



# Simulation du comportement dynamique des transmissions par engrenages sur paliers hydrodynamiques

Romain Fargere

## ► To cite this version:

Romain Fargere. Simulation du comportement dynamique des transmissions par engrenages sur paliers hydrodynamiques. Autre. INSA de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ISAL0130 . tel-00833202

**HAL Id: tel-00833202**

**<https://theses.hal.science/tel-00833202>**

Submitted on 12 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*Présentée devant*

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

*Pour obtenir*

Le GRADE DE DOCTEUR

*Ecole doctorale :*

Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

*Spécialité*

MECANIQUE – GENIE MECANIQUE – GENIE CIVIL

*Par*

**Romain FARGERE**

Ingénieur INSA de Lyon

## **SIMULATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES SUR PALIERS HYDRODYNAMIQUES**

Soutenue le 13 décembre 2012 devant la commission d'examen

– **Jury** –

---

|                   |                                            |                    |
|-------------------|--------------------------------------------|--------------------|
| BONNEAU O.        | Professeur (Université de Poitiers)        | Rapporteur         |
| DUFOUR R.         | Professeur (INSA de Lyon)                  |                    |
| GUILBAULT R.      | Professeur (ETS Montréal)                  | Rapporteur         |
| MENARD C.         | Ingénieur – Docteur (DCNS – Nantes Indret) |                    |
| PERRET-LIAUDET J. | Maître de Conférences (EC Lyon)            |                    |
| VELEX P.          | Professeur (INSA de Lyon)                  | Directeur de thèse |

LaMCoS – UMR CNRS 5259 – INSA de Lyon  
20 Avenue Albert Einstein, 69621, Villeurbanne Cedex (France)



## INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

| SIGLE     | ECOLE DOCTORALE                                                                                                                                                                                               | NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| CHIMIE    | <b>CHIMIE DE LYON</b><br><a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a><br>Insa : R. GOURDON                                                                                           | M. Jean Marc LANCELIN<br>Université de Lyon – Collège Doctoral<br>Bât ESCPE<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72.43 13 95<br><a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>                                  |
| E.E.A.    | <b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b><br><a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a><br>Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN<br><a href="mailto:eea@ec-lyon.fr">eea@ec-lyon.fr</a> | M. Gérard SCORLETTI<br>Ecole Centrale de Lyon<br>36 avenue Guy de Collongue<br>69134 ECULLY<br>Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17<br><a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>                                                    |
| E2M2      | <b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b><br><a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a><br>Insa : H. CHARLES                                                 | Mme Gudrun BORNETTE<br>CNRS UMR 5023 LEHNA<br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>Bât Forel<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cédex<br>Tél : 04.72.43.12.94<br><a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>                |
| EDISS     | <b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b><br><a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a><br>Sec : Safia AIT CHALAL<br>Insa : M. LAGARDE                                                    | M. Didier REVEL<br>Hôpital Louis Pradel<br>Bâtiment Central<br>28 Avenue Doyen Lépine<br>69677 BRON<br>Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16<br><a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>                                 |
| INFOMATHS | <b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b><br><a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>                                                                                           | M. Johannes KELLENDONK<br>Université Claude Bernard Lyon 1<br>INFOMATHS<br>Bâtiment Braconnier<br>43 bd du 11 novembre 1918<br>69622 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87<br><a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a> |
| Matériaux | <b>MATERIAUX DE LYON</b><br>Secrétariat : M. LABOUNE<br>PM : 71.70 –Fax : 87.12<br>Bat. Saint Exupéry<br><a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>                             | M. Jean-Yves BUFFIERE<br>INSA de Lyon<br>MATEIS<br>Bâtiment Saint Exupéry<br>7 avenue Jean Capelle<br>69621 VILLEURBANNE Cédex<br>Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28<br><a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>           |
| MEGA      | <b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b><br>Secrétariat : M. LABOUNE<br>PM : 71.70 –Fax : 87.12<br>Bat. Saint Exupéry<br><a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>               | M. Philippe BOISSE<br>INSA de Lyon<br>Laboratoire LAMCOS<br>Bâtiment Jacquard<br>25 bis avenue Jean Capelle<br>69621 VILLEURBANNE Cedex<br>Tél :04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37<br><a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>       |
| ScSo      | <b>ScSo*</b><br>M. OBADIA Lionel<br>Sec : Viviane POLSINELLI<br>Insa : J.Y. TOUSSAINT                                                                                                                         | M. OBADIA Lionel<br>Université Lyon 2<br>86 rue Pasteur<br>69365 LYON Cedex 07<br>Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48<br><a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>                                                                 |

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



## REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon, dirigé par le Professeur David DUREISSEIX d'une part, et le Département Dynamique des Structures de DCNS research, dirigé par M. Jean-François SIGRIST, sur le site de Nantes-Indret, d'autre part.

Je tiens, en premier lieu, à exprimer toute ma gratitude envers Monsieur Philippe VELEX, Professeur à l'INSA Lyon, pour m'avoir initié à la dynamique des engrenages lors de mon second cycle, puis pour la confiance qu'il m'a accordée durant ce travail de thèse. Par ses conseils avisés et sa vision pragmatique il a permis l'aboutissement de ce projet.

Jean-François SIGRIST s'est également imposé comme une pièce importante de ce travail bien que son domaine de compétence scientifique soit éloigné des engrenages. Je le remercie pour son accueil au sein de DCNS puis de son département ; mais également pour sa curiosité et pour la pertinence de ses remarques scientifiques et numériques.

Je remercie chaleureusement Monsieur Christian MENARD, Ingénieur à DCNS Nantes-Indret pour l'attention qu'il a bien voulu porter à l'égard de ce travail, non seulement en acceptant de faire partie du jury de cette thèse, mais également tout au long des travaux en me faisant profiter de sa curiosité scientifique et d'une partie de son savoir dans le domaine des paliers.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Messieurs les Professeurs Olivier BONNEAU de l'université de Poitiers et Raynald GUILBAULT de l'Ecole de Technologie Supérieure de Montréal pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de mon jury de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Joël PERRET-LIAUDET, maître de conférence à l'Ecole Centrale de Lyon ainsi qu'à messieurs Régis DUFOUR et Philippe VELEX, tous deux professeurs à l'INSA Lyon, pour l'honneur qu'ils me font de faire partie de mon jury de thèse.

Mes remerciements vont également aux membres des diverses équipes dans lesquelles j'ai travaillé :

Du côté d'Indret, je remercie Cédric pour ses conseils de présentation et de rédaction, Fabien pour m'avoir fait partager une infime partie de ses connaissances dans le domaine naval, à qui je souhaite une bonne dernière année de thèse, Marie pour les astuces de programmation. Dans le Service Technique et Scientifique je ne pouvais oublier Lydia, Vincent, Philippe, Yoann mais également Raphaël BOSIO dans le rôle du manager/collègue durant les deux premières années. J'ai également été honoré de constater que mes travaux ont intéressé Messieurs Jean-Marc CHICHOUX et Jérôme CHAUMON ; je les remercie pour leur intérêt constant.

Du côté du laboratoire je remercie mes amis thésards pour les discussions, parfois animées, le midi ou en soirée, sur des sujets scientifiques ou non. Je pense particulièrement à BenJ, B.G., Hugo, Vince ; mais aussi à Dhafer et Nabih dans un style plus studieux. Je remercie également

Mini-Bûche pour la relecture du mémoire et lui souhaite bon courage pour la suite des opérations. Enfin un petit mot pour Vincent, Jérôme C., Jérôme B. et Fabrice de l'équipe SMC qui ont contribué au climat détendu mais appliqué qui a régné durant cette thèse.

A titre personnel, un grand merci également à mon équipe d'Oullins, mes parents, mon frère et ma bretonne pour leur bonne humeur, leurs prises de bec et leur soutien sans faille au cours de la thèse. Chacun, à sa manière, a contribué à la réalisation de ce travail et a fait de ces trois années une période charnière de mon existence.

## RESUME

Ce travail vise à prédire le comportement dynamique de transmissions par engrenages supportées par des paliers hydrodynamiques, semblables à celles utilisées dans le domaine de la propulsion navale. Un modèle couplé de transmission mécanique est présenté ; il traite la plupart des interactions possibles entre les engrenages, les arbres et les paliers. Un élément d'engrenages à dentures larges, avec raideur non linéaire et dépendante du temps, est combiné à des éléments finis de poutre alors que la contribution des paliers est introduite par la résolution directe de l'équation de REYNOLDS et d'un modèle thermique simplifié. A cause des jeux de fonctionnement des paliers, une attention particulière a été portée à la définition de l'état de référence et des degrés de liberté. La réponse du système est calculée par la combinaison d'un schéma d'intégration temporelle, d'une méthode de NEWTON-RAPHSON et d'un algorithme de contact normal unilatéral de manière à ce que les conditions de contact aux paliers et entre les dents soient simultanément traitées. Les résultats de simulation sont comparés à des mesures réalisées sur un banc d'essai de haute précision possédant un train simple étage en dentures droites et hélicoïdales, supporté par des paliers lisses de type hydrodynamique. Les comparaisons fournissent un bon accord et aboutissent à la validation du modèle de couplage tant sur les aspects globaux que locaux. Bon nombre de résultats sont également présentés, qui montrent que certains paramètres, bien souvent ignorés dans les modèles de la littérature, tels que la position de la zone d'alimentation des paliers, la température de lubrifiant dans les paliers, les accouplements avec l'environnement extérieur peuvent fortement modifier l'équilibre statique et le comportement dynamique du système, jusqu'aux contacts entre les dents.

**Mots clés :** Engrenages, réducteur de vitesse, engrenage droit, engrenage hélicoïdal, paliers lisses, couplages non linéaires, effets thermiques, simulation numérique.

## ABSTRACT

The present work is aimed at predicting the dynamic behaviour of geared transmissions supported by hydrodynamic journal bearings, similar to those used in naval propulsion. A global model of mechanical transmissions is introduced which deals with most of the possible interactions between gears, shafts and hydrodynamic journal bearings. A specific element for wide-faced gears with non linear time-varying mesh stiffness and tooth shape deviations is combined with shaft finite elements whereas the bearing contributions are introduced based on the direct solution of REYNOLDS' equation and a simple thermal model. Because of the large bearing clearances, particular attention has been paid to the definition of the degrees-of-freedom and their datum. Solutions are derived by combining a time-step integration scheme, a NEWTON-RAPHSON method and a normal contact algorithm in such a way that the contact conditions in the bearings and on the gear teeth are simultaneously dealt with. The simulation results are compared with the measurement obtained on a high-precision test rig with single stage spur and helical gears supported by hydrodynamic journal bearings. The experimental and simulation results compare well thus validating the simulation strategy both at the global and local scales. A number of results are presented which show that parameters often discarded in global models such as the location of the oil inlet area, the oil temperature in the bearings and external couplings with mechanical parts can be influential on the static and dynamic behaviour of the system.

**Keywords:** Gears, speed reducer, spur gear, helical gear, journal bearings, nonlinear couplings, thermal effects, numerical simulation.



## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                               |               |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Remerciements.....                                                            | <i>v</i>      |
| Résumé.....                                                                   | <i>ix</i>     |
| Abstract.....                                                                 | <i>ix</i>     |
| Table des matières.....                                                       | <i>xi</i>     |
| Principales notations.....                                                    | <i>xiii</i>   |
| <br>Introduction.....                                                         | <br>1         |
| <br><b>Chapitre 1 : Approche bibliographique du problème de couplage.....</b> | <br><b>7</b>  |
| <br>1.1. Un problème de dynamique de ligne d'arbre .....                      | <br>8         |
| 1.1.1. Méthodes continues et phénomènes de base.....                          | 8             |
| 1.1.2. Application à des réducteurs industriels : méthodes discrètes .....    | 11            |
| 1.2. L'engrènement .....                                                      | 12            |
| 1.2.1. Une liaison excitatrice.....                                           | 12            |
| a. Elasticité de denture et raideur d'engrènement.....                        | 13            |
| b. Les écarts géométriques.....                                               | 19            |
| c. Les déformations des corps d'engrenages.....                               | 23            |
| d. Les éléments extérieurs .....                                              | 24            |
| 1.2.2. Grandeurs caractéristiques .....                                       | 28            |
| a. L'erreur de transmission.....                                              | 28            |
| b. Chargement de la denture et coefficients dynamiques .....                  | 28            |
| 1.2.3. Quelques modèles d'engrenages et phénomènes de base .....              | 28            |
| a. Modèles à raideur d'engrènement constante .....                            | 33            |
| b. Modèles à raideur d'engrènement variable.....                              | 34            |
| c. Modèles non linéaires et description du contact .....                      | 37            |
| 1.3. Les paliers, un support actif .....                                      | 40            |
| a. Principes, hypothèses et équations de base de la lubrification.....        | 40            |
| b. Hypothèses simplificatrices et modèles de base .....                       | 44            |
| c. Quelques phénomènes .....                                                  | 47            |
| <br><b>Chapitre 2 : Modélisation d'un réducteur sur paliers.....</b>          | <br><b>55</b> |
| <br>2.1. Mise en équations du problème : hypothèses et notations.....         | <br>56        |
| 2.2. Etat de référence.....                                                   | 58            |
| 2.2.1. Calage des arbres dans les paliers .....                               | 58            |
| a. Mise en équation.....                                                      | 58            |
| b. Résolution .....                                                           | 62            |
| c. Positionnement.....                                                        | 64            |
| 2.2.2. Etat de référence de l'engrènement .....                               | 65            |
| a. Modélisation des écarts géométriques.....                                  | 65            |
| b. Cinématique des corps rigides.....                                         | 68            |
| c. Dynamique des corps rigides .....                                          | 68            |
| 2.3. Etat déformé .....                                                       | 69            |
| 2.3.1. Etat de fonctionnement des corps déformables .....                     | 69            |

|                                                                               |                |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 2.3.2. Assemblage des éléments.....                                           | 71             |
| 2.3.3. Travail des efforts extérieurs .....                                   | 73             |
| a. La pesanteur .....                                                         | 73             |
| b. Les réactions paliers.....                                                 | 73             |
| c. Les couples.....                                                           | 73             |
| 2.3.4. Première écriture des équations du mouvement.....                      | 74             |
| 2.3.5. Introduction des effets dissipatifs.....                               | 76             |
| 2.3.6. Equations du mouvement non linéaires.....                              | 77             |
| 2.3.7. Equilibre statique – conditions initiales.....                         | 78             |
| 2.3.8. Equations du mouvement linéarisées.....                                | 79             |
| <b>2.4. Introduction des effets thermiques dans les paliers .....</b>         | <b>81</b>      |
| 2.4.1. Modèle thermique de palier retenu .....                                | 82             |
| 2.4.2. Procédure numérique et application au système complet .....            | 84             |
| a. Elévation de température pour un palier isolé sous une charge donnée ..... | 84             |
| b. Elévation de température pour les paliers du système couplé .....          | 85             |
| <b>2.5. Résolution des équations du mouvement .....</b>                       | <b>86</b>      |
| 2.5.1. Discrétisation et intégration temporelle.....                          | 87             |
| 2.5.2. Résolution de l'équation non linéaire .....                            | 88             |
| 2.5.3. Application au problème couplé.....                                    | 89             |
| 2.5.4. Applications et temps de calcul .....                                  | 92             |
| <br><b>Chapitre 3 : Eléments de validation.....</b>                           | <br><b>97</b>  |
| <br>3.1. Présentation du banc d'essai .....                                   | <br>98         |
| 3.2. Modèle de réducteur .....                                                | 101            |
| 3.2.1. Calcul de la contrainte en pied de dent adimensionnée .....            | 102            |
| 3.3. Résultats en dentures droites .....                                      | 103            |
| 3.3.1. Comportement dynamique des dentures .....                              | 103            |
| 3.3.2. Influence d'une modification de chargement.....                        | 105            |
| 3.3.3. Comportement des paliers.....                                          | 106            |
| 3.3.4. Equilibre statique du système.....                                     | 108            |
| 3.4. Résultats en dentures hélicoïdales .....                                 | 109            |
| 3.4.1. Comportement dynamique des dentures .....                              | 110            |
| 3.4.2. Comportement des paliers.....                                          | 111            |
| 3.4.3. Equilibre statique du système.....                                     | 113            |
| <br><b>Chapitre 4 : Etudes paramétriques.....</b>                             | <br><b>117</b> |
| 4.1. Phénomènes de base sur un réducteur simple.....                          | 118            |
| 4.1.1. Réducteur étudié .....                                                 | 118            |
| 4.1.2. Etude à vitesse de rotation fixe .....                                 | 120            |
| 4.1.3. Balayage en vitesse de rotation .....                                  | 124            |
| 4.2. Influence de paramètres .....                                            | 126            |
| 4.2.1. Angle d'hélice.....                                                    | 127            |
| 4.2.2. Accouplements extérieurs.....                                          | 131            |
| a. Influence d'un accouplement .....                                          | 131            |
| b. Introduction de conditions aux limites .....                               | 136            |
| 4.2.3. Caractéristiques des paliers : le bassin d'alimentation .....          | 140            |

|                                                                   |                |
|-------------------------------------------------------------------|----------------|
| <b>4.3. Influence du modèle de palier .....</b>                   | <b>145</b>     |
| 4.3.1. Palier court / modèle unidimensionnel, cas linéaire.....   | 145            |
| 4.3.2. Influence de la non linéarité du modèle de palier .....    | 150            |
| <b>4.4. Etude de deux architectures .....</b>                     | <b>153</b>     |
| 4.4.1. Engrenages à double hélice.....                            | 154            |
| 4.4.2. Engrenages en porte-à-faux .....                           | 157            |
| <br><b>Conclusions générales et perspectives.....</b>             | <br><b>163</b> |
| <br><b>Références bibliographiques.....</b>                       | <br><b>167</b> |
| <br><b>ANNEXES.....</b>                                           | <br><b>177</b> |
| <br><b>ANNEXE A : Définition du facteur de mésalignement.....</b> | <br><b>178</b> |
| <b>ANNEXE B : Matrices des éléments d'arbre .....</b>             | <b>180</b>     |
| B.1. La matrice de masse .....                                    | 180            |
| B.2. La matrice de raideur .....                                  | 181            |
| <b>ANNEXE C : Schémas de résolution.....</b>                      | <b>182</b>     |
| C.1. Le schéma implicite de NEWMARK.....                          | 182            |
| C.2. La méthode de NEWTON-RAPHSON.....                            | 184            |
| C.2.1.Cas unidimensionnel .....                                   | 184            |
| C.2.2.Extension au cas en dimension $n$ .....                     | 185            |
| <b>ANNEXE D : Caractéristiques des huiles .....</b>               | <b>186</b>     |
| D.1. Masse volumique .....                                        | 186            |
| D.2. Viscosité dynamique .....                                    | 186            |
| D.3. Viscosité cinématique .....                                  | 187            |
| D.4. Chaleur massique.....                                        | 187            |



## Principales notations

### - Repères

| <i>Grandeur</i>                              | <i>Signification</i>                         | <i>Unité</i> |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------|
| $(\mathbf{S}_0, \mathbf{T}_0, \mathbf{Z}_0)$ | Repère global lié au centre des paliers      | -            |
| $(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{z})$       | Repère de référence lié à l'engrènement      | -            |
| $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{z})$       | Repère lié au plan d'action de l'engrènement | -            |
| $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$                   | Repère cartésien local lié au palier         | -            |
| $(\mathbf{r}, \mathbf{q})$                   | Repère polaire local lié au palier           | -            |

### - Engrènement et arbres

| <i>Grandeur</i>                   | <i>Signification</i>                                                                                                   | <i>Unité</i> |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| $\alpha_t$                        | Angle de pression de fonctionnement                                                                                    | °            |
| $\beta_b$                         | Angle d'hélice                                                                                                         | °            |
| $R_{p1}$ ; $R_{p2}$               | Rayon primitif du pignon ; de la roue                                                                                  | <i>m</i>     |
| $R_{b1}$ ; $R_{b2}$               | Rayon de base du pignon ; de la roue                                                                                   | <i>m</i>     |
| $Z_1$ ; $Z_2$                     | Nombre de dents du pignon ; de la roue                                                                                 | -            |
| $T_m$                             | Période d'engrènement                                                                                                  | <i>s</i>     |
| $f_m$                             | Fréquence d'engrènement                                                                                                | <i>Hz</i>    |
| $\Omega_m$                        | Pulsation d'engrènement                                                                                                | <i>rad/s</i> |
| $\Omega_1$ ; $\Omega_2$           | Vitesse de rotation de l'arbre moteur ; récepteur                                                                      | <i>rad/s</i> |
| $\mathcal{C}_m$ ; $\mathcal{C}_r$ | Couple moteur ; récepteur                                                                                              | <i>N.m</i>   |
| $\mathcal{R}$                     | Coefficient dynamique                                                                                                  | -            |
| $K_{H\beta}^*$                    | Coefficient de répartition de charge                                                                                   | -            |
| $\kappa$                          | Mésalignement équivalent                                                                                               | <i>m</i>     |
| $M_{ij}$                          | Point de contact appartenant à la $i^{\text{ème}}$ ligne de contact et à la $j^{\text{ème}}$ tranche (voir chapitre 2) | -            |
| $k_{ij}$                          | Raideur de contact associée au point $M_{ij}$                                                                          | <i>N/m</i>   |
| $e(M_{ij})$                       | Ecart normal associé au point $M_{ij}$                                                                                 | <i>m</i>     |
| $\delta e(M_{ij})$                | Séparation initiale associés au point $M_{ij}$                                                                         | <i>m</i>     |
| $\Delta(M_{ij})$                  | Ecrasement élastique au point $M_{ij}$                                                                                 | <i>m</i>     |
| $N_{eng}$                         | Nombre d'engrènements                                                                                                  | -            |

### - Paliers

| <i>Grandeur</i>            | <i>Signification</i>              | <i>Unité</i> |
|----------------------------|-----------------------------------|--------------|
| $O$                        | Centre du palier                  | -            |
| $O'$                       | Centre de l'arbre dans son palier | -            |
| $\Omega$                   | Vitesse de rotation               | <i>rad/s</i> |
| $L$                        | Longueur                          | <i>m</i>     |
| $D$                        | Diamètre                          | <i>m</i>     |
| $h$                        | Hauteur de film                   | -            |
| $c$                        | Jeu radial                        | <i>m</i>     |
| $\epsilon = \frac{OO'}{c}$ | Excentricité de fonctionnement    | -            |
| $\phi$                     | Angle de calage                   | °            |

|              |                                                                                                                                                                       |            |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\mu$        | Viscosité dynamique du lubrifiant                                                                                                                                     | $Pa.s$     |
| $C_p$        | Capacité thermique du lubrifiant                                                                                                                                      | $J/(kg.K)$ |
| $\rho$       | Masse volumique du lubrifiant                                                                                                                                         | $kg/m^3$   |
| $p$          | Champ de pression                                                                                                                                                     | $Pa$       |
| $C_f$        | Couple de frottement                                                                                                                                                  | $N.m$      |
| $T_f$        | Température moyenne de fonctionnement du lubrifiant                                                                                                                   | $K$        |
| $T_{inj}$    | Température du lubrifiant injecté dans le palier (avant circulation)                                                                                                  | $K$        |
| $T_{injeff}$ | Température du lubrifiant entrant dans le palier (après circulation)                                                                                                  | $K$        |
| $Q$          | Débit volumique de fluide, l'indice se réfère à la surface traversée ( $z$ pour le débit axial, $inj$ pour l'injection, $\theta_i$ pour la surface $S_i$ figure 2.11) | $m^3/s$    |
| $N_{pal}$    | Nombre de paliers                                                                                                                                                     | -          |

- Système

| <i>Grandeur</i> | <i>Signification</i>                                      | <i>Unité</i> |
|-----------------|-----------------------------------------------------------|--------------|
| $[M_X]$         | Matrice de masse relative à la grandeur X                 | -            |
| $[C_X]$         | Matrice d'amortissement                                   | -            |
| $[K_X]$         | Matrice de raideur relative à la grandeur X               | -            |
| $Q$             | Vecteur des forces nodales équivalentes                   | -            |
| $X$             | Vecteur représentatif du champ de déplacement élastique   | -            |
| $X_R$           | Vecteur représentatif du champ de déplacement rigidifiant | -            |

- Notations mathématiques

| <i>Notation</i> | <i>Signification</i>                                                                     | <i>Unité</i> |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| $x$             | Grandeur scalaire                                                                        | -            |
| $u$             | Grandeur vectorielle                                                                     | -            |
| $[A]$           | Grandeur matricielle                                                                     | -            |
| $u \bullet v$   | Produit scalaire de deux vecteurs                                                        | -            |
| $u \times v$    | Produit vectoriel de deux vecteurs                                                       | -            |
| $[A]^t$         | Transposée d'une matrice                                                                 | -            |
| $\dot{x}$       | Dérivée par rapport au temps d'une grandeur pouvant être scalaire ou matricielle         | -            |
| $\ddot{x}$      | Dérivée seconde par rapport au temps d'une grandeur pouvant être scalaire ou matricielle | -            |

- Indices utilisés

| <i>Grandeur</i> | <i>Signification</i>                            | <i>Unité</i> |
|-----------------|-------------------------------------------------|--------------|
| 0               | Grandeur considérée à l'équilibre statique      | -            |
| <i>eng</i>      | Grandeur se rapportant à l'engrènement          | -            |
| <i>S</i>        | Grandeur se rapportant aux arbres               | -            |
| <i>C</i>        | Grandeur se rapportant aux éléments de couplage | -            |
| <i>pal</i>      | Grandeur se rapportant aux paliers              | -            |





# Introduction

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre d'un partenariat de longue date entre le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon, plus particulièrement l'équipe « Systèmes Mécaniques et Contacts », et l'ancienne Direction des Constructions Navales, aujourd'hui devenue DCNS, avec le Département Dynamique des Structures (D<sup>2</sup>S) au sein de son nouveau pôle de recherche DCNS research. La collaboration autour du thème des réducteurs de vitesse a commencé au début des années 90. Une thèse sur un sujet similaire a eu lieu à la fin des années 90, traité d'un point de vue principalement expérimental.

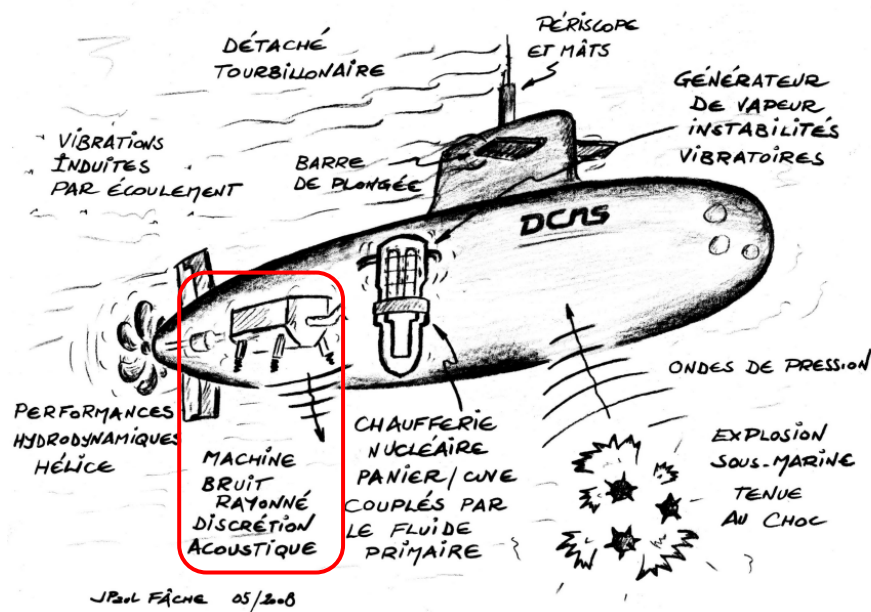


Fig. 1 – Croquis d'un sous-marin, siège de nombreux problèmes vibratoires.

## Contexte industriel

Dans le domaine de la propulsion navale, la problématique de la transmission de puissance représente un enjeu majeur et un avantage certain pour celui qui la maîtrise. Il s'agit de transmettre la puissance d'un arbre moteur dit Grande Vitesse (GV), pouvant être entraîné par des moteurs diesels, électriques ou une chaufferie nucléaire, à un arbre récepteur dit Petite Vitesse (PV), lié à l'hélice de propulsion. Cette transmission est réalisée par l'intermédiaire du réducteur de vitesse dont la mission est multiple :

- garantir la transmission de puissance d'un niveau élevé avec la plus grande fiabilité et le meilleur rendement ;
- assurer une furtivité maximale en se montrant le plus silencieux possible.



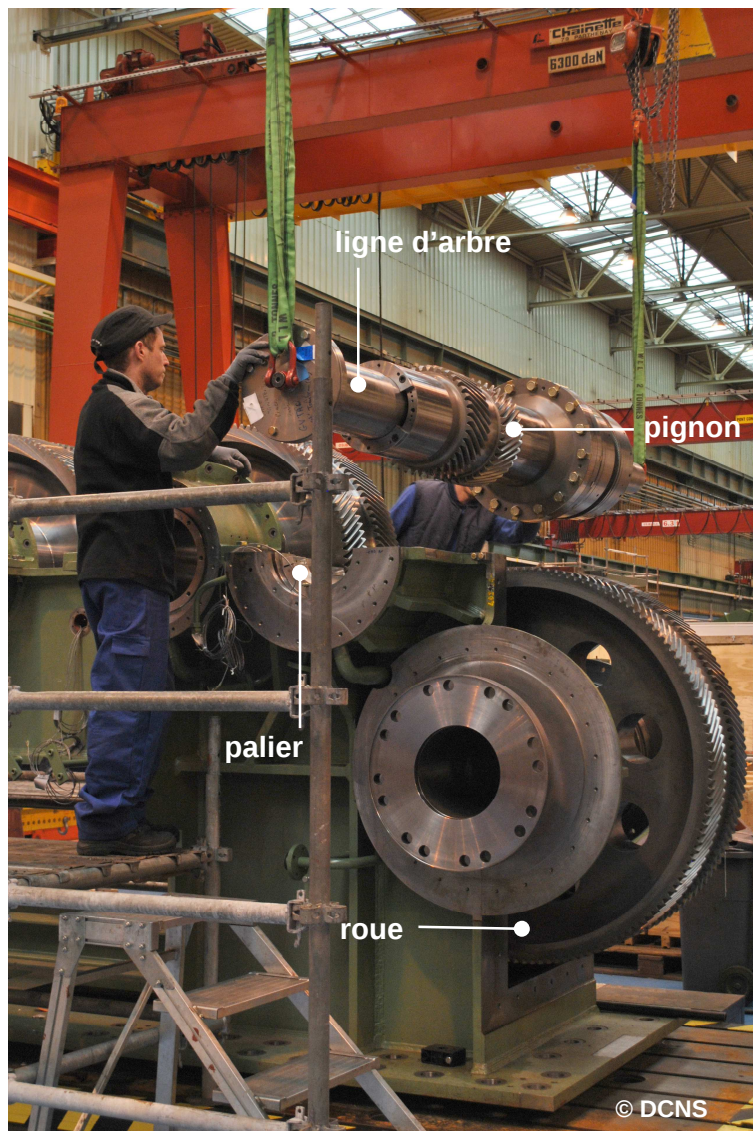
**Fig. 2** – Réducteurs GV (grande vitesse) et PV (petite vitesse) de frégate.

Dans la pratique, cet organe transmet des puissances pouvant atteindre la centaine de mégawatts ( $MW$ ) en propulsion nucléaire (quelques dizaines en propulsion classique) à des vitesses de quelques milliers de tours par minute ( $tr/min$ ). En raison des conditions de fonctionnement, des niveaux de puissance à transmettre et des fortes contraintes acoustiques, les paliers hydrodynamiques sont souvent préférés aux paliers à roulement pour supporter le réducteur, notamment en raison des propriétés d'amortissement que leur confère le film d'huile. Les contraintes sur les différents organes mécaniques tels que dentures et paliers n'en demeurent pas moins grandes, et ces derniers sont en constante interaction.

En effet, dans le cas du réducteur de vitesse, les paliers ne supportent pas uniquement le poids propre de la ligne d'arbre et des mobiles, mais également le chargement transmis par la

denture et transféré aux paliers. Il est communément admis que ce chargement est de type périodique et comporte plusieurs harmoniques, multiples de la fréquence d'engrènement du réducteur, c'est-à-dire haute fréquence, aux fréquences  $f_n = \frac{nZ_1\Omega_1}{2\pi}$  ( $Z_1$  étant le nombre de dents du pignon et  $\Omega_1$  sa vitesse de rotation,  $n \in \mathbb{N}$ ).

Réciproquement, les paliers ne se comportent pas comme de simples appuis et sont connus pour présenter un certain nombre de non linéarités dans leur fonctionnement (calage, effets thermiques, comportement rhéologique, instabilités...) dont les effets sur le système global sont actuellement mal connus tant le traitement de ces problèmes est aujourd'hui découplé.



**Fig. 3** – Montage d'un réducteur GV de frégate.

En pratique, les paliers sont de type hydrodynamiques à géométrie parfois non circulaire (les paliers dits « citron » sont fréquemment employés) et plusieurs étages de réduction sont parfois nécessaires compte tenu des différents modes de propulsion et des conditions de fonctionnement et puissances à transmettre. *Dans ce mémoire nous nous limiterons à des trains simple étage et des paliers lisses.* L'extension à des trains multi-étage représente un travail conséquent avec de nouvelles problématiques et constitue un axe de recherche intéressant pour les travaux à venir.

## Objectifs de la thèse

A l'heure actuelle, les équipes de conception et de R&D utilisent des modèles performants de palier et de réducteur découplés, nécessitant des itérations manuelles aussi nombreuses que fastidieuses : les codes de paliers servent à calculer, à partir des points de fonctionnement, les classiques coefficients dynamiques correspondants. D'autre part, les codes d'engrènement sont utilisés pour calculer les chargements des dentures, vitesses critiques et vibrations de ligne d'arbre, les paliers étant considérés comme des éléments passifs.

L'objectif de cette thèse est d'élaborer un modèle prenant en compte les interactions entre les phénomènes globaux et locaux rencontrés dans les réducteurs de vitesse sur paliers hydrodynamiques, à savoir :

- vibrations des lignes d'arbres ;
- contact à la denture ;
- lubrification aux paliers ;
- interactions avec l'environnement extérieur (accouplements...).

## Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres.

Le chapitre 1 est consacré à une étude bibliographique portant sur les organes et phénomènes utilisés dans le modèle. Les premiers choix de modélisation seront mis en évidence.

Le chapitre 2 présente les développements apportés par rapport à l'existant. Fondé sur les modèles découplés introduits dans le chapitre 1, un modèle tout couplé de réducteur sur palier est élaboré. Il repose sur certaines hypothèses de séparation entre plusieurs champs de déplacement (mouvement de corps solide et petites dé-

formations autour de cette position), et sur un équilibre statique relativement précis, menant à une formulation linéaire et à une formulation non linéaire du problème dynamique. Le modèle présenté comporte notamment une formulation adaptée du problème de lubrification aux paliers, vus comme des efforts extérieurs au système, permettant de prendre en compte des conditions d'alimentation en lubrifiant et des phénomènes thermiques basiques. Les corps d'engrenages y sont traités comme des éléments déformables et au plan du contact à la denture, les modifications de profil et de positionnement sont prises en compte comme des écarts de forme par rapport à une géométrie parfaite de référence.

Un algorithme de résolution spécifique a dû être développé pour la résolution des équations du mouvement et se trouve présenté dans ce chapitre. Il combine (i) un processus itératif de convergence en température sur les paliers, (ii) un schéma d'intégration pas à pas dans le temps de type NEWMARK implicite, (iii) un algorithme de NEWTON-RAPHSON traitant la non linéarité du problème de lubrification aux paliers et (iv) un algorithme de contact unilatéral traitant le problème de contact à la denture.

Le chapitre 3 est dédié à la validation du modèle présenté. Des résultats expérimentaux portant sur un banc d'essai ont été comparés aux résultats de simulation. Les points de comparaisons portent aussi bien sur les aspects locaux (contrainte en pied de dent et position de fonctionnement des paliers) que globaux (équilibre du système et transfert des efforts aux paliers, déformée de ligne d'arbre...). Différents types de dentures et positions de paliers ont été étudiés. Ces travaux constituent une validation du code de calcul et font ressortir certains effets novateurs apportés par le modèle couplé.

Le chapitre 4 consiste en une étude paramétrique, exclusivement numérique, relativement complète basée sur l'étude d'un réducteur proche de celui présenté dans le chapitre 3. L'influence du modèle de palier retenu est tout d'abord discutée avec des comparaisons entre modèles linéaires et non linéaires. L'influence de paramètres, jusqu'alors ignorés ou méconnus est ensuite étudiée.



# Chapitre 1

---

## Approche bibliographique du problème de couplage et choix de modélisation

### Sommaire

|        |                                                                      |    |
|--------|----------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1.   | Un problème de dynamique de ligne d'arbre.....                       | 8  |
| 1.1.1. | Méthodes continues et phénomènes de base.....                        | 8  |
| 1.1.2. | Application à des réducteurs industriels : méthodes discrètes .....  | 11 |
| 1.2.   | L'engrènement .....                                                  | 12 |
| 1.2.1. | Une liaison excitatrice.....                                         | 12 |
| a.     | Elasticité de denture et raideur d'engrènement .....                 | 13 |
| b.     | Les écarts géométriques .....                                        | 19 |
| c.     | Les déformations des corps d'engrenages.....                         | 23 |
| d.     | Les éléments extérieurs .....                                        | 24 |
| 1.2.2. | Grandeurs caractéristiques .....                                     | 28 |
| a.     | L'erreur de transmission .....                                       | 28 |
| b.     | Chargement de la denture et coefficients dynamiques.....             | 30 |
| 1.2.3. | Quelques modèles d'engrenages et phénomènes de base .....            | 33 |
| a.     | Modèles à raideur d'engrènement constante .....                      | 33 |
| b.     | Modèles à raideur d'engrènement variable .....                       | 35 |
| c.     | Modèles non linéaires et description du contact.....                 | 37 |
| 1.3.   | Les paliers, un support actif.....                                   | 40 |
| a.     | Principes, hypothèses et équations de base de la lubrification ..... | 40 |
| b.     | Hypothèses simplificatrices et modèles de base .....                 | 44 |
| c.     | Quelques phénomènes .....                                            | 47 |

La modélisation du comportement dynamique de réducteurs sur paliers hydrodynamiques représente un très bon exemple de problème de couplage. Il s'agit de faire interagir trois domaines distincts, chacun faisant l'objet d'une littérature abondante : (i) l'engrènement, (ii) le comportement des lignes d'arbres et (iii) les paliers. Chacun de ces organes a été largement étudié et nombre de modèles ont été proposés au cours des dernières décennies. L'objectif de ces travaux de thèse étant de mettre en place et de valider un modèle couplé permettant de simuler le comportement dynamique de transmissions proches de celles utilisées en propulsion navale, cette première partie a pour but de synthétiser les travaux précédemment réalisés dans chaque domaine, qui ont constitué une base de travail importante pour la construction du modèle couplé. A cette fin :

- le comportement des lignes d'arbres est un problème classique qui ne sera traité que très succinctement,
- plusieurs modèles de simulations d'engrenages sont présentés,
- le comportement statique et dynamique des paliers hydrodynamiques est présenté, ainsi que les équations de base et principales techniques de résolution.
- les problématiques de déformations élastiques des carters ne sont pas envisagées.

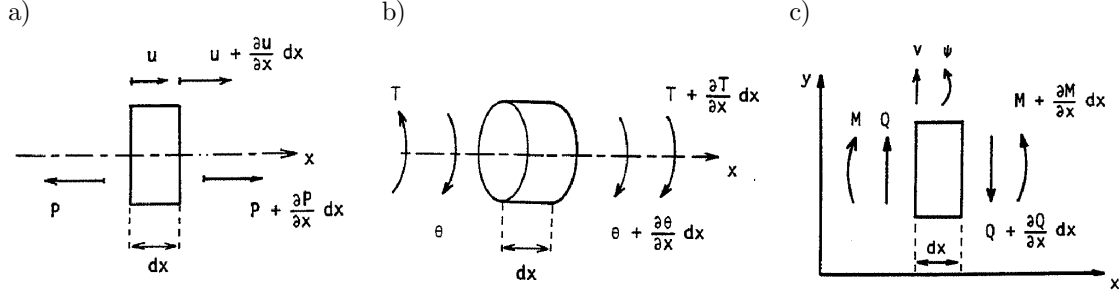
## 1.1. Un problème de dynamique de ligne d'arbre

Si les réducteurs de vitesse sont le siège de nombreux phénomènes locaux, ils restent un cas particulier de problème de lignes d'arbres, couplées entre elles. Ces sujets ont fait l'objet de nombreuses études, et peuvent être abordés selon différentes approches dont les grandes lignes sont esquissées ci-dessous.

### 1.1.1. Méthodes continues et phénomènes de base

- **Vibrations longitudinales, torsionnelles et transverses**

L'étude des vibrations de poutres est un sujet relativement classique. Une synthèse est présentée dans [Lal84] qui aborde le problème des vibrations d'une poutre comme un problème de mécanique des milieux continus. Il s'agit d'écrire les équations d'équilibre locales appliquées à un tronçon de poutre soumis à diverses sollicitations.



**Fig. 1.1** – Sections de poutres élémentaires isolées pour l'établissement des équations vibratoires d'après LALANNE et col. [Lal84] ; a) vibrations longitudinales ; b) vibrations torsionnelles ; c) vibrations transverses

Ainsi, en négligeant les effets de cisaillement secondaires (poutres d'EULER-BERNOULLI), et avec les notations de la figure 1.1, les équations de vibration des poutres s'écrivent:

- pour les vibrations longitudinales :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + P_{ext} \quad (1.1)$$

- pour les vibrations torsionnelles :

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + T_{ext} \quad (1.2)$$

- pour les vibrations transverses :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Q_{ext} = 0 \quad (1.3)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $S$  la surface de la section de poutre,  $E$  le module d'Young,  $J$  le moment d'inertie,  $I_\theta$  le moment d'inertie massique par unité de longueur ( $I_\theta = \rho J$  pour les poutres de section circulaire),  $G$  le module de cisaillement et  $I$  le moment d'inertie de section de la poutre par rapport à la ligne neutre.

La résolution de ces équations passe bien souvent par l'emploi d'une technique de séparation de variable, du type RAYLEIGH-RITZ :

$$u_i(x, t) = \phi_i(x) q_i(t) \quad (1.4)$$

avec  $u_1 = u, \dots, u_n = \theta, \dots$

• **Dynamique des rotors**

Dans le cas de lignes d'arbres en rotation à une vitesse constante  $\Omega$ , une approche classique consiste à utiliser les équations de LAGRANGE. Ces dernières s'écrivent, pour un système conservatif :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (1.5)$$

$T$  et  $U$  sont respectivement les énergies de déformation et cinétique de la structure, les  $q_i$  sont les coordonnées généralisées du système et les  $Q_i$ , les efforts généralisés appliqués au système.

Les équations nécessitent le calcul de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle des lignes d'arbres, notées  $(\tau)$ , qui, dans le cas général s'expriment :

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \rho(M) V^2(M) d\tau \quad (1.6)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \epsilon^t(M) \sigma(M) d\tau \quad (1.7)$$

où  $V(M)$  représente la norme du vecteur vitesse instantané du point  $M$  (en prenant en compte la rotation de l'arbre autour de son axe),  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont respectivement le tenseur des déformations et des contraintes dans la structure,  $^t$  désigne l'opérateur de transposition matricielle.

Dans le cas de lignes d'arbres, le calcul de ces énergies nécessite quelques hypothèses et simplifications, détaillées dans [Lal90], telles que la prise en compte des effets secondaires d'inertie concernant le cisaillement (poutres de TIMOSHENKO), ou des effets gyroscopiques dans le calcul de l'énergie cinétique.

L'application des équations de LAGRANGE conduit à un système du type :

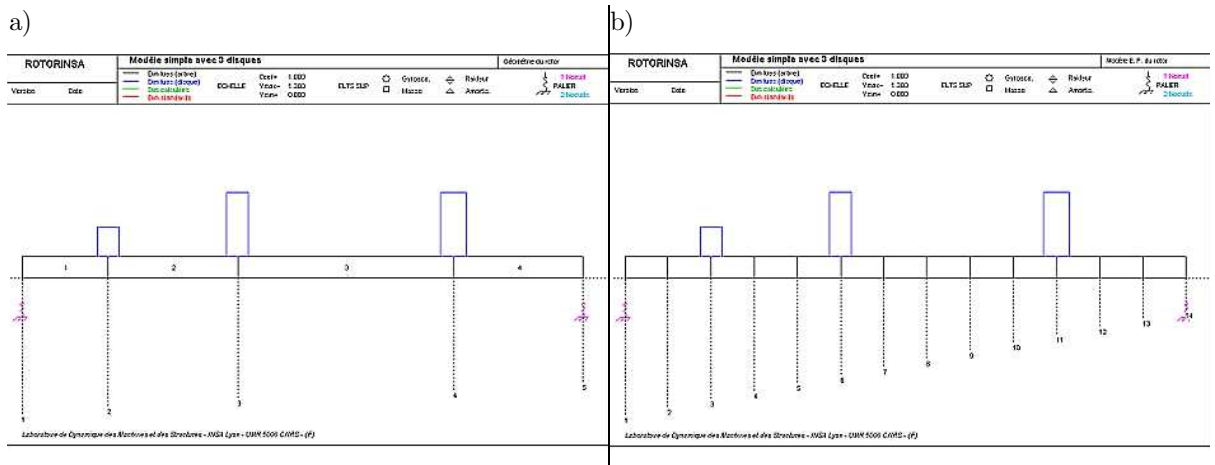
$$\begin{cases} [\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{q}} + \Omega [\mathbf{G}] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}] \mathbf{q} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \quad + \text{conditions limites} \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $[\mathbf{M}]$  est un opérateur de masse contenant les caractéristiques massiques et inertielles de la structure,  $[\mathbf{G}]$  est un opérateur causé par la rotation de la ligne d'arbre contenant les effets gyroscopiques,  $[\mathbf{K}]$  est un terme de raideur ;  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  contient l'ensemble des efforts généralisés appliqués à la structure, le tout en rapport aux degrés de liberté  $q_i$  rassemblés dans le vecteur  $\mathbf{q}$ .

### 1.1.2. Application à des réducteurs industriels : méthodes discrètes

Dans bon nombre de cas, la complexité des géométries et les conditions limites non-usuelles des structures réelles nécessitent l'emploi de méthodes numériques pour la détermination des comportements statique et dynamique. La méthode des éléments finis est alors fréquemment utilisée [Spi021], [Spi022], [Spi023].

La technique est basée sur la discrétisation de la structure à l'aide d'éléments de taille donnée, appelés *éléments finis*, connectés entre eux en certains points appelés *nœuds*, localisés aux frontières de l'élément.



**Fig. 1.2** – Exemples de maillage d'un même monorotor simple à 3 disques (source : rotorinsa.insa-lyon.fr),  
a) maillage à 4 éléments ; b) maillage à 13 éléments.

En utilisant une hypothèse raisonnable concernant le champ de déplacement de l'élément  $i$  (utilisation de fonctions de forme appropriées, voir [Lal90]), l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de chaque élément sont calculées, par les formules (1.6) et (1.7) comme des fonctions des accélérations, vitesses et déplacements nodaux.

Les énergies de la structure composée de  $N$  éléments sont calculées par sommation :

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \quad (1.9)$$

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (1.10)$$

Les efforts généralisés sont déterminés en écrivant le travail virtuel des efforts extérieurs. L'application des équations de LAGRANGE (1.5) permet d'établir les équations différentielles du mouvement de la structure complète, d'une forme identique à celles présentées en (1.8). Etant donné la complexité des phénomènes dissipatifs, ces derniers sont bien souvent introduits *à posteriori* (amortissement proportionnel ou modal).

La résolution des équations du mouvement fait, elle aussi, appel à des méthodes discrètes. Ce sont, bien souvent, des schémas d'intégration pas à pas dans le temps qui sont utilisés. Ces schémas peuvent-être :

- explicites (expression des grandeurs à l'instant  $t + dt$  en fonctions des grandeurs à l'instant  $t$ , soit une résolution très rapide mais un champ d'application plus restreint et de nombreuses conditions de stabilité), c'est le cas du schéma d'EULER notamment ;
- implicites (expression des grandeurs à l'instant  $t + dt$  en fonctions des grandeurs à l'instant  $t$  et  $t + dt$ , nécessitant la résolution d'un système linéaire, donc plus coûteux mais possédant des champs d'application plus larges et des conditions de stabilité moins réduites), c'est le cas des schémas de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 ou de NEWMARK (et ses dérivés tels que HILBER HUGHES TAYLOR). Ces schémas sont notamment détaillés dans [Dur08].

## 1.2. L'engrènement

Certains auteurs se sont intéressés aux transmissions par engrenages en simplifiant les éléments extérieurs et en portant davantage d'attention aux contacts entre les dents. Dans ce paragraphe, nous présenterons dans un premier temps les principales sources d'excitations propres à l'engrènement, justifiant ainsi son rôle « d'organe excitateur ». Dans un second temps, un certain nombre de paramètres propres à la dynamique des engrenages seront abordés ; ils seront, pour la plupart, largement utilisés dans la suite de ce mémoire. Enfin une liste non exhaustive de modèles d'engrenage issus de la littérature sera dressée.

### 1.2.1. Une liaison excitatrice

Par définition, l'engrenage est un organe servant à transmettre, par l'intermédiaire d'obstacles appelés dents, un mouvement de rotation entre deux arbres. Nous nous limiterons, dans ce mémoire, au cas où les arbres en question sont dits parallèles, et les engrenages dits cylindriques, dont les principes de fonctionnement et caractéristiques sont abondamment décrits dans [Hen79].



**Fig. 1.3** – Engrenages droits à axes parallèles

Cette vision, essentiellement cinématique est très utilisée en avant-projet. Elle se révèle néanmoins insuffisante dès lors qu'est abordée la notion de transmission de puissance entre les arbres, intimement liée à la notion d'effort et donc de déformation.

### **a. Elasticité de denture et raideur d'engrènement**

La raideur d'engrènement caractérise l'élasticité des dentures et leurs déformations sous chargement. Point central de la dynamique des engrenages, elle a d'abord été envisagée comme excitation externe au système, avant d'être vue comme un élément interne et comme un résultat de simulation, témoignant des conditions de contact. Son lien avec la cinématique de l'engrenage, et notamment le passage des dents, ne fait aucun doute. En revanche sa distribution sur la largeur de denture et son lien avec les petites perturbations n'ont été abordés que relativement récemment [Vel93].

La majorité des modèles rencontrés fait l'hypothèse d'un contact parfaitement lubrifié donnant lieu à un effort transmis dans la direction normale aux dents ; c'est-à-dire dans le plan d'action, tangent aux cercles de base du pignon et de la roue. Cette hypothèse a notamment été remise en question par [Kas81] et [Vil07] qui ont proposé des efforts hors du plan d'action.

Qu'elle soit concentrée ou bien répartie sur la largeur de la dent, la détermination de cette raideur de manière réaliste représente une difficulté. En effet, suivant l'approche envisagée, on parlera de *raideur globale d'engrènement* ou de *raideur d'un couple de dents*.

- **Raideur d'un couple de dents**

Le calcul de la raideur globale d'engrènement passe bien souvent par le calcul de la raideur d'un couple de dents en prise à un instant considéré, utilisant les déflexions locales des dents sous chargement, notées  $\delta$  avec différents indices suivant les phénomènes observés et hypothèses retenues.

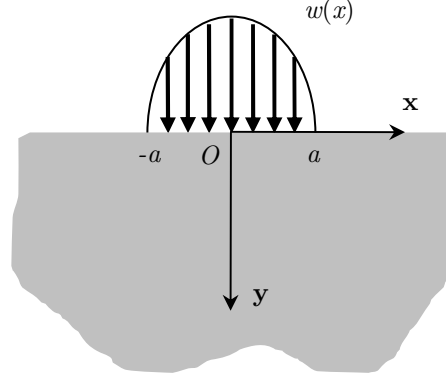
Si certains auteurs passent par des modèles tridimensionnels, [Sai89], les approches bidimensionnelles, fondées sur une décomposition des dents en tranches minces sont souvent utilisées [Ajm00].

Quelles que soient les hypothèses réalisées, les auteurs s'accordent sur le fait que la raideur d'engrènement se décompose en deux contributions :

- l'une locale correspondant aux déflexions dues au contact entre les dents, vues comme des solides soumis à un contact de type hertzien ;
- l'autre globale causée par (i) la flexion de la denture et (ii) la liaison « dent-jante »

▪ Raideur de contact

Le calcul de la raideur de contact repose bien souvent sur le calcul de la déflexion locale de la dent soumise à un chargement très local. Pour ce type d'approche, les éléments finis sont très rarement utilisés car ils nécessitent un maillage extrêmement raffiné, et se révèlent donc très coûteux. En revanche, les caractéristiques du contact se prêtent fort bien à une modélisation de la dent de type massif élastique semi-infini.



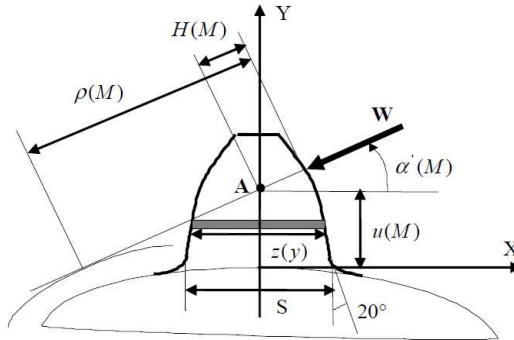
**Fig. 1.4** – Demi-plan élastique soumis à une distribution de pression hertzienne

Une méthode classiquement utilisée est la formulation bidimensionnelle proposée par WEBER et BANASCHEK [Web50]. Il s'agit d'assimiler le contact entre deux dents au contact entre deux massifs semi-infinis soumis à une distribution hertzienne de pressions normales. JOHNSON [Joh77] établit alors que la déflexion au centre du contact par rapport à un point de référence situé sur la même verticale à une profondeur  $d$  s'écrit :

$$\delta_c = 2 \frac{W}{b} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left( \log \frac{2d}{a_H} - \frac{\nu}{2(1 - \nu)} \right) \quad (1.11)$$

Avec

- $\frac{W}{b}$  la charge par unité de largeur de contact (selon  $\mathbf{z}$ ) ;
- $a_H = \sqrt{8 \frac{W}{b} \rho \frac{1 - \nu^2}{\pi E}}$  la demi-largeur du contact hertzien ;
- $\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$  le rayon de courbure équivalent au point de contact, voir figure 1.5.



**Fig. 1.5** – Notations utilisées dans la formule de WEBER-BANASCHEK

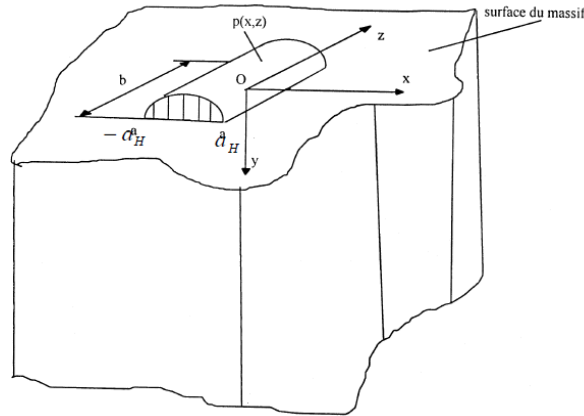
Devant la singularité d'une telle formulation, WEBER et BANASCHEK [Web50] supposent que la déformée de contact demeure localisée au voisinage de la zone chargée, et en particulier qu'elle est négligeable devant les effets de structure sur la ligne médiane de la dent. Il vient alors :

$$\delta_c^{WB} = 2 \frac{W}{b} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left( \log \frac{2H}{a_H} - \frac{\nu}{2(1 - \nu)} \right) \quad (1.12)$$

A cette formulation bidimensionnelle, nous préférons la formulation tridimensionnelle proposée par LUNDBERG [Lun39]. En supposant la répartition de la pression de contact uniforme dans la direction de la largeur de denture et semi-elliptique dans la direction transverse, la déflexion au centre de la zone chargée s'exprime alors (avec les mêmes notations) :

$$\delta_c^L = 2 \frac{W}{b} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left( \frac{1}{2} + \log 2 + \log \frac{b}{a_H} \right) \quad (1.13)$$

Cette formulation qui fait intervenir la largeur du contact  $b$  indépendamment du rapport  $\frac{W}{b}$  semble appropriée à notre problème.



**Fig. 1.6** – Demi-espace élastique et chargement pour la formule de LUNDBERG

▪ Raideur de flexion et de fondation de la dent

UMEZAWA [Ume69] a procédé en assimilant la dent à une plaque d'épaisseur variable liée à la jante par un encastrement élastique ; la méthode retenue consiste à assimiler la dent à une poutre de section variable, d'axe  $\mathbf{y}$ , encastree-libre. La section d'encastrement est définie par le point où la tangente à la trochoïde de raccordement est inclinée d'un angle de  $20^\circ$  par rapport à  $\mathbf{y}$ . Les déformations de l'encastrement sont traitées séparément. Les formules les plus communément utilisées sont celles de WEBER et BANASCHEK [Web50].

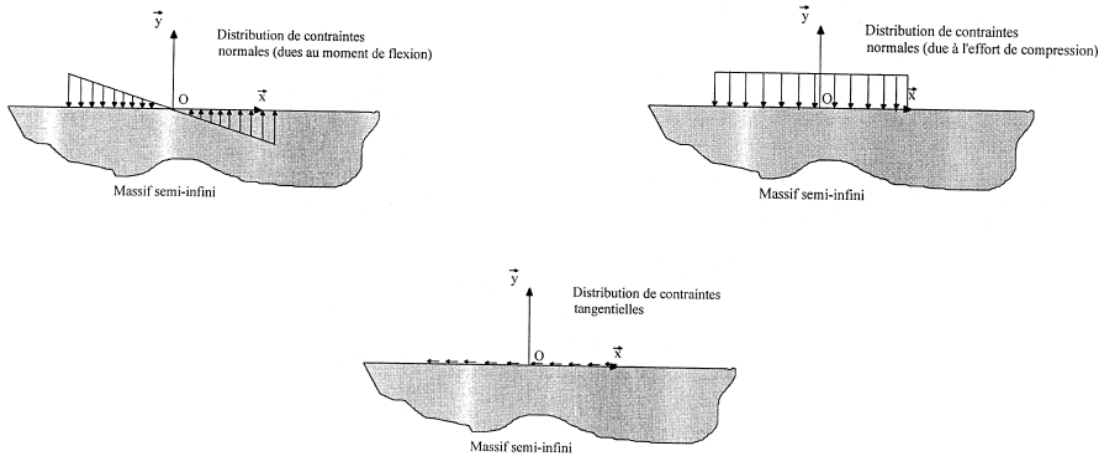
En égalant l'énergie de déformation de la dent soumise à un chargement concentré avec le travail de cette charge au cours de la déflexion, la déflexion de la ligne moyenne de la dent dans la direction du chargement s'exprime :

$$\delta_d = \frac{W}{b} \frac{1}{E^*} \cos^2 \alpha' (M) \left( 10.92 \int_0^{u(M)} \frac{(u(M) - y)^2}{z^3(y)} dy + 3.1 (1 + 0.294 \tan^2 \alpha' (M)) \int_0^{u(M)} \frac{dy}{z(y)} \right) \quad (1.14)$$

où

- $E^* = E$  est le module d'YOUNG en contraintes planes (utilisées pour des dentures peu larges) ;
- $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$  est le module d'YOUNG en déformations planes (utilisées pour des dentures larges) ;
- les autres paramètres sont définis figure 1.5.

Le modèle ci-dessus est basé sur l'hypothèse d'un encastrement rigide de la dent. Cette hypothèse est corrigée en prenant en compte l'élasticité de la liaison entre la dent et le corps de l'engrenage. L'encastrement est assimilé à un massif semi-infini bidimensionnel soumis à une distribution de contraintes causées par le chargement de la dent, se décomposant en des contraintes normales dues à un moment de flexion et à un effort de compression, mais aussi à des contraintes tangentielles comme représenté sur la figure 1.7.



**Fig. 1.7** – *Modélisation de la fondation d'une dent*

L'application des formules d'élasticité de WEBER et BANASCHEK et du principe de superposition fournit le résultat en déplacement pour un point  $M$  :

$$\delta_f = \frac{W}{b} \frac{1}{E^*} \cos^2 \alpha' (M) \left( 5.2 \left( \frac{u(M)}{S} \right)^2 + \frac{u(M)}{S} 1.4 (1 + 0.294 \tan^2 \alpha' (M)) \right) \quad (1.15)$$

Une formule plus précise basée sur la théorie des potentiels complexes de MUSKHELISHIRKI a été récemment proposée par SAINOT et col. [Sai04].

Ces formules donnent souvent satisfaction mais présentent l'inconvénient d'ignorer les effets convectifs entre dent et corps. Ainsi, dans la continuité des méthodes éléments finis, une méthode hybride a été développée par AJMI et VELEX [Ajm00] [Ajm05]. Elle est basée sur les fondations élastiques de PASTERNAK [Ker64], utilisées pour modéliser la dent.

Comme représenté sur la figure 1.8, la fondation est constituée d'éléments de flexion et de cisaillement transversal, liés à un bâti par une série de ressorts. Les couplages élastiques entre points voisins sont simulés à l'aide de ces éléments de flexion et de cisaillement, comme le montre la figure 1.9.

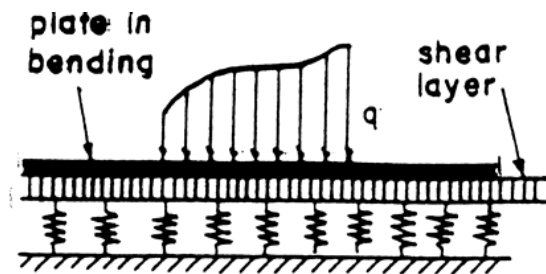


Fig. 1.8 – Fondation élastique de type PASTERNAK

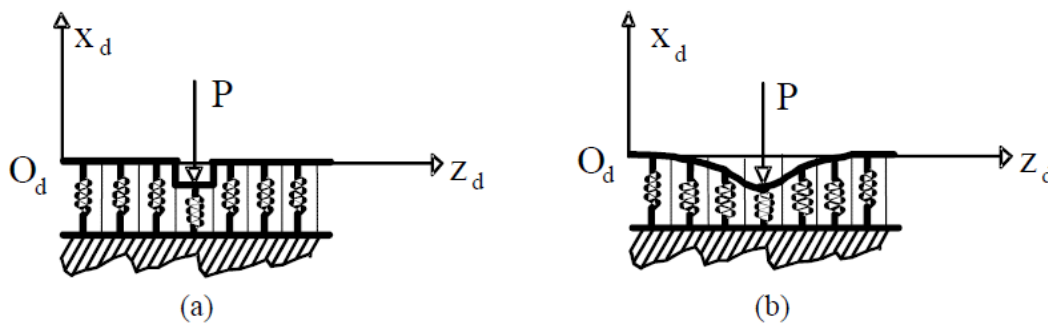


Fig. 1.9 – Déformée d'une fondation élastique par une charge concentrée normale,  
a) sans couplage, b) avec couplage

Sur la base de travaux quasi-statiques de SEAGER [Sea67] et SCHMIDT et col. [Sch80], les déplacements élastiques des dentures sont décrits par des fondations élastiques de PASTERNAK ramenées dans le plan d'action de l'engrènement. La dent et son embase sont ainsi découpées en tranches minces, chacune étant matérialisée par un ressort lié à des éléments de dimensions variables travaillant en flexion et en cisaillement, assurant ainsi le couplage entre les tranches.

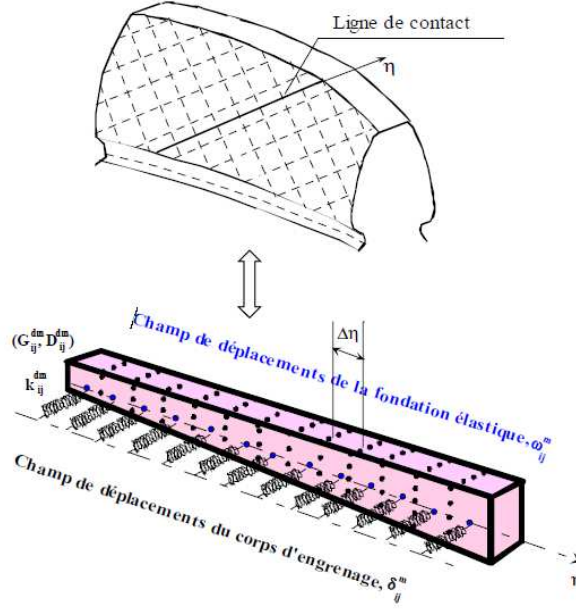


Fig. 1.10 – Modélisation d'une dent par une fondation élastique

Les rigidités des éléments de raideur, de cisaillement et de flexion, respectivement notées  $k_{ij}^{dm}$ ,  $G_{ij}^{dm}$  et  $D_{ij}^{dm}$  sont obtenues par les formules semi-empiriques, ajustées (grâce aux paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$ ) sur les résultats trouvés par des simulations éléments finis.

$$k_{ij}^{dm} = C_f k_{0ij}^m \quad (1.16)$$

$$G_{ij}^{dm} = C_f f_m(z) f_0(Z_m) \left(\frac{m_n}{4}\right)^2 k_{0ij}^m \quad (1.17)$$

$$D_{ij}^{dm} = C_f f_m(z) f_0(Z_m) \left(\frac{m_n}{4}\right)^4 k_{0ij}^m \quad (1.18)$$

avec

- $C_f = 0.8$  pour des engrenages massifs, d'après la norme ISO 6336 ;
- $k_{0ij}^m$  la raideur de WEBER et BANASCHEK déduite des relations (1.13) et (1.14) ;
- $f_m(z) = 1$  pour une denture droite et  $f_m(z) = A f_1(\alpha) + B f_2(Z_m) f_3\left(\frac{b_m}{m_n}\right) e^{-Cz/m_n}$  pour une denture hélicoïdale ;  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  étant des fonctions dépendant de la géométrie de la denture
- $z$  la coordonnée du point  $M_{ij}$  selon la largeur.

#### • Raideur globale d'engrènement :

Différentes formulations ont été proposées afin de calculer la raideur d'un couple de dent, en considérant les caractéristiques locales de cette dernière. La raideur d'engrènement globale est obtenue en considérant la somme des raideurs unitaires présentées ci-dessus sur tous les points de contact à l'instant considéré. Elle est donc intrinsèquement liée à la notion de lon-

gueur de contact. De nombreux modèles [Kuc84], [Vel93] considèrent la raideur locale comme constante, quel que soit la position du point de contact. La raideur globale d'engrènement devient alors proportionnelle à la longueur de contact et une simple fonction périodique du temps. La figure 1.11 illustre l'évolution de cette raideur globale pour des engrenages à denture droite.

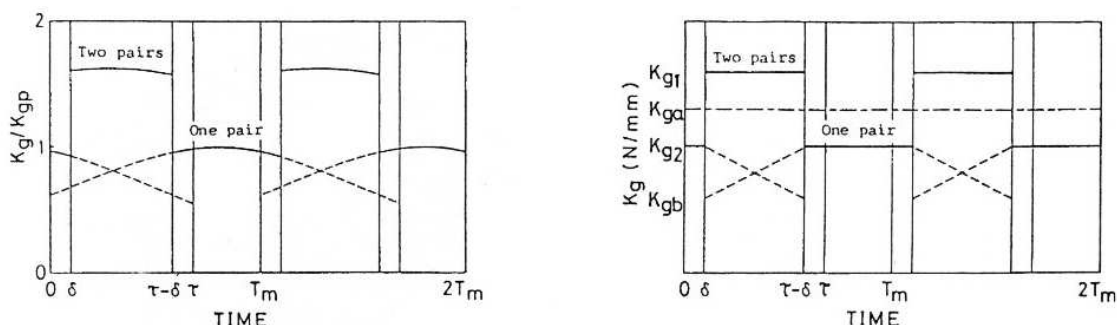


Fig. 1.11 – Raideur d'engrènement globale d'après IWATSUBO et col. [Iwa84]

Les variations de raideur au cours du temps sont grandement conditionnées par le type de denture, et particulièrement par le rapport de conduite et le rapport de recouvrement, et peuvent représenter une source d'excitation interne importante pour le système.

**Remarque :** • Pour les modèles les plus basiques, c'est-à-dire ceux qui font intervenir une raideur d'engrènement constante au cours du temps, cette dernière correspond à une moyenne temporelle de la fonction évoquée ci-dessus et se trouve grandement liée à la notion de rapport de conduite (défini comme le nombre moyen de paires de dents en prise au cours du processus d'engrènement).

## b. Les écarts géométriques

Les méthodes de fabrication ne seront pas décrites dans ce mémoire, elles sont abondamment documentées dans [Hen78] [Hen79]. Classiquement, elles débutent par une phase d'usinage ou de taillage, suivie par une phase de traitement thermique afin de donner aux dentures une résistance suffisante aux phénomènes de fatigue de surface et en sous couche [Osm12]. Enfin vient l'opération de finition. Malgré l'opération de rectification, chacune de ces étapes est une source d'erreur pour la denture qui se voit localement plus ou moins différente du profil idéal (les écarts étant moins importants à mesure que la classe de qualité augmente, et donc le temps et le coût de fabrication, augmente). Les opérations d'assemblage, de montage sont également sources d'erreurs.

### • Les écarts de forme et corrections

Les erreurs de forme apparaissent principalement lors de l'usinage. Elles sont classées en plusieurs types, dont principalement :

▪ Les erreurs de profil

Il s'agit d'écarts entre le profil théorique et le profil réel, présents sous la forme d'irrégularités de la surface, parfois d'oscillations variables.

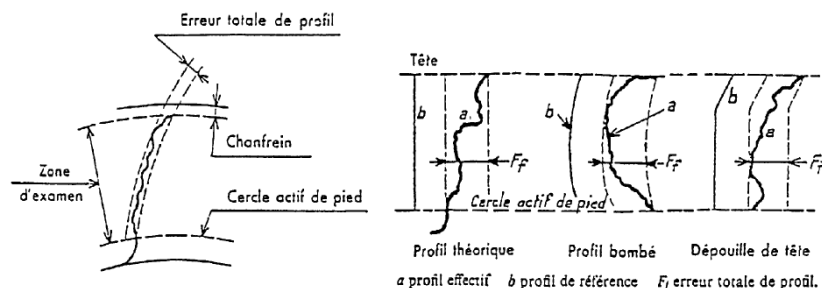


Fig. 1.12 – Erreurs de profil [Hen78]

▪ Les erreurs de pas ou erreurs de division

Elles sont définies comme l'écart entre la valeur réelle du pas considéré (pas circulaire, apparent ou réel, pas de base réel) et sa valeur théorique. On distinguera l'erreur de division individuelle de l'erreur de division cumulée, somme algébrique des erreurs individuelles.

