HAL
open science

Ecoulements critiques et plantes

Alexandre Ponomarenko

To cite this version:

Alexandre Ponomarenko. Ecoulements critiques et plantes. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT : 2012PAO66267 . tel-00833463

HAL Id: tel-00833463

https://theses.hal.science/tel-00833463v1

Submitted on 12 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité
Physique des liquides

Présentée par

Alexandre Ponomarenko

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Écoulements critiques et plantes

Sera soutenue le 16 février 2012 devant le jury composé de :

M.	Xavier Noblin	Rapporteur
M.	Yves Brunet	Rapporteur
Mme	Martine Ben Amar	Présidente
M.	Christophe Clanet	Directeur de thèse
M.	David Quéré	Directeur de thèse
M.	Stéphane Douady	Invité
M.	Bruno Moulia	Invité

Table des matières

1 Modélisation physique des milieux condensés **5**
1.1 Capillarité . . . 6
1.1.1 La tension de surface . . . 6
1.1.2 Loi de Laplace . . . 7
1.1.3 Mouillage . . . 9
1.1.4 Ascension capillaire dans un tube . . . 10
1.2 Élasticité . . . 13
1.2.1 Loi de Hooke . . . 13
1.2.2 Flambage d'Euler . . . 15

I Ascension capillaire et montée de la sève **21**

2 Ascension capillaire dans les coins **23**
2.1 Introduction . . . 23
2.2 Ascension capillaire dans un coin . . . 26
2.3 Le modèle de l'orgue . . . 30
2.4 Une loi universelle . . . 33
2.5 Conséquences pour un milieu poreux . . . 34
2.6 Ascension capillaire dans des rameaux . . . 36
2.7 Conclusion . . . 41

II Vitesse critique de verse **43**

3 La verse de structures groupées **49**
3.1 L'expérience . . . 50
3.2 Vitesse critique pour un ensemble de plaques . . . 51
3.3 Prévention du phénomène de verse . . . 52
3.4 Conclusion . . . 53

4 La verse géométrique des structures élancées courbées **55**
4.1 Le mètre à ruban . . . 56
4.1.1 Faits remarquables . . . 56
4.1.2 Le pli . . . 61
4.2 Expérience de flambage . . . 62
4.3 Modèle . . . 66
4.3.1 Transition d'état liquide-gaz . . . 66
4.3.2 Transition d'état du ruban . . . 68

4.3.3 Comparaison aux expériences . . . 72
4.4 Pli déclenché par un couple . . . 74
4.4.1 Expériences de flexion . . . 74
4.4.2 Expériences en soufflerie . . . 77
4.5 Perspectives . . . 82
4.5.1 Longueur de transition . . . 82
4.5.2 Bourrasque . . . 86
4.6 Conclusion . . . 89

5 Le verse géométrique de structures tubulaires 91
5.1 Motivation . . . 92
5.2 Expériences . . . 93
5.3 Discussion . . . 99
5.4 Conclusion . . . 101

6 La verse par flexion des structures élancées fragiles 103
6.1 Motivations physiologiques . . . 103
6.1.1 Vitesse critique de verse . . . 103
6.1.2 Types de verse . . . 107
6.1.3 Organisation du chapitre . . . 107
6.2 Expériences . . . 108
6.2.1 Résultats . . . 108
6.2.2 Résumé des expériences . . . 112
6.3 Modèle . . . 113
6.3.1 Critère de rupture classique . . . 113
6.3.2 Critère de Griffith . . . 114
6.4 Retour à la physiologie . . . 117
6.4.1 Flambage sous son propre poids . . . 117
6.4.2 Détermination de la vitesse de vent critique . . . 118
6.5 Conclusion . . . 120

7 Une variante : la torsion 123
7.1 Motivation physiologique . . . 123
7.2 Expérience . . . 124
7.3 Analyse . . . 126
7.4 Retour à la physiologie . . . 127

III Annexes 131

A Rayon de courbure d'une structure élancée encastrée 133

B Courbure d'une structure élancée soumise à une force aérodynamique 137
B.1 Direction de la force sur une structure élancée . . . 137
B.1.1 La soufflerie conventionnelle . . . 137
B.1.2 La soufflerie du pauvre . . . 138
B.2 Résultats expérimentaux . . . 140
B.2.1 Mesure de la traînée . . . 140
B.2.2 Direction de la force aérodynamique . . . 141

B.2.3 Déformées des tiges de bois 142
B.3 Courbure de la structure élancée sous l'effet de la force aérodynamique 143

C Propriétés des tiges 147
C.1 Propriétés du bois en général 147

D Article 153

Introduction

Ce travail de thèse s'attache à étudier des phénomènes de physiologie végétale avec une approche de physicien. L'espoir de comprendre certaines propriétés du vivant avec des outils physiques a été stimulé par D'Arcy Thompson 1917 [1] dans le livre "On growth and form" qui montre que plusieurs propriétés des êtres vivants, animaux et plantes, peuvent être décrites avec des outils mathématiques et comprises avec des lois physiques.

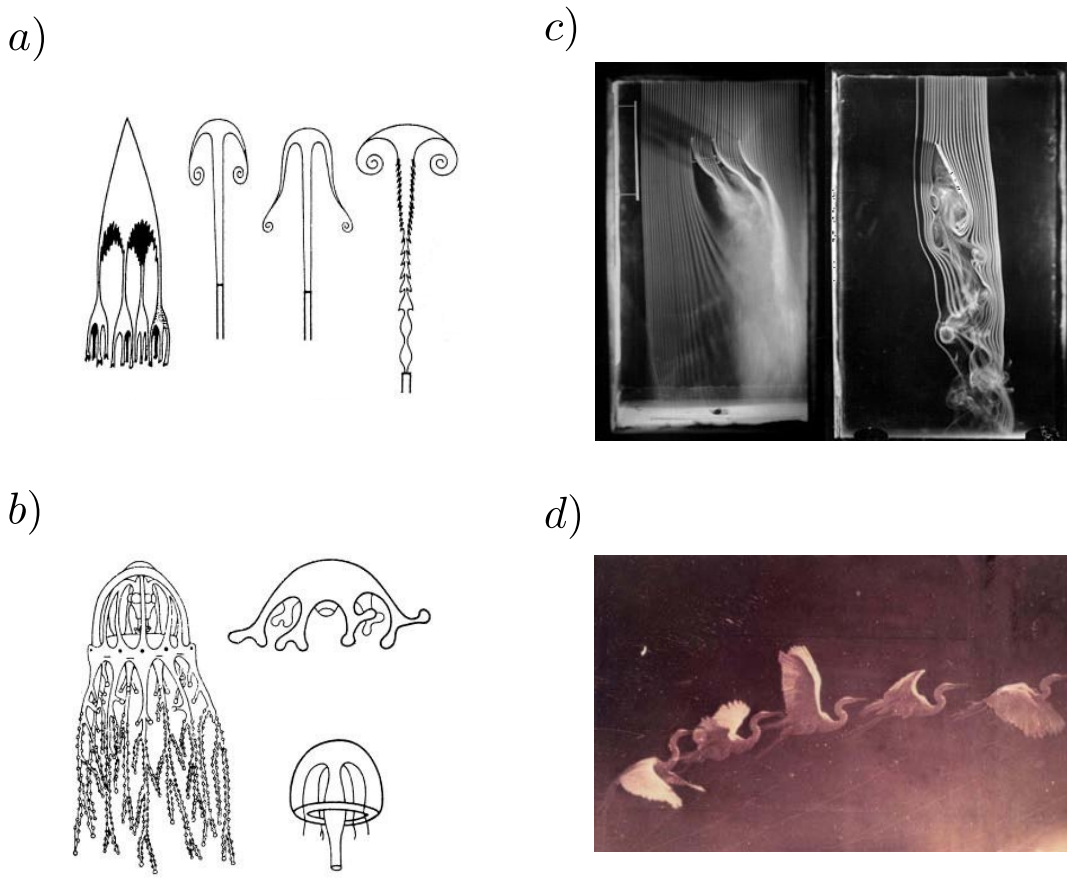


FIGURE 1 – D'Arcy Thompson : analogie entre $a)$ la forme d'impact de gouttes et de jets d'eau dans de l'eau et $b)$ la morphologie des méduses. Chronophotographies d'Étienne-Jules Marey : $c)$ écoulements d'air déformés par un obstacle. $d)$ envol d'un pélican, chronophotographies.

Dans l'étude du monde animal, la volonté de comprendre la circulation sanguine a motivé l'approche physique en physiologie et mené aux premières expériences sur l'ascension capillaire : Jurin 1718 [2], Young 1805 [3] et Drake 1772 [4]. Au $19^{\text{ème}}$siècle, toujours dans le cadre de

l'étude de la circulation sanguine, Poiseuille 1846 [5] introduit le concept de viscosité pour expliquer la vitesse des écoulements dans les canaux. Marey 1885 [6] s'intéresse à la description du mouvement, aux muscles, aux écoulements d'air et à la circulation sanguine. Pour mener ces études il développe de nouveaux outils de mesure : la chronophotographie avec le "fusil photographique", la soufflerie avec utilisation de la fumée pour visualiser les écoulements d'air et le sphygmographe pour la mesure de la pression sanguine. Plus récemment, l'approche physique a été utilisée pour des recherches en médecine, par exemple les ondes de pouls, Lighthill 1987 [7] et les anévrismes, Duclaux 2006 [8].

L'approche physique en physiologie porte sur toute l'échelle du vivant : de la molécule au groupe d'individus. À l'échelle des molécules, les expériences de traction sur la molécule d'ADN, Croquette 1996 [9], montrent le lien entre l'enroulement de la molécule d'ADN et son élasticité, ce qui est intimement lié à sa capacité de réplication. Les travaux de Stone 2010 [10] et Barthès-Biesel [11] s'appliquent eux aux déformations des cellules. Le passage de la cellule à l'organe est illustré par les mécanismes de morphogénèse, dont une approche possible est celle de Turing 1952 [12]. Ces mécanismes sont aussi étudiés dans le cadre de la croissance des tissus mous et notamment des tumeurs, Ben Amar 2010 [13]. Les formes des organes peuvent être comprises par des modèles simples d'élasticité et reproduites par des expériences de physique utilisant ces modélisations. Par exemple, la formation de rides sur des structures multicouches peut être utilisée pour expliquer les volutes du cerveau, la forme de certains coraux ou la formation des empreintes digitales, Boudaoud 2008 [14], voir la figure 2, mais aussi les rides de la peau animale et des structures végétales, Mahadevan 2003 [15]. Les différentes fonctions remplies par ces organes sont aussi étudiées d'un point de vue physique, par exemple la production du son chez la cigale, Sueur 2006 [16]. Une fonction très importante dans le monde animal est la locomotion. Il y a la nage, Marais 2011 [17], le vol : étude des élytres et ailes des coléoptères Frantsevich 2005 [18], des ailes de chauve-souris, Breuer 2005 [19] et tout particulièrement de l'élasticité des ailes en général, Ramananarivo 2011 [20]. Il y a aussi le saut, par exemple l'étude des crickets par Burrows 2003 [21]. Et enfin il y a un intérêt pour le comportement de groupes d'individus : bancs de poissons, Krause 2000 [22] et nuées d'oiseaux Ginelli 2010 [23].

Pour l'étude des végétaux, l'approche du physicien permet aussi de mettre en évidence la présence des mécanismes physiques en jeu. Au niveau de l'anatomie des plantes, la phyllotaxie (qui est la position des bourgeons sur la plante) est dictée par l'apparition plus ou moins rapide des bourgeons lors de la croissance de la plante, Hofmeister 1867 [24] et Reinhardt 2003 [25]. Ce phénomène est illustré d'un point de vue physique par l'expérience de Douady 1996 [26] qui consiste à déposer des gouttes de ferro-fluide qui se repoussent sur une surface plane circulaire, le tout placé dans un champ magnétique qui crée une force radiale sur les gouttes, dirigée du centre vers l'extérieur. Les positions prises par les gouttes sont semblables à celles prises par les bourgeons, figure 3. Lorsque la fréquence à laquelle les gouttes sont émises est faible, figure 3 d), chaque nouvelle goutte ne ressent que la force de répulsion de la goutte émise précédemment, elle part donc à l'opposé. Et les gouttes se placent sur un diamètre de la surface circulaire. Au niveau de la phyllotaxie, cela correspond à un positionnement alterné de bourgeons sur une tige, figure 3 a). Si par contre la fréquence d'émission des gouttes est élevée, alors une goutte entrante ressent plusieurs gouttes qui l'ont précédé, donc la nouvelle goutte ne part pas à l'opposé de celle qui la précède, mais avec un angle φ, figure 3 e). Cette expérience permet de montrer que le critère important pour la phyllotaxie est la vitesse d'apparition des bourgeons.

Au niveau des vaisseaux conducteurs de sève, l'approche physique de la formation de ces vaisseaux de sève dans les feuilles a été faite par Corson 2009 [27]. La question de la distribution des vaisseaux est soulignée par Zwieniecki 2006 [28] et Noblin 2008 [29]. Et une approche

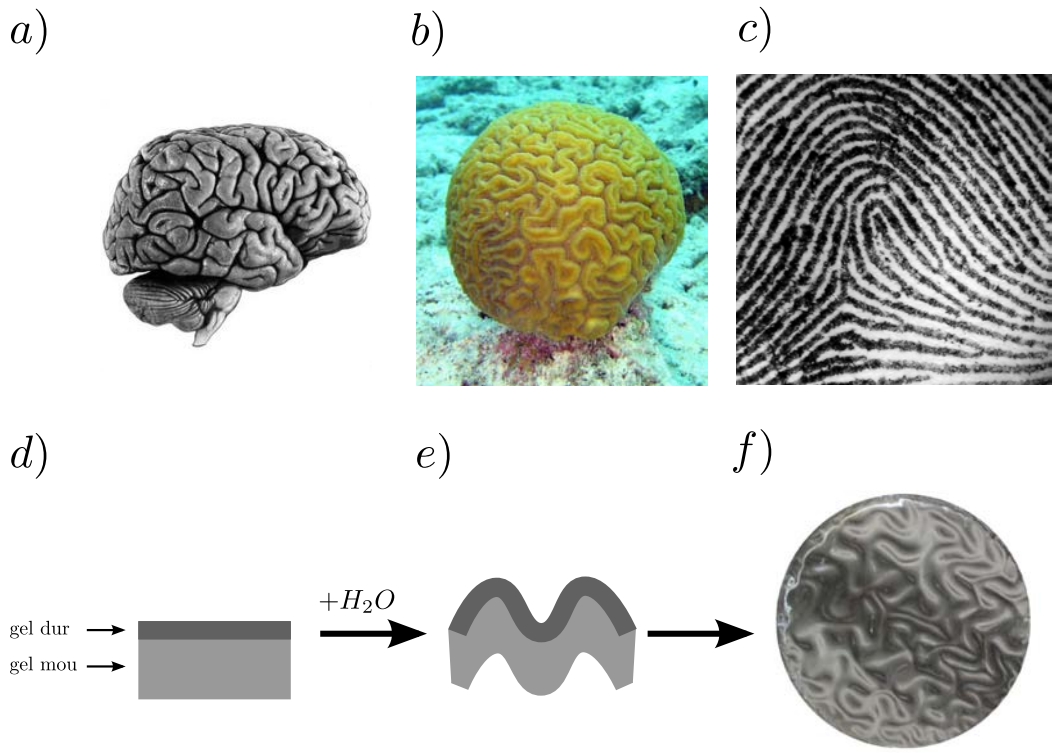


FIGURE 2 – Formation de rides sur des structures multicouches et comparaison à des systèmes vivants. a) Cerveau humain. b) Corail. c) Empreinte digitale. De d) à f) : expérience de formation de rides sur une structure multicouches, Boudaoud 2008 [14] : d) la structure multicouche est composée d'un gel dur et d'un gel mou, e) de l'eau est ajoutée à l'ensemble, elle est absorbée principalement par le gel dur qui se gonfle et provoque les rides, qui sont observées du dessus sur la photo f) où les parties claires représentent les creux et les parties sombres représentent les bosses.

physique du problème de cavitation de la sève dans les vaisseaux des plantes est réalisée par l'étude de la cavitation de l'eau dans des canaux d'hydrogel, Stroock 2008 [30] ou des cavités dans de l'hydrogel, Marmottant 2012 [31]. L'étude des formes des feuilles est faite par analogie avec celle de plaques minces en mécanique, Roman 2003 [32], Moulia 2000 [33] et Couturier 2009 [34]. Le flambage de plaques minces pré-contraintes est utilisé pour comprendre le fonctionnement des plantes carnivores, telles l'utriculaire, Vincent 2011 [35] ou la dionée, Forterre 2011 [36]. Le rôle important de la poroélasticité dans les mouvements des plantes est souligné par Dumais 2012 [37]. À l'échelle de la plante, les modèles mécaniques permettent d'interpréter la forme des individus Greenhill 1881 [38] et MacMahon 1983 [39] et leurs réponses aux sollicitations extérieures : la gravité, Bastien 2010 [40] ou bien le vent, Moulia 2004 [41], Rodriguez 2008 [42] et de Langre 2008 [43]. Le pont entre physiologie et physique est aussi fait pour l'étude des groupes d'individus, forêts ou champs, dans le cas de la compétition pour la lumière et le contact entre arbres, Holbrook 1989 [44], ou dans le cas de la compétition pour la lumière dans les champs de céréales, Aikman 1994 [45]. Un domaine d'étude important est celui de l'interaction des arbres avec le vent, Coutts 1995 [46].

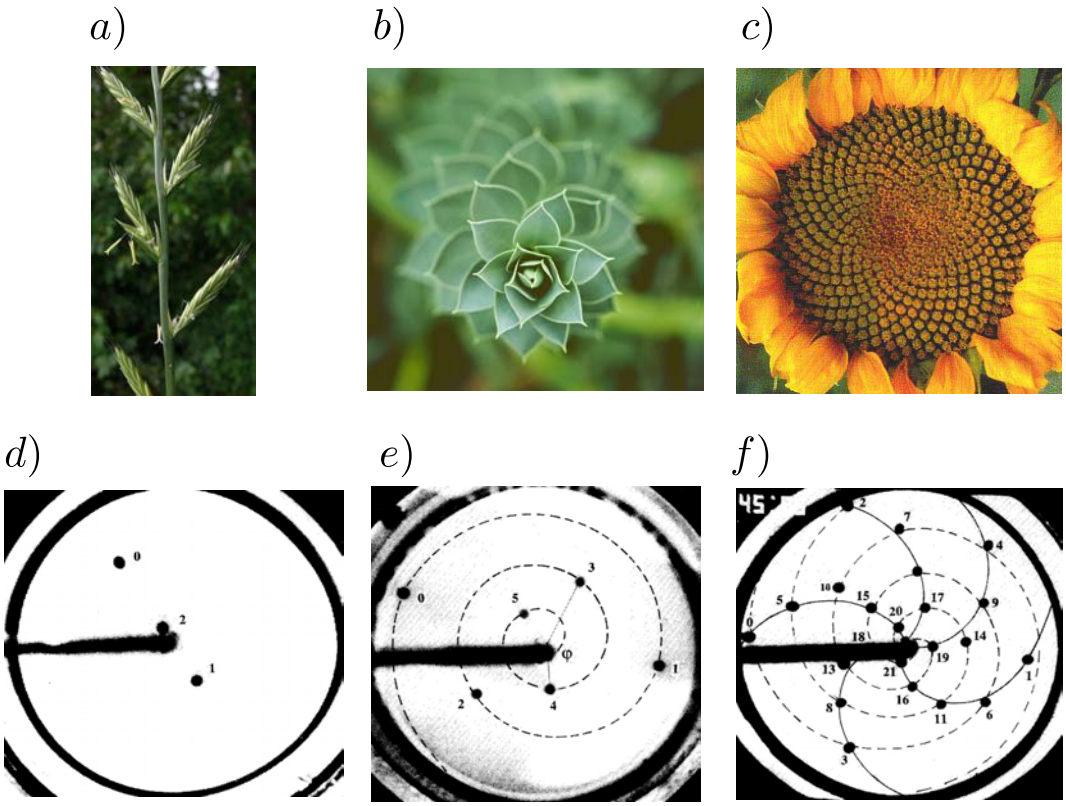


FIGURE 3 – Phyllotaxie. Différentes dispositions des bourgeons : a) lolium perenne. b) echeveria. c) Fleur de tournesol. Sur les images d), e) et f) des gouttes de ferro-fluides sont introduites dans un champ magnétique radial, Douady 1996 [26]. Les gouttes exercent des forces répulsives entre elles et le champ magnétique les entraine du centre du disque vers son périmètre. De d) à e) la fréquence d'émission des gouttes est augmentée.

Dans cet esprit, cette thèse de physique appliquée à la physiologie végétale s'intéresse à deux phénomènes : l'ascension capillaire dans des vaisseaux embolisés traitée dans le chapitre 2 et la verse des plantes sous le vent étudiée dans les chapitres 3, 4, 5, 6 et 7.

Chapitre 1

Modélisation physique des milieux condensés

Sommaire

1.1 Capillarité **6**
1.1.1 La tension de surface 6
1.1.2 Loi de Laplace 7
1.1.3 Mouillage 9
1.1.4 Ascension capillaire dans un tube 10
1.2 Élasticité **13**
1.2.1 Loi de Hooke 13
1.2.2 Flambage d'Euler 15

Dans ce chapitre, nous présentons les modèles physiques utilisés pour décrire les objets que nous étudions : les solides et les liquides, qui sont des phases condensées.

Dans une phase condensée, les molécules subissent deux forces : une force attractive à longue portée due aux interactions entre dipôles (forces de van der Waals) et une force répulsive à courte portée qui est due à la non pénétrabilité de la matière (principe d'exclusion de Pauli). Le potentiel de Lennard-Jones réunit ces deux interactions :

$$E_p(r) = 4U\left(\left(\frac{l}{r}\right)^{12} - \left(\frac{l}{r}\right)^{6}\right) \tag{1.1}$$

où l est la taille des molécules, U leur énergie d'interaction et r est la distance entre les molécules. L'allure du potentiel de Lennard-Jones est représentée sur la figure 1.1

Il y a une position d'équilibre entre les molécules lorsque le potentiel est minimum : pour $r_e = 2^{1/6}l$. Et alors l'énergie potentielle vaut $E_r(r_e) = -U$. Pour séparer les deux molécules, il faut fournir l'énergie U. La distance r_e est la distance entre molécules dans une phase condensée. Elle est de l'ordre de 10^{-9} m.

Au niveau moléculaire, la température se traduit par l'agitation des molécules autour de leur position d'équilibre. L'agitation moléculaire apporte l'énergie supplémentaire k_BT aux molécules, avec T la température et $k_B = 1.38.10^{-23}$ J.K^{-1} la constante de Boltzmann. Les molécules oscillent autour de leur position d'équilibre d'une distance δr, qui est telle que :

$$E_p(r_e + \delta r) = -U + k_BT \tag{1.2}$$

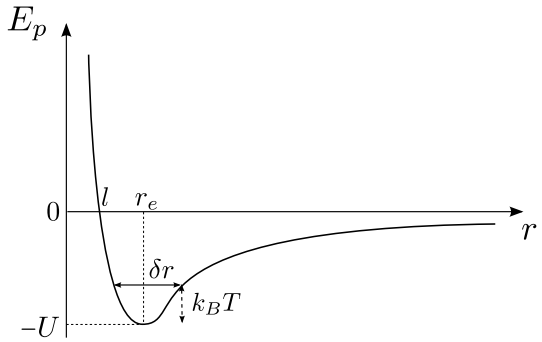


FIGURE 1.1 – Allure du potentiel de Lennard-Jones : potentiel d'interaction entre deux molécules.

et en développant le potentiel de Lennard-Jones au second ordre, E_p peut aussi s'écrire :

$$E_p(r_e + \delta r) = E_p(r_e) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial r^2}\right)_{r=r_e} \delta r^2 = -U + \frac{\delta r^2}{2}\frac{U}{{r_e}^2} \tag{1.3}$$

En identifiant les deux potentiels 1.2 et 1.3 nous pouvons obtenir la distance d'oscillation des molécules autour de leur position d'équilibre :

$$\frac{\delta r}{r_e} = \sqrt{\frac{k_B T}{U}} \tag{1.4}$$

La mobilité des molécules autour de leur position d'équilibre varie avec le rapport de l'énergie d'agitation thermique et de l'énergie d'interaction entre les molécules. Selon les valeurs de ce rapport, la matière peut être sous trois états différents :

- solide lorsque $k_BT \ll U$, alors $\delta r \ll r_e$: les molécules sont figées les unes par rapport aux autres et ne font qu'osciller autour de leur position d'équilibre.

- liquide lorsque $k_BT \sim U$, ici $\delta r \sim r_e$: les molécules restent à des distances les unes des autres proches de r_e mais cette fois sont très mobiles et peuvent se réarranger.

- gaz lorsque $k_BT \gg U$, cette fois-ci $\delta r \gg r_e$: les molécules sont très éloignées les unes des autres.

1.1 Capillarité

1.1.1 La tension de surface

Sur la figure 1.2 nous représentons une phase condensée de volume Ω et de surface Σ.

Pour calculer l'énergie de cette phase condensée E, nous nous limitons à l'interaction entre une molécule et ses six plus proches voisines. Lorsque deux molécules sont appariées, l'énergie varie de $-U$. Donc l'énergie totale est $-U/2$ fois le nombre de faces accolées. Le nombre total de molécules dans le volume Ω est $\frac{\Omega}{r_e^3}$, il y a donc $6\frac{\Omega}{r_e^3}$ faces. Mais celles de la surface ne sont pas appariées et elles sont au nombre de $\frac{\Sigma}{r_e^2}$. L'énergie E de la phase condensée est :

$$E = -6\frac{U}{2}\frac{\Omega}{r_e^3} + \frac{U}{2}\frac{\Sigma}{r_e^2} \tag{1.5}$$

Pour un volume donné de phase condensée, cette énergie est d'autant plus faible que la surface Σ est petite. Il est difficile de séparer une phase condensée en deux, car cela coûte

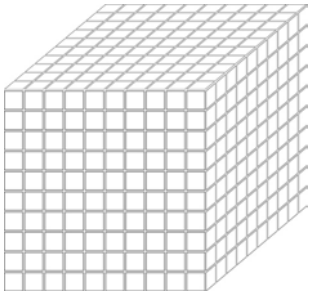


FIGURE 1.2 – Modélisation d'une phase condensée de volume Ω et de surface Σ.

une énergie proportionnelle à la surface créée. Et si la phase condensée est un liquide dont les molécules sont libres de se réarranger, alors elles peuvent le faire de façon à minimiser l'énergie liée à la surface Σ. Le coefficient de proportionnalité entre l'énergie et la surface est appelé la tension de surface γ et s'exprime en J/m^2. La tension de surface est liée à l'énergie d'interaction entre molécules :

$$\gamma = \frac{U}{2{r_e}^2} \tag{1.6}$$

Dans le cas des liquides, $U \sim k_B T$. En prenant T = 20°C et $r_e \sim 3\mathring{A}$, $\gamma \sim 20$ mJ/m^2. Pour les liquides usuels, les tensions de surface sont de l'ordre de la dizaine de mJ/m^2. Par exemple pour l'eau : γ = 70 mJ/m^2 et pour les huiles que nous allons utiliser dans les expériences qui vont suivre, $\gamma \sim 20$ mJ/m^2. Remarquons aussi que l'unité de la tension de surface, le J/m^2 est aussi le N/m : la tension de surface peut aussi être vue comme une force linéique.

C'est la tension de surface qui confère à une goutte de pluie sa forme sphérique, par contre l'eau dans un verre ou dans les océans ne forme pas d'immenses sphères. C'est parce qu'à ces échelles la gravité joue un rôle plus important que la tension de surface. Prenons une goutte de rayon a, son énergie de tension de surface est $\mathscr{E}_\gamma \sim \gamma a^2$ et son énergie potentielle de pesanteur est $\mathscr{E}_p \sim mga$ et avec $m = \rho a^3$, $\mathscr{E}_p \sim \rho g a^4$. L'équilibre entre ces deux énergies donne la longueur pour laquelle la force de tension de surface est aussi importante que la force de gravité :

$$a \sim \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \tag{1.7}$$

Pour l'eau, ρ = 1000 kg/m^{-3}, γ = 73 mJ/m^2 et g = 9.81 m/s^2, donc $a = 2.7mm$. Si la goutte est plus grande que cette longueur, sa forme sera dictée par les effets de la gravité et si la goutte est plus petite que cette longueur alors sa forme sera dictée par les effets de tension de surface. Cette quantité a est appelée la longueur capillaire, car les effets de tension de surface deviennent importants pour des objets dont les tailles caractéristiques sont plus petites que a, submillimétriques, typiquement l'épaisseur d'un cheveu.

1.1.2 Loi de Laplace

La tension de surface est à l'origine de la variation de pression à la traversée des surfaces courbées. Si on réalise l'expérience qui consiste à relier une bulle à un tube, comme on le voit sur la figure 1.3 et que l'on met ainsi la bulle en contact avec l'atmosphère, celle-ci se vide. Ce qui indique que la bulle est en surpression par rapport à l'atmosphère qui l'entoure : $P_b > P_0$, où P_b est la pression dans la bulle et P_0 celle de l'atmosphère.

Si on relie deux bulles de tailles différentes, figure 1.4, c'est la plus petite qui se vide dans la plus grande. On en déduit que plus une bulle est petite plus la surpression qui y règne est importante.

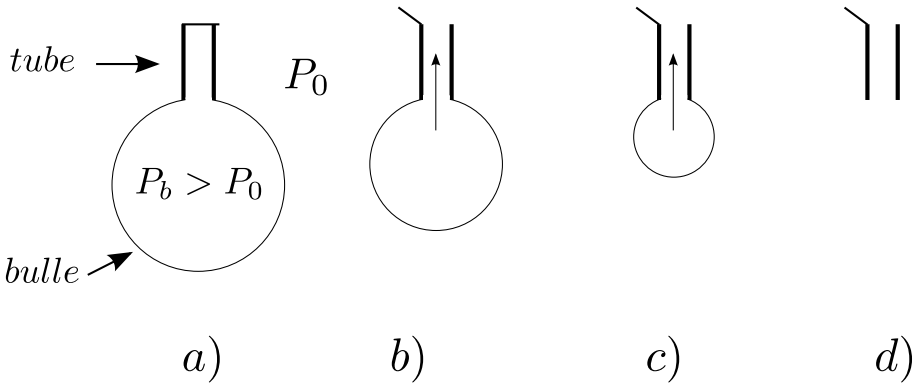


FIGURE 1.3 – Une bulle est reliée à l'atmosphère par l'intermédiaire d'un tube. Sous l'effet de la différence de pression, la bulle se vide. a) le tube est fermé. b) et c) le tube est ouvert et la bulle se vide. d) la bulle a disparu.

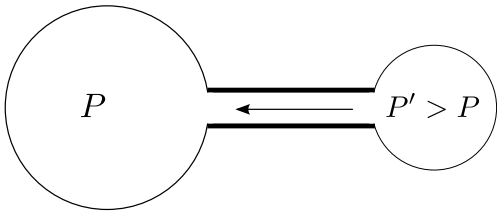


FIGURE 1.4 – Deux bulles reliées ensemble par un tube. La bulle la plus petite se vide dans la plus grande.

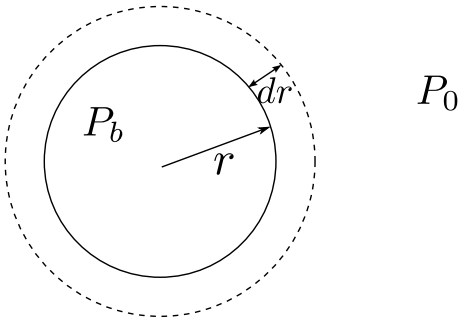


FIGURE 1.5 – Variation de pression à la traversée d'une interface sphérique.

On peut exprimer la variation de pression dans la bulle en calculant le travail associé à la variation de son volume (voir la figure 1.5) :

$$\delta W \sim (P_b - P_0)dV + 2\gamma dS \tag{1.8}$$

où dV est la variation de volume : $dV = d(4\pi r^3/3) = 4\pi r^2 dr$ et dS est la variation de surface : $dS = d(4\pi r^2) = 8\pi r dr$. Le facteur 2 devant la tension de surface est dû à la présence de deux interfaces dans le cas des bulles. La condition d'équilibre est $\delta W = 0$, soit

$$P_b - P_0 = \frac{4\gamma}{r} \tag{1.9}$$

La bulle est bien en surpression. Et plus son rayon est petit plus la surpression est grande. D'une façon plus générale, on peut calculer la variation de pression pour une interface quelconque, c'est la loi de Laplace :

$$\Delta P = \frac{\gamma}{R} \tag{1.10}$$

où $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ est la courbure de l'interface avec R_1 et R_2 ses rayons de courbure principaux.

1.1.3 Mouillage

Le mouillage est l'étude de l'étalement d'un liquide sur un solide. Quand on pose une goutte sur une surface, on peut observer différentes situations, certaines sont schématisées sur la figure 1.6 :

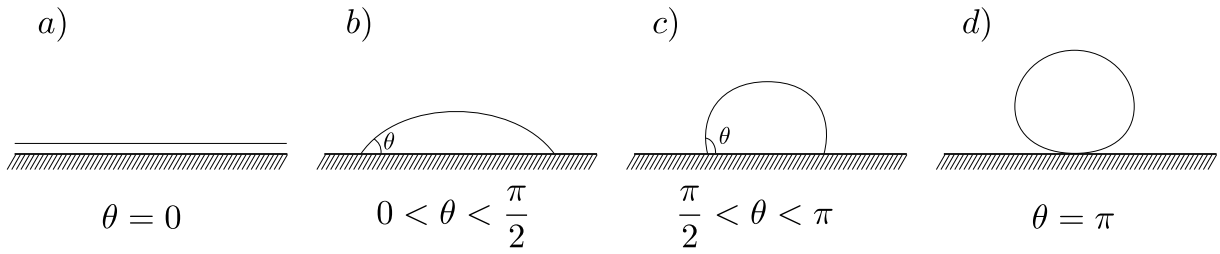


FIGURE 1.6 – Goutte posée sur un substrat. a) Situation superhydrophile. b) Situation hydrophile. c) Situation hydrophobe. d) Situation superhydrophobe.

Les formes prises par la goutte varient entre deux extrêmes, la situation a) où la goutte s'étale entièrement sur la surface et la situation d) où la goutte reste sphérique et ne s'étale pas du tout sur la surface. En a), on parle de surface superhydrophile et en d) on parle de surface superhydrophobe. Pour quantifier ce mouillage, on mesure l'angle θ que fait la surface de la goutte avec la surface du solide au niveau du contact. On appelle θ, l'angle de contact. Lorsque $0 < \theta < \pi/2$ la situation est dite hydrophile ou mouillante [figure 1.6 b)] et lorsque $\pi/2 < \theta < \pi$ la situation est dite hydrophobe ou non mouillante [figure 1.6 c)].

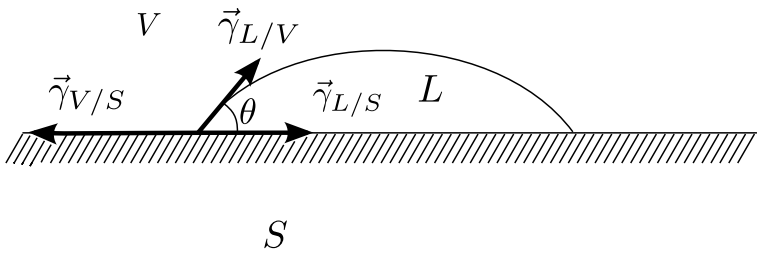


FIGURE 1.7 – Goutte de liquide L posée sur une surface S, entourée d'un gaz V.

La valeur de θ est liée aux tensions de surface mises en jeu. Sur le schéma 1.7 est dessinée une goutte de liquide L posée sur une surface S, le tout entouré d'un gaz V. La goutte a un angle de contact θ avec la surface. On note respectivement $\gamma_{L/V}$, $\gamma_{L/S}$ et $\gamma_{V/S}$ les tensions de surface entre les différents milieux. Elles génèrent des forces linéiques qui leur sont proportionnelles et dirigées le long de l'interface entre les deux milieux, ce que nous avons aussi représenté sur le schéma. La goutte est à l'équilibre, on a donc équilibre des forces :

$$\gamma_{L/V} \cos\theta + \gamma_{L/S} = \gamma_{V/S} \tag{1.11}$$

Et on peut écrire l'équation de Young [3] :

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{V/S} - \gamma_{L/S}}{\gamma_{L/V}} \tag{1.12}$$

qui indique que θ varie de 0° à 180° suivant les combinaisons des tensions de surface. On voit notamment que pour $\gamma_{V/S} > \gamma_{L/S}$ on a $0 < \theta < \pi/2$, on est en situation mouillante et pour $\gamma_{V/S} < \gamma_{L/S}$ on a $\pi/2 < \theta < \pi$, on est en situation non mouillante.

1.1.4 Ascension capillaire dans un tube

Si on approche un tube d'un réservoir de liquide et que le rayon r de ce tube est petit devant la longueur capillaire du liquide a alors, dans le tube, la force capillaire est plus importante que la force de gravité et on peut s'attendre à une ascension du liquide.

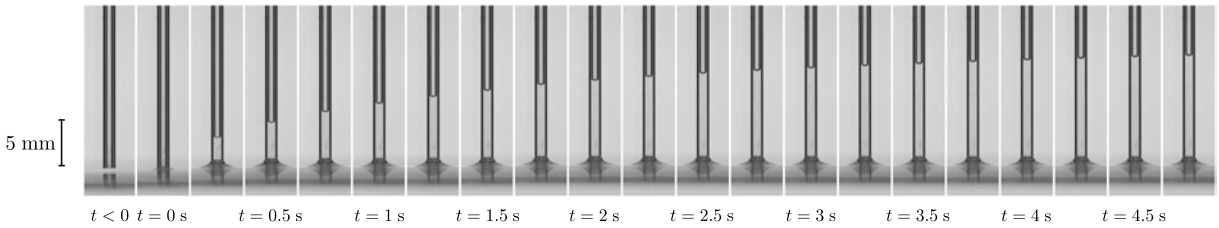


FIGURE 1.8 – Expérience d'ascension capillaire d'un liquide mouillant dans un tube capillaire. Écart de temps entre chaque image : 0.25 s. Rayon du tube : 0.3 mm. Viscosité de l'huile silicone η = 21 mPas, tension de surface de l'huile γ = 20.6 mN/m et densité 0.95. L'huile mouille totalement le tube en verre : θ = 0°.

Cette expérience fut décrite pour la première fois par Boyle en 1682 [47] mais c'est aux travaux de Jurin en 1718 [2] qu'elle doit son nom. Elle est réalisée sur la figure 1.8 avec un liquide mouillant, une huile silicone de viscosité $\eta = 20$ mPas, de tension de surface $\gamma = 20.6$ mN/m et de densité 0.95. La longueur capillaire de l'huile est $a = 1.5$ mm. Au temps $t = 0$ s nous mettons le liquide en contact avec un tube en verre de rayon r = 0.3 mm, qui est à la verticale. On observe que le liquide grimpe dans le tube. Puis, après un certain temps, s'arrête à une hauteur $h_e = 14.5$ mm. Sur la figure 1.9, nous avons tracé la hauteur h du front liquide en fonction du temps. On observe aussi que pour $h < h_e$ la dynamique d'ascension est en racine du temps.

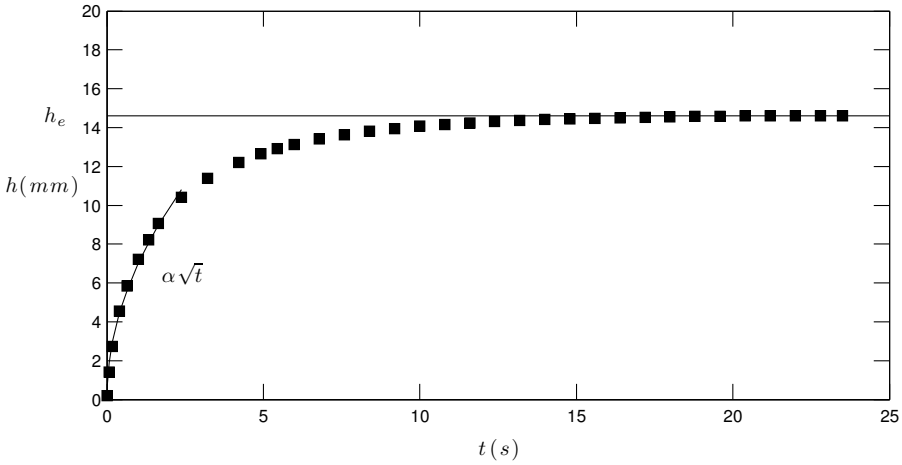


FIGURE 1.9 – Hauteur du ménisque dans un tube capillaire en fonction du temps. Diamètre du tube 0.3 mm. Viscosité de l'huile 21 mPas. tension de surface de l'huile 20.6 mN/m. Densité 0.95. L'huile mouille totalement le tube en verre : θ = 0°

Dans le cas général d'un liquide mouillant, pour lequel $0 < \theta < \pi/2$, le liquide cherche à établir l'angle de contact θ avec la paroi intérieure du tube, voir la figure 1.10. Cela donne une courbure négative à la surface liquide, qui se retrouve en dépression. D'après la loi de Laplace, cette dépression est $\Delta P = \frac{\gamma}{R}$ où $\frac{1}{R} = -\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\cos\theta}{r}$, soit :

$$\Delta P = -\frac{2\gamma\cos\theta}{r} \tag{1.13}$$

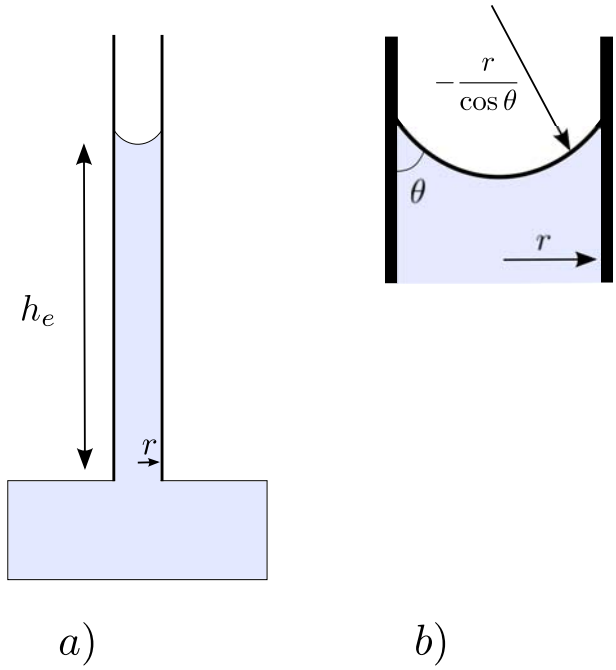


FIGURE 1.10 – Ascension d'un liquide dans un tube capillaire. a) le liquide monte à une hauteur h_e. b) vue agrandie du ménisque. Le tube a un rayon r, l'angle de contact est θ et la courbure du ménisque est $-\frac{r}{\cos\theta}$.

Pour équilibrer la dépression dans le front de liquide avec la pression hydrostatique le liquide grimpe dans le tube jusqu'à la hauteur h_e que l'on trouve en équilibrant les variations de pression hydrostatique $\Delta P = -\rho g h_e$ et de Laplace $\Delta P = -\frac{2\gamma cos\theta}{r}$:

$$\frac{h_e}{r} = 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\theta \tag{1.14}$$

C'est Laplace [48], qui en 1806, exprima le premier ce résultat. On constate notamment que plus le rayon du tube est petit plus la hauteur d'équilibre du ménisque est importante, h_e varie comme $1/r$. Dans l'expérience que nous avons présentée, $a = 1.5$ mm, $r = 0.3$ mm et $\theta = 0°$. On retrouve bien $h_e = 14.5$ mm.

La dynamique de l'imprégnation d'un tube capillaire horizontal a été décrite indépendamment par Lucas en 1918 [49] et Washburn en 1921 [50], soit plus d'un siècle plus tard.

Nous allons démontrer ce résultat. Pour cela, nous utilisons le principe fondamental de la dynamique, qui, appliqué à une particule fluide, devient l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}\right) = -\mathbf{grad}P + \rho\mathbf{f} + \eta\nabla^2\mathbf{v} \tag{1.15}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la particule fluide, P sa pression, et $\mathbf{f}$ les forces volumiques qui lui sont appliquées.

Si l'on compare le terme inertiel de cette équation à son terme visqueux, on obtient le nombre de Reynolds $Re \sim \frac{|\rho(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}|}{|\eta\nabla^2\mathbf{v}|} \sim \frac{\rho LV}{\eta}$. Avec $\rho \sim 950$ kg.m^{-3}, $L \sim r = 0.3$ mm, $\eta \sim 20.10^{-3}$Pa.s et $V \sim \frac{h_e}{t} \sim 10^{-3}$m.s^{-1} (où $h_e \sim 10$ mm et $t \sim 10$ s) on trouve $Re \sim 10^{-2} \ll 1$. De même, comparons le terme instationnaire et le terme de viscosité : $N \sim \frac{|\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}|}{|\eta\nabla^2\mathbf{v}|} \sim \frac{\rho L^2}{\eta t}$, soit : $N \sim 10^{-3} \ll 1$. Les valeurs de Re et N indiquent que l'on peut négliger $\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$ et $\rho(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}$ devant le terme visqueux. La seule force volumique qui agit sur le liquide est la gravité qui dérive de l'énergie potentielle de gravité ρgh. Alors, en notant $P' = P + \rho gh$, l'équation de Navier-Stokes prend la forme :

$$\eta\nabla^2\mathbf{v} - \mathbf{grad}(P') = \mathbf{0} \tag{1.16}$$

Cette relation est dite équation de Stokes.

Dans le cas du tube capillaire, la pression sous le ménisque est $P' = P_0 - \frac{2\gamma\cos\theta}{r} + \rho gh$. Le gradient de pression est uniquement suivant l'axe du tube et vaut $-\frac{2\gamma\cos\theta}{rh} + \rho g$. On peut réécrire l'équation (1.16) projetée selon l'axe du tube :

$$\frac{2\gamma\cos\theta}{rh} = \rho g + \eta\nabla^2 v \tag{1.17}$$

Le terme de gauche de cette équation est le terme moteur de l'ascension, la tension de surface et à droite se trouvent les termes qui la freinent : la gravité et la viscosité. À temps longs, la vitesse du fluide est nulle et l'équation devient :

$$\frac{2\gamma\cos\theta}{rh} = \rho g \tag{1.18}$$

Qui redonne la hauteur d'équilibre du ménisque. Par contre lorsque $h \ll h_e$, c'est la gravité qui est négligeable et l'équation (1.17) devient :

$$\frac{2\gamma\cos\theta}{rh} = \eta\nabla^2 v \tag{1.19}$$

On peut alors caculer la vitesse moyenne du liquide dans le tube :

$$v = \frac{1}{4}\frac{\gamma r\cos\theta}{\eta h} \tag{1.20}$$

Et sachant que $v = \frac{dh}{dt} = \dot{h}$, on arrive à :

$$\dot{h}h = \frac{1}{4}\frac{\gamma\cos\theta r}{\eta} \tag{1.21}$$

Qui une fois intégrée donne l'équation de la dynamique $h(t)$:

$$h(t) = \sqrt{\frac{\gamma\cos\theta r}{2\eta}t} \tag{1.22}$$

Qui correspond à l'observation de la dynamique à temps courts.

On retient donc les deux traits caractéristiques de l'ascension capillaire dans une géométrie fermée :

-le ménisque sature à une hauteur d'équilibre $h_e = \frac{2a^2\cos\theta}{r}$

-la dynamique est en racine du temps.

1.2 Élasticité

1.2.1 Loi de Hooke

Dans le cas où la phase condensée est un solide, les molécules sont figées les unes par rapport aux autres, elles sont seulement libres de se déplacer autour de leur position d'équilibre r_e de $\delta r \gg r_e$. La forme de l'énergie potentielle de Lennard-Jonnes autour de la position d'équilibre est :

$$E_p(r_e + \delta r) \sim -U + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial r^2}\right)_{r=r_e} \delta r^2 \tag{1.23}$$

Elle est semblable à celle d'un ressort de constante de raideur $k \sim U/{r_e}^2$. La phase condensée peut être modélisée comme un ensemble de molécules liées entre elles par des ressorts de raideur k. C'est pourquoi tout objet solide est déformable. On le voit très bien en appuyant sur du caoutchouc, beaucoup moins bien en appuyant sur une dalle de béton, mais c'est le cas pour tous les solides. Une autre configuration mettant en évidence la flexibilité des matériaux est celle où ils sont sous la forme de tiges, soumises à leur propre poids. Ici nous avons utilisé trois tiges : a) en élastomère (polyvinylsiloxane fabriqué par Marie Le Merrer [51]), b) en bois (hêtre) et c) en nylon. Nous avons placé chaque tige dans un tube creux horizontal puis augmenté sa longueur. La figure 1.11 permet de voir que les trois tiges ont des comportements différents. L'élastomère s'aligne rapidement avec la gravité (dont la direction est représentée sur la figure 1.11 a), tandis que le bois reste plutôt horizontal, et la tige de nylon a un comportement intermédiaire.

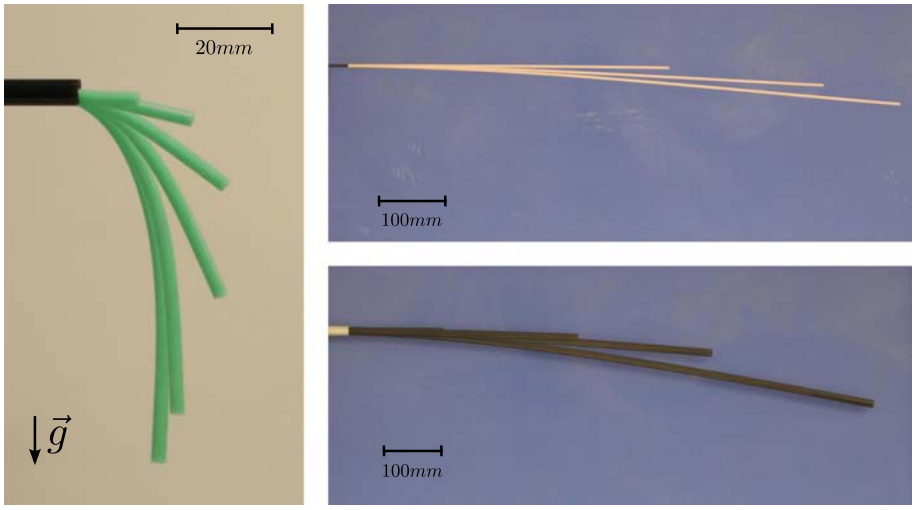


FIGURE 1.11 – Trois matériaux soumis à la force de gravitation : a) tige d'élastomère, b) tige de hêtre et c) tige de nylon.

Pour comprendre ces formes, il nous faut le rapport entre les forces appliquées sur le solide et ses déformations. Nous allons utiliser l'approche où le solide est modélisé comme un ensemble de molécules liées entre elles par des ressorts de raideur $k \sim U/{r_e}^2$, ce qui est représenté sur la figure 1.12.

Si une force F est exercée sur cet élément de solide dans la direction z, le solide va s'étirer ou se comprimer de $\mathrm{d}z$ dans cette direction. Pour relier $\mathrm{d}z$ à la force F, calculons la raideur du ressort équivalent à l'association des ressorts entre toutes les molécules qui le composent. Nous pouvons commencer par réunir les ressorts dans les plans (xy), perpendiculaires à z. Le ressort

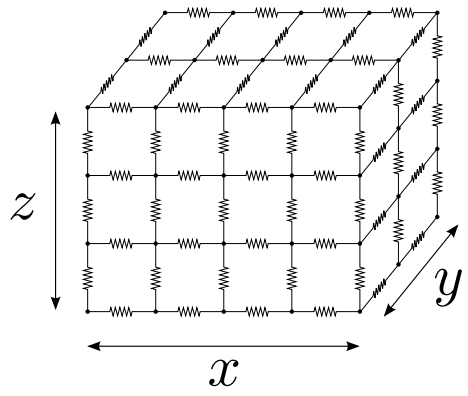


FIGURE 1.12 – Solide représenté par une association de molécules liées entre elles par des ressorts de raideur k.

équivalent par plan (xy) est constitué par l'association de $N_p = \frac{xy}{{r_e}^2}$ ressorts en parallèle de raideur k. La raideur équivalente de chaque plan (xy) est donc $k_p = \frac{xy}{{r_e}^2}k$. Il reste maintenant à faire l'association en série des $N_z = \frac{z}{r_e}$ ressorts en séries selon z. Alors la raideur totale est telle que $\frac{1}{k_t} = \frac{z}{r_e}\frac{1}{k_p}$. Le lien entre l'allongement et la force exercée est $F = k_t \mathrm{d}z$. Il est alors possible d'exprimer la contrainte $\sigma = \frac{F}{xy}$ au sein du solide en fonction de l'allongement relatif $\epsilon = \frac{\mathrm{d}z}{z}$:

$$\sigma = E\epsilon \tag{1.24}$$

où le coefficient de proportionnalité $E = \frac{U}{{r_e}^3}$ est appelé le module de Young. Cette équation est appelée la loi de Hooke [52]. Le module de Young est homogène à une énergie volumique. Sa valeur va de la centaine de kPa - 200 kPa pour l'élastomère présenté à la figure 1.11 a) - à 200 GPa pour l'acier, et peut atteindre 1 000 GPa pour le diamant et les nanotubes de carbone.

Le cas du bois n'est pas aussi simple, le bois est un matériau non isotrope : il est constitué principalement de fibres ligneuses dirigées verticalement, qui ont des longueurs de l'ordre de 1 mm et des rayons de l'ordre de 100 µm, Tyree 2001 [53]. Le bois a un module de Young dans la direction perpendiculaire aux fibres de l'ordre de 10 GPa et dans la direction perpendiculaire aux fibres de l'ordre de 1 GPa, Ashby 2000 [54]. Dans notre démonstration, nous avions pris le cas d'un matériau isotrope. Si le matériau est non isotrope, alors la loi de Hooke se généralise, Landau 1990 [55] :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \tag{1.25}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E_y}(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \tag{1.26}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E_z}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \tag{1.27}$$

où nous avons ajouté les indices x, y et z aux grandeurs ϵ, σ et E. Le coefficient ν est appelé coefficient de Poisson, il est dû au fait que lorsqu'un matériau est étiré dans une direction, il se contracte dans la direction perpendiculaire. Sa valeur est comprise entre 0 et 0.5, elle est souvent proche de 0.3 pour les matériaux usuels.

Dans cette thèse, nous allons étudié des tiges et des plaques minces. Dans le cas où l'objet considéré est une tige très longue devant son rayon, les contraintes dans le plan perpendiculaire à l'axe (plan (yz) par exemple) sont nulles sur la surface de la tige et comme son rayon est petit devant sa longueur, elles peuvent être considérées comme nulles dans toute la tige : $\sigma_y = 0$ et $\sigma_z = 0$. Alors l'équation 1.25 redonne la loi de Hooke.

Dans le cas où l'objet est une plaque mince (longueur L selon x, largeur b selon y et épaisseur h selon z, avec $h \ll b \ll L$), il est toujours possible de considérer σ_z nulle dans toute la plaque, mais cette fois-ci le fait que les déplacements soient nuls dans la direction y impose une contrainte transverse (équation 1.26) :

$$\sigma_y = \nu \sigma_x \tag{1.28}$$

D'après l'équation 1.25, la contrainte longitudinale est :

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1-\nu^2}\epsilon_x \tag{1.29}$$

Le module de Young se retrouve multiplié par un facteur $\frac{1}{1-\nu^2}$. Pour $\nu = 0.3$ cela fait une variation de 10% du module de Young. Pour une plaque mince, les effets du module de Poisson sont très peu visibles.

Aussi bien dans le cas des tiges que dans celui des plaques minces, la loi de Hooke sous la forme $\sigma = E\epsilon$ décrira suffisamment bien le comportement des objets élastiques.

On peut noter que les premiers travaux sur l'élasticité se sont penchés précisément sur des tiges (Galilée 1638 [56], Hooke 1678 [52], Bernoulli 1691 [57] et Euler 1744 [58]) et qu'une attention particulière a été portée sur la transition entre deux états : allongé et courbé, cette transition est appelée flambage d'Euler.

1.2.2 Flambage d'Euler

Dans la mesure où nous étudierons en détail le flambage de mètres à ruban et de pailles dans les chapitres suivants, nous rappelons l'origine du flambage d'Euler, Euler 1744 [58].

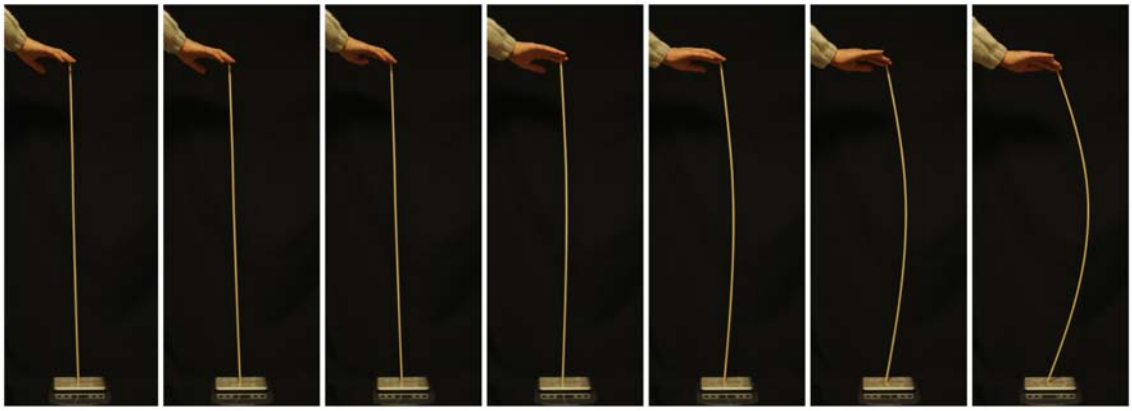


FIGURE 1.13 – Série d'images où l'on appuie sur une tige de hêtre de longueur 1 m et rayon 3 mm. La balance qui se trouve sous la tige permet de connaître la force que l'on exerce. Pour les photos de gauche à droite on exerce une force croissante. Lorsqu'on franchit la masse $m_E = 700$ g la tige flambe.

Sur la figure 1.13 une tige de hêtre (1 m de long et 3 mm de rayon) est comprimée par une force croissante exercée par la main. À l'autre extrémité de la tige se trouve une balance qui nous permet de mesurer la force exercée. De la gauche vers la droite, la masse affichée sur la balance est croissante. Sur la première photo, la tige est seulement maintenue en équilibre, elle est alors uniquement soumise à la gravité. La balance indique le poids de la tige m=20 g, ainsi

la masse volumique du hêtre est de l'ordre de $\rho = \frac{m}{\pi r^2 L} = 700\ kg/m^3$. Sur les quatre premières images la forme de la tige reste rectiligne, bien que la force exercée passe de 0 à 6 N. En fait, la tige se comprime, mais ce n'est pas visible à l'oeil. Quand la masse indiquée sur la balance passe à $m_E = 700\ g$, la tige commence à se courber, et les trois dernières photos montrent qu'une faible augmentation de la force a pour conséquence une grande déformation de la tige.

Nous allons analyser le flambage de la tige de hêtre avec la loi de Hooke. Nous avons vu, pendant l'expérience avec la tige de hêtre, que la tige passe d'un état comprimé auquel on peut associer l'énergie $\mathscr{E}_1$ à un état courbé auquel on associe l'énergie $\mathscr{E}_2$. Ce sont ces deux énergies que nous allons exprimer avec la loi de Hooke, puis comparer.

