



HAL
open science

Caractérisation vibratoire et acoustique des instruments à cordes - Application à l'aide à la facture instrumentale

Benjamin Elie

► To cite this version:

Benjamin Elie. Caractérisation vibratoire et acoustique des instruments à cordes - Application à l'aide à la facture instrumentale. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2012. Français. NNT : . tel-00833885

HAL Id: tel-00833885

<https://theses.hal.science/tel-00833885v1>

Submitted on 13 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur, Géophysique et
Architecture

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Acoustique

présentée par

Benjamin ELIE

Caractérisation vibratoire et acoustique des instruments à
cordes

—
Application à l'aide à la facture instrumentale

dirigée par François GAUTIER
et Bertrand DAVID

Soutenue le lundi 26 novembre 2012, devant le jury composé de :

M. Antoine CHAIGNE	ENSTA ParisTech, Palaiseau	rapporteur
M. Jose ANTUNES	Instituto Tecnológico e Nuclear, Lisbonne	rapporteur
M. Jean-Loïc LE CARROU	Université Pierre et Marie Curie, Paris	examinateur
M. Laurent DAUDET	Université Paris Diderot, Paris	examinateur
M. Vincent DOUTAUT	ITEMM, Le Mans	examinateur
M. François GAUTIER	Université du Maine, Le Mans	directeur de thèse
M. Bertrand DAVID	Institut Mines-Télécom, Télécom ParisTech, Paris	directeur de thèse
M. Jean-Marie FOUILLEUL	Luthier guitare, Cuguen	invité
M. Nicolas DÉMARAIS	Luthier violon, Grenoble	invité

Laboratoire d'Acoustique de l'Univer-
sité du Maine
UMR CNRS 6613
Avenue Olivier Messiaen
72085 Le Mans - cedex 9

Centrale Nantes - ED SPIGA
1 rue de la Noë - BP 92101
44321 Nantes cedex 3

Remerciements

Je remercie en premier lieu Antoine Chaigne et José Antunes d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail, ainsi que les autres membres du jury, Laurent Daudet, Vincent Doutaut, et Jean-Loïc Le Carrou pour leur rôle d'examineur, et enfin Nicolas Démarais et Jean-Marie Fouilleul pour avoir accepté l'invitation à participer au jury.

Cette thèse faisant partie du projet ANR PAFI, je tiens à remercier l'Agence Nationale de la Recherche pour le financement, et bien sûr tous les membres actifs du projet. Merci donc à Joël, le responsable, puis l'équipe du Pôle d'Innovation de l'ITEMM, pour leur investissement massif dans le projet, la mise en place et l'entretien d'échanges avec les luthiers, l'organisation des JFIS, et bien d'autres actions. Merci aussi aux autres acteurs du projet, de l'ESEO, de l'IRCAM, de Telecom et du LAUM.

Je remercie mes encadrant François et Bertrand pour l'aide et les conseils qu'ils ont pu fournir, permettant l'avancement de ces travaux.

Comme évoqué un peu plus haut, de nombreux échanges avec des luthiers ont permis de faire avancer le projet, comme en témoigne le chapitre 5, par exemple. Je tiens donc à remercier personnellement (par ordre alphabétique) : Dominique Chevalier, Nicolas Démarais, Yann-David Esmans, Jean-Marie Fouilleul, Christian Magdeleine, Gilles Orin, Patrick Penaud, Olivier Pont, Alain Raifort, Nicolas Saumagne et l'ensemble des luthiers participant chaque année aux JFIS. Je n'oublie pas non plus les collaborations avec l'IRCAM et le LEA de Poitiers. Dans ce cadre, je remercie aussi Yan Maresz et Jean-Christophe Valière. Je tiens également à remercier la cité de la musique et le magasin *La Guitarrerria* pour la mise à disposition d'instruments pour des campagnes de mesures.

Je remercie aussi toute personne ayant contribué aux travaux présentés dans ce document, que ce soit dans le cadre de stage, de projet d'étude, ou leur participation à des campagnes de mesures, voire des combinaisons des trois possibilités : Frédéric Ablitzer, Fabrice Bissonnier, Amandine Boucheron, Marion David, Charlotte Delmas, Johan Gillery, Clément Giroux, Sonsoles Gomez-Garcia, Aurélien Jud, Hugo Paris, Ifanila Rakotoarisoa, Hugo Ricateau et Geneviève Strosser.

La réalisation de ces travaux a aussi été rendu possible grâce, soit à la mise à disposition de matériel d'acquisition, soit à leur mise en œuvre. Ce qui m'amène à remercier Adil Ayouch, Nicolas Boissé, Emmanuel Brasseur, Antoine Chaigne et Mathieu Secail-Géraud.

Merci à Chris Waltham pour son invitation à participer au *World Harp Congress* de Vancouver.

Merci aux membres du LAUM, de l'ENSIM et de Telecom pour les échanges qu'on a pu avoir. En particulier mes collègues du bureau singulier n°49 du LAUM, et le bout de l'aile du 3ème étage du site Dareau de Telecom, qui est passé au 4ème maintenant. Là, ça fait beaucoup de gens à remercier, donc j'éviterai de tous les citer, ça m'évitera de surcroît d'en oublier, ils se reconnaîtront.

Ces 3 ans de thèse auraient été plus difficiles, moins productifs et surtout moins agréables sans le contact de beaucoup de gens ou bien l'apport de choses extérieures, sans forcément de rapports professionnels, que je remercie personnellement. En particulier, merci aux branlemiks, notamment ceux qui se sont déplacés pour la soutenance, mais les autres aussi. En vrac et sans lien ou ordre logique, merci à la coloc' d'Ivry, Greg et Philou, à Gilles Chardon, à l'ours anonyme croisé dans l'arctique alaskien, à la caféine, à France Musique, et enfin à Domenico Scarlatti, Arthur Lourié, Steve Reich, Georges Gurdjieff et Thomas de Hartmann, pour la composition de musiques idoines à la rédaction de thèse.

Et enfin, merci à mes parents et ma famille en général pour leur soutien.

Résumé

Pour qualifier un instrument, il est possible de proposer des caractérisations acoustiques et vibratoires permettant de quantifier objectivement des différences entre instruments. Le choix des grandeurs pertinentes pour mener à bien ce travail de caractérisation est l'objectif central de la thèse. Le travail concerne essentiellement la guitare et le violon et s'intègre au projet ANR PAFI (*Plateforme d'Aide à la Facture Instrumentale*) qui prévoit le développement d'outils permettant au luthier d'orienter ses choix lorsqu'il conçoit, fabrique et fait évoluer un instrument.

Pour cela, une méthodologie permettant l'identification de propriétés vibratoires de structures mécaniques, qu'ils s'agissent d'instruments de musique ou non est détaillée. Elle s'appuie d'une part sur l'estimation de la densité modale en moyennes fréquences, à l'aide d'une méthode haute résolution, la méthode ESPRIT, et d'autre part sur la théorie de la valeur moyenne de Skudrzyk pour estimer les paramètres caractéristiques de structures se comportant comme des plaques ou des coques minces. L'étude montre que la méthodologie est applicable tant que le facteur de recouvrement modal reste inférieur à 100 %. Des applications à des données expérimentales et simulées montrent que la méthode permet de discriminer des panneaux au moyen des valeurs des masses et raideurs équivalentes. Par ailleurs, la méthode ne requiert que très peu de points de mesures, et un matériel expérimental simple, ce qui rend la procédure abordable et utilisable par un luthier directement en atelier.

L'application de la méthode à la guitare révèle que son comportement vibratoire au chevalet en moyennes fréquences est similaire à celui d'une plaque. L'instrument est alors caractérisé par quelques macroparamètres correspondant aux paramètres caractéristiques d'une plaque équivalente : masse, raideur, et mobilité moyenne. Deux types de guitares, des instruments haut de gamme fabriqués par des luthiers et des instruments d'étude produits industriellement, sont clairement discriminés à l'aide des valeurs de ces macroparamètres.

Une étude détaillée de la mobilité au chevalet, de la densité modale de violon, et des caractéristiques spectrales des sons de violon en situation de jeu, permet de lier des caractéristiques communes à ces trois grandeurs : l'existence de formants dans les sons de violon est établi en procédant à l'analyse spectrale de glissandi. Ces formants sont associés à des pics de la mobilité moyenne mesurée au chevalet. L'examen de la densité modale suggère que le premier pic, situé généralement entre 500 et 1000 Hz, et variable d'un violon à l'autre, est dû à la courbure de la table d'harmonie.

Les méthodes développées sont illustrées à travers des exemples d'applications à des problématiques rencontrées en lutherie, mais également par des musiciens.

Abstract

The assessment of musical instruments may be performed using vibroacoustical parameters, enabling to quantify objectively differences between instruments. The choice of relevant quantities evaluating the mechanical and the acoustical behavior of stringed instruments is the main aim of this thesis. The present study focuses on guitars and violins : it belongs to the PAFI project (*Plateforme d'Aide à la Facture Instrumentale*), which aims at developing a set of tools dedicated to instrument makers, providing an assistance for luthiers in a daily practice context.

For that purpose, a method enabling the estimation of mechanical properties of dynamic structures, whether musical or not, is developed. It is based on the estimation of the modal density in the mid-frequency range, by means of a subspace method, called ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*). It is also based on the mean-value theory by Skudrzyk. This method estimates the characteristic parameters of any plate-like or curved panel structures. The modal identification is proved to be robust as long as the modal overlap factor does not exceed 100 %. Applications on experimental and simulated data show that the method is able to discriminate panels by means of the values of their mass density and their Young's modulus. The method requires solely a few measurement points and the required experimental device is affordable and easily manipulable by the luthier in its workshop.

Applications of the method on guitars show that its mechanical behavior in the mid-frequency range is similar to that of a flat panel. The instrument is then characterized by a few features or macroparameters corresponding to the characteristic parameters of the equivalent plate : the equivalent mass, the equivalent bending stiffness, and the mean-value of mobility. These features discriminate two population of guitars : high-quality handcrafted guitars and lower-quality guitars.

A detailed study about bridge mobility of violins, as well as a study about their modal density and the spectral features of violin sounds, enable to identify features shared by these three quantities. The spectral envelopes of violin sounds present a formantic aspect, and the identified formants are associated to the mean mobility maxima. The estimation of the modal density suggests that the first maximum, located at a frequency between 500 and 1000 Hz, is a consequence of the soundboard curvature.

The methods are applied to a few examples of problematic frequently encountered by instrument makers and musicians.

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Contexte	11
1.2	État de l'art scientifique	12
1.2.1	Instruments à cordes pincées	13
1.2.2	Instruments à cordes frottées	31
1.3	Définitions des axes d'investigation	46
2	Méthode de caractérisation de systèmes mécaniques	49
2.1	Description modale de la mobilité	50
2.1.1	Modes propres du système dissipatif	50
2.1.2	Réponse impulsionnelle	51
2.1.3	Admittance mécanique	51
2.1.4	Densité modale	52
2.2	Description synthétique de la mobilité	62
2.2.1	Domaines fréquentiels	62
2.2.2	Mobilité moyenne et courbes enveloppes	64
2.3	Identification modale	69
2.3.1	Méthode ESPRIT	69
2.3.2	Estimation de l'ordre du modèle	73
2.4	Limites de la méthodologie	75
2.4.1	Procédure de test	75
2.4.2	Synthèse hybride de réponse impulsionnelle	76
2.4.3	Résultats	79
2.5	Estimation des paramètres caractéristiques de matériaux	84
2.5.1	Définition des paramètres caractéristiques	84
2.5.2	Méthode d'estimation des paramètres caractéristiques des structures	85
2.5.3	Limites de la méthode	90
2.5.4	Tests sur des plaques de synthèse	92
2.5.5	Tests expérimentaux	95

2.6	Conclusions du chapitre	99
3	Instruments à cordes pincées	103
3.1	Paramètres de couplage corde-table d'harmonie	103
3.1.1	Mobilité au chevalet vue par une corde de guitare	103
3.1.2	Identification des paramètres modaux des guitares	107
3.1.3	Plaque équivalente d'une guitare	110
3.1.4	Variation des paramètres caractéristiques le long du chevalet	113
3.1.5	Variations des paramètres caractéristiques pour plusieurs guitares	116
3.2	Analyse de décroissance de sons de guitares	119
3.2.1	Hétérogénéité de la décroissance des notes de guitares	119
3.2.2	Mesures de la matrice de mobilité	122
3.2.3	Mesures de courbes de décroissance énergétiques	124
3.2.4	Analyses des orbites de cordes	130
3.3	Conclusions du chapitre	133
4	Instruments du quatuor	135
4.1	Analyse du comportement vibratoire des violons	136
4.1.1	Définition des mobilités utilisées	136
4.1.2	Mobilité typique d'un violon	136
4.1.3	Mobilité moyenne d'un violon	137
4.1.4	Mobilité moyenne de plusieurs violons	138
4.1.5	Comparaison des mobilités de violons et de guitares	139
4.1.6	Identification des modes du violon	140
4.1.7	Coque équivalente à un violon	144
4.2	Réponse acoustique des instruments à cordes frottées	145
4.2.1	Méthodologie	146
4.2.2	Protocole expérimental	149
4.2.3	Resultats	149
4.2.4	Signal de pression sonore	152
4.3	Conclusions du chapitre	155
5	Application à l'aide à la facture instrumentale	157
5.1	Aide à la lutherie des instruments à cordes pincées	157
5.1.1	Suivi de tables de guitares en cours de fabrication	158
5.1.2	Caractérisation de chevalets d'ukulélé	163
5.1.3	Un barrage de guitare ajustable	168
5.2	Aide à la lutherie d'instruments à cordes frottées	172
5.2.1	Réglages de l'âme d'un violon	172

5.2.2	Caractérisation mécanique d'un ensemble de violons	176
5.2.3	Analyses de réponses acoustiques : effet d'une sourdine	179
Conclusions et perspectives		187
A Théorie modale des systèmes vibrants		191
A.1	Formulation d'état pour l'équation du mouvement	191
A.2	Modes propres complexes	192
A.3	Forme générale de la réponse forcée exprimée à l'aide des modes complexes	193
A.3.1	Expression de la réponse impulsionnelle	193
A.3.2	Expression de l'admittance mécanique	194
B Calcul de la mobilité moyenne de Skudrzyk		197
C Calcul des courbes enveloppes		201
D Article paru au JASA		203
E Corpus d'instruments		217
E.1	Guitares	217
E.2	Instruments du quatuor	217
F Plans de lutherie d'instruments à cordes		219
F.1	Guitare	219
F.2	Violon	221

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Les facteurs intervenant dans la définition de la qualité des instruments de musique à cordes sont nombreux : ils sont d'ordre acoustique (timbre, puissance sonore, homogénéité de timbre sur l'étendue de la tessiture), d'ordre mécanique (tenue mécanique dans le temps, sensibilité à l'environnement, jouabilité), d'ordre esthétique (aspect), d'ordre psychologique, ou encore liés au confort de jeu (géométrie, masse, confort haptique). La multiplicité de ces facteurs rend la qualité délicate à évaluer. Cette notion de qualité est cependant importante : elle est le centre d'enjeux artistiques, tant pour le luthier que pour le musicien. Elle a aussi un impact économique direct dans la mesure où elle justifie des différences de prix.

Dans le but d'éclairer, à la fois le luthier et le musicien, sur l'*identité* acoustique et mécanique de son instrument, des indicateurs pertinents, doivent être identifiés. Il n'y a aujourd'hui pas de consensus à ce sujet, il est très difficile de définir des catégories d'instruments basées sur des indicateurs objectifs, issus purement de la mesure.

La recherche de critères de catégorisation d'instruments, participant à l'évaluation de la qualité, fait l'objet d'études depuis quelques années au laboratoire d'acoustique de l'université du Maine. Ces études sont menées en collaboration avec des associations de professionnels de la facture instrumentale, en lien avec l'ITEMM (*Institut Technologique Européen des Métiers de la Musique*), qui assure un rôle d'interface entre luthiers, musiciens et acousticiens. Les échanges se sont structurés depuis 2001 au travers de rencontres annuelles, appelées JFIS (*Journées de la Facture Instrumentale et des Sciences*), composées de conférences et de travaux pratiques d'acoustique musicale appliqués à la lutherie. En 2007, la mise à disposition de *Lutherie Tools* a permis le développement d'une synergie : *Lutherie Tools* est un système de mesures acoustiques et mécaniques, associé à des post-traitements élémentaires, dédiés à la lutherie. Utilisé par une douzaine d'artisans luthiers, le système a permis la mise en place de projets collaboratifs permettant aux luthiers et acousticiens

de mieux connaître mutuellement leurs sphères professionnelles et leurs attentes. Cette collaboration s'est étendue en 2009 avec le démarrage du projet ANR PAFI (*Plateforme modulaire d'Aide à la Facture Instrumentale*) visant à développer un outil de mesure et de caractérisation destiné aux facteurs d'instruments. Le travail de thèse présenté s'inscrit dans ce cadre.

L'enjeu principal du projet PAFI est de proposer des paramètres permettant la catégorisation des instruments de musique, indépendamment de la qualité que l'on peut prêter à ces instruments. Ces indicateurs doivent pouvoir être estimés *in situ* par le luthier, ce qui contraint bien sûr le dispositif.

1.2 État de l'art scientifique

Les modifications apportées sur les instruments à cordes n'ont cessé d'exister depuis leur création. Elles sont guidées par des approches empiriques issues de l'expérience du luthier et de l'idée qu'il se fait du fonctionnement acoustique de l'instrument.

L'étude du fonctionnement physique d'un instrument à cordes est un préalable essentiel à toute proposition d'aide à la facture instrumentale. Une distinction essentielle doit être faite entre instruments se jouant principalement en pinçant (ou frappant) les cordes (guitares, harpes ou cithares), et instruments se jouant principalement en frottant les cordes avec un archet (vièles). Indépendamment des différences de forme ou d'aspect entre ces types d'instruments, le principe de fonctionnement acoustique de tous les cordophones reste sensiblement le même ; l'énergie acoustique rayonnée par une corde seule étant trop faible pour être perçue, les cordes sont couplées à un élément rayonnant, rôle que joue la table d'harmonie. Il est possible de schématiser le fonctionnement de l'instrument au moyen d'un diagramme, dit fonctionnel, tel que celui de la figure 1.1.



FIGURE 1.1 – Schéma fonctionnel simplifié d'un instrument à corde

Ce schéma fait apparaître deux sous-systèmes distincts qui constituent l'instrument : les cordes et le corps. Les cordes jouent le rôle de système résonant : ce sont elles qui imposent la hauteur de la note, grâce à l'effort périodique ou pseudo-périodique qu'elles engendrent sur le chevalet. Le corps est l'élément rayonnant : il permet d'assurer une énergie acoustique suffisamment importante pour que l'instrument soit entendu. L'état de l'art qui suit décrit les connaissances actuelles des différents mécanismes mis en jeu lors de la production sonore des instruments à cordes pincées et frottées. Les instruments étudiés par la suite dans ce document appartiennent à la famille des luths, selon la classification

organologique de Sachs-Hornbostel [136], c'est-à-dire des instruments de musiques à cordes constitués d'une table d'harmonie parallèle au plan des cordes, d'une caisse de résonance, et des cordes fixées au chevalet et à l'extrémité d'un manche, formant l'extension du système table d'harmonie-caisse de résonance. Le manche sert à poser le doigt de manière à ajuster la longueur des cordes pour régler la hauteur de la note jouée.

1.2.1 Instruments à cordes pincées

1.2.1.1 Généralités organologiques et morphologiques des guitares

Il existe aujourd'hui de nombreux types de guitares leur permettant de s'adapter à une multitude de styles musicaux. Cette variété peut être due à une évolution au cours du temps, qui amène certains instruments à devenir désuets (la vihuela par exemple), remplacés par des types de guitare plus modernes. Elle peut être également due à une adaptation culturelle, les guitares étant adaptées pour des traditions musicales ou des styles musicaux précis. Pour exemple, on pourra citer la guitare *flamenca*, dérivée de la guitare classique moderne, mais possédant un son plus percussif (plus puissant et plus bref) caractéristique de ce style, ou la guitare électrique, dont le son amplifié permet de jouer devant un public important, sans rapport avec ce qui est possible avec des instruments acoustiques non amplifiés. Dans l'étude qui suit, nous nous limitons à la guitare dite *classique*. Sa morphologie générale se présente telle que figurée sur le schéma 1.2. Un plan de fabrication détaillé est disponible en annexe F.1.

La guitare classique que nous connaissons aujourd'hui est le résultat de plusieurs siècles d'évolution. Il est difficile d'en préciser l'origine exacte tant il subsiste des traces d'instruments à cordes pincées dans bon nombre de cultures et époques. Cependant, la *vihuela* est communément admise en tant qu'ancêtre commun du fait de sa morphologie très proche, notamment sa caisse en forme de "8". La vihuela est apparue vers le milieu du XVème siècle. A cette époque, sa forme, ainsi que son style de jeu, variaient d'un instrument à l'autre. On retrouve dans l'iconographie de l'époque des instruments a priori semblables joués en pinçant les cordes, ou en les frottant à l'aide d'un archet en tenant l'instrument soit sur l'épaule, soit entre les jambes [65]. Pour ce qui est de son aspect, la vihuela était un instrument à cordes constitué d'une caisse de résonance plate avec des éclisses incurvées, un manche et un chevillier. La forme des éclisses était variable. Elles étaient incurvées soit avec des coins, tel que le violon, soit sans coin, telle que la guitare. Cela résultait d'expériences simultanées à divers endroits. Ces expériences aboutirent finalement à une standardisation au début du XVIème siècle, donnant lieu à un instrument à cordes pincées ayant des éclisses démunies de coin [65]. Les cordes étaient généralement regroupées par paires, appelées *chœurs*, au nombre de 5 ou 6. L'accord standard était semblable au luth (quarte-quarte-quarte-tierce-quarte-quarte du grave à l'aïgu). La vihuela a connu son apo-

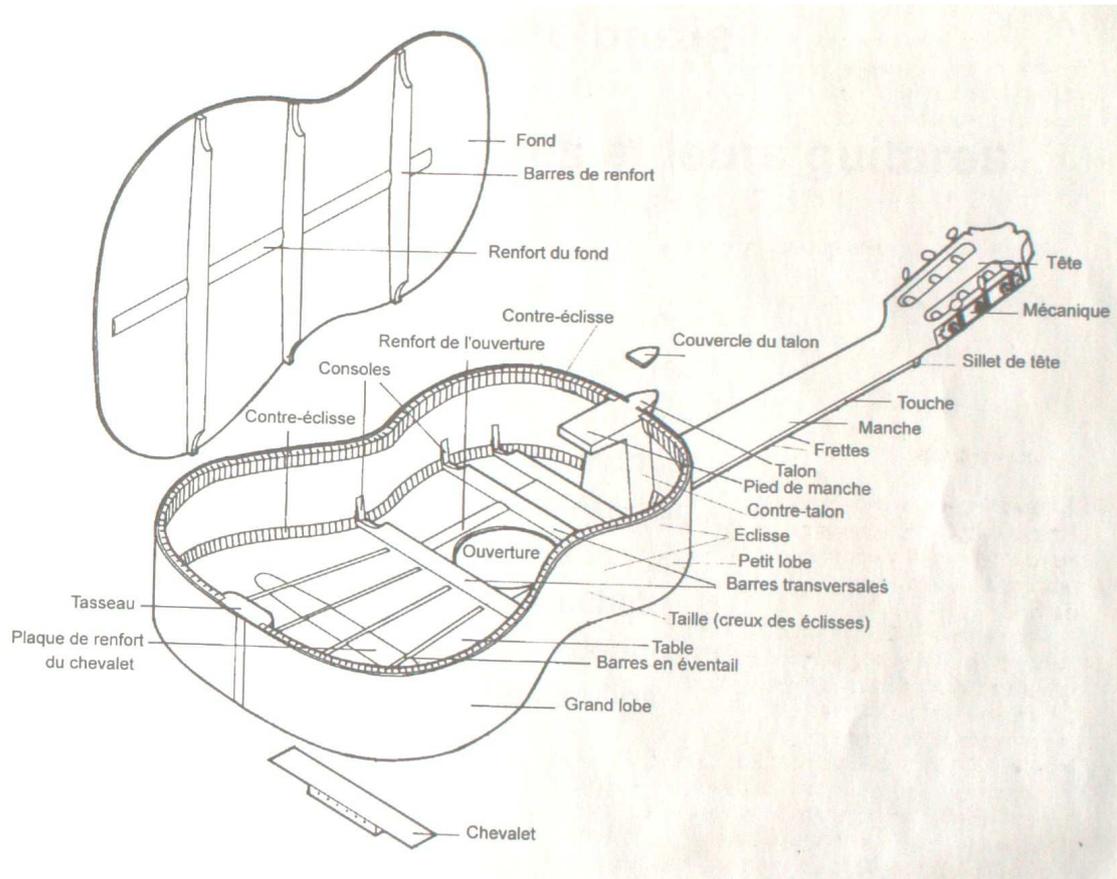


FIGURE 1.2 – Schéma d'une guitare classique actuelle, extrait de [34].

gée de popularité au cours du XVIème siècle. Vers la fin de ce siècle, la guitare renaissance, décrite comme une vihuela dont on a retiré le premier et le dernier chœur la supplante peu à peu. Par la suite, l'instrument gagne en taille, lui assurant une plus grande puissance sonore, et de nouveaux chœurs peuvent être ajoutés. Dans la deuxième partie du XIXème siècle, Torres définit l'aspect de l'instrument qui reste encore majoritairement admis à ce jour : larges éclisses, caisse ample et barrage en éventail. L'aspect n'a pas évolué de manière conséquente depuis ces dernières modifications apportées.

1.2.1.2 Mouvement de la corde pincée

La corde pincée est une configuration étudiée depuis longtemps. Les équations régissant le mouvement des cordes vibrantes ont été établies par D'Alembert [36] et Euler [52]. Les modèles se succèdent et se complexifient afin de rendre compte de plus en plus finement des phénomènes physiques entrant en jeu.

Mouvement de la corde pincée idéale

Considérons une corde idéale de longueur L fixée à deux extrémités indéformables. Soit $y(x, t)$ le déplacement vertical de la corde au point x et à l'instant t , celui-ci est régi par l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 y, \quad (1.1)$$

où c_s est la célérité des ondes transversales dans la corde et ∇^2 est l'opérateur laplacien spatial. La célérité c_s est définie selon les propriétés de la corde, à savoir sa tension T , et sa masse linéique ρ_l , par la relation suivante :

$$c_s = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}. \quad (1.2)$$

Les conditions aux limites vérifiant $y(0, t) = 0$ et $y(L, t) = 0$, la solution de l'équation (1.1) est alors une superposition de modes propres de la corde :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(n \frac{c_s t}{L}\right), \quad (1.3)$$

où b_n est l'amplitude du n^{ieme} mode propre de la corde.

Le pincement peut être modélisé par un déplacement vertical h de la corde à la position d'excitation x_0 , imposant une forme triangulaire à la corde au moment du lâcher. En considérant de petites oscillations, il est possible de montrer, à travers un développement en série de Fourier, que le déplacement transversal $y(x, t)$ de la corde en tout point x de la corde et à tout instant t , lorsque la corde est pincée à la position x_0 avec un déplacement transversal initial h , s'écrit :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{\pi^2 n^2 X_0 (1 - X_0)} \sin(n\pi X_0) \sin(n\pi X) \cos\left(\frac{c_s n \pi t}{L}\right), \quad (1.4)$$

où $X_0 = x_0/L$ et $X = x/L$ sont les positions normalisées par L , la longueur effective de la corde. Rappelons que cette équation est valable pour un pincement idéal. En pratique, la déformation est plus complexe qu'un simple triangle. Cependant, on peut déjà noter plusieurs points importants à partir de l'équation (1.4) :

- En supposant h assez faible pour rester linéaire, l'amplitude de vibration est d'autant plus grande que h est grand, donc que l'excitation est importante.
- Le maximum de vibration est atteint pour une excitation $x_0 = L/2$, soit au centre de la corde.
- L'amplitude des partiels décroît de manière globale en $\frac{1}{n^2}$.
- La position d'excitation et d'observation entraîne un effet de "filtrage" des partiels [122, 134].

Sur le dernier point, les termes $\sin(n\pi X_0)$ et $\sin(n\pi X)$ entraîne une annulation de la contribution du n^{ieme} partiel et de ses multiples pour certaines valeurs de X ou X_0 . Par exemple, si $X_0 = 1/2$ (excitation au centre de la corde), nous avons $\sin(n\pi X_0) = \sin(n\pi/2)$. Ce terme s'annule pour tout n pair et est égale à 1 pour tout n impair. Les contributions des partiels d'ordres pairs sont nulles car la corde est excitée à une position correspondant à un nœud. Nous observons une décroissance globale des amplitudes des partiels en $\frac{1}{n^2}$ modulée par un effet de filtrage dû à la position d'excitation et d'observation. La figure 1.3 illustre cet effet à travers un exemple où le point d'excitation et d'observation sont confondus, cette fois à une position proche de $L/6$, entraînant une atténuation forte des partiels d'ordre multiple de 6.

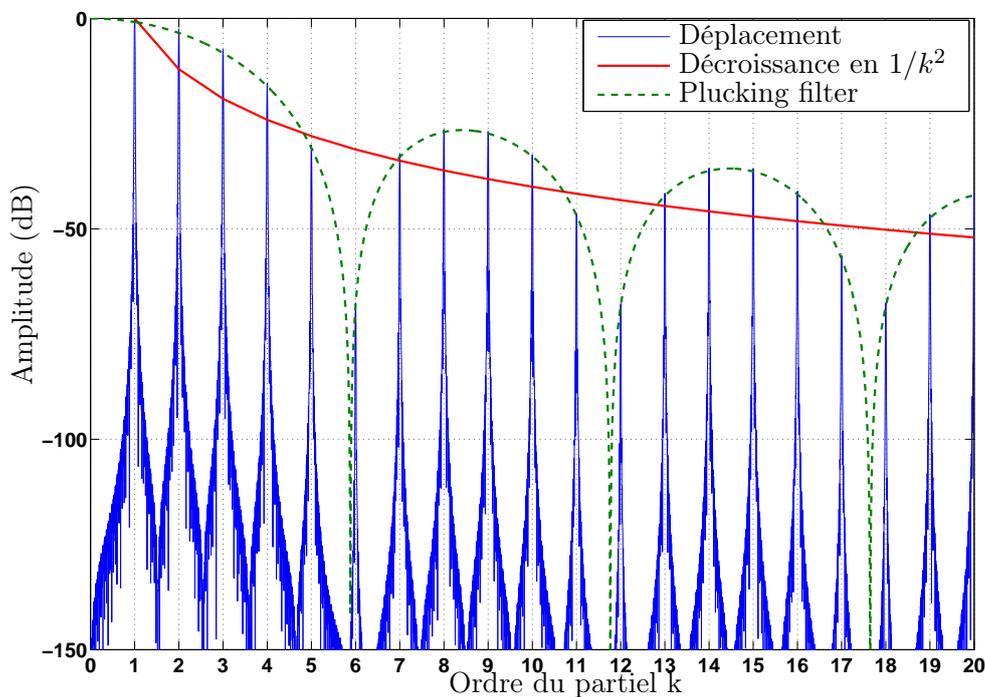


FIGURE 1.3 – Illustration de l'effet de filtrage dû à la position d'excitation. Le spectre en dB du déplacement d'une corde idéale pincée à $x = 0.17L$ est tracé en fonction du partiel de rang n . Pour comparaison, la tendance globale de décroissance en $1/n^2$ et le filtrage dû à la position ($\frac{\sin(n\pi X_0)^2}{f^2}$) sont tracés. Notons que les points d'observations et d'excitation sont confondus et situés à une abscisse voisine de $L/6$, expliquant la forte atténuation des partiels d'ordre multiple de 6.

Inharmonicité

Dans le modèle de corde idéale considéré ci-dessus, le spectre de la corde présente des raies harmoniques, c'est-à-dire à des fréquences multiples de la fondamentale. En pratique,

la corde possède une certaine raideur qui tend à la ramener à son état de repos. Il en résulte une inharmonicité propre aux cordes en oscillations libres : les fréquences des partiels¹ ne sont pas exactement égales à des multiples de la fréquence fondamentale. D’après Fletcher [58], la fréquence f_n du partiel d’ordre n par rapport à la fréquence fondamentale f_0 s’écrit

$$f_n = nf_0\sqrt{1 + Bn^2}, \quad (1.5)$$

où B est appelé le facteur d’inharmonicité. Il dépend des paramètres mécaniques et géométriques de la corde [135]

$$B = \frac{\pi^3 Ed^4}{64TL^2}, \quad (1.6)$$

où E est le module d’Young du matériau de la corde, d est le diamètre de la corde.

L’inharmonicité a été souvent étudiée dans le cas du piano pour des problèmes d’accord [112, 127]. Le tableau 1.1 regroupe des valeurs de B mesurées sur différents pianos et publiées dans différents articles.

Note	Fréquence nominale (Hz)	$B (\times 10^{-4})$		
		Fletcher [58]	Lieber [93]	Fletcher <i>et al.</i> [59]
A_0	27.5	3.52	3.97	5.3
A_1	55	1.35	2.17	2.8
A_2	110	1.14	1.44	1.50
A_3	220	4.01	3.61	0.50
A_4	440	5.26	7.22	4.00
A_5	880	18.63	21.65	2.00
A_6	1760	38.0	54.13	2.00
A_7	3520	148.95	151.56	

TABLE 1.1 – Valeurs du coefficient d’inharmonicité mesuré sur plusieurs pianos. Piano droit pour Fletcher [58] et Lieber [93]. Grand piano pour Fletcher *et al.* [59]. Ses valeurs sont regroupées dans l’article de Rasch [112].

Le facteur d’inharmonicité des cordes de guitare a été mesuré expérimentalement par David [38] et Järveläinen et Karjalainen [81]. Le tableau 1.2 reprend les valeurs du coefficient d’inharmonicité mesuré sur des guitares dans [81].

La figure 1.4 permet de comparer les valeurs du coefficient d’inharmonicité mesuré sur des guitares et sur des pianos.

L’inharmonicité des cordes de guitare semble globalement inférieure à celle des cordes de piano, les ordres de grandeurs restent toutefois comparables.

D’un point de vue perceptif, Järveläinen *et al.* ont étudié notre capacité à discriminer un son inharmonique d’un son parfaitement harmonique [81, 82]. De leurs études, il en

1. Nous emploierons le terme *partiel* pour désigner des composantes inharmoniques

Cordes en nylon			Cordes en acier		
Corde et frette	f_0 (Hz)	B ($\times 10^{-4}$)	Corde et frette	f_0 (Hz)	B ($\times 10^{-4}$)
Corde 1, frette 1	349	0.47	Corde 4, frette 0	146	0.5
Corde 1, frette 12	659	1.7	Corde 4, frette 7	219	1.05
Corde 3, frette 1	207	1.5	Corde 5, frette 0	110	0.66
Corde 3, frette 12	392	5.2	Corde 5, frette 7	164	1.5
Corde 6, frette 1	87	0.205	Corde 6, frette 0	82	1.08
Corde 6, frette 12	165	0.7	Corde 6, frette 7	123	2.42

TABLE 1.2 – Valeurs du coefficient d'inharmonicité mesuré sur deux guitares montées de cordes en nylon et en acier. Les valeurs proviennent de [81].

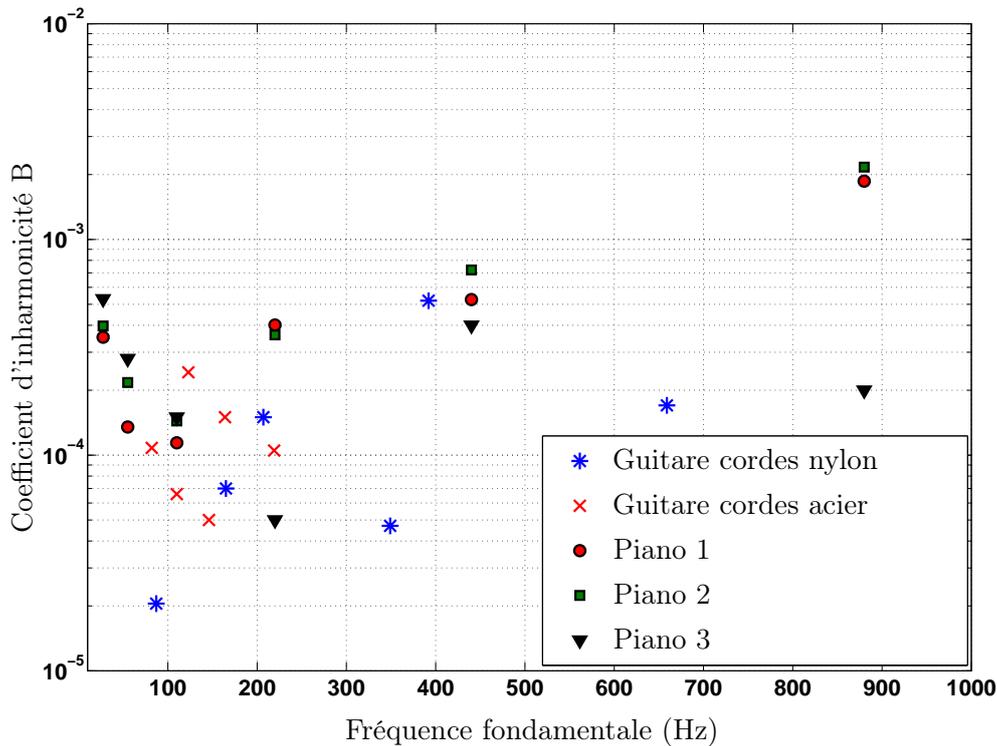


FIGURE 1.4 – Valeurs du coefficient d'inharmonicité mesuré sur des guitares et des pianos, valeurs extraites de [81] pour les guitares et de [58] pour le piano 1, de [93] pour le piano 2 et de [59] pour le piano 3.

résulte qu'il existe une valeur seuil de B à partir de laquelle un son est perçu comme inharmonique. En dessous de ce seuil, l'inharmonicité n'est pas détectable. Cette valeur seuil est dépendante de la fréquence : l'inharmonicité est perçu plus facilement en basses fréquences qu'en hautes fréquences. Woodhouse [144] s'est intéressé à la comparaison entre l'inharmonicité mesurée sur des cordes de guitares et la valeur seuil. Les résultats de ses mesures sont représentés sur la figure 1.5.

La prise en compte de l'inharmonicité est importante pour une synthèse réaliste, soit du déplacement de la corde, soit du son produit par l'instrument. Toutefois, le coefficient

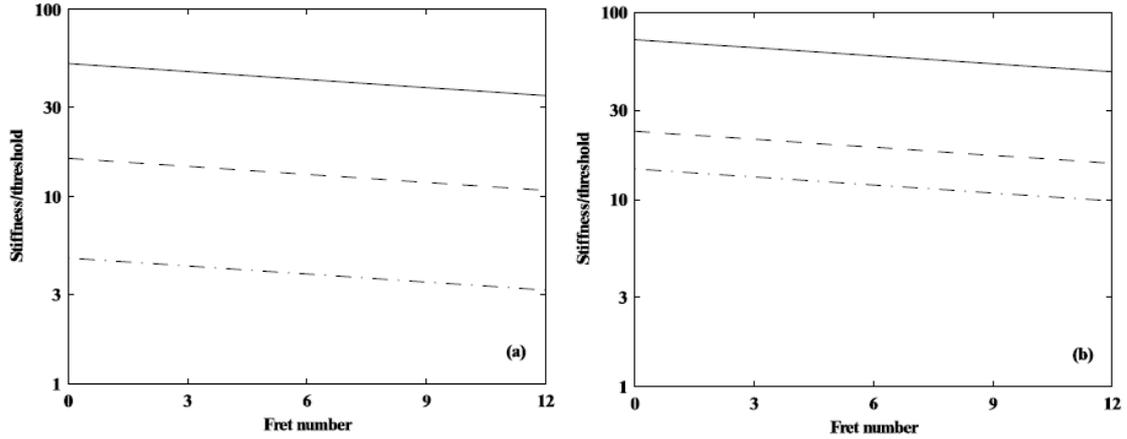


FIGURE 1.5 – Rapport entre le coefficient d’inharmonicité B mesuré sur des cordes de guitares et la valeur seuil à partir de laquelle le son est perçu comme inharmonique. a) De haut en bas : corde G, corde B et corde E4. b) De haut en bas : corde E2, corde A, corde D. Figure extraite de Woodhouse [144].

B dépend uniquement des paramètres intrinsèques de la corde, il ne peut donc pas être un outil d’étude pour le luthier. Les propriétés mécaniques de la caisse peuvent toutefois modifier très légèrement l’inharmonicité. C’est dans ce cadre que le luthier peut intervenir.

Mécanismes d’amortissements intrinsèques de la corde

Lorsque l’on excite une corde, celle-ci s’amortit avec le temps. Son mouvement n’est pas perpétuel. Ce phénomène est dû au transfert d’énergie de la corde vers un système extérieur. Dans le cas d’instruments à cordes, une partie de l’énergie de la corde est transmise à la table d’harmonie via le chevalet, pour que la table d’harmonie puisse rayonner. Ce mécanisme dissipatif est appelé mécanisme d’amortissement par *couplage*. Il existe d’autres mécanismes dissipatifs, propre à la corde, entraînant un amortissement qualifié d’*intrinsèque*. L’amortissement total de la corde est la somme des termes d’amortissement *intrinsèque* et d’amortissement par *couplage*.

Au sein des amortissements intrinsèques, il existe plusieurs mécanismes dissipatifs.

Viscosité de l’air Considérant la corde comme un cylindre oscillant à une certaine fréquence dans un fluide visqueux (ici l’air), elle présente une résistance mécanique entraînant des pertes d’énergie. Dans le cas de cordes de guitares, elles sont généralement faibles. La valeur de la résistance mécanique due à la viscosité de l’air est donnée par Stokes [132] :

$$R = 2\pi\nu_{air} + 2\pi d\sqrt{\pi\nu_{air}\rho_{air}f}, \quad (1.7)$$

où ν_{air} est la viscosité de l’air. Le facteur d’amortissement dû à la viscosité de l’air est donné par [135] :

$$\alpha_{air} = \frac{R}{2\rho_l} = \frac{\pi\nu_{air}}{\rho_l} + \frac{\pi d\sqrt{\pi\nu_{air}\rho_{air}f}}{\rho_l}. \quad (1.8)$$

On constate que le terme en basses fréquences est constant et égal à $\frac{\pi\nu_{air}}{\rho_l}$. En reprenant les valeurs tirées de Woodhouse [144], les cordes de guitares possèdent une masse linéique allant de 0.38 g/m pour la corde E4 à 6.24 g/m pour la corde E2. La viscosité de l'air étant d'environ 1.5×10^{-5} m²/s, il vient des valeurs de α_{air} en basses fréquences allant de 0.12 s⁻¹ pour la corde E4 à 0.0076 s⁻¹ pour la corde E2.

Viscoélasticité et thermoélasticité Les pertes viscoélastiques et thermoélastiques sont généralement représentées par l'ajout d'un angle de perte δ_{vt} dans l'écriture du module d'Young complexe $\underline{E} = E(1 + j\delta_{vt})$. Woodhouse [144] a mesuré des angles de pertes pour des cordes de guitares en nylon allant de 4×10^{-4} pour la chanterelle à 2×10^{-5} pour la basse (*cf.* le tableau 1.3). Howle *et al.* [70] utilisent une valeur de 4.78×10^{-4} pour illustrer leur modèle d'amortissement d'une corde de guitare en nylon (E4). L'angle de perte est donc constant et le terme d'amortissement dû à la viscoélasticité et à la thermoélasticité augmente proportionnellement avec l'ordre k du partiel. Il devient important pour les composantes d'ordre élevé.

Pertes par frottements entre spires Lorsque les cordes sont filées, un autre mécanisme de dissipation apparaît. Celui-ci est dû aux frottements entre spires. Il se modélise par l'ajout d'un angle de perte δ_{sp} dans le terme de tension de la corde, qui s'écrit sous forme complexe : $\underline{T} = T(1 + j\delta_{sp})$.

Comparaison de modèles Dans son étude portant sur la synthèse de sons de guitare, Woodhouse [144] utilise un modèle permettant de calculer le facteur de perte du n^{ieme} partiel en tenant compte de ces trois termes d'amortissements. Les termes de pertes dues à la viscosité de l'air et aux frictions internes entre spires sont tous deux pris en compte par l'ajout d'une partie imaginaire à la tension de la corde. Le terme de pertes internes dues à la viscoélasticité et à la thermoélasticité est modélisé par l'angle de perte du module d'Young complexe. Il en déduit une formule donnant le facteur de pertes η_n du partiel d'ordre n :

$$\eta_n = \frac{T(\eta_F + \eta_A/\omega_n) + B'\eta_B(n\pi/L)^2}{T + B'(n\pi/L)^2}, \quad (1.9)$$

où η_F , η_A et η_B sont les facteurs de pertes liées respectivement aux frottements entre spires, à la viscosité de l'air, et aux termes visco et thermoélastiques. La raideur de torsion B' est telle que $B = \frac{B'\pi^2}{2Z_0L^2}$, où B est le coefficient d'inharmonicité.

Le modèle de Howle *et al.* [70] ne prend en compte que les pertes par frottement avec

l'air et les pertes dues à la viscoélasticité et thermoélasticité. La figure 1.6 compare les deux modèles d'amortissements de Woodhouse et Howle *et al.*, d'après les valeurs fournies dans [70] et [144].

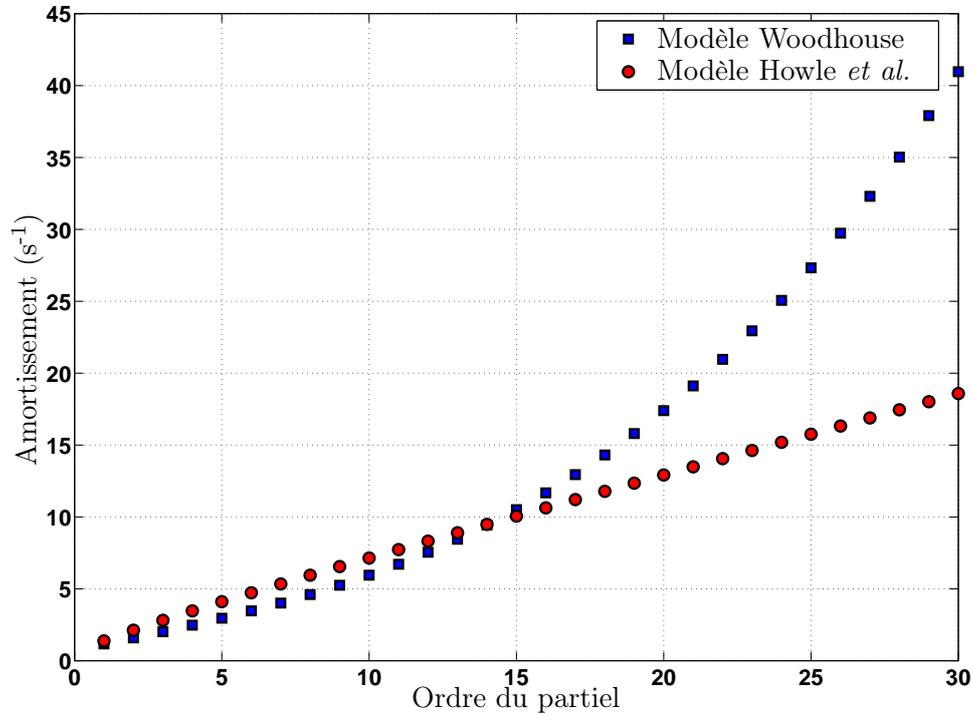


FIGURE 1.6 – Amortissement intrinsèque selon l'ordre des partiels d'une corde E4 en nylon, calculé analytiquement selon les valeurs fournies par Woodhouse [144] et Howle *et al.* [70]. Les valeurs des paramètres de la corde sont ceux repris dans le tableau 1.3.

Grandeur	Unités	<i>mi</i>	<i>la</i>	<i>ré</i>	<i>sol</i>	<i>si</i>	<i>mi aigu</i>
Fréquence fondamentale f_0	Hz	82.4	110	146.8	196	246.9	329.6
Tension T	N	71.6	73.9	71.2	58.3	53.4	70.3
Masse linéique ρ	$g.m^{-1}$	6.24	3.61	1.95	0.9	0.52	0.38
Célérité d'onde c_s	$m.s^{-1}$	107	143	191	255	321	429
Impédance caractéristique Z_0	$Ns.m^{-1}$	0.67	0.52	0.37	0.23	0.17	0.16
Raideur de torsion B'	$10^{-6}Nm^2$	57	40	51	310	160	130
Pertes internes friction η_F	10^{-5}	2	7	5	14	40	40
Pertes visco et thermoélastiques η_B	10^{-2}	2	2.5	2	2	2	2.5
Pertes viscosité de l'air η_A	s^{-1}	1.2	0.9	1.2	1.7	1.2	1.5

TABLE 1.3 – Paramètres de la corde mesurés par Woodhouse [144].

Les deux modèles donnent des résultats différents. Cependant, l'évolution de l'amortissement intrinsèque de la corde avec l'ordre du partiel est régulière dans les deux cas. L'extinction des partiels d'une corde de guitare attachée à une structure parfaitement rigide s'effectue de manière régulière : plus l'ordre du partiel est élevé, plus celui-ci s'éteint

rapidement. Pour notre étude, seule cette dernière information suffit. En revanche, le besoin d'avoir un modèle le plus réaliste possible est indispensable lors de synthèses de sons de guitares. Pour une problématique d'aide à la facture instrumentale, nous nous intéressons à l'amortissement dû au couplage avec une structure mobile, dont la théorie est développée au paragraphe suivant.

1.2.1.3 Couplage corde-table d'harmonie

Modèle de couplage

Un modèle de couplage permettant la synthèse de déplacement de corde a été proposé par Woodhouse [143, 144]. Il utilise le fait que les vitesses du chevalet et de la corde au point de contact sont identiques et que la force totale exercée est la somme des deux forces exercées sur le sous-système. Il s'ensuit la relation suivante :

$$Y_{Coup}^{-1} = Y_{corde}^{-1} + Y_{Ch}^{-1}, \quad (1.10)$$

où Y_{Coup} , Y_{corde} , et Y_{Ch} représentent respectivement l'admittance de couplage, l'admittance de la corde et l'admittance au chevalet. L'admittance au chevalet Y_{Ch} est aisément accessible par la mesure. L'impédance de la corde est en revanche plus difficilement mesurable. Cependant son expression analytique est dérivable à partir des propriétés de la corde.

Impédance de corde L'impédance d'entrée de la corde est connue [144] :

$$Z_{corde} = -jZ_C \cot \frac{\omega L}{c_s} = Y_{corde}^{-1}, \quad (1.11)$$

où $Z_C = \frac{T}{c_s}$ est l'impédance caractéristique de la corde. La relation (1.11) peut se développer en série et s'écrit ainsi [144]

$$Z_{corde} = \frac{-jT}{L} \left[\frac{1}{\omega} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\omega - j\omega_n \eta_n}{\omega^2 - j\omega\omega_n \eta_n - \omega_n^2} \right], \quad (1.12)$$

où $\omega_n = \frac{n\pi c_s}{L} \left[1 + B \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]$, η_n est le facteur de pertes intrinsèques du mode n de la corde, calculé à partir de l'équation (1.9).

Mobilité au chevalet La mobilité au chevalet est le rapport dans le domaine fréquentiel entre la vitesse $V(\omega)$ au chevalet et la force $F(\omega)$ exercée sur celui-ci, soit

$$Y_{Ch}(\omega) = \frac{V(\omega)}{F(\omega)}. \quad (1.13)$$

Modification des modes propres de la corde due au couplage avec le chevalet

Lorsque la corde est fixée à une structure mobile, cette dernière perturbe le mouvement de la corde, et notamment son nombre d'onde. Connaissant l'effort transversal exercé sur le chevalet :

$$F = -T \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (1.14)$$

on peut écrire la mobilité au chevalet

$$Y_{Ch} = \frac{j\omega y(L)}{F} = -j c_s \frac{\tan\left(\frac{\omega L}{c_s}\right)}{T}. \quad (1.15)$$

Les perturbations sur ω étant petites, la pulsation du mode n devient $\omega = \omega_n + \delta\omega$ et le développement au premier ordre de l'équation (1.15) aux alentours du mode n amène :

$$\left[1 + \tan^2\left(\frac{\omega_n L}{c_s}\right)\right] \frac{L}{c_s} \delta\omega = j \frac{T}{c_s} Y_{Ch}, \quad (1.16)$$

où $\tan^2\left(\frac{\omega_n L}{c_s}\right) = 0$. La perturbation sur ω en fonction de la mobilité au chevalet est donc

$$\delta\omega = j \frac{T}{L} Y_{Ch}. \quad (1.17)$$

La partie imaginaire de la mobilité influe sur la partie réelle de $\delta\omega$, ce qui entraîne une variation de fréquence des partiels (inharmonicité), alors que la partie réelle de Y_{Ch} influe sur la partie imaginaire de $\delta\omega$, indiquant une dissipation d'énergie.

La variation de fréquence vaut donc

$$d\omega = \frac{T}{L} \Im[Y_{Ch}]. \quad (1.18)$$

Un exemple de variation de fréquences due au couplage est représenté sur la figure 1.7.

Dans cet exemple, les différences sont extrêmement faibles, de l'ordre du Hertz. L'effet sur l'inharmonicité est donc très faible devant celui de la corde, ce qui en fait un problème peu important pour le luthier.

L'amortissement ajouté par couplage avec la table mobile est proportionnel à la partie réelle de la mobilité de la table :

$$\alpha_{n_{Coup}} = \frac{T}{L} \Re[Y_{Ch}(\omega_k)], \quad (1.19)$$

avec $\alpha_{n_{Coup}}$ l'amortissement (en s^{-1}) introduit par couplage avec la table mobile.

La figure 1.8 trace l'amortissement théorique des 26 premiers partiels d'une note de La 110 Hz jouée sur la corde la plus grave de la guitare.

Le terme d'amortissement total α_n relatif au n^{ieme} partiel est la somme de deux termes ;

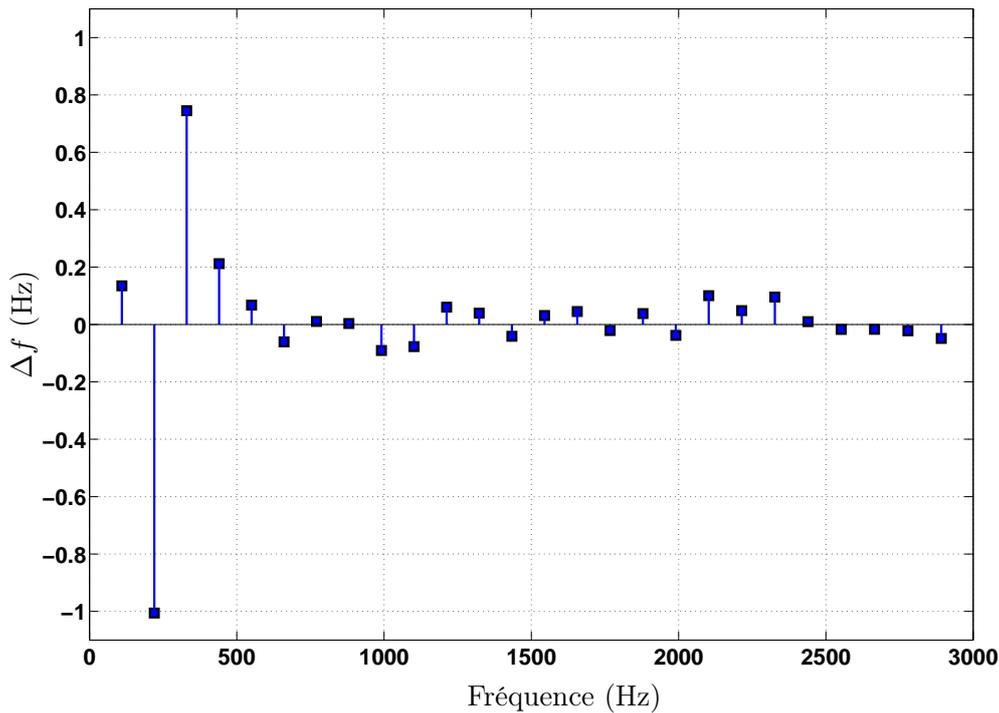


FIGURE 1.7 – Différence de fréquence des partiels entre une configuration découplée et couplée, calculée d’après la relation (1.18). La note simulée est un *la* 110 Hz jouée sur la corde la plus grave (E2). La mobilité prise en compte dans la synthèse est la mobilité mesurée sur la guitare GI_{18} du corpus de l’annexe E.

un terme d’amortissement intrinsèque à la corde, regroupant tous les mécanismes de dissipation d’énergie (pertes visco-élastiques, visco-thermiques, frictions internes, etc,...), et d’un terme d’amortissement lié au couplage avec l’instrument, donné par la relation (1.19). Cette relation révèle le compromis auquel le luthier doit faire face : un fort niveau de mobilité assure une certaine puissance sonore mais diminue la durée de son. De plus, la mobilité au chevalet étant très variable avec la fréquence, l’amortissement dû au couplage varie de manière non négligeable note à note. L’art du luthier consiste à la fois à ajuster de manière globale le niveau de mobilité et la durée de son, mais aussi localement d’assurer une certaine homogénéité en termes de durée de son le long de la tessiture. Par la suite, nous nous focalisons sur le terme d’amortissement par couplage, car c’est sur celui-ci que le luthier peut avoir un contrôle, les autres termes étant uniquement dépendant des caractéristiques intrinsèques de la corde.

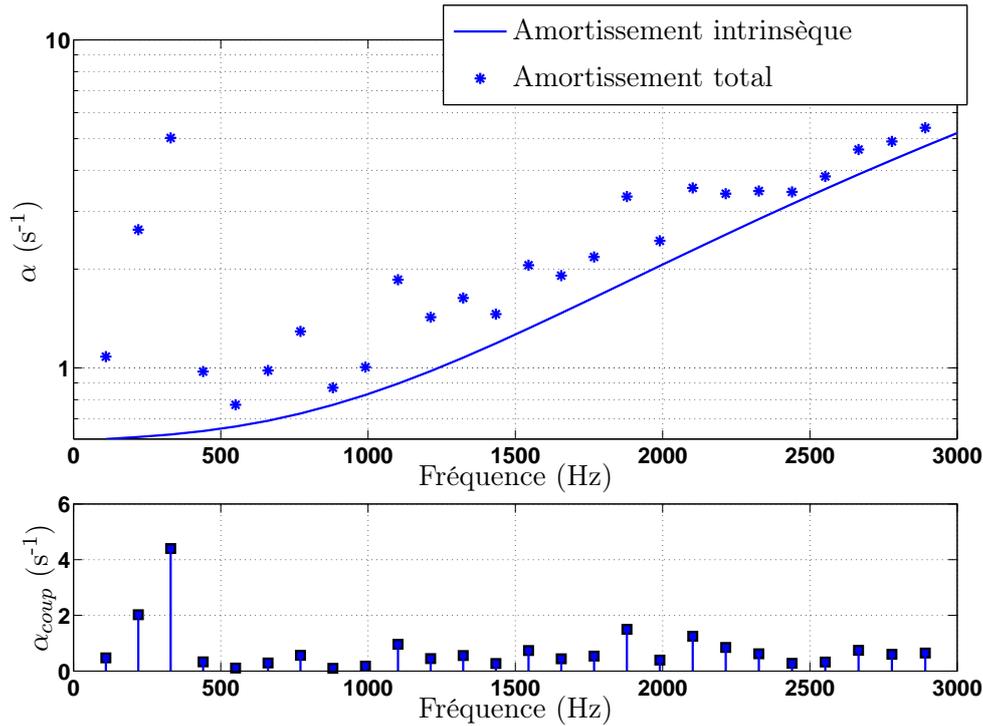


FIGURE 1.8 – En haut, comparaison de l’amortissement total théorique des 26 premiers partiels d’une note de La 110 Hz, jouée sur la corde la plus grave de la guitare, avec l’amortissement intrinsèque de la corde. Les propriétés de la corde sont celles du tableau 1.3. La mobilité considérée est mesurée sur la guitare GI_{18} du corpus de l’annexe E. La figure du bas représente l’amortissement dû au couplage avec la table d’harmonie.

1.2.1.4 Comportement vibroacoustique de la caisse

Analyse modale de la guitare

La table d’harmonie jouant le rôle d’élément rayonnant (*cf* figure 1.1) dans la chaîne de production sonore de la guitare, son comportement vibratoire tient un rôle important dans le son résultant d’une note jouée par le musicien. Ainsi, de nombreuses études portent sur les propriétés vibratoires de la table d’harmonie, couplée ou non au reste de la guitare entière.

Les déformées des premiers modes de guitares mettent en évidence le fait que la partie principalement mobile de l’instrument se situe sur la partie inférieure de la table d’harmonie, sous la rosace. La partie supérieure étant très peu mobile. Du fait de la très faible variation de géométrie des guitares modernes, les fréquences de ces premiers modes varient peu d’une guitare à l’autre.

Les premières images publiées de déformées modales de la guitare, par le biais d’analyses opérationnelles, sont le fait de Jansson [77], à l’aide de techniques holographiques. Firth [54] a ensuite déterminé les premières lignes nodales, à l’aide d’une méthode de Chladni, sur la

table d'harmonie et sur le dos d'une guitare. Dans le but de bien spécifier l'origine de ces premiers modes, des dénominations spécifiques ont été attribuées :

- le premier mode de cavité, noté A_0 , correspond au mode de la masse d'air à l'intérieur de la cavité couplée à des parois mobiles. Sa fréquence f_{A_0} se situe systématiquement pour la guitare classique aux alentours de 90-100 Hz.
- le premier mode de table, noté T_1 , est le mode de la table couplée à la cavité. Sa fréquence f_{T_1} est située aux alentours de 190-220 Hz pour la plupart des guitares classiques.
- le troisième pic est un mode de dos ou un mode présentant une ligne nodale sur l'axe de symétrie.

A noter que d'autres instruments présentent les mêmes caractéristiques, notamment la harpe classique [25] et la harpe gothique [37].

La fréquence du mode de la cavité, non couplé à la table, correspondant donc à un mode de Helmholtz, est une autre fréquence remarquable. Elle est communément notée f_h [32], et se présente sous la forme d'une antirésonance dans la fonction de réponse en fréquence mesurée au chevalet de l'instrument, telle que représenté sur la figure 1.9.

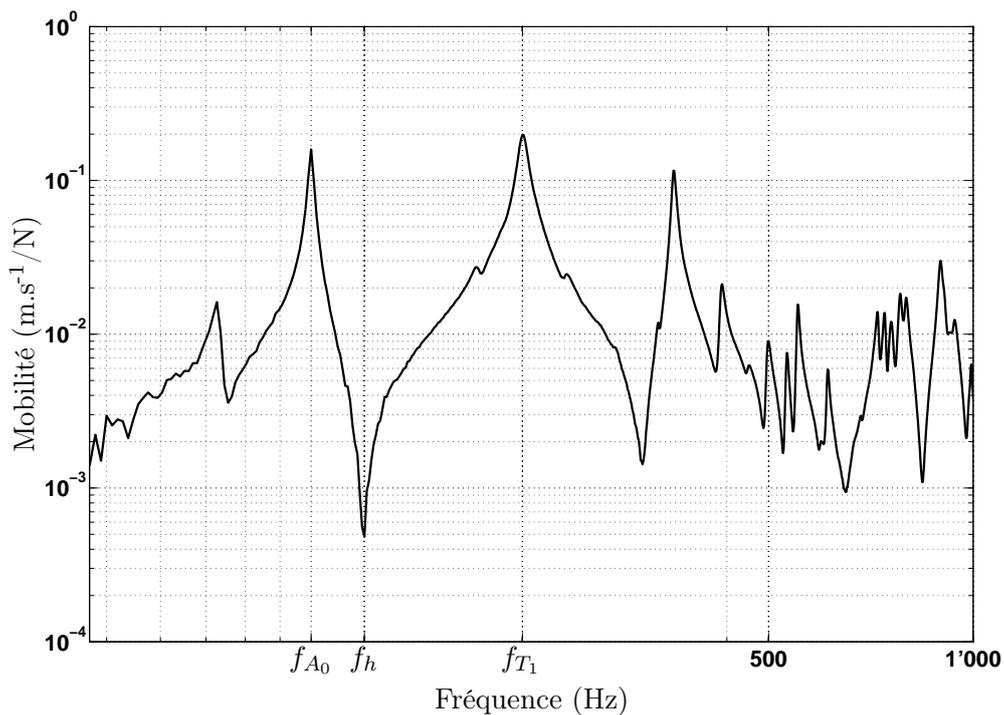


FIGURE 1.9 – Exemple d'une réponse en fréquence mesurée au chevalet de la guitare GI_{18} du corpus de l'annexe E. Les fréquences remarquables sont indiquées avec leurs dénominations usuelles. L'axe des fréquences est en échelle logarithmique.

Le premier pic, aux alentours de 75 Hz sur la figure 1.9, juste avant le mode A_0 , est un mode appelé mode de manche. Il correspond à une flexion globale du manche et de la

caisse. Il existe très peu de documentation à ce sujet, Jansson [78] parle de *mouvement de flexion de la guitare* ("*Bending motion of the complete guitar*"), et Meyer [100] évoque une *résonance secondaire* ("*secondary resonance*").

La figure 1.10 est extraite des travaux de Hill et Richardsson [69]. Elle représente les déformées modales des premiers modes de la guitare, obtenues par holographie.

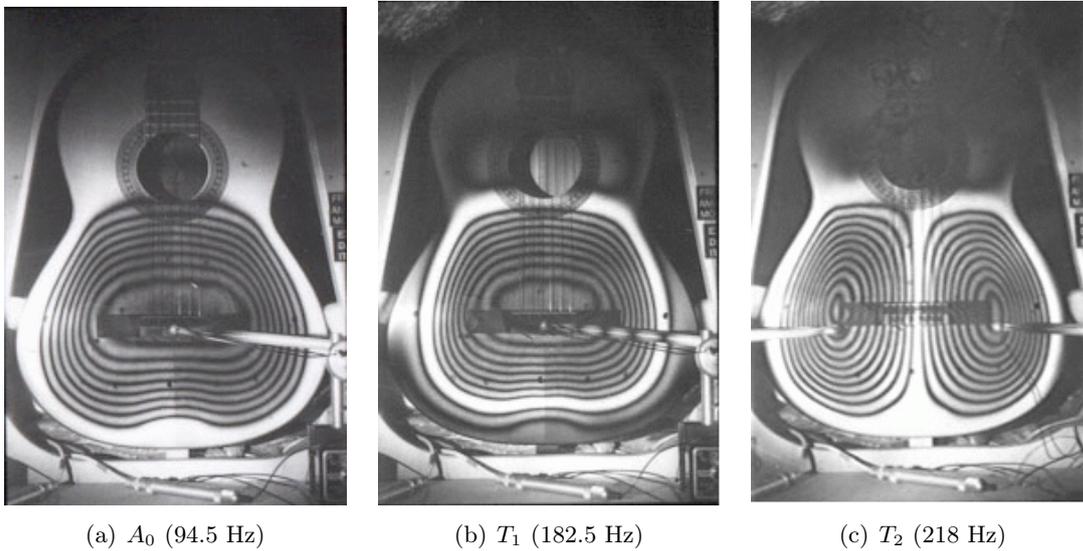


FIGURE 1.10 – Déformées modales des 3 premiers modes de la guitare, extraites de [69].

Modèles discrets à plusieurs degrés de liberté

Dans le but d’appréhender de façon simple le concept basses fréquences des guitares, certains auteurs ont proposé des modèles discrets permettant d’étudier le couplage entre la table d’harmonie et la cavité. A la fin des années 70, Firth [54], puis Caldersmith [23] proposèrent de modéliser la cavité comme une enceinte *bass-reflex*. Firth propose un circuit électrique équivalent décrivant le comportement mécanique de la guitare au voisinage des fréquences du mode A_0 et T_1 . Ce circuit est très similaire à celui d’une enceinte *bass-reflex*. L’auteur conclut que le rôle de la cavité est essentiellement d’amplifier la réponse de l’instrument en basses fréquences. Le modèle de Caldersmith [23] permet, à l’aide de données géométriques de la guitare, ainsi que des propriétés mécaniques des matériaux la constituant, de prédire les fréquences et facteur de qualité des modes A_0 et T_1 .

En 1980, Christensen et Vistisen [32] proposent un modèle discret à 2 degrés de liberté pour étudier le couplage entre la table d’harmonie et la cavité (*cf.* figure 1.11). La table d’harmonie est remplacée par un piston d’une certaine surface et d’une certaine masse équivalente, connecté à deux ressorts, l’un décrivant la raideur de la plaque, l’autre le couplage avec le domaine fluide. La masse d’air est celle située au voisinage de la rosace, couplée à la raideur équivalente et au volume d’air situé à l’intérieur de la cavité. Les mouvements

couplés de la table et du piston d'air situé au voisinage de la rosace donnent lieu à 2 modes, qui sont les modes A_0 et T_1 . Le mode A_0 correspond donc au mode de résonance de la cavité couplée avec la table d'harmonie, et le mode T_1 correspondant au mode de résonance de la table d'harmonie chargée par la cavité. La fréquence f_h de l'antirésonance, observée entre les fréquences de résonance de A_0 (f_{A_0}) et T_1 (f_{T_1}) correspond à la fréquence de résonance du résonateur de Helmholtz de la cavité à parois rigides. Le mode A_0 est parfois appelé mode de Helmholtz, ce qui peut paraître abusif car ce mode met en jeu les mouvements fortement couplés du piston d'air et des parois. Le modèle discret à 2 degrés de liberté décrit ces phénomènes. Les fréquences caractéristiques f_{A_0} , f_{T_1} et f_h sont liées à la fréquence f_p de la table d'harmonie (connectée à la raideur de l'air dans la cavité) par la relation suivante :

$$f_p^2 + f_h^2 = f_{A_0}^2 + f_{T_1}^2, \quad (1.20)$$

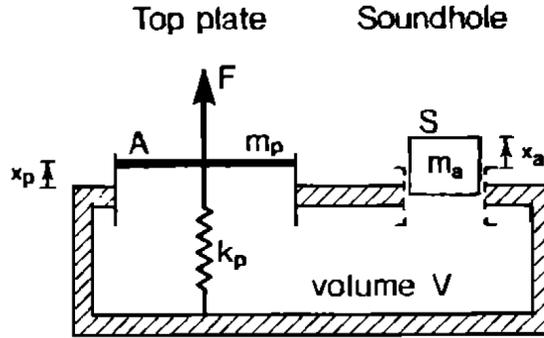


FIGURE 1.11 – Modèle discret à 2 degrés de liberté décrivant le couplage entre les modes A_0 et T_1 . Schéma extrait de l'article de Christensen et Vistisen [32].

Ce modèle possède l'avantage de permettre une estimation de paramètres caractéristiques de la guitare à partir de la simple mesure de la réponse en fréquence de la table. En effet, les valeurs de f_{A_0} , f_{T_1} et f_h sont directement accessibles sur la courbe de réponse en fréquence de l'instrument (*cf.* figure 1.9). Il est alors possible d'en déduire la fréquence f_p à l'aide de la relation (1.20). Il est en revanche très limité en fréquences, permettant de décrire uniquement le comportement des premiers modes de l'instrument.

Une extension naturelle de ce modèle consiste à ajouter un troisième degré de liberté, constitué par une masse additionnelle qu'est le dos de la guitare. Ce modèle a été proposé par Christensen [30], confirmé expérimentalement par Rossing *et al.* [117], et développé par la suite par Wright [147]. Les fréquences remarquables f_{A_0} , f_{T_1} , f_d , f_h et f_b sont liées entre elles par la relation :

$$f_{A_0}^2 + f_{T_1}^2 + f_d^2 = f_h^2 + f_p^2 + f_b^2, \quad (1.21)$$

où f_d est la fréquence du mode de dos, f_p est la fréquence du premier mode de la table seule et f_b est la deuxième antirésonance, située entre f_{T_1} et f_{T_2} .

Notons que Popp a récemment étendu le modèle à 4 degrés de liberté [108], incluant les éclisses. Les modifications des conditions aux limites imposées par le musicien lors de la tenue de l'instrument peuvent ainsi être pris comme paramètres d'entrée du modèle.

1.2.1.5 Rayonnement de la table d'harmonie

L'étude du rayonnement de la guitare commence à partir des travaux de Lai et Burgess [87], publiés en 1990. Les auteurs utilisent la méthode utilisée auparavant par Suzuki [133] sur des tables d'harmonie de piano pour déterminer l'efficacité de rayonnement d'une guitare. Cette méthode consiste à mesurer l'intensité acoustique en champ proche et en tous points de l'instrument à une excitation ponctuelle de type bruit large-bande à l'aide d'un pot vibrant, les auteurs mettent en évidence le mode A_0 de la cavité, pour lequel le rayonnement autour de la rosace domine clairement à la fréquence de A_0 (*cf.* figure 1.12).

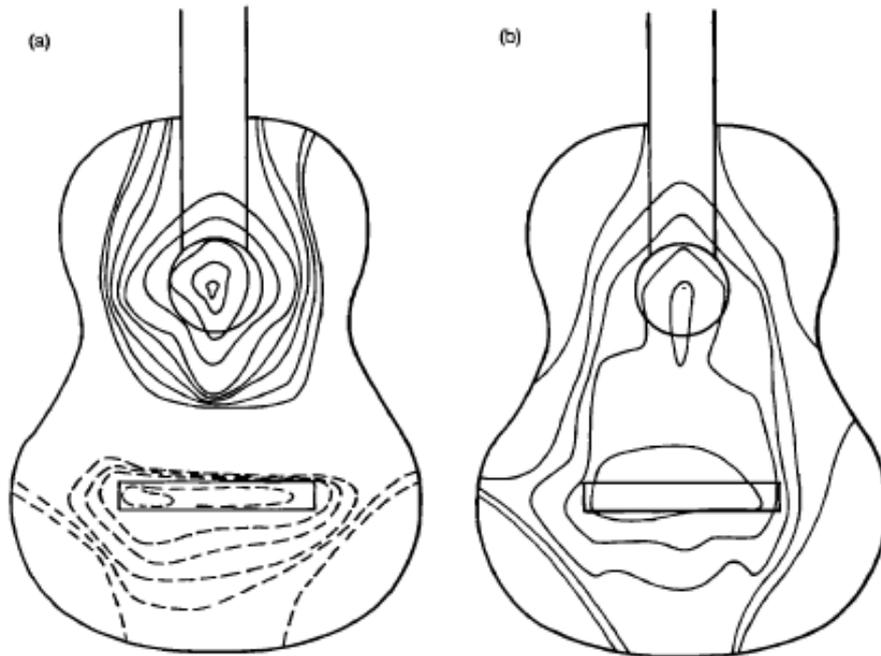


FIGURE 1.12 – Isovaleurs de l'intensité acoustique mesurées sur une guitare à deux fréquences d'excitation correspondant respectivement aux modes A_0 (a) et T_1 (b). Les traits en pointillés représentent les isovaleurs négatives. Les traits plein sont des valeurs positives. Figure extraite de [87].

Boullosa *et al.* [16] ont proposé d'utiliser l'efficacité de rayonnement totale de la guitare pour établir un lien entre cette grandeur et la qualité perçue. L'efficacité totale de

rayonnement est définie par :

$$E_{Tot} = \frac{\sum_{n=1}^N E_n \Delta f_n}{\sum_{n=1}^N \Delta f_n}, \quad (1.22)$$

où Δf_n est la n^{ieme} bande de tiers d'octave considérée et E_n est l'efficacité de rayonnement de l'instrument (rapport entre puissance sonore rayonnée et puissance de la source excitatrice) dans cette bande de tiers d'octave. A partir de tests sur 4 guitares, Boullosa *et al.* concluent sur le fait que les guitares ayant la plus grande efficacité de rayonnement sont celles qui sont jugées le plus positivement par un corpus d'auditeurs, et que donc l'efficacité de rayonnement joue un rôle important dans l'appréciation subjective de l'instrument.

Christensen [31] a étendu son modèle de guitare utilisant des oscillateurs à 2, puis 3 degrés de liberté, au rayonnement acoustique de ces oscillateurs connectés à des pistons. Cette étude permet de modéliser la fonction de réponse acoustique des guitares jusqu'à 600 Hz en utilisant uniquement les paramètres des premiers modes. Plus récemment, Hill *et al.* [69] ont développé ce modèle en prenant en compte la directivité des oscillateurs. Les diagrammes tridimensionnels du champ acoustique rayonné pour les 3 premiers modes de la guitare selon Hill *et al.* [69] sont représentés sur la figure 1.13.

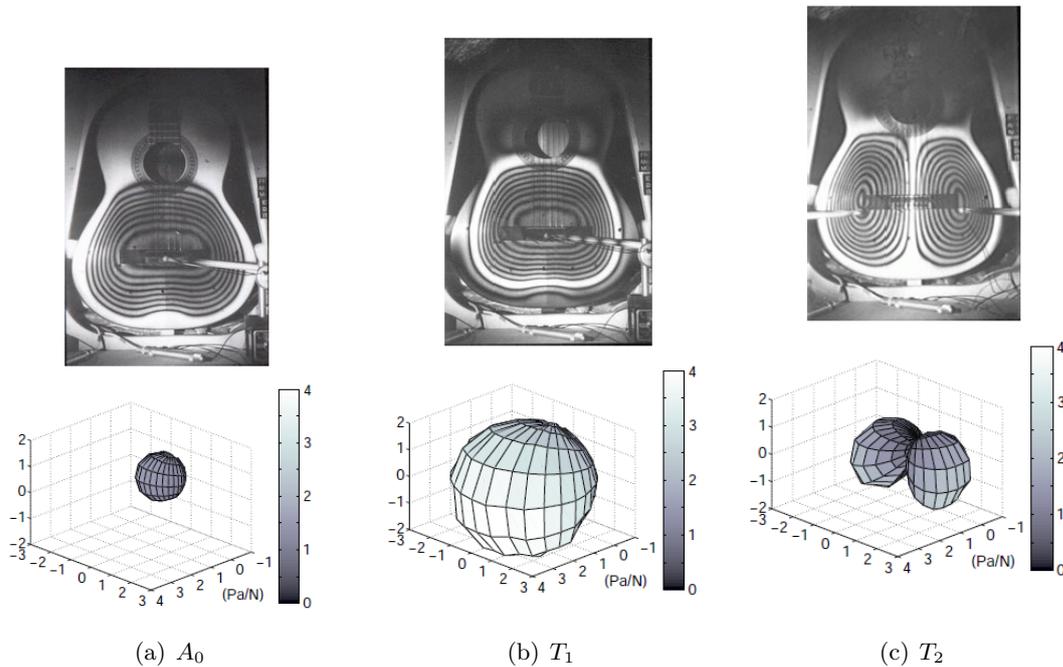


FIGURE 1.13 – Déformées modales et diagrammes tridimensionnels du champ acoustique rayonné pour les 3 premiers modes de guitare, d'après Hill *et al.* [69].

Notons que des modèles numériques complets d'instruments à cordes ont été développés dans l'équipe de Chaigne [6, 26, 43, 44]. Ils sont très utiles pour la compréhension de certains phénomènes mécaniques ou acoustiques, tels que la déformation de la table d'harmonie de l'instrument au cours du temps ou encore la variation du champ acoustique, lorsque

l'instrument est joué (*cf.*s figure 1.14). Ils fournissent des sons de synthèse permettant l'étude de modifications. Ils sont cependant mal adaptés au contexte d'aide à la lutherie, du fait de leur complexité de mise en œuvre. La méconnaissance des paramètres caractérisant les matériaux et les liaisons constitue également une limite importante à la mise en œuvre de ces modèles dans l'atelier du luthier.

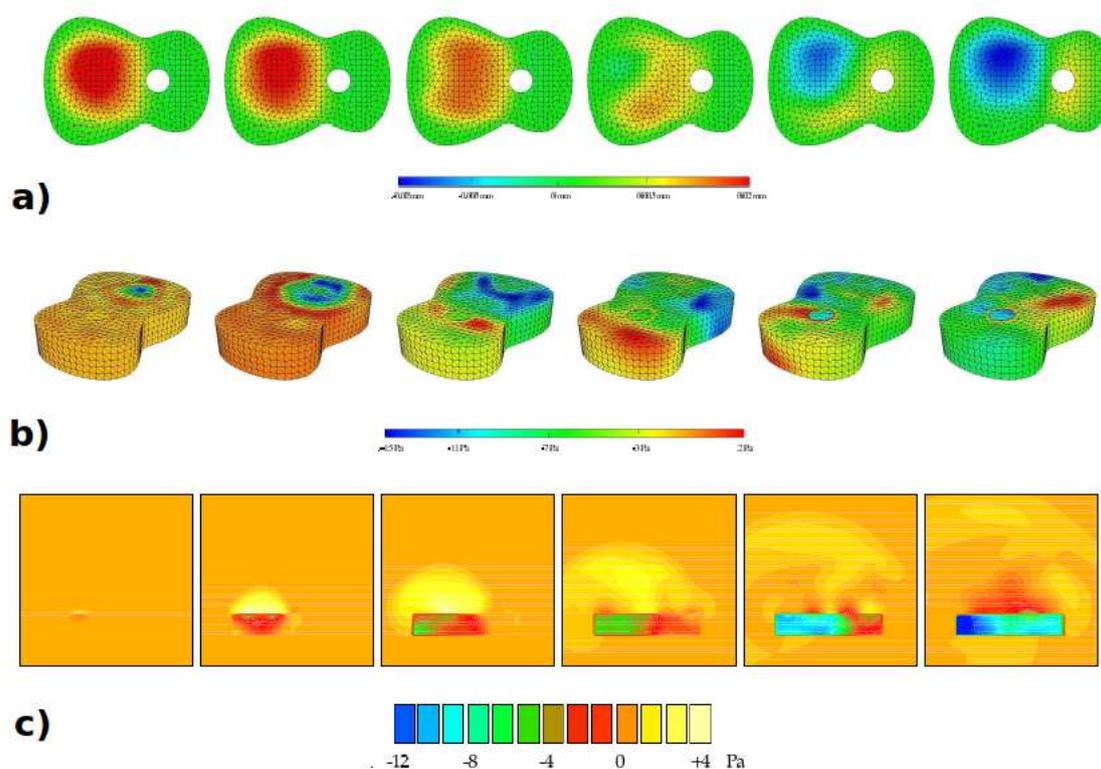


FIGURE 1.14 – a) Déformation de la table d’harmonie, b) saut de pression à la surface de la guitare et c) coupe du champ de pression acoustique dans le plan normal à la table d’harmonie, selon son axe de symétrie. Figure extraite de [43].

1.2.2 Instruments à cordes frottées

1.2.2.1 Généralités organologiques et morphologiques

Le violon fait aussi partie de la famille des luths, selon la classification Sachs-Hornbostel [136], en effet, les cordes sont dans un plan parallèle à la table d’harmonie. Il se démarque toutefois de la guitare par plusieurs points : les deux principaux étant que sa table d’harmonie est voutée et il se joue principalement en frottant ses cordes avec un archet.

Le violon est également le résultat d’évolutions d’instruments à cordes frottées plus anciens. Tout comme pour la guitare, la mise en place d’échancrures en forme de C lui permet de se démarquer de ses ancêtres, tels que le rebec et la vièle [68]. Le renforcement s’accroît de plus en plus à partir du XIV^{ème} siècle, jusqu’à donner la forme actuelle du

violon (*cf.* figure 1.15) au XVIème siècle [68]. Un plan de fabrication détaillé est disponible en annexe F.2.

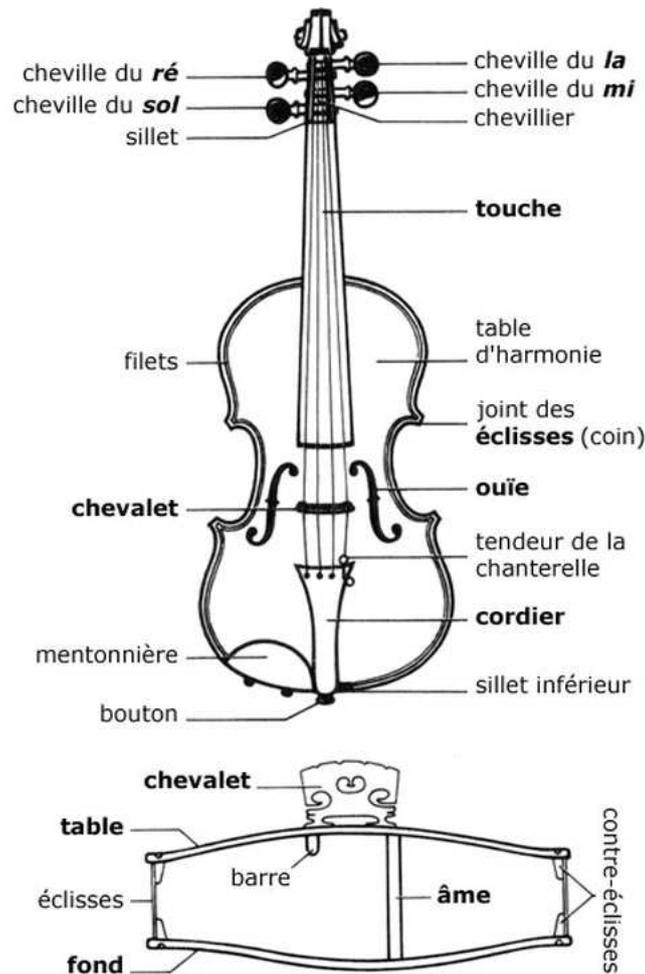


FIGURE 1.15 – Schéma d'un violon, disponible à l'adresse suivante : <http://library.thinkquest.org/27178/fr/section/2/2.html>

Les autres instruments formant le quatuor, à savoir l'alto, le violoncelle et la contrebasse, suivent principalement le même schéma avec d'autres dimensions permettant de couvrir une tessiture large. Cette famille a été agrandie par Hutchins, qui a voulu compléter la compléter en créant de nouveaux instruments, formant un octuor. La figure 1.16, extraite d'un article de Hutchins [72] représente les différents instruments à corde frottées du quatuor classique et de l'octuor de Hutchins, ainsi que la hauteur de leurs cordes à vide en accord standard.

