ ayant le moins de monômes possibles. C'est ainsi que nous avons défini une *signature* d'un système comme étant la différence entre le nombre total de variables et le nombre d'équations linéaires présentes. Cette signature permet d'évaluer, de manière instantanée, l'opportunité de choisir une représentation plutôt qu'une autre.

La représentation décrite plus haut est celle qui a le meilleur potentiel au vu de la méthode dialytique par rapport aux autres représentations déjà utilisées dans d'autres méthodes.

VII.4.2.2 Application numérique

Considérons le robot parallèle suivant, prototype INRIA, dont la base et la plate-forme sont des hexagones. Pour l'application suivante nous avons pris

	Base			Plate-forme		
Segment	x_B	y_B	z_B	x_P	y_P	z_P
1	-9.7	9.1	0	-3	7.3	0
2	9.7	9.1	0	3	7.3	0
3	12.76	3.9	0	7.822	-1.052	0
4	3	-13	0	4.822	-6.248	0
5	-3	-13	0	-4.822	-6.248	0
6	-12.76	3.9	0	-7.822	-1.052	0

ce robot dans la configuration où sa posture est :

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 55 \end{pmatrix} \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De manière à obtenir un système de petite taille que l'on pourra détailler assez rapidement, nous considérons l'ajout de trois capteurs linéaires sur trois segments différents. Dans la configuration choisie, les capteurs additionnels permettent de donner les équations suivantes :

[Type IV]

$$\begin{aligned} -4999.50 x_1 + 609.03 z_1 &= 0 \\ -4999.50 x_2 - 609.03 z_2 &= 0 \\ -5285.50 x_3 - 474.5418 z_3 &= 0 \end{aligned}$$

Équations quadratiques provenant des longueurs de segments du robot :

[Type I]

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 3073.13 &= 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 3073.13 &= 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - 3073.906 &= 0 \end{aligned}$$

[Type II]

$$\begin{aligned} -2 x_2 x_1 + 38.8 x_2 - 38.8 x_1 + 6486.62 - 2 y_2 y_1 - 2 z_2 z_1 &= 0 \\ -2 x_3 x_1 + 44.92(x_3 - x_1) + 6491.656 - 2 y_3 y_1 \\ - 10.4(y_3 - y_1) - 2 z_3 z_1 - 2 x_3 x_2 + 6.12 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_3 - 6.12 x_2 + 6090.432 - 2 y_3 y_2 - 10.4(y_3 - y_2) - 2 z_3 z_2 = 0$$

Équations linéaires provenant des longueurs de segments du robot :
[Type III]

$$\begin{aligned} 44.199 y_1 - 21.736 x_2 - 71.697 y_2 + 31.663 x_3 \\ + 54.827 y_3 + 402.911 - 25.399 x_1 &= 0 \\ 115.243 y_1 - 82.027 x_2 - 142.741 y_2 + 51.129 x_3 \\ + 54.827 y_3 + 158.986 - 34.938 x_1 &= 0 \\ 27.116 y_1 - 117.121 x_2 - 27.116 y_2 + \\ 51.039 x_3 - 639.589 + 15.956 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des équations linéaires permet d'éliminer six inconnues, laissant encore 6 monômes :

1	$z_2 y_3$	z_2	y_3	z_2^2	y_3^2
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6

Le déterminant est de degré quatre en la variable cachée z_3 :

$$\Delta = -155.794 z_3^4 + 40988.866 z_3^3 - 0.179 10^7 z_3^2 - 0.121 10^8 z_3 + 0.707 10^9$$

Les quatre racines pour z_3 sont :

$$-18.894, 21.246, 55.000, 205.743$$

La troisième racine correspond visiblement à la posture choisie en début d'application. C'est la valeur que nous choisirons pour substitution dans la variable cachée. Ainsi nous obtenons un système linéaire homogène à coefficients numériques. La résolution du système en $X_i, i = 2 \dots 6$ donne

$$\begin{aligned} z_2 y_3 &= X_2 = -272.36 \\ y_3 &= X_3 = -4.952 \\ z_2 &= X_4 = 55.000 \\ z_2^2 &= X_5 = 3025.0 \\ y_3^2 &= X_6 = 24.522 \end{aligned}$$

La précision sur les monômes indique que la cohérence est assez bonne, puisque malgré tout le calcul a été fait indépendamment des relations entre les monômes :

y_3	z_2	z_3	$z_2 y_3$	z_2^2	y_3^2
10^{-12}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-9}

Le triplet de valeurs $(z_2, y_3, z_3) = (55.000, -4.952, 55.000)$ correspond à la résolution des inconnues restées après l'utilisation des équations linéaires pour éliminer les variables $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2)$. En remplaçant les inconnues (z_2, y_3, z_3) par leurs valeurs respectives dans les équations linéaires et en résolvant le système linéaire numérique ainsi obtenu, on obtient l'ensemble des valeurs des inconnues correspondant à la racine $z_3 = 55.000$ du déterminant. Ces valeurs correspondent effectivement à la posture considérée en début de l'application.

En répétant les mêmes opérations pour chacune des racines du déterminant, il apparaît que la seule racine admissible est celle étudiée en détail ci-dessus. Toutes les autres mènent à des incompatibilités dans au moins l'une des équations. Cette observation indique que la borne de 4 donnée pour un robot à plate-forme plane, est rarement atteinte en pratique.

VII.4.3 Synthèse des résultats

VII.4.3.1 Plate-forme plane

En fonction du nombre de capteurs ajoutés, les tables VII.4 et VII.5 indiquent une borne sur le nombre de solutions, le nombre d'inconnues dans le système non-linéaire, le nombre d'équations au moment où un système carré a pu être construit et la borne triviale à partir de laquelle a été réduite la borne améliorée comme décrit en VII.3.1.4.3. La représentation classique donne de moins bons résultats que la représentation de LAZARD. La borne est obtenue après construction de la matrice par élimination dialytique à l'aide du pseudo pivot de Gauss. Sauf pour le cas à un capteur additionnel où les temps de calculs sont excessifs pour une évaluation symbolique (qui a permis d'atteindre la valeur de 27) : la borne de 20 est obtenue en prenant des coefficients numériques aléatoires pour la matrice dialytique.

Lorsqu'il y a plus de trois capteurs la matrice dialytique n'est pas intéressante à construire, sous réserve que les capteurs apportent effectivement de l'information. En effet il est plus direct de résoudre le système non-linéaire en tirant avantage de sa structure lorsque les équations linéaires ont été éliminées. La borne obtenue est de loin meilleure que celle qu'on pourrait obtenir en construisant la matrice. Si les six capteurs sont utiles, alors la solution est unique et obtenue en résolvant le système linéaire correspondant aux six équations provenant des capteurs et aux trois provenant du type III.

