



Compensation en fréquence des résonateurs MEMS pour des applications de référence de temps

Yoan Civet

► To cite this version:

Yoan Civet. Compensation en fréquence des résonateurs MEMS pour des applications de référence de temps. Micro et nanotechnologies/Microélectronique. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : . tel-00838019v1

HAL Id: tel-00838019

<https://theses.hal.science/tel-00838019v1>

Submitted on 24 Jun 2013 (v1), last revised 8 Oct 2013 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Nano Electronique et Nano Technologies (NENT)**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Yoan Civet

Thèse dirigée par **Skandar Basrour**

préparée au sein du **Laboratoire TIMA**
dans l'**École Doctorale Electronique, Electrotechnique,
Automatique & Traitement du Signal (EEATS)**

Ajustement de la fréquence des résonateurs MEMS pour des applications de référence de temps

Thèse soutenue publiquement le « **16 Mai 2012** »,
devant le jury composé de :

M. Bernard DULMET

Professeur à l'ENS2M Besançon, Président

M. Alain BOSSEBOEUF

Directeur de recherche à l'IEF Paris, Rapporteur

M. Tarik BOUROUINA

Professeur à l'ESIEE Paris, Rapporteur

M. Olivier LE TRAON

Responsable d'unité à l'ONERA Paris, Membre

M. Julien ARCAMONE

Ingénieur-Docteur au CEA-LETI Grenoble, Membre

M. Jean-François CARPENTIER

Ingénieur-Docteur à STMicroelectronics Crolles, Membre

M. Skandar BASROUR

Professeur à l'UJF Grenoble, Directeur de thèse



Résumé

A l'heure actuelle, les Micro-Electro-Mechanical-Systems (MEMS) sont devenus incontournables dans les produits technologiques quotidiens. De par leur taille, leurs performances et leur intégration, les microsystèmes résonants se sont inscrits dans la diversification de la fameuse Loi de Moore. Cependant les applications de type base de temps demeurent le segment de marché où les MEMS ne parviennent pas à s'imposer durablement. En effet, grâce à une stabilité en fréquence de quelques parties par millions, l'oscillateur à base de résonateur en Quartz reste le produit numéro 1 d'un marché estimé à dix-sept milliards de dollars.

Etant donné le lien entre la fréquence d'un résonateur silicium MEMS et ses dimensions intrinsèques, les différentes étapes de fabrication induisent un décalage de cette fréquence par rapport à la valeur visée. C'est donc cet écart que nous tenterons d'adresser. Dans ce contexte, nous avons proposé une nouvelle méthode de correction à l'échelle du substrat. Cette méthode consiste en une ultime étape technologique, après une première mesure électrique des dispositifs qui permet de quantifier l'erreur, à ramener la fréquence à la valeur souhaitée par un ajout localisé de matière. Nous montrerons qu'il est possible, en une seule étape, de réduire la Gaussienne représentative de la variation de la fréquence au sein du substrat à quelques parties par million. Pour cela, nous avons développé deux modèles physiques qui permettent de quantifier la correction pour atteindre les objectifs. En parallèle, nous avons mis en place un processus de fabrication compatible avec la filière CMOS avec seulement dix-sept étapes et deux masques photolithographiques dont le point de départ est un substrat de type SOI. Ce procédé a permis la fabrication de résonateur à modes de flexion et ondes de volume, dont les performances intrinsèques (f et Q) permettent de concurrencer les résonateurs Quartz. Enfin, nous avons validé notre concept et nos modèles physiques par des caractérisations électriques de nos dispositifs.

L'analyse des résultats nous a permis de dresser une liste des pistes d'amélioration pour établir une voie vers l'industrialisation durable des résonateurs MEMS. Dans un premier temps, une attention toute particulière se portera sur le choix du substrat et la technologie utilisée pour garantir des performances optimales. La méthode de correction nécessite une mesure électrique intermédiaire, cette étape doit être précisée et il faudra s'assurer qu'elle n'augmente pas le coût global de la fonction. Bien que discutés, le packaging du MEMS et l'intégration seront des points à étudier, tout particulièrement pour conserver les spécifications du résonateur lui-même.

Mots clés :

MEMS, Technologie SOI, Résonateur électromécanique, Caractérisation RF, Oscillateur MEMS, détection capacitive

Abstract

At present, Micro-Electro-Mechanical-Systems (MEMS) have become essential in everyday technology products. Thanks to their size, performances and integration, resonant microsystems have been enrolled in the diversification of the famous Moore's Law. However, the time based applications remain the market segment where MEMS are unable to settle permanently. Indeed, the oscillator-based Quartz is the number one product on the market, a market estimated at \$ 17 billions, thanks to a frequency stability of a few parts per million over its lifetime.

Given the link between the frequency of a MEMS resonator and its intrinsic dimensions, the various manufacturing steps induce a shift of this frequency from the target value. We will try to address this difference.

In this context, we proposed a new method of correction across the wafer. This method consists of a final technological step after a first electrical measurement to quantify the shift. We will show that it is possible in one step, to reduce the Gaussian representing the frequency variation within the wafer to a few parts per million. From this perspective, we have developed two physical models that quantify the correction to achieve the objectives. Moreover, we set up a manufacturing process CMOS compatible with only 17 steps and 2 photolithographic masks starting with a SOI wafer. This process has enabled the production of flexural mode resonators and bulk mode resonators, whose intrinsic performances (f , Q) can compete with Quartz. Finally, we validated our concept and our physical models thanks to electrical characterization of our devices.

Analysis of the results allowed us to develop a list of possible improvements to establish a route to the industrialization of MEMS resonators. First, special attention will be focused on the choice of substrate and the technology used to ensure perfect performances. Correction method requires a preliminary electrical measurement, this step must be detailed and one have to ensure that it does not increase the overall cost. Although partially studied, the packaging of MEMS and integration are the points to consider in particular keeping the specifications of the resonator itself.

Key words:

MEMS, SOI technology, Electromechanical resonator, RF characterizations, MEMS Oscillator, Capacitive transduction

Remerciements

Voilà maintenant 3 ans que ces travaux ont commencé. 3 ans que je découvre chaque jour des gens passionnants et passionnés. 3 ans que je pousse à bout mes proches mais aussi mes encadrants. Mon directeur de thèse m'a qualifié de TNCA (Thésard, Nomade, Communicant, Adaptatif) et mon président de Jury comme étant réactif et avec du répondant. Je vais donc clôturer ce manuscrit comme j'ai mené ces trois années avec mon propre style. Je vais ainsi prendre le temps de remercier chacune des personnes qui m'ont apporté de près ou de loin pendant ces trois années. Pour ce faire, je choisis de classer ces personnes par ordre alphabétique et ainsi garder mon esprit « consensuel »...Merci à tous !!

Allain Marjolaine : Bon retour en salle après ce petit périple au pays de la fougère blanche.

Arcamone Julien : Merci Julien pour nos différentes entrevues et ta présence à ma soutenance.

Ancey Pascal : Merci pour tes conseils toujours avisés et nos discussions au combien enrichissantes. Un bon rétablissement...

Arnaud Caroline : Merci Caro pour ta patience et ces manip au dernier moment.

Bar Pierre : Que dire de ces soirées Poker, de ces idées de brevet venus d'ailleurs, de ces bières en terrasses et de ton aide pour la partie électrique. Merci.

Basroul Skandar : Merci ne serait pas assez fort pour décrire toute ma gratitude. Je n'oublierai jamais le mode « castor »...

Beilliard Yann : A dans deux ans...

Bertheau Julien : Toujours de passage, un peu comme moi...

Bonvilain Agnès : Merci.

Bosseboeuf Alain : Merci pour votre rapport de thèse au combien intéressant et

perspicace. Merci également pour vos questions et remarques lors de la soutenance.

Bourouina Tarik : Merci d'avoir accepté la charge d'examiner en détail mes travaux.

Brocard Mélanie : bon courage pour cette dernière ligne droite.

Bustos Jessy : Merci pour cette étape déterminante toujours dans la décontraction.

Cadix Lionel : Lio, au plaisir.

Carpentier Jean-François : Merci pour ce coup de téléphone en juillet 2008, point de départ de cette thèse. Merci pour m'avoir initié aux joies de la RF. Merci pour tes conseils et relecture avisés.

Casset Fabrice : Fabrice, on a tout partagé, du boulot, du foot, des soirées. Merci pour tout et on remet cela encore une année.

Cemeli Pierre : Sans vous, on serait encore à chercher des plaques. En espérant que notre collaboration fructifie.

Cécile : Qu'est ce que tu n'aurais pas fait pour ne pas venir. Bon rétablissement et merci du parrain de ta fille.

Chagoya Alejandro : Monsieur Alejandro, Merci pour ta disponibilité et les nombreux dépannages informatiques. Danke Schön !!

Chapelon Laurent-Luc : Bonne continuation à toi.

Colin Mikael : Dsl pour Coventor, mais merci pour la piezo.

Constantin Delphine : Merci pour les manip en bout de table...

Coudrain Perceval : Merci pour nos petits tours en salle blanche.

Cueff Matthieu : Merci pour ces 80 sandwiches !!

Defosseux Maxime : Les montagnes te manquent, donc à très vite !!

Felk Yacine : Merci pour tes mails et ton humour « pinçant ».

Dulmet Bernard : Merci pour votre enthousiasme en tant que président de Jury.

Durand Cédric : Tu avais mis la barre haute en développant les MEMS à Crolles et pourtant tu as toujours répondu à mes questions. Merci.

Escoffier David : ton « c'est chaud les gars » du lundi matin m'a fait rêver pendant un bon bout de temps.

Farcy Alexis : Monsieur sport, fais attention à ne pas te blesser

Fourneret-Itié Anne-Laure : Merci pour ces contrats qu'il a fallu faire et refaire, voir défaire pour mieux refaire.

Fréro : un exemple...

Gousseau Simon : fais attention de ne pas trop écouter Pierre, tu vas basculer du mauvais côté. A dans 2 ans.

Haccart Thibault : Merci pour ton soutien à la PTA

Huguenin Jean-Luc : à la Finlande et au premier de la classe !!

Icard Béatrice : Je n'ose imaginer où on en serait sans vous. Merci.

Kokshagina Olga : On partage le fait d'être multi site ; bon courage.

Joblot Sylvain : A quand les prochains travaux pratiques dans les terres froides ? Merci pour ta dispo et je te souhaite une bonne santé.

Lamraoui Hamid : Monsieur le PDG, et pourtant rien n'a changé. Après la cuisine et les stats, on attaque quoi ?

Ledenmat Simon : Merci pour les sessions MEB du vendredi à 19h.

Le Traon Olivier : Merci pour votre présence à ma soutenance et pour vos explication de la figure de mérite ($f \times Q$).

Leverd François : Monsieur gravure, « on peut essayer », mais surtout on réussit. Merci.

Lhostis Sandrine : Merci pour tes conseils dans les derniers instants et tes mails d'encouragement.

Loulou : toi seul sais...

Maman : Je vous aime (1).

Martineau Sophie : Merci pour ces missions et ta joie de vivre.

Mercier Denis : Sans toi les caracs ne se seraient pas aussi bien passé.

Montmayeul Evelynne : Toujours disponible pour régler mes problèmes à Crolles. Merci.

Pache Denis : Merci pour ton aide dans la modélisation électrique.

Papa : je vous aime (2).

Pellissier-tanon Denis : Vive le syndicalisme et le bus Grenoble-Crolles !!

Petit David : Quand tu veux pour un squash.

Ponthenier Fabienne : J'espère que les dalles du plafond ne te sont pas tombées dessus.

Rufer Libor : Ton seul défaut, c'est d'habiter Rives

Terrier Marlène : Le FIB, la chimie, je te remercie pour ton aide.

Thomassin Jean-Luc : Toujours présent pour m'éclairer sur la techno.

Velard Rémi : Très discret mais au combien intéressant.

Vianne Benjamin : dixit le « stagiaire », tu verras c'est bien une thèse.

Vincent Loïc : Je me rappellerai toujours de cette après-midi avec l'américain chasseur d'élan. Merci.

Yang Wenbin : Si tu ne veux plus faire de la recherche, tu sais que tu peux faire cuisinier.

Je tiens à m'excuser auprès des personnes que j'aurai malencontreusement oubliées et les remercie ici. Enfin, mes derniers remerciements vont à ceux qui sont partis trop vite...

Il est maintenant temps de vous souhaiter une bonne lecture et bon courage à ceux qui parcourront ces 4 chapitres jusqu'au bout.

Bien Amicalement.

Table des matières

RESUME.....	I
ABSTRACT.....	III
REMERCIEMENTS.....	V
TABLE DES MATIERES.....	IX
INTRODUCTION.....	1
 Partie 1 : Concept et état de l'art des résonateurs MEMS.....	 7
1.1 INTRODUCTION.....	8
1.1.1 Généralités.....	8
1.1.2 MEMS.....	8
1.1.2.1 Présentation des MEMS.....	8
1.1.2.2 MEMS RF.....	9
1.1.2.2.1 Types.....	9
1.1.2.2.2 Oscillateurs.....	10
1.1.2.2.3 Spécifications.....	11
1.2 RESONATEURS.....	12
1.2.1 Transduction.....	12
1.2.2 Types de résonateurs.....	14
1.2.3 Paramètres intrinsèques influant sur la fréquence de résonance.....	17
1.2.4 Performances.....	18
1.2.5 Circuit électrique équivalent.....	19
1.2.6 Influence des trous sur la structure résonante.....	21
1.3 TRIMMING ET COMPENSATION.....	23
1.3.1 Introduction.....	23
1.3.2 Dispersion sur un substrat.....	23
1.3.2.1 Introduction.....	23
1.3.2.2 Mesures électriques de résonateurs à ondes de volume de type disque.....	24
1.3.3 Trimming.....	27
1.3.3.1 Conception insensible au process.....	27
1.3.3.2 Ajout ou suppression de masse.....	28
1.3.3.3 Trimming thermique.....	30
1.3.3.4 Diffusion de métal.....	31
1.3.4 Compensation.....	31
1.3.4.1 Approche matériau.....	32
1.3.4.2 Contraintes mécaniques.....	33
1.3.4.3 Contraintes électrostatiques.....	35
1.3.4.4 Systèmes électromagnétiques.....	39
1.3.4.5 Tension de polarisation.....	39
1.3.4.6 Electronique.....	41
1.3.5 Comparaison du trimming et de la compensation.....	42
1.4 ENCAPSULATION.....	44
1.5 CONCLUSIONS.....	45

Partie 2 :	Modélisations et Simulations	47
2.1	INTRODUCTION	47
2.2	DEFINITIONS ET METHODES	48
2.2.1	<i>Analyse modale</i>	49
2.2.1.1	Méthodes à constantes localisées	49
2.2.1.2	La méthode du quotient de Rayleigh	50
2.2.2	<i>Analyse numérique</i>	51
2.3	MODES DE FLEXION	51
2.3.1	<i>Poutre encastrée-encastrée simple</i>	51
2.3.2	<i>Poutre comportant des trous</i>	52
2.3.2.1	Mode fondamental hors plan	53
2.3.2.1.1	Un seul trou	53
2.3.2.1.2	Réseau de trous	59
2.3.2.1.3	Bilan mode hors plan	65
2.3.2.1.4	Choix des structures	68
2.3.2.2	Mode fondamental dans le plan	69
2.3.2.2.1	Modélisation et simulations	69
2.3.2.2.2	Choix des structures	72
2.3.3	<i>Conclusion</i>	73
2.4	RESONATEURS A ONDES DE VOLUME	73
2.4.1	<i>Introduction</i>	73
2.4.2	<i>Simulations sous CoventorWare</i>	74
2.4.3	<i>Conclusion</i>	77
2.5	CORRECTION	78
2.5.1	<i>Poutre encastrée-encastrée</i>	78
2.5.1.1	Modèle analytique	78
2.5.1.1.1	Remplissage des trous	78
2.5.1.1.2	Correction localisée	78
2.5.1.2	Mode « hors plan »	81
2.5.1.2.1	Correction par remplissage	81
2.5.1.2.2	Correction localisée	83
2.5.1.3	Mode « dans le plan »	88
2.5.1.3.1	Correction par épitaxie	88
2.5.1.3.2	Correction localisée	89
2.5.2	<i>Résonateurs à ondes de volume</i>	91
2.5.2.1	Introduction	91
2.5.2.2	Résultats	91
2.6	CONCLUSIONS	93
Partie 3 :	Fabrication des résonateurs MEMS	97
3.1	INTRODUCTION	98
3.2	TECHNOLOGIE SOI	98
3.2.1	<i>Introduction</i>	98
3.2.2	<i>Procédé de fabrication</i>	100
3.2.2.1	Implantation	100
3.2.2.2	Epitaxie	100
3.2.2.3	Dépôt du masque dur en SiO ₂	101
3.2.2.4	Lithographie électronique	102
3.2.2.5	Gravure du masque dur en SiO ₂	105
3.2.2.6	Gravure Silicium	105

3.2.2.7	Réalisation des contacts électriques	109
3.2.2.8	Libération	110
3.2.2.9	Dépôt pour la correction	111
3.3	CONCLUSION	113
Partie 4 :	Caractérisations électriques	115
4.1	INTRODUCTION	116
4.2	BANCS DE MESURES	116
4.2.1	<i>Enceinte sous vide, CEA-Léti</i>	116
4.2.2	<i>Mesures RF, STMicroelectronics</i>	117
4.3	MODELISATION ELECTRIQUE DU SUBSTRAT ET DES PLOTS	119
4.4	MESURE DES POUTRES TROUEES	126
4.4.1	<i>Introduction</i>	126
4.4.2	<i>Poutre encastrée-encastrée</i>	127
4.4.2.1	Influence de la tension de polarisation	127
4.4.2.2	Distributions des trous	129
4.4.3	<i>Conclusion</i>	131
4.5	MESURE DES STRUCTURES A ONDES DE VOLUME	131
4.5.1	<i>Mesure avant correction</i>	131
4.5.1.1	Plaques 20MHz	132
4.5.1.2	Disques 87MHz	134
4.5.1.3	Plaques 80MHz	136
4.5.1.4	Conclusions	137
4.5.2	<i>Mesures électriques après correction</i>	138
4.6	CONCLUSION	138
	CONCLUSION & PERSPECTIVES	141
	BIBLIOGRAPHIE	145
	TABLE DES FIGURES	155
	LISTE DES TABLEAUX	161
	LISTE DES COMMUNICATIONS ET BREVET	163
	GLOSSAIRE	165
	ANNEXES	167

Introduction

1 Contexte

Le « nano-monde » est aujourd'hui un sujet d'actualité tout autant technique que politique et éthique. Les avancées technologiques de ces dernières années ont rendu possible l'apparition d'objets communicants toujours plus petits. L'Homme est à la recherche et demandeur des technologies toujours plus pointues. Les objets communicants sont devenus incontournables au quotidien, du téléphone à l'ordinateur portable en passant par les tablettes numériques et les systèmes de navigation. Ces outils se doivent d'être toujours plus performants, fiables et dont leur consommation soit la plus faible possible.

Au sein de ces composants, l'oscillateur est l'élément indispensable à leur bon fonctionnement. Il permet la création d'un signal périodique dont la fréquence détermine la vitesse d'exécution de l'information, c'est l'horloge du système. Estimé à environ 17 milliards d'euros, le marché des oscillateurs, principalement détenu par les industries du Quartz (82.4%), les composants piézoélectriques à onde acoustique de surface (9.2%) et les céramiques (5.6%), est en constante évolution de 10% par an. Ces chiffres démontrent tout l'intérêt pour un industriel de la microélectronique tel que STMicroelectronics.

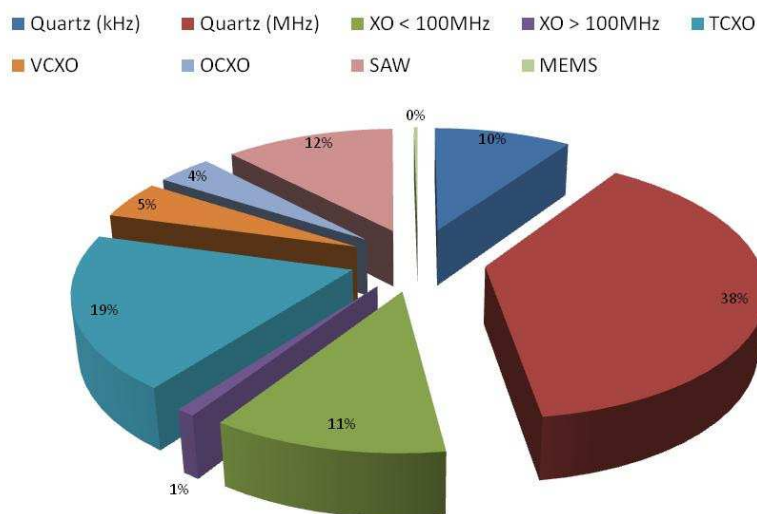


Figure 1 Répartition des ventes des oscillateurs en 2009¹

L'émergence des systèmes embarqués et mobiles est intimement liée aux avancées décrites par la loi de Moore, qui prédit le doublement du nombre de transistors par puce tous les 18 mois, du fait d'une diminution des nœuds technologiques. A l'heure actuelle, les technologies 45nm, voir même 22nm sont sur le point de devenir matures et donc commercialisées. Cependant, très rapidement, des ingénieurs ont eu l'idée d'utiliser les

¹ MEMSWAVE 2009, Aarne Oja, VTT

technologies CMOS dans le but d'imaginer de nouveaux composants¹. Cette diversification a permis l'apparition de nouvelles fonctionnalités, au plus près des transistors tels que les composants passifs, les capteurs, les actionneurs et les puces biologiques, rassemblées sous l'entité « More than Moore ». Cette diversification a permis d'optimiser les coûts et d'apporter une valeur ajoutée aux composants de la microélectronique classique. En contrepartie, les industriels ont été amenés à penser autrement avec l'apparition de structures 3D. L'empilement de puces ou intégration 3D, a été rendu possible avec l'apparition des TSV (Through Silicon Via).

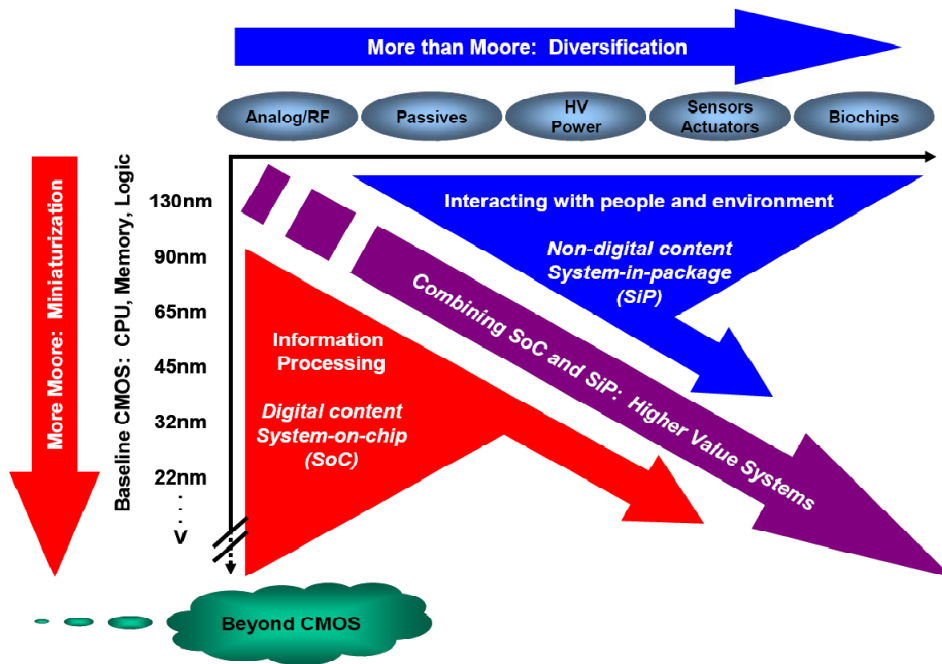


Figure 2 Description de l'entité "More than Moore"²

Finalement, les microsystèmes électromécaniques, plus communément appelés MEMS offrent des perspectives d'intégration et de miniaturisation des fonctions dédiées aux objets communicants cités précédemment.

L'utilisation des MEMS est d'ores et déjà très répandue, par exemple sur des marchés grand public tels que ceux des jeux (capteurs tels que des accéléromètres³ ou gyroscopes⁴ intégrés par exemple dans la Wii Nintendo), de l'optique (micro miroir⁵) ou des têtes à jet

¹ H. Nathanson et Al., "The resonant gate transistor", *Electron Devices, IEEE Transactions on*, 1967 (14)

² ITRS 2010, "More-than-Moore" White Paper

³ M.-H. Tsai et Al., "3-axis CMOS-MEMS accelerometer with vertically integrated fully-differential sensing electrodes," in *Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference (TRANSDUCERS)*, 2011 16th International

⁴ B. Eminoglu et Al., "Novel, simple, and Q-independent self oscillation loop designed for vibratory MEMS gyroscopes," in *Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference (TRANSDUCERS)*, 2011 16th International

⁵ N. Quack et Al., "Mid-infrared tunable resonant cavity enhanced detectors employing vertically moving comb drive actuated MEMS micromirrors," in *Optical MEMS and Nanophotonics, 2008 IEEE/LEOS International Conference on*

d'encre (inkjet head¹ de EPSON ou SAMSUNG...). Les MEMS commencent même à investir le marché des systèmes sans fil avec l'émergence de résonateurs MEMS susceptibles de concurrencer les Quartz dès aujourd'hui pour les applications de base de temps les moins drastiques (produits SiTime©). Si aujourd'hui, les résonateurs MEMS de l'état de l'art présentent des performances du même niveau que les Quartz (Figure 3), de nombreux défis restent à être surmontés pour une industrialisation. En effet, le problème de la précision fréquentielle doit notamment être résolu pour répondre aux spécifications les plus drastiques des oscillateurs. Ce problème est intimement lié aux développements technologiques qui induisent une modification des dimensions des résonateurs, et donc par conséquent de la fréquence de résonance. Par la suite, la stabilité en température des oscillateurs à base de MEMS devra également être résolue soit au niveau du résonateur soit à l'échelle de la fonction globale.

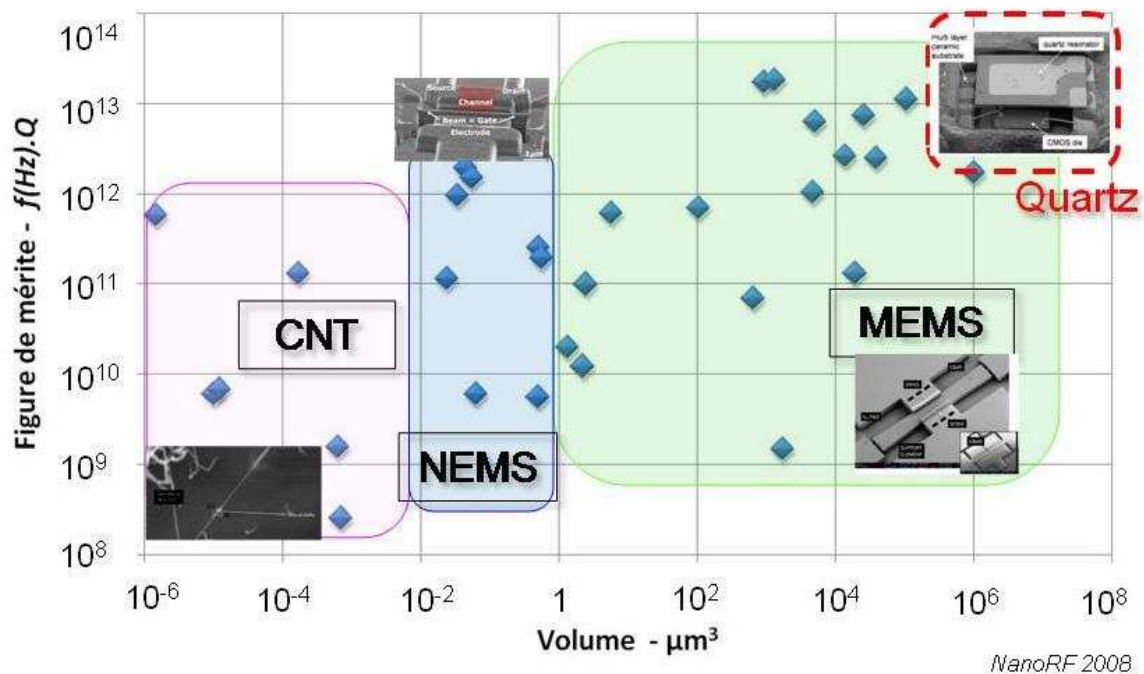


Figure 3 Etat de l'art des performances des MEMS ($f.Q$) par rapport au Quartz²

2 Objectifs

Ce travail de thèse s'inscrit donc dans cette optique : proposer une solution au problème d'adressage de la fréquence, notamment en répondant aux variations imputées à la fabrication.

¹ Ki Chul An et Al., "The study on the optimal operating voltage and pressure for the stable ejection using the electrostatic field induced MEMS inkjet head", *Assembly and Manufacturing, 2009, ISAM 2009, IEEE International Symposium*

² Fabrice Casset, *NanoRF 2008*

Les différentes approches envisagées sont listées ci-dessous :

- Métrologie : Etant donné la relation qui lie la fréquence de résonance d'un oscillateur aux dimensions intrinsèques de l'élément résonant, la possibilité de mesurer les dimensions (largeur, longueur, rayon, coté...) en cours de réalisation, à quelques parties par million (ppm) près, permettrait par la suite de modifier la structure par un ajout ou un retrait adéquat de matériau et d'obtenir de ce fait la fréquence de résonance à quelques ppm près elle aussi.

Cependant, les appareils de mesures (WYCO, AFM...) disponibles ne répondent pas à nos attentes. En effet, il ne nous est pas possible de mesurer « in-line », de manière standard, une ou plusieurs dizaines de micromètres (dimension typique d'un résonateur) à quelques ppm près.

- Architecture : La deuxième idée consiste à coupler un ou plusieurs résonateurs afin de compenser les variations tant d'un point de vue du procédé de fabrication qu'environnementale. Le couplage peut être mécanique ou bien à l'aide d'un circuit électronique extérieur. Parmi les travaux publiés¹, le couplage mécanique de structures capacitives semble être une solution. Il a été montré qu'en couplant 3 résonateurs, on diminuait quasiment d'un facteur 2 l'écart type à la valeur moyenne de la fréquence. Néanmoins cette solution est pénalisante en termes d'encombrement et de consommation et peut induire une dégradation du facteur de qualité.

- Design et process : Enfin, l'élaboration d'un nouveau design dont les caractéristiques seraient invariantes au vu de la réalisation technologique pourrait permettre de limiter l'impact des erreurs de process sur notre composant. Il peut s'agir par exemple d'une nouvelle approche au niveau des ancrages qui compenserait automatiquement les écarts². En effet, une étude approfondie de l'influence des différentes dimensions de la structure a permis de définir des jeux de valeurs réduisant drastiquement la déviation à ± 500 ppm. Malheureusement cette approche est limitée et présente peu d'intérêt notamment pour les résonateurs à ondes de volume.

La modification d'état de contrainte du résonateur permettrait lui aussi de compenser les écarts fréquentiels liés au procédé. On pense, par exemple à l'implémentation d'une structure bicouches pour les supports ou alors d'une couche piézoélectrique capable de modifier la contrainte interne du résonateur. On veillera dans ces deux derniers cas à ne pas accroître considérablement la

¹ Y. Lin & Al., "Enhancement of Micromechanical Resonator Manufacturing Precision Via Mechanically-coupled Arraying", *22nd European Frequency and Time forum*, 2009

² G. Ho & Al., "Micromechanical Ibars: Modeling and Process Compensation", *Journal of MEMS*, 2010

consommation du composant si l'on veut rester compétitif par rapport aux résonateurs de référence en Quartz. Ce choix est pertinent pour les modes de flexion mais nous serions contraints à des fréquences relativement basses (<10MHz) pour ce type de structure.

- **Trimming** : La dernière solution envisageable repose sur une étape supplémentaire en fin de processus de fabrication, où l'on viendra jouer sur la masse et la raideur de l'élément résonant en réalisant une correction localisée sur les résonateurs. Une mesure au préalable de la variation en fréquence est nécessaire pour connaître la valeur de la correction à implémenter. Une faible épaisseur de matériau pourrait induire une variation de fréquence de sorte à calibrer notre composant sur la fréquence voulue (Figure 4).

C'est cette dernière méthode qui a été retenue, présentant l'avantage de ne pas augmenter la consommation et de permettre une intégration au plus près de l'électronique avec des épaisseurs de matériaux très faibles, compatibles avec les procédés CMOS. De plus, cette méthode, si réalisée judicieusement, peut venir compenser non seulement les erreurs liées à la fabrication intrinsèque du résonateur mais aussi les erreurs dues à l'électronique associée.

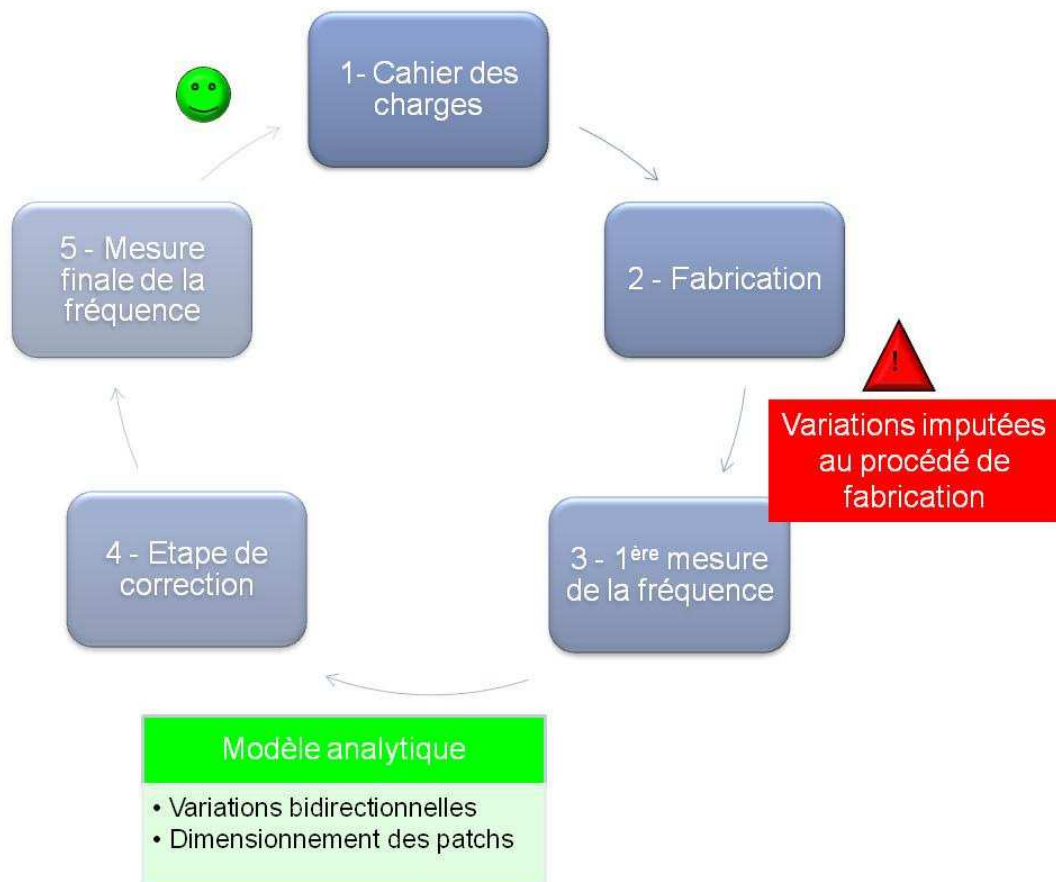


Figure 4 Schéma de principe de la correction "in-line"

3 Description du manuscrit

Dans le premier chapitre, après une brève présentation du marché visé par les résonateurs électromécaniques, nous présenterons les caractéristiques intrinsèques des résonateurs : modes de transduction, performances, conception des dispositifs et influence de la méthode de correction. Ensuite nous entrerons dans le « vif du sujet » avec une revue de l'état de l'art des différentes méthodes déjà implémentées pour compenser les écarts fréquentiels des résonateurs MEMS, précédée d'une étude statistique des variations fréquentielles mesurées dans le cadre d'un projet mené conjointement entre STMicroelectronics et le CEA-Léti. Cette étude mettra en évidence la dispersion constatée en sortie de fabrication, et nous permettra de quantifier la compensation à mettre en œuvre tant d'un point de vue résolution que variations maximales à ajuster.

Le deuxième chapitre commencera avec la description des modèles analytiques que nous avons développés dans le but de concevoir les structures et d'implémenter la correction localisée. Ceux-ci seront confrontés aux simulations par éléments finis effectuées sous CoventorWare®.

Nous aborderons alors le troisième chapitre qui présentera les différentes étapes technologiques nécessaires à la réalisation de nos résonateurs. A la fin de ce chapitre, nous verrons les améliorations possibles à mettre en place pour garantir des performances optimales.

Enfin, les caractérisations électriques de l'ensemble de nos dispositifs seront discutées et analysées au travers du quatrième et dernier chapitre. Ces mesures nous permettront de valider les modèles présentés au préalable dans ce document et de prouver tout l'intérêt de cette méthode de correction.

Nous terminerons le manuscrit en prenant du recul par rapport à l'ensemble des travaux réalisés et proposerons quelques pistes à étudier pour l'obtention d'un produit industriel compétitif et fiable.

Partie 1 : Concept et état de l'art des résonateurs MEMS

1.1	INTRODUCTION	8
1.1.1	Généralités.....	8
1.1.2	MEMS	8
1.1.2.1	Présentation des MEMS	8
1.1.2.2	MEMS RF	9
1.1.2.2.1	Types.....	9
1.1.2.2.2	Oscillateurs	10
1.1.2.2.3	Spécifications	11
1.2	RESONATEURS	12
1.2.1	Transduction	12
1.2.2	Types de résonateurs.....	14
1.2.3	Paramètres intrinsèques influant sur la fréquence de résonance.....	17
1.2.4	Performances.....	18
1.2.5	Circuit électrique équivalent.....	19
1.2.6	Influence des trous sur la structure résonante	21
1.3	TRIMMING ET COMPENSATION.....	23
1.3.1	Introduction	23
1.3.2	Dispersion sur un substrat	23
1.3.2.1	Introduction	23
1.3.2.2	Mesures électriques de résonateurs à ondes de volume de type disque	24
1.3.3	Trimming	27
1.3.3.1	Conception insensible au process	27
1.3.3.2	Ajout ou suppression de masse.....	28
1.3.3.3	Trimming thermique	30
1.3.3.4	Diffusion de métal.....	31
1.3.4	Compensation.....	31
1.3.4.1	Approche matériau	32
1.3.4.2	Contraintes mécaniques	33
1.3.4.3	Contraintes électrostatiques	35
1.3.4.4	Systèmes électromagnétiques	39
1.3.4.5	Tension de polarisation.....	39
1.3.4.6	Electronique	41
1.3.5	Comparaison du trimming et de la compensation.....	42
1.4	ENCAPSULATION.....	44
1.5	CONCLUSIONS.....	45

1.1 Introduction

1.1.1 Généralités

L'émergence de l'industrie microélectronique dans les années 1970 a donné naissance à une nouvelle discipline à la croisée des chemins entre les sciences et les technologies, connue sous le nom de microtechnologie. Ainsi de petits éléments, de dimensions inférieures à la centaine de micromètres, ont vu le jour grâce aux nouvelles technologies utilisées dans la réalisation de circuits intégrés en silicium.

La connaissance poussée des propriétés du silicium (propriétés mécaniques, électriques, structurales...) couplée à une fabrication collective et bon marché ont permis d'élaborer de nouvelles structures électromécaniques, plus connues sous le terme de Micro-Electro-Mechanical-System (MEMS). Nous n'aurons pas la prétention de faire une liste exhaustive tant des matériaux utilisés pour la fabrication des MEMS que des applications, mais les prochains paragraphes discuteront de quelques directions recensées dans la littérature.

1.1.2 MEMS

1.1.2.1 Présentation des MEMS

Les MEMS sont des structures miniaturisées composées de parties électriques et mécaniques couplées entre-elles par un système de transduction. Ce dernier peut-être réalisé par des matériaux spécifiques tels que piézoélectriques [1], électrostrictifs ou encore magnétostrictifs [2]. L'utilisation de forces électrostatiques ou électromagnétiques [3] est également recensée dans les méthodes de transduction. Pour notre part, nous nous bornerons à la méthode de transduction la plus simple à mettre en œuvre d'un point de vue pratique et l'une des plus efficaces aux petites dimensions : la transduction électrostatique.

Les matériaux utilisés pour la réalisation de MEMS sont ceux abondamment usités dans l'industrie microélectronique : silicium (mono et polycristallin), alliages de silicium (SiO_2 , SiC ...) et les métaux (Cu, Al...). Mais les fabricants ne se limitent pas seulement aux matériaux standards. Des matériaux plus atypiques avec des propriétés intéressantes tel que le GaAs sont également utilisés pour des applications telle que la photonique et dans des environnements soumis à de fortes contraintes (hautes températures, fortes pressions...).

Aux échelles usuelles des microsystèmes, la physique est toujours la même mais les effets dominants sont différents de ceux rencontrés à taille macroscopique. L'intérêt de réduire les dimensions est considérable dans la réalisation de capteurs, des applications hautes fréquences, de dissipation de chaleur. En effet, diminuer les dimensions d'un facteur α induit un net progrès de plusieurs ordres de grandeur pour différents paramètres (Tableau I.I).

Grandeurs	Facteur
<i>Dimension</i>	α
<i>Aire</i>	α^2
<i>Volume</i>	α^3
<i>Raideur</i>	α
<i>Fréquence de résonance (mode fondamentale)</i>	α^{-1}
<i>Constante de temps thermique</i>	α

Tableau I.I EFFETS D'ECHELLE POUR DIFFERENTES GRANDEURS ($\alpha < 1$)

Parmi les nombreuses applications des MEMS reportées dans la littérature, les principales sont :

- Les capteurs : l'accéléromètre [4] est l'exemple même d'un MEMS utilisé en capteur, on le retrouve dans des applications variées tels que l'automobile, l'aéronautique, et plus récemment dans les jeux vidéo...
- Les actionneurs : de nombreuses micropompes [5, 6] ont été développées ces dernières années et montrent ainsi l'étendue de l'utilisation des MEMS pour des applications variées telles que la biologie, la médecine...
- Les MEMS RF : ces derniers peuvent être classés suivant leurs fréquences d'utilisation ou alors leurs applications intrinsèques. On retrouve les inductances, capacités et interrupteurs d'une part, ainsi que les filtres et résonateurs d'autre part [7, 8]. Ils peuvent être utilisés, par exemple, dans toutes les applications sans fil tels que la téléphonie mobile, ordinateur portable, tablette numérique... On verra plus en détail ce type de MEMS dans la partie suivante.

1.1.2.2 MEMS RF

1.1.2.2.1 Types

Le domaine des télécommunications est en plein essor, avec l'apparition de nouveaux produits toujours plus petits et dont les performances ne cessent d'augmenter. On définit deux grands domaines liés aux fréquences d'utilisation : le domaine RF (Radio Fréquence) qui utilise la bande de fréquence supérieure à 400MHz. Le domaine IF (Fréquence intermédiaire), quant à lui, utilise la bande de fréquence inférieure à 400MHz.

Parmi les applications courantes, on retrouve le filtrage, les déphaseurs (capacités variables ou interrupteurs [8]) ou encore les bases de temps (résonateurs montés en oscillateur [7]). Pour cette dernière application, les principaux systèmes développés et utilisés en industrie sont les structures à base de Quartz du fait de leur facteur de qualité élevé, et de leur excellente stabilité en fréquence (quelques ppm) en fonction de la température, de l'environnement et du vieillissement. Cependant, les problèmes majeurs des Quartz sont sa taille ainsi que l'impossibilité de les intégrer au plus près des transistors.

L'utilisation de résonateurs électromécaniques MEMS semble pouvoir répondre aux deux problèmes rencontrés par les Quartz, grâce notamment à des résonateurs à forts facteurs de qualité. De plus, de part leur fabrication collective et la fréquence définie par les dimensions planaires des MEMS, nous pouvons imaginer des architectures multi-fréquences, à même de révolutionner l'architecture RF existante. Ces derniers, couplés à un système électronique, permettent la fabrication d'oscillateurs. Les défis principaux des MEMS restent la précision d'adressage à l'échelle du wafer et la stabilité en fréquence ($f(T, P, \dots)$).

1.1.2.2.2 Oscillateurs

Un oscillateur est un système électronique qui permet de générer un signal de sortie (en principe une tension) avec une période fixe. Il se schématise par un système contre-réactionné (Figure 1.1) composé d'une partie active H qui permet de fournir de l'énergie et d'un élément passif K vu comme un filtre sélectif. Un système bouclé oscille à une fréquence f_0 si et si seulement si la condition de Barkhausen est respectée (Eq. 1.3).

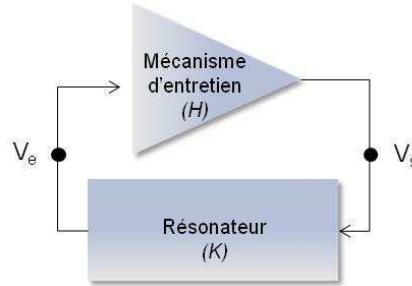


Figure 1.1 Schéma d'un système contre-réactionné à deux ports

$$A(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)} = \frac{H(j\omega)}{1 - H(j\omega).K(j\omega)} \quad \text{Eq. 1.1}$$

$$T(j\omega) = H(j\omega).K(j\omega) = 1 \quad \text{Eq. 1.2}$$

$$\begin{cases} |H(j\omega).K(j\omega)| \geq 1 \\ \varphi_H + \varphi_K = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 1.3}$$

Il existe cinq grands groupes d'oscillateurs présentant des stabilités fréquentielles différentes [9] (Tableau I.II).

Type d'oscillateur	Stabilité (ppm)
<i>Crystal oscillator (XO)</i>	1 à 100
<i>Temperature compensated crystal oscillator (TCXO)</i>	0.1
<i>Microcomputer compensated crystal oscillator (MCXO)</i>	0.001 à 0.1
<i>Oven controlled crystal oscillator (OCXO)</i>	0.001 à 0.01
<i>Small atomic frequency standard (Rb, RbXO)</i>	0.001
<i>High performance atomic standard (Cs)</i>	0.000001 à 0.00001

Tableau I.II STABILITE FREQUENTIELLE D'OSCILLATEURS

Outre le paramètre fréquentiel, le bruit de phase, la consommation, les dimensions ainsi que le prix sont des contraintes à prendre en compte dans l'évaluation des performances d'un oscillateur.

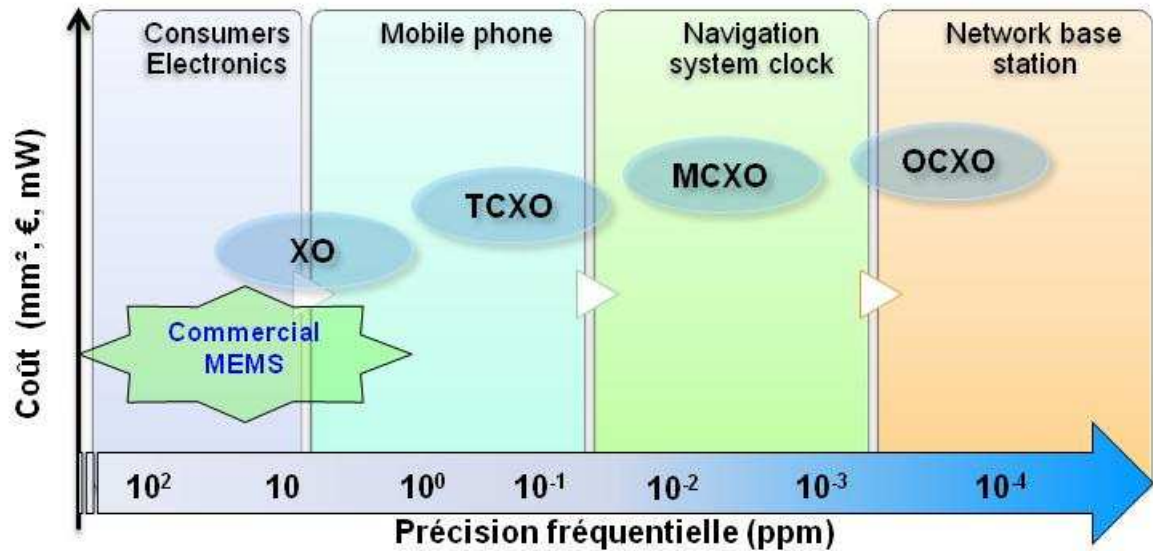


Figure 1.2 Stabilité fréquentielle requise par application pour les oscillateurs Quartz et MEMS [10]

La Figure 1.2 montre que les Quartz peuvent répondre aux spécifications des différentes applications en notant une augmentation des coûts, du volume et de la consommation du composant en fonction de la stabilité fréquentielle requise. Le développement de résonateurs MEMS pourrait permettre l'obtention de références de temps à moindre coût (fabrication collective) et présentant une faible consommation. La précision d'adressage de la fréquence des résonateurs MEMS à l'échelle du wafer nous semble être le critère prépondérant à améliorer pour conforter l'introduction de base de temps MEMS à moindre coût sur des marchés de volume, tels que la téléphonie mobile.

1.1.2.2.3 Spécifications

Le champ d'applications des résonateurs MEMS dans le monde de la RF est considérable. Nous listons dans le Tableau I.III quelques applications présentes sur le marché associées aux précisions requises pour chacun des segments. Deux groupes apparaissent à nos yeux :

- Les applications très contraignantes d'un point de vue précision avec des variations inférieures à 25ppm (incluant la stabilité en température).
- Les applications moins exigeantes avec des écarts variant entre une centaine et quelques milliers de ppm.

Protocole	Application	Fréquence	Stabilité fréquentielle totale (ppm)
<i>Ethernet</i>	Communication de données	50MHz	± 25
<i>GSM</i>	Téléphonie	20MHz	± 25
<i>USB 2.0</i>	Ordinateur	13MHz	± 25
<i>SATA</i>	Communication de données	20MHz	± 25
<i>PCI / PCIe</i>	Ordinateur	33/66MHz	± 300
<i>μProcesseur</i>	Ordinateur	100MHz	± 100
<i>CAN / Bus Lin</i>	Automobile	kHz	± 1500
<i>ASK / TPMS</i>	Automobile	9.838kHz	± 238

Tableau I.III SPECIFICATIONS DE DIVERSES APPLICATIONS

Au vu du Tableau I.III, la part de marché la plus importante présente un écart au maximum de 25ppm. Il est donc nécessaire d'avoir en sortie de ligne de fabrication une variation inférieure ou égale à celle-ci. Ceci est d'autant plus vrai qu'il est important d'avoir pour les concepteurs des circuits électroniques associés aux résonateurs, une dispersion autour de la valeur visée la plus petite possible. Nous nous fixons donc cette valeur comme objectif final de la thèse.

1.2 Résonateurs

1.2.1 Transduction

Dans tous les systèmes résonants, l'énergie électrique est transformée en énergie mécanique en excitant l'un des modes fondamentaux du résonateur. Le déplacement résultant de cette excitation est à nouveau retransformé en énergie électrique par un système de transduction qui peut être identique à celui de l'excitation. Il existe différents types de transduction :

- La transduction électrostatique qui met en jeu une différence de potentiel entre deux plaques, l'une étant l'électrode fixe et l'autre le résonateur libre de vibrer (Figure 1.3) [11].

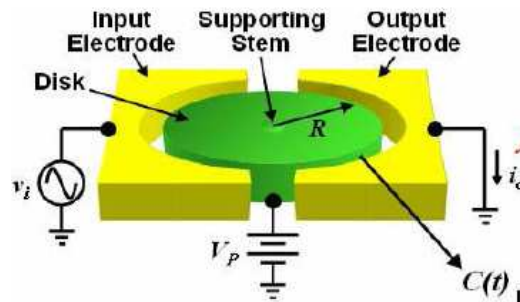


Figure 1.3 Principe d'un résonateur à excitation et détection capacitive [11]

La transduction à effet de champ (Figure 1.4) est une dérivée de la transduction électrostatique, principalement utilisée dans le cadre de la détection. Dès 1967, Nathanson & Al. [12] ont montré qu'il était possible d'optimiser le signal de sortie en utilisant un transistor MOS afin d'amplifier le courant de sortie.

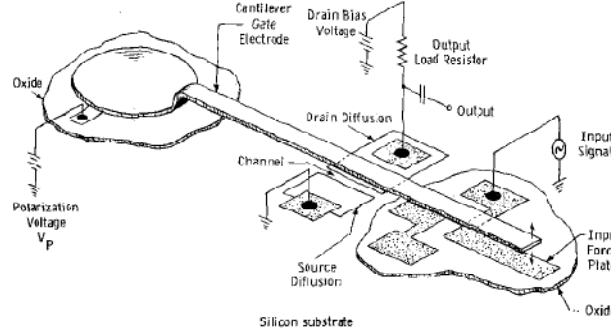


Figure 1.4 Transistor à grille résonante [12]

- La transduction piézoélectrique utilise les caractéristiques des matériaux ferroélectriques pour lesquelles une déformation entraîne des charges sur des électrodes.
- Les transductions thermiques ou magnétiques sont également recensées dans la littérature mais sont peu développées étant donné leurs faibles performances et leur intégration complexe.

Les transductions purement capacitives et à effet de champ sont typiquement utilisées pour des dimensions particulières des résonateurs. La détection MOS est avantageuse dans le cadre de dimensions inférieures à $30\mu\text{m}$ [13]. Par la suite la détection capacitive présente de meilleures performances [14]. Cependant, la mise en œuvre de la détection MOS rend le procédé de fabrication du résonateur plus complexe que celui de la détection capacitive.

Récemment, la combinaison d'un actionnement capacitif et d'une détection piézoélectrique [15] a montré de très bons résultats en diminuant nettement les effets des différentes capacités parasites. Ce procédé permet également d'améliorer le facteur de Qualité et de réduire considérablement les modes parasites (Figure 1.5).

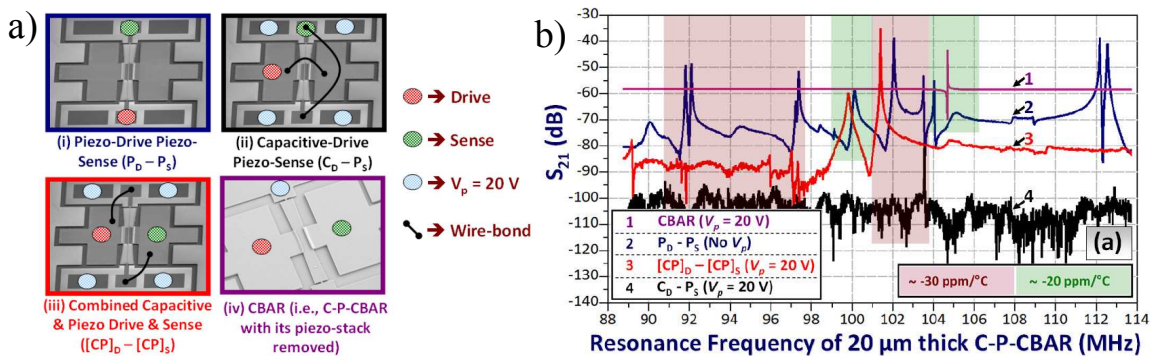


Figure 1.5 Combinaison des transductions capacitatives et piézoélectriques (a), mesures électriques des différentes combinaisons sur un même dispositif (b)

1.2.2 Types de résonateurs

Les deux principales familles des résonateurs MEMS utilisés pour les applications de base de temps sont :

- Les résonateurs à modes de flexion.
- Les résonateurs à ondes de volume.

Chacune des familles présente un certain nombre d'avantages et d'inconvénients que nous allons développer dans les paragraphes suivants.

Les poutres en flexion ont largement été étudiées dans la littérature du fait de leur facilité de mise en œuvre. Le premier microsystème résonnant en flexion a été élaboré en 1967 par Nathanson avec une détection à effet de champ [12]. Elles présentent l'avantage de voir leur fréquence de résonance varier grandement en fonction de la tension de polarisation. Ceci permet d'ajuster la fréquence de résonance [13] et donc de compenser les écarts dus au procédé et à la température (détaillé par la suite). Mais cette méthode engendre une consommation supplémentaire du dispositif.

Ainsi, pour une poutre vibrant dans le plan de section rectangulaire, la résolution des équations de la dynamique des milieux continus permet d'obtenir la relation suivante pour la fréquence de résonance du mode fondamental :

$$f_{poutre} = \alpha \frac{W}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Eq. 1.4}$$

où α est un facteur fonction des conditions aux limites. W et L sont respectivement la largeur et la longueur de la poutre et E et ρ représentent le module de Young et la masse volumique du matériau utilisé pour réaliser le résonateur.

Malheureusement, les limites d'un tel dispositif sont très vite atteintes et il est difficile d'augmenter le facteur de qualité ainsi que la fréquence. C'est ainsi qu'un autre type de résonateur est apparu dans les années 90 : le résonateur à ondes de volume ou modes de Lamé [16]. L'état de l'art rapporte donc des travaux sur des résonateurs plus « massifs », comme les disques, les plaques, les anneaux [17]. Ces derniers, entre autre grâce à une rigidité supérieure, permettent d'obtenir des performances comparables au résonateur à base de Quartz.

Les modes d'ordre les plus bas, dans le cas des disques, plaques et anneaux sont le mode extensionnel et le mode elliptique. Dans les deux cas, la fréquence est inversement proportionnelle à la dimension critique du dispositif, respectivement le rayon, la longueur du côté et la distance entre les rayons intérieur et extérieur.

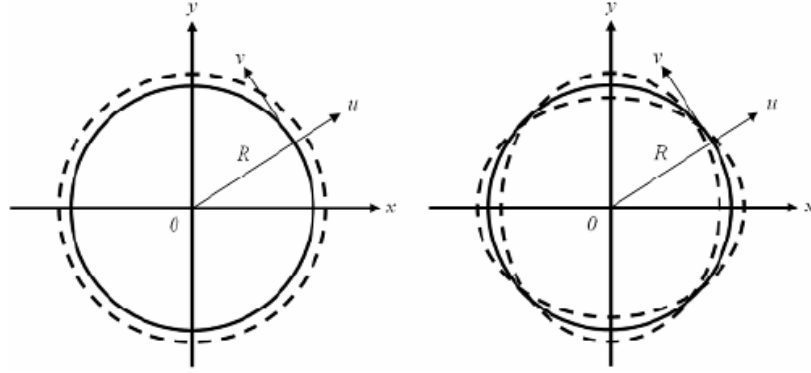


Figure 1.6 Schéma bidimensionnel de deux disques à modes de vibration extensionnelle (gauche) et elliptique (droite)

$$f_{disque_{extensionnel}} = \frac{\alpha}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Eq. 1.5}$$

$$f_{disque_{elliptique}} = \frac{k}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu)}} \quad \text{Eq. 1.6}$$

$$f_{plaque_{extensionnel}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Y_{2D}}{\rho}} \quad \text{Eq. 1.7}$$

$$f_{plaque_{Lamé}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)}} \quad \text{Eq. 1.8}$$

avec R et L les dimensions du disque et de la plaque et Y_{2D} le module de Young effectif correspondant à une extension $2D$ ($Y_{2D}=C_{11}+C_{12}-2C_{12}^2/C_{11}=181\text{GPa}$ pour le silicium). Les C_{ij} représentent les éléments de la matrice de conformité mécanique. k est un facteur fonction du mode excité.

L'utilisation des ondes de volume permet d'obtenir des structures vibrant à hautes fréquences (>GHz) [18, 19], présentant de forts facteurs de qualité (pouvant dépasser 100 000) [20] et de faibles résistances motionnelles (couplage de structures).

Récemment, un dérivé des résonateurs plaques est apparu : le SiBAR. Le mode de fonctionnement est sensiblement identique à celui des plaques extensionnelles. Ces composants ont le grand avantage de présenter des paramètres dissociés pour la résistance motionnelle et la fréquence. Le module de Young « classique » vient remplacer le module de Young effectif $2D$ et la fréquence de résonance s'écrit alors :

$$f_{SiBAR} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Eq. 1.9}$$

avec L la largeur de la bar de Silicium.

Le Tableau I.IV ci-après rapporte les performances de quelques dispositifs mentionnés ci-dessus.

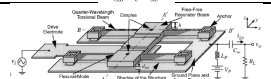
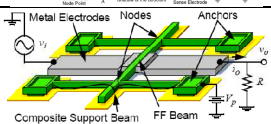
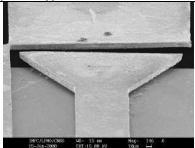
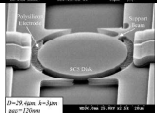
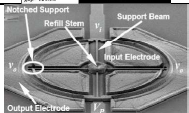
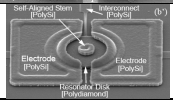
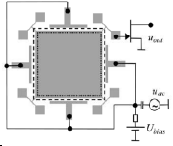
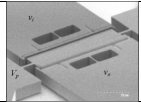
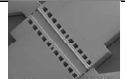
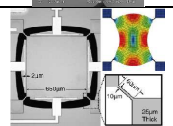
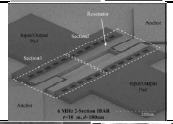
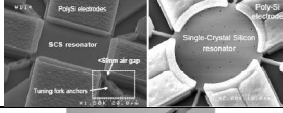
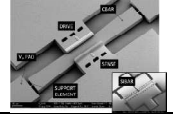
Type de résonateur		f (MHz)	Q	f.Q	R _m (kOhms)	V _{DC} (V)	gap (nm)
Quartz (XO) ¹		1.5-80	100000	-	-	3.3	-
BAW [21]		8000	2500	2.10 ¹⁴	-	-	-
Free-Free Beam[22] (1999)		92.25	7450	6.87 10 ¹¹	167	76	160
Q optimized Free-Free Beam [23](2001)		10.47	10000	1.05 10 ¹¹	7	30	100
Lamé-mode microresonator [17] (2001)		6.051	1210 (air)	7.32 10 ⁹	-	63	-
Elliptic mode disk resonator [24] (2004)		149.3	45700	6.82 10 ¹²	43.3	17	90
Hollow disk ring resonator [18] (2004)		1169	5846	6.83 10 ¹²	274.4	6.5	100
Diamond disk resonator [19] (2004)		1510	115555	1.74 10 ¹³	100	2.5	90
Square extensional resonator [25] (2004)		13.1	130000	1.70 10 ¹²	4.47	75	750
Vertical capacitive SiBar [26] (2005)		213.4	28700	6.12 10 ¹²	6.3	100	225
Low phase Noise SiBAR [27] (2008)		145	51000	7.40 10 ¹²	2.4	14	77
SOI square resonators [28](2008)		6.35	1.6 10 ⁶	1.01 10 ¹³	61.4	50	2000
Tunable High Q resonators [20](2010)		5.59	112000	6.26 10 ¹¹	58	3	180
Single crystal silicon 100MHz MEMS resonators [11]		100	60000	610 ¹²	50	5	60
High Q Silicon Micromechanical Resonators [29](2010)		104.92	101550	1.06 10 ¹³	-	10	100

Tableau I.IV COMPARAISON DE DIVERS TYPES DE RESONATEURS

¹ http://www.ndk.com/en/products/search/clock/1187879_1433.html

Comme mentionné précédemment, les performances des résonateurs à ondes de volume sont nettement supérieures à celles des modes de flexion. Il serait cependant réducteur de mettre de côté les systèmes résonants à modes de flexion, sur lesquels il est plus facile de comprendre et de modéliser l'ensemble des phénomènes mécaniques mis en jeu qui nous servira par la suite à venir ajuster la fréquence de résonance.

Nous avons omis volontairement la dépendance en température de chacun des dispositifs, qui sera étudiée dans la partie suivante.

1.2.3 Paramètres intrinsèques influant sur la fréquence de résonance

L'objectif d'un résonateur est de fournir une fréquence de résonance, notée f_0 . Pour un même système, plusieurs fréquences de résonance existent, fonction des différents modes qu'il est possible d'exciter. La fréquence de résonance est bien entendu dépendante du type de vibration (flexion, élongation contraction, torsion, ondes de volume ou toutes combinaisons de modes) et de l'actionnement (tension de polarisation), mais elle est également intimement liée aux propriétés intrinsèques des matériaux utilisés (E , ρ , ν) et aux dimensions (W , L ou R , h).

La contrainte des couches dans lesquelles est réalisé le résonateur, est également un élément déterminant dans la valeur de la fréquence. Cette contrainte est dépendante de la technologie utilisée lors de la fabrication. Par exemple, dans le cas du mode fondamental d'une poutre, une contrainte en tension va augmenter la fréquence de résonance alors qu'une contrainte compressive va l'abaisser. L'équation donnée dans le cadre d'une poutre bi-encastree, régissant la fréquence de résonance f_0 en fonction de la contrainte σ du résonateur [30] est :

$$f_0 = 1.027 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{W}{L^2} (1 + 0.293 \frac{L^2}{EW} \sigma)^{1/2} \quad \text{Eq. 1.10}$$

La tension de polarisation de l'élément résonant est aussi un facteur à prendre en compte. L'équation 1.11, dans le cas d'une poutre en flexion, montre que la tension permet d'abaisser la fréquence de résonance à la valeur souhaitée par une modification artificielle de la raideur, avec V_p la tension de polarisation, A_e la surface en regard des électrodes, d_0 l'entrefer et k_m la raideur de la poutre :

$$f = f_0 \sqrt{1 - \frac{V_p \epsilon_0 A_e}{d_0^3 k_m}} \quad \text{Eq. 1.11}$$

L'un des derniers paramètres, et non des moindres, à considérer est le bruit. Il cause inévitablement des fluctuations au niveau de la fréquence de résonance. On identifie trois types de bruit : le bruit thermique, le bruit dû aux variations de la température environnante et le bruit résultant d'échange de molécules à la surface du résonateur. Il est typiquement exprimé en dBc.Hz^{-1} à 1kHz au dessus de la fréquence de résonance.