1.2.2.2 La corde frottée

Nous présentons un bref état de l'art sur la corde frottée. Nous invitons le lecteur à s'orienter vers des articles ou ouvrages plus spécifiquement consacrés aux cordes frottées

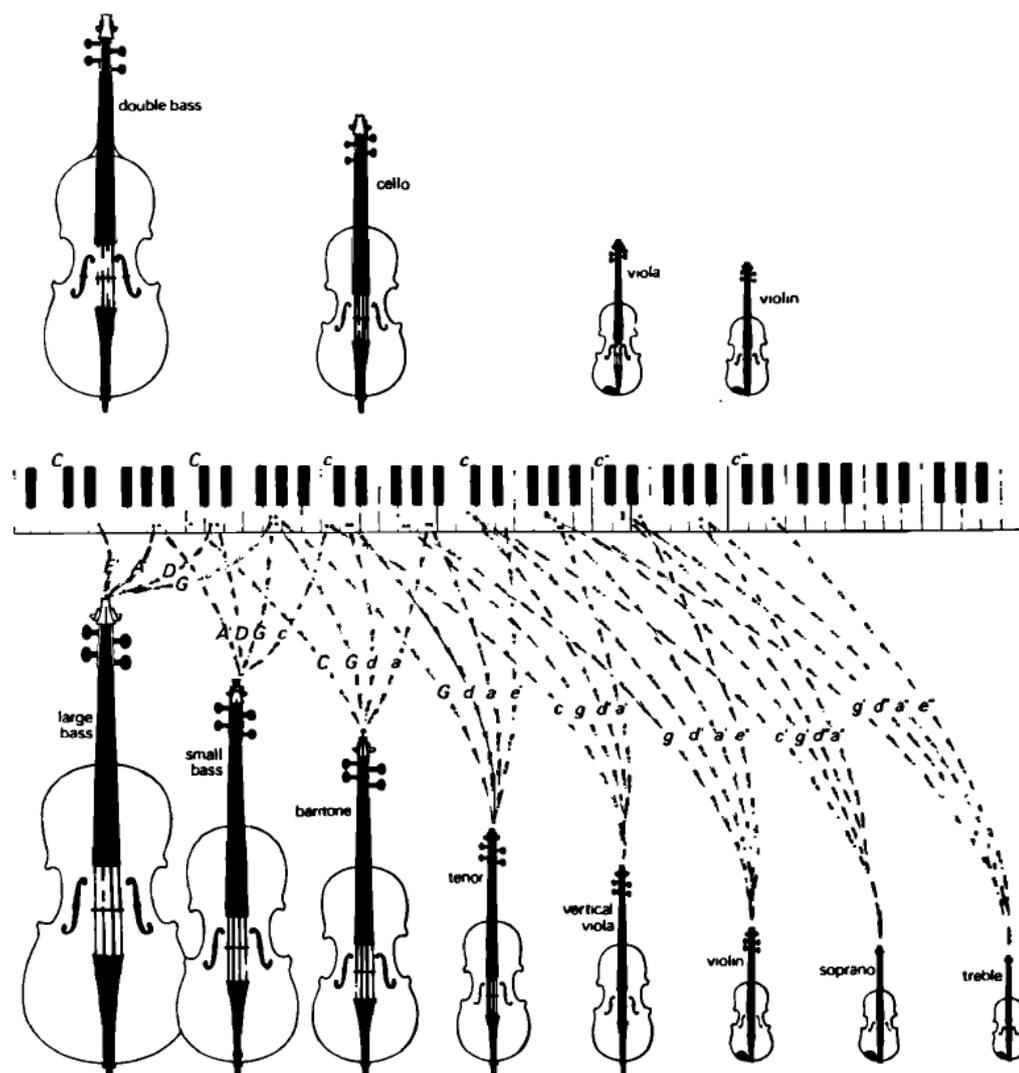


FIGURE 1.16 – Famille des instruments à cordes frottées du quatuor classique et de l’octuor de Hutchins. Figure extraite de [72].

et aux état des connaissances scientifiques sur le sujet, tels que l’article de Woodhouse et Galluzzo [146] ou le chapitre écrit par Boutillon dans [27].

L’étude du mouvement de la corde frottée trouve ses origines dans la seconde moitié du 19ème siècle, avec les travaux de Helmholtz [67]. Il met en évidence le mouvement qui portera son nom. Celui-ci met en jeu un coin anguleux se déplaçant d’un bout à l’autre de la corde en décrivant un fuseau constitué de deux arches de paraboles. Il en résulte que le déplacement de la corde en fonction du temps est de forme triangulaire, donnant lieu à 2 phases du mouvement. La première phase correspondant au front montant du déplacement est la phase d’accroche de la corde : cette dernière "colle" à l’archet et se déplace donc à la même vitesse v_+ , supposée pratiquement constante et positive. Le déplacement au cours du temps est donc une droite de pente positive. La deuxième phase correspondant à la partie descendante du déplacement est la phase de glissement de la corde : cette dernière

se détache de l'archet et revient à sa position initiale à une vitesse v_- constante et négative. En général $|v_-| > |v_+|$. La figure 1.17 illustre ce mouvement bien particulier de la corde frottée.

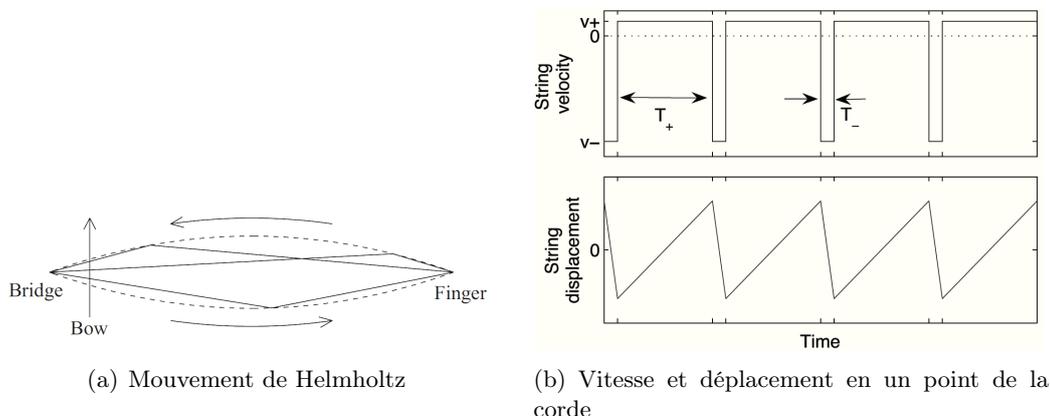


FIGURE 1.17 – a) Illustration du mouvement de Helmholtz. La corde est déformée par l'archet pour former un angle se déplaçant le long de la courbe en pointillés d'un bout à l'autre de la corde. Figure extraite de [146]. b) Vitesse en un point quelconque de la corde et déplacement en fonction du temps mettant en évidence l'existence de deux régimes : phase d'accroche et phase de glissement. Figures extraites de [42].

Le mouvement idéal de Helmholtz a été par la suite étudié par Raman [111], Friedlander [60] et Keller [83]. Leurs modèles n'incluant pas de dissipation prédisaient des instabilités du mouvement incompatibles avec les observations sur des cordes réelles. La prise en compte de la dissipation permet de corriger ce type de problème [98]. Les modèles de cordes frottées doivent donc impérativement prendre en compte les dissipations. En pratique, le coin n'est pas idéalement anguleux mais présente un aspect d'autant plus orbiculaire que la force d'excitation de l'archet est faible [35].

En situation de jeu, le mouvement de Helmholtz n'est pas toujours atteint. Son existence dépend de trois paramètres : la vitesse d'archet, la force appliquée sur la corde, et la distance entre le chevalet et l'archet. Schelleng [121] a aussi proposé des diagrammes qui portent son nom (diagrammes de Schelleng). Ces diagrammes, définis par les axes force appliquée et distance archet-chevalet, indiquent pour une vitesse d'archet donnée, la zone à l'intérieur de laquelle le mouvement de Helmholtz est atteint. Ces diagrammes sont de la forme de celui de la figure 1.18.

Notons que le diagramme de la figure 1.18 est valable pour un doigté donné sur un violon, lorsque la corde est frottée à une vitesse donnée. Schelleng note toutefois qu'il suffit de translater la zone comprise entre les lignes minimum et maximum dans le plan pour les autres doigtés ou vitesses d'archet. L'écart entre la force minimale et maximale lorsque la corde est frottée près du chevalet est très faible, il est par conséquent plus difficile de jouer près du chevalet. Cette position de jeu est donc généralement utilisée par des musiciens

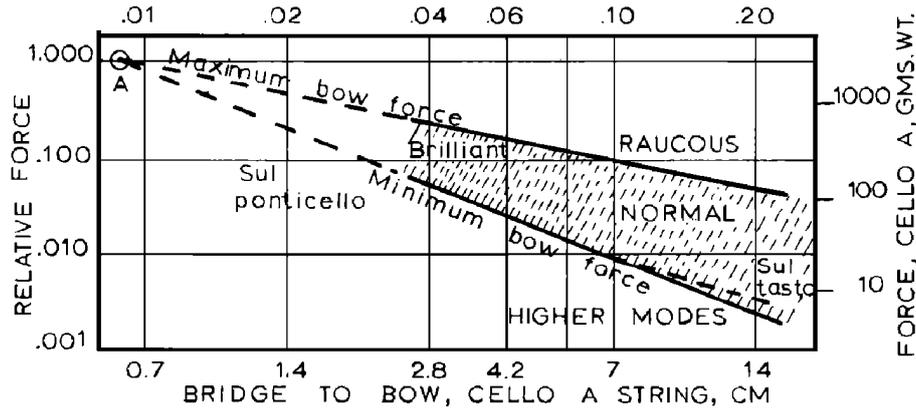


FIGURE 1.18 – Diagramme indiquant, pour une vitesse d’archet donnée (ici 0.2 m/s), le domaine du plan force appliquée distance archet-chevalet pour lequel la corde frottée de violoncelle suit un mouvement de Helmholtz, d’après Schelleng [121].

experts. Cette position favorise un son très riche en harmonique : le premier harmonique coupé par l’effet de filtrage (*cf.* la figure 1.3) étant d’ordre élevé, très peu d’harmoniques sont supprimés.

1.2.2.3 Couplage corde-table d’harmonie

Couplage faible Les diagrammes de Schelleng vus à la section précédente sont calculés sous l’hypothèse peu réaliste que l’admittance au chevalet est nulle. Woodhouse [142] a étendu le modèle de Schelleng en prenant en compte la mobilité du chevalet. La force minimale d’appui pour obtenir le mouvement de Helmholtz est en fait fortement dépendante de la mobilité au chevalet, et par conséquent de la fréquence de jeu. Elle est donnée par la formule suivante :

$$f_{min}(\omega) = \frac{2v_b Z_0^2}{\pi^2 X^2 (\mu_s - \mu_d)} \left[\max_t \left\{ \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} Y_{Ch}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \right\} + \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{Ch}(n\omega_0)}{n^2} \right], \quad (1.23)$$

où v_b est la vitesse de l’archet, Z_0 est l’impédance caractéristique de la corde, X est le rapport entre la distance de l’archet au chevalet sur la longueur vibrante de corde, μ_s et μ_d sont les coefficients de friction de respectivement la phase de frottement et de glissement, ω_0 est la pulsation fondamentale et Y_{Ch} est la mobilité au chevalet. La figure 1.19 est un exemple de courbe de force minimale en fonction de la fréquence calculée par Woodhouse [142].

L’équation (1.23) et la figure 1.19 révèlent un compromis existant entre puissance sonore (forte mobilité) et facilité de jeu (faible force minimale). En effet, la force minimale est d’autant plus grande que la mobilité au chevalet est grande. Le luthier doit alors ajuster le

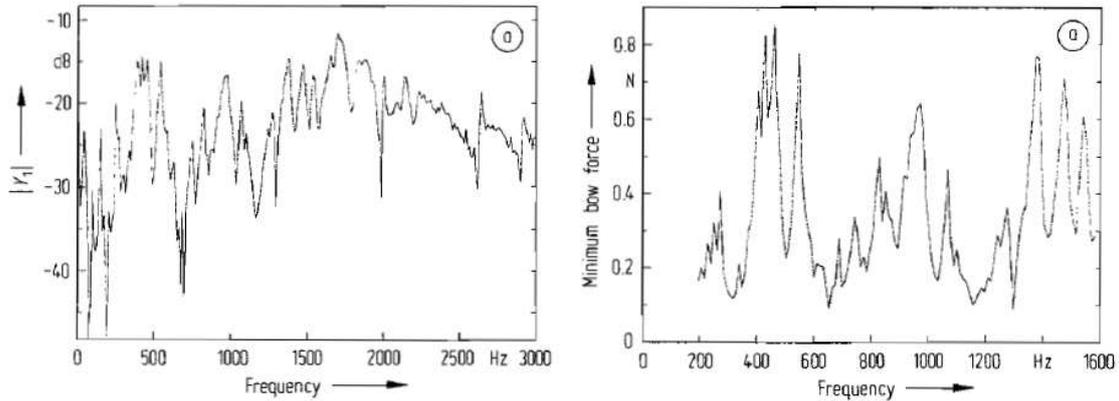


FIGURE 1.19 – Gauche : mobilité mesurée au chevalet d'un violon. Droite : force minimale en fonction de la fréquence calculée selon l'équation (1.23) correspondant à la mobilité représentée sur la figure de gauche. Figure extraite de [142].

niveau de mobilité pour choisir entre un instrument puissant mais plus difficile à jouer ou alors un instrument avec une meilleure jouabilité mais produisant un son moins puissant. C'est en ce sens que la connaissance des niveaux de mobilité pour un luthier est importante.

Couplage excessif : cas de la note du loup Lorsque le niveau de mobilité, et par conséquent le niveau de couplage entre la corde et le corps de l'instrument, est trop important, ce qui se produit généralement lorsque la fréquence fondamentale de la note jouée correspond à une résonance de la structure, on observe un phénomène non souhaitable, appelé *note du loup* [35]. Il apparaît le plus souvent sur les violoncelles, mais peut se retrouver plus rarement sur les autres instruments du quatuor. Il se caractérise par un effet de roulement indésirable. Les premières études expérimentales, effectuées par White [140] et Raman [110], eurent lieu en 1915 et 1916 et donnèrent deux explications contradictoires : White [140] présente le phénomène comme des battements amenant une fluctuation de l'intensité du son au cours du temps, alors que Raman [110] réfute cette conjecture et suggère que le phénomène est dû à une rapide alternance entre le fondamental et l'octave dans le son produit.

Il a fallu ensuite attendre les années 1960 et Schelleng [120] pour fournir une étude théorique sur le sujet. En utilisant une modélisation du violon à l'aide d'un circuit électrique équivalent, l'auteur conclut que la note du loup est bien le résultat de battements dus à une superposition de deux ondes sinusoïdales dans la corde, correspondant aux fréquences proches de résonances des deux circuits couplés (corde et corps du violon). Firth [55] confirme expérimentalement les suggestions de White [140] et Schelleng [120] en affirmant : "The wolfnote in the cello is the result of beating between pairs of equally forced vibrations".

Un modèle d'interaction corde-table dans le domaine temporel a été développé depuis

quelques années au sein de l'équipe d'Antunes [39, 74]. Il permet de tracer des diagrammes de stabilité prédisant l'efficacité d'anti-rouleurs (dispositif conçu pour réduire l'effet de la note du loup) en fonction de leur positionnement et de leur masse [40]. Ces diagrammes mettent en évidence certaines difficultés que peuvent connaître le luthier ou le musicien lorsqu'il veut ajuster son anti-rouleur pour supprimer un loup : dans l'exemple donné dans [40], il n'est pas possible de supprimer totalement le loup sur une corde, quelque soit la position ou la masse de l'anti-rouleur. Un autre exemple de difficulté est le fait de déplacer le problème sur une autre note.

Prédire a priori l'existence d'un loup, à partir des caractéristiques de la caisse n'est pas aisé. Schelleng [120] propose un critère basé sur la mesure de l'amortissement des modes de caisse de l'instrument, et d'un paramètre sans dimension, appelé impédance caractéristique relative, et égal à Z_C/\sqrt{DM} , où Z_C est l'impédance caractéristique de la corde, D et M sont respectivement la raideur et la masse de la table dans le circuit équivalent de Schelleng. D'après [120], le loup est d'autant plus susceptible d'apparaître que l'amortissement est petit et que l'impédance caractéristique relative est grande. Les grandeurs D et M sont toutefois difficilement accessibles, ce qui peut devenir une limite importante à l'utilisation de ce critère par le luthier.

Afin de quantifier le caractère pathologique d'une note à partir de quelques indicateurs objectifs déduits de la mesure de l'instrument en situation de jeu nous pouvons aussi nous inspirer des méthodes d'identification de pathologies vocales, étant donné que les oscillations des cordes vocales des cordes frottées sont toutes les deux de types auto-entretenu. Généralement, on considère des cordes vocales pathologiques lorsque le caractère auto-entretenu de leurs oscillations se dégrade, c'est-à-dire que certains paramètres (tels que la fréquence fondamentale, l'amplitude, ou la balance spectrale) fluctuent involontairement au cours du temps. Ainsi nous regardons deux critères principaux dérivés des études sur l'acoustique de la parole : le jitter et le shimmer [5].

- Le jitter quantifie la variation de la période fondamentale d'un cycle à l'autre. Perceptivement, il correspond au vibrato. On retrouve plusieurs définitions du critère. Les deux plus couramment utilisés sont le jitter ratio et l'FPQ (*Frequency Perturbation Quotient*), aussi appelé RAP (*Relative Average Perturbation*). Nous utilisons le jitter ratio. Il s'agit de la moyenne de toutes les différences, en valeur absolue, entre les durées de deux périodes consécutives du signal enregistré. On l'exprime souvent en pourcentage, ce qui implique de diviser cette moyenne des écarts par la durée moyenne d'une période du signal. Il s'écrit donc :

$$J_{ratio\%} = 100 \times \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} |P_{n+1} - P_n|}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_n}, \quad (1.24)$$

avec N le nombre de périodes du signal, et P_n la durée de la n^{ime} période du signal.

Un seuil voix normale / voix pathologique est communément admis pour un jitter ratio supérieur à 1.04% [41].

- Le shimmer quantifie la variation de l'amplitude du signal sonore d'un cycle à l'autre. Il correspond perceptivement au trémolo. Là encore, on retrouve plusieurs définitions du critère. Les deux plus couramment utilisés étant le shimmer local et le shimmer APQ (*Amplitude Perturbation Quotient*). Nous utilisons le shimmer local. Il s'agit de la moyenne de toutes les différences, en valeur absolue, entre les amplitudes de deux périodes consécutives du signal enregistré. On l'exprime souvent en pourcentage, ce qui implique de diviser cette moyenne des écarts par l'amplitude moyenne d'une période du signal. Il s'écrit donc :

$$S_{local\%} = 100 \times \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} |A_{n+1} - A_n|}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n}, \quad (1.25)$$

avec A_n l'amplitude de la $n^{ième}$ période du signal. Un seuil voix normale / voix pathologique est communément admis pour un shimmer local supérieur à 3.81% [41].

La figure 1.20 présente un exemple d'application de ces critères sur des signaux enregistrés sur un alto présentant un loup (AO_1). Le signal présente deux parties bien distinctes : la première partie du signal est une note normale, et la deuxième est une note du loup relativement bien marquée.

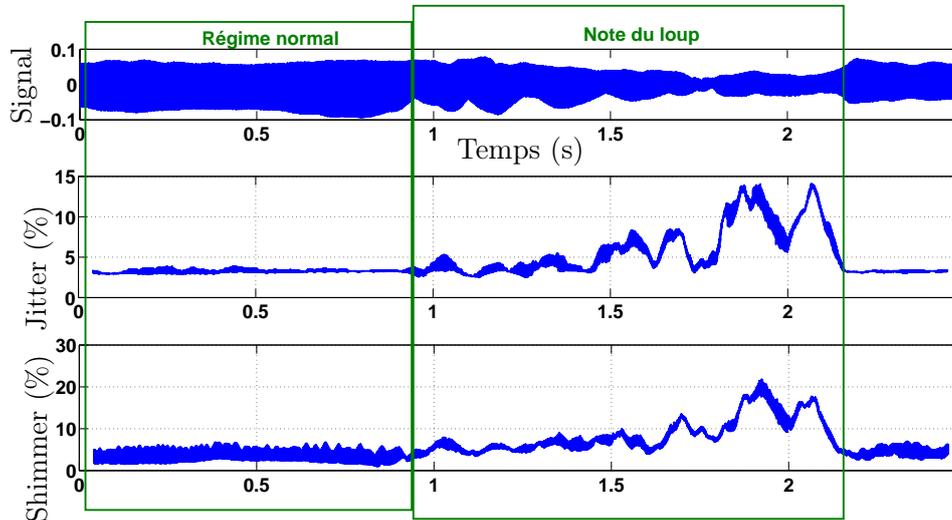


FIGURE 1.20 – Haut : Signal enregistré de pression sonore sur l'alto AO_1 du corpus de l'annexe E. Sont représentées les l'évolution du jitter ratio correspondant (milieu) et du shimmer local (en bas).

Le passage du régime nominal à la note du loup est bien marqué à la fois sur le signal, mais aussi par des valeurs de jitter et shimmer beaucoup plus élevées lors du loup, soulignant le caractère très erratique de l'oscillation. Ces critères sont donc bien adaptés

pour la détection de notes du loup par le luthier ou le musicien. Pour ce dernier, cela peut aussi constituer un critère de stabilité de jeu.

1.2.2.4 Comportement vibratoire de la table d'harmonie

Modes basses fréquences

A l'instar de la guitare, les premiers modes du violon ont été particulièrement étudiés. Ils sont classiquement classés selon leur appartenance au corps entier de l'instrument, à la table d'harmonie seule, au dos, au manche ou à la cavité. En revanche, contrairement aux premiers modes de la guitare, il n'y a pas de dénomination standard pour la plupart d'entre eux. Le tableau 1.4 dresse un récapitulatif des noms adressés aux premiers modes de violons à travers 5 exemples d'articles traitant du comportement modal des violons. Par la suite, nous gardons la dénomination de [103]. Une telle étude, utilisant un vibromètre à balayage a été effectuée au LAUM. Les déformées opérationnelles des premiers modes de la table d'harmonie du violon VI_1 sont représentées sur la figure 1.21.

Références		[103]	[116]	[73]	[13]	[123]	Fréquences
Modes de cavité	1er mode de cavité	A0	A0	A0	A0	A0	270-290 Hz
	2ème mode de cavité		A1	A1	A1		430-490 Hz
Modes de structure	1er mode de corps	C1	B1	B-1			145-190 Hz
	Mode de manche	N	B2	B0			250-300 Hz
	2nd mode de corps	C2	C1		CBR	C2	380-420 Hz
	1er mode de table	T1	C2		B1-	T1	430-480 Hz
	3ème mode de corps	C3	C3	B1	B1+	B1	510-580 Hz
	4ème mode de corps	C4	C4				700 Hz

TABLE 1.4 – Nomenclature et fréquences des premiers modes de violon issus des travaux de la littérature. Sont répertoriées les nomenclatures utilisées par Moral et Jansson [103], Rossing [116], Hutchins [73], Bissinger [13] et Schleske [123].

Les rapports entre les fréquences des premiers modes ont longtemps été l'objet de recherches, notamment par Hutchins [72].

Dans [103], les auteurs définissent des zones de fréquences selon la dominance des modes globaux (corps entier du violon) ou locaux (modes de table ou dos). Ainsi, en se référant à la figure 1.22 tirée de [103], les modes globaux dominent pour les fréquences inférieures à 600-700 Hz, environ, puis ce sont les modes locaux qui dominent de 700 à 2000 Hz, qui est la limite supérieure de fréquence de leur étude. D'après cette figure, on remarque notamment une accumulation de modes entre 1000 et 1500 Hz.

Phénomène du "*Bridge Hill*"

Il existe de nombreuses références dans la littérature scientifique sur un phénomène communément appelé *Bridge Hill*. Il se manifeste par une amplification sur la courbe de

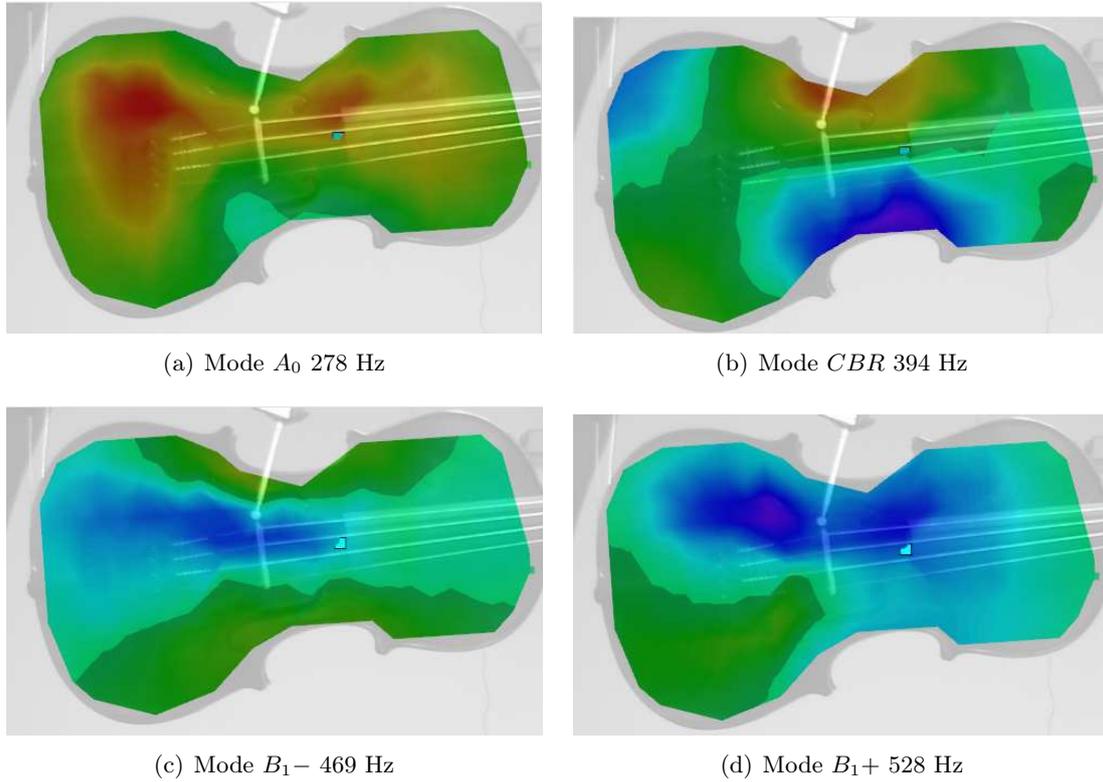


FIGURE 1.21 – Déformées de la table d'harmonie de violons pour 4 modes basses fréquences identifiés. Les déformées opérationnelles du violon VI_1 du corps de l'annexe E sont mesurées à l'aide d'un vélocimètre laser à balayage. L'excitation est effectuée à l'aide d'un petit marteau d'impact PCB 086E80, l'impact étant effectué sur le haut du chevalet, à la base de la corde la plus grave du violon, dans la direction normal à la table. La nomenclature utilisée est celle de Bissinger [13].

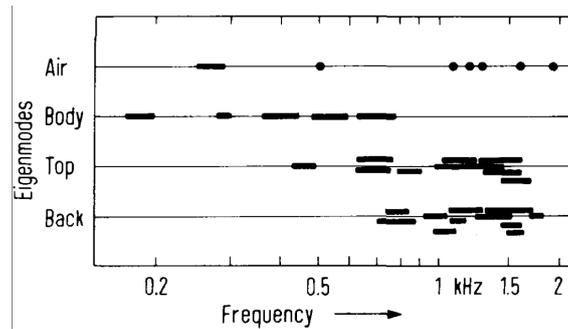


FIGURE 1.22 – Position en fréquences des premiers modes de violon, en fonction du sous-système auquel ils appartiennent. Figure extraite de [103]

mobilité entre 2 et 3 kHz, aux alentours de la fréquence du premier mode de balancement du chevalet [35,114]. Le mouvement de ce mode se caractérise par un balancement du chevalet sur ses deux pieds (*cf.* figure 1.23). Moral et Jansson [103] évoque une résonance large, contenant plusieurs résonances "mineures" dont le maximum se situe approximativement dans le domaine fréquentiel de la première résonance "majeure" du chevalet observée par

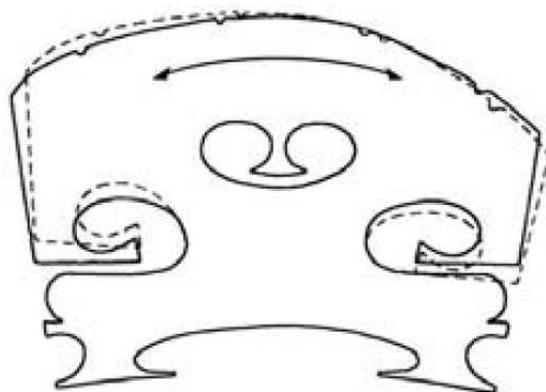


FIGURE 1.23 – Premier mode de balancement du chevalet, d'après [145]

Reinicke dans [114]. Un exemple de mobilité au chevalet avec *Bridge Hill* apparent est donné en figure 1.24. L'appellation *Bridge Hill* est ensuite attribuée à Jansson après qu'il ait constaté la présence systématique du phénomène sur un lot de violons considérés comme de grande qualité [79]. Cependant, si l'appellation *Bridge Hill* est maintenant communément admise, Jansson lui-même tempérait cette appellation lorsqu'il constata que l'amplification de la mobilité entre 2 et 3 kHz n'était pas due qu'au seul chevalet, mais aussi aux propriétés mécaniques de la table au pied du chevalet [46, 80].

Les études expérimentales sur le *Bridge Hill* sont surtout l'œuvre de Jansson. Dans [80], les auteurs étudient l'influence de la forme du chevalet sur la position et l'amplitude du *Bridge Hill*, et plus spécifiquement l'influence de la distance existante entre les deux pieds du chevalet. La conclusion étant qu'une diminution de la distance inter-pieds du chevalet a tendance à diminuer la fréquence centrale du *Bridge Hill*, mais augmentait le niveau de ce dernier. Une autre conclusion est que les propriétés de la table (raideur, épaisseur, courbure) influent aussi sur le *Bridge Hill*. Cette conclusion est un point de départ pour l'étude suivante, qui porte sur l'influence de la table sur le *Bridge Hill* [46]. D'après cette étude, le facteur essentiel pour régler le *Bridge Hill* serait la géométrie des ouïes.

Plus récemment, Bissinger a montré que le *Bridge Hill* se manifeste également dans le rayonnement de l'instrument [14]. Notons que cette étude remet en cause l'idée soutenue jusqu'alors que le *Bridge Hill* était une caractéristique des bons violons et que sur ces derniers, le *Bridge Hill* était plus marqué que sur les violons de moins bonne qualité. Dans [14], l'auteur ne remarque aucune différence significative entre le rayonnement des "bons" et "moins bons" violons dans la zone fréquentielle du *Bridge Hill*.

Des modèles visant à reproduire le couplage entre le chevalet et la table d'harmonie ont été proposés par la suite [7, 18, 145]. Dans ces modèles, le chevalet est modélisé par un système masse-ressort à bras de levier, se balançant sur deux pieds, posés sur une simple plaque. Ces modèles sont relativement simplistes, ils ont pour but principal d'étu-

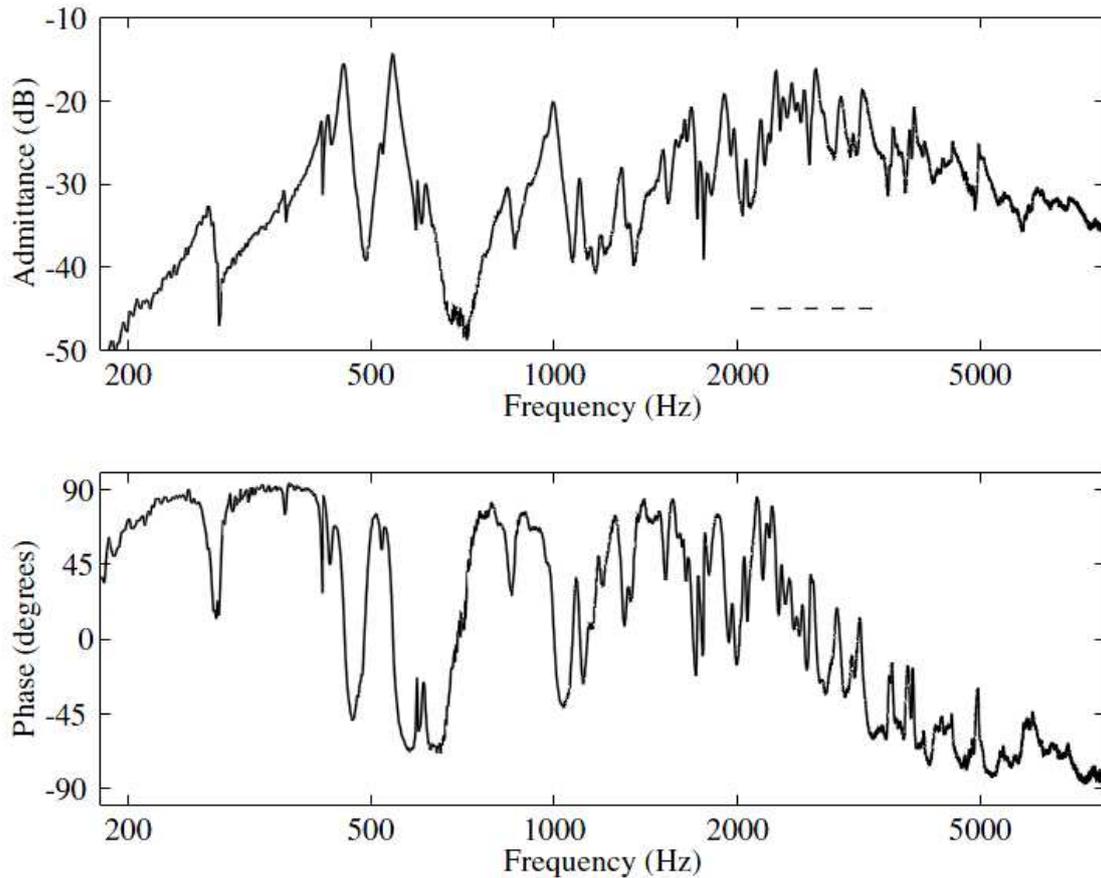


FIGURE 1.24 – Exemple typique de mobilité au chevalet montrant le *Bridge Hill* dans la zone de fréquence marquée par les traits en pointillés. La phase de la mobilité est tracée dans la partie inférieure de la figure.

dier uniquement le *Bridge Hill*. L'étude de Woodhouse [145] analyse l'influence de chaque paramètre d'entrée du modèle, qu'ils soient relatifs au chevalet (masse, raideur et fréquence de résonance) ou relatifs à la caisse de l'instrument (épaisseur de la table, nature du matériau et position de l'âme). Il montre ainsi que les paramètres du chevalet ont une influence plus grande sur les paramètres du *Bridge Hill* (fréquence centrale, amplitude, et largeur) que les paramètres de la caisse.

1.2.2.5 Rayonnement de la table d'harmonie et lien avec la qualité des instruments

Réponse acoustique des violons

L'appréciation d'un instrument fini se faisant généralement en situation de jeu, en l'écoutant, de nombreuses études s'intéressent à l'analyse des sons de violons, lorsque ces derniers sont joués (ou du moins excités). Ces analyses consistent pour la plupart à traiter les signaux de pression sonore enregistrés à l'aide de microphones. Ce problème est extrê-

mement vaste car il existe de nombreux paramètres entrant en jeu : le geste excitateur, l'intensité sonore en fonction de la fréquence, la directivité, l'environnement (salle). Les études se focalisent alors généralement sur un de ces paramètres, contrôlant les autres ou les négligeant.

Les représentations dans le domaine fréquentiel d'un ensemble de sons de violons utilisent souvent des transformées à Q constant [20] (ou *Constant Q Transform*, *CQT*, en anglais). La transformée à Q constante est une technique de représentation dans le domaine de Fourier utilisant une résolution logarithmique en fréquence (cf. figure 1.25). Le facteur de qualité Q des bandes de fréquences représentées est gardé constant (d'où le nom). Cette technique est bien adaptée dans le cas de signaux musicaux constituées d'un ensemble de notes dont l'échelle de hauteur est elle aussi logarithmique, comme l'est la gamme tempérée que l'on utilise en musique occidentale.

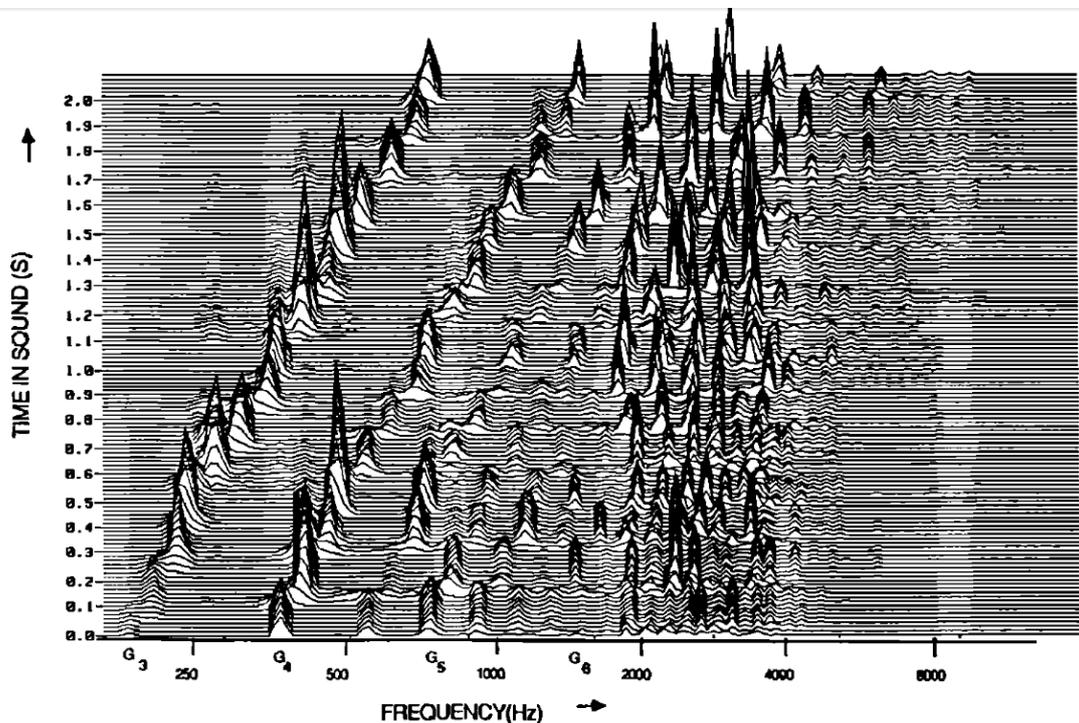


FIGURE 1.25 – Représentation temps-fréquence d'une CQT d'un signal de pression sonore enregistré à partir d'une gamme diatonique de G_3 (196 Hz) à G_5 (784 Hz) jouée sur un violon. Figure extraite de [20].

Cette représentation fait apparaître une bande de fréquences très riche en harmoniques d'amplitudes élevées. Cette bande, comprise entre 2000 et 4000 Hz, correspond à la zone où le Bridge Hill est régulièrement observé.

D'autres méthodes utilisent des spectres moyens à long-terme (*Long-Time-Average-Spectra*, *LTAS*, en anglais). La technique consiste à enregistrer un signal temporel, soit de plusieurs notes [62], soit d'un glissando [102], que l'on décompose en trames temporelles

recouvrantes de longueur fixe. Le spectre moyen est obtenu en effectuant la moyenne du carré du module des spectres obtenus divisé par la longueur des trames temporelles. On obtient alors la moyenne des périodogrammes [139].

Les premières études, telle que celle de Miller [102], n'incluent malheureusement pas de mesures de mobilité, ou du moins d'étude vibratoire de l'instrument, ce qui ne permet pas d'expliquer l'allure de ces spectres. Le lien entre allure générale des caractéristiques spectrales des sons de violons en situation de jeu et mobilité au chevalet est manquant. Il est pourtant important dans le contexte d'aide à la facture instrumentale : les conséquences d'éventuelles modifications d'allure générale de mobilité apportées par le luthier sur les caractéristiques spectrales des sons de violons en situation de jeu pouvant alors être bien anticipées.

Critères de qualité relatifs au rayonnement acoustique des violons

Devant les difficultés liées à la complexité du rayonnement acoustique des violons, une approche visant à séparer ce dernier en zones principales de fréquence a été proposée par Dünwald [45]. Se basant sur des réponses de violons classés en 3 catégories, à savoir :

- vieux violons italiens (fabriquées avant 1800),
- violons fabriqués par des "maîtres-luthiers" après 1800,
- violons d'usine,

l'auteur repère des différences significatives entre chaque catégorie dans des zones fréquentielles bien précises. En tout, 6 zones sont définies selon la tableau suivant :

Domaine	A	B	C	D	E	F
Fréquences (Hz)	190-650	650-1300	1300-1640	1640-2580	2580-4200	4200-6400

Le niveau moyen du spectre, modifié par une fonction de pondération tenant compte des sensibilités de l'oreille humaine, dans chacune de ces bandes est ensuite relié à des qualités perceptives, définies de manière empirique :

- $L_B \gg L_{ACD} \rightarrow$ le son est *nasal*,
- $L_B \ll L_{ACD} \rightarrow$ le son est *non-nasal* ("unnasal"),
- $L_F \gg L_{DE} \rightarrow$ le son est *âpre* ("harsh"),
- $L_F \ll L_{DE} \rightarrow$ le son est *clair* ("clear"),

où L_{ij} représente la somme des niveaux moyens des bandes i et j .

Pour chaque violon, 46 notes sont jouées. Un pourcentage de notes remplissant les critères parmi ces 46 notes est attribué à chaque critère. Les violons sont alors jugés à travers l'analyse de la proportion de notes remplissant chaque critère. A la suite d'une étude portant sur un large corpus de violons, l'auteur affirme que les vieux violons italiens présentent presque tous un très faible pourcentage de notes "nasales" et "âpres", selon les critères définis par l'auteur.

Diagramme de directivité

La directivité du violon a été étudiée par Meyer dans son travail sur le son des orchestres [101]. Il montre ainsi que l'instrument est d'autant plus directif que la fréquence augmente. Il est par conséquent presque omni-directionnel en basses fréquences (200-400 Hz), puis son champ de rayonnement diminue quand la fréquence augmente (parfois l'instrument est bi-directionnel, à 1500 et 2000 Hz, par exemple), jusqu'à devenir très directionnel à partir de 2500 Hz. Le rayonnement est alors dirigé dans un plan normal au plan de la table d'harmonie. Un peu plus tard, Bissinger [12] étudie le rayonnement des modes d'un violon jusqu'à 1200 Hz. Il en sort les diagrammes de directivité représentés sur la figure 1.26.

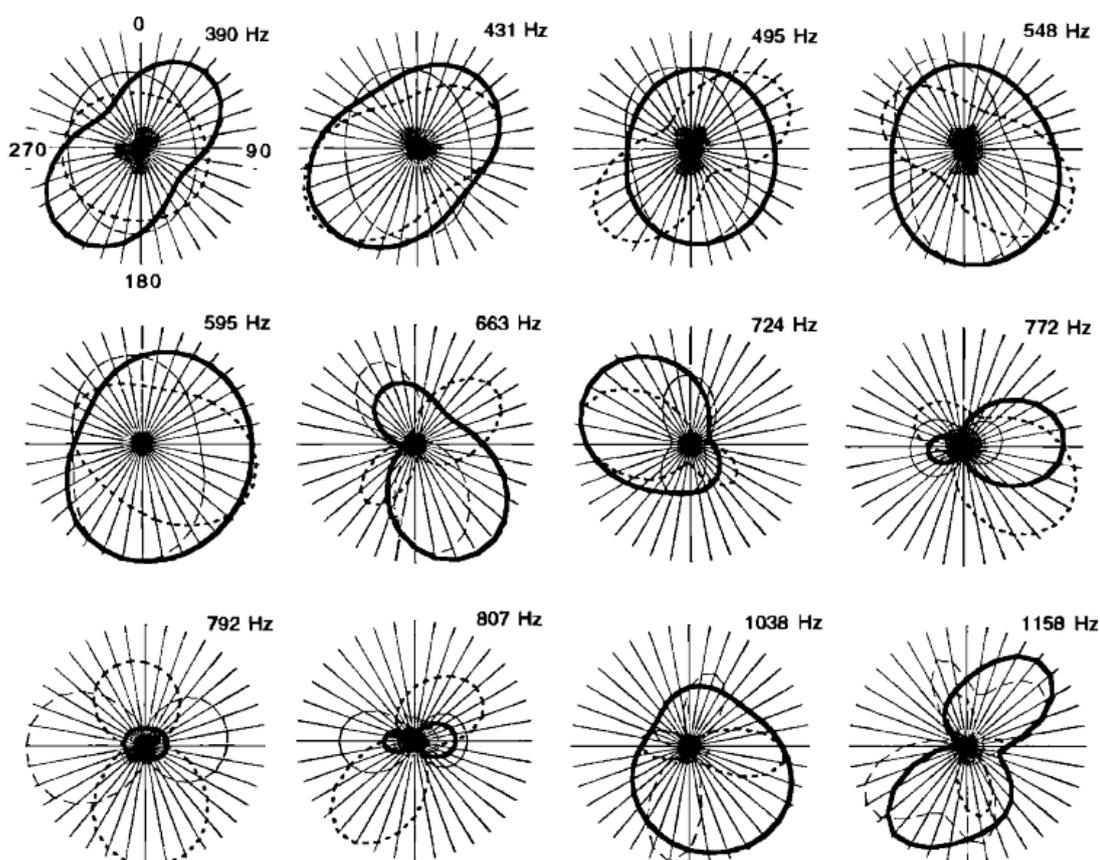


FIGURE 1.26 – Diagrammes de directivité des premiers modes principaux d'un violon en dessous de 1200 Hz, d'après Bissinger [12]. Le plan de la table d'harmonie (XY) est représenté par la ligne pleine et fine, le plan du chevalet (XZ) par la ligne pleine en gras, et enfin le plan de la barre d'harmonie (YZ) par les lignes fines en pointillés. Les angles sont affichés sur le mode le plus bas en fréquence, dans le sens des aiguilles d'une montre.

De ces études, il en ressort que le rayonnement du violon est très variable en fréquences et dans l'espace, le rendant très difficile à appréhender. De plus, les méthodes de mesures permettant de l'étudier sont peu adaptées au contexte d'aide à la lutherie car non exploi-

tables par l'artisan-luthier dans son atelier, du fait de leur complexité de mise en œuvre. L'étude du seul rayonnement de l'instrument ne nous semble donc pas un axe d'investigation pertinent pour la mise en place d'outils d'aide à la facture instrumentale.

1.3 Conclusions sur l'état actuel des recherches et définition des axes d'investigation

L'introduction bibliographique a permis de préciser le fonctionnement mécanique et acoustique des instruments à cordes (guitares et violons) en faisant l'état de l'art scientifique. La physique des instruments à cordes met en jeu un grand nombre de phénomènes complexes, interdépendants. Caractériser ces phénomènes suppose la mesure d'un nombre important de grandeurs physiques, fonctions de nombreux paramètres. La multiplicité des paramètres rend leur analyse difficile. Les informations obtenues par la mesure de chacune de ces grandeurs physiques sont nombreuses. Un tri parmi ces informations est nécessaire, de façon à isoler les grandeurs pertinentes, décrivant de manière globale le comportement mécanique de l'instrument. Certaines études sont orientées dans ce sens : des modèles permettent de décrire synthétiquement le comportement mécanique ou acoustique des instruments [7,23,30–32,69,120,145]. Cependant, les modèles développés sont valides pour des domaines fréquentiels réduits, principalement limités aux basses fréquences. Les modèles de couplage chevalet-table d'harmonie [7,145] se concentrent sur la zone de 2 à 3 kHz. Le développement d'outil d'aide à la lutherie réclame cependant l'identification de paramètres globaux décrivant la spécificité de chaque instrument. La caractérisation cherchée doit pouvoir s'appliquer à des zones fréquentielles larges, en utilisant peu de paramètres mais pertinents. Ces paramètres sont considérés comme pertinents si ils ont un réel sens physique, c'est-à-dire que l'on peut justifier de leur pertinence par des considérations physiques, et si ils sont robustes, c'est-à-dire répétables, peu dépendant des conditions environnementales. Par exemple, la position en fréquence ou l'amplitude d'un mode particulier dépend des conditions aux limites, des précontraintes, de l'hygrométrie, des conditions de jeu. Tous ces facteurs sont susceptibles de varier très fortement d'une façon mal connue. En ce sens, la fréquence et l'amplitude d'un mode particulier ne constituent pas des paramètres pertinents. De plus, ils doivent être facilement accessibles par le luthier grâce à des mesures *in situ*. Les paramètres doivent être estimés à partir de mesures simples, effectuées à l'aide d'un matériel peu coûteux, réalisables directement en atelier. La mesure du rayonnement acoustique à l'aide d'antennes de microphones, ou encore des études modales au moyen de vélocimètres laser à balayage ne sont pas envisageables. Ces moyens expérimentaux lourds et complexes restent des instruments de laboratoire. Parmi l'ensemble des interactions identifiées dans le diagramme fonctionnel de la figure 1.1, le couplage entre la corde et la table d'harmonie via le chevalet constitue un élément essentiel. C'est le point

de passage entre la partie résonante de l'instrument (la corde) et la partie rayonnante (le corps de l'instrument). Sous certaines conditions, le matériel nécessaire pour caractériser ce couplage est réduit et peu coûteux. Il peut se limiter à un marteau d'impact et un accéléromètre. Le résultat sonore, ou réponse acoustique, peut également être mesuré au moyen d'un microphone. Pour notre investigation, nous définissons deux types d'analyse : la première se base sur l'étude du signal sonore de l'instrument, en situation de jeu, que nous appelons analyse de réponse. La deuxième se base sur l'étude des propriétés mécaniques, vibratoires et acoustiques de l'instrument. Nous l'appelons analyse *mécanique*.

Le chapitre 2 détaille une analyse mécanique permettant premièrement de décrire de manière synthétique les courbes de mobilité mécanique de structures vibrantes, puis de caractériser objectivement des structures simples, de types plaques, à l'aide de leur paramètres caractéristiques que sont la densité et la raideur. La méthode développée dans le chapitre 2 s'applique à de nombreux contextes de dynamique des structures qui ne sont pas forcément musicales.

Le chapitre 3 développe l'application de la méthode aux instruments à cordes pincées et plus précisément aux guitares. Le chapitre aborde également l'analyse de sons de guitares, et notamment l'analyse du temps de décroissance de la réponse de guitare en lien avec ses caractéristiques mécaniques.

Le chapitre 4 est consacré aux instruments du quatuor et particulièrement au violon. Il vise à étudier la correspondance existante entre certaines caractéristiques globales communes à toutes les courbes de mobilité de violons et les caractéristiques spectrales de sons de violons. Le paragraphe 4.1 se focalise sur l'étude de la mobilité au chevalet des violons. La partie 4.2 s'intéresse quant à elle à l'analyse spectrale des sons de violons en situation de jeu.

Enfin le chapitre 5 détaille les résultats obtenus lors de l'application des méthodes développées à des projets précis d'aide à la facture instrumentale, réalisés à côté de professionnels de la lutherie. Ces projets ont été pour partie présentés lors des JFIS, journées de rencontres entre scientifiques et luthiers du Mans, organisées annuellement par l'ITEMM depuis 2001.

Chapitre 2

Méthode de caractérisation de systèmes mécaniques

En situation de jeu, les vibrations des instruments de musique à cordes sont complexes. Le champ acoustique rayonné l'est tout autant. Comme pour toute structure vibrante, leur réponse en fréquence peut être décomposée au moyen de contributions associées aux modes structuraux. Ces contributions modales structurent l'allure de la réponse en fréquence en introduisant des pics centrés autour de leur fréquence de résonance, et de largeur proportionnelle à leur amortissement. Nous présentons dans ce chapitre cette approche, dite approche modale.

Les premiers modes en basses fréquences des instruments de musique à cordes ont fait l'objet de nombreuses études. Des modèles existent et permettent de comprendre leurs rôles. C'est le cas par exemple des modes A_0 et T_1 de la guitare ou du violon (*cf.* paragraphe 1.2). Lorsque la fréquence augmente, il devient plus délicat d'étudier les modes individuellement. De plus, une lecture mode à mode des réponses en fréquences amène rapidement un nombre d'informations trop important pour être traitées efficacement. Chaque contribution modale est en effet décrite par trois paramètres : sa fréquence, son amortissement, et son amplitude. Ces paramètres, trop nombreux, sont difficiles à interpréter. Il apparaît donc nécessaire de réduire cette quantité d'informations en choisissant un petit nombre de paramètres décrivant de manière globale le comportement vibratoire et acoustique de l'instrument. Ce chapitre détaille les méthodes développées pour décrire de façon synthétique le comportement de structures vibrantes. Les applications de ce chapitre se font sur des plaques et coques minces qui sont les constituants élémentaires des instruments à cordes. Ces méthodes sont applicables aux instruments complets. Cela fait l'objet des chapitres suivants. Elles peuvent bien sûr être appliquées à des structures non musicales.

Nous commençons dans le paragraphe 2.1 par rappeler la description modale des ré-

ponses en fréquences des structures vibrantes. Nous voyons ensuite dans le paragraphe 2.1.4 que les valeurs des fréquences auxquelles apparaissent les modes dépendent des paramètres mécaniques. Connaître ces fréquences modales, et par la même occasion, connaître leur distribution globale en fonction de la fréquence via une quantité appelée densité modale, permet d'obtenir des renseignements sur les caractéristiques de la structure. On trouve dans la littérature des études proposant d'autres paramètres simples permettant de décrire de manière globale le comportement mécanique complexe des structures vibrantes. Ces paramètres sont décrits au paragraphe 2.2. Leur calcul requiert toutefois la connaissance des paramètres modaux, et ce même lorsque le recouvrement modal est important. Le paragraphe 2.3 décrit les méthodes d'identification de paramètres modaux utilisées, et analyse leurs performances lorsque les conditions d'identification sont difficiles. Enfin, le paragraphe 2.5 détaille les différents post-traitements permettant de retrouver les paramètres caractéristiques de structures. La précision et la pertinence de la méthode sont étudiées à travers des tests sur des signaux de synthèse simulant des réponses impulsionnelles de structures définies et des tests sur des signaux provenant de mesures de réponses impulsionnelles de réelles structures vibrantes.

2.1 Description modale de la mobilité

Cette partie décrit l'expression de la réponse impulsionnelle et de l'admittance de la structure en fonction de ses paramètres modaux. La théorie modale est détaillée dans l'annexe A.

2.1.1 Modes propres du système dissipatif

Pour un système discret à N degrés de libertés, les modes propres du système dissipatif sont les solutions de l'équation homogène :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur, de dimension $N \times N$, et \mathbf{x} est le vecteur de coordonnées généralisées du déplacement.

Les solutions oscillantes de (2.1), ou modes propres sont notées (λ_k, Φ_k) [27, 64]. Les coefficients complexes $\lambda_k = -\alpha_k + j\omega_k$ sont les valeurs propres du système. La partie imaginaire ω_k est la pulsation modale du k^{ieme} mode, et la partie réelle α_k est l'amortissement modal du k^{ieme} mode. Les vecteurs propres ϕ_k sont les vecteurs contenant les valeurs de déformée modale du k^{ieme} mode de la structure.

2.1.2 Réponse impulsionnelle

Lorsque la structure est soumise à une force impulsionnelle unitaire et ponctuelle de la forme $F(x_0, y_0) = F_0 \delta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0)$, avec $F_0 = 1$ N, la réponse en vitesse de la structure peut s'écrire dans le domaine temporel comme une somme d'exponentielles complexes (*cf.* annexe A) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_0 \sum_{k=1}^{2N} \mathbf{D}_k e^{\lambda_k t}. \quad (2.2)$$

où \mathbf{D}_k est l'amplitude complexe des exponentielles complexes et \mathbf{F}_0 est le vecteur de force, qui est nul en tous points sauf au point d'excitation.

Chaque exponentielle complexe correspond à la réponse temporelle d'un mode, et est fonction des seuls paramètres de ce mode.

2.1.3 Admittance mécanique

L'admittance mécanique est le rapport dans le domaine fréquentiel entre la vitesse de la structure et la force d'excitation. Pour obtenir son expression sous la forme d'une somme de contributions modales, nous considérons la structure soumise à une excitation harmonique. Le calcul s'effectue en annexe A où on montre que la vitesse de la structure s'écrit sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = j\omega \mathbf{F}_0 \sum_{k=1}^N \frac{1}{j\omega_k m_k} \left[\frac{(\alpha_k + j\omega) \Im(\phi_k \phi_k^T) + j\omega_k \Re(\phi_k \phi_k^T)}{\omega_k^2 + j\eta_k \omega_k \omega - \omega^2 + \alpha_k^2} \right], \quad (2.3)$$

où $\mathbf{F}_0 = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T e^{j\omega t}$, avec T désignant la transposée du vecteur associé, $\eta_k = \frac{2\alpha_k}{\omega_k}$, m_k , et ϕ_k étant respectivement le facteur de pertes modal, la masse modale et la déformée modale du mode k .

L'admittance mécanique d'un système visqueux s'exprime donc comme la somme de contributions modales indépendantes. Chacune de ces contributions modales est caractérisée par un triplet $\{\omega, \eta, \phi\}_k$, qui sont respectivement la pulsation, le facteur de pertes et la déformée modale du mode k complexe. En considérant l'amortissement faible ($\alpha_k^2 \ll \omega^2$), et les déformées ϕ_k réelles, de sorte que

$$\Re(\phi_k \phi_k^T) = \phi_k \phi_k^T \quad (2.4)$$

$$\Im(\phi_k \phi_k^T) = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

l'expression (2.3) se simplifie :

$$\dot{\mathbf{x}} = j\omega \mathbf{F}_0 \sum_{k=1}^N \frac{\phi_k \phi_k^T}{m_k (\omega_k^2 + j\eta_k \omega_k \omega - \omega^2)}. \quad (2.6)$$

L'écriture générale de l'admittance scalaire observée au point A d'une structure excitée au point E s'écrit :

$$Y(A, E, \omega) = \frac{V(A, \omega)}{F(E, \omega)} = j\omega \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_k(A)\Phi_k(E)}{m_k(\omega_k^2 + j\eta_k\omega_k\omega - \omega^2)}, \quad (2.7)$$

où $\Phi_k(A)$ et $\Phi_k(E)$ sont les déformées modales du mode k respectivement au point d'observation A et au point d'excitation E . Lorsque A et E , c'est-à-dire lorsque le point d'observation et d'excitation sont confondus au point de coordonnées (x, y) , l'équation (2.7) devient :

$$Y(x, y, \omega) = j\omega \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_k^2(x, y)}{m_k(\omega_k^2 + j\eta_k\omega_k\omega - \omega^2)}. \quad (2.8)$$

2.1.4 Densité modale

2.1.4.1 Définition

La densité modale quantifie le nombre de modes d'une structure par unité de fréquence. Elle dépend de la fréquence, mais aussi des propriétés mécaniques de la structure (caractéristiques des matériaux, géométrie et conditions aux limites). Nous distinguons deux approches pour l'estimer : l'approche analytique et l'approche directe.

La densité modale peut être calculée de manière directe, à partir de l'estimation des fréquences f_k des modes propres de la structure. La densité modale ainsi obtenue est alors sous forme discrète. Elle se calcule en prenant l'inverse de l'écart fréquentiel entre deux modes successifs.

$$n_k = \frac{1}{f_{k+1} - f_k}. \quad (2.9)$$

La méthode analytique s'appuie sur le calcul de la fonction de comptage modal, appelée en anglais *Mode Count function*. Elle est généralement désignée par $N(\Omega)$, où Ω est la pulsation, et est égale au nombre de modes de la structure ayant une pulsation propre inférieure à Ω . La densité modale $n(\Omega)$, que nous appelons par la suite densité modale *analytique*, se déduit en calculant la dérivée de $N(\Omega)$ par rapport à Ω , soit

$$n(\Omega) = \frac{\partial N(\Omega)}{\partial \Omega}. \quad (2.10)$$

Les méthodes utilisées pour estimer l'expression de $N(\Omega)$ sont dérivées de Courant [33] et détaillées dans le paragraphe 2.1.4.3 dans le cas des plaques et des coques.

2.1.4.2 Estimation de la densité modale à partir des fréquences modales

Cas d'un panneau plan

Considérons une plaque mince vérifiant les hypothèses suivantes :

- la plaque possède des caractéristiques uniformes : module d'Young, masse volumique et épaisseur sont indépendants de l'espace,
- l'épaisseur h de la plaque est petite devant les autres dimensions,
- les déformations sont faibles,
- seul le déplacement transversal ou déplacement de flexion, noté w est considéré. Ce déplacement est très faible devant l'épaisseur de la plaque.

Pour ces hypothèses, le modèle de Love-Kirchhoff [64] donne l'expression du déplacement transversal $w(x, y, t)$:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y, t), \quad (2.11)$$

où D_i , $i = 1, \dots, 4$ sont les constantes de rigidité de flexion du matériau, et $f(x, y, t)$ la force appliquée au point de coordonnées (x, y) . Les constantes de rigidité d'un matériau sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}; & D_2 = \frac{\nu_{yx} E_x h^3}{6(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \\ D_3 = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}; & D_4 = \frac{G_{xy} h^3}{3} \end{cases}, \quad (2.12)$$

avec E_i le module d'Young selon la direction i , ν_{ij} le coefficient de Poisson entre les directions i et j . Le terme G_{xy} désigne le module de cisaillement dans le plan.

En rajoutant le champ élémentaire $w(x, y, t) = A e^{jk_x x} e^{jk_y y} e^{j\omega t}$, on établit l'équation de dispersion de la plaque qui s'écrit

$$D_1 k_x^4 + D_3 k_y^4 + (D_2 + D_4) k_x^2 k_y^2 = \rho h \omega^2, \quad (2.13)$$

où ρ et h sont respectivement la masse volumique et l'épaisseur de la plaque, et $k_x = \frac{\pi}{L_x}$ et $k_y = \frac{\pi}{L_y}$ sont les nombres d'onde selon x et y . Pour une plaque rectangulaire simplement appuyée de dimension L_x et L_y , il est possible de combiner des solutions élémentaires de façon à satisfaire les conditions aux limites. Les solutions sont alors

$$W_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right), \quad (2.14)$$

et les pulsations propres associées sont

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\rho h}} \sqrt{D_1 \frac{m^4}{L_x^4} + D_3 \frac{n^4}{L_y^4} + (D_2 + D_4) \frac{m^2 n^2}{L_x^2 L_y^2}}. \quad (2.15)$$

Cas d'une coque

Considérons le cas d'un panneau courbe, appelé coque, présentant des courbures R_x , R_y dans les deux directions x et y (cf. figure 2.1, tirée du livre de Soedel [131]). Le panneau est rectangulaire de dimensions L_x et L_y . Nous considérons le matériau de la coque isotrope. En notant l'épaisseur h , la masse volumique ρ , le déplacement transversal $w(x, y, t)$, dans le cadre de la théorie des coques minces de Donnell, l'équation du mouvement suivante, selon [131], est donnée par

$$D \left[\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \nabla_k^2 Ai(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.16)$$

où D est la constante de rigidité de la plaque, $Ai(x, y, t)$ est une fonction d'Airy, et ∇_k^2 est l'opérateur défini par :

$$\nabla_k^2(\cdot) = \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}. \quad (2.17)$$

La fonction $Ai(x, y, t)$ vérifie la propriété [131] :

$$Eh \nabla_k^2 w(x, y, t) - \nabla^4 \phi(x, y, t) = 0. \quad (2.18)$$

En régime harmonique, $w(x, y, t) = W(x, y)e^{j\omega t}$ et $Ai(x, y, t) = Ai(x, y)e^{j\omega t}$, on obtient :

$$D \nabla^4 W + \nabla_k^2 \Phi - \rho h \omega^2 W = 0 \quad (2.19)$$

$$Eh \nabla_k^2 W - \nabla^4 Ai = 0. \quad (2.20)$$

En appliquant le bilaplacien ∇^4 à l'équation (2.19) et en appliquant l'opérateur ∇_k^2 à l'équation (2.20), puis en additionnant les deux, on obtient :

$$D \nabla^8 W + Eh \nabla_k^4 W - \rho h \omega^2 \nabla^4 W = 0. \quad (2.21)$$

Dans le cas d'un panneau courbe rectangulaire simplement supporté sur ses bords, on vérifie que la fonction

$$W_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right), \quad (2.22)$$

satisfait bien les conditions aux limites et l'équation de mouvement. La substitution de

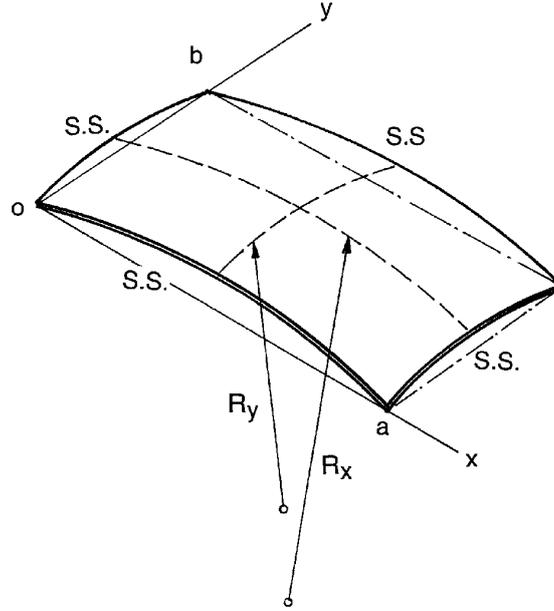


FIGURE 2.1 – Schéma d'un panneau rectangulaire doublement courbé, extrait de l'ouvrage de Soedel [131]. Par la suite, nous appelons L_x et L_y les dimensions du panneau respectivement selon x et y .

l'équation (2.22) dans l'équation (2.21) donne :

$$D \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^4 + Eh \left[\frac{1}{R_y} \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \frac{1}{R_x} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2 - \rho h \omega^2 \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2 = 0. \quad (2.23)$$

Les pulsations modales du panneau doublement courbé ω_{mn_c} sont alors données par :

$$\omega_{mn_c}^2 = \omega_{mn_f}^2 + \frac{E \left[\frac{1}{R_y} \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \frac{1}{R_x} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2}{\rho \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2}, \quad (2.24)$$

où ω_{mn_f} sont les pulsations modales de la plaque équivalente non courbée.

Notons que dans le cas d'une coque à courbure sphérique ($R_x = R_y = R$), l'équation (2.24) se simplifie :

$$\omega_{mn_c}^2 = \omega_{mn_f}^2 + \frac{E}{\rho R^2}. \quad (2.25)$$

Il en va de même, si le panneau n'est courbé que dans une direction (par exemple $R_x = \infty$) :

$$\omega_{mn_c}^2 = \omega_{mn_f}^2 + \frac{E}{\rho R_y^2} \frac{\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4}{\left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2}. \quad (2.26)$$

Les fréquences propres obtenues par la relation (2.24) permettent le calcul explicite de

la densité modale.

2.1.4.3 Estimation de la densité modale par la méthode de Courant

Cas d'une plaque mince : principe du calcul de la fonction de comptage

La détermination de la fonction de comptage $N(\Omega)$ dans le cas des plaques minces rectangulaires s'effectue en représentant le nombre d'onde k_{mn} dans l'espace des nombres d'ondes (*cf.* fig 2.2). Le maillage de cet espace est constitué de nœuds espacés de $\frac{\pi}{L_x}$ selon l'axe des abscisses, désignant le nombre d'onde k_{x_m} selon x , et de $\frac{\pi}{L_y}$ selon l'axe des ordonnées, désignant le nombre d'onde k_{y_n} selon y . Le nombre d'onde $k_{mn} = \sqrt{k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2}$ à une certaine pulsation Ω est alors inscrit dans un quart de cercle de rayon $k(\Omega)$ et centré sur l'origine. Le nombre de modes $N(\Omega)$ présents avant la pulsation Ω est alors le nombre de nœuds du maillage à l'intérieur d'une surface délimitée par ce quart de cercle.

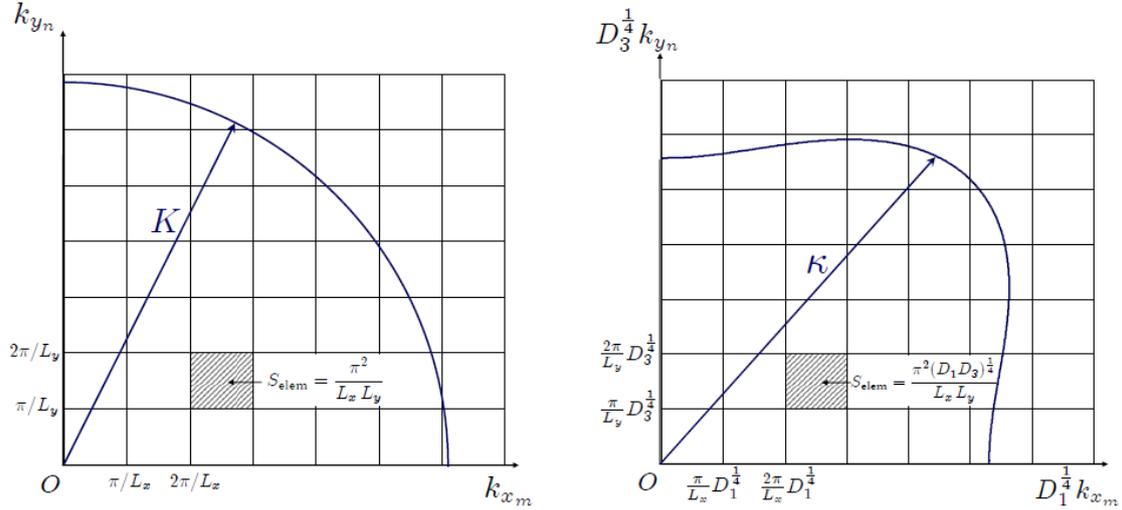


FIGURE 2.2 – Espace des nombres d'onde, dans le cas isotrope, à gauche, et dans le cas orthotrope, à droite. Figures extraites de [47]

Cas de la plaque isotrope Les pulsations propres d'une plaque isotrope de dimension L_x et L_y , d'épaisseur h , de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν , et de masse volumique ρ sont données par

$$\omega_{mn} = k_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad (2.27)$$

où $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est le module de rigidité et $k_{mn}^2 = k_{x_m}^2 + k_{y_n}^2$, avec $k_{x_m} = \frac{m\pi}{L_x}$ et $k_{y_n} = \frac{n\pi}{L_y}$.

Dans l'espace des nombres d'onde, les modes (m, n) associés au nombre d'onde k_{mn} dont les pulsations sont inférieures à une pulsation donnée Ω vérifient $k_{mn}^2 < \Omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$. En

hautes fréquences (c'est-à-dire lorsque K est grand), le nombre de nœuds du maillage tend vers le rapport entre la surface du quart de cercle et celle des mailles de dimensions $\frac{\pi}{L_x}$ et $\frac{\pi}{L_y}$. Le rayon du quart de cercle est $K = \sqrt{\Omega} \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}}$. On obtient alors :

$$N(\Omega) = \frac{\pi \frac{1}{4} K^2(\Omega)}{\frac{\pi^2}{L_x L_y}} = \frac{S}{4\pi} K^2(\Omega) = \frac{S}{4\pi} \Omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad (2.28)$$

où $S = L_x L_y$ est la surface de la plaque. La densité modale asymptotique en hautes fréquences de la plaque isotrope est obtenue en dérivant $N(\Omega)$ par rapport à Ω :

$$n(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} = \frac{S}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}. \quad (2.29)$$

Cas de la plaque orthotrope La densité modale d'une plaque orthotrope, quel que soit la nature de l'orthotropie du matériau a été calculée par Wilkinson [141]. L'auteur introduit un changement de variable, en définissant les coordonnées polaires r et θ suivantes :

$$\begin{cases} k_x \sqrt[4]{D_1} = r \cos \theta \\ k_y \sqrt[4]{D_3} = r \sin \theta \end{cases}, \quad (2.30)$$

le paramètre r est la distance entre l'origine et le point représentant le nombre d'onde convenu (*cf.* figure 2.2 b), pour laquelle r est noté κ). En notant $2H = D_2 + D_4$, l'équation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = \frac{1}{4\pi^2 \rho h} [k_x^4 D_1 + 2H k_x^2 k_y^2 + k_y^4 D_3]. \quad (2.31)$$

La substitution de l'équation (2.30) dans (2.31) permet de simplifier l'équation de dispersion

$$\omega^2 = \frac{r^4}{4\pi^2 \rho h} [1 - \chi^2 \sin^2(2\theta)], \quad (2.32)$$

avec $\chi^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{D_1 D_3}}\right)$. La distance r en fonction de la pulsation Ω s'écrit alors :

$$r^2 = \frac{2\pi \Omega \sqrt{\rho h}}{\sqrt{1 - \chi \sin^2(2\theta)}}. \quad (2.33)$$

Le plan des nombres d'onde est donc décrit par les variables $k_x \sqrt[4]{D_1}$ suivant l'axe des abscisses et $k_y \sqrt[4]{D_3}$ suivant l'axe des ordonnées. La surface d'une maille élémentaire est alors $S_{elem} = \frac{\pi^2 \sqrt[4]{D_1 D_3}}{L_x L_y}$. On en déduit $N(\Omega)$

$$N(\Omega) = \frac{L_x L_y}{\pi^2 (D_1 D_3)^{\frac{1}{4}}} \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} r dr d\theta = \frac{S \Omega}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_3}} F\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right), \quad (2.34)$$

où $F(\frac{\pi}{2}, \chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \chi^2 \sin^2(2\theta)]^{-\frac{1}{2}} d\theta$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Nous en déduisons la densité modale, qui s'écrit

$$n(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} = \frac{S}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_3}} F\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right), \quad (2.35)$$

Dans le cas où $D_1 = D_3 = H = D$, c'est-à-dire dans le cas isotrope, $\chi = 0$, et $F(\frac{\pi}{2}, 0) = \frac{\pi}{2}$. Nous retrouvons alors l'expression 2.29 donnant la densité modale asymptotique d'une plaque isotrope.

Effet des conditions aux limites L'effet des conditions aux limites sur la densité modale des plaques a été étudié par Xie *et al.* [148]. Dans cette étude, les auteurs proposent une modification de l'espace des nombres d'onde à partir de conditions géométriques simples. La position des nœuds du maillage dans l'espace des nombres d'onde étant modifiée, l'expression de la densité modale est alors augmentée d'un terme correctif. Cependant, l'influence de ces modifications devient négligeable en hautes fréquences. La densité modale tend vers sa valeur asymptotique donnée par les expressions (2.29) et (2.34), et ce, indépendamment des conditions aux limites imposées à la structure. Nous nous intéressons aux deux cas de conditions aux limites suivants : appuis simples sur les 4 bords de la plaque et plaque libre sur ses 4 bords.

D'après Xie *et al.* [148], les différentes conditions aux limites modifient le nombre de modes $N(\Omega)$, et par conséquent la densité modale, qui s'écrit

$$n(f) = n_\infty + n_c f^{-1/2}, \quad (2.36)$$

avec $n_\infty = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ et n_c un terme correctif dépendant des conditions aux limites tel que :

- $n_c = -\frac{P}{\sqrt{32\pi}} \left(\frac{\rho h}{D}\right)^{1/4}$ pour une plaque simplement supportée,
- $n_c = \frac{P}{\sqrt{8\pi}} \left(\frac{\rho h}{D}\right)^{1/4}$ pour une plaque libre-libre.

Dans le cas d'une plaque orthotrope, nous retrouvons une densité modale de la forme de l'équation (2.36). Le terme n_∞ est la densité modale asymptotique d'une plaque orthotrope selon Wilkinson [141], d'après l'équation (2.35), et les termes correctifs n_c sont légèrement modifiés :

- appuis simples :

$$n(f) = n_\infty - \frac{P_{Eq}}{\sqrt{32\pi}} \left(\frac{\rho h}{D_1}\right)^{1/4} f^{-1/2}, \quad (2.37)$$

- libre-libre :

$$n(f) = n_\infty + \frac{P_{Eq}}{\sqrt{8\pi}} \left(\frac{\rho h}{D_1}\right)^{1/4} f^{-1/2}, \quad (2.38)$$

où $P_{Eq} = 2 \left[L_x + L_y \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^{-1/4} \right]$.

Pour toutes les configurations décrites par les relations (2.36) à (2.38), la densité modale tend vers une valeur asymptotique. Il en résulte que l'allure du profil de densité modale d'une plaque est une fonction presque constante.

Cas d'une coque mince

La densité modale de panneaux courbes ou coques sphériques a été étudiée de façon analytique [51, 88, 141] et peut aussi être étudiée de façon directe à partir des fréquences propres [131]. Nous reprenons ici les densités modales analytiques de coques sphériques calculées par Elishakoff [51].

Lorsque le matériau est isotrope, la densité modale analytique d'une coque sphérique de rayon de courbure R , d'épaisseur h , de surface S , de module d'Young E , et de masse volumique ρ est donnée par [51]

$$n_c(f) = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}, \quad (2.39)$$

où $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est le module de rigidité de la coque et $f_c = \sqrt{\frac{E}{4\pi^2 \rho R^2}}$ est la fréquence dite de *concentration* ou fréquence d'*anneau*. On constate dans l'expression (2.39) une singularité à la fréquence f_c . En pratique, il existe un pic de densité modale autour de cette fréquence, due à une concentration de modes. Pour une plaque donnée, en très hautes fréquences ($f \gg f_c$), la densité modale tend vers celle de la plaque non courbée. Il en va de même lorsque R tend vers l'infini, ce qui est naturel car les effets de courbure diminuent alors.

Lorsque le matériau est orthotrope, la densité modale analytique est donnée par [51] :

$$n_c(f) = \frac{Sf\rho h}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho h f^2 - \frac{1}{C(\theta)R^2}}{1/D(\theta)} \right]^{-1/2} d\theta, \quad (2.40)$$

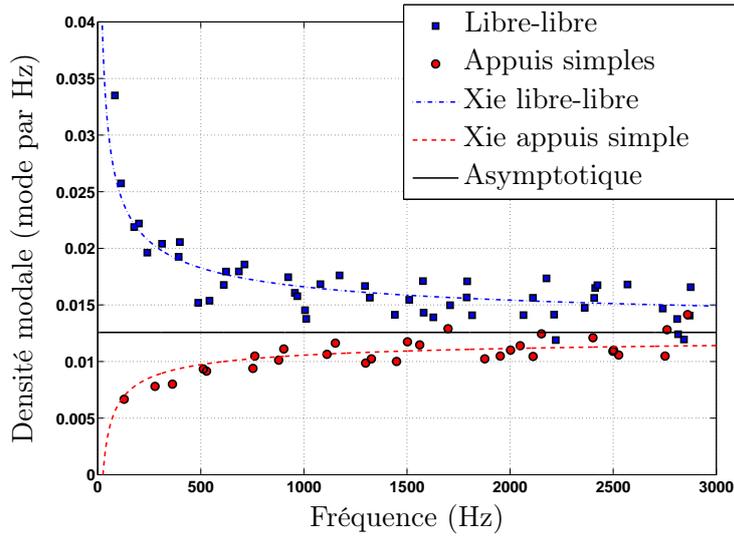
où

$$\begin{cases} D(\theta) = D_1 \cos^4(\theta) + D_3 \sin^4(\theta) + (D_2 + D_4) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ C(\theta) = C_1 \sin^4(\theta) + C_3 \cos^4(\theta) + 2C_2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \end{cases}. \quad (2.41)$$

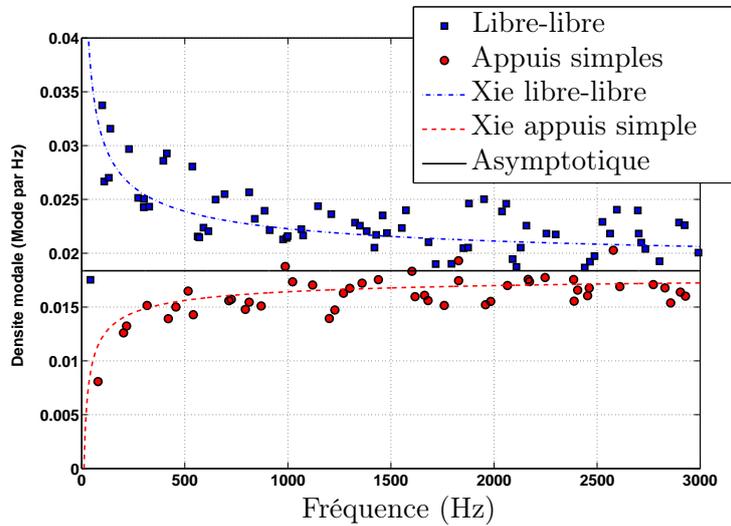
Notons que dans le cas isotrope ($D_1 = D_3 = \frac{D_2+D_4}{2} = D$, et $C_1 = C_3 = C_2 = C$), les paramètres $D(\theta)$ et $C(\theta)$ deviennent tout simplement D et $C = \frac{1}{Eh}$, et nous retrouvons alors l'expression (2.39)

2.1.4.4 Applications à des panneaux de synthèse

Panneaux plans La figure 2.3 représente la densité modale de deux plaques de synthèse en aluminium (matériau isotrope) et en érable (matériau orthotrope). Pour chaque matériau, nous avons représenté la densité modale calculée à partir d'une moyenne glissante sur 11 espacements intermodaux successifs, ainsi que la densité modale analytique, et ce pour les deux conditions aux limites considérées, à savoir simplement supporté et libre-libre.



(a)



(b)

FIGURE 2.3 – Influence des conditions aux limites sur la densité modale. a) Cas d'une plaque d'aluminium isotrope ($L_x = 0.28$ m, $L_y = 0.35$ m, $h = 2.5$ mm, $\rho = 2700$ $kg.m^{-3}$, $E = 70$ GPa). b) Cas d'une plaque en érable orthotrope ($L_x = 0.32$ m, $L_y = 0.20$ m, $h = 2.5$ mm, $\rho = 650$ $kg.m^{-3}$, $D_{i=1,..,4} = [13.4, 2.19, 2.66, 3.59]$ N.m). Les densités modales marquées par '*' sont estimées par moyenne glissante sur une fenêtre de 11 espacements inter-modaux calculés analytiquement.

La densité modale calculée à partir des valeurs des fréquences modales varie autour de la densité modale analytique. Les fluctuations sont légèrement plus importantes dans le cas de la plaque orthotrope de synthèse. Elles restent toutefois faibles, l'allure générale de la densité modale discrète étant similaire à la densité modale analytique. Il en résulte que la connaissance des fréquences modales constitue un moyen efficace d'approcher la densité modale analytique de la structure.

Coques La densité modale d'une coque en épicéa ayant des paramètres géométriques et mécaniques analogues à celles utilisées en lutherie de violon est étudiée. Elle est calculée de manière analytique, d'après l'équation (2.24) du paragraphe 2.1.4.2 en utilisant les paramètres précisés sur la figure 2.4.

