



HAL
open science

Recherche de méthode simplifiée pour le calcul de poutres multicouches en grandes transformations planes

Laurent Lagarde

► **To cite this version:**

Laurent Lagarde. Recherche de méthode simplifiée pour le calcul de poutres multicouches en grandes transformations planes. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2000. Français. NNT: . tel-00838664

HAL Id: tel-00838664

<https://theses.hal.science/tel-00838664>

Submitted on 26 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de
Docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Laurent LAGARDE

Sujet de la thèse :

Recherche de méthode simplifiée pour le calcul de poutres
multicouches en grandes transformations planes

Soutenue le 14 Décembre 2000 à l'E.N.P.C
devant le jury composé de :

D. Gay	<i>Président</i>
Y. Rémond	<i>Rapporteur</i>
A. Chabot	<i>Examinatrice</i>
A. Ehrlacher	<i>Examineur</i>
J.M. Vacherand	<i>Examineur</i>
F. Léné	<i>Directrice de Thèse</i>

Remerciements

Je tiens à remercier Madame Françoise LENE, qui m'a témoigné de sa confiance et de son soutien en de nombreuses occasions et qui a accepté de prendre la direction de cette thèse en collaboration avec Alain EHRLACHER.

Etre encadré par Alain est un privilège. Tous ceux qui ont eu la même chance que moi sont unanimes. J'ai beaucoup appris d'Alain pendant ces trois années tant sur le plan scientifique qu'humain. Et si cette expérience restera pour moi unique c'est sans nul doute grâce à lui.

Je tiens bien évidemment à remercier tout particulièrement les rapporteurs, messieurs Gay et Rémond pour le soin avec lequel ils ont examiné ce rapport et pour la qualité de leurs commentaires malgré le peu de temps qui leur a été laissé pour effectuer ce travail.

Ma gratitude va également à Armelle Chabot pour l'intérêt avec lequel elle a suivi cette étude. Son dynamisme et ses encouragements constants m'ont été d'un grand soutien tout au long de ces trois ans.

Mes pensées vont aussi à François Devries qui vient de nous quitter tragiquement. Par gentillesse et pur intérêt scientifique, il a su me consacrer du temps chaque fois que je le sollicitais. J'aurais aimé qu'il lise ces lignes.

Merci également à tous les chercheurs du LAMI, doctorants ou permanents, avec qui les échanges scientifiques mais aussi amicaux ont fait de ces trois années un agréable moment.

Pour terminer, je voudrais remercier du fond du coeur mes parents qui m'ont beaucoup appris et ont su me donner l'envie d'en apprendre encore plus. Ils ont été et seront toujours, je le sais, d'un soutien sans faille.

Enfin, c'est à Sandrine que vont ces dernières lignes : je mesure combien cette aventure n'a pas toujours été facile pour elle non plus. Elle a pourtant toujours su rester patiente et m'encourager.

A ma famille

Résumé

Les structures multicouches permettent d'obtenir des associations de comportements très variées aux multiples applications (butées parasismiques acier-élastomères, ...). Leur étude, dans le cadre de grandes transformations est complexe et donc essentiellement numérique.

Ce travail, qui est lui principalement analytique, propose la construction d'un modèle simplifié de poutres multicouches en grandes transformations planes. Il repose sur l'approximation conjointe des contraintes et de la cinématique qui reste cependant suffisamment riche pour prendre en compte un éventuel gauchissement des sections. Les valeurs exactes des transformations aux niveaux de ses interfaces sont introduites comme transformations généralisées du modèle, fournissant ainsi une information importante pour une étude éventuelle des phénomènes d'interfaces. Le problème simplifié formulé en variables généralisées reste non linéaire mais devient unidimensionnel.

Afin de conserver une signification physique au modèle proposé, on s'intéresse également aux définitions d'efforts généralisés de type résistance des matériaux adaptés au cas des grandes transformations.

Pour finir, une démarche de résolution numérique assez simple est proposée.

Mots clés poutre - multicouches - interfaces - grandes transformations planes - formulation variationnelle mixte - 1^{er} et 2nd tenseur des contraintes. de Piola-Kirchhoff - résultante des efforts intérieurs - gauchissement

Abstract

Multilayer structures offer a large variety of behaviours with a great number of applications (multilayer elastomeric bearings used in earthquake engineering, ...). The study of such structures submitted to large transformations is usually numeric because of its complexity.

This work, that is essentially analytical, propose a simplified model for large plane transformations. It consists of both the approximations of the stresses and kinematics, that stay rich enough in order to take into account warping of the sections. The exact values of the transformation at each interfaces are introduced in generalized kinematics so that the model is able to give an important information for the study of interfaces' phenomena. The simplified problem written with the generalized variables is, of course, still non linear but only depends of the longitudinal coordinate.

In order to bring physical meaning to the model, we also study how to define generalized stresses extending to large transformations those commonly used in the classical theory of mechanical engineering. To end, one numerical scheme is described to solve the problem.

Keywords beam - multilayers - interfaces - large plane transformations - mixed variational principle - 1st and 2nd Piola-Kirchhoff's stress tensor - resultant of inner efforts - warping.

Table des matières

Présentation du sujet	7
I Etudes préliminaires	11
1 Modélisation multiparticulaire	13
1.1 Le principe mixte d' Hellinger-Reissner	14
1.1.1 Enoncé	14
1.1.2 Stationnarité de \mathbf{J}_{HR} par rapport à \underline{u}^*	15
1.1.3 Stationnarité de \mathbf{J}_{HR} par rapport à $\underline{\sigma}^*$	15
1.2 Approximation des contraintes	15
1.2.1 Nature des approximations	15
1.2.2 Contraintes généralisées	16
1.3 Utilisation du principe d' Hellinger-Reissner	16
1.3.1 Cinématique duale de l'approximation de contraintes	17
1.3.2 Réécriture du terme de bord $\int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u}^* d\Gamma$	18
1.4 Energie de déformation approchée	18
1.4.1 La fonctionnelle mixte modifiée	19
1.5 Equations du modèle simplifié	19
1.5.1 Equations d'équilibre et conditions aux limites en efforts	19
1.5.2 Loi de comportement	19
2 Formulations mixtes Lagrangienne	21
2.1 Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff	22
2.1.1 Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \underline{P}	24
2.1.2 Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff	25
2.2 Equations lagrangiennes du problème mécanique	25
2.2.1 Loi de comportement	26
2.2.2 Equations d'équilibre et conditions aux limites	28
2.3 Formulations variationnelles mixtes Lagrangiennes	30
2.3.1 Formulation en $\underline{\phi}$ et \underline{S}	31
2.3.2 Formulation en $\underline{\phi}$ et \underline{P}	34
3 Etude Lagrangienne de poutres	41
3.1 Présentation du problème	42
3.1.1 Description géométrique du problème	42

3.1.2	Description cinématique	42
3.2	Equations d'équilibre du système	43
3.2.1	Equilibre en résultante	43
3.2.2	Equilibre en moment	44
3.3	Description bidimensionnelle	45
3.3.1	Transport d'une facette appartenant à une section de poutre	45
3.3.2	Transport d'une facette initialement orthogonale à une section de poutre	48
3.4	Torseur des efforts extérieurs	48
3.4.1	Contraintes élémentaires normales et tangentes à S	49
3.5	Le cas particulier de la poutre de type Timoshenko	51
3.5.1	La cinématique de Timoshenko	51
3.6	déformations duales des efforts physiques	54
3.6.1	Expression de la variation d'énergie de déformation	54
3.6.2	Loi de comportement	57
II construction du modèle		59
4	Présentation du modèle	61
4.1	Principes de la modélisation	61
4.1.1	Les point clés de la modélisation "M4"	61
4.1.2	Comparaison des formulations mixtes Lagrangiennes	62
4.1.3	Conclusion	63
4.2	Description du problème étudié	64
4.2.1	Géométrie tridimensionnelle de la poutre étudiée	64
4.2.2	Comportement des matériaux constitutifs	65
4.2.3	Formulation plane du problème	66
4.3	Expression du principe mixte correspondant	69
4.3.1	Expression de la fonctionnelle mixte correspondant au problème (\mathcal{P}_p)	69
4.3.2	Enoncé du principe mixte correspondant au problème (\mathcal{P}_p)	71
5	Le principe mixte modifié	73
5.1	Définition des bases de polynômes de Legendre	73
5.1.1	Définitions des polynômes utilisés	73
5.1.2	Propriétés	74
5.2	Approximations de la cinématique	75
5.2.1	Forme du développement	75
5.2.2	Introduction des transformations généralisées	76
5.2.3	Gradient de la transformation plane approchée sur la couche $c : \underline{\underline{F}}_a^c(X_1, X_3)$	79
5.2.4	Tenseur plan des déformations de Green-Lagrange approchés	80
5.3	Approximations des contraintes	83
5.3.1	Degré du développement	83
5.4	Approximation du premier Piola-Kirchhoff sur la couche c	84
5.4.1	Construction de $(\underline{\underline{P}}^c)_a$	84
5.4.2	Expression de $\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{P}}^c_a$	86

5.4.3	Discontinuité du vecteur contrainte aux interfaces	87
5.5	Obtention de la fonctionnelle modifiée	88
5.5.1	Rappel de l' expression de la fonctionnelle mixte utilisée	88
5.5.2	Restriction de J à $s\mathbf{E}_{\underline{\phi}} \times s\mathbf{E}_{\underline{S}}$	89
5.5.3	Expression du principe mixte modifié	90
6	Les équations du modèle	93
6.1	Commentaire sur la présentation des équations de stationnarité	93
6.1.1	Forme de la fonctionnelle $\tilde{J}(\Phi^*, S^*)$	93
6.2	Stationnarité par rapport aux contraintes généralisées	94
6.2.1	Forme générale	94
6.2.2	Loi de comportement généralisée	94
6.2.3	Conditions aux limites en transformations	96
6.2.4	Remarques sur les conditions aux limites en transformations	97
6.3	Stationnarité par rapport à la cinématique généralisée	99
6.3.1	Forme générale des équations de stationnarité	99
6.3.2	Expressions des termes 6.23, 6.24	102
6.3.3	Stationnarité par rapport aux transformations généralisées	106
6.3.4	Remarque sur les conditions aux limites en efforts	112
6.4	Commentaire sur la forme des équations d'équilibre du modèle	114
6.4.1	Rappels	114
6.4.2	Variation de l'énergie de déformation par rapport à la transformation $\underline{\phi}^* \in s\mathbf{E}_{\underline{\phi}}$	114
6.4.3	Effet de l'approximation sur \underline{S}	116
6.5	Application au cas du monocouche avec gauchissement	117
6.5.1	Adimensionnalisation de la cinématique	117
6.5.2	Loi de comportement	118
6.5.3	Equations d'équilibre et conditions aux limites	119
6.5.4	Vérification dans le cas de la traction uniaxiale	121
7	Efforts physiques	125
7.1	Poutre monocouche de Timoshenko	126
7.1.1	Dégénérescence de la cinématique du modèle	126
7.1.2	Approximation des contraintes	129
7.1.3	Le torseur des efforts extérieurs	129
7.1.4	Liens entre les contraintes généralisées et les efforts possédant un sens physique	131
7.1.5	Comparaison avec les résultats de la première partie	132
7.2	Efforts physiques avec gauchissement	135
7.2.1	Interprétation physique de l'approximation de la transformation	135
7.2.2	Eléments de réduction du torseur des efforts intérieurs	138
7.2.3	Efforts possédant un sens physique à l'intérieur de chaque couche	139
7.2.4	Contraintes possédant un sens physique à l'interface	140