Il est important de noter ici que le type de capteur, (parmi angulaire et élongation) n'a pas d'importance. Tout au plus les capteurs d'élongation produisent-ils des équations linéaires comportant les inconnues ne correspondant pas uniquement à un des segments pris dans l'ensemble de base (voir section VII.3.2.2.3).

Nb. capteurs	Nb. inconnues	Dim. matrice	Borne triviale	Borne améliorée
6	3	6	4	4
5	4	19	14	6
4	5	35	20	12
3	6	71	33	22
2	7	201	59	32
1	8	253	68	39 ^a

TAB. VII.4 – *Bornes sur le nombre de solutions d'un robot à plate-forme plane dans le cas d'une représentation classique (vecteur position et matrice orientation : 9 inconnues)*

^a Le résultat correct est probablement plus faible, mais obtenir la valeur réelle demande un temps de calcul beaucoup trop important.

Les temps de calculs pour établir la meilleure borne pour un système ne sont donnés qu'à titre indicatif. En effet dans les circonstances réelles ce calcul n'a aucun intérêt et n'est pas effectué, puisqu'à ce moment l'objectif est de calculer numériquement le polynôme. Les temps de calculs (VII.6) correspondent à l'établissement de la borne pour un robot quelconque à plate-forme plane.

VII.4.3.2 Plate-forme quelconque

Si la plate-forme est générale, les tailles de matrice augmentent rapidement et les bornes dépassent des résultats précédemment établis. A titre d'exemple la table (VII.7) contient les valeurs pour 5 et 6 capteurs additionnels.

VII.4.4 Difficultés

Cette méthode présente encore trois principaux types de difficultés qui ont été présentées au cours de ce chapitre.

Le système d'équations construit pour la résolution est d'une taille qu'il est important de minimiser. Comme cela a été illustré dans l'exemple 15 il n'est pas clair de déterminer *a priori* quelle sera la dimension optimale. Les conséquences portent sur la manipulation de la matrice et sur le calcul de son déterminant.

En l'état actuel, le calcul du degré théorique est extrêmement long du fait du processus récursif et des dimensions de matrices impliquées. Un palliatif est le calcul du degré du déterminant à partir de coefficients génériques pour le robot. La valeur générique ainsi trouvée fait foi selon l'argumentation que

Nb. capteurs	Nb. inconnues	Dim. matrice	Borne triviale	Borne améliorée
6	0 ^a	NS ^b	NS	1
5	1	NS	NS	2
4	2	NS	NS	2
3	3	4	6	4
2	4	16	14	9
1	5	64	41	20

TAB. VII.5 – *Bornes sur le nombre de solutions d'un robot à plate-forme plane (3 vecteurs $A_i B_i$ (Lazard) : 9 inconnues)*

^a Après résolution des équations linéaires... il n'y a plus d'inconnue : il y a (6+3) équations linéaires pour 9 inconnues.

^b Donnée non significative : il n'est pas rentable de construire une matrice dialytique.

Degré	39	38	37	36	35	34	33	32
Temps CPU (s)	0,26	0,85	3,47	13,7	50	161	488	1488

TAB. VII.6 – *Temps de calcul pour l'évaluation du coefficient du terme de degré donné. Cas un capteur additionnel, plate-forme plane. (SS10 75 MHz)*

si les coefficients de la matrice ne vérifient aucune relation particulière entre eux, alors la matrice sera de rang maximum. Numériquement il est possible d'éviter de calculer explicitement le déterminant et d'obtenir ses racines par des méthodes de valeurs propres, comme l'ont appliqué ZANGANEH et ANGELES [ZA94] aux robots parallèles, et comme le détaillent RAGHAVAN et ROTH [RR95].

Le dernier point est, quant à lui, totalement lié aux fondements de l'élimination. Il s'agit de la rapide croissance de la dimension de la matrice avec le nombre de monômes existant dans les équations de départ.

Nb. capteurs	Nb. inconnues	Dim. matrice	Borne triviale	Borne améliorée
6	4	10	5	5
5	5	31	18	11

TAB. VII.7 – *Bornes sur le nombre de solutions d'un robot à plate-forme générale (4 vecteurs $A_i B_i$ (Lazard) : 12 inconnues)*

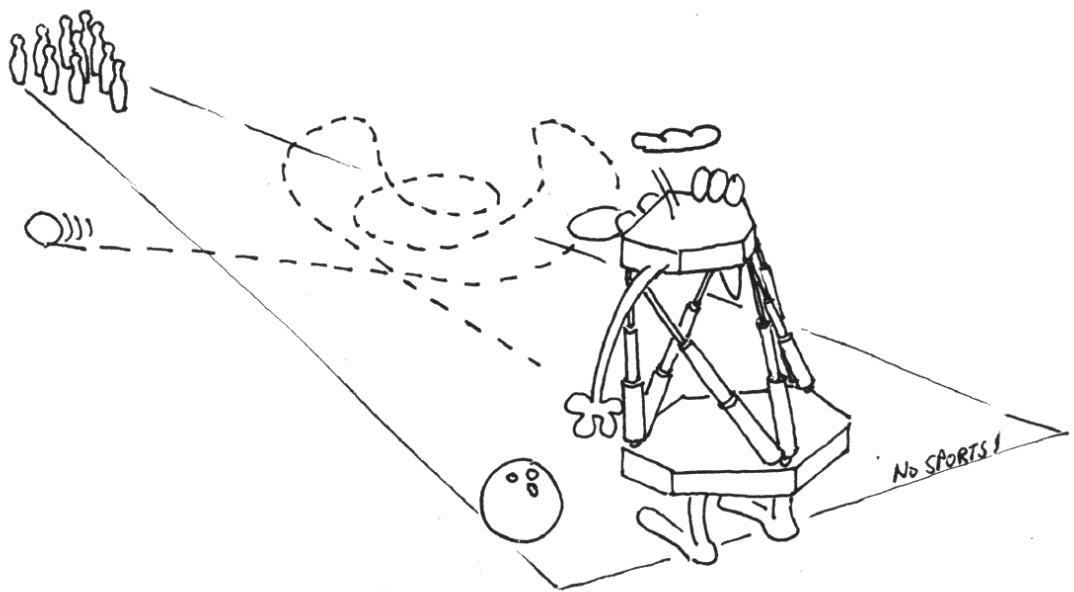
VII.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode d'élimination dialytique. Nous avons montré que le degré en la variable cachée du déterminant de la matrice construite, n'était pas forcément une borne sur le nombre de postures du manipulateur.