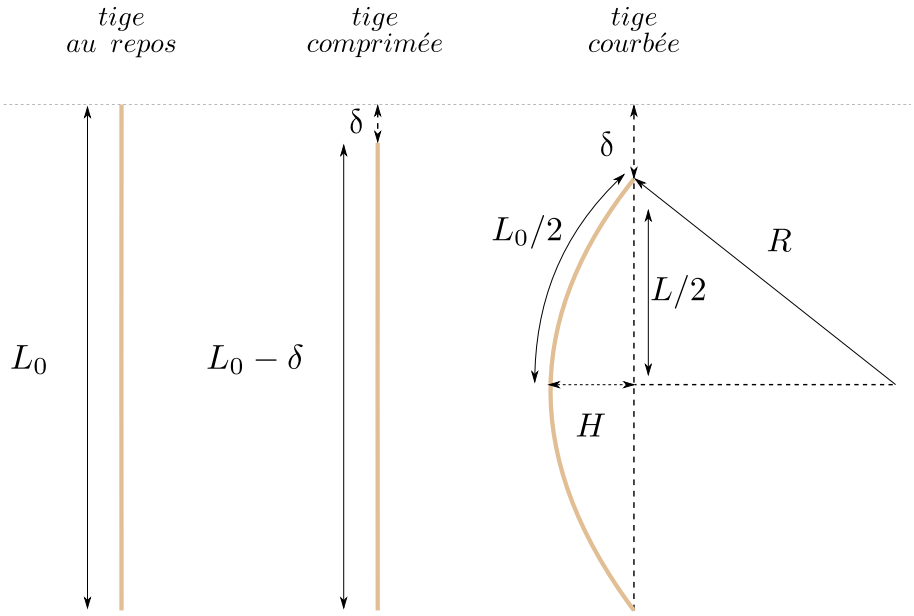


FIGURE 1.14 – Notations pour le flambage d'Euler d'une tige.

Commençons par l'énergie stockée dans la tige comprimée. Les notations que nous allons utiliser sont représentées sur la figure 1.14. La loi de Hooke $\sigma = E\epsilon$ indique la force exercée pour comprimer la tige : $\frac{F}{\pi r^2} = E\frac{\delta}{L}$, où r est le rayon de la tige, L sa longueur, δ son allongement et E son module de Young. Alors l'énergie de compression $\mathscr{E}_1$ est :

$$\mathscr{E}_1 = F\delta = E\frac{\delta}{L}\pi r^2\delta = \Omega E\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \tag{1.30}$$

Où $\Omega = \pi L r^2$ est le volume de la tige. Cette énergie est proportionnelle au module de Young de la tige, à son volume et à son allongement relatif au carré.

Quand la tige est à l'état courbé, son rayon de courbure peut s'exprimer avec δ et L :

$$\frac{1}{R^2} \sim \frac{\delta}{L^3} \tag{1.31}$$

La figure 1.16 qui représente la tige courbée permet de voir que sa partie supérieure est étirée et que sa partie inférieure est comprimée. Ces deux parties sont limitées par la ligne neutre qui a la même longueur que la tige au repos.

La relation de Hooke permet de calculer l'énergie de chaque section courbée et par intégration l'énergie de courbure $\mathscr{E}_2$:

$$\mathscr{E}_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} F\delta L = \int_0^r \int_0^{2\pi} E\epsilon\delta L r_t dr_t d\theta \tag{1.32}$$

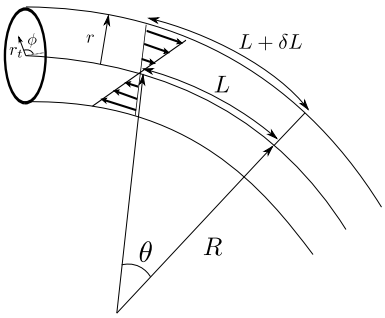


FIGURE 1.15 – Tige à l'état courbé. On voit la ligne neutre qui a conservé sa longueur initiale. Au-dessus le matériau est étiré et en-dessous il est comprimé.

Et géométriquement, l'angle θ peut être écrit de deux façons différentes : $\theta = \frac{L}{R} = \frac{L+\delta L}{R+r_t \sin\phi}$, et alors l'allongement relatif en (r_t,ϕ) est : $\epsilon = \frac{\delta L}{L} = \frac{r_t \sin\phi}{R}$ et l'énergie de courbure $\mathscr{E}_2$ devient :

$$\mathscr{E}_2 = \frac{EL}{R^2}\int_0^r \int_0^{2\pi} r_t^3 \sin^2\theta dr_t d\theta = \frac{EI}{R^2}L \tag{1.33}$$

Où $I = \int_0^r \int_0^{2\pi} r_t^3 \sin^2\theta dr_t d\theta$ est le moment quadratique de la tige. Finalement l'énergie de courbure de la tige est :

$$\mathscr{E}_2 = \frac{EI}{R^2}L = \Omega E \frac{r_t^2}{L^3}\delta \tag{1.34}$$

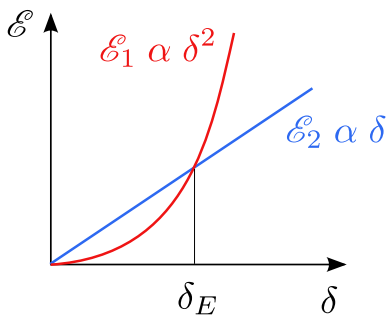


FIGURE 1.16 – Comparaison de l'énergie de compression $\mathscr{E}_1$ et de l'énergie de courbure $\mathscr{E}_2$ d'une tige.

L'énergie de compression varie comme δ^2 tandis que l'énergie de courbure varie comme δ, il y a une compression critique pour laquelle la tige passe de l'état comprimé à l'état courbé. En écrivant que les deux énergies sont égales, on trouve cette compression critique $\delta_E \sim \frac{r^2}{L}$, qui ne dépend pas du module de Young, mais seulement de l'inverse de la longueur de la tige et de son rayon au carré. En retournant à la loi de Hooke qui relie F et δ il est possible d'exprimer la force nécessaire pour courber une tige :

$$F \sim \frac{EI}{L^2} \qquad \left(\text{le calcul exact mène à } F = \frac{\pi^2 EI}{L^2}\right) \tag{1.35}$$

Nous appliquons la formule exacte à notre tige de hêtre. Avec L=1 m, r=3 mm et le module de Young longitudinal du hêtre $E = 12.2$ GPa. La masse critique à laquelle la tige flambe est :

780 g, ce qui est proche des 700 g trouvés expérimentalement. On remarque cependant un écart de 10% entre l'expérience et la théorie.

Cette imprécision est liée au matériau utilisé, le bois. En effet, notons d'abord qu'il n'est pas homogène. Il présente un certain nombre de défauts : noeuds liés à l'insertion des branches, fissures dues au séchage. Par ailleurs, il n'est pas isotrope. La majorité des cellules qui le constituent sont allongées, leurs longueurs de l'ordre du centimètre sont bien supérieures à leurs diamètres de l'ordre de 100 µm, et sont principalement orientées verticalement. Ainsi, dans les expériences que nous mènerons avec le bois, il ne sera pas surprenant d'avoir de grandes variations entre chaque relevé. Pour limiter l'erreur de mesure, nous avons répété au moins une dizaine de fois chaque expérience, et conservé la moyenne des valeurs obtenues.

On trouve aussi un parfait exemple de flambage dans la physique du sport : le saut à la perche. La chronophotographie ci-dessous, figure 1.17, montre que les formes successives que prend la perche pendant un saut sont comparables à celles que l'on avait lors du flambage de la tige de hêtre, à la figure 1.13. Ici, au début du saut, la perche est droite ①, pendant l'ascension du sauteur, elle est courbée ②, ③ et ④ et au moment de passer la barre, la perche est dépliée ⑤ et ⑥. On peut estimer la force critique pour le flambage de la perche. Sa longueur est de 5.3 m et comme elle est creuse, elle a un rayon interne $r_i = 14\ mm$ et un rayon externe $r_e = 16.5\ mm$. Son module de Young est $E = 60$ GPa. On calcule le moment quadratique d'une tige creuse : $I = \int_{r_i}^{r_e}\int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\theta dr d\theta = \frac{\pi(r_e^4 - r_i^4)}{4}$. On arrive finalement à la force critique pour le flambage de la perche :

$$F_c = \frac{\pi^3 E({r_e}^4 - {r_i}^4)}{4L^2} = 600 \text{ N} \tag{1.36}$$

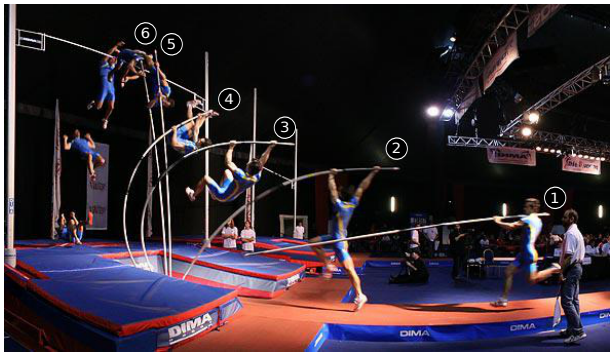


FIGURE 1.17 – Une chronophotographie d'un saut à la perche. En 1) la perche est droite, en 2), 3) et 4) elle est flambée et en 5) et 6) elle récupère sa forme droite.

Le sauteur à la perche peut faire flamber la perche avec son propre poids. On remarque que la perche du sauteur est creuse. En effet celui-ci souhaite qu'elle soit la plus légère possible et on constate qu'à masse égale, un objet creux est plus résistant qu'un objet plein. Si la perche était pleine et de même masse, elle aurait pour rayon $R = 9$mm et son moment d'inertie serait $I_{plein} = \frac{\pi R^4}{4} = 5.10^{-9}$ m^4 soit environ six fois plus petit que celui de la perche creuse : $I_{creux} = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{4} = 28.10^{-9}$ m^4.

Les structures de tiges de certains végétaux font appel à cette propriété physique. En effet, certaines plantes comme les céréales annuelles, doivent atteindre une hauteur de plusieurs dizaines de centimètres tout en ayant peu de temps pour produire la matière de leur tige. Le rapport d'aspect de ces végétaux est fort, de l'ordre de 100 en prenant une tige de céréale de

1 m et de diamètre 1 cm. Ainsi pour assurer leur maintien, ces dernières élaborent préférentiellement des tiges creuses, plus résistantes à la gravité. Les arbres plus longévifs et plus hauts, ont un rapport d'aspect dix fois plus faible, de l'ordre de 25, par exemple un arbre de 25 m de haut avec pour diamètre 1 m. Ils ont tendance à fabriquer des tiges pleines.

Première partie

Ascension capillaire et montée de la sève

Chapitre 2

Ascension capillaire dans les coins

> « À y regarder de plus près, l'on se trouve alors à l'une des mille portes d'un immense laboratoire, hérissé d'appareils hydrauliques multiformes, tous beaucoup plus compliqués que les simples colonnes de la pluie et doués d'une originale perfection : tous à la fois cornues, filtres, siphons, alambics. »
>
> Francis Ponge, Végétations.

Sommaire

2.1 Introduction 23
2.2 Ascension capillaire dans un coin 26
2.3 Le modèle de l'orgue 30
2.4 Une loi universelle 33
2.5 Conséquences pour un milieu poreux 34
2.6 Ascension capillaire dans des rameaux 36
2.7 Conclusion 41

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux flux de sève dans les arbres. Il y a deux types de sève dans les arbres, la sève brute qui va des racines aux feuilles et la sève élaborée, qui est le résultat de la photosynthèse au niveau des feuilles et est redistribuée dans tout l'arbre. Un mécanisme d'ascension de la sève dans les arbres fut proposé pour la première fois par Dixon et Joly en 1895 [59]. Le flux de sève serait généré par l'évaporation de la sève au niveau des feuilles. Et la cohésion de l'eau assurerait le flux de sève des racines aux feuilles. L'eau est alors en tension et peut se trouver sous pression négative, Zimmermann 2004 [60]. Ce mécanisme n'a jamais été totalement accepté et la question du moteur de l'ascension de la sève dans l'arbre reste ouverte, Zimmermann 2000 [61].

Lorsque l'arbre est soumis à des stress hydrauliques (sécheresse, températures élevées en été ou températures négatives en hiver), des bulles de gaz apparaissent dans les vaisseaux conduisant la sève brute Cochard 2002 [62]. La présence de ces bulles est dangereuse pour l'arbre car elle rompt la colonne de liquide des racines aux feuilles. L'arbre est en partie protégé de l'embolie

partielle car les vaisseaux conducteurs de sève sont interconnectés, Tyree 2001 [53]. Et des observations indiquent que les bulles de gaz formées dans les vaisseaux peuvent disparaître et être à nouveau remplacées par de la sève, Holbrook 1999 [63]. Il existe donc des mécanismes réparateurs de l'embolie dans les arbres.

Sur la figure 2.1 nous présentons quelques caractéristiques anatomiques des tissus conducteurs de sève. La coupe longitudinale dans le plan (xz), qui correspond à la photo $a)$ et son agrandissement $b)$, a été réalisée par É. Badel de l'INRA de Clermont-Ferrand à l'aide d'un microtomographe. Cet appareil permet de visualiser des rameaux en trois dimensions avec une précision de $1\ \mu$m^3. La photo qui est présentée ici est celle d'un rameau de pin qui a été déshydraté. Ce qui est noir sur la photo correspond à la phase gazeuse, les lignes blanches sont les parois des vaisseaux et les zones grises correspondent à la sève. Il reste un peu de sève dans le rameau et la forme des ménisques montre que la sève mouille totalement les parois des vaisseaux conducteurs. Ces vaisseaux conducteurs ont des diamètres qui sont de l'ordre de 10 µm. La photo $b)$ rappelle fortement les photos d'ascension capillaire dans un tube avec un liquide mouillant que nous avons présentées au chapitre 1.

La photo $c)$ est une coupe transversale d'un rameau de peuplier. La photo $d)$ est un agrandissement de la photo $c)$. Ces deux photos ont été réalisées par P. Conchon de l'INRA de Clermont-Ferrand. Sur ces deux photos, nous voyons la section des vaisseaux conducteurs de sève : les zones gris foncé sont les parois des vaisseaux et les zones gris clair sont l'espace intérieur de ces vaisseaux, appelé lumen, c'est dans ces espaces que les flux de sève se font. Les vaisseaux sont comme écrasés les uns contre les autres, si bien qu'ils ont des formes elliptiques et que les espaces entre vaisseaux (zones noires) prennent des formes triangulaire avec des coins très affinés, ils sont appelés méats.

Lorsqu'une partie importante des vaisseaux est remplie d'air après un phénomène important d'embolie, il n'y a plus de flux de sève à travers les lumen des vaisseaux. Ce que nous proposons, c'est qu'un flux de secours soit assuré par les méats. Le moteur de ce flux ne serait pas l'évaporation au niveau des feuilles car la colonne de liquide est rompue. Mais ce serait la capillarité. Nous nous demandons s'il est possible qu'il y ait un flux de sève par capillarité dans ces méats en forme de coin. Ce flux permettrait de reconnecter la colonne liquide et ainsi de réparer l'embolie. Dans ce chapitre nous allons donc étudier l'ascension capillaire d'un liquide mouillant dans des géométries en forme de coin.

Remarquons aussi que dans certains cas les stress hydriques engendrent le collapse des vaisseaux conducteurs de sève sur eux-mêmes. Un tel phénomène est illustré par les photos 2.2 réalisées par H. Cochard [62] qui comparent le tissu vasculaire en situation de stress hydrique ou non. L'ascension de sève par capillarité dans des coins pourrait aussi se faire dans ces situations de collapse.

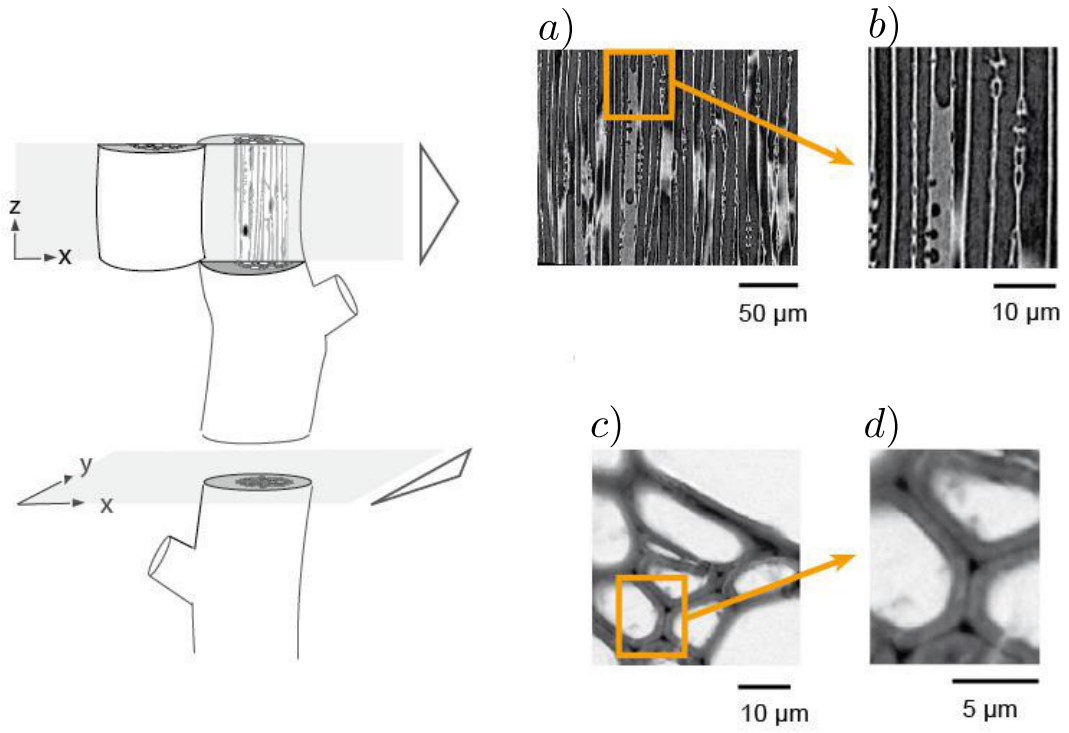


FIGURE 2.1 – Coupes transversales et longitudinales d'un rameau. À gauche, la coupe longitudinale d'un rameau après embolie. On voit que l'eau mouille les vaisseaux. À droite, coupe transversale : on voit la section des vaisseaux et les zones inter-vaisseaux où se trouvent des géométries ouvertes et où on s'attend à avoir de la montée capillaire en $t^{1/3}$

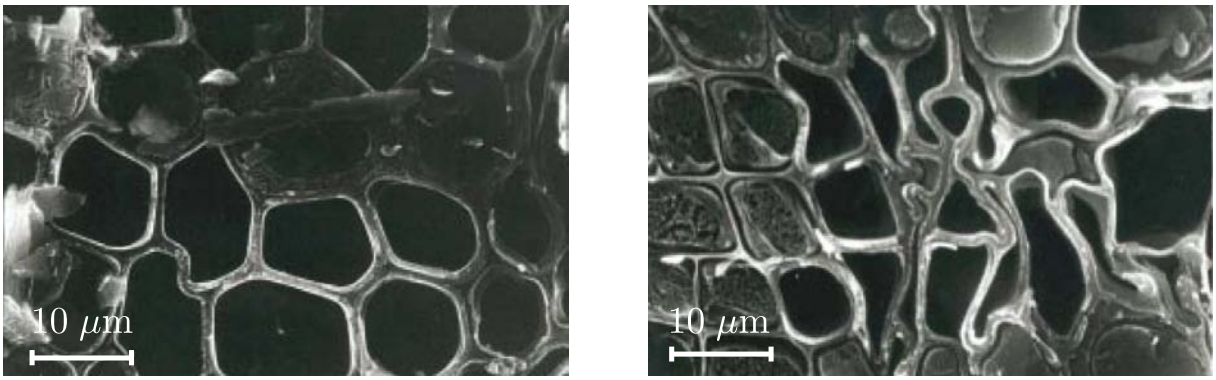


FIGURE 2.2 – Coupes transversales à travers le tissu vasculaire d'aiguilles de pin. Photos : Cochard et Froux, INRA Clermont-Ferrand. À gauche l'aiguille a été prélevée sur une branche normalement hydratée. À droite, l'aiguille a été prélevée sur une branche déshydratée.

2.2 Ascension capillaire dans un coin

Nous présentons ici nos expériences d'ascension capillaire dans des coins formés par l'association de deux plans (coins linéaires) ou de deux cylindres (coins quadratiques). Nous désignons ces géométries comme des géométries ouvertes par opposition aux géométries fermées constituées par un tube capillaire, par exemple. De telles études ont été menées pour l'ascension capillaire dans des coins plans. Dans le cas de la statique, Taylor 1712 [64] et Hauksbee 1712 [65] ont mené les premiers des expériences d'ascension capillaire dans des coins formés par l'association de deux plaques de verre. Ils ont mis en avant le fait que la hauteur atteinte par le ménisque dans l'espace formé par les deux plaques varie comme l'inverse de la distance au coin.

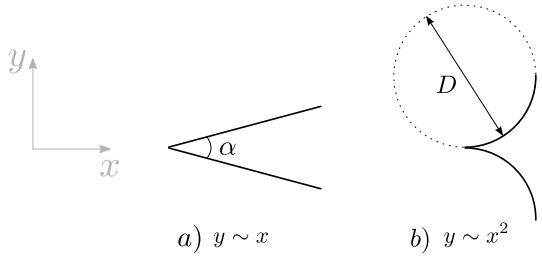


FIGURE 2.3 – Formes de coins a) linéaires d'angle α : $y \sim x$ et b) quadratiques : $y \sim x^2$.

Dans le cas du coin plan d'angle α, voir la figure 2.3, Concus et Finn 1969 [66] ont établi la relation entre α et l'angle de contact θ afin qu'il y ait ascension capillaire :

$$\alpha + 2\theta < \pi \tag{2.1}$$

L'angle du coin ne peut dépasser $90°$ si on veut avoir ascension. Le critère sur θ est plus restrictif que pour le cas d'une géométrie fermée où il suffit d'avoir $\theta < \pi/2$. Si par exemple $\alpha = \pi/2$, alors il faut $\theta < \pi/4$.

La dynamique a été étudiée bien plus tard que la statique : Tang et Tang 1994 [67] ont prédit une dynamique en $t^{1/3}$ en 1994 et Higuera et *al.*2008 [68] l'ont observée expérimentalement en 2008 dans des coins linéaires d'angle $\alpha = 0.75°$. Ce que nous avons cherché à faire, c'est étendre cette étude à tout type de coin. Si l'ascension capillaire est possible dans tout type de coin, alors elle est sûrement aussi possible dans les coins formés par les vaisseaux conducteurs de sève.

Expérimentalement, il y avait deux difficultés pour faire ces expériences d'ascension capillaire. Il faut être capable de construire un coin de bonne qualité (tailles des rugosités très inférieures à la longueur capillaire) sur une grande hauteur (environ 30 cm). Et il faut être capable d'observer cette ascension. En effet il y a très peu de liquide qui se place dans le coin et ce que l'on a à observer est très haut et très peu fin. Ce n'est pas facile d'observer des objets avec un grand rapport d'aspect. La solution a été de faire nos expériences d'ascension capillaire dans des coins quadratiques [voir la figure 2.3 b)] que nous avons fabriqués en associant deux cylindres en Plexiglass.

En associant de cette manière les deux cylindres, nous avons résolu les deux difficultés expérimentales : 1. Le contact de Hertz aplanit les coins sur toute la longueur des cylindres et 2. Le problème du rapport d'aspect de l'expérience est balancé par l'effet loupe créé par la géométrie circulaire des cylindres. Nous observons donc l'ascension capillaire comme il est

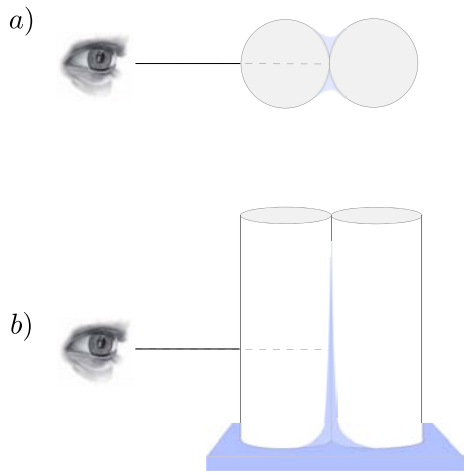


FIGURE 2.4 – Vue du montage. a) vue de haut. b) vue de profil.

indiqué sur la figure 2.4. Nous utilisons un appareil photo pour réaliser des photos à intervalles réguliers de temps.

Sur la figure 2.5 est représentée une série d'images de l'ascension capillaire. Nous avons utilisé une huile silicone V20 de viscosité 20 mPas, 20 fois plus visqueuse que l'eau, et qui mouille totalement le Plexiglass. La première image est prise au moment du contact avec le bain liquide, à $t = 0$ s. On constate que le liquide monte de façon non linéaire. Il lui faut 56 secondes pour atteindre 50 mm et 441 secondes pour doubler cette distance. Mais le front ne sature jamais. Nous avons reporté la hauteur du ménisque en fonction du temps sur la figure 2.6.

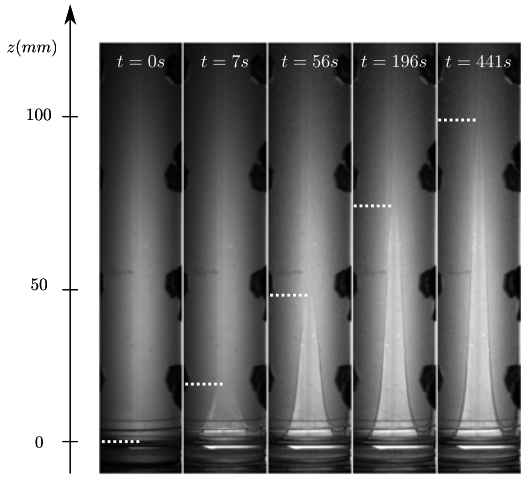


FIGURE 2.5 – Série d'images de l'ascension d'une huile 20 fois plus visqueuse que l'eau dans les coins formés par l'association de deux cylindres de 20 mm de diamètre.

Sur ce graphe on constate à nouveau que la hauteur atteinte par le ménisque ne sature pas. On voit aussi qu'après une durée qui est de l'ordre de la dizaine de secondes, s'établit un régime d'ascension où la hauteur du ménisque évolue en fonction du temps à la puissance un tiers : $h \sim t^{1/3}$. L'ascension capillaire dans un coin est différente de celle qui se fait dans un tube pour deux aspects : elle n'atteint pas de hauteur limite et se fait avec une dynamique en $t^{1/3}$, alors que l'ascension capillaire dans un tube atteint une hauteur limite avec une dynamique en $t^{1/2}$.

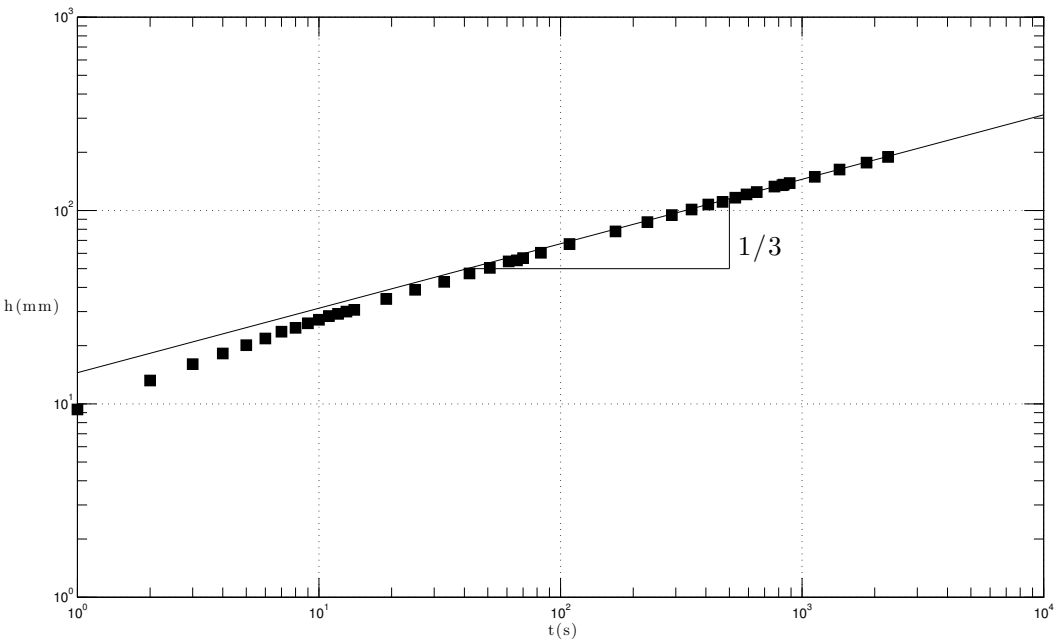


FIGURE 2.6 – Hauteur du ménisque en fonction du temps. Coin formé par l'association de deux cylindres de 20 mm de diamètre. Liquide mouillant : huile silicone de viscosité 20 mPas.

Nous avons répété l'expérience avec des cylindres de diamètres différents, en utilisant une huile silicone dix fois plus visqueuse que l'eau. On trace sur le graphe 2.7 les résultats de cette expérience.

Les trois expériences donnent le même résultat. Nous pouvons en conclure que le diamètre du cylindre n'a pas d'influence sur l'ascension. Changeons maintenant la viscosité du liquide. Nous faisons l'expérience avec des huiles silicones de viscosité allant de 5 à 1000 mPas. Les résultats de cette expérience se trouvent sur la figure 2.8.

Ici le fait de changer de viscosité a une influence. À un temps fixé, plus la viscosité est élevée, moins le liquide monte haut. Par exemple, une huile de viscosité 10 mPas atteint 100 mm en 100 s alors qu'une huile 100 fois plus visqueuse atteint la même hauteur en 10^4 s. Mais on a toujours une dynamique en $t^{1/3}$, précédée d'une ascension initiale rapide qui elle aussi est d'autant plus longue que la viscosité est élevée.

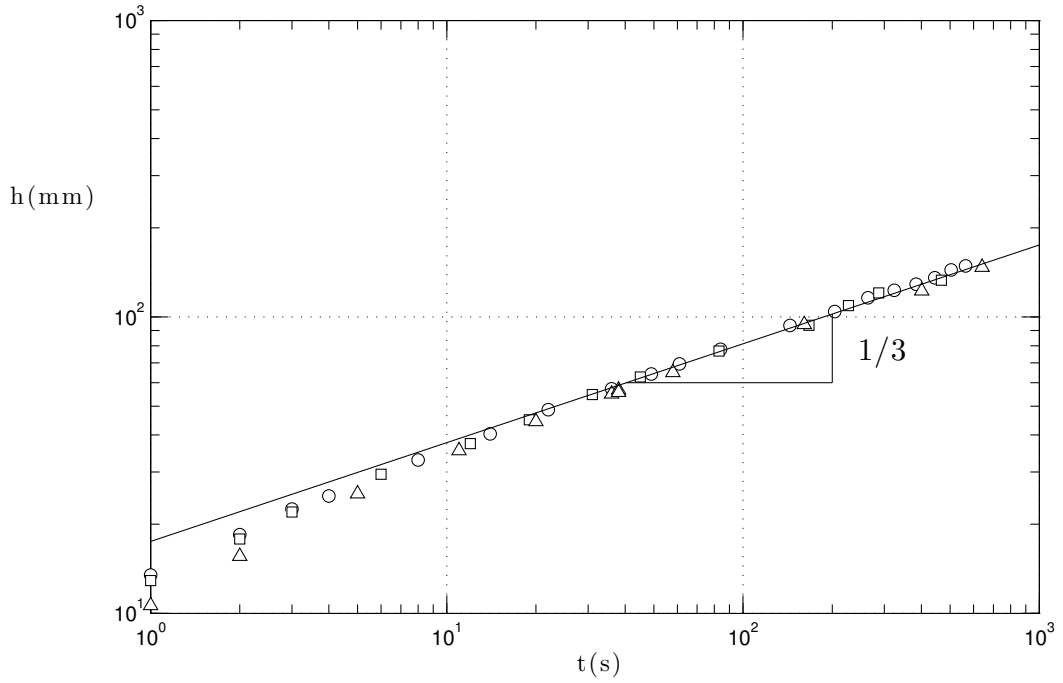


FIGURE 2.7 – Hauteur du ménisque en fonction du temps. Coin formé par l'association de deux cylindres. Le diamètre des cylindres est différent pour chaque expérience : 10, 20 et 30 mm, représentés respectivement par les symboles ○, △ et □. Liquide mouillant : huile silicone de viscosité 10 mPas.

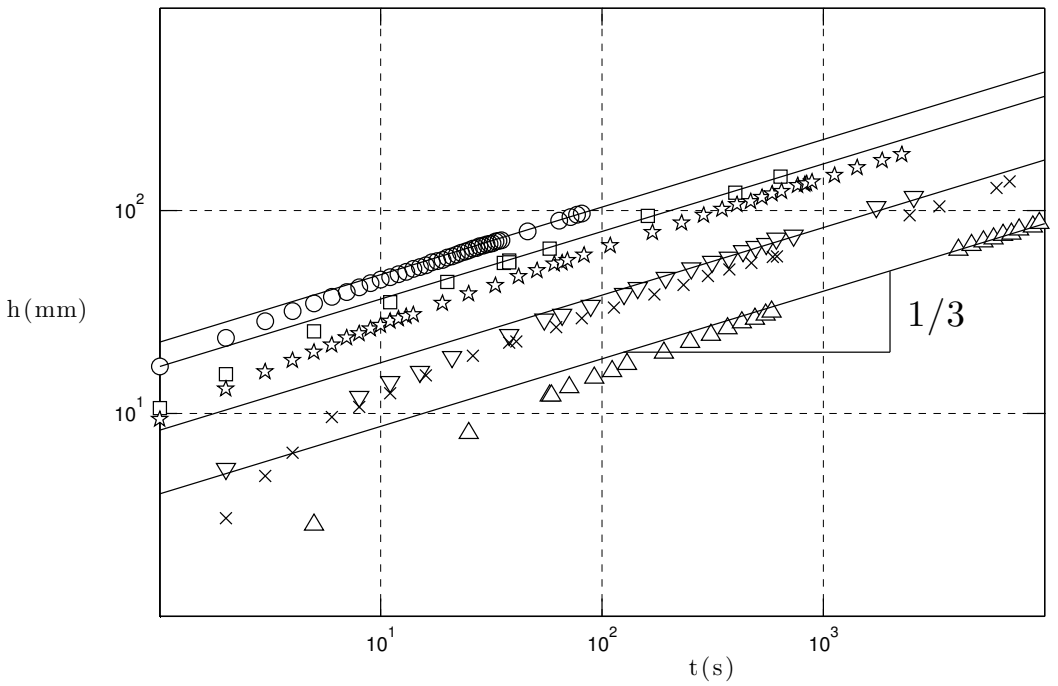


FIGURE 2.8 – Hauteur du ménisque en fonction du temps. Coin formé par l'association de deux cylindres de diamètre 30 mm. Huiles silicones de viscosités 5 à 1000 mPas. ○ : 5 mPas, □ : 10 mPas, ☆ : 20 mPas, ▽ : 100 mPas, × : 171 mPas, △ : 1000 mPas.

2.3 Le modèle de l'orgue

Pour comprendre la dynamique de l'ascension, nous modélisons le coin par une association de tubes capillaires de rayon $r(x)$ décroissant au fur et à mesure que l'on approche du coin. Comme on le voit sur la figure 2.9 a).

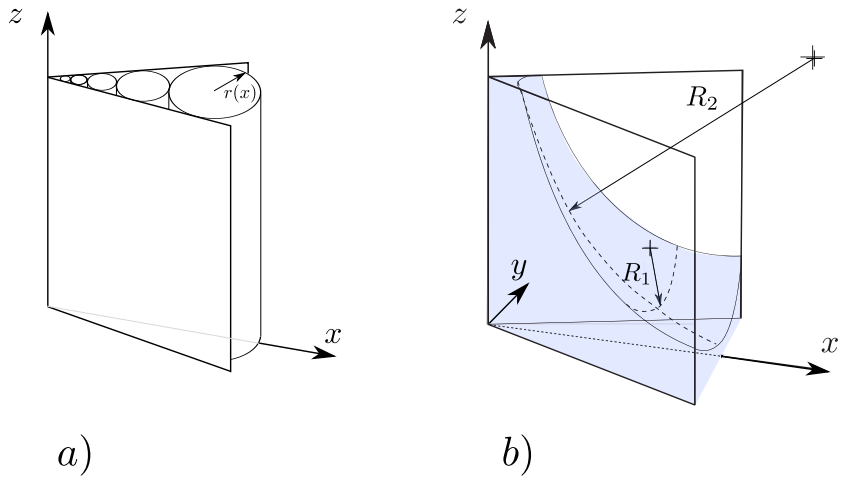


FIGURE 2.9 – a) Le coin modélisé par une association de cylindres de rayon $r(x)$.
b) Les deux rayons de courbure de l'interface liquide dans le coin.

Cette vision nécessite une approximation. En effet la surface du liquide a deux courbures, une dans le plan (xz), R_2 et l'autre dans le plan (yz), R_1. Elles sont représentées sur le schéma 2.9 b). Dans nos expériences R_1 est toujours très inférieur à R_2 : $R_1 \ll R_2$. On peut négliger la courbure $1/R_2$ devant $1/R_1$ et modéliser le coin par une assemblée de tubes. Pour un liquide totalement mouillant, la loi de Laplace devient :

$$\Delta P \approx \frac{\gamma}{r(x)} \tag{2.2}$$

La variation de pression est fonction de la distance au coin. On réécrit alors l'équation de Stokes en loi d'échelle :

$$\frac{\gamma}{hr(x)} \sim \frac{\eta \dot{h}}{r(x)^2} + \rho g \tag{2.3}$$

que l'on intègre :

$$h(r,t) \sim \sqrt{\frac{2\gamma r}{\eta} t} - \frac{\rho g r^2}{\eta} t \tag{2.4}$$

À temps courts, la gravité peut être négligée et nous retrouvons la dynamique de Lucas-Washburn. Mais d'une façon plus générale, l'équation (2.4) nous donne le rayon r_L du ménisque "leader" : le tube pour lequel h est maximum à un temps t. On le trouve avec la condition $\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=r_L} = 0$:

$$r_L \sim \left(\frac{1}{8}\frac{\eta\gamma}{\rho^2 g^2 t}\right)^{1/3} \tag{2.5}$$

La position du leader se rapproche du coin selon $1/t^{1/3}$, cela a été étudié par Higuera 2008 [68]. Pour suivre la hauteur du ménisque dans le coin, nous suivons la hauteur du ménisque leader $h(r = r_L,t)$, que l'on trouve grâce à (2.4) et (2.5) :

$$h(t) \sim \left(\frac{\gamma^2 t}{\eta \rho g}\right)^{1/3} \tag{2.6}$$

Cette loi correspond à nos observations expérimentales : l'ascension capillaire est indépendante du diamètre des cylindres de Plexiglass qui n'apparaît pas dans l'équation. Le ménisque n'a pas de hauteur de saturation. Le temps nécessaire pour atteindre une hauteur donnée est proportionnel à la viscosité. Et le modèle prédit la dynamique en $t^{1/3}$ que nous observons à temps longs. On peut réécrire l'équation (2.6) sous forme adimensionnée :

$$\frac{h(t)}{a} \sim \left(\frac{\gamma t}{\eta a}\right)^{1/3} \tag{2.7}$$

et alors retracer les données adimensionnées sur le graphe 2.13.

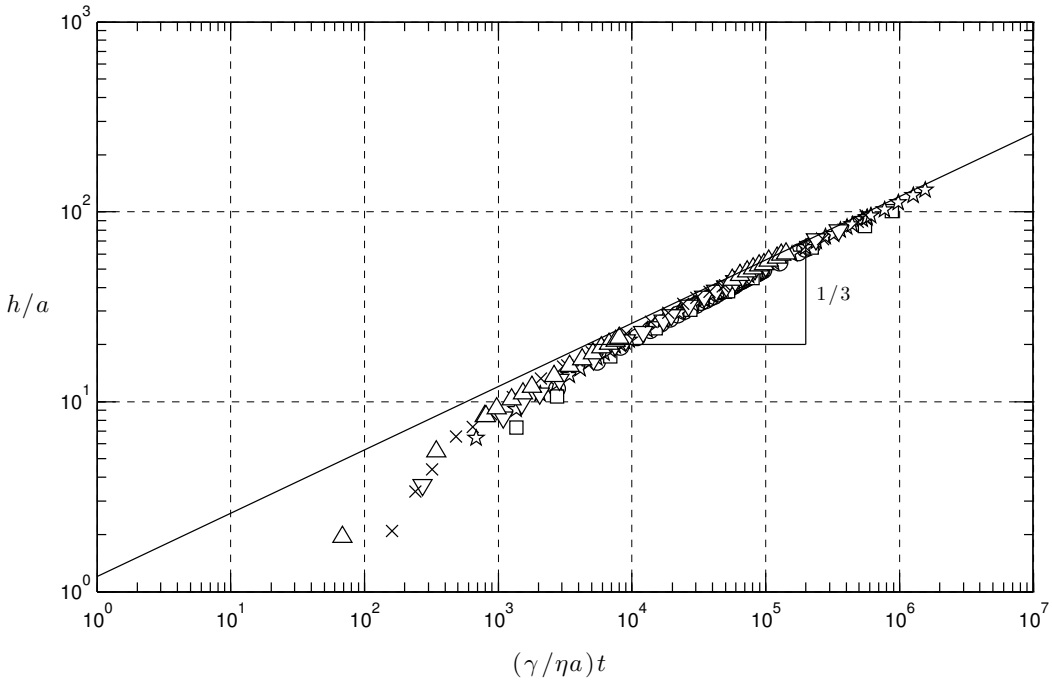


FIGURE 2.10 – Hauteur du ménisque adimensionnée par la longueur capillaire en fonction de $(\gamma t/\eta a)$. Avec des huiles de différentes viscosités. ○ : 5 mPas, □ : 10 mPas, ☆ : 20 mPas, ▽ : 100 mPas, × : 171 mPas, △ : 1000 mPas.

Toutes les courbes se rejoignent, même dans la partie d'établissement du régime, et elles suivent alors la loi en $t^{1/3}$ pour $\gamma t/\eta a > 10^3$.

Cette partie d'établissement du régime est liée au temps de mise en place du ménisque. En effet dans notre modèle nous supposons que le mouillage est total, or lorsqu'on met le coin en contact avec le liquide mouillant ce n'est pas le cas, l'angle de contact est initialement de $\theta = 90°$, et il faut un certain temps τ_m pour passer en situation totalement mouillante : $\theta = 0°$. Ce temps a été étudié par [69], qui trouvent que $\tau_m \approx 10^2 - 10^3 \eta a/\gamma$. Ce temps correspond au temps d'établissement de la dynamique en $t^{1/3}$ que nous observons dans nos expériences. Comme dans notre modèle le temps est adimensionné par $\eta a/\gamma$, les données se rejoignent aussi dans la phase initiale de l'ascension capillaire.

Validation expérimentale du modèle de l'orgue

Afin de valider notre modèle de l'orgue, nous avons réalisé une expérience où le coin est remplacé par une association de 7 tubes capillaires de rayons décroissants (respectivement 0.85 mm, 0.68 mm, 0.51 mm, 0.37 mm, 0.27 mm, 0.22 mm et 0.14 mm). Ceci est notre orgue capillaire. Nous approchons cet orgue d'un bain de liquide, qui est une huile silicone de viscosité 10 mPas. Nous observons l'ascension du liquide dans les différents tubes. Une série d'images tirée de cette expérience est présentée sur la figure 2.11. La position du leader se déplace effectivement du tube le plus large vers le tube le plus fin au cours de l'expérience.

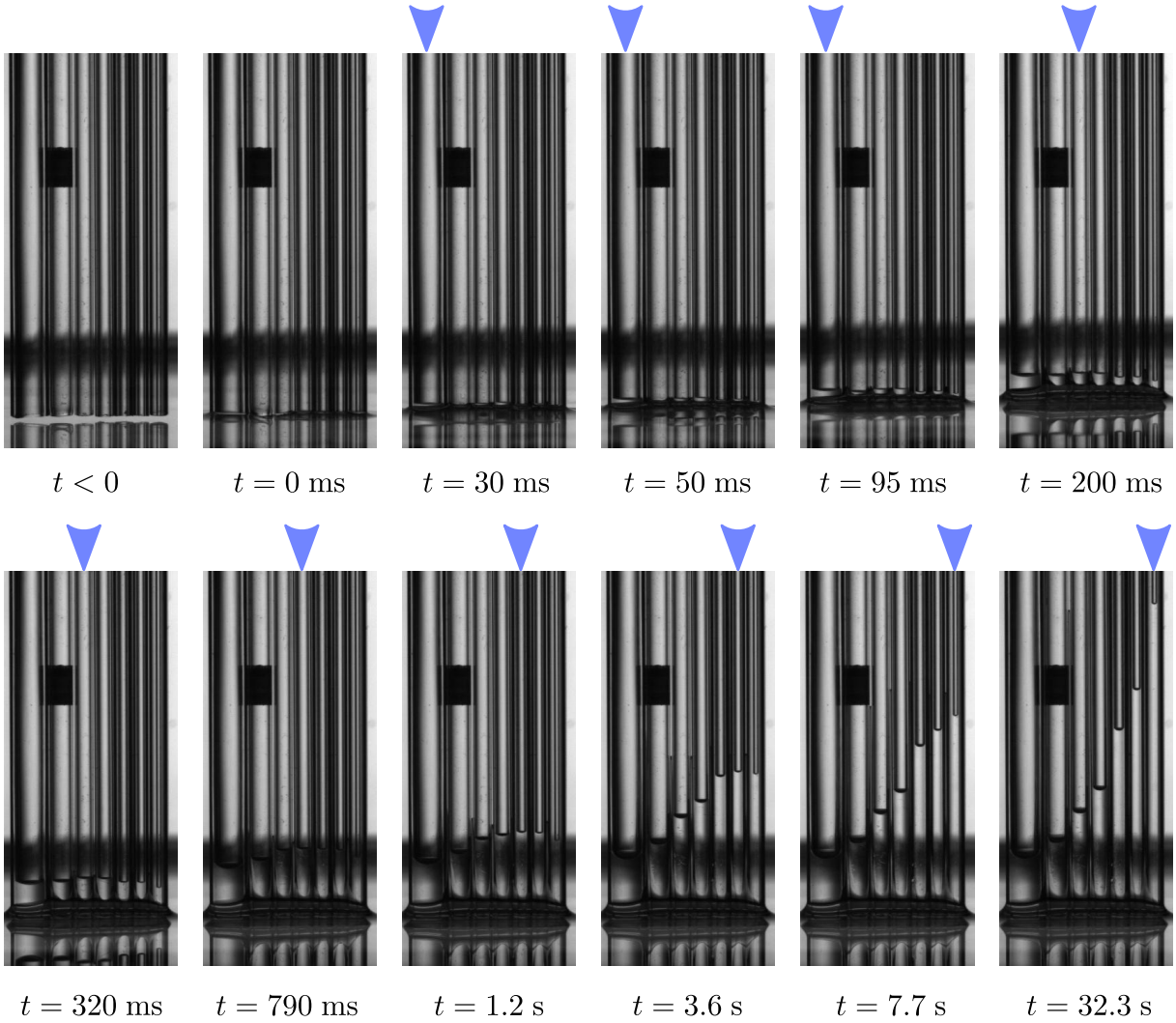


FIGURE 2.11 – Ascension capillaire dans une série de tubes capillaires. Sur chaque image, les tubes sont rangés de gauche à droite par rayon interne décroissant (0.85 mm, 0.68 mm, 0.51 mm, 0.37 mm, 0.27 mm, 0.22 mm et 0.14 mm). L'huile silicone utilisée a pour viscosité 10 mPas. Le pas de temps n'est pas constant entre chaque image. Nous indiquons le temps après mise en contact des tubes avec le bain liquide. La position du leader est indiquée par une flèche bleue. L'échelle est donnée par la pastille noire sur le deuxième tube, sa hauteur est de 3 mm.

2.4 Une loi universelle

Ce que nous venons de montrer avec le modèle de l'orgue est indépendant de la forme du coin. Pour la démonstration, nous n'avons pas eu besoin de spécifier la fonction $r(x)$ liant le rayon des tubes imaginaires à la distance au coin. En d'autres termes, l'équation (2.6) peut s'appliquer à tout type de coin. Nous avons utilisé trois types de coin pour vérifier cette affirmation : des coins linéaires, quadratiques et cubiques. Les coins linéaires sont obtenus en format un angle 2α avec deux plaques planes. La relation $r(x)$ est alors $r = \tan \alpha x$. Nous avons travaillé avec $\alpha = 2.5°$ et $\alpha = 6.5°$ et comparé nos résultats à ceux de [68], obtenus avec une géométrie identique mais plus confinée : $\alpha = 0.75°$. Les coins quadratiques sont ceux que nous avons réalisés avec des cylindres pleins, alors $r(x) = x^2/D$ où D est le diamètre du cylindre. Et nous avons obtenu des coins cubiques en contraignant deux feuilles flexibles contre une plaque solide. Alors la distance entre les murs élastiques suit la loi $r(x) \approx x^3/L^2$, où L est la longueur de chaque feuille flexible (voir la figure 2.12).

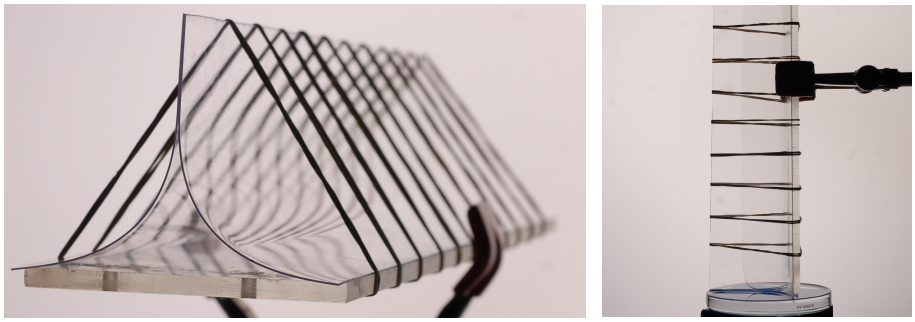


FIGURE 2.12 – Coin cubique, formé en appliquant deux plaques flexibles contre une plaque rigide à l'aide de rubans élastiques. À gauche, une vue de profil du coin. À droite, le coin plongé dans un bain liquide

Chacun de ces différents coins est mis au contact avec une huile silicone V20, de viscosité 20 mPas, et nous mesurons la hauteur du ménisque en fonction du temps. Nous présentons toutes les données adimensionnées sur la figure 2.13.

On vérifie ainsi l'indépendance de l'ascension capillaire vis-à-vis de la fonction $r(x)$. Et c'est pourquoi on peut dire que la loi a un caractère universel, elle peut être appliquée à toute forme de coin.

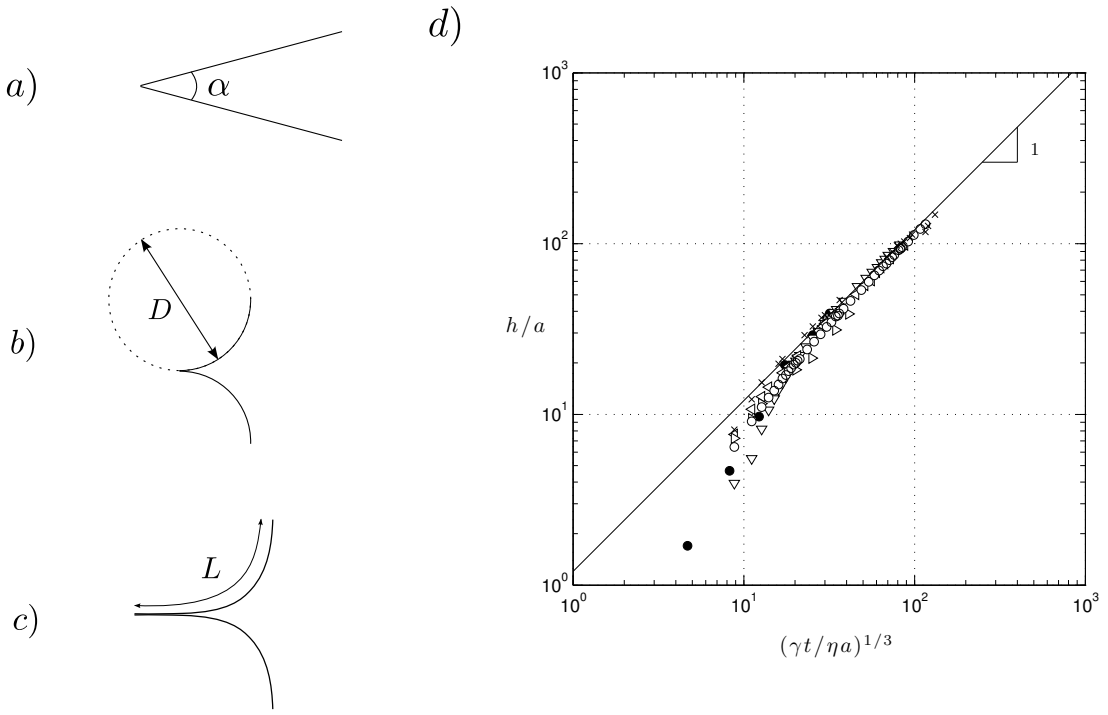


FIGURE 2.13 – a) coin linéaire : $r = \tan\alpha x$. b) coin quadratique : $r = x^2/D$. c) coin cubique : $r = x^3/L^2$. d) Hauteur du ménisque adimensionnée par la longueur capillaire en fonction de $(\gamma t/\eta a)^{1/3}$ pour différentes formes de coins. (i) coins linéaires. • : expériences de Higuera et al. $\alpha = 0.75°$, $\triangledown$: $\alpha = 2.5°$, $\triangleleft$: $\alpha = 6.5°$ et $\triangleright$: $\alpha = 30°$. (ii) coins quadratiques. $\circ$: $D = 30$mm. (iii) coins cubiques. $\times$: $L = 65$mm.

2.5 Conséquences pour un milieu poreux

Il y a des situations où on rencontre à la fois des géométries fermées et des géométries ouvertes, par exemple dans des milieux poreux ou dans des granulaires. La géométrie fermée donnerait une dynamique en $t^{1/2}$, type loi de Washburn et la géométrie ouverte où pourrait se trouver des coins donnerait une dynamique en $t^{1/3}$, comme nous venons de le voir dans les paragraphes précédents. Nous avons alors réalisé une expérience d'ascension capillaire où ces deux dynamiques apparaissent simultanément, et nous observons leur coexistence.

Pour obtenir une telle géométrie, nous avons repris le montage du coin formé par l'association d'une plaque rigide et de deux plaques flexibles, mais de telle sorte que cette fois-ci l'espace entre les plaques soit de taille submillimétrique, voir la figure 2.14. Cet espace va jouer le rôle de la géométrie fermée, tandis que les trois coins qui l'entourent jouent le rôle de la géométrie ouverte, dans laquelle nous savons que l'ascension se fait en $t^{1/3}$.

Nous avons mis en contact ce dispositif avec une huile silicone de viscosité 20 mPas, et suivi l'ascension du liquide dans le centre du canal et dans un des trois coins. Puis nous avons tracé la hauteur des deux ménisques sur le graphe 2.15. Nous avons aussi ajouté sur ce graphe les points correspondant à l'ascension capillaire du même liquide dans un coin formé par l'association de deux cylindres pleins de 30 mm de diamètre.

Nous observons le fait que les deux ascensions capillaires sont indépendantes. Le front dans la géométrie fermée, représenté par les carrés noirs sur le graphique 2.15, est semblable à celui qui se ferait dans un tube capillaire. Il a une dynamique initiale en $t^{1/2}$, suivant la loi de Wahsburn, et sature à une hauteur $h_e \approx 20$ mm qui correspond à celle prédit par la loi de

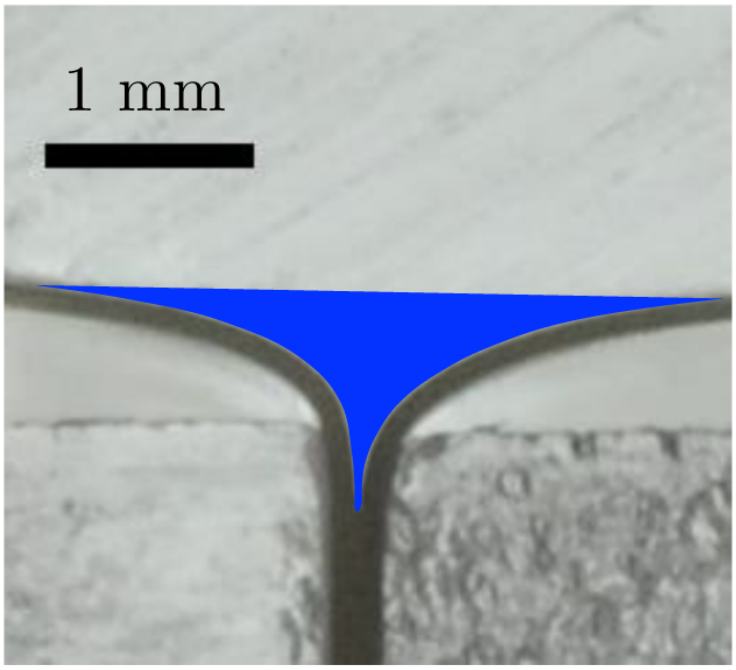


FIGURE 2.14 – Dispositif utilisé pour l'ascension capillaire dans une géométrie complexe où un canal central coexiste avec trois coins (zone bleue).

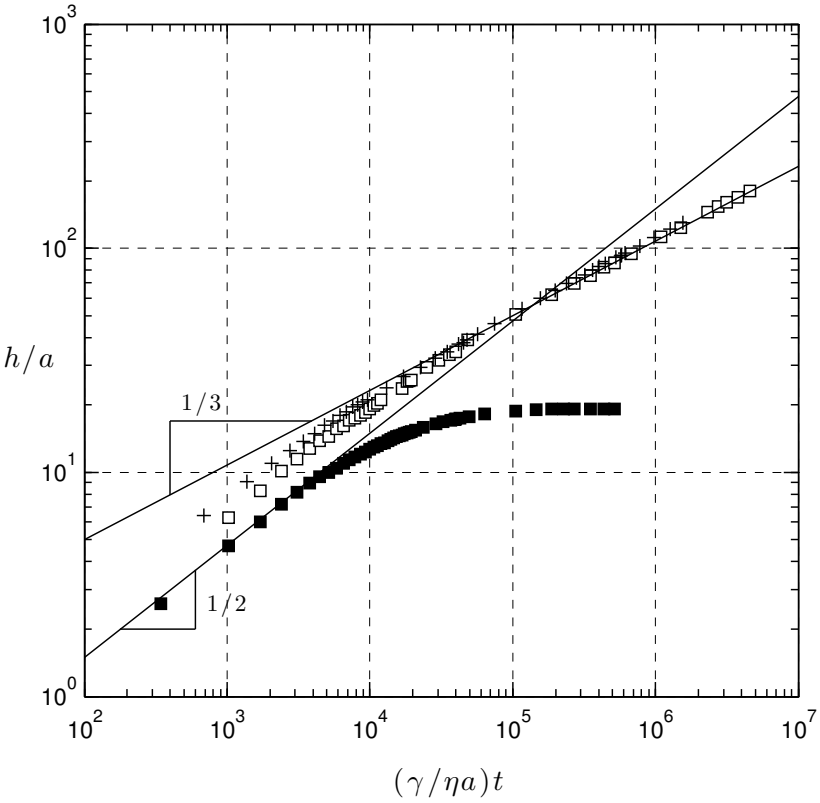


FIGURE 2.15 – Hauteur adimensionnée des ménisques dans le système de la figure 2.14 en fonction du temps adimensionné. ■ : dans le canal. □ : dans un des trois coins. + : dans un coin quadratique formé avec deux cylindres pleins de 30 mm de diamètre.

