HAL
open science

Application des méthodes fiabilistes à l'analyse et à la synthèse des tolérances

Paul Beaucaire

To cite this version:

Paul Beaucaire. Application des méthodes fiabilistes à l'analyse et à la synthèse des tolérances. Autre. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2012. Français. NNT : 2012CLF22295 . tel-00836759

HAL Id: tel-00836759

https://theses.hal.science/tel-00836759v1

Submitted on 21 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. : 2295
EDSPIC : 586

Université BLAISE PASCAL - Clermont II
École Doctorale
Sciences Pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

Thèse

présentée par

Paul BEAUCAIRE
Ingénieur IFMA

en vue d'obtenir le grade de :

Docteur d'Université
Spécialité : Génie Mécanique

Application des méthodes fiabilistes à l'analyse et à la synthèse des tolérances

soutenue publiquement le 29 novembre 2012 devant le jury :

Pr. Laurent CHAMPANEY	ENSAM, Paris	Rapporteur
Pr. Jean-Yves DANTAN	ENSAM, Metz	Rapporteur
Pr. Emmanuel DUC	IFMA, Clermont-Ferrand	Directeur de thèse
Dr. Nicolas GAYTON	IFMA, Clermont-Ferrand	Encadrant
Pr. Maurice LEMAIRE	IFMA, Clermont-Ferrand	Président du jury
Dr. Gilles PETITET	Valeo SE, Issoire	Examinateur

Institut Pascal - Axe Mécanique Matériaux et Structures
Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée

A mes grands-parents,
à l'Ingénieur sans diplôme.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes rapporteurs d'avoir accepté ce travail de relecture. Je remercie ainsi Jean-Yves Dantan (Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Metz) avec qui une collaboration appréciable et fructueuse a été établie, ce qui m'a permis de mieux appréhender les problématiques liées au tolérancement géométrique. Mes remerciements vont également à Laurent Champaney (Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris). Nos échanges au cours de l'évaluation de ce manuscrit ont été très riches.

Je remercie Gilles Petitet (Docteur Ingénieur R&D de Valeo Système d'Essuyages à Issoire) d'avoir accepté le rôle d'examinateur, témoignant ainsi de son intérêt pour ce thème de recherche. Je remercie également Maurice Lemaire (Professeur émérite de l'IFMA de Clermont-Ferrand) d'avoir présidé ce jury de thèse mais aussi pour m'avoir initié aux méthodes de Fiabilité pendant ma scolarité à l'IFMA.

J'exprime ma reconnaissance à Laurent Gauvrit, Thierry Yalamas et Gilles Petitet, respectivement représentants des sociétés Radiall SA, Valeo SE et Phimeca Engineering, pour leur soutien scientifique et le partage de leurs problématiques industrielles qui ont servi de support à mes travaux de recherches.

Toute ma gratitude va également à mes responsables de thèse, Emmanuel Duc (Directeur de thèse, Professeur des universités à l'IFMA de Clermont-Ferrand) qui m'a permis d'aborder mon sujet de thèse avec un plus grand recul et qui a régulièrement su me détendre par son sens de l'humour et ses qualités humaines indéniables, ainsi que Nicolas Gayton (Encadrant, Maître de conférences à l'IFMA de Clermont-Ferrand) pour sa confiance, sa patience et son sens certain de la rigueur scientifique et d'expression qu'il a su me transmettre.

J'en profite pour remercier tous mes collègues mécaniciens pour leur bonne humeur au quotidien et leur soutien : Sami, Arnaud, Hamid, Benoît, Su, Guillaume, Aurélie, Bastien, Greg, Sylvain, Greg, Carole, Pierre, Georges, Benjamin, Cécile, David, Kévin, Khaled, Vincent, Julien, Kseniya, Agnès, Miguel, Maïté, Cédric, Nicolas et tout particulièrement mes compagnons d'open-space : Ben, Guillaume, Pierrot, Hanh, Bob, Ju, Ricardo, Moncef, Simon, William et Georges malgré que la quasi-intégralité d'entre vous soient des déserteurs...

Je ne saurais oublier mes collègues chimistes du SEESIB (allez comprendre...) : Anto, Cécile, Claire, Nath, Xavier, Thomas, Stéphane, Greg, Carlos, Loïc, Aurélie, Johan, Marielle, Nadia, Juliane, Nuno, Isra, Julie, Karima, Stéphane, Nico, Mounir, Mohamed, Mickaël, Pierre, Murielle, Pierre, Skip, Joey, Cédric, Audrey, Jak, avec qui j'ai passé d'excellents moments en Corrèze, dans le Cantal ou plus régulièrement au Nota.

Enfin, je suis très reconnaissant envers mes parents, Christian et Catherine, qui m'ont permis d'arriver jusque là. J'ai également une pensée pour ma petite soeur Clara. Enfin, je tiens à remercier ma compagne Flora pour ses encouragements et sa patience. Son soutien a été extraordinaire pendant la rédaction de ce document ainsi que pour la préparation de la soutenance. Merci Florette !

Résumé

En conception de systèmes mécaniques, la phase de cotation fonctionnelle consiste à affecter des cotes, constituées d'une valeur nominale et d'un intervalle de tolérance, à des dimensions de pièces. En particulier, l'analyse des tolérances consiste à vérifier que les intervalles de tolérance choisis permettent le respect de la fonctionnalité du mécanisme. A l'inverse, la synthèse des tolérances vise à déterminer ces intervalles de tolérance, si possible de manière optimale, permettant le respect des exigences fonctionnelles. Les approches statistiques traditionnelles, bien que très utiles en phase de préconception, ne sont pas capables d'estimer avec précision le risque de non-qualité. Cette thèse aborde ces problèmes selon un angle de vue différent, non plus pour garantir le respect d'exigences fonctionnelles, mais pour garantir le Taux de Non-Conformité (TNC) du mécanisme. Il s'agit de la probabilité que l'exigence fonctionnelle ne soit pas respectée. Les méthodes fiabilistes, s'appuyant sur la théorie des probabilités, permettent un calcul précis et efficace de cet indicateur. L'objectif de cette thèse est d'explorer le domaine de l'analyse et de la synthèse des tolérances afin d'identifier et d'exposer les apports des méthodes fiabilistes sur ces problématiques.

Dans ces travaux de thèse, différents outils fiabilistes sont mis à disposition permettant l'analyse des tolérances de tous types de mécanismes avec ou sans jeu. La théorie probabiliste permet une modélisation très complète des dimensions des pièces. En particulier, l'approche APTA (Advanced Probability-based Tolerance Analysis of products) est développée afin de prendre en compte l'évolution aléatoire de certains paramètres de modélisation, notamment les décalages de moyenne, responsables de fortes variations du TNC. L'analyse des tolérances étant plus complexe pour les mécanismes avec jeux, une méthodologie spécifique a été développée basée sur une décomposition en situations de points de contacts et l'utilisation d'une méthode fiabiliste système. Différents indices de sensibilité sont aussi proposés afin d'aider à identifier les cotes ayant le plus d'influence sur le TNC d'un mécanisme. Enfin, l'optimisation du coût de production, sous contrainte de TNC, permet une synthèse des tolérances optimale. Les gains potentiels en termes de coût dépassent 50% par rapport aux conceptions initiales tout en maitrisant le niveau de qualité du produit.

Les sociétés RADIALL SA et VALEO Système d'Essuyages, concepteurs et fabricants de produits pour l'automobile et l'aéronautique, ont proposé des cas d'études sur lesquels est démontrée la pertinence des travaux effectués. Sur la base de ces travaux, Phimeca Engineering, spécialisée dans l'ingénierie des incertitudes, développe et commercialise un outil informatique professionnel.

Mots-clés : analyse des tolérances, synthèse des tolérances, fiabilité, approche probabiliste, jeux, taux de non conformité, APTA, sensibilités, exigence fonctionnelle, niveau de qualité, coût.

Abstract

To design mechanical systems, functional dimensioning and tolerancing consists in allocating a target value and a tolerance to part dimensions. More precisely, tolerance analysis consists in checking that chosen tolerances allow the mechanism to be functional. In the opposite, the tolerance synthesis goal is to determine those tolerances, optimaly if possible, such as functional requirements are respected. Traditional statistical approaches are very useful in pre-design phases, but are incapable of estimating precisely non-quality risks. This PhD thesis adresses this problem from a different point of view. The objective is no longer to respect functional requirements but to guarantee the Non-Conformity Rate (NCR) of the mechanism. It is the probability that the functional requirement is not respected. Reliability methods, based on probabilistic theory, allow a precise and efficient calculation of the NCR. The main goal of this thesis is to explore tolerance analysis and synthesis domains in order to identify potential contributions of reliability methods to these issues.

In this work, different reliability tools are provided enabling tolerance analysis of all kind of mechanisms with or without gaps. The probability theory allows a detailed modeling of parts dimensions. In particular, the APTA (Advanced Probability-based Tolerance Analysis of products) approach is designed to take into account random variations of some parameters such as mean shifts which influence highly the NCR. As tolerance analysis is more complex for mechanisms with gaps, a specific method is designed based on a decomposition of contact points situations and the use of a reliability system method. Several sensitivity indexes are also proposed to identify the leading dimensions on the NCR. The optimization of the production cost, under a NCR constraint, enables an optimal tolerance synthesis. The potential benefits in terms of costs exceed 50% compared to initial designs while keeping under control quality levels of products.

Companies RADIALL SA and VALEO Wiping Systems, designers and manufacturers of products for the automotive and aeronautic industries, have provided case studies on which is demonstrated the relevance of the presented work. Based on this work, the company Phimeca Engineering, specialized in uncertainties, is developing and commercializing a professional computer tool.

Keywords : tolerance analysis, tolerance synthesis, reliability, probabilistic approach, gaps, non-conformity rate, APTA, sensitivity, functional requirement, quality level, cost.

Table des matières

Abréviations 1
Notations Générales 1

Introduction **3**

1 Généralités sur les méthodes fiabilistes **9**
1.1 Introduction 11
1.2 Méthodes d'approximation de la probabilité de défaillance 12
1.2.1 Méthodes FORM / SORM 13
1.2.2 Méthodes de fiabilité système 15
1.3 Méthodes de simulation 17
1.3.1 Méthode de Monte Carlo 17
1.3.2 Méthodes de simulation alternatives 19
1.4 Méthodes par calcul des moments statistiques 20
1.4.1 Restriction au cas linéaire Gaussien 20
1.4.2 Méthode SOTA 20
1.4.3 Intégration numérique 23
1.4.4 Méthode de Taguchi 24
1.5 Généralités sur les métamodèles 24
1.5.1 Développement de Taylor 25
1.5.2 Surface de réponse quadratique 25
1.5.3 Autres métamodèles 26
1.6 Conclusion 27

2 Analyse des tolérances pour les mécanismes sans jeu **29**
2.1 Introduction 31
2.2 Calcul de l'intervalle de variation d'une caractéristique fonctionnelle 33
2.2.1 Méthode arithmétique ou au pire des cas 33
2.2.2 Méthode statistique 34
2.2.3 Variantes de la méthode statistique 36
2.2.4 Application à un exemple linéaire 40
2.2.5 Synthèse et conclusion 42
2.3 Calcul du taux de non-conformité 43
2.3.1 Méthodes fiabilistes usuelles 44
2.3.2 Application à un exemple non-linéaire 45
2.3.3 Synthèse et conclusion 48
2.4 L'approche APTA pour le calcul du taux de non-conformité 49
2.4.1 Zone de conformité 49
2.4.2 Intérêt de l'approche APTA 51
2.4.3 Expression mathématique de l'approche APTA 53
2.4.4 Hypothèses pour les caractéristiques des lots des pièces 54

2.4.5 Calcul numérique du TNC 59
2.4.6 Illustration de l'approche APTA sur un exemple linéaire . . . 60
2.4.7 Applications industrielles et CAO 63
2.4.7.1 Recouvrement de contact RADIALL 63
2.4.7.2 Débattement de contact RADIALL 65
2.4.7.3 Application CAO 67
2.4.8 Conclusion sur l'approche APTA 69
2.5 Conclusion 70
Synthèse de chapitre 70

3 Analyse des tolérances pour les mécanismes avec jeux 73
3.1 Introduction 75
3.2 Formulation générale du problème d'assemblage 76
3.3 Formulation générale du problème fonctionnel 77
3.4 Approche de résolution globale couplant Monte Carlo et optimisation 78
3.5 Une nouvelle approche de résolution par méthodes fiabilistes systèmes 79
3.6 Applications industrielles et académiques 83
3.6.1 Système d'essuyage VALEO 83
3.6.2 Débattement de contact RADIALL 87
3.6.3 Liaison glissière hyperstatique 94
3.7 Conclusion 98
Synthèse de chapitre 99

4 Analyse de sensibilité et synthèse des tolérances 101
4.1 Introduction 103
4.2 L'analyse de sensibilité 103
4.2.1 Principales méthodes de sensibilité 104
4.2.2 Les sensibilités au service de la prise de décision 105
4.2.2.1 Gestion des intervalles de tolérance 106
4.2.2.2 Gestion des lots non-conformes 109
4.2.2.3 Identification des Key-Characteristics 112
4.2.3 Conclusion sur l'analyse de sensibilité 113
4.3 Synthèse des tolérances 114
4.3.1 Partitionnement de l'exigence fonctionnelle de Y 114
4.3.2 Optimisation d'une fonction coût 116
4.3.2.1 Description de différents schémas d'optimisation . . 116
4.3.2.2 Formulation retenue 119
4.3.2.3 Méthode de calcul proposée. 120
4.3.3 Applications 121
4.3.3.1 Mécanisme d'embrayage 121
4.3.3.2 Débattement de contact RADIALL 125
4.3.4 Conclusion sur la synthèse des tolérances 128
Synthèse de chapitre 130

Conclusions et perspectives 131

Bibliographie 135

A Algorithme de Polak 143

Abréviations

MC	Monte Carlo.
TNC	Taux de Non-Conformité.
APTA	Advanced Probability-based Tolerance Analysis.
IT	Intervalle de Tolérance.
EF	Exigence Fonctionnelle.
CAO	Conception Assistée par Ordinateur.
KC	Key Characteristic.

Notations générales

$\mathbf{V} = \{V_1, ..., V_n\}$	Vecteur ligne.
$\mathbf{V}^t = \{V_1, ..., V_n\}^t$	Vecteur colonne.
V_i	$i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\mathbf{V}$.
$\mathbf{V}_{\#\mathbf{i}}$	Vecteur contenant toutes ses composantes sauf la $i^{\text{ème}}$.
$[\mathbf{M}]$	Matrice.
M_{ij}	$(i,j)^{\text{ème}}$ composante de la matrice $[\mathbf{M}]$.
$\mathrm{E}[X]$	Espérance mathématique de X.
$\tilde{X}$ ou $\tilde{f}$	Valeur estimée d'une grandeur X ou fonction f linéarisée.
$\mathbf{V}.\mathbf{W}$	Produit scalaire.
$\bigcap$ et $\bigcup$	Intersection et union.
$\bigwedge$ et $\bigvee$	Opérateurs logiques "et" et "ou".

Introduction

Contexte. Au tournant du XXème siècle, le déterminisme est la pensée scientifique dominante (Charue-Duboc, 1995). Ce concept selon lequel chaque évènement est déterminé par un principe de causalité, se retrouve notamment dans le monde de l'industrie. Le Chatelier, éminent chimiste de l'époque écrit : "Tous les phénomènes sont engrenés suivant des lois inexorables. (...) La croyance à la nécessité des lois, autrement dit à l'inexistence du hasard, conduit dans l'industrie à s'insurger contre les irrégularités, contre les déchets de fabrication et permet presque toujours de les faire disparaître." Ce n'est que dans les années 1920-1930 que les ingénieurs des grands pays industrialisés commencent à développer des théories probabilistes. En effet, les ingénieurs se rendent compte que leurs systèmes de production ne parviennent pas à produire des pièces sans défaut. L'intérêt économique de prévoir l'aléa se révèle.

L'entreprise "Bell Labs" sera une des premières entreprises à développer des méthodes probabilistes, en 1931, grâce à un ingénieur : Shewhart. Il inventa la carte de contrôle, dispositif encore en vigueur de nos jours dans bon nombre d'entreprises. Cet outil permet de connaître le moment où une cause assignable entraînant une dérive du processus de fabrication apparaît. Des actions correctives appropriées peuvent alors être menées à temps. Dans les années 80, l'entreprise Motorola développa la méthode "Six Sigma". Encore utilisée dans de nombreuses industries actuellement, elle permet de réduire les coûts de production tout en maîtrisant un taux de rebut acceptable.

Depuis, les méthodes probabilistes ont considérablement évoluées. Notamment, l'approche fiabiliste applique la théorie des probabilités aux problèmes de fonctionnalité de mécanismes, par l'intermédiaire de scénarios de défaillance. Cette approche, initialement développée pour le Génie Civil, est parfaitement adaptée à la problématique de production de pièces mécaniques. Elle fournit les outils indispensables aux ingénieurs en leur permettant de prendre en compte les variabilités induites par les processus de fabrication incertains.

Problématiques. En conception de systèmes mécaniques, la phase de cotation fonctionnelle (ou tolérancement) est critique car elle est garante du coût de production et du respect de la fonctionnalité du mécanisme. Elle produit aussi des risques de non-qualité (trop de mécanismes produits non-fonctionnels) et de retards de production. La cotation fonctionnelle consiste à affecter des cotes à des dimensions de pièces (Bourdet et Schneider, 2007, Mathieu et Villeneuve, 2007). Une cote est constituée d'une valeur nominale et d'un intervalle de tolérance. Plus ces intervalles sont faibles, plus la pièce coûte cher à fabriquer. De plus, des retards peuvent apparaître à cause de la difficulté de réalisation, entraînant éventuellement des surcoûts. Mais plus ils sont larges, plus le risque de non-fonctionnalité augmente. Le défi de l'ingénieur concepteur est donc de trouver le bon compromis entre coût de fabri-

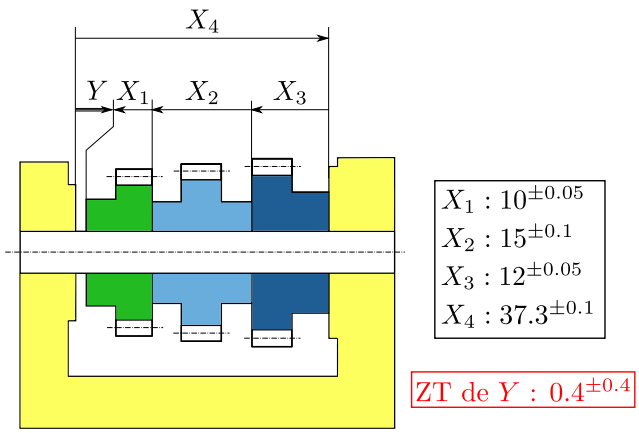


FIGURE 1 – Schéma de cotation d'un mécanisme d'engrenage. Chaque cote est spécifiée par sa valeur nominale et son intervalle de tolérance de façon à ce que la caractéristique fonctionnelle Y appartienne à la zone de tolérance (ZT). Y s'exprime grâce à la chaîne de cotes unidirectionnelle $Y = X_4 - (X_1 + X_2 + X_3)$.

cation et qualité du produit. Les intervalles de tolérance sont calculés de manière à assurer la fonctionnalité du mécanisme, s'exprimant par l'intermédiaire d'une ou plusieurs caractéristiques fonctionnelles (ou jeux fonctionnels). Un assemblage de pièces induit un empilement de cotes, et donc d'intervalles de tolérance. Si ce dernier aboutit à une caractéristique fonctionnelle contenue dans sa zone de tolérance, alors le mécanisme est fonctionnel. La Figure 1 illustre ce principe grâce au schéma de cotation d'un mécanisme d'engrenage.

Le premier problème de cotation pour le concepteur est d'identifier les pièces et les dimensions qui participent au respect de la zone de tolérance d'une caractéristique fonctionnelle. Pour cela, la première solution est la chaîne de cotes dimensionnelle unidirectionnelle (Voir Figure 1). Il s'agit de fonctions, linéaires dans le cas de mécanismes simples ou non-linéaires, dépendant des dimensions des pièces. Mais l'évolution des exigences fonctionnelles a induit de nouvelles approches bidimensionnelles et tridimensionnelles couplant dimensions et angles. Ces approches ont entraîné de nombreux travaux sur la modélisation géométrique des mécanismes, des contacts et des jeux (Bourdet *et al.*, 1996, Dantan *et al.*, 2005, Giordano *et al.*, 2010). Suivant ces approches, la modélisation géométrique de mécanismes permet de produire des systèmes d'équations définissant des exigences fonctionnelles plus complètes.

Le second problème de cotation porte sur l'analyse et la synthèse des tolérances. L'analyse des tolérances consiste à vérifier pour une conception établie, c'est à dire lorsque les intervalles de tolérances sont calculés et fixés, que la fonctionnalité du produit est respectée. Il s'agit d'un premier degré d'exigence. Le second degré d'exigence consiste à s'assurer que son niveau de qualité est satisfaisant. Une des façons d'exprimer la qualité du produit est le Taux de Non-Conformité (TNC) vis à vis de caractéristiques fonctionnelles identifiées. C'est la probabilité, formulée en pièces

par millions (ppm), que le produit ne remplisse pas sa fonction.

La synthèse des tolérances, quant à elle, peut être vue comme l'opération "réciproque" de l'analyse des tolérances. Elle consiste à déterminer les intervalles de tolérances, si possible optimums, permettant de respecter les exigences fonctionnelles et de qualité. Pour affecter les intervalles de tolérance, les approches ont évolué des méthodes simplifiées vers des méthodes plus complexes. En effet, les premières approches (Scholtz, 1995) basées sur une répartition des intervalles de tolérance (méthode arithmétique ou au pire des cas) ne sont pas adaptées dans le cas de problèmes complexes car elles engendrent souvent des surcoûts de fabrication dûs à des intervalles de tolérance trop réduits. Pour pallier ce problème, des approches statistiques ont été proposées (Scholtz, 1995), inspirées de la méthode Six Sigma. Dans ce manuscrit, elles sont dénommées "semi-probabiliste" car elles s'appuient sur la théorie des probabilités sans nécessiter de calculs probabilistes particuliers. Testées et approuvées par de nombreux industriels depuis des dizaines d'années, ces approches sont très simples d'utilisation et relativement efficaces. Elles souffrent cependant d'importantes limitations car elles ne s'appliquent que sous certaines hypothèses très restrictives (dimensions Gaussiennes indépendantes, linéarité de la chaîne de cotes, etc.). De plus, elles ne permettent pas de contrôler le TNC avec précision. Enfin, la conception obtenue par ces approches n'a pas vocation à être optimale.

Les problèmes d'analyse et de synthèse des tolérances ont aussi été abordés selon un autre point de vue : déterminer les intervalles de tolérance des cotes non plus pour garantir le respect d'une exigence fonctionnelle, mais pour garantir le TNC du mécanisme. Pour cela, il est nécessaire de proposer une modélisation probabiliste plus complète du problème. En ce sens, l'approche fiabiliste s'appuyant sur la théorie des probabilités constitue une alternative sérieuse pour traiter les problèmes d'analyse et de synthèse des tolérances. Elle permet de s'intéresser de plus près à l'exigence de qualité d'un mécanisme. En effet, l'objectif principal des méthodes fiabilistes est de calculer une probabilité de défaillance qui, en l'occurrence, est le TNC. De plus, elles permettent de mener différents types d'analyse de sensibilité apportant des informations complémentaires à cette probabilité.

De façon générale, l'utilisation des méthodes fiabilistes peut permettre de répondre de manière efficace aux questions suivantes, auxquelles les industriels concepteurs semblent porter un intérêt croissant :

- Quel est le TNC associé à une conception existante (intervalle de tolérances fixés) ? Les méthodes de calcul du TNC sont rarement triviales pour deux raisons.

  La première est la complexité de la relation entrée - sortie. En effet, il arrive que la chaîne de cotes soit non-linéaire implicite lorsqu'elle dépend de la déformation d'une pièce étudiée par un code éléments finis. De même, l'utilisation de logiciels CAO permet l'étude de relations 3D complexes mais rend la chaîne de cotes également non-linéaire implicite. Enfin, les jeux dans les mécanismes sont historiquement peu étudiés à cause de leur complexité de modélisation (Dantan *et al.*, 2005). Néanmoins, leur prise en compte à l'aide de systèmes d'équations, qui complique considérablement le calcul de TNC, est nécessaire.

La deuxième raison réside dans la complexité de modélisation des dimensions obtenues en fabrication. Une dimension est modélisée par une variable aléatoire mais la plupart des méthodes existantes ne sont capables de traiter que des lois Gaussiennes indépendantes et centrées sur la valeur nominale. Cette modélisation est bien trop idéaliste et doit être remise en question. Les méthodes fiabilistes permettent le calcul de ce TNC quel que soit le type de chaînes de cotes et en considérant toutes leurs distributions potentielles.

- Quelles sont les sensibilités du TNC aux paramètres de conception ? Répondre quantitativement à cette question permet de justifier la réponse à donner à un fournisseur réclamant une dérogation sur certaines exigences de fabrication. Les méthodes fiabilistes permettent les calculs de sensibilité probabiliste appliqués à cette problématique.

- Comment définir de manière optimale les intervalles de tolérance d'un système mécanique ? Répondre à cette question permettrait un gain économique important puisque les pièces pourraient être fabriquées pour un coût minimal sans que cela n'affecte la fonctionnalité du mécanisme tolérancé. La satisfaction des clients pourrait aussi être améliorée par un meilleur contrôle du taux de mécanismes non-conformes. L'optimisation sous contrainte de qualité d'une fonction coût, prenant en compte les coûts au sens large (coût de production direct, coût de production indirect dû aux rebuts, etc.), semble particulièrement bien adaptée au problème de synthèse des tolérances. Il s'agit d'optimisation fiabiliste puisque les probabilités de défaillance (TNC) sont impliquées dans les différentes fonctions coûts et contraintes.

Objectifs. L'enjeu principal de ces travaux de thèse est d'explorer le domaine de l'analyse et de la synthèse des tolérances d'un point de vue probabiliste. Il s'agit d'identifier les apports éventuels de l'approche fiabiliste, appliquant la théorie probabiliste, dans ce domaine qui est relativement vaste. En particulier, les trois problématiques précédemment soulevées sont de nature différente mais permettent toutes de résoudre un problème de cotation fonctionnelle. Elles ont notamment comme point commun d'être basées sur le TNC d'un mécanisme.

Afin de fournir des outils permettant de donner des éléments de réponse aux trois questions précédentes, cette thèse est menée pour aboutir aux trois objectifs suivants :

- Objectif 1 : Développer une méthodologie de justification des intervalles de tolérance (analyse des tolérances) pour une conception mécanique donnée en utilisant l'approche fiabiliste. Cette justification nécessite le calcul du TNC qui est comparé au niveau de qualité souhaité afin de juger de la satisfaction apportée par cette conception. Ce calcul doit être réalisé aussi bien pour des mécanismes avec jeux que sans jeu.
- Objectif 2 : Proposer différents outils, complémentaires de l'analyse des to-

lérances, d'aide à la prise de décision dans un contexte industriel. Lorsqu'un concepteur doit accepter un lot de pièces non-conforme, autoriser ou refuser une dérogation qu'un fournisseur réclame ou bien déterminer les cotes à particulièrement surveiller en phase de fabrication, il doit être en mesure de trancher. L'analyse de sensibilités permet de remplir cet objectif.

- Objectif 3 : Développer une méthodologie permettant de déterminer les intervalles de tolérance optimums d'une conception (synthèse des tolérances). Le coût de fabrication ainsi que le coût de rebuts doivent être minimisés, pour des exigences fonctionnelles et de qualité respectées.

L'atteinte des objectifs 2 et 3 passe par la réalisation du premier. En effet, il est évident que la maîtrise du calcul du TNC pour tout type de mécanismes est un prérequis au développement d'outils plus sophistiqués.

Cadre de la thèse. Ces travaux de thèse sont financés par le Conseil Régional d'Auvergne, le fonds européen FEDER ainsi que trois partenaires industriels : VALEO SE (Système d'Essuyages), RADIALL SA et Phimeca Engineering. Cette collaboration a permis des échanges de connaissances et de compétences entre le secteur industriel et le secteur académique. En particulier, VALEO SE et RADIALL SA, concepteurs et fabricants de produits pour l'automobile et l'aéronautique, ont partagé les problématiques auxquelles ils sont confrontés. Ils ont aussi proposé des cas d'étude sur lesquels est démontrée la pertinence des travaux effectués et leur caractère applicable en industrie. Sur la base de ces travaux, Phimeca Engineering, spécialisée dans l'ingénierie des incertitudes, développe et commercialise un outil informatique professionnel. Cet outil, reprenant entre autres les méthodologies développées dans ces travaux de thèse, est destiné au secteur industriel principalement, mais aussi universitaire.

Organisation du manuscrit. Les développements réalisés dans cette thèse s'organisent en quatre chapitres. Le premier vise à présenter les principales méthodes fiabilistes dans un cadre général. Quelques notions de bases sur les métamodèles sont aussi introduites en raison de leur large utilisation dans les problèmes fiabilistes et d'analyse/synthèse des tolérances.

Le second chapitre est consacré à l'analyse des tolérances de mécanismes sans jeu, modélisés à l'aide de chaînes de cotes. La première partie du chapitre s'intéresse à l'étude des méthodes semi-probabilistes et fiabilistes dans le contexte de l'analyse des tolérances. Plusieurs applications académiques et industrielles illustrent l'efficacité relative des différentes méthodes existantes, ainsi que leurs avantages et inconvénients. La seconde partie du chapitre s'intéresse à la modélisation probabiliste des dimensions. En effet, en fabrication de grande série notamment, les caractéristiques probabilistes des dimensions évoluent, affectant le TNC des mécanismes. Ce phénomène est très rarement pris en compte à l'heure actuelle dans la littérature. En conséquence, une méthode spécifique a été développée, nommée " Advanced Probability-based Tolerance Analysis of products" (APTA) ou "méthode

dynamique", afin de prendre en compte cette évolution sur le long terme. Dans ce chapitre, l'apport des méthodes fiabilistes pour l'analyse des tolérances est clairement démontré.

Le chapitre 3 est consacré à l'analyse des tolérances de mécanismes avec jeux, dans un contexte bidimensionnel ou tridimensionnel. En effet, ces jeux sont essentiels et se retrouvent dans la plupart des liaisons mécaniques en raison de problèmes d'hyperstaticité notamment. D'une part, la relation entrée - sortie (cotes - caractéristique fonctionnelle) ne peut pas être modélisée simplement à l'aide d'une chaîne de cotes. D'autre part, ces jeux ne peuvent pas être modélisés par des variables aléatoires. Ces deux aspects rendent l'analyse des tolérances de mécanismes avec jeux très spécifique. Notamment, les méthodes détaillées dans les deux premiers chapitres sont inutilisables directement. Une méthodologie basée sur une décomposition par situations de points de contact et une résolution grâce à une méthode de fiabilité système a été développée et appliquée à plusieurs mécanismes industriels.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'analyse de sensibilités et à la synthèse des tolérances. Ces deux outils sont regroupés dans un unique chapitre car leur objectif commun est d'identifier les cotes qui ont le plus d'importance vis-à-vis de la conception à mener. Ils sont par ailleurs intimement liés puisque des calculs de sensibilité sont parfois nécessaires pour mener la synthèse des tolérances. Dans la partie sensibilité du chapitre, deux indices sont proposés, chacun répondant à une problématique concrète d'industriels afin d'aider à la prise de décision. De plus, ces indices permettent d'identifier les cotes critiques "Key Characteristics" qui doivent faire l'objet d'une surveillance particulière dans la phase de fabrication, de part leur influence importante sur le niveau de qualité du produit. Dans la partie synthèse des tolérances, un problème d'optimisation fiabiliste est proposé. La somme du coût de fabrication et du coût de non-conformité est minimisée. Cette optimisation a pour objet bien entendu de respecter la fonctionnalité et le niveau de qualité souhaité du mécanisme. La méthode développée est illustrée sur plusieurs applications académiques et industrielles pour lesquelles une conception optimisée est obtenue en un temps de calcul raisonnable.

Chapitre 1

Généralités sur les méthodes fiabilistes

Sommaire

1.1 Introduction **11**
1.2 Méthodes d'approximation de la probabilité de défaillance **12**
1.2.1 Méthodes FORM / SORM 13
1.2.2 Méthodes de fiabilité système 15
1.3 Méthodes de simulation **17**
1.3.1 Méthode de Monte Carlo 17
1.3.2 Méthodes de simulation alternatives 19
1.4 Méthodes par calcul des moments statistiques **20**
1.4.1 Restriction au cas linéaire Gaussien 20
1.4.2 Méthode SOTA 20
1.4.3 Intégration numérique 23
1.4.4 Méthode de Taguchi 24
1.5 Généralités sur les métamodèles **24**
1.5.1 Développement de Taylor 25
1.5.2 Surface de réponse quadratique 25
1.5.3 Autres métamodèles 26
1.6 Conclusion **27**

Notations spécifiques

$\mathbf{X}$	Vecteur des variables aléatoires physiques.
$\mathbf{x}$	Vecteur d'une réalisation de $\mathbf{X}$.
n	Taille du vecteur $\mathbf{X}$, nombre de variables aléatoires.
G	Fonction de performance dans l'espace physique.
P_f	Probabilité de défaillance.
h_{X_i}	Densité de probabilité de la variable aléatoire X_i.
F	Domaine de défaillance.
N_a	Nombre d'appels à la fonction d'intérêt.
N_{sim}	Nombre de simulations des variables aléatoires.
$\mathbf{U}$	Vecteur des variables Gaussiennes standards (centrées normées non-corrélées).
$\mathbf{u}$	Vecteur d'une réalisation de $\mathbf{U}$.
H	Fonction de performance dans l'espace standard.
σ_i	Ecart-type de la variable aléatoire X_i.
μ_i	Moyenne de la variable aléatoire X_i.
F_{X_i}	Fonction de répartition de la variable aléatoire X_i.
Φ	Fonction de répartition de la loi Gaussienne standard.
β	Indice de fiabilité.
P^*	Point de défaillance le plus probable.
$\mathbf{u}^*$	Vecteur des coordonnées de P^*.
α_i	Cosinus directeur de la variable aléatoire U_i.
$[\boldsymbol{\rho}]$	Matrice de corrélation.
Φ_m	Fonction de répartition de la loi Gaussienne standard en dimension m.
$M_j(X_i)$	Moment statistique centré d'ordre j de la variable aléatoire X_i.

1.1 Introduction

Avant d'aborder les thèmes liés au tolérancement (ou cotation), il est nécessaire d'introduire les méthodes fiabilistes. Elles permettent de mener des études de fiabilité, afin de s'assurer qu'un dispositif soit capable d'assurer sa fonction, par l'intermédiaire de scénarios de défaillance identifiés. Les paramètres incertains sont modélisés par des variables aléatoires. Le vecteur des variables aléatoires est noté $\mathbf{X}(\omega) = \{X_1, ..., X_n\}$, où ω représente l'aléa, à valeurs dans l'espace physique $\mathbb{X}^n \subset \mathbb{R}^n$. Pour un aléa fixé, les réalisations de ce vecteur sont notées $\mathbf{x} = \{x_1, ..., x_n\} \in \mathbb{X}^n$. Un scénario de défaillance est défini à l'aide d'une fonction de performance $G(\mathbf{X})$. Cette fonction permet de définir deux sous-ensembles :

- Le domaine de sûreté $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n : G(\mathbf{x}) > 0\}$.
- Le domaine de défaillance complémentaire $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n : G(\mathbf{x}) \leq 0\}$.

Une étude de fiabilité permet principalement de calculer la probabilité de défaillance d'un mécanisme, généralement très faible, d'un évènement redouté. Un bon indicateur de performance d'une méthode de fiabilité est le nombre N_a requis d'appels à la fonction de performance. L'efficacité d'une telle méthode se mesure en mettant en relation ce nombre avec la précision obtenue sur la probabilité de défaillance P_f, dont l'expression est la suivante :

$$P_f = \text{Prob}(G(\mathbf{X}) \leq 0) \tag{1.1}$$

Cette probabilité s'exprime grâce à la densité conjointe de probabilité $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ de $\mathbf{X}$ (Ditlevsen et Madsen, 1996, Lemaire, 2009) :

$$P_f = \int_F h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{1.2}$$

Dans la plupart des cas, il n'existe pas de solution analytique exacte à cette intégrale. De plus, l'erreur d'intégration numérique avec les méthodes classiques (Trapèze, Gauss) peut être du même ordre de grandeur que la probabilité calculée. Plusieurs méthodes spécifiques permettent de mener des études de fiabilité. Pour certaines d'entre elles, il est nécessaire de changer d'espace, i.e. passer de l'espace des variables aléatoires physiques $\mathbf{X}$ à l'espace des variables Gaussiennes standards $\mathbf{U}$ (normées centrées non-corrélées, à moyennes nulles et écarts-types unitaires). Ce nouvel espace $\mathbb{U}^n$ est appelé l'espace standard et permet de donner une définition équivalente du domaine de défaillance : $F = \{\mathbf{u} \in \mathbb{U}^n : H(\mathbf{u}) \leq 0\}$. Cette opération est appelée transformation iso-probabiliste. Elle est notée T et, par définition, conserve la probabilité. De façon générale :

$$\mathbf{U} = T_j(\mathbf{X}) \tag{1.3}$$

La fonction de performance dans l'espace standard est notée H est est définie par :

$$H(\mathbf{U}) \equiv G\left(T_j^{-1}(\mathbf{U})\right) \tag{1.4}$$

Dans le cas d'une variable aléatoire Gaussienne non-corrélée X_i, cette transformation est simple et linéaire :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \tag{1.5}$$

où μ_i et σ_i sont respectivement la moyenne et l'écart-type de X_i. Si la loi de la variable aléatoire indépendante est quelconque, la transformation prend la forme suivante :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i)\right) \tag{1.6}$$

Où F_{X_i} et Φ sont respectivement les fonctions de répartition des variables X_i et U_i. Dans le cas de variables corrélées, Der Kiureghian et Liu (1986) proposent d'utiliser la transformation de Nataf (1962), qui ne sera pas développée ici.

Un des objectifs de cette thèse est d'explorer l'ensemble des méthodes fiabilistes existantes et d'évaluer leur capacité à résoudre des problèmes d'analyse et de synthèse des tolérances. En vu de cet objectif, un tri préalable des méthodes a été réalisé selon deux critères : se restreindre aux méthodes les plus largement usitées ou ayant un intérêt particulier pour les problèmes liés au tolérancement. Ce chapitre comporte quatre sections, traitant respectivement des méthodes d'approximation, des méthodes de simulation, des méthodes de calcul des moments statistiques et des métamodèles. Les méthodes d'approximation présentées pour lesquelles il est simple de calculer P_f, FORM et SORM, ont pour objectif de remplacer l'état-limite réel $G = 0$ par une forme approchée. Les méthodes de simulation regroupent la méthode de Monte Carlo et ses variantes, permettant notamment d'améliorer son efficacité. Les méthodes de calcul des moments statistiques ont la particularité d'être assez largement utilisées dans les problèmes d'analyse des tolérances depuis les années 80. Les moments statistiques de la fonction de performance permettent de caractériser la loi de probabilité de G dont les valeurs fractiles permettent de calculer P_f. Enfin, les métamodèles sont utilisés à diverses fins, de manière générale pour remplacer un modèle coûteux à évaluer par une forme plus simple. Dans ce cadre, ils peuvent donc être couplés aux méthodes fiabilistes afin de calculer la probabilité de défaillance d'un mécanisme dont le comportement est modélisé par un code éléments finis par exemple.

1.2 Méthodes d'approximation de la probabilité de défaillance

Les méthodes d'approximation tendent à remplacer l'état-limite réel $G(\mathbf{x}) = 0$ par une forme approchée. Les méthodes décrites dans cette section s'appuient toutes sur l'indice de fiabilité β de Hasofer et Lind (1974) et le point de défaillance le plus probable P^*. C'est le point appartenant à l'état-limite le plus proche de l'origine. Il maximise donc la densité de probabilité des variables aléatoires dans le domaine de défaillance F. Ce point existe aussi bien dans l'espace physique que dans l'espace standard. Cependant, l'indice de fiabilité β, qui est la distance entre P^* et l'origine, n'est défini que dans l'espace standard. Les coordonnées de P^* sont notées

$\mathbf{u}^* = \{u_1^*, ..., u_n^*\}$. La recherche de ce point est effectué en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\beta = \min \sqrt{(\mathbf{u}.\mathbf{u})} \qquad \text{sous la contrainte} \qquad H(\mathbf{u}) \leq 0 \tag{1.7}$$

Toutes sortes d'algorithmes peuvent être utilisées, mais le plus couramment usité est iHLRF (improved Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler) de Zhang et Der Kiureghian (1995). La recherche de la solution peut conduire à l'obtention de minima locaux, car ce type d'algorithme utilise les gradients des fonctions de performance. Ils sont cependant très efficaces dans la plupart des cas et permettent de trouver le minimum global pour un nombre modéré de calculs N_a de la fonction de performance.

1.2.1 Méthodes FORM / SORM

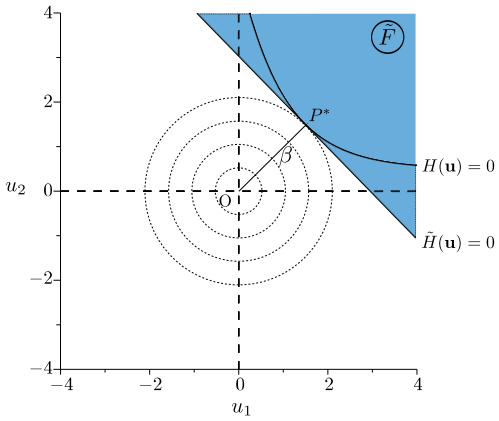


FIGURE 1.1 – Principe de la méthode FORM. Les cercles concentriques représentent les iso-valeurs de la densité de probabilité Gaussienne standard. $\tilde{F}$ est le domaine de défaillance approximé.

FORM (First Order Reliability Method). Le principe de la méthode FORM (Ditlevsen et Madsen, 1996, Lemaire, 2009) est de remplacer l'état-limite réel par un hyper-plan (Figure 1.1). L'état-limite est donc linéarisé grâce à un développement de Taylor au 1er ordre autour du point P^*. L'équation de l'hyper-plan obtenu, qui est une droite en deux dimensions, est la suivante :

$$\tilde{H}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \beta = 0 \tag{1.8}$$

où α_i représente le cosinus directeur (dont la valeur varie entre -1 et 1) associé à la variable U_i et permet de définir l'orientation de l'état-limite. Le lien entre l'indice

de fiabilité et le cosinus directeur est le suivant :

$$u_i^* = \beta\alpha_i \tag{1.9}$$

Cet hyper-plan est orthogonal à la droite (P^*O) donc le domaine de défaillance approximé $\tilde{F} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{U}^n : \tilde{H}(\mathbf{u}) \leq 0\}$ est délimité par l'hyper-plan et ne contient pas l'origine (si $P_f < 0.5$). Ainsi, la probabilité de défaillance est approximée par :

$$\tilde{P}_f = \Phi(-\beta) \tag{1.10}$$

Remarques à propos de FORM :

- Dans le cas où la fonction de performance est linéaire, et que les variables aléatoires sont Gaussiennes, la méthode FORM ($P_f = \Phi(-\beta)$) permet théoriquement d'obtenir la valeur exacte de la probabilité de défaillance. Mais la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite s'exprime sous la forme d'une intégrale dont il n'existe pas de solution analytique :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \tag{1.11}$$

  Elle peut être obtenue par intégration numérique, par des tables ou par des expressions approchées.
- L'inconvénient de la méthode FORM est que l'approximation trouvée pour P_f peut être de mauvaise qualité. Il arrive que dans certains cas, la recherche du point P^* échoue ou bien qu'il y ait plusieurs points P^* à prendre en compte. Il est donc habituellement conseillé de valider les résultats par une méthode de simulations (voir Section 1.3).
- A chaque itération de l'algorithme de recherche de point P^*, $n+1$ appels à la fonction de performance sont nécessaires. L'ordre de grandeur du nombre d'itérations est de 10 et dépasse rarement 100. Il est raisonnable de dire que la méthode FORM nécessite moins de $N_a = 100(n+1)$ appels à la fonction de performance (sans compter le coût de validation). En conséquence, la méthode FORM se classe parmi les méthodes économiques lorsqu'elle fonctionne, soit dans la plupart des cas.

SORM (Second Order Reliability Method). Alors que la méthode FORM vise à remplacer l'état-limite par un hyper-plan, la méthode SORM le remplace par une hyper-surface d'ordre 2 (Ditlevsen et Madsen, 1996, Lemaire, 2009). La prise en compte de la courbure rend évidemment la méthode légèrement plus coûteuse en temps de calcul mais améliore aussi sensiblement l'approximation de la probabilité de défaillance.

Facteurs d'importance. Parmi les produits de l'analyse de fiabilité figurent les facteurs d'importance. Ils comprennent les facteurs de sensibilité et d'élasticité fiabilistes qui sont les seuls abordés dans cette section. De manière générale, ils per-

mettent de connaitre l'influence de la variation d'un paramètre ou d'une variable sur l'indice de fiabilité. En particulier, les cosinus directeurs précédemment définis représentent la sensibilité de l'indice de fiabilité aux variables normées en P^* :

$$\alpha_i = -\left.\frac{\partial \beta}{\partial u_i}\right|_{u_i^*} \tag{1.12}$$

A partir de cette constatation, il est possible de définir le facteur de sensibilité S_{p_i} de β à un paramètre p_i de la variable aléatoire X_i :

$$S_{p_i} = \frac{\partial \beta}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial \beta}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial p_i}\right|_{u_i^*} \tag{1.13}$$

Grâce à la transformation iso-probabiliste T_i et à la définition des cosinus directeurs, cette sensibilité peut-être reformulée :

$$S_{p_i} = -\alpha_i \frac{\partial T_i(x_i^*)}{\partial p_i} \tag{1.14}$$

Dans le cas particulier de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes, les facteurs de sensibilités fiabilistes par rapport aux moyennes S_{μ_i} et écart-types S_{σ_i} s'expriment très simplement :

$$S_{\mu_i} = \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \tag{1.15}$$

$$S_{\sigma_i} = -\frac{\beta \alpha_i^2}{\sigma_i} \tag{1.16}$$

Certaines fois, pour des raisons d'interprétation, il est nécessaire d'utiliser les élasticités plutôt que les sensibilités. Il s'agit simplement de sensibilités normées qui s'expriment de la façon suivante :

$$E_{p_i} = \frac{p_i}{\beta} S_{p_i} \tag{1.17}$$

En particulier, l'élasticité par rapport à l'écart-type σ_i ne dépend que du cosinus directeur :

$$E_{\sigma_i} = -\alpha_i^2 \tag{1.18}$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$ ($\boldsymbol{\alpha}$ est un vecteur normé), il est usuel de représenter l'influence de la variabilité des variables de conception sous la forme d'un diagramme circulaire de surface unité (Lemaire, 2009).

1.2.2 Méthodes de fiabilité système

Lorsque le scénario de défaillance peut être décomposé en plusieurs sous-évènements, il faut adopter une approche système pour laquelle différentes combinaisons d'évè-

nements sont envisageables. Seule la combinaison parallèle est détaillée ici mais le raisonnement est analogue pour la combinaison série. Soit N_e domaines de défaillance F_i, dont les fonctions de performance sont notées $G_i(\mathbf{X})$ tel que $F_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}^n : G_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$. La défaillance d'un système parallèle survient lorsque tous les évènements sont rencontrés simultanément. La probabilité de défaillance système s'exprime de la façon suivante :

$$P_{fsys} = \text{Prob}\left(\bigcap_{i=1}^{N_e} F_i\right) \tag{1.19}$$

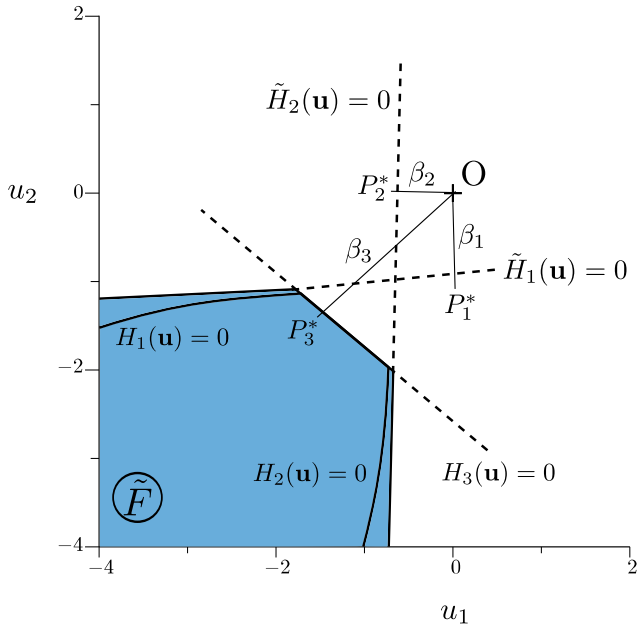


FIGURE 1.2 – Principe de la méthode FORM système. Le domaine de défaillance approximé $\tilde{F}$ est délimité par trois états-limites linéaires.