Enfin, les performances du résonateur seront liées à sa conception mécanique (disposition et dimensionnements des fixations mécaniques de la structure) et électrique (pertes à travers le substrat et capacités parasites entre les électrodes).

Les différents facteurs énumérés jusqu'à maintenant n'ont de valeurs que remis dans le contexte d'excitation et donc du mode de résonance établi, à savoir un mode de flexion ou alors d'ondes de volume. Ainsi les performances intrinsèques du résonateur et les méthodes d'ajustement de la fréquence vont être différentes d'un type de résonateur à l'autre.

Nous avons vu que l'on pouvait jouer sur différents paramètres dans le but de réajuster la fréquence de résonance au vu des écarts du fait dans un premier temps du procédé de fabrication et dans un deuxième temps de l'environnement dans lequel le résonateur est utilisé. Le Tableau I.V reprend les paramètres cités ci-dessus auxquels sont précisés sur quoi ces paramètres influent et la facilité à intervenir dessus.

Paramètres	Variation	Facilité à modifier ?
Dimensions	Fréquence	++
Contraintes	Fréquence	--
Tension de polarisation	Fréquence et facteur de qualité	+-
Transduction	Facteur de qualité	--
Conception mécanique	Facteur de qualité	++

Tableau I.V RECAPITULATIF DES PARAMETRES DETERMINANT DANS LA CORRECTION EN FREQUENCE ET DU FACTEUR DE QUALITE

1.2.4 Performances

L'une des grandeurs caractérisant les performances d'un résonateur est le facteur de qualité, noté Q . Il est défini comme étant le rapport de l'énergie emmagasinée au cours d'un cycle de vibration sur l'énergie dissipée par cycle. Il caractérise en fait les pertes d'énergie. Ces pertes peuvent être de plusieurs types :

- les pertes par amortissement visqueux,
- les pertes par les fixations,
- les pertes thermo-élastiques au sein des matériaux,
- les pertes de surface.

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{air}} + \frac{1}{Q_{ancrage}} + \frac{1}{Q_{thermoelastique}} + \frac{1}{Q_{surface}} \quad \text{Eq. 1.12}$$

Afin de comparer les différents résonateurs MEMS entre eux mais également tout type de résonateurs, le facteur de mérite « $f.Q$ » est classiquement utilisé par la communauté scientifique pour les applications de base de temps.

1.2.5 Circuit électrique équivalent

Il est possible d'attribuer un schéma électrique équivalent aux résonateurs MEMS [31] et ainsi faciliter la conception de ces derniers pour une utilisation optimale lorsqu'associés à un circuit électronique. Le résonateur est assimilé à un système masse-ressort amorti (Figure 1.7). En utilisant des analogies électromécaniques, nous pouvons alors déterminer le circuit électrique équivalent (Figure 1.8).

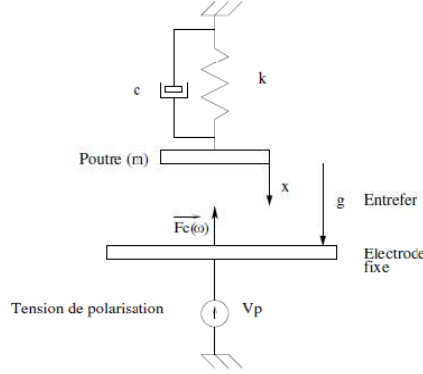


Figure 1.7 Conventions mécaniques des microrésonateurs [32]

L'équation différentielle du mouvement du système masse-ressort de la Figure 1.7 s'obtient en écrivant le principe fondamental de la dynamique appliqué au résonateur soumis à une force électrique F_e :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_e \quad \text{Eq. 1.13}$$

m est la masse du système résonant, c est le coefficient d'amortissement visqueux, k est la raideur de la structure. Cette équation est semblable à celle qui permet d'exprimer la charge aux bornes d'un condensateur dans un circuit de type RLC série. Les conventions sont reportées dans la Figure 1.8.

$$L_{eq}\ddot{q} + R_{eq}\dot{q} + \frac{q}{C_{eq}} = v(t) \quad \text{Eq. 1.14}$$

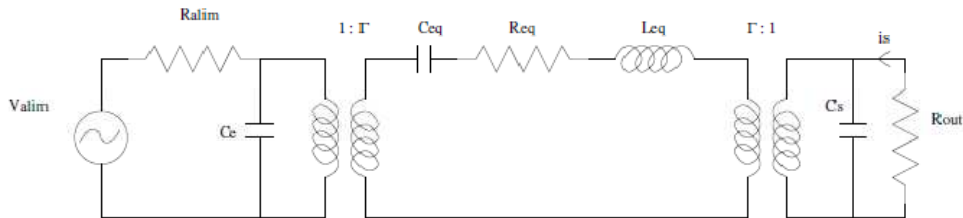


Figure 1.8 Conventions pour le modèle électro-mécanique d'un microrésonateur avec une électrode d'excitation et une de détection [32]

Nous pouvons alors introduire la pulsation de résonance ω_0 , le facteur de qualité Q et le coefficient de couplage électromécanique Γ . Ce dernier se détermine en considérant l'intensité en sortie du microrésonateur et la loi de Kirchhoff.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{Eq. 1.15}$$

$$c = \frac{\sqrt{k.m}}{Q} \quad \text{Eq. 1.16}$$

$$\Gamma = \frac{C_0 V_p}{g} \quad \text{Eq. 1.17}$$

Les composants du circuit électrique équivalent, R_{eq} la résistance motionnelle, C_{eq} la capacité électrique équivalente, L_{eq} l'inductance électrique équivalente, C_0 la capacité statique qui est entre autre due à l'entrefer électrode-résonateur s'expriment de la manière suivante.

$$R_{eq} = \frac{\sqrt{k.m}}{Q\Gamma^2} \quad \text{Eq. 1.18}$$

$$C_{eq} = \frac{\Gamma^2}{k} \quad \text{Eq. 1.19}$$

$$L_{eq} = \frac{m}{\Gamma^2} \quad \text{Eq. 1.20}$$

La résistance motionnelle, qui caractérise la capacité du signal à passer au travers du résonateur, joue un rôle particulier. Par exemple pour des applications de filtrage, il est coutumier de concevoir des systèmes avec une résistance de 50Ω afin de présenter un bon accord d'impédance avec les autres composants électroniques. Pour les oscillateurs, nous recherchons des résistances motionnelles de l'ordre du $k\Omega$. Différents travaux [18, 33] ont montré que la résistance était inversement proportionnelle au facteur de qualité, d'où la recherche d'un très fort facteur. Elle est également inversement proportionnelle à la tension de polarisation au carré. Il est nécessaire de trouver un compromis entre une résistance faible et une consommation acceptable. On peut également jouer sur les surfaces en regard des électrodes et du résonateur. Nous verrons que les résonateurs à ondes de volume sont plus intéressants au vu du possible découplage entre le système de détection et la fréquence de résonance. Néanmoins, le facteur prépondérant jouant sur la résistance motionnelle est l'entrefer. Nous nous bornerons donc à travailler sur des structures présentant les entrefers les plus faibles possibles (de préférence inférieure à 100nm).

Le schéma électrique équivalent montre une capacité C_0 , capacité qu'il est nécessaire soit de diminuer soit de s'affranchir. Cette capacité C_0 s'explique en premier lieu par la capacité statique de l'entrefer sur laquelle il est difficile de jouer. En outre, pour être complet et rigoureux, il faudra par la suite ajouter les différentes capacités des électrodes, du substrat et aussi la capacité entre le résonateur lui-même et le substrat. Dans le cas d'un substrat SOI, il est préférable d'avoir un oxyde enterré relativement épais pour éviter toute perte électrique par le substrat. De plus, l'utilisation d'un substrat haute résistivité permet également de limiter les pertes par ce dernier.

La littérature reporte quelques travaux sur des moyens de limiter l'influence de ces capacités pendant la mesure. Notamment, Arcamone et Al. [34] proposent une astucieuse méthode de caractérisation RF basée sur une mesure différentielle avec des polarisations particulières (Figure 1.9).

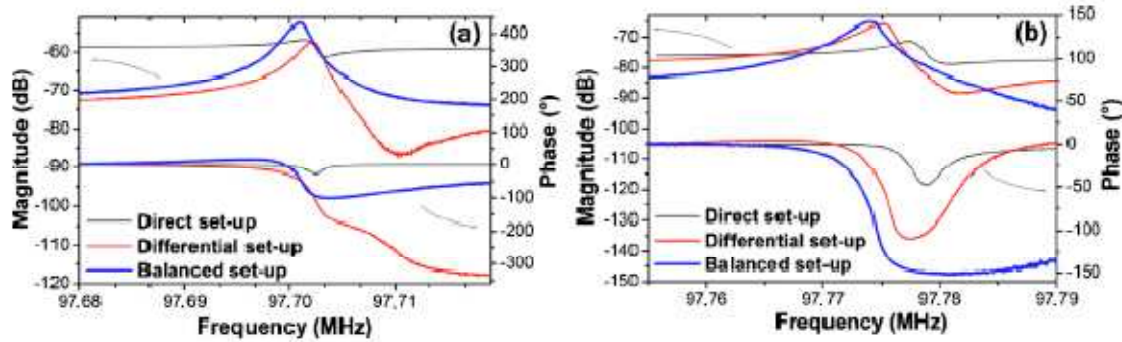


Figure 1.9 Amélioration du signal mesuré par élimination des capacités parasites

Dewdney [35] a montré qu'une cage de Faraday était aussi un bon moyen de limiter l'influence de la capacité parasite en diminuant l'influence du chemin parallèle au chemin motionnelle (Figure 1.10).

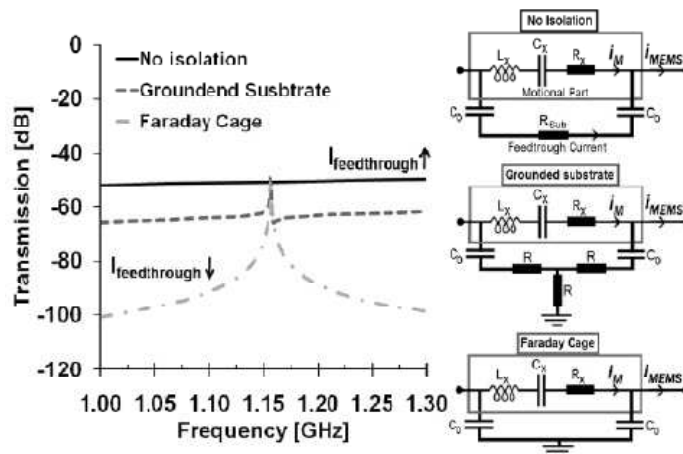


Figure 1.10 Signal mesuré sans isolation, avec un substrat isolé ou au sein d'une cage de Faraday

1.2.6 Influence des trous sur la structure résonante

La présence de trous sur les résonateurs est utilisée pour la libération des structures notamment avec le processus de fabrication MUMPS « Multi Users MEMS Processes » [36]. Il est évident que ces trous modifient les caractéristiques des résonateurs. L'état de l'art rapporte diverses études sur l'évolution des propriétés intrinsèques des matériaux utilisés (E et ν) [37, 38]. En réalité, les propriétés des matériaux ne changent pas mais des propriétés équivalentes pour la structure trouée peuvent être calculées. On ne pense pas, par exemple, au fait qu'un matériau isotrope à l'origine « devient » anisotrope par la présence de trous au sein de celui-ci. Dans le cas de structures résonantes, le facteur de qualité est aussi modifié par un réseau de trous [39].

William N. Sharpe [38] rapporte des mesures sur l'évolution du module de Young et de la contrainte par interférométrie sur des structures trouées et non trouées. Le module chute de 12% alors que la contrainte décroît littéralement de 50% pour un réseau de trous de $5\mu\text{m}$ de diamètre espacés de $30\mu\text{m}$. L'auteur préconise donc de limiter la présence de trous dans les zones sujettes à de fortes charges mécaniques.

Vladimir L. Rabinovich [37] a montré que les trous au sein d'une structure la rendent anisotrope d'un point de vue des propriétés mécaniques du matériau avec une chute de la fréquence de résonance et une diminution conséquente de la contrainte. Malgré ces modifications, les propriétés électrostatiques ne changent pas et restent très proches d'une structure non trouée. Il explique cela par une concentration des charges électriques sur les bords des trous.

L'évolution du facteur de Qualité « Q » fonction de la présence de trous sur une plaque résonante (Mode de Lamé) a été étudiée par L. Shao [39]. Il a montré que la chute du Q était liée aux pertes engendrées par l'interférence des ondes se propageant dans la structure avec le réseau de trous également présent. Suivant la position et le nombre de trous, les pertes sont plus ou moins importantes. En effet, les trous au niveau des fixations de la plaque perturbent peu les ondes qui se propagent dans le résonateur car ces ancrages correspondent aux nœuds de vibration.

De notre côté, dans un premier temps les trous sont envisagés pour modifier la fréquence de résonance des structures. Peu d'articles discutent précisément de l'influence de ces derniers sur l'évolution de la fréquence. Parmi eux, Lobontiu [40] a montré, à partir du formalisme de Rayleigh, que les trous peuvent modifier la valeur de la fréquence des modes propres des résonateurs mais également ceux des modes parasites. Les modes de torsion peuvent venir par exemple perturber les modes de flexion. Il s'est attaché à éloigner les modes parasites du mode fondamental.

F. Casset [41] a étudié l'influence des trous dans le cas de plaques vibrantes pour diverses répartitions de ces derniers. Cette étude a été menée afin de conserver d'une part la fréquence nominale d'une plaque sans trou et de garantir une stabilité fréquentielle par rapport à la température grâce au remplissage des trous par de l'oxyde. L'oxyde présente un module de Young qui évolue en fonction de la température à l'inverse de celui du silicium, constitutif du résonateur.

Ces différentes références montrent tout d'abord que les trous sont souvent inévitables (libération, compensation...). De plus, un travail de fond est nécessaire pour la conception de résonateurs présentant des trous sur la structure en ayant pour objectifs de conserver la fréquence de départ et d'optimiser au mieux leur position pour garantir une correction optimale. Il faudra également garantir que les trous ne fassent pas chuter le facteur de qualité. Nous verrons dans les parties suivantes où positionner les trous afin d'atteindre nos objectifs tout en garantissant un fonctionnement optimal de nos résonateurs.

1.3 Trimming et Compensation

1.3.1 Introduction

L'adressage et la stabilité en fréquence d'un résonateur sont primordiaux pour les applications de type oscillateur. Les performances visées autorisent un écart de quelques ppm par rapport à la valeur souhaitée. Comme indiqué précédemment, la fréquence de résonance est fonction des dimensions intrinsèques du résonateur. Le procédé de fabrication (dépôt, photolithographie, gravure...) induit une variation des côtes du résonateur par rapport à celles prévues par conception sur le masque de photolithographie, et ne permet pas d'assurer la stabilité fréquentielle requise pour ce type d'application. Par exemple, pour la réalisation de transistors, le niveau grille de première importance est assuré à $\pm 1\%$ pour les technologies classiques 130nm, 90nm, 65nm... De plus, des mesures lors d'un précédent projet (MTR « MEMS for Time reference », STMicroelectronics / CEA-Léti), montrent qu'on retrouve aussi des variations d'un dispositif à un autre sur une même plaque, illustré dans la partie 1.3.2.

D'autre part, la stabilité en fréquence est aussi fonction de la dépendance en température des résonateurs. En effet les constantes d'élasticité sont fonction de la température et de l'environnement de fonctionnement. Les contraintes du résonateur sont également responsables de cette dépendance, néanmoins à moindre échelle. En effet, les variations du module de Young dues à la température sont nettement supérieures aux variations des contraintes également dues à la température, notamment pour la poutre. Nous ne traiterons pas de cette seconde dépendance dans ce manuscrit mais des solutions envisagées, par exemple [42], nous semblent pertinentes.

Afin de répondre à ce problème, l'état de l'art reporte différentes techniques. Une étude théorique de l'effet des dérives du procédé ou une intervention suite à la réalisation technologique peuvent être envisagées : nous parlerons alors de **trimming** ou ajustement. Il s'agit là d'ajuster la fréquence d'utilisation avant commercialisation.

Afin de compenser les dérives dues à l'environnement d'utilisation du résonateur, mais aussi les problèmes rencontrés après fabrication notamment lors de l'encapsulation, plusieurs techniques sont envisageables. Nous verrons par exemple des conceptions innovantes, des matériaux composites ainsi que l'utilisation de l'électronique associée. On parlera alors de **compensation**.

1.3.2 Dispersion sur un substrat

1.3.2.1 Introduction

Comme évoqué précédemment, les différentes étapes du procédé font que, sur un même substrat, les fréquences varient de quelques ppm à quelques milliers de ppm autour d'une

valeur centrale. C'est pourquoi nous allons détailler dans la partie suivante l'étude de la dispersion de la fréquence de résonance sur un substrat 200mm lors d'un projet collaboratif (MTR) entre le CEA-LETI et STMicroelectronics (2008) afin de déterminer la correction nécessaire pour répondre aux spécifications industrielles.

1.3.2.2 Mesures électriques de résonateurs à ondes de volume de type disque

Etant donné le lien entre les dimensions intrinsèques du résonateur et sa fréquence de résonance, les incertitudes du procédé de fabrication modifient la fréquence d'un dispositif à l'autre sur un substrat. Il paraît donc intéressant de mener une étude statistique sur les variations induites par le procédé.

Les résultats mentionnés ci-dessous sont des valeurs mesurées sur un quart de substrat 8" pour un même motif, à savoir un disque (Tableau I.VI). La différence entre les deux séries de colonnes repose sur la disposition des électrodes (puisque la deuxième colonne présente une fente dans l'une des quatre électrodes qui servent à le caractériser) dont nous estimons l'impact négligeable sur le dispositif (nous considérons donc les deux colonnes comme représentant le même composant). Les dispositifs ont été répétés sur le substrat, ce qui nous permet de pouvoir mesurer la dispersion en fréquence.

Position	Fréquence (MHz)	Ecart / moyenne (ppm)	Position	Fréquence (MHz)	Ecart / moyenne (ppm)
B:1	98.22	611	B:1	98.114	-468
B:2	98.083	-784	E:1	98.458	3035
C:2	98.19	305	B:2	98.103	-580
D:2	98.192	326	C:2	98.202	427
E:2	98.244	855	D:2	98.183	234
B:3	98.129	-315	E:2	98.301	1436
C:3	98.193	336	B:3	98.126	-346
D:3	98.12	-407	C:3	98.119	-417
E:3	98.154	61	D:3	98.102	-590
C:4	98.06	-1018	E:3	98.126	-346
D:4	98.02	-1426	D:4	98.037	-1253
E:4	98.227	682	E:4	98.128	-326

Tableau I.VI MESURES DE LA FREQUENCE DE RESONANCE
(PROJET MTR, CEA-LETI, STMICROELECTRONICS, 2008)

L'étude statistique montre une moyenne de 98.153MHz avec un écart-type de 0.071MHz et de 98.1409MHz avec un écart-type de 0.113MHz respectivement pour les blocs 1 et 2. Nous souhaitons réaliser la cartographie de ces valeurs. Il est nécessaire de vérifier l'hypothèse précédente où l'on considère ces valeurs comme une seule population. Un test Shapiro-Wilk avec le logiciel « R » nous a permis, tout d'abord, de vérifier que les « populations » respectaient une distribution Gaussienne. Le logiciel « R » indique pour

valeurs de W , 0.94 et 0.87. Ces valeurs sont donc supérieures au $W_{0.05}$, 0.05 représentant le risque de se tromper, et par conséquent, nous pouvons établir que les populations respectent une distribution Gaussienne. Nous avons omis la valeur « *E:1 du bloc 2* », qui nous semble aberrante, pour obtenir cette distribution Gaussienne.

Au vu de ces résultats, nous avons comparé les fréquences de résonance par une méthode de « Student ». La valeur de t ainsi trouvée, égale à 0.44 nous permet donc d'affirmer que les fréquences de résonance peuvent être utilisées comme celles d'une même population et donc utilisées en tant que telles.

La Figure 1.11 montre la dispersion des fréquences de résonance autour de la valeur moyenne de 98.14MHz. On retrouve donc la distribution Gaussienne mentionnée ci-dessus.

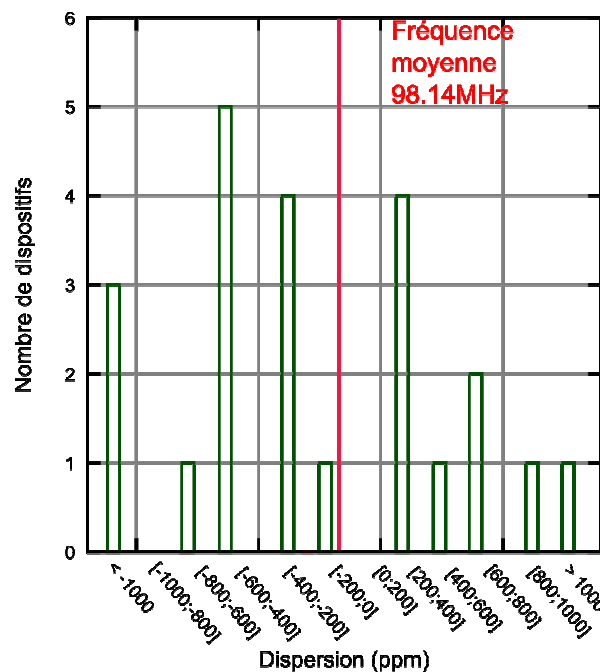


Figure 1.11 Dispersion de la fréquence de résonance
(Projet MTR 2008, CEA-LETI / STMicroelectronics)

On note tout d'abord l'écart « général » de la valeur moyenne par rapport à la fréquence visée de 100MHz. Cet écart pourra être « facilement » compensé par une correction adaptée du layout, technique abondamment usitée en microélectronique. On remarque également la dispersion de la fréquence de chacun des dispositifs mesurés autour d'une valeur moyenne. On met en évidence la nécessité de réduire la Gaussienne sur un intervalle de ± 1000 ppm.

Il nous paraît intéressant de cartographier cette dispersion. Nous avons donc réparti les fréquences sur un quart de substrat et extrapolé linéairement les valeurs intermédiaires. On obtient donc la Figure 1.12. La couleur rose foncée représente les dispositifs dont la fréquence de résonance est supérieure de 1000ppm par rapport à la fréquence moyenne. De même, la couleur rose pâle correspond aux dispositifs dont la fréquence est inférieure de 1000ppm.

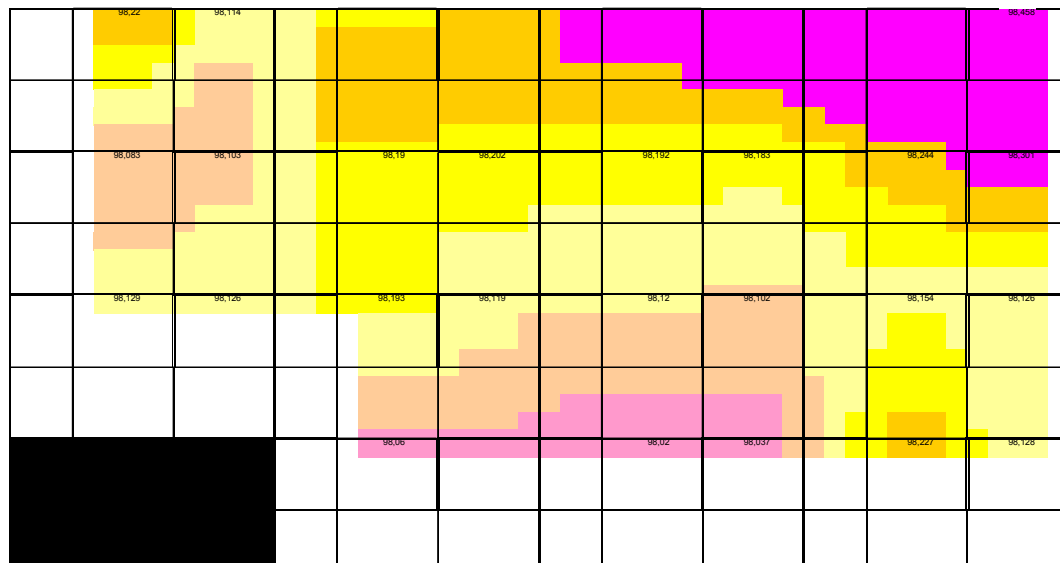


Figure 1.12 Cartographie du quart de substrat

Par extrapolation également, nous passons d'un quart de substrat à un substrat complet et obtenons la Figure 1.13.

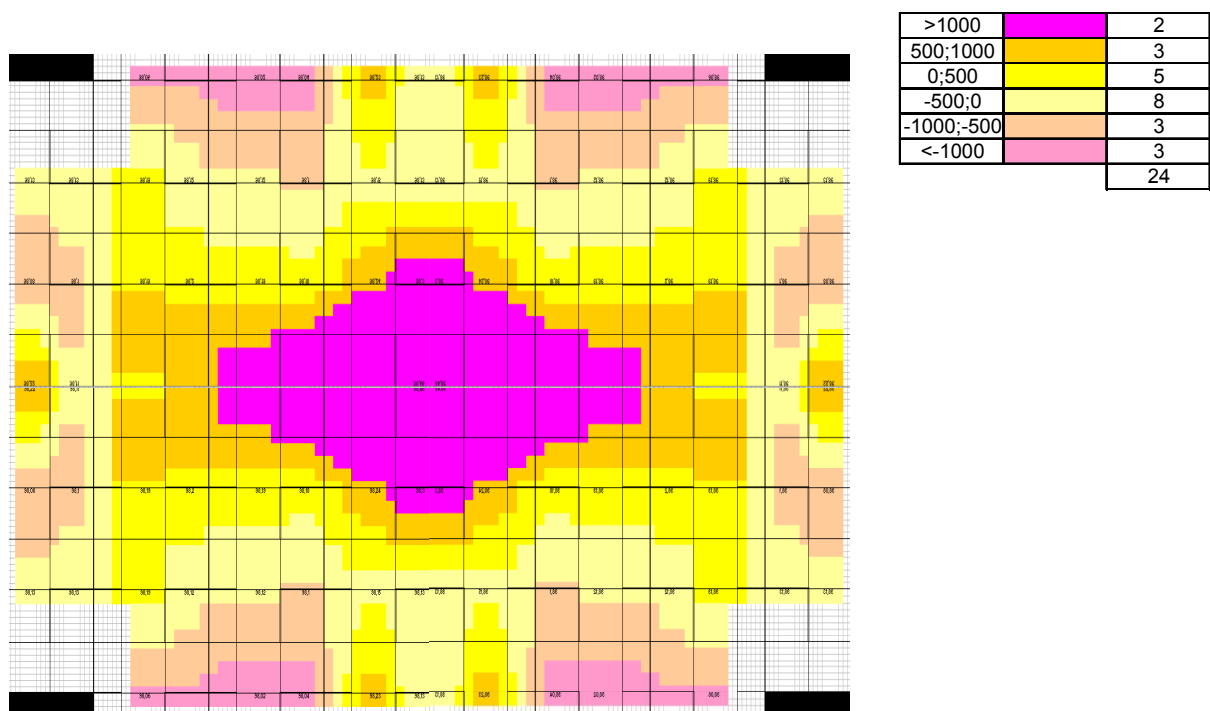


Figure 1.13 Extrapolation de la Figure 1.12 pour obtenir la cartographie de la dispersion de la fréquence de résonance sur un substrat 8"

La Figure 1.13 montre que la variation de la fréquence s'effectue du centre du substrat vers l'extérieur, résultat qui était attendu et qui se relie aux profils de dispersions obtenues en général sur les étapes de fabrication. On voit ainsi apparaître trois zones :

- la première au centre avec un écart supérieur à 1000ppm. Elle peut être liée à une sur-gravure au centre du substrat puisque la fréquence est inversement proportionnelle aux dimensions du résonateur,
- une deuxième zone où les variations sont relativement faibles et centrées autour de la valeur moyenne,
- une troisième sur les bords du substrat présentant une sous-gravure des dispositifs.

On a ainsi mis en évidence la valeur de la correction à implémenter et les différentes zones à corriger. La dispersion mesurée sur ce projet peut nous servir de base pour spécifier la méthode de compensation en fréquence que nous allons étudier :

- Valeur de la fréquence maximale que devra au minimum rattraper la méthode de compensation en fréquence que nous choisirons : $\pm 1000\text{ppm}$ ($=0.1\%$).
- Résolution suffisamment faible fixée entre 10 et 50ppm pour nous permettre de nous approcher au plus près de la fréquence voulue tout en utilisant des procédés industriels.

Nous pouvons à présent passer en revue les différentes méthodes déjà publiées tentant de répondre à la problématique de la variation en fréquence, afin de définir si un principe de compensation ou de trimming peut répondre à notre cahier des charges.

1.3.3 Trimming

1.3.3.1 Conception insensible au process

Une série de publications [43, 44, 45] présente le développement d'une conception robuste dans le but d'anticiper les variations au niveau du procédé de fabrication. Une étude analytique couplée aux simulations par éléments finis permet d'étudier le comportement du dispositif afin de minimiser les variations dues à la fabrication.

La référence [43], dans un premier temps, considère le problème de sensibilité de la structure vis-à-vis du procédé comme l'optimisation des dimensions mêmes du MEMS. Pour cela, ils utilisent un « algorithme génétique à multi-objectifs » et réduisent ainsi les différences de 6.33% à 3.53% pour une fréquence de 160Hz. La précision d'adressage résiduelle n'est pas suffisante pour nos applications.

Au travers de calculs analytiques, une relation entre le périmètre et l'aire de la structure résonante est reportée par [45] pour une poutre encastrée-encastrée à bras repliés. Ainsi un facteur 6 entre ces deux grandeurs semblerait être le meilleur compromis pour limiter l'influence du process sur la valeur finale de la fréquence de résonance. Cette valeur absolue n'est toutefois valable que pour cette structure et que pour ce procédé de fabrication.

La référence [44] obtient de meilleurs résultats avec un écart de 1% (=10 000ppm) par rapport à la valeur souhaitée en utilisant cette fois-ci, en tant qu'algorithme d'optimisation, un SPQ (Sequential quadratic programming). De nouveau, nous n'atteignons pas les spécifications de départ.

Dans le même ordre d'idée, le brevet [46] propose une technique consistant à changer la forme du résonateur, qui couplée à une étude par simulations permettrait de compenser les variations dues au procédé. Cette méthode est conception-dépendante, c'est-à-dire qu'il faudra faire une étude au préalable pour chaque résonateur et chaque fréquence désirée, et surtout consommatrice de temps avec les simulations.

Dans tous les cas, ces différentes techniques ne permettent pas d'atteindre les performances de variations inférieures à quelques ppm nécessaires à la réalisation d'un résonateur pour une référence de temps.

1.3.3.2 Ajout ou suppression de masse

La fréquence propre d'un résonateur dépend entre autre de la masse composant l'élément résonant. Plusieurs brevets ont été déposés, notamment par Intel [47] et Motorola [48], où l'on vient ajouter de la masse sur les résonateurs pour ajuster la fréquence. Le dépôt d'une couche de métal sur la surface du résonateur permet notamment d'ajuster la fréquence [49]. Dans le même registre, il est possible de faire un dépôt [50] au centre d'une poutre résonante qui donne une augmentation de fréquence de 1.96% pour des épaisseurs de l'ordre du micromètre (Figure 1.14). Ces techniques nécessitent cependant un très bon contrôle des paramètres de l'expérience, à savoir l'épaisseur de matériau déposé dans la première référence et la température ou pression des gaz dans la seconde. De plus une seule épaisseur est disponible sur l'ensemble du wafer. Cette caractéristique ne permet pas de corriger localement chacun des résonateurs présents sur le wafer.

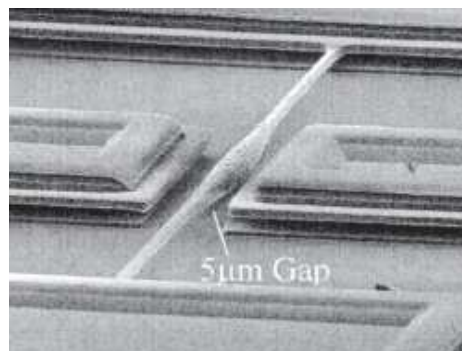


Figure 1.14 Image MEB du dépôt sélectif de polysilicium [50]

L'utilisation du laser est aussi une solution apportée par la compagnie Discera [51]. L'intérêt de cette technique repose sur le fait que le trimming peut être effectué après packaging (Figure 1.15). Ainsi les effets de l'encapsulation sont eux aussi compensés et les résultats sont très prometteurs avec une résolution de 2.6ppm. Néanmoins la correction doit

s'effectuer puce par puce. C'est, à ce jour, la méthode industrialisée et utilisée dans les produits commerciaux.

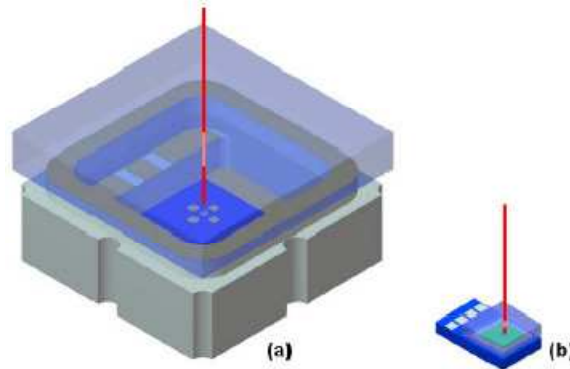


Figure 1.15 Laser trimming [51]

Il est également possible d'utiliser le laser d'une autre manière pour ajuster la fréquence de résonance, non pas en enlevant de la masse au résonateur lui-même, mais en ajoutant de la masse sur ce dernier. En effet, par un astucieux système d'encapsulation, Chiao & Al. [52] ont montré qu'il était possible d'ajuster la fréquence de résonance jusqu'à 1.8% de sa valeur de départ par le dépôt de particules présentes dans le packaging et « libérées » par un laser ($P = 616 \text{ mJ.cm}^{-2}$) (Figure 1.16). Nous nous interrogeons néanmoins quant à la reproductibilité d'une telle correction.

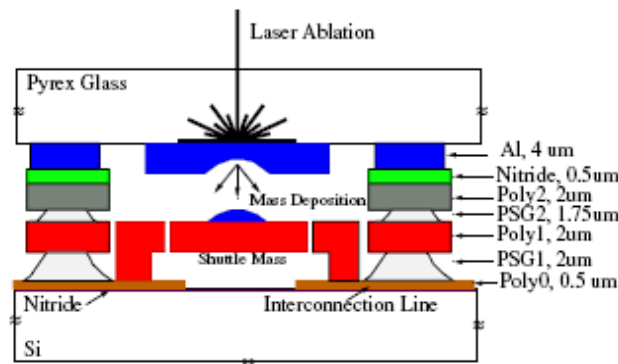


Figure 1.16 Schéma expliquant le principe de re-dépôt par laser [52]

Le Brevet de F. Casset et C. Durand¹ utilise également un dépôt afin de faire varier la masse de l'élément résonant dans le but d'en modifier la fréquence. La réalisation d'un certain nombre de trous ou bien l'utilisation de silicium poreux permet d'obtenir une surface développée apte à assurer une variation en fréquence notable induite par l'ajout d'un volume de matériau de compensation suffisant, tout en utilisant des épaisseurs fines, compatibles avec les procédés CMOS. Après une première série de mesures permettant de quantifier la dérive en fréquence due à la réalisation technologique, l'étape de dépôt dans les trous de compensation permet de rétablir la fréquence souhaitée. L'avantage de cette

¹ Brevet STMicroelectronics / CEA-Léti, 2008

méthode serait la possibilité de n'utiliser que des matériaux « front-end » (silicium) pour ajuster la fréquence, sans dégrader le facteur de qualité. Néanmoins la démonstration de ce principe de fonctionnement n'a pas été mise en œuvre à ce jour. De plus les auteurs n'annoncent qu'une variation croissante de la fréquence.

En 2004, Nguyen et Al. [53] ont proposé une méthode de trimming localisé par laser et ont montré que suivant la position du trimming, il était possible d'augmenter ou de diminuer la fréquence de résonance. Cette méthode permettrait de réduire la Gaussienne caractéristique de la dispersion de la fréquence au sein d'un wafer. Cependant, aucune formulation analytique n'a été proposée pour expliquer ces variations et le processus de correction nécessiterait de trimmer les résonateurs un par un.

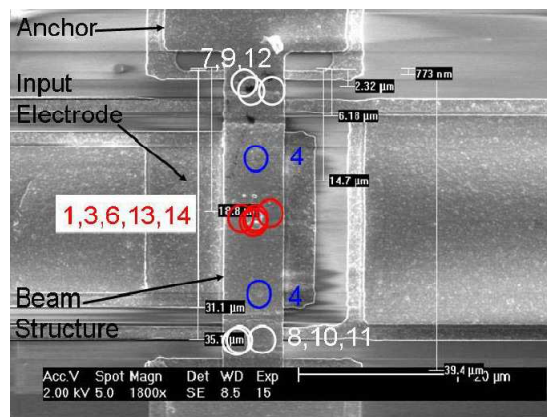


Figure 1.17 Localisation des différents spots de trimming de la poutre [53]

1.3.3.3 Trimming thermique

Le groupe de Nguyen [54] a proposé d'effectuer un recuit de la structure résonante post-process. Cette étape leur a permis de venir modifier la fréquence de résonance (jusqu'à 2.7% de sa valeur initiale) avec une résolution annoncée de 16ppm mais également d'améliorer nettement le facteur de qualité (600%). Si les résultats semblent intéressants, la stabilité sur le long terme demeure en pointillés.

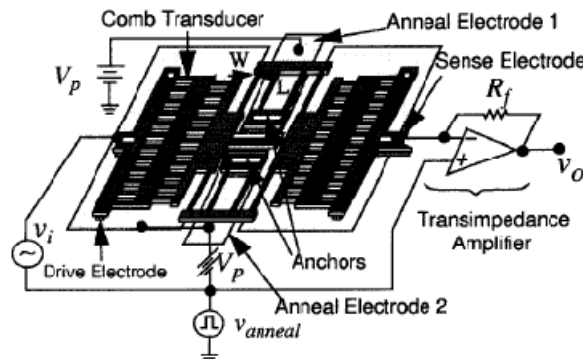


Figure 1.18 Schéma du trimming thermique

1.3.3.4 Diffusion de métal

Récemment une publication d'Ayazi & Al. [55] explore une toute nouvelle approche de trimming pour compenser les dérives au niveau du procédé de fabrication. Des plots de métal sont déposés sur la surface du résonateur lors de l'étape de fabrication (Figure 1.19). En fin de process, la fréquence obtenue est mesurée. Un courant est alors appliqué au résonateur qui induit un échauffement de ce dernier. Du fait de l'augmentation de la température, le métal diffuse au sein du résonateur et modifie donc la raideur de ce dernier. Suivant le métal utilisé, la fréquence peut-être augmentée ou diminuée. Un calibrage permet de restituer la fréquence désirée, modifiée par l'imprécision de l'étape de réalisation technologique. Un trimming de 4000ppm sur un résonateur de 100MHz a été réalisé soit avec des plots d'or (augmentation de la fréquence), soit avec des plots d'argent (diminution de la fréquence). En plus d'obtenir de très bons résultats, l'avantage de cette technique par rapport à d'autres est la possibilité d'intervenir une seule fois en fin de process et non pas continuellement, qui nécessite alors un apport de puissance trop important. Le temps de trimming, environ une heure pour 4000ppm, doit-être cependant nettement amélioré. Il reste également à vérifier la dérive sur le long terme lors de l'utilisation du composant, notamment, est ce que l'échauffement du résonateur ne modifiera pas la fréquence de résonance de la même façon que le courant l'a affecté lors du trimming. En outre, la contamination par l'or ne permet pas d'implémenter cette technique dans des fabriques CMOS.

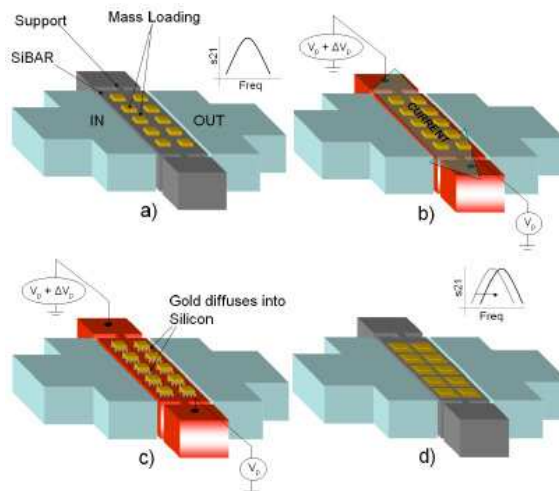


Figure 1.19 Schéma du trimming électrique par effet joule : (a) dépôt d'or, (b) échauffement par effet joule, (c) diffusion de l'or, (d) shift de la fréquence du SiBAR/Gold [55]

1.3.4 Compensation

L'intérêt des MEMS pour remplacer les Quartz dans les oscillateurs nécessite d'apporter une solution aux dérives apportées par l'environnement des microsystèmes, notamment du point de vue de la température. En effet, les performances d'un Quartz sont dans le plus mauvais des cas 15 fois supérieures à celles d'un MEMS : les résonateurs à base de

silicium montrent une dérive de l'ordre de -10 à -30 ppm.K^{-1} . De telles variations sont évidemment trop grandes pour satisfaire nos applications d'oscillateurs de référence. En l'occurrence, si l'on est capable de compenser une dérive variable au cours du temps, on peut, dans la plus part des cas, compenser une variation ponctuelle liée au processus de fabrication.

Différentes solutions sont envisageables et proposées dans l'état de l'art. Une conception exigeante et pertinente fait partie de ces solutions. On peut également jouer sur les propriétés intrinsèques des matériaux, notamment le module de Young. Des techniques moins triviales avec une force électrostatique ou bien une activité électrothermique, ont également été implémentées. Enfin, l'utilisation de l'électronique est aussi à prendre en considération. Nous allons voir en détail et illustrer numériquement ces différentes compensations.

1.3.4.1 Approche matériau

La première possibilité pour compenser une dérive en température est d'intervenir au niveau des matériaux utilisés lors de la réalisation technologique. Weigel & Al. [42] ont montré que l'on pouvait diminuer les variations de -21.5 ppm.K^{-1} à -9.9 ppm.K^{-1} en combinant des matériaux (Figure 1.20) dont les dépendances en température sont opposées, tout en maintenant un très fort facteur de qualité et un très bon actionnement. Cette méthode semble la plus adéquate pour une compensation passive de la dérive en température des résonateurs MEMS.

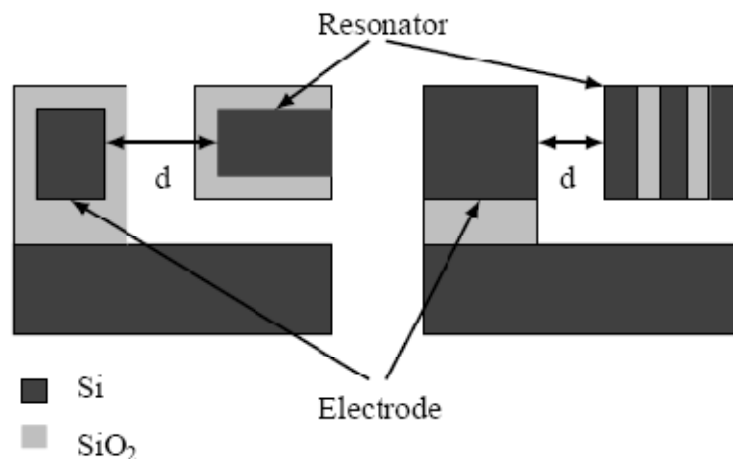


Figure 1.20 Compensation en température par un matériau composite Si/SiO₂ [42]

Casset et Al. [41] expriment analytiquement le TCF d'une poutre encastree-encastree de silicium ainsi que les coefficients correspondants (TCE : Temperature Coefficient of Young's modulus, α : Coefficient de dilatation thermique, σ : Contrainte axiale) pour le silicium et l'oxyde. Ils mettent également en évidence une diminution du TCF jusqu'à 3.3 ppm.K^{-1} pour un résonateur de type plaque à mode de Lamé.

$$TCF = 0.121 \frac{12L^2}{\pi EW^2} \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \frac{TCE}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad \text{Eq. 1.21}$$

	TCE (ppm/K)	A (ppm/K)
Silicium	-46 à -80	+2.6
Oxyde	+185	+0.5

Figure 1.21 Valeurs des paramètres de l'Eq. 1.21 [41]

Il semble donc possible de réaliser un résonateur stable en température par l'utilisation d'une couche d'oxyde et ainsi de se focaliser seulement sur l'aspect variation fréquentielle due au procédé de fabrication. Evidemment, une des perspectives à ces travaux sera de prouver en même temps la compensation en température et en fréquence comme cela a pu être fait sur les résonateurs BAW [56].

1.3.4.2 Contraintes mécaniques

Un certain nombre de structures [57, 58] ont montré les possibilités qu'elles pouvaient apporter en terme de compensation. L'utilisation de bras d'ancrages (Figure 1.22) avec un coefficient d'extension plus important que celui du résonateur, tel que reporté par Hsu en 2000 [57], permet d'ajuster la dérive de -35.9 à -2.5 ppm.K⁻¹. Le même groupe [58] a proposé une autre solution où cette fois-ci on va jouer sur l'entrefer entre l'électrode et le résonateur par un système atypique (Figure 1.23). Des plots de support, qui augmentent ou diminuent de volume suivant la température ambiante, modifient la largeur du gap et donc le coefficient de rappel électrique. Le coefficient TCF est alors réduit à -0.24 ppm.K⁻¹. Ces techniques reposent sur des idées intéressantes mais leur implémentation n'est pas aussi aisée que relatée. De nombreuses phases de calibrage et d'expérimentation sont nécessaires. De plus l'impact du procédé reste le même et modifie les dimensions requises pour un fonctionnement normal et adapté des structures. Notons enfin que ces systèmes sont adaptés pour des structures en flexion, et peu utiles dans le cas des ondes de volume. La modification de l'entrefer engendra également une tension de polarisation plus importante.

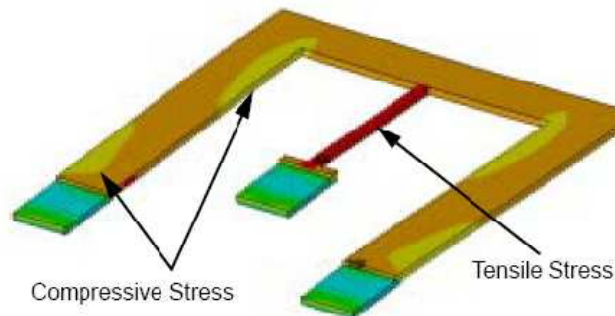


Figure 1.22 Simulation (FEM) de la contrainte dans une poutre compensée en température [57]

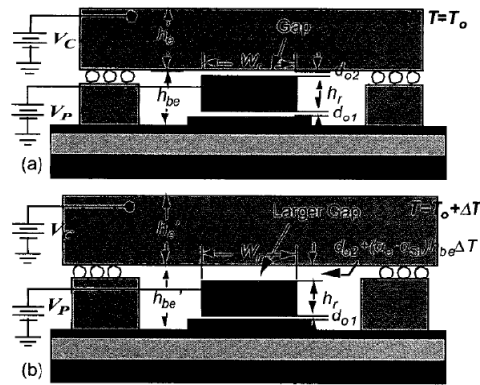


Figure 1.23 Vue en coupe du système [58] à T (a) et ΔT (b)

Peters [59] propose d'utiliser des matériaux piézoélectriques comme actionneurs pour ajuster la fréquence d'un résonateur. Ces derniers modifient la contrainte de la partie résonante et donc la fréquence de plus ou moins 15% de la valeur initiale avec une tension de moins de 5V (Figure 1.24). Nous pouvons nous interroger quant à la stabilité en température d'un tel composant et l'évolution du facteur de qualité.

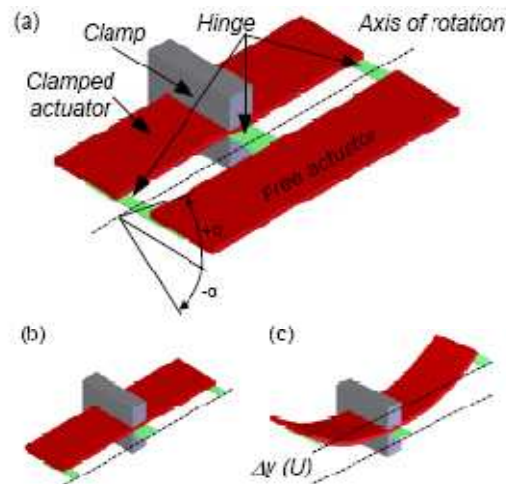


Figure 1.24 (a) Schéma de l'actionneur et du résonateur, vue en coupe (b) sans tension appliquée, (c) avec une tension [59]

Cabuz [60] propose pour sa part un réglage de la fréquence par l'application d'une contrainte axiale sur le résonateur au moyen d'un système électromécanique (Figure 1.25). La plage de fréquence allouée est de 16Hz autour d'une fréquence centrale de 518Hz avec une tension de réglage variant entre 0 et 16V. Cette technique, peu évidente à mettre en œuvre d'un point de vue technologique, ne semble pas adaptée pour les résonateurs à ondes de volume.

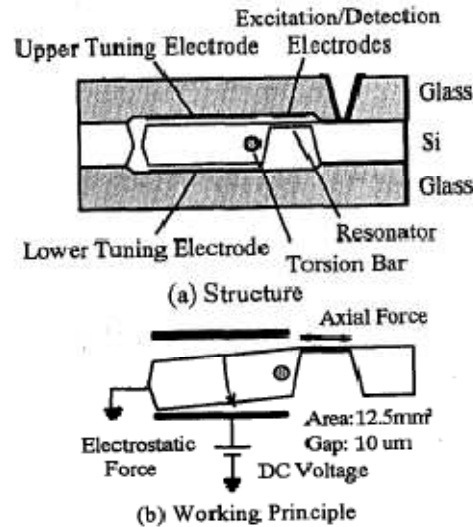


Figure 1.25 Résonateur dont la fréquence est modifiée par l'application d'une contrainte axiale [60]

Enfin, Leland [61] applique une précontrainte à un résonateur mécanique par un positionneur micrométrique. La fréquence peut alors varier de 24% de sa valeur initiale (200-250Hz) (Figure 1.26). Le dispositif est cette fois-ci macroscopique mais l'idée peut sans doute être appliquée à un microsystème. Ce principe reste néanmoins difficilement envisageable d'un point de vue industriel.

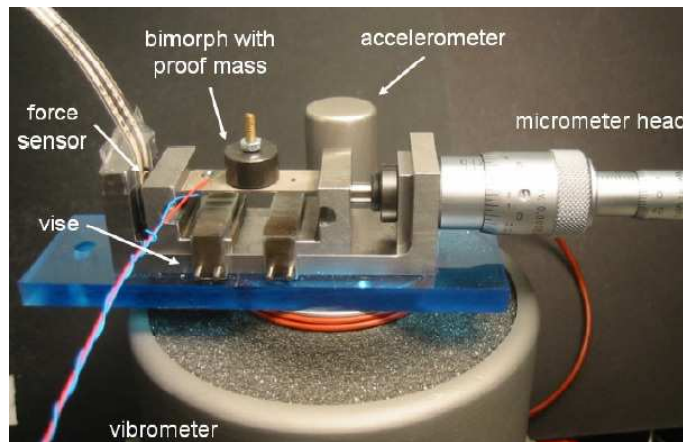


Figure 1.26 Set-up expérimental du système proposé par Leland [61]

1.3.4.3 Contraintes électrostatiques

Il est également possible d'imposer une contrainte au sein du résonateur par un actionnement électrostatique et ainsi de compenser la dilatation de ce dernier du fait de la température [30]. La Figure 1.27 montre l'utilisation d'un « tuning beam » actionné électrostatiquement. Les simulations (Figure 1.28) de ces travaux reportent une variation de 1000ppm sous une plage de tension de 18V. Ce principe, bien que simple à implémenter, reste limité aux structures en flexion.

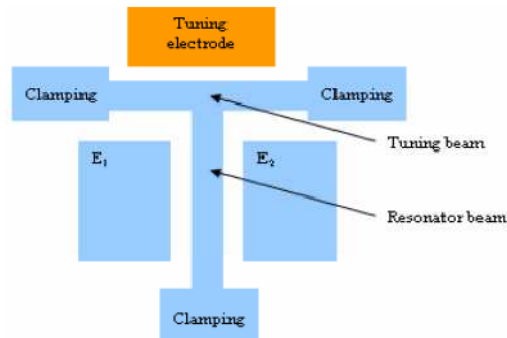


Figure 1.27 « Design du tuning beam » [30]

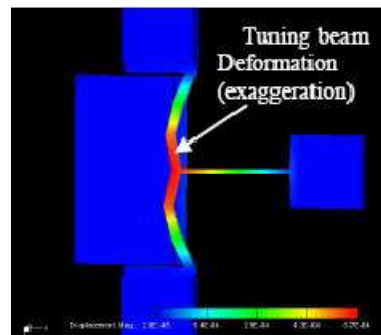


Figure 1.28 Simulation FEM de la déformation de la poutre par actionnement électrostatique [30]

Adams [62] a également montré en 1998, les possibilités offertes par l'utilisation d'une force électrostatique. Il reporte ainsi une variation de -7,7 à 146% autour d'une fréquence centrale de 25kHz pour une tension comprise entre 0 et 50V (Figure 1.29). Le sens de variation dépend de la configuration des peignes interdigités utilisés.

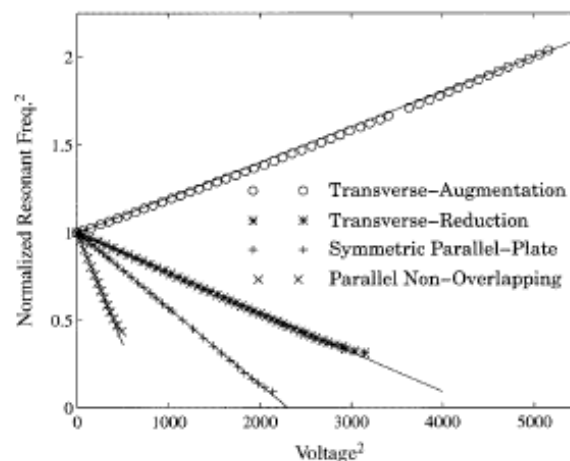


Figure 1.29 Variation normalisée théorique de la fréquence pour différentes structures [62]

Lee [63] a repris cette idée en améliorant la conception de la structure. En effet, grâce à des doigts courbés, la force électrostatique générée varie linéairement avec la tension

appliquée. Il met en évidence une réduction de la fréquence initiale (19kHz) de 55%, pour une tension appliquée de 150V (Figure 1.30).

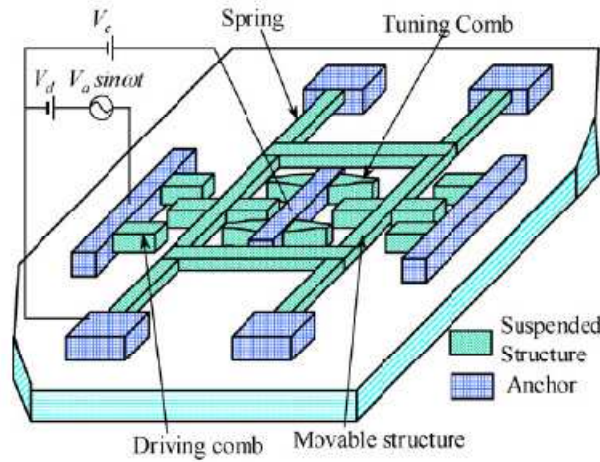


Figure 1.30 Résonateur ajustable grâce à la tension V_c [63]

L'implémentation d'une structure avec des doigts verticaux de formes différentes, réalisée par Morgan [64], permet une adaptation en fréquence de 17%, avec une tension appliquée relativement importante de 70V (Figure 1.31).

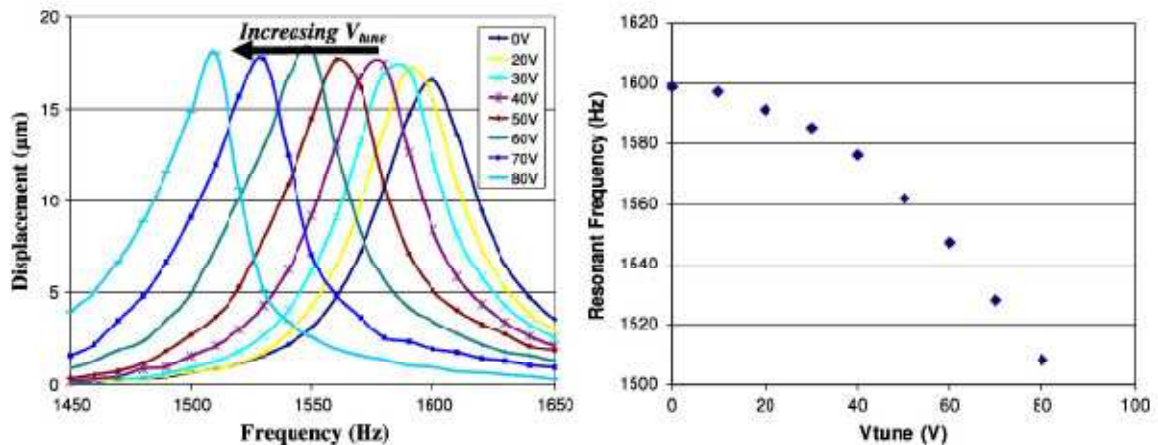


Figure 1.31 Mesures des pics de résonance fonction de la tension appliquée [64]

Les trois travaux précédents ont tous la même limitation, à savoir la tension appliquée pour le contrôle de la fréquence. Les tensions requises sont incompatibles avec les tensions d'alimentation des circuits électroniques de nos jours et inconcevables pour des applications nomades. D'autre part, ces méthodes ne sont valables que pour des structures à modes de flexion.

Avec un design similaire mais une utilisation différente (détecteur de vibration), Scheibner [65] a développé un réseau de résonateurs dont les fréquences (entre 1 et 10kHz) peuvent être modifiées de 10 à 25% de leurs valeurs initiales (Figure 1.32).

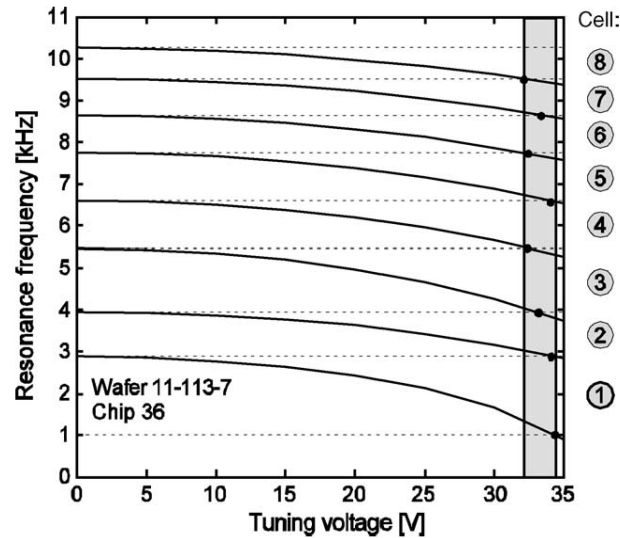


Figure 1.32 Tuning de la fréquence pour les différents résonateurs du réseau [65]

Enfin, Piazza [66] utilise le substrat comme électrode pour créer une force électrostatique et venir ajuster la fréquence de résonance de ce dernier, détecté par une transduction piézoélectrique. La technique utilise une tension entre 0 et 20V pour un décalage de la fréquence initiale (719kHz) de 6kHz (Figure 1.33) correspondant à environ 8000ppm de variation.

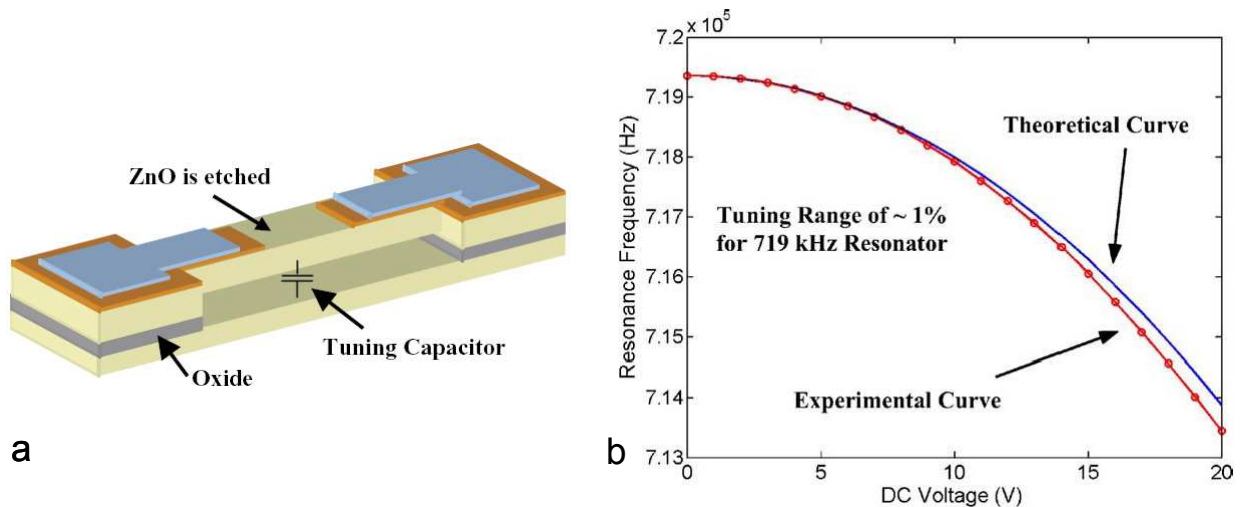


Figure 1.33 (a) Schéma du dispositif, (b) variation de la fréquence (Théorie et résultats expérimentaux) [66]

L'ajout de champs électriques risque cependant d'engendrer des modifications du fonctionnement du résonateur et d'apporter également un surplus de bruit déjà conséquent dans de tels systèmes. Enfin, ces techniques ne semblent pouvoir convenir uniquement que dans le cas de résonateurs utilisant le mode de flexion.

Très récemment, Li & Al. [67] ont présenté une poutre « libre-libre » ($f = 11.53\text{MHz}$) suspendue à deux structures de pull-in (Figure 1.34). Ces dernières permettent d'augmenter la fréquence du résonateur en jouant sur la distance du résonateur à l'entrefer

électrostatique. Il rapporte un décalage de la fréquence de 5000ppm pour une tension appliquée de 60V avec une résolution de 84ppm.V⁻¹. Cependant, les valeurs élevées de tension ne permettent pas d'intégrer ce type de dispositif dans un circuit intégré.

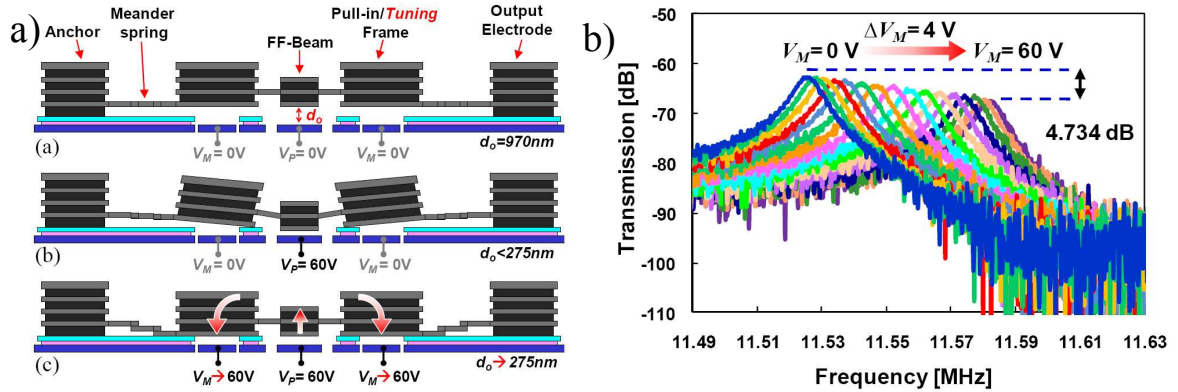


Figure 1.34 Schéma de principe de la poutre avec structure de pull-in (a), variation de la fréquence fonction de la tension appliquée sur les deux structures (b)

1.3.4.4 Systèmes électromagnétiques

Challa [68] évoque l'idée d'utiliser les forces magnétiques pour modifier la fréquence d'une structure résonante. Le positionnement d'aimants permanents sur la poutre résonante couplé à des aimants sur le support permet d'engendrer des forces sur le résonateur (Figure 1.35). Le positionnement vertical de ce dernier va modifier la force appliquée sur celui-ci. Il montre une variation de 20% de la fréquence initiale. Ce principe, difficile à mettre en œuvre d'un point de vue technologique, reste peu intégrable et le champ magnétique peut avoir un impact sur les transistors environnants.