III	Proposition de résolution numérique du modèle	145
8	Réécriture de la fonctionnelle	147
8.1	Forme initiale de la fonctionnelle utilisée	147
8.2	Introduction des nouvelles notations	148
8.2.1	Cinématique sur la couche c	148
8.3	Nouvelle expression de la fonctionnelle	153
9	Discrétisation par éléments finis	155
9.1	Maillage unidimensionnel	155
9.2	Interpolations	156
9.2.1	Fonctions d'interpolation	156
9.2.2	Interpolation des composantes de $\{\phi^c\}$	157
9.2.3	Interpolation des composantes de $\{S^c\}$	157
9.3	Degrés de liberté	157
9.4	Discrétisation de \tilde{J}	158
9.4.1	Discrétisation de \tilde{J}_1	158
9.4.2	Discrétisation de \tilde{J}_2	159
9.4.3	Discrétisation de \tilde{J}_3	162
9.4.4	Discrétisation de \tilde{J}_4	162
10	Algorithme de résolution	165
10.1	L'algorithme de résolution	165
10.2	$(\alpha + 1)$ -ième itération de l'incrément $(N + 1)$	166
	Conclusions et Perspectives	171
	Annexe	175
	Mesures de déformations duales de \underline{P} et \underline{S} .	175
	Références bibliographiques	179

Table des figures

2.1	Description du problème mécanique (\mathcal{P})	23
2.2	Signification physique de $\underline{\underline{P}}$	24
2.3	Signification physique de $\underline{\underline{S}}$	26
3.1	Géométrie de la poutre étudiée	42
3.2	Cinématique bidimensionnelle du problème dans le cas $(O'; \underline{e}_i)_{i=1,3} \equiv (O; \underline{E}_\alpha)_{\alpha=1,3}$	46
3.3	Rotation locale d'une facette appartenant à une section	47
3.4	Décomposition de l'effort élémentaire	50
4.1	Géométrie de la poutre étudiée dans \mathcal{K}_0	65
4.2	Etude bidimensionnelle de la poutre	69
5.1	Illustration de la cinématique généralisée choisie sur la couche c	77
7.1	Cinématique du gauchissement	137
9.1	Interpolation sur le e-ième élément	156
10.1	Méthode de Newton	167

Présentation du sujet

Les structures multicouches sont généralement élaborées par collage de couches de différents matériaux. Les épaisseurs des couches ainsi que leurs nombres peuvent être très variables d'un système à l'autre. L'utilisation de ces structures est de nos jours très répandue car l'étape de fabrication offre la possibilité de composer une structure adaptée en terme de comportement à sa future utilisation. On peut en effet associer des couches possédant des comportements caractéristiques qui leur sont conférés par la nature et/ou l'orientation du matériau constitutif. L'empilement de couches d'acier et d'élastomère permet par exemple d'obtenir des structures à la fois très résistantes en compression et très souples en cisaillement : les butées parasismiques sont donc logiquement élaborées avec ce type d'empilement. Dans les skis de loisir (matériaux sandwichs), chacune des peaux est obtenue par empilement de mêmes couches de fibre de verre mais possédant des orientations différentes. Le ski ainsi élaboré résiste très bien à la flexion mais possède un seuil de résistance en torsion relativement bas qui n'est de toute façon jamais atteint en utilisation normale et qui permet ainsi un gain de matière.

Les avantages précédents directement liés à l'hétérogénéité de la structure s'accompagnent cependant d'un handicap : l'introduction de zones particulièrement fragiles au niveau des interfaces entre les couches. Un endommagement typique se traduit en effet par une décohésion des couches nommée délaminage. La prévision de ce phénomène est cruciale pour garantir la sécurité mais elle nécessite de parvenir à quantifier les différentes grandeurs mécaniques aux interfaces.

L'étude, aussi bien analytique que numérique, du comportement des structures multicouches en petites perturbations est parfaitement maîtrisée. Cependant, bien que les valeurs des contraintes et des déformations d'interface puissent être évaluées avec précision, les critères proposés doivent être avancés avec prudence.

Lorsque ces structures font l'objet de grandes transformations, telle que la butée parasismique au cours d'un séisme, l'étude est plus complexe du fait de la (ou des) non linéarité(s). On tente de caractériser leurs comportements expérimentalement comme [Boukamel 88] ou encore [Mori 97]. Les travaux théoriques sont plus rares [Simo 84]. La grande majorité des recherches sur ces structures concerne la résolution par éléments finis des problèmes posés [Kanok-Nukulchai 81] ou encore [Seki 87]. Les méthodes numériques qui ont été mises au point donnent des résultats très satisfaisants [Rey 94]. Mais les temps de calcul, du fait de la complexité du problème, restent généralement élevés.

Un bureau d'étude qui cherche à faire une étude de pré-dimensionnement sur un multicouche en grandes transformations ne possède pas forcément la puissance de calcul requise par les algorithmes mis en jeu. Il n'a pas non plus besoin dans un premier temps de la précision apportée par une étude numérique. Il a donc semblé intéressant de travailler sur une modélisation approchée de ce type de problèmes.

La structure multicouche étudiée dans ce travail est une poutre. Chacune des couches constitutives est supposée posséder un comportement linéaire. La non-linéarité ne peut donc être que de nature géométrique. Nous nous restreindrons également à des transformations planes subies par cette poutre. Ces hypothèses simplificatrices vont nous permettre de mener aussi loin que possible une étude analytique. L'objectif de ce travail est en fait double. D'une part, il s'agit de **proposer la construction d'un modèle simplifié de poutre multicouche reposant sur une méthode systématique**. D'autre part, il s'agit de profiter des hypothèses simplificatrices réalisées pour **forcer le modèle à restituer des informations sur les phénomènes d'interfaces**.

Ce travail s'articule donc autour trois parties.

La première partie présente trois études complémentaires en trois chapitres.

Le premier chapitre expose le point de départ de ce travail : la modélisation multiparticulaire. Cette modélisation, développée par [Ehlacher 94], offre une démarche systématique de construction d'une famille de modèles de plaques multicouches linéaires élastiques sous les hypothèses des petites perturbations. Elle repose sur des approximations des contraintes qui sont ensuite introduites dans un principe variationnel mixte. L'intérêt de cette approche en contraintes réside entre autre dans la possibilité de définir les valeurs exactes de certaines contraintes aux interfaces comme contraintes généralisées du modèle. On voit donc que l'objectif fixé à ce travail se présente comme une généralisation de la modélisation multiparticulaire au cadre des grandes transformations.

Une des difficultés dans l'étude des grandes transformations réside dans le fait que la géométrie courante de la structure est une inconnue du problème. La solution retenue dans ce travail consiste à travailler sur la géométrie de référence. Une telle approche est dite Lagrangienne totale. L'application directe de la technique de la modélisation multiparticulaire nécessite donc l'écriture d'un principe mixte lagrangien. C'est l'objet du chapitre 2 qui présente deux principes variationnels mixtes utilisant chacun un jeu propre de variables indépendantes duales contraintes -"déformations".

Cependant, l'inconvénient majeur de l'approche lagrangienne réside dans le risque d'introduire des quantités de contraintes "artificielles" au sens de la signification physique. Or, il a semblé indispensable de dégager aussi souvent que possible, tout au long de la construction de ce modèle, le sens physique des différentes grandeurs manipulées. C'est pourquoi le chapitre 3 présente une étude lagrangienne de poutres dans laquelle des concepts d'efforts généralisés classiquement définis en résistance des matériaux sont réécrits dans le cas des grandes transformations sur la configuration de référence.

Toute **la deuxième partie** est dédiée à la construction du modèle.

A la lumière des trois chapitres précédents, des choix vont pouvoir être motivés aussi bien au niveau technique que physique pour bâtir le modèle : le chapitre 4 présente ces hypothèses. Il fixe notamment le choix du principe variationnel mixte qui sera utilisé ainsi que la nature des approximations qui seront introduites dans ce principe au chapitre suivant.

En donnant l'expression du principe variationnel mixte modifié à partir duquel seront obtenues les équations du modèle, le chapitre 5 constitue donc un travail préparatoire. Il illustre l'intérêt des formes des approximations qui ont été retenues.

L'ensemble de ces équations est ensuite présenté au chapitre 6. On a tenté de décrire la succession de calculs conduisant à ces équations avec le plus de simplicité possible.

Le modèle proposé se caractérise par une cinématique riche permettant de prendre en compte le

gauchissement des sections, et par des contraintes ne possédant pas un sens physique immédiat. Nous avons donc cherché à savoir comment redéfinir des contraintes et efforts généralisées possédant un sens physique plus direct que ceux initialement introduits. Ce travail fait l'objet du dernier chapitre de la partie II. Il permettra dans un premier temps en dégénéralisant notre modèle de discuter de la validité d'un modèle de comportement communément utilisé dans la littérature. Nous introduisons dans un second temps des notions d'efforts physiques s'appliquant sur une section gauchie.

Les équations du modèle constituent un système d'équations différentielles non-linéaires. Ici s'arrêtent donc la possibilité d'une étude purement analytique. En effet, bien qu'approximé, le problème reste logiquement non-linéaire. On pense alors à une résolution numérique. L'objectif n'étant pas de réaliser un travail de programmation, nous avons tout de même cherché à savoir comment pouvait être mise en oeuvre la résolution numérique du modèle par éléments finis. **La troisième partie**, qui sera donc plus restreinte que les deux premières, présente ce travail préliminaire à la programmation. Basé sur la recherche du point stationnaire d'une fonctionnelle, son découpage est classique.

Le chapitre 8 commence par proposer une réécriture de la fonctionnelle sous une forme adaptée à un stockage informatique.

La discrétisation par éléments finis est alors introduite dans le chapitre 9.

Un algorithme de résolution est enfin proposé dans le dernier chapitre.

Première partie
Etudes préliminaires

Chapitre 1

Présentation des modèles multiparticulaires de matériaux multicouches

Dans ce travail, nous nous intéressons à la modélisation de structures multicouches en grandes transformations. Il est utile de rappeler succinctement une méthode de construction de modèles de matériaux multicouches en élasticité linéaire sous les hypothèses des petites perturbations.

La Modélisation Multiparticulaire de Matériaux Multicouches, dénommée “M4”, est une démarche permettant de créer une famille de modèles de plaques multicouches élastiques linéaires. Elle a été développée par Ehlacher et Naciri [Ehlacher 94] puis par Chabot et Ehlacher [Chabot 97]. Elle repose sur une approximation en contraintes qui est introduite dans le principe mixte d’Hellinger-Reissner [Reissner 50]. L’avantage de cette approche en contraintes réside dans le libre choix des efforts généralisés que l’on souhaite introduire dans le modèle à construire. Il est ainsi possible de limiter le nombre de contraintes généralisées et donc la complexité du modèle, à celles qui semblent prépondérantes aux vues des sollicitations appliquées au multicouche étudié. Il est de plus possible d’introduire des efforts généralisés d’interface dont les valeurs représentent une information très importante pour l’étude d’un endommagement tel que le délaminage.

Quelque soit la complexité du modèle multiparticulaire construit, la démarche repose sur quatre étapes. C’est pourquoi, après avoir rappelé le principe mixte d’Hellinger-Reissner, nous présenterons successivement les étapes suivantes :

- La définition des approximations des contraintes.
- La mise en évidence de la cinématique généralisée.
- L’écriture des équations d’équilibres à l’aide des contraintes généralisées.
- Enfin, l’écriture du comportement généralisé.