Pour une classe d'engrenage, on donne habituellement l'erreur totale de division admissible, définie comme la variation crête-à-crête de l'erreur de division cumulée, mesurée sur un tour.

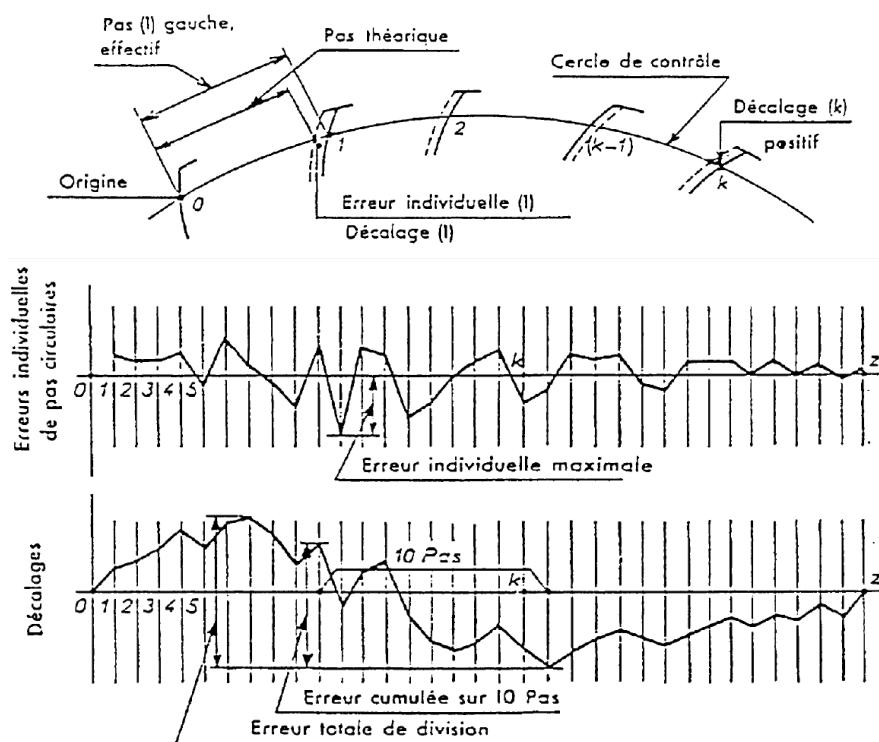


Fig. 1.13 – Erreurs de pas [Hen78]

▪ L'erreur de distorsion

Elle est définie comme l'écart de trace entre l'hélice réelle et l'hélice idéale.

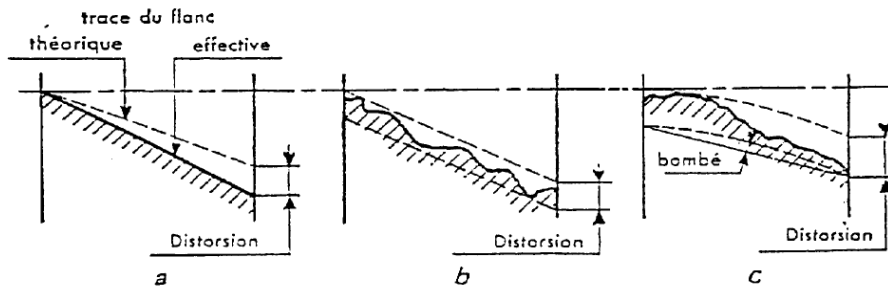


Fig. 1.14 – Erreurs de distorsion [Hen78]

▪ Les corrections de forme

On parle de corrections de forme lorsque les modifications de géométrie sont volontaires, l'objectif étant alors de modifier le chargement sur les flancs de denture et d'améliorer le comportement vibratoire.

On distinguera :

- les corrections de profil (dépouilles en tête, en pied) dont l'influence est importante sur le comportement vibratoire ;
- les corrections longitudinales, selon l'hélice dont l'objectif principal est de recentrer le chargement à l'aide de bombés et de corrections d'hélice.

▪ Les avaries de surface

Les avaries de surface sont souvent liées aux phénomènes de fatigue. Elles se présentent sous la forme de fissures ou de défauts localisés sur un nombre limité de dents et altèrent le comportement vibratoire de l'engrènement. OSMAN [Osm12] étudie leur apparition et leur interaction avec le comportement vibratoire ainsi que les phénomènes d'usure.

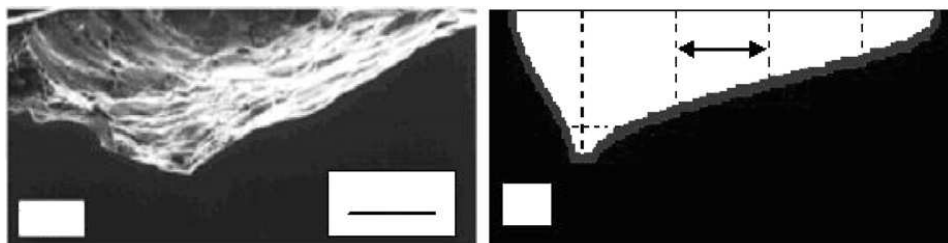
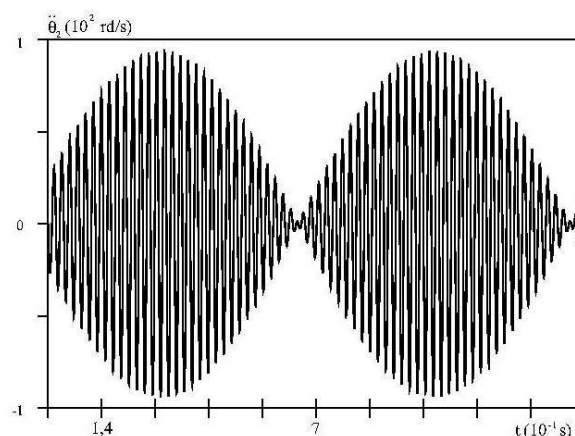


Fig. 1.15 – Comparaison des fissures expérimentales et numériques d'après OSMAN [Osm12]

- **Les écarts de position**

- Les excentricités

Les erreurs d'excentricité traduisent le fait que l'axe de rotation n'est pas coïncident avec l'axe du cercle de base du mobile. Ces défauts sont inévitables. Leurs effets sont notamment traités par SABOT et PERRET-LIAUDET [Sab 92] qui montrent qu'ils se traduisent par un phénomène de modulation d'amplitude, à la fréquence de rotation de l'arbre. Ces phénomènes sont clairement remarquables aussi bien sur les représentations temporelles (figure 1.16) que spectrales (apparition de bandes latérales).

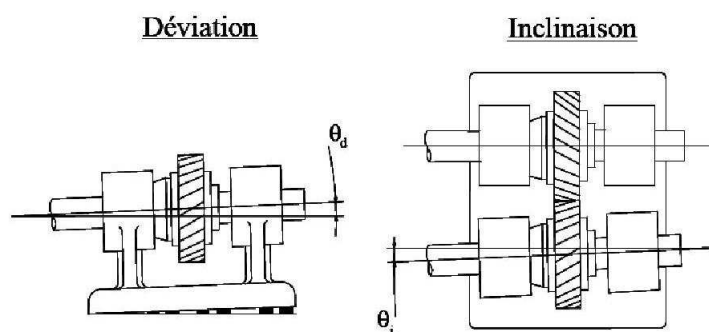


**Fig. 1.16** – Influence d'une excentricité sur l'accélération angulaire d'un arbre d'après [Sab92]

- Les mésalignements

Les mésalignements caractérisent le fait que les axes de rotation des mobiles ne sont pas parallèles. La raison peut être liée au montage du mobile sur son arbre ou bien au montage de l'arbre lui-même (jeu dans les paliers ...). Dans tous les cas on distinguera la déviation de l'inclinaison, dont les effets sont distincts :

- la déviation correspond à une rotation autour d'un axe normal à l'axe de rotation et contenu dans le plan défini par les axes de rotation théoriques ;
- l'inclinaison correspond à une rotation autour d'un axe normal à l'axe de rotation et normal au plan défini par les axes de rotation théoriques.



**Fig. 1.17** – Illustration d'une déviation et d'une inclinaison sur un réducteur [Ume86]

Les mésalignements influent sur le comportement vibratoire du système [Ume86] mais également de manière très importante sur les zones de portage et donc sur le chargement de la denture, comme nous le verrons dans le chapitre 4.

- *Le défaut d'entraxe*

Le défaut d'entraxe est également couramment rencontré dans les applications où les arbres reposent sur des paliers avec jeu. Il a tendance à modifier la géométrie de l'engrènement. MITCHELL [Mit71] et WELBOURNE [Wel79] l'ont étudié expérimentalement et ont montré son influence sur le bruit généré par une boîte de vitesse de camion.

### c. Les déformations des corps d'engrenages

L'élasticité des dentures, décrite dans les sections précédentes n'est pas l'unique source de déformation des engrenages. Les corps sont également soumis à des contraintes importantes et sont susceptibles de se déformer de manière non négligeable. Si pour les applications où les corps d'engrenages sont des roues pleines et les chargements modérés, une modélisation des corps par des disques rigides peut être suffisante [Vel93] ; dès que les géométries de corps deviennent plus élaborées, le problème de leur influence sur le comportement du système (et donc de leur modélisation) se pose. Deux principaux cas sont envisagés :

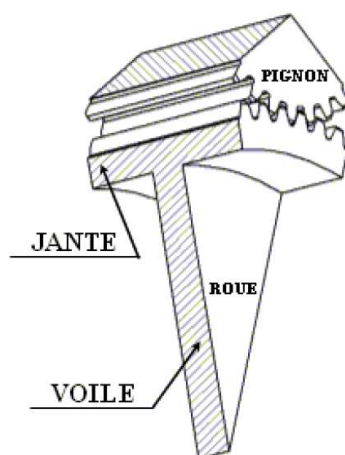
- **Cas des puissances importantes**

Dans certains types d'applications, telles que la propulsion navale, les niveaux de puissance à transmettre sont tels (parfois plus de 100 MW) que même des dentures larges et des corps de pignon massifs ne peuvent suffire à prévenir des déformations significatives. Dans de telles applications, les déformations de corps d'engrenages sont majoritairement causées par des phénomènes de torsion et de flexion des corps. Les modèles à corps indéformables [Vel961] ont alors été perfectionnés. Un des moyens les plus simples de prendre en compte ces phénomènes consiste à modéliser les corps de mobiles par des éléments de poutre de TIMOSHENKO tels que présentés dans la première partie de ce chapitre [Ajm00].

Les résultats en terme prédiction des vitesses critiques, de chargement de la denture ou encore de contrainte en pied de dents sont alors bien meilleurs. C'est ce modèle qui sera utilisé dans la modélisation du réducteur sur paliers.

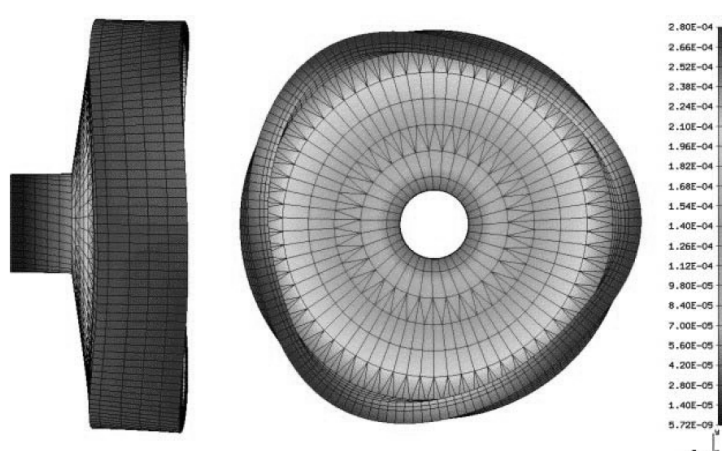
- **Engrenages légers**

Dans certaines applications, notamment celles où les contraintes de poids des éléments sont fortes, il est habituel de réduire le voile et/ou la jante de la roue à leur strict minimum [Bet06], [Bet07].



**Fig. 1.18** – *Géométrie d'une roue à voile mince*

Les effets d'un voile ou d'une jante mince sont qualitativement proches de ceux évoqués ci-dessus pour les dentures larges. La prédiction des déformations et modes propres associées à chaque fréquence est un point central dans la compréhension des phénomènes. De nombreux modèles ont été mis au point, la plupart utilisant les éléments finis : certains, très lourds [Kah922], [Vij91], avec un nombre importants de degrés de liberté ; d'autres, plus légers [Abo05], utilisent par exemple des méthodes de sous-structuration.



**Fig. 1.19** – *Déformée statique de la couronne d'un train planétaire d'après [Abo05]*

#### d. Les éléments extérieurs

Un certain nombre de grandeurs ont été introduites dans les paragraphes précédents, toutes ayant une influence sur le comportement vibratoire du système, et toutes étant directement liées à la géométrie de l'engrenage. Cependant, d'autres éléments sont susceptibles de perturber le comportement vibratoire du réducteur en fonctionnement

- **Le moteur**

La plupart des modèles rencontrés dans la littérature traite le comportement des engrenages soit d'un point de vue quasi-statique, soit dynamique en régime permanent. Très peu de modèles traitent les problèmes liés au régime transitoire. Pourtant, dans la plupart des transmissions, les vitesses de fonctionnement et/ou couples transmis sont très rarement constants. SIKA [Sik08] traite le cas d'un réducteur en présence d'acyclisme causé par des fluctuations de couple moteur et met en évidence un certain nombre d'instabilités engendrées par les phénomènes transitoires (pertes de contact avec chocs avant et rétro autrement appelés « backlash » et déjà abordés par KAHRAMAN et SINGH [Kah90] notamment)

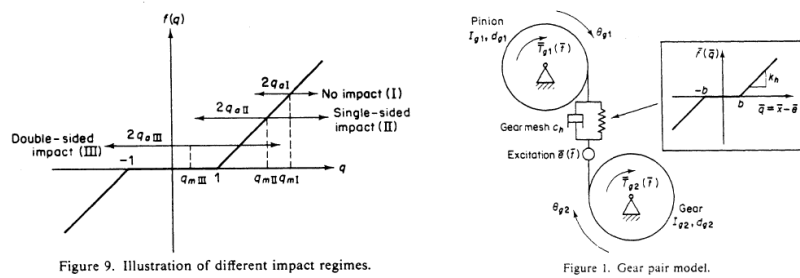


Fig. 1.20 – Modèle de réducteur en régime transitoire d'après [Kah90]

- **Les lignes d'arbres**

Les couplages existant entre le contact à la denture et le comportement vibratoire des lignes d'arbres a été pressenti assez tôt mais ce n'est qu'à partir de la fin des années 80 que les couplages avec la dynamique de ligne d'arbre ont été clairement mis en évidence. VELEX a eu l'idée de mailler les lignes d'arbres à l'aide d'éléments finis de poutre, couplés à un modèle d'engrènement à paramètres concentrés [Vel88]. D'autres auteurs [Fur91] ont, eux, fait le choix de maillages éléments finis tridimensionnels pour les lignes d'arbres ; mais ces modèles s'avèrent lourds en terme de temps de calcul au regard du gain en précision.

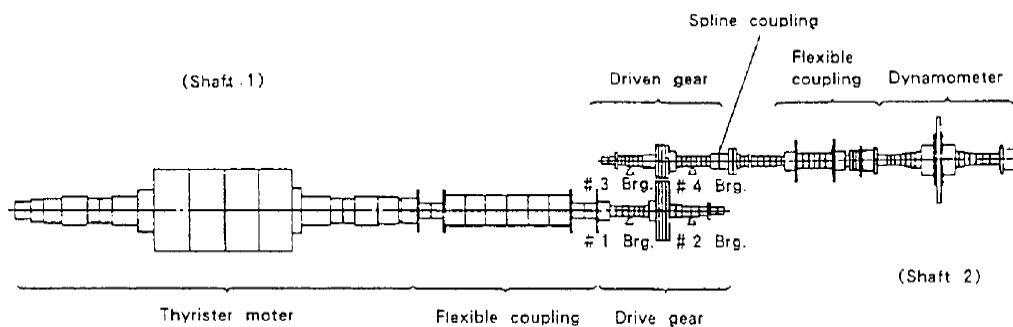


Fig. 1.21 – Modèle éléments finis de réducteur et lignes d'arbres d'après [Fur91]

L'influence des lignes d'arbre a été étudiée par UMEZAWA et col. [Ume96] qui ont montré que le comportement du réducteur est fortement influencé par les lignes d'arbres. BARD

[Bar95] a, quant à lui, mis en évidence le rôle que jouent les lignes d'arbres dans l'erreur de transmission, (grandeur qui sera évoquée par la suite) et notamment le rôle déterminant de la technique et du point de mesure de cette grandeur.

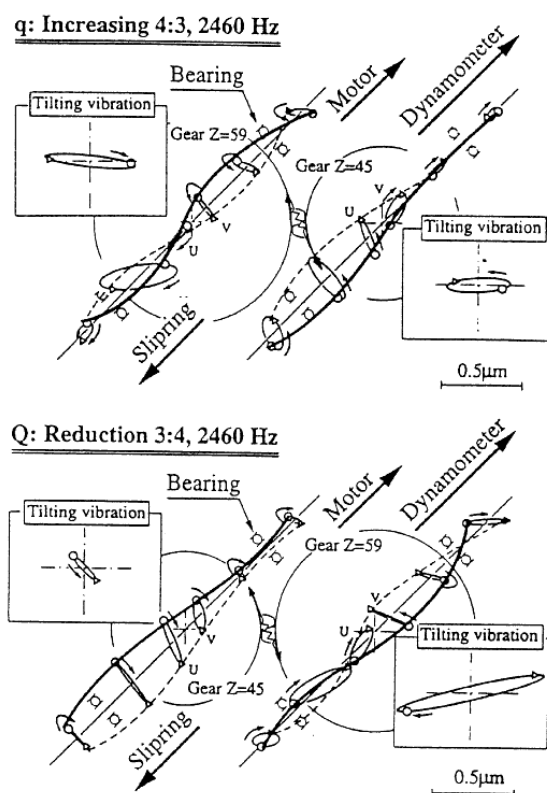
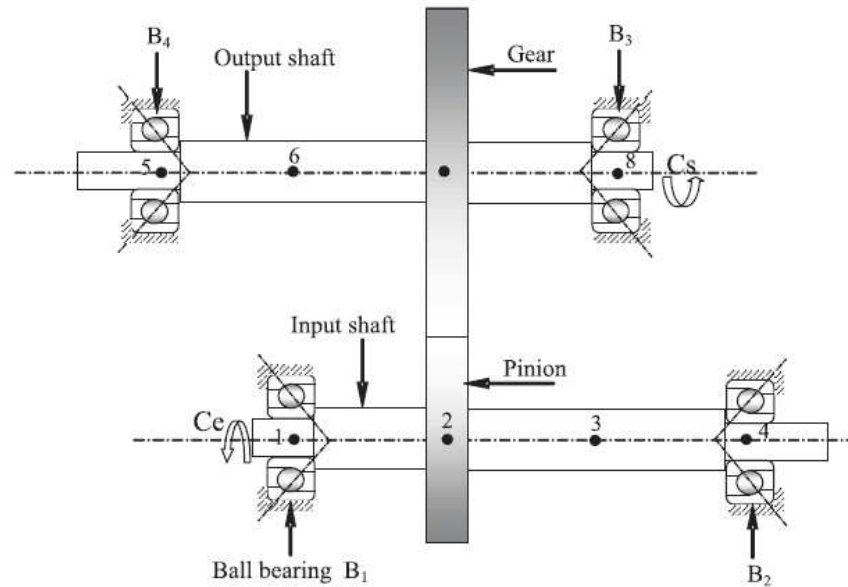


Fig. 1.22 – Déformée modale d'après UMEZAWA [Ume96]

- **Les paliers**

Tout comme les arbres, les supports de ces derniers jouent un rôle déterminant dans le transfert des vibrations à l'environnement mécanique d'un réducteur (ou multiplicateur). En fonction des applications, les paliers peuvent être à roulement ou lisses. Les paliers à roulements, qu'ils soient à billes, à aiguilles ou à rouleaux coniques sont très fréquemment employés dans les applications où le coût prime sur la discrétion, telles que l'automobile. Quelques modèles d'interactions entre engrènement, lignes d'arbres et paliers à roulement ont vu le jour, notamment [Lah00] qui calcule les distributions d'efforts sur les éléments roulants et leur influence sur la dynamique de l'engrènement. L'influence des caractéristiques des roulements est mise en évidence (nombre d'éléments roulants, précharge), tout comme leur positionnement et les rigidités de carter. ABBES et col. [Abb11] ont récemment étudié ces interactions en intégrant les ondulations des roulements à bille dans leur modèle.



**Fig. 1.23** – *Modèle de réducteur hélicoïdal sur paliers à roulement d'après ABBES et col. [Abb11]*

Plusieurs modèles d'engrenages incluant des paliers lisses ont été proposés mais la plupart ne prend pas en compte les non linéarités du contact à la denture ou le problème de contact aux paliers. C'est notamment le cas de KAHRAMAN et col. [Kah921] qui, dès le début des années 90, modélisaient l'engrènement par un unique élément de type « raideur-amortisseur » situé dans le plan d'action alors que les paliers étaient modélisés à l'aide des classiques coefficients dynamiques.

Plus tard, CHEN et col. [Che98] puis THEODOSSIADES et col. [The01] ont utilisé un modèle d'engrènement similaire couplé avec les non linéarités des paliers lisses grâce à des modèles de palier court modifiés.

A l'inverse, BAUD et VELEX [Bau98], [Bau02] ont simulé les paliers lisses à l'aide de coefficients dynamiques alors que le contact entre la denture était décrit de manière précise à l'aide de raideurs distribuées sur la largeur de contact et à l'aide d'un algorithme de contact dédié. Ces travaux sont aussi bien numériques qu'expérimentaux, les derniers seront d'ailleurs largement utilisés dans le chapitre 3 comme base de comparaison avec nos calculs

Plus récemment, des modèles prenant en compte des non linéarités de denture et de palier ont vu le jour. BAGUET et VELEX [Bag05] ont mis en évidence un nombre important de couplages, sur un système à géométrie simple, à l'aide d'un modèle de palier court, avant que ces travaux ne soient repris par BAGUET et JACQUENOT [Bag10] qui y ont intégré un modèle de palier de longueur finie basé sur une méthode de résolution multigrille des équations de la lubrification [Ven00]. Les couplages ont ensuite été affinés par FARGERÉ et VELEX sur des engrenages de denture large, et avec des géométries de systèmes et de dentures variées. Tout d'abord un modèle sur palier court [Far11] a été présenté avant qu'un modèle plus complet avec prise en compte d'effets thermiques dans les paliers et des conditions d'alimentation ne soit élaboré [Far12].

### 1.2.2. Grandeurs caractéristiques

La dynamique des engrenages est un domaine particulier et l'analyse des résultats de simulation ou de mesure s'appuie bien souvent sur des grandeurs qui lui sont propres.

#### a. L'erreur de transmission

L'erreur de transmission est une notion qui a été introduite par HARRIS en 1958 [Har58]. Elle est définie comme l'écart de position de la roue menée, pour une position donnée du pignon, par rapport à la position qu'elle devrait occuper si les engrenages étaient rigides et géométriquement parfaits. Elle est connue pour être une caractéristique fondamentale dans l'étude d'un réducteur à engrenages ; aussi bien en régime statique que dynamique. Si elle est souvent exprimée sous la forme d'une variation de position angulaire de la roue  $\delta\theta$ , WELBOURN [Wel70], Mark [Mar78], [Mar79] et ÖZGÜVEN [Ozg88] la transforment en un déplacement relatif,  $\xi$ , dans le plan d'action théorique :

$$\xi = R_{b2}\delta\theta \quad (1.19)$$

avec  $R_{b2}$  le rayon de base de la roue.

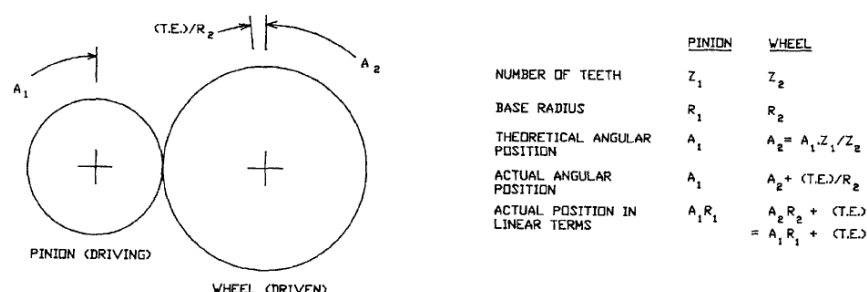


Fig. 1.24 – Définition de l'erreur de transmission [Mun89]

Selon les applications et les conditions, on distingue :

- l'erreur de transmission statique, ou quasi-statique, sans charge, également appelée *erreur cinématique* ;
- l'erreur de transmission statique, ou quasi-statique, sous charge ;
- l'erreur de transmission dynamique.

Diverses techniques de mesure ont été développées : BLANKENSHIP et KAHRAMAN [Bla96] utilisent des accéléromètres, alors que REMOND [Rem91] et GREGORY et col. [Gre641], [Gre642] utilisent des codeurs optiques et que MUNRO [Mun89] et ROSINSKI [Ros94] utilisent un système interférométrique.

- **Erreur cinématique**

L'erreur cinématique correspond à l'erreur relevée sur un couple de roues ne transmettant aucune puissance et pour une vitesse quasi nulle. Elle correspond alors aux déviations de position créées uniquement par les défauts de fabrication ou de montage et relève de la métrologie des engrènements, constituant ainsi un bon indicateur de sa géométrie.

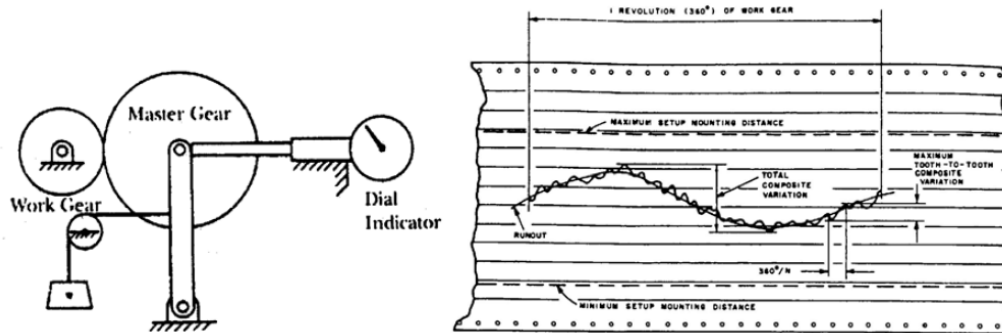


Fig. 1.25 – Erreur de transmission quasi statique sans charge d'après DRAGO [Dra88]

- **Erreur quasi-statique sous charge**

Par rapport à l'erreur cinématique, l'erreur quasi-statique sous charge, notée  $TE_s$ , tient en plus compte des déflexions de dentures, et des composants extérieurs tels que les arbres, paliers, etc, lors de la transmission de la charge.

GREGORY et col. [Gre641], [Gre642] et LIN et col. [Lin891], [Lin892] notamment l'utilisent pour étudier l'effet d'écarts géométriques (erreurs ou modifications de profil) alors que VELEX et AJMI [Vel962] démontrent que l'erreur de transmission quasi-statique sous charge est représentative des sources d'excitation dues à l'engrènement (à certaines non linéarités près).

Dans de nombreux modèles, [Ozg88], [Mun70], l'erreur de transmission quasi-statique sous charge est directement introduite comme source d'excitation.

- **Erreur dynamique**

A la différence de l'erreur quasi-statique sous charge, l'erreur dynamique tient compte des effets inertiels de la transmission et représente une image du comportement vibratoire et acoustique du réducteur en fonctionnement. Ce paramètre permet notamment de mettre en évidence les phénomènes de séparation de denture, aussi bien expérimentalement [Kub78] que numériquement [Kah91].

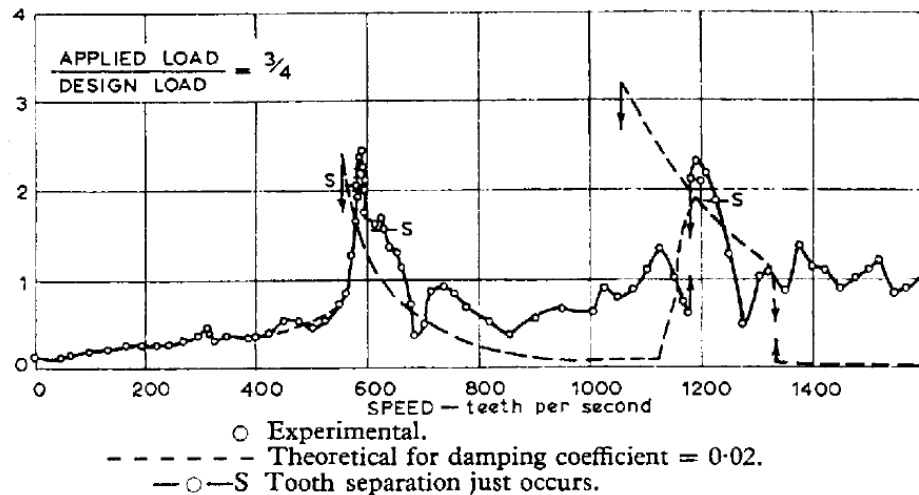


Fig. 1.26 – Réponses expérimentales de GREGORY et col. [Gre641]

A partir des années 90, une succession de modèles a été développée dont [Vel91] et [Vel96]. Ces derniers sont novateurs dans le sens où ils sont fondés sur une description locale du contact entre dentures. L'erreur de transmission devient alors un résultat des simulations dynamiques, contrairement à la majorité des modèles antérieurs pour lesquels l'erreur de transmission était une variable d'entrée.

En définitive et au regard de la littérature, il semble clair que l'erreur de transmission représente un indicateur intéressant du comportement vibratoire d'un train d'engrenages, et particulièrement pour des dentures peu larges. En revanche, les déformations de corps, pour des dentures larges, ainsi que des autres organes tels que les arbres et paliers se retrouvent englobées dans ce concept. Il convient donc de garder la plus grande prudence lors de son utilisation dans ce contexte.

## b. Chargement de la denture et coefficients dynamiques

D'autres paramètres sont parfois utilisés par les auteurs comme points de comparaisons, propres aux contacts entre dentures. Ils donnent tous une image du chargement dynamique et s'expriment sous la forme d'un rapport entre la grandeur en question dans le cas dynamique et la même grandeur dans le cas statique pris comme référence. Suivant que l'on parle d'effort total transmis par les dentures ou par un couple de dent en particulier, de contrainte en pied de dent ou de répartition de charge, on distinguera plusieurs coefficients. Ces coefficients sont très utiles lors d'études paramétriques, en particulier l'étude de leurs maxima au cours du temps qui représente un point de comparaison assez fiable.

Il est à noter qu'implicitement, lorsque, dans des conditions de fonctionnement données, on ne donne qu'une valeur de coefficient, il s'agit de ce maximum.

- **Coefficient dynamique global**

C'est le coefficient le plus fréquemment rencontré. Il est défini comme le rapport entre le chargement dynamique global transmis par l'engrènement (c'est-à-dire l'intégrale du chargement de la denture sur la surface de contact totale, appartenant éventuellement à plusieurs dents) et le chargement transmis dans le cas statique, ou quasi-statique. Ce coefficient a d'abord été évalué sur des engrenages à dentures droites, sans pertes de contact, grâce à des formules empiriques [Buc31], [Tup58].

Les effets des variations temporelles de raideur d'engrènement, de masse, d'inertie et les contributions d'écarts géométriques n'ont été introduits que plus tard par HOUSER et SEIREG [Hou70], [Sei70] sur des engrenages droits ou hélicoïdaux. KUBO [Kub78] a présenté de nombreux résultats expérimentaux et analytiques souvent utilisés comme points de comparaison pour les modèles futurs.

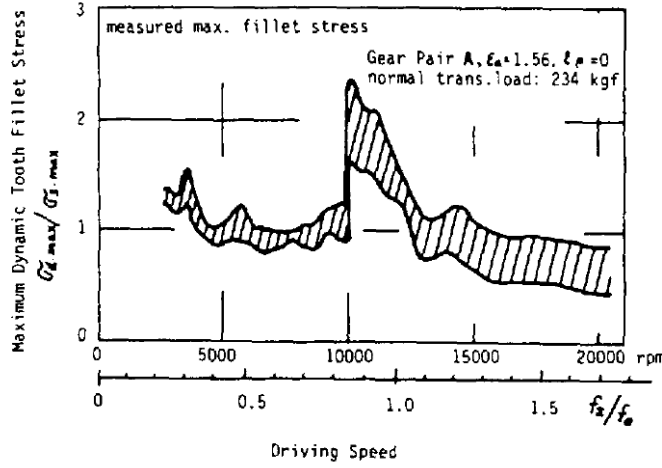


Fig. 1.27 – Courbe de réponse dynamique d'après KUBO [Kub78]

Nous nous intéresserons principalement au maximum de cette grandeur :

$$\mathcal{R} = \max \left( \frac{F_{eng}(t)}{\frac{C_m}{R_{b1} \cos \beta_b}} \right) \quad (1.20)$$

où  $F_{eng}(t)$  est la charge totale transmise par l'ensemble des points de contact à l'instant  $t$ ,  $C_m$  le couple moteur,  $R_{b1}$  le rayon de base du pignon et  $\beta_b$  l'angle d'hélice.

- **Coefficient dynamique local**

Le coefficient dynamique local est propre à un couple de dents particulier, étant donné que les écarts de forme varient d'une dent à l'autre. Il est défini comme le rapport entre le chargement dynamique transmis par un couple de dent  $N$  donné (c'est-à-dire l'intégral du charge-

ment de la denture sur la surface de contact d'une dent en question, du pignon) et le chargement transmis dans le cas statique, ou quasi-statique.

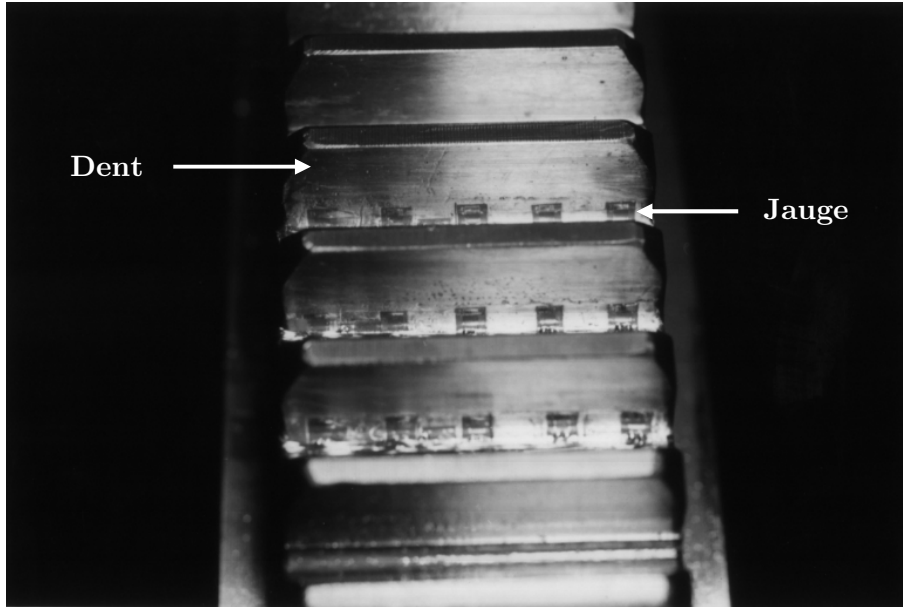
$$\mathcal{R}_N = \max \left( \frac{F_{eng N}(t)}{\frac{C_m}{R_{b1} \cos \beta_b}} \right) \quad (1.21)$$

Ce coefficient, bien souvent calculé numériquement, peut représenter une alternative au calcul de la contrainte adimensionnée en pied de dent.

**Remarque :** • *Par définition, il est possible de trouver des valeurs de  $\mathcal{R}_N$  inférieures à 1, principalement dans le cas de dentures hélicoïdales.*

- **Contrainte en pied de dent adimensionnée**

La contrainte en pied de dent a aussi été étudiée par KUBO [Kub78] et représente une grandeur expérimentalement très accessible permettant de qualifier quantitativement le chargement subi par une dent  $N$  donnée. BAUD [Bau98] [Bau02] a notamment mené une campagne d'essai sur un réducteur en dentures droites et hélicoïdales en s'intéressant à la contrainte en pied de dent adimensionnée. Comme représenté sur la figure 1.28, les jauges sont collées à différentes positions sur la largeur de denture permettant de mettre en évidence des différences de comportement selon le point de mesure dans le cas des dentures hélicoïdales.



**Fig. 1.28** – *Mesure de la contrainte en pied de dent d'après BAUD [Bau98]*

Nous prendrons la définition suivante de la contrainte adimensionnée en pied de dent :

$$\Sigma_{Ni} = \max \left( \frac{\sigma_{Ni}(t)}{\sigma_{REF}} \right) \quad (1.22)$$

où  $\sigma_{Ni}$  est la contrainte mesurée, ou calculée, au pied, c'est-à-dire au point où la tangente à la trochoïde de raccordement forme un angle de  $20^\circ$  avec l'axe de symétrie de la dent, de la  $i^{\text{ème}}$  jauge de la  $N^{\text{ème}}$  dent. BAUD a fait le choix de mesurer  $\sigma_{REF}$  comme la contrainte en pied de dent en configuration statique, c'est-à-dire lorsque la roue est bloquée.

- **Coefficient dynamique de répartition longitudinale de charge**

Les grandeurs évoquées ci-dessus permettent de rendre compte du niveau de chargement des dentures, mais plus difficilement de sa répartition, du moins quantitativement (cette dernière pouvant toutefois être évaluée par la mesure de contrainte en pied de dent). La norme ISO 6336 introduit un coefficient de répartition longitudinale de chargement,  $K_{H\beta}$ , qui se prête très bien à ce type de comparaisons et sera utilisé lors des études paramétriques. La norme ISO 6336 le définit de la manière suivante :

$$K_{H\beta} = \frac{\text{Charge maximale par unité de largeur de denture}}{\text{Charge moyenne par unité de largeur de denture}} \quad (1.23)$$

Il s'agit donc de comparer la valeur du chargement linéique maximale à la valeur correspondant au chargement linéique équitablement réparti sur la longueur de contact moyenne. Numériquement son calcul dépend fortement du modèle d'engrenages utilisé

### 1.2.3. Quelques modèles d'engrenages et phénomènes de base

Un nombre très important de modèles de simulation du comportement statique ou dynamique d'engrenages a vu le jour depuis plus de cinquante ans. Si les premiers modèles sont assez basiques, purement torsionnels, voire à raideur d'engrènement constante, les contributions plus récentes tiennent compte des conditions de contact, couplages tri-dimensionnels, de la déformabilité des corps voire même des éléments extérieurs (arbres, paliers, *etc*).

#### a. Modèles à raideur d'engrènement constante

Avec de tels modèles, la raideur d'engrènement est considérée comme constante, au cours du temps, les excitations étant introduites par l'intermédiaire de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge [Mun70], [Ozg88]. Il résulte bien souvent de ces modèles des systèmes d'équations différentielles à coefficients constants du type :

$$[M] \ddot{\mathbf{X}} + [C] \dot{\mathbf{X}} + [K] \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (1.24)$$

Ces systèmes sont particulièrement adaptés à des résolutions analytiques, pour peu que l'expression de la fonction  $\mathbf{F}(t)$  soit simple. C'est notamment ce qu'ont réalisé CAÏ et HAYASHI [Caï92] (fig 1.29) et KAHRAMAN [Kah93].

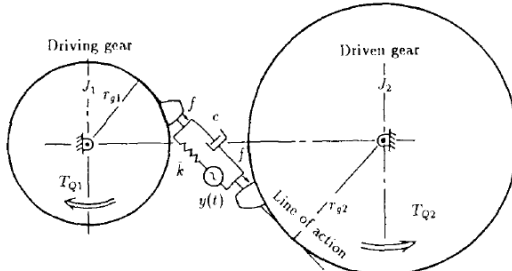


Fig.3 Linear model of vibration system

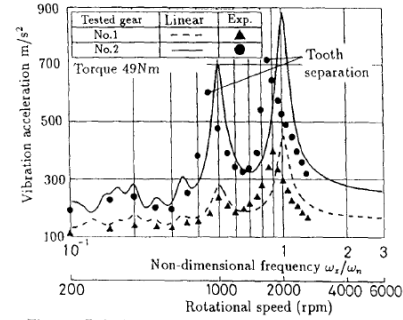


Fig.14 Relation between acceleration amplitude and the rotational speed of driving gear (Comparison between experiment and linear equation)

Fig. 1.29 – Modèle linéaire de CAÏ et HAYASHI [Caï92]

Ces modèles assurent un couplage entre les vibrations torsionnelles du pignon et de la roue, et sont assez bien adaptés à des analyses modales, telles que les a réalisées KAHRAMAN [Kah93] sur des engrenages à dentures hélicoïdales.

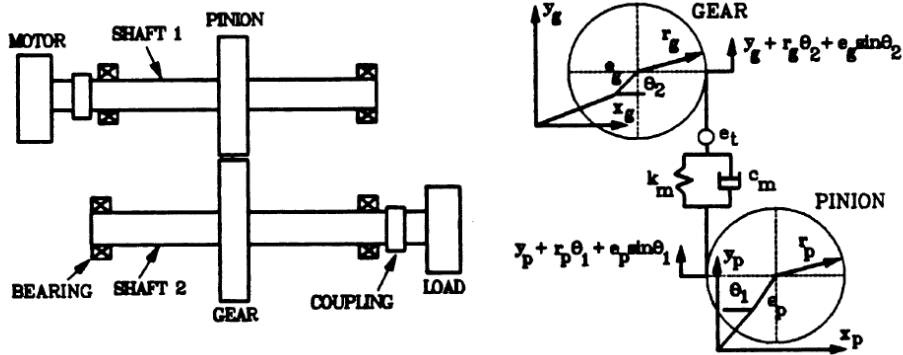


Fig. 1.30 – Modèle de SENER et ÖZGÜVEN [Sen93]

La prise en compte des excitations dues à l'engrènement passe bien souvent par une introduction via l'erreur de transmission. C'est ce qu'ont réalisé SENER et ÖZGÜVEN [Sen93] dans leur modèle tridimensionnel, les arbres étant modélisés par des éléments de poutre.

Ces modèles possèdent l'avantage d'avoir des solutions exactes mais ignorent largement le problème de contact.



tuée à l'aide d'un schéma de RUNGE-KUTTA ou de NEWMARK (éventuellement amélioré pour les hautes fréquences, voir [Vel961] avec l'emploi d'un schéma de HILBER HUGHES TAYLOR)

### • Phénomènes d'instabilité de denture

Les équations du mouvement décrites en (1.25) sont habituellement appelées équations de HILL et ont fait l'objet de nombreux développements mathématiques. Citons notamment ceux de FLOQUET [Flo83] qui a démontré, outre l'absence de solutions analytiques, l'existence possible de zones d'instabilité lorsque les fonctions  $C(t)$  et  $K(t)$  sont périodiques, ce qui est notre cas ; on parle alors d'équations de MATHIEU-HILL. Les travaux sont basés sur l'étude d'un cas particulier, appelé équation de MATHIEU [Bol64] correspondant au système conservatif décrit par :

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}(t)] \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (1.26)$$

Le problème mathématique est également illustré sur un modèle d'engrènement torsionnel [Gre642] avec raideur sinusoïdale. Les zones d'instabilité sont identifiées et correspondent aux vitesses de rotations telles que la pulsation d'engrènement  $\Omega_m$  est liée à la fréquence propre du système  $\Omega_0$  par la relation :

$$\Omega_m = \frac{2\Omega_0}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1.27)$$

Bien que, dans la réalité, les instabilités soient limitées par des phénomènes de séparation de dentures, BENTON et SEIREG [Ben81] montrent l'importance de l'amortissement qui tend à réduire les zones d'instabilité.

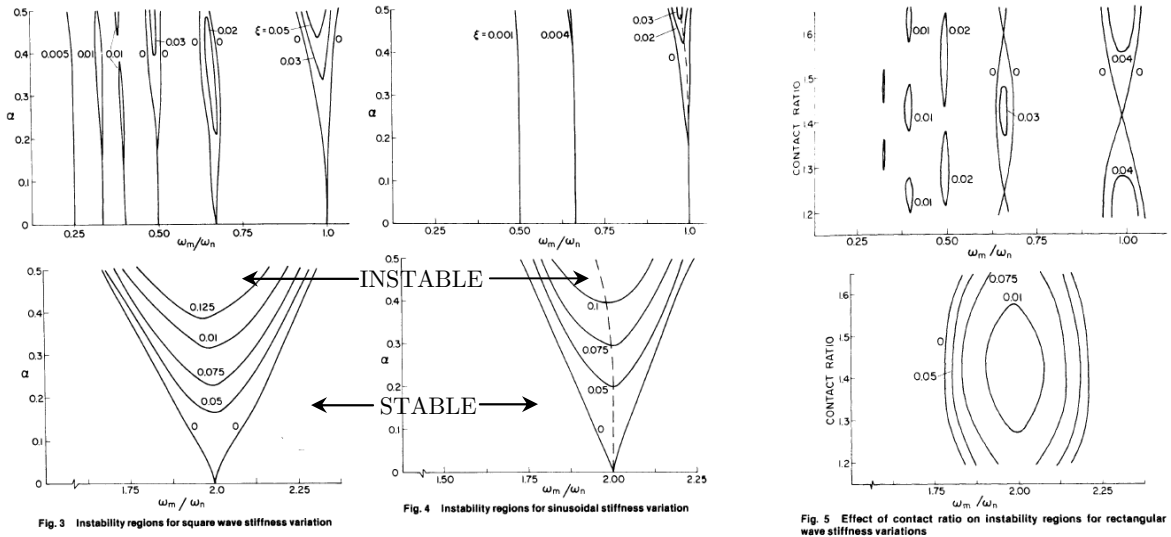


Fig. 1.32 – Influence de l'amortissement sur les zones d'instabilité d'après BENTON et SEIREG [Ben81]

VELEX [Vel88] a également étudié ces équations, dans le cas d'un modèle tridimensionnel d'engrenages, et arrive notamment aux conclusions suivantes :

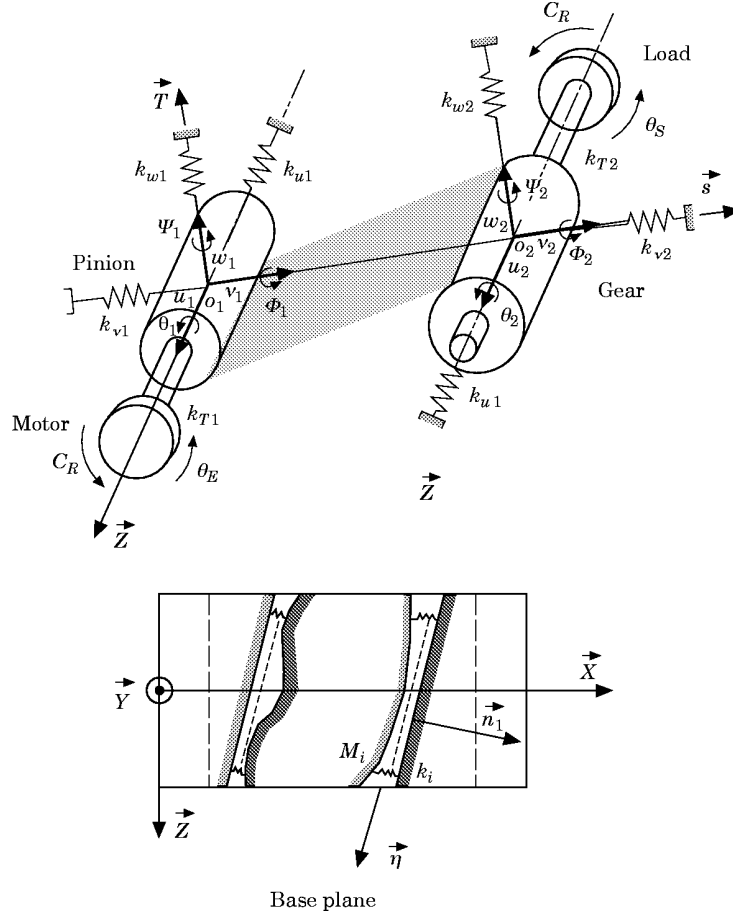
- certaines formes de raideur d'engrènement sont plus dangereuses que d'autres (typiquement une raideur en créneau provoque des zones d'instabilité plus vastes qu'une raideur sinusoïdale) ;
- l'amortissement a un effet stabilisant : son augmentation tend à supprimer les zones d'instabilité basse-fréquence et à réduire les zones haute-fréquence ;
- le rapport de conduite a une influence sur la taille de ces zones.

### **c. Modèles non linéaires et description du contact**

Si les modèles précédemment évoqués permettent de mettre en avant des phénomènes intéressants, ils n'offrent pas une description très détaillée du contact entre les dents. En effet, ceux-ci sont basés sur une raideur d'engrènement périodique, relativement arbitraire. Dans le meilleur des cas, la raideur d'engrènement est proportionnelle à la longueur de contact théorique, c'est-à-dire calculée en supposant qu'à chaque instant toutes les paires de dents potentiellement en contact le sont.

#### **• Un premier modèle avec description du contact**

VELEX [Vel88] a proposé un modèle dans lequel la raideur d'engrènement n'est plus une donnée du problème mais une solution. Son modèle, été repris et abouti dans [Vel961] afin de pouvoir tenir compte de nombreux aspect locaux, ce qui est relativement novateur pour l'époque. Le modèle en question, bien que tridimensionnel, reste assez léger en raison de son nombre limité de degrés de liberté. Il est basé sur une modélisation hybride d'une transmission : les arbres sont modélisés par des éléments finis de poutre de TIMOSHENKO à 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud, prenant en compte les effets de traction-compression, flexion et torsion. Le modèle d'engrenages est à paramètres concentrés : les corps d'engrenages, tout comme le moteur et le frein sont modélisés par des disques indéformables à 6 degrés de liberté (possédant donc uniquement des caractéristiques massiques et inertielles). Les corps sont liés entre eux par une série de raideurs, notées  $k_i$ , et associées à chaque point de contact potentiel, et réparties dans le plan d'action (figure 1.33). Les vibrations du système sont envisagées au voisinage d'un état de référence défini comme étant le mouvement de corps rigide de système. Il est de plus supposé que le plan d'action reste inchangé au cours du temps et n'est pas modifié par les éventuels écarts de forme de la denture.



**Fig. 1.33** – *Modèle d'engrenages tridimensionnel à paramètres concentrés d'après VELEX et MAATAR [Vel961]*

Le modèle est novateur dans le sens où il permet de prendre en compte la géométrie locale du contact et les défauts les plus couramment rencontrés :

- les défauts de positionnement ;
- les écarts de forme et corrections.

Ces derniers sont modélisés comme des erreurs par rapport à la géométrie parfaite. Basée sur une discrétisation du profil de chaque dent, la séparation initiale  $\delta e(M)$  est calculée en chaque point  $M$  comme la différence des écarts du pignon et de la roue ; eux même calculés comme la superposition de diverses contributions (erreurs de profil, de positionnement, excentricités...).

La construction de l'élément de liaison entre les corps est basée sur le calcul de la déflexion normale  $\Delta(M)$  en chaque point ; celle-ci est équivalente au rapprochement normal par rapport à la configuration des corps rigides moins la séparation initiale causée par les modifications et erreurs de forme  $\delta e(M)$ , qui est mise sous la forme matricielle :

$$\Delta(M) = \mathbf{V}(M)^t \mathbf{q} - \delta e(M) \quad (1.28)$$

où  $\mathbf{V}(M)$  est un vecteur de structure tenant compte de la géométrie et  $\mathbf{q}$  est le vecteur des degrés de liberté.

L'idée est ensuite de calculer l'énergie de déformation de chaque point de contact potentiel, de sommer toutes ces énergies et appliquer les équations de LAGRANGE. Les calculs, détaillés dans [Vel961] aboutissent à :

- une matrice raideur  $[\mathbf{K}_G(t, \mathbf{q})] = \int_{L(t)} k(M) \mathbf{V}(M) \mathbf{V}(M)^t dM$
- un terme source  $\mathbf{F}_G(t, \mathbf{q}) = \int_{L(t)} k(M) \delta e(M) \mathbf{V}(M) dM$

Ces termes sont dépendants du temps car ils sont calculés par intégration sur la longueur instantanée de contact  $L(t)$  qui dépend du temps, à cause du défilement des lignes de contact sous l'effet du mouvement de corps solide du pignon et de la roue.  $k(M)$  est calculé par les méthodes décrites dans le paragraphe 1.2.1.a et dépend de la position sur les profils, et par conséquent introduit également une dépendance avec le temps.

L'intérêt d'un tel modèle étant d'analyser le contact en chaque point (aux approximations de discrétisation près), il est possible de distinguer les points faisant effectivement partie du contact (ceux qui se sont rapprochés sous l'effet des déformations, c'est-à-dire vérifiant  $\Delta(M) \leq 0$ ) de ceux ne faisant plus partie du contact (ceux qui se sont éloignés ou pas rapprochés suffisamment sous l'effet des déformations, c'est-à-dire vérifiant  $\Delta(M) > 0$ ), et donc n'intervenant plus dans la longueur de contact.

Cette vérification et réactualisation de la longueur de contact (et de toutes les grandeurs qui en dépendent) est effectuée, à chaque pas de temps, à l'aide d'un test de convergence en pénétration et d'un test de convergence en chargement en chaque point (afin de vérifier, à une itération donnée, les points exclus lors des précédentes itérations). Cet algorithme de contact est utilisé pour traiter la non linéarité due au contact à la denture et doit être couplé à un schéma d'intégration temporelle (H.H.T. dans ce cas) afin de résoudre les équations du mouvement qui se mettent sous la forme d'un système d'équations différentielles non linéaires :

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}(t, \mathbf{X})] \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (1.29)$$

AJMI et VELEX [Ajm00], [AjmVel05] ont ensuite étendu ce modèle aux engrenages larges, transmettant des chargements importants et dont les corps se déforment de manière non négligeable. Ces travaux seront largement repris dans la construction du modèle présenté dans le chapitre 2.

**Remarque :** • *Dans ces modèles, l'amortissement (structurel pour les arbres ou visqueux pour le contact) est bien souvent introduit à posteriori dans la matrice  $[\mathbf{C}]$ , par l'utilisation d'un amortissement proportionnel (type  $[\mathbf{C}] = \alpha [\mathbf{M}] + \beta [\mathbf{K}]$ , [Vel88]) ou modal [Vel961], [Ajm00].*

En conclusion, l'engrènement représente une source d'excitation importante dont le traitement de manière précise implique des non linéarités d'un point de vue modélisation, nécessitant le développement d'outils spécifiques.

### 1.3. Les paliers, un support actif

Indépendamment du problème du comportement du réducteur, celui des paliers est une préoccupation majeure pour les fabricants de machines tournantes. Dans les transmissions « haute-puissance » avec de fortes contraintes acoustiques, les paliers hydrodynamiques sont couramment utilisés pour supporter les lignes d'arbres. Le paragraphe ci-dessous a pour vocation à présenter les phénomènes et équations de base qui régissent le comportement de ce type de paliers. Ces dernières seront appliquées aux paliers circulaires ; les autres géométries de paliers pouvant être traitées de façon très similaire.

#### a. Principes, hypothèses et équations de base de la lubrification

- **Equation de la lubrification**

Un palier lisse est composé de deux organes mécaniques, un arbre tournant et un coussinet, fixe dans notre cas ; tous deux étant séparés par un film d'huile. La charge appliquée à l'arbre en rotation conduit à la non coïncidence des centres de l'arbre et du coussinet, appelée excentricité, caractérisée par son rapport d'excentricité  $\epsilon = \frac{OO'}{c}$ , où  $O$  est le centre du coussinet,  $O'$  le centre de l'arbre et  $c$  est le jeu radial du palier. Cette position a pour effet de créer un convergent, de telle sorte que le fluide entraîné par la rotation de l'arbre subisse une pression hydrodynamique. L'équilibre entre ces forces de pression et le chargement conduit l'arbre à trouver une position d'équilibre.

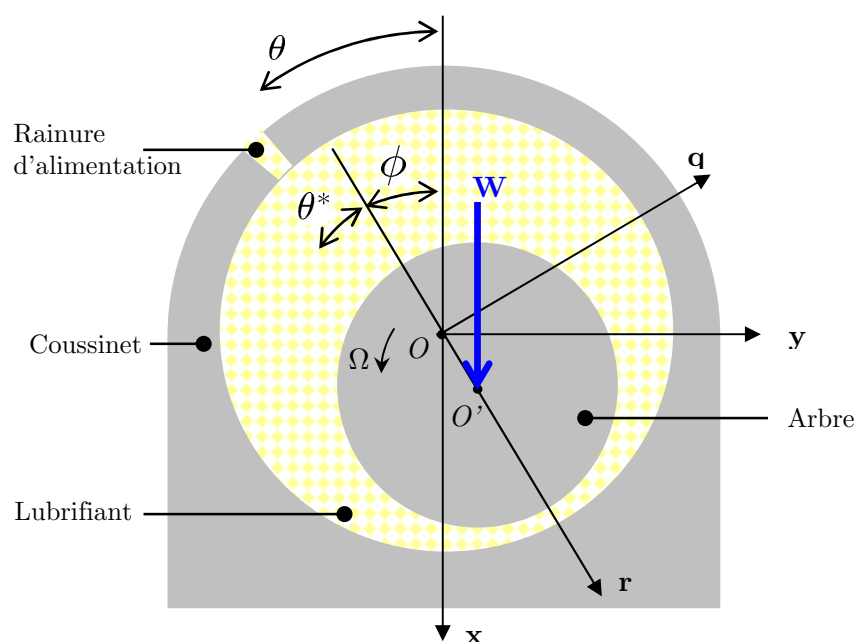


Fig. 1.34 – Schématisation d'un palier lisse

Le comportement du fluide séparant l'arbre du coussinet est régi par les équations de NAVIER-STOKES. La résolution de ces équations est un problème assez lourd, et moyennant un certain nombre d'hypothèses, rappelées ci-dessous, elles peuvent être réduites à une équation, appelée équation de REYNOLDS [Pin71] (1.29), (1.30) liant le champ de pression dans le fluide aux variables de positionnement et vitesse de l'arbre (ainsi qu'aux caractéristiques des paliers et du fluide).

Les hypothèses associées à l'équation de REYNOLDS sont :

- une faible épaisseur du film fluide devant les dimensions du contact ;
- un milieu continu (la zone de rupture étant considérée comme un mélange homogène de fluide et de gaz) ;
- un fluide newtonien ;
- un régime d'écoulement laminaire ;
- l'absence de glissement entre le fluide et les parois ;
- des forces d'inertie négligeables.

En ajoutant les hypothèses de viscosité, masse volumique et température de lubrifiant constantes, l'équation de REYNOLDS s'écrit dans le repère  $(\epsilon; \phi)$ :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \left( \left( \Omega - 2\dot{\phi} \right) \frac{dh}{d\theta^*} + 2c\dot{\epsilon} \cos \theta^* \right) \quad (1.30)$$

Et dans le repère  $(x; y)$  :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \left( \Omega \frac{dh}{d\theta} + 2(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \right) \quad (1.31)$$

avec  $\theta = \theta^* + \phi$ .

Dans le cas statique, les termes dépendant du temps dans le membre de droite sont annulés.

#### • Conditions limites

Le calcul du champ de pression nécessite la résolution de l'équation de REYNOLDS, sur la surface du palier. Les conditions limites sur la pression s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} - \text{selon } z : \quad & p\left(\theta; z = \frac{L}{2}\right) = P_1; \quad p\left(\theta; z = -\frac{L}{2}\right) = P_2, \quad \forall \theta \\ - \text{selon } \theta : \quad & p(\theta = 0, z) = p(\theta = 2\pi, z), \quad \forall z \end{aligned} \quad (1.32)$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont les pressions extérieures au palier.

Lorsque le palier possède des rainures d'alimentation, celles-ci sont écrites comme des conditions limites :

- pour une rainure circonférentielle en  $z = 0$ :  $p(\theta; z = 0) = P_a, \quad \forall \theta$
- pour une rainure axiale à l'abscisse  $\theta = \theta_a$ :  $p(\theta = \theta_a; z) = P_a, \quad \forall z$

(1.33)

où  $P_a$  est la pression dans la rainure d'alimentation.

En outre, la forme convergente, puis divergente du film a tendance à provoquer des pressions pouvant devenir inférieures à la pression de vapeur saturante du fluide et donc un phénomène de cavitation. Divers types de conditions limites sont habituellement employées :

▪ Conditions de SOMMERFELD

Elles sont introduites par SOMMERFELD [Som04] dès 1904 et consistent à faire l'hypothèse qu'il n'y a pas de rupture de film, une partie du champ de pression pouvant alors prendre des valeurs négatives.

▪ Conditions de GÜMBEL

GÜMBEL propose [Gum21] des conditions aux limites plus réalistes :

$$\begin{aligned} p(\theta = \theta_e, z) &= 0, \quad \forall z \\ p(\theta = \theta_e + \pi, z) &= 0, \quad \forall z \\ p(\theta, z) &= 0, \quad \forall \theta \notin ]\theta_e; \theta_e + \pi[, \quad \forall z \end{aligned} \tag{1.34}$$

Ces conditions, revenant à négliger les pressions négatives dans la solution de SOMMERFELD impliquent une discontinuité dans l'écoulement en  $\theta = \theta_e + \pi$ . Elles sont cependant fréquemment utilisées, surtout dans le cas du palier court.

Dans le cas statique,  $\theta_e = 0$ .

▪ Conditions de REYNOLDS

Ces conditions sont proposées par SWIFT [Swi32], et respectent la continuité du débit en supposant que la cavitation a lieu à partir d'une abscisse  $\theta_s$  inconnue à laquelle la pression et son gradient s'annulent :

$$\begin{aligned} p(\theta = 0, z) &= 0, \quad \forall z \\ p(\theta = \theta_s, z) &= 0, \quad \forall z \\ \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) &= \frac{\partial p}{\partial z}(\theta = \theta_s, z) = 0, \quad \forall z \\ p(\theta, z) &= 0, \quad \forall \theta \in ]\theta_s; 2\pi[, \quad \forall z \end{aligned} \tag{1.35}$$

Deux régions du palier sont alors à distinguer :

- une région active, à pression positive et film complet ;

- une région inactive à pression nulle, dans laquelle la cavitation peut apparaître en régime dynamique.

Numériquement, il a été démontré [Col71] que dans le cas où l'équation de REYNOLDS était résolue par une méthode de différences finies, ces conditions s'obtenaient très simplement à l'aide de l'algorithme de CHRISTOPHERSON [Chr41].

- **Hauteur de film**

L'équation de REYNOLDS, qu'elle soit formulée en variables  $(\epsilon; \phi)$  ou  $(x; y)$ , fait intervenir la hauteur de film fluide. Celle-ci est habituellement calculée à l'aide d'un développement limité de l'espacement entre le coussinet et l'arbre. Une hypothèse forte mais fréquente consiste à ne pas prendre en compte les variations axiales de la hauteur de film, et donc à négliger le désalignement de l'arbre par rapport au coussinet.

Ainsi, la hauteur de film s'exprime :

$$\begin{aligned} h &= c(1 + \epsilon \cos \theta^*) \\ &= c + x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned} \quad (1.36)$$

**Remarques :**

- *Ces formules sont valables dans le cas d'un palier lisse avec les notations de la figure 1.34, notamment l'origine de la variable  $\theta$  prise opposée à la charge. Dans le cas où la rainure d'alimentation a une position particulière, l'origine de la variable  $\theta$  est prise en sortie de cette rainure et les formules (1.36) sont légèrement modifiées.*

- *Dans le cas de paliers non-circulaires, la hauteur de film est modifiée et doit être recalculée arc par arc, et l'équation de REYNOLDS résolue plusieurs fois également.*

- **Problème direct et problème inverse**

Le calcul du champ de pression dans le palier passe par la résolution de l'équation de REYNOLDS, nécessitant le plus souvent l'emploi de méthodes numériques telles que les différences finies ou les éléments finis.

On parlera de problème direct lorsque le but est de calculer la réaction du film d'huile sur le palier, dans des conditions de fonctionnement données, et pour une position d'arbre donnée. La réaction, également appelée « portance », est calculée par intégration du champ de pression sur la surface de l'arbre, soit dans le cas du palier circulaire, et exprimé en coordonnées  $(x; y)$  :

$$\mathbf{F}_{\text{pal}} = \begin{pmatrix} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p(\theta, z) \cos \theta R d\theta dz \\ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p(\theta, z) \sin \theta R d\theta dz \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Une seule résolution de l'équation de REYNOLDS est suffisante pour ce problème. En revanche, la résolution du problème inverse consiste à chercher, pour un chargement extérieur  $\mathbf{W}$  donné, la position d'équilibre statique du centre de l'arbre. Il s'agit alors de résoudre :

$$\mathbf{F}_{\text{pal}}(\mathbf{u}_0) = -\mathbf{W} \quad (1.38)$$

où  $\mathbf{u} = \{x; y\}^t$  est le déplacement du centre de l'arbre.

L'équation d'inconnue  $\mathbf{u}_0$  est résolue de manière itérative (une méthode de NEWTON-RAPHSON est souvent employée) et converge très rapidement lorsque l'initialisation est assez proche de la solution.

#### • Coefficients dynamiques

Dans le cas d'études dynamiques, il est fréquent que le chargement au palier oscille autour d'une valeur moyenne, utilisée comme base pour l'équilibre statique, définissant une position d'équilibre  $\mathbf{u}_0 = \{x_0; y_0\}^t$ .

Dans la mesure où les déplacements et vitesses induits par les oscillations dynamiques de chargement restent modérés (hypothèse de petites perturbations), il est légitime d'avoir recours à une linéarisation des efforts palier. Ce processus de linéarisation est basé sur un développement de l'effort palier au voisinage de la position d'équilibre  $\mathbf{u}_0$  et mène à l'expression de l'effort dynamique :

$$\mathbf{F}_{\text{pal}}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_{\text{pal}}(\mathbf{u}_0) - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{pal}}}{\partial \mathbf{u}} \right] (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{pal}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right] (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_0) \quad (1.39)$$

On notera  $[\mathbf{K}_{\text{pal}}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{pal}}}{\partial \mathbf{u}} \right]$  et  $[\mathbf{C}_{\text{pal}}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{pal}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right]$  qui correspondent respectivement aux raideurs et amortissements dus au film d'huile.

### b. Hypothèses simplificatrices et modèles de base

La résolution de l'équation de REYNOLDS dans le cas général ou le cas simplifié évoqué dans cette étude est relativement longue lorsque celle-ci est réalisée au sein d'une procédure numérique multi-itérative. Un certain nombre d'auteurs ont alors simplifié l'équation de REYNOLDS et lui ajoutent des hypothèses restreignant son champ d'application mais divisant son

temps de résolution. Certains de ces modèles permettent des résolutions analytiques de (1.29) ou (1.30), d'autres nécessitent toujours l'emploi de méthodes numériques mais réduisent considérablement les tailles de systèmes.

- **Approximation du palier court**

Introduite par MICHELL [Mic29] et reprise par OCVIRK [Ocv53], cette hypothèse consiste à négliger le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. Cette hypothèse est entièrement justifiée pour les paliers dont le rapport  $L/D$  est inférieur ou égal à 0.125. Dans la pratique, elle est utilisée pour des rapports  $L/D$  allant jusqu'à 0.5 malgré l'erreur relativement importante commise sur le maximum de pression, erreur d'autant plus importante que l'excentricité augmente.

Sous l'hypothèse citée précédemment, l'équation de REYNOLDS se met sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \left( \left( \Omega - 2\dot{\phi} \right) \frac{dh}{d\theta^*} + 2c\dot{\epsilon} \cos \theta^* \right) \quad (1.40)$$

L'application d'une pression nulle aux extrémités du palier et des conditions limites de GÜMBEL donnent alors les expressions analytiques du champ de pression et de la réaction, exprimée dans le repère  $(\mathbf{r}; \mathbf{q})$  :

$$p(\theta^*; z) = -\frac{3\mu}{h^3} \left( \frac{L^2}{4} - z^2 \right) \left( \left( \Omega - 2\dot{\phi} \right) \frac{dh}{d\theta^*} + 2c\dot{\epsilon} \cos \theta^* \right) \quad (1.41)$$

$$F_{pal_r} = \frac{\mu L^3 R}{2c^2} \left( I_1 \left( \Omega - 2\dot{\phi} \right) \epsilon - 2\dot{\epsilon} I_2 \right) \quad (1.42)$$

$$F_{pal_q} = \frac{\mu L^3 R}{2c^2} \left( I_2 \left( \Omega - 2\dot{\phi} \right) \epsilon - 2\dot{\epsilon} I_3 \right) \quad (1.43)$$

avec

$$I_1 = \int_{\theta_e}^{\theta_e+\pi} \frac{\sin \theta^* \cos \theta^*}{(1+\epsilon \cos \theta^*)^3} d\theta^* \quad I_2 = \int_{\theta_e}^{\theta_e+\pi} \frac{\cos^2 \theta^*}{(1+\epsilon \cos \theta^*)^3} d\theta^* \quad I_3 = \int_{\theta_e}^{\theta_e+\pi} \frac{\sin^2 \theta^*}{(1+\epsilon \cos \theta^*)^3} d\theta^*$$

dont les valeurs sont données dans [Fre98].

Dans le cas statique, la recherche de la position d'équilibre sous un chargement  $W$  consiste à trouver l'excentricité  $\epsilon_0$  et l'angle de calage  $\phi_0$  tels que :

$$W = \mu L R \Omega \left( \frac{L}{D} \right)^2 \left( \frac{R}{C} \right)^2 \frac{\epsilon_0}{(1-\epsilon_0^2)^2} \sqrt{16\epsilon_0^2 + \pi^2 (1-\epsilon_0^2)} \quad (1.44)$$

$$\tan \phi_0 = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{1 - \epsilon_0^2}}{\epsilon_0} \quad (1.45)$$

L'hypothèse de palier court donne également accès aux expressions analytiques des coefficients dynamiques. Ces derniers sont exprimés, au choix, dans le repère polaire  $(\mathbf{r}; \mathbf{q})$  ou cartésien  $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ , et peuvent être trouvées dans [Fre98].