Dans le cas de la représentation de LAZARD nous avons prouvé dans quelles conditions le degré du déterminant est effectivement une borne sur le nombre de solutions admises par le modèle géométrique direct. Pour un robot à plate-forme générale, la représentation utilisée pour les équations ne permet pas d'obtenir de meilleurs résultats que ceux obtenus dans les chapitres précédents. Des bornes sont montrées lorsque de 1 à 6 capteurs additionnels sont utilisés sur un robot à plate-forme plane.

Un avantage important de la méthode symbolique développée est la réutilisation possible de la matrice construite et de son déterminant pour tout robot. La matrice et son déterminant peuvent être calculés hors-ligne, et la résolution numérique des racines, propre à chaque robot et à chaque configuration, peut être faite en ligne.

Conclusion



étude réalisée dans ce mémoire s'est attachée à présenter les diverses méthodes qui étaient disponibles pour résoudre le modèle géométrique direct des robots parallèles. Devant la difficulté du problème l'approche qui consiste à ajouter des capteurs de manière redondante a fait l'objet d'une analyse systématique.

La plupart des cas de placement de capteurs, par paires ou en solitaire sur un segment, ont été étudiés et ont donné lieu à l'obtention d'une borne sur le nombre de solutions admissibles pour le modèle géométrique direct de robot quelconques. Cela permet ainsi de restreindre l'ensemble des solutions parmi lesquelles il faudra trier la posture effective du manipulateur. Dans de nombreux cas nous avons pu déterminer les conditions géométriques d'architecture et/ou de configuration qui pouvaient donner lieu à une borne plus faible. Parfois même, il a été possible de donner de telles conditions pour l'obtention d'une solution *unique* au modèle géométrique direct d'architectures particulières.

L'intérêt d'étudier les divers cas ayant moins de capteurs qu'il n'en faudrait pour garantir une solution unique sont multiples. En premier lieu vient le facteur de coût. En effet comparativement au prix de revient d'un manipulateur parallèle (hormis peut-être pour les très grandes structures comme les plates-formes pour simulateurs de vol) le coût de capteurs excédentaires est important et on aimerait ainsi le minimiser. En second lieu, l'augmentation du nombre de capteurs additionnels et donc de l'encombrement inhérent aux câblages et aux volumes rajoutés, diminue l'espace de travail du manipulateur. Enfin il faut considérer les cas d'un environnement hostile ou d'une exigence de tolérance aux pannes qui nécessitent la possibilité de pouvoir résoudre le modèle géométrique direct en mode dégradé, c'est-à-dire lorsque des capteurs ne fournissent plus d'information.

Lorsque la solution est explicite nous avons montré qu'une analyse de l'influence des erreurs de mesure des capteurs sur la posture calculée est possible. Ceci permet de connaître la précision des capteurs à utiliser si l'on souhaite avoir une précision donnée dans l'espace de travail. Cela permet aussi de déterminer la zone de l'espace de travail où la précision est la plus importante et dans laquelle il faudra se placer pour effectuer des opérations délicates.

Nous avons montré que les approches abordées sont exploitables pour divers types de robots pleinement parallèles lorsque leurs chaînes cinématiques élémentaires sont composées d'articulations rotoïdes et prismatiques.

Nous avons adapté la méthode dialytique à un traitement symbolique de manière à pouvoir traiter les cas d'ajout de capteurs pour n'importe quel robot. Par la suite il est possible de réutiliser les plus gros calculs en injectant

à la place des coefficients symboliques, les valeurs numériques correspondant au robot et à la configuration choisis.

Quelle que soit la méthode utilisée, il faut garder à l'esprit qu'aucune, hormis la géométrie synthétique, n'est capable de considérer uniquement les parties réelles et finies des objets géométriques étudiés. C'est un gros problème pour l'ingénierie et la conception des robots. Néanmoins des méthodes de calcul puissantes viennent de voir leur concrétisation dans le cadre du projet européen PoSSo à propos de la résolution de systèmes d'équations polynomiales. Elles devraient permettre des avancées significatives dans l'étude du mouvement des robots. L'une de ces méthodes a permis de montrer, avec des calculs en précision infinie, un robot tout à fait quelconque ayant vingt-quatre postures réelles.

Une étude plus approfondie sur l'influence des erreurs de mesures sur la posture devrait être suivie avec profit. En particulier, l'optimalité sur le choix des segments à équiper est à faire. De même, l'influence sur l'orientation et pas seulement la position est intéressante [BA95].

L'application d'autres représentations pour les équations du modèle géométrique direct devrait amener de nouveaux résultats. La représentation de LAZARD est pressentie pour améliorer certains résultats du chapitre V. L'idéal est de trouver une représentation parfaitement adaptée aux déplacements spatiaux. Les quaternions duaux se rapprochent de cet idéal, mais amènent des étapes intermédiaires difficilement manipulables [Hus94]. Dans le chapitre VII, le cas d'une plate-forme générale n'obtient pas de bornes très satisfaisantes avec la représentation utilisée. La conjugaison d'une autre représentation avec une implantation en un langage compilé (C par exemple) plutôt que le système de calcul formel *Maple*⁴ serait avantageuse.

La géométrie synthétique mériterait plus d'attention pour apporter un progrès dans la connaissance des parties réelles des courbes, des surfaces et des solutions. Plus précisément elle serait utile pour la recherche de la borne véritable sur le nombre de solutions réelles.

Le tri des solutions pour obtenir la solution courante parmi les solutions possibles demanderait une étude des composantes connexes dans l'espace de travail. Des travaux montrent que plusieurs solutions peuvent ne pas être séparées par un lieu de singularité [IP92, EW95].