La méthode "FORM système" (Ditlevsen et Madsen, 1996, Lemaire, 2009), dont la Figure 1.2 illustre le principe, estime la probabilité de défaillance système grâce à la fonction de répartition de la loi multi-normale :

$$P_{fsys} \approx \Phi_{N_e}\left(-\boldsymbol{\beta}; [\boldsymbol{\rho}]\right) \tag{1.20}$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur des N_e indices de fiabilité et $[\boldsymbol{\rho}]$ est la matrice de corrélation des variables $\mathbf{G}$ entre elles. Cette matrice permet de prendre en compte les dépendances entre les scénarios de défaillance et chaque terme de la matrice est obtenu grâce au produit scalaire des cosinus directeurs : $\rho_{ij} = \boldsymbol{\alpha}^{(i)}.\boldsymbol{\alpha}^{(j)}$. La fonction de répartition

de la loi-multi-normale s'exprime sous la forme d'une intégrale en dimension N_e :

$$\Phi_{N_e}\left(-\boldsymbol{\beta}, [\boldsymbol{\rho}]\right) = \int_{-\infty}^{-\beta_1} ... \int_{-\infty}^{-\beta_n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N_e}{2}}\sqrt{\det[\boldsymbol{\rho}]}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{u}[\boldsymbol{\rho}]^{-1}\mathbf{u}^t} du_1...du_n \tag{1.21}$$

Φ_{N_e} n'a pas de solution analytique, mais elle peut être évaluée numériquement. Genz (1992) propose une méthode efficace pour le faire qui associe un intervalle de confiance au résultat obtenu. Cette évaluation numérique représente une source d'approximation plus ou moins négligeable en fonction de l'effort de calcul alloué.

1.3 Méthodes de simulation

1.3.1 Méthode de Monte Carlo

La méthode de simulation la plus connue est la méthode de Monte Carlo (MC) (Ditlevsen et Madsen, 1996, Lemaire, 2009). Il s'agit d'une méthode d'intégration plus économique que les méthodes classiques d'intégration numérique. Son résultat est souvent considéré comme le résultat de référence. Soit une fonction f de variables aléatoires $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, la méthode de Monte Carlo permet d'estimer son espérance mathématique définie par l'intégrale suivante :

$$\mathrm{E}[f(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{1.22}$$

où $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est la densité conjointe de probabilité de $\mathbf{X}$. L'estimateur de cette espérance est donné par la moyenne empirique grâce à N réalisations $\mathbf{x}^{(k)}$ des variables aléatoires $\mathbf{X}$ simulées selon $h_{\mathbf{X}}$:

$$\mathrm{E}[f(\mathbf{X})] \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \tag{1.23}$$

Le principe de la méthode de MC dans le cadre de la fiabilité est d'estimer l'intégrale présentée en Equation 1.2 en introduisant la fonction indicatrice $1_{D_f}(\mathbf{U})$ égal à 1 lorsque $H(\mathbf{U}) \leq 0$ et nul sinon. L'intégrale se réécrit :

$$P_f = \mathrm{E}\left[1_{D_f}(\mathbf{U})\right] = \int_{\mathbb{U}^n} 1_{D_f}(\mathbf{u})\phi_n(\mathbf{u}) du_1...du_n \tag{1.24}$$

où ϕ_n est la densité de probabilité Gaussienne standard à n dimensions. Soit N_a réalisations des variables aléatoires dans l'espace standard : $\mathbf{u}^{(j)}, j = 1, ..., N_a$, un estimateur de P_f est donné par l'expression :

$$\tilde{P}_f = \frac{1}{N_a}\sum_{k=1}^{N_a} 1_{D_f}\left(\mathbf{u}^{(k)}\right) \tag{1.25}$$

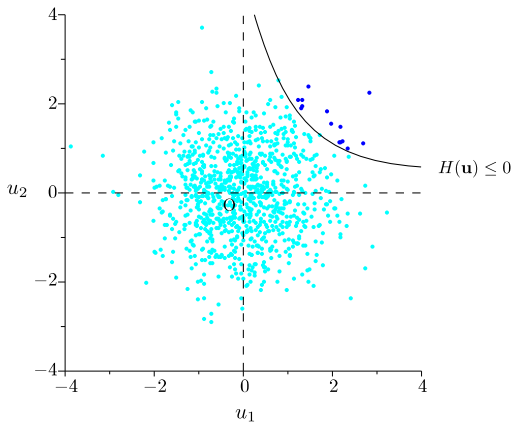


FIGURE 1.3 – Tirages de Monte Carlo.

Cet estimateur nécessite N_a évaluations de la fonction de performance, une pour chaque réalisation des variables aléatoires. Il est non-biaisé $\left(\mathrm{E}\left[\tilde{P}_f\right] = P_f\right)$, et sa variance s'exprime en fonction de la probabilité recherchée et du nombre de simulations effectuées N_a :

$$\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_f\right] \approx \frac{1}{N_a}\tilde{P}_f\left(1-\tilde{P}_f\right) \tag{1.26}$$

La Figure 1.3 illustre la méthode en représentant les différents tirages réalisés dans l'espace standard à deux dimensions. Comme ces tirages sont centrés sur l'origine, seule une très faible proportion d'entre eux est défaillante alors que ce sont les seuls tirages utiles qui permettent de contribuer au calcul de P_f. Il est judicieux d'accompagner l'estimation de la probabilité de défaillance par son intervalle de confiance à 95%. Ainsi, P_f est bornée (avec 5% d'incertitude) par l'encadrement suivant :

$$\tilde{P}_f - 1.96\sqrt{\frac{\mathrm{Var}\left[\tilde{1}_{D_f}\right]}{N_a}} \lesssim P_f \lesssim \tilde{P}_f + 1.96\sqrt{\frac{\mathrm{Var}\left[\tilde{1}_{D_f}\right]}{N_a}} \tag{1.27}$$

Comme $\mathrm{Var}\left[\tilde{1}_{D_f}\right] = N_a\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_f\right]$, alors cet encadrement devient :

$$\tilde{P}_f - 1.96\sqrt{\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_f\right]} \leq P_f \leq \tilde{P}_f + 1.96\sqrt{\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_f\right]} \tag{1.28}$$

Le coefficient de variation $c_{\tilde{P}_f}$ de $\tilde{P}_f$ est défini par :

$$c_{\tilde{P}_f} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}\left[\tilde{P}_f\right]}}{\mathrm{E}\left[\tilde{P}_f\right]} \approx \sqrt{\frac{1-\tilde{P}_f}{N_a\tilde{P}_f}} \tag{1.29}$$

En visant un coefficient de variation égal à 10%, le nombre de simulations nécessaires est environ égal à $N_a \approx 10^{p+2}$ lorsque la probabilité recherchée est de l'ordre de 10^{-p}. Comme P_f est souvent inférieure à 10^{-4}, plusieurs millions d'évaluations de la fonction de performance sont nécessaires. Ceci a un coût considérable, surtout si cette fonction nécessite l'appel à un code numérique tel qu'un code éléments finis par exemple.

1.3.2 Méthodes de simulation alternatives

Pour éviter les problèmes de temps de calcul des simulations de MC, plusieurs méthodes alternatives ont été envisagées. Tout d'abord les méthodes de réduction de la variance visent à réduire la variance de $\tilde{P}_f$ pour un coût de calcul donné (N_a fixé). Parmi celles-ci, la plus connue est la méthode de tirages d'importance (Melchers, 1990) (Figure 1.4). Au lieu de simuler les variables aléatoires autour de leur moyenne dans l'espace physique, c'est à dire autour de l'origine dans l'espace normé, comme c'est le cas dans la méthode classique de MC, il est préférable de centrer ces simulations autour du point de défaillance le plus probable P^*. Contrairement à la méthode de MC, près de la moitié des réalisations des variables ainsi simulées seront défaillantes, ce qui réduit considérablement la variance de $\tilde{P}_f$ et permet donc à la méthode de tirage d'importance d'être beaucoup plus économique en temps de calcul. En revanche, cette méthode repose sur le fait que P^* ait été convenablement identifié. Il existe d'autres méthodes de simulations parmi lesquelles figurent la méthode des Subsets (Au et Beck, 2001), ou la méthode de simulations directionnelles (Ditlevsen *et al.*, 1988) permettant de considérer des problèmes avec plusieurs points P^* prépondérants.

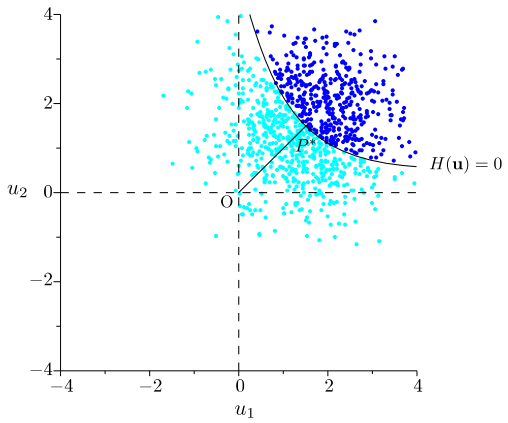


FIGURE 1.4 – Tirages d'importance centrés en P^*.

1.4 Méthodes par calcul des moments statistiques

Pour calculer P_f, une méthode consiste à caractériser la loi de probabilité de la fonction de performance grâce à ses moments statistiques. Pour ce faire, le calcul des quatre premiers moments de G est jugé suffisant (Glancy, 1994). Une fois la loi caractérisée, le calcul de P_f est réalisé grâce à ses fractiles. Une première approche simplifiée restreinte au cas linéaire Gaussien est présentée. Trois autres méthodes issues de la littérature spécifique à l'analyse des tolérances sont détaillées pour traiter le cas général.

1.4.1 Restriction au cas linéaire Gaussien

Dans le cas linéaire, la fonction de performance s'écrit selon la formulation suivante :

$$G(\mathbf{X}) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \tag{1.30}$$

où $\mathbf{a}$ est le vecteur des coefficients linéaires de la fonction de performance. Si les lois des variables $\mathbf{X}$ sont Gaussiennes, alors la loi résultante de G l'est aussi. Sinon, le Théorème Central Limite (TCL) stipule que, pour des distributions quelconques indépendantes, la distribution résultante est aussi Gaussienne lorsque n est suffisamment grand. Les deux premiers moments de la loi normale sont calculés de la façon suivante :

$$\mu_G = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \tag{1.31}$$

$$\sigma_G = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i \sigma_i)^2} \tag{1.32}$$

La probabilité de défaillance s'exprime grâce à une transformation iso-probabiliste adaptée et la fonction de répartition de la loi Gaussienne standard :

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob}\left(G(\mathbf{X}) \leq 0\right) \\ &= \text{Prob}\left(H(\mathbf{U}) \leq -\frac{\mu_G}{\sigma_G}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{\mu_G}{\sigma_G}\right) \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.4.2 Méthode SOTA

Calcul des moments statistiques de G. Lorsque la fonction $G(\mathbf{X})$ est non-linéaire ou que n n'est pas suffisamment grand (d'après le TCL), sa loi de probabilité n'est pas Gaussienne. Le calcul de ses quatre premiers moments centrés dépend des moments des variables $\mathbf{X}$. Seules des estimations de ses moments sont disponibles,

grâce à N_{sim} simulations $\mathbf{x}^{(j)}, j = 1...N_{sim}$ du vecteur des variables aléatoires selon leur loi respective. Des estimateurs de ces moments sont donnés par les Equations 1.34 à 1.38 :

Moyenne :

$$\tilde{\mu}_i = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{j=1}^{N_{sim}} x_i^{(j)} \tag{1.34}$$

Variance :

$$\sigma_i^2 = M_2(X_i) \tag{1.35}$$

Coefficient d'asymétrie (skewness) :

$$\gamma_{3i} = \frac{M_3(X_i)}{\sigma_i^3} \tag{1.36}$$

Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :

$$\gamma_{4i} = \frac{M_4(X_i)}{\sigma_i^4} \tag{1.37}$$

où le moment centré d'ordre k s'exprime de la façon suivante :

$$\tilde{M}_k(X_i) = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{j=1}^{N_{sim}} \left(x_i^{(j)} - \mu_i\right)^k \tag{1.38}$$

Pour une variable Gaussienne X_i, $\gamma_{3i} = 0$ et $\gamma_{4i} = 3$. La méthode SOTA (Second Order Tolerance Analysis) (Cox, 1986, Glancy et Chase, 1999) s'appuie sur un développement de Taylor de la fonction de performance à l'ordre 2 autour des moyennes. Mais une approximation au premier ordre peut suffire. Ainsi, le problème est résolu comme dans le cas linéaire. Il est aussi possible, comme le propose Evans (1975), d'effectuer le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 6. Mais cette solution apporte peu de précision supplémentaire par rapport à sa grande complexité. Le calcul est ici détaillé à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) \approx G(\boldsymbol{\mu}) \quad &+ \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_j}(x_j - \mu_j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_j^2}(x_j - \mu_j)^2 \\ &+ \quad \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_j \partial x_k}(x_j - \mu_j)(x_k - \mu_k) \end{aligned} \tag{1.39}$$

A partir de cette expression analytique approchée, les expressions des premiers moments statistiques de G peuvent être déterminées analytiquement. Pour la moyenne et la variance, les formules sont simples, mais leur complexité augmente considérablement pour l'asymétrie et l'aplatissement. Les formules complètes dépendent des huit premiers moments des variables. Les termes mettant en oeuvre des moments de degrés supérieurs à 4 ont été tronqués car ils n'apportaient que très peu de pré-

cision. En supposant les variables indépendantes, les moments s'expriment selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned} M_1(G) &= \mathrm{E}[G] \\ &\approx \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{jj}}{2} M_2(X_j) + G(\boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned} M_2(G) &= \mathrm{E}[(G - \mathrm{E}[G])^2] \\ &\approx \sum_{j=1}^{n} \left[b_j^2 M_2(X_j) + b_j b_{jj} M_3(X_j) + \frac{b_{jj}^2}{4} M_4(X_j) - \left(\frac{b_{jj} M_2(X_j)}{2} \right)^2 \right] \\ &+ \sum_{j \neq k} \frac{b_{jk}^2}{2} M_2(X_j) M_2(X_k) \end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned} M_3(G) &= \mathrm{E}[(G - \mathrm{E}[G])^3] \\ &\approx \sum_{j=1}^{n} \left[b_j^3 M_3(X_j) + \frac{3 b_j^2 b_{jj} M_4(X_j)}{2} - \frac{3 b_{jj} b_j^2 M_2(X_j)^2}{2} \right] \\ &+ 3 \sum_{j \neq k} b_{jk} b_j b_k M_2(X_j) M_2(X_k) \end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned} M_4(G) &= \mathrm{E}[(G - \mathrm{E}[G])^4] \\ &\approx \sum_{j=1}^{n} b_j^4 M_4(X_j) + 3 \sum_{j \neq k} b_j^2 b_k^2 M_2(X_j) M_2(X_k) \end{aligned} \tag{1.43}$$

où :

$$b_j = \frac{\partial G(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_j} \tag{1.44}$$

$$b_{jj} = \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_j^2} \tag{1.45}$$

$$b_{jk} = \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_j \partial x_k} \tag{1.46}$$

Ces dérivées peuvent par ailleurs être calculées par différences finies. En choisissant des formules de dérivation adaptées, $N_a = 2n^2 + 1$ appels à la fonction d'intérêt sont requis.

Approximation de la loi de probabilité de G. La loi de probabilité obtenue, caractérisée par ses moments, peut être approximée par des tables de loi telles que la loi de Pearson (Johnson *et al.*, 1963) ou la loi de Johnson (1965). Une dernière, la Loi Généralisée Lambda (Karian et Dudewicz, 2000), est privilégiée dans le cadre

de la méthode SOTA. Sa fonction de répartition inverse est définie par :

$$F^{-1}(y) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \tag{1.47}$$

La détermination de ses paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ se fait en résolvant numériquement un système non-linéaire de quatre équations. Il implique le calcul de la fonction de répartition de la loi beta et les moments de G calculés précédemment, ou bien en utilisant une des tables mises à disposition par Karian et Dudewicz (2000). A partir de la fonction de répartition inverse F_G^{-1} de la variable G, il est possible d'estimer P_f tel que :

$$F_G^{-1}(P_f) = 0 \tag{1.48}$$

1.4.3 Intégration numérique

Evans (1975) propose de calculer les moments statistiques par intégration numérique. L'espérance d'une fonction de type $G(\mathbf{X})$, lorsque les variables aléatoires sont indépendantes, est donnée par :

$$\mathrm{E}[G] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^{n} h_{X_k}(x_k) dx_k \tag{1.49}$$

où h_{X_k} est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X_k. Une intégrale de cette forme peut être approximée par quadrature :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[G] \approx\ & C_1 G(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{j=1}^{n} L_j \left[\frac{G(\mu_j + Q_j^+ \sigma_j)}{Q_j^+} - \frac{G(\mu_j + Q_j^- \sigma_j)}{Q_j^-} \right] \\
& + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} M_{jk} \left[\frac{G(\mu_j + Q_j^+ \sigma_j, \mu_k + Q_k^+ \sigma_k)}{Q_j^+ Q_k^+} - \frac{G(\mu_j + Q_j^- \sigma_j, \mu_k + Q_k^+ \sigma_k)}{Q_j^- Q_k^+} \right] \\
& - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} M_{jk} \left[\frac{G(\mu_j + Q_j^+ \sigma_j, \mu_k + Q_k^- \sigma_k)}{Q_j^+ Q_k^-} - \frac{G(\mu_j + Q_j^- \sigma_j, \mu_k + Q_k^- \sigma_k)}{Q_j^- Q_k^-} \right]
\end{aligned} \tag{1.50}$$

où $Q_k^{\pm}, L_j$ et M_{jk} sont des constantes définies de la façon suivante :

$$Q_k^{\pm} = \frac{\gamma_{3k}}{2} \pm \sqrt{\gamma_{4k} - \frac{3\gamma_{3k}^2}{4}} \tag{1.51}$$

$$L_j = \frac{1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{Q_k^- Q_k^+} \right) - \frac{1}{Q_j^- Q_j^+}}{Q_j^+ - Q_j^-} \tag{1.52}$$

$$M_{jk} = \frac{1}{(Q_j^+ - Q_j^-)(Q_k^+ - Q_k^-)} \tag{1.53}$$

En définissant la fonction $G^{(v)}(\mathbf{x}) = [G(\mathbf{x}) - A]^v$, alors $\mathrm{E}[G^{(v)}]$ estime le $v^{\text{ème}}$ moment de G autour de A. En définissant $A = G(\boldsymbol{\mu})$, alors la constante C_1 n'a pas besoin d'être connue puisque $G^{(v)}(\boldsymbol{\mu}) = 0$. Cette méthode permet donc de calculer les quatre premiers moments statistiques de G. A partir de ceux-ci, la Loi Lambda Généralisée permet d'approximer la loi de G, comme présenté en Section 1.4.2 concernant la méthode SOTA. Seule la connaissance des quatre premiers moments des variables ainsi que N_a évaluations de G sont nécessaires, N_a étant là aussi égal à $2n^2 + 1$.

1.4.4 Méthode de Taguchi

La méthode de Taguchi est une méthode numérique alternative aux deux précédentes. Le principe est celui d'un plan d'expériences factoriel complet à 3 niveaux pour chaque variable. La fonction est donc évaluée à chacune des 3^n combinaisons de variables. Le niveau central se situe à la moyenne μ_i des variables tandis que les niveaux supérieurs et inférieurs sont $\mu_i \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_i$. Le vecteur des $N_a = 3^n$ évaluations de G représente un échantillon à partir duquel les différents moments de la fonction peuvent être calculés grâce aux Equations 1.34 à 1.38. Enfin, la Loi Lambda Généralisée permet d'approximer la loi de probabilité de G, comme présenté en Section 1.4.2 concernant la méthode SOTA.

D'Errico et Zaino (1988) ont proposé des améliorations à cette méthode pour deux raisons. La méthode initiale donne de mauvais résultats pour le quatrième moment, et le nombre de calculs devient trop conséquent lorsque $n > 10$:

- Les niveaux inférieurs et supérieurs ont été changés par $\mu_i \pm \sqrt{3}\sigma_i$.
- Des poids ont été alloués à chaque niveau : 4/6 pour le niveau central et 1/6 pour les autres.
- Un plan factoriel fractionnel a été proposé lorsque $n > 10$ à la place d'un plan factoriel complet.

1.5 Généralités sur les métamodèles

Un métamodèle est une fonction permettant de substituer un modèle existant et qui présente l'avantage d'être plus économique à évaluer. Les métamodèles se caractérisent principalement par deux aspects : leur capacité à prédire avec précision des phénomènes complexes, donc non-linéaires, et leur coût de construction, exprimé en nombre d'appels au modèle existant. Ils ont de multiples fonctions et peuvent notamment être couplés à des méthodes de fiabilité. Par exemple, des métamodèles sont couramment utilisés avec la méthode de MC ou même avec la méthode FORM. Le nombre d'appels aux fonctions de performance pouvant dépasser le million avec la méthode de MC, comme décrit section 1.3.1, il est donc généralement intéressant de substituer la fonction de performance réelle par un métamodèle. Certains d'entre eux font aussi partie intégrante des méthodes fiabilistes. Par exemple, l'approximation de la méthode FORM est réalisée par un développement de Taylor au premier ordre.

Dans cette section, deux métamodèles parmi les plus simples sont détaillés car ils sont utilisés dans la suite de cette thèse : le développement de Taylor et la surface

de réponse quadratique. Enfin, une sous-section est consacrée à la brève description d'autres métamodèles, qui semblent plus pertinents pour évaluer P_f.

1.5.1 Développement de Taylor

Soit une fonction f d'une variable réelle t infiniment dérivable, et un réel a au voisinage duquel la fonction est définie. Le développement de Taylor de f en a s'exprime de la façon suivante :

$$\tilde{f}(t) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(t-a)^3 + ... \tag{1.54}$$

où f', f'' et $f^{(3)}$ sont respectivement des dérivés première, seconde et troisième de la fonction f par rapport à t, qui peuvent être calculées analytiquement ou par différences finies. Cette expression est généralisable aux fonctions à plusieurs variables. Par exemple, le développement de Taylor d'une fonction à deux variables (t_1, t_2) autour du point de coordonnées $\{a, b\}$ au deuxième ordre est le suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t_1,t_2) \approx\ & f(a,b) + \frac{\partial f(t_1,b)}{\partial t_1}\frac{(t_1-a)}{1!} + \frac{\partial f(a,t_2)}{\partial t_2}\frac{(t_2-b)}{1!} + \frac{\partial^2 f(t_1,b)}{\partial t_1}\frac{(t_1-a)^2}{2!} \\ & + \frac{\partial^2 f(a,t_2)}{\partial t_2}\frac{(t_2-b)^2}{2!} + 2\frac{\partial^2 f(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\frac{(t_1-a)(t_2-b)}{2!} \end{aligned} \tag{1.55}$$

Le coût de construction de ce métamodèle provient exclusivement des dérivés de la fonction f dans le cas où elles sont calculées par différences finies. De manière générale, il est égal à $N_a = 2n^2 + 1$ au deuxième ordre. Au premier ordre, il s'agit d'une linéarisation et il est égal à $N_a = n + 1$. Un tel métamodèle est utilisé dans la méthode SOTA à l'ordre 2, et dans la méthode FORM à l'ordre 1.

Toutefois, il faut garder à l'esprit que le développement de Taylor est un métamodèle local. Seules les orientations/courbures autour du point auquel les dérivés sont calculées sont prises en compte. La précision de ce métamodèle diminue au fur et à mesure de l'éloignement du point d'évaluation par rapport au point de définition a (ou $\{a, b\}$) dans l'éventualité ou le modèle original n'est pas régulier (changement brusque de courbure par exemple).

1.5.2 Surface de réponse quadratique

Le terme surface de réponse est synonyme de métamodèle. Parmi ceux-ci figurent les surfaces de réponse polynomiales. Il s'agit donc de remplacer un modèle coûteux par une fonction polynomiale. L'ordre du polynôme peut-être choisi égal à 1. Dans ce cas, il s'agit encore d'une linéarisation. Si son ordre est égal à 2, ce qui correspond aux choix de nombreux auteurs (Bucher et Bourgund, 1990, Das et Zheng, 2000, Gayton *et al.*, 2003), il s'agit d'une surface de réponse quadratique. L'ordre 2 inclut un calcul possible des courbures en évitant de potentielles oscillations dues aux ordres élevés. Soit f une fonction d'un modèle à substituer par un surface de réponse quadratique

avec termes croisés $\tilde{f}$, son expression est la suivante :

$$\tilde{f}(\mathbf{t}) = \left\{t_1, ..., t_n, t_1^2, t_1 t_2, ..., t_n t_{n-1}, t_n^2\right\} \mathbf{c}^t \tag{1.56}$$

où $\mathbf{c}$ est le vecteur des coefficients du polynôme. Pour le déterminer, un plan d'expériences est utilisé. Chaque expérience définit une ligne de la matrice des expériences $[\mathbf{V}]$. Pour l'expérience (v), $v = 1$ à N_a :

$$\begin{aligned} \left\{\mathbf{t}^{(v)}\right\} &= \left\{1, t_1^{(v)}, t_2^{(v)}, ..., t_n^{(v)}, \left(t_1^{(v)}\right)^2, t_1^{(v)} t_2^{(v)}, ..., t_{n-1}^{(v)} t_n^{(v)}, \left(t_n^{(v)}\right)^2\right\} \\ \text{avec } [\mathbf{V}] &= \begin{pmatrix} \vdots \\ \left\{\mathbf{t}^{(v)}\right\} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.57}$$

La fonction f est évaluée pour chacune des N_a expériences et un vecteur des réalisations $\mathbf{R}$ est construit :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} f\left(\mathbf{t}^{(1)}\right) \\ \vdots \\ f\left(\mathbf{t}^{(N_a)}\right) \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

Finalement, les n_c coefficients du polynôme sont estimés par une approximation des moindres carrés si $N_a \geq n_c$:

$$\tilde{\mathbf{c}}^t = \left([\mathbf{V}]^t [\mathbf{V}]\right)^{-1} [\mathbf{V}]^t \mathbf{R} \tag{1.59}$$

L'appel au métamodèle $\tilde{f}(\mathbf{t})$ est censé être beaucoup moins coûteux en temps de calcul que l'appel au modèle original $f(\mathbf{t})$. Ce métamodèle se construit à partir d'un plan d'expériences. Il existe différents types de plans d'expériences nécessitant chacun un nombre d'appels au modèle N_a différent. Un plan factoriel complet à deux niveaux peut par exemple être choisi nécessitant $N_a = 2^n$ appels au modèle original.

1.5.3 Autres métamodèles

Outre les développements de Taylor et les surfaces de réponses polynomiales, il existe d'autres types de métamodèles. Parmi ceux-ci figurent le développement en polynômes du chaos (Ghanem et Spanos, 1991, Sudret et Der Kiureghian, 2002), les réseaux de neurones (Andolfato *et al.*, 2012), la régression à vecteurs de support (SVM) (Hurtado, 2004, Bourinet *et al.*, 2011) ou le Krigeage (Echard *et al.*, 2011). La méthode de chaos polynomial a certains avantages. Elle est très efficace et permet notamment de conduire des études de sensibilité très facilement une fois le développement effectué. Néanmoins, son coût de construction augmente considérablement en grandes dimensions. Blatman et Sudret (2010) proposent un chaos polynomial creux en considérant une base polynomiale incomplète, en retirant les termes de degrés peu influents. La méthode de Krigeage est quant à elle très prometteuse et

permet d'enrichir la connaissance du métamodèle progressivement, en sélectionnant les nouveaux appels au modèle dans les zones les plus judicieuses.

1.6 Conclusion

Plusieurs méthodes fiabilistes, pour beaucoup déjà utilisées dans le cadre de l'analyse des tolérances, sont décrites dans ce chapitre. Certaines sont plus économiques que d'autres et plus ou moins adaptées en fonction du type de problème. Même si leur efficacité globale est difficile à appréhender notamment parce que différentes approximations apparaissent à différents niveaux pour chacune, différentes remarques générales sont possibles. Au vu de l'ordre de grandeur du nombre d'appels à G nécessaires, plusieurs méthodes se montrent *a priori* plus efficaces que la méthode de Monte Carlo seule, qui est à éviter (si possible) vu son coût de calcul important. Néanmoins, elle est souvent utilisée pour valider les nouvelles méthodes sur des cas tests académiques. L'ensemble des méthodes apportent aussi certaines réponses à des problèmes peu conventionnels mais néanmoins de plus en plus courants :

- La méthode de Monte Carlo ainsi que la méthode FORM permettent de prendre en compte des variables corrélées grâce à une transformation isoprobabiliste appropriée.
- Lorsque la fonction de performance fait appel à un modèle mécanique coûteux, un métamodèle peut être utilisé et couplé à une méthode fiabiliste.
- Pour des problèmes systèmes, la méthode de Monte Carlo peut être utilisée pour estimer P_f. La méthode FORM système permet d'obtenir de bonnes approximations de P_f. Malgré le coût d'intégration de Φ_{N_e}, la méthode reste économique.
- La méthode FORM permet à moindre coût d'obtenir différents indices de sensibilités grâce aux cosinus directeurs.

Chapitre 2

Analyse des tolérances pour les mécanismes sans jeu

Sommaire

2.1 Introduction **31**
2.2 Calcul de l'intervalle de variation d'une caractéristique fonctionnelle **33**
2.2.1 Méthode arithmétique ou au pire des cas 33
2.2.2 Méthode statistique 34
2.2.3 Variantes de la méthode statistique 36
2.2.4 Application à un exemple linéaire 40
2.2.5 Synthèse et conclusion 42
2.3 Calcul du taux de non-conformité **43**
2.3.1 Méthodes fiabilistes usuelles 44
2.3.2 Application à un exemple non-linéaire 45
2.3.3 Synthèse et conclusion 48
2.4 L'approche APTA pour le calcul du taux de non-conformité **49**
2.4.1 Zone de conformité 49
2.4.2 Intérêt de l'approche APTA 51
2.4.3 Expression mathématique de l'approche APTA 53
2.4.4 Hypothèses pour les caractéristiques des lots des pièces . . . 54
2.4.5 Calcul numérique du TNC 59
2.4.6 Illustration de l'approche APTA sur un exemple linéaire . . . 60
2.4.7 Applications industrielles et CAO 63
2.4.7.1 Recouvrement de contact RADIALL 63
2.4.7.2 Débattement de contact RADIALL 65
2.4.7.3 Application CAO 67
2.4.8 Conclusion sur l'approche APTA 69
2.5 Conclusion **70**
Synthèse de chapitre **70**

Notations spécifiques

Y	Caractéristique fonctionnelle, résultante de chaîne de cotes.
$\mathbf{X}$	Vecteur des dimensions (ou cotes), modélisées par des variables aléatoires.
n	Taille du vecteur $\mathbf{X}$, nombre de cotes.
$\mathbf{a}$	Vecteur des coefficients linéaires de la chaîne de cotes.
T_i	Valeur nominale de la cote X_i.
t_i	Intervalle de tolérance de la cote X_i.
μ_i	Moyenne de la dimension X_i.
δ_i	Décalage de moyenne de la dimension X_i.
σ_i	Ecart-type de la dimension X_i.
LSL_i, USL_i	Bornes respectivement inférieures et supérieures de t_i.
C_{pi}, C_{pki}	Indices de capabilité de la dimension X_i.
$C_{pi}^{(e)}, C_{pki}^{(e)}$	Exigences de capabilité de la dimension X_i.
t_Y	Intervalle de variation potentielle de la caractéristique fonctionnelle Y.
T_Y	Valeur nominale de la caractéristique fonctionnelle Y.
LSL_Y, USL_Y	Bornes respectivement inférieures et supérieures de t_Y.
σ_Y	Ecart-type de la caractéristique fonctionnelle Y.
δ_Y	Décalage de moyenne de la caractéristique fonctionnelle Y.
$C_{pi}^{(\max)}$	Niveau maximal de capabilité de la dimension X_i.
$\delta_i^{(\max)}$	Décalage de moyenne maximal de la dimension X_i.
h_{X_i}	Densité de probabilité de la variable X_i.
Z_{ci}	Zone de conformité de la dimension X_i dans l'espace (δ_i, σ_i).
$\mathrm{TNC}_{\vert\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}$	TNC conditionnel ou ponctuel ($\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$ connus).
$\mathrm{TNC}_{\mathrm{APTA}}$	TNC dynamique calculé par la méthode APTA.

2.1 Introduction

La conception d'un système mécanique est guidée par le respect d'Exigences Fonctionnelles (EF) sur des grandeurs d'intérêts notées Y. Ces dernières sont modélisées par des fonctions appelées chaînes de cotes. Les variables d'entrée $\mathbf{X}$ sont les dimensions des pièces (associées aux cotes). Elles sont modélisées par des variables aléatoires et influencent la caractéristique fonctionnelle Y, aussi appelée résultante de chaîne de cotes. Dans le cas d'une fonction explicite f sans jeu, une chaîne de cotes s'écrit :

$$Y = f(\mathbf{X}) \tag{2.1}$$

Cette fonction peut être linéaire ou non-linéaire. Dans le cas de mécanismes simples, elle est explicite. Cependant sa modélisation peut impliquer l'utilisation d'un modèle CAO (Conception Assistée par Ordinateur) ou d'un code éléments finis, alors cette fonction est non explicite. Dans le cas linéaire, elle s'écrit :

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \tag{2.2}$$

où $\mathbf{a}$ représente le vecteur des coefficients linéaires de la chaîne de cotes. En conception de systèmes mécaniques, le défi de l'ingénieur est de trouver le bon compromis entre coût de fabrication et qualité du produit. Le coût de fabrication est directement lié aux intervalles de tolérances des pièces (IT), imposés par le concepteur au fabricant. Plus ces intervalles sont serrés, plus la pièce coûte cher à produire. La qualité du produit est quant à elle liée au Taux de Non-Conformité (TNC). C'est la probabilité que le produit ne remplisse pas sa fonction. En d'autres termes, c'est la probabilité que l'EF imposée sur Y ne soit pas respectée :

$$\mathrm{TNC} = \mathrm{Prob}\left(Y \notin [\mathrm{EF}_{\min}; \mathrm{EF}_{\max}]\right) \tag{2.3}$$

où $\mathrm{EF}_{\min}$ et $\mathrm{EF}_{\max}$ représentent les bornes inférieures et supérieures de l'EF.

L'analyse des tolérances consiste, pour une conception donnée, c'est-à-dire lorsque les IT sont fixés, à vérifier que la qualité du produit est satisfaisante. Pour réaliser cela, deux approches existent :

- **Approche semi-probabiliste.** L'intervalle de variation potentielle de Y, noté t_Y, est calculé. Différentes méthodes permettent ce calcul, chacune associant un TNC au résultat sous plusieurs hypothèses. L'EF est comparée à l'intervalle t_Y calculé afin de s'assurer du bon fonctionnement du mécanisme. Cette approche est dénommée "semi-probabiliste" par la suite, car un TNC est impliqué, sans qu'aucun calcul probabiliste ne soit mené (Scholtz, 1995).
- **Approche fiabiliste.** Le calcul du TNC est directement mené par des méthodes fiabilistes. L'accent est porté principalement sur cette approche dans ces travaux de thèse car elle est du point de vue probabiliste beaucoup plus intéressante. Les méthodes fiabilistes décrites en Chapitre 1 ayant pour but principal de calculer des probabilités de défaillance, elles peuvent directement

être appliquées au domaine de l'analyse des tolérances afin de calculer le TNC (Evans, 1975).

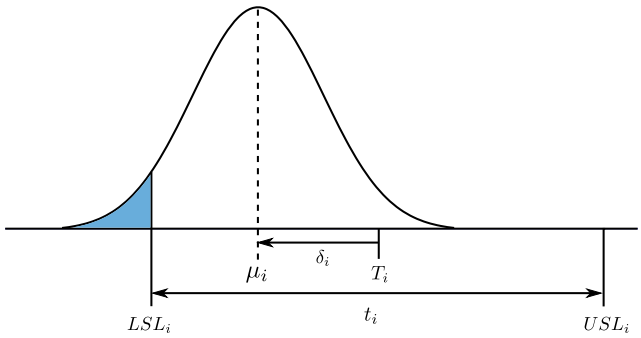


FIGURE 2.1 – Modélisation Gaussienne d'une dimension de moyenne μ_i, décalée de δ_i par rapport à la valeur nominale T_i sur laquelle l'intervalle de tolérance t_i est centré. La zone bleue représente les pièces non-conformes.

En fabrication de grande série et depuis l'introduction des méthodes statistiques de tolérancement, la définition d'exigences de fabrication par lots plutôt que par pièces individuelles devient de plus en plus courante. Communément, la dimension d'une pièce X_i est cotée au plan par une valeur nominale T_i, un intervalle de tolérance t_i dont les bornes supérieures et inférieures sont respectivement notées USL_i et LSL_i, ainsi que deux exigences de capabilité $C_{pi}^{(e)}$ et $C_{pki}^{(e)}$, $i = 1$ à n. **Dans ce document, tout intervalle de tolérance est considéré centré sur sa valeur nominale.** Pour un lot donné, les dimensions des pièces sont supposées aléatoires (le plus souvent Gaussiennes) et suivent une loi de probabilité d'écart-type σ_i, de moyenne μ_i et de décalage de moyenne $\delta_i = \mu_i - T_i$ (Figure 2.1). A chacune de ces dimensions appartenant à un lot sont associés deux indices de capabilité d'expressions :

$$C_{pi} = \frac{t_i}{6\sigma_i} \tag{2.4}$$

$$C_{pki} = \frac{t_i/2 - |\delta_i|}{3\sigma_i} = \min\left(\frac{\mu_i - LSL_i}{3\sigma_i}; \frac{USL_i - \mu_i}{3\sigma_i}\right) \tag{2.5}$$

Une pièce est jugée conforme si la mesure de sa dimension appartient à son IT ($X_i \in [LSL_i; USL_i]$) et si en plus, son lot de provenance vérifie $C_{pi} \geq C_{pi}^{(e)}$ et $C_{pki} \geq C_{pki}^{(e)}$. Plus ces indices sont grands, plus les dimensions fabriquées sont proches de leur valeur nominale. En pratique, seules quelques pièces d'un lot sont mesurées. Les indices de capabilité sont estimés à partir de cet échantillon.

Depuis quelques années, une nouvelle méthode de spécification dite inertielle, inspirée des travaux sur la fonction de perte de Taguchi, a été proposée par Pillet (2004). Les deux exigences de capabilité sont remplacées par une exigence inertielle $I_i^{(e)}$ qui est comparée à l'inertie mesurée à partir des pièces d'un lot, définie de la

manière suivante :

$$I_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \delta_i^2} \tag{2.6}$$

Cet indice n'a pas d'influence sur le calcul du TNC, mais simplement sur la manière de spécifier les exigences de fabrication d'un lot de pièces. De plus, comme les indices de capabilité classiques sont beaucoup plus répandus que les indices inertiels dans l'industrie, le choix a été fait de ne pas baser les travaux de cette thèse sur cette méthode alternative. Néanmoins, tous les développements sont compatibles avec cette dernière, comme il l'est mentionné en Section 2.4.4.

Dans la première section de ce chapitre, les principales méthodes d'analyse des tolérances pour les mécanismes sans jeu sont détaillées. Deux approches sont abordées : l'approche semi-probabiliste visant à calculer l'intervalle de variation potentielle t_Y de la caractéristique fonctionnelle, et l'approche fiabiliste visant à calculer le TNC. Plusieurs applications académiques et industrielles permettent de confronter ces différentes méthodes. La seconde section a pour but de proposer une méthode innovante de calcul du TNC pour l'analyse des tolérances d'un mécanisme produit en grande série : la méthode APTA (Advanced Probability-based Tolerance Analysis of products). Elle est aussi appelée méthode dynamique, car les caractéristiques statistiques des pièces fabriquées, évoluant sur le long terme, sont prises en compte. Elle est appliquée à trois cas d'études industriels et académiques.

2.2 Calcul de l'intervalle de variation d'une caractéristique fonctionnelle

Cette section vise à développer les différentes méthodes semi-probabilistes permettant de calculer l'intervalle de variation potentielle t_Y d'une caractéristique fonctionnelle Y. Cet intervalle est déterminé pour une conception donnée, c'est à dire lorsque les IT des cotes , rassemblées dans le vecteur $\mathbf{t}$, sont connus. Chaque méthode possède ses propres hypothèses, qui impliquent notamment un TNC associé à t_Y. Ainsi, si l'Exigence Fonctionnelle (EF) est égale à t_Y, ce TNC est censé être atteint. De plus, elles ne s'appliquent que dans le cadre des chaînes de cotes linéaires, définies par l'Equation 2.2.

2.2.1 Méthode arithmétique ou au pire des cas

La méthode arithmétique ou au pire des cas (Greenwood et Chase, 1987, Scholtz, 1995) est encore aujourd'hui très répandue. En faisant la simple hypothèse que les dimensions sont toutes contenues dans leurs IT, il est certain que la caractéristique fonctionnelle appartienne à l'intervalle centré sur T_Y et de largeur t_Y tel que :

$$T_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i T_i \tag{2.7}$$

$$t_Y = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, t_i \tag{2.8}$$

où **a** représente le vecteur des coefficients linéaires de la chaîne de cotes. L'avantage de cette méthode est qu'elle conduit à un TNC nul. Toute pièce conforme conduit à un assemblage conforme. Cependant, elle s'avère extrêmement coûteuse, d'autant plus lorsque le nombre de cotes impliquées n grandi, et n'est pas applicable pour la plupart des productions en grande série.

De manière similaire, une approche nommée "accumulation des tolérances" a été développée parallèlement par plusieurs auteurs (Teissandier *et al.*, 1999, Giordano *et al.*, 2009, Mansuy *et al.*, 2012). Elle suit le même principe en trois dimensions en prenant en compte des défauts dimensionnels, d'orientations et de positions des pièces. Un de ses objectifs est de permettre une meilleure adéquation avec la cotation ISO GPS. Ces travaux utilisent une somme de Minkowski pour faire la somme de domaines de tolérance, très coûteuse à mettre en oeuvre en terme de temps de calcul. Cependant, plusieurs algorithmes sont développés pour accélérer les calculs, notamment lorsque les domaines sont des polytopes (Teissandier et Delos, 2011).

2.2.2 Méthode statistique

La méthode statistique s'appuie sur trois hypothèses assez restrictives :

- **Distribution Gaussienne centrée :** pour chaque lot de pièces, les dimensions se répartissent suivant une loi Gaussienne centrée sur la valeur nominale de la cote. Il est généralement plus judicieux, et physiquement plus réaliste de considérer une loi Gaussienne plutôt qu'une autre, en particulier la loi uniforme ayant pour bornes celles des IT. Cette loi illustre le fait qu'il y a souvent plus de chance d'obtenir des réalisations proches de la valeur ciblée plutôt qu'éloignées. L'écart-type σ est supposé égal à $\frac{t}{6}$, ce qui implique $C_p = 1$.
- **Dimensions non corrélées :** chaque dimension X_i est indépendante de la dimension X_j si $i \neq j$. En général, si chaque dimension est fabriquée selon un processus différent des autres, ou bien si plusieurs dimensions proviennent de pièces différentes, cette hypothèse est vérifiée. Elle est discutable sinon.
- **Linéarité :** les chaînes de cotes sont linéaires ou linéarisées. Ainsi, elles sont définies par l'Equation 2.2.

Cas général. La méthode statistique (Evans, 1975, Greenwood et Chase, 1987, Scholtz, 1995), contrairement à la méthode arithmétique, ne conduit pas à un TNC nul et admet qu'un certain nombre d'assemblages puissent être non-conformes, c'est à dire à l'extérieur de t_Y. Elle est donc moins exigeante du point de vue de la qualité. L'intervalle de variation t_Y par cette méthode est donné par la relation suivante :

$$t_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i t_i)^2} \tag{2.9}$$

Comme les écarts-types des dimensions sont égales au sixième de leur intervalle de tolérance ($\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{t}}{6}$), et comme Y est une combinaison linéaire de lois Gaussiennes, la résultante de chaîne de cotes suit aussi une loi Gaussienne d'écart-type $\sigma_Y = \frac{t_Y}{6}$

et centrée sur $T_Y = \mu_Y$ défini à l'Equation 2.7. Il est ensuite aisé, comme illustré en Figure 2.2, de déterminer la probabilité que Y n'appartienne pas à t_Y dont les bornes respectivement inférieures et supérieures sont notées LSL_Y et USL_Y. Elle se calcule comme une somme de probabilités de deux évènements indépendants grâce à la fonction de répartition de loi Gaussienne standard Φ (voir Section 1.4) :

$$\begin{aligned} \text{TNC} &= \text{Prob}(Y \leq LSL_Y) + \text{Prob}(Y \geq USL_Y) \\ &= \Phi\left(\frac{LSL_Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_Y - USL_Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \Phi(-3) + \Phi(-3) \\ &= 2700 \text{ ppm} \end{aligned} \tag{2.10}$$

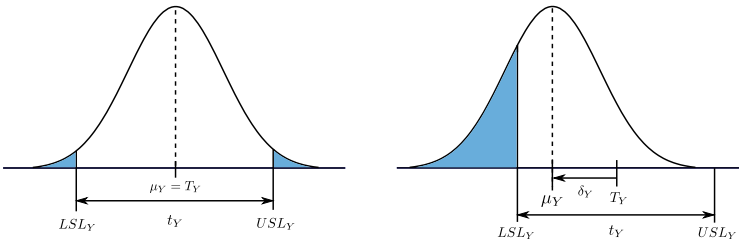


FIGURE 2.2 – Représentation de 2 résultantes de chaînes de cotes Gaussiennes : l'une centrée (à gauche), l'autre décentrée (à droite). La zone bleue représente les dimensions non-conformes. Un décalage de moyenne entraîne une non-conformité plus importante.

Discussion. Cinq cas principaux ont été référencés par Graves et Bisgaard (2000), pour lesquels le tolérancement par la méthode statistique peut échouer. Dans chaque cas, le TNC cible de 2700 ppm n'est pas atteint. Les trois cas suivants sont les plus critiques :

- **Déviations** : lorsqu'un processus de fabrication produit des pièces dont la moyenne des dimensions diffère de la valeur nominale, il est dit biaisé. Ce phénomène apparait soit aléatoirement soit systématiquement. Il peut aussi être volontaire, afin par exemple de gérer l'usure de l'outil. Ces déviations sur chaque dimension se répercutent sur Y et entraînent un TNC accru comme illustré en Figure 2.2.
- **Problèmes de corrélations** : la méthode statistique ne considère aucune corrélation entre les variables. C'est une hypothèse qui est souvent vérifiée en pratique. Mais il existe des cas où elle est prise à défaut, notamment lorsque plusieurs dimensions sont fabriquées selon le même processus. Il est à noter que la corrélation peut être très défavorable à la qualité d'un produit dans certains cas bien particuliers. Mais elle peut aussi lui être favorable. Une étude approfondie est donc nécessaire pour connaître l'influence exacte de la corrélation.

- **Distributions non-Gaussiennes** : certains processus de fabrication produisent des dimensions qui ne suivent pas une loi Gaussienne. D'après le Théorème Central Limite (TCL), la résultante d'une chaîne de cotes linéaire suit approximativement une loi Gaussienne si n est suffisamment grand, même si les distributions des dimensions sont non-Gaussiennes. Le problème dans cette formulation est le mot " suffisamment " qui n'a pas de signification mathématique claire. Il se peut donc dans certains cas que l'hypothèse de normalité (Distributions non-Gaussiennes) soit prise en défaut, et que n soit trop faible pour que le TCL s'applique correctement. Dans ce cas, le TNC calculé par les fractiles de la loi Gaussienne est faussé.

Méthode statistique gonflée. L'une des suggestions proposée pour prendre en compte les trois défauts de modélisation précédemment cités est d'utiliser la méthode statistique gonflée (Bender, 1968, Greenwood et Chase, 1987, Graves et Bisgaard, 2000). Un facteur de correction s_g est inséré dans l'expression permettant d'obtenir t_Y :

$$t_Y = s_g \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i t_i)^2} \tag{2.11}$$

s_g est souvent choisi égal à 1.5 ou 1.6 dans la littérature mais chacun peut l'adapter en fonction du problème. Le défaut principal de la méthode est que le choix de la valeur de s_g est arbitraire et qu'il ne permet donc pas de corriger avec précision les erreurs de la méthode statistique.

2.2.3 Variantes de la méthode statistique

Prise en compte de distributions non-Gaussiennes. Certains processus de fabrication produisent des dimensions qui ne peuvent pas être modélisées par des lois Gaussiennes. Scholtz (1995) propose d'ajouter un coefficient c afin de modéliser ces dimensions par des lois non-Gaussiennes, ayant comme support l'IT. Par exemple, considérer une loi Gaussienne d'écart-type $\sigma = \frac{t}{6}$ est équivalent à considérer une loi uniforme ayant pour bornes l'IT, à condition d'ajouter le coefficient correcteur $c = 1.732$. Cela vient du fait qu'une telle loi uniforme a un écart-type égal à $\frac{t}{\sqrt{12}} = \frac{1.732t}{6}$. Ce coefficient, qui pénalise l'IT en question, est inséré de la manière suivante :

$$t_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i c_i t_i)^2} \tag{2.12}$$

Le Tableau 2.2 propose les coefficients des principales distributions (Scholtz, 1995). D'après ce tableau, c'est l'emploi de la loi uniforme qui est le plus pénalisant en augmentant t_Y, loin devant celui de la loi triangulaire et de la loi Gaussienne. Finalement, cette méthode permet de prendre en compte facilement des lois de probabilité particulières.