1.1 Le principe mixte d' Hellinger-Reissner

1.1.1 Enoncé

Considérons un système (S) élastique occupant un volume noté Ω de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_T\Omega$ avec $\partial_u\Omega \cap \partial_T\Omega = \emptyset$.

On impose :

- une densité volumique d'efforts dans Ω notée \underline{f} .
- une densité surfacique d'efforts sur $\partial_T\Omega$ notée \underline{T}^d .
- un déplacement sur $\partial_u\Omega$ noté \underline{u}^d .

On se place ici sous l'hypothèse des petites perturbations. Les configurations initiale et finale peuvent donc être confondues car les composantes du champs de déplacement \underline{u} ainsi que celles du champs de tenseur des déformations linéarisées $\underline{\epsilon} - \underline{1}$ sont des infiniment petits.

Le problème linéaire posé, (P_l) consiste à trouver le couple $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ avec \underline{u} cinématiquement admissible et $\underline{\sigma}$ statiquement admissible vérifiant la loi de comportement

$$\underline{\epsilon}(\underline{u}) = \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} \quad (1.1)$$

dans laquelle $\underline{\underline{S}}$ désigne le tenseur d'ordre quatre de souplesse.

Hellinger et Reissner [Reissner 50] ont proposé un principe variationnel mixte dans lequel le déplacement \underline{u} et le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$ sont considérés comme variables indépendantes.

En définissant les deux espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &\equiv (H^1(\Omega))^3 \\ \mathbf{\Sigma} &= \left\{ \underline{\sigma}^* \in (H^1(\Omega))^6 / \underline{\sigma}^* = \underline{\sigma}^{*T} \right\} \end{aligned}$$

le principe d' Hellinger-Reissner s'énonce ainsi :

Un couple $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ appartenant à $\mathbf{U} \times \mathbf{\Sigma}$ rendant stationnaire la fonctionnelle \mathbf{J}_{HR} définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{HR}(\underline{u}^*, \underline{\sigma}^*) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma}^* d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{\underline{grad}} \underline{u}^* d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u}^* d\Omega - \int_{\partial_T\Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u}^* d\Gamma - \int_{\partial_u\Omega} \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}^d) d\Gamma \end{aligned} \quad (1.2)$$

est solution du problème (P_l) .

On vérifie aisément que l'écriture de la stationnarité en $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ de la fonctionnelle \mathbf{J}_{HR} par rapport à \underline{u}^* d'une part et à $\underline{\sigma}^*$ d'autre part, entraîne que le couple $(\underline{u}, \underline{\sigma}) \in \mathbf{U} \times \mathbf{\Sigma}$ vérifie l'ensemble des équations du problème mécanique (P_l) .

1.1.2 Stationnarité de J_{HR} par rapport à \underline{u}^*

La variation de J_{HR} par rapport à \underline{u}^* dans la direction $\underline{\delta u} \in U$ et calculée en $(\underline{u}, \underline{\sigma}) \in U \times \Sigma$ s'écrit donc par application du théorème de la divergence :

$$\begin{aligned} D_{,\underline{u}^*} J_{HR}(\underline{u}, \underline{\sigma})[\underline{\delta u}] &= \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\delta u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\delta u} \, d\Omega - \int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{\delta u} \, d\Gamma - \int_{\partial_u \Omega} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \cdot \underline{\delta u} \, d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} (\underline{div} \underline{\sigma} + \underline{f}) \cdot \underline{\delta u} \, d\Omega + \int_{\partial_T \Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \underline{T}^d) \cdot \underline{\delta u} \, d\Gamma \end{aligned}$$

On déduit les conséquences suivantes de l'écriture de la condition de stationnarité par rapport à \underline{u}^* en $(\underline{u}, \underline{\sigma}) \in U \times \Sigma$:

$$D_{,\underline{u}^*} J_{HR}(\underline{u}, \underline{\sigma})[\underline{\delta u}] = 0 \quad \forall \underline{\delta u} \in U \implies \begin{cases} \underline{div} \underline{\sigma} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d & \text{sur } \partial_T \Omega \end{cases}$$

Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma} \in \Sigma$ est donc statiquement admissible.

1.1.3 Stationnarité de J_{HR} par rapport à $\underline{\sigma}^*$

La variation de J_{HR} par rapport à $\underline{\sigma}^*$ dans la direction $\underline{\delta \sigma} \in \Sigma$ et calculée en $(\underline{u}, \underline{\sigma}) \in U \times \Sigma$ s'écrit donc :

$$D_{,\underline{\sigma}^*} J_{HR}(\underline{u}, \underline{\sigma})[\underline{\delta \sigma}] = \int_{\Omega} \underline{\delta \sigma} : \left(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) - \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} \right) \, d\Omega - \int_{\partial_u \Omega} \underline{\delta \sigma} \cdot \underline{n} (\underline{u} - \underline{u}^d) \, d\Gamma$$

On déduit les conséquences suivantes de l'écriture de la condition de stationnarité par rapport à $\underline{\sigma}^*$ en $(\underline{u}, \underline{\sigma}) \in U \times \Sigma$:

$$D_{,\underline{\sigma}^*} J_{HR}(\underline{u}, \underline{\sigma})[\underline{\delta \sigma}] = 0 \quad \forall \underline{\delta \sigma} \in \Sigma \implies \begin{cases} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) = \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} & \text{dans } \Omega \\ \underline{u} = \underline{u}^d & \text{sur } \partial_u \Omega \end{cases}$$

Le déplacement $\underline{u} \in U$ est donc cinématiquement admissible et de plus, le couple $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ vérifie bien la loi de comportement.

1.2 Approximation des contraintes

1.2.1 Nature des approximations

Considérons maintenant le cas particulier d'une plaque constituée d'un empilement de NC couches suivant la direction associée à x_3 . Ce système occupe un volume $\Omega = \partial\omega \times [H_-^1, H_+^{NC}]$ de \mathbb{R}^3 où la couche $c \in [1, NC]$ est repérée par $[H_-^c, H_+^c]$ et $\partial\omega$ désigne le plan de la plaque.

Les approximations réalisées sur $\underline{\sigma}$ reposent sur des développements par couche des composantes de $\underline{\sigma}$ sur des bases de polynômes de Legendre définies sur chacune des couches.

L'hypothèse de départ porte sur le degré dg des développements des composantes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in [1, 2]^2$) de $\underline{\underline{\sigma}}$: les équations d'équilibre tridimensionnelles fixent alors les degrés des développements portant sur $\sigma_{\alpha 3}$, $\alpha \in [1, 2]$ à $dg + 1$ et ceux portant sur σ_{33} à $dg + 2$.

1.2.2 Contraintes généralisées

L'objectif est d'exprimer les coefficients de ces développements à l'aide de contraintes généralisées qui sont amenées à devenir les nouvelles inconnues en contraintes du modèle construit. Ces contraintes généralisées sont des grandeurs bidimensionnelles ne dépendant que des variables d'espace x_1 et x_2 qui définissent le plan de la plaque multicouche étudiée. L'intérêt d'une approche en contraintes réside dans le libre choix des contraintes généralisées apparaissant dans le modèle. Pour que ce modèle devienne le plus opérationnel possible, on s'attache à définir des contraintes généralisées possédant le plus grand sens physique possible. On peut ainsi définir à l'intérieur de chaque couche, des contraintes généralisées classiques de plaques : moyenne sur l'épaisseur de la couche des contraintes membranaires ou encore de la contrainte de cisaillement. Mais, on peut de plus introduire des contraintes généralisées d'interface en introduisant sur chaque couche $c \in [1, NC]$ les valeurs des contraintes de cisaillement et d'arrachement aux côtes données de l'interface inférieure et de l'interface supérieure de la couche considérée et en imposant la continuité de ces contraintes aux interfaces. De telles informations aux interfaces constituent des données très utiles à la modélisation d'un phénomène d'endommagement tel que le délaminage.

Afin de simplifier les notations futures, l'ensemble des contraintes généralisées sur toutes les couches seront regroupées dans le vecteur \mathbb{S}^g .

L'écriture des définitions des contraintes généralisées retenues à l'aide des approximations polynômiales faites sur les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ permet alors de relier les coefficients des développements aux contraintes généralisées et d'exprimer la restriction à la couche $c \in [1, NC]$ de l'approximation de $\underline{\underline{\sigma}}$, notée $\underline{\underline{\sigma}}_a^c$, sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}_a^c(\underline{x}) = \sum_{\gamma=0}^{dg+2} \underline{\underline{\sigma}}_{\gamma}^c(x_1, x_2) Q_{\gamma}^c(x_3) \quad (1.3)$$

où les coefficients $\underline{\underline{\sigma}}_{\gamma}^c$ $\gamma \in [0, dg + 2]$ ont pour composantes des combinaisons linéaires des contraintes généralisées.

1.3 Recherche d'une solution approchée à l'aide du principe d'Hellinger-Reissner

Supposons, pour simplifier, que le problème mécanique étudié (\mathcal{P}_I) soit tel que :

- $\underline{f} \equiv \underline{0}$ dans Ω
- $\partial\Omega = \partial_T\Omega$ avec \underline{T}^d densité surfacique d'efforts imposés sur $\partial\Omega$

La fonctionnelle \mathbf{J}_{HR} s'écrit alors d'après 1.2 à l'aide de trois grandeurs $W(\underline{\underline{\sigma}}^*)$, $T(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*)$ et $U(\underline{\underline{u}}^*)$:

$$\mathbf{J}_{HR}(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*) = \underbrace{-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^* d\Omega}_{W(\underline{\underline{\sigma}}^*)} + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{u}}^* d\Omega}_{T(\underline{\underline{u}}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*)} - \underbrace{\int_{\partial_T \Omega} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{u}}^* d\Gamma}_{U(\underline{\underline{u}}^*)} \quad (1.4)$$

On souhaite utiliser le principe d'Hellinger-Reissner pour rechercher une solution en contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ du problème mécanique sous la forme 1.3, les nouvelles inconnues en contraintes devenant alors les contraintes généralisées bidimensionnelles.

On recherche donc un couple $(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\sigma}})$ avec $\underline{\underline{u}} \in \mathbf{U}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ appartenant à un sous ensemble de Σ défini par l'ensemble des $\underline{\underline{\sigma}}$ de forme 1.3.

Pour $\underline{\underline{\sigma}}^*$ appartenant à ce sous espace, la fonctionnelle \mathbf{J}_{HR} est modifiée. Nous allons donc introduire les approximations réalisées sur $\underline{\underline{\sigma}}$ dans les trois morceaux constituant \mathbf{J}_{HR} définis en 1.4. Après réécriture, nous donnerons l'expression de la fonctionnelle modifiée obtenue, notée $\hat{\mathbf{J}}$.

1.3.1 Cinématique duale de l'approximation de contraintes

Le terme mixte $\int_{h_-^c}^{h_+^c} \underline{\underline{\sigma}}_a^{c*} : \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{u}}^* dx_3$ permet d'exhiber la cinématique duale de l'approximation introduite sur $\underline{\underline{\sigma}}$.