4. © Université de Waterloo (Canada) et *Waterloo Maple Software*

Bibliographie

- [ABRW94] Alonso (M.E.), Becker (E.), Roy (M.F.) et Wörmann (T.). – Zeros, multiplicities and idempotents for zero dimensional systems. *In: Proceedings of MEGA.* – A paraître.
- [BA94a] Baron (Luc) et Angeles (Jorge). – The decoupling of the direct kinematics of parallel manipulators using redundant sensors. *In: International Conference on Robotics and Automation.* IEEE, pp. 974–979. – San Diego Californie, USA, Mai 1994.
- [BA94b] Baron (Luc) et Angeles (Jorge). – The measurement subspaces of parallel manipulators under sensor redundancy. *In: ASME Design Automation Conference.*, pp. 467–474. – Minneapolis, MN, USA, Septembre 1994.
- [BA95] Baron (Luc) et Angeles (Jorge). – The isotropic decoupling of the direct kinematics of parallel manipulators under sensor redundancy. *In: International Conference on Robotics and Automation.* IEEE. – Nagoya Japon, Mai 1995.
- [BC93] Burdea (G.) et Coiffet (P.). – *La réalité virtuelle.* – Paris, Hermès, 1993.
- [Ber75] Bernstein (D.N.). – The number of roots of a system of equations. *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, vol. 9, 1975, pp. 1–4. – Traduit du russe.
- [Buc87] Buchberger (Bruno). – Applications of Gröbner bases in nonlinear computational geometry. *In: Mathematical Aspects of Scientific Software.* pp. 52–80. – Springer Verlag.
- [BW93] Becker (T.) et Weispfenning (V.). – *Gröbner Bases: a Computational Approach to Commutative Algebra.* – Springer-Verlag, 1993, *Graduate Texts in Mathematics.*

- [Can88] Canny (J. F.). – Elimination theory. *In : The complexity of robot motion planning*, chap. 3. – Cambridge, MA, USA, MIT Press, 1988.
- [Cas87] Casteljau, de (Paul). – *Les quaternions*. – Paris, Hermès, 1987, *Traité des Nouvelles Technologies*.
- [Cha90] Charentus (Sylvie). – *Modélisation et commande d'un robot manipulateur redondant composé de plusieurs plate-formes*. – Toulouse, France, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Avril 1990.
- [CLO92] Cox (David), Little (John) et O'Shea (Donal). – *Ideals, Varieties and Algorithms*. – New York, Springer-Verlag, 1992, *Undergraduate Texts in Mathematics*.
- [COB93] Cheok (K.C.), Overholt (J.L.) et Beck (R.R.). – Exact methods for determining the kinematics of a Stewart platform using additional displacement sensors. *Journal of Robotics Systems*, vol. 10(5), 1993, pp. 689–707.
- [Com95] Comin (F.). – Six degree-of-freedom scanning supports and manipulators based on parallel robots. *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 66, n 2, Février 1995, pp. 1665–1667.
- [Cox87] Coxeter (H.S.M.). – *Projective Geometry*. – New York, Springer-Verlag, 1987.
- [CR89] Charentus (Sylvie) et Renaud (Marc). – *Calcul du modèle géométrique direct de la plate-forme de Stewart*. – Rapport technique n89260, Toulouse, France, LAAS, Juillet 1989.
- [Dix08] Dixon (A.L.). – The eliminant of three quantics in two independent variables. *In : Proceedings of the London Mathematical Society*, pp. 49–69. – Londres, Grande-Bretagne, 1908.
- [Duv94] Duval (Dominique). – Algebraic numbers: an example of dynamic evaluation. *Journal of Symbolic Computation*, vol. 18, 1994, pp. 429–445.
- [Emi94] Emiris (Ioannis Z.). – *Sparse Elimination and Applications in Kinematics*. – Berkeley Californie, USA, Thèse de doctorat, University of California at Berkeley, 1994.

- [EW95] El Omri (J.) et Wenger (P.). – A general criterion for the identification of nonsingular posture changing 3-dof manipulators. *In: Computational Kinematics*, éd. par Merlet (Jean-Pierre) et Ravani (B.), pp. 153–162. – Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [Fic75] Fichter (E.F.). – *Algebraic loci traced by certain mechanisms: A determination of loci of points, planes or line with one or two degree of freedom*. – Clayton, Victoria, Australie, Thèse de doctorat, Monash University, 1975.
- [FL95] Faugère (Jean-Charles) et Lazard (Daniel). – The combinatorial classes of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 30, n6, Août 1995, pp. 765–776.
- [G⁺93] Grace (K.W.) et al. – A six degree of freedom micromanipulator for ophthalmic surgery. *In: IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 630–635. – Atlanta, Mai 1993.
- [GCL92] Geddes (K.O.), Czapor (S.R.) et Labahn (G.). – *Algorithms for computer algebra*. – Boston, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [GG95] Gosselin (C. M.) et Gagné (M.). – A closed-form solution for the direct kinematics of a special class of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. *In: Computational Kinematics*, éd. par Merlet (J-P.) et Ravani (B.), pp. 231–240. – Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [Góm94] Gómez-Díaz (Teresa). – *Quelques applications de l'évaluation dynamique*. – Limoges, France, Thèse de doctorat, Université de Limoges, Janvier 1994.
- [Gos88] Gosselin (Clément M.). – *Kinematic Analysis, Optimization and Programming of Parallel Robotic Manipulators*. – Montréal, Canada, Thèse de doctorat, McGill University, 1988.
- [Gou57] Gough (V.E.). – Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance, 1956-1957. *Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng.*
- [GRS83] Guibas (L. J.), Ramshaw (L.) et Stolfi (J.). – A kinetic framework for computational geometry. *In: Proceedings 24th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 100–111.

- [GSR92] Gosselin (Clément M.), Sefrioui (Jaouad) et Richard (Marc J.). – Solution polynômiale au problème de la cinématique directe des manipulateurs parallèles plans à 3 degrés de liberté. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, n2, Mars 1992, pp. 107–119.
- [Gug94] Guglielmetti (P.). – *Model-Based control of fast parallel robots: a global approach in operational space*. – Lausanne, Suisse, Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Mars 1994.
- [HCY95] Han (K.), Chung (W-K.) et Youm (Y.). – Local structurization for the forward kinematics of parallel manipulators using extra sensor data. In : *International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, pp. 514–520. – Nagoya Japon, Mai 1995.
- [HP93] Hunt (K.H.) et Primrose (E.J.F.). – Assembly configurations of some in-parallel actuated manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 28, n1, Janvier 1993, pp. 31–42.
- [HS75] Horowitz (E.) et Sahni (S.). – On computing the exact determinant of matrices with polynomial entries. *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 22, n1, Janvier 1975, pp. 38–50.
- [Hun90] Hunt (K.H.). – *Kinematics Geometry of Mechanisms*. – Oxford, Clarendon Press, 1990, seconde édition.
- [Hus94] Husty (M.L.). – *An algorithm for solving the direct kinematics of Stewart-Gough-type platforms*. – Rapport technique nTR-CIM-94-7, Montréal, Canada, McGill University, Juin 1994.
- [Inn93] Innocenti (C.). – Analytical determination of the intersections of two coupler-point curves generated by two four-bar linkages. In : *Computational Kinematics*, éd. par Angeles (J.), Hommel (G.) et Kovács (P.), pp. 251–262. – Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [Inn94] Innocenti (C.). – 1994. Communication personnelle.
- [IP90] Innocenti (C.) et Parenti-Castelli (V.). – Direct position analysis of the Stewart platform mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 25, n6, 1990, pp. 611–621.