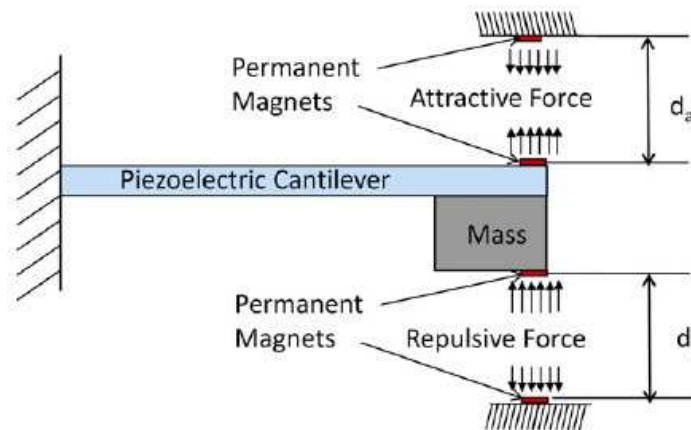


Figure 1.35 Schéma d'un système de récupération d'énergie adaptable en fréquence [68]

1.3.4.5 Tension de polarisation

La fréquence de résonance d'une poutre encastree-encastree est fonction de la tension de polarisation d'après l' Eq. 1.11. Sa dérivée s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial V_p} = \frac{-f_0 \frac{\epsilon_0 A_e}{d_0^3 k_m}}{2 \sqrt{1 - \frac{V_p \epsilon_0 A_e}{d_0^3 k_m}}} \quad \text{Eq. 1.22}$$

Durand & Al. [69] ont ainsi montré que pour une poutre encastrée-encastrée, la tension de polarisation pourrait permettre d'ajuster la fréquence jusqu'à 1% de sa valeur initiale (Figure 1.36).

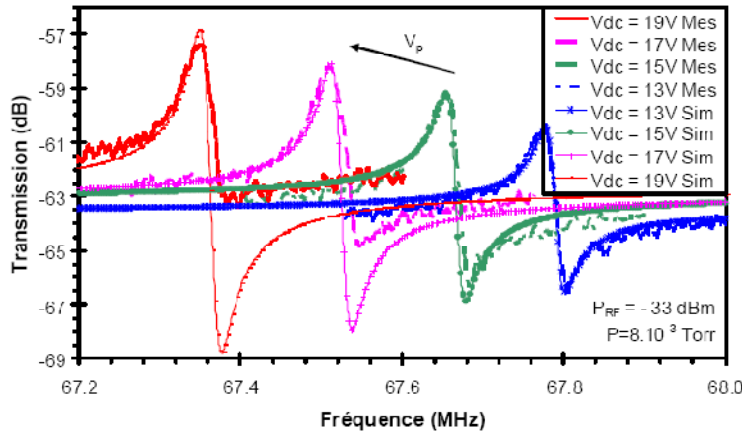


Figure 1.36 Réponse fréquentielle d'une poutre bi-encastrée pour différentes tensions de polarisation (expérimentales et simulations) [69]

D'après le même auteur, la tension de polarisation permettrait de compenser également une dérive en température. Il reporte pour une poutre résonnante une compensation de 100K avec une plage de tension de 2.5V (Figure 1.37).

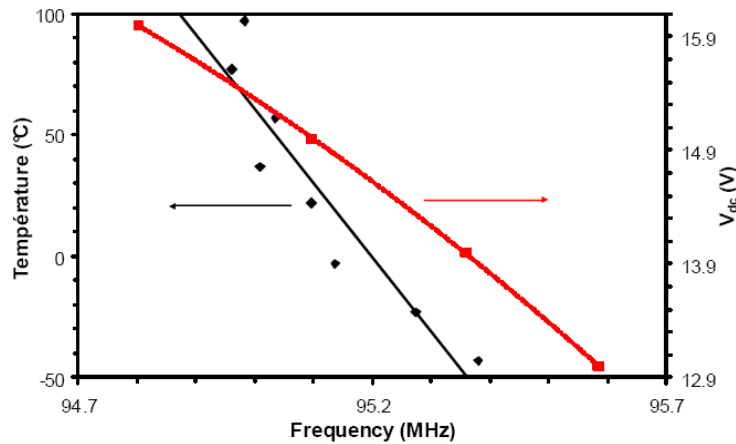


Figure 1.37 Influence de la tension de polarisation pour compenser la température [69]

Par contre, cette technique appliquée aux systèmes à ondes de volume ne permet pas d'obtenir d'aussi bons résultats que dans le cadre de la poutre en flexion et les tensions appliquées deviennent très vite supérieures à la cinquantaine de volts (Tableau I.VII).

Type de résonateur	f (MHz)	Plage de tension (V)	Tuning (ppm)	Tuning rapporté (ppm.V ⁻¹)
Plaques mode extensionnel [25]	13.1	(40 : 100)	76	1.25
Disque mode elliptique [24]	147.8	(10 : 15)	15.6	2.6
I BAR [70]	213	(20 : 100)	117	144
Poutre Encastrée-Encastrée [69]	95	(13 : 16)	8246	2061

Tableau I.VII COMPARAISON DE L'EFFET DE LA TENSION DE POLARISATION SUR DIFFERENTS TYPES DE RESONATEURS

1.3.4.6 Electronique

L'utilisation de circuits électroniques pour palier le manque de performance des résonateurs MEMS vis-à-vis de la température ainsi que des variations dues au procédé est aujourd'hui la seule technique viable et commercialisée. Le Tableau I.VIII rapporte différents résonateurs couplés à un circuit électronique ainsi que les performances associées. On a par exemple la possibilité de faire passer un courant au sein du résonateur pour maintenir une température constante de ce dernier [71]. Il est également possible d'utiliser un circuit de chaîne de diodes dont les tensions de polarisation sont fonction de la température, et donc de modifier la tension du résonateur et par conséquent ajuster les dérives en température [72]. Une dernière technique présentée, joue également sur la tension de polarisation du résonateur mais cette fois avec une alimentation par un circuit de type « bandgap » [70].

Aujourd'hui, quelques entreprises commercialisent des résonateurs MEMS pour des oscillateurs de référence : SiTIME [73], SiClock, Ecliptek, IDT [74] and Sand9 [75]. Tous les produits issus de ces entreprises utilisent une boucle à verrouillage de phase (PLL) pour ajuster la fréquence à quelques ppm près. La PLL présente l'avantage d'avoir une très grande précision mais la consommation s'en ressent et se trouve être limitante pour des applications portables (téléphonie, ordinateur, tablette numérique...). De plus, les composants intrinsèques d'une PLL (Filtre & VC0) apportent un surplus de bruit. Ce bruit peut, s'il se trouve proche de la porteuse, venir perturber le signal relativement bon du résonateur. Afin d'améliorer encore le bruit de phase et dans le cas de résonateurs présentant des fréquences de sortie élevées, il est possible d'ajouter un diviseur de fréquence en série à l'oscillateur. Cependant le diviseur vient lui aussi contribuer à une augmentation de la consommation [76].

Types / Noms	Q	f	Bruit de phase	Power	Variation	Remarques
<i>Ayazi [71]</i>	92000	100MHz	-108dBc @ 1kHz	191.9mW	0.56ppm.K ⁻¹	- Oscillateur : Amplificateur CMOS de type Pierce - Compensation Température : échauffement du résonateur
<i>Ayazi [72]</i>	20000	4MHz	-	1.8mW	4.2ppm.K ⁻¹	- Oscillateur : Amplificateur CMOS de type Pierce - Compensation Température : Chaîne de diode - V _p =20V & ETC = -10ppm.V ⁻²
<i>Ayazi [70]</i>	39400	6MHz	-112dBc @1kHz	1.9mW	0.39ppm.K ⁻¹	- Oscillateur : Amplificateur CMOS de type Pierce - Compensation Température : Band gap et générateur PTAT - V _{DC} =18V & R _X =218Ohms & ETC = -8.9ppm.V ⁻²
<i>IDT [74]</i>	-	133MHz	-	3.6mW	-	- Précision : 300ppm - 2 mA @ 1.8V
<i>Si T8002 [73]</i>	-	1-125MHz	-	27-49.5mW	-	- 100ppm [-40;85]K - PLL
<i>Kenny [77]</i>	10000	1.2MHz		114-137mW	±1ppm	- PLL - Consommation réduite si IC
<i>Discera [73]</i>	-	10MHz	-120dBc @ 1kHz	820μW	-	- Type XO - Résonateur disque
<i>Quartz oscillators [73]</i>	-	1-125MHz	-100 to -140 dBc @ 1kHz	30-50mA (@10MHz)	0.5-100ppm	

Tableau I.VIII COMPARAISON DES PERFORMANCES DE DIFFERENTS OSCILLATEURS MEMS ET QUARTZ

1.3.5 Comparaison du trimming et de la compensation

Au travers du Tableau I.IX, on note que la compensation en fréquence vis-à-vis de la température et de l'impact du procédé de fabrication est toujours un sujet d'actualité. Les performances réalisées sont encore loin de celles proposées par des résonateurs à base de Quartz. Pour l'instant, l'électronique associée reste le meilleur moyen de fabriquer des résonateurs MEMS présentant une stabilité en fréquence acceptable mais dont le point noir demeure la consommation.

Publications	Méthodes	Correction		Drawbacks
		Variations Max	Résolution	
Goodman, 2005 [43]	Structure insensible au process	$\Delta f = 1.66\%$	-	Précision
Kim, 2006[44]	Structure insensible au process	$\Delta f = 1\%$	-	Précision
Allen, 2005 [49]	Dépôt métal	$\Delta f = 11\%$,	375 ppm.nm ⁻¹	Résolution
Joachim, 2003 [50]	Sélective déposition	$\Delta f = 1.96\%$	-	Single device
Discera, 2007 [51]	Laser trimming	$\Delta f = 4\%$	2.6ppm	Single device
Chiao, 2004 [52]	PLD	$\Delta f = 1.8\%$	5000ppm	Répétabilité
Nguyen, 2004 [53]	Localized laser trimming	$\Delta f = 2\%$	21ppm	Single device
Ayazi, 2009 [55]	Diffusion d'or	$\Delta f = 0.24\%$	20 ppm.min ⁻¹	Contamination
Weigel, 2009[42]	Matériau composite Si/SiO ₂		-9.9ppm.K ⁻¹	Dispersion fréquentielle non résolue
Nguyen, 2000 [57]	Contrainte induite par un support atypique		- 2.5 ppm.K ⁻¹	Process compliqué
Nguyen, 2002 [58]	Modification du gap	$\Delta f = 0.18\%$	17.8ppm	Process compliqué
Peters, 2008 [59]	Actionneurs piézoélectriques	$\Delta f = 15\%$		Tension d'utilisation
Cabuz, 1994 [60]	Contraintes axiales électromécaniques	$\Delta f = \pm 16\%$		Tension d'utilisation
Casset, 2007 [30]	Contraintes électrostatiques	$\Delta f = 0.1\%$	55 ppm.V ⁻¹	Tension d'utilisation
Adams, 1998 [62]	Forces électrostatiques	$\Delta f = -7,7$ à 146%		Tension d'utilisation
Leland, 2008 [63]	Précontraintes par un positionneur micrométrique	$\Delta f = 24\%$		Intégration
Lee, 2008 [63]	Forces électrostatiques	$\Delta f = 55\%$		Tension d'utilisation
Morgan, 2008 [64]	Forces électrostatiques	$\Delta f = 17\%$		Tension d'utilisation
Scheibner, 2005 [65]	Forces électrostatiques	$\Delta f = 10-25\%$		Tension d'utilisation
Piazza, 2004 [66]	Forces électrostatiques	$\Delta f = 0.8\%$		Tension d'utilisation
Li, 2011[67]	Contraintes axiales électromécaniques	$\Delta f = 0.5\%$	84ppm.V ⁻¹	Tension d'utilisation
Challa, 2008[68]	Forces magnétiques	$\Delta f = 20\%$		Intégration
Durand, 2008[69]	Tension de polarisation V _p	$\Delta f = 1\%$	2061ppm.V ⁻¹ 0.025 V.K ⁻¹	Mode de flexion seulement
Ayazi, 2006[70]	Band gap et générateur PTAT		0.39ppm.K ⁻¹	Consommation

Tableau I.IX COMPARAISON DES TECHNIQUES DE COMPENSATION EN FREQUENCE ET / OU TEMPERATURE

1.4 Encapsulation

Un aspect très souvent laissé de côté est l'encapsulation du résonateur [78]. En effet, tout MEMS doit forcément, à un moment donné, être intégré à une structure support, capable de protéger ce dernier et de permettre son bon fonctionnement. Il existe deux types de packaging :

- Le collage direct wafer / wafer pour un packaging à l'échelle du wafer [79], pour lequel il n'est pas rare d'avoir des températures autour de 1000°C dans le processus de fabrication, température rédhibitoire pour de nombreuses applications. Avec les mêmes caractéristiques, le collage die / wafer peut être envisagé.
- L'utilisation d'une couche sacrificielle, pour un packaging dispositif par dispositif également valable pour un packaging à l'échelle du wafer [80], mais qui complexifie le procédé de fabrication.

Plusieurs entreprises ont proposé des idées au sujet du packaging. La palme revient à SiTime avec leur Episeal packaging [81, 82]. En effet, cette boîte présente des performances non égalées à tout point de vue : au niveau de la stabilité en fréquence à court et long terme (2 ppm en 8000h), ainsi que de la stabilité en température (3 ppm pour 600 cycles (-50°C à +80°C)).

En outre, la mise en « boîte » peut induire un décalage de la fréquence de résonance notamment dû aux contraintes [83] ou à un re-dépôt du polymère sacrificiel (Avatrel) [84]. Il est donc nécessaire de limiter cette influence en choisissant correctement les zones de fixations pour éviter de reproduire ces contraintes au sein du résonateur [83]. Les structures à ondes de volume sont à priori moins sujettes à ce problème de contraintes, de part leur rigidité de quelques kN.m⁻². Kaajakari et Al. confirment cette idée en montrant un décalage de la fréquence inférieur à 0.1ppm/mois pour des structures à ondes de volume [85] dans le cas d'un collage à haute température (« anodic bonding »). Le problème de re-dépôt a, quant à lui, été résolu grâce à un recuit à 250°C du résonateur en « boîte » [84]. Ayazi et Al. [86] proposent une méthode simple d'encapsulation par un couvercle réalisé en 3 fois à base de polysilicium, SiO₂ et métal. Encore une fois, la fréquence se trouve décalée de 420ppm après encapsulation. Mais ce décalage semble dû au dépôt d'oxyde et semble pouvoir être limité en jouant sur l'épaisseur ou l'ouverture du couvercle.

En toute vraisemblance, si ce décalage demeure, il peut être considéré comme constant et répétable et par conséquent il est moins important que la dérive due au processus de fabrication.

1.5 Conclusions

Au travers de cette introduction, nous avons tout d'abord présenté l'apport potentiel des MEMS dans les objets électroniques grand public de demain. On a ainsi pu voir que les MEMS sont et vont devenir encore davantage présents dans la réalisation de systèmes pour la télécommunication. En particulier les MEMS semblent prometteurs dans le but de fabriquer des systèmes oscillants en remplacement des Quartz du fait de leur taille, de leur capacité d'intégration et de leur consommation intrinsèque.

Dans la partie 2, nous avons reporté les deux principaux types de résonateurs : à savoir les résonateurs à modes de flexion et à ondes de volume. Si les premiers permettent une réalisation technologique simple, ils ne garantissent pas des performances comparables à celles des Quartz en termes de facteur de qualité et de fréquence maximale. Nous n'écartons toutefois pas ce type de résonateur du fait d'une part de la possibilité d'adresser précisément la fréquence de résonance voulue en jouant sur la seule tension de polarisation et d'autre part pour prouver le concept de notre méthode de compensation du fait de la relative facilité de mise en œuvre et de caractérisations de ce type de structure. Les structures à ondes de volume présentent, quant à elles, des performances au niveau des Quartz.

Malheureusement, les différentes étapes de fabrication induisent un décalage de la fréquence visée à l'échelle du wafer. Ceci est également valable pour les structures en mode de flexion. C'est donc cette dérive que nous tenterons d'adresser.

Les méthodes de compensation et de trimming développées dans l'état de l'art, et reportées dans la partie 3, ne permettent pas, d'un point de vue coût et correction collective la réalisation de résonateurs MEMS identiques à l'échelle du wafer, capable de concurrencer les Quartz pour des applications de base de temps avec des variations inférieures à 50ppm. On retiendra tout de même la possibilité d'augmenter ou de diminuer la fréquence par Nguyen et Al. en 2004 [53].

Ce premier chapitre nous a permis de définir notre feuille de route pour la suite du manuscrit. Nous souhaitons donc une méthode simple capable de ramener une population de résonateurs dont les fréquences se situent à $\pm 1000\text{ppm}$ de la valeur visée avec un écart final inférieur à 50ppm. D'autre part, les applications visées étant des produits nomades, les tensions d'actionnement doivent être les plus basses possibles.

Ainsi, nous faisons le choix de travailler sur un dépôt en fin de processus de fabrication pour ajuster la fréquence à la valeur souhaitée. Cette technique présente l'avantage d'une intervention unique, simple, collective et compatible avec les technologies CMOS.

Plusieurs dépôts seront envisagés (Figure 1.38) :

- Une épitaxie qui viendra remplir des trous réalisés préalablement sur le résonateur.
- Un dépôt localisé sur le résonateur défini par une étape de lithographie.

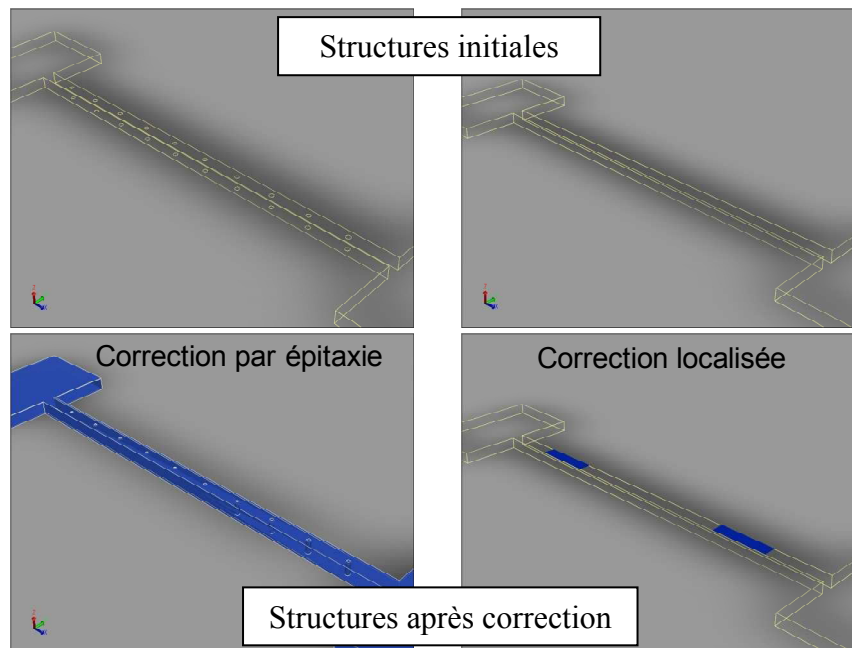


Figure 1.38 Schéma de principe de la correction par épitaxie ou localisée

Nous nous fixons comme objectifs de travailler à des fréquences autour de 90MHz avec un facteur de qualité proche de 10000 pour les structures à ondes de volume. Cette valeur du facteur de qualité demeure loin des 100000 de celle du Quartz mais nous ne cherchons pas un résonateur parfait du point de vue des ancrages, du gap et de l'épaisseur de Silicium utilisée. En outre, nous implémenterons des structures à plus basses fréquences (700kHz, 5MHz) pour valider nos différents concepts. Ces deux paramètres fixés, le chapitre suivant va nous permettre de concevoir dans un premier temps les résonateurs puis dans un second temps la correction associée.

Variations minimales	1000ppm
Ecart final	$< \pm 50\text{ppm}$

Tableau I.X SPECIFICATIONS REQUISES POUR NOTRE CORRECTION

Partie 2 : Modélisations et Simulations

2.1	INTRODUCTION	47
2.2	DEFINITIONS ET METHODES	48
2.2.1	Analyse modale	49
2.2.1.1	Méthodes à constantes localisées.....	49
2.2.1.2	La méthode du quotient de Rayleigh	50
2.2.2	Analyse numérique	51
2.3	MODES DE FLEXION	51
2.3.1	Poutre encastree-encastree simple	51
2.3.2	Poutre comportant des trous.....	52
2.3.2.1	Mode fondamental hors plan.....	53
2.3.2.1.1	Un seul trou	53
2.3.2.1.2	Réseau de trous	59
2.3.2.1.3	Bilan mode hors plan	65
2.3.2.1.4	Choix des structures.....	68
2.3.2.2	Mode fondamental dans le plan	69
2.3.2.2.1	Modélisation et simulations.....	69
2.3.2.2.2	Choix des structures.....	72
2.3.3	Conclusion.....	73
2.4	RESONATEURS A ONDES DE VOLUME	73
2.4.1	Introduction	73
2.4.2	Simulations sous CoventorWare.....	74
2.4.3	Conclusion.....	77
2.5	CORRECTION.....	78
2.5.1	Poutre encastree-encastree.....	78
2.5.1.1	Modèle analytique	78
2.5.1.1.1	Remplissage des trous	78
2.5.1.1.2	Correction localisée	78
2.5.1.2	Mode « hors plan »	81
2.5.1.2.1	Correction par remplissage	81
2.5.1.2.2	Correction localisée	83
2.5.1.3	Mode « dans le plan »	88
2.5.1.3.1	Correction par épitaxie	88
2.5.1.3.2	Correction localisée	89
2.5.2	Résonateurs à ondes de volume.	91
2.5.2.1	Introduction	91
2.5.2.2	Résultats.....	91
2.6	CONCLUSIONS.....	93

2.1 Introduction

Ce chapitre sert de support à la conception et la modélisation des résonateurs MEMS. Il permettra de définir les paramètres qui entrent en jeu dans la compensation en fréquence des résonateurs. Les divers modèles analytiques implémentés apporteront des réponses sur l'évolution de la fréquence des résonateurs en fonction d'une part de la présence de trous et d'autre part d'une correction par le remplissage de ces derniers ou bien d'une correction localisée. Ils nous permettront de vérifier si ces corrections peuvent répondre aux problèmes rencontrés par l'industrie.

Nous avons décidé de travailler sur le développement de résonateurs à partir d'une technologie SOI, avec une épaisseur de silicium fixée à $1.4\mu\text{m}$ et un oxyde enterré de 145nm . Ce dernier n'est pas idéal pour un découplage électrique optimal avec le substrat. Il est préférable d'avoir une épaisseur d'oxyde d'au moins $1\mu\text{m}$ pour réduire les capacités parasites et pertes par le substrat. L'épaisseur de $1.4\mu\text{m}$ est un compromis entre une couche conductrice relativement épaisse pour une bonne conduction électrique (un des éléments qui favorise un bon Q) et une gravure pas trop contraignante sur toute l'épaisseur. Les divers résonateurs réalisés fonctionneront exclusivement dans le plan. Ce choix simplifie les étapes de fabrication et rend possible le dessin de structures multifréquences sur un même substrat utilisant le même procédé de fabrication. Cependant, dans la partie modélisation, nous avons étudié aussi bien les structures vibrant « hors plan » (mieux référencées dans la littérature) que les modes de vibration « dans le plan ».

Nous verrons donc au travers de ce chapitre les méthodes et techniques utilisées pour réaliser les modèles analytiques (Annexes 1 et 2) qui seront également confrontés aux simulations par la méthode des éléments finis (MEF). Ces modèles seront détaillés dans deux parties distinctes :

- Les structures trouées,
- La correction en fréquence (grâce à une épitaxie ou un dépôt localisé).

2.2 Définitions et méthodes

Deux approches différentes et complémentaires à la fois peuvent être utilisées pour calculer la fréquence d'un système résonant [40]. Il s'agit des analyses modale et numérique. La première est souvent utilisée pour des cas « relativement » simple mais nous verrons également des cas plus complexes. Cette procédure comprend dans notre cas précis l'étude énergétique, dit « Quotient de Rayleigh » et le calcul par système équivalent, dit « Méthodes à Constantes Localisées ». La seconde s'appuie sur la méthode des éléments finis (MEF), et est utilisée dans le cas de conditions aux limites difficiles à

établir analytiquement ou pour les modes de volume pour lesquels le calcul de la fréquence de structures trouées ou avec une correction localisée n'a pas encore été développé.

2.2.1 Analyse modale

2.2.1.1 Méthodes à constantes localisées

Il est possible de transformer les paramètres intrinsèques (raideur et inertie) d'une structure en un système équivalent (k_e pour raideur effective et m_e pour masse effective). Dans cette configuration, la pulsation de résonance d'une structure s'écrit :

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} \quad \text{Eq. 2.1}$$

Le calcul de la fréquence se limite donc au calcul des deux paramètres k_e et m_e .

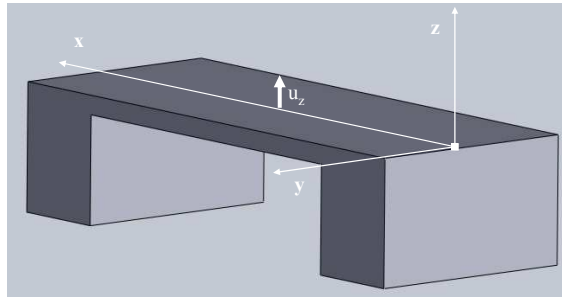


Figure 2.1 Schéma d'une poutre encastrée-encastrée avec conventions

W	Largeur de la poutre	E	Module de Young
L	Longueur de la poutre	ρ	Masse volumique
h	Epaisseur de la poutre	I	Moment quadratique d'inertie
A	Aire de la section de la poutre	T	Energie cinétique
w_b	Déformée de la poutre	U	Energie potentielle

Tableau II.I CONVENTIONS UTILISEES DANS LE CHAPITRE

La raideur équivalente d'un système linéaire, de type poutre, intervient dans la formule qui lie la force appliquée au système F_z au déplacement statique de ce dernier $u_z(x)$:

$$F_z(x) = k_e \cdot u_z(x) \quad \text{Eq. 2.2}$$

D'autre part, le premier théorème de Castigliano nous permet de dire que :

$$F_z = \frac{\partial U_d}{\partial u_z} \quad \text{Eq. 2.3}$$

où U_d représente l'énergie de déformation de la structure. Une poutre encastrée-encastrée en flexion subit l'énergie de déformation suivante :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y(x) \left[\frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} \right]^2 dx \quad \text{Eq. 2.4}$$

avec $u_z(x) = u_z w_b(x)$ où u_z représente le déplacement maximal.

Ainsi nous obtenons que :

$$F_z = \left\{ \int_0^L EI_y(x) \left[\frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} \right]^2 dx \right\} u_z \quad \text{Eq. 2.5}$$

et en comparant les Eq. 2.3 & Eq. 2.5, il en résulte que la raideur s'exprime :

$$k_e = \int_0^L EI_y(x) \left[\frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} \right]^2 dx \quad \text{Eq. 2.6}$$

La masse équivalente peut s'exprimer en utilisant d'une part le principe de Rayleigh où :

$$T_e = \frac{1}{2} m_e \left[\frac{du_z(t)}{dt} \right]^2 \quad \text{Eq. 2.7}$$

et d'autre part la formule explicitant l'énergie cinétique d'un système tel qu'une poutre encastrée-encastrée :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{\partial u_z(x,t)}{\partial t} \right]^2 dm = \frac{\rho}{2} \int_0^L A(x) \left[\frac{\partial u_z(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad \text{Eq. 2.8}$$

On obtient finalement l'équation suivante :

$$m_e = \int_0^L \rho A(x) w_b(x)^2 dx \quad \text{Eq. 2.9}$$

2.2.1.2 La méthode du quotient de Rayleigh

Cette méthode utilisée de nombreuses fois dans l'état de l'art [87, 88, 89] permet de calculer la fréquence de résonance dans le cas de systèmes conservatifs. On peut alors écrire que l'énergie cinétique maximale est égale à l'énergie potentielle maximale :

$$T_{\max} = U_{\max} \quad \text{Eq. 2.10}$$

La seconde hypothèse nécessaire est la séparation des variables spatiale et temporelle dans le cas de mouvements harmoniques, qui s'exprime par :

$$u(x,t) = u(x) \sin(w \cdot t) \quad \text{Eq. 2.11}$$

L'Eq. 2.8 vue précédemment exprime l'énergie cinétique. Il nous reste à exprimer l'énergie potentielle stockée U :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y(x) \left[\frac{\partial u_z(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad \text{Eq. 2.12}$$

A partir des Eq. 2.8 & Eq. 2.12, on peut exprimer la pulsation au carré qui s'écrit :

$$\omega_b^2 = \frac{\int_0^L EI_y(x) \left[\frac{\partial^2 u_z(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx}{\int_0^L \rho A(x) u_z(x)^2 dx} \quad \text{Eq. 2.13}$$

mais qui peut également s'écrire :

$$\omega_b^2 = \frac{\int_0^L EI_y(x) \left[\frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{\int_0^L \rho A(x) w_b(x)^2 dx} \quad \text{Eq. 2.14}$$

en considérant la déformée de la poutre w_b .

2.2.2 Analyse numérique

Les calculs par éléments finis seront effectués avec le logiciel commercial Coventorware®. L'analyse par éléments finis est une technique numérique qui permet de résoudre des équations différentielles partielles. Les objets, dont on veut connaître le comportement, doivent être continus et décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires.

CoventorWare® est composé de quatre modules dont les fonctions vont de la conception de MEMS (Process flow et modèle électromécanique) aux simulations et extractions des paramètres caractéristiques des MEMS.

Ce dernier sera utilisé d'une part pour conforter les modèles analytiques développés et d'autre part pour étudier le cas des résonateurs à ondes de volumes avec des trous ou des ajouts de masse localisés pour lesquels aucun modèle analytique n'a été développé à ce jour.

2.3 Modes de flexion

2.3.1 Poutre encastree-encastree simple

Lorsque la section de la poutre est constante, la déformée statique de la poutre, soumis à une force distribuée peut s'exprimer à partir d'un polynôme du quatrième degré [90] :

$$w_b(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \quad \text{Eq. 2.15}$$

Les conditions aux limites traduisant l'encastrement, respectivement $w_b(0) = 0$, $w_b(L) = 0$, $w'_b(0) = 0$, $w'_b(L) = 0$ et $w'_b(\frac{L}{2}) = 0$ permettent de déterminer les coefficients a, b, c, d, e ; et donc la déformée de la poutre devient :

$$w_b(x) = 16 \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad \text{Eq. 2.16}$$

A partir des Eq. 2.14 & Eq. 2.16, on peut montrer que la fréquence de résonance du mode fondamental d'une poutre (mode hors plan) s'écrit :

$$f_{b,o-p} = \frac{6.481}{(2\pi)} \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Eq. 2.17}$$

Alors que la fréquence du mode de flexion « dans le plan » est égale à :

$$f_{b,i-p} = \frac{6.481}{2\pi} \frac{W}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Eq. 2.18}$$

On montre alors aisément que le rapport des deux varie comme le ratio largeur sur épaisseur :

$$\frac{f_{b,i-p}}{f_{b,o-p}} = \frac{W}{h} \quad \text{Eq. 2.19}$$

Le choix de $\frac{W}{h}$ permet d'écarter les fréquences dans et hors plan. Cela permet d'éviter la combinaison de modes qui seront considérés comme parasites.

2.3.2 Poutre comportant des trous

La présence de trous au sein d'une structure résonante peut avoir plusieurs utilisations. On pense tout d'abord au phénomène de damping, particulièrement lorsque le résonateur est utilisé dans un environnement liquide en tant que capteur. Ainsi les trous réduisent la dispersion d'énergie. Suivant le procédé de fabrication utilisé (MUMPS [36], SOIMUMPS [91]...), des trous peuvent être nécessaires pour la libération de structures.

Dans notre cas, nous implémenterons une structure trouée pour augmenter la surface disponible sur le résonateur et donc diminuer l'épaisseur de matériau nécessaire pour corriger la fréquence de ce dernier. Nous ferons tout d'abord une étude des modes de résonance « hors-plan ». Ce travail nous permettra d'aborder l'ensemble des notations et de comprendre plus facilement les différents phénomènes abordés, étant donné que l'axe des trous sera le même que l'axe de déplacement de la poutre. Puis nous revisiterons l'ensemble des calculs pour un mode de résonance « dans le plan », qui correspondra à nos prototypes.

2.3.2.1 Mode fondamental hors plan

2.3.2.1.1 Un seul trou

La présence d'un trou au sein d'une structure de type poutre modifie la masse du système mais également la raideur de ce dernier. Nous considérons dans ce paragraphe le cas le plus simple où le trou est placé le long de l'axe de symétrie de la poutre (Figure 2.2) de section constante. Ce dernier est positionné à une distance l_1 d'un des encastres de la poutre. Il s'en suit que la présence de ce trou va modifier la fréquence de la structure initiale.

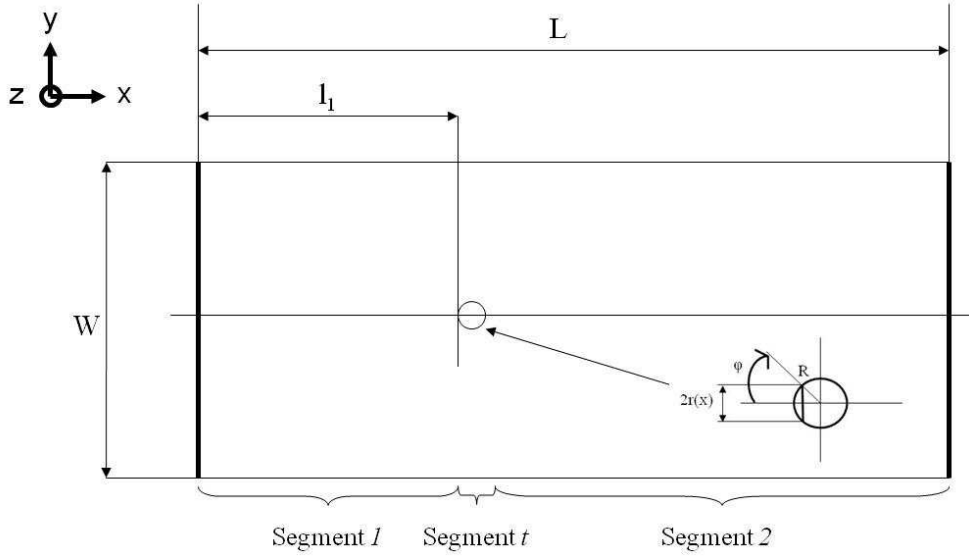


Figure 2.2 Schéma d'une poutre comportant un seul trou

Etant donné la configuration de la poutre d'après la Figure 2.2, cette dernière peut-être considérée comme la mise en série de trois segments de poutre pour lesquels le moment quadratique d'inertie et l'aire de la section sont différents. La Figure 2.2 montre qu'au niveau du trou, on a :

$$r(x) = R \sin(\varphi) \quad \text{Eq. 2.20}$$

Par ailleurs on a :

$$x = l_1 + R(1 - \cos(\varphi)) \quad \text{Eq. 2.21}$$

et par conséquent pour la portion de segment présentant un trou :

$$W(\varphi) = W - 2 R \sin(\varphi) \quad \text{Eq. 2.22}$$

Le moment quadratique d'inertie autour de l'axe y pour la portion présentant un trou est égal à :

$$I_y(\varphi) = \frac{(W - 2 R \sin(\varphi))h^3}{12} \quad \text{Eq. 2.23}$$

Enfin, l'aire de la section est :

$$A(\varphi) = (W - 2R \sin(\varphi))h \quad \text{Eq. 2.24}$$

Nous supposons que la déformée de la poutre est identique sur les trois segments mais en utilisant « x » de l'Eq. 2.21 pour la partie trouée de la poutre. L'Eq. 2.16 devient alors :

$$w_{b-t}(\varphi) = 16 \frac{(l_1 + R(1 - \cos(\varphi)))^2}{L^2} \left(1 - \frac{l_1 + R(1 - \cos(\varphi))}{L} \right)^2 \quad \text{Eq. 2.25}$$

Pour les segments non troués, nous avons les formules suivantes :

$$I_y(x) = \frac{W h^3}{12} \quad \text{Eq. 2.26}$$

$$A(x) = Wh \quad \text{Eq. 2.27}$$

Il est nécessaire de calculer la dérivée seconde de la déformée de la poutre w_{b-t} comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_{b-t}}{dx} = \frac{dw_{b-t}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{dw_{b-t}}{d\varphi} \\ \frac{d^2 w_{b-t}}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw_{b-t}}{dx} \right) = \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{d^2 w_{b-t}}{d\varphi^2} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{dw_{b-t}}{d\varphi} \right) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 2.28}$$

La pulsation de résonance du résonateur troué s'écrit alors :

$$\omega_t^2 = \frac{k_1 + k_t + k_2}{m_1 + m_t + m_2} \quad \text{Eq. 2.29}$$

où k_1 , k_t , k_2 et m_1 , m_t , m_2 sont égales à

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = \int_0^{l_1} E I_y(x) \frac{d^2 w_b}{dx^2} dx \\ k_t = \int_0^{\pi} E I_y(\varphi) \left[\frac{1}{R \sin(\varphi)} \left(\frac{d^2 w_{b-t}}{d\varphi^2} - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{dw_{b-t}}{d\varphi} \right) \right]^2 d\varphi \\ k_2 = \int_{l_1+2R}^L E I_y(x) \frac{d^2 w_b}{dx^2} dx \\ m_1 = \int_0^{l_1} \rho A(x) w_b^2 dx \\ m_t = \int_0^{\pi} \rho A(\varphi) w_{b-t}^2 R \sin(\varphi) d\varphi \\ m_2 = \int_{l_1+2R}^L \rho A(x) w_b^2 dx \end{array} \right. \quad \text{Eq. 2.30}$$

Le modèle analytique développé permet de prendre en compte différents paramètres. On pourra faire varier notamment :

- les dimensions du résonateur,
- les caractéristiques du matériau utilisé,
- la taille et la position du trou.

L'ensemble des calculs et la résolution des intégrales ont été menés sous le logiciel mathématique Maple®.

Le fil rouge de notre étude concerne l'influence d'un ou de plusieurs trous sur la fréquence du résonateur. La Figure 2.3 montre les variations fréquentielles en fonction de la position et de la taille d'un trou. Le résonateur est réalisé à partir de Silicium ($E = 169 \text{ GPa}$, $\rho = 2330 \text{ kg.m}^{-3}$). Les dimensions de ce dernier sont $L=50\mu\text{m}$, $W=20\mu\text{m}$, $h=1.4\mu\text{m}$, qui est l'épaisseur de silicium au-dessus de l'oxyde enterré du substrat SOI, et servira de couche structurelle du résonateur. Ces dimensions permettent de bien faire apparaître les phénomènes dus aux trous. Nous garderons ces paramètres pour l'ensemble de l'étude « hors plan ».

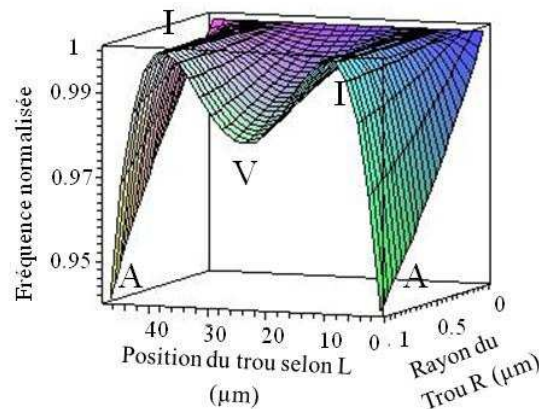


Figure 2.3 Variation de la fréquence de résonance en fonction du rayon d'un trou et de la position de ce dernier ($L=50\mu\text{m}$, $W=20\mu\text{m}$, $h=1.4\mu\text{m}$, $f_i=4.9192\text{MHz}$)

Comme attendu, nous constatons une variation de la fréquence en fonction de la position et de la taille du trou. On met en évidence trois zones dont les variations sont atypiques. Les variations pour ces zones sont d'autant plus marquées que le rayon du trou augmente. Les trois zones mentionnées ci-dessus sont les ancres, qu'on nommera « A », le milieu de la poutre « V » pour ventre, où a lieu le maximum de déflexion, et une zone qu'on appellera intermédiaire « I » située entre les deux premières (Figure 2.4).

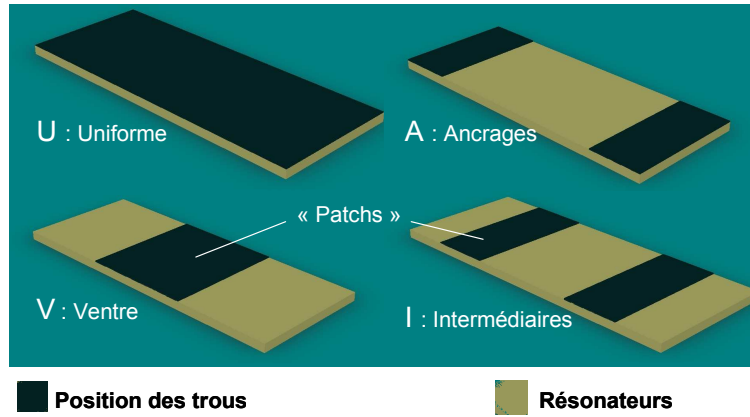


Figure 2.4 Dénomination des trois zones

La fréquence diminue de 5% et 2% respectivement pour « A » et « V ». Elle augmente de 0.06% pour la position intermédiaire.

Afin de comprendre les variations de la fréquence, la Figure 2.5 représente les variations de la masse et de la raideur effectives pour chacune des positions mentionnées ci-dessus en fonction du rayon du trou.

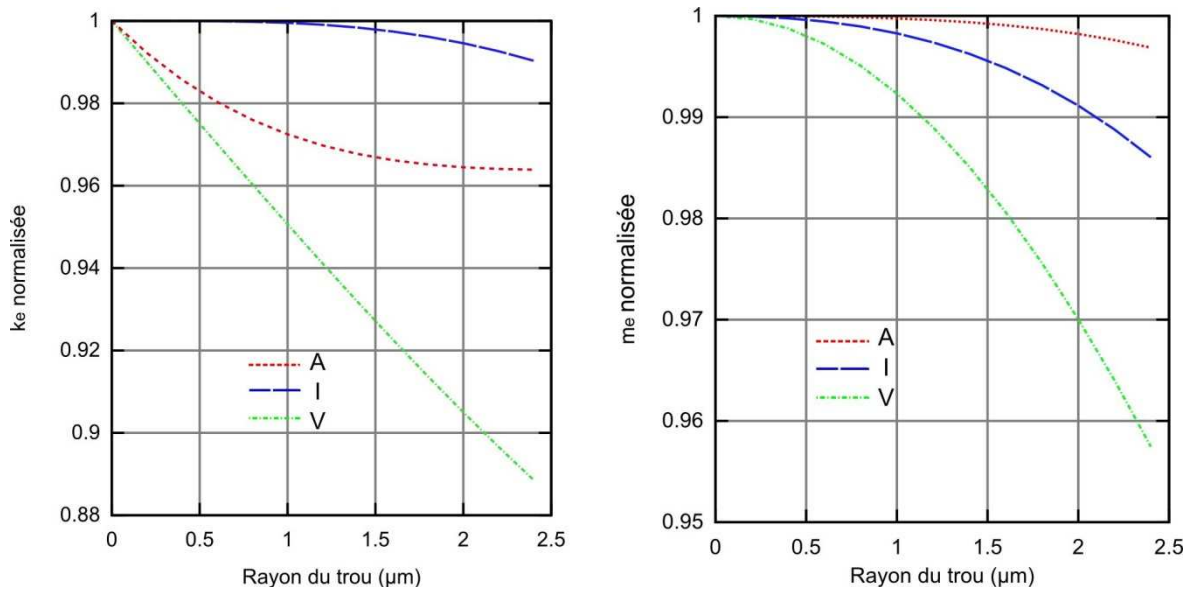


Figure 2.5 Variation de la raideur et de la masse effectives en fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = 25μm, « I » = 10μm, « A » = 5μm, $f_i = 4.9192\text{MHz}$)

D'après ces courbes, on comprend alors que pour chacune des positions la masse et la raideur ne diminuent pas de la même façon. Pour le cas « A », la masse effective varie très peu alors que la raideur diminue très rapidement pour se stabiliser. A l'inverse, dans le cas « I », la raideur reste stable alors que la masse effective diminue. Les deux paramètres diminuent fortement pour une localisation du trou au niveau du « ventre » (10% pour la raideur, 4.5% pour la masse). On peut donc remonter aux variations de fréquence de la Figure 2.6 à partir de ces courbes.

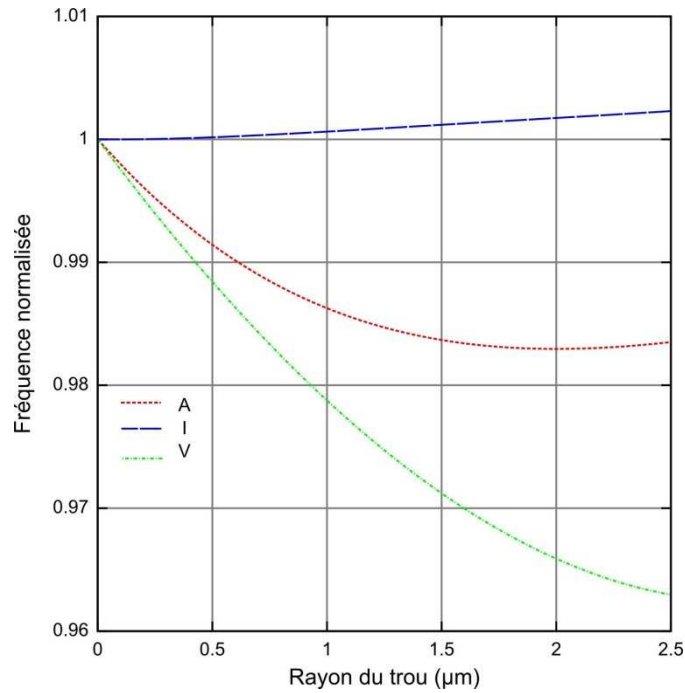


Figure 2.6 Variation de la fréquence fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = 25μm, « I » = 10μm, « A » = 5μm, $f_i = 4.9192\text{MHz}$)

Afin de conforter ces explications, nous nous sommes intéressés aux contraintes d'une poutre soumise à une pression uniforme vers le bas (Figure 2.7).

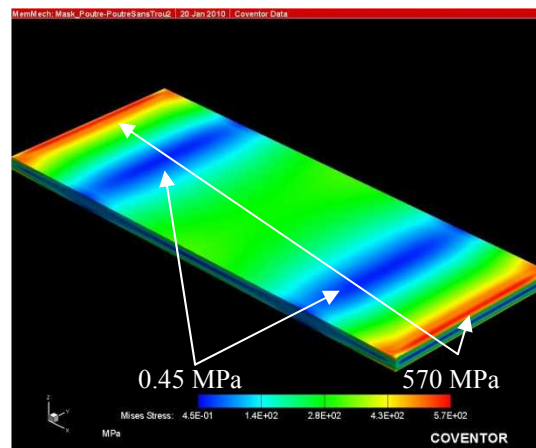


Figure 2.7 Contraintes d'une poutre sujette à une pression statique uniforme vers le bas.

On retrouve les 3 zones définies ci-dessus. La poutre présente de fortes contraintes au niveau de l'ancrage « A ». Deux zones intermédiaires se dessinent avec des contraintes beaucoup plus faibles, il s'agit des points d'inflexion de la poutre qui peuvent être calculés de manière analytique avec la formule de sa déformée.

Ainsi, le fait de localiser le trou près des ancrages va singulièrement diminuer la raideur effective et donc, par conséquent, diminuer la fréquence de résonance. Le même effet se retrouve lorsque le trou se situe au niveau du ventre (V), avec un effet moindre du fait de contraintes plus faibles (Figure 2.3). En revanche un trou en zone « I », n'agira pas sur la

raideur de la poutre mais seulement sur la masse de cette dernière. Ceci explique l'augmentation de la fréquence lorsque le trou se situe dans cette zone. Tout récemment, une étude semblable a été menée par Samarao et al [92]. Ils ont montré qu'une modification de la forme du résonateur permet de concentrer les contraintes de celui-ci pour d'une part augmenter le facteur de qualité et d'autre part augmenter la capacité de trimming, qui se fait par thermo-migration d'Aluminium dans le Silicium. Dans notre cas, nous retrouvons ce principe de contraintes au sein du résonateur que nous utilisons pour modifier la fréquence de résonance.

L'étude précédente a été réalisée dans le cas d'un trou relativement petit. Le trou le plus grand présentait un rayon de $2.5\mu\text{m}$. Nous pouvons regarder l'influence de l'augmentation de ce dernier jusqu'à $8\mu\text{m}$. La Figure 2.8 représente la variation de la fréquence pour un trou plus large. Nous retrouvons la partie de la Figure 2.6 pour un rayon compris entre 0 et $2.5\mu\text{m}$ puis la fréquence croît nettement lorsque le rayon du trou augmente au-delà de $5\mu\text{m}$.

Il faut néanmoins garder à l'esprit que le modèle est plus mathématique que physique. En effet lorsque $R = 8\mu\text{m}$, nous avons le diamètre du trou presque égal à la largeur de la poutre et le résonateur ne ressemble plus au résonateur du départ, le modèle devient alors inexact. De même, le trou près de l'ancrage est situé à $5\mu\text{m}$ du bord de la poutre. Il n'est plus judicieux de considérer la courbe pour la zone « A » pour un rayon supérieur à $5\mu\text{m}$. L'utilisateur du modèle doit être sensible à ces limites.

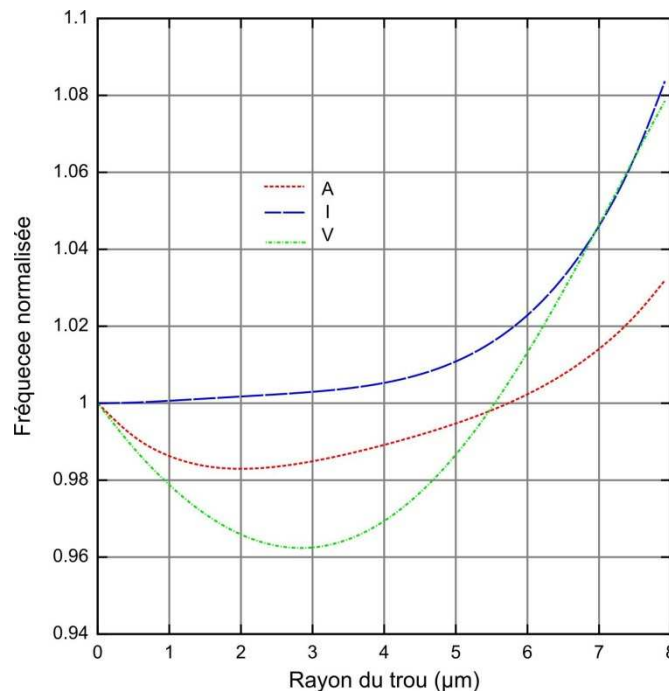


Figure 2.8 Variation de la fréquence en fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu\text{m}$, « I » = $10\mu\text{m}$, « A » = $5\mu\text{m}$, $f_i = 4.9192\text{MHz}$)

De même que précédemment, la décomposition de la fréquence en ratio raideur sur masse (Figure 2.9) explique les variations de la Figure 2.8. On remarque que la masse décroît beaucoup plus vite que la raideur et par conséquent la fréquence augmente à partir de $3\mu\text{m}$.

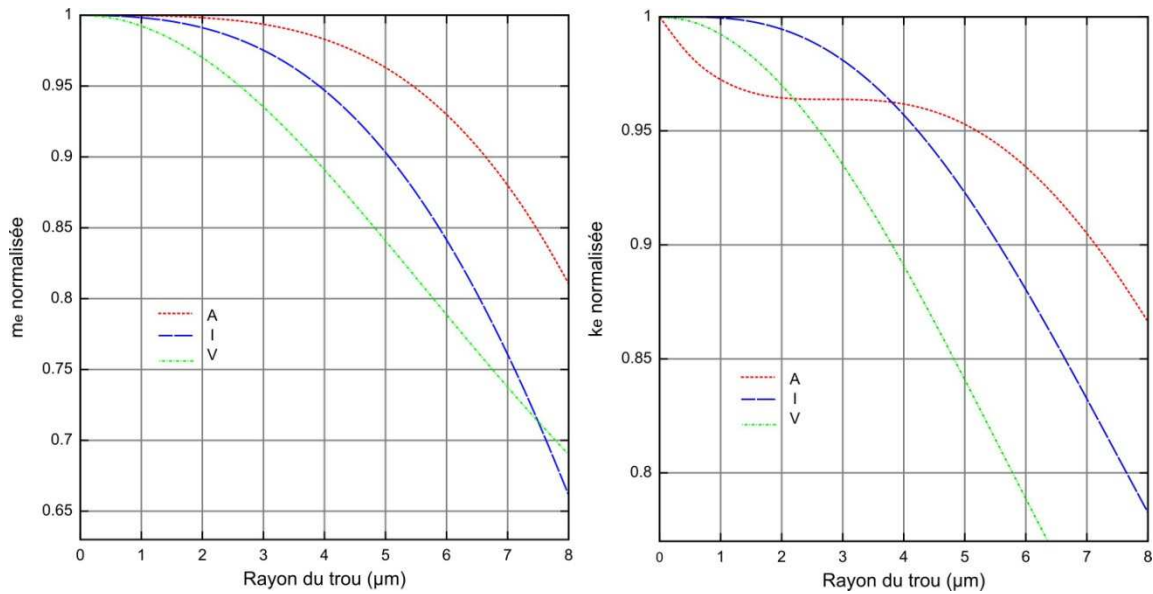


Figure 2.9 Variation de la masse et de la raideur effective en fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu\text{m}$, « I » = $10\mu\text{m}$, « A » = $5\mu\text{m}$, $f_i = 4.9192\text{MHz}$)

Cette première étude a montré qu'il était important de prendre en compte d'une part la taille des trous mais surtout la position de ces derniers. Il est donc nécessaire d'élargir ce premier modèle à un réseau de trous répartis uniformément. Nous proposons également un modèle pour des réseaux de trous localisés sur une seule partie de la structure.

2.3.2.1.2 Réseau de trous

Nous considérons maintenant la Figure 2.10 pour définir l'ensemble des variables qui rentrent en compte dans le calcul de la fréquence de résonance de la structure.

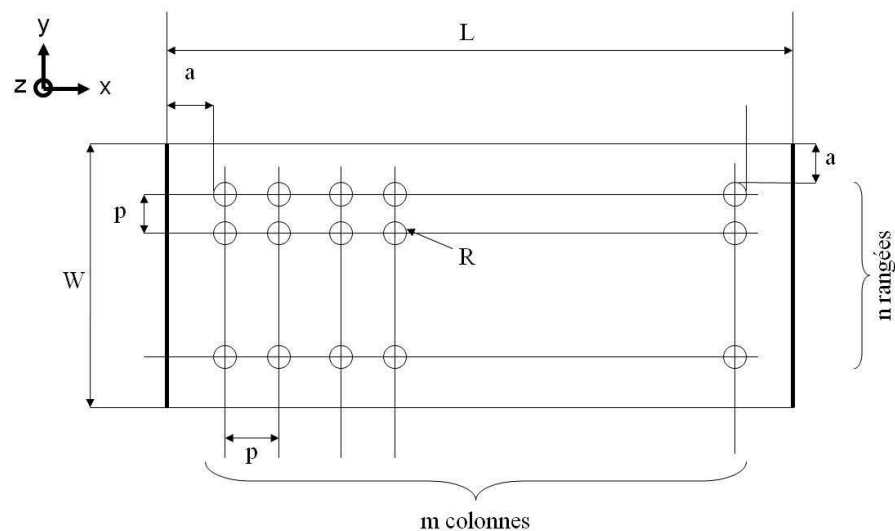


Figure 2.10 Schéma d'une poutre présentant un réseau de trous

Nous définissons donc p , la distance entre deux trous consécutifs, a la distance d'un trou au bord de la poutre. m et n représentent le nombre de trous suivant la longueur et la largeur de la poutre. La poutre devient donc une séquence de $2m+1$ segments (m segments avec les trous et $m+1$ segments « région pleine »)

La largeur de la poutre à prendre en compte dans le calcul de l'inertie I varie suivant la position à laquelle on se trouve. La Figure 2.11 qui utilise les coordonnées polaires permet de définir simplement cette position et donc de simplifier les calculs.

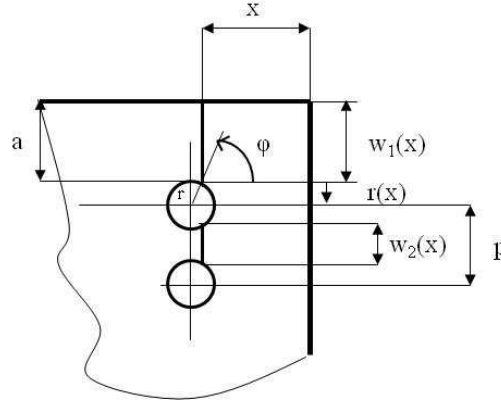


Figure 2.11 Détail d'un réseau de trous

Le rayon d'un trou est défini par l'Eq. 2.20 et la Figure 2.11 montre que :

$$\begin{cases} W_1(x) = a + R - R \sin \varphi \\ W_2(x) = p - 2R \sin \varphi \end{cases} \quad \text{Eq. 2.31}$$

La largeur totale dans une région trouée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} W(x) &= 2W_1(x) + (n-1)W_2(x) \\ &= 2(a + R) + (n-1)p - 2nR \sin \varphi \\ &= W(\varphi) \end{aligned} \quad \text{Eq. 2.32}$$

La variable « x », couplée à sa dérivée entre dans les formules de la raideur et de la masse effectives. Nous devons les exprimer pour chacun des intervalles troués ou non. Pour les segments troués, les coordonnées polaires doivent être utilisées alors que pour les autres segments, les coordonnées cartésiennes peuvent être conservées. Nous avons donc dans le premier cas :

$$\begin{cases} x = a + R + (j-1)p - R \cos \varphi \\ dx = R \sin \varphi d\varphi \end{cases} \quad \text{Eq. 2.33}$$

La déformée de la poutre devient alors :

$$w_{bj}(\varphi) = 16 \frac{(a + R + (j-1)p - R \cos \varphi)^2}{L^2} \left(1 - \frac{a + R + (j-1)p - R \cos \varphi}{L} \right)^2 \quad \text{Eq. 2.34}$$

alors qu'elle reste celle de l'Eq. 2.16 pour les segments pleins.

En considérant que la poutre est constituée de $2m+1$ segments, comme expliqué précédemment, la raideur ainsi que la masse équivalente peuvent être déterminées. La raideur équivalente s'écrit :

$$k_e = E \left\{ S_{1b}^{(k)} + S_{2b}^{(k)} + I_y \left[\int_0^a \left(\frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_{a+2R+(m-1)p}^L \left(\frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} \right)^2 dx \right] \right\} \quad \text{Eq. 2.35}$$

avec :

$$S_{1b}^{(k)} = R \sum_{j=1}^m \int_0^\pi I_y(\varphi) \left[\frac{d^2 w_{bj}(\varphi)}{dx^2} \right] \sin \varphi d\varphi \quad \text{Eq. 2.36}$$

où :

$$I_y(\phi) = \frac{W(\phi)t^3}{12} \quad \text{Eq. 2.37}$$

et :

$$S_{2b}^{(k)} = I_y \sum_{j=2}^m \int_{a+2R+(j-2)p}^{a+(j-1)p} \left[\frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} \right] dx \quad \text{Eq. 2.38}$$

De la même manière, on peut exprimer la masse équivalente :

$$m_{b,e} = \rho t \left\{ S_{1b}^{(m)} + S_{2b}^{(m)} + W \left[\int_0^a w_b(x)^2 dx + \int_{a+2R+(m-1)p}^L w_b(x)^2 dx \right] \right\} \quad \text{Eq. 2.39}$$

avec

$$S_{1b}^{(m)} = R \sum_{j=1}^m \int_0^\pi W(\varphi) w_{bj}(\varphi)^2 \sin \varphi d\varphi \quad \text{Eq. 2.40}$$

et

$$S_{2b}^{(m)} = W \sum_{j=2}^m \int_{a+2R+(j-2)p}^{a+(j-1)p} w_b(x)^2 dx \quad \text{Eq. 2.41}$$

En combinant les Eq. 2.35 et Eq. 2.39, on peut donc calculer la fréquence de résonance d'une poutre encastree-encastree presentant un reseau de trous. Par une analyse similaire mais des bornes ou des sommes differentes, il est possible d'implémenter un reseau de trous dans les differentes zones de la Figure 2.4.

L'ensemble des courbes presentees par la suite sont les resultats du modele analytique pour une poutre encastree-encastree avec pour dimensions $L=50\mu m$, $W=20\mu m$ et $h=1.4\mu m$.

➤ Répartition Uniforme

Nous considérons tout d'abord la présence de trous répartis uniformément sur la poutre. La Figure 2.12 montre que la fréquence augmente avec m mais diminue avec n (lorsque $m < 7$). Le fait d'augmenter le nombre de trous sur le dispositif modifie le comportement du résonateur. En effet, la masse de la structure diminue significativement par rapport à la raideur de ce dernier. Nous avons vu que lorsque le rayon du trou augmentait, la masse devenait prépondérante. C'est ce que l'on retrouve lorsque le nombre de trous suivant la largeur augmente pour un nombre de trous donné suivant la longueur ($m=8$).

A l'inverse, lorsque l'on se place avec peu de trous suivant la longueur et que l'on augmente le nombre de trous suivant la largeur, la fréquence diminue. En répartissant les trous suivant la longueur de cette manière là, ces derniers se retrouvent dans la zone « A » ou « V », le paramètre « k_e » est alors le plus influencé. Ce qui se traduit par une chute de la fréquence. Alors que pour des valeurs de m relativement importantes, l'effet de la masse redevient prépondérante et par conséquent la fréquence augmente de nouveau lorsque n augmente.

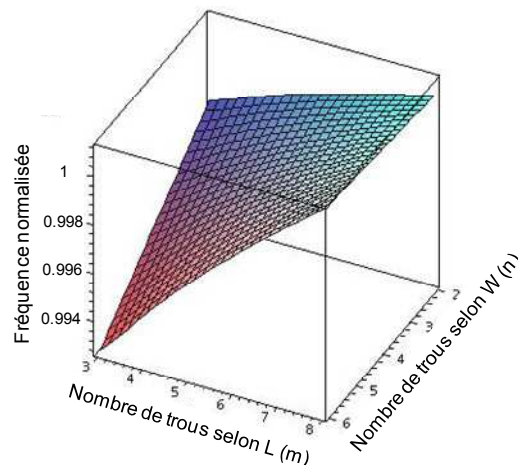


Figure 2.12 Variation de la fréquence en fonction du nombre de trous suivant la longueur (m) et la largeur (n) de la poutre ($R=500nm$, $f_i = 4.9192MHz$)

Comparons à présent le rayon du trou avec le nombre de trous suivant la longueur (m) (Figure 2.13). Si R augmente, on note une fréquence plus grande lorsque m est grand. En effet, la masse diminue plus que la raideur. On remarque que pour de petites valeurs de m , la fréquence diminue, ceci peut s'expliquer par le fait que les trous sont positionnés de telle façon que l'on joue sur la raideur de la poutre (trous en « A » et « V ») et non plus la masse (trous en « I »).

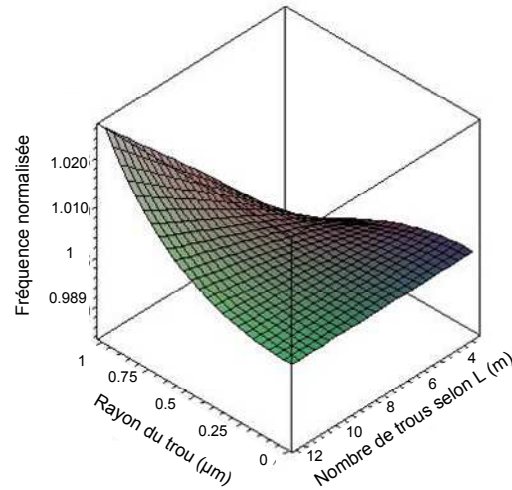


Figure 2.13 Variation de la fréquence en fonction du nombre de trous suivant la longueur (m) et du rayon d'un trou ($n=4, f_i = 4.9192\text{MHz}$)

Il nous paraît également intéressant de regarder l'influence entre le rayon d'un trou et le nombre de trous suivant la largeur (Figure 2.14).

Nous fixons tout d'abord le nombre de trous suivant la longueur à 4 et une distance de l'encastrement au premier trou à $2.5\mu\text{m}$. Les rangées de trous se trouvent donc dans la zone « A » ou « V ». Si on augmente n en conservant les valeurs mentionnées précédemment pour m et a_m , la fréquence diminue d'autant plus que le rayon du trou est grand. On comprend bien que l'on diminue la rigidité de la poutre, notamment au niveau des encastrements (Figure 2.14).

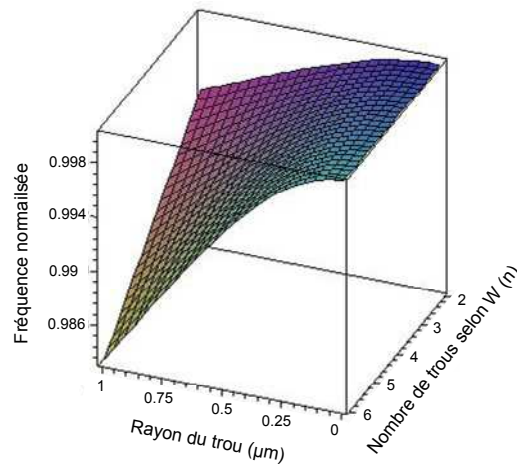


Figure 2.14 Variation de la fréquence en fonction du nombre de trous suivant la largeur (n) et du rayon d'un trou ($m=4, a_m=2,5\mu\text{m}, f_i = 4.9192\text{MHz}$)

Le modèle montre également que si l'on recentre les trous suivant la largeur, on n'observe aucun effet car la raideur est identique suivant la largeur.

Il est important de prendre en considération l'ensemble de ces éléments afin de concevoir la poutre de telle manière à peu modifier la fréquence de résonance sous peine de ne plus atteindre la valeur de précision d'adressage souhaitée.