Distribution	Coefficient c
Gaussienne	1
Triangulaire	1.225
Uniforme	1.732
Cosinus demi-vague	1.306
Elliptique	1.5
Student-t	1

Tableau 2.2 – Coefficients d'ajustement des distributions usuelles.

Prise en compte des décalages de moyenne. L'hypothèse selon laquelle la distribution d'une dimension est centrée sur sa valeur nominale est très largement remise en question dans la littérature (Evans, 1975, Graves et Bisgaard, 2000). La Figure 2.3 présente un exemple de 10 lots de fabrication. Aucun lot de pièces n'est produit avec la même moyenne pourtant tous sont conformes. Les raisons de ces décalages sont multiples. Par exemple, la variation du processus de fabrication d'une dimension peut être très inférieure à l'IT à respecter. Dans ce cas, l'opérateur n'aura ni la motivation ni l'intérêt de centrer le processus de fabrication sur la valeur nominale tant que les exigences de fabrication sont respectées. Il se peut aussi qu'il en ait l'incapacité.

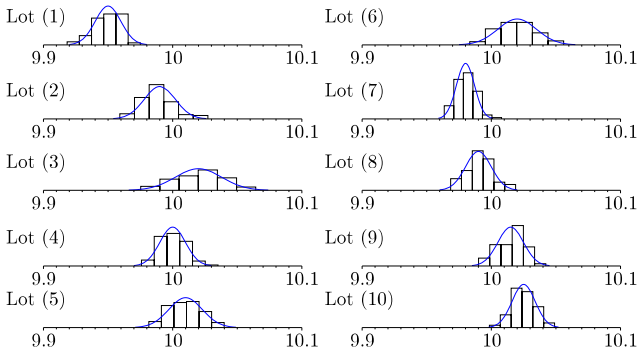


FIGURE 2.3 – Représentation statistique de 10 lots d'une même cote de valeur nominale $T_i = 10$ et d'intervalle de tolérance $t_i = 0.2$.

Scholtz (1995) propose une variante de la méthode statistique permettant de prendre en compte les décalages de moyenne statiques. Anselmetti et Radouani (2003) l'appellent la méthode semi-quadratique. Un décalage de moyenne est intégré dans la formulation de la méthode statistique tel que $\delta = \mu - T$ et $\eta = \frac{2|\delta|}{t}$, où η est le coefficient de décalage de moyenne. Ce décalage est aléatoirement positif ou négatif, mais toujours de même amplitude $|\delta| = \delta^{(\max)}$, d'où le terme "décalage statique". Pour un indice de capabilité fixé, par exemple $C_{pk} = 1$, alors :

$$C_{pk} = 1 = \frac{\frac{t}{2} - |\delta|}{3\sigma} \qquad \text{donc} \qquad \sigma = \frac{\frac{t}{2} - |\delta|}{3} = \frac{(1-\eta)t}{6} \tag{2.13}$$

t_Y est égal à $6\sigma_Y$ (comme dans la méthode statistique classique), auquel deux décalages de moyenne $\delta_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_i$ sont ajoutés (un pour chaque sens de décalage) :

$$t_Y = 2\delta_Y + 6\sigma_Y = \sum_{i=1}^{n} 2a_i\delta_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(6a_ic_i\sigma_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i|a_i|t_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}((1-\eta_i)a_ic_it_i)^2} \tag{2.14}$$

La probabilité que Y n'appartienne pas à t_Y est d'au plus 0.27% (0.135% de chaque côté de la loi Gaussienne). Mais comme chaque dimension est décentrée dans un sens ou un autre, il y a de fortes chances pour que Y le soit aussi. Dans ce cas, illustré en Figure 2.4, il n'y a qu'une des deux extrémités de la loi Gaussienne qui dépasse significativement de t_Y. La probabilité est quasiment diminuée de moitié, soit 0.135%. Finalement, plus les décalages de moyenne sont importants, plus le TNC atteint par cette méthode est proche de 0.135%.

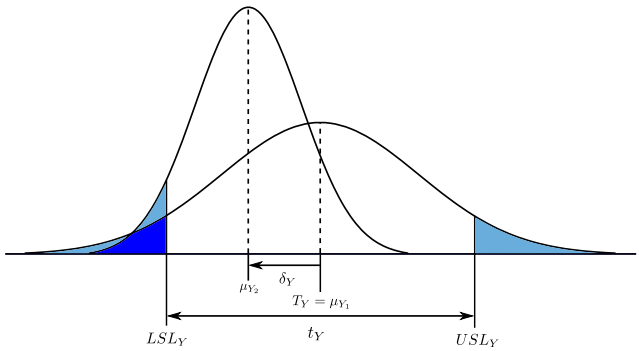


FIGURE 2.4 – Représentation de deux lots de dimensions Gaussiennes : l'un centré et l'autre décentré. Le TNC du côté gauche s'élève pour chacune à 1350 ppm (surface non-conforme équivalentes). Le TNC total du lot centré est de 2700 ppm alors que celui du lot décentré est de 1350 ppm.

Une seconde méthode, très semblable à la précédente, a été développée par Scholtz (1995). La seule différence est que les décalages de moyenne sont maintenant considérés aléatoires, d'amplitude variable (d'où le terme "décalage dynamique"), centrés sur la valeur cible T. Ils suivent alors une loi d'écart-type $\sigma_\mu = \frac{\eta t}{6}$. Le décalage de moyenne δ_Y est aléatoire donc son expression peut être obtenue grâce à la méthode statistique classique : $\delta_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(6c_{\mu_i}a_i\sigma_{\mu_i})^2}$. Ainsi t_Y est obtenue similairement à la méthode précédente :

$$t_Y = 2\delta_Y + 6\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[c_{\mu i}a_i\eta_it_i\right]^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[(1-\eta_i)a_ic_it_i\right]^2} \tag{2.15}$$

où $c_{\mu i}$ est le coefficient de correction de distribution du décalage de moyenne d'une

dimension X_i dont les valeurs sont à choisir dans le Tableau 2.2. Pour les mêmes raisons que précédemment, la probabilité de non respect de l'exigence fonctionnelle est d'au plus 0.27%. Mais les décalages d'amplitude aléatoire réduisent leur influence sur la résultante Y et ne la décale pas forcément significativement. En conséquence, rien ne permet de connaître le TNC visé, sinon qu'il est compris entre 0.135% et 0.27%. Cette imprécision peut être relativement gênante pour s'assurer du respect du niveau de qualité requis dans un contexte industriel.

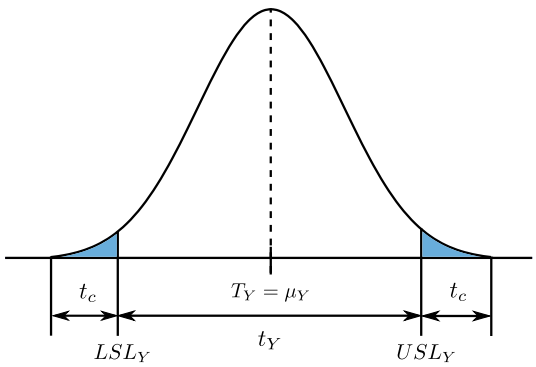


FIGURE 2.5 – Représentation des plages de valeurs non-conformes de Y, notées t_c, Y étant une somme de n lois uniformes (plus n est grand, plus Y se rapproche de la loi Gaussienne).

Méthode de Crofts. Crofts (1958) propose une méthode alternative ayant pour but de prendre en compte des décalages de moyenne d'une loi supposée Gaussienne. L'astuce est de modéliser les dimensions par des lois uniformes centrées sur T. Selon lui, le fait de considérer une loi uniforme au lieu de Gaussienne est pessimiste du point de vue du TNC, mais se compense parfaitement avec le fait de ne pas considérer de décalage de moyenne, ce qui est une hypothèse optimiste du même point de vue. Pour ce faire, Crofts intègre la densité de probabilité d'une somme de variables uniformes sur la plage des valeurs de Y non-conformes, notée t_c, de part et d'autre de t_Y, tel qu'illustré en Figure 2.5 :

$$t_Y = \sum_{i=1}^{n} t_i - 2t_c \tag{2.16}$$

L'expression de t_c est obtenue analytiquement pour $n = 2$ à 4. Elle est ensuite généralisée :

$$t_c = \sqrt[n]{\frac{n!\mathrm{TNC}_{\text{visé}} \prod_{i=1}^{n} t_i}{2}} \tag{2.17}$$

Attention, il faut noter que cette formule n'est exacte que si $t_c < \min(t_i)$. Cette restriction est assez handicapante et impose souvent $n < 8$.

2.2.4 Application à un exemple linéaire

L'objectif de cette application est d'identifier les défauts des méthodes de calcul semi-probabilistes : leur incapacité à s'adapter à de nombreuses situations ne respectant pas leurs conditions d'application trop restrictives. Pour cela, plusieurs types de modélisation des dimensions sont envisagés à partir des valeurs nominales $\mathbf{T}$ et des IT $\mathbf{t}$. Pour chacune, dans un premier temps, une ou plusieurs méthodes semi-probabilistes sont utilisées pour calculer t_Y. Dans un second temps, la méthode de Monte Carlo est utilisée pour estimer le TNC relatif à la modélisation choisie et ainsi vérifier si, en imposant l'EF égale à t_Y, le TNC visé est atteint ou non.

Soit la chaîne de cotes linéaire suivante :

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \tag{2.18}$$

Les caractéristiques des cotes sont : $\mathbf{T} = \{10, 10, 10, 10\}$, $\mathbf{t} = \{0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$. Les différentes modélisations considérées sont les suivantes :

- Modélisation 1 : les dimensions suivent des lois uniformes centrées sur $\mathbf{T}$ de bornes $\pm\frac{\mathbf{t}}{2}$.
- Modélisation 2 : les dimensions suivent des lois Gaussiennes d'écarts-types $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{t}}{6}$ avec des décalages de moyenne d'amplitudes constantes tel que $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{T} \pm \frac{\boldsymbol{\eta}\mathbf{t}}{2}$, le signe de chaque décalage étant aléatoire et équiprobable.
- Modélisation 3 : les dimensions suivent des lois Gaussiennes d'écarts-types $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{t}}{6}$ dont la moyenne est aléatoirement décalée. Cette moyenne suit une loi uniforme de moyenne $\mathbf{T}$ et de bornes $\pm\frac{\boldsymbol{\eta}\mathbf{t}}{2}$.

Le Tableau 2.3 dresse la première partie des résultats de l'application pour chaque méthode utilisée, comprenant notamment l'intervalle de variation potentielle de Y à mettre en relation avec le TNC visé correspondant. Le Tableau 2.4 dresse la seconde partie des résultats de l'application, comprenant notamment l'estimation du TNC si l'EF est fixée égale à t_Y à mettre en relation avec le TNC visé. Cette estimation est calculée par la méthode de Monte Carlo (MC) avec 1 million de simulations et est accompagnée par son intervalle de confiance à 95% (voir Section 1.3.1).

Remarques à propos des résultats du Tableau 2.3 :

- Les hypothèses nécessaires à l'application de la méthode statistique classique ne sont réunies dans aucun type de modélisation. C'est la raison pour laquelle son utilisation n'est pas envisagée dans cette application.
- La méthode arithmétique (calcul (1)) considère des dimensions modélisées par des lois uniformes et vise un TNC nul. Comme déjà expliqué, cet objectif extrêmement ambitieux implique un intervalle t_Y très large (0.4 mm), le plus grand parmi ceux obtenus à partir de la modélisation 1.
- La méthode statistique gonflée (calculs (2), (6) et (8)) apporte la même réponse ($t_Y = 0.3$ mm) aux trois types de modélisations, qui sont pourtant très différentes. Il y a dès lors très peu de chances pour que le TNC visé soit atteint. De plus, cela montre bien l'incapacité de la méthode à s'adapter avec

précision aux situations proposées.

Numéro de modélisation	Numéro de calcul, nom de la méthode, caractéristiques	t_Y (mm)	TNC visé (ppm)
1	(1), Arithmétique	0.4	0
1	(2), Statistique gonflée, $s_g = 1.5$	0.3	2700
1	(3), Statistique avec lois uniformes, $c = 1.732$	0.346	2700
1	(4), Crofts	0.315	2700
1	(5), Crofts	0.329	1350
2	(6), Statistique gonflée, $s_g = 1.5$	0.3	2700
2	(7), Statistique avec décalages statiques, $\eta = 0.1$	0.22	1350
3	(8), Statistique gonflée, $s_g = 1.5$	0.3	2700
3	(9), Statistique avec décalages dynamiques, $\eta = 0.1$	0.215	[1350 ;2700]
3	(10), Crofts	0.315	2700
3	(11), Crofts	0.329	1350

Tableau 2.3 – Première partie des résultats de l'application des méthodes semi-probabilistes à l'exemple linéaire. Les caractéristiques de chaque calcul sont données, ainsi que les intervalles de variation potentielle t_Y de Y obtenus, à mettre en relation avec les TNC visés.

Numéro de modélisation	Numéro de calcul, nom de la méthode, caractéristiques	TNC visé (ppm)	TNC atteint [IC à 95%]
1	(1), Arithmétique	0	0 [0]
1	(2), Statistique gonflée, $s_g = 1.5$	2700	5203 [288]
1	(3), Statistique avec lois uniformes, $c = 1.732$	2700	457 [87]
1	(4), Crofts	2700	2692 [207]
1	(5), Crofts	1350	1328 [146]
2	(6), Statistique gonflée, $s_g = 1.5$	2700	19 [17]
2	(7), Statistique avec décalages statiques, $\eta = 0.1$	1350	1596 [160]
3	(8), Statistique gonflée, $s_g = 1.5$	2700	10 [13]
3	(9), Statistique avec décalages dynamiques, $\eta = 0.1$	[1350 ;2700]	1478 [154]
3	(10), Crofts	2700	3 [6]
3	(11), Crofts	1350	2 [6]

Tableau 2.4 – Seconde partie des résultats de l'application des méthodes semi-probabilistes à l'exemple linéaire. Les caractéristiques de chaque calcul sont données, ainsi que les TNC atteints, à mettre en relation avec les TNC visés.

Remarques à propos des résultats du Tableau 2.4 :

- La méthode statistique gonflée possède un coefficient s_g à régler afin de corriger les hypothèses trop restrictives de sa version originale. Ce coefficient dont la valeur est choisie égale à 1.5, comme beaucoup d'auteurs le recommandent, permet *a priori* d'utiliser des lois uniformes à la place de lois Gaussiennes. Le calcul (2) montre qu'il existe une différence de plus de 100 % entre le TNC visé et celui atteint. De même, ce coefficient devrait pouvoir corriger un décalage des moyennes des dimensions ; les calculs (6) et (8) montrent là encore le contraire en affichant des différences de l'ordre de 100% entre les résultats obtenus. Cette méthode nécessite un réglage arbitraire d'un coefficient de correction, qui a très peu de chances de corriger convenablement la méthode statistique classique.
- La variante de la méthode statistique, qui permet de prendre en compte des lois non-Gaussiennes (selon le TCL), obtient une différence de l'ordre de 80% entre le TNC visé et celui atteint (calcul (3)). Ces résultats montrent qu'elle n'est pas satisfaisante. Cela vient du fait de l'imprécision de l'expression "n suffisemment grand" utilisée par le TCL dont il est question dans les hypothèses de la méthode statistique. $n = 4$ dans le cas présent n'est donc pas assez grand.
- Certaines variantes de la méthode statistique permettent de prendre en compte des décalages de moyenne statiques ou dynamiques. Pour le premier type de décalages, la différence entre le TNC visé et le TNC atteint (calcul (7)) est relativement faible, de l'ordre de 20%, ce qui montre que cette méthode est plutôt performante.
- Pour le second type de décalages, la méthode ne vise pas un TNC particulier mais un intervalle, relativement large. Les résultats obtenus au calcul (9) montrent que le TNC atteint est dans cet intervalle. En ce sens, cette méthode est efficace et tient ses objectifs néanmoins peu ambitieux.
- Enfin, la méthode de Crofts a été développée initialement dans le but de prendre en compte des décalages de moyennes. Toutefois, elle s'appuie sur la considération de lois uniformes. Les calculs (4) et (5) permettent d'observer sa justesse pour la prise en compte de telles lois. En revanche, les résultats des calculs (10) et (11) sont très mauvais. Ils indiquent que cette méthode est inefficace pour la prise en compte de décalages de moyennes ; tâche pour laquelle elle a été développée.

2.2.5 Synthèse et conclusion

La méthode arithmétique est la méthode du qualiticien. Bien qu'étant la plus intuitive, elle n'est pas adaptée aux problèmes industriels actuels : produire à un coût le plus bas possible en assurant un niveau de qualité maitrisé. La méthode statistique est celle du fabricant. Bien que contestable, elle semble être plus proche des problématiques actuelles des industriels. Néanmoins, les hypothèses nécessaires à son application sont rarement vérifiées. Elle a alors été déclinée en plusieurs versions

afin de la rendre plus réaliste, avec plus ou moins de succès. La méthode statistique gonflée est censée corriger les erreurs d'optimisme de la version originale. Au vue des résultats présentés dans les Tableaux 2.3 et 2.4, il est clair qu'elle ne corrige pas correctement ces erreurs, à cause du coefficient s_g qu'il est difficile de régler. La méthode de Crofts ne permet pas de prendre en compte efficacement les décalages de moyenne, comme elle est censée le faire. De plus, elle souffre d'une restriction assez handicapante ($n < 8$).

Plus généralement, ces méthodes, appelées semi-probabilistes, sont assez limitées pour deux raisons. La première est qu'elles ne sont valables que sous certaines hypothèses handicapantes ne permettant pas de traiter l'ensemble des cas qu'il est possible de rencontrer. La seconde est qu'elles ne permettent pas dans la plupart des cas **d'atteindre avec précision le TNC visé**, puisqu'aucun calcul probabiliste n'est prévu. Elles ont néanmoins l'avantage d'être très simples d'utilisation et peu coûteuses en temps de calcul, ce qui permet très rapidement de se faire une idée sur la pertinence des exigences de fabrication spécifiées. Au contraire, les méthodes fiabilistes détaillées dans le chapitre précédent permettent de prendre en compte des lois non-Gaussiennes, des corrélations entre dimensions, ainsi que des décalages de moyenne statiques, dynamiques ou plus sophistiqués encore. Elles permettent de maitriser le TNC avec plus de précision. L'utilisation de ces méthodes dans le cadre de l'analyse des tolérances est développée dans la section suivante.

2.3 Calcul du taux de non-conformité

Cette section fait référence à la deuxième approche d'analyse des tolérances. Ils s'agit de l'approche fiabiliste qui représente une alternative de gestion de la qualité par une meilleure maitrise du TNC. Elle vise, contrairement à la précédente, à calculer le Taux de Non-Conformité (TNC) d'un mécanisme. Ce calcul est réalisé à partir d'une conception établie, c'est à dire lorsque les IT et l'Exigence Fonctionnelle (EF) à imposer sur Y sont connus. Ce TNC, exprimé en ppm, est la probabilité que la caractéristique fonctionnelle Y ne respecte pas l'EF de bornes $\mathrm{EF}_{\min}$ et $\mathrm{EF}_{\max}$. Deux fonctions de performance sont définies, une pour chaque borne de l'EF :

$$G_1(\mathbf{X}) = \mathrm{EF}_{\min} - Y(\mathbf{X}) \tag{2.19}$$

$$G_2(\mathbf{X}) = Y(\mathbf{X}) - \mathrm{EF}_{\max} \tag{2.20}$$

Alors, cette probabilité, qui peut être vue comme une probabilité de défaillance, s'exprime comme une somme de deux probabilités d'évènements indépendants, et peut être estimée grâce aux méthodes fiabilistes détaillées dans le Chapitre 1 :

$$\mathrm{TNC} = \mathrm{Prob}\left(Y(\mathbf{X}) \notin [\mathrm{EF}_{\min}, \mathrm{EF}_{\max}]\right) \tag{2.21}$$

$$= \mathrm{Prob}(G_1(\mathbf{X}) \leq 0) + \mathrm{Prob}(G_2(\mathbf{X}) \leq 0) \tag{2.22}$$

2.3.1 Méthodes fiabilistes usuelles

Parmi les méthodes fiabilistes, la méthode la plus utilisée dans le cadre de l'analyse des tolérances est sans conteste celle des simulations de Monte Carlo (MC) (Section 1.3.1). Malgré un inconvénient de taille, qui est celui du nombre important d'appels aux fonctions de performance $G(\mathbf{X})$ nécessaire, beaucoup l'utilisent dans sa version classique, c'est à dire sans technique de réduction de la variance (Evans, 1975, Nigam et Turner, 1995, Dantan et Qureshi, 2009, Mansuy *et al.*, 2012). Il faut noter que lorsque ces fonctions sont explicites, le temps de calcul reste raisonnable. Mais son utilisation sans technique de réduction de la variance offre peu de perspectives pour l'utilisation de fonctions implicites par exemple. Il est intéressant de noter que dans la grande majorité des cas, aucun indicateur de performance tel qu'un intervalle de confiance (Section 1.3.1) n'accompagne le résultat. C'est un outil indispensable qui permet d'évaluer la précision de l'estimation. Certains auteurs, conscients du coût prohibitif de cette méthode, utilisent des techniques de réduction de la variance, et donc du nombre d'appels aux fonctions $G(\mathbf{X})$ (Skowronski et Turner, 1997). D'autres, pour les mêmes raisons, couplent la méthode de Monte Carlo avec un métamodèle tel que des Surfaces de Réponse Quadratique (SRQ) (Section 1.5.2) (Jeang, 2001, Jansson *et al.*, 2008) ou des réseaux de neurones (Andolfato *et al.*, 2012).

Parmi les méthodes visant à estimer les moments statistiques des fonctions de performance (détaillées en Section 1.4), les méthodes d'intégration numérique par quadrature et de Taguchi (D'Errico et Zaino, 1988) sont intéressantes. Leur utilisation est rapportée par Evans (1975) et Nigam et Turner (1995) dans leur revues bibliographiques mais tendent à disparaitre. Leur efficacité est testée dans une application en Section 2.3.2. D'autres auteurs proposent d'effectuer un développement de Taylor (Section 1.5.1) de $G(\mathbf{X})$ afin d'obtenir analytiquement ses premiers moments. Ce développement peut être réalisé à l'ordre 1 (Evans, 1975, Nigam et Turner, 1995, J.M.Gilbert *et al.*, 2005), à l'ordre 2 comme dans la méthode SOTA (Glancy et Chase, 1999, Stockinger et Meerkamm, 2009) ou bien à l'ordre 5 (Evans, 1975, Nigam et Turner, 1995). A partir des estimations des moments, la deuxième phase consiste à approximer la loi de $G(\mathbf{X})$. Evans (1975) et J.M.Gilbert *et al.* (2005) choisissent d'utiliser la loi de Pearson alors que d'autres lui préfèrent la Loi Lambda Généralisée (Glancy et Chase, 1999, Stockinger et Meerkamm, 2009).

La méthode d'approximation FORM (Section 1.2.1) est quant à elle de plus en plus utilisée (Nigam et Turner, 1995, Swan et Savage, 1998, Du, 2008, Benanzer *et al.*, 2009) car elle permet le calcul de la probabilité de défaillance pour un coût très faible. Yadav *et al.* (2010) par exemple choisissent d'utiliser la méthode SORM pour pouvoir prendre en compte la non-linéarité des fonctions de performance $G(\mathbf{X})$.

La plupart des méthodes fiabilistes utilisées dans le cadre de l'analyse des tolérances pour des mécanismes sans jeu sont confrontées en Section 2.3.2 sur une application académique non-linéaire. Dans la seconde partie de la section, la non-linéarité est artificiellement augmentée en modifiant certains paramètres. Quelques méthodes décrites au Chapitre 1 ne sont pas testées. En voici les raisons :

- Les méthodes de réduction de la variance pour les simulations de Monte Carlo réduisent le nombre d'appels aux fonctions de performance d'un rapport de l'ordre de 10 ou 100. Cela ne change pas radicalement la nature de la méthode qui reste malgré cela coûteuse. De plus, il existe un grand nombre de techniques différentes difficiles à comparer car elles ne peuvent être utilisées que dans certains cas particuliers. Pour ces raisons, le choix a été fait de ne pas mener d'études approfondies de ces méthodes dans ces travaux.
- La méthode SORM apporte un gain négligeable par rapport à la méthode FORM lorsque les fonctions de performance sont quasi-linéaires. Dans le contexte d'analyse des tolérances, la non-linéarité des fonctions (même forte) dans l'intervalle de variation des dimensions (qui est très faible) reste assez limitée. C'est un point crucial qui sera discuté au vue des résultats de la Section 2.3.2.
- La méthode de calcul des moments de $G(\mathbf{X})$ par un développement de Taylor à l'ordre 5 apporte un gain de précision relativement faible pour une complexité considérablement accrue. C'est pourquoi elle n'a pas été retenue.

2.3.2 Application à un exemple non-linéaire

L'objectif de cette application est de confronter les principales méthodes fiabilistes proposées au Chapitre 1 sur une application non-linéaire. La non-linéarité de l'exemple choisi est modérée dans un premier temps puis est accentuée par la modification des paramètres du problème dans un second temps.

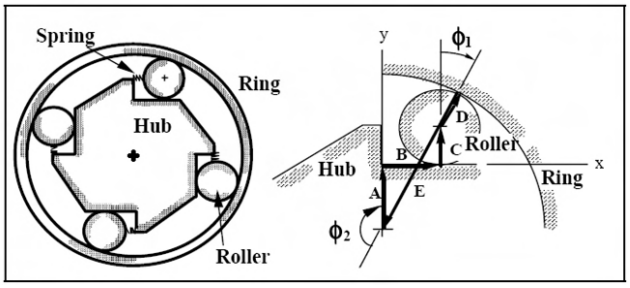


FIGURE 2.6 – Schéma du mécanisme d'embrayage unidirectionnel à billes. La caractéristique fonctionnelle est l'angle Φ_1. L'EF impose $\Phi_1 \in [6.4184^\circ; 7.6184^\circ]$.

Présentation du mécanisme - Paramètres standards. Cet exemple académique (Figure 2.6), issu de la littérature (Glancy et Chase, 1999) est un mécanisme d'embrayage unidirectionnel composé d'un moyeu central, d'une couronne, d'un anneau et de 4 billes accompagnées par 4 ressorts. Il est défini géométriquement par un ensemble de cotes $\mathbf{X} = \{A, C, E\}$. B est une variable intermédiaire et $D = E$. Les données du problème sont rassemblées dans le Tableau 2.5. L'EF impose que l'angle de pression Φ_1 soit compris dans l'intervalle $[6.4184^\circ; 7.6184^\circ]$. L'expression

analytique de la chaîne de cotes est la suivante :

$$\Phi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{A+C}{E-C}\right) \tag{2.23}$$

Variable	Moyenne	Ecart-type	Distribution
A	27.645 mm	0.01666 mm	Gaussienne
C	11.430 mm	0.00333 mm	Gaussienne
E	50.800 mm	0.00416 mm	Gaussienne

Tableau 2.5 – Paramètres standards du problème d'embrayage à billes.

Calcul du TNC. Le Tableau 2.6 présente les 4 premiers moments de la distribution de Φ_1, ainsi que le TNC calculé pour chaque méthode. Le nombre d'appels aux fonctions de performance est aussi donné afin d'estimer l'efficacité des différentes méthodes proposées. Il s'agit du nombre d'évaluations de la chaîne de cotes (ou du modèle numérique associé) nécessaire. Plus il est faible, moins la méthode sera coûteuse et d'autant plus efficace.

Méthode	Moyenne	Ecart-type	Asymétrie	Aplatissement	TNC (ppm)	Nombre d'appels
Monte Carlo	7.015	0.220	-0.094	3.024	6544	10^{10}
Taylor 1er ordre	7.018	0.221	0	3	6660	4
Taguchi	7.015	0.212	-0.091	3.004	4818	27
Intégration numérique	7.015	0.212	-0.136	3.013	4952	19
SOTA	7.015	0.219	-0.093	2.997	6316	19
FORM	/	/	/	/	6543	28

Tableau 2.6 – Résultats de l'application non-linéaire (paramètres standards) : moments statistiques de Φ_1, TNC calculés ainsi que le nombre de calculs associé à chaque méthode.

La méthode de MC est supposée comme étant la référence et permet de donner une estimation du TNC avec un intervalle de confiance à 95% de l'ordre du ppm dans ce cas. Par rapport à cette dernière, les méthodes de Taguchi et d'intégration numérique sont un peu moins précises. La méthode SOTA, comme les méthodes de Taylor au 1er ordre et FORM, donne de bons résultats. L'exemple n'est pas suffisamment non-linéaire dans l'intervalle de variation des dimensions pour perturber le bon comportement de la méthode de Taylor au 1er ordre.

A propos de la méthode FORM, elle n'appelle la fonction Φ_1 que 14 fois pour calculer la probabilité par rapport à la première borne de l'EF, mais calcule la probabilité associée à la seconde borne de manière indépendante, contrairement aux autres méthodes (14+14=28). De plus, elle ne nécessite pas le calcul des moments de Y, ce qui explique les cases vides dans le tableau.

Accentuation de la non-linéarité. Dans cette section, l'exemple précédent est repris en changeant quelques paramètres afin d'augmenter artificiellement la non-linéarité de la chaîne de cotes dans l'intervalle de variation des dimensions. Le but est donc de tester les méthodes de calcul du TNC dans un contexte plus fortement non-linéaire. Pour ce faire, les écarts-types des dimensions ont été multipliés par 5 et l'EF a été modifiée arbitrairement afin de conserver un TNC relativement faible : $\Phi_1 \in [5^\circ; 9^\circ]$.

Méthode	Moyenne	Ecart-type	Asymétrie	Aplatissement	TNC (ppm)	Nombre d'appels
Monte Carlo	6.923	1.158	-0.619	4.055	76919	10^{10}
Taylor 1er ordre	7.018	1.106	0	3	70506	4
Taguchi	6.930	1.111	-0.505	3.304	69038	27
Intégration numérique	6.930	1.113	-0.727	3.390	65883	19
SOTA	6.933	1.103	-0.459	2.928	67477	19
FORM	/	/	/	/	76922	42

Tableau 2.7 – Résultats de l'application non-linéaire (avec accentuation de la non-linéarité) : moments statistiques de Φ_1, TNC calculés ainsi que le nombre de calculs associé à chaque méthode.

Le Tableau 2.7 présente les résultats de l'application dont la non-linéarité a été accentuée. La méthode de MC est de nouveau la référence et associe au TNC estimé un intervalle de confiance à 95% de l'ordre de 10 ppm cette fois. Par rapport à cette dernière, les méthodes de Taguchi, d'intégration numérique et SOTA sont un peu moins performantes que dans l'application précédente. La méthode de Taylor au 1er ordre donne de relativement bons résultats. L'exemple étant plus fortement non-linéaire que le précédent dans l'intervalle de variation des dimensions, il est normal que les résultats des différentes méthodes s'éloignent de la valeur exacte. Cependant la méthode FORM reste très efficace.

De manière générale, les valeurs d'asymétrie et d'aplatissement s'éloignant respectivement de 0 et 3 par rapport à l'application précédente montrent que la résultante de la chaîne de cote ne suit plus une loi Gaussienne. Il s'agit d'une conséquence de l'accentuation de la non-linéarité de la chaîne de cotes.

2.3.3 Synthèse et conclusion

Le Tableau 2.8 synthétise l'efficacité de chaque méthode au vue des résultats présentés dans les Tableaux 2.6 et 2.7. Les remarques principales les concernant y sont aussi répertoriées. Cette application non-linéaire montre que la plupart des méthodes décrites dans ce chapitre donnent des résultats satisfaisants, notamment la méthode FORM qui est particulièrement performante. **Elle sera préférentiellement utilisée dans la suite de ces travaux de thèse pour deux raisons principales.** Premièrement, elle ne nécessite que très peu d'appels aux fonctions de performance. **Deuxièmement, la faible variabilité des dimensions dans leur IT dans le contexte d'analyse des tolérances limite la non-linéarité des fonctions ; ce qui accroît son efficacité.**

Contrairement aux méthodes semi-probabilistes, les méthodes fiabilistes permettent un calcul maitrisé, et pour la majorité d'entre elles économique, du TNC. Elles se révèlent donc particulièrement adaptées aux calculs d'analyse des tolérances dont l'objectif principal est le respect du niveau de qualité d'un mécanisme.

Méthode	**Efficacité (Précision/Temps de calcul)**	**Remarques**
Monte Carlo	- - -	Peut traiter tout type de problème mais très coûteuse en temps de calcul
Taylor 1er ordre	++	Ne peut pas traiter les cas les plus fortement non-linéaires
Taguchi	+	Le nombre d'appels augmente considérablement lorsque $n > 10$
Intégration numérique	+	
SOTA	+	Nécessite la résolution d'un système d'équations non-linéaire
FORM	+++	Nécessite la validation des résultats car certains cas non-linéaires peuvent poser problème

Tableau 2.8 – Tableau de synthèse des méthodes fiabilistes de calcul de TNC. +++ indique une méthode très efficace, contrairement à - - -.

2.4 L'approche APTA pour le calcul du taux de non-conformité

2.4.1 Zone de conformité

Dans le domaine de la grande série en industrie, les pièces sont fabriquées par lots. Un lot de fabrication est considéré conforme au plan de définition, lorsque les indices de capabilité associés aux dimensions $\mathbf{X}$ appartenant à ce lot respectent ses exigences :

$$\mathbf{C_p} \geq \mathbf{C_p^{(e)}} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{C_{pk}} \geq \mathbf{C_{pk}^{(e)}} \tag{2.25}$$

La fabrication par lots engendre une spécificité majeure : **les caractéristiques statistiques (moyenne et écart-type) des dimensions pour chaque lot évoluent en fonction de l'instant de fabrication.** La Figure 2.7 montre un historique de fabrication d'une dimension provenant de 10 lots dont les bornes sont $[9,9; 10,1]$. L'évolution de leurs caractéristiques statistiques est clairement visible.

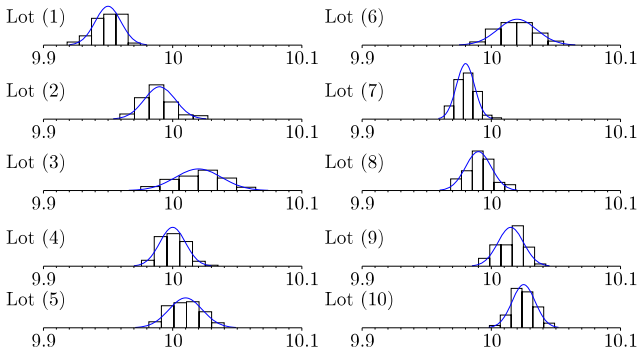


FIGURE 2.7 – Représentation statistique de 10 lots d'une même cote de valeur nominale $T_i = 10$ et d'intervalle de tolérance $t_i = 0.2$.

Les conditions de conformité exprimées par les Equations 2.24 et 2.25 permettent de délimiter une zone de conformité Z_{ci} associée à chaque dimension X_i dans l'espace (δ_i, σ_i) (voir Figure 2.8). **Il est important de noter qu'il existe autant de zones de conformité que de dimensions.** L'écart-type σ_i appartient à l'intervalle $\left[\sigma_i^{(\min)}; \sigma_i^{(\max)}\right]$. L'écart-type minimal $\sigma_i^{(\min)}$ n'est évidemment pas égal à 0, valeur inatteignable. Il est fonction du process de fabrication utilisé. Il se calcule de la façon suivante :

$$\sigma_i^{(\min)} = \frac{t_i}{6C_{pi}^{(\max)}} \tag{2.26}$$

où $C_{pi}^{(\max)}$ est le niveau maximal de capabilité que le process utilisé peut atteindre dans des conditions optimales de fabrication. En conséquence, une zone inatteignable est définie, contenant les écarts-types allant de 0 à $\sigma_i^{(\min)}$. De même, l'écart-type

maximal $\sigma_i^{(\max)}$ est limité par l'indice de capabilité maximal $C_{pi}^{(e)}$ et :

$$\sigma_i^{(\max)} = \frac{t_i}{6C_{pi}^{(e)}} \tag{2.27}$$

Le décalage de moyenne varie entre $-\delta_i^{(\max)}$ et $\delta_i^{(\max)}$, $\delta_i^{(\max)}$ étant le décalage de moyenne maximal et est obtenu lorsque $\sigma_i = \sigma_i^{(\min)}$. En utilisant la relation 2.5, il vient :

$$\delta_i^{(\max)} = \frac{t_i}{2}\left(1 - \frac{C_{pki}^{(e)}}{C_{pi}^{(\max)}}\right) \tag{2.28}$$

Finalement, la zone Z_{ci} est triangulaire. Si $C_{pi}^{(e)} = C_{pki}^{(e)}$, elle devient trapézoïdale, comme le montre la Figure 2.8.

Les différents lots de la Figure 2.7 ont été positionnés par un rond numéroté sur la zone de conformité en Figure 2.8. Comme tous les lots sont conformes, ils sont tous positionnés à l'intérieur de cette zone.

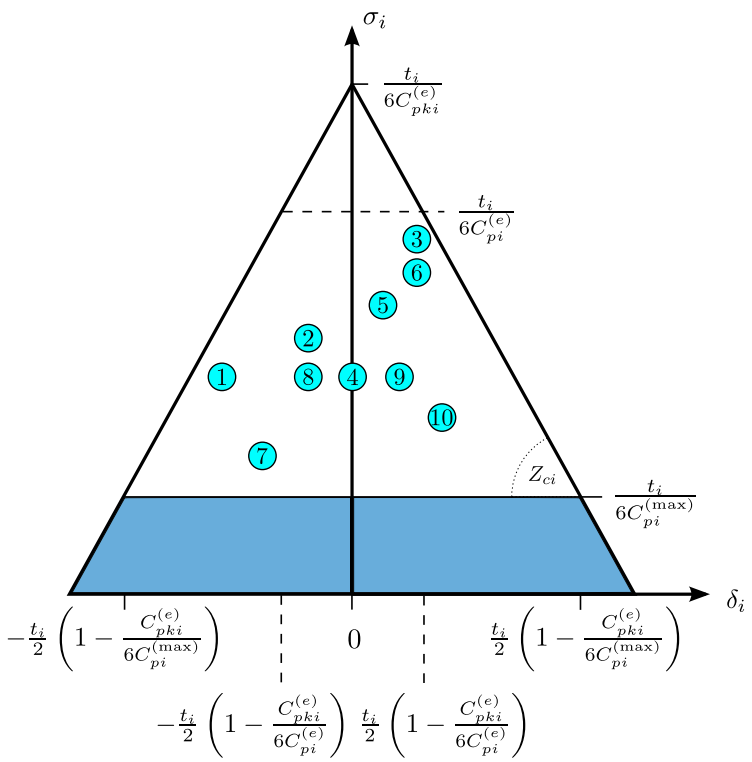


FIGURE 2.8 – Représentation de la zone de conformité Z_{ci} de la dimensions X_i dans l'espace (δ_i, σ_i) (en blanc). La zone bleue représente la zone inatteignable (écart-type trop faible). Chaque rond numéroté représente un lot de pièces de la Figure 2.7. Ils sont tous conformes donc tous dans Z_{ci}.

2.4.2 Intérêt de l'approche APTA

Le TNC conditionnel, ou ponctuel, associé à un lot de pièces dépend de la modélisation probabiliste des dimensions $\mathbf{X}$. Plus précisément, il dépend des écarts-types $\boldsymbol{\sigma}$ et des décalages de moyennes $\boldsymbol{\delta}$. Il est noté de la manière suivante :

$$\text{TNC} = \text{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}) \tag{2.29}$$

Dès lors que les n couples (δ_i, σ_i) sont connus, il est possible de calculer $\text{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma})$. N'importe quelle méthode détaillée au Chapitre 1 peut être utilisée pour calculer le TNC ponctuel. De nombreux auteurs comme par exemple Evans (1975), Graves et Bisgaard (2000) relèvent le fait que l'évolution de ces paramètres, en particulier les décalages de moyenne, influencent de manière considérable ce TNC. Pourtant, la grande majorité des études publiées dans la littérature modélisent les dimensions par des lois aléatoires de moyennes centrées sur leur valeur nominale et d'écart-type maximal, sans prendre en compte de décalages de moyenne.

Une application simple permet de se rendre compte de l'influence des caractéristiques statistiques des dimensions, c'est à dire de la position du lot dans les différentes zones de conformité Z_{ci}, pour le calcul du TNC conditionnel. La chaîne de cotes étudiée est :

$$Y = X_1 + X_2 \tag{2.30}$$

Les exigences de fabrication des cotes ont été déterminées arbitrairement : $T_1 = 6$, $T_2 = 4$, $t_1 = t_2 = 0.59$. Les exigences de capabilité sont : $\mathbf{C_p^{(e)}} = \mathbf{C_{pk}^{(e)}} = \{1, 1\}$. Enfin, l'EF impose que Y appartienne à l'intervalle $[9.5; 10.5]$. Plusieurs modélisations des dimensions sont envisagées, identiques pour X_1 et X_2. Comme deux dimensions sont impliquées, deux zones de conformité existent (Z_{c1} et Z_{c2}). Cependant, comme les modélisations sont identiques pour les deux dimensions, la représentation d'une seule zone de conformité est nécessaire. La Figure 2.9 montre le positionnement de cinq lots de dimension X_i sur la zone de conformité Z_{ci}. Chaque lot est représenté par un rond numéroté et accompagné par un schéma de la modélisation Gaussienne associée à la dimension X_i ainsi que par le TNC conditionnel calculé à partir du lot de pièces en question. Il est intéressant de remarquer que plus le décalage de moyenne est important, plus le TNC est grand, alors même que l'écart-type diminue. Le TNC le plus élevé se retrouve quasi-systématiquement lorsque chaque moyenne est décentrée au maximum, dans un sens particulier définissant la pire combinaison des décalages de moyenne du point de vue du TNC. Il s'agit néanmoins d'un cas de modélisation très pessimiste et peu probable. De même, les cas de modélisations centrés sont peu probables et quant à eux très optimistes, d'autant plus lorsque l'écart-type diminue. D'une manière générale, le TNC conditionnel, calculé pour différents lots conformes, a une très grande variabilité en fonction des paramètres de modélisation des dimensions.

Le TNC ponctuel évolue en fonction de l'instant de fabrication, mais qu'en est-il du TNC sur le long terme ? Un exemple très simple est proposé afin de répondre à cette question. Le Tableau 2.9 répertorie les TNC ponctuels de 10 lots de 100

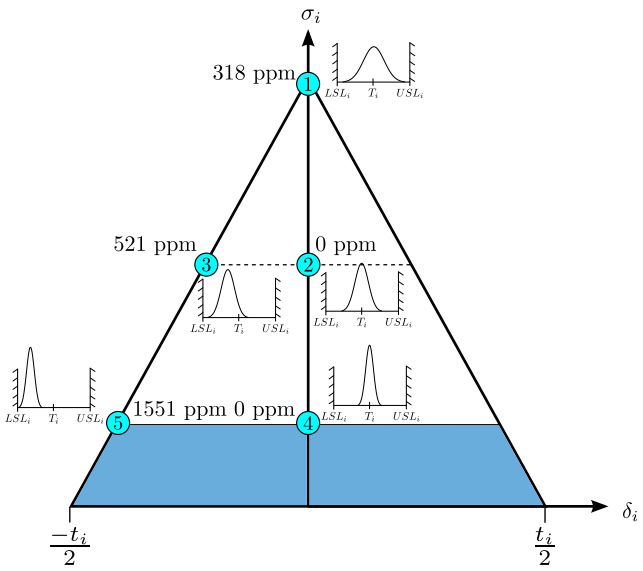


FIGURE 2.9 – Représentation de la zone de conformité Z_{ci} de la dimension X_i dans l'espace (δ_i, σ_i) (identiques pour $i = 1$ et $i = 2$). Cinq ronds numérotés représentent cinq lots de pièces particuliers. Pour chaque lot, un schéma de la loi Gaussienne associée à la dimension X_i est proposé ainsi que son TNC conditionnel. Les résultats sont symétriques par rapport à l'axe vertical.

pièces, respectant tous les exigences de fabrication. L'objectif qualité est fixé à 3000 ppm, soit 3 pièces non-conformes sur la production entière. Il s'avère que trois lots dépassent ponctuellement le TNC limite de 3000 ppm. Cependant, par un effet de moyennisation, la production totale est conforme aux objectifs qualité imposés car il y a moins de 3 pièces non-conformes sur la production totale.

Numéro de lot	**TNC ponctuel (ppm)**	**Nombre de pièces non-conformes**
1	200	0.02
2	1 000	0.1
3	100	0.01
4	5 000	0.5
5	100	0.01
6	300	0.03
7	10 000	1
8	2 000	0.2
9	5 000	0.5
10	100	0.01
	Total	2.93

Tableau 2.9 – Illustration de la nécessité de calculer le TNC sur le long terme par un exemple très simple. Quatre lots dépassent ponctuellement le TNC limite de 3000 ppm alors que moins de trois pièces (2.93) sont défectueuses en fin de production.

Il apparaît alors indispensable de modéliser précisément les caractéristiques probabilistes des dimensions $(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma})$ afin notamment de calculer le TNC sur le long terme, appelé TNC dynamique. C'est l'objectif de l'approche APTA (Advanced Probability-based Tolerance Analysis of products) (Gayton *et al.*, 2011a). Comme Leung (2009) le suggère, ces caractéristiques sont modélisées par des lois de probabilité. **Ainsi, les dimensions sont modélisées par des variables aléatoires, dont les caractéristiques (moyennes et écarts-types) sont elles-mêmes modélisées par d'autres variables aléatoires.**

L'expression mathématique du TNC dynamique est détaillée en Section 2.4.3. Plusieurs hypothèses de modélisations des paramètres $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$ sont ensuite proposées en Section 2.4.4. La méthode de calcul numérique, qui est spécifique pour l'approche APTA, est introduite en Section 2.4.5. L'illustration proposée dans cette section est reprise de manière plus complète en Section 2.4.6. Enfin, la méthode est appliquée sur trois cas d'études académiques et CAO en Section 2.4.7.

2.4.3 Expression mathématique de l'approche APTA

L'approche APTA permet de prendre en compte la variabilité des caractéristiques statistiques $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$ des dimensions pour l'évaluation du TNC. Ces paramètres sont modélisés par des variables aléatoires.

Soit 3 évènements :

- A : L'EF n'est pas respectée.
- B_i : Le décalage de moyenne d'une dimension X_i est compris dans l'intervalle $[\delta_i; \delta_i + \mathrm{d}\delta_i]$ et son écart-type est compris dans l'intervalle $[\sigma_i; \sigma_i + \mathrm{d}\sigma_i]$.
- B : L'évènement B est constitué de l'intersection des évènements B_i sur l'ensemble des dimensions constituantes de la chaîne de cotes. $B = \cap_{i=1}^{n} B_i$

Les expressions des probabilités des évènements B_i et B s'expriment de la façon suivante si les dimensions sont indépendantes entre elles :

$$\mathrm{Prob}(B_i) = h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i, \sigma_i) d\delta_i d\sigma_i \tag{2.31}$$

$$\mathrm{Prob}(B) = \prod_{i=1}^{n} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i, \sigma_i) d\boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.32}$$

où $h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i, \sigma_i)$ représente la densité conjointe de probabilité de δ_i, σ_i. Sachant les paramètres $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$, la probabilité de non respect de l'EF s'exprime comme un TNC conditionnel :

$$\mathrm{Prob}(A|B) = \mathrm{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}) \tag{2.33}$$

Alors, grâce au théorème de Bayes, il est possible d'exprimer la probabilité suivante :

$$\mathrm{Prob}(A \cap B) = \mathrm{Prob}(A|B)\mathrm{Prob}(B) \tag{2.34}$$

$$= \mathrm{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}) \prod_{i=1}^{n} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i, \sigma_i) d\boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.35}$$

Enfin, en parcourant la zone de conformité totale Z_{ct}, définie comme l'union des zones de conformité Z_{ci} ($i = 1$ à n), le TNC dynamique, au sens de l'approche APTA, est obtenu par l'expression suivante :

$$\mathrm{TNC}_{\mathrm{APTA}} = \int_{Z_{ct}} \mathrm{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}) \prod_{i=1}^{n} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i,\sigma_i) d\boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.36}$$

Il faut noter que cette expression est bornée ainsi :

$$\mathrm{TNC}_{\mathrm{APTA}} \leq \mathrm{TNC}^{(\max)} = \max_{Z_{ct}} \left(\mathrm{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma})\right) \tag{2.37}$$

Sachant que la difficulté majeure réside dans la connaissance de la densité conjointe $h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i,\sigma_i)$, il peut être intéressant de calculer cette borne supérieure $\mathrm{TNC}^{(\max)}$, appelée TNC au pire des cas statistiques. Elle peut être obtenue à partir des caractéristiques probabilistes $(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma})$ les plus pénalisantes. Par expérience, le TNC au pire des cas statistique est calculé lorsque l'écart-type est minimal et le décalage de moyenne est maximal. Comme la moyenne peut être décalée dans un sens ou dans l'autre, il faut en plus choisir judicieusement le sens de décalage de chaque moyenne intervenant dans la chaîne de cotes afin d'obtenir le pire des cas. Pour cela, un calcul du gradient de la fonction f est réalisé aux valeurs nominales $\mathbf{T}$.