En utilisant la notation indicielle on a en effet avec $\alpha \in [1, 2]$, $j \in [1, 3]$ et $c \in [1, NC]$:

$$\begin{aligned} \int_{h_-^c}^{h_+^c} \underline{\underline{\sigma}}_a^{c*} : \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{u}}^* dx_3 &= \sum_{\gamma=0}^{dg+2} \left(\underline{\underline{\sigma}}_{\gamma}^{c*} \right)_{\alpha i} (x_1, x_2) \frac{d}{dx_{\alpha}} \left\{ \int_{h_-^c}^{h_+^c} u_i(\underline{\underline{x}}) Q_{\gamma}^c(x_3) dx_3 \right\} \\ &+ \sum_{\gamma=0}^{dg+2} \left(\underline{\underline{\sigma}}_{\gamma}^{c*} \right)_{3i} (x_1, x_2) [u_i(\underline{\underline{x}}) Q_{\gamma}^c(x_3)]_{h_-^c}^{h_+^c} \\ &- \sum_{\gamma=0}^{dg+2} \left(\underline{\underline{\sigma}}_{\gamma}^{c*} \right)_{3i} (x_1, x_2) \int_{h_-^c}^{h_+^c} u_i(\underline{\underline{x}}) Q'_{\gamma}(x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Il suffit alors de faire apparaître les dépendances des coefficients $\left(\underline{\underline{\sigma}}_{\gamma}^{c*} \right)_{ij} (x_1, x_2)$ par rapport aux contraintes généralisées et de réécrire l'expression précédente comme une somme de produits entre chaque contrainte généralisée et son cofacteur. Ce cofacteur est alors identifié comme étant la déformation duale de la contrainte généralisée considérée. Elle est logiquement appelée déformation généralisée.

Dans l'expression 1.5, on montre que les termes de déplacements définis aux interfaces disparaissent dans la sommation sur $c \in [1, NC]$ sauf pour les faces inférieure et supérieure du multicouche. Les déformations généralisées sont donc définies à partir de termes de la forme :

$$\int_{h_-^c}^{h_+^c} u_i(\underline{\underline{x}}) Q_{\gamma}^c(x_3) dx_3 \quad \text{où } i \in [1, 3] \text{ et } \gamma \in [0, dg + 2]$$

qui sont appelés déplacements généralisés.

Pour simplifier les notations, nous regrouperons les déplacements généralisés sur l'ensemble des couches dans le vecteur \underline{U}^g .

1.3.2 Réécriture du terme de bord $\int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u}^* d\Gamma$

Sur $\partial_T \Omega$, la restriction du déplacement à la couche $c \in [1, NC]$ peut s'écrire :

$$\underline{u}^{c*}(\underline{x}) = \sum_{\gamma=0}^{dg+2} \underline{u}_\gamma^*(x_1, x_2) Q_\gamma^c(x_3) + \underline{\Delta u}^*(\underline{x})$$

où

- $\underline{\Delta u}^*(\underline{x})$ est une perturbation orthogonale aux $Q_\gamma^c(x_3) \forall \gamma \in [0, dg+2]$.
- Les coefficients $\underline{u}_\gamma^*(x_1, x_2)$ sont exprimés à l'aide des déplacements généralisés précédemment mis en évidence.

Le terme $\int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u}^* d\Gamma$ va ainsi se décomposer comme suit :

$$\int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u}^* d\Gamma = \sum_{\gamma=0}^{dg+2} \int_{\partial \omega} \left[\underbrace{\int_{h_-^c}^{h_+^c} \underline{T}^d(\underline{x}) Q_\gamma^c(\underline{x}) dx_3}_{\underline{T}_\gamma^d(x_1, x_2)} \right] \underline{u}_\gamma^*(x_1, x_2) d\tau + \int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\Delta u}^*(\underline{x}) d\Gamma \quad (1.6)$$

On définit ainsi des efforts imposés de la forme $\underline{T}_\gamma^d(x_1, x_2)$, cofacteurs des déplacements généralisés.

On fait de plus l'hypothèse que le terme dépendant de la perturbation $\underline{\Delta u}^*$ a une influence négligeable par rapport au premier facteur.

1.4 Energie de déformation approchée

Considérons l'expression de l'énergie complémentaire du multicouche :

$$W \left[\left(\underline{\underline{\sigma}}^c \right)^* \right] = \frac{1}{2} \int_\omega \left\{ \int_{h_-^c}^{h_+^c} \left(\underline{\underline{\sigma}}^c \right)^* : \underline{\underline{S}} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^c \right)^* dx_3 \right\} d\omega$$

Compte-tenu de l'orthogonalité des polynômes de base, la quantité précédente se réduit à :

$$W \left[\left(\underline{\underline{\sigma}}^c \right)^* \right] = \frac{1}{2} \int_\omega \sum_{\gamma=0}^{dg+2} \underline{\underline{\sigma}}_\gamma^*(x_1, x_2) \left\{ \left(\int_{h_-^c}^{h_+^c} Q_\gamma^{c2}(x_3) dx_3 \right) \underline{\underline{S}} \right\} : \underline{\underline{\sigma}}_\gamma^*(x_1, x_2) d\omega \quad (1.7)$$

Rappelons que les tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}_\gamma^*(x_1, x_2) \gamma \in [0, dg+2]$ sont des expressions des contraintes généralisées. L'expression 1.7 est donc une expression quadratique des contraintes généralisées dans laquelle certains couplages peuvent apparaître.

1.4.1 La fonctionnelle mixte modifiée

Grâce aux expressions 1.5, 1.6 et 1.7, on obtient alors l'expression de la fonctionnelle modifiée \tilde{J} dans laquelle la variable d'espace x_3 a disparu et les variables indépendantes sont maintenant les contraintes généralisées \mathbb{S}^g et les déplacements généralisés \mathbb{U}^g .

1.5 Equations du modèle simplifié

Elles sont obtenues par application du principe d'Hellinger-Reissner à la fonctionnelle modifiée $\tilde{J}(\mathbb{U}^g, \mathbb{S}^g)$.

1.5.1 Equations d'équilibre et conditions aux limites en efforts

L'ensemble des équations d'équilibre, d'une part, et des conditions aux limites d'autre part, formulées à l'aide des variables généralisées est obtenu en écrivant la stationnarité de la fonctionnelle modifiée $\tilde{J}(\mathbb{U}^g, \mathbb{S}^g)$ par rapport à chacun des déplacements généralisés contenu dans \mathbb{U}^g .

1.5.2 Loi de comportement

La loi de comportement généralisée, reliant les contraintes généralisées aux déformations généralisées est quand à elle obtenue en écrivant la stationnarité de $\tilde{J}(\mathbb{U}^g, \mathbb{S}^g)$ par rapport à chaque contrainte généralisée contenue dans \mathbb{S}^g .

Conclusion

La modélisation multiparticulaire offre une démarche systématique de construction de modèles simplifiés de plaques multicouches élastiques linéaires sous l'hypothèse des petites perturbations.

Elle repose sur :

- *Le principe mixte d'Hellinger-Reissner.*
- *Des approximations réalisées sur le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ sur chacune des couches.*

Cette approche en contraintes est très souple. elle permet en effet :

- *de contrôler la complexité du modèle construit.*
- *d'introduire des inconnues en contraintes aux interfaces.*

Chapitre 2

Formulations mixtes Lagrangienne en grandes transformations

LA modélisation “M4” utilise la fonctionnelle mixte d’Hellinger-Reissner dans laquelle, le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, et le vecteur déplacement \underline{u} sont considérés comme variables indépendantes. L’objectif de ce travail étant de développer une modélisation simplifiée de poutre multicouche dans le cadre des grandes transformations, l’idée de départ est de tenter d’adapter au cadre des grandes transformations la démarche adoptée dans la modélisation multiparticulaire. Pour ce faire, on souhaite utiliser un principe mixte adapté au cadre des grandes transformations. La difficulté qui se pose est alors la suivante : lors de grandes transformations, la géométrie de la configuration courante ne peut plus être confondue avec la géométrie de la configuration initiale et elle ne devient connue qu’une fois obtenue la solution en déplacements du problème.

Plusieurs approches sont possibles pour contourner cette difficulté. Une approche dite totalement Lagrangienne consiste à écrire l’ensemble des équations du problème sur la seule géométrie connue, la géométrie de la configuration initiale. Une autre approche, incrémentale cette fois, appelée Lagrangienne réactualisée, consiste à résoudre le problème à chaque incrément en écrivant les équations du problème sur la géométrie correspondant à la solution en déplacements obtenue à l’incrément précédent. L’aspect itératif de cette dernière approche se prête particulièrement à un traitement numérique. Un des objectifs de ce travail de modélisation est de mener le plus loin possible une démarche analytique. Nous privilégierons donc l’approche Lagrangienne totale.

Les deux tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff vont apparaître dans les expressions des fonctionnelles mixtes proposées. Il nous faudra donc rappeler leur définition et préciser leur sens physique. Nous donnerons alors à l’aide de ces tenseurs les expressions de l’ensemble des équations d’un problème mécanique écrit sur la configuration initiale. Enfin, deux formulations variationnelles utilisant d’une part, la transformation et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, et d’autre part la transformation et le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff seront présentées. Nous vérifierons alors que l’écriture de la stationnarité de ces fonctionnelles par rapport aux champs indépendants redonne bien l’ensemble des équations du problème telles qu’elles ont été précédemment présentées.

2.1 Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff

Considérons un ensemble de points matériels de \mathbb{R}^3 constituant le système (\mathcal{S}) .

Description du problème mécanique tridimensionnel (\mathcal{P})

- Géométrie de la configuration de référence :

L'ensemble des points matériels de (\mathcal{S}) occupe, dans \mathcal{K}_0 , un volume Ω_0 de frontière $\partial\Omega_0$.

Dans la suite, nous considérerons une partition de (\mathcal{S}) en deux sous-systèmes (\mathcal{S}^1) et (\mathcal{S}^2) . Notons Ω_0^i le volume occupé, dans \mathcal{K}_0 , par $(\mathcal{S}^i)_{i=\{1,2\}}$, et $\partial\Omega_0^i$ la frontière de Ω_0^i . La portion de frontière commune à $\partial\Omega_0^1$ et $\partial\Omega_0^2$ est notée $\Gamma_0^{1,2}$ et $\underline{N}^{1,2}$ désigne sa normale orientée de Ω_0^1 vers Ω_0^2 .

Nous distinguerons deux partitions de la frontière de $\Omega_0^1 \cup \Omega_0^2 = \Omega_0$:

- On définit tout d'abord pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\partial_i\Omega_0 = \partial\Omega_0^i - \Gamma_0^{1,2}$$

qui conduit donc à :

$$\partial\Omega_0 = \cup_{i=1}^2 \partial_i\Omega_0$$

- L'application des conditions aux limites nécessite également de distinguer

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_u\Omega_0 \text{ la portion de frontière de } \Omega_0 \text{ à transformations imposées} \\ \partial_T\Omega_0 \text{ la portion de frontière de } \Omega_0 \text{ à efforts imposés} \end{array} \right.$$

- cinématique :

On définit dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 les 2 repères $(O; \underline{E}_\alpha)_{\alpha=1,3}$ et $(O'; \underline{e}_i)_{i=1,3}$ permettant de repérer les points matériels de (\mathcal{S}) respectivement dans la configuration de référence \mathcal{K}_0 et dans la configuration courante \mathcal{K}_t . Ces deux repères généralement pris confondus resteront pour l'instant distincts afin de mieux repérer les natures lagrangiennes et eulériennes des quantités introduites. Un point matériel M de (\mathcal{S}) est donc repéré dans \mathcal{K}_0 par le vecteur position $\underline{X} = X_\alpha \underline{E}_\alpha$ ($\alpha = 1, 3$), et dans \mathcal{K}_t par le vecteur position $\underline{x} = x_i \underline{e}_i$ ($i = 1, 3$).