➤ Répartition aux encastremements

On comprend aisément qu'en positionnant les trous près des encastremements, on va diminuer la rigidité de la structure et donc par conséquent la fréquence de résonance de cette dernière, d'autant plus que l'on augmente le nombre de trous. On notera que la fréquence varie plus lorsque n augmente que lorsque m augmente. En effet, la raideur est la même suivant la largeur. Donc si on augmente n , on multiplie l'effet d'un trou par n . Alors que si on joue sur m , la raideur varie suivant la longueur de la poutre, la raideur équivalente se trouve donc être moins diminuée que pour n (Figure 2.15).

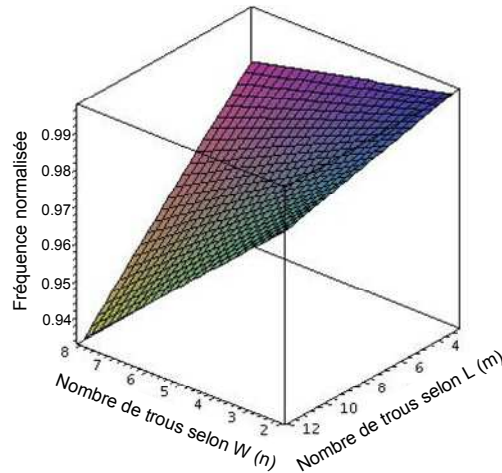


Figure 2.15 Variation de la fréquence de résonance en fonction des trous suivant la largeur (n) et la longueur (m) de la poutre ($f_i = 4.9192\text{MHz}$, $R = 500\text{nm}$)

➤ Répartition au niveau du ventre

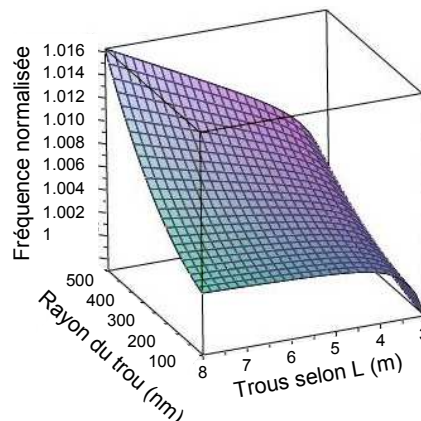


Figure 2.16 Variation de la fréquence de résonance en fonction du nombre de trous (m) et du rayon d'un trou ($n=4$)

La zone « V », pour ventre, présente des paramètres proches de ceux de la zone « A ». En effet, nous nous trouvons dans la zone avec le maximum de déflexion, présentant de plus des contraintes non négligeables (Figure 2.7). Ces contraintes ne sont pourtant pas assez importantes pour modifier de manière identique à la zone « A » la fréquence de résonance.

Ainsi, celle-ci augmente lorsque le nombre de trous augmente, d'autant plus que le rayon d'un trou est grand (Figure 2.16).

➤ Zone intermédiaire

On note sur la Figure 2.7 qu'il existe une zone où la contrainte est quasi nulle. On comprend donc qu'en positionnant des trous dans cette partie, ces derniers vont simplement modifier la masse du système et non pas la raideur de ce dernier. On notera donc une augmentation de la fréquence, d'autant plus que le nombre de trous suivant la longueur augmente.

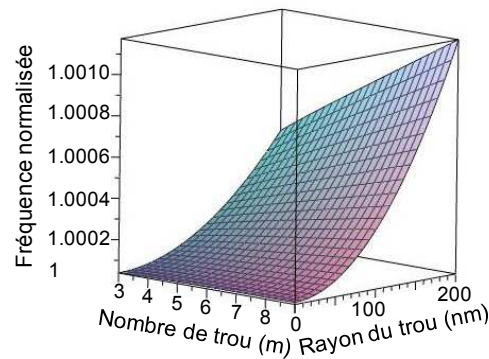


Figure 2.17 Variation de la fréquence de résonance en fonction du nombre de trous (m) et du rayon d'un trou ($n=4$)

2.3.2.1.3 Bilan mode hors plan

Nous avons mis en évidence à travers ce modèle analytique une modification de la valeur de la fréquence de résonance due à la présence de trous au sein de la structure, en fonction de leur position et de leur taille (Tableau II.II).

Répartitions	Variables	Paramètres influencés	Fréquence	Remarques
Uniformes	m (n, R fixés)	masse	↗ si m ↗	
	n (m, R fixés)	- Dépend de la position - Général : raideur	↘ si n ↗	
	R ($m \gg 1$)	masse	↗ si r ↗	
	R ($m \ll 1$)	raideur	↘ si r ↗	
	R, n ($m=4$)	raideur	↘ si r, n ↗	
Encastrements (A)	m, n (R fixé)	raideur	↘ si m ou n ↗	n a plus d'influence
Ventre (V)	m, R (n fixé)	masse si $m \gg 1$	↗ si m ou r ↗	
	m, R (n fixé)	raideur si $m \ll 1$	↘ si m ou r ↗	
Intermédiaire (I)	m, n, R	masse	↗ si m ou n ou r ↗	

Tableau II.II BILAN DES STRUCTURES TROUEES, MODE HORS PLAN

Nous avons confronté ces résultats aux simulations par éléments finis (MEF) effectuées sous CoventorWare. Les trous sont cette fois-ci carrés afin de limiter le temps de calcul. Nous faisons l'approximation que cette différence de géométrie (rond en analytique et carré en FEM) influe peu sur nos résultats.

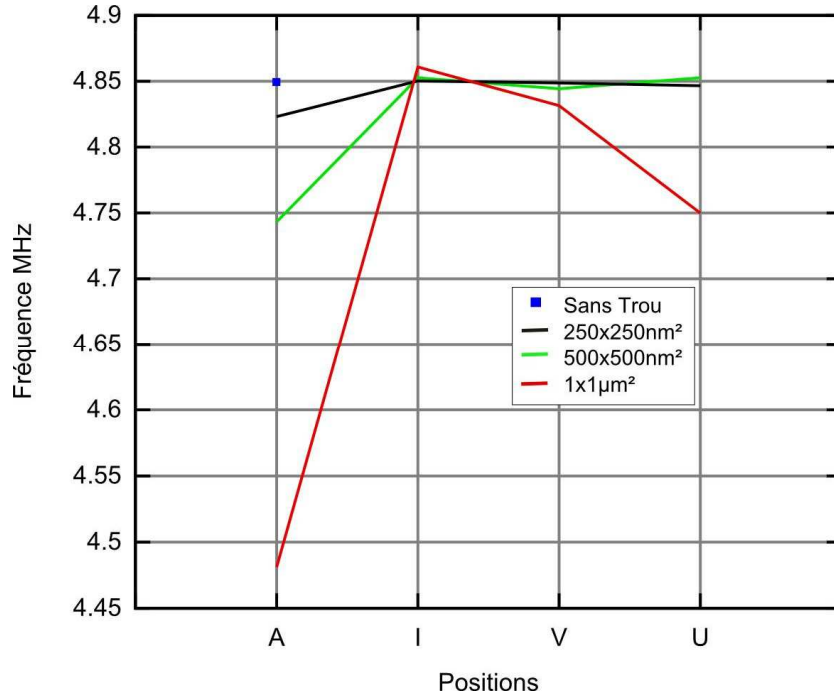


Figure 2.18 Variation de la fréquence en fonction de la position des trous de petites tailles : réseau de 6x6 trous (MEF)

La Figure 2.18 montre que les variations au niveau de l'ancrage sont beaucoup plus marquantes. En effet, on a vu que dans cette zone, c'était la raideur qui variait. Les deux autres zones sont plus sensibles à la masse. On peut conclure que la variable k_e est beaucoup plus influencée par la présence de trous au niveau de l'ancrage. Ceci conforte le modèle analytique et la variation de la masse et de la raideur de la Figure 2.5.

De plus, les simulations par éléments finis (Figure 2.19) confirment les variations constatées par la modélisation analytique lorsque les trous deviennent grands et que la fréquence ne dépend plus que de la masse du système.

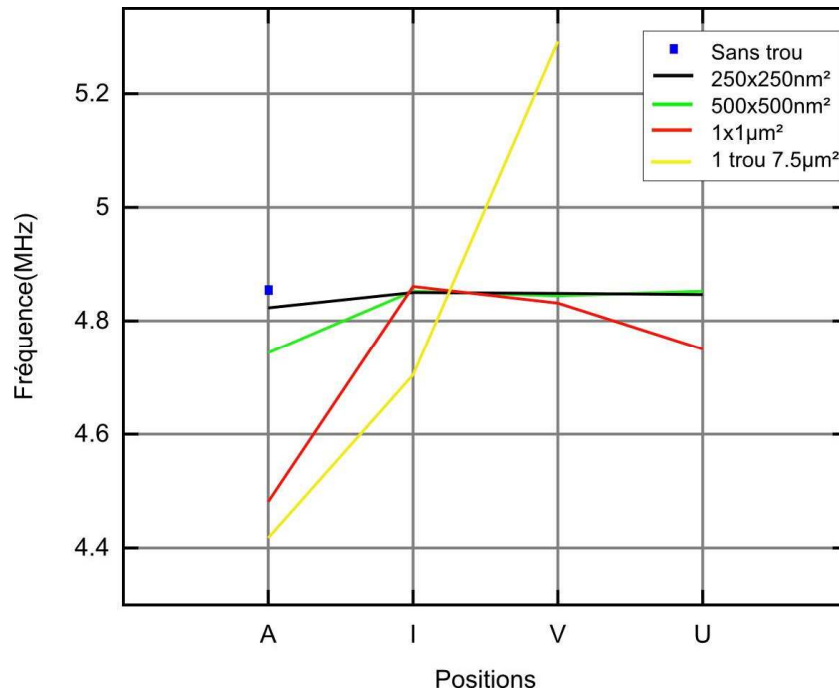


Figure 2.19 Variation de la fréquence en fonction de la position des trous de plus grandes tailles : réseau de 6x6 trous (MEF)

On remarque tout de même que pour un seul trou de côté $7.5\mu\text{m}$ en « I », la fréquence diminue. Ceci s'explique par le fait qu'avec ce trou, la zone intermédiaire n'est plus respectée. Le trou est positionné proche de l'ancrage, ce qui explique donc la chute de la fréquence.

La comparaison des études montre une bonne corrélation (Figure 2.20). On note cependant une différence majeure entre le modèle et les simulations pour une répartition dans la zone intermédiaire « I ». Le modèle analytique montre une augmentation nette de la fréquence lorsque les trous sont positionnés dans cette partie. Les simulations rapportent également une augmentation mais de façon beaucoup moins nette. La modification de la déformée de la poutre en fonction des trous présents peut expliquer cette disparité, non prise en compte dans le modèle analytique.

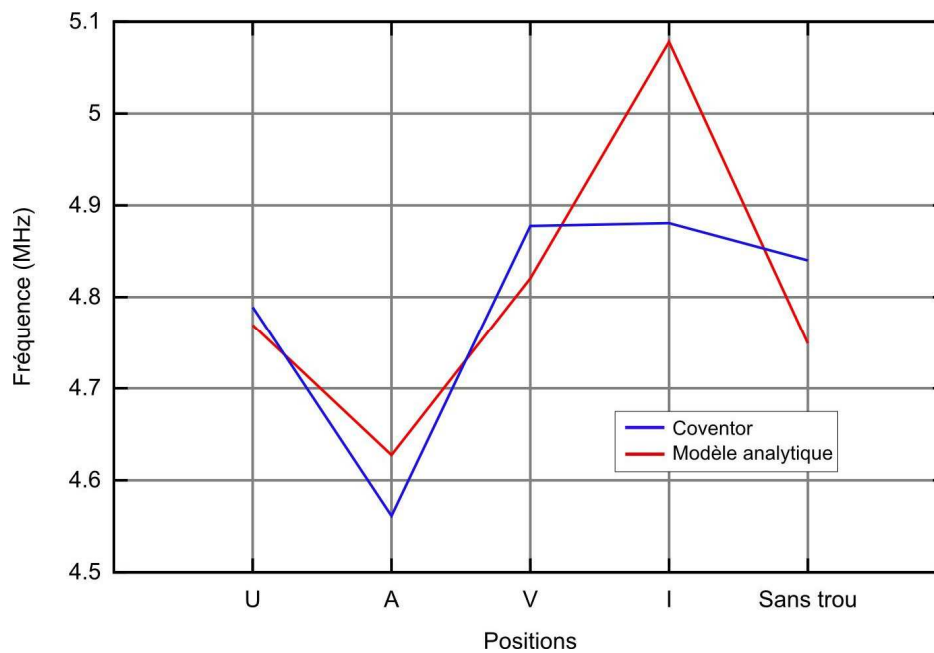


Figure 2.20 Comparaison du modèle avec les simulations pour une poutre (mode hors plan) comportant un réseau de 6x6 trous ($R = 250nm$), $f_{référence} = f_{modèle_sans\ trou}$

Le Tableau II.III rapporte la valeur de la fréquence d'une poutre pour différentes répartitions de trous. On rapporte dans ce même tableau les valeurs calculées par le logiciel CoventorWare et celles par le modèle ainsi que les variations entre les deux. Le tableau montre une bonne concordance entre les deux méthodes d'analyses ($< 4\%$).

Type	Fréquence (MHz)		Ecart (%)
	Analytique	FEM	
U	4.7692	4.7889	- 0.41
A	4.6274	4.5612	1.45
V	4.8204	4.8776	-1.17
I	5.0781	4.8807	4.04

Tableau II.III COMPARAISON DES FREQUENCES DE RESONANCE POUR LES 4 REPARTITIONS DE TROUS ($L=50\mu m$, $W=20\mu m$, $H=1.4\mu m$, RESEAU : 6X6 TROUS, $R=250nm$)

2.3.2.1.4 Choix des structures

Au vu de cette étude, il nous est possible de choisir le dimensionnement et le positionnement des trous afin de maintenir la fréquence souhaitée tout en augmentant la surface disponible grâce aux trous.

Nous reportons dans le Tableau II.IV un ensemble de paramètres répondant à nos critères. Il est ainsi possible de conserver la fréquence voulue 4.91MHz tout en ajoutant un certain nombre de trous.

Résonateur	Sans trou	« U »	« A »
		$a_m=2\mu\text{m}, a_n=2\mu\text{m}$ $L=49.97\mu\text{m}$	$a_m=1\mu\text{m}, a_n=2\mu\text{m}$ $L=49.43\mu\text{m}$
Fréquence (MHz)	4.9192	4.9192	4.9192

Tableau II.IV FREQUENCE POUR DIFFERENTES DISPOSITIONS $R=500\text{nm}$, $W=20\mu\text{m}$, $H=1,4\mu\text{m}$, $n=6$, $m=8$ DE TROUS AVEC POUR OBJECTIF DE CONSERVER LA FREQUENCE D'UNE POUTRE SIMPLE

2.3.2.2 Mode fondamental dans le plan

2.3.2.2.1 Modélisation et simulations

L'enjeu de la thèse est de travailler dans le plan du substrat afin de faciliter la fabrication mais aussi d'augmenter les performances, notamment avec des structures à ondes de volume.

Nous prendrons pour dimensions de la poutre une longueur de $50\mu\text{m}$, une largeur de $1.5\mu\text{m}$, qui nous permettront d'implémenter des trous de rayon au moins égal à 250nm et de travailler à une fréquence d'environ 5MHz . Nous conserverons une épaisseur de $1.4\mu\text{m}$. Ces dimensions permettent de garantir une fréquence autour de 5MHz et de mettre en évidence les variations imputées aux trous ou à la correction localisée.

Le modèle développé précédemment reste valable pour le cas des vibrations dans le plan. Il est ainsi possible de représenter les variations de la fréquence en fonction de la taille d'un trou pour différentes localisations (Figure 2.21).

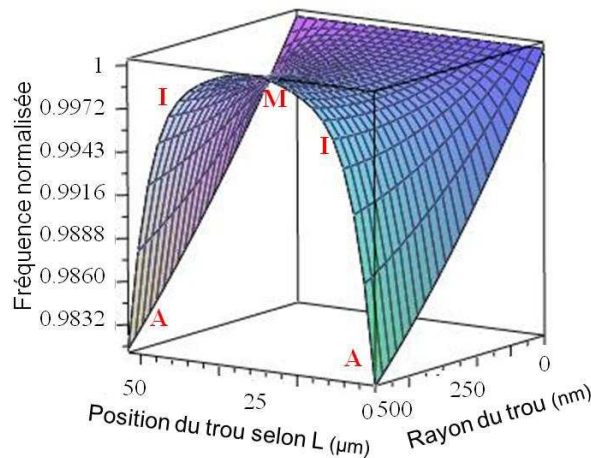


Figure 2.21 Variation de la fréquence de résonance en fonction du rayon d'un trou et de la position de ce dernier ($L=50\mu\text{m}$, $W=1.5\mu\text{m}$, $h=1.4\mu\text{m}$)

Les variations rapportées sur la Figure 2.21 sont en partie différentes des variations pour le mode hors plan. On peut tout de même mettre en évidence les trois zones « A », « I » et « V ». Nous notons une diminution de la fréquence pour « A » et « I ». La zone « V » montre une évolution plus complexe avec une diminution dans un premier temps puis une augmentation à partir d'un rayon de 250nm .

De même que précédemment, l'évolution de la masse et de la raideur effective dans chacune des zones explique ces variations. La Figure 2.22 reporte les variations de la masse et de la raideur et correspond aux variations relevées dans le cadre d'une excitation hors plan.

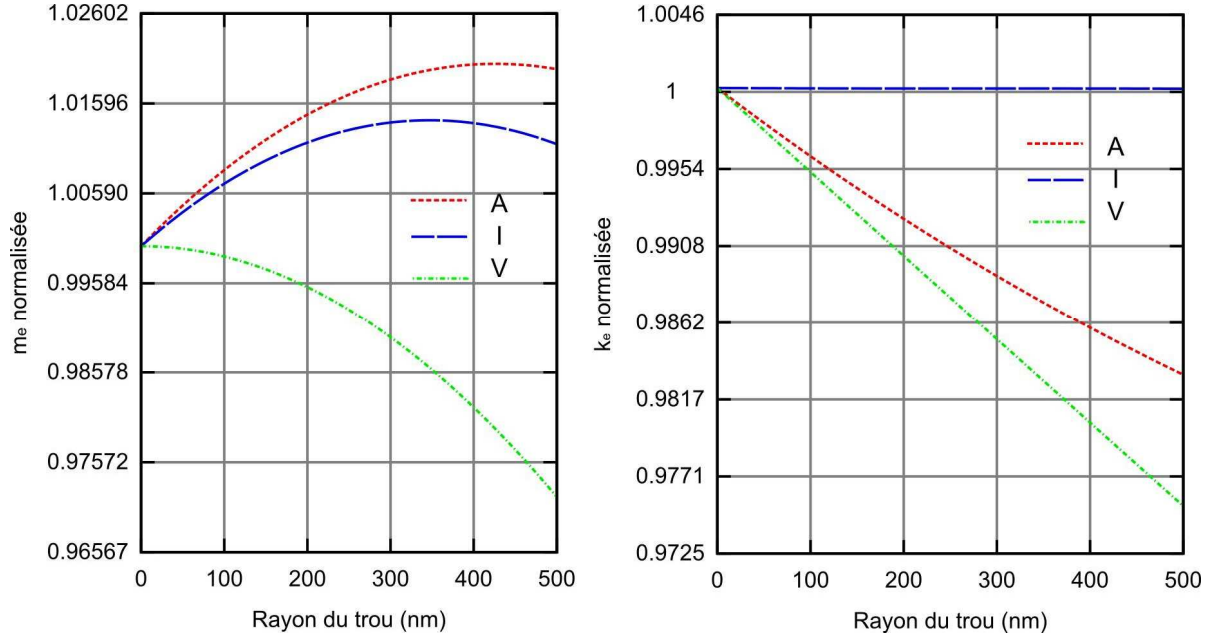


Figure 2.22 Variation de la masse et de la raideur effective en fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = 25 μm , « I » = 10 μm , « A » = 5 μm)

La raideur effective diminue avec le rayon dans les cas « V » et « A » respectivement de 2.2% et 1.9% pendant que la masse effective augmente de 1.6% avec le rayon pour « A », d'où une diminution de la fréquence. Pour « V » la masse diminue d'abord de 0.4% ($R=200\text{nm}$) puis plus rapidement de 2.4% lorsque R atteint 500nm, on assiste donc d'abord à une diminution de la fréquence puis celle-ci augmente lorsque R augmente. Pour la position « I » la raideur reste stable quelque soit le rayon du trou alors que la masse augmente. La fréquence ne peut donc que diminuer.

La Figure 2.23 montre l'évolution de la fréquence pour chacune des trois zones fonction de la taille d'un trou et ces variations se déduisent des courbes de la Figure 2.22.

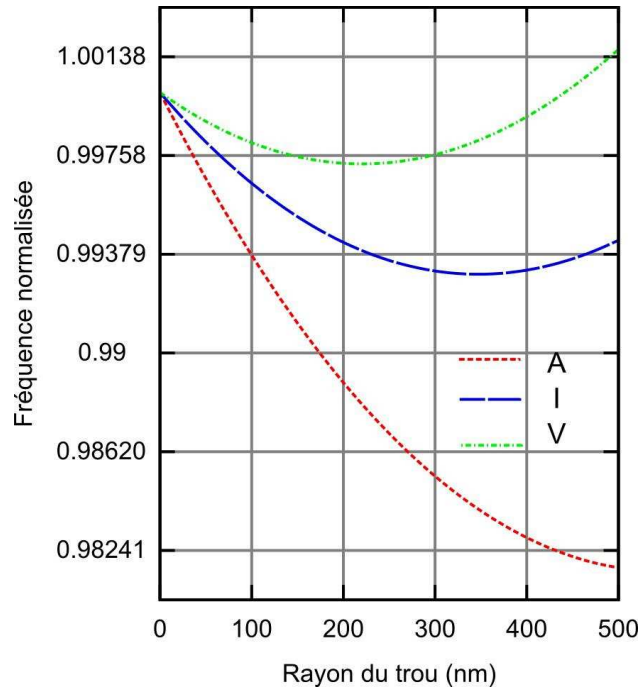


Figure 2.23 Variation de la fréquence fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu\text{m}$, « I » = $10\mu\text{m}$, « A » = $5\mu\text{m}$)

La Figure 2.24 reportant les contraintes de la poutre sujette à une déformation dans le plan, permet de visualiser les trois zones mentionnées ci-dessous.

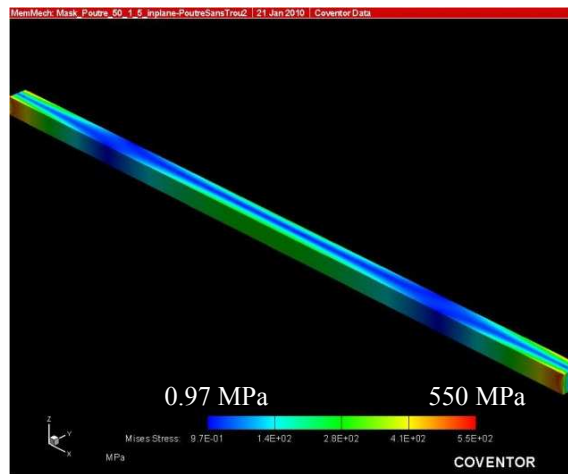


Figure 2.24 Contraintes d'une poutre sujette à une pression statique uniforme sur le côté

On retrouve les 3 zones, décrites dans l'étude de la poutre hors plan, avec des contraintes plus ou moins importantes. Cependant, le plan neutre est suivant la hauteur, donc les variations sont quelques peu différentes du fait que l'on garde les trous dans cette même direction, alors que l'excitation se fait dans le plan. La rigidité initiale de la structure, beaucoup plus faible que dans la partie précédente, peut également jouer un rôle dans ces variations. Nous avons également confronté notre modèle aux valeurs simulées sous CoventorWare® dans le cas d'une structure avec un seul trou (Figure 2.25). On note bien

une diminution de la fréquence pour les trois zones, nette pour la zone « A », moins forte pour la zone « I » et une légère baisse pour la zone « V ».

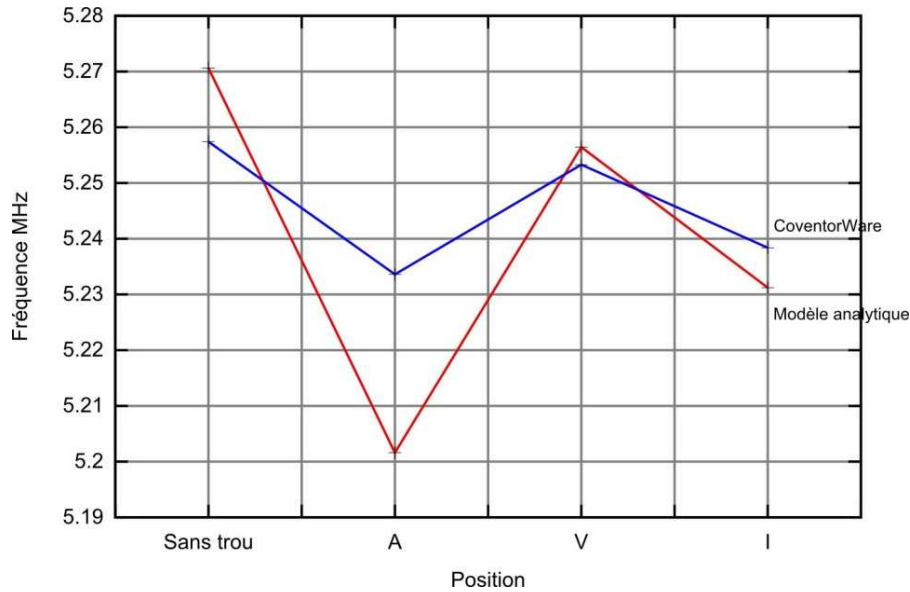


Figure 2.25 Comparaison du modèle et des simulations pour une poutre vibrante dans le plan comportant un trou ($R=250\text{nm}$)

Le Tableau II.V rapporte la valeur de la fréquence de ces poutres. On montre, dans ce même tableau, les valeurs calculées par le logiciel CoventorWare® et celles par nos modèles ainsi que les variations entre les deux. Le tableau montre une bonne concordance entre les deux méthodes d'analyse.

Type	Fréquence (MHz)		Ecart (%)
	Analytique	MEF	
Sans trou	5.2706	5.2574	0.25
A	5.2016	5.2336	-0.61
V	5.2564	5.2533	0.06
I	5.2366	5.2384	-0.03

Tableau II.V COMPARAISON DES FREQUENCES DE RESONANCE POUR LES 3 REPARTITIONS DE TROUS ($L=50\mu\text{m}$, $W=1.5\mu\text{m}$, $H=1.4\mu\text{m}$, UN TROU, $R=250\text{nm}$)

2.3.2.2.2 Choix des structures

De la même manière que pour le mode hors plan, cette étude préalable nous permet de dimensionner et de positionner les trous afin de maintenir la fréquence souhaitée tout en augmentant la surface disponible grâce aux trous, pour garantir une bonne correction.

Nous reportons dans le Tableau II.VI un ensemble de paramètres répondant à nos critères pour une répartition uniforme des trous sur la poutre. Il est ainsi possible de conserver la fréquence voulue 5.270MHz tout en ajoutant un certain nombre de trous.

Résonateur	Simple $L=50\mu m$	2x6 trous $L=49.493\mu m$	2x8 trous $L=49.564\mu m$	2x10 trous $L=49.616$	2x12 trous $L=49.661$
$f (MHz)$	5.27061	5.27062	5.27053	5.27058	5.27067

Tableau II.VI FREQUENCE POUR DIFFERENTES DISPOSITIONS DE TROUS AVEC POUR OBJECTIFS DE CONSERVER LA FREQUENCE D'UNE POUTRE SIMPLE. ($R=250nm$, $W=1.5\mu m$, $H=1.4\mu m$, $A_M=2\mu m$, $A_N=250nm$)

2.3.3 Conclusion

Afin de garantir une fréquence stable, il est nécessaire de prendre en compte l'influence des trous, i.e de leur taille mais surtout de la position de ces derniers

On pourra de cette façon anticiper la conception que ce soit pour faciliter la libération des structures, éviter le phénomène de « damping », ou bien tout simplement améliorer la dérive en température ou en fréquence par une correction ultérieure. On a ainsi montré qu'il était possible d'implémenter des résonateurs troués tout en maintenant la fréquence souhaitée. La correction dans les trous sera effectuée sur les différents résonateurs étudiés dans cette partie.

2.4 Résonateurs à ondes de volume

2.4.1 Introduction

Le développement de résonateurs MEMS dits à « ondes de volume » est apparu afin d'augmenter les performances intrinsèques de ces derniers, à savoir f , Q et R_m . Nous verrons dans cette partie comment un résonateur de type disque réagit à la présence de trous sur celui-ci.

Le développement d'un modèle analytique dans ce cas précis est quelque peu plus compliqué que dans le cas d'une poutre. En effet, le problème est à deux dimensions. Ce qui engendre le calcul de valeurs propres comportant des sommes d'intégrales. Nous reportons tout de même en Annexe 3 un modèle analytique pour le calcul de la fréquence d'une structure à ondes de volume de type disque. Nous avons également travaillé, à partir de ce modèle, sur le calcul de la fréquence d'une structure à ondes de volume de type disque comportant un trou. Ce modèle n'a cependant pas encore abouti.

Le modèle analytique sur les poutres trouées nous a permis de comprendre et d'appréhender l'ensemble des phénomènes et paramètres déterminant dans la fréquence de résonance, à savoir par exemple les zones de contraintes. Par analogie, nous avons mené une étude sur la variation de la fréquence de résonance des structures à ondes de volume grâce aux simulations par éléments finis (MEF). Les divers résultats mentionnés ci-dessus

dans le cas d'une poutre nous ont guidé dans le choix du nombre, de la taille et de la position des trous.

Nous verrons donc au travers de cette partie, l'étude d'un résonateur de type disque ($R = 19.88\mu\text{m}$, fréquence visée de 90MHz) sur lequel nous venons reporter un certain nombre de trous carrés de côté 250nm . Ce choix est dicté par l'étude précédente qui a montré que la masse devenait très vite prépondérante lorsque les trous devenaient trop grands ou en trop grand nombre.

2.4.2 Simulations sous CoventorWare

Comme mentionné ci-dessus, nous avons fixé le côté d'un trou à 250nm . Nous avons travaillé sur des réseaux de 2 ou 4 trous, dessinés en ligne ou en carré (Figure 2.26).

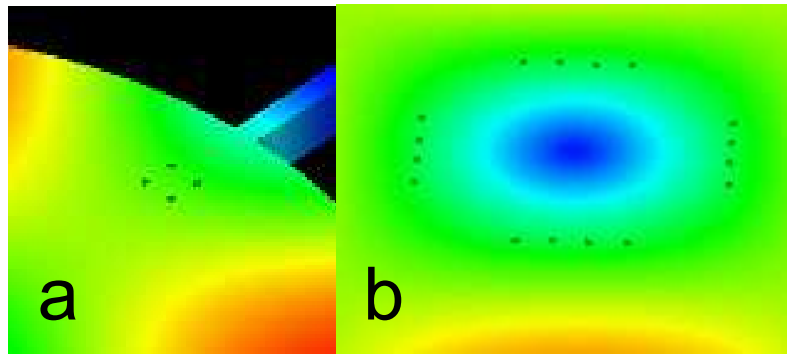


Figure 2.26 Réseau de trous carrés positionné près d'un ancrage (a), réseau de trous linéaires positionné au centre du résonateur disque (b), lors de simulations modales

Puis nous avons réparti ces réseaux suivant deux critères. Le premier consiste à partir du centre du disque et à se diriger vers l'extérieur. Le second est défini par les zones « Ventres » et « Ancrages », déjà définies dans le paragraphe (2.3.2.1.1), et représentées par la Figure 2.27.

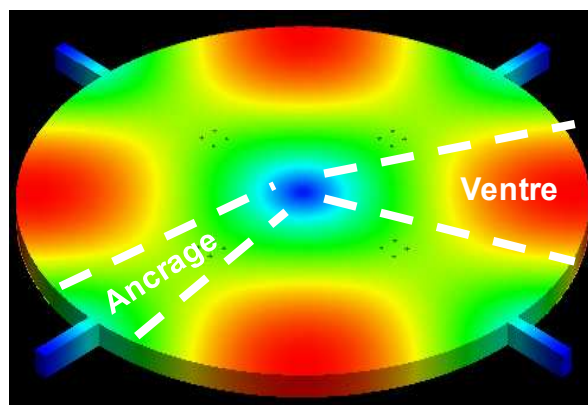


Figure 2.27 Définition des zones "Ventres" et "Ancrages" sur une simulation modale

Le choix de ces critères n'est pas anodin puisque nous savons que la fréquence de résonance est toujours proportionnelle au rapport raideur sur masse. De plus, nous montrons sur Figure 2.28 que les contraintes maximales se trouvent au centre. En outre, nous savons que les ancrages ont un rôle non négligeable dans la valeur de la fréquence ou du facteur de qualité Q [38].

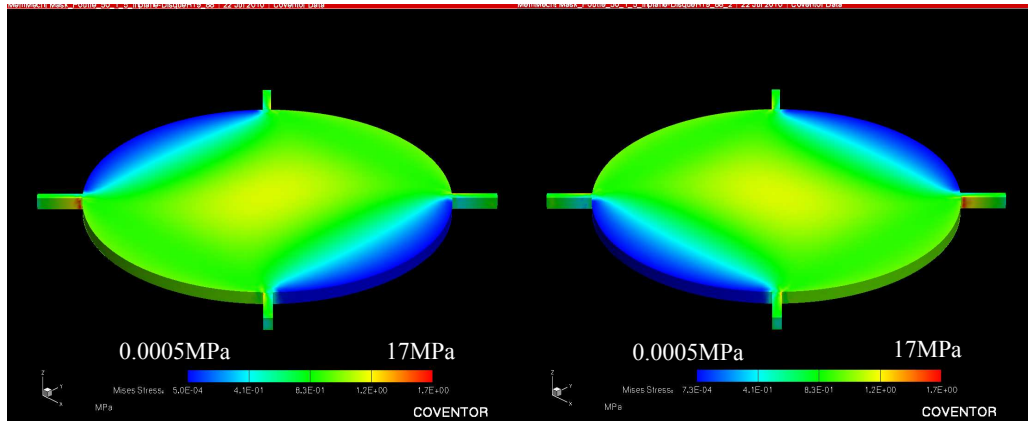


Figure 2.28 Contraintes d'un disque soumis à une excitation symétrique alternativement sur les côtés opposés

La Figure 2.29 montre que nous avons vu juste avec la possibilité d'augmenter et de diminuer la fréquence de résonance suivant la position des trous présents sur la structure.

La première chose à remarquer est que les trous, quelque soit leur position « ventres » ou « ancrages » ont beaucoup plus d'influence lorsqu'ils sont situés au centre du disque.

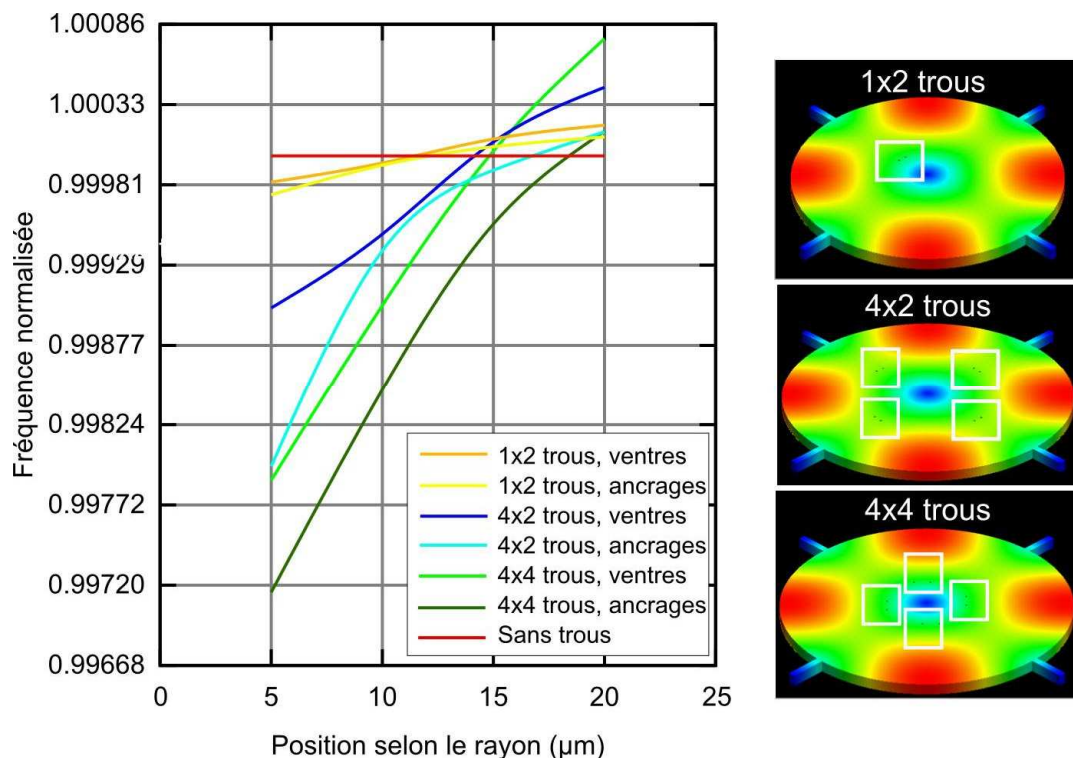


Figure 2.29 Variation de la fréquence en fonction de la position des trous pour différentes architectures ($f_i=95.71\text{MHz}$, $R=19,88\mu\text{m}$)

Regardons à présent chacune des zones séparément. La Figure 2.30 représentant la variation de la fréquence en fonction de la position des trous suivant le rayon de la zone « ventre » (V), montre que pour des trous près du centre, la fréquence diminue et augmente lorsque ces derniers sont positionnés vers l'extérieur, d'autant plus que le nombre de trous augmente.

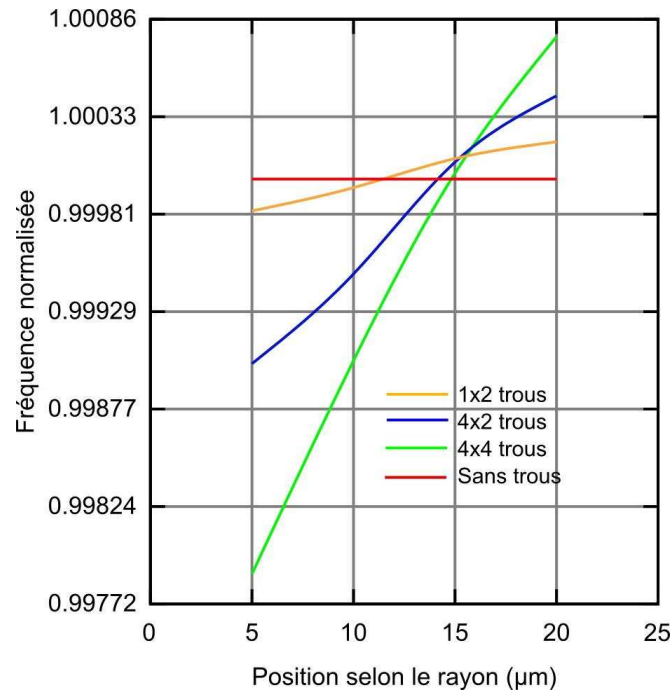


Figure 2.30 Variation de la fréquence en fonction de la position suivant le rayon en position "Ventre" ($f_i=95.71\text{MHz}$, $R=19,88\mu\text{m}$)

A présent, tournons nous vers le cas de trous dans la zone appelée « ancrages » (A). Nous constatons également une augmentation de la fréquence lorsque les trous s'éloignent vers l'extérieur du disque. Cependant une différence forte apparaît par rapport au cas précédent. Lorsque les trous sont très proches de la circonférence du disque, le nombre de trous n'accroît pas l'augmentation de la fréquence. Nous voyons apparaître un palier pour cette dernière (Figure 2.31). Ceci peut s'expliquer par le fait que les ondes se propagent peu, près des ancrages et donc que ces ondes ne sont quasiment pas modifiées par la présence de trous. De ce fait la fréquence de résonance ne change pas ou très peu avec l'augmentation du nombre de trous.

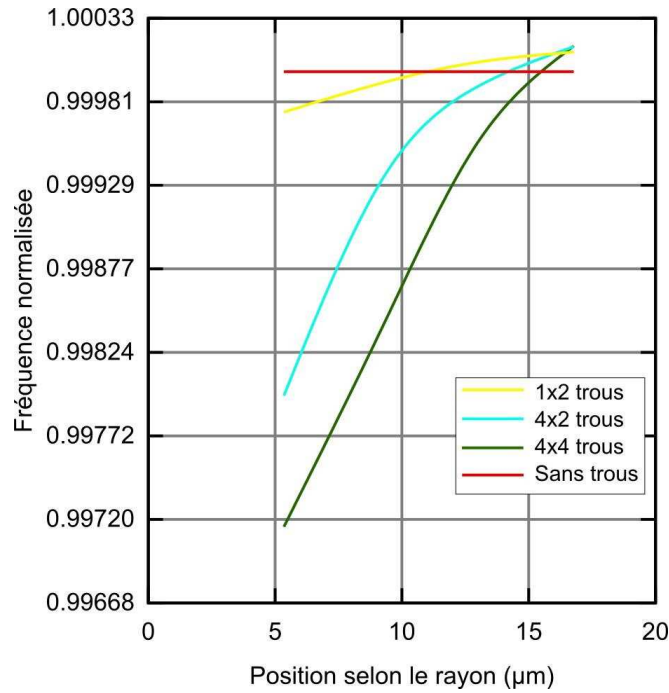


Figure 2.31 Variation de la fréquence en fonction de la position suivant le rayon en position "Ancrage" ($f_i=95.71\text{MHz}$, $R=19,88\mu\text{m}$)

2.4.3 Conclusion

Ces diverses simulations nous ont permis de comprendre l'évolution de la fréquence en fonction de la position de trous présents sur des structures dites à ondes de volume. Il est nécessaire de prendre en compte cette évolution pour concevoir du mieux possible les disques ou plaques avec des trous, qui seront remplis par la suite pour corriger la fréquence ou bien simplement utilisés pour la libération de ces structures massives. En parallèle de cette étude par éléments finis, nous avons travaillé sur le développement d'un modèle analytique, au moins dans le cas le plus simple (un seul trou), qui caractérise les variations de la fréquence de résonance des structures à ondes de volume, notamment suite aux travaux réalisés par Bhat et Al [93] (Annexe 3).

Ce travail de simulation sur des structures à ondes de volume nous permet également de cibler précisément la correction à apporter sur ce type de structure. En effet, nous avons mis en évidence la possibilité d'augmenter ou de diminuer la fréquence de résonance suivant la position des trous. Ceci confirme donc la possibilité de venir réduire la Gaussienne caractéristique de la dispersion de la fréquence dispositif à dispositif au sein d'un substrat.

2.5 Correction

La correction implique un dépôt de matériau dans les trous ou bien localisé sur le résonateur par une étape de photolithographie. Il paraît évident que suivant la méthode de dépôt utilisée, tant les variations maximales possibles que la précision ne seront pas les mêmes. Avant de rentrer dans les formules mathématiques de la correction, nous reportons dans le tableau suivant quelques techniques de dépôt avec leurs caractéristiques. Suivant la méthode de correction utilisée, il faudra trouver un compromis entre le taux de croissance et l'épaisseur minimale. Dans le cas d'une correction par les trous, les deux seules options sont l'épitaxie et l'oxydation, qui présentent toutes les deux des épaisseurs minimales supérieures au nm. Pour la correction localisée, le choix de la méthode sera déterminé par le type de matériau de correction choisi.

Techniques	Matériau	Epaisseur minimale	Taux de croissance
<i>Epitaxie</i>	Si	4nm	
<i>ALD</i>	Dielectrics High k	« 1Å »	0.1-2Å/cycle
<i>Oxydation</i>	SiO ₂	1.5nm	
<i>Thermal evaporation</i>	Metal	10nm	1-20Å/s
<i>E-beam evaporation</i>	Metal & dielectrics	10nm-100nm	1-100Å/s
<i>CVD[94]</i>	Diamond	8.2nm	80-85nm/h
<i>LPCVD</i>	Dielectrics	1nm-10nm	1-10Å/s
<i>PECVD</i>	Dielectrics	5-10nm	10-100Å/s
<i>ECR PECVD</i>	Si ₃ N ₄	1.5nm	
<i>Sputtering</i>	Metal & dielectrics	10nm	10-100Å/s

Tableau II.VII LISTE DES DIFFERENTES METHODES DE DEPOT UTILISEES
CLASSIQUEMENT DANS LA MICROELECTRONIQUE

2.5.1 Poutre encastree-encastree

2.5.1.1 Modèle analytique

2.5.1.1.1 Remplissage des trous

Le modèle analytique de la correction uniforme par remplissage des trous se déduit du modèle analytique réalisé dans le cas d'une structure trouée. En jouant simplement sur les valeurs du rayon du trou ainsi que de la largeur, de la longueur et de l'épaisseur du résonateur, nous pouvons modéliser la correction par remplissage des trous (Figure 1.38).

2.5.1.1.2 Correction localisée

La correction localisée nécessite d'implémenter un nouveau modèle multicouche. Nous considérons par la suite que la section de la poutre est constante sur toute sa longueur.

Dans le cas d'une poutre bi-encastée de longueur L composée de couches superposées de même longueur et largeur, la raideur équivalente s'exprime par :

$$k_e = \frac{384 EI_y}{L^3} \quad \text{Eq. 2.42}$$

où EI_y représente la rigidité effective. Cette rigidité se calcule [95] pour une poutre comportant m couches au moyen de l'Eq. 2.43 :

$$EI_y = \sum_{j=1}^m \{E_j [I_{yj} + z_j (z_j - z_n) A_j]\} \quad \text{Eq. 2.43}$$

La Figure 2.32 illustre les différents termes de cette équation : z_j est la distance de l'axe y au centre de la couche j et z_n représente la distance à l'axe neutre (caractérisé par une courbure et une contrainte nulle). I_{yj} est le moment quadratique d'inertie de la couche j et E_j est le module de Young longitudinal de la couche j . Le calcul de l'axe neutre de la poutre est reporté dans l'Eq. 2.44 :

$$z_n = \frac{\sum_{j=1}^m z_j E_j A_j}{\sum_{j=1}^m E_j A_j} \quad \text{Eq. 2.44}$$

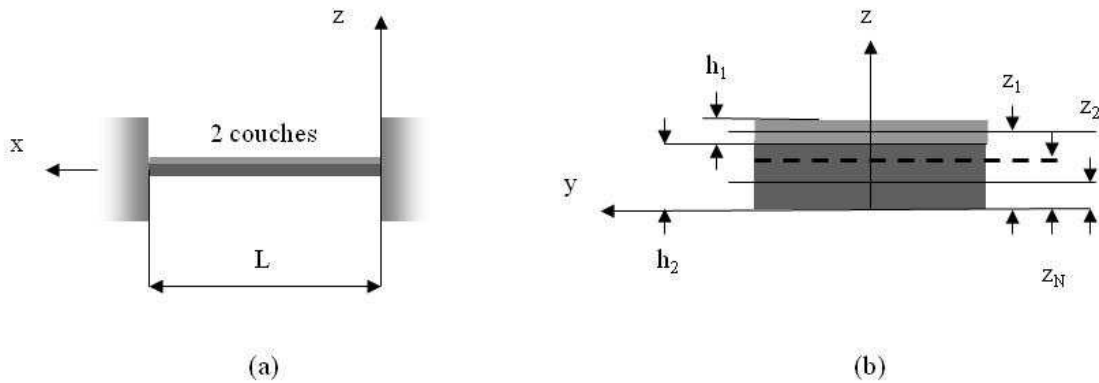


Figure 2.32 Poutre multicouche : (a) vue de côté, (b) zoom vue en coupe

alors que la masse effective s'exprime par :

$$m_e = \sum_{j=1}^m \left[\rho_j w W h_j \int_0^L w_b(x)^2 dx \right] = \frac{128}{315} m \quad \text{Eq. 2.45}$$

où m est la masse totale de la poutre et w_b est la déformée de la poutre donnée par l'Eq. 2.16, que l'on considère identique dans notre cas du fait d'une couche de correction fine par rapport à la structure du résonateur (rapport 100). Nous considérerons cela conforme pour l'ensemble des calculs menés par la suite, quelque soit le profil et l'empilement des couches, i.e :

$$u_{z,i} = w_b(x)u_z \quad \text{Eq. 2.46}$$

La pulsation de résonance devient alors :

$$\omega_e = 21.737 \sqrt{\frac{EI_y}{mL^3}} \quad \text{Eq. 2.47}$$

Les différentes couches superposées peuvent également être de longueurs différentes tout en étant disposées de manière symétrique par rapport au centre de la poutre (Figure 2.33). Il est alors possible de calculer simplement la pulsation de résonance qui s'écrit :

$$\omega_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^{m-i+1} \left(E_j [I_{yj} + (z_j + z_{Ni})^2 A_j] \int_{li} \left(\frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} \right)^2 \right) \right\}}{W \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^{m-i+1} (\rho_j h_j) \int_{li} w_b(x)^2 dx \right]} \quad \text{Eq. 2.48}$$

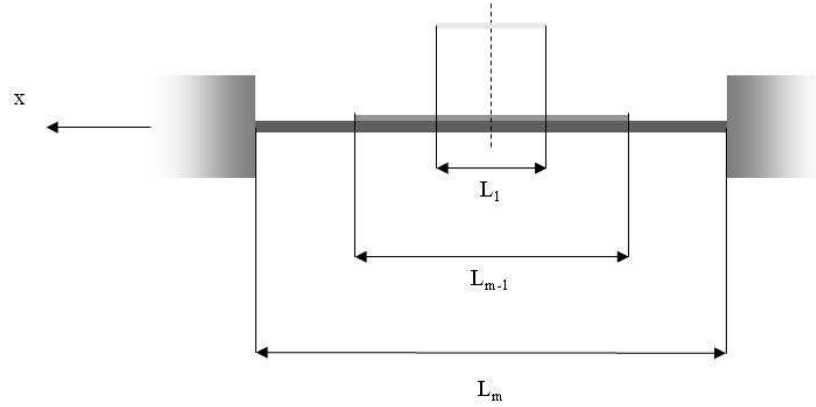


Figure 2.33 Vue de côté d'une poutre multicouche avec des longueurs de couche différentes

Dans le cas où l'on dispose la correction de manière localisée mais de façon non continue sur le résonateur, nous nous retrouvons avec une situation présentée par la Figure 2.34.

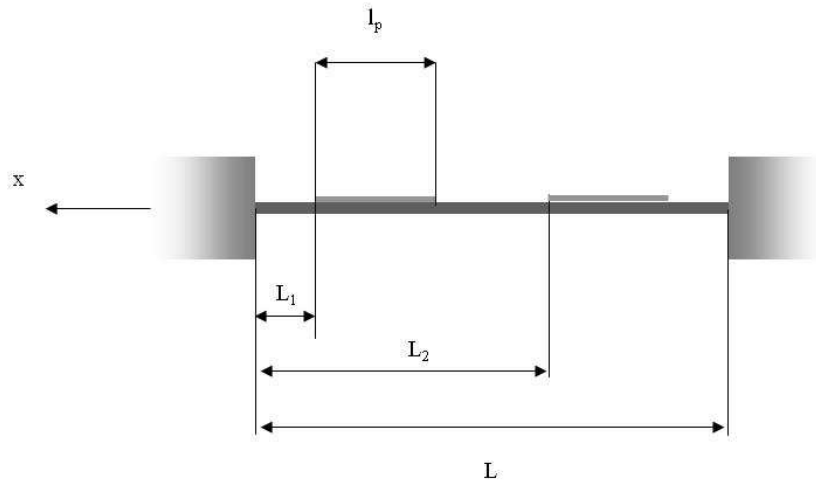


Figure 2.34 Correction à deux patches (vue de côté)

Les calculs se complexifient alors quelque peu puisque la poutre est d'une part multicouche et d'autre part multi profil. Dans le cas d'un résonateur multi profil, la pulsation de résonance s'écrit :

$$\omega_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{l_i} E_i I_{y,i}(x) \left[\frac{d^2 u_{z,i}(x)}{dx^2} \right]^2}{\sum_{i=1}^n \int_{l_i} \rho_i A_i(x) u_{z,i}^2(x) dx} \quad \text{Eq. 2.49}$$

Le couplage des Eq. 2.48 & Eq. 2.49 détaillées ci-dessus pour la poutre multicouche symétrique, nous permet d'exprimer la pulsation de résonance dans ce cas complexe, qui est égale à :

$$\omega_e^2 = \frac{k_{p,e}}{m_{p,e}} \quad \text{Eq. 2.50}$$

avec :

$$k_{p,e} = \int_0^{L_1} E_s I_y \frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} + \int_{L_1+L_p}^{L_2} E_s I_y \frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} + \int_{L_2+L_p}^L E_s I_y \frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} + \int_{L_1}^{L_1+L_p} (EI)_{eq} \frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} + \int_{L_2}^{L_2+L_p} (EI)_{eq} \frac{d^2 w_b(x)}{dx^2} \quad \text{Eq. 2.51}$$

et

$$m_{p,e} = \int_0^{L_1} \rho_s W h_s w_b(x)^2 + \int_{L_1+L_p}^{L_2} \rho_s W h_s w_b(x)^2 + \int_{L_2+L_p}^L \rho_s W h_s w_b(x)^2 + \int_{L_1}^{L_1+L_p} W \cdot (\rho_s h_s + \rho_m h_m) w_b(x)^2 + \int_{L_2}^{L_2+L_p} W \cdot (\rho_s h_s + \rho_m h_m) w_b(x)^2 \quad \text{Eq. 2.52}$$

où

$$(EI)_{eq} = E_s \cdot (I_s + z_{j,s} \cdot (z_{j,s} - z_n) W h_s) + E_m \cdot (I_m + z_{j,m} \cdot (z_{j,m} - z_n) W h_m) \quad \text{Eq. 2.53}$$

$$z_n = \frac{z_{j,m} \cdot E_m \cdot W \cdot h_m + z_{j,s} \cdot E_s \cdot W \cdot h_s}{E_m \cdot W \cdot h_m + E_s \cdot W \cdot h_s} \quad \text{Eq. 2.54}$$

$E_m, E_s, \rho_m, \rho_s, h_m, h_s, z_{j,s}, z_{j,m}$, représentent les modules de Young, les masses volumiques, les épaisseurs ainsi que les distances respectives à l'axe des ordonnées (y) du résonateur et de la couche correctrice.

2.5.1.2 Mode « hors plan »

2.5.1.2.1 Correction par remplissage

La correction uniforme par ajout de matière sur toute la surface du résonateur [47, 48, 49, 50] a déjà été étudiée et réalisée mais les résultats obtenus sont loin de ceux aujourd'hui nécessaires pour industrialiser les résonateurs MEMS avec notamment des épaisseurs de matériaux très supérieures à celles tolérées pour une compatibilité CMOS.

L'outil développé précédemment pour modéliser la présence de trous peut être réutilisé pour simuler la correction par dépôt sur toute la surface disponible du résonateur, ainsi que dans les trous. En effet en ajoutant une variable, qu'on appellera « e », il est possible de modifier le rayon du trou mais également la longueur, la largeur ainsi que l'épaisseur du résonateur pour modéliser un dépôt par épitaxie (Figure 2.35).

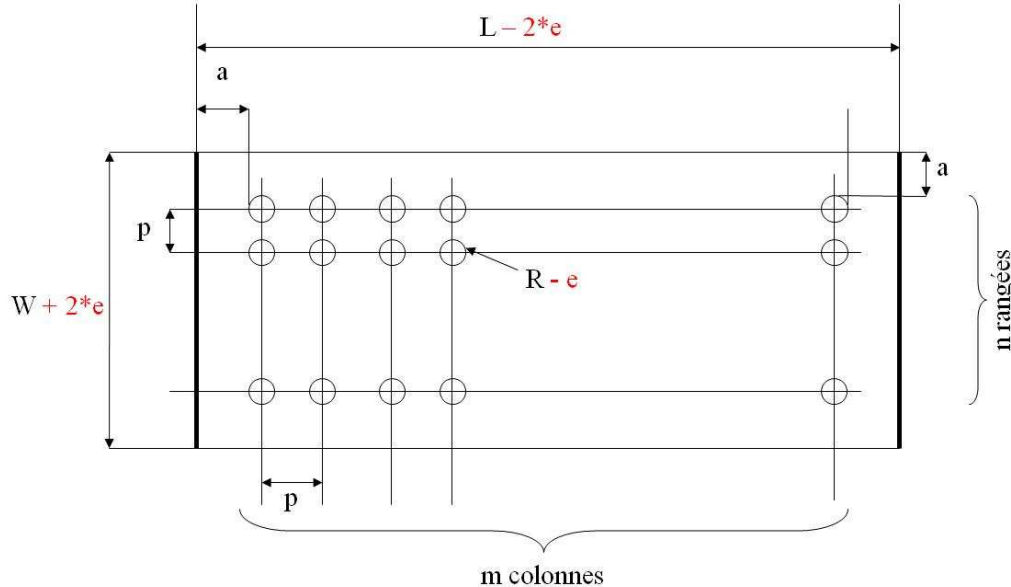


Figure 2.35 Schéma d'une poutre pour correction par épitaxie

Le Tableau II.VIII rapporte la correction possible dans le cas d'une vibration hors plan pour quelques dispositions des trous (U : les trous sont répartis uniformément sur le résonateur, A : les trous sont répartis seulement dans la zone appelée « Ancrage »). Nous considérerons dans ce cas une modification des variables W , L , h et R .

Epaisseur de la correction (nm)	Sans trou ($f=4.9192\text{MHz}$)	U ($f=4.9192\text{MHz}$)	A ($f=4.9192\text{MHz}$)	1 trou en A ($f=4.8622\text{MHz}$)
1	0.07	0.07	0.09	0.07
10	0.71	0.72	0.80	0.74
20	1.43	1.44	1.59	1.47
50	3.57	3.60	3.96	3.68

Tableau II.VIII CORRECTION EN SILICIUM (%) PAR RAPPORT A LA FREQUENCE INITIALE POUR DIFFERENTES STRUCTURES, $R=500\text{nm}$, $W=20\mu\text{m}$, $H=1.4\mu\text{m}$, $n=6$, $m=8$

Le modèle montre donc la possibilité d'accroître la correction en diminuant l'épaisseur nécessaire de matériau ajouté. On passe de 3.57% pour 50nm de silicium ajouté sur une poutre simple, à 3.96% pour une poutre comportant 48 trous de 500nm localisés près des ancrages. On améliore donc la capacité à corriger la fréquence de 10%. Ces résultats ne remplissent cependant pas les exigences du cahier des charges, à savoir une résolution de quelques ppm, puisque l'ajout de 1nm de Silicium entraîne déjà une modification de 0.09% (= 900ppm) de la fréquence toujours en position « A ».

D'autre part, l'étude de la fréquence fonction de la présence de trous et de leur position a montré qu'on était capable d'augmenter ou de diminuer la fréquence. L'épitaxie induit une diminution de la longueur et une augmentation de la largeur et de l'épaisseur du résonateur, ce qui induit une augmentation de la fréquence.

Cependant, un choix judicieux de la position des trous permet d'inverser ce phénomène dans un premier temps, et donc suivant l'épaisseur de silicium épitaxié de diminuer la fréquence (paragraphe 2.3 Modes de flexion). Puis à partir d'une certaine épaisseur, la fréquence augmente. Cependant, s'il l'on veut répondre à notre cahier des charges de départ, à savoir une correction collective à l'échelle du wafer, nous devons réaliser un dépôt d'épaisseur différente suivant la position du résonateur sur le wafer. Nous atteignons ici les limites de cette méthode de correction.

2.5.1.2.2 Correction localisée

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la correction uniforme par remplissage de trous n'est pas suffisante. On a donc étudié les possibilités offertes par une correction localisée. Les positions étudiées sont les mêmes que dans les parties précédentes : Ancrage (A), Ventre (V), Intermédiaire (I) et Uniforme (U).

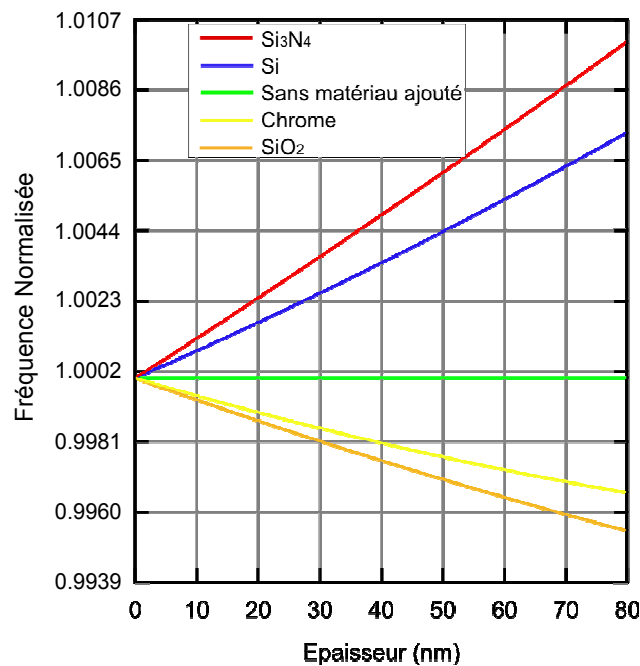


Figure 2.36 Variation de la fréquence d'une poutre pourvu d'un patch en position "V" en fonction de l'épaisseur et de la nature de ce dernier ($f_i = 4.9192\text{MHz}$)

Lorsque l'on place un patch ($10 \times 20 \mu\text{m}^2$) dans le centre du résonateur (i.e. ventre), la fréquence augmente avec l'épaisseur. En effet, on rigidifie la structure, d'où une augmentation de la fréquence. En moyenne, nous reportons une variation de 1% de la fréquence initiale pour 100nm de matériau ajouté. La Figure 2.36 montre la possibilité de faire varier la fréquence dans les deux sens avec des matériaux différents qui s'explique

par les valeurs du module de Young et de la masse volumique de chacun des matériaux utilisés (Tableau II.IX).

	Module de Young (GPa)	Masse volumique (kg.m ⁻³)
Aluminium	69	2700
Chrome	289	7150
Si ₃ N ₄	230	3270
Si	169	2330
Platine	168	21450
Or	78	19300
SiO ₂	70	2200

Tableau II.IX MODULES DE YOUNG ET MASSES VOLUMIQUES DE QUELQUES MATERIAUX

Dans le cas de l'ancrage (Figure 2.37), la fréquence augmente quelque soit le matériau utilisé avec des variations plus importantes (2% pour 50nm ajouté en moyenne). On joue alors principalement sur la rigidité de la structure. Dans ce cas précis, nous avons disposé deux patches (5*20µm²) aux extrémités de la poutre.

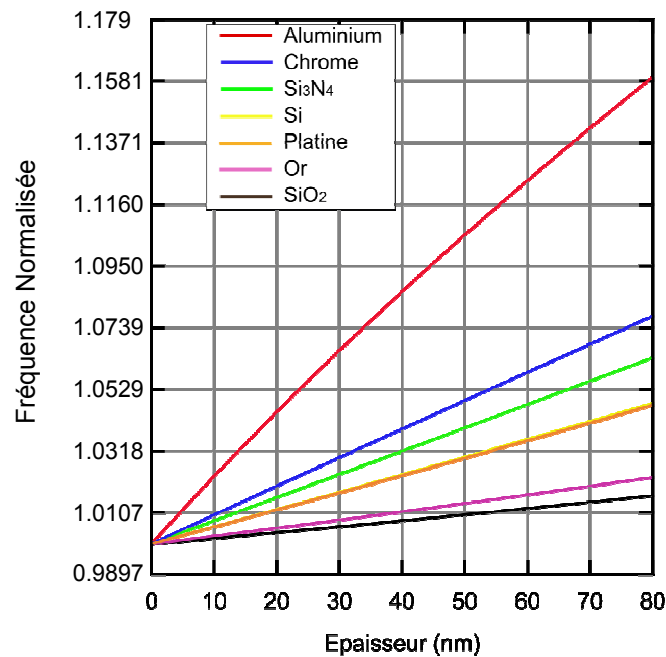


Figure 2.37 Variation de la fréquence d'une poutre pourvue de deux patches en position "A" en fonction de l'épaisseur de ce dernier ($f_i = 4.9192\text{MHz}$)

La zone intermédiaire présente la particularité de pouvoir faire diminuer la fréquence. Encore une fois, les contraintes dans une poutre expliquent cette localisation. On joue simplement sur la masse et non pas la raideur en ajoutant un matériau à cet endroit. Pour garantir une sensibilité optimale, il faut trouver la position idéale pour laquelle la fréquence diminue le plus fortement (Figure 2.38). On définit donc une largeur de patch raisonnable qui ne dépasse pas la zone intermédiaire (ici 5µm). Puis, on cherche les positions l_1 et l_2 pour lesquelles on atteint la fréquence minimale représentée par la « cuvette » sur la Figure 2.38.

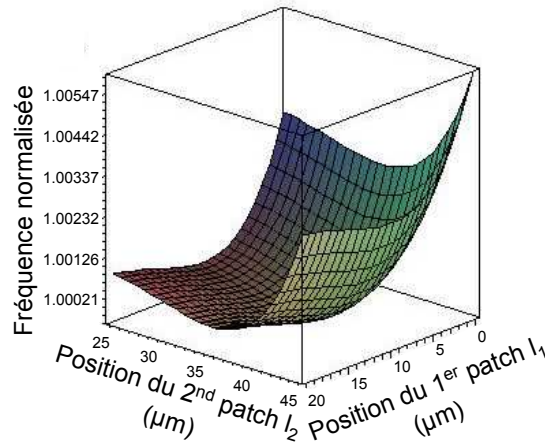


Figure 2.38 Variation de la fréquence d'une poutre pourvue de deux patches (Silicium : $5 \times 20 \mu\text{m}^2$) en position "I" en fonction de la position de ces derniers ($f_i = 4.9192\text{MHz}$)

Une fois les positions des patches trouvées, nous faisons varier la largeur du patch et la nature de celui-ci à épaisseur fixée. On voit ainsi que l'on peut en cette position diminuer ou augmenter la fréquence de résonance (Figure 2.39). On augmente à partir d'une certaine largeur car on débord de la zone intermédiaire et les contraintes ne sont plus les mêmes. Ces variations sont d'autant plus importantes selon les matériaux envisagés.