Jurin avec a = 1.5 mm et $r \approx 0.25$ mm : h_J = $2a^2/r \approx 20$ mm. Le front dans la géométrie ouverte, représenté par les carrés blancs sur le graphique 2.15 suit une dynamique en $t^{1/3}$ après un certain temps correspondant à l'établissement du ménisque. Sur le graphique, nous avons représenté par des croix, l'ascension dans un coin formé par l'association de deux cylindres pleins de 30 mm de diamètre avec le même liquide mouillant. Les deux courbes se confondent, on en déduit l'indépendance de l'ascension dans les coins vis-à-vis de celle dans le canal.

On peut proposer un argument en loi d'échelle pour comprendre l'indépendance des deux dynamiques et le fait que les deux courbes ne peuvent jamais se croiser. Estimons le temps typique t_e que met le liquide du canal pour atteindre la hauteur de Jurin $h_e \sim a^2/r$. Pour faire cela on fait l'approximation suivante, la dynamique du liquide pendant toute l'ascension est décrite par la loi de Lucas-Washburn

$$h \sim \sqrt{\frac{\gamma r}{\eta} t} \tag{2.8}$$

On trouve alors

$$t_e \sim \frac{\eta a^4}{\gamma r^3} \tag{2.9}$$

Si maintenant on cherche à écrire le temps auquel les deux fronts se croiseraient, t_c, on utilise les équations (1.22) et (2.6), qui donnent la hauteur de chaque front en fonction du temps :

$$\sqrt{\frac{\gamma r}{\eta} t_c} \sim \left(\frac{\gamma a^2}{\eta} t_c\right)^{1/3} \tag{2.10}$$

Et on trouve

$$t_c \sim \frac{\eta a^4}{\gamma r^3} \tag{2.11}$$

Alors $t_c = t_e$, les deux temps sont les mêmes. Cela signifie que le front du canal va ressentir la gravité avant de pouvoir rattraper le front des coins.

2.6 Ascension capillaire dans des rameaux

Une application à la montée de la sève dans les arbres (dans le cas où les vaisseaux conducteurs de sève sont embolisés) a été tentée en collaboration avec Éric Badel et Hervé Cochard au laboratoire PIAF (laboratoire de Physique et Physiologie Intégratives de l'Arbre Fruitier et Forestier) à l'INRA de Clermont-Ferrand.

Dans les expériences d'ascension capillaire précédentes nous étions libres de modifier chaque partie du montage afin de rendre l'expérience possible ou de faciliter les observations. Par exemple le choix des cylindres en Plexiglass a été très important, il a permis d'obtenir des coins quadratiques de bonne qualité et de les observer aisément. Dans le cas de l'observation en biologie, il n'est pas possible de faire de telles modifications. Ici par exemple, les tiges de bois sont opaques. Nous présentons tout d'abord le protocole expérimental que nous avons suivi, puis les résultats que nous avons obtenus.

Protocole

Pour faire les expériences d'ascension capillaire dans les tiges de bois, nous voulions être le plus proche possible de tiges dans une situation embolisée. Nous avons donc coupé des tiges de bois sur pied que nous avons mises à sécher une semaine. Ces tiges étaient écorcées pour

faciliter leur déshydratation. Ainsi nous avions des tiges embolisées, dans lesquelles de l'eau pourrait monter par ascension capillaire.

Pour éviter tout problème de mouillage (l'angle de contact de l'eau sur les parois des vaisseaux varie d'une espèce d'arbre à l'autre, Kohonen 2006 [70]), nous avons utilisé comme liquide de l'éthanol qui mouille totalement le bois. Les tiges de bois étant opaques, la seule solution pour observer la présence de l'éthanol dans les vaisseaux conducteurs de sève ou dans les méats est de faire une coupe transversale de la tige et d'observer cette coupe à la loupe binoculaire ou au microscope. Afin d'observer l'éthanol, nous lui avons ajouté un colorant rouge, de la cyanosine. Les coupes transversales sont faites avec un outil appelé microtomographe. C'est une lame de rasoir fixée à un rail. Cela permet de faire des états de surface convenables pour une observation au microscope. Sur la figure 2.16 nous montrons trois photos de section transversale d'une tige de hêtre. Les photos a) et b) ont été faites à la loupe binoculaire. La photo c) a été faite avec un microscope. Lorsqu'un microscope est utilisé pour regarder une lamelle, l'éclairage peut être fait à travers la lamelle, mais ici nous regardons la surface d'une tige, l'éclairage doit être oblique (par le côté) et c'est pour cela qu'il y a des reflets et des ombres sur la photo c).

Sur la photo a), le bois est intact, c'est une tige avant le début de l'expérience. Au centre, il est possible de distinguer la moelle de la tige. Les rayons blancs qui vont de la moelle à la périphérie de la tige sont les rayons ligneux. Tous les petits points noirs que l'on voit, qui ont une taille d'environ 50 μm correspondent à des vaisseaux conducteurs de sève. La photo b) a été prise après une expérience d'ascension capillaire d'éthanol. Presque toute la surface est rouge et a donc été mouillée par l'éthanol. La photo c) montre en détail les vaisseaux conducteurs de sève. Le diamètre de leur section va de 15 μm à 35 μm, et a pour valeur moyenne 28 μm. C'est à partir de telles images que nous avons mesuré les rayons moyens des vaisseaux pour toutes les essences de bois utilisées. Sur le tableau 2.1, nous indiquons les valeurs des rayons de vaisseaux que nous avons mesurées en fonction de l'essence de bois.

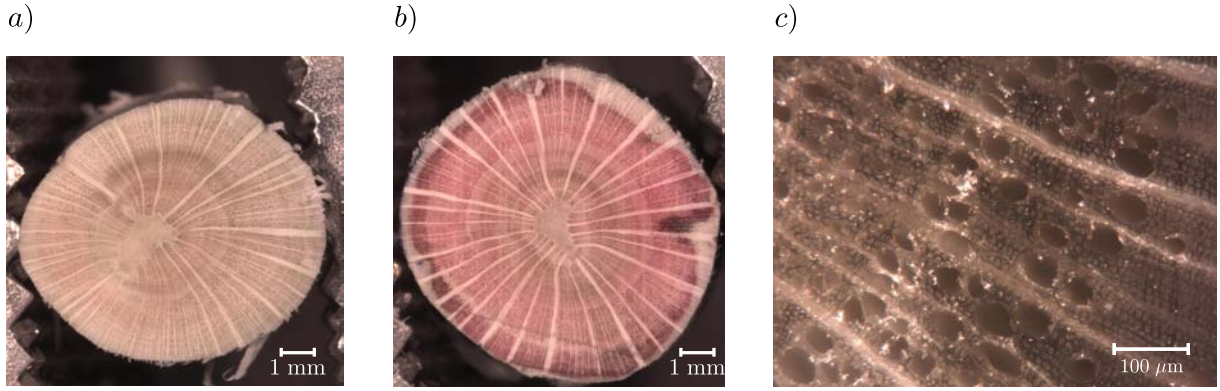


FIGURE 2.16 – Observations de coupes transversales de tiges de hêtre. a) surface avant expérience. b) surface après expérience d'ascension capillaire. c) vue au microscope de la surface avant expérience.

essence	robinier	peuplier	cerisier	pêcher	hêtre
rayon (μm)	40	15	12.5	12	14

TABLE 2.1 – Rayons moyens des vaisseaux des essences de bois utilisées.

Expériences

Nous mettons donc une tige de bois préalablement séchée en contact avec un bain d'éthanol pendant une journée. Puis nous découpons cette tige en petites sections de 1 cm de longueur. Et nous regardons la surface de chaque section. Sur le diagramme 2.17, nous présentons les résultats de cette expérience. Nous avons disposé les photos prises tous les 2 cm pour trois espèces d'arbre : hêtre, pêcher et robinier. Suivons la variation de cette surface dans le cas du hêtre. À la hauteur $z = 0$ cm, la surface de la tige est totalement rouge : toute la section de la tige est mouillée par l'éthanol. Jusqu'à la hauteur $z = 10$ cm, la surface reste complètement rouge. À partir de la hauteur $z = 12$ cm et jusqu'à la hauteur $z = 40$ cm, la surface diminue pour devenir nulle à la hauteur $z = 42$ cm. Cette hauteur $J_{\text{hêtre}} = 41$ cm correspond à une hauteur de Jurin pour la tige de hêtre. Pour les deux autres essences présentées ici, les hauteurs pour lesquelles la coloration disparaît totalement sont $J_{\text{pêcher}} = 28$ cm et $J_{\text{cerisier}} = 26$ cm . Nous avons aussi fait une expérience avec une tige de peuplier et une tige de robinier, pour lesquelles $J_{\text{peuplier}} = 25$ cm et $J_{\text{robinier}} = 12$ cm.

Notons aussi l'évolution spatiale de la surface mouillée avec la hauteur. Dans le cas du hêtre, la surface mouillée se resserre vers la moelle. En effet, tout en haut de la colonne liquide, les derniers vaisseaux remplis sont ceux qui sont proches de la moelle. Dans le cas du pêcher, les derniers vaisseaux mouillés se trouvent localisés autour d'un cerne. C'est le cas aussi pour le robinier, où les derniers vaisseaux mouillés se trouvent sur le cerne le plus jeune.

Des hauteurs plus petites que prévu

Si le phénomène d'ascension capillaire dans des coins avait eu lieu, il n'y aurait pas eu de hauteur critique à partir de laquelle les rameaux ne sont plus atteints par l'éthanol. Nous avons observé en détail les surfaces des sections de tiges pour des hauteurs légèrement supérieures aux hauteurs J mesurées. Nous n'avons pas trouvé la moindre trace d'éthanol ni dans les méats, ni dans les lumen des vaisseaux. Il semblerait que le phénomène d'ascension capillaire dans les coins n'intervienne pas ici et que l'ascension capillaire soit uniquement due à la capillarité dans les vaisseaux conducteurs de sève. Sur la figure 2.18 nous comparons la hauteur expérimentale d'ascension de l'éthanol à celle prédite par une loi de Jurin pour un tube de rayon égal au rayon moyen des vaisseaux des rameaux de chaque espèce. Les hauteurs trouvées expérimentalement correspondent à des hauteurs de Jurin. Pour le hêtre et le robinier la corrélation est parfaite, tandis que pour le peuplier, le cerisier et le pêcher les hauteurs expérimentales sont faibles par rapport à la prédiction donnée par la loi de Jurin. Plus la section moyenne des vaisseaux est petite, plus un liquide peut monter haut par capillarité dans une branche verticale séchée.

Cependant les hauteurs de montée capillaire atteintes sont toujours inférieures ou égales à celles que prédirait une loi de Jurin avec un rayon moyen de vaisseau. Alors qu'il y a beaucoup de vaisseaux de rayon plus faible que le rayon moyen, qui devraient permettre d'atteindre des hauteurs plus importantes. Mais le rayon d'un vaisseau peut varier avec la hauteur : un rayon qui est fin à une certaine hauteur est peut-être plus large à une hauteur plus faible et c'est pourquoi l'éthanol n'a pas pu y faire son ascension.

Mais nous avons fait une expérience avec un liquide volatile. Et il se pourrait que l'évaporation de l'éthanol ait fait diminuer la hauteur à laquelle le front liquide aurait dû monter sans évaporation. Pour tester cet effet d'évaporation, nous avons fait des expériences avec des rameaux entourés de cellophane. Les hauteurs atteintes ont été les mêmes. L'évaporation de l'éthanol est donc négligeable pour notre expérience.

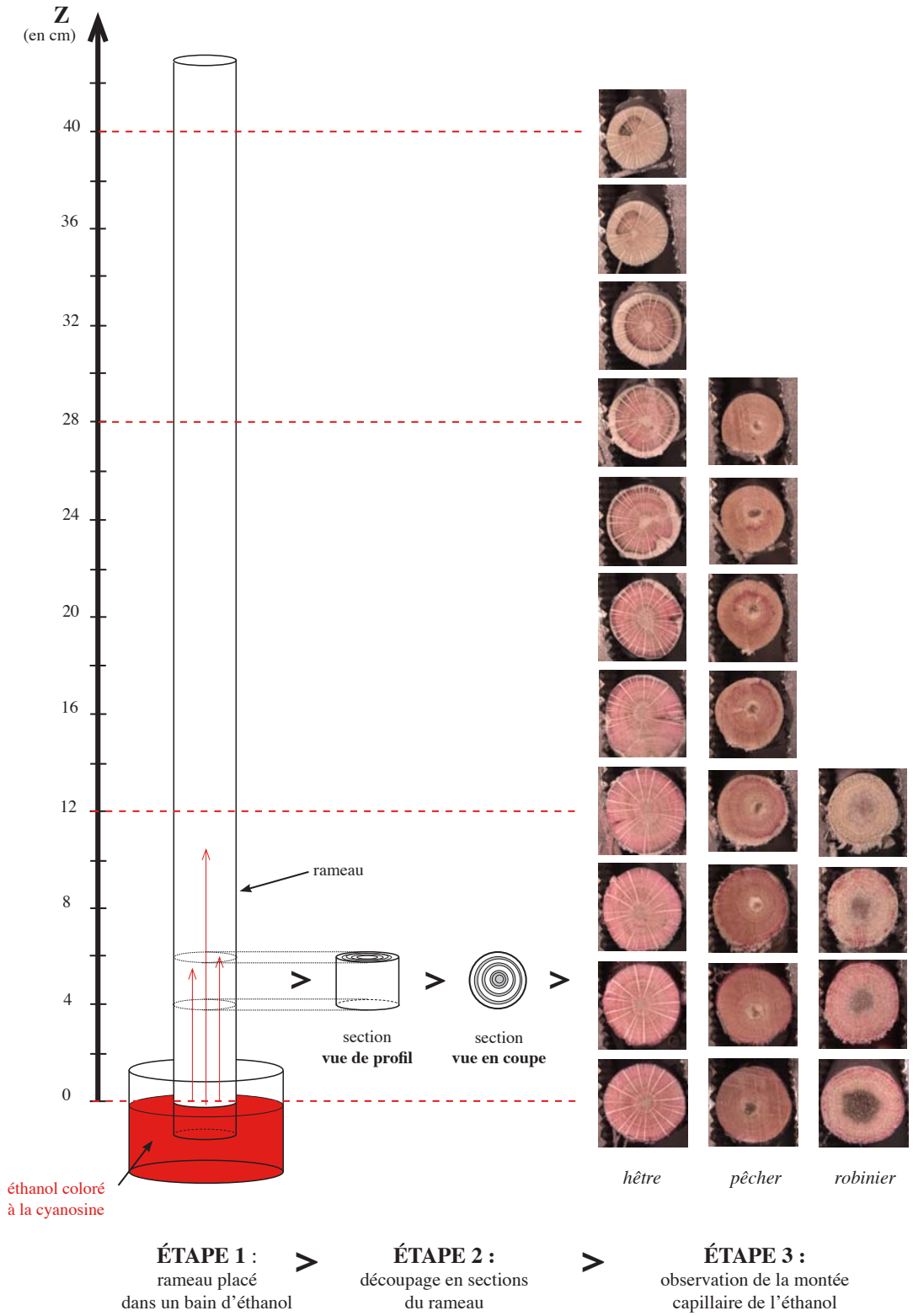


FIGURE 2.17 – Hauteurs de montée capillaire dans des tiges de hêtre, de pêcher et de robinier. Le liquide ascendant est de l'éthanol, sa longueur capillaire est $a = 1.7$ mm.

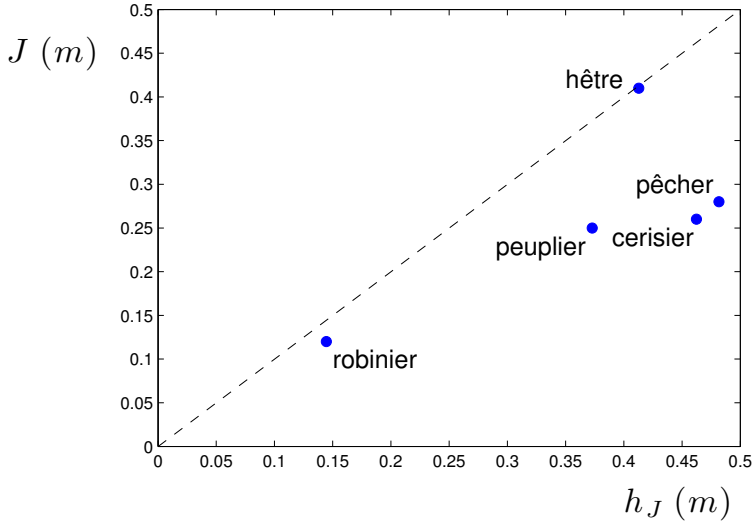


FIGURE 2.18 – Hauteurs d'ascension capillaire expérimentale J comparées à la hauteur de Jurin h_J qui serait atteinte avec un tube capillaire dont le rayon est égal au rayon moyen des vaisseaux de la tige de bois concernée.

Perspectives

Nous avons fait des expériences d'ascension capillaire dans des tiges de bois préalablement séchées. La hauteur à laquelle monte le liquide semble dictée par un mécanisme d'ascension du type loi de Jurin, avec comme rayon de tube équivalent celui des vaisseaux conducteurs de sève. Peut-être que du liquide est monté plus haut, mais nous n'avons pu l'observer car les dimensions des objets où nous observons les coins sont petites, de l'ordre du μm. Il est possible aussi que le colorant n'ait pas suivi l'éthanol dans de si petites géométries. Une solution serait de travailler avec un traceur plus petit, par exemple une eau lourde que l'on pourrait suivre en RMN. Une autre solution serait de suivre cette expérience avec un microtomographe à rayons X. Il est possible aussi que le mécanisme proposé d'ascension dans les coins ne fonctionne pas ou alors ne soit que local : une zone en forme de coin peut se remplir de sève mais ne construit pas une colonne d'une hauteur importante car les coins ne sont pas connectés entre eux. Il serait très intéressant aussi d'approfondir l'étude de l'évolution spatiale de la zone mouillée par le liquide ascendant avec la hauteur. Car il semble y avoir de fortes différences entre les essences et donc entre les différentes organisations des systèmes vasculaires.

2.7 Conclusion

Nous avons fait des expériences d'ascension capillaire dans des géométries ouvertes. Nous avons observé que le liquide imprègne les coins sans atteindre de hauteur limite. La dynamique de l'ascension est en $t^{1/3}$. Ce type de montée capillaire est bien différent de celles qui se font dans des tubes ou dans des géométries plus complexes (tels les tissus, les milieux granulaires ou les milieux poreux) et pour lesquelles les lois de Jurin et de Lucas-Washburn sont valables. En effet on arrive toujours à définir un rayon r qui les caractérisent. Mais dans un coin il n'y a pas de longueur caractéristique et c'est pourquoi la dynamique est différente. Cela est valable pour toutes les formes de coins que nous avons utilisées (linéaires, quadratiques et cubiques) et en accord avec le modèle que nous avons proposé. C'est pourquoi l'ascension capillaire dans un coin a un caractère universel : la dynamique est la même pour toute forme de coin.

Nous avons essayé de faire la même expérience avec des rameaux de différentes essences. Mais nous n'avons pas observé de hauteur d'ascension capillaire dépassant la hauteur de Jurin. Nous ne savons pas quelle en est la raison. Deux questions restent en suspens : le phénomène est-il bien présent dans les arbres ou est-il difficile à observer ?

Deuxième partie

Vitesse critique de verse

Dans cette partie, nous allons étudier la verse des plantes. La verse est le phénomène où un arbre ou un plant de céréale se couche au sol, figures 2.19 et 2.20. Cela peut être causé par une force qui agit sur la plante (le vent ou le poids de la neige), par une faiblesse de la tige (champignons) ou des racines (érosion du sol, terre trop enrichie en sulfates). Le résultat est la chute de la plante et conduit le plus souvent à sa mort.

FIGURE 2.19 – Verse dans un champ d'orge. Printemps 2010. Essonne.

FIGURE 2.20 – Verse d'arbres dans les Landes après les tempêtes de 1999.

Il existe plusieurs types de verse : soit la verse par rupture de la tige, soit la verse par rupture des racines. Dans le cas des arbres, on utilise respectivement les termes de volis et de chablis. Ces deux types de verse sont illustrées sur la figure 2.21.

Ici nous nous intéresserons uniquement à la verse par rupture de la tige, dans le cas des céréales et des arbres. Nous allons diviser cette partie en cinq chapitres. Dans le chapitre 3, la plante sera modélisée par une plaque flexible, ce qui permettra d'introduire les notions d'élasticité et de trouver une première vitesse critique pour laquelle la plaque est pliée. Mais, la plupart des plantes ne sont pas planes, il y a les céréales qui ont une tige creuse, les herbes qui ont

une géométrie de ruban courbé, les arbres dont le tronc est une grande tige pleine. L'étude des géométries courbées sera menée au chapitre 4, puis étendue au cas des géométries tubulaires au chapitre 5. La verse par rupture de tiges fragiles, modèles des arbres, sera étudiée au chapitre 6 pour le cas de la flexion et au chapitre 7 pour le cas de la torsion.

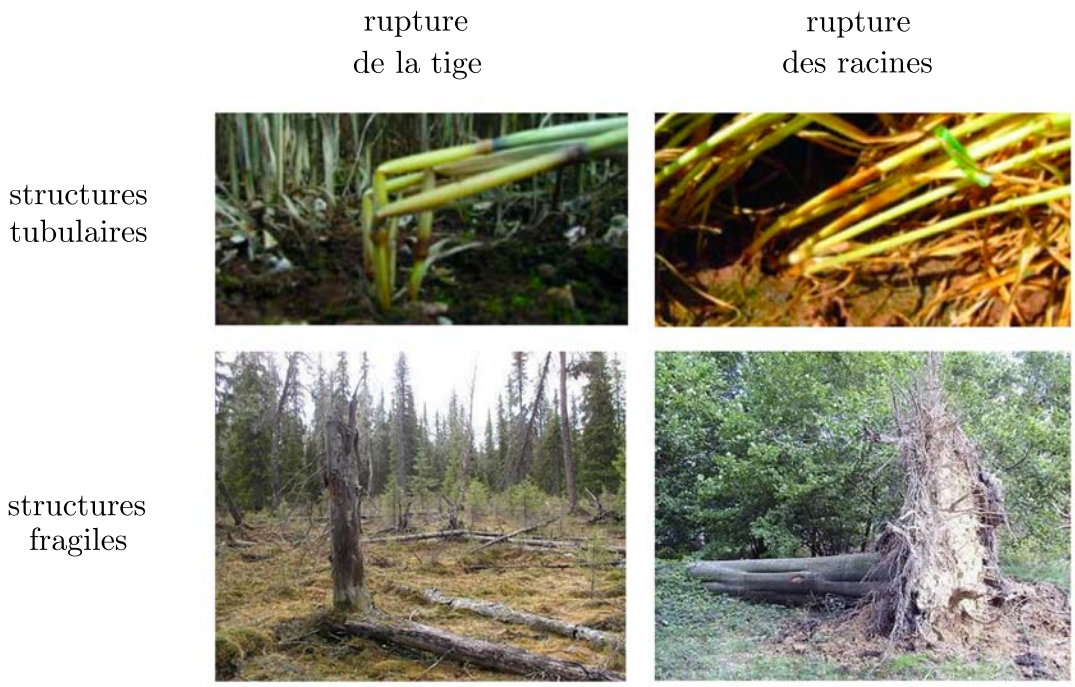


FIGURE 2.21 – Deux types de verse : rupture de la tige ou des racines. En haut pour les céréales et en bas pour les arbres

FIGURE 2.22 – Plantes et leurs modèles. Rubans pour les herbes. Pailles pour les céréales. Tiges de bois pour les arbres.

Chapitre 3

La verse de structures groupées

Sommaire

3.1 L'expérience 50

3.2 Vitesse critique pour un ensemble de plaques 51

3.3 Prévention du phénomène de verse 52

3.4 Conclusion 53

Dans ce chapitre, nous présentons l'étude de la vitesse critique de verse pour un ensemble de plaques groupées. Cette expérience a été menée par Pedro Reis, John Bush et Christophe Clanet en 2008 au "Department of Mathematics" du MIT, à Cambridge aux États-Unis. Elle consiste à modéliser le couvert végétal par un ensemble de plaques flexibles alignées dans une direction, celle de la soufflerie où l'expérience va se dérouler ; c'est ce qui est représenté sur la figure 3.1. En étudiant le couplage entre le couvert et le vent, il apparaît une vitesse critique U^* pour laquelle de grandes déformations apparaissent sur le couvert, et qui sont interprétées comme un phénomène de verse. La question ici est, comment cette vitesse varie-t-elle avec la géométrie des plaques et de l'ensemble de plaques, la canopée.

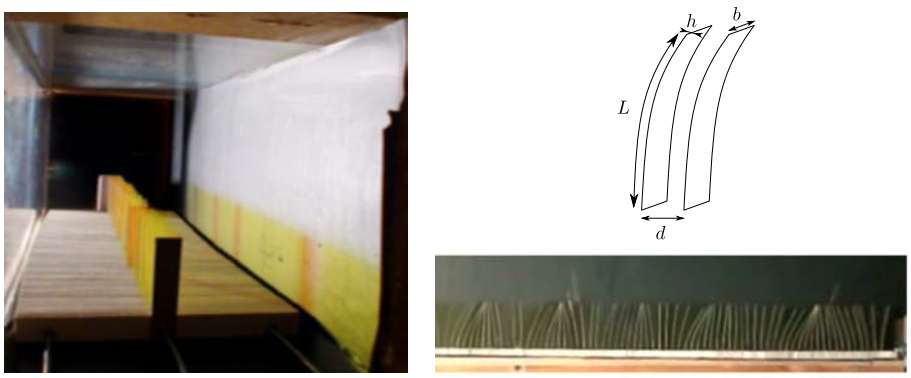


FIGURE 3.1 – Montage expérimental. À gauche, l'assemblée de plaques dans la soufflerie. En bas à droite, les plaques soumises à un écoulement pendant une expérience. En haut à droite, les différents paramètres définissant l'assemblée de plaques flexibles : L leur hauteur, h leur épaisseur, b leur largeur et d leur écartement.

3.1 L'expérience

Les plaques utilisées sont en mylar, elles ont un module de Young E = 10^{10} N/m^2, une densité de 1570 kg/m^3, une d'épaisseur h = 89 µm et une largeur b = 2.5 cm. Leur hauteur L varie de 7.2 cm à 11.5 cm. Elle est toujours inférieure à la hauteur à laquelle la plaque plierait sous son propre poids, qui est d'environ 17 cm. Pour représenter le couvert végétal, les plaques sont placées en ligne, espacées d'un espace d compris entre 5 et 20 mm (voir la figure 3.1). L'écoulement d'air est créé avec une soufflerie et on peut mesurer la fréquence à laquelle les plaques vibrent et la comparer à leur fréquence naturelle de vibration $f_0 = \frac{\pi}{16\sqrt{3}}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{h}{L^2}$. Pour une vitesse U de vent, on relève la fréquence moyenne des plaques f. Ainsi il est possible d'étudier l'évolution de la fréquence moyenne des plaques en fonction de la vitesse de l'écoulement.

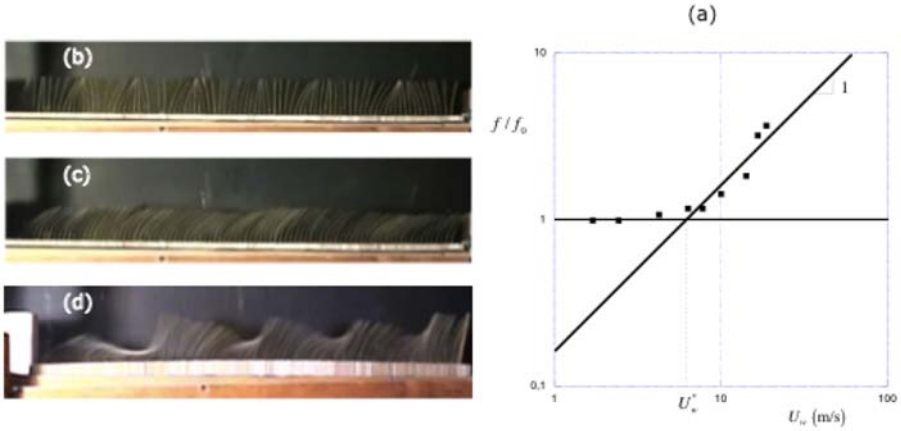


FIGURE 3.2 – Trois régimes de vibration des plaques en fonction de la vitesse du vent.

Sur la figure 3.2 a) est tracée l'évolution de la fréquence adimensionnée des plaques f/f_0 en fonction de la vitesse de l'écoulement U pour des plaques de hauteur L = 8.3 cm et d'espacement d = 5 mm. Il y a trois régimes : 3.2 b) les plaques oscillent mais il n'est pas possible de déterminer la direction du vent, figure 3.2 c) les plaques oscillent et sont inclinées dans la direction du vent et figure 3.2 d) les plaques subissent de fortes déformations et sont couchées dans la direction de l'écoulement d'air. La fréquence des plaques est égale à leur fréquence propre tant que la vitesse du vent est inférieure à une vitesse critique U^* = 7 m/s. Une fois cette vitesse U^* dépassée la fréquence augmente linéairement avec la vitesse. Le régime $U \ll U^*$ correspond à celui de la figure 3.2 b) où les plaques oscillent mais où on ne voit pas la direction du vent, et celui où $U \gg U^*$ correspond à la figure 3.2 d) où les plaques sont fortement défléchies, tandis que lorsque $U \approx U^*$, on est dans le régime de transition où l'on voit apparaître la direction du vent sur le couvert.

On étudie maintenant les variations de la vitesse critique U^* avec la hauteur des plaques et leur espacement. Pour une distance entre plaques d = 5 mm, l'expérience est répétée avec des hauteurs allant de 7.3 cm à 11.5 cm et les résultats sont présentés sur la figure 3.3 a). Avec des plaques de hauteur 8.3 cm, la distance entre plaques est variée de 5 à 20 mm et les résultats sont présentés sur la figure 3.3 b).

On observe qu'une augmentation de la hauteur des plaques ou de la distance entre plaques a pour conséquence une diminution de la vitesse U^*. Dans le paragraphe qui suit, nous présentons un modèle qui permet d'interpréter ces résultats.

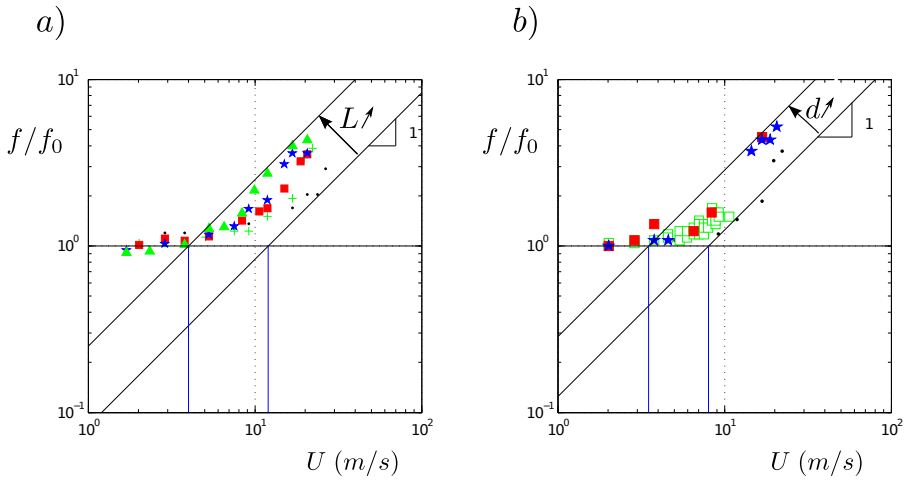


FIGURE 3.3 – Évolution de la vitesse critique de changement de régime avec la hauteur des plaques a) et la distance entre plaques b). En a) la distance entre les plaques est 5 mm et les hauteurs de plaques sont • 7.2 cm, + 8.3 cm, ■ 9.5 cm, ★ 10.5 cm et ▲ 11.5 cm. En b) la hauteur des plaques est 8.3 cm et les distances entre les plaques sont • 5 mm, □ 10 mm, ■ 15 mm, ★ 20 mm.

3.2 Vitesse critique pour un ensemble de plaques

Pour connaître la force exercée par le vent sur une plante, il faut savoir quelle est la vitesse du vent dans le couvert, en fonction de la vitesse du vent en surface. D'après Finnigan 2000 [71], la taille des écoulements turbulents qui pénètrent le couvert varie en loi d'échelle avec la hauteur des plantes (ou plaques) qui constituent le couvert et leur vitesse varie comme la vitesse du vent à l'extérieur du couvert.

Alors, en loi d'échelle, la force qui s'exerce sur une plaque est de l'ordre de $F_{vent} \sim \rho_{vent}\, U^2 Lb$. La force élastique de rappel de la plaque est $F_p \sim \frac{EI}{L^2}$, avec ici $I = \frac{bh^3}{12} \sim bh^3$. Une plaque qui se couche sur sa longueur, vient au contact avec L/d autres plaques, ce qui a pour conséquence le fait que la force totale de réaction élastique est $F_t \sim \frac{Ebh^3}{Ld}$. En équilibrant ces deux forces, on déduit la vitesse critique à partir de laquelle les plaques sont mises au sol :

$$U^* = \sqrt{\frac{E}{\rho_{vent}} \frac{I}{LSd}} \tag{3.1}$$

Cette vitesse augmente avec le module de Young de la plaque, si c'est une plante qui forme le couvert végétal, alors pour une même géométrie, la plante qui a le plus grand module de Young sera la plus résistante à la verse de vent. La vitesse critique dépend aussi de la masse volumique de l'air, qui peut augmenter sensiblement s'il pleut, il y a alors un plus grand risque de verse. Il y a aussi une dépendance de la vitesse critique avec la géométrie de la plante, par le terme $\frac{I}{LS}$. Et une diminution de l'espacement entre plants fait augmenter U^* et rend le couvert plus résistant au vent. On peut retracer les résultats de toutes les expériences avec les vitesses adimensionnées par U^* et on voit sur la figure 3.4 que toutes les courbes se rejoignent.

On peut maintenant comparer les vitesses de vents mesurées en plein champ à celles prédites par le modèle qui vient d'être présenté. On trouve chez Py 2006 [72] les caractéristiques physiologiques des plants de blé : hauteur $L = 0.68$ m, fréquence propre $f_0 = 2.5$ Hz, espacement entre tiges $d = 0.05$ m et masse de la tige $m = 7.4$ g. Ici, ce sont la fréquence propre et la masse de la tige qui sont indiquées, et non son module de Young et son moment d'inertie, Nous allons

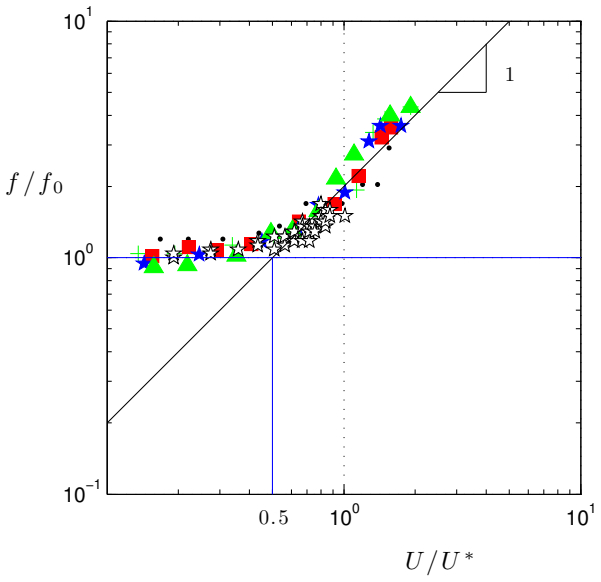


FIGURE 3.4 – Vitesses et fréquences adimensionnées

donc réécrire la vitesse critique en fonction de ces paramètres, en utilisant l'expression de la fréquence d'une tige ($f_0 = \frac{3.515}{4*\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{r}{L^2}}$) :

$$U^* = \frac{2\pi}{3.515} f_0 \sqrt{\frac{m}{\rho}\frac{L^2}{Sd}} \tag{3.2}$$

En prenant $S = 2rL$, où $r = 2$ mm, on trouve $U^* = 20$ m/s, ce qui est proche de la vitesse critique de verse de 22 m/s pour le blé, d'après Berry 2002 [73].

3.3 Prévention du phénomène de verse

Pour éviter la verse des céréales, on cherche à augmenter cette vitesse U^*. De la même façon que dans les expériences précédentes, on peut essayer de raccourcir leur taille ou de les rapprocher. Mais comme on l'a vu plus haut, on ne peut plus diminuer la hauteur des céréales utilisées actuellement. Les rapprocher est également délicat. Il y aurait alors compétition entre les plants pour la lumière, l'eau et les nutriments venant du sol. Dans des champs de céréales très rapprochées, les champignons se transmettent aussi beaucoup plus facilement.

On peut alors essayer de sélectionner des céréales de plus grand module de Young. Mais aussi améliorer la géométrie de la tige pour augmenter le moment quadratique. Nous avons vu que les tiges creuses remplissent très bien cette fonction : pour une même masse de tige, une tige creuse aura un moment quadratique plus élevé qu'une tige pleine, et sa vitesse critique de verse sera alors plus élevée.

3.4 Conclusion

Nous venons de présenter l'étude de l'interaction d'un ensemble de plaques flexibles avec un écoulement d'air. Nous avons observé qu'à partir d'une vitesse critique d'écoulement U^*, les plaques sont couchées au sol. Cette vitesse peut être considérée comme la vitesse de verse d'un couvert végétal. La comparaison de cette vitesse avec les données de terrain pour le blé est correcte et valide le modèle. Nous avons donc appris sur quels paramètres agir pour renforcer la résistance d'un champ au vent.

Cependant, quelle que soit la vitesse imposée, les plaques couchées au sol retrouvent leur position verticale quand la vitesse retombe. Dans un pareil cas, le vent ne présenterait aucun risque. Ce qui présente un danger, c'est la formation d'un pli, qui empêche la plante de se relever, ce que l'on voit sur la figure 3.5 pour une tige de blé.

FIGURE 3.5 – Pli au niveau de la tige.

On ne voit pas de pli apparaître sur une plaque peu épaisse, car il faudrait lui imposer un rayon de courbure longitudinale de l'ordre de son épaisseur. Par contre pour la tige, c'est sa géométrie courbée qui est responsable de l'apparition d'un pli à un rayon de courbure longitudinale que nous souhaiterions déterminer.

La tige, avec sa géométrie courbée, présente un avantage par rapport à la plaque : elle a un moment d'inertie plus grand, et donc une vitesse U^* plus élevée. Mais elle peut former un pli pour un rayon de courbure bien plus élevé que son rayon transversal et donc verser à une vitesse de vent plus faible que U^*. Pour déterminer cette nouvelle vitesse de vent à laquelle apparaît le pli nous allons étudier dans le chapitre suivant l'apparition de plis sur des objets courbés.

Chapitre 4

La verse géométrique des structures élancées courbées

Travail réalisé avec Benoit Roman

Sommaire

4.1 Le mètre à ruban **56**
4.1.1 Faits remarquables 56
4.1.2 Le pli 61
4.2 Expérience de flambage **62**
4.3 Modèle **66**
4.3.1 Transition d'état liquide-gaz 66
4.3.2 Transition d'état du ruban 68
4.3.3 Comparaison aux expériences 72
4.4 Pli déclenché par un couple **74**
4.4.1 Expériences de flexion 74
4.4.2 Expériences en soufflerie 77
4.5 Perspectives **82**
4.5.1 Longueur de transition 82
4.5.2 Bourrasque 86
4.6 Conclusion **89**

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des objets courbés transversalement, tel un mètre à ruban. Il existe de nombreuses études sur les rubans dans le cadre d'applications à des systèmes déployables, notamment dans le cas de l'aéronautique, pour ouvrir des panneaux solaires sur des engins spatiaux : Guinot 2011 [74], Bourgeois 2012 [75] et Pellegrino 2007 [76]. Dans le cas des plantes, l'aspect mécanique du ruban est utilisé pour décrire la feuille de maïs, Moulia 2000 [33].

La courbure des objets augmente énormément leur moment quadratique. Ainsi un objet courbé est beaucoup plus difficile à déformer qu'un objet plat. Une plante à tige courbée est robuste. Et effectivement il y a beaucoup de plantes dans le monde végétal qui ont des géométries planes courbées, certains exemples se trouvent sur la figure 4.1.

Mais cela a un coût. Tandis que pour former un pli sur une feuille plane, il faut lui imposer un rayon de courbure longitudinale qui est de l'ordre de son épaisseur ; pour un objet qui possède

une courbure transversale, un pli apparaît pour un rayon de courbure longitudinale plus élevé. Il devient alors très facile de tordre l'objet. Ceci constitue une autre faiblesse de la plante, elle verserait par formation d'un pli et non en se couchant au sol. Nous cherchons donc à comprendre la formation d'un pli sur une structure élancée qui possède une courbure transversale.

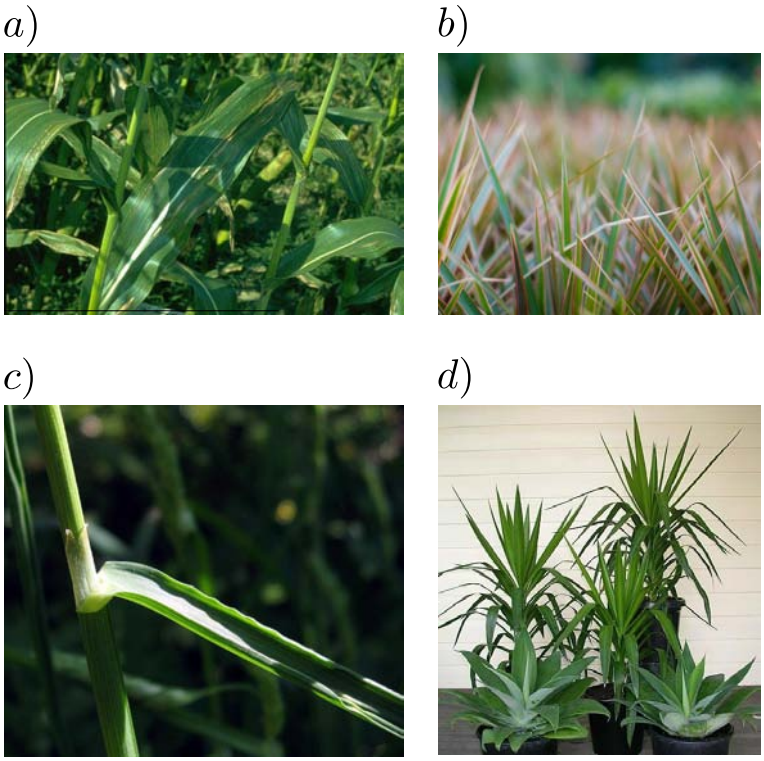


FIGURE 4.1 – Exemples de plantes à géométries courbées. a) maïs, b) carex bicolore, c) dactyle aggloméré et d) yucca et agave.

Nous verrons qu'il est possible de faire une analogie entre l'apparition du pli sur le ruban et un changement de phase en thermodynamique, ce que l'on retrouve dans plusieurs problèmes de transition Gioia 2001 [77], Panovko 1972 [78] et Chater 1994 [79]. Cela va nous être très utile pour prédire l'apparition du pli.

4.1 Le mètre à ruban

Dans ce paragraphe, nous décrivons les propriétés générales d'un ruban qui possède un rayon de courbure transversale r. Un tel objet fait partie de la vie quotidienne, c'est le mètre à ruban. Une photo de mètre à ruban se trouve sur la figure 4.2 Avec une longueur L, grande devant sa largeur b, elle-même grande devant son épaisseur h : $h \ll b \ll L$.

4.1.1 Faits remarquables

Le mètre à ruban est un ruban de métal qui a une courbure transversale, ainsi il résiste mieux à une déformation qu'un ruban plat. Pour visualiser cela, nous avons réalisé les deux clichés qui se trouvent sur la figure 4.3. À gauche se trouve un mètre à ruban de rayon de courbure transversale r = 12.5 mm, d'épaisseur h = 0.1 mm, de largeur b = 30 mm et de longueur L = 50 cm, étendu à l'horizontale dans le champ de gravité vertical. Et à droite

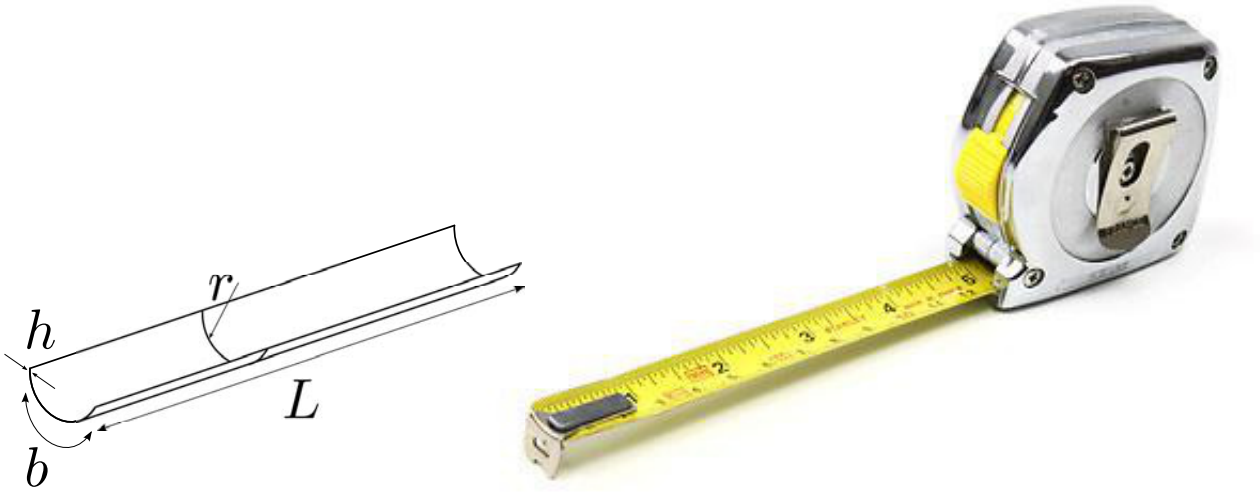


FIGURE 4.2 – Mètre à ruban.

se trouve un réglet de largeur $b = 20$ mm, d'épaisseur $h = 1$ mm, sans courbure transversale et étendu de la même longueur à l'horizontale. Le mètre à ruban reste horizontal quasiment sur toute sa longueur tandis que le réglet ploie sous l'effet de la gravité, bien qu'il soit dix fois plus épais. La courbure du ruban permet d'augmenter le moment quadratique et ainsi la résistance à la flexion. En effet, une vue de profil de ces objets, représentée dans les encarts de la figure 4.3, montre que bien que le mètre à ruban soit très peu épais, le fait qu'il ait une courbure transversale lui confère une épaisseur apparente importante, et donc une rigidité élevée. En se référant à la figure 4.4, il est possible de déterminer l'épaisseur apparente du mètre à ruban : h_r. La géométrie permet de calculer $h_r = r(1 - \cos\theta)$ et $2\theta r = b$, si bien que : $h_r = \frac{1}{8}\frac{b^2}{r}$. Avec $b = 20$ mm et $r = 25$ mm, $h_r = 9$ mm, ce qui est 90 fois supérieur à l'épaisseur du ruban, $h = 0.1$ mm. Augmenter la largeur et surtout diminuer le rayon de courbure transversale sont deux solutions pour augmenter la rigidité du ruban sans avoir à augmenter son épaisseur. Dans le cas du mètre à ruban, augmenter l'épaisseur reviendrait à augmenter la masse et l'objet deviendrait très lourd. Dans le monde végétal, et surtout dans le cas des plantes annuelles, la quantité de matière qui peut être produite est limitée. C'est très intéressant pour la plante de pouvoir créer une structure rigide avec très peu de matière végétale en formant des structures enrubannées ou circulaires.

En s'intéressant maintenant uniquement au ruban, et en faisant varier sa longueur exposée au champ de gravité, il est tout de même possible de le voir se courber. La série d'images 4.5 montre un mètre à ruban en acier de largeur $b = 13$ mm, de rayon de courbure transversale $r = 19$ mm et d'épaisseur $h = 0.15$ mm. De gauche à droite et de haut en bas, la longueur L du ruban est augmentée par pas de 20 cm. Plus la longueur augmente, plus le ruban se courbe sous l'action de la gravité. Le ruban a alors un rayon de courbure longitudinale R à la position d'encastrement, ce rayon augmente en s'approchant de l'extrémité libre où il devient infini. Puis, lorsque la longueur du ruban dépasse 1 m, sur la dernière image de la figure 4.5, il forme un pli localisé près de la partie encastrée et le reste du ruban redevient droit. La formation de ce pli s'accompagne d'un bruit. Elle a lieu pour un rayon de courbure longitudinale critique noté R_c.

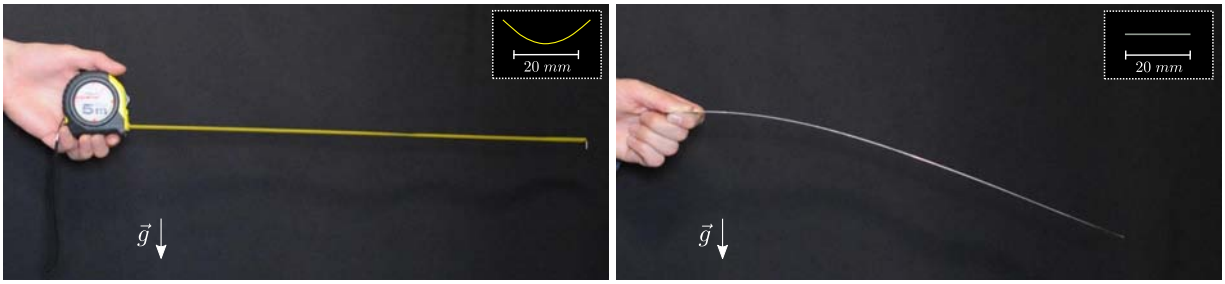


FIGURE 4.3 – Ruban et réglet soumis à l'action de la gravité. À gauche, le ruban, qui a une courbure transversale ($r = 40$ m^{-1}) reste quasiment horizontal sur toute sa longueur. Tandis que le réglet de la photo de droite, qui est totalement plat, se courbe sous l'effet de la gravité. Dans les encarts est présenté le profil du ruban et du réglet.

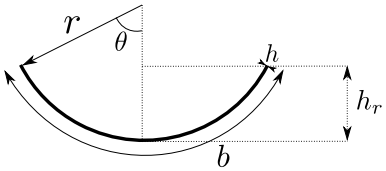


FIGURE 4.4 – Notations pour le calcul de l'épaisseur apparente du ruban h_r de rayon de courbure transversale r, de largeur b et d'épaisseur h.

Nous allons observer la dépendance de cette longueur maximale horizontale du mètre à ruban L_h avec sa géométrie. Pour cela nous faisons varier la largeur. Sur la figure 4.6 est représentée la variation de cette longueur L_h avec la largeur b, pour un ruban en acier d'épaisseur $h = 0.16$ mm, de rayon de courbure transversale $r = 22$ mm et de largeur initiale $b = 31.5$ mm. La longueur L_h varie à peu près linéairement avec la largeur. Nous n'avons pas fait de points pour des largeurs comprises entre 0 et 15 mm, pour lesquelles la transition vers le pli disparaît : le ruban passe continûment d'un état à l'autre et le bruit lié à la formation du pli a disparu. Ce que l'on retient de cette rapide expérience, c'est le fait que l'apparition du pli est liée à un critère, à déterminer, qui dépend de la géométrie du ruban.

Il faut noter que les rubans provenant de mètres à ruban vendus dans le commerce ne constituent pas des rubans parfaits. Une coupe transversale du ruban, qui est représentée sur la partie gauche de la figure 4.7, montre que le mètre à ruban n'a pas une courbure transversale constante. Sur les extrémités, il n'a même pas du tout de courbure. Nous nous sommes aussi demandés si la courbure du ruban est constante sur toute sa longueur. Nous présentons donc l'évolution du rayon de courbure transversale du ruban tout le long de sa longueur sur la partie droite de la figure 4.7. Elle est maximum aux extrémités et minimum au milieu avec des transitions extrémité/milieu très rapides, si bien que les parties $0-2$ m et $6-8$ m du ruban ont un rayon de courbure de 22 mm et la partie $2-6$ m a un rayon de courbure de 15 mm. Ces deux particularités géométriques des rubans peuvent s'expliquer par la façon dont ils sont construits industriellement. Les rubans sont fabriqués à partir de rubans plats très longs qui passent entre deux roues, une fine et une large. La roue large est rainurée, si bien que la roue fine écrase le ruban dans la rainure. Puis quand cela est fait, les extrémités du ruban sont coupées. C'est ce qui peut expliquer un rayon de courbure plus faible aux extrémités du ruban et un rayon de courbure transversale non uniforme pour une section donnée.

Ces mètres à ruban ne constituent pas de parfaits modèles pour l'étude des rubans courbés. C'est une raison pour laquelle nous avons fabriqué nos propres rubans, la seconde est de pouvoir

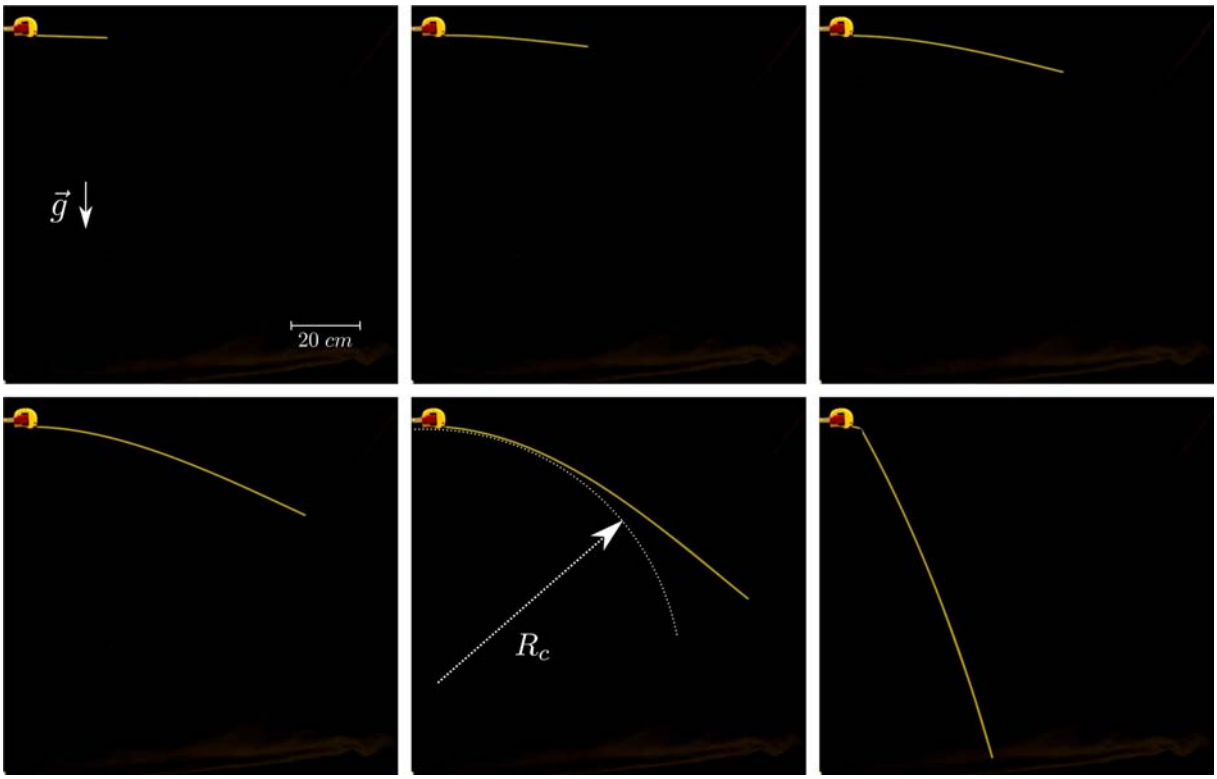


FIGURE 4.5 – Longueur maximale d'un mètre à ruban à l'horizontale. Pour un mètre à ruban en acier, de largeur b = 13 mm, d'épaisseur h = 0.15 mm et de rayon de courbure transversale r = 19 mm. De gauche à droite et de haut en bas, la longueur L du ruban de 20 cm par image. Sur la dernière image, le ruban forme un pli, la longueur est alors de L_h = 1.05 m.

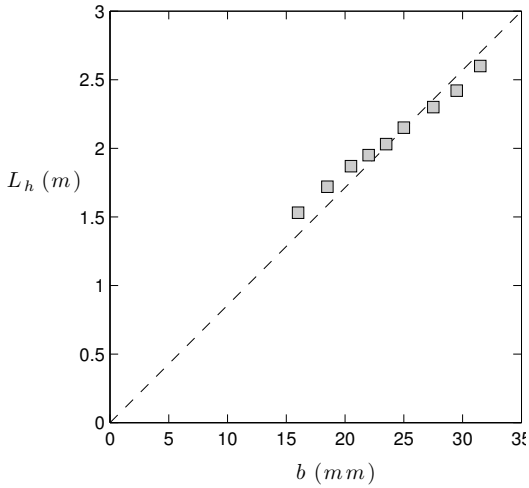


FIGURE 4.6 – Longueur maximale d'un mètre à ruban à l'horizontale L_h en fonction de sa largeur b. Son épaisseur est h = 0.16 mm et son rayon de courbure transversale r = 22 mm.

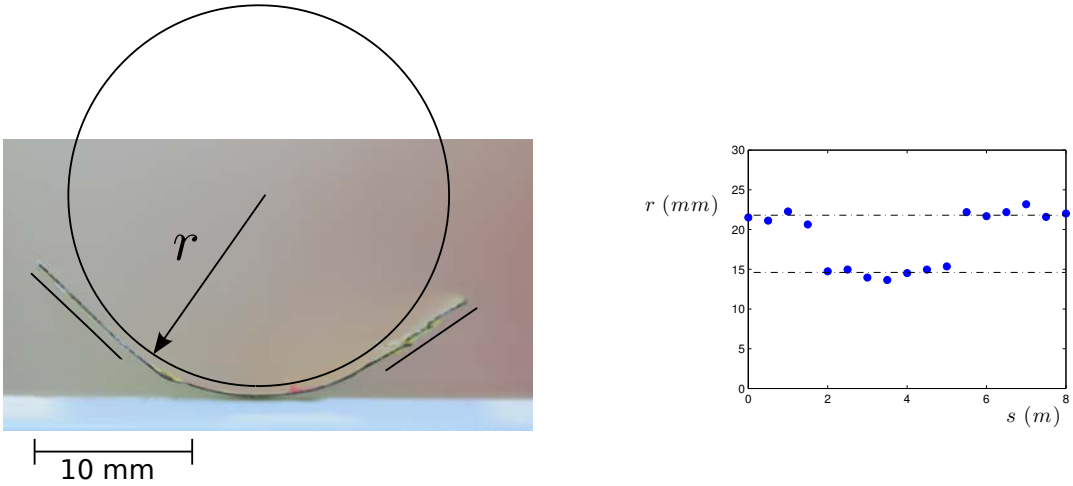


FIGURE 4.7 – Géométrie d'un mètre à ruban que l'on trouve dans le commerce. À gauche : image de profil d'un mètre à ruban où l'on voit que la partie centrale a une courbure r et les extrémités sont plates. À droite : évolution de la courbure transversale du ruban r avec son abscisse curviligne s.

faire varier à volonté la géométrie des rubans : rayon de courbure transversale, épaisseur et largeur. Ces rubans courbés ont été fabriqués en utilisant un plastique thermoformable appelé LEXAN® [80] qui est en polycarbonate, et est disponible sous forme de plaques de différentes épaisseurs (0.25, 0.5 et 0.75 mm). Après avoir découpé des rubans plats dans ces plaques de plastique, nous les glissons dans des tubes de rayons internes choisis (voir la figure 4.8) que nous mettons au four. Nous augmentons la température progressivement jusqu'à 75°C, température à laquelle nous laissons les rubans pendant 5 heures puis nous coupons le four pour laisser la température diminuer progressivement. Nous avons pu obtenir ainsi des rubans de différentes épaisseurs et rayons de courbure transversale. Leur largeur maximale étant de l'ordre de une ou deux fois le rayon de courbure transversale (la limite maximale est évidemment 2π fois le rayon, mais en réalité elle est plutôt de l'ordre de une fois et demi le rayon car si le ruban est plus large il s'effondre sur lui-même, lorsqu'il est chauffé au four). Leur longueur est limitée par la taille du four : 40 cm. Nous utiliserons tout de même des mètres à rubans en acier car ils permettent d'avoir des rubans très longs, ce que l'on ne peut pas construire facilement avec un four.