- [IP91] Innocenti (C.) et Parenti-Castelli (V.). – Direct kinematics of the 6-4 fully parallel manipulator with position and orientation uncoupled. *In: European Robotics and Intelligent Systems Conference.* – Corfou, Grèce, Juin 1991.
- [IP92] Innocenti (C.) et Parenti-Castelli (V.). – Singularity-free evolution from one configuration to another in serial and fully-parallel manipulators. *ASME Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems*, vol. 45, 1992, pp. 553–560.
- [IP93] Innocenti (C.) et Parenti-Castelli (V.). – Direct kinematics in analytical form of a general 5-4 fully-parallel manipulator. *In: Computational Kinematics*, éd. par Angeles (J.), Hommel (G.) et Kovács (P.), pp. 141–152. – Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [ITF85] Inoue (H.), Tsusaka (Y.) et Fukuizumi (T.). – Parallel manipulator. *In: 3rd ISRR*, pp. 321–327. – Gouvieux, France, Octobre 1985.
- [Kle39] Klein (Félix). – *Elementary mathematics from an advanced standpoint. Geometry.* – Londres, Grande-Bretagne, Dover Publications Inc., 1939. Traduit de l'allemand.
- [Koe97] Koenigs (G.). – *Leçons de cinématique.* – Paris, France, A. Hermann, 1897.
- [Laz93] Lazard (Daniel). – Generalized Stewart Platform: How to compute with rigid motions? *In: IMACS*, pp. 85–88. – Lille, France, Mai 1993.
- [LM94] Lazard (Daniel) et Merlet (Jean-Pierre). – The (true) Stewart platform has 12 configurations. *In: International Conference on Robotics and Automation.* IEEE, pp. 2160–2165. – San Diego Californie, USA, Mai 1994.
- [Mer88] Merlet (Jean-Pierre). – *Parallel manipulators, Part 2, Singular Configurations and Grassmann geometry.* – Rapport technique n 791, INRIA, Février 1988.
- [Mer89] Merlet (Jean-Pierre). – *Manipulateurs parallèles, 4eme partie: mode d'assemblage et cinématique directe sous forme polynômiale.* – Rapport technique n1135, INRIA, Décembre 1989.

- [Mer90] Merlet (Jean-Pierre). – *Les Robots parallèles*. – Paris, France, Hermès, 1990.
- [Mer93] Merlet (Jean-Pierre). – Closed-form resolution of the direct kinematics of parallel manipulators using extra sensors data. *In: International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, pp. 200–204. – Atlanta, USA, Mai 1993.
- [MG91] Merlet (Jean-Pierre) et Gosselin (Clément). – Nouvelle architecture pour un manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 26, n1, 1991, pp. 77–90.
- [Mou93a] Mouly (Nicolas). – *Développement d'une famille de robots parallèles à motorisation électrique*. – Sophia-Antipolis, France, Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, Mai 1993.
- [Mou93b] Mourrain (Bernard). – The 40 generic position of a parallel robot. *In: ISSAC'93*, éd. par Bronstein (M.), pp. 173–182. – Kiev, Ukraine, Juillet 1993.
- [Mou94] Mourrain (Bernard). – Enumeration problems in geometry, robotics and vision. *In: MEGA*, p. 18. – Santander, Espagne, Septembre 1994.
- [MS87] Morgan (A.) et Sommese (A.). – A homotopy for solving general polynomial systems that respects m -homogeneous structures. *Applied Mathematics and Computation*, no24, 1987, pp. 101–113.
- [Nai92] Nair (R.). – *On the kinematics geometry of parallel robot manipulators*. – College Park, USA, Mémoire de Master, University of Maryland, 1992.
- [Nai94] Nair (R.). – On the forward kinematics of parallel manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 13, n2, Avril 1994, pp. 171–188.
- [NP95] Notash (L.) et Podhorodeski (R.P.). – On the forward displacement problem of three-branch parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 30, n3, 1995, pp. 391–404.
- [PF69] Primrose (E.J.F.) et Freudenstein (F.). – Spatial motion I - point paths of mechanisms with four or fewer links. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, Février 1969, pp. 103–114.

- [Pie91] Pierrot (F.). – *Robots Pleinement Parallèles Légers : Conception Modélisation et Commande*. – Montpellier, France, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, Avril 1991.
- [Rag91] Raghavan (M.). – The Stewart platform of general geometry has 40 configurations. *In : ASME Design and Automation Conference*, pp. 397–402. – Chicago, IL, USA, Septembre 1991.
- [Rot67] Roth (B.). – The kinematics of motion through finitely separated positions. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Septembre 1967, pp. 591–597.
- [Rot93] Roth (B.). – Computations in kinematics. *In : Computational Kinematics*, éd. par Angeles (J.), Hommel (G.) et Kovács (P.), pp. 3–14. – Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [Rou95] Rouillier (Fabrice). – Real roots counting on some robotics problem. *In : Computational Kinematics*, éd. par Merlet (Jean-Pierre) et Ravani (B.), pp. 73–82. – Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [RP90] Reboulet (C.) et Pigeyre (R.). – Hybrid control of a 6 d.o.f. in parallel actuated micro-macro manipulator mounted on a Scara robot. *In : ISRAM*, pp. 293–298. – Burnaby, Juillet 1990.
- [RR85] Reboulet (C.) et Robert (A.). – Hybrid control of a manipulator with an active compliant wrist. *In : 3rd ISRR*, pp. 76–80. – Gouvieux, France, Octobre 1985.
- [RR90] Raghavan (M.) et Roth (B.). – Kinematic analysis of the 6R manipulator of general geometry. *In : 5th International Symposium on Robotics Research*, éd. par Miura (H.) et Arimoto (S.), pp. 263–270. – Tokyo Japon, 1990.
- [RR95] Raghavan (M.) et Roth (B.). – Solving polynomial systems for the kinematic analysis and synthesis of mechanisms and robot manipulators. *Transaction of the ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 117, n2, 1995, pp. 71–78.
- [RV95] Ronga (F.) et Vust (T.). – Stewart platforms without computer? *In : International Conference on Real Analytic and Algebraic Geometry*. – Berlin, 1995. Présenté lors de la conférence en 1992, Trento, Italie.