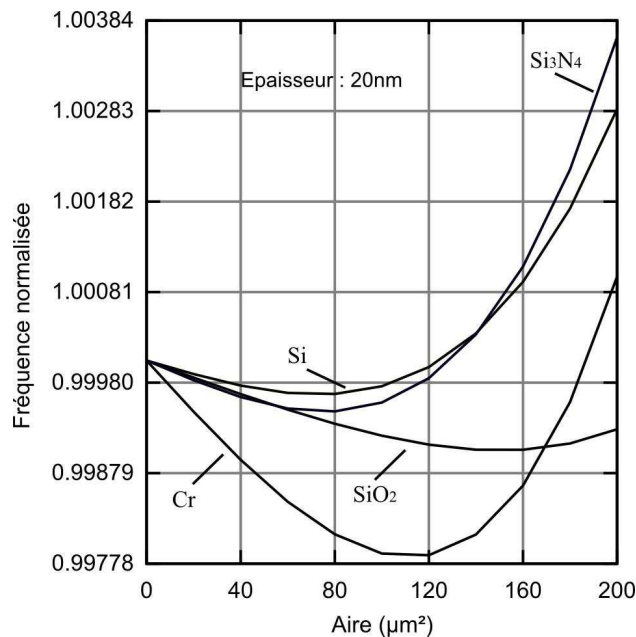


Figure 2.39 Evolution relative de la fréquence de résonance ($f_i = 4.9192\text{MHz}$) pour une correction en "I" en fonction de la largeur des patches pour différents matériaux

On a ainsi mis en évidence les possibilités de correction pour chacune des dispositions. Il s'avère que la position « intermédiaire » présente l'avantage de pouvoir faire augmenter ou diminuer la fréquence de résonance fonction de la largeur du patch ajouté. En réalité il ne s'agit pas seulement de la position « intermédiaire ». Plus le patch sera grand, plus le patch dépassera de cette fameuse zone, et la fréquence augmentera de nouveau. Le fait de positionner le patch à l'intersection de 2 zones permet de limiter l'influence de la zone

prépondérante, à savoir « Ancrage » ou « Ventre » et donc d'augmenter la résolution finale. Le Tableau II.X ci-après, rapporte les performances potentielles pour la position « intermédiaire » pour un dépôt en Silicium. Nous reportons dans la colonne « Fréquence » la valeur de la fréquence pour un écart compris entre -1000 et +1000ppm. Nous considérons un pas lithographique de 50nm. Puis pour chacune des fréquences erronées, nous venons déterminer, par le modèle analytique, la longueur du patch (l_p , μm) à ajouter pour ajuster cette fréquence à celle visée. Par exemple, la cadre rouge montre qu'avec un patch de $0.65\mu\text{m}$, la fréquence passe de 4919733Hz à 4919261Hz. L'écart par rapport à la fréquence visée n'est plus que 4ppm. On montre ainsi qu'avec une résolution lithographique idéale de 50nm, la Gaussienne peut être réduite à $\pm 5\text{ppm}$ (cadre vert).

Les dernières colonnes rapportent les performances des mêmes patchs mais en considérant cette fois-ci une erreur de 1% sur la taille du patch ajouté, qui est classiquement l'erreur sur la grille d'un transistor. Nous choisissons de considérer le cas où le patch est agrandi de 1% par rapport au l_p initial. L'écart est alors inférieur à 42ppm (cadre orange).

Cette étude montre que l'on est capable de réduire la Gaussienne de la Figure 1.11, par exemple pour une épaisseur de 30nm de silicium avec différents patchs, pour la première fois en une seule étape et avec un écart final maximal de seulement 42ppm dans le pire des cas. Cette valeur peut-encore être améliorée en jouant sur la largeur mais également la position du centre du patch. En effet, nous avons considéré le centre du patch comme fixe. C'est-à-dire que lorsque le patch devient plus grand, on dépasse identiquement du côté « A » et « V ». Or, nous avons montré que les variations en A étaient plus importantes qu'en « V ». En décalant le centre du patch et en favorisant du coup le dépassement du patch dans la zone « V », il est possible de réduire l'écart final pour les patchs de grandes tailles, qui présentent la résolution la plus médiocre.

Position	Ecart $\pm 1000\text{ppm}$		Résolution lithographique 50nm			Résolution 50nm (erreur 1% sur lp)	
	Fréquence (Hz)	Ecart (ppm)	Longueur patch, l_p	Fréquence finale (Hz)	Ecart final (ppm)	Fréquence finale (Hz)	Ecart final (ppm)
Intermédiaire	4914322	-1000	14.85	4919236	-1	4919446	42
	4914814	-900	14.55	4919217	-5	4919403	33
	4915306	-800	14.25	4919229	-2	4919391	30
	4915798	-700	13.75	4919240	0	4919359	24
	4916289	-600	13	4919227	-3	4919304	13
	4916781	-500	12.3	4919221	-4	4919265	5
	4917273	-400	11.9	4919229	-2	4919259	4
	49197765	-300	10.9	4919250	2	4919248	1
	4918257	-200	10.3	4919243	0	4919227	-3
	4918749	-100	10	4919248	1	4919225	-3
	4919241	0	-	-	-	-	-
	4919733	100	0.65	4919261	4	4919255	3
	4920225	200	1.2	4919234	-1	4919221	-4
	4920717	300	1.65	4919243	0	4919225	-3
	4921209	400	2.1	4919220	-4	4919196	-9
	4921701	500	2.5	4919242	0	4919213	-6
	4922193	600	2.9	4919266	5	4919233	-2
	4922684	700	3.35	4919245	1	4919207	-7
	4923176	800	3.8	4919257	3	4919213	-6
	4923668	900	4.35	4919235	-1	4919198	-9
	4924160	1000	5.05	4919234	-1	4919207	-7

 Tableau II.X PERFORMANCE DE LA CORRECTION LOCALISEE (*SILICIUM*, $f_i = 4,9192\text{MHz}$)

Le choix du matériau de correction est très important. Ce dernier peut permettre d'augmenter les variations tout en maintenant un très bon niveau de résolution. L'oxyde paraît très intéressant avec de grandes variations relativement lentes (Figure 2.39). D'autre part, l'oxyde présente l'avantage de pouvoir compenser les dérives en température (Figure 1.20). Il est également possible de coupler différents patchs pour accroître d'une part la plage de fréquence à corriger et d'autre part améliorer la résolution de la méthode de correction. Ceci a un coût en termes de temps et de prix des étapes de correction.

La confrontation du modèle aux simulations par éléments finis sous CoventorWare (Figure 2.40) montre un bon accord entre les deux études. Les tendances entrevues par le modèle se retrouvent au travers des simulations avec des écarts inférieurs à 0.87%, ce qui est, à notre avis, très satisfaisant.

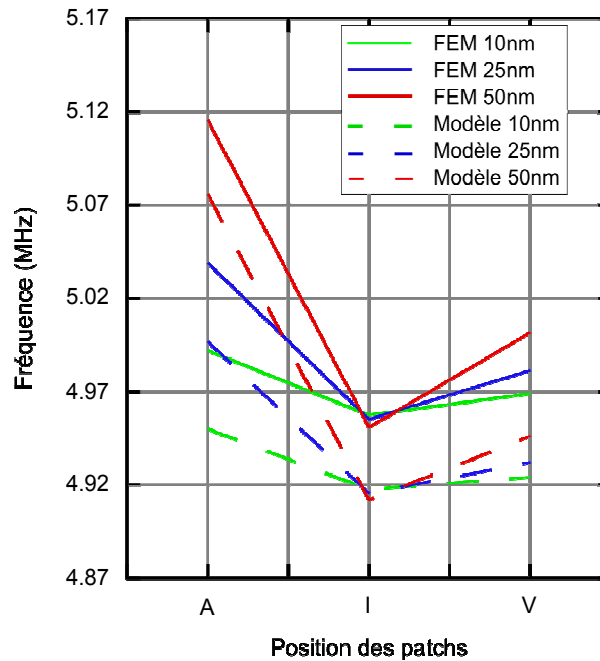


Figure 2.40 Comparaison des simulations et du modèle dans le cadre de la correction localisée (A, I, V : patches $2 \times 9 \times 20 \mu\text{m}^2$) pour plusieurs épaisseurs

2.5.1.3 Mode « dans le plan »

Nous avons étudié le cas d'une résonance « hors plan » pour mettre en relief l'ensemble des définitions et des phénomènes. Cependant, notre cahier des charges définit un processus de fabrication le plus simple possible. Par conséquent, le mode de résonance correspondant est une vibration « dans le plan ».

Encore une fois, une correction uniforme sur l'ensemble de la structure ne permet pas d'acquiescer une stabilité suffisante pour développer des bases de temps.

Pour cette étude, nous garderons les dimensions de la poutre du paragraphe 2.3.2.2. Les modèles développés précédemment sont réutilisables dans ce cas, en inversant les variables h et W pour obtenir le mode souhaité.

2.5.1.3.1 Correction par épitaxie

Nous reportons dans le Tableau II.XI la correction pour différents nombres de trous répartis uniformément sur le résonateur. On met ainsi en évidence la possibilité d'augmenter la capacité à corriger la fréquence en remplissant les trous par du Silicium. Une amélioration de 2.12% est obtenue avec 12 trous ($R=250\text{nm}$) répartis sur la surface du résonateur. La résolution est encore une fois insuffisante avec une variation minimale d'environ 1400ppm.

Correction (nm)	Simple L = 50μm $f_i = 5.27061\text{MHz}$	2x6 trous L = 49.493μm $f_i = 5.27062\text{MHz}$	2x8 trous L = 49.964μm $f_i = 5.27053\text{MHz}$	2x10 trous L = 49.616μm $f_i = 5.27058\text{MHz}$	2x12 trous L = 49.661μm $f_i = 5.27067\text{MHz}$
1	0.14	0.14	0.14	0.14	0.13
10	1.41	1.44	1.40	1.38	1.35
20	2.83	2.88	2.83	2.78	2.72
50	7.09	7.28	7.16	7.04	6.92

Tableau II.XI CORRECTION (%) POUR DIFFÉRENTES STRUCTURES ($R=250\text{nm}$, $W=1,5\mu\text{m}$, $H=1.4\mu\text{m}$, $A_M=2\mu\text{m}$, $A_N=250\text{nm}$)

Cependant, nous avons vu que l'on pouvait augmenter la fréquence en positionnant des trous en « V » (2.3.2.2). Donc lors d'une épitaxie, une fois remplis, ces trous vont faire diminuer la fréquence. Dans le même temps, une épitaxie modifie la longueur, la largeur et l'épaisseur du résonateur ce qui induit une augmentation de la fréquence. Par un choix judicieux du nombre de trous, il est possible de jouer sur les deux variations, et donc d'augmenter ou de diminuer la fréquence. Le Tableau II.XII rapporte que pour une poutre ($L=50\mu\text{m}$, $W=20\mu\text{m}$, $h=1.4\mu\text{m}$) comportant 2x26 trous ($r=250\text{nm}$), une épitaxie de 10nm induit une diminution de la fréquence de 595ppm et que pour 50nm épitaxié, la fréquence augmente de 4000ppm. Ce qui correspond à une résolution moyenne de 100ppm.nm^{-1} . Cependant la variation n'est pas linéaire et il faudrait connaître dès le départ le décalage en fréquence présent sur un substrat pour placer correctement et en bon nombre les trous afin de venir corriger la fréquence par une épitaxie d'une certaine épaisseur.

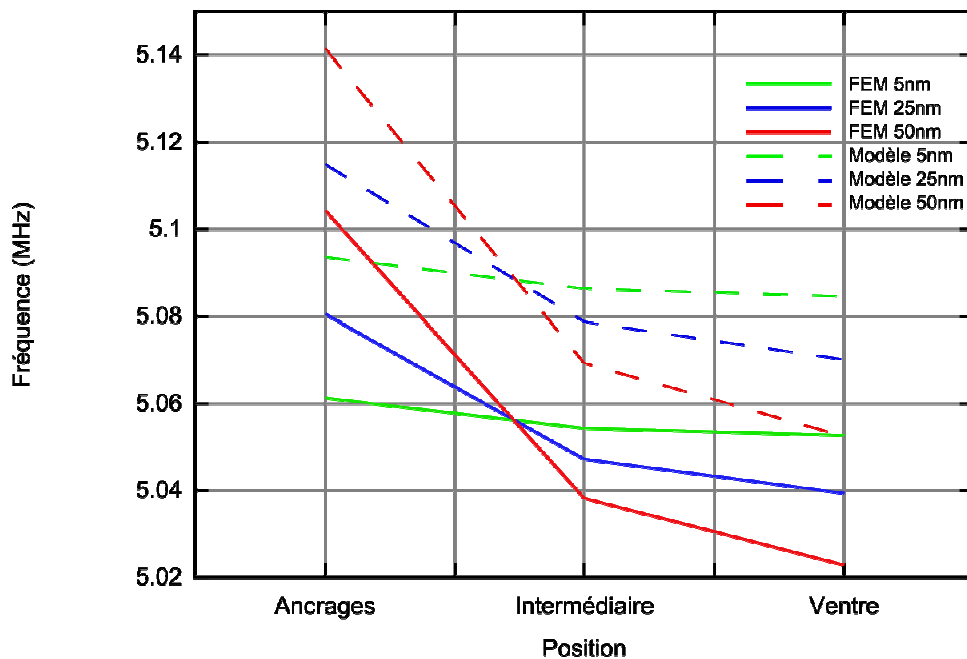
Correction (nm)	2x25 trous		2x26 trous		2x27 trous	
	$f(\text{MHz})$	Ecart (ppm)	$f(\text{MHz})$	Ecart (ppm)	$f(\text{MHz})$	Ecart (ppm)
0	6.333677	0	6.407191	0	6.488023	0
1	6.329272	-695	6.404712	-386	6.487869	-23
10	6.333450	-35	6.403375	-595	6.479152	-1367
20	6.340947	1147	6.401603	-872	6.468975	-2935
50	6.388655	8680	6.433634	4127	6.480971	-1086

Tableau II.XII CORRECTION PAR EPITAXIE SUR UNE POUTRE COMPORTANT DES TROUS EN « M » ($L = 50\mu\text{m}$, $W = 1.5\mu\text{m}$, $R = 250\text{nm}$, $A_M = 16\mu\text{m}$, $A_N = 0.250\mu\text{m}$)

2.5.1.3.2 Correction localisée

Les solutions développées dans le paragraphe 2.5.1.2.2 sont également appropriées dans le cas de résonateurs en mode de flexion mais cette fois-ci dans le plan. Les résultats obtenus sont meilleurs en termes de compensation maximale atteinte. La sensibilité est de manière générale moins bonne que dans le cas de résonateur vibrant hors plan (Tableau II.XIII). Ceci est dû aux dimensions du résonateur. En effet, dans le cas d'un résonateur vibrant hors plan, une variation de centaines de nm sur une dizaine de micromètre n'est pas significatif alors que dans ce cas précis, nous varions toujours d'une centaine de nanomètres mais sur un micron. Le rapport des dimensions est totalement différent.

Localisation de la correction	Dimension des patchs associés	Epaisseur (nm)	Variation (ppm)	Résolution avec erreur (4% sur dimension, ppm)
Ventre	$2x(0.5x1.5\mu m^2)$	5	36	3
		20	150	12
	$2x(1x1.5\mu m^2)$	5	146	11
		20	596	48
	$2x(2x1.5\mu m^2)$	5	289	23
		20	1176	94
Intermédiaire	$2x(1x1.5\mu m^2)$	5	-37	-3
		20	-148	-12
	$2x(2x1.5\mu m^2)$	5	-72	-5
		20	-289	-23
	$2x(4x1.5\mu m^2)$	5	-128	-9
		20	-512	-39
	$2x(10x1.5\mu m^2)$	5	246	106
		20	1005	431
	$2x(15x1.5\mu m^2)$	5	661	153
		20	2676	613

 Tableau II.XIII PERFORMANCE DE LA CORRECTION LOCALISEE (*SILICIUM*, $f_i = 5.0883\text{MHz}$)

 Figure 2.41 Comparaison du modèle et des simulations pour une correction localisée en différents lieux pour plusieurs épaisseurs de matériau ajouté ($L=20\mu m$, $W=1.5\mu m$, $\text{Longueur patch} = 2x9\mu m$)

Nous trouvons d'abord les mêmes tendances pour les simulations par éléments finis que le modèle physique. Dans les deux cas, la fréquence augmente avec l'épaisseur en position « A » : on augmente la rigidité. Pour « I » et « V » la fréquence diminue avec l'épaisseur. On retrouve bien l'inverse de la Figure 2.21 où la fréquence augmentait en présence de trous. De plus l'écart entre le modèle et la simulation est dans tous les cas inférieur à 0.8%. Encore une fois, nous prouvons par cette valeur la fiabilité de notre modèle.

2.5.2 Résonateurs à ondes de volume.

2.5.2.1 Introduction

Une fois encore, l'objectif principal de la thèse est la réalisation de résonateurs à ondes de volume. L'étude sur les trous a montré que ces derniers, suivant leur position, permettaient de modifier la fréquence de résonance des disques. L'étude de la correction par patch a montré de meilleurs résultats que le remplissage des trous dans le cas des poutres. Nous nous attendons donc également à obtenir de meilleurs résultats dans ce cas aussi.

La Figure 2.28 a montré que deux zones principales se dégageaient du disque : « Ventre » et « Centre ». Nous avons utilisé ces deux zones pour positionner les deux patchs sur le disque. Le patch circulaire au « Centre » présente un rayon de $6.53\mu\text{m}$. Nous souhaitons garder une aire égale entre ce patch et les 4 autres (de forme en arc de cercle) répartis sur la circonférence au niveau des « Ventres ». Chacun des arcs de cercle présente donc un rayon intérieur de $14\mu\text{m}$, un rayon extérieur de $18\mu\text{m}$ et un angle de 30° .

2.5.2.2 Résultats

A partir des paramètres mentionnés ci-dessus, nous avons effectué des simulations avec la présence de patchs dans les deux zones avec des épaisseurs, ici de silicium, comprises entre 0 et 50nm.

La Figure 2.42 montre que la fréquence augmente avec l'épaisseur lorsque le patch est au centre alors qu'elle diminue lorsque les patchs sont présents sur la circonférence du disque au niveau des « ventres » de déformation. La définition de la fréquence égale au rapport de la raideur sur la masse permet d'expliquer ces évolutions. En effet, le patch au centre va principalement jouer sur la raideur de ce dernier du fait de contraintes plus importantes en cet endroit. Alors que les patchs sur l'extérieur du disque ont pour effet d'augmenter la masse du disque et donc de faire diminuer la fréquence de résonance.

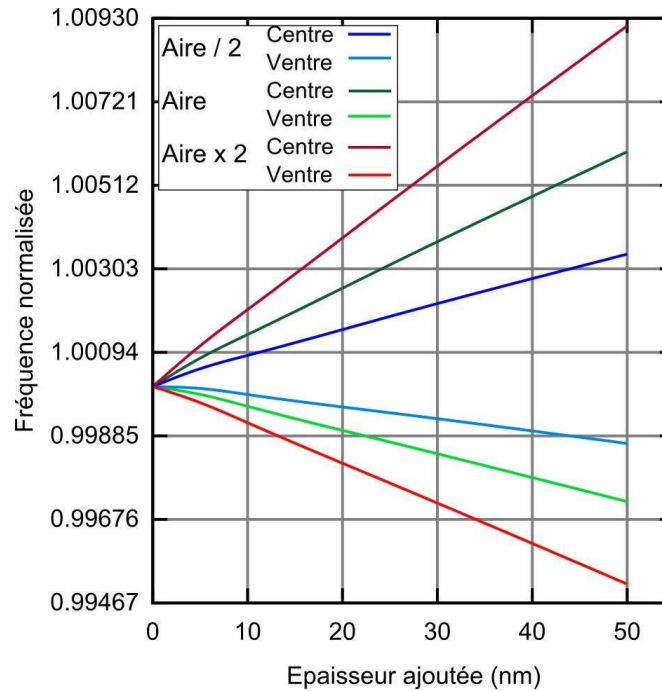


Figure 2.42 Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur ajoutée pour deux configurations de patches ($f_i=95.71\text{MHz}$)

Le Tableau II.XIV reporte les performances d'une telle correction pour différentes grandeurs de patches. Nous sommes légèrement au dessus des spécifications visées avec cependant de relativement grandes plages de variation. Plus on augmente la surface des patches, plus la plage de variation est grande. On remarque que les effets sont plus importants pour le patch au centre. En diminuant la taille des patches, il apparaît donc possible de réduire la résolution à la valeur voulue tout en garantissant une plage de variation suffisante.

Epaisseur (nm)			0	5	10	25	50	Shift max (50nm)	Résolution (ppm.nm ⁻¹)
Fréquence (MHz)	Aire = 134 μm^2	Ventre	95.718	95.6993	95.671	95.585	95.443	-0.28%	57
		Centre		95.7861	95.843	96.01	96.28	0.58%	117
	Aire / 2	Ventre		95.7136	95.699	95.655	95.582	-0.14%	27
		Centre		95.7609	95.793	95.886	96.035	0.32%	64
	Aire X 2	Ventre		95.6795	95.632	95.487	95.245	-0.48%	95
		Centre		95.8157	95.902	96.16	96.582	0.87%	174

Tableau II.XIV PERFORMANCES DE LA CORRECTION LOCALISEE

La Figure 2.43 montre qu'il est possible d'augmenter ou de diminuer la fréquence en jouant sur la taille du patch de matière ajoutée. Ceci confirme bien que l'on est capable de réduire la Gaussienne de la dispersion en fréquence pour ce type de structures comme expliqué précédemment.

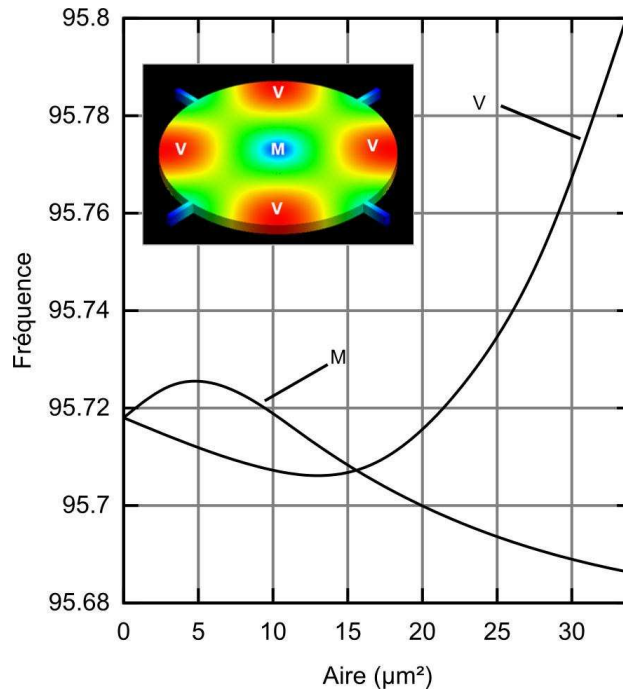


Figure 2.43 Variation de la fréquence de résonance d'un disque en fonction de la taille du patch de Silicium ajouté en « V » ou « M » ($f_i=95.718\text{MHz}$, épaisseur=25nm)

Les premiers résultats montrent des tendances très intéressantes d'un point de vue de la résolution comparées aux spécifications présentées au début de ce manuscrit. Il faudra néanmoins affiner la taille et la position des patches pour obtenir une correction performante pour les bases de temps.

2.6 Conclusions

Nous avons tout d'abord étudié dans ce chapitre l'influence des trous sur la fréquence du résonateur. Pour cela, nous avons implémenté un premier modèle analytique permettant de calculer la fréquence dans le cas d'une poutre en flexion comportant un trou. Ce travail a mis en évidence 3 zones distinctes : Ventre (V), Ancrages (A) et Intermédiaire (I). Suivant la position du trou, nous avons montré que la fréquence pouvait augmenter ou diminuer à des degrés différents. En effet, l'élément déterminant est la contrainte au sein du résonateur et diffère d'une position à l'autre. Ce premier modèle a été confronté aux simulations par éléments finis, qui ont montré la fiabilité de ce dernier. Ensuite, nous avons étendu ce modèle à des réseaux de trous sur la structure. Ces deux modèles ont montré la possibilité d'ajuster la fréquence de résonance par une étape d'épitaxie en diminuant l'épaisseur nécessaire par rapport à une structure sans trou.

De plus, nous avons montré qu'en positionnant correctement les trous, nous pouvions soit diminuer soit augmenter la fréquence en fonction de l'épaisseur de matériau ajouté. Ceci permettrait donc de venir réduire la Gaussienne caractéristique de la dispersion de la

fréquence au sein d'un substrat. Cependant, cette méthode nécessite d'avoir une épaisseur différente pour chacun des dispositifs. Ce qui n'est pas viable industriellement parlant.

Ces travaux nous ont amené à étudier une autre piste, à savoir une correction localisée. Nous avons ainsi montré, par un troisième modèle analytique, toujours sur des structures de type poutre en flexion, qu'une correction en zone « I » permettait de venir réduire la gaussienne avec des performances telle que celle-ci serait comprise entre +50 et -50ppm pour un pas lithographique de 50nm et en tenant compte de l'incertitude de l'étape technologique (classiquement 1% d'erreur). Bien entendu, nous avons vérifié ce modèle en le comparant avec les simulations par éléments finis et l'écart de 0.8% entre les deux modèles atteste de la pertinence du modèle analytique développé. Ces résultats témoignent de la qualité de la correction envisagée.

D'autre part, il est évident que les structures à ondes de volume seront les dispositifs qui pourront venir concurrencer les résonateurs à Quartz. Nous nous sommes donc attelés à évaluer les performances d'une correction localisée grâce aux simulations par éléments finis. Nous avons ainsi montré qu'il était également possible pour ce type de structure d'augmenter ou de diminuer la fréquence suivant la position et la taille des patches ajoutés.

Nous avons donc reporté dans ce chapitre une étude précise analytique et numérique sur des structures trouées et une correction localisée. Les différents modèles analytiques nous ont permis de définir des axes de travail pour le dessin de nos structures que ce soit pour les résonateurs à « modes de flexion » ou à « ondes de volumes ». Nous avons ainsi proposé plusieurs types de structures avec ou sans trous dans chacun des cas pour valider nos modèles par la microfabrication. Les dimensions et performances de celles-ci sont reportées dans le tableau suivant (Tableau II.XV).

		Résonateur (w=1.5μm)	Simple L=50μm	2x6 trous L=49493μm	2x8 trous L=49.564μm	2x10 trous L=49.616μm	2x12 trous L=49.661μm		
		f_i (MHz)	5.2706	5.270629	5.270534	5.270581	5.270677		
Flexion (in-plane, Modèle analytique)	Epaisseur (nm)	Correction epitaxie (%)	1	0.1412	0.1495	0.14244	0.1419	0.1340	
			10	1.4144	1.4426	1.4024	1.3818	1.3567	
			20	2.8311	2.8808	2.8373	2.7845	2.7205	
			50	7.0946	7.2885	7.1631	7.0429	6.9228	
			50x1.5μm²						
			Patches	Uniforme	Ventre	Ventre	Intermédiaire	Ancrages	
			Dimensions Patches	50x1.5μm²	18x1.5μm²	2x1.5μm²	2x(1x1.5μm²)	2x(1x1.5μm²)	
			f_i (MHz)	5.0883					
	Epaisseur (nm)	Correction patch	1	932ppm	180ppm	29ppm	5ppm	783ppm	
			50	4560ppm	920ppm	150ppm	30ppm	3930ppm	

		Résonateur Disque (R=19.88μm)	4x4 trous	4x2 trous	1x2 trous	4x4 trous	4x2 trous	1x2 trous		
		Position	Ventre			Ancrages				
Ondes de volume (Coventor)	Distance au centre (μm)	Fréquence (MHz)	5.347	95.5154	95.6233	95.7017	95.4456	95.5241	95.6938	
			9.446	95.6248	95.6693	95.7136	95.572	95.6589	95.7122	
			12.987	95.721	95.7267	95.7285	95.6756	95.7091	95.7237	
			16.776	95.791	95.7607	95.7371	95.7334	95.733	95.7298	
			Résonateur		Disque (R = 19.88μm)					
			Patches	Ventre	Centre	Ventre	Centre	Ventre	Centre	
			Aire Patches	134μm²		67μm²		268μm²		
			f_i (MHz)	95.71						
	Epaisseur	Correction patch	1nm	57ppm	117ppm	27ppm	64ppm	95ppm	174ppm	
			50nm	2800ppm	5800ppm	1400ppm	3200ppm	4800ppm	8700ppm	

Tableau II.XV STRUCTURES TESTEES SUR LE RUN DE FABRICATION

Partie 3 : Fabrication des résonateurs MEMS

3.1	INTRODUCTION	98
3.2	TECHNOLOGIE SOI	98
3.2.1	Introduction	98
3.2.2	Procédé de fabrication.....	100
3.2.2.1	Implantation.....	100
3.2.2.2	Epitaxie.....	100
3.2.2.3	Dépôt du masque dur en SiO ₂	101
3.2.2.4	Lithographie électronique.....	102
3.2.2.5	Gravure du masque dur en SiO ₂	105
3.2.2.6	Gravure Silicium	105
3.2.2.7	Réalisation des contacts électriques	109
3.2.2.8	Libération	110
3.2.2.9	Dépôt pour la correction.....	111
3.3	CONCLUSION	113

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la description des étapes technologiques qui ont permis de réaliser nos dispositifs et de conforter les différents modèles analytiques implémentés. Le but étant de fabriquer de la manière la plus simple possible, i.e avec le moins d'étapes possibles, nos démonstrateurs.

Nous détaillerons tout d'abord l'ensemble des étapes de fabrication réalisées dans l'ordre à STMicroelectronics, salle blanche 12" à Crolles, au CEA-Léti, également en 12" et à la « Plateforme Technologique Amont » situé au CEA, mais pour laquelle la taille des substrats autorisés est de 4" maximum. L'ensemble des étapes peut être réalisé à STMicroelectronics en 12" mais pour des raisons de coût et d'accès aux différentes machines, nous avons travaillé successivement au CEA-Léti et à la PTA dans le but de prouver le concept. Nous n'omettrons pas de parler des divers tests menés, qui ont été nécessaires à l'élaboration des dispositifs. En effet, la réalisation ne s'est pas faite sans problème notamment dû aux spécifications d'une lithographie avancée et d'une finesse de gravure de la centaine de nm comportant des flancs de gravure les moins rugueux possibles...

Dans un deuxième temps, nous discuterons des différents résultats obtenus ainsi que des améliorations possibles pour optimiser le procédé de fabrication.

3.2 Technologie SOI

3.2.1 Introduction

La technologie SOI [91] est classiquement utilisée pour la réalisation de MEMS. Elle permet d'éviter par exemple des gravures face arrière pour libérer les structures suspendues et donc de les fragiliser.

On travaillera sur un wafer SOI 12" composé de 145nm d'oxyde de Silicium et d'une couche supérieure de silicium de 70nm, gracieusement fourni par SOITEC™. Cette couche de silicium est très importante car elle fait partie de la couche structurelle du résonateur, siège de la conduction électrique et responsable des propriétés mécaniques du résonateur. En effet, cette épaisseur fait partie de la surface active des électrodes qui permettent l'excitation et la détection du résonateur.

La couche d'oxyde relativement fine n'est pas le meilleur choix d'un point de vue comportement électrique du microrésonateur. En effet, les électrodes seront peu isolées du « Si-bulk » et le dispositif présentera de fortes capacités parasites de plots et un fort couplage entre les différentes électrodes elles-mêmes. D'autre part, si l'implantation est trop forte, des charges peuvent se retrouver dans le substrat et nous dégraderons alors les

bonnes propriétés du Silicium Haute Résistivité (HR). L'épaisseur de l'oxyde n'est pas non plus idéale en vue de la correction. Une fois libérées, les structures peuvent être confrontées à un milieu humide susceptible de favoriser le collage des structures au substrat et ce même avec l'utilisation du sécheur supercritique, plus communément appelé « CO₂ dryer ».

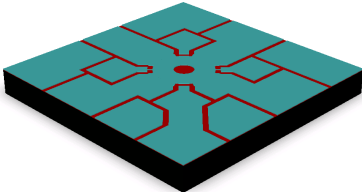
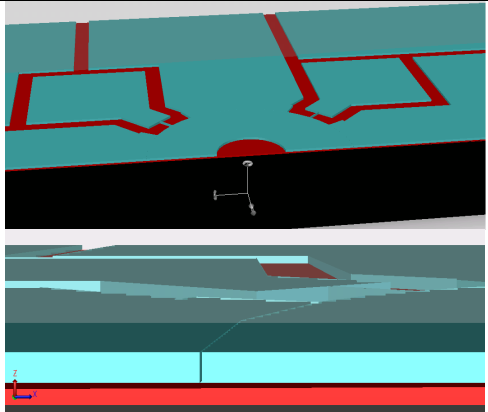
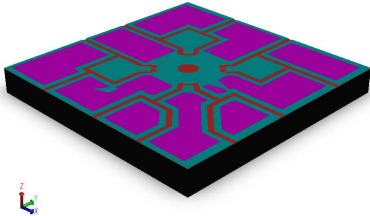
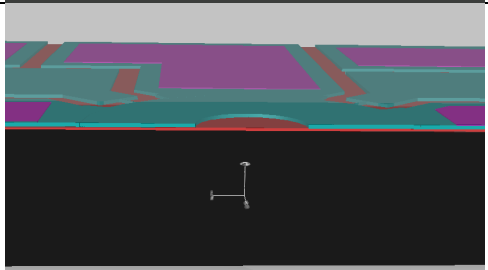
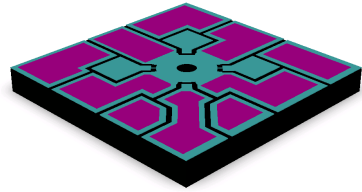
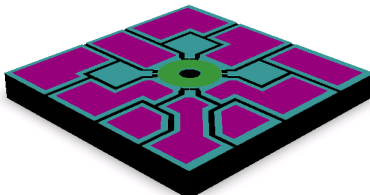
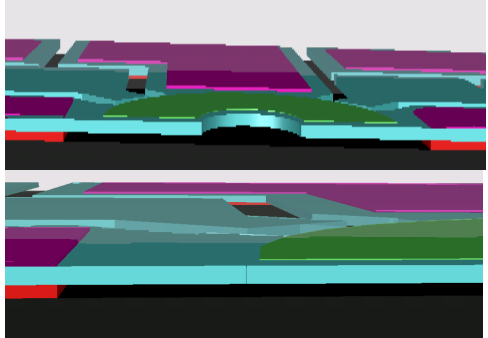
Etape	Description	Vue en perspective	Vue en coupe
1	Implantation Phosphore ($10^{19} \text{ at.cm}^{-3}$)		
2	Epitaxie de Silicium ($1.4\mu\text{m}$)		
3-9	- Lithographie électronique - Gravure SiO₂ - Gravure Si		
10-16	Métallisation		
17	Libération des dispositifs		
18-23	Correction		

Tableau III.I PRESENTATION DES PRINCIPALES ETAPES DE FABRICATION DES RESONATEURS

Le Tableau III.I présente de façon schématique les principales étapes technologiques que nous détaillerons par la suite :

- en premier lieu, il est nécessaire d'implanter la couche supérieure de silicium pour la rendre conductrice et d'épaissir cette dernière pour obtenir de bonnes performances électriques, notamment en terme de transduction. En outre, on dépose une couche de SiO₂ qui servira de masque dur pour la gravure,
- lithographie + gravure SiO₂ / Si : ces deux étapes permettent de définir les résonateurs d'une centaine de μm², les entrefers d'une dizaine de nm de largeur sur une dizaine de μm de long et les électrodes de quelques centaines de μm²,
- métallisation : afin de caractériser électriquement nos résonateurs, nous avons besoin d'une couche de conduction qui nous permettra de poser les pointes,
- libération des structures : travailler avec un substrat SOI nécessite de graver l'oxyde enterré pour libérer les résonateurs,
- correction par épitaxie, oxydation ou dépôt localisé : le but de la thèse est de venir ajuster, dans la mesure du possible à l'échelle du substrat, la fréquence de résonance. Pour cela, nous avons proposé de venir ajuster la fréquence par le dépôt d'une fine couche dans des lieux particuliers. Ceci entraîne donc une ultime étape de photolithographie.

3.2.2 Procédé de fabrication

3.2.2.1 Implantation

Nous partons donc d'un wafer SOI 12" haute résistivité que l'on doit nécessairement implanter afin de rendre conducteur la couche supérieure de silicium (70nm), corps du résonateur. Cette implantation doit être contrôlée pour éviter de venir implanter la couche d'oxyde enterré, voir même le substrat HR. En effet, il faut limiter la diffusion des dopants Cette étape réalisée à STMicroelectronics présente les caractéristiques suivantes (Tableau III.II). Nous souhaitons obtenir un dopage de 10¹⁹at.cm⁻³

	Energie	Dose
1 ^{ère} implantation	600keV	10 ¹⁴ cm ⁻²
2 nd implantation	250keV	10 ¹⁴ cm ⁻²
3 ^{ème} implantation	100keV	10 ¹⁴ cm ⁻²

Tableau III.II PARAMETRES DE L'IMPLANTATION AU PHOSPHORE DES WAFERS

3.2.2.2 Epitaxie

Nous voulons obtenir une couche fonctionnelle de Silicium de 1.4μm. Il est donc nécessaire d'épiter le Si Top initial, épais de 70nm, de 1.330μm. Les paramètres de l'étape sont reportés dans le Tableau III.III.

Step	Recuit	Pré-déposition	déposition	Post-déposition	Fin
Temps (s)	120	10	174	10	30
Température (°C)	1050	1050	1050	1050	900
N ₂ / H ₂ (L)	80	80	80	80	20
Pression (Torr)	60	60	60	60	ATM
SiH ₂ Cl ₂ (sccm)	0	86	86	0	0
Rotation (tour.min ⁻¹)	35	35	35	35	0

Tableau III.III PARAMETRES DE L'EPITAXIE DE SILICIUM

Le Tableau III.IV rapporte les valeurs mesurées de Silicium après épitaxie sur la couronne du substrat par ellipsométrie. Nous pouvons voir que le dépôt est inférieur à la demande d'environ 37nm. Ces mesures sont cohérentes, car comme constaté classiquement, l'épitaxie est plus fine en bord de plaque qu'au centre.

Moyenne	13637Å
Valeur haute	13670Å
Valeur basse	13593Å

Tableau III.IV MESURES DE L'ÉPAISSEUR DE SILICIUM EPITAXIE

3.2.2.3 Dépôt du masque dur en SiO₂

Nous verrons dans le paragraphe suivant que pour définir nos structures, nous utiliserons la lithographie électronique. L'épaisseur de résine pour ce type de lithographie est de l'ordre de quelques centaines de nanomètres de manière à pouvoir obtenir des structures inférieures à la centaine de nanomètres. Cette épaisseur ne permet pas de venir graver les 1.4µm de Silicium. Afin de réaliser cette gravure, un masque dur est nécessaire. Nous avons utilisé une couche de SiO₂, connu pour présenter une bonne sélectivité par rapport au Si. La couche de 200nm est déposée par PECVD (Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition) utilisant une chimie à base de Tetra-Ethyl-Ortho-Silicate (TEOS) (Tableau III.V). Cette couche sera gravée juste avant l'étape de Lift-off des plots de métal par acide fluorhydrique liquide.

Température	400°C
TEOS	5500 mg.min ⁻¹
Gaz O ₂	4200 sccm
He	4000 sccm
Pression	5 Torr

 Tableau III.V CARACTERISTIQUES DU DEPOT DE SiO₂

3.2.2.4 Lithographie électronique

Nous avons opté pour une gravure des petites zones (entrefer ~centaine nm) et des grandes zones (électrodes $\sim \mu\text{m}^2$) simultanée. Le fait d'avoir des motifs inférieurs à la centaine de nanomètres nous a orienté vers la lithographie électronique pour définir l'ensemble des entrefers allant de 50 à 200nm étant donné que la lithographie optique à laquelle nous avons accès ne permettait pas d'atteindre de telles performances.

Dans un premier temps nous avons choisi de développer la lithographie électronique avec le parc d'équipements de la PTA. L'ensemble des travaux a été effectué sur des échantillons de Silicium. Nous avons été orientés vers une résine positive UV5 dont l'épaisseur est d'environ 250nm. Celle-ci présente l'avantage d'avoir un temps d'insolation relativement court par rapport aux résines du type PMMA mais avec des résolutions ne dépassant pas les 50nm. Il nous a fallu 6 mois de développement pour obtenir les premiers résultats après avoir rencontré de nombreux problèmes. Par exemple, le problème d'insolation de structures verticales et horizontales est un problème connu qui nécessite une calibration du masqueur électronique, mais non effectuée avec l'équipement de la PTA. Nous avons donc différencié les entrefers verticaux et horizontaux (Figure 3.1) et balayé une plage de doses ($\mu\text{C.cm}^{-2}$) pour obtenir la plus intéressante. Egalement, des vibrations externes présentes dans le bâtiment modifient considérablement l'insolation de la résine. Malgré ces problèmes, nous avons tout de même obtenu des paramètres permettant la définition des entrefers (Figure 3.1).

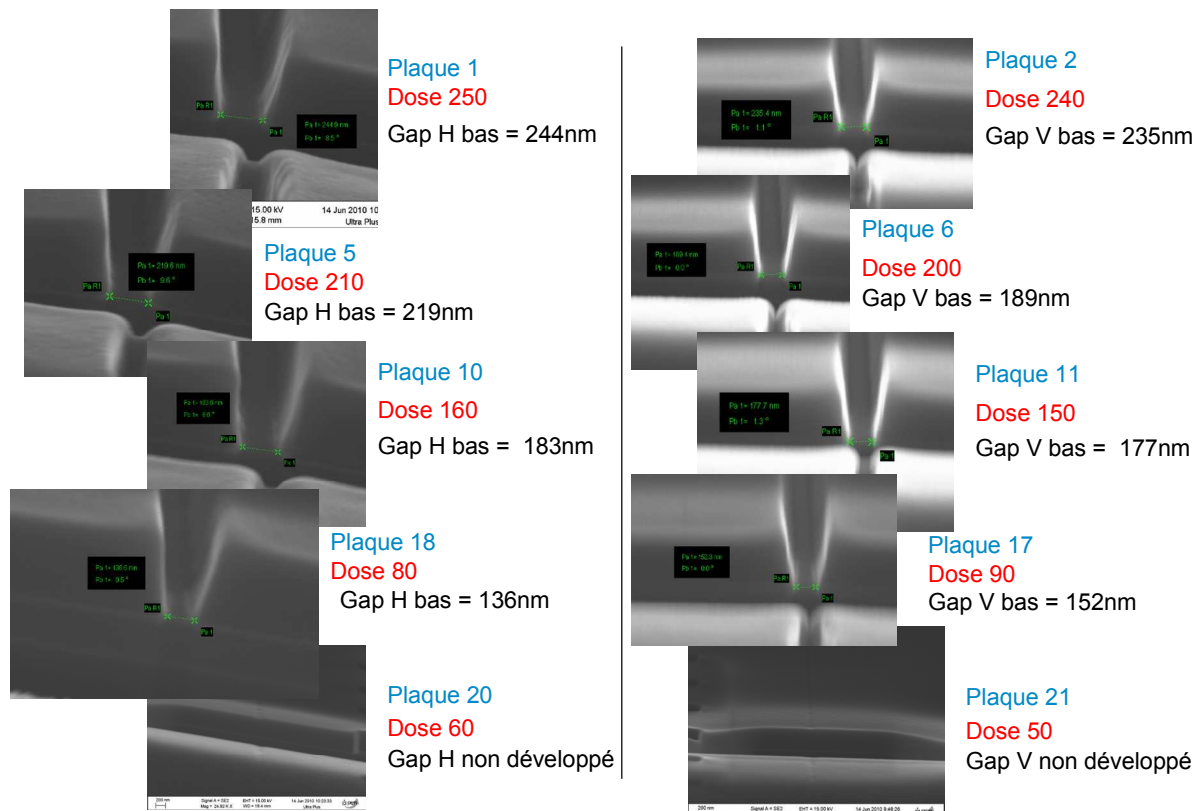


Figure 3.1 Balayage des doses ($\mu\text{C.m}^{-2}$) pour les entrefers des plaques (V : vertical, H : horizontal)

Finalement après de nombreux tests, la modification du layout et le calibrage de l'e-beam, nous avons réussi à déterminer la plage de doses nécessaires pour chacune des zones à insoler. Nous avons donc divisé le layout en 4 sous parties : « grandes zones », réseaux de trous, gaps verticaux et gaps horizontaux, qui seront exposées consécutivement avec des doses différentes. La Figure 3.2 et le Tableau III.VI illustrent et rapportent les paramètres ainsi que les dimensions associées pour chacun des dispositifs.

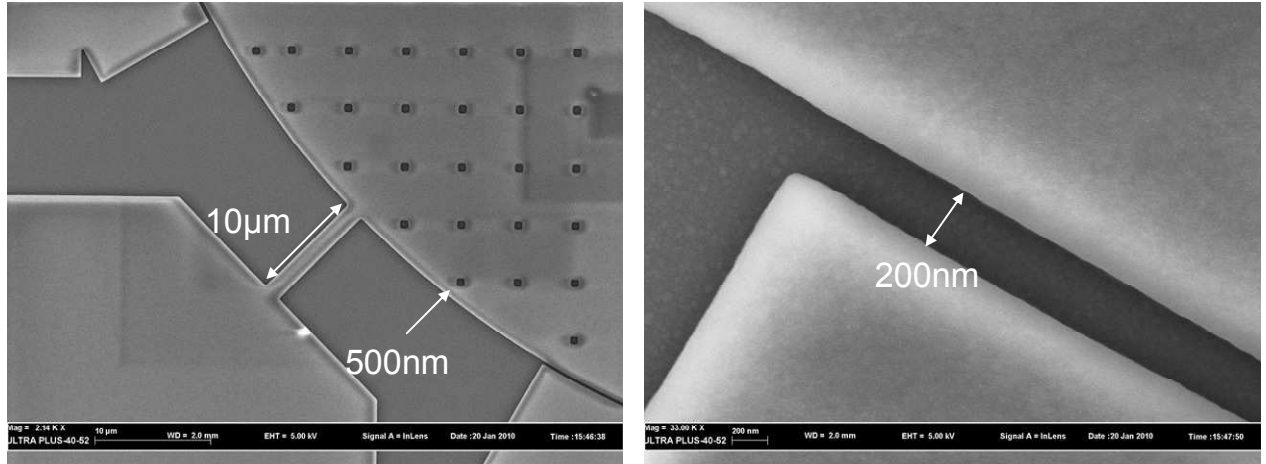


Figure 3.2 Images au microscope électronique à balayage de la lithographie électronique

Dispositifs	Structures	Dimensions visées	Dimensions (Layout)	Doses ($\mu\text{C}.\text{cm}^{-2}$)	Dimensions effectives
Poutres	Grandes zones	5 μm	5 μm	50	5.953 μm
	Trous	500nm	500nm	60	516.5nm
	Gaps	200nm	80nm	60	163nm
Plaques	Grandes zones	5 μm	5 μm	50	4.953 μm
	Trous	500nm	500nm	60	516.5
	Gaps horizontaux	80nm	25nm	70	152nm
	Gaps verticaux	80nm	25nm	80	136nm

Tableau III.VI TABLEAU RECAPITULATIF DES DOSES ET DIMENSIONS

Cependant, l'ensemble de ces paramètres n'a pu être répété deux fois consécutivement et donc, il nous a été impossible d'obtenir un ensemble d'échantillons.

Nous nous sommes tournés vers un équipement du CEA-Léti dédié à la lithographie électronique pour des projets semi-industrialisés. L'approche est complètement différente avec l'utilisation d'un logiciel de découpage du layout et d'optimisation de la dose pour chacune des zones définies par le découpage.

Dans un premier temps, une expo-dose a été effectuée sur un seul substrat 12". Ainsi, neuf doses ont été testées sur le substrat afin d'obtenir la dose optimale pour notre layout. Le temps et les moyens mis à notre disposition n'ont pas permis d'optimiser l'ensemble de nos dispositifs. Nous nous sommes focalisés sur la réalisation d'entrefers linéaires de

100nm. Un travail plus approfondi aurait permis la réalisation entre autres des entrefers courbés d'environ 50nm.

Nous avons obtenu des résultats très intéressants avec des entrefers linéaires et courbés de 100nm (Figure 3.3). Les entrefers courbés de 100nm ont montré par endroits des pieds de résine (Figure 3.4), qui auraient pu affecter par la suite la gravure SiO_2 / Si, heureusement cela n'a pas été le cas.

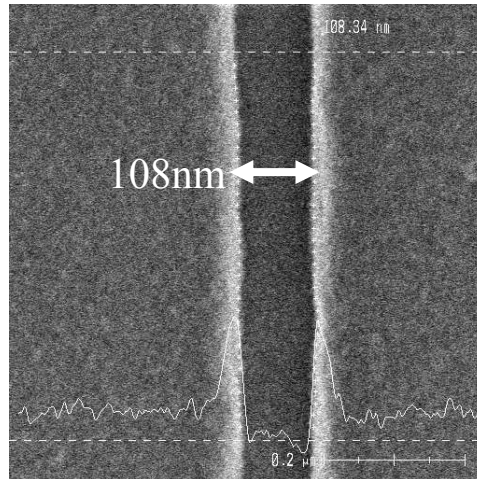


Figure 3.3 Vue de dessus des entrefers linéaires de 100nm

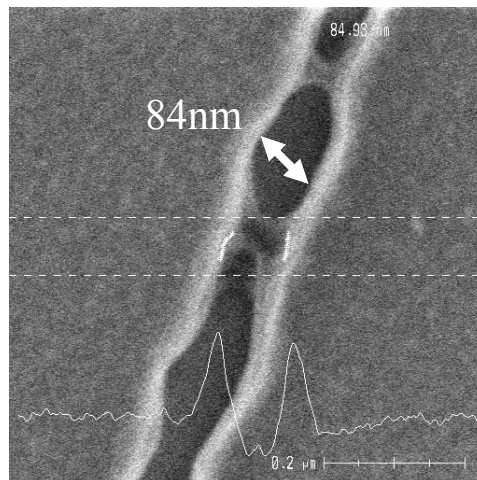


Figure 3.4 Vue de dessus des entrefers courbés de 100nm

La Figure 3.3 montre une mesure à 108nm au lieu des 100nm dimensionnés. Nous sommes proches de la valeur demandée et les étapes qui suivent, à savoir gravure SiO_2 et gravure du Silicium vont également modifier cette cote. Après avoir choisi la dose optimale, nous avons procédé à la fabrication des 4 plaques restantes.

Il est évident que l'industrialisation du procédé de fabrication aura l'avantage d'éviter cette étape de lithographie électronique. En effet les performances de lithographie des équipements de STMicroelectronics (lithographie à immersion par exemple) sont largement suffisantes pour répondre à nos problèmes d'entrefers linéaires ou courbés de quelques dizaines de nanomètres.

3.2.2.5 Gravure du masque dur en SiO_2

Une fois l'étape de lithographie électronique réalisée, le masque dur doit être ouvert pour permettre la gravure Silicium. Nous ne devons pas détériorer la qualité de la photolithographie précédente puisque les erreurs seront alors reportées sur l'étape suivante à savoir la gravure du Silicium.

L'étape de gravure a été effectuée à STMicroelectronics sur un bâti de production. La chimie utilisée est composée des gaz SF_6 , CHF_3 , CF_4 et Ar. Le temps de gravure est défini en analysant la raie du CO à 520nm.

3.2.2.6 Gravure Silicium

Cette gravure est l'étape la plus importante du procédé de fabrication combinant un facteur de formes élevé (~ 35) et des conditions sévères sur les flancs de gravure. Elle doit en effet d'une part présenter des flancs de gravures verticaux et d'autre part ne pas agrandir la taille des entrefers électrostatiques. L'étape a été réalisée dans le même bâti que la gravure SiO_2 directement après cette dernière. Elle est composée d'une alternance de cycles rapides $\text{C}_4\text{F}_8/\text{SF}_6$ (procédé Bosch) avec un plasma pulsé. La température de la chambre est réglée à 130°C .

La gravure Silicium présente elle aussi de très bonnes performances en utilisant des recettes standards utilisées pour des gravures de TSV ou « deep trench ». On a ainsi pu directement et simultanément graver les grandes zones et les entrefers (Figure 3.5).

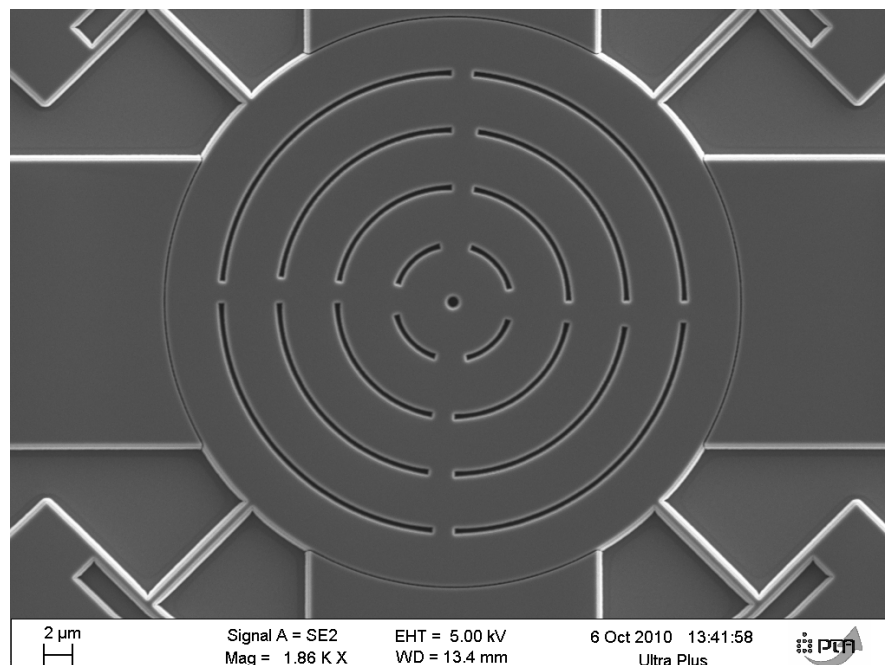


Figure 3.5 Vue de dessus d'un disque après gravure du SiO_2 et du Silicium

Un re-dépôt de téflon ($\text{CF}_2\text{-CF}_2$)_n est présent au niveau des grandes zones, la recette ayant été développée pour la gravure de petites zones. Ce dépôt n'a pas posé dans un premier temps de problème puisque qu'il ne court-circuitait pas les électrodes (Figure 3.6).

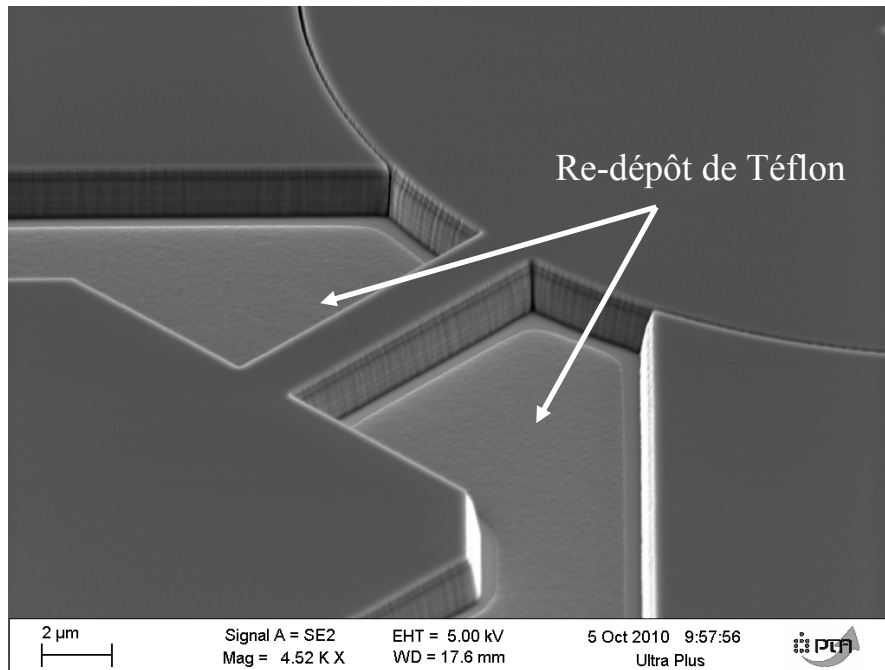


Figure 3.6 Zoom sur le re-dépôt de Téflon dans les grandes zones

La partie critique concernant la gravure des gaps sur $1.4\mu\text{m}$ d'épaisseur s'est très bien passée avec des flancs de gravure quasiment verticaux et une rugosité inexistante (Figure 3.7). L'arrêt sur la couche de SiO_2 est très net. On remarque cependant une légère surgravure en haut des entrefers. La combinaison de la lithographie électronique et d'une gravure directe du Silicium nous a permis d'obtenir parmi les structures présentes sur le run de fabrication des facteurs de forme de 35 (40nm d'entrefer et $1.4\mu\text{m}$ d'épaisseur de Silicium).

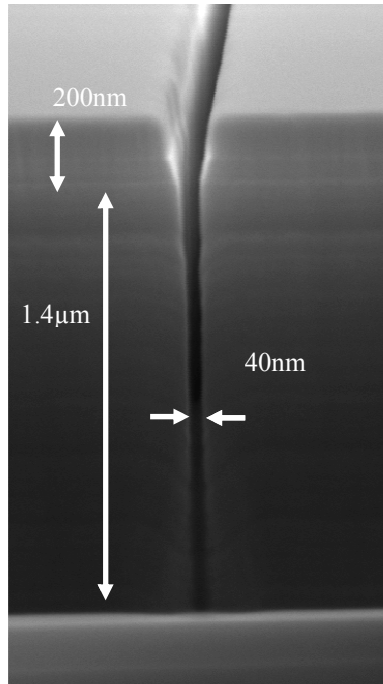


Figure 3.7 Zoom sur un entrefer de 40nm

Ces résultats sont très encourageants avec notamment la possibilité d'épaissir la couche de Silicium conductrice au moins jusqu'à 3μm afin d'augmenter les performances électriques (transduction) du résonateur.

Cependant, nous pouvons tout de même évoquer quelques imperfections. Si la gravure des entrefers présente des flancs de gravure verticaux et sans rugosité, les flancs de gravure pour les grandes zones sont moins propres. Nous avons un genre de « scalloping » qui est apparu à certains endroits (Figure 3.8).

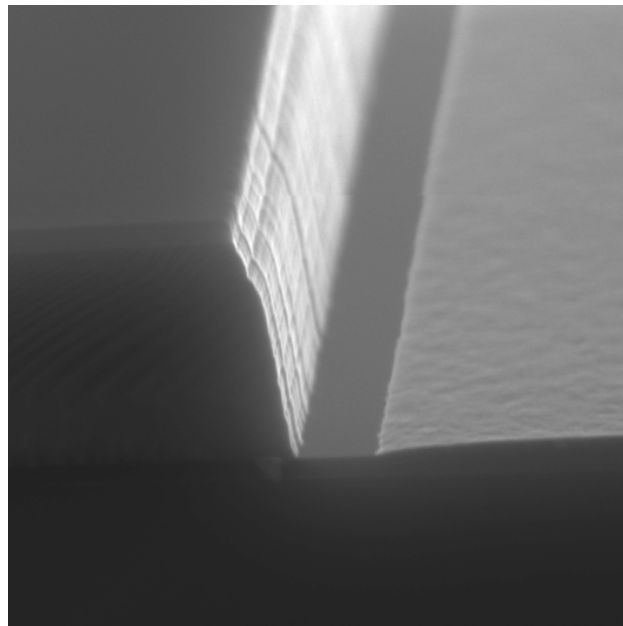


Figure 3.8 Pseudo « scalloping » au niveau des grandes zones

En plus du « scalloping », nous pouvons voir sur les Figure 3.9 & Figure 3.10 que les structures courbées ont été morcelées et que les flancs de gravure sont loin d'être verticaux. La lithographie électronique est sans doute en grande partie responsable de cet effet indésirable. Un travail d'optimisation des doses, du temps d'insolation et de la manière d'insoler permettra d'éviter ces effets. Par contre, la gravure elle-même est imputable pour la non-verticalité des flancs. En effet, la gravure a été développée pour graver des tranchées de quelques nanomètres de largeur sur des micromètres de longueur.

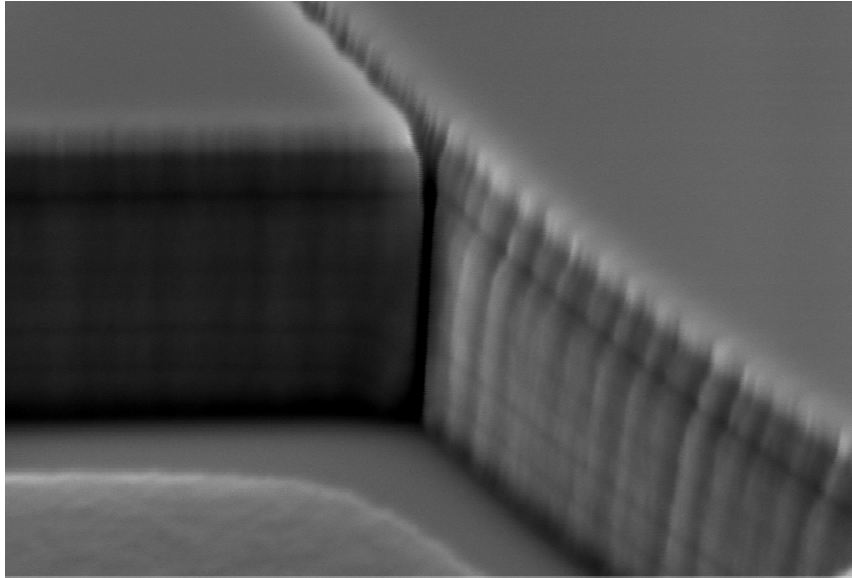


Figure 3.9 Vue au MEB de l'effet morcelé au niveau des grandes zones

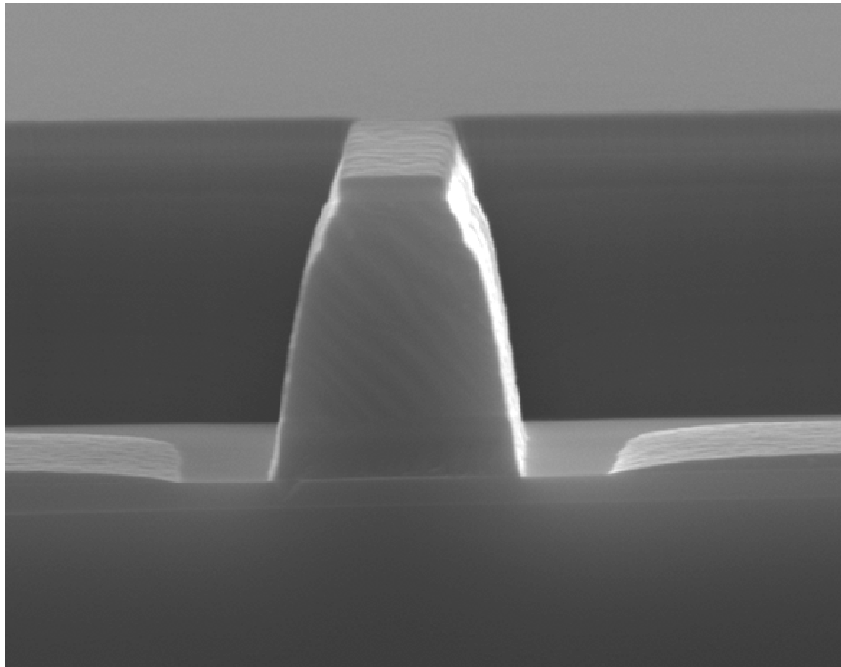


Figure 3.10 Vue au MEB des flancs de gravure des grandes zones

La gravure des plaques suivantes n'a pas été aussi bien réussie que la première. Le re-dépôt de $(CF_2-CF_2)_n$ a obstrué les entrefers et donc les résonateurs se sont retrouvés bloqués mécaniquement (Figure 3.11)

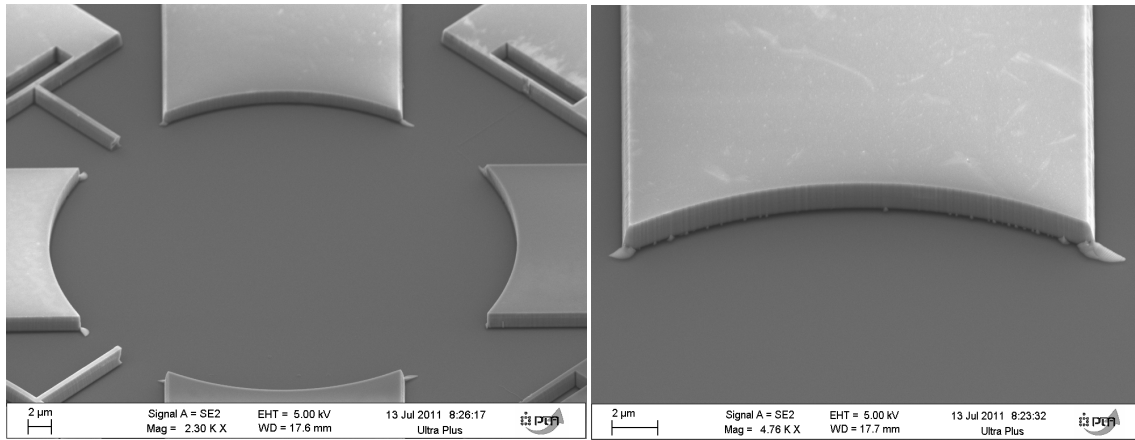


Figure 3.11 Résidus de Téflon au niveau des entrefers dus au re-dépôt pendant la phase de gravure (le résonateur a été enlevé pour faciliter l'observation)

3.2.2.7 Réalisation des contacts électriques

Les contacts nécessaires à la caractérisation électrique sont réalisés à partir d'un empilement Chrome-Or épais d'environ 400nm. La couche de chrome est utilisée comme couche d'adhérence pour l'or qui sera la couche de conduction. Des tests ont été réalisés au préalable pour s'assurer de la tenue de ce bi-couche à l'acide fluorhydrique qui sera utilisé par la suite.