2.4.4 Hypothèses pour les caractéristiques des lots des pièces

La densité conjointe h_{δ_i,σ_i} relative à la dimension X_i peut prendre plusieurs formes en fonction du processus de fabrication utilisé. Cinq modélisations inspirées de Leung (2009) sont proposées dans cette section :

- Cas 1 : processus parfaitement stable avec décalage de moyenne et écart-type constants $\delta_i = k_1, \sigma_i = k_2$, équivalent à une approche conditionnelle déjà illustrée en Figures 2.8 et 2.9 :

$$\begin{aligned} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i,\sigma_i) &= +\infty \text{ si } \delta_i = k_1 \text{ et } \sigma_i = k_2 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \tag{2.38}$$

- Cas 2 : processus avec écart-type constant σ_i et décalage de moyenne variant uniformément entre les bornes admissibles (Figure 2.10) :

$$\begin{aligned} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i) &= \frac{1}{2\delta_i^{(\max)}(k)} \text{ si } \delta_i \in \left[-\delta_i^{(\max)}(k); \delta_i^{(\max)}(k)\right] \text{ et } \sigma_i = k \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \tag{2.39}$$

avec

$$\delta_i^{(\max)}(k) = \frac{t_i}{2} - 3C_{pki}^{(e)} k \tag{2.40}$$

Ce cas de modélisation permet de représenter le phénomène d'usure d'outil par exemple. L'utilisation de la loi uniforme implique qu'il y a autant de

chances d'obtenir une dimension décentrée au maximum qu'une dimension parfaitement centrée.

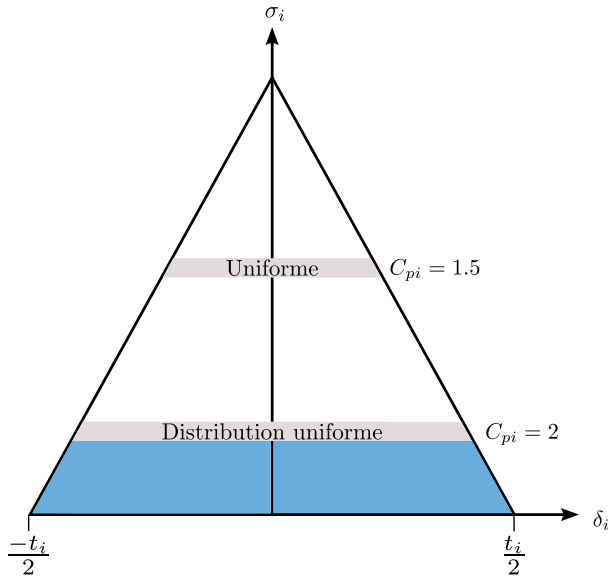


FIGURE 2.10 – Représentation de deux densités de probabilité (pour deux valeurs de capabilité) de la dimension X_i sur Z_{ci} pour le cas 2. L'écart-type est constant $\left(\text{égal à } \frac{t_i}{6C_{pi}}\right)$ et le décalage de moyenne est distribué uniformément.

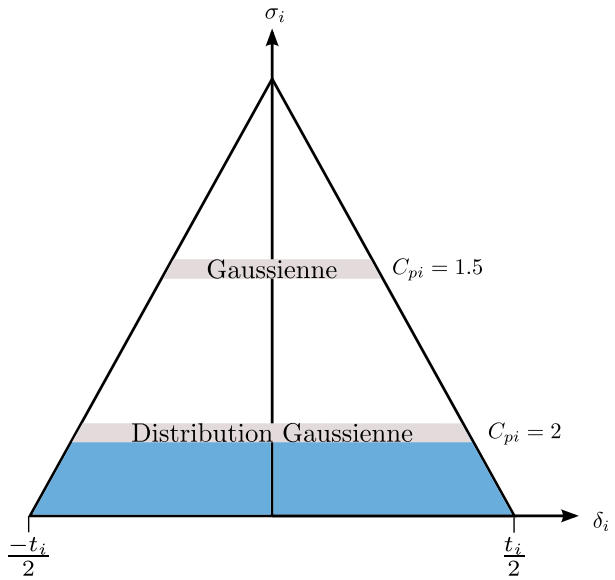


FIGURE 2.11 – Représentation de deux densités de probabilité (pour deux valeurs de capabilité) de la dimension X_i sur Z_{ci} pour le cas 3. L'écart-type est constant $\left(\text{égal à } \frac{t_i}{6C_{pi}}\right)$ et le décalage de moyenne est Gaussien (tronqué).

- Cas 3 : processus avec écart-type constant σ_i et décalage de moyenne variant selon une loi Gaussienne tronquée (Figure 2.11) :

$$\begin{aligned} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i) &= \frac{R}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta}}\exp\left(-\frac{\delta_i^2}{2\sigma_\delta^2}\right) \text{ si } \delta_i \in \left[-\delta_i^{(\max)}(k); \delta_i^{(\max)}(k)\right] \text{ et } \sigma_i = k \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \tag{2.41}$$

σ_δ est l'écart-type de la loi gaussienne tronquée que suit δ_i. Le paramètre R est calculé afin que l'intégrale de $h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i)$ sur $\mathbb{R}$ soit égale à 1. L'utilisation de la loi Gaussienne implique qu'il y a plus de chances d'obtenir une dimension centrée qu'une dimension décentrée.

- Cas 4 : processus dont les caractéristiques δ_i, σ_i sont réparties uniformément sur la zone de conformité (Figure 2.12) :

$$\begin{aligned} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i,\sigma_i) &= \frac{1}{\left[\delta_i^{(\max)}\left(\sigma_i^{(\min)}\right) + \delta_i^{(\max)}\left(\sigma_i^{(\max)}\right)\right]\left[\sigma_i^{(\max)} - \sigma_i^{(\min)}\right]} \\ &\quad \text{si } \delta_i \in \left[-\delta_i^{(\max)}(\sigma_i); \delta_i^{(\max)}(\sigma_i)\right] \text{ et } \sigma_i \in \left[\sigma_i^{(\min)}; \sigma_i^{(\max)}\right] \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned} \tag{2.42}$$

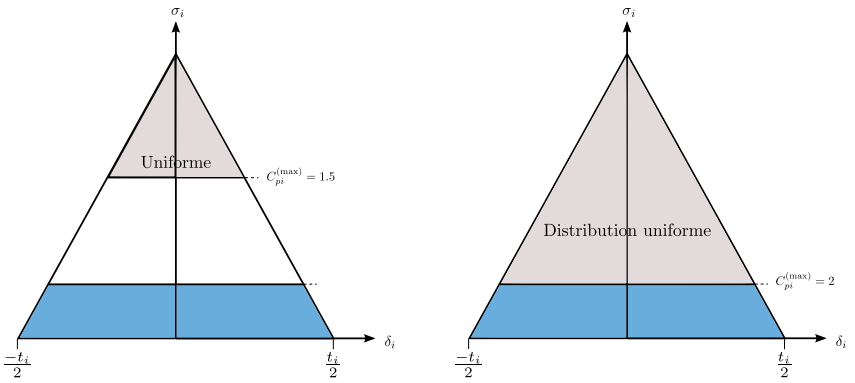


FIGURE 2.12 – Représentation de deux densités de probabilité (pour deux valeurs de capabilité maximale) de la dimension X_i sur Z_{ci} pour le cas 4. L'écart-type ainsi que le décalage de moyenne sont uniformément distribués.

- Cas 5 : processus dont les caractéristiques δ_i, σ_i suivent chacune une loi gaussienne tronquée sur la zone de conformité (Figure 2.13) :

$$\begin{aligned} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i,\sigma_i) &= \frac{R}{\sqrt{2\pi\sigma_\sigma\sigma_\delta}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_i - m_\sigma}{\sigma_\sigma}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_i - m_\delta}{\sigma_\delta}\right)^2\right) \\ &\quad \text{si } \delta_i \in \left[-\delta_i^{(\max)}(\sigma_i); \delta_i^{(\max)}(\sigma_i)\right] \text{ et } \sigma_i \in \left[\sigma_i^{(\min)}; \sigma_i^{(\max)}\right] \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \tag{2.43}$$

Le paramètre R est calculé afin que l'intégrale de $h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i, \sigma_i)$ sur $\mathbb{R}^2$ soit égale à 1. La Figure 2.14 représente en 3 dimensions la densité conjointe $h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i, \sigma_i)$ pour le cas 5.

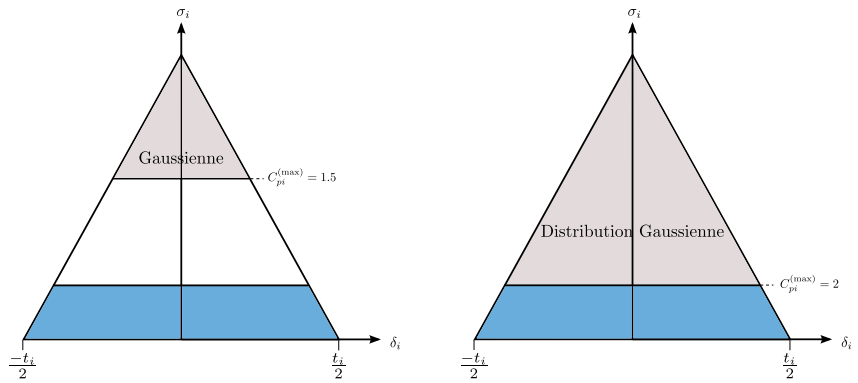


FIGURE 2.13 – Représentation de deux densités de probabilité (pour deux valeurs de capabilité maximale) de la dimension X_i sur Z_{ci} pour le cas 5. L'écart-type ainsi que le décalage de moyenne sont Gaussiens (tronqués).

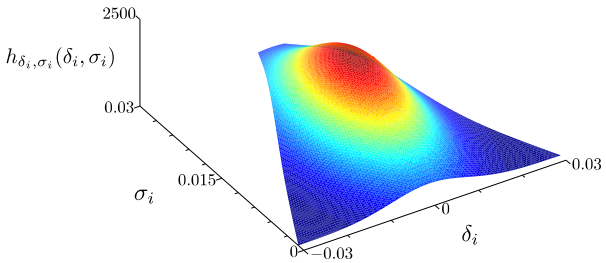


FIGURE 2.14 – Représentation de la densité de probabilité de la dimension X_i sur Z_{ci} en 3 dimensions pour le cas 5. L'écart-type ainsi que le décalage de moyenne sont Gaussiens (tronqués).

Ces cinq cas ne sont que des exemples de densités conjointes des variables $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$. Il est possible d'envisager d'autres types de densités de probabilité multimodales afin de prendre en compte des moules multi-empreintes ou plusieurs fournisseurs pour une même pièce. Par exemple, sur la figure 2.15, le fournisseur A (distribution plus étendue et moins haute), produit des pièces avec plus de dispersion des moyennes et des écarts-types alors qu'un fournisseur B produit des pièces avec une dispersion moindre. Il est alors possible de déterminer l'influence du fournisseur sur la qualité des pièces fabriquées, donc des mécanismes assemblés. Finalement, chacune des n

densités conjointes peut être spécifique, caractérisant un processus de fabrication et un fournisseur distinct.

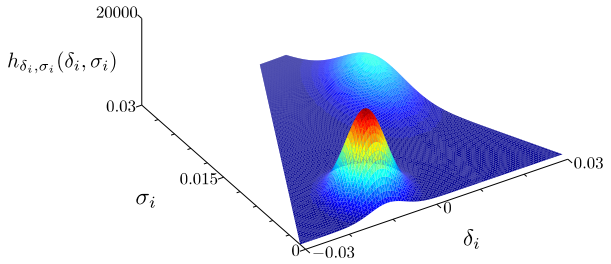


FIGURE 2.15 – Représentation de la densité de probabilité de la dimension X_i sur Z_{ci} en 3 dimensions. Chaque bosse représente un lot de pièces produit par un fournisseur différent.

Remarque : Les zones de conformité peuvent aussi être délimitées grâce aux indices de capabilité inertiels. La zone triangulaire ou trapézoïdale serait remplacée par une zone circulaire. La Figure 2.16 représente cette zone sous forme ellipsoïdale car l'échelle des axes est différente. Pour utiliser l'approche APTA avec la méthode de spécification inertielle, il suffit de modéliser une densité de probabilité conjointe couvrant la zone de conformité inertielle. A partir de celle-ci, toutes les méthodes de calcul de TNC présentées dans cette thèse restent valables. Pour rappel, l'indice inertiel est définie de la manière suivante :

$$I_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \delta_i^2} \tag{2.44}$$

La Figure 2.16 représente aussi les TNC ponctuels associés aux lots définis dans l'application simple et proposée en Section 2.4.2. Elle montre notamment que le lot 5, qui cause le TNC le plus important, est non-conforme vis-à-vis de l'exigence inertielle spécifiée $\left(I_i \leq I_i^{(e)}\right)$. En effet, la définition de cette exigence à partir d'une somme quadratique des écarts-types et décalages de moyenne permet d'exclure les coins inférieurs de la zone de conformité classique. Il semble, comme relevé en Section 2.4.3 et illustré sur la Figure 2.16, que l'acceptation de lots situés dans ces zones conduise aux TNC les plus élevés. En particulier, le lot 5 serait accepté d'après les exigences de capabilité alors qu'il pourrait être judicieux de le rejeter selon les exigences inertielles. En ce sens, la méthode de spécification inertielle est intéressante (Gayton *et al.*, 2011b).

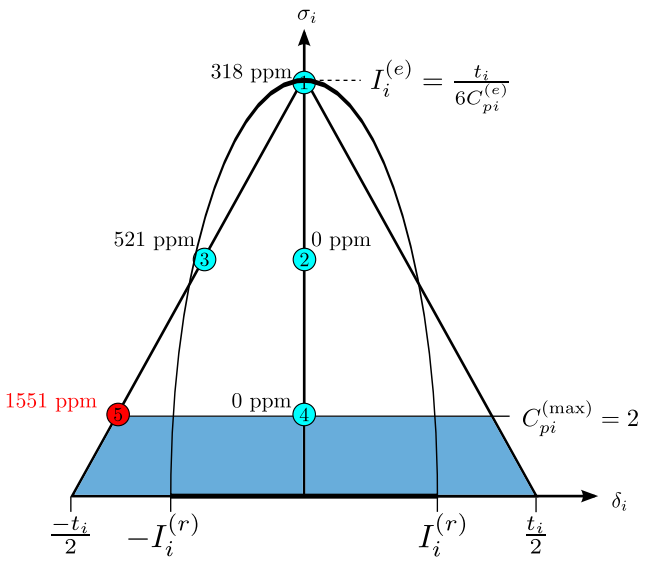


FIGURE 2.16 – Représentation des zones de conformité classique (triangle) et inertielle (demi-ellipse). Le lot 5 est non-conforme vis-à-vis de l'exigence inertielle spécifiée $\left(I_i \leq I_i^{(e)}\right)$.

2.4.5 Calcul numérique du TNC

Le calcul du TNC par l'approche APTA fait appel à une intégrale en dimensions $2n$. Plusieurs méthodes existent pour son estimation. Les méthodes d'intégration numérique classiques ont rapidement été écartées car, n pouvant être très grand, le coût de calcul augmente considérablement. La méthode de Monte Carlo semble de loin apporter le meilleur compromis entre précision de l'estimation et temps de calcul, et a donc été choisie. N_{sim} tirages aléatoires des décalages de moyennes et écarts-types sont effectués selon les lois de densité conjointes h_{δ_i,σ_i}, $i = 1$ à n. D'après les expressions détaillées en Sections 1.3.1 et 2.4.3, le TNC peut se calculer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TNC}_{\mathrm{APTA}} &= \int_{Z_{ct}} \mathrm{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}) \prod_{i=1}^{n} h_{\delta_i,\sigma_i}(\delta_i,\sigma_i) d\boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{\sigma} && (2.45)\\
&= \mathrm{E}\left[\mathrm{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma})\right] && (2.46)\\
&\approx \tilde{\mathrm{TNC}}_{\mathrm{APTA}} = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{k=1}^{N_{sim}} \mathrm{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\delta}^{(k)},\boldsymbol{\sigma}^{(k)}\right) && (2.47)
\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\delta}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)}$ représentent les $k^{\text{ème}}$ (parmi les N_{sim}) vecteurs des décalages de moyenne et des écarts-types simulés selon leurs densités de probabilités respectives. En pratique, le TNC conditionnel est calculé N_{sim} fois par n'importe quelle méthode de la Section 2.3.1. Un intervalle de confiance à 95% encadrant $\mathrm{TNC}_{\mathrm{APTA}}$ (avec une incertitude de 5%) est calculé afin d'ajuster la valeur de N_{sim} pour obtenir la précision

souhaitée sur son estimation $\tilde{\text{TNC}}_{\text{APTA}}$:

$$\tilde{\text{TNC}}_{\text{APTA}} - 1.96\frac{\sigma_{\text{TNC}}}{\sqrt{N_{sim}}} \lesssim \text{TNC}_{\text{APTA}} \lesssim \tilde{\text{TNC}}_{\text{APTA}} + 1.96\frac{\sigma_{\text{TNC}}}{\sqrt{N_{sim}}} \tag{2.48}$$

où σ_{TNC} est l'écart-type de $\tilde{\text{TNC}}_{\text{APTA}}$ et son expression est la suivante :

$$\sigma_{\text{TNC}} \approx \sqrt{\frac{\tilde{\text{TNC}}_{\text{APTA}}(1 - \tilde{\text{TNC}}_{\text{APTA}})}{N_{sim}}} \tag{2.49}$$

L'inconvénient de cette méthode est son coût de calcul numérique comme cela a déjà été souligné plusieurs fois. La méthode de Monte Carlo, bien qu'étant une méthode d'intégration très efficace, nécessite l'évaluation de la fonction d'intérêt (la fonction de performance pour un calcul de probabilité ou le TNC conditionnel dans le cas présent) N_{sim} fois, N_{sim} étant souvent très grand. Pour rendre cette méthode utilisable à moindre coût, il faut nécessairement que la méthode de calcul du TNC conditionnel soit la plus efficace possible. La Section 2.3.3 relève que ce sont les méthodes de linéarisation de Taylor au premier ordre ainsi que FORM qui le sont (voir Tableau 2.8). C'est pourquoi elles ont été choisies préférentiellement pour les applications présentées en Section 2.4.7.

Cette méthode permet aussi, sans calcul supplémentaire, de relever la proportion de TNC ponctuels supérieurs à une certaine valeur (par exemple 10 ppm). Les industriels sont fortement intéressés par cette mesure leur indiquant le risque d'obtenir des lots ponctuellement de mauvaise qualité. En pratique, pour $k = 1$ à N_{sim}, l'indicateur I_p est défini de la manière suivante :

$$I_p^{(k)} = \begin{cases} 1 \text{ si } \text{TNC}_{|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\delta}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)}\right) \geq 10\text{ppm} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.50}$$

Finalement, la probabilité d'obtenir des TNC ponctuellement supérieurs à 10 ppm se calcule grâce à l'espérance mathématique de $\mathbf{I_p}$:

$$P_{10} = \text{E}[\mathbf{I_p}] \tag{2.51}$$

2.4.6 Illustration de l'approche APTA sur un exemple linéaire

Dans cette section, l'approche APTA est illustrée sur un exemple très simple, celui présenté en Section 2.4.2. L'objectif est de se rendre compte de l'influence de la modélisation des variables $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$. Pour rappel, la chaîne de cotes étudiée est :

$$Y = X_1 + X_2 \tag{2.52}$$

Les exigences de fabrication des cotes ont été déterminées arbitrairement : $T_1 = 6$, $T_2 = 4$, $t_1 = t_2 = 0.59$. Les exigences de capabilité sont : $\mathbf{C_p^{(e)}} = \mathbf{C_{pk}^{(e)}} = \{1, 1\}$. Enfin, l'EF impose que Y appartienne à l'intervalle $[9.5; 10.5]$.

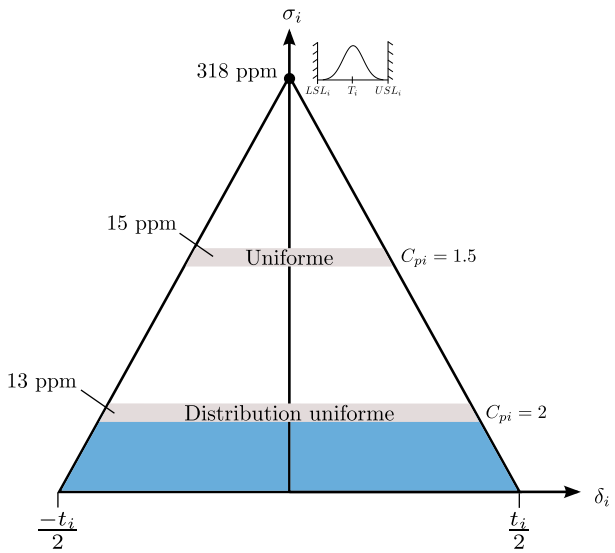


FIGURE 2.17 – Représentation des résultats de l'application linéaire sur une des zones de conformité Z_{ci} (les deux étant identiques). Un TNC conditionnel (pas de décalage de moyenne, écart-type maximal), accompagné par le schéma de modélisation du lot considéré, ainsi que deux TNC dynamiques selon le cas 2 APTA de la Section 2.4.4 sont calculés. Dans le cas dynamique, l'écart-type est constant $\left(\text{égal à } \frac{t_i}{6C_{pi}}\right)$ et le décalage de moyenne est uniforme.

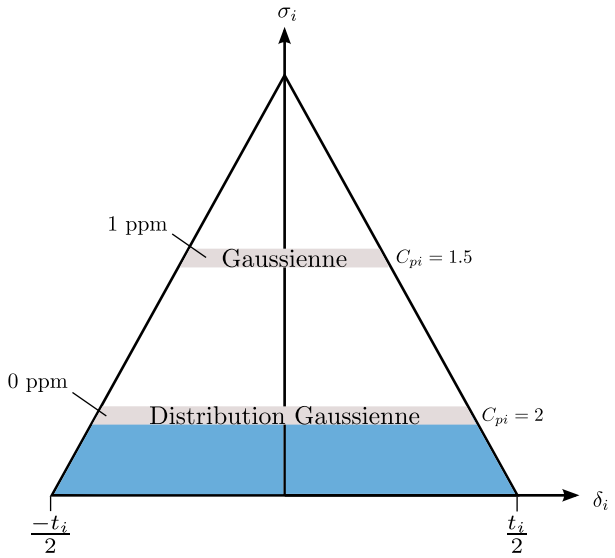


FIGURE 2.18 – Représentation des résultats de l'application linéaire sur une des zones de conformité Z_{ci} (les deux étant identiques). Deux TNC dynamiques selon le cas 3 APTA de la Section 2.4.4 sont calculés. L'écart-type est constant $\left(\text{égal à } \frac{t_i}{6C_{pi}}\right)$ et le décalage de moyenne est Gaussien (tronqué).

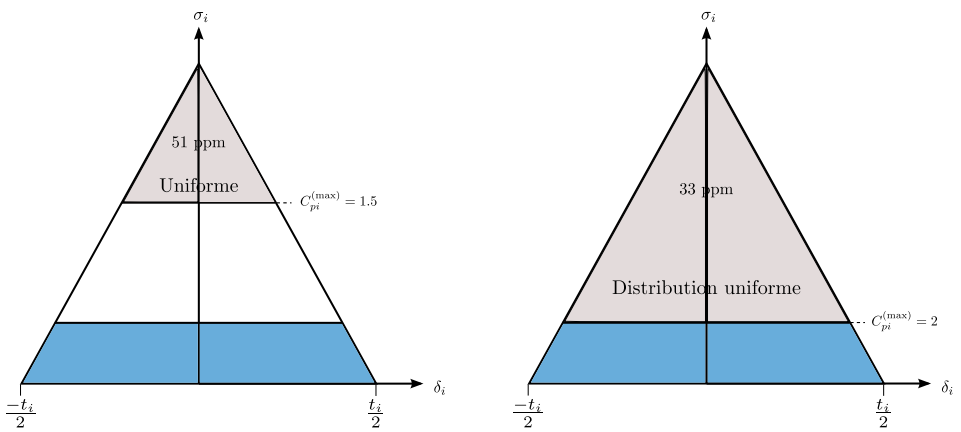


FIGURE 2.19 – Représentation des résultats de l'application linéaire sur une des zones de conformité Z_{ci} (les deux étant identiques). Deux TNC dynamiques selon le cas 4 APTA de la Section 2.4.4 sont calculés. L'écart-type, ainsi que le décalage de moyenne sont distribués uniformément.

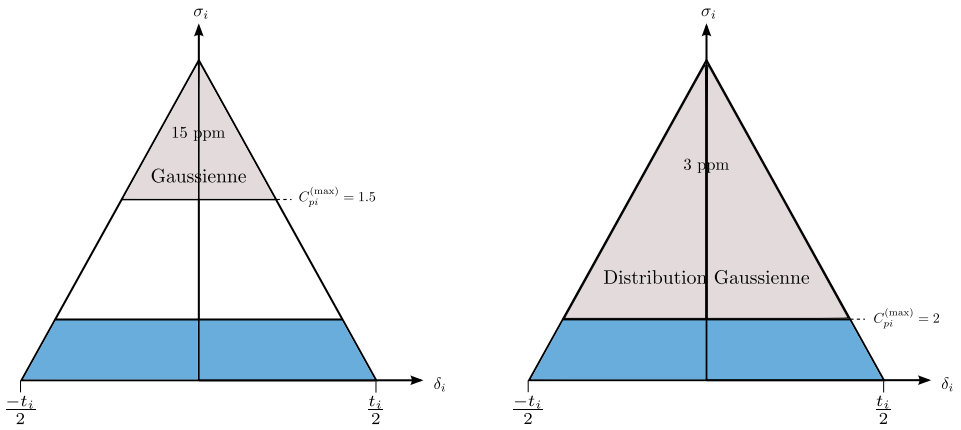


FIGURE 2.20 – Représentation des résultats de l'application linéaire sur une des zones de conformité Z_{ci} (les deux étant identiques). Deux TNC dynamiques selon le cas 5 APTA de la Section 2.4.4 sont calculés. L'écart-type, ainsi que le décalage de moyenne suivent une distribution Gaussienne tronquée.

Les figures 2.9, 2.17, 2.18, 2.19 et 2.20 représentent les TNC ponctuels et dynamiques obtenus respectivement pour les cas de modélisations 1 à 5 présentés en Section 2.4.4. Ces résultats montrent que pour une même conception, et pour différents lots de pièces (ou ensembles de lots) conformes, les valeurs de TNC APTA sont très variables. Notamment, la modélisation la plus courante dans la littérature (Ecart-type maximal sans décalage de moyenne) conduit à un TNC de 318 ppm et le pire des cas statistiques à 1551 ppm. Parallèlement, les modélisations prenant en compte l'évolution des écarts-types et des décalages de moyenne (cas 2 à 5) conduisent à des TNC allant de 0 à 51 ppm. Si l'exigence de qualité au long terme du mécanisme étudié était de 50 ppm, des calculs de TNC ponctuels pour-

raient conduire à une redéfinition de la conception alors qu'une modélisation plus fine permettrait de la valider. Cela démontre l'importance de la modélisation probabiliste des variables $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$ et justifie l'utilisation de la méthode APTA par rapport aux méthodes ponctuelles classiques.

2.4.7 Applications industrielles et CAO

Deux applications industrielles et une application académique utilisant une modélisation par logiciel CAO sont présentées dans cette section. Pour chacune, deux types de modélisation sont proposées : le pire des cas statistique qui permet d'obtenir la borne supérieure du TNC, ainsi que le cas APTA numéro 4 décrit en Section 2.4.4. Ces deux TNC nécessitent le calcul de TNC conditionnels comme le montre l'Equation 2.47. Ils sont effectués grâce à la méthode FORM pour les applications industrielles dont les chaînes de cotes sont explicites. Pour l'application CAO, le calcul du TNC dynamique nécessite le calcul d'un grand nombre de TNC conditionnels. Comme la chaîne de cotes est implicite et nécessite l'appel relativement long à un module CAO, l'utilisation de la méthode FORM impliquerait un temps de calcul trop important. En remplacement, les TNC conditionnels sont calculé analytiquement (voir Section 1.4.1) à partir de la chaîne de cotes linéarisée grâce à un développement de Taylor. Pour chaque application, un graphique montre l'évolution du TNC pour chaque modélisation en fonction de la sévérité de l'EF.

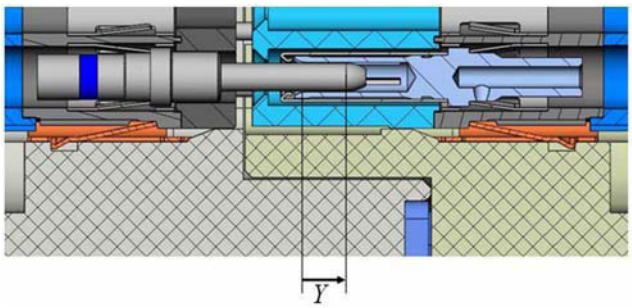


FIGURE 2.21 – Schéma d'une fiche électrique conçue et commercialisée par la société RADIALL. La caractéristique fonctionnelle est la longueur de pénétration Y.

2.4.7.1 Recouvrement de contact RADIALL

Présentation du mécanisme. La société RADIALL conçoit et commercialise des connectiques pour l'aéronautique. La Figure 2.21 représente un de ses produits : une fiche électrique métallique. Pour cette application, l'étude porte sur le recouvrement de la fiche dans son logement. L'EF impose, pour assurer un contact électrique suffisant, que la longueur de pénétration de la fiche Y soit supérieure à un certain seuil S. Le recouvrement de contact est caractérisé par une chaîne de cotes linéaire

constituée de 17 cotes :

$$\begin{aligned} Y &= -X_1 + X_2 + X_3 - X_4 - X_5 + X_6 + X_7 - X_8 \\ &- X_9 + X_{10} + X_{11} - X_{12} - X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} - X_{17} \end{aligned} \tag{2.53}$$

Les exigences de fabrication sont répertoriées dans le Tableau 2.10.

X	**T**	**t**	$\mathbf{C_p^{(e)} = C_{pk}^{(e)}}$	$\mathbf{C_p^{(max)}}$
X_1	0.75	0.2	1.8	2.6
X_2	10.71	0.16	1.8	2.6
X_3	3.75	0.1	1.8	2.6
X_4	5.125	0.05	Loi uniforme	
X_5	3.125	0.05	Loi uniforme	
X_6	4.505	0.03	1.7	1.94
X_7	5.985	0.09	1.8	2.8
X_8	21.535	0.11	0.38	1.32
X_9	8.195	0.11	0.38	1.32
X_{10}	5.985	0.09	1.8	2.8
X_{11}	12.305	0.03	1.7	1.94
X_{12}	10.325	0.05	Loi uniforme	
X_{13}	5.125	0.05	Loi uniforme	
X_{14}	3.75	0.1	1.8	2.6
X_{15}	0.825	0.05	1.05	1.85
X_{16}	8.8	0.1	1.8	2.6
X_{17}	0.4	0.2	1.8	2.6

Tableau 2.10 – Données du problème "Recouvrement de contact". Toutes les dimensions sont classiquement Gaussiennes indépendantes, comme indiqué en introduction, sauf celles mentionnées "Loi uniforme".

Calcul du TNC. Les cotes X_4, X_5, X_{12} et X_{13} nécessitent un contrôle à 100% de leurs dimensions d'après les recommandations du concepteur. Celles-ci sont donc modélisées par des lois uniformes alors que les autres dimensions sont modélisées par des lois Gaussiennes. Comme chaque cote provient d'une pièce différente, les dimensions sont considérées indépendantes. Même si la chaîne de cotes est linéaire, comme certaines dimensions sont modélisées par des lois uniformes, les TNC conditionnels ne peuvent pas être calculés par la méthode simplifiée, présentée en Section 1.4.1 et restreinte au cas linéaire Gaussien. C'est donc la méthode FORM qui est utilisée dans cette application. La méthode d'intégration de MC lui est associée pour estimer le TNC dynamique. La Figure 2.22 montre l'évolution des TNC en fonction de la valeur de seuil S. En toute logique, le TNC augmente lorsque l'EF devient plus sévère. Il faut noter que la valeur du TNC au pire des cas statistiques est très forte, souvent égale au million de ppm. Cette valeur borne évidemment le TNC mais n'est pas d'une grande utilité. Elle vient du fait que la mauvaise combinaison de dé-

calages de moyennes d'un grand nombre de cotes (17 dans ce cas) peut engendrer des décalages de moyennes conséquents sur la résultante Y. Cette combinaison est très peu probable mais montre néanmoins qu'en acceptant uniquement des lots de pièces conformes, il est possible d'obtenir des TNC bien supérieurs à ceux attendus. La valeur des TNC obtenus sur le long terme est plus probablement de l'ordre des résultats APTA.

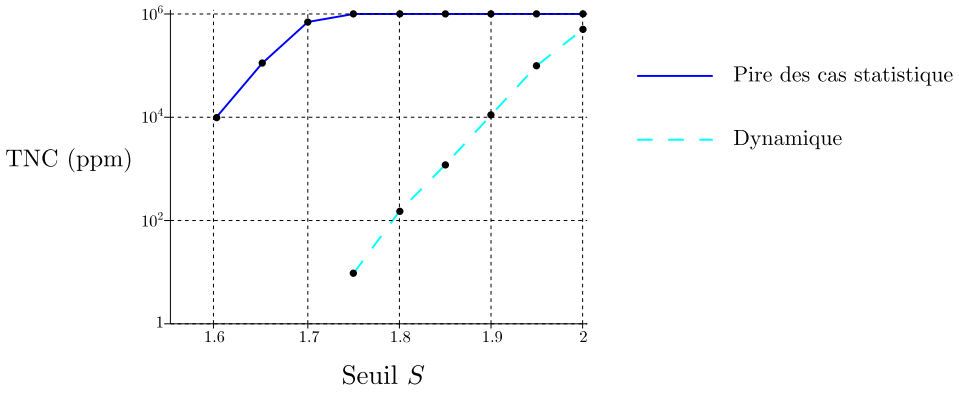


FIGURE 2.22 – Evolution des TNC au pire des cas statistique et dynamique pour l'application "Recouvrement de contact" en fonction du seuil S.

2.4.7.2 Débattement de contact RADIALL

Présentation du mécanisme. Pour cette application, l'étude porte encore sur un mécanisme proposé par la société RADIALL, plus exactement sur le débattement de la fiche mâle (Figure 2.23) par rapport à son logement. Le débattement de contact est caractérisé par une fonction non-linéaire de 14 cotes constituée de plusieurs sous-fonctions trigonométriques élémentaires. Il définit l'angle d'inclinaison de la fiche Y :

$$\begin{aligned}
c &= X_4 + X_6 + \frac{X_5}{2} \qquad i = X_{11} + X_{13} + \frac{X_{12}}{2} \qquad h = X_{10} + X_{14} \\
\alpha &= \cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{i^2+h^2}} - \cos^{-1}\frac{i}{\sqrt{i^2+h^2}} \\
r_2 &= \frac{X_{13} + \frac{X_{12}}{2}}{2\tan\alpha} - \frac{X_6 + \frac{X_5}{2}}{2\sin\alpha} \\
z &= \frac{r_2}{\cos\alpha} + \left(\frac{X_7}{2} + \frac{X_9}{4} + \frac{X_5}{4}\right)\tan\alpha \\
J_1 &= (X_1 - X_8 - z)\sin\alpha \qquad J_2 = \frac{X_5}{4}\cos\alpha \qquad J_3 = \frac{X_2 + X_3}{2}\cos\alpha \\
Y &= J_1 + J_2 + J_3
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Ces relations sont obtenues géométriquement en faisant l'hypothèse que les points de contact sont connus. L'EF impose $Y \leq S$, S étant une valeur de seuil à ne pas

dépasser afin que le contact électrique s'effectue dans de bonnes conditions. Les données du problème sont présentées dans le Tableau 2.11.

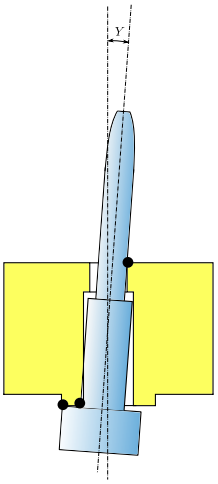


FIGURE 2.23 – Schéma d'une fiche électrique conçue et commercialisée par la société RADIALL. La caractéristique fonctionnelle est l'angle d'inclinaison Y. Les points de contact sont supposés connus et repérés par un point noir.

X	**T**	**t**	$\mathbf{C_p^{(e)} = C_{pk}^{(e)}}$	$\mathbf{C_p^{(max)}}$
X_1	10.53	0.2	1.1	1.6
X_2	0.1	0.2	1.1	1.6
X_3	0	0.06	1.1	1.6
X_4	0.643	0.015	1.1	1.6
X_5	0	0.2	1.1	1.6
X_6	0.72	0.04	1.1	1.6
X_7	1.325	0.05	1.1	1.6
X_8	0.75	0.04	1.1	1.6
X_9	0	0.04	1.1	1.6
X_{10}	3.02	0.06	0.86	1.36
X_{11}	0.72	0.04	0.86	1.36
X_{12}	0	0.04	0.86	1.36
X_{13}	0.97	0.04	0.86	1.36
X_{14}	0.4	0.06	0.86	1.36

Tableau 2.11 – Données du problème "Débattement de contact". Toutes les dimensions sont Gaussiennes.

Calcul du TNC. Cette fois, toutes les dimensions sont modélisées par des lois Gaussiennes indépendantes. Cette hypothèse est discutable dans ce cas car plusieurs dimensions appartiennent à la même pièce et sont donc fabriquées dans la même opération, avec le même réglage machine. Comme la chaîne de cotes est non-linéaire,

les TNC conditionnels sont calculés par méthode FORM, associée à la méthode de MC pour estimer les TNC dynamiques. Les résultats sont présentés en Figure 2.24. Plus la valeur de S augmente, plus les TNC diminuent. A nouveau, ces résultats sont logiques. La borne supérieure du TNC est encore une fois très restrictive et sur-estime largement le TNC dynamique plus représentatif de la situation sur le long terme.

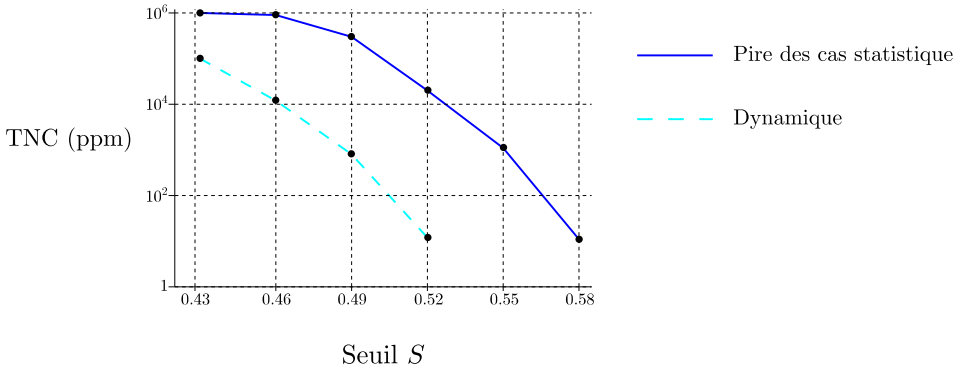


FIGURE 2.24 – Evolution des TNC au pire des cas statistique et dynamique pour l'application "Débattement de contact" en fonction du seuil S.

2.4.7.3 Application CAO

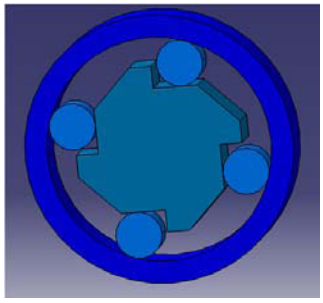


FIGURE 2.25 – Modélisation CAO de l'embrayage à billes étudié en Section 2.3.2.

Présentation du mécanisme. Le système mécanique de la Figure 2.6 a déjà été étudié précédemment en Section 2.3.2. Les trois dimensions sont modélisées par des lois Gaussiennes indépendantes dont les caractéristiques sont listées dans le Tableau 2.12. La particularité de cette application est la modélisation du mécanisme grâce à un logiciel CAO (Figure 2.25). Ce choix de modélisation est guidé par le fait qu'un tel logiciel est capable de mesurer toute dimension spatiale, ce qui permet de s'affranchir de l'expression d'une chaîne de cotes explicite. Un couplage entre le modèle CAO et les algorithmes de calcul du TNC a été mis en place. L'algorithme

de calcul numérique pilote le modèle CAO en demandant l'évaluation de l'angle Φ_1 pour un ensemble de réalisations des variables dimensionnelles. Dans ce cas, la fonction CAO est équivalente à la fonction analytique en Equation 2.23. Pour des raisons fonctionnelles, l'angle de pression Φ_1 doit être compris dans l'intervalle $\left[7,0184^\circ - \frac{S}{2}; 7,0184^\circ + \frac{S}{2}\right]$, S étant un seuil variable.

X	**T**	**t**	$\mathbf{C_p^{(e)}}$	$\mathbf{C_{pk}^{(e)}}$	$\mathbf{C_p^{(max)}}$
A	27.645	0.1	1.33	1	2
C, D	11.43	0.02	1.33	1	2
E	50.8	0.025	1.33	1	2

Tableau 2.12 – Données de l'application académique sous modélisation CAO. Toutes les dimensions sont Gaussiennes.

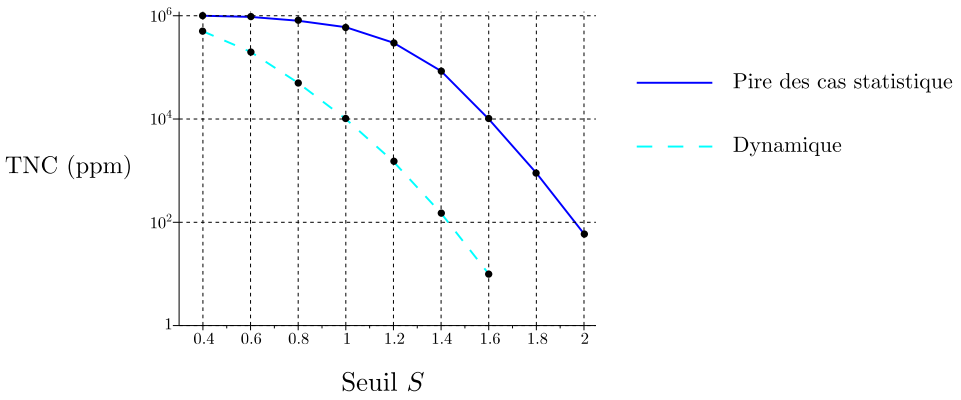


FIGURE 2.26 – Evolution des TNC au pire des cas statistique et dynamique pour l'application CAO en fonction du seuil S.

Calcul du TNC. L'objectif est de mener les calculs de TNC grâce à la modélisation CAO. Evidemment, l'appel au logiciel CAO est beaucoup plus coûteux que la simple évaluation d'une fonction analytique. Cela rend l'utilisation de la méthode FORM, directement couplée à la méthode d'intégration de MC, difficilement envisageable pour le calcul du TNC dynamique. C'est pourquoi un métamodèle $\tilde{f}$ très simple a été construit. Il s'agit d'une chaîne de cotes linéaire obtenue par linéarisation de Taylor :

$$\Phi_1 = \tilde{f}(\mathbf{X}) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \tag{2.55}$$

où a_0 et a_i représentent les coefficients linéaire du métamodèle. A partir de celui-ci, dont la construction ne nécessite que $n+1$ appels à la fonction, le calcul du TNC conditionnel est analytique (voir Section 1.4.1) et celui du TNC dynamique est quasiment instantané. La Figure 2.26 montre l'évolution des TNC au pire des

cas statistiques et dynamiques en fonction de S. Logiquement, la non-conformité diminue lorsque l'exigence sur l'angle diminue. Cette fois encore, l'approche au pire des cas statistique surévalue largement le TNC.

L'intérêt de cette application se situe au niveau de l'utilisation du logiciel CAO qui permet d'avoir accès à n'importe quelle mesure dimensionnelle, notamment celles n'ayant pas d'expression analytique. Cette application montre aussi que le calcul du TNC dynamique n'est pas incompatible avec l'utilisation de logiciels CAO pour évaluer la chaîne de cotes. Les perspectives à ces travaux sont nombreuses. En effet, il est désormais envisageable d'étudier des mécanismes très complexes avec des chaînes de cotes en 3D par exemple.

2.4.8 Conclusion sur l'approche APTA

Dès le début de cette section consacrée à l'approche APTA, il est démontré qu'il existe une infinité de lots de pièces différents mais conformes pour des exigences de fabrication données. Chacun de ces lots conduit à un TNC ponctuel différent. Le calcul d'un TNC pour un lot centré sur sa valeur nominale avec écart-type maximal (hypothèse courante dans la littérature) ne représente qu'un cas bien particulier. La même remarque peut être faite, à partir des Figures 2.22, 2.24 et 2.26, pour un lot au pire des cas statistique. D'une manière générale, le calcul d'un TNC ponctuel n'est pas forcément pertinent, comme l'illustre le Tableau 2.9. De plus, durant la vie série d'un produit, les caractéristiques statistiques $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}$ des lots évoluent. L'illustration présentée en Section 2.4.6 montre que les TNC associés à différents cas de modélisation sont très variables. Il est donc nécessaire de les modéliser le plus précisément possible. Toutes ces raisons démontrent l'utilité de l'approche APTA, capable de calculer le TNC dynamique d'une production en grande série, en prenant en compte l'évolution des caractéristiques statistiques des dimensions.

En pratique, une étude statistique des lots de pièces doit être menée pour chaque processus et type de pièces à fabriquer. Cette étude a pour but de déterminer le plus précisément possible les densités conjointes liées aux processus à considérer pour l'approche APTA. Une large campagne de mesures a déjà été initiée en collaboration avec les partenaires industriels VALEO SE et RADIALL SA de cette thèse. Malheureusement, les résultats ne sont pas encore disponibles. Ils le seront dans un futur proche et pourront être utilisés dans le cadre du projet ANR ATHOLA qui a pour but, parmi d'autres, de continuer les travaux de recherche menés durant cette thèse. Il sera alors possible d'identifier des densités conjointes de probabilité caractéristiques de différents processus de fabrication. En attendant, et si aucune information n'est disponible, des hypothèses peuvent être formulées en se basant sur les cinq cas présentés en Section 2.4.4. En dernier recours, une borne supérieure du TNC formulée en Section 2.4.3 est disponible, nécessitant uniquement la connaissance de $C_p^{(\max)}$. Malheureusement, elle se révèle souvent très éloignée de la valeur réelle, notamment lorsqu'il y a un grand nombre de dimensions impliquées dans la chaîne de cotes.

2.5 Conclusion

Les méthodes semi-probabilistes montrent rapidement leurs limites de part leur principe. Elles visent un TNC approximatif sous hypothèses souvent trop restrictives. Néanmoins, elles peuvent être adaptées à des études de préconception par exemple. Les méthodes fiabilistes sont quant à elles capables de calculer ce TNC de manière relativement précise. A ce défi s'ajoute celui de le faire à un coût raisonnable, c'est-à-dire en un temps réduit à l'aide d'un simple ordinateur. En ce qui concerne le calcul d'un TNC conditionnel avec fonctions explicites ou implicites, à part la méthode de Monte Carlo, toutes les méthodes proposées en Section 2.3.2 en sont capables. Plus particulièrement, deux méthodes se montrent relativement efficaces et ont donc été privilégiées pour les applications présentées en Section 2.4.7. Il s'agit des méthodes FORM et linéarisation de Taylor (voir Tableau 2.8). Leur grande efficacité, même pour des fonctions non-linéaires, s'explique simplement. **En effet, dans le contexte d'analyse des tolérances, qui par nature implique des IT réduits, même des fonctions *a priori* fortement non-linéaires sont quasi-linéaires dans l'intervalle de variations des dimensions.** A partir de cette constatation, il semblerait être une erreur que de développer des méthodes trop complexes capables de traiter les cas fortement non-linéaires. Le calcul du TNC dynamique, relatif à une production en grande série, reste lui aussi très abordable par la méthode d'intégration de MC, quitte à utiliser un métamodèle simple lorsque des fonctions nécessitent l'évaluation de codes numériques ou logiciels CAO.

A propos de la modélisation des dimensions, le choix s'est souvent porté sur des lois Gaussiennes. Il s'agit, dans la majorité des cas, de la modélisation la plus proche de la réalité. Lorsque ce n'est pas le cas, la méthode FORM a l'avantage de pouvoir traiter n'importe quel type de loi de probabilité grâce à une transformation iso-probabiliste adaptée, comme décrit en Section 1.2.1. Enfin, ces dimensions sont considérées comme indépendantes. Ce choix est certes discutable, mais dans le cas où une corrélation doit être prise en compte, la méthode FORM le permet là encore. L'approche APTA permet de plus de modéliser l'évolution des caractéristiques probabilistes des dimensions $(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma})$ sur le long terme.