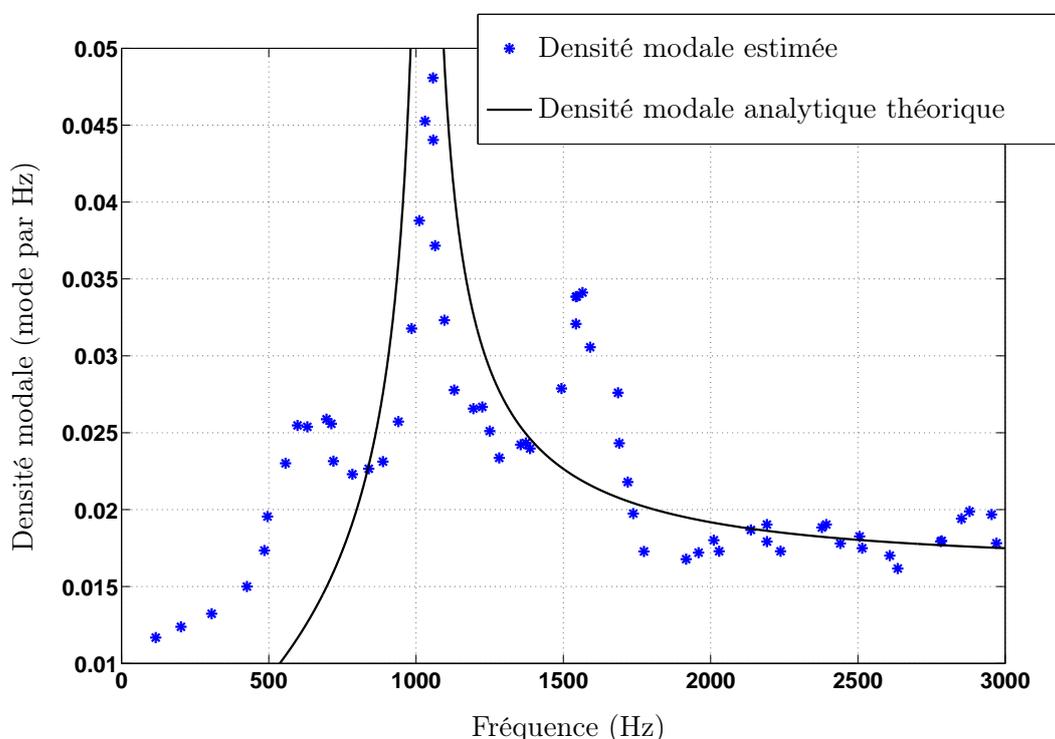


FIGURE 2.4 – Variation avec la fréquence de la densité modale calculée à partir des fréquences modales, selon la relation (2.24), ainsi que la densité modale analytique, calculée d'après la relation (2.39) d'une coque mince de matériau isotrope de module d'Young 3.18 GPa, de dimensions $320 \times 250 \times 2.9$ mm, de masse 102.2 g et de rayon de courbure 0.11 m.

La figure 2.4 montrant le profil de densité modale indique la présence d'une concentration de modes, caractérisée par un pic dans la courbe de densité modale, prévue par Soedel [131]. L'expression analytique de l'équation (2.39) donne lieu à une singularité à la fréquence d'anneau, ici légèrement supérieure à 1000 Hz. En hautes fréquences, la densité modale tend vers une constante égale à la densité modale du panneau équivalent

parfaitement plan. La densité modale calculée à partir des fréquences modales est une approximation correcte de la densité modale analytique. Cependant la singularité présente dans le modèle de densité modale analytique est une limite à cette approximation. Celle-ci est peu réaliste lorsque l'on calcule la densité modale discrète. La densité modale analytique se trouve éloignée de la densité modale discrète au voisinage de la singularité.

2.2 Description synthétique de la mobilité

Nous appelons description synthétique de la mobilité une description utilisant un nombre réduit de paramètres, très inférieur par exemple au nombre de modes impliqués dans cette réponse.

En toute généralité, la mobilité d'une structure se présente sous la forme d'une matrice $N \times N$, où N est le nombre de degrés de libertés considérés [17]. Nous rappelons que nous souhaitons limiter le matériel de mesures pour qu'il soit adapté aux luthiers, c'est-à-dire abordable, et manipulable directement dans leur atelier. Dans ce cadre, se limiter à une mobilité scalaire $Y(\omega)$ correspondant au rapport dans le domaine fréquentiel entre la vitesse transverse de la structure $V(\omega)$ et la force d'excitation $F(\omega)$ dans la même direction et à la même position est suffisant et idoine à notre étude.

La figure 2.5 représente un exemple de mobilité mesurée en un point d'une plaque typique de bois de lutherie. La courbe de mobilité ainsi obtenue est complexe, elle inclut un nombre important de contributions modales, rendant son analyse peu évidente. Nous proposons dans cette partie des paramètres permettant de décrire synthétiquement les courbes de mobilité de structures, et ainsi dégager efficacement les informations utiles à la description globale de leur comportement mécanique.

Dans ce but, les travaux de Skudrzyk [129] sur ce qu'il appelle l'admittance caractéristique, et de Langley [89] sur les courbes enveloppes de mobilité, paraissent particulièrement bien adaptés. Ces approches permettent de décrire efficacement le comportement global de tous types de structures, et s'adaptent très bien aux problématiques utilisant un domaine fréquentiel très large (typiquement jusqu'aux domaines des moyennes et hautes fréquences).

2.2.1 Domaines fréquents

Les courbes de mobilité d'une structure présentent généralement trois parties distinctes, associées à trois domaines fréquents communément définis : les *basses*, *moyennes* et *hautes* fréquences. Dans le domaine des basses fréquences, le comportement de la réponse est fortement modal : les modes se recouvrent peu et chaque pic est aisément identifiable. Dans les domaines de fréquences supérieures, on observe généralement un phénomène de recouvrement modal. Les différents modes ont tendance à se recouvrir ou à interférer fortement, du fait d'un amortissement plus élevé et/ou d'une plus forte densité modale.

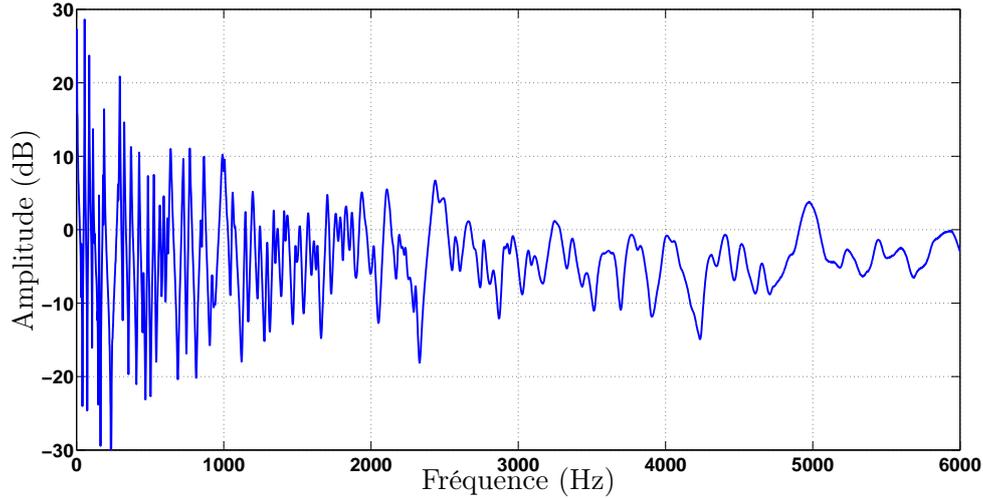


FIGURE 2.5 – Exemple de mobilité mesurée sur d’une demi-table d’épicéa de dimensions $500 \times 190 \times 2$ mm. La table est suspendue pour permettre des conditions aux limites de type libre-libre.

En hautes fréquences, le recouvrement modal est particulièrement important, la courbe de réponse en fréquence tend à s’aplatir, les modes deviennent alors totalement indiscernables.

Les limites de ces domaines fréquentiels sont quantifiées à l’aide d’un indicateur, appelé facteur de recouvrement modal, ou *Modal Overlap Factor* (MOF) en anglais. Il est classiquement noté μ et représente le rapport entre l’écart de fréquence séparant deux résonances successives et la largeur de la bande à -3 dB d’un pic de résonance. De manière plus précise, soit f_k la fréquence du $k^{\text{ième}}$ mode, f_{k+1} la fréquence du mode suivant, et Δf_k , la largeur de bande à -3 dB, le facteur de recouvrement modal μ_k s’écrit :

$$\mu_k = \frac{\Delta f_k}{f_{k+1} - f_k}. \quad (2.42)$$

Le choix des valeurs limites de μ permettant de définir les frontières des domaines fréquentiels est arbitraire. Cependant, les valeurs suivantes restent admises dans la littérature de dynamique des structures [10] :

- basses fréquences : $\mu < 30\%$,
- moyennes fréquences : $30\% < \mu < 100\%$,
- hautes fréquences : $\mu > 100\%$.

La figure 2.6 représente un exemple de mobilité de synthèse d’une plaque mince rectangulaire. L’évolution du facteur de recouvrement modal en fonction de la fréquence est tracé en dessous. Les différents domaines fréquentiels sont reportés sur la figure. Nous appellerons f_{30} et f_{100} les fréquences pour lesquelles le facteur de recouvrement modal μ dépasse respectivement 30 et 100 %. Ces fréquences constituent donc les limites du domaine des moyennes fréquences.

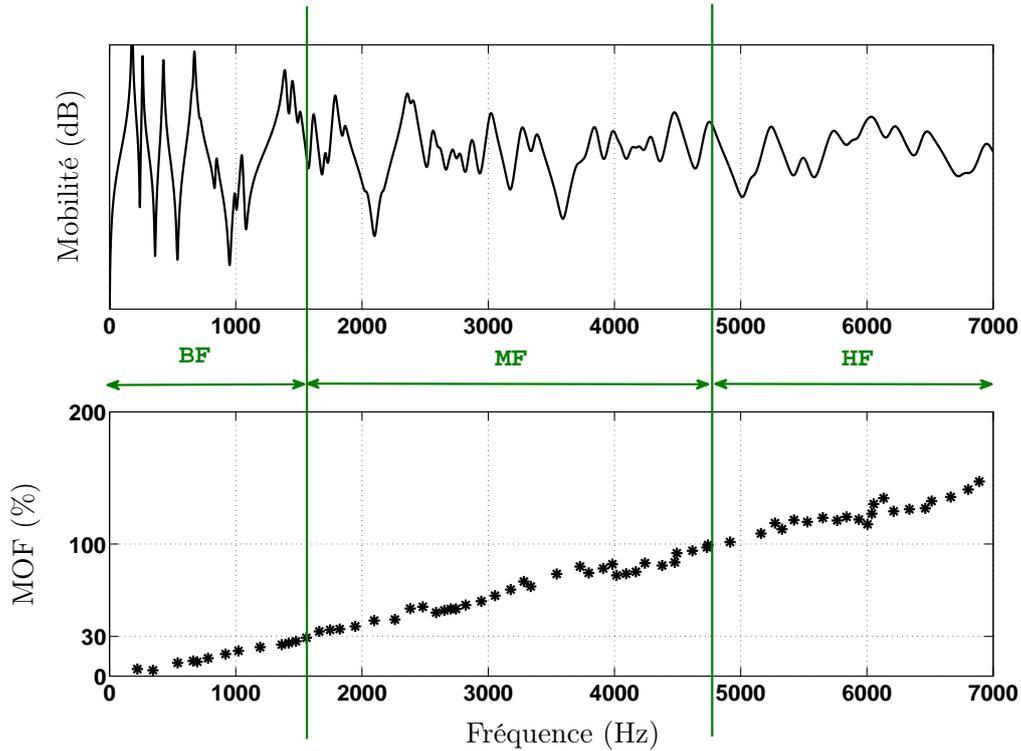


FIGURE 2.6 – Mobilité mécanique calculée en un point d’une plaque mince simulée. L’évolution du MOF en fonction de la fréquence est tracée en dessous. La structure de synthèse est une plaque de dimension $350 \times 280 \times 2.5$ mm, de matériau isotrope ayant un module d’Young de 70 GPa, et de masse 635 g. Le facteur de pertes est fixé à 2 % pour tous les modes.

Dans le cas de structures de type plaque, présentant une densité modale et un facteur de pertes constant, le facteur de recouvrement modal croît proportionnellement avec la fréquence. Le recouvrement modal est d’autant plus important que la fréquence est grande. La réponse en fréquence tend vers une ligne continue en hautes fréquences : la distinction entre les modes devient impossible. Il apparaît clairement qu’une étude mode à mode n’est pas pertinente, ils sont individuellement trop peu influent sur la réponse en fréquence pour justifier une telle approche. En revanche, l’allure générale de la mobilité peut être décrite à travers quelques paramètres globaux.

2.2.2 Mobilité moyenne et courbes enveloppes

2.2.2.1 Mobilité moyenne

L’admittance caractéristique Y_C est définie par Skudrzyk [129] comme la mobilité de la structure équivalente de dimensions infinies. L’expression analytique de sa partie réelle peut-être calculée à partir des propriétés mécaniques de la structure :

$$G_C(\omega) = \Re [Y_C(\omega)] = \frac{\pi n(\omega)}{2M_{Tot}}, \quad (2.43)$$

où $n(\omega)$ est la densité modale et M_{Tot} est la masse totale du système.

L'obtention de l'équation (2.43) est précisée en annexe B. Ce calcul se base sur plusieurs hypothèses :

- le recouvrement modal est supposé être suffisamment grand pour que les contributions modales ne soient plus individuellement observables,
- la structure est supposée homogène (densité massique de surface constante sur toute la structure),
- la matrice d'amortissement généralisé est supposé diagonalisable (hypothèses de Basile),
- le facteur de pertes modal varie peu d'un mode à l'autre.

Mobilité caractéristique des plaques minces homogènes

Les hypothèses ci-dessus sont valides en particulier pour les structures telles que les plaques et les coques. Dans le cas de plaques homogènes isotropes, il est démontré [33] que la densité modale en hautes fréquences tend vers une valeur constante. La densité modale est alors donnée par la relation (2.29).

En substituant la relation (2.29) dans l'expression (2.43), on peut déterminer l'expression de son admittance en hautes fréquences :

$$Y_A \xrightarrow{+\infty} G_C = \frac{1}{8\sqrt{\rho_p h D}}. \quad (2.44)$$

Remarque 1 : La relation (2.44) correspond à l'expression de la limite en hautes fréquences de l'admittance d'une plaque mince homogène et isotrope de dimensions finies. Or ce résultat est connu par ailleurs, il correspond à la mobilité d'une plaque homogène isotrope, de dimensions infinies [27]. Nous pouvons alors en déduire que la mobilité d'une plaque mince homogène et isotrope tend en hautes fréquences vers la valeur de mobilité de la plaque de dimensions infinies ayant même épaisseur et constituée du même matériau.

Remarque 2 : En substituant l'expression de la densité modale en hautes fréquences de la plaque mince orthotrope (2.34) dans l'expression (2.43), il est possible de déterminer l'expression de son admittance en hautes fréquences :

$$Y_A \xrightarrow{+\infty} G_C = \frac{F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right)}{4\pi\sqrt{\rho_p h D'_1}} = \frac{1}{8\sqrt{\rho_p h D^*}}, \quad (2.45)$$

où $D'_1 = \sqrt{D_1 D_3}$ et $D^* = \frac{\pi^2}{4} \frac{D'_1}{F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right)}$.

Nous proposons une expression simplifiée de D^* . D'après [66], l'intégrale elliptique $F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right)$ peut-être approximée par :

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) \simeq \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{9}{64}\chi^4 + \dots + \left(\frac{(2i)!}{2^{2i}(i!)^2}\right)^2 \chi^{2i} + \dots + \left(\frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}\right)^2 \chi^{2N} \right]. \quad (2.46)$$

Soit $D'_2 = \frac{D_2 + D_4}{2}$, rappelons que le paramètre d'orthotropie χ s'écrit $\chi = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{D'_2}{D'_1}\right)}$. Supposons que χ^2 soit compris entre 0 (orthotropie elliptique pour laquelle $D'_1 = D'_2$) et 0.5 (pour laquelle $D'_1 \gg D'_2$). Une application numérique présente sur la figure 2.7 montre qu'une approximation de l'équation (2.46) à l'ordre 1 suffit ($F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) \simeq \frac{\pi}{2}$) :

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) \simeq \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4}\chi^2 \right]. \quad (2.47)$$

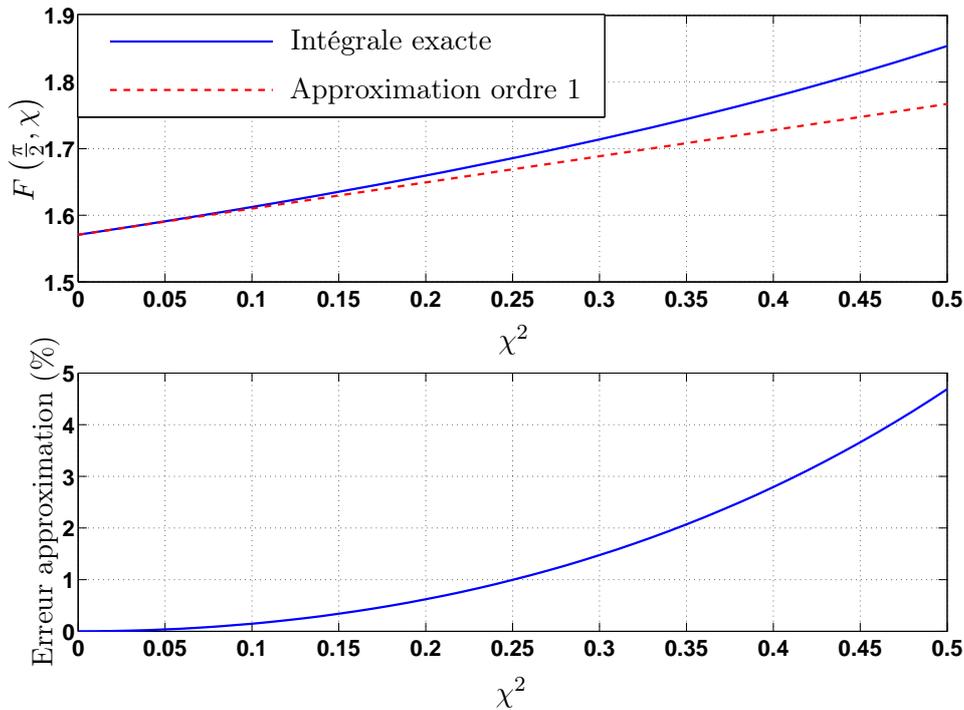


FIGURE 2.7 – Tracé de l'intégrale elliptique $F^2\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right)$ pour χ^2 compris entre 0 et 0.5 et comparaison avec l'approximation à l'ordre 1 de l'équation (2.47). Le pourcentage d'écart en fonction de χ est tracé sur la courbe de la partie inférieure.

Dans la plupart des cas rencontrés, le paramètre d'orthotropie χ^2 est compris entre 0 et 0.5. Il existe alors une raideur équivalente d'un matériau isotrope qui présenterait un comportement mécanique équivalent à un matériau orthotrope. Cette raideur, notée D^* ici, peut être approchée par l'expression suivante :

$$D^* \simeq \frac{16}{(4 + \chi^2)^2} \sqrt{D_1 D_3}. \quad (2.48)$$

2.2.2.2 Courbes enveloppes de mobilité

L'admittance caractéristique est un critère pertinent car il donne des informations sur la valeur moyenne de mobilité. La dispersion de mobilité autour de cette valeur moyenne peut être décrite par les courbes enveloppes, qui représentent les bornes inférieures et supérieures de l'amplitude de mobilité en fonction de la fréquence. Pour deux structures ayant la même mobilité caractéristique G_C , et la même densité modale, leurs courbes enveloppes diffèrent selon le facteur de pertes, soit selon l'amortissement de la structure. Langley [89] donne une expression analytique des courbes enveloppes de mobilité en fonction des propriétés mécaniques de la structure. Le détail du calcul est disponible en annexe C. En considérant dans un premier temps la différence entre deux pulsations propres successives ω_k et ω_{k+1} , supposées être distribuées régulièrement (l'intervalle intermodal est alors l'inverse de la densité modale $n(\omega)$), puis en considérant dans un second temps que la fréquence de l'antirésonance située entre deux résonances successives vaut $\omega = \frac{\omega_k + \omega_{k+1}}{2}$, Langley montre que l'expression donnant la partie réelle de la mobilité aux fréquences de résonance et d'antirésonance s'écrit :

$$\begin{cases} G_{Res}(\omega) = G_C \coth \left[\frac{\pi\mu(\omega)}{\zeta} \right] \\ G_{Ares}(\omega) = G_C \tanh \left[\frac{\pi\mu(\omega)}{\zeta} \right] \end{cases}, \quad (2.49)$$

où $\zeta = 2$ pour des structures monodimensionnelles et $\zeta = 4$ pour des structures bidimensionnelles [89].

2.2.2.3 Application à une plaque de synthèse

Pour illustrer les résultats obtenus précédemment, nous proposons d'étudier une plaque de synthèse dont le facteur de pertes est constant pour tous les modes. Les masses modales et déformées modales sont toutes égales, afin de simuler une mobilité qui aurait été moyennée sur l'ensemble de la surface de la plaque. Les conditions aux limites sont de type appuis simples. La figure 2.8 représente la mobilité de la structure, ainsi que la mobilité caractéristique, avec et sans prise en compte des conditions aux limites, et les courbes enveloppes pour deux différentes valeurs du paramètre ζ introduit au paragraphe précédent : respectivement 2 et 4.

La valeur de G_C avec prise en compte des conditions aux limites correspond bien à une valeur moyenne de la mobilité sur toute la plage de fréquence considérée. Les courbes enveloppes de mobilité, quant à elle, sont dépendantes des zones fréquentielles. En effet, dans la zone des basses fréquences $[0, f_{30}]$, pour laquelle le facteur de recouvrement modal

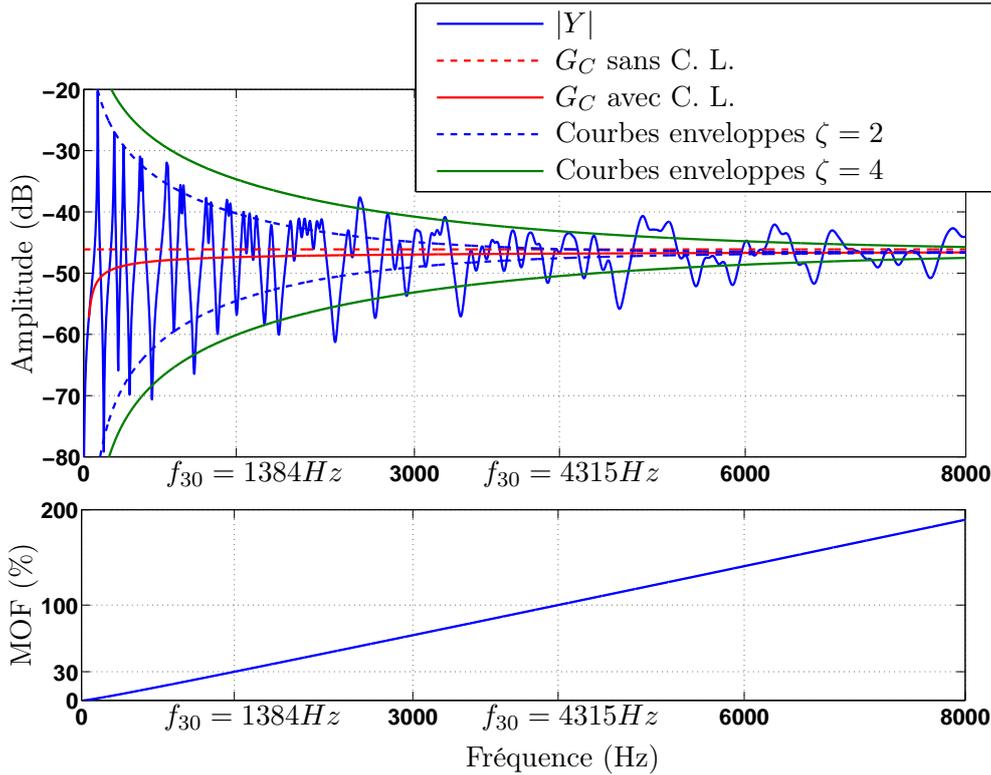


FIGURE 2.8 – Mobilité d’une plaque isotrope de synthèse, de dimension $280 \times 350 \times 2.5$ mm, de masse 0.635 g, et de module d’Young 69 GPa. Le facteur de pertes est gardé constant à 2 % pour tous les modes. Les mobilités caractéristiques G_C avec et sans prise en compte des conditions aux limites sont tracées. Les courbes enveloppes sont tracées pour deux valeurs de ζ égales à 2 et 4. La courbe du bas est l’évolution du facteur de recouvrement modal en fonction de la fréquence. Les valeurs de f_{30} et f_{100} , correspondant aux limites des 3 zones de fréquences (basses, moyennes, et hautes fréquences) sont indiquées.

est inférieur à 30 %, ce sont les courbes enveloppes calculées avec le paramètre $\zeta = 2$ qui correspondent le mieux aux maxima et minima de la courbe de mobilité. En revanche, dans la zone des moyennes fréquences, quand le facteur de recouvrement modal est compris entre 30 et 100 %, le calcul avec $\zeta = 4$ semble plus approprié. Enfin, lorsque le facteur de recouvrement modal est supérieur à 100 % c’est-à-dire lorsque l’on entre dans le domaine des hautes fréquences, les courbes enveloppes calculées avec le paramètre $\zeta = 4$ tendent à ne plus correspondre aux maxima et minima de la courbe de mobilité. Il nous faut alors considérer un calcul de courbes enveloppes prenant en compte les changements de zones fréquentielles. Langley [89] a proposé une correction aux équations donnant les courbes enveloppes selon les valeurs du facteur de recouvrement modal. Ces modifications prennent en compte le facteur d’aspect de la plaque. Dans notre méthode, nous ne prenons pas en compte ces modifications. En effet, fixer le paramètre ζ à 4 est suffisant dans notre cadre de travail, qui reste majoritairement dans des conditions moyennes fréquences.

2.3 Identification modale

En pratique, les méthodes d'estimation de paramètres caractéristiques présentées dans les paragraphes précédents requièrent la connaissance des paramètres modaux, tels que la fréquence modal et le facteur de pertes modal. Les méthodes d'identification modale classiques sont performantes en basses fréquences, lorsque les modes sont bien identifiables, du fait de leur faible recouvrement. Cependant, au-delà de la limite entre basses et moyennes fréquences, ces méthodes deviennent inadaptées, car moins robustes. Les méthodes sous-espaces, telles que MUSIC [130] (*MUltiple SIgnal Classification*), Matrix Pencil [71], ou ESPRIT [118] (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) sont mieux adaptées, notamment à cause de leurs capacités à résoudre les composantes très proches en fréquence. Certaines de ces méthodes ont été utilisées avec succès dans le cas de signaux d'analyses vibratoires. Nous pouvons citer Laroche [90] et Elie [50] pour les guitares, Le Carrou [92] pour la harpe ou encore Ege [47, 48] pour l'analyse modale haute-résolution des table d'harmonie de piano et de plaques d'aluminium. Ces méthodes se basent sur une décomposition de l'espace des données en deux sous-espaces, classiquement appelés *sous-espace signal* et *sous-espace bruit*, pour estimer les paramètres des K sinusoïdes exponentiellement amorties qui composent le signal mesuré. Le sous-espace signal, noté \mathcal{S} est celui engendré par les composantes sinusoïdales, le sous-espace bruit, noté \mathcal{N} est le sous-espace orthogonal à \mathcal{S} tel que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{E}_N$, où \mathcal{E}_N est l'espace vectoriel engendré par les N échantillons du signal mesuré.

2.3.1 Méthode ESPRIT

Pour cette étude, nous choisissons d'utiliser la méthode ESPRIT. Le signal de réponse impulsionnelle est modélisé comme une somme de sinusoïdes exponentiellement amorties. Chacune de ces composantes sinusoïdales correspond à la réponse temporelle d'un mode. Sous forme numérique, pour un signal $x[n]$, de longueur N , la modélisation de $x[n]$ a pour expression :

$$x[n] = \sum_{k=1}^K a_k e^{-\alpha'_k n} e^{j(2\pi n f'_k + \varphi_k)}, \quad n \in [1, N], \quad (2.50)$$

avec f'_k la fréquence normalisée ($f'_k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$). Les a_k sont les amplitudes réelles des sinusoïdes amorties ($a_k > 0$). Chaque sinusoïde k possède aussi une phase φ_k et un facteur d'amortissement réduit réel positif α'_k .

L'identification de pôles consiste à estimer les pôles z_k de la forme :

$$z_k = e^{-\alpha'_k + j2\pi f'_k}. \quad (2.51)$$

Le signal mesuré $s[n]$ est alors modélisé par la relation suivante :

$$s[n] = x[n] + w[n] = \sum_{k=1}^K b_k z_k^n + w[n], \quad (2.52)$$

avec $b_k = a_k e^{j\varphi_k}$ les amplitudes complexes, et $w[n]$ le bruit de mesure, supposé additif et blanc.

Le principe des méthodes sous-espace, dont ESPRIT fait partie, est de voir l'équation (2.52) comme la somme directe de deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, nommés \mathcal{S} pour le sous-espace signal et \mathcal{N} pour le sous-espace bruit. Les K sinusoides forment des vecteurs de Vandermonde dans \mathbb{C}^N : $\mathbf{v}_k = [1 \ z_k^1 \ z_k^2 \ \dots \ z_k^N]^T$. La famille des vecteurs de Vandermonde \mathbf{v}_k que constituent les sinusoides étant libre, elle forme alors une base du sous-espace signal. Cette base est une matrice \mathbf{V} de Vandermonde de dimension $N \times K$, de rang plein ($z_n \neq z_m, \forall n \neq m$), définie comme suit :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_K \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_K^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_K^{N-1} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

L'algorithme ESPRIT utilise ensuite la propriété d'invariance rotationnelle de l'espace signal (la base de l'espace signal reste inchangée d'un échantillon à l'autre) qui s'écrit sous forme matricielle

$$\mathbf{V}_\uparrow = \mathbf{V}_\downarrow \mathbf{D}, \quad (2.54)$$

où \mathbf{V}_\uparrow est la matrice \mathbf{V} dont la première ligne a été supprimée, et \mathbf{V}_\downarrow est la matrice \mathbf{V} dont la dernière ligne a été supprimée. La matrice \mathbf{D} est une matrice diagonale composée des K pôles du signal, soit

$$\mathbf{D} = \text{diag}(z_1, \dots, z_K).$$

En pratique, \mathbf{V} n'est pas connue à ce stade, mais une base du sous-espace signal peut être approchée en décomposant en valeurs singulières la matrice d'autocovariance $\mathbf{C} = \frac{1}{l} \mathbf{H} \mathbf{H}^H$, où \mathbf{H} est une matrice de Hankel de dimensions $M \times l$. La matrice \mathbf{H} s'écrit

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_l \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_M & s_{M+1} & \dots & s_N \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

La matrice d'autocovariance \mathbf{C} est reliée aux bases des sous espaces par la relation

$$\mathbf{C} = \mathbb{E}[\mathbf{ss}^H] \quad (2.56)$$

$$= \mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{V}^H + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (2.57)$$

avec $\mathbf{B} = \mathbf{b}\mathbf{b}^H$ où \mathbf{b} est le vecteur formé des amplitudes complexes b_k :

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_K]^T. \quad (2.58)$$

Les dimensions $M < N$ et $l < N$ sont choisies telles que M soit la somme des dimensions des sous-espaces signal et bruit ($M = \dim(\mathcal{S}) + \dim(\mathcal{N})$), $M > K$, $l = N - M + 1$ et $l > K$. Une base $\mathbf{W}(K)$ du sous-espace signal \mathcal{S} est obtenue en concaténant les K vecteurs singuliers $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K\}$ associés aux valeurs singulières triées en ordre décroissant. Ces vecteurs singuliers et valeurs singulières sont obtenus par décomposition en valeurs singulières (ou *SVD*) de \mathbf{C} . A titre d'exemple, on montre sur la figure 2.9 les valeurs singulières rangées par ordre décroissant obtenues par décomposition en valeurs singulières de la matrice d'autocovariance \mathbf{C} formée à partir des échantillons d'un signal de synthèse composé de 4 sinusoides exponentiellement amorties et d'un bruit blanc additif. Les paramètres du signal sont répertoriés dans le tableau 2.1. Dans un cas simple comme celui-ci, la distinction entre les valeurs singulières associées au sous-espace signal, et celles associées au sous espace bruit est évidente. Les K vecteurs singuliers associés aux K plus grandes valeurs singulières forment alors une base du sous-espace signal. Les $l - K$ autres vecteurs forment une base du sous-espace bruit.

Paramètres des sinusoides	Composante 1	Composante 2
Fréquence réduite	0.0457	0.0889
Amortissement réduit ($\times 10^{-3}$)	8.57	0.713
Amplitude	46.26	86.51
Paramètres du signal	Valeurs	
Rapport signal à bruit	48.1 dB	
Nombre de points	10001	
Dimension de la matrice de covariance	40	

TABLE 2.1 – Paramètres du signal de synthèse utilisé pour illustrer la méthode.

Sachant que $\mathbf{W}(K)$ et \mathbf{V} forment deux bases du sous-espace signal, $\mathbf{W}(K)$ vérifie également la propriété d'invariance rotationnelle de l'équation (2.54) :

$$\mathbf{W}_\uparrow(K) = \mathbf{W}_\downarrow(K)\mathbf{R}(K), \quad (2.59)$$

où $\mathbf{R}(K)$ est une matrice $K \times K$ dont les valeurs propres sont les K pôles du signal.

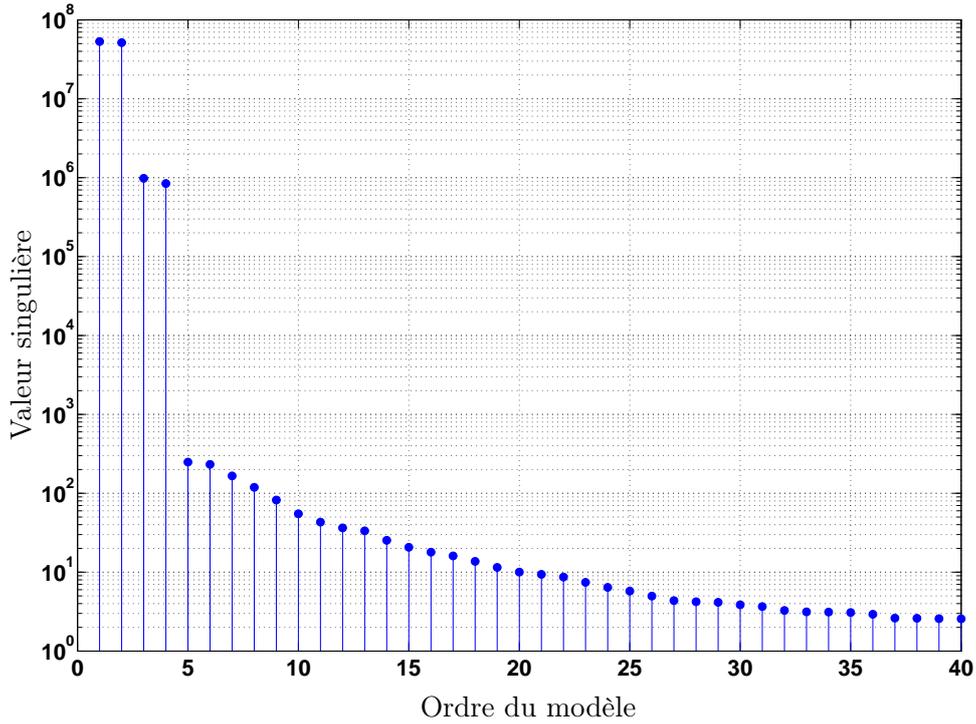


FIGURE 2.9 – Valeurs singulières rangées en ordre décroissant obtenues par décomposition en valeurs singulières de la matrice d'autocovariance \mathbf{C} formée à partir des échantillons d'un signal de synthèse réel, composé de 4 sinusoides exponentiellement amorties et d'un bruit additif parfaitement blanc. Les paramètres du signal sont répertoriés dans le tableau 2.1.

Ces derniers sont calculés par décomposition en valeurs propres de la matrice $\mathbf{R}(K)$. Les fréquences et amortissements des pôles étant normalisés par la fréquence d'échantillonnage, les fréquences et amortissements physiques des modes sont alors obtenus à l'aide de la relation suivante :

$$f_k = \frac{\arg(z_k)}{2\pi} F_e \quad \text{et} \quad \alpha_k = -F_e \ln |z_k|, \quad (2.60)$$

où F_e est la fréquence d'échantillonnage du signal.

Si l'on souhaite reconstruire le signal à partir des pôles estimés par la méthode ESPRIT, il nous faut alors déterminer les amplitudes complexes b_k des K pôles du signal. Pour cela, nous les estimons à l'aide d'une méthode des moindres carrés, à partir de l'équation (2.61) suivante :

$$\mathbf{b} = \mathbf{V}_e^\dagger \mathbf{s}, \quad (2.61)$$

avec \mathbf{s} le signal mesuré, et \mathbf{V}_e la matrice de Vandermonde de dimension $N \times K$, constituée des pôles estimés du signal, de la même manière que l'équation (2.53). Le terme \dagger désigne

le pseudo-inverse de \mathbf{V}_e .

Les amplitudes réelles et phases sont obtenues par les relations suivantes :

$$a_k = |b_k| \quad \text{et} \quad \varphi_k = \arg(b_k). \quad (2.62)$$

Dans notre cas, nous estimons les valeurs des amplitudes modales $\frac{\Phi_k(A)\Phi_k(F)}{m_k}$ à partir des M valeurs de l'admittance d'une structure observée en A et excitée en F . Il suffit d'écrire la matrice $\mathbf{V}_{\mathcal{F}} \in \mathbb{C}^{M \times K}$ du sous-espace signal dans la base de Fourier telle que :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{j\omega[1]}{\omega_1^2 + j\omega_1\eta_1\omega[1] + \omega^2[1]} & \frac{j\omega[1]}{\omega_2^2 + j\omega_2\eta_2\omega[1] + \omega^2[1]} & \dots & \frac{j\omega[1]}{\omega_K^2 + j\omega_K\eta_K\omega[1] + \omega^2[1]} \\ \frac{j\omega[2]}{\omega_1^2 + j\omega_1\eta_1\omega[2] + \omega^2[2]} & \frac{j\omega[2]}{\omega_2^2 + j\omega_2\eta_2\omega[2] + \omega^2[2]} & \dots & \frac{j\omega[2]}{\omega_K^2 + j\omega_K\eta_K\omega[2] + \omega^2[2]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{j\omega[M-1]}{\omega_1^2 + j\omega_1\eta_1\omega[M-1] + \omega^2[M-1]} & \frac{j\omega[M-1]}{\omega_2^2 + j\omega_2\eta_2\omega[M-1] + \omega^2[M-1]} & \dots & \frac{j\omega[M-1]}{\omega_K^2 + j\omega_K\eta_K\omega[M-1] + \omega^2[M-1]} \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

où $\omega[n] = 2\pi n \frac{Fe}{M}$. Le vecteur $\mathbf{b}_{\mathcal{F}} \in \mathbb{C}^K$ des amplitudes modales s'écrit alors :

$$\mathbf{b}_{\mathcal{F}} = \mathbf{V}_{\mathcal{F}}^\dagger \mathbf{y}, \quad (2.64)$$

avec $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ le vecteur contenant les M valeurs d'admittance, et $\eta_k = \frac{\alpha_k}{\pi f_k}$ est le facteur de pertes du mode k .

2.3.2 Estimation de l'ordre du modèle

Les méthodes sous-espaces requièrent une connaissance *a priori* de la dimension de l'espace signal, c'est-à-dire le nombre K de composantes. Pour certaines situations, pour lesquelles ce nombre de composantes est soit connu, soit approché, cela ne pose pas de problèmes majeurs. Une technique consistant à légèrement surestimer le nombre de pôles puis supprimer les pôles jugés aberrant (amortissement trop fort, énergie des composantes concernées trop faible ou encore fréquences en dehors des zones fréquentielles attendues) peut être appliquée. Le fait de surestimer introduit un biais d'estimation moins important que le fait de sous-estimer [4]. En revanche, lorsque aucune connaissance *a priori* du nombre de pôles à estimer dans le signal n'est possible, le problème de l'estimer correctement se pose. De nombreuses méthodes ont alors été proposées pour estimer K : le méthode du maximum de vraisemblance (*maximum likelihood*) [11] et l'ITC (*Information Theoretic Criteria*) [137], qui incluent l'AIC (*Akaike Information Criteria*) [2], et le MDL (*Maximum Description Length*) [128]. Plus récemment, le critère ESTER (*ESTimation of ERror*), basé sur une vérification de la propriété d'invariance par rotation qui caractérise le sous-espace

signal, a été proposé par Badeau *et al.* [4] et utilisé par Ege [48], Le Carrou *et al.* [92] et Elie *et al.* [50] dans un contexte expérimental sur des signaux vibratoires. Nous avons choisi d'appliquer cette technique car elle se révèle fiable et s'adapte très bien à la méthode ESPRIT qui utilise aussi la propriété d'invariance de l'espace signal. Une méthode plus récente, basée sur la mesure d'angle entre le sous-espace signal et le sous-espace bruit a été proposée par Christensen *et al.* [29]. Elle se base sur une mesure d'angle entre les sous-espaces : l'ordre du modèle est le nombre p qui minimise la projection du sous-espace signal de dimension p sur le sous-espace bruit de dimension $M - p$, où M a été défini au paragraphe précédent comme étant la somme des dimensions des deux sous-espaces. La projection est minimale lorsque les sous-espaces sont orthogonaux, c'est-à-dire lorsque l'angle est égal à $\pi/2$. Elle est plus adaptée à une utilisation avec MUSIC [29].

La méthode ESTER consiste à évaluer la propriété d'invariance d'un espace constitué des p premiers vecteurs singuliers, pour p allant de 1 à l ($l > K$). En utilisant l'équation (2.59) de l'invariance rotationnelle, nous définissons une fonction erreur $\mathbf{E}(p)$ telle

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p)\mathbf{U}(p). \quad (2.65)$$

Pour des commodités de lectures, nous utilisons une fonction inverse $J(p)$ définie par

$$J(p) = \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2}, \quad (2.66)$$

La fonction $J(p)$ est calculée pour $p = 1, 2, \dots, p_{max}$, avec $p_{max} > K$. Lorsque l'ordre p est égal au bon nombre de pôles inclus dans le signal ($p = K$), la matrice $\mathbf{W}(p = K)$, formée par les $p = K$ premiers vecteurs singuliers vérifie la propriété d'invariance rotationnelle, et par conséquent $\|\mathbf{E}(p)\|_2^2$ s'annule. $\mathbf{E}(p)$ peut aussi s'annuler pour $p < K$ étant donné que le sous-espace est aussi constitué par p sinusoïdes. En pratique, nous obtenons généralement de grandes valeurs de $J(p)$ pour $p \leq K$, puis de faibles valeurs pour $p > K$, lorsque la base du sous-espace $\mathbf{W}(p)$ inclut des composantes de bruit. Notons que $J(p)$ est toujours supérieur ou égal à 1. Lorsque le signal est réel, tel que les réponses impulsionnelles de structures vibrantes, le nombre de composantes K est le double du nombre de modes propres physiques de la structure. A titre d'exemple, la figure 2.10 donne un exemple du calcul du critère ESTER calculé à partir des vecteurs singuliers dont les valeurs singulières sont représentées sur la figure 2.9. Le critère ESTER possède un maximum pour un ordre de 4, correspondant au bon nombre de composantes dans le signal d'origine.

Cette méthode est apparentée à la méthode SAMOS [76], qui utilise également la propriété d'invariance rotationnelle du sous-espace signal. Le critère évaluant l'invariance du sous-espace signal est légèrement différent : il consiste à déterminer les $2p$ valeurs singulières d'une matrice $\Phi(p) = [\mathbf{W}^{\uparrow}(p)\mathbf{W}^{\downarrow}(p)]$. La fonction inverse $J(p)$ s'écrit alors :

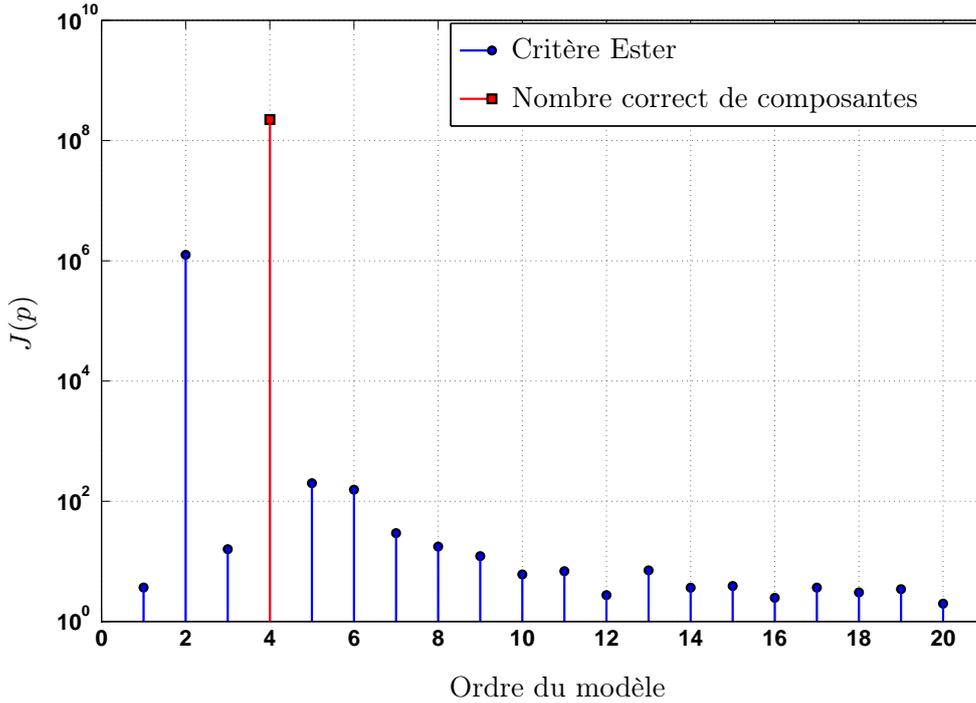


FIGURE 2.10 – Critère ESTER calculé pour un signal composé de 4 sinusoides amorties. La dimension de la matrice d'autocovariance est $l = 50$. Le bon nombre de composantes (4) est indiqué par un cercle.

$$J(p) = \frac{p}{\sum_{k=p+1}^{2p} v_k^2}, \quad (2.67)$$

où v_k est la k^{ieme} valeur singulière de $\Phi(p)$. Le nombre correct de composantes est alors celui qui maximise J .

2.4 Limites de la méthodologie

2.4.1 Procédure de test

La densité modale de la structure étant directement reliée au nombre de modes présents dans le signal de réponse impulsionnelle, il est indispensable d'estimer ce nombre correctement, et ce même en cas de fort recouvrement modal. Le but de ce paragraphe est d'étudier les limites que présente la méthode d'estimation des paramètres modaux quand cette dernière est soumise à différentes conditions pouvant la mettre en défaut. Pour cela, des tests sur des réponses impulsionnelles *hybrides*, provenant d'une synthèse de sinusoides connues et de bruits mesurés sur des capteurs réels (justifiant l'appellation *hybride*), sont soumis à la procédure d'estimation des paramètres modaux. L'intérêt de cette méthode

hybride est de reconstituer les conditions expérimentales le plus fidèlement possible. La méthode d'estimation est sensible aux facteurs suivants :

1. la densité modale de la structure ; si cette dernière est trop importante, on peut atteindre les limites de performance d'identification de sinusoides de la méthode ESPRIT en conditions bruitées.
2. l'amortissement des composantes sinusoidales,
3. le rapport signal à bruit,
4. la sensibilité de la méthode à l'emplacement des points d'excitation et d'observation sur la structure. En effet, appliquer la méthode en un unique point peut provoquer un biais, si l'on excite et observe sur une ligne nodale, par exemple. Le fait d'exciter des nœuds les rendra probablement difficilement détectables par la méthode d'estimation de sinusoides.

La multiplicité des facteurs listés ci-dessus influant le résultat de l'estimation rend difficile l'analyse de sa robustesse. Il nous faut faire des choix pertinents et représentatifs des conditions d'utilisation de la méthode. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la caractérisation de structures de types plaques, qui, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1.4.3, possède une densité modale constante. Nous utilisons des plaques dont il nous faut synthétiser la réponse impulsionnelle de façon réaliste, c'est-à-dire proche de la façon dont elle est mesurée. Ces réponses impulsionnelles hybrides donnent lieu à une étude paramétrique permettant d'évaluer les limites de la méthode.

2.4.2 Synthèse hybride de réponse impulsionnelle

La synthèse s'effectue en plusieurs étapes :

Étape 1 : synthèse de la réponse impulsionnelle non bruitée. La première étape consiste à calculer la réponse impulsionnelle non bruitée de la plaque de synthèse. Nous l'effectuons sous la forme d'une somme de sinusoides amorties dont les paramètres d'amplitude, de fréquence et d'amortissement sont ceux des paramètres modaux.

La réponse impulsionnelle non bruitée, que l'on note $s(t)$, est alors calculée par somme des contributions modales

$$s(t) = \Re \left[\sum_{k=1}^K b_k e^{2j\pi f_k t - \alpha_k t} \right], \quad (2.68)$$

où b_k , f_k et α_k désignent respectivement l'amplitude complexe, la fréquence et l'amortissement du k^{ieme} mode. Pour chaque valeur de η , les amortissements modaux α_k sont calculés à l'aide de la relation suivante :

$$\alpha_k = \eta\pi f_k. \quad (2.69)$$

Étape 2 : synthèse du signal de force. Le signal de force, noté $f[n]$ est calculé de manière à être représentatif d'un signal de force typique mesuré avec le capteur de force utilisé dans les expérimentations. En pratique, nous utilisons un marteau miniature PCB 086E80. La forme temporelle peut être approchée par deux demi-gaussiennes, produisant une forme en "cloche" asymétrique de moment d'ordre 3 légèrement positif. Le front montant est en effet plus rapide que le front descendant. La figure 2.11 permet de comparer le signal de synthèse avec un ensemble de plusieurs signaux de force mesurés, dans leur forme temporelle et fréquentielle.

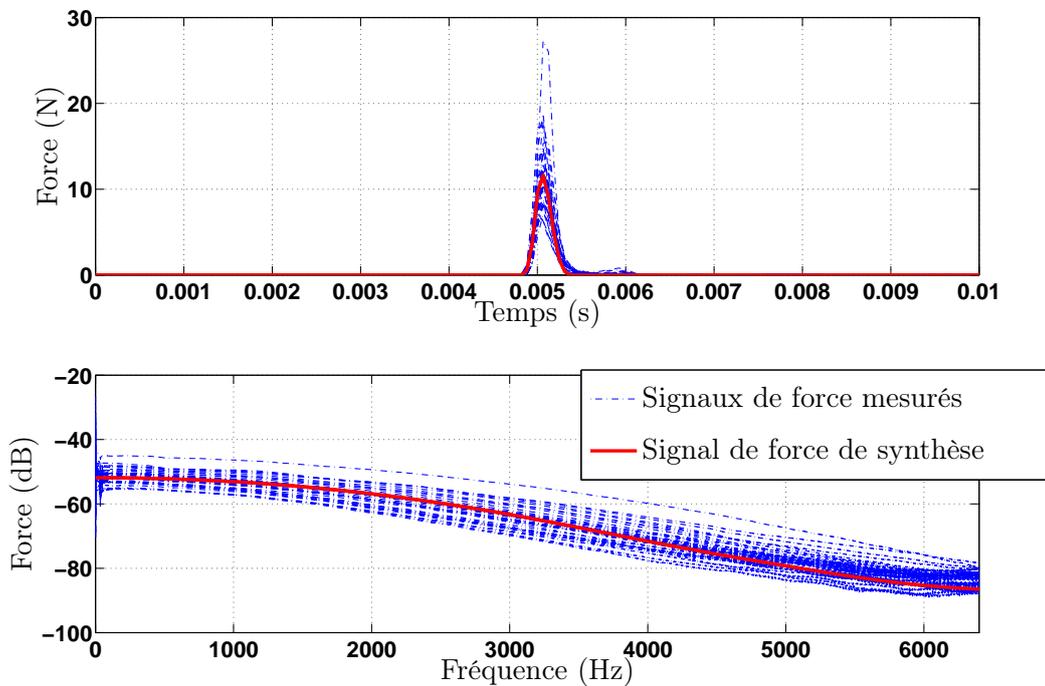


FIGURE 2.11 – Signal temporel (a) et spectre (b) d'un ensemble de 42 signaux de force mesurés. Comparaison avec le signal de force de synthèse ('_'), modélisé par une courbe en "cloche" asymétrique avec front montant plus rapide que le front descendant.

Étape 3 : synthèse du signal d'accélération non bruité. Le signal d'accélération non bruité, noté $\gamma[n]$ est la convolution du signal de force $f[n]$ par la réponse impulsionnelle non bruitée $s[n]$, soit $\gamma[n] = f[n] * s[n]$.

Étape 4 : ajout des signaux de bruits. Pour caractériser le bruit de mesure, des signaux sont enregistrés directement sur les capteurs utilisés (accéléromètre PCB 352C23,

de 0.2 g et marteau d'impact PCB 086E80) en l'absence d'excitation. Les bruits ainsi enregistrés sont additionnés aux signaux synthétiques.

Étape 5 : blanchiment du bruit La méthode ESPRIT étant basée sur l'hypothèse de la présence d'un bruit additif *blanc*, les signaux d'analyse (force et accélération) doivent être préalablement traités, afin que le bruit additif contenu dans les signaux mesurés soit blanc. Cette opération est appelée blanchiment du bruit. Connaissant l'allure des signaux de bruit (*cf.* étape précédente), il nous est possible de déterminer un filtre blanchisseur. Le bruit est modélisé par un processus auto-regressif (AR) d'ordre 10. Soit $H = 1/A$ la fonction de transfert du processus AR associé au bruit mesuré, le blanchiment consiste alors à filtrer les signaux synthétiques bruités (accélération et force) par les filtres inverses A [4] correspondant. L'effet du blanchiment de bruit sur la densité spectrale de puissance (DSP) du bruit mesuré sur les capteurs est illustré sur la figure 2.12 :

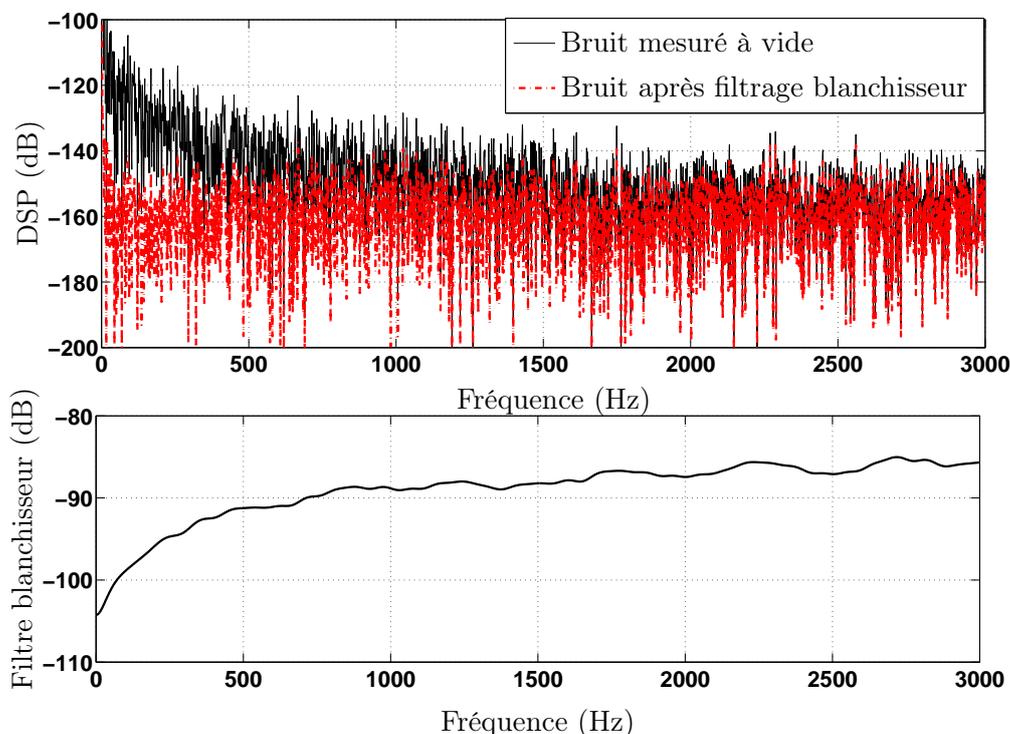


FIGURE 2.12 – a) Exemple de signal de bruit mesuré sur l'accéléromètre avant et après blanchiment. Le bruit est mesuré à vide, lorsque la structure sur laquelle repose l'accéléromètre n'est pas excitée. Le bruit blanchi est le bruit de mesure auquel est appliqué le filtre blanchisseur dont la réponse en fréquence est tracée en b)

Étape 6 : déconvolution. La dernière étape consiste à estimer la réponse impulsionnelle à partir des signaux bruités d'accélération et de force. En considérant le système comme étant linéaire et invariant, le problème s'écrit, dans des conditions non bruitées :

$$f[n] * s[n] = \gamma[n]. \quad (2.70)$$

Afin d'estimer $s[n]$, nous appliquons une méthode de déconvolution consistant à estimer un filtre $g[n]$ tel que $f[n] * g[n] = \delta$. L'équation (2.70) devient alors :

$$[\hat{g} * f[n]] * s[n] = \delta * s[n] = s[n] = \hat{g} * \gamma[n]. \quad (2.71)$$

De manière pratique, le filtre \hat{g} est estimé au sens des moindres carrés :

$$\hat{g} = \operatorname{argmin}_{\hat{g}} \left\| \hat{g} * \tilde{f} - \delta \right\|_2^2, \quad (2.72)$$

où \tilde{f} désigne le signal de force bruité. Finalement, la relation $\hat{s} = \hat{g} * \tilde{\gamma}$ permet une estimation de $\hat{s}[n]$, où $\tilde{\gamma}$ désigne le signal d'accélération bruité.

2.4.3 Résultats

Pour simplifier, nous considérons des plaques de synthèse dont les facteurs de pertes sont identiques pour tous les modes. En pratique, ce n'est généralement pas le cas. Néanmoins, pour des structures homogènes, les variations d'un mode à l'autre sont relativement faibles. Pour une plaque donnée ayant une densité modale n et un facteur de pertes η , l'évolution du facteur de recouvrement $\mu = \eta n f$ en fonction de la fréquence est alors proche d'une droite de pente ηn . Nous effectuons des simulations en variant ces deux paramètres que sont n et η . Pour fixer la valeur de n , nous prenons la valeur asymptotique hautes fréquences de la densité modale d'une plaque, donnée par l'équation (2.29). Pour chaque paramètre, nous fixons une valeur, dite nominale. Lors des tests, nous faisons varier un seul paramètre à la fois en gardant tous les autres à leur valeur nominale. Le tableau 2.2 répertorie les valeurs nominales choisies.

Paramètre	Unité	Valeur	Paramètre	Unité	Valeur
Longueur de plaque	m	0.5	D_1	N.m	17.2
Largeur de plaque	m	0.19	D_2	N.m	1.05
Épaisseur de plaque	m	2.5×10^{-3}	D_3	N.m	1.31
Masse volumique	kg.m ⁻³	420	D_4	N.m	1.87
Facteur de perte	%	1	Fréquence maximale d'analyse	Hz	2700

TABLE 2.2 – Valeurs nominales choisies pour chaque paramètre de synthèse.

2.4.3.1 Influence de la densité modale

Le premier paramètre testé est la densité modale. Pour cela, nous modifions la surface des plaques et nous fixons les autres paramètres (raideur, masse volumique, épaisseur et

amortissement) à leur valeur nominale (*cf.* tableau 2.2) tout au long du test. Les résultats sont reportés sur la figure 2.13. La fréquence maximale d'analyse ($Fe/2$) est fixée de manière arbitraire pour ce test à 2700 Hz. Cette fréquence est proche de celle pour laquelle le facteur de recouvrement modal vaut 100 % pour une plaque de densité modale $n_\infty = 0.025$ Hz^{-1} et de facteur de perte $\eta = 1\%$, soit les valeurs nominales des configurations analysées.

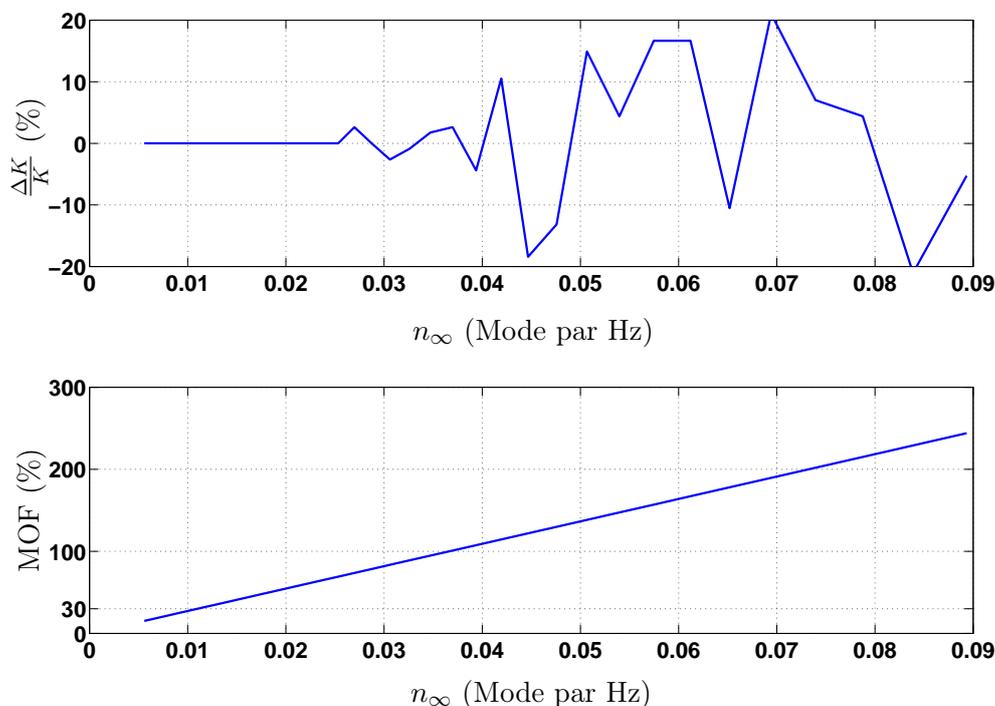


FIGURE 2.13 – Haut : pourcentage d'erreur sur l'estimation du nombre de modes en fonction de la densité modale de la plaque. Bas : Valeur du facteur de recouvrement modal de la structure à $Fe/2$ en fonction de la densité modale.

Le test confirme la capacité de la méthode à estimer le bon nombre de modes même en cas de fort recouvrement modal. Toutefois, l'estimation se dégrade dès lors que le facteur de recouvrement modal dépasse les 120-130 % environ.

2.4.3.2 Influence de l'amortissement

Lorsque le facteur de perte η est le seul paramètre variable au cours du test. Les autres paramètres sont donc fixés à leurs valeurs nominales. Les résultats du test sont représentés sur la figure 2.14.

Ce test confirme celui effectué sur la densité modale : la méthode est performante en basses et moyennes fréquences. En effet, l'estimation du nombre de modes est correcte lorsque le facteur de pertes est tel que le recouvrement modal est inférieure à 100 %. L'estimation se dégrade lorsque le facteur de pertes est tel que le facteur de recouvrement

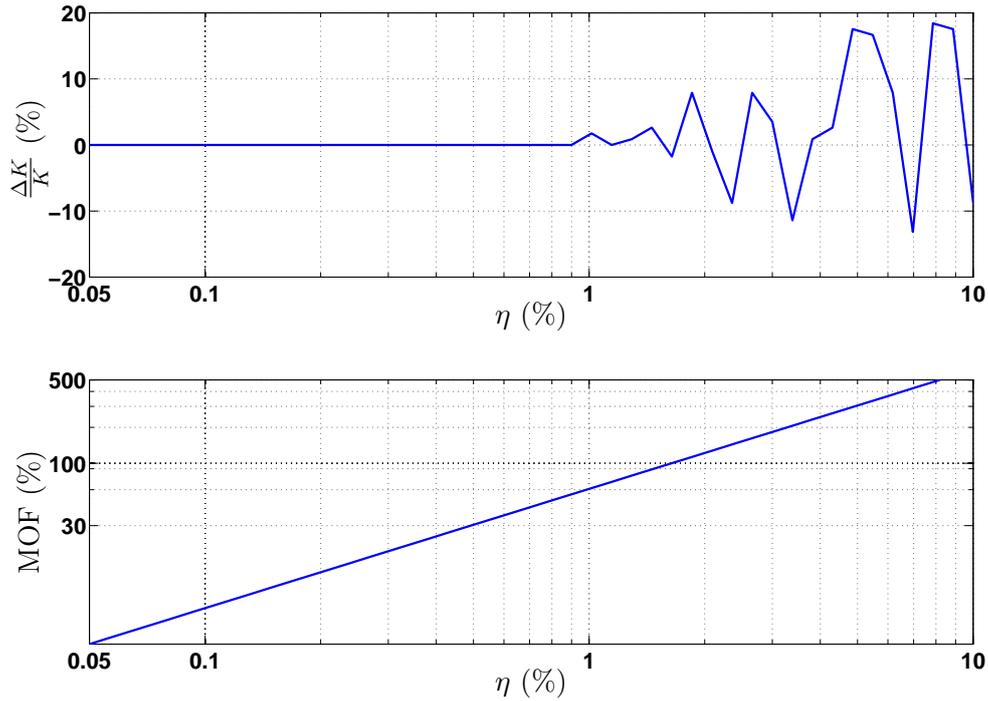


FIGURE 2.14 – Haut : pourcentage d’erreur sur l’estimation du nombre de modes en fonction du facteur de pertes de la plaque. Bas : Valeur du facteur de recouvrement modal de la structure à $Fe/2$ en fonction du facteur de pertes.

modal est supérieur à 100 %.

2.4.3.3 Influence du rapport signal à bruit

L’influence du rapport signal à bruit sur la performance de la méthode est testée de la manière suivante : tous les paramètres mécaniques et géométriques de la plaque d’épicéa de synthèse sont fixés à leurs valeurs nominales, le rapport signal à bruit est modifié en simulant un signal de force plus ou moins fort. Le signal d’accélération simulé est ainsi plus ou moins bruité. Dans notre cas, le RSB est défini par la relation suivante :

$$RSB = 20 \log_{10} \left[\frac{A_\gamma}{A_{n_\gamma}} \right], \quad (2.73)$$

où A_γ est la valeur RMS (*Root Mean Square*) du signal d’accélération simulé et non bruité (étape 3 du paragraphe 2.4.2) et A_{n_γ} est la valeur RMS du signal de bruit enregistré sur l’accéléromètre. Les variations ont lieu sur A_γ , la valeur de A_{n_γ} est constante tout au long de la procédure.

De manière intuitive, le test montre que la méthode est extrêmement performante lorsque le bruit est très faible, l’erreur d’estimation étant quasi-nulle pour des valeurs de

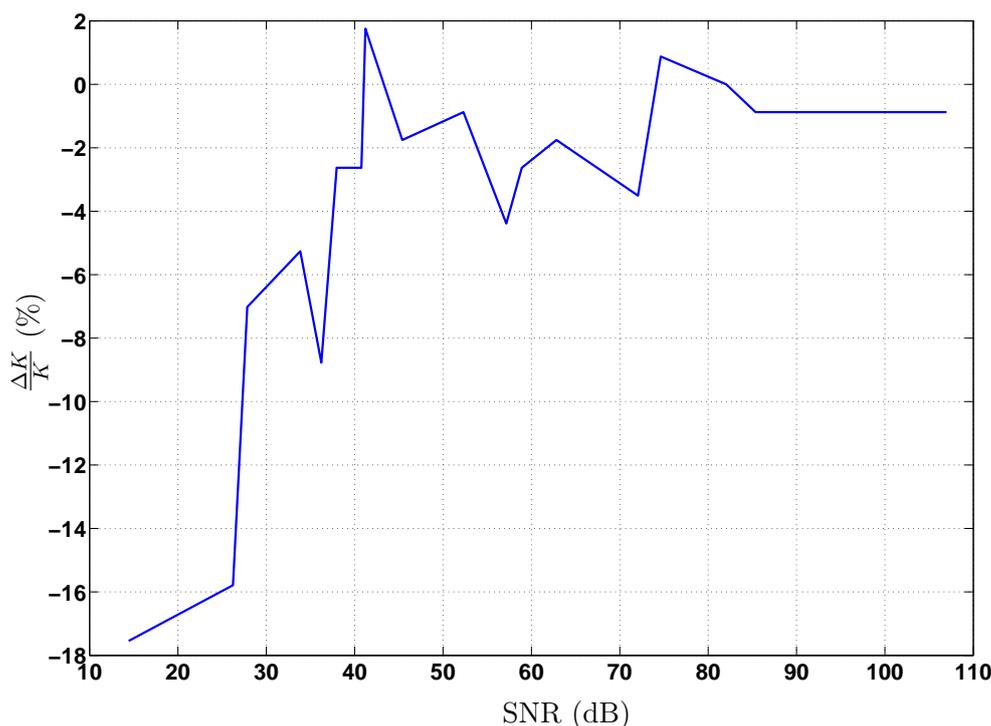


FIGURE 2.15 – Erreur d’estimation (en pourcentage) du nombre de modes en fonction du rapport signal à bruit.

RSB supérieures à 70 dB. Lorsque le bruit n’est plus négligeable, la performance de la méthode est altérée, mais reste néanmoins très bonne, avec moins de 5 % d’erreurs lorsque le rapport signal-à-bruit est d’au moins 40 dB. Nous observons expérimentalement des RSB systématiquement supérieurs à 50 dB.

2.4.3.4 Influence de la position d’observation

Le dernier test effectué concerne la sensibilité de la méthode à la position d’observation. Selon la position d’observation (ou d’excitation), les modes sont plus ou moins excités. Il peut en résulter des erreurs d’estimation : les sinusoïdes de faible amplitude sont rapidement noyées dans le bruit et deviennent ainsi difficilement détectables. Pour le test, tous les paramètres sont fixés à leurs valeurs nominales. Seule la position d’excitation et d’observation sont modifiées, la position suit un maillage sur un quadrant de la plaque de synthèse (les résultats sur les autres quadrants sont identiques par symétrie). Les résultats se présentent sous la forme d’une carte d’erreur sur la figure 2.16.

L’effet des lignes nodales est clairement visible sur la figure 2.16 : les positions pour lesquelles les positions normalisées x/L_x et y/L_y forment des rapport simples ($1/2$, $2/5$, $1/3$, $1/4$ et $1/5$) entraînent les plus fortes erreurs d’estimation. Pour ces positions, un

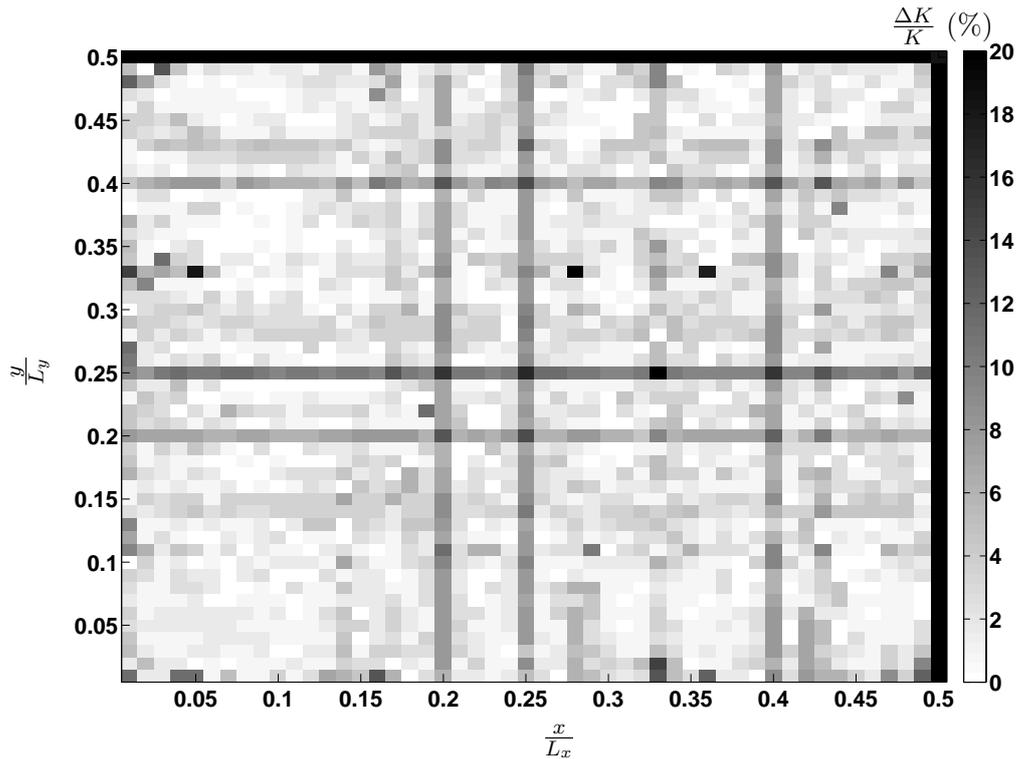


FIGURE 2.16 – Pourcentage d’erreur, en valeur absolue sur l’estimation du nombre de modes en fonction de la position d’excitation et d’observation sur un quadrant d’une plaque de synthèse.

grand nombre de modes sont excités sur leurs nœuds, d’où une plus grande difficulté à bien estimer le nombre de modes. En dehors de ces lignes, l’estimation reste très bonne. Lors d’estimation de densité modale de structures, il faut donc bien veiller à ne pas exciter sur des lignes nodales.

2.4.3.5 Conclusions sur les limites de la méthode

Plusieurs tests ont été effectués sur des signaux de synthèse simulant des réponses impulsionnelles de plaques. Ils ont été pensés pour tester les différents paramètres susceptibles d’influer sur les performances de la méthode. La multiplicité de ces facteurs rend difficile la définition de limites précises de la méthode à estimer le bon nombre de modes d’une structure. Cependant, il est possible de dégager certaines tendances :

- le facteur prépondérant semble être le recouvrement modal : en effet, pour des niveaux de bruit nominaux, l’estimation du nombre de modes est précise pour des valeurs de facteur de recouvrement modal inférieure à 100 %. Au-delà de 100 %, l’estimation est d’autant plus dégradée que le recouvrement est important.
- lorsque le recouvrement modal est de 100 %, l’estimation est précise pour des valeurs de rapport signal-à-bruit supérieures à 40 dB.

- la méthode est sensible à la position d’excitation et d’observation : l’observation sur des lignes nodales des premiers modes rend difficile la détection des sinusoïdes de faible amplitude correspondant à des nœuds.

Par la suite, les analyses se font essentiellement dans les domaines des basses et moyennes fréquences, assurant un facteur de recouvrement modal inférieur à 100 %.

2.5 Estimation des paramètres caractéristiques de matériaux

Cette partie détaille une méthodologie permettant une caractérisation globale de matériaux à partir des valeurs des paramètres modaux estimées à l’aide de la méthode décrite dans le paragraphe 2.4.3.5. Après avoir défini les paramètres caractéristiques, puis la méthodologie permettant de les estimer, des exemples d’applications sur des éprouvettes à la fois synthétiques et réelles sont réalisés dans le but de valider la méthode.

2.5.1 Définition des paramètres caractéristiques

Les paramètres recherchés sont des caractéristiques globales et intrinsèques de la structure. Nous avons retenus deux grandeurs caractéristiques : la densité ou masse volumique (notée ρ), et le module d’Young (noté E). A partir des valeurs de ces deux paramètres, il est possible de définir d’autres grandeurs caractéristiques du matériau qui sont :

Constante élastique de plaque Les expressions donnant la densité modale des panneaux plans ou courbes font intervenir la quantité $\sqrt{\frac{\rho h}{D}}$, paramètre intrinsèque de la plaque, dépendant des propriétés mécaniques du matériau utilisé. Nous appelons ce paramètre *constante élastique de plaque*, et nous le noterons β .

Masse équivalente La masse équivalente s’interprète comme une estimation de la masse vibrante effective. Dans le cas de structures simples, telles que des panneaux homogènes, elle correspond à la masse totale de la structure. En revanche, dans le cas de structures plus complexes, telles que les panneaux barrés ou les instruments de musique, la masse équivalente peut être différente de la masse totale du système, si seulement une partie est effectivement mobile.

Raideur équivalente La raideur équivalente D est une estimation du module de rigidité d’une structure isotrope qui aurait la même densité modale que la structure étudiée. Cette raideur prend en compte une éventuelle orthotropie du matériau. Elle inclut cependant les différents termes de raideur dans un terme de raideur global, correspondant au D^* de l’équation (2.48).

Mobilité caractéristique de la plaque équivalente infinie La mobilité moyenne G_C d'un panneau, telle que définie par Skudrzyk [129], tend en hautes fréquences vers la mobilité du panneau plan équivalent de dimensions infinies. Cette valeur, notée $G_{C\infty}$, et appelée mobilité caractéristique, quantifie l'efficacité globale de la structure à vibrer. Elle est d'autant plus grande que la structure est efficace à vibrer. Dans le cas de panneaux courbés, cette grandeur est la mobilité caractéristique du panneau plan équivalent de dimensions infinies.

Dispersion de mobilité La dispersion de mobilité d'un panneau quantifie la dispersion de la valeur de mobilité autour de sa valeur moyenne. C'est une mesure de l'écart relatif existant entre les courbes enveloppes de mobilité supérieure et inférieure. Une grande dispersion de mobilité se traduit par des variations de valeurs de mobilité importante d'une fréquence à l'autre. Pour une structure donnée, c'est une indication directe de son amortissement : une structure très amortie présente une faible dispersion de mobilité.

2.5.2 Méthode d'estimation des paramètres caractéristiques des structures

2.5.2.1 Constante élastique de plaque

L'expression analytique de la densité modale de plaques et des coques nous apprend que celle-ci dépend des paramètres β , de la fréquence, des conditions aux limites et de la géométrie. En supposant connues la géométrie et les conditions aux limites, l'estimation de la densité modale permet d'estimer le paramètre β .

Plaques minces

Dans le cas de plaque minces, nous cherchons le paramètre β qui minimise l'erreur quadratique entre la densité modale estimée et la densité modale analytique d'après l'équation (2.36). Ce qui s'écrit :

$$\beta = \operatorname{argmin}_{\beta} \left\| \mathbf{n}(f) - p\beta - q\sqrt{\frac{\beta}{f}} \right\|_2^2, \quad (2.74)$$

où les paramètres p et q dépendent des conditions aux limites et de la géométrie.

Coques minces

De manière analogue au cas des plaques minces, nous cherchons le paramètre $\beta = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ dans l'équation de la densité modale des coques minces (2.39) qui minimise l'erreur avec la densité modale estimée. La différence avec les plaques minces est qu'il existe un paramètre de forme, dû à la courbure. En effet, la courbure a comme effet de faire se

concentrer les modes autour d'une certaine fréquence, appelée fréquence de concentration. Le problème majeur est que cette fréquence de concentration entraîne une singularité qui peut biaiser l'estimation si elle s'appuie sur des minimisation d'erreurs quadratiques (méthode des moindres carrés par exemple). En effet, le recalage de la courbe aura tendance à se focaliser sur les erreurs présentes aux alentours de la singularité au détriment des autres zones fréquentielles. Une première approche consiste à minimiser les erreurs logarithmiques, qui a pour effet de privilégier les faibles valeurs plutôt que les grandes valeurs. Cependant, cette méthode n'est pas totalement satisfaisante pour notre cas, les valeurs proches de la singularité restant encore trop privilégiées. La solution choisie pour remédier à ce problème est de minimiser la norme L1 des erreurs. Cela revient à trouver le paramètre β pour lequel la densité modale analytique forme une fonction médiane au vecteur contenant les valeurs de densité modale estimées par ESPRIT. Il y aura donc autant de points de la densité modale estimée au-dessus de la courbe analytique qu'en-dessous de cette courbe. La figure 2.17 donne un exemple des recalages obtenus par l'intermédiaire des différentes méthodes.

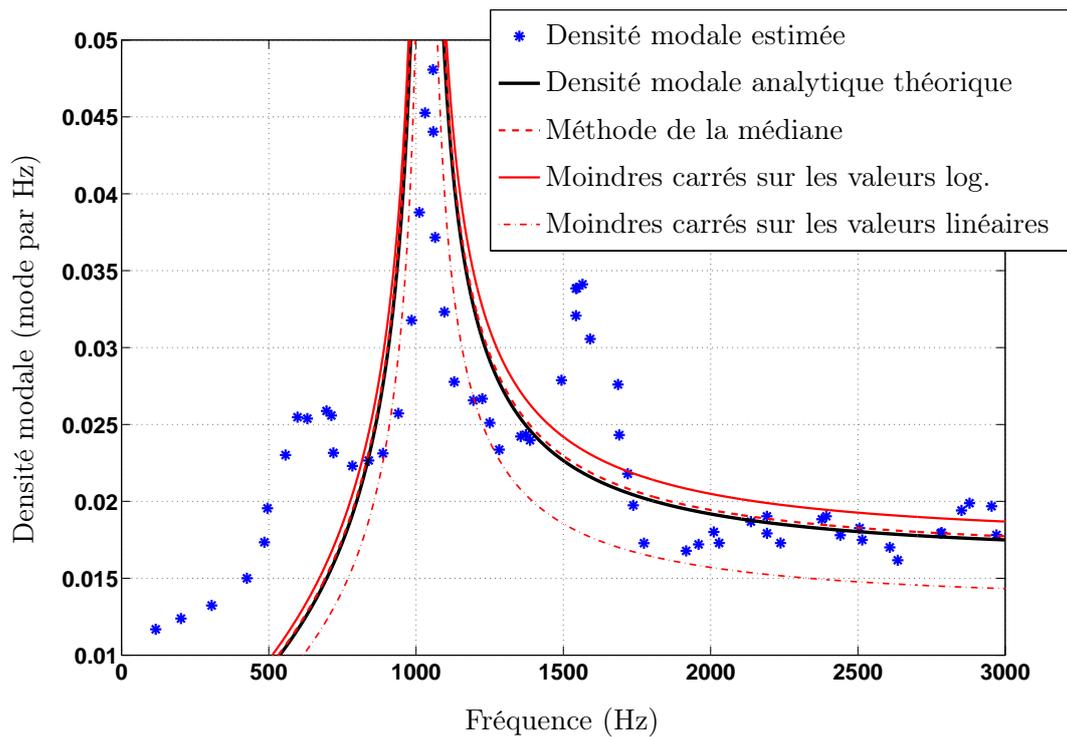


FIGURE 2.17 – Comparatif des méthodes de recalage des courbes de densité modale analytique d'une coque mince. La courbe en trait plein est la densité modale analytique théorique d'une coque mince de matériau isotrope de module d'Young 3.18 GPa, de dimensions $320 \times 250 \times 2.9$ mm, de masse 102.2 g et de rayon de courbure 0.11 m. Les méthodes comparées sont une méthode des moindres carrés, une méthode des moindres carrés sur le logarithme des échantillons, et une minimisation de la norme L1 des erreurs.

La supériorité en termes de précision de la méthode de la fonction médiane dans ce cas particulier est bien mise en évidence, cette dernière étant en accord avec la densité modale analytique théorique, alors que les courbes estimées par l'intermédiaire des autres méthodes ont tendance à s'en écarter lorsque l'on s'éloigne de la singularité.

2.5.2.2 Estimation de G_C

Ce paragraphe propose deux méthodes possibles permettant d'estimer G_C à partir de la mesure de mobilité en un point.

Estimation de G_C par lissage de la courbe de mobilité

Cette méthode s'appuie sur une définition donnée par Skudrzyk pour la mobilité moyenne d'une structure : celle-ci est la ligne moyenne de la mobilité tracée en échelle logarithmique, à savoir la moyenne *géométrique* entre la valeur de la mobilité à une résonance et celle à l'anti-résonance suivante. Il est donc possible de l'estimer à l'aide d'un filtre moyennneur. Il consiste à faire glisser point par point une fenêtre d'une certaine largeur fréquentielle et de calculer la moyenne de la mobilité exprimée en dB contenue à l'intérieur de la fenêtre, soit :

$$G_{C_{dB}}(f_c) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f_1}^{f_2} Y_{dB} df, \quad (2.75)$$

où f_c est la fréquence centrale de la fenêtre, f_1 et f_2 sont respectivement les bornes fréquentielles inférieure et supérieure de la fenêtre, $\Delta f = f_2 - f_1$ est la largeur de fenêtre, et Y_{dB} est la mobilité exprimée en dB¹.

Estimation de G_C par augmentation de l'amortissement

L'autre méthode permettant d'estimer G_C s'appuie sur un amortissement artificiel de la réponse impulsionnelle (en vitesse) de la structure. Pour cela, cette dernière est multipliée par une fenêtre exponentielle fortement décroissante. Dans le modèle sinusoides amorties utilisé pour décrire la réponse impulsionnelle, cela revient à multiplier chaque composante sinusoïdale par une exponentielle décroissante, c'est-à-dire à augmenter chaque facteur d'amortissement modal par une constante. Il vient alors :

$$s(t) = \sum_{k=1}^N b_k e^{2j\pi f_k t - \alpha_k t} e^{-\alpha_w t} = \sum_{k=1}^N b_k e^{2j\pi f_k t - (\alpha_k + \alpha_w)t}, \quad (2.76)$$

où α_w est l'inverse de la durée caractéristique de la fenêtre exponentielle appliquée à la réponse impulsionnelle. La représentation fréquentielle de la réponse impulsionnelle en vitesse, lorsque les modes sont fortement amortis, tend vers la mobilité moyenne G_C . En effet,

1. La valeur de G_C en linéaire devient alors $G_C = 10^{G_{C_{dB}}/20}$.

reprenant l'équation (2.49) des courbes enveloppes, introduites dans le paragraphe 2.2.2.2, on remarque que lorsque le facteur de recouvrement modal μ tend vers l'infini, alors les valeurs de G_{Res} et G_{Ares} tendent vers la mobilité moyenne². Il apparait clairement que la mobilité, bornée par ses limites supérieure et inférieure, que constituent G_{Res} et G_{Ares} , ne peut être qu'égale à G_C . La figure 2.18 illustre le phénomène, les résonances et antirésonances "se rapprochent" au fur et à mesure que l'on augmente l'amortissement, et tendent vers une ligne moyenne correspondant à G_C .