Pour éviter tout faux contact, la technique du lift-off est préconisée. Une couche de résine est d'abord déposée puis insolée afin d'ouvrir les zones où seront déposées le chrome puis l'or. Nous avons utilisé une résine épaisse (AZ4562) qui permet d'obtenir une épaisseur d'environ 6µm avec les paramètres standards du fournisseur. Nous procédons ensuite au dépôt des deux métaux par évaporation. Enfin le reste de résine est enlevé dans un bain d'acétone couplé à des ultrasons laissant place aux plots de contacts (Figure 3.12). Nous avons au préalable gravé le masque dur SiO_2 de 200nm par un bain d'acide fluorhydrique liquide

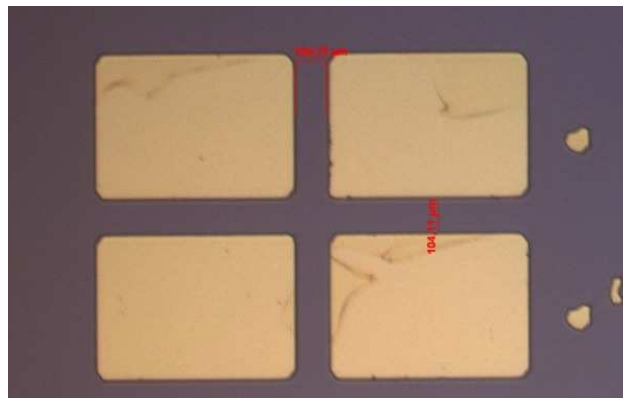


Figure 3.12 Image des plots Cr/Or réalisés par lift-off SU8

Résistance mesurée	75 k Ω
Résistivité calculée	0.63 Ω .m
Dopage calculé	1.54 10^{19}cm^{-3}
Dopage visé	10^{19}cm^{-3}

Tableau III.VII COMPARAISON DES DOPAGES MESURE ET ATTENDU

Les mesures de résistances effectuées montrent une bonne concordance entre le dopage visé et la valeur obtenue (Tableau III.VII). Cette mesure, bien qu'élémentaire, nous donne une bonne idée sur, d'une part, le bon contact électrique Cr / Au – Si et d'autre part, la bonne conduction électrique d'un plot à l'autre en passant par le Si dopé.

3.2.2.8 Libération

La gravure de l'oxyde enterré peut se faire, soit par voie humide avec une vitesse de gravure de 100nm.min^{-1} , soit par voie sèche avec des vitesses de gravure de l'ordre de 20nm.min^{-1} . Les équipements mis à notre disposition nous ont conduit à sous-traiter la gravure au CEA-Léti. En effet, si nous voulions effectuer la gravure humide, une étape de séchage dite supercritique était nécessaire pour ne pas coller les structures libérées au substrat. Le bâti de CO_2 supercritique est arrivé à la fin du procédé de fabrication et a été utilisé pour l'ultime étape de fabrication : la correction. Etant donné la taille des structures, des trous de libération ont été disposés sur les résonateurs pour faciliter la libération. La distance de libération visée était de $7\mu\text{m}$. Nous avons ainsi pu libérer nos structures tout en les maintenant suspendues. Des images au microscope infrarouge ont confirmé les observations faites en coupe au MEB sur des structures fonctionnelles.

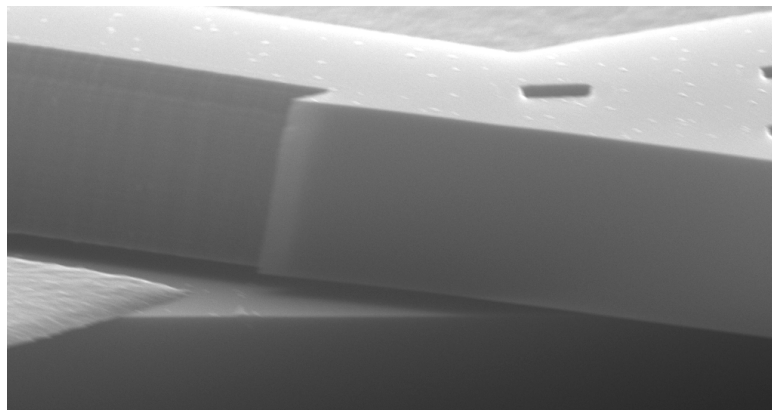


Figure 3.13 Vue en coupe de la gravure d'oxyde de BOX par HF vapeur

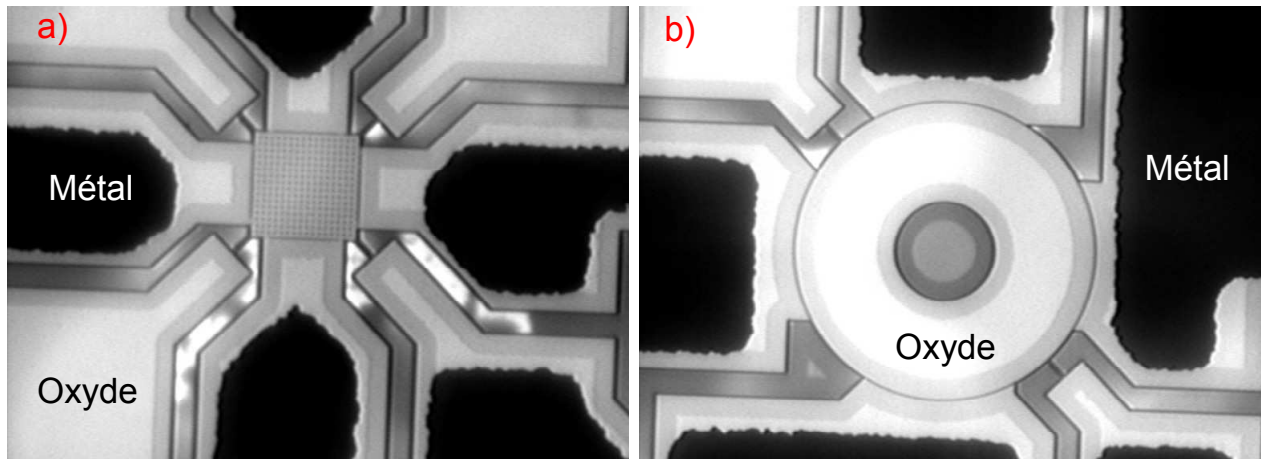


Figure 3.14 Vue de dessus par microscope infrarouge d'une structure libérée (a) et non libérée (b)

Le dépôt de Téflon dans les grandes zones est toujours présent mais n'a pas empêché la libération des structures (Figure 3.13).

3.2.2.9 Dépôt pour la correction

Après une première mesure de la fréquence, nous souhaitons modifier celle-ci par un ajout de matière.

Dans le cas de caractérisations électriques directement sur la couche de silicium dopé, le résonateur n'est pas contaminé par du métal. Il est donc « techniquement possible » de faire une épitaxie ou une oxydation du résonateur. Ces techniques vont recouvrir le résonateur sur toute sa surface disponible, c'est-à-dire que l'épaisseur normalement nécessaire est diminuée du fait de la présence de trous au sein de la structure qui augmente la surface disponible.

S'il est nécessaire de réaliser les plots de contacts en métal, il n'est plus possible d'utiliser un bâti d'épitaxie et la seule possibilité est donc un dépôt localisé, qui présente de toutes manières de meilleures performances, d'après nos simulations et modèles analytiques. Une étape de photolithographie est alors nécessaire. Le lift-off présente de nombreux avantages dans notre cas par rapport à une étape de lithographie classique. En effet, si nous utilisons un métal pour matériau de correction et que la gravure de ce dernier laisse des filets de métal, il se pourrait que les électrodes soient court-circuitées.

Nous avons donc déposé une résine épaisse (SU8), afin de garantir un recouvrement total des gaps, trous et entrefers, sur les échantillons à corriger. Le choix de la SU8 est déterminé par l'utilisation du CO₂ supercritique pour éviter de coller les structures au substrat par capillarité. La SU8 était la seule résine disponible résistante au bain d'alcool du sécheur. Le développement de cette dernière après insolation nécessite de plonger les échantillons dans un milieu humide. Nous devons alors procéder à un séchage supercritique pour éviter de coller les structures au substrat.

Pour ce faire, nous plongeons les échantillons dans un solvant en l'occurrence l'alcool miscible avec le CO₂ liquide. Une fois dans le bâti du sécheur supercritique, l'alcool est progressivement remplacé par le CO₂ liquide. La chambre est alors montée en température (40°C) et mise sous pression (1300psi). Le CO₂ entre dans un état dit « supercritique ». Le changement d'état fluide/gaz se fait de manière continue. La température de la chambre et sa pression sont alors diminuées et le CO₂ gazeux est vidangé. De cette manière, on garde nos structures suspendues malgré le passage dans une solution liquide.

On fait alors notre dépôt, en l'occurrence du chrome, toujours par évaporation. Et on plonge notre échantillon dans de l'acétone pour enlever la résine superflue. De nouveau, le passage dans le CO₂ supercritique est nécessaire pour garantir le bon fonctionnement de nos structures (Figure 3.15).

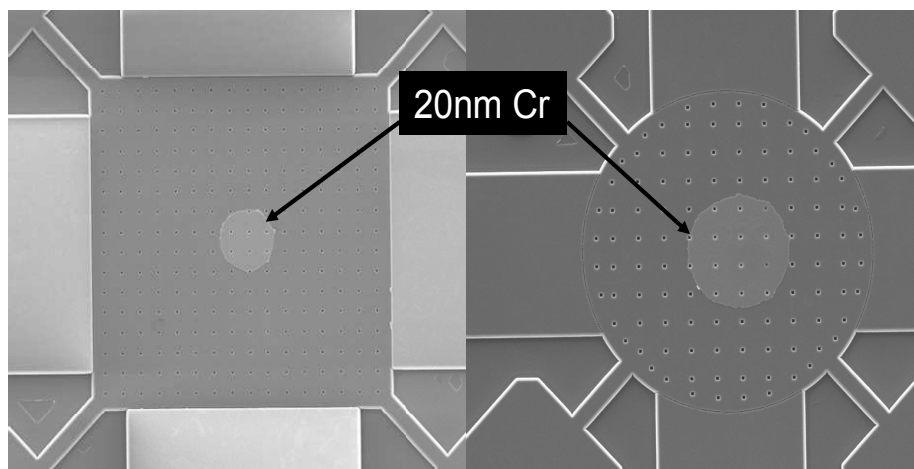


Figure 3.15 Vue au MEB du dépôt localisé de chrome sur les structures à ondes de volume

Malheureusement, malgré les précautions prises avec l'utilisation du sécheur supercritique, nos structures se sont retrouvées collées au substrat. La Figure 3.16 montre une différence de contraste au sein du résonateur, ce qui est caractéristique du collage du résonateur avec la partie supérieure du substrat. L'épaisseur de 145nm de l'oxyde enterré est la raison principale de la non-réussite de cette dernière étape.

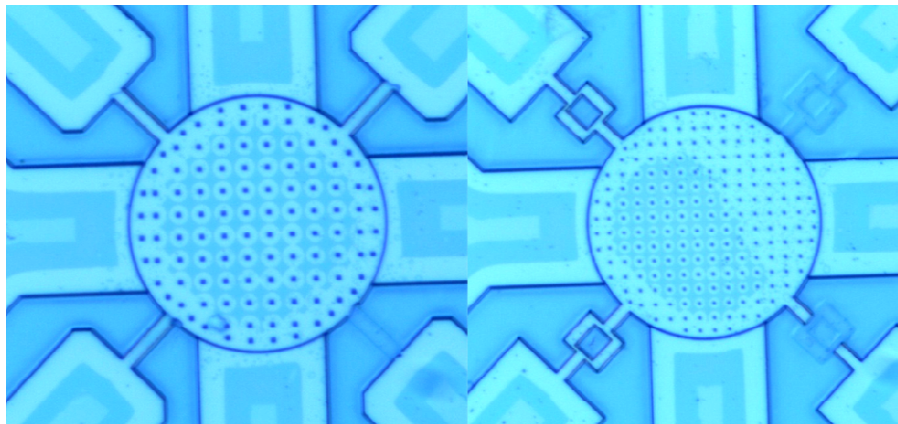


Figure 3.16 Vue de dessus au microscope optique après passage dans le CO₂ supercritique

3.3 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre l'ensemble des étapes de fabrication d'un résonateur MEMS compensé en fin de processus de fabrication. Certaines étapes (Gravure Si, Libération...) présentent des caractéristiques beaucoup plus critiques que d'autres (dépôt Métal...).

Notre premier choix d'utiliser les services de la Plateforme Technologique Amont n'a pas été fructueux. En effet, les dimensions et les caractéristiques des gravures demandées ne rentraient pas dans les spécifications proposées par une plateforme amont, bien que clairement exposées au départ. Des procédés semi-industrialisés voire industrialisés ont été nécessaires pour obtenir nos dispositifs.

Nous avons ainsi pu réaliser des structures de type poutre ou résonateur à ondes de volumes avec des facteurs de formes élevés (~ 35) en un nombre restreint d'étapes (17) de fabrication et de masques (2).

Nous avons également essayé d'apporter des pistes possibles d'amélioration pour chacune des étapes vues précédemment :

- utiliser un substrat présentant un oxyde enterré plus épais (entre 500nm et 1 μ m) pour éviter la présence de charge dans le substrat due à une implantation non contrôlée et le collage du résonateur au substrat en solution humide,
- épitaxie de 3 μ m au lieu des 1.4 μ m pour favoriser la transduction électrique et diminuer la résistance motionnelle R_m ,
- lithographie optique classique à très haute résolution (lithographie à immersion par exemple) pour éviter la lithographie électronique,
- développer une gravure Si spécifique pour éviter le re-dépôt de Teflon ($\text{CHF}_2\text{-CH}_2\text{F}_2$) dans les grandes zones, ainsi que les problèmes de verticalité pour les grandes zones ou bien diviser l'étape de gravure en deux gravures : tout d'abord définir les entrefers puis faire une gravure moins rigoureuse pour le reste des motifs,
- utilisation d'un métal compatible front-end,
- pré-libération à l'acide fluorhydrique liquide pour accélérer la vitesse de gravure de l'oxyde enterré,
- correction par épitaxie ou matériau front-end. Utilisation d'une gravure sèche, dans le cas où le CO_2 supercritique n'est pas disponible.

La réalisation des structures effectuée, nous passons donc au chapitre suivant sur la caractérisation électrique de celles-ci.

Partie 4 : Caractérisations électriques

4.1	INTRODUCTION	116
4.2	BANCS DE MESURES	116
4.2.1	<i>Enceinte sous vide, CEA-Léti</i>	116
4.2.2	<i>Mesures RF, STMicroelectronics</i>	117
4.3	MODELISATION ELECTRIQUE DU SUBSTRAT ET DES PLOTS	119
4.4	MESURE DES POUTRES TROUEES	126
4.4.1	<i>Introduction</i>	126
4.4.2	<i>Poutre encastrée-encastrée</i>	127
4.4.2.1	Influence de la tension de polarisation	127
4.4.2.2	Distributions des trous	129
4.4.3	<i>Conclusion</i>	131
4.5	MESURE DES STRUCTURES A ONDES DE VOLUME	131
4.5.1	<i>Mesure avant correction</i>	131
4.5.1.1	Plaques 20MHz	132
4.5.1.2	Disques 87MHz	134
4.5.1.3	Plaques 80MHz	136
4.5.1.4	Conclusions	137
4.5.2	<i>Mesures électriques après correction</i>	138
4.6	CONCLUSION	138

4.1 Introduction

Le quatrième et dernier chapitre est consacré aux mesures électriques des différents résonateurs décrits précédemment. Dans un premier temps, nous parlerons des deux bancs de mesures utilisés. Nous avons mesuré nos dispositifs sur des bancs différents de par leur nature et leurs possibilités. Le premier est situé au CEA-Léti dans le Laboratoire de Caractérisation et Fiabilité des Composants (LCFC) dirigé par M. Didier BLOCH. Le second banc de mesure est disponible à STMicroelectronics dans le laboratoire de « Vehicle Test Engineering » (VTE).

La seconde partie discutera de la modélisation physique du substrat. Le substrat SOI de départ comporte un oxyde enterré très fin qui malheureusement laisse « fuir » une partie du signal au sein du Silicium massif, phénomène accentué par les charges à l'interface Silicium massif / Oxyde.

Nous verrons ensuite dans une troisième partie les mesures effectuées au CEA-Léti sur des poutres en flexion. Il s'agit de structures trouées dont la fréquence de résonance se situe autour de 700kHz. Nous utiliserons un détecteur synchrone (LIA) couplé à une méthode de mesure appelée « $2.f$ ».

Dans une quatrième partie, nous discuterons des mesures électriques des disques et plaques à mode de Lamé. Sur ces structures, nous ne reporterons que les mesures effectuées avant le dépôt du matériau de correction du fait d'un problème technologique.

Enfin nous conclurons sur l'ensemble des résultats et les améliorations envisageables pour faciliter les mesures électriques et éviter les différents problèmes rencontrés.

4.2 Bancs de mesures

4.2.1 Enceinte sous vide, CEA-Léti

Le premier banc de mesure est un Lakeshore™ (Figure 4.1) qui permet d'une part de faire des mesures sous vide et également de tester nos structures en température. Il est équipé de 6 bras manipulateurs munis de pointes simples en tungstène. Nous pouvons brancher sur ce banc différents appareils de mesures :

- un détecteur synchrone (LIA) qui permet de faire des mesures en « f » ou en « $2.f$ » et ainsi de s'affranchir des problèmes de non linéarité, notamment pour les poutres,
- un analyseur vectoriel de réseau (VNA) qui permet de mesurer les paramètres « S » d'un circuit,

- un impédancemètre classique qui mesure les variations d'impédance. Cet appareil est particulièrement utilisé pour les poutres.



Figure 4.1 Banc cryogénique Lakeshore™

Ce banc de mesure n'a pas été couplé à un système de calibration électrique pour s'affranchir de toutes les connectiques : câblage, pointes... Les mesures reportées par la suite montreront un niveau de bruit nettement supérieur aux mesures effectuées à STMicroelectronics. Ceci provient de l'utilisation de pointes simples classiques pour lesquelles le plan de masse n'est pas ramené au niveau des dispositifs. Une boucle de masse est créée au niveau des connexions entre les câbles et le banc. Le câblage lui-même n'est pas aussi performant qu'un câblage blindé utilisé pour les hautes fréquences. Cependant, ce banc de mesure nous a permis de caractériser les structures à basses fréquences.

Bien que le banc soit équipé d'un système cryogénique, nous n'avons effectué aucune mesure en température. En effet, nous avons concentré nos efforts sur la compensation en fréquence des dérives imputées à la fabrication et non aux variations en température du Silicium.

4.2.2 Mesures RF, STMicroelectronics

Les mesures électriques effectuées à STMicroelectronics sont assurées par un analyseur vectoriel de réseaux (VNA) qui évalue les quatre paramètres « S » complexes d'un quadripôle. Les pointes utilisées sont des pointes GSG (pour Ground Signal Ground). Celles-ci permettent de ramener le plan de mesure au niveau des pointes et donc de s'affranchir des erreurs induites par les éléments d'interconnexion (câbles, connecteurs, sondes...) après une calibration adéquate. La méthode de calibration utilisée est le SOLT (Short Open Load Thru) traduit littéralement par court-circuit, circuit-ouvert, charge et ligne à retard (Figure 4.2). Les plots de tests viennent eux aussi modifier les mesures électriques en ajoutant des capacités parasites. On peut « soustraire » ces perturbations en

mesurant à vide une structure comportant seulement les plots sans le résonateur. Les deux signaux sont ensuite traités et le signal de sortie est reconstitué : on appelle cela le « de-embedding ».

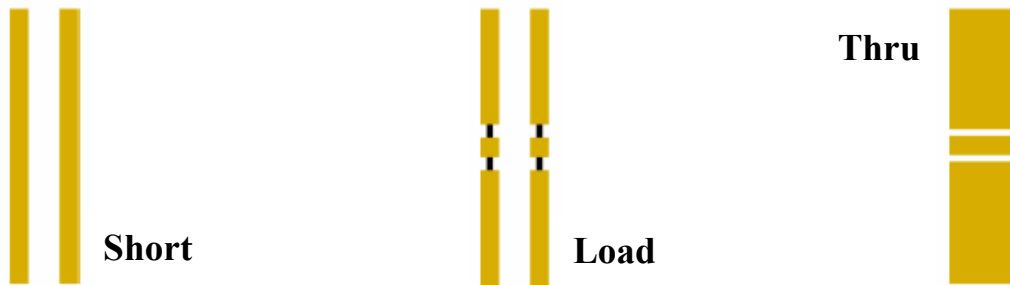


Figure 4.2 Standard de type SOLT

Malheureusement le banc n'est ni équipé d'enceinte sous vide, ni de chambre contrôlée en température. L'ensemble des mesures a donc été effectué à l'air libre et à température ambiante. Nous reportons sur la Figure 4.3 une photographie des pointes positionnées sur un de nos dispositifs, en l'occurrence une plaque à mode de Lamé dont la fréquence est proche de 18MHz. Un pitch de 100 μ m est utilisé ce qui rend le positionnement des pointes très minutieux. La calibration a, quant à elle, été effectuée partiellement. Nous verrons par la suite que nous mesurons nos structures en deux ports avec quatre pointes déphasées deux à deux. Il n'existe cependant pas de système de calibration pour ce type de mesure. La calibration est donc effectuée seulement sur deux pointes avec les deux autres pointes branchées aux appareils mais reliées chacune d'elles à une charge 50 Ω .

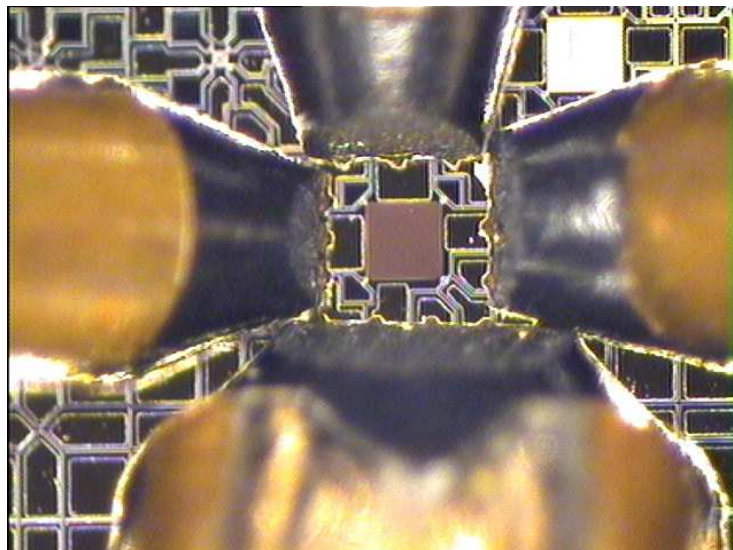


Figure 4.3 Photographie du positionnement des pointes sur une structure de type plaque à mode de Lamé en 2 ports déphasés de 180°

4.3 Modélisation électrique du substrat et des plots

Le modèle électrique intrinsèque d'un résonateur électromécanique est usuellement défini par un circuit RLC en série avec une capacité en parallèle (Figure 1.6). Ce dernier ne reflète pas complètement la réalité électrique. En effet, les plots et le substrat ne sont pas pris en compte par une telle modélisation, ou du moins pas explicitement. Nous souhaitons donc modéliser notre résonateur en tenant compte de l'environnement de celui-ci. Pour cela, nous allons tout d'abord étudier les plots et le substrat.

Notre structure de test est constituée de trois plots espacés d'une dizaine de micromètres où l'oxyde enterré a été gravé partiellement. Le substrat est théoriquement HR (Figure 4.4) mais comporte une zone de charge à l'interface du Si massif et de la couche d'oxyde, due à la réalisation du substrat SOI.

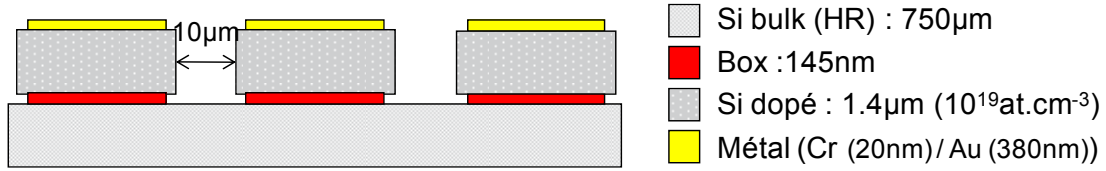


Figure 4.4 Schéma en coupe du pad utilisé pour la modélisation du substrat

Un plot est classiquement modélisé par une capacité planaire. Le substrat SOI est plus difficile à modéliser. La littérature [96, 97, 98, 99] reporte une modélisation du substrat à partir d'une capacité ($C_{substrat} = C_{Si}$) en parallèle avec une résistance ($R_{substrat} = 1/G_{Si}$) (Figure 4.5), où les deux composants sont liés par l'équation 4.1 avec ϵ_0 la permittivité du vide, ϵ_{Si} la permittivité relative du Silicium et σ_{Si} la conductivité du Silicium.

$$R_{substrat} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{Si}}{C_{substrat} \cdot \sigma_{Si}} \quad \text{Eq. 4.1}$$

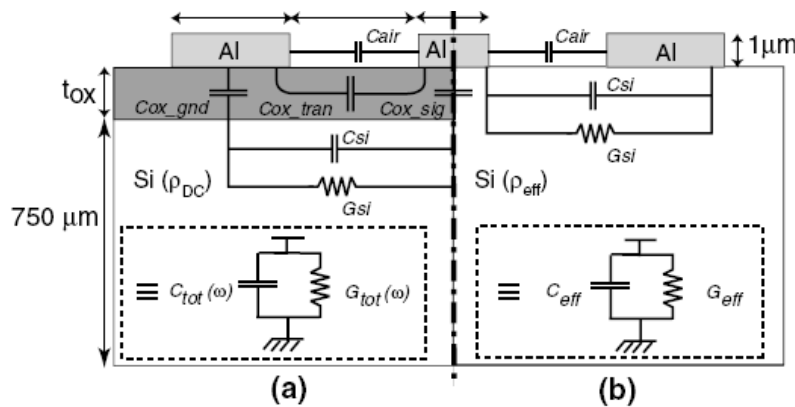


Figure 4.5 Modélisation électrique de l'effet substrat SOI pour des structures coplanaires [97]

Afin d'effectuer la modélisation du plot, nous avons tout d'abord réalisé des mesures de type $C(V)$ par un RLC mètre pour vérifier le phénomène de charges à l'interface. Ces dernières permettent de mesurer la capacité et la résistance équivalentes d'un composant. La mesure s'effectue en deux ports à partir de pointes simples. La première pointe est positionnée sur le contact électrique en face avant. La seconde pointe est reliée au porte échantillon sur lequel est posé le substrat. Ceci permet de réaliser une mesure verticale sur l'épaisseur totale du substrat. Il est nécessaire de définir la plage de tension continue balayée ainsi que la tension V_{AC} utilisée. D'autre part, nous devons introduire la fréquence de travail pour effectuer les mesures. Nous verrons que cette fréquence est déterminante dans la mesure.

Le banc de mesure est illustré par la Figure 4.6. Il est composé de l'enceinte sous vide avec les micropointes, du RLC mètre qui fournit les valeurs de la capacité et de la résistance équivalentes et de la connectique (câble SMA). Le RLC mètre permet de faire une « pseudo calibration » lorsque les pointes ne sont pas posées pour s'affranchir en partie des capacités, inductances et résistances introduites par la connectique.

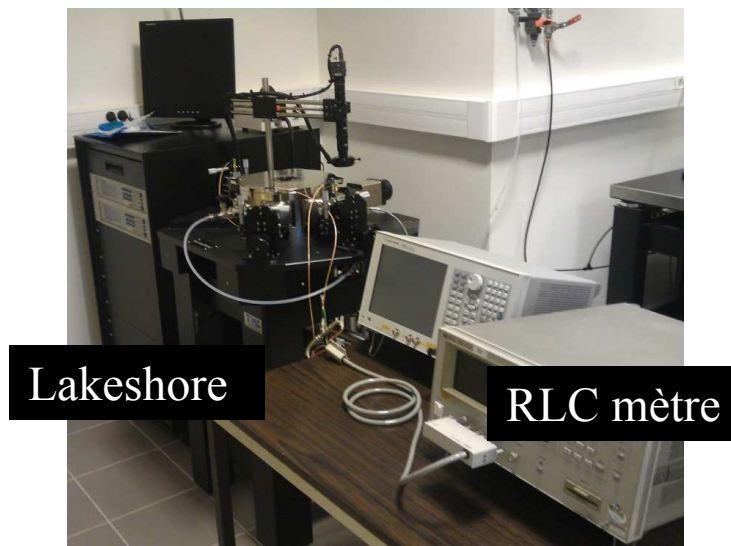


Figure 4.6 Banc de mesure pour les caractérisations $C(V)$ du substrat

La Figure 4.7 représente les variations de capacité pour différentes fréquences de travail pour un balayage en DC de -20 à +20V. Nous pouvons voir que l'on retrouve les trois phénomènes connus dans la physique des semiconducteurs, à savoir l'accumulation des charges pour un V_{DC} inférieur à -10V, une zone de déplétion entre -10V et 0V, et une zone de forte déplétion ou inversion pour une tension supérieure à 0V. Ce phénomène de charge sera déterminant dans l'explication des mesures des plaques à 20MHz. Nous remarquons que les valeurs de capacités varient en fonction de la fréquence de travail pour une même valeur de DC. Ces variations sont largement discutées dans la littérature [99, 100, 101]. Ceci s'explique par le temps de réponse des charges. Lorsque la fréquence de travail augmente, le régime stationnaire n'a pas le temps de s'établir et donc les valeurs de capacités diminuent. Raskin et Al [99] parlent alors de mode diélectrique.

En zone d'accumulation et à basse fréquence, la capacité mesurée correspond à la capacité planaire du pad. Nous relevons une valeur de 4.45pF sur la Figure 4.7 qui est en parfait accord avec la valeur calculée de 4.77pF. D'autre part, la valeur de la capacité relevée à -5V, qui correspond à la zone de déplétion, $C = 466\text{fF}$, et la valeur de la capacité planaire du pad, mentionnée précédemment, permettent de remonter à la capacité de déplétion de 520fF. Ces mesures confirment donc l'importance d'une résistance en parallèle de l'effet substrat lui-même modélisé par un R_{substrat} , C_{substrat} parallèle. Elles mettent en évidence les limites du comportement du substrat théoriquement HR.

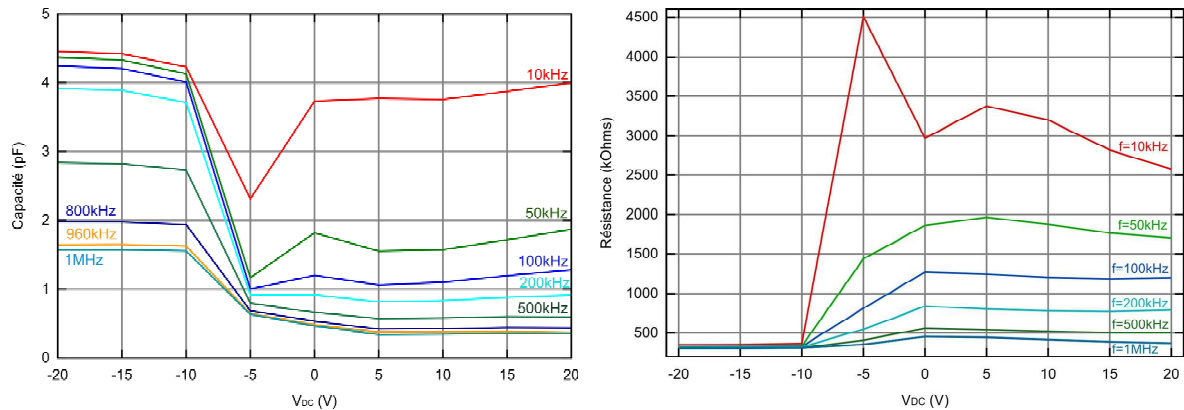


Figure 4.7 Mesure de $C(V)$ du substrat à différentes fréquences de travail ($V_{AC} = 0.2V$)

Regardons à présent la modélisation du plot en détail. Pour cela, nous avons réalisé des mesures de paramètres S , du plot de la Figure 4.4, en un ou deux ports sur le banc électrique à STMicroelectronics. Une fois la calibration *SOLT* effectuée, cette fois-ci parfaite, nous avons posé une pointe GSG sur un premier plot et une seconde pointe en vis-à-vis de celle-ci sur un second plot. Ceci nous permettra d'une part de modéliser le plot en lui-même, mais également le couplage par le substrat entre deux plots (Figure 4.8).

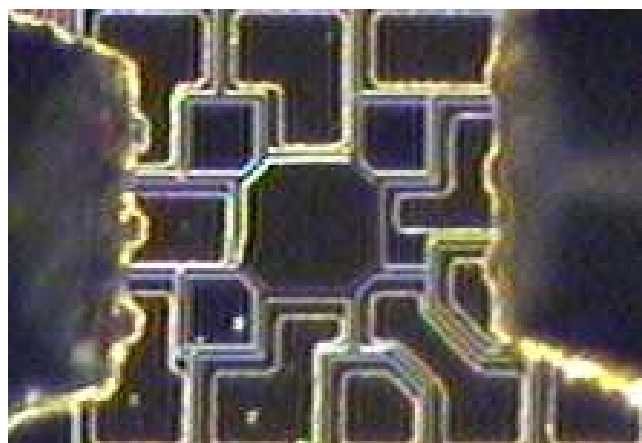


Figure 4.8 Photo de la mesure 2 ports sans résonateur

Nous avons donc dans un premier temps considéré seulement le plot de gauche en analysant le paramètre S_{11} . Nous nous sommes rendus compte que les mesures des plots étaient différentes d'une plaque à l'autre. En effet, la Figure 4.9 montre une évolution

différente du paramètre S_{11} d'une plaque à l'autre alors que la mesure a été effectuée exactement dans les mêmes conditions et au même moment. Nous considérerons la courbe présentant les variations les plus importantes puisque les mesures de nos résonateurs ont été effectuées sur cette plaque précisément.

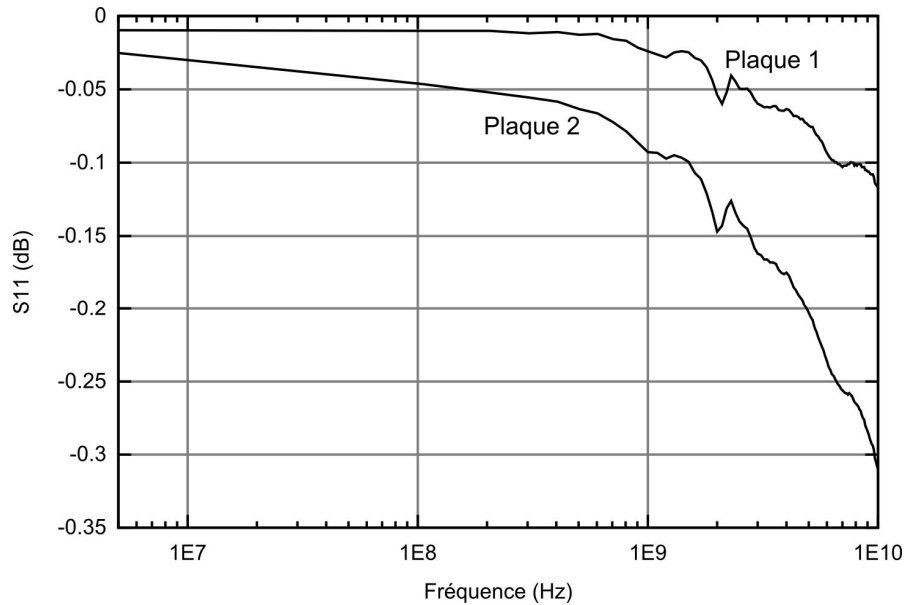


Figure 4.9 Mesure du paramètre S_{11} d'un plot sur deux plaques (1 et 2)

En cohérence avec la littérature, nous avons modélisé l'ensemble plots + substrat par une capacité planaire pour les deux pads de masse (C_3 & C_5) et une autre pour le pad de signal (C_1), puis un ensemble Capacité (C_{sub}) / Résistance (R_{sub}) pour le substrat. Enfin, nous avons ajouté une résistance (R_{charge}) en parallèle de l'ensemble précédent pour modéliser les charges à l'interface oxyde Si BULK (Figure 4.10). Nous avons également introduit les capacités d'effets de bord C_{fr} . Ces capacités permettent de modéliser les effets de bord entre les plots et le substrat HR. Les valeurs des capacités planaires des plots proviennent des mesures de $C(V)$ présentées précédemment.

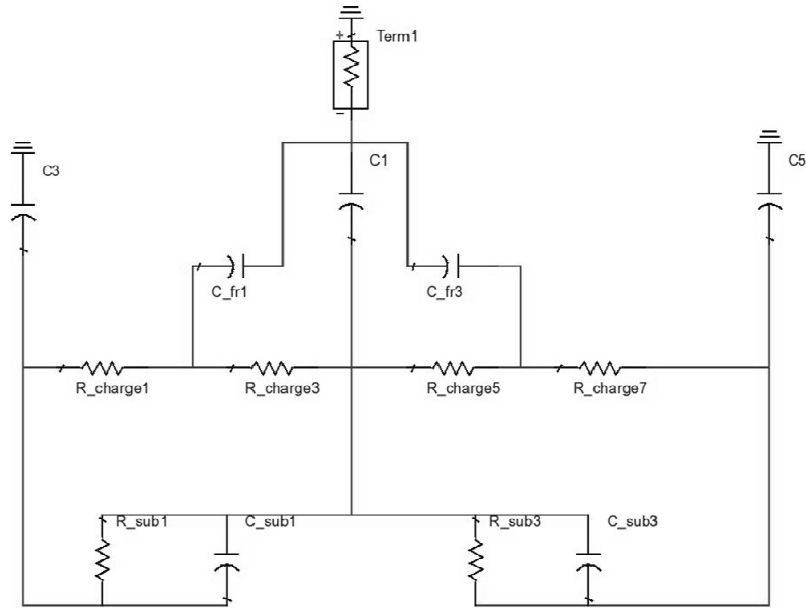


Figure 4.10 Circuit électrique équivalent (plots + substrat + C_{fr})

Ensuite, nous avons tenté d'ajuster les valeurs de capacité du substrat (C_{sub}), de résistance de charge (R_{charge}) et de capacité de « fringing » pour égaler les valeurs du modèle et des mesures du paramètre S_{11} . Malheureusement, quelque soit les valeurs fournies dans ce schéma électrique, le paramètre S_{11} du modèle électrique associé reste constant avec la fréquence (Modèle sans pointes, Figure 4.11) alors que l'on voit clairement que le paramètre chute avec la fréquence dans le cas de la mesure.

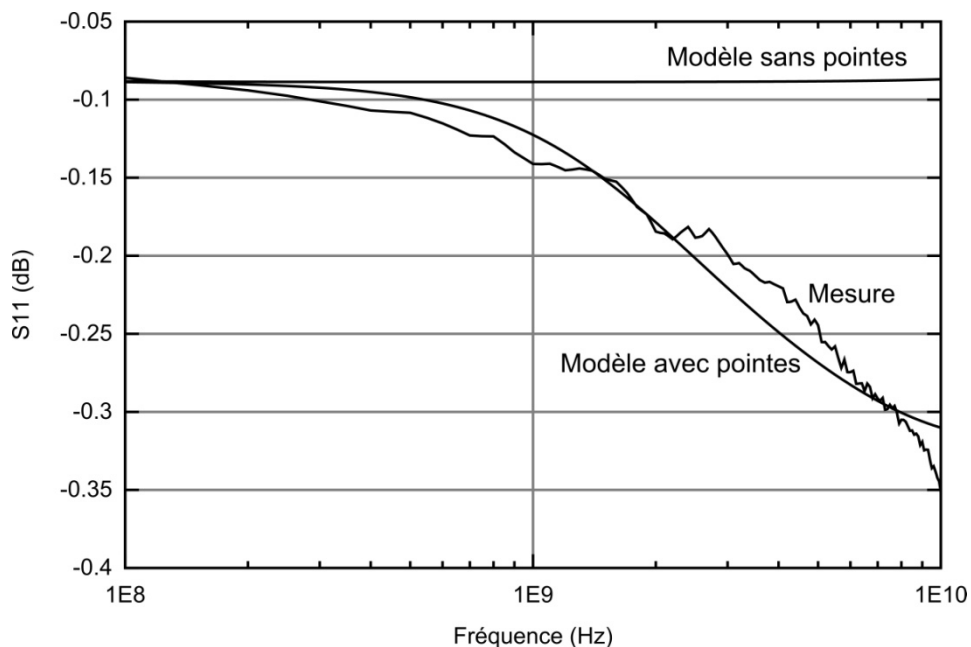


Figure 4.11 Variations du paramètre S_{11} fonction de la fréquence (Mesure, modèle sans pointes, modèle avec pointes)

Pour rendre compte de ce phénomène il est nécessaire de rajouter un couple R_{para} , C_{para} . Ce couple pourrait décrire la présence de la pointe malgré la calibration SOLT. En effet, la pointe elle-même introduit une capacité, qui par mesure a pour valeur une dizaine de femto Farads. Mais ce couple apparaît intimement lié au phénomène de charges à l'interface, effet indépendant d'une plaque à l'autre comme en témoigne la Figure 4.9. Nous ajoutons donc au schéma électrique précédent le couple R_{para} , C_{para} (Figure 4.12). Ceci nous permet donc d'avoir une correspondance entre la mesure effectuée sur un plot et le modèle électrique (Figure 4.11). Nous reportons dans le Tableau IV.I les valeurs numériques des différents paramètres mentionnés ci-dessus.

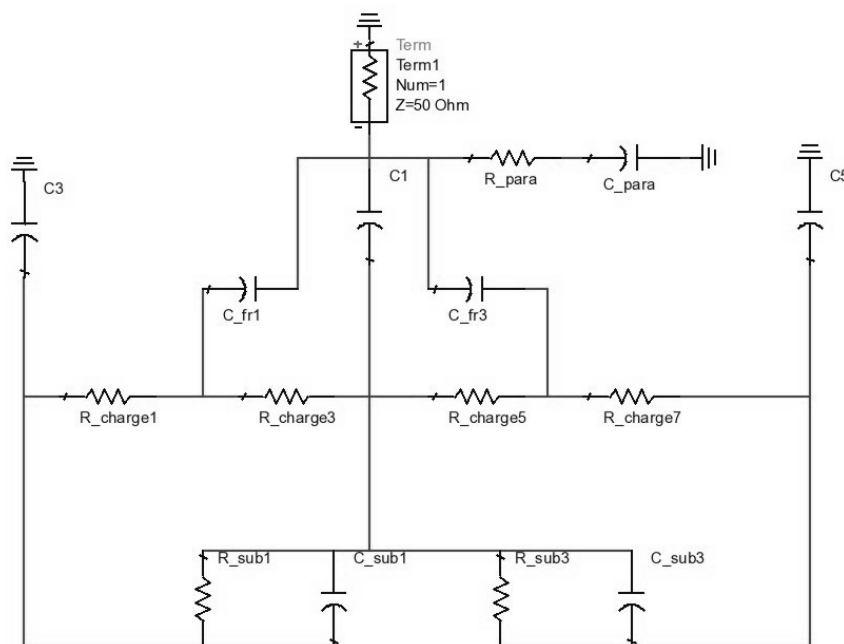


Figure 4.12 Circuit électrique équivalent d'un plot sur la plage 100MHz-10GHz

C_{sub}	23 fF
C_{fr}	5 fF
R_{charge}	10.5 k Ω
R_{para}	5 k Ω
C_{para}	15 fF

Tableau IV.I VALEURS NUMERIQUES DU SCHEMA ELECTRIQUE EQUIVALENT 1 PORT

Nous avons souhaité vérifier que les valeurs introduites dans le schéma électrique avaient une réalité électrique. Pour cela, nous avons effectué une calibration SOLT, puis nous avons réalisé une mesure de paramètre S_{11} . Le paramètre S_{11} nous permet de définir la capacité et la résistance équivalentes au travers des formules suivantes (Equation 4.2 et 4.3) où $\Re$ et $\Im$ représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire.

$$R_{eq} = \Re(Z_{1,1}) \quad \text{Eq. 4.2}$$

$$C_{eq} = \frac{-1}{2\pi \text{ fréquence} \Im(Z_{1,1})} \quad \text{Eq. 4.3}$$

Nous représentons dans la (Figure 4.13) ces dernières. Nous relevons à hautes fréquences la valeur de la capacité introduite par le substrat, ici 50fF. Cette valeur est typique d'un substrat HR. Nous relevons à basses fréquences une capacité de 500fF qui rejoint la valeur de la capacité de déplétion mesurée en C(V).

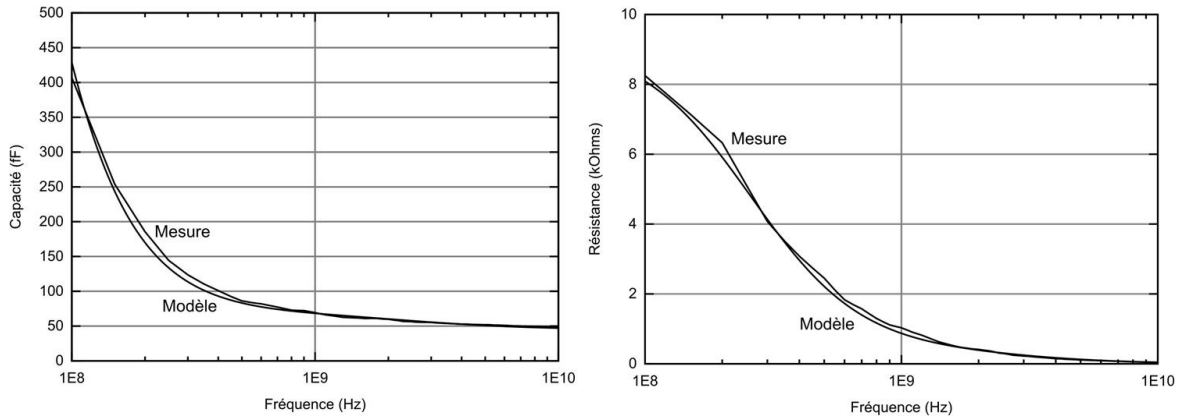


Figure 4.13 Variation des paramètres équivalents représentant le plot fonction de la fréquence

D'autre part, les charges à l'interface vont introduire lors de l'excitation du résonateur un chemin parallèle à celui du résonateur. Un autre couple $R_{couplage}$, $C_{couplage}$ doit être ajouté pour prendre en compte ce chemin qui sera dans notre cas parasite. Une résistance $R_{c_couplage}$ est également représentée et liée au $C_{couplage}$ par l'équation 4.1, comme discuté précédemment. Nous avons effectué des mesures de plots en « 2 ports » sans le résonateur (Figure 4.8). Puis nous avons modélisé l'ensemble à partir du schéma électrique d'un plot seul et du couple $R_{couplage}$, $C_{couplage}$ (correspondant au chemin par le substrat, Figure 4.14). De même que précédemment, nous avons ajusté les valeurs de ces deux paramètres pour obtenir les mesures en deux ports (Figure 4.15). Les valeurs numériques de ces composants sont reportées dans le Tableau IV.II.

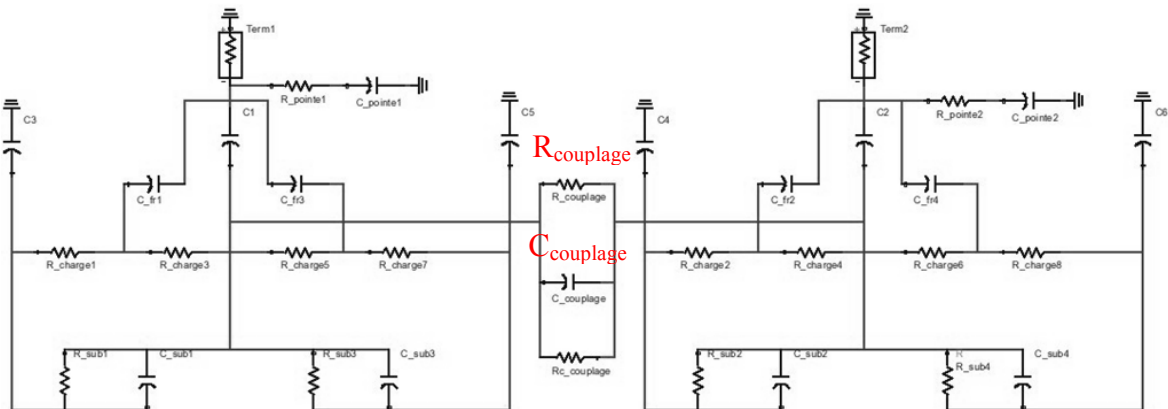


Figure 4.14 Schéma électrique équivalent de la mesure 2 ports

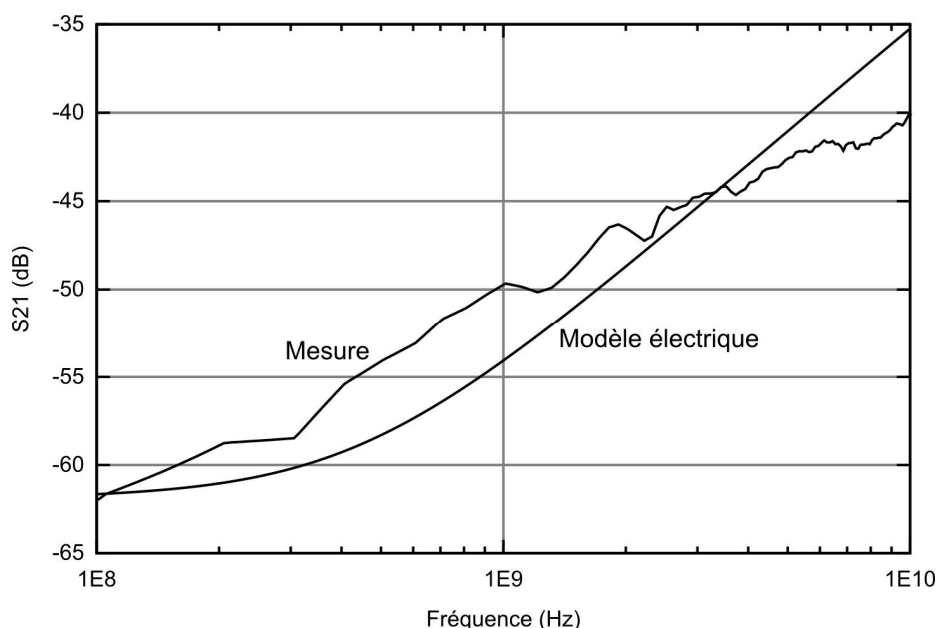


Figure 4.15 Comparaison des paramètres S_{21} du modèle électrique et de la mesure 2 ports

R_{couplage}	130k Ω
C_{couplage}	3fF

Tableau IV.II VALEURS NUMERIQUES DU MODELE ELECTRIQUE EQUIVALENT 2 PORTS

Nous utiliserons par la suite ces modélisations lorsque nous établirons le modèle électrique du résonateur à ondes de volume dans la partie '4.5.1.2'. Nous avons vu que les pointes jouaient un rôle à très hautes fréquences. Or, nos résonateurs fonctionnent dans le meilleur des cas à 87MHz. De ce fait, nous omettrons les capacités et résistances de pointes, nécessaires à la modélisation du plot à hautes fréquences, dans la modélisation du résonateur puisqu'elles ne jouent aucun rôle à basses fréquences (Figure 4.11).

4.4 Mesure des poutres trouées

4.4.1 Introduction

A présent, nous allons discuter des mesures de nos poutres sur lesquelles ont été positionnés des trous. Nous avons montré dans les Parties 1 et 2 que la position et le nombre de trous étaient des éléments importants dans la conception des structures. En effet, nous avons vu que selon la position, la fréquence pouvait augmenter ou diminuer par rapport à la fréquence d'une structure sans trou. Pour prouver le concept de notre méthode de correction, nous nous sommes tournés vers des structures « faciles » à caractériser telles que peuvent l'être des poutres en flexion vibrant à basses fréquences (poutre encastree-encastree ~700kHz). Nous avons donc mesuré ces dispositifs sur le banc du CEA-Léti à partir d'un montage « 2 ports » (Figure 4.16).

4.4.2 Poutre encastrée-encastrée

Le modèle analytique de la partie 2 a été développé pour une poutre encastrée-encastrée en flexion dont les vibrations se font dans le plan du substrat. Les poutres ont été mesurées grâce au détecteur synchrone (LIA) à une pression de 10^{-3} mBar. La poutre est polarisée par une tension continue V_{DC} . Un signal sinusoïdal est appliqué sur la première électrode et nous mesurons le signal de sortie par le LIA sur la seconde électrode (Figure 4.16).

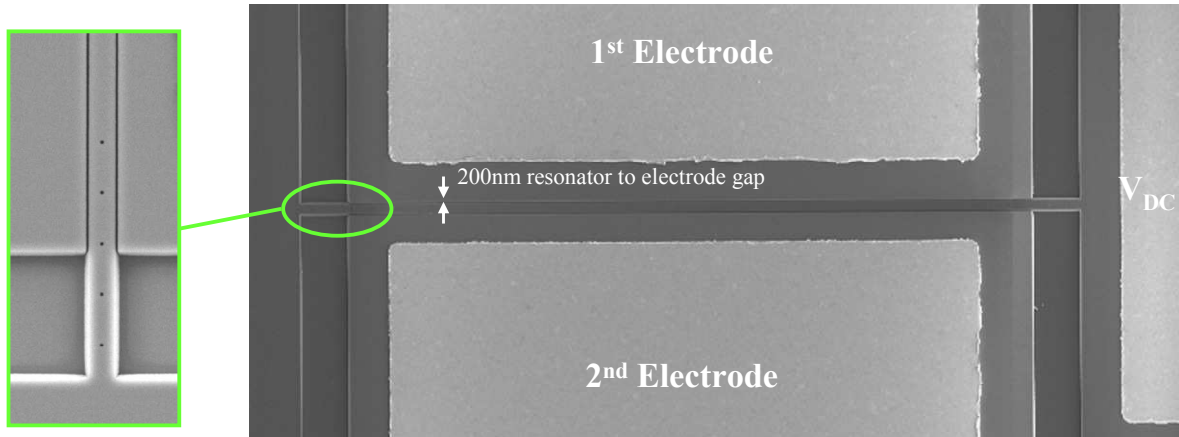


Figure 4.16 Vue MEB d'une poutre caractérisée en 2 ports

4.4.2.1 Influence de la tension de polarisation

Dans un premier temps, nous avons vérifié l'évolution de la fréquence de résonance en fonction de la tension V_{DC} . Nous avons vu dans la partie 1 qu'une raideur électrique négative apparaissait à cause de la tension de polarisation. La Figure 4.17 rapporte les courbes de résonance pour des tensions comprises entre 5 et 12V, avec pour tension d'excitation 0.2V crête-à-crête. La structure mesurée est une poutre de longueur $L=159\mu m$, $W=2\mu m$ comportant 2×5 trous au niveau du maximum de déplacement de la poutre, i.e le centre de celle-ci. La fréquence diminue bien avec la tension et on note une augmentation du signal de sortie. Pour $V_{DC} = 5V$, nous mesurons une fréquence de $715kHz$ qui est en bon accord avec la valeur donnée par le modèle analytique de $715.916kHz$ et celle issue de la simulation par éléments finis de $716kHz$. La résistance motionnelle est de $81k\Omega$ et le facteur de qualité de 950. Cette faible valeur s'explique d'abord par la valeur élevée, 200nm, de l'entrefer électrostatique. En effet, le facteur de qualité est inversement proportionnel au gap. Les dimensions intrinsèques sont aussi responsables de cette valeur [102]. Le résonateur n'a pas été conçu de façon optimale pour garantir un très bon facteur de qualité. Les pertes par les ancrages sont plus importantes pour des poutres à hautes fréquences [103]. Enfin, cette valeur peut s'expliquer par le fait que les trous modifient la structure et donc par conséquent induisent une diminution du facteur de qualité. Ceci a été mis en évidence par les publications [37, 38, 39], que nous avons discutées dans le chapitre 1.

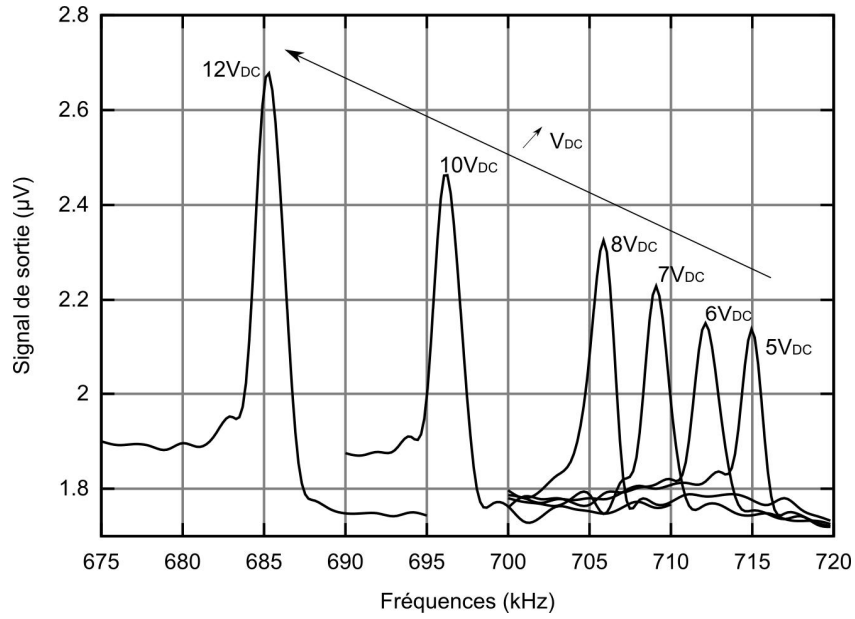


Figure 4.17 Variation de la fréquence de résonance pour différentes tensions V_{DC} , $V_{AC} = 0.2V$, $P = 10^{-3}mBar$

Nous avons représenté sur la Figure 4.18, la fréquence de résonance fonction du carré de la tension de polarisation, ceci afin de confirmer l'équation 1.11. La courbe de tendance linéaire associée aux différents points de mesures, dont le coefficient de corrélation R^2 est égal à 0.9997, montre que les mesures sont en parfait accord avec l'équation mentionnée ci-dessus.

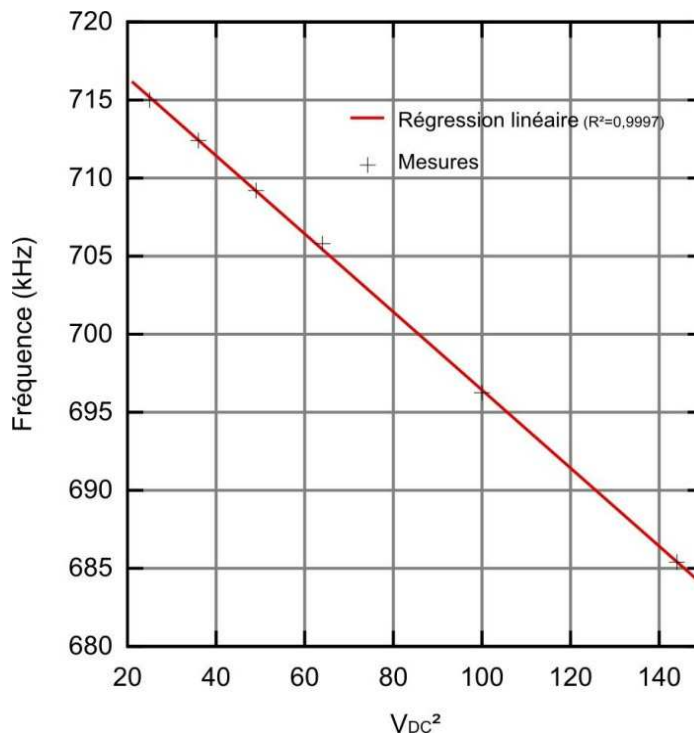


Figure 4.18 Fréquence de résonance fonction de la tension de polarisation au carré (V_{DC}^2)

4.4.2.2 Distributions des trous

Le but de nos travaux était dans un premier temps de comprendre l'influence des trous sur la fréquence de résonance et par la suite de corriger la fréquence de résonance du fait des variations de dimensions des résonateurs imputées aux différentes étapes de fabrication. Nous avons ainsi mesuré trois structures :

- Une poutre sans trou de $159\mu\text{m}$ de long et de $2\mu\text{m}$ de large (Figure 4.19 a),
- Une poutre de $159\mu\text{m}$ de long et de $2\mu\text{m}$ de large comportant 2x5 trous ($250\times 250\text{nm}^2$) en position « V » (Figure 4.19 b),
- Une poutre de $159\mu\text{m}$ de long et de $2\mu\text{m}$ de large comportant 2x5 trous ($250\times 250\text{nm}^2$) en position « I » (Figure 4.19 c).

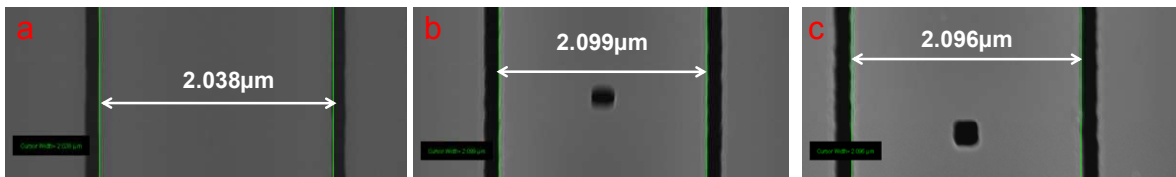


Figure 4.19 Mesure MEB de la largeur des poutres

Les structures mesurées sont espacées de moins de $500\mu\text{m}$. Donc les variations imputées au processus de fabrication sont négligeables. Les mesures MEB de la Figure 4.19 confirment cette hypothèse.

Nous remarquons que la fréquence augmente de 0.43% pour la structure avec les trous en « V » et diminue de 0.22% pour la position « I » (Figure 4.20). Nous avons alors confronté le modèle à nos mesures. Dans un premier temps, nous avons fait ajuster notre modèle à la mesure de la poutre ne comportant pas de trou pour prendre en compte les faibles variations imputées au procédé de fabrication. Puis nous avons reporté cet ajustement dans les deux autres cas. Les mesures sont en parfait accord avec le modèle développé dans la partie 2 lorsque nous considérons les variations vers le haut ou vers le bas de la fréquence nominale (Figure 4.21). De plus, nous reportons moins de 0.4% de différence entre le modèle et les mesures (Tableau IV.III). Dans les deux cas « V » et « I », le modèle accentue les variations de fréquences. Ceci peut s'expliquer par la forme des ancrages. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent que les grandes zones présentaient des flancs de gravure non verticaux. Ce qui peut induire une différence au niveau de la fréquence de résonance.

Néanmoins la différence de fréquence mesurée sur ces dispositifs aux dimensions identiques mais présentant des trous positionnés dans les différentes zones définies plus tôt prouve la validité de notre concept de correction. Nous reportons dans le Tableau IV.IV un récapitulatif des mesures pour les différents résonateurs troués avec leur tension d'excitation, la fréquence et le facteur de qualité.