Dans la section suivante, nous décrivons plus précisément le pli du ruban.

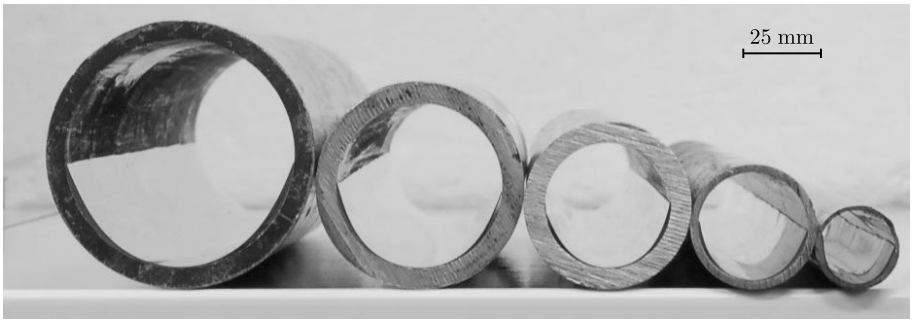


FIGURE 4.8 – Préparation de rubans en Lexan dans des tubes avant le passage au four, afin de leur donner une courbure transversale.

4.1.2 Le pli

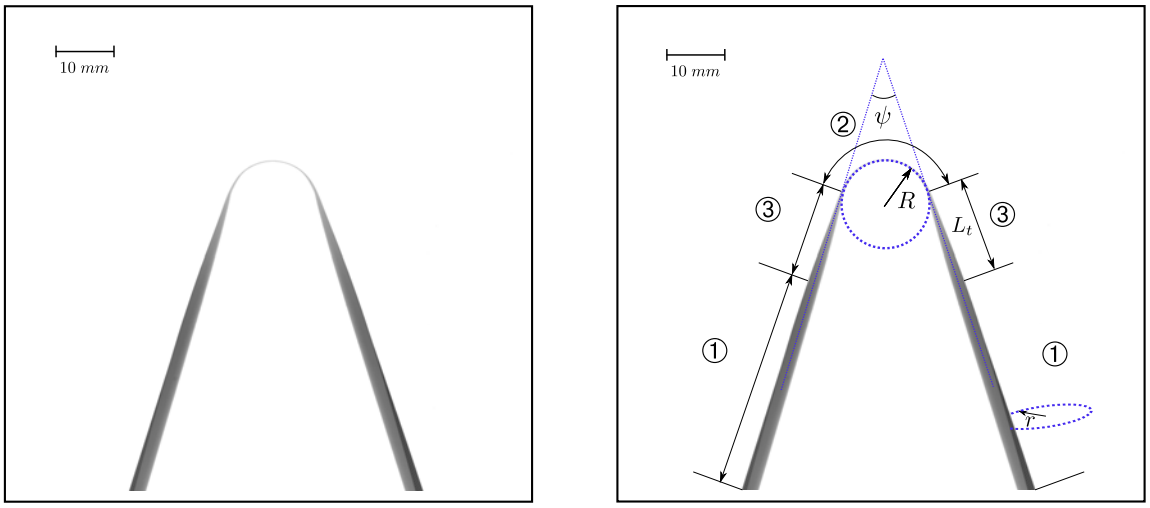


FIGURE 4.9 – Le mètre à ruban plié, à gauche sans notation, à droite avec notations : le rayon de courbure transversale des brins est noté r, le rayon de courbure longitudinale du pli est noté R, et ces deux régions sont séparées par une zone de transition de longueur L_t. L'épaisseur est $h = 0.15$ mm, sa largeur est $b = 25$ mm et son rayon de courbure transversale est $r = 15.5$ mm.

Sur la figure 4.9 (à gauche sans notation et à droite avec notations) se trouve un ruban en acier qui a été comprimé pour former un pli. Ce ruban a une largeur $b = 25$ mm, une épaisseur $h = 0.15$ mm et un rayon de courbure transversale $r = 15.5$ mm. Trois zones sont visibles : ① deux branches identiques au ruban au repos, avec la courbure transversale r ; ② le pli qui n'a pas de courbure transversale (l'épaisseur apparente du ruban est réduite à son épaisseur h) mais possède une courbure longitudinale R ; ③ et deux zones de transition qui relient le pli aux branches, de longueur L_t. Dans ces zones, la courbure transversale se transforme progressivement en courbure longitudinale.

Sur la figure 4.10, nous avons fait varier l'angle ψ entre les deux branches du ruban. Le rayon longitudinal R du pli reste constant, comme si le ruban s'enroulait autour d'un tube de rayon R constant. Sa valeur est 15.5 mm, exactement celle du rayon transversal du ruban non plié.

Nous allons démontrer l'égalité des deux rayons de courbure en suivant le calcul de Rimrott 1970 [81]. Nous nous intéressons à la variation d'énergie de la zone du pli et négligeons les deux zones de transition qui peuvent être considérées comme des constantes du problème : quel que soit l'angle ψ entre les deux brins, leur longueur L_t est constante, et donc l'énergie qui leur est associée aussi. L'énergie du pli, elle, est fonction de l'angle ψ. Écrivons d'abord la variation d'énergie surfacique d'une plaque mince en fonction de ses rayons de courbure, d'après Landau 1990 [55] :

$$U = \frac{D}{2}\left((\Delta\kappa_x)^2 + (\Delta\kappa_y)^2\right) \tag{4.1}$$

où D est la rigidité d'une plaque mince, ici $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (h est l'épaisseur du ruban et ν et E sont respectivement le coefficient de Poisson et le module de Young de l'acier dont est fait le ruban), $\Delta\kappa_x$ est le changement de courbure longitudinale et $\Delta\kappa_y$ est le changement de courbure transversale : $\Delta\kappa_x = \frac{1}{R}$ et $\Delta\kappa_y = -\frac{1}{r}$. Alors l'énergie de la surface pliée est :

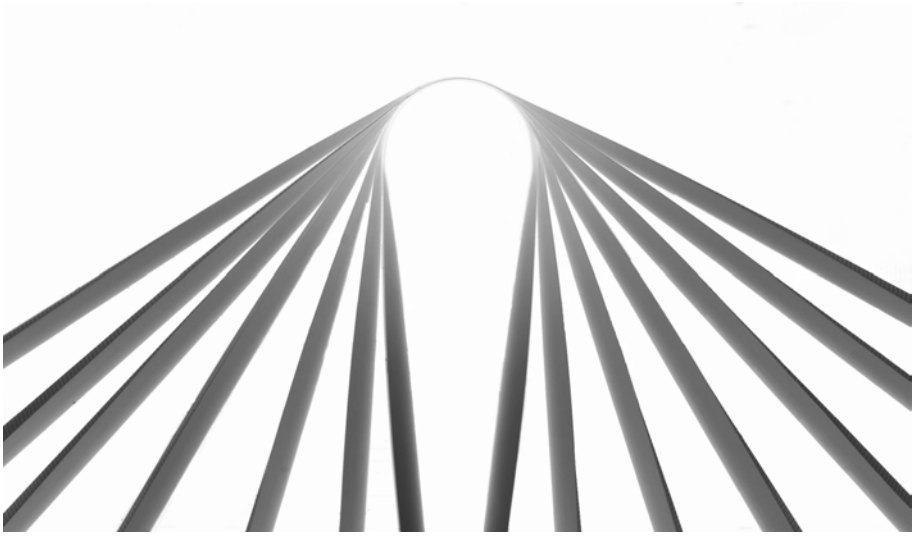


FIGURE 4.10 – Le rayon de courbure longitudinale R du pli est constant pour différents angles entre les deux brins.

$$U_T = b\psi RU = \frac{Db\psi}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{R}{r^2}\right) \tag{4.2}$$

où $b\psi R$ est la surface du pli : b est sa largeur et ψR sa longueur avec ψ l'angle entre les deux branches du pli. Cette énergie admet un minimum, pour $R = r$.

Il est possible de décrire ce pli avec une approche en ordre de grandeur. Lorsque le pli apparaît, il y a deux contributions à la variation d'énergie : le changement de courbure transversale et le changement de courbure longitudinale. L'énergie liée au changement de courbure transversale est proportionnelle à la surface concernée. Elle varie linéairement avec R. Pour minimiser cette énergie, le système cherche à avoir un petit R. Pour ce qui est du changement de courbure longitudinale, l'énergie est d'autant plus importante que R est petit. Quand $R \ll r$, l'énergie augmente et quand $R \gg r$, l'énergie augmente aussi. Il y a donc un minimum pour R, qui se trouve être exactement r.

Le ruban avec courbure transversale constitue un objet original. Sa courbure longitudinale varie de façon non linéaire lorsqu'une déformation lui est imposée. Il peut être dans deux états : soit il a une courbure longitudinale globale, soit il a une courbure longitudinale localisée. C'est la transition d'un état à l'autre qui peut être interprétée comme un phénomène de verse pour les végétaux à structures élancées courbées. Nous allons donc chercher à comprendre comment prédire le rayon longitudinal critique R_c pour lequel il y a transition vers l'état plié.

4.2 Expérience de flambage

Afin de comprendre pour quel rayon critique longitudinal R_c le pli se forme sur le mètre à ruban, nous avons réalisé des expériences de flambage sur des rubans en acier et en Lexan de différentes géométries.

Dans les expériences de flambage, le ruban est placé entre deux poteaux, un fixe et un mobile, fixé à une vis micrométrique, ce qui permet de le déplacer avec précision d'une longueur δ dans l'axe du ruban. Cette expérience est représentée sur la figure 4.11 où le poteau mobile est celui de droite. En le déplaçant, le ruban se comprime, très rapidement il se courbe et ici

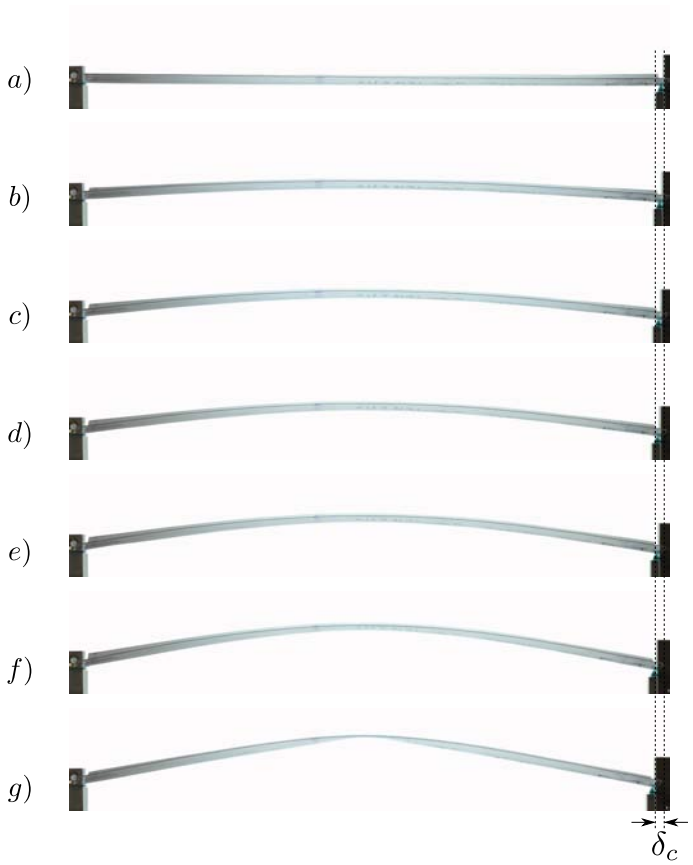


FIGURE 4.11 – Expérience de flambage d'un ruban de Lexan, de largeur b = 50 mm, de longueur L = 475 mm, d'épaisseur h = 0.75 mm et de rayon de courbure transversale r = 44 mm. Sur l'image a) le ruban est au repos. Le ruban est comprimé de l'image b) à l'image g) sur laquelle il forme un pli.

le flambage d'Euler est atteint dès la deuxième photo (photo b)). En continuant à appuyer (photos c) à f)), le ruban se courbe de plus en plus, puis sur la photo g), forme un pli. En déplaçant la vis micrométrique en sens inverse, le pli disparaît. C'est signe que le phénomène est uniquement élastique. Par contre, le déplacement auquel le pli disparaît n'est pas le même que celui pour lequel il est apparu, il y a une hystérésis. Nous allons étudier l'apparition des plis, c'est le phénomène qui est intéressant pour la verse des plantes.

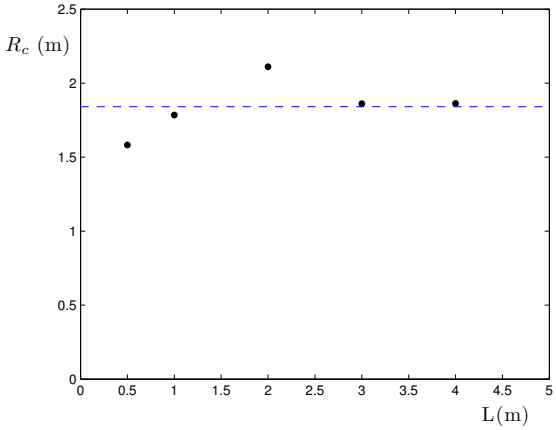


FIGURE 4.12 – Évolution du rayon de courbure critique auquel le pli se forme avec la longueur du ruban. Pour un ruban en acier de largeur $b = 25$ mm, d'épaisseur $h = 0.12$ mm et de courbure transversale $r = 17$ mm.

Nous mesurons le rayon de courbure critique R_c à partir duquel le pli se forme en ajustant un cercle sur la dernière image de la série avant que le pli apparaisse. Tout d'abord, nous présentons la dépendance de R_c avec la longueur L du ruban sur la figure 4.12. Pour avoir des grandes longueurs cette expérience a été faite avec un ruban en acier provenant d'un mètre à ruban. Ce ruban a une largeur $b = 25$ mm, une épaisseur $h = 0.12$ mm et un rayon de courbure transversale $r = 17$ mm. Cette expérience montre que pour des longueurs allant de 0.5 m à 4 m, R_c ne varie que très peu autour de la valeur 1.8 m. Le rayon de courbure critique auquel le ruban plie est indépendant de la longueur du ruban. Il est aussi possible de faire varier la courbure transversale du ruban, ce qui est présenté sur la figure 4.13. Dans cette expérience, les rubans en Lexan ont trois largeurs différentes : 40, 50 et 60 mm. Les rayons de courbure transversale varient de 20 à 45 mm. Pour une largeur donnée, le rayon de courbure critique R_c ne varie pas significativement avec r.

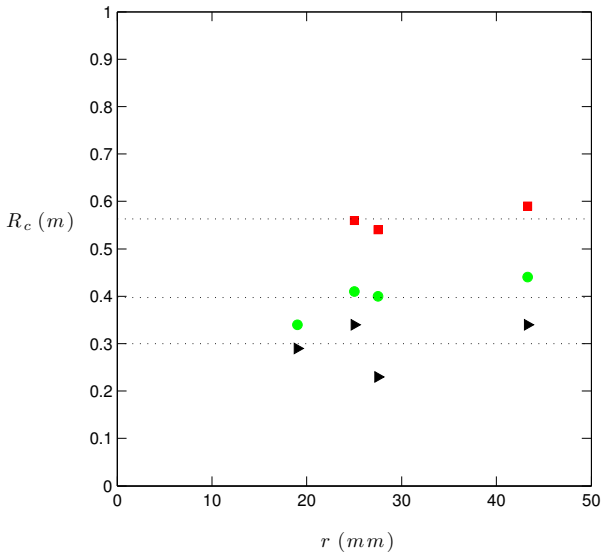


FIGURE 4.13 – Évolution du rayon critique d'apparition du pli avec la courbure transversale du ruban pour un ruban de Lexan d'épaisseur 0.75 mm et de longueur 350 mm. Les trois séries correspondent aux rubans de largeurs 40, 50 et 60 mm et sont représentées respectivement par les symboles ▸ , ● et ■.

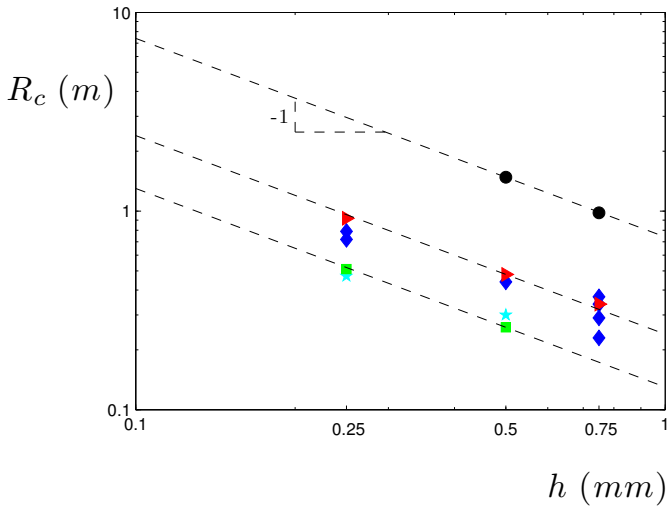


FIGURE 4.14 – Évolution du rayon critique d'apparition du pli avec l'épaisseur du ruban pour un ruban de Lexan de longueur 350 mm, de rayon de courbure 20 mm et de différentes largeurs. ★ : $b = 30$ mm, ■ $b = 34$ mm, ◆ $b = 40$ mm, ▸ $b = 50$ mm et • $b = 80$ mm.

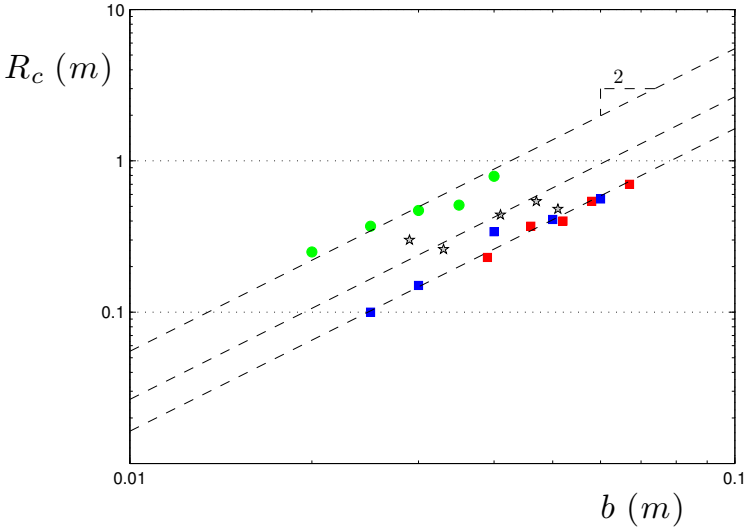


FIGURE 4.15 – Évolution du rayon critique d'apparition du pli avec la largeur du ruban pour 4 rubans différents : • L = 400 mm, r = 15 mm et h = 0.25 mm ; ⋆ L = 340 mm, r = 19 mm et h = 0.5 mm ; ▪ L = 340 mm, r = 25 mm et h = 0.75 mm ; ▪ L = 340 mm, r = 27.5 mm et h = 0.75 mm.

Nous avons aussi testé la dépendance de R_c avec l'épaisseur h du ruban. Nous présentons sur la figure 4.14 cette dépendance pour 5 rubans de différentes largeurs : 30, 34, 40, 50 et 80 mm. Le rayon R_c varie comme l'inverse de l'épaisseur h. Sur la figure 4.15, est représentée l'évolution de R_c avec la largeur du ruban, pour quatre rubans différents. Pour chaque ruban, R_c varie comme b^2.

La conclusion de ces expériences est que le rayon critique pour lequel le pli apparaît est seulement dépendant de l'épaisseur h et de la largeur b des rubans : $R_c \, \alpha \, \frac{b^2}{h}$. Plus le ruban est large et fin et plus le rayon de courbure longitudinale auquel le pli apparaît est grand, et donc plus une faible déformation du ruban est nécessaire pour le faire plier.

4.3 Modèle

La formation du pli sur un ruban correspond à une transition de phase d'un état de faible courbure longitudinale vers un état de grande courbure longitudinale pendant laquelle les deux états coexistent. Ce qui est analogue à la transition d'état liquide-gaz pour un fluide. Nous rappellerons donc la transition liquide-gaz pour un fluide, et comment elle peut être analysée avec la construction de Maxwell. Puis nous appliquerons cette construction de Maxwell au cas du ruban.

4.3.1 Transition d'état liquide-gaz

Lorsqu'un gaz est comprimé, en augmentant sa pression, son volume diminue. À partir d'une certaine pression, le gaz se transforme en liquide, c'est la transition gaz-liquide. Cette transition se fait à pression constante. Il est observé expérimentalement qu'il y a coexistence de la phase gazeuse et de la phase liquide pendant cette transition. L'équation d'état écrite par van der Waals en 1873 [82] qui décrit la relation entre pression P, volume V et température T d'un

gaz permet de comprendre cette transition. Cette équation est :

$$\left(P - \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \tag{4.3}$$

où n est le nombre de moles de fluide concerné, a est la pression de cohésion (elle a pour origine les forces attractives entre molécules appelées forces de Van der Waals), b est le covolume (il a pour origine le volume des molécules composant le gaz) et R est la constante des gaz parfaits. Sur la figure 4.16 nous traçons l'évolution de la pression du fluide P en fonction de son volume V pour plusieurs valeurs de la température T. Les deux courbes de températures les plus élevées sont monotones. Les deux courbes de températures les moins élevées ont un minimum local et un maximum local. Et la courbe de température $T = T_c$ correspond à la limite entre ces deux régimes.

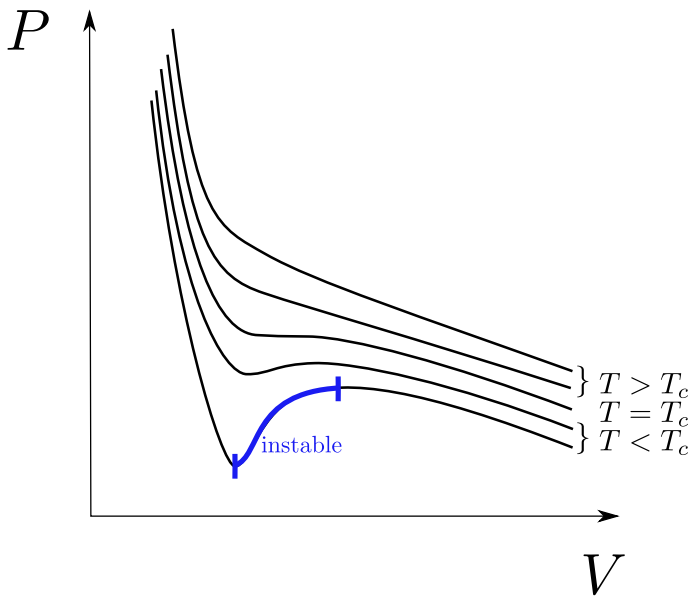


FIGURE 4.16 – Diagramme de Clapeyron (P,V) pour un fluide pour $T < T_c$, $T = T_c$ et $T > T_c$.

Pour les cas où $T \geq T_c$ le fluide évolue continûment en pression et en volume. Par contre dans les cas où $T < T_c$, l'expérience montre qu'il y a une transition de l'état gazeux vers l'état liquide pour une certaine pression $P_t(T)$ et que le système se scinde en deux phases : une liquide et une gazeuse. Notons tout d'abord qu'il y a une zone instable sur la courbe $P(V)$. C'est la zone soulignée en bleu sur la figure 4.16. Dans cette partie de la courbe, la pression augmente avec le volume : le fluide a une compressibilité négative : augmenter la pression a pour conséquence une augmentation de volume ce qui a nouveau augmente la pression. Mais ceci ne permet pas d'expliquer pourquoi le système se scinde en deux phases. La solution est apportée en 1875 par Maxwell [83] : le fluide cherche à minimiser son énergie, et si la somme des énergies de la partie liquide et de la partie gazeuse est plus petite que l'énergie qu'aurait le système non scindé, alors le système a intérêt à se séparer en deux phases.

Sur le diagramme (P,V), l'énergie du gaz est l'aire représentée sous la courbe $P(V)$. La condition pour laquelle le gaz peut passer à l'état liquide sans coût d'énergie (de B à F) est l'égalité de l'aire A_1 (délimitée par les points DEF) et de l'aire A_2 (délimitée par les points BCD). La construction de ces aires pour déterminer le volume et la pression de transition est appelée construction de Maxwell.

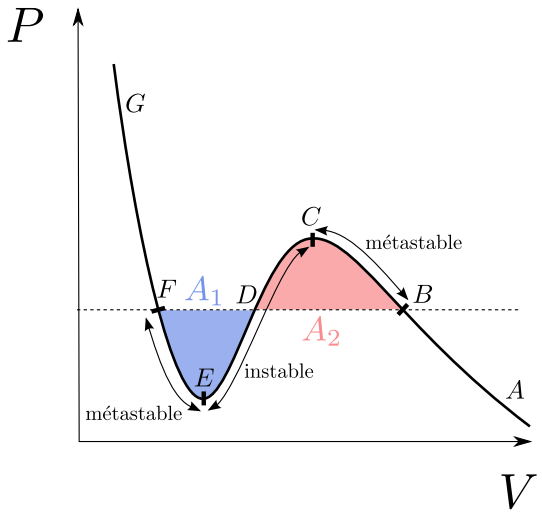


FIGURE 4.17 – Diagramme de Clapeyron (P,V) pour un fluide de température $T < T_c$.

4.3.2 Transition d'état du ruban

Nous allons appliquer cette construction de Maxwell à la description du ruban courbé. La formation du pli pour le ruban correspond à une transition de phase où le système se scinde en deux parties. Nous avons vu expérimentalement qu'il y a un rayon de courbure longitudinale critique pour lequel le ruban forme un pli de courbure longitudinale élevée et de courbure transversale nulle, tandis que le reste du ruban est presque identique au ruban au repos. Nous allons commencer par écrire l'énergie du ruban pour une courbure longitudinale donnée K, puis appliquer la construction de Maxwell pour expliquer la formation du pli du mètre à ruban.

Énergie du ruban

Nous écrivons la densité d'énergie surfacique du ruban. Elle se compose de l'énergie de courbure $\mathscr{E}_c$, que nous avons déjà écrite plus haut et de l'énergie d'élongation $\mathscr{E}_{el}$ qui est liée à l'étirement du ruban qui acquiert une courbure longitudinale. En utilisant les notations de la figure 4.18, il est possible d'écrire l'étirement ϵ des bandes longitudinales qui forment le ruban sous la forme :

$$\epsilon \sim \frac{\delta L}{L} = \frac{\theta(R+y) - \theta R}{\theta R} = \frac{y}{R} \tag{4.4}$$

Nous avons vu plus haut que $y = b^2/r$. Pour plus de commodité, nous remplaçons les rayons de courbure R et r par les courbures $K = 1/R$ et $k = 1/r$. Alors, l'étirement ϵ est :

$$\epsilon \sim kKb^2 \tag{4.5}$$

Avec la loi de Hooke, la contrainte longitudinale dans le ruban vaut :

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\epsilon \tag{4.6}$$

et l'énergie d'élongation $\mathscr{E}_{el} = F.\delta L$ peut être calculée :

$$\mathscr{E}_{el} \sim E\Omega K^2 k^2 b^4 \tag{4.7}$$

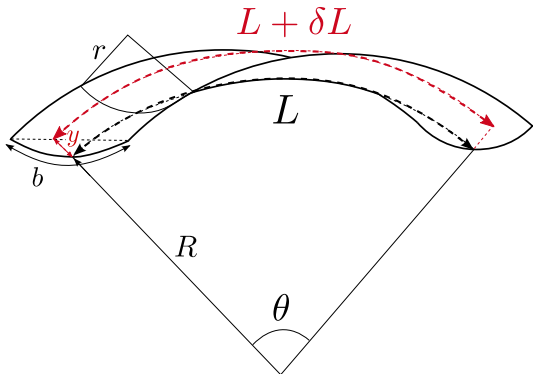


FIGURE 4.18 – Notations pour l'élongation du ruban de rayon de courbure longitudinale R.

où $\Omega = bhL$ est le volume du ruban. Ici l'énergie de courbure est l'énergie de courbure surfacique $U \sim Eh^3(K^2 + (k - k_0)^2)$ multipliée par la surface totale du ruban Lb, soit :

$$\mathscr{E}_c \sim E\Omega\left(h^2K^2 + h^2(k - k_0)^2\right) \tag{4.8}$$

Alors l'énergie totale est :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{el} + \mathscr{E}_c \sim E\Omega\left(h^2(K^2 + (k - k_0)^2) + K^2k^2b^4\right) \tag{4.9}$$

et en notant $\rho = \frac{h}{b^2}$, qui correspond à la courbure pour laquelle l'épaisseur apparente du ruban devient égale à sa propre épaisseur, l'équation devient :

$$\mathscr{E} \sim E\Omega h^2\left(K^2 + (k - k_0)^2 + \frac{K^2k^2}{\rho^2}\right) \tag{4.10}$$

Cette équation est fonction de k et K, qui sont respectivement les courbures transversale et longitudinale du ruban. Lorsque nous imposons une courbure longitudinale au ruban, la courbure transversale varie aussi, minimisant l'énergie à K fixé. Il y a une relation entre k et K donnée par la condition $\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k}\right)_K = 0$:

$$k \sim \frac{\rho^2k_0^2}{\rho^2 + K^2} \tag{4.11}$$

Cette équation peut être considérée comme l'équation d'état du ruban. Lorsque $K = 0$, $k = k_0$, et au fur et à mesure que K augmente, k diminue, le ruban s'ouvre jusqu'à être mis à plat. C'est ce que nous avons vu de façon qualitative durant les expériences. Cela peut se voir sur la série d'images de la figure 4.11 : l'épaisseur apparente du ruban, bien visible au milieu du ruban, diminue quand la courbure longitudinale du ruban augmente. De plus, l'épaisseur apparente h_r est liée à la courbure k par la relation $h_r = k/b^2$. La courbure transversale k et l'épaisseur apparente h_r sont proportionnelles. Donc k diminue bien lorsque K augmente.

Comme la courbure k s'adapte à un changement de courbure longitudinale K, l'énergie du ruban est uniquement fonction de K :

$$\mathscr{E} \sim E\Omega h^2K^2\frac{\rho^2 + K^2 + k_0^2}{\rho^2 + K^2} \tag{4.12}$$

Lorsque le ruban est faiblement courbé, pour $K \ll 0$, l'énergie du ruban devient $\mathscr{E} \sim E\Omega h^2\frac{k_0^2}{\rho^2}K^2$ (par définition, $k_0 \gg \rho$). Nous pouvons réécrire cette énergie sous la forme $\mathscr{E} \sim EIK^2L$, ce qui

nous permet de déterminer le moment quadratique du ruban à petit K :

$$I \sim hb^5 k_0^2 \tag{4.13}$$

En se rappelant que l'épaisseur apparente du ruban est $h_r \sim k_0 b^2$, son moment quadratique peut aussi s'écrire $I \sim hb\,h_r^2$. Le terme hb représente la section du ruban et est lié au volume du ruban dans le calcul de l'énergie. Le terme h_r^2 est lié au produit de l'allongement relatif et de la contrainte dans le calcul de l'énergie. Nous présentons sur la figure 4.19 les moments quadratiques de trois rubans de sections différentes, le premier est un ruban plat de largeur b et d'épaisseur h, le deuxième correspond à notre ruban, il a une largeur b, une épaisseur h et une épaisseur apparente h_r et le troisième est un ruban plat de largeur b et d'épaisseur h_r. Le moment quadratique du ruban est compris entre celui d'un ruban plat d'épaisseur h et celui d'un ruban plat d'épaisseur h_r : $hb\,h^2 < hb\,h_r^2 < h_r b\,h_r^2$.

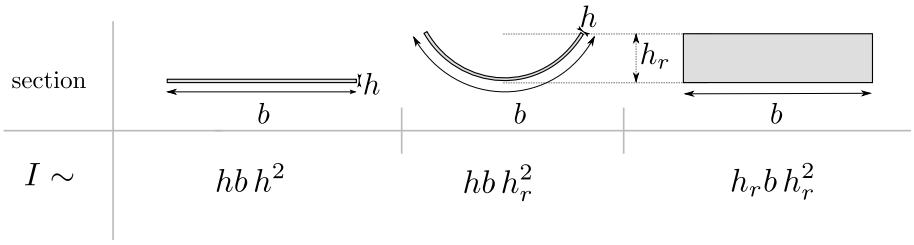


FIGURE 4.19 – Comparaison des moments quadratiques de trois plaques de sections différentes.

Nous dérivons maintenant l'énergie du ruban $\mathscr{E}$ par rapport à K :

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K} = E\Omega h^2 \frac{2K^5 + 4\rho^2 K^3 + 2K(\rho^4 + \rho^2 k_0^2)}{(\rho^2 + K^2)^2} \tag{4.14}$$

et représentons l'allure de la courbe $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}(K)$ sur la figure 4.20, en distinguant trois cas : $k_0 > \rho$, $k_0 = \rho$ et $k_0 < \rho$.

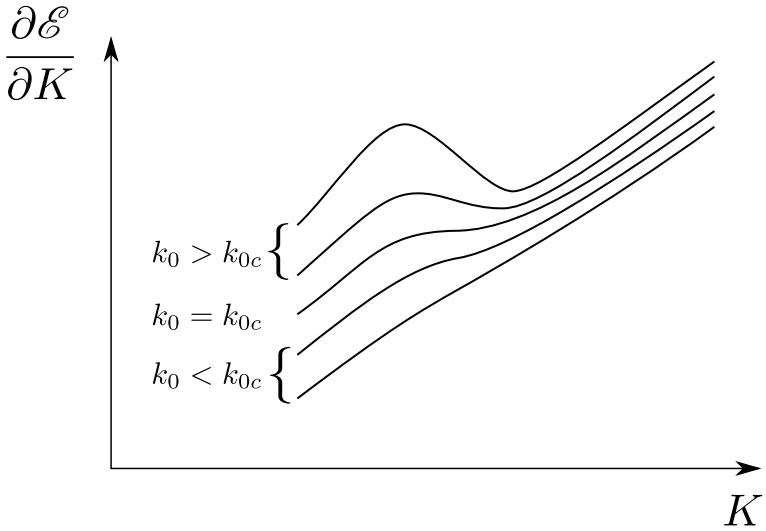


FIGURE 4.20 – Allure de la variation de $\frac{\partial(E)}{\partial K}$ avec la courbure longitudinale K pour des valeurs croissantes de k_0.

Il y a deux comportements. Si $k_0 < \rho$ les courbes sont monotones et si $k_0 > \rho$, les courbes ont un maximum et un minimum local. Ces courbes $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}(K)$ sont similaires aux courbes $P(V)$ de la figure 4.16 pour la transition gaz-liquide. L'aire sous la courbe $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}(K)$ entre deux valeurs de K représente la variation d'énergie d'un K à un autre. Nous allons pouvoir appliquer la construction de Maxwell pour prévoir la courbure longitudinale critique d'apparition du pli dans les cas où $k_0 > \rho$.

Courbure longitudinale critique K_c

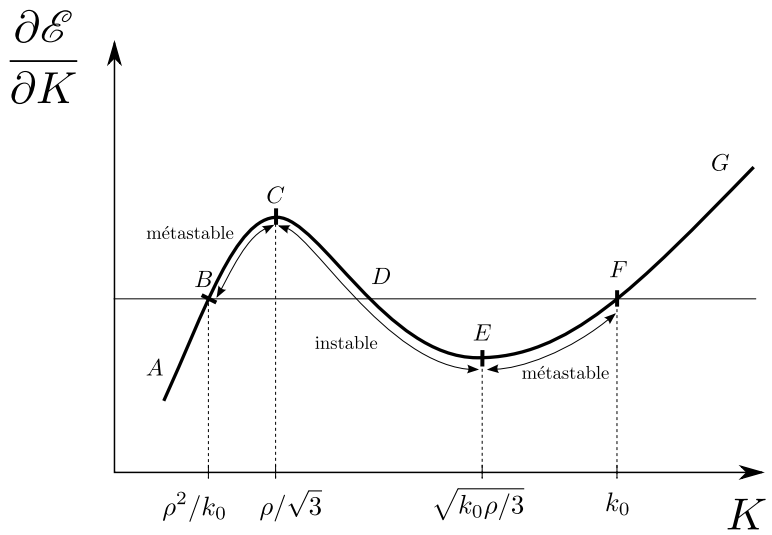


FIGURE 4.21 – Allure de la courbe $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}(K)$ et construction de Maxwell.

Nous sommes dans le cas où $k_0 \gg \rho$ (la courbe $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial K}(K)$ présente une bosse), alors l'énergie du ruban est très bien décrite par l'équation :

$$\frac{\mathscr{E}}{EbLh^3} = K^2 \frac{K^2 + k_0^2}{\rho^2 + K^2} \tag{4.15}$$

Nous allons chercher à déterminer les courbures longitudinales critiques qui correspondent aux points B, C, E et F sur la figure 4.21. En fait nous connaissons déjà une valeur de K, c'est celle qui correspond au point F pour lequel le ruban est totalement enroulé : $K_F = k_0$, car la courbure longitudinale du ruban juste après la transition est k_0, exactement la même que la courbure transversale initiale.

Nous pouvons maintenant calculer K_C. Comme $K_F = k_0$, nous sommes dans la région où $K \ll k_0$ et l'énergie peut être simplifiée :

$$\frac{\mathscr{E}}{EbLh^3} = K^2 \frac{k_0^2}{\rho^2 + K^2} \tag{4.16}$$

La dérivée de cette énergie est maximum pour $K = K_C$:

$$K_C = \frac{\rho}{\sqrt{3}} \tag{4.17}$$

La courbure K_E est dans la zone où $\rho \ll K \ll k_0$. Ici l'énergie peut être écrite :

$$\frac{\mathscr{E}}{EbLh^3} = K^2 \frac{\left(K^2 + k_0^2\right)}{K^2 + \rho^2} \sim \left(K^2 + k_0^2\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{K^2}\right) \tag{4.18}$$

La dérivée de cette énergie est minimum pour $K = K_E$:

$$K_E = \sqrt{\frac{k_0 \rho}{3}} \tag{4.19}$$

Et enfin, écrire la condition de Maxwell $\left(\frac{\partial E}{\partial K}\right)_{K=K_B} = \left(\frac{\partial E}{\partial K}\right)_{K=K_F}$ permet de déterminer K_B :

$$K_B = \frac{\rho^2}{k_0} \tag{4.20}$$

Nous avons fait nos expériences en augmentant progressivement et avec précaution la courbure du ruban. C'est pourquoi il est possible de supposer que l'apparition du pli se fait au passage de la zone métastable vers la zone instable. La courbure critique d'apparition du pli est :

$$K_{th} = \frac{\rho}{\sqrt{3}} \sim \frac{h}{b^2} \tag{4.21}$$

4.3.3 Comparaison aux expériences

Sur la figure 4.22 nous comparons le rayon de courbure longitudinale expérimental R_c obtenu lors de nos expériences au rayon théorique $R_{th} = \frac{1}{K_{th}} = \frac{b^2}{h}$ prédit par le modèle.

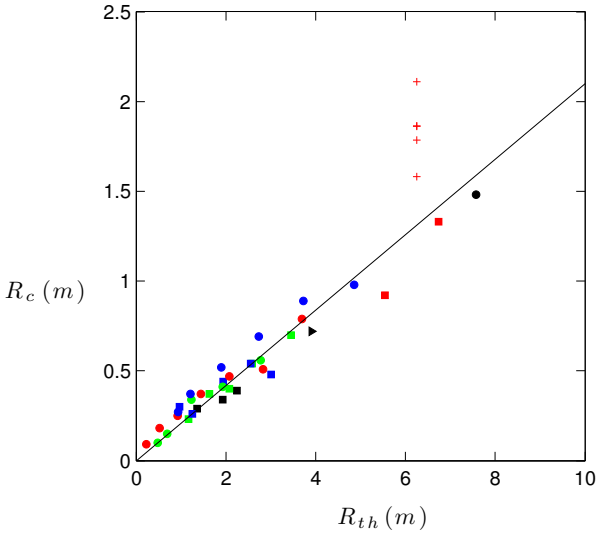


FIGURE 4.22 – Rayon critique expérimental R_c comparé au rayon critique théorique R_{th}. Pour différents rubans : ■ : Lexan ($h = 0.75$ mm, $b = 42$ à 54 mm, $r = 19$ mm et $L = 340$ mm), ■ : Lexan ($h = 0.75$ mm, $b = 39$ à 67 mm, $r = 27.5$ mm et $L = 340$ mm), ■ : Lexan ($h = 0.25$ mm, $b = 49$ à 54 mm, $r = 19$ mm et $L = 340$ mm), ■ : Lexan ($h = 0.5$ mm, $b = 29$ à 51 mm, $r = 19$ mm et $L = 340$ mm), • : Lexan ($h = 0.5$ mm, $b = 81$ mm, $r = 27.5$ mm et $L = 340$ mm), • : Lexan ($h = 0.75$ mm, $b = 25$ à 60 mm, $r = 25$ mm et $L = 360$ mm), • : Lexan ($h = 0.25$ mm, $b = 10$ à 40 mm, $r = 15$ mm et $L = 400$ mm), • : Lexan ($h = 0.75$ mm, $b = 35$ à 80 mm, $r = 43$ mm et $L = 460$ mm), ▸ : Lexan ($h = 0.25$ mm, $b = 41$ mm, $r = 15$ mm et $L = 330$ mm) et + : acier ($h = 0.1$ mm, $b = 25$ mm, $r = 17$ mm et $L = 0.5$ à 4 m).

Tous les points se rejoignent. Il y a cependant quelques points qui s'écartent de la prédiction, ce sont ceux qui correspondent au mètre à ruban, mais nous avons vu que le mètre à ruban ne constitue pas un ruban parfait.

La formation du pli sur le mètre à ruban est liée à la présence de la bosse sur la courbe de l'énergie, si cette bosse disparaît, le pli aussi disparaît. Lorsque k_0/ρ diminue et se rapproche de 1, la bosse diminue. En considérant que cela se fait pour $k_0 = \rho$, le critère pour lequel le clac du ruban disparaît est $b^2 = hr$, cela confirme nos expériences. Nous avions vu qu'en maintenant fixés l'épaisseur h et le rayon de courbure transversale r du ruban et en diminuant sa largeur b, l'apparition du pli disparaissait. C'est l'équivalent de la température critique T_c pour un fluide. Pour les rubans, il existe une courbure transversale critique $k_c \sim \rho = h/b^2$ en-dessous de laquelle il n'y a plus formation de pli.

4.4 Pli déclenché par un couple

Ici, nous allons déclencher le pli du ruban en exerçant un couple. Le ruban sera toujours encastré à une extrémité et le couple exercé sera soit une force localisée à l'extrémité libre, soit une force aérodynamique répartie sur toute la surface du ruban. Nous nous rapprochons ainsi des sollicitations réelles auxquelles peuvent être soumises les plantes.

4.4.1 Expériences de flexion

Le ruban est fixé dans un étau à une extrémité et est libre à l'autre extrémité. C'est à l'extrémité libre que nous exerçons une force en accrochant un récipient que nous remplissons d'eau petit à petit. La courbure transversale doit pouvoir varier librement tout le long du ruban, et surtout à la position d'encastrement. C'est pourquoi nous plaçons un cylindre plein entre les mors de l'étau comme cela se voit sur la figure 4.23.

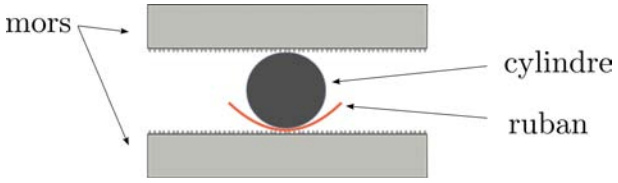


FIGURE 4.23 – Silhouette du ruban entre les mors de l'étau.

La série d'images 4.24 montre une expérience de flexion avec un ruban en acier de longueur $L = 50$ cm, de largeur $b = 19$ mm, d'épaisseur $h = 0.14$ mm et de rayon de courbure transversale $r = 11.9$ mm. Sur l'image a), le ruban n'est soumis qu'à son propre poids, il est presque horizontal. De l'image b) à l'image f), la masse à l'extrémité du ruban augmente par pas de 10 g. Lorsque la masse augmente, le ruban se courbe de plus en plus, jusqu'à atteindre son rayon de courbure critique, et alors il forme un pli. Cela se produit pour la masse $m_c = 50$ g.

Nous traçons sur la figure 4.25 l'évolution de la masse critique m_c pour former le pli en fonction de la longueur L du ruban et de sa largeur b.

La variation de la masse m_c avec b est étudiée pour trois longueurs de ruban ($L = 0.1, 0.6$ et 1.2 m). Pour chaque longueur, la largeur du ruban varie de $b = 15$ mm à $b = 25$ mm. La limite supérieure de b est la largeur initiale du ruban et la limite inférieure est la largeur critique pour avoir formation d'un pli, en-dessous de cette largeur, le ruban passe continûment vers l'état enroulé. L'évolution de la masse critique avec b est importante. Par exemple pour la longueur $L = 1.2$ m (sur la figure 4.25 : +) la masse critique varie de 7 à 46 g. Pour les trois longueurs de ruban, la masse critique varie comme b^3.

Sur le graphique de gauche de la figure 4.25 est tracée l'évolution de m_c avec la longueur L. Pour des longueurs allant de 0.1 à 1.2 m, la masse m_c varie comme $1/L$: le couple critique imposé au ruban à la position d'encastrement est toujours le même. Cependant, à grand L, la masse m_c s'écarte de la tendance $1/L$, car la masse propre du ruban n'est plus négligeable devant m_c.

Nous allons déterminer la masse critique m_c en la reliant à la courbure longitudinale R_c du ruban à l'encastrement. La formule A.15 démontrée dans l'annexe A relie R_c à m_c :

$$\left(\frac{R_c}{L}\right)^4 = \left(\frac{EI}{m_c g L^2}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{EI}{2 m_c g L^2}}\right)^4 \tag{4.22}$$

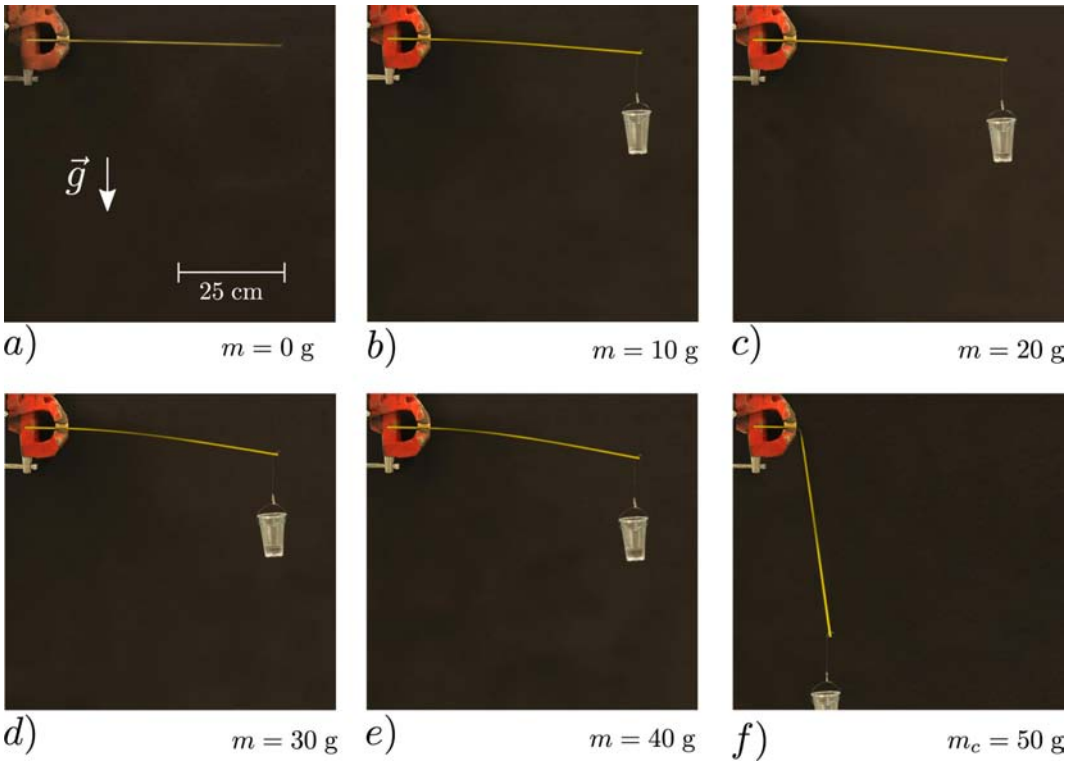


FIGURE 4.24 – Expérience de flexion d'un ruban de longueur L = 50 cm, de largeur b = 19 mm, d'épaisseur h = 0.14 mm et de rayon de courbure transversale r = 11.9 mm. Entre chaque image la masse suspendue au bout du ruban est augmentée de 10 g. Sur l'image a), la masse est nulle et sur l'image f) elle vaut 50 g, c'est la masse critique pour laquelle le ruban plie.

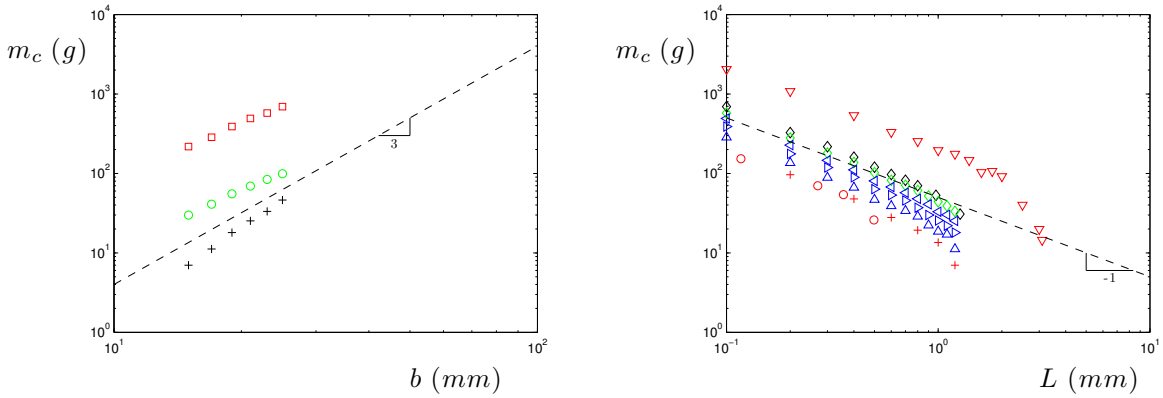


FIGURE 4.25 – Formation du pli sur un mètre à ruban en flexion. Masse critique m_c pour la flexion en fonction de la largeur du ruban (figure de gauche) et de sa longueur L (figure de droite). À gauche : (□ : acier L = 0.1 m, r = 12.7 mm et h = 0.15 mm), (○ : acier L = 0.6 m, r = 12.7 mm et h = 0.15 mm) et (+ : acier L = 0.1 m, r = 12.7 mm et h = 0.15 mm). À droite : (○ : Lexan b = 39 mm, r = 12.7 mm et h = 0.25 mm), (▽ : acier b = 31 mm, r = 12.42 mm et h = 0.15 mm) et (◇, ◇, ◁, ▷, △ et + : b = 25, 23, 21, 19, 17 et 15 mm, r = 12.42 mm et h = 0.15 mm).

où E est le module de Young de la tige, I son moment quadratique : $I \sim hb^5k_0^2$ et g est l'accélération de la pesanteur. Nos expériences se limitent aux faibles déflexions, et c'est pourquoi nous ne gardons que le premier terme dans le membre de droite de l'équation 6.1. En remplaçant R_c par l'expression que nous avons déterminée plus haut : $R_c = \frac{b^2}{h}$, il vient :

$$m_{th} = \frac{Eh^2b^3}{gLr^2} \tag{4.23}$$

Nous traçons sur la figure 4.26 la masse critique m_c pour laquelle le ruban plie en flexion en fonction de cette masse critique théorique m_{th}.

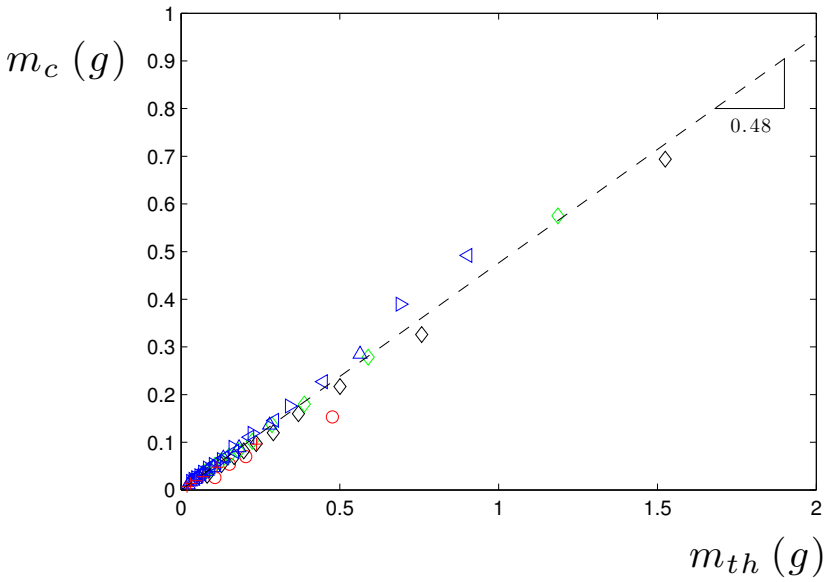


FIGURE 4.26 – Masse critique en flexion m_c de rubans à l'horizontale en fonction de la masse critique théorique m_{th}. Pour chaque série de mesures nous indiquons les données comme suit (signe sur le graphe : matière, épaisseur h (mm), largeur b (mm),rayon transversal r (mm) et longueur L (m)) : (○ : Lexan, 0.25, 39, 7, 0.12 à 0.5), (+ : Lexan, 0.75, 43, 15, 0.2 et 0.3), (◇ : acier, 0.15, 25, 12.7, 0.1 à 1.3), (◇ : acier, 0.15, 23, 12.7, 0.1 à 1.2), (◁ : acier, 0.15, 21, 12.7, 0.1 à 1.2), (▷ : acier, 0.15, 19, 12.5, 0.1 à 1.2), (△ : acier, 0.15, 17, 11.7, 0.1 à 1.2), (+ : acier, 0.15, 15, 10.5, 0.2 à 1.2), (× : acier, 0.11, 25, 12.7, 0.13 à 0.45).

Les variations de la masse mesurée expérimentalement correspondent à celles prédites par notre modèle, avec un facteur 0.5. Cela permet aussi d'expliquer le résultat de l'expérience présentée en tout début de chapitre et concernant la longueur maximale horizontale d'un mètre à ruban. En remplaçant la masse exercée en bout de ruban par la masse propre du ruban, nous trouvons que la longueur maximale du ruban à l'horizontale L_h est :

$$L_h \sim \sqrt{\frac{Eh}{\rho_{ruban}g}}\,\frac{b}{r} \tag{4.24}$$

Nous avions effectivement trouvé une variation linéaire entre L_h et b (à la figure 4.6). Cette idée pourrait être adaptée aux feuilles, par exemple à la feuille de yucca. Sur la photo 4.1 d), les feuilles de yucca qui sont à la verticale subissent un couple faible de la part de leur propre poids, tandis que celles qui sont horizontales subissent un plus grand couple et forment un pli.

4.4.2 Expériences en soufflerie

Ici la force transversale sur le ruban est exercée par un écoulement d'air qui s'appuie sur tout le ruban. La section du canal d'une soufflerie classique n'étant pas assez grande, nous avons utilisé une voiture pour créer l'écoulement d'air. Les mesures sont faites à l'extérieur (figure 4.27). La vitesse de l'air est presque égale à la vitesse de la voiture (en sens opposé). Le compteur de vitesse pourrait fournir une bonne approximation de la vitesse du vent autour de la voiture. Mais pour plus de précision, nous avons utilisé un anémomètre (tube de Pitot) pour mesurer la vitesse de l'écoulement de l'air. Le ruban est placé à l'extérieur de la voiture : nous le fixons à une structure horizontale qui mesure 2 m de long. Une moitié de la structure est solidement attachée à l'intérieur de la voiture, et l'autre moitié se trouve à l'extérieur. Au bout de la structure se trouve le ruban positionné à la verticale. Il se trouve donc à 1 m de la voiture, l'influence de la voiture sur l'écoulement autour du ruban peut être négligée.

Sur la figure 4.27 se trouve une expérience avec un ruban de longueur $L = 50$ cm, de largeur $b = 19$ mm, d'épaisseur $h = 0.14$ mm et de rayon de courbure transversale $r = 11.9$ mm. La série d'images nommées de $a)$ à $l)$ se déroule de gauche à droite et de haut en bas. Sur les six premières images $a)$ à $f)$, la vitesse du vent sur le ruban augmente de 1.5 m/s à $U_c = 10$ m/s, vitesse à laquelle le ruban plie. Sur les images suivantes $g)$ à $l)$, la vitesse diminue de 8.5 m/s à 1.5 m/s. Le pli ne disparaît qu'entre les figures $k)$ et $l)$, pour une vitesse $U_h = 2$ m/s. Ici aussi l'hystérésis a une forte influence sur la différence entre vitesse de formation de pli et vitesse de disparition du pli.

Nous nous intéressons à la vitesse de formation du pli U_c. Nous notons les variations de cette vitesse en fonction de la géométrie du ruban. Les expériences avec les rubans en acier, obtenues à partir de mètres à ruban ont toutes très bien fonctionné. Par contre il n'a pas été possible de faire des expériences avec des rubans en Lexan, ceux-ci se mettaient à osciller dès qu'il y avait du vent. Ces oscillations les faisaient casser par torsion, ce qui est un autre mode de formation de plis sur les rubans. Pour les rubans en acier, les résultats de l'expérience se trouvent sur la figure 4.28.

Quelle que soit la géométrie du ruban, la vitesse critique U_c à partir de laquelle le pli se forme varie comme l'inverse de la longueur du ruban L. Plus un ruban est court, plus la vitesse nécessaire pour le faire plier sera importante.

Pour analyser ces résultats, nous pouvons adapter le modèle de la section précédente, mais cette fois-ci la force qu'il faut prendre en compte a pour origine la pression hydrodynamique sur la surface du ruban. Nous montrons dans l'annexe B que le rayon de courbure à la position d'encastrement du ruban est fonction de la force aérodynamique sur le ruban, et s'écrit dans le cas des faibles déformations :

$$R = \frac{EI}{F_{aero}L} = \frac{2EI}{\rho U^2 C b L^2} \tag{4.25}$$

Nous savons que pour le ruban, $I = \frac{hb^5}{r^2}$ et le rayon de courbure au moment de la formation du pli est $R_c = b^2/h$. Alors la vitesse critique de formation du pli pour un ruban est :

$$U_{th} \sim \sqrt{\frac{E}{\rho C}}\frac{bh}{rL} \tag{4.26}$$

Nous comparons notre modèle et les résultats expérimentaux sur la figure 4.29, en prenant $E = 200$ GPa pour l'acier, $\rho = 1.2$ kg/m^3 et $C = 1$ pour le coefficient de trainée.