- [SA91] Stoughton (R.) et Arai (T.). – Optimal sensor placement for forward kinematics evaluation of a 6-dof parallel link manipulator. *In: IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems, (IROS)*, pp. 785–790. – Osaka, Japon, Novembre 1991.
- [Sal85] Salmon (G.). – *Lessons introductory to the modern higher algebra*. – New York, USA, Chelsea, 1885.
- [SF92] Shi (X.) et Fenton (R.G.). – Solution to the forward instantaneous kinematics for a general 6-dof Stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, n3, Mai 1992, pp. 251–259.
- [SP95] Sarkissian (Y.L.) et Parikian (T.F.). – Direct position problem for stewart platform and multiple points of 5(SS) linkage coupler curve. *In: Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. IFToMM, pp. 1614–1618. – Milan, Italie, Septembre 1995.
- [Ste65] Stewart (D.). – A platform with 6 degrees of freedom. *Proceedings of the Institution of mechanical engineers*, vol. 180, nI, 15, 1965, pp. 371–386.
- [Tan95] Tancredi (Luc). – Elimination method for parallel manipulators. *In: POSSO open workshop on applications of POSSO and real solving*, éd. par González-Vega (L.). Universidad de Cantabria, Espagne.
- [TM94] Tancredi (Luc) et Merlet (Jean-Pierre). – Evaluation of the errors when solving the direct kinematics of parallel manipulators with extra sensors. *In: Advances in Robot Kinematics and Computational Geometry*, éd. par Lenarčič (J.) et Ravani (B.), pp. 439–448. – Springer-Verlag, 1994.
- [TTM95a] Tancredi (Luc), Teillaud (Monique) et Merlet (Jean-Pierre). – Extra sensors for solving the forward kinematics problem of parallel manipulators. *In: Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. IFToMM, pp. 2122–2126. – Milan, Italie, Septembre 1995.
- [TTM95b] Tancredi (Luc), Teillaud (Monique) et Merlet (Jean-Pierre). – Forward kinematics of a parallel manipulator with additional rotary sensors measuring the position of platform joints. *In: Computational Kinematics*, éd. par Merlet (Jean-Pierre) et Ravani (Bahram), pp. 261–270. – Kluwer Academic Publishers, 1995.

- [vdW48] van der Waerden (B.L.). – *Modern algebra, Vol. II.* – Frederick Ungar Publishing Co, 1948.
- [Ver94] Verschelde (J.). – Polynomial homotopy continuation. *In: Workshop on Numerical and Algebraic Methods for Polynomial Solving.* Médicis-Posso. – Toulouse, France, Décembre 1994.
- [Wam] Wampler (C.W.). – Polynomial continuation: A tutorial.
- [Wam94] Wampler (C.W.). – *Forward displacement analysis of general six-in-parallel (Stewart) platform manipulators using soma coordinates.* – Rapport de recherche n GMR-8179, General Motors Research Laboratories, Mai 1994.
- [WMS88] Wampler (C.W.), Morgan (A. P.) et Sommese (J.). – *Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics.* – Rapport de recherche nGMR-6372, General Motors Research Laboratories, Août 1988.
- [WMS90] Wampler (C.W.), Morgan (A. P.) et Sommese (J.). – Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics. *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 112, Mars 1990, pp. 59–68.
- [ZA94] Zanganeh (K.E.) et Angeles (J.). – The direct kinematics of general parallel manipulators with minimum sensor data. *In: IS-RAM*, pp. 333–338. – Hawaï, USA, Août 1994.
- [ZS91] Zhang (C.D.) et Song (S.M.). – Forward kinematics of a class of parallel (Stewart) platforms with closed-form solutions. *In: International Conference on Robotics and Automation.* IEEE, pp. 2676–2681. – Sacramento, CA, USA, Avril 1991.

Annexe A

Illustration de la circularité



Voici deux autres exemples de l'utilisation de la circularité pour éliminer un certain nombre de solutions à l'infini.

A.1 Intersection d'une cubique et d'une quartique

Considérons, dans le plan et avec pour inconnues x et y , la cubique

$$a x^3 + y^3 + x^2 y + a x y^2 - r^2(a x + y) = 0$$

et la quartique (degré quatre)

$$x^3 y + x y^3 + b x^2 + b y^2 - r^2(x y + b) = 0$$

La borne de BÉZOUT indique que l'intersection de ces courbes pourrait avoir jusqu'à douze solutions. Après homogénéisation ces équations deviennent respectivement :

$$a x^3 + y^3 + x^2 y + a x y^2 - r^2 w^2(a x + y) = 0$$

et la quartique :

$$x^3 y + x y^3 + b x^2 w + b y^2 w - r^2 w(x y + b w^2) = 0$$

En se plaçant sur la droite à l'infini ($w = 0$) les équations homogènes deviennent :

$$(a x + y)(x^2 + y^2) = 0 \tag{A.1}$$

$$x y(x^2 + y^2) = 0 \tag{A.2}$$

Les points $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ ont une multiplicité de un pour chacune des deux courbes considérées. En appliquant directement le théorème IV.10 le nombre de points réels dans l'intersection n'est vraiment que de dix au plus, soit $3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1$.

A.2 Une surface : le tore

L'équation générale d'un tore s'écrit :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - K)^2 = G$$

Elle devient après homogénéisation à l'aide de la variable w :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - Kw^2)^2 = Gw^4$$

D'où on trouve que l'intersection avec le plan à l'infini est :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0$$

Par conséquent le tore a une circularité de deux.

Annexe B

Paramétrisation et élimination

Cette annexe illustre l'influence du choix de la paramétrisation des équations dans le cas d'un robot plan. Le cas considéré est le modèle géométrique direct sans ajout de capteur.