- **Approximation du palier long**

Introduite par SOMMERFELD [Som04], cette hypothèse consiste à négliger le gradient de pression axial devant le gradient de pression circonférentiel. Cette hypothèse n'est justifiée que pour les paliers dont le rapport  $L/D$  est supérieur ou égal à 4.

Sous ces hypothèses, l'équation de REYNOLDS se met sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \theta^*} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta^*} \right) = 6R^2 \left( \left( \Omega - 2\dot{\phi} \right) \frac{dh}{d\theta^*} + 2c\dot{e} \cos \theta^* \right) \quad (1.46)$$

Plusieurs types de conditions limites sont compatibles avec cette approximation, toutes menant à des formulations analytiques du champ de pression, et parfois même des efforts. Toutes les formules, y compris celles des coefficients dynamiques sont données dans [Fre98].

- **Modèles hybrides**

Les modèles évoqués plus haut ne permettent pas de traiter de manière suffisamment précise les paliers tels que  $L/D \in [0.25; 4]$ , ce qui représente une part importante des paliers habituellement rencontrés. En souhaitant garder des formulations analytiques, très avantageuses pour des raisons de temps de calcul, certains auteurs ont développé des modèles hybrides, dans lesquels les paliers de longueurs finis sont traités comme combinaisons de palier court et de palier long. [Hir98], notamment, calcule directement les champs de pression comme moyenne harmonique des champs de pression calculées dans les deux cas extrêmes alors que [Rao01] étend cette méthode au calcul des efforts et coefficients dynamiques.

Ces modèles hybrides permettent des précisions correctes sur les réactions palier, avec de très faibles temps de calcul, mais ne permettent pas d'appliquer des conditions limites suffisamment réalistes. A titre d'exemple une rainure d'alimentation en lubrifiant ne peut pas être intégrée aux modèles.

- **Modèle de palier court généralisé ou méthode unidimensionnelle**

Au début des années 80, RHODE et LI [Rho80] ont eu l'idée de simplifier la résolution de l'équation de REYNOLDS en séparant les variables du champ de pression à l'aide d'une méthode proche de celle employée par RITZ.

$$p(\theta; z) = p_0 f(z) \cdot g(\theta) \quad (1.47)$$

Partant de la constatation que, pour des rapports  $L/D$  allant jusqu'à 1, voire même au delà, le champ de pression dans un palier aligné restait quasiment parabolique dans sa direction axiale, et sur la base de l'expression analytique obtenue dans le cas du palier court, BONNEAU notamment [Bon89] a choisi une forme parabolique dans la direction axiale :

$$p = \mu\Omega \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(1 - 4\left(\frac{z}{L}\right)^2\right) G(\theta) \quad (1.48)$$

Avec comme variables adimensionnées :  $H = \frac{h}{c}$ ;  $Z = \frac{z}{L}$ ;  $X = \frac{X}{c}$ ;  $\dot{X} = \frac{\dot{x}}{c\Omega}$  , BONNEAU [Bon89] montre que l'équation de REYNOLDS s'écrit sous la forme :

$$\frac{2H^3}{15} \frac{d^2G}{d\theta^2} + \frac{2}{5} \frac{dG}{d\theta} H^2 \frac{dH}{d\theta} - \frac{4}{3} \left(\frac{R}{L}\right)^2 H^3 G = \frac{dH}{d\theta} + 2(\dot{X} \cos \theta + \dot{Y} \sin \theta) \quad (1.49)$$

Cette équation, de la seule variable angulaire est alors intégrée numériquement par la méthode des différences finies ; elle conduit à la résolution d'un système linéaire, effectuée par la méthode de GAUSS-SEIDEL avec coefficient de sur-relaxation. L'avantage d'une telle méthode est de pouvoir appliquer des conditions limites de type « rainure d'alimentation », tout en gardant des tailles de systèmes raisonnables du fait du maillage du palier qui n'est développé que dans la direction circonférentielle. Signalons au passage que, dans ce cas, la matrice résultant de la discrétisation du problème est tri-bande, ce qui facilite grandement son inversion.

Cette méthode permet également un traitement correct du problème de cavitation avec l'application de conditions limites de REYNOLDS. De plus elle s'applique à une large gamme de paliers (  $L/D \leq 1$  ).

### c. Quelques phénomènes

Les paliers sont le siège d'effets physiques qui leur sont parfois propres. Pour certains, la formulation simplifiée du problème présenté ci-dessus suffit à les mettre en évidence ; à l'opposé, certains phénomènes sont volontairement ignorés dans les hypothèses de base.

- **Instabilités**

L'expérience a montré que sous certaines conditions de fonctionnement, les paliers hydrodynamiques ont un comportement dynamique instable. C'est NEWKIRK [New25] qui a mis en évidence ce phénomène en identifiant une vibration propre aux arbres supportés par paliers fluides. Deux effets voisins sont à distinguer :

- le « whirl » qui est un mouvement de précession de l'arbre à une vitesse voisine de la moitié de la vitesse de rotation ; et qui évolue donc avec la vitesse de l'arbre ;

- le « whip » qui est un fouettement caractérisé par une augmentation des amplitudes à une vitesse fixe, proche de la moitié de la pulsation propre du rotor. Cette vitesse n'évolue donc plus avec celle de l'arbre, et il convient de ne pas la dépasser, sous peine d'arriver à la destruction de la machine.

Ces phénomènes ont par la suite été abondamment étudiés, dans le cas d'arbres rigides [Hol60], ou flexibles [Myr76], [Hag53], [Hah75].

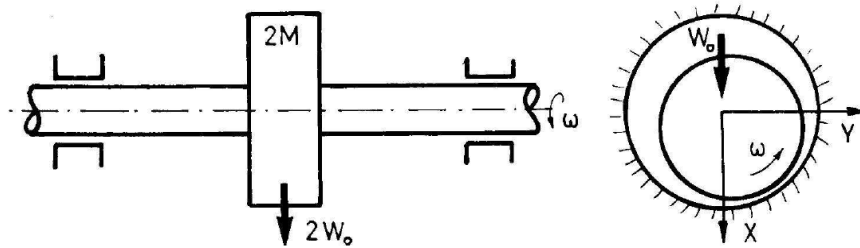


Fig. 1.35 – Arbre sur paliers pour la détermination des zones de stabilité d'après Frêne et col. [Fre98]

Si une simulation précise du comportement de paliers instables nécessite l'emploi de méthodes non linéaires, la prédiction des zones et frontières de stabilité peut être abordée par la théorie linéaire [Tie95]. Les techniques habituelles de détermination des zones de stabilité sont souvent basées sur un critère de ROUTH appliqué à l'ensemble « arbre + paliers », ces derniers étant modélisés à l'aide des coefficients dynamiques. Cette détermination est détaillée dans [Fre98] : elle aboutit au tracé de cartes de stabilité faisant intervenir une masse critique en fonction de paramètres représentatifs du fonctionnement tels que le nombre de SOMMERFELD ou l'excentricité.

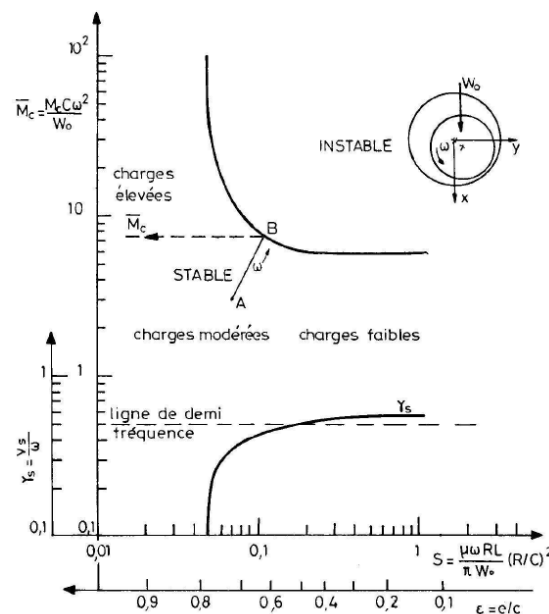


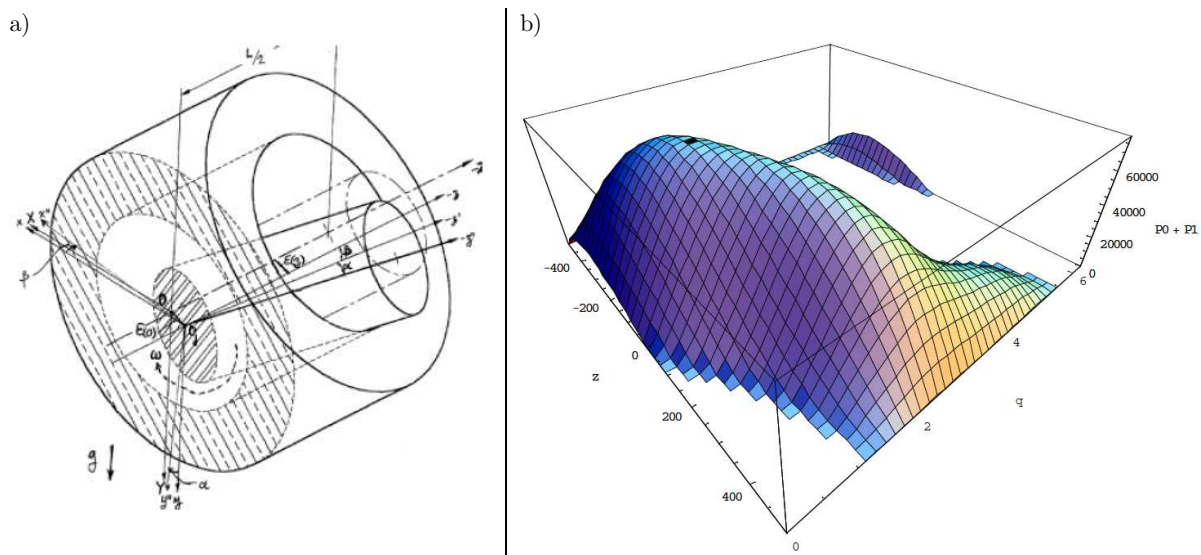
Fig. 1.36 – Exemple de carte de stabilité d'après FRENE et col. [Fre98]

### • Mésalignements

Qu'il trouve son origine dans le montage des arbres et des paliers, dans la déformation des lignes d'arbres sous charge ou une autre raison, un mésalignement entre l'arbre et le coussinet est très souvent observé. Du point de vue de la modélisation, un mésalignement se traduit par une hauteur de film dépendant des coordonnées circonférentielle et axiale (et non plus circonférentielle seule) ;  $h(\theta, z)$ . Le calcul de la hauteur de film fait alors intervenir d'autres paramètres que les seules excentricité et angle de calage, d'après NICOLAS [Nic72] :

- l'excentricité dans le plan médian du coussinet ;
- l'angle de calage dans le plan médian du coussinet ;
- l'angle de mésalignement entre la ligne des centres et la direction de la charge ;
- l'amplitude de mésalignement, défini comme la projection du segment liant les centres de l'arbre aux extrémités du palier sur la section médiane du palier.

NICOLAS [Nic72] a alors résolu l'équation de REYNOLDS en dimension 2 à l'aide d'un schéma différences finies, en la présence d'une rainure d'alimentation notamment. En supposant les mésalignements petits, et inspiré par les travaux réalisés par OCVRK [Ocv53] pour le palier aligné, GOMEZ-MANCILLA [Gom02] propose des formules analytiques du champ de pression et des réactions palier, en se basant sur un développement en série de l'excentricité dans le palier tronqué à l'ordre 1 et dans l'hypothèse du palier court ; il obtient des résultats relativement précis pour de très faibles temps de calcul.



**Fig. 1.37** – *Modèle de palier mésaligné et champ de pression analytique correspondant d'après [Gom02]*

Si le calcul du champ de pression, pour un positionnement défini, est un problème classique et maîtrisé, le problème inverse de la recherche du calage de l'arbre sous un chargement extérieur donné sous l'effet d'un torseur de forces quelconque est plus délicat, et grandement conditionné par le choix du positionnement initial (*i.e.* à l'itération 0).

• **Effets thermiques et rhéologie du lubrifiant**

Lors du fonctionnement, le fluide à l'intérieur du palier est soumis à un champ de pression, et donc un champ de vitesse, non uniformes, étant donné la vitesse de l'arbre, ayant pour effet de cisailer le film fluide, générant ainsi de la chaleur. Le fluide a alors tendance à s'échauffer [Pin80].

L'une des hypothèses habituellement associées à l'équation de REYNOLDS est celle d'une viscosité et d'une masse volumique de lubrifiant constantes en chaque point de l'écoulement. Cette hypothèse n'est pas exacte, en raison de la distribution non constante de vitesse et donc de température, mais très fréquemment utilisée. En effet, la détermination du champ de température dans le film lubrifiant nécessite la résolution simultanée de l'équation de REYNOLDS modifiée, de l'équation de l'énergie dans le fluide et des équations de conduction de la chaleur dans l'arbre et le coussinet. La résolution de ce problème couplé est un problème à part entière et très coûteux en temps de calcul. Compte-tenu du nombre de paliers dans une transmission mécanique et du couplage déjà présent entre les équations de contact à la denture et aux paliers, nous nous limiterons à l'approche isotherme, qui a été historiquement la première approche envisagée [Fre98].

Les lois d'évolution de la viscosité, de la masse volumique et de la capacité thermique du lubrifiant en fonction de la température sont supposées connues ; nous considérerons le régime isotherme à la température de fonctionnement  $T_f = T_{inj} + \Delta T$  où  $T_{inj}$  est la température d'injection du lubrifiant. L'accroissement de température  $\Delta T$  est calculé par un bilan thermique simple : un pourcentage de la puissance générée par cisaillement du film d'huile est égalé à la chaleur évacuée par le lubrifiant.

$$\lambda \mathcal{C}_f \Omega = \rho C_p Q_z \Delta T \quad (1.50)$$

où  $\lambda$  est la fraction d'énergie calorifique évacuée par le lubrifiant ; le complément  $(1 - \lambda)$  est évacué par l'arbre, par conduction.

Les autres grandeurs sont :

- $\mathcal{C}_f$  est le couple de frottement ;
- $\Omega$  est la vitesse de rotation de l'arbre ;
- $\rho$  est la masse volumique du lubrifiant (fonction de la température du lubrifiant)
- $C_p$  est la capacité thermique du lubrifiant (fonction de la température du lubrifiant)
- $Q_z$  est le débit axial de lubrifiant (ou débit de fuite)
- $\Delta T$  est l'élévation de température.

▪ Calcul du couple de frottement

Le couple de frottement est calculé par intégration de la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  sur la surface de l'arbre. Cette contrainte est calculée à partir de la loi de comportement rhéologique du lubrifiant, et appliquée à notre problème de fluide newtonien ; elle vaut :

$$\tau_{xy}(y=h) = \mu \frac{R\Omega}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.51)$$

Le couple de frottement vaut alors :

$$\begin{aligned} C_f &= \int_S R \cdot \tau_{xy}(y=h) dS \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}} R \left[ \mu \frac{R\Omega}{h(\theta)} + \frac{h(\theta)}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right] dz R d\theta \end{aligned} \quad (1.52)$$

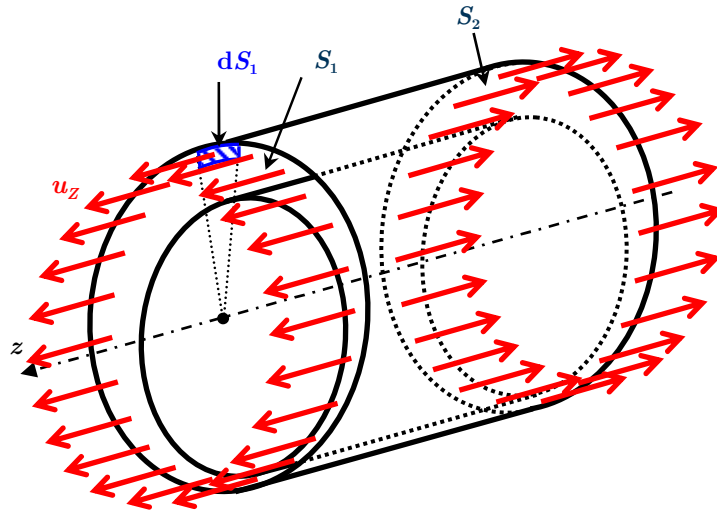
Le couple de frottement sera également considéré comme un effort extérieur au système.

**Remarque :** • *A la différence des réactions paliers, celui-ci sera considéré comme constant lors du calcul de l'équilibre à une température donnée, et actualisé à chaque itération thermique uniquement, ceci afin d'alléger la résolution des équations.*

▪ Calcul débit de fuite axial

Le débit de fuite du palier est calculé indépendamment du débit d'injection de lubrifiant. Cela revient à considérer que le débit d'injection de lubrifiant est toujours suffisant pour assurer une quantité de fluide constante dans le palier. Le débit de fuite axial est alors calculé par intégration de la vitesse du fluide sur les bords du palier :

$$Q_z = \int_{S_1 \cup S_2} u_z dS = \int_{S_1} u_z dS + \int_{S_2} u_z dS \quad (1.53)$$



**Fig. 1.38** – Visualisation des surfaces d'intégration pour le calcul du débit de fuite du palier

où l'axe  $y$  est normal à la surface de référence, ici le coussinet développé.

La symétrie axiale du champ de pression permet d'écrire

$$\begin{aligned} Q_z &= 2 \int_{S_1} u_z dS \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{y=0}^{y=h(\theta)} \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=\frac{L}{2}} y(y-h) dy R d\theta \end{aligned} \quad (1.54)$$

Dans le cas général, le calcul de  $\frac{\partial p}{\partial z}$  se fait numériquement. Cependant, dans le cas du palier court, ce calcul est purement analytique, et dans l'approximation de RHODE et LI, il est possible de calculer ce terme soit numériquement soit d'une manière hybride (mélant formule analytique pour la coordonnée axiale et numérique pour la direction circonférentielle).

- **Déformations de palier et phénomène d'usure**

Sous l'effet de fortes charges, le palier peut se déformer, parfois favorisé par le revêtement du coussinet. FANTINO [Fan79] a étudié ce phénomène sur les paliers de bielles automobiles, résolvant simultanément l'équation de REYNOLDS et les équations de déformation élastique du palier. Dans la même veine, les défauts d'usure sur le coussinet ont également tendance à modifier la géométrie du palier, et donc la hauteur de film. Ce problème est abordé dans [Duf83].

- **Autres effets**

Chacune des hypothèses liées à l'expression présentée de l'équation de REYNOLDS peut être remise en question et traitée de manière plus précise. C'est notamment le cas des forces d'inertie [Rei75], du régime d'écoulement [Hir92], du comportement rhéologique [Mil07] du lubrifiant... Il en résulte alors une équation de REYNOLDS plus générale, mais dont la résolution numérique est plus délicate.

\*

\*   \*

Ce chapitre a permis de synthétiser un certain nombre de notions relatives à chacun des organes qui seront par la suite couplés dans le modèle global. L'étude du comportement de ces organes a permis de mieux appréhender le problème de couplage : par exemple il apparait, à la suite de cette partie, évident que dans un réducteur sur paliers, une part importante des excitations dynamiques provient du contact à la denture (ces excitations pouvant être atténuées ou amplifiées par les corrections et écarts de profil). Les excitations sont ensuite transmises par la ligne d'arbre puis aux paliers qui peuvent réagir de diverses manières suivant les conditions de fonctionnement.

Un aperçu du type d'équations qui régissent les comportements de systèmes selon le type de phénomène et les principaux modèles est également donné, avec quelques précisions sur les méthodes de résolution.

La suite du mémoire vise à établir et à illustrer un certain nombre d'interactions entre ces organes, d'une manière plus complète et précise que ce qui a pu être présenté dans les quelques modèles de la littérature cités précédemment.



# Chapitre 2

---

## Modélisation d'un réducteur sur paliers

### Sommaire

|        |                                                                            |    |
|--------|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1.   | Mise en équations du problème : hypothèses et notations .....              | 56 |
| 2.2.   | Etat de référence.....                                                     | 58 |
| 2.2.1. | Calage des arbres dans les paliers .....                                   | 58 |
| a.     | Mise en équation .....                                                     | 58 |
| b.     | Résolution.....                                                            | 62 |
| c.     | Positionnement .....                                                       | 64 |
| 2.2.2. | Etat de référence de l'engrènement .....                                   | 65 |
| a.     | Modélisation des écarts géométriques.....                                  | 65 |
| b.     | Cinématique des corps rigides .....                                        | 68 |
| c.     | Dynamique des corps rigides .....                                          | 68 |
| 2.3.   | Etat déformé.....                                                          | 69 |
| 2.3.1. | Etat de fonctionnement des corps déformables .....                         | 69 |
| 2.3.2. | Assemblage des éléments.....                                               | 71 |
| 2.3.3. | Travail des efforts extérieurs .....                                       | 73 |
| a.     | La pesanteur .....                                                         | 73 |
| b.     | Les réactions paliers.....                                                 | 73 |
| c.     | Les couples.....                                                           | 73 |
| 2.3.4. | Première écriture des équations du mouvement.....                          | 74 |
| 2.3.5. | Introduction des effets dissipatifs .....                                  | 76 |
| 2.3.6. | Equations du mouvement non linéaires.....                                  | 77 |
| 2.3.7. | Equilibre statique – conditions initiales.....                             | 78 |
| 2.3.8. | Equations du mouvement linéarisées .....                                   | 79 |
| 2.4.   | Introduction des effets thermiques dans les paliers.....                   | 81 |
| 2.4.1. | Modèle thermique de palier retenu .....                                    | 82 |
| 2.4.2. | Procédure numérique et application au système complet .....                | 84 |
| a.     | Elévation de température pour un palier isolé sous une charge donnée ..... | 84 |
| b.     | Elévation de température pour les paliers du système couplé .....          | 85 |
| 2.5.   | Résolution des équations du mouvement .....                                | 86 |
| 2.5.1. | Discrétisation et intégration temporelle.....                              | 87 |
| 2.5.2. | Résolution de l'équation non linéaire .....                                | 88 |
| 2.5.3. | Application au problème couplé.....                                        | 89 |
| 2.5.4. | Applications et temps de calcul .....                                      | 92 |

Ce chapitre présente les principaux éléments de la mise en équations du problème de couplage entre (i) ligne d'arbre, (ii) engrènement, (iii) paliers lisses. Dans un premier temps, la mise en équations du problème est présentée : positionnement, équations du mouvement, prise en compte des effets thermiques dans les paliers sur le système couplé. Dans un second temps, la présentation de la procédure de discrétisation et de résolution des équations du mouvement, spécialement développée à cet effet, sera abordée.

## 2.1. Mise en équations du problème : hypothèses et notations

Le comportement dynamique des structures déformables est habituellement régi par les équations de LAGRANGE, présentées en (1.5).

Une grande majorité des modèles traitant de lignes d'arbres sur paliers emploie, implicitement ou non, comme origine des degrés de liberté le mouvement de corps solide des engrenages tournant autour de leurs axes respectifs. Concernant les déplacements radiaux, la ligne passant par le centre des paliers est fréquemment prise comme origine des degrés de liberté, ce qui n'est pas problématique dans le cas de lignes d'arbres découplées et pour des modèles simplifiés de paliers basés sur des coefficients dynamiques.

Dans notre cas, compte-tenu de la liaison entre les lignes d'arbres, des jeux des paliers hydrodynamiques  $c$  et des hypothèses de petits déplacements élastiques ( $\Delta$  pour l'écrasement) utilisées dans la construction de l'élément de liaison (typiquement  $100 \Delta > c > \Delta$ , suivant les caractéristiques du système), il est nécessaire de distinguer deux champs de déplacements :

- un champ de déplacement dit « rigidifiant », correspondant au mouvement de corps solide de calage des arbres dans les coussinets. Ce champ de déplacement, noté  $\mathbf{X}_R$ , de grande amplitude *à l'échelle du contact*, est responsable d'une modification de la position de référence et sert d'origine aux degrés de liberté ;
- un champ de déplacement dit « élastique », noté  $\mathbf{X}$ , correspondant aux (petits) déplacements de la structure considérée comme flexible autour de la position de référence, comme présenté sur la figure 2.1.

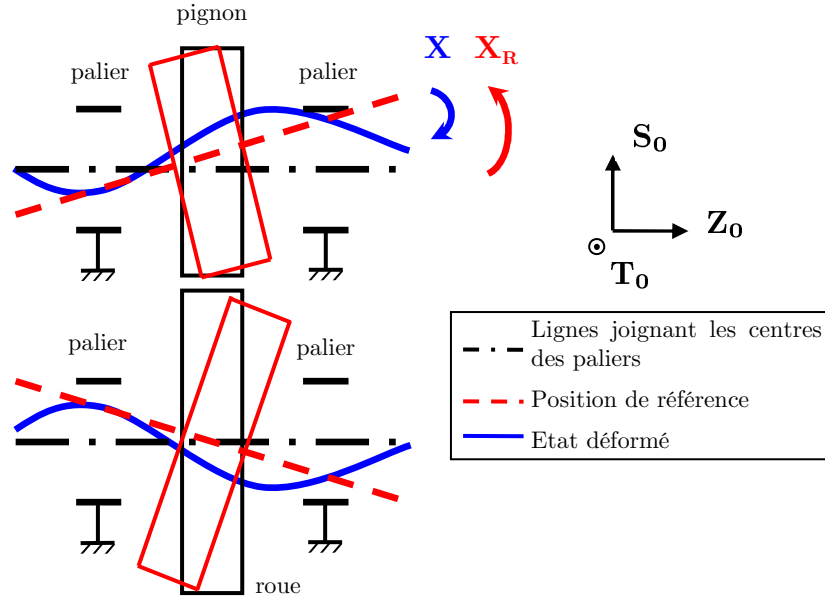


Fig. 2.1 – Représentation des différents champs de déplacements.

Dans toute la suite de la modélisation, les corps d'engrenages seront divisés en  $N_j$  tranches minces de largeur identique et d'indice  $j$  définissant des cellules de contact dans le plan d'action, dont les centres sont les points  $M_{ij}$ , points d'intersection avec la ligne de contact numéro  $i$ .

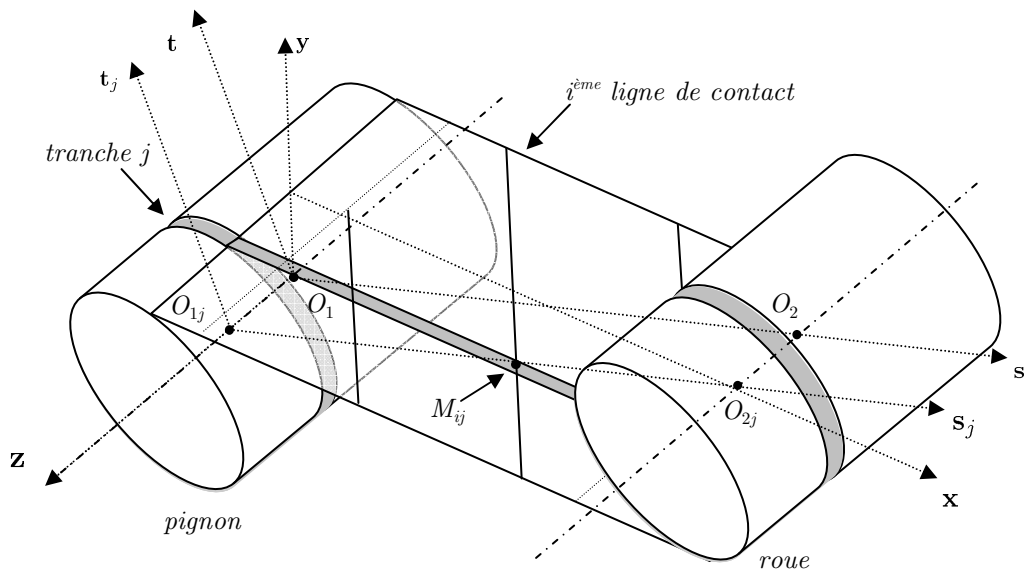


Fig. 2.2 – Division des corps d'engrenages en tranches minces et visualisation des différents repères liés à l'engrènement.

$O_m$  ( $m = 1$  pour le pignon et  $m = 2$  pour la roue) étant le centre du mobile  $m$ , et  $O_{mj}$  est le centre de la  $j^{\text{ème}}$  tranche du mobile  $m$ .

## 2.2. Etat de référence

Conformément aux développements de [Vel961] et [Ajm05], la position de référence correspond au mouvement de corps solide des engrenages. Dans le cas d'un système monté sur des paliers avec jeux, les contributions des champs de déplacements élastiques et rigidifiants sont difficiles à distinguer, si bien qu'une hypothèse supplémentaire doit être introduite.

Le mouvement de corps solide pris pour référence est constitué du mouvement de rotation des lignes d'arbres et des corps d'engrenages dans la configuration des corps solides auquel est ajouté le mouvement de calage des arbres à l'intérieur des jeux des paliers. Ce calage est calculé comme le positionnement à l'équilibre statique de chacune des lignes d'arbre, supposées rigides, et découplées.

### 2.2.1. Calage des arbres dans les paliers

#### a. Mise en équation

Chaque ligne d'arbre, avec son ou ses mobile(s) est assimilée à un solide indéformable, libre de bouger à l'intérieur des jeux des paliers. Compte-tenu de l'ordre de grandeur des jeux, à l'échelle du système, le mouvement de chaque ligne  $k$  est supposé décrit par un torseur de petits déplacements, avec pour origine la ligne joignant les centres des paliers :

$$\{S_k\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_k(G_k) = v_k \mathbf{S}_0 + w_k \mathbf{T}_0 + u_k \mathbf{Z}_0 \\ \omega_k = \phi_k \mathbf{S}_0 + \psi_k \mathbf{T}_0 \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

où  $G_k$  est le centre de gravité de la ligne  $k$ ,  $v_k$ ,  $w_k$  et  $u_k$  sont les trois rotations et  $\phi_k$  et  $\psi_k$  les rotations par rapport aux axes  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{T}_0$  et  $\mathbf{Z}_0$ .

**Remarque :** • *L'angle de rotation  $\theta_k$  restant défini à une constante près, puisque compris dans le mouvement de rotation de la ligne d'arbre, celui-ci n'est pas déterminé.*

En utilisant les propriétés du torseur des petits déplacements, le déplacement en un point quelconque  $M_k$  de la ligne  $k$  est donné par :

$$\mathbf{u}_k(M_k) = \mathbf{u}_k(G_k) + \omega_k \times \mathbf{G}_k \mathbf{M}_k \quad (2.2)$$

Chaque ligne d'arbre  $k$  est alors soumise aux efforts suivants :

- *son poids propre*, vecteur glissant, appliqué au centre de gravité  $G_k$  :

$$\mathbf{P}_k = - \int_{V_k} \rho(M) g dM \mathbf{T}_0 \quad (2.3)$$

- *les couples*, moteur ou récepteur (selon la ligne) :

$$\mathbf{C}_m = C_m \mathbf{Z}_0 \text{ ou } \mathbf{C}_r = C_r \mathbf{Z}_0 \quad (2.4)$$

- *les couples de frottement* des paliers, considérés comme constants, sur le palier  $i$  :

$$C_{fi} \mathbf{Z}_0 \quad (2.5)$$

- *les réactions* pouvant être dues à des éventuels *accouplements extérieurs* (arbres, butées...), modélisés par des raideurs concentrées, agissant comme des efforts ponctuels aux points  $M_i$ . Elles sont du type  $\mathbf{F}_{ci} = [K_{ci}] \mathbf{u}_k(M_i)$  soit, compte-tenu des propriétés du torseur des petits déplacements :

$$\mathbf{F}_{ci}(M_i, \mathbf{u}(G_k), \omega_k) = [K_{ci}] (\mathbf{u}_k(G_k) + \omega_k \times \mathbf{G}_k \mathbf{M}_i) \quad (2.6)$$

- *les réactions paliers*, considérées comme des efforts ponctuels, appliqués en  $M_i$ , centre de la section de l'arbre, à l'abscisse correspondant au centre du palier  $i$ . Elles sont obtenues par intégration du champ de pression statique sur le palier  $i$ , projetées dans le repère  $(s, t)$  :

$$\mathbf{F}_{pal0_i} \begin{Bmatrix} F_{pal0v_i} \\ F_{pal0w_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \iint_{S_p} p_i(\theta, z) \cos \theta R d\theta dz \\ \iint_{S_p} p_i(\theta, z) \sin \theta R d\theta dz \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Etant donné la nature des paliers, une écriture plus complète de ces réactions serait  $\mathbf{F}_{pal0_i}(\Omega_k, \mathbf{u}(M_i))$  ; soit, compte-tenu des propriétés du torseur des petits déplacements et en fonction des degrés de liberté de la ligne d'arbre :  $\mathbf{F}_{pal0_i}(\Omega_k, M_i, u_k, v_k, w_k, \phi_k, \psi_k)$ .

- *l'effort d'engrènement*  $\mathbf{F}_{eng_k}$ , réaction de la denture, appliqué sur chaque ligne d'arbre. Si physiquement, le contact est distribué sur toute la surface de contact entre les dentures, surface variant en fonction du temps notamment, VELEX a prouvé [Vel01] que pour chaque paire {roue – pignon}, le torseur des efforts transmis par la denture était assimilable à un vecteur glissant si la normale à tous les points de contact était identique ; et par conséquent qu'il pouvait être défini par un vecteur libre et un point de son support,  $I$ , tel que :

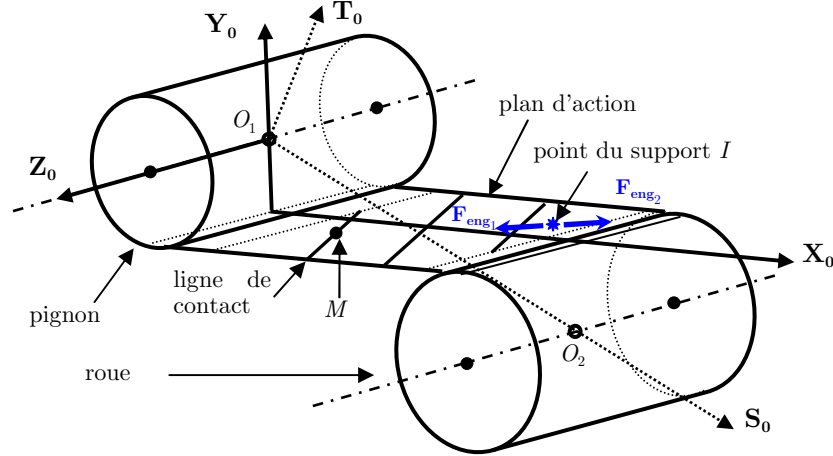
$$\mathbf{O}_1 \mathbf{I} = \begin{Bmatrix} \frac{\lambda}{F_n} \sin \beta_b \\ \zeta R_{b1} \\ -\xi \frac{\lambda}{F_n} \cos \beta_b \end{Bmatrix}_{(\mathbf{X}_0; \mathbf{Y}_0; \mathbf{Z}_0)} \quad (2.8)$$

avec

$$F_n = \int_{L(t)} dF(M) \text{ et } \lambda = \int_{L(t)} (X(M) \sin \beta_b - Z(M) \cos \beta_b) dF(M) \quad (2.9)$$

où

- $\zeta = \pm 1$  en fonction du sens de rotation du pignon ;
- $\xi = \pm 1$  en fonction de l'angle d'hélice ;
- $X(M)$  et  $Z(M)$  les coordonnées du point  $M$  dans le plan d'action ;
- $L(t)$  la longueur de contact instantanée.



**Fig. 2.3** – Modélisation de l'effort d'engrènement par un vecteur glissant.

La longueur de contact  $L(t)$  étant, a priori, inconnue (c'est un résultat de calcul, dépendant du mouvement de corps solide et des déplacements élastiques), sa détermination, dans ce calcul préliminaire est simplifiée. En effet, en vertu du principe de SAINT-VENANT, il est raisonnable de supposer qu'à l'échelle d'une ligne d'arbre, les paliers sont situés suffisamment loin de l'engrènement pour qu'une modification de la longueur de contact n'ait pas, ou peu, d'effet sur le comportement des paliers, et donc sur le calage des arbres dans les coussinets. Chaque point des lignes de contact est donc supposé contribuer à l'engrènement avec une contribution  $dF$  identique. Sous cette hypothèse, et compte-tenu du fait qu'au cours d'une période d'engrènement, les lignes de contact balayent toute la portion active de la fenêtre d'engrènement, la quantité  $\lambda$  peut être moyennée par  $\bar{\lambda}$ :

$\bar{\lambda} = \frac{R_{p1}+R_{p2}}{2} \sin \alpha_t \sin \beta_b F_n$ , conduisant à la localisation approximative du point  $I$  :

$$\mathbf{O}_1 \mathbf{I} = \begin{Bmatrix} \frac{R_{p1}+R_{p2}}{2} \sin \alpha_t \sin^2 \beta_b \\ \zeta R_{b1} \\ -\xi \frac{R_{p1}+R_{p2}}{2} \sin \alpha_t \sin \beta_b \cos \beta_b \end{Bmatrix}_{(\mathbf{X}_0; \mathbf{Y}_0; \mathbf{Z}_0)} \quad (2.10)$$

Après changement de base (matrice de passage  $[P] = \begin{bmatrix} \sin \alpha_t & \cos \alpha_t & 0 \\ -\cos \alpha_t & \sin \alpha_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ),  $\mathbf{O}_1 \mathbf{I}$  peut être exprimé dans  $(\mathbf{S}_0; \mathbf{T}_0; \mathbf{Z}_0)$ .

$\mathbf{O}_2 \mathbf{I}$  peut être calculé sachant que  $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 = (R_{p1} + R_{p2}) \mathbf{S}_0$ .

En écrivant  $\mathbf{U}_k = \{u_k; v_k; w_k; \phi_k; \psi_k\}^T$  le vecteur des degrés de liberté de la ligne  $k$ , le torseur des efforts extérieurs appliqués à la ligne  $k$  s'exprime alors :

$$\{\tau_{ext/k}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_k + \sum_{i=1}^{N_{eng}} \mathbf{F}_{eng_i} + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{F}_{ci}(\mathbf{U}_k) + \sum_{i=1}^{N_{pal}} \mathbf{F}_{pal0_i}(\mathbf{U}_k) \\ \sum_{i=1}^{N_{eng}} \mathcal{M}_{\mathbf{F}_{eng_i}/G_k} + \sum_{i=1}^{N_c} \mathcal{M}_{\mathbf{F}_{acc_i}(\mathbf{U}_k)/G_k} + \sum_{i=1}^{N_{pal}} \mathcal{M}_{\mathbf{F}_{pal0_i}(\mathbf{U}_k)/G_k} + C_k \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

L'équilibre statique de la ligne  $k$  s'écrit alors :

$$\{\tau_{ext/k}\} = \{0\} \quad (2.12)$$

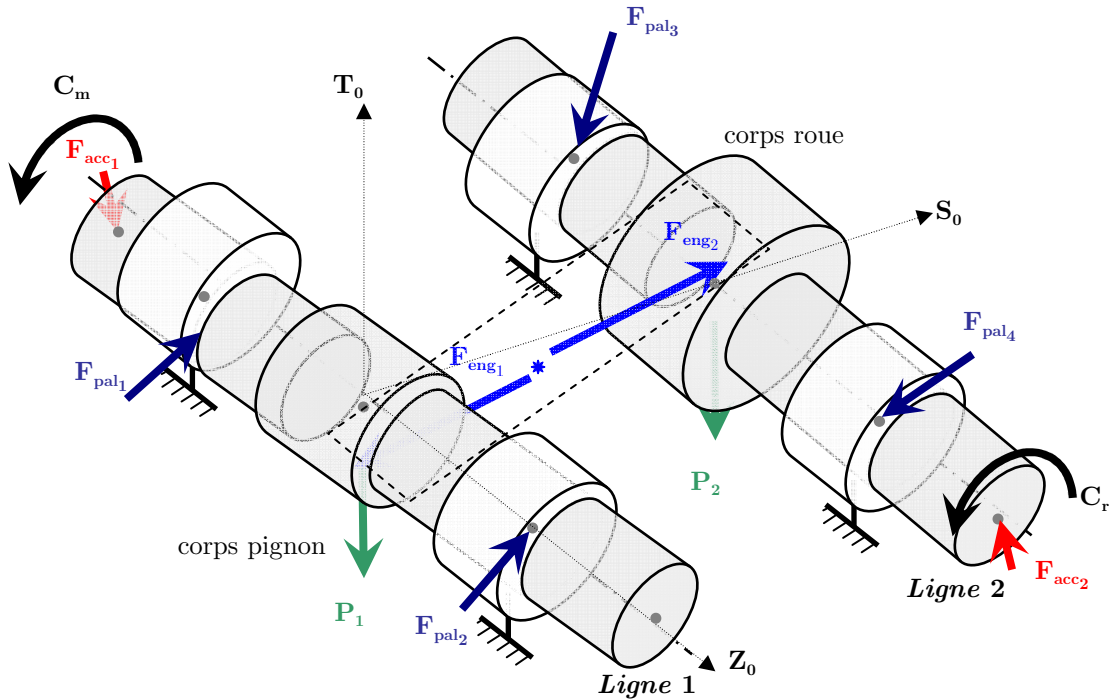


Fig. 2.4 – Equilibre statique des lignes d'arbres rigides soumises aux efforts extérieurs dans les coussinets.

## b. Résolution

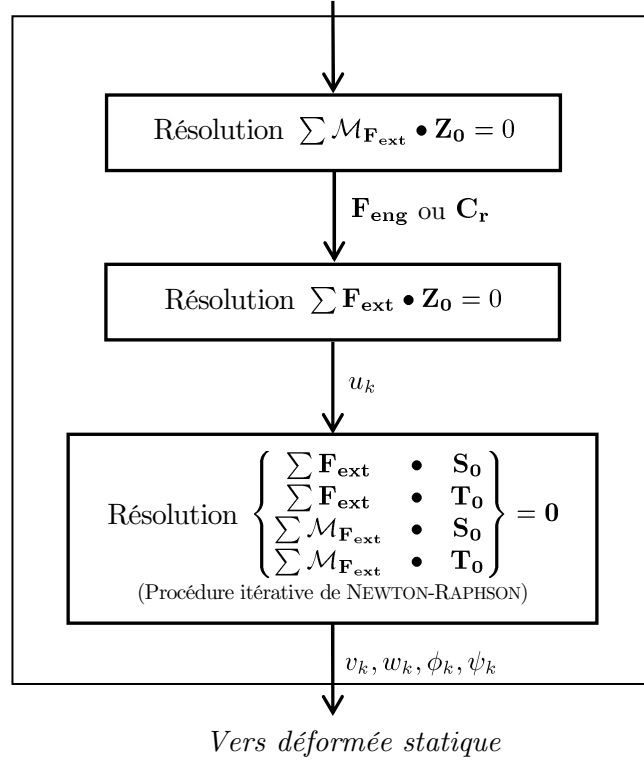
Le système d'équations (2.12) présente 6 équations algébriques pour chaque ligne d'arbre. Les inconnues sont au nombre de  $5 + N_{engr}$ , où  $N_{engr}$  est le nombre d'engrenages. Dans le cas où  $N_{engr} = 1$ , le système est iso-statique.

Deux cas de figure peuvent produire  $N_{engr} > 1$  :

- la présence de plusieurs étages de réduction, auquel cas la loi des actions réciproques avec la ligne précédemment calculée permet de lever l'indétermination (ce cas ne sera pas traité par la suite) ;
- la présence d'une denture double-hélice. Dans ce cas, il est légitime de considérer, en première approximation, que le même effort est transmis par les deux hélices.

La résolution a lieu en trois étapes principales :

- i) Résolution de l'équation d'équilibre des moments projetée sur l'axe  $\mathbf{Z}_0$ . En effet, cette équation est indépendante des autres et linéaire. Pour la ligne d'arbre moteur,  $\mathbf{C}_m$  est connu, cette équation donne accès à la norme de l'effort transmis par l'engrènement  $\|\mathbf{F}_{eng}\|$ , et donc à  $\mathbf{F}_{eng}$ . Pour les lignes suivantes, où la ligne réceptrice,  $\mathbf{F}_{eng}$  est connu ; la résolution donne donc accès à  $\mathbf{C}_r$ .
- ii) Résolution de l'équation d'équilibre des forces projetée sur l'axe  $\mathbf{Z}_0$ . Elle fait intervenir le seul degré de liberté  $u_k$  sous la forme  $Ku_k = F$ .
- iii) Résolution des 4 autres équations. Celles-ci sont liées et dépendent de façon non linéaire des degrés de liberté  $\mathbf{U}_k$ . Le système d'équation restant de (2.12) est alors résolu de manière itérative, à l'aide d'un schéma de NEWTON-RAPHSON.



**Fig. 2.4** – Procédure de calcul de la position de référence pour la ligne  $k$ .

**Remarques :** • Comme pour toute résolution itérative, l'initialisation a un effet important sur le temps de calcul et sur la convergence de la solution. Dans notre cas, les inconnues sont les positions de calage des arbres dans les paliers, et donc également les réactions paliers (les deux étant liées, voir Chapitre 1). Deux choix d'initialisation ont été envisagés :

- positions correspondant à des arbres soumis à la moitié de l'effort d'engrènement privé de sa composante axiale : de norme  $\|\mathbf{W}_{\text{pal}}\| = \frac{C_m R_{b1}}{2}$ , et orienté selon le plan d'action ;
- positions correspondant à des arbres soumis à un effort résultant de l'équilibre statique du réducteur sur des appuis rigides.

La seconde méthode nécessite un calcul statique du réducteur sur appuis mais fournit une première approximation de position d'équilibre qui est de meilleure qualité et réduit grandement le temps de calcul nécessaire à la convergence. C'est celle qui a été retenue.

• Au cours du mouvement de calage de chacune des lignes d'arbres, les points  $O_k$  sont soumis au déplacement  $\mathbf{u}_k(O_k)$ . En toute rigueur,  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$  est modifié lors du déplacement, tout comme l'angle de pression  $\alpha_t$ . Etant donné l'amplitude des déplacements, faibles à l'échelle du système, les

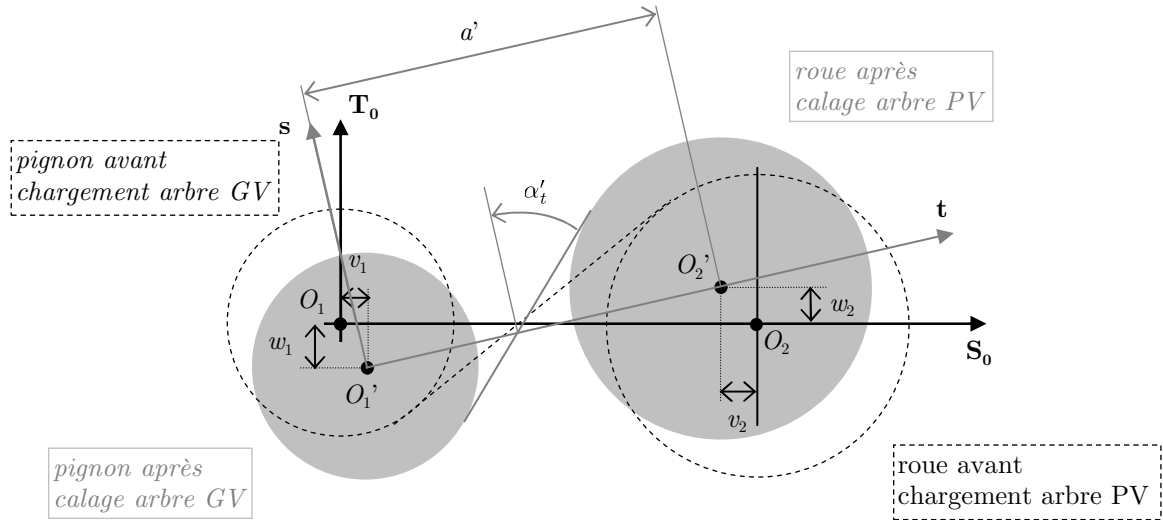
grandeurs citées ci-dessus sont considérées comme constantes au cours du calcul et mises à jour uniquement une fois l'équilibre calculé. Les coordonnées des points d'application des efforts subissent également de légères variations, susceptibles de modifier légèrement les calculs de moments par exemple. Ces variations, de l'ordre des jeux paliers au maximum, sont ignorées car supposées petites devant les dimensions du système.

### c. Positionnement

Les résultats des calculs (déplacements  $\mathbf{U}_k$  de chaque ligne d'arbre) sont utilisés comme données d'entrées dans la suite du modèle. En effet le déplacement du centre du mobile  $k$ ,  $\mathbf{u}_k(O_k)$ , est responsable d'un décalage des mobiles dans la direction axiale, et d'une modification de l'entraxe  $a'$ , de telle sorte que, en notant provisoirement  $\mathbf{u}_k(O_k) = v_k \mathbf{S}_0 + w_k \mathbf{T}_0 + u_k \mathbf{Z}_0$ ,  $a'$  s'exprime :

$$a' = \sqrt{(a + v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2} \quad (2.13)$$

où  $a$  est la valeur de l'entraxe lorsque les arbres sont centrés dans les paliers. Cette valeur peut être imposée ou calculée par la formule théorique habituelle.



**Fig. 2.5** – Modification de l'entraxe de l'engrènement sous l'effet d'un mouvement de corps solide.

Les composantes du vecteur des petites rotations,  $\omega_k = \phi_k \mathbf{S}_0 + \psi_k \mathbf{T}_0$ , de la ligne  $k$ , sont, quant à elles, traitées comme des désalignements d'arbres supports et par conséquent des mobiles.

Dans la pratique, ces composantes sont causées par le fait que les paliers d'un même arbre, dans le cas où ils seraient identiques, présentent des positions d'équilibre différentes. Elles peuvent avoir plusieurs causes :

- asymétrie du chargement de la denture (denture hélicoïdale) ;
- asymétrie du système (mobiles non centrés entre les paliers...) ;
- présence d'accouplements extérieurs...

Conformément aux définitions données dans le chapitre 1, et selon la terminologie, la composante  $\phi_k$  est appelée « déviation », et la composante  $\psi_k$  « inclinaison ».

[Vel961] présente l'effet d'un désalignement selon une direction, sur un seul des deux arbres, produisant un effet relativement prévisible sur le chargement. En revanche dans le cas du réducteur sur paliers avec jeux, les désalignements sont quelconques, positifs ou négatifs selon l'équilibre, et bien souvent présents sur les deux arbres, produisant des effets plus ou moins imprévisibles. Par exemple, de forts désalignements, identiques sur le pignon et la roue, n'auront aucun impact sur le chargement de la denture.

Pour rendre compte simplement de cet effet, nous introduisons le coefficient  $\kappa$ , défini comme le projeté des déplacements induits par les petites rotations de corps solide dans la direction normale au contact, aux bords du plan d'action (voir annexe A) :

$$\kappa = \frac{b}{\cos \beta_b} ((\phi_1 - \phi_2) \cos \alpha_t + (\psi_2 - \psi_1) \sin \alpha_t) \quad (2.14)$$

Dans la pratique (et dans la théorie [Vel961]), il est constaté que les mésalignements ont un effet notable sur le chargement à la denture lorsque  $\kappa$  devient de l'ordre de grandeur de l'écrasement moyen  $\bar{\Delta}$ .

## 2.2.2. Etat de référence de l'engrènement

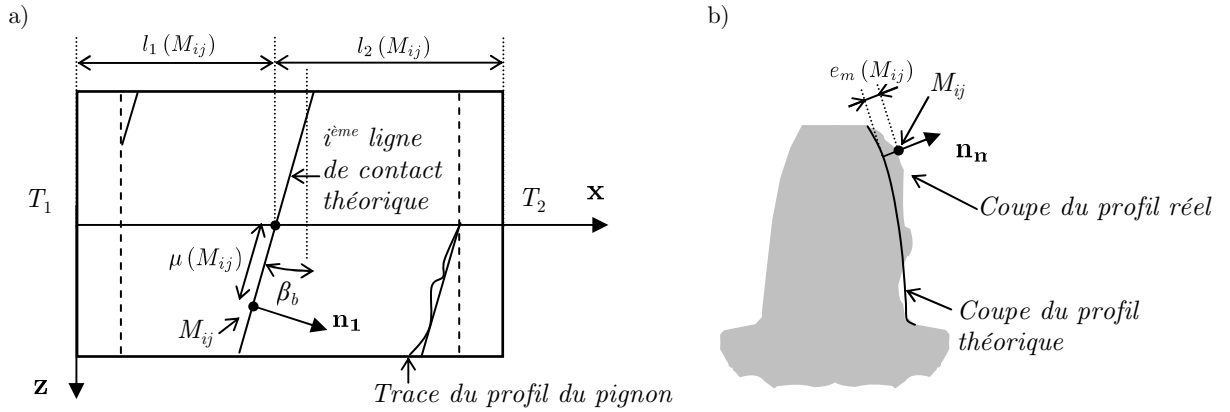
Il s'agit de définir le mouvement de corps solide de rotation des engrenages et lignes d'arbres. Chaque ligne d'arbre est soumise, non seulement aux couples (moteur et résistant) mais également aux couples de frottement causés par les paliers.

### a. Modélisation des écarts géométriques

Dans cette section, la modélisation des écarts géométriques introduits dans le chapitre 1 est présentée. Ils sont d'abord présentés séparés, en chaque point de contact potentiel  $M_{ij}$ , puis regroupés dans la notion d'écart normal équivalent.

### • Ecart de forme

Comme représenté sur la figure 2.2, la modélisation des écarts de forme est basée sur une discrétisation du flanc de chaque dent et donc à une subdivision des lignes de contact, si bien qu'un point de contact appartenant à la  $j^{\text{ème}}$  cellule sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne de contact sera noté  $M_{ij}$ . L'écart ( $e_1(M_{ij})$  pour le pignon et  $e_2(M_{ij})$  pour la roue) est alors défini par la mesure algébrique de la distance entre le point réel et le point théorique (en denture parfaite), suivant la normale extérieure au profil, tel que représenté sur la figure 2.6. Les écarts sont définis positifs selon la normale extérieure au profil et leur amplitude est supposée suffisamment faible devant les dimensions de l'engrenage pour ne pas affecter la normale extérieure au profil.



**Fig. 2.6** – Modélisation des écarts géométriques a) repérage d'un point dans le plan de contact, b) coupe d'une dent dans le plan normal à son flanc théorique au point  $M_{ij}$  avec visualisation de l'écart.

Le point de contact étant commun au pignon et la roue, on peut définir l'écart normal total au point de contact  $e_f(M_{ij})$  comme la somme algébrique des écarts associés à la dent du pignon et à celle de la roue, soit :

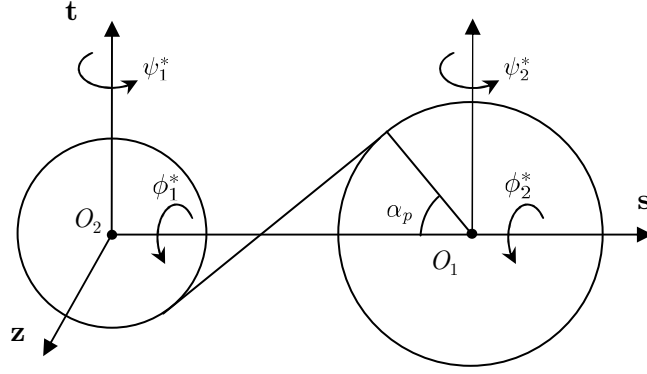
$$e_f(M_{ij}) = e_1(M_{ij}) + e_2(M_{ij}) \quad (2.15)$$

### • Ecart de montage

Les écarts de montage ici envisagés concernent les mésalignements, tels qu'introduits dans le chapitre 1 (déviation et inclinaison). Les désalignements du mobile  $m$  ( $m = 1$  pour le pignon et  $m = 2$  pour la roue) sont notés tels que représenté sur la figure 2.7.

Ils peuvent avoir pour cause :

- le calage des arbres dans les paliers, résultats de l'équation (2.12) ;
- le montage des mobiles sur les arbres.



**Fig. 2.7** – Définition des paramètres de désalignements.

Suivant VELEX et MAATAR [Vel961], les désalignements du pignon et de la roue sont modélisés comme un écart de forme, qui s'exprime au point  $M_{ij}$ , avec les notations de la section 2.3.1 et de la figure 2.2:

$$e_d(M_{ij}) = \begin{Bmatrix} -\sin \beta_b (R_{b1} \sin \alpha_t - l_1 (M_{ij}) \cos \alpha_t) - \eta (M_{ij}) \cos \alpha_t \\ -\sin \beta_b (R_{b1} \cos \alpha_t + l_1 (M_{ij}) \sin \alpha_t) + \eta (M_{ij}) \sin \alpha_t \\ -\sin \beta_b (R_{b2} \sin \alpha_t - l_2 (M_{ij}) \cos \alpha_t) + \eta (M_{ij}) \cos \alpha_t \\ -\sin \beta_b (R_{b2} \cos \alpha_t + l_2 (M_{ij}) \sin \alpha_t) - \eta (M_{ij}) \sin \alpha_t \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1^* \\ \psi_1^* \\ \phi_2^* \\ \psi_2^* \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

L'effet de ces désalignements sera largement étudié par la suite.

- **Ecart normal équivalent et écart relatif**

On définit l'écart normal équivalent au point  $M_{ij}$  comme la somme des écarts de forme de denture et des écarts de montage :

$$e(M_{ij}) = e_f(M_{ij}) + e_d(M_{ij}) \quad (2.17)$$

Dans les conditions de corps rigide, le point de contact effectif, noté  $M^*$  correspond, à chaque instant, au point pour lequel l'écart normal est maximal. Cet écart est noté  $e(M^*)$ .

On définit alors l'écart relatif au point  $M_{ij}$  comme la différence entre l'écart normal équivalent en ce point et l'écart normal au point de contact dans les conditions de corps rigides  $M^*$  :

$$\delta e(M_{ij}) = e(M_{ij}) - e(M^*) \quad (2.18)$$

A chaque instant et en tout point, l'écart relatif est, par définition, inférieur ou égal à 0.

## b. Cinématique des corps rigides

L'introduction d'écarts géométriques sur les éléments d'engrenage perturbe leur cinématique. Le calcul des vitesses de rotation des arbres repose sur deux hypothèses principales :

- la vitesse de rotation constante de l'arbre moteur  $\Omega_1$ , le problème se résume alors à chercher la vitesse de sortie ;
- la condition de non interpénétration des corps solides selon la normale aux points de contact communs.

L'expression liant la vitesse de sortie à la vitesse d'entrée s'écrit alors :

$$\Omega_2(t) = -\frac{R_{b1}}{R_{b2}}\Omega_1 + \epsilon \frac{\dot{\epsilon}(M^*)}{R_{b2} \cos \beta_b} \quad (2.19)$$

avec  $\epsilon = -1$  pour un pignon menant tournant dans le sens positif,  $\epsilon = 1$  sinon.

## c. Dynamique des corps rigides

On définit la dynamique de référence comme le mouvement de corps rigides de l'ensemble du mécanisme, possédant une énergie cinétique pouvant être perturbée par les éventuels écarts géométriques. Parmi les chargements extérieurs appliqués, on dénombre :

- le couple moteur, supposé constant (tout comme la vitesse d'entrée) noté  $C_m$  ;
- les couples de frottement sur les paliers, calculés par la résolution de (1.52), en relation avec le positionnement des arbres dans les paliers et des conditions de fonctionnement, notés  $C_{f_{mi}}$  avec  $m = 1, 2$  et  $N_{pm}$  pour le  $i^{\text{ème}}$  palier de la ligne  $m$  ;
- le couple résistant, a priori inconnu, pouvant fluctuer sous l'effet des variations de vitesses de rotation engendrées par les écarts géométriques, noté  $C_r(t)$ .

La relation liant entre grandeurs est établie par application du théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dT_{\text{sys}}}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} \quad (2.20)$$

où  $P_{\text{ext}}$  est la puissance des efforts extérieurs et  $P_{\text{int}}$  est la puissance des efforts intérieurs au système.

En négligeant les efforts de frottement au niveau du contact entre les dentures (en accord avec [Vel961] qui considère le contact comme parfaitement lubrifié), mais en considérant les couples de frottement sur les paliers, en raison de leur nombre plus important, il vient alors :

$$\mathcal{C}_r = - \left( \mathcal{C}_m + \sum_{i=1}^{N_{p1}} \mathcal{C}_{f1i} \right) \frac{\Omega_1}{\Omega_2(t)} + I_{p2} \dot{\Omega}_2 - \sum_{i=1}^{N_{p2}} \mathcal{C}_{f2i} \quad (2.21)$$

où les  $\mathcal{C}_{f1i}$  sont les couples de frottement des paliers de l'arbre moteur et  $\mathcal{C}_{f2i}$  ceux des paliers de l'arbre récepteur.

## 2.3. Etat déformé

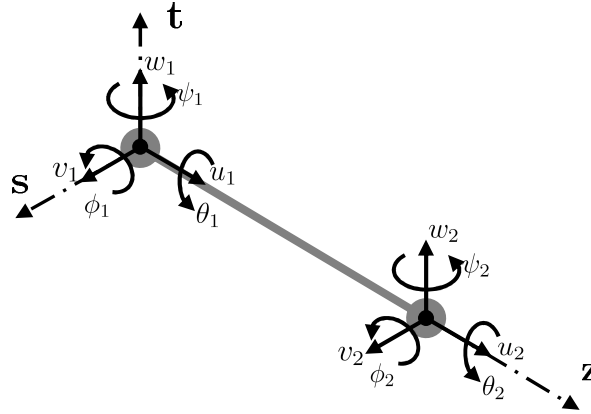
Les équations du mouvement régissent le comportement dynamique de la structure flexible autour de la position d'équilibre définie au paragraphe précédent. Dans le cas d'un système soumis à un mouvement de corps solide d'amplitude importante, il est plus rigoureux de procéder à une mise à jour dynamique de la position de référence, cette dernière suivant le système au cours de son mouvement. Ceci nécessite de modifier, au cours du temps, le repère de référence, ce qui conduit à une modification des équations de LAGRANGE, avec prise en compte de termes inertiels supplémentaires. Etant donné l'ordre de grandeur des excitations dynamiques, cette transformation ne sera pas effectuée dans la présente étude. En effet, dans la grande majorité des cas, le système reste au voisinage de la position définie au paragraphe précédent et l'hypothèse d'une position de référence constante est justifiée. En revanche dans le cas de mouvements de large amplitude (efforts synchrones très importants, instabilités de paliers...), une telle théorie pourrait présenter un certain intérêt. Le lecteur intéressé est invité à consulter [Axi03] pour de plus amples informations sur l'application des équations de LAGRANGE avec changements de référentiels.

### 2.3.1. Etat de fonctionnement des corps déformables

- **Eléments d'arbre et corps d'engrenage**

Les transmissions de forte puissance font intervenir des arbres souvent très « écrasés », de sections variables et des mobiles de largeurs importantes. Le choix a donc été fait de modéliser *les arbres et les corps des engrenages* par des éléments finis de poutre de section circulaire constante, avec prise en compte du cisaillement (poutre de TIMOSHENKO). Ils peuvent aisément être couplés les uns aux autres et décrire, avec une formulation relativement simple des systèmes d'architectures complexes. Les éléments utilisés présentent 2 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud, comme présenté sur la figure 2.8 :

- $u_{jk}, v_{jk}, w_{jk}$  sont les degrés de liberté de translation du  $j^{\text{ème}}$  nœud de l'élément  $k$  ;
- $\phi_{jk}, \phi_{jk}, \theta_{jk}$  sont les degrés de liberté de rotation du  $j^{\text{ème}}$  nœud de l'élément  $k$ .



**Fig. 2.8** – *Elément d'arbre à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud.*

En négligeant les effets gyroscopiques, l'application des équations de LAGRANGE sur l'élément  $k$  conduit à une matrice masse  $[\mathbf{M}_{\mathbf{S}_k}]$ , un terme source causé par les éventuelles variations de vitesse de sortie  $\mathbf{F}_{1k}$  et une matrice raideur  $[\mathbf{K}_{\mathbf{S}_k}]$  qui sont détaillées dans l'annexe B.

- **Calcul de l'écrasement à la denture et conditions de contact**

Le calcul de l'écrasement en un point est basé sur une discrétisation des corps de mobiles en un certain nombre de tranches cylindriques minces ( voir figure 2.2 ), repérées par l'indice  $j$ . Ainsi, le déplacement sous charge d'un point  $M_{ij}$  de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de contact peut s'exprimer à partir des torseurs de déplacements infinitésimaux associés à la  $j^{\text{ème}}$  tranche du pignon ( $m = 1$ ) et de la roue ( $m = 2$ ) par rapport au mouvement de corps rigides.

$$\{\tau_{mj}\}_{(R_j)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_{mj}(O_{mj}) = v_{mj}\mathbf{s}_j + w_{mj}\mathbf{t}_j + u_{mj}\mathbf{z} \\ \boldsymbol{\omega}_{mj}(O_{mj}) = \phi_{mj}\mathbf{s}_j + \psi_{mj}\mathbf{t}_j + \theta_{mj}\mathbf{z} \end{array} \right\}_{(R_j)} \quad (2.22)$$

avec  $(O_{mj})$  le centre de la  $j^{\text{ème}}$  tranche du corps  $m$ , comme représenté sur la figure 2.2.

Le déplacement normal d'un point  $M_{ij}$  sous l'effet de ces perturbations, et superposé au mouvement de corps rigide, s'écrit, en vertu des propriétés du torseur des petits déplacements :

$$\delta_m(M_{ij}) = (\mathbf{U}_{mj}(O_{mj}) + \boldsymbol{\omega}_{mj} \times \mathbf{O}_{mj}\mathbf{M}_{ij}) \bullet \mathbf{n}_m \quad (2.23)$$

qui peut se réécrire, [Ajm00], sous forme matricielle :

$$\delta_m(M_{ij}) = \mathbf{V}_m(M_{ij}) \bullet \mathbf{q}_{mj} \quad (2.24)$$

où  $\mathbf{q}_{mj}$  est le vecteur des degrés de liberté de la tranche  $j$  appartenant au mobile  $m$  :

$$\mathbf{q}_{mj} = \{u_{mj}; v_{mj}; w_{mj}; \phi_{mj}; \psi_{mj}; \theta_{mj}\}^t \quad (2.25)$$

et  $\mathbf{V}_m(M_{ij})$  est un vecteur de structure dépendant des caractéristiques géométriques du mobile :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(M_{ij}) &= \begin{Bmatrix} \sin \beta_b \\ \cos \beta_b \sin \alpha_t \\ \epsilon \cos \beta_b \cos \alpha_t \\ -\epsilon \sin \beta_b (R_{b1} \sin \alpha_t - x_{1j} \cos \alpha_t) \\ -\sin \beta_b (R_{b1} \cos \alpha_t + x_{1j} \sin \alpha_t) \\ \epsilon R_{b1} \cos \beta_b \end{Bmatrix} \\ \mathbf{V}_2(M_{ij}) &= \begin{Bmatrix} -\sin \beta_b \\ -\cos \beta_b \sin \alpha_t \\ -\epsilon \cos \beta_b \cos \alpha_t \\ -\epsilon \sin \beta_b (R_{b2} \sin \alpha_t - (T_1 T_2 x_{1j}) \cos \alpha_t) \\ -\sin \beta_b (R_{b1} \cos \alpha_t + (T_1 T_2 x_{1j}) \sin \alpha_t) \\ \epsilon R_{b2} \cos \beta_b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec  $\epsilon = -1$  pour un pignon menant tournant dans le sens positif,  $\epsilon = 1$  sinon. Les autres paramètres sont définis figure 2.2.

En réécrivant les déplacements généralisés du centre de chaque tranche  $\mathbf{q}_{mj}$  en fonction des déplacements des deux nœuds extrêmes du mobile  $m$  (par l'intermédiaire des fonctions de forme de l'élément d'arbre [Lal98],  $\mathbf{q}_{mj} = [\mathbf{P}_m(M_{ij})] \mathbf{q}_m$ , où les matrices  $[\mathbf{P}_m(M_{ij})]$  sont explicitées dans [Lal98]), le déplacement d'un point  $M_{ij}$  s'écrit :

$$\delta_m(M_{ij}) = \mathbf{V}_m(M_{ij})^t [\mathbf{P}_m(M_{ij})] \mathbf{q}_m \quad (2.27)$$

On notera alors l'écrasement :

$$\Delta(M_{ij}) = \delta_1(M_{ij}) + \delta_2(M_{ij}) - \delta e(M_{ij}) \quad (2.28)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\delta(M_{ij}) = \mathbf{V}(M_{ij})^t \mathbf{q} - \delta e(M_{ij}) \quad (2.29)$$

avec  $\mathbf{V}(M_{ij}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_1(M_{ij}) [\mathbf{P}_1(M_{ij})] \\ \mathbf{V}_2(M_{ij}) [\mathbf{P}_2(M_{ij})] \end{Bmatrix}$  et  $\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix}$ .

### 2.3.2. Assemblage des éléments

Les équations du mouvement permettent de prédire le comportement dynamique de la structure autour de la position d'équilibre correspondant au mouvement de corps solide. Elles

se construisent à partir des équations de LAGRANGE, nécessitant le calcul des énergies de déformation et cinétique associées à la structure.

Parmi les deux champs de déplacements traités, chacun possède une contribution bien distincte :

- le mouvement de corps solide contribue à l'énergie cinétique du système, mais pas à son énergie de déformation (excepté pour les accouplements extérieurs, qui ne font pas partie du système « réducteur ») ;
- les déplacements dits « élastiques » qui contribuent aux énergies cinétiques et de déformation de tous les organes.

Ainsi, en négligeant les effets gyroscopiques, après assemblage des éléments d'arbres, les énergies cinétiques des différentes parties du système s'écrivent :

$$T_S = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}_R \right)^t [\mathbf{M}_S] \left( \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}_R \right) + \mathbf{F}_1 \left( \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}_R \right) \quad (2.30)$$

pour les éléments d'arbres,  $[\mathbf{M}_S]$  étant constituée des matrices  $[\mathbf{M}_{S_i}]$  exprimées en annexe B et assemblées selon les nœuds du système, idem pour  $\mathbf{F}_1$  avec les  $\mathbf{F}_{1i}$ .

$$T_I = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}_R \right)^t [\mathbf{M}_I] \left( \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}_R \right) \quad (2.31)$$

pour les éléments inertiels supplémentaires,  $[\mathbf{M}_S]$  étant constituée des masses et inerties ponctuelles ajoutées en certains nœuds.

L'énergie cinétique de la denture est négligée.