La transformation permettant de passer de la configuration \mathcal{K}_0 à la configuration \mathcal{K}_t est notée $\underline{\phi}$ et est donc définie par :

$$\begin{aligned} \underline{\phi} : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{X} &\mapsto \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}) \end{aligned}$$

- géométrie de la configuration courante :

Les volumes et courbes de \mathbb{R}^3 définies précédemment dans la configuration de référence, sont transportés par $\underline{\phi}$. Les notations utilisées pour désigner ces transportées sont données par le

tableau suivant pour $i \in \{1, 2\}$:

dans \mathcal{K}_0		dans \mathcal{K}_t	
	$\underline{\phi}$		
Ω_0	\longrightarrow	Ω_t	
Ω_0^i	\longrightarrow	Ω_t^i	
$\Gamma_0^{1,2}$	\longrightarrow	$\Gamma_t^{1,2}$	
$\partial\Omega_0^i$	\longrightarrow	$\partial\Omega_t^i$	
$\partial_i\Omega_0$	\longrightarrow	$\partial_i\Omega_t$	

L'image par $\underline{\phi}$ du vecteur normal en un point donné de $\Gamma_0^{1,2}$, $\underline{N}^{1,2}$, est le vecteur normal à $\Gamma_t^{1,2}$ au point image du point considéré : il sera noté $\underline{n}^{1,2}$.

• Le problème (\mathcal{P}) consiste à trouver la solution en contraintes et transformation pour le système (\mathcal{S}) soumis aux efforts et déplacements imposés définis comme suit :

– déplacements imposés : $\underline{\phi}^d$: transformation donnée sur $\partial_u\Omega_0$

– efforts imposés :

– \underline{f}^d : densité massique d'efforts appliquée sur (\mathcal{S}) .

– $\underline{T}^d(\underline{x})$: densité surfacique d'efforts appliqués sur $\partial_T\Omega_t$ par unité de surface de \mathcal{K}_t

– $\underline{T}_0^d(\underline{X})$ la densité surfacique d'efforts appliqués sur $\partial_T\Omega_0$ par unité de surface de \mathcal{K}_0 .

Notons d'une part que \underline{f}^d qui est une densité massique est identique dans la configuration finale et actuelle, et d'autre part que \underline{T}^d et \underline{T}_0^d sont liés par une relation qui sera mise en évidence ultérieurement, lors de l'étude du transport d'une surface orientée.

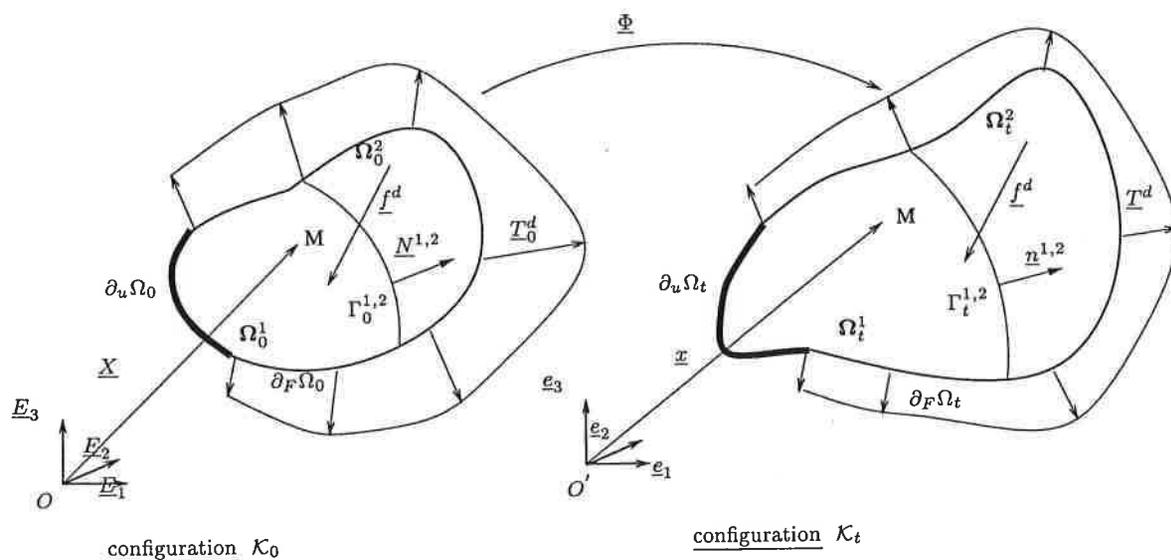


FIG. 2.1 – Description du problème mécanique (\mathcal{P})

Facette à l'intérieur de (S)

Soit un point matériel M de (S) repéré par \underline{X} dans \mathcal{K}_0 et \underline{x} dans \mathcal{K}_t . Considérons une surface élémentaire centrée en M que nous allons suivre au cours de la transformation. Nous appellerons facette une surface élémentaire orientée. Cette facette, notée $\underline{da}(\underline{x})$ dans \mathcal{K}_t , est caractérisée par son aire élémentaire da et son vecteur unitaire normal $\underline{n}(\underline{x})$. Elle est l'image par la transformation $\underline{\phi}(\underline{X})$ d'une facette de la configuration \mathcal{K}_0 , notée $\underline{dA}(\underline{X})$, d'aire élémentaire dA et orientée par le vecteur unitaire $\underline{N}(\underline{X})$.

La formule de transport de la facette $\underline{dA}(\underline{X})$ dans la transformation $\underline{\phi}$ est donnée par [Duvaut 90] :

$$\underline{n}(\underline{x}) da = J(\underline{X}) \underline{F}^{-T}(\underline{X}) \cdot \underline{N}(\underline{X}) dA \quad (2.1)$$

où

$$\begin{cases} \underline{F}(\underline{X}) = \underline{\nabla}\underline{\phi}(\underline{X}) \text{ désigne le champ de gradient de la transformation} \\ J(\underline{X}) = \det \underline{F}(\underline{X}) \text{ désigne le Jacobien de la transformation.} \end{cases}$$

2.1.1 Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \underline{P}

Considérons alors la facette $\underline{da}(\underline{x})$ et son antécédent $\underline{dA}(\underline{X})$ par $\underline{\phi}$. Notons $\underline{df}(\underline{x})$ le vecteur représentant la force élémentaire s'appliquant sur $\underline{da}(\underline{x})$ dans \mathcal{K}_t . Le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}(\underline{x})$, défini sur \mathcal{K}_t donne accès à $\underline{df}(\underline{x})$ par :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) da = \underline{df}(\underline{x}) \quad (2.2)$$

Par définition, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, noté \underline{P} , donne accès à \underline{df} , effort élémentaire s'appliquant sur la facette dans la configuration déformée, à partir de la facette dans sa configuration initiale. Par définition, on a :

$$\underline{P}(\underline{X}) \cdot \underline{N}(\underline{X}) dA = \underline{df}(\underline{x}) \quad (2.3)$$

En d'autres termes, la formule 2.3 permet d'affirmer que le vecteur contrainte $\underline{P} \cdot \underline{N}$ donne

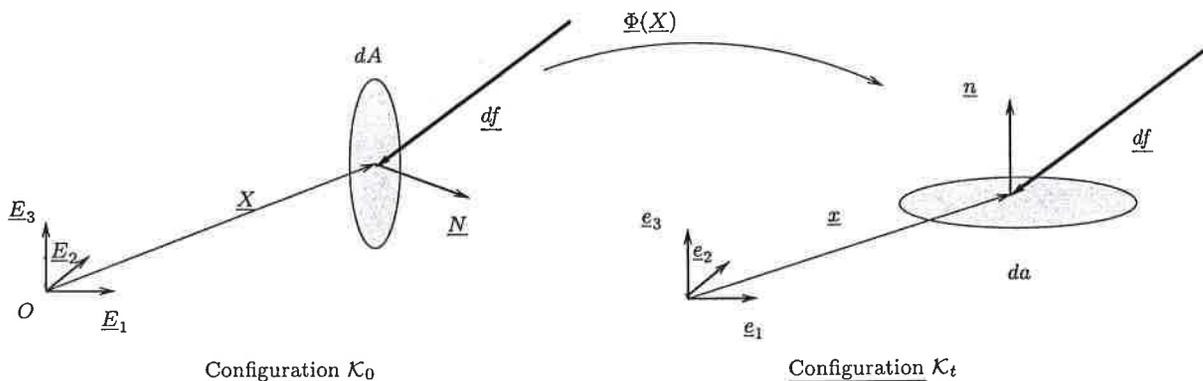


FIG. 2.2 – Signification physique de \underline{P}

accès à la force élémentaire s'appliquant dans la configuration déformée par unité de surface de la configuration de référence.

La définition de $\underline{\underline{P}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ est directement obtenue par injection de la formule de transport 2.1 dans l'égalité entre les relations 2.2 et 2.3. On trouve :

$$\underline{\underline{P}}(\underline{X}) = J(\underline{X}) \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\phi}(\underline{X})) \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}(\underline{X}) \quad (2.4)$$

L'intérêt du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff réside dans le sens physique que possède donc ses composantes. Cependant, la relation 2.4 met en évidence deux inconvénients :

- $\underline{\underline{P}}$ est un tenseur qualifié de mixte c'est à dire défini à la fois par la configuration de référence et la configuration courante. Ceci est une conséquence directe du sens physique qu'il possède.
- $\underline{\underline{P}}$ est un tenseur non symétrique.

2.1.2 Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, noté $\underline{\underline{S}}$, a alors été défini comme suit à partir de $\underline{\underline{P}}$ afin de surmonter les deux inconvénients précédemment cités de $\underline{\underline{P}}$:

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X}) = \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}) \cdot \underline{\underline{P}}(\underline{X}) \quad (2.5)$$

ce qui, grâce à 2.4, lie $\underline{\underline{S}}$ à $\underline{\underline{\sigma}}$ suivant :

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X}) = J(\underline{X}) \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\phi}(\underline{X})) \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}(\underline{X}) \quad (2.6)$$

La relation 2.5 permet alors de constater que $\underline{\underline{S}}$ est un un tenseur purement Lagrangien alors que la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$ assure la symétrie de $\underline{\underline{S}}$ par 2.6.

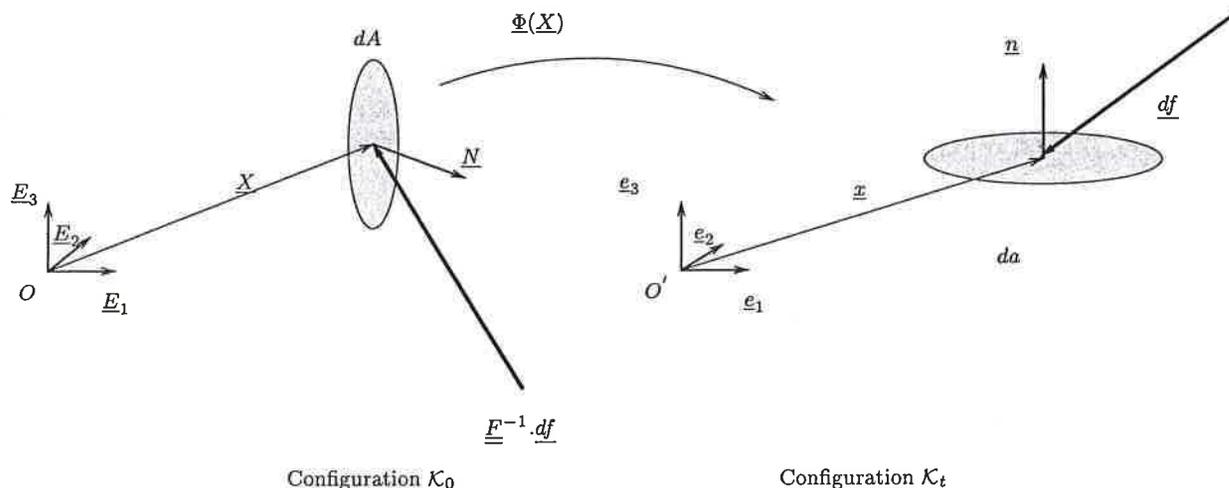
Cependant cette définition de $\underline{\underline{S}}$ conduit à une perte du sens physique de ses composantes. En effet, en explicitant l'expression de $\underline{\underline{S}}$ en fonction du vecteur force élémentaire \underline{df} par les relations 2.5 et 2.3, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}(\underline{X}) \cdot \underline{N}(\underline{X}) &= \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}) \cdot \underline{\underline{P}}(\underline{X}) \cdot \underline{N}(\underline{X}) \\ &= \frac{1}{dA} (\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}) \cdot \underline{df}(\underline{\phi}(\underline{X}))) \end{aligned}$$

Le vecteur contrainte associé à $\underline{\underline{S}}$ donne donc accès au vecteur $\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{df}$ par unité de surface de la configuration de référence comme le montre la figure 2.3. Or le vecteur force élémentaire \underline{df} n'est pas un vecteur matériel. Le vecteur $\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{df}$ obtenu par un transport convectif inverse n'a donc pas de sens physique.