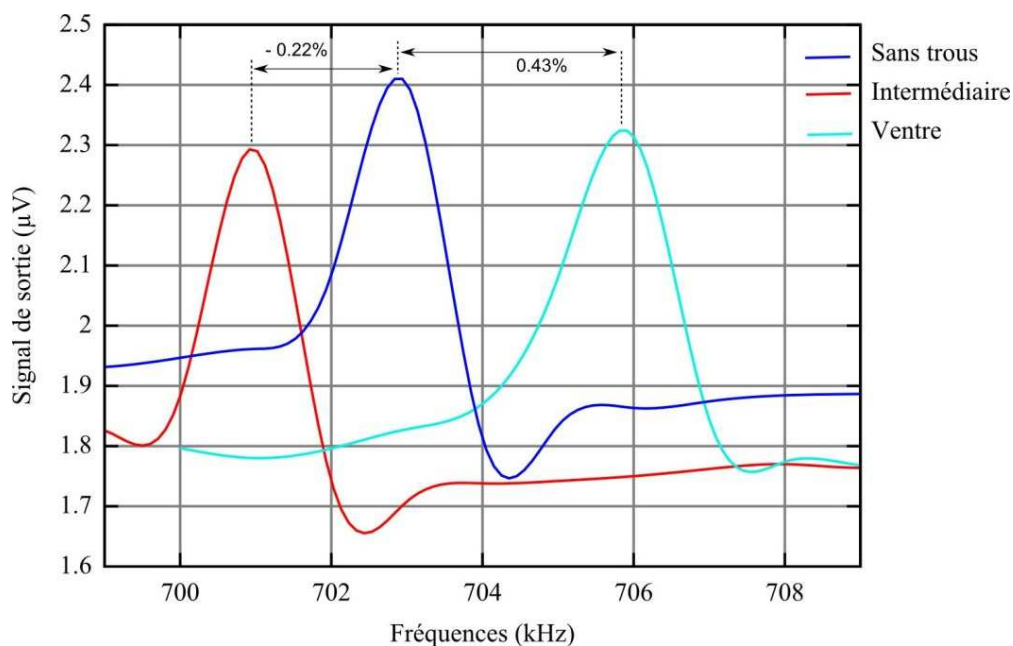


Figure 4.20 Variations de la fréquence pour différentes répartitions des trous (« V », « I »)

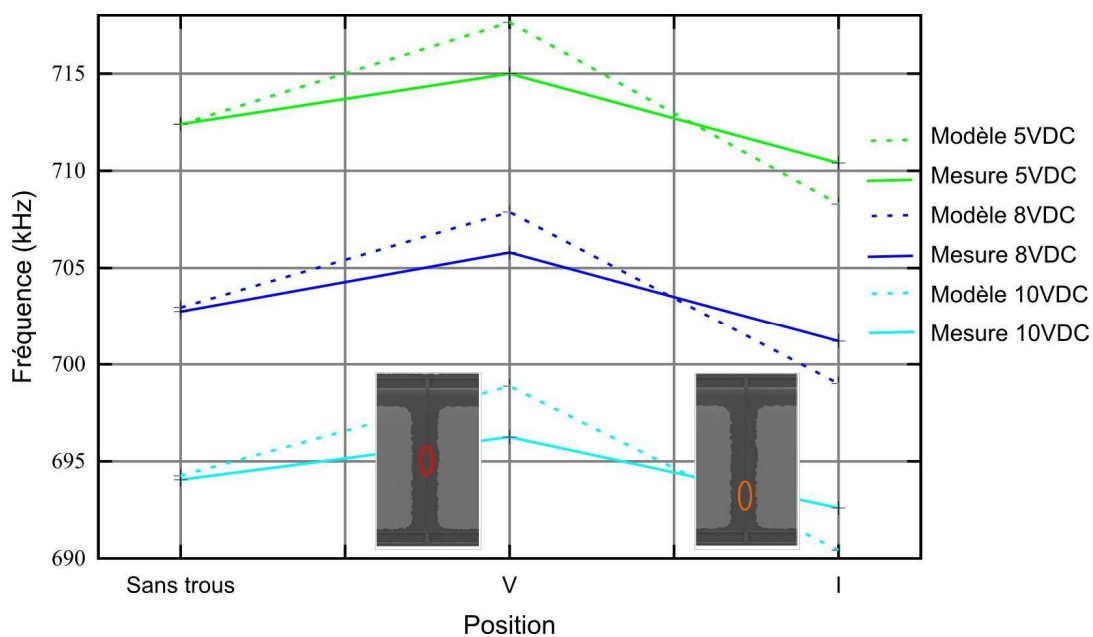


Figure 4.21 Comparaison des mesures et du modèle analytique pour différents V_{DC} ($L=159\mu m$, $W=2\mu m$, 2×5 trous ($250 \times 250 nm^2$))

Répartition des trous	Tension V_{DC} (V)		
	5	8	10
<i>Sans trou</i>	-0.0012	0.0301	0.0298
« <i>V</i> »	0.3674	0.2941	0.3760
« <i>I</i> »	-0.2978	-0.3144	0.3146

Tableau IV.III DIFFERENCE ENTRE LES VALEURS FOURNIES PAR LE MODELE ET LES MESURES (%)

Nom	Dispo 14_2			Dispo 14_14			Dispo 14_15		
<i>Trous</i>	Sans trous			Intermédiaire (2x5, 250x250nm ²)			Ventre (2x5, 250x250nm ²)		
<i>Tension (V_{DC})</i>	5	8	10	5	8	10	5	8	10
<i>Fréquence (kHz)</i>	712	703	694	710	701	693	715	706	696
<i>Q</i>	890	1562	1157	1776	1753	1154	950	706	696
<i>R_m (MΩ)</i>	2.8	1.6	2.1	1.4	1.4	2.1	2.8	3.6	3.6

Tableau IV.IV FREQUENCES, FACTEURS DE QUALITE ET RESISTANCES MOTIONNELLES DES POUTRES

Au vu des résultats du Tableau IV.IV, nous pouvons remarquer que le facteur de qualité est plus important dans le cas des trous au niveau de la zone intermédiaire et chute lorsqu'ils sont placés au niveau du ventre, i.e le centre de la poutre. Même s'il n'y a pas eu d'étude statistique sur la valeur du Q, on retrouve bien le fait que les trous influent beaucoup le facteur de qualité lorsqu'ils sont placés au niveau du maximum de déplacement, comme mentionné précédemment.

4.4.3 Conclusion

Nous avons détaillé dans cette partie les caractérisations électriques des poutres présentant des trous en différentes positions. Les caractérisations ont nécessité d'implémenter des plots électriques Cr / Au qui malheureusement ne permettent pas de réaliser une étape d'épitaxie ou d'oxydation. Cependant, nous avons tout de même validé le principe et la possibilité d'augmenter ou de diminuer la fréquence en positionnant les trous différemment suivant la longueur du résonateur. Ce résultat valide donc la possibilité d'augmenter ou de diminuer la fréquence par un ajout de matière localisé.

4.5 Mesure des structures à ondes de volume

4.5.1 Mesure avant correction

La méthode utilisée pour mesurer les structures à ondes de volume a été utilisée et améliorée par M. Julien ARCAMONE au CEA-Léti [34] lors du projet MTR. Elle consiste à exciter le résonateur et récupérer le signal de sortie en mode différentiel (Figure 4.22). Il

est également possible de limiter les effets parasites en polarisant de façon dissociée deux des quatre électrodes.

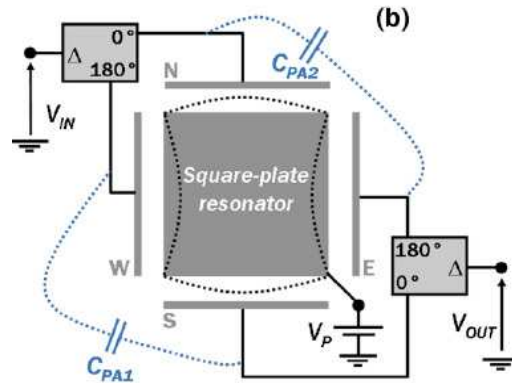


Figure 4.22 Principe de mesure différentielle d'une plaque à ondes de volume

4.5.1.1 Plaques 20MHz

Dans un premier temps, nous avons mesuré les plaques à 20MHz au CEA-Léti. La Figure 4.23 présente la variation de la fréquence de résonance en fonction de la tension pour une plaque de côté $205.54\mu\text{m}$ avec des trous de 500nm de côté répartis uniformément sur toute la surface de la plaque, mesurée sous une pression de 10^{-3}mBar . La plaque est maintenue par 4 ancrages rectangulaires qui ont pour dimensions $18 \times 1\mu\text{m}^2$.

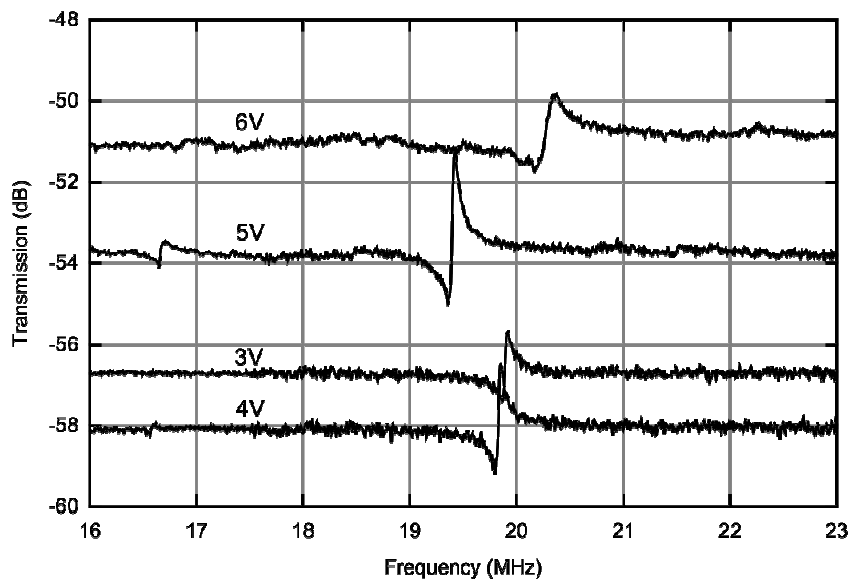


Figure 4.23 Mesure électrique d'une plaque pour différentes valeurs de V_{DC}

A $3V_{DC}$, la plaque résonne à 19.89MHz alors que la simulation par éléments finis indique une résonance à 17.19MHz . Nous remarquons un phénomène étrange lorsque la tension de polarisation augmente. En effet, nous nous attendons à une diminution de la fréquence avec l'augmentation du V_{DC} . Ceci est vrai pour les premières valeurs de tension (jusqu'à $5V$). Puis la fréquence augmente avec la tension de polarisation. Ce phénomène n'apparaît pas dans le cas de structures plus petites telles que les plaques et disques à 80MHz , de même que pour les poutres. Ceci pourrait donc s'expliquer par le phénomène de charges,

dépendant de la tension, mis en évidence dans la partie précédente. Ces dernières créeraient une capacité parasite entre le corps du résonateur et le substrat et donc une raideur supplémentaire qui viendrait annuler la raideur négative engendrée par la tension de polarisation. Une autre explication serait que la tension de polarisation soit modifiée par la présence de ces charges. Ayazi et Al. [104] ont montré qu'il était possible de polariser un résonateur en intégrant des charges intrinsèquement dans le résonateur au moment de sa fabrication. Il est également plausible que cet effet de charge eut été accentué lors de l'étape d'implantation du Silicium. En effet, nous souhaitons un dopage important pour garantir une très bonne conduction. Il se pourrait alors que du phosphore se soit retrouvé dans le substrat. Malheureusement, nous n'avons pas pu vérifier cette hypothèse par une mesure adéquate de type SIMS.

Nous avons également caractérisé un autre résonateur de type plaque également de $205.54\mu\text{m}$ avec des trous de 500nm de côté à STMicroelectronics (Figure 4.24). Nous remarquons que le dispositif réagit de la même façon avec une diminution (pour V_{DC} compris entre 5 et 7V) puis une augmentation (à partir de 8V) de la fréquence de résonance. Cependant, les signaux sont dans l'ensemble de meilleure qualité grâce à la calibration électrique et la présence des pointes de masse.

Nous notons que la fréquence de résonance a diminué de 6% (à $5V_{\text{DC}}$, 19.5MHz sous vide contre 18.3MHz sous air). Ceci s'explique par le fait que les mesures sont réalisées à l'air, les mouvements sont alors amortis. L'air agit comme une raideur négative et par conséquent la fréquence diminue. De plus les variations des dimensions de la plaque imputées à la réalisation technologique de la structure peuvent également induire un décalage en fréquence.

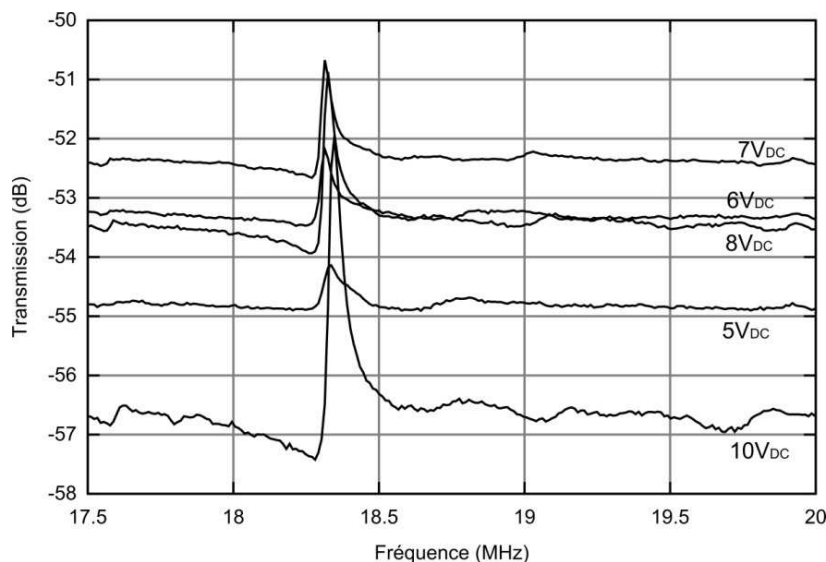


Figure 4.24 Mesure électrique d'une plaque fonction de la tension V_{DC}

4.5.1.2 Disques 87MHz

A plus haute fréquence, il est nécessaire de limiter au maximum l'influence des câbles et des pointes, et de ramener la masse au plus près des dispositifs. Nous avons donc mesuré des disques dont la fréquence se situe autour de 87MHz à STMicroelectronics. De manière générale, les disques présentent de meilleurs signaux. Nous présentons à travers la Figure 4.25, les mesures électriques d'un disque de rayon $19.88\mu\text{m}$ perforé de trous de côté 250nm répartis uniformément sur ce-dernier maintenu par quatre ancrages en diapason.

Le disque est polarisé par un V_{DC} variant de 0 à 9V et excité par les électrodes d'entrée avec une puissance de 5dBm. Nous pouvons vérifier que la fréquence diminue lorsque la tension V_{DC} augmente et que l'intensité maximale du signal augmente quant à lui avec le V_{DC} . La fréquence mesurée est de 87.37MHz pour $V_{\text{DC}} = 9\text{V}$ avec un facteur de qualité de 1500 (Figure 4.25). Les simulations par éléments finis prédisaient une fréquence de 87.53MHz, ce qui est en parfait accord avec les mesures. Nous pouvons également voir les autres modes de résonance du disque aux fréquences suivantes : 83.35MHz et 88.69MHz (Figure 4.26).

Le facteur de qualité est loin de nos attentes (cf : 10000). Plusieurs facteurs peuvent expliquer cet écart. Premièrement les mesures ont été réalisées à l'air libre. Deuxièmement l'épaisseur du résonateur ne fait que $1.4\mu\text{m}$ alors que plus elle est élevée, plus le facteur de qualité est important. Le design des ancrages n'a pas été optimisé et nous avons aussi vu dans la partie 1 que les trous pouvaient engendrer des pertes.

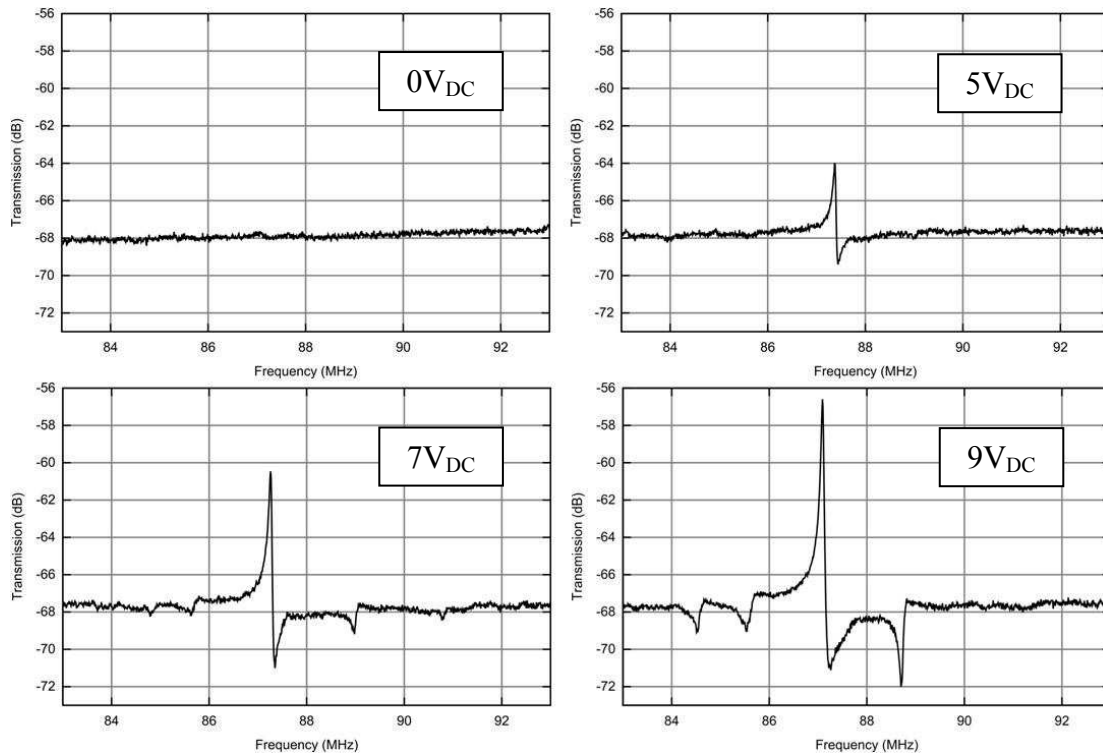


Figure 4.25 Mesure électrique d'un disque pour différentes valeurs de V_{DC}

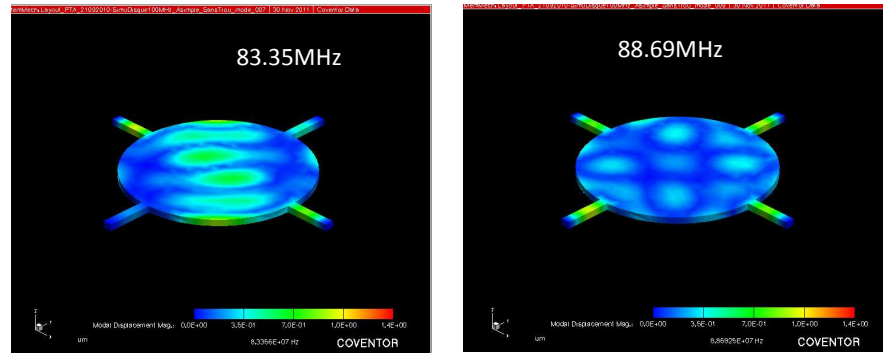


Figure 4.26 Représentation sous Coventor® des autres modes de résonance du disque

A partir de la modélisation d'un plot simple (Figure 4.12), de la modélisation de l'effet de couplage par le substrat (Figure 4.14) et de l'extraction des paramètres R_{mot} , C_{mot} et L_{mot} de la mesure (Figure 4.25), il est possible de modéliser électriquement le résonateur. Les Figure 4.27 et Figure 4.28 présentent le modèle électrique associé au résonateur lors de la mesure en différentielle (Figure 4.22), et compare la mesure électrique du résonateur de type disque avec son modèle électrique en tenant compte de l'ensemble des modélisations précédentes. Le Tableau IV.V rapporte les différentes valeurs du modèle électrique. La résistance de couplage entrée-sortie a du être ajustée par rapport aux données du Tableau IV.II. Ceci s'explique par le fait que l'espace entre les plots de signal est réduit dans le cas où le résonateur est présent. La valeur est cohérente car la distance est plus courte lorsque le résonateur est présent, donc la valeur de résistance est plus faible.

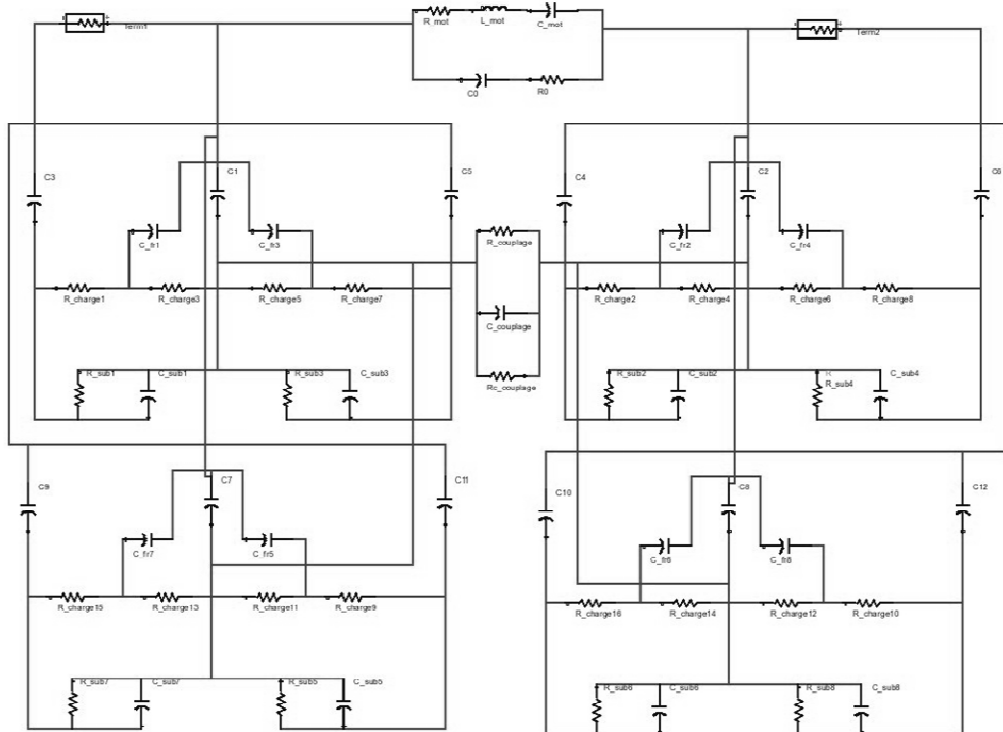


Figure 4.27 Modèle électrique complet du résonateur disque

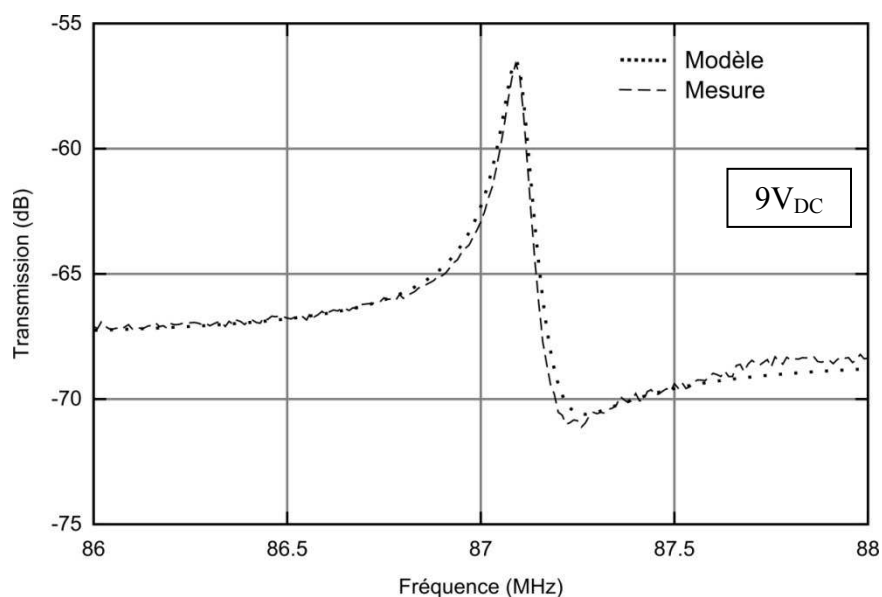


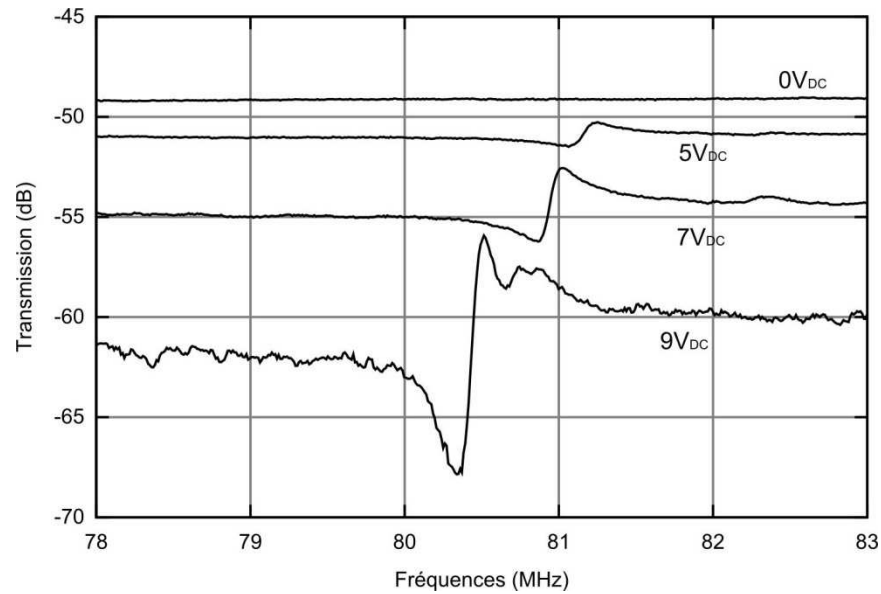
Figure 4.28 Comparaison du modèle électrique avec la mesure pour $9V_{DC}$

C_{sub}	23fF	R_{mot}	5.0k Ω
C_{fr}	5fF	L_{mot}	19.64mH
R_{charge}	1.09k Ω	C_{mot}	170aF
$R_{couplage}$	2.5k Ω	R_0	14.4k Ω
$C_{couplage}$	2fF	C_0	95fF

Tableau IV.V VALEURS NUMERIQUES ASSOCIEES AU MODELE ELECTRIQUE DU RESONATEUR

4.5.1.3 Plaques 80MHz

Nous discutons ici d'un résonateur à ondes de volume de type plaque de 42.58 μ m de côté avec des trous carrés de 500nm répartis uniformément. La plaque est polarisée par un V_{DC} variant de 0 à 9V également et excitée par la même puissance RF que pour le disque, i.e 5dBm. Nous pouvons voir sur la Figure 4.29 que le signal est beaucoup moins bon que pour le disque comme annoncé précédemment. Les ancrages pour cette structure font 2x10 μ m², ce qui favorise les pertes et rend la structure moins performante. Les simulations par éléments finis prédisaient une fréquence légèrement inférieure à 78MHz.


 Figure 4.29 Mesure électrique d'une plaque pour différentes valeurs de V_{DC}

4.5.1.4 Conclusions

Nous avons ainsi réalisé les mesures des dispositifs avant correction. Les mesures montrent que le procédé de fabrication est viable et a permis de fabriquer des résonateurs fonctionnels malgré le temps perdu en début du processus de fabrication. Les structures disques ont montré dans l'ensemble de meilleurs résultats en termes de signaux électriques. En outre, le phénomène de charges, connus dans la littérature, a été mis en évidence d'une part par des mesures de $C(V)$ mais également par les mesures fréquentielles de structures à basses fréquences pour lesquelles les dimensions latérales dépassent la centaine de micromètres et favorise donc ce dernier. Nous reportons dans le Tableau IV.VI le récapitulatif des mesures des structures à ondes de volume.

Nom	Dispo D_3			Dispo I			Dispo F_2			Dispo F_13		
Type	Disque			Plaque			Plaque			Plaque		
Ancrages	Diapason			Simple			Simple			Simple		
Trous	Uniforme carré 250nm			Uniforme carré 500nm			Uniforme carré 250nm			Uniforme carré 250nm		
Fréquence modale FEM (MHz)	87.53			76.59			17.19			17.19		
Tension (V_{DC})	5	7	9	5	7	9	5	7	10	3	5	6
Fréquence (MHz)	87.4	87.3	87.1	81.3	81.0	80.5	18.34	18.31	18.35	19.93	19.43	20.37
Q	380	1050	1427	507	506	805	305	915	458	200	388	185

Tableau IV.VI FREQUENCES, TENSIONS ET FACTEURS DE QUALITE DES MESURES DES STRUCTURES A ONDES DE VOLUME

4.5.2 Mesures électriques après correction

Malheureusement, comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, les dispositifs fonctionnels n'ont pas résisté aux étapes humides de la correction. L'oxyde enterré, dont l'épaisseur est très faible, est la cause de cet échec.

4.6 Conclusion

Ce chapitre était dédié aux caractérisations électriques des dispositifs conçus dans cette étude. Dans un premier temps, nous avons effectué un travail de compréhension et modélisation du substrat et des effets de charges à l'interface Si BULK / Oxyde. Puis, nous avons caractérisé des dispositifs afin de valider les deux méthodes de correction déjà évoquées. Nous avons donc mesuré les structures à mode de flexion pour lesquels nous avons réalisé des « splits » de trous sur différentes structures. Nous avons mis en évidence une variation de la fréquence fonction de la position des trous sur le résonateur. De plus, nous avons confronté ces mesures au modèle analytique de la partie 2. Nous avons montré une différence inférieure à 0.4% entre le modèle analytique et les mesures électriques. Nous avons donc validé notre modèle analytique pour les structures trouées et par la même occasion de principe de réduction de la Gaussienne par une correction localisée. Même si aucune mesure électrique n'a pu venir conforter le modèle analytique pour la correction, nous pouvons espérer au moins des performances équivalentes au modèle analytique des structures trouées. Ces modèles pourront devenir dans le futur des éléments essentiels à la conception de résonateurs troués tant pour la libération des structures que pour éviter les phénomènes d'amortissement, ou encore pour la précision d'adressage en fréquence (notre objectif actuel).

D'autre part, nous avons caractérisé électriquement des structures dites à ondes de volume. Sur ces mesures, nous avons cherché à comprendre au mieux les phénomènes de pertes et de charges par le substrat. Nous avons ainsi développé un modèle électrique détaillé prenant en compte le résonateur lui-même mais également les plots et le substrat.

Ce travail nous permet de pointer un certain nombre d'éléments à améliorer pour d'une part obtenir des structures fonctionnelles même après correction et surtout augmenter les performances intrinsèques du résonateur.

- Nous devons limiter au maximum le phénomène de charges à l'interface. Ceci passe par l'utilisation d'un substrat SOI dont l'oxyde enterré est relativement épais. Cette caractéristique est également valable pour limiter les capacités parasites des plots. Les récentes avancées dans le processus de fabrication des substrats SOI limitent désormais le piégeage de charges à l'interface. D'autre part, l'implantation de la couche supérieure de Silicium, couche de conduction du résonateur, doit être contrôlée de manière drastique pour éviter tout transfert de charges dans l'oxyde et pire encore dans le substrat.

- Afin de laisser libre le résonateur, même après passage en phase humide, l'oxyde enterré doit être suffisamment épais. Ou alors, il faut développer une autre méthode de correction. On peut par exemple réaliser un dépôt d'oxyde non-conforme pour isoler le résonateur et s'en servir de couche sacrificielle. Puis par une étape de photolithographie, nous venons ouvrir les zones sur lesquelles nous voulons déposer le matériau. Après dépôt de la couche de correction et gravure, nous venons graver la couche d'oxyde par une solution vapeur.
- Enfin, pour une utilisation optimale, nous devons coupler les bancs de mesure, à savoir réaliser des mesures sous vide après calibration électrique grâce à des pointes GSG et un VNA.

Conclusion & perspectives

Nous avons vu que les résonateurs MEMS pouvaient potentiellement remplacer les résonateurs en Quartz pour les applications de base de temps d'un point de vue performances (fréquence et facteurs de qualité). Ils présentent en effet aujourd'hui des performances de tout premier ordre ($f > 100\text{MHz}$, $Q > 100000$). Néanmoins, la précision d'adressage de la fréquence et la stabilité en température restent encore des points bloquants pour l'industrialisation de ces composants. L'utilisation d'une structure Oxyde / Silicium et d'un tuning électrostatique est aujourd'hui la solution pour éviter des dérives en température du résonateur avec des performances comparables au TCXO (2.5ppm sur $-10^{\circ}\text{C} : +80^{\circ}\text{C}$) [105]. L'objectif de nos travaux était de compenser les variations fréquentielles dues à la réalisation technologique des résonateurs MEMS tout en limitant au maximum l'utilisation de l'électronique.

Dans un premier temps nous avons vu que les méthodes de compensation disponibles dans l'état de l'art ne nous permettaient pas d'obtenir les spécifications drastiques requises pour les applications de base de temps.

De notre côté, nous nous sommes orientés vers des méthodes dites passives avec une compensation en fin de processus de fabrication. La première méthode repose sur le remplissage de trous lors d'une ultime étape venant compenser les dérives antérieures. La seconde méthode, basée sur une correction localisée, paraît plus adaptée avec de meilleures performances.

Nous nous sommes donc attelés à développer un premier modèle physique traduisant l'influence des trous et de leur remplissage sur la valeur de la fréquence des structures résonantes. Malheureusement, cette méthode ne permet pas de garantir une fréquence identique à l'échelle du substrat en une seule et même étape. Nous nous sommes également intéressés à la modélisation de la correction localisée sur les différentes structures au travers d'un second modèle physique. Ce modèle nous a permis de mettre en évidence une correction à l'échelle du wafer, avec des performances proches des attentes de l'industrie. En effet, nous avons montré la possibilité de ramener la Gaussienne représentative de la dispersion de la fréquence de résonance sur un substrat à moins de 50ppm en considérant le cas le plus désavantageux. Dans le meilleur des cas, nous pouvons atteindre un écart final par rapport à la valeur visée de 5ppm. Ces deux modèles couplés aux simulations par éléments finis nous ont permis de dimensionner des résonateurs de type poutre vibrant en mode de flexion et des résonateurs à ondes de volume.

Puis, nous avons établi un ensemble d'étapes technologiques permettant de fabriquer les différents résonateurs modélisés. Nous avons ainsi développé entre autre une étape de lithographie électronique capable de définir des structures dites de grandes tailles (quelques dizaines de μm) en même temps que des structures de plus petites tailles

(quelques dizaines de nm). La gravure Silicium avec un fort facteur de forme a également été réalisée. Enfin les structures ont été libérées par une étape de gravure (sèche) à l'acide fluorhydrique. Après une première série de caractérisations électriques, nous avons effectué une étape dite de correction sur les résonateurs fonctionnels. Cette étape nous a permis de mettre en évidence les limites du substrat de départ ou de la méthode de correction par voie humide. Nous avons proposé une alternative pour rendre le processus de fabrication viable.

Enfin, les différents résonateurs obtenus ont été caractérisés électriquement. Dans un premier temps, nous avons implémenté un modèle électrique équivalent de l'ensemble Plot + Substrat que l'on a utilisé par la suite dans la modélisation du résonateur lui-même. Puis, nous avons pu vérifier le premier modèle physique développé dans le cadre de structures trouées, avec une déviation inférieure à 0.4% entre le modèle et les mesures. Nous avons également mesuré des composants dits à ondes de volume avant correction à l'air avec des performances plus que satisfaisantes. L'étude de ces mesures au travers de modèles électriques, ont mis en évidence la possibilité d'améliorer nettement les performances en choisissant correctement le substrat de départ. Les mesures après correction n'ont malheureusement pas pu être effectuées.

Au travers de ces étapes, nous avons proposé une méthode nouvelle répondant aux attentes de l'industrie afin de garantir des oscillateurs à base de MEMS à moindre coût et identiques en tout point du substrat. Ceci facilitera entre autre le travail des concepteurs pour concevoir le circuit électronique associé. En effet, si la fréquence est restreinte à une plage de fréquence plus petite, le circuit électronique sera moins complexe et donc la consommation électrique sera plus faible.

Si nous avons prouvé le concept de correction localisée tant d'un point de vue modélisation que réalisation (Variation de la fréquence fonction de la position des trous), il faudra valider cette approche par une réalisation au sein d'un environnement industriel et garantir une dispersion inférieure aux 50ppm envisagés.

Plusieurs pistes sont envisageables pour améliorer ces premiers résultats et garantir le niveau de performances requis.

Tout d'abord d'un point de vue conception, une optimisation des pistes électriques et un travail plus approfondi sur les ancrages des structures résonantes seront à mener.

Le type de matériau et l'épaisseur des différentes couches utilisées mériteraient une attention toute particulière pour une meilleure conduction d'une part et des étapes de gravure moins critiques. Ces deux paramètres méritent un compromis pour répondre aux attentes industrielles. De plus l'utilisation d'un oxyde enterré plus épais permettrait une meilleure isolation du résonateur vis-à-vis des pertes par le substrat.

Enfin, l'étape de correction bien qu'encourageante n'a pas permis d'atteindre les objectifs. Un travail plus approfondi sur le choix de la résine utilisée ainsi que le lift-off en lui-même

est à réaliser. En effet, il est nécessaire d'atteindre une résolution de 50nm pour ajuster à quelques parties par million la fréquence. De plus, l'étape de CO₂ supercritique doit être approfondie pour éviter le collage des structures au substrat. Une épaisseur d'oxyde plus épaisse peut également être une solution aux problèmes de collage. Sinon, une étape à base d'oxyde de protection peut-être envisageable mais complexifierait le procédé de fabrication. On peut également imaginer un processus avec une couche présente dès la première phase de fabrication que l'on viendrait graver en certains points pour ajuster la fréquence, par exemple au moyen d'un laser. Il sera nécessaire de dérouler de façon plus ou moins industrielle le processus de fabrication sur plusieurs plaques. Ensuite, il faudra étudier d'une part les variations au sein d'un wafer mais également d'une plaque à l'autre. Cette étude permettra de définir la méthode de correction optimale. Soit une méthode par dépôt, dans quel cas, on s'assurera qu'il n'est pas nécessaire de re-fabriquer un masque régulièrement sous peine d'augmenter considérablement le coût. Soit par une étape de gravure par laser d'une couche pré-existante, dans quel cas, il faudra vérifier la précision de l'étape.

Finalement, le dernier point crucial reste le packaging. L'état de l'art a montré une évolution nette des techniques d'encapsulation vis-à-vis de la stabilité de la fréquence. En effet, les premiers travaux reportés dans la littérature ont montré un décalage de la fréquence. Cette dérive a été réduite lors de l'utilisation des structures dites à ondes de volume. Enfin, bien qu'académique, une méthode a montré qu'il était possible de réaliser un packaging sans décalage de la fréquence. Pour un futur développement produit, les futurs industriels devront vérifier la stabilité du procédé de packaging sous peine que notre méthode de correction à quelques ppm près n'ait plus grand intérêt. On peut par exemple imaginer une relaxation des contraintes, responsables de la dérive, par un design astucieux autour du résonateur.

Enfin, pourquoi ne pas envisager une intégration monolithique du MEMS avec l'électronique ou bien un assemblage type 3D, via des TSV. Dans quel cas, l'étape de correction viendrait ajuster la fréquence de la fonction globale de l'oscillateur.

Bibliographie

- [1] S. Humad, R. Abdolvand, G. Ho, G. Piazza, and F. Ayazi, "High frequency micromechanical piezo-on-silicon block resonators," in *Electron Devices Meeting, 2003. IEDM'03 Technical Digest. IEEE International*, Dec. 2003, pp. 39.3.1–39.3.4.
- [2] V. Russino, F. Pieri, and P. Bruschi, "Design of an electronic oscillator for biosensing applications based on a mems resonator," in *Ph.D. Research in Microelectronics and Electronics (PRIME), 2011 7th Conference on*, July 2011, pp. 53 –56.
- [3] V. Varadan and J. Kalarickaparambil, "Rf mems and their applications," *John Wiley & Sons Ltd*, p. 394, 2003.
- [4] R. L. Kubena, G. M. Atkinson, W. P. Robinson, and F. P. Stratton, "A new high performance surface-micromachined tunneling accelerometer fabricated using nanolithography," *Journal of Vacuum Science Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures*, vol. 14, no. 6, pp. 4029 – 4033, Nov . 1996.
- [5] H. Ma and B. Chen, "The development of a valveless piezoelectric micropump," in *Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium, 2010. SEMI-THERM 2010. 26th Annual IEEE*, Feb. 2010, pp. 59 –67.
- [6] S. Guo, J. Wang, and J. Guo, "A novel type of micropump using solenoid actuator for biomedical applications," in *Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on*, April 2007, pp. 654 –659.
- [7] D. K. Agrawal, P. Thiruvengatanathan, J. Yan, and A. A. Seshia, "Electrically coupled mems oscillators," in *Frequency Control and the European Frequency and Time Forum (FCS), 2011 Joint Conference of the IEEE International*, May 2011, pp. 1 –5.
- [8] M. Kaynak, K. Ehwald, R. Scholz, F. Korndorfer, C. Wipf, Y. Sun, B. Tillack, S. Zehir, and Y. Gurbuz, "Characterization of an embedded rf-mems switch," in *Silicon Monolithic Integrated Circuits in RF Systems (SiRF), 2010 Topical Meeting on*, Jan. 2010, pp. 144 –147.
- [9] J. R. Vig, "Quartz crystal resonators and oscillators for frequency control and timing applications," *The Smithsonian/NASA Astrophysics Data System*, 1992.
- [10] M. A. Hopcroft, "Temperature-stabilized silicon resonators for frequency references," Ph.D. dissertation, Stanford, Sept. 2007.

- [11] E. Ollier, J. Arcamone, E. Lorent, E. Collinet, A. Niel, A. Berthelot, C. Marcoux, P. Renaux, C. Vizioz, D. Renaud, S. Hentz, F. Casset, J. Carpentier, and P. Robert, "Ic integration-compatible single crystal silicon 100mhz mems resonators with 60 air-gap and sub5v polarization voltage." in the Proc. of the MEMSWAVE 2010 conference, 2010.
- [12] H. Nathanson, W. Newell, R. Wickstrom, and J. Davis, J.R., "The resonant gate transistor," *Electron Devices, IEEE Transactions on*, vol. 14, no. 3, pp. 117–133, March 1967.
- [13] C. Durand, F. Casset, P. Renaux, N. Abele, B. Legrand, D. Renaud, E. Ollier, P. Ancey, A. Ionescu, and L. Buchaillot, "In-plane silicon-on-nothing nanometer-scale resonant suspended gate mosfet for in-ic integration perspectives," *Electron Device Letters, IEEE*, vol. 29, no. 5, pp. 494–496, May 2008.
- [14] N. Abele, V. Pott, K. Boucart, F. Casset, K. Segueni, P. Ancey, and A. Ionescu, "Comparison of rsg-mosfet and capacitive mems resonator detection," *Electronics Letters*, vol. 41, no. 5, pp. 242–244, March 2005.
- [15] A. Samarao and F. Ayazi, "Combined capacitive and piezoelectric transduction for high performance silicon microresonators," in *Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 2011 IEEE 24th International Conference on*, Jan. 2011, pp. 169–172.
- [16] G. Henriët, "Etude, réalisation et caractérisation d'un oscillateur intégrable," Ph.D. dissertation, Université Paris VI, Sept. 1991.
- [17] H. Majjad, J.-R. Coudeville, S. Basrour, and M. De Labachellerie, "Modeling and characterization of lame-mode microresonators realized by uv-liga," in *TRANSDUCERS-'01.-EUROSENSORS-XV.-11th-International-Conference-on-Solid-State-Sensors-and-Actuators.-Digest-of-Technical-Papers*. Springer, 2001, pp. 300–3 vol. 1.
- [18] S.-S. Li, Y.-W. Lin, Y. Xie, Z. Ren, and C.-C. Nguyen, "Micromechanical "hollow-disk" ring resonators," in *Micro Electro Mechanical Systems, 2004. 17th IEEE International Conference on. (MEMS)*, 2004, pp. 821–824.
- [19] J. Wang, J. Butler, T. Feygelson, and C.-C. Nguyen, "1.51-ghz nanocrystalline diamond micromechanical disk resonator with material-mismatched isolating support," in *Micro Electro Mechanical Systems, 2004. 17th IEEE International Conference on. (MEMS)*, 2004, pp. 641–644.
- [20] G. Ho, K. Sundaresan, S. Pourkamali, and F. Ayazi, "Micromechanical ibars: Tunable high- resonators for temperature-compensated reference oscillators," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 19, no. 3, pp. 503–515, June 2010.

- [21] R. Ruby, "Review and comparison of bulk acoustic wave fbar, smr technology," in *Ultrasonics Symposium, 2007. IEEE*, Oct. 2007, pp. 1029 – 1040.
- [22] K. Wang, A.-C. Wong, and C.-C. Nguyen, "Vhf free-free beam high-q micromechanical resonators," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 9, no. 3, pp. 347 –360, sep 2000.
- [23] W.-T. Hsu, J. Clark, and C.-C. Nguyen, "Q-optimized lateral free-free beam micromechanical resonators," vol. 2. TRANSDUCERS '01. EUROSENSORS XV. 11th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators., 2001, p. 1110.
- [24] S. Pourkamali, Z. Hao, and F. Ayazi, "Vhf single crystal silicon capacitive elliptic bulk-mode disk resonators-part ii: implementation and characterization," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 13, no. 6, pp. 1054–1062, Dec. 2004.
- [25] V. Kaajakari, T. Mattila, A. Oja, J. Kiihamaki, and H. Seppa, "Square-extensional mode single-crystal silicon micromechanical resonator for low-phase-noise oscillator applications," *Electron Device Letters, IEEE*, vol. 25, no. 4, pp. 173–175, April 2004.
- [26] S. Pourkamali, G. Ho, and F. Ayazi, "Vertical capacitive sibars," in *Micro Electro Mechanical Systems, 2005. 18th IEEE International Conference on. (MEMS)*, Jan.-3 Feb. 2005, pp. 211–214.
- [27] H. Lavasani, A. Samarao, G. Casinovi, and F. Ayazi, "A 145mhz low phase-noise capacitive silicon micromechanical oscillator," in *Electron Devices Meeting, 2008. IEDM 2008. IEEE International*, Dec. 2008, pp. 1–4.
- [28] L. Khine and M. Palaniapan, "High- q bulk-mode soi square resonators with straight-beam anchors," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 19, no. 1, p. 015017, 2009.
- [29] A. Samarao, G. Casinovi, and F. Ayazi, "Passive tcf compensation in high q silicon micromechanical resonators," in *Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 2010 IEEE 23rd International Conference on*, 24-28 2010, pp. 116 –119.
- [30] F. Casset, C. Durand, P. Ancey, M. Aïd, and L. Buchaillet, "Tuning beam electromechanical resonators." in the Proc. of the MEMSWAVE 2007 conference, 2007.
- [31] Y. Ahn, H. Guckel, and J. D. Zook, "Capacitive microbeam resonator design," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 11, no. 1, p. 70, 2001.

- [32] J. R. Coudevylle, “Conception et realisation de microrésonateurs pour les télécommunications,” Ph.D. dissertation, Université de Franche-Comte, Sept. 2004.
- [33] S. Pourkamali and F. Ayazi, “High frequency capacitive micromechanical resonators with reduced motional resistance using the harpss technology,” in *Silicon Monolithic Integrated Circuits in RF Systems, 2004. Digest of Papers. 2004 Topical Meeting on*, Sept. 2004, pp. 147–150.
- [34] J. Arcamone, E. Colinet, A. Niel, and E. Ollier, “Efficient capacitive transduction of high-frequency micromechanical resonators by intrinsic cancellation of parasitic feedthrough capacitances,” *Applied Physics Letters*, vol. 97, no. 4, pp. 043505–043505–3, July; 2010.
- [35] J. Dewdney, I.-T. Wu, M. Wei, and J. Wang, “Reduction of impedance and feedthrough parasitics of rf micromechanical resonators,” in *Silicon Monolithic Integrated Circuits in RF Systems (SiRF), 2011 IEEE 11th Topical Meeting on*, Jan. 2011, pp. 165–168.
- [36] K. Koester, “Mumps design handbook rev. 7.0,” Cronos Integrated Microsystems, 2001.
- [37] V. Rabinovich, R. Gupta, and S. Senturia, “The effect of release-etch holes on the electromechanical behaviour of mems structures,” in *Solid State Sensors and Actuators, 1997. TRANSDUCERS '97 Chicago., 1997 International Conference on*, vol. 2, 16-19 1997, pp. 1125–1128 vol.2.
- [38] J. William N. Sharpe, R. Vaidyanathan, B. Yuan, G. Bao, and R. L. Edwards, “Effect of etch holes on the mechanical properties of polysilicon,” *Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures*, vol. 15, no. 5, pp. 1599–1603, 1997.
- [39] L. Shao and M. Palaniapan, “Effect of etch holes on quality factor of bulk-mode micromechanical resonators,” *Electronics Letters*, vol. 44, no. 15, pp. 938–940, 2008.
- [40] N. Lobontiu, *Dynamics of Microelectromechanical Systems*. Springer, 2007.
- [41] F. Casset, C. Durand, Y. Civet, E. Ollier, J. Carpentier, P. Ancsey, and P. Robert, “Mems resonator temperature compensation,” in *Thermal, Mechanical Multi-Physics Simulation, and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE), 2010 11th International Conference on*, 26-28 2010, pp. 1–5.
- [42] F. Schoen, M. Nawaz, T. Bever, R. Gruenberger, W. Raberg, W. Weber, B. Winkler, and R. Weigel, “Temperature compensation in silicon-based micro-electromechanical resonators,” in *Micro Electro Mechanical Systems*,

2009. *MEMS 2009. IEEE 22nd International Conference on*, Jan. 2009, pp. 884–887.
- [43] Z. Fan, J. Wang, and E. Goodman, “An evolutionary approach for robust layout synthesis of mems,” in *Advanced Intelligent Mechatronics. Proceedings, 2005 IEEE/ASME International Conference on*, July 2005, pp. 1186–1191.
 - [44] J. K. Sung Kyu Ha, Hee-Moon Jeong, “Robust design of a decoupled vibratory microgyroscope considering over-etching as a fabrication tolerance factor,” *JSME International Journal, Series A (Solid Mechanics and Material Engineering)*, vol. 29, pp. 273–81, April 2006.
 - [45] R. Liu, B. Paden, and K. Turner, “Mems resonators that are robust to process-induced feature width variations,” *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 11, no. 5, pp. 505 – 511, oct 2002.
 - [46] M. Lutz and A. Partridge, “Frequency compensated oscillator design for process tolerances,” US Patent 2005/0073078 A1, 2005.
 - [47] INTEL, US Patent US6753639B2.
 - [48] MOTOROLA, US Patent US6707351B2.
 - [49] C. Courcimault and M. Allen, “High-q mechanical tuning of mems resonators using a metal deposition -annealing technique,” in *Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, 2005. Digest of Technical Papers. TRANSDUCERS’05. The 13th International Conference on*, vol. 1, June 2005, pp. 875–878.
 - [50] J. Daphne and L. Lin, “Characterization of selective polysilicon deposition for mems resonator tuning,” *Journal of microelectromechanical system*, vol. 12, pp. 193–200, 2003.
 - [51] W.-T. Hsu and A. Brown, “Frequency trimming for mems resonator oscillators,” in *Frequency Control Symposium, 2007 Joint with the 21st European Frequency and Time Forum. IEEE International*, June 2007, pp. 1088–1091.
 - [52] M. Chiao and L. Lin, “Post-packaging frequency tuning of microresonators by pulsed laser deposition,” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 14, no. 12, p. 1742, 2004.
 - [53] M. Abdelmoneum, M. Demirci, Y.-W. Lin, and C.-C. Nguyen, “Location-dependent frequency tuning of vibrating micromechanical resonators via laser trimming,” in *Frequency Control Symposium and Exposition, 2004. Proceedings of the 2004 IEEE International*, aug. 2004, pp. 272 – 279.
 - [54] K. Wang, A.-C. Wong, W.-T. Hsu, and C.-C. Nguyen, “Frequency trimming and q-factor enhancement of micromechanical resonators via localized

- filament annealing,” in *Solid State Sensors and Actuators, 1997. TRANSDUCERS '97 Chicago., 1997 International Conference on*, vol. 1, jun 1997, pp. 109–112 vol.1.
- [55] A. Samarao and F. Ayazi, “Post-fabrication electrical trimming of silicon bulk acoustic resonators using joule heating,” in *Micro Electro Mechanical Systems, 2009. MEMS 2009. IEEE 22nd International Conference on*, Jan. 2009, pp. 892–895.
 - [56] D. Petit, N. Abele, A. Volatier, A. Lefevre, P. Ancey, and J.-F. Carpentier, “Temperature compensated bulk acoustic wave resonator and its predictive 1d acoustic tool for rf filtering,” in *Ultrasonics Symposium, 2007. IEEE*, Oct. 2007, pp. 1243–1246.
 - [57] W.-T. Hsu, J. Clark, and C.-C. Nguyen, “Mechanically temperature-compensated flexural-mode micromechanical resonators,” in *Electron Devices Meeting, 2000. IEDM Technical Digest. International*, 2000, pp. 399–402.
 - [58] W.-T. Hsu and C.-C. Nguyen, “Stiffness-compensated temperature-insensitive micromechanical resonators,” in *Micro Electro Mechanical Systems, 2002. The Fifteenth IEEE International Conference on*, 2002, pp. 731–734.
 - [59] C. Peters, D. Maurath, W. Scock, and Y. Manoli, “Novel electrically tunable mechanical resonator for energy harvesting,” in the *Proc. of PowerMEMS 2008 conference*, Nov. 2008, pp. 253–256.
 - [60] C. Cabuz, K. Fukatsu, H. Hashimoto, S. Shoji, T. Kurabayashi, K. Minami, and M. Esashi, “Fine frequency tuning in resonant sensors,” in *Micro Electro Mechanical Systems, 1994, MEMS '94, Proceedings, IEEE Workshop on*, 1994, pp. 245–250.
 - [61] E. S. Leland and P. K. Wright, “Resonance tuning of piezoelectric vibration energy scavenging generators using compressive axial preload,” *Smart Materials and Structures*, vol. 15, no. 5, p. 1413, 2006.
 - [62] S. G. Adams, F. M. Bertsch, K. A. Shaw, P. G. Hartwell, F. C. Moon, and N. C. MacDonald, “Capacitance based tunable resonators,” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 8, no. 1, p. 15, 1998.
 - [63] K. Bang Lee, L. Lin, and Y.-H. Cho, “A closed-form approach for frequency tunable comb resonators with curved finger contour,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 141, no. 2, pp. 523–529, 2008.
 - [64] B. Morgan and R. Ghodssi, “Vertically-shaped tunable mems resonators,” *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 17, no. 1, pp. 85–92, Feb. 2008.

- [65] D. Scheibner, J. Mehner, D. Reuter, T. Gessner, and W. Dötzel, "A spectral vibration detection system based on tunable micromechanical resonators," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 123-124, pp. 63 – 72, 2005, eurosensors XVIII 2004 - The 18th European conference on Solid-State Transducers.
- [66] G. Piazza, R. Abdolvand, K. Gavin, and F. Ayazi, "Voltage-tunable piezoelectrically-transduced single-crystal silicon micromechanical resonators," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 111, no. 1, pp. 71 – 78, 2004.
- [67] W.-C. Chen, W. Fang, and S.-S. Li, "Quasi-linear frequency tuning for cmos-mems resonators," in *Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 2011 IEEE 24th International Conference on*, Jan. 2011, pp. 784 –787.
- [68] V. R. Challa, M. G. Prasad, Y. Shi, and F. T. Fisher, "A vibration energy harvesting device with bidirectional resonance frequency tunability," *Smart Materials and Structures*, vol. 17, no. 1, p. 015035, 2008.
- [69] C. Durand, F. Casset, B. Legrand, M. Faucher, P. Renaux, D. Mercier, D. Renaud, D. Dutartre, E. Ollier, P. Ancey, and L. Buchaillot, "Characterization of in-ic integrable in-plane nanometer scale resonators fabricated by a silicon on nothing advanced cmos technology," in *Micro Electro Mechanical Systems, 2008. MEMS 2008. IEEE 21st International Conference on*, Jan. 2008, pp. 1016–1019.
- [70] G. Ho, K. Sundaresan, S. Pourkamali, and F. Ayazi, "Temperature compensated ibar reference oscillators," in *Micro Electro Mechanical Systems, 2006. MEMS 2006 Istanbul. 19th International Conference on*, 2006, pp. 910–913.
- [71] K. Sundaresan, G. Ho, S. Pourkamali, and F. Ayazi, "A low phase noise 100mhz silicon baw reference oscillator," in *Custom Integrated Circuits Conference, 2006. CICC '06. IEEE*, Sept. 2006, pp. 841–844.
- [72] K. Sundaresan, G. Ho, S. Pourkamali, and F. Ayazi, "A two-chip, 4-mhz, microelectromechanical reference oscillator," *Circuits and Systems, 2005. ISCAS 2005. IEEE International Symposium on*, pp. 5461–5464 Vol. 6, May 2005.
- [73] F. Casset, "Benchmark sur les résonateurs électromécaniques," Projet NanoRF, Hybrid Carbon Nanotube - CMOS RF Microsystems, FP6 Contract: IST-028158, Tech. Rep., 2008.
- [74] I. D. Technology, "<http://www.eetimes.com/news/design/showarticle.jhtml?articleid=224700287>," Tech. Rep., 2010.

- [75] K. Schoepf, R. Rebel, D. Chen, G. Zolfagharkhani, A. Gaidarzhy, J. Kuypers, M. Crowley, and P. Mohanty, "Tcmo(tm): A versatile mems oscillator timing platform." 41st Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Systems and Applications Meeting, 16-19 Nov 2009, Santa Ana Pueblo, NM, 2009.
- [76] S. Pellerano, S. Levantino, C. Samori, and A. Lacaita, "A 13.5-mw 5-ghz frequency synthesizer with dynamic-logic frequency divider," *Solid-State Circuits, IEEE Journal of*, vol. 39, no. 2, pp. 378 – 383, feb. 2004.
- [77] J. Salvia, R. Melamud, S. Chandorkar, H. Lee, Y. Qu, S. Lord, B. Murmann, and T. Kenny, "Phase lock loop based temperature compensation for mems oscillators," *Micro Electro Mechanical Systems, 2009. MEMS 2009. IEEE 22nd International Conference on*, pp. 661–664, Jan. 2009.
- [78] Y. Shimooka, M. Inoue, M. Endo, S. Obata, A. Kojima, T. Miyagi, Y. Sugizaki, I. Mori, and H. Shibata, "Robust hermetic wafer level thin-film encapsulation technology for stacked mems / ic package," in *Electronic Components and Technology Conference, 2008. ECTC 2008. 58th*, May 2008, pp. 824 –828.
- [79] B. Lee, S. Seok, and K. Chun, "A study on wafer level vacuum packaging for mems devices," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 13, no. 5, p. 663, 2003.
- [80] M. Shahriar Rahman, M. Chitteboyina, D. Butler, Z. C, Andelik-Butler, S. Pacheco, and R. McBean, "Device-level vacuum packaging for rf mems," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 19, no. 4, pp. 911 –918, Aug. 2010.
- [81] A. Partridge, M. Lutz, B. Kim, M. Hopcroft, R. Candler, T. Kenny, K. Petersen, and M. Esashi, "Mems resonators: Getting the packaging right," *White paper*, Jan. 2009.
- [82] R. Melamud, S. Chandorkar, B. Kim, H. K. Lee, J. Salvia, G. Bahl, M. Hopcroft, and T. Kenny, "Temperature-insensitive composite micromechanical resonators," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 18, no. 6, pp. 1409 –1419, dec. 2009.
- [83] C.-C. Nguyen, "Mems technology for timing and frequency control," *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 2, pp. 251 –270, Feb. 2007.
- [84] P. Monajemi, P. Joseph, P. Kohl, and F. Ayazi, "Characterization of a polymer-based mems packaging technique," in *Advanced Packaging Materials: Processes, Properties and Interface, 200611th International Symposium on*, 2006, pp. 139 –144.

- [85] V. Kaajakari, J. Kiihamaki, A. Oja, H. Seppa, S. Pietikainen, V. Kokkala, and H. Kuisma, "Stability of wafer level vacuum encapsulated single-crystal silicon resonators," in *Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, 2005. Digest of Technical Papers. TRANSDUCERS '05. The 13th International Conference on*, vol. 1, June 2005, pp. 916 – 919 Vol. 1.
- [86] S. Pourkamali and F. Ayazi, "Wafer-level encapsulation and sealing of electrostatic harpss transducers," in *Sensors, 2007 IEEE*, Oct. 2007, pp. 49 – 52.
- [87] S. Jr. Weaver, P. Timoshenko, and D. H. Young, *Vibration Problems in Engineering*. Wiley-Interscience, 1990.
- [88] S. Rao, *Mechanical Vibration*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [89] Thomson and Dahleh, *Theory of Vibrations with Applications (5th Ed.)*. Prentice Hall, 1997.
- [90] N. Lobontiu, *Mechanical Design of Microresonators*. Mc-Graw-Hill Professional, 2005.
- [91] K. Miller, A. Cowen, G. Hames, and B. Hardy, "Soimumps design handbook," MEMSCAP, 2004.
- [92] A. Samarao and F. Ayazi, "Postfabrication electrical trimming of silicon micromechanical resonators via joule heating," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 20, no. 5, pp. 1081 –1088, oct. 2011.
- [93] S. Bashmal, R. Bhat, and S. Rakheja, "In-plane free vibration of circular annular disks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 322, no. 1-2, pp. 216 – 226, 2009.
- [94] J. Kim, S. Lee, O. Kwon, S. Hong, and D. Lim, "Thickness controlled and smooth polycrystalline cvd diamond film deposition on sio2 with electrostatic self assembly seeding process," *Diamond and Related Materials*, vol. 18, no. 10, pp. 1218 – 1222, 2009.
- [95] N. Lobontiu and E. Garcia, *Mechanics of Microelectromechanical Systems*, K. A. Publishers, Ed. Springer Science, Business Media, 2005.
- [96] H. Gamble, B. Armstrong, S. Mitchell, Y. Wu, V. Fusco, and J. Stewart, "Low-loss cpw lines on surface stabilized high-resistivity silicon," *Microwave and Guided Wave Letters, IEEE*, vol. 9, no. 10, pp. 395 –397, oct 1999.
- [97] D. Lederer and J.-P. Raskin, "Effective resistivity of fully-processed soi substrates," *Solid-State Electronics*, vol. 49, no. 3, pp. 491 – 496, 2005.
- [98] T. Makita, I. Tamai, and S. Seki, "Coplanar waveguides on high-resistivity silicon substrates with attenuation constant lower than 1 db/mm for

- microwave and millimeter-wave bands,” *Electron Devices, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 3, pp. 709 –715, March 2011.
- [99] J.-P. Raskin, A. Viviani, D. Flandre, and J.-P. Colinge, “Substrate crosstalk reduction using soi technology,” *Electron Devices, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 12, pp. 2252 –2261, Dec. 1997.
 - [100] B. Rong, L. Nanver, J. Burghartz, A. Jansman, A. Evans, and B. Rejaei, “C-v characterization of mos capacitors on high resistivity silicon substrate,” in *European Solid-State Device Research, 2003. ESSDERC '03. 33rd Conference on*, sept. 2003, pp. 489 – 492.
 - [101] C. Schollhorn, W. Zhao, M. Morschbach, and E. Kasper, “Attenuation mechanisms of aluminum millimeter-wave coplanar waveguides on silicon,” *Electron Devices, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 3, pp. 740 – 746, march 2003.
 - [102] C. Durand, “Développement de résonateurs électromécaniques en technologie silicon on nothing, à détection capacitive et amplifiée par transistor mos, en vue d’une co-intégration permettant d’adresser une application de référence de temps,” Ph.D. dissertation, université de Lille I, Sept. 2009.
 - [103] S. Pourkamali, “High frequency capacitive single crystal silicon resonators and coupled resonator systems,” Ph.D. dissertation, School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology, 2004.
 - [104] A. Samarao and F. Ayazi, “Self-polarized capacitive silicon micromechanical resonators via charge trapping,” in *Electron Devices Meeting (IEDM), 2010 IEEE International*, dec. 2010, pp. 7.4.1 –7.4.4.
 - [105] H. K. Lee, R. Melamud, B. Kim, M. Hopcroft, J. Salvia, and T. Kenny, “Electrostatic tuning to achieve higher stability microelectromechanical composite resonators,” *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 20, no. 6, pp. 1355 –1365, dec. 2011.