L'énergie cinétique totale est alors :

$$T = T_S + T_I \quad (2.32)$$

Les énergies de déformation s'écrivent :

$$U_S = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t [\mathbf{K}_S] \mathbf{X} \quad (2.33)$$

pour les éléments d'arbres,  $[\mathbf{K}_S]$  étant constituée des matrices  $[\mathbf{K}_{S_i}]$  exprimées en annexe B et assemblées selon les nœuds du système :

$$U_C = \frac{1}{2} (\mathbf{X} + \mathbf{X}_R)^t [\mathbf{K}_C] (\mathbf{X} + \mathbf{X}_R) \quad (2.34)$$

pour les éléments d'accouplements élastiques,

$$U_{eng} = \frac{1}{2} \sum_{M_{ij} \in L} \left[ k_{ij} \mathbf{X}^t \mathbf{V}(M_{ij}) \mathbf{V}(M_{ij})^t \mathbf{X} + 2k_{ij} \delta e(M_{ij}) \mathbf{V}(M_{ij}) \mathbf{X}^t + k_{ij} \delta e(M_{ij})^2 \right] \quad (2.35)$$

$$U_{eng} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t [\mathbf{K}_{eng}] \mathbf{X} + \mathbf{F}_2 \mathbf{X} + \dots \text{(termes indépendants de } \mathbf{X} \text{)} \quad (2.36)$$

L'énergie de déformation totale est alors :

$$U = U_S + U_C + U_{eng} \quad (2.37)$$

### 2.3.3. Travail des efforts extérieurs

#### a. La pesanteur

Etant donné les dimensions et masses des systèmes étudiés, l'effet de la pesanteur ne peut pas être négligé devant la charge imposée par les couples (particulièrement pour les systèmes peu chargés). La gravité est donc prise en compte dans le modèle par intégration de l'effort volumique sur l'élément considéré qui peut être :

- Une masse  $M$ , ramenée en un nœud, alors :  $\delta W_{poids} = Mg \delta u$  ;
- Un élément de poutre, alors :  $\delta W_{poids} = \int_0^l \rho g S \delta u dz$  .

#### b. Les réactions paliers

Le travail virtuel des forces créées par le film d'huile, agissant sur l'arbre s'écrit :

$$\delta W_{paliers} = [F_u \quad F_v] \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

#### c. Les couples

Qu'il s'agisse de couples extérieurs (moteur  $\mathcal{C}_M$  ou récepteur  $\mathcal{C}_M$ ) ou de frottement  $\mathcal{C}_f$  dus aux paliers, ceux-ci sont caractérisés par leur travail virtuel qui s'écrit :

$$\delta W_{couples} = \mathcal{C}_X \delta \theta \quad (2.39)$$

Les couples sont comptabilisés positifs lorsqu'ils sont appliqués dans le sens trigonométrique pour l'observateur placé du côté des  $\mathbf{z}$  croissants.

**Remarque :** • *Si les couples moteur et récepteur sont de signe identique, il n'en est pas de même des couples de frottement entre les paliers d'arbre moteur et récepteur, en effet ces couples sont opposés au sens de rotation de l'arbre sur lequel ils sont appliqués.*

### 2.3.4. Première écriture des équations du mouvement

L'application des équations de LAGRANGE conduit alors à une première forme des équations du mouvement, en négligeant les effets dissipatifs (ces derniers seront introduits par la suite) :

$$[\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_I] (\ddot{\mathbf{X}} + \ddot{\mathbf{X}}_R) + [\mathbf{K}_S + \mathbf{K}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X}; \mathbf{X}_R) + \mathbf{K}_C] \mathbf{X} = \mathbf{Q}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}; \mathbf{X}_R; \dot{\mathbf{X}}; \dot{\mathbf{X}}_R) + \mathbf{Q}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X}; \mathbf{X}_R) - [\mathbf{K}_C] \mathbf{X}_R \quad (2.40)$$

Dans cette expression:

- $[\mathbf{M}_S]$  et  $[\mathbf{K}_S]$  correspondent respectivement aux matrices masse et raideur des éléments d'arbres, assemblées selon les nœuds du système,
- $[\mathbf{K}_{\text{eng}}]$  est la matrice de rigidité des dentures
- $[\mathbf{M}_I]$  est la matrice de masse correspondant à tous les éléments supplémentaires introduits (principalement masses et inerties diamétrales et polaires concentrées)
- $[\mathbf{K}_C]$  est la matrice de raideur correspondant à tous les éléments supplémentaires introduits (principalement accouplements élastiques et butées)
- $[\mathbf{Q}_{\text{eng}}]$  est constitué des vecteurs de forçage dus aux effets inertiels  $\mathbf{F}_{1i}$  et géométriques  $\mathbf{F}_{2i}$ , complétés par des 0.
- $[\mathbf{Q}_{\text{ext}}]$  est le vecteur contenant les efforts extérieurs appliqués à la structure :
  - Les couples (moteur, récepteur et de frottement), appliqués aux nœuds correspondants.
  - Les efforts nodaux correspondant au poids propre de chaque élément.
  - Les efforts de type « balourd » engendrés par un centre de gravité non centré d'un élément, ils sont du type  $mr\Omega_i^2 \cos(\Omega_i t) \mathbf{s} + \xi mr\Omega_i^2 \sin(\Omega_i t) \mathbf{t}$  avec  $\xi = 1$  sur l'arbre moteur ( $i = 1$ ) et  $\xi = -1$  sur l'arbre récepteur ( $i = 2$ ).
- $\mathbf{Q}_{\text{pal}}$  est le vecteur des efforts généralisés générés par les paliers sur le système.

La  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{Q}_{\text{pal}}$  s'exprime :

$$Q_{pal_i} = \sum_{j=1}^{N_{pat}} \mathbf{F}_{pal_{x_j}} \bullet \frac{\partial x_j}{\partial \mathbf{X}_i} + \mathbf{F}_{pal_{y_j}} \bullet \frac{\partial y_j}{\partial \mathbf{X}_i} \quad (2.41)$$

Tout calcul effectué,  $\mathbf{Q}_{pal}$  s'exprime :

$$\mathbf{Q}_{pal} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 0 \\ F_{pal_{v1}} \\ F_{pal_{w1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_{pal_{vi}} \\ F_{pal_{wi}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 6(n_{p1}-1) \\ \\ 6 \\ \\ \\ \\ \\ \\ 6 \\ \\ \\ \\ 6(N-n_{pmax}) \end{array} \right\} \quad (2.42)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{pal_{vi}} \\ F_{pal_{wi}} \end{array} \right\} = [\mathbf{Q}_i] \left\{ \begin{array}{c} F_{pal_{xi}} \\ F_{pal_{yi}} \end{array} \right\} \quad (2.43)$$

avec

- $[\mathbf{Q}_i] = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_i & -\cos \alpha_i \\ \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \end{bmatrix}$  pour les paliers dont l'arbre tourne dans le sens trigonométrique avec  $\mathbf{z}$  sortant ;
- $[\mathbf{Q}_i] = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \\ \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \end{bmatrix}$  pour les paliers dont l'arbre tourne dans le sens horaire avec  $\mathbf{z}$  sortant ;
- $\alpha_i$  l'angle formé entre la verticale (axe  $\mathbf{t}$ ) et l'axe  $\mathbf{x}_i$  du repère local du palier considéré, comme représenté sur la figure 2.9.

Nous avons également (dans le cas où les efforts sont calculés dans le repère polaire).

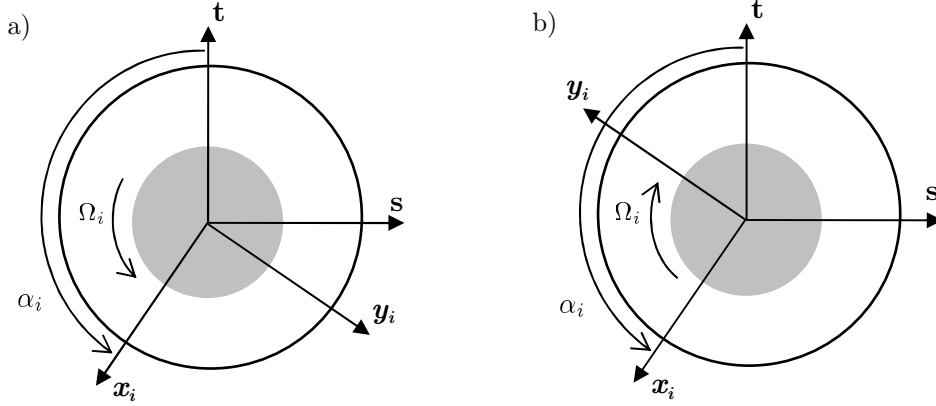
$$\left\{ \begin{array}{c} F_{pal_i} \\ F_{pal_i} \end{array} \right\}_{xy} = [\mathbf{P}_i] \left\{ \begin{array}{c} F_{pal_i} \\ F_{pal_i} \end{array} \right\}_{rq} \quad (2.44)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{pal_i} \\ F_{pal_i} \end{array} \right\}_{st} = [\mathbf{P}_i] [\mathbf{Q}_i] \left\{ \begin{array}{c} F_{pal_i} \\ F_{pal_i} \end{array} \right\}_{rq} \quad (2.45)$$

avec

- $[\mathbf{P}_i] = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix}$  pour les paliers dont l'arbre tourne dans le sens trigonométrique avec  $\mathbf{z}$  sortant ;
- $[\mathbf{P}_i] = \begin{bmatrix} -\cos \phi_i & \sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix}$  pour les paliers dont l'arbre tourne dans le sens horaire avec  $\mathbf{z}$  sortant .



**Fig. 2.9** – Orientation des repères locaux relativement au repère global pour les paliers dont l'arbre tourne en sens dit « positif » (a) et en sens dit « négatif » (b).

**Remarques :**

- Le repère local  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  associé au palier  $i$  est repéré par l'angle  $\alpha_i$ . Dans le cas de modèle de palier avec intégration numérique du champ de pression,  $\alpha_i$  correspond au début d'arc actif du palier, soit la sortie du bassin d'alimentation. Dans le cas de modèle de palier avec intégration analytique du champ de pression (palier court),  $\alpha_i$  correspond à la direction d'application de la charge.
- L'équation (2.40) possède une forme proche de l'équation du mouvement résolue par BONNEAU et FRENE [Bon97] qui étudient un rotor supporté par des paliers fluides. La résolution de (2.40) ne sera, ici, pas réalisée en base modale mais directement en base physique, en raison de la taille du système à résoudre qui reste raisonnable (faible nombre d'éléments d'arbres)

### 2.3.5. Introduction des effets dissipatifs

Le modèle de couplage traité dans cette thèse met en jeu plusieurs organes mécaniques (arbres, engrenages, paliers, accouplements...). Tous ces organes sont des sources dissipatives, bien que la nature même de l'amortissement puisse varier (visqueux, structural...).

L'amortissement des paliers est clairement de type visqueux. Il est intégré au modèle de palier et plutôt représentatif du comportement physique. Concernant l'engrènement, l'amortissement est principalement de type visqueux puisqu'il provient en grande partie des effets d'écrasement de film lubrifiant entre les dents.

Les effets dissipatifs sont modélisés par des facteurs d'amortissement modaux sur le système constitué du réducteur avec arbres, monté sur des paliers rigides, l'amortissement des paliers étant géré séparément. La matrice amortissement visqueux du système est supposée orthogonale aux modes propres de la structure obtenus par résolution du problème aux valeurs propres – vecteurs propres issu de l'équation (2.46), directement déduite de (2.40) :

$$[\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_I] \ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}_S + \bar{\mathbf{K}}_{\text{eng}} + \mathbf{K}_C] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

où  $[\bar{\mathbf{K}}_{\text{eng}}]$  est la matrice raideur d'engrènement dite moyenne, correspondant à la moyenne temporelle et spatiale de la matrice  $[\mathbf{K}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X}; \mathbf{X}_R)]$ .

On note :

- $[\Phi]$  la matrice des modes ;
- $[\mathbf{K}_\Phi] = [\Phi]^t [\mathbf{K}_S + \bar{\mathbf{K}}_{\text{eng}} + \mathbf{K}_C] [\Phi]$  la matrice raideur modale dont les composantes sont les  $k_{ij}^\Phi$ , qui sont tels que  $k_{ij}^\Phi = 0$  si  $i \neq j$  ;
- $[\mathbf{M}_\Phi] = [\Phi]^t [\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_I] [\Phi]$  la matrice masse modale dont les composantes sont les  $m_{ij}^\Phi$ , qui sont tels que  $m_{ij}^\Phi = 0$  si  $i \neq j$  ;
- $[\mathbf{C}_\Phi]$  la matrice amortissement modale dont les composantes sont les  $c_{ij}^\Phi$ , qui sont tels que  $c_{ij}^\Phi = 0$  si  $i \neq j$  et  $c_{ij}^\Phi = 2\zeta\sqrt{k_{ij}^\Phi m_{ij}^\Phi}$  sinon.

Le facteur d'amortissement  $\zeta$  est une source importante d'imprécision du modèle. Si physiquement, des facteurs d'amortissement différents devraient être employés suivant les modes (ceux ne faisant pas intervenir d'énergie de déformation dans l'engrènement étant supposés avoir un amortissement plus faible...), dans la pratique un coefficient commun est employé, sa valeur variant de façon importante dans la littérature, dans une fourchette  $0.013 \leq \zeta \leq 0.17$ .

La matrice amortissement en base physique  $[\mathbf{C}]$  est déterminée par le changement de base :

$$[\mathbf{C}] = \left([\Phi]^t\right)^{-1} [\mathbf{C}_\Phi] ([\Phi])^{-1} \quad (2.47)$$

### 2.3.6. Equations du mouvement non linéaires

Compte tenu de l'introduction des effets dissipatifs et de l'hypothèse de stationnarité concernant le champ de déplacement de corps solide, matérialisé par  $\mathbf{X}_R$ , les équations du mouvement se mettent sous la forme :

$$[\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_I] \ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{C}_S] \dot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}_S + \mathbf{K}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X}; \mathbf{X}_R) + \mathbf{K}_C] \mathbf{X} = \mathbf{Q}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}; \mathbf{X}_R; \dot{\mathbf{X}}; \dot{\mathbf{X}}_R) + \mathbf{Q}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X}; \mathbf{X}_R; \delta e) - [\mathbf{K}_C] \mathbf{X}_R \quad (2.48)$$

Cette équation présente plusieurs sources de non linéarité :

- l'engrènement, faisant appel à un algorithme dédié permettant de traiter le problème de contact unilatéral ;
- les paliers dont le caractère non linéaire impose l'utilisation d'un algorithme itératif.

En tant que système différentiel non linéaire à excitations paramétriques, l'équation (2.48) est résolue pas à pas dans le temps à l'aide du schéma d'intégration implicite de NEWMARK couplé à l'algorithme de contact unilatéral et à l'algorithme de NEWTON-RAPHSON, comme présenté dans le paragraphe suivant.

### 2.3.7. Equilibre statique – conditions initiales

Les simulations dynamiques sont initialisées avec des conditions correspondant à la déformée statique du système,  $\mathbf{X}_0$ , solution de l'équation d'équilibre (2.49) directement obtenue à partir de (2.46) dans le cas statique :

$$[\mathbf{K}_S + \bar{\mathbf{K}}_{\text{eng}} + \mathbf{K}_C] \mathbf{X}_0 = \bar{\mathbf{Q}}_{\text{ext}} + \mathbf{Q}_{\text{pal}_0}(\mathbf{X}_0; \mathbf{X}_R) - [\mathbf{K}_C] \mathbf{X}_R \quad (2.49)$$

où  $[\bar{\mathbf{K}}_{\text{eng}}]$  correspond à la moyenne spatiale et temporelle de la matrice  $[\mathbf{K}_{\text{eng}}(t, \mathbf{X})]$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}_{\text{ext}}$  contient les termes constants de  $\mathbf{Q}_{\text{ext}}(t)$  et  $\mathbf{Q}_{\text{pal}_0}$  est identique à  $\mathbf{Q}_{\text{pal}}$  avec le champ de pression de chaque palier calculé dans le cas statique (annulation des termes temporels de l'équation de REYNOLDS).

**Remarques :** •  $[\mathbf{K}_{\text{eng}}(t, \mathbf{X})]$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} \sum_{L(t)} k_{ij} \mathbf{V}_1(M_{ij}) \mathbf{V}_1(M_{ij})^T & \sum_{L(t)} k_{ij} \mathbf{V}_1(M_{ij}) \mathbf{V}_2(M_{ij})^T \\ \sum_{L(t)} k_{ij} \mathbf{V}_2(M_{ij}) \mathbf{V}_1(M_{ij})^T & \sum_{L(t)} k_{ij} \mathbf{V}_2(M_{ij}) \mathbf{V}_2(M_{ij})^T \end{bmatrix} \text{ complétée par des } 0 \text{ pour le système complet. La dépendance temporelle est liée au défilement des lignes de contact alors que la dépendance spatiale est liée au fait que certaines portions des lignes de contact peuvent être « inactives » } (k_{ij} = 0). \text{ Pour le calcul de la matrice raideur moyenne } [\bar{\mathbf{K}}_{\text{eng}}], \text{ il est considéré que tous les points de contact potentiels } M_{ij} \text{ participent au contact et les vecteurs } \mathbf{V}_i(M_{ij}) \text{ ainsi que les raideurs } k_{ij}, \text{ sont moyennés sur une période d'engrènement, respectivement } \bar{\mathbf{V}}_i \text{ pour les vecteurs de forme et } \bar{k} \text{ pour la raideur globale moyenne. Ainsi, il vient}$$

$$[\bar{\mathbf{K}}_{\text{eng}}] = \bar{k} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1(M_{ij}) \bar{\mathbf{V}}_1(M_{ij})^T & \bar{\mathbf{V}}_1(M_{ij}) \bar{\mathbf{V}}_2(M_{ij})^T \\ \bar{\mathbf{V}}_2(M_{ij}) \bar{\mathbf{V}}_1(M_{ij})^T & \bar{\mathbf{V}}_2(M_{ij}) \bar{\mathbf{V}}_2(M_{ij})^T \end{bmatrix}.$$

- Afin de simplifier la formulation, et surtout la résolution, du problème, les écarts de forme  $\delta e$  en chaque point ont été ignorés pour l'équilibre statique, permettant ainsi de réduire significativement le nombre d'itérations, et donc le nombre de résolutions de l'équation de REYNOLDS, ce qui peut représenter un gain de temps de calcul conséquent.

Cette équation est, elle aussi, non linéaire. La seule source de non linéarité réside dans le terme  $\mathbf{Q}_{\text{pal}0}$ . Une technique de NEWTON-RAPHSON est également utilisée pour la résolution. Le procédé est identique à celui utilisé pour la résolution de l'équation (2.46), à savoir que l'équation (2.49) est écrite sous la forme  $\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{X}_0$  calculé après la  $k+1^{\text{ième}}$  itération,  $\mathbf{X}_0^{k+1}$ , est la correction de  $\mathbf{X}_0^k$  :  $\mathbf{X}_0^{k+1} = \mathbf{X}_0^k + \Delta\mathbf{X}_0$  avec  $\Delta\mathbf{X}_0$  solution de  $\left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X}_0^k)}{\partial \mathbf{X}_0^k} \right] \Delta\mathbf{X}_0 = -\mathbf{G}(\mathbf{X}_0^k)$ . En pratique, peu d'itérations suffisent à la convergence du problème car l'initialisation  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$  est déjà relativement proche de la solution aux nœuds des paliers.

Toutes les simulations dynamiques sont alors initiées avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0 \\ \ddot{\mathbf{X}}(t=0) = \dot{\mathbf{X}}(t=0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.50)$$

### 2.3.8. Equations du mouvement linéarisées

Supposons que les mouvements du centre de l'arbre au sein du palier restent au voisinage de la position d'équilibre statique  $\mathbf{X}_0$ , ce qui est fort probable dans la mesure où les excitations dynamiques, causées par les variations de la raideur d'engrènement et divers termes excitateurs, restent faibles devant le chargement statique moyen. Sous ces hypothèses, les efforts paliers peuvent être linéarisés autour de cette position d'équilibre, conformément à la procédure décrite dans [Fre98] et rappelée dans le Chapitre 1. Une fois les efforts paliers linéarisés, et compte-tenu des conditions initiales (2.50), les équations du mouvement (2.46) s'écrivent :

$$[\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_I] \ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{C}_S + \mathbf{C}_{\text{pal}}] \dot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}_S + \mathbf{K}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X}; \mathbf{X}_R) + \mathbf{K}_C + \mathbf{K}_{\text{pal}}] \mathbf{X} = \mathbf{Q}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{Q}_{\text{pal}0}(\mathbf{X}_0; \mathbf{X}_R) + \mathbf{Q}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X}; \mathbf{X}_R) - [\mathbf{K}_C] \mathbf{X}_R + [\mathbf{K}_{\text{pal}}] \mathbf{X}_0 \quad (2.51)$$

où  $[\mathbf{K}_{\text{pal}}]$  et  $[\mathbf{C}_{\text{pal}}]$  sont les matrices (respectivement de raideur et d'amortissement) issues de l'assemblage des matrices élémentaires de chaque palier, et transposées dans le repère global.

$$[\mathbf{K}_{\text{pal}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & & & \dots & & & [\mathbf{0}] \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ss1} & k_{st1} \\ 0 & k_{ts1} & k_{tt1} \end{bmatrix} & & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ssi} & k_{sti} \\ 0 & k_{tsi} & k_{tti} \end{bmatrix} & & \\ & & & & & & \\ [\mathbf{0}] & & & \dots & & & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} 6(n_{pi}-1) \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} 6 \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} 6 \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} 6(N-n_{pmax}) \end{matrix} \quad (2.52)$$

$$[\mathbf{C}_{\text{pal}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & & & \dots & & & [\mathbf{0}] \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{ss1} & c_{st1} \\ 0 & c_{ts1} & c_{tt1} \end{bmatrix} & & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{ssi} & c_{sti} \\ 0 & c_{tsi} & c_{tti} \end{bmatrix} & & \\ & & & & & & \\ [\mathbf{0}] & & & \dots & & & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} 6(n_{pi}-1) \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} 6 \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} 6 \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} 6(N-n_{pmax}) \end{matrix} \quad (2.53)$$

$n_{pi}$  est le numéro du nœud correspondant au palier  $i$ ,  $n_{pmax}$  est le numéro du nœud correspondant au dernier palier, et  $N$  est le nombre de nœuds total du système.

Pour les modèles de palier utilisant une intégration numérique de l'équation de Reynolds, les coefficients  $k_{ssi}$ ,  $k_{sfi}$ ,  $k_{tsi}$ ,  $k_{tfi}$ ,  $c_{ssi}$ ,  $c_{sfi}$ ,  $c_{tsi}$  et  $c_{tfi}$ , peuvent être calculés numériquement par dérivation, directement dans le repère (s,t), et les matrices  $[\mathbf{K}_{\text{pal}}]$  et  $[\mathbf{C}_{\text{pal}}]$  s'expriment alors rigoureusement :

$$[\mathbf{K}_{\text{pal}}] = - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{pal}}}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0; \dot{\mathbf{X}}=0} \quad (2.54)$$

$$[\mathbf{C}_{\text{pal}}] = - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{pal}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0; \dot{\mathbf{X}}=0} \quad (2.55)$$

De même que pour les réactions palier, les modèles simplifiés basés sur une résolution analytique de l'équation de REYNOLDS, et une formulation analytique des réactions, ne permettent pas une dérivation directement dans le repère global. Les coefficients sont d'abord obtenus par une dérivation analytique dans le repère local lié à chaque palier puis dans le repère global par changements de base :

$$[\mathbf{K}_{pal_i}]_{xy} = [\mathbf{P}_i] [\mathbf{K}_{pal_i}]_{rq} [\mathbf{P}_i]^{-1} \quad (2.56)$$

soit

$$[\mathbf{K}_{pal_i}]_{xy} = [\mathbf{P}_i] [\mathbf{Q}_i] [\mathbf{K}_{pal_i}]_{rq} [\mathbf{Q}_i]^{-1} [\mathbf{P}_i]^{-1} \quad (2.57)$$

avec les matrices  $[\mathbf{P}_i]$  et  $[\mathbf{Q}_i]$  définies en section 2.3.4.

**Remarque :** • *Dans le cas de modèle nécessitant la résolution numérique, il a été vérifié qu'une dérivation dans le repère global ( $\mathbf{s}, \mathbf{t}$ ) fournissait les mêmes valeurs de coefficients qu'une dérivation dans le repère local de chaque palier ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ) suivi du changement de base ci-dessus. Le tenseur d'amortissement reste également symétrique.*

Avec cette formulation, la seule source de non linéarité est l'engrènement,  $\mathbf{X}_R$  et  $\mathbf{X}_0$  étant connus. La résolution se fait donc simplement en couplant le schéma d'intégration temporelle de NEWMARK à l'algorithme de contact unilatéral, tel que décrit dans [Vel961]. Ce modèle permet de réduire grandement le nombre de résolution de l'équation de REYNOLDS qui n'est plus résolue qu'un nombre fini de fois : pour l'équilibre statique et pour le calcul des coefficients dynamiques

## 2.4. Introduction des effets thermiques dans les paliers

L'étude des effets thermiques dans les paliers est une problématique à part entière, cette partie n'a pas vocation à présenter un modèle de thermique novateur. Il s'agit de prendre en compte simplement un effet thermique. En revanche, l'influence des effets thermiques sur un réducteur monté sur paliers n'a pas, à notre connaissance, été étudiée ; et de toutes les hypothèses restrictives associées à l'équation de REYNOLDS (fluide newtonien, écoulement laminaire, modèle isotherme...), les effets thermiques ont semblé être le paramètre le plus influent. Le paragraphe suivant a donc pour objectif de présenter un premier modèle simple de ces ef-

fets sur le comportement du mécanisme. L'influence sera démontrée dans les chapitres suivants.

### 2.4.1. Modèle thermique de palier retenu

Dans ce paragraphe, nous présentons le modèle thermique de palier qui a été retenu. Ce modèle simplifié est construit sur la base du modèle thermique global présenté dans le chapitre 1. Le modèle a été modifié afin de tenir compte de la circulation du lubrifiant dans le calcul de la température d'injection.

L'expérience a montré que l'hypothèse d'une température d'injection de fluide constante était erronée. Elle est donc ici remise en question et il est tenu compte de la recirculation du fluide (débits  $Q_{\theta i}$ ) dans le calcul de la température d'injection.

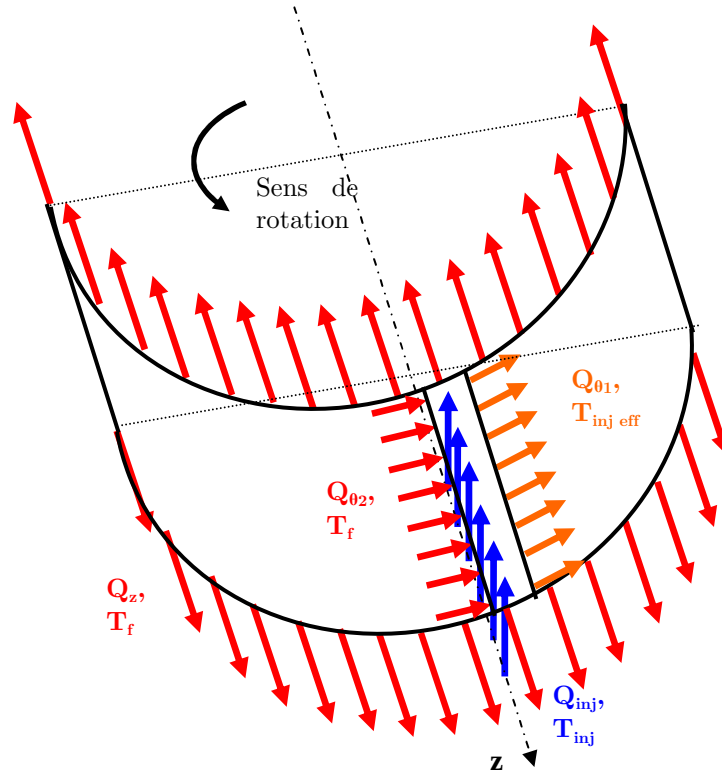


Fig 2.10 – Représentation des différents débits à l'intérieur du palier.

Comme représentée sur la figure 2.10, la température d'injection dite effective  $T_{inj\ eff}$  est calculée comme la température d'équilibre issue du mélange d'une quantité de fluide « chaud » 1 ( $Q_{\theta 2}$ ,  $T_f$ ) et d'une quantité de fluide froid 2 ( $Q_{inj} = Q_z$ ,  $T_{inj}$ ). Dans l'hypothèse où la transformation de mélange est adiabatique et sans variation de travail extérieur (la géométrie est inchangée), le premier principe de la thermodynamique permet d'écrire la relation entre les chaleurs cédées par chaque fluide ( $\Delta Q_{\theta 2}$  et  $\Delta Q_{inj}$  à ne pas confondre avec les débits) :

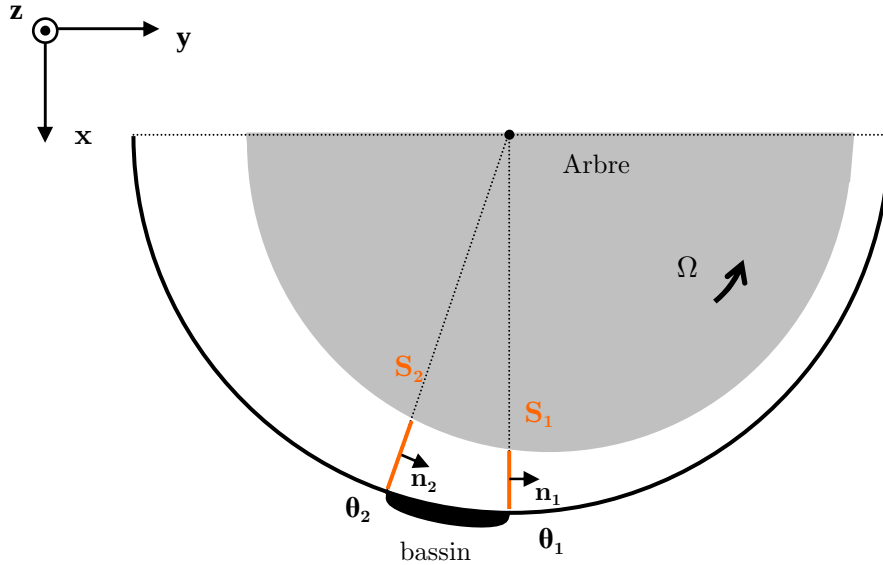
$$\Delta Q_{\theta 2} = -\Delta Q_{inj} \quad (2.58)$$

où  $\Delta Q_{\theta 2} = Q_{m\theta 2} C_{p\theta 2} (T_{injeff} - T_f) = Q_{\theta 2} \rho_{\theta 2} C_{p\theta 2} (T_{injeff} - T_f)$ , et une relation identique est écrite pour le fluide en entrée ; avec  $Q_{m\theta i}$  le débit massique traversant la surface  $S_i$ , et  $\rho_{\theta i}$ ,  $C_{p\theta i}$  et  $Q_{\theta i}$  respectivement la masse volumique, la capacité thermique du lubrifiant et le débit volumique de lubrifiant traversant cette même surface (figure 2.11).

La température « effective » d'injection du fluide est alors :

$$T_{injeff} = \frac{Q_z \rho_{inj} C_{pinj} T_{inj} + Q_{\theta 2} \rho_{\theta 2} C_{p\theta 2} T_f}{Q_z \rho_{inj} C_{pinj} + Q_{\theta 2} \rho_{\theta 2} C_{p\theta 2}} \quad (2.59)$$

Le débit de recirculation est défini comme le débit traversant la surface  $S_2$ , noté  $Q_{\theta 2}$ , avec les notations de la figure 2.11.



**Fig 2.11** – Visualisation des surfaces d'intégration pour le calcul du débit de recirculation dans les paliers.

Pour un fluide incompressible dont le champ de vitesse est  $\mathbf{u}$ , le débit volumique passant à travers une surface  $S$ , de normale  $\mathbf{n}$ , vaut  $Q_n = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ .

Cette formule permet de calculer  $Q_1$ , le débit au travers de  $S_1$ , première surface traversée par une particule sortant du bassin d'alimentation :  $\mu C_p \rho$

$$Q_{\theta 1} = \int_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}} \int_{y=0}^{y=h(\theta_1)} \left[ \frac{1}{2R\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} y(y-h) + \frac{yR\Omega}{h} \Big|_{\theta=\theta_1} \right] dy dz \quad (2.60)$$

En revanche, entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , il y a rupture de film (et éventuellement reformation<sup>(1)</sup>). Ce n'est alors plus un film continu qui arrive en  $S_2$ , mais des filets à pression nulle [Fre98]. L'intégration du terme  $yR\Omega/h$  conduit à une erreur. Pour calculer le débit en  $S_2$ , il est nécessaire d'avoir recours à la loi de conservation du débit :

$$Q_{inj} + Q_{\theta 2} = Q_{\theta 1} \quad (2.61)$$

Compte tenu de l'hypothèse faite sur le débit entrant,  $Q_{inj} = Q_z$ , on a :

$$Q_{\theta 2} = Q_{\theta 1} - Q_z \quad (2.62)$$

### 2.4.2. Procédure numérique et application au système complet

#### a. Elévation de température pour un palier isolé sous une charge donnée

Etant donné que, pour une charge donnée, le couple de frottement et le débit de fuite sont fonction de la viscosité du lubrifiant (elle-même fonction de la température, tout comme la masse volumique et la capacité thermique), un processus itératif est nécessaire à la convergence du problème. Afin d'assurer la convergence du processus tout en réduisant le nombre d'itérations nécessaires, une technique de sous-relaxation est employée, l'accroissement de température est calculé de manière itérative par la formule :

$$\Delta T^{(n+1)} = (1 - \sigma) \Delta T^{(n)} - \sigma \left( \frac{\lambda C_f \Omega}{\rho C_p Q_z} \right) \quad (2.63)$$

où  $\sigma$  est un coefficient de sous-relaxation.

Le processus itératif vise à mettre à jour, la viscosité, la densité et la capacité thermique après chaque itération en fonction de la température calculée  $T_f^{(n+1)} = T_{inj} + \Delta T_f^{(n+1)}$ .

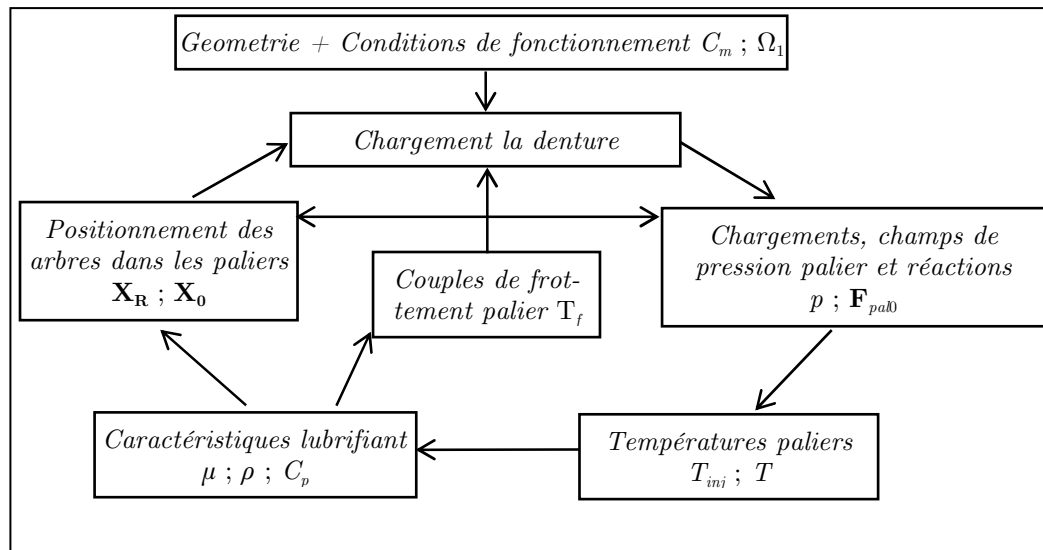
---

<sup>(1)</sup> Selon la position du bassin, il peut y avoir reformation du film d'huile ou non. En pratique, lorsque le bassin se rapproche de la direction d'application de la charge, une reformation du film est observée, accompagnée d'une seconde frontière libre. Dans ce cas là, l'excentricité est importante, et le pic de pression aussi, tout comme  $\partial p / \partial \theta|_{\theta_1}$ . Après calcul des débits, on observe que tout le fluide injecté n'est pas capable d'entrer dans le palier par  $S_1$  dans son sens dit « normal ». Ceci est dû à la composante de Poiseuille du champ de vitesse qui prend le dessus sur celle de Couette. Il n'y a alors pas de recirculation de fluide puisque le fluide injecté tend à traverser  $S_2$  dans le sens inverse pour conserver le débit. La chaleur s'évacue également mal et l'échauffement du fluide par cisaillement est important. Dans le contexte industriel, ces conditions sont à proscrire.

Le processus est arrêté lorsque la température ne varie plus significativement entre deux itérations successives.

### b. Elévation de température pour les paliers du système couplé

Sur le système complet, il est impossible de considérer chaque palier comme un élément indépendant en raison des nombreuses interactions entre les différents organes, celles-ci sont représentées sur la figure 2.12.



**Fig 2.12** – Diagramme de visualisation des différentes interactions suite à l'introduction d'effets thermiques dans les paliers ( «  $A \rightarrow B$  » signifiant que A a une influence directe sur B).

En effet, pour un système donné dans des conditions de fonctionnement données (couple d'entrée, et vitesse de rotation), le chargement de chaque palier est une inconnue du problème, calculée en l'égalant avec la réaction palier. Ces réactions dépendent de la position de l'arbre dans le coussinet (la réciproque est vraie), et donc de la viscosité du lubrifiant. Cette dernière variant avec la température, la position d'équilibre de l'arbre est modifiée et en la présence d'un accouplement élastique sur un arbre, la réaction (et donc le chargement) est elle-même modifiée, sous un couple et une vitesse donnés.

Dans le cas d'une transmission par engrenage, le chargement des paliers est conditionné par les couples appliqués sur chaque arbre, et notamment les couples de frottement des paliers. Le processus itératif doit donc prendre en compte tous les paliers simultanément.

La méthode employée consiste à considérer le problème à chargement et position inconnus comme une succession de problèmes à chargement et positions connus, calculés par l'équilibre statique du réducteur complet, jusqu'à ce que les caractéristiques de position, chargement et température soient stabilisées.

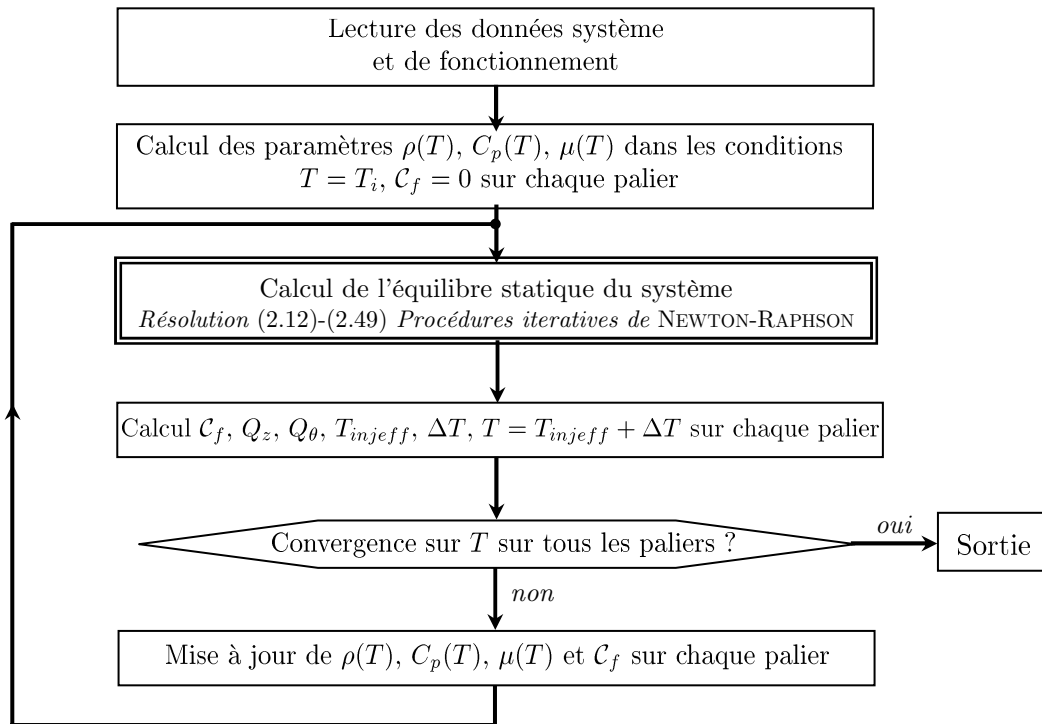


Fig 2.13 – Procédure de calcul de l'équilibre statique d'une transmission avec modèle thermique de palier

Les données dites de « Sortie » sont constituées de données relatives :

- aux paliers :
  - position de calage, champ de pression *sur chaque palier*,
  - coefficients dynamiques, dans le cas de simulations avec efforts paliers linéarisés autour de la position d'équilibre *sur chaque palier*,
  - température de fonctionnement (et d'injection), viscosité... *sur chaque palier* ;
- au système :
  - entraxe,
  - mésalignements,
  - caractéristiques engrènement (angle de pression...).

## 2.5. Résolution des équations du mouvement

Le modèle introduit dans ce chapitre présente de nombreux couplages entre des organes présentant des comportements non linéaires. Assez logiquement, ces non linéarités sont retrouvées dans les équations du mouvement (2.45).

Pour résoudre cette équation, une procédure dédiée a été mise au point.

Le champ de déplacement rigidifiant étant préalablement déterminé par l'équilibre statique ; en regroupant certains termes et en ne faisant apparaître que les dépendances utiles, l'équation (2.45) peut se mettre sous la forme simplifiée :

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X})] \mathbf{X} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}; \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{Q}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X}) \quad (2.64)$$

Sous cette forme, les deux sources de non linéarité apparaissent clairement :

- l'engrènement avec les termes  $[\mathbf{K}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X})]$ , causé par l'élasticité des dentures, et  $\mathbf{Q}_{\text{eng}}(t; \mathbf{X})$ , causé par les divers écarts de forme ;
- les paliers, avec le terme  $\mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}; \dot{\mathbf{X}})$  liant les efforts aux déplacements et vitesse nodales par l'intermédiaire de l'équation de REYNOLDS appliquée à chaque palier.

La résolution de ce système d'équations différentielles non linéaire du seconde ordre à excitation paramétrique a nécessité la mise au point d'une procédure dédiée combinant :

- un schéma d'intégration temporelle de NEWMARK ;
- un algorithme itératif de NEWTON-RAPHSON ;
- un algorithme de contact normal unilatéral permettant de traiter le problème de contact à la denture.

### 2.5.1. Discrétisation et intégration temporelle

Le problème du mouvement du réducteur est classiquement discrétisé en temps de telle sorte que le vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{X}$  s'écrive de manière discrète à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{X}_n$ , qui est tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t=0) &= \mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_n, \mathbf{X}(t+\Delta t) = \mathbf{X}_{n+1}, \dots \\ \dot{\mathbf{X}}(t=0) &= \dot{\mathbf{X}}_0, \dots, \dot{\mathbf{X}}(t) = \dot{\mathbf{X}}_n, \dot{\mathbf{X}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{X}}_{n+1}, \dots \\ \ddot{\mathbf{X}}(t=0) &= \ddot{\mathbf{X}}_0, \dots, \ddot{\mathbf{X}}(t) = \ddot{\mathbf{X}}_n, \ddot{\mathbf{X}}(t+\Delta t) = \ddot{\mathbf{X}}_{n+1}, \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

L'évolution dans le temps est réalisée au moyen du schéma d'intégration temporelle de NEWMARK, basé sur un développement en série de TAYLOR de la solution (cf annexe C).

En choisissant le jeu de paramètres  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ , les vitesses et accélérations à l'instant  $t + \Delta t$  sont approximées par les formules :

$$\dot{\mathbf{X}}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (X_{n+1} - X_n) - \dot{\mathbf{X}}_n \quad (2.66)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (X_{n+1} - X_n) - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{X}}_n - \ddot{\mathbf{X}}_n \quad (2.67)$$

L'équation (2.64) est alors discrétisée, de telle sorte qu'à l'instant  $t + \Delta t$  elle s'écrit :

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}}_{n+1} + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{X}}_{n+1} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1})] \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}) + \mathbf{Q}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}) \quad (2.68)$$

et que l'on réécrit :

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}) = [\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}}_{n+1} + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{X}}_{n+1} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1})] \mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}) - \mathbf{Q}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (2.69)$$

Le terme  $\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1})$  est appelé *résidu*.

### 2.5.2. Résolution de l'équation non linéaire

Il s'agit de résoudre l'équation

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

Une méthode itérative, basée sur l'algorithme de NEWTON-RAPHSON, va être présentée. C'est à dire que  $\mathbf{X}_{n+1}$  va être cherché comme limite d'une suite de vecteurs dont les éléments sont successivement  $\mathbf{X}_{n+1}^1, \dots, \mathbf{X}_{n+1}^k, \mathbf{X}_{n+1}^{k+1}, \dots$  (dans la pratique on s'arrête avant d'atteindre la limite).

La méthode de NEWTON-RAPHSON est basée sur le développement de Taylor du résidu  $\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1})$  au voisinage de la dernière solution approximée,  $\mathbf{X}_{n+1}^k$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k) + \frac{1}{1!} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] (\mathbf{X}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{X}_{n+1}^k) + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{(\partial \mathbf{X}_{n+1})^2} \right] (\mathbf{X}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{X}_{n+1}^k)^2 + \dots \quad (2.71)$$

Soit en notant  $\Delta \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{X}_{n+1}^k$  le terme correcteur,  $[\mathbf{J}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] = \left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right]$  la matrice tangente ou jacobienne, et en tronquant le développement à l'ordre 1 :

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^{k+1}) \simeq \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k) + \left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} \quad (2.72)$$

L'équation (2.71) se ramène alors à :

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k) + [\mathbf{J}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] \Delta \mathbf{X}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{0} \quad (2.73)$$

Cette équation, d'inconnue  $\Delta \mathbf{X}_{n+1}^{k+1}$  est inversée par une méthode LR et permet d'obtenir  $\mathbf{X}_{n+1}^{k+1}$  et de commencer une nouvelle itération jusqu'à ce que la convergence soit atteinte, c'est-à-dire jusqu'à ce que  $\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^{k+1}) \simeq \mathbf{0}$ . Les critères d'arrêt sont détaillés dans la partie 2.5.4.

### 2.5.3. Application au problème couplé

Compte tenu des termes et dépendances contenues dans  $\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}) = \mathbf{0}$ , la matrice jacobienne contient une part « indéterminée ».

En effet, par définition

$$[\mathbf{J}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] = \left[ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] \quad (2.74)$$

En reprenant l'expression de  $\mathbf{G}(\mathbf{X}_{n+1}^k)$  donnée dans (2.68) et compte-tenu des dépendances des différents termes :

$$[\mathbf{J}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] = [\mathbf{M}] \frac{\partial \ddot{\mathbf{X}}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} + [\mathbf{C}] \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} + [\mathbf{K}] + \frac{\partial ([\mathbf{K}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] \mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} - \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} - \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \quad (2.75)$$

De plus

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k)}{\partial \dot{\mathbf{X}}_{n+1}} \quad (2.76)$$

Compte-tenu de l'approximation de NEWMARK et de l'expression ci-dessus, la matrice jacobienne peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] = & \frac{4}{\Delta t^2} [\mathbf{M}] + \frac{2}{\Delta t} [\mathbf{C}] + [\mathbf{K}] + \left[ \left[ \frac{\partial [\mathbf{K}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)]}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] \right] \mathbf{X}_{n+1}^k + [\mathbf{K}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] \\
 & - \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] - \frac{2}{\Delta t} \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k)}{\partial \dot{\mathbf{X}}_{n+1}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

Si mathématiquement, l'obtention du terme  $\left[ \left[ \frac{\partial [\mathbf{K}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)]}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] \right]$  peut se révéler fastidieuse et coûteuse numériquement (car il s'agit d'un tenseur de rang 3 et de dimensions importantes), physiquement son obtention est encore plus difficile, car il n'existe pas de relation explicite liant la raideur d'engrènement aux déplacements nodaux. Le même problème a lieu pour le calcul de  $\left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right]$ . En effet cette dépendance est assurée par l'algorithme de contact unilatéral qui détermine/modifie la zone de contact réelle en fonction d'une solution provisoire au problème, en annulant, ou pas, les raideurs affectées à certaines cellules de contact.

La solution retenue consiste alors à se placer dans des conditions de résolution telles que  $\left[ \left[ \frac{\partial [\mathbf{K}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)]}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] \right] = [\mathbf{0}]$  et  $\left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] = \mathbf{0}$ . Pour ce faire, il suffit de supposer la matrice  $[\mathbf{K}_{\text{eng}}]$  comme indépendante des déplacements nodaux durant le processus itératif de NEWTON-RAPHSON. Ceci ne peut être réalisé rigoureusement qu'en procédant à la mise à jour de  $[\mathbf{K}_{\text{eng}}]$  à l'extérieur du procédé itératif de NEWTON-RAPHSON.

Ainsi, la matrice jacobienne s'exprime :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] = & \frac{4}{\Delta t^2} [\mathbf{M}] + \frac{2}{\Delta t} [\mathbf{C}] + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{eng}}(\mathbf{X}_{n+1}^k)] - \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right] \\
 & - \frac{2}{\Delta t} \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k)}{\partial \dot{\mathbf{X}}_{n+1}} \right] \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Suivant le modèle de palier retenu, les termes  $\left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{X}_{n+1}} \right]$  et  $\left[ \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{pal}}(\mathbf{X}_{n+1}^k; \dot{\mathbf{X}}_{n+1}^k)}{\partial \dot{\mathbf{X}}_{n+1}} \right]$  sont calculés de manière analytique (cas du palier court) ou de manière numérique (tous les modèles de palier). Numériquement, il n'est pas nécessaire de perturber tous les degrés de liberté du système, sous peine de résoudre inutilement un nombre important de fois l'équation de REYNOLDS : il suffit de perturber les déplacements radiaux (et vitesses correspondantes) aux nœuds où un palier est affecté ; ce qui représente 4 résolutions de l'équation de REYNOLDS par palier.

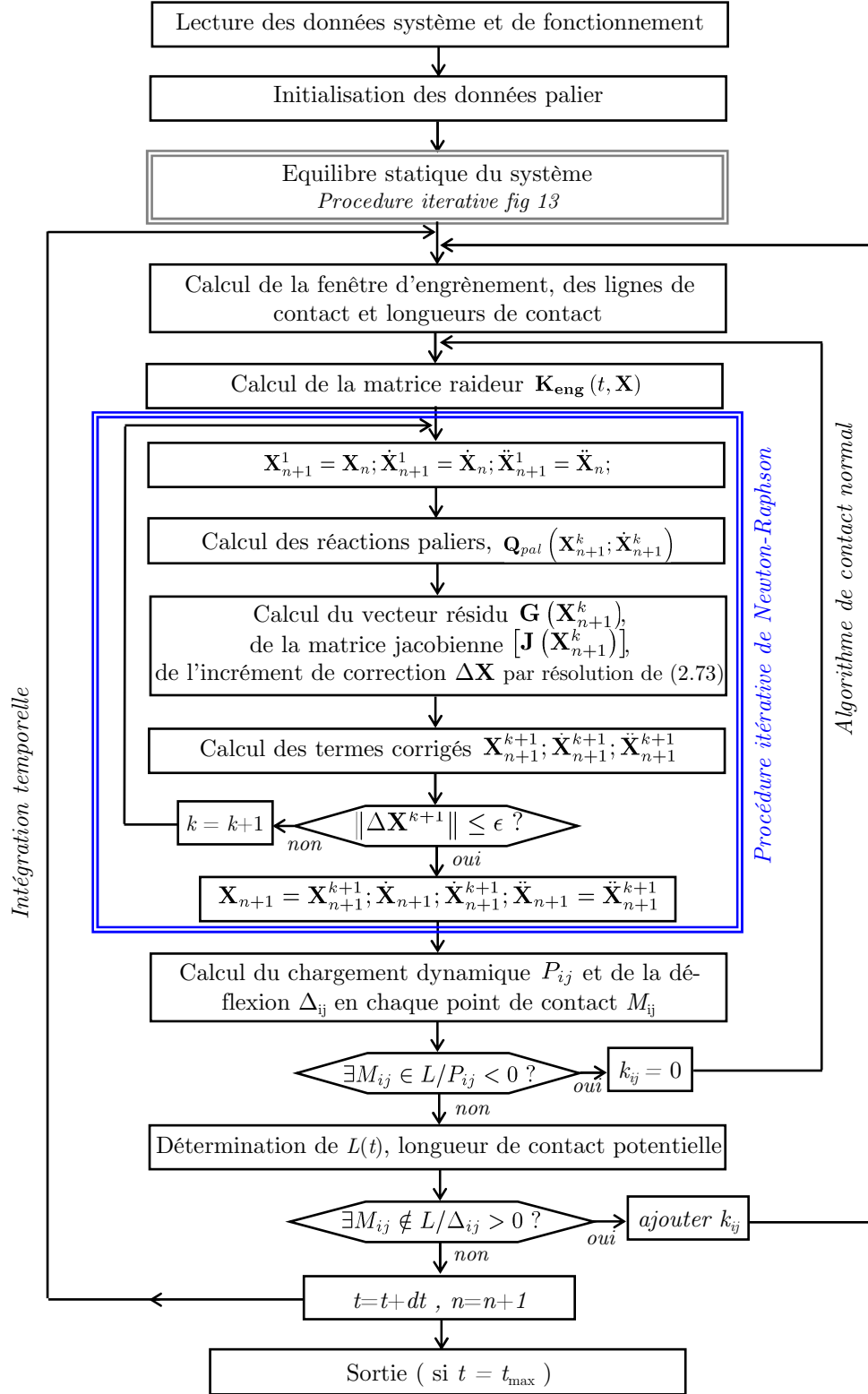


Fig 2.14 – Procédure de résolution des équations du mouvement dans le cas non-linéaire

Comme le montre la figure 2.14, la résolution de l'équation de REYNOLDS a lieu un nombre important de fois au cours de la procédure de résolution puisque l'équation est placée à l'intérieur de plusieurs boucles de l'algorithme:

- boucle d'itération thermique lors de l'équilibre statique ;
- boucle d'intégration temporelle par le schéma de NEWMARK ;
- deux boucles de convergence de l'algorithme de contact à la denture ;
- boucle de convergence des déplacements aux paliers

Etant donné que chaque calcul des réactions est bien souvent suivi du calcul d'une matrice jacobienne, l'utilisation d'un modèle de palier relativement « léger » nous est apparue comme un critère indispensable afin que le code de calcul soit utilisable dans un contexte industriel.

En plus de modèles de simulation d'engrènement et de paliers peu coûteux, une attention particulière a été portée à l'initialisation des variables, permettant de réduire le temps nécessaire à la convergence, et les différenciations numériques ont été réalisées en ne perturbant que les degrés de liberté vraiment utiles.

Signalons enfin que l'environnement FORTRAN<sup>®</sup> dans lequel a été programmé le modèle se prête particulièrement bien à une résolution multi-itérative comme celle présentée ci-dessus.

## 2.5.4. Applications et temps de calcul

On s'intéresse ici aux temps de calcul nécessaires à la résolution des problèmes dans un cas concret. Nous simulerons le comportement dynamique (équilibre statique et comportement dynamique) d'un réducteur semblable à ceux qui seront étudiés dans les chapitres 3 et 4, représenté sur la figure 2.15 :

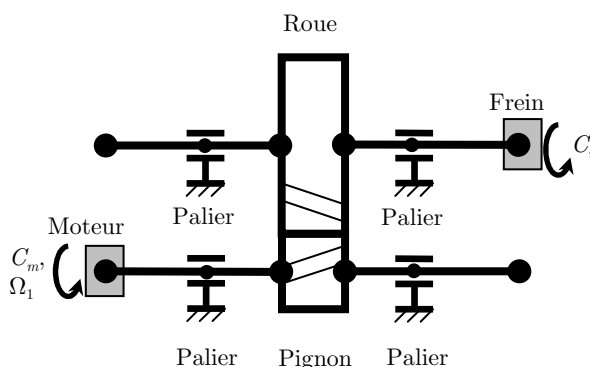


Fig 2.15 – Modèle d'un système « type »

Ses caractéristiques ne sont pas détaillées ici, mais les principales sont :

- 26 dents sur le pignon et 157 dents sur la roue ;
- 50 *mm* de largeur de denture ;
- 640 *mm* de longueur totale d'arbre ;
- 320 *mm* d'espace entre les paliers ;
- 70 *mm* (arbre moteur) et 90 *mm* (arbre récepteur) de diamètres extérieurs

Les paramètres numériques utiles sont les suivants :

- nombre de périodes d'engrènement parcourues : 128
- nombre de pas de temps par période d'engrènement : 64
- nombre de nœuds du système : 12
- nombre de degrés de liberté du système : 72
- nombre d'engrènements : 1
- nombre de tranches de discrétisation des engrenages sur la largeur : 70
- type de dentures : hélicoïdales
- nombre de paliers : 4
- rapport longueur/diamètre : de 0.2 à 1.5
- dimensions du maillage « différences finies » sur chaque palier :  $100 \times 1$  (maillage dans la seule direction circonférentielle)
- critère d'arrêt des itérations thermiques (températures en KELVIN [*K*]) :

$$\frac{|T_{pal}^{k+1} - T_{pal}^k|}{T_{pal}^k} \leq 10^{-1} \text{ et } \frac{|\mu^{k+1} - \mu^k|}{\mu^k} \leq 10^{-2} \text{ sur chaque palier}$$

- critère d'arrêt des itérations de NEWTON-RAPHSON :

$$\frac{\sqrt{\|\Delta \mathbf{X}^{k+1}\|_2}}{c_{min}} \leq 10^{-2} \text{ et } \frac{\sqrt{\|\Delta \mathbf{X}^{k+1}\|_2}}{\bar{\Delta}} \leq 10^{-2}$$

où  $\|\Delta \mathbf{X}^{k+1}\|_2$  désigne la norme 2 du vecteur résidu (  $\|\mathbf{u}\|_2 = \sum_i u_i^2$  ) ;  $c_{min}$  est le minimum des jeux radiaux sur l'ensemble des paliers et  $\bar{\Delta}$  est la déflexion statique moyenne des dentures du réducteur sur appuis.

Les simulations ont été réalisées sur une station de travail portable comportant deux cœurs à 2.40 *GHz* et 3 *Go* de mémoire vive, les ordres de grandeur des temps de calcul sont les suivants pour le modèle couplé à différents modèles de paliers :

| Modèle de palier<br>retenu | Palier<br>court lin. | Palier<br>court non<br>lin. | Rhode &<br>Li lin. | Rhode &<br>Li non lin. | Rhode &<br>Li lin. +<br>thermique | Rhode & Li<br>non lin. +<br>thermique |
|----------------------------|----------------------|-----------------------------|--------------------|------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| Equilibre statique         | 2 s                  | 2 s                         | 5 - 30 s           | 5 - 30 s               | 5 s - 5 min                       | 5 s - 5 min                           |
| Simulation dynamique       | 1 - 2 min            | 12 min                      | 1 - 2 min          | 30 - 60 min            | 1 - 2 min                         | 30 - 60 min                           |

**Tab 2.1** – Temps de calcul moyens pour l'équilibre statique et la simulation dynamique lorsque le modèle est couplé avec différents modèles de paliers.

Le tableau 2.1 révèle d'importantes disparités en termes de temps de calcul selon les modèles et des temps de calcul variables pour un même modèle, ceci en fonction de la vitesse de rotation et de la charge notamment.

Les conclusions sont les suivantes du point de vue statique :

- l'équilibre statique du réducteur sur paliers courts est très rapide, bien qu'il nécessite la convergence en charge et en déplacement à chaque palier, car l'équation de REYNOLDS est intégrée analytiquement ;
- le modèle basé sur la méthode de paliers unidimensionnels propose un équilibre statique très rapide pour les paliers dont le rapport  $L/D$  est faible (l'itération 0 étant la solution palier court) mais peut nécessiter jusqu'à 30 s de calcul pour les rapports  $L/D$  supérieurs à 1 et les excentricités importantes (itération 0 éloignée de la solution) ;
- la prise en compte d'effets thermiques, même par un modèle très simple, alourdit considérablement l'équilibre statique. Pour les simulations, à vitesse élevée notamment, où l'élévation de température est importante, et compte-tenu du travail éventuel des accouplements pouvant modifier le chargement, la convergence simultanée en température, en chargement, et en position peut nécessiter plusieurs minutes de calcul avec les critères ci-dessus.

Concernant les simulations dynamiques :

- les modèles linéaires sont très rapides (moins d'une seconde par période d'engrènement en moyenne dans cette configuration) alors qu'ils ne permettent pas de traiter les non linéarités causées par les larges excitations dynamiques ;
- les modèles non linéaires, prenant ces effets en compte, rendent la résolution assez lourde : en effet pour les modèles basés sur une intégration numérique de l'équation de REYNOLDS, sur les 128 périodes d'engrènement, à raison de 64 pas de temps par période d'engrènement, environ  $1.7 \times 10^6$  résolutions de l'équation de REYNOLDS sont nécessaires au total (à chaque pas de temps, en moyenne 3.2 itérations de l'algorithme de contact et 3.4 itérations de l'algorithme de NEWTON-RAPHSON ; avec 20 résolutions de l'équation de REYNOLDS par itération en considérant le calcul des réactions et de la matrice jacobienne). Ce nombre très important de résolutions de l'équation de REYNOLDS nous conforte dans notre

choix d'utiliser un modèle de palier permettant d'alléger au maximum l'intégration numérique.

Il est intéressant de noter que les nombres d'itérations des algorithmes de contact et de NEWTON-RAPHSON ne sont pas constants ; en effet ils dépendent notamment des conditions de fonctionnement.

Pour les études paramétriques notamment, les simulations peuvent être lancées sur des durées inférieures.

Un temps de calcul de l'ordre de l'heure peut être rédhibitoire dans le cadre d'une utilisation en milieu industriel, surtout lorsque des études paramétriques sur des balayages en vitesse doivent être réalisés (parfois jusqu'à 100 vitesses traitées). C'est pourquoi l'utilisation des modèles linéaires et non linéaires doit être réalisée de manière complémentaire.

\*  
\*   \*

Ce chapitre a permis de présenter la procédure de couplage entre les trois organes que sont l'engrènement, les lignes d'arbres et les paliers. Cette procédure est basée sur la séparation des déplacements en deux champs, dont les contributions sont distinctes. Le modèle présenté est indépendant du modèle de palier retenu, les réactions étant calculées par intégration du champ de pression ou selon la théorie linéaire, divers modèles de paliers peuvent être appliqués.

A la différence des précédents travaux de simulation du comportement de réducteurs sur appuis élastiques, dans notre cas de système couplé, la position de référence dépend de la charge et de la vitesse de rotation (notamment, mais aussi positionnement et caractéristiques paliers, géométrie...) par l'intermédiaire du calage des arbres dans les paliers. En ce sens, elle doit être recalculée à chaque simulation, d'ailleurs elle est partie intégrante de la simulation.

Une procédure de résolution, propre à notre problème, a été développée et présentée. Les temps de calcul nécessaires à la simulation du comportement d'un système ont été analysés. Ces derniers fluctuent énormément selon le modèle retenu, nous invitant à une certaine réflexion avant de privilégier un modèle par rapport aux autres.



# Chapitre 3

---

## Éléments de validation du modèle de réducteur à engrenages sur paliers fluides

### Sommaire

|        |                                                             |     |
|--------|-------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1.   | Présentation du banc d'essai.....                           | 98  |
| 3.2.   | Modèle de réducteur.....                                    | 101 |
| 3.2.1. | Calcul de la contrainte en pied de dent adimensionnée ..... | 102 |
| 3.3.   | Résultats en dentures droites .....                         | 103 |
| 3.3.1. | Comportement dynamique des dentures .....                   | 103 |
| 3.3.2. | Influence d'une modification de chargement .....            | 105 |
| 3.3.3. | Comportement des paliers.....                               | 106 |
| 3.3.4. | Equilibre statique du système.....                          | 108 |
| 3.4.   | Résultats en dentures hélicoïdales .....                    | 109 |
| 3.4.1. | Comportement dynamique des dentures .....                   | 110 |
| 3.4.2. | Comportement des paliers.....                               | 111 |
| 3.4.3. | Equilibre statique du système.....                          | 113 |

Ce chapitre a pour but principal de présenter un certain nombre d'éléments de validation du modèle de simulation du comportement dynamique de réducteurs sur paliers hydrodynamiques exposé dans le chapitre 2.

Dans la mesure du possible, les éléments de validation consistent en des comparaisons avec des résultats expérimentaux réalisés sur banc d'essai lors d'une précédente thèse de doctorat qui a eu lieu au LaMCoS [Bau98]. Au préalable, le modèle de palier retenu a été comparé à d'autres modèles sur des paliers proches de ceux rencontrés sur les cas concrets.

Dans ce chapitre, les cas d'un réducteur avec dentures droites, puis hélicoïdale seront envisagés. Chacun des deux types de dentures aboutit à des vérifications à l'échelle du système, portant sur le transfert de la charge depuis la denture jusqu'aux paliers. Les comparaisons concernent aussi un certain nombre de grandeurs plus locales (contraintes en pied de dent adimensionnées et positions d'équilibre palier) étudiées dans le cadre de balayages en vitesse. Dans le cas du réducteur en dentures droites, plusieurs positions de paliers ont été testées.

### 3.1. Présentation du banc d'essai

Le banc d'essai représenté figure 3.1 est constitué d'un train d'engrenages simple étage (droit ou hélicoïdal, à entraxe variable) à axes parallèles reposant sur quatre paliers de type paliers lisse hydrodynamique fixés au socle. Le réducteur est monté sur une plaque de fonte fixée sur un bloc de béton armé suspendu par un ensemble de raideurs et amortisseurs. Les arbres et mobiles, dont les caractéristiques figurent dans les tableaux 3.1 et 3.2, ont été usinés de manière très fine afin de respecter la précision requise par les applications prévues pour le banc (classe ISO 4 pour la denture). Les contacts à la denture sont lubrifiés par un jet d'huile de type ISO VG 100 à la température constante de 55° ; la même huile étant utilisée pour la lubrification des paliers. Afin d'éviter les effets thermiques transitoires, avant toute mesure, une montée en température de la machine est réalisée, jusqu'à atteindre la stabilisation de la température de fonctionnement et des déplacements de la plaque.

La vitesse de rotation du pignon  $\Omega_1$  est variable dans l'intervalle [50 ; 700 *rad/s*] pour le jeu de paliers hydrodynamiques, l'arbre GV tournant en sens horaire pour un observateur situé côté moteur. La charge  $C_r$  maximale est de 4 200 *N.m*. Les profils des dentures droites et hélicoïdales ont été modifiés par des corrections linéaires pour la roue et le pignon d'une profondeur de 20  $\mu m$  en tête de dent pour une denture droite et 13  $\mu m$  pour une denture hélicoïdale sur 20% de la longueur de profil active. Les erreurs de pas cumulées restent inférieures à 10  $\mu m$  et 20  $\mu m$  crête-à-crête pour le pignon et la roue.

Le dispositif d'instrumentation comprend : (i) des mesures de couple, (ii) des capteurs de déplacements, positionnés par paires à 90° à quatre abscisses, le long de chaque arbre et (iii) de jauges de déformations instrumentées au pied de certaines dents du pignon. Ces jauges sont placées du côté « chargé » de la dent, telles que représenté sur la figure 3.2, avec quatre jauges actives réparties sur la largeur. Les signaux sont transmis à l'intérieur des arbres creux puis par deux collecteurs tournants disposés en bout d'arbre.

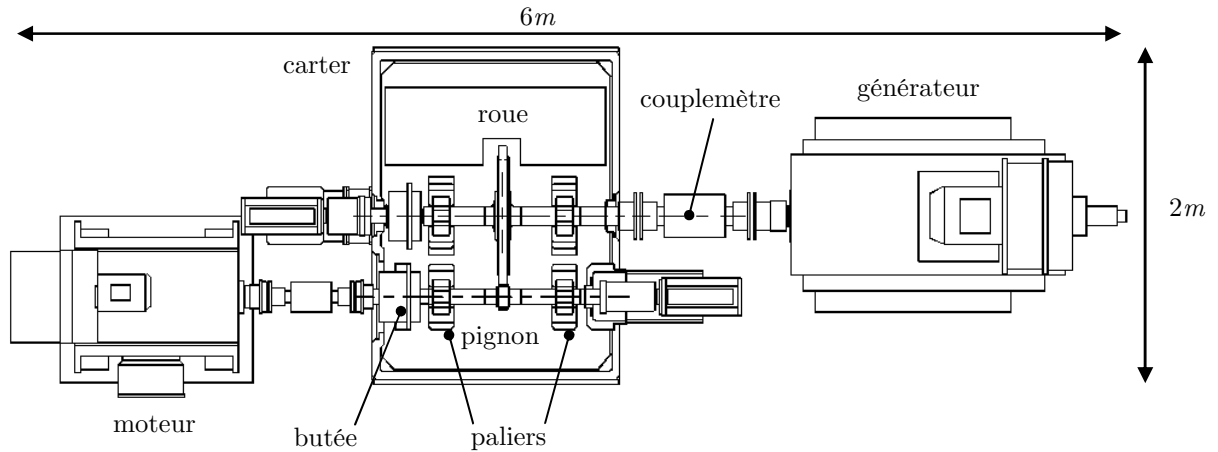


Fig. 3.1 – Schéma du banc d'essai

|                         | Pignon                          | Roue                                     |
|-------------------------|---------------------------------|------------------------------------------|
| Nombre de dents         | 26                              | 157                                      |
| Largeur de denture [mm] | 50                              | 40                                       |
| Angle d'hélice [°]      | 0 et 12.5                       |                                          |
| Module [mm]             | 4                               |                                          |
| Angle de pression [°]   | 20                              |                                          |
| Coefficient de creux    | 1.                              | 1.                                       |
| Coefficient de saillie  | 1.4                             | 1.4                                      |
| Coefficient de déport   | 0.16                            | - 0.16 (droit) et<br>- 0.14 (hélicoïdal) |
| Entre-axe [mm]          | 366 (droit) et 375 (hélicoïdal) |                                          |

Tab 3.1 – Caractéristiques des dentures

|                                          | Arbre pignon      | Arbre roue |
|------------------------------------------|-------------------|------------|
| Diamètre extérieur [mm]                  | 70                | 90         |
| Diamètre intérieur [mm]                  | 30                | 30         |
| Longueur d'arbre [mm]                    | 1280              | 1415       |
| Entre-palier : $E_p$ [mm]                | 640 max – 320 min |            |
| Module d'Young [MPa]                     | 210 000           |            |
| Coefficient de Poisson                   | 0.3               |            |
| Masse volumique [ $kg/m^3$ ]             | 7 800             |            |
| Raideur butée [ $N/m$ ]                  | $4.10^7$          | $6.10^7$   |
| Raideur accouplement élastique [ $N/m$ ] | $1.10^7$          |            |

Tab 3.2 – Caractéristiques des arbres

|                                                                           | Arbre pignon                                          | Arbre roue |
|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------|
| Longueur $L$ [mm]                                                         | 50                                                    | 65         |
| Jeu radial $c$ [ $\mu\text{m}$ ]                                          | 75                                                    | 55         |
| Viscosité cinématique lubrifiant [ $\text{mm}^2/\text{s}$ ]<br>(annexe D) | ISO VG 100<br>$\nu_{40} = 100$ ; $\nu_{100} = 11.384$ |            |
| Température d'injection lubrifiant [K]                                    | 318                                                   |            |
| Injection de lubrifiant                                                   | Bassin axial supposé opposé à la charge               |            |

Tab 3.3 – Caractéristiques des paliers lisses

**Remarque :** • Le tableau 3.3 fait état d'une largeur de contact de 40mm pour un pignon de diamètre primitif de l'ordre de 100mm, ce qui ne représente pas une denture large. Le modèle, développé dans le cas des dentures larges, peut néanmoins être appliqué à ce cas, qui représente les seuls éléments expérimentaux de validation existant dans la littérature à notre connaissance. Le chapitre 4 sera dédié à l'étude, exclusivement numérique, d'un réducteur à denture large.