2.2 Equations lagrangiennes du problème mécanique

Nous allons formuler l'ensemble des équations du problème (\mathcal{P}) sur la configuration de référence en utilisant successivement le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\underline{\underline{P}}$, puis le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\underline{\underline{S}}$. Nous commencerons par proposer diverses écritures de la loi de comportement puis, nous écrirons les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

FIG. 2.3 – Signification physique de $\underline{\underline{S}}$

2.2.1 Loi de comportement

Densité d'énergie complémentaire

Dans la suite de ce travail nous ne nous intéresserons qu'aux matériaux hyperélastiques.

- Le principe d'indifférence matérielle permet de montrer que la densité d'énergie élastique de ces matériaux peut s'exprimer à l'aide d'une fonction de la déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ définie telle que :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}]$$

Notons $\omega(\underline{\underline{E}})$ cette densité d'énergie. L'inégalité de Clausius-Duhem permet de montrer que :

$$\underline{\underline{S}} = \left(\frac{d\omega}{d\underline{\underline{E}}} \right)_{sym} \quad (2.7)$$

où la notation $(\)_{sym}$ désigne la partie symétrique du tenseur d'ordre 2 considéré. C'est la première façon d'écrire le comportement. On peut généralement choisir ω pour que $\frac{d\omega}{d\underline{\underline{E}}}$ soit symétrique, ce qui simplifie la relation en 2.7 en :

$$\underline{\underline{S}} = \frac{d}{d\underline{\underline{E}}} \omega(\underline{\underline{E}}) \quad (2.8)$$

- Certains auteurs introduisent une densité d'énergie de déformation fonction de $\underline{\underline{F}}$ notée $\bar{\omega}(\underline{\underline{F}})$, qui peut prêter à confusion. En effet, le tenseur $\underline{\underline{F}}$ n'est pas objectif puisqu'il dépend de la rotation de la matière d'après le théorème de décomposition polaire. La dépendance de $\bar{\omega}$ en $\underline{\underline{F}}$ n'est donc pas quelconque car le principe d'indifférence matérielle implique que :

$$\bar{\omega}(\underline{\underline{F}}) = \bar{\omega}(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}}) \quad \forall \underline{\underline{Q}} \text{ orthogonal}$$

Le plus simple consiste à écrire :

$$\omega(\underline{\underline{E}}) = \omega\left(\frac{1}{2}[\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}]\right) = \bar{\omega}(\underline{\underline{F}})$$

On montre que :

$$\frac{d}{d\underline{\underline{F}}}\bar{\omega}(\underline{\underline{F}}) = \frac{d}{d\underline{\underline{E}}}\omega(\underline{\underline{E}}) \cdot \frac{d\underline{\underline{E}}}{d\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{P}}$$

Le comportement peut alors s'écrire :

$$\underline{\underline{P}} = \frac{d}{d\underline{\underline{F}}}\bar{\omega}(\underline{\underline{F}}) \quad (2.9)$$

• Dans notre travail, nous souhaitons utiliser une fonction densité d'énergie élastique écrite en contraintes. Pour cela, nous définissons $\omega^c(\underline{\underline{S}})$ par la transformation de Legendre-Fenchel de $\omega(\underline{\underline{E}})$. La densité $\omega^c(\underline{\underline{S}})$ ainsi obtenue vérifie le principe d'indifférence matérielle. Nous avons alors

$$\underline{\underline{E}} = \frac{d}{d\underline{\underline{S}}}\omega^c(\underline{\underline{S}})$$

C'est une troisième façon d'écrire le comportement.

• Il semble souhaitable, en raison du sens physique direct que possède $\underline{\underline{P}}$, de pouvoir exprimer la densité d'énergie complémentaire notée $\bar{\omega}^c$ comme une fonction de $\underline{\underline{P}}$. Cette question a fait l'objet de nombreux tâtonnements dans la littérature comme le rappelle [Dill 77]. [Levinson 65] affirme tout d'abord que cette énergie complémentaire, exprimée à l'aide de $\underline{\underline{P}}$, est obtenue par la transformée de Legendre-Fenchel de $\bar{\omega}(\underline{\underline{F}})$ moyennant l'inversion de la relation 2.9. Or, [Novozhilov 58] puis [Truesdell 65] montrent que cette inversion est impossible. Remarquons que $\underline{\underline{P}}$ n'est pas un tenseur objectif. Supposons que l'on sache écrire la densité d'énergie élastique en fonction de $\underline{\underline{P}}$ que nous noterons $\bar{\omega}^c(\underline{\underline{P}})$. Remarquons que le tenseur $\underline{\underline{P}}$ n'est pas objectif. Le principe d'indifférence matérielle implique que :

$$\bar{\omega}^c(\underline{\underline{P}}) = \bar{\omega}^c(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{P}}) \quad \forall \underline{\underline{Q}} \text{ orthogonal}$$

[Zubov 70] construit alors $\bar{\omega}^c(\underline{\underline{P}})$ grâce au tenseur objectif

$$(\underline{\underline{P}}^*)^2 = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}}^T \quad (2.10)$$

Le point clé de sa démonstration repose sur le calcul de $\underline{\underline{P}}^*$ comme racine carrée de $\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}}^T$. Mais [Koiter 73] met en cause la validité du calcul de Zubov car contrairement à ce qu'il écrit ce dernier, la relation 2.10 ne conduit pas à la détermination d'un unique $\underline{\underline{P}}^*$.

Le plus simple consiste à choisir une expression de l'énergie dépendant de $\underline{\underline{P}}$ et de $\underline{\underline{F}}$ par :

$$\bar{\omega}^c(\underline{\underline{P}}, \underline{\underline{F}}) = \omega^c(\underline{\underline{S}}) = \omega^c(\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{P}})$$

Illustrons ce qui précède à partir d'un comportement quadratique en $\underline{\underline{E}}$.

Notons $\underline{\underline{R}}$ un tenseur d'ordre 4 de rigidité inversible tel que $R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{ijlk} = R_{klij}$. Et supposons que :

$$\omega(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.11)$$

On a alors les égalités suivantes :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{R}} : \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{R}}^{-1} : \underline{\underline{S}}$$

$$\omega^c(\underline{\underline{S}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{R}}^{-1} : \underline{\underline{S}}$$

De 2.11 on tire également :

$$\bar{w}(\underline{\underline{F}}) = \frac{1}{8} [\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}] : \underline{\underline{R}} [\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}]$$

qui permet de calculer

$$\underline{\underline{P}} = \frac{d}{d\underline{\underline{F}}} \bar{w}(\underline{\underline{F}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{F}} : \underline{\underline{R}} : [\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}] \quad (2.12)$$

et on reconnaît alors bien la relation $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}}$.

La relation 2.12 n'est pas facile à inverser pour exprimer $\underline{\underline{F}}$ en fonction de $\underline{\underline{P}}$. La transformation de Legendre-Fenchel de $\bar{w}(\underline{\underline{F}})$ n'est donc pas facile à construire. Nous préférons dans la suite lorsque nous utiliserons une formulation en $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{\phi}}$ définir l'énergie élastique à partir de $\bar{w}^c(\underline{\underline{P}}, \underline{\underline{F}}) = \omega^c(\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{P}})$, ce qui dans cette application s'écrit :

$$\omega^c(\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{P}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}) : \underline{\underline{R}}^{-1} : (\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{P}})$$

2.2.2 Equations d'équilibre et conditions aux limites

Formulation à l'aide $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{\phi}}$

Rappelons les équations du problème d'hyperélasticité écrites en $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{\phi}}$.

- L'équilibre en forces s'écrit :

$$\text{Div } \underline{\underline{P}} + \rho_0 \underline{\underline{f}}^d = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (2.13)$$

où Div désigne l'opérateur divergence par rapport aux variables d'espace lagrangiennes $(X_i)_{(i=1,3)}$. Notons que compte-tenu du sens physique de $\underline{\underline{P}}$, l'équilibre en force ne porte logiquement que sur cette grandeur. La relation 2.13 traduit l'équilibre des forces élémentaires appliquées sur un volume élémentaire de Ω_t en utilisant la géométrie de l'antécédent de ce volume par $\underline{\underline{\phi}}$.

- Il faut encore écrire la condition d'équilibre des moments à l'aide de $\underline{\underline{P}}$. Cet équilibre est traduit par la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$ en eulérien. La relation 2.4 permet de traduire la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$ à l'aide de $\underline{\underline{P}}$ par :

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{F}}^T)^T = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{P}}^T \quad (2.14)$$

Remarquons que l'équilibre des moments dans la configuration courante, contrairement à l'équilibre en forces, fait intervenir la géométrie de la configuration déformée. L'écriture de cet équilibre s'exprime donc logiquement à la fois à l'aide de $\underline{\underline{P}}$ et à l'aide de $\underline{\underline{\phi}}$.

- La continuité du vecteur contrainte sur l'interface $\Gamma_0^{1,2}$ s'écrit :

$$[\underline{\underline{P}}^2 - \underline{\underline{P}}^1]_{|\Gamma_0^{1,2}} \cdot \underline{\underline{N}}^{2,1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^{1,2} \quad (2.15)$$

où $\underline{\underline{P}}^i$ désigne la restriction de $\underline{\underline{P}}$ à Ω_0^i pour $i = \{1, 2\}$

- Les conditions aux limites en efforts imposés s'écrivent :

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{T}}_0^d \quad \text{sur } \partial_T \Omega_0 \quad (2.16)$$

où $\underline{\underline{T}}_0^d$ a été défini en dans la section 2.1.

- Les conditions aux limites en déplacements s'écrivent quand à elles :

$$\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\phi}}^d \quad \text{sur } \partial_u \Omega_0 \quad (2.17)$$

Formulation à l'aide de $\underline{\underline{\phi}}$ et de $\underline{\underline{S}}$

Les équations précédentes peuvent être reformulées avec le tenseur $\underline{\underline{S}}$ en leur injectant la relation 2.5. On obtient alors les relations suivantes vérifiées par un couple solution $(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{\phi}})$:

- l'équilibre en forces s'écrit :

$$\text{Div} \left(\underline{\underline{\nabla \phi}} \cdot \underline{\underline{S}} \right) + \rho_0 \underline{\underline{f}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (2.18)$$

- la condition d'équilibre des moments qui d'après 2.6 exige la symétrie de $\underline{\underline{S}}$.