La relation entre la vitesse expérimentale U_c pour laquelle le pli se forme et la vitesse théorique U_{th} est linéaire. La vitesse de formation du pli pour le ruban dépend de sa géométrie via le terme $\frac{bh}{rL}$ et de l'une de ses caractéristiques : son module de Young E. Le coefficient de

trainée C a été pris égal à 1, ce qui est arbitraire. Il faudrait faire une expérience en soufflerie avec un capteur de force pour déterminer exactement sa valeur, qui doit se trouver entre 1 et 2. Mais cette variation sur C n'expliquerait pas le coefficient numérique entre les données expérimentales et théoriques, qui vaut 16 et provient sûrement du moment quadratique qui peut cacher d'énormes facteurs numériques. L'expérience n'en reste pas moins concluante car nous sommes capables de prédire la vitesse de formation de pli d'une structure élancée courbée.

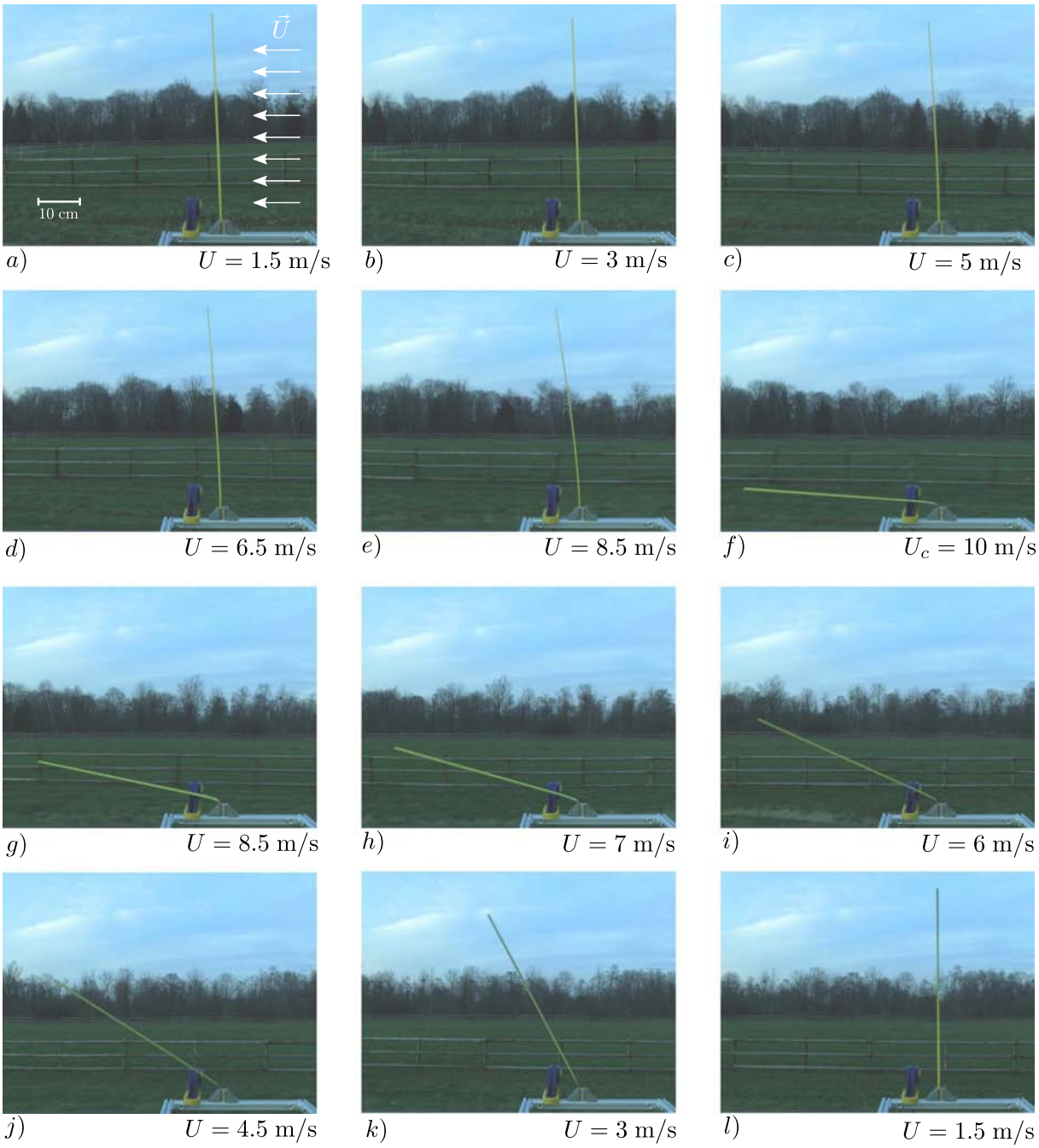


FIGURE 4.27 – Ruban soumis à un écoulement d'air. Dimensions du ruban : longueur L = 50 cm, largeur b = 19 mm, épaisseur h = 0.14 mm et rayon de courbure transversale r = 11.9 mm. De l'image a) à l'image f) la vitesse augmente de 1.5 m/s à 10 m/s. Et de l'image g) à l'image l) la vitesse diminue de 8.5 m/s à 1.5 m/s. Le pli apparaît sur l'image f) à la vitesse U_c = 10 m/s et disparaît sur l'image l) à la vitesse 1.5 m/s.

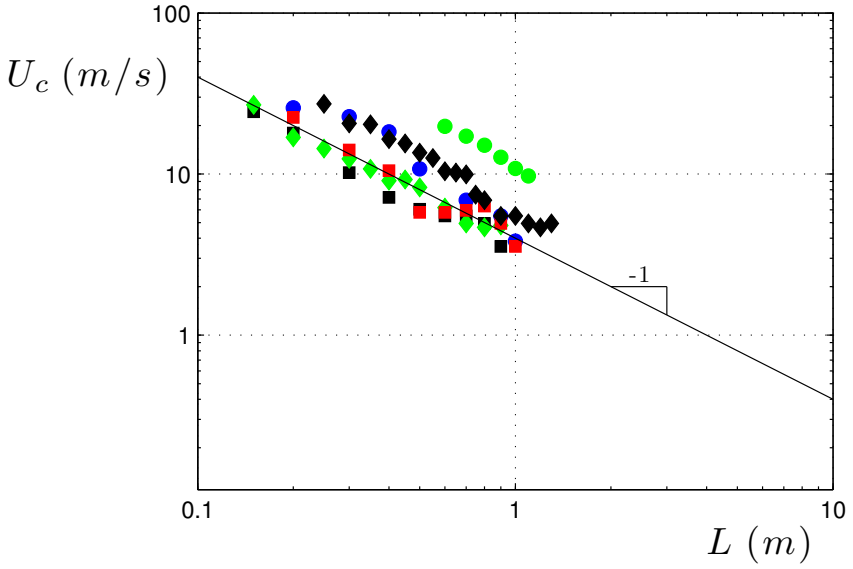


FIGURE 4.28 – Vitesse critique de formation d'un pli pour un ruban. Pour chaque série de mesures nous indiquons les données comme suit (signe sur le graphe : matière, épaisseur h, largeur b et rayon transversal r) : (● : acier, $h = 0.18$ mm, $b = 31.5$ mm, $r = 11.6$ mm), (◆ : acier, $h = 0.14$ mm, $b = 25$ mm, $r = 13.9$ mm), (● : acier, $h = 0.14$ mm, $b = 19$ mm, $r = 11.9$ mm), (■ : acier, $h = 0.13$ mm, $b = 15$ mm, $r = 10.8$ mm), (◇ : acier, $h = 0.115$ mm, $b = 12.5$ mm, $r = 11.37$ mm) et (■ : acier, $h = 0.14$ mm, $b = 12.5$ mm, $r = 13.8$ mm).

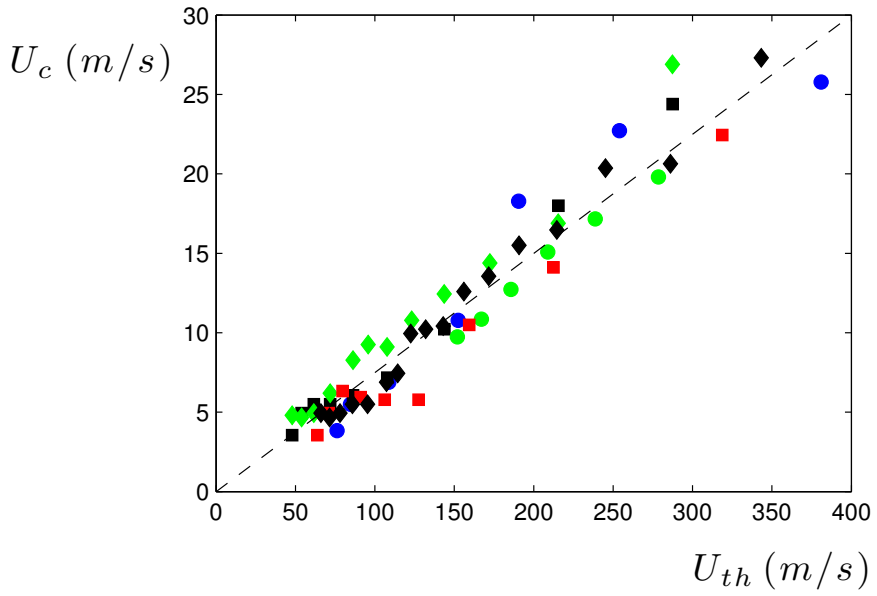


FIGURE 4.29 – Vitesse critique de formation d'un pli pour un ruban U_c comparée à la vitesse théorique U_{th}. Pour chaque série de mesures nous indiquons les données comme suit (signe sur le graphe : matière, épaisseur h, largeur b et rayon transversal r) : (● : acier, $h = 0.18$ mm, $b = 31.5$ mm, $r = 11.6$ mm), (◆ : acier, $h = 0.14$ mm, $b = 25$ mm, $r = 13.9$ mm), (● : acier, $h = 0.14$ mm, $b = 19$ mm, $r = 11.9$ mm), (■ : acier, $h = 0.13$ mm, $b = 15$ mm, $r = 10.8$ mm), (◇ : acier, $h = 0.115$ mm, $b = 12.5$ mm, $r = 11.37$ mm) et (■ : acier, $h = 0.14$ mm, $b = 12.5$ mm, $r = 13.8$ mm).

4.5 Perspectives

4.5.1 Longueur de transition

Lors de la description du ruban (figure 4.9), nous avons noté la présence de la zone de transition de longueur L_t entre la zone pliée du ruban et les deux brins libres. D'une façon générale, cette longueur se rencontre dès qu'il y a un changement de courbure imposé dans une plaque mince (Vandeparre 2011 [84] et Cambau 2011 [85]). Nous allons étudier cette longueur de transition L_t. Pour cela nous prenons des rubans courbés transversalement dont nous aplatissons une partie en l'écrasant entre les mors d'un étau. La photo 4.30 montre une de ces expériences pour un ruban fabriqué en Rhodoïd. Ce ruban a pour largeur $b = 40$ mm, épaisseur $h = 0.2$ mm et rayon de courbure transversale $r = 25$ mm. Sur la gauche de l'image les deux mors de l'étau serrent le ruban, qui se retrouve mis à plat. Son épaisseur apparente est alors égale à son épaisseur h. En s'éloignant des plaques, le ruban récupère sa courbure et son épaisseur apparente augmente jusqu'à redevenir h_r, l'épaisseur apparente d'un ruban de rayon de courbure r. Cette transition se fait sur une longueur L_t, qui vaut ici 7 cm.

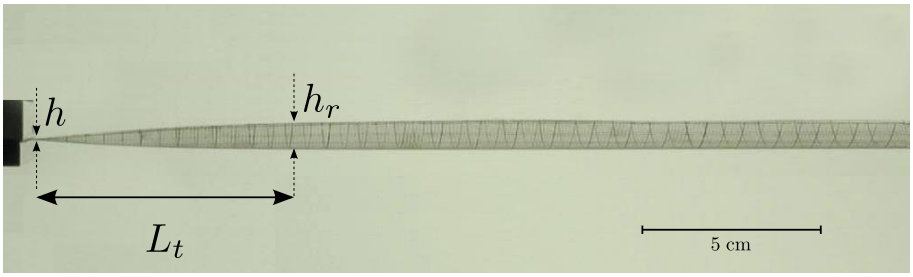


FIGURE 4.30 – Longueur de transition du ruban, entre l'état non courbé et l'état courbé.

Nous avons répété cette expérience pour des rubans de différentes géométries provenant de différents matériaux : acier, Lexan et Rhodoïd. Sur la figure 4.31 nous présentons l'évolution de la longueur de transition L_t avec la largeur du ruban b. Pour tous les rubans, la longueur de transition varie comme b^2. Selon les rubans, elle peut aller de 1 à 27 cm. Ces longueurs de l'ordre de la dizaine de cm sont en-dessous des longueurs minimum de rubans avec lesquelles nous avons travaillé dans les expériences précédentes. Si nous avions travaillé avec des rubans plus courts, nous aurions vu apparaître les effets de cette longueur de transition. Elle est analogue à la tension de surface pour les liquides : tant que les longueurs caractéristiques des récipients et des volumes de liquide utilisés sont grandes devant la longueur capillaire de l'eau, les effets de la capillarité ne se font pas sentir. Sur la photo de gauche de la figure 4.32 se trouve un bain d'éthanol dans un récipient. Nous avons plongé un cylindre de 0.5 mm de rayon dans ce bain. La surface du bain est modifiée autour du cylindre, sur une longueur qui est de l'ordre de grandeur de la longueur capillaire $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$ et qui vaut 1.7 mm pour l'éthanol. Sur la photo de droite de la figure 4.32 nous présentons un ruban en acier (épaisseur $h = 0.14$ mm, largeur $b = 19$ mm et rayon de courbure transversale $r = 12$ mm) à l'horizontale qui est défléchi sous son propre poids. Le pli devrait être à la position d'encastrement. Mais il en est légèrement écarté à cause de la longueur de transition.

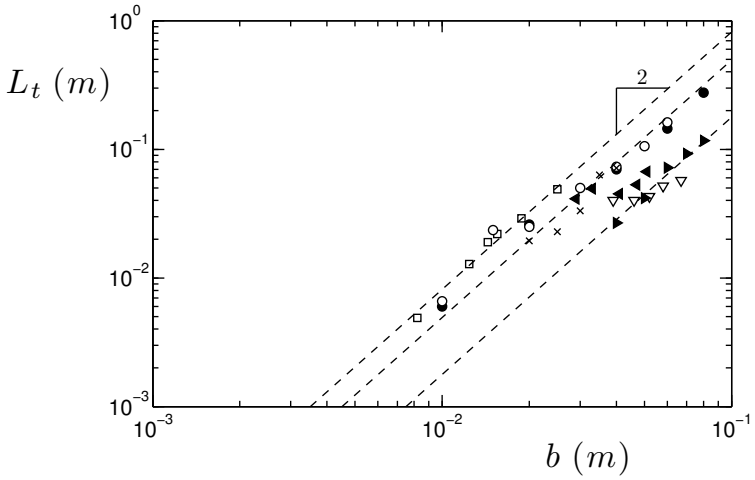


FIGURE 4.31 – Évolution de la longueur de transition du mètre à ruban avec sa largeur pour différents rubans. Légende : (□ : acier, $h = 0.1$ mm et $r = 13$ mm), (• : Rhodoïd, $h = 0.2$ mm et $r = 25$ mm), (○ : Rhodoïd, $h = 0.2$ mm et $r = 20$ mm), (▽ : Lexan, $h = 0.75$ mm et $r = 27.5$ mm), (◂ : Lexan, $h = 0.5$ mm et $r = 19$ mm), (▸ : Lexan, $h = 0.75$ mm et $r = 43.3$ mm) et (× : Lexan, $h = 0.25$ mm et $r = 15$ mm).

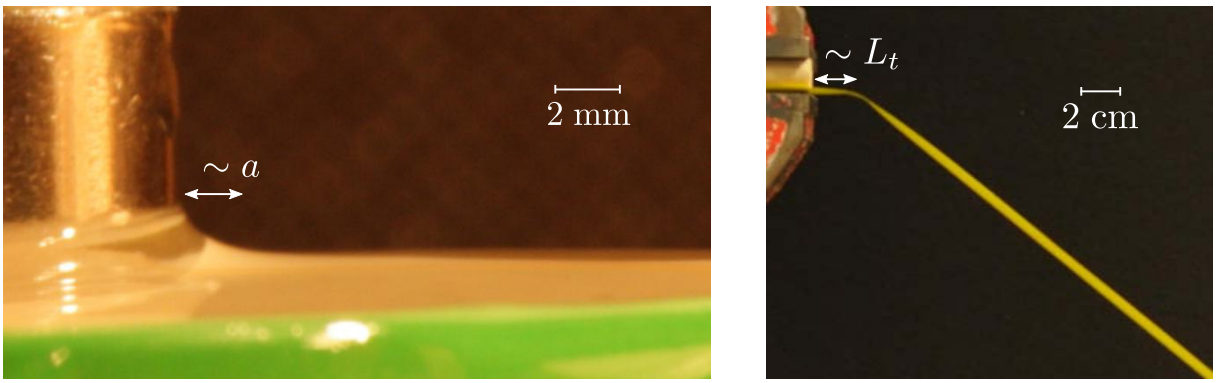


FIGURE 4.32 – Analogie entre tension de surface pour un liquide et longueur de transition pour un ruban. À gauche, le liquide est de l'éthanol, sa longueur capillaire est $a = 1.7$ mm. À droite, se trouve un ruban en acier d'épaisseur $h = 0.14$ mm, de largeur $b = 19$ mm et de rayon de courbure transversale $r = 12$ mm, sa longueur de transition est $L_t = 2.8$ cm

Calculons maintenant cette longueur caractéristique L_t. Le ruban a un rayon de courbure transversale r. Mais nous lui imposons un rayon de courbure infini en l'aplatissant entre deux plaques. Cela coûte une énergie de courbure $\mathscr{E}_c$. Pour calculer cette énergie, nous prenons l'énergie volumique $\sigma_c \epsilon_c$ que nous multiplions par le volume de la plaque $\Omega = bhL_t$. Avec les notations du schéma de droite de la figure 4.33 nous déterminons $\epsilon_c = h/r$ et finalement l'énergie de courbure est :

$$\mathscr{E}_c \sim E\frac{bh^3}{r^2}L_t \tag{4.27}$$

Cette énergie est proportionnelle à L_t, elle a tendance à faire diminuer la longueur de transition.

Il faut aussi prendre en compte l'énergie d'élongation $\mathscr{E}_{el}$ du ruban. Pour récupérer sa forme courbée, le ruban subit un allongement $L_t + \Delta L$. Sur le schéma de gauche de la figure 4.33, nous voyons que l'allongement relatif du ruban est $\epsilon_{el} \sim \frac{\Delta L}{L_t} \sim \frac{{h_r}^2}{{L_t}^2}$, où $h_r = b^2/r$. D'après la loi de Hooke :

$$\sigma_{el} = E\frac{b^4}{r^2{L_t}^2} \tag{4.28}$$

Et l'énergie volumique étant $\sigma_{el}\epsilon_{el}$, nous obtenons ici aussi $\mathscr{E}_{el}$ en multipliant l'énergie volumique d'élongation par le volume de la zone de transition $\Omega = bhL_t$:

$$\mathscr{E}_{el} \sim E\frac{hb^9}{r^4{L_t}^3} \tag{4.29}$$

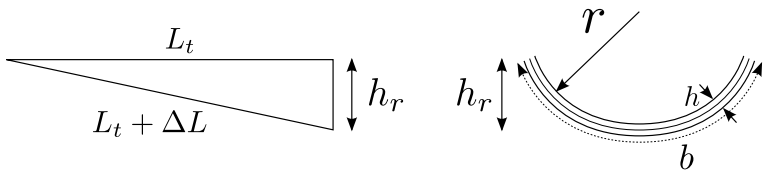


FIGURE 4.33 – Vue schématisée de la zone de transition. À gauche, la zone de transition de longueur L_t représentée de profil. Certaines parties du ruban sont allongées de ΔL. À droite, la section du ruban de rayon de courbure transversale r, d'épaisseur h, de largeur b et d'épaisseur apparente h_r.

L'énergie d'élongation varie comme $1/{L_t}^3$: plus la longueur de transition est grande plus cette énergie est faible. Nous représentons les allures des courbes $\mathscr{E}_c(L_t)$ et $\mathscr{E}_{el}(L_t)$ sur la figure 4.34. Comme l'énergie de courbure augmente avec L_t et l'énergie d'élongation diminue avec L_t il y a une valeur de L_t pour laquelle $\mathscr{E}_c \sim \mathscr{E}_{el}$ et l'énergie totale est minimale, ce qui donne une loi d'échelle pour L_t :

$$L_t \sim \frac{b^2}{\sqrt{hr}} \tag{4.30}$$

Cette longueur est d'autant plus grande que b est grand et que le produit hr est petit.

Nous présentons alors sur la figure 4.35 toutes les mesures de L_t que nous avons faites en fonction de la longueur théorique $\frac{b^2}{\sqrt{hr}}$. Il y a une relation linéaire, avec un facteur numérique 0.1, entre nos résultats expérimentaux et notre modèle. Contrairement à la tension de surface qui est fixée pour un liquide donné, et est toujours de l'ordre du mm, la longueur L_t pour une plaque peu épaisse peut subir de grandes variations avec la géométrie de la plaque. Il est possible alors d'imaginer le problème inverse : prendre une plaque plane et lui imposer comme condition aux limites une courbure transversale. Cette plaque voit alors son moment quadratique et donc sa rigidité augmenter sur une longueur qui est de l'ordre de L_t. Si la longueur de la plaque est plus petite que L_t alors la plaque est entièrement rigidifiée. Les plantes à gaine, comme par exemple les graminées, fournissent un exemple de cette rigidification de plante par courbure.

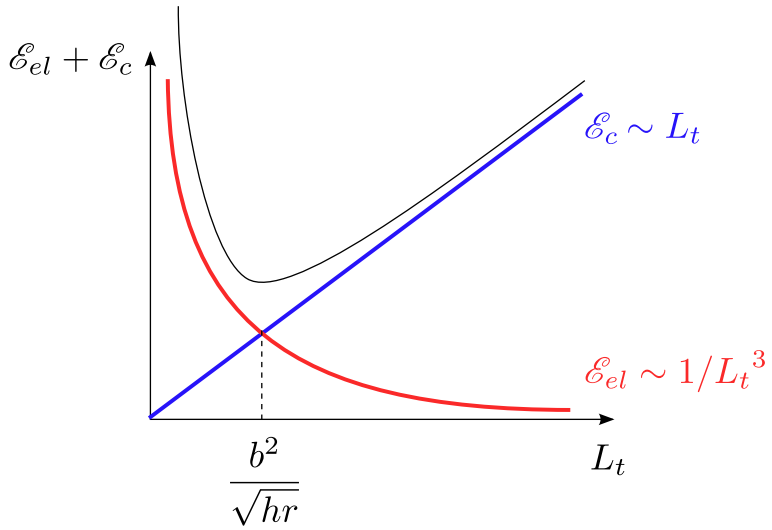


FIGURE 4.34 – Les deux formes d'énergie stockée dans la zone de transition : énergie de courbure $\mathscr{E}_c$ et énergie d'élongation $\mathscr{E}_{el}$ dont la somme admet un minimum pour $L_t = \frac{b^2}{\sqrt{hr}}$.

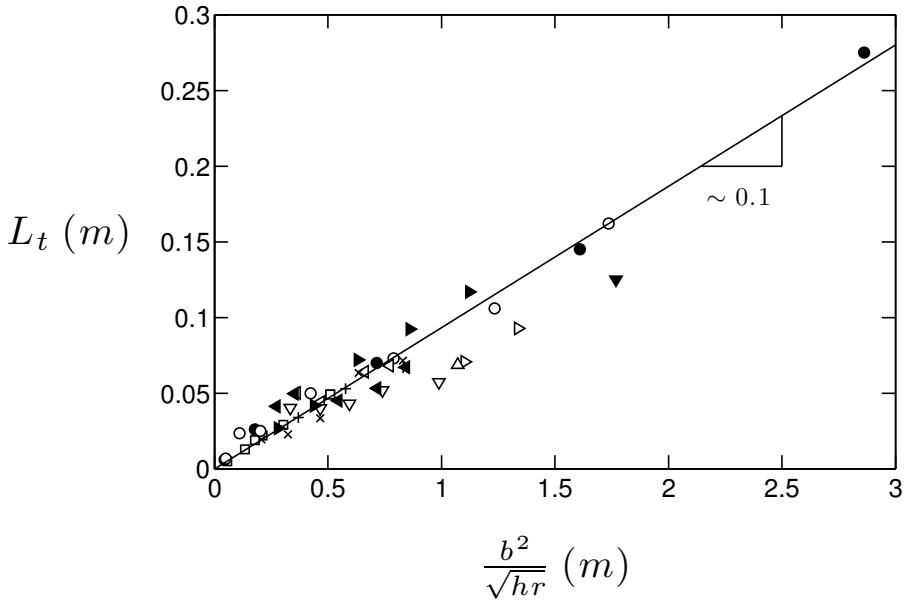


FIGURE 4.35 – Longueur de la zone de transition de changement de courbure des rubans. Légende : (□ : acier, $h = 0.1$ mm, $r = 14$ mm et $b = 8$ à 25 mm), (• : Rhodoïd, $h = 0.2$ mm, $r = 25$ mm et $b = 10$ à 80 mm), (∘ : Rhodoïd, $h = 0.2$ mm, $r = 21$ mm et $b = 10$ à 60 mm), (◁ : Lexan, $h = 0.75$ mm, $r = 19$ mm et $b = 37$ à 54 mm), (▽ : Lexan, $h = 0.75$ mm, $r = 27.5$ mm et $b = 39$ à 67 mm), (▷ : Lexan, $h = 0.25$ mm, $r = 19$ mm et $b = 49$ et 54 mm), (△ : Lexan, $h = 0.25$ mm, $r = 27.5$ mm et $b = 53$ mm), (◂ : Lexan, $h = 0.5$ mm, $r = 19$ mm et $b = 29$ à 51 mm), (▾ : Lexan, $h = 0.5$ mm, $r = 27.5$ mm et $b = 81$ mm), (▸ : Lexan, $h = 0.75$ mm, $r = 43.3$ mm et $b = 40$ à 80 mm), (+ : Lexan, $h = 0.75$ mm, $r = 25$ mm et $b = 40$ à 60 mm) et (× : Lexan, $h = 0.25$ mm, $r = 15$ mm et $b = 20$ à 40 mm).

4.5.2 Bourrasque

Dans cette partie nous nous intéressons à la tendance du vent à faire des bourrasques et à l'impact que cela peut avoir sur la vitesse de verse des plantes. Lors de bourrasques ou de rafales, l'écoulement d'air est très turbulent et les variations de la vitesse de vent peuvent être de l'ordre de grandeur de la vitesse du vent lui-même. Nous avons analysé des données de vitesse de vent durant la tempête Joachim du 15 et 16 décembre 2011. Ces données ont été fournies par Jean-Charles Dupont, du SIRTA. Elles proviennent de la station météorologique du LMD, le Laboratoire de Météorologie Dynamique de l'École Polytechnique. Les anémomètres utilisés sont des anémomètres à ultrasons (modèle CSAT3 3-D de Campbell Scientific) et sont situés sur le site de l'École Polytechnique, à Palaiseau, 91128. Ils sont installés sur une tour, à 10 m de haut. Ces anémomètres permettent une mesure de la vitesse du vent à une fréquence de 10 Hz. Nous présentons sur le graphique 4.36 un échantillon de ces données pour la journée du 16 décembre de 7h15 à 7h20. La vitesse moyenne du vent est de 10 m/s. Mais il est bien visible que la dispersion de vitesse est très importante : il y a de très nombreuses bourrasques et les valeurs maximales de vent se trouvent autour de 35 m/s.

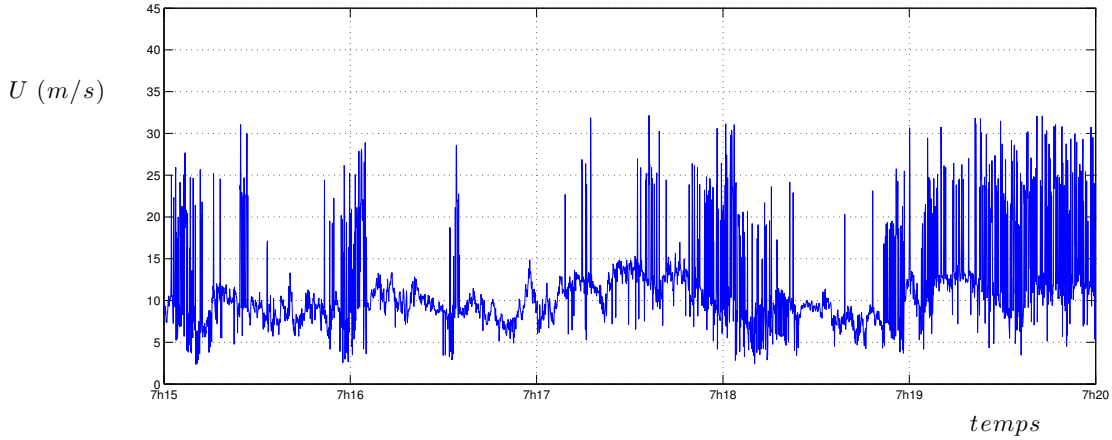


FIGURE 4.36 – Bourrasques durant la tempête Joachim : le 16 décembre 2011 de 7h15 à 7h20. Données : SIRTA [86]

Sur le graphique 4.37 nous avons sélectionné une minute du graphique précédent, de 17h17 à 17h18 la journée du 16 décembre 2011. Les bourrasques à 35 m/s correspondent à des points isolés sur le graphique. L'échantillonnage des données est fait à 10 Hz. La durée des bourrasques est donc de l'ordre du dixième de seconde. D'après Py 2006 [72] et Rodriguez 2008 [42], la fréquence d'oscillation pour les plantes est universelle et est de l'ordre de 1 s. La durée des bourrasques serait alors trop courte pour avoir un impact sur une plante. Cependant nous avons vu au chapitre 3 qu'il existe une vitesse critique au-delà de laquelle la fréquence d'oscillation des végétaux augmente et se rapproche alors de la durée des bourrasques. Et il arrive que les bourrasques soient répétées sur des durées de l'ordre de la seconde, ce qui se voit sur les intervalles de temps 30-40 s et 50-60 s de la figure 4.37. Il est donc important de faire une expérience pour visualiser cet effet bourrasque.

Nous avons donc mené une série d'expériences qui est très semblable à celle du paragraphe 4.4.1. Le ruban est initialement encastré à une extrémité et libre à l'autre extrémité. Cette fois-ci la masse suspendue à son extrémité n'est pas augmentée progressivement jusqu'à formation du pli comme si la vitesse du vent avait augmenté progressivement. Mais pour imiter la bourrasque

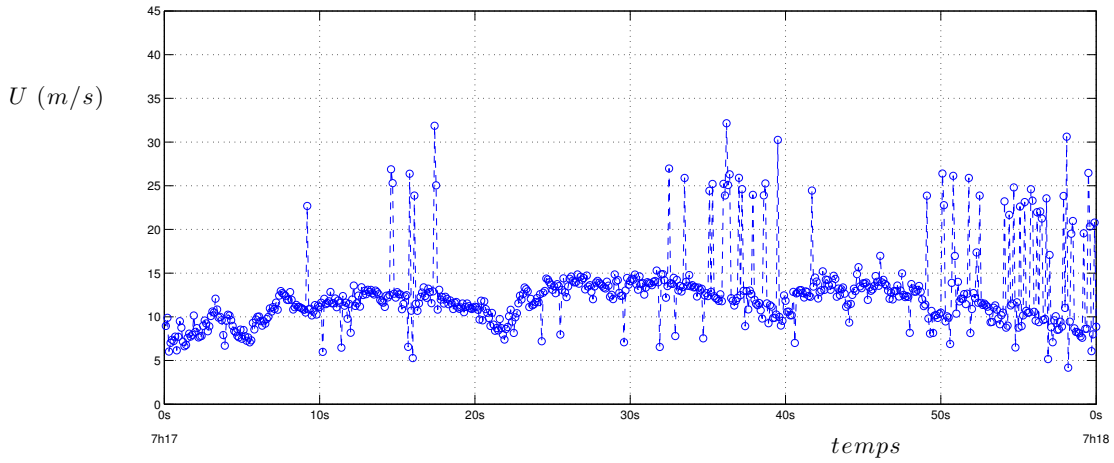


FIGURE 4.37 – Bourrasques durant la tempête Joachim : le 16 décembre 2011 de 7h17 à 7h18. Données : SIRTA [86]

nous plaçons une masse donnée m à l'extrémité du ruban puis nous laissons le système atteindre l'équilibre. Lors de telles expériences, deux résultats différents apparaissent. Soit la masse m est faible et le ruban ne plie pas, soit la masse m est élevée et le ruban forme un pli sous la force exercée. Ce que nous avons cherché, c'est pour quelle masse critique m_d il y a transition entre les deux comportements. Pour chaque ruban, nous avons cherché m_d par dichotomie. Le ruban est très bien adapté à une telle mesure car la formation du pli est élastique (nous pouvons former le pli sur le ruban autant de fois que l'on veut) et la recherche de m_d par dichotomie peut être menée sans l'abîmer. Nous présentons sur la figure 4.38 nos résultats pour différents rubans en acier et en Lexan. La masse est adimensionnée par la masse m_c qui est la masse critique pour former le pli sur un ruban en chargement progressif.

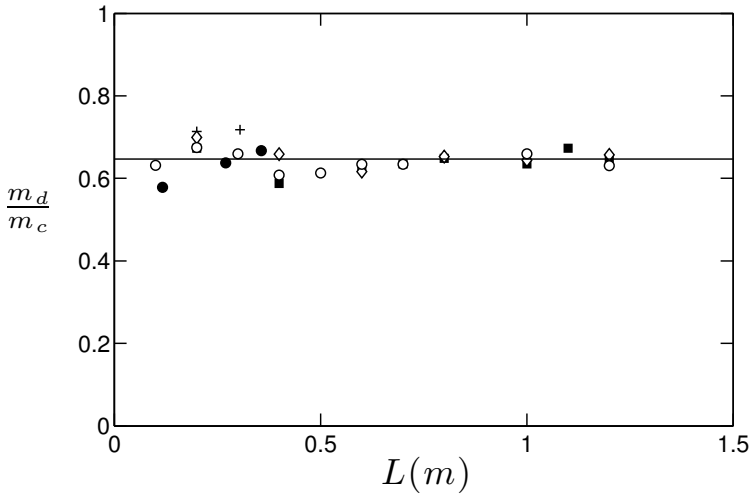


FIGURE 4.38 – Rapport m_d/m_c pour différents rubans, présenté en fonction de leur longueur L. Légende : (• : Lexan, b = 39 mm, r = 13 mm et h = 0.25 mm), (+ : Lexan, b = 43 mm, r = 15 mm et h = 0.5 mm), (∘ : acier, b = 23 mm, r = 12.7 mm et h = 0.15 mm), (▪ : acier, b = 19 mm, r = 12.5 mm et h = 0.15 mm) et (◊ : acier, b = 15 mm, r = 12.5 mm, et h = 0.15 mm).

La rapport des masses se trouve autour d'une valeur moyenne qui vaut 0.66. Il apparaît être indépendant de la longueur des rubans, et de ses caractéristiques géométriques (rayon de courbure transversale r, épaisseur h et largeur b) et physiques (module de Young et densité).

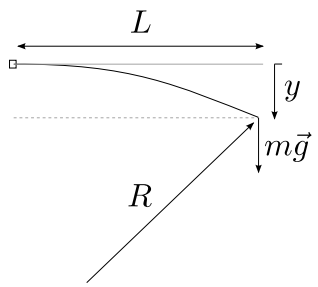


FIGURE 4.39 – Notations pour le calcul de $\frac{1}{R} \sim \frac{y}{L^2}$.

Pour comprendre ce résultat, écrivons l'équilibre des couples auquel est soumis le ruban lorsque la masse m_d est placée à l'extrémité libre. Le ruban est soumis au couple $m_d g L$ par la présence de la masse. Il oppose un couple élastique $EI/R = EIy/L^2$ (la loi d'échelle $\frac{1}{R} \sim \frac{y}{L^2}$ est calculée avec l'aide des notations du graphique 4.39). Et il faut prendre aussi en compte le couple de l'accélération de la tige $m_{ruban}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$. L'équilibre des couples fournit une équation du second degré sur y :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2 y - \omega_0^2 y_0 = 0 \tag{4.31}$$

où $\omega_0^2 = \frac{EI}{m_{ruban}L^3}$ et $y_0 = m_d g L^3 EI$. La solution de cette équation est $y(t) = y_0(1 - \cos\omega_0 t)$. Le ruban oscille autour de sa position d'équilibre y_0 avec l'amplitude y_0. Pour déterminer m_d, la masse minimale pour laquelle le ruban plie en chargement dynamique, il faut comparer la valeur maximale de $y(t)$: $2y_0$, à la valeur de y_c pour laquelle le ruban forme le pli. Et nous savons que $y_0 \sim \frac{m_d g L^3}{EI}$ et de même $y_c \sim \frac{m_c g L^3}{EI}$. Finalement, cela donne $m_d = \frac{1}{2}m_c$. Cette loi d'échelle est en accord avec nos expériences, dans le sens où elle prédit un rapport des masses m_d/m_c constant quel que soit le ruban. Par contre, expérimentalement, nous trouvons que ce facteur est 0.66. Cela peut être dû à l'amortissement des oscillations du ruban autour de sa position d'équilibre ou à l'énergie associée à la formation des zones de transitions que l'on néglige.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons caractérisé le comportement non linéaire d'un ruban courbé transversalement lorsque sa courbure longitudinale varie. Il existe une courbure longitudinale critique pour laquelle le ruban forme un pli. Nous avons fait varier la courbure longitudinale du ruban soit en le comprimant soit en lui imposant un couple (avec une force localisée ou avec un écoulement d'air sur la surface totale de ruban). Dans tous les cas nous sommes capables de prédire l'apparition du pli. Ce qui est très intéressant pour une application à la verse de structures élancées.

Dans le cas de l'application à la verse, il serait nécessaire de s'intéresser en détail au coefficient de trainée du ruban, qui doit évoluer sensiblement avec la vitesse. En effet, les deux courbures du ruban étant liées, lorsque le ruban se courbe sous le vent, sa courbure transversale évolue et sûrement son coefficient de traînée aussi. Il serait très intéressant aussi de connaître la raison pour laquelle les rubans en Lexan oscillent transversalement durant les expériences en soufflerie et forment alors des plis par torsion bien avant d'atteindre la courbure longitudinale critique mesurée au laboratoire avec une force localisée.

Nous avons aussi commencé l'étude de la longueur de transition d'une plaque mince entre courbure transversale imposée et courbure transversale naturelle. Et dans l'optique de comprendre l'importance des bourrasques lors des tempêtes, nous avons commencé à caractériser le rapport entre force dynamique et force statique pour former le pli sur des rubans. L'étude de l'hystérésis d'apparition et de disparition du pli serait aussi très intéressante : le ruban est un objet qui se plie quand la vitesse de vent est trop élevée, ainsi il se protège des grands vents, et se redéploie dès que la vitesse diminue, mais ne se fait pas piéger par le phénomène bourrasque grâce à la différence des vitesses d'apparition et de disparition du pli.

Chapitre 5

Le verse géométrique de structures tubulaires

"Sauver la nature". Gilbert Garcin

Travail réalisé avec Éline Dehandschoewercker

Sommaire

5.1 Motivation 92
5.2 Expériences 93
5.3 Discussion 99
5.4 Conclusion 101

5.1 Motivation

Dans ce chapitre, nous étudions la verse géométrique de structures élancées tubulaires. Cette étude porte directement sur la verse des céréales qui ont des tiges creuses circulaires (figure 5.1). Elle a pour conséquence une perte importante des récoltes : de 10 à 30 % en moyenne par an au niveau mondial, d'après Heisey 1996 [87]. La verse des céréales a plusieurs origines possibles : champignons, pluie ou vent. Elle se traduit par la rupture des racines ou de la tige, Berry 2004 [88]. Ici, c'est à la verse par formation d'un pli sur la tige induit par le vent que nous nous intéressons.

D'un point de vue mécanique, l'étude de la formation de plis sur des structures creuses a été motivée par le besoin de créer des objets solides et légers, notamment dans le domaine de l'aéronautique. Cette approche peut être illustrée par l'étude de la formation de plis sur des pailles menée par Brazier 1927 [89]. D'un point de vue agronomique, de nombreuses études ont cherché à caractériser le phénomène de verse. Une étude de la verse par rupture des racines a été faite par Crook 1993 [90] . L'étude de la déflexion de tiges de blé et d'orge en soufflerie a été conduite par Neenan 1975 [91] pour déterminer les vitesses de verse par extrapolation. Elles seraient de 22 m/s pour le blé et de 15 m/s pour l'orge. Berry et al. 2002 [73] retrouvent aussi cette vitesse de 22 m/s pour le blé, avec cependant une forte dispersion (pour les tiges les plus faibles, la vitesse critique est de 8 m/s et pour les tiges les plus résistantes elle est de 40 m/s).

Ici, nous utiliserons des pailles comme modèle de la tige de céréale. Après avoir caractérisé le critère de formation d'un pli par des expériences de flambage et de flexion sur ces pailles, nous essaierons de comprendre la vitesse critique de vent nécessaire à la formation de ce pli lors d'une expérience en soufflerie. Nous nous posons aussi la question du lien avec la formation d'un pli sur un ruban courbé transversalement. Est-il possible de formuler un critère de formation du pli commun aux deux problèmes ?

FIGURE 5.1 – Le phénomène de verse par rupture de la tige pour des céréales à tiges circulaires. Sur la gauche, les céréales intactes. Au milieu, la formation d'un pli sur une tige. À droite, le phénomène de verse dans un champ.

5.2 Expériences

La démarche adoptée dans ce chapitre est de comprendre la formation du pli sur une paille lors d'expériences de flambage et de flexion par application d'une force locale, puis de passer au cas de la flexion induite par un écoulement d'air, qui est le plus proche de la verse lors de grands vents dans les champs de céréales. Pour les expériences de flambage, nous avons utilisé des pailles en plastique (polypropylène), commercialisées comme pailles à boire, et des tubes en aluminium. Pour les expériences de flexion, nous avons uniquement utilisé des pailles en plastique. L'utilisation des pailles présente un inconvénient : il est difficile de trouver des tailles de pailles très différentes dans le commerce. Mais l'avantage, c'est que nous avons pu emboîter ces pailles les unes dans les autres pour obtenir de très grandes pailles (jusqu'à 2 m de longueur).

Flambage

Un exemple d'expérience de flambage de paille se trouve sur la figure 5.2. Nous comprimons une paille de longueur $L = 20$ cm, de rayon de courbure $r = 2.25$ mm et d'épaisseur $h = 0.5$ mm. Les dimensions sont notées sur l'image a) de la figure 5.2 et dans l'encart de cette image. Sur l'image a), la paille n'est pas comprimée. De l'image b) à l'image f), nous comprimons régulièrement la paille. Elle se courbe pour finalement plier à l'image f). Nous mesurons le rayon de courbure critique R_c auquel la paille forme le pli sur l'image e). Ici, $R_c = 44$ mm. À la différence du cas des rubans, ici la formation du pli s'accompagne d'une plastification de la tige près du pli, si bien qu'il n'y a pas de retour vers la position initiale.

Nous présentons sur la figure 5.3 les mesures de R_c en fonction de la longueur des tiges creuses. Dans l'ensemble, le rayon R_c est constant avec la longueur L. Pour le cas des pailles, il y a deux séries de points : la série correspondant aux points bleus sur le graphe est faite pour des pailles de rayon transversal $r = 2.95$ mm et d'épaisseur $h = 0.2$ mm tandis que la série correspondant aux points rouges est faite pour des pailles de rayon transversal $r = 2.25$ mm et d'épaisseur $h = 0.5$ mm. Les premières ont un rapport h/r plus faible que celui des secondes, elles correspondent mieux à l'approximation de plaques d'épaisseur fine devant leurs autres dimensions. Cela peut expliquer la grande dispersion des points rouges par rapport à celle des points bleus. Pour les tubes en aluminium (signes carrés), l'épaisseur est maintenue constante, à $h = 0.5$ mm et le rayon de courbure transversale varie de $r = 1.25$ à $r = 2.75$ mm. Pour une augmentation du rayon de la tige, le rayon de courbure critique R_c augmente.

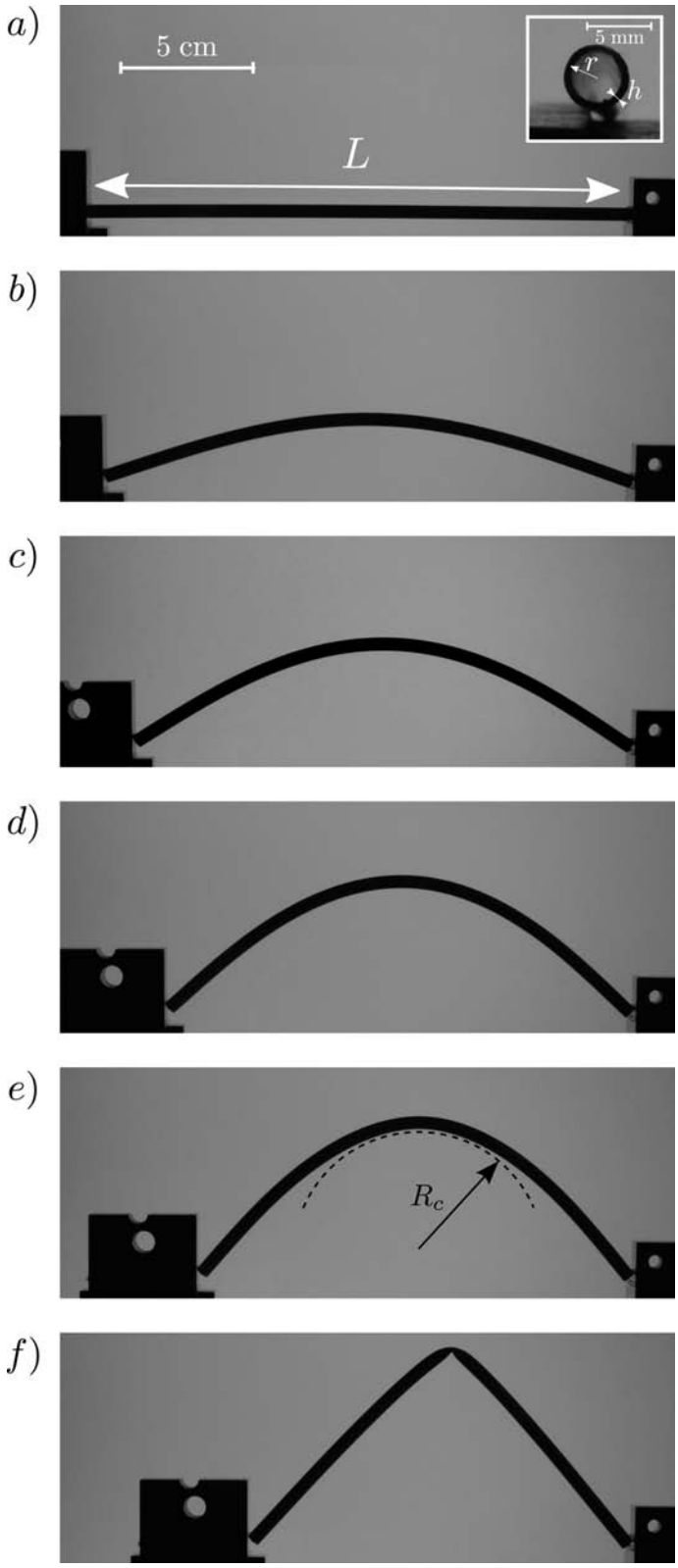


FIGURE 5.2 – Expérience de flambage d'une tige creuse en plastique de longueur L = 20 cm, de rayon de courbure r = 2.25 mm et d'épaisseur h = 0.5 mm. Nous mesurons le rayon longitudinal critique R_c = 44 mm pour lequel la paille plie sur la figure e).

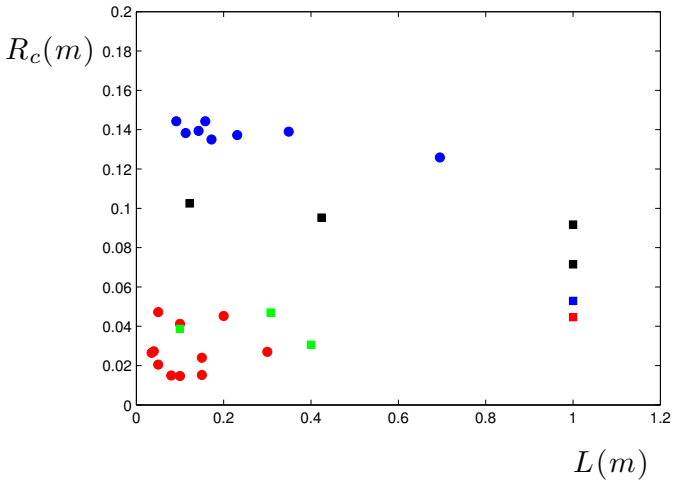


FIGURE 5.3 – Rayon critique longitudinal R_c d'apparition du pli pour une tige en fonction de la longueur de la tige. Légende : (● : plastique, $r = 2.25$ mm et $h = 0.5$ mm), (● : plastique, $r = 2.95$ mm et $h = 0.2$ mm), (■ : aluminium, $r = 1.25$ mm et $h = 0.5$ mm), (■ : aluminium, $r = 1.75$ mm et $h = 0.5$ mm), (■ : aluminium, $r = 2.25$ mm et $h = 0.5$ mm) et (■ : aluminium, $r = 2.75$ mm et $h = 0.5$ mm).

Flexion

Une expérience de flexion se trouve sur la figure 5.4. Ici, la paille a pour longueur $L = 30$ cm, rayon $r = 2.9$ mm et épaisseur $h = 0.15$ mm. Elle est encastrée à une extrémité et libre à l'autre extrémité. Sur l'image a), la paille n'est soumise qu'à son propre poids, puis de l'image b) à l'image i), nous exerçons une force croissante à son extrémité, en plaçant un gobelet que nous remplissons d'eau par pas de 5 mL par image. La paille forme un pli sur l'image i) lorsque la masse dépasse 35 g.

Nous avons répété cette expérience pour trois pailles de sections différentes : ($r = 1.95$ mm et $h = 0.12$ mm), ($r = 2.55$ mm et $h = 0.125$ mm) et ($r = 3$ mm et $h = 0.14$ mm). Et nous avons fait varier leur longueur. Pour chaque expérience nous avons relevé la masse critique de formation du pli m_c. Les résultats de cette expérience sont présentés sur la figure 5.5. Pour chaque paille, la masse critique varie comme $1/L$. Et pour une longueur de paille donnée, plus la section de la paille est grande plus la masse nécessaire pour la plier est grande.

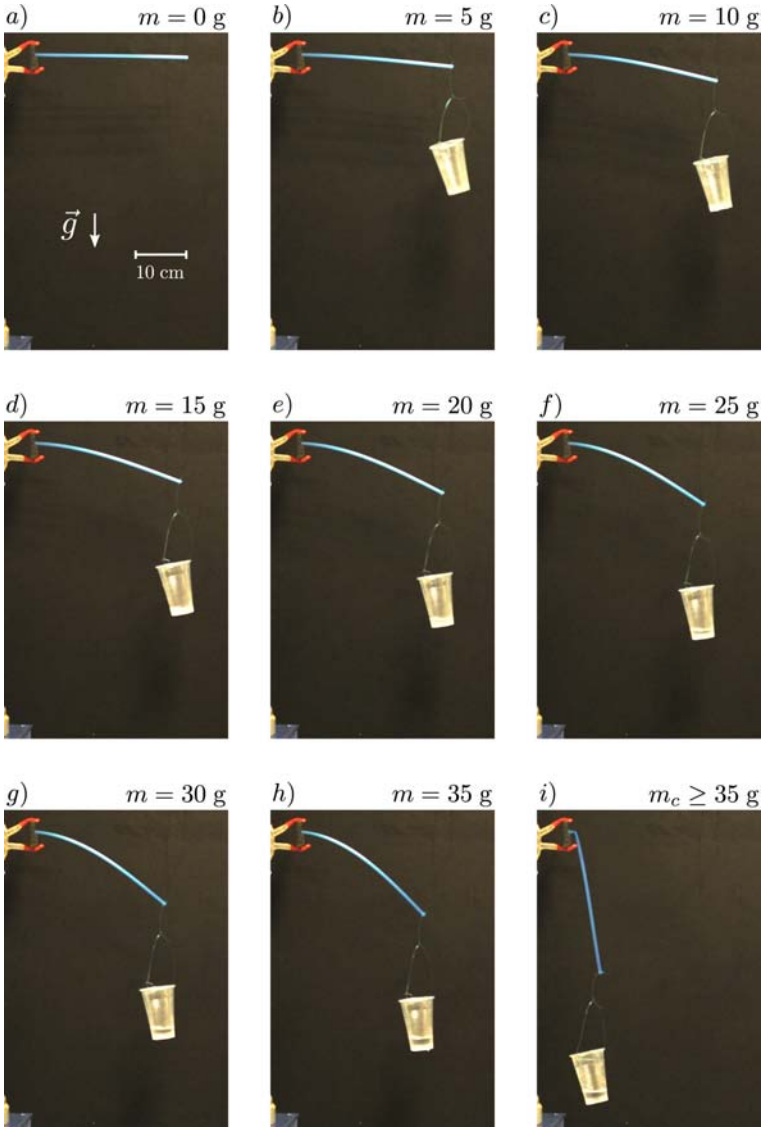


FIGURE 5.4 – Série d'images d'une paille fléchie par une force localisée à son extrémité. La paille a pour longueur L = 30 cm, rayon r = 2.9 mm et épaisseur h = 0.15 mm. Entre chaque image, la masse suspendue augmente de 5 g.

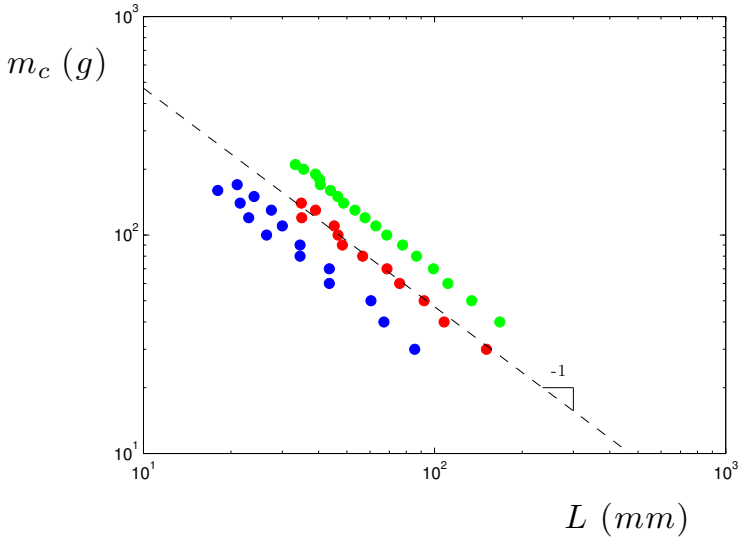


FIGURE 5.5 – Masse critique pour faire plier une paille en fonction de sa longueur. Légende : (• : $r = 1.95$ mm et $h = 0.12$ mm), (• : $r = 2.55$ mm et $h = 0.125$ mm) et (• : $r = 3$ mm et $h = 0.14$ mm).

Soufflerie

La flexion de la paille est cette fois-ci induite par un écoulement d'air. Soit en soufflerie pour les pailles courtes, soit en voiture pour les pailles longues. La soufflerie permet d'avoir des écoulements de vitesse précis et laminaires, mais pour faire des mesures avec des grandes pailles, il nous a été nécessaire de faire les expériences avec une voiture en plaçant la paille à l'extérieur de cette dernière. Sur la figure 5.6 nous montrons une série d'images correspondant à une expérience en soufflerie. La paille mesure $L = 260$ mm. La vitesse de vent est progressivement augmentée de 0 à 33 m/s, vitesse à laquelle la paille plie. Nous avons donc pu déterminer la vitesse critique de formation d'un pli sur une paille ($r = 3.1$ mm et $h = 0.13$ mm) en fonction de sa hauteur.

Nous présentons les résultats de cette expérience sur la figure 5.7. La vitesse critique de formation du pli diminue avec la hauteur de la paille. Il y a deux régimes. Pour des longueurs de pailles comprises entre 0 et 40 cm la vitesse varie comme $1/L$, puis à grand L atteint un plateau de vitesse critique U_{lim} valant environ 17 m/s.

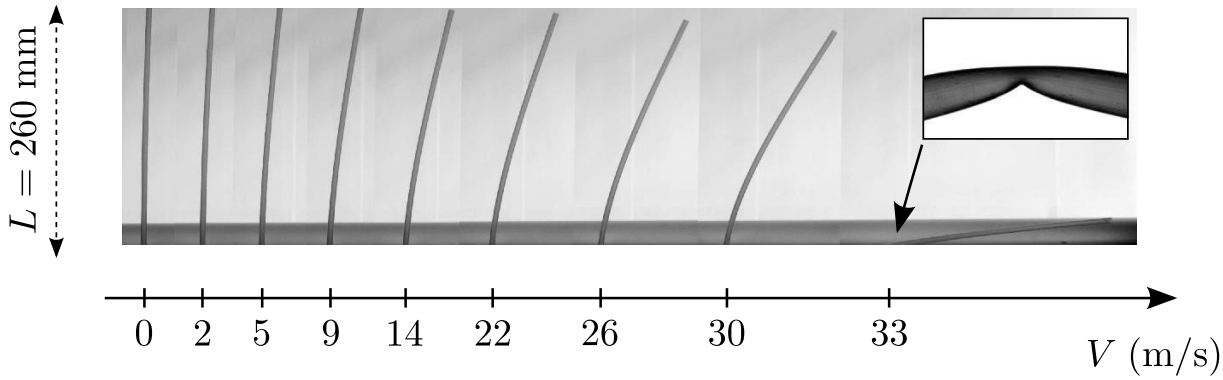


FIGURE 5.6 – Série d'images d'une paille en soufflerie, soumise à une vitesse de vent croissant. Sur la dernière image, la paille forme un pli, ce qui est illustré dans l'encart. Dimensions de la paille : $L = 260$ mm, $r = 3.1$ mm et $h = 0.13$ mm.