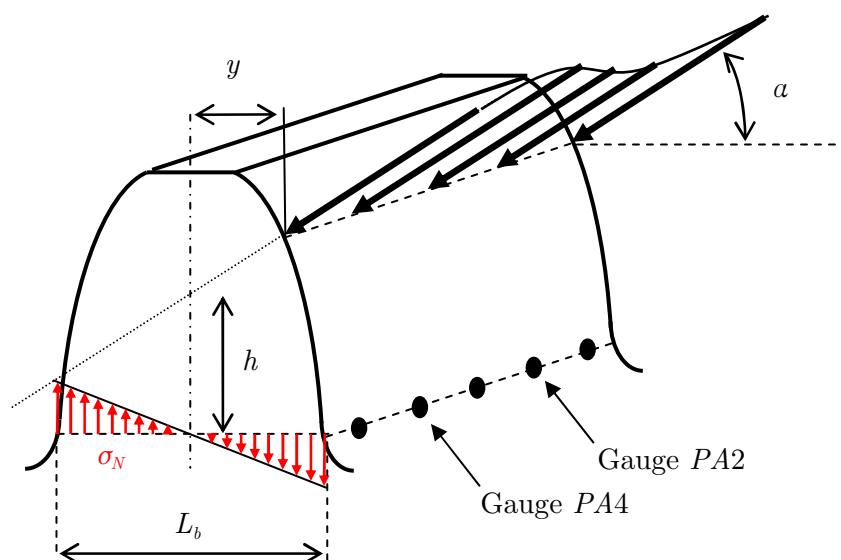


Fig. 3.2 – Emplacements des jauges, paramètres de calcul des contraintes en pied de dents et visualisation de la contrainte de flexion  $\sigma_N$  de la poutre représentant la dent  $N$  pour l'élément de dent supérieur.

## 3.2. Modèle de réducteur

En ce qui concerne la modélisation du réducteur, il a été modélisé conformément à la représentation de la figure 3.3. : chaque ligne d'arbre a été maillée avec 5 éléments d'arbre (6 nœuds), de dimensions variable, telles que décrit table 3.2, l'un d'entre eux étant consacré au corps du mobile (le pignon ou la roue). Les profils de chaque dent ont été discrétisés séparément de manière à rendre compte des corrections de profil et des erreurs de pas, modélisés comme des écarts de forme.

Comme sur le banc d'essai, la distance entre paliers est variable ( $E_p = 640mm$  pour la configuration dite « entre-palier maximal », et  $E_p = 320mm$  pour la configuration dite « entre-palier minimal »), cette variation d'entre palier étant réalisée en modifiant les longueurs des éléments d'arbre. L'engrènement est, lui, centré entre les paliers, et les arbres sont non symétriques.

Les effets du moteur et du frein sont modélisés par des couples appliqués et des inerties ponctuelles équivalentes concentrés en chaque nœud correspondant. Les effets des butées et accouplements extérieurs sont modélisés par des raideurs (axiale pour la butée et radiale pour les accouplements) concentrées, fonctionnant sans jeu, telles que présentées dans le chapitre 2 (modélisation), appliquées entre le bâti et le nœud correspondant.

Les simulations sont lancées sur 128 périodes d'engrènement, avec 64 pas de temps par période d'engrènement. Les 64 premières périodes d'engrènement sont ignorées afin d'éliminer les perturbations transitoires.

Un coefficient d'amortissement modal unique de 0.04 (4%) a été utilisé pour le système « arbre-engrènement », l'amortissement des paliers étant directement calculé lors de l'intégration du champ de pression.



### 3.2.1. Calcul de la contrainte en pied de dent adimensionnée

Plusieurs résultats de comparaisons portent sur la contrainte en pied de dent, calculée en un point donné, c'est-à-dire sur une section de la dent  $N$  donnée (la section telle que la tangente au profil forme un angle de  $20^\circ$  avec l'axe de symétrie de la dent), et pour une tranche  $i$  donnée. En assimilant la dent à une poutre à section variable orientée de manière radiale, la contrainte en pied de dent est calculée par la formule issue de la théorie des poutres :

$$\sigma_{Ni} = \frac{M_{fi}}{I_G} \frac{L_b}{2} \quad (3.1)$$

où  $M_{fi} = W_i(h_i \cos \alpha_i - y_i \sin \alpha_i)$  est le moment de flexion dû au chargement  $W_i$  sur la tranche  $i$  de la dent.  $I_G$  est le moment d'inertie de la section de la dent et  $L_b$  est l'épaisseur de la dent à la hauteur où la contrainte est calculée.

**Remarques :**

- Pour des engrenages droits faiblement désalignés, le chargement  $W$  est supposé correctement réparti et la variation de la contrainte selon la largeur de la dent sera considérée comme nulle. Pour les engrenages hélicoïdaux, la variation de contrainte selon la largeur sera illustrée par la suite.
- La contrainte calculée ne prend en compte que la contribution de la flexion de la dent et ignore l'effet causé par la proximité du contact entre les dents (qui, elle, est mesurée). Cette approximation semble justifiée par le fait que seuls les maxima sont ici comparés et que ceux-ci ne devraient pas être atteints pour des chargements appliqués trop près des pieds de dents (emplacement des jauges).

En notant  $\sigma_{REF}$  la contrainte de référence calculée pour une charge transmise  $W$  correspondant à la charge totale  $\frac{C_m}{R_b \cos \beta_b}$ , dans la direction du plan d'action,  $\alpha = \alpha_t$ , coupant le cercle primitif sur l'axe de symétrie de la dent, on définit la contrainte en pied de dent adimensionnée par :

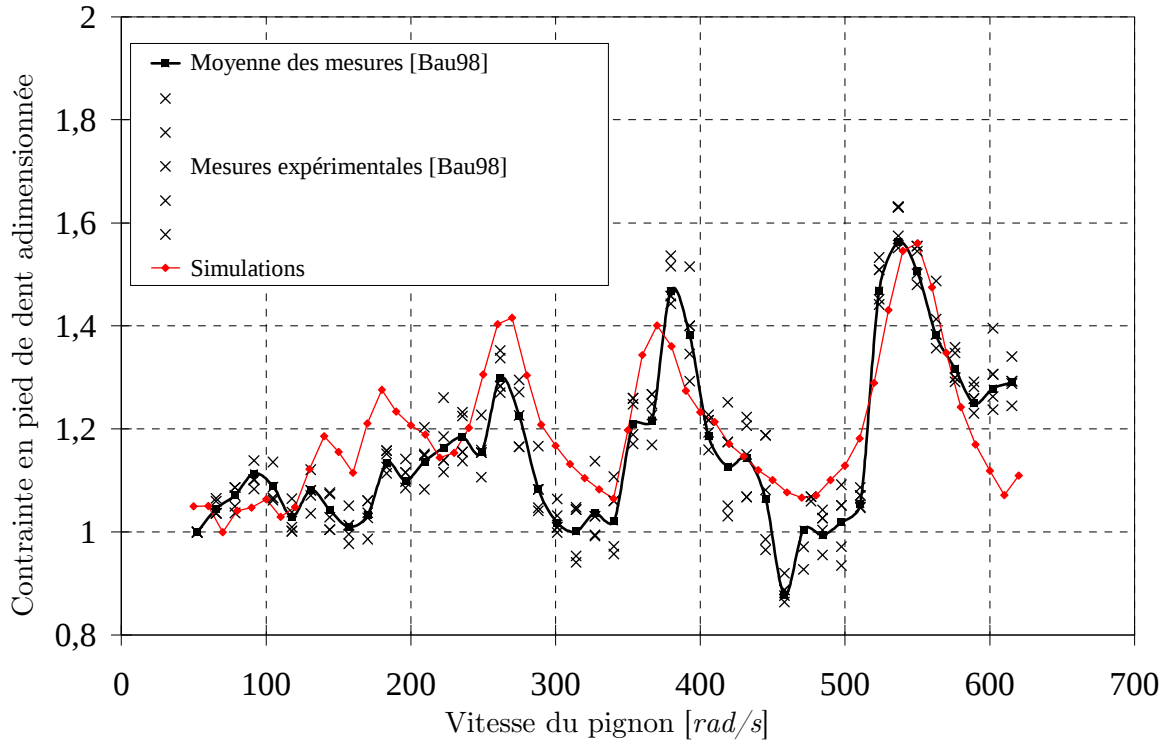
$$\Sigma_{N_i} = \max \left( \frac{\sigma_{N_i}(t)}{\sigma_{REF}} \right) \quad (3.2)$$

Expérimentalement la contrainte de référence  $\sigma_{REF}$  est mesurée de manière similaire à la contrainte dynamique mais pour une très faible vitesse de rotation et avec le système sur paliers hydrostatiques.

### 3.3. Résultats en dentures droites

#### 3.3.1. Comportement dynamique des dentures

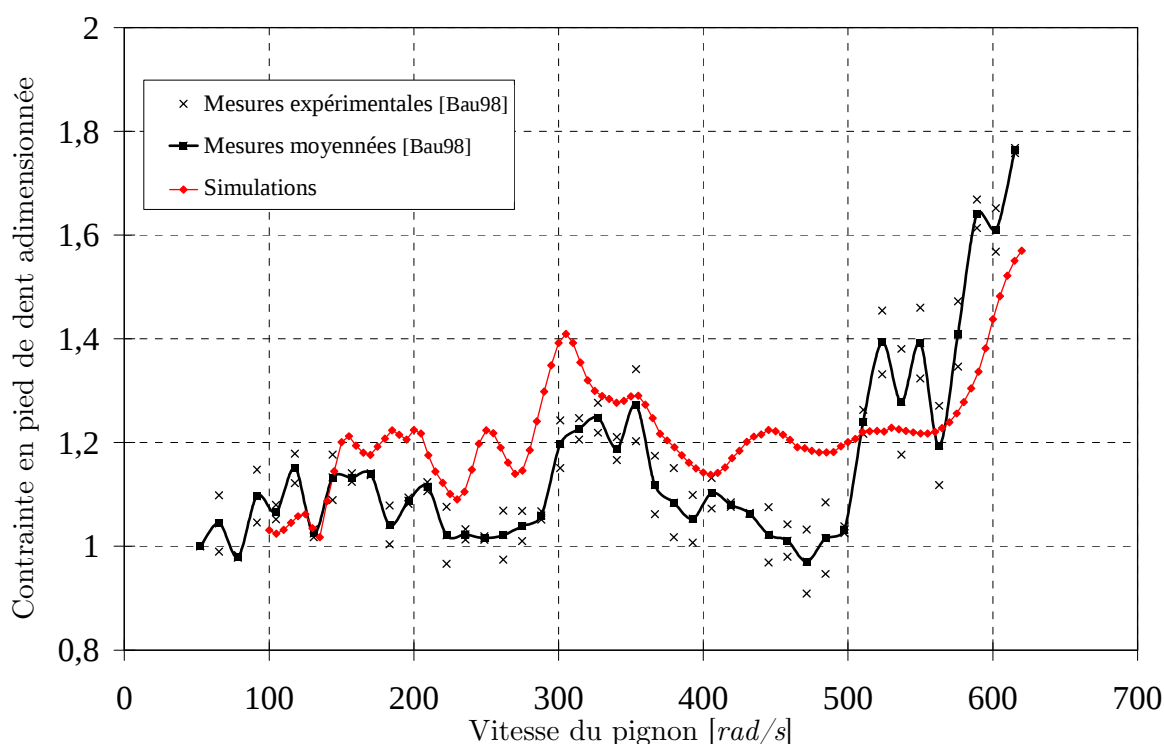
L'évolution de la contrainte adimensionnée en pied de dent lorsque la vitesse du pignon  $\Omega_1$  varie entre 50 et 630  $rad/s$  est représentée sur les figures 3.4 et 3.5 dans les deux configurations d'entre paliers.



**Fig. 3.4** – Comparaisons numérique-expérimental de l'évolution de la contrainte adimensionnée en pied de dent avec la vitesse du pignon pour la configuration « entre-palier maximal » sous une charge  $C_r = 1540 N.m$

Dans la configuration « entre-palier maximal », la figure 3.4 révèle un très bon accord entre les résultats expérimentaux et numériques. Contrairement aux résultats numériques de [Bau98] qui utilisait une modélisation simplifiée des paliers basée sur des coefficients dynamiques approchés, les trois principaux pics de contrainte sont correctement simulés (avec une très légère surestimation sur l'amplitude pour le premier pic à  $270 \text{ rad/s}$  et une sous-estimation sur le second à  $380 \text{ rad/s}$ ), confirmant l'influence des paliers sur le comportement dynamique de la denture.

La figure 3.5. montre, aussi bien expérimentalement que numériquement, que le fait de passer à la configuration « entre-palier minimal », modifie significativement l'allure de la réponse dynamique de la denture. En effet la plus haute des vitesses critiques passe alors de  $550 \text{ rad/s}$  à plus de  $600 \text{ rad/s}$ , ce qui est cohérent avec le raidissement probable du système dû à la diminution de l'entre-palier. Les deux pics secondaires ne sont plus aussi visibles, et seul l'intervalle  $[300 ; 530 \text{ rad/s}]$  présente un niveau de contrainte plus élevé que les autres vitesses. La simulation reproduit correctement cet effet malgré un niveau moyen légèrement plus élevé que les mesures. Ces différences, tout comme le fait que les courbes expérimentales sont globalement plus perturbées que les courbes numériques, seront mises sur le compte d'un nombre de degrés de liberté faible dans le modèle, ne permettant pas de retranscrire les modes de vibration les plus élevés de la structure.

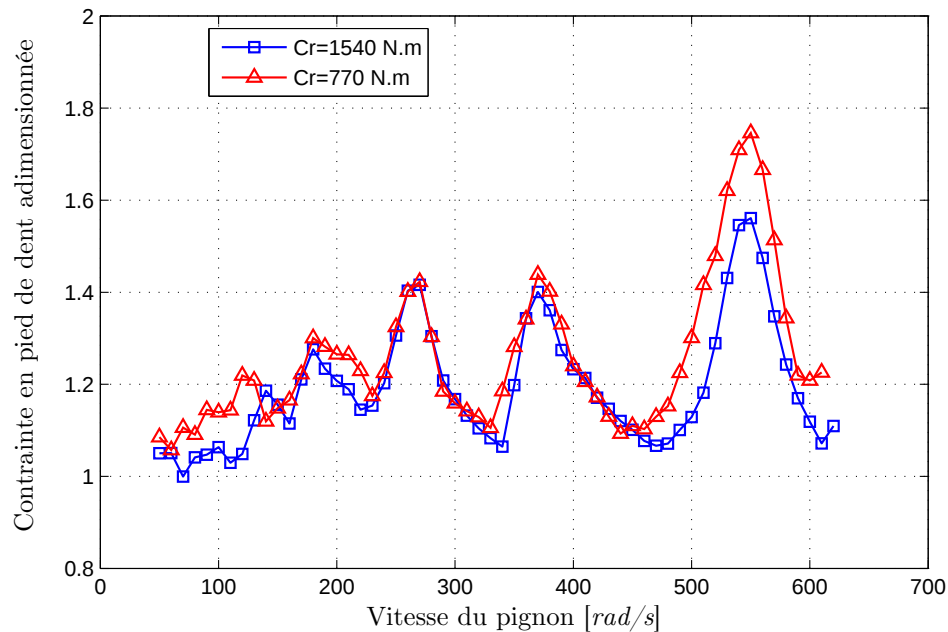


**Fig. 3.5** – Comparaisons numérique-expérimental de l'évolution de la contrainte adimensionnée en pied de dent avec la vitesse du pignon pour la configuration « entre-palier minimal » sous une charge  $C_r = 1540 \text{ N.m}$

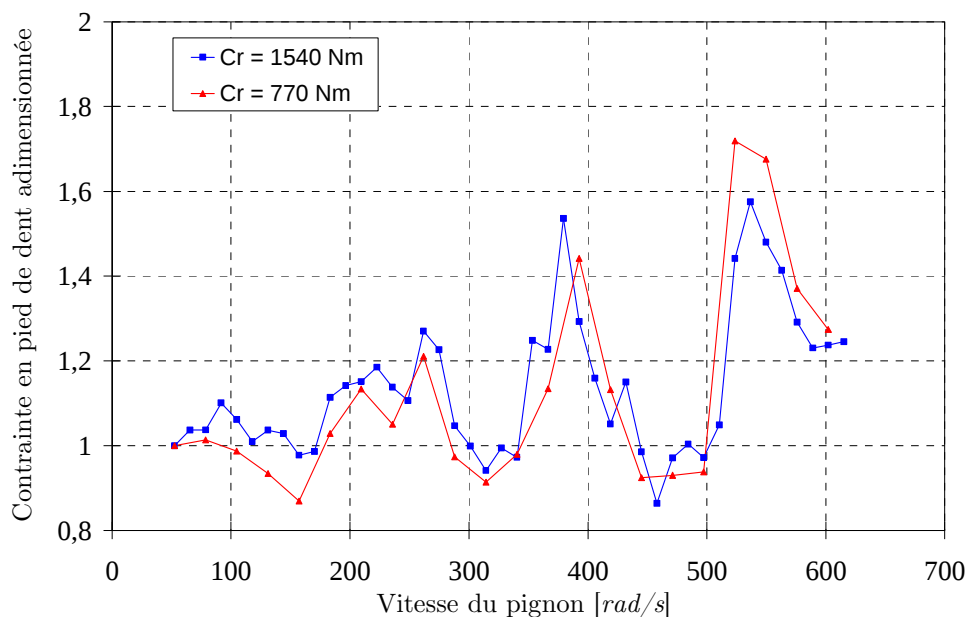
### 3.3.2. Influence d'une modification de chargement

Des simulations et mesures ont été réalisées à deux niveaux de chargement :  $C_r = 1540 \text{ N.m}$  et  $C_r = 770 \text{ N.m}$  dans la configuration « entre-palier maximal ». Il apparaît, aussi bien numériquement qu'expérimentalement, figure 3.6. que la modification du chargement n'altère que très peu la réponse de la denture. Les vitesses critiques ne sont pas décalées. Seule la troisième vitesse critique semble légèrement touchée, avec une légère sur-amplification à faible charge. Les résultats de simulation et expérimentaux traduisent tous deux cet effet.

a)



b)

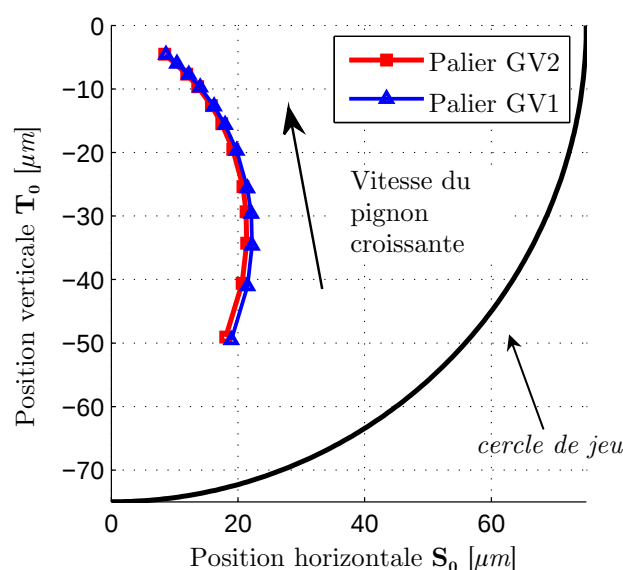


**Fig. 3.6** – Influence d'une modification de la charge sur la contrainte en pied de dent adimensionnée, cas de l'entre-paliers maximal ; a) résultats de simulation ; b) relevés expérimentaux [Bau98]

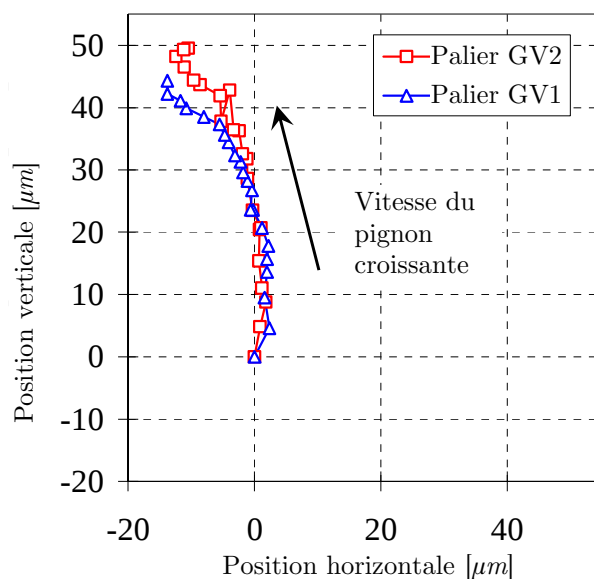
### 3.3.3. Comportement des paliers

Expérimentalement, les capteurs de position ont permis de relever la position de fonctionnement moyenne de l'arbre dans les paliers [Bau98]. Les capteurs ne permettent que de réaliser des mesures relatives ; ainsi l'origine de ces déplacements, a été choisie comme la position à la vitesse la plus faible. Les positions d'équilibre statique calculées (avec origine au centre du palier), en utilisant le modèle de palier unidimensionnel avec prise en compte des effets thermiques, successivement lors du balayage en vitesse (succession de vitesses fixes), figure 3.7.a, peuvent être comparées aux mesures, figure 3.7.b.

a)



b)

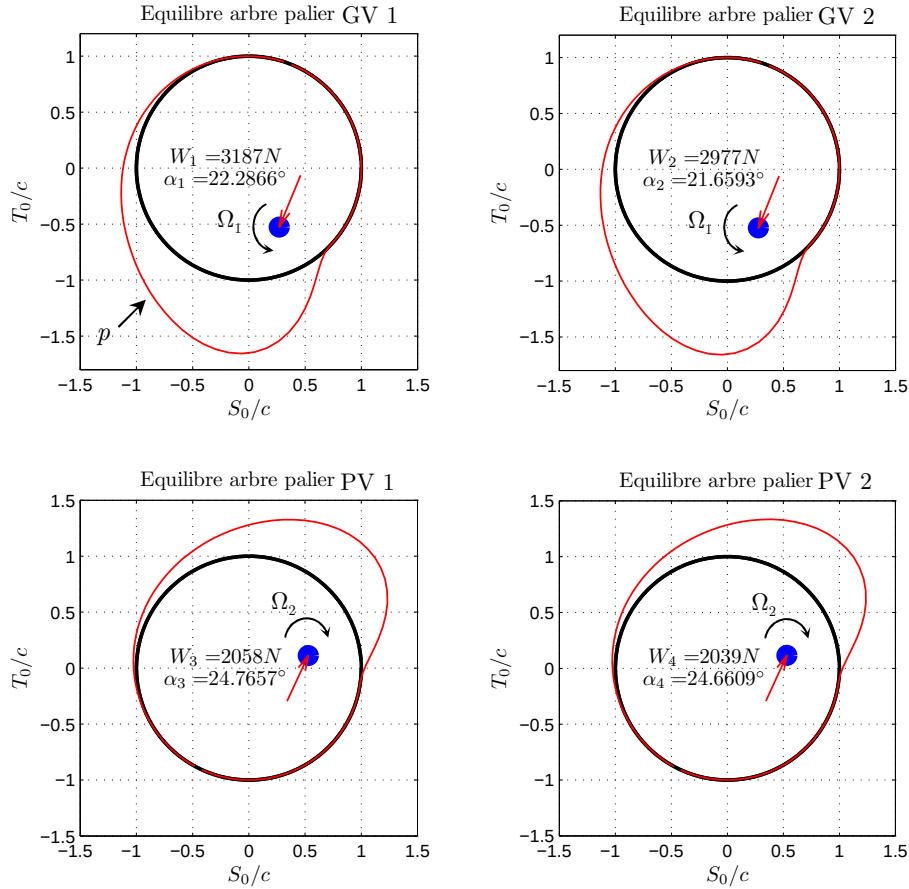


**Fig. 3.7** – Evolution de la position de fonctionnement moyenne du centre de l'arbre à l'intérieur du palier lors d'une montée de vitesse, denture droite, configuration « entre-palier maximal ».

a) résultats de simulation ; b) relevés expérimentaux

Les résultats expérimentaux et numériques donnent des tendances très proches, aussi bien en termes d'orientation que d'amplitude, avec environ  $45 \mu m$  de différence de position verticales et  $15 \mu m$  horizontalement entre les basses et hautes vitesses. De très légères différences sont observées, aussi bien numériquement qu'expérimentalement sur le positionnement des deux paliers d'un même arbre ; ces différences sont probablement causées par la non-symétrie des arbres.

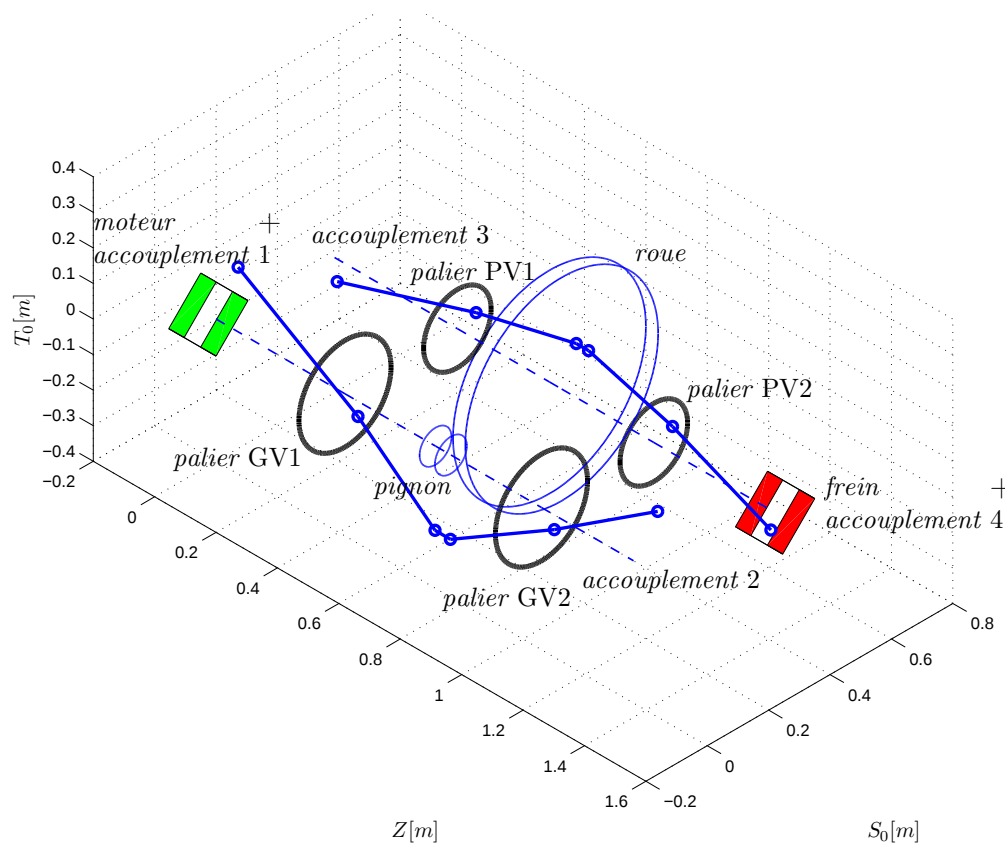
La succession des positions d'équilibre, figure 3.7.a, forme une courbe proche d'un arc de cercle tendant vers le centre des paliers à mesure que la vitesse de rotation augmente. Ce résultat est très classique pour les paliers hydrodynamiques. Comme le montre la figure 3.8, les chargements récupérés par les paliers sont proches de la moitié de l'effort d'engrènement appliqué dans la direction du plan d'action, la différence étant causée par les accouplements élastiques en bout d'arbre, et le poids des éléments de la ligne d'arbre. La figure 3.9 montre le calage des arbres dans les paliers et la déformée statique. Il apparaît clairement que l'arbre GV est « projeté » vers le bas, alors que l'arbre PV trouve sa position dans le quartile supérieur droit, sous l'effet des différents sens et vitesses de rotation et de la réciprocité de l'effort d'engrènement. Notons que les zones actives ( $p > 0$ ) sur les paliers d'un même arbre sont identiques, mais quasi opposées entre les paliers de l'arbre GV et ceux de l'arbre PV.



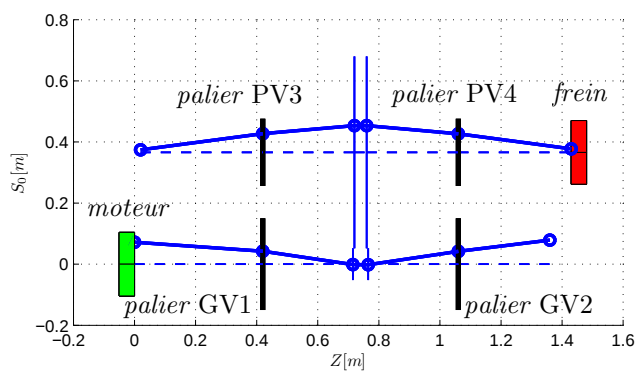
**Fig. 3.8** – Positionnement des arbres GV et PV dans les 4 paliers, visualisation de l'effort  $W_i$  orienté supporté par chaque palier et du champ de pression adimensionné ; denture droite ;  $\Omega_1=60\text{rad/s}$ ,  $C_r=1540\text{N.m}$ .

### 3.3.4. Equilibre statique du système

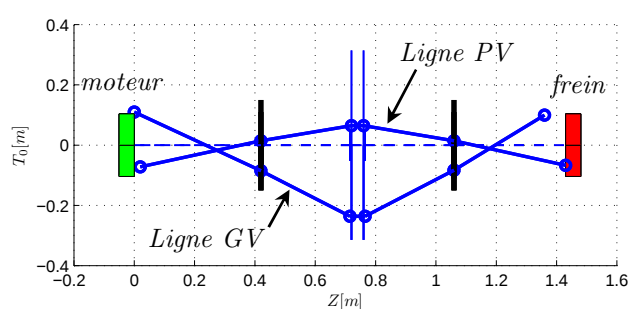
a)



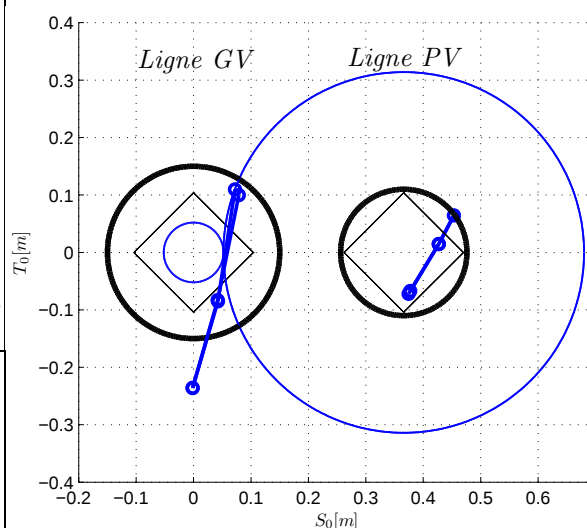
b) déformée dans le plan horizontal



c) déformée dans le plan vertical



d)



**Fig. 3.9** – Représentation de la déformée statique numérique en flexion du banc d'essai, déplacements exagérés ( $\times 1000$ ) ;  $\Omega_1=60\text{rad/s}$ ,  $C_r=1540\text{N.m}$  ; denture droite ; a) perspective, b) vue de dessus, c) vue de côté, d) vue de face.

La figure 3.9 montre une représentation de l'équilibre statique en flexion du réducteur, à une faible vitesse ( $\Omega_1 = 60 \text{ rad/s}$ ). Les lignes d'arbre déformées et calées dans les paliers semblent quasi symétriques, et rester dans un même plan (particulièrement visible sur la vue de côté (*d*)). Les accouplements extérieurs ne semblent pas avoir d'effet notable sur le calage des arbres, ni sur leurs déformées ; sans doute à cause des faibles jeux dans les paliers.

| Efforts [N]           |                               | $S_0$      | $T_0$       |
|-----------------------|-------------------------------|------------|-------------|
| Ligne GV              | Accouplement Moteur 1*        | -180.7     | - 284.0     |
|                       | Palier 1*                     | 1099.1     | 2992.0      |
|                       | Engrènement                   | -1784.9    | -4903.8     |
|                       | Palier 2*                     | 1064.2     | 2779.8      |
|                       | Accouplement opposé moteur 2* | - 197.5    | -259.1      |
|                       | Poids propre ligne GV         | 0.0        | -325.5      |
| <b>Total ligne GV</b> |                               | <b>0.2</b> | <b>-0.6</b> |
| Ligne PV              | Accouplement opposé frein 3*  | -21.4      | 181.1       |
|                       | Palier 3*                     | -874.3     | -1863.8     |
|                       | Engrènement                   | 1784.9     | 4903.8      |
|                       | Palier 4*                     | -860.3     | -1848.7     |
|                       | Accouplement frein 4*         | -28.8      | 167.7       |
|                       | Poids propre ligne GV         | 0.0        | -1540.9     |
| <b>Total ligne PV</b> |                               | <b>0.1</b> | <b>-0.8</b> |

\* ces efforts sont les résultats du calcul statique itératif (équation de Reynolds pour les paliers et équilibre de la structure pour les accouplements), leur répartition étant fonction des coordonnées des points d'application, des caractéristiques des accouplements (raideurs) et paliers (dimensions, jeu, température, viscosité...), il est important de vérifier la convergence.

**Tab 3.4** – Vérification de l'équilibre statique des efforts sur les lignes d'arbre dans les directions radiales; denture droite ;  $\Omega_1=60\text{rad/s}$ ,  $C_r=1540\text{N.m}$ .

Dans la continuité de la figure 3.9,, le tableau 3.4 présente la projection sur les axes  $S_0$  et  $T_0$  des efforts appliqués sur chaque ligne d'arbre. L'effort d'engrènement, calculé par la formule  $\frac{C_m}{R_{b1} \cos \beta_b}$  avec  $\beta_b = 0$  appliqué normalement aux lignes de contact théoriques, avec entraxe modifié, est artificiellement comptabilisé comme effort extérieur (dans le modèle il est un effort intérieur) dans le but de vérifier l'équilibre statique de chaque ligne d'arbre. Il est alors possible de vérifier que la somme des efforts extérieurs appliqués à chaque ligne d'arbre est nulle, aux erreurs d'arrondis et approximations faites dans cette partie (concernant notamment l'effort d'engrènement) prêt. L'équilibre des moments est, lui aussi, vérifié mais n'est pas présenté ici. La vérification de l'équilibre des forces est plus importante qu'elle n'y parait car les efforts transmis par les paliers sont directement liés aux positions des arbres dans les jeux (l'application étant bijective). L'équilibre des efforts garantit alors la convergence des déplacements aux paliers.

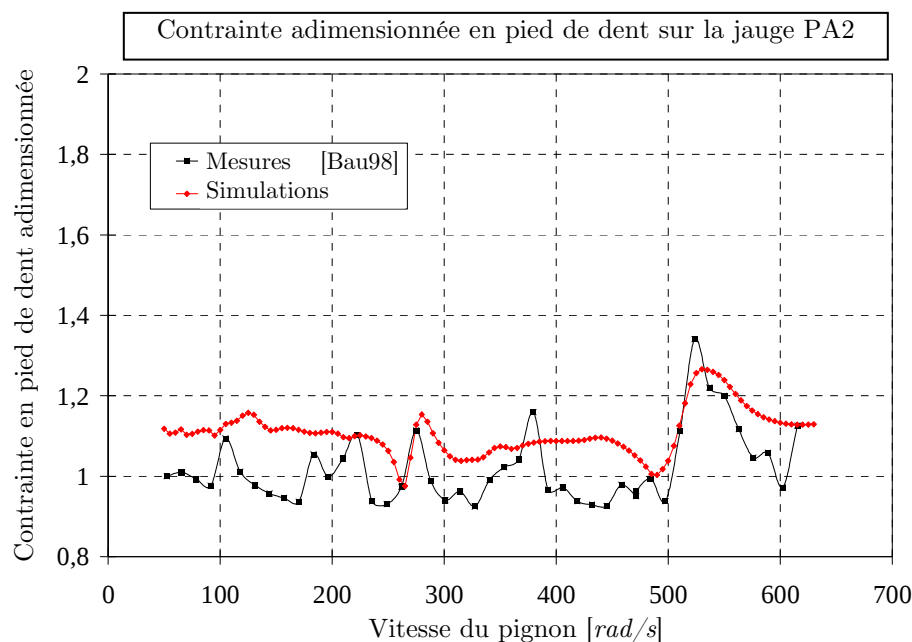
### 3.4. Résultats en dentures hélicoïdales

Seules des mesures dans la configuration « entre-palier maximal » sont disponibles, les comparaisons sont donc établies dans cette configuration uniquement.

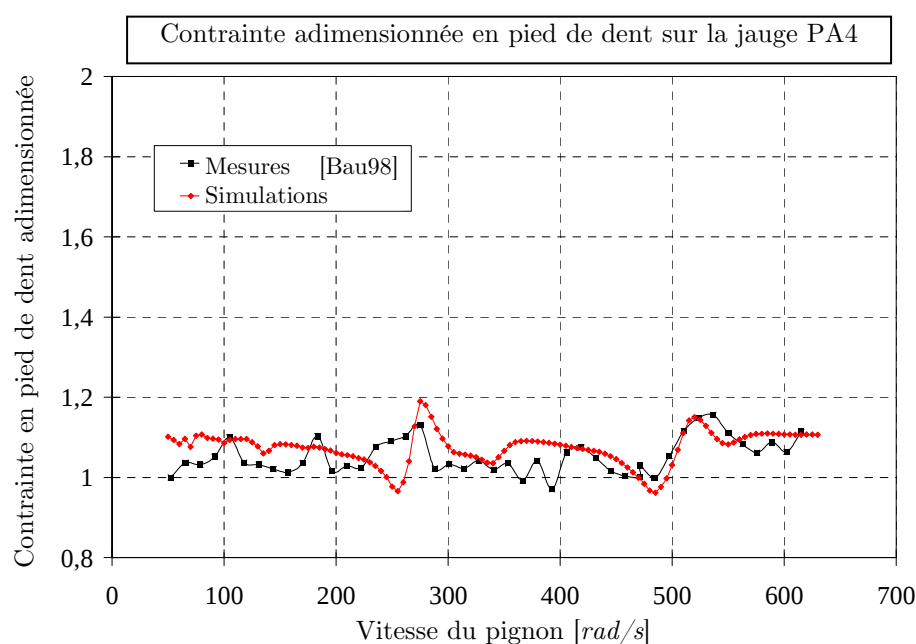
### 3.4.1. Comportement dynamique des dentures

Nous nous intéressons, à la contrainte adimensionnée en pied de dent en deux positions distinctes (jauges PA2 et PA4 sur la figure 3.2). L'évolution de cette contrainte avec la vitesse de rotation du pignon a été portée sur les figures 3.10.a et 3.10.b.

a)



b)



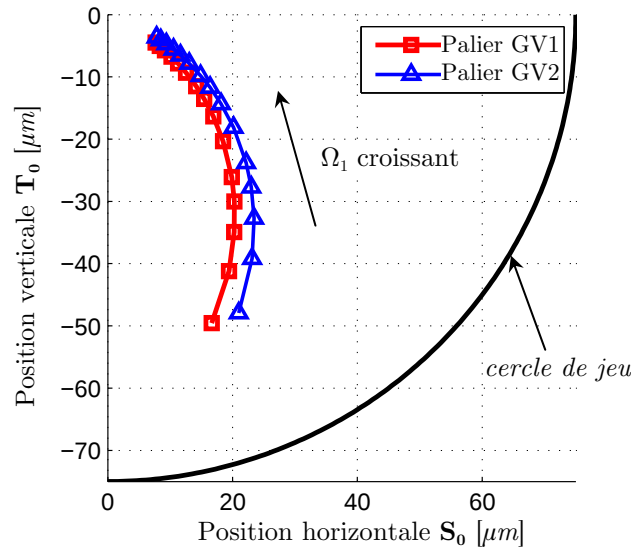
**Fig. 3.10** – Comparaisons numérique-expérimental de l'évolution de la contrainte adimensionnée en pied de dent avec la vitesse du pignon en denture hélicoïdale pour la configuration « entre-palier maximal » sous une charge  $Cr = 1540 N.m$  ; a) jauge PA2, b) jauge PA4

Contrairement aux cas avec des dentures droites, les distinctions entre les contraintes relevées en deux points de mesures révèlent la non uniformité selon la largeur de denture de la contrainte en pied de dent. La simulation fait apparaître cet effet aussi bien que les mesures, tout comme le fait que les niveaux d'amplification relevés sont globalement plus faible que pour les dentures droites (1.3 au maximum en denture hélicoïdale contre 1.6 en denture droite). Il apparaît alors que la seule véritable vitesse critique est située à environ  $530 \text{ rad/s}$ , quel que soit le point de mesure/de calcul. Les résultats nous apparaissent comme convenables.

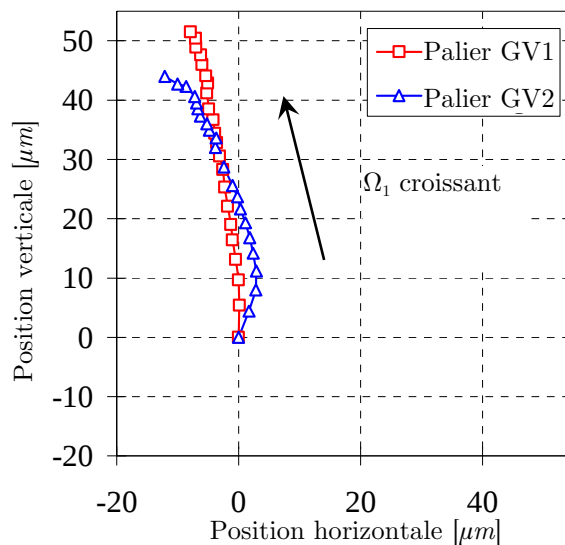
### 3.4.2. Comportement des paliers

Tout comme pour le cas des dentures droites, les positions d'équilibre des paliers ont été calculées lors d'un balayage en vitesse et comparées aux résultats de mesure, figure 3.11 :

a)



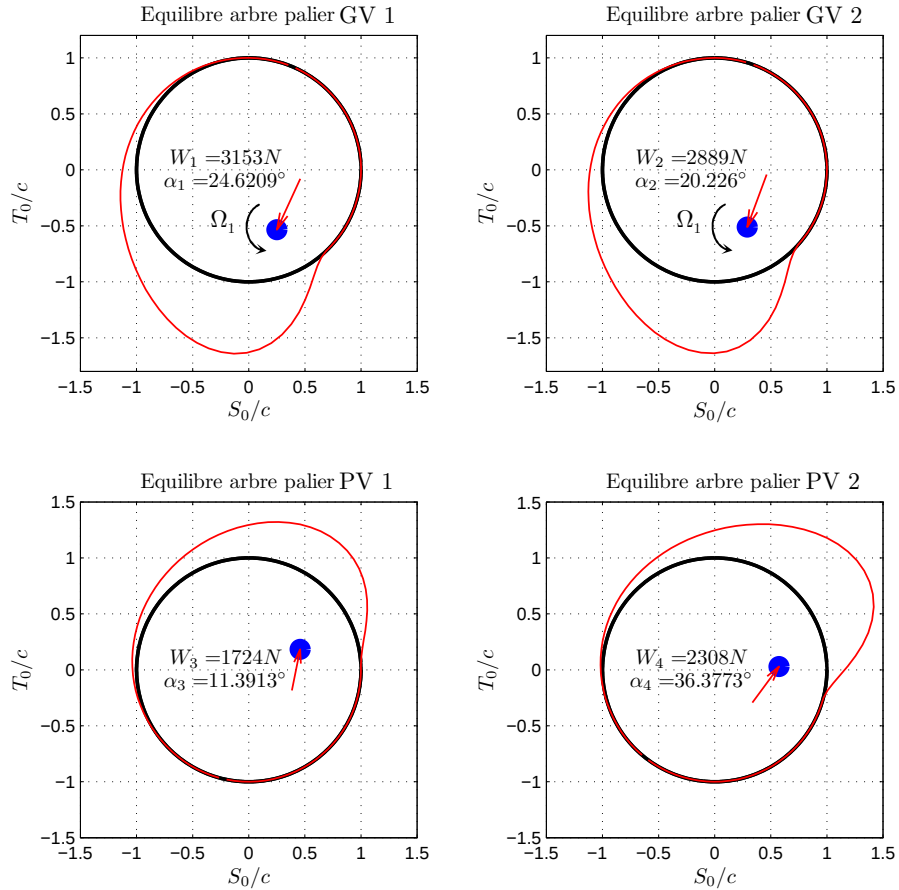
b)



**Fig. 3.11** – Evolution de la position de fonctionnement moyenne du centre de l'arbre à l'intérieur du palier lors d'une montée de vitesse, denture hélicoïdale, configuration « entre-palier maximal ».  
a) résultats de simulation ; b) relevés expérimentaux

L'accord entre les résultats expérimentaux et les simulations est, là aussi, bon, bien que les positions relevées expérimentalement ne soient que relatives. Il apparaît clairement que les positions sont différentes sur les deux paliers de l'arbre GV avec des évolutions assez distinctes, malgré le fait que les mesures ne soient que relatives. Les positions semblent également distinctes de celles obtenues en denture droite, sous l'influence de l'angle d'hélice.

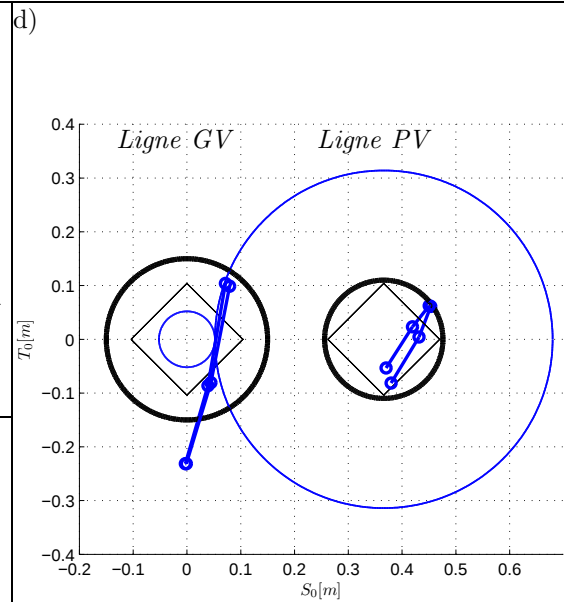
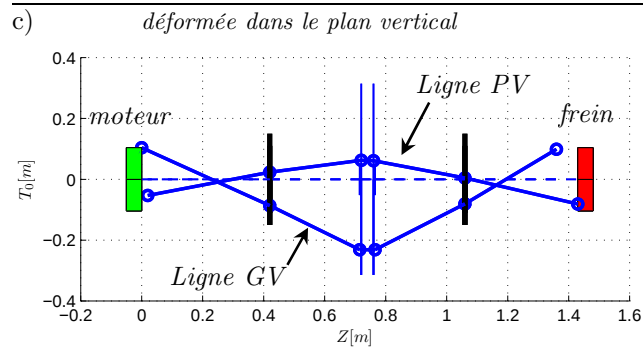
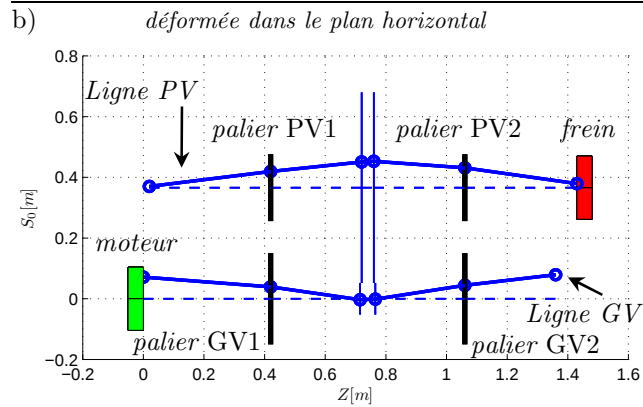
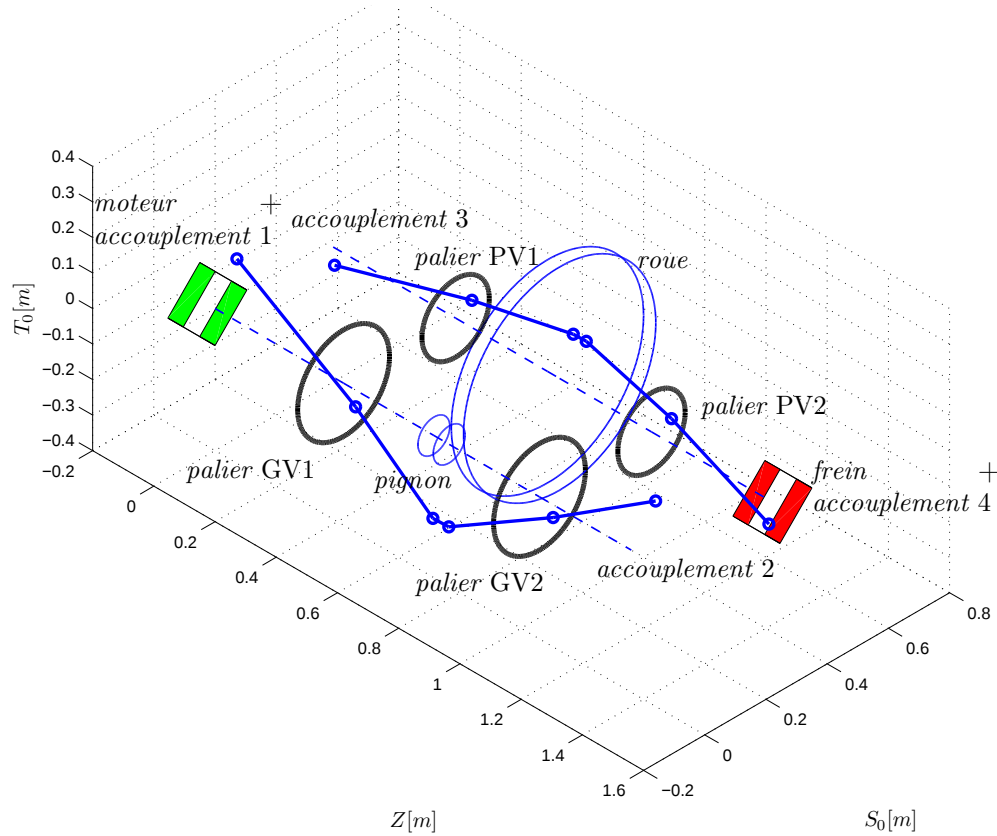
La figure 3.12 montre, à la vitesse fixe de  $60 \text{ rad/s}$ , que ces différences de position de fonctionnement sont liées à des différences de chargement des paliers, aussi bien en norme qu'en direction. Même si aucune mesure n'a été effectuée sur l'arbre PV, les résultats de simulation montrent que la dissymétrie est bien plus marquée entre les paliers de cet arbre. Ce résultat semble logique compte-tenu du fait que la dissymétrie est causée par le moment de basculement engendré par la denture hélicoïdale, moment bien plus important sur la roue que sur le pignon, en raison des différences de rayon. Il en résulte également que les zones actives des paliers d'arbre PV sont différentes l'une de l'autre.



**Fig. 3.12** – Positionnement des arbres GV et PV dans les 4 paliers, visualisation de l'effort  $W_i$  orienté supporté par chaque palier et du champ de pression adimensionné ; denture hélicoïdale ;  $\Omega_1=60\text{rad/s}$ ,  $C_r=1540\text{N.m}$ .

## 3.4.3. Equilibre statique du système

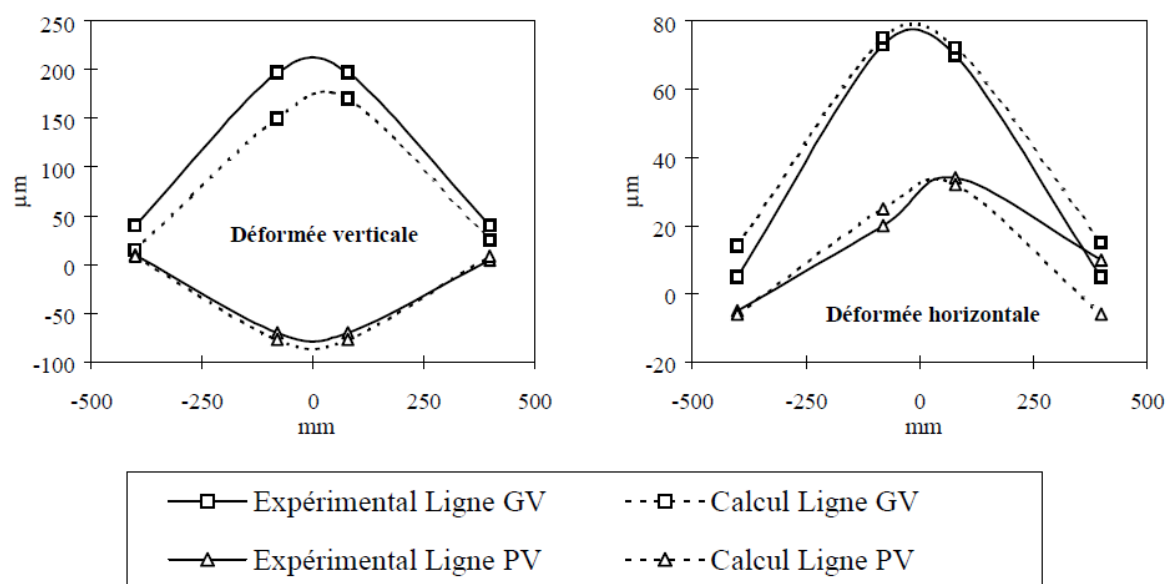
a)



**Fig. 3.13** – Représentation de la déformée statique numérique en flexion du banc d'essai, déplacements exagérés ( $\times 2000$ ) ;  $\Omega_1 = 60 \text{ rad/s}$ ,  $C_r = 1540 \text{ N.m}$  ; denture hélicoïdale ; a) perspective, b) vue de dessus, c) vue de côté, d) vue de face.

La figure 3.13 montre une représentation de l'équilibre statique en flexion du réducteur. Malgré les erreurs de représentation (les nœuds sont reliés par des segments de droite, et non des fonctions cubiques comme l'imposent les fonctions de forme), on note la dissymétrie des déformées des lignes d'arbre, principalement PV (particulièrement visible sur la vue de côté (*d*)). La dissymétrie est ici légère, en raison des jeux de paliers relativement faibles, mais peut devenir prédominante pour des paliers de caractéristiques différentes, entre-paliers plus faibles *etc...* ces points seront abordés dans les études paramétriques réalisées dans le chapitre suivant.

Toutes proportions gardées, les déformées statiques de la figure 3.13 peuvent être comparées à celles de la figure 3.14 (les paliers étant de type hydrostatique dans ce cas), issues des mesures et simulations de [Bau98], ces dernières utilisant un modèle de palier sans jeu. Les dissymétries en bout d'arbre, sont présentes sur le modèle présenté figure 3.13 et également sur les déformées expérimentales. En revanche, elles ne sont pas retranscrites par le modèle avec paliers à coefficients présenté dans [Bau98] leur origine étant le mouvement de corps solide de calage des arbres dans les paliers, que prend en compte notre modèle.



NB : les systèmes d'axes de mesures utilisés par [Bau98] sont différents des nôtres: pour les déformées horizontales, les sens « déplacements positifs » sont opposés sur les deux arbres, d'où les courbures qui semblent dans le même sens sur les deux arbres, alors que, physiquement, elles sont bien opposées.

**Fig. 3.14** – Déflexions statiques des lignes d'arbres en denture hélicoïdales pour  $C_r=1540\text{N.m}$  d'après [Bau98] (réducteur sur paliers hydrostatiques)

| Efforts [N]           |                               | $S_0$       | $T_0$       |
|-----------------------|-------------------------------|-------------|-------------|
| Ligne GV              | Accouplement Moteur 1*        | -179.9      | -216.6      |
|                       | Palier 1*                     | 1209.1      | 2912.1      |
|                       | Engrènement                   | -1784.9     | -4903.8     |
|                       | Palier 2*                     | 958.1       | 2726.0      |
|                       | Accouplement opposé moteur 2* | -201.8      | -246.9      |
|                       | Poids propre ligne GV         | 0.0         | -272.1      |
| <b>Total ligne GV</b> |                               | <b>0.6</b>  | <b>-1.3</b> |
| Ligne PV              | Accouplement opposé frein 3*  | -10.2       | 80.3        |
|                       | Palier 3*                     | -362.9      | -1685.7     |
|                       | Engrènement                   | 1784.9      | 4903.8      |
|                       | Palier 4*                     | -1380.2     | -1850.9     |
|                       | Accouplement frein 4*         | -32.1       | 142.3       |
|                       | Poids propre ligne PV         | 0.0         | -1587.9     |
| <b>Total ligne PV</b> |                               | <b>-0.5</b> | <b>1.9</b>  |

\* ces efforts sont les résultats du calcul statique itératif (équation de REYNOLDS pour les paliers et équilibre de la structure pour les accouplements), leur répartition étant fonction des coordonnées des points d'application, des caractéristiques des accouplements (raideurs) et paliers (dimensions, jeu, température, viscosité...), il est important de vérifier la convergence de la solution. La convergence des efforts est équivalente à la convergence des déplacements.

**Tab 3.5** – Vérification de l'équilibre statique des efforts sur les lignes d'arbre dans les directions radiales; denture hélicoïdale ;  $\Omega_1=60\text{rad/s}$ ,  $C_r=1540\text{N.m}$ .

Tout comme le tableau 3.4 en denture droite, le tableau 3.5 permet de vérifier l'équilibre statique du réducteur en denture hélicoïdale. Il est notamment possible de vérifier que, si l'effort d'engrènement, projeté sur les axes  $S_0$  et  $T_0$ , n'est pas modifié par rapport au cas en denture droite, les réactions paliers, elles, le sont, sous l'effet du moment de basculement induit par la denture hélicoïdale (voir chapitre 2). Comme le laissaient présager les représentations figure 3.13, les dissymétries sont nettement plus marquées sur l'arbre PV, tant pour ce qui est des réactions paliers que pour les réactions dues aux accouplements élastiques. Encore une fois, l'équilibre des efforts est vérifié, garantissant par la même occasion la convergence des déplacements aux paliers.

\*

\*   \*

Ce chapitre a permis de présenter un certain nombre de résultats de validation partielle du modèle de comportement dynamique de réducteur sur paliers. Le problème présentant des couplages importants entre les différents organes, il a semblé important de s'assurer,

au préalable, que le modèle de palier retenu était valide pour les plages de systèmes étudiés.

Dans la mesure du possible les résultats de calcul du réducteur sur palier ont été confrontés aux résultats expérimentaux. Ceux-ci concernent principalement le comportement de la denture, et plus particulièrement la contrainte en pied de dent. Les comparaisons ont révélé un bon accord entre les résultats de mesure et de simulation pour les engrenages droits dans les deux configurations d'entre-palier. L'importance de ce paramètre est parfaitement démontrée tant les résultats diffèrent dans les deux configurations, aussi bien expérimentalement que numériquement. En denture hélicoïdale, seule la configuration « entre-palier maximal » a été testée, et, là encore, l'accord est bon entre simulation et expérimentation. Il a été observé que la contrainte en pied de dent présentait alors des disparités importantes selon la largeur de denture, et des niveaux d'amplification globalement plus bas qu'en denture droite.

Malheureusement, trop peu de résultats expérimentaux existent et aucun, à notre connaissance, ne traite spécifiquement le comportement dynamique de réducteurs à engrenages sur paliers hydrodynamiques. Concernant le comportement des paliers, nous avons été contraints de nous limiter à des considérations statiques, donnant des résultats satisfaisants, principalement sur les positions de calage des paliers d'arbre GV ; avec, là aussi, des disparités sur les paliers d'un même arbre et une influence du type de denture. Ces positions de fonctionnement ont été mises en relation avec les chargements paliers, et plus globalement l'équilibre statique du réducteur ainsi que le transfert de charge de la denture aux paliers ont été présentés avec les deux types de denture, mettant en évidence le transfert de charge de la denture aux paliers, les rôles joués notamment par les accouplements extérieurs et le poids des lignes d'arbres.

# Chapitre 4

---

## Etudes paramétriques sur un réducteur

### Sommaire

|        |                                                               |     |
|--------|---------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.   | Phénomènes de base sur un réducteur simple .....              | 118 |
| 4.1.1. | Réducteur étudié .....                                        | 118 |
| 4.1.2. | Etude à vitesse de rotation fixe .....                        | 120 |
| 4.1.3. | Balayage en vitesse de rotation .....                         | 124 |
| 4.2.   | Influence de paramètres.....                                  | 126 |
| 4.2.1. | Angle d'hélice.....                                           | 127 |
| 4.2.2. | Accouplements extérieurs.....                                 | 131 |
| a.     | Influence d'un accouplement .....                             | 131 |
| b.     | Introduction de conditions aux limites .....                  | 136 |
| 4.2.3. | Caractéristiques des paliers : le bassin d'alimentation ..... | 140 |
| 4.3.   | Influence du modèle de palier.....                            | 145 |
| 4.3.1. | Palier court / modèle unidimensionnel.....                    | 145 |
| 4.3.2. | Influence de la non linéarité du modèle de palier .....       | 150 |
| 4.4.   | Etude de deux architectures .....                             | 153 |
| 4.4.1. | Engrenages à double hélice.....                               | 154 |
| 4.4.2. | Engrenages en porte-à-faux .....                              | 157 |

Le chapitre précédent a permis de commencer à mettre en évidence, sur un banc d'essai et par la simulation, l'influence de certains paramètres propres aux systèmes de type « réducteur sur paliers hydrodynamiques », tels que le positionnement des arbres dans les paliers, ou le type de denture, tout en présentant des résultats de validation du modèle. Dans la continuité, ce dernier chapitre propose des études paramétriques plus poussées et met en évidence l'influence de paramètres parfois ignorés dans les modèles rencontrés dans la littérature.

Le chapitre débute par la présentation de phénomènes que nous appellerons « couplages de base » entre les différents organes, présentés sur un réducteur fictif proche de celui du cha-

pitre 3. Nous présenterons les résultats qui nous apparaissent comme novateurs avant une phase d'étude de l'influence du modèle de palier. Nous terminerons par l'étude de deux architectures de réducteur particulières, à savoir un train d'engrenages à double hélice et un engrenage simple hélice en porte à faux.

## 4.1. Phénomènes de base sur un réducteur simple

On se propose dans un premier temps d'étudier un réducteur simplifié, à dentures droites, afin de mettre en évidence les premiers couplages entre les différents organes. Sauf indication contraire, le modèle de palier retenu pour cette section est le modèle unidimensionnel avec prise en compte des effets thermiques au moyen du modèle thermique global modifié présenté dans le chapitre 2. La théorie linéaire (basée sur les coefficients dynamiques calculés au voisinage de la position d'équilibre statique) est ici employée, et sera, par la suite, comparée à la théorie non linéaire.

### 4.1.1. Réducteur étudié

Le réducteur étudié est schématisé figure 4.1 et ses caractéristiques sont données dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3. Comparativement au banc d'essai étudié dans le chapitre 3, ce réducteur est plus compact (arbres plus courts) et les dentures sont plus larges, ce qui permet de transmettre des puissances supérieures. Les deux arbres (GV et PV) sont identiques, de même que les paliers (à l'exception de la position du bassin d'alimentation, dans un premier temps considérée comme opposée à la charge : elle sera un paramètre étudié par la suite). A l'exception du moteur et du frein, le réducteur est symétrique, et aucun accouplement extérieur n'est pour le moment introduit en bout d'arbre.

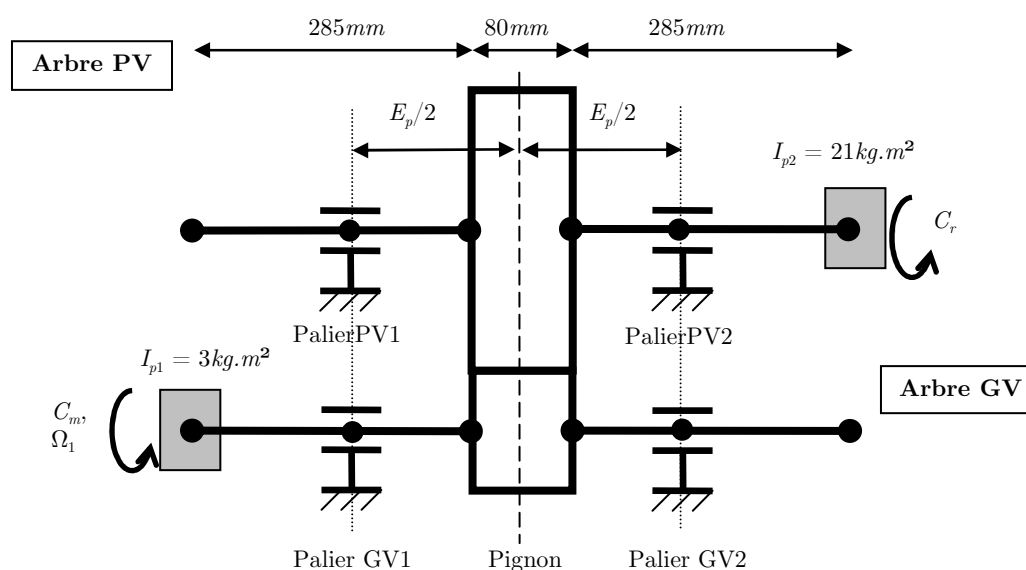


Fig. 4.1 – Modèle du réducteur simulé

|                         | <b>Pignon</b>                   | <b>Roue</b>                           |
|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| Nombre de dents         | 26                              | 157                                   |
| Largeur de denture [mm] | 80                              | 80                                    |
| Angle d'hélice [°]      | 0 (droit) ; 12,5 (hélicoïdal)   |                                       |
| Module [mm]             | 4                               |                                       |
| Angle de pression [°]   | 20                              |                                       |
| Coefficient de creux    | 1,0                             | 1,0                                   |
| Coefficient de saillie  | 1,4                             | 1,4                                   |
| Coefficients de déport  | 0,16                            | - 0,16 (droit)<br>- 0,14 (hélicoïdal) |
| Entre-axe [mm]          | 366 (droit) et 375 (hélicoïdal) |                                       |

Tab 4.1 – Caractéristiques de denture

|                                          | <b>Arbre GV</b> | <b>Arbre PV</b> |
|------------------------------------------|-----------------|-----------------|
| Diamètre extérieur [mm]                  | 90              | 90              |
| Diamètre intérieur [mm]                  | 30              | 30              |
| Longueur d'arbre [mm]                    | 650             | 650             |
| Entre-palier : $E_p$ [mm]                | 330             |                 |
| Module d'Young [MPa]                     | 210 000         |                 |
| Coefficient de Poisson                   | 0,3             |                 |
| Masse volumique [ $kg/m^3$ ]             | 7 800           |                 |
| Raideur butée [ $N/m$ ]                  | $4 \cdot 10^6$  | $6 \cdot 10^6$  |
| Raideur accouplement élastique [ $N/m$ ] | 0.0             |                 |

Tab 4.2 – Caractéristiques des arbres

|                                                                | <b>Arbre GV</b>                                   | <b>Arbre PV</b> |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------|
| Longueur [mm]                                                  | 60                                                | 60              |
| Jeu radial [ $\mu m$ ]                                         | 150                                               | 150             |
| Viscosité cinématique du lubrifiant<br>[ $mm^2/s$ ] (annexe D) | ISO VG 100<br>$v_{40} = 100$ ; $v_{100} = 11,384$ |                 |
| Température d'injection lubrifiant [K]                         | 318                                               |                 |
| Injection de lubrifiant                                        | Bassin axial supposé opposé à la charge           |                 |

Tab 4.3 – Caractéristiques des paliers lisses

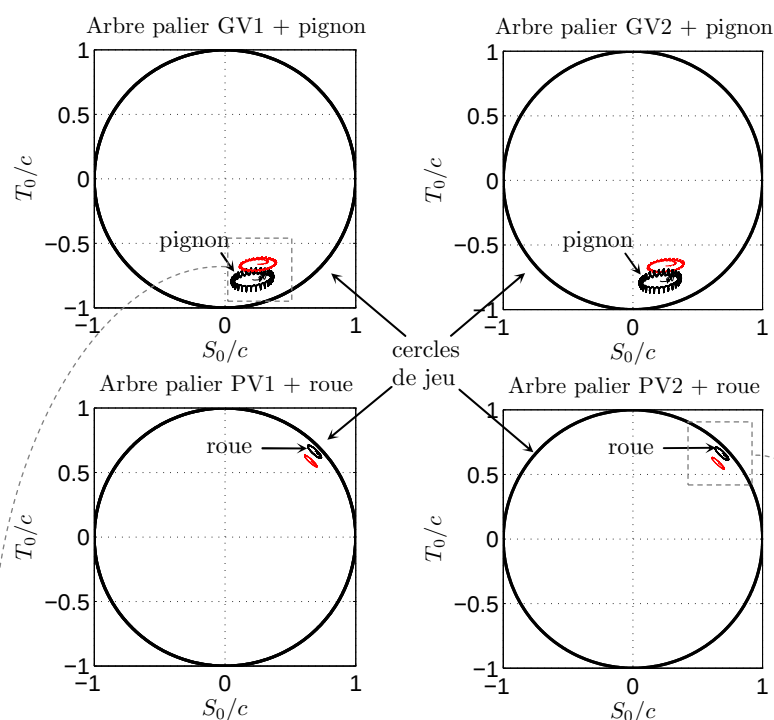
Le réducteur sera étudié pour un couple moteur nominal de 1000  $N.m$  (pouvant varier durant l'étude paramétrique) et une vitesse de rotation  $\Omega_1$  variant de 60 à 900 rad/s.