- La continuité du vecteur contrainte sur l'interface $\Gamma_0^{1,2}$ s'écrit

$$\left[\left(\underline{\underline{\nabla \phi}}^2 \cdot \underline{\underline{S}}^2 \right) - \left(\underline{\underline{\nabla \phi}}^1 \cdot \underline{\underline{S}}^1 \right) \right]_{|\Gamma_0^{1,2}} \cdot \underline{\underline{N}}^{2,1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^{1,2} \quad (2.19)$$

où $\underline{\underline{\phi}}^i$ et $\underline{\underline{S}}^i$ désignent respectivement les restrictions de $\underline{\underline{\phi}}$ et $\underline{\underline{S}}$ à Ω_0^i pour $i = \{1, 2\}$

- les conditions aux limites en efforts s'écrivent :

$$\left(\underline{\underline{\nabla \phi}} \cdot \underline{\underline{S}} \right) \cdot \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{T}}_0^d \quad \text{sur } \partial_T \Omega_0 \quad (2.20)$$

- les conditions aux limites en déplacements restant identiques :

$$\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\phi}}^d \quad \text{sur } \partial_u \Omega_0 \quad (2.21)$$

En conclusion, le tableau ci-dessous récapitule les différentes expressions des équations du problème que nous venons de présenter :

Equations de (\mathcal{P}) en $\underline{\phi}$ et \underline{P}	Equations de (\mathcal{P}) en $\underline{\phi}$ et \underline{S}
(Eqs I)	(Eqs II)
$\text{Div } \underline{P} = 0$ dans Ω_0	$\text{Div } (\underline{\nabla} \underline{\phi} \cdot \underline{S}) = 0$ dans Ω_0
$\underline{\nabla} \underline{\phi}^{-1} \cdot \underline{P} = \underline{P}^T \cdot \underline{\nabla} \underline{\phi}^{-T}$ dans Ω_0	$\underline{S} = \underline{S}^T$ dans Ω_0
$\underline{P} = \frac{d}{d\underline{F}} \bar{\omega}(\underline{F})$ dans Ω_0	$\left. \begin{array}{l} \underline{S} = \frac{d}{d\underline{E}} \omega(\underline{E}) \\ \text{ou} \\ \underline{E} = \frac{d}{d\underline{S}} \omega^c(\underline{S}) \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega_0$
$[\underline{P}^2 - \underline{P}^1]_{ \Gamma_0^{1,2}} \cdot \underline{N}^{2,1} = 0$ sur $\Gamma_0^{1,2}$	$[(\underline{\nabla} \underline{\phi}^2 \cdot \underline{S}^2) - (\underline{\nabla} \underline{\phi}^1 \cdot \underline{S}^1)]_{ \Gamma_0^{1,2}} \cdot \underline{N}^{2,1} = 0$ sur $\Gamma_0^{1,2}$
$\underline{P} \cdot \underline{N} = \underline{T}_0^d$ sur $\partial_T \Omega_0$	$(\underline{\nabla} \underline{\phi} \cdot \underline{S}) \cdot \underline{N} = \underline{T}_0^d$ sur $\partial_T \Omega_0$
$\underline{\phi} = \underline{\phi}^d$ sur $\partial_u \Omega_0$	$\underline{\phi} = \underline{\phi}^d$ sur $\partial_u \Omega_0$

2.3 Formulations variationnelles mixtes Lagrangiennes

En H.P.P, il existe de nombreuses formulations variationnelles faisant intervenir :

– un seul champ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energie potentielle fonction du déplacement } \underline{u} \\ \text{Energie complémentaire fonction du champ de contraintes } \underline{\sigma} \end{array} \right.$$

– deux champs : fonctionnelle d'Hellinger-Reissner fonction des champs indépendants \underline{u} et $\underline{\sigma}$.

– ou trois champs \underline{u} , $\underline{\sigma}$ et $\underline{\epsilon}$ (le tenseur des déformations linéarisées) qui sont considérés comme indépendants [Imbert 90].

La construction de principes variationnels mixtes en grandes transformations a fait l'objet d'une abondante littérature. On trouve également, comme généralisation directe de cas H.P.P, un principe du minimum de l'énergie formulée à l'aide de l'unique champ de déplacements. [Tabarrok 80] l'utilise pour l'étude des plaques.

L'écriture d'un principe de l'énergie complémentaire pose lui problème comme le rappelle

[Reissner 84]. La discussion concernant l'existence d'un tel principe est directement liée à celle déjà menée sur l'existence d'une énergie complémentaire écrite en contraintes.

[de Veubeke 72] propose lui un principe mixte général dans lequel les champs indépendants sont d'une part le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et d'autre part la rotation de la décomposition polaire. Ce principe est d'ailleurs mis en oeuvre dans l'étude des coques par [Valid 86].

Notons encore que d'autres auteurs, dont [Atluri 84], proposent des formulations variationnelles présentant un jeu de trois champs indépendants constitués de $\underline{\underline{R}}$, le tenseur de rotation locale de la matière, $\underline{\underline{U}}$ le tenseur des déformations pures ainsi que différents tenseurs des contraintes et de leurs mesures de déformations associées. La signification physique de ces tenseurs des contraintes n'est cependant pas immédiate et ne provient en fait que de l'observation de la transformation dans des référentiels animés de rotations correspondantes.

Dans cette section, nous proposons deux formulations variationnelles à deux champs. La première formulation variationnelle est fonction des champs $\underline{\phi}$ et $\underline{\underline{S}}$, la seconde est fonction des champs $\underline{\phi}$ et $\underline{\underline{P}}$.

2.3.1 Formulation en $\underline{\phi}$ et $\underline{\underline{S}}$

L'expression la plus simple d'un principe mixte écrit sur la configuration de référence est obtenue en retenant comme variables indépendantes dans la fonctionnelle le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\underline{\underline{S}}$, et la transformation $\underline{\phi}$. Comme nous allons le voir, la prise en compte de conditions aux limites en déplacements fait que ce principe n'est pas tout à fait la généralisation directe au cadre des grandes transformations du principe d'Hellinger-Reissner utilisé dans la modélisation multiparticulaire.

Désignons par $C^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continûment différentiables sur le domaine Ω quelconque, et $C^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω .

Supposons que les sous-systèmes (S^1) et (S^2) partitionnant (S) correspondent chacun à un matériau homogène et que les forces massiques soient régulières. Dans ce cas, les couples solutions $(\underline{\phi}, \underline{\underline{S}})$ peuvent être recherchés parmi les champs continûment différentiables sur chacun des morceaux $\Omega_{i \in \{1,2\}}^i$. De plus, $\underline{\phi}$ doit être continue dans Ω_0 .

On introduit les deux espaces fonctionnels suivants :

- E_ϕ , l'espace dans lequel on recherche $\underline{\phi}$ est défini par :

$$E_\phi \equiv \left\{ \underline{\phi} / \underline{\phi} \in (C^1(\Omega_i))^3 \quad \forall i \in [1, 2] \text{ et } \underline{\phi} \in (C^0(\Omega_0))^3 \right\}$$

- E_S , l'espace dans lequel on recherche $\underline{\underline{S}}$ est défini par :

$$E_S = \left\{ \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T \in (C^1(\Omega_i))^3 \quad \forall i \in [1, 2] \right\}$$

Le principe mixte formulé en $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\phi}$ s'énonce alors comme suit :

Un couple $(\underline{\phi}, \underline{S})$ appartenant à $\mathbf{E}_\phi \times \mathbf{E}_S$ rendant stationnaire la fonctionnelle J définie par :

$$\begin{aligned} J(\underline{\phi}^*, \underline{S}^*) &= \int_{\Omega_0} -\omega^c(\underline{S}^*) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{S}^* : \frac{1}{2} \left[{}^t \underline{\nabla} \underline{\phi}^* \cdot \underline{\nabla} \underline{\phi}^* - \underline{\mathbb{1}} \right] d\Omega_0 - \int_{\partial_T \Omega_0} \underline{T}_0^d \cdot \underline{\phi}^* d\Gamma_0 \\ &\quad - \int_{\partial_u \Omega_0} \left(\underline{\nabla} \underline{\phi}^* \cdot \underline{S}^* \right) \cdot \underline{N} (\underline{\phi}^* - \underline{\phi}^d) d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

est solution du problème (\mathcal{P}) .

Nous allons vérifier qu'un couple $(\underline{\phi}, \underline{S})$ de $\mathbf{E}_\phi \times \mathbf{E}_S$ rendant stationnaire la fonctionnelle J définie en 2.22 vérifie bien l'ensemble des équations $(Eq II)$.

Stationnarité par rapport à $\underline{S} \in \mathbf{E}_S$

La variation de J par rapport au tenseur des contraintes \underline{S} dans la direction $\underline{\delta S} \in \mathbf{E}_S$ calculée au point $(\underline{\phi}, \underline{S})$ de $\mathbf{E}_\phi \times \mathbf{E}_S$ sera notée $D_{,\underline{S}}(\underline{\phi}, \underline{S}) [\underline{\delta S}]$. Compte tenu de la définition 2.22 cette variation s'écrit :

$$\begin{aligned} D_{,\underline{S}}(\underline{\phi}, \underline{S}) [\underline{\delta S}] &= - \int_{\Omega_0} \frac{\partial \omega^c(\underline{S})}{\partial \underline{S}} : {}^t \underline{\delta S} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \left[{}^t \underline{\nabla} \underline{\phi} \cdot \underline{\nabla} \underline{\phi} - \underline{\mathbb{1}} \right] : \underline{\delta S} d\Omega_0 \\ &\quad - \int_{\partial_u \Omega_0} \left[\left(\underline{\nabla} \underline{\phi} \cdot \underline{\delta S} \right) \cdot \underline{N} \right] \cdot (\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) d\Gamma_0 \end{aligned}$$

qui s'écrit après regroupement :

$$\begin{aligned} D_{,\underline{S}}(\underline{\phi}, \underline{S}) [\underline{\delta S}] &= \int_{\Omega_0} \left\{ -\frac{\partial \omega^c(\underline{S})}{\partial \underline{S}} + \frac{1}{2} \left[{}^t \underline{\nabla} \underline{\phi} \cdot \underline{\nabla} \underline{\phi} - \underline{\mathbb{1}} \right] \right\} : \underline{\delta S} d\Omega_0 \\ &\quad - \int_{\partial_u \Omega_0} \left[\left(\underline{\nabla} \underline{\phi} \cdot \underline{\delta S} \right) \cdot \underline{N} \right] \cdot (\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) d\Gamma_0 \end{aligned}$$

La condition de stationnarité $D_{,\underline{S}}(\underline{\phi}, \underline{S}) [\underline{\delta S}] = 0 \quad \forall \underline{\delta S} \in \Sigma$ entraîne donc les deux conditions

$$\int_{\Omega_0} \left\{ -\frac{\partial \omega^c(\underline{S})}{\partial \underline{S}} + \frac{1}{2} \left[{}^t \underline{\nabla} \underline{\phi} \cdot \underline{\nabla} \underline{\phi} - \underline{\mathbb{1}} \right] \right\} : \underline{\delta S} d\Omega_0 = 0 \quad \forall \underline{\delta S} \in \mathbf{E}_S \quad (2.23)$$

et

$$\int_{\partial_u \Omega_0} \left[\left(\underline{\nabla} \underline{\phi} \cdot \underline{\delta S} \right) \cdot \underline{N} \right] \cdot (\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) d\Gamma_0 = 0 \quad \forall \underline{\delta S} \in \mathbf{E}_S \quad (2.24)$$

La condition 2.23 avec $\underline{\delta S} \in \mathbf{E}_S$ donc $\underline{\delta S}$ symétrique entraîne alors que le couple $(\underline{\phi}, \underline{S})$ doit vérifier l'égalité :

$$\left(\frac{\partial \omega^c(\underline{S})}{\partial \underline{S}} \right)_{sym} = \frac{1}{2} \left[{}^t \underline{\nabla \phi} \cdot \underline{\nabla \phi} - \underline{\underline{1}} \right]$$

qui n'est autre que la loi de comportement. On peut bien sûr choisir $\omega^c(\underline{S})$ tel que $\frac{\partial \omega^c(\underline{S})}{\partial \underline{S}}$ soit symétrique, ce qui simplifie l'écriture.