B.1 Plateau général

Le système d'équations considéré est celui défini dans la section II.1 après la substitution de la variable d'angle. À ce niveau la, onze monômes sont présents :

$$1, T, x, y, x^2, y^2, yT, T^2, T^2x, xT, T^2y$$

Parmi les trois choix possibles pour la variable cachée, aucun n'est plus avantageux qu'un autre. Choisissons par exemple y . L'algorithme développé construit un système à 17 équations et 17 monômes en introduisant les équations produits des équations de départ par la liste de monômes indiquée dans la table (B.1) Ce système n'admet de solutions que si son déterminant s'an-

Équation de base	Monômes
1	$T \quad x \quad T^2 \quad xT \quad x^2 \quad T^3$
2	$T \quad x \quad T^2 \quad xT$
3	$T \quad x \quad T^2 \quad xT$

TAB. B.1 – Construction des équations pour le robot plan quelconque.

nule pour une valeur de la variable cachée y . Le déterminant est un polynôme

de degré neuf en y .

$$(U_8 U_7 - U_{16} U_3 + U_{11} U_7 y) \left(\sum_{i=0}^8 V_i y^i \right)$$

Le robot admet alors au plus neuf configurations différentes pour un triplet de valeurs des longueurs de segments ρ_i , $i = 1, 2, 3$. Il n'est pas très surprenant de trouver une valeur plus grande que celle trouvée (six) en II.1. En effet, il faut garder à l'esprit le fait que la valeur trouvée par élimination est une borne supérieure qui n'est pas nécessairement atteinte. De plus pour des systèmes de petite taille (peu d'équations de départ et peu d'inconnues) il est clair que cet algorithme est difficilement concurrentiel vis à vis de manipulations au cas par cas des équations. L'algorithme est sensible à la structure du système donné en entrée. C'est pourquoi des manipulations sur les équations, quand c'est raisonnable, ont une incidence bénéfique sur le nombre final de solutions.

B.2 Le robot rectiligne

Maintenant, reprenons le robot dont la base et le plateau sont linéaires. La méthode d'élimination permet de construire un système de taille 17. Les équations construites sont indiquées dans la table (B.2).

Équation de base	Monômes
1	$T \quad x \quad T^2 \quad x T \quad x^2 \quad T^3$
2	$T \quad x \quad T^2 \quad x T$
3	$T \quad x \quad T^2 \quad x T$

TAB. B.2 – Construction des équations pour le robot dont les articulations sont alignées pour la base et pour le plateau.

B.2.1 Base quelconque

Lorsque la base est quelconque et n'admet aucune relation particulière entre les coordonnées de ses trois articulations, le déterminant s'écrit comme le produit d'un polynôme en y de degré huit et du terme suivant :

$$\begin{aligned}
 & -2 (l_3 + a_2) b_3 y - ((a_2 + l_3)^2 - \rho_2^2 + \rho_1^2) (l_2 + a_3) \\
 & + (l_3 + a_2) ((l_2 + a_3)^2 + b_3^2 - \rho_3^2 + \rho_1^2) \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

B.2.2 Base linéaire

Ce robot peut avoir encore des architectures encore plus spécialisées car le déterminant a en facteur le terme :

$$((l_2 + a_3)^2 + \rho_1^2 - \rho_3^2)(l_3 + a_2) - (a_3 + l_2)((a_2 + l_3)^2 + \rho_1 - \rho_2^2)$$

Le robot admet un polynôme mono-variable de degré huit en T dont seules les puissances paires sont présentes :

$$U_8 T^8 + U_6 T^6 + U_4 T^4 + U_2 T^2 + U_0 = 0 \quad (\text{B.2})$$

De manière à manipuler un polynôme plus simple, on fait le changement de variable $Y = T^2$. Ce qui mène à un polynôme de degré 4 qui peut être résolu de manière explicite. Finalement pour chaque valeur de Y trouvée, il y aura deux solutions T et $-T$.

B.2.3 Base linéaire et spéciale

Considérons un robot dont les articulations de la base sont alignées. Si de plus les coordonnées de ces articulations sont des fonctions de la longueur des côtés du plateau, alors le nombre de solutions est encore plus faible. Nous allons le voir sur les deux cas suivant.

B.2.3.1 Premier cas

En prenant pour positions des articulations de la base :

$$\begin{aligned} a_3 &= -l_2 \\ a_2 &= -l_3 \end{aligned}$$

le déterminant obtenu est le suivant :

$$-U_3 (1 + T^2) ((-U_6 U_5 + U_3 U_8) T^2 + U_3 U_7 - U_4 U_6)^2 \quad (\text{B.3})$$

Ici, il n'y a que deux solutions possibles au plus pour le MGD .

B.2.3.2 Deuxième cas

En prenant pour positions des articulations de la base :

$$\begin{aligned} a_3 &= l_2 \\ a_2 &= l_3 \end{aligned}$$

le déterminant obtenu est le suivant :

$$-U_4 T^4 (1 + T^2) ((U_4 U_6 - U_3 U_7) T^2 + U_4 U_8 - U_5 U_7)^2 = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ce déterminant est celui du système 6×6 construit comme dans la table (B.3). En observant les conditions d'annulation de ce déterminant, il est clair qu'il y a trois solutions au plus pour T dont une est immédiate : $T = 0 \Rightarrow \phi = 0$.

Équation de base	Monômes
1	
2	$x \quad y$
3	y

TAB. B.3 – Construction des équations pour le robot 2D à base spéciale et plateau linéaire.

B.2.4 Deux articulations confondues

Choisissons B_3 tel que cette articulation soit confondue avec B_1 . Le déterminant obtenu a la forme suivante :

$$-(1 + T^2)^2((l_3 + a_2)T^2 + (l_3 - a_2))\left(\sum_{i=0}^4 V_i T^i\right) = 0$$

Deux des solutions, quand elles existent, sont connues dès la conception du robot, car :

$$T^2 = \frac{l_3 - a_2}{l_3 + a_2} \quad (\text{B.5})$$

Il est possible de choisir les paramètres l_3 et a_2 tels que ces solutions deviennent imaginaires. Ensuite il reste quatre solutions à extraire du dernier terme. Ce terme de degré quatre est plus simple que les précédents déterminants menant aussi à quatre solutions.