Un balourd a été introduit sur chaque arbre, dans son plan de symétrie correspondant à la masse de chaque arbre et du mobile associé, concentré à une distance  $e_i$  de l'axe de rotation de l'arbre  $i$  :  $e_1 = 0.5 \text{ mm}$  ;  $e_2 = 1.0 \text{ mm}$ .

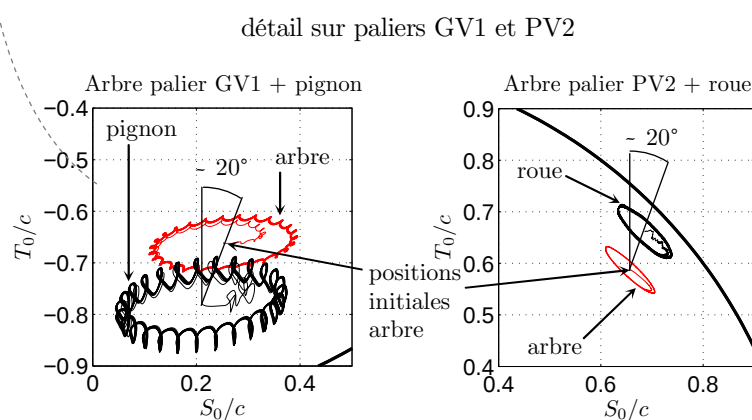
### 4.1.2. Etude à vitesse de rotation fixe

Les résultats ci-dessous concernent l'étude du réducteur à la vitesse d'entrée  $\Omega_1 = 475 \text{ rad/s}$ . et sous un couple moteur  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

a)



b)



**Fig. 4.2** – Orbits du centre de l'arbre dans chaque palier et du centre du pignon et de la roue,  $\Omega_1 = 475 \text{ rad/s}$  ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$  ; a) 4 paliers + pignon et roue ; b) détail sur les paliers GV1 et PV2

La figure 4.2 représente les trajectoires du centre de l'arbre aux paliers et au centre des mobiles, pour le réducteur fonctionnant en conditions dites « normales » ( $\Omega_1 = 475 \text{ rad/s}$  ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ ). Les trajectoires font déjà apparaître de nombreux couplages entre les différents organes :

- tout d'abord, il est intéressant de noter que la symétrie du réducteur (aux positions du moteur et du frein près) implique la symétrie des trajectoires des deux paliers d'un même arbre ;
- comme pour le réducteur étudié dans le chapitre 3, l'arbre GV est globalement projeté vers le bas et l'arbre PV dans le coin supérieur droit (dans le repère  $(\mathbf{S}_0; \mathbf{T}_0)$  ) compte tenu de la combinaison des sens de rotation et de l'effort transmis par la denture (ce point a déjà été abordé dans le chapitre 3) ;
- l'étude des trajectoires du centre de l'arbre au niveau des quatre paliers montrent l'existence d'un régime transitoire très bref, de l'ordre d'une demi-révolution puis une orbite quasi elliptique dont la période est la période de révolution de l'arbre ( $T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1}$  pour l'arbre GV et  $T_2 \simeq 6\frac{2\pi}{\Omega_1}$  pour l'arbre PV, compte tenu du rapport de réduction). Cette trajectoire quasi elliptique est caractéristique des réponses d'arbres soumis à un balourd, par la théorie des paliers linéaires ;

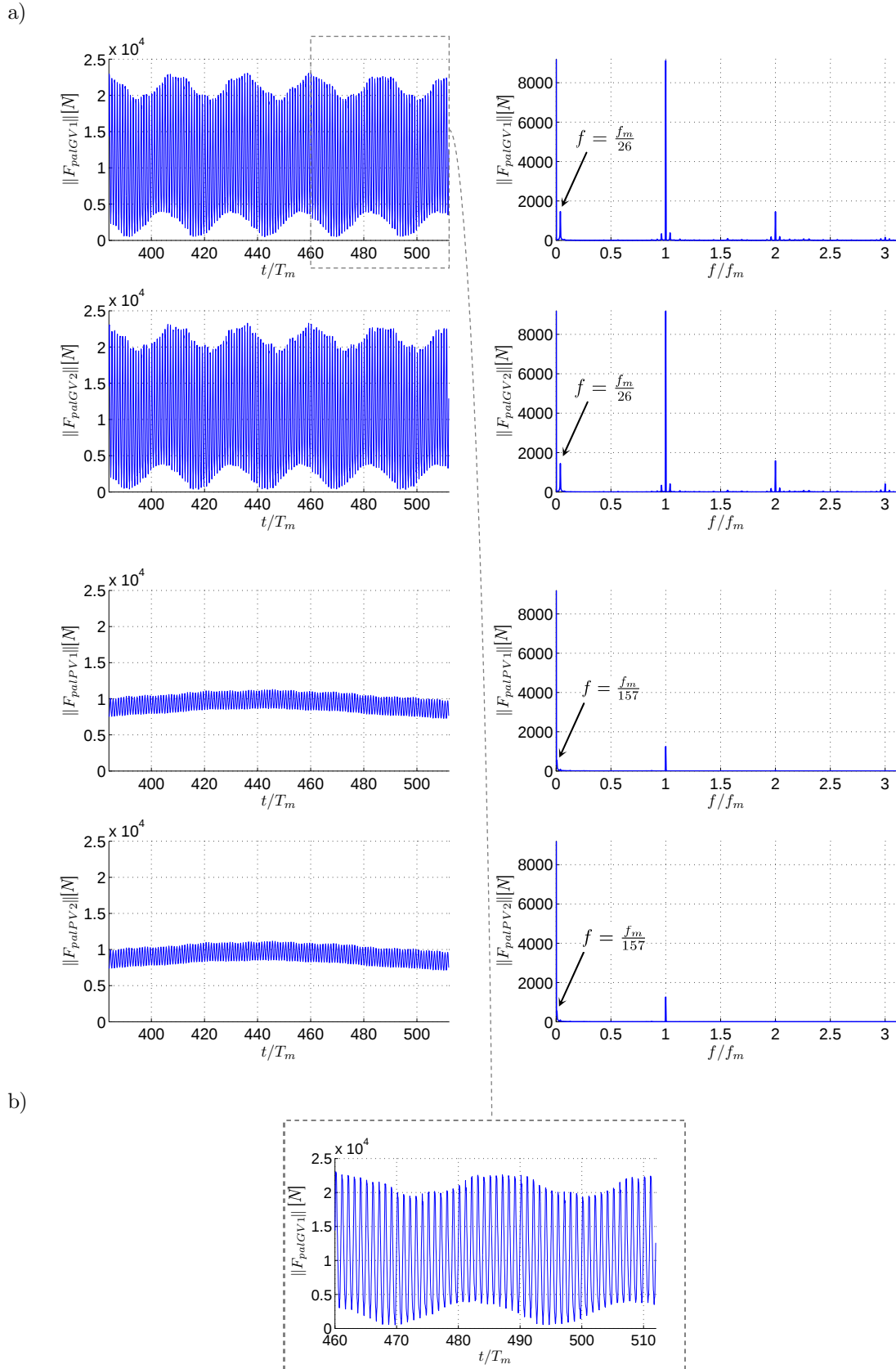
**Remarque :** *En suivant les trajectoires des centres d'arbres depuis leur position initiale, on pourra observer que, dans le plan de représentation, l'arbre GV tourne dans le sens trigonométrique alors que l'arbre PV tourne dans le sens horaire.*

- à ces oscillations dites « basse fréquence » se superposent des oscillations dites « haute fréquence » causées par l'engrènement entre dentures droites et, du point de vue de la modélisation, la variation de la raideur d'engrènement, telle qu'exposée dans le chapitre 1. Il est possible de compter (sur la figure 4.2.b) que pour une révolution de l'arbre GV, 26 oscillations « HF » sont visibles sur la trajectoire du centre de l'arbre, lesquelles correspondent aux 26 dents du pignon. La lecture des 157 oscillations du centre de l'arbre PV durant sa révolution est en revanche plus délicate, simplement par manque de lisibilité ;
- la trajectoire du centre du pignon et de la roue est très semblable à celle du centre de l'arbre aux paliers de la ligne correspondant : elle est également constituée d'une oscillation « basse fréquence », d'amplitude légèrement plus importante que dans les paliers correspondants, et d'oscillations « haute fréquence », à la même fréquence que les paliers mais d'amplitudes nettement plus importantes qu'en ces points, signe que les lignes d'arbre jouent un rôle important dans la transmission des vibrations ;

- si les trajectoires du centre des mobiles sont proches de celles des centres des arbres au niveau des paliers, elles présentent un décalage correspondant à la flèche des arbres au centre des mobiles dans une direction d'environ  $20^\circ$  (le poids ayant peu d'influence devant la charge transmise relativement importante) par rapport à la verticale, qui est proche de l'angle de pression de fonctionnement ;

L'étude de la norme des réactions paliers sur un tour de roue (fig. 4.3.a) ou sur deux tours de pignon (fig. 4.3.b) révèle des informations confirmant les observations des trajectoires :

- la représentation temporelle adimensionnée des efforts montre une oscillation basse fréquence de fréquence environ six fois plus importante sur les paliers GV que sur les paliers PV ;
- l'agrandissement réalisé sur la figure 4.3.b fait apparaître les 26 oscillations haute fréquence sur le palier GV1 durant une oscillation basse fréquence correspondant à un tour d'arbre GV. De même, 157 oscillations haute fréquence se produisent durant une oscillation basse fréquence sur les paliers d'arbre PV ;
- ces observations sont confirmées par les représentations temporelles adimensionnées avec l'apparition du premier pic basse fréquence à une fréquence  $f = \frac{f_m}{26}$  sur les paliers GV et  $f = \frac{f_m}{157}$  sur les paliers PV. De même que l'oscillation basse fréquence semble plus marquée sur les paliers GV dont les orbites étaient plus larges (figure 4.2), la composante basse fréquence est plus importante sur les paliers GV que sur les paliers PV, où elle est à peine visible ;
- les représentations spectrales révèlent que les harmoniques d'ordre supérieur (ici 2 et 3 uniquement) sont également légèrement présentes dans la réponse des paliers, mais d'un niveau quasiment négligeable devant la première harmonique ;
- comme l'avait suggéré l'étude des trajectoires, les paliers d'arbre PV sont moins bruyants que les paliers d'arbre GV (on observe un rapport 4 sur les niveaux à la fréquence d'engrènement), ce qui est probablement imputable au fait que la fréquence d'engrènement est de type « très haute fréquence » pour les paliers PV (rapport 157 avec la fréquence de rotation de l'arbre PV contre un rapport 26 pour l'arbre GV). La masse et l'inertie de la roue, beaucoup plus élevées que celles du pignon, sont une explication possible au fait que de la réponse des paliers d'arbre PV soit beaucoup moins perturbée que celle des palier d'arbre GV ;
- enfin on observe de très légers pics de part et d'autre des pics principaux ; nous reviendrons sur ces phénomènes par la suite.

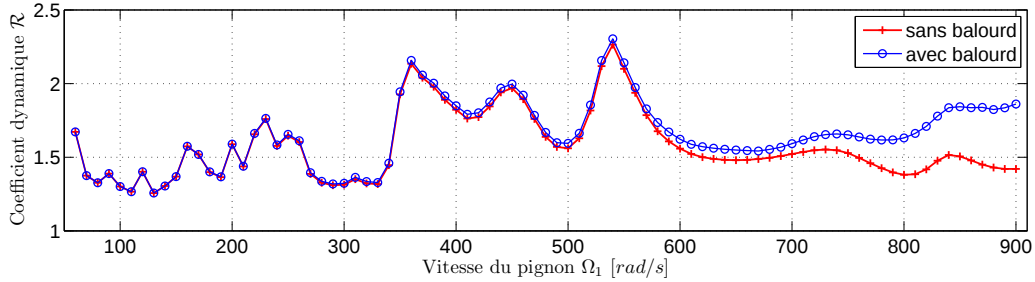


**Fig. 4.3** – Représentations temporelles et spectrales des réactions paliers ;  $\Omega_1 = 475 \text{ rad/s}$  ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$  ;  
 a) sur une période de roue et sur les 4 paliers ; b) sur deux tours de pignon sur le palier GV1

### 4.1.3. Balayage en vitesse de rotation

Des simulations ont été réalisées avec une vitesse d'entrée variant dans la plage [ 60 ; 900  $rad/s$  ], sous une charge constante  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ , sans, puis avec balourd dans le plan médian du pignon et de la roue tel que décrit en 4.1.1.. Par la suite, le « balayage en vitesse de rotation » désignera une succession de simulations à vitesse fixe, chaque fois incrémentée d'un pas de vitesse ; il ne s'agit pas d'une montée en régime.

La figure 4.4 montre l'évolution du coefficient dynamique défini en (1.20), les maxima de ce coefficient étant ici cherchés sur le dernier tour de pignon, soit sur les 26 dernières périodes d'engrènement. Outre la variation de ce coefficient, et la présence de vitesses critiques aux alentours de 350, 450 et 550  $rad/s$  (assez proche des vitesses rencontrées dans le chapitre 3, excepté celle de 450  $rad/s$ ), il est clairement visible que l'introduction d'un balourd n'a que très peu d'effet sur le coefficient  $\mathcal{R}$  pour les vitesses  $\Omega_1 \leq 600 \text{ rad/s}$ . En revanche, au delà de 600  $rad/s$ , les simulations avec balourd révèlent une augmentation du coefficient dynamique qui est causée par les oscillations basse fréquence.



**Fig. 4.4** – Evolution du coefficient dynamique lors d'un balayage en vitesse, avec et sans introduction de balourd sur les deux arbres ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

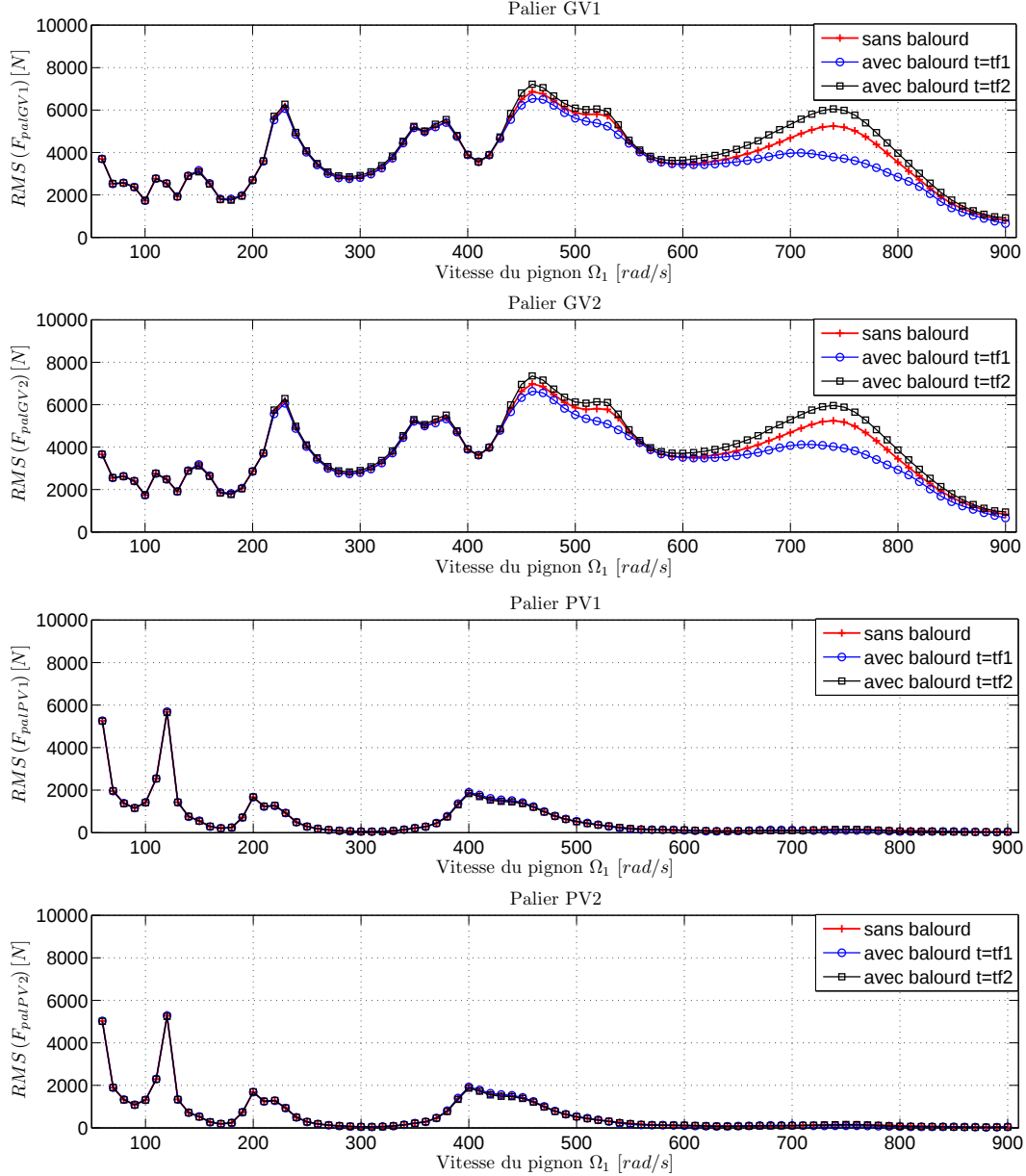
Nous nous sommes également intéressé aux réactions paliers par l'intermédiaire de leur valeur RMS sur un intervalle de temps donné, exprimé en multiples de la fréquence d'engrènement :

$$RMS(F_{pal}) = \sqrt{\frac{1}{nT_m} \int_{t=t_f-nT_m}^{t=t_f} (F_{pal}(t) - F_{pal0})^2 dt} \quad (4.1)$$

où  $n$  est le nombre de périodes d'engrènement  $T_m$  retenues pour le calcul,  $t_f$  est le temps de fin de simulation,  $F_{pal}(t)$  étant la norme de l'effort palier considéré, en chaque instant, et  $F_{pal0}$  la norme de l'effort palier calculé à l'équilibre statique, correspondant également à la valeur moyenne de l'effort dynamique.

Afin d'éliminer l'effet de la composante basse fréquence due au balourd, dont nous savons déjà qu'elle dégrade les réactions, nous avons calculé le RMS sur un faible nombre de

périodes d'engrènement ( $n = 4$  dans la formule (4.1)) à différents instants : i) sur les 4 dernières périodes avant que le pignon ne termine une rotation complète par rapport à sa position initiale ( $t_f = t_{f1}$ ), ii) sur les 4 dernières périodes avant que le pignon ne termine une demi-rotation complète par rapport à sa position initiale ( $t_f = t_{f2}$ ).

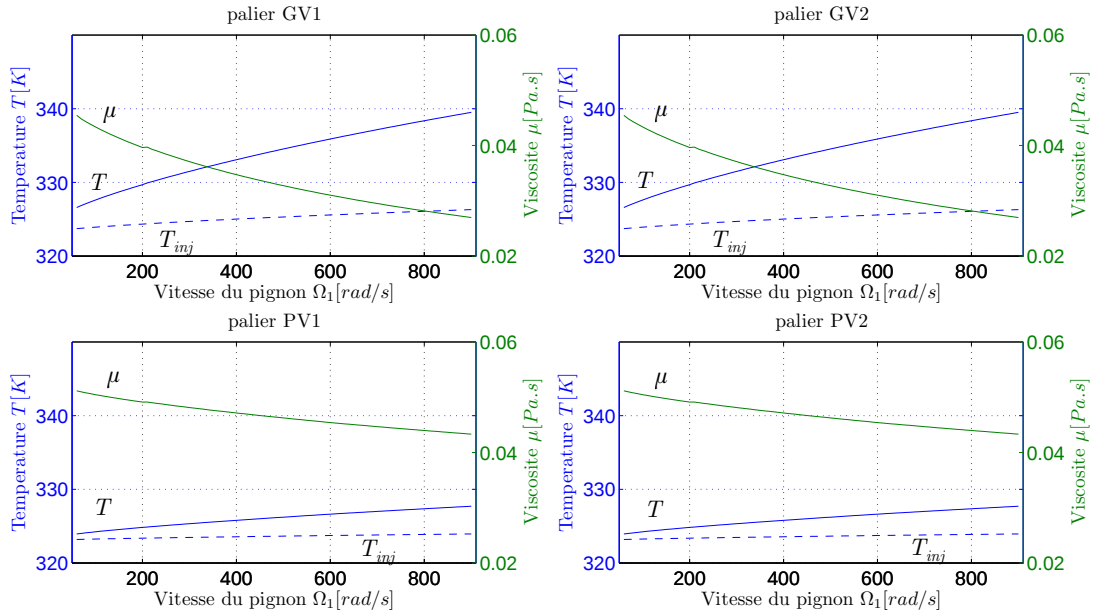


**Fig. 4.5** – Evolution du RMS des efforts paliers avec la vitesse de rotation ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

Les résultats de simulation de la figure 4.5 montrent l'évolution du RMS des efforts paliers avec la vitesse de rotation. On y voit notamment que la plupart des vitesses qui présentent un coefficient dynamique  $\mathcal{R}$  élevé, figure 4.4, présentent aussi des niveaux RMS d'effort palier élevés pour les paliers d'arbre GV, et ce, avec ou sans balourd. En revanche le comportement des paliers d'arbre PV est moins perturbé. Il est intéressant de noter que des vitesses dites critiques, propres aux paliers, apparaissent ( $\Omega_1 = 60, 120 \text{ rad/s}$  sur les

paliers PV et 750 rad/s sur les paliers GV). Cette dernière vitesse présente la particularité de ne pas apparaître sur le tracé du coefficient dynamique figure 4.4, et il semble qu'à cette vitesse particulière, l'existence d'un balourd ait une certaine importance, de même que l'instant de calcul du RMS ; avec, probablement l'apparition d'un phénomène de modulation d'amplitude, suggéré par la figure 4.3, sur lequel nous reviendrons par la suite.

En guise de contrôle, nous nous sommes intéressés aux conditions de fonctionnement des paliers. La figure 4.6 représente l'évolution des températures moyenne de fonctionnement, d'injection et de la viscosité du lubrifiant avec la vitesse de rotation. De manière assez prévisible, les températures ont tendance à augmenter lorsque la vitesse de rotation augmente, ce phénomène étant beaucoup plus marqué sur les paliers GV fonctionnant à plus haute vitesse qui atteignent environ 65°C de température moyenne. Sans surprise, les paliers PV ont tendance à moins s'échauffer, leur température n'excédant pas les 55°C. Les viscosités du lubrifiant évoluent dans le rapport inverse, avec une décroissance plus importante sur les paliers GV que sur les paliers PV.



**Fig. 4.6** – Evolution de la température moyenne ( $T$ ), de la température d'injection ( $T_{inj}$ ) et de la viscosité ( $\mu$ ) du lubrifiant de chaque palier avec la vitesse de rotation ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

Cette première partie a permis de présenter un certain nombre de résultats de simulation, à vitesse fixe, puis variable, du comportement d'un réducteur à engrenages à dentures droites sur paliers fluides. Des couplages significatifs apparaissent entre les différents organes. Ce cas servira de référence pour les études à venir dans les paragraphes suivants.

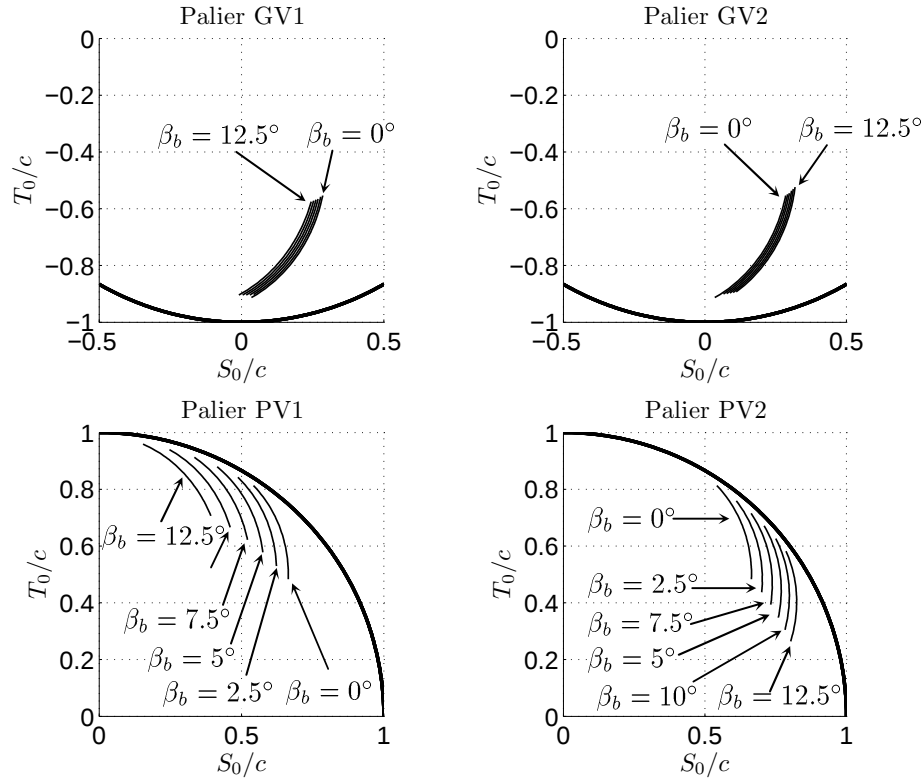
## 4.2. Influence de paramètres

Dans ce paragraphe, l'influence d'un certain nombre de paramètres relatifs au réducteur sera étudiée. Dans un premier temps nous présenterons l'influence d'un angle d'hélice sur le comportement statique et dynamique du système. Ensuite le rôle des accouplements extérieurs sera mis en évidence ; et enfin nous nous intéresserons de plus près au rôle joué par les paliers.

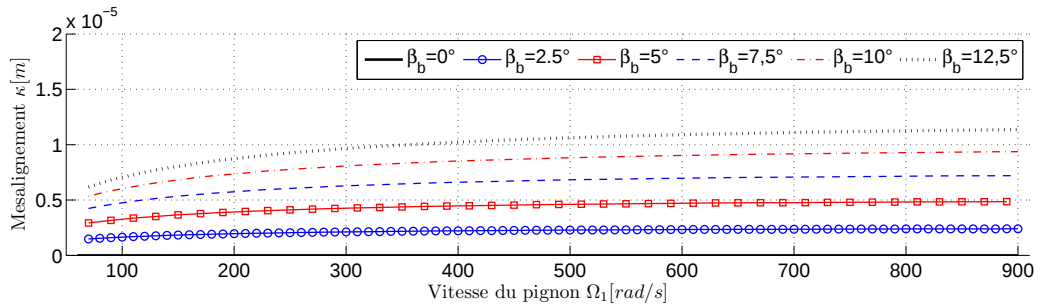
#### 4.2.1. Angle d'hélice

L'angle d'hélice est connu pour modifier les excitations d'engrènement et le chargement à la denture (changement de la normale, introduction d'une poussée axiale et d'un moment de basculement, comme décrit dans le chapitre 2). La figure 4.7 met en relation ces grandeurs avec le positionnement des arbres dans leurs paliers, pour une vitesse  $\Omega_1$  variable et un angle d'hélice variant de 0 à 12.5° :

a)



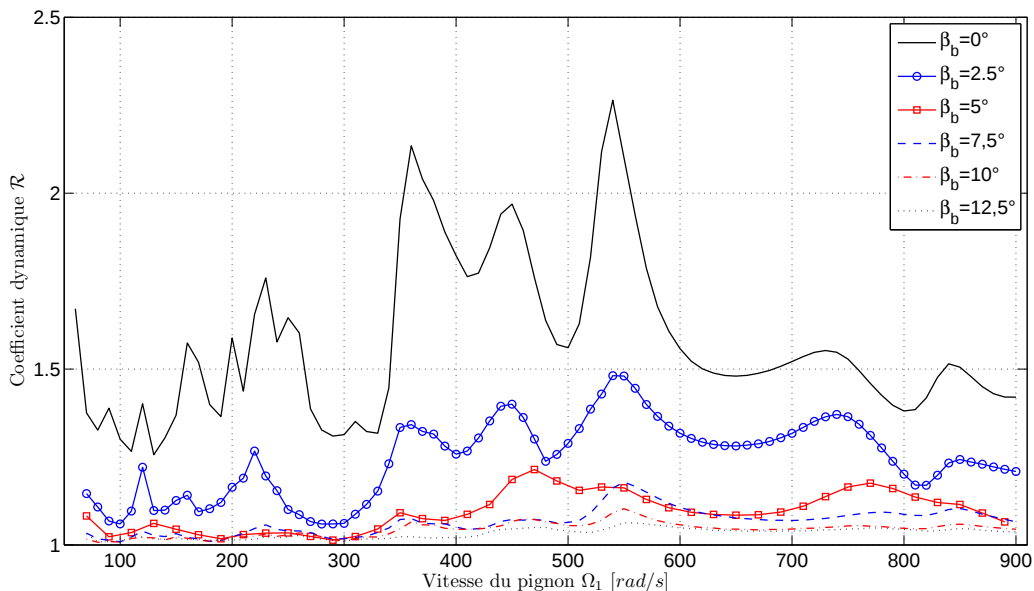
b)



**Fig. 4.7** – Evolution du calage des arbres à l'équilibre statique pour une vitesse  $\Omega_1$  variant de 60 à 900 rad/s et différents angles d'hélice ;  $C_m = 1000$  N.m. ; a) calage des arbres ; b) mésalignement équivalent (2.14)

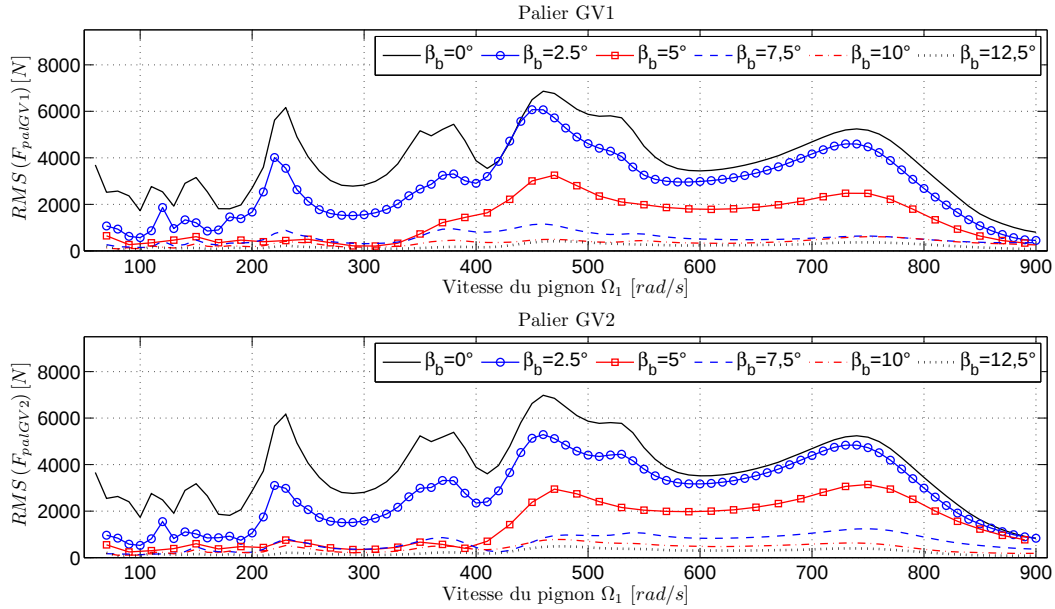
L'étude du positionnement est intéressante : elle révèle (figure 4.7.a) que les positions d'équilibre des paliers ne sont identiques (quelle que soit la vitesse  $\Omega_1$ ) qu'en denture droite, le mésalignement global équivalent  $\kappa$  étant alors nul (figure 4.7.b). Dès qu'un angle d'hélice est introduit, les arbres se calent dans des positions différentes sur les deux paliers d'un même arbre. Cette dissymétrie augmente à mesure que l'angle d'hélice augmente, mais demeure quelle que soit la vitesse. Elle est beaucoup plus marquée sur les paliers d'arbre PV à cause du moment de basculement plus important du fait des dimensions de la roue. On observe nettement sur la figure 4.7.a qu'augmenter  $\beta_b$  tend à décaler les positions d'équilibre dans les paliers PV dans des directions quasi-opposées, ce qui accentue le mésalignement  $\kappa$ , figure 4.7.b, qui devient de l'ordre de l'écrasement statique moyen de la denture (environ  $10\mu m$ ) pour les angles d'hélice les plus importants.

L'étude du coefficient dynamique pour diverses valeurs de l'angle d'hélice révèle un certain nombre d'informations. Certaines sont connues, comme le fait qu'augmenter l'angle d'hélice a pour effet de globalement réduire le coefficient dynamique sur toute la plage de fonctionnement, ce qui reste vérifié ici malgré les mésalignements importants causés par le calage des arbres dans les paliers. D'après la figure 4.8, les vitesses critiques correspondant à  $\Omega_1 = 450 \text{ rad/s}$  et  $\Omega_1 = 730 \text{ rad/s}$  en denture droites paraissent particulièrement intéressantes car elles semblent se décaler vers des vitesses supérieures à mesure que l'angle d'hélice augmente, ce qui n'est pas observé pour les autres vitesses critiques. Pour les angles d'hélice les plus élevés, les vitesses critiques ne sont pas très visibles en raison du rapport de recouvrement important : jusqu'à 1,38.



**Fig. 4.8** – Evolution du coefficient dynamique lors d'un balayage en vitesse pour plusieurs valeurs d'angle d'hélice ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

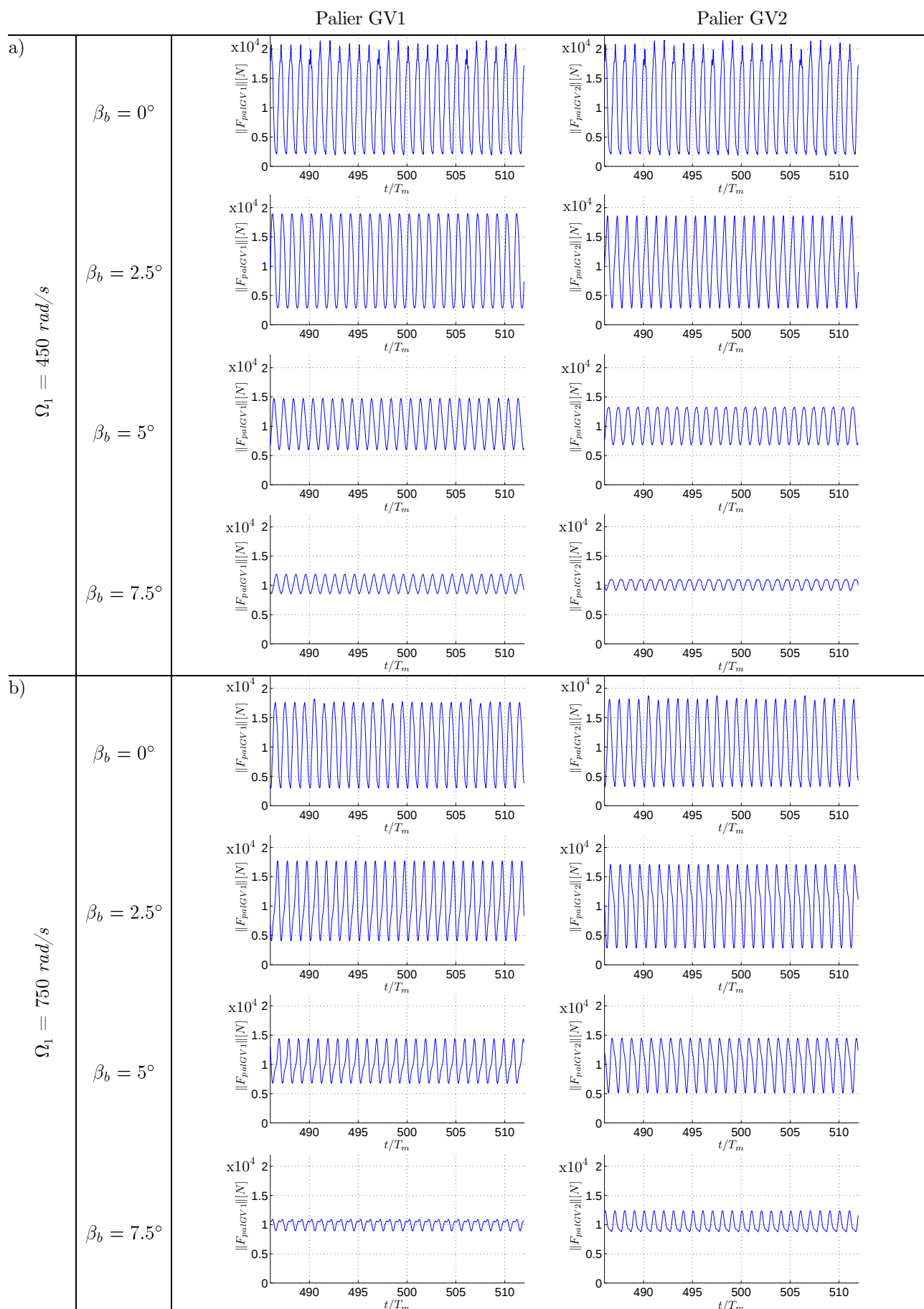
L'étude des réactions aux paliers est également susceptible de révéler des informations intéressantes. La figure 4.9 représente l'évolution du RMS des efforts transmis pas les paliers d'arbre GV (les paliers d'arbre PV étant trop faiblement excités), calculés selon la formule (4.1) sur les 4 dernières périodes d'engrènement et en l'absence de tout effort synchrone.



**Fig. 4.8** – Evolution du coefficient dynamique lors d'un balayage en vitesse pour plusieurs valeurs d'angle d'hélice,  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

La discrétion apportée par la denture hélicoïdale est confirmée (baisse globale du RMS des réactions paliers). En revanche il apparaît que l'introduction d'un angle d'hélice, même faible, rend les réactions paliers dissymétriques, chaque palier ayant sa propre courbe de réponse, avec des vitesses critiques plus ou moins marquées. Par exemple, le palier GV1 tend à garder des niveaux de vibrations plus importants que le palier GV2 à moyenne vitesse ( $\Omega_1 \simeq 500 \text{ rad/s}$ ), alors que le phénomène semble s'inverser sur les vitesses plus élevées ( $\Omega_1 \simeq 750 \text{ rad/s}$ ). Signalons également que pour  $\beta_b \geq 5^\circ$ , les vitesses critiques n'apparaissent plus clairement en dessous de  $350 \text{ rad/s}$ .

Les prévisions faites à partir de la figure 4.8 sont confirmées sur les représentations temporelles des normes des efforts aux vitesses  $\Omega_1 = 450 \text{ rad/s}$  et  $\Omega_1 = 750 \text{ rad/s}$ , figure 4.9. La figure a)  $\Omega_1 = 450 \text{ rad/s}$  montre une réduction globale des amplitudes de vibration avec l'augmentation de l'angle d'hélice, le palier GV1 gardant toujours un crête-à-crête supérieur au palier GV2. Sur la figure b)  $\Omega_1 = 750 \text{ rad/s}$ , c'est bel et bien le phénomène inverse qui se produit alors que le sens de l'hélice n'a pas été modifié. Nous ne réaliserons pas d'étude fréquentielle spécifique dans ce paragraphe mais il est visible sur les courbes temporelles que le contenu fréquentiel change avec l'augmentation de l'angle d'hélice, les courbes (particulièrement à  $\Omega_1 = 750 \text{ rad/s}$ ) étant loin de sinusoides, ce qui est le signe que la première harmonique n'est plus prédominante.


 Fig. 4.9 – Influence de l'angle d'hélice sur les réactions aux paliers, à  $\Omega_1=450$  puis  $750\text{rad/s}$  ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$

Dans ce paragraphe nous avons étudié l'influence de l'angle d'hélice sur le comportement des dentures et sur celui des paliers. Un certain nombre de résultats connus ont été retrouvés, alors que d'autres résultats nous semblent plus novateurs, comme le comportement assez dissymétrique des paliers ou la déviation des vitesses critiques avec l'augmentation de l'angle d'hélice.

Physiquement, les conditions aux limites du modèle n'étaient pas très réalistes puisque les extrémités des arbres étaient laissées libres. Ces conditions ont, au moins, permis d'appréhender certains phénomènes de base. Dans la suite du mémoire, nous allons modifier ces conditions. Nous commencerons par étudier leur influence.

### 4.2.2. Accouplements extérieurs

L'environnement extérieur au réducteur, composé notamment du moteur, du frein et d'accouplements interagit avec le système. Les effets inertiels et de raideur sont pris en compte dans le modèle (chapitre 2). Ces derniers ont été jusqu'ici ignorés alors qu'ils sont susceptibles de modifier le comportement du système. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons aux effets de ces accouplements extérieurs tant sur le fonctionnement des paliers qu'au contact entre les dentures.

#### a. Influence d'un accouplement

Dans un premier temps, nous ne modifions le système que très légèrement en n'introduisant qu'un seul accouplement, supposé isotrope, et modélisé par deux raideurs identiques  $k_c$  dans les directions orthogonales, en bout d'arbre GV, telles que représentées sur la figure 4.10. Comme exposé dans le chapitre 2, ces ressorts ont pour origine au repos la ligne des centres des paliers et agissent donc sans jeu, à la différence des paliers.

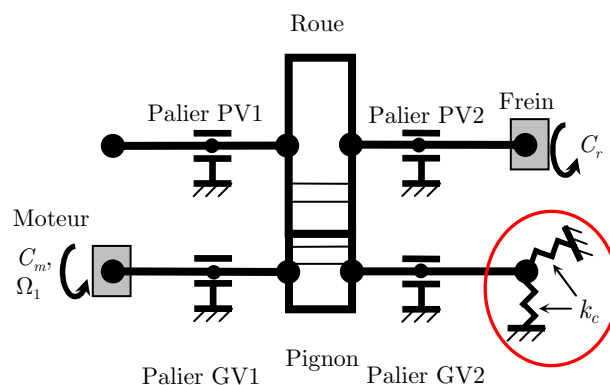
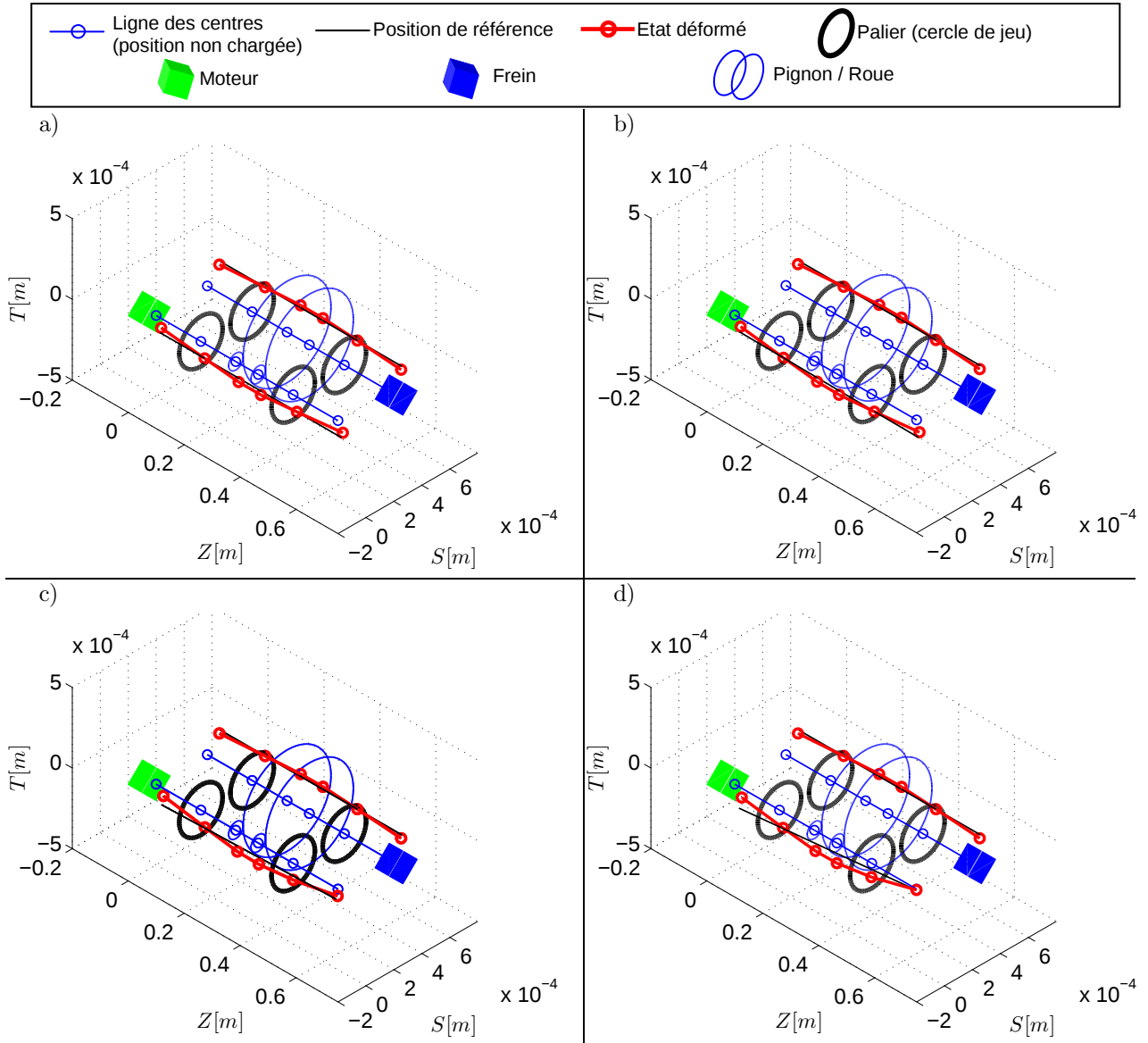


Fig 4.10 – Modèle de réducteur avec un seul accouplement



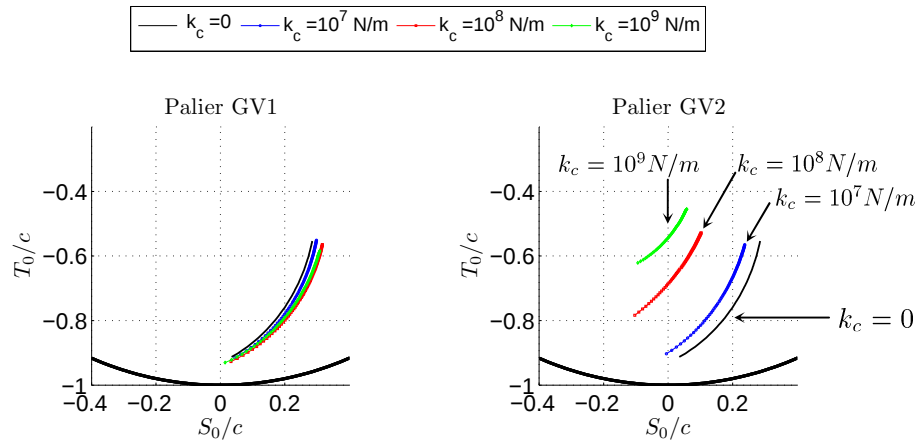
**Fig 4.11** – Déformée statique en flexion du réducteur pour plusieurs raideurs d'accouplement, déplacements exagérés ;  $\Omega_1=200\text{rad/s}$  ;  $C_m=1000\text{N.m}$  ; a)  $k_r=0\text{N/m}$  ; b)  $k_r=10^7\text{N/m}$  ; c)  $k_r=10^8\text{N/m}$  ; d)  $k_r=10^9\text{N/m}$  ;

L'équilibre statique à la vitesse  $\Omega_1 = 200 \text{ rad/s}$  représenté figure 4.11 pour différentes valeurs de la raideur d'accouplement met en évidence le rôle joué par ce dernier. Celui-ci est très faible pour la valeur  $k_r = 10^7 \text{ N/m}$  (4.11.b), l'arbre GV restant dans une position quasi identique à celle sans raideur (4.11.a) mais à mesure que  $k_r$  augmente, le déplacement en bout d'arbre GV tend vers 0 (4.11.d), ce qui désaligne fortement l'arbre.

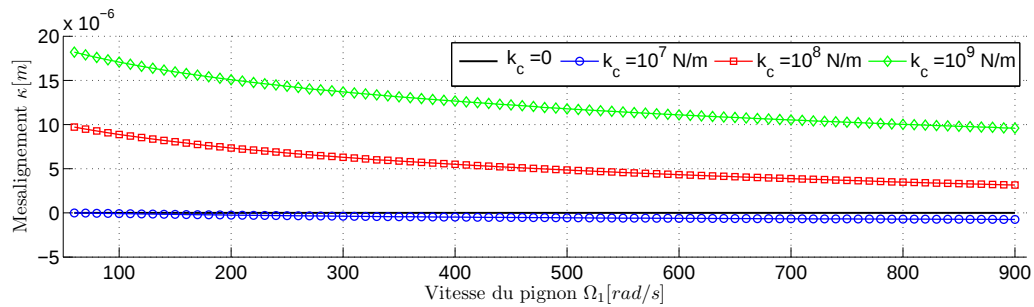
La figure 4.12.a nous montre l'influence de l'accouplement sur les positions de calage de l'arbre GV lors d'un balayage en vitesse. L'effet semble important, particulièrement pour le palier GV2, le plus proche de l'accouplement, qui fonctionne alors à de plus faibles excentricités à mesure que l'accouplement devient plus raide, c'est-à-dire qu'il transmet un effort plus faible. Le palier GV1 est également impacté mais à un degré moindre. La tendance est confirmée en observant la variation de mésalignement avec la vitesse de rotation, figure 4.12.b ; ce

dernier augmentant globalement avec la raideur de l'accouplement, sauf éventuellement pour la raideur la plus faible.

a)



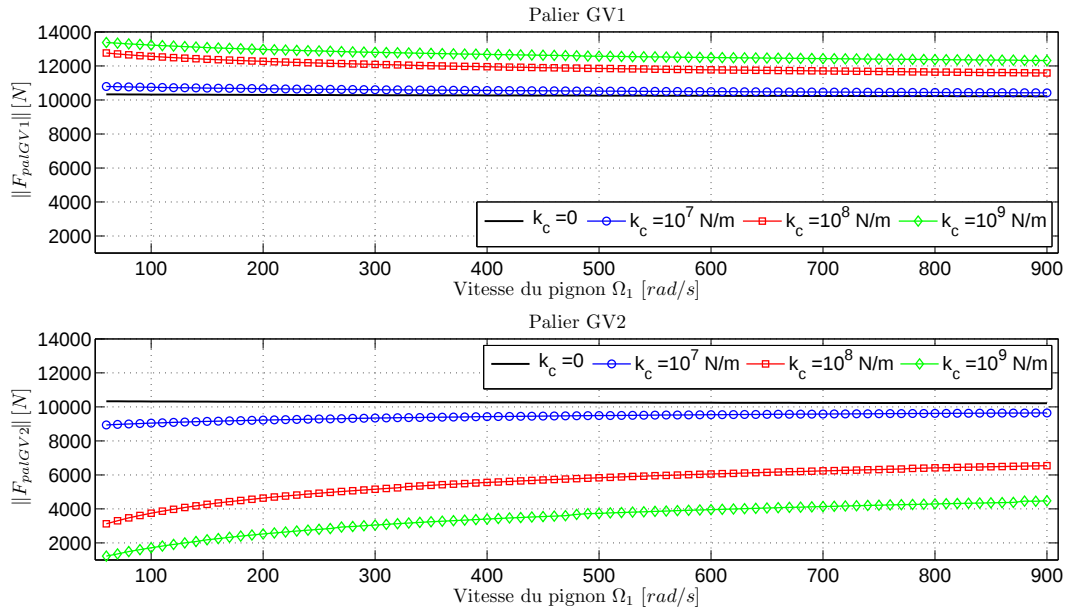
b)



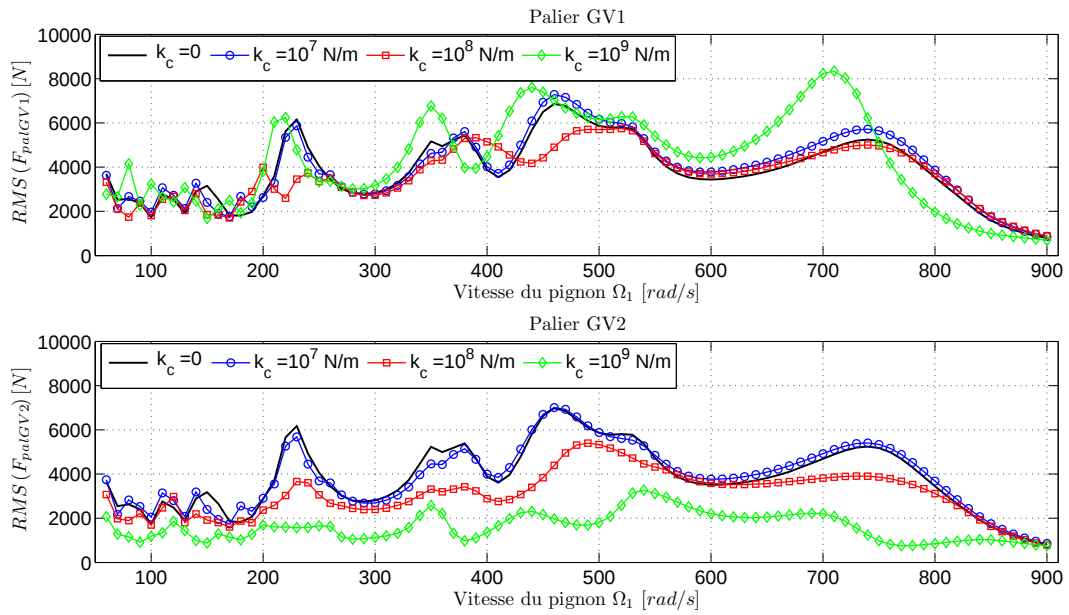
**Fig. 4.12** – Evolution des positions de calage avec la vitesse de rotation ;  $C_m = 1000 \text{ N.m.}$  a) calage dans les paliers, b) mésalignement  $\kappa$

Les réactions aux paliers sont étudiées sur la figure 4.13.a. La figure 4.13.a nous montre la norme de l'effort statique transmis par chaque palier lors du balayage en vitesse. Comme le suggérait la figure 4.11, le palier situé proche de l'accouplement transmet un effort moins important (la direction est également impactée). L'un des points intéressant est le fait que cet effort varie en norme (et direction, non représenté ici) lorsque la vitesse varie, puisque le chargement s'équilibre entre les paliers et l'accouplement et que la position d'équilibre des paliers varie avec la vitesse. La vitesse augmentant, les arbres tendent à se rapprocher des centres des paliers, et l'accouplement travaille moins ; ainsi les efforts paliers tendent vers une valeur limite (par valeur inférieure pour le palier GV2 et supérieure pour le palier GV1) proche de la valeur d'effort en l'absence d'accouplement. Enfin, une observation fine de la figure 4.13.a révèle que, même en l'absence d'accouplement, l'effort palier diminue très légèrement lorsque la vitesse augmente, sur les deux paliers cette fois. Cet effet est dû aux couples de frottement qui sont globalement des fonctions croissantes de la vitesse (à charge fixe en toute rigueur), ce qui diminue ainsi légèrement le chargement à la denture et donc le chargement des paliers.

a)



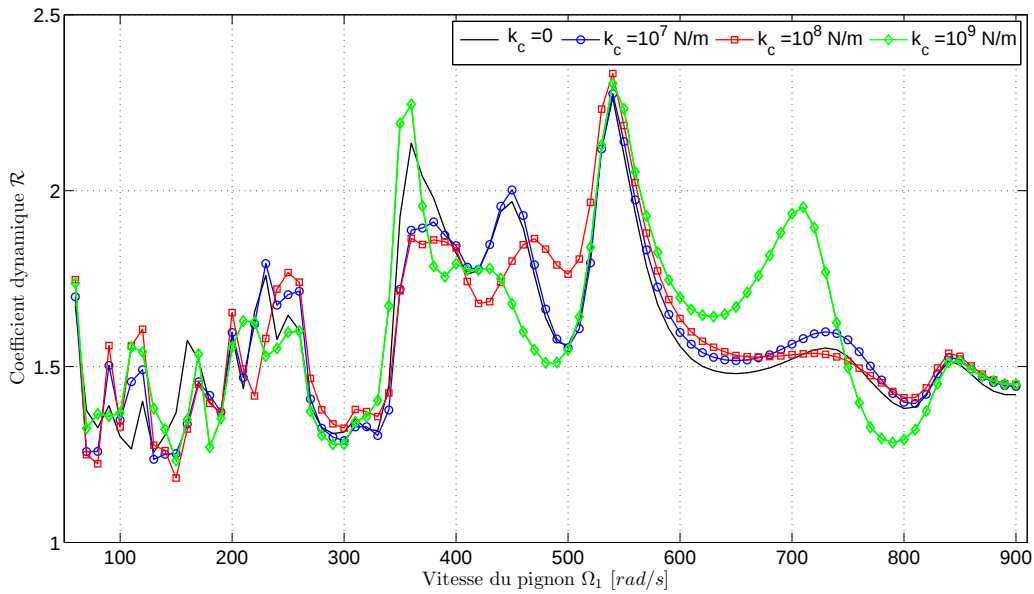
b)



**Fig. 4.13** – Evolution de l'effort palier lors d'un balayage en vitesse pour plusieurs valeurs de raideur d'accouplement ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ . a) norme de l'effort statique, b) RMS de l'effort dynamique

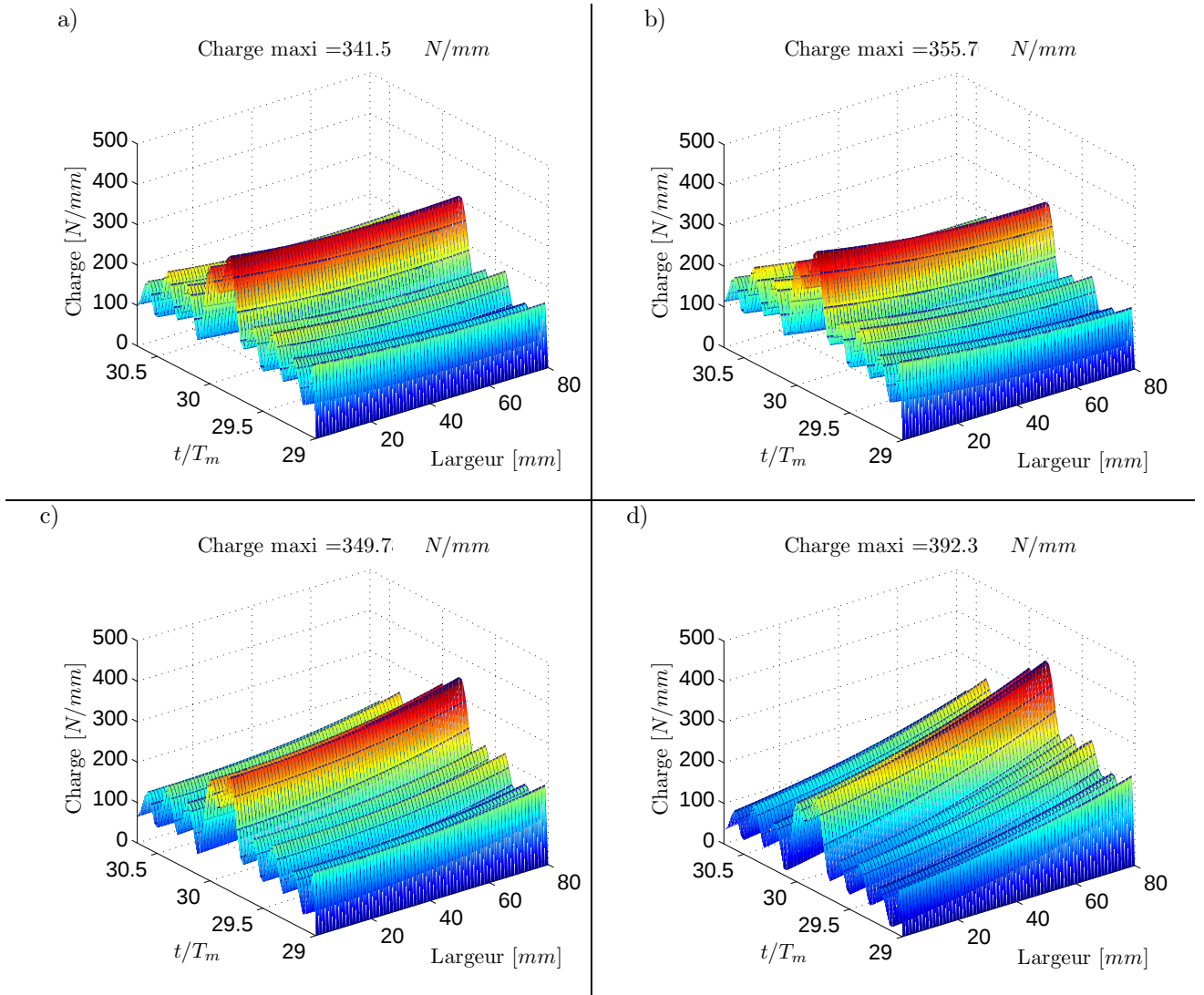
D'un point de vue dynamique, les efforts paliers sont grandement affectés par l'introduction d'un accouplement comme le montre la figure 4.13.b. Si l'introduction d'un accouplement flexible ne modifie que légèrement la réponse des paliers, principalement à basse vitesse, les raideurs les plus élevées modifient profondément les réponses en modifiant les vitesses critiques et leurs niveaux (comme celle présente à  $\Omega_1 = 700 \text{ rad/s}$  avec  $k_r = 10^9 \text{ N/m}$ , sur le palier GV1).

Le chargement à la denture semble, lui aussi, impacté par l'environnement extérieur. La figure 4.14 nous montre que la vitesse critique apparue au palier GV1 à  $\Omega_1=700 \text{ rad/s}$  est également révélée par le coefficient dynamique pour un accouplement raide ( $k_r=10^9 \text{ N/m}$ ). A contrario, la vitesse  $\Omega_1=450 \text{ rad/s}$  est quasiment effacée. Plus globalement, si l'introduction d'un accouplement de faible raideur semble avoir assez peu d'effet sur le comportement dynamique de la denture (la notion de faible raideur étant à mettre en relation avec la charge appliquée qui, ici, est relativement importante), dès lors qu'il devient suffisamment raide, les vitesses critiques du réducteur sont susceptibles d'être modifiées.



**Fig. 4.14** – Evolution du coefficient dynamique lors d'un balayage en vitesse pour plusieurs valeurs de raideur d'accouplement,  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

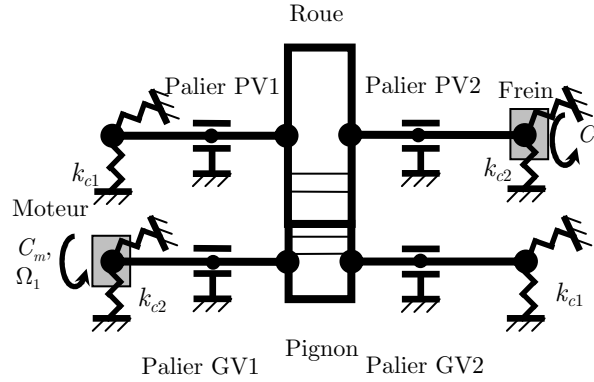
La figure 4.15 présente le chargement linéique sur une ligne de contact donnée, au cours de l'engrènement, exprimé en temps adimensionné  $\frac{t}{T_m}$ , pour différentes valeurs de raideur d'accouplement, à la vitesse  $\Omega_1=200 \text{ rad/s}$ . Bien que le système soit symétrique en l'absence d'accouplement (4.15.a) une légère dyssymétrie apparaît dans le chargement selon la largeur de contact. AJMI [Ajm00] a étudié cet effet et l'impute à la position relative du moteur et du frein, couplée à la déformation des corps de mobile. Un accouplement souple ( $k_r=10^7 \text{ N/m}$ , créant un mésalignement  $\kappa$  négatif, figure 4.12) n'augmente cette dissymétrie que très légèrement, figure 4.15.b. En revanche, un accouplement de raideur moyenne ( $k_r=10^8 \text{ N/m}$ , créant un mésalignement  $\kappa$  positif, figure 4.12) a pour effet de faire porter le chargement du côté opposé au moteur. Cet effet est encore plus net pour un accouplement raide,  $k_r=10^9 \text{ N/m}$ , figure 4.15.d ; et apparaîtrait encore plus fortement si le réducteur était étudié sous une charge plus faible. Cette interaction entre le réducteur et son environnement n'avait, à notre connaissance, jamais été mise en évidence par la simulation bien que l'influence d'accouplements extérieurs soit un problème de premier ordre pour les concepteurs de réducteurs chez DCNS.



**Fig. 4.15** – Influence d'un accouplement extérieur sur le chargement d'une ligne de contact au cours de l'engrènement ;  $\Omega_1=200$  rad/s ;  $C_m = 1000$  N.m. a)  $k_r = 0$  N/m, b)  $k_r = 10^7$  N/m, c)  $k_r = 10^8$  N/m, d)  $k_r = 10^9$  N/m

## b. Introduction de conditions aux limites

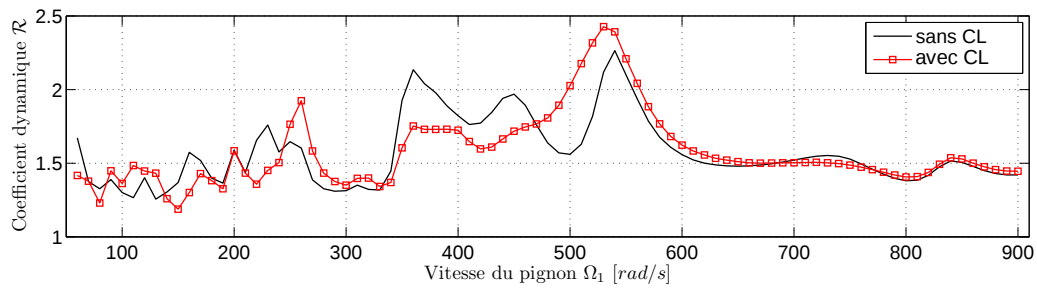
Après avoir présenté l'influence d'un accouplement sur l'une des quatre extrémités du réducteur, nous pouvons étudier ce dernier avec des conditions aux limites plus réalistes. En effet, un système physique ne possède jamais d'arbres laissés complètement libres. L'accouplement avec le moteur, le frein ou tout autre dispositif, de mesure par exemple, est modélisé comme dans le paragraphe précédent. Le système a alors été simulé en introduisant des accouplements aux quatre extrémités, tel que représenté sur la figure 4.16, avec des accouplements plus raides au niveau du moteur et du frein ( $k_{c1} = 2.10^7$  N/m ;  $k_{c2} = 5.10^7$  N/m avec les notations de la figure 4.16). Chaque arbre est donc maintenu par deux paliers hydrodynamiques et deux liaisons élastiques. Dans ce paragraphe, nous ne nous intéresserons qu'au cas des engrenages droits sans effort de type balourd.



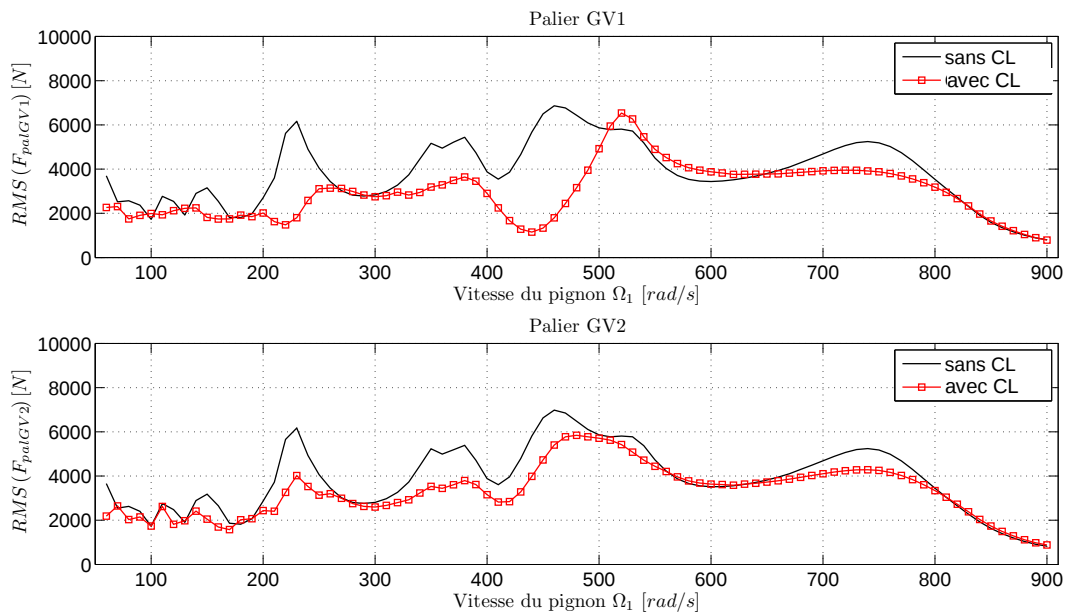
**Fig 4.16** – Modèle de réducteur avec quatre accouplements

Un balayage en vitesse sous un couple constant a été réalisé. La figure 4.17 nous montre l'évolution du coefficient dynamique (a) et des RMS des efforts paliers d'arbre GV (b), les comparant aux mêmes grandeurs avec les premières conditions aux limites, dites « libres ».

a)



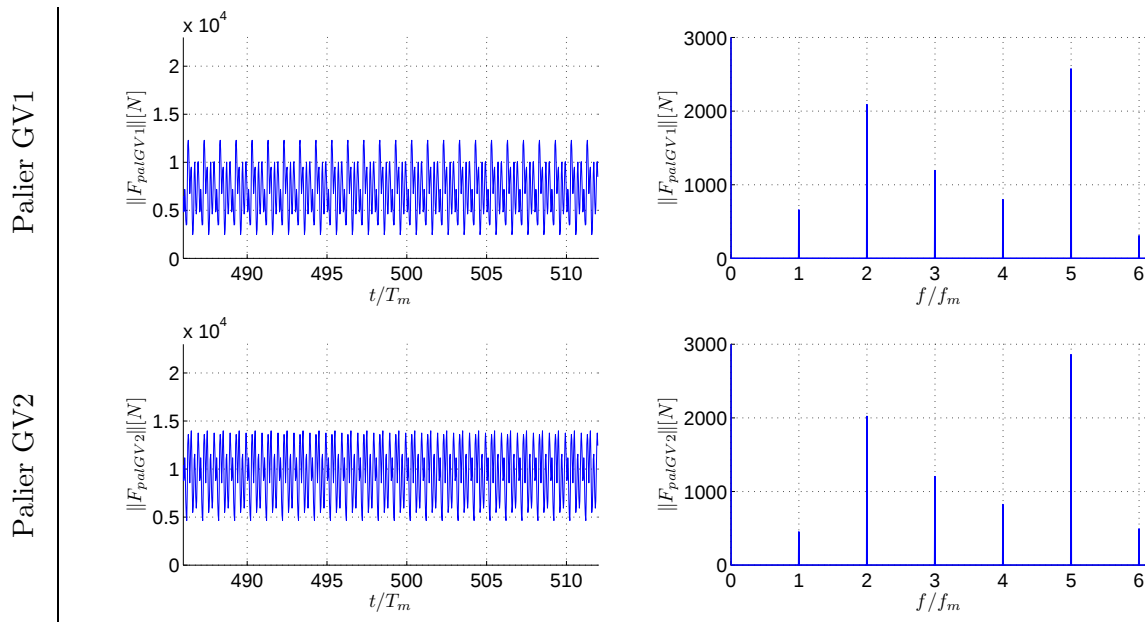
b)



**Fig. 4.17** – Comportement dynamique des dentures et des paliers en vitesse pour plusieurs valeurs de raideur d'accouplement ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$  ; a) coefficient dynamique ; b) RMS des efforts aux paliers d'arbre GV

On constate une modification sensible du comportement dynamique de la denture avec l'introduction d'accouplements de raideurs modérées. La denture présentait une première vitesse critique autour des  $\Omega_1=230 \text{ rad/s}$ , à peine marquée. Celle-ci se retrouve amplifiée et déplacée proche de  $\Omega_1=260 \text{ rad/s}$ . Les vitesses proches de  $\Omega_1=350 \text{ rad/s}$  et  $\Omega_1=450 \text{ rad/s}$  apparaissent beaucoup moins nettement alors que la vitesse principale  $\Omega_1=550 \text{ rad/s}$  n'est presque pas modifiée, légèrement accentuée.