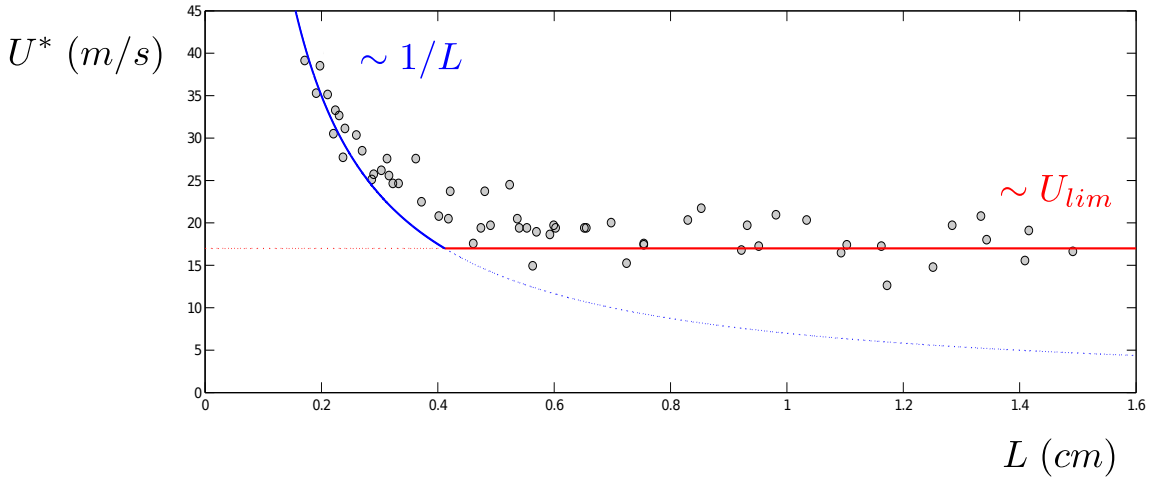


FIGURE 5.7 – Vitesse critique de pli d'une paille U^* en fonction de sa hauteur L. Le rayon de courbure de la paille est $r = 3.1$ mm et son épaisseur est $h = 0.13$ mm

5.3 Discussion

Flambage

Pour analyser les résultats des expériences de flambage, nous utilisons le résultat du chapitre précédent sur les rubans, où nous avons montré que le rayon de courbure critique R_c pour lequel le pli se forme vaut :

$$R_c \sim \frac{b^2}{h} \tag{5.1}$$

où b est la largeur du ruban et h est son épaisseur. La particularité d'une paille par rapport à un ruban courbé est que son périmètre b est proportionnel à son rayon de courbure transversale r : $b = 2\pi r$. Si bien que R_c peut être réécrit :

$$R_c \sim \frac{r^2}{h} \tag{5.2}$$

Nous traçons alors sur la figure 5.9 le rayon de courbure expérimental pour la formation du pli R_c en fonction du rayon de courbure théorique r^2/h. Sur la figure, les points • et • correspondent aux pailles et les points ▪, ▪, ▪ et ▪ correspondent aux tubes d'aluminium. Pour les pailles, malgré le fait qu'il n'y ait que deux valeurs différentes du critère r^2/h, la proportionnalité entre expérimentation et prévision théorique est visible. Par contre il y a un décalage dans le cas des expériences avec les tiges d'aluminium : le rayon de courbure expérimental est bien plus élevé que r^2/h et ne correspond pas à une relation de proportionnalité, cela est dû au fait qu'il y a un phénomène de plastification pour les expériences avec les tiges d'aluminium, Qureshi 1999 [92].

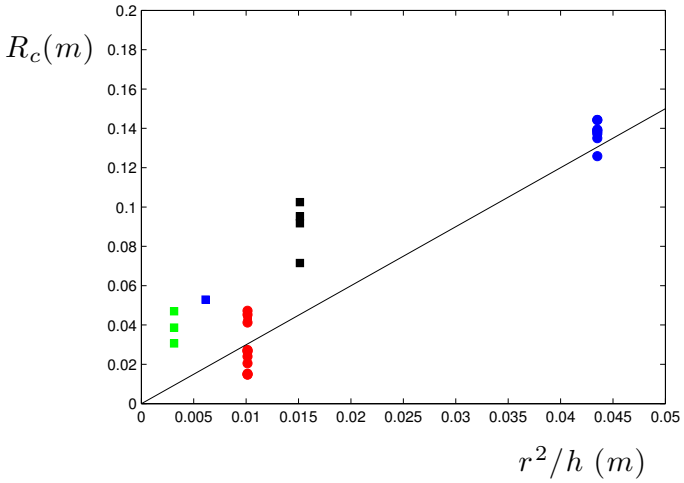


FIGURE 5.8 – Rayon critique longitudinal R_c d'apparition du pli pour une tige en fonction de la longueur de la tige. Légende : (• : plastique, r = 2.25 mm et h = 0.5 mm), (• : plastique, r = 2.95 mm et h = 0.2 mm), (▪ : aluminium, r = 2.75 mm et h = 0.5 mm), (▪ : aluminium, r = 1.25 mm et h = 0.5 mm), (▪ : aluminium, r = 1.75 mm et h = 0.5 mm) et (▪ : aluminium, r = 2.25 mm et h = 0.5 mm).

Flexion

Pour les expériences de flexion, nous allons transformer la masse critique de formation du pli m_c en rayon de courbure longitudinale R_c grâce à l'équation A.15 démontrée dans l'annexe A :

$$\left(\frac{R_c}{L}\right)^4 = \left(\frac{EI}{m_c g L^2}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{EI}{2m_c g L^2}}\right)^4 \tag{5.3}$$

où E est le module de Young de la paille ($E = 1.5$ GPa pour le polypropylène dont sont faites les pailles), g est l'accélération de la pesanteur et I est son moment quadratique : $I \sim hr^3$. Remarquons qu'en prenant le moment quadratique d'un ruban, $I_{ruban} \sim hb^5/r^2$ et en remplaçant b par r, le moment quadratique du ruban devient celui d'une paille. Alors nous pouvons tracer le rayon de courbure critique R_c expérimental pour l'expérience de flexion en fonction du rayon de courbure théorique r^2/h. Notre critère de formation de pli r^2/h fonctionne pour les pailles.

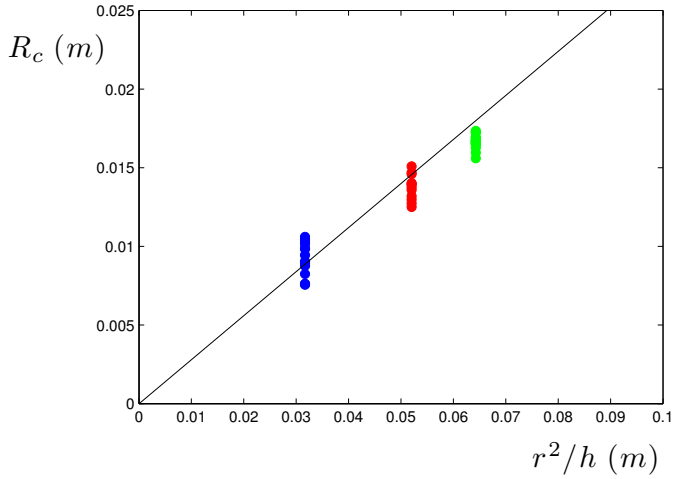


FIGURE 5.9 – Rayon critique longitudinal R_c d'apparition du pli pour une tige.

Soufflerie

Pour l'expérience en soufflerie, nous avons constaté deux régimes. Ces régimes s'expliquent par la variation de longueur de la paille soumise au vent : lorsqu'elle est courte, le régime est décrit par les faibles déflexions et nous retenons le premier membre du terme de gauche de l'équation 6.1 : $\frac{R_c}{L} = \frac{EI}{\rho U^2 C S L^2}$ où $S \sim Lr$ est la surface de paille exposée au vent dans le cas des faibles déflexions, voir la figure 5.10 a). Ainsi la vitesse critique est :

$$U^* \sim \sqrt{\frac{E}{\rho C}}\frac{h}{L} \tag{5.4}$$

Ce qui explique le régime des faibles déformations dans nos expériences, voir la figure 5.7. Pour le cas des fortes déflexions, nous retenons uniquement le second terme du membre de droite de l'équation 6.1 : $\left(\frac{R_c}{L}\right)^2 = \frac{EI}{\rho U^2 C S L^2}$ où cette fois-ci la surface exposée au vent est $S = R_c r$, car en forte déformation, une partie de la paille s'aligne avec l'écoulement d'air et une autre de longueur égale au rayon de courbure est exposée à l'écoulement d'air, voir la figure 5.10 b).

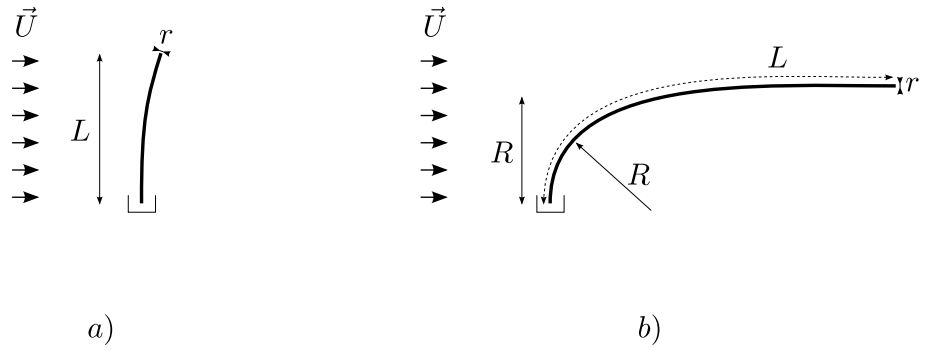


FIGURE 5.10 – Surface S de paille exposée au vent de vitesse $\vec{U}$: $a)$ dans le cas des faibles déformations $S = rL$ et $b)$ dans le cas des fortes déformations $S = rR$.

Alors, dans ce cas, la vitesse critique de formation du pli est :

$$U^* \sim \sqrt{\frac{E}{\rho C}} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \tag{5.5}$$

Cette vitesse est bien indépendante de la longueur de la paille, ce que nous avions observé lors de l'expérience en soufflerie, voir la figure 5.7.

Expérimentalement, nous pouvons déterminer le préfacteur qui relie U^* aux dimensions de la paille dans les deux cas :

$$U^*_{fd} = 1.5\sqrt{\frac{E}{\rho C}}\frac{h}{L} \tag{5.6}$$

et

$$U^*_{Fd} = 0.28\sqrt{\frac{E}{\rho C}} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \tag{5.7}$$

et qui est à peu près le même pour les cas fortes et faibles déflexions (pour lesquels nous utilisons respectivement les notations fd et Fd). Écrire $U^*_{fd} = U^*_{Fd}$ nous permet de trouver la longueur de paille à partir de laquelle il y a transition d'un régime à un autre. Nous trouvons 41 cm pour le cas de notre expérience.

5.4 Conclusion

Nous avons appliqué nos résultats pour les rubans au cas des pailles. La géométrie d'une paille est plus simple que celle d'un ruban car son rayon est proportionnel à sa largeur. En utilisant le critère de formation de pli pour le ruban nous avons pu déterminer un rayon de courbure critique de formation de pli pour les pailles. Ce critère est validé expérimentalement par nos expériences de flambage, de flexion par application d'une force locale et de flexion de pailles en soufflerie. Lors de ces expériences en soufflerie, nous avons mis en évidence les régimes faiblement défléchi et fortement défléchi des pailles. Dans le régime faiblement défléchi, la vitesse critique de verse dépend de la hauteur de la paille. Dans le régime fortement défléchi, la vitesse critique de verse est une constante indépendante de la hauteur de la paille, elle ne dépend plus que de sa hauteur et de son rayon.

Chapitre 6

La verse par flexion des structures élancées fragiles

« Les jean-foutre et les gens probes
Médisent du vent furibond
Qui rebrousse les bois, détrousse les toits, retrousse les robes. »

Georges Brassens, Le vent.

Travail réalisé avec Emmanuel Virot

Sommaire

6.1 Motivations physiologiques . . . 103
6.1.1 Vitesse critique de verse . . . 103
6.1.2 Types de verse . . . 107
6.1.3 Organisation du chapitre . . . 107
6.2 Expériences . . . 108
6.2.1 Résultats . . . 108
6.2.2 Résumé des expériences . . . 112
6.3 Modèle . . . 113
6.3.1 Critère de rupture classique . . . 113
6.3.2 Critère de Griffith . . . 114
6.4 Retour à la physiologie . . . 117
6.4.1 Flambage sous son propre poids . . . 117
6.4.2 Détermination de la vitesse de vent critique . . . 118
6.5 Conclusion . . . 120

6.1 Motivations physiologiques

6.1.1 Vitesse critique de verse

Les tempêtes jouent un rôle important dans la chute des arbres. Par exemple, la tempête Klaus de 2009 a abattu plus de 60% des arbres dans certaines régions françaises (Inventaire

Forestier National [93]). Cela a eu un fort impact sur la sylviculture : la qualité et le prix du bois ont chuté (Birot 2002 [94]). Mais la chute d'arbres peut faire bien pire, elle peut détruire des infrastructures dont les dégâts peuvent se chiffrer en milliards d'euros et causer des accidents humains totalement dramatiques (rapport de la commission des affaires économiques [95]).

FIGURE 6.1 – Verse d'arbres dans les Vosges après les tempêtes Lothar et Martin de décembre 1999.

Si d'un point de vue humain, ces phénomènes sont souvent vécus comme des catastrophes, dans les forêts, ils permettent l'élagage des arbres les plus fragiles. La décomposition de ces arbres et la formation de trouées participent à la régénération spontanée des peuplements. Les arbres morts sur pied, appelés chandelles, accueillent de nombreux insectes (Albouy 2003 [96]) et oiseaux (Bütler 2006 [97]). La verse permet aussi à certains arbres de se "déplacer". En effet, une fois l'arbre au sol, de jeunes pousses apparaissent tout le long de son tronc, c'est la réitération (voir la photo 6.2). On peut alors considérer que l'arbre a avancé d'une longueur proche de sa hauteur. Ceci est fréquent pour les arbres de bord de mer qui poussent sur des terrains meubles (Holbrook 1982 [98]) mais peut aussi être le cas pour des arbres de forêts tropicales (Blanc 2002 [99]).

Les récentes tempêtes (Lothar et Martin en décembre 1999 et Klaus en janvier 2009) ont permis d'obtenir des données sur la sensibilité des arbres vis-à-vis du vent. Sur les deux cartes de la figure 6.3 nous présentons les relevés de vitesse de vent et de dégâts des arbres pour la tempête Klaus. La carte des vents (figure 6.3 en haut à droite), établie par Météo France, indique les "vitesses maximales instantanées". Les vitesses instantanées, aussi appelées rafales, sont des moyennes sur 10 secondes de la vitesse du vent. Durant cette journée du 29 janvier 2009, les vitesses maximales de vent allaient de moins de 80 km/h dans le Massif Central à près de 180 km/h dans l'Aquitaine et le Languedoc-Roussillon. La carte des dégâts (figure 6.3 en haut à gauche), établie par l'Inventaire Forestier National, indique les mesures faites sur le terrain du pourcentage d'arbres versés après la tempête. Les points noirs représentants les zones où il y a eu plus de 60% de dégâts, correspondent aux zones où il y a eu des vitesses de vent élevées. En Aquitaine, où la majorité des arbres sont des pins, les zones où plus de 60% des arbres sont tombés correspondent aux zones où la vitesse du vent a été supérieure à 150 km/h. Dans le Languedoc-Roussillon, il y a la même relation entre dégâts et vitesse de vent, mais les

FIGURE 6.2 – Cet arbre est versé mais est toujours enraciné, alors ses branches latérales se mettent à pousser comme de jeunes arbres. Photo : Lanner 2002, [100].

arbres les plus fréquents sont des chênes. La vitesse semble indépendante de l'essence d'arbre. Le graphique de la figure 6.3 indique de façon quantitative le lien entre vitesse instantanée maximale de vent et dégâts. Il montre qu'il y a une vitesse critique, d'environ 150 km/h, au-dessus de laquelle presque tous les arbres tombent. Le même résultat est obtenu par Colin 2009 [101] pour les tempêtes de 1999. Cette vitesse critique est apparemment indépendante de la taille de l'arbre, de son âge et de son essence. Le travail présenté dans ce chapitre a pour objectif de comprendre le caractère universel de la vitesse critique de verse des arbres.

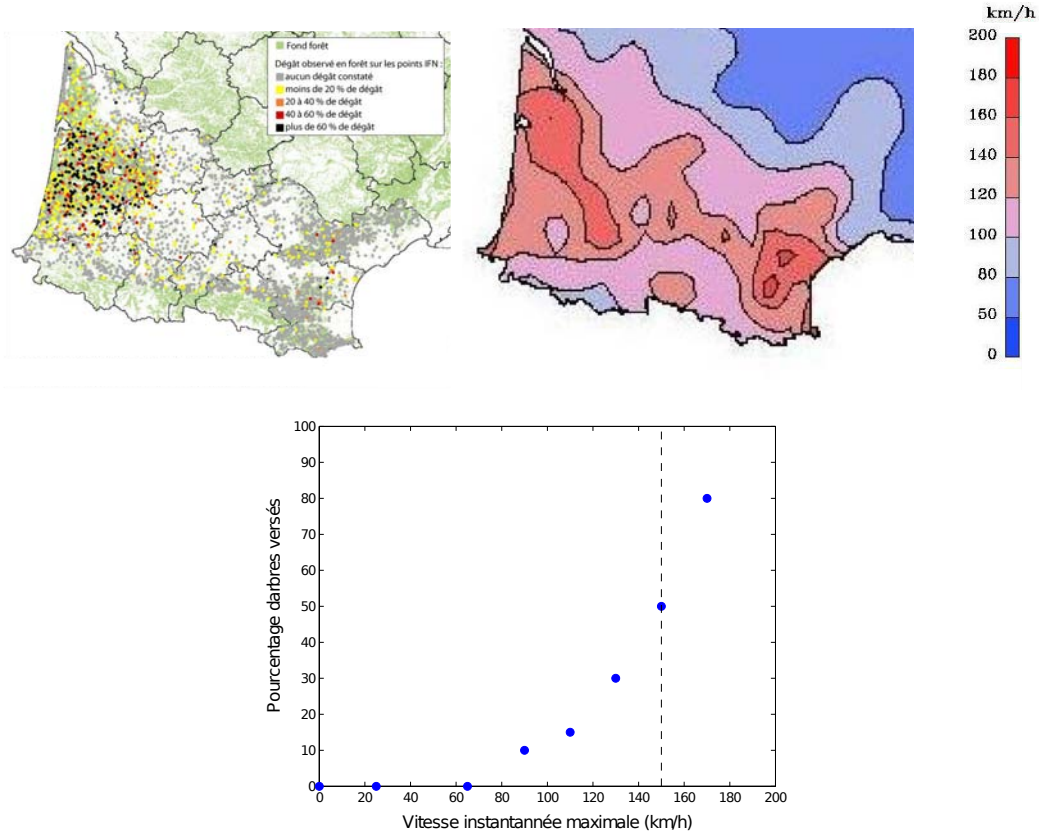


FIGURE 6.3 – Corrélation entre vitesse du vent et dégâts à partir des mesures réalisées lors de la tempête Klaus de janvier 2009. En haut à gauche, les relevés de l'Inventaire Forestier National indiquent le pourcentage de dégâts. En haut à droite la carte des vents Météo France indique la vitesse instantanée des vents pendant la tempête. À partir de ces deux cartes, nous reportons sur le graphique le pourcentage d'arbres versés en fonction de la vitesse du vent. La vitesse de 150 km/h est la vitesse critique à partir de laquelle plus de 50% des arbres sont versés.

6.1.2 Types de verse

Avant de présenter nos expériences, notons qu'il existe deux principaux types de verse : la verse par rupture du tronc et la verse par rupture des racines. Dans le cas des arbres, le terme de chablis décrit la rupture des racines et celui de volis décrit la rupture du tronc. Ces deux types de verse sont illustrés sur la figure 6.4.

$a)$ $b)$

FIGURE 6.4 – Deux types de verse : $a)$ rupture du tronc ou $b)$ rupture des racines.

La verse par chablis a pour origine une faiblesse des racines : sol mouillé, champignons ou racines abimées par les tracteurs sylvicoles et peut être déclenchée par le vent. Nous nous limitons ici à l'étude du volis.

6.1.3 Organisation du chapitre

Pour comprendre la vitesse critique de verse des structures élancées fragiles, nous cherchons un critère qui permet de prédire la rupture de la tige. Pour cela nous allons exercer la force la plus simple possible sur la tige : une force localisée à l'extrémité. La tige étant encastrée à son autre extrémité. Cela représente le cas d'un arbre dont le couple de rappel des racines est infini, et nous sommes bien dans le cas de l'étude du volis. Ensuite nous verrons le cas où la force est exercée par un écoulement d'air de vitesse U, ce qui nous mènera à prédire la vitesse U^* de tiges encastrées. Et nous comparerons ce résultat au cas des arbres.

6.2 Expériences

Le principe de l'expérience est de faire casser une tige d'un matériau fragile qui est encastrée à une extrémité et libre à l'autre extrémité. La force est locale et exercée à l'extrémité libre de la tige. Nous avons fait nos expériences avec des tiges provenant de trois matériaux différents : du graphite (mines de critérium de dureté HB), du verre (PYREX®) et du bois dont l'essence est le hêtre. Pour chaque matériau, nous disposions de tiges de diamètres différents, variant de presque un ordre de grandeur chacun. Les sections de ces tiges sont représentées sur les trois photos de la figure 6.5. Les tiges de graphite ont des rayons allant de 0.2 à 1.5 mm et leur longueur maximale est 60 mm. Les tiges de verre ont des rayons variant de 2 à 10 mm avec une longueur maximale de 1.5 m. Et les tiges de hêtre ont des rayons allant de 2 à 15 mm et une longueur maximale de 1 m. Les modules de Young et densités de ces trois matériaux sont notés dans le tableau 6.1.

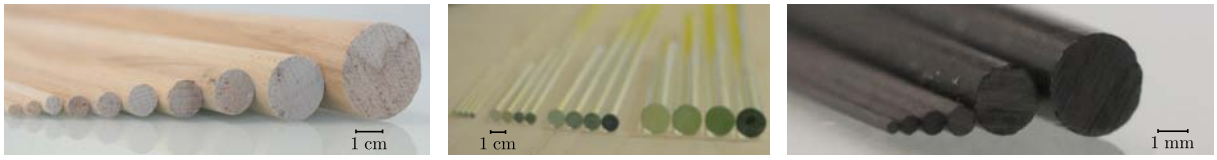


FIGURE 6.5 – Tiges de différents rayons r utilisées pour les expériences de rupture. De haut en bas : graphite (r : de 0.2 à 1.5 mm et longueur maximale : 60 mm), verre (r : de 2 à 10 mm et longueur maximale : 1.5 m) et hêtre (r : de 2 à 15 mm et longueur maximale : 1 m).

	E (GPa)	ρ (10^3 kg/m^3)
graphite (mines HB)	67	1.8
bois (hêtre)	12	0.7
verre (PYREX)	64	2.2

TABLE 6.1 – Module de Young et masse volumique du graphite (mines HB), du bois (hêtre) et du verre (PYREX).

Sur la figure 6.6 se trouve un exemple d'expérience pour une tige de hêtre de longueur $L = 0.95$ m et de rayon $r = 10$ mm. La série d'images se déroule de gauche à droite et de haut en bas. La partie gauche de la tige est serrée entre les pinces d'un étau et à l'extrémité libre nous plaçons un bidon de 20 L que nous remplissons d'eau progressivement pour faire varier la force à l'extrémité de la tige. Sur la première photo, la masse à l'extrémité de la tige est nulle et la tige est horizontale. Sur les quatre photos suivantes, la masse vaut respectivement 3, 5, 7 et 9 kg. Plus la masse augmente, plus la tige se courbe. Et sur la dernière photo, nous avons atteint la masse critique pour laquelle la tige casse : $m_c = 10.5$ kg.

6.2.1 Résultats

Nous présentons ici les résultats de nos expériences pour les tiges de verre, de graphite et de bois. Comme dans le cas du ruban, le rayon de courbure longitudinale à la base de la tige au moment où elle casse R^* est le paramètre adéquat pour décrire l'objet au moment de la rupture. La mesure de R^* est faite en utilisant la relation A.15 présentée dans le chapitre 1 qui

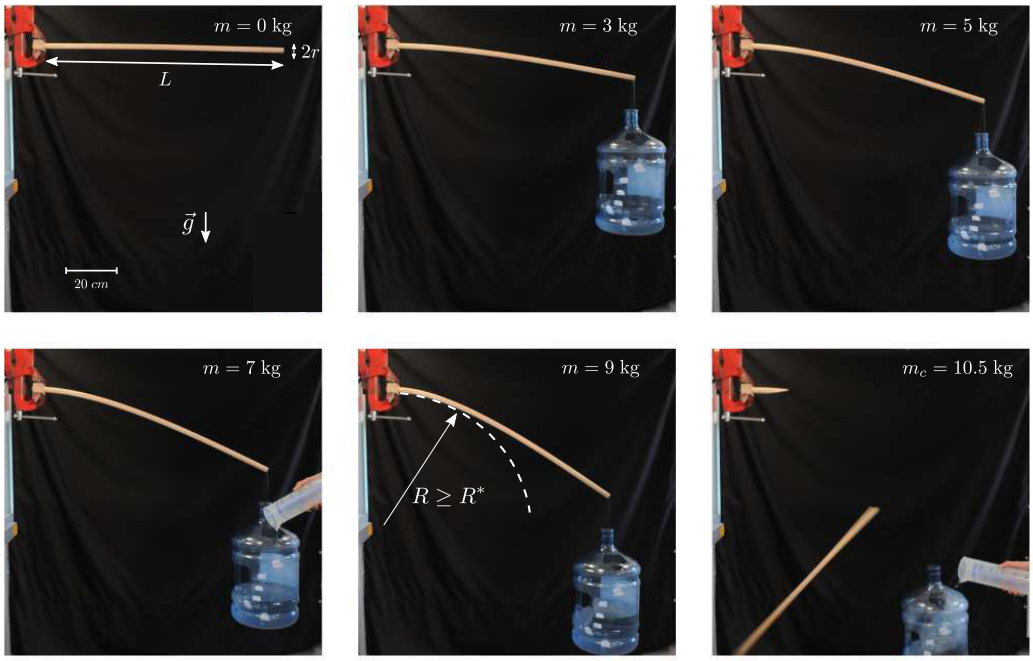


FIGURE 6.6 – Expérience de flexion d'une tige de hêtre de rayon $r = 10$ mm et de longueur $L = 0.95$ m. La masse suspendue à l'extrémité libre augmente de gauche à droite et de haut en bas. La tige casse lorsque la masse vaut $m_c = 10.5$ kg.

relie R^* à m_c :

$$\left(\frac{R^*}{L}\right)^4 = \left(\frac{EI}{m_c g L^2}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{EI}{2m_c g L^2}}\right)^4 \tag{6.1}$$

où E est le module de Young de la tige, I son moment quadratique : $I = \frac{\pi r^4}{4}$ et g est l'accélération de la pesanteur. Durant les expériences nous mesurons avec précision la masse m_c (à 1% près) et avec 6.1 nous déduisons R^*.

Verre

Sur la figure 6.7, nous présentons l'évolution du rayon de courbure critique R^* auquel la tige casse en fonction de sa longueur L pour des tiges de rayon 2, 4, 6 et 10 mm.

Vu le danger lié aux éclats de verre lorsque la tige casse, nous avons construit un habitacle pour isoler l'expérience. Nous remplissions les bidons accrochés au bout de la tige de verre à l'aide d'un tuyau. Comme les déflexions des tiges de verre étaient assez importantes (jusqu'à 0.5 m pour les tiges les plus fines), il arrivait que le tuyau sorte du bidon et que l'on verse de l'eau à côté. D'où l'imprécision sur m_c et par conséquent sur R^*. Néanmoins, il est clair que le rayon critique de fracture R^* est indépendant de la longueur de la tige pour une tige de rayon r donné. Pour la tige de rayon $r = 2$ mm, le rayon R^* varie de 1.2 à 1.6 m, il a une valeur moyenne de 1.4 m. Pour la tige de rayon $r = 10$ mm, le rayon R^* varie de 7.2 à 12.9 m et a pour valeur moyenne 9.9 m. Sur la figure 6.7 se trouvent en traits pointillés les valeurs moyennes de R^* pour chaque rayon r.

Nous présentons les valeurs moyennées de R^* en fonction de r sur la figure 6.8. Le rayon R^* varie linéairement avec r. Il y a un facteur 1 000 entre R^* et r.

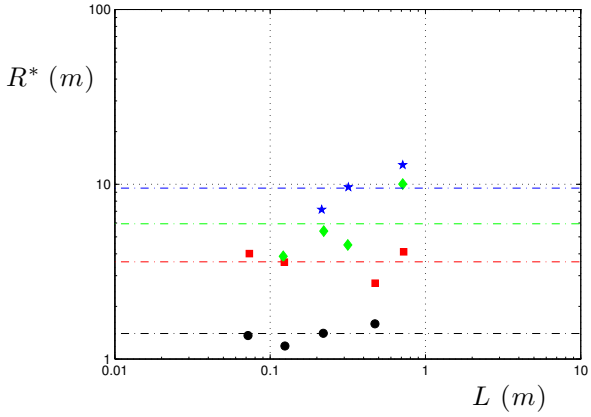


FIGURE 6.7 – Évolution de R^* en fonction de la longueur L pour une tige de verre. Pour différents rayons de tige : • r = 2 mm, ▪ r = 4 mm, ◆ r = 6 mm et ★ r = 10 mm.

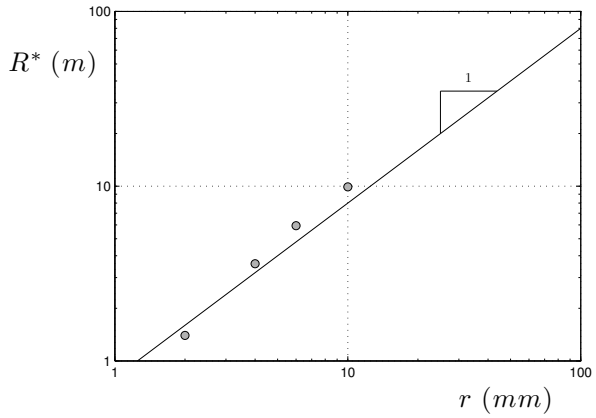


FIGURE 6.8 – Évolution de R^* avec le rayon de la tige r, pour des tiges de verre.

Graphite

Les mêmes expériences sont répétées avec les tiges de graphite. Sur la figure 6.9 se trouve l'évolution de R^* avec r pour des tiges de longueur L = 52 mm. Pour le rayon r = 0.38 mm, le rayon R^* vaut 44 mm et pour r = 3 mm, R^* = 0.97 m. Pour le graphite aussi, R^* est croissant avec r, mais cette fois-ci R^* varie en fonction de $r^{3/2}$.

Sur la figure 6.10 sont rassemblés tous les résultats d'expériences avec les tiges de graphite : à gauche l'évolution de R^* avec L et à droite l'évolution de R^* avec r. R^* est indépendant de L et varie avec $r^{3/2}$.

Hêtre

Avec le bois se pose le problème de la répétabilité des résultats. Pour deux échantillons identiques et dans les mêmes conditions de mesure, les écarts de masses critiques mesurées peuvent dépasser $\pm 100\%$.

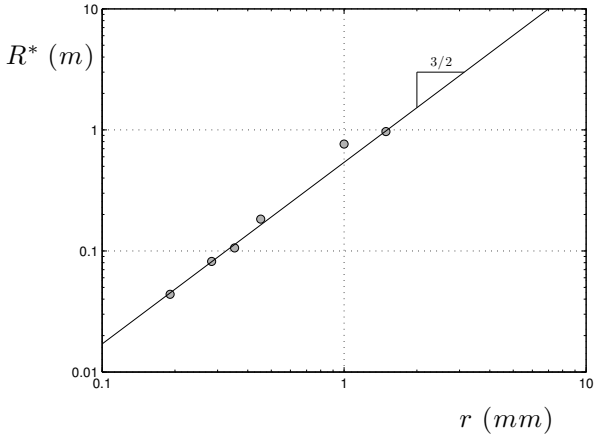


FIGURE 6.9 – Évolution de R^* avec le rayon de la tige de graphite r pour des tiges de longueur L = 52 mm.

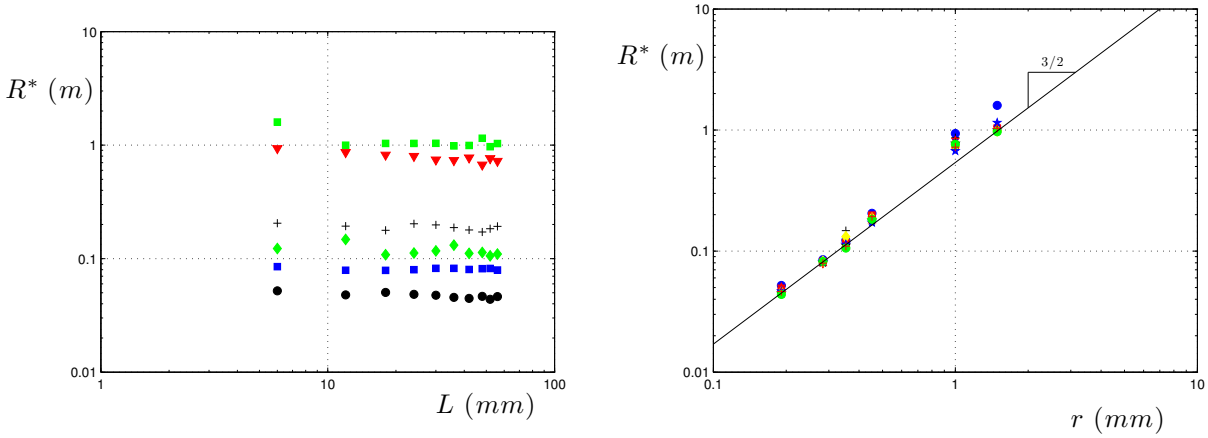


FIGURE 6.10 – Évolution de R^* pour les tiges de graphite. À gauche, $R^*(L)$ pour différents rayons (● : r = 0.19 mm, ■ : r = 0.28 mm, ◆ : r = 0.35 mm,+ : r = 0.45 mm, ▼ : r = 1 mm, ■ : r = 1.5 mm,). À droite, $R^*(r)$ pour des tiges de différentes longueurs (● : L = 6 mm, + : L = 12 mm, ★ : L = 18 mm, × : L = 24 mm, ■ : L = 30 mm, ◆ : L = 36 mm, ★ : L = 42 mm, ★ : L = 48 mm, ● : L = 52 mm, + : L = 56 mm).

Cela peut s'expliquer par :
- La variabilité des conditions dans lesquelles les arbres ont poussé,
- La position des cernes formés entre le printemps et l'été chaque année,
- La présence de noeuds (départs de branches),
- La direction des fibres du bois,
- Le taux d'humidité du bois (de 12% à 30%, selon que le bois est sec ou saturé). Il a une influence sur les grandeurs intrinsèques du bois.

Pour cette raison, nous avons fait dix expériences pour chaque point de mesure qui est présenté sur la figure 6.11 : à gauche se trouve la variation de R^* en fonction de L pour des tiges de rayon r = 3 mm et à droite se trouve la variation de R^* avec r pour des tiges de longueur L = 0.95 m. Ces mesures suggèrent que le rayon de courbure critique R^* varie comme $r^{3/2}$ et est indépendant de la longueur de la tige.

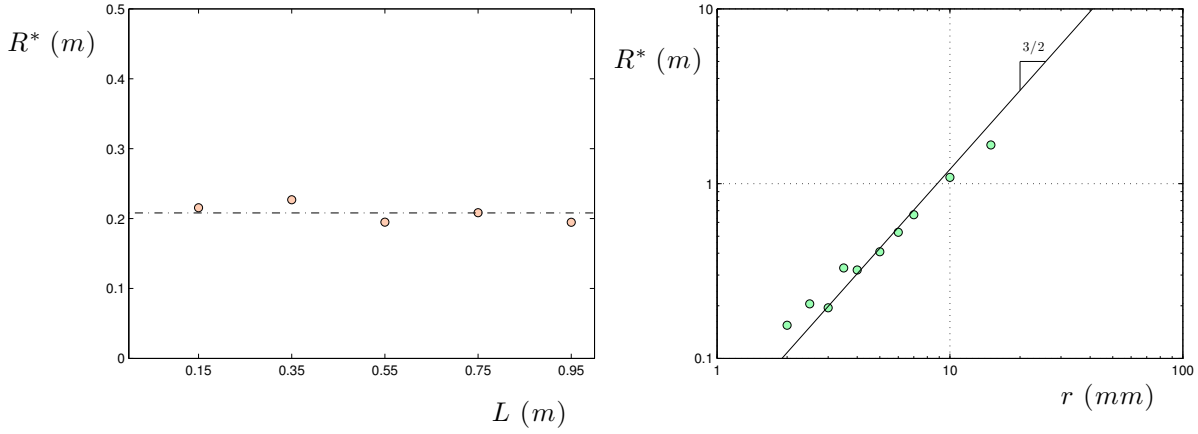


FIGURE 6.11 – Évolution de R^* pour les tiges de hêtre. À gauche, $R^*(L)$ avec r = 3 mm. À droite, $R^*(r)$ avec L = 0.95 m.

6.2.2 Résumé des expériences

Nous avons fait des expériences de flexion de tiges fragiles jusqu'à la rupture. Lorsqu'une tige est défléchie, son rayon de courbure à l'extrémité encastrée diminue jusqu'à atteindre une valeur limite R^* pour laquelle la tige casse. Nous avons étudié l'évolution du rayon R^* en fonction de la longueur L et du rayon r des tiges, pour trois matériaux : du bois, du verre et du graphite. Pour le graphite, la répétabilité des expériences a été excellente. Par contre pour le verre et le bois les incertitudes de mesures ont été plus importantes. La raison est la faible précision des mesures dans le cas du verre et l'inhomogénéité dans le cas du bois. Deux comportements sont apparus. Dans le cas du verre, le rayon R^* est indépendant de L, et varie linéairement avec r. Dans le cas du graphite et du bois, R^* est aussi indépendant de L mais varie cette fois avec $r^{3/2}$. Dans le paragraphe qui suit nous proposons un modèle pour expliquer ces résultats.

6.3 Modèle

Dans cette partie nous présentons un modèle qui va permettre de comprendre le critère pour lequel les tiges cassent. Ce modèle est basé sur la notion de contrainte critique σ^* d'un matériau fragile.

6.3.1 Critère de rupture classique

Pour les matériaux fragiles, la relation de Hooke est valide jusqu'à une déformation critique ϵ_c à partir de laquelle la relation n'est plus valable et le matériau se casse. Pour la plupart des matériaux, l'élongation maximale est de l'ordre de 1%, Gordon 1976 [102]. Alors, d'après la loi de Hooke la contrainte critique est de l'ordre de 1% fois le module de Young du matériau. Lorsqu'une tige est courbée, c'est le premier endroit où la contrainte atteindra σ_c qui cassera. Pour prédire la rupture il faut calculer la contrainte à cet endroit.

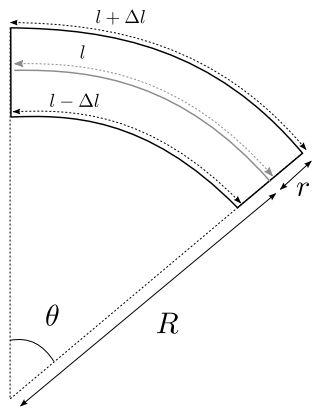


FIGURE 6.12 – Allongement relatif d'une section de tige de rayon r et de rayon de courbure R.

Dans nos expériences de flexion, la tige est encastrée à une extrémité et libre à l'autre extrémité. Sa courbure est maximum à l'encastrement et nulle à l'extrémité libre. C'est donc à la base de la tige que les contraintes sont les plus grandes et c'est pourquoi dans nos expériences les tiges cassent toujours à la base. À l'aide de la figure 6.12, nous déterminons la relation entre le rayon de courbure longitudinale R^* et l'allongement relatif : $\epsilon = \frac{l+\Delta l-l}{l} = \frac{(R+r)\theta - R\theta}{R\theta} = \frac{r}{R}$. La loi de Hooke relie l'allongement critique ϵ^* à la contrainte critique σ^* : $\epsilon^* = \frac{\sigma^*}{E}$. Avec ces deux lois, il est possible de déterminer le rayon de courbure critique à partir duquel la tige casse :

$$R^* = \frac{Er}{\sigma^*} \tag{6.2}$$

Le rayon de courbure critique auquel la tige casse varie linéairement avec le rayon de la tige avec un coefficient de proportionnalité qui vaut $\frac{E}{\sigma^*}$. Pour le PYREX, $E = 64$ GPa et $\sigma^* = 69$ MPa. Si bien que $\frac{E}{\sigma^*} = 1\,000$. C'est exactement le facteur que nous avions observé expérimentalement.

Ce modèle s'applique correctement aux résultats du verre pour lequel nous avons vu que le rayon critique de courbure varie linéairement avec le rayon de la tige et est indépendant de la longueur de la tige. Par contre il n'explique pas la dépendance de R^* avec r pour le bois et le graphite. Pour comprendre les résultats expérimentaux avec le bois et le graphite, il faut s'intéresser plus en détail à la contrainte critique de rupture.

6.3.2 Critère de Griffith

Pour le cas du verre, nous avons considéré que la contrainte critique de rupture est une constante. Mais en général, ce n'est pas le cas. C'est le résultat établi par Griffith en 1921 [103]. Cela est dû au fait que les matériaux possèdent des défauts microscopiques. Dans le cas du bois, ce pourrait être la présence des noeuds ou des cernes qui serait à l'origine de ces défauts.

Nous allons montrer comment calculer la contrainte critique d'un matériau comportant des fissures en déterminant un critère pour la croissance de ces fissures.

Concentration de contraintes

Tout d'abord, il faut noter l'influence des fissures sur la contrainte près de leur voisinage. Pour cela nous représentons sur la figure 6.13 l'influence de la variation de géométrie d'un corps sur la concentration des contraintes. De gauche à droite sont schématisés trois corps solides soumis à leurs extrémités à la contrainte σ_0. Le premier a une section constante, le deuxième a une section non uniforme avec un pincement en son milieu et le troisième comporte une fissure. Les lignes sont les trajectoires des contraintes. Elles représentent les trajectoires le long desquelles se transmettent les contraintes dans le solide : les forces de tensions qu'exercent les atomes les uns sur les autres au sein du solide sont alignées avec ces lignes. Plus elles sont resserrées, plus la contrainte est élevée. Ces schémas sont comparables à l'écoulement d'un liquide dans un canal. Lorsque le canal se resserre, la vitesse de l'écoulement augmente. Ici, lorsque la section diminue ou qu'il y a présence d'une fissure, la contrainte augmente.

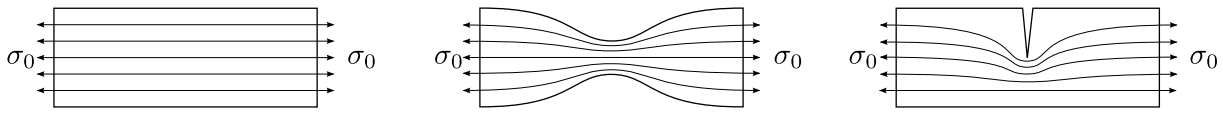


FIGURE 6.13 – Variations de géométrie et concentration de contraintes.

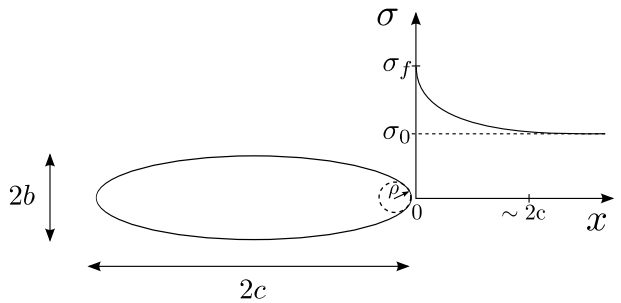


FIGURE 6.14 – Évolution de la contrainte liée à la présence d'une fissure elliptique de grand axe de longueur 2c et de petit axe de longueur 2b. Pour une contrainte imposée σ_0 dans le volume entourant la fissure, la contrainte en bord de fissure est $\sigma_f > \sigma_0$.

Nous considérons une fissure elliptique comme celle qui est représentée sur la figure 6.14. D'après les résultats d'Inglis 1913 [104] la contrainte au bord de la fissure, $\sigma_f = \sigma(x = 0)$, est :

$$\sigma_f = \left(1 + 2\frac{c}{b}\right)\sigma_0 \tag{6.3}$$

où σ_0 est la contrainte imposée dans le volume entourant la fissure, 2c et 2b sont respectivement les longueurs du grand axe et du petit axe de l'ellipse. x est la distance à la fissure dans l'axe du grand axe. La contrainte diminue en s'éloignant de la fissure, à x croissant, pour revenir à σ_0 sur une longueur de l'ordre de 2c. ρ est le rayon de courbure à l'extrémité du grand axe, si bien que $b^2 = c\rho$. Les fissures dans nos matériaux ont des formes très aplaties, si bien que $c \gg \rho$ et ρ est de l'ordre de la distance interatomique ($\rho \sim a \sim 10^{-10}$ m). La contrainte en bord de fissure peut s'écrire :

$$\sigma_f = 2\sqrt{\frac{c}{a}}\sigma_0 \tag{6.4}$$

La contrainte près des fissures est plus élevée que la contrainte imposée dans tout le solide et est d'autant plus importante que la fissure est grande.

Énergie de surface d'un solide

Tout comme les liquides, les solides possèdent une tension de surface, qui est l'énergie à fournir par unité de surface pour séparer les molécules du solide. Pour séparer en deux une surface S d'un solide de tension de surface γ_s, il faut fournir l'énergie :

$$W = 2\gamma_s S \tag{6.5}$$

L'ouverture de la fissure se fait en prélevant toute l'énergie élastique du volume entourant la fissure. En considérant que ce volume est limité à la couche d'atomes d'épaisseur a entourant la fissure, l'énergie disponible est $U = \frac{1}{2}\sigma_f\epsilon_f Sa$. Avec la loi de Hooke, $\epsilon_f = \sigma_f/E$, et U devient :

$$U = \frac{1}{2}\frac{\sigma_f^2}{E}Sa \tag{6.6}$$

Lorsque la contrainte au sein du matériau augmente, l'énergie élastique augmente avec le carré de la contrainte, et le matériau se fracture lorsque l'énergie élastique atteint l'énergie de surface nécessaire à l'ouverture de la fissure, pour une contrainte critique notée σ^*. En écrivant $U(\sigma_f) = W$ et en remplaçant σ_f par σ^* avec la relation 6.4 :

$$\sigma^* = 2\sqrt{\frac{\gamma E}{c}} \tag{6.7}$$

La contrainte critique σ^* est fonction du facteur $K = \sqrt{\gamma E}$ appelé ténacité du matériau, dont l'unité est le Pa$\sqrt{\text{m}}$ et de la taille c des fissures dans le matériau. Cette équation est appelée le critère de Griffith [103].

Nous cherchons maintenant à relier la taille caractéristique des fissures c aux dimensions de la tige. L'endroit où se trouvent les contraintes maximales sur la tige est sa surface et la direction selon laquelle les fissures sont les plus fragiles est perpendiculaire à la direction des contraintes, c'est-à-dire transverse. Donc la taille des fissures devrait varier avec le périmètre de la tige, c'est-à-dire avec son rayon. Nous écrivons donc que $a \sim r$. Et la contrainte critique est alors $\sigma^* \sim \frac{K}{\sqrt{r}}$. Nous remplaçons maintenant σ^* dans l'équation 6.2 :

$$R^* \sim \frac{E}{K}r^{3/2} \tag{6.8}$$

Le rayon de courbure critique est cette fois-ci proportionnel au rapport du module de Young E et de la ténacité K et varie avec $r^{3/2}$, ce qui est en accord avec nos expériences sur le bois et le graphite.

Cas du hêtre et du graphite

L'équation qui relie le rayon de courbure critique au rayon de la tige 6.8 va nous permettre de déterminer expérimentalement la relation entre le rayon de courbure critique et les caractéristiques géométriques et intrinsèques de nos tiges. Pour cela, nous réécrivons l'équation :

$$R^* = \frac{\delta E}{K} r^{3/2} \tag{6.9}$$

où δ est un coefficient numérique qui est dû au fait que la taille des fissures n'est qu'une fraction du rayon des tiges ($c = (2\delta)^2 r$).

Dans le cas du hêtre, le facteur $\frac{\delta E}{K}$ vaut 1000 et dans le cas du graphite il vaut 20.10^3. Avec les valeurs de la ténacité du hêtre ($K = 1.0$ MPa$\sqrt{\text{m}}$, d'après Pluvinage [105]) et du graphite (d'après Bompard [106], la ténacité du grès, matériau proche du graphite est $K = 0.5$ MPa$\sqrt{\text{m}}$), nous déterminons δ pour le hêtre et le graphite : $\delta_{\text{hêtre}} = 0.08$ et $\delta_{\text{graphite}} = 0.18$. Nous écrivons la formule exacte 6.9 sous la forme :

$$\frac{R^*}{L} = \frac{r^{3/2}}{\lambda^{1/2} L} \tag{6.10}$$

avec $\lambda = \left(\frac{K}{\delta E}\right)^2$. Les résultats de nos expériences sur le bois et sur le graphite peuvent être alors rassemblés sur le graphique 6.15, avec en ordonnées $\frac{R^*}{L}$ et en abscisses $\frac{r^{3/2}}{\lambda^{1/2} L}$.

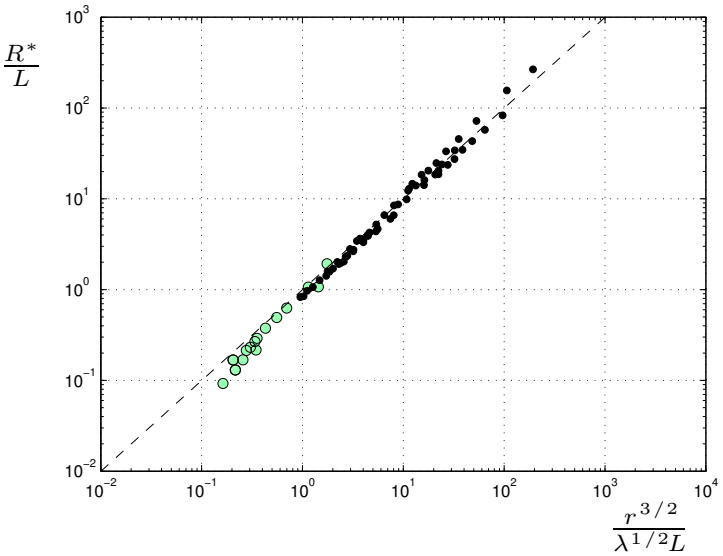


FIGURE 6.15 – Rayon critique de rupture adimensionné par la longueur de la tige (R^*/L) en fonction du paramètre $\frac{r^{3/2}}{\lambda^{1/2} L}$. • : tiges de bois et • : tiges de graphite.

Toutes les données se rejoignent sur une même courbe, de pente 1. Le modèle permet d'expliquer les résultats pour nos expériences avec les tiges de hêtre et de graphite. Est-il possible d'étendre ce modèle au cas des arbres ? A priori oui, car le rayon des troncs d'arbres varie de 1 cm à 5 m, et en supposant que la taille des fissures varie toujours proportionnellement avec le rayon des tiges, le critère de Griffith est toujours applicable.

Il y aurait un problème dans le cas où le rayon diminue. La taille des fissures diminuant avec le rayon, il y a un rayon critique pour lequel la taille des fissures c devient du même ordre de grandeur que la section des cellules ligneuses de l'arbre qui est de l'ordre de 10 μm. Avec l'expression $c = (2\delta)^2 r$ et en prenant $c \sim 10.10^{-6}$ m, ce rayon critique de tige vaut 0.4 mm. Il est bien plus petit que le plus petit rayon de tige de hêtre que nous avons utilisé (1.5 mm).

6.4 Retour à la physiologie

6.4.1 Flambage sous son propre poids

Dans nos expériences, nous étions libres de choisir indépendamment le rayon et la longueur de nos tiges. Mais pour le cas des arbres, il existe une relation entre ces deux grandeurs. Sur la figure 6.16 se trouvent trois arbres de hauteur et rayon de tronc différents. Le rayon des arbres est clairement croissant avec leur hauteur.

FIGURE 6.16 – Relation entre rayon r et hauteur L des arbres pour trois arbres : hêtre, chêne et séquoia pour lesquels (r,L) valent respectivement (0.02 m, 3.5 m), (0.6 m, 20 m) et (1 m, 38 m).

Sur la figure 6.17 se trouvent les mesures expérimentales faites sur 576 espèces d'arbres par MacMahon (1983) [39] : le diamètre des arbres varie comme $L^{3/2}$. Nous avons rajouté nos relevés sur le hêtre, le chêne et le séquoia, ce sont les points rouges sur la figure.

Ce lien entre rayon et hauteur pourrait avoir pour origine le fait que l'arbre est tel que la force de gravité due à son poids, $\rho g L r^2$, soit plus faible que la force sous laquelle il flamberait, Er^4/L^2, ce qui implique :

$$r \sim \left(\frac{\rho g}{E}\right)^{1/2} L^{3/2} \tag{6.11}$$

Cela correspond aux observations expérimentales, mais il y a un écart par rapport à la loi 6.11, en réalité $r = \beta L^{3/2}$ avec $\beta = 5.10^{-3} \gg \sqrt{\frac{\rho g}{E}} = 7.10^{-4}$. Cet écart est interprété comme une marge de sécurité.

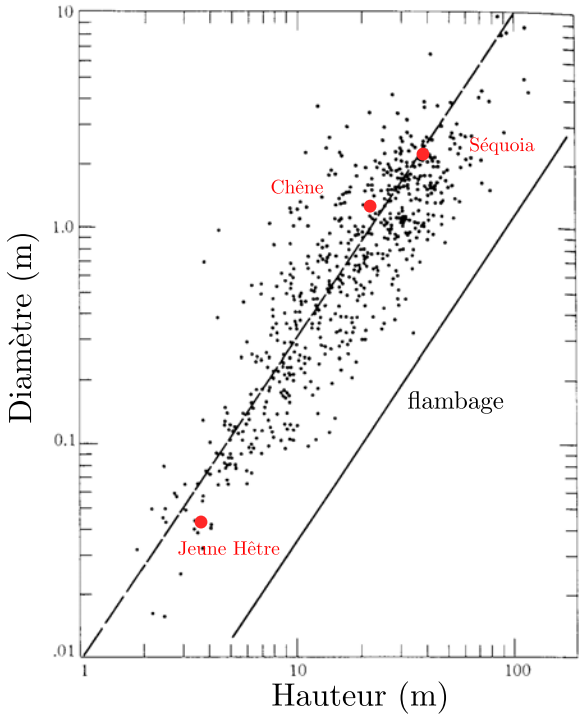


FIGURE 6.17 – Relation diamètre hauteur pour 576 espèces d'arbres. MacMahon 1983 [39].

6.4.2 Détermination de la vitesse de vent critique

Nous allons pouvoir maintenant calculer la vitesse de vent critique d'un arbre. Nous calculerons la vitesse de vent critique d'une tige de rayon r et de longueur L données, et ensuite nous utiliserons la relation 6.11 pour être dans le cas des arbres.

Dans l'annexe (B) nous avons montré que la pression hydrostatique exercée par l'écoulement d'air autour d'une tige peut s'écrire $F = \frac{1}{2}\rho_{air}C_xSv^2$ où ρ_{air} est la masse volumique de l'air, C_x est le coefficient de trainée d'une tige dont la valeur peut être ramenée à 1, S est la surface sur laquelle s'exerce l'écoulement d'air et v est la vitesse du vent. Et cette force est dirigée perpendiculairement à la tige. Dans le cas des arbres, il est possible de considérer uniquement le cas des faibles déformations. Alors la force exercée par le vent sur une tige ou un tronc d'arbre est perpendiculaire à l'axe de la tige au repos, ce qui correspond aux expériences que nous avions faites en chargeant les tiges avec des masses.

Finalement, le couple exercé par le vent sur le tronc est :

$$\Gamma_{vent} = \frac{1}{2}C_x\rho_{air}Sv^2L \tag{6.12}$$

où nous avons pris comme bras de levier L la hauteur de l'arbre. La surface S est la surface d'arbre exposée au vent, nous prenons la surface du tronc : $S = 2rL$.

Le couple de flexion de la tige est :

$$\Gamma_{tige} = \frac{EI}{R} \tag{6.13}$$

En remplaçant R par sa valeur maximale $R^* = \frac{\delta E}{K}r^{3/2}$ et en écrivant l'équilibre des couples

Γ_{vent} et Γ_{tige}, nous pouvons trouver la vitesse critique de vent pour l'arbre :

$$v^* = \sqrt{\frac{KI}{\delta \rho_{air} C_x S r^{3/2} L}} \tag{6.14}$$

Et sachant que $I = \frac{\pi r^4}{4}$ et $S = 2rL$, la vitesse critique v^* peut se réécrire :

$$v^* = \sqrt{\frac{\pi K}{4\delta \rho_{air} C_x} \frac{r^{3/2}}{L^2}} \tag{6.15}$$

Cette vitesse dépend du rayon et de la longueur de la tige, mais dans le cas d'un arbre, nous avons vu que le critère de MacMahon donne une relation entre le rayon de l'arbre et sa longueur : $r = \beta L^{3/2}$, si bien que la vitesse critique de verse v^* peut s'écrire en fonction de la hauteur L de l'arbre uniquement :

$$v^* = \sqrt{\frac{\pi K \beta^{3/2}}{4\delta \rho_{air} C_x}} L^{1/8} \tag{6.16}$$

La vitesse critique de verse ne dépend que de la hauteur de l'arbre, elle varie très faiblement avec cette hauteur : en puissance $1/8$. C'est assez inattendu : souvent, plus une structure est grande, plus elle est sensible à la flexion, mais ici, grâce au critère de MacMahon, le rayon des arbres varie de telle façon que c'est le contraire qui arrive. Les arbres les plus grands sont les moins sensibles à la verse par rupture du tronc.

Sur la figure 6.18 nous traçons l'évolution de cette vitesse avec la hauteur de l'arbre, en prenant la ténacité du hêtre $K = 1.0$ Pa$\sqrt{\text{m}}$, $\beta = 5.10^{-3}$ m$^{-1/2}$, $\delta_{hetre} = 0.08$ que nous avons déterminé plus haut, $\rho_{air} = 1.2$ kg/m^{-3} et $C_x = 1$.

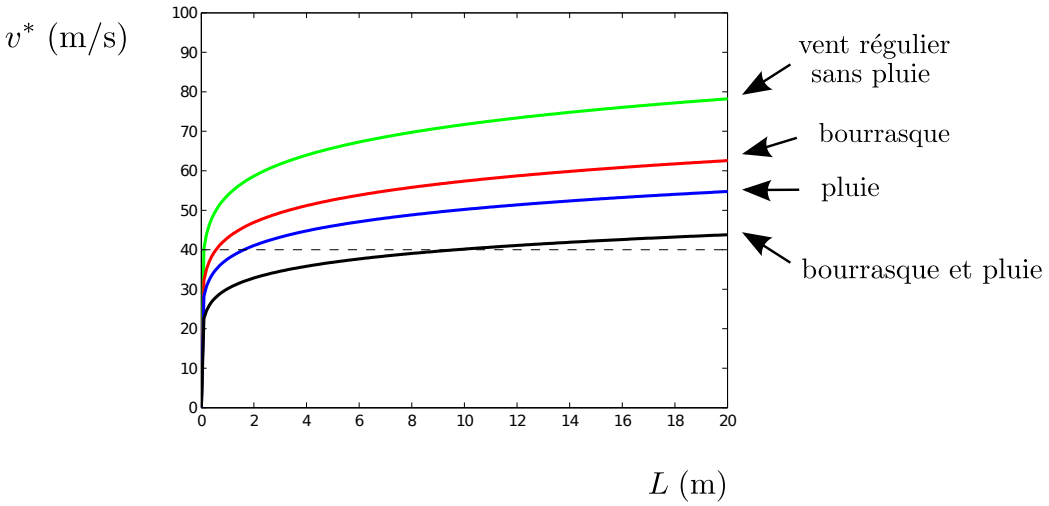


FIGURE 6.18 – Vitesse critique de rupture d'un arbre en fonction de sa hauteur. En vert : dans le cas d'un vent régulier sans pluie, en rouge : dans le cas d'une bourrasque, en bleu : dans le cas de la pluie et en noir : dans le cas où il y a une bourrasque et de la pluie.