Dans l'ensemble de ce chapitre, les mécanismes sont considérés sans jeu. Ce choix de modélisation est là aussi contestable, notamment dans l'application "Débattement de contact RADIALL" en Section 2.4.7.2 pour laquelle les points de contact sont supposés connus. En réalité, comme il existe des jeux, donc des déplacements de pièces incontrôlés, d'autres points de contact auraient pu être choisis et le TNC calculé aurait été plus important. L'objectif du chapitre suivant est de prendre en compte ces jeux dans un contexte d'analyse des tolérances.

Synthèse de chapitre

Objectifs. Développer des outils permettant l'analyse des tolérances de tous types de mécanismes sans jeu, dont la relation cotes - caractéristique fonctionnelle est modélisée par une chaîne de cotes. L'objectif n'est pas simplement de respecter l'exigence fonctionnelle, mais aussi de contrôler précisément le Taux de Non-Conformité (TNC) du système mécanique. De plus, tous types de modélisation des dimensions doivent pouvoir être prises en compte.

Méthodologie. D'une manière générale, les méthodes fiabilistes, par l'intermédiaire de la théorie probabiliste, permettent le calcul rigoureux d'une probabilité de défaillance. En l'occurrence, le TNC est une probabilité de défaillance et les méthodes fiabilistes s'appliquent directement à l'analyse des tolérances. Les dimensions sont modélisées par des variables aléatoires dont les caractéristiques (moyennes et écarts-types) sont elles aussi modélisées par des variables aléatoires grâce à la méthode APTA (Advanced Probability-based Tolerance Analysis of products). Cette méthode conduit au calcul de TNC dynamiques, relatifs à une production en grande série.

Principaux résultats. Les méthodes fiabilistes sont très efficaces, mêmes dans le cas de chaînes de cotes non-linéaires et implicites. Couplées avec la méthode de Monte Carlo, les méthodes FORM et linéarisation de Taylor permettent le calcul de TNC ponctuels et dynamiques pour un coût de calcul très faible (de l'ordre de quelques secondes).

Productions scientifiques :

- N. GAYTON, P. BEAUCAIRE, E. DUC, M. LEMAIRE : Application des méthodes fiabilistes au tolérancement statistique des systèmes mécaniques. *6èmes journées nationales de fiabilité 2010*, Toulouse, France.
- P. BEAUCAIRE, N. GAYTON, E. DUC, M. LEMAIRE : Méthode APTA pour l'analyse statistique des tolérances de systèmes mécaniques. *12ème colloque national AIP PRIMECA 2011*, Mont Dore, France.
- N. GAYTON, P. BEAUCAIRE, J.-M. BOURINET, E. DUC, M. LEMAIRE et L. GAUVRIT : APTA : Advanced Probability-based Tolerance Analysis of products. *Mécanique et Industries*, 12-71 : 85, 2011.
- N. GAYTON, P. BEAUCAIRE, E. DUC, M. LEMAIRE : The APTA method for the tolerance analysis of products - comparison of capability-based tolerance and inertial tolerance. *Asian International Journal of Science and Technology in Production and Manufacturing Engineering (AIJSTPME)*, 24-36 : 4(3), 2011.

Chapitre 3

Analyse des tolérances pour les mécanismes avec jeux

Sommaire

3.1 Introduction **75**
3.2 Formulation générale du problème d'assemblage **76**
3.3 Formulation générale du problème fonctionnel **77**
3.4 Approche de résolution globale couplant Monte Carlo et optimisation **78**
3.5 Une nouvelle approche de résolution par méthodes fiabilistes systèmes **79**
3.6 Applications industrielles et académiques **83**
3.6.1 Système d'essuyage VALEO 83
3.6.2 Débattement de contact RADIALL 87
3.6.3 Liaison glissière hyperstatique 94
3.7 Conclusion **98**
Synthèse de chapitre **99**

Notations spécifiques

TNC_a	Taux de Non-Conformité d'assemblage.
TNC_f	Taux de Non-Conformité fonctionnel.
Φ_m	Fonction de répartition de la loi Gaussienne standard en dimension m.
$\mathbf{X}$	Vecteur des dimensions et des écarts géométriques, modélisés par des variables aléatoires.
$\mathbf{d}$	Vecteur de positions (ou déplacements) des pièces, modélisées par des variables déterministes.
m_i	$i^{\text{ème}}$ fonction caractéristique d'assemblage.
N_m	Nombre de contraintes d'assemblage.
g_i	$i^{\text{ème}}$ fonction contrainte de non-interférence.
N_c	Nombre de contraintes de non-interférence.
Ω	Domaine de non-interférence.
$\mathrm{EF}_{\min}, \mathrm{EF}_{\max}$	Bornes respectivement inférieure et supérieure de l'EF.
$\tilde{f}$	Fonction f linéarisée.
N_s	Nombre de situations de points de contact.
$\hat{\mathbf{d}}_i$	Vecteur des coordonnées des pièces mobiles dans la $i^{\text{ème}}$ situation de points de contact.
L_i	Fonction de performance associée à la $i^{\text{ème}}$ situation de points de contact.
N_{ds}	Nombre de situations dominantes de points de contact.

3.1 Introduction

Les jeux jouent un rôle crucial dans la plupart des mécanismes, notamment hyperstatiques. Lorsqu'une pièce est positionnée dans l'espace, elle possède six degrés de liberté (trois rotations et trois translations). Les pièces sont liées entre elles par des liaisons qui suppriment un ou plusieurs degrés de liberté. Si l'un d'entre eux est supprimé plus d'une fois, alors la pièce est sur-contrainte et le mécanisme est dit hyperstatique. Cette situation est très commune. Dans la plupart des cas, les ingénieurs conçoivent de tels mécanismes pour augmenter leur rigidité. Cette situation entraîne des complications telles que des problèmes fonctionnels qui peuvent être résolus par les jeux. Ce sont des espaces entre les pièces qui permettent le relâchement des contraintes mécaniques et donc la possibilité de mouvements des pièces. L'analyse des tolérances de tels mécanismes n'est pas directe. En effet, à cause de la présence des jeux dans un contexte bidimensionnel ou tridimensionnel, leur fonctionnalité n'est pas régie par une simple chaîne de cotes, ce qui empêche l'utilisation directe des méthodes détaillées au Chapitre 2. De plus, les mécanismes avec jeux peuvent, en plus d'être non-fonctionnels, connaître des problèmes d'assemblage. C'est pourquoi deux types de TNC sont définis, le TNC d'assemblage TNC_a et le TNC fonctionnel TNC_f.

Dans la littérature, les jeux sont souvent négligés, via l'étude de mécanismes idéaux ou iso-statiques, par soucis de simplicité. Pourtant, il est recommandé de les prendre en compte ((Zou et Morse, 2004, Ameta *et al.*, 2007, Ballu *et al.*, 2008)). Pour étudier de tels mécanismes, toutes les mobilités entre les pièces, dues à la présence de jeux, doivent être considérées. Une nouvelle formulation, développée par Dantan et Qureshi (2009), permet de réaliser cela :

- Un mécanisme est considéré comme montable si **pour tous** les défauts géométriques acceptables, **il existe** une configuration de jeux qui permette l'assemblage du mécanisme.
- Un mécanisme est considéré comme fonctionnel si **pour tous** les défauts géométriques acceptables, et **pour toutes** les configurations de jeux, la fonction du produit est respectée.

Les quantifieurs $\forall$ "**pour tous**" et $\exists$ "**il existe**" permettent une formulation rigoureuse des problèmes d'assemblage et fonctionnels. Ils offrent une large perspective de recherche et permettent notamment de définir les expressions mathématiques des TNC d'assemblage et fonctionnels notés TNC_f et TNC_a.

En phase de fabrication, plusieurs types de défauts apparaissent à cause des différents processus de fabrication. Dans ce chapitre, par soucis de simplicité, seuls les défauts dimensionnels et de position (localisation et orientation) sont pris en compte. Les défauts de forme ne sont pas considérés. Le vecteur des dimensions et des écarts géométriques $\mathbf{X}(\omega)$ permet de modéliser les défauts dimensionnels et de position par des variables aléatoires, ω représentant l'aléa. Leur moyenne est égale à leur valeur nominale tandis que leur écart-type dépend des caractéristiques du processus de fabrication. Les jeux, quant à eux, sont pris en compte via les positions des pièces, qui sont modélisées par des variables de déplacement (ou de position)

déterministes notées $\mathbf{d}$. **Elles ne sont pas aléatoires car les déplacements des pièces sont libres et ne peuvent pas être contrôlés.** En effet, toutes sortes de forces externes peuvent influencer la position des pièces. Dans la plupart des cas, les déplacements de pièces ne peuvent pas être modélisés précisément. En revanche, ils sont limités par la géométrie du mécanisme, ce qui borne les variables $\mathbf{d}$. Comme déjà expliqué, dans l'espace, une pièce possède six degrés de liberté qui impliquent potentiellement six variables de position $\mathbf{d}$ par pièce mobile.

Dans ce chapitre, les formulations des TNC d'assemblage et fonctionnels sont détaillées en Section 3.2 et 3.3. Il apparaît que le problème d'assemblage peut souvent être simplifié en retirant les jeux de la formulation du TNC. Alors le problème d'assemblage est ramené à un problème de fiabilité système classique permettant la prise en compte de combinaisons d'évènements, tel que défini en Section 1.2.2. En revanche, le problème fonctionnel est bien plus complexe. La Section 3.4 présente une approche globale de résolution du problème fonctionnel basée sur des simulations de Monte Carlo et un algorithme d'optimisation. Cette approche a déjà été utilisée dans la littérature par Qureshi *et al.* (2012). Son inconvénient est son important coût de calcul. Malgré cela, elle constitue à l'heure actuelle la méthode de référence car elle permet l'étude de tout type de mécanismes avec jeux. La Section 3.5 propose une approche de résolution innovante s'appuyant sur des méthodes fiabilistes systèmes. Elle permet pour des mécanismes relativement simples de réduire considérablement le coût calculatoire sans perte de précision. Elle utilise notamment la fonction de répartition de la loi Gaussienne standard à n dimensions Φ_n. Il s'agit d'une des contributions majeures de ces travaux de thèse. Les Sections 3.4 et 3.5 abordent aussi succinctement les méthodes de résolution du problème plus simple d'assemblage. Trois applications sont proposées en Section 3.6, et permettent de mettre en évidence l'efficacité de l'approche fiabiliste système. La première d'entre elles, un mécanisme d'essuyage proposé par la société VALEO SE, illustre uniquement un problème d'assemblage et détaille la façon dont un problème avec jeux peut être simplifié en un problème de fiabilité système classique. Les deux suivantes impliquent chacune un problème d'assemblage et un fonctionnel. Il s'agit d'un modèle de connexion électrique type de la société RADIALL SA et d'une liaison glissière hyperstatique.

3.2 Formulation générale du problème d'assemblage

En premier lieu, il est nécessaire de déterminer si un mécanisme hyperstatique peut être assemblé. Comme Dantan et Qureshi (2009) l'expriment, une configuration de position des pièces doit être trouvée assurant l'assemblage du mécanisme. N_m fonctions caractéristiques d'assemblages, dépendant des positions des pièces $\mathbf{d}$ et des dimensions du mécanisme $\mathbf{X}$, permettent de définir l'ensemble des contraintes d'assemblage : $\left(\wedge_{i=1}^{N_m} m_i(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \leq 0\right)$. L'assemblage est possible si elles sont simultanément négatives. Le TNC d'assemblage est donc défini comme la probabilité qu'il existe au moins une contrainte d'assemblage qui ne soit pas respectée, quelle que

soit la position des pièces :

$$\mathrm{TNC}_a = \mathrm{Prob}\left(\forall \mathbf{d}, \exists i, m_i(\mathbf{X}, \mathbf{d}) > 0\right) \tag{3.1}$$

Comme des jeux sont impliqués, à travers les variables de position $\mathbf{d}$ qui ne sont pas aléatoires, le calcul de ce TNC est potentiellement complexe. En pratique, il peut souvent être simplifié de telle manière que les contraintes d'assemblage ne dépendent plus des positions des pièces $\mathbf{d}$. Sa formulation simplifiée est la suivante :

$$\mathrm{TNC}_a = \mathrm{Prob}\left(\bigvee_{i=1}^{N_m} m_i(\mathbf{X}) > 0\right) = 1 - \mathrm{Prob}\left(\bigwedge_{i=1}^{N_m} m_i(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{3.2}$$

où $\bigwedge$ et $\bigvee$ sont les opérateurs logiques "et" et "ou".

3.3 Formulation générale du problème fonctionnel

La fonctionnalité de mécanismes avec jeux est définie grâce à une (ou plusieurs) caractéristique fonctionnelle, fonction des défauts géométriques $\mathbf{X}$ et des positions des pièces $\mathbf{d}$:

$$Y = f(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \tag{3.3}$$

Comme l'expriment Dantan et Qureshi (2009), lorsque les pièces sont mobiles, l'exigence fonctionnelle doit être respectée pour toutes les positions admissibles des pièces. Un ensemble de N_c contraintes de non-interférence $g(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \leq 0$, correspondant à N_c points de contact potentiels, sont définies. Elles empêchent les pièces de rentrer en collision entre elles. Elles peuvent être déterminées grâce à différentes méthodes : les torseurs des petits déplacements (Bourdet *et al.*, 1996), la méthodes des matrices (Desrochers, 1999), les T-Map (Ameta *et al.*, 2007), ou bien géométriquement en considérant individuellement chaque point de contact potentiel. Elles forment le domaine de non-interférence $\Omega(\mathbf{X})$ définissant les positions admissibles des pièces. Le mécanisme est fonctionnel si, quelque soit la position des pièces appartenant au domaine de non-interférence, l'EF est respectée :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{d} \in \Omega(\mathbf{X}), Y(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \in [\mathrm{EF}_{\min}; \mathrm{EF}_{\max}] \\ \Omega(\mathbf{X}) : \mathbf{d} / \bigwedge_{j=1}^{N_c} g_j(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

L'obectif est de calculer le TNC fonctionnel TNC_f, défini comme la probabilité que l'EF ne soit pas respectée :

$$\begin{aligned} \mathrm{TNC}_f &= \mathrm{Prob}(\exists \mathbf{d} \in \Omega(\mathbf{X}), Y(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \notin [\mathrm{EF}_{\min}, \mathrm{EF}_{\max}]) \\ &= \mathrm{Prob}(\exists \mathbf{d} \in \Omega(\mathbf{X}), Y(\mathbf{X}, \mathbf{d}) < \mathrm{EF}_{\min}) \\ &+ \mathrm{Prob}(\exists \mathbf{d} \in \Omega(\mathbf{X}), Y(\mathbf{X}, \mathbf{d}) > \mathrm{EF}_{\max}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Remarques :

- Dans les sections suivantes, comme les deux termes de probabilité de l'Equation 3.5 peuvent être traités de manière similaire, la borne inférieure $\mathrm{EF}_{\min}$ ne sera plus considérée.
- Il faut noter que la notion de fonctionnalité n'est définie que si le mécanisme est montable. Comparer la valeur d'une caractéristique fonctionnelle à un seuil si le mécanisme ne s'assemble pas n'a aucun sens. De fait, le TNC fonctionnel est la probabilité que le mécanisme soit non-fonctionnel mais montable. Le TNC fonctionnel, sachant que le mécanisme s'assemble, noté $\mathrm{TNC}_{f|a}$ se calcule de la façon suivante :

$$\mathrm{TNC}_{f|a} = \frac{\mathrm{TNC}_f}{\mathrm{TNC}_a} \tag{3.6}$$

Le calcul de $\mathrm{TNC}_{f|a}$ peut être intéressant afin d'identifier les mécanismes non-conformes pour des raisons de fonctionnalité uniquement.

3.4 Approche de résolution globale couplant Monte Carlo et optimisation

A ce jour, très peu d'auteurs proposent de méthodes permettant le calcul de TNC de mécanismes avec jeux. Tous utilisent la méthode des simulations de Monte Carlo (MC) d'une part, et un module de gestion des jeux d'autre part. Par exemple, Andolfato *et al.* (2012) traitent la gestion des jeux par un module éléments-finis. Une simulation de MC est ensuite réalisée à partir d'un métamodèle (réseaux de neurones) approximant les réponses du module éléments-finis. Mansuy *et al.* (2012) appliquent l'approche de l'"accumulation des tolérances" brièvement présentée en Section 2.2 à la gestion des jeux grâce à des sommes de Minkowski. Des simulations de MC permettent ensuite de calculer le TNC. De manière comparable, Qureshi *et al.* (2012) gèrent les jeux en prenant en compte les différentes positions des pièces grâce à un algorithme d'optimisation couplé à des simulations de MC. C'est la méthode proposée par Qureshi *et al.* (2012) qui est détaillée dans cette section.

A cause de la présence de jeux, comme précédemment expliqué, le problème fonctionnel nécessite de prendre en compte toutes les positions admissibles des pièces. L'algorithme d'optimisation est utilisé afin de trouver la caractéristique fonctionnelle admissible la plus pénalisante $\max(Y)$. **Si l'EF est respectée dans le pire des cas, elle l'est dans tous les autres.** Pour une réalisation des variables géométriques $\mathbf{X}$, $Y(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ est maximisé sous N_c contraintes de non-interférence : $g_j(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \leq 0, j = 1$ à N_c. Le TNC fonctionnel s'écrit alors :

$$\mathrm{TNC}_f = \mathrm{Prob}\left[\left(\max_{\mathbf{d}\in\Omega(\mathbf{X})} Y(\mathbf{X}, \mathbf{d})\right) > \mathrm{EF}_{\max}\right] \tag{3.7}$$

Cette approche est dénommée "globale" car, contrairement aux méthodes présentées par la suite, l'ensemble du domaine de non-interférence est pris en compte pour chaque optimisation. L'algorithme général est composé de quatre étapes. Les

trois premières sont répétées N_{sim} fois : $k = 1$ à N_{sim}, où N_{sim} est le nombre de simulations de MC.

1. Une réalisation des variables de dimensions $\mathbf{x}^{(k)}$ est tirée aléatoirement.
2. Une fois que le domaine de non-interférence $\Omega\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ est constitué, $\max(Y) = \max\limits_{\mathbf{d}\in\Omega(\mathbf{x}^{(k)})} Y\left(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{d}\right)$ est obtenu grâce à un algorithme d'optimisation.
3. L'indicateur $I_f^{(k)}$ est calculé :

$$I_f^{(k)} = \begin{cases} 1 \text{ si } \max(Y) > \mathrm{EF}_{\max} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{3.8}$$

4. Finalement, le TNC fonctionnel est calculé grâce à l'espérance mathématique du vecteur des indicateurs : $\mathrm{TNC}_f = \mathrm{E}[\mathbf{I}_f]$

Pour le problème d'assemblage, la résolution est plus simple : la deuxième étape n'est pas effectuée et l'indicateur est défini par :

$$I_a^{(k)} = \begin{cases} 1 \text{ si } \max\limits_{i=1}^{N_a}[m_i(\mathbf{X})] > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Finalement, $\mathrm{TNC}_a = \mathrm{E}[\mathbf{I}_a]$.

Les TNC calculés par la méthode de MC sont des estimations. Il est important d'évaluer leur précision grâce à leur intervalle de confiance à 95% (défini en Section 1.3.1) :

$$\tilde{\mathrm{TNC}} - 1.96\sigma_{\mathrm{TNC}} \lesssim \mathrm{TNC} \lesssim \tilde{\mathrm{TNC}} + 1.96\sigma_{\mathrm{TNC}} \tag{3.10}$$

où σ_{TNC} est l'écart-type du TNC, fonction du nombre de simulations N_{sim} de MC, défini par :

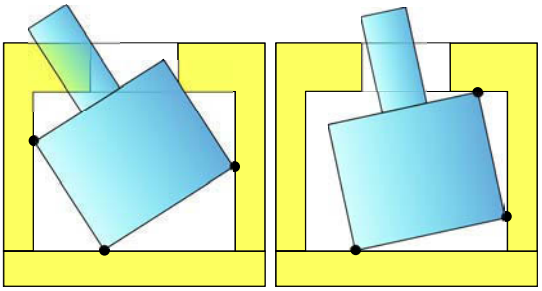
$$\sigma_{\mathrm{TNC}} \approx \sqrt{\frac{\tilde{\mathrm{TNC}}(10^6 - \tilde{\mathrm{TNC}})}{N_{sim}}} \tag{3.11}$$

La précision de cette méthodologie dépend du nombre de simulations de MC effectuées. Elle nécessite des millions de tirages pour atteindre de faibles valeurs du TNC, ce qui implique potentiellement des millions de problèmes d'optimisation à résoudre. C'est pourquoi une méthode alternative est proposée pour réduire le temps de calcul, et présentée dans la section suivante.

3.5 Une nouvelle approche de résolution par méthodes fiabilistes systèmes

L'approche globale de référence, basée sur les simulations de MC et l'optimisation et ayant pour but de rechercher la pire situation des jeux est très coûteuse. L'objectif de cette nouvelle approche est de réduire le temps de calcul.

Formulation système : décomposition par situations de points de contact. Comme précédemment expliqué, pour traiter le problème de fonctionnalité, toutes les positions de pièces doivent être envisagées. L'approche proposée est basée sur le fait que **la caractéristique fonctionnelle la plus pénalisante se retrouve systématiquement pour une situation de points de contact, lorsque les pièces mobiles sont en contact avec les autres.** L'idée est alors de décomposer le scénario de non-conformité fonctionnel global en plusieurs scénarios identifiés, chacun relatif à une situation de points de contact. Cette approche est appelée "système" car elle est composée d'un système d'évènements. Son avantage principal est que les paramètres de jeux (i.e. les variables de déplacement $\mathbf{d}$) disparaissent de l'Equation 3.7 pour des situations de points de contact données. Les variables $\hat{\mathbf{d}}^{(i)}$ sont alors introduites dans l'Equation 3.12. Il s'agit des coordonnées de la pièce mobile dans la $i^{\text{ème}}$ situation de points de contact. Il est alors beaucoup plus facile de vérifier le respect de l'EF.



(a) Situation non-admissible (b) Situation admissible

FIGURE 3.1 – Représentation de deux situations de points de contact (l'une admissible, l'autre non) entre deux pièces. Pour chacune, trois (au lieu de six car il s'agit d'un mécanisme plan) fonctions de non-interférence $\tilde{g}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{d}})$, relatives aux points de contact, sont égales à 0. Pour la situation admissible, les contraintes de non-interférence non relatives aux points de contacts sont respectées donc il n'y a pas pénétration de matière, contrairement à la situation non-admissible.

Une situation de points de contact est définie de telle façon que tous les degrés de liberté d'une pièce soient supprimés (voir Figure 3.1) ; alors six fonctions de non-interférence sont égales à 0 en 3 dimensions : $g_j(\mathbf{X}, \mathbf{d}) = 0, j = 1$ à 6. Le vecteur $\mathbf{s}^{(i)}$ contient les numéros des contraintes de non-interférence (i.e. 6 numéros entre 1 et N_c) concernés dans la $i^{\text{ème}}$ situation de points de contact. Ces fonctions sont linéarisées grâce à un développement de Taylor autour d'un point particulier, spécifique au problème, dans l'espace des déplacements $\mathbf{d}$. Comme les déplacements des pièces sont très faibles dans un contexte d'analyse des tolérances, les fonctions linéarisées notées $\tilde{g}_i(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ sont très proches des fonctions originales. Cette linéarisation permet de traiter le problème beaucoup plus facilement. Pour chacune des $N_s = \mathrm{C}_{N_c}^6$ situations de points de contact, il est possible de résoudre le $i^{\text{ème}}$ ($i = 1$ à N_s) système

linéaire $\left(\wedge_{j=1}^{6}\tilde{g}_{\mathbf{s}_j^{(i)}}(\mathbf{X},\mathbf{d})=0\right)$ dont les solutions sont $\hat{\mathbf{d}}^{(i)}$ pour des valeurs de $\mathbf{X}$ données. Si ce système a une solution, cela signifie que les six contraintes de non-interférence concernées sont respectées. Pour que la situation soit admissible, il faut que les N_c-6 autres contraintes, constituant aussi le domaine de non-interférence, soient respectées (voir Figure 3.1). Sous l'hypothèse que les contraintes sont linéaires, la valeur caractéristique la plus pénalisante est définie comme la valeur maximale admissible des caractéristiques fonctionnelles de chaque situation de points de contact :

$$\max_{\mathbf{d}\in\Omega(\mathbf{X})}(Y(\mathbf{X},\mathbf{d}))\approx\max_{i=1}^{N_s}\left[Y\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right),\bigwedge_{j=1}^{N_c-6}\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right)\leq 0\right] \tag{3.12}$$

où $\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}$ est le vecteur contenant les numéros des équations de non-interférence non-impliquées dans la $i^{\text{ème}}$ situation de points de contact. La recherche de la valeur maximale sur un domaine continu par l'approche globale est transformé en un problème de recherche sur un domaine discret grâce à la décomposition en situations de points de contact. En accord avec les méthodes de fiabilité système et les équivalences (union/intersection avec les min/max sur l'ensemble des fonctions (Thoft-Christensen et Murotsu, 1986)), l'expression 3.12 peut se transformer et le TNC fonctionnel s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\text{TNC}_f &\approx \text{Prob}\left(\text{EF}_{\max}-\max_{i=1}^{N_s}\left[Y(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}),\bigwedge_{j=1}^{N_c-6}\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right)\leq 0\right]<0\right)\\
&\approx \text{Prob}\left(\min_{i=1}^{N_s}\left[L_i(\mathbf{X}),\bigwedge_{j=1}^{N_c-6}\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right)\leq 0\right]<0\right)\\
&\approx \text{Prob}\left(\bigvee_{i=1}^{N_s}\left[(L_i(\mathbf{X})<0)\bigwedge_{j=1}^{N_c-6}\left(\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right)\leq 0\right)\right]\right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où les fonctions de performance sont $L_i(\mathbf{X})=\text{EF}_{\max}-Y\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right)$. Le problème est alors réduit à un problème système de N_s unions de N_c-6 intersections d'évènements dépendants. Néanmoins, le calcul de TNC_f en l'état n'est pas trivial. Il peut être simplifié par plusieurs aspects. Premièrement, le nombre de situations de points de contact N_s peut être très important et peut être réduit. Deuxièmement, l'union d'intersection peut être transformée.

Il est important de noter que la phase de linéarisation des fonctions de non-interférence est cruciale. En effet, elle permet de s'assurer que la caractéristique fonctionnelle la plus pénalisante se retrouve pour une des situations de points de contact et permet donc de justifier la décomposition proposée.

Réduction du nombre de situations de points de contact. Pour des raisons diverses, seulement une faible proportion des N_s situations de points de contact est utile dans le domaine des variations dimensionnelles pour le calcul du TNC. Certaines sont mécaniquement irréalistes, extrêmement rares ou redondantes avec d'autres. Pour ces raisons, une phase d'identification est recommandée pour extraire les situations dominantes, celles qui sont réellement utiles. Ballu *et al.* (2008) le fait par expertise et connaissance du mécanisme, mais ce n'est pas toujours possible. Une autre possibilité est de résoudre le problème d'optimisation, proposé dans l'approche globale, un petit nombre de fois (100 fois par exemple) dans le domaine des variations dimensionnelles. Pour chaque réalisation des variables aléatoires, l'algorithme trouve $\max(Y)$ en saturant certaines contraintes du domaines $\Omega(\mathbf{X})$. Ces dernières représentent les situations de points de contact à identifier, celles qui jouent un rôle dans la non-conformité fonctionnelle. Cette phase d'identification permet un gain significatif dans le nombre de situations N_s à considérer pour la plupart des mécanismes. Le nombre de situations dominantes est noté N_{ds}.

Transformation de la formulation de TNC$_f$. La seconde phase de simplification consiste à transformer la formulation du TNC fonctionnel grâce à la formule de Poincaré :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TNC}_f \approx & \sum_{i=1}^{N_{ds}} \mathrm{Prob}\left[(L_i(\mathbf{X})<0)\bigwedge_{j=1}^{N_c-6}\left(\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right)\leq 0\right)\right] \\
- & \sum_{i<k} \mathrm{Prob}\left[(L_i(\mathbf{X})<0)\bigwedge_{j=1}^{N_c-6}\left(\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right)\leq 0\right)\ldots\right. \\
& \left.\ldots\bigwedge(L_k(\mathbf{X})<0)\bigwedge_{j=1}^{N_c-6}\left(\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(k)}}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(k)}\right)\leq 0\right)\right] \qquad (3.14) \\
+ & \ldots \\
+ & (-1)^{N_{ds}-1}\mathrm{Prob}\left(\bigwedge_{i=1}^{N_{ds}}\left[(L_i(\mathbf{X})<0)\bigwedge_{j=1}^{N_c-6}\left(\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right)\leq 0\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

Elle transforme l'union d'intersections d'évènements en une somme d'intersections d'évènements uniquement. Cela permet de calculer TNC$_f$ plus facilement par les méthodes fiabilistes systèmes telles que FORM système.

Calcul par méthodes fiabilistes systèmes. Les fonctions caractéristiques d'assemblage $m(\mathbf{X})$ de l'Equation 3.2, les fonctions de performance $L(\mathbf{X})$ ou les fonctions de non-interférence $\tilde{g}\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{d}}\right)$ de l'Equation 3.14 sont toutes des fonctions de performance telles qu'elles ont été définies au Chapitre 1 de ce manuscrit. Que ce soit pour les problèmes d'assemblage ou fonctionnels, le problème de fiabilité système

classique à résoudre consiste à calculer la probabilité suivante :

$$\text{Prob}\left(\bigwedge_{i=1}^{N} G_i(\mathbf{X}) \leq 0\right) \tag{3.15}$$

où N est le nombre de fonctions de performance $G(\mathbf{X})$ impliquées. Dans le domaine de l'analyse des tolérances qui impliquent des problèmes systèmes, deux méthodes sont principalement utilisées : la méthode de MC (Section 1.3.1), de part sa simplicité d'utilisation (Skowronski et Turner, 1997, Wu *et al.*, 2009) et la méthode FORM système (Section 1.2.1) par son coût d'utilisation très réduit (Savage *et al.*, 2006, Ballu *et al.*, 2008, Beaucaire *et al.*, 2012, 2013). Pour l'approche présentée dans cette section, c'est l'utilisation de la méthode FORM système qui est retenue. Bien que la méthode de MC soit plus facile à mettre en oeuvre, FORM système est de loin la plus économique comme présenté dans le Tableau 2.8 en Section 2.3.3. Elle permet de calculer d'une manière très efficace TNC_a et TNC_f. Les applications de la section suivante ont pour but de l'illustrer.

3.6 Applications industrielles et académiques

3.6.1 Système d'essuyage VALEO

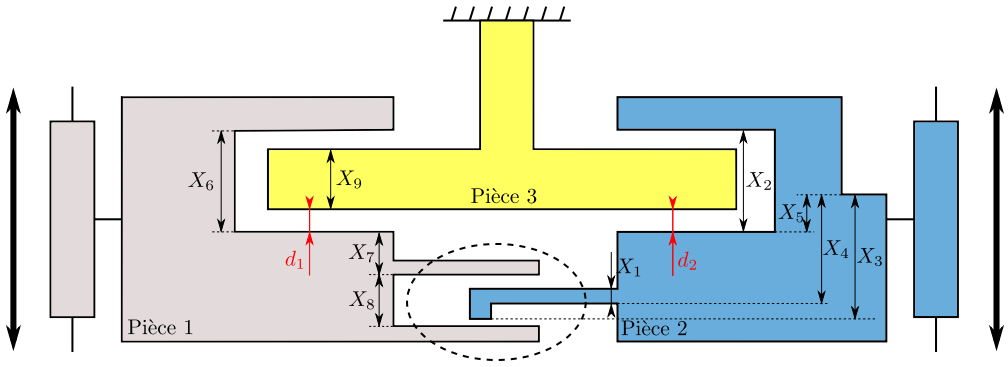


FIGURE 3.2 – Schéma du système d'essuyage VALEO SE. Les pièces (1) et (2) sont respectivement positionnées par rapport à la pièce (3) grâce aux variables de positions d_1 et d_2.

Présentation du mécanisme. Le mécanisme présenté dans cette section est issu d'un système d'essuyage conçu, fabriqué et commercialisé par la société VALEO SE. Pour des raisons de confidentialité, seul un diagramme opérationnel est présenté en Figure 3.2. Il est composé de trois pièces (1,2,3), dont les dimensions $\mathbf{X}$ sont modélisées par des variables aléatoires indépendantes. Ce mécanisme est hyperstatique car plusieurs liaisons planes bloquent les mêmes degrés de liberté des pièces. Il nécessite des jeux pour pouvoir être assemblé sans déformation exagérée. Ces jeux impliquent

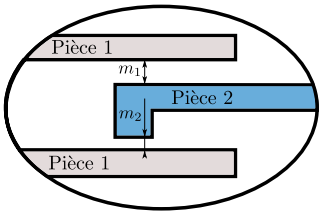


FIGURE 3.3 – Zone agrandie de la Figure 3.2. m_1 et m_2 doivent être supérieurs à -0.1 pour que le mécanisme s'assemble. Cette valeur négative est acceptable car les pièces sont flexibles.

des déplacements relatifs de ces pièces. La position relative de (1) et (2) par rapport à (3) est repérée par les variables $\mathbf{d} = \{d_1, d_2\}$. Ces positions sont bornées par les dimensions du mécanisme, comme le montre la Figure 3.2, tel que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_1 \leq X_6 - X_9 \\ 0 &\leq d_2 \leq X_2 - X_9 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Le schéma présenté (Figure 3.2) est trompeur quant à l'influence de l'orientation des pièces. En réalité, le mécanisme est plus compact et les défauts d'orientation n'ont que très peu d'influence, c'est pourquoi ils sont négligés dans cette étude.

TNC d'assemblage. L'assemblage de ce mécanisme est contrôlé par deux caractéristiques d'assemblage $m_1(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ et $m_2(\mathbf{X}, \mathbf{d})$, représentées en Figure 3.3. Les exigences d'assemblage imposent que m_1 et m_2 soient supérieures à un certain seuil fixé à -0.1 par les concepteurs. Cette valeur est négative car les pièces sont flexibles et qu'une légère déformation des pièces est admissible pour l'assemblage du mécanisme. Ces exigences dépendent des dimensions du mécanisme et des positions des pièces. Elles s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= -X_1 + X_4 - X_5 - X_7 - d_1 + d_2 \\ m_2(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= -X_3 + X_5 + X_7 + X_8 + d_1 - d_2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Cette formulation des exigences est gênante car elle dépend des positions des pièces, qui ne sont pas des variables aléatoires. Il est possible de les reformuler en considérant des cas extrêmes (voir Figure 3.4). En réécrivant ces exigences dans les conditions les moins favorables :

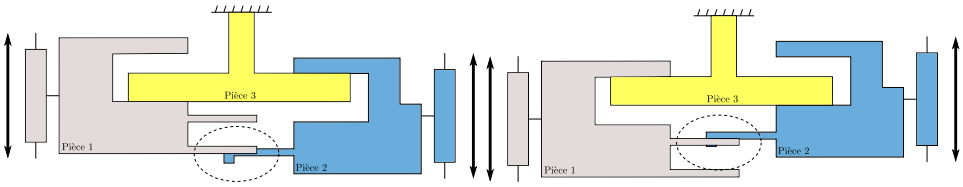
$$\begin{aligned} d_1 &= 0 & \text{et} \quad d_2 = X_2 - X_9 \quad \text{pour} \quad m_1 \\ d_1 &= X_6 - X_9 & \text{et} \quad d_2 = 0 \quad \text{pour} \quad m_2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

deux nouvelles contraintes sont obtenues :

$$\begin{aligned} m_1(0, X_2 - X_9) &= -X_1 + X_2 + X_4 - X_5 - X_7 - X_9 \quad \geq \quad -0.1 \\ m_2(X_6 - X_9, 0) &= -X_3 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 - X_9 \quad \geq \quad -0.1 \end{aligned} \tag{3.19}$$

De plus, en combinant m_1 et m_2, une nouvelle et troisième contrainte est obtenue :

$$\begin{aligned} & m_1 + m_2 \geq -0.2 \\ \text{ou} \quad & -X_1 - X_3 + X_4 + X_8 \geq -0.2 \end{aligned} \tag{3.20}$$



(a) Première situation défavorable. (b) Seconde situation défavorable.

FIGURE 3.4 – Représentation du système d'essuyage dans les deux situations les plus défavorables définies par l'Equation 3.18. Il y a pénétration de matière dans les zones identifiées par les ellipses en pointillés.

Finalement, les trois nouvelles contraintes retenues, indépendantes des positions des pièces, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} m_3(\mathbf{X}) &= -X_1 + X_2 + X_4 - X_5 - X_7 - X_9 + 0.1 \geq 0 \\ m_4(\mathbf{X}) &= -X_3 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 - X_9 + 0.1 \geq 0 \\ m_5(\mathbf{X}) &= -X_1 - X_3 + X_4 + X_8 + 0.2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

m_5 permet d'assurer qu'il y a assez d'espace entre les deux extrémités de la pièce (1) (voir Figure 3.3) pour insérer la pièce (2). m_3 et m_4 assurent en plus que la position relative des pièces permette l'assemblage dans la situation la plus défavorable, donc dans toutes les autres. Le TNC d'assemblage s'exprime alors comme la probabilité d'une intersection d'évènements dépendants gouvernés par trois fonctions de performance :

$$\text{TNC}_a \quad = \quad 1 - \text{Prob}\left(m_3(\mathbf{X}) \geq 0 \wedge m_4(\mathbf{X}) \geq 0 \wedge m_5(\mathbf{X}) \geq 0\right) \tag{3.22}$$

Deux hypothèses de modélisation sont proposées pour ce cas d'étude. La première considère que les dimensions sont Gaussiennes de moyennes égales à leur valeur nominale. De plus, les indices de capabilité associés aux dimensions fabriquées sont égaux aux exigences de capabilité ($\mathbf{C_p} = \mathbf{C_p^{(e)}}$), ce qui a comme conséquence de rendre l'écart-type maximal (voir Figure 3.5). Cette hypothèse est plutôt optimiste mais est la plus couramment utilisée dans la littérature. La seconde

considère des distributions Gaussiennes décalées de la plus grande valeur admissible $\boldsymbol{\delta}^{(\max)} = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{C_{pk}^{(e)}}}{\mathbf{C_p^{(max)}}}\right)$ (voir Equation 2.28 de la Section 2.4), comme le montre la Figure 3.5. Le signe de chaque décalage de moyenne est défini de telle façon qu'il provoque le plus grand TNC possible. Cette seconde hypothèse, appelée pire des cas statistique, est très pessimiste et conduit à la borne supérieure du TNC. Dans la zone de conformité définie en Section 2.4, un lot suivant la première hypothèse serait situé dans la zone supérieure centrale alors qu'un lot suivant la seconde serait situé dans le coin inférieur droit ou gauche.

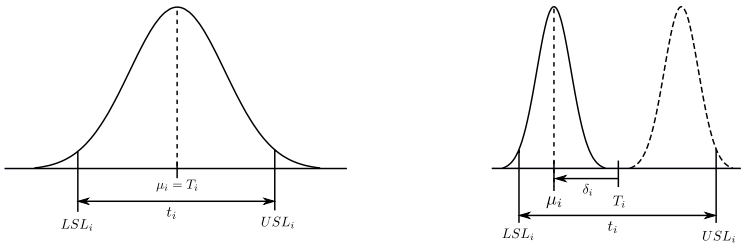


FIGURE 3.5 – A gauche : hypothèse 1. La moyenne de la dimension X_i est égale à la valeur nominale. L'écart-type est maximal. A droite : hypothèse 2. Le décalage de moyenne de la dimension X_i est maximal alors que l'écart-type est minimal. Deux sens de décalages de moyenne sont envisagés.

X	**T**	**t**	$\mathbf{C_p^{(e)}}$	$\mathbf{C_{pk}^{(e)}}$	$\mathbf{C_p^{(max)}}$
X_1	0.7	0.1	1	1	2
X_2	1.35	0.1	1.67	1.33	2
X_3	3	0.2	1.67	1.33	2
X_4	2.4	0.1	1	1	2
X_5	0.955	0.1	1.67	1.33	2
X_6	1.5	0.3	1.67	1.33	2
X_7	0.7	0.1	1	1	2
X_8	1.35	0.2	1.67	1.33	2
X_9	1.25	0.06	2	2	2

Tableau 3.2 – Caractéristiques des cotes du système d'essuyage VALEO. $\{X_2, X_3, X_5, X_6, X_8, X_9\}$ sont des dimensions critiques. Leurs exigences de capabilité sont plus sévères. Les niveaux de capabilité maximums $\mathbf{C_p^{(max)}}$ sont obtenus dans les conditions optimales de fabrication.

Les paramètres du cas d'étude industriel VALEO se trouvent dans le Tableau 3.2. Deux types de dimensions sont présentées : les classiques $\{X_1, X_4, X_7\}$ et les critiques possédant des exigences de capabilité plus sévères $\{X_2, X_3, X_5, X_6, X_8, X_9\}$. A partir de celles-ci, le TNC d'assemblage est calculé par les méthodes FORM système et MC. Pour FORM, les contraintes d'assemblage sont linéaires et les dimensions sont Gaussiennes, donc les indices de fiabilité sont calculés analytiquement. Les ré-

sultats des TNC suivant les hypothèses 1 et 2 sont reportés dans le Tableau 3.3. Ils sont accompagnés de leurs intervalles de confiance à 95%. Pour la méthode FORM système, cet intervalle provient de la méthode d'intégration numérique de Genz (voir Section 1.2.2).

Les temps de calcul pour les deux méthodes envisagées sont négligeables puisque les fonctions de performance sont analytiques. Dans ce cas précis, l'avantage principal de la méthode FORM système, qui est de nécessiter très peu d'appels aux fonctions de performance, n'est pas mis en valeur. La méthode des simulations de MC permet de valider les résultats obtenus par FORM système. C'est pourquoi un effort de calcul particulier lui a été alloué (10^{10} simulations). L'hypothèse pessimiste, conduisant à un TNC approximatif de 13 726 ppm contre 4 ppm dans le cas où les moyennes sont centrées, montre qu'il ne faut pas négliger l'impact des décalages de moyenne, même si le pire des cas statistique est évidemment très peu probable.

	Monte Carlo	**FORM système**
Hypothèse 1	[4.20 ; 4.28]	[3.55 ; 4.86]
Hypothèse 2	[13 724 ; 13 728]	[13 657 ; 13 779]

Tableau 3.3 – TNC d'assemblage calculés par méthode de Monte Carlo et FORM système pour deux hypothèses de modélisation des dimensions. Les résultats sont donnés sous forme d'intervalles de confiance à 95% en ppm.

Comme les pièces sont flexibles, un seuil de déformation égal à -0.1 est jugé réaliste par les concepteurs du mécanisme. Cependant, une étude plus rigoureuse de ces déformations pourrait être menée grâce un à module éléments-finis. En effet, en plus d'apporter un gain de précision dans la modélisation, elle permettrait d'illustrer plus clairement l'apport de la méthode FORM système par rapport à celle de MC. En effet, les fonctions seraient plus coûteuses à évaluer et pénaliseraient les simulations de MC au point de rendre la méthode inenvisageable. En revanche, comme FORM système ne nécessite que très peu d'appels aux fonctions de performance, le temps de calcul ne serait que très peu impacté. Cette nouvelle étude est au programme du projet ANR ATHOLA, ayant pour but entre autres de prolonger les travaux de cette thèse.

3.6.2 Débattement de contact RADIALL

Présentation du mécanisme. Le mécanisme étudié dans cette section est inspiré par un produit de la société RADIALL SA. Il s'agit du même type de connecteur électrique que celui présenté en Section 2.4.7.2. Contrairement à l'étude citée, les points de contact ne sont pas supposés connus. Il y en a six potentiels (représentés par des cercles numérotés sur la Figure 3.6), mais aucune hypothèse n'est faite sur la situation de points de contact privilégiée. A cause de la présence de jeux, la pièce cylindrique (1) est mobile alors que la pièce cylindrique (2) est fixe. La position de (1) est définie dans le plan grâce au vecteur des déplacements $\mathbf{d} = \{d_X, d_Y, d_\alpha\}$. Une symétrie axiale est prise en compte en contraignant d_α positif. Les dimensions $\mathbf{X}$ sont

modélisées par des variables Gaussiennes dont les caractéristiques sont répertoriées dans le Tableau 3.4.

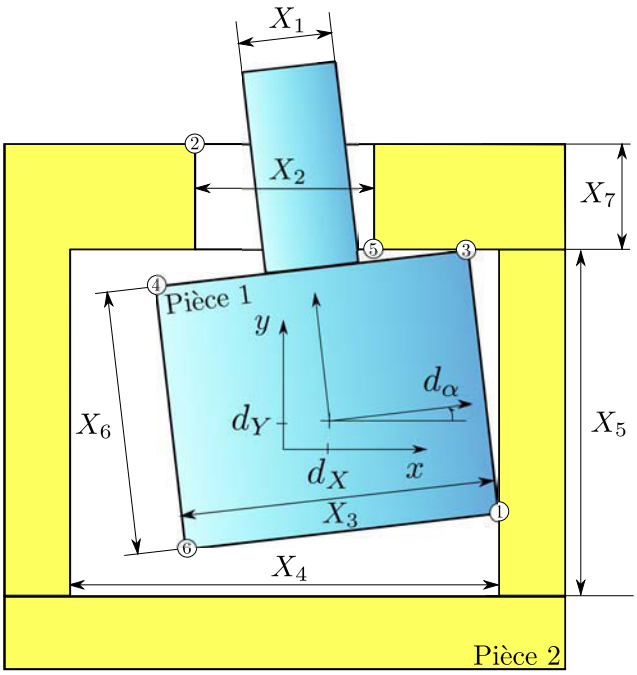


FIGURE 3.6 – Modèle plan d'un connecteur électrique RADIALL. Les jeux sont accentués sur la figure. La pièce cylindrique (1) est mobile alors que la pièce cylindrique (2) est fixe. Les cercles numérotés représentent les points de contact potentiels.

Nom	Moyenne	Ecart-type
X_1	6	0.03
X_2	6.1	0.03
X_3	12	0.03
X_4	12.1	0.03
X_5	10.1	0.03
X_6	10	0.03
X_7	3	0.03

Tableau 3.4 – Caractéristiques de modélisation des dimensions Gaussiennes du connecteur électrique RADIALL.

TNC d'assemblage. Ce connecteur électrique peut être assemblé si les dimensions de la pièce (1) sont plus petites que leurs correspondantes de la pièce (2) (la base de la pièce (2) est supposée dévissable), c'est à dire si les contraintes suivantes

sont respectées :

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{X}) &= X_3 - X_4 \leq 0 \\ m_2(\mathbf{X}) &= X_1 - X_2 \leq 0 \\ m_3(\mathbf{X}) &= X_6 - X_5 \leq 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Le TNC d'assemblage peut être calculé par la méthode FORM système, comme expliqué en Section 3.5 :

$$\begin{aligned} \mathrm{TNC}_a &= 1 - \mathrm{Prob}\left((m_1(\mathbf{X}) \leq 0) \bigwedge (m_2(\mathbf{X}) \leq 0) \bigwedge (m_3(\mathbf{X}) \leq 0)\right) \\ &= 1 - \Phi_3(-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3, [\boldsymbol{\rho}]) \end{aligned} \tag{3.24}$$

où Φ_3 est la fonction de répartition de la loi Gaussienne en dimensions 3. Comme les fonctions sont indépendantes, la matrice de covariance $[\rho]$ est égale à la matrice identité. Alors, $\Phi_3(-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3, [\boldsymbol{\rho}]) = \Phi(-\beta_1)\Phi(-\beta_2)\Phi(-\beta_3)$, avec :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\mu_{X_3} - \mu_{X_4}}{\sqrt{\sigma_{X_4}^2 + \sigma_{X_3}^2}} = -2.357 \\ \beta_2 &= \frac{\mu_{X_1} - \mu_{X_2}}{\sqrt{\sigma_{X_2}^2 + \sigma_{X_1}^2}} = -2.357 \\ \beta_3 &= \frac{\mu_{X_6} - \mu_{X_5}}{\sqrt{\sigma_{X_5}^2 + \sigma_{X_6}^2}} = -2.357 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Les indices de fiabilité sont ici négatifs à cause de la convention adoptée pour le respect des exigences d'assemblage. Cela n'a aucune incidence sur le résultat final. Finalement,

$$\mathrm{TNC}_a = 1 - \Phi(2.357)\Phi(2.357)\Phi(2.357) \approx 27380 \text{ ppm} \tag{3.26}$$

Méthode de résolution	**TNC_a en ppm (IC à 95%)**	**Nombre d'appels (Temps de calcul)**
Simulations de MC	27490 (205)	10^7 calculs (21 secondes)
FORM système	27380	Calcul analytique instantané

Tableau 3.5 – Résultats du problème d'assemblage du connecteur électrique RADIALL. Les TNC d'assemblage sont donnés avec leur intervalle de confiance. Le nombre d'appels aux fonctions de performances ainsi que les temps de calcul associés sont aussi indiqués.

Le Tableau 3.5 montre les résultats des TNC_a calculés par les méthodes des simulations de MC et FORM système. Les deux méthodes donnent des résultats comparables pour un temps de calcul très court car le problème d'assemblage est trivial.