Les paliers sont également fortement impactés, signe que les vibrations transmises à la structure support du réducteur sont modifiées. Ces derniers avaient des comportements strictement identiques dans le cas académique sans conditions limites. Ils présentent désormais des réponses tout à fait distinctes et il est notamment intéressant de remarquer que la vitesse  $\Omega_1=230 \text{ rad/s}$  pour le palier GV2 possède un niveau de vibration bien supérieur à la même vitesse sur le palier GV1. La figure 4.18 représente, à  $\Omega_1=200 \text{ rad/s}$  (soit hors de toute vitesse critique potentielle), les normes des réactions aux paliers d'arbre GV sous forme temporelle et spectrale. Contrairement au cas avec conditions aux limites « libres », beaucoup plus de fréquences sont présentes, parfois avec des niveaux différents entre les deux paliers (particulièrement les première, cinquième et sixième harmoniques). Les représentations temporelles sur un tour de pignon montrent un niveau moyen différent entre les deux réactions paliers, dans la continuité des résultats de la figure 4.13.



**Fig. 4.18** – Représentations temporelle et fréquentielle des réactions paliers d'arbre GV en présence de conditions limites ;  $\Omega_1=200 \text{ rad/s}$  ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$

A titre d'illustration, on pourra s'intéresser aux équilibres statiques à vitesse fixe  $\Omega_1=200 \text{ rad/s}$ , sous  $C_m=1000 \text{ N.m}$ . La figure 4.19 représente les positions d'équilibre statique, avec position de référence, projetées dans les 3 plans.

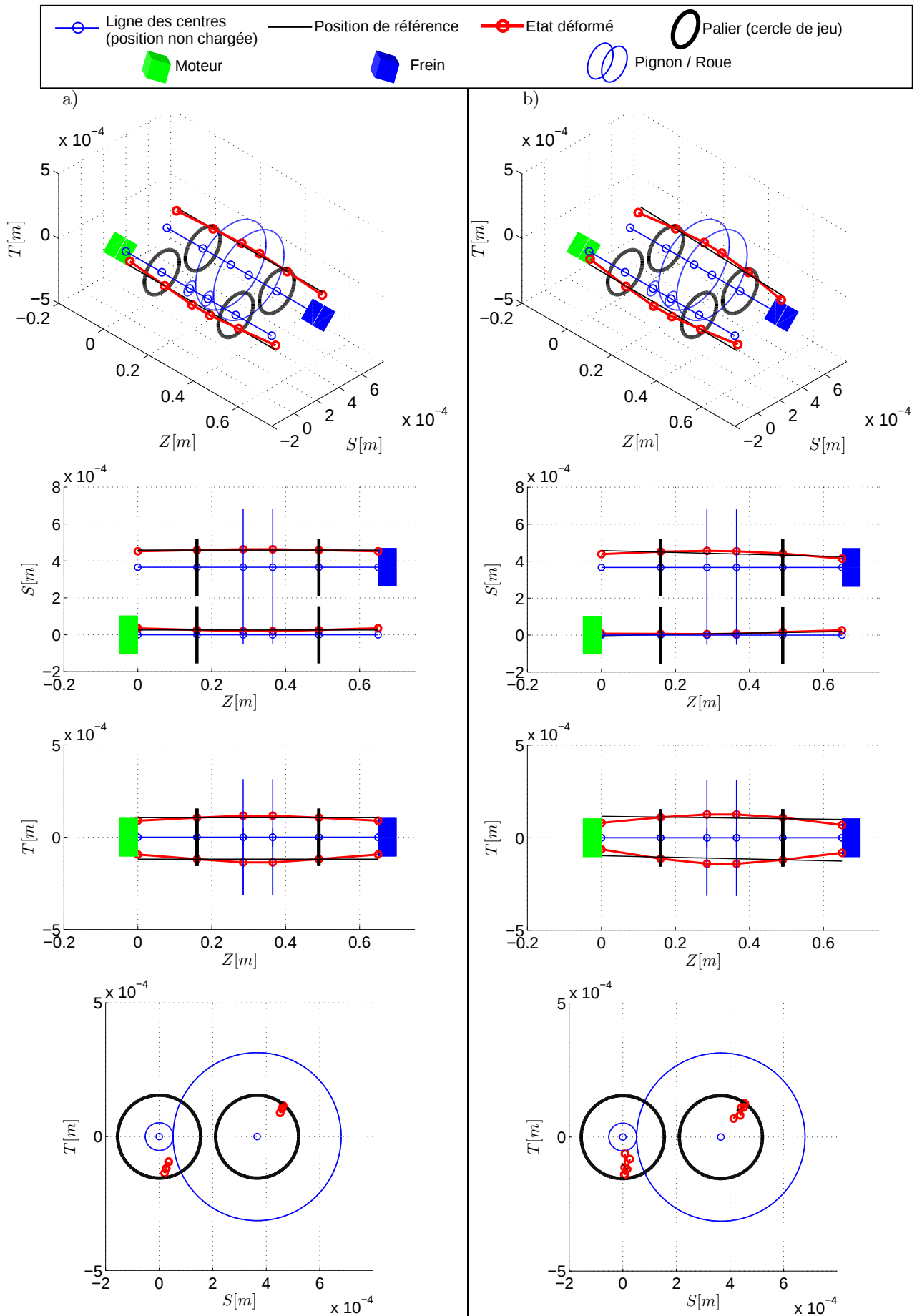


Fig. 4.19 – Déformée statique en flexion  $\Omega_1=200$  rad/s,  $C_m = 1000$  N.m a) sans CL, b) avec CL

Les dissymétries des lignes d'arbres apparaissent assez nettement et semblent bien dues à la présence d'un accouplement (même peu raide comme ici), sur les deux arbres. Il apparaît également que l'introduction d'accouplements tend à faire se déformer les lignes d'arbre dans des plans sensiblement différents, et avec des amplitudes plus importantes

### 4.2.3. Caractéristiques des paliers : le bassin d'alimentation

Nous proposons ici d'étudier l'influence directe des paliers sur le comportement du réducteur. Nous nous intéressons alors au même réducteur que dans les paragraphes précédents avec des dentures hélicoïdales  $\beta_b = 12.5^\circ$ . L'étude consiste à modifier la position du bassin d'alimentation en lubrifiant, à pression nulle, successivement sur le palier GV1 puis GV2. Nous repérerons le bassin par l'angle  $\gamma_i$  (pour le palier  $i$ ) que forme son bord gauche par rapport à la verticale, tel que représenté sur la figure 4.20. La « largeur » du bassin est fixe ( $30^\circ$ ) ; dans cette zone, la pression du fluide est imposée à 0.

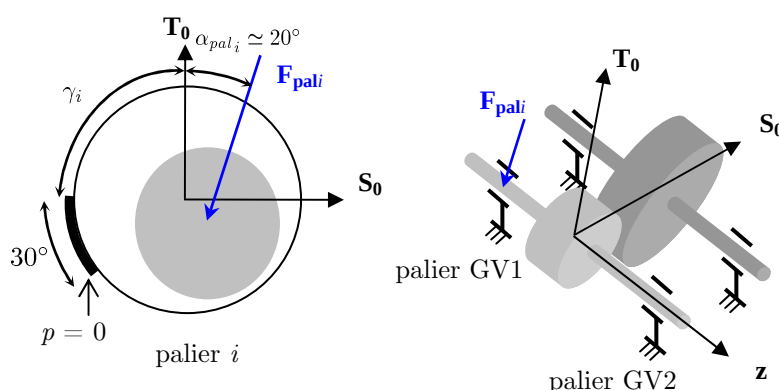
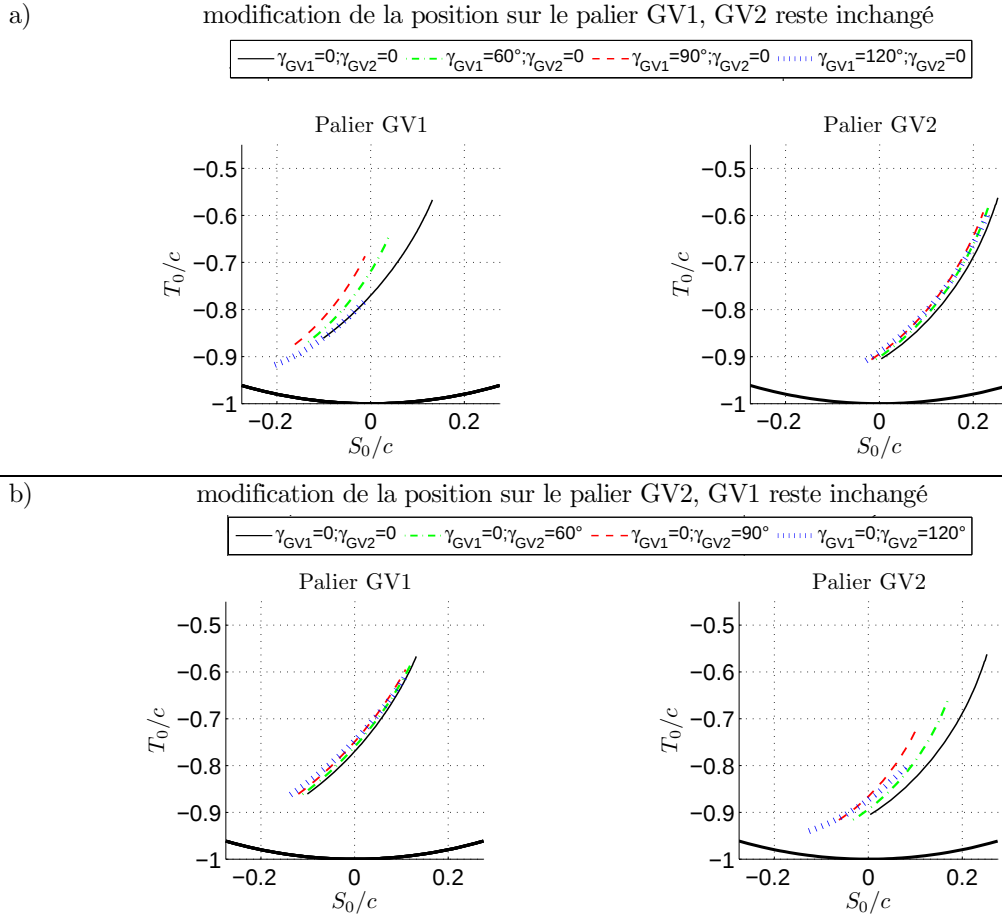


Fig. 4.20 – Paramétrage de la position du bassin d'alimentation d'un palier

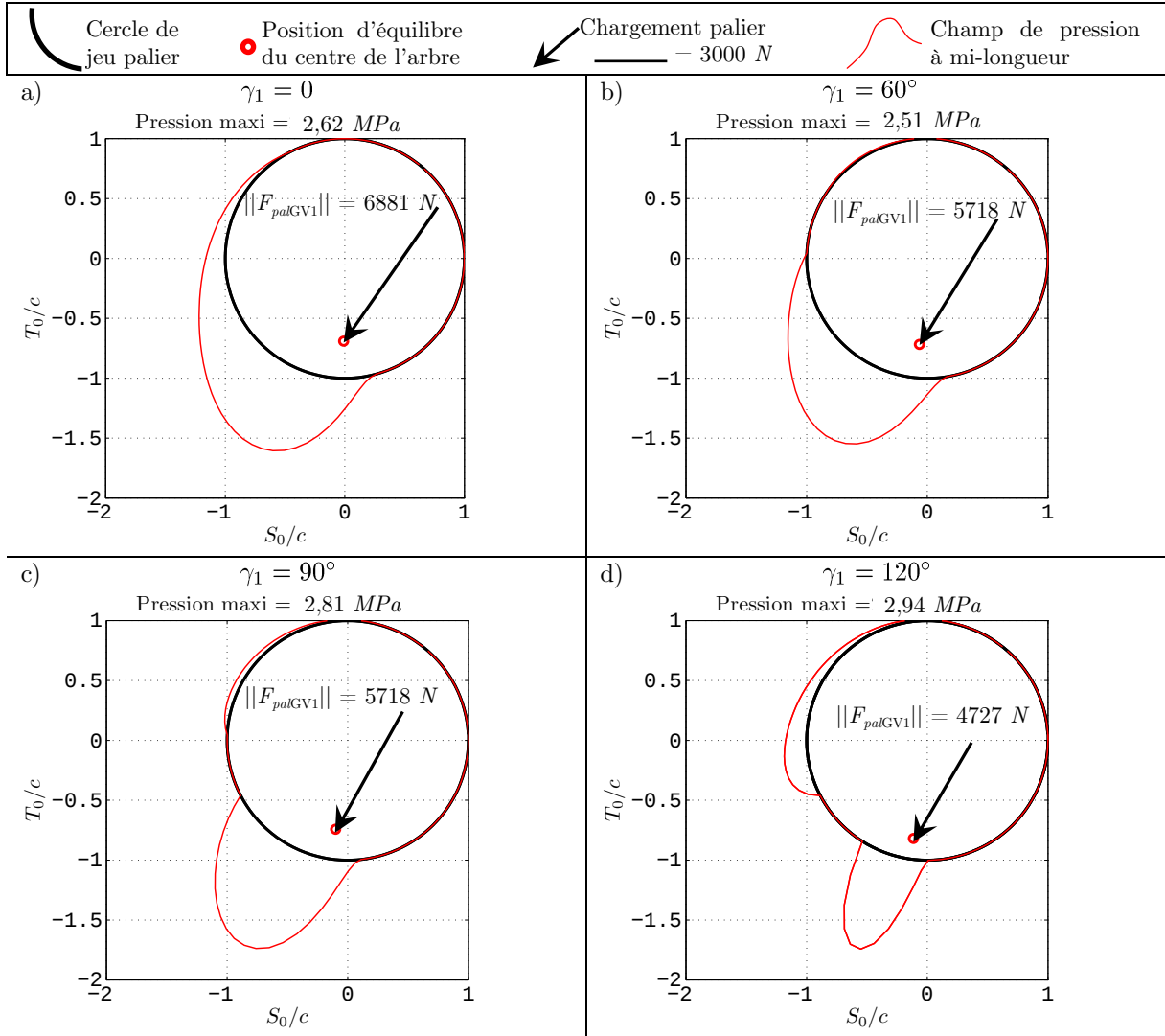
L'évolution des positions d'équilibre de l'arbre dans les paliers d'arbre GV lors d'un balayage en vitesse de rotation valeurs pour différentes positions de bassin d'alimentation est présenté sur la figure 4.21.

Nous retrouvons un résultat connu qui est que le fait de rapprocher la zone d'alimentation de la zone active du palier a tendance à augmenter l'excentricité de calage. Comme pour l'introduction d'accouplement élastique, la position du bassin d'alimentation tend à modifier l'excentricité, et donc le chargement moyen du palier. Ce résultat est considéré comme acquis et ne sera pas illustré d'avantage, puisqu'un phénomène très proche a déjà été présenté dans le paragraphe précédent, et qu'il demeure somme toute logique que le fait de modifier les caractéristiques des paliers ait une influence sur leur comportement, aussi bien statique que dynamique.



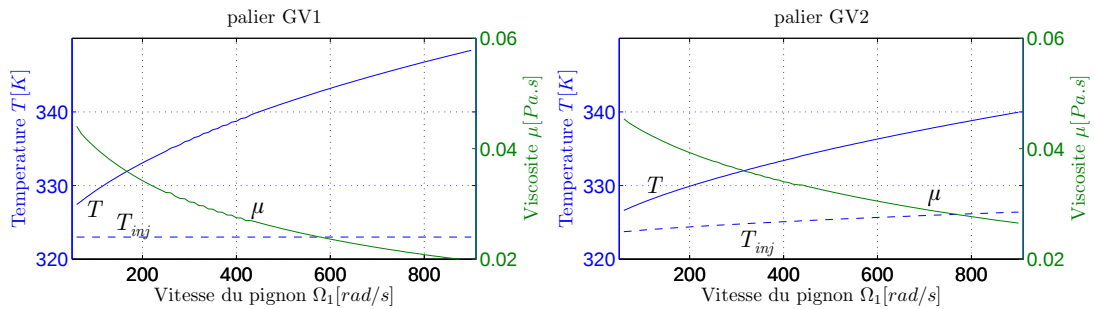
**Fig. 4.21** – Evolution, lors d'un balayage en vitesse, de la position de calage de l'arbre GV dans les paliers pour plusieurs positions de basse d'alimentation,  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ , a) bassin variable sur palier GV1 uniquement, b) sur palier GV2 uniquement

A ce sujet, les champs de pression adimensionnés sur la circonférence du palier GV1 (représentés à mi-longueur, c'est-à-dire sur leur plan de symétrie) sont présentés pour différentes positions du bassin d'alimentation, à la vitesse  $\Omega_1 = 200 \text{ rad/s}$ , sous  $C_m = 1000 \text{ N.m}$  sur la figure 4.22. La position d'équilibre du centre de l'arbre dans ces conditions est également représentée, tout comme l'effort extérieur appliqué au palier (orienté dans le repère  $(\mathbf{S}_0; \mathbf{T}_0; \mathbf{z})$  et à l'échelle selon la légende). On observe nettement la position du bassin d'alimentation correspondant à la zone de pression nulle (dont le choix, qui peut être discutable, a principalement été dicté par un souci de simplicité). Contre toute attente, on peut observer que le fait de rapprocher le bassin de la direction de charge n'augmente quasiment pas la valeur du maximum de pression. L'étude des réactions nous montre que les réactions ont en fait diminué de près de 35% entre le cas  $\gamma_1 = 0$  et le cas  $\gamma_1 = 120^\circ$ . Relativement à la charge transmise, le maximum de pression a bien tendance à augmenter pour une zone d'alimentation mal placée. La variation de la charge, sous l'effet de la variation de position d'équilibre et de la répartition des efforts entre paliers et accouplements, semble en revanche être un effet notable. Signalons aussi le fait qu'une rainure d'alimentation mal placée diminue la réaction palier et a donc tendance à augmenter le risque d'instabilité de palier.

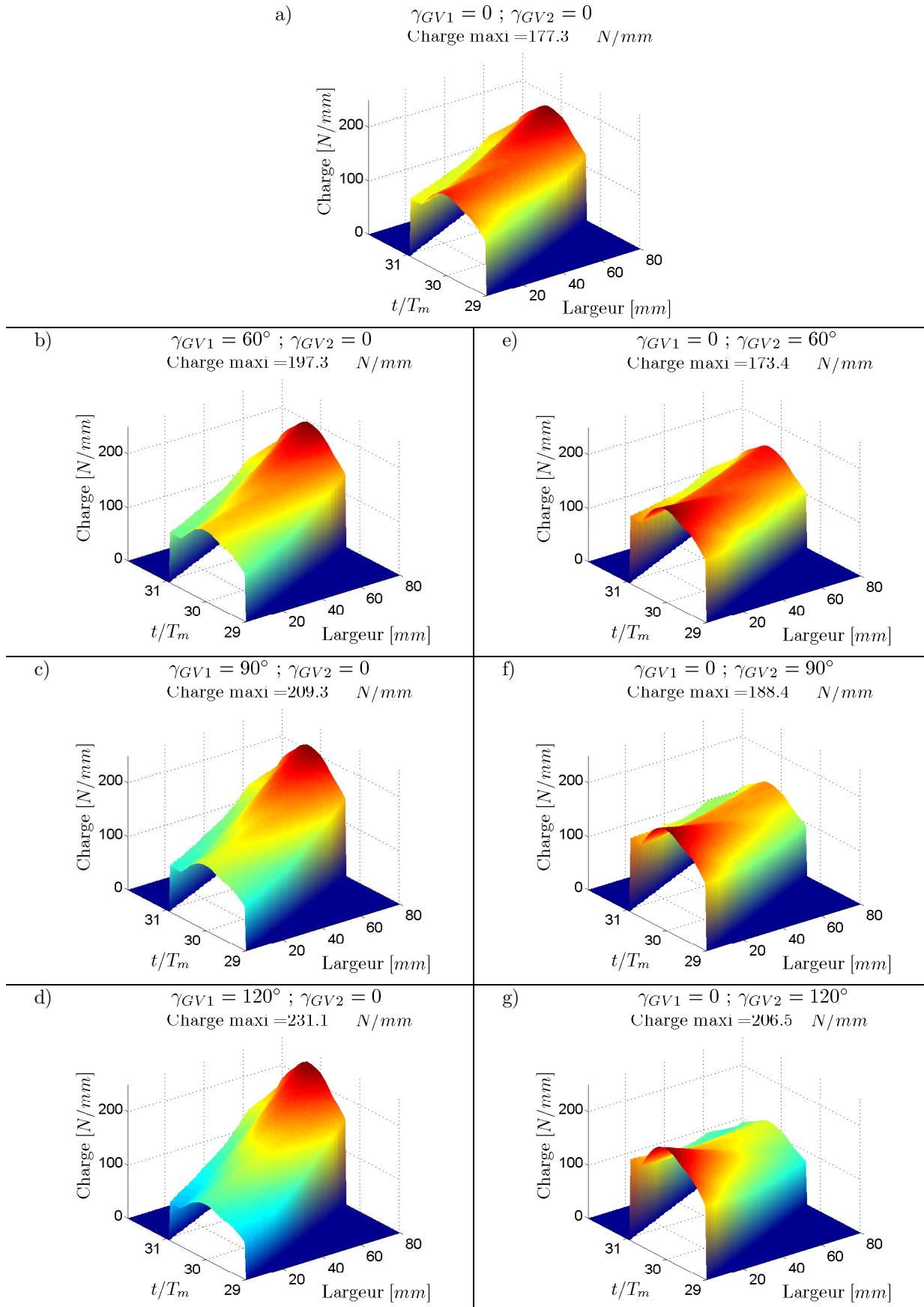


**Fig. 4.22** – Influence de la position d'alimentation en lubrifiant sur le champ de pression (pression adimensionnée) et la charge transmise par le palier GV1 ;  $\Omega_1 = 200 \text{ rad/s}$  ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$

Les températures de fonctionnement et d'injection du lubrifiant des paliers d'arbre GV sont présentées figure 4.23 pour un balayage en vitesse dans la configuration  $\gamma_{GV1} = 90^\circ$  ;  $\gamma_{GV2} = 0$ . On observe globalement que le palier GV1 s'échauffe d'avantage alors que sa température d'injection reste constante et plus basse. Ceci est causé par l'absence de recirculation de fluide dans ce cas, car on trouve un débit négatif au bord du palier, signifiant que le fluide remonte en sens inverse, et est responsable de la reformation du film observée sur les figures 4.22.c et d.



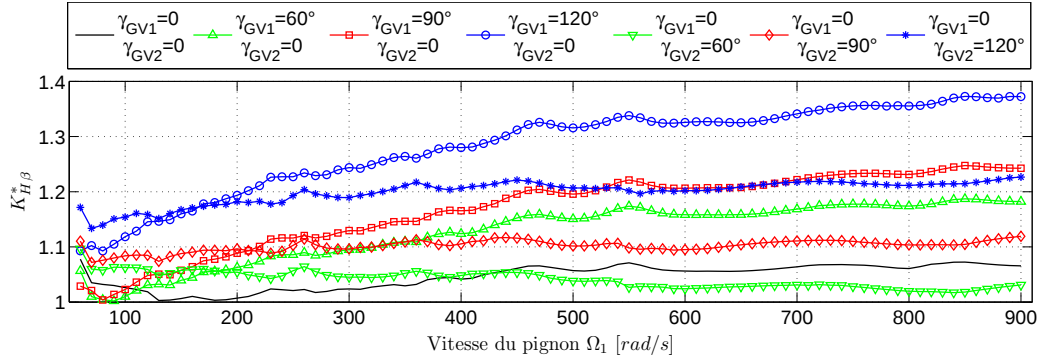
**Fig. 4.23** – Evolution de la température moyenne ( $T$ ), de la température d'injection ( $T_{inj}$ ) et de la viscosité ( $\mu$ ) du lubrifiant des paliers d'arbre GV, dans la configuration  $\gamma_{GV1} = 90^\circ$  ;  $\gamma_{GV2} = 0$  ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .



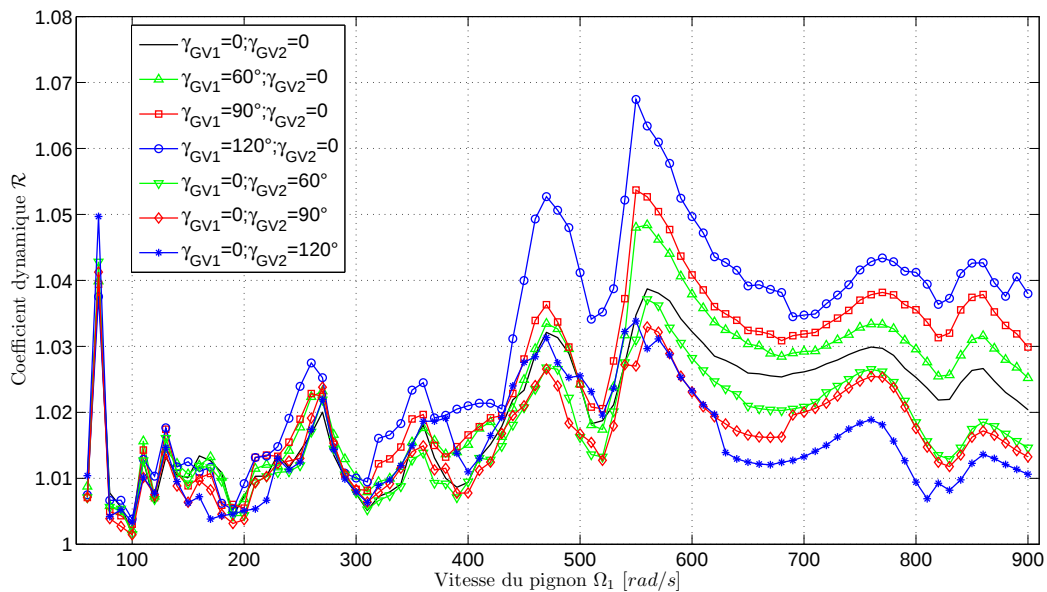
**Fig. 4.24** – Chargement linéique sur une ligne de contact pour différentes positions de bassin ;  $\Omega_1=200\text{rad/s}$  ;  
 $C_m=1000\text{N.m}$

L'étude du chargement à la denture peut également se révéler intéressante. La figure 4.23 montre comment, dans des conditions données ( $\Omega_1=200 \text{ rad/s}$ ,  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ ) et par rapport au cas où les zones d'alimentation n'interfèrent pas avec les chargements (fig. 4.23.a), la position des zones d'alimentation successivement sur le palier GV1 (fig. 4.32.b-d) puis GV2 (fig. 4.32.e-g) modifie le chargement linéique d'un couple de dents. Il apparaît alors qu'un bassin mal placé sur le palier GV1 tend à modifier le chargement en le faisant porter d'un côté de la dent alors que l'effet inverse est présent si le bassin est introduit sur le palier GV2. Cet effet est d'autant plus marqué que le bassin est mal placé ( $\gamma_i$  grand).

Les tendances observées à vitesse fixe sur la figure 4.24, sur confirmées sur la représentation du coefficient de répartition de chargement  $K_{H\beta}^*$  lors d'un balayage en vitesse figure 4.25. Si globalement, il tend à légèrement augmenter avec la vitesse du pignon, il semble que le fait de mal placer un bassin ne fasse qu'altérer la répartition de chargement à la denture (dans ce cas précis), avec un effet croissant lorsque  $\gamma_i$ , augmente indépendamment du palier considéré, même si l'effet est plus marqué lorsque le palier GV1 est concerné.



**Fig. 4.25** – Evolution du coefficient de répartition du chargement lors d'un balayage en vitesse pour plusieurs positions des bassins d'alimentation sur les paliers d'arbre GV ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .



**Fig. 4.26** – Evolution du coefficient dynamique lors d'un balayage en vitesse pour plusieurs positions des bassins d'alimentation sur les paliers d'arbre GV ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

En ce qui concerne le coefficient dynamique, figure 4.26, les tendances sont proches, quelles que soient les positions de bassin, les vitesses critiques ne sont pas modifiées, seuls les niveaux sont globalement impactés, d'une façon plus importante à raison que  $\Omega_1$  augmente.

## 4.3. Influence du modèle de palier

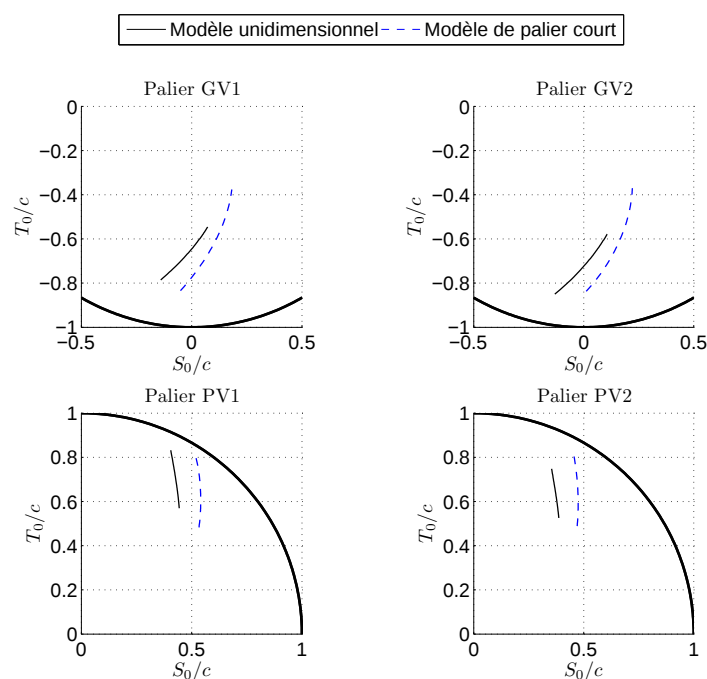
Le modèle de simulation du comportement de réducteurs à engrenages sur paliers fluides présenté dans le chapitre 2 peut être associé à divers modèles de paliers. Nous avons étudié l'influence du modèle de palier retenu sur les résultats. Pour ce faire, nous reprendrons le réducteur étudié en 4.2.2.b, c'est-à-dire avec les conditions aux limites dites réalistes. Le réducteur sera d'abord étudié, à l'aide d'un modèle de palier court, selon une théorie linéaire, dont les résultats seront comparés au modèle avec les paliers issus de la théorie unidimensionnelle de RHODE et LI [Rho80] avec prise en compte d'effets thermiques. Ensuite, l'influence de la non linéarité du modèle de palier sera présentée, en exposant les résultats de calculs réalisés avec le modèle de paliers unidimensionnel selon la théorie non linéaire.

### 4.3.1. Palier court / modèle unidimensionnel, cas linéaire

De nombreux ouvrages, dont [Fre98], présentent les différences de comportement obtenues avec différents modèles de paliers. De manière générale, l'introduction d'hypothèses supplémentaires induit une erreur sur le champ de pression (plus ou moins grande selon les hypothèses, les caractéristiques du palier et les conditions de fonctionnement), qui se répercute sur le calcul des réactions et également sur le calcul d'une position d'équilibre sous chargement imposé. Cette section a pour objectif d'illustrer l'influence d'une modification du modèle de palier sur les prédictions de comportement à l'échelle du système. Ces dernières concernent aussi bien les paliers (positions d'équilibre, réactions...) que le contact aux dentures.

Dans toute cette section, les simulations menées avec le modèle de palier court ont été réalisées en considérant une valeur de viscosité  $\mu = 0.05 Pa.s$  correspondant sensiblement à la viscosité moyenne observée dans la plage de fonctionnement pour l'huile considérée. Aucun effort synchrone de type « balourd » n'est introduit ici.

La figure 4.27 nous montre l'évolution de la position de calage des arbres dans les quatre paliers à l'équilibre statique. Les effets combinés du modèle de palier et de l'échauffement (variation de la viscosité du lubrifiant avec la vitesse de rotation) apparaissent clairement, avec des positions d'arbre qui décrivent un arc plus courbé et un intervalle d'excentricités plus vaste avec le modèle de palier court (principalement visible sur l'arbre GV). Le modèle de palier unidimensionnel, plus proche de la réalité sur ce type de paliers ( $L/D = 2/3$ ) fonctionne à des excentricités plus importantes et décrit un arc plus restreint étant donné que la viscosité du lubrifiant tend à diminuer sous l'effet de l'augmentation de la température avec la vitesse de rotation (figure 4.6 sur un cas proche).

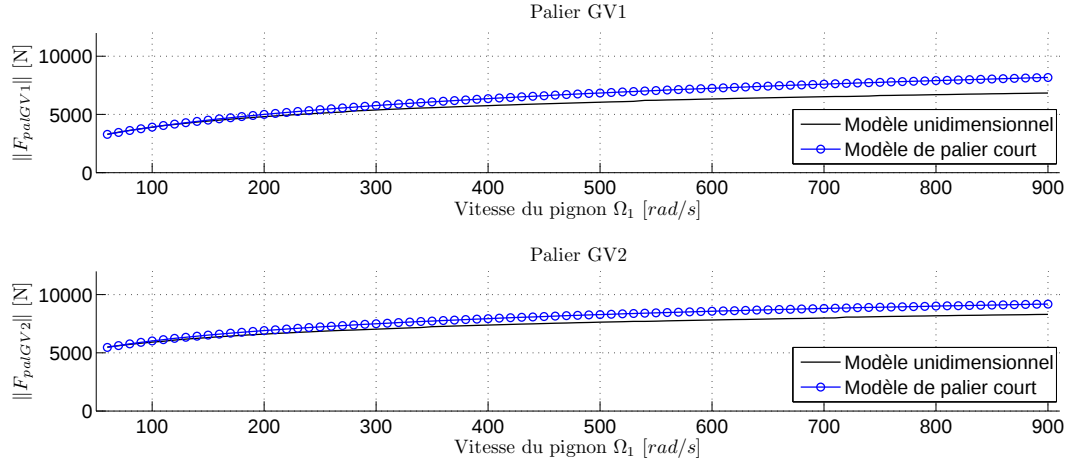


**Fig. 4. 27** – Déformée statique en flexion du réducteur avec denture de type double chevron,  $\Omega_1=350$  rad/s,  $C_m = 1000$  N.m

Les différences observées au niveau des positions de calage sont également à mettre en relation avec l'effort supporté par les paliers. Les valeurs des normes de ces efforts à l'équilibre statique sont portées sur la figure 4.28 lors d'un balayage en vitesse (paliers d'arbre GV uniquement). Outre le fait que, pour un modèle de palier donné, les efforts varient en fonction de la vitesse (résultat déjà exposé), il est intéressant de remarquer que la modification du modèle de palier a également pour effet de perturber le chargement statique des paliers, le modèle de palier court semblant légèrement surestimer le chargement dans notre cas.

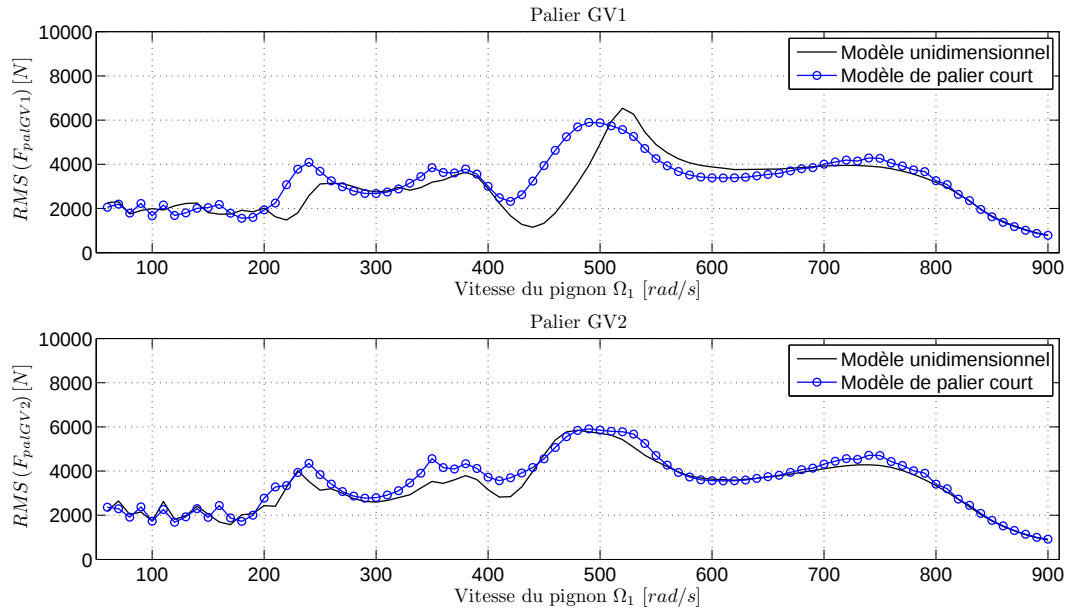
Ce phénomène s'explique par le fait que la modification du modèle de palier sous une charge donnée entraîne une modification de l'excentricité de fonctionnement, qui elle-même conduit à une modification de la répartition des efforts entre les accouplements et les paliers en raison de la non linéarité du problème. Cette dépendance du modèle de palier nous invite à la plus grande prudence lors des phases d'exploitation de résultats.

Les résultats issus de l'équilibre statique portés sur la figure 4.28 sont complétés par les résultats de simulation dynamique, avec le tracé des valeurs RMS des efforts paliers d'arbre GV obtenus avec les deux modèles de palier lors d'un balayage en vitesse, figure 4.29.



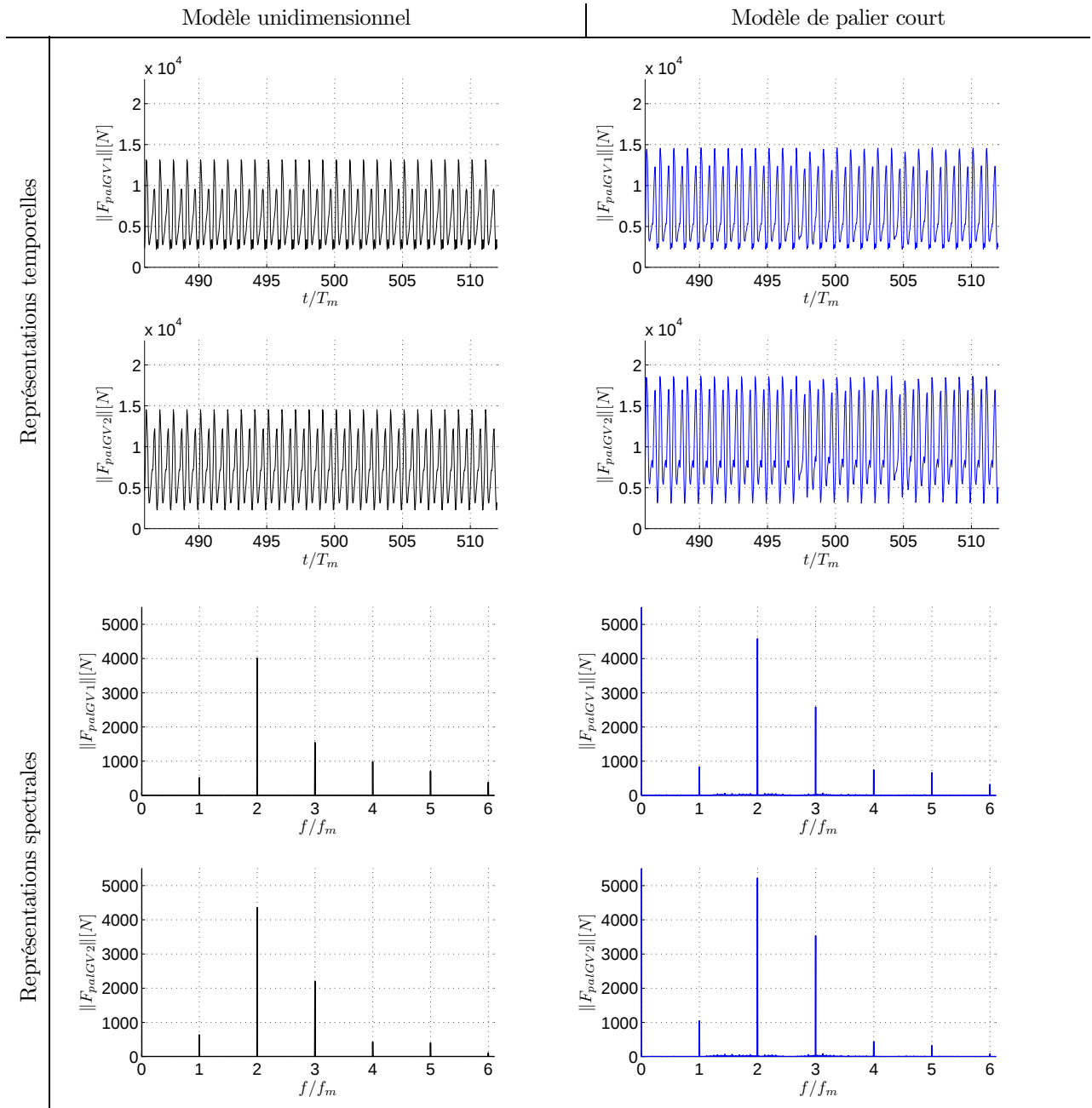
**Fig. 4. 28** – Influence du modèle de palier sur l'effort statique supporté par les paliers d'arbre GV,  $C_m = 1000$  N.m

Les différences de comportement entre les deux paliers d'un même arbre avaient déjà été étudiées mais la figure 4.29 montre que le modèle de palier a également un effet notable, principalement dans l'intervalle  $[300 ; 600 \text{ rad/s}]$ . Cet effet semble justifié par le fait que, quelle que soit la vitesse, les paliers ne fonctionnent pas aux mêmes excentricités, comme l'a montré la figure 4.27, et que les modifications de viscosité dues aux effets thermiques sont ignorées dans le cas du palier court.



**Fig. 4. 29** – Influence du modèle de palier sur le RMS des efforts paliers d'arbre GV,  $C_m = 1000$  N.m

Les différences de comportement des paliers sont illustrées figure 4.30 sur les paliers d'arbre GV à la vitesse fixe  $\Omega_1 = 350 \text{ rad/s}$  (correspondant, d'après la figure 4.29, à une vitesse où les différences entre les deux modèles sont notables mais pas fondamentales).



**Fig. 4.30** – Influence du modèle de palier sur le RMS les efforts paliers d'arbre GV (représentations temporelles et fréquentielles),  $\Omega_1 = 350 \text{ rad/s}$ ,  $C_m = 1000 \text{ N.m}$

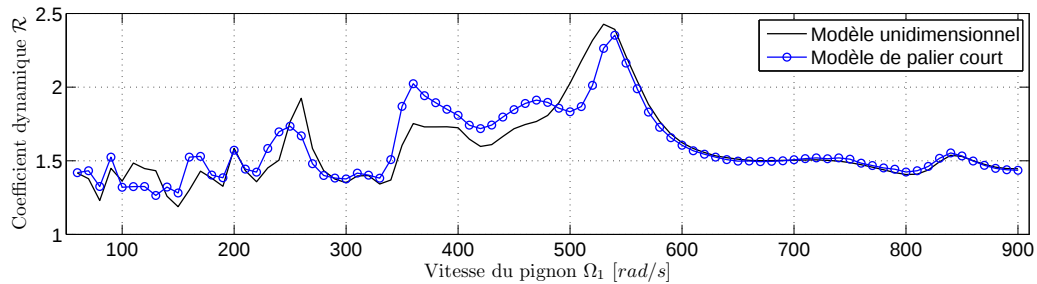
Les représentations temporelles montrent clairement que les valeurs moyennes des efforts au cours du temps sont supérieures pour les résultats utilisant le modèle de palier court. Il en va de même pour les valeurs crête-à-crête, ce qui confirme les informations données par les RMS lors du balayage en vitesse, à savoir une différence encore plus importante sur le palier GV2.

Les représentations fréquentielles, elles, permettent de quantifier ces différences, harmonique par harmonique. En absolu, les différences sont les plus importantes sur la seconde harmonique, qui est également celle qui ressort le plus nettement. En revanche, relativement à

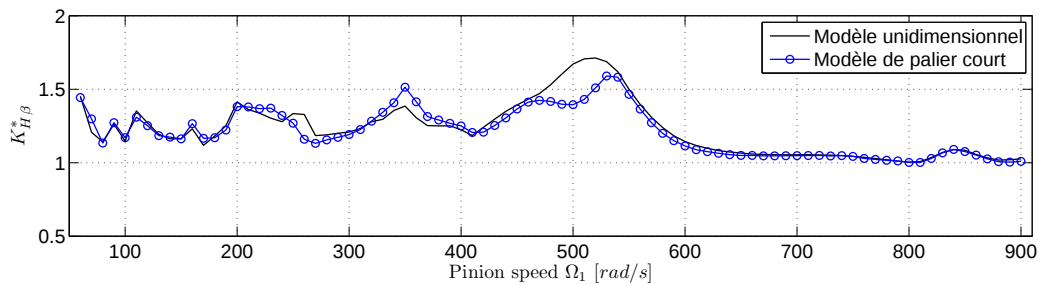
leur niveau, l'harmonique 3 est très affectée par la modification du modèle de paliers avec parfois plus de 50% de différence sur l'amplitude.

Concernant le chargement à la denture, la figure 4.31 permet de l'étudier dans le cadre d'un balayage en vitesse. Des différences sont, là encore, présentes ; aussi bien en ce qui concerne l'amplification du chargement que la répartition de ce dernier. Si les vitesses critiques ne semblent pas modifiées par le changement du modèle de palier, le chargement semble, lui, assez fortement impacté pour des vitesses de rotation aux alentours de 350 et 500  $rad/s$ . Les différences de résultats entre les deux modèles ne sont pas très importantes ce qui reste compréhensible, compte tenu du fait que les temps de calcul pour la simulation dynamique sont proches (d'après tableau 2.1). La différence de temps de calcul lors de l'équilibre statique, qui peut demander un nombre important d'itérations ( $< 5$  min d'après le tableau 2.1), ne représente pas un point bloquant.

a)



b)



**Fig. 4.31** – Influence du modèle de palier sur le le chargement à la denture,  $C_m = 1000$   $N.m$  ; a) coefficient dynamique ; b) coefficient de répartition de charge

Ce paragraphe a permis de mettre en évidence le rôle joué par le modèle de palier sur la prédiction du comportement du réducteur. Comme nous pouvions nous y attendre, les résultats concernant les paliers (efforts, calage...) sont impactés par le changement du modèle de palier. En revanche, la modification du chargement aux dentures (amplification et répartition ont été présentées) était moins attendue.

**Remarque :** Il est important de noter que les différences de comportement du système selon le modèle de palier sont largement mises en évidence par la présence des accouplements extérieurs et la modification de la répartition du chargement entre ces

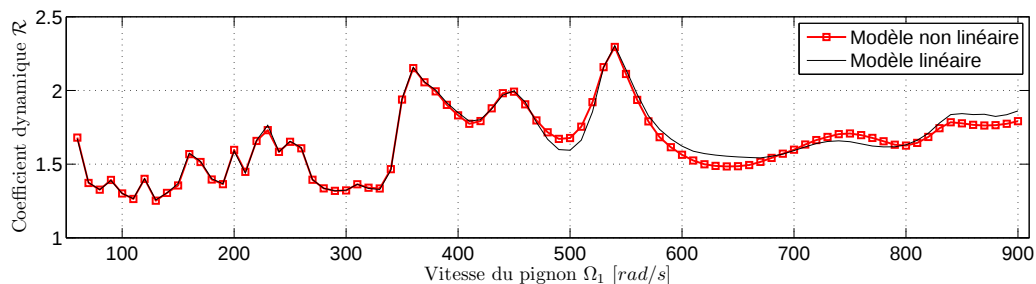
*derniers et les paliers. En l'absence de ces accouplements, les différences seraient clairement moins visibles.*

### 4.3.2. Influence de la non linéarité du modèle de palier

Nous nous intéresserons dans cette partie à l'influence sur le comportement dynamique du réducteur des non linéarités causées par les paliers fluides. Le réducteur étudié sera celui présenté dans le paragraphe 4.1, et le modèle de palier employé est le modèle unidimensionnel avec prise en compte des effets thermiques.

Les résultats statiques ont déjà été présentés dans le paragraphe 4.1 et sont strictement identiques car les équations résolues sont les mêmes jusqu'à l'équilibre statique. Seules les équations du mouvement diffèrent, en conséquence, seuls des résultats des simulations dynamiques seront exposés.

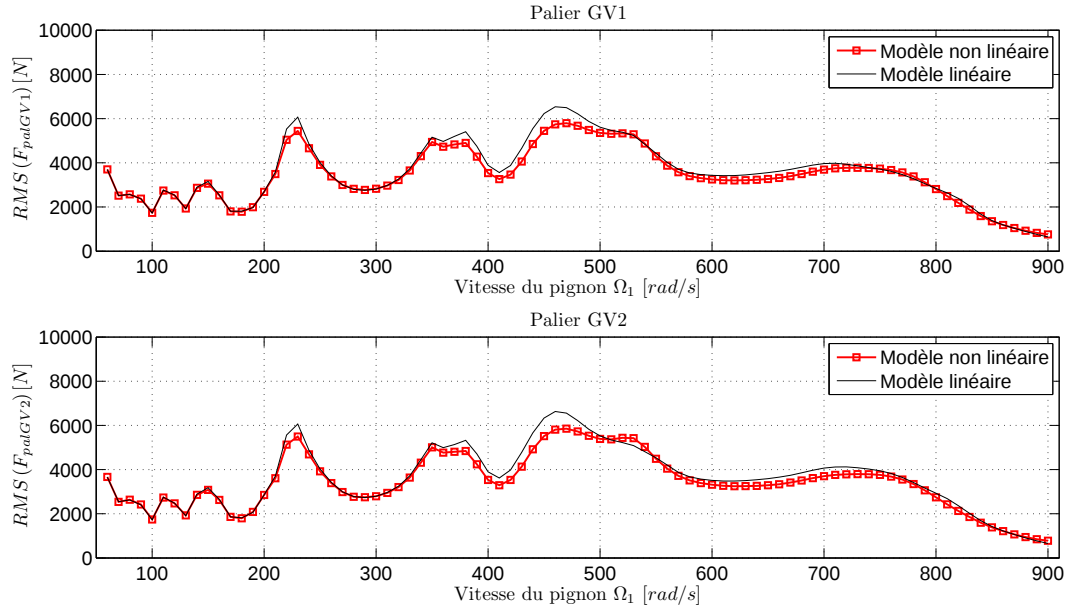
L'évolution du coefficient dynamique en fonction de la vitesse de rotation est présentée sur la figure 4.32 avec des efforts paliers calculés selon une théorie linéaire puis non linéaire. Les résultats sont très proches sur la large plage de vitesses balayée. Seules quelques différences apparaissent, à haute vitesse principalement (à partir de  $450 \text{ rad/s}$ ), et restent inférieures à 20%.



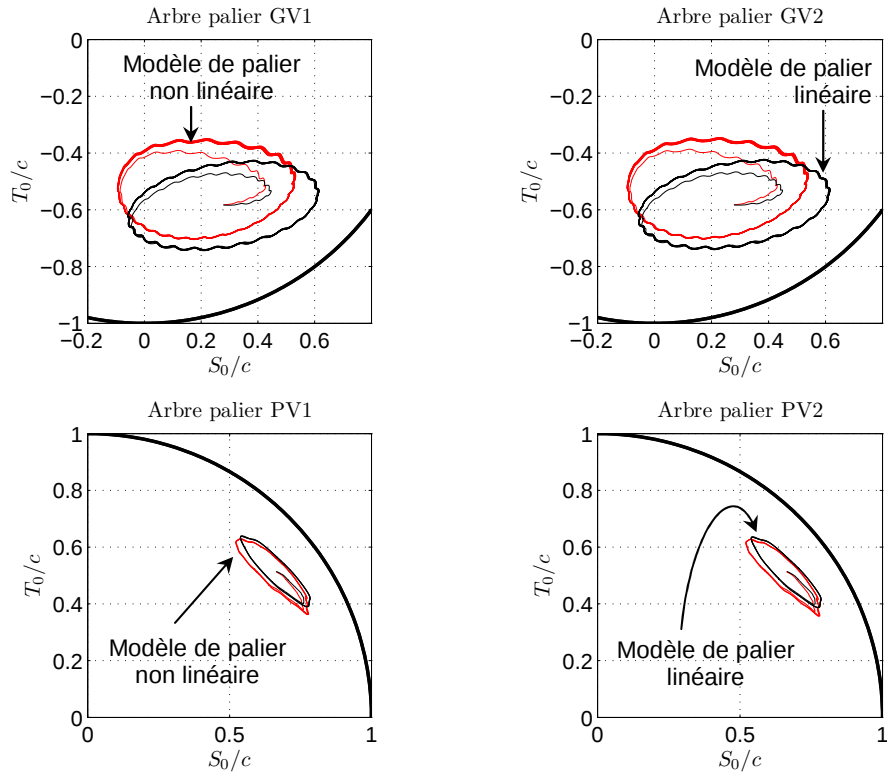
**Fig. 4.32** – Influence de la non linéarité du modèle de palier sur le coefficient dynamique,  $C_m = 1000 \text{ N.m}$

La figure 4.33 nous indique, par l'intermédiaire de leurs valeurs RMS, que les réactions aux paliers d'arbre GV sont également impactées par la modification du modèle de palier. Les vitesses critiques ne semblent pas modifiées mais les amplitudes varient jusqu'à plus de 10%, ce qui reste important en absolu comme l'ont montré les simulations des paragraphes précédents. Les précédentes simulations (paragraphe 4.1 principalement), ont révélé que les RMS des réactions aux paliers dépendaient fortement de l'intervalle de calcul en la présence d'un effort de type balourd. Par exemple, la figure 4.33 fait état de RMS des efforts aux paliers d'arbre GV quasiment identiques à la vitesse  $\Omega_1 = 750 \text{ rad/s}$ . Nous nous proposons d'étudier les différences de réponse des paliers d'après les deux modèles plus en détail à ce régime.

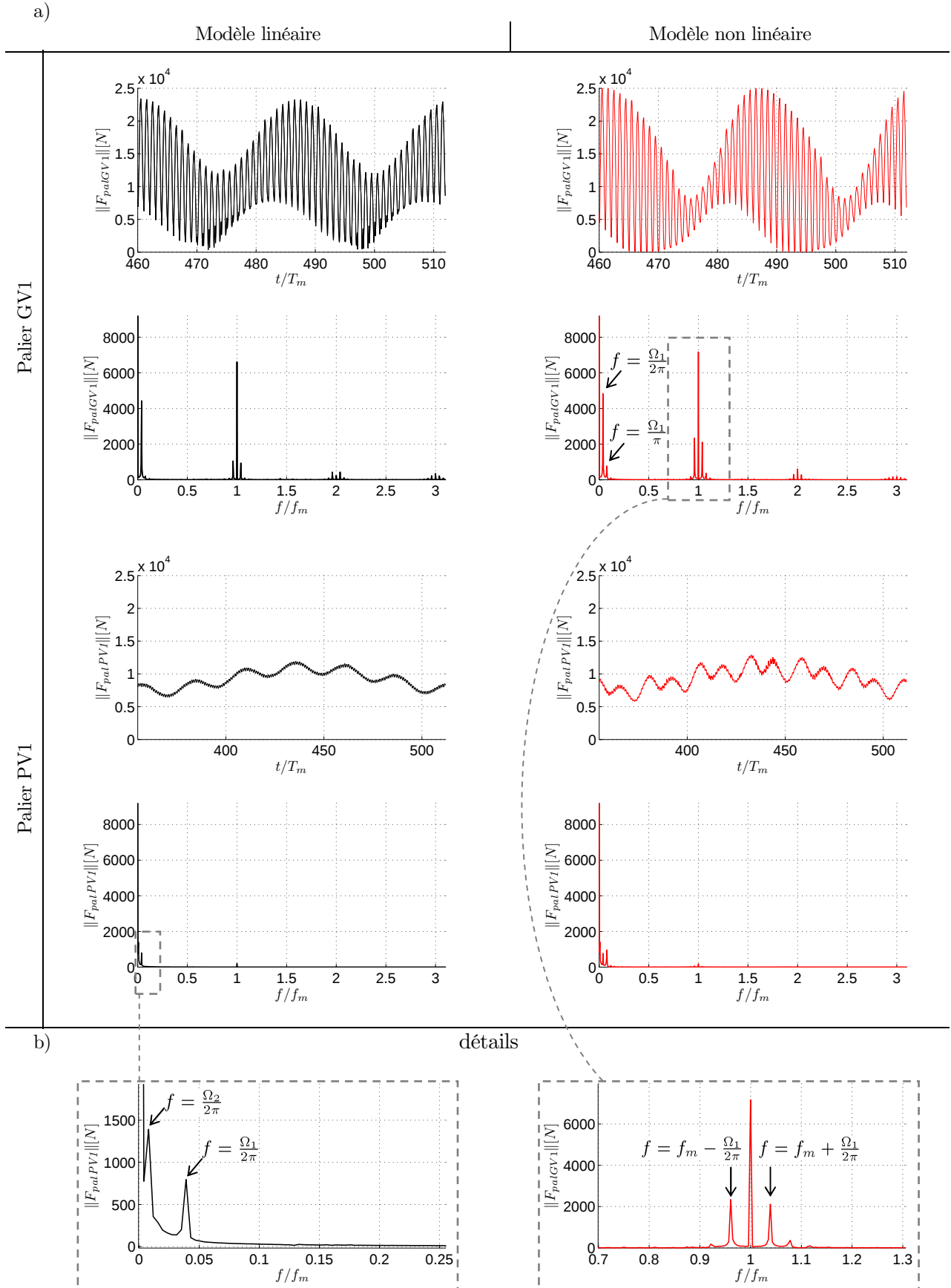
La figure 4.34 représente les orbites du centre de l'arbre pour les quatre paliers du système (régime transitoire compris), selon les deux modèles de paliers ; alors que la figure 4.35 permet de comparer les réactions du palier GV1 sous forme temporelle et spectrale.



**Fig. 4.33** – Influence de la non linéarité du modèle de palier sur les RMS des efforts aux paliers,  $C_m = 1000$  N.m



**Fig. 4.34** – Trajectoires des centres des arbres calculées avec les deux modèles de paliers ;  $\Omega_1 = 750$  rad/s ;  $C_m = 1000$  N.m



**Fig. 4.35** – Représentations temporelles et spectrales des efforts aux paliers GV1 et PV1,  $\Omega_1 = 750$  rad/s,  $C_m = 1000$  N.m

Sur la figure 4.34, on observe que si l'orbite des arbres est à tendance généralement elliptique pour les paliers d'arbre GV (avec oscillations haute fréquence) avec une théorie linéaire, elles sont largement modifiées par l'introduction d'un modèle de palier non linéaire. Les nuances entre les résultats sont également visibles sur les représentations des efforts aux paliers (figure 4.35) avec l'apparition d'un phénomène de modulation d'amplitude sur le palier GV1 beaucoup plus marqué avec le modèle non linéaire. Sur la représentation spectrale, cette modulation d'amplitude se caractérise par la présence de bandes latérales de part et d'autre de chaque harmonique, situées aux fréquences  $f_n = kf_m \pm n\frac{\Omega_1}{2\pi}$ ,  $k, n$  entiers. Le taux de modulation  $m$  relatif à la première harmonique est assez élevé ( $m \simeq 0.65$  en théorie non linéaire contre 0.3 en théorie linéaire, d'après les amplitudes des bandes latérales). De même, la représentation fréquentielle de l'effort au palier GV1 fait apparaître un pic à la fréquence  $f = \frac{\Omega_1}{2\pi}$ , et un pic à  $f = \frac{\Omega_1}{\pi}$  uniquement présent sur les résultats issus du modèle non linéaire.

On notera également les différences entre les niveaux associés à chaque harmonique selon le modèle de palier (environ 10% sur la première harmonique de la réaction d'arbre GV).

L'arbre PV est également intéressant à étudier, puisque la représentation fréquentielle de l'effort au palier PV1 fait apparaître un pic à la fréquence  $f = \frac{\Omega_2}{2\pi}$  correspondant à l'effet du balourd de l'arbre PV et également un pic à la fréquence  $f = \frac{\Omega_1}{2\pi}$ , causé par le balourd de l'autre arbre (GV). Ce phénomène, particulièrement visible à haute vitesse, apparaît sur l'agrandissement figure 4.35.b. mais aussi sur la représentation temporelle de l'effort au palier PV1 sur un tour de roue avec une oscillation très basse fréquence et environ six oscillations basse fréquence causées par le couplage entre les balourds des différents arbres. Ce couplage est également visible sur les trajectoires des arbres dans les paliers PV1 et PV2 figure 4.34. En effet, les deux modèles de palier montrent des trajectoires perturbées par les interactions entre les deux arbres.

Au final il apparaît que les modèles linéaire et non linéaire donnent de résultats aux tendances assez proches mais que certains phénomènes très locaux ne peuvent pas être retranscrits par une théorie linéaire. Les modèles linéaires sont donc à réserver à des études paramétriques nécessitant de nombreux calculs en série, alors que les modèles non linéaires seront plus utiles pour des simulations à vitesse fixe nécessaires à l'étude fine des réactions.

## 4.4. Etude de deux architectures

Dans ce dernier paragraphe, on se propose de présenter des résultats, à vitesse fixe de systèmes avec des architectures assez peu courantes :

- le premier système consiste en un train d'engrenages à double chevron ;
- le second système est constitué d'un train simple étage en denture droite dont les engrenages sont positionnés en porte-à-faux.

#### 4.4.1. Engrenages à double hélice

Les engrenages à double hélice, et particulièrement à chevrons, sont fréquemment employés dans les applications « haute-puissance » telles que la propulsion navale car ils présentent de nombreux avantages. Ils permettent d'obtenir des niveaux de discrétion comparables aux dentures hélicoïdales, tout en éliminant, ou presque, la poussée axiale et le moment de basculement causés par l'hélice (qui se compensent entre les deux hélices de sens opposés). Une étude approfondie sur ce sujet est réalisée par AJMI [Ajm00].

Du point de vue des interactions avec les paliers fluides, les travaux faisant intervenir ce type de dentures sont, à notre connaissance, inexistantes. Nous allons nous y intéresser sur un modèle de réducteur basé sur celui des paragraphes précédents. La géométrie des engrenages est parfaite et les butées sont laissées aux noeuds extrêmes (paliers PV1 et GV2), conformes au tableau 4.2. Les caractéristiques du système étudié et schématisé sur la figure 4.36 sont identiques à celles du système étudié dans le premier paragraphe de ce chapitre, à quelques détails près :

- les dentures sont hélicoïdales, l'angle d'hélice  $\beta_b = 20^\circ$  est opposé sur les deux hélices, de type « PN », c'est-à-dire que l'engagement se fait par la partie centrale du double hélice ;
- chaque hélice possède une largeur de 35 mm (sur le pignon et sur la roue), espacées d'un centimètre ;
- l'architecture est simplifiée compte-tenu du nombre limité de noeuds dont nous disposons, car chaque arbre comprend deux pignons ou roues séparé(e)s par un élément d'arbre, ce qui ne laisse plus la possibilité que d'intégrer deux éléments de poutre sur chaque arbre.

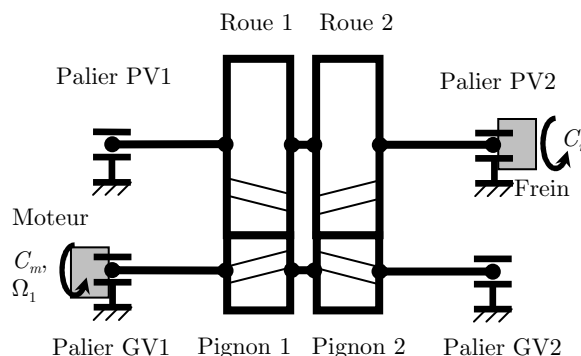
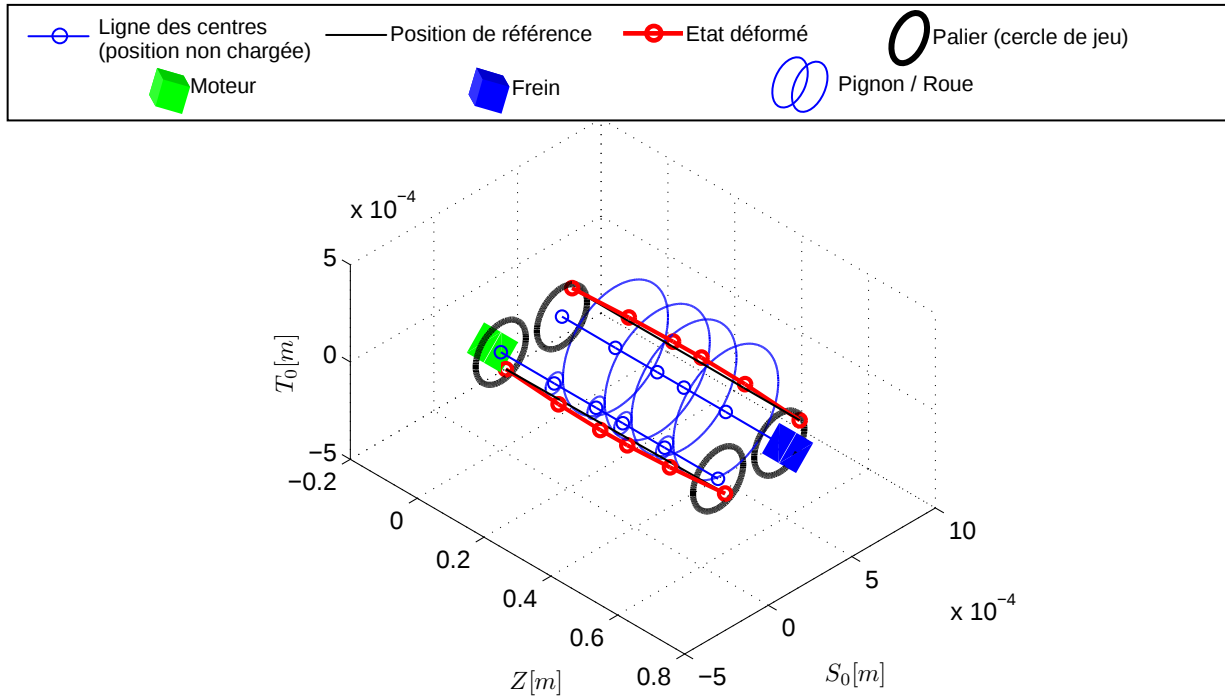


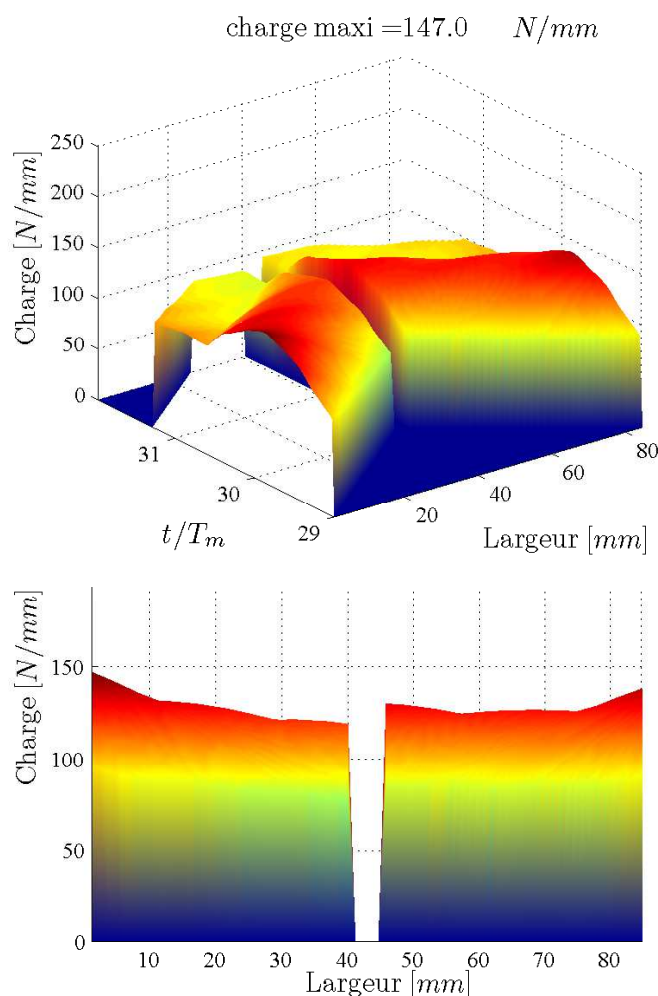
Fig 4.36 – Modèle de réducteur avec engrenages à double hélice

Pour cette architecture, nous ne présenterons qu'un nombre réduit de résultats, tout d'abord à vitesse fixe, concernant l'équilibre statique du réducteur et le chargement dynamique à la denture ; puis quelques résultats issus d'un balayage en vitesse. En effet, les études paramétriques à vitesse variable présentent des résultats tout à fait comparables à ceux des précédentes architectures (influence des accouplements, des caractéristiques des paliers...) exposés dans les précédents paragraphes et ne seront donc pas développées ici.