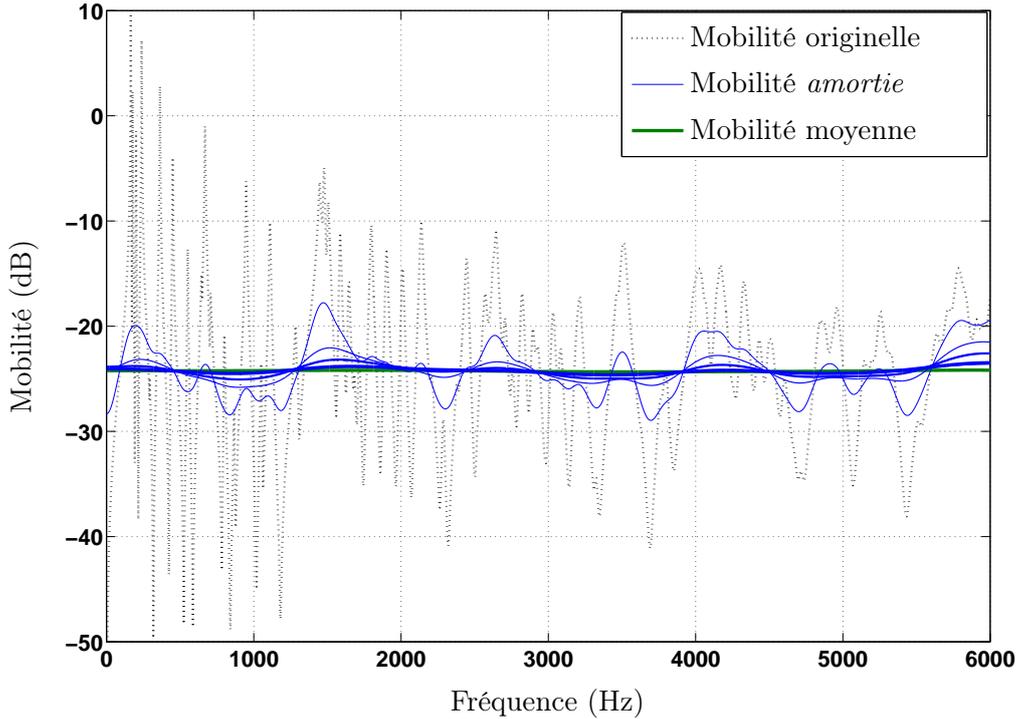


FIGURE 2.18 – Courbes de mobilité pour des fenêtres exponentielles dont la durée caractéristique décroît.

2.5.2.3 Estimation de la masse équivalente

Reprenant la formule de Skudrzyk [129] donnant la relation entre la mobilité moyenne G_C , la masse M de la structure et la densité modale $n(f)$:

$$G_C = \frac{n(f)}{4M}, \quad (2.77)$$

il est possible d'estimer la masse M telle que le rapport $\frac{n_{fit}}{4M}$, où n_{fit} représente la densité modale analytique (d'après Xie *et al.* [148]) estimée à partir des résultats d'ESPRIT, minimise les erreurs, dans le sens des moindres carrés, avec la mobilité moyenne G_C , soit

2. Les fonctions $\coth(x)$ et $\tanh(x)$ tendent effectivement vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$M = \underset{\hat{M}}{\operatorname{argmin}} \|G_C - \frac{n}{4\hat{M}}\|_2^2. \quad (2.78)$$

où la valeur de G_C est estimée soit par moyenne glissante, soit par la méthode de l'augmentation d'amortissement.

2.5.2.4 Estimation de la raideur équivalente

Connaissant le paramètre β , ainsi que la surface de la plaque, la raideur équivalente s'obtient facilement :

$$D_{Eq} = \frac{M_{Eq}}{S\beta^2}. \quad (2.79)$$

2.5.2.5 Estimation de la mobilité caractéristique de la plaque équivalente infinie

A partir des valeurs de masse et de raideur, la mobilité caractéristique de la plaque équivalente de dimension infinie, notée $G_{C\infty}$ est calculée à partir de l'expression suivante :

$$G_{C\infty} = \frac{1}{8\sqrt{M_{Eq}D_{Eq}/S}}. \quad (2.80)$$

2.5.2.6 Dispersion de mobilité

La dispersion de mobilité tend à quantifier la manière dont la mobilité oscille autour de sa valeur moyenne. Il quantifie en quelque sorte l'homogénéité de la valeur de mobilité. Il est calculé à travers les valeurs de courbes enveloppes de mobilité de Langley [89] introduites au paragraphe 2.2.2.2. Il est défini comme la valeur moyenne de l'aire comprise entre la courbe enveloppe supérieure et la courbe enveloppe inférieure dans la bande de fréquences comprise entre la limite basses et moyennes fréquences (notée f_{30} et définie comme la fréquence à partir de laquelle le facteur de recouvrement modal est supérieur à 30 %) et la fréquence maximale d'analyse (fréquence de Nyquist, notée f_N). Cette valeur est normalisée par la valeur de mobilité moyenne G_C . La dispersion de mobilité est notée $\langle\sigma_Y\rangle_{30}$ et s'écrit :

$$\langle\sigma_Y\rangle_{f_{30}} = \frac{1}{f_N - f_{30}} \int_{f_{30}}^{f_N} \frac{G_{Res} - G_{Ares}}{G_C} df, \quad (2.81)$$

où G_{Res} et G_{Ares} sont respectivement les limites supérieures et inférieures des courbes enveloppes de mobilité. En prenant $\zeta = 4$, la substitution de l'équation (2.49) dans (2.81) donne :

$$\langle\sigma_Y\rangle_{f_{30}} = \frac{1}{f_N - f_{30}} \int_{f_{30}}^{f_N} \left[\coth \left[\frac{\pi\mu}{4} \right] - \tanh \left[\frac{\pi\mu}{4} \right] \right] df, \quad (2.82)$$

où μ est le facteur de recouvrement modal. On constate alors que la dispersion de mobilité, pour une plage fréquentielle donnée, n'est fonction que du recouvrement modal, et donc en partie de l'amortissement. En particulier, si le recouvrement modal tend vers de grandes valeurs, alors les termes \coth et \tanh tendent tous deux vers 1, et par conséquent, $\langle \sigma_Y \rangle_{f_{30}}$ tend vers 0. On retrouve la propriété qui veut qu'une structure ayant un fort recouvrement modal possède une courbe de mobilité plate, avec peu de fluctuation autour de sa valeur moyenne.

2.5.3 Limites de la méthode

Ce paragraphe discute de deux limites que présente la méthode : choix des paramètres d'entrée pour le calcul de la mobilité moyenne et les variations de mobilité dues aux différentes positions d'observation. Nous étudions l'influence de ces paramètres sur l'estimation des caractéristiques de la structure de synthèse de référence en épicea, dont les valeurs des paramètres mécaniques sont répertoriés dans le tableau 2.2.

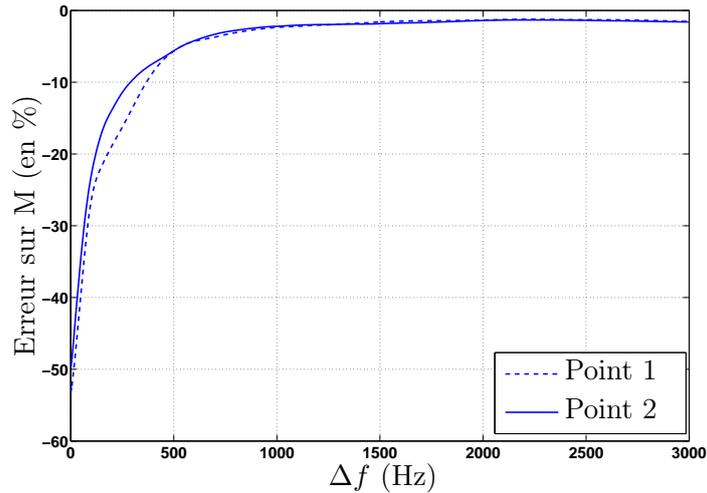
2.5.3.1 Choix de l'ordre de lissage et de la durée caractéristique de la fenêtre exponentielle pour l'estimation de G_C

Afin d'obtenir une estimation robuste de la masse équivalente, il est important d'estimer correctement G_C au préalable. Les deux méthodes permettant d'approcher G_C ont besoin de paramètres d'entrée qui sont a priori arbitraires : largeur fréquentielle de la fenêtre glissante pour la méthode du lissage, et durée caractéristique de la fenêtre exponentielle pour la méthode de l'augmentation de l'amortissement. La valeur de ces paramètres influe sur l'estimation de la masse équivalente. Cette influence est mise en évidence sur la figure 2.19, qui représente le pourcentage d'erreur d'estimation sur la masse équivalente en fonction des valeurs des paramètres Δf et α_w , pour trois points choisis aléatoirement sur la surface de la plaque.

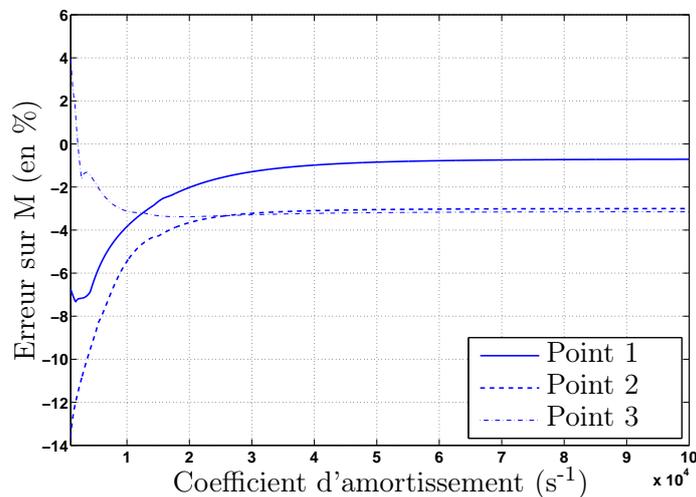
La variation de la masse équivalente en fonction de la valeur Δf , ou α_w présente globalement le même comportement lorsque ces paramètres sont grands : la masse équivalente estimée tend vers une constante, pour laquelle l'erreur d'estimation de la masse est minimale. Le choix de Δf ou α_w s'effectue donc à l'aide d'une méthode récursive : la masse équivalente est calculée pas à pas pour des valeurs croissantes de Δf ou α_w jusqu'à obtenir une variation relative en-dessous d'un certain seuil ϵ ($\left| \frac{M_{k+1} - M_k}{M_k} \right| < \epsilon$), ϵ étant choisi arbitrairement. En pratique, nous prenons $\epsilon = 0.01$ %.

2.5.3.2 Effet de la position d'observation

La méthode présentée ici peut s'appliquer localement, c'est-à-dire en un seul point de la structure. Or, la réponse de la structure peut varier d'un point à l'autre. En fait, la mo-



(a) Effet de l'ordre de lissage



(b) Effet du coefficient d'amortissement

FIGURE 2.19 – Influence des valeurs de a) Δf et b) α_w sur l'estimation de la masse équivalente. L'estimation est effectuée sur une plaque d'épicéa de synthèse dont les valeurs des paramètres mécaniques sont répertoriées dans le tableau 2.2. Les trois courbes correspondent à 3 points différents, choisis aléatoirement sur la surface de la plaque.

bilité caractéristique, lorsque celle-ci est estimée à partir d'une mesure de mobilité en un point, n'est pas strictement constante : de faibles variations autour de la valeur moyenne existent du fait de la présence de modes faiblement excités ou fortement excités. Ce phénomène influe alors indirectement sur l'estimation de la masse équivalente et de la raideur équivalente. La masse équivalente estimée est alors fonction de la position d'observation. La figure 2.20 donne un exemple de carte de biais d'estimation de la masse par méthode d'augmentation artificielle de l'amortissement sur une plaque mince rectangulaire.

La carte de la figure 2.20 fait apparaître clairement des zones, sous forme de lignes, pour

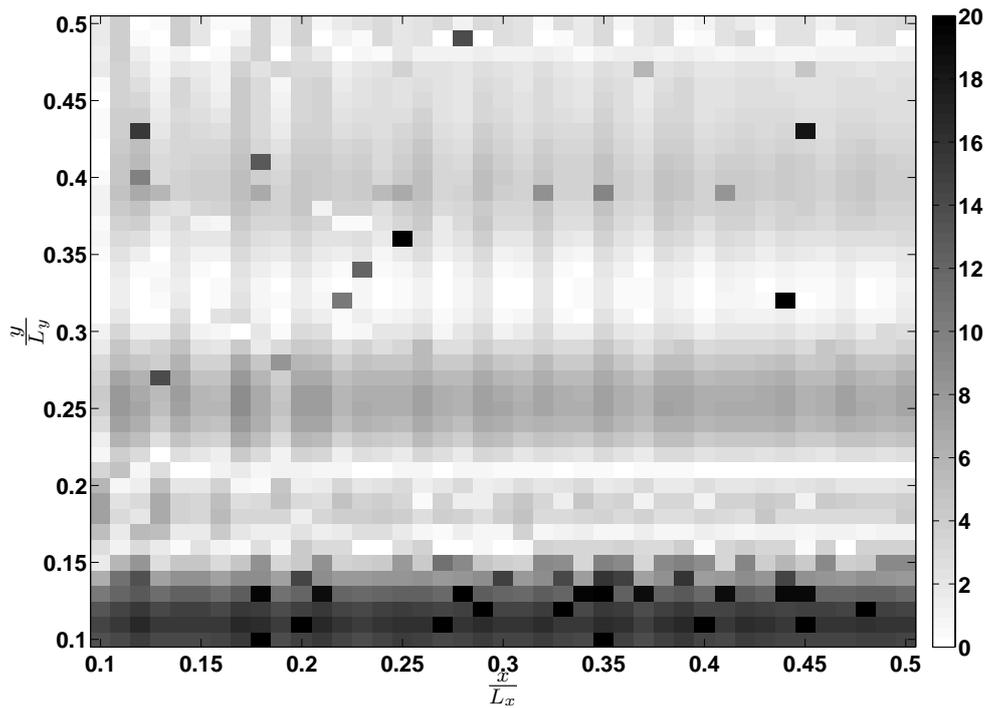


FIGURE 2.20 – Carte de biais d'estimation de la masse d'une plaque mince rectangulaire par méthode d'augmentation artificielle de l'amortissement. L'échelle à droite représente l'erreur d'estimation, en %, de la masse équivalente avec la vraie masse de la plaque.

lesquelles la masse équivalente est estimée moins précisément que d'autres. Cette variabilité spatiale sur l'estimation de la masse peut être atténuée par un moyennage spatial de la mobilité en quelques points.

2.5.4 Tests sur des plaques de synthèse

Dans le but de valider la méthode, nous proposons de simuler des réponses impulsionnelles de plaques de différents matériaux, en restant le plus fidèlement possible aux conditions expérimentales.

2.5.4.1 Présentation des tests

Nous choisissons un ensemble de 47 plaques. Les dimensions des plaques sont fixées de manière identique pour la totalité des matériaux testés à $40 \times 28 \times 2.5$ mm, ainsi que leur amortissement (le facteur de pertes est fixé à 1 % à chaque mode). La totalité des structures de synthèse sont considérées isotropes. Les différents matériaux sont représentés sur la figure 2.21, dans un diagramme s'inspirant de celui d'Ashby [3].

Dans le cas de matériaux naturellement orthotropes, tels que les bois, le module d'Young représenté est celui de la plaque isotrope équivalente à la plaque orthotrope parfaitement

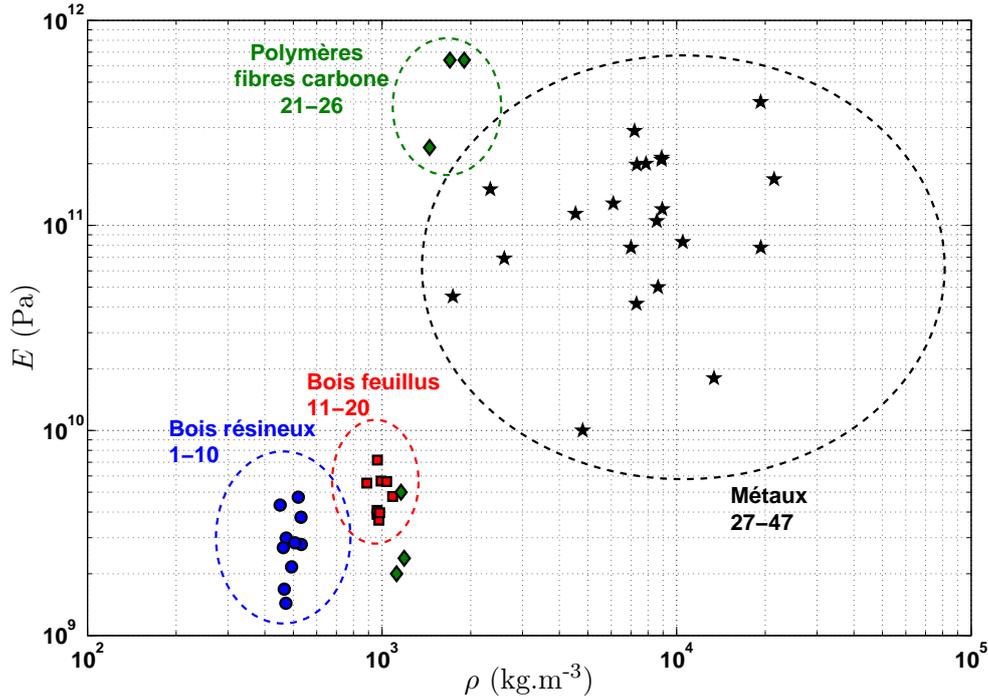


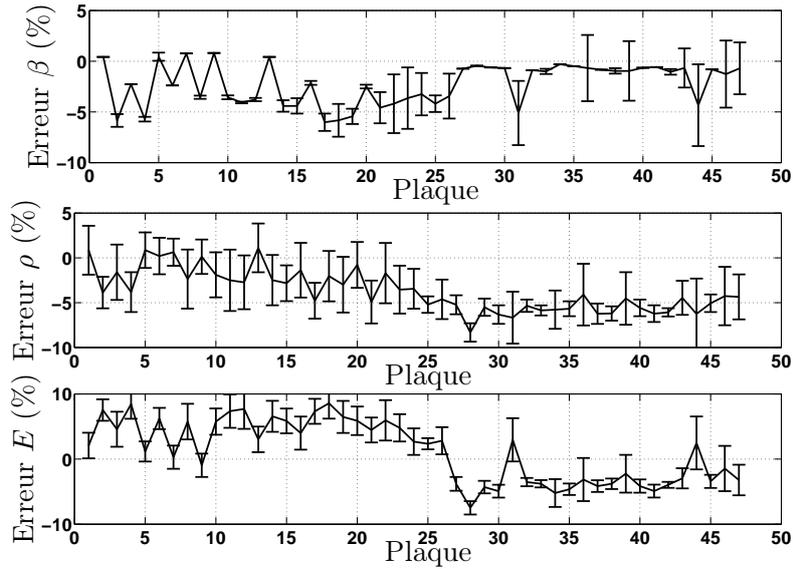
FIGURE 2.21 – Densité volumique et module d’Young des plaques de synthèse étudiées dans ce paragraphe, représentées à la manière du diagramme d’Ashby. Les matériaux sont regroupés par classes (bois feuillus ou résineux, polymères, et métaux). Les bois résineux correspondent aux plaques numérotées de 1 à 10, les bois feuillus correspondent aux plaques numérotées de 11-20, les plaques en polymères sont numérotées de 21-26, et les plaques métalliques sont numérotées de 27 à 47.

elliptique, c’est-à-dire $E = \sqrt{E_x E_y}$.

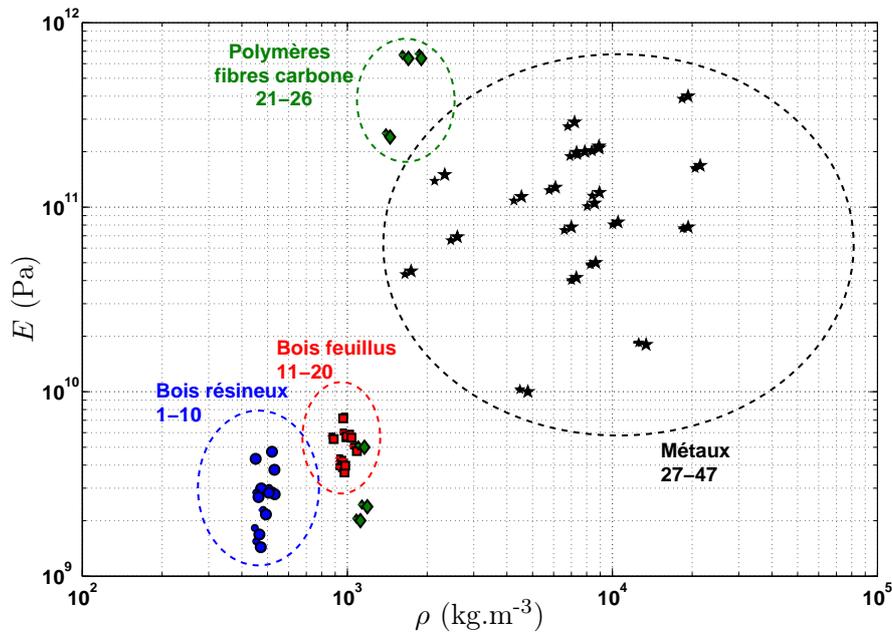
La méthode est appliquée à toutes les plaques synthétisées selon les propriétés mécaniques des matériaux du diagramme de la figure 2.21. Chaque plaque est analysée 100 fois. Pour chaque analyse, le point d’excitation et d’observation sont confondus et leur placement est tiré de manière aléatoire, selon une loi uniforme, à l’intérieure d’une certaine surface de la plaque limité au deuxième et troisième quartile de chaque dimension ($x \in [\frac{L_x}{4}, \frac{3L_x}{4}]$ et $y \in [\frac{L_y}{4}, \frac{3L_y}{4}]$). Les signaux analysés sont une moyenne de 5 réponses impulsionnelles de synthèse correspondant à 5 points de simulation.

2.5.4.2 Résultats

Les résultats sont représentés sur la figure 2.22. Ils montrent que la méthode que l’estimation sur β est robuste et répétable. Il existe des biais d’estimation sur ρ et E qui sont situés entre 0 et 10 % pour les pires cas. Toutefois, la dispersion des estimations est faible. Cela se traduit donc par un biais systématique sur le diagramme d’Ashby de la figure 2.22, consistant en une sous-estimation systématique de ρ et de E . La méthode est toutefois



(a) Erreurs d'estimation



(b) Diagramme d'Ashby

FIGURE 2.22 – a) Erreurs médianes d'estimation et dispersion médianes sur les 100 estimations des paramètres caractéristiques des différentes plaques et b), positionnement des valeurs théoriques (grands symboles) et des estimations de la méthode (petits symboles), ainsi que leur dispersion. Les bois résineux correspondent aux plaques numérotées de 1 à 10, les bois feuillus correspondent aux plaques numérotées de 11-20, les plaques en polymères sont numérotées de 21-26, et les plaques métalliques sont numérotées de 27 à 47.

suffisamment robuste pour permettre d'estimer les valeurs des paramètres caractéristiques des matériaux à l'aide d'un matériel léger et avec très peu de points de mesures. La fi-

gure 2.22 met en évidence le caractère discriminant de la méthode : les matériaux sont regroupés par classes selon leurs valeurs de ρ et E .

2.5.5 Tests expérimentaux

Les applications expérimentales concernent plusieurs plaques rectangulaires.

2.5.5.1 Protocole expérimental

Lors des mesures, les plaques sont suspendues à l'aide de fils, permettant de réaliser des conditions libres. Les modèles analytiques de densité modale utilisés sont donc ceux de plaques en conditions libre-libre. Pour chaque plaque, les réponses impulsionnelles ont été mesurées en 3 positions différentes, dans la zone centrale¹. Le signal d'accélération est obtenu à l'aide d'un accéléromètre léger (PCB 352C23.0.2 g) devant la masse de la structure étudiée. Le signal de force est obtenu simultanément par l'intermédiaire d'un petit marteau d'impact PCB 086E80. L'impact est situé au plus proche de l'accéléromètre. La procédure d'estimation de la réponse impulsionnelle blanchie, connaissant le signal d'accélération et de force, suit les étapes 5 et 6 du paragraphe 2.4.2. La réponse impulsionnelle moyennée des 3 points est ensuite analysée via les méthodes d'analyse présentées aux paragraphes 2.3.1 et 2.5.1. L'algorithme ESPRIT, couplé avec le critère ESTER, permet d'estimer les paramètres modaux (fréquences, facteurs de pertes, amplitudes et phases). Finalement, les paramètres caractéristiques décrits dans le paragraphe 2.5.1 sont estimés à partir des valeurs des paramètres modaux et de la moyenne de mobilité aux 3 points de mesures. Dans cette partie, la géométrie de la plaque est connue avec précision.

2.5.5.2 Analyse des mesures

Les résultats sont présentés dans un ordre croissant de recouvrement modal. La première plaque est une plaque en acier de faible densité modale et faible amortissement. Ensuite nous étudions une plaque en cèdre rouge, de densité modale supérieure et présentant un amortissement élevé.

Plaque en acier

La première plaque analysée est une plaque d'acier d'aspect carrée ($240 \times 240 \times 4.6$ mm). Sa masse totale à la pesée est de 2.02 kg. Sa masse volumique est donc de 7623 kg.m^{-3} . L'acier étant un alliage, les valeurs des propriétés mécaniques sont variables d'un acier à l'autre. Cependant, les valeurs restent généralement dans un même ordre de grandeur. Les valeurs théoriques des propriétés mécanique de l'acier sont répertoriées dans le tableau 2.3.

1. Nous situons cette zone centrale entre le deuxième et troisième quartile selon les deux dimensions de la surface de la plaque

Paramètre	Unité	Valeur	Paramètre	Unité	Valeur
Longueur de plaque	m	0.24	Module d'Young	GPa	200
Largeur de plaque	m	0.24	Masse volumique	kg.m ⁻³	7623
Épaisseur de plaque	m	4.6×10 ⁻³	Masse de la plaque	kg	2.02

TABLE 2.3 – Données géométriques et mécaniques de la plaque d'acier et propriétés mécaniques typiques de l'acier.

Paramètres modaux Les valeurs estimées des paramètres modaux sont représentées sur la figure 2.23, où l'on trouve l'amortissement modal, le facteur de pertes modal et le facteur de recouvrement modal. Le facteur de recouvrement modal est extrêmement faible (de l'ordre de quelques pour-cents), indiquant un caractère fortement modal, avec des pics bien identifiables sur la fonction de transfert. L'amortissement estimé augmente de manière significative à partir de 2200 Hz. Ce type d'augmentation soudaine d'amortissement peut-être lié aux pertes par rayonnement acoustique. En effet, dans le cas de plaques finies, le rayonnement est faible en dessous d'une certaine fréquence, appelée *fréquence critique*, et devient rapidement important pour des fréquences supérieures à la fréquence critique [94]. Elle dépend des propriétés de la plaque et de la célérité c_a des ondes acoustiques dans l'air environnant

$$f_c = \frac{c_a^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}. \quad (2.83)$$

Dans le cas de la plaque d'acier étudiée, la valeur de fréquence critique calculée d'après la relation (2.83) est de 2550 Hz, ce qui est en accord avec l'augmentation de l'amortissement observée dans cette zone de fréquence.

Enfin, les valeurs des paramètres caractéristiques de la plaque d'acier sont estimées à partir de la densité modale et de la mobilité caractéristique de la plaque. La mobilité reconstruite à partir des valeurs des paramètres modaux est comparée avec celle mesurée sur la figure 2.24. On remarque que la position des pics coïncident parfaitement, ainsi que leurs amplitudes, indiquant que les modes sont bien estimés. La densité modale représentée sur la figure 2.24 montre un comportement typique de plaque mince en conditions libres, à savoir un comportement pratiquement constant, très légèrement décroissant avec la fréquence et tendant vers une valeur constante de 0.0055 modes par Hertz, soit un mode tous les 180 Hertz. La comparaison entre la densité modale analytique estimée et la densité modale analytique d'une plaque possédant la même géométrie et des propriétés mécaniques moyennes de l'acier (valeurs répertoriées dans le tableau 2.3) confirme cette tendance, les deux étant très proches, et sont en bon accord avec la densité modale estimée par la méthode.

Paramètres caractéristiques estimés La masse de la plaque étant une grandeur dont la valeur est connue avec précision, nous comparons la masse équivalente estimée avec la

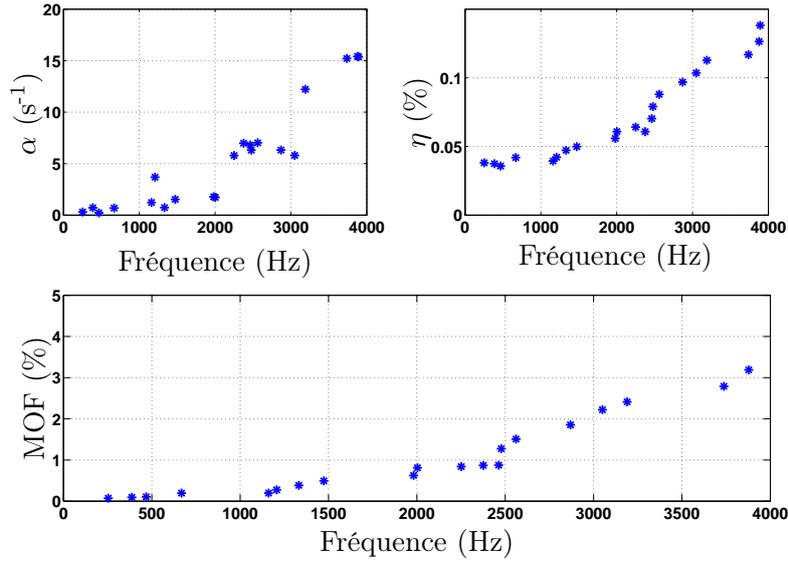


FIGURE 2.23 – Représentation des paramètres modaux de la plaque d’acier estimés par ESPRIT. En haut à gauche : amortissement modal, en s^{-1} . En haut à droite : facteur de pertes modal en %. En bas : facteur de recouvrement modal en %.

masse réelle de la plaque. On remarque que la méthode permet de très bien l’estimer dans ce cas. La masse équivalente estimée par la méthode est de 2.018 kg, soit une erreur de 2 grammes ou 0.11 %. Les grandeurs qui en découlent, à savoir la constante élastique de plaque β , la raideur équivalente, le module d’Young et la masse volumique sont donc très susceptibles d’être estimés avec la même précision. La raideur estimée est de 1713 N.m, ce qui reste très proche de la valeur typique pour une plaque d’acier de 4.6 mm d’épaisseur et de module d’Young 200 GPA, qui est de 1820 N.m. L’écart de raideur de cette plaque avec une valeur de référence pour une telle plaque est de 5.9 %.

Plaque de bois de lutherie

La méthode est maintenant appliquée à une demi-table de cèdre rouge conçue pour la lutherie. Ses dimensions sont de $190 \times 500 \times 2$ mm, sa masse volumique est de 427.5 kg.m^{-3} . La même méthode est employée, à savoir la réponse impulsionnelle est mesurée en 3 points pris aléatoirement sur la plaque, puis l’estimation des paramètres modaux est effectuée sur la moyenne des 3 réponses impulsionnelles.

Paramètres modaux Les paramètres modaux représentés sur la figure 2.25 sont conformes à ce que l’on peut s’attendre de plaques en cèdre rouge. En effet, le facteur de pertes varie peu avec la fréquence : il est compris entre 1 et 2%. Ce comportement a été observé auparavant dans de nombreuses études sur le bois [19, 99, 104, 149]. La fréquence critique attendue pour cette structure est de l’ordre d’une dizaine de kHz, ce qui est en dehors de la

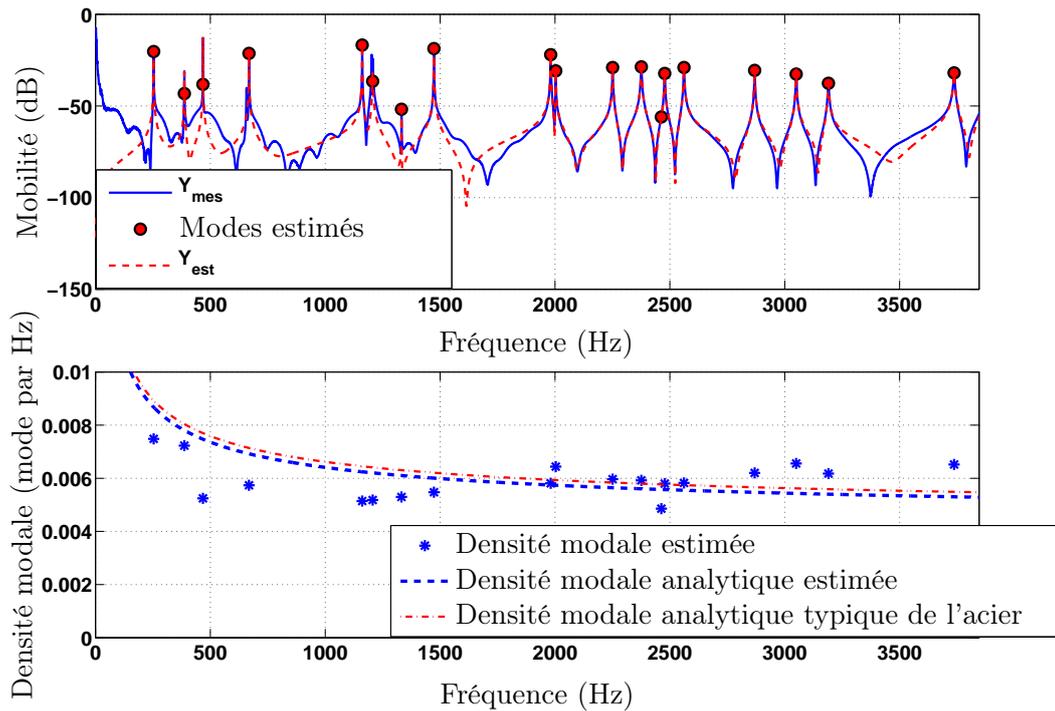


FIGURE 2.24 – En haut : mobilité mesurée et mobilité reconstruite à partir des paramètres modaux estimés (trait en pointillés). La position des modes est représentée par un cercle plein. Les différences entre mobilité mesurée et reconstruites s’expliquent par les effets de troncature (seuls les modes jusqu’à 4000 Hz sont pris en compte dans la reconstruction) et par un effet de fenêtrage sur le calcul de la mobilité mesurée à partir du signal d’accélération. En bas : densité modale estimée par ESPRIT (*), densité modale analytique estimée $n_{fit}(f)$ (traits pointillés gras), et densité modale analytique d’une plaque de même géométrie possédant des propriétés mécaniques typiques de l’acier, d’après le tableau 2.3.

fréquence maximale d’analyse, l’amortissement ne présente pas d’augmentation soudaine, contrairement à la plaque d’acier. L’effet de rayonnement n’est donc pas visible. De la même manière que précédemment, la densité modale estimée, représentée en figure 2.26, est proche de celle attendue pour une telle structure.

La densité modale de la plaque de cèdre rouge possède une allure de type plaque ayant des conditions aux limites libres sur ses 4 bords. la valeur de densité modale tend en hautes fréquences vers une valeur constante, voisine de 0.03 mode par Hertz, soit un mode tous les 33 Hz. La similitude entre la courbe de mobilité mesurée et la mobilité de resynthèse, reconstruite à partir des paramètres modaux estimés par ESPRIT, indique une estimation robuste de ces paramètres modaux.

Paramètres caractéristiques estimés La masse volumique estimée est de 411 kg.m^{-3} , contre 427.5 kg.m^{-3} par simple pesée, soit un écart de 3.96 %. La raideur estimée est de 2.84 N.m, soit un module d’Young d’une valeur de 3.97 GPa. Dans le cadre de sa thèse préparée

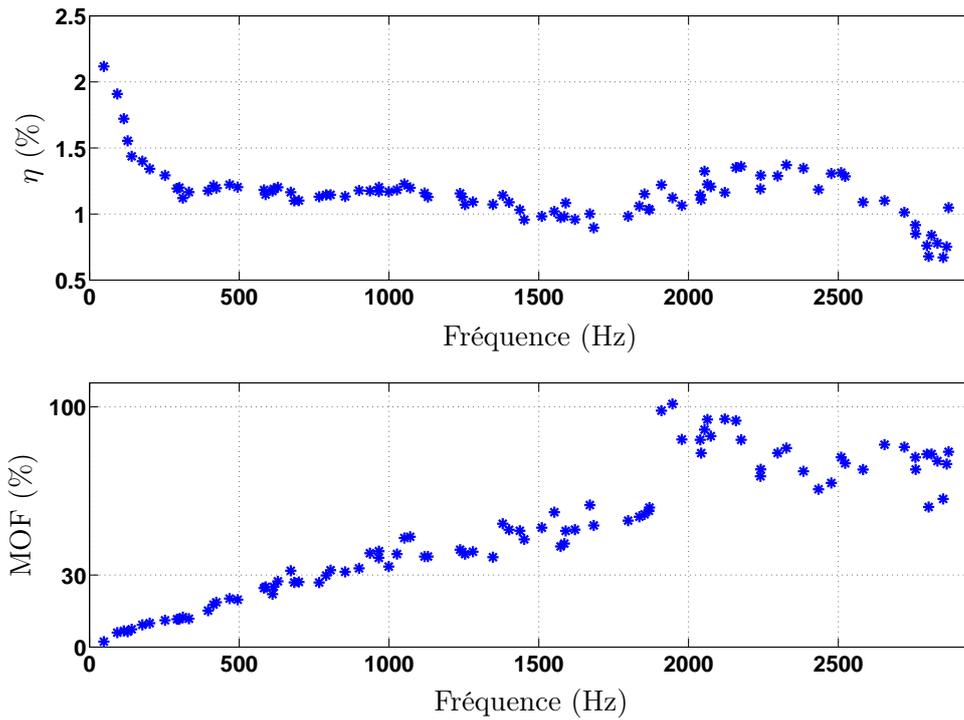
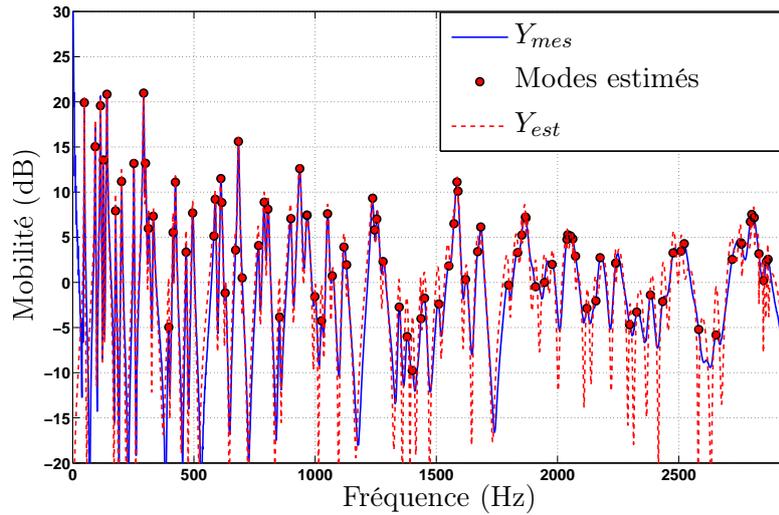


FIGURE 2.25 – Représentation des paramètres modaux estimés par ESPRIT de la demi-table de cèdre rouge. En haut : facteur de pertes modal, en %. En bas : facteur de recouvrement modal en %. Les limites des zones basses, moyennes et hautes fréquences sont $f_{30} = 670$ Hz et $f_{100} = 2000$ Hz.

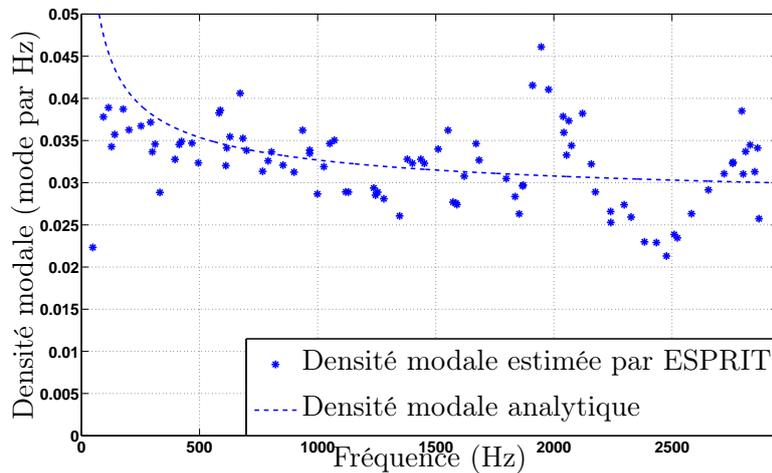
au *Laboratoire des Vibrations Acoustiques* (LVA) de Lyon sous la direction de Guyader et Pezerat, Růžek a estimé les 4 modules de rigidité de la même plaque, en utilisant une technique d'estimation dérivée de la méthode RIFF [107] et d'une méthode développée par Chardon *et al.* [28]. L'application de sa méthode sur cette plaque donne les modules de rigidité suivant : $D_1 = 9.52$ N.m, $D_2 + D_4 = 4.89$ N.m et $D_3 = 0.94$ N.m. Ses valeurs, qui ont fait l'objet d'une communication personnelle non publiée, conduisent à une valeur de $D^* = 2.86$ N.m, calculée d'après la relation (2.48). L'écart est donc de 0.79 %. La valeur de la constante élastique de plaque β est estimée à une valeur de 0.552 s.m⁻², contre 0.547 s.m⁻² pour l'estimation de M. Růžek, soit une différence 0.96 %. Ce résultat montre que la méthode développée donne des résultats en bon accord avec ceux obtenus par une méthode indépendante. Il est donc possible d'estimer de manière précise un module de rigidité D^* rendant compte du caractère orthotropique du matériau.

2.6 Conclusions du chapitre

Ce chapitre présente une méthode permettant d'estimer les paramètres caractéristiques que sont la masse volumique et le module d'Young au moyen de tests vibratoires simples



(a)



(b)

FIGURE 2.26 – a) : mobilité mesurée (ligne pleine) et mobilité reconstruite à partir des paramètres modaux estimés (trait en pointillés). La position des modes est représentée par un cercle. b) : densité modale estimée par ESPRIT (*), densité modale analytique estimée $n_{fit}(f)$ (traits pointillés)

sur des éprouvettes de types plaques. Elle s'appuie dans un premier temps sur l'estimation expérimentale de la densité modale, à l'aide de la méthode sous-espace ESPRIT. Se basant ensuite sur des modèles de densité modale de plaques, il est possible de déterminer une plaque équivalente ayant la même densité modale que la plaque réelle. Notons que le modèle présenté est celui d'une plaque isotrope. Dans le cas de plaques orthotropes, telles que les panneaux de bois par exemple, nous estimons un module d'Young correspondant à celui de la plaque isotrope ayant la même densité modale. La masse volumique et le module

d'Young sont ensuite estimés à l'aide de la théorie de la valeur moyenne de Skudrzyk qui prédit que l'allure moyenne des courbes de mobilité de structures est proportionnelle au rapport entre la densité modale et sa masse.

Les limites de la méthode sont étudiées pas à pas. Premièrement, la capacité de la méthode d'identification modale à estimer le bon nombre de modes présents dans la réponse impulsionnelle est étudiée pour plusieurs configurations. Il en ressort que la méthode est très robuste pour des recouvrement modaux inférieurs à 100 %, c'est-à-dire lorsque nous sommes dans le domaine des basses et moyennes fréquences. Au-delà, la méthode peut être perturbée par plusieurs paramètres, tels que le niveau de bruit ou le nombre de modes. La méthode d'identification peut être améliorée si l'analyse est effectuée sur une moyenne des réponses impulsionnelles mesurées en quelques points, évitant ainsi l'existence de pôles d'énergie trop faible dans le signal (correspondant à un mode excité trop près d'un de ses nœuds). Dans un second temps, la méthode d'estimation des paramètres caractéristiques des matériaux est testée numériquement à l'aide de plaques de synthèse, et expérimentalement à l'aide de vrais plaques métalliques et en bois. Il en ressort qu'elle se montre efficace pour estimer ces paramètres.

De manière générale, la méthode présentée dans ce chapitre permet de caractériser des structures (ici des panneaux) à l'aide de peu de paramètres globaux. Le positionnement des structures en fonction de leurs paramètres dans un diagramme de type Ashby permet de les classer par catégories (métaux, bois feuillus, bois résineux, polymères). La méthode s'applique donc dans un contexte très large, qui va bien au-delà du seul contexte de l'acoustique musicale.

La méthode développée ne requiert pas de matériel de laboratoire lourd, ni de beaucoup points de mesures. Elle est donc parfaitement adaptée à la problématique d'aide à la facture instrumentale, les luthiers pouvant s'en servir in situ dans leur atelier avec très peu de contraintes.

Chapitre 3

Instruments à cordes pincées

Ce chapitre présente l'application de la méthodologie développées au chapitre 2 au cas des instruments de musique à cordes pincées. Nous avons établi une liste de macro-paramètres caractéristiques d'une structure mécanique :

- la mobilité caractéristique de l'instrument au chevalet,
- la densité modale,
- la dispersion de mobilité,
- la masse et la raideur équivalente de la structure lorsque celle-ci a un comportement de type plaque.

Nous cherchons à estimer ce type de paramètres pour les guitares de façon à évaluer leur pertinence pour catégoriser les instruments.

3.1 Paramètres de couplage corde-table d'harmonie

3.1.1 Mobilité au chevalet vue par une corde de guitare

La première partie de ce paragraphe reprend les résultats présentés dans un article publié au JASA (*Journal of the Acoustical Society of America*) [50] et présenté en annexe D.

3.1.1.1 Mesure de mobilité

Le dispositif de mesures permettant d'estimer la mobilité au chevalet des guitares est identique à celui utilisé au chapitre 2. Il présente l'avantage d'être abordable pour un luthier, aisément manipulable et peu invasif. Lors des mesures, les guitares sont suspendues par leur tête, au niveau des mécaniques. Les cordes sont étouffées, dans le but de ne pas solliciter les modes de cordes lors de l'identification modale. Suivant la même méthode présentée au chapitre précédent, la réponse impulsionnelle est estimée par l'acquisition colocalisée et simultanée du signal d'accélération, à l'aide d'un accéléromètre PCB 352C23 de masse 0.2 g, et du signal d'excitation, à l'aide d'un marteau d'impact PCB 086C80.

Les niveaux de mobilité sont donnés en dB dont la référence est la mobilité caractéristique d'une plaque de 2 mm d'épaisseur ayant des propriétés mécaniques typiques de l'épicéa. Cette référence est prise dans un contexte d'aide à la lutherie. Nous pensons qu'elle est plus significative aux yeux du luthier qu'une référence purement physique prise à $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{N}^{-1}$. La référence en mobilité est calculée d'après l'équation (2.44), avec $\rho = 420 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $h = 2 \text{ mm}$, et $D = 2.1 \text{ N}\cdot\text{m}$, soit une mobilité de référence, notée $G_{C_{Ref}} = 0.094 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{N}^{-1}$.

3.1.1.2 Mobilités typiques mesurées au chevalet de guitares

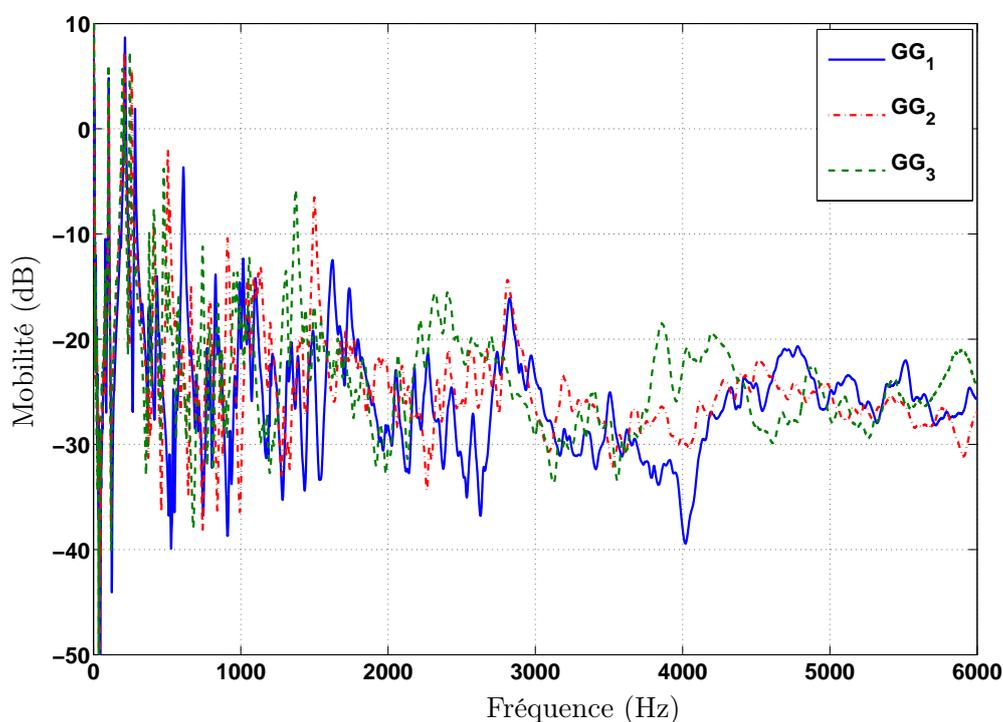


FIGURE 3.1 – Module de la mobilité au chevalet mesurée sur trois guitares différentes, GG_1 , GG_2 et GG_3 du corpus de l'annexe E. Les mobilités sont mesurées au point d'attache de la corde du mi grave (E2) au niveau du chevalet.

La figure 3.1 représente un exemple de mobilités mesurées au chevalet de guitares. Les trois exemples donnés ici montrent des courbes très difficiles à appréhender. Elles incluent de nombreuses contributions modales rendant la lecture et l'analyse des courbes délicate aux premiers abords. La comparaison entre instruments n'est pas directe.

Notons que le module de mobilité varie autour d'une valeur moyenne comprise entre -25 et -30 dB. L'ensemble des éléments qui constituent la guitare a donc pour effet de diminuer la mobilité moyenne d'environ 30 dB par rapport à la table en bois d'origine.

3.1.1.3 Étude modale dans le domaine des basses fréquences

Dans le domaine des basses fréquences, les modes sont bien identifiés¹, ils possèdent une fonction bien connue, et se retrouvent généralement sur tous les instruments. Dans ce contexte, une étude des modes pris individuellement est pertinente : nous effectuons dans ce paragraphe une étude statistique portant sur les caractéristiques des premiers modes sur un ensemble de guitares.

Sur la figure 3.2, on place dans un plan fréquence-amortissement un ensemble de guitares. cette représentation permet d'évaluer la dispersion des paramètres dans une population d'instruments. Les guitares sont divisées en 2 groupes. Le premier groupe est constitué de guitares provenant du magasin *La Guitarreria*, à Paris. Ce sont les guitares notées GG_1 à GG_9 dans l'annexe E, elles sont des guitares d'artisans-luthier et sont considérées comme des guitares haut-de-gamme. Le second groupe est un ensemble de 17 guitares industrielles, de marque Yamaha, modèle CG111 ou CG131, de table faites soit en épicéa, soit en cèdre rouge. ces guitares sont utilisées par des étudiants de l'ITEMM dans le cadre de travaux pratiques sur les techniques de restauration d'instruments. Ce sont les guitares notées GI_1 à G_{17} dans l'annexe E.

On remarque que les guitares d'un même groupe ont tendance à se regrouper entre elles. Par exemple, les guitares du groupe 1 (guitares de luthier) possèdent un mode A_0 présentant un facteur de pertes généralement plus petit que les guitares du groupe 2 (guitares industrielles). De la même manière, le mode T_1 des guitares du groupes 1 se trouvent à des fréquences généralement plus basses pour que les modes T_1 des guitares du groupe 2. Il existe donc des différences objectives fondamentales entre instruments, voire entre groupes d'instruments. Cependant, ces seules paramètres sont insuffisant car ils ne décrivent qu'un comportement local (en fréquences) de l'instrument.

3.1.1.4 Mobilité moyenne

L'étude globale, utilisant la notion de mobilité moyenne, est pertinente à partir des moyennes fréquences : dans ce domaine, chaque mode est très variable d'une guitare à l'autre. Une approche simple et directe permettant d'analyser le comportement global d'une structure est d'estimer la mobilité moyenne G_C . Sur la figure 3.3, on représente les mobilités moyennes, calculées à l'aide de la méthode de la fenêtre glissante, de plusieurs guitares.

Le tracé des mobilités moyennes permet de mieux rendre compte des différences entre instruments. La discrimination est plus nette, permettant par exemple d'identifier directement laquelle est plus mobile.

1. cf. le chapitre 1, et plus particulièrement le paragraphe 1.2.1.4 consacré à l'état de l'art des connaissances scientifiques sur le comportement vibroacoustique de la caisse de guitare

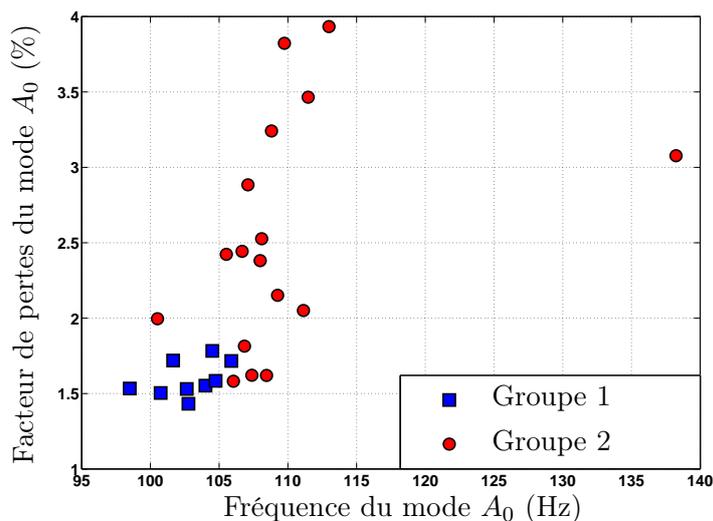
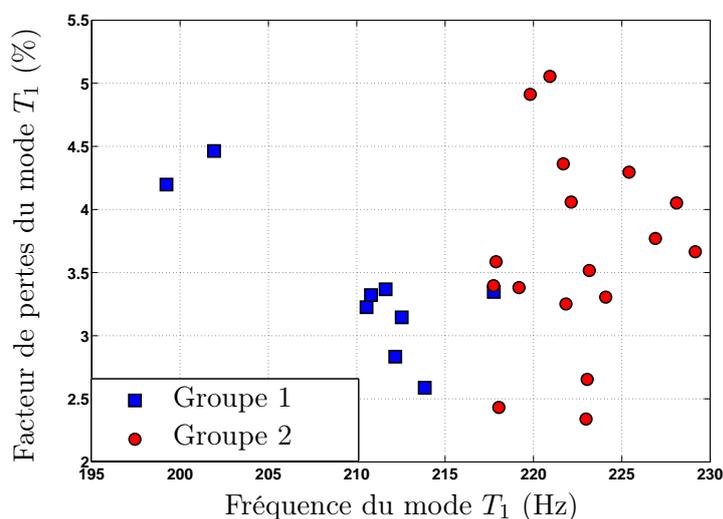
(a) Fréquence du mode A_0 et facteur de qualité(b) Fréquence du mode T_1 et facteur de qualité

FIGURE 3.2 – Comparaison des fréquences et facteur de perte des modes A_0 et T_1 . Le groupe 1 est un ensemble des instruments considérés comme étant des guitares haut-de-gamme, le groupe 2 est un ensemble de guitares industrielles.

La mobilité moyenne permet d'évaluer l'efficacité globale de l'instrument à entrer en vibration. En effet, pour un effort donné, plus la mobilité moyenne est élevée et plus le déplacement de la table d'harmonie, et par conséquent le rayonnement acoustique est important, laissant à penser que le son ainsi rayonné est plus puissant. Cette technique permet de souligner les différences de niveau de mobilité entre les guitares. Celles-ci ne possèdent pas toutes le même niveau de mobilité moyenne, ce qui permet leur classement. L'efficacité à vibrer des instruments semble donc être un critère discriminant.

Les mobilités moyennes, présentées sur la figure 3.3 présente une caractéristique im-

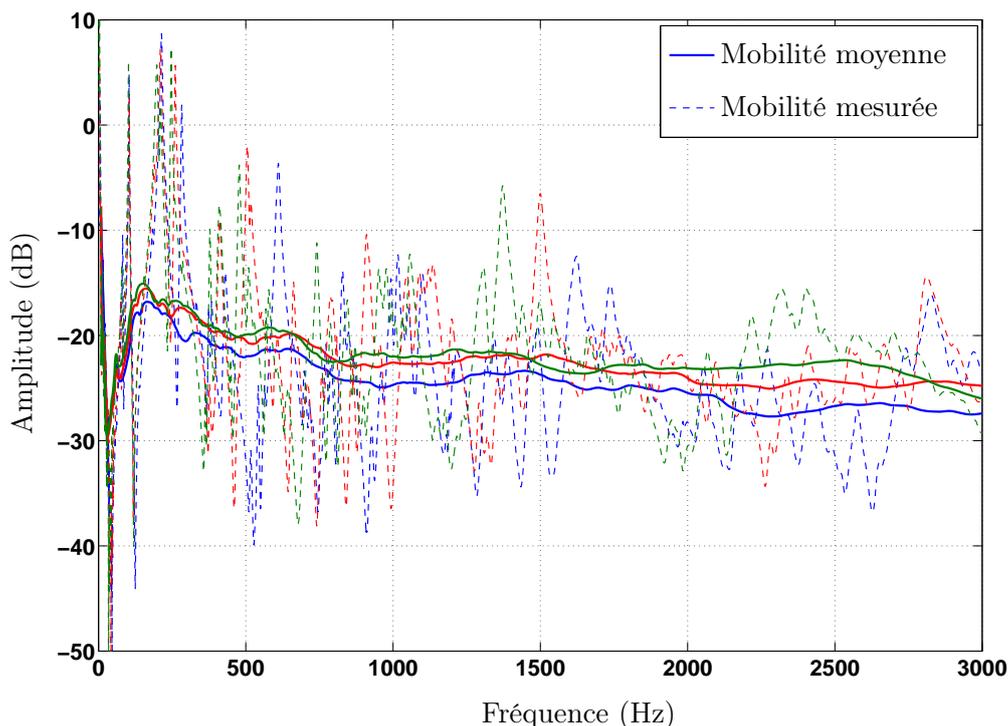


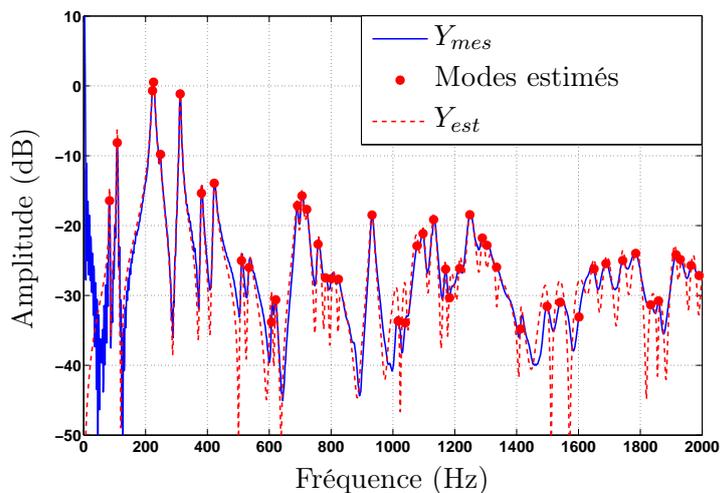
FIGURE 3.3 – Mobilité lissée par la méthode de la fenêtre glissante pour trois guitares différentes, GG_1 , GG_2 et GG_3 du corpus de l’annexe E. Les mobilités sont calculées en 1 point, correspondant au point d’attache de la corde du mi grave (E2) au niveau du chevalet. La longueur de la fenêtre glissante est de 500 Hz.

portante : elles sont quasiment constantes dans la plage des moyennes fréquences. Cette caractéristique montre que les guitares ont un comportement de type plaque. Ce résultat est très important dans la mesure où il permet de caractériser globalement les instruments à cordes pincées. Si le comportement de type plaque est confirmé par l’analyse de la densité modale que nous effectuons au paragraphe suivant, l’application de la méthode d’estimation des paramètres caractéristiques de panneaux plans, développée au chapitre 2, peut alors s’appliquer à la guitare.

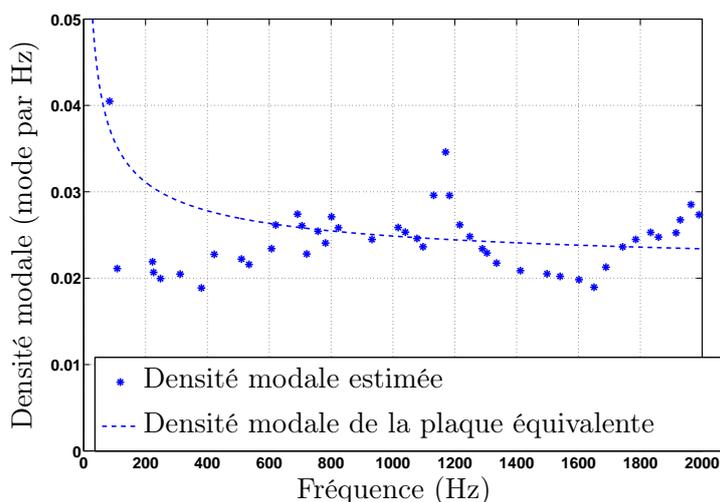
3.1.2 Identification des paramètres modaux des guitares

L’analyse des réponses impulsionnelles par la méthode ESPRIT est effectuée sur un ensemble de guitares. Par souci de clarté, nous exposons d’abord les densités modales et paramètres modaux estimés par la méthode ESPRIT sur une guitare qui confirme le comportement de type plaque de l’instrument, puis nous estimons un ensemble de macro-paramètres caractéristiques (masse, raideur, mobilité moyenne et dispersion de mobilité) sur le corpus d’instruments étudiés.

3.1.2.1 Étude de la densité modale



(a)



(b)

FIGURE 3.4 – a) : mobilité mesurée (trait plein) et mobilité reconstruite à partir des paramètres modaux estimés (trait en pointillés). La position des modes est représentée par un cercle plein. b) : densité modale estimée par ESPRIT (*), densité modale analytique estimée $n_{fit}(f)$ (traits pointillés). La guitare analysée est GG_1 .

Les fréquences des modes estimés, ainsi que la mobilité reconstituée à partir des valeurs des paramètres modaux estimées par ESPRIT sont données sur la figure 3.4. Le bon accord entre mobilité mesurée et celle reconstruite permet la confiance dans la base modale identifiée. Les différences entre mobilité mesurée et reconstruite s'expliquent par les effets de troncature (seuls les modes jusqu'à 2000 Hz sont pris en compte dans la reconstruction). La fréquence des modes estimés permet le calcul de la densité modale, représentée

sur la figure 3.4. Celle-ci présente un profil très proche de ceux observées dans le cas de simples plaques rectangulaires suspendues : elle est légèrement décroissante et tend vers une valeur constante dans le domaine des hautes fréquences. La densité modale analytique tracée sur la figure 3.4 est celle de la plaque équivalente à la table d’harmonie vue par la corde. Elle est calculée à l’aide d’une minimisation de distance quadratique avec la densité modale estimée au sens des moindres carrés, selon la relation (2.74). Ce résultat confirme la remarque résultant de l’observation des courbes de mobilités moyennées de la figure 3.3, ces dernières ressemblant également à celles de plaques suspendues. Ces observations permettent de confirmer que le comportement mécanique du chevalet vu par la corde peut-être assimilé à celui d’une plaque mince. Les guitares peuvent alors être caractérisées à travers l’estimation des paramètres d’une plaque équivalente à la table d’harmonie.

3.1.2.2 Etude de l’amortissement

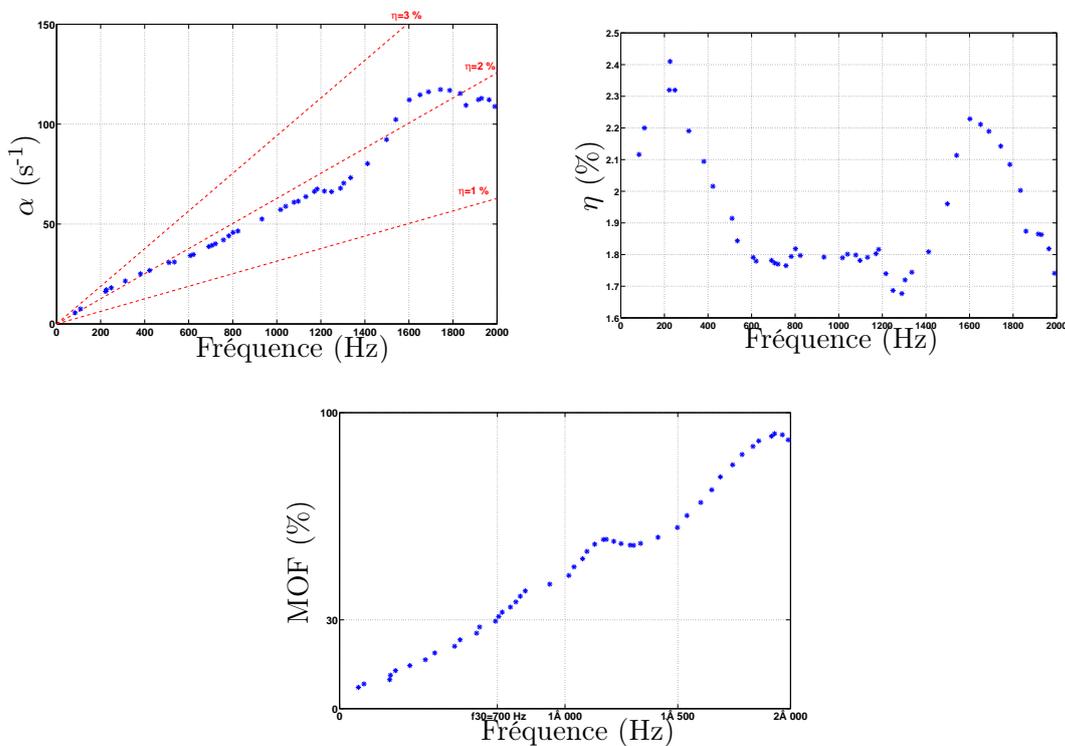


FIGURE 3.5 – Représentation des paramètres modaux estimés par ESPRIT de la guitare GG_1 . a) : amortissement modal, en s^{-1} . Les lignes en pointillés indiquent les valeurs d’amortissement modal équivalents à des facteurs de perte de 1, 2, et 3 %. b) : facteur de pertes modal en %. c) : facteur de recouvrement modal en %.

Les amortissements modaux estimés sur la guitare GG_1 sont représentés sur la figure 3.5. On trace aussi sur cette figure l’évolution du facteur de recouvrement modal en fonction de la fréquence. Celui-ci est croissant jusqu’à 2000 Hz où il atteint une valeur proche de 100 %. Les fréquences limites f_{30} et f_{100} qui définissent les plages basses,

moyennes et hautes fréquences sont égales à 700 Hz pour f_{30} et 2000 Hz pour f_{100} . Le facteur de pertes est voisin de 2 % (entre 1.7 % et 2.5 % pour des fréquences allant jusqu'à 2000 Hz), ce qui correspond à l'ordre de grandeur connu pour les bois de lutherie [19, 99, 104, 149]. Cette valeur est cependant légèrement supérieure à celle observée sur les demi-tables de lutherie étudiées dans la section 2.5.5, qui était de l'ordre de 1 %. Cette remarque laisse supposer que l'amortissement induit par les conditions aux limites, de la précontrainte imposée par les cordes, ou encore du vernis est de l'ordre de la différence entre ces deux valeurs, à savoir de l'ordre de 1 %.

La limite entre le domaine des basses et des moyennes fréquences se situe aux alentours de 700 Hz, qui correspond à la fréquence à partir de laquelle le comportement global de la guitare vue par la corde au chevalet peut être assimilé à celui d'une plaque. La méthodologie permettant d'estimer les macro-paramètres caractéristiques de la plaque équivalente à la guitare ne s'applique qu'à partir des moyennes et hautes fréquences, à savoir dès que le facteur de recouvrement modal dépasse 30 %.

3.1.3 Plaque équivalente d'une guitare

La guitare présentant un comportement de type plaque, nous cherchons à en estimer les paramètres caractéristiques. L'estimation de ces paramètres, et notamment celle de la constante élastique de plaque, requiert des aprioris à la fois sur les conditions aux limites et sur la géométrie de la plaque. Le but étant *in fine* de comparer les instruments entre eux, nous fixons arbitrairement la géométrie de la plaque équivalente. Elle est donc identique pour tous les instruments : il s'agit d'un carré de 30 cm de côté. Ce choix se justifie par le fait que la partie mobile de la table d'harmonie, sous la rosace, peut s'apparenter à un carré ayant ces dimensions, comme l'indique la forme du mode T_1 donnée sur la figure 1.10 par exemple. Le fait que la géométrie ne varie pas beaucoup d'une guitare à l'autre justifie aussi le choix de fixer la même géométrie à tous les instruments. Pour ce qui est des conditions aux limites, nous choisissons des conditions de type libre-libre. En effet, d'après les termes correctifs de densité modale de Xie [148], écrits en équation (2.36), seule la condition libre-libre donne une densité modale décroissante avec la fréquence, tendant vers sa valeur asymptotique n_∞ par valeurs supérieures. Dans le cas de la guitare, nous observons systématiquement ce type de profil de densité modale, et de mobilité caractéristique. Notre choix se porte par conséquent vers ce type de conditions aux limites.

L'identification de paramètres caractéristiques est effectuée sur deux types de guitares différentes classées en deux groupes : des guitares d'étude et de lutherie. Le premier groupe est constitué de 9 guitares de luthiers, considérées comme haut-de-gamme. Elles proviennent du magasin *La Guitarrerie* à Paris. Le deuxième groupe est un ensemble de 3 guitares utilisées par les étudiants de l'ITEMM lors de travaux pratiques de restauration de guitares. Ce sont des guitares industrielles provenant du même modèle d'une marque (Ya-

maha CG131S). Ce sont les guitares notées GI_1 à GI_3 de l'annexe E, elles sont considérées comme étant de moins bonne qualité que celles du groupe 1. Les mesures se déroulent de la même manière pour toutes les guitares, suivant le protocole annoncé dans le paragraphe précédent.

Mobilité caractéristique versus dispersion de mobilité

Une première classification est proposée en comparant la mobilité caractéristique G_{C_∞} des instruments et leur dispersion de mobilité $\langle\sigma_Y\rangle_{30}$. Les instruments sont alors regroupés dans un plan défini par leurs valeurs de G_{C_∞} et $\langle\sigma_Y\rangle_{30}$, tel que celui de la figure 3.6.

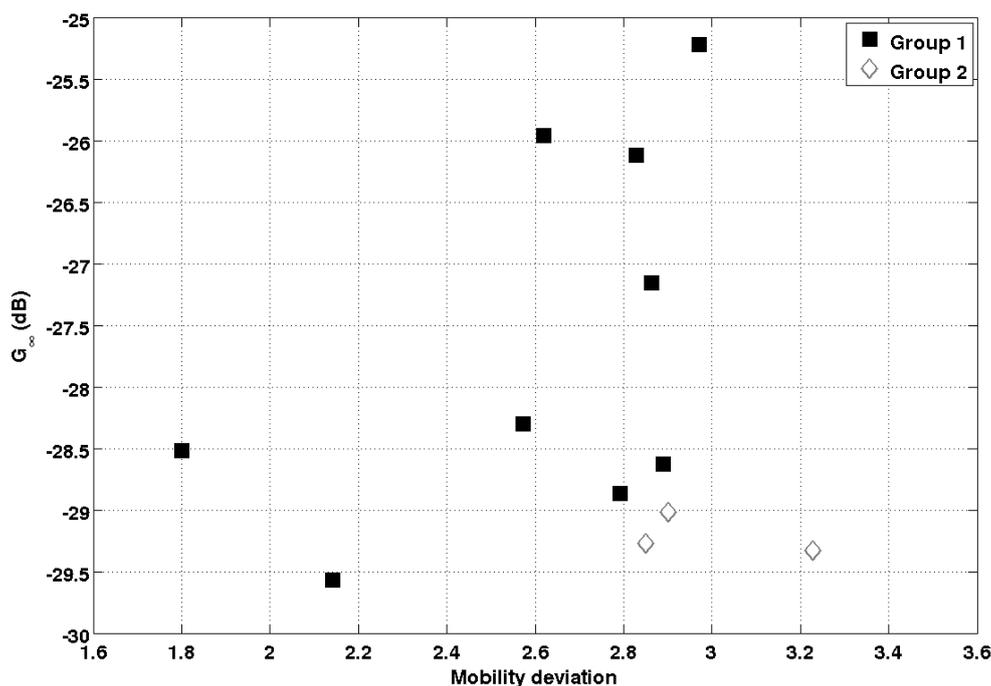


FIGURE 3.6 – Classification des 2 groupes de guitares classiques par leurs valeurs de mobilité caractéristique G_{C_∞} et leur dispersion de mobilité $\langle\sigma_Y\rangle_{30}$.

A l'exception d'un cas isolé, la mobilité caractéristique des guitares du groupe 2, guitares industrielles, est plus faible que celle du groupe 1, constitué de guitares de luthiers. Typiquement, la différence entre les guitares des 2 groupes est comprise entre 1 et 4 dB. Les guitares du groupe 1 sont significativement plus mobiles.

La dispersion de mobilité, quand elle est étudiée seule, est cependant moins discriminante : une grande partie des guitares du groupe 1 présentent une dispersion de mobilité du même ordre de grandeur que les guitares du groupe 2, à savoir des valeurs comprises entre 2.8 et 2.9. Cependant, quelques guitares du groupe 1 possèdent une dispersion de mobilité beaucoup plus faible (entre 1.8 et 2.8). Les mécanismes dissipatifs présents dans

les instruments des groupes 1 et 2 semblent donc présenter le même dispersion. La répétabilité des procédés de fabrication industrielle pourrait expliquer la faible variation de la dispersion de mobilité.

Raideur équivalente versus masse équivalente

Nous proposons maintenant de comparer les instruments au moyen des valeurs de raideur et de masse des panneaux qui leurs sont équivalents. Les instruments sont regroupés sur la figure 3.7 dans un plan défini par les valeurs de raideur équivalente D_{Eq} et de masse équivalente M_{Eq} . Les courbes d'isomobilité représentent les valeurs de M_{Eq} et D_{Eq} donnant une même valeur de mobilité caractéristique $G_{C\infty}$ calculée au moyen de l'équation (2.80).

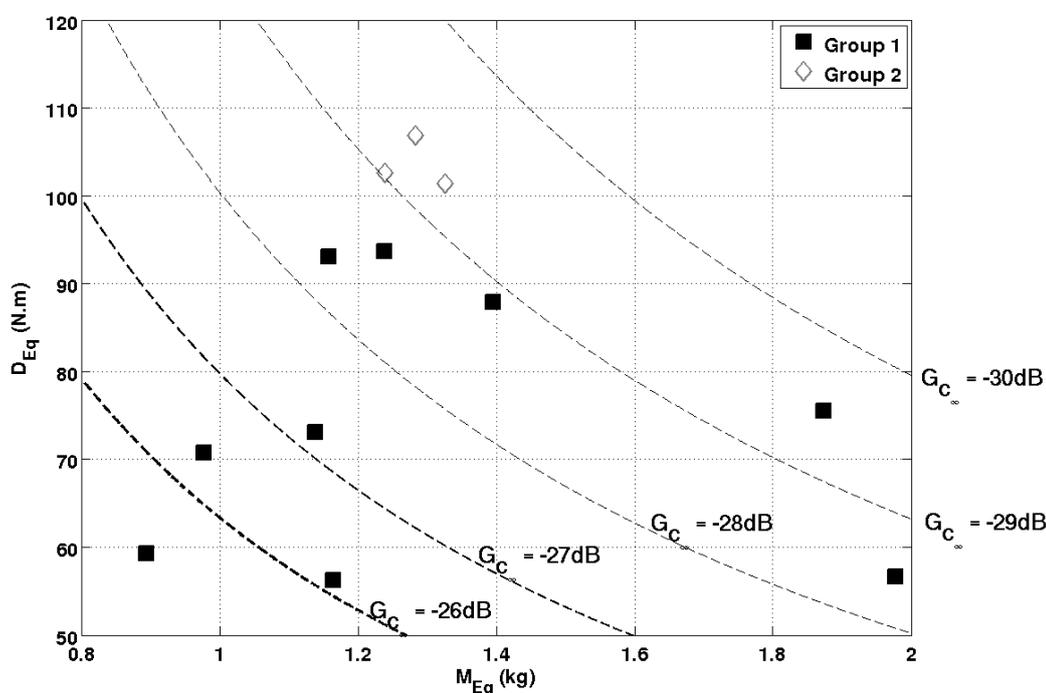


FIGURE 3.7 – Classification des instruments au moyen des valeurs de raideur et de masse des panneaux qui leurs sont équivalents. Les courbes d'isomobilité sont indiquées par les lignes en pointillés.

Lorsqu'ils sont associés, les paramètres masse et raideur équivalente sont discriminants : la séparation entre les guitares des deux différents groupes est directe. Les guitares industrielles présentent une raideur équivalente plus importante que les guitares du groupe 1. Cependant, les masses équivalentes sont assez similaires. Les différences de raideur entre les groupes de guitares peuvent s'expliquer par les différences de matériaux utilisés pour leur conception. En effet, les guitares industrielles sont fabriqués à partir de contreplaqué, qui est généralement plus raide que le bois massif (épicéa ou cèdre rouge) utilisé pour les

guitares du groupe 1. Il est intéressant de noter que les guitares industrielles possèdent des propriétés similaires, et tendent à se regrouper à la fois sur la figure 3.6 et sur la figure 3.7. Étant donné qu'il s'agit du même modèle d'instrument de la même marque, cela montre le caractère répétable du procédé industriel de fabrication.

3.1.4 Variation des paramètres caractéristiques le long du chevalet

Le paragraphe précédent permet de conclure qu'il est possible de distinguer objectivement le comportement mécanique global de différentes guitares à l'aide de quelques paramètres simples, mesurés en un point. Ces paramètres sont ceux d'une plaque équivalente à la table d'harmonie de la guitare, telle qu'elle est vue par la corde. Dans ce paragraphe, nous étudions la variation de ces paramètres en fonction de la position du point de mesure. En effet, le barrage induit une hétérogénéité d'épaisseur, de raideur et de masse le long du chevalet. Il est alors naturel que les différentes cordes ne voient pas la même mobilité. Pour cette raison, les paramètres de la plaque équivalente à la guitare sont susceptibles de varier le long du chevalet.

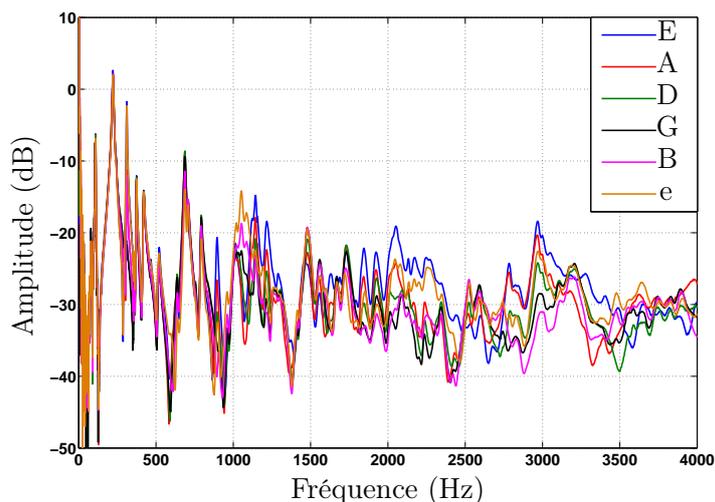
3.1.4.1 Variation de la mobilité moyenne le long du chevalet

En premier lieu, nous examinons les différences entre les mobilités au chevalet vue par chaque corde. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à une guitare particulière, en l'occurrence une guitare industrielle de marque Yamaha, modèle CG131S, table en épicea. Les mobilités au point d'attache de chaque corde ont été mesurées suivant le protocole expérimental décrit dans le paragraphe précédent. La figure 3.8 représente les courbes de mobilité mesurées pour chacune des 6 cordes d'une guitare, ainsi que les mobilités moyennes correspondantes.

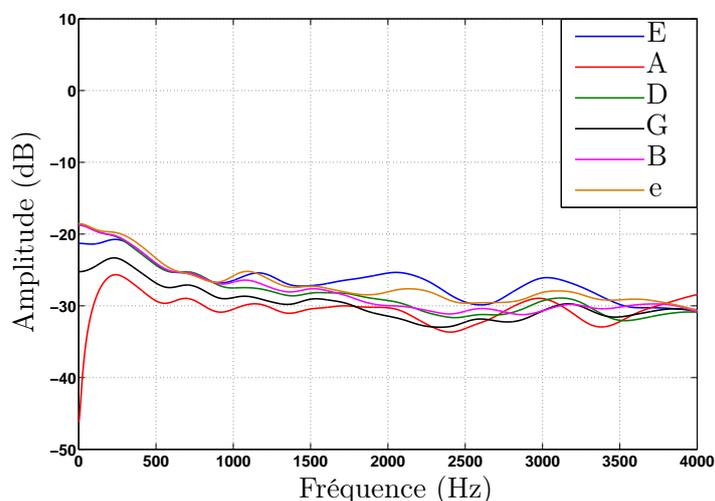
L'analyse directe des courbes de mobilité mesurée est difficile et ne donne guère de tendances. En revanche, l'analyse des mobilités lissées montre des différences de niveaux de mobilité. En effet, il est nettement visible sur la figure 3.8.b que les mobilités vues par les deux cordes de *mi*, grave et aiguë, sont supérieures aux autres et notamment aux mobilités vues par les cordes de *la* et *sol*. Cela montre que la structure globale vue par une corde est légèrement différente que celle vue par ses voisines. Nous nous attendons à retrouver ce résultat dans l'estimation des paramètres caractéristiques de la plaque équivalente vue par chacune des 6 cordes.

3.1.4.2 Variation de la densité modale

Nous avons vu au chapitre 2 que, même si la densité modale d'une structure mécanique, et notamment d'une plaque, est en théorie indépendante du point utilisé pour l'estimer, l'estimation modale, quant à elle, dépend en pratique du point d'observation. En effet, les



(a) Mobilités mesurées



(b) Mobilités moyennes

FIGURE 3.8 – Mobilités (a) mesurées au chevalet, au point d'accroche de chacune des 6 cordes de la guitare GI_4 et mobilités moyennes (b) à l'aide de la méthode de la fenêtre exponentielle décroissante.

techniques d'estimation modale sont mises en défaut pour les modes faiblement excités ou faiblement observés, ce qui se produit à proximité d'un nœud de vibration. Ceci induit une modification de la densité modale, et plus globalement une variation du paramètre β estimé à partir de celle-ci. La figure 3.9 représente la variation de la densité modale vue par chacune des 6 cordes d'une même guitare.

Le profil de densité modale est bien modifié d'une corde à l'autre. On remarque notamment que les deux extrêmes, à savoir la corde de *mi* grave et la corde de *sol* qui présentent respectivement la plus forte et la plus faible densité modale, présentaient par ailleurs également les deux extrêmes de niveau de mobilité. Les faibles densités modales résultent de

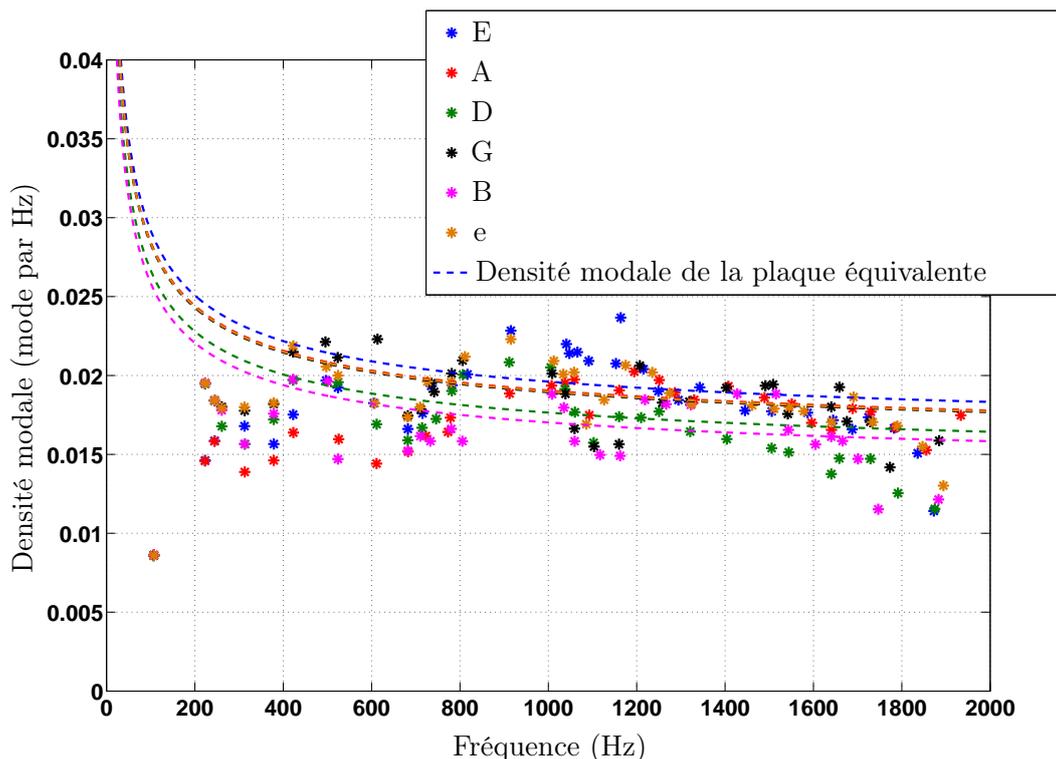


FIGURE 3.9 – Densité modale vue par chacune des 6 cordes de la guitare GI_4 . Les traits pointillés représentent les densité modale analytiques de la plaque équivalente vue par chacune des 6 cordes.

modes manquants, pour lesquels une ligne nodale passe par le point de mesure.