Il apparaît que les vitesses critiques de vent pour les arbres de hauteurs comprises entre 2 et 20 m varient de 50 à 80 m/s. Ces vitesses sont élevées par rapport aux données des tempêtes qui indiquent une vitesse qui est de l'ordre de 40 m/s. Nous pouvons citer au moins trois pistes qui permettraient de se rapprocher de cette vitesse critique.

L'une serait de prendre en compte l'effet bourrasque. Il serait raisonnable de prendre cet effet en compte car les vitesses de 40 m/s qui font chuter les arbres sont des vitesses de rafale de vent. Nous avons abordé le problème de la bourrasque au paragraphe (4.5.2) du chapitre sur les structures élancées courbées (4). Avec les rubans, la force nécessaire pour atteindre le pli en chargement dynamique est plus faible que la force en chargement statique, d'un facteur 0.66. Si ce facteur est introduit dans la force hydrostatique du vent, alors la vitesse v^* est diminuée d'un facteur $\sqrt{0.66}$ = 0.8 Donc la vitesse en cas de bourrasque v_{dyn} est plus faible que la vitesse que nous venons de déterminer : v^*_{dyn} = $0.8v^*$. Ce n'est pas grand chose et ça ne nous amène pas à 40 m/s.

La seconde idée pour recalculer cette vitesse de verse est la surface de l'arbre sur laquelle le vent appuie. Nous avons écrit S = rL, mais les arbres ne sont pas de simples tiges, et il serait tout aussi possible de choisir S = LL en supposant que la silhouette de l'arbre est ronde et que l'arbre est aussi large que haut (un chêne par exemple). Alors en recalculant v^* avec cette nouvelle surface, il vient :

$$v^* = \sqrt{\frac{\pi K \beta^{5/2}}{2\delta \rho_{air} C_x}} L^{3/8} \tag{6.17}$$

Cette fois-ci la dépendance avec la hauteur de l'arbre est plus importante. La vitesse critique pour un arbre de 20 m de haut serait de 16 m/s, ce qui est bien trop faible. En réalité, la surface d'un arbre est comprise entre les deux limites L^2 et rL, et les feuilles et les branches fines de l'arbre s'alignent dans la direction du vent (Vogel 1989 [107] et Gosselin 2010 [108]). Il est donc assez complexe de déterminer la force exercée par le vent sur l'arbre.

Une troisième idée est que la masse volumique de l'air peut être grandement augmentée quand il pleut, d'un facteur deux selon Spilhaus 1948[109], et alors la vitesse v^* devient v_{pluie} = $0.7v^*$. Il faut noter que lorsqu'il pleut la terre devient cassante et que c'est le risque de chablis qui devient le plus important.

6.5 Conclusion

Afin d'étudier la vitesse critique de verse des arbres nous nous sommes intéressés à la rupture par flexion de structures élancées fragiles. À l'aide du critère de Griffith, nous avons déterminé un critère sur le rayon de courbure longitudinale critique R^* pour lequel une tige casse. Pour le cas spécial des arbres, la flexion est causée par un vent de vitesse v. Et la géométrie des arbres impose un lien entre le rayon et la hauteur de l'arbre. Si bien que la vitesse critique de vent pour atteindre la rupture ne dépend que de la hauteur (ou du rayon) de l'arbre. Cette dépendance avec la hauteur est faible, en puissance $1/8$ de la hauteur. Donc le modèle prédit une vitesse de verse à peu près constante pour tous les arbres. Mais la vitesse que nous trouvons est trop élevée par rapport aux données de terrain. Il faudrait étudier plus en détail l'effet de bourrasque dû aux rafales de vent et la surface effective de l'arbre sur laquelle s'appuie l'écoulement d'air pour améliorer le modèle.

Le fait que la vitesse soit tout de même légèrement croissante avec la hauteur de l'arbre est intéressant dans le cas des vergers où les grands arbres, type peuplier, sont utilisés pour protéger les petits arbres et leurs fruits des grands vents, voir la figure 6.19 et dans le cas des forêts mixtes où différentes espèces d'arbres sont plantées, notamment des arbres de hauteurs différentes. Dans les deux cas, la présence des arbres les plus grands, qui sont les plus solides, a pour effet de diminuer la vitesse du vent ressentie par les plus petits arbres, qui sont les plus fragiles.

FIGURE 6.19 – Arbres coupe-vent dans un verger de la plaine de la Crau. Photographie : Matthieu Colin.

Chapitre 7

Une variante : la torsion

"Sous-bois après la tempête", 1630. Roleandt Savery.

Sommaire

7.1 Motivation physiologique 123
7.2 Expérience 124
7.3 Analyse 126
7.4 Retour à la physiologie 127

7.1 Motivation physiologique

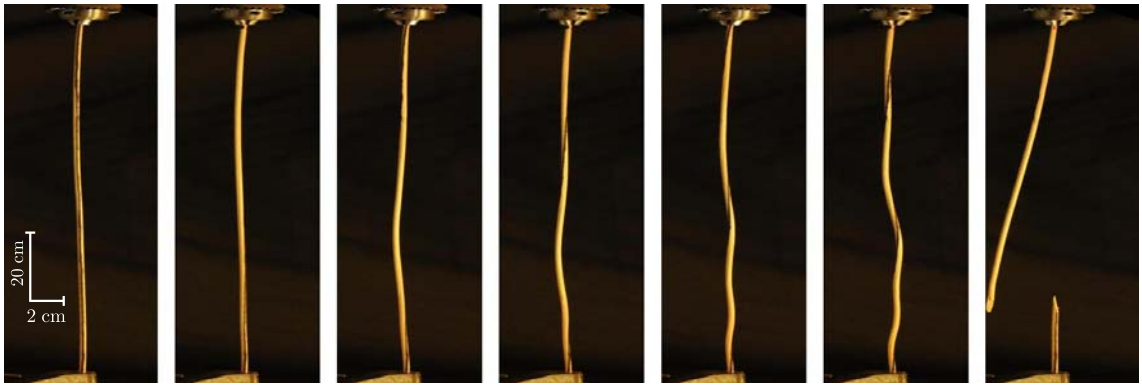
Une tige fragile peut casser de trois façons différentes : par tension ou compression, par flexion et par torsion. Nous avons étudié la flexion en détail dans le chapitre précédent. Il est peu probable qu'un arbre casse en tension ou compression directement. Mais par contre il peut casser par torsion. C'est ce qui est visible sur les images de la figure 7.1. Cela peut arriver si l'arbre a un houppier asymétrique, si c'est un arbre de lisière ou si l'arbre est dans le coeur d'une tornade où le vent est circulaire. Nous allons présenter ici des expériences sur la torsion de tiges fragiles, des tiges de hêtre. Puis nous appliquerons les résultats obtenus au chapitre précédent pour analyser les résultats de nos expériences.

FIGURE 7.1 – Volis d'arbres par torsion.

7.2 Expérience

Nous avons fait une expérience qui consiste à prendre une tige de bois et lui imposer une torsion jusqu'à la fracture. Pour cela nous fixons une extrémité de la tige dans un étau et l'autre extrémité dans un mandrin que nous faisons tourner d'un angle θ. Nous mesurons l'angle θ au moment de la fracture. Et nous nous intéressons à l'évolution de cet angle en fonction de la longueur L et du rayon R de la tige. Pour chaque point de mesure, nous avons fait des moyennes sur 5 expériences avec des tiges de hêtre pour compenser la variabilité des caractéristiques du bois.

Sur la figure 7.2 se trouve une série d'images correspondant à une expérience avec une tige de hêtre de longueur $L = 0.9$ m et de rayon $R = 2$ mm. Une ligne noire tracée sur la tige permet de visualiser la torsion imposée. L'échelle dans la largeur de l'image est exagérée afin de voir les déformations de la tige hors de son axe. Ces déformations rappellent le travail sur le plectonème de Marie le Merrer 2010 [51]. Entre chaque image, la tige est tournée de $180°$, si bien qu'à la septième image où la tige est cassée, la tige a fait trois tours sur elle-même : $\theta = 1080°$.



$\theta = 0^o$ $\theta = 360^o$ $\theta = 720^o$ $\theta = 1080^o$

FIGURE 7.2 – Expérience de torsion d'une tige de hêtre de longueur $L = 0.9$ m et de rayon $R = 2$ mm.

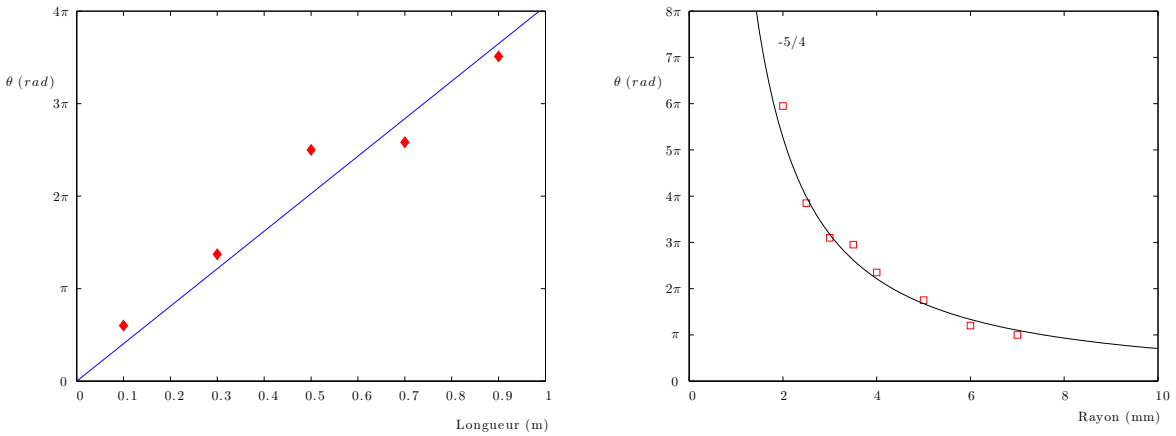


FIGURE 7.3 – Résultats de l'expérience de torsion sur des tiges de hêtre. À gauche la variation de θ avec la longueur de la tige pour un rayon fixé de 2.5 mm. À droite, la longueur de tige est fixée et c'est son rayon qui varie de 2 à 7 mm.

Nous présentons sur la figure 7.3 les variations de θ avec la géométrie de la tige. Sur le graphique de gauche se trouve la variation de θ avec la longueur de tige pour un rayon de 2.5 mm. Sur la droite de la figure, nous avons fixé la longueur de tige à 0.9 m et fait varier le rayon de la tige de 2 à 7 mm. La variation de θ avec L est linéaire tandis que la variation de θ avec le rayon de la tige est en puissance $-5/4$.

Les résultats de cette expérience sont de très bonne qualité par rapport à ceux que nous avons obtenu au chapitre précédent. Les points obtenus indiquent très clairement les dépendances de θ avec la géométrie de la tige. Cela est sûrement dû au fait que les contraintes sont uniformément réparties sur toute la surface de la tige. Et alors la distribution des fissures est plus régulière. Alors que dans le cas de la flexion, la contrainte maximum est localisée près de la position d'encastrement. Et c'est pourquoi il y avait une plus grande variation des résultats.

7.3 Analyse

Pour comprendre ces résultats, nous allons nous baser sur ce que nous avons compris sur le bois : c'est un objet fragile dont la contrainte critique σ^* dépend du rayon de la tige utilisée. Nous devons donc relier l'angle θ dont la tige est tournée à la contrainte critique.

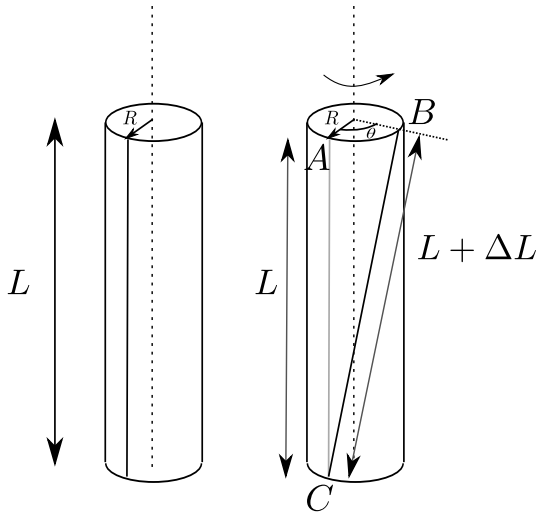


FIGURE 7.4 – Notations pour le calcul de l'élongation d'une tige en torsion.

En s'appuyant sur les notations de la figure 7.4 nous écrivons la relation de Pythagore pour le triangle ABC :

$$(L + \Delta L)^2 = L^2 + (R\theta)^2 \tag{7.1}$$

En négligeant le terme du deuxième ordre en ΔL, il est possible d'exprimer l'allongement relatif $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ de la ligne BC :

$$\epsilon \sim \frac{R^2\theta^2}{L^2} \tag{7.2}$$

Et nous avons vu au chapitre précédent que l'allongement critique du bois se déduit de la combinaison de la loi de Hooke [52] $\sigma_c = E\epsilon_c$ et de la relation de Griffith [103] $\sigma_c = \frac{K}{\delta\sqrt{R}}$. Alors :

$$\epsilon_c = \frac{K}{\delta E\sqrt{R}} \tag{7.3}$$

En identifiant les équations 7.2 et 7.3, nous trouvons l'angle critique de rupture de la tige en torsion :

$$\theta = \sqrt{\frac{K}{\delta E}}\frac{L}{R^{5/4}} \tag{7.4}$$

Cette relation décrit bien nos observations expérimentales. Sur le graphique 7.5 nous traçons les données des angles critiques θ mesurés en fonction de la grandeur $L/R^{5/4}$. Toutes nos données se rejoignent sur une seule courbe. L'approche utilisant le critère de Griffith sur la contrainte critique est applicable au cas de la torsion.

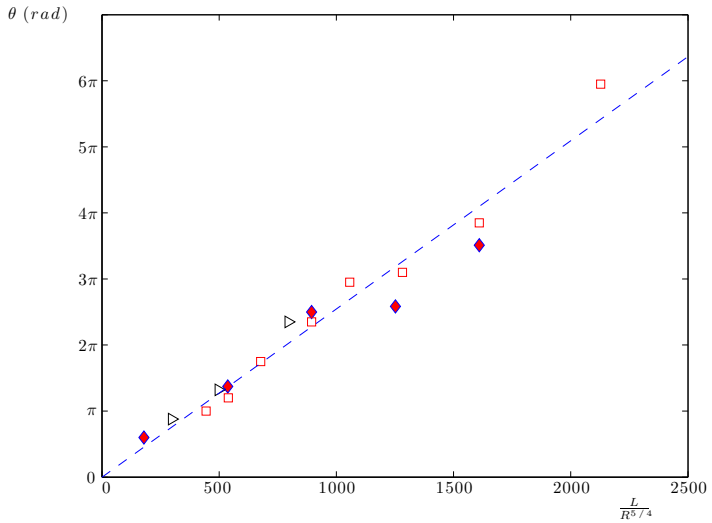


FIGURE 7.5 – Angle critique de rupture d'une tige en torsion θ en fonction de $L/R^{5/4}$.

7.4 Retour à la physiologie

Pour le cas des arbres, l'étude de MacMahon 1983 [39] relie le rayon de l'arbre à sa hauteur : $R = 0.0025L^{3/2}$. Et nous avons trouvé expérimentalement pour le hêtre que $\theta = 0.008\frac{L}{R^{5/4}}$. Donc l'angle critique de rupture en torsion pour un arbre ne dépend que de sa hauteur, soit :

$$\theta_{arbre} = \frac{6}{L^{7/8}} \tag{7.5}$$

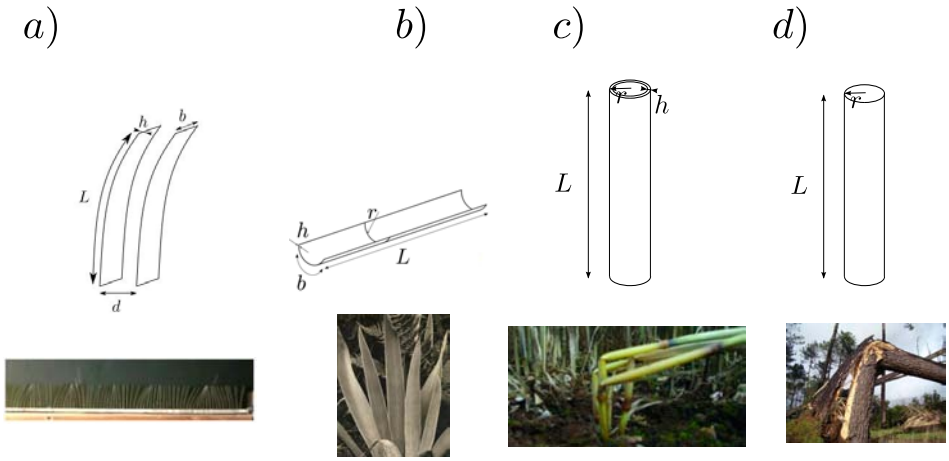
Plus l'arbre est grand, plus l'angle critique de torsion est faible. Pour un arbre de 3 m de haut $\theta = 130°$ et pour un arbre de 100 m de haut $\theta = 6°$. L'étude de l'asymétrie des houppiers et donc des forces de torsion exercées par le vent sur les arbres serait très intéressante pour déterminer la vitesse critique pour laquelle un arbre casse par torsion. Il faudrait alors comparer cette vitesse à la vitesse de verse par flexion, et la construction d'un diagramme de phase torsion/flexion serait possible. La combinaison des deux phénomènes étant elle aussi à analyser. Notons qu'une étude menée sur 4 populations d'arbres en Norvège par Skatter 2000 [110] montre que la rupture par torsion des arbres est envisageable.

Conclusion

Nous avons étudié deux phénomènes d'écoulements critiques liés aux plantes. Dans un cas l'écoulement critique est celui de la sève, et son acheminement des racines vers les feuilles (sève brute) est nécessaire à la vie de la plante. Dans le second cas, l'écoulement critique est le vent et s'il dépasse une vitesse critique il peut endommager voir mettre à terre une plante ou un ensemble de plantes.

Pour l'ascension de la sève dans les vaisseaux des plantes, nous avons proposé un mécanisme d'ascension capillaire dans le cas ou les vaisseaux sont remplis de gaz. C'est l'ascension capillaire dans des géométries ouvertes en forme de coin. Cette ascension capillaire est infinie en hauteur et se fait avec une dynamique en puissance $1/3$ du temps. Nous avons montré qu'elle est indépendante de la géométrie du coin dans laquelle elle a lieu, ce qui fait de l'ascension capillaire dans les coins un phénomène robuste. C'est pour cela et aussi parce que les coupes anatomiques des végétaux révèlent des formes de coin, que nous avons tenté l'ascension capillaire dans des rameaux. En supposant que cette ascension capillaire serait un mécanisme réparateur de l'embolie des plantes. Nous n'avons atteint que des hauteurs prédites par la loi de Jurin pour un tube qui aurait le même rayon que la valeur moyenne des rayons des vaisseaux du rameau. Nous nous demandons si le phénomène est confiné dans les méats et est donc très difficile à observer.

Pour la verse, nous avons étudié en détail les comportements mécaniques de plaques flexibles en groupe, de structures élancées courbées et tubulaires et de structures élancées fragiles. Ce qui nous à permis de définir des vitesses critiques de verses pour chaque objet, qui sont résumées sur la figure7.6. Les plaques flexibles sont considérées comme versées lorsqu'elles sont complètement couchées au sol, c'est le régime des grandes déflexions. Par contre, pour le cas des structures élancées courbées tubulaires et fragiles, il peut y avoir formation d'un pli ou d'une fracture dans le régime des faibles déflexions aussi bien que dans les fortes déflexions, ce qui mène à la verse. Dans le cas des tiges fragiles, notre objectif était de comprendre pourquoi la vitesse de verse des arbres est commune à tous les arbres, quelque soit l'espèce de l'arbre, son âge et sa hauteur. En faisant appel à la théorie de Griffith 1921 [103] (qui permet de décrire nos expériences avec des tiges de bois) et aux observations de MacMahon 1983 [39] pour décrire les arbres (relation entre rayon et hauteur d'un arbre), nous sommes arrivé à déterminer une vitesse de verse qui varie très faiblement avec la hauteur de l'arbre (puissance $1/8$). Cette vitesse est élevée par rapport aux observations lors des tempêtes, et une prise en compte de l'effet bourrasque et de la silhouette des arbres exposée au vent est nécessaire pour arriver à la bonne vitesse.



scalings des vitesses de verse	$\sqrt{\frac{E}{\rho C}}\sqrt{\frac{h^3}{dL^2}}$	$\sqrt{\frac{E}{\rho C}}\frac{h}{L}\frac{b}{r}$	$\sqrt{\frac{E}{\rho C}}\frac{h}{L}$	$\sqrt{\frac{K\beta^{3/2}}{\rho C}}L^{1/8}$

FIGURE 7.6 – Résumé des vitesses critiques de verse pour les objets étudiés : a) ensemble de plaques planes. b) ruban. c) paille. d) arbre.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Rayon de courbure d'une structure élancée encastrée

Dans cette annexe, nous étudions une tige encastrée. Nous montrons comment relier la courbure R^* à la position d'encastrement à une force exercée localement, en plaçant une masse m à l'extrémité libre de la tige. Ce lien entre R^* et la masse à l'extrémité de la tige doit être exprimé dans deux situations : faibles déflexions et fortes déflexion. Pour décrire la tige, nous utilisons les équations de Kirchoff.

Équations de Kirchoff

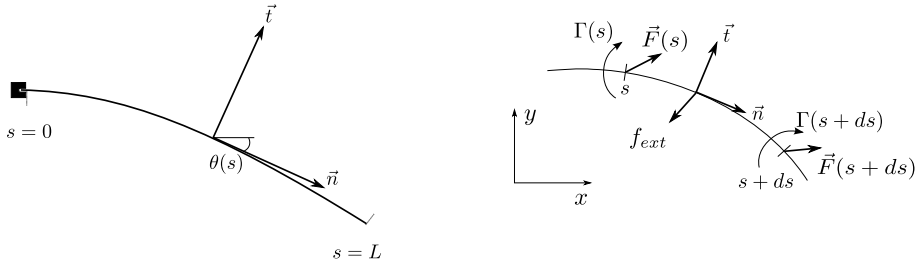


FIGURE A.1 – Notations utilisées pour décrire la tige flexible. À gauche, la tige sur toute sa longueur. À droite, une portion ds de la tige.

Nous allons utiliser les notations qui sont indiquées sur la figure A.1. Nous écrivons l'équilibre des forces et des moments sur une section ds de tige, située entre s et $d+ds$. Cette section est soumise aux forces des éléments de tige qui l'entourent : $\mathbf{F}(s+ds)$ et $-\mathbf{F}(s)$ et aux couples des éléments de tige qui l'entourent : $\Gamma(s+ds)$ et $-\Gamma(s)$. Par convention, les forces agissant depuis l'élément de droite sur ds sont comptées positivement et celles agissant depuis l'élément de gauche négativement, il en va de même pour les couples.

L'équilibre des forces est :

$$-\mathbf{F}(s) + \mathbf{F}(s+\mathrm{d}s) + \mathbf{f}_{ext}\mathrm{d}s = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}s} = -\mathbf{f}_{ext} \tag{A.1}$$

De même, l'équilibre des moments, à l'ordre 1 en ds, est :

$$-\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s}) + \mathbf{\Gamma}(s+\mathrm{d}s) - (\mathbf{F}\times\mathbf{t}).\mathbf{e}_z\mathrm{d}s = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}s} = (\mathbf{F}\times\mathbf{t}).\mathbf{e}_z \tag{A.2}$$

Et nous avons vu que la loi de Hooke permettait de lier le moment de la tige à sa courbure :

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s}) = EI\frac{d\theta}{\mathrm{d}s}\mathbf{e}_z \tag{A.3}$$

Ces trois équations (A.1, A.2 et A.3) permettent de calculer la forme de la tige. Ici, nous négligeons l'action du poids de la tige sur elle-même. En effet la masse que l'on suspendra à son extrémité sera toujours plus grande que la masse de la tige, et les tiges encastrées sans masse sont quasiment toujours horizontales. Donc $\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

Nous plaçons à l'extrémité $s = L$ de la tige une masse m qui exerce la force $-mg\mathbf{e}_y$. Par conséquent, $\mathbf{F}(L) = -mg\mathbf{e}_y$ et avec l'équation A.1 :

$$\mathbf{F}(s) = -mg\mathbf{e}_y \tag{A.4}$$

Cette force peut être introduite dans l'équation d'équilibre des couples A.2 :

$$\mathbf{\Gamma}'(s) = mg\cos\theta\mathbf{e}_z \tag{A.5}$$

En dérivant l'équation A.3, nous identifions les dérivées du moment au sein de la tige pour obtenir une équation sur θ, que nous écrivons accompagnée de ses conditions aux limites :

$$\begin{cases} \theta''(s) &= \frac{mg}{EI}\cos\theta \\ \theta'(L) &= 0 \\ \theta(0) &= 0 \end{cases} \tag{A.6}$$

La condition $\theta'(L) = 0$ traduit la courbure nulle à l'extrémité et la condition $\theta(0) = 0$ traduit l'encastrement.

Faibles déflexions

Dans le cas des faibles déflexions, $\mathrm{d}y \approx \theta\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}s$ et alors l'ensemble d'équations A.6 peut être écrit :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}(x) &= \frac{mg}{EI} \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(L) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) &= 0 \end{cases} \tag{A.7}$$

En ajoutant la condition initiale $y(0) = 0$, il est possible d'intégrer cette équation :

$$y(x) = \frac{mg}{6EI}x^2(x-3L) \tag{A.8}$$

La courbure d'une courbe $y(x)$ est $\mathcal{C}(x) = \frac{y''(x)}{(1+y'(x)^2)^{3/2}}$. Avec notre solution pour y, le rayon de courbure de la tige est :

$$R(x) = \frac{1}{\mathcal{C}(x)} = \frac{\left(1+\left(\frac{mg}{2EI}\right)^2 x^2\left(1-x\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{mg}{EI}(1-x)} \tag{A.9}$$

Ce rayon est minimum lorsque x tend vers 0 et vaut alors :

$$R = \frac{EI}{mgL} \tag{A.10}$$

Fortes déflexions

Dans le cas des fortes déflexions, nous calculons l'intégrale première de l'équation A.6 ($\theta'' = mg/EI\cos\theta$) :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \frac{mg}{EI}(\sin\theta(s) - \sin\theta(L)) \tag{A.11}$$

avec toujours la condition $\theta(0) = 0$, et en forte déflexion $\theta(L) = -\frac{\pi}{2}$ il est possible d'obtenir le rayon de courbure à la position d'encastrement :

$$R = \sqrt{\frac{EI}{2mg}} \tag{A.12}$$

Conclusion

Lorsque la tige est défléchie en plaçant une masse à son extrémité, elle est faiblement ou fortement défléchie. Le rayon de courbure à l'encastrement adimensionné par la longueur de la tige peut s'exprimer dans chacun de ces cas limites :

$$\begin{cases} \text{faibles déflexions : } \frac{R}{L} = \frac{EI}{mgL^2} \\ \text{fortes déflexions : } \frac{R}{L} = \sqrt{\frac{EI}{2mgL^2}} \end{cases} \tag{A.13}$$

En notant $\Delta = \frac{mgL^2}{EI}$, paramètre adimensionné qui compare le moment exercé par la masse m sur la tige et le moment de courbure de la tige lorsque son rayon de courbure est de l'ordre de L, nous pouvons réécrire la courbure adimensionnée :

$$\begin{cases} \text{faibles déflexions : } \frac{L}{R} = \Delta \\ \text{fortes déflexions : } \frac{L}{R} = \sqrt{2\Delta} \end{cases} \tag{A.14}$$

Ces deux limites peuvent être réunies dans une même équation :

$$\left(\frac{R}{L}\right)^4 = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{1}{2\Delta}}\right)^4 \tag{A.15}$$

Nous comparons sur les deux graphes de la figure A.2 les valeurs de L/R obtenues par la résolution numérique de l'équation de l'élastica aux limites attendues en faible et forte déflexion (graphique de gauche) et à l'équation analytique A.15 (graphique de droite).

La transition entre les régimes faible et forte déflexion est très rapide, et est en accord avec les résultats obtenus par résolution numérique de l'équation de l'élastica. Et l'équation A.15 qui réunit ces deux régimes suit aussi de très près les résultats numériques. Dans nos expériences de rupture, nous mesurerons la masse critique m^* à laquelle la tige casse et remonterons à la courbure critique de rupture R^* grâce à l'équation A.15. Cela nous permettra une mesure plus précise de R^* par rapport à la mesure directe du rayon de courbure. En effet, la précision des mesures de rayon de courbure par ajustement d'un cercle sont de l'ordre de 20% tandis que celle de la mesure de la masse ne sont que de 0.1%.

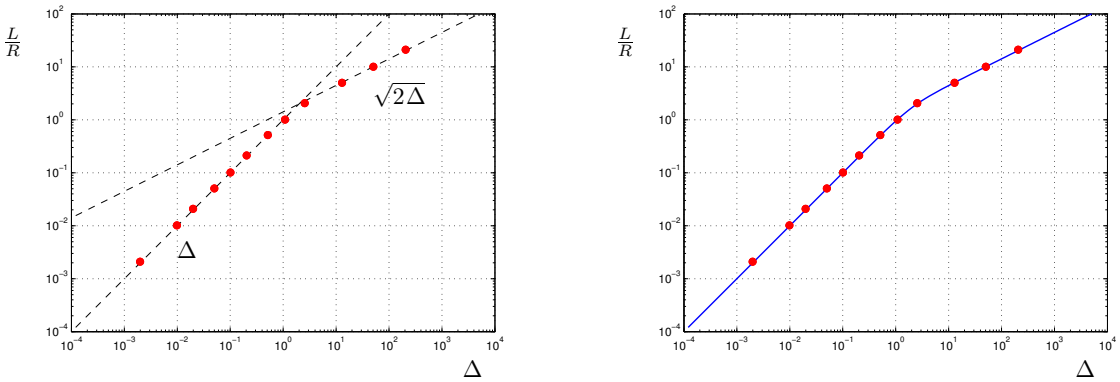


FIGURE A.2 – Evolution de la courbure adimensionnée L/R à l'encastrement de la tige en fonction du paramètre adimensionné $\Delta = \frac{mgL^2}{EI}$. • : résolution numérique de l'équation de l'élastica, courbes en pointillés : tendances à faible et forte déflexion et courbe bleu : équation A.15 : $(\frac{R}{L})^4 = (\frac{1}{\Delta})^4 + (\sqrt{\frac{1}{2\Delta}})^4$.

Annexe B

Courbure d'une structure élancée soumise à une force aérodynamique

Sommaire

B.1 Direction de la force sur une structure élancée 137
B.1.1 La soufflerie conventionnelle 137
B.1.2 La soufflerie du pauvre 138
B.2 Résultats expérimentaux 140
B.2.1 Mesure de la traînée 140
B.2.2 Direction de la force aérodynamique 141
B.2.3 Déformées des tiges de bois 142
B.3 Courbure de la structure élancée sous l'effet de la force aérodynamique143

Afin de déterminer la courbure d'une structure élancée soumise à une force aérodynamique, nous avons déterminé la force exercée par un écoulement aérodynamique sur une tige lors d'une expérience en soufflerie. Ensuite nous avons calculé la courbure avec à cette force.

B.1 Direction de la force sur une structure élancée

B.1.1 La soufflerie conventionnelle

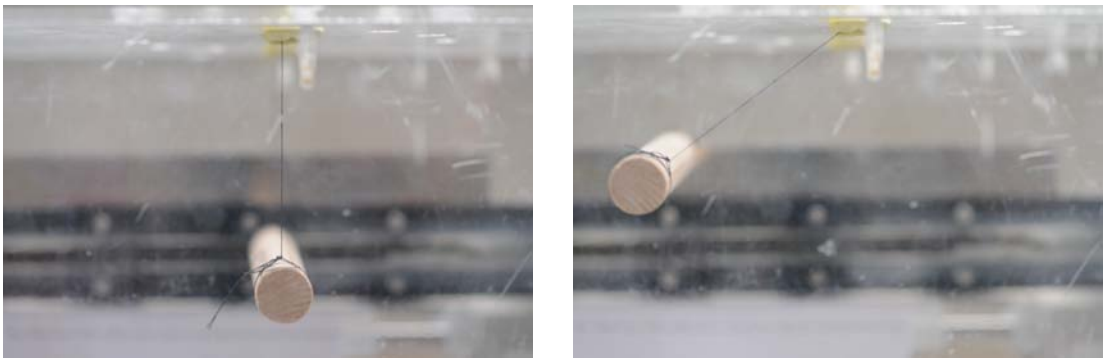
Dans un premier temps, nous avons utilisé une soufflerie de petite taille (de section carrée 20 cm x 20 cm environ) avec deux objectifs :
- Mesurer la traînée des cylindres dans un écoulement d'air,
- Observer la direction de la force aérodynamique.

Mesure de la traînée d'un cylindre

Le montage est présenté sur la figure B.1 en vue de profil. La tige cylindrique en bois (hêtre) est fixée par un fil à la partie supérieure de la soufflerie, comme une "balançoire".

Direction de la force aérodynamique

Le montage précédent est utilisé mais cette fois-ci la "balançoire" est inclinée par rapport à la direction du vent. Nous déterminons quelle direction possède la force aérodynamique sur le



(a) Diamètre de la tige : 16 mm ; longueur de la tige : 120 mm ; vitesse de vent : nulle.

(b) Diamètre de la tige : 16 mm longueur de la tige : 120 mm ; vitesse de vent : 16,6 m/s.

FIGURE B.1 – Montage expérimental utilisé pour déterminer la traînée d'un cylindre.

cylindre. Il s'agit de savoir si elle est alignée avec le vent ou au contraire si elle est perpendiculaire au cylindre.

Mesure de la vitesse de l'écoulement

Le principe de mesure de la vitesse (v) de l'écoulement de l'air dans la soufflerie (de masse volumique notée ρ_{air}) est basé sur l'équilibre des pressions aérodynamique et hydrostatique : nous mesurons une hauteur de progression verticale (h_{eau}) de liquide (ici de l'eau de masse volumique notée ρ_{eau}). L'équilibre des pressions s'écrit :

$$\frac{1}{2}\rho_{air}v^2 = \rho_{eau}gh_{eau} \tag{B.1}$$

B.1.2 La soufflerie du pauvre

Afin d'observer les déformées de tiges de bois de 1 m et plus, nous ne pouvons pas utiliser une soufflerie classique, généralement réduite en taille (entre 20 cm x 20 cm et 30 cm x 30 cm en général). Nous pouvons réaliser des expériences à l'air libre lors d'une journée venteuse, mais ce que nous souhaitons avant tout, c'est pouvoir maîtriser la vitesse du vent.

Pour surmonter ce problème, nous avons utilisé un véhicule motorisé (une voiture...) se déplaçant dans l'air (...qui roule) et nous exposons les tiges de bois à un vent apparent en dehors du véhicule (par la fenêtre). Ainsi nous pouvons facilement jouer sur la vitesse de vent apparent, et ne pas être limité en taille de tiges de bois à tester.

Notre montage expérimental[1] comprend un socle pour tenir raisonnablement la tige loin de la couche limite de l'écoulement de l'air sur la voiture. Nous nous écartons aussi de ce qui pourrait modifier l'écoulement de l'air (les rétroviseurs par exemple). Le montage comprend également un tube de Pitot pour la mesure de la vitesse du vent apparent et un appareil photo pour immortaliser les courbures des tiges de bois soumises au vent.

En pratique, la mesure de la vitesse du vent apparent par le tube de Pitot ne nous a pas donné satisfaction, elle n'était pas suffisamment précise à faible vitesse. Nous avons réalisé ces

1. Le montage est en partie visible sur les photographies de la figure B.5.

expériences lors de journées à vent réduit ($\leq 10km.h^{-1}$). Au degré de précision auquel nous travaillons, la vitesse du compteur nous satisfait.

B.2 Résultats expérimentaux

B.2.1 Mesure de la traînée

Les notations du montage expérimental sont indiquées sur la figure B.2.

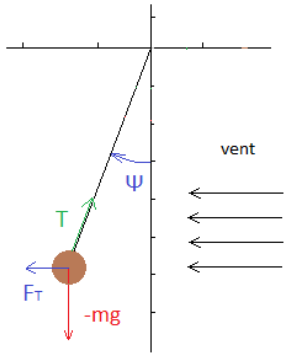


FIGURE B.2 – Notations utilisées pour la mesure du coefficient de traînée. Nous représentons l'angle d'inclinaison avec la verticale (Ψ), la force de traînée (F_T), le poids du cylindre ($-mg$) et la réaction du fil sur le cylindre (T).

Après un rapide bilan d'équilibre des forces en jeu, nous obtenons :

$$F_T = -mg \tan \Psi \tag{B.2}$$

Nous savons que la force de traînée a pour origine la pression hydrodynamique ($\frac{1}{2}\rho v^2$) et qu'elle est d'autant plus importante que la surface de l'objet exposée à l'écoulement est grande. Cette surface de référence sera ici ($S = LD$). La force de traînée est proportionnelle au coefficient de traînée (C_x), qui dépend du nombre de Reynolds (qui dépend lui-même de la vitesse de l'écoulement, de la viscosité cinématique de l'air et des dimensions du cylindre). Nous avons donc :

$$F_T = -\frac{1}{2}\rho_{air} S C_x v^2 \tag{B.3}$$

En assemblant les équations (B.1), (B.2) et (B.3) nous obtenons :

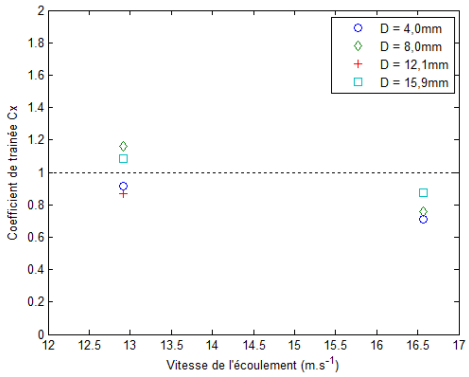
$$C_x = \frac{mg \tan \Psi}{\rho_{eau} g h L D} = \frac{\pi D}{4} \frac{\rho_{bois}}{\rho_{eau}} \frac{\tan \Psi}{h} \tag{B.4}$$

	air ($25\,^\circ C$, $1bar$)	eau	bois de hêtre	aluminium
Masse volumique	1,180kg.m^{-3}	1000kg.m^{-3}	709kg.m^{-3}	2840kg.m^{-3}

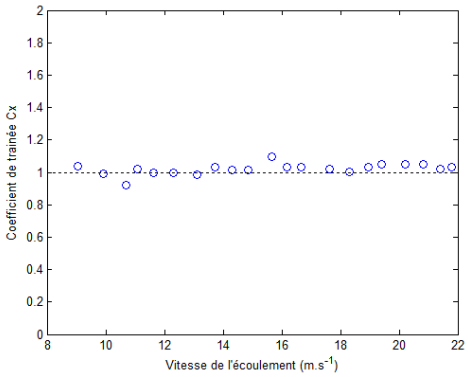
TABLE B.1 – Valeurs des masses volumiques utilisées.

La mesure de l'angle Ψ (avec les photographies) permet donc de remonter au coefficient de traînée. Nous reportons sur la figure B.3a les résultats des mesures du coefficient de traînée sur les cylindres de bois, en fonction de la vitesse et pour différents diamètres. Les valeurs des masses volumiques utilisées sont données dans le tableau B.1.

Nous remarquons que $C_x \simeq 1$ et qu'il dépend peu du diamètre du cylindre. Nous avons réalisé des mesures supplémentaires de la traînée de cylindre, avec un cylindre en aluminium (la



(a) Mesure du coefficient de traînée avec des cylindres en bois.



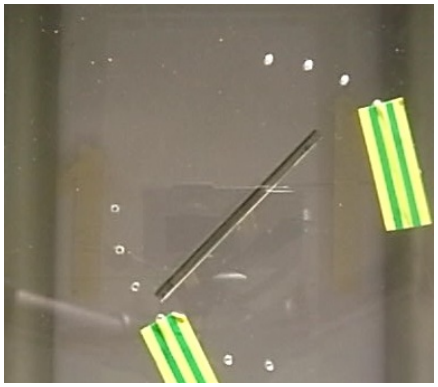
(b) Mesure du coefficient de traînée avec des cylindres en aluminium. Diamètre : 6,3mm.

FIGURE B.3 – Mesure du coefficient de trainée d'un cylindre en fonction de la vitesse de l'écoulement, pour un cylindre en bois (a) ou en aluminium (b).

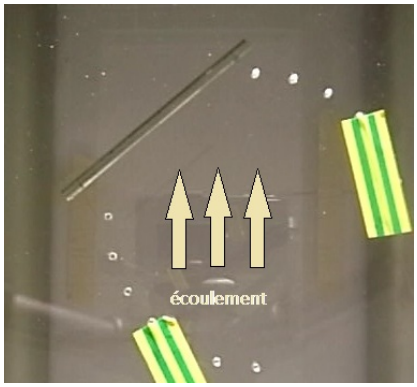
masse volumique de l'aluminium est grande devant celle du bois, cela permet de réduire l'angle Ψ et d'améliorer les mesures à hautes vitesses d'écoulement). Ces mesures sont reportées sur la figure B.3b. Elles nous renseignent sur le fait que le coefficient de traînée est vraisemblablement constant dans la gamme de vitesse étudiée. Pour la suite nous considérons que $C_x \simeq 1$.

B.2.2 Direction de la force aérodynamique

Comme l'illustre la figure B.4, nous avons observé que la force aérodynamique qui s'applique sur le cylindre est perpendiculaire à la longueur du cylindre.



(a) Diamètre de la tige : $15{,}9$ mm. Longueur de la tige : $120{,}4$ mm. Vitesse de vent : nulle.



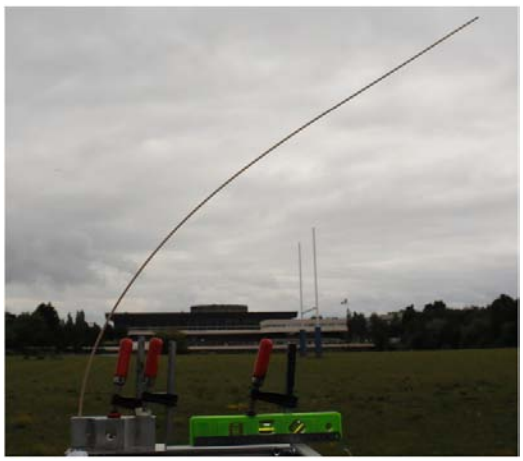
(b) Diamètre de la tige : $15{,}9$ mm. Longueur de la tige : $120{,}4$ mm. Vitesse de vent : $16{,}6$ m/s.

FIGURE B.4 – Vue de dessus. Le cylindre en "balançoire" se déplace dans la direction perpendiculaire à sa longueur et non dans la direction de l'écoulement.

B.2.3 Déformées des tiges de bois

Nous avons observé la déformée de tiges de bois de hêtre en fonction de la vitesse, des exemples de photographies prises lors des mesures sont présentées sur la figure B.5.

(a) Diamètre de la tige : 8 mm ; longueur de la tige : 960 mm ; vitesse de l'écoulement : $16{,}6$ m/s ; vitesse du vent : $1{,}8$ m/s (relevé Météo France).



(b) Diamètre de la tige : 4 mm ; longueur de la tige : 960 mm ; vitesse de l'écoulement : $33{,}3$ m/s ; vitesse du vent : $1{,}8$ m/s (relevé Météo France).

FIGURE B.5 – Photographies des tiges de bois soumises à la force aérodynamique.

En particulier, nous avons mesuré le rayon de courbure à la base des tiges à partir de ces photos (par la méthode du cercle osculateur). Les relevés du rayon de courbure en fonction de la vitesse de l'écoulement sont reportés sur la figure B.6.

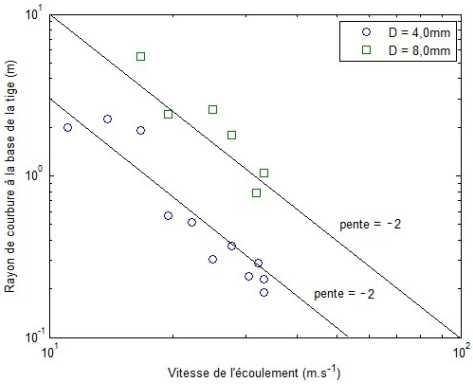


FIGURE B.6 – Rayon de courbure à la base des tiges de bois de hêtre en fonction de la vitesse de l'écoulement : ici il s'agit de la vitesse de la voiture qui en est une bonne approximation. Le graphique est en échelle logarithmique pour apprécier la dépendance $R \sim \frac{1}{v^2}$.

B.3 Courbure de la structure élancée sous l'effet de la force aérodynamique

Considérons une tranche infinitésimale de la tige de largeur ds, entre s et $s+ds$, mise en flexion par un écoulement de vitesse v (figure B.7).

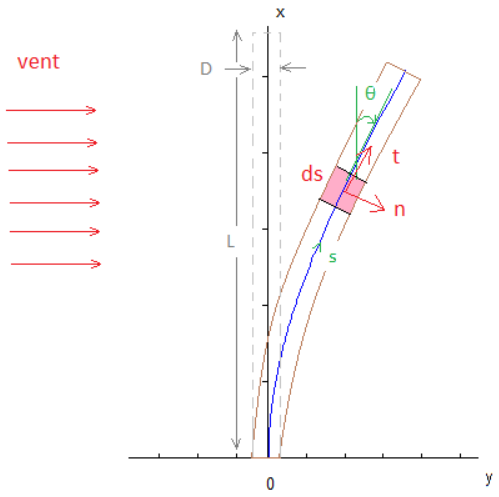


FIGURE B.7 – Notations utilisées pour la tige mise en flexion par le vent.

- $\overrightarrow{F}(s)$ est la force interne exercée par la partie droite de la tige sur sa partie gauche.
- $\overrightarrow{\Gamma}(s)$ est le moment interne exercé par la partie droite de la tige sur sa partie gauche.

Soit $\overrightarrow{K}$ la densité linéique de force aérodynamique. D'une part, sur une portion $[s,\ s+ds]$, la surface apparente exposée au vent est $D\ ds\ cos\theta(s)$. D'autre part, nous savons que la force aérodynamique est normale à la tige (discuté au troisième chapitre), c'est à dire ici dirigée selon $\overrightarrow{n}$. Nous avons donc :

$$\overrightarrow{K}(s)ds = \frac{1}{2}\rho_{air}v^2(Ddscos\theta(s))C_x\overrightarrow{n}(s) \tag{B.5}$$

Équilibre des forces sur $[s,\ s+ds]$ Nous écrivons l'équilibre des forces de la portion de tige de longueur ds :

$$\overrightarrow{F}(s+ds)-\overrightarrow{F}(s) = \overrightarrow{K}(s)ds \tag{B.6}$$

$$\overrightarrow{F}'(s) = -\overrightarrow{K}(s) \tag{B.7}$$

Nous en déduisons :

$$\overrightarrow{F}'(s) = -\frac{1}{2}\rho_{air}v^2DC_x\cos\theta(s)\overrightarrow{n}(s) \tag{B.8}$$

Remarquons que les coordonnées de $\overrightarrow{n}(s)$ sont $(-\sin\theta(s),\ \cos\theta(s),\ 0)$ et posons $\tilde{s} = \frac{s}{L}$, $\tilde{F}_x = \frac{F_xL^2}{EI}$ et $\tilde{F}_y = \frac{F_yL^2}{EI}$, il vient :

$$\begin{cases} \tilde{F}_x{}'(\tilde{s}) = +\frac{1}{2}(\rho_{air}v^2DC_x\frac{L^3}{EI})\cos\theta(\tilde{s})\sin\theta(\tilde{s}) \\ \tilde{F}_y{}'(\tilde{s}) = -\frac{1}{2}(\rho_{air}v^2DC_x\frac{L^3}{EI})\cos\theta(\tilde{s})\cos\theta(\tilde{s}) \end{cases} \tag{B.9}$$

Soit $\eta = \frac{64}{\pi}\frac{\rho v^2}{E}C_x\left(\frac{L}{D}\right)^3$. Nous reconnaissons le nombre de Cauchy $C_Y = \frac{\rho v^2}{E}$ qui mesure l'ordre de grandeur des déformations imposées par la pression dynamique.

Équilibre des moments sur [s, s+ds] Comme dans l'annexe $refan0$ nous obtenons : $\Gamma'(s)\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{t}(s)$ et $\Gamma(s) = EI\theta'(s)$. Il vient :

$$EI\theta''(s) = F_x \sin\theta(s) - F_y \cos\theta(s) \tag{B.10}$$

$$\theta''(\tilde{s}) = \tilde{F}_x \sin\theta(\tilde{s}) - \tilde{F}_y \cos\theta(\tilde{s}) \tag{B.11}$$

Les conditions aux limites de notre problème sont :
- L'encastrement à l'origine : $\theta(0) = 0$,
- L'absence d'efforts à l'extrémité libre de la tige : $\theta(1) = 0$, $F_x(1) = 0$ et $F_y(1) = 0$.

Au final nous devons résoudre le système d'équation couplées suivant :

$$\begin{cases} \tilde{F}_x{}'(\tilde{s}) = +\dfrac{1}{2}\eta\cos\theta(\tilde{s})\sin\theta(\tilde{s}) \\ \tilde{F}_y{}'(\tilde{s}) = -\dfrac{1}{2}\eta\cos\theta(\tilde{s})\cos\theta(\tilde{s}) \\ \theta''(\tilde{s}) = \tilde{F}_x\sin\theta(\tilde{s}) - \tilde{F}_y\cos\theta(\tilde{s}) \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(1) = 0 \\ F_x(1) = 0 \\ F_y(1) = 0 \end{cases} \tag{B.12}$$

Résolution Nous utilisons une "méthode de tir" pour résoudre numériquement le système d'équations (B.12). Nous définissons toutes les conditions aux limites à l'extrémité libre de la tige, en donnant une valeur arbitraire à $\theta(1)$. Nous cherchons la valeur de l'angle $\theta(1)$ permettant de vérifier $\theta(0) = 0$.

Nous avons écrit un programme Matlab pour calculer la déformée d'une tige en fonction de la force aérodynamique initiale (ce programme résout le système d'équations (B.12) par une méthode de tir). Nous avons représentés quelques solutions de l'*Elastica* sur la figure B.8.

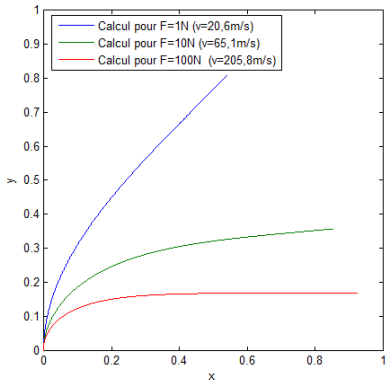


FIGURE B.8 – Quelques exemples de déformées calculées avec le système d'équations B.12. La tige a une longueur de 1 m et un diamètre de 4mm. Le graphique est adimensionné par la longueur de la tige.

Annexe C

Propriétés des tiges

Nous présentons ici la méthode utilisée pour mesurer les modules de Young des tiges utilisées dans le chapitre traitant de la flexion fragile.

C.1 Propriétés du bois en général

Fréquences propres

Une tige écartée de sa position d'équilibre se met à osciller, c'est ce que l'on voit sur la série d'images C.1. Cette représentation n'est pas la plus appropriée pour observer les vibrations. Le mieux est de faire un spatio-temporel de la série d'images entière en sélectionnant une ligne de chaque image (la ligne blanche que l'on voit sur la dernière image de la figure C.1) que l'on place les unes à coté des autres. On obtient alors un diagramme spatio-temporel : dans la direction verticale on voit les déplacements dans l'espace de la tige et dans la direction horizontale on voit l'évolution dans le temps. La figure C.2 correspond à un spatio-temporel réalisé à partir de la série d'images que nous venons de présenter. On mesure la fréquence d'oscillation de la tige, en faisant une moyenne sur dix périodes. Ici on mesure une fréquence de 3.6 Hz.

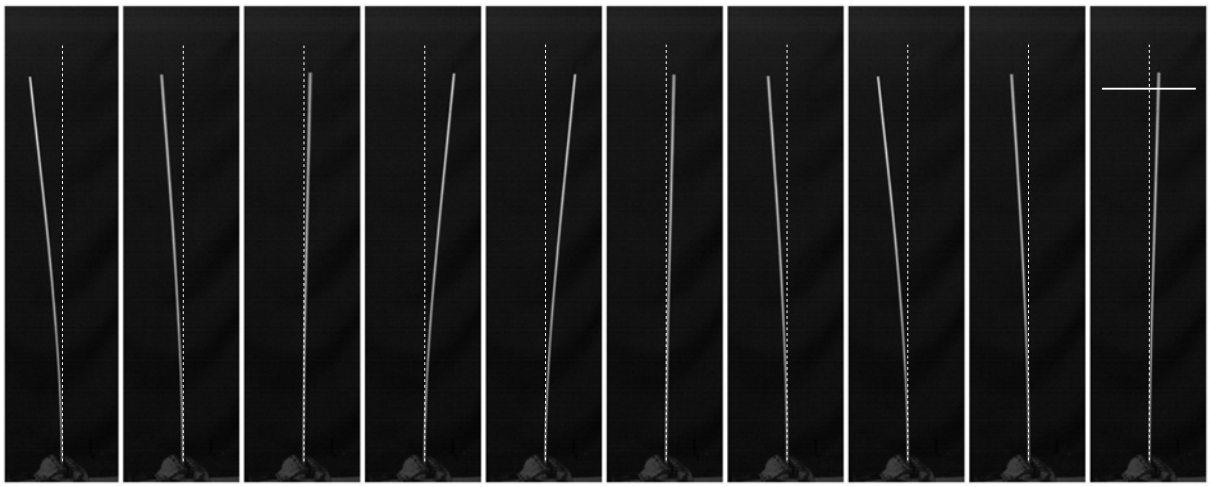


FIGURE C.1 – Série d'images d'une tige de hêtre en oscillation. Sa longueur est de 98.5 cm et son diamètre est de 6 mm. Temps entre chaque image : 40 ms.

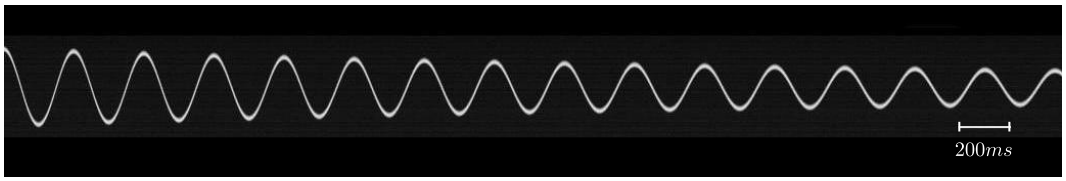


FIGURE C.2 – Un spatio-temporel réalisé à partir de la série d'image présentée à la figure C.1.

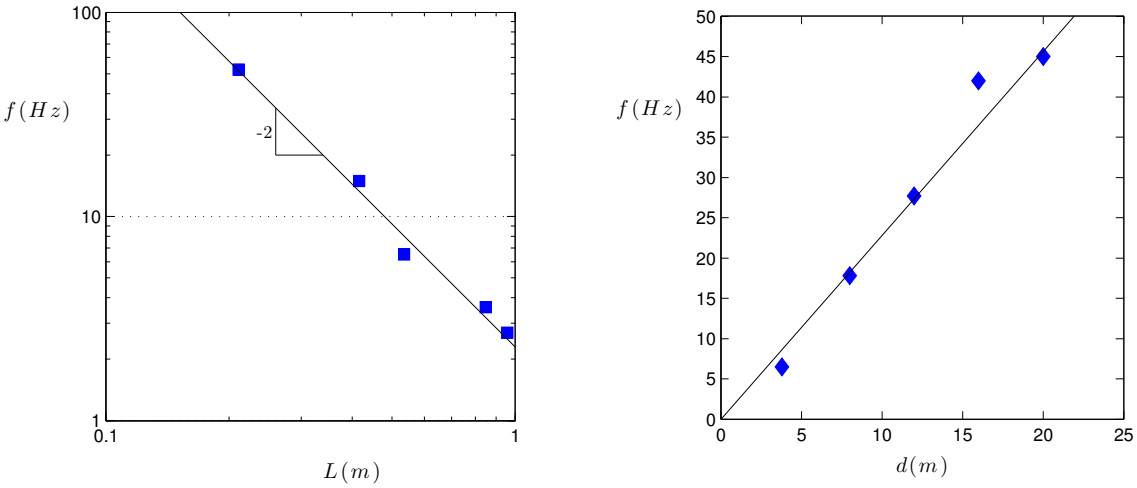


FIGURE C.3 – Variation de la fréquence de vibration des tiges de hêtre. a) avec la longueur, à diamètre fixé à 3.8mm et b) avec le diamètre avec la longueur fixée à 0.5m.

Pour une tige de diamètre fixé, on peut mesurer la variation de la fréquence avec la longueur, ce qui est représenté sur la figure C.3 a) où l'on voit que la fréquence varie en $1/L^2$ et on peut aussi mesurer la variation de la fréquence avec le diamètre, voir la figure C.3 b), la fréquence varie linéairement avec le diamètre.

Ainsi d'une façon générale on a rassemblé sur la figure C.4 un ensemble d'expériences sur des tiges de hêtre de différentes longueurs et diamètres, où on a tracé la fréquence en fonction du rapport d/L^2. Toutes les données se rassemblent sur une même courbe linéaire, validant les dépendances de la fréquence avec la longueur et le diamètre.

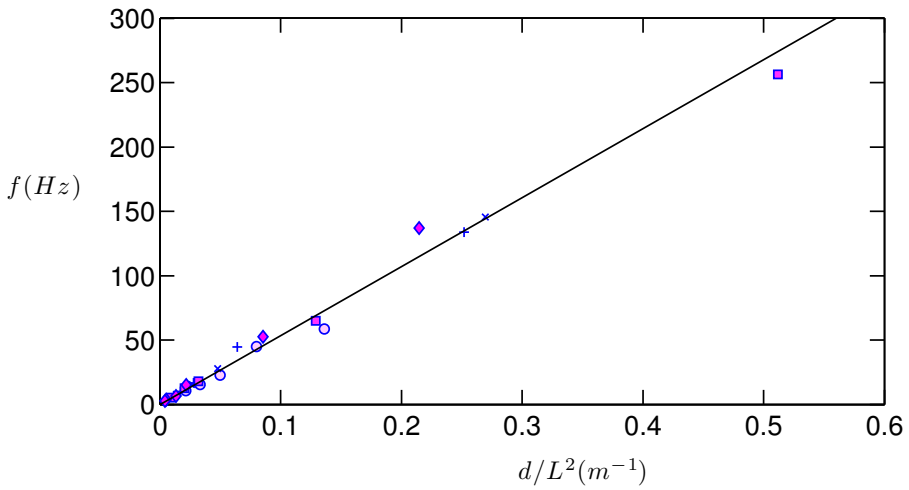


FIGURE C.4 – Variation de la fréquence d'une tige avec sa hauteur et son diamètre. Nous traçons la fréquence de vibration en fonction du rapport d/L^2. Il y a proportionnalité entre la fréquence et ce rapport.