TNC fonctionnel. En ce qui concerne le problème fonctionnel, le domaine de non-interférence $\Omega(\mathbf{X})$ est déterminé géométriquement en considérant chaque point de contact potentiel, chacun impliquant une contrainte. Il dépend des dimensions du mécanisme et encadre les positions et orientations admissibles de la pièce (1) :

$$\begin{aligned}
g_1(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= \frac{X_6}{2}\sin(d_\alpha) + \frac{X_3}{2}\cos(d_\alpha) - \frac{X_4}{2} + d_X \leq 0 \\
g_2(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= X_7\tan(d_\alpha) + \frac{X_1}{2\cos(d_\alpha)} + \left(\frac{X_5}{2} - d_Y\right)\tan(d_\alpha) - d_X - \frac{X_2}{2} \leq 0 \\
g_3(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= \frac{X_3}{2}\sin(d_\alpha) + \frac{X_6}{2}\cos(d_\alpha) - \frac{X_5}{2} + d_Y \leq 0 \\
g_4(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= \frac{X_6}{2}\sin(d_\alpha) + \frac{X_3}{2}\cos(d_\alpha) - \frac{X_4}{2} - d_X \leq 0 \\
g_5(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= \frac{X_1}{2\cos(d_\alpha)} + \left(\frac{X_5}{2} - d_Y\right)\tan(d_\alpha) + d_X - \frac{X_2}{2} \leq 0 \\
g_6(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= \frac{X_3}{2}\sin(d_\alpha) + \frac{X_6}{2}\cos(d_\alpha) - \frac{X_5}{2} - d_Y \leq 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

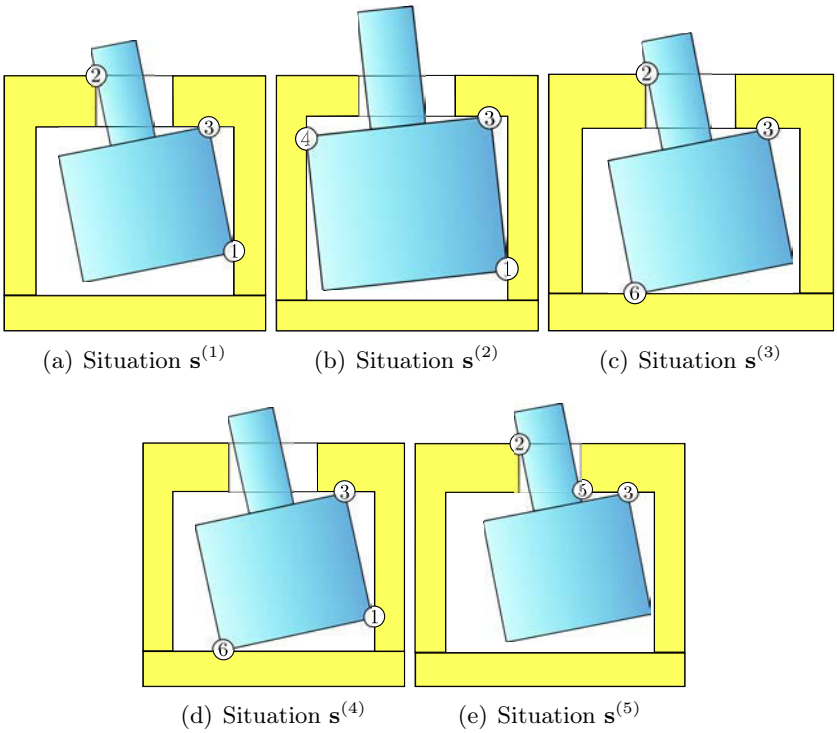
$$\Omega(\mathbf{X}) : \mathbf{d} / \bigwedge_{i=1}^{6} g_i(\mathbf{X},\mathbf{d}) \leq 0$$

La caractéristique fonctionnelle est $Y = d_\alpha^{(\max)}$. Pour assurer une connexion électrique correcte, $d_\alpha^{(\max)}$, qui correspond au plus grand angle d_α admis par la géométrie du mécanisme, ne doit pas excéder un seuil $\text{EF}_{\max} = 0.01$ rad. L'EF est donc :

$$d_\alpha^{(\max)}(\mathbf{X}) = \max_{\mathbf{d}\in\Omega(\mathbf{X})}(d_\alpha) \leq \text{EF}_{\max} \tag{3.28}$$

Pour calculer TNC_f avec l'approche fiabiliste système, la tâche préliminaire est de linéariser les équations de non-interférence $g(\mathbf{X},\mathbf{d})$ des Equations 3.27 dans l'espace des déplacements $\mathbf{d}$ en utilisant un développement de Taylor autour d'un point particulier : $(d_X = 0, d_Y = 0, d_\alpha = \text{EF}_{\max})$. Ce point est pertinent car $\text{EF}_{\max}$ est l'angle pour lequel la caractéristique fonctionnelle est critique.

Dans le plan, une situation de points de contact présente 3 points de contact (car il n'y a que 3 degrés de liberté à supprimer) parmi les six potentiels ($N_c = 6$ dans le cas présent, voir Figures 3.6 et 3.7). En conséquence, il existe $N_s = \text{C}_6^3 = 20$ situations de points de contact potentielles. Cinq parmi celles-ci sont identifiées comme dominantes dans ce cas particulier (Figure 3.7) : $\mathbf{s}^{(1)} = \{1,2,3\}$, $\mathbf{s}^{(2)} = \{1,3,4\}$, $\mathbf{s}^{(3)} = \{2,3,6\}$, $\mathbf{s}^{(4)} = \{1,3,6\}$ et $\mathbf{s}^{(5)} = \{2,3,5\}$ où les numéros sont définis en Figure 3.6. Elles ont été obtenues en résolvant 100 problèmes d'optimisation dans le



(a) Situation $\mathbf{s}^{(1)}$ (b) Situation $\mathbf{s}^{(2)}$ (c) Situation $\mathbf{s}^{(3)}$

(d) Situation $\mathbf{s}^{(4)}$ (e) Situation $\mathbf{s}^{(5)}$

FIGURE 3.7 – Représentation des cinq situations dominantes de points de contact de l'application "Débattement de contact RADIALL". Les coordonnées de la pièce mobile sont notées $\hat{\mathbf{d}}^{(i)}$, $i = 1$ à 5. Pour chacune, trois fonctions de non-interférence, relatives aux points de contact, sont égales à 0. Ces situations sont toutes admissibles puisqu'il n'y a pas pénétration de matière, ce qui veut dire que toutes les contraintes de non-interférence sont respectées. Pour l'ensemble des schémas, différentes géométries $\mathbf{X}$ sont considérées car toutes les situations ne sont pas admissibles pour une même géométrie.

domaine de variation des dimensions, comme expliqué en Section 3.5. Pour chaque situation dominante, un système d'équations linéaire est résolu afin d'obtenir les coordonnées $\hat{\mathbf{d}}$. Par exemple, les coordonnées $\hat{\mathbf{d}}^{(1)}$ de la première situation de points de contact sont obtenues en résolvant le système suivant :

$$\hat{\mathbf{d}}^{(1)}(\mathbf{X}) = \mathbf{d} / \begin{cases} \tilde{g}_1(\mathbf{X}, \mathbf{d}) = 0 \\ \tilde{g}_2(\mathbf{X}, \mathbf{d}) = 0 \\ \tilde{g}_3(\mathbf{X}, \mathbf{d}) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

A partir de ces coordonnées, cinq fonctions de performance L_i sont définies :

$$L_i(\mathbf{D}) = \mathrm{EF}_{\max} - Y(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{d}}^{(i)}(\mathbf{X})), i = 1 \text{ à } 5 \tag{3.30}$$

Ces fonctions, bien que provenant d'un système d'équations linéaire, ne sont linéaires ni dans l'espace des variables physiques $\mathbf{X}$ ni dans l'espace des variables standard

U dans lequel la méthode FORM s'applique (voir Section 1.2.1). Dans ce cas, la méthode FORM remplace les états-limites non-linéaires par des hyper-plans au point de défaillance le plus probable. L'association de ces situations de points de contact, qui sont interdépendantes, est traitée par la méthode FORM système dans le but de calculer le TNC fonctionnel TNC_f. L'expression suivante, utilisant la fonction de répartition de la loi multi-Gaussienne Φ_n, permet le calcul de ce TNC, présenté dans sa forme générale dans l'Equation 3.14 :

$$\begin{aligned}\mathrm{TNC}_f &\approx \sum_{i=1}^{5} \Phi_4\left(-\boldsymbol{\beta}^{(i)}, [\boldsymbol{\rho}]^{(i)}\right) \\ &- \sum_{i<j} \Phi_8\left(-\boldsymbol{\beta}^{(ij)}, [\boldsymbol{\rho}]^{(ij)}\right) \\ &+ \ldots \\ &+ (-1)^{N_{ds}-1}\Phi_{20}\left(-\boldsymbol{\beta}^{(ij\ldots N_{ds})}, [\boldsymbol{\rho}]^{(ij\ldots N_{ds})}\right)\end{aligned} \tag{3.31}$$

où $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(ij)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(ij\ldots N_{ds})}$, $[\boldsymbol{\rho}]^{(i)}$, $[\boldsymbol{\rho}]^{(ij)}$ et $[\boldsymbol{\rho}]^{(ij\ldots N_{ds})}$ sont les vecteurs d'indices de fiabilité et les matrices de corrélation associées respectivement à la $i^{\text{ème}}$ situation de points de contact, les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ situations et les N_{ds} situations ensemble. Par exemple, le premier terme de l'Equation 3.31 utilise Φ_4 car il y a une intersection de $N_c - 3 + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$ évènements dans le premier terme de l'Equation 3.14 ($N_c - 6 + 1$ en 3 dimensions mais seulement $N_c - 3 + 1$ dans le cas du modèle plan). $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ et $[\boldsymbol{\rho}]^{(i)}$ sont respectivement un vecteur et une matrice carrée de dimension 4.

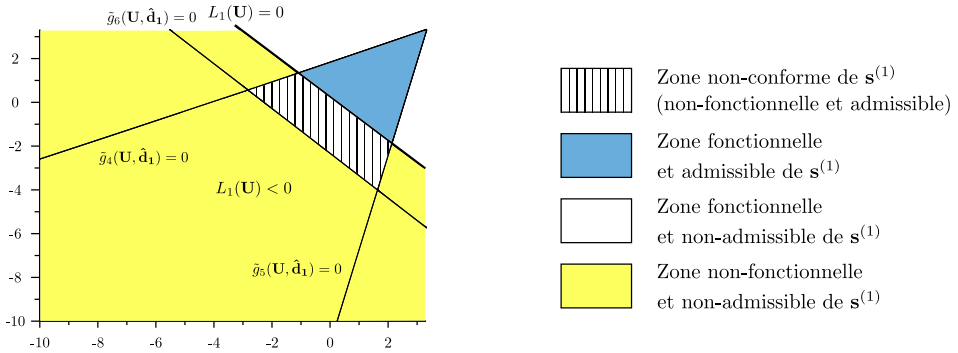


FIGURE 3.8 – Représentation de la zone de non-conformité pour la première situation de points de contact dans l'espace standard U_1, U_2. Les autres variables sont fixées.

Pour aider à la compréhension, la Figure 3.8 montre différents domaines dont celui non-fonctionnel (et admissible) au regard de la première situation de points de contact identifiée dans l'espace (U_1, U_2) (U_3, U_4, U_5, U_6 et U_7 sont fixés). La Figure 3.9 montre la zone non-fonctionnelle totale dans le même espace. Cette dernière est l'union des zones non-fonctionnelles relatives à chaque situation dominante. Certaines droites sont manquantes car elles correspondent à des situations irréalistes. Certaines sont confondues avec d'autres. Il est intéressant de noter que la plupart

des zones ont des limites communes et sont disjointes. Néanmoins, la troisième et la quatrième ont une intersection. Cette figure aide à comprendre la nécessité de l'utilisation de la formule de Poincaré pour calculer TNC_f (Equation 3.31).

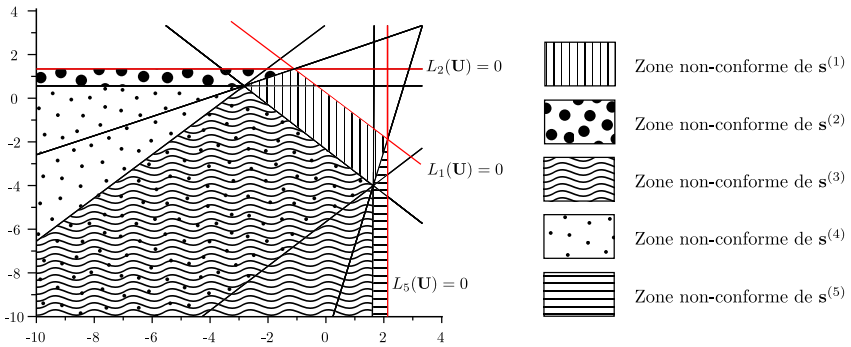


FIGURE 3.9 – Représentation de la zone de non-conformité totale dans l'espace standard U_1, U_2. Les autres variables sont fixées. Les zones de conformité des zones 3 et 4 ont une intersection commune, prise en compte grâce à la formule de Poincaré.

Méthode de résolution	**$\mathrm{TNC_f}$ en ppm (IC à 95 %)**	**Nombre de calculs (Temps de calcul)**
MC avec contraintes non-linéaires	47329 (257)	10^7 calculs d'optimisation non-linéaire (3 jours)
MC avec contraintes linéaires	47202 (312)	10^7 calculs d'optimisation linéaire (10 heures)
FORM système avec contraintes linéaires	47245 (225)	20 résolutions FORM + 31 estimations de Φ_n (10 minutes)
Borne supérieure FORM système	60940 (136)	5 résolutions FORM (3 secondes)

Tableau 3.6 – Résultats du problème fonctionnel du connecteur électrique RADIALL. Les TNC fonctionnel sont donnés avec leur intervalle de confiance. Le nombre d'appels aux fonctions de performances ainsi que les temps de calcul associés sont aussi indiqués.

L'objectif de cette application est de montrer que l'analyse des tolérances (en terme de fonctionnalité) peut être menée pour un coût de calcul réduit sur des mécanismes simples (dont le comportement est faiblement non-linéaire) avec jeux grâce à une approche système. Différentes méthodes de résolutions sont proposées, basées sur les deux approches présentées dans les sections précédentes, utilisant des équations de non-interférence linéaires et non-linéaires. Les résultats sont donnés en ppm dans le Tableau 3.6 avec leurs intervalles de confiance à 95%. $N_{sim} = 10^7$ simulations de MC sont utilisées, ce qui donne un intervalle de confiance de TNC_f de largeur approximativement égal à 300 ppm. Les résultats de la méthode FORM

système ont aussi leur intervalle de confiance à 95% à cause de la méthode de Genz. La faible différence entre les deux résultats de MC montre que la linéarisation des fonctions de non-interférence n'a pas d'impact mesurable sur TNC_f. De plus, les résultats de la méthode FORM système, très proches de ceux de MC (Tableau 3.6), prouvent que la linéarisation inhérente à la méthode FORM n'a pas d'impact non plus. Toutes ces remarques montrent que l'approche par méthode FORM système permet de traiter ce type de problèmes d'analyse des tolérances pour un coût de calcul très faible (10 minutes contre 10 heures par l'approche globale).

Pour donner un ordre d'idée du poids de chaque situation de points de contact dans la non-fonctionnalité globale, des TNC individuels associés à chaque situation ont été calculés de la manière suivante :

$$\mathrm{TNC}_f^{(i)} \approx \mathrm{Prob}\left[(L_i(\mathbf{X}) < 0) \bigwedge_{j=1}^{3} \left(\tilde{g}_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right) \leq 0\right] \tag{3.32}$$

et les résultats sont :

$$\begin{gathered}\mathrm{TNC}_f^{(1)} = 30527(65)\ \mathrm{ppm}, \mathrm{TNC}_f^{(2)} = 1861(12)\ \mathrm{ppm}, \mathrm{TNC}_f^{(3)} = 13770(27)\ \mathrm{ppm} \\ \mathrm{TNC}_f^{(4)} = 14781(32)\ \mathrm{ppm}, \mathrm{TNC}_f^{(5)} = 1(0.01)\ \mathrm{ppm}\end{gathered} \tag{3.33}$$

Ces résultats montrent que presque toutes les situations identifiées jouent un rôle significatif dans le scénario de défaillance. Cela prouve que présupposer des points de contact dans l'étude d'un tel mécanisme, peut entraîner des erreurs non négligeables. A partir de ces résultats individuels, il est possible de calculer une borne supérieure à TNC_f, plus rapide et plus simple à obtenir, mais éloignée du résultat attendu dans ce cas :

$$\mathrm{TNC}_f \leq \sum_{i=1}^{N_{ds}} \mathrm{TNC}_f^{(i)} = 60940(136)\ \mathrm{ppm} \tag{3.34}$$

Il n'est généralement pas possible de prédire la différence entre cette borne supérieure et la valeur réelle de TNC_f.

3.6.3 Liaison glissière hyperstatique

Présentation du mécanisme. Le mécanisme étudié dans cette section semble un peu plus complexe que le précédent. Il s'agit d'une liaison glissière hyperstatique déjà présentée plusieurs fois dans la littérature par Ballu *et al.* (2008) et Wu *et al.* (2009). L'approche système est appliquée afin de calculer les TNC d'assemblage et fonctionnels de ce mécanisme. Cette liaison glissière est composée de deux arbres (3,4), d'un palier (1) et d'une autre pièce (2) (voir Figure 3.10). Les arbres sont liés à la pièce (2) par liaison encastrement. L'ensemble (2,3,4), afin de remplir la fonction usuelle d'une liaison glissière, est censé se déplacer principalement dans la direction horizontale, mais cette étude particulière porte sur son déplacement vertical uniquement. La pièce (1) est immobile alors que l'ensemble (2,3,4) est positionné dans

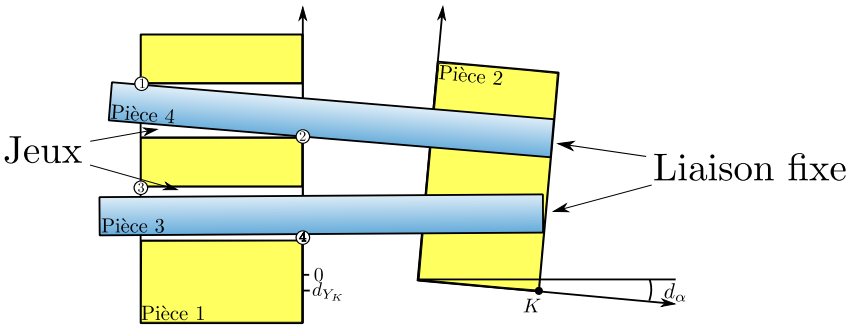


FIGURE 3.10 – Modèle de la liaison hyperstatique. Les jeux sont accentués pour faciliter la compréhension. Les points de contact potentiels sont numérotés de 1 à 4.

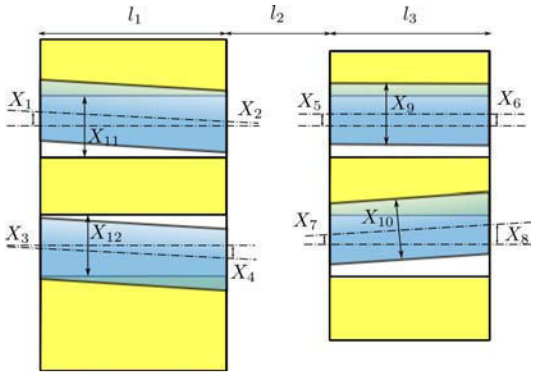


FIGURE 3.11 – Modèle de la liaison glissière hyperstatique. Les dimensions X_1 à X_8 sont définies au niveau des plans verticaux.

la position verticale grâce aux variables de déplacement $\mathbf{d} = \{d_{Y_K}, d_\alpha\}$ (voir Figure 3.10). Les longueurs l_1, l_2 et l_3 sont constantes et définissent la position horizontale des pièces (voir Figure 3.11). En raison de défauts de fabrication, les axes ne sont pas parallèles, leurs alésages non plus et leurs dimensions ne sont pas égales à leurs valeurs nominales. C'est pourquoi un ajustement glissant (présence de jeux) est tolérancé entre les arbres et les paliers afin de permettre le déplacement des pièces. Les dimensions $\mathbf{X}$ représentent les dimensions caractéristiques du mécanisme. X_1 à X_8 sont les distances entre les axes réels des cylindres mâles et femelles au niveau des plans verticaux des pièces (1) et (2). X_9 à X_{12} sont les diamètres des axes et paliers (voir Figure 3.11). Ces dimensions sont modélisées par des variables aléatoires Gaussiennes. Les caractéristiques de $\mathbf{X}$ et des longueurs l_1, l_2 et l_3 sont notées dans le Tableau 3.7.

Nom	Moyenne	Ecart-type
$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8$	0	0.022
X_9, X_{10}	79.78	0.022
X_{11}, X_{12}	80.22	0.022
l_1	300	/
l_2, l_3	200	/

Tableau 3.7 – Caractéristiques de modélisation des dimensions de la liaison glissière. l_1, l_2 et l_3 sont des variables déterministes.

TNC d'assemblage. Les contraintes d'assemblage du mécanisme, obtenues géométriquement sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
m_1(\mathbf{X}) &= 2X_1 - \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_3}X_5 - \left(2 - \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_3}\right)X_6 + X_9 - X_{11} \\
&- 2X_3 + \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_3}X_7 + \left(2 - \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_3}\right)X_8 + X_{10} - X_{12} \leq 0 \\
m_2(\mathbf{X}) &= -2X_1 + \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_3}X_5 + \left(2 - \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_3}\right)X_6 + X_9 - X_{11} \\
&+ 2X_3 - \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_3}X_7 - \left(2 - \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_3}\right)X_8 + X_{10} - X_{12} \leq 0 \\
m_3(\mathbf{X}) &= 2X_2 - \frac{2(l_2+l_3)}{l_3}X_5 - \left(2 - \frac{2(l_2+l_3)}{l_3}\right)X_6 + X_9 - X_{11} \\
&- 2X_4 + \frac{2(l_2+l_3)}{l_3}X_7 + \left(2 - \frac{2(l_2+l_3)}{l_3}\right)X_8 + X_{10} - X_{12} \leq 0 \qquad (3.35) \\
m_4(\mathbf{X}) &= -2X_2 + \frac{2(l_2+l_3)}{l_3}X_5 + \left(2 - \frac{2(l_2+l_3)}{l_3}\right)X_6 + X_9 - X_{11} \\
&+ 2X_4 - \frac{2(l_2+l_3)}{l_3}X_7 - \left(2 - \frac{2(l_2+l_3)}{l_3}\right)X_8 + X_{10} - X_{12} \leq 0 \\
m_5(\mathbf{X}) &= X_9 - X_{11} \leq 0 \\
m_6(\mathbf{X}) &= X_{10} - X_{12} \leq 0
\end{aligned}$$

Ces contraintes permettent aux arbres de pénétrer dans le palier sans déformation. Pour calculer TNC_a, une fois encore, les méthodes de simulations de MC et FORM système peuvent être utilisées directement, puisque la non-conformité ne dépend pas des positions des pièces. Les indices de fiabilité de la méthode FORM sont calculés analytiquement puisque les contraintes sont linéaires. Le Tableau 3.8 montre les résultats de TNC pour ce cas d'étude.

TNC fonctionnel. La fonctionnalité du mécanisme dépend de la position basse $\min(d_{Y_K})$ du point K, appartenant à la pièce (2), dans la position verticale (voir Figure 3.10). L'EF impose que cette position soit supérieure à 0.94 mm en dessous de sa position nominale : $\min(d_{Y_K}) \geq d_{Y_{K_{\min}}} = -0.94$. Pour calculer TNC_f, la tâche

Méthode de résolution	$\mathrm{TNC_a}$ en ppm (IC à 95%)	Nombre de calculs (Temps de calcul)
Simulations de MC	1567 (49)	10^7 calculs (2 minutes)
FORM système	1575 (73)	1 estimation de Φ_6 (2 secondes)

Tableau 3.8 – Résultats du problème d'assemblage de la liaison glissière. Les TNC d'assemblage sont donnés avec leur intervalle de confiance. Le nombre d'appels aux fonctions de performances ainsi que les temps de calcul associés sont aussi indiqués.

préliminaire est de constituer le domaine de non-interférence. Il y a quatre points de contact potentiels représentés sur la Figure 3.10. Chacun implique une contrainte :

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= d_{Y_K} + (l_1+l_2+l_3)d_\alpha + X_6 + \frac{X_9}{2} \\
&- \frac{X_6 - X_5}{l_3}(l_3+l_2+l_1) - X_1 - \frac{X_{11}}{2} \leq 0 \\
\tilde{g}_2(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= -d_{Y_K} - (l_2+l_3)d_\alpha - X_6 + \frac{X_9}{2} \\
&+ \frac{X_6 - X_5}{l_3}(l_3+l_2) + X_2 - \frac{X_{11}}{2} \leq 0 \\
\tilde{g}_3(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= d_{Y_K} + (l_1+l_2+l_3)d_\alpha + X_8 + \frac{X_{10}}{2} \\
&- \frac{X_8 - X_7}{l_3}(l_3+l_2+l_1) - X_3 - \frac{X_{12}}{2} \leq 0 \\
\tilde{g}_4(\mathbf{X},\mathbf{d}) &= -d_{Y_K} - (l_2+l_3)d_\alpha - X_8 + \frac{X_{10}}{2} \\
&+ \frac{X_8 - X_7}{l_3}(l_3+l_2) + X_4 - \frac{X_{12}}{2} \leq 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\Omega(\mathbf{X}) : \mathbf{d} / \bigwedge_{i=1}^{4} \tilde{g}_i(\mathbf{X},\mathbf{d}) \leq 0$$

Comme les déplacements sont très faibles, les contraintes sont linéarisées. Le TNC fonctionnel TNC_f est défini par :

$$\mathrm{TNC}_f \approx \mathrm{Prob}\left(\min_{\mathbf{d}\in\Omega(\mathbf{X})} (d_{Y_K}(\mathbf{X},\mathbf{d})) - d_{Y_{K_{\min}}} < 0 \right) \tag{3.37}$$

Ce TNC peut être calculé par l'approche globale ou par l'approche système si les situations de points de contact sont correctement définies. Comme Ballu *et al.* (2008) le font, il est aisé de les identifier en utilisant les numéros définis sur la Figure 3.10 : $\mathbf{s}^{(1)} = \{1,2\}$, $\mathbf{s}^{(2)} = \{3,4\}$, $\mathbf{s}^{(3)} = \{1,4\}$ et $\mathbf{s}^{(4)} = \{2,3\}$. Dans ce cas, $N_{ds} = N_s = 4$,

$N_c = 4$. Alors, la formulation système de TNC_f est la suivante :

$$\mathrm{TNC}_f \approx \mathrm{Prob}\left(\bigvee_{i=1}^{4}\left[(L_i(\mathbf{X}) < 0)\bigwedge_{j=1}^{2}\left(g_{\bar{\mathbf{s}}_j^{(i)}}\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{d}}^{(i)}\right) \leq 0\right)\right]\right) \tag{3.38}$$

où $L_i(\mathbf{X}) = d_{Y_K}\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{d}}^{(i)}(\mathbf{D})\right) - d_{Y_{K_{\min}}}$. Les résultats des TNC fonctionnels sont donnés par le Tableau 3.9. Comme dans l'application précédente "Débattement de contact RADIALL", chaque méthode donne des résultats comparables, mais le coût de calcul des simulations de MC est significativement supérieur à celui de la méthode FORM système. Cette application confirme la capacité de l'approche système par méthode FORM à traiter ce type de problèmes très efficacement.

Méthode de résolution	**$\mathrm{TNC_f}$ en ppm (IC à 95%)**	**Nombre d'appels (Temps de calcul)**
Simulations de MC	556 (30)	10^7 calculs d'optimisation linéaire (28 heures)
FORM système	553 (4)	12 résolutions FORM + 15 estimations de Φ_n (5 minutes)
Borne supérieure FORM système	558 (4)	4 résolutions FORM (3 secondes)

Tableau 3.9 – Résultats du problème fonctionnel de la liaison glissière. Les TNC fonctionnel sont donnés avec leur intervalle de confiance. Le nombre d'appels aux fonctions de performances ainsi que les temps de calcul associés sont aussi indiqués.

Le TNC fonctionnel relatif à chaque situation $\mathrm{TNC}_f^{(i)}, i = 1$ à 4 peut être calculé très simplement, et leur somme donne une borne supérieure du TNC très proche du résultat attendu :

$$\begin{aligned} \mathrm{TNC}_f^{(1)} &= 148(1), \mathrm{TNC}_f^{(2)} = 131(1), \mathrm{TNC}_f^{(3)} = 148(1), \mathrm{TNC}_f^{(4)} = 131(1) \\ \mathrm{TNC}_f &\approx \sum_{i=1}^{4} \mathrm{TNC}_f^{(i)} = 558(4) \text{ ppm} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Cela montre que les situations de points de contact sont indépendantes dans ce cas. Malheureusement, ce type de conclusion ne peut être faite qu'après une étude approfondie du mécanisme dans la plupart des cas. De même, il n'est pas possible de prédire la différence entre la valeur de la borne supérieure calculé par méthode FORM système et la valeur réelle de TNC_f.

3.7 Conclusion

Un des objectifs de cette thèse est de développer des méthodes d'analyse des tolérances adaptées aux mécanismes avec jeux. Dans cette entreprise, les jeux re-

présentent la difficulté majeure puisqu'ils ne peuvent pas être modélisés par des variables aléatoires. Ce point complique fortement la résolution du problème. De plus, ce type de mécanisme est spécifique puisque leur non-conformité est causée soit par un défaut d'assemblage, soit par un défaut de fonctionnalité. Les applications présentées en fin de chapitre montrent que les problèmes d'assemblage peuvent souvent être ramenés à des problèmes de fiabilité système classiques alors que les problèmes fonctionnels sont complexes à cause de la présence de jeux.

A propos des problèmes fonctionnels, une approche fiabiliste système basée sur une décomposition par situations de points de contact est proposée. S'appuyant sur cette approche, la méthode FORM système permet de calculer le TNC fonctionnel TNC_f. L'association des différentes situations dépendantes entre elles est gérée grâce à la méthode FORM système qui utilise la fonction de répartition de la loi Gaussienne standard en dimensions n Φ_n, évaluée par la méthode de Genz. La méthodologie proposée est comparée avec une approche globale basée sur des simulations de MC et de l'optimisation, et déjà utilisée dans la littérature. Les différentes applications montrent que les deux approches donnent des résultats équivalents. L'approche fiabiliste utilisant FORM système, contrairement à l'approche globale de référence, permet le calcul du TNC fonctionnel de mécanismes avec jeux pour un coût de calcul très bas (quelques minutes comparées à plusieurs heures). Cette méthodologie est remarquablement efficace et peut être appliquée aux mécanismes simples (fonctions faiblement non-linéaires) avec jeux dont les situations de points de contact sont identifiables. **Son efficacité est liée à la faible non-linéarité des fonctions de non interférence habituellement retrouvées dans le contexte de l'analyse des tolérances.** De fait, l'approximation induite par leur linéarisation est négligeable. Néanmoins, l'approche globale reste intéressante car elle permet de traiter les cas les plus complexes.

Dans de futurs travaux, il serait intéressant de traiter des mécanismes plus complexes dont le comportement mécanique est régi par des fonctions fortement non-linéaires. Les limites de l'approche système pourraient être atteintes et l'utilisation de l'approche globale serait envisagée avec une stratégie de réduction de temps de calcul par métamodèles par exemple. Il s'agit d'un des objectifs du projet ANR ATHOLA.

Synthèse de chapitre

Objectifs. Développer une méthodologie économique permettant l'analyse de tolérances de mécanismes avec jeux dans un contexte bidimensionnel ou tridimensionnel. En complément des problèmes de fonctionnalité, ce type de mécanisme engendre des problèmes d'assemblage qui doivent être considérés.

Méthodologie. Les jeux, ne peuvent pas être modélisés par des variables aléatoires, ce qui empêche l'utilisation directe des méthodes fiabilistes. La méthodologie proposée contourne le problème en décomposant le scénario de non-conformité global en situations de points de contacts, indépendantes des jeux. La méthode FORM système permet alors le calcul des TNC d'assemblage et fonctionnels.

Principaux résultats. Les problèmes d'assemblage peuvent généralement être formulés indépendamment des jeux, ce qui simplifie leur résolution. La méthodologie développée permet le calcul du TNC fonctionnel de manière très économique par rapport aux méthodes évoquées dans la littérature, basées sur les simulations de Monte Carlo. En revanche, elle n'est pas viable lorsque le comportement du mécanisme est fortement non-linéaire.

Productions scientifiques :

- P. BEAUCAIRE, N. GAYTON, E. DUC, M. LEMAIRE : Statistical tolerance analysis of a mechanism with gaps based on system reliability methods. *13ème colloque national AIP PRIMECA 2012.*, Mont Dore, France.
- P. BEAUCAIRE, N. GAYTON, E. DUC, M. LEMAIRE : Statistical tolerance analysis of a mechanism with gaps based on system reliability methods. *12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing 2012.* Huddersfield, UK.
- A.J. QURESHI, J.-Y. DANTAN, V. SABRI, N. GAYTON, P. BEAUCAIRE : A statistical tolerance analysis approach for over-constrained mechanism based on optimization and Monte Carlo simulation. *Computer Aided Design*, 133-142 : 44(2), 2012.
- P. BEAUCAIRE, N. GAYTON, E. DUC, J.-Y. DANTAN : Statistical tolerance analysis of a hyperstatic mechanism, using system reliability methods. *Computers and Industrial Engineering*, 1118-1127 : 63, 2012.
- P. BEAUCAIRE, N. GAYTON, E. DUC, J.-Y. DANTAN : Statistical tolerance analysis of over-constrained mechanisms using system reliability methods. *Computer Aided Design.* En cours de révision.

Chapitre 4

Analyse de sensibilité et synthèse des tolérances

Sommaire

4.1 Introduction **103**
4.2 L'analyse de sensibilité **103**
4.2.1 Principales méthodes de sensibilité 104
4.2.2 Les sensibilités au service de la prise de décision 105
4.2.2.1 Gestion des intervalles de tolérance 106
4.2.2.2 Gestion des lots non-conformes 109
4.2.2.3 Identification des Key-Characteristics 112
4.2.3 Conclusion sur l'analyse de sensibilité 113
4.3 Synthèse des tolérances **114**
4.3.1 Partitionnement de l'exigence fonctionnelle de Y 114
4.3.2 Optimisation d'une fonction coût 116
4.3.2.1 Description de différents schémas d'optimisation . . 116
4.3.2.2 Formulation retenue 119
4.3.2.3 Méthode de calcul proposée. 120
4.3.3 Applications 121
4.3.3.1 Mécanisme d'embrayage 121
4.3.3.2 Débattement de contact RADIALL 125
4.3.4 Conclusion sur la synthèse des tolérances 128
Synthèse de chapitre **130**

Notations spécifiques

Y	Variable de sortie, résultante de chaîne de cotes.
$\mathbf{X}$	Vecteur des dimensions (ou cotes), modélisées par des variables aléatoires.
n	Taille du vecteur $\mathbf{X}$.
S_{x_i}	Indice de sensibilité locale par rapport à la variable x_i.
E_{x_i}	Indice d'élasticité locale par rapport à la variable x_i.
$\mathbf{t}$	Vecteur des intervalles de tolérance des cotes $\mathbf{X}$.
$\boldsymbol{\delta}$	Vecteur des décalages de moyenne des dimensions $\mathbf{X}$.
$\boldsymbol{\sigma}$	Vecteur des écarts-types des dimensions $\mathbf{X}$.
$\mathrm{EF}_{\min}$, $\mathrm{EF}_{\max}$	Bornes respectivement inférieures et supérieures de l'exigence fonctionnelle.
δ_Y	Décalage de moyenne de Y.
σ_Y	Ecart-type de Y.
μ_Y	Moyenne de Y.
$\mathbf{a}$	Vecteur des coefficients linéaires de la chaîne de cotes.
Φ	Fonction de répartition de la loi Gaussienne standard.
ϕ	Densité de probabilité de la loi Gaussienne standard.
$\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{e})}, \mathbf{C}_{\mathbf{pk}}^{(\mathbf{e})}$	Vecteur des exigences de capabilité des dimensions $\mathbf{X}$.
$\mathbf{C}_{\mathbf{p}}, \mathbf{C}_{\mathbf{pk}}$	Vecteur des indices de capabilité des dimensions $\mathbf{X}$.
$\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{(\max)}$	Vecteur des niveaux maximums de capabilité.
C_t	Coût total de production.
C_f	Coût de fabrication.
C_{nc}	Coût de non-conformité.
a_{nc}	Coefficient de coût de non-conformité.
$\mathbf{a_f}$	Vecteur des coefficients de coût de fabrication.
$\mathbf{t}^*$	Vecteur des intervalles de tolérance optimums.

4.1 Introduction

L'analyse des tolérances, largement traitée dans les Chapitres 2 et 3 permet d'avoir une vue d'ensemble sur la capacité d'un mécanisme à remplir sa fonction, par le calcul du TNC notamment. Il s'agit en quelques sortes d'une phase de vérification. Plusieurs questions se posent en amont et en aval :

- Comment déterminer les intervalles de tolérance (IT) permettant d'obtenir un mécanisme fonctionnel avec un certain niveau de TNC ?
- Si le TNC visé n'est pas atteint, quel IT modifier afin de l'obtenir ?

Derrière ces questions se pose la notion d'importance des cotes, qui peut être caractérisée par différents critères. Dans le cas le plus basique, la cote la plus importante est celle qui a le plus d'influence sur le TNC. En réalité, d'autres critères plus subtils peuvent être choisis en complément. Par exemple, le coût de fabrication est un critère déterminant dans la conception d'un mécanisme. L'analyse des sensibilités et la synthèse des tolérances ont un objectif commun : celui d'identifier les cotes qui ont le plus d'importance vis-à-vis de la conception. Ces deux outils sont par ailleurs intimement liés puisque des calculs de sensibilités sont parfois nécessaires pour mener des calculs de synthèse des tolérances.

La première partie du chapitre est consacrée à une revue bibliographique succincte concernant l'analyse des sensibilités. Différents indices sont proposés, chacun répondant à une problématique concrète afin d'aider à la prise de décision. Il s'agit là d'accepter ou non des dérogations sur les exigences de fabrication de cotes plus ou moins importantes. De plus, ces indices permettent d'identifier les cotes " Key Characteristics " qui doivent faire l'objet d'une surveillance particulière dans la phase de fabrication, de part leur influence importante sur le TNC. Dans la seconde partie du chapitre, traitant de la synthèse des tolérances, une approche basée sur les méthodes semi-probabilistes d'analyse des tolérances est décrite, permettant de réaliser très simplement une pré-conception. Afin de réaliser une synthèse des tolérances plus complète, un problème d'optimisation fiabiliste est proposé. La fonction à minimiser est la somme du coût de fabrication et du coût de non-conformité des pièces. Une des contraintes est un TNC seuil à ne pas dépasser. La méthode développée est illustrée sur plusieurs applications académiques et industrielles pour lesquelles une conception optimisée est obtenue en un temps de calcul raisonnable.

4.2 L'analyse de sensibilité

La première partie de cette section vise à présenter les principaux types de méthodes d'analyse de sensibilité ainsi que leurs utilisations dans le cadre du tolérancement. Dans la seconde partie, des indices de sensibilité locaux sont proposés afin d'aider à la prise de décision dans l'entreprise.

4.2.1 Principales méthodes de sensibilité

Soit un modèle mathématique f, fonction de n variables d'entrée rassemblées dans le vecteur $\mathbf{x}$, de variable de sortie notée Y :

$$Y = f(\mathbf{x}) \tag{4.1}$$

Une analyse de sensibilité permet de déterminer l'influence d'une variable d'entrée sur la sortie du modèle. Comme l'indique Jacques (2005), il est possible de regrouper les méthodes d'analyse de sensibilité en trois classes : les méthodes de criblage, les méthodes locales et les méthodes globales.

Méthodes de criblage. Les méthodes de criblage (screening) (Saltelli *et al.*, 2004) sont qualitatives ; elles permettent de hiérarchiser les variables d'entrée selon leur influence sur le modèle pour un coût de calcul très faible. Lorsqu'un modèle comprend un très grand nombre de variables d'entrée, elles permettent d'identifier rapidement un lot de variables peu influentes sur la sortie. Elles réduisent ainsi la complexité du modèle et sont donc utiles au préalable de l'utilisation de méthodes plus complexes et coûteuses. La méthode de criblage la plus connue est celle de Morris, qui utilise une approche OAT (One-factor-At-a-Time) en perturbant chaque variable individuellement.

Méthodes de sensibilité locales. La méthode d'analyse de sensibilité locale la plus répandue est basée sur les dérivées partielles du modèle. Chaque variable est perturbée individuellement (approche OAT) autour d'un point $\mathbf{x}^0$ et son influence est observée sur la sortie Y. Cela revient à calculer les indices de sensibilité locale pour $i = 1$ à n :

$$S_{x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} \tag{4.2}$$

Ces calculs peuvent être analytiques ou réalisés par différences finies. Par exemple, il est possible dans le contexte du tolérancement de calculer les sensibilités du TNC par rapport aux intervalle de tolérance identifiées par le vecteur $\mathbf{t}$:

$$S_{t_i} = \frac{\partial \mathrm{TNC}(\mathbf{t}^0)}{\partial t_i} \tag{4.3}$$

Si $S_{t_3} = 10$, cela signifie qu'une augmentation de l'intervalle de tolérance t_3 de 1 mm augmente le TNC de 10 ppm. Comme expliqué en Section 1.2.1, il est parfois recommandé pour des raisons d'interprétation de calculer les indices d'élasticité. Il s'agit des sensibilités normées notées de la manière suivante :

$$E_{t_i} = S_{t_i} \frac{\mathbf{t}^0}{\mathrm{TNC}(\mathbf{t}^0)} \tag{4.4}$$

Si $E_{t_3} = 10$, cela signifie qu'une augmentation de l'intervalle de tolérance d'1% augmente le TNC de 10%. L'utilisation des élasticités ou des sensibilités dépend du

contexte. Par exemple, en phase de détermination des IT, un fabricant peut réclamer un dixième de millimètre plutôt que 5% d'augmentation ; la notion de sensibilités est alors préférée.

Des indices de sensibilité locaux fiabilistes existent, notamment des facteurs d'importance fiabilistes basés sur la méthode FORM (voir Section 1.2.1). Parmi les produits de l'analyse fiabiliste figurent les cosinus directeurs qui sont les sensibilités locales (au point de défaillance le plus probable) de l'indice de fiabilité β par rapport aux variables d'entrée dans l'espace standard. A partir de ceux-ci, toutes sortes d'informations peuvent être obtenues. Swan et Savage (1998) calculent les sensibilités du TNC de cette manière.

Ces méthodes sont quantitatives car elles permettent, contrairement aux méthodes de criblage, de donner un ordre de grandeur de l'influence des entrées sur la sortie. Cependant, du fait de leur caractère local, ces indices ne délivrent une information pertinente qu'aux alentours du point $\mathbf{x^0}$.

Méthodes de sensibilité globales. Comme l'indique Iooss (2010), afin de pallier aux limites des méthodes locales (hypothèses de linéarité et de normalité des variables aléatoires, variations locales...), une nouvelle génération de méthodes s'est développée. Par opposition aux méthodes locales, elles ont été dénommées globales car elles prennent en compte la variabilité des entrées sur leurs domaines de variation tout entier. Il s'agit là aussi de méthodes quantitatives.

Parmi celles-ci, les plus connues sont celles basées sur la décomposition de la variance. Elle sont utilisées lorsque les entrées et la sortie du modèle sont stochastiques. Suivant les hypothèses du modèle mathématique, plusieurs indices existent : des coefficients de régression standard (SRC) jusqu'aux indices de Sobol (1993). Ces indices expriment la part de la variance de la variable de sortie due aux variances des variables d'entrée et ont l'avantage d'être relativement faciles et rapides à calculer. En revanche, ils ne s'intéressent qu'à la variance, un des moments statistiques nécessaires à la description d'une variable aléatoire. Ces indices ne donnent d'information que sur la dispersion de la sortie. Dans le cadre de l'analyse des tolérances, la dispersion des dimensions obtenues dans leur intervalle de tolérance est importante et peut être étudiée grâce à la variance. Néanmoins, le décalage de moyenne l'est tout autant, et ignoré par ces méthodes. Borgonovo (2007) par exemple propose un indice de sensibilité basé non pas sur la variance mais sur la densité de probabilité de la sortie du modèle. L'information étudiée est donc plus complète et permet de considérer des décalages de moyenne.

4.2.2 Les sensibilités au service de la prise de décision

Dans l'industrie, il arrive très fréquemment qu'un fabricant soit dans l'incapacité de fabriquer une pièce primaire selon les exigences de fabrication imposées. Le fabricant demande alors une dérogation afin d'augmenter un intervalle de tolérance ou baisser une exigence de capabilité. Parallèlement, certaines cotes sont plus importantes que d'autres dans un mécanisme. Il s'agit des "Key Characteristics" (KC).

Il est indispensable de pouvoir les identifier, grâce à différents critères, afin de leur associer des exigences de capabilité plus fortes par exemple. Pour ces KC, il sera sans doute plus pénalisant d'accorder de telles dérogations. L'objectif de cette section est de fournir des outils mathématiques simples afin d'aider la prise de décisions. Ces outils sont basés sur l'analyse de sensibilité locale.

4.2.2.1 Gestion des intervalles de tolérance

Soit un mécanisme conçu de façon à garantir un TNC cible. Le plan des pièces est fourni à un fabricant. S'il respecte les indications du plan, alors le TNC du mécanisme est respecté. Cependant, il arrive que le fabricant ne soit pas capable de fabriquer une dimension avec l'intervalle de tolérance spécifié, en respectant les indices de capabilité. Il réclame alors un élargissement des intervalles de tolérance (IT). Dans cette situation, il est intéressant de connaître l'influence quantitative de l'augmentation de l'intervalle de tolérance sur le TNC du mécanisme. L'idée est de calculer la sensibilité/élasticité du TNC par rapport aux IT grâce aux indices suivants :

$$S_{t_j} = \frac{\partial \mathrm{TNC}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma})}{\partial t_j} \tag{4.5}$$

$$E_{t_j} = S_{t_j} \frac{t_j}{\mathrm{TNC}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma})} \tag{4.6}$$

Ils peuvent être calculés de deux manières différentes en fonction de la complexité de la chaîne de cotes et de la méthode utilisée. Dans les cas les plus simples, les expressions analytiques sont disponibles. Sinon, il est toujours possible de faire le calcul par différences finies.

Soit une chaîne de cotes linéaire définie grâce au vecteur des coefficients linéaires $\mathbf{a}$: $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$. Si les dimensions sont modélisées par des lois Gaussiennes, alors le TNC ponctuel s'exprime grâce à la fonction de répartition de la loi Gaussienne standard (d'après les Equations 1.33 et 2.22) :

$$\mathrm{TNC}_{Y|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}) = \Phi\left(\frac{\mathrm{EF}_{\min} - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_Y - \mathrm{EF}_{\max}}{\sigma_Y}\right) \tag{4.7}$$

où $\mathrm{EF}_{\min}$ et $\mathrm{EF}_{\min}$ sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de l'EF, et σ_Y et μ_Y sont respectivement l'écart-type et la moyenne de Y. Il est nécessaire de définir différents cas de modélisation des lots des pièces car le calcul des sensibilités locales nécessite un point de calcul. Trois hypothèses, définies grâce aux exigences de capabilité $C_p^{(e)}$ et $C_{pk}^{(e)}$ ainsi qu'aux niveaux de capabilité maximums $C_p^{(\max)}$, sont envisagées :

(1) : Les dimensions sont considérées centrées et les écarts-types sont maximums : $\boldsymbol{\delta}^{(1)} = 0, \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \frac{\mathbf{t}}{6\mathbf{C_p^{(e)}}}$

(2) : Les décalages de moyenne des dimensions sont maximums dans le sens le plus défavorable pour le TNC. Dans ce cas : $\boldsymbol{\delta}^{(2)} = \text{signe}(\mathbf{a})\frac{\mathbf{t}}{2}\left(1 - \frac{\mathbf{C_{pk}^{(e)}}}{\mathbf{C_p^{(max)}}}\right)$, $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \frac{\mathbf{t}}{6\mathbf{C_p^{(max)}}}$.

(3) : Chaque dimension est modélisée par l'approche APTA, cas 4 présenté en Section 2.4.4. Les écarts-types et les décalages de moyenne des dimensions sont répartis uniformément sur la zone de conformité. Dans ce cas, l'expression du TNC se retrouve en Equation 2.47 et les sensibilités sont calculées par différences finies.