**Fig. 4.37** – Déformée statique en flexion du réducteur avec denture de type double chevron ;  $\Omega_1=350 \text{ rad/s}$  ;  $C_m = 1000 \text{ N.m}$

L'équilibre statique du réducteur à la vitesse  $\Omega_1=350 \text{ rad/s}$  montre une symétrie quasiment parfaite du système, tant du point de vue du calage des arbres dans les paliers (et donc de la position de référence) que pour ce qui concerne la déformée. Les champs de pression dans les paliers ne sont pas représentés mais ils sont similaires au cas en dentures droites. Les positions de calage sont également identiques au cas où le réducteur est étudié en dentures droites, et aucun mésalignement n'est introduit par les jeux des paliers, contrairement au cas en dentures hélicoïdales. Ce positionnement symétrique a pour effet de garder un chargement de denture bien réparti et presque symétrique entre les deux hélices, comme le montre la figure 4.38, ce qui n'était pas, à priori, évident compte tenu des jeux dans les paliers.

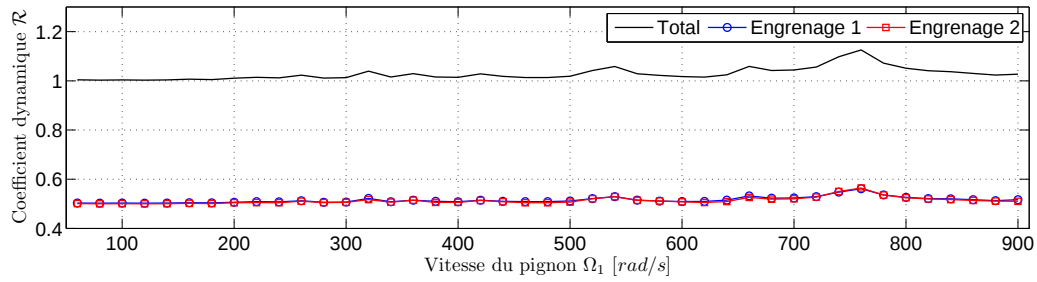


**Fig. 4.38**– Chargement linéique sur une ligne de contact pour le réducteur avec engrenages en porte-à-faux,  
 $\Omega_1 = 350 \text{ rad/s}$ ,  $C_m = 1000 \text{ N.m}$

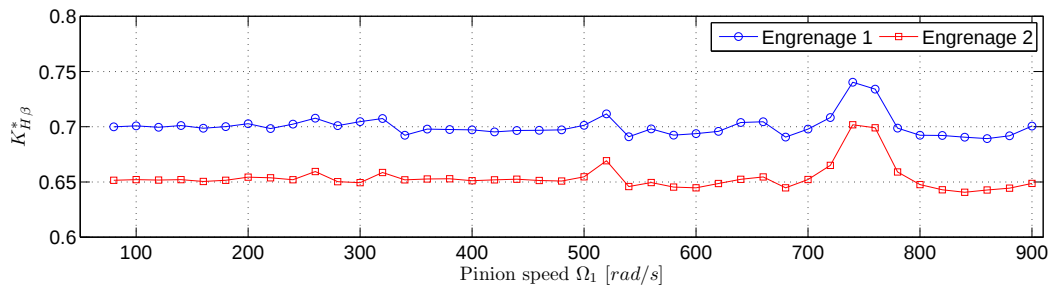
L'étude du coefficient dynamique  $\mathcal{R}$  (fig. 4.39.a) et du coefficient de répartition de charge  $K_{H\beta}^*$  (fig. 4.39.b) sur chaque engrenage lors d'un balayage en vitesse révèle dans un premier temps que le chargement est presque équi-réparti sur les deux engrenages, ce qui confirme le résultat de la figure 38 à vitesse fixe. En revanche, de petites dissymétries locales peuvent exister, causées par la déformation des corps, créant un très léger déséquilibre dans le coefficient  $K_{H\beta}^*$ .

Notons que la somme des coefficients dynamiques des engrenages 1 et 2 reste comprise entre 1 et 1.15, ce qui révèle une amplification dynamique de charge aussi faible que pour des engrenages hélicoïdaux, mais avec une meilleure répartition, et pas de désalignement dans cette configuration particulière. La mise en place de conditions limites comme celles utilisées en dentures droites donnerait, là aussi, de légères dissymétries.

a)



b)

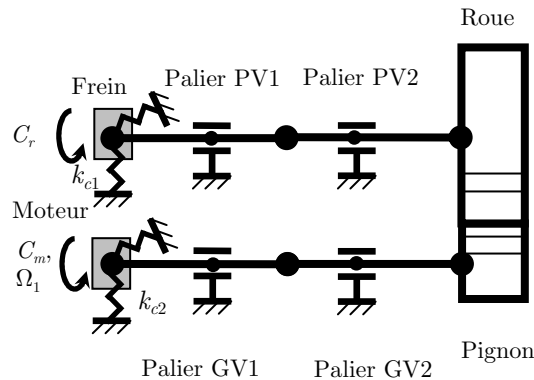


**Fig. 4.39** – Evolution du coefficient dynamique (a) et du coefficient de répartition du charge (b) lors d'un balayage en vitesse pour chacun des deux engrenages,  $C_m = 1000 \text{ N.m}$ .

#### 4.4.2. Engrenages en porte-à-faux

Le cas extrême d'engrenages non centrés entre les paliers est celui où l'engrenage est hors de l'espace inter-paliers ; c'est ce cas que nous allons étudier. Les caractéristiques du réducteur sont identiques à celles présentées dans les paragraphes précédent, à l'exception de :

- la largeur de denture, ramenée à  $50 \text{ mm}$  au lieu de  $80 \text{ mm}$  ;
- la longueur des arbres, identiques, de longueur totale (sans les mobiles)  $880 \text{ mm}$ , les paliers étant espacés de  $640 \text{ mm}$ , situés à  $120 \text{ mm}$  des extrémités ;
- la position du frein et des accouplements extérieurs, tels que représentés sur la figure 4.40.

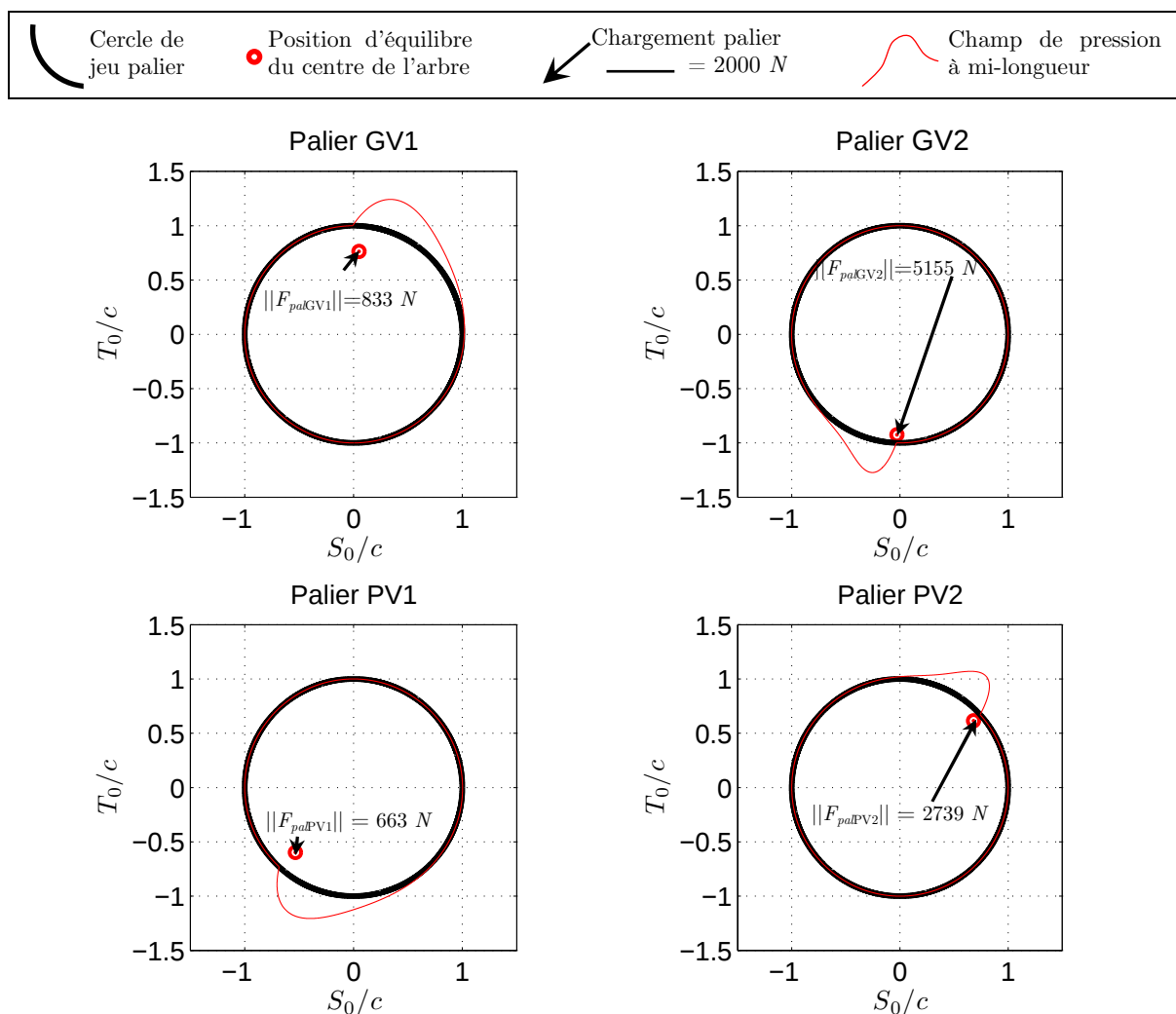


**Fig 4.40** – Modèle de réducteur avec engrenages en porte à faux

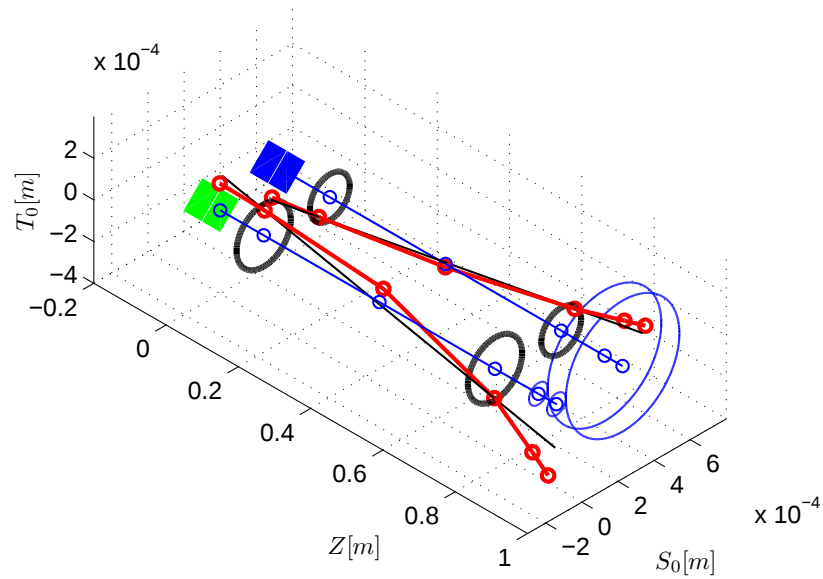
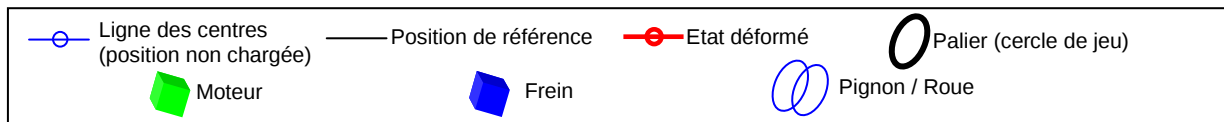
Le réducteur est étudié sous faible charge ( $C_m = 200 \text{ N.m}$ ) à la vitesse  $\Omega_1 = 350 \text{ rad/s}$ .

La représentation des positions d'équilibre palier, figure 4.41, montre bien que les deux paliers d'un même arbre travaillent dans des zones opposées. Ces zones sont également différentes entre les paliers d'arbre GV et les paliers d'arbre PV, sous l'effet du chargement, des sens de rotation, du calage des arbres et des accouplements. Les réactions sont, elles aussi, très déséquilibrées sur un même arbre, avec les paliers GV2 et PV2 (ceux proches des mobiles) très chargés et les paliers GV1 et PV1 très peu chargés, ce qui peut éventuellement faire craindre des phénomènes d'instabilité.

Dans la continuité de la figure précédente, la figure 4.42 montre l'équilibre statique du réducteur et l'on observe nettement que les positions dans les paliers donnent lieu à des arbres fortement désalignés.

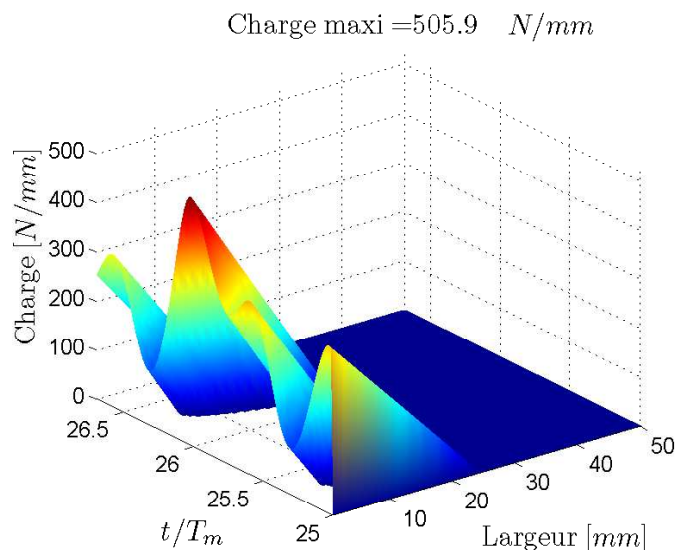


**Fig. 4.41** – Positions d'équilibre, effort transmis, champ de pression adimensionné pour les quatre paliers du réducteur avec engrenages en porte-à-faux ;  $\Omega_1 = 350 \text{ rad/s}$  ;  $C_m = 200 \text{ N.m}$



**Fig. 4.42** – Déformée statique en flexion du réducteur avec engrenages en porte-à-faux ;  $\Omega_1 = 350 \text{ rad/s}$  ;  $C_m = 200 \text{ N.m}$

La figure 4.43 permet de voir l'effet des mésalignements produits par le calage des arbres, en représentant la charge linéique sur une ligne de contact. Il apparaît nettement que le chargement est très mal réparti, avec la moitié de la dent qui n'est pas en contact et un maximum de charge élevé, alors que le couple imposé reste faible. Même une correction très importante ne suffirait pas à recentrer la charge dans ce cas.



**Fig. 4.43** – Chargement linéique sur une ligne de contact pour le réducteur avec engrenages en porte-à-faux,  $\Omega_1 = 350 \text{ rad/s}$ ,  $C_m = 200 \text{ N.m}$

Compte-tenu des quelques risques évoqués (principalement le risque d'instabilité de palier et la mauvaise répartition de chargement), on comprend bien que cette configuration est à éviter.

\*  
\*   \*

Ce chapitre a permis de montrer un certain nombre de phénomènes comportementaux. Quelques tendances étaient déjà connues, elles concernent principalement l'effet d'une modification de dentures car la littérature à ce sujet est assez vaste. En revanche, de nombreuses interactions, propres au cas des réducteurs à engrenages sur paliers lisses, ont été mises en évidence. Les interactions les plus simples concernent l'influence des excitations haute fréquence causées par le passage des dents qui sont récupérées par les paliers. En présence d'un effort de type balourd, les excitations dans différentes gammes de fréquences apparaissent nettement, éventuellement couplées (phénomènes de modulation d'amplitude, apparition de bandes latérales en représentations fréquentielles...), ce dernier phénomène apparaissant plus clairement sur les modèles non linéaires, tout comme les premiers phénomènes d'instabilité de paliers.

Un certain nombre d'interactions, a priori moins évidentes sont également apparues et concernent l'influence que peuvent avoir les paliers ou l'environnement extérieur sur le comportement de la denture. Il apparaît que les accouplements extérieurs ont tendance à modifier la répartition de charge entre les paliers, et donc à modifier le calage des arbres et finalement le contact à la denture (répartition du chargement). Des accouplements très raides ont même pour effet de modifier largement la localisation et les niveaux des vitesses critiques. Nous avons également pu étudier brièvement l'influence des conditions d'alimentation en lubrifiant ou des effets thermiques dans les paliers. Ces derniers, bien connus pour modifier le champ de pression et le comportement des paliers, sont aussi susceptibles d'avoir un effet sur le chargement à la denture. De tels paramètres sont souvent ignorés dans les modèles présents dans la littérature et les études menées ont mis en évidence leur rôle.

L'effet d'une modification du modèle de palier a également été illustré. Il apparaît alors qu'une modification du modèle de palier a une influence aussi bien sur le comportement des paliers que sur celui de la denture. La prise en compte des non linéarités dues aux paliers a un effet notable dans certaines plages de vitesse et ne peut être ignorée pour une étude fine des réactions. En revanche, compte-tenu des temps de calcul présentés en fin de chapitre 2, les résultats exposés nous invitent à une certaine réflexion avant de privilégier un modèle par rapport à l'autre, selon le niveau de précision requis.

Enfin, deux architectures relativement absentes de la littérature ont été traitées. Concernant les dentures à double hélice, elles induisent des calages dans les paliers semblables à ceux obtenus en dentures droites, c'est-à-dire n'induisant pas de mésalignement dans le cas du réducteur symétrique ; tout en conservant un niveau vibratoire intéressant. Quant aux engrena-

ges en porte-à-faux, ils sont tout simplement à proscrire pour un réducteur supporté par des paliers fluides, tant les jeux de ces derniers créent des mésalignements importants, des portées de chargement dangereuses et des réactions aux paliers perturbées.



# Conclusions générales et perspectives

---

Dans ce mémoire, un modèle hybride a été présenté, qui permet de simuler le comportement dynamique de réducteurs à engrenages sur paliers hydrodynamiques. Il est basé sur une discrétisation des lignes d'arbres en éléments finis de poutre de TIMOSHENKO, l'utilisation d'un élément spécifique d'engrenages permettant de traiter à la fois les déformations de corps larges, le problème de contact entre les dents (incluant les défauts et corrections de forme, au même titre que les déflexions sous charge ; ceci par l'intermédiaire de raideurs distribuées) et le problème de contact entre les arbres et les coussinets par l'utilisation d'un modèle de palier tenant compte de l'échauffement du lubrifiant. L'écriture des équations d'équilibre statique et du mouvement a nécessité des hypothèses supplémentaires par rapport aux modèles de la littérature, qui concernent notamment la séparation de deux champs de déplacements et leur contributions respectives.

La résolution des équations d'équilibre a nécessité le développement d'une procédure numérique spécifique mêlant un schéma d'intégration temporelle de NEWMARK, un algorithme de contact normal unilatéral et deux procédures itératives, l'une visant à mettre à jour les caractéristiques du lubrifiant en fonction de son échauffement, l'autre, basée sur une méthode de NEWTON-RAPHSON, dédiée à la non linéarité de comportement des paliers fluides. Plusieurs variantes du modèle ont été développées : elles sont basées sur une utilisation du modèle de palier court ou du modèle unidimensionnel, et nécessitent une résolution de l'équation de REYNOLDS analytique ou numérique par différences finies. Ces variantes peuvent être associées à des théories linéaires ou non linéaires et conduisent à des temps de calcul très variables avec différents niveaux de précision.

Devant le manque de résultats offerts par la littérature sur ce problème spécifique, les validations ont consisté en des comparaisons avec des résultats expérimentaux [Bau98] sur un train simple étage avec erreurs de pas et corrections de profil (classe de qualité ISO 4), relativement fidèle à la réalité industrielle. Les dentures droites et hélicoïdales ; ainsi que plusieurs positions de paliers et niveaux de chargement ont été testés et les résultats coïncident sur la

plupart des points de comparaisons (positions de fonctionnement des paliers, contraintes en pied de dents...) avec quelques disparités selon les conditions de fonctionnement. Ces résultats représentent clairement une amélioration par rapport aux modèles précédents.

D'autre part, les simulations sur un réducteur modèle ont mis en évidence de nombreuses interactions. Les plus simples d'entre elles concernent les excitations des paliers par le contact aux dentures. D'autres interactions plus spécifiques sont apparues et semblent mettre en relief plusieurs phénomènes rencontrés par les concepteurs de réducteurs chez DCNS. Ces phénomènes concernent principalement les relations entre les positions de fonctionnement des arbres dans les paliers et la réponse de la denture sous l'effet de la modification de sa position de référence par les jeux des paliers. Ainsi, si du point de vue théorique, le modèle de palier peut avoir une importance non négligeable, il a été démontré que les caractéristiques des paliers (d'alimentation en lubrifiant particulièrement) et l'environnement extérieur (accouplements extérieurs) étaient des paramètres d'importance non négligeable, alors qu'ils avaient été ignorés dans bon nombre de modèles de la littérature.

Les principales conclusions issues des applications numériques sont les suivantes :

- dans leurs réponses, les paliers font intervenir plusieurs gammes de fréquences : des basses fréquences liées aux efforts de type balourd ; et des hautes fréquences liées au passage des dents. Les modèles non linéaires, ont semblé donner des résultats assez proches des modèles linéaires dans de nombreuses situations, du moins en tendances, puisqu'à vitesse élevée ils font apparaître des effets de modulation d'amplitude entre les basses et les hautes fréquences. Ces effets sont bien connus chez DCNS et restaient peu visibles au moyen des modèles précédents qui utilisent de simples coefficients dynamiques (limités bien souvent aux seuls termes directs) pour modéliser l'effet des paliers ;
- le contact entre les dents représente un élément de couplage entre les deux arbres, avec notamment des traces du balourd de l'arbre GV dans la réponse des paliers d'arbre PV à des vitesses élevées ;
- les positions de calage des arbres dans les coussinets sont notamment fonction du régime, de l'arbre en question, du sens de rotation, de l'emplacement des paliers, des engrenages, du type de denture et de l'environnement extérieur (accouplements élastiques sans jeu) ;
- les positions des arbres dans les coussinets apparaissent comme un paramètre de tout premier plan qui conditionne assez largement la répartition du chargement des dentures en l'absence de correction ;
- il est également apparu que le lubrifiant avait tendance à s'échauffer nettement plus sur les paliers d'arbre GV, et pouvait même atteindre des températures nécessitant une attention particulière à vitesse élevée ; tout particulièrement lorsque la zone d'alimentation interfère avec la zone de chargement. Ces effets thermiques modifient la viscosité de chaque palier, et sont susceptibles de faire varier les zones de portée des dentures : en ce sens ils ne peuvent être ignorés ;

- les accouplements extérieurs sont capables de modifier les vitesses critiques, les amplitudes associées tout comme les répartitions de chargement.
- la modification de la zone d'alimentation des paliers, qui peut être causée par une prédiction incorrecte du transfert de charge jusqu'aux paliers, peut avoir des effets similaires dans une moindre mesure.

Même si le modèle répond de manière satisfaisante à plusieurs comparaisons avec des résultats expérimentaux, il souffre de certaines approximations. Certaines d'entre elles sont propres aux modèles locaux qui ont été utilisés (engrenages et paliers) alors que d'autres ont été introduites dans la construction du modèle :

- le modèle de contact entre les dents, à paramètres concentrés, ignore les effets convectifs de contact entre les cellules voisines. De plus, les déformations suivant les fonctions de forme des éléments de poutre sont assez éloignées des déformées des roues dont le voile est parfois mince ;
- le modèle de palier présente lui aussi des hypothèses assez fortes, ne serait-ce que sur la géométrie puisque la méthode unidimensionnelle restreint le champ d'application aux paliers lisses de longueur inférieure ou égale au diamètre, alors que dans la pratique, les paliers à lobes sont fréquemment utilisés. La prise en compte du mésalignement de l'arbre par rapport au coussinet représente une piste d'amélioration intéressante. D'un point de vue dynamique, le modèle de lubrifiant (fluide newtonien) utilisé dans le modèle, est associé à des hypothèses assez fortes. La modélisation du comportement du lubrifiant à des excitations « haute fréquence » (de l'ordre de quelques  $kHz$ ) est une piste d'amélioration ;
- enfin le modèle couplé en lui-même est basé sur une hypothèse de stationnarité de la position de référence, et donc du plan d'action et des caractéristiques d'engrènement, au cours du mouvement. Cette hypothèse peut être remise en question afin de traiter de manière plus précise le problème de contact entre les dents dans des conditions de fonctionnement où les déplacements de ligne d'arbre dans les jeux des paliers sont importants au cours du temps (typiquement en présence de balourd et à vitesse élevée). Le calcul de la position de référence et de la déformée statique pourrait être plus précis en prenant en compte les termes de forçage et les zones sans contact dans la détermination de l'équilibre statique ainsi que la contribution distincte de chaque cellule dans le calcul des coordonnées du point d'application du vecteur glissant équivalent à l'effort transmis par la denture. Un tel degré de précision a été estimé excessif pour un gain qui a été jugé minime.

Ces approximations et limites sont autant de pistes d'améliorations, parfois difficilement exploitables pour le concepteur de réducteurs. Les principales évolutions à donner au modèle seraient d'augmenter le nombre de degrés de liberté du système simulé afin de pouvoir traiter des architectures plus variées, principalement en double hélice. Il serait aussi intéressant de pouvoir traiter un éventail de paliers hydrodynamiques de géométrie plus

proche de la réalité industrielle (tels que les paliers citron) avant de rentrer le modèle, à terme, utilisable sur des transmissions multi-étages.

La modélisation de l'amortissement dans le modèle représente une source d'amélioration potentielle. Actuellement, aucune distinction n'est faite entre l'amortissement sur les dentures et l'amortissement structurel. L'amortissement des paliers est, lui, introduit par l'intermédiaire de l'équation de REYNOLDS. La distinction des différentes sources d'amortissement pose le problème de l'estimation de ces amortissements, particulièrement pour les voiles minces et les carters.

Enfin, dans une optique de réduction du bruit rayonné par le réducteur, une suite intéressante à donner à ces travaux consisterait à modéliser le carter et les interactions de ce dernier avec le réducteur. Une méthode basée sur les éléments de frontière proche de celle utilisée dans [Ham12] pourrait alors être utilisée afin de calculer des niveaux de bruit en  $dB$ .

# Références

## bibliographiques

---

- [Abb11] **ABBES S.A., HENTATI T., MAATAR M., FAKHFAKH T., HADDAR M.** 2011, *Dynamic analysis of helical gears supported by rolling element bearings*, Journal of theoretical and applied mechanics, Sofia, Vol 41 N° 1, pp. 33-50.
- [Abo05] **ABOUSLEIMAN V., VELEX P.** 2005, *A hybrid 3D finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear set*, Mechanism and Machine Theory, Vol 41 N° 6, pp. 725-748.
- [Ajm00] **AJMI M.** 2000, *Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à dentures larges*, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Villeurbanne, 151 p.
- [Ajm05] **AJMI M., VELEX, P.** 2005, *A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears*, Mechanism and Machine Theory, Vol 40, pp. 173-190.
- [Axi03] **AXISA F.** 2003, *Modelling of Mechanical Systems: Vol.1 Discrete Systems*, Hermes Penton Science, 300 p.
- [Bag05] **BAGUET S, VELEX P.** 2005, *Influence of the nonlinear dynamic behaviour of journal bearings on gear-bearing assemblies*, Proc. ASME Power Transmission and Gearing International Conference, Long Beach, 5, pp. 735-745.
- [Bag10] **BAGUET S., JACQUENOT G.** 2010, *Nonlinear couplings in a gear-shaft-bearing system*, Mechanism and Machine Theory, Vol 45, pp. 1777-1796.
- [Bau98] **BAUD S.** 1998, *Développement et validations sur banc d'essai de modèles du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Villeurbanne, France, 194 p.
- [Bau02] **BAUD S., VELEX P.** 2002, *Static and dynamic tooth loading in spur and helical geared systems. Experiments and code validation*, ASME, Journal of Mechanical Design, Vol 124, pp. 334-346.
- [Ben81] **BENTON M., SEIREG A.** 1981, *Factors influencing instability and resonances in geared systems*, Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, Vol 103, pp. 372-378.

- [Bet06] **BETTAÏEB M.N.** 2006, *Introduction des jantes minces dans les simulations du comportement dynamique d'engrenages*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Villeurbanne, France.
- [Bet07] **BETTAÏEB M.N., VELEX P., AJMI, M.** 2007, *A static and dynamic model of geared transmissions by combining substructures and elastic foundations – Application to thin-rimmed gears*, ASME, Journal of Mechanical Design, Vol 129 N° 2, pp. 184-194.
- [BlaSin95] **BLANKENSHIP G.W., SINGH R.** 1995, *A new gear mesh interface dynamic model to predict multi-dimensional force coupling and excitation*, Elsevier, Mechanical and Machine Theory, Vol 30 N°1, pp. 43-57.
- [Bla96] **BLANKENSHIP G.W., KAHRAMAN A.** 1996, *Gear Dynamics Experiments, Part 1: Characterization of forced response*, Proceedings of the 7<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, pp. 373-380.
- [Bol64] **BOLOTIN V.V.** 1964, *The dynamic stability of elastic systems*. Holden-Day, San Francisco, pp. 145-277.
- [Bon89] **BONNEAU O.** 1989, *Comportement statique et dynamique de ligne d'arbre montée sur paliers fluides : Influence des caractéristiques des paliers*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Villeurbanne, France, 136 p.
- [Bon97] **BONNEAU O., FRÈNE J.** 1997, *Non-linear behaviour of a flexible shaft partly supported by a squeeze-film damper*. Wear, Vol 206, pp. 244-250.
- [Buc31] **BUCKINGHAM E.** 1931, *Dynamic loads on gear teeth*, Report, New-York: Special Research Committee on the Strength of gear Teeth, 221 p.
- [Cai92] **CAI Y., HAYASHI T.** 1992, *The linear approximated equation of vibration for a pair of spur gears: theory and experiment*, Proceedings of the 6<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference. Phoenix, Vol 2, pp. 521-528.
- [Cam66] **CAMERON A.** 1966, *The Principles of lubrication*, Longmans.
- [Che98] **CHEN C.-S., NATSIAVAS S., NELSON H.D.** 1998, *Coupled lateral-torsional vibration of a gear-pair system supported by a squeeze film damper*, Journal of Vibration and Acoustics, Vol 120 N°4, pp.860-867.
- [Chr41] **CHRISTOPHERSON D.G.**, 1941, *A new mathematical method for the solution of oil film lubrication problems*, Proc. Inst. Mech. Engrs., Vol 146, pp. 126-135.
- [Col71] **COLIN W. CRYER**, 1971, *The method of Christopherson for solving free boundary problems for finite journal bearings by means of the finite differences*, Mathematics of computation, Vol 25 N° 115, pp. 435-443.

- 
- [Dow62] **DOWSON D.** 1962, *A generalized Reynolds equation for film lubrication*, International Journal of Mechanical Science, Vol 4, pp. 159-170.
- [Dra88] **DRAGO R.J.** 1988, *Fundamentals of gear design*, Boston: Butterworth, 560 p.
- [Duf83] **DUFRANE K.F., KANNEL J.W., MC CLOSKEY T.H.** 1983, *Wear of steam turbine journal bearings at low operating speeds*, Journal of Lubrication Technology, Vol 105 N° 3, pp. 313-317.
- [Dur08] **DUREISSE D.** 2008, *Méthodes numériques appliquées à la conception par éléments finis*, Université Montpellier II, 91 p.
- [Fan79] **FANTINO B., PARQUET J., FRENE, J.** 1979, *Elastic connecting-rod bearing with piezoviscous lubricant: analysis of the steady-state characteristics*, Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, Vol 101 N° 2, pp. 190-200
- [Far11] **FARGÈRE R., VELEX P.** 2011, *Some simulations of gear-bearings interactions*, Proc. ASME Power Transmission and Gearing International Conference, Washington, DC, USA.
- [Far12] **FARGÈRE R., VELEX P.** 2012, *Influence of clearances and thermal effects on the dynamic behaviour of gear-hydrodynamic journal bearing systems*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, *Soumis*.
- [Flo83] **FLOQUET M.G.** 1883, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Annales de l'Ecole Normale, 2<sup>ème</sup> série, Tome XII, pp. 47-89.
- [Fre98] **FRENE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHE D., GODET, M.** 1998, *Lubrification hydrodynamique - Paliers et Butées*, Ed. Eyrolles.
- [Fur91] **FUROKAWA T.** 1991, *Vibration analysis of gear and shaft system by modal method.*, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, pp. 123-127.
- [Ger96] **GERARDIN M., RIXEN D.** 1996, *Théorie des vibrations – Application à la dynamique des structures*, Paris : Masson, 421p.
- [Gom02] **GOMEZ-MANCILLA J., NOSOV V.** 2002, *Perturbed pressure field solution for misaligned short bearings*, Proc. 9<sup>th</sup> International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery.
- [Gre641] **GREGORY R.W., HARRIS S.L., MUNRO R.G.** 1963-1964, *Dynamic behaviour of spur gears*, Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol 178 Part 1 N° 8, pp. 207-226.
- [Gre642] **GREGORY R.W., HARRIS S.L., MUNRO R.G.** 1963-1964, *Torsional motion of a pair of spur gears*, Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol 178 Part 1 N° 8, pp. 166-173.
-

- [Gum21] **GÜMBEL L.K.R.** 1921, *Vergleich der Ergebnisse der rectinerischen Behandlung der Legerschmierungsproblem mit neueren Versuchsresultaten*, Monatsbl. Berliner Berz Ver. Dtsch. Ing., 125 p.
- [Hag53] **HAGG A.C., WARNER P.C.** 1953, *Oil whip of flexible rotors*, Trans. ASME, Vol 75 N° 7, pp. 1339-1344.
- [Hah75] **HAHN A.C.** 1975, *The excitability of flexible rotors in short sleeve bearings*, Journal of Lubrication technology, Trans. ASME, Ser F, Vol 97, pp. 105-115.
- [Ham12] **HAMBRIC S.A., SHEPHERD M.R., CAMPBELL R.L., HANFORD A.D.** 2012, *Simulations and measurements of the vibroacoustic effects of replacing rolling element bearings with journal bearings in a simple gearbox*, Journal of Vibration and Acoustics, A paraître
- [Har58] **HARRIS S.L.** 1958, *Dynamic loads on the teeth of spur gears*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol 172, pp. 87-112.
- [Hen78] **HENRIOT G.** 1978, *Traité théorique et pratique des engrenages, Tome II : Etude complète du matériel*. 4<sup>ème</sup> édition, Paris : Dunod Technique, 608p.
- [Hen79] **HENRIOT G.** 1979, *Traité théorique et pratique des engrenages, Tome I : Théorie et technologie*. 6<sup>ème</sup> édition, Paris : Dunod Technique, 622p.
- [Hir92] **HIROMU H.** 1992, *Dynamic characteristic analysis of short elliptical journal bearings in turbulent inertial flow regime*. Tribology Transactions, Vol 35 N° 4, pp. 619-626.
- [Hir98] **HIRANI H., ATHRE K., BISWAS S.** 1998, *Rapid and globally convergent method for dynamically loaded journal bearing design*. Proc. Inst. Mech. Eng. Part. J, Vol 14, pp. 212-207.
- [Hol60] **HOLMES R.** 1960, *The vibration of a rigid shaft on short sleeve bearings*, Journal of Mechanical Engineering Science, pp. 337-341.
- [Hou70] **HOUSER D.R., SEIREG A.** 1970, *An experimental investigation of dynamic factors in spur and helical gears*. Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 495-503.
- [Iwa84] **IWATSUBO T., ARII S. , KAWAI R.** 1984, *The coupled lateral torsional vibration of a geared rotor system*. Proceedings of the 3rd Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, paper C265/84, pp.59-66 .
- [Joh77] **JOHNSON K.L., BENTALL R.H.** 1977, *A numerical method for finding elastic contact pressures*, Cambridge University Engineering, Department report, C-MECH/TR14, 56 p.

- 
- [Kah90] **KAHRAMAN A., SINGH R.** 1990, *Non linear dynamics of a spur gear pair*, Journal of Sound and Vibration, Vol 142 N°1, pp. 49-75.
- [Kah91] **KAHRAMAN, A., SINGH, R.** 1991, *Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system*, Journal of Sound and Vibration, Vol 146 N°1, pp. 135-146.
- [Kah921] **KAHRAMAN, A.** 1992, *Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train*, Proceedings of the 6<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference. Phoenix, Vol 1, pp. 365-373.
- [Kah922] **KAHRAMAN A., ÖZGÜVEN H.N., HOUSER D.R., ZAKRAJSEK J.** 1992, *Dynamic analysis of geared rotors by finite elements*, ASME, Journal of Mechanical Design, Vol 114, pp. 486-497.
- [Kah93] **KAHRAMAN, A.** 1993, *Effect of axial vibrations of the dynamics of a helical gear pair*, Journal of Vibration and Acoustics, Vol 115, pp. 33-39.
- [Kas81] **KASUBA R., EVANS J.W.** 1981, *An extended model for determining dynamic loads in spur gearing*, Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, Vol 103, pp. 398-409.
- [Kuc84] **KÜÇÜKAY F.** 1984, *Dynamic behaviour of high speed gears*, Proc. Inst. Mech. Engrs, Paper C317/84, pp. 81-90.
- [Ker64] **KERR A.D.** 1964, *Elastic and viscoelastic foundation models*, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, pp. 491-498.
- [Kub78] **KUBO A.** 1978, *Stress condition, vibrational exciting force and contact pattern of helical gears with manufacturing and alignment error*, Transactions of the ASME journal of Mechanical Design, Vol 100, pp. 77-84.
- [Kuc84] **KÜÇÜKAY F.** 1984, *Dynamic behaviour of high speed gears*, The Institution of Mechanical Engineers, Proc. Of the 3<sup>rd</sup> International Conference "Vibrations on Rotating Machinery", pp. 81-90, Sept. 11-13, York, England
- [Lah00] **LAHMAR F.** 2000, *Interactions entre la dynamique de l'engrènement et les paliers à roulement*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 251 p.
- [Lal84] **LALANNE M., BERTHIER P., DER HAGOPIAN J.** 1984, *Mechanical Vibrations for Engineers*, John Wiley & Sons.
- [Lal90] **LALANNE M., FERRARIS G.** 1990, *Rotordynamics. Prediction in Engineering*, John Wiley & Sons, New York.
-

- [Lin891] **LIN H.H., TOWNSEND D.P., OSWALD F.B.** 1989, *Dynamic loading of spur gears with linear and parabolic tooth profile modifications*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, Vol 1, pp 409-419.
- [Lin892] **LIN H.H., TOWNSEND D.P., OSWALD F.B.** 1989, *Profile modification to minimize spur gear dynamic loading*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, Vol 1, pp 455-465.
- [Lun39] **LUNDBERG G.** 1939, *Elastische berührung zweier halbraume (Elastic contact of two half spaces)*, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Vol 10 N° 5, pp. 201-211.
- [Lun65] **LUND J.W.** 1965, *The stability of an elastic rotor in journal bearings with flexible damped supports*, ASME, Journal of Applied Mechanics, pp. 911-918.
- [Mar78] **MARK W.D.**, 1978, *Analysis of the vibratory excitation of gear systems: Basic theory*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol 63 N° 5, pp. 1409-1430.
- [Mar79] **MARK W.D.**, 1979, *Analysis of the vibratory excitation of gear systems II: Tooth error representations, approximations and applications*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol 66 N° 6, pp. 1758-1787.
- [Mas86] **MASUDA T., ABE T., HATTORI K.**, 1986, *Prediction method of gear noise considering the influence of the tooth flank finishing method*, Transactions of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol 108, pp. 95-100.
- [Mic29] **MICHELL A.G.**, 1929, *Progress in fluid film lubrication*, Trans. ASME, 51, M.S.P. 51. 21., pp. 153-163.
- [Mil07] **MILLET S.**, 2007, *Stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [Mit71] **MITCHELL L.D.**, 1971, *Gear noise: the purchaser's and the manufacturer's views*, Proceedings of the Purdue Noise Control Conference, Lafayette-Indiana, pp. 95-106.
- [Mun62] **MUNRO R.G.** 1962, *The dynamic behaviour of spur gears*, Ph.D. Thesis, Cambridge University.
- [Mun70] **MUNRO R.G.** 1969-1970, *Effects of geometrical errors on the transmission of motion between gears*, Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol 184, Part 30, pp. 79-83.
- [Mun89] **MUNRO R.G.** 1989, *The D.C. component of gear transmission error*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, Vol 1, pp 467-470.
- [Myr76] **MYRICK S.T. Jr., RYLANDER H.G.** 1976, *Analysis of Flexible Rotor Whirl and Whip Using a Realistic Hydrodynamic Journal Bearing Model*, Journal of Engineering for Industry, pp. 1135-1144.

- 
- [New25] **NEWKIRK B.L., LEWIS J.F.** 1925, *Shaft whipping due to oil action in journal bearings*, General Electric Review, pp. 559-568.
- [Nic72] **NICOLAS D.** 1972, *Les paliers hydrodynamiques soumis à un torseur de forces quelconque*, PhD Thesis, INSA de Lyon, France.
- [Ocv53] **OCVIRK F.W., DUBOIS G.B.** 1953, *Analytical derivation and experimental evaluation of short bearing approximations of full journal bearing*, NACA, Tech. rep. 1157.
- [Osm12] **OSMAN T., VELEX P.** 2012, *A model for the simulation of the interactions between dynamic tooth loads and contact fatigue in spur gears*, Tribology International, Vol 46, pp. 84-96.
- [Ozg88] **ÖZGÜVEN H.N., HOUSER D.R.** 1988, *Mathematical models used in gear dynamics. A review*, Journal of Sound and Vibration, Vol 121, pp. 383-411.
- [Par00] **PARKER R.G., VIJAYAKAR S.M., IMAJO, T.** 2000, *Nonlinear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons*, Journal of Sound and Vibration, Vol 237 N° 3, pp.435-455.
- [Pin71] **PINKUS O., STERNLIGHT B.** 1971, *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, Mc Graw-Hill, New-York.
- [Pin80] **PINKUS O., WILCOCK D.J.** 1980, *Thermal Effects in Fluid Film Bearings*, Proceeding of the 6<sup>th</sup> Leeds-Lyon Symposium on Tribology: Thermal effects on tribology Mech. Eng. Publi., pp. 3-23.
- [Rao01] **RAO T.V.V.L.N., BISWAS S., ATHRE K.** 2001, *A methodology for dynamic coefficients and nonlinear response of multi-lobe journal bearings*, Tribology Transactions, Vol 44 N° 1, pp. 111-117.
- [Rei75] **REINHART E., LUND J.W.** 1975, *The influence of fluid inertia on the dynamic properties of journal bearings*, ASME Journal of Lubrication Technology, pp. 159-167.
- [Rem91] **REMOND D.** 1991, *Contribution à l'étude et à l'analyse expérimentale du bruit d'engrènement. Développement et application de la transformée en ondelettes rapide*, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, N° 91 ISAL 0067, 232 p.
- [Rho80] **RHODE S.M., LI D.F.** 1980, *A generalized short bearing theory*, Journal of Lubrication Techn., Vol 102, pp.278-282.
- [Ros94] **ROSINSKI J., HOFFMAN D.A., PENNELL J.A.,** 1994, *Dynamic transmission error measurements in the time domain in high speed gears*, Proceedings of International Gearing Conference, University of Newcastle upon Tyne, pp. 363-370.

- [Sab92] **SABOT J., PERRET-LIAUDET J.** 1992, *Excitation d'un carter de boîte de vitesses par l'erreur de transmission*, 3<sup>ème</sup> congrès mondial des engrenages et des transmissions, Paris, pp. 829-840.
- [Sai89] **SAINOT P.** 1989, *Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteurs*, thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, N° 89 ISAL 0091, 205 p.
- [Sai04] **SAINOT P., VELEX P., DUVERGER O.** 2004, *Contribution of gear body to tooth deflections – A new bidimensionnal analytical formula*, Journal of Mechanical Design, Vol 126, pp. 748-752.
- [Sch80] **SCHMIDT G., PINNEKAMP L., WUNDER A.** 1980, *Optimum tooth profile correction of helical gears*, Proceedings International Power Transmission and Gearing Conference, San Francisco. Paper 80-C2/DET-110, 12 p.
- [Sea67] **SEAGER D.L.** 1967, *Some elastic effects in helical gear teeth*, PhD Thesis, University of Cambridge, 209 p.
- [Sei70] **SEIREG A., HOUSER D.R.** 1970, *Evaluation of dynamic factors for spur and helical gears*. Transactions of the ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 504-515.
- [Sen93] **SENER O.S., ÖZGÜVEN H.N.**, 1993, *Dynamic analysis of geared shaft systems by using continuous system model*, Journal of Sound and Vibration, Vol 166 N° 3, pp. 539-556..
- [Sik08] **SIKA G.** 2008, *Dynamique des transmissions en régime transitoire*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Villeurbanne, France, 216 p.
- [Som04] **SOMMERFELD A.** 1904, *Zur hydrodynamischen theorie des schiermittelreibung*, Z. Angew. Lath. Phys., Vol 50, pp. 97-155.
- [Spi021] **SPIETRI P.** 2002, *Introduction à la méthode des éléments finis*, Techniques de l'Ingénieur, Ref AF 504.
- [Spi022] **SPIETRI P.** 2002, *Présentation générale de la méthode des éléments finis*, Techniques de l'Ingénieur, Ref AF 505.
- [Spi023] **SPIETRI P.** 2002, *Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis*, Techniques de l'Ingénieur, Ref AF 503.
- [Swi31] **SWIFT H.W.** 1932, *The stability of lubricating films in journal bearings*, Proc. Inst. Civil Eng., Vol 233 Part 1, pp. 267-322.
- [The01] **THEODOSSIADES S., NATSIAVAS S.** 2001, *On geared rotordynamic systems with oil journal bearing*, Journal of Sound and Vibration, Vol 243 N° 4, pp. 721-745.

- 
- [Tie95] **TIEU A.K., QIU Z.L.** 1995, *Stability of finite journal bearings – from linear and nonlinear bearing forces*, ASME Tribology transactions, Vol 38 N° 3, pp. 627-635.
- [Tup58] **TUPLIN W.A.** 1958, *On Dynamic loads on gear teeth*, Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Gearing, London, pp. 24-30.
- [Ume69] **UMEZAWA K., ICHIKAWA J., HAYASHI K.** 1969, *Deflections due to a concentrated load on a cantilevered thick plate of finite length for gears*, Proceeding of the 2<sup>nd</sup> World Congress on gearing, Paris, pp. 615-626.
- [Ume86] **UMEZAWA K., SUZUKI T., HOUJOH H. , BAGIASNA K.** 1986, *Influence of misalignment on vibration of helical gear*, Bulletin of JSME, Vol 12 N° 53, pp.85-91.
- [Ume96] **UMEZAWA K., HOUJOH H., MATSUMURA S., WANG S., OHSHIMA S.** 1996, *Experimental investigation on modal behaviour of helical gear units with various ratio*, Proceeding of the 7<sup>nd</sup> ASME Power Transmission and Gearing Conference, San-Diego, pp. 509-517.
- [Vel88] **VELEX P.** 1988, *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon.
- [Vel91] **VELEX P., SAADA A.** 1991, *Modal analysis for the prediction of tooth loads in geared trains*, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> JSME International Conference on Motion and power Transmissions, Hiroshima, pp. 117-122.
- [Vel93] **VELEX P.** 1993, *Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages*, Chapitre 2 de “Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages”, CETIM Ed., pp. 39-95.
- [Vel961] **VELEX P., MATAAR M.** 1996, *A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic*, Journal of Sound and Vibration, 191(5), pp. 629-660.
- [Vel962] **VELEX P., AJMI M.** 1996, *On the modelling of excitations in geared systems by transmission errors*, Journal of Sound and Vibration, Vol 290, Issue 3-5, pp. 882-909.
- [Vel01] **VELEX P.** 2001, *Some problems in the modelling of gear dynamic behaviour*, The JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Fukuoka, Japan, pp. 45-50.
- [Ven00] **VENNER C.H., LUBRECHT A.A.** 2000, *Multi-level methods in lubrication*, Ed: D. Dowson, Tribology and Interface Engineering, Vol 37, 400 p.
- [Vij91] **VIJAYAKAR S.** 1991, *A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensionak contact problem*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 31, pp. 525-545.

- [Vil07] **VILLE F., VELEX P.** 2007, *Introduction du frottement sur les dentures dans la simulation du comportement dynamique de transmissions par engrenages*, 18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique.
- [Web50] **WEBER C., BANASCHEK K.**, 1950, *The deformation of loaded gears and the effect on their load-carrying capacity. Part 5*, London: Department of Scientific and Industrial Research (Sponsored Research (Germany)), Report N°6.
- [Wel70] **WELBOURN D.B.**, 1969-1970, *Gear errors and their resultant noise spectra*, Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol 184 Part 30, pp. 131-139.
- [Wel79] **WELBOURN D.B.**, 1979, *Fundamental knowledge of gear noise – A survey*, Conference of Noise and Vibrations of Engines and transmissions, Cranfield, Paper C117/79 pp. 9-29.

# Annexes

---

## Sommaire

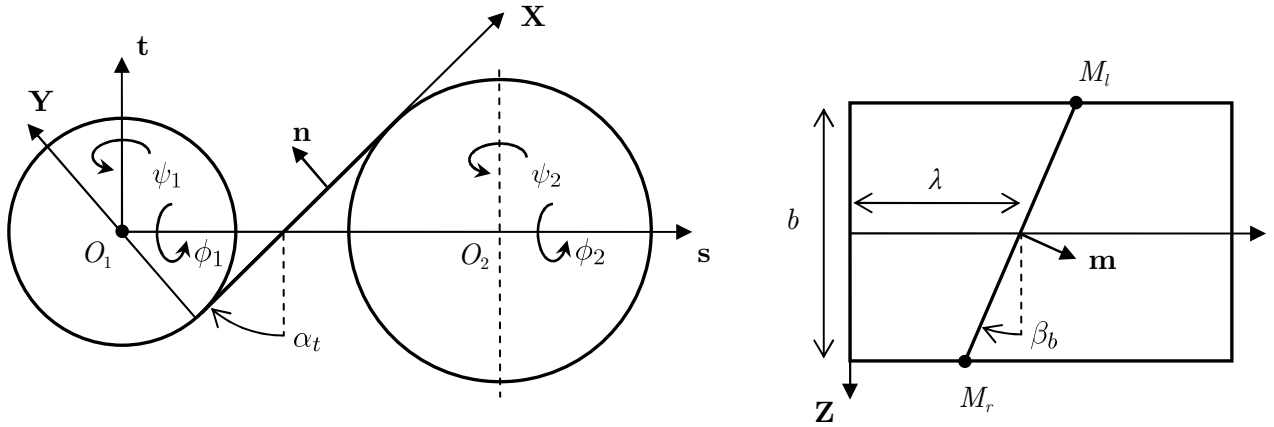
|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>ANNEXE A : Définition du facteur de mésalignement .....</b> | <b>178</b> |
| <b>ANNEXE B : Matrices des éléments d'arbre .....</b>          | <b>180</b> |
| B.1.    La matrice de masse.....                               | 180        |
| B.2.    La matrice de raideur .....                            | 181        |
| <b>ANNEXE C : Schémas de résolution.....</b>                   | <b>182</b> |
| C.1.    Le schéma implicite de NEWMARK .....                   | 182        |
| C.2.    La méthode de NEWTON-RAPHSON .....                     | 184        |
| C.2.1.  Cas unidimensionnel .....                              | 184        |
| C.2.2.  Extension au cas en dimension $n$ .....                | 185        |
| <b>ANNEXE D : Caractéristiques des huiles .....</b>            | <b>186</b> |
| D.1.    Masse volumique .....                                  | 186        |
| D.2.    Viscosité dynamique.....                               | 186        |
| D.3.    Viscosité cinématique .....                            | 187        |
| D.4.    Chaleur massique .....                                 | 187        |

## ANNEXE A : Définition du facteur de mésalignement

On s'intéresse aux déplacements en deux points distincts  $M_l$  et  $M_r$  situés à deux extrémités d'une même ligne de contact (voir fig. A.1), sous l'effet des petits déplacements induits par les rotations dues aux mouvements de corps solide des arbres dans les paliers. Ces déplacements sont caractérisés par des torseurs de petits déplacements :

$$\{S_k\} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_k(O_k) = v_k \mathbf{s}_0 + w_k \mathbf{t}_0 + u_k \mathbf{z}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_k = \phi_k \mathbf{s}_0 + \psi_k \mathbf{t}_0 \end{array} \right\}, \quad k = 1 \text{ pour le pignon et } k = 2 \text{ pour la roue}$$

On admet que les résultantes de ces torseurs ( $\mathbf{u}_k(O_k)$ ) ont pour effet de modifier l'entraxe du système ; alors que les moments ( $\boldsymbol{\omega}_k$ ) sont responsables de mésalignements des arbres et par conséquence du pignon et de la roue. Ces mésalignements,  $\phi_1^*, \psi_1^*, \phi_2^*$  et  $\psi_2^*$ , sont exprimés dans le repère  $(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{z})$ . Compte-tenu de la très faible modification d'orientation entre les repères  $(\mathbf{S}_0, \mathbf{T}_0, \mathbf{z})$  et  $(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{z})$ , nous ferons l'approximation  $\phi_1^* = \phi_1, \psi_1^* = \psi_1, \phi_2^* = \phi_2$  et  $\psi_2^* = \psi_2$ ,



**Fig. A.1** – Influence des rotations dues aux mésalignements sur la position de référence.

On définit alors le coefficient  $\kappa$  comme le projeté des déplacements induits par les petites rotations de corps solide dans la direction normale au contact (direction portée par  $\mathbf{m}$ ) :

$$\kappa = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{M}_l \mathbf{M}_r) \cdot \mathbf{m} - (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{M}_l \mathbf{M}_r) \cdot \mathbf{m} \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\mathbf{m} \begin{pmatrix} \cos \beta_b \\ 0 \\ \sin \beta_b \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}; \mathbf{Y}; \mathbf{z})} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{O}_1 \mathbf{M}_l \begin{pmatrix} \lambda - \frac{b}{2} \tan \beta_b \\ -R_{b1} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}; \mathbf{Y}; \mathbf{z})} \quad \mathbf{O}_1 \mathbf{M}_r \begin{pmatrix} \lambda + \frac{b}{2} \tan \beta_b \\ -R_{b1} \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}; \mathbf{Y}; \mathbf{z})} \quad (\text{A.3})$$

d'où

$$\mathbf{M}_l \mathbf{M}_r \begin{pmatrix} b \tan \beta_b \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}; \mathbf{Y}; \mathbf{z})} \quad (\text{A.4})$$

Or pour  $k = 1, 2$

$$\boldsymbol{\omega}_k \begin{pmatrix} \phi_k \\ \psi_k \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{S}; \mathbf{T}; \mathbf{z})} \quad (\text{A.5})$$

soit après changement de base

$$\boldsymbol{\omega}_k \begin{pmatrix} \phi_k \sin \alpha_t + \psi_k \cos \alpha_t \\ -\phi_k \cos \alpha_t + \psi_k \sin \alpha_t \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}; \mathbf{Y}; \mathbf{z})} \quad (\text{A.6})$$

alors,

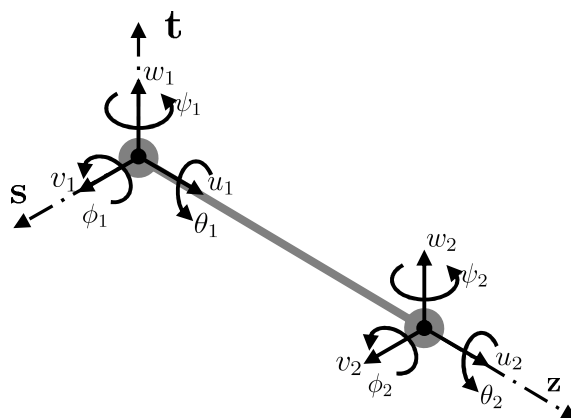
$$\boldsymbol{\omega}_k \wedge \mathbf{M}_l \mathbf{M}_r \begin{pmatrix} -b [-\phi_k \cos \alpha_t + \psi_k \sin \alpha_t] \\ b [\phi_k \sin \alpha_t + \psi_k \cos \alpha_t] \\ -b \tan \beta_b [-\phi_k \cos \alpha_t + \psi_k \sin \alpha_t] \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}; \mathbf{Y}; \mathbf{z})} \quad (\text{A.7})$$

Tout calcul effectué, le coefficient  $\kappa$  s'exprime

$$\kappa = \frac{b}{\cos \beta_b} [(\phi_1 - \phi_2) \cos \alpha_t + (\psi_2 - \psi_1) \sin \alpha_t] , \text{ avec } \beta_b \neq \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.8})$$

## ANNEXE B : Matrices des éléments d'arbre

Les éléments d'arbre utilisés sont des éléments à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud, tels que présenté sur la figure B.1. Ils intègrent les effets secondaires de cisaillement (modèle de Timoshenko) et ignorent les effets gyroscopiques. Les fonctions de forme sont affines pour les déplacements de traction-compression et de torsion, et cubiques pour les phénomènes de flexion.



**Fig. B.1** – Élément d'arbre à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud.

L'application des équations de LAGRANGE (1.5) conduit à la construction d'une matrice de masse  $[\mathbf{M}_S]$ , d'une matrice de raideur  $[\mathbf{K}_S]$  et éventuellement d'un terme source

### B.1. La matrice de masse

La matrice masse découle des termes dus à l'énergie cinétique dans les équations de LAGRANGE. Elle peut être décomposée en sous-matrices, chacune relative à un effet :

$$[\mathbf{M}_S] = [\mathbf{M}_{tc}] + [\mathbf{M}_T] + [\mathbf{M}_{Fs}] + [\mathbf{M}_{Ft}] \quad (\text{B.1})$$

où :

- l'indice « tc » se rapporte aux phénomènes de traction-compression ;
- l'indice « T » se rapporte aux phénomènes de torsion ;
- l'indice « Fs » se rapporte aux phénomènes de flexion suivant l'axe  $s$  ;
- l'indice « Ft » se rapporte aux phénomènes de flexion suivant l'axe  $t$  .

Les expressions de ces matrices sont, relativement à leurs degrés de liberté respectifs :

$$[\mathbf{M}_{tc}] = \frac{\rho SL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$[\mathbf{M}_T] = \frac{I_0 L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$[\mathbf{M}_{Fs}] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & 22L \\ Sym. & & & 4L^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$[\mathbf{M}_{Ft}] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & 22L \\ Sym. & & & 4L^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

## B.2. La matrice de raideur

De la même manière, la matrice de raideur découle des termes dus à l'énergie de déformation dans les équations de LAGRANGE. Elle peut être décomposée en sous-matrices, chacune relative à un effet :

$$[\mathbf{K}_S] = [\mathbf{K}_{tc}] + [\mathbf{K}_T] + [\mathbf{K}_{Fs}] + [\mathbf{K}_{Ft}] \quad (\text{B.6})$$

avec les mêmes notations indicielles que pour la matrice de masse.

$$[\mathbf{K}_{tc}] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$[\mathbf{K}_T] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$[\mathbf{K}_{Fs}] = \frac{EI_x}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & (4+a)L^2 & -6L & (2-a)L^2 \\ & & 12 & -6L \\ Sym. & & & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ \psi_1 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$[\mathbf{K}_{Ft}] = \frac{EI_x}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & (4+a)L^2 & -6L & (2-a)L^2 \\ & & 12 & -6L \\ Sym. & & & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_1 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Avec  $a = \frac{12EI_x}{GL^2S}$  coefficient traduisant l'influence du cisaillement sur la déformée de flexion.

## ANNEXE C : Schémas de résolution

Cette annexe est destinée à présenter les schémas de résolution que se retrouvent couplés dans la méthode décrite au chapitre 2, à savoir le schéma d'intégration temporelle de NEWMARK et l'algorithme de NEWTON-RAPHSON.

### C.1. Le schéma implicite de NEWMARK

Il s'agit d'un schéma d'intégration pas à pas dans le temps, construit à partir du développement en série de TAYLOR des vecteurs déplacement  $\mathbf{q}$  et vitesse  $\dot{\mathbf{q}}$  à l'instant  $t_{n+1}$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^3}{6} 6\beta \ddot{\mathbf{q}}_n + o(\Delta t^4) \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^2}{6} 2\beta \ddot{\mathbf{q}}_n + o(\Delta t^3) \quad (\text{C.2})$$

où :

- $\Delta t$  représente l'incrément de temps ;
- $\beta$  et  $\gamma$  sont des facteurs de pondération dont le but est de stabiliser la solution.

Par définition de la dérivation numérique, on a :

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{q}}_n}{\Delta t} \quad (\text{C.3})$$

En introduisant (C.3) dans (C.1) et (C.2), on obtient

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \right) \quad (\text{C.4})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \right) \quad (\text{C.5})$$

Ainsi

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_{n+1}) - \frac{\frac{1}{2} - \beta}{\beta} \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (\text{C.6})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \left( 1 - \gamma - \frac{\gamma}{\beta} \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) \quad (\text{C.7})$$

La stabilité inconditionnelle du schéma s'écrit :

$$\gamma \geq 0.5 \qquad \beta \geq \frac{1}{4} (0.5 + \gamma) \qquad (C.8)$$

La résolution de l'équation du mouvement  $[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{q}}_{n+1} + [\mathbf{K}] \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}$  se ramène à la relation matricielle :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\Delta \beta} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right] \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + [\mathbf{M}] \left( \frac{\frac{1}{2} - \beta}{\beta} \ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{\Delta t \beta} \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{q}_n \right) \\ + [\mathbf{C}] \left( \Delta t \left( \gamma + \frac{\gamma}{\beta} \left( \frac{1}{2\beta} \right) - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \mathbf{q}_n \right) \end{aligned} \quad (C.9)$$

En supposant  $\mathbf{F}_{n+1}$  connu, le système est linéaire et sa résolution permet de déterminer le vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{q}_{n+1}$  puis d'en déduire les vitesses et accélérations par les relations (C.6) et (C.7)

La réitération de cette opération au cours du temps permet de calculer les champs de déplacements, vitesses et accélérations des nœuds du modèle pour un effort imposé.

La stabilité de ce schéma est discutée dans [Ger96], et il en ressort que le couple  $\{\gamma = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4}\}$  est nécessaire pour un schéma inconditionnellement stable sans amortissement numérique ; ce qui revient à utiliser la valeur moyenne de l'accélération entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

La résolution est programmée de façon itérative selon l'algorithme décrit ci-dessous:

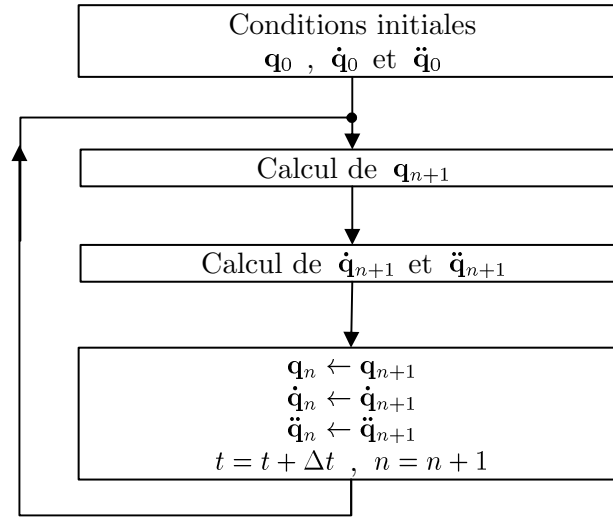


Fig C.1 – Procédure d'intégration pas à pas dans le temps

## C.2. La méthode de NEWTON-RAPHSON

La méthode de NEWTON-RAPHSON est fréquemment employée pour résoudre des équations non linéaires. Nous procéderons ici à une brève illustration dans le cas unidimensionnel, puis nous la généraliserons au cas de dimension  $n$ .

### C.2.1. Cas unidimensionnel

La méthode de NEWTON-RAPHSON consiste à chercher une approximation d'un zéro d'une fonction que nous considérerons ici d'une variable réelle, notée  $f : x \rightarrow f(x)$ . Ce zéro est noté  $\alpha$ .

$$f(\alpha) = 0 \quad (\text{C.10})$$

La technique est basée sur un développement en série de Taylor. Partant d'un point initial,  $x_0$ , choisi aussi proche de la solution que possible, le développement de  $f(x)$  au voisinage de  $x_0$  s'écrit, sous réserve que la fonction  $f$  soit suffisamment dérivable :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + O((x - x_0)^4) \quad (\text{C.11})$$

Ce développement, tronqué au premier ordre, s'écrit

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{C.12})$$

La résolution de (C.10) est alors remplacée par la résolution de (C.13) qui nous donne une solution approchée, notée  $x_1$ .

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \quad (\text{C.13})$$

Géométriquement, la solution à cette équation,  $x_1$ , est l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à  $f$  en  $x_0$ .  $x_1$  peut être réutilisé pour trouver une meilleure approximation, notée  $x_2$ , et ainsi de suite, tel que représenté sur la figure C.2

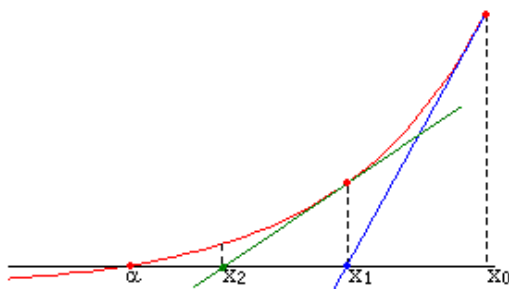


Fig C.2 – Illustration de la méthode de NEWTON-RAPHSON

Sous réserve que la fonction  $f$  soit dérivable, et de dérivée non nulle, en chacun des points, on construit une suite de points  $(x_n)$  dont la limite est la solution à l'équation (C.10), et définie par récurrence par :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (\text{C.14})$$

La récurrence se termine dès lors que  $x_{k+1}$  est suffisamment près de  $\alpha$ , ce qui peut se traduire par  $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$ . Cette condition peut aussi ne jamais se réaliser, par exemple si la dérivée à une itération donnée venait à s'annuler. Le nombre d'itérations réalisées doit alors être systématiquement contrôlé.

### C.2.2. Extension au cas en dimension $n$

Dans le cas d'une fonction  $F$  de la variable  $\mathbf{X}$ , de dimension  $n$ , de composantes  $x_1, \dots, x_n$ , et à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ , la méthode peut être généralisée.

En notant  $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ , la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $F(\mathbf{X})$  s'exprime :

$$F_i(\mathbf{X}) = F_i(\mathbf{X}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Delta x_j + O(\Delta \mathbf{X}^2) \quad (\text{C.15})$$

En supposant que  $F$  soit dérivable, on appellera jacobienne la matrice, notée  $[\mathbf{J}]$ , dont les composantes sont :

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (\text{C.16})$$

Par un raisonnement similaire au cas unidimensionnel, on construit une suite de vecteurs  $(\mathbf{X}_n)$  définie par :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \Delta \mathbf{X} \quad (\text{C.17})$$

où  $\Delta \mathbf{X}$  est solution du système linéaire

$$[\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)] \delta \mathbf{X} = -F(\mathbf{X}_k) \quad (\text{C.18})$$

Un processus itératif analogue à celui du cas unidimensionnel est alors initié, avec réactualisation de la matrice jacobienne à chaque itération, jusqu'à convergence.

## ANNEXE D : Caractéristiques des huiles

Les relations présentées dans cette annexe sont celles qui ont été utilisées dans le modèle avec prise en compte d'effets thermiques dans les paliers. Il a été considéré que la viscosité dynamique, la masse volumique et la chaleur massique des huiles étaient des fonctions de la température, ici notée  $T$ .

### D.1. Masse volumique

D'après l'ISO/TF 15144-1 :2009, pour les huiles minérales, la masse volumique,  $\rho$  en  $kg/m^3$  à la température  $T$ , ici en  $^{\circ}C$  peut être approximée par :

$$\rho(T) = \rho(15) \left( 1 - 0.7 \frac{(T + 273) - 289}{\rho(15)} \right) \quad (D.1)$$

$$\rho(15) = 43.37 \log \nu(40) + 805.5 \quad (D.2)$$

avec

- $\rho(15)$  la masse volumique à  $15^{\circ}C$  ;
- $\nu(40)$  la viscosité cinématique à  $40^{\circ}C$ .

soit finalement :

$$\rho(T) = 816.7 - 0.7T + 43.37 \log \nu(40) \quad (D.3)$$

### D.2. Viscosité dynamique

Toujours d'après l'ISO/TF 15144-1 :2009, pour les huiles minérales, la viscosité dynamique,  $\mu(T)$  en  $N.s/m^2$  à la température  $T$  peut être approximée par :

$$\mu(T) = 10^{-6} \nu(T) \rho(T) \quad \text{Avec } \nu(T) = 10^{10^A \log(T+273)+B} - 0.7 \quad (D.4)$$

$$A = \frac{\log \left( \frac{\log(\nu(40)+0.7)}{\nu(100)+0.7} \right)}{\log \left( \frac{313}{373} \right)} \quad B = \log(\log(\nu(40) + 0.7)) - A \log(313) \quad (D.5)$$

### D.3. Viscosité cinématique

Voir le tableau suivant :

| huile      | $\nu(40) [mm^2/s]$ | $\nu(100) [mm^2/s]$ | Indice de viscosité |
|------------|--------------------|---------------------|---------------------|
| ISO VG 100 | 100                | 11.384              | 100                 |

### D.4. Chaleur massique

L'ISO/TR 15144-1 :2009 ne donne pas de formule de calcul de la chaleur massique des huiles minérales en fonction de la température.

Les formules utilisées sont des fonctions affines de la température.