Pour retrouver par le calcul l'expression de la fréquence f de vibration d'une tige on compare l'énergie cinétique $\mathscr{E}_k \sim m(y\omega)^2 \sim \rho L r^2 \frac{L^4}{R^2}\omega^2$ de la tige vibrante à son énergie de courbure $\mathscr{E}_c \sim \frac{EI}{R^2}L \sim \frac{Er^4}{R^2}L$. On obtient :

$$f \sim \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{r}{L^2} \tag{C.1}$$

Le calcul exact (Rocard 1949 [111]) menant à :

$$f \sim \frac{3.515}{4\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{r}{L^2} \tag{C.2}$$

La fréquence est bien dépendante de la géométrie de la tige, mais aussi des caractéristiques du matériau dont elle est constituée : son module de Young et sa masse volumique.

Dans le rapport $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, on reconnaît la vitesse du son dans le matériau. Comme nous travaillons avec le bois, il est intéressant de noter les valeurs de E et ρ pour les différentes essences de bois. La figure C.5 indique les valeurs des modules de Young E et des masses volumiques ρ pour différentes espèces de bois.

Nous traçons aussi sur la figure C.6 la vitesse du son dans le bois pour différentes espèces de bois. Bien que la masse volumique du bois varie de 400 à 1000 kg/m^3 la vitesse du son - soit la racine carrée de E/ρ - dans le bois est constante, proche de 4500 m/s. Cela est dû au fait que toutes les essences de bois sont constituées principalement du même matériau : la cellulose, mais de façon plus ou moins dense.

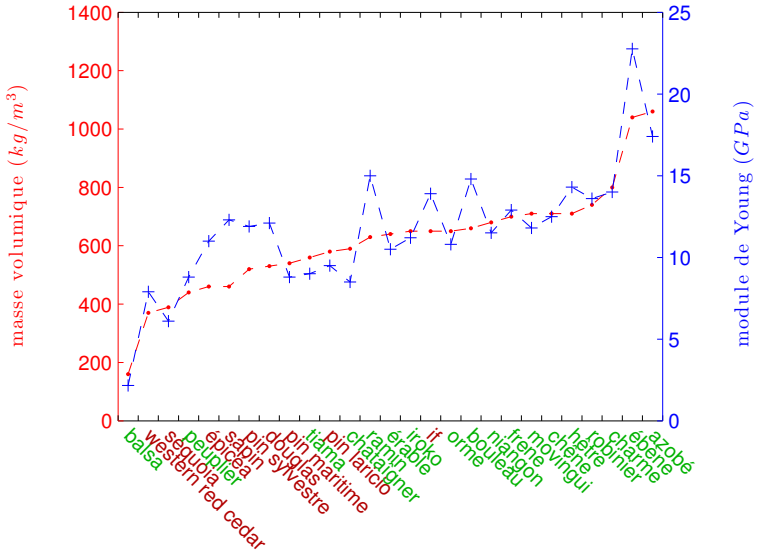


FIGURE C.5 – Différentes valeurs de la masse volumique et du module de Young du bois en fonction des essences. Le module de Young croît avec la densité. Nous avons fait la distinction entre conifères et feuillus, en notant leurs noms respectivement en rouge et en vert.

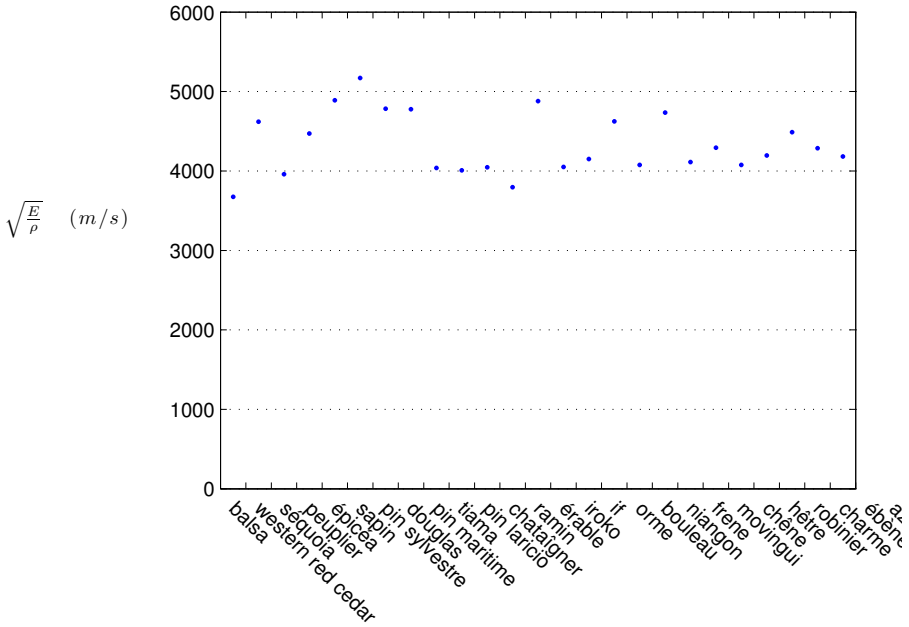


FIGURE C.6 – Vitesse du son dans le bois pour différentes espèces de bois.

Mesures de modules de Young

Lorsque nous avons travaillé sur des tiges de bois, le matériau était un bois séché, destiné à la construction, c'est-à-dire assez éloigné du bois vert qui constitue les arbres sur pied. Il était

nécessaire de mesurer le module de Young des tiges que nous allions utiliser. Nous indiquons ici les modules de Young pour tous les matériaux que nous utiliserons par la suite.

Matériau	hêtre	carbone mines 0.3 à 0.9 mm	carbone mines 2 et 3 mm
E (GPa)	10	73	61

TABLE C.1 – Modules de Young des différents matériaux utilisés pendant la thèse.

Annexe D

Article

Les travaux sur l'ascension capillaire menés durant cette thèse ont conduit à une publication qui est insérée dans les pages ci-dessous.

J. Fluid Mech. (2011), *vol.* 666, *pp.* 146–154. © Cambridge University Press 2011
doi:10.1017/S0022112010005276

A universal law for capillary rise in corners

ALEXANDRE PONOMARENKO, DAVID QUÉRÉ AND CHRISTOPHE CLANET†

PMMH (Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes), UMR7636 du CNRS, ESPCI, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris, and LadHyX, UMR7646 du CNRS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

(Received 30 July 2010; revised 29 September 2010; accepted 29 September 2010)

We study the capillary rise of wetting liquids in the corners of different geometries and show that the meniscus rises without limit following the universal law: $h(t)/a \approx (\gamma t/\eta a)^{1/3}$, where γ and η stand for the surface tension and viscosity of the liquid while $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$ is the capillary length, based on the liquid density ρ and gravity g. This law is universal in the sense that it does not depend on the geometry of the corner.

Key words: capillary flows, porous media

1. Introduction

According to Hardy (1922), the study of surface energies and short-range forces started with Boyle's experiment on capillary rise in 1682 (Boyle 1682). This experiment consists in contacting a wetting liquid with a vertical tube. The liquid spontaneously rises up to a final height h_e, whose value is inversely proportional to the tube radius r ($h_e \sim 1/r$). The interest of physicists, or even physicians, for capillary rise is naively explained in the *Encyclopedia Diderot d'Alembert*, first published in 1751: *The spontaneous rise of water in a capillary tube, which seems to contradict the law of gravitation, deserves our attention. Indeed, the human body is a hydraulic machine where the number of capillary tubes is almost infinite.*

Following more than one century of experiments, the theory of capillary rise was proposed by Laplace (1806), who determined in particular the final height of rise:

$$\frac{h_e}{r} = 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\theta. \tag{1.1}$$

In this expression, $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$ is the capillary length and θ is the contact angle that characterizes the wetting of the liquid on the solid ($\theta = 0$ in the limit of complete wetting). In the expression of the capillary length, γ, ρ, g respectively stand for surface tension, liquid density and gravity. The law (1.1) is often referred to as Jurin's law, following the work of Jurin (1718). It reveals that the capillary rise becomes significant only in tubes of diameter smaller than the capillary length (millimetric). It also predicts a height of 30 km for nanopores ($r = 0.5$ nm). The question of the maximum possible value of h_e has recently been addressed by Caupin *et al.* (2008).

† Email address for correspondence: clanet@ladhyx.polytechnique.fr

It took another century to solve the question of the dynamics $h(t)$ of the rise. The solution was found by Lucas (1918) and independently, in the context of oil extraction, by Washburn (1921). They both showed that for a liquid of viscosity η in a horizontal tube, the meniscus moves according to the law:

$$h(t) = \sqrt{\mathscr{D}t} \quad \text{with} \quad \mathscr{D} = 2\frac{\gamma r \cos\theta}{\eta}. \tag{1.2}$$

For a vertical tube, this law holds in the limit $h \ll h_e$, where gravity can be neglected. The major assumption used in (1.2) is the constancy of the contact angle θ. The studies of dynamical wetting (Hoffman 1974; Tanner 1979; de Gennes 1985) later showed that this is generally not the case, so that the Lucas–Washburn law must be corrected in the first steps of the rise (Siebold 2000; Wolf 2010). Another assumption in this law is that inertia is negligible. When this approximation is not satisfied, Quéré (1997) and Quéré, Raphael & Ollitrault (1999) reported a very different behaviour for the rise, composed of an initial phase of constant velocity followed by oscillations around the equilibrium $h = h_e$. The transition from the viscous to the inertial regime was discussed by Fries & Dreyer (2008).

On the applied side, capillary rise plays a major role in the imbibition of porous media (Kistler 1993; Steen 1996; Lago & Araujo 2001; Marmur 2003). Its main applications are, among others, in soil imbibition (Depountis *et al.* 2001; Ramrez-Flores, Bachmann & Marmur 2010), wicking in textiles (Ferrero 2003), flows in foams (Caps *et al.* 2005) or powders (Galet, Patry & Dodds 2010) and civil engineering materials (Karoglou *et al.* 2005; Hall & Hoff 2007). In all these examples, the geometry of the porous media is far from a collection of cylindrical tubes and the applicability of Jurin's and Lucas–Washburn's laws can be questioned (van Brakel & Heertjes 1975; Lago & Araujo 2001). This led to the study of capillary rise in more complex geometries, such as between cylinders (Princen 1968, 1969), in rectangular tubes (Ramos & Cerro 1994; Weislogel & Lichter 1998; Bico & Qur 2002), or on textured surfaces (Ishino *et al.* 2007). For each of these systems, the wicking process is characterized by well-defined length scales (distance between the cylinders for Princen, or size of the rectangular cavities for examples).

Our aim in this study is to characterize capillary rise in 'open' geometries, which do not impose any length scale. Two of these geometries are sketched in figure 1(a, b). The linear case (figure 1a) has been studied by Higuera, Medina & Linan (2008) in the limit of small angles ($\alpha = 0.75°$). Using the lubrication approximation, these authors found a self-similar solution, with a $t^{1/3}$ time evolution for the liquid front, compatible with the theory of Tang & Tang (1994). After presenting the experimental set-up and results, we will compare the data obtained in linear (figure 1a), quadratic (figure 1b) and cubic corners (figure 4a,b) with the small-angle limit and discuss the general properties of capillary rise in corners.

2. Experimental set-up and protocol

The experimental set-up used to study capillary rise in a quadratic corner is shown in figure 1(c). Two solid rods made of Plexiglas are pressed together by regularly spaced threaded rods. The diameter D of the cylinders is varied from 10 to 30 mm. The wetting liquid is a silicon oil ($\gamma = 20$ mN m^{-1}) of viscosity η between 10 and 1000 mPa s. The liquid is contained in a Petri dish whose vertical position is controlled by a Micro-Controle translation table. This yields a precise and reproducible contact. The capillary rise of the liquid in the corner is observed through the cylinders

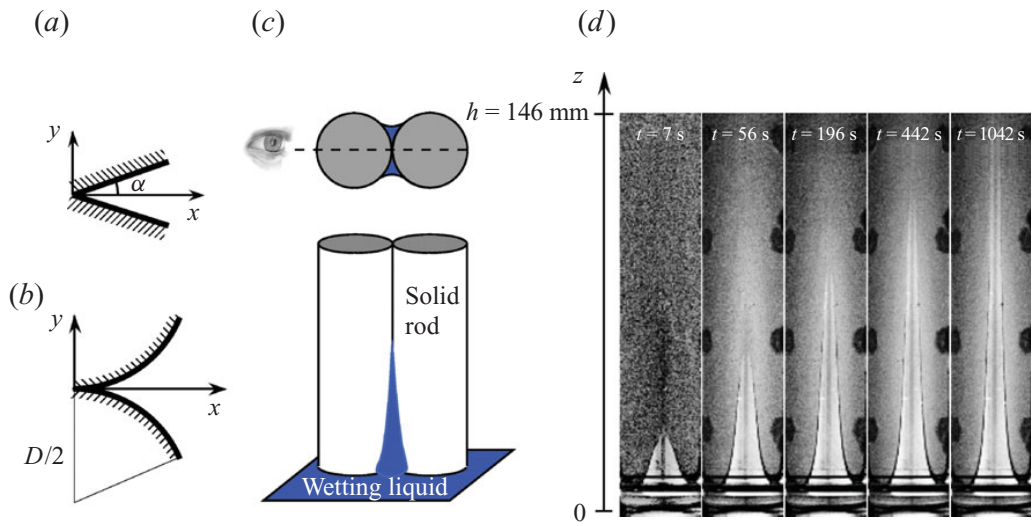


FIGURE 1. (Colour online) (*a*) Linear corner $y = \tan\alpha x$. (*b*) Quadratic corner $y = x^2/D$. (*c*) Sketch of the experiment. (*d*) Typical sequence obtained with solid rods made of Plexiglas (diameter $D = 30$ mm) and brought in contact with a silicone oil V20 ($\eta = 20$mPa s, $\gamma = 20$mN m^{-1}).

(figure 1*c*) via a D300 Nikon programmable camera. The location of the front is determined by subtracting, from each image, the initial unwetted reference frame. An example of the rise is shown in figure 1(*d*), where the wetted region appears in light grey and the determination of the liquid front $h(t)$ does not present any ambiguity. The actual shape of the wetted area is more difficult to extract from these pictures since the observation is made through cylindrical Plexiglas lenses. In this study, we focus on the time evolution $h(t)$ of the liquid height.

3. Experimental results

In the sequence 1(*d*) it can be seen that the front progresses in a strongly nonlinear fashion. It takes 196 s to reach 73 mm and 1042 s to double this distance. More quantitatively, the height $h(t)$ is shown in figure 2. For different cylinder diameters, figure 2(*a*) shows the front dynamics obtained with silicone oil 10 times more viscous than water. After an initial phase of about 10 s, the front progresses as $t^{1/3}$. This evolution does not depend on the rod diameter. For a fixed diameter $D = 30$ mm, the influence of the viscosity on the capillary rise can be seen in figure 2(*b*): the larger the viscosity, the longer the time needed to reach a given height. As an example, it takes 100 s to reach 100 mm with a silicon oil V10, whereas an oil 100 times more viscous reaches the same height in 10^4 s, suggesting a characteristic time of rise proportional to η. For all the viscosities, the rise comprises an initial 'quick' rise followed by a $t^{1/3}$ evolution. The duration of the initial regime also increases with the viscosity.

4. The organ model

Figure 3(*a*) shows a sketch of our model to capture the dynamics of the rise. For a corner of arbitrary shape, we model it as a kind of organ, that is, a collection of juxtaposed tubes of decreasing diameters as they approach the corner. Our main assumptions here are that the motion is mainly vertical and that the curvature imposed by the wall confinement (in the (y, z)-plane) dominates the curvature in the (x, z)-plane, as indicated by the observations of the wetting front (figure 1*d*).

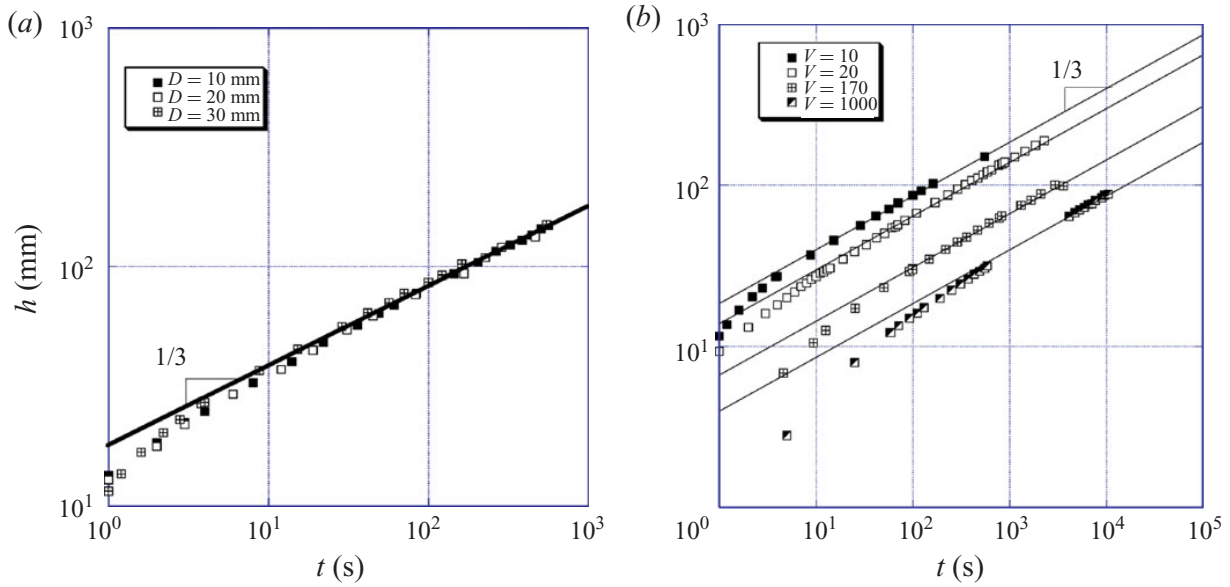


FIGURE 2. (Colour online) Experimental results for the time evolution of the position of the liquid front. (*a*) The wetting liquid is a silicon oil (viscosity $\eta = 10\,\mathrm{mPa\,s}$, surface tension $\gamma = 20\ \mathrm{mN\,m^{-1}}$) and the diameter of the solid rods is changed. (*b*) The diameter of the plain cylinders is kept constant ($D = 30\,\mathrm{mm}$) but the silicon oil viscosity η is varied between 10 and 1000 mPa s. The solid lines indicate the slope 1/3.

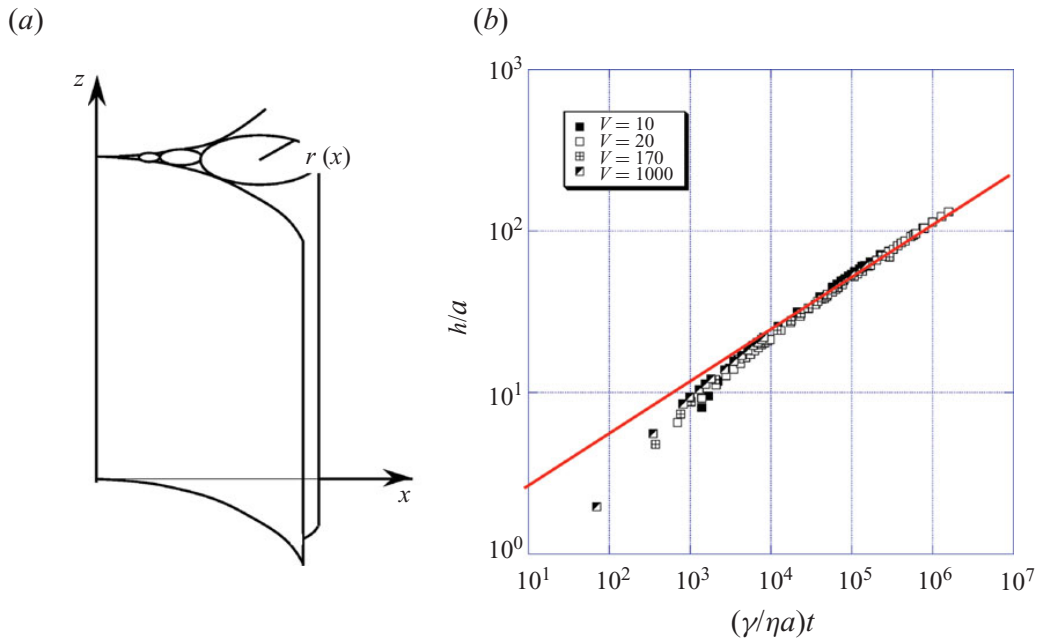


FIGURE 3. (Colour online) (*a*) Presentation of the 'organ' model. (*b*) Evolution of the normalized height h/a as a function of the reduced time $(\gamma/\eta a)t$. The solid line shows the slope 1/3 (4.4).

As the corner contacts the wetting liquid, the rise starts in the collection of juxtaposed tubes and we try to understand the race between the menisci in each tube. By definition, the height of the leader, which is not always in the same tube, is $h(t)$. If $h_r(r, t)$ stands for the location of the front in the tube of radius r at time t, Stokes'

equation can be written in the scaling form:

$$\frac{\gamma}{rh_r} \sim \rho g + \eta \frac{\dot{h}_r}{r^2}. \tag{4.1}$$

Equation (4.1) shows that the driving capillary pressure gradient γ/rh_r is balanced by both the force of gravity ρg, and the viscous friction based on the velocity of the front $\dot{h}_r$. This classical equation can be integrated as

$$h_r(r,t) \sim \sqrt{\frac{2\gamma r}{\eta}t} - \frac{\rho g r^2}{\eta}t. \tag{4.2}$$

At short times, gravity can be neglected and we recover the Lucas–Washburn behaviour. More generally, (4.2) provides the radius r_L of the leading meniscus, deduced from the condition $(\partial h_r/\partial r)_{r=r_L} = 0$. Hence, we find

$$r_L \sim \left(\frac{1}{8}\frac{\eta\gamma}{\rho^2 g^2 t}\right)^{1/3}. \tag{4.3}$$

The position of the front thus approaches the corner as $1/t^{1/3}$. Since our definition of $h(t)$ is $h_r(r_L, t)$, we can deduce from (4.2) and (4.3) the dynamics of the capillary rise:

$$h(t) \sim \left(\frac{\gamma^2 t}{\eta\rho g}\right)^{1/3}. \tag{4.4}$$

This scaling law is in good agreement with the experimental observations reported in figure 2. The capillary rise does not depend on the rod diameter D. Moreover, the time needed to reach a fixed height is proportional to the viscosity. Finally, the model predicts the $t^{1/3}$ behaviour observed at long times. Rewriting (4.4) as $h/a \sim (\gamma t/\eta a)^{1/3}$, we show in figure 3($b$) the collection of our experimental results. All the data collapse on a single curve, even in the initial phase, and they follow the $t^{1/3}$ law at long times ($\gamma t/\eta a > 10^3$). The short-time regime can be associated with the meniscus onset. Our model assumes that the contact angle between the liquid and the wall is $\theta = 0$, fixed by the wetting condition. However, this condition is not fulfilled at $t = 0$ since the liquid is initially horizontal, so the contact angle is $\pi/2$. According to Clanet & Quéré (2002), it takes a time $\tau_m \approx 10^2$–10^3 $\eta a/\gamma$ to establish the condition $\theta = 0$. This time is compatible with the observations in figure 3(b). Since it also varies as $\eta a/\gamma$, we understand that the data also collapse in this initial phase.

5. A universal law

The law of rise (4.4) is derived without needing the relation $r(x)$ between the tube radius and the distance from the corner. In other words, (4.4) is independent of the actual shape of the corner. To check this strong prediction, we tested three types of corners, namely linear, quadratic and cubic. The linear-type (figure 1a) consists of the intersection of two rigid planes with an opening angle 2α. The distance between the two planes is thus described by $y = \tan\alpha\ x$. We worked with $\alpha = 2.5°$ and $\alpha = 6.5°$ and compared our results with those of Higuera *et al.* (2008), obtained in a more confined geometry ($\alpha = 0.75°$). The quadratic type of equation $y = x^2/D$ is used in figures 1(b–d), 2 and 3. Finally, cubic corners were obtained by pressing two elastic sheets against a solid plane (figure 4a (top view) and figure 4b (side view)). Then, the distance between the elastic walls follows the law $y \approx x^3/L^2$, where L is the length of the sheet.

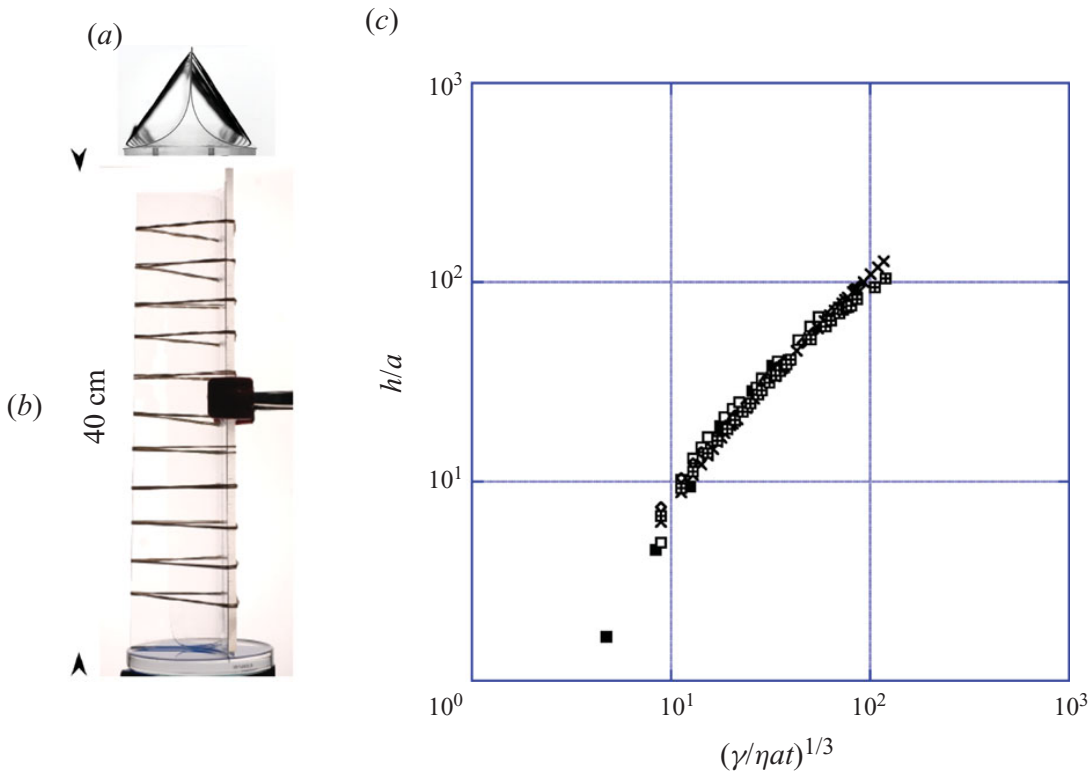


FIGURE 4. (Colour online) (*a*) Top view of a cubic corner of equation $y \simeq x^3/L^2$ created by the compression of elastic mylar sheets. (*b*) Side view of the corner. The horizontal lines are rubber bands that hold the structure. (*c*) Evolution of the reduced height h/a as a function of $(\gamma/\eta a t)^{1/3}$ for different corners: (i) linear ($y = \tan\alpha\, x$): ■ data from Higuera *et al.* (2008) ($\alpha = 0.75°$ and silicon oil V460) □ $\alpha = 2.5°$ with a silicon oil V20, ◇ $\alpha = 6.5°$ with a silicon oil V20; (ii) quadratic ($y = x^2/D$): $\times D = 30$ mm with a silicon oil V20; (iii) cubic ($y \simeq x^3/L^2$): ⊞ $L = 6$ cm with a silicon oil V20.

These different corners are brought into contact with a silicone oil V20, and the reduced height $h(t)/a$ is measured and plotted in figure 4(*c*) as a function of the non-dimensional time $\gamma\ t/\eta a$. The rise is independent of the corner geometry. Equation (4.4) indeed describes the whole family of rises. Note that the numerical coefficient is found to be of order one.

6. Implications for porous media

In complex geometries such as encountered in porous media, one expects to find both closed vessels leading to the Washburn $t^{1/2}$ law, and corners leading to the $t^{1/3}$ law. In this section, we present a device in which these two dynamics appear simultaneously and we discuss their coexistence.

A top view of the channel designed for this experiment is shown in figure 5(*a*). Two elastic sheets (dark grey regions) are clamped together on one side (A) and are pressed against a rigid plate (B) on the other side. This builds up a complex channel (shown in black), in which one finds three corners and a confined region of submillimetric size. Once put vertically in contact with a wetting liquid (again, a silicone oil V20), the rise starts both in the centre of the channel and in the corners. The location of the liquid in the main channel is shown in figure 5(*b*) by solid squares, while open squares indicate the location of the front in one of the corners. In addition, the horizontal crosses show the position of the front in a quadratic corner obtained with solid rods ($D = 30$ mm) with the same silicone oil. It is observed that both capillary rises occur

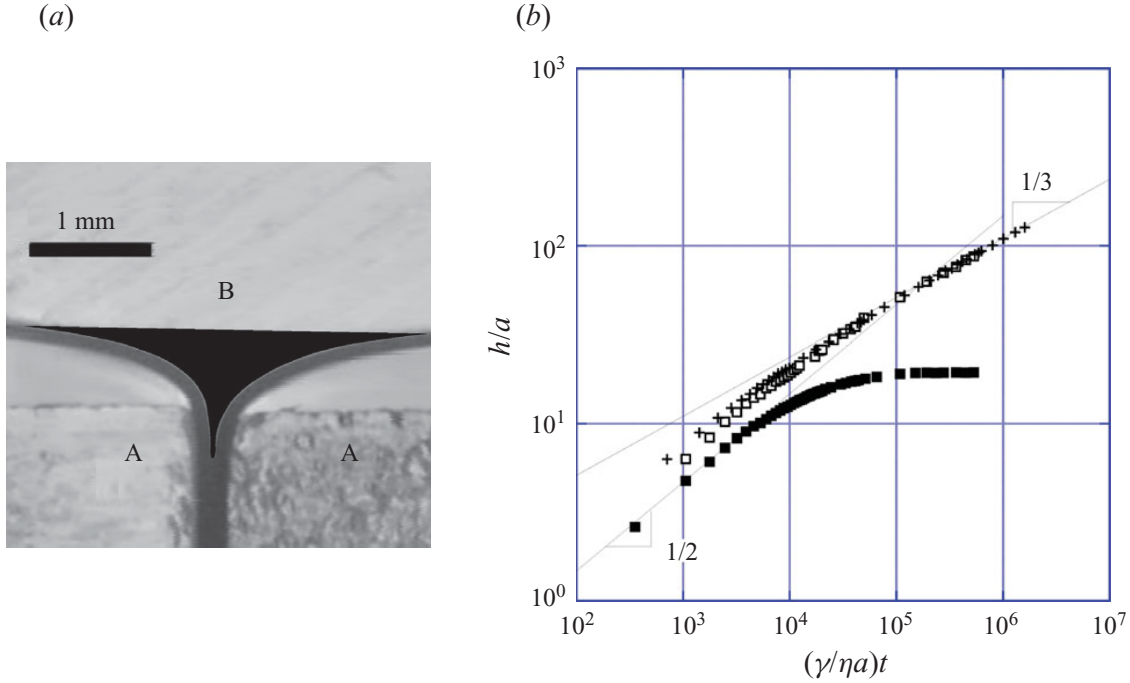


FIGURE 5. (*a*) Device used to study the capillary rise in a complex submillimetric geometry, where a central channel coexists with three corners (black region). (*b*) Location of the liquid front in the centre of the channel (■) and the corner (□). In addition, we show the liquid front in a free quadratic corner (+), with $D = 30$ mm and the same silicone oil V20.

independently of each other. The front in the corner is always the leading front, and apart from the very early stage, it superimposes with the data for an open corner, showing that the filling of the channel does not impact the $t^{1/3}$ dynamics. Conversely, the channel follows the classical Lucas–Washburn law before stopping at a height $h_e \approx 20a$.

One can propose an argument to understand that these features are general and why, in particular, the $t^{1/2}$ law cannot cross the $t^{1/3}$ law at long times. Inside a tube of radius r, the wetting liquid moves as $h = \sqrt{\mathscr{D}t}$. Extrapolating the Lucas–Washburn law up to $h = h_e$ enables evaluation of the characteristic time of the rise: $t_e \sim \eta a^4/\gamma r^3$. On the other hand, the time for which we expect a crossover between the two dynamics can be deduced from matching (1.2) and (4.4). We find the same time t_e, which implies that a Lucas–Washburn front will experience gravity (and stop) before catching up the meniscus in the corner.

7. Conclusion

We have studied the capillary rise of wetting liquids in corners. Using different geometries (linear, quadratic and cubic), we showed that the meniscus rises indefinitely (without saturation), following a universal $t^{1/3}$ law. This result contrasts with most wicking dynamics. The Lucas–Washburn law ($t^{1/2}$), initially derived and observed in a capillary tube, still holds in much more complex geometries (paper, fabric, sand and rough solids). Hence, for each of these geometries, an equivalent radius r can be deduced, which characterizes the wickability of the material. Conversely, there is no such length in a corner which was found to dramatically affect the rise. The absence of characteristic length is also at the origin of the independence of the $t^{1/3}$ law on the corner geometry.

The possible application of this work to capillary rise in trees was discussed with Noel Michele Holbrook during a summer school and with Hervé Cochard at INRA during a seminar. Both discussions were fruitful and have led to ongoing experiments on capillary rise in real stems. May both of them find here the expression of our sincere gratitude.

REFERENCES

Bico, J. & Qur, D. 2002 Rise of liquids and bubbles in angular capillary tubes. *J. Colloid Interface Sci.* **247**, 162–166.

Boyle 1682 *New Experiments Physico-Mechanical Touching the Spring of the Air and Its Effects.* Oxford H. Hall.

van Brakel, J. & Heertjes, P. M. 1975 Capillary rise in porous media. *Nature* **254**, 585–586.

Caps, H., Cox, S. J., Decauwer, H., Weaire, D. & Vandewalle, N. 2005 Capillary rise in foams under microgravity. *Colloids Surf. Physicochem. Engng Asp.* **261**, 131–134.

Caupin, F., Cole, M., Balibar, S. & Treiner, J. 2008 Absolute limit for the capillary rise of a fluid. *EPL* **82**, 56004.

Clanet, C. & Quéré, D. 2002 Onset of menisci. *J. Fluid Mech.* **460**, 131–149.

Depountis, N., Davies, M. C. R., Harris, C., Burkhart, S., Thorel, L., Rezzoug, A., Knig, D., Merrifield, C. & Craig, W. H. 2001 Centrifuge modelling of capillary rise. *Engng Geol.* **60**, 95–106.

Ferrero, F. 2003 Wettability measurements on plasma treated synthetic fabrics by capillary rise method. *Polym. Test.* **22**, 571–578.

Fries, N. & Dreyer, M. 2008 The transition from inertial to viscous flow in capillary rise. *J. Colloid Interface Sci.* **327**, 125–128.

Galet, L., Patry, S. & Dodds, J. 2010 Determination of the wettability of powders by the Washburn capillary rise method with bed preparation by a centrifugal packing technique. *J. Colloid Interface Sci.* **346**, 470–475.

de Gennes, P. G. 1985 Wetting: statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys.* **57**, 827–863.

Hall, C. & Hoff, W. 2007 Rising damp: capillary rise dynamics in walls. *Proc. R. Soc.* A **463**, 1871–1884.

Hardy, W. B. 1922 Historical notes upon surface energy and forces of short range. *Nature* **109**, 375–378.

Higuera, F. J., Medina, A. & Linan, A. 2008 Capillary rise of a liquid between two vertical plates making a small angle. *Phys. Fluids* **20**, 102102.

Hoffman, R. L. 1974 A study of the advancing interface. *J. Colloid Interface Sci.* **50**, 228–241.

Ishino, C., Reyssat, M., Reyssat, E., Okumura, K. & Quéré, D. 2007 Wicking within forest of micro-pillars. *EPL* **79**, 56005.

Jurin, J. 1718 An account of some experiments shown before the Royal Society; with an enquiry into the cause of the ascent and suspension of water in capillary tubes. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **30**, 739–747.

Karoglou, M., Moropoulou, A., Giakoumaki, A. & Krokida, M. K. 2005 Capillary rise kinetics of some building materials. *J. Colloid Interface Sci.* **284**, 260–264.

Kistler, F. 1993 Hydrodynamics of wetting. *Wettability, Surfactant Science Series* (ed. J. C. Berg), vol. 49. Dekker.

Lago, M. & Araujo, M. 2001 Capillary rise in porous media. *J. Colloid Interface Sci.* **234**, 35–43.

Laplace, P. S. 1878 *Traité de mécanique céleste.* Bachelier Librairie Paris.

Lucas, R. 1918 Rate of capillary ascension of liquids. *Kolloid Z.* **23**, 15.

Marmur, A. 2003 Kinetics of penetration into uniform porous media: testing the equivalent-capillary concept. *Langmuir* **19**, 5956–5959.

Princen, H. M. 1968 Capillary phenomena in assemblies of parallel cylinders. *J. Colloid Interface Sci.* **30**, 69–75.

Princen, H. M. 1969 Capillary phenomena in assemblies of parallel cylinders. *J. Colloid Interface Sci.* **30**, 359–371.

Quéré, D. 1997 Inertial capillarity. *Europhys. Lett.* **39**, 533–538.

Quéré, D., Raphael, E. & Ollitrault, J.-Y. 1999 Rebounds in a capillary tube. *Langmuir* **15**, 3679–3682.

Ramos, A. L. de & Cerro, R. L. 1994 Liquid filament rise in corners of square capillaries: a novel method for the measurement of small contact angles. *Chem. Engng Sci.* **49**, 2395.

Ramrez-Flores, J. C., Bachmann, J. & Marmur, A. 2010 Direct determination of contact angles of model soils in comparison with wettability characterization by capillary rise. *J. Hydrol.* **382**, 10–19.

Siebold, A., Nardin, M., Schultz, J., Walliser, A. & Oppliger, M. 2000 Effect of dynamic contact angle on capillary rise phenomena. *Colloids Surfaces* A **161**, 81–87.

Steen, P. H. 1996 Capillarity and interfacial phenomena, wetting and spreading. In *Research Trends in Fluid Mechanics* (ed. J. L. Lumley, A. Acrivos, L. G. Leal & S. Leibovich), vol. 48. AIP.

Tang, L. H. & Tang, Y. 1994 Capiflary rise in tubes with sharp grooves. *J. Phys.* II **4**, 881–890.

Tanner, L. 1979 The spreading of silicone oil drops on horizontal surfaces. *J. Phys.* D. *Appl. Phys.* **12**, 1473–1484.

Washburn, E. W. 1921 The dynamics of capillary flow. *Phys. Rev.* **17**, 273–283.

Weislogel, M. M. & Lichter, S. 1998 Capillary flow in an interior corner. *J. Fluid Mech.* **373**, 349–378.

Wolf, F. G., dos Santos, L. O. E. & Philippi, P. C. 2010 Capillary rise between parallel plates under dynamic conditions. *J. Colloid Interface Sci.* **344**, 171–179.

Bibliographie

[1] d'A. W. Thompson. *On Growth and Form*. Cambridge University Press, 1917.

[2] J. Jurin. An account of some experiments shown before the royal society ; with an enquiry into the cause of the ascent ans suspension of water in capillary tubes. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.*, 30 :739–747, 1718.

[3] T. Young. An essay on the cohesion of fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 95 :65–87, 1805.

[4] *Encyclopédie Diderot d'Alembert*. Diderot and d'Alembert, 1751-1772.

[5] J.-L.-M. Poiseuille. Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres. 1846.

[6] E.-J. Marey. Études pratiques sur la marche de l'homme. expériences faites à la station physiologique du parc des princes. *La Nature*, 608, janvier 1885.

[7] M. J. Lighthill. *Mathematical Biofluiddynamics*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial Mathematics., 1987.

[8] V. Duclaux. *Occlusions pulmonaires, Entropion oculaire et Anévrismes : une approche physique en physiologie*. PhD thesis, Université de Provence - Aix Marseilles I, Novembre 2006.

[9] T. R. Strick, J.-F. Allemand, D. Bensimon, A. Bensimon, and V. Croquette. The elasticity of a single supercoiled dna molecule. *Science*, 271 :1835–1837, Mars 1996.

[10] A. M. Forsyth, J. D. Wan, W. D. Ristenpart, and H. A. Stone. The dynamic behavior of chemically "stiffened" red blood cells in microchannel flows. *Microvascular Research*, 80(1) :37–43, 2010.

[11] D. Barthès-Biesel, A. Diaz, and E. Dhenin. Effect of constitutive laws for two-dimensional membranes on flow-induced capsule deformation. *Journal of Fluid Mechanics*, 460 :211–222, 2002.

[12] A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 237 :37–72, 1952.

[13] M. Ben Amar and P. Ciarletta. Swelling instability of surface-attached gels as a model of soft tissue growth under geometric constraints. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(7) :935–954, 2010.

[14] E. Sultan and A. Boudaoud. The buckling of a swollen thin gel layer bound to a compliant substrate. *Journal of Applied Mechanics*, 75(051002) :1–5, 2008.

[15] E. Cerda and L. Mahadevan. Geometry and physics of wrinkling. *Physical Review Letters*, 90(7) :074302–1–4, 2003.

[16] J. Sueur, J. F. C. Windmill, and D. Robert. Tuning the drum : the mechanical basis for frequency discrimination in a mediterranean cicada. *The Journal of Experimental Biology*, 209 :4115–4128, 2006.

[17] C. Marais, R. Godoy-Diana, D. Barkley, and J. E. Wesfreid. Convective instability in inhomogeneous media : Impulse response in the subcritical cylinder wake. *Physics of Fluids*, 23(1) :014104–1–7, 2011.

[18] L. Frantsevich, Z. Dai, W. Y. Wang, and Y. Zhang. Geometry of elytra opening and closing in some beetles (coleoptera, polyphaga). *The Journal of Experimental Biology*, 208 :3145–3158, 2005.

[19] S. M. Swartz, K. M. Middleton, J. Iriate-Diaz, M. Lee, J. M. Wofford, K. S. Breuer, and D. A. Ritter. Can bats actively control the mechanical properties of the wing membrane ? *Integrative and Comparative Biology*, Janvier 2005.

[20] S. Ramananarivo, R. Godoy-Diana, and B. Thiria. Rather than resonance, flapping wing flyers may play on aerodynamics to improve performance. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(15) :5964–5969, Avril 2011.

[21] M. Burrows and O. Morris. Jumping and kicking in bush crickets. *The Journal of Experimental Biology*, 206 :1035–1049, 2003.

[22] J. Krause, D. J. Hoare, D. Croft, J. Lawrence, A. Ward, G. D. Ruxton, J.-G. J. Godin, and R. James. Fish shoal composition : mechanisms and constraints. *Proceedings of the Royal Society of London B*, 267 :2011–2017, Juillet 2000.

[23] F. Ginelli and H. Chaté. Relevance of metric-free interactions in flocking. *Physical Review Letters*, 105 :168103–1–4, 2010.

[24] W. Hofmeister, J. Sachs, and A. de Bary. *Handbuch der Physiologischen Botanik*. Engelmann, 1867.

[25] D. Reinhardt, E.-R. Pesce, P. Stieger, T. Mandel, K. Baltensperger, M. Bennett, J. Traas, J. Friml, and C. Kuhlemeier. Regulation of phyllotaxis by polar auxin transport. *Nature*, 426 :255–260, Novembre 2003.

[26] S. Douady and Y. Couder. Phyllotaxis as a dynamical self organizing process. *Journal of theorical Biology*, 178 :255–274, 1996.

[27] F. Corson, M. Adda-Bedia, and A. Boudaoud. In silico leaf venation networks : Growth and reorganisation driven by mechanical forces. *Journal of theorical Biology*, 259 :440–448, 2009.

[28] M. A. Zwieniecki, H. A. Stone, A. Leigh, C. K. Boyce, and N. M. Holbrook. Hydraulic design of pine needles : one-dimensional optimization for single-vein leaves. *Plant Cell and Environment*, 29(5) :803–809, 2006.

[29] X. Noblin, L. Mahadevan, I. A. Coomaraswamy, D. A. Weitz, and N. M. Holbrook. Optimal vein density in artificial and real leaves. *Proceedings of th National Academy of Sciences*, 105(27) :9140–9144, Juillet 2008.

[30] T. D. Wheeler and A. Stroock. The transpiration of water at negative pressures in a synthetic tree. *Nature*, 455 :208–212, Septembre 2008.

[31] O. Vincent, P. Marmottant, P. A. Quinto-Su, and C.-D. Ohl. Birth and growth of cavitation bubbles within water under tension using a simple synthetic tree. 2012.

[32] M. Marder, E. Sharon, S. Smith, and B. Roman. Theory of edges of leaves. *Europhysics Letters*, 62(4) :498–504, Mai 2003.

[33] B. Moulia. Leaves as shell structures : Double curvature, auto-stresses, and minimal mechanical energy constraints on leaf rolling in grasses. *Journal of Plant Growth Regulation*, 19 :19–30, 2000.

[34] E. Couturier. *Pli et forme des feuilles*. PhD thesis, Université Paris Diderot (Paris 7), 2009.

[35] O. Vincent, C. Weißkopf, S. Poppinga, T. Masselter, T. Speck, M. Joyeux, C. Quilliet, and P. Marmottant. Ultra-fast underwater suction traps. *Proceedings of the Royal Society B : Biological Sciences*, 2011.

[36] M. Colombani and Y. Forterre. Biomechanics of rapid movements in plants : poroelastic measurements at the cell scale. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 14 :115–117, 2011.

[37] J. Dumais and Y. Forterre. Vegetable dynamicks : The role of water in plant movements. *Annual Reviews of Fluid Dynamics*, 44 :453–478, 2012.

[38] A. G. Greenhill. On height consistent with stability. *ProceeProceedings of the Cambridge philosophical society, Cambridge*, 1881.

[39] A. McMahon and J. T. Bonner. *On size and life*. Scientific American Library, Freeman and Co., New York, 1983.

[40] R. Bastien. *Formes et mouvements gravitropiques des tiges végétales*. PhD thesis, Université Paris Diderot (Paris 7), 2010.

[41] B. Moulia and D. Combes. Thigmomorphogenetic acclimation of plants to moderate winds greatly affects height structure in field-gown alfalfa (medicago sativa l.), an indeterminate herb. *Comparative Biochemistry and Physiology Part A : Molecular & Integrative Physiology*, 137(77), 2004.

[42] M. Rodriguez, E. de Langre, and B. Moulia. A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization. *American Journal of Botany*, 95(12) :1523–1537, 2008.

[43] E. de Langre. Effects of wind on plants. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 40 :141–168, Janvier 2008.

[44] N. M. Holbrook and F.E. Putz. Influence of neighbours on tree form : effects of lateral shade and prevention of sway on the allometry of liquidambar styraciflua. *American Journal of Botany*, 76(12) :239–243, 1989.

[45] D. P. Aikman and L. R. Benjamin. A model for plant and crop growth, allowing for competition for light by the use of potential and restricted projected crown zone areas. *Annals of Botany*, 73 :185–194, 1994.

[46] M. P. Coutts and J. Grace, editors. *Wind and trees*. Cambridge University Press, 1995.

[47] Boyle. New experiments physico-mechanical touching the spring of the air and its effects. *Oxford H. Hall*, 1682.

[48] P. S. Laplace. *Traité de mécanique céleste*. Bachelier Librairie Paris, 1878.

[49] R. Lucas. Rate of capillary ascension of liquids. *Kolloid Z.*, 23(15), 1918.

[50] E. W. Washburn. The dynamics of capillary flow. *Physical Review*, 17 :273–283, March 1921.

[51] M. LeMerrer. *Dissipation aux interfaces : caléfaction, sillages, filaments visqueux*. PhD thesis, Écle Polytechnique, 2010.

[52] R. Hooke. Lectures de potentia reftitutiva or of spring axplaining the power of springing bodies. *Royal Society*, pages 1–64, 1678.

[53] M. T. Tyree and M. H. Zimmermann. *Xylem structure and the ascent of sap*. Springer Series in Wood Science, 2001.

[54] M. F. Ashby. *Choix des matériaux en construction mécanique*. Dunod, 2000.

[55] L. Landau, E. Lifchitz, and A. Kosevich. *Physique théorique : théorie de l'élasticité*, volume 7. Mir, 1990.

[56] G. Galilée. Discours concernant deux sciences nouvelles. 1638.

[57] J. Bernoulli. Quadratura curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura. *Birkhäuser*, pages 223–227, 1692.

[58] L. Euler. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, additamentum i, de curvis elasticis, lausanne et genève. 1744.

[59] H. H. Dixon and J. Joly. On the ascent of sap. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B*, 186 :563–576, 1895.

[60] U. Zimmermann, H. Schneider, L. H. Wegner, and A. Haase. Water ascent in tall trees : does evolution of land plants rely on a highly metastable state ? *New Phytologist*, 162 :575–615, 2004.

[61] U. Zimmermann, H.-J. Wagner, H. Schneider, M. Rokitta, A. Haase, and F.-W. Bentrup. Water ascent in plants : the ongoing debate. *Trends in plant science*, 5(4) :245–146, Avril 2000.

[62] H. Cochard. *De l'architecture hydraulique du xylème et de son apport à la compréhension des relations hydriques dans la plante*. Hdr, INRA, Centre de recheche Clermont-Ferrand Theix, 2002.

[63] N. M. Holbrook and M. A. Zwieniecki. Embolism repair and xylem tension : do we need a miracle ? *Plant Physiology*, 120 :7–10, 1999.

[64] B. Taylor. Ascent of water between two glass planes. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 27 :538, Juin 1712.

[65] F. R. S. Hauksbee. An account of an experiment touching the ascent of water between two glass planes, in an hyperbolick figure. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 27 :539–540, Juin 1712.

[66] P. Concus and R. Finn. On the behavior of a capillary surface in a wedge. *Applied Mathematical Sciences*, 63 :292–299, Janvier 1969.

[67] L. H. Tang and Y. Tang. Capillary rise in tubes with sharp grooves. *Journal de Physique II France*, 4 :881–890, Mai 1994.

[68] F. J. Higuiera, A. Medina, and A. Liñan. Capillary rise of a liquid between two vertical plates making a small angle. *Physics of Fluids*, 20 :1–7, Octobre 2008.

[69] C. Clanet and D. Quéré. Onset of menisci. *Journal of Fluid Mechanics*, 460 :131–149, 2002.

[70] M. M. Kohonen. Engineered wettability in tree capillaries. *Langmuir*, 22 :3148–3153, 2006.

[71] J. Finnigan. Turbulence in plant canopies. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 :519–571, 2000.

[72] C. Py, E. de Langre, and B. Moulia. A frequency lock-in mechanism in the interaction between wind and crop canopies. *Journal of Fluid Mechanics*, 568 :425–449, May 2006.

[73] P. Berry, J. Spink, R. Sylvester-Bradley, A. Pickett, M. Sterling, C. Baker, and N. Cameron. Lodging control through variety choice and management. In *Proceedings of the 8th Home-Grown Cereals Association R & D Conference on Cereals and Oilseeds*, pages 7.1–7.12, London, 2002. HGCA.

[74] F. Guinot. *Déploiement régulé de structures spatiales : vers un modèle unidimensionnel de mètre ruban compisite*. PhD thesis, Université de Provence - Aix Marseilles I, 2011.

[75] F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, and L. Blanchard. A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. application to the folding of tape springs. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1) :73–86, 2012.

[76] T. Schioler and S. Pellegrino. Space frames with multiple stable configurations. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 45(7) :1740–1747, Juillet 2007.

[77] G. Gioia, Y. Wang, and A. M. Cuitiño. The energetics of heterogeneous deformation in open-cell solid foams. *Proceedings of the Royal Society A*, 457 :1079–1096, 2001.

[78] Y. G. Panovko and I. I. Gubanova. *Stability and oscillation of elastic systems : modern concepts, paradoxes and errors*. National aeronautics and space administration, 1972.

[79] E. Chater and J. W. Hutchinson. Mechanical analogs of coexistent phases. *Phase*.

[80] Sabic Innovative Plastics. http ://www.sabic-ip.com.

[81] F. P. J. Rimrott. Querschnittsverformung bei torsion offener profile. *ZAMM*, 50 :775–778, 1970.

[82] J. D. van der Waals. *Over de continuiteit van den gas en vloeistoftiestand*. PhD thesis, University of Leiden, 1873.

[83] J. C. Maxwell. On the dynamical evidence of the molecular constitution of bodies. *Nature*, 11 :357–359, 374–377, 1875.

[84] H. Vandeparre, M. Piñeirua, F. Brau, B. Roman, J. Bico, C. Gay, W. Bao, C. Ning Lau, P. M. Reis, and P. Damman. Wrinkling hierarchy in constrained thin sheets from suspended graphene to curtains. *Physical Review Letters*, 106(22) :1–4, Juin 2011.

[85] T. Cambau, J. Bico, and E. Reyssat. Capillary rise between flexible walls. *Euro Physical Letters*, 96(24) :1–6, Octobre 2011.

[86] J. C. Dupont. SIRTA. jean-charles.dupont@ipsl.polytechnique.fr.

[87] P. W. Heisey, P. Aquino, V. Hernandez, and E. Rice. "part 2 : The current world wheat situation,". *CIMMYT 1995/96 World Wheat Facts and Trends, Mexico, D.F. : CIMMYT*, 1996.

[88] P. M. Berry, M. Sterling, J. H. Spink, C. J. Baker, R. Sylvester-Bradley, S. J. Mooney, A. R. Tams, and A. R. Ennos. Understanding and reducing lodging in cereals. *Advances in Agronomy*, 84 :217–271, 2004.

[89] L. G. Brazier. On the flexure of thin cylindrical shells and other "thin" sections. *Proceedings of the Royal Society A*, 116 :104–114, 1927.

[90] M. J. Crook and A. R. Ennos. The mechanics of root lodging in winter wheat, triticum aestivum l. *Journal of Experimental Botany*, 44(265) :1219–1224, 1993.

[91] M. Neenan and J. L. Spencer-Smith. An analysis of the problem of lodging with particular reference to wheat and barley. *The Journal of agricultural science*, 85 :495–507, 1975.

[92] H. A. Al-Qureshi. Elastic-plastic analysis of tube bending. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 39 :87–104, 1999.

[93] IFN. Cartographie des dégâts de la tempête klaus, http ://www.ifn.fr/spip/spip.php ?article613.

[94] Y. Birot. Tempêtes et forêts : perturbations, catatrophes ou opportunités ? *Annales des Mines*, pages 96–102, Aout 2002.

[95] J. P. Nicolas. Les conséquences de la tempête du 24 janvier 2009 dans le sud-ouest. Rapport d'information 1836, Commision des affaires économiques, Juillet 2009.

[96] V. Albouy. La seconde vie du bois mort. *Insectes*, 1(128) :3–4, 2003.

[97] R. Bütler. Les vieux arbres et le bois mort. *La forêt*, 1 :10–13, 2006.

[98] N. M. Holbrook and F. E. Putz. Vegetative seaward expansion of *Sonneratia alba* in a malaysian mangrove forest. *The Malayan Forester*, 45(2) :278–281, 1982.

[99] P. Blanc. *Être plante à l'ombre des forêts tropicales*. Nathan/Yves Rocher, Paris, 2002.

[100] R. M. Lanner. Why do trees live so long ? *Ageing Research Reviews*, 1 :653–671, 2002.

[101] F. Colin and P. Riou-Nivert. Relations entre résistance au vent, descripteurs du peuplement et sylviculture. *Innovations Agronomiques*, 6 :39–49, 2009.

[102] J. E. Gordon. *The New Science of Strong Materials or Why You Don't Fall Through the Floor, Second edition*. Penguin Group, 1976.

[103] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 221 :163–198, 1921.

[104] C. E. Inglis. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Institution of the Naval Architects*, 44 :219–241, Mars 1913.

[105] G. Pluvinage. *La Rupture de Bois et des Composites*. Cépaduès Editions, 1992.

[106] P. Bompard. *Mécanique de la Rupture*. Cours de 3ème année de l'Ecole Centrale Paris, 2011.

[107] S. Vogel. Drag and reconfiguration of broad leaves in high winds. *Journal of Experimental Botany*, 40 :941–948, 1989.

[108] F. Gosselin, E. de Langre, and B. A. Machado-Almeida. Drag reduction of flexible plates by reconfiguration. *Journal of Fluid Mechanics*, 650 :319–341, 2010.

[109] A. F. Spilhaus. Drop size, intensity, and radar echo of rain. *Journal of Meteorology*, 5 :161–164, Aout 1948.

[110] S. Skatter and B. Kucera. Tree breakage from torsional wind loading due to crown asymmetry. *Forest Ecology and Management*, 135 :97–103, 2000.

[111] Y. Rocard. *Dynamique générale des vibrations*. Masson & Cie, 1949.

Résumé

Dans cette thèse de physique appliquée à la physiologie végétale nous nous intéressons à deux phénomènes liés aux plantes. L'ascension capillaire dans des coins et la verse des céréales et des arbres.

Lorsque les plantes sont soumises à de forts stress hydriques, nous observons l'apparition de bulles de gaz dans leur sève, c'est l'embolie. Il existe donc des situations avec interfaces sève/air dans les plantes. De plus nous observons sur les coupes anatomiques des plantes des géométries en forme de coin. Ces géométries et la présence d'interfaces liquide/vapeur permettraient l'ascension capillaire de la sève. Ceci pourrait réparer les embolies soit en remplissant les vaisseaux qui se sont vidés de leur sève, soit en assurant un flux de sève de secours, le temps que de nouveaux vaisseaux remplis de sève soient formés. Nous avons caractérisé la dynamique de l'ascension capillaire dans des géométries en forme de coin et nous l'avons appliquée à l'ascension capillaire dans des rameaux préalablement vidés de leur sève.

Toujours dans le domaine végétal, nous étudions la verse qui est la chute des plantes causée par le vent. Elle apparaît tous les ans dans les champs de céréales, détruisant en moyenne 30% des récoltes. Les forêts en sont aussi victimes lors des grandes tempêtes, on pense à Lothar et Martin en 1999 et Klaus en 2009 pour la France. La comparaison entre la vitesse des vents et le pourcentage d'arbres cassés indique une vitesse critique de 150 km/h pour laquelle presque tous les arbres sont détruits. En nous intéressant aux effets de la géométrie courbée des plantes et à leur caractère fragile nous avons déterminé des critères de rupture et notamment retrouvé une vitesse critique proche de 150 km/h pour laquelle les arbres sont versés.

Mots clefs : Capillarité, milieux poreux, élasticité, flambage, objets fragiles, physiologie végétale.

Abstract

In this physics PHD thesis applied to vegetal physiology we focus on two phenomenons dealing with plants. The capillary ascension of liquids in corners and lodging of cereals and trees.

When plants are under high hydraulic stress, we observe gas bubbles appearing in their sap, this is gaseous embolism of plants. Hence, there are situations with interfaces sap/air in plants. And we observed on anatomic views of plant vessels geometries with corners. Those geometries and the fact there are liquid/vapor interfaces enable the capillary ascension of sap. This could be a mechanism for embolism repair in filling back emptied vessels or in assuring a safety flux of sap while new vessels -full of sap- form in the plant. We have characterised the dynamics of capillary ascension in a various panel of corner geometries and applied it to the ascension of liquids in stems emptied from their sap.

Still in vegetal domain, we study lodging, that is the falling of plants. Here we focus on the falling due to wind and by the mechanism of stem breaking. Lodging by wind is very frequent for cereals, it causes a loss of 30% of the harvest, it is a great deal for farmers. During great storms, forests are also damaged, we have had recently in France the Lothar and Martin storm in 1999 and Klaus storm in 2009. Comparing the speeds of wind during the storms and the percentage of trees damaged shows that above a critical wind speed almost every trees fall, that speed is 150 km/h. Looking at curved geometry of cereals and brittleness of trees we could deduce criterions of lodging and especially predict wind lodging speeds.

Keywords : Capillarity, porous media, elasticity, buckling, brittle, vegetal physiology.