Les expressions analytiques des indices de sensibilité selon les deux premières hypothèses sont les suivantes :

$$\begin{aligned} S_{t_j}^{(1)} &= \frac{\partial \text{TNC}_{Y|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\delta}^{(\mathbf{1})}, \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{1})}\right)}{\partial t_j} \\ &= \frac{-a_j^2 t_j}{36\left(C_{pj}^{(e)}\right)^2 \sigma_Y^3}\left[(\text{EF}_{\min} - \mu_Y)\phi\left(\frac{\text{EF}_{\min} - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \ldots\right. \\ \ldots &+ \left.(\mu_Y - \text{EF}_{\max})\phi\left(\frac{\mu_Y - \text{EF}_{\max}}{\sigma_Y}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} S_{t_j}^{(2)} &= \frac{\partial \text{TNC}_{Y|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\delta}^{(\mathbf{2})}, \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{2})}\right)}{\partial t_j} \\ &= \left(\frac{\text{signe}(a_j)a_j}{2\sigma_Y}\left(1 - \frac{C_{pkj}}{C_{pj}^{(\max)}}\right) - \frac{(\mu_Y - \text{EF}_{\max})a_j^2 t_j}{36\left(C_{pj}^{(\max)}\right)^2 \sigma_Y^3}\right) \ldots \\ &\quad \ldots \times \left[(\mu_Y - \text{EF}_{\max})\phi\left(\frac{\mu_Y - \text{EF}_{\max}}{\sigma_Y}\right)\right] \\ &- \left(\frac{\text{signe}(a_j)a_j}{2\sigma_Y}\left(1 - \frac{C_{pkj}}{C_{pj}^{(\max)}}\right) + \frac{(\text{EF}_{\min} - \mu_Y)a_j^2 t_j}{36\left(C_{pj}^{(\max)}\right)^2 \sigma_Y^3}\right) \ldots \\ &\quad \ldots \times \left[(\text{EF}_{\min} - \mu_Y)\phi\left(\frac{\text{EF}_{\min} - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.9}$$

Il est intéressant de remarquer que les sensibilités selon l'hypothèse (1) ne dépendent, à un facteur près, que du terme $\frac{a_j^2 t_j}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^2}$.

Un calcul des sensibilités pour la gestion des IT est appliqué au problème RADIALL "Débattement de contact" déjà présenté en Section 2.4.7.2. Dans le cas présent, la chaîne de cotes a été linéarisée afin de pouvoir tirer parti des formules analytiques de sensibilités/élasticités. La Figure 4.1 représente les élasticités calculées selon les trois hypothèses de modélisation des lots de pièces. Elles sont toutes positives puisque l'augmentation d'un IT augmente systématiquement le TNC. Elles

peuvent être utilisées directement dans le but de connaître l'influence exacte de l'augmentation d'un IT. Dans ce cas, le choix de l'hypothèse a de l'importance pour l'exploitation des résultats puisque les valeurs d'élasticité peuvent passer du simple au double selon l'hypothèse considérée.

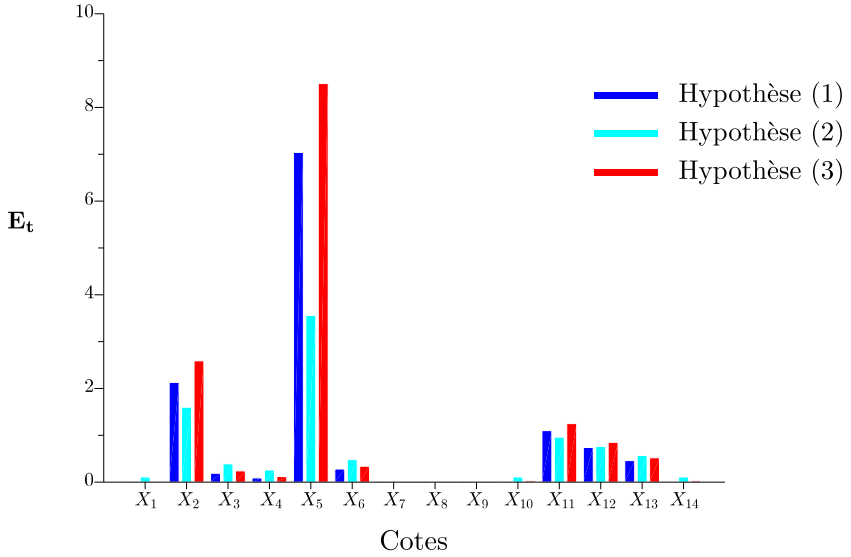


FIGURE 4.1 – Représentation des élasticités du TNC par rapport aux intervalles de tolérance selon trois hypothèses de modélisation des lots de pièces.

Si l'objectif est de simplement classer les IT selon l'influence qu'ils ont sur le TNC, alors le choix de l'hypothèse de modélisation des lots de pièces a peu d'importance. En effet, pour chacune d'entre elles, les ordres de grandeur des élasticités sont équivalents. Les IT t_2 et t_5 ont une élasticité très supérieure aux autres alors que les IT $t_1, t_7, t_8, t_9, t_{10}$ et t_{14} n'ont que très peu d'influence sur le TNC. Dans ce cas, il suffit de calculer la sensibilité ou l'élasticité selon l'hypothèse (1) pour laquelle l'expression mathématique est la plus simple. Elle peut même être ramenée, comme précédemment remarqué, au terme $\frac{a_j^2 t_j}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^2}$ pour la sensibilité et au terme $\frac{a_j^2 t_j^2}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^2}$ pour l'élasticité, qui sont très simples à déterminer.

Par ailleurs, une pratique courante pour déterminer l'influence des cotes sur la fonctionnalité du mécanisme est de calculer la sensibilité de la caractéristique fonctionnelle Y par rapport aux cotes directement. Cette sensibilité est directement égale aux coefficients a_i dans le cas où la chaîne de cotes est linéaire ($Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$). La Figure 4.2 représente la valeur absolue de ces coefficients. Il apparaît que les résultats sont très éloignés de ceux obtenus par les indices $\mathbf{E_t}$ mesurant l'influence des IT sur le TNC. Par exemple, la Figure 4.2 montre que la cote X_4 a une forte influence sur Y, mais comme t_4 est très faible (voir Tableau 2.11), l'influence sur le TNC est quasiment nulle, comme le montre la Figure 4.1. La prise en compte de ce

type de phénomène est essentielle et est possible grâce aux indices $\mathbf{S_t}$ et $\mathbf{E_t}$ proposés dans cette section. L'utilisation des coefficients de la chaîne de cotes a_i seuls peut véritablement mener à des interprétations faussées.

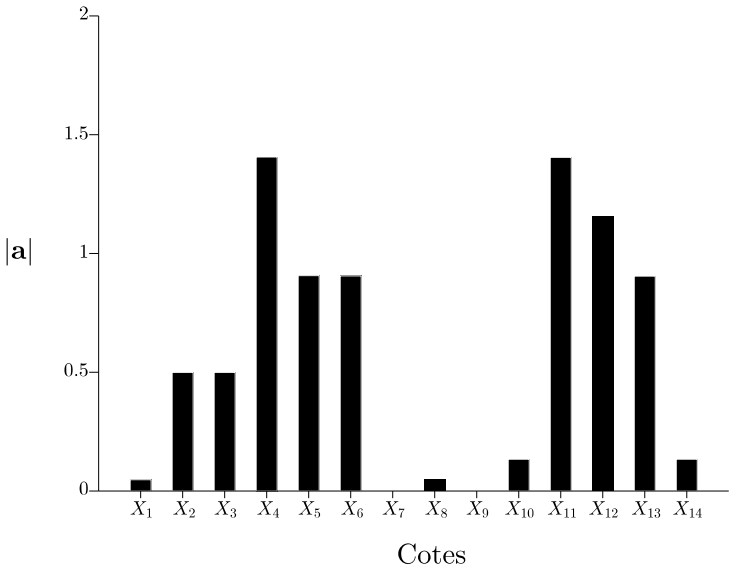


FIGURE 4.2 – Représentation des coefficients **a** (en valeur absolue) de la chaîne de cotes linéarisée.

4.2.2.2 Gestion des lots non-conformes

Lorsqu'un lot de pièces est livré non-conforme du point de vue des exigences de capabilité, il est utile de savoir de quelle manière cette violation de l'exigence de fabrication impacte le TNC du mécanisme. Dans le même cadre que précédemment (chaîne de cotes linéaire, lois Gaussiennes), l'idée est cette fois de calculer la différence de TNC entre un lot non-conforme et un lot à la limite de la conformité. Dans le cas où l'exigence de capabilité C_{pk} est violée, cette différence s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \mathrm{TNC}\left(\mathbf{C_{pk\#j}} = \mathbf{C^{(e)}_{pk\#j}}, C_{pkj} = C^{(e)}_{pkj} - h\right) - \mathrm{TNC}\left(\mathbf{C_{pk}} = \mathbf{C^{(e)}_{pk}}\right) \\ \approx \quad & -h\frac{\partial \mathrm{TNC}\left(\mathbf{C_{pk}} = \mathbf{C^{(e)}_{pk}}\right)}{\partial C_{pkj}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

où la notation $\#j$ fait référence à un vecteur possédant toutes ses composantes sauf la $j^{\text{ème}}$. Il s'agit, à un facteur près $(-h)$, de la définition par différences finies de l'indice de sensibilité du TNC par rapport aux capabilités C_{pkj} nommée $S_{C_{pkj}}$.

Comme précédement, plusieurs hypothèses sont envisageables :

(1) : Les dimensions sont considérées centrées et les écarts-types sont maximums : $\boldsymbol{\delta}^{(1)} = 0, \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \frac{\mathbf{t}}{6\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{e})}}$. Comme il n'y a pas de décalage de moyenne dans ce cas, c'est l'exigence C_p qui est considérée non-conforme.

(2) : Les décalages de moyenne des dimensions sont maximums dans le sens le plus défavorable pour le TNC. Dans ce cas : $\boldsymbol{\delta}^{(2)} = \text{signe}(\mathbf{a})\frac{\mathbf{t}}{2}\left(1 - \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{pk}}^{(\mathbf{e})}}{\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{(\max)}}\right)$, $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \frac{\mathbf{t}}{6\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{(\max)}}$. La non-conformité concerne C_{pk} dans ce cas.

(3) : Seule la dimension en limite de conformité est modélisée selon l'hypothèse (1). Les autres suivent l'approche APTA, cas 4 présenté en Section 2.4.4. Les écarts-types et les décalages de moyenne des dimensions sont répartis uniformément sur la zone de conformité. Dans ce cas, l'expression du TNC se retrouve en Equation 2.47 et les sensibilités sont calculées par différences finies.

(4) : Hypothèse identique à (3) sauf que la dimension en limite de conformité est modélisée selon l'hypothèse (2).

Les expressions analytiques des indices de sensibilité selon les deux premières hypothèses sont disponibles :

$$\begin{aligned} S_{C_{pj}}^{(1)} &= \frac{\partial \text{TNC}_{Y|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\delta}^{(\mathbf{1})}, \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{1})}\right)}{\partial C_{pkj}} \\ &= \frac{a_j^2 t_j^2}{36\left(C_{pj}^{(e)}\right)^3 \sigma_Y^3}\left[(\text{EF}_{\min} - \mu_Y)\phi\left(\frac{\text{EF}_{\min} - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) ...\right. \\ &+ \left. ...(\mu_Y - \text{EF}_{\max})\phi\left(\frac{\mu_Y - \text{EF}_{\max}}{\sigma_Y}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} S_{C_{pkj}}^{(2)} &= \frac{\partial \text{TNC}_{Y|\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\delta}^{(\mathbf{2})}, \boldsymbol{\sigma}^{(\mathbf{2})}\right)}{\partial C_{pkj}} \\ &= \frac{\text{signe}(a_j)a_j t_j}{2C_{pj}^{(\max)}\sigma_Y}\left[\phi\left(\frac{\text{EF}_{\min} - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) - \phi\left(\frac{\mu_Y - \text{EF}_{\max}}{\sigma_Y}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

Il est intéressant de remarquer que les sensibilités selon l'hypothèse (1) ne dépendent, à un facteur près, que du terme $\frac{a_j^2 t_j^2}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^3}$.

Pour les hypothèses (3) et (4), les indices de sensibilité se formulent de la façon suivante :

$$S_{C_{pj}}^{(3)} = \frac{\partial \text{TNC}_{\text{APTA}}\left(\boldsymbol{\delta}_{\#\boldsymbol{j}}^{(\mathbf{3})}, \boldsymbol{\sigma}_{\#\boldsymbol{j}}^{(\mathbf{3})}, \delta_j^{(1)}, \sigma_j^{(1)}\right)}{\partial C_{pkj}} \tag{4.13}$$

$$S_{C_{pkj}}^{(4)} = \frac{\partial \text{TNC}_{\text{APTA}}\left(\boldsymbol{\delta}_{\#\boldsymbol{j}}^{(\mathbf{4})}, \boldsymbol{\sigma}_{\#\boldsymbol{j}}^{(\mathbf{4})}, \delta_j^{(2)}, \sigma_j^{(2)}\right)}{\partial C_{pkj}} \tag{4.14}$$

Pour chaque indice calculé, seule une dimension est concernée par la non-conformité.

Les hypothèses (3) et (4) ont comme intérêt de ne pas supposer de modélisation particulière pour les autres. Elles sont simplement considérées conformes, donc sont uniformément placés dans la zone de conformité (Cas 4 APTA). Bien sûr, d'autres hypothèses de modélisation APTA pourraient être choisies.

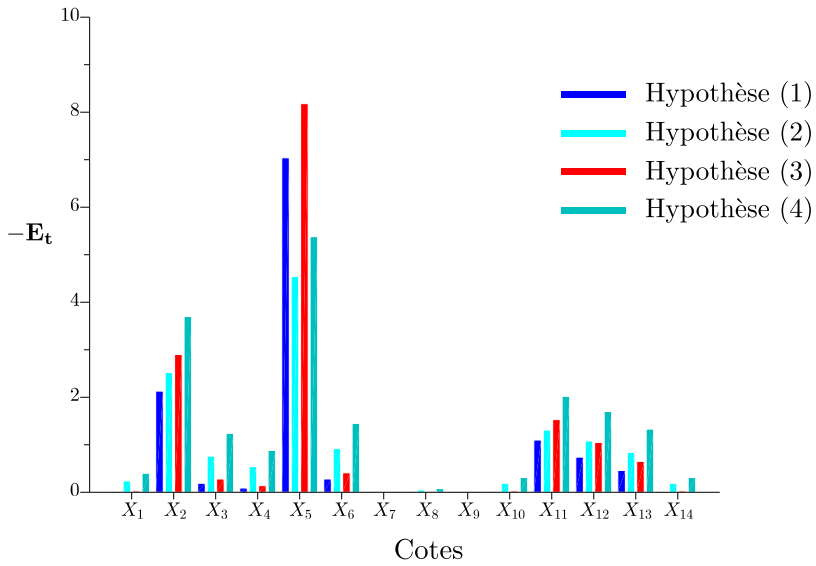


FIGURE 4.3 – Représentation des élasticités du TNC par rapport aux exigences de capabilité selon quatre hypothèses.

Comme dans la section précédente, un calcul des sensibilités est appliqué au problème RADIALL "Débattement de contact", cette fois-ci pour la gestion des lots non-conformes. La Figure 4.3 représente les élasticités calculées selon les quatre hypothèses proposées. Le même type de conclusions peut être apporté pour cette application que pour la précédente. L'hypothèse choisie a une importance particulière s'il s'agit de connaître avec précision l'influence de l'augmentation d'une exigence de capabilité sur le TNC. En revanche, dans un but de classification uniquement, il est possible d'utiliser les indices simplifiés de l'hypothèse (1) : $\frac{a_j^2 t_j^2}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^3}$ pour la sensibilité et $\frac{a_j^2 t_j^2}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^2}$ pour l'élasticité, très faciles à déterminer.

Dans un contexte où les pièces sont livrées, les caractéristiques statistiques de toutes les dimensions sont connues. Plutôt que de faire des hypothèses sur toutes les dimensions, il est possible d'utiliser les informations disponibles. Il s'agit alors de calculer la différence entre le TNC conditionnel du lot livré (contenant la dimension non-conforme) et le TNC du même lot en supposant la dimension concernée conforme. Cette dernière peut être considérée conforme selon l'hypothèse (1) ou (2)

par exemple :

$$\mathrm{Diff}_j^{(1)} = \mathrm{TNC}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{lot}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{lot}}\right) - \mathrm{TNC}\left(\boldsymbol{\delta}_{\#j}^{\mathrm{lot}}, \boldsymbol{\sigma}_{\#j}^{\mathrm{lot}}, \delta_j^{(1)}, \sigma_j^{(1)}\right) \tag{4.15}$$

$$\mathrm{Diff}_j^{(2)} = \mathrm{TNC}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{lot}}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{lot}}\right) - \mathrm{TNC}\left(\boldsymbol{\delta}_{\#j}^{\mathrm{lot}}, \boldsymbol{\sigma}_{\#j}^{\mathrm{lot}}, \delta_j^{(2)}, \sigma_j^{(2)}\right) \tag{4.16}$$

Cet indice, qui n'est pas issu des sensibilités, est intéressant car il indique le gain de TNC en remplaçant uniquement la dimension non-conforme par une conforme.

Attention, la conformité d'un lot est basée sur le respect des exigences de capabilité et non pas sur le TNC. Il est tout à fait envisageable qu'un lot conforme (au pire des cas notamment) entraîne un TNC plus grand qu'un lot non-conforme. Dans ce cas, cet indice évoque une perte et non un gain.

4.2.2.3 Identification des Key-Characteristics

Les "Key Characteristics" (KC) (AS9100 et AS9103) sont les caractéristiques d'un produit dont les variations à l'intérieur de leurs IT ont une influence sur la performance, la fonctionnalité ou la durée de vie. Une dimension est une KC s'il y a un bénéfice à la fabriquer proche de sa valeur nominale plutôt que simplement dans l'IT spécifié. Comme il ne s'agit plus de classification, mais bien d'un travail d'identification, des critères de choix sont nécessaires pour évaluer ce bénéfice. Il est possible de les définir par l'intermédiaire de sensibilités locales. Thornton (1999) identifie les KC grâce aux sensibilités d'une fonction inspirée de la fonction de perte de Taguchi (Taguchi, 1989) ($(\mu_Y - \mathrm{EF}_{\mathrm{nom}})^2 + \sigma_Y^2$ où $\mathrm{EF}_{\mathrm{nom}}$ est la valeur nominale de l'exigence fonctionnelle), permettant comme le TNC mais de manière moins précise d'estimer le niveau de qualité d'un mécanisme. Dans ces travaux de thèse, deux critères de choix innovants sont proposés, basés sur les sensibilités du TNC définies en Section 4.2.2.1 et 4.2.2.2. Le premier identifie une cote X_j comme une KC si une augmentation de l'intervalle de tolérance de 10% double le TNC :

$$E_{t_j} \geq 10 \tag{4.17}$$

Le second indice identifie une KC si une non-conformité de 0.1 (équivalent à une diminution de 0.1) sur C_{pk} (ou C_p) double le TNC :

$$-0.1 S_{C_{pkj}} \geq \mathrm{TNC}\left(\mathbf{C}_{\mathbf{pk}}^{(\mathbf{e})}\right) \tag{4.18}$$

$$-0.1 S_{C_{pj}} \geq \mathrm{TNC}\left(\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{e})}\right) \tag{4.19}$$

Bien entendu, ces critères peuvent être ajustés en fonction du niveau d'exigence qualité à imposer.

La taille de la zone de conformité (Figure 2.8) est déterminée par ses bornes $\delta^{\max}$, $\sigma^{\max}$ et $\sigma^{\min}$ qui dépendent toutes des IT et des exigences de capabilité (voir Equations 2.26, 2.27 et 2.28). En particulier, la diminution d'un intervalle de tolérance ou l'augmentation d'une exigence de capabilité rétrécissent la zone de conformité

et permettent donc d'inciter à fabriquer les dimensions plus proches de leur valeur nominale. Les deux critères proposés permettent donc d'identifier les KC au sens de la norme.

Une fois les KC identifiées, une attention particulière doit leur être attribuée. Dans la plupart des industries, cela se traduit par un contrôle accru des lots de pièces fabriquées et l'assignation d'exigences de capabilité plus sévères.

4.2.3 Conclusion sur l'analyse de sensibilité

Ce chapitre propose des indices de sensibilité/élasticité pour aider à la prise de décision. Ils permettent de connaître l'influence exacte d'une dérogation sur les paramètres de conception (intervalles de tolérance d'une part et exigences de capabilité d'autre part) sur le TNC. Basés sur les sensibilités locales, ils sont relativement faciles à calculer.

Dans un but de classification des cotes selon leur influence sur le TNC, le calcul est plus simple encore car le choix de l'hypothèse de modélisation des lots des pièces importe peu. Il suffit de s'intéresser aux sensibilités simplifiées selon l'hypothèse (1) qui ne dépendent que des paramètres spécifiques des cotes, référencées dans le Tableau 4.2. Cependant, cet exercice de simplification ne doit pas être trop poussé. En effet, il est montré que la prise en compte des coefficients linéaires a_i uniquement n'était pas judicieuse. Il s'agit pourtant d'une pratique courante.

$\mathbf{S}^{(1)}_{\mathbf{t_j}}$	$\mathbf{S}^{(1)}_{\mathbf{C_{pj}}}$	$\mathbf{E}^{(1)}_{\mathbf{t_j}}$	$\mathbf{E}^{(1)}_{\mathbf{C_{pj}}}$
$\frac{a_j^2 t_j}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^2}$	$\frac{a_j^2 t_j^2}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^3}$	$\frac{a_j^2 t_j^2}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^2}$	$\frac{a_j^2 t_j^2}{\left(C_{pj}^{(e)}\right)^2}$

Tableau 4.2 – Sensibilités et élasticités simplifiées du TNC par rapport à l'intervalle de tolérance et l'exigence de capabilité de la cote X_j suivant l'hypothèse (1).

Par ailleurs, il faut noter que l'augmentation d'un intervalle de tolérance ainsi que la diminution d'une exigence de capabilité ont tous deux le même effet d'agrandissement de la zone de conformité. De plus, les résultats obtenus pour les deux types d'indices d'élasticité et représentés par les Figures 4.1 et 4.3 sont très proches. Il est alors évident que les deux types de dérogation sont quasiment équivalents du point de vue du TNC. Ils le sont même exactement en considérant les élasticités selon l'hypothèse (1) (voir Tableau 4.2).

L'intérêt de ces indices de sensibilité/élasticité est renforcé s'ils sont mis en relation avec des coûts. En revenant à l'exemple du fabricant qui demande une dérogation sur l'intervalle de tolérance, les questions à se poser sont les suivantes :

- Si la dérogation est refusée, un autre fournisseur doit être choisi, ce qui engendre un retard de livraison des pièces. Quel est le coût lié à ce retard ?
- Si la dérogation est acceptée, le TNC est augmenté. Quel est le coût lié à cette perte de qualité (Nombre de retours SAV, coût de correction de pièces, etc.) ?

Finalement un travail de modélisation des coûts est nécessaire pour compléter ces analyses. En effet, ces coûts associés aux indices proposés, permettent de mieux peser le pour et le contre d'une telle dérogation.

Les "Key Characteristics" sont aussi identifiées grâce aux indices de sensibilité/élasticité proposés. Celles-ci se voient alors attribuer des exigences de capabilité plus sévères car leur variation influencent fortement la fonctionnalité du mécanisme.

Les sensibilités locales ont été privilégiées dans ces travaux de thèse car elles répondent de manière plus directe aux problématiques concrètes. Néanmoins, les méthodes de sensibilité globales, notamment celle de Borgonovo (2007) offrent de bonnes perspectives de recherche.

4.3 Synthèse des tolérances

La synthèse des tolérances peut être vue comme l'opération "réciproque" de l'analyse des tolérances. Elle consiste à définir les paramètres de conception permettant de respecter la fonction du mécanisme avec un certain niveau de qualité. En pratique, les IT sont définis de façon à ce que l'exigence fonctionnelle soit respectée avec un TNC maitrisé.

Il existe plusieurs moyens de réaliser cette opération. Dans cette section, deux méthodes suivant les approches déjà présentées au Chapitre 2 dans le cadre de l'analyse des tolérances sont détaillées. La méthode de partitionnement de t_Y issue de la littérature suit une approche semi-probabiliste. Elle est détaillée en Section 4.3.1 et permet de manière très simplifiée, donc très rapide, de définir une préconception. Néanmoins, son extrême simplicité ne lui permet pas de répondre au problème de la synthèse des tolérances de manière optimale (pas de prise en compte du coût de fabrication par exemple). En Section 4.3.2 est proposée la méthode d'optimisation d'une fonction coût. Il s'agit d'une approche fiabiliste, plus complète.

4.3.1 Partitionnement de l'exigence fonctionnelle de Y

La synthèse des tolérances semi-probabiliste repose sur les mêmes principes que l'analyse des tolérances semi-probabiliste détaillée en Section 2.2, mais le raisonnement est inversé. Le principe est celui du partitionnement de l'intervalle de variation potentielle t_Y (Scholtz, 1995). Il s'agit de le répartir sur chaque intervalle de tolérances t_i, $i = 1$ à n. Pour permettre cette répartition, des coefficients d'importance $\boldsymbol{\kappa}$ sont introduits, égaux à 1 par défaut. Ils permettent de hiérarchiser les dimensions selon leurs difficultés de fabrication. Un processus de fabrication peu capable entrainera un coefficient d'importance supérieur à 1. Moins le processus est capable, plus κ est grand, et inversement. Ainsi :

$$t_i = \kappa_i t_1 \tag{4.20}$$

Par exemple, si le processus de fabrication de la dimension X_2 est 2 fois moins capable que celui de X_1, alors $\kappa_2 = 2$ et $t_2 = 2t_1$. Evidemment, $\kappa_1 = 1$. Une fois cette

hiérarchisation établie, les relations d'analyse de tolérances détaillées en Section 4.3.1 peuvent être inversées afin d'obtenir t_i en fonction de t_Y. Les hypothèses attachées à chaque méthode sont conservées, ainsi que le TNC supposé respecté.

Dans cette section, seules les méthodes arithmétiques et statistiques seront étudiées car toutes les autres suivent le même principe. La méthode de Crofts, quant à elle, n'est pas adaptée à la synthèse de tolérances car la relation (Equation 2.16) mise en oeuvre n'est inversible que numériquement. De plus, la méthode est ici simplifiée puisqu'une seule chaîne de cotes est considérée. Le processus réel est plus complexe puisqu'il implique plusieurs caractéristiques fonctionnelles donc plusieurs chaînes de cotes, mais suit le même principe.

Méthode arithmétique. En combinant les Equations 2.8 et 4.20, la relation suivante est obtenue :

$$t_1 = \frac{t_Y}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|\kappa_i} \tag{4.21}$$

Une fois t_1 déterminé, chaque intervalle de tolérance t_i est obtenu par l'Equation 4.20. Si pour $i = 1$ à n, $a_i = 1$ et $\kappa_i = 1$, alors :

$$t_i = t_1 = \frac{t_Y}{n} \tag{4.22}$$

Méthode statistique. De la même façon que précédemment, en combinant les équations 2.9 et 4.20, la relation suivante permet d'exprimer t_1 en fonction de t_Y :

$$t_1 = \frac{t_Y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i\kappa_i)^2}} \tag{4.23}$$

Si pour $i = 1$ à n, $a_i = 1$ et $\kappa_i = 1$, alors :

$$t_i = t_1 = \frac{t_Y}{\sqrt{n}} \tag{4.24}$$

Remarques :

- Les intervalles de tolérance $\mathbf{t}$ calculés par la méthode arithmétique sont inversement proportionnels à n alors que ceux calculés par la méthode statistique sont inversement proportionnels à $\sqrt{n}$. C'est une différence importante qui, comme cela a déjà été remarqué en Section 4.3.1, rend la méthode arithmétique beaucoup plus exigeante que la méthode statistique, et implique un coût de fabrication accru.
- L'inconvénient majeur des méthodes de partitionnement est qu'elles sont très dépendantes des coefficients d'importance $\boldsymbol{\kappa}$. Elles demandent donc une bonne expertise du concepteur.
- Ces méthodes souffrent des limitations communes aux méthodes semi-probabilistes déjà évoquées en Section 2.2. Elles ne sont valides que sous certaines hypothèses fortes et ne permettent pas de viser un TNC de manière rigoureuse.

Pour les raisons évoquées dans ces deux derniers points, il apparaît nécessaire de mettre en oeuvre une méthode autorisant la modélisation du problème de synthèse des tolérances de manière plus fine et permettant un meilleur respect du TNC visé. L'optimisation d'une fonction coût présentée dans la section suivante est en mesure de répondre à ce besoin.

4.3.2 Optimisation d'une fonction coût

Dans l'industrie, la logique financière impose la maitrise des coûts. C'est de cette constatation qu'est venue l'idée de concevoir un mécanisme de manière optimale en minimisant une fonction coût. La minimisation d'une fonction, éventuellement sous contrainte, est un problème d'optimisation. Afin de maintenir un niveau raisonnable de qualité du mécanisme, différents auteurs introduisent des indices de qualité dans le problème d'optimisation à différents niveaux : soit dans les contraintes, soit dans la fonction coût directement ou bien dans les deux à la fois. La Section 4.3.2.1 a pour objectif de présenter les principaux schémas d'optimisation existants et envisageables dans le cadre de la synthèse des tolérances. Afin de traiter le problème de la manière la plus complète et réaliste possible, un schéma d'optimisation impliquant le TNC du mécanisme, calculé par méthodes fiabilistes, a été privilégié. Il s'agit d'optimisation fiabiliste, dont le principe sera détaillé en Section 4.3.2.2. Différentes applications sont proposées en Section 4.3.3.

4.3.2.1 Description de différents schémas d'optimisation

Un problème d'optimisation vise à minimiser une fonction objectif (la fonction coût dans le cas présent), éventuellement sous différentes contraintes lorsqu'une limitation stricte doit être imposée. Les variables d'optimisation du problème sont les IT. L'objectif du problème d'optimisation est donc de déterminer les "meilleurs" IT ; ceux qui entraîneront un coût minimal sous respect d'un certain nombre de contraintes. Différents types de fonctions coûts et de fonctions contraintes permettent de déterminer ces intervalles optimums.

Fonctions coûts. Dans la littérature, plusieurs fonctions relatives au coût de fabrication sont rencontrées, définies par les Equations 4.25 à 4.29 ((Lee et Woo, 1990, Kim et Cho, 2000, Jeang, 2001)) et représentées par la Figure 4.4 :

$$C_i = k_0 + \frac{k_1}{t_i^2} \tag{4.25}$$

$$C_i = \frac{k_0}{t_i} \tag{4.26}$$

$$C_i = k_0 t_i^{-k_1} \tag{4.27}$$

$$C_i = k_0 t_i^{-t_i k_1} \tag{4.28}$$

$$C_i = k_0 \left[e^{-t_i k_1} \right] \left[t_i^{-k_2} \right] \tag{4.29}$$

où C_i représente le coût de fabrication d'une dimension X_i et $\mathbf{k}$ est un vecteur de constantes à identifier. Ce coût est fonction de l'intervalle de tolérance t_i. En effet, comme le montre la Figure 4.4 sur laquelle toutes les courbes ont approximativement la même allure, plus l'intervalle de tolérance imposé est grand, plus le coût de fabrication total C_f diminue tel que :

$$C_f = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{4.30}$$

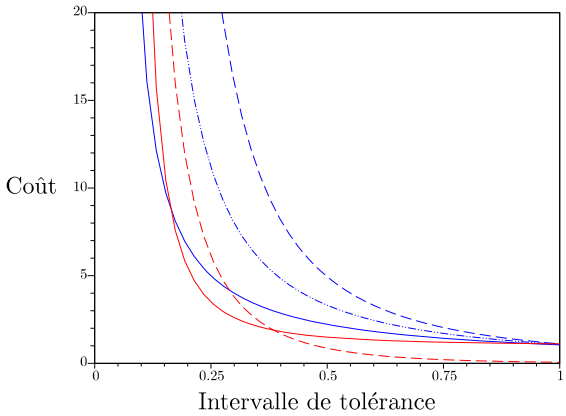


FIGURE 4.4 – Représentation des principaux modèles de coûts de fabrication.

Evidemment, d'autres facteurs influencent le coût total de production. Parmi ceux-ci figurent le coût de non-conformité. En effet, lorsqu'un mécanisme est fabriqué et assemblé mais n'est pas fonctionnel, cela représente une perte financière pour l'entreprise. Dans le meilleur des cas, la non-fonctionnalité est constatée dans l'atelier de production et le mécanisme est mis au rebut ou retouché. Sinon, il est livré au client qui peut faire preuve de mécontentement et/ou le renvoyer en SAV. Il est donc indispensable de minimiser le coût de non-conformité qui peut être ajouté au coût de fabrication. Jeang (2001) propose par exemple de modéliser ce coût de non-conformité par un terme C_Y inspiré de la fonction de perte de Taguchi :

$$C_Y = k_f \left[(\mu_Y - \mathrm{EF}_{\mathrm{nom}})^2 + \sigma_Y^2 \right] \tag{4.31}$$

où k_f est une constante et $\mathrm{EF}_{\mathrm{nom}}$ est la valeur nominale de l'exigence fonctionnelle. Taguchi (1989) suppose que la perte financière augmente lorsque la moyenne de Y s'éloigne de sa valeur cible ou quand son écart-type augmente. Cette perte est proportionnelle à une constante de coût k_f. D'autres termes, liés au coût de rebut ou au coût de pénalité qu'un client impose en cas de non respect de la fonctionnalité,

sont envisageables.

Fonctions contraintes. Les contraintes servent à faire respecter une limitation stricte. Elles peuvent servir à limiter l'espace de variation des IT (Kim et Cho, 2000) en les bornant :

$$\mathbf{t}_{\min} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_{\max} \tag{4.32}$$

Jeang (2001) propose aussi de respecter l'exigence qualité du mécanisme grâce à une exigence de capabilité sur Y :

$$C_{pkY} = \min\left(\frac{\mu_Y - \mathrm{EF}_{\min}}{3\sigma_Y}; \frac{\mathrm{EF}_{\max} - \mu_Y}{3\sigma_Y}\right) \geq C_{pkY}^{(e)} \tag{4.33}$$

D'autres auteurs (Benanzer *et al.*, 2009, Yadav *et al.*, 2010) choisissent d'introduire une contrainte fiabiliste limitant le TNC du mécanisme calculé à l'aide des méthodes détaillées au Chapitre 1, notamment la méthode FORM :

$$\mathrm{TNC} \leq \mathrm{TNC}_{\mathrm{limite}} \tag{4.34}$$

Cette contrainte peut aussi être astucieusement intégrée dans la fonction coût. C'est ce que Skowronski et Turner (1997) ont choisi de faire. Le problème d'optimisation devient sans contrainte, ce qui le rend beaucoup plus simple à traiter. La contrainte fiabiliste intégrée dans la fonction coût fonctionne comme une fonction de pénalité mais elle ne permet pas de fixer de limite stricte. L'utilisation du TNC dans les problèmes d'optimisation a l'avantage, contrairement à la fonction de perte C_Y et à l'exigence de capabilité C_{pkY}, d'aborder de manière très précise la notion de qualité d'un mécanisme. Certes, les paramètres C_Y et C_{pkY} sont liés à la non-conformité, mais indirectement. En revanche, l'optimisation fiabiliste consistant à manipuler des probabilités de non-conformité (ou de défaillance) rend la résolution plus complexe.

Différents schémas d'optimisation. La synthèse des tolérances grâce à l'optimisation d'une fonction coût peut être réalisée suivant plusieurs schémas. Dans la littérature, différentes fonctions coûts sont envisagées ainsi que différents types de contraintes. Deux exemples de schémas d'optimisation sont ici présentés, simplement pour en étudier le principe. Le premier est l'optimisation du coût total de production $C_t = C_f + C_{nc}$ composé d'un coût de fabrication C_f et d'un coût de non-conformité C_{nc}, sans contrainte. Le second est l'optimisation du coût C_f sous contrainte de TNC. Les différents coûts sont modélisés en s'inspirant des différentes fonctions de la littérature, décrites dans les paragraphes précédents :

$$C_{nc} = k_f\left[(\mu_Y - \mathrm{EF}_{\mathrm{nom}})^2 + \sigma_Y^2\right] \tag{4.35}$$

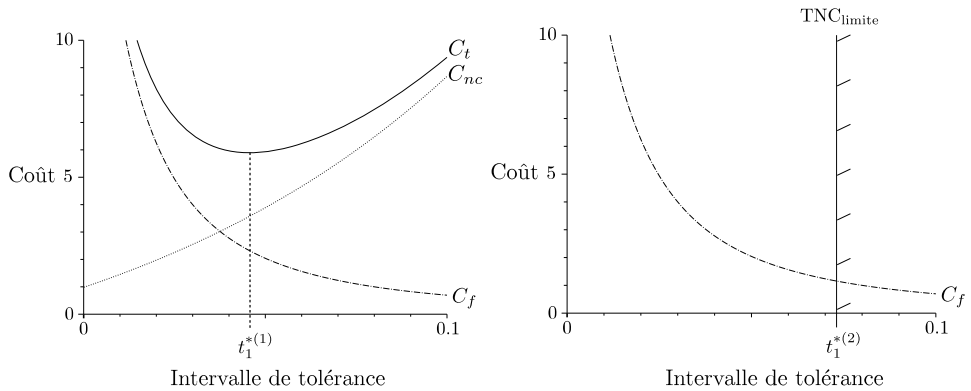
$$C_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{t_i} \tag{4.36}$$

Les deux schémas d'optimisation se formulent de la façon suivante :

$$\mathbf{t}^{*(1)} = \arg\min\{C_t(\mathbf{t})\} \tag{4.37}$$

$$\mathbf{t}^{*(2)} = \arg\min\{C_f(\mathbf{t})|\mathrm{TNC}(\mathbf{t}) \leq \mathrm{TNC}_{\mathrm{limite}}\} \tag{4.38}$$

La Figure 4.5 représente le principe de ces schémas d'optimisation dans le cas très simplifié d'une chaîne à une seule cote ($n = 1$). Les valeurs optimales $t_1^{*(1)}$ et $t_1^{*(2)}$ ainsi que les différentes courbes de coûts et contraintes y sont présentés. Le fait d'utiliser une contrainte fiabiliste telle que $\mathrm{TNC} \leq \mathrm{TNC}_{\mathrm{limite}}$ plutôt qu'une fonction de perte intégrée dans la fonction à minimiser permet un meilleur respect de l'exigence de qualité du mécanisme. En effet, il s'agit d'une limite stricte, contrairement à la fonction de perte qui incite simplement à ne pas "trop" perdre en qualité.



(a) Schéma d'optimisation (1). (b) Schéma d'optimisation (2).

FIGURE 4.5 – Représentation du principe des schémas d'optimisation (1) et (2). La contrainte fiabiliste $\mathrm{TNC}(\mathbf{t}) \leq \mathrm{TNC}_{\mathrm{limite}}$ permet de respecter rigoureusement l'exigence de qualité du mécanisme.

4.3.2.2 Formulation retenue

Afin de répondre le plus précisément possible au problème de la synthèse des tolérances, un schéma d'optimisation fiabiliste, plus complet que ceux présentés dans la section précédente, a été choisi pour ces travaux de thèse. L'objectif est de minimiser une fonction objectif prenant en compte aussi bien le coût de fabrication que le coût de non-conformité dépendant du TNC. Une contrainte de TNC est aussi ajoutée, ainsi que des bornes aux IT. L'intégration du coût de non-conformité dans le coût total de production permet une baisse de la perte financière liée au retours SAV et aux rebuts. Il n'a pas pour objectif principal de faire respecter l'exigence qualité du mécanisme. Ce rôle est joué par la contrainte de TNC. Le problème d'optimisation se formule de la manière suivante :

$$\mathbf{t}^* = \arg\min\{C_f(\mathbf{t}) + C_{nc}(\mathbf{t})|\mathrm{TNC}(\mathbf{t}) \leq \mathrm{TNC}_{\mathrm{limite}}, \mathbf{t}_{\min} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{t}_{\max}\} \tag{4.39}$$

où le coût de non-conformité dépend directement du TNC et du coefficient de coût de non-conformité a_{nc} tel que :

$$C_{nc}(\mathbf{t}) = a_{nc}\text{TNC}(\mathbf{t}) \tag{4.40}$$

Le coût de fabrication peut être définie de différentes façons (voir Equations 4.25 à 4.29). La formulation retenue dépend des coefficients de coût de fabrication $\mathbf{a_f}$ et des IT tel que :

$$C_f(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{fi}}{t_i} \tag{4.41}$$

4.3.2.3 Méthode de calcul proposée.

Plusieurs classes de problèmes d'optimisation existent selon la complexité des fonctions objectifs et contraintes. La plus simple, l'optimisation linéaire étudie le cas où les fonctions sont linéaires. Si les contraintes sont linéaires, mais la fonction objectif est sous forme quadratique, il s'agit d'optimisation quadratique. Dans le cas présent, comme le TNC est une fonction non-linéaire et est présent dans la fonction objectif et les contraintes, il s'agit d'optimisation non-linéaire. Pour résoudre les problèmes d'optimisation non-linéaire, deux types de méthodes existent : les méthodes d'ordre 0 et celles d'ordre supérieur (aussi appelées méthodes à base de gradient). En effet, pour se déplacer dans l'espace des solutions admissibles, ce sont généralement les gradients qui sont utilisés. Malheureusement, ces gradients sont difficiles voire impossibles à obtenir (dans le cas de fonctions non-continues par exemple) et la présence de minima locaux peuvent rendre ces méthodes inefficaces. Au contraire, les méthodes d'ordre 0 n'en ont pas besoin et parcourent l'espace admissible de manière aléatoire ou prédéterminée. Elles permettent ainsi de résoudre les problèmes les plus complexes, mais pour un coût de calcul parfois très important. Wu *et al.* (2009) par exemple utilisent un algorithme génétique dans un cadre de la synthèse des tolérances. Couplé à la méthode de Monte Carlo, son coût de calcul est relativement élevé. D'autres auteurs utilisent des méthodes d'ordre 1 pour des raisons d'économie de temps de calcul (Skowronski et Turner, 1997, Kim et Cho, 2000).

Comme le TNC est impliqué dans la formulation retenue, il s'agit d'optimisation fiabiliste. La plupart des auteurs utilisent la méthode FORM pour calculer le TNC dans ce contexte (Savage *et al.*, 2006, Benanzer *et al.*, 2009, Yadav *et al.*, 2010) en raison de son coût de calcul réduit. D'après les résultats présentés dans le Tableau 2.8, il s'agit d'une méthode très efficace. Pour ces raisons, elle a été préférée dans ces travaux de thèse pour le calcul du TNC en optimisation fiabiliste.

Pour résoudre le problème d'optimisation non-linéaire adressé en Equation 4.39, c'est l'algorithme de Polak (1997) qui a été choisi. Il s'agit d'un algorithme d'ordre 1 dont la capacité à résoudre de tels problèmes efficacement est reconnue (Polak, 1997). Les développements mathématiques de l'algorithme sont disponibles en Annexe A. Notamment, il nécessite le calcul des gradients de la fonction objectif ∇F et des contraintes $\nabla \mathbf{g}$. Evidemment, cela requiert que ces fonctions soient différentiables,

ce qui est généralement le cas. Dans le cadre de la synthèse des tolérances, c'est uniquement la dérivée du TNC (par rapport aux IT) qui pose problème.

Si la chaîne de cotes impliquée est linéaire, la dérivée du TNC conditionnel est connue sous sa forme analytique (voir Section 4.2.2.1). Si la chaîne de cotes est non-linéaire, le TNC conditionnel est calculé par la méthode FORM et la forme analytique de la dérivée est aussi disponible (voir Section 1.2.1). Si le TNC est calculé par l'approche APTA, un problème de temps de calcul apparaît. En effet, l'algorithme d'optimisation nécessite le calcul fiabiliste du TNC un grand nombre de fois. Pour rappel, le TNC APTA nécessite l'utilisation des méthodes FORM et des simulations de MC, qui est relativement coûteuse. De plus, comme sa dérivée n'est pas disponible sous une forme analytique, elle doit être calculée par différences finies, ce qui implique un certain nombre de calculs fiabilistes supplémentaires. Pour ces raisons, l'utilisation d'un métamodèle est proposée afin de réduire le temps de calcul. Une surface de réponse quadratique (SRQ) avec termes croisés (voir Section 1.5.2) est construite permettant d'approximer le TNC APTA en fonction des IT. Une rapide étude a montré qu'un métamodèle simple tel qu'une SRQ permet de bonnes estimations de ce TNC. L'appel au métamodèle $\tilde{\mathrm{TNC}}_{\mathrm{APTA}}(\mathbf{t})$ étant instantané, les calculs de gradients par différences finies sont accélérés. En revanche, la construction du métamodèle par plan d'expériences est nécessaire. Il s'agit d'un plan factoriel à deux niveaux $\mathbf{t}_{\min}$ et $\mathbf{t}_{\max}$. 2^n appels au modèle original sont donc nécessaires au préalable.

4.3.3 Applications

Deux applications sont présentées dans cette section afin d'illustrer les capacités d'un schéma d'optimisation fiabiliste à répondre au problème de la synthèse des tolérances. Il s'agit du mécanisme d'embrayage présenté en Section 2.3.2 et le connecteur électrique RADIALL présenté en Section 2.4.7.2.

4.3.3.1 Mécanisme d'embrayage

Description du cas d'étude. Le mécanisme d'embrayage étudié est constitué de trois cotes. Il permet donc une bonne interprétation des différents résultats. Le problème d'optimisation comporte de nombreux paramètres de modélisation : les coefficients de coût $\mathbf{a_f}$ et a_{nc}, le TNC maximal admissible ainsi que le type de modélisation des dimensions retenu (basé sur les caractéristiques du mécanisme données Tableau 4.3) pour le calcul du TNC. L'objectif de cette application est d'illustrer l'influence de certains de ces paramètres sur les variables de conception optimales obtenues : les IT, les coûts et le TNC. Pour cela, trois calculs sont proposés dont les caractéristiques sont détaillées dans le Tableau 4.4. Ils permettent d'envisager différentes combinaisons des paramètres influençant le problème d'optimisation. Par exemple, le calcul (1) considère une constante de coût de non-conformité faible ($a_{nc} = 5.10^{-4}$) ainsi qu'une limite de TNC haute ($\mathrm{TNC}_{\max} = 22750$ ppm). Pour l'ensemble de ces études, seule une modélisation conditionnelle est envisagée pour une meilleure in-

terprétation des résultats. Pour la même raison, chaque dimension est considérée équivalente d'après son coefficient de coût de fabrication ($\mathbf{a_f} = \{1, 1, 1\}$).

Variable	Moyenne	Distribution
X_1 (A)	27.645 mm	Gaussienne
X_2 (C)	11.430 mm	Gaussienne
X_3 (E)	50.800 mm	Gaussienne

Tableau 4.3 – Caractéristiques du mécanisme d'embrayage.

	Calcul (1)	Calcul (2)	Calcul (3)
$\mathbf{a_f}$ (mm.€)	$\{1, 1, 1\}$	$\{1, 1, 1\}$	$\{1, 1, 1\}$
a_{nc} (€/ppm)	5.10^{-4}	5.10^{-4}	5.10^{-2}
TNC_{max} (ppm)	22750	1350	22750
Modélisation des dimensions	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{t}}{6}$, $\boldsymbol{\delta} = 0$	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{t}}{6}$, $\boldsymbol{\delta} = 0$	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{t}}{6}$, $\boldsymbol{\delta} = 0$

Tableau 4.4 – Paramètres des différents calculs d'optimisation fiabiliste menés sur le mécanisme d'embrayage.

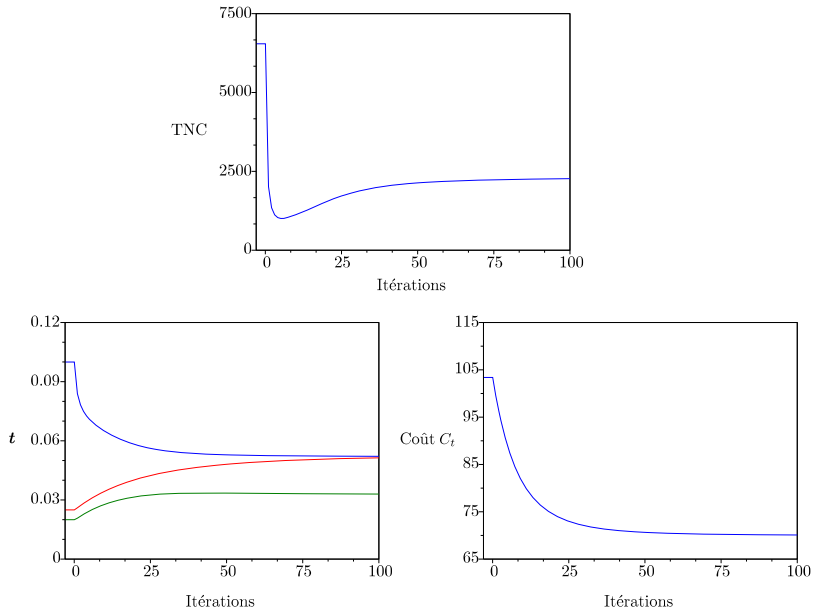


FIGURE 4.6 – Evolution des variables de conception du mécanisme d'embrayage pour le calcul (1).

Interprétations des résultats. Pour le calcul (1), la limite admissible de TNC est si haute qu'elle n'influence pas l'évolution des variables de conception. Comme le montre la Figure 4.6, le coût de non-conformité limite naturellement le TNC.