3.1.4.3 Variation des grandeurs caractéristiques

Les paragraphes précédents ont confirmé les tendances observées au chapitre 2, à savoir que l'observation en un seul point d'une structure ne permet pas une estimation correcte des paramètres caractéristiques. L'application sur la guitare montre que les mobilités moyennes, et les densités modales estimées varient le long du chevalet, de la même manière que cela a été observé sur des plaques lorsque l'on change de point d'observation. La figure 3.10 récapitule les variations des paramètres caractéristiques de la plaque équivalente estimées pour chacune des 6 cordes d'une guitare.

Bien que la constante élastique de plaque β varie peu d'une corde à l'autre, les variations de masse équivalente et de raideur équivalente peuvent être importantes. Cela s'explique par les variations de mobilités moyennes qui peuvent être de l'ordre de 3 dB d'une corde à l'autre. Les accroches de corde les plus mobiles sont celles situées aux extrémités du chevalet, à savoir les deux cordes de *mi*. Ce sont aussi les deux plus souples. De plus, la masse équivalente vue par les cordes latérales est faible devant celle vue par les cordes centrales. Ces dernières étant proches de l'axe de symétrie de la guitare, qui représente une

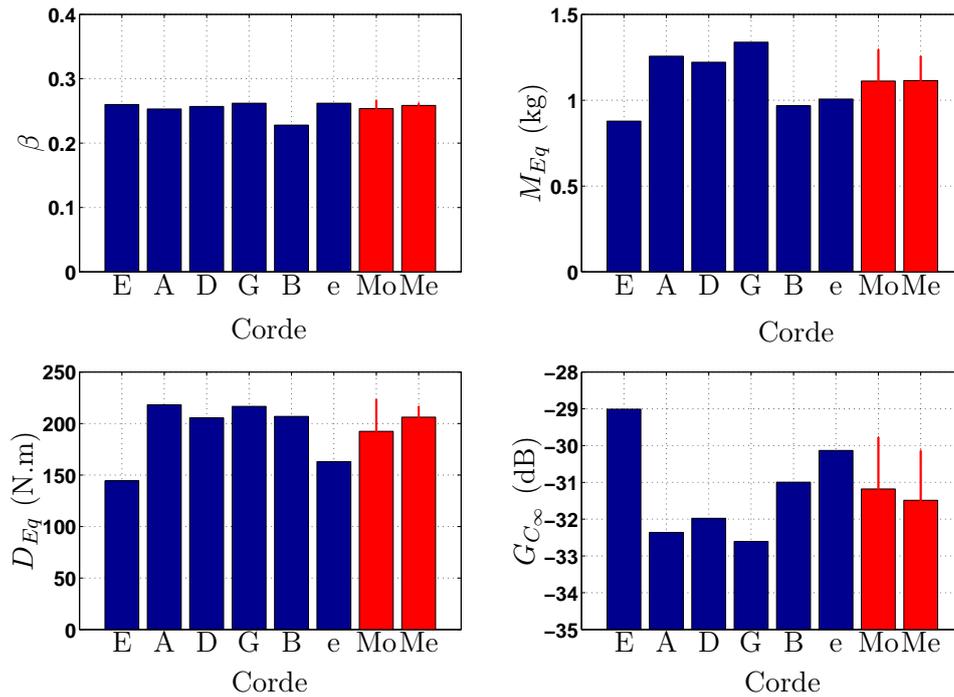


FIGURE 3.10 – Variation des paramètres caractéristiques de la plaque équivalente vue par chacune des cordes de la guitare GI_4 . Les barres rouges représentent les valeurs moyennes (Mo) et médianes (Me), ainsi que l'écart-type par rapport à la moyenne, et la médiane des écarts par rapports à la médiane (appelée *Median Absolute Deviation*). De gauche à droite et de haut en bas : constante élastique de plaque (β), masse équivalente, raideur équivalente, et mobilité moyenne de la plaque infinie équivalente en dB (la référence est prise sur la valeur de mobilité d'une plaque infinie en épicéa de 2 mm d'épaisseur).

ligne nodale pour de nombreux modes, ceux-ci ne sont que faiblement excités. Il en résulte une diminution globale de la mobilité près de cette ligne nodale.

3.1.5 Variations des paramètres caractéristiques pour plusieurs guitares

Le paragraphe précédent a mis en avant, pour une guitare particulière, le fait que les paramètres caractéristiques varient de manière non négligeable selon la position d'observation le long du chevalet. Ce paragraphe vise maintenant à observer les tendances de variations des paramètres caractéristiques le long du chevalet pour un ensemble de guitares. Nous choisissons 7 guitares identiques du modèle Yamaha CG131S, dont le barrage est représenté sur la figure 3.11.

La variation de la mobilité caractéristique G_{C_∞} le long du chevalet pour les 7 guitares est tracée sur la figure 3.12.

Nous observons de manière générale que les mobilités moyennes vues par les cordes centrales (*sol* et *ré*) sont plus faibles que les celles vues par les autres cordes. La mobilité

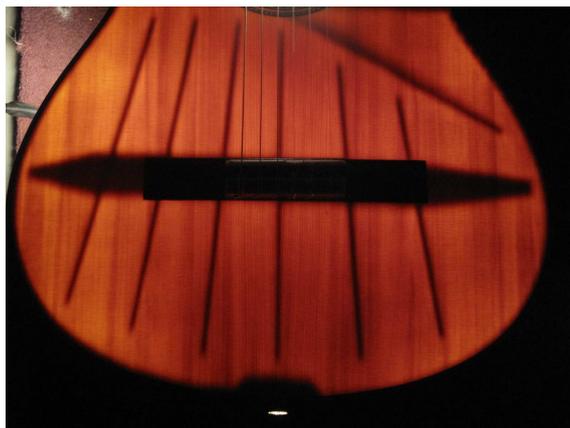


FIGURE 3.11 – Photographie des barrages d'une guitare Yamaha CG131S obtenue par transparence. Une lampe est placée à l'intérieur de l'instrument au moment de la photographie.

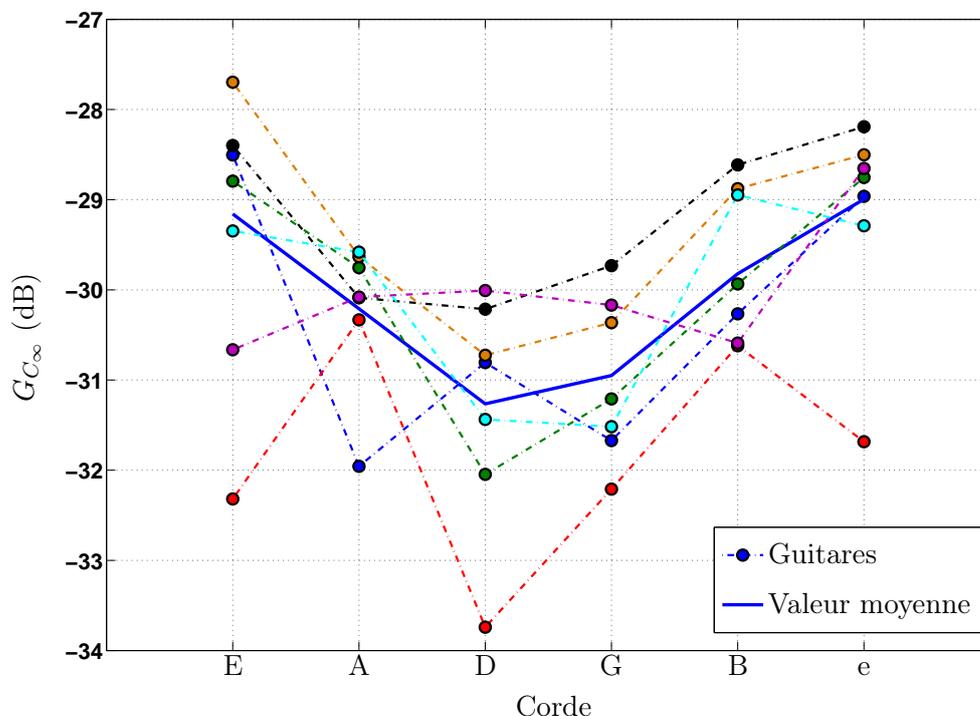


FIGURE 3.12 – Évolution de la mobilité caractéristique $G_{C_{\infty}}$ le long du chevalet de 7 guitares Yamaha CG131S, GI_4 à GI_{10} . Les mesures sont effectuées au point d'attache de chaque corde indiquée en abscisse. La ligne pleine en gras représente la moyenne des 7 guitares pour chaque corde.

caractéristique le long du chevalet est d'autant plus forte que l'on s'éloigne du centre. Cette tendance est confirmée par la courbe des valeurs moyennes sur les 7 guitares. L'influence du barrage n'est donc sûrement pas négligeable : il modifie spatialement le comportement global de la table d'harmonie. Nous pouvons alors supposer qu'homogénéiser l'instrument

passé également par le fait de réduire les variations de mobilité moyenne d'une corde à l'autre.

3.1.5.1 Conclusions partielles sur l'étude des paramètres modaux de la table d'harmonie vue par la corde

L'application de l'approche développée au chapitre 2 aux réponses impulsionnelles mesurées en un point de la guitare (point d'attache d'une corde au niveau du chevalet) a permis d'estimer avec précision la densité modale, ainsi que, de manière générale, les paramètres modaux de plusieurs guitares. La méthode haute-résolution ESPRIT, associée avec le critère ESTER permet cette identification même lorsque le facteur de recouvrement modal est proche de 100 %.

Cette étude révèle des caractéristiques communes à toutes les guitares étudiées : celles-ci possèdent un profil de densité modale proche de celui d'une simple plaque mince à partir des moyennes fréquences. Cette tendance est confortée par une mobilité caractéristique, obtenue par moyenne glissante, relativement constante à partir des moyennes fréquences. Ces résultats permettent d'affirmer que le comportement mécanique de la table d'harmonie, telle qu'elle est vue par la corde, est comparable à celui d'une plaque. Il est alors possible d'estimer les paramètres caractéristiques d'une plaque équivalente à la guitare. Ces paramètres caractéristiques sont la masse et la raideur équivalente. Il est important de souligner que la géométrie de cette plaque est fixée de manière arbitraire de manière identique pour tous les instruments. Cet arbitraire permet la comparaison entre instruments d'un même type.

L'application à un corpus de plusieurs instruments, divisés en 2 groupes a mis en avant, de manière objective, les principales différences existantes entre ces deux groupes. Le premier groupe, constitué de guitares de luthiers, considérées de haute qualité, possèdent une mobilité caractéristique plus importante que le deuxième groupe, constitué de guitares industrielles, considérées de moins bonne qualité. Les guitares de luthiers semblent donc construites de manière à être plus mobiles, et sont par conséquent plus efficaces pour produire des sons. Il n'est cependant pas évident qu'une mobilité élevée soit systématiquement associée à un instrument de qualité.

Entre instruments, la principale différence entre chaque mobilité caractéristique semble provenir principalement d'une raideur équivalente plus importante pour les guitares industrielles. Ces différences peuvent s'expliquer par le fait que le contreplaqué utilisé pour les guitares industrielles est plus raide que les bois massifs utilisés par les luthiers. En revanche, les masses équivalentes sont similaires pour les 2 groupes.

On peut noter aussi que les guitares de luthiers présentent une dispersion très importante de valeurs de paramètres caractéristiques au sein de leur population, alors que les guitares industrielles semblent se regrouper au même endroit dans les plans. Sachant que

le groupe 1 est constitué de guitares provenant de plusieurs luthiers, chacun ayant son savoir-faire particulier, et que les guitares industrielles proviennent du même modèle, ce résultat montre le caractère répétable du processus de fabrication.

Ces grandeurs caractéristiques varient d'une corde à l'autre : les cordes latérales, situées aux extrémités du chevalet sont généralement plus mobiles que les cordes centrales. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce phénomène :

- pour les guitares étudiées, les cordes centrales sont accrochées au chevalet à des endroits proches d'un barrage. Localement, la raideur est augmentée à la fois par le raidisseur et pas l'augmentation d'épaisseur. Cela se traduit par une diminution de la mobilité moyenne.
- l'axe de symétrie de la guitare, passant entre les deux cordes centrales moins mobiles, est une ligne nodale importante. La plupart des modes excités par les cordes centrales sont donc excités à des nœuds, réduisant également la mobilité moyenne.

Cette méthode semble donc être une possibilité intéressante à disposition des luthiers pour caractériser objectivement le comportement global de leurs instruments, et ainsi pouvoir relever les différences existantes entre deux instruments, voire les différences entre deux configurations d'un même instrument.

3.2 Analyse de décroissance de sons de guitares

Les notes obtenues avec une guitare sont des oscillations libres. L'amplitude sonore ou de vibration décroît au cours du temps. La façon dont l'amplitude du signal décroît est complexe et dépend de plusieurs paramètres. Chaque harmonique de la note décroît en effet différemment des autres. La variation des caractéristiques spectrales au cours du temps (ou flux spectral [85]) devient alors difficile à analyser, car le nombre de paramètres à prendre en compte est très grand. Compte tenu de la nature des signaux, nous choisissons d'étudier le temps de décroissance des notes. En effet, le temps que met chaque note avant de s'éteindre est un paramètre de première importance. Plus précisément, c'est la variation note à note de cette décroissance qui importe et caractérise l'homogénéité de l'instrument. Nous proposons dans cette partie un paramètre simple, basé sur le calcul de la décroissance énergétique d'une note à chaque instant t , permettant d'étudier l'homogénéité des guitares en ce qui concerne la durée de son et d'identifier des notes singulières, appelées *notes mortes*.

3.2.1 Hétérogénéité de la décroissance des notes de guitares : existence de notes singulières ou notes mortes

Les notes mortes de guitares sont présentes sur de nombreux instruments. Elles se caractérisent par une atténuation anormalement rapide du son, en comparaison avec les

notes voisines. Des études menées par Fleischer *et al.* [56, 57] portant sur la guitare électrique, montrent qu'elles résultent d'un couplage important entre la mobilité du manche, à l'endroit de la frette correspondant à la note, et la corde. L'énergie de la corde étant alors transmise vers le corps plus rapidement, entraînant une extinction plus soudaine. La mobilité au chevalet des guitares électriques étant faible, l'essentiel du couplage entre la corde et le corps de l'instrument se situe en effet au niveau du manche. Pour la guitare électrique, des travaux plus récents montrent que ce mécanisme ne semble pas suffisant pour expliquer les amortissements observés [105]. Dans le cas de guitares classiques, le couplage dominant entre la corde et le corps de l'instrument se situe au niveau du chevalet. La figure 3.13 représente la partie réelle de mobilité mesurée au chevalet et à deux endroits du manche, sur la frette 1, et sur la frette 12. A l'exception de quelques zones fréquentielles, la mobilité du chevalet est plus importante que celle du manche. Les écarts peuvent atteindre une vingtaine de dB entre la mobilité au chevalet et celle en haut du manche (frette 1), et une trentaine de dB entre la mobilité au chevalet et celle en bas du manche (frette 12). Il est donc plus naturel de chercher la cause des notes mortes dans la mobilité au chevalet, plus que dans celle du manche.

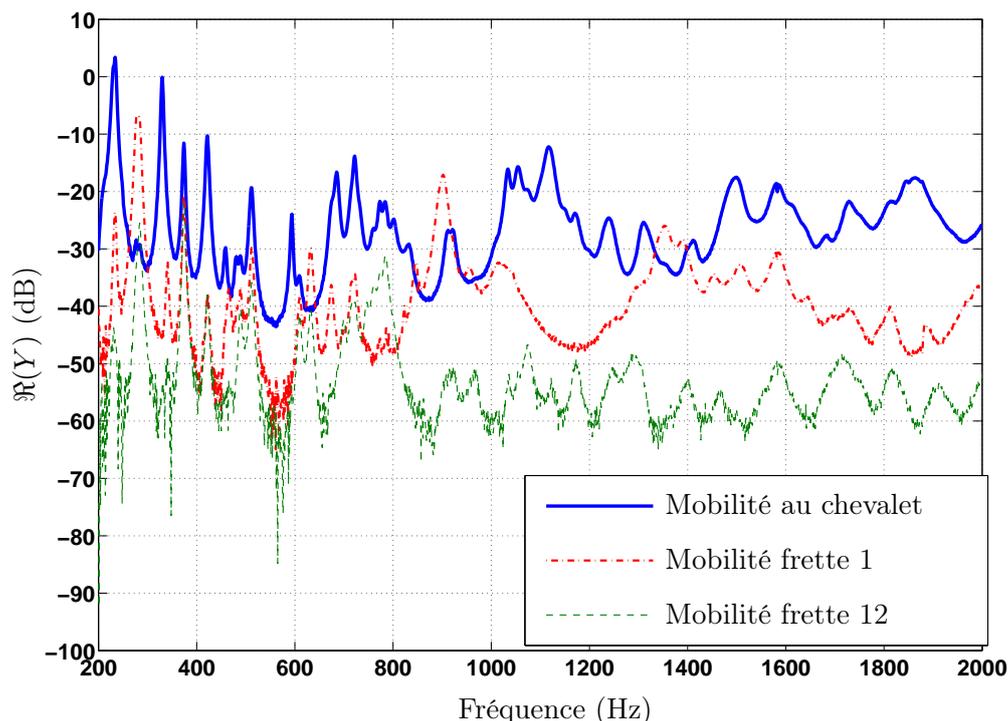


FIGURE 3.13 – Partie réelle de mobilité au chevalet, en haut du manche (frette 1), et en bas du manche (frette 12) de la guitare GI_{18} . L'emplacement de l'accéléromètre et de l'impact sont confondus lors des trois mesures.

Afin de mettre en évidence ce phénomène, nous utilisons un indicateur global décrivant

la décroissance énergétique du signal. Les courbes de décroissance énergétique, *Energy Decay Curves* ou EDC en anglais, sont dérivées des études menées en acoustique des salles [125, 126]. Elles représentent l'énergie restante dans un signal $s(t)$ à chaque instant t et s'écrivent :

$$EDC(t) = \int_t^{+\infty} |s(\tau)|^2 d\tau. \quad (3.1)$$

Cette étude est réalisée avec l'aide de Patrick Penaud, luthier guitare de la région de Poitiers. La figure 3.14 représente un exemple d'EDC de 4 notes voisines, dont une a été diagnostiquée comme morte par Patrick Penaud. Nous définissons le paramètre T_{10} correspondant au temps mis par la courbe de décroissance énergétique pour décroître de 10 dB.

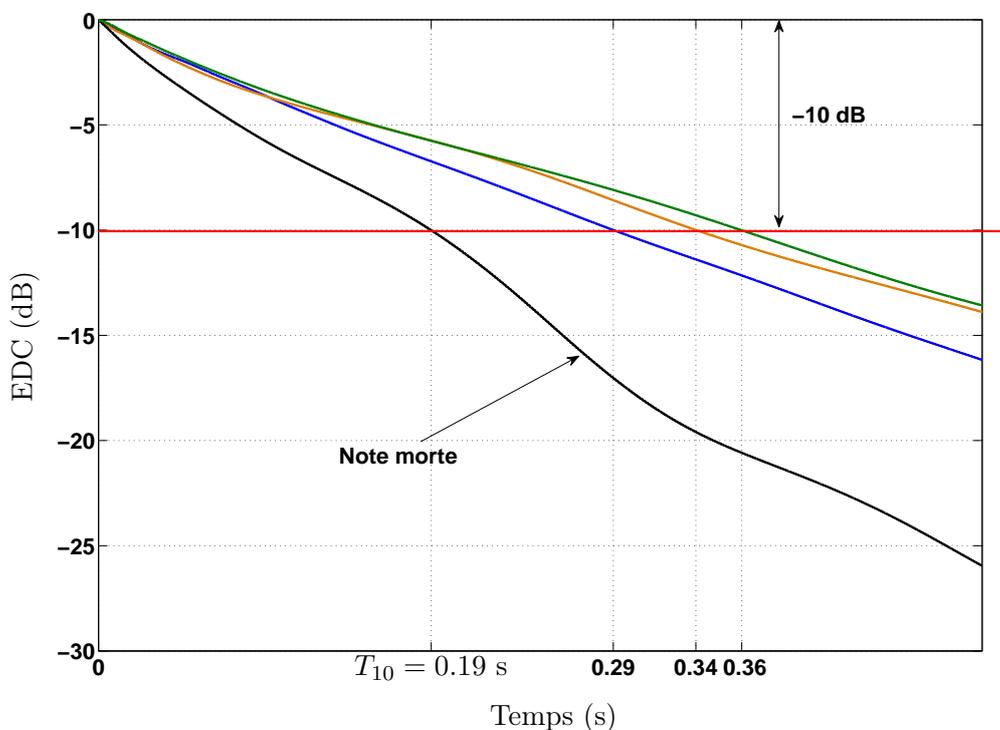


FIGURE 3.14 – Courbes de décroissances énergétiques (EDC) de 4 notes successives mesurées sur la guitare GP_1 .

Le caractère fortement amorti de la note morte, en comparaison de ses notes voisines, est mis en évidence sur la figure 3.14 : le T_{10} de cette note est plus petit que celui de ses notes voisines. Sa décroissance est donc plus rapide. L'approche développée dans cette partie consiste à rechercher la corrélation entre la décroissance énergétique d'une note de guitare et la valeur de mobilité à la fréquence fondamentale ou des premiers harmoniques des notes correspondantes.

3.2.2 Mesures de la matrice de mobilité

En situation de jeu, la corde vibre selon deux polarisations. Pour l'analyse de la décroissance de l'oscillation, nous nous intéressons à la matrice de mobilité au point d'accrochage.

3.2.2.1 Protocole expérimental

La figure 3.15 montre le dispositif expérimental utilisé pour la mesure des matrices de mobilité.



FIGURE 3.15 – Dispositif expérimental. L'axe y est défini comme celui perpendiculaire aux cordes et parallèle à la table d'harmonie. L'axe z est l'axe normal à la table d'harmonie.

La guitare est pendue par ses mécaniques à l'aide d'un câble. Les quatre termes de la matrice de mobilité sont mesurés à l'aide d'une acquisition simultanée du signal d'accélération par un accéléromètre miniature (PCB 352C23, de masse 0.2 g), et du signal d'effort, généré par un petit marteau d'impact (PCB 086E80). Les capteurs sont placés à la base de la plus haute corde de la guitare (E4), soit sur le chevalet, pour les mesures dans la direction z , soit sur le côté, pour les mesures selon y .

3.2.2.2 Tests de validité des mesures

La mesure sur le côté du chevalet est délicate à faire car la surface disponible pour à la fois placer l'accéléromètre et frapper à côté de celui-ci est réduite. De plus, la mobilité latérale est faible en module, comparée à la mobilité transversale, ce qui entraîne un faible rapport signal à bruit. La qualité de la mesure doit être vérifiée. Pour les termes diagonaux, à savoir $Y_{zz}(\omega)$ et $Y_{yy}(\omega)$, la partie réelle doit être du même signe quelque soit la fréquence si les positions d'excitation et de force sont confondues. La figure 3.16 présente le signe des parties réelles des termes diagonaux de la matrice de mobilité mesurée sur une guitare.

Ce signe est constant pour l'essentiel de la plage de fréquence testée, confirmant la validité de la mesure. Cependant, la zone fréquentielle de fiabilité de mesure est plus petite

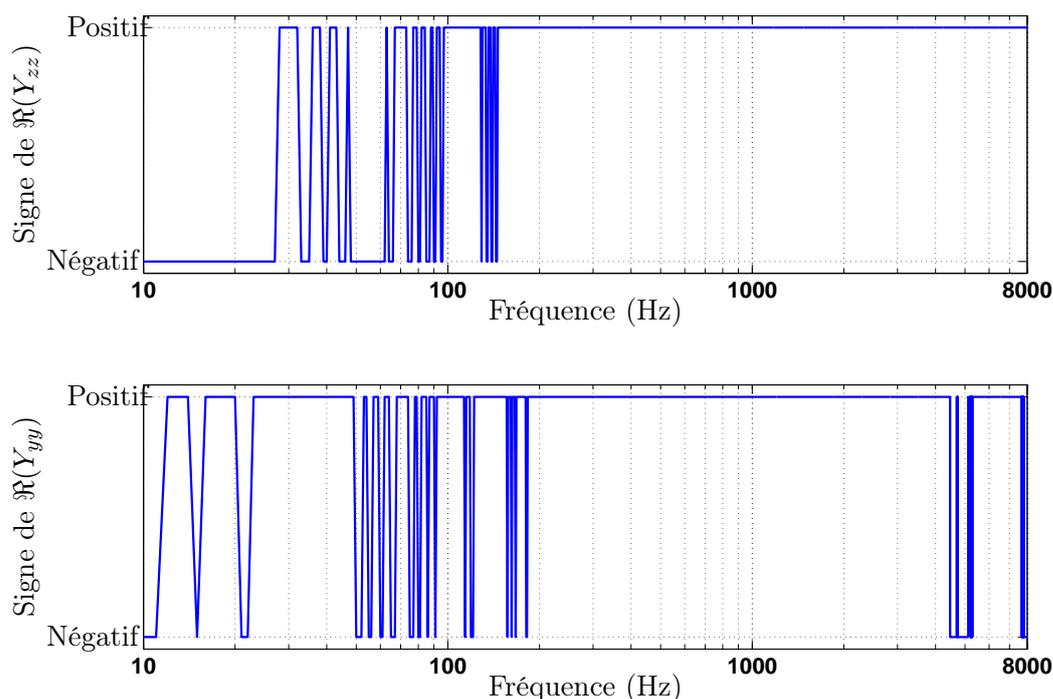


FIGURE 3.16 – Signe de la partie réelle des termes diagonaux de la matrice de mobilité de la guitare GI_{18} en fonction de la fréquence. En haut : mobilité transversale. En bas : mobilité latérale.

pour la mobilité latérale : la partie réelle est positive de 183 à 4468 Hz, contre 146 à 8000 Hz pour la mobilité transversale. Pour cette étude, nous nous intéressons aux fréquences fondamentales des notes le long de la chanterelle, à savoir de E4 (330 Hz) à B5 (988 Hz). La partie réelle de mobilité dans cette zone fréquentielle est toujours positive dans les deux cas, la mesure de mobilité effectuée est donc valide.

3.2.2.3 Matrice de mobilité

La figure 3.17 montre les résultats de la mesure de matrice de mobilité obtenue à la base de la plus haute corde (E4). Notons qu'un seul élément non diagonal de la matrice est représenté, pour des commodités de lecture. La matrice de mobilité étant symétrique, les termes non-diagonaux sont identiques.

L'amplitude de la mobilité directe $Y_{zz}(\omega)$ est plus importante que celle de la mobilité croisée. La différence, variable en fréquence, est de l'ordre de 10 à 20 dB. Cette différence est la cause d'un phénomène bien connu. Il existe une différence significative d'ordre de grandeur entre l'amortissement de la polarisation verticale et celui de la polarisation horizontale : cette dernière étant bien moins amortie. Le profil de décroissance des notes d'instruments à cordes oscillant librement présente une double décroissance [138]. Les tous

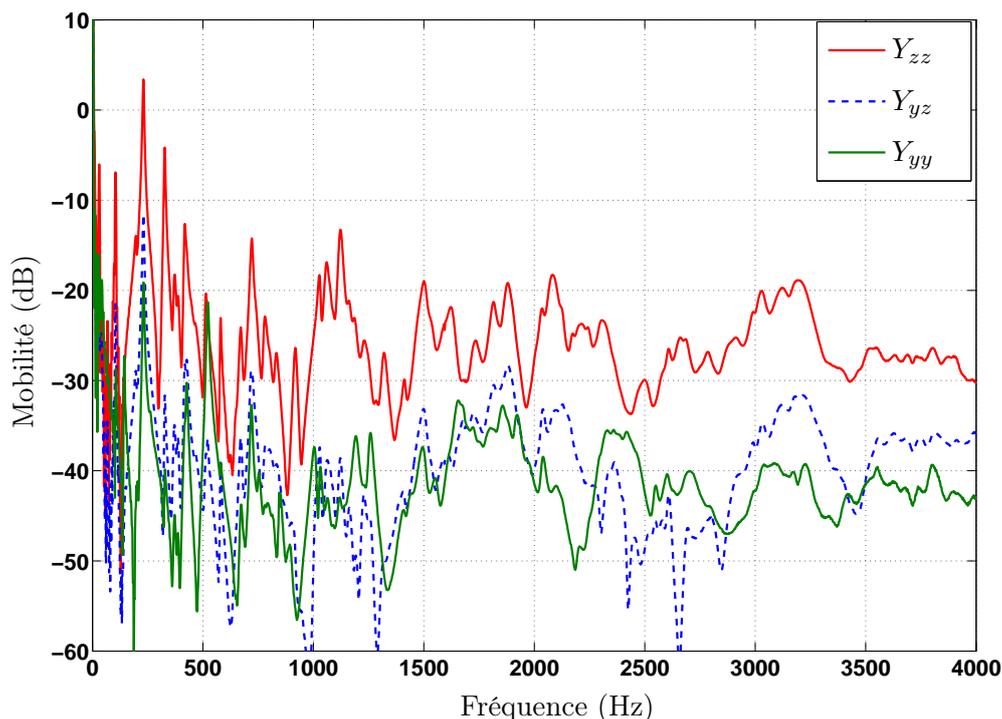


FIGURE 3.17 – Termes de la matrice de mobilité mesurés à la base de la corde E4. Sont représentés $Y_{yy}(\omega)$, $Y_{zz}(\omega)$, et $Y_{zy}(\omega)$.

premiers instants de la note sont dominés par la composante verticale, d'énergie initiale supérieure. Celle-ci décroît en revanche beaucoup plus rapidement que la composante horizontale, qui domine les derniers instants de la note. Nous appelons *son initial* l'intervalle de temps initial dominé par la composante verticale et son rémanent la partie dominée par la composante horizontale.

3.2.3 Mesures de courbes de décroissance énergétiques

3.2.3.1 Protocole

Le paramètre T_{10} permet de repérer automatiquement les notes mortes. Pour cela, des courbes d'EDC sont mesurées pour plusieurs notes autour d'une note morte, et cela pour la guitare GI_{18} . Nous appelons notes mortes celles qui ont été préalablement identifiées comme telles par soit un luthier, soit un musicien. Les notes sont jouées en excitant la corde à une position fixe, 16 cm du chevalet, selon deux directions différentes : soit la corde est excitée horizontalement, dans le plan de la table d'harmonie, soit elle est excitée verticalement, selon la direction normale à la table d'harmonie. Les autres cordes sont étouffées pour atténuer au maximum l'influence de phénomènes de vibrations par sympathie qui peuvent perturber l'analyse [24, 63, 91, 138], mais qui ne sont pas un problème central de l'étude.

3.2.3.2 Méthodes d'estimation du paramètre T_{10}

Le paramètre T_{10} est calculé de deux façons différentes : soit en utilisant le signal de la note sans prétraitement (le paramètre T_{10} est alors nommé global), soit en utilisant le signal de la note préalablement filtré par un filtre basse-bande centré autour de la fréquence fondamentale. Ce filtre est choisi de manière à réduire au maximum les partiels d'ordres supérieurs. Nous avons choisi un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF), de bande passante 2 Hz. La figure 3.18 représente le signal avant et après filtrage. La réjection du filtre en dehors de la bande passante est très bonne, de l'ordre de 120 dB.

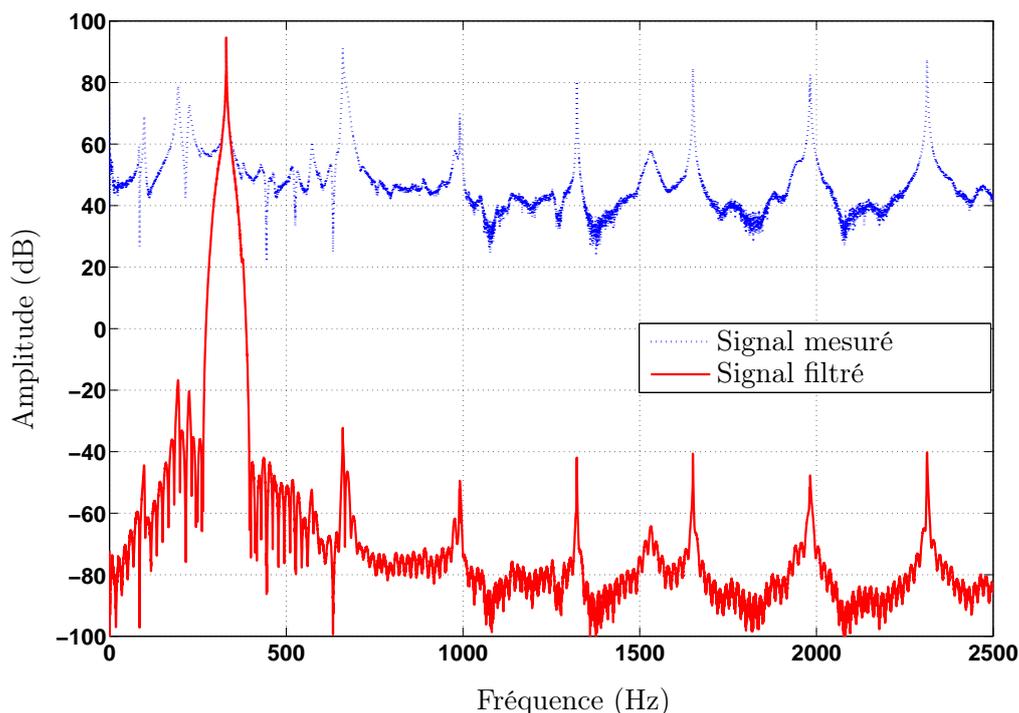


FIGURE 3.18 – Spectre d'un signal de note de guitare et spectre du même signal filtré autour de la fréquence fondamentale à l'aide d'un filtre RIF de bande passante 2 Hz.

Le fait d'isoler ainsi le fondamental pour le calcul du paramètre T_{10} se justifie par le fait que l'énergie portée par le fondamental est importante.

3.2.3.3 Résultats

La variation du T_{10} le long des frettes de la chanterelle d'une guitare, calculé à la fois sur le signal entier et uniquement sur la fréquence fondamentale, est tracée sur la figure 3.19. Il n'existe pas de différences, en termes d'allure générale, entre le T_{10} global et le T_{10} du signal filtré autour de la fréquence fondamentale. Les analyses ultérieures se concentrent donc uniquement sur la fréquence fondamentale de la note.

Cette analyse révèle qu'il existe de grandes disparités en termes de durée de son entre

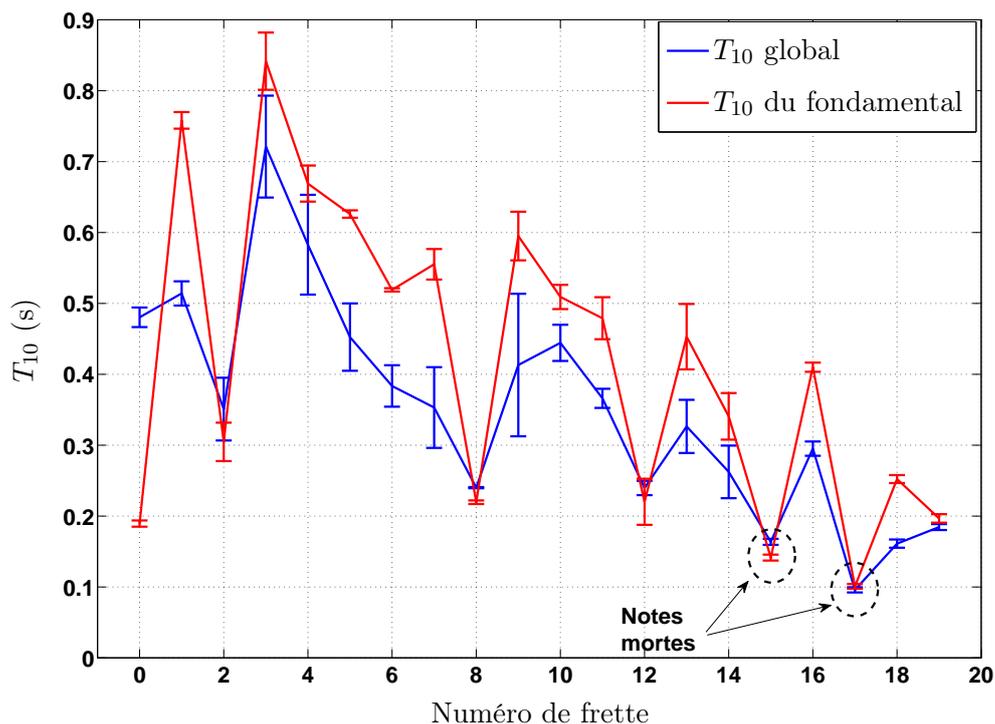


FIGURE 3.19 – Évolution du T_{10} le long de la chanterelle de la guitare G_{18} . Les notes ont été jouées avec une attaque dans le plan de la table d’harmonie, sur une guitare suspendue. Le T_{10} est calculé à la fois sur le signal entier et sur le signal filtré autour de la fréquence fondamentale.

les notes d’une seule corde d’un même instrument : les frettes 2, 8, 12, 15 et 17 ont en effet une décroissance énergétique beaucoup plus rapide que les autres. Pour ce qui est des notes mortes, les notes identifiées préalablement comme telles sont effectivement celles qui possèdent le plus faible temps de décroissance. C’est le cas des frettes 15 et 17. Le T_{10} semble donc être un bon indicateur permettant d’analyser l’homogénéité d’un instrument à cordes pincées. Il permet également d’identifier simplement les notes mortes. En revanche, son caractère global ne permet pas d’analyser séparément les deux polarisations de la corde. Pour cela, nous avons besoin d’une analyse plus fine, permettant de séparer les multiples composantes qui constituent chaque parti.

3.2.3.4 Analyse paramétrique fine à l’aide d’une méthode haute-résolution

Pour mener à bien une analyse paramétrique fine, nous utilisons la méthode haute-résolution ESPRIT, très bien adaptée à l’estimation des paramètres (amplitude, fréquence, amortissement) de composantes de cordes modélisées sous la forme de sinusoïdes exponentiellement amorties.

Principe de la méthode

Nous supposons que chaque partiel d'une note de guitare est composé d'au moins 2 sinusoides amorties, correspondant aux composantes verticale et horizontale. Nous avons vu précédemment qu'il était possible de se focaliser uniquement sur la fréquence fondamentale : l'analyse porte donc uniquement sur cette fréquence. Le signal est filtré de la même manière que pour le calcul du T_{10} , à savoir à l'aide d'un filtre RIF centré autour de la fréquence fondamentale et de largeur de bande 2 Hz. Un calcul du critère ESTER permet d'identifier l'ordre du modèle, donc du nombre de composantes. Enfin, les pôles estimés sont classés selon les critères suivants :

- seules les deux composantes les plus énergétiques et situées dans la bande fréquentielle proche de la fréquence fondamentale sont conservées,
- la composante ayant l'amortissement le plus élevé est considérée comme étant celle de la composante verticale,
- la composante ayant l'amortissement le plus faible est considérée comme étant celle de la composante horizontale.

Ces critères se rapprochent de ceux utilisés par Scherrer et Depalle [122]. Dans cette étude, les auteurs rajoutent un autre critère : ils supposent que la composante ayant la fréquence la plus élevée est celle de la composante horizontale. Ceci est expliqué par les auteurs par une légère différence de longueur effective de corde entre les deux polarisations du fait que la polarisation horizontale n'est pas complètement bloquée par le doigt posé sur le manche [122, 144]. Dans notre étude, nous n'utilisons pas ce critère fréquentiel pour séparer les 2 composantes. Rappelons que la fréquence f_k d'un partiel d'une note d'un instrument à cordes pincées est modifiée par un facteur proportionnel à la partie imaginaire de la mobilité au chevalet à la fréquence f_k donné par la relation (1.18). Or, la partie imaginaire de la mobilité peut s'avérer très différente dans la direction transverse ou latérale. Par conséquent, il n'est pas impossible a priori d'observer que la fréquence du mode à polarisation verticale soit plus faible que celle du mode à polarisation horizontale. La figure 3.20 est un exemple de résultats obtenus à l'aide de cette méthode pour un signal d'accélération d'une note de guitare. Cet exemple montre l'efficacité du critère ESTER à repérer les deux composantes contenues dans le partiel fondamental. Nous observons également la double décroissance qui caractérise chaque partiel d'une note de guitare. La composante verticale étant atténuée beaucoup plus rapidement que la composante horizontale, cette dernière domine le son rémanent, situé à partir de 500 ms.

Relation amortissement-mobilité au chevalet

L'application de la méthode aux données utilisées lors du paragraphe 3.2.3.2 donne les résultats présentés sur la figure 3.21. Les amortissements représentés sont ceux estimés

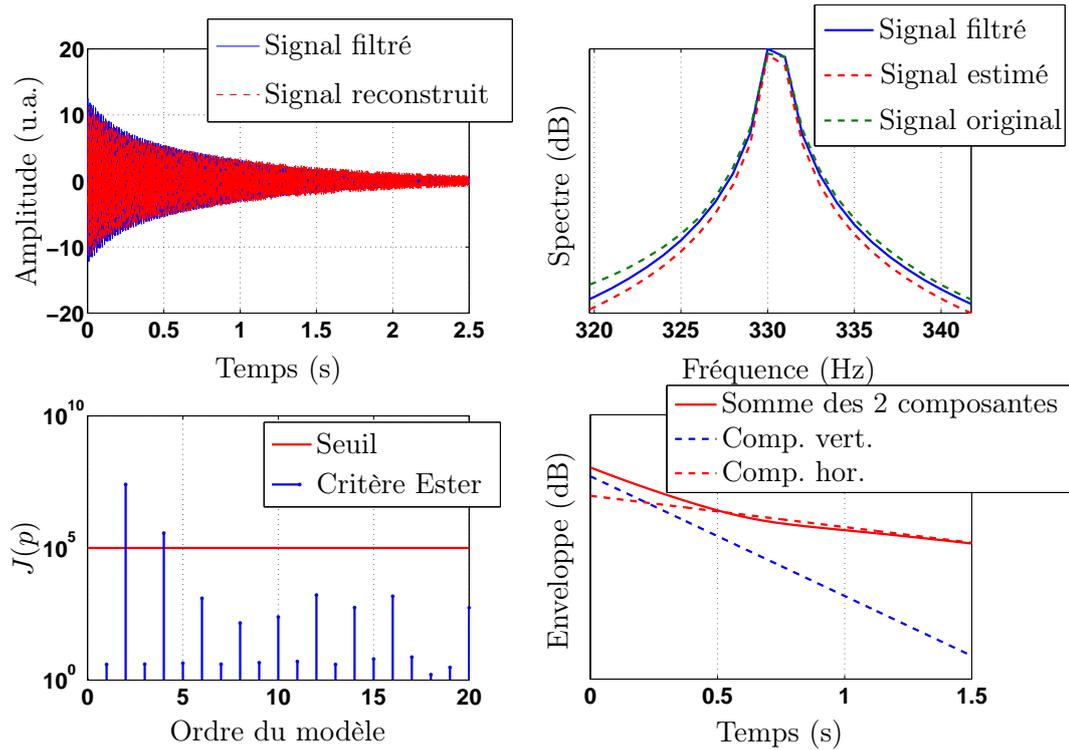


FIGURE 3.20 – Exemple de résultats obtenus par l’analyse ESPRIT de la fréquence fondamentale d’une note (E4) de la guitare GI_{18} . En haut à gauche : signal temporel filtré autour de f_0 et signal reconstruit. En haut à droite : spectre du signal filtré (trait plein). En pointillés, spectre du signal de reconstruit et spectre du signal non filtré. En bas à gauche : critère ESTER calculé sur le signal filtré. La présence de 2 composantes est bien attestée ($\hat{K} = 4$). En bas à droite : courbes enveloppes des signaux temporels des deux composantes estimées (traits en pointillés). En trait plein : enveloppe du signal composé de la somme des deux composantes.

à l’aide de la méthode ESPRIT appliqué à la fréquence fondamentale de chaque note. L’amortissement de la composante horizontale en fonction de la fréquence fondamentale de la note peut ainsi être comparé à la partie réelle de la mobilité latérale. Similairement, l’amortissement de la composante verticale en fonction de la fréquence fondamentale de la note peut être comparé à la partie réelle de la mobilité transversale.

Nous observons que les notes pour lesquelles T_{10} admet un minimum local présentent un amortissement de la composante horizontale important. Ces notes sont celles des frettes 2, 8, 12, 15 et 17. Un amortissement de la composante horizontale important conduit donc à une faible valeur de T_{10} . Cette observation n’est en revanche pas systématiquement vérifiée pour l’amortissement vertical. Nous remarquons également que ces notes possèdent une fréquence fondamentale proche d’un maximum de mobilité latérale. Il semble donc que la décroissance globale d’une note soit principalement pilotée par la polarisation dans le plan, et par conséquent la mobilité latérale au chevalet de la guitare. Cela nous amène à penser

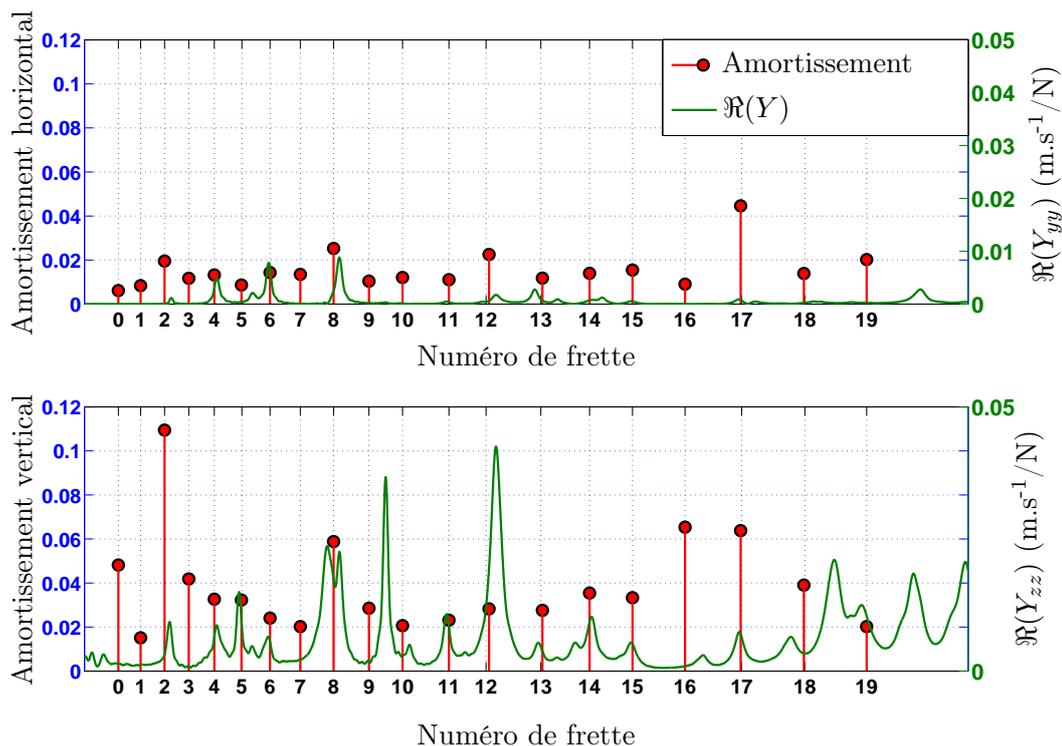


FIGURE 3.21 – En haut : amortissement horizontal estimé pour des notes jouées le long des frettes de la chanterelle et partie réelle de mobilité latérale. En bas : amortissement vertical estimé pour des notes jouées le long des frettes de la chanterelle et partie réelle de mobilité transversale. La guitare analysée est GI_{18} .

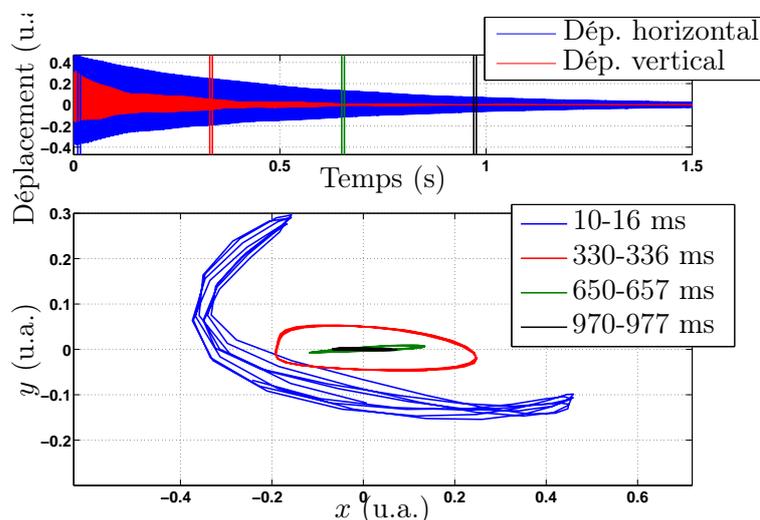
que l'aspect très amorti des notes mortes peut être lié à un amortissement trop élevé de la polarisation horizontale. Le phénomène de note morte serait donc lié à un manque de son rémanent, ce qui est, d'un point de vue perceptif, cohérent avec les écoutes effectuées.

Pour vérifier cette hypothèse, il nous faut pouvoir observer le déplacement de chaque composante indépendamment l'une de l'autre. Deux possibilités ont été envisagées et mises en œuvre : la visualisation du mouvement de la corde à l'aide d'une caméra rapide, et à l'aide de capteurs optiques, enregistrant le déplacement selon chacune des directions. Nous avons retenu la deuxième solution pour sa simplicité de traitement. L'utilisation de la caméra rapide est contrainte par un compromis entre résolution et fréquence d'échantillonnage. Une fréquence d'échantillonnage trop faible, de 2 kHz, donne lieu à des problèmes de repliement qui peuvent être rapidement gênant dans la gamme de fréquence analysée. Nous avons alors choisi d'observer le mouvement des cordes selon chaque polarisation à l'aide de capteurs optiques.

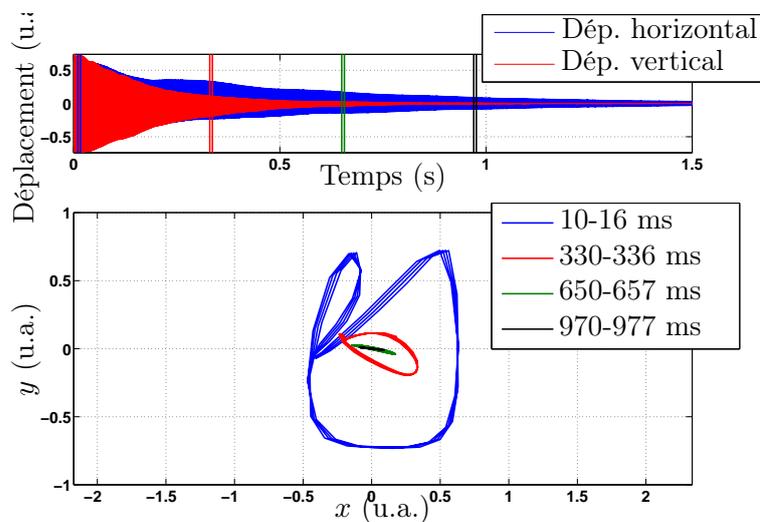
3.2.4 Analyses des orbites de cordes

3.2.4.1 Protocole expérimental

Deux couples de photodiode émetteur-récepteur prêtés par A. Chaigne de l'ENSTA nous permettent d'analyser le mouvement de la corde selon les polarisations horizontale et verticale. Les capteurs optiques sont placés au niveau de la rosace.



(a) Excitation horizontale



(b) Excitation verticale

FIGURE 3.22 – Tracé des orbites de cordes pour une note E5, excitée horizontalement (en haut) et verticalement (en bas). L'axe x est la polarisation horizontale, y est la polarisation verticale. Les deux signaux temporels de déplacement selon x et selon y sont tracés au-dessus de la représentation des orbites. Les orbites tracées sont celles du déplacement à l'intérieur d'une fenêtre de 6.3 ms se déplaçant par pas de 320 ms. La guitare analysée est GI_{18} .

La figure 3.22 donne un exemple de deux orbites de cordes d'une même note excitée

de deux manières différentes : excitation horizontale et verticale. Pour une excitation horizontale, la corde présente une polarisation essentiellement horizontale tout au long du mouvement (*cf.* figure 3.22 (a)). Pour une excitation verticale, nous observons que les couplages entre polarisations induisent rapidement un mouvement dans les deux directions. L'amortissement global de l'oscillation est également plus important que dans le cas d'une excitation horizontale. Nous cherchons à préciser quantitativement ces observations en calculant les taux de décroissance. Pour la suite, nous réduisons le champ d'investigation en se focalisant uniquement sur la fréquence fondamentale. Les signaux sont préalablement filtrés à l'aide d'un filtre passe-bande fin, centré autour de la fréquence fondamentale.

3.2.4.2 Analyse des temps de décroissance

Le temps de décroissance à -10 dB (T_{10}) est calculé directement sur les signaux de déplacement selon x et selon y . Nous disposons de 7 notes jouées (corde à vide E4, puis frettes 12 à 17). Chaque note est jouée 6 fois, avec 3 excitations horizontales et 3 excitations verticales.

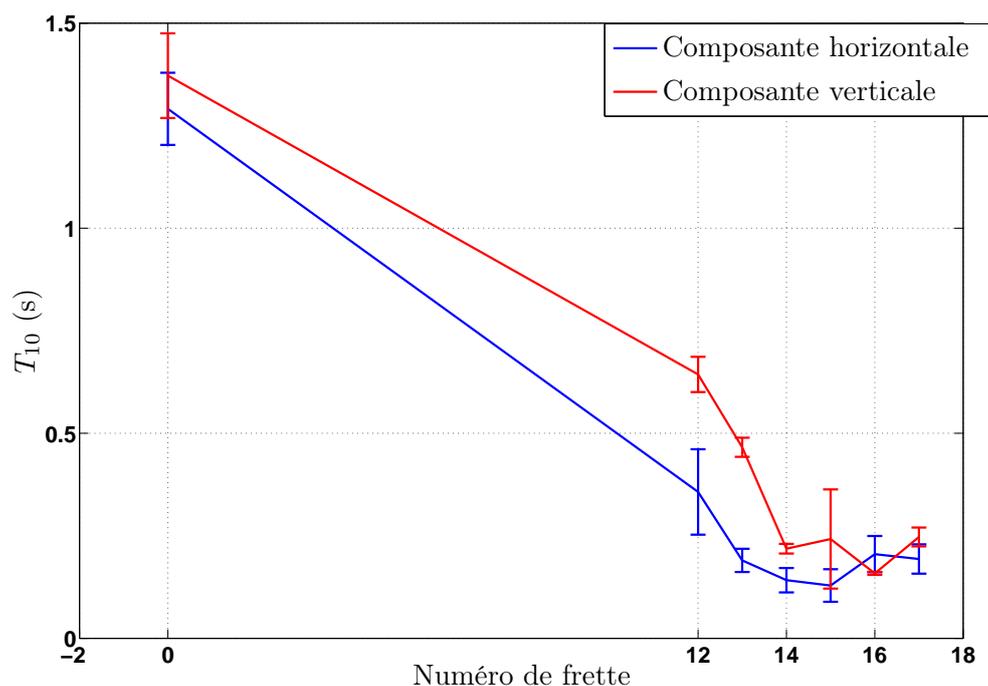


FIGURE 3.23 – T_{10} (médiane et écart-type) calculé sur les signaux de déplacement des composantes verticale et horizontale des notes jouées sur la corde à vide (E4) et des frettes 12 à 17. Les signaux ont été préalablement filtrés à l'aide d'un filtre passe-bande centré autour de la fréquence fondamentale. La guitare analysée est GI_{18} .

Les résultats donnés par la figure 3.23 confirment l'observation faite au paragraphe précédent : la polarisation verticale est en général plus amortie que la polarisation horizontale.

L'écart de décroissance entre les deux polarisations tend à diminuer lorsque la hauteur de la note augmente. Au-delà de la 15ème frette, l'écart de T_{10} d'une excitation à l'autre et de l'ordre de grandeur de l'écart de T_{10} médian entre les polarisations horizontale et verticale. Pour la 16ème frette, la polarisation horizontale est plus amortie que la polarisation verticale.

3.2.4.3 Orbite de notes amorties

L'orbite de la 16ème frette est tracée sur la figure 3.24. Contrairement aux orbites de la figure 3.22, correspondant à la note E5, nous ne retrouvons pas une orbite tendant vers une ligne horizontale. Cette fois-ci, la corde tend à vibrer dans un angle à 45°. La polarisation horizontale est cette fois-ci plus amortie.

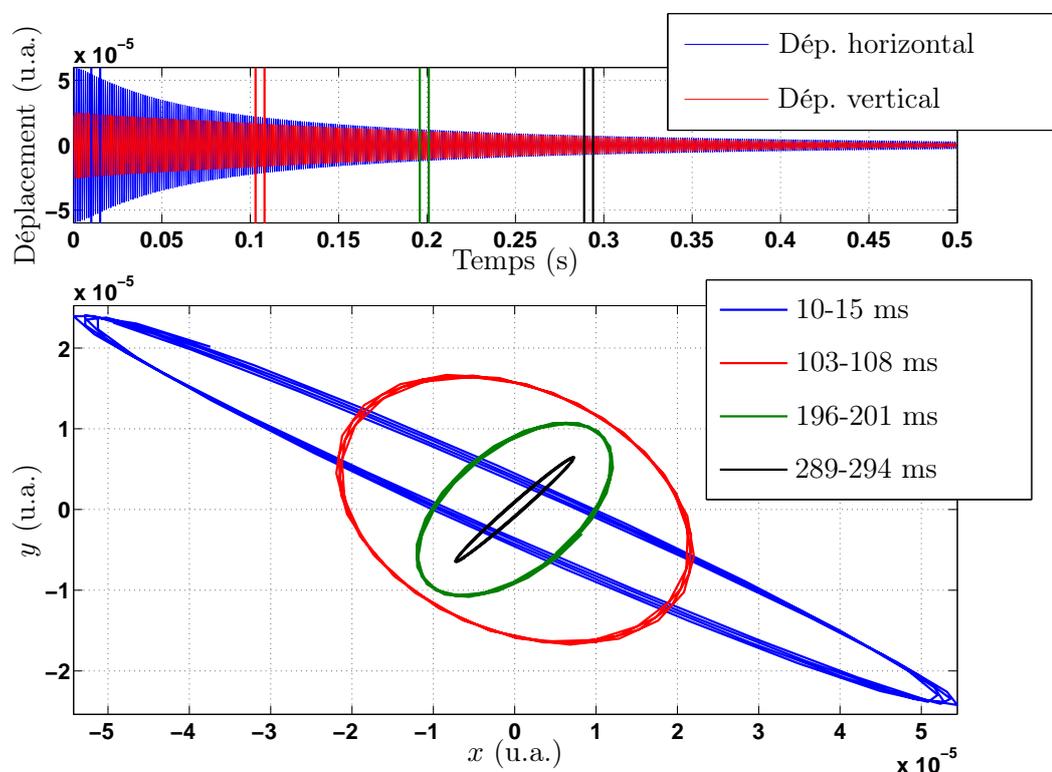


FIGURE 3.24 – Tracé des orbites de cordes pour une note $G\#5$, filtrée autour de la fréquence fondamentale ($f_0 = 806$ Hz), excitée horizontalement. L'axe x est la polarisation horizontale, y est la polarisation verticale. Les deux signaux temporels de déplacement selon x et selon y sont tracés au-dessus de la représentation des orbites. Les orbites tracées sont celles du déplacement à l'intérieur d'une fenêtre de 5 ms se déplaçant par pas de 98 ms. La guitare analysée est GI_{18} .

Ce phénomène implique qu'il n'existe pas de son rémanent, le mouvement de la corde étant systématiquement oblique. Il n'y a donc pas de régime pour lequel une polarisation prédomine sur l'autre. Cette absence de double décroissance peut être à l'origine du

phénomène de note morte.

3.3 Conclusions du chapitre

Ce chapitre, consacré à la guitare, se compose de deux parties principales : une caractérisation du comportement mécanique de l'instrument, via des mesures de mobilité au chevalet, et une analyse de la décroissance des notes de guitares, et plus particulièrement les notes mortes. La première partie est l'application des méthodes développées au chapitre 2 au cas de la guitare. La méthode révèle ainsi que :

- Le comportement global de la table d'harmonie peut être assimilé à celui d'une plaque à partir de f_{30} , fréquence pour laquelle le facteur de recouvrement modal est de 30 %, marquant la limite entre le domaine des basses fréquences, et celui des moyennes fréquences. La densité modale et la mobilité moyenne présentent un comportement constant avec la fréquence typique de celui d'une plaque.
- Les paramètres caractéristiques de la plaque équivalente permettent de caractériser les guitares de manière simple. Ces macroparamètres sont la masse et la raideur de la plaque isotrope équivalente, c'est-à-dire présentant la même densité modale et la même mobilité caractéristique que celles observées expérimentalement sur l'instrument.
- L'estimation de ces paramètres ne requiert qu'un matériel simple d'utilisation, manipulable in situ dans un atelier de lutherie. Les mesures de mobilité s'effectuent à l'aide d'un accéléromètre miniature et d'un petit marteau d'impact.
- Une étude portant sur plusieurs guitares réparties en 2 groupes a permis de révéler des différences significatives entre des instruments d'étude et des instruments haut de gamme à l'aide des paramètres caractéristiques de leur plaque équivalente. Les paramètres introduits permettent de catégoriser les instruments.
- Pour un même instrument, la mobilité caractéristique au chevalet est globalement plus faible pour les cordes centrales (*ré* et *sol*), que pour les cordes "latérales". L'axe de symétrie de l'instrument est une ligne nodale pour un nombre important de modes. Les cordes centrales donnent lieu à des vibrations auxquelles ces modes ne participent pas. La mobilité de ces cordes s'en trouve alors diminuée. La différence de mobilité moyenne entre cordes centrales et cordes latérales est de l'ordre de 3 dB.

L'analyse des décroissances de notes de guitares révèle les points suivants :

- Un indicateur simple, calculé à partir des courbes de décroissance énergétique, permet d'observer le caractère homogène de l'instrument en ce qui concerne la durée de son, et plus localement d'identifier des notes singulières, appelées communément *notes mortes*.
- Cet indicateur, appelé T_{10} , est égal au temps mis par l'énergie du signal pour décroître

de 10 dB.

- Une analyse plus fine, utilisant la méthode haute-résolution ESPRIT permet d'étudier les deux polarisations principales de la corde (horizontale et verticale) séparément. Les amortissements des fréquences fondamentales indiquent une corrélation forte entre niveau de mobilité au chevalet à la fréquence fondamentale de la note et le niveau d'amortissement. Ainsi, les notes très amorties sont celles dont la fréquence fondamentale est proche d'un mode de table.
- Les notes ayant globalement un caractère amorti pathologique (notes mortes) sont celles dont l'amortissement dans le plan de la table (polarisation horizontale) est important.
- Une polarisation horizontale anormalement amortie induit un manque de son rémanent et peut donner lieu à une note morte.
- Ce dernier point semble confirmé par l'analyse du mouvement de chaque polarisation à l'aide de capteurs optiques. Le mouvement d'une corde à vide est rapidement dominé par la polarisation horizontale, la polarisation verticale s'étant éteinte très rapidement. Ce phénomène est moins évident pour les notes à faible temps de décroissance, leur mouvement reste principalement oblique : aucune polarisation ne prédomine sur l'autre, leur temps de décroissance respectif étant du même ordre de grandeur.

Chapitre 4

Instruments du quatuor

La qualité des instruments à cordes frottées, et plus particulièrement celle des violons, est abordée dans la littérature sous diverses formes. Les études se basent souvent sur des aprioris et partent de postulats affirmant que les bons violons présentent certaines caractéristiques, telles que la présence d'une amplification de la mobilité et du spectre dans une zone allant de 2 à 3kHz [15, 46, 145]. Une autre approche employée dans la littérature consiste à relier le vocabulaire généralement employé pour qualifier un violon à ses caractéristiques spectrales [119], ou vibratoires [61]. Cependant, s'il ne fait pas de doute que les caractéristiques vibratoires de la caisse et les caractéristiques acoustiques liées au rayonnement jouent des rôles fondamentaux dans l'appréciation du résultat sonore, le geste de l'instrumentiste et donc le contrôle des paramètres gouvernant la mise en place de l'auto-oscillation est tout aussi important. En effet, un musicien expert pourra produire un son musicalement intéressant de n'importe quel violon, contrairement à un musicien débutant, même si celui-ci joue un excellent violon. Il en résulte que le son produit par un violon résulte de deux caractéristiques fondamentales et différentes : le geste instrumental et le comportement dynamique de l'instrument. L'approche développée dans ce chapitre ne se base sur aucun jugement subjectif quant à la qualité des instruments. Elle vise à définir des corrélations entre des attributs acoustiques des sons de violons et des caractéristiques de la caisse. Elle vise donc à rechercher les traces de la signature acoustique des violons dans les caractéristiques spectrales de leurs sons. L'étude comprend deux parties : la première concerne l'analyse du comportement vibratoire du violon, à travers l'étude de la mobilité au chevalet. La seconde vise à relier les caractéristiques identifiées pour la mobilité avec des paramètres spectraux caractéristiques des sons produits par les instruments.

4.1 Analyse du comportement vibratoire des violons

4.1.1 Définition des mobilités utilisées

La mesure de la mobilité d'un violon au point d'accrochage de la corde met en jeu un nombre de degrés de liberté plus important que dans le cas de la guitare. En effet, la matrice de mobilité est a priori une matrice 6×6 [17], décrivant les relations entre les mouvements de translation et de rotation, et les efforts et moments appliqués. Nous cherchons à limiter le nombre de grandeurs à considérer. Le mouvement de flexion de la table est celui qui donne lieu au champ acoustique rayonné et est le seul considéré dans ce document. Deux éléments à prendre en compte guident notre choix :

- la table d'harmonie, qui est l'élément rayonnant, vibre principalement selon sa direction transverse. Les mouvements dans le plan de la table sont faibles. Le point d'observation doit donc se situer sur la table d'harmonie, au pied du chevalet, et doit mesurer l'accélération selon la direction transverse.
- la projection des efforts exercés sur le chevalet via la corde se situe principalement selon la direction latérale et transverse. Les efforts doivent donc être appliqués dans ses deux directions.

Pour cette raison, nous ne considérons que le mouvement transversal de la table d'harmonie, que nous mesurons au pied du chevalet. L'excitation du chevalet s'effectue par l'intermédiaire de deux efforts, l'un est transversal, perpendiculaire à la table, l'autre est latéral, dans le plan parallèle à la table. Nous définissons ainsi deux mobilités, que nous appelons *mobilité transverse*, lorsque l'impact est effectué dans la direction normale à la table, et *mobilité latérale* lorsque ce dernier est effectué sur le côté du chevalet.

La figure 4.1 représente une photographie du montage utilisé pour mesurer la mobilité au chevalet des violons.

4.1.2 Mobilité typique d'un violon

La figure 4.2 représente des courbes typiques de mobilité transverse et latérale d'un violon. De manière similaire à la guitare, ces courbes sont le résultat de nombreuses contributions modales, rendant la lecture difficile.

Une analyse simple de ces courbes passe par une réduction de données. Pour cela, l'admittance moyenne, dérivée de la théorie de la valeur moyenne de Skudrzyk [129], et la densité modale sont calculées, permettant ainsi de décrire de manière efficace le comportement mécanique global des violons.

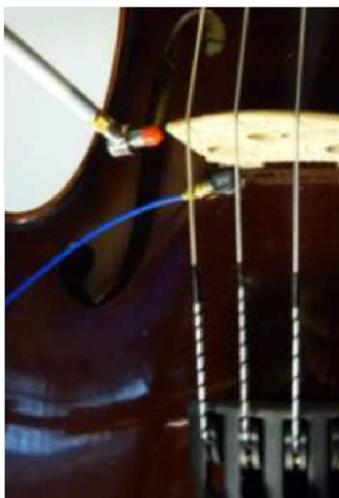


FIGURE 4.1 – Montage utilisé pour la mesure de mobilité au chevalet des violons. L'accéléromètre est placé au pied du chevalet, mesurant l'accélération transverse de la table d'harmonie, l'impact est effectué en haut du chevalet, soit latéralement (sur le côté du chevalet), soit dans la direction transverse (sur le haut du chevalet)

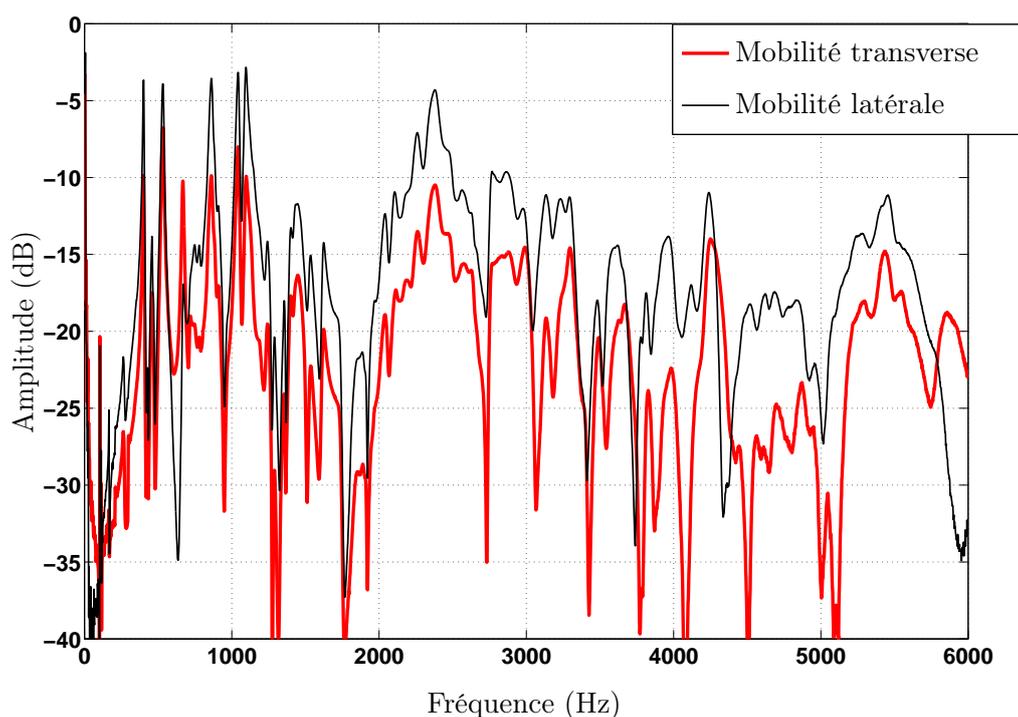


FIGURE 4.2 – Courbes de mobilité transverse et latérale mesurées au chevalet du violon VI_1 .

4.1.3 Mobilité moyenne d'un violon

La mobilité moyenne calculée est celle décrite au paragraphe 2.2.2.1. Pour l'estimer expérimentalement, nous choisissons d'appliquer la méthode du filtre moyennneur, mise en

œuvre via la formule (2.75). La figure 4.3 représente les courbes de mobilité transverse et latérale mesurées au chevalet du violon VI_1 , ainsi que leur mobilité caractéristique correspondante.

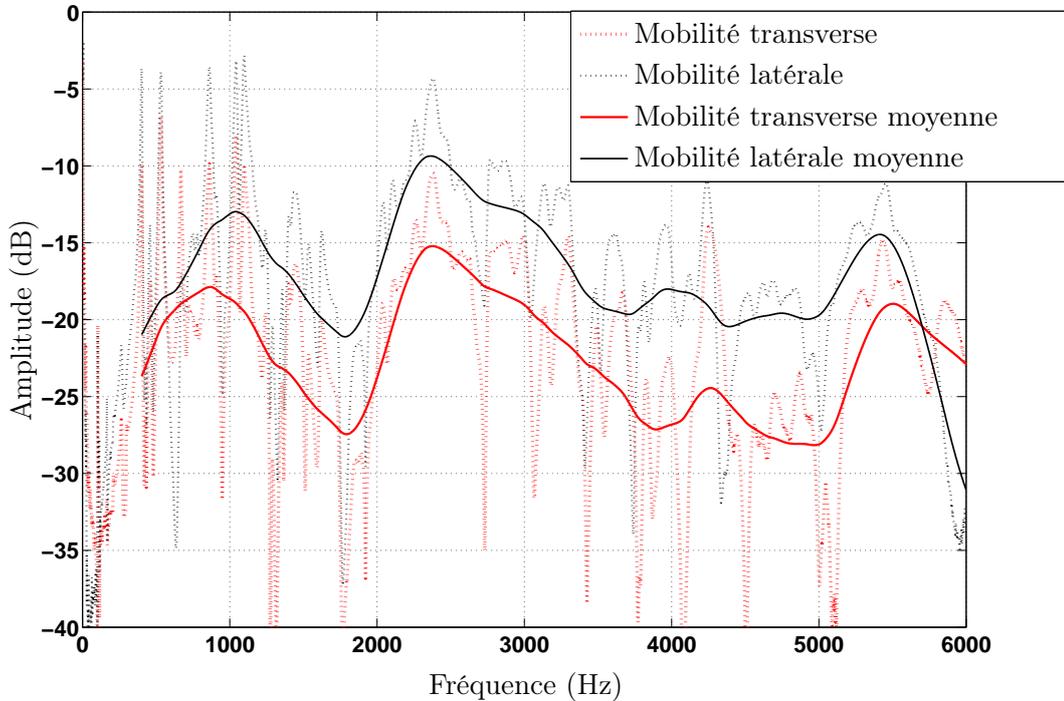


FIGURE 4.3 – Courbes de mobilité transverse et latérale mesurées au chevalet du violon VI_1 et leur mobilité moyenne correspondante, calculées avec la relation (2.75)

La représentation des mobilités moyennes permet de dégager plusieurs caractéristiques :

1. Hormis dans la plage de fréquence de 0 à 500 Hz, la mobilité latérale est supérieure de 5 dB par rapport à la mobilité transversale.
2. Des plages fréquentielles donnent lieu à des amplifications. Pour l'exemple considéré, les plages sont centrées sur 1000 Hz, 2500 et 5500 Hz.

Dans la plage de fréquences située autour de 2500 Hz, l'amplification de la mobilité est communément attribuée au phénomène de Bridge Hill (*cf.* paragraphe 1.2.2.4 consacré au phénomène). Les différents maxima peuvent être interprétés comme une signature de l'instrument dans la mesure où elles sont propres à chaque violon, et que l'on s'attend à une amplification des composantes spectrales dans ces zones.

4.1.4 Mobilité moyenne de plusieurs violons

Sur la figure 4.4, on trace la mobilité latérale moyenne mesurée sur plusieurs violons. Le pic de mobilité moyenne situé aux alentours de 1000 Hz est présent dans tous les

cas. Cela semble donc être un trait caractéristique commun aux violons¹. En revanche, le deuxième maximum, située dans la zone du Bridge Hill est moins évident, dans la mesure où ce maximum est plus ou moins prononcé. Dans tous les cas, la structure de la mobilité moyenne est complexe et varie de façon conséquente d'un violon à l'autre, tout en présentant une structure identique : il existe des zones d'amplification et d'atténuation importantes de la mobilité moyenne.

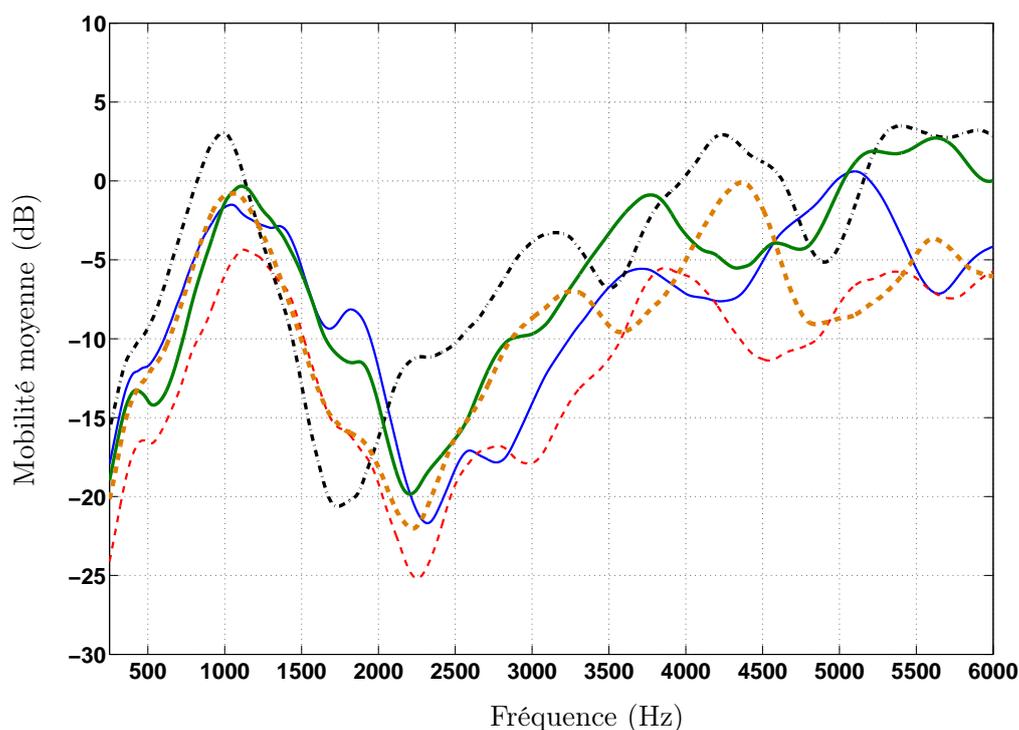


FIGURE 4.4 – Courbes de mobilité latérale moyenne mesurées sur un corpus de violons mis à disposition par Gilles Orin, de VO_1 à VO_5 . La mobilité moyenne a été calculée à l'aide d'un filtre moyenneur d'ordre 250 Hz.

4.1.5 Comparaison des mobilités de violons et de guitares

Au-delà des différences de forme, d'aspect, ou encore de modes de jeu entre les violons et les guitares qui constituent les spécificités de ces instruments, leurs courbes de mobilité au chevalet sont également très différentes. La figure 4.5 permet de comparer des mobilités moyennes mesurées sur des violons et des guitares. Les différences d'allure générale et de niveau, sont ainsi mises en évidence. Les mobilités moyennes de guitares présentent peu de variations, elles ont une allure de type plaque, alors que les mobilités moyennes de violons présentent une allure plus compliquée, avec de larges amplifications ou atténuations.

Ces différences sont probablement les conséquences des améliorations apportées pour

1. Du moins les violons conçus de manière traditionnelle, testés dans le cadre de cette étude

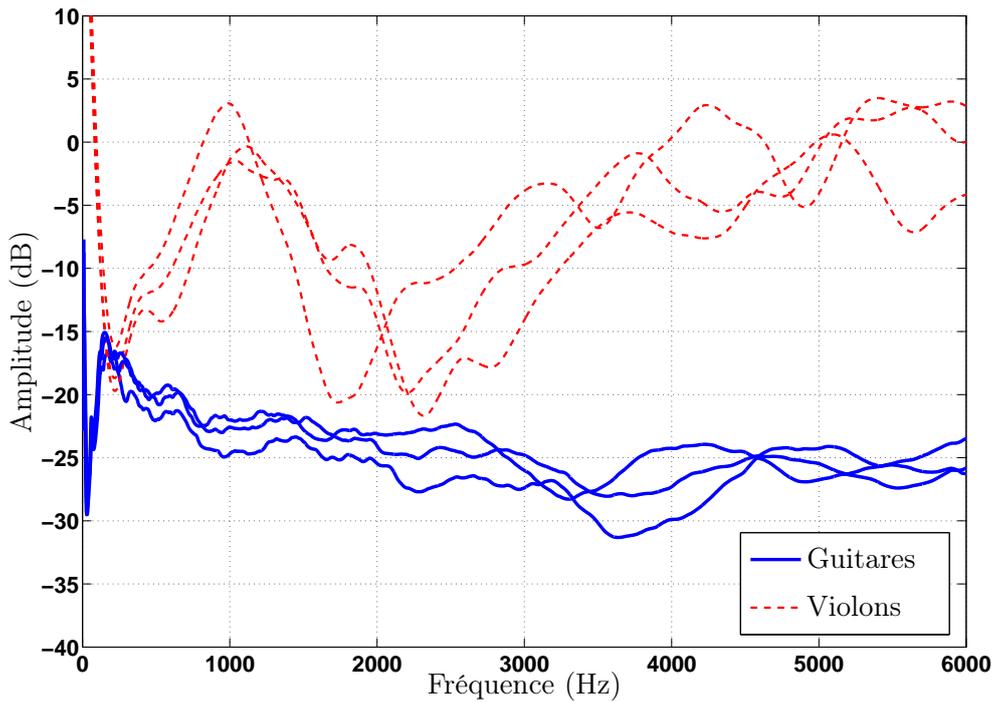


FIGURE 4.5 – Comparaison des mobilités moyennes G_C mesurées sur trois violons, de VO_1 à VO_3 , et trois guitares, de GG_1 à GG_3 .

optimiser la *jouabilité* ou le rendu sonore selon le mode de jeu. La nature de la table, la présence de la barre d’harmonie, l’âme, le dos, ou encore la nature tridimensionnelle du chevalet sont autant d’éléments susceptibles de complexifier la structure de la mobilité du violon.

4.1.6 Identification des modes du violon

4.1.6.1 Densité modale d’un violon : résultat typique

La densité modale des violons est estimée à l’aide de la méthodes ESPRIT, associée à la méthode ESTER, l’ensemble étant détaillé dans la partie 2.3.1 du document. Sur la figure 4.6, on représente un exemple de densité modale estimée de violon.

La figure 4.6 révèle la présence d’un pic marqué de densité modale à une fréquence légèrement inférieure à 1000 Hz. A cette fréquence la densité modale de ce violon est de 0.04 mode par Hertz (1 mode tous les 25 Hertz). Lorsque la fréquence est très inférieure à 1000 Hz, la densité modale est nettement plus basse, les valeurs vont de 0.01 mode par Hertz (1 mode tous les 100 Hertz) à 0.02 mode par Hertz (1 mode tous les 50 Hertz). Pour des fréquences très supérieures à 1000 Hz, la densité modale tend vers une valeur constante, qui se situe aux alentours de 0.01 mode par Hertz.

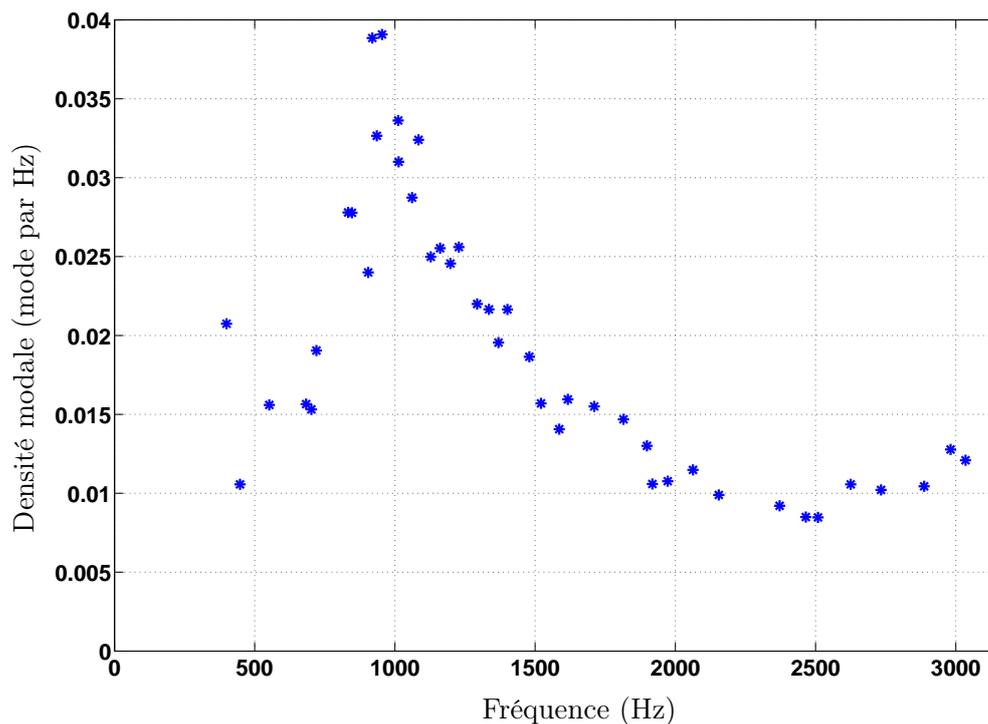


FIGURE 4.6 – Densité modale estimée du violon VO_1 . Une moyenne glissante, consistant à moyenniser 7 valeurs d’espacements inter-modaux successifs inclus dans une fenêtre glissante d’un échantillon à l’autre, a été appliquée dans le but de lisser la courbe et d’en révéler la structure.