Table des figures

Chapitre 1

Figure 1.1	Schéma d'un système contre-réactionné à deux ports
Figure 1.2	Précision fréquentielle requise par application pour les oscillateurs Quartz et MEMS [10]
Figure 1.3	Principe d'un résonateur à excitation et détection capacitive [11]
Figure 1.4	Transistor à grille résonante [12]
Figure 1.5	Combinaison des transductions capacitives et piézoélectriques (a), mesures électriques des différentes combinaisons sur un même dispositif (b)
Figure 1.6	Schéma bidimensionnel de deux disques à modes de vibration extensionnelle (gauche) et elliptique (droite)
Figure 1.7	Conventions mécaniques des microrésonateurs [32]
Figure 1.8	Conventions pour le modèle électro-mécanique d'un microrésonateur avec une électrode d'excitation et une de détection [32]
Figure 1.9	Amélioration du signal mesuré par élimination des capacités parasites
Figure 1.10	Signal mesuré sans isolation, avec un substrat isolé ou au sein d'une cage de Faraday
Figure 1.11	Dispersion de la fréquence de résonance (Projet MTR 2008, CEA-LETI / ST Microelectronics)
Figure 1.12	Cartographie du quart de substrat
Figure 1.13	Extrapolation de la Figure 1.12 pour obtenir la cartographie de la dispersion de la fréquence de résonance sur un substrat 8"
Figure 1.14	Image MEB du dépôt sélectif de polysilicium [50]
Figure 1.15	Laser trimming [51]
Figure 1.16	Schéma expliquant le principe de re-dépôt par laser [52]
Figure 1.17	Localisation des différents spots de trimming de la poutre [53]
Figure 1.18	Schéma du trimming thermique
Figure 1.19	Schéma du trimming électrique par effet joule : (a) dépôt d'or, (b) échauffement par effet joule, (c) diffusion de l'or, (d) shift de la fréquence du SiBAR/Gold [55]
Figure 1.20	Compensation en température par un matériau composite Si/SiO ₂ [42]
Figure 1.21	Valeurs des paramètres de l'Eq. 1.21 [41]
Figure 1.22	Simulation (FEM) de la contrainte dans une poutre compensée en température [57]
Figure 1.23	Vue en coupe du système [58] à T (a) et ΔT (b)
Figure 1.24	(a) Schéma de l'actionneur et du résonateur, vue en coupe (b) sans tension appliquée, (c) avec une tension [59]
Figure 1.25	Résonateur dont la fréquence est modifiée par l'application d'une contrainte axiale [60]
Figure 1.26	Set-up expérimental du système proposé par Leland [61]
Figure 1.27	« Design du tuning beam » [30]
Figure 1.28	Simulation FEM de la déformation de la poutre par actionnement électrostatique [30]
Figure 1.29	Variation normalisée théorique de la fréquence pour différentes structures [62]
Figure 1.30	Résonateur ajustable grâce à la tension V_c [63]
Figure 1.31	Mesures des pics de résonance fonction de la tension appliquée [64]

Figure 1.32	Tuning de la fréquence pour les différents résonateurs du réseau [65]
Figure 1.33	(a) Schéma du dispositif, (b) variation de la fréquence (Théorie et résultats expérimentaux) [66]
Figure 1.34	Schéma de principe de la poutre avec structure de pull-in (a), variation de la fréquence fonction de la tension appliquée sur les deux structures (b)
Figure 1.35	Schéma d'un système de récupération d'énergie adaptable en fréquence [68]
Figure 1.36	Réponse fréquentielle d'une poutre bi-encastree pour différentes tensions de polarisation (expérimentales et simulations) [69]
Figure 1.37	Influence de la tension de polarisation pour compenser la température [69]
Figure 1.38	Schéma de principe de la correction par épitaxie ou localisée

Chapitre 2

Figure 2.1	Schéma d'une poutre encastree-encastree avec conventions
Figure 2.2	Schéma d'une poutre comportant un seul trou
Figure 2.3	Variation de la fréquence de résonance en fonction du rayon d'un trou et de la position de ce dernier ($L=50\mu m$, $W=20\mu m$, $h=1.4\mu m$, $f_i=4.9192MHz$)
Figure 2.4	Dénomination des trois zones
Figure 2.5	Variation de la raideur et de la masse effectives en fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu m$, « I » = $10\mu m$, « A » = $5\mu m$, $f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.6	Variation de la fréquence fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu m$, « I » = $10\mu m$, « A » = $5\mu m$, $f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.7	Contraintes d'une poutre sujette à une pression statique uniforme vers le bas.
Figure 2.8	Variation de la fréquence en fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu m$, « I » = $10\mu m$, « A » = $5\mu m$, $f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.9	Variation de la masse et de la raideur effective en fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu m$, « I » = $10\mu m$, « A » = $5\mu m$, $f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.10	Schéma d'une poutre présentant un réseau de trous
Figure 2.11	Détail d'un réseau de trous
Figure 2.12	Variation de la fréquence en fonction du nombre de trous suivant la longueur (m) et la largeur (n) de la poutre ($R=500nm$, $f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.13	Variation de la fréquence en fonction du nombre de trous suivant la longueur (m) et du rayon d'un trou ($n=4$, $f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.14	Variation de la fréquence en fonction du nombre de trous suivant la largeur (n) et du rayon d'un trou ($m=4$, $a_m=2,5\mu m$, $f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.15	Variation de la fréquence de résonance en fonction des trous suivant la largeur (n) et la longueur (m) de la poutre ($f_i = 4.9192MHz$, $R = 500nm$)
Figure 2.16	Variation de la fréquence de résonance en fonction du nombre de trous (m) et du rayon d'un trou ($n=4$)
Figure 2.17	Variation de la fréquence de résonance en fonction du nombre de trous (m) et du rayon d'un trou ($n=4$)
Figure 2.18	Variation de la fréquence en fonction de la position des trous de petites tailles : réseau de 6x6 trous (MEF)

Figure 2.19	Variation de la fréquence en fonction de la position des trous de plus grandes tailles : réseau de 6x6 trous (MEF)
Figure 2.20	Comparaison du modèle avec les simulations pour une poutre (mode hors plan) comportant un réseau de 6x6 trous ($R = 250nm$), $f_{référence} = f_{modèle_sans\ trou}$
Figure 2.21	Variation de la fréquence de résonance en fonction du rayon d'un trou et de la position de ce dernier ($L=50\mu m$, $W=1.5\mu m$, $h=1.4\mu m$)
Figure 2.22	Variation de la masse et de la raideur effective en fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu m$, « I » = $10\mu m$, « A » = $5\mu m$)
Figure 2.23	Variation de la fréquence fonction de la taille d'un trou pour les 3 zones (« V » = $25\mu m$, « I » = $10\mu m$, « A » = $5\mu m$)
Figure 2.24	Contraintes d'une poutre sujette à une pression statique uniforme sur le coté
Figure 2.25	Comparaison du modèle et des simulations pour une poutre vibrante dans le plan comportant un trou ($R=250nm$)
Figure 2.26	Réseau de trous carré positionné près d'un ancrage (a), réseau de trous linéaire positionné au centre du résonateur disque (b), lors de simulations modales
Figure 2.27	Définition des zones "Ventres" et "Ancrages" sur une simulation modale
Figure 2.28	Contraintes d'un disque soumis à une excitation symétrique alternativement sur les cotés opposés
Figure 2.29	Variation de la fréquence en fonction de la position des trous pour différentes architectures ($f_i=95.71MHz$, $R=19,88\mu m$)
Figure 2.30	Variation de la fréquence en fonction de la position suivant le rayon en position "Ventre" ($f_i=95.71MHz$, $R=19,88\mu m$)
Figure 2.31	Variation de la fréquence en fonction de la position suivant le rayon en position "Ancrage" ($f_i=95.71MHz$, $R=19,88\mu m$)
Figure 2.32	Poutre multicouches : (a) vue de coté, (b) zoom vue en coupe
Figure 2.33	Vue de coté d'une poutre multicouche avec des longueurs de couche différentes
Figure 2.34	Correction à deux patches (vue de coté)
Figure 2.35	Schéma d'une poutre pour correction par épitaxie
Figure 2.36	Variation de la fréquence d'une poutre pourvu d'un patch en position "V" en fonction de l'épaisseur et de la nature de ce dernier ($f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.37	Variation de la fréquence d'une poutre pourvue de deux patches en position "A" en fonction de l'épaisseur de ce dernier ($f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.38	Variation de la fréquence d'une poutre pourvue de deux patches (Silicium : $5*20\mu m^2$) en position "I" en fonction de la position de ces derniers ($f_i = 4.9192MHz$)
Figure 2.39	Evolution relative de la fréquence de résonance ($f_i = 4.9192MHz$) pour une correction en "I" en fonction de la largeur des patches pour différents matériaux
Figure 2.40	Comparaison des simulations et du modèle dans le cadre de la correction localisée (A, I, V : patches $2x9x20\mu m^2$) pour plusieurs épaisseurs
Figure 2.41	Comparaison du modèle et des simulations pour une correction localisée en différents lieux pour plusieurs épaisseurs de matériau ajouté ($L=20\mu m$, $W=1.5\mu m$, Longueur patch = $2x9\mu m$)
Figure 2.42	Variation de la fréquence en fonction de l'épaisseur ajoutée pour deux configurations de patches ($f_i=95.71MHz$)
Figure 2.43	Variation de la fréquence de résonance d'un disque en fonction de la taille du patch de Silicium ajouté en « V » ou « M » ($f_i=95.718MHz$, épaisseur= $25nm$)

Chapitre 3

- Figure 3.1 Balayage des doses pour les entrefers des plaques (V : vertical, H : Horizontal)
- Figure 3.2 Images au microscope électronique à balayage de la lithographie électronique
- Figure 3.3 Vue de dessus des entrefers linéaires de 100nm
- Figure 3.4 Vue de dessus des entrefers courbés de 100nm
- Figure 3.5 Vue de dessus d'un disque après gravure du SiO₂ et du Silicium
- Figure 3.6 Zoom sur le re-dépôt de Téflon dans les grandes zones
- Figure 3.7 Zoom sur un entrefer de 40nm
- Figure 3.8 Pseudo « scalloping » au niveau des grandes zones
- Figure 3.9 Vue au MEB de l'effet morcelé au niveau des grandes zones
- Figure 3.10 Vue au MEB des flancs de gravure des grandes zones
- Figure 3.11 Résidus de silicium au niveau des entrefers dus au re-dépôt pendant la phase de gravure (le résonateur a été enlevé pour faciliter l'observation)
- Figure 3.12 Image des plots Cr/Or réalisés par lift-off SU8
- Figure 3.13 Vue en coupe de la gravure d'oxyde de BOX par HF vapeur
- Figure 3.14 Vue de dessus par microscope infrarouge d'une structure libérée (a) et non libérée (b)
- Figure 3.15 Vue au MEB du dépôt localisé de chrome sur les structures à ondes de volume
- Figure 3.16 Vue de dessus au microscope optique après passage dans le CO₂ supercritique

Chapitre 4

- Figure 4.1 Banc cryogénique Lakeshore™
- Figure 4.2 Standard de type SOLT
- Figure 4.3 Photographie du positionnement des pointes sur une structure de type plaque à mode de Lamé en 2 ports déphasés de 180°
- Figure 4.4 Schéma en coupe du pad utilisé pour la modélisation du substrat
- Figure 4.5 Modélisation électrique de l'effet substrat SOI pour des structures coplanaires [97]
- Figure 4.6 Banc de mesure pour les caractérisations C(V) du substrat
- Figure 4.7 Mesure de C(V) du substrat à différentes fréquences de travail ($V_{AC} = 0.2V$)
- Figure 4.8 Photo de la mesure 2 ports sans résonateur
- Figure 4.9 Mesure du paramètre S_{11} d'un plot sur deux plaques (1 et 2)
- Figure 4.10 Circuit électrique équivalent (plots + substrat + C_{fr})
- Figure 4.11 Variations du paramètre S_{11} fonction de la fréquence (Mesure, modèle sans pointes, modèle avec pointes)
- Figure 4.12 Circuit électrique équivalent d'un plot sur la plage 100MHz-10GHz
- Figure 4.13 Variation des paramètres équivalents représentant le plot fonction de la fréquence
- Figure 4.14 Schéma électrique équivalent de la mesure 2 ports
- Figure 4.15 Comparaison des paramètres S_{21} du modèle électrique et de la mesure 2 ports
- Figure 4.16 Vue MEB d'une poutre caractérisée en 2 ports

Figure 4.17	Variation de la fréquence de résonance pour différentes tensions V_{DC} , $V_{AC} = 0.2V$, $P = 10^{-3}mBar$
Figure 4.18	Fréquence de résonance fonction de la tension de polarisation au carré (V_{DC}^2)
Figure 4.19	Mesure MEB de la largeur des poutres
Figure 4.20	Variations de la fréquence pour différentes répartitions des trous (« V », « I »)
Figure 4.21	Comparaison des mesures et du modèle analytique pour différents V_{DC} ($L=159\mu m$, $W=2\mu m$, 2x5 trous ($250 \times 250 nm^2$))
Figure 4.22	Principe de mesure différentielle d'une plaque à ondes de volume
Figure 4.23	Mesure électrique d'une plaque pour différentes valeurs de V_{DC}
Figure 4.24	Mesure électrique d'une plaque fonction de la tension V_{DC}
Figure 4.25	Mesure électrique d'un disque pour différentes valeurs de V_{DC}
Figure 4.26	Représentation sous Conventor® des autres modes de résonance du disque
Figure 4.27	Modèle électrique complet du résonateur disque
Figure 4.28	Comparaison du modèle électrique avec la mesure pour $9V_{DC}$
Figure 4.29	Mesure électrique d'une plaque pour différentes valeurs de V_{DC}

Liste des tableaux

Chapitre 1

Tableau I.I	Effets d'échelle pour différentes grandeurs ($\alpha < 1$)
Tableau I.II	Précision fréquentielle d'oscillateurs
Tableau I.III	Spécifications de diverses applications
Tableau I.IV	Comparaison des divers types de résonateurs
Tableau I.V	Récapitulatif des paramètres déterminant dans la dispersion en fréquence et du facteur de qualité
Tableau I.VI	Mesures de la fréquence de résonance (Projet MTR, CEA-Léti, ST Microelectronics, 2008)
Tableau I.VII	Comparaison de l'effet de la tension de polarisation sur différents types de résonateurs
Tableau I.VIII	Comparaison des performances de différents oscillateurs MEMS et Quartz
Tableau I.IX	Comparaison des techniques de compensation en fréquence et / ou température
Tableau I.X	Spécifications requises pour notre correction

Chapitre 2

Tableau II.I	Conventions utilisées dans le chapitre
Tableau II.II	Bilan des structures trouées, mode hors plan
Tableau II.III	Comparaison des fréquences de résonance pour les 4 répartitions de trous ($L=50\mu m$, $W=20\mu m$, $h=1.4\mu m$, réseau : 6×6 trous, $r=250nm$)
Tableau II.IV	Fréquence pour différentes dispositions $R=500nm$, $W=20\mu m$, $h=1.4\mu m$, $n=6$, $m=8$ de trous avec pour objectif de conserver la fréquence d'une poutre simple
Tableau II.V	Comparaison des fréquences de résonance pour les 3 répartitions de trous ($L=50\mu m$, $W=1.5\mu m$, $h=1.4\mu m$, un trou, $R=250nm$)
Tableau II.VI	Fréquence pour différentes dispositions de trous avec pour objectifs de conserver la fréquence d'une poutre simple. ($R=250nm$, $W=1.5\mu m$, $h=1.4\mu m$, $a_m=2\mu m$, $a_n=250nm$)
Tableau II.VII	Liste des différentes méthodes de dépôt utilisées classiquement dans la microélectronique
Tableau II.VIII	Correction en Silicium (%) par rapport à la fréquence initiale pour différentes structures, $R=500nm$, $W=20\mu m$, $h=1.4\mu m$, $n=6$, $m=8$
Tableau II.IX	Modules de Young et masses volumiques de quelques matériaux
Tableau II.X	Performance de la correction localisée (Silicium, $f_i = 4,9192MHz$)
Tableau II.XI	Correction (%) pour différentes structures ($R=250nm$, $W=1.5\mu m$, $h=1.4\mu m$, $a_m=2\mu m$, $a_n=250nm$)
Tableau II.XII	Correction par épitaxie sur une poutre comportant des trous en « M » ($L = 50\mu m$, $W = 1.5\mu m$, $R = 250nm$, $a_m = 16\mu m$, $a_n = 0.250\mu m$)
Tableau II.XIII	Performance de la correction localisée (Silicium, $f_i = 5.0883MHz$)
Tableau II.XIV	Performances de la correction localisée
Tableau II.XV	Structures testées sur le run de fabrication

Chapitre 3

Tableau III.I	Présentation des principales étapes de fabrication des résonateurs
Tableau III.II	Paramètres de l'implantation au Phosphore des wafers
Tableau III.III	Paramètres de l'épitaxie de Silicium
Tableau III.IV	Mesures de l'épaisseur de Silicium épitaxié
Tableau III.V	Caractéristiques du dépôt de SiO ₂
Tableau III.VI	Tableau récapitulatif des doses et dimensions
Tableau III.VII	Comparaison des dopages mesuré et attendu

Chapitre 4

Tableau IV.I	Valeurs numériques du schéma électrique équivalent 1 port
Tableau IV.II	Valeurs numériques du modèle électrique équivalent 2 ports
Tableau IV.III	Différence entre les valeurs fournies par le modèle et les mesures (%)
Tableau IV.IV	Fréquences, Facteurs de qualité et résistances motionnelles des poutres
Tableau IV.V	Valeurs numériques associées au modèle électrique du résonateur
Tableau IV.VI	Fréquences, tensions et facteurs de qualité des mesures des structures à ondes de volume

Liste des Communications et Brevet

Conférences

Casset, F.; Durand, C.; Civet, Y.; Ollier, E.; Carpentier, J.F.; Ancey, P.; Robert, P.; , "MEMS resonator temperature compensation," *Thermal, Mechanical & Multi-Physics Simulation, and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE), 2010 11th International Conference on* , vol., no., pp.1-5, 26-28 April 2010.

Civet, Y.; Casset, F. ; Carpentier, J.F ; Basrour, S., "Compensation de la fréquence des résonateurs MEMS par ajustement "in-line"," *Journées Nationales du Réseau Doctoral de Micro-électronique (JNRDM 2010)*, 7-9 June 2010, Montpellier, France, 2010.

Casset F., Arcamone J., Niel A., Lorent E., Marcoux C., Civet Y., Durand C., Ollier E., Renaux P., Carpentier JF., Ancey P., Robert P., *21st Micromechanics and Micro systems Europe Workshop*, 26-29 Sept. 2010.

Civet Y., Casset F., Carpentier, Decossas S., Haccart T., Basrour S., "MEMS resonator frequency compensation by "in-line" trimming", in *Proc. of 11th International Symposium on RF MEMS and RF Microsystems (Memswave'10) - 11th International Symposium on RF MEMS and RF Microsystems (Memswave'10)*, 29-30 June 2010.

Civet Y., Casset F., Carpentier, Icard B., Bustos J., Leverd F., Mercier D., Basrour S., "Holed MEMS resonators with High aspect ratio and frequency compensated", *22nd Micromechanics and Micro systems Europe Workshop*, pp 158-161, 19-22 June 2011,

Civet, Y.; Basrour, S.; Casset, F.; Icard, B.; Mercier, D.; Carpentier, J.-F.; Bustos, J.; Leverd, F.; , "Holed MEM resonators for high accuracy frequency trimming," *Eurosensors 2011, Proceedings of the European* , vol., no., pp.531-534, 5-7 Sept. 2011.

Civet, Y.; Basrour, S.; Casset, F.; Icard, B.; Mercier, D.; Carpentier, J.-F.; Bustos, J.; Leverd, F.; , "Holed MEM resonators with high aspect ratio, for high accuracy frequency trimming," *Solid-State Device Research Conference (ESSDERC), 2011 Proceedings of the European* , vol., no., pp.123-126, 12-16 Sept. 2011.

Journal

Y. Civet, et al., Numerical and analytical modelling of holed MEMS resonators, *Sens. Actuators A: Phys.* (2011), doi:10.1016/j.sna.2011.12.040

Brevet

Yoan Civet, Fabrice Casset, Skandar Basrour, Jean-François Carpentier, Method of adjusting the resonance frequency of a micro-machined element, Dépôt INPI le 31 mars 2011, numéro 11/52729.

Glossaire

TIMA	Technique de l'Informatique et de la Microélectronique pour l'Architecture des systèmes intégrés
MEMS	Micro Electro Mechanical System
ppm	Parts Per Million
AFM	Atomic Force Microscopy
CMOS	Metal Oxide Semiconductor
CEA	Commissariat à l'Energie Atomique
RF	Radio Frequency
IF	Intermediate Frequency
VCXO	Voltage Controlled Oscillator
CAN	Convertisseur Analogique Numérique
μ P	micro Processeur
GSM	Global Systems for global Communications
GPS	Global Position System
MOS	Metal Oxide Semiconductor
dBc	deciBel to carrier
dB	deciBel
Rm	Résistance motionnelle
MUMPS	Multi Users MEMS Process
SPQ	Sequential Quadratic Programming
K	Kelvin
TCE	Temperature Coefficient of Young's modulus
α	Coefficient d'expansion thermique
σ	Stress axial
TCF	Temperature Coefficient of Frequency
CC	Clamped-Clamped
PLL	Phase Locked Loop
PTAT	Proportional To Absolute Temperature
SOI	Silicon On Insulator
FEM	Finite Element Method
LTM	Laboratoire des Techniques de la Microélectronique
PTA	Plateforme Technologique Amont
PECVD	Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition
Scm	Standard Cubic Centimeter per Minute
RIE	Reactive Ion Etching
HF	Acide Fluorhydrique

Annexes

Annexe 1 : Modèle analytique structure trouée (mode de flexion)

Parameters of the model

Geometrical parameters

[> # <i>an</i> : distance entre le trou et le bord suivant la largeur	
[> # <i>am</i> : distance entre le trou et le bord suivant la longueur	
[> # <i>m</i> : nombre de trous suivant la longueur	
[> # <i>n</i> : nombre de trous suivant la largeur	
[> # <i>pn</i> :	
<i>pitch</i> entre deux trous suivant la largeur (à partir du centre de chaque trous)	
[> # <i>pm</i> : <i>pitch</i> entre deux trous suivant la longueur	
[> # <i>w</i> : largeur de la poutre	
[> # <i>le</i> : longueur de la poutre	
Beam width (m)	
> width1 := w+2*i-2*n*R_t*sin(phi);	
<i>width1 := w + 2 i - 2 n R_t sin(φ)</i>	(1.1.1.1.1.1)
> width2 := w+2*i ;	
<i>width2 := w + 2 i</i>	(1.1.1.1.1.2)
Beam length (m)	
> l := le-2*i ;	
<i>l := le - 2 i</i>	(1.1.1.1.1.3)
>	
Substrate layer thickness (m)	
> thickness := t+2*i ;	
<i>thickness := t + 2 i</i>	(1.1.1.1.1.4)
> Aire1:=thickness*width1;	
<i>Aire1 := (t + 2 i) (w + 2 i - 2 n R_t sin(φ))</i>	(1.1.1.1.1.5)
> Aire2:=width2*thickness;	
<i>Aire2 := (w + 2 i) (t + 2 i)</i>	(1.1.1.1.1.6)
Trous (m)	
> R_t:=r-i ;	
<i>R_t := r - i</i>	(1.1.1.1.1.7)
Pitch	
> pm:=(le-2*am-2*r)/(m-1);	
<i>pm := $\frac{le - 2 am - 2 r}{m - 1}$</i>	(1.1.1.1.1.8)
> pn:=(w-2*an-2*r)/(n-1);	

$$pn := \frac{w - 2 \, an - 2 \, r}{n - 1} \quad (1.1.1.1.1.9)$$

▼ Material Properties

Substrate

Module de Young (Pa)

$$> E_{si} := E; \quad E_{si} := E \quad (1.1.1.1.2.1)$$

Density (Kg.m⁻³)

$$> rho_{si} := rho; \quad rho_{si} := \rho \quad (1.1.1.1.2.2)$$

Inertie

$$> ly1 := (width1 * (thickness)^3) / 12; \quad ly1 := \frac{1}{12} (w + 2 \, i - 2 \, n (r - i) \sin(\phi)) (t + 2 \, i)^3 \quad (1.1.1.1.2.3)$$

$$> ly2 := (width2 * (thickness)^3) / 12; \quad ly2 := \frac{1}{12} (w + 2 \, i) (t + 2 \, i)^3 \quad (1.1.1.1.2.4)$$

>

▼ Solution deflection

Bending distribution functions

$$> f_1(b, q) := 16 * (am + R_t + (j - 1) * pm - R_t * \cos(\phi))^2 / (l)^2 * (1 - (am + R_t + (j - 1) * pm - R_t * \cos(\phi)) / l)^2;$$

$$f_1(b, q) := \frac{1}{(le - 2 \, i)^2} \left(16 \left(am + r - i + \frac{(j - 1) (le - 2 \, am - 2 \, r)}{m - 1} - (r(1.1.3.1) - i) \cos(\phi) \right)^2 \right) \left(1 \right)$$

$$-\frac{am+r-i+\frac{(j-1)(le-2am-2r)}{m-1}-(r-i)\cos(\phi)}{le-2i}\Bigg)^2$$

> f_2(b,q):=16*(x)^(2)/(l)^(2)*(1-x/l)^(2);

$$f_2(b,q):=\frac{16x^2\left(1-\frac{x}{le-2i}\right)^2}{(le-2i)^2} \quad (1.1.3.2)$$

t frequency

> k_1(ef):=R_t*sum(int(ly1*((1/((R_t*sin(phi))^(2)))*(diff(f_1(b,q),phi,phi)-((cos(phi)/sin(phi))*diff(f_1(b,q),phi)))^2*sin(phi),phi=0..Pi),j=1..m):

> k_2(ef):=ly2*sum(int((diff(f_2(b,q),x,x))^2,x=am+2*R_t+(j-2)*pm..am+(j-1)*pm),j=2..m):

> k_3(ef):=int((diff(f_2(b,q),x,x))^2,x=0..am):

> k_4(ef):=int((diff(f_2(b,q),x,x))^2,x=am+2*R_t+(m-1)*pm..l):

>

>

>

>

> m_1(ef):=R_t*sum(int(width1*(f_1(b,q))^2*sin(phi),phi=0..Pi),j=1..m):

> m_2(ef):=width2*sum(int((f_2(b,q))^2,x=am+2*R_t+(j-2)*pm..am+(j-1)*pm),j=2..m):

> m_3(ef):=int((f_2(b,q))^2,x=0..am):

$$m_3(ef):=\frac{256}{9}\frac{am^9}{(le-2i)^8}-\frac{128am^8}{(le-2i)^7}+\frac{1536}{7}\frac{am^7}{(le-2i)^6}-\frac{512}{3}\frac{am^6}{(le-2i)^5}+\frac{256}{5}\frac{am^5}{(le-2i)^4} \quad (1.1.3.3)$$

> m_4(ef):=int((f_2(b,q))^2,x=am+2*R_t+(m-1)*pm..l);

$$m_4(ef):=\frac{256}{9}\frac{(le-2i)^9-(-am-2i+le)^9}{(le-2i)^8}-\frac{128((le-2i)^8-(-am-2i+le)^8)}{(le-2i)^7}+\frac{1536}{7}\frac{(le-2i)^7-(-am-2i+le)^7}{(le-2i)^6}-\frac{512}{3}\frac{(le-2i)^6-(-am-2i+le)^6}{(le-2i)^5} \quad (1.1.3.4)$$

```

+  $\frac{256}{5} \frac{(le-2i)^5 - (-am-2i+le)^5}{(le-2i)^4}$ 
>
>
>
> k_(eff):=E_si*(k_1(eff)+k_2(eff)+ly2*(k_3(eff)+k_4(eff))):
>
>
>
> m_(eff):=rho_si*thickness*(m_1(eff)+m_2(eff)+width2*(m_3
(eff)+m_4(eff))):
>
>
>
> w²b:=k_(eff)/m_(eff):
> w_b:=sqrt(%):
> f:=w_b/(2*Pi):

```

▼

```

> Fres := unapply(f, rho, E, t, r, w, le, n, m, an, am,i):
> Fres(2500, 1.69E11, 1.4E-6, 1E-6, 20E-6, 54.55E-6, 6, 14,
2E-6, 12.5E-6, 50E-9);

$$\frac{3.356585567 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{-3.508454901 \cdot 10^{-10} \pi + 7.171747822 \cdot 10^{-9}}{-5.277271461 \cdot 10^{-11} \pi + 4.447189263 \cdot 10^{-10}}}}{\pi} \quad (1.1.4.1)$$

> evalf[10]( (1.1.4.1) )

$$4.984011599 \cdot 10^6 \quad (1.1.4.2)$$

>

```

Annexe 2 : Modèle analytique structure bicouche (mode de flexion)

▼ Paramètre géométrique

```
>
> # Es Module de young du substrat
> # rhos Densité du substrat
> # Em Module de young du matériau ajouté
> # rhom Densité du matériau ajouté
> # w: largeur du microbridge
> width:=w;
width:= w (1.1.1)
```

```
> # t: épaisseur du substrat
> thickness_s := t_s;
thickness_s:= t_s (1.1.2)
```

```
>
> # t: épaisseur du matériau ajouté
> thickness_m := t_m;
thickness_m:= t_m (1.1.3)
```

```
> # l longueur du microbridge
> l:=l;
l:= l (1.1.4)
```

Longueur des patches ajoutés

```
> lp:=lp;
lp:= lp (1.1.5)
```

Position des patches

▼ Premier patch

```
> l1:=l1;
l1:= l1 (1.1.1.1)
```

▼ Deuxième patch

```
> l2:=l2;
l2 (1.1.2.1)
```

Déformé de la poutre

```
> f_(b,q):=16*(x)^(2)/(l)^(2)*(1-x/l)^(2);
f_(b, q) := 
$$\frac{16x^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2}{l^2}$$
 (1.1.6)
```

▼ Propriétés des matériaux

▼ Substrat

Module de Young (Pa)		
> E_s := Ey_s;	$E_s := E_{y_s}$	(1.2.1.1)
Density		
> rho_s := rho_s;	$\rho_s := \rho_{o_s}$	(1.2.1.2)
Inertie		
> I_s := (width*(thickness_s)^(3))/12;	$I_s := \frac{1}{12} w t_s^3$	(1.2.1.3)
Zj_s		
> Zj_s := thickness_s/2;	$Z_{j_s} := \frac{1}{2} t_s$	(1.2.1.4)
▼ Matériau Ajouté		
Module de Young (Pa)		
> E_m := Ey_m;	$E_m := E_{y_m}$	(1.2.2.1)
Density		
> rho_m := rho_m;	$\rho_m := \rho_{o_m}$	(1.2.2.2)
Inertie		
> I_m := (width*(thickness_m)^(3))/12;	$I_m := \frac{1}{12} w t_m^3$	(1.2.2.3)
Zj_m		
> Zj_m := thickness_s+thickness_m/2;	$Z_{j_m} := t_s + \frac{1}{2} t_m$	(1.2.2.4)
▼ Zn la distance a l'axe neutre		
> Zn := (Zj_m*E_m*width*thickness_m+Zj_s*E_s*width*thickness_s)/(E_m*width*thickness_m+E_s*width*thickness_s);	$Z_n := \frac{\left(t_s + \frac{1}{2} t_m\right) E_{y_m} w t_m + \frac{1}{2} t_s^2 E_{y_s} w}{E_{y_m} w t_m + E_{y_s} w t_s}$	(1.2.3.1)
▼ Equivalent bending rigidity (EI_y)_e		
> E1 := E_s*(I_s+Zj_s*(Zj_s-Zn)*width*thickness_s)+E_m*(I_m+Zj_m*(Zj_m-Zn)*width*thickness_m);		

$$EI := E_{y_s} \left(\frac{1}{12} w t_s^3 + \frac{1}{2} t_s^2 \left(\frac{1}{2} t_s - \left(t_s + \frac{1}{2} t_m \right) \frac{E_{y_m} w t_m + \frac{1}{2} t_s^2 E_{y_s} w}{E_{y_m} w t_m + E_{y_s} w t_s} \right) \right) + E_{y_m} \left(\frac{1}{12} w t_m^3 + \left(t_s + \frac{1}{2} t_m \right) \left(t_s + \frac{1}{2} t_m - \left(t_s + \frac{1}{2} t_m \right) \frac{E_{y_m} w t_m + \frac{1}{2} t_s^2 E_{y_s} w}{E_{y_m} w t_m + E_{y_s} w t_s} \right) w t_m \right) \quad (1.2.4.1)$$

Calcul de la fréquence

Raideur équivalente

```
> kb_e:=int(E_s*I_s*(diff(f_(b,q),x,x))^2,x=0..l1)+int(E_s*I_s*(diff(f_(b,q),x,x))^2,x=l1+lp..l2)+int(E_s*I_s*(diff(f_(b,q),x,x))^2,x=l2+lp..l)+int(E1*(diff(f_(b,q),x,x))^2,x=l1..l1+lp)+int(E1*(diff(f_(b,q),x,x))^2,x=l2..l2+lp):
```

Masse équivalente

```
> mb_e:=int(rho_s*width*thickness_s*(f_(b,q))^2,x=0..l1)+int(rho_s*width*thickness_s*(f_(b,q))^2,x=l1+lp..l2)+int(rho_s*width*thickness_s*(f_(b,q))^2,x=l2+lp..l)+int((rho_s*width*thickness_s+rho_m*width*thickness_m)*(f_(b,q))^2,x=l1..l1+lp)+int((rho_s*width*thickness_s+rho_m*width*thickness_m)*(f_(b,q))^2,x=l2..l2+lp):
```

Fréquence

```
> w2b_e:=kb_e/mb_e:
> wb_e:=sqrt(%):
> f:=wb_e/(2*Pi):
> Fres:=unapply(f, rho_s,Ey_s,t_s, rho_m, Ey_m, t_m, w, l, lp, l1, l2):
> Fres(2330,169E9,1.4E-6, 2330, 169E9, 30E-9, 20E-6, 50.025E-6,14.85E-6,6.9345E-6,26.934E-6);
      1.545376825 107
              π
(2.3.1)
```


Annexe 3 : Calcul des modes d'une structure à Ondes de volume

Cas $m = 6$

Cas $m = 6$ (1.1)

```
>
> restart;
> with(LinearAlgebra) :
> n := 4
```

$n := 4$ (1.2)

```
> v := 0.3;
```

$v := 0.3$ (1.3)

```
> l := 8;
```

$l := 8$ (1.4)

```
> phi1(x) := 1;
```

$\phi1 := x \rightarrow 1$ (1.5)

```
> b1 := 
$$\frac{\int_0^1 (x^2 \cdot (\phi1(x))^2) dx}{\int_0^1 (x \cdot (\phi1(x))^2) dx};$$

```

$b1 := \frac{2}{3}$ (1.6)

```
> phi2(x) := (x - b1) * phi1(x);
```

$\phi2 := x \rightarrow (x - b1) \phi1(x)$ (1.7)

```
> b2 := 
$$\frac{\int_0^1 (x^2 \cdot (\phi2(x))^2) dx}{\int_0^1 (x \cdot (\phi2(x))^2) dx};$$

```

$b2 := \frac{8}{15}$ (1.8)

```
> c2 := 
$$\frac{\int_0^1 (x^2 \cdot \phi2(x) \cdot \phi1(x)) dx}{\int_0^1 (x \cdot (\phi1(x))^2) dx};$$

```

$c2 := \frac{1}{18}$ (1.9)

```
> phi3(x) := (x - b2) * phi2(x) - c2 * phi1(x);
```

$\phi3 := x \rightarrow (x - b2) \phi2(x) - c2 \phi1(x)$ (1.10)

$$\begin{aligned}
 & \text{> } b3 := \frac{\int_0^1 (x^2 \cdot (\text{phi3}(x))^2) \, dx}{\int_0^1 (x \cdot (\text{phi3}(x))^2) \, dx}; \\
 & \qquad \qquad \qquad b3 := \frac{18}{35} \qquad \qquad \qquad (1.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } c3 := \frac{\int_0^1 (x^2 \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x)) \, dx}{\int_0^1 (x \cdot (\text{phi2}(x))^2) \, dx}; \\
 & \qquad \qquad \qquad c3 := \frac{3}{50} \qquad \qquad \qquad (1.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } \text{phi4}(x) := (x - b3) \cdot \text{phi3}(x) - c3 \cdot \text{phi2}(x); \\
 & \qquad \qquad \qquad \phi4 := x \rightarrow (x - b3) \phi3(x) - c3 \phi2(x) \qquad \qquad \qquad (1.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } b4 := \frac{\int_0^1 (x^2 \cdot (\text{phi4}(x))^2) \, dx}{\int_0^1 (x \cdot (\text{phi4}(x))^2) \, dx}; \\
 & \qquad \qquad \qquad b4 := \frac{32}{63} \qquad \qquad \qquad (1.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } c4 := \frac{\int_0^1 (x^2 \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi3}(x)) \, dx}{\int_0^1 (x \cdot (\text{phi3}(x))^2) \, dx}; \\
 & \qquad \qquad \qquad c4 := \frac{3}{49} \qquad \qquad \qquad (1.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } \\
 & \text{> } \text{phi5}(x) := (x - b4) \cdot \text{phi4}(x) - c4 \cdot \text{phi3}(x); \\
 & \qquad \qquad \qquad \phi5 := x \rightarrow (x - b4) \phi4(x) - c4 \phi3(x) \qquad \qquad \qquad (1.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } b5 := \frac{\int_0^1 (x^2 \cdot (\text{phi5}(x))^2) \, dx}{\int_0^1 (x \cdot (\text{phi5}(x))^2) \, dx}; \\
 & \qquad \qquad \qquad b5 := \frac{50}{99} \qquad \qquad \qquad (1.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > c5 := \frac{\int_0^1 (x^2 \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x)) \, dx}{\int_0^1 (x \cdot (\text{phi4}(x))^2) \, dx}; \\
& & c5 := \frac{5}{81} \tag{1.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > \text{phi6}(x) := (x - b5) \cdot \text{phi5}(x) - c5 \cdot \text{phi4}(x); \\
& & \phi6 := x \mapsto (x - b5) \phi5(x) - c5 \phi4(x) \tag{1.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > UU_{(1,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) \right) dx; \\
& & UU_{1,1} := 121.5764929 \tag{1.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > UU_{(1,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x) \right) dx; \\
& & UU_{1,2} := -74.15099534 \tag{1.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > UU_{(1,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x) \right) dx; \\
& & UU_{1,3} := 31.79294796 \tag{1.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& > UU_{(1,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x) \right) dx; \\
& & UU_{1,4} := -11.65159925 \tag{1.23}
\end{aligned}$$

$$& > UU_{(1,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x) \right) dx;$$

$$\left(\frac{d}{dx} \phi_5(x) \right) + \frac{\phi_1(x) \cdot \phi_5(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \phi_1(x) \cdot \phi_5(x) \right) dx;$$

$$UU_{1,5} := 3.933194196 \quad (1.24)$$

$$> UU_{(1,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_1(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_1(x) \cdot \phi_6(x) + \phi_1(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \right) + \frac{\phi_1(x) \cdot \phi_6(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \phi_1(x) \cdot \phi_6(x) \right) dx;$$

$$UU_{1,6} := -1.254370053 \quad (1.25)$$

$$> UU_{(2,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_1(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_1(x) + \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_1(x) \right) + \frac{\phi_2(x) \cdot \phi_1(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_1(x) \right) dx;$$

$$UU_{2,1} := -74.15099534 \quad (1.26)$$

$$> UU_{(2,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_2(x) + \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \right) + \frac{\phi_2(x) \cdot \phi_2(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_2(x) \right) dx;$$

$$UU_{2,2} := 48.93399694 \quad (1.27)$$

$$> UU_{(2,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_3(x) + \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) \right) + \frac{\phi_2(x) \cdot \phi_3(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_3(x) \right) dx;$$

$$UU_{2,3} := -20.87863199 \quad (1.28)$$

$$> UU_{(2,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_4(x) + \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \right) + \frac{\phi_2(x) \cdot \phi_4(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_4(x) \right) dx;$$

$$UU_{2,4} := 7.764875698 \quad (1.29)$$

$$> UU_{(2,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_5(x) + \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) \right) + \frac{\phi_2(x) \cdot \phi_5(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_5(x) \right) dx;$$

$$UU_{2,5} := -2.602923118 \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(2,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{\text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x) \right) dx; \\
UU_{2,6} := 0.8370403540
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(3,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x) \right) dx; \\
UU_{3,1} := 31.79294796
\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(3,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x) \right) dx; \\
UU_{3,2} := -20.87863199
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(3,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) \right) dx; \\
UU_{3,3} := 9.387884412
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(3,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x) \right) dx; \\
UU_{3,4} := -3.426336927
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(3,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x) \right) dx; \\
UU_{3,5} := 1.175164611
\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$> UU_{(3,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x) \right) dx;$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \Big) + \frac{\phi_3(x) \cdot \phi_6(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_3(x) \cdot \phi_6(x) \Big) dx;$$

$$UU_{3,6} := -0.3722850431 \quad (1.37)$$

$$> UU_{(4,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_1(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_1(x) + \phi_4(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_1(x) \right) + \frac{\phi_4(x) \cdot \phi_1(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_1(x) \right) dx;$$

$$UU_{4,1} := -11.65159925 \quad (1.38)$$

$$> UU_{(4,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_2(x) + \phi_4(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \right) + \frac{\phi_4(x) \cdot \phi_2(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_2(x) \right) dx;$$

$$UU_{4,2} := 7.764875698 \quad (1.39)$$

$$> UU_{(4,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_3(x) + \phi_4(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) \right) + \frac{\phi_4(x) \cdot \phi_3(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_3(x) \right) dx;$$

$$UU_{4,3} := -3.426336927 \quad (1.40)$$

$$> UU_{(4,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_4(x) + \phi_4(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \right) + \frac{\phi_4(x) \cdot \phi_4(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_4(x) \right) dx;$$

$$UU_{4,4} := 1.310795023 \quad (1.41)$$

$$> UU_{(4,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_5(x) + \phi_4(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) \right) + \frac{\phi_4(x) \cdot \phi_5(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_5(x) \right) dx;$$

$$UU_{4,5} := -0.4381473662 \quad (1.42)$$

$$> UU_{(4,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_6(x) + \phi_4(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \right) + \frac{\phi_4(x) \cdot \phi_6(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_6(x) \right) dx;$$

$$UU_{4,6} := 0.1426453847 \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(5,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi5}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x) \right) dx; \\
UU_{5,1} &:= 3.933194196
\end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(5,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi5}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x) \right) dx; \\
UU_{5,2} &:= -2.602923118
\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(5,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi5}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x) \right) dx; \\
UU_{5,3} &:= 1.175164611
\end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(5,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi5}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x) \right) dx; \\
UU_{5,4} &:= -0.4381473662
\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(5,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi5}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) \right) dx; \\
UU_{5,5} &:= 0.1532824618
\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(5,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi5}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x) \right) dx; \\
UU_{5,6} &:= -0.04842291707
\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}
> UU_{(6,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + v \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi6}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{\text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} + \frac{(1-v)}{2} \frac{n^2}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x) \right) dx;
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \phi_1(x) \Big) + \frac{\phi_6(x) \cdot \phi_1(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_6(x) \cdot \phi_1(x) \Big) dx; \\ \textcolor{blue}{UU_{6,1} := -1.254370053} \quad (1.50)$$

$$> UU_{(6,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \phi_2(x) + \phi_6(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \right) + \frac{\phi_6(x) \cdot \phi_2(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_6(x) \cdot \phi_2(x) \right) dx; \\ \textcolor{blue}{UU_{6,2} := 0.8370403540} \quad (1.51)$$

$$> UU_{(6,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \phi_3(x) + \phi_6(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) \right) + \frac{\phi_6(x) \cdot \phi_3(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_6(x) \cdot \phi_3(x) \right) dx; \\ \textcolor{blue}{UU_{6,3} := -0.3722850431} \quad (1.52)$$

$$> UU_{(6,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \phi_4(x) + \phi_6(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \right) + \frac{\phi_6(x) \cdot \phi_4(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_6(x) \cdot \phi_4(x) \right) dx; \\ \textcolor{blue}{UU_{6,4} := 0.1426453847} \quad (1.53)$$

$$> UU_{(6,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \phi_5(x) + \phi_6(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) \right) + \frac{\phi_6(x) \cdot \phi_5(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_6(x) \cdot \phi_5(x) \right) dx; \\ \textcolor{blue}{UU_{6,5} := -0.04842291707} \quad (1.54)$$

$$> UU_{(6,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(x \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) + \nu \cdot \left(\frac{d}{dx} \phi_6(x) \cdot \phi_6(x) + \phi_6(x) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) \right) + \frac{\phi_6(x) \cdot \phi_6(x)}{x} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{r^2}{x} \cdot \phi_6(x) \cdot \phi_6(x) \right) dx; \\ \textcolor{blue}{UU_{6,6} := 0.01600519964} \quad (1.55)$$

>
>
>
>
>
>

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(1,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{1,1} := 301.1781302
\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(1,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{1,2} := -184.7854203
\end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(1,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{1,3} := 78.97843924
\end{aligned} \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(1,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{1,4} := -29.02035787
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(1,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{1,5} := 9.778298892
\end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(1,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right. \\
&\quad + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{1,6} := -3.123980082
\end{aligned} \tag{1.61}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(2,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right. \\
&\quad + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{2,1} := -184.7854203
\end{aligned} \tag{1.62}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(2,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right. \\
&\quad + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi2}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{2,2} := 120.5236136
\end{aligned} \tag{1.63}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(2,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right. \\
&\quad + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi2}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{2,3} := -52.11895954
\end{aligned} \tag{1.64}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(2,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right. \\
&\quad + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi2}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{2,4} := 19.23261955
\end{aligned} \tag{1.65}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(2,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi2}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{2,5} := -6.493469109
\end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(2,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{2,6} := 2.076881384
\end{aligned} \tag{1.67}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(3,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{3,1} := 78.97843924
\end{aligned} \tag{1.68}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(3,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{3,2} := -52.11895954
\end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(3,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
\text{VV}_{3,3} := 23.08853183
\end{aligned} \tag{1.70}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(3,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{3,4} := -8.558964526
\end{aligned} \tag{1.71}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(3,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{3,5} := 2.905791263
\end{aligned} \tag{1.72}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(3,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{3,6} := -0.9295100443
\end{aligned} \tag{1.73}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(4,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{4,1} := -29.02035787
\end{aligned} \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(4,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{4,2} := 19.23261955
\end{aligned} \tag{1.75}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(4,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi4}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{4,3} := -8.558964526
\end{aligned} \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(4,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi4}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{4,4} := 3.221510303
\end{aligned} \tag{1.77}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(4,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi4}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{4,5} := -1.094957521
\end{aligned} \tag{1.78}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(4,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi4}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{4,6} := 0.3522953135
\end{aligned} \tag{1.79}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(5,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{5,1} := 9.778298892
\end{aligned} \tag{1.80}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(5,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad VV_{5,2} := -6.493469109
\end{aligned} \tag{1.81}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(5,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad VV_{5,3} := 2.905791263
\end{aligned} \tag{1.82}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(5,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad VV_{5,4} := -1.094957521
\end{aligned} \tag{1.83}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(5,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad VV_{5,5} := 0.3765512944
\end{aligned} \tag{1.84}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(5,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad VV_{5,6} := -0.1210505402
\end{aligned} \tag{1.85}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(6,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
VV_{6,1} := -3.123980082
\end{aligned} \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(6,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
VV_{6,2} := 2.076881384
\end{aligned} \tag{1.87}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(6,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
VV_{6,3} := -0.9295100443
\end{aligned} \tag{1.88}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(6,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
VV_{6,4} := 0.3522953135
\end{aligned} \tag{1.89}$$

$$\begin{aligned}
> VV_{(6,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right. \\
+ \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \\
\left. \cdot \frac{\text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
VV_{6,5} := -0.1210505402
\end{aligned} \tag{1.90}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VV}_{(6,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n^2}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} x \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v-1)}{2} \cdot \left(\frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \right) + \frac{(1-v)}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VV}_{6,6} := 0.03930526455
\end{aligned} \tag{1.91}$$

$$\begin{aligned}
> \text{UV}_{(1,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx; \\
&\quad \text{UV}_{1,1} := 99.47167602
\end{aligned} \tag{1.92}$$

$$\begin{aligned}
> \text{UV}_{(1,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{UV}_{1,2} := -62.31445072
\end{aligned} \tag{1.93}$$

$$\begin{aligned}
> \text{UV}_{(1,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{UV}_{1,3} := 26.34150285
\end{aligned} \tag{1.94}$$

$$\begin{aligned}
> \text{UV}_{(1,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{UV}_{1,4} := -9.768191579
\end{aligned} \tag{1.95}$$

$$\begin{aligned}
> \text{UV}_{(1,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{UV}_{1,5} := 3.270304623
\end{aligned} \tag{1.96}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(1,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{1,6} &:= -1.051233897
\end{aligned} \tag{1.97}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(2,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{2,1} &:= -59.71445074
\end{aligned} \tag{1.98}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(2,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{2,2} &:= 39.74296719
\end{aligned} \tag{1.99}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(2,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{2,3} &:= -17.43433526
\end{aligned} \tag{1.100}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(2,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{2,4} &:= 6.414984870
\end{aligned} \tag{1.101}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(2,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{2,5} &:= -2.178615783
\end{aligned} \tag{1.102}$$

$$> UV_{(2,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right.$$

$$\cdot \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \Big) dx$$

$$UV_{2,6} := 0.6949062928 \quad (1.103)$$

$$> UV_{(3,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{3,1} := 25.82150288 \quad (1.104)$$

$$> UV_{(3,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{3,2} := -17.00100193 \quad (1.105)$$

$$> UV_{(3,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{3,3} := 7.610450880 \quad (1.106)$$

$$> UV_{(3,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{3,4} := -2.853886054 \quad (1.107)$$

$$> UV_{(3,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{3,5} := 0.9680755170 \quad (1.108)$$

$$> UV_{(3,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{3,6} := -0.3113009060 \quad (1.109)$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(4,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{4,1} &:= -9.396763030
\end{aligned} \tag{1.110}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(4,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{4,2} &:= 6.278794406
\end{aligned} \tag{1.111}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(4,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{4,3} &:= -2.801886057
\end{aligned} \tag{1.112}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(4,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{4,4} &:= 1.061670881
\end{aligned} \tag{1.113}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(4,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{4,5} &:= -0.3644520499
\end{aligned} \tag{1.114}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(4,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{4,6} &:= 0.1172344003
\end{aligned} \tag{1.115}$$

$$> UV_{(5,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right.$$

$$\cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \Big) dx$$

$$UV_{5,1} := 3.187764953 \quad (1.116)$$

$$> UV_{(5,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{5,2} := -2.111208383 \quad (1.117)$$

$$> UV_{(5,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{5,3} := 0.9490913925 \quad (1.118)$$

$$> UV_{(5,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{5,4} := -0.3591459279 \quad (1.119)$$

$$> UV_{(5,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{5,5} := 0.1240798647 \quad (1.120)$$

$$> UV_{(5,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{5,6} := -0.04024514405 \quad (1.121)$$

$$> UV_{(6,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\ \left. \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx$$

$$UV_{6,1} := -1.011839963 \quad (1.122)$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(6,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{6,2} &:= 0.6761472776
\end{aligned} \tag{1.123}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(6,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{6,3} &:= -0.3028593489
\end{aligned} \tag{1.124}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(6,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{6,4} &:= 0.1151441100
\end{aligned} \tag{1.125}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(6,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{6,5} &:= -0.03975383649
\end{aligned} \tag{1.126}$$

$$\begin{aligned}
> UV_{(6,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
UV_{6,6} &:= 0.01295056504
\end{aligned} \tag{1.127}$$

>
>
>

$$\begin{aligned}
> VU_{(1,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx; \\
VU_{1,1} &:= 99.47167602
\end{aligned} \tag{1.128}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(1,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{1,2} := -59.71445074 \tag{1.129}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(1,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{1,3} := 25.82150288 \tag{1.130}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(1,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{1,4} := -9.396763030 \tag{1.131}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(1,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{1,5} := 3.187764953 \tag{1.132}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(1,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi1}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{1,6} := -1.011839963 \tag{1.133}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(2,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{2,1} := -62.31445072 \tag{1.134}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(2,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi2}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi2}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right.
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_2(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_2(x)}{x} \Big) dx$$

$$VU_{2,2} := 39.74296719 \quad (1.135)$$

$$> VU_{(2,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_3(x) + v \cdot n \cdot \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_3(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_3(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{2,3} := -17.00100193 \quad (1.136)$$

$$> VU_{(2,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_4(x) + v \cdot n \cdot \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_4(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_4(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{2,4} := 6.278794406 \quad (1.137)$$

$$> VU_{(2,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_5(x) + v \cdot n \cdot \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_5(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_5(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{2,5} := -2.111208383 \quad (1.138)$$

$$> VU_{(2,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_6(x) + v \cdot n \cdot \phi_2(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) \cdot \phi_6(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_6(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{2,6} := 0.6761472776 \quad (1.139)$$

$$> VU_{(3,1)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_3(x) \cdot \phi_1(x) + v \cdot n \cdot \phi_3(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_1(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) \cdot \phi_1(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_3(x) \cdot \phi_1(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{3,1} := 26.34150285 \quad (1.140)$$

$$> VU_{(3,2)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_3(x) \cdot \phi_2(x) + v \cdot n \cdot \phi_3(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) \cdot \phi_2(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_3(x) \cdot \phi_2(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{3,2} := -17.43433526 \quad (1.141)$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(3,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{3,3} := 7.610450880
\end{aligned} \tag{1.142}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(3,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{3,4} := -2.801886057
\end{aligned} \tag{1.143}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(3,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{3,5} := 0.9490913925
\end{aligned} \tag{1.144}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(3,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi3}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{3,6} := -0.3028593489
\end{aligned} \tag{1.145}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(4,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{4,1} := -9.768191579
\end{aligned} \tag{1.146}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(4,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{4,2} := 6.414984870
\end{aligned} \tag{1.147}$$

$$> \text{VU}_{(4,3)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi4}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi4}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right.$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_3(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_3(x)}{x} \Big) dx$$

$$VU_{4,3} := -2.853886054 \quad (1.148)$$

$$> VU_{(4,4)} = \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_4(x) + v \cdot n \cdot \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_4(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_4(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{4,4} := 1.061670881 \quad (1.149)$$

$$> VU_{(4,5)} = \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_5(x) + v \cdot n \cdot \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_5(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_5(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{4,5} := -0.3591459279 \quad (1.150)$$

$$> VU_{(4,6)} = \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_6(x) + v \cdot n \cdot \phi_4(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_6(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_4(x) \cdot \phi_6(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_4(x) \cdot \phi_6(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{4,6} := 0.1151441100 \quad (1.151)$$

$$> VU_{(5,1)} = \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_5(x) \cdot \phi_1(x) + v \cdot n \cdot \phi_5(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_1(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) \cdot \phi_1(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_5(x) \cdot \phi_1(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{5,1} := 3.270304623 \quad (1.152)$$

$$> VU_{(5,2)} = \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_5(x) \cdot \phi_2(x) + v \cdot n \cdot \phi_5(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_2(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) \cdot \phi_2(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_5(x) \cdot \phi_2(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{5,2} := -2.178615783 \quad (1.153)$$

$$> VU_{(5,3)} = \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \phi_5(x) \cdot \phi_3(x) + v \cdot n \cdot \phi_5(x) \cdot \frac{d}{dx} \phi_3(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \phi_5(x) \cdot \phi_3(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \phi_5(x) \cdot \phi_3(x)}{x} \right) dx$$

$$VU_{5,3} := 0.9680755170 \quad (1.154)$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(5,4)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{5,4} := -0.3644520499
\end{aligned} \tag{1.155}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(5,5)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{5,5} := 0.1240798647
\end{aligned} \tag{1.156}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(5,6)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi5}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{5,6} := -0.03975383649
\end{aligned} \tag{1.157}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(6,1)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi1}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi1}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{6,1} := -1.051233897
\end{aligned} \tag{1.158}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(6,2)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi2}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi2}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{6,2} := 0.6949062928
\end{aligned} \tag{1.159}$$

$$\begin{aligned}
> \text{VU}_{(6,3)} &:= \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi3}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi3}(x)}{x} \right) dx \\
&\quad \text{VU}_{6,3} := -0.3113009060
\end{aligned} \tag{1.160}$$

$$> \text{VU}_{(6,4)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi4}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \right.$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi4}(x)}{x} \Big) dx$$

$VU_{6,4} := 0.1172344003$

(1.161)

$$> VU_{(6,5)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi5}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi5}(x)}{x} \right) dx$$

$VU_{6,5} := -0.04024514405$

(1.162)

$$> VU_{(6,6)} := \int_{10^{-l}}^1 \left(\frac{n}{x} \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x) + v \cdot n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) + \frac{(v-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{d}{dx} \text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x) + \frac{(1-v)}{2} \cdot \frac{n \cdot \text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x)}{x} \right) dx$$

$VU_{6,6} := 0.01295056504$

(1.163)

>

>

>

>

> $K := \text{Matrix}(12, [[UU_{(1,1)}, UU_{(1,2)}, UU_{(1,3)}, UU_{(1,4)}, UU_{(1,5)}, UU_{(1,6)}, UV_{(1,1)}, UV_{(1,2)}, UV_{(1,3)}, UV_{(1,4)}, UV_{(1,5)}, UV_{(1,6)}, [UU_{(2,1)}, UU_{(2,2)}, UU_{(2,3)}, UU_{(2,4)}, UU_{(2,5)}, UU_{(2,6)}, UV_{(2,1)}, UV_{(2,2)}, UV_{(2,3)}, UV_{(2,4)}, UV_{(2,5)}, UV_{(2,6)}, [UU_{(3,1)}, UU_{(3,2)}, UU_{(3,3)}, UU_{(3,4)}, UU_{(3,5)}, UU_{(3,6)}, UV_{(3,1)}, UV_{(3,2)}, UV_{(3,3)}, UV_{(3,4)}, UV_{(3,5)}, UV_{(3,6)}, [UU_{(4,1)}, UU_{(4,2)}, UU_{(4,3)}, UU_{(4,4)}, UU_{(4,5)}, UU_{(4,6)}, UV_{(4,1)}, UV_{(4,2)}, UV_{(4,3)}, UV_{(4,4)}, UV_{(4,5)}, UV_{(4,6)}, [UU_{(5,1)}, UU_{(5,2)}, UU_{(5,3)}, UU_{(5,4)}, UU_{(5,5)}, UU_{(5,6)}, UV_{(5,1)}, UV_{(5,2)}, UV_{(5,3)}, UV_{(5,4)}, UV_{(5,5)}, UV_{(5,6)}, [UU_{(6,1)}, UU_{(6,2)}, UU_{(6,3)}, UU_{(6,4)}, UU_{(6,5)}, UU_{(6,6)}, UV_{(6,1)}, UV_{(6,2)}, UV_{(6,3)}, UV_{(6,4)}, UV_{(6,5)}, UV_{(6,6)}, [VU_{(1,1)}, VU_{(1,2)}, VU_{(1,3)}, VU_{(1,4)}, VU_{(1,5)}, VU_{(1,6)}, VV_{(1,1)}, VV_{(1,2)}, VV_{(1,3)}, VV_{(1,4)}, VV_{(1,5)}, VV_{(1,6)}, [VU_{(2,1)}, VU_{(2,2)}, VU_{(2,3)}, VU_{(2,4)}, VU_{(2,5)}, VU_{(2,6)}, VV_{(2,1)}, VV_{(2,2)}, VV_{(2,3)}, VV_{(2,4)}, VV_{(2,5)}, VV_{(2,6)}, [VU_{(3,1)}, VU_{(3,2)}, VU_{(3,3)}, VU_{(3,4)}, VU_{(3,5)}, VU_{(3,6)}, VV_{(3,1)}, VV_{(3,2)}, VV_{(3,3)}, VV_{(3,4)}, VV_{(3,5)}, VV_{(3,6)}, [VU_{(4,1)}, VU_{(4,2)}, VU_{(4,3)}, VU_{(4,4)}, VU_{(4,5)}, VU_{(4,6)}, VV_{(4,1)}, VV_{(4,2)}, VV_{(4,3)}, VV_{(4,4)}, VV_{(4,5)}, VV_{(4,6)}, [VU_{(5,1)}, VU_{(5,2)}, VU_{(5,3)}, VU_{(5,4)}, VU_{(5,5)}, VU_{(5,6)}, VV_{(5,1)}, VV_{(5,2)}, VV_{(5,3)}, VV_{(5,4)}, VV_{(5,5)}, VV_{(5,6)}, [VU_{(6,1)}, VU_{(6,2)}, VU_{(6,3)}, VU_{(6,4)}, VU_{(6,5)}, VU_{(6,6)}, VV_{(6,1)}, VV_{(6,2)}, VV_{(6,3)}, VV_{(6,4)}, VV_{(6,5)}, VV_{(6,6)}]]];$

(1.164)

$$K := \begin{bmatrix} 12 \times 12 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{bmatrix} \quad (1.164)$$

$$\begin{aligned} &> m_{(1,1)} := \int_0^1 (\text{phi1}(x) \cdot \text{phi1}(x) \cdot x) \, dx; \\ & \quad m_{1,1} := \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.165)$$

$$\begin{aligned} &> m_{(2,2)} := \int_0^1 (\text{phi2}(x) \cdot \text{phi2}(x) \cdot x) \, dx; \\ & \quad m_{2,2} := \frac{1}{36} \end{aligned} \quad (1.166)$$

$$\begin{aligned} &> m_{(3,3)} := \int_0^1 (\text{phi3}(x) \cdot \text{phi3}(x) \cdot x) \, dx; \\ & \quad m_{3,3} := \frac{1}{600} \end{aligned} \quad (1.167)$$

$$\begin{aligned} &> m_{(4,4)} := \int_0^1 (\text{phi4}(x) \cdot \text{phi4}(x) \cdot x) \, dx; \\ & \quad m_{4,4} := \frac{1}{9800} \end{aligned} \quad (1.168)$$

$$\begin{aligned} &> m_{(5,5)} := \int_0^1 (\text{phi5}(x) \cdot \text{phi5}(x) \cdot x) \, dx; \\ & \quad m_{5,5} := \frac{1}{158760} \end{aligned} \quad (1.169)$$

$$\begin{aligned} &> m_{(6,6)} := \int_0^1 (\text{phi6}(x) \cdot \text{phi6}(x) \cdot x) \, dx; \\ & \quad m_{6,6} := \frac{1}{2561328} \end{aligned} \quad (1.170)$$

$$\begin{aligned} &> M := \text{Matrix}(12, [[m_{(1,1)}, 0, 0, 0], [0, m_{(2,2)}, 0, 0], [0, 0, m_{(3,3)}, 0], [0, 0, 0, m_{(4,4)}], \\ & \quad [0, 0, 0, 0, m_{(5,5)}], [0, 0, 0, 0, 0, m_{(6,6)}], [0, 0, 0, 0, 0, 0, m_{(1,1)}, 0], [0, \\ & \quad 0, 0, 0, 0, 0, m_{(2,2)}], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m_{(3,3)}], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m_{(4,4)}], \\ & \quad [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m_{(5,5)}], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m_{(6,6)}]] \\ & \quad); \end{aligned} \quad (1.171)$$

```

M:=
    12 x 12 Matrix
    Data Type: anything
    Storage: rectangular
    Order: Fortran_order

>
> N := LinearAlgebra:-MatrixInverse( (1.171) )
N:=
    12 x 12 Matrix
    Data Type: anything
    Storage: rectangular
    Order: Fortran_order

>
>
> K.N;

    12 x 12 Matrix
    Data Type: float8
    Storage: rectangular
    Order: Fortran_order

> LinearAlgebra:-CharacteristicPolynomial( (1.173), λ )
(λ - 2.39923386958475 105 - 0.1) (λ - 53761.6340168963 - 0.1) (λ
- 1265.88244852923 - 0.1) (λ - 736.751329033220 - 0.1) (λ
- 317.195703930166 - 0.1) (λ - 259.040810077364 - 0.1) (λ
- 7.69595582292672 - 0.1) (λ - 19.4036341860566 - 0.1) (λ
- 39.3108195584314 - 0.1) (λ - 57.4489251658561 - 0.1) (λ
- 142.451229832811 - 0.1) (λ - 102.871091289166 - 0.1)

> solve( { (1.174) = 0 } )
{λ = 53761.63402}, {λ = 7.695955823}, {λ = 19.40363419}, {λ
= 1265.882449}, {λ = 2.399233870 105}, {λ = 317.1957039}, {λ
= 736.7513290}, {λ = 142.4512298}, {λ = 102.8710913}, {λ
= 39.31081956}, {λ = 259.0408101}, {λ = 57.44892517}

>
>
>
> S := LinearAlgebra:-Eigenvalues( (1.173) )

```


	$S := \begin{bmatrix} 1 \dots 12 \text{ Vector}_{column} \\ \text{Data Type: complex}_8 \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}$	(1.176)
> $\Omega_1 := \text{sqrt}(S(1));$	$\Omega_1 := 489.819749457364 + 0.1$	(1.177)
> $\Omega_2 := \text{sqrt}(S(2));$	$\Omega_2 := 231.865551595955 + 0.1$	(1.178)
> $\Omega_3 := \text{sqrt}(S(3));$	$\Omega_3 := 35.5792418206069 + 0.1$	(1.179)
> $\Omega_4 := \text{sqrt}(S(4));$	$\Omega_4 := 27.1431635782055 + 0.1$	(1.180)
> $\Omega_5 := \text{sqrt}(S(5));$	$\Omega_5 := 17.8099888806862 + 0.1$	(1.181)
> $\Omega_6 := \text{sqrt}(S(6));$	$\Omega_6 := 16.0947447969007 + 0.1$	(1.182)
> $\Omega_7 := \text{sqrt}(S(7));$	$\Omega_7 := 2.77415857926809 + 0.1$	(1.183)
> $\Omega_8 := \text{sqrt}(S(8));$	$\Omega_8 := 4.40495563951064 + 0.1$	(1.184)
> $\Omega_9 := \text{sqrt}(S(9));$	$\Omega_9 := 6.26983409337371 + 0.1$	(1.185)
> $\Omega_{10} := \text{sqrt}(S(10));$	$\Omega_{10} := 7.57950692102435 + 0.1$	(1.186)
> $\Omega_{11} := \text{sqrt}(S(11));$	$\Omega_{11} := 11.9352934539881 + 0.1$	(1.187)
> $\Omega_{12} := \text{sqrt}(S(12));$	$\Omega_{12} := 10.1425387004027 + 0.1$	(1.188)
>		
>		

Mots clés :

MEMS, Technologie SOI, Résonateur électromécanique, Caractérisation RF, Oscillateur MEMS, détection capacitive

Résumé :

A l'heure actuelle, les Micro-Electro-Mechanical-Systems (MEMS) sont devenus incontournables dans les produits technologiques quotidiens. De par leur taille, leurs performances et leur intégration, les microsystèmes résonants se sont inscrits dans la diversification de la fameuse Loi de Moore. Cependant les applications de type base de temps demeurent le segment de marché où les MEMS ne parviennent pas à s'imposer durablement. En effet, grâce à une stabilité en fréquence de quelques parties par millions, l'oscillateur à base de résonateur en Quartz reste le produit numéro 1 d'un marché estimé à dix-sept milliards de dollars. Etant donné le lien entre la fréquence d'un résonateur silicium MEMS et ses dimensions intrinsèques, les différentes étapes de fabrication induisent un décalage de cette fréquence par rapport à la valeur visée. C'est donc cette dérive que nous tenterons d'adresser pour venir concurrencer les résonateurs en Quartz.

Keywords :

MEMS, SOI technology, Electromechanical resonator, RF characterizations, MEMS Oscillator, Capacitive transduction

Summary :

At present, Micro-Electro-Mechanical-Systems (MEMS) have become essential in everyday technology products. Thanks to their size, performances and integration, resonant microsystems have been enrolled in the diversification of the famous Moore's Law. However, the time based applications remain the market segment where MEMS are unable to settle permanently. Indeed, the oscillator-based Quartz is the number one product on the market, a market estimated at \$ 17 billions, thanks to a frequency stability of a few parts per million over its lifetime. Given the link between the frequency of a MEMS resonator and its intrinsic dimensions, the various manufacturing steps induce a shift of this frequency from the target value. We will try to address this drift to settle MEMS resonator as direct challenger to Quartz resonator.