	Etat initial		Etat optimal
t_1	0.1	$\xrightarrow{-}$	0.052
t_2	0.02	$\xrightarrow{+}$	0.033
t_3	0.025	$\xrightarrow{+}$	0.051
Coût	103	$\xrightarrow{-32\%}$	70
TNC	6544	$\xrightarrow{-}$	2269

Tableau 4.5 – Variables de conception initiales et optimales pour le calcul (1).

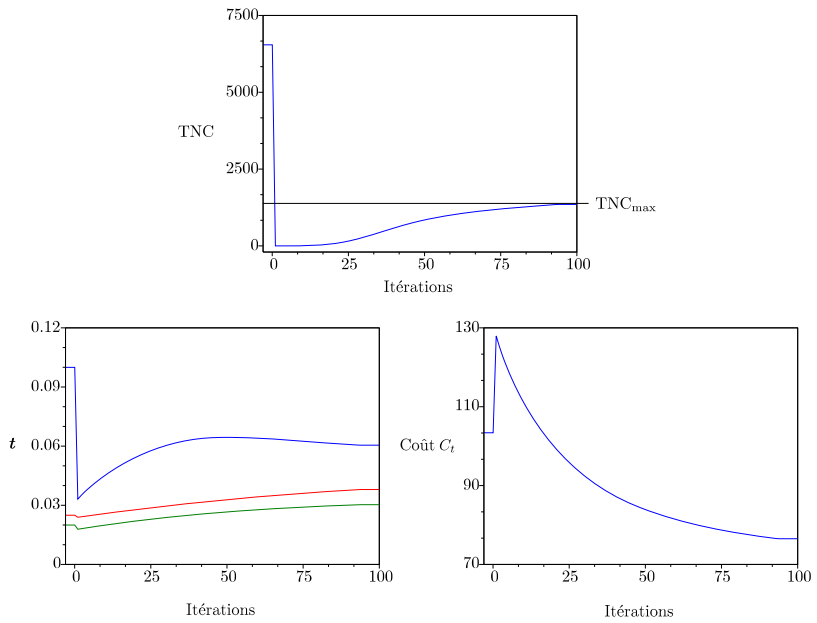


FIGURE 4.7 – Evolution des variables de conception du mécanisme d'embrayage pour le calcul (2). La conception initiale dépasse la limite admissible de non-conformité alors que la conception finale est calée sur cette limite.

	Etat initial		Etat optimal
t_1	0.1	$\xrightarrow{-}$	0.060
t_2	0.02	$\xrightarrow{+}$	0.030
t_3	0.025	$\xrightarrow{+}$	0.038
Coût	103	$\xrightarrow{-25\%}$	77
TNC	6544	$\xrightarrow{-}$	1350

Tableau 4.6 – Variables de conception initiales et optimales pour le calcul (2).

Pour le calcul (2), la conception initiale ne satisfait pas la contrainte de TNC qui a été abaissée. Ceci a pour conséquence une forte correction des IT, entraînant un

coût total augmenté dès les premières itérations (voir Figure 4.7). Finalement, la conception optimale est obtenue à la limite de TNC, en diminuant le coût total. Pour le calcul (3), c'est la constante de coût de non-conformité qui est augmentée par rapport aux autres calculs. Le coût correspondant devient alors prédominant, ce qui entraîne une chute substantielle du TNC (voir Figure 4.8). Les Tableaux 4.5, 4.6 et 4.7 résument l'évolution des variables de conception (IT, TNC et coût de production) entre l'état initial, défini à partir de la conception actuelle, et l'état optimal. Le coût optimal de production est abaissée respectivement de 32%, 25% et 77% pour les calculs (1), (2) et (3) par rapport aux coûts initiaux . Il s'agit de gains potentiels significatifs. Il est intéressant de noter que les IT de deux cotes parmi les trois sont augmentés. Seules les cotes très influentes voient leur IT baisser, ce qui permet des diminutions de coût de production.

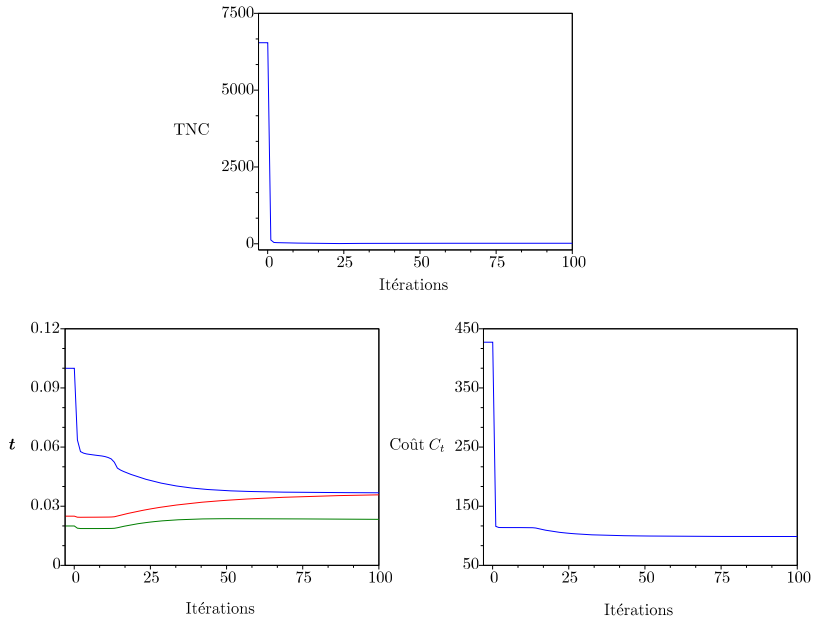


FIGURE 4.8 – Evolution des variables de conception du mécanisme d'embrayage pour le calcul (3). Un coût de défaillance prédominant entraîne le TNC à chuter en dessous de sa limite.

	Etat initial		**Etat optimal**
t_1	0.1	$\xrightarrow{-}$	0.037
t_2	0.02	$\xrightarrow{+}$	0.023
t_3	0.025	$\xrightarrow{+}$	0.036
Coût	427	$\xrightarrow{-77\%}$	99
TNC	6544	$\xrightarrow{-}$	17

Tableau 4.7 – Variables de conception initiales et optimales pour le calcul (3).

4.3.3.2 Débattement de contact RADIALL

Description de l'étude. Le connecteur électrique étudié ici est le même que celui de la Section 2.4.7.2. Deux calculs d'optimisation fiabiliste sont réalisés, dont les paramètres sont arbitrairement définis dans le Tableau 4.8. Le calcul (4) est similaire aux calculs menés dans l'application précédente, avec une modélisation ponctuelle des dimensions. Il permet simplement de s'assurer que l'algorithme d'optimisation donne des résultats cohérents dans un cas plus complexe que précédemment lorsque 14 cotes sont impliquées. En revanche, le calcul (5) considère une modélisation au sens de l'approche APTA. L'objectif est de mener une optimisation de la conception sous modélisation réaliste (i.e. APTA). Pour celle-ci, comme les exigences de capabilité des cinq dernières dimensions sont inférieures aux autres, il est logiquement moins coûteux de les fabriquer. Leur coefficient de coût de fabrication est donc abaissé de 1 à 0.5 mm.€.

	Calcul (4)	**Calcul (5)**
$a_{fi}, i = 1$ à 9 (€.mm)	1	1
$a_{fi}, i = 10$ à 14 (€.mm)	1	0.5
a_{nc} (€/ppm)	5.10^{-2}	5.10^{-4}
TNC_{max} (ppm)	22750	22750
Modélisation	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{t}}{6}$, $\boldsymbol{\delta} = 0$	APTA Cas 4

Tableau 4.8 – Paramètres des différents calculs d'optimisation fiabiliste menés sur le connecteur électrique RADIALL.

Interprétations des résultats. Pour le calcul (4), comme le coût de non-conformité est dominant, le TNC est drastiquement abaissé (voir Figure 4.9). A partir de la 50ème itération, quatre IT augmentent régulièrement sans que le TNC n'évolue. Cela peut s'expliquer par le fait que ces IT n'ont quasiment aucune influence sur le TNC. Comme ils augmentent, le coût de fabrication et celui de production diminuent eux aussi alors que toutes les autres variables de conception ont convergé. Ces IT sont toutefois limitées à 0.3 mm par des contraintes pour éviter qu'ils ne perturbent trop le fonctionnement du mécanisme. Pour le calcul (5), la constante de coût de non-conformité est relativement faible et implique un coût de non-conformité faible. Cela autorise l'augmentation du TNC, sans toutefois qu'il ne dépasse sa limite admissible. La diminution du coût total de production ne peut donc être due qu'à la diminution du coût de fabrication (voir Figure 4.10).

Finalement, les Tableaux 4.9 et 4.10 montrent que les coûts de production sont respectivement diminué de 49% et 71% pour les calculs (4) et (5) par rapport à la conception initiale, alors que seuls un ou deux IT sont resserés. Cette méthodologie sélectionne les IT qui ont le plus d'influence sur le TNC et permet ainsi des gains en terme de coût tout en contrôlant le niveau de qualité du mécanisme. Il arrive même que le TNC et le coût de production total baissent ensemble (Tableau 4.9). Il s'agit d'un phénomène *a priori* contradictoire mais qui s'explique lorsqu'une minorité d'IT

est resserée, impliquant la baisse du TNC, pendant que d'autres sont relâchés, impliquant la baisse du coût de fabrication donc du coût total de production.

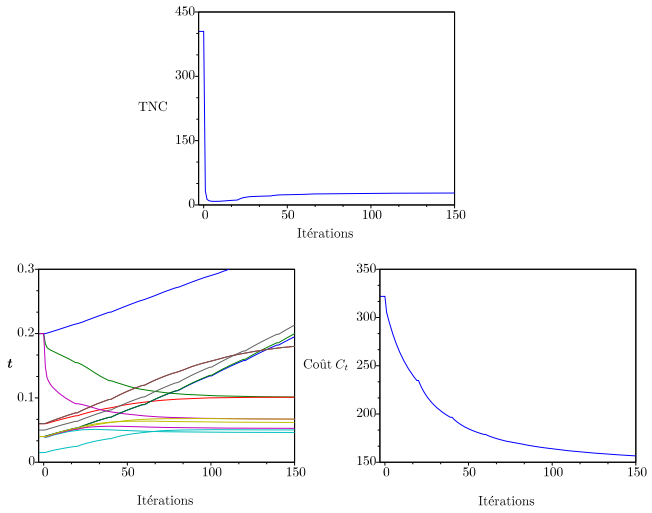


FIGURE 4.9 – Evolution des variables de conception du mécanisme d'embrayage pour le calcul (4). Un coût de défaillance prédominant entraîne le TNC à chuter en dessous de sa limite. Quatre IT tendent vers des valeurs très élevées.

	Etat initial		**Etat optimal**
t_1	0.2	$\xrightarrow{+}$	0.3
t_2	0.2	$\xrightarrow{-}$	0.1
t_3	0.06	$\xrightarrow{+}$	0.1
t_4	0.015	$\xrightarrow{+}$	0.05
t_5	0.2	$\xrightarrow{-}$	0.07
t_6	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.07
t_7	0.05	$\xrightarrow{+}$	0.3
t_8	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.3
t_9	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.3
t_{10}	0.06	$\xrightarrow{+}$	0.19
t_{11}	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.05
t_{12}	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.05
t_{13}	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.06
t_{14}	0.06	$\xrightarrow{+}$	0.19
Coût	321	$\xrightarrow{-49\%}$	150
TNC	405	$\xrightarrow{-}$	28

Tableau 4.9 – Variables de conception initiales et optimales pour le calcul (4).

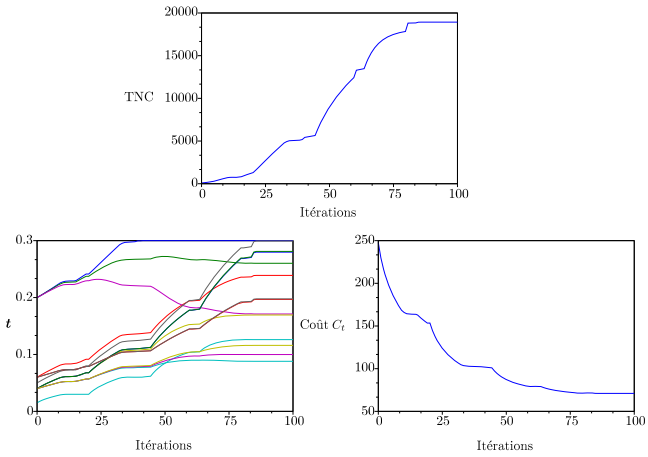


FIGURE 4.10 – Evolution des variables de conception du mécanisme d'embrayage pour le calcul (5). Le TNC est augmenté pratiquement jusqu'à sa limite admissible en raison d'un coût de non-conformité plutôt faible.

	Etat initial		**Etat optimal**
t_1	0.2	$\xrightarrow{+}$	0.3
t_2	0.2	$\xrightarrow{+}$	0.26
t_3	0.06	$\xrightarrow{+}$	0.24
t_4	0.015	$\xrightarrow{+}$	0.13
t_5	0.2	$\xrightarrow{-}$	0.17
t_6	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.17
t_7	0.05	$\xrightarrow{+}$	0.3
t_8	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.28
t_9	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.28
t_{10}	0.06	$\xrightarrow{+}$	0.20
t_{11}	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.09
t_{12}	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.1
t_{13}	0.04	$\xrightarrow{+}$	0.12
t_{14}	0.06	$\xrightarrow{+}$	0.20
Coût	248	$\xrightarrow{-71\%}$	71
TNC	89	$\xrightarrow{+}$	18927

Tableau 4.10 – Variables de conception initiales et optimales pour le calcul (5).

Remarques :

- Les gains affichés entre les coûts optimums et les coûts initiaux de production sont obtenus à partir de paramètres de conception discutables. Une modéli-

sation approfondie des coûts permettrait de les affiner. Ces gains illustrent simplement le potentiel de la méthode d'optimisation fiabiliste pour ce type d'études. De plus, un mécanisme possède généralement plusieurs exigences fonctionnelles, chacune impliquant un TNC. La prise en compte des différentes EF conduit à l'optimisation d'une fonction coût dépendant d'un TNC système. Elle multiplie aussi le nombre de contraintes, restreignant la marge de manoeuvre et minimisant les gains potentiels de coût.

- Les résultats d'optimisation sont obtenus en une centaine d'itérations pour chaque calcul. Pour les quatre premiers calculs, comme les TNC sont calculés par la méthode FORM, les gradients sont obtenus analytiquement et le temps de calcul total est de l'ordre de la seconde. Pour le calcul (5), le TNC est calculé selon l'approche APTA, ce qui empêche l'utilisation de sensibilités analytiques. Une SRQ est donc utilisée dans le but de limiter le temps de calcul total, en l'occurrence égal à cinq minutes.
- Quatre discontinuités sont visibles sur les différentes courbes de la Figure 4.10. Cela vient du fait que plus les IT s'éloignent de leur valeur nominale, moins le métamodèle $\tilde{\mathrm{TNC}}_{\mathrm{APTA}}(\mathbf{t})$, qui a un domaine de validité localisé, est précis. Il est donc régulièrement actualisé à partir d'un nouveau plan d'expériences, ce qui entraîne un ajustement des différentes variables de conception.

4.3.4 Conclusion sur la synthèse des tolérances

Deux principales méthodes de synthèse des tolérances sont évoquées dans ce manuscrit. L'approche semi-probabiliste, issue de la littérature, permet une préconception intéressante puisqu'elle permet le respect d'un certain niveau de qualité pour un nombre de calcul très limité. Cette approche souffre toutefois des mêmes limitations que pour l'analyse des tolérances (linéarité de la chaîne de cotes, TNC limite non-ajustable, etc.). Pour mener une synthèse des tolérances plus complète, une approche fiabiliste menée grâce à un problème d'optimisation est proposée dans ce chapitre. Un schéma minimisant un coût de fabrication et un coût de non-conformité, sous contrainte de TNC est privilégié. La mise en application de ce schéma combiné à un calcul de TNC au sens de l'approche APTA constitue un des apports majeur de ce chapitre. En effet, ce type de problèmes permet l'optimisation d'une conception sous modélisation très réaliste des caractéristiques de fabrication des mécanismes. Les différentes applications montrent que cette approche permet un gain potentiel significatif du coût de production par rapport à la conception initiale tout en respectant la fonctionnalité du mécanisme avec le niveau de qualité souhaité.

L'approche proposée de minimisation d'une fonction coût dépend bien évidemment des divers coûts de production et de défaillance qu'il est nécessaire de déterminer (par l'intermédiaire des constantes de coûts). Il est important de comprendre que dans l'entreprise où la maitrise des coûts est essentielle, toute prise de décision ou conception de mécanisme dépend fortement des divers coûts impliqués. La priorité est donc de modéliser le plus précisément possible ces coûts afin de relier concrètement les méthodes d'analyse de sensibilité et de synthèse des tolérances à

la réalité d'aujourd'hui.

Synthèse de chapitre

Objectifs :

- Proposer des outils d'aide à la décision pour un concepteur dans un contexte industriel. Lorsque le fournisseur réclame une dérogation sur des exigences de fabrication, le client doit être en mesure de trancher. De même, il paraît important de pouvoir identifier les cotes les plus "importantes" vis à vis de la conception à mener, afin de les surveiller particulièrement en phase de fabrication par exemple.
- Développer une méthodologie de synthèse des tolérances efficace. Il s'agit de déterminer les intervalles de tolérance optimaux minimisant le coût de production tout en respectant le niveau d'exigence de qualité souhaité.

Méthodologie. Plusieurs critères d'importance des cotes sont envisagés à partir d'indices de sensibilités locaux, selon plusieurs hypothèses de modélisation des dimensions. D'autre part, un algorithme d'optimisation fiabiliste est utilisé pour mener la synthèse des tolérances. Le coût de production, défini comme la somme du coût de non-conformité et du coût de fabrication, est minimisé sous contrainte de TNC maximal.

Principaux résultats. Les différents critères d'importance développés à partir des indices de sensibilité locaux permettent de connaître l'influence exacte d'une cote sur le TNC d'un mécanisme de manière très simple. Ils permettent aussi d'identifier les cotes critiques pour la conception : les "Key Characteristics". En ce qui concerne l'analyse des tolérances, la méthode développée permet l'optimisation d'une conception tout en respectant le niveau d'exigences de qualité en s'appuyant sur le TNC ponctuel ou dynamique (APTA). Les gains potentiels en terme de coût de production sont significatifs (de l'ordre de 50%) par rapport aux conceptions initiales, alors même qu'une majorité d'intervalles de tolérance est augmentée.

Conclusions et perspectives

Ces dernières années, les industriels ont compris qu'une baisse des coûts de production passe par un contrôle efficace des moyens de production dans le but de fabriquer le juste nécessaire, notamment dans le domaine de la grande série. Mais les pratiques d'analyse des tolérances sont encore majoritairement orientées vers l'utilisation des cartes de contrôle et des approches statistiques (ou semi-probabilistes) telles que la méthode Six Sigma. Face à des niveaux de contraintes de coût et de qualité plus forts, ces méthodes ne suffisent plus car les informations apportées manquent de précision. Dans ce contexte, la proportion de pièces produites non conformes semble être l'indicateur privilégié. Sa prévision, plus encore que sa connaissance, semble indispensable. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que certaines entreprises utilisent cet indicateur pour fixer des objectifs de production sans qu'elles aient les moyens de s'assurer qu'ils soient tenus, par manque d'outils appropriés. Il paraît donc utile de les aider à développer de nouvelles stratégies d'analyse des tolérances.

L'approche fiabiliste rassemble les outils permettant aux industriels de répondre avec précision aux problèmes les plus sévères auxquels ils sont confrontés. L'objectif principal de cette thèse est de sensibiliser la communauté industrielle à l'intérêt de cette approche dans les phases de conception et de fabrication de systèmes mécaniques.

Une méthodologie d'analyse des tolérances a été développée. Elle est basée sur le Taux de pièces Non-Conformes (TNC) exprimant le niveau de qualité obtenu vis-à-vis des caractéristiques fonctionnelles sélectionnées. Il permet à l'ingénieur de vérifier qu'une conception respecte bien les exigences imposées par le cahier des charges. La méthodologie fiabiliste développée permet de traiter aussi bien les chaînes de cotes linéaires que non-linéaires, explicites ou implicites. De plus, tous types de lois peuvent être envisagées pour modéliser les dimensions. A partir d'un lot de pièces connu (moyennes et écarts-types des dimensions du lot connus), le TNC conditionnel ou ponctuel peut être calculé efficacement par différents moyens en fonction du type de modélisation choisi.

Une des constatations principales de ces travaux de thèse est que les paramètres de modélisation évoluent au cours de la production série, en fonction des réglages machines, de l'usure des outils, etc. En conséquence, l'approche APTA (Advanced Probability-based Tolerance Analysis of products) est proposée afin de tenir compte de cette évolution. Elle est basée sur une modélisation aléatoire des paramètres probabilistes (moyennes et écarts-types) des dimensions. Afin de rendre le calcul du TNC dynamique abordable, celui du TNC conditionnel a comme prérequis d'être d'une grande efficacité. Différentes méthodes fiabilistes le permettent. La méthode FORM notamment constitue un très bon choix dans ce contexte. Elle apporte un excellent rapport précision/temps de calcul tout en permettant un large choix de modélisation des dimensions.

La classe de mécanismes la plus complexe pour l'analyse des tolérances est sans doute celle des mécanismes comportant des jeux. Bien que négligés dans beaucoup d'études à l'heure actuelle, principalement à cause de la complexité qu'ils engendrent, les jeux doivent absolument être pris en compte. Notamment, leur considération évite de faire des hypothèses trop importantes, telles que la supposition de la localisation des points de contacts. En conséquence, une méthodologie basée sur une approche fiabiliste système a été développée, afin de traiter une combinaison de situations de points de contact. Elle s'appuie sur la méthode FORM système, qui permet de préserver là aussi toutes les possibilités de modélisation des variables aléatoires. Elle comporte cependant certaines limites liées à d'éventuelles fortes non-linéarités des fonctions impliquées. Il s'agit d'une des contributions majeures de cette thèse.

Les méthodes d'analyse des tolérances ont pour objectif de vérifier que les exigences de fabrication permettent au mécanisme d'être conforme. La synthèse des tolérances et l'analyse des sensibilité apporte des outils aidant le concepteur à définir une conception optimale. La notion de coût apparaît de fait. En effet, produire à moindre coût est une contrainte omniprésente dans l'entreprise. Les indices de sensibilité, couplés à des coûts de non-conformité, permettent de prendre des décisions sur l'acceptation ou non de dérogations sur les exigences de fabrication imposées au fabricant. Ils peuvent aussi aider à identifier les cotes nécessitant une surveillance particulière en phase de fabrication : les "Key Characteristics". L'inconvénient d'un calcul de TNC absolu est que sa valeur peut être remise en question si la modélisation probabiliste ou mécanique est défectueuse. Au contraire, les résultats d'une analyse des sensibilité peuvent être interprétés de manière relative. L'ordre d'"importance" des "Key Characteristics" par exemple n'est quasiment pas altéré par d'éventuelles défauts de modélisation.

La dernière contribution majeure de cette thèse est le développement d'un schéma d'optimisation fiabiliste permettant la synthèse des tolérances de manière optimale. Ce schéma propose de minimiser le coût de production dépendant du coût de fabrication, du coût de non-conformité et potentiellement d'autres types de coûts. Cette minimisation permet de respecter les exigences de qualité imposées par le cahier des charges en s'appuyant sur le TNC conditionnel ou dynamique. Ce schéma d'optimisation tire donc partie des différentes méthodes d'analyse des tolérances adaptées ou mises au point dans cette thèse. Pour l'obtention d'une solution optimale de conception, il nécessite l'utilisation des ces méthodes un grand nombre de fois. L'efficacité des méthodes fiabilistes employées permet finalement une synthèse des tolérances complète pour un temps de calcul très raisonnable. Par l'utilisation de cette technique, les applications proposées sur des cas d'études réalistes (modélisation APTA) peuvent apporter des gains en terme de coût de production de l'ordre de 50% par rapport aux conceptions initiales, tout en augmentant une majorité d'IT.

Cette thèse a pour vocation initiale d'être exploratrice dans le domaine de l'analyse et la synthèse des tolérances. Pour résumer, les principaux apports de ces travaux de thèse sont les suivants :

- Les méthodes fiabilistes sont adaptées au domaine de l'analyse des tolérances

afin de permettre le contrôle précis du TNC de tous types de mécanismes sans jeu.

- Pour les mécanismes avec jeux, une stratégie basée sur une décomposition par situations de points de contact et sur une méthode de fiabilité système permet d'éviter l'utilisation des simulations de Monte Carlo, extrêmement coûteuses en temps de calcul.
- Des indices de sensibilité locaux permettent, de manière relativement simple, de mesurer l'influence exacte des exigences de fabrication sur le TNC d'un mécanisme. Ils permettent aussi d'identifier les cotes critiques pour la conception : les "Key Characteristics".
- Une stratégie de synthèse des tolérances est proposée et permet d'obtenir une conception optimisée respectant les exigences de qualité imposées. La contribution de ces travaux vient principalement de l'association des différentes méthodes adaptées ou développées dans cette thèse.

Bien évidemment, de nombreux aspects restent à approfondir et même tout simplement à explorer. Les perspectives présentées dans le paragraphe suivant en sont des exemples.

Perspectives. D'une manière générale, les méthodes fiabilistes proposées dans cette thèse sont capables de délivrer des informations relativement précises. Néanmoins, et cela semble logique, elles nécessitent en contrepartie une modélisation pointue des variables influentes. Trois exemples, pour lesquels une amélioration de modélisation est envisageable, sont proposés :

- Une dimension est modélisée par une variable aléatoire. Même si sa loi de probabilité est souvent Gaussienne, elle peut être différente dans certains cas. Elle peut aussi être corrélée avec d'autres fabriquées dans la même phase. Des études statistiques pourraient être menées afin de modéliser plus finement les dimensions.
- L'évolution des moyennes et écart-types des lots de pièces est aussi modélisée par des variables aléatoires dans l'approche APTA. Ces informations sont disponibles dans la plupart des grandes entreprises mais ne sont pas exploitées. La mise en place d'une base de données permettrait d'identifier certaines évolutions types associées aux processus de fabrication. L'idée est de rendre ce calcul le plus abordable possible. L'utilisateur n'aurait qu'à sélectionner le processus de fabrication au lieu de rentrer des paramètres mathématiques de modélisation. D'autres améliorations sont envisageables notamment pour la gestion de plusieurs fournisseurs par pièce ainsi que d'outils multi-empreintes.
- La logique financière dans l'entreprise rend indispensable la modélisation de certains coûts qui se retrouvent associés à de nombreuses méthodes présentées dans ce manuscrit. Par exemple, le fait d'évaluer le coût général d'une pièce non-conforme permettrait de fixer un objectif de TNC réaliste. Il serait le plus haut possible afin de ne pas trop impacter les coûts de fabrication mais assez bas pour ne pas nuire au rendement productif de l'entreprise.

Un travail poussé de modélisation semble primordial afin de tirer le meilleur parti des méthodologies fiabilistes, et ainsi répondre aux problématiques concrètes des industriels. Cela passe par l'organisation d'un système généralisé de mesures des pièces, ainsi que de récupération et de traitement de ces données.

La prise en compte des jeux dans les mécanismes reste problématique pour les plus complexes d'entre eux et ceux nécessitant des modélisations sophistiquées. Le projet ANR ATHOLA (Advanced Hybrid method for the TOLerance Analysis of complex system), mené avec les mêmes partenaires industriels que cette thèse (ainsi que Pierburg), a notamment comme objectif de permettre l'analyse des tolérances sur de tels systèmes mécaniques. Par ailleurs, la synthèse des tolérances par optimisation fiabiliste pour des mécanismes avec jeux n'a pas été développée dans ces travaux de thèse en raisons de problèmes techniques. Elle est cependant envisageable à court terme.

En ce qui concerne les exigences de fabrication, les indices de capabilité actuellement utilisés dans la majorité des entreprises sont assez pertinents mais perfectibles. En effet, il peut arriver qu'une pièce respectant les exigences de fabrication conduise à un TNC plus élevé qu'une pièce ne les respectant pas. L'indice de capabilité inertiel, compatible avec les méthodes développées dans ces travaux de thèse, semble répondre en partie à ce problème. La mise en relation directe des exigences de fabrication avec le TNC serait une innovation conséquente, simplifiant de fait toutes les procédures post-fabrication d'analyse et de synthèse des tolérances.

De nos jours, la conception de systèmes mécaniques est presque exclusivement réalisée à partir de logiciels CFAO (Conception et Fabrication Assistée par Ordinateur). Il semble donc primordial et prioritaire d'intégrer ces méthodes fiabilistes dans un environnement CFAO. Cette solution a l'avantage de déléguer le problème de modélisation de la relation cotes - caractéristique fonctionnelle au logiciel lui-même. De plus, elle permettrait une diffusion et sensibilisation plus rapide des approches probabilistes au monde industriel.

Bibliographie

G. Ameta, J.K. Davidson et J.J. Shah : Using tolerance-maps to generate frequency distributions of clearance and allocate tolerances for pin-hole assemblies. *ASME Transactions, Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 7(4):347–359, 2007. (Cité en pages 75 et 77.)

L. Andolfato, F. Thiébaut, M. Douilly et C. Lartigue : On neural networks' ability to approximate geometrical variation propagation in assembly. *In 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, 2012. (Cité en pages 26, 44 et 78.)

B. Anselmetti et M. Radouani : Calcul statistique des chaînes de cotes avec des distributions hétérogènes non indépendantes. *In Conception et Production Intégrées : CPI*, 2003. (Cité en page 37.)

S.-K. Au et J. L. Beck : Estimation of small failure probabilities in high dimensions by Subset Simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4):263–277, 2001. (Cité en page 19.)

A. Ballu, J.-Y. Plantec et L. Mathieu : Geometrical reliability of overconstrained mechanisms with gaps. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 57 (1):159–162, 2008. ISSN 0007-8506. (Cité en pages 75, 82, 83, 94 et 97.)

P. Beaucaire, N. Gayton, E. Duc et J.-Y. Dantan : Statistical tolerance analysis of over-constrained mechanisms using system reliability methods. *Computer Aided Design*, Under review, 2013. (Cité en page 83.)

P. Beaucaire, N. Gayton, E. Duc, M. Lemaire et J.-Y. Dantan : Statistical tolerance analysis of a hyperstatic mechanism, using system reliability methods. *Computers and Industrial Engineering*, To be published, 2012. (Cité en page 83.)

Todd W. Benanzer, Ramana V. Grandhi et William P. Krol : Reliability-based optimization of design variance to identify critical tolerances. *Advances Engineering Software*, 40(4):305–311, 2009. (Cité en pages 44, 118 et 120.)

A. Bender : Statistical tolerancing as it relates to quality control and the designer. *SAE transactions*, 77:1965–1971, 1968. (Cité en page 36.)

G. Blatman et B. Sudret : An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(2):183–197, 2010. (Cité en page 26.)

E. Borgonovo : A new uncertainty importance measure. *Reliability Engineering and System Safety*, 92:771–784, 2007. (Cité en pages 105 et 114.)

P. Bourdet, L. Mathieu et C. Lartigue : The concept of the small displacement torsor in metrology. *Advanced Mathematical Tools in Metrology II, Series Advances in Mathematics for Applied Sciences : World Scientific.*, 40:110–122, 1996. (Cité en pages 4 et 77.)

P. Bourdet et F. Schneider : *Spécification géométrique des produits. Cotation et tolérancement ISO.* Dunod/Industries et Technologies., 2007. (Cité en page 3.)

J.-M. Bourinet, F. Deheeger et M. Lemaire : Assessing small failure probabilities by combined Subset Simulation and Support Vector Machines. *Structural Safety*, 33(6):343–353, 2011. (Cité en page 26.)

C. G. Bucher et U. Bourgund : A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 7(1):57–66, 1990. (Cité en page 25.)

F. Charue-Duboc : *Des savoirs en action. Contributions de la recherche en gestion.* l'Harmattan, 1995. (Cité en page 3.)

N.D. Cox : *How to Perform Statistical Tolerance Analysis. Asqc Basic References in Quality Control : Statistical Techniques.* 1986. (Cité en page 21.)

Crofts : Assembly tolerance problem. *The Engineer*, 206:918–922, 1958. (Cité en page 39.)

J.-Y. Dantan, L. Mathieu, A. Ballu et P. Martin : Tolerance synthesis : quantifier notion and virtual boundary. *Computer Aided Design*, 37:231–240, 2005. (Cité en pages 4 et 5.)

J.-Y. Dantan et A.-J. Qureshi : Worst-case and statistical tolerance analysis based on quantified constraint satisfaction problems and monte carlo simulation. *Computer Aided Design*, 41:1–12, 2009. (Cité en pages 44, 75, 76 et 77.)

P. K. Das et Y. Zheng : Cumulative formation of response surface and its use in reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(4):309–315, 2000. (Cité en page 25.)

A. Der Kiureghian et P.L. Liu : Structural reliability under incomplete probability information. *Journal of Engineering Mechanics*, 112(1):85–104, 1986. (Cité en page 12.)

D'Errico et Zaino : Statistical tolerancing using a modification of taguchi's method. *Technometrics*, 30(4):397–405, 1988. (Cité en pages 24 et 44.)

A. Desrochers : Modeling three dimensional tolerance zones using screw parameters. *In 25th design automation conference, ASME.*, 1999. (Cité en page 77.)

O. Ditlevsen, P. Bjerager, R. Olesen et A. M. Hasofer : Directional Simulation in Gaussian processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(4):207–217, 1988. (Cité en page 19.)

O.D. Ditlevsen et H.O. Madsen : *Structural Reliability Methods.* John Wiley & Sons Inc, 1996. (Cité en pages 11, 13, 14, 16 et 17.)

X. Du : Unified uncertainty analysis with the first order reliability method. *ASME Journal of Mechanical Design*, 130(9):ASME Journal of Mechanical Design, 2008. (Cité en page 44.)

B. Echard, N. Gayton et M. Lemaire : AK-MCS : An Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation. *Structural Safety*, 33 (2):145–154, 2011. (Cité en page 26.)

D.H. Evans : Statistical tolerancing : The state of the art. part ii. methods for estimating moments. *Journal of Quality Technology*, 7(1):1–12, 1975. (Cité en pages 21, 23, 32, 34, 37, 44 et 51.)

N. Gayton, P. Beaucaire, J-M. Bourinet, E. Duc, M. Lemaire et L. Gauvrit : Apta : Advanced probability - based tolerance analysis of products. *Mecanique et Industries*, 12:71–85, 2011a. (Cité en page 53.)

N. Gayton, P. Beaucaire, E. Duc et M. Lemaire : The apta method for the tolerance analysis of products - comparison of capability-based tolerance and inertial tolerance. *Asian International Journal of Science and Technology in Production and Manufacturing Engineering (AIJSTPME)*, 4(3):24–36, 2011b. (Cité en page 58.)

N. Gayton, J.-M. Bourinet et M. Lemaire : CQ2RS : a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety*, 25(1):99–121, 2003. (Cité en page 25.)

A. Genz : Numerical computation of multivariate normal probabilities. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, pages 141–149, 1992. (Cité en page 17.)

R. G. Ghanem et P. D. Spanos : *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach.* Springer, Berlin, 1991. (Cité en page 26.)

M. Giordano, P. Hernandez et D. Denimal : Synthesis and statistical analysis for three-dimensional tolerancing. *In CAT2009 11th CIRP International conferance on Computer Aided Tolerancing, Annecy, France*, 2009. (Cité en page 34.)

M. Giordano, L. Mathieu et F. Villeneuve : *Product Life-Cycle Management. Geometric Variations.* Wiley, 2010. (Cité en page 4.)

C. G. Glancy : A second-order method for assembly tolerance analysis. Mémoire de D.E.A., Brigham Young University, 1994. (Cité en page 20.)

C. G. Glancy et K.W. Chase : A second-order method for assembly tolerance analysis. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, 1999. (Cité en pages 21, 44 et 45.)

Graves et Bisgaard : Five ways statistical tolerancing can fail, and what to do about them. *Quality Engineering*, 13(1):85–93, 2000. (Cité en pages 35, 36, 37 et 51.)

W.H. Greenwood et K.W. Chase : A new tolerance analysis method for designers and manufacturers. *Transaction of the ASME*, 109:112–116, 1987. (Cité en pages 33, 34 et 36.)

A. Hasofer et N. Lind : Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics*, 100(1):111–121, 1974. (Cité en page 12.)

J. E. Hurtado : An examination of methods for approximating implicit limit state functions from the viewpoint of statistical learning theory. *Structural Safety*, 26 (3):271–293, 2004. (Cité en page 26.)

B. Iooss : Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques. *Journal de la Société Françiase de Statistique*, 2010. (Cité en page 105.)

J. Jacques : *Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2005. (Cité en page 104.)

T. Jansson, L. Nilsson et R. Moshfegh : Reliability analysis of a sheet metal forming process using monte carlo analysis and metamodels. *Journal of Materials Processing Technology*, 202(1-3):255–268, June 2008. (Cité en page 44.)

Jeang : Computer-aided tolerance synthesis with statistical method and optimization techniques. *Quality and reliability engineering international*, 17:131–139, 2001. (Cité en pages 44, 116, 117 et 118.)

J.M.Gilbert, I.M.Bell et D.R. Johnson : Circuit design optimization based on quality cost estimayion. *Quality and Reliability Engineering International*, 21:365–386, 2005. (Cité en page 44.)

N.L. Johnson : Tables to facilitate fitting su frequency curves. *Biometrika*, 52:547–558, 1965. (Cité en page 22.)

N.L. Johnson, E. Nixon et D.E. Amos : Table of percentage points of pearson purves, for $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 expressed in standard measure. *Biometrika*, 50(3,4):459, 1963. (Cité en page 22.)

Karian et Dudewicz : *Fitting Statistical Distributions : The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods.* CRC Press, 2000. (Cité en pages 22 et 23.)

Kim et Cho : The use response surface designs selection optimum tolerance allocation. *Quality Engineering*, 13(1), 2000. (Cité en pages 116, 118 et 120.)

W-J. Lee et T. C. Woo : Tolerances : Their analysis and synthesis. *Journal of Engineering for Industry*, 112(2):113–121, mai 1990. (Cité en page 116.)

M. Lemaire : *Structural Reliability.* ISTE/Wiley, 2009. (Cité en pages 11, 13, 14, 15, 16 et 17.)

J. Leung : Methodology for evaluating statistical tolerancing strategies. *In 11th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, 2009. (Cité en pages 53 et 54.)

M. Mansuy, M. Giordano et P. Hernandez : A generic method for the worst case and statistical tridimensional tolerancing analysis. *In 12th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, 2012. (Cité en pages 34, 44 et 78.)

L. Mathieu et F. Villeneuve : *Tolérancement géométrique des produits.* Hermès, Lavoisier., 2007. (Cité en page 3.)

R.E. Melchers : Radial importance sampling for structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(1):189–203, 1990. (Cité en page 19.)

A. Nataf : Détermination des distributions dont les marges sont données. *Comptes Randus de l'Académie des Sciences*, 225:42–43, 1962. (Cité en page 12.)

S. D. Nigam et J. U. Turner : Review of statistical approaches to tolerance analysis. *Computer Aided Design*, 27(1):6–15, 1995. (Cité en page 44.)

Pillet : Inertial tolerancing. *The Total Quality Management Magazine*, 16(3):202–209, 2004. (Cité en page 32.)

E. Polak : *Algorithms and Consistent Approximations.* Springer-Verlag New York Inc., 1997. (Cité en pages 120, 143 et 144.)

A. J. Qureshi, J-Y. Dantan, V. Sabri, P. Beaucaire et N. Gayton : A statistical tolerance analysis approach for over-constrained mechanism based on optimization and monte carlo simulation. *Computer Aided Design*, 44 Issue 2:132–142, 2012. (Cité en pages 76 et 78.)

A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo et M. Ratto : *Sensitivity Analysis in Practice : A Guide to Assessing Scientific Models.* Wiley, 2004. (Cité en page 104.)

G.J. Savage, D. Tong et S.M. Carr : Optimal mean and tolerance allocation using conformance-based design. *Quality and Reliability Engineering International*, 22: 445–472, 2006. (Cité en pages 83 et 120.)

F. Scholtz : *Tolerance Stack Analysis Methods.* Boeing Technical Report, 1995. (Cité en pages 5, 31, 33, 34, 36, 37, 38 et 114.)

Victor J Skowronski et Joshua U Turner : Using monte-carlo variance reduction in statistical tolerance synthesis. *Computer-Aided Design*, 29(1):63–69, janvier 1997. ISSN 0010-4485. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TYR-3SNN254-5/2/bf10bce0b005d2a3ea005bc162479746`. (Cité en pages 44, 83, 118 et 120.)

I.M. Sobol : Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments.*, 1:407–414, 1993. (Cité en page 105.)

A. Stockinger et H. Meerkamm : Concept for the integration of manufacturing simulations into tolerance analysisoperations on polytopes : application to tolerance analysis. *In 112th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing*, 2009. (Cité en page 44.)

B. Sudret et A. Der Kiureghian : Comparison of finite element reliability methods. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17(4):337–348, 2002. (Cité en page 26.)

D.A. Swan et J. Savage : Continuous taguchi, a model based approach to taguchi's 'quality by design' with arbitrary distributions. *Quality and Reliability Engineering*, 14:29–41, 1998. (Cité en pages 44 et 105.)

G. Taguchi : *Introduction to Quality Engineering.* Unipub : White Plains, NY, 1989. (Cité en pages 112 et 117.)

D. Teissandier et V. Delos : Algorithm to calculate the minkowski sums of 3-polytopes based on normal fans. *Computer-Aided Design*, 43(12):1567–1576, 2011. (Cité en page 34.)

D. Teissandier, V. Delos et Y. Couétard : Operations on polytopes : application to tolerance analysis. *In CAT1999 6th CIRP International conferance on Computer Aided Tolerancing, Twente, Netherlands*, 1999. (Cité en page 34.)

P. Thoft-Christensen et Y. Murotsu : *Application of Structural Systems Reliability Theory.* Springer-Verlag., 1986. (Cité en page 81.)

A.C. Thornton : A mathematical framework for the key characteristic process. *Research in Engineering Design*, 11:145–157, 1999. (Cité en page 112.)

F. Wu, J-Y. Dantan, A. Etienne, A. Siadat et P. Martin : Improved algorithm for tolerance allocation based on monte carlo simulation and discrete optimization. *Computers & Industrial Engineering*, 56(4):1402–1413, mai 2009. ISSN 0360-8352. (Cité en pages 83, 94 et 120.)

O. P. Yadav, S. S. Bhamare et A. Rathore : Reliability-based robust design optimization : A multi-objective framework using hybrid quality loss function. *Quality and Reliability Engineering International*, 26(1):27–41, 2010. (Cité en pages 44, 118 et 120.)

Y. Zhang et A. Der Kiureghian : Two improved algorithms for reliability analysis. *In* R. Rackwitz, G. Augusti et A. Bori, éditeurs : *Reliability and optimization of structural systems, Proceedings of the 6th IFIP WG7.5 Working Conference on reliability and optimization of structural systems*, Assisi, Italy, 1995. Chapman & Hall. (Cité en page 13.)

Z. Zou et E. Morse : A gap-based approach to capture fitting conditions for mechanical assembly. *Computer Aided Design*, 36:691–700, 2004. (Cité en page 75.)

Annexe A

Algorithme de Polak

Pour résoudre le problème d'optimisation non-linéaire adressé en Equation 4.39, c'est l'algorithme de Polak (1997) qui a été choisi. Il s'agit d'un algorithme d'ordre 1 dont la capacité à résoudre de tels problèmes efficacement est reconnue (Polak, 1997).

Mathématiquement, le problème d'optimisation général se pose de la manière suivante :

$$\mathbf{t}^* = \arg\min\{F(\mathbf{t})|\mathbf{g}(\mathbf{t}) \leq 0\} \tag{A.1}$$

Où F est la fonction objectif, $\mathbf{g}$ le vecteur des fonctions contraintes et $\mathbf{t}$ le vecteur des variables d'optimisation dans le contexte de la synthèse des tolérances. L'algorithme vise à trouver le minimum (si possible global) de la fonction objectif au point de coordonnées $\mathbf{x}^*$. Comme la plupart des algorithmes, celui-ci résout ce problème de manière itérative. Le point à l'itération $i+1$ est obtenu à partir de celui à l'itération i. Dans le but d'améliorer la conception, donc de minimiser la fonction objectif, le point de coordonnées $\mathbf{x^{(i)}}$ est déplacé dans la direction de descente $\mathbf{h^{(i)}}$ d'une longueur de pas optimale $\lambda^{(i)}$.

$$\mathbf{x^{(i+1)}} = \mathbf{x^{(i)}} + \lambda^{(i)}\mathbf{h^{(i)}} \tag{A.2}$$

La direction de descente la plus appropriée est obtenue grâce aux conditions d'optimalité de Karush Kuhn Tucker. Elles s'écrivent à partir du lagrangien suivant :

$$L(\mathbf{x}) = \mu_0 F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}.\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{A.3}$$

où μ_0 et $\boldsymbol{\mu}$ sont les multiplicateurs de Lagrange. Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla L(\mathbf{x}) &= 0 \\ \boldsymbol{\mu}.\mathbf{g}(\mathbf{x}) &= 0 \\ \mu_0 &\geq 0 \\ \boldsymbol{\mu} &\geq 0 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Afin de s'assurer de leur respect, Polak (1997) propose de résoudre le sous-problème d'optimisation suivant, en minimisant une combinaison quadratique des différentes conditions d'optimalité sous contraintes linéaires, dont les variables d'optimisation

sont les multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{aligned}\theta^{(i)} &= -\min\left\{\mu_0\gamma\psi\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)_+ + \boldsymbol{\mu}\left[\psi\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)_+ - \mathbf{g}\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)\right] \ldots\right. \\ \ldots &+ \left.\frac{1}{2\delta}\left\|\mu_0\nabla F\left(\mathbf{x^{(i)}}\right) + \boldsymbol{\mu}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)\right\|^2 \middle| \mu_0 \geq 0, \boldsymbol{\mu} \geq 0\right\} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Où $\left(\mu_0^{(i)}, \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{i})}\right)$ sont les solutions du problème d'optimisation, $\psi\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)_+ = \max\left[0, \mathbf{g}\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)\right]$ est la fonction de violation de contrainte, et γ, δ sont des paramètres de l'algorithme tel que $\gamma > 0$ et $\delta > 0$. Il s'agit ici d'un sous-problème d'optimisation quadratique résolu grâce à l'algorithme SQP (Polak, 1997). La direction de descente s'exprime finalement en fonction des multiplicateurs de Lagrange et des gradients des fonctions objectifs et contraintes :

$$\mathbf{h^{(i)}} = -\frac{1}{\delta}\left[\mu_0^{(i)}\nabla F\left(\mathbf{x^{(i)}}\right) + \boldsymbol{\mu}^{(\mathbf{i})}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)\right] \tag{A.6}$$

La longueur de pas optimale pour obtenir une convergence la plus rapide possible est calculée grâce à la fonction de mérite d'Armijo :

$$M\left(\mathbf{x^{(i)}}, \mathbf{x^{(i)}} + \beta^s\mathbf{h^{(i)}}\right) = \max\begin{pmatrix} F\left(\mathbf{x^{(i)}} + \beta^s\mathbf{h^{(i)}}\right) - F\left(\mathbf{x^{(i)}}\right) - \gamma\psi\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)_+ \\ \mathbf{g}\left(\mathbf{x^{(i)}} + \beta^s\mathbf{h^{(i)}}\right) - \psi\left(\mathbf{x^{(i)}}\right)_+ \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

Où s est un entier, dont la valeur initiale est nulle, pouvant varier afin de satisfaire la condition suivante :

$$M\left(\mathbf{x^{(i)}}, \mathbf{x^{(i)}} + \beta^s\mathbf{h^{(i)}}\right) \leq \alpha\beta^s\theta^{(i)} \tag{A.8}$$

α, β sont des paramètres de l'algorithme tel que $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$. Enfin, la longueur optimale de pas est obtenue en résolvant un problème d'optimisation discret simple décrit par l'expression suivante :

$$\lambda^{(i)} = \max\left\{\beta^s \middle| M\left(\mathbf{x^{(i)}}, \mathbf{x^{(i)}} + \beta^s\mathbf{h^{(i)}}\right) \leq \alpha\beta^s\theta^{(i)}\right\} \tag{A.9}$$

L'algorithme est stoppé lorsque deux solutions consécutives sont assez proches. Le critère suivant peut être utilisé :

$$\left\|\mathbf{x^{(i)}}, \mathbf{x^{(i+1)}}\right\| \leq 10^{-6} \tag{A.10}$$

Ainsi, Polak (1997) prouve que l'optimum trouvé $\mathbf{x}^*$ satisfait les conditions d'optimalité nécessaires (mais pas suffisantes) du premier ordre de Karush Kuhn Tucker. L'optimum trouvé a donc toutes les chances d'être un minimum local ou global, même si aucune certitude ne peut être apportée. L'efficacité de l'algorithme est altérée si les ordres de grandeur des fonctions objectif et contraintes sont trop éloignées. C'est pourquoi elles sont normalisées à chaque itération par rapport à leurs valeurs précédentes. Enfin, les valeurs recommandées pour les paramètres de l'algorithme

sont : $\alpha = 0.5, \beta = 0.6, \gamma = 1, \delta = 1$.