Notons que la valeur de densité modale relativement constante pour des fréquences élevées est deux fois moindre que celle observée sur les guitares. Cet effet s’explique entre autres par la différence de surface de la table d’harmonie entre ces deux instruments : le violon étant beaucoup plus petit que la guitare. La surface de la table d’harmonie des violons étant située aux environs de 850 cm^2 contre 1400 cm^2 pour celle des guitares classiques, soit environ deux fois plus que celle des violons.

4.1.6.2 Variation de la densité modale entre instruments

La densité modale a été estimée sur plusieurs violons. Ces violons sont les mêmes que ceux dont la mobilité moyenne est représentée sur la figure 4.4. Nous observons que le pic de densité modale observé sur la figure 4.6 est une caractéristique commune aux violons.

Ce pic est situé au voisinage de 1000 Hz. La densité décroît ensuite pour tendre vers une constante à partir de 1700-2000 Hz. Cette concentration de mode peut expliquer l’amplification des courbes de mobilité moyenne observée sur la figure 4.4, le pic de densité modale se situant à la même fréquence que le pic de mobilité moyenne. Une telle concentration modale est observée dans le cas de panneaux courbes (*cf.* paragraphe 2.1.4.3 et

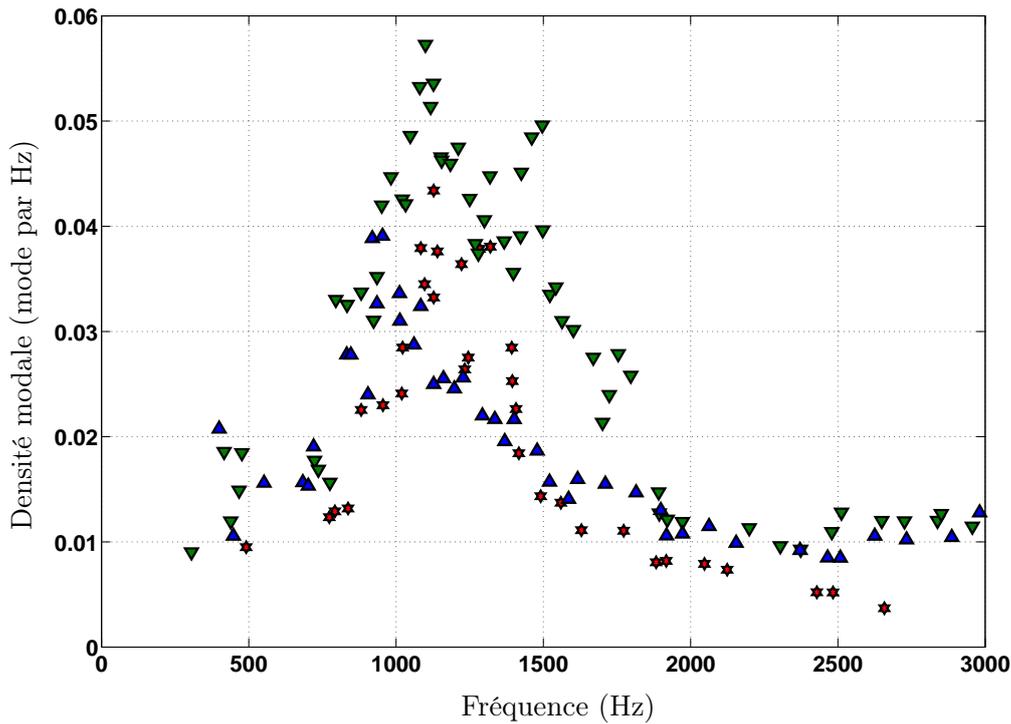


FIGURE 4.7 – Densité modale estimée pour plusieurs violons, de VO_1 à VO_3 . Une moyenne glissante, consistant à moyenner 7 valeurs d’espacements inter-modaux successifs inclus dans une fenêtre glissante d’un échantillon à l’autre, a été appliqué dans le but de lisser la courbe.

références [51, 131]). La table d’harmonie des violons est taillée dans l’épaisseur du bois et présente des courbures dans les directions axiales et latérales. Nous émettons l’hypothèse que la concentration de modes observée soit intrinsèquement liée à la courbure de la table d’harmonie. De façon similaire au cas de la guitare, dont la densité modale, présentée au paragraphe 3.1, est typique de celle d’une plaque, le comportement mécanique des violons entre 500 et 2000 Hz peut alors être assimilé à celui d’une coque équivalente. Les paramètres caractéristiques de cette coque équivalente permettent alors une caractérisation simple des violons.

4.1.6.3 Différence de densité modale entre violon à table courbe et violon à table plate

Si la concentration modale observée sur les violons aux alentours de 1000 Hz est bien due à la courbure de la table d’harmonie, elle ne doit plus être présente dans le cas où la courbure est annulée, c’est-à-dire en présence d’une table d’harmonie plate. Pour vérifier cette hypothèse, la densité modale d’un violon à table d’harmonie plate a été effectuée. Un tel violon a été réalisé par Olivier Pont (*cf.* figure 4.8). Mis à part l’aspect plat de



FIGURE 4.8 – Photographie représentant le violon à table d’harmonie plate conçu par Olivier Pont.

la table d’harmonie, le reste du violon est conçu de manière similaire à l’ensemble des instruments de sa catégorie. En effet, le chevalet, le manche, l’âme, et la barre d’harmonie restent inchangés. La figure 4.9 donne la densité modale estimée sur le violon à table plate.

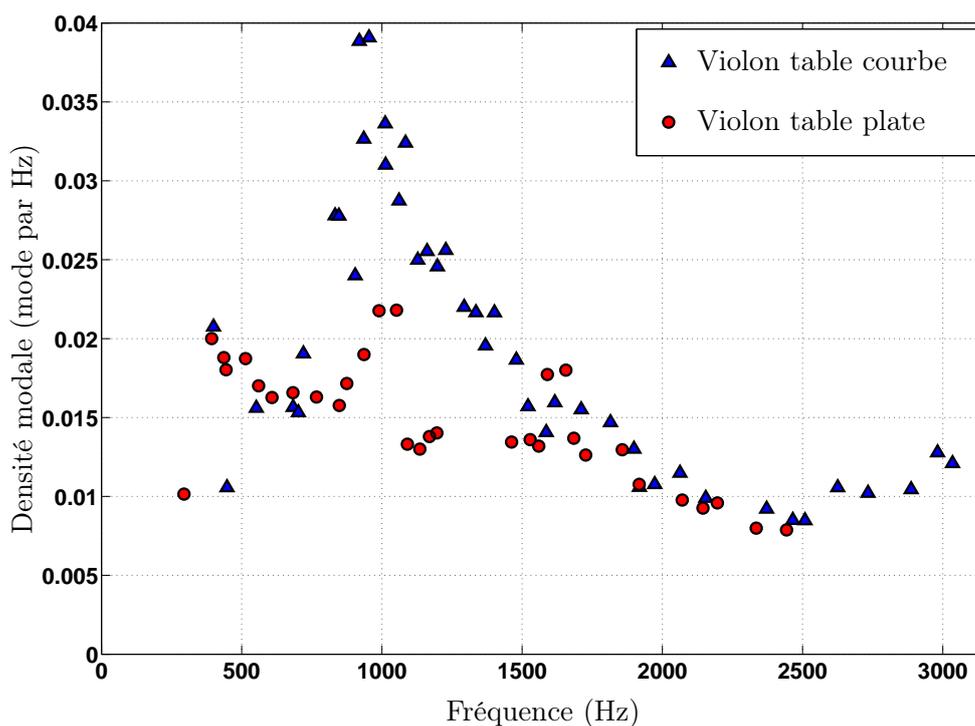


FIGURE 4.9 – Densité modale du violon à table plate VP_1 , comparée à celle du violon classique, à table courbée, VO_1 .

Le pic de densité modale est beaucoup moins marqué sur le violon à table plate. La densité modale maximum est de 0.025 Hz^{-1} dans le cas du violon à table plate, contre 0.04 Hz^{-1} pour le violon à table courbe. Notons qu’en dehors de la zone voisine du pic à 1000

Hz, les densités modales sont très similaires. Le pic de densité modale observé sur tous les violons ayant des tables courbes semble donc bien être lié à la courbure de celle-ci. Une application de la méthode d'estimation de paramètres caractéristiques d'une coque équivalente à la table d'harmonie du violon est donc pertinente. Nous proposons alors par la suite d'ajuster un modèle de densité modale de coque sur la densité modale mesurée.

4.1.6.4 Amortissement et recouvrement modal

Les paramètres modaux identifiés par ESPRIT sont représentés sur la figure 4.10. La concentration de modes à pour effet d'augmenter le facteur de recouvrement modal. Il atteint localement des valeurs proches de 80 % au voisinage de 1000 Hz. Le facteur de pertes modal est quant à lui compris entre 2 et 3 %, ce qui est légèrement supérieur à celui de la guitare. Cet ordre de grandeur de facteur de pertes est aussi supérieur à celui du bois de lutherie généralement employé, qui est de l'ordre de 1 %. Les différents éléments intervenant dans le processus de fabrication, tels que la mise sous tension des cordes, les éclisses, les colles utilisées, le vernis, ont donc pour effet de rajouter des mécanismes dissipatifs expliquant la valeur élevée du facteur de pertes : celui-ci est donc augmenté d'une valeur comprise entre 1 et 2 %.

4.1.7 Coque équivalente à un violon

De manière analogue au cas de la guitare, nous proposons une méthode permettant d'estimer les paramètres caractéristiques d'une structure simple équivalente à la table d'harmonie du violon vue par le chevalet. Cette structure est une coque, dont les rayons de courbure sont identiques dans les deux directions. Le modèle utilisé pour cela est celui des coques sphériques d'Elishakoff [51]. La méthode pour estimer les paramètres caractéristiques β , M_{Eq} et D_{Eq} d'une coque mince est expliquée dans la partie 2.5 du document. L'exemple illustré ici est une application de la méthode afin de différencier 3 violons différents, VO_4 , VO_6 et VO_7 . Les mobilités de ces violons ont été mesurées dans l'atelier de Gilles Orin, luthier quatuor à Rennes.

4.1.7.1 Densité modale

La figure 4.11 représente la densité modale analytique de la coque équivalente estimée pour les trois violons. Les différences sont nettes : VO_4 possède une densité modale supérieure aux deux autres violons. Ces derniers ont une valeur de densité modale en hautes fréquences similaire, aux alentours de 0.014 Hz^{-1} . En revanche, VO_7 présente un pic de densité modale à une fréquence de 1150 Hz, ce qui est en décalage avec les deux autres violons, qui présentent un pic de densité modale à 1066 Hz pour VO_6 et 1076 Hz pour VO_4 . Ces fréquences restent cependant dans le même ordre de grandeur.

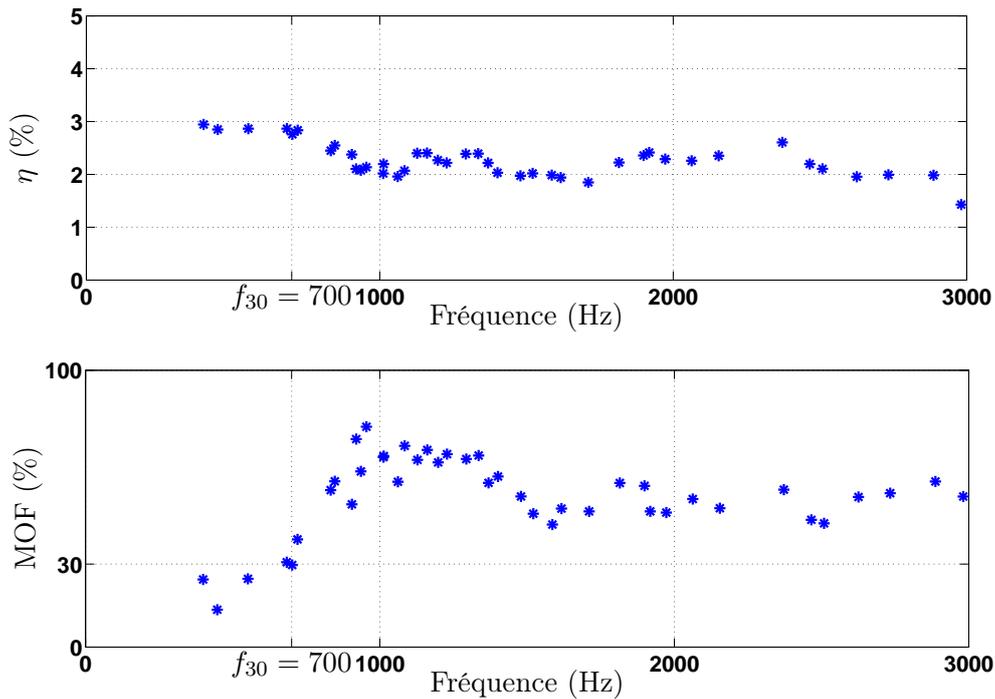


FIGURE 4.10 – Paramètres modaux du violon VO_1 estimés par ESPRIT. En haut : facteur de pertes modal. En bas : facteur de recouvrement modal. La limite entre le domaine des basses et des moyennes fréquences, définie comme la fréquence à partir de laquelle le recouvrement modal est supérieur à 30 % est désignée par f_{30} . Dans cet exemple, $f_{30} = 700Hz$.

4.1.7.2 Masse équivalente *vs.* raideur équivalente

Sur la figure 4.12, nous positionnons les trois violons dans un plan selon leurs valeurs de masse et de raideur équivalente. Ces paramètres caractéristiques permettent de bien discriminer les instruments. De plus, ils rendent compte des différences de mobilité moyennes au chevalet des violons. On constate par exemple que le violon 1 est plus mobile que le violon 2 et le violon 3, ce dernier étant à la fois le moins léger et le moins souple. La variation de masse équivalente est moins importante que la variation de raideur équivalente, ce qui est constaté aussi dans le cas de la guitare.

4.2 Réponse acoustique des instruments à cordes frottées

Après avoir cherché des caractéristiques de la mobilité commune aux violons, nous proposons une étude de leurs réponses acoustiques. Cette approche vise à trouver des liens entre le son produit par un violon en situation de jeu, et son comportement vibratoire, caractérisé par sa mobilité au chevalet. Pour cela, nous étudions les relations existantes entre les caractéristiques spectrales (ou *descripteurs de sons*) de sons de violons joués avec

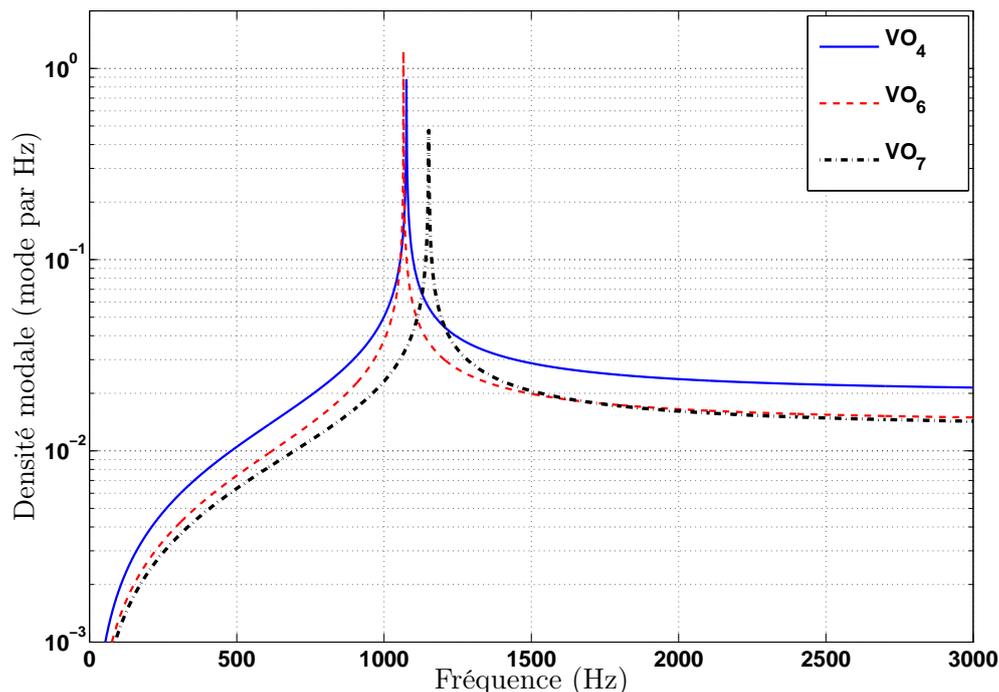


FIGURE 4.11 – Résultat du recalage du modèle de densité modale analytique d’une coque équivalente sur la densité modale estimée par ESPRIT pour les 3 violons VO_4 , VO_6 et VO_7 .

un archet et les courbes lissées de mobilité au chevalet.

4.2.1 Méthodologie

Deux approches de degrés de finesse différents sont mises en œuvre : l’une s’intéresse à la relation entre allure générale du spectre et caractéristiques globales de la mobilité, donc de la mobilité moyenne. La deuxième est une analyse fine. Elle s’intéresse aux relations entre les variations locales de la mobilité et les amplitudes relatives des harmoniques du son stationnaire.

Ces deux analyses s’effectuent sur des signaux similaires, à savoir des glissandi réalisés sur la corde la plus grave du Ré (292 Hz) au Sol (195 Hz). Cela permet d’obtenir des amplitudes d’harmoniques sur un continuum de fréquences très large.

4.2.1.1 Poursuite d’harmoniques

Dans le but de relier les variations d’amplitude des harmoniques de sons de violons en fonction de leurs fréquences et les courbes de mobilité des violons, il est nécessaire d’estimer ces amplitudes et fréquences de manière précise et robuste, que le signal soit stationnaire (une seule note jouée), ou non (un *glissando* par exemple). Une solution directe consisterait

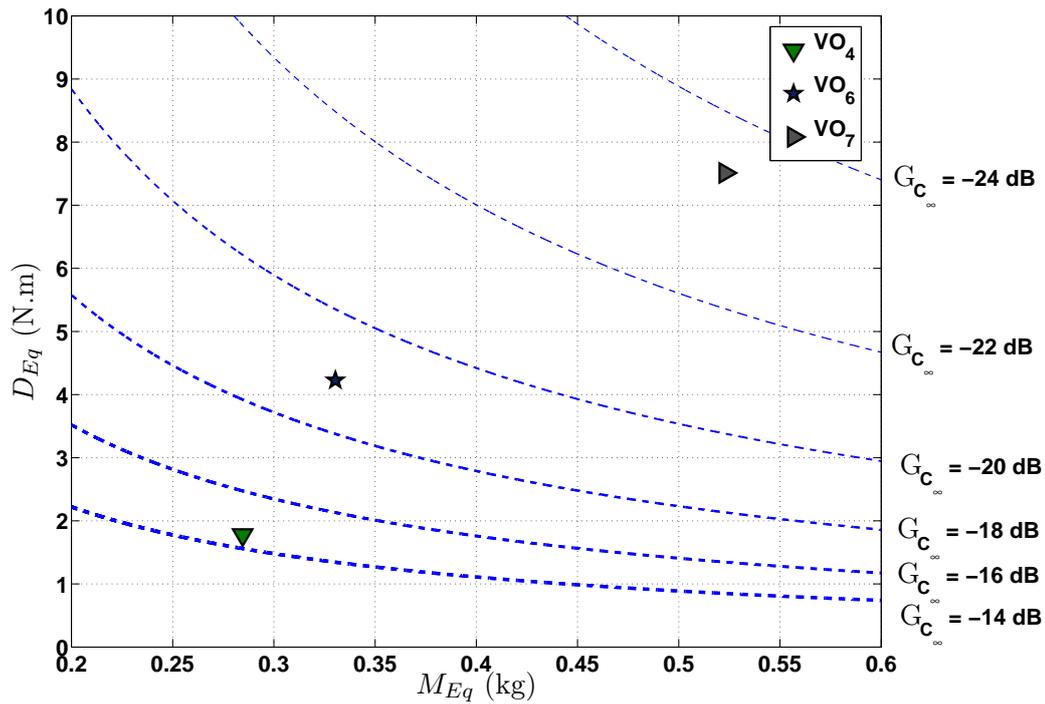


FIGURE 4.12 – Représentation dans un plan masse-raideur équivalente des trois violons VO_4 , VO_6 et VO_7 . Les courbes d’isomobilité en pointillés représentent les valeurs de mobilité d’un panneau plan infini ayant les mêmes masses volumique et même raideur que la table d’harmonie.

à détecter les pics, correspondant aux harmoniques, de la transformée de Fourier discrète (TFD) de chaque section temporelle, et ensuite extraire les amplitudes et fréquences correspondantes. Cette méthode présente l’avantage d’être rapide et facilement implémentable. Cependant, elle présente l’inconvénient d’être limitée en termes de résolution, du fait de la TFD. En effet, les points de la TFD sont espacés d’une fréquence égale à F_e/N , où F_e est la fréquence d’échantillonnage, et N est la taille de la TFD. Si les harmoniques tombent entre deux points de la TFD, ce qui est fort probable, l’estimation sera alors biaisée du fait que l’on ne peut pas savoir ce qu’il se passe exactement entre eux.

Pour contourner ce problème, nous utiliserons la technique *QIFFT* (*Quadratically Interpolated Fast-Fourier Transform*) proposée par Abe et *al.* [1], qui consiste à interpoler par un polynôme d’ordre 2 les premiers points autour de chaque pic du logarithme népérien de la transformée de Fourier du signal, préalablement fenêtré à l’aide d’une fenêtre gaussienne. Connaissant les coefficients du polynôme, la fréquence, l’amplitude et la phase de chaque harmonique est aisément déductible. Cette méthode est valide lorsque les harmoniques sont bien isolés et que leur amortissement est nul, ce qui est le cas dans notre étude.

Pour le suivi d’harmoniques, le signal est d’abord découpé en sections temporelles

comportant N_f échantillons et se recouvrant légèrement. La méthode s'applique à chaque section de signal comme suit :

- a la fréquence fondamentale de la tranche du signal est estimée à l'aide d'une méthode d'auto-corrélation [115],
- b le spectre du signal préalablement multiplié par une fenêtre gaussienne de longueur N_f est calculé,
- c l'interpolation quadratique du pic correspond au fondamental est effectuée, puis la fréquence et l'amplitude du fondamental sont estimées,
- d l'interpolation quadratique du pic correspond au deuxième pic est effectuée, ainsi que la fréquence et l'amplitude du deuxième pic sont estimées,
- e l'étape *d.* est répétée en passant d'un harmonique à l'autre jusqu'à ce que la fréquence de Nyquist $F_e/2$ soit atteinte.

4.2.1.2 Enveloppe spectrale : analyse formantique

Dans un modèle source-filtre, le signal de sortie $y(t)$ est vu comme la convolution d'un signal d'entrée $x(t)$ par la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant $h(t)$, jouant le rôle de filtre :

$$y(t) = x(t) * h(t). \quad (4.1)$$

Si la source $x(t)$ est harmonique, telles que les cordes vocales ou les cordes de violons, le signal de sortie $y(t)$ est aussi harmonique, mais son spectre $Y(\omega)$ est alors perturbé par la réponse en fréquence du filtre $H(\omega)$. En effet, les variations lentes de $Y(\omega)$ (*i.e.* son enveloppe spectrale) suit la forme générale de $H(\omega)$. Les résonances de $H(\omega)$ sont alors détectables dans l'enveloppe spectrale de $Y(\omega)$. Les pics de la courbe enveloppe du signal de sortie d'un modèle source-filtre sont communément appelés *formants* [8, 53]. En acoustique de la parole, le modèle source-filtre est régulièrement utilisé pour la détection de ces formants [53], responsable de la perception et de la production de voyelles [86, 109]. Les méthodes classiques incluent les modèles *auto-regressifs* (AR) et *Linear Predictive Coding* (LPC) [97], ou on utilise des coefficients cepstraux [113]. Dans notre cas, nous avons choisi d'utiliser la LPC, pour son utilisation commune pour le traitement de signaux de la parole, mais aussi parce que cet algorithme semble mieux adapté à notre cas. L'algorithme LPC est basé sur l'estimation de p coefficients d'un filtre AR d'ordre p du signal de sortie $y[n]$. Le filtre obtenu est celui minimisant au sens des moindres carrés l'erreur de prédiction. La prédiction est basée sur les échantillons passés de $y[n]$.

Soit $\hat{y}[n]$ la valeur prédite, elle est définie par :

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^p a_k y[n-k], \quad (4.2)$$

où p est l'ordre du modèle, a_k sont les coefficients de prédiction, et $y[n-k]$ sont les échantillons précédents. Les coefficients de prédiction sont ensuite estimés par minimisation au sens des moindres carrés de la fonction d'erreur $e[n] = y[n] - \hat{y}[n]$, soit :

$$\mathbf{a} = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} \left\| \left\| y[n] - \sum_{k=1}^p a_k y[n-k] \right\|_2 \right\|_2^2, \quad (4.3)$$

où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur contenant les p coefficients de prédiction.

4.2.2 Protocole expérimental

Les signaux analysés sont obtenus à l'aide d'enregistrements simultanés du signal d'accélération de la table d'harmonie, à l'aide d'un accéléromètre miniature, et du signal de pression sonore, à l'aide d'un microphone placé en champ proche. Les mesures s'effectuent dans une chambre anéchoïque. Lors des expériences, le musicien joue des glissandi sur la corde la plus grave du violon, du Ré (292 Hz) au Sol (195 Hz). La fréquence d'échantillonnage est fixée à 8192 Hz, et la durée des signaux est de 6 secondes. Pour chaque configuration, le glissando est joué trois fois. Le signal analysé est la concaténation des trois enregistrements de glissando.

4.2.3 Resultats

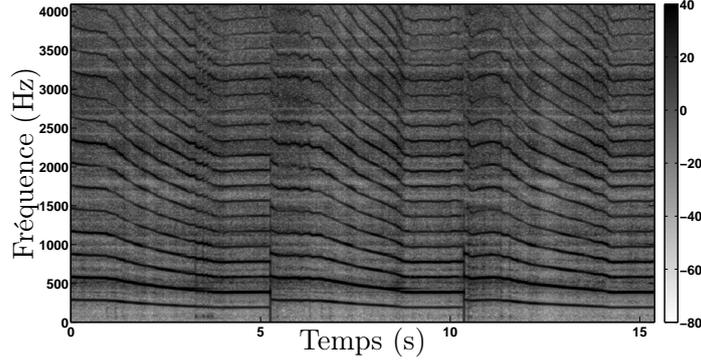
La figure 4.13 représente le spectrogramme du signal de pression sonore d'un glissando, et le spectrogramme du signal estimé, reconstruit à partir des valeurs de fréquences et d'amplitudes estimées à l'aide de l'algorithme QIFFT.

La technique d'estimation d'amplitudes et de fréquences d'harmonique est efficace : le spectrogramme du signal reconstruit reproduit celui du signal original, en ne gardant que la partie harmonique, le bruit n'étant plus présent entre les harmoniques.

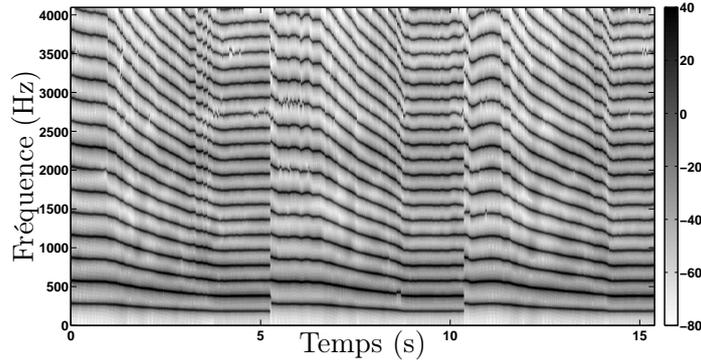
4.2.3.1 Signal d'accélération

Dans la partie 4.1.1, nous avons rappelé que la matrice de mobilité \mathbf{Y} considérée est une matrice 2×2 . Par conséquent, la relation donnant la vitesse de la table d'harmonie et les forces appliquées est une combinaison linéaire dont les éléments scalaires sont les éléments de \mathbf{Y} , ce qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} V_y(\omega) \\ V_z(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{yy}(\omega) & Y_{yz}(\omega) \\ Y_{zy}(\omega) & Y_{zz}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_y(\omega) \\ F_z(\omega) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$



(a)



(b)

FIGURE 4.13 – a) : spectrogramme de la concaténation de 3 signaux de pression sonore de glissandi joués sur le violon VI_1 de 300 à 195 Hz. b) : signal reconstruit à partir des fréquences et des amplitudes des harmoniques estimées par la méthode QIFFT.

où les indices y et z représentent respectivement les directions latérales et transversales.

Cette combinaison linéaire amène alors le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} V_y(\omega) = Y_{yy}(\omega)F_y(\omega) + Y_{yz}(\omega)F_z(\omega) \\ V_z(\omega) = Y_{zy}(\omega)F_y(\omega) + Y_{zz}(\omega)F_z(\omega) \end{cases} \quad (4.5)$$

Dans notre approche, la force appliquée est *a priori* inconnue, nous ne connaissons donc pas la contribution individuelle de $F_y(\omega)$ et $F_z(\omega)$ aux vitesses de la table des équations (4.5). Cependant, il est possible de considérer que Y_{yy} est petit devant les autres éléments de \mathbf{Y} , et par conséquent que $V_y(\omega)$ est très petit devant $V_z(\omega)$. La mesure de $V_z(\omega)$, lorsque l'excitation $\mathbf{f}(\omega)$ est supposée large-bande, donne des informations sur la contribution de chaque composante de la force appliquée. Ainsi, les amplitudes des harmoniques et des courbes enveloppes de $V_z(\omega)$ sont estimées à l'aide de la méthode détaillée à la section 4.2.1.

4.2.3.2 Amplitudes des harmoniques

La figure 4.14 représente les amplitudes A_k en fonction de f_k .

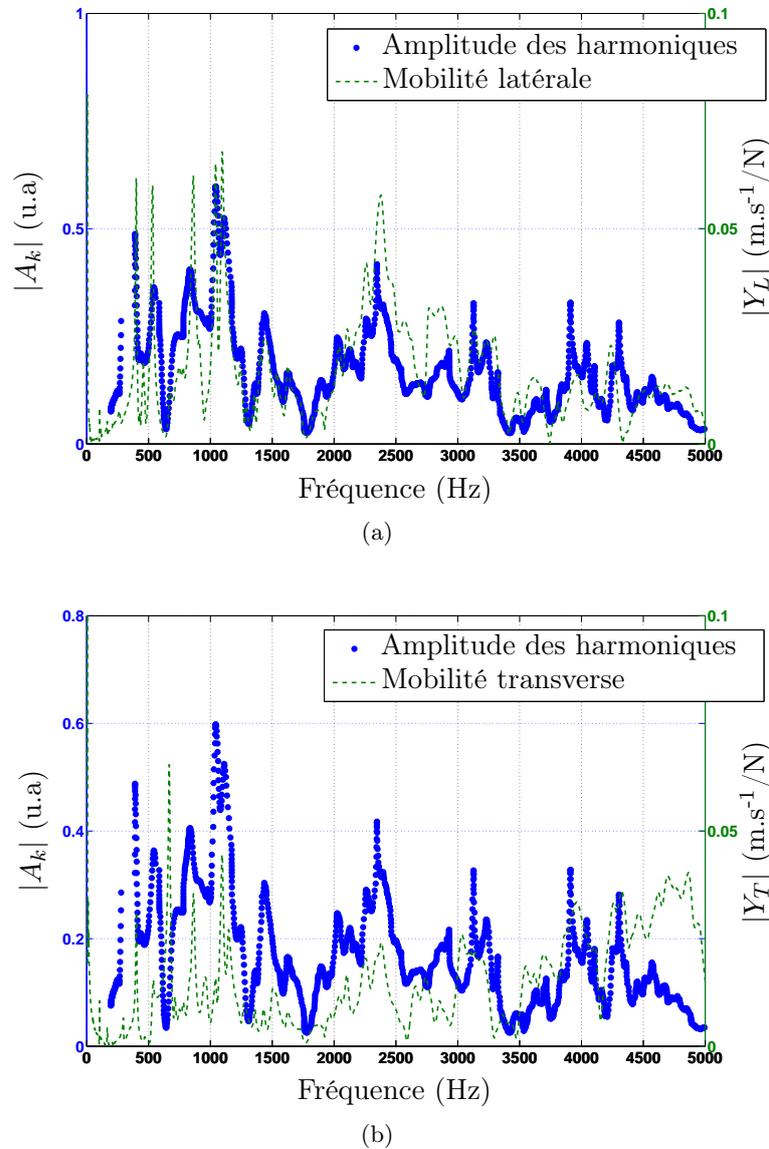


FIGURE 4.14 – Amplitudes moyennées des harmoniques en fonction de leurs fréquences. a) : la mobilité latérale est tracée (en traits pointillés) pour comparaison. b) : la mobilité transverse est tracée pour comparaison avec les amplitudes moyennées des harmoniques (en trait plein). Le violon étudié est VI_1 .

Le profil d'amplitude des harmoniques est semblable à la mobilité au chevalet $Y(\omega)$, et ce dans les deux directions transverse et latérale. Cependant, cette similarité est plus évidente dans le cas de la mobilité latérale. La distance de Pearson² entre les amplitudes

2. La distance de Pearson $d_{P_{X,Y}}$ entre deux variables X et Y est définie comme étant l'écart entre 1 et leur coefficient de corrélation de Pearson, définie comme le rapport entre la covariance des deux variables et le produit de leur écart-type, soit $d_{P_{X,Y}} = 1 - \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$. C'est un indicateur de similarité : la distance

des harmoniques et la mobilité latérale est de 0.19, alors qu'elle est de 0.57 pour la mobilité transverse. La distance entre la distribution des amplitudes des harmoniques et la mobilité latérale est donc plus petite que celle entre cette distribution et la mobilité transverse, confirmant le fait qu'elle est plus proche de la mobilité latérale que de la mobilité transverse. Le terme dominant de l'équation (4.5) est alors $Y_{zy}(\omega)F_y(\omega)$, et par conséquent, $F_z(\omega)$ est considéré comme petit devant $F_y(\omega)$. De plus, les techniques d'archet utilisent principalement la polarisation dans le plan (parallèle à la table d'harmonie). Plus précisément, l'inclinaison de l'archet par rapport au plan des cordes dépend de quelle corde est jouée. Dans notre cas, c'est la corde de *Sol* qui est jouée. Pour cette dernière, l'inclinaison est incluse entre -10 et -20 degrés [124]. Pour le reste de notre étude, seule la mobilité latérale est prise en compte.

4.2.3.3 Courbes enveloppes

Pour chaque section temporelle k , le signal reconstruit $s_{res}[k, n]$ à partir des harmoniques estimés par ESPRIT est calculé. Les courbes enveloppes de chaque signal reconstruit $s_{res}[k, n]$ du signal de glissando est calculée à l'aide d'une LPC d'ordre $n = 10$. Puis, pour chaque section k , les courbes enveloppes de la première section à la k^{ieme} section sont moyennées. La courbe enveloppe finale est alors la courbe enveloppe d'un spectre moyenné à long-terme du signal de glissando. Précisons que chaque portion de signal est normalisée par sa valeur RMS. La figure 4.15 représente l'enveloppe d'enveloppe spectrale moyenne, ainsi que la mobilité latérale, et moyenne du violon.

L'amplification globale de la mobilité au chevalet peut être clairement observée à l'aide des courbes enveloppes du signal d'accélération. En effet, il s'en dégage des formants prédominants aux alentours de 1000 Hz, et entre 2000 et 3000 Hz. Ces maxima contenus dans l'enveloppe spectral sont identiques à ceux de la mobilité moyenne.

4.2.4 Signal de pression sonore

La méthode est maintenant appliquée au signal de pression sonore enregistré lors des glissandi joués sur le violon en configuration nominale.

4.2.4.1 Amplitude des harmoniques

La figure 4.16 trace l'évolution des amplitudes des harmoniques du signal de pression sonore en fonction de la fréquence. La comparaison de cette évolution avec la courbe de mobilité latérale mesurée au chevalet montre que l'amplitude de l'harmonique est fortement liée à cette dernière. En effet, les deux courbes présentent la même allure, la distance de Pearson est ici de 0.254. Les harmoniques sont amplifiés lorsqu'ils tombent à des fréquences

est d'autant plus petite que les deux variables sont corrélées.

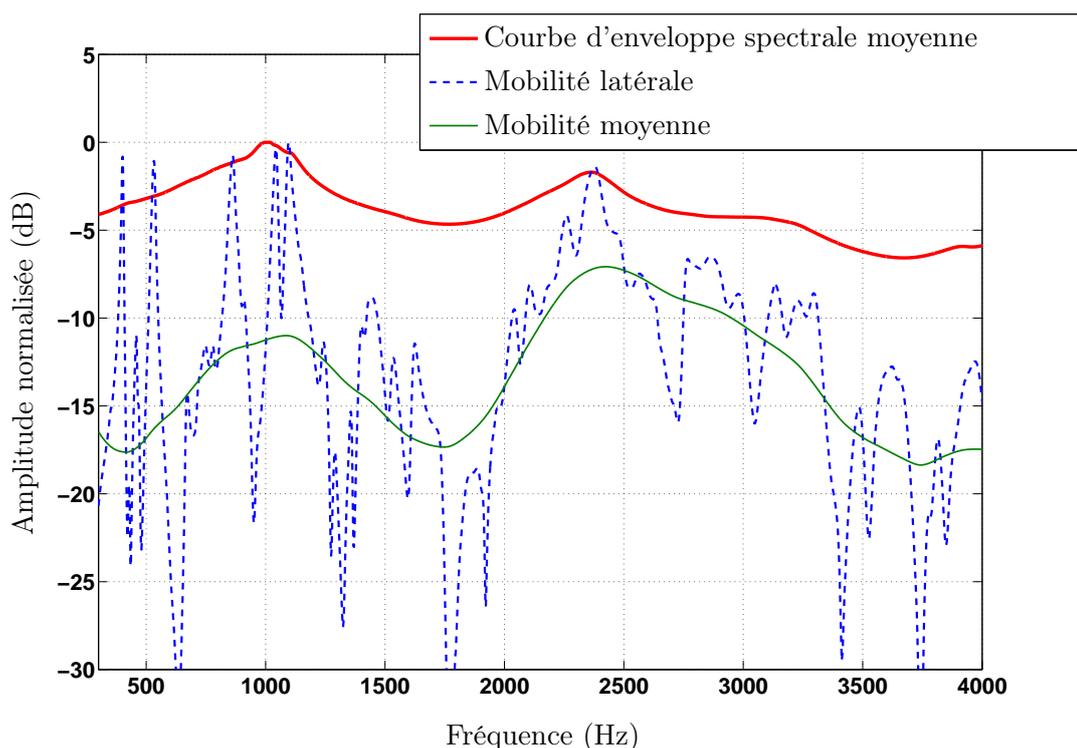


FIGURE 4.15 – Mobilité latérale mesurée au chevalet et mobilité moyenne du violon VI_1 et courbe d’enveloppe spectrale moyennée à long-terme.

pour lesquelles la mobilité est maximale, et inversement, il sont atténués lorsque la mobilité latérale est faible.

Les caractéristiques spectrales des notes jouées sont donc probablement fortement modélées par la mobilité latérale au chevalet. Il est effectivement possible de retrouver les variations fines de la mobilité latérale du violon à l’aide d’une étude spectrale de sons de violons. Cela confirme donc que la mobilité latérale des violons est une signature de l’instrument, présente de manière sous-jacente dans les sons qu’il produit.

4.2.4.2 Courbes enveloppes

L’enveloppe spectrale moyennée à long-terme du signal de pression sonore des glissandi est tracée sur la figure 4.17. La méthode employée est identique à celle utilisée dans le paragraphe 4.2.3.3. L’enveloppe spectrale moyennée à long-terme peut ainsi être comparée comparée avec la mobilité latérale au chevalet.

L’enveloppe moyenne présente une allure similaire à celle de la mobilité moyenne, à savoir une amplification importante entre 500 et 600 Hz, puis un faible niveau entre 1000 et 2000 Hz, et enfin de nouveau un maximum à 3500 Hz. La courbe enveloppe moyennée à long-terme indique clairement cette tendance : le niveau est important entre 500 et 600 Hz (présence de l’harmonique d’ordre 2) et inférieur d’au moins 10 dB aux environs de 1500

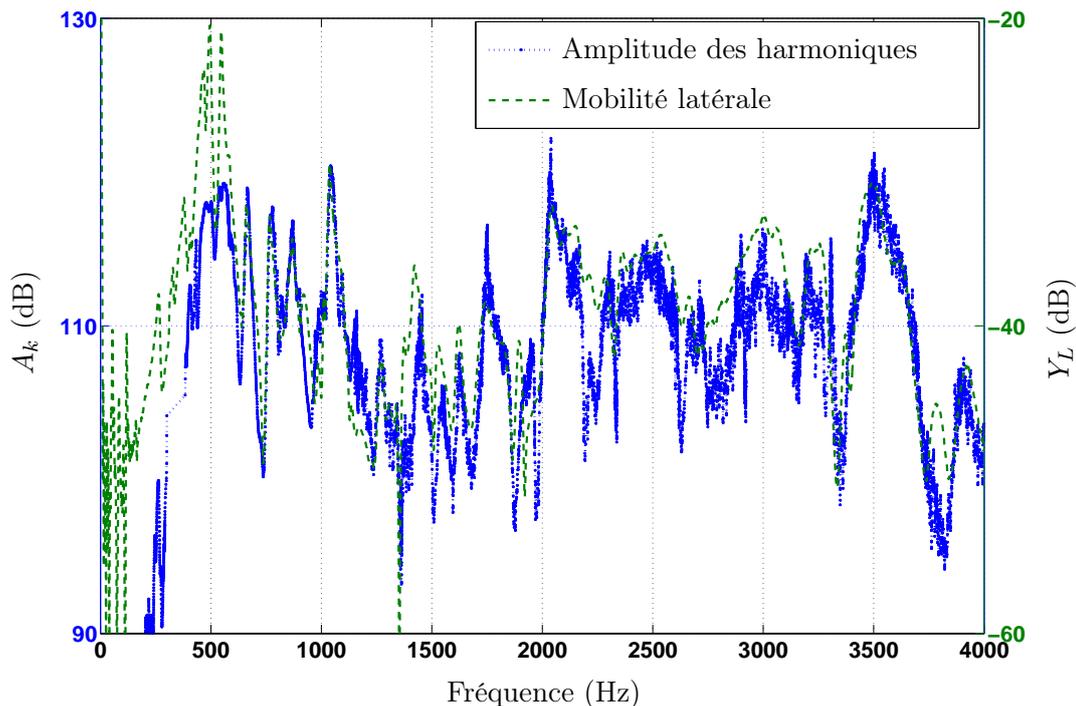


FIGURE 4.16 – Amplitude des harmoniques du signal de pression sonore en fonction de la fréquence (‘*’) et mobilité latérale mesurée au chevalet du violon VA_1 en configuration nominale (traits en pointillés). Les amplitudes des harmoniques sont moyennées à l’aide d’un filtre moyenneur d’ordre 11.

Hz, indiquant un anti-formant.

4.2.4.3 Comparaison de courbes enveloppes de deux violons

L’analyse est effectuée sur deux violons différents. Les courbes enveloppes moyennes sont représentées sur la figure 4.18.

Les courbes d’enveloppe spectrale moyenne des deux violons sont très proches au voisinage du premier formant : elles présentent toutes deux un pic vers 500 Hz, puis un léger rebond vers 1000 Hz. Cette forme est celle de la mobilité moyenne. Au-delà de 2000 Hz, les courbes d’enveloppe spectrale moyenne sont moins semblables : un formant assimilable au Bridge Hill est très marqué sur le violon 1, alors que pour le violon 2, la présence d’un tel pic ne se situe qu’aux environs de 3500 Hz.

L’allure des courbes d’enveloppe spectrale, et plus particulièrement la position des formants et des creux, est fortement liée à la mobilité latérale moyenne des violons. La mobilité latérale est donc une signature acoustique importante de l’instrument. Indépendamment des variations des paramètres de contrôle opérées par le musicien, l’allure de la mobilité latérale est présente de manière sous-jacente dans les caractéristiques spectrales. Sa forme compliquée, composée d’amplifications et d’atténuations, donne au son de violon une allure

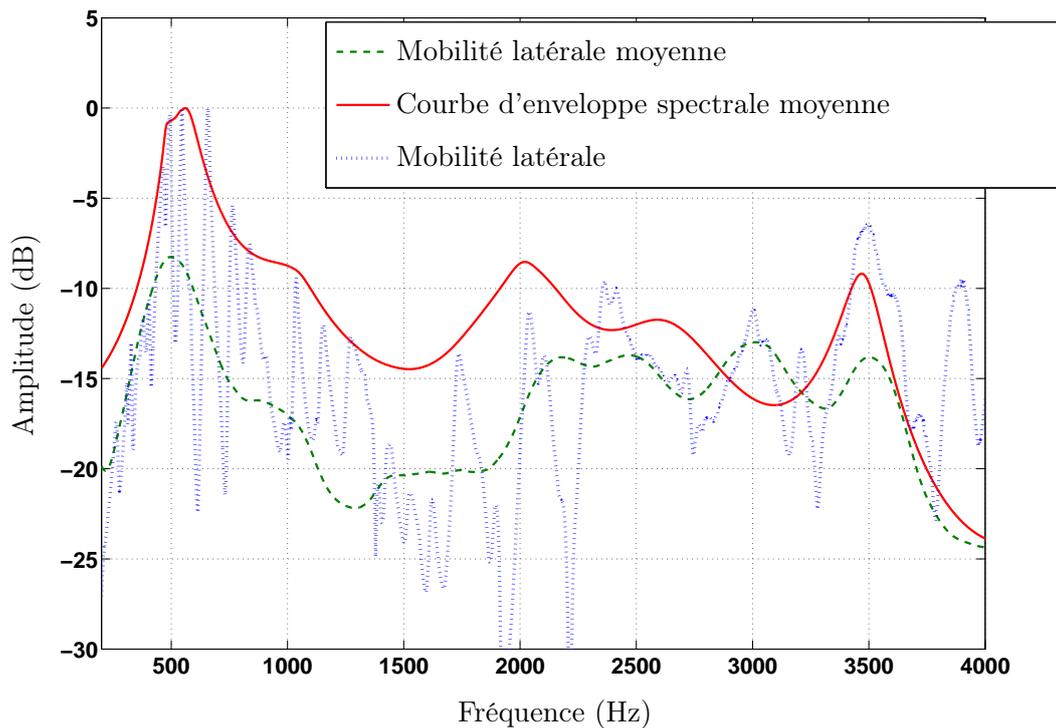


FIGURE 4.17 – Mobilité latérale mesurée au chevalet du violon VA_1 , ainsi que sa courbe moyenne et courbe d'enveloppe spectrale moyennée à long-terme. Le signal temporel analysé est celui de la pression sonore mesurée en champ proche pendant le glissando.

formantique qui est propre à chaque violon.

4.3 Conclusions du chapitre

Ce chapitre consacré au violon étudie son comportement vibroacoustique à partir d'une approche purement mécanique, puis à l'aide d'une approche acoustique. La première partie, consacrée au comportement mécanique du violon, révèle les points suivant :

- les courbes de mobilité moyenne des violons présentent généralement deux amplifications locales bien marquées : la première présente un maximum entre 500 et 1000 Hz environ, et la deuxième se situe entre 2000 et 3000 Hz. Cette dernière est connue dans la littérature sous le nom de *Bridge Hill* [79].
- L'étude de la densité modale estimée des violons révèle aussi un pic de densité modale (concentration de mode) pour des fréquences proches du maximum de mobilité lissée. Ce profil de densité modale est typique des coques [51, 131].

Ces deux points suggèrent que la première amplification observée sur les courbes de mobilité moyenne des violons soit due à une concentration modale ; et que cette dernière soit la conséquence de la courbure de la table d'harmonie. La connaissance de la densité

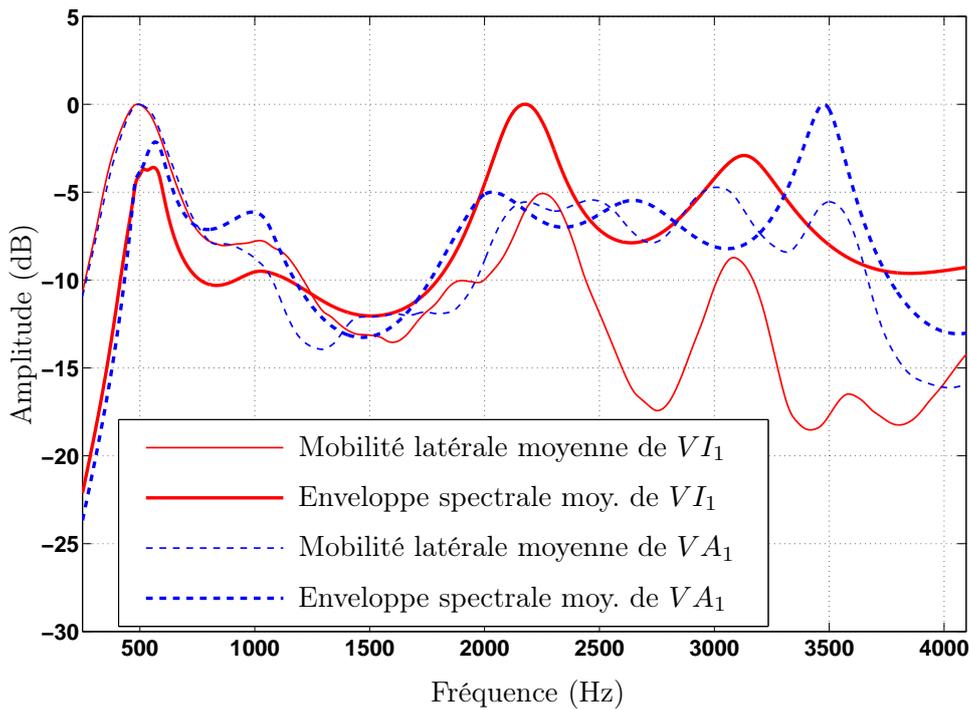


FIGURE 4.18 – Comparaison de courbes d’enveloppe spectrale moyenne d’un signal de glissando enregistrés sur deux violons différents, VI_1 et VA_1 . Les mobilités latérales moyennes des deux violons sont représentées en trait fin.

modale, ainsi que la mesure de la mobilité au chevalet permet d’estimer les paramètres caractéristiques de la coque équivalente au violon. Ces macro-paramètres sont identifiables et utilisables par le luthier pour caractériser le comportement mécanique du violon. Ils permettent de quantifier efficacement les différences en terme de réponse mécanique entre instruments.

La deuxième partie du chapitre est consacrée à l’étude des caractéristiques spectrales des sons de violons en situation de jeu. L’analyse révèle un point important dans l’analyse du timbre de violons :

- il existe une concordance significative entre amplitudes des harmoniques et mobilité latérale mesurée au chevalet d’une part et entre enveloppe spectrale et mobilité moyenne d’autre part. En effet, les amplifications observées dans les courbes de mobilité moyenne se retrouvent dans les courbes d’enveloppe spectrale moyenne, donnant lieu à une structure formantique des sons de violons. Par analogie avec l’étude sur le comportement mécanique des violons, les deux premiers formants sont donc supposés être dû à la courbure pour le premier (entre 500 et 1000 Hz) et au phénomène de *Bridge Hill* pour le second (entre 2000 et 3000 Hz).

Chapitre 5

Application à l'aide à la facture instrumentale

Ce chapitre rapporte l'application des méthodes de caractérisation des instruments proposées dans ce mémoire à différentes études de cas proposées par des luthiers. Celles-ci ont été traitées dans le cadre de projets, proposés par les luthiers et soutenus par le pôle national d'innovation de l'ITEMM. Des échanges réguliers, organisés par l'ITEMM ont permis de définir les pistes et cadres des projets d'aide à la lutherie. Ces rencontres permettent aux artisans de prendre connaissance des possibilités des outils d'aide à la lutherie. Elles permettent aussi aux acousticiens de prendre connaissance du questionnement des luthiers. Ces projets ont fait l'objet de présentations lors des JFIS (*Journées de la Facture Instrumentale et des Sciences*) spécialité cordes ayant lieu fin mai. Lors des JFIS 2011 et 2012, organisés dans les locaux de l'ITEMM, ils ont été présentés devant un public composé essentiellement de luthiers et scientifiques. Nous exposons une synthèse d'une sélection de ces projets. Ils sont séparés en deux parties principales, en distinguant ceux qui traitent d'instruments à cordes pincées (guitares et ukulélés) ou d'instruments à cordes frottées (violons essentiellement).

5.1 Aide à la lutherie des instruments à cordes pincées

Les projets traitant des instruments à cordes pincées portent principalement sur la caractérisation du comportement mécanique. Un projet portait sur les analyses de sons, en particulier sur les notes mortes, cette problématique est traitée dans le paragraphe 3.2.

5.1.1 Suivi de tables de guitares en cours de fabrication

5.1.1.1 Problématique

Ce projet a été réalisé avec Alain Raifort, luthier guitare à Tours. Il consiste à caractériser des tables d'harmonie de guitares classiques et folks au cours du processus de fabrication. Le suivi des propriétés mécaniques de l'ensemble de l'instrument au cours de la fabrication est essentiel pour le luthier pour au moins deux raisons principales : la connaissance, et à terme l'anticipation, des modifications du comportement mécanique de l'instrument qu'induit chaque nouvelle étape de fabrication et le contrôle de la répétabilité des caractéristiques obtenues. Cette répétabilité est liée au procédé de fabrication et au choix du matériau. Les méthodologies développées pour la guitare, et plus particulièrement l'estimation des paramètres caractéristiques des matériaux, sont bien adaptées pour répondre à ce problème.

5.1.1.2 Procédure

Nous disposons de 2 groupes de 4 tables d'harmonie à différents stades de finition, toutes mises à disposition par Alain Raifort. Un groupe est constitué de tables conçues pour des guitares classiques, le deuxième groupe est constitué de tables conçues pour des guitares folks. A l'intérieur de chaque groupe, le bois utilisé pour la construction provient du même quartier, afin de s'assurer de la similitude des propriétés mécaniques d'une table à l'autre. Les différents stades de fabrication sont représentés dans le tableau 5.1.

Les mesures de mobilité sont effectuées en un seul point, correspondant au point où sera attachée la corde basse (E2) une fois l'instrument terminé. Le protocole utilisé est similaire à celui utilisé pour les mesures sur des instruments terminés : la réponse impulsionnelle est déterminée à l'aide d'une acquisition simultanée et colocalisée du signal d'accélération, enregistré par un accéléromètre, et du signal de force, enregistré par un marteau d'impact.

5.1.1.3 Courbes de mobilité

Les courbes de mobilité mesurée et moyenne des tables de guitares classique et folk sont regroupées sur la figure 5.1. Les niveaux de mobilité aux différents stades de fabrication sont équivalents pour les tables de guitare classique. Le barrage modifie très peu le niveau global de mobilité. En revanche, la table nue d'une guitare folk est beaucoup plus mobile que celle dont on a ajouté les premiers barrages. Les tensions des cordes de guitares folks sont plus fortes que celles des guitares classiques. Le barrage de la table d'harmonie doit alors être fait pour que la table puisse supporter cette tension plus forte. Cela se traduit par une mobilité beaucoup plus faible des tables de guitares folks barrées.

Type	Stade 1	Stade 2	Stade 3	Stade 4
Classique				
Folk				

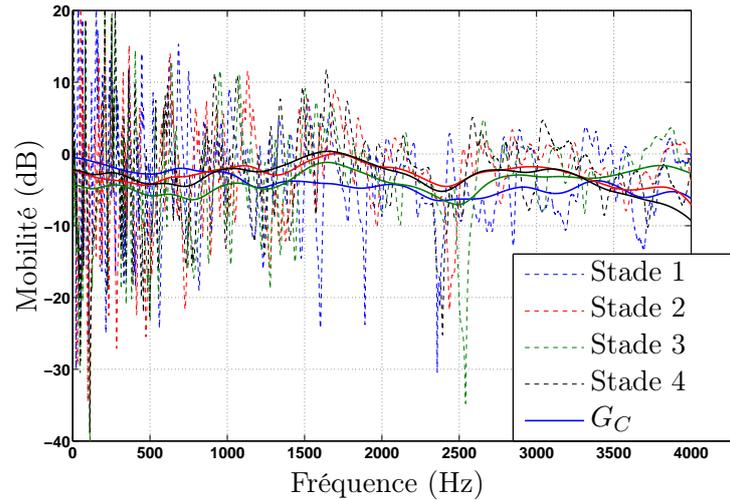
TABLE 5.1 – Différents stade de fabrication des tables de guitare classique et folk. Stade 1 : table nue. Stade 2 : Barrages fins. Stade 3 : Barrages épais. Stade 4 : renfort de rosace.

5.1.1.4 Paramètres caractéristiques des tables de guitare classique

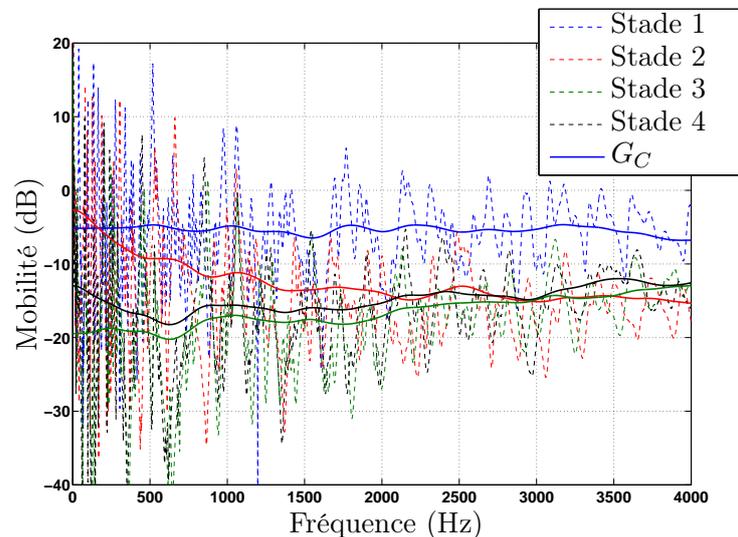
Les paramètres caractéristiques des tables d'harmonie de guitare classique ont été regroupés dans des plans *dispersion de mobilité-mobilité caractéristique* et *masse équivalente-raideur équivalente* sur la figure 5.2.

En ce qui concerne les guitares classiques, les valeurs des paramètres caractéristiques confirment certaines observations évoquées pour les courbes de mobilité : l'ajout successif de barrage modifie très peu le niveau de mobilité. Le maximum d'écart de mobilité caractéristique est d'environ 2 dB. En revanche, on remarque que le barrage ajoute de l'amortissement. En effet, la dispersion de mobilité est moins importante pour les tables barrées que pour la table non barrée. Cette augmentation d'amortissement confirme la remarque du paragraphe 3.1.2.2 qui précisait que l'amortissement augmentait entre une demi-table nue et une guitare finie. Pour compléter cette remarque, le barrage semble également apporter sa contribution dans l'ajout d'amortissement.

Les valeurs de raideur et masse équivalente sont en revanche assez contre-intuitives, le passage entre les stades 2 et 3 fait diminuer le niveau de masse et de raideur équivalente, alors que l'on a explicitement rajouté de la masse et de la raideur sur la table. Ce paradoxe s'explique par le fait que bien que l'on ait ajouté globalement de la masse et de la raideur



(a) Mobilités mesurées et moyennes des tables de guitare classique, à différents stades de fabrication



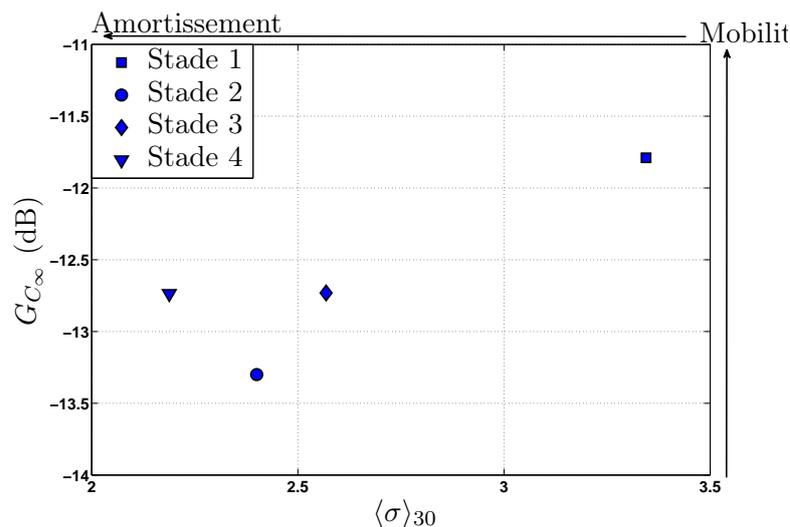
(b) Mobilités mesurées et moyennes des tables de guitare folk, à différents stades de fabrication

FIGURE 5.1 – Mobilités mesurées et moyennes des tables d’harmonie de guitare a) classique et b) folk, mesurées en un point, celui où sera attachée la corde basse (E2) une fois l’instrument terminé.

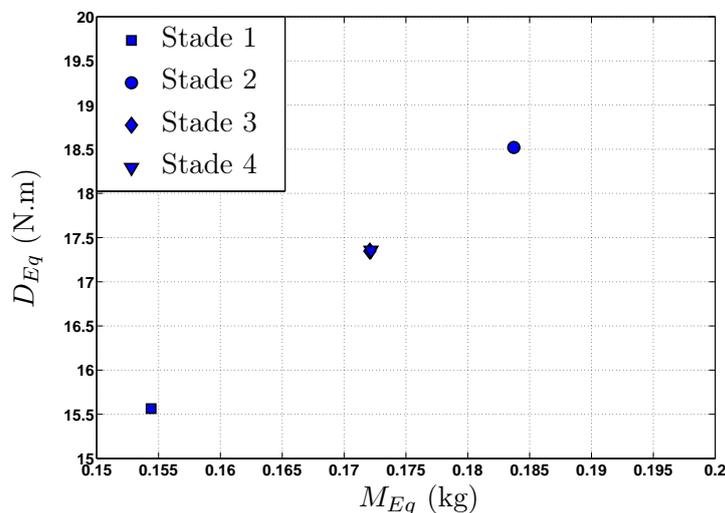
sur la table, la mise en place des barrages épais à pour conséquence de réduire la surface active ou vibrante de la table. La surface de la plaque équivalente est ainsi fortement réduite ce qui entraîne une diminution de la masse de la structure vibrante équivalente.

5.1.1.5 Paramètres caractéristiques des tables de guitare folk

Les paramètres caractéristiques des tables d’harmonie de guitare folk sont représentés sur la figure 5.3.



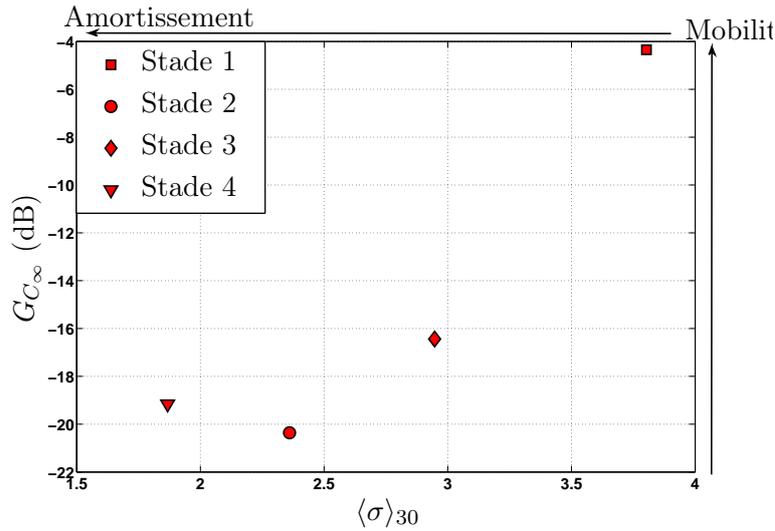
(a) Dispersion de mobilité et mobilité caractéristique de tables de guitare classique, estimées à différents stades de fabrication



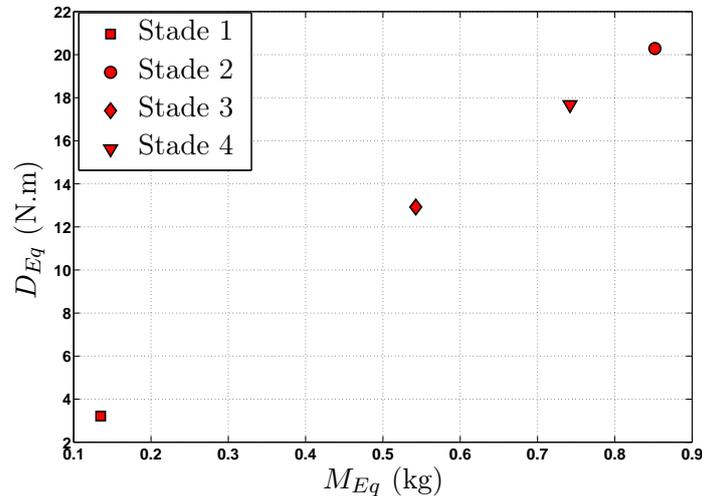
(b) Masse équivalente et raideur équivalente de tables de guitare classique, estimées à différents stades de fabrication

FIGURE 5.2 – Représentation des valeurs des paramètres caractéristiques des tables de guitare classique. a) Dispersion de mobilité et mobilité caractéristique. b) Masse et raideur équivalente

Les variations des paramètres caractéristiques des tables d'harmonie de guitare folk au cours du processus de fabrication sont similaires à celles observées pour les guitares classiques. L'ajout successif de barrage a tendance à augmenter l'amortissement global de la structure : les courbes de mobilité sont plus serrées autour de leur valeur moyenne. Le paradoxe de diminution de masse et raideur entre le stade 2 et le stade 3 est également observé. Toutefois, il existe une différence importante avec les guitares classiques : l'écart entre la mobilité caractéristique de la table nue au stade 1 et celles des stades supérieurs est bien



(a) Dispersion de mobilité et mobilité caractéristique de tables de guitare folk, estimées à différents stades de fabrication



(b) Masse équivalente et raideur équivalente de tables de guitare folk, estimées à différents stades de fabrication

FIGURE 5.3 – Représentation des valeurs des paramètres caractéristiques des tables de guitare folk. a) Dispersion de mobilité et mobilité caractéristique. b) Masse et raideur équivalente

plus important dans le cas de la guitare folk. Comme évoqué précédemment, cela provient du fait que les raidisseurs sont plus important pour les guitares folks afin de supporter une tension plus forte des cordes. D'ailleurs, on peut remarquer sur les photographies du tableau 5.1 représentant la table d'harmonie de la guitare folk à partir du stade 2 qu'une pièce de bois est ajoutée derrière l'emplacement du futur chevalet. L'augmentation d'épaisseur a pour conséquence à la fois une augmentation de masse et également une augmentation de raideur, cette dernière étant proportionnelle à h^3 où h est l'épaisseur de la structure.

5.1.2 Caractérisation de chevalets d'ukulélé

5.1.2.1 Problématique

Ce projet a été réalisé avec Dominique Chevalier, luthier guitare et ukulélé dans le Gard. Des premiers résultats ont été présentés lors du congrès *Forum Acusticum* se tenant à Aalborg, au Danemark, en juin 2011 [49].

Le projet consiste à caractériser différents chevalets de ukulélé, qui est une petite guitare hawaïenne à quatre cordes. Le chevalet est un élément essentiel d'un instrument à cordes, c'est lui qui assure le transfert d'énergie de la corde vers la table d'harmonie. Dans le cas d'instruments à cordes pincées, tels que la guitare ou le ukulélé, il ajoute une masse et une raideur qui ne sont pas négligeables : sa masse est du même ordre de grandeur que celle de la table d'harmonie, et étant plus épais que la table d'harmonie, sa raideur est plus importante que cette dernière. Le choix de la forme, des dimensions, mais surtout du matériau utilisé par le luthier pour concevoir le chevalet est par conséquent une question fréquemment rencontrée par le luthier. L'évolution des paramètres caractéristiques d'un instrument à cordes pincées en fonction des caractéristiques du chevalet donne des informations utiles au luthier pour qu'il puisse contrôler la réponse dynamique de son instrument, une fois celui-ci terminé. Par exemple, le niveau moyen de couplage, quantifié par la mobilité moyenne au chevalet est un paramètre important à connaître, afin de pouvoir régler le compromis entre puissance sonore et durée de son. Cette étude est une tentative de réponse à cette problématique : un instrument est caractérisé pour plusieurs configurations de chevalet différentes.

5.1.2.2 Procédure

Les mesures ont été effectuées sur un même ukulélé dans 4 configurations différentes :

1. configuration sans chevalet,
2. configuration avec un chevalet en acajou, qui est l'essence de bois généralement utilisée,
3. configuration avec un chevalet en palissandre,
4. configuration avec le chevalet en palissandre légèrement scié entre chaque point d'attache de corde.

Les photographies représentant chacune des configurations sont regroupées dans le tableau 5.2

Les mesures sont prises en un seul point, à la base de la corde la plus grave de l'instrument (*cf.* photographies du tableau 5.2). Les cordes sont étouffées et l'instrument suspendu. La réponse impulsionnelle est mesurée grâce à l'acquisition simultanée et colocalisée du signal d'accélération et de force.

Elements	Masse (g)	Image
Table d'harmonie	42	
Chevalet acajou	3	
Chevalet palissandre	7	
Chevalet palissandre modifié	6	
Sillet	1	

TABLE 5.2 – Différentes configurations du ukulélé avec les masses des différents chevalets utilisés.

5.1.2.3 Mobilités dans les différentes configurations

Les courbes de mobilités du ukulélé dans les 4 configurations différentes sont regroupées et tracées dans la figure 5.4. Les courbes de mobilité moyennes sont également tracées.

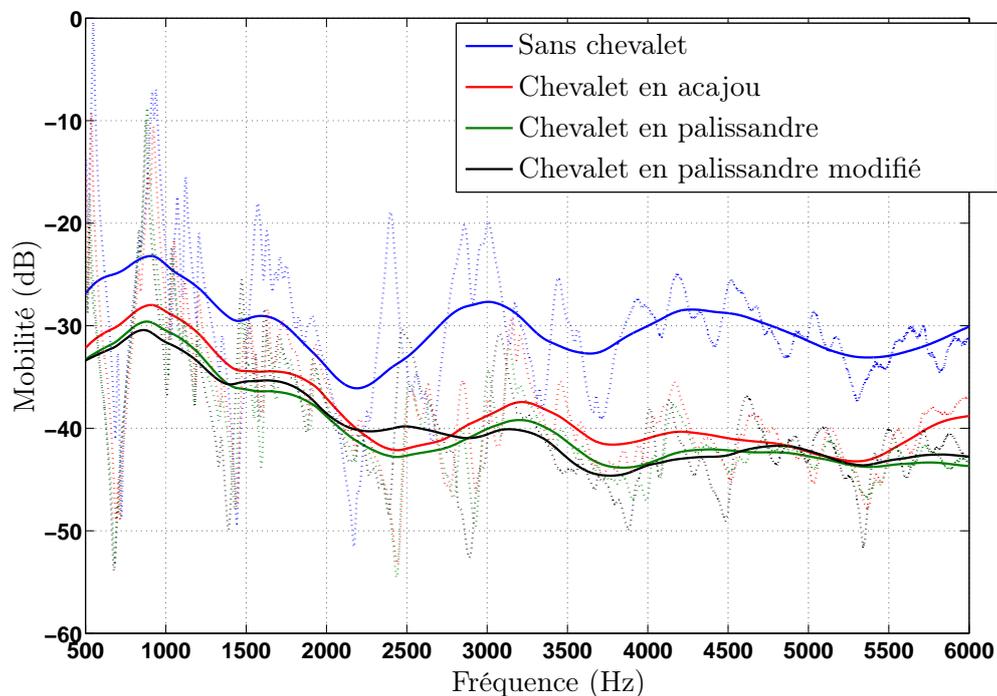


FIGURE 5.4 – Mobilités mesurées et moyennes des différentes configurations du ukulélé, sans chevalet, avec un chevalet en acajou, en palissandre, et en palissandre scié entre les points d'attache des cordes.

De manière attendue, la mise en place d'un chevalet abaisse le niveau de mobilité. La différence de mobilité moyenne est d'une dizaine de dB au-delà de 3000 Hz. Avant 3000 Hz, l'effet du chevalet est moins important, la différence se situant entre 5 et 7 dB. Le couplage avec la cavité, particulièrement important en basses fréquences, permet de diminuer la perte de mobilité induite par la masse ajoutée du chevalet.

Lorsque le chevalet est collé sur l'instrument, le niveau global de mobilité est du même ordre de grandeur pour les 3 différentes configurations. Les changements de masse et de raideur sont moins conséquents que le changement entre la table d'harmonie sans chevalet et avec chevalet.

5.1.2.4 Paramètres caractéristiques d'un ukulélé dans ses différentes configurations

Densité modale

La densité modale du ukulélé dans les différentes configurations est estimée à l'aide de la méthode ESPRIT.

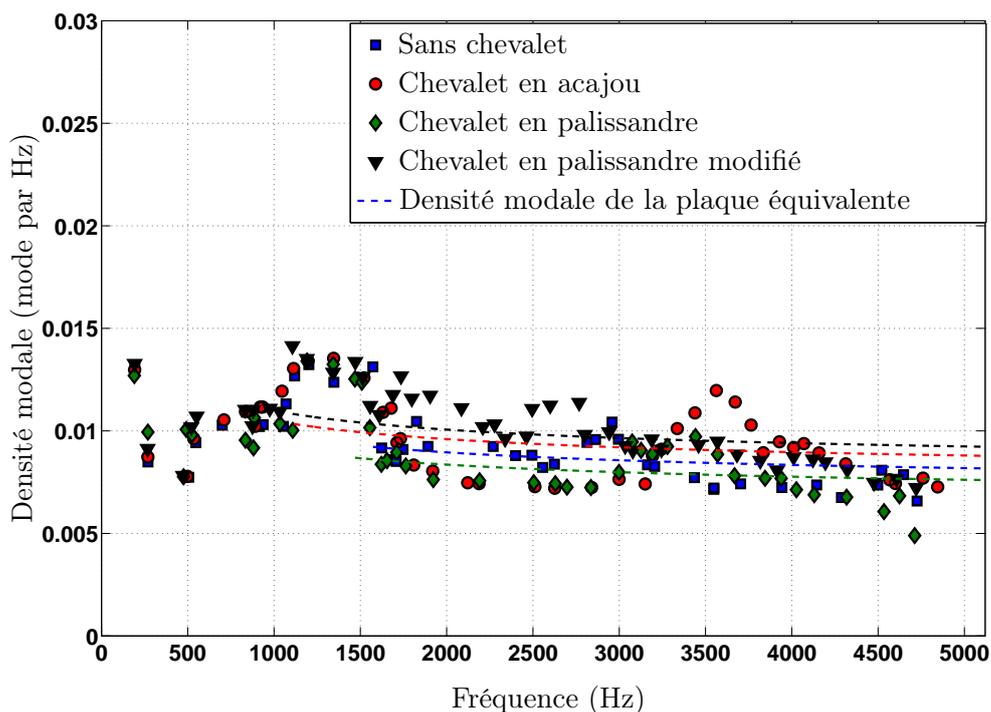


FIGURE 5.5 – Densité modale du ukulélé dans ses 4 configurations différentes. La densité modale analytique de la plaque équivalente au ukulélé est tracée en pointillés.

La densité modale possède la même allure générale que celle observée sur les guitares (*cf.* figure 5.5). Elle varie peu à partir des moyennes fréquences, dont la limite est située aux alentours de 1500 Hz. A partir de cette limite, la densité modale décroît très légèrement,

et tend vers une valeur constante, située aux alentours de 0.01 mode par Hertz, soit un mode tous les 100 Hz. Cette valeur est plus faible que la densité modale des guitares, ce qui est réaliste, la table d'harmonie des ukulélés étant beaucoup plus petite que celle des guitares. Elle est également du même ordre de grandeur que la densité modale en hautes fréquences des violons, qui présentent une taille de table d'harmonie comparable à celle des ukulélés. Il est donc possible d'appliquer la même méthode que pour les guitares afin d'estimer une masse et une raideur équivalente. Sachant que les dimensions de la plaque équivalente sont à fixer arbitrairement, nous prenons des dimensions inférieures que celles de la plaque équivalente aux guitares. Les dimensions considérées sont $L_x = L_y = 15$ cm.

Paramètres caractéristiques de la plaque équivalente

Les valeurs des paramètres caractéristiques sont représentées sur la figure 5.6.

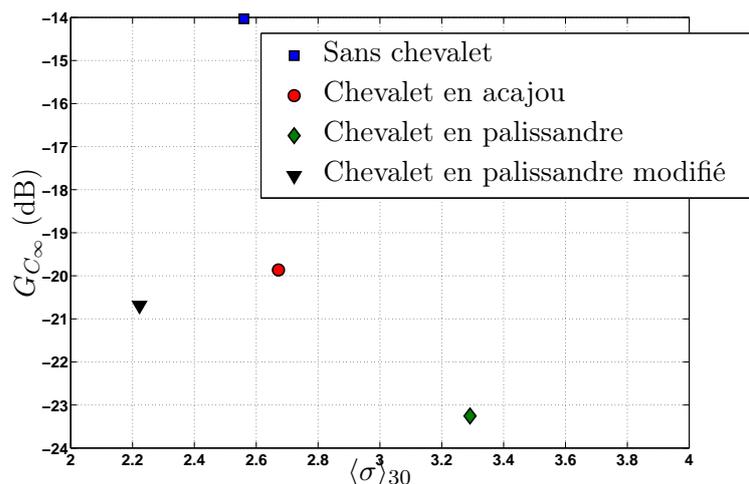
Le calcul du paramètre de mobilité caractéristique G_{C_∞} confirme la diminution de mobilité induite par l'ajout successif de masse sur l'instrument. En effet, plus le système table-chevalet est lourd, plus la mobilité caractéristique est faible. Notons que la différence de mobilité caractéristique entre la configuration avec le chevalet en palissandre scié et celle avec le chevalet en acajou est très faible, la configuration scié étant globalement moins mobile de 0.8 dB. La différence de mobilité caractéristique entre les configurations avec et sans chevalet est située entre 6 et 9 dB.

L'ajout de masse est confirmé par le fait que la masse équivalente est également croissante au fur et à mesure de l'augmentation de masse du chevalet. Il en va de même pour la raideur, le module d'Young du palissandre est plus grand que celui de l'acajou¹, expliquant le fait que la raideur équivalente de la configuration avec le chevalet en palissandre soit plus grande que celle de la configuration en acajou. Notons également que le fait d'avoir modifié le chevalet en palissandre en le sciant a eu pour effet à la fois de diminuer très légèrement la masse et de manière plus sensible la raideur, ce qui est en accord avec les attentes. En effet, le chevalet scié possède une masse diminuée de seulement 1 g par rapport à la configuration nominale, et la modification a été effectuée dans le but de diminuer la raideur du chevalet.

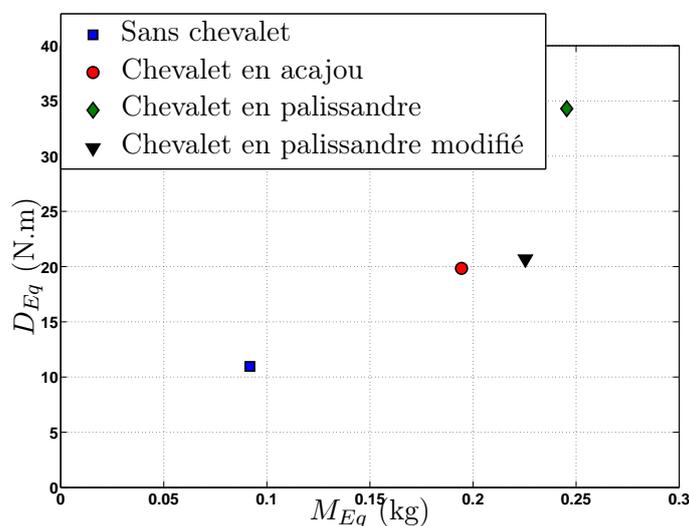
Contrairement à l'ajout de barrage, l'ajout de masse au chevalet semble être associé à une diminution de l'amortissement global de la structure : la dispersion de mobilité étant plus grande pour les configurations avec chevalet en acajou et en palissandre non modifié que pour la configuration sans chevalet. Notons aussi le fait que la modification du chevalet en palissandre a eu pour effet de diminuer la dispersion de mobilité, et par conséquent d'augmenter l'amortissement.

La nature du matériau utilisé pour le chevalet possède une importance non négligeable sur le comportement mécanique global de l'instrument. Des matériaux souples et légers

1. 12.5 GPa pour le palissandre contre 10.0 GPa pour l'acajou



(a) Dispersion de mobilité et mobilité caractéristique de ukulélé, estimées pour différentes configurations de chevalet



(b) Masse équivalente et raideur équivalente de ukulélé, estimées pour différentes configurations de chevalet

FIGURE 5.6 – Représentation des valeurs des paramètres caractéristiques des différentes configurations du ukulélé. a) Dispersion de mobilité et mobilité caractéristique. b) Masse et raideur équivalente

augmentent sensiblement le niveau de mobilité, permettant d'obtenir un niveau sonore globalement plus important pour une excitation de corde donnée. En revanche, si l'on souhaite produire un son existant plus longtemps, on choisira un matériau plus raide et dense. Ce type de matériau réduit le niveau moyen de mobilité. Dans notre étude, la différence de niveau moyen de mobilité entre un ukulélé monté avec un chevalet en acajou et le même ukulélé monté avec un chevalet en palissandre, plus dense et plus raide que l'acajou, est de l'ordre de 3 dB.

L'étude révèle également que la modification du chevalet permet aussi de modifier le comportement global de l'instrument. Par exemple, le fait de scier un chevalet fait en un matériau dense et raide permet à l'instrument d'avoir des paramètres mécaniques plus proches de ceux de l'instrument avec un chevalet construit dans un autre matériau, plus léger et plus souple. Dans notre cas la différence de mobilité caractéristique est proche de 0.8 dB entre la configuration avec le chevalet en palissandre scié et la configuration avec le chevalet en acajou, alors qu'elle est de 3 dB entre les configurations avec chevalet en palissandre non scié et chevalet en acajou.

5.1.3 Un barrage de guitare ajustable

5.1.3.1 Problématique

Ce projet a été réalisé avec Jean-Marie Fouilleul, luthier guitare en Ile-et-Vilaine, qui a développé un système de barre réglable (*cf.* figure 5.7), dans le but d'ajuster la mise sous tension de la table d'harmonie. En effet, le barrage traditionnel des guitares ne permet pas d'ajuster la raideur, ou les précontraintes, de la table. Sur le violon, ceci est rendu possible grâce à l'âme, qui permet ce réglage de précontrainte sur la table d'harmonie. Cette étude est un moyen de connaître les possibilités qu'offre le système de barre réglable en terme de modifications de comportement mécanique de l'instrument. Nous étudions différentes configurations de cette arche réglable sur le même instrument.



FIGURE 5.7 – Photographie de l'intérieur de la guitare de Jean-Marie Fouilleul montrant la barre réglable, ainsi que la molette permettant le réglage.

5.1.3.2 Procédure

Le tableau 5.3 détaille les masses des différents objets qui sont utilisés pour l'étude. La barre permettant le réglage est la barre épicea-carbone, les deux autres n'étant pas réglables. Le réglage de la tension se fait à l'aide d'une molette en aluminium.

Objet	Masse (g)
Molette aluminium	9.7
Barre épicéa - carbone	7.8
Barre épicéa, version 1	14.7
Barre épicéa, version 2	10.9

TABLE 5.3 – Masses des différents éléments utilisés.

Les mesures s'effectuent en un seul point, à la base de la corde la plus grave (E2). La guitare est suspendue de la même manière que les études précédentes. La réponse impulsionnelle est mesurée par une acquisition simultanée et colocalisée du signal d'accélération et du signal de force.