Index

- A -

acabit 78
 ANGELES 41, 177
 ARAI 40
 articulation
 prismatique 15
 rotoïde 15
 sphérique ou rotule 15
Ascension Technologies 36
 assemblage
 modes d'"s 13
Axiom 125

- B -

Bézout
 nombre de " 112
 théorème étendu de " 75
 théorème de " 72, 112
 BÉZOUT 113
 bézoutien 148
 BAREISS 149
 BARON 41
 base
 " de Gröbner 120
 " de Gröbner réduite 122
 " standard 120
 BECK 38
 BERNSTEIN 110
 Buchberger
 algorithme de " 121
 BUCHBERGER 120–122, 124
 BURMESTER 70, 90

- C -

Cayley
 théorème de " 80
 CAYLEY 70
 chaînes cinématiques 6
 CHARENTUS 6
 CHASLES 65
 chemin de continuation 128
 CHEOK 38
 CHUNG 41
 circularité 74
 configuration 13
 " générique 124
 " pseudo-générique 125
 connexion
 " algébrique 78
 continuation 127
 coordonnée
 "s homogènes 71
 "s articulaires 10
 courbe du coupleur 77
 cycliques
 points " 73

- D -

DARBOUX 78
Delta 90
 dialytique
 élimination " 141
 DUVAL 125

- E -

élimination 138, 146
 EMIRIS 118, 139, 140
 enveloppe convexe 116

Euclide
 algorithme d'" 119
 extension 138, 151

- F -

Fastrack 36
 FAUGÈRE 124, 125
 FENTON 43
 Fichter
 théorème de " 78
 FICHTER 70, 74, 78, 81
Flock of Birds 36
 FUKUIZUMI 36, 40

- G -

généricité 124
 GAGNÉ 87
GB 125, 129
 GOMEZ-DIAZ 125
 GOSSELIN 6, 21, 87
 GOUGH 1
 Gröbner
 base de " voir base
 GRÖBNER 119
 GRASSMAN 97

- H -

HAN 41
 HERMITE 129
 homogène 70
 multi-" 110
 HUNT 77, 80, 106
 hybride 8

- I -

infini
 plan à l'" 71
 points à l'" 71
 INNOCENTI 69, 77, 129, 130
 INOUE 36, 40

- K -

KHOVANSKI 110
Kinematics 70
 KLEIN 71
 KUSHNIRENKO 110

- L -

Laurent
 polynômes de " 116
 LAZARD 30, 124, 154, 175, 178
Logabex
 robot *LX4* 8
 société 8
LX4 voir *Logabex*

- M -

mécanisme
 à quatre barres 76
 "plan 20
 "équivalent 18
Main gauche 51
main gauche 51
Maple 146, 181
 matrice de Sylvester 139
 MERLET 14, 30, 41, 47
 Minkowski
 somme de " 116
 modèle géométrique 12
 "direct 12
 "inverse 12
 modes d'assemblages 13
 MORGAN 111, 127

- N -

NAIR 38
 Newton 14
 polytopes de " 116
 NOTASH 42

- O -

œil agile 87
 ombilic 74
 OVERHOLT 38

- P -

parallèle
 manipulateur pleinement " .. 7
 PARENTI-CASTELLI 69
 PARIKIAN 89
 PLÜCKER 70
 plateau 20
 PODHORODESKI 42
poignet actif 16
Polhemus 36
 polynôme
 " de Laurent 116
 S-" 121
 posture 11
 prismatique *voir* articulation

- R -

résultant 138
 " de Sylvester 139
 " multivarié 139
 " creux 140
 " homogène 139
 RAGHAVAN 128, 177
 RICHARD 21
 robot plan 20
 robots
 AID 8
Delta 16
Hexa 16
LX4 *voir Logabex*
œil agile 87
hexa 8
main gauche INRIA 7, 51
poignet actif INRIA 16
 ROTH 135, 141, 145, 177
 rotoïde *voir* articulation
 rotule *voir* articulation
 ROUILLIER 6, 129, 130
 RS 129

- S -

séquence de Sturm-Habicht ... 129
 SALMON 145
 SARKISSIAN 89
 SEFRIQUI 21
 sextique 77
 SHI 43
 soma
 coordonnées de " 114
 SOMMESE 111, 127
 SONG 102, 104
 standard
 base " 120
 Stewart
 plate-forme de " 30
 STEWART 1, 3, 7, 14, 30, 84
 STOUGHTON 40
 support 116
 SYLVESTER 139, 141

- T -

terminologie 8
 torique 116
 transformation
 affine 71
 projective 71
 TSUSAKA 36, 40

- V -

valeur
 " propre 149
 variable
 " articulaire 10
 " cachée 142
 " d'homogénéisation 72
 VERSCHELDE 127
 volume mixte 115

- W -

WAMPLER 111, 114, 127

- Y -

YOUM 41

- Z -

ZANGANEH.....	177
ZHANG.....	102, 104

De la simplification et la résolution du modèle géométrique direct des robots parallèles

Un robot manipulateur parallèle est composé de deux solides, une plate-forme et une base, reliés par des chaînes cinématiques articulées et motorisées permettant leur mouvement relatif. Le problème du modèle géométrique direct des robots parallèles est essentiel. Il consiste à déterminer la position et l'orientation de la plate-forme par rapport à un repère de base lorsque les variables articulaires sont fixées. Ce problème revient à considérer le placement d'un solide quelconque sur six sphères de rayons et de centres fixés. Il présente deux facettes, une géométrique et l'autre algébrique, menant à diverses méthodes à mettre en œuvre. Le modèle géométrique direct est connu pour admettre au plus quarante solutions complexes. Nous présentons une approche consistant à utiliser des capteurs additionnels pour simplifier et résoudre ce problème. Nous utilisons ou développons toute une gamme de méthodes symboliques et parfois numériques permettant la résolution dans ce contexte précis. Les résultats obtenus permettent de définir des architectures de robot ayant un nombre minimum de solutions pour la résolution du modèle géométrique direct, voire même des solutions explicites ou uniques.

Mots-clés : Systèmes polynômiaux - Théorie des mécanismes - Capteurs additionnels - Élimination dialytique - Calcul formel - Analyse d'erreur - Racines réelles - Géométrie algébrique

Simplifying and Solving the Forward Kinematics of Parallel Manipulators

A parallel manipulator is made of two bodies, a platform and a base, connected by articulated and motorized kinematic chains that enable one to move with respect to the other. The forward kinematic problem for six degrees of freedom parallel manipulators is fundamental. This problem is to find the position and the orientation of the platform with respect to a reference frame when the control variables are known. An equivalent statement is to place a given solid onto six spheres with fixed centers and radii. This problem may be considered either from a geometric point of view or an algebraic one, calling for the use of various methods. The forward kinematic problem has at most forty solutions over the complex field. We use extra sensors to simplify and solve this problem, as well as, many symbolic and sometimes numerical methods. The results we obtain lead to the design of robot architectures with a minimum number of solutions to the forward kinematic problem, and sometimes even with explicit or unique solutions.

Keywords: Polynomial systems - Mechanisms theory - Extra sensors - Dialytic elimination - Symbolic calculus - Error analysis - Real roots - Algebraic geometry