5.1.3.3 Mobilité et densité modale

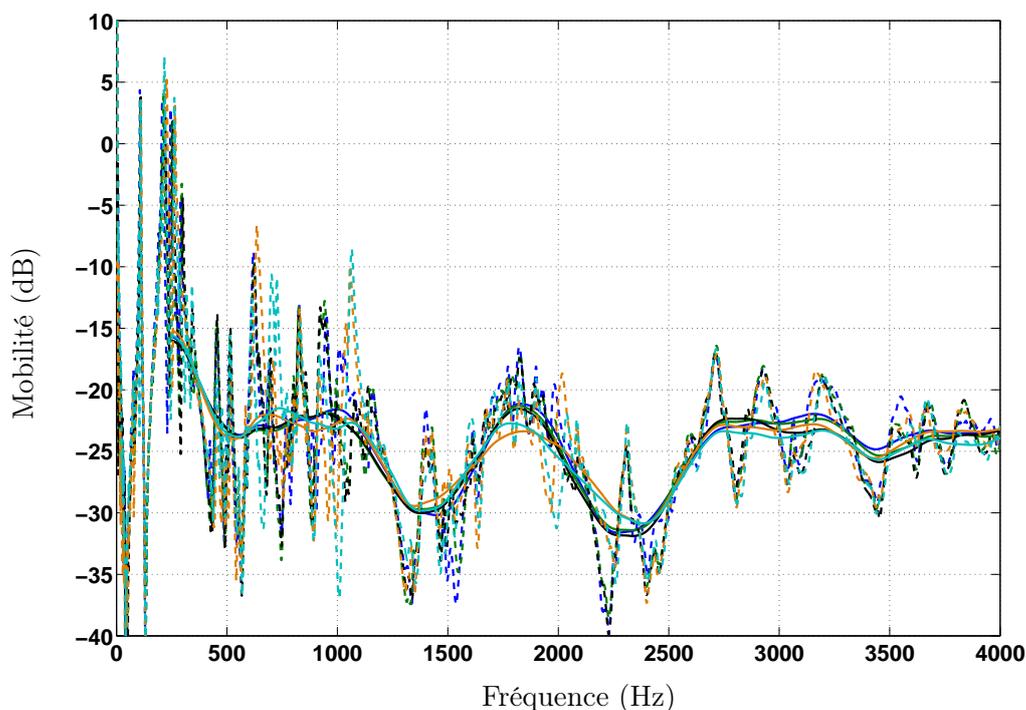


FIGURE 5.8 – Mobilité mesurée et moyenne de la guitare de Jean-Marie Fouilleul GF_1 pour les différentes configurations. Les mobilités mesurées sont tracées en traits pointillés.

Le tracé des mobilités mesurées et moyennes des différentes configurations de la guitare, représentées sur la figure 5.8, révèlent un comportement assez particulier de cette guitare. Nous n'observons pas le comportement constant habituel : il existe deux zones "creuses" de mobilité, une vers 1500 Hz, et une autre entre 2000 et 2500 Hz. La mobilité moyenne dans ces zones fréquentielles est abaissée de 6 à 10 dB par rapport à la mobilité des autres

régions fréquentielles. Cette particularité est présente dans toutes les configurations. Le réglage de la barre ne permet d'ajuster l'amplitude et la position des creux que dans une très faible mesure.

La densité modale de la guitare dans les différentes configurations est représentée sur le figure 5.9. Pour toutes les configurations, nous observons aussi un creux de densité modale entre 1000 et 1600 Hz, dans la même zone de fréquence que celle où la mobilité des guitares est plus faible qu'ailleurs. Les creux de mobilité observés sur la figure 5.8 sont donc causés par une diminution de la densité modale à l'intérieur de cette zone fréquentielle.

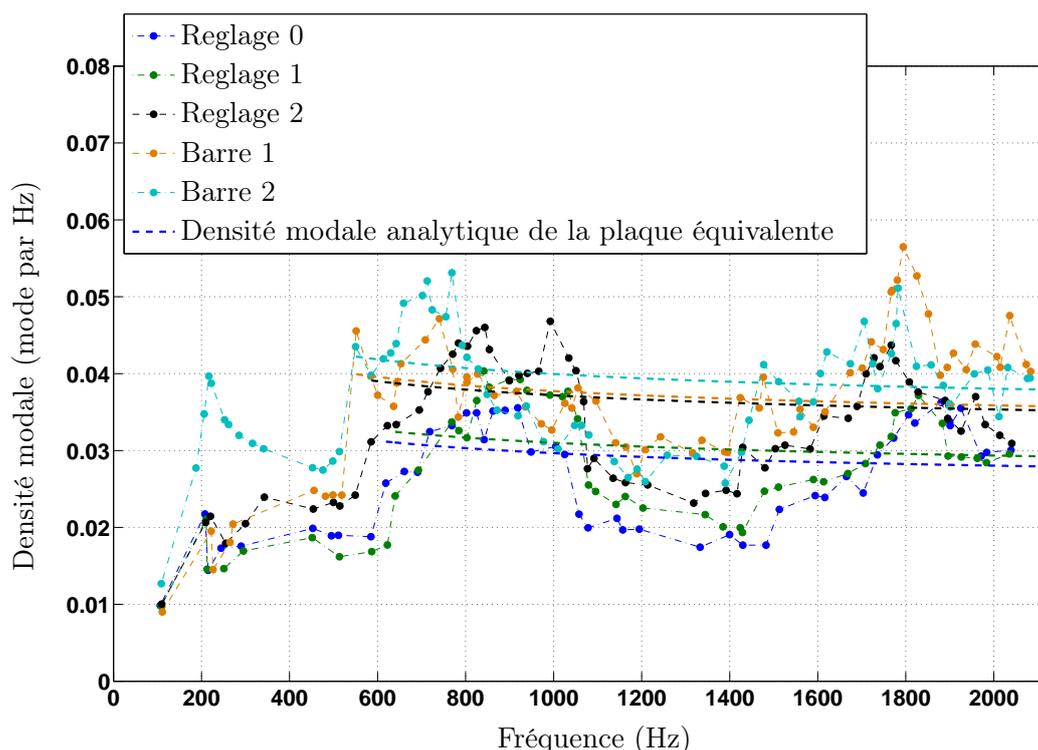


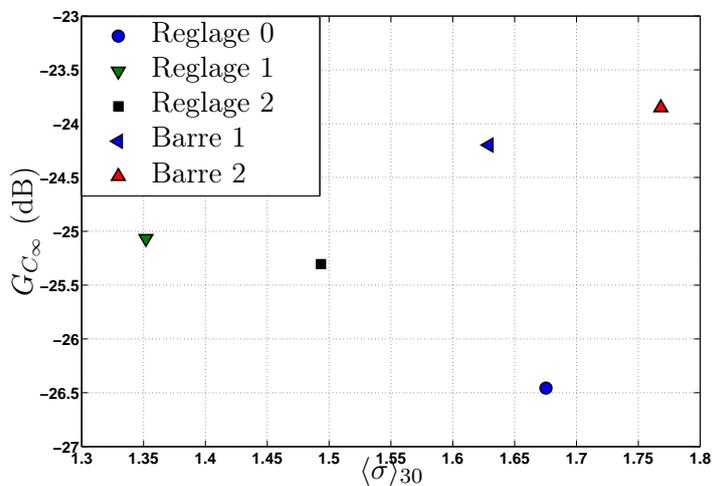
FIGURE 5.9 – Densité modale de la guitare de Jean-Marie Fouilleul GF_1 pour les différentes configurations. Les densités modales analytiques de la plaque équivalente sont tracées en pointillés.

5.1.3.4 Paramètres caractéristiques

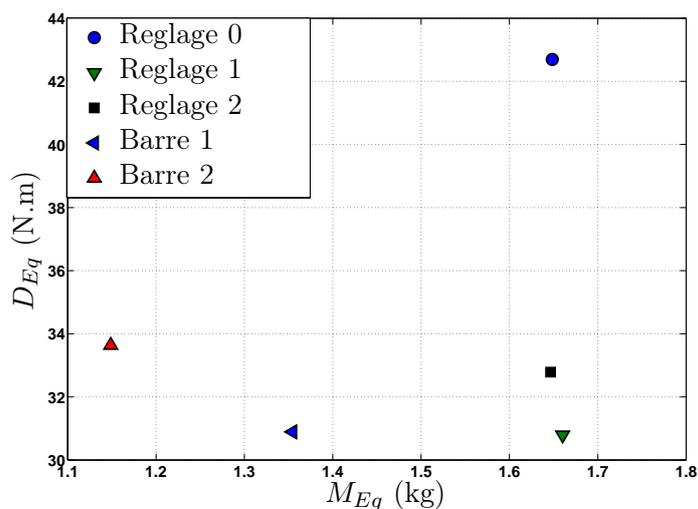
Les valeurs des paramètres caractéristiques, regroupées sur la figure 5.10, révèlent que la tension sur la table influe particulièrement sur la raideur équivalente, la masse équivalente n'étant que très peu modifiée. Celle-ci est en revanche modifiée lorsque l'ensemble barre d'origine-molette est remplacé par les barres traditionnelles. D'ailleurs, intuitivement, la masse équivalente est d'autant plus faible que les barres sont légères.

La mise sous tension de la barre diminue la raideur équivalente sans modifier sensiblement la masse équivalente. Le réglage de cette tension permet donc d'ajuster le niveau

global de mobilité par l'intermédiaire d'un ajustement de la raideur équivalente de la table d'harmonie. Notre étude révèle qu'on peut ainsi augmenter la mobilité caractéristique de 1.5 dB à l'aide de la barre réglable.



(a) Dispersion de mobilité et mobilité caractéristique de la guitare GF_1 dans plusieurs configurations



(b) Masse et raideur équivalente de la guitare GF_1 dans plusieurs configurations

FIGURE 5.10 – Représentation des valeurs des paramètres caractéristiques des différentes configurations de la guitare de Jean-Marie Fouilleul GF_1 . a) Dispersion de mobilité et mobilité caractéristique. b) Masse et raideur équivalente.

Le réglage de tension de la table permet aussi d'ajuster l'amortissement de la table, et par conséquent, la dispersion de mobilité. La mise en place de ce système est donc un moyen efficace de régler les paramètres mécaniques de l'instrument. Les méthodologies développées constituent un appui essentiel pour le luthier, voire pour le musicien : elles

quantifient ces changements de comportement mécanique permettant d'ajuster de manière précise la configuration désirée.

5.2 Aide à la lutherie d'instruments à cordes frottées

Les projets traitant des instruments à cordes frottées mettent en pratique les méthodes développées au chapitre 4. Les problématiques sont divisées en 2 principales catégories : l'analyse du comportement mécanique des violons et l'analyse de leurs sons.

5.2.1 Réglages de l'âme d'un violon

5.2.1.1 Problématique

Ce projet a été réalisé avec Nicolas Démarais, luthier violon à Grenoble. Il porte sur l'étude de l'influence de la position de l'âme sur le comportement mécanique global de l'instrument. Pour rappel, l'âme est une pièce cylindrique, généralement faite de bois, reliant la table d'harmonie au dos de l'instrument. Elle est située à l'intérieur de la cavité, placée à proximité d'un des pieds du chevalet, à l'opposé de la barre d'harmonie. La position de l'âme est considérée comme importante dans le réglage fin de l'instrument. Elle permet de contrôler la tension et les précontraintes imposées à la table d'harmonie. L'étude présentée décrit l'influence de la position de l'âme sur le comportement global du violon. Ce projet est une tentative de caractérisation de plusieurs configurations d'un même instrument. L'archivage des paramètres obtenus pour un réglage donné permet d'objectiver une configuration, et donc, potentiellement permet de la retrouver après dérèglement. Pour l'expérience, nous étudions un violon pour lequel on positionne l'âme à 5 positions différentes : la position d'origine, à savoir celle jugée comme optimale par le luthier, et 4 autres positions autour de la position optimale (*cf.* la figure 5.11). La position jugée comme optimale par le luthier est appelée *position 0* pour la suite de l'étude.

5.2.1.2 Procédure

Les mesures sont effectuées sur le violon suspendu par ses mécaniques à l'aide d'une corde. L'accélération est mesurée dans la direction perpendiculaire à la table, en collant l'accéléromètre au pied du chevalet. L'impact est effectué à proximité de l'accéléromètre, dans la direction transverse.

La mobilité et la densité modale du violon sont mesurées pour 5 positions d'âme différentes. Ces positions sont représentées sur la figure 5.11.

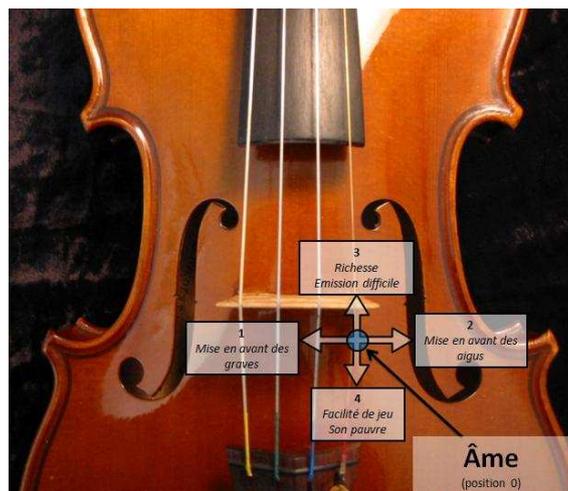


FIGURE 5.11 – Différentes positions de l'âme du violon de Nicolas Démarais

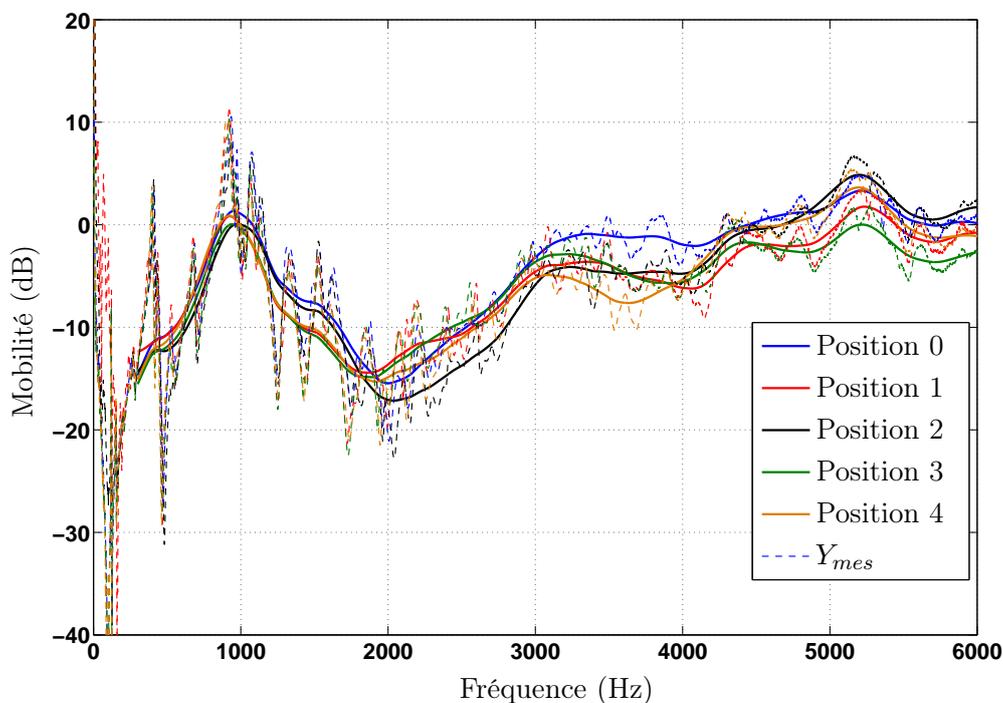


FIGURE 5.12 – Mobilité mesurée (trait en pointillés) et moyenne (trait plein) du violon de Nicolas Démarais pour les différentes positions de l'âme.

5.2.1.3 Mesures de mobilités et densité modale

La mobilité du violon dans les 5 différentes configurations sont tracées sur la figure 5.12, ainsi que la mobilité moyenne. Les courbes ont globalement toutes la même allure, à savoir une amplification entre 500 et 2000 Hz, centrée entre 900 Hz et 1000 Hz, fréquence que nous appelons f_c pour *fréquence de concentration*. A partir de 2000 Hz, la tendance moyenne de

mobilité croit et atteint un niveau équivalent à celui de f_c . Nous nous intéresserons à la première partie de ces courbes, à savoir l'amplification centrée sur f_c .

Les niveaux de mobilité moyenne varient légèrement d'une configuration à l'autre. La courbe de mobilité moyenne qui correspond à la configuration 0 est par exemple au-dessus des courbes correspondant aux autres configurations, excepté entre 2000 et 3000 Hz où la mobilité moyenne de la position 0 est globalement inférieure à celles de la position 1 et 3.

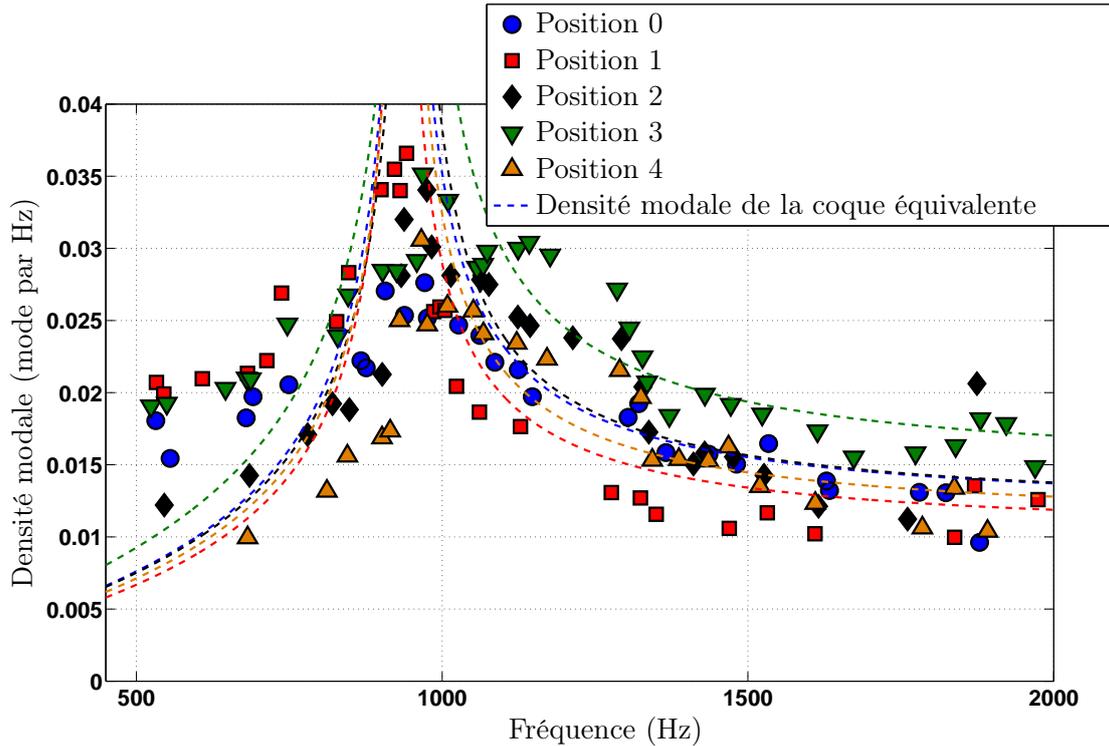
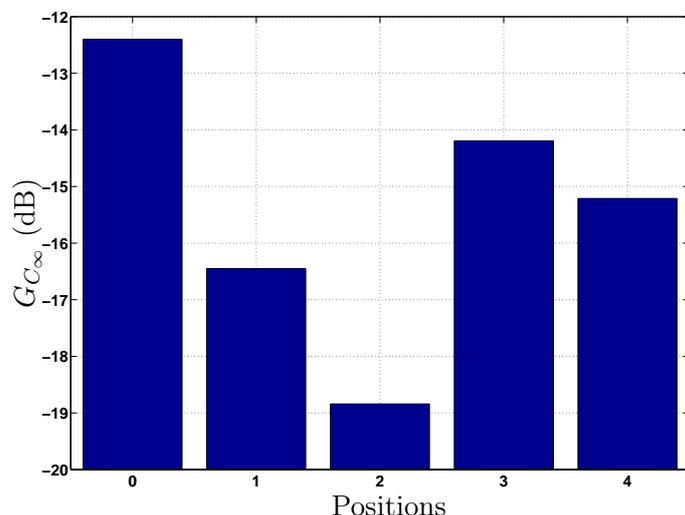


FIGURE 5.13 – Densité modale du violon de Nicolas Démarais VD_1 pour les différentes positions du violon. Les densités modales analytiques de la coque équivalente sont tracées en pointillés.

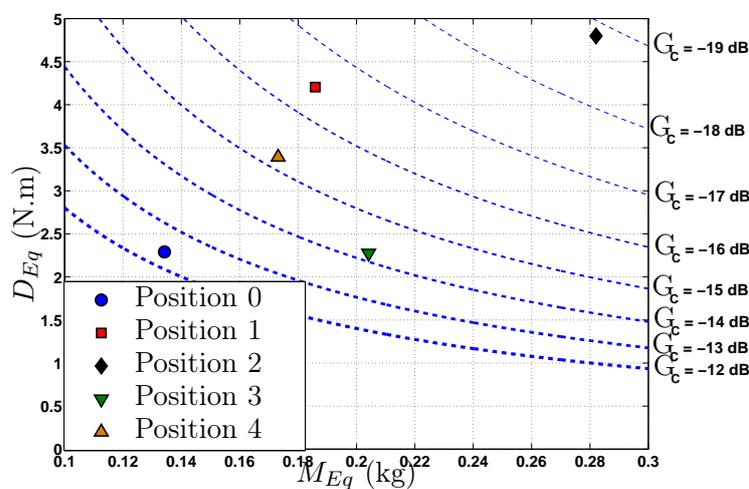
L'allure générale des courbes de mobilité moyenne est à rapprocher à celle des courbes de densité modale, tracées sur la figure 5.13. Le profil de densité modale et l'allure moyenne de la courbe de mobilité sont identiques à ceux d'une coque. En effet, il existe de manière systématique un pic de densité modale entre 900 et 1000 Hz. Lorsque la fréquence est supérieure à 1000 Hz, la densité modale tend vers une valeur constante, située aux alentours de 0.015 mode par Hertz, ce qui est bien inférieur à la valeur de densité modale à 1000 Hz, qui est située entre 0.035 et 0.045 mode par Hertz. Ces observations confirment celles effectuées au paragraphe 4.1. La méthode d'estimation des paramètres caractéristiques de la coque équivalente peut par conséquent s'appliquer à notre étude.

5.2.1.4 Paramètres caractéristiques du violon

Nous étudions 3 paramètres du violon pour les 5 différentes positions de l'âme. Ces paramètres sont la mobilité caractéristique de la plaque équivalente, notée G_{C_∞} , la masse équivalente et la raideur équivalente.



(a) Mobilité caractéristique de la plaque équivalente du violon VD_1 pour plusieurs positions de l'âme



(b) Masse et raideur équivalente du violon VD_1 pour plusieurs positions de l'âme

FIGURE 5.14 – Représentation des valeurs des paramètres caractéristiques du violon de Nicolas Démarais pour les 5 différentes positions de l'âme. a) Mobilité caractéristique de la plaque équivalente. b) Masse et raideur équivalente. Les traits en pointillés sont les courbes d'isomobilité, exprimées en dB.

Le réglage de la position de l'âme permet de modifier le comportement global de l'instrument. Plus particulièrement, on constate d'après les valeurs de G_{C_∞} que la position

jugée optimale par le luthier est celle qui correspond à une mobilité plus importante. Nous pouvons alors supposer que le luthier règle l'âme de manière à ce que le violon soit globalement plus efficace à vibrer, et par suite plus efficace à produire un son. Les deux paramètres jouant sur cette valeur de G_{C_∞} sont la masse et la raideur du système équivalent. Le réglage de l'âme permet aussi d'ajuster les contributions respectives des deux termes dans la mobilité globale. L'estimation de ces paramètres permet donc au luthier de caractériser efficacement l'instrument pour plusieurs réglages qu'il est amené à effectuer sur celui-ci.

5.2.2 Caractérisation mécanique d'un ensemble de violons

5.2.2.1 Problématique

Ce projet a été réalisé avec Gilles Orin, luthier instruments du quatuor à Rennes. Il consiste à étudier une collection de violons pour tenter de les discriminer de manière objective. Cette étude répond au besoin de discriminer objectivement plusieurs instruments d'une même famille. La méthodologie d'estimation des paramètres caractéristiques d'une coque équivalente au violon, utilisée avec succès pour caractériser plusieurs configurations d'un même violon est particulièrement bien adaptée à cette problématique. Par conséquent, nous concentrons notre étude sur l'analyse du comportement mécanique global des violons, et plus particulièrement sur la zone fréquentielle comprise entre 500 et 2000 Hz, à l'intérieure de laquelle le violon a été observée se comportant comme une coque. Cette étude sur une collection de violons permet également d'observer la variation d'allure moyenne de mobilité au sein d'une population de violons.

5.2.2.2 Procédure

Nous disposons de mesures de mobilité d'une collection de violons, au nombre de 9. Parmi les 9 violons, nous disposons d'un violon au format 7/8, qui est noté n°6 et un violon non verni, noté n°9. Les autres violons sont des violons conçus de manière traditionnelle. Les mesures de mobilité sont effectuées sur le violon suspendu à ses mécaniques. La mobilité est mesurée à l'aide de l'acquisition simultanée du signal d'accélération et de force. L'accéléromètre est placé sur la table, au pied du chevalet, et l'impact est donné à proximité de l'accéléromètre, dans la direction transverse. La figure 5.15 est une photographie indiquant l'emplacement des capteurs par rapport au chevalet lors des mesures.

5.2.2.3 Paramètres caractéristiques des violons

Les valeurs des paramètres caractéristiques des coques équivalentes aux 9 violons sont regroupées sur la figure 5.16. Ces paramètres sont la mobilité caractéristique G_{C_∞} , la masse et la raideur équivalente.

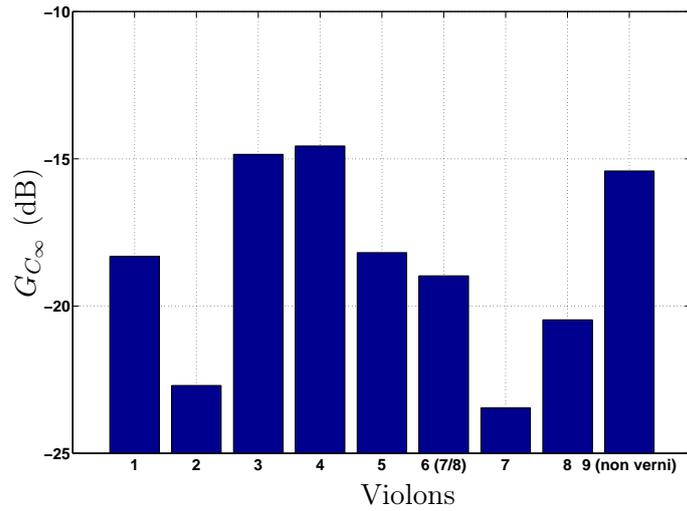


FIGURE 5.15 – Emplacement des capteurs lors de la mesure de mobilité.

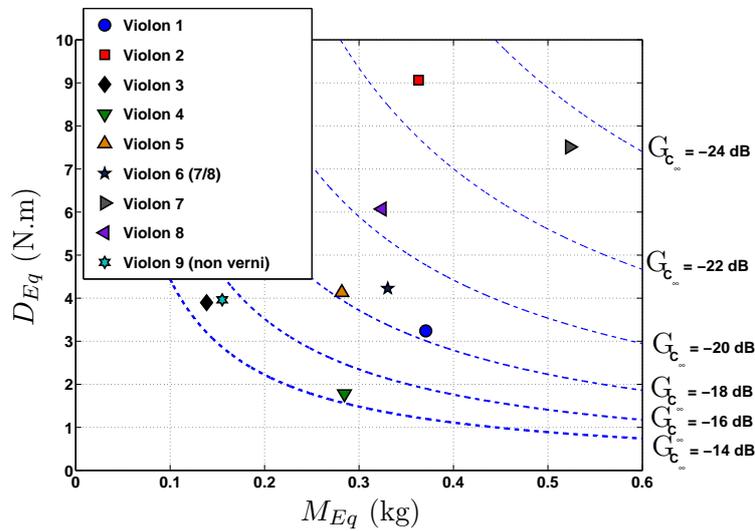
Il existe de grandes disparités en ce qui concerne la mobilité caractéristique entre instruments. Les extrêmes diffèrent de plus de 9 dB. En effet deux violons présentent des mobilités caractéristiques très faibles, comprises entre -24 et -23 dB. En revanche deux violons finis présentent des mobilités caractéristiques très fortes, d'une valeur située aux alentours de -15 dB. Un troisième violon présente une valeur de mobilité caractéristique proche de -15 dB, c'est un violon non verni. Malheureusement nous ne possédons pas d'analyse pouvant affirmer si une telle mobilité est due au fait qu'il soit non verni ou pas. Toutefois, les outils et les méthodes développées permettront aux luthiers d'effectuer eux-mêmes ce type d'étude. Enfin, un groupe de 4 violons présentent une mobilité caractéristique comprise entre -20 et -18 dB.

Ces trois groupes se retrouvent sur le plan masse-raideur équivalentes : les instruments ayant une plus forte mobilité sont ceux possédant les plus faibles valeurs de masse et de raideur équivalentes. À l'inverse, les deux instruments très peu mobiles sont les plus denses et raides. Enfin, le groupe de 4 violons, possédant une mobilité caractéristique intermédiaire, se regroupent au centre du plan, avec également des valeurs intermédiaires de masse et de raideur équivalentes.

Le chapitre 3 présentait un moyen de discriminer efficacement deux populations de guitares à travers leurs valeurs de paramètres caractéristiques d'une plaque équivalente. Les deux groupes représentés dans un plan masse et raideur équivalente montrait une séparation nette entre ceux-ci. Cette étude montre qu'il est possible d'effectuer ce type de discrimination pour les violons, à travers l'estimation des paramètres caractéristiques d'une coque équivalente. L'analyse sur 9 violons a permis de repérer clairement les violons peu mobiles des violons très mobiles, et ceux présentant une mobilité intermédiaire. À terme, une telle analyse sur un très large corpus d'instrument permettra de définir des classes d'instruments à partir des valeurs des paramètres caractéristiques des coques équivalentes des violons.



(a) Mobilité caractéristique de la plaque équivalente



(b) Masse et raideur équivalente

FIGURE 5.16 – Représentation des valeurs des paramètres caractéristiques des violons VO_1 à VO_9 mis à disposition par Gilles Orin. a) Mobilité caractéristique de la plaque équivalente. b) Masse et raideur équivalente. Les traits en pointillés sont les courbes d'isomobilité, exprimées en dB.

Notons que les paramètres de la coque équivalente ne caractérisent que le premier pic de mobilité et de densité modale. Les autres pics de ces courbes sont également des caractéristiques importantes. L'ensemble participe à la définition de la signature de l'instrument.

5.2.3 Analyses de réponses acoustiques : effet d'une sourdine

5.2.3.1 Problématique

Ce projet a été réalisé en collaboration avec l'IRCAM. Il part de la volonté du compositeur Yan Maresz de développer un prototype de sourdine ajustable applicable sur un alto. Le but étant de modifier le timbre de l'instrument au cours de la pièce. Nous verrons dans un premier temps comment la mise en place d'une sourdine modifie la mobilité au chevalet d'un violon, puis nous appliquerons certaines des méthodes développées au paragraphe 4.2, afin d'étudier les modifications des caractéristiques spectrales qu'imposent la sourdine sur l'instrument en situation de jeu.

Ce type d'analyse a pour objectif sous-jacent de comprendre l'influence du comportement mécanique sur les caractéristiques spectrales, notamment lorsque l'instrument est soumis à des modifications, telles qu'une sourdine par exemple. Cela intéresse évidemment les luthiers, mais aussi les musiciens qui cherchent par exemple à mieux anticiper les effets d'une sourdine sur le timbre de l'instrument.

5.2.3.2 Procédure

Nous disposons de deux violons. Leur mobilité est mesurée dans les deux configurations : sans sourdine, appelée configuration nominale, et avec une petite sourdine en caoutchouc. Il y a donc 4 mesures de mobilité, correspondant aux deux violons chacun dans deux configurations différentes. Les violons sont tenus avec une pince au niveau du manche. A l'autre extrémité, le bouton repose sur une plaque de mousse pour éviter les mouvements de corps solides. Des tests préliminaires ont montré que ce faible contact ne modifiait pas les fonctions de transfert mesurées. La mobilité est mesurée latéralement, en effectuant un impact sur le côté, en haut du chevalet, et l'accéléromètre est placé sur la table au pied du chevalet. La sourdine utilisée est celle de la figure 5.17, sa masse est de 1.2 g.

Pour l'enregistrement des sons, le violon est placé de manière similaire à la mesure de mobilité, et le musicien joue un glissando allant d'un *ré* 292.5 Hz, à un *sol* 195 Hz, sur la corde la plus grave du violon. Un glissando permet d'explorer la réponse de l'instrument sur tout un continuum de fréquences de jeu. Chaque glissando est répété trois fois, l'analyse se portant sur un signal concaténant les trois glissandi. Les mesures sont effectuées dans une salle anéchoïque.

5.2.3.3 Effet de la sourdine sur la mobilité latérale d'un violon

La sourdine, placée sur le chevalet, a pour but de modifier le comportement mécanique de l'instrument en atténuant la vibration du chevalet. Il en résulte donc une diminution de la mobilité au chevalet. La figure 5.18 permet de comparer les mobilités moyennes au chevalet des deux violons dans les deux configurations.



FIGURE 5.17 – Sourdine utilisée pour l'étude, mise en place sur le chevalet du violon. Sa masse est de 1.2 g.

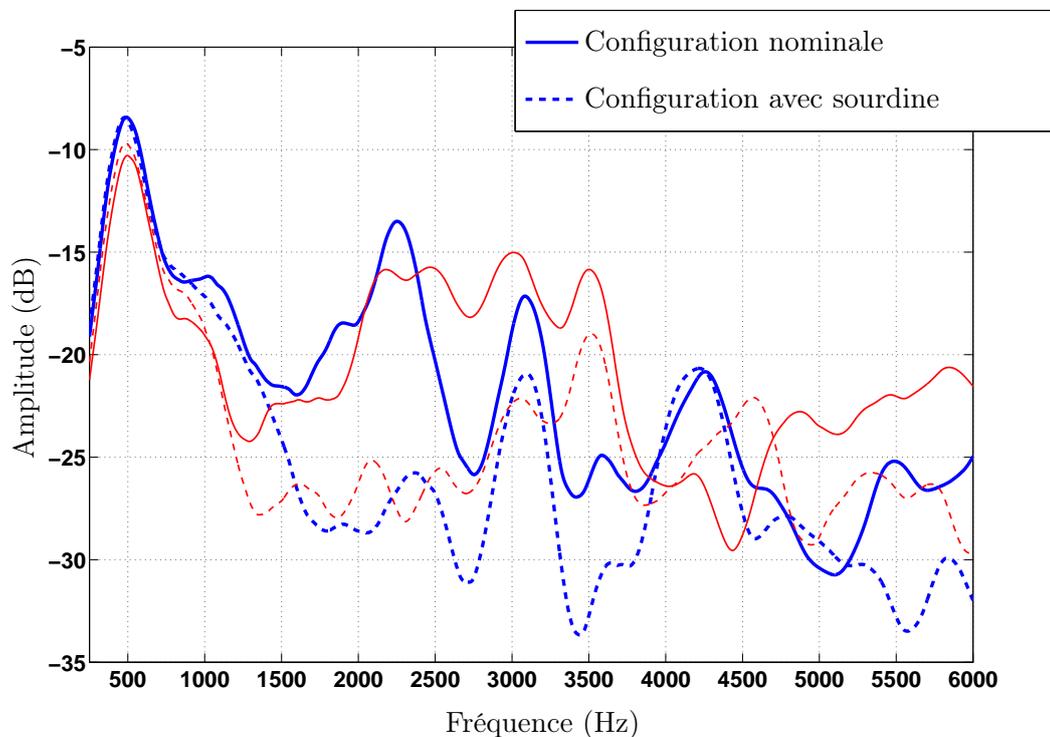


FIGURE 5.18 – Représentation des mobilités moyennes au chevalet de deux violons dans leur configuration nominale et avec sourdine. Les mobilités moyennes correspondant aux configurations avec sourdines sont en pointillés. Les deux violons sont différenciés par l'épaisseur de trait.

L'effet de la sourdine sur la mobilité moyenne est clairement visible : pour les deux violons. Celle-ci présente un niveau inférieur d'une dizaine de dB dans la configuration avec sourdine que la mobilité dans la configuration nominale, pour une zone fréquentielle comprise entre 1500 Hz et 3000 Hz. En dehors de cette zone, les mobilités dans les deux

configurations sont du même ordre de grandeur. Cette sourdine a donc pour fonction l'atténuation de la mobilité, et par conséquent du niveau sonore, dans la bande fréquentielle allant de 1500 Hz à 3000 Hz. Cette zone est celle où l'oreille humaine est la plus sensible. Ce dispositif représente un moyen efficace de réduire le niveau sonore perçu par les auditeurs, au moyen d'un ajout modéré de masse au point de couplage entre corde et instrument.

5.2.3.4 Effet de la sourdine sur les caractéristiques spectrales de la réponse sonore

Moments spectraux

Les moments spectraux sont basés sur les moments statistiques. Ils décrivent la distribution spectrale du signal [106] à l'aide de 4 paramètres scalaires, soit :

- le centre de gravité spectral, ou centroïde spectral, associé à l'espérance de la distribution spectrale (moment d'ordre 1),
- l'étendue spectrale, ou spectral spread, associée à la variance de la distribution spectrale (moment d'ordre 2),
- le facteur d'asymétrie, ou skewness, mesurant la symétrie du spectre entre fréquences supérieures et inférieures au centroïde spectral (moment d'ordre 3),
- le kurtosis, quantifiant la forme plus ou moins aplatie de la distribution spectrale (moment d'ordre 4).

Ces descripteurs sont utilisés couramment pour caractériser les attributs spectraux de signaux audio. Ils sont par exemple intégrés dans la base de descripteurs audio du projet CUIDADO de l'IRCAM [106], servant à la classification de sons audio.

Centre de gravité spectral Le centre de gravité spectral (CGS), ou centroïde spectral est une mesure de la balance entre les fréquences graves et les fréquences aigües d'une distribution spectrale. Dans le cas d'un spectre harmonique, tel que celui du violon, il est défini comme la somme des amplitudes des harmoniques pondérées par leur fréquence correspondantes, divisée par la somme des amplitudes non pondérées. Nous normalisons ensuite en divisant par la fréquence fondamentale, permettant d'obtenir un nombre sans dimension. Il se calcule par la relation

$$CGS = \frac{\sum_{k=1}^N k A_k}{\sum_{k=1}^N A_k}, \quad (5.1)$$

où A_k est l'amplitude du $k^{ième}$ harmonique, et N est le nombre d'harmoniques.

Cet attribut est largement employé dans la littérature, notamment dans les études psychoacoustiques [22, 84] en tant qu'une des dimensions de l'espace de timbre. Celui-ci est d'ailleurs utilisé par McAdams *et al.* pour classifier, ou reconnaître les différentes classes

d'instruments [96]. Le CGS semble donc un descripteur spectral pertinent pour dissocier le timbre de différents instruments [21, 75].

Musicalement, il est souvent utilisé pour quantifier la *brillance* du son [84]. En effet, plus le CGS d'un son est élevé, plus les harmoniques d'ordre élevé sont importants. Une valeur de CGS faible indique un son pauvre en harmoniques.

Étendue spectrale L'étendue spectrale est assimilée à la variance de la distribution spectrale. Un son possédant une faible étendue spectrale est un son dont le spectre est concentré autour de son centre de gravité. Inversement, un son possédant une large étendue spectrale présente un spectre plus large bande. Ce descripteur est moins utilisé [95] que le centre de gravité spectral, d'après Caclin *et al.* [22]. Dans le cas de signaux à composantes harmoniques, il peut se normaliser par la fréquence fondamentale, et finalement s'écrire :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^N A_k (k - CGS)^2}{\sum_{k=1}^N A_k}. \quad (5.2)$$

Asymétrie et kurtosis Le facteur d'asymétrie est une mesure de symétrie de la distribution spectrale autour de son centre de gravité. Typiquement, un facteur d'asymétrie positif signifie que l'énergie du spectre est située majoritairement à des fréquences supérieures au CGS, alors qu'un facteur d'asymétrie négatif signifie que l'énergie spectrale est concentrée majoritairement à des fréquences inférieures au CGS. Il correspond au moment d'ordre 3 d'une distribution statistique : il s'écrit :

$$Sk = \frac{\sum_{k=1}^N A_k (k - CGS)^3}{\sqrt{\sigma^3} \sum_{k=1}^N A_k}, \quad (5.3)$$

où σ est la racine carrée de la variance, ou étendue spectrale, calculée d'après l'équation (5.2).

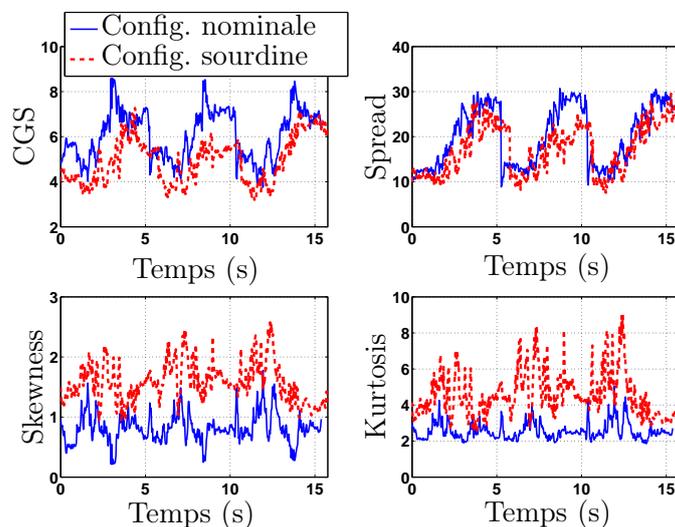
Le kurtosis est un paramètre de forme, il décrit le caractère plus ou moins aplati de la distribution spectrale. Une valeur de kurtosis signifie que la distribution spectrale est pointue autour de son centre de gravité, et que ses queues sont épaisses. Il s'écrit :

$$Ku = \frac{\sum_{k=1}^N A_k (k - CGS)^4}{\sqrt{\sigma^4} \sum_{k=1}^N A_k}. \quad (5.4)$$

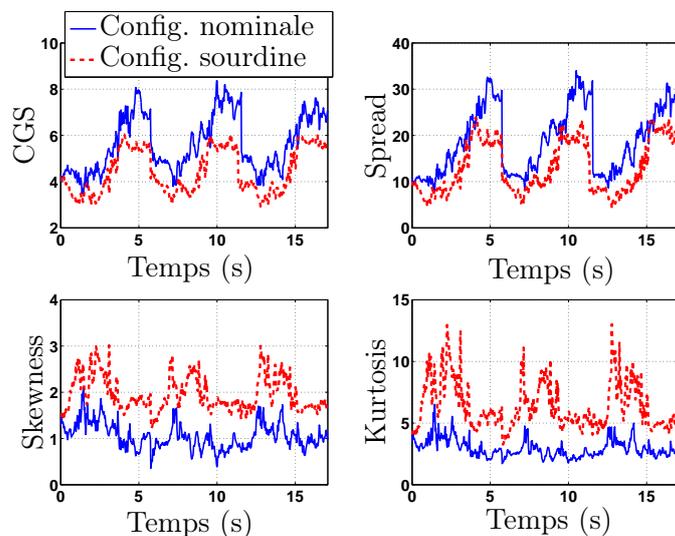
Ces deux paramètres sont moins couramment utilisés que l'étendue spectrale ou encore le centre de gravité spectral.

Résultats La figure 5.19 trace l'évolution des moments spectraux des signaux de glissando pour les deux violons, dans une configuration nominale, et une configuration avec sourdine. La bande fréquentielle d'analyse se situe entre 0 et 4000 Hz. La réduction de la

bande fréquentielle d'analyse se justifie par le fait que nous voulons observer les modifications des caractéristiques spectrales liées à la mise en place de la sourdine. Nous pensons que ces modifications sont principalement localisées entre 1500 et 3000 Hz. Nous voulons donc observer les modifications des caractéristiques spectrales se situant autour de cette zone.



(a) Violon 1



(b) Violon 2

FIGURE 5.19 – Évolution des moments spectraux en fonction du temps. Pour chaque violon, les valeurs des moments spectraux des signaux de glissando joués en configuration nominale et en configuration avec sourdine sont tracés.

L'ajout de la sourdine tend à faire diminuer le centre de gravité spectral. Cette tendance s'explique par la diminution de la mobilité moyenne dans la zone fréquentielle comprise entre 1500 Hz et 3000 Hz : les amplitudes des harmoniques situés dans cette zone sont

atténuées, alors que les harmoniques situés à des fréquences inférieures ne subissent pas d'atténuation, la mobilité moyenne étant du même ordre de grandeur avec ou sans sourdine. L'importance des harmoniques de faible rang est alors accentuée par rapport à ceux d'ordre élevé, ce qui induit une baisse du centre de gravité spectral.

Cette modification entraîne naturellement une baisse de l'étendue spectrale, et une hausse du kurtosis. En effet, la distribution des amplitudes des harmoniques au-delà du centre de gravité spectral tend à s'annuler plus rapidement dans la configuration avec sourdine que dans la configuration nominale. La variance de la distribution est donc plus petite, et la forme de la distribution autour du centre de gravité spectral est plus pointue, d'où la hausse du kurtosis. En ce qui concerne le facteur d'asymétrie, nous observons une augmentation lors de l'ajout de la sourdine, indiquant une augmentation de l'énergie dans la zone de fréquences supérieures au centroïde. Cela peut paraître contre-intuitif, mais s'explique par la diminution du centroïde : la queue de la distribution de la partie supérieure est plus longue dans le cas où le centroïde est bas.

La mise en place de la sourdine permet donc de modifier les caractéristiques spectrales du violon. Elle a pour principal conséquence de diminuer le centre de gravité spectral, ainsi que l'étendue spectrale. Le son est alors moins brillant, moins riche en harmoniques. Ces caractéristiques sont objectivées par les descripteurs proposés.

Enveloppes spectrales

Nous nous intéressons maintenant aux enveloppes spectrales moyennes des violons, dans une configuration avec ou sans sourdine. La figure 5.20 trace les courbes d'enveloppe spectrale moyenne dans les deux configurations.

La figure 5.20 et la figure 5.18 présentent des profils très similaires. Cela indique que la structure des courbes d'enveloppes spectrales sont fortement dépendantes des caractéristiques de la mobilité latérale moyenne du violon. En outre, les différences d'enveloppes moyennes entre les deux configurations de violons sont similaires à celles entre mobilités moyennes. L'effet principal de la sourdine étudiée est donc de supprimer le formant potentiel existant entre 2000 Hz et 3000 Hz, dans la région du Bridge Hill.

Conclusions

Les modifications du comportement mécanique causées par l'ajout d'une sourdine sont importantes : le formant situé entre 2000 et 3000 Hz est supprimé. De plus, les valeurs des moments spectraux (centre de gravité spectral, étendue spectrale, asymétrie et kurtosis) sont modifiées. Pour un luthier, l'intérêt est donc de trouver un moyen d'abaisser la mobilité moyenne du violon de manière homogène sur l'ensemble des fréquences, afin de s'assurer de diminuer la puissance sonore sans altérer le timbre de l'instrument. Pour un compositeur,

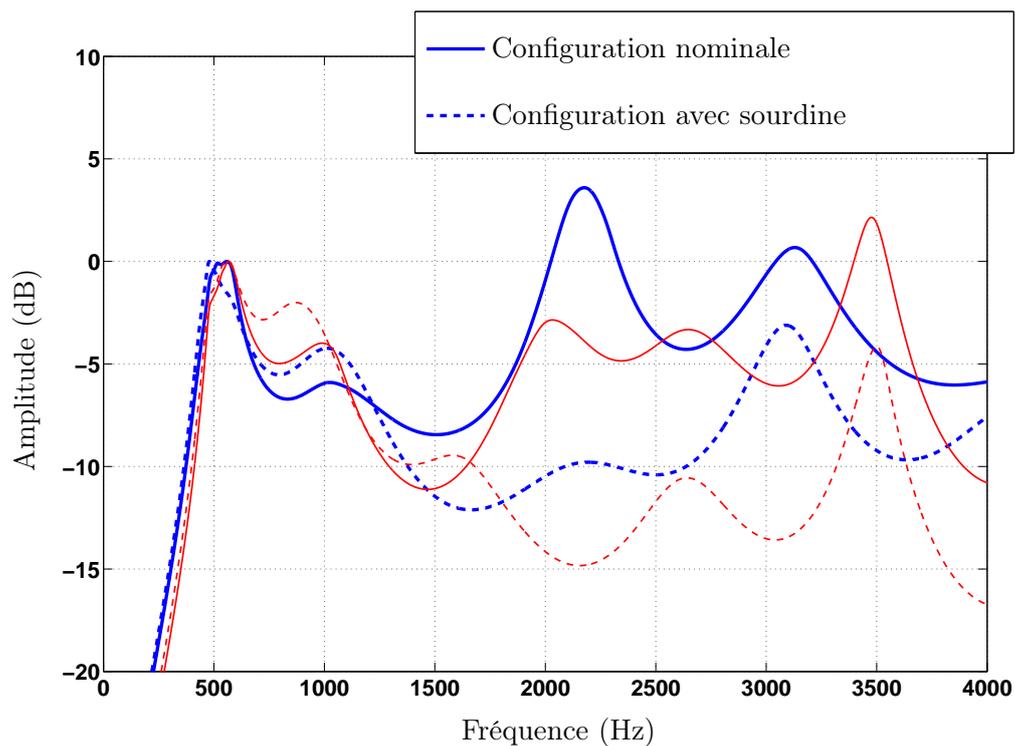


FIGURE 5.20 – Courbes d’enveloppe spectrale moyenne calculées sur les signaux de glissando. Les deux violons sont différenciés par l’épaisseur de trait.

l’intérêt est alors de chercher des moyens de modifier l’allure de mobilité moyenne comme il le souhaite, permettant de contrôler les modifications du timbre de l’instrument.

Conclusions et perspectives

Le savoir faire du luthier est essentiellement empirique. Les choix qu'il doit faire pour sélectionner un matériau, un procédé d'assemblage ou encore une variation géométrique, résultent de son expérience et l'idée qu'il se fait du fonctionnement acoustique de l'instrument. Les outils standards disponibles aujourd'hui en ingénierie acoustique et vibratoire ne sont que très peu utilisés en pratique pour guider ses choix. La complexité de mise en œuvre de ces outils et leur caractère souvent trop générique expliquent en partie cette situation.

L'enjeu principal de ce travail de thèse est de définir une méthodologie permettant d'aider le luthier à faire évoluer l'instrument qu'il fabrique ou l'adapter aux exigences particulières d'un musicien.

La méthodologie se doit de prendre en compte la réalité d'un système mécanique dans lequel les matériaux, les liaisons, la géométrie et le couplage fluide-structure sont particulièrement complexes. Il s'agit donc de définir une méthodologie permettant d'accéder à des paramètres pertinents, qui rendent à la fois compte de la complexité, tout en restant suffisamment peu nombreux pour constituer des outils d'aide à la décision efficace.

Le grand nombre de modes vibratoire et le recouvrement modal auquel ils donnent lieu limite l'applicabilité des techniques usuelles d'identification de paramètres modaux. Nous faisons le choix dans cette étude d'utiliser une méthode de traitement de signal, qualifiée de méthode haute résolution.

L'utilisation de la méthode haute résolution ESPRIT pour l'analyse des systèmes vibroacoustiques permet de conclure les points suivants :

- La méthode ESPRIT, associée à la méthode d'énumération ESTER permet une identification fiable des modes de structures jusqu'à des fréquences pour lesquelles le recouvrement modal est de l'ordre de 100 %.
- La mesure de quelques mobilités vibratoires sur un panneau plan, utilisé en lutherie ou dans un contexte non musical permet d'identifier ses caractéristiques mécaniques : module d'Young et masse volumique. La méthodologie est basée sur la connaissance de la densité modale, obtenue dans la plage des moyennes fréquence grâce à la méthode ESPRIT, et l'estimation de la mobilité moyenne. La simplicité de mise en œuvre de cette technique, dont les limites sont évaluées, en font son intérêt. Pour le

luthier, cette méthode est utilisable en atelier pour caractériser des plaques de bois destinées à la fabrication.

L'application de la méthode à l'analyse des guitares a permis de révéler les points suivants :

- La densité modale de la guitare, ainsi que l'allure moyenne de sa mobilité au chevalet présentent en moyennes et hautes fréquences des caractéristiques similaires à celles d'une plaque. Ce résultat permet de définir une plaque équivalente à la guitare.
- Les paramètres caractéristiques de la plaque équivalente (masse et raideur) sont des paramètres discriminants entre instruments. Ils permettent de caractériser les différences existantes entre les guitares et permettent également de les catégoriser.
- Ces paramètres sont variables le long du chevalet. La plaque équivalente vue par les cordes centrales au chevalet est plus raide et moins mobile que celle vue par les autres cordes.

L'analyse des réponses acoustiques des guitares, et plus particulièrement l'analyse de la décroissance des sons de guitares montre les points suivants :

- Un indicateur simple, appelé T_{10} permet d'évaluer la décroissance de l'énergie sonore. L'homogénéité de ce paramètre sur toute la tessiture est importante pour le musicien, dans la mesure où il rend compte du compromis entre amplitude et durée de son.
- L'indicateur T_{10} permet d'identifier le comportement singulier de certaines notes particulièrement amorties, appelées *notes mortes*.
- Ces notes pathologiques sont celles dont l'amortissement de la polarisation horizontale est significativement important. Pour ces notes, le son rémanent n'existe pas.
- Il existe une corrélation forte entre niveau de mobilité à la fréquence fondamentale de la note et la décroissance globale de celle-ci. Les notes très amorties sont celles dont la mobilité à leur fréquence fondamentale est proche d'un mode de la table.

Dans le cas des violons, l'analyse permet d'établir les conclusions suivantes :

- La mobilité latérale au chevalet est une grandeur caractéristique très importante. Les variations avec la fréquence de la mobilité moyenne constituent une signature de l'instrument, beaucoup plus complexe que dans le cas de la guitare.
- En dessous de 2000 Hz, la densité modale et la mobilité moyenne d'un violon présentent un maximum local, situé entre 500 et 1000 Hz. La courbure de la table d'harmonie est responsable de ce comportement qui est typique des coques minces. Une coque équivalente à l'instrument peut être définie alors.
- Le maximum local de la mobilité moyenne du à la courbure donne lieu à une am-

plification systématique des harmoniques situés à son voisinage. Les sons de violons présentent alors une structure formantique.

- La mobilité moyenne présente généralement un deuxième formant, pouvant être associé au phénomène de Bridge Hill. Ce formant, variable d'un violon à l'autre, est centré sur une fréquence voisine de 2500 Hz.
- Les caractéristiques spectrales des sons de violons (amplitudes des harmoniques, enveloppes spectrales) sont fortement corrélées à la mobilité latérale au chevalet.

Les méthodes développées pour la thèse ont fait l'objet de premières applications sous la forme de projets impliquant acousticiens, luthiers ou musiciens. Ces projets ont permis de tester l'intérêt de la méthodologie dans le cadre de l'aide à la facture instrumentale. Il apparaît que la méthodologie offre aux luthiers ou musiciens des possibilités intéressantes pour caractériser :

- un instrument au cours de sa fabrication, permettant un "suivi qualité", une meilleure reproductibilité dans la fabrication, ou bien d'identifier un comportement atypique non souhaité.
- plusieurs configurations d'un même instrument, de façon à ajuster au mieux des réglages fins et à les objectiver : réglage de l'âme, du barrage ou du chevalet, par exemple.
- le comportement mécanique global de plusieurs instruments, permettant de les différencier et de les catégoriser.

Le travail décrit dans cette thèse répond partiellement à notre sens à certaines attentes formulées par les professionnels de la facture instrumentale. Toutefois, ce travail prendra toute son importance lorsque le matériel de mesure dédié, ainsi que les post-traitements adaptés seront mis à disposition des luthiers. Ceci aura lieu avec la livraison de la plateforme d'aide à la facture instrumentale du projet ANR qui a financé cette thèse. Ce sera par leurs propres expériences, leurs partages de données, que les luthiers s'approprient le système et progresseront dans la recherche de voies d'améliorations des instruments.

Annexe A

Théorie modale des systèmes vibrants

L'exposé qui suit est classique. Il a pour but d'établir les écritures de la réponse impulsionnelle et de l'admittance mécanique d'un système dissipatif sous la forme de contributions associées aux modes de la structure. Nous supposons un système discret à N degrés de libertés. Nous reprenons ici la formulation et les notations utilisées dans [64].

A.1 Formulation d'état pour l'équation du mouvement

Considérons un système vibrant, présentant des mécanismes dissipatifs de type visqueux. L'équation de mouvement d'un tel système admet la forme générale

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (\text{A.1})$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} désignent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. Ces matrices sont supposées réelles symétriques et définies positives. Leurs dimensions sont $N \times N$. Le vecteur \mathbf{x} est le vecteur des coordonnées de déplacement, et \mathbf{F} désigne le vecteur des efforts extérieurs appliqués au système.

Si N degrés de liberté ont été choisis pour décrire le système, l'équation (A.1) constitue un ensemble de N équations différentielles couplées. Il est possible de transformer ce système de N équations du second ordre en $2N$ équations du premier ordre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

L'équation de mouvement est alors de la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{s}, \quad (\text{A.3})$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Modes propres complexes

Les modes du système correspondent aux solutions du problème homogène associé à l'équation (A.1). Dans le cas où aucune force n'est appliquée au système, on cherche une solution à (A.1) de la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}e^{\lambda t}. \quad (\text{A.5})$$

Le vecteur \mathbf{y} et le paramètre λ sont alors les solutions du problème aux valeurs propres,

$$\mathbf{A}\mathbf{y} + \lambda\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.6})$$

Ces solutions appelées modes complexes du système sont notées $(\lambda_n, \mathbf{y}_n)$, et d'après l'équation A.4, prennent la forme

$$\mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} \Phi_n \\ \lambda_n \Phi_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

On peut alors écrire, toujours en considérant un système sans effort extérieur :

$$(\lambda_n^2 \mathbf{M} + \lambda_n \mathbf{C} + \mathbf{K}) \Phi_n = \mathbf{0}. \quad (\text{A.8})$$

Les vecteurs propres vérifient des conditions d'orthogonalité, à savoir

$$\begin{cases} \mathbf{y}_m^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n = b_n \delta_{mn} \\ \mathbf{y}_m^T \mathbf{A} \mathbf{y}_n = a_n \delta_{mn}, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

où δ_{mn} vaut 1 pour $m = n$ et 0 pour $m \neq n$. Les coefficients a_n et b_n sont des coefficients complexes.

La prémultiplication de l'équation (A.6) par \mathbf{y}_n^T permet d'exprimer les valeurs propres λ_n en fonction des vecteurs propres \mathbf{y}_n :

$$\lambda_n = -\frac{\mathbf{y}_n^T \mathbf{A} \mathbf{y}_n}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n} = -\frac{a_n}{b_n}. \quad (\text{A.10})$$

A.3 Forme générale de la réponse forcée exprimée à l'aide des modes complexes

Décomposons le vecteur d'état \mathbf{u} en série de modes propres \mathbf{y}_n :

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{2N} q_n(t) \mathbf{y}_n. \quad (\text{A.11})$$

En substituant l'équation (A.11) dans l'équation (A.3), et après prémultiplication par \mathbf{y}_n^T , on obtient :

$$\mathbf{y}_n^T \mathbf{A} \mathbf{y}_n q_n + \mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n \dot{q}_n = \mathbf{y}_n^T \mathbf{s}(t), \quad (\text{A.12})$$

qui s'écrit comme $2N$ équations du premier ordre :

$$-\lambda_n q_n + \dot{q}_n = \phi_n(t), \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\lambda_n = -\frac{\mathbf{y}_n^T \mathbf{A} \mathbf{y}_n}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n}, \quad \phi_n(t) = \frac{\mathbf{y}_n^T \mathbf{s}(t)}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n}, \quad \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \delta(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

En multipliant l'équation (A.13) par $e^{-\lambda_n t}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\lambda_n t} q_n \right) = e^{-\lambda_n t} \phi_n(t), \quad (\text{A.15})$$

d'où :

$$q_n(t) = e^{\lambda_n t} \left[\int_0^t \phi_n(\tau) e^{-\lambda_n \tau} d\tau + q_n(0) \right]. \quad (\text{A.16})$$

A.3.1 Cas d'une force impulsionnelle : expression de la réponse impulsionnelle

Certains travaux présentés dans ce document se basent sur la mesure de la réponse impulsionnelle du système, c'est-à-dire sur sa réponse lorsque ce dernier est soumis à une force ponctuelle unitaire, de durée infiniment courte ($F(x_0, y_0, t_0) = F_0 \delta(t - t_0) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0)$). On cherche à établir l'expression de la réponse impulsionnelle du système en fonction des valeurs de ses paramètres modaux.

Si $\mathbf{s}(t) = \mathbf{F}_0 \delta(t)$, l'expression (A.16) s'écrit

$$q_n(t) = e^{\lambda_n t} \int_0^t \frac{\mathbf{y}_n^T}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n} \mathbf{F}_0 \delta(\tau) e^{-\lambda_n \tau} d\tau \quad (\text{A.17})$$

$$= e^{\lambda_n t} \frac{\mathbf{y}_n^T}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n} \mathbf{F}_0, \quad (\text{A.18})$$

d'où on déduit la réponse

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{D}_n \mathbf{s}_0 e^{\lambda_k t}, \quad (\text{A.19})$$

où $\mathbf{D}_n = \frac{\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^T}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n}$. Le dénominateur de l'expression de \mathbf{D}_n , que nous appelons Ψ_n s'écrit

$$\Psi_n = \mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n = [\Phi_n^T \lambda_k \Phi_n^T] \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_n \\ \lambda_k \Phi_n \end{bmatrix} = \Phi_n^T \mathbf{C} \Phi_n + 2\lambda_n m_n \quad (\text{A.20})$$

En considérant la force comme ponctuelle et unitaire, le vecteur \mathbf{F}_0 est alors un vecteur dont tous les éléments sont nuls sauf celui correspondant aux coordonnées du point d'excitation. L'élément correspondant vaut 1.

D'après l'équation (A.4) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{D}_n \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} e^{\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{e^{\lambda_n t}}{\Psi_n} \begin{bmatrix} \Phi_n \Phi_n^T \\ \lambda_n \Phi_n \Phi_n^T \end{bmatrix} \mathbf{F}_0. \quad (\text{A.21})$$

Nous nous intéressons ici à la vitesse du système $\dot{\mathbf{x}}$, soumis à une force impulsionnelle. D'après l'équation (A.21), nous obtenons :

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{\lambda_n \Phi_n \Phi_n^T}{\Psi_n} \mathbf{F}_0 e^{\lambda_n t}, \quad (\text{A.22})$$

A.3.2 Cas d'une force harmonique : expression de l'admittance mécanique

L'admittance mécanique, représentant le rapport dans le domaine fréquentiel entre la vitesse de la structure et la force d'excitation est une quantité utile. Les lignes suivantes détaillent les calculs permettant d'exprimer cette admittance mécanique en fonction des valeurs de ses paramètres modaux. Pour obtenir cette expression, nous allons maintenant calculer la solution de (A.16) dans le cas où la force est harmonique. Les différents termes de l'équation (A.16) deviennent alors :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_0 e^{j\omega t}, \quad \phi_n(t) = \phi_{0n} e^{j\omega t} = \frac{\mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_0}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n}. \quad (\text{A.23})$$

En injectant dans l'équation (A.16), on obtient :

$$q_n(t) = e^{\lambda_n t} \int_0^t \phi_{0n} e^{(j\omega - \lambda_n)\tau} d\tau \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{\phi_{0n} e^{j\omega t}}{j\omega - \lambda_n}. \quad (\text{A.25})$$

On en déduit alors la solution forcée harmonique suivante :

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^T}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{B} \mathbf{y}_n} \frac{1}{\alpha_n + j(\omega + \omega_n)} + \frac{\bar{\mathbf{y}}_n \bar{\mathbf{y}}_n^T}{\bar{\mathbf{y}}_n^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{y}}_n} \frac{1}{\alpha_n + j(\omega - \omega_n)} \right\} \mathbf{s}_0 e^{j\omega t} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} \Phi_n \Phi_n^T \\ \lambda_n \Phi_n \Phi_n^T \end{bmatrix} \frac{1}{\Psi_n [\alpha_n + j(\omega_n + \omega)]} + \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_n \bar{\Phi}_n^T \\ \bar{\lambda}_n \bar{\Phi}_n \bar{\Phi}_n^T \end{bmatrix} \frac{1}{\Psi_n [\alpha_n + j(\omega - \omega_n)]} \right\} \mathbf{F}_0 e^{j\omega t},$$

La réponse en vitesse (dérivée par rapport au temps du déplacement) à une force harmonique unitaire ($F_0 = 1$) s'écrit donc :

$$\dot{\mathbf{x}} = j\omega \mathbf{F}_0 \sum_{n=1}^N \frac{2}{\Psi_n} \left[\frac{(\alpha_n + j\omega) \Im(\Phi_n \Phi_n^T) + j\omega_n \Re(\Phi_n \Phi_n^T)}{\omega_n^2 + j\eta_n \omega_n \omega - \omega^2 + \alpha_n^2} \right]. \quad (\text{A.27})$$

Si on considère le cas particulier, mais toutefois assez fréquent en pratique, où l'amortissement est faible ($\alpha_n^2 \ll \omega^2$), et les déformées Φ_n sont réelles, de sorte que :

$$\Re(\Phi_n \Phi_n^T) = \Phi_n \Phi_n^T \quad (\text{A.28})$$

$$\Im(\Phi_n \Phi_n^T) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.29})$$

ce qui amène l'expression classique

$$\dot{\mathbf{x}} = j\omega \mathbf{F}_0 \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n \Phi_n^T}{m_n (\omega_n^2 + j\eta_n \omega_n \omega - \omega^2)}. \quad (\text{A.30})$$

L'admittance mécanique d'un système visqueux s'exprime donc comme la somme de contributions modales indépendantes. Chacune de ces contributions modales est caractérisée par un triplet $\{\omega, \eta, \Phi\}_n$, qui sont respectivement la pulsation, le facteur de pertes et la déformée modale du mode n .

Annexe B

Calcul de la mobilité moyenne de Skudrzyk

Considérons l'écriture classique de la mobilité d'entrée d'une structure au point A

$$Y(A, \omega) = j\omega \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_k^2(A)}{m_k(\omega_k^2 + j\eta_k\omega_k\omega - \omega^2)}. \quad (\text{B.1})$$

Skudrzyk [129] propose un calcul permettant de prédire l'allure moyenne de cette mobilité. Nous reprenons ici le raisonnement permettant d'établir la conclusion décrite par l'expression (2.43).

Nous supposons que les modes sont suffisamment proches (ou se recouvrent suffisamment) pour considérer une densité de mode, notée $n(\lambda)$ continue et non plus discrète. La relation (B.1) peut s'écrire alors sous forme d'une intégrale impliquant un paramètre λ , jouant le rôle de l'indice modal k dans le cas discret.

$$Y_A(\omega) = j\omega \int_0^{+\infty} \frac{\Phi_\lambda^2(x_A, y_A)}{m_\lambda(\lambda^2 + j\omega\lambda\eta_\lambda - \omega^2)} n(\lambda) d\lambda, \quad (\text{B.2})$$

Skudrzyk propose d'effectuer une moyenne spatiale de la mobilité. Celle-ci s'écrit

$$\langle Y(\omega) \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S Y(\omega) dS, \quad (\text{B.3})$$

ou encore

$$\langle Y(\omega) \rangle_S = j\omega \int_0^{+\infty} \frac{\langle \Phi_\lambda^2 \rangle}{m_\lambda(\lambda^2 + j\omega\lambda\eta_\lambda - \omega^2)} n(\lambda) d\lambda = G_C + jB_C. \quad (\text{B.4})$$

Si nous faisons l'hypothèse que la structure est homogène et que le rapport entre la moyenne spatiale quadratique des déformées et la masse modale est indépendante du mode, alors le facteur $\frac{\langle \Phi_\lambda^2 \rangle}{m_\lambda}$ peut sortir de l'intégrale (B.4). On a alors

$$\frac{\langle \Phi_\lambda^2 \rangle}{m_\lambda} = \frac{\frac{1}{S} \int_S \Phi_\lambda^2(x, y) dS}{\rho_S \int_S \Phi_\lambda^2(x, y) dS} = \frac{1}{\rho_S S} = \frac{1}{M_{Tot}}, \quad (\text{B.5})$$

et

$$\langle Y(\omega) \rangle_S = \frac{j\omega}{M_{Tot}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 + j\omega\lambda\eta_\lambda - \omega^2} n(\lambda) d\lambda, \quad (\text{B.6})$$

où ρ_S est la masse surfacique de la structure et M_{Tot} la masse totale de la structure.

Nous supposons également que le facteur de pertes modal η_λ est indépendant de λ . Il est simplement noté η par la suite. De manière expérimentale, nous n'observons en effet pas de grande variations de facteur de pertes. De plus, l'allure moyenne de mobilité est indépendante de l'amortissement. Cela signifie que quelle que soit la valeur de η_λ , cette allure moyenne est la même, ce qui justifie le fait de considérer η comme constant pour le calcul de $\langle Y \rangle$. En effet, nous partons du principe que l'allure moyenne de mobilité est la moyenne géométrique entre une résonance et l'anti-résonance suivante. Or la hauteur du pic de résonance est inversement proportionnelle à η et la profondeur d'une anti-résonance est proportionnelle à η . La moyenne géométrique des deux valeurs, définie comme la racine de leur produit, est donc strictement indépendante de η .

Nous supposons de plus que la densité modale $n(\lambda)$ est peu dépendante de la fréquence. On peut alors la sortir de l'intégrale (B.6).

L'admittance caractéristique Y_C est définie selon Skudrzyk [129] comme la limite en hautes fréquences de la moyenne spatiale de la mobilité.

En considérant les hypothèses mentionnées, nous pouvons écrire la relation (B.6) sous la forme suivante :

$$\langle Y(\omega) \rangle_S \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} Y_C = K \times I, \quad (\text{B.7})$$

avec

$$K = \frac{j\omega n(\omega)}{M_{Tot}}, \quad (\text{B.8})$$

et

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{d\Delta}{D}, \quad (\text{B.9})$$

où Δ est le dénominateur d'expression :

$$\Delta = \Omega^2(1 + j\eta) - \omega^2. \quad (\text{B.10})$$

Les singularités de l'intégrande de I sont obtenues pour $\Delta = 0$. Les racines de Δ sont données par les pulsations complexes :

$$\Omega^0 = \pm\omega(\sqrt{1 - j\eta}). \quad (\text{B.11})$$

L'intégrale I peut se calculer en utilisant la méthode des résidus, en lui associant l'intégrale complexe :

$$I' = \oint_{\gamma} \frac{d\Omega}{\Omega^2(1+j\eta) - \omega^2}, \quad (\text{B.12})$$

où γ est un contour incluant l'axe réel, et contenant la singularité présente dans l'un des demi-plan complexe, représenté sur la figure B.1.

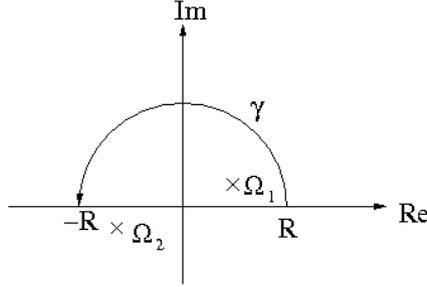


FIGURE B.1 – contour d'intégration utilisé pour le calcul de I' .

Le contour γ peut se décomposer en un parcours sur une distance $2R$ de l'axe réel et un demi-cercle de rayon R , centré sur l'origine :

$$I' = \int_{-R}^R \frac{d\Omega}{\Delta} + \int_{\cap} \frac{d\Omega}{\Omega^2(1+j\eta) - \omega^2}. \quad (\text{B.13})$$

Le lemme de Jordan indique que l'intégrale sur le demi-cercle s'annule [9]. L'intégrale I' s'écrit alors sous la forme d'une somme pondérée par $2\pi j$ des résidus des singularités inclus dans le contour, c'est-à-dire à partie imaginaire positive dans notre cas. Notons que l'intégrale I de la relation (B.9) est calculée pour des bornes allant de 0 à $+\infty$, alors que I' se calcule pour de bornes allant de $-\infty$ à $+\infty$, le résultat de I est donc la moitié de I' ($I' = 2I$).

Le résidu d'un pôle d'ordre 1 est défini par la relation :

$$\text{Res}(f(\Omega), \Omega_i) = \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_i} (\Omega - \Omega_i) f(\Omega). \quad (\text{B.14})$$

Le dénominateur Δ peut s'écrire :

$$\Delta = (\Omega - \Omega_1)(\Omega - \Omega_2), \quad (\text{B.15})$$

où les Ω_i sont les pôles. On en déduit :

$$Res(f(\Omega), \Omega_i) = \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_i} (\Omega - \Omega_i) f(\Omega) = \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_1} \left(\frac{1}{\Omega - \Omega_2} \right) = \frac{1}{\Omega_1 - \Omega_2}, \quad (\text{B.16})$$

avec :

$$\begin{cases} \Omega_1 = -\omega(\sqrt{1-j\eta}) \\ \Omega_2 = \omega(\sqrt{1-j\eta}) \end{cases}, \quad (\text{B.17})$$

d'où :

$$\frac{1}{\Omega_1 - \Omega_2} = \frac{-1}{2\omega\sqrt{1-j\eta}}. \quad (\text{B.18})$$

D'après le théorème des résidus

$$I' = 2I = \frac{-\pi j}{\omega\sqrt{1-j\eta}}, \quad (\text{B.19})$$

il vient alors :

$$\langle Y_C(\omega) \rangle = \frac{-j\omega\pi j n(\omega)}{M_{Tot}} \frac{1}{2\omega\sqrt{1-j\eta}}. \quad (\text{B.20})$$

On a finalement

$$\begin{cases} G_C = \Re(Y_C) = \frac{\pi n(\omega)}{2M_{Tot}} \\ n(\omega) = \frac{n(f)}{2\pi}, \end{cases}, \quad (\text{B.21})$$

avec $n(f)$ la densité modale. Il vient alors :

$$G_C = \frac{n(f)}{4M_{Tot}}. \quad (\text{B.22})$$

La relation (B.22) donne la mobilité moyenne en fonction de la densité modale analytique de la structure et sa masse.

Annexe C

Calcul des courbes enveloppes

Cette annexe développe le calcul aboutissant à l'expression analytique des amplitudes des résonances et des antirésonances d'une structure vibrante. Ces expressions sont publiées par Langley [89]. Dans cet article, l'auteur utilise l'approximation suivante sur le dénominateur de l'expression de l'admittance, au voisinage d'une résonance ($\omega \simeq \omega_k$) :

$$\omega_k^2(1 + j\eta_k) - \omega^2 \simeq 2\omega(\omega_k - \omega) + j\eta\omega^2. \quad (\text{C.1})$$

L'expression usuelle de l'admittance (2.8) devient alors :

$$Y(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega^3 \eta + 2j\omega^2(\omega_k - \omega)}{4\omega^2(\omega_k - \omega)^2 + \eta^2\omega^4}. \quad (\text{C.2})$$

Langley [89] suppose ensuite que les résonances sont régulièrement espacées sur tout le spectre, d'un espacement Δf égal à l'inverse de la densité modale $n(f)$. Pour notre étude nous supposons que cela est vrai sur une plage de fréquence réduite autour de chaque mode (typiquement les 10 modes autour du mode central). A la résonance ω_p , nous pouvons alors écrire :

$$\omega_k - \omega_p = \frac{k - p}{n(\omega_p)} = 2\pi \frac{k - p}{n(f_p)}. \quad (\text{C.3})$$

En remplaçant ω par ω_p dans (C.2), on obtient :

$$Y_{Res}(\omega_p) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega_p^3 \eta_p + 2j\omega_p^2(\omega_k - \omega_p)}{4\omega_p^2(\omega_k - \omega_p)^2 + \eta^2\omega_p^4}. \quad (\text{C.4})$$

La partie réelle $G_{Res}(\omega_p)$ s'écrit alors

$$G_{Res}(\omega_p) = \frac{n(f_p)}{2\pi M_p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\omega_p \eta_p n(\omega_p)}{4(k - p)^2 + \mu(\omega_p)} = \frac{n(f_p)}{4M_p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{\pi\mu(\omega_p)}{2}}{(k - p)^2 \pi^2 + \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{2}\right]^2}, \quad (\text{C.5})$$

où μ est le facteur de recouvrement modal, tel qu'il est défini par la relation (2.42).

La substitution de $k - p$ par j amène la relation suivante :

$$G_{Res}(\omega_p) = G_C \sum_{j=1-p}^{+\infty} \frac{\frac{\pi\mu(\omega_p)}{2}}{j^2\pi^2 + \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{2}\right]^2}, \quad (C.6)$$

où G_C est la mobilité moyenne définie par Skudrzyk [129] et la relation (2.43).

La borne inférieure de la somme contenue dans la relation (C.6) peut s'étendre jusqu'à $-\infty$. Dans ce cas, cette somme est l'approximation d'une cotangente hyperbolique [66], soit

$$G_{Res}(\omega_p) = G_C \coth \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{2} \right]. \quad (C.7)$$

L'enveloppe des antirésonances se calcule de manière similaire en supposant que les minima de l'admittance apparaissent entre deux résonances successives, soit à la fréquence $\omega = \frac{\omega_k + \omega_{k+1}}{2} = \omega_k + \frac{1}{2n(\omega_k)}$.

On obtient alors la relation suivante :

$$G_{Ares}(\omega_p) = G_C \sum_{j=1-p}^{+\infty} \frac{\frac{\pi\mu(\omega_p)}{2}}{(j - 1/2)^2\pi^2 + \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{2}\right]^2}. \quad (C.8)$$

De manière analogue au calcul de l'enveloppe des résonances, il vient :

$$G_{Ares}(\omega_p) = G_C \tanh \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{2} \right]. \quad (C.9)$$

La courbe de mobilité peut alors être modélisée à travers 3 paramètres, que sont la densité modale, la masse de la structure et le facteur de recouvrement modal.

Dans [89], l'auteur introduit une correction dans les relations (C.8) et (C.9) en divisant les arguments des fonctions hyperboliques par deux. Les courbes enveloppes sont alors déterminées par les expressions :

$$\begin{cases} G_{Res}(\omega_p) = G_C \coth \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{4} \right] \\ G_{Ares}(\omega_p) = G_C \tanh \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{4} \right] \end{cases}. \quad (C.10)$$

Il est toutefois possible de définir une expression générale des courbes enveloppes telle que

$$\begin{cases} G_{Res}(\omega_p) = G_C \coth \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{\zeta} \right] \\ G_{Ares}(\omega_p) = G_C \tanh \left[\frac{\pi\mu(\omega_p)}{\zeta} \right] \end{cases}, \quad (C.11)$$

où ζ est une constante dépendant du type de structure où de la zone de fréquence consi-

dérée.



Annexe D

Article paru au JASA : Macro
parameters describing the mechanical
behavior of classical guitars

Macro parameters describing the mechanical behavior of classical guitars

Benjamin Elie^{a)} and François Gautier

LAUM, UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen F-72085, Le Mans Cedex 9, France

Bertrand David

Institut Mines-Télécom, Télécom ParisTech, CNRS LTCI 46 rue Barrault F-75634, Paris Cedex 13, France

(Received 21 March 2012; revised 16 October 2012; accepted 17 October 2012)

Since the 1960s and 1970s, researchers have proposed simplified models using only a few parameters to describe the vibro-acoustical behavior of string instruments in the low-frequency range. This paper presents a method for deriving and estimating a few important parameters or features describing the mechanical behavior of classical guitars over a broader frequency range. These features are selected under the constraint that the measurements may readily be made in the workshop of an instrument maker. The computations of these features use estimates of the modal parameters over a large frequency range, made with the high-resolution subspace ESPRIT algorithm (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques*) and the signal enumeration technique ESTER (*ESTimation of ERror*). The methods are applied to experiments on real metal and wood plates and numerical simulations of them. The results on guitars show a nearly constant mode density in the mid- and high-frequency ranges, as it is found for a flat panel. Four features are chosen as characteristic parameters of this equivalent plate: Mass, rigidity, characteristic admittance, and the mobility deviation. Application to a set of 12 guitars indicates that these features are good candidates to discriminate different classes of classical guitars.

© 2012 Acoustical Society of America. [<http://dx.doi.org/10.1121/1.4765077>]

PACS number(s): 43.75.Gh, 43.75.Yy [JW]

Pages: 4013–4024

I. INTRODUCTION

In the 1960s and 1970s, Schelleng,¹ Caldersmith,² and Christensen and Vistisen³ proposed simple models for the low-frequency mechanical behavior of string instruments. These studies, while giving a better understanding of the role of important elements such as the rose for the guitar, also reduce the complexity of a whole system to a few simple substructures (two coupled mass-string systems^{2,3} for the guitar soundboard-soundbox interaction, or an electric circuit¹ for the violin). This reduction mainly relies on a low-frequency assumption, which enables the modeling of mechanical and acoustical elements with the help of lumped equivalent circuits. For extending the study of complex vibrators to broader frequency ranges where the concept of lumped circuits does not apply, statistical⁴ or finite element methods^{5,6} have been thoroughly exploited. In this paper, we follow another approach which consists of addressing the issue of designing and estimating a few parameters able to characterize an instrument in the mid- and high-frequency ranges as well as in the low-frequency register. We particularly focus on the application of this approach to classical guitars.

In the low-frequency range, the mechanical behavior of weakly damped vibrating structures is usually described using eigenmodes. For higher frequency ranges, the spectral overlap of modes increases often due to higher damping and

sometimes higher modal density, and the modal theory becomes ineffective.^{4,7} This is likely a ratio for which authors have tried alternative approaches to capture the important and salient properties of a whole instrument: There is a need for summarizing its behavior along the whole frequency range with a few parameters (or features) and we expect them to discriminate instruments of the same kind.

For instance, a number of authors have investigated the vibro-acoustical properties by considering the radiation efficiency.^{8,9} Hill *et al.*¹⁰ designed a profile analysis of classical guitars with a method based on low-frequency input admittance and sound-pressure response. Earlier, Meyer and Janson¹¹ proposed a small set of selected features to be related to the quality of the guitar. Recently, Ege and Boutillon¹² have suggested describing globally the piano soundboard with a method based on modal density estimation. More generally, the salience of such features or macro-parameters is sometimes assessed with the help of subjective evaluation.^{8,13–15}

Hence, there are a number of solutions to deal with the issue of summarizing the vibro-acoustical behavior of a guitar in a few features. Since our work has been initiated from a collaboration with instrument makers and will be developed in the future in this framework, we only have considered the features which are computable from mechanical measurements made within a workshop context.

When a guitar string is plucked by the musician, its vibration is transmitted to the soundboard via the bridge. This makes the study of the string-soundboard coupling a good candidate for our purposes while the measurement of

^{a)} Author to whom correspondence should be addressed. Electronic mail: benjamin.elie.etu@univ-lemans.fr

the mechanical admittance, also called mobility, is realizable in the workshop for interested makers. On plucked instruments, the level of that coupling acts on both the sound level and the sound duration:¹ When it is strong (i.e., large mobility), the energy of the string is suddenly transferred to the soundboard, resulting in a more powerful sound but with faster decay. The trade-off between sound level and sound duration is a frequent issue to be tackled by instrument makers.

The main aspects of our approach are outlined by the organization of the paper. In Sec. II we follow Langley,¹⁷ Skudrzyk,¹⁸ and Ege and Boutillon¹² to design useful and salient features from the measurement of bridge mobility. In order to robustly estimate these features, an original signal processing method extending the modal identification to higher frequency ranges is presented in Sec. III. The performance of the method is studied in Sec. IV using a test framework combining a controlled dataset with realistic noisy environment. The method is then used in experiments with real wood and metallic thin plates. These experiments lead us to confidently apply the method to guitar mobility measurements (Sec. V), making it possible to visualize guitars as points in a well-chosen feature space.

II. DESCRIPTION OF BRIDGE MOBILITY USING A FEW PARAMETERS

In this paper, the experimental framework is restricted to that suitable from a daily instrument maker practice. Thus, the normal mobility is the only one considered for this study. This approximation restricts the possible degrees of freedom to the unique transverse motion; that is, the translation perpendicular to the soundboard. Where in a general case the mobility would have been a matrix,¹⁹ expressed in the frequency domain, here it becomes a simple scalar $Y(\omega)$ which amounts to the ratio between the transverse velocity in the Fourier domain $V(\omega)$ and the excitation force $F(\omega)$ in the same direction and at the same location. This mobility is usually measured at one of the points of the bridge where strings are attached.

Figure 1 shows typical mobility curves measured at the bridge of two different guitars at the point where the $E2$ string is attached. Both plots of $|Y|$ as a function of the frequency include numerous modal contributions and overall tendencies which results in different but rather complicated patterns and makes the comparison between the instruments not straightforward. In this section, we propose to consider a small set of quantities able to highlight the meaningful information comprised in $Y(\omega)$.

To this aim, the work of Skudrzyk on what he has called the characteristic admittance¹⁸ and that of Langley on the envelope curves of mobility¹⁷ have been found to be particularly useful. Both approaches allow a description of vibratory responses in the mid- and high-frequency ranges and are adapted for the case of stringed instruments.

A. MOF and frequency ranges

It is usual to split the frequency response of mechanical systems into three domains: The low-, mid-, and high-

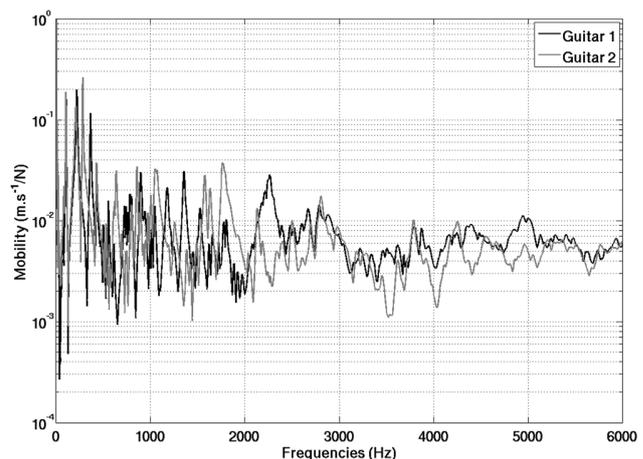


FIG. 1. Modulus of the mobility plotted versus frequency, measured at the bridge of two different guitars.

frequency ranges. In the low-frequency range, the mobility shows resonances as well as separated peaks, easy to segregate and identify. When higher frequencies are considered, the modal peaks tend to overlap largely because of higher damping in addition or not of greater modal density. The boundaries of these domains have been specified using the value of the Modal Overlap Factor (MOF),⁵ defined as μ , the ratio of the half-power bandwidth to the frequency difference of two successive eigenmodes. More precisely, let ω_k be the center angular frequency of a resonance peak, ω_{k+1} the next modal center angular frequency, and $\Delta\omega_k$ the half-power bandwidth, and the MOF μ_k writes

$$\mu_k = \frac{\Delta\omega_k}{\omega_{k+1} - \omega_k}. \quad (1)$$

The boundaries of the frequency ranges are commonly defined as follows:⁵

- (1) Low-frequency range: $\mu < 30\%$;
- (2) mid-frequency range: $30\% < \mu < 100\%$; and
- (3) high-frequency range: $\mu > 100\%$.

From a practical point of view, μ is obtained as a function of frequency by averaging μ_k 's over a sliding window containing a predefined number of modes (typically 11 modes).

B. Characteristic admittance

The so-called characteristic admittance Y_C of a finite structure is defined by Skudrzyk¹⁸ as the mobility of the equivalent structure with infinite dimensions. Skudrzyk¹⁸ derives a closed-form expression to estimate the real part of the characteristic admittance, $G_C = \Re(Y_C)$, of the finite structure from its properties

$$G_C(\omega) = \frac{\pi n(\omega)}{2M_{\text{Tot}}}, \quad (2)$$

where $n(\omega)$ denotes the local modal density and M_{Tot} is the total mass of the system.

To obtain Eq. (2), Skudrzyk's technique consists of changing the expression of the mechanical admittance from a discrete sum to an integral. However, the calculation of this integral is based upon several assumptions:

- The modal overlap is supposed to be large enough so that the modal contributions are no longer individually observable;
- the structure is supposed to be homogeneous (the surface density is constant over the whole structure);
- the generalized damping matrix is supposed to be diagonal (Basile hypothesis); and
- the modal loss factor is assumed to be constant over the whole frequency range.

The above hypotheses are, in particular, valid for plate-like systems, for which analytical expressions of modal density have been previously proposed.^{20–23} The modal density of rectangular plates is known to tend asymptotically toward a constant, which has been estimated by Courant and Hilbert:²⁰

$$n_{\infty}(\omega) = \frac{S}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad (3)$$

where S , h , and ρ denote, respectively, the surface, the thickness, and the surface density of the plate, D being the flexural rigidity.

The substitution of Eq. (3) in Eq. (2) leads to the expression of the asymptotic value of the characteristic admittance of rectangular flat panels

$$G_{C_{\infty}} = \frac{1}{8\sqrt{\rho h D}}. \quad (4)$$

The value of $G_{C_{\infty}}$ can be used as an indicator to quantify the ability of the structure to vibrate, a structure with large characteristic admittance being globally more mobile, therefore more efficient to vibrate. The value will be expressed in dB, where the reference at 0 dB is the characteristic admittance of a 2-mm thick infinite plate having typical mechanical properties of the spruce. Thus

$$G_{C_{dB}} = 20 \log_{10} \left(\frac{G_{C_{\infty}}}{G_{\text{Ref}}} \right), \quad (5)$$

where G_{Ref} is the characteristic admittance computed from Eq. (4), with $\rho = 420 \text{ kg m}^{-3}$, $h = 2 \text{ mm}$, and $D = 2.1 \text{ N m}$. Therefore, $G_{\text{Ref}} = 0.094 \text{ m s}^{-1} \text{ N}^{-1}$.

In the case of conservative thin plates, the imaginary part of the mobility of an infinite plate is zero (cf. Ref. 4, pp. 34–39), therefore the imaginary part of the characteristic admittance is null.

C. Envelope curves of the mobility

The characteristic admittance is a relevant descriptor as it gives information about the mean-value of mobility. The scattering of the mobility around its mean-value can be described by the envelope curves, which represent the upper and lower bounds of the admittance modulus as a function of

frequency. For two structures having the same characteristic admittance and the same modal density, their envelope curves will differ according to their loss factor. Langley¹⁷ gives an expression of envelope curves of mobility. Considering first the difference in frequencies between two successive resonances ω_k and ω_{k+1} evenly distributed and equal to the inverse of the local modal density $n(\omega)$, then considering that antiresonance frequencies between two successive resonances are $\omega = \omega_k + \omega_{k+1}/2$, the expression for the real part of the mobility at resonances and antiresonances is written

$$\begin{cases} G_{\text{Res}} = G_C \coth \left[\frac{\pi \mu}{\zeta} \right] \\ G_{\text{Ares}} = G_C \tanh \left[\frac{\pi \mu}{\zeta} \right], \end{cases} \quad (6)$$

where $\zeta = 2$ for one-dimensional structures and $\zeta = 4$ for two-dimensional structures (cf. Ref. 17).

The coupling between a string and the soundboard is strongly related to the value of the soundboard mobility at frequencies corresponding to the eigenfrequencies of the string.¹⁶ Basically, a large value of the real part of the soundboard mobility, at the point of coupling between the soundboard and the string, leads to a strongly damped string mode. Consequently, if the deviation of the soundboard mobility is large, the damping coefficients of string modes of successive notes also vary a lot. Therefore, if a guitar presents a large deviation of its frequency response curve around its mean value, one can think that its behavior is less homogeneous than another guitar having a small deviation of its frequency response. In order to quantify this deviation with simple quantities, the area between the upper and lower envelope curves normalized by the mean value of the mobility is estimated. This parameter, called the *mobility deviation*, is denoted by $\langle \sigma_Y \rangle_{\omega_{30}}$, and can be written

$$\langle \sigma_Y \rangle_{\omega_{30}} = \frac{1}{\omega_{\text{max}} - \omega_{30}} \int_{\omega_{30}}^{\omega_{\text{max}}} \frac{G_{\text{Res}} - G_{\text{Ares}}}{G_C} d\omega, \quad (7)$$

where ω_{max} is the upper bound of the frequency band used for the analysis of mobility. The angular frequency ω_{30} corresponds to the lower bound of the mid-frequency range and is defined as the angular frequency for which the MOF is greater than 30%.

III. MODAL IDENTIFICATION USING HIGH-RESOLUTION TECHNIQUES

In practice, the computation of the characteristic admittance and envelope curves requires an estimation of modal parameters. In the low-frequency range, several Fourier based modal identification techniques^{24,25} have been developed. In the mid- and high-frequency ranges, the modal overlap increases^{4,5} and these methods are no longer robust. Subspace methods such as MUSIC (Ref. 26) (*Multiple Signal Classification*), Matrix Pencil,²⁷ or ESPRIT (Ref. 28) (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) are then interesting to consider and have already

been successfully applied to vibration signals (cf. Le Carrou *et al.*²⁹ for the harp, David,³⁰ Badeau *et al.*,³¹ and Ege *et al.*³² for thin plates and piano, and Laroche³³ for guitars). Indeed, these methods overcome the Fourier resolution limit and are then useful when modes are overlapping (because of this property they are often called *high-resolution*). In our work, ESPRIT is used since it is known to be one of the more robust.

A. Modal description of the mobility

The eigenmodes of a dissipative system are the solutions of the homogeneous equation

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

where \mathbf{M} , \mathbf{C} , and \mathbf{S} are, respectively, the mass, the damping, and the stiffness matrices of size $N \times N$, where N is the number of modes and \mathbf{x} is the generalized coordinates vector of the displacement.

The eigenmodes (λ_k, Φ_k) of the dissipative systems are known to be complex.³⁴ The mobility can then be developed on the basis of the complex modes as

$$Y_A(\omega) = j\omega \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{u_k^2(A)}{\alpha_k + j(\omega + \omega_k)} + \frac{\bar{u}_k^2(A)}{\alpha_k + j(\omega - \omega_k)} \right\},$$

$$u_k^2(A) = \frac{\Phi_k^2(A)}{2j\omega_k m_k}, \quad (9)$$

where A denotes the point of observation, ω_k , α_k , m_k , and Φ_k are, respectively, the modal angular frequency, the modal damping factor, the modal mass, and the modal shape associated with the k th mode. \bar{u}_k denotes the complex conjugate of u_k , the complex modal amplitude of the k th mode.

If the damping matrix is such that the mode shapes Φ_k are real, then Eq. (9) can be rewritten in the form

$$Y_A(\omega) = j\omega \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_k^2(A)}{m_k(\omega_k^2 + j\eta_k\omega_k\omega - \omega^2)}, \quad (10)$$

where η_k denotes the modal loss factor of the k th mode.

The computation of the parameters described in the previous section requires knowledge of the modal parameters ω_k , α_k , Φ_k , and m_k . The measurement and analysis of the mobility using suitable techniques enable the modal parameter estimation in a broad frequency range.

B. Modal identification technique

From Eq. (9), it comes that the velocity response $s(A, t)$ to an impulse force is the inverse Fourier transform of $Y_A(\omega)$. To emphasize that $s(A, t)$ is real, it is written as a real part of a sum of complex damped sinusoids

$$s(A, t) = \Re \left[\sum_{k=1}^K b_k(A) z_k^t \right], \quad (11)$$

where $b_k(A) = a_k(A)e^{j\varphi_k(A)}$ is the complex amplitude of the k th mode, and $z_k = e^{-\alpha_k + j\omega_k}$ denotes the corresponding pole

with angular frequency ω_k and damping factor α_k . K is the number of modes between $\omega = -\pi F_s$ and $\omega = \pi F_s$, where F_s is the sampling frequency ($K = 2N$), the poles with negative frequency being the conjugate of those with positive frequency. These parameters are related to that of Eq. (9) by

$$b_k(A) = \frac{\Phi_k^2(A)}{2m_k} [1 + j\eta_k/2] \quad \text{and} \quad \alpha_k = \frac{1}{2}\eta_k\omega_k. \quad (12)$$

The ESPRIT (Ref. 28) algorithm estimates the signal parameters corresponding to the modal parameters of the K sinusoidal components embedded in the signal. As with the other subspace high resolution methods (such as Matrix Pencil or MUSIC), it is based on the decomposition of the data vector space onto two orthogonal subspaces, the so-called signal and noise subspaces. The signal subspace \mathcal{S} is that spanned by the sinusoidal components, i.e., the family of the Vandermonde vectors $\mathbf{v}_{k=1..K}$, with $\mathbf{v}_k = e^{j\omega_k t - \alpha_k t}$. The noise signal \mathcal{N} is the orthogonal complement of \mathcal{S} , such as $\mathcal{S} \oplus \mathcal{N} = \varepsilon$ where ε is the vector space spanned by the data vector. A basis $\mathbf{W}(K)$ of \mathcal{S} is obtained by computing the singular value decomposition (SVD) of the Hankel data matrix computed from the measured signal samples. The signal subspace verifies the so-called rotational invariance property: It remains invariant from a sample to the next. This remark leads to the following property:

$$\mathbf{W}_\uparrow(K) = \mathbf{W}_\downarrow(K)\mathbf{R}(K), \quad (13)$$

where $\mathbf{R}(K)$ is a $K \times K$ matrix the eigenvalues of which are the poles z_k . $\mathbf{W}_\downarrow(K)$ is the matrix $\mathbf{W}(K)$ where the last row has been deleted and $\mathbf{W}_\uparrow(K)$ is the matrix $\mathbf{W}(K)$ where the first row has been deleted. The estimation of the poles z_k is done by an eigenvalue decomposition of $\mathbf{R}(K)$. The reader can refer to the Appendix for a detailed description of the ESPRIT algorithm.

C. Signal enumeration

An important issue when applying subspace methods to composite signals is the tuning of the modeling order K , which is usually unknown. Several methods have been proposed to estimate K : The maximum likelihood³⁵ method and Information Theoretic Criteria,³⁶ which include the Akaike Information Criteria,³⁷ and the Maximum Description Length.³⁸ More recently, the ESTER (*ESTimation of ERror*) criterion, based upon the assessment of the rotational invariance property that characterizes the signal subspace, has been designed by Badeau *et al.*³¹ and used by Ege *et al.*³² in the context of real world mechanical experiments. We thus chose to apply this technique since it proves to be reliable and also for its straightforward implementation with the ESPRIT algorithm.

This criterion consists of appraising the rotational invariance property of the signal sub-space with the error function

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_\uparrow(p) - \mathbf{W}_\downarrow(p)\mathbf{R}(p). \quad (14)$$

The authors then introduce the function \mathbf{J}

$$\mathbf{J}(p) = \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2}. \quad (15)$$

$\mathbf{J}(p)$ is computed for $p = 1, 2, \dots, p_{\max}$, where $p_{\max} > K$, K being the right number of components residing in the signal. When the order p is equal to the right number of poles ($p = K$), the matrix $\mathbf{W}(K)$ verifies the rotational invariance property, and consequently $\|\mathbf{E}(p)\|_2^2$ becomes null. $\mathbf{E}(p)$ can also be zero for $p < K$ since the subspace is then spanned by p sinusoids. Practically, we will obtain large values of \mathbf{J} for $p \leq K$ and smaller ones for $p > K$, when the subspace spanned by $\mathbf{W}(p)$ includes noise components. Note that for the impulse response signal, which is real, the number of components K is twice the number of physical eigenmodes.

IV. ROBUSTNESS OF THE METHOD

This section proposes numerical and experimental testings of the ESPRIT method in order to assess the performance and the robustness of the method.

A. Test on realistic numerical simulations

In this section, the method is applied to synthetic test signals, designed to accurately simulate real measurement conditions while providing a ground truth for the modal parameters. It then allows to precisely control the macro-parameters as the noise level, the distribution of the modal component along the frequency axis, and the modal overlap on purpose to assess the performance of the method for different values of these macro-parameters. The design of the synthetic signal is described first, followed by the main step of the whole, practical, signal processing method.

1. Hybrid synthesis of the acceleration and the force signals

The synthetic signals are designed by mixing a thin plate modal superimposition and measured noise outcomes obtained from a typical vibro-acoustic sensor; hence the denomination ‘‘Hybrid.’’ Simulated impulse responses of rectangular, simply supported thin plates are then computed by following the steps below.

Step 1: Synthesis of the noiseless impulse response.

The modal parameters of a simply-supported rectangular plate, obeying the Kirchhoff-Love³⁴ model, are given by

$$\omega_{n,m} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\rho h}} \sqrt{D_1 \frac{n^4}{L_x^4} + D_3 \frac{m^4}{L_y^4} + (D_2 + D_4) \frac{n^2 m^2}{L_x^2 L_y^2}}, \quad (16)$$

$$\Phi_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right), \quad (17)$$

$$m_{n,m} = \Phi_{n,m}^T \mathbf{M} \Phi_{n,m} = \int_S \rho_S \Phi_{n,m}^2(x, y) dS, \quad (18)$$

where n and m are positive integers, and L_x and L_y are, respectively, the dimensions of the plate along x and y . The

terms D_i , with $i = 1, \dots, 4$, denote the flexural rigidity of the material, ρ_S is the surface density, and S is the surface.

The noiseless impulse response signal $s(t)$ is computed as a sum of the modal responses, by substituting Eqs. (16)–(18) into Eqs. (11) and (12).

Step 2: Synthesis of the force signal $f(t)$.

To resemble a force signal as produced by a real hammer impact, a typical waveform is proposed. It is a composite time-function built on two half-Gaussians leading to an asymmetrical bell-shape which rises faster than it decays. The synthetic waveform has been chosen in agreement with the observation of a large set of different measured signals.

Step 3: Synthesis of the noiseless acceleration signal $\gamma(t)$.

The noiseless acceleration signal $\gamma(t)$ is computed by convolving the signal force by the impulse response of the synthetic plate, e.g., $\gamma = f * s$.

Step 4: noisy synthetic signal.

Numerous noise signals have been recorded from the sensors used for our experiments attached to nonexcited plates. A segment of these measurements is randomly extracted and added both on the synthetic force and acceleration signals.

2. Impulse response estimation

Step 1: Prewhitening.

ESPRIT is based on the assumption of an additive white noise; hence the necessity of a signal prewhitening before applying the estimation algorithm. In practice, it is often not difficult to obtain a measured noise alone, e.g., the mechanical system being not excited, either from the acceleration or the force sensor. This noise is then modeled as an autoregressive process of order 10. The corresponding transfer function is denoted by $H = 1/A$ and the noise whitening step then consists of filtering the signals (acceleration or force) by the inverse filter A .³¹

Step 2: Deconvolution.

The impulse response is estimated following a deconvolution technique. Assuming the mechanical system to be linear, the problem writes

$$f * s = \gamma. \quad (19)$$

The technique consists of estimating an approximate, finite impulse response, inverse filter \hat{g} for f . The approximation is defined in the mean least square sense as

$$\hat{g} = \underset{\hat{g}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{g} * f - \gamma\|_2^2. \quad (20)$$

We then obtain an estimate \hat{s} of s as

$$\hat{s} = \hat{g} * \gamma. \quad (21)$$

3. Application of the method to simulated plates

Impulse responses of nine simulated plates are computed, with intermediate parameters of modal density and loss factors. This leads to nine data sets, corresponding to nine plates that are represented in a loss factor-modal density

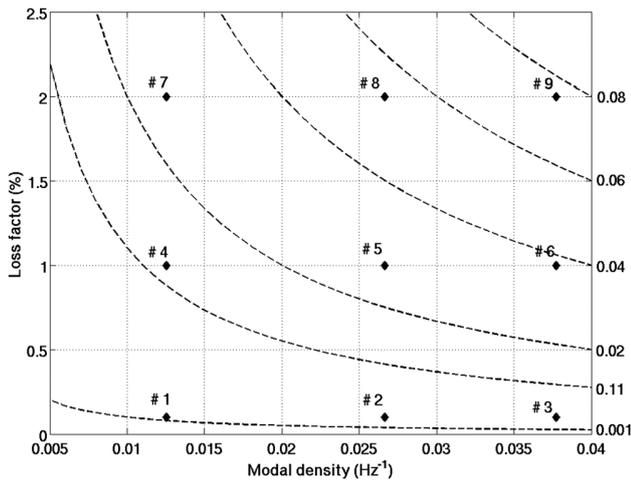


FIG. 2. Modal density and loss factors of the nine synthetic plates. The value of the modal density is computed from Eq. (3). The “isoMOF” (dashed line) is the product of the modal density and loss factor values.

plane in Fig. 2. For additional information, the contour lines of equal MOF, or isoMOF, are drawn (dashed lines). Two of these nine simulated plates are a simulation of panels that are used for the experimental validation, which is presented in Sec. IV B: An aluminum plate, with a low modal density and low damping, and a spruce plate, with a higher modal density and higher damping. The geometrical and mechanical parameters of both plates are summarized in Tables I and II.

Following Sec. III C, the modeling order (number of components of the impulse response) is selected as the integer K for which the ESTER criteria $J(p)$ remains below a certain threshold for $p > K$. Usually $J(p)$ shows higher values on average for $p < K$ than for $p > K$ where it is often evenly lower. The threshold is set to a fraction of the global maximum, typically chosen as 1/10 or 2/5. Figure 3 shows the ESTER criterion applied to plates #1 and #6.

In practice, an overestimation of the number of modes often leads to unrealistic modal parameters (for instance, a very high or negative damping). These aberrant values are easily discarded by a simple thresholding, consisting of rejecting modes estimated with negative damping or loss factors greater than an arbitrary threshold (set to 5% in our case).

In order to statistically assess the performance of the order estimation, 100 outcomes of the simulated plate signals are computed. Each outcome uses a different noise segment following the scheme presented in Sec. IV A 1. The performance of the method for the nine synthetic plates is plotted in Fig. 4, where error bars have been drawn, corresponding to the median absolute deviation.

For all plates, the number of components is accurately estimated. However, the estimation is rather dependent on

TABLE I. Mechanical parameters of the aluminum plate.

Parameter	Units	Values	Parameter	Units	Values
L_x	mm	280.0	ρ	kg m^{-1}	2700.0
L_y	mm	350.0	E	GPa	69
h	mm	2.5	ν		0.3

TABLE II. Mechanical parameters of the spruce plate.

Parameter	Units	Values	Parameter	Units	Values
L_y	mm	500	D_1	N m	17.2
L_x	mm	190	D_2	N m	1.0
h	mm	2.5	D_3	N m	1.3
ρ	kg m^{-1}	433	D_4	N m	3.6

the excitation and observation points. Indeed, if the excitation and observation points are in the vicinity of the nodal lines, the corresponding modes are not detected by the method. This is especially the case when damping is large (e.g., plates #7 to #9) because the sinusoidal component is quickly drawn into noise, due to its large damping. Figure 4 confirms this tendency since the number of components is rather underestimated, and the variation of estimation is higher when damping and/or modal density is large (i.e., the modal overlap is larger). However, the study focuses on the modal density of the guitar soundboard seen by the string. Thus, if the string applies a force in the vicinity of a mode

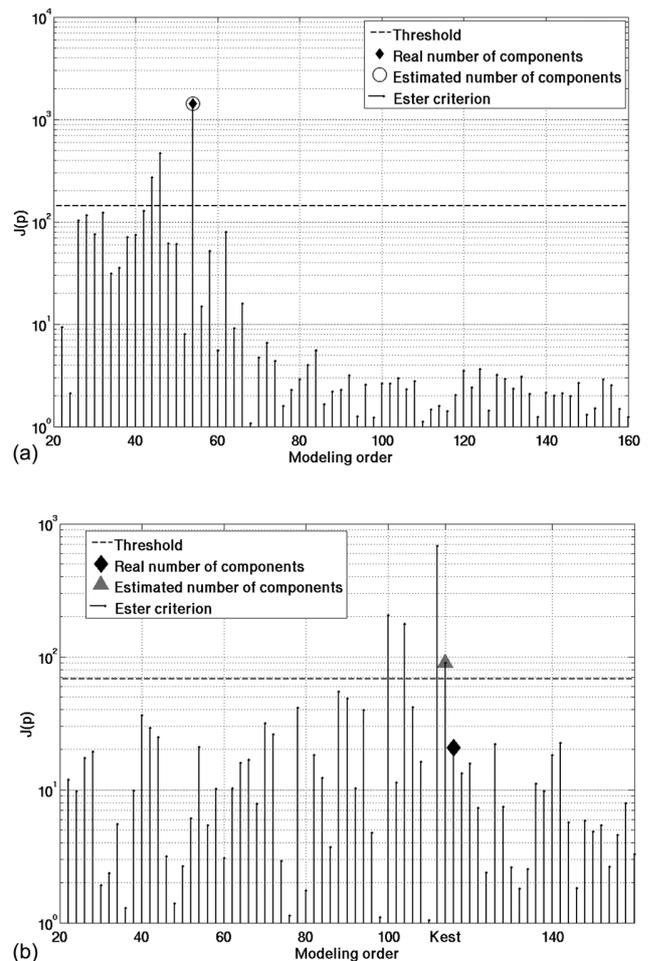


FIG. 3. (a) ESTER criterion, given by Eq. (15), for plate #1 versus the modeling order. The estimated modeling order in that case is 54, which matches the right number of components (54). (b) Results of the method applied to plate #6. The estimated modeling order in that case is 114, which is slightly under the right number of components (116).

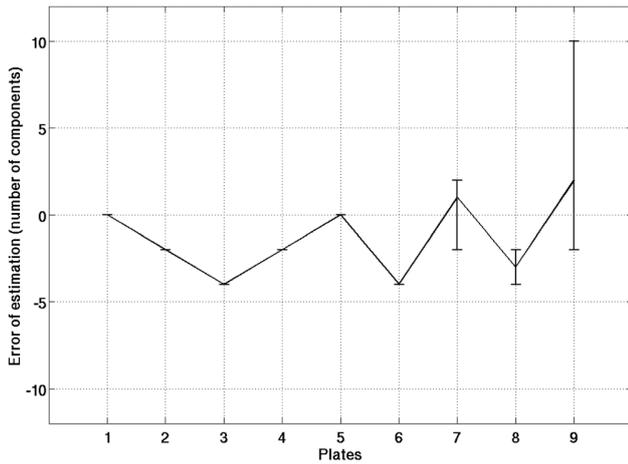


FIG. 4. A comparison between the estimated number of components K_{est} and the real number of components K_{real} in the synthetic impulse response of the nine plates. The values are the median and the median absolute deviation of a set of 100 realizations.

node, it is not of great interest to detect it since that mode will not be excited. Besides, the study focuses on global parameters; a local error in the modal estimation is unlikely to be really influent on the final estimation of the global features.

B. Application to real plates

This section reports an experimental study using a rectangular aluminum plate and a rectangular spruce plate. The mechanical parameters of the tested plates are those given in Tables I and II.

1. Measurement setup

The plates are hung with wires, fixed to its upper corners. This experimental setup is intended to approach free-edge boundary conditions while minimizing the added dissipation due to suspensions. The impulse response $s(t)$ is obtained by a synchronous and co-localized measurement of the excitation signal, using a small impact hammer (PCB 086E80), and the acceleration signal, by means of a small accelerometer (PCB 352C23, 0.2g). The plate is impacted at the same point than the measurement and the signal $s(t)$ is analyzed with the help of the ESPRIT method as described in Sec. III B. The algorithm gives in output the estimated signal parameters Θ_k (the modal parameters, frequency, damping, amplitude, and phase). As discussed in Sec. II A, the MOF, as well as the modal density, and the modal damping are averaged by means of a sliding window (in this study 11 consecutive modes are averaged). Finally, the global parameters defined in Sec. II (namely, G_C and the envelope curves) are computed from the values of the modal parameters.

2. Analysis of plate measurements

Figure 5 represents the ESTER criterion applied on the measured impulse response of both plates.

The overall spread of the ESTER criterion from the measured data resembles those obtained in Sec. IV A 3 with simulated data. This leads to confidently apply the method to

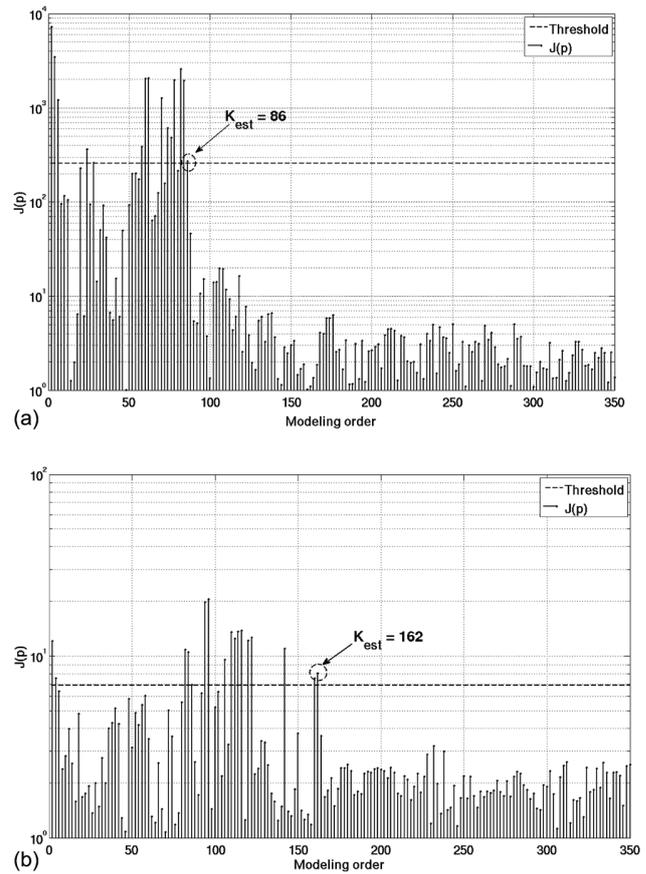


FIG. 5. ESTER criterion for (a) the aluminum plate and (b) the spruce plate.

estimate the number of components. Figure 6 shows the modal density, estimated by ESPRIT for the aluminum and spruce plates, computed from the ESPRIT-estimated modal frequencies and using Eq. (22).

For both plates, the estimated modal density is found roughly constant, amounting to a value of 0.015 Hz^{-1} for the aluminum plate, and 0.0255 Hz^{-1} for the spruce plate. These results are in good agreement with the theoretical modal density of thin plates, known to be asymptotically constant. A close form of the asymptotic modal density, independent of the boundary conditions, has been derived by Courant and Hilbert²⁰ for isotropic plates. Recently, Xie *et al.*²¹ have proposed to add a corrective term, depending on the boundary conditions (cf. Sec. V B for details). The analytical modal density of free plates, after Xie *et al.*,²¹ is given by

$$n(\omega) = n_{\infty} + \frac{L_x + L_y}{2\pi} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/4} \omega^{-1/2}, \quad (22)$$

where n_{∞} is the asymptotic modal density given by Eq. (3). The dashed line in Fig. 5 represents the analytical modal density, after Eq. (22). For the spruce plate, the analytical modal density is computed with the typical mechanical parameters of the spruce. The modal density estimated by ESPRIT from experimental data is in good agreement with that computed from Eq. (22), showing that the number of modes estimated by ESTER is accurate.

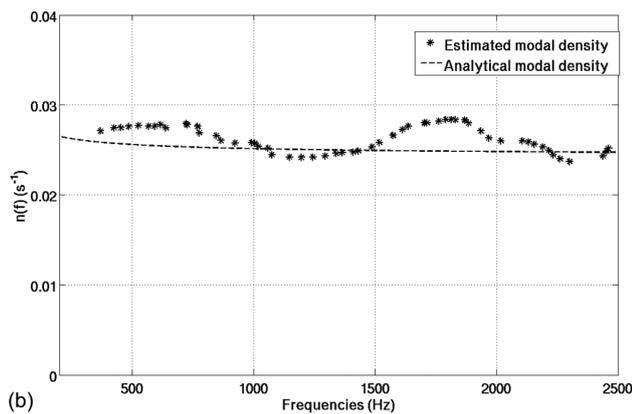
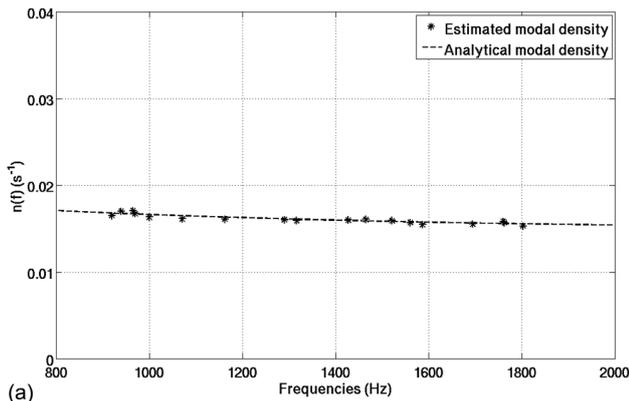


FIG. 6. Modal density estimated by ESPRIT of (a) the aluminum plate and (b) the spruce plate. The dashed line represents the analytical modal density after Eq. (22) and Table III, where the boundary conditions are free. For the spruce plate, the analytical modal density is computed according to the typical values of the spruce, displayed in Table II.

V. APPLICATION TO GUITARS

A. Analysis of measured bridge mobility

For experimental testing, guitars are hung by their headstock. The bridge mobility is measured using an accelerometer placed on the bridge, at the base of the $E2$ string, and a force hammer impacting at the same point. The present study focuses on the mechanical response of the guitar's soundboard at one string attachment point. The mean mobility level varies along the bridge: The bridge at the central strings ($D3$ and $G3$) attachment point is globally less mobile than at the other string's attachment points.

Figure 7 is an overall description of the mobility measured at the bridge of a guitar. The behavior of G_C , computed from Eq. (2), in the mid- and high-frequency ranges is typical of thin plates. This result suggests that guitars can be assimilated to an equivalent flat panel in these frequency domains. Furthermore, the computation of G_C highlights the global differences between instruments. This is one of the main results of this paper. The interest of such a result for the characterization of guitars is to reduce their characteristics to those of a rectangular thin plate that is equivalent to the guitar. The dashed line is the analytical modal density of the so-called equivalent plate. The modal damping is represented in Fig. 7(c). The modal loss factor is set between 1%

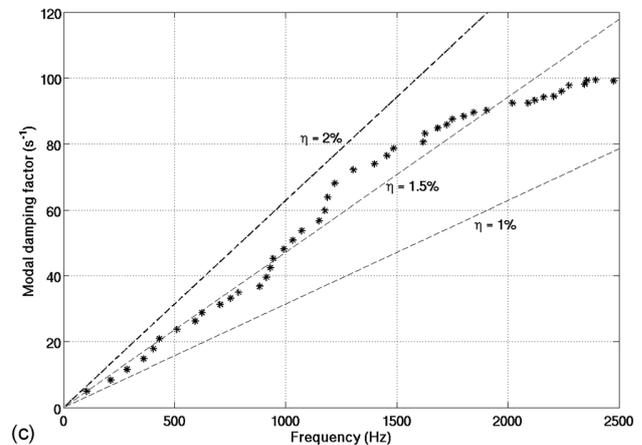
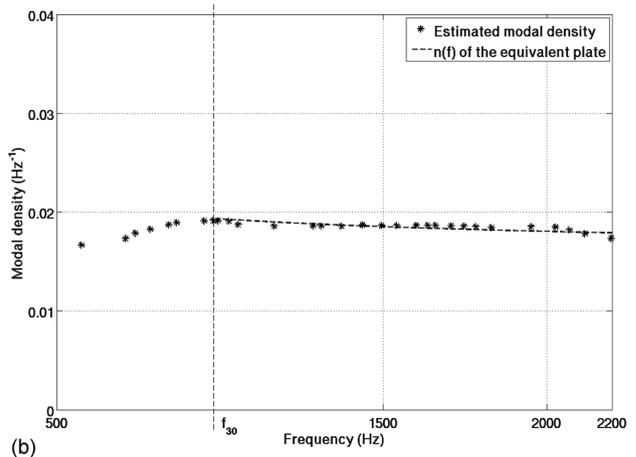
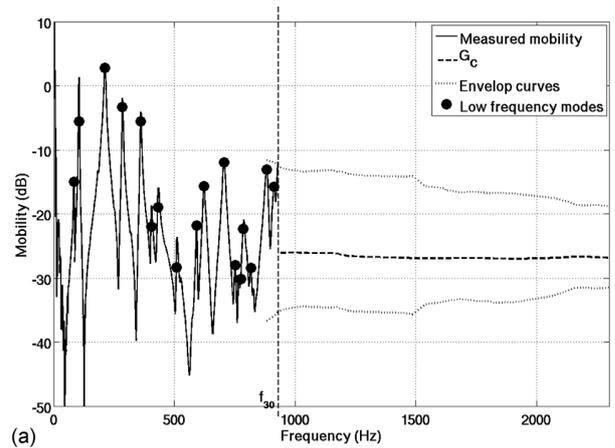


FIG. 7. (a) Overall representation of the mobility measured at the bridge of a guitar. (b) Modal density and (c) modal damping factor estimated by ESPRIT and corresponding modal loss factors (dashed lines).

and 2%, which is a typical value for wood materials, such as spruce.^{39,40}

B. Parameters of characterization: Bending stiffness and mass

The analysis of the modal density of several guitars shows that it is roughly constant in the mid- and high-frequency

ranges, which is a common feature of flat panels. We propose to determine the bending stiffness and the mass of the plate having the same modal density, i.e., the equivalent plate. This equivalent plate contains the contribution of every subsystem composing the whole instrument, namely, the soundboard, the bridge, the bars, the back plate, the soundbox, etc. The method does not require prior information about the instrument. Although the materials used in instrument making are mainly orthotropic, the chosen model is an isotropic plate. The knowledge of the different rigidity moduli D_i is not necessary, and it is more convenient to estimate a global bending stiffness corresponding to the rigidity of the equivalent isotropic plate.

The modal density of plates writes

$$n(\omega) = p\beta + q\sqrt{\beta/\omega}, \quad (23)$$

where $p = S/4\pi$, q is a constant coefficient depending on the boundary conditions and on the perimeter of the plate, and $\beta = \sqrt{\rho h/D}$ is called the *plate elastic constant*, depending on the mechanical properties of the material. Table III gives the parameter q for different boundary conditions, according to Xie *et al.*²¹

The plate elastic constant is determined by searching the value of β which minimizes the quadratic difference between the measured modal density and the model given by Eq. (23). Hence

$$\beta = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{n}_{30} - p\beta + q\sqrt{\beta}\mathbf{g}_{30}\|_2^2, \quad (24)$$

where $\mathbf{n}_{30} \in \mathbb{R}_+^{*\tilde{N}}$ is a vector containing the \tilde{N} measured values of the modal density at angular frequencies larger than ω_{30} , i.e., $\mathbf{n}_{30} = [n_j \ n_{j+1} \ \dots \ n_N]^T$, where j is the first mode order for which the modal overlap is higher than 30%, N being the number of modes estimated in the impulse response. The vector $\mathbf{g}_{30} \in \mathbb{R}_+^{*\tilde{N}}$ is the vector containing the \tilde{N} square root of the inverse measured modal angular frequencies in the mid-frequency range, i.e., $\mathbf{g}_{30} = [\omega_j^{-1/2} \ \omega_{j+1}^{-1/2} \ \dots \ \omega_N^{-1/2}]^T$. Considering $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, Eq. (24) has only one solution.

The estimation of the modal density for every guitar shows a slightly decreasing modal density in the mid-frequency range, which is proper to a freely vibrating plate. Consequently, the parameter q used for the study is the one corresponding to a plate with free boundary conditions.

Since the dimensions of classical guitars are very similar from one guitar to the next, those of the equivalent plate are set to the same value for each of them. The choice of the dimensions L_x and L_y is arbitrary. We chose to set these dimensions to those of a square plate with $L_x = L_y = 0.3$ m, since it roughly corresponds to the dimensions of the lower

TABLE III. Parameter q for different boundary conditions.

Boundary conditions	q
Free	$L_x + L_y$
Simply supported	$-(L_x + L_y)/2$
Clamped	$-(L_x + L_y)$

part of the soundboard, which is the most mobile part. The values of parameters p and q in Eq. (24) are $p = 7.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ and $q = 0.6 \text{ m}$.

The equivalent mass should be estimated by computing the spatial average of the modal amplitudes. In practice, this spatial average is delicate to achieve because of the high number of required measurements.

We propose to estimate the equivalent mass from Eq. (2). According to Skudrzyk, the characteristic admittance is the mean-line of the logarithmically plotted mobility curve; it is the geometrical mean between a resonance and its successive antiresonance. It can be estimated by computing the moving average of the mobility curve, in dB. It consists of computing the mean value of the mobility, in dB, included in a sliding window of a certain span, this latter moving from one sample to the next. The obtained smoothed mobility G_{smoothdB} writes

$$G_{\text{smoothdB}}(\omega_c) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} Y_{\text{dB}} d\omega, \quad (25)$$

where $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\omega_c = \omega_1 + \omega_2/2$, ω_1 and ω_2 being, respectively, the lower and upper frequency bounds of the sliding window.

The equivalent mass is estimated from Eq. (2), by means of the mean least squares method

$$M = \frac{\pi}{2} \mathbf{n}_{\text{fit}} \cdot \mathbf{G}_{\text{smoothdB}}^\dagger, \quad (26)$$

where \dagger denotes the Moore-Penrose pseudo-inverse, \mathbf{n}_{fit} is the analytical modal density of the equivalent plate, computed from Eq. (23), and $\mathbf{G}_{\text{smoothdB}}$ is the estimation of characteristic admittance G_C computed from Eq. (25).

Tests on synthetic plates showed that the frequency span of the sliding window should be large (around 2000 Hz) in order to minimize the error of estimation on the equivalent mass.

Dividing the equivalent mass M_{Eq} by S gives the surface density ρh . Then, the equivalent bending stiffness is given by

$$D_{\text{Eq}} = \frac{\rho h}{\beta^2}. \quad (27)$$

This method of characterization is not only dedicated to musical applications but it applies to any plate-like structures and is relevant for estimating their characteristic parameters.

C. Results

Two groups of guitars have been studied. The first group is composed of nine recent guitars made by instrument makers, considered as high quality instruments. They come from several different manufacturers and were lent by the store *La Guitarreria*, located in Paris. The second group is composed of industrial guitars of a lower quality. The limits of the low-frequency domain, given by f_{30} , corresponding to the frequency from which the MOF is greater than 30% is given in Table IV.

TABLE IV. Values of f_{30} for different studied guitars.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Group 1	f_{30} (Hz)	772	910	834	465	767	835	754	603	850
Group 2	f_{30} (Hz)	506	602	635						

1. Characteristic admittance vs mobility deviation

A classification of the studied instruments is proposed by comparing the values of their characteristic admittance, denoted by G_{C_∞} , and their mobility deviation, denoted by $\langle\sigma_Y\rangle$. The instruments can be represented in a plane defined by the values of G_{C_∞} and $\langle\sigma_Y\rangle$, as shown in Fig. 8.

Except for a few cases, the characteristic admittance of industrial guitars (group 2) is smaller than the one of handmade guitars (group 1). Typically, the difference is from 1 up to 4 dB. Guitars from group 1 are therefore generally more efficient to vibrate.

The mobility deviation alone, however, is unlikely to discriminate the two groups: A large part of guitars from group 1 presents a mobility deviation in the same range than guitars from group 2, between 2.8 and 2.9. Nevertheless, some guitars from group 1 have a smaller mobility deviation, around 1.8 and 2.8.

2. Bending stiffness vs equivalent mass

A classification of instruments is proposed by comparing the values of the mechanical properties of their equivalent plate, namely, the bending stiffness D_{Eq} and the mass M_{Eq} . Figure 9 represents the position of the guitars in the plane defined by these two macro-parameters. The isomobility contour lines in Fig. 9 represent the values of G_{C_∞} corresponding to the values of D_{Eq} and M_{Eq} , after Eq. (4).

The pair of parameters, equivalent mass, and bending stiffness, when associated, is discriminant: The separation between the industrial guitars and the guitars from luthiers is straightforward. The industrial guitars present a high equivalent bending stiffness in comparison to those of guitars from group 1. However, the equivalent mass of industrial guitars

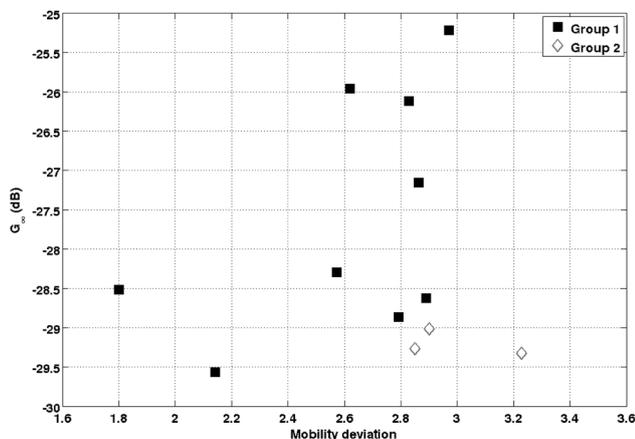


FIG. 8. Classification of two groups of classical guitars by the values of their characteristic admittance G_{C_∞} and their deviation of mobility.

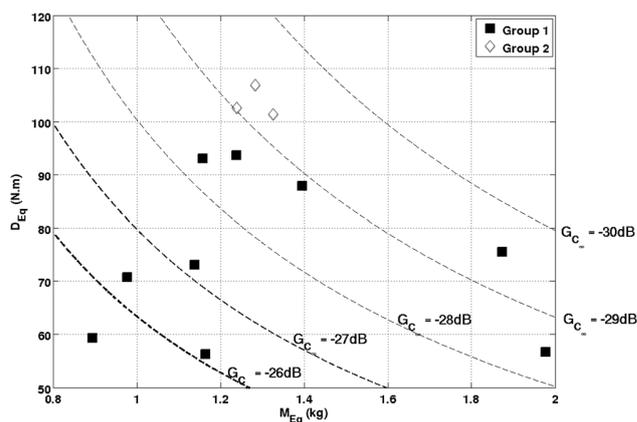


FIG. 9. Classification of instruments by the values of the mechanical parameters of their equivalent plate (bending stiffness and mass). The isomobility contour lines (–) are given by dashed lines.

is rather similar to those made by luthiers. The stiffness disparities between guitar groups can be explained by the nature of materials used for manufacturing. Indeed, industrial guitars are usually made with plywood, which is stiffer than solid woods (spruce or red cedar) used for soundboard manufacturing of high quality guitars.

It is worth noting that industrial guitars present similar properties: They tend to group together in the planes of both Figs. 8 and 9. This is certainly a consequence of the reproducible aspect of the industrial manufacturing process.

VI. CONCLUSIONS

The developed approach for this study enables the identification of modal density of structures. Despite the fact that frequency responses of mechanical structures show high modal overlap, so that the modal parameters are difficult to identify by classical methods, the modeling of the impulse response of a structure as a sum of complex damped sinusoids, made up of the temporal responses of the mechanical modes, enables the ESPRIT method to estimate them with good precision when associated with the signal enumeration technique ESTER.

Numerical and experimental validations on metallic and wood plates confirmed the accuracy of the method. Then, applications on guitars showed a common feature of their average mobility, the latter presenting a plate-like behavior in the mid-frequency domain. Thus, the guitar soundboard can be considered as a plate for frequencies higher than 800 Hz. From the values of modal parameters estimated by ESPRIT and some geometrical assumptions, it is possible to determine the mechanical properties of an equivalent plate (bending stiffness and equivalent mass), allowing a simple characterization of guitars using only four scalar features, which are the equivalent mass and equivalent bending stiffness, the characteristic admittance of the equivalent plate, and the mobility deviation.

Applications on different populations of guitars highlight differences between instruments, especially in terms of average mobility, where the industrial guitars tend to have an average mobility smaller than guitars made by luthiers.

The difference in average mobility is attributed to the fact that industrial guitars made of plywood, are stiffer than hand-made guitars that present a solid top of spruce or red cedar. The equivalent masses of all guitars are rather similar. It seems that one part of the luthier's savoir-faire consists of adjusting the global flexibility of the soundboard, so that they can control the mobility level. However, a high mobility is not necessarily a desirable quantity, as it can induce damped notes if the latter is very large at a particular frequency. The trade-off between powerful sound and sound duration is another role of the luthier. The homogeneity of the mobility level with frequency is assessed by the mobility deviation feature.

The mobility deviation feature, quantifying the scattering of the mobility around its mean-value, shows that, except in a few cases, all guitars present similar deviation of mobility around its mean-value.

Finally, the studied features seem to be good candidates to discriminate objectively instruments of the same kind, enabling eventually an instrument clustering. The application of the method shall be helpful for the instrument makers regarding the problematics encountered. They will dispose measurement tools enabling them to characterize objectively the mechanical behavior of their instrument with a set of few features.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to acknowledge the *Agence Nationale pour la Recherche* for the financial support of project PAFI (*Plateforme d'Aide à la Fabrication Instrumentale*). We would also like to thank *La Guitarreria*, and the ITEM (Institut Technologique Européen des Métiers de la Musique) for the loan of instruments.

APPENDIX: ESPRIT ALGORITHM

Let $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$ be the column vector of the measured signal, and \mathbf{s} is a sum of K exponentially damped complex sinusoids corrupted by an additive white noise ε which the variance is σ^2 ; hence

$$s[n] = \sum_{k=1}^K b_k z_k^n + \varepsilon[n], \quad (\text{A1})$$

where b_k is the complex amplitudes of the sinusoids, and $z_k = e^{j\omega'_k - \alpha'_k}$ is the complex poles, $\omega'_k \in [-\pi, \pi]$ being the normalized angular frequency and $\alpha'_k \in \mathbb{R}_+$ being the normalized damping factor. The autocovariance matrix \mathbf{X} writes

$$\mathbf{X} = \mathbb{E}[\mathbf{s}\mathbf{s}^H], \quad (\text{A2})$$

$$= \mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{V}^H + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (\text{A3})$$

where \mathbb{E} and \cdot^H denote, respectively, the statistical expectation and the conjugate transpose of the matrix/vector, \mathbf{I} is the identity matrix, and $\mathbf{B} = \mathbf{b}\mathbf{b}^H$, \mathbf{b} being the vector containing the complex amplitudes b_k

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_K]^T. \quad (\text{A4})$$

The matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times K}$ is a base of the signal subspace \mathcal{S} spanned by the K complex sinusoids. It is a Vandermonde matrix containing the Vandermonde vectors $\mathbf{v}_k \in \mathbb{C}^N = [1 \quad z_k^1 \quad z_k^2 \quad \cdots \quad z_k^{N-1}]^T$ of each individual sinusoid. The matrix \mathbf{V} writes

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_K \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_K^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_K^{N-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A5})$$

The noise subspace \mathcal{N} is then the orthogonal complement of the signal subspace \mathcal{S} such that $\mathcal{S} \oplus \mathcal{N} = \varepsilon_N$, where ε_N is the vector space spanned by the N -dimensional data vector \mathbf{s} .

The signal subspace \mathcal{S} is characterized by the so-called rotational invariance (its base remains invariant from a sample to the next), which can be written into a matricial form

$$\mathbf{V}_\uparrow = \mathbf{V}_\downarrow \mathbf{D}, \quad (\text{A6})$$

where \mathbf{V}_\uparrow is the matrix \mathbf{V} to which the first line has been withdrawn, and \mathbf{V}_\downarrow is the matrix \mathbf{V} to which the last line has been withdrawn. The matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ is a diagonal matrix, where the diagonal elements are the K poles of the signal

$$\mathbf{D} = \text{diag}(z_1, \dots, z_K).$$

In practice, \mathbf{V} cannot be estimated but a base of the signal subspace \mathcal{S} can be approached from a SVD of the autocovariance matrix $\mathbf{X} = \frac{1}{r} \mathbf{H}\mathbf{H}^H$, where \mathbf{H} is a $l \times r$ Hankel matrix, with $r > K$ and $l = N + 1 - r > K$ is the sum of the dimensions of the signal and noise subspaces, composed of the measured signal samples

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Z}, \quad (\text{A7})$$

where $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{l \times l}$ is an $l \times l$ matrix containing the l singular vectors $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l\}$ associated with the l singular values sorted in decreasing order. The matrix $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{l \times l}$ is a diagonal matrix containing the l singular values $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l\}$ sorted in decreasing order. A base \mathbf{W} of \mathcal{S} can be approached by the concatenation of the K first singular vectors associated with the K larger singular values. The singular values from λ_{K+1} to λ_l are associated with the noise subspace \mathcal{N} . The base \mathbf{W} verifies the rotational invariance; hence

$$\mathbf{W}_\uparrow(\mathbf{K}) = \mathbf{W}_\downarrow(\mathbf{K})\mathbf{R}(\mathbf{K}), \quad (\text{A8})$$

where $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ is a $K \times K$ matrix in which the eigenvalues are the poles of the signal. The poles z_k are then obtained by means of an eigenvalue decomposition of the matrix \mathbf{R} .

Finally, the steps for finding the complex poles are as follows:

- (1) Compute the autocovariance matrix $\mathbf{X} = \frac{1}{r} \mathbf{H}\mathbf{H}^H$, where \mathbf{H} is the $l \times r$ Hankel matrix with the samples of the measured signal. The dimension l should be chosen such that $l > K$;
- (2) compute $\mathbf{W}(\mathbf{K})$ by a concatenation of the K singular vectors associated with the K largest singular values from the SVD of \mathbf{X} ;

- (3) compute $\mathbf{R}(K) = \mathbf{W}_\downarrow(K)^\dagger \mathbf{W}_\uparrow(K)$, where the symbol \dagger denotes the Moore-Penrose pseudo-inverse; and
 (4) extract the poles z_k as the eigenvalues of $\mathbf{R}(K)$.

- ¹J. C. Schelleng, "The violin as a circuit," *J. Acoust. Soc. Am.* **35**(3), 326–338 (1963).
²G. W. Caldersmith, "Guitar as a reflex enclosure," *J. Acoust. Soc. Am.* **63**(5), 1566–1575 (1978).
³O. Christensen and B. B. Vistisen, "Simple model for low-frequency guitar function," *J. Acoust. Soc. Am.* **68**(3), 758–766 (1980).
⁴R. H. Lyon and R. D. Dejong, *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, 2nd ed. (Butterworth Heinemann, Boston, 1995), Chap. 6.
⁵J. Berthaut, M. N. Ichchou, and L. Jézéquel, "Piano soundboard: Structural behavior, numerical and experimental study in the modal range," *Appl. Acoust.* **64**, 1113–1136 (2003).
⁶E. Bécache, A. Chaigne, G. Dervaux, and P. Joly, "Numerical simulation of a guitar," *Comput. Struct.* **83**, 107–126 (2005).
⁷R. S. Langley, "A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations," *J. Sound Vib.* **159**(3), 483–502 (1991).
⁸F. Orduna-Bustamante, F. F. del Castillo Gomez, E. E. M. Montejo, and H. C. Tello, "Subjective and physical experiments related to the tuning of classical guitars," *J. Acoust. Soc. Am.* **128**(4), 2447–2447 (2010).
⁹J. C. S. Lai and M. A. Burgess, "Radiation efficiency of acoustic guitars," *J. Acoust. Soc. Am.* **88**(3), 1222–1227 (1990).
¹⁰T. J. W. Hill, B. E. Richardson, and S. J. Richardson, "Acoustical parameters for the characterization of the classical guitar," *Acta. Acust. Acust.* **90**, 335–348 (2004).
¹¹J. Meyer, "Quality aspects of the guitar tone," in *Function, Construction and Quality of the Guitar*, edited by E. V. Jansson (Royal Swedish Academy of Music, Stockholm, Sweden, 1983), pp. 51–75.
¹²K. Ege and X. Boutillon, "Synthetic description of the piano soundboard mechanical mobility," in *Proceedings of the 20th International Symposium on Music Acoustics*, Sydney and Katoomba, Australia (2010), pp. 93–99.
¹³F. Orduna-Bustamante and R. R. Boullosa, "Subjective evaluation of classical guitars," *J. Acoust. Soc. Am.* **102**(5), 3086–3086 (1997).
¹⁴R. R. Boullosa, F. Orduna-Bustamante, and A. P. Lopez, "Tuning characteristics, radiation efficiency and subjective quality of a set of classical guitars," *Appl. Acoust.* **56**, 183–197 (1999).
¹⁵H. Wright, "Acoustics and psychoacoustics of the guitar," Ph.D. thesis, University of Wales, College of Cardiff, 1996, pp. 133–197.
¹⁶G. Weinreich, "Coupled piano strings," *J. Acoust. Soc. Am.* **62**(6), 1474–1484 (1977).
¹⁷R. S. Langley, "Spatially averaged frequency response envelopes for one and two-dimensional structural components," *J. Sound Vib.* **178**(4), 483–500 (1994).
¹⁸E. Skudrzyk, "The mean value method of predicting the dynamic response of complex vibrators," *J. Acoust. Soc. Am.* **67**(4), 1105–1135 (1980).
¹⁹X. Boutillon and G. Weinreich, "Three-dimensional mechanical admittance: Theory and new measurement method applied to the violin bridge," *J. Acoust. Soc. Am.* **105**(6), 3524–3533 (1999).
²⁰R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Wiley Classic edition, New York, 1989), Vol. 1, pp. 429–431.
²¹G. Xie, D. J. Thompson, and C. J. C. Jones, "Mode count and modal density of structural systems: Relationships with boundary conditions," *J. Sound Vib.* **274**(3), 621–651 (2004).
²²J. P. D. Wilkinson, "Modal densities of certain shallow structural elements," *J. Acoust. Soc. Am.* **43**(2), 245–251 (1968).
²³I. Elishakoff, "Distribution of natural frequencies in certain structural elements," *J. Acoust. Soc. Am.* **57**(2), 361–369 (1975).
²⁴D. J. Ewins, *Modal Testing* (Research Studies Press, Taunton, 1984), pp. 153–196.
²⁵N. M. M. Maia and J. M. M. Silva, "Modal analysis identification techniques," *Philos. Trans. R. Soc. London* **359**, 29–40 (2001).
²⁶R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Antennas Propag.* **34**(3), 276–280 (1986).
²⁷Y. Hua and T. K. Sarkar, "Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process.* **38**(5), 814–824 (1990).
²⁸R. Roy and T. Kailath, "Esprit—estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process.* **37**(7), 984–995 (1989).
²⁹J.-L. Le Carrou, F. Gautier, N. Dauchez, and J. Gilbert, "Modelling of sympathetic string vibrations," *Acta. Acust. Acust.* **91**, 277–288 (2005).
³⁰B. David, "Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée (Acoustical characterization of vibrating structures in low atmospheric pressure)," Ph.D. thesis, Université Pierre and Marie Curie - Paris VI, 1999, pp. 170–180.
³¹R. Badeau, B. David, and G. Richard, "A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques," *IEEE Trans. Signal Process.* **54**(2), 450–458 (2006).
³²K. Ege, D. Boutillon, and B. David, "High-resolution modal analysis," *J. Sound Vib.* **325**, 852–869 (2009).
³³J. Laroche, "The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals," *J. Acoust. Soc. Am.* **94**(4), 1958–1965 (1993).
³⁴M. Géradin and D. Rixen, *Théorie des Vibrations. Application à la Dynamique des Structures (Theory of Vibrations. Application to Structural Dynamics)* (Editions Masson, Paris, 1992), pp. 119–123.
³⁵G. Bienvenu and L. Kopp, "Optimality of high-resolution array processing using the eigensystem method," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process.* **31**(5), 1235–1245 (1983).
³⁶M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process.* **33**(2), 387–392 (1985).
³⁷H. Akaike, "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle," in *Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory*, Budapest, Romania (1973), pp. 267–281.
³⁸G. Schwarz, "Estimating the dimensions of a model," *Ann. Stat.* **6**(2), 461–464 (1978).
³⁹M. E. McIntyre and J. Woodhouse, "On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials," *Acta Metall.* **36**(6), 1397–1416 (1988).
⁴⁰T. Ono, S. Miyakoshi, and U. Watanabe, "Acoustic characteristics of unidirectionally fiber-reinforced polyurethane foam composites for musical instrument soundboards," *Acoust. Sci. & Tech.* **23**(3), 135–142 (2002).



Annexe E

Corpus d'instruments

E.1 Guitares

Les différentes guitares analysées dans ce document sont :

- 9 guitares de luthier, issues du magasin *La Guitarrerria*, situé à Paris, notées GG_1 à GG_9 .
- 18 guitares de l'ITEMM, notées GI_1 à GI_{18} . Ce sont des guitares industrielles, utilisées par les étudiants comme modèle pour effectuer des réparations. Elles sont toutes de marque Yamaha, et proviennent de plusieurs modèles :
 - CG131S : GI_1 à GI_{10} , GI_{12} , GI_{13} , et GI_{18} , table en épicéa
 - CG111C : GI_{14} à GI_{16} , table en cèdre rouge
 - CG111S : GI_{11} et GI_{17} , table en épicéa
- 1 guitare de Patrick Penaud, notée GP_1
- 1 guitare de Jean-Marie Fouilleul, notée GF_1 .

E.2 Instruments du quatuor

Les différents violons analysés dans ce document sont :

- 1 violon ITEMME, nommé VI_1
- 1 violon de Frédéric Ablitzer, violon d'étude sorti d'un atelier artisanal, nommé VA_1
- 9 violons de Gilles Orin, nommé VO_1 à VO_9
- 1 violon de Nicolas Demarais, de la famille Klotz, nommé VD_1
- 1 violon plat, conçu et mis à disposition par O. Pont, nommé VP_1

Un alto est aussi analysé pour cette étude :

- 1 alto de Gilles Orin, noté AO_1 .

Annexe F

Plans de lutherie d'instruments à cordes

F.1 Guitare

Les plans de fabrication de guitare reproduits sont tous extraits du livre de Court-nall [34].

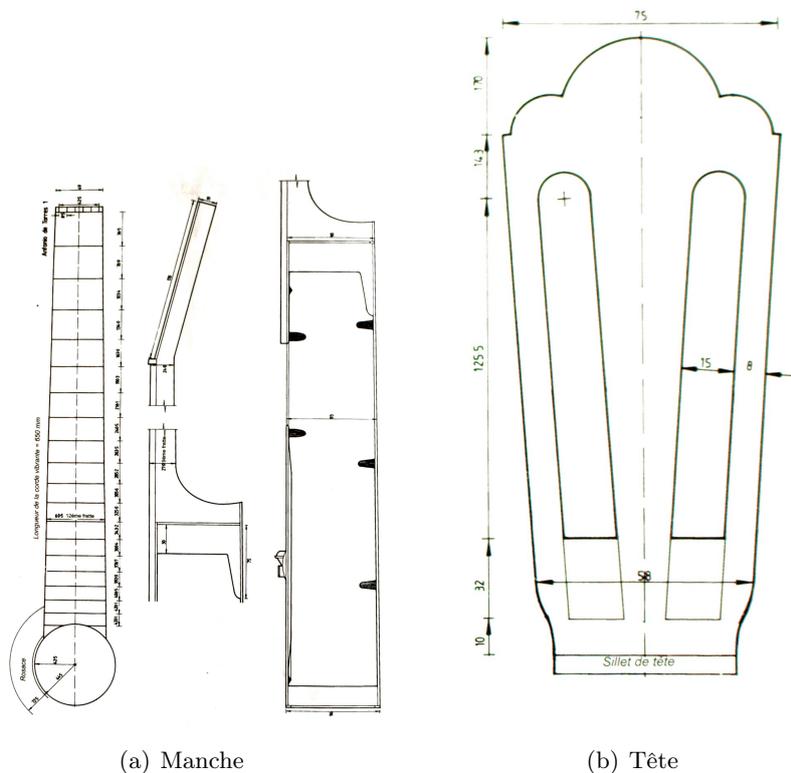


FIGURE F.1 – Plan de fabrication a) du manche et b) de la tête d'une guitare, selon Antonio de Torres. Figure extraite de [34]. Les côtes sont en mm.

F.2 Violon

Les deux pages suivantes sont extraites d'un article de Roger Hargraves écrit pour la revue *The Strad*. Il s'agit d'un plan d'un violon de Guarneri de 1735. L'article est disponible sur http://www.roger-hargrave.de/PDF/Artikel/Strad/Artikel_0000_00_Gesu_1773_PDF.pdf. Les côtes sont en mm, la dernière page est une carte d'épaisseur du dos et de la table du violon.

Le tableau F.1 est un complément au document, il recense les côtes manquantes. Ces informations ont été fournies par Nicolas Démarais.

Dimensions (mm)	Dos	Table
Longueur de coffre	350.3	350
Largeur maximale partie haute	164.3	164.5
Largeur minimale partie centrale	108.6	109
Largeur maximale partie basse	203.7	205.7
Hauteur de voute	14.7	13.3
Diapason	191	
Longueur de manche	130	
Longueur de corde vibrante	324.5	

TABLE F.1 – Dimensions de la table d'harmonie et du dos du violon de Guarneri de 1735.

Bibliographie

- [1] M. Abe and J. O. Smith III. AM/FM rate estimation for time-varying sinusoidal modeling. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP)*, Philadelphia, PA, volume 3, pages 201–204, Mar. 2005.
- [2] H. Akaike. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Proc. of the 2nd International Symposium on Information Theory*, 1973.
- [3] M.F. Ashby, Y.J.M. Bréchet, D. Cebon, and L. Salvo. Selection strategies for materials and processes. *Materials and Design*, 25(1) :51 – 67, 2004.
- [4] R. Badeau, B. David, and G. Richard. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Signal Proceeding*, 54(2), 2006.
- [5] R. J. Baken and R. F. Orlikoff. *Clinical measurements of speech and voice*. Singular Press, 2000.
- [6] E. Bécache, A. Chaigne, G. Dervaux, and P. Joly. Numerical simulation of a guitar. *Computers and structures*, 83 :107–126, 2005.
- [7] I. P. Beldie. About the bridge hill mystery. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 2(4) :9–13, 2003.
- [8] A. H. Benade. *Fundamentals of musical acoustics*. Oxford University Press, London, 1976.
- [9] P. Benoist-Gueutal and M. Courbage. *Mathématiques pour la physique, tome 1*. Ed. Eyrolles, 1992.
- [10] J. Berthaut, M. N. Ichchou, and L. Jézéquel. Piano soundboard : Structural behavior and numerical and experimental study in the modal range. *Applied Acoustics*, 64 :1113–1136, 2003.
- [11] G. Bienvenu and L. Kopp. Optimality of high-resolution array processing using the eigensystem method. *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Process.*, 31(5) :1235–1245, 1983.
- [12] G. Bissinger. Some mechanical and acoustical consequences of the violin soundpost. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(5) :3154–3164, 1995.

-
- [13] G. Bissinger. Modal analysis of a violin octet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(4) :2105–2113, 2003.
- [14] G. Bissinger. The violin bridge as a filter. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(1) :482–491, 2006.
- [15] G. Bissinger. Structural acoustics of good and bad violins. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(3) :1764–1773, 2008.
- [16] R. R. Boullosa, F. Orduna-Busatamante, and A. P. Lopez. Tuning characteristics, radiation efficiency and subjective quality of a set of classical guitars. *Applied Acoustics*, 56 :183–197, 1999.
- [17] X. Boutillon and G. Weinreich. Three-dimensional mechanical admittance : theory and new measurement method applied to the violin bridge. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(6) :3524–3533, 1999.
- [18] H. Boutin and C. Besnainou. Physical parameters of the violin bridge changed by active control. In *Acoustics'08, ASA Meeting, Paris, France*, 2008.
- [19] I. Bremaud. *Diversité des bois utilisés ou utilisables en facture d'instruments de musique - Etude expérimentale des propriétés vibratoires en direction axiale de types de bois contrastés en majorité tropicaux - Relations à des déterminants de microstructure et de composition chimique secondaire*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2006.
- [20] J. C. Brown. Calculation of a constant Q spectral transform. *J. of the Cat. Acoust. Soc.*, 89(1) :425–434, 1991.
- [21] J. C. Brown, O. Houix, and S. McAdams. Feature dependance in the automatic identification of musical woodwind instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(3) :1064–1072, 2001.
- [22] A. Caclin, S. McAdams, B. K. Smith, and S. Winsberg. Acoustic correlates of timbre space dimensions : A confirmatory study using synthetic tones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(1) :471–482, 2005.
- [23] G. W. Caldersmith. Guitar as a reflex enclosure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 63(5) :1566–1575, 1978.
- [24] B. Capleton. False beats in coupled piano string unisons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(2) :885–892, 2004.
- [25] J.-L. Le Carrou, F. Gautier, and E. Foltete. Experimental study of A0 and T1 modes of the concert harp. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121(1) :559–567, 2007.
- [26] J. Chabassier. *Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques*. PhD thesis, Ecole polytechnique ParisTech, 2012.

- [27] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Edition Belin, 2008.
- [28] G. Chardon, A. Leblanc, and L. Daudet. Plate impulse response spatial interpolation with sub-Nyquist sampling. *J. of Sound and Vibration*, 23(7) :5678–5689, 2011.
- [29] M. G. Christensen, A. Jakobsson, and S. H. Jensen. Sinusoidal order estimation using angles between subspaces. *EURASIP J. Adv. Signal Process*, 2009 :62 :7–62 :7, 2009.
- [30] O. Christensen. Quantitative models for low frequency guitar function. *J. Guitar Acoustics*, 6 :10–25, 1982.
- [31] O. Christensen. An oscillator model for analysis of guitar sound pressure response. *Acustica*, 54(5) :289–295, 1984.
- [32] O. Christensen and B. B. Vistisen. Simple model for low-frequency guitar function. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68(3) :758–766, 1980.
- [33] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics and Vol. 1*. Wiley Classic edition, 1989.
- [34] R. Courtnall. *La fabrication des guitares classiques*. H. Vial, 1993.
- [35] L. Cremer. *The physics of the violin*. Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [36] J. Le Rond d’Alembert. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibrations. *Hist. Acad. Berlin*, pages 214–219, 1747.
- [37] S. Daltrop, A. Kotlicki, C. Waltham, N. Wolfe, B. Elie, and F. Gautier. Vibroacoustic characteristics of a gothic harp. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(1) :837–843, 2012.
- [38] B. David. *Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée*. PhD thesis, Université Pierre and Marie Curie - Paris VI, 1999.
- [39] V. Debut, X. Delaune, and J. Antunes. Identification of the nonlinear excitation force acting on a bowed string using the dynamical responses at remote locations. *J. of Sound and Vibration*, 52 :1419–1436, 2010.
- [40] V. Debut, O. Inacio, T. Dumas, and J. Antunes. Modelling and experiments on string/body coupling and the effectiveness of a cello wolf-killing device. In *Proceedings of 20th International Symposium on Music Acoustics, Sydney and Katoomba, Australia*, 2010.
- [41] D. D. Deliyski. Acoustic model and evaluation of pathological voice production. In *3rd Conference on Speech Communication and Technology, EUROSPEECH ’93.*, pages 1969–1972, september 1993.
- [42] M. Demoucron. *On the control of the violin : Physical modelling and control of bowed string instruments*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie and Royal Institute of Technology, 2008.

-
- [43] G. Dervaux. *Modélisation numérique de la guitare acoustique*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2002.
- [44] G. Dervaux, A. Chaigne, P. Joly, and E. Bécache. Time-domain simulation of a guitar : Model and method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114(6) :3368–3383, 2003.
- [45] H. Dünwald. Deduction of objective quality parameters on old and new violins. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 1(7) :1–5, 1991.
- [46] F. Durup and E. V. Jansson. The quest of the violin bridge-hill. *Acta Acustica United with Acustica*, 91 :206–213, 2005.
- [47] K. Ege. *La table d’harmonie du piano – Etudes modales en basses and moyennes fréquences*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2009.
- [48] K. Ege, D. Boutillon, and B. David. High-resolution modal analysis. *J. of Sound and Vibration*, 325 :852–869, 2009.
- [49] B. Elie, F. Gautier, B. David, and M. Curtit. Analysis of bridge admittance of plucked string instruments. In *Forum Acusticum, Aalborg*, June 2011.
- [50] Benjamin Elie, Francois Gautier, and Bertrand David. Macro parameters describing the mechanical behavior of classical guitars. *J. Acoust. Soc. Am.*, 132(6) :4013–4024, 2012.
- [51] I. Elishakoff. Distribution of natural frequencies in certain structural elements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(2) :361–369, 1975.
- [52] L. Euler. Sur la vibration des cordes. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, pages 69–85, 1750.
- [53] G. Fant. *Acoustic theory of speech production*. Mouton, The Hague, 1960.
- [54] I. M. Firth. Physics of the guitar at the Helmholtz and first top plate resonances. *J. Acoust. Soc. Am.*, 61(2) :588–593, 1977.
- [55] I. M. Firth and J. M. Buchanan. The wolf in the cello. *J. Acoust. Soc. Am.*, 53(2) :457–463, 1973.
- [56] H. Fleischer and T. Zwicker. Mechanical vibrations of electric guitars. *Acta Acustica United with Acustica*, 84 :758–765, 1998.
- [57] H. Fleischer and T. Zwicker. Investigating dead spots of electric guitars. *Acta Acustica United with Acustica*, 85 :128–135, 1999.
- [58] H. Fletcher. Normal vibration frequencies of a stiff piano string. *J. Acoust. Soc. Am.*, 36(1) :203–209, 1964.
- [59] H. Fletcher, E. D. Blackham, and R. Stratton. Quality of piano tones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34(6) :749–761, 1962.

- [60] F. G. Friedlander. On the oscillations of the bowed string. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 49 :516–530, 1953.
- [61] C. Fritz, I. Cross, B. C. J. Moore, and J. Woodhouse. Perceptual thresholds for detecting modifications applied to the acoustical properties of a violin. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(6) :3640–3650, 2007.
- [62] A. Gabrielsson and E. V. Jansson. Long-time-average-spectra and rated quality of twenty-two violins. *Acustica*, 42(1) :47–56, 1979.
- [63] C. E. Gough. The theory of string resonances on musical instruments. *Acustica*, 49 :124–141, 1981.
- [64] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*. Ed. Massonand Paris, 1992.
- [65] J. Griffiths. L’essor et le déclin de la vihuela. *Les cahiers du musée de la musique*, 5 :8–15, 2004.
- [66] J. W. Harris and H. Stocker. *Handbook of Mathematics and Computational Science*. Ed. Springer-Verlag, 2006.
- [67] H. Helmholtz. *Lehre von den Tonempfindungen, als physiologische grundlage für die theorie der musik*. 1870.
- [68] E. Heron-Allen. *Violin making, as it was and is*. Ward, Lock and Company, London, 1885.
- [69] T. J. W. Hill, B. E. Richardson, and S. J. Richardson. Acoustical parameters for the characterisation of the classical guitar. *Acta Acustica United with Acustica*, 90 :335–348, 2004.
- [70] V. E. Howle and L. N. Trefethen. Eigenvalues and musical instruments. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 135(1) :23–40, 2001.
- [71] Y. Hua and T. K. Sarkar. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Process.*, 38(5) :814–824, 1990.
- [72] C. M. Hutchins. A 30-year experiment in the acoustical and musical development of violin-family instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(2) :639–650, 1992.
- [73] C. M. Hutchins and D. Voskuil. Mode tuning for the violin maker. *J. of the Cat. Acoust. Soc.*, 2(4) :5–9, 1993.
- [74] O. Inacio, J. Antunes, and M. C. M. Wright. Computational modelling of string-body interaction for the violin family and simulation of wolf notes. *J. of Sound and Vibration*, 310 :260–286, 2008.
- [75] P. Iverson and C. L. Krumhansl. Isolating the dynamic attributes of musical timbre. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(5) :2595–2603, 1993.

-
- [76] S. van Huffel J. M. Papy, L. De Lathauwer. A shift invariance-based order-selection technique for exponential data modelling. *Sig. Proc. Letter, IEEE*, 14(7) :473–476, 2007.
- [77] E. V. Jansson. A study of acoustical and hologram interferometric measurements of the top plate vibrations of a guitar. *Acustica*, 25 :95–100, 1971.
- [78] E. V. Jansson. Acoustic for the guitar maker. *Roy. Swedish Academy of Music*, 38 :27–50, 1983.
- [79] E. V. Jansson. Admittance measurements of 25 high quality violins. *Acta Acustica United with Acustica*, 83(2) :337–341, 1997.
- [80] E. V. Jansson. Violin frequency response – bridge mobility and bridge feet distance. *Applied Acoustics*, 65 :1197–1205, 2004.
- [81] H. Järveläinen and M. Karjalainen. Perceptibility of inharmonicity in the acoustic guitar. *Acta Acustica United with Acustica*, 92 :842–847, 2006.
- [82] H. Järveläinen, V. Välimäki, and M. Karjalainen. Audibility of the timbral effects of inharmonicity in stringed instrument tones. *Acoustical Research Online*, 2 :79–84, 2001.
- [83] J. B. Keller. Bowing of violin strings. *Comm. Pure and Applied Maths*, 6 :283–495, 1953.
- [84] J. Krimphoff, S. McAdams, and S. Winsberg. Caractérisation du timbre des sons complexes. II. analyses acoustiques et quantification psychophysique. *Supplément au Journal de Physique III*, 4 :625–628, 1994.
- [85] C. L. Krumhansl. *Why Is Musical Timbre so Hard to Understand? Structure and Perception of Electroacoustics Sounds and Music.*, 1989.
- [86] P. Ladefoged. *Preliminary of Linguistic Phonetics*. University of Chicago Press, Chicago, 1971.
- [87] J. C. S. Lai and M. A. Burgess. Radiation efficiency of acoustic guitars. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(3) :1222–1227, 1990.
- [88] R. S. Langley. The modal density and mode count of thin cylinders and curved panels. *J. of Sound and Vibration*, 169(1) :43–53.
- [89] R. S. Langley. Spatially averaged frequency response envelopes for one and two-dimensional structural components. *J. of Sound and Vibration*, 178(4) :483–500, 1994.
- [90] Jean Laroche. The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(4) :1958–1965, 1993.
- [91] J.-L. Le Carrou, F. Gautier, N. Dauchez, and J. Gilbert. Modelling of sympathetic string vibrations. *Acta Acustica United with Acustica*, 91 :277–288, 2005.

- [92] Jean-Loic Le Carrou, Francois Gautier, and Roland Badeau. Sympathetic string modes in the concert harp. *Acta Acustica united with Acustica*, 95(4)(4) :744–752, 2009.
- [93] E. Lieber. Moderne theorien über die physik der schwingenden saiten und ihre bedeutung für die musikalosche akustik. *Acustica*, 33 :324–335, 1975.
- [94] G. Maidanik. Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34(6) :809–826, 1962.
- [95] J. Marozeau, A. de Cheveigne, S. McAdams, and S. Winsberg. The dependency of timbre on fundamental frequency. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(5) :2946–2957, 2003.
- [96] S. McAdams, S. Winsberg, S. Donnadiou, G. De Soete, and J. Krimphoff. Perceptual scaling of synthesized musical timbres : Common dimensions, specificities, and latent subject classes. *Psychol. Res.*, 58(3) :177–192, 1995.
- [97] S. McCandless. An algorithm for automatic formant extraction using linear prediction spectra. *IEEE Trans*, 22 :135–141, 1974.
- [98] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, and J. Woodhouse. Aperiodicity in bowed-string motion. *Acustica*, 49 :13–32, 1981.
- [99] M. E. McIntyre and J. Woodhouse. On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. *Acta Metallurgica*, 36(6) :1397–1416, 1988.
- [100] J. Meyer. Quality aspects of the guitar tone. *Roy. Swedish Academy of Music*, 38 :51–76, 1983.
- [101] J. Meyer. The sound of the orchestra. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 41(4) :203–213, 1993.
- [102] J. E. Miller. Spectral measurements of violins. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 2(4) :1–4, 1993.
- [103] J. Moral and E. V. Jansson. Eigenmodes and input admittances and the function of the violin. *Acustica*, 50 :329–337, 1982.
- [104] Teruaki Ono, Souji Miyakoshi, and Ugai Watanabe. Acoustic characteristics of unidirectionally fiber-reinforced polyurethane foam composites for musical instrument soundboards. *Acoustical Science and Technology*, 23(3)(3) :135–142, 2002.
- [105] A. Paté, J.-L. Le Carrou, B. Navarret, D. Dubois, and B. Fabre. A vibro-acoustical and perceptive study of the neck-to-body junction of a solid-body electric guitar. In *Proceedings of acoustics2012, Nantes*, 2012.
- [106] G. Peeters. A large set of audio features for sound description (similarity and classification) in the CUIDADO project. Tech. rep., IRCAM, 2004.

-
- [107] C. Pezerat, Q. Leclere, N. Totaro, and M. Pachebat. Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holography and the force analysis techniques. *J. of Sound and Vibration*, 326 :540–556, 2009.
- [108] J. E. Popp. Four mass coupled oscillator guitar model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(1) :829–836, 2012.
- [109] R. K. Potter and J. C. Steinberg. Toward the specification of speech. *J. Acoust. Soc. Am.*, 22(6) :807–820, 1950.
- [110] C. V. Raman. On the wolf note of the violin and cello. *Nature*, 97 :363, 1916.
- [111] C. V. Raman. On the mechanical theory of vibrations of bowed strings. *Indian Assoc. Cult. Sci. Bull.*, 15 :1–158, 1918.
- [112] R. A. Rasch and V. Heetvelt. String inharmonicity and piano tuning. *Music Perception : An Interdisciplinary Journal*, 3(2) :171–189, 1985.
- [113] A. Röbel, F. Villavicencio, and X. Rodet. On cepstral and all-pole based spectral envelope modeling with unknown model order. *Pattern Recognition Letters*, 28(11) :1343 – 1350, 2007.
- [114] W. Reinicke and L. Cremer. Application of hologram interferometry to the vibration of bodies of stringed instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 48 :988–992, 1970.
- [115] M. J. Ross, H. L. Schaffer, A. Cohen, R. Freuberg, and H. J. Manley. Average magnitude difference function in pitch extractor. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, 22 :353–362, 1974.
- [116] T. D. Rossing. *The science of string instruments*. Springer, 2010.
- [117] T. D. Rossing, J Popp, and D. Polstein. Acoustical response of guitars. *J. Guitar Acoust.*, 3 :23–41, 1985.
- [118] R. Roy and T. Kailath. ESPRIT – Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 37(7) :984–995, 1989.
- [119] R. Sando, B. N. Huallpa, and J. R. F. Arruda. Violin quality assessment with an objective criterion using the constant-q transform. *Catgut Acoust. Soc. J.*, 4(6) :39–44, 2002.
- [120] J. C. Schelleng. The violin as a circuit. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35(3)(3) :326–338, 1963.
- [121] J. C. Schelleng. The bowed string and the player. *J. Acoust. Soc. Am.*, 53(1) :26–41, 1973.
- [122] B. Scherrer and P. Depalle. Extracting the modal parameters of the horizontal and vertical transverse polarisations of a guitar strings. 2009.

- [123] M. Schleske. Empirical tools in contemporary violin making : Part I. analysis of design, materials, varnish and normal modes. *J. of the Cat. Acoust. Soc.*, 4(5) :50–64, 2002.
- [124] E. Schoonderwaldt and M. Demoucron. Extraction of bowing parameters from violin performance combining motion capture and sensors. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126(5) :2695–2708, 2009.
- [125] M. R. Schroeder. Integrated-impulse method measuring sound decay without using impulses. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(2) :497–500, 1965.
- [126] M. R. Schroeder. New method of measuring reverberation time. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(2) :928–944, 1965.
- [127] O. H. Schuck and R. W. Young. Observations on the vibrations of piano strings. *J. Acoust. Soc. Am.*, 15(1) :1–11, 1943.
- [128] G. Schwarz. Estimating the dimensions of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2) :461–464, 1978.
- [129] E. Skudrzyk. The mean value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(4) :1105–1135, 1980.
- [130] R. O. Smith. Multiple emitter location and signal parameter estimation. In *Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop*, pages 243–258, 1979.
- [131] W. Soedel. *Vibrations of shells and plates*. Marcel Dekker, New York, 2004.
- [132] G. G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9 :8–106, 1851.
- [133] Hideo Suzuki. Vibration and sound radiation of a piano soundboard. *J. Acoust. Soc. Am.*, 80(6) :1573–1582, 1986.
- [134] C. Traube and P. Depalle. Deriving the plucking point along a guitar string from a least-square estimation of a comb filter delay. In *Proc. of IEEE CCECE*, pages 2001–2003, May 2003.
- [135] C. Valette and C. Cuesta. *Mécanique de la corde vibrante*. Edition Hermes, 1993.
- [136] E. M. von Hornbostel and C. Sachs. Systematik der musikinstrumente. ein versuch. *Zeitschrift für Ethnologie*, 46(4-5) :553–590, 1914.
- [137] M. Wax and T. Kailath. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Process.*, 33(2) :387–392, 1985.
- [138] G. Weinreich. Coupled piano strings. *J. Acoust. Soc. Am.*, 62(6) :1474–1484, 1977.
- [139] P. D. Welch. The use of Fast Fourier Transforms for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short modified periodograms. *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 15 :70–73, 1967.

- [140] G. W. White. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 18 :85–87, 1915.
- [141] J. P. D. Wilkinson. Modal densities of certain shallow structural elements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 43(2) :245–251, 1968.
- [142] J. Woodhouse. On the playability of violins. part II : Minimum bow force and transients. *Applied Acoustics*, 78 :137–153, 1993.
- [143] J. Woodhouse. On the synthesis of guitar plucks. *Acta Acustica United with Acustica*, 90 :928–944, 2004.
- [144] J. Woodhouse. Plucked guitar transients : Comparison of measurements and synthesis. *Acta Acustica United with Acustica*, 90 :945–965, 2004.
- [145] J. Woodhouse. On the bridge hill of the violin. *Acta Acustica United with Acustica*, 91 :155–165, 2005.
- [146] J. Woodhouse and P. M. Galluzzo. The bowed string as we know it today. *Acta Acustica United with Acustica*, 90 :579–589, 2004.
- [147] H. Wright. *Acoustics and Psychoacoustics of the guitar*. PhD thesis, University of Wales, College of Cardiff, 1996.
- [148] G. Xie, D. J. Thompson, and C. J. C. Jones. Mode count and modal density of structural systems : Relationships with boundary conditions. *J. of Sound and Vibration*, 274(3) :621–651, 2004.
- [149] S. Yoshikawa. Acoustical classification of woods for string instruments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(1) :568–573, 2007.