La condition 2.24 demande un traitement complémentaire avant de pouvoir conclure sur $\partial_u \Omega_0$. Elle se réécrit :

$$\int_{\partial_u \Omega_0} \underline{\nabla \phi}^T \cdot (\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) \cdot (\underline{\delta S} \cdot \underline{N}) = 0 \quad \forall \underline{\delta S} \in \Sigma \quad (2.25)$$

On montre alors que quel que soit le vecteur $\underline{V} \in \mathbb{R}^3$, et \underline{N} vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 on peut trouver $\underline{\delta \hat{S}} \in \mathbf{E}_S$ tel que $\underline{\delta \hat{S}} \cdot \underline{N} = \underline{V}$ sur $\partial_u \Omega_0$. Ainsi, la condition 2.25 implique que

$$\int_{\partial_u \Omega_0} \underline{\nabla \phi}^T \cdot (\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) \cdot \underline{V} \, d\Gamma_0 = 0 \quad \forall \underline{V} \text{ suffisamment régulier sur } \partial_u \Omega_0$$

On peut alors déduire que

$$\underline{\nabla \phi}^T \cdot (\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) = \underline{0} \quad \text{sur } \partial_u \Omega_0$$

Et comme $\underline{\nabla \phi}$ est inversible ($\det \underline{F} \neq 0$ sur $\partial_u \Omega_0$), on en déduit la relation :

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}^d \quad \text{sur } \partial_u \Omega_0$$

Stationnarité par rapport à $\underline{\phi}$

La variation de J par rapport à la transformation $\underline{\phi}^*$ dans la direction $\underline{\delta \phi} \in \mathbf{E}_\phi$ et calculée au point $(\underline{\phi}, \underline{S})$ de $\mathbf{E}_\phi \times \mathbf{E}_S$ sera notée $D_{\underline{\phi}^*} J(\underline{\phi}, \underline{S}) [\underline{\delta \phi}]$.

Compte tenu de la définition 2.22 cette variation s'écrit :

$$\begin{aligned} D_{\underline{\phi}^*} J(\underline{\phi}, \underline{S}) [\underline{\delta \phi}] &= \int_{\Omega_0} \underline{S} : \frac{1}{2} \left[\underline{\nabla \delta \phi}^T \cdot \underline{\nabla \phi} + \underline{\nabla \phi}^T \cdot \underline{\nabla \delta \phi} \right] \, d\Omega_0 - \int_{\partial_T \Omega_0} \underline{T}_0^d \cdot \underline{\delta \phi} \, d\Gamma_0 \\ &\quad - \int_{\partial_u \Omega_0} \left\{ \left[(\underline{\nabla \delta \phi} \cdot \underline{S}) \cdot \underline{N} \right] \cdot (\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) + \left[(\underline{\nabla \phi} \cdot \underline{S}) \cdot \underline{N} \right] \cdot \underline{\delta \phi} \right\} \, d\Gamma_0 \end{aligned}$$

Comme le point stationnaire vérifie $\underline{\phi} = \underline{\phi}^d$ sur $\partial_u \Omega_0$ on obtient donc :

$$\begin{aligned} D_{\underline{\phi}^*} J(\underline{\phi}, \underline{S}) [\underline{\delta \phi}] &= \int_{\Omega_0} (\underline{\nabla \phi} \cdot \underline{S}) : \underline{\nabla \delta \phi}^T \, d\Omega_0 - \int_{\partial_T \Omega_0} \underline{T}_0^d \cdot \underline{\delta \phi} \, d\Gamma_0 \\ &\quad - \int_{\partial_u \Omega_0} \left[(\underline{\nabla \phi} \cdot \underline{S}) \cdot \underline{N} \right] \cdot \underline{\delta \phi} \, d\Gamma_0 \end{aligned}$$

L'application du théorème de la divergence doit s'effectuer en tenant compte de la discontinuité possible de $\underline{\underline{\nabla\delta\phi}}$ et de $\underline{\underline{S}}$ sur $\Gamma_0^{1,2}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right)^T \underline{\underline{\nabla\delta\phi}} \, d\Omega_0 &= \int_{\Omega_0} \left\{ \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{N}} \right\} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \text{Div} \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Omega_0 \\ &\quad + \int_{\Gamma_0^{1,2}} \left\{ \left[\left(\underline{\underline{\nabla\phi^2.\underline{S}^2}} \right) - \left(\underline{\underline{\nabla\phi^1.\underline{S}^1}} \right) \right] \cdot \underline{\underline{N}^{2,1}} \right\} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Gamma_0^{1,2} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} D_{,\underline{\phi}}(\underline{\phi}, \underline{\underline{S}}) [\underline{\delta\phi}] &= - \int_{\Omega_0} \text{Div} \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Omega_0 + \int_{\partial_T\Omega_0} \left\{ \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{N}} - \underline{\underline{T}}_0^d \right\} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Gamma_0 \\ &\quad + \int_{\Gamma_0^{1,2}} \left\{ \left[\left(\underline{\underline{\nabla\phi^2.\underline{S}^2}} \right) - \left(\underline{\underline{\nabla\phi^1.\underline{S}^1}} \right) \right] \cdot \underline{\underline{N}^{2,1}} \right\} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Gamma_0^{1,2} \end{aligned}$$

La condition de stationnarité $D_{,\underline{\phi}^*}(\underline{\phi}, \underline{\underline{S}}) [\underline{\delta\phi}] = 0 \quad \forall \underline{\delta\phi} \in \mathbf{E}_\phi$ entraîne donc l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \text{Div} \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Omega_0 + \int_{\partial_T\Omega_0} \left\{ \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{N}} - \underline{\underline{T}} \right\} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Gamma_0 \\ + \int_{\Gamma_0^{1,2}} \left\{ \left[\left(\underline{\underline{\nabla\phi^2.\underline{S}^2}} \right) - \left(\underline{\underline{\nabla\phi^1.\underline{S}^1}} \right) \right] \cdot \underline{\underline{N}^{2,1}} \right\} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} \, d\Gamma_0^{1,2} = 0 \quad \forall \underline{\delta\phi} \in \mathbf{E}_\phi \end{aligned}$$

Il en résulte donc que le couple $(\underline{\phi}, \underline{\underline{S}})$ vérifie les trois relations :

$$\begin{cases} \text{Div} \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right) &= 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \left[\left(\underline{\underline{\nabla\phi^2.\underline{S}^2}} \right) - \left(\underline{\underline{\nabla\phi^1.\underline{S}^1}} \right) \right] \cdot \underline{\underline{N}^{2,1}} &= 0 & \text{sur } \Gamma_0^{1,2} \\ \left(\underline{\underline{\nabla\phi.\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{N}} &= \underline{\underline{T}}_0^d & \text{sur } \partial_T\Omega_0 \end{cases}$$

Toutes les équations du problème (\mathcal{P}) sont donc bien vérifiées par le couple $(\underline{\phi}, \underline{\underline{S}})$ rendant stationnaire la fonctionnelle J telle qu'elle est définie en 2.22.

2.3.2 Formulation en $\underline{\phi}$ et $\underline{\underline{P}}$

On peut être tenté par une formulation utilisant le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{P}}$ plutôt que le second $\underline{\underline{S}}$, compte-tenu de la signification physique de $\underline{\underline{P}}$. Les conditions d'existence de ce principe en temps que principe d'extremum ont été étudiées par [Stumpf 79]. Nous allons ici l'établir par changement de variable à partir du principe précédent. On rappelle la relation 2.5 reliant $\underline{\underline{S}}$ à $\underline{\underline{P}}$: $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\nabla\phi^{-1}} \cdot \underline{\underline{P}}}$.

Si $\underline{\phi} \in \mathbf{E}_\phi$ et $\underline{S} \in \mathbf{E}_S$, alors compte-tenu des définitions de ces deux espaces ainsi que de la relation précédente, on définit un troisième espace fonctionnel

$$\mathbf{E}_P = \left\{ (\underline{\phi}^*, \underline{P}^*) / \underline{\phi}^* \in \mathbf{E}_\phi, \underline{P}^* \in (C^1(\Omega_i))^9 \forall i \in \{1, 2\} \text{ et } \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*-1} \cdot \underline{P}^* = \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*-1} \cdot \underline{P}^* \right)^T \right\} \quad (2.26)$$

En remplaçant dans 2.22, on définit la fonctionnelle \hat{J} :

$$\begin{aligned} \hat{J}(\underline{\phi}^*, \underline{P}^*) &= \int_{\Omega_0} -\omega^c(\underline{S}(\underline{\phi}^*, \underline{P}^*)) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*-1} \cdot \underline{P}^* \right) : \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*T} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^* - \underline{\underline{1}} \right] d\Omega_0 \\ &\quad - \int_{\partial_T \Omega_0} \underline{T}_0^d \cdot \underline{\phi}^* d\Gamma_0 - \int_{\partial_u \Omega_0} \underline{P}^* \cdot \underline{N}(\underline{\phi}^* - \underline{\phi}^d) d\Gamma_0 \end{aligned}$$

avec $\underline{S}(\underline{\phi}^*, \underline{P}^*) = \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*-1} \cdot \underline{P}^*$ qui se réécrit :

$$\begin{aligned} \hat{J}(\underline{\phi}^*, \underline{P}^*) &= \int_{\Omega_0} -\omega^c(\underline{S}(\underline{\phi}^*, \underline{P}^*)) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{P}^* : \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*T} - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*-1} \right] d\Omega_0 \\ &\quad - \int_{\partial_T \Omega_0} \underline{T}_0^d \cdot \underline{\phi}^* d\Gamma_0 - \int_{\partial_u \Omega_0} \underline{P}^* \cdot \underline{N}(\underline{\phi}^* - \underline{\phi}^d) d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Stationnarité par rapport à \underline{P}

On vérifie que :

$$\begin{aligned} D_{\underline{P}^*} \omega^c(\underline{\phi}, \underline{P}) [\underline{\delta P}] &= \frac{\partial \omega^c}{\partial \underline{S}^*} : \frac{\partial \underline{S}^*}{\partial \underline{P}^*} |_{(\underline{\phi}, \underline{S})} : \underline{\delta P}^T = \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{-T} \cdot \frac{\partial \omega^c}{\partial \underline{S}^*} \right) : \underline{\delta P}^T \\ &= \left[\left(\frac{\partial \omega^c}{\partial \underline{S}^*} \right)^T \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{-1} \right] : \underline{\delta P} = \left(\frac{\partial \omega^c}{\partial \underline{S}^*} \right)^T : \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{-1} \cdot \underline{\delta P} \right] \end{aligned}$$

La variation de \hat{J} par rapport à \underline{P}^* dans la direction $\underline{\delta P} \in \mathbf{E}_P$ calculée au point $(\underline{\phi}, \underline{P}) \in \mathbf{E}_P$ est notée $D_{\underline{P}^*} \hat{J}(\underline{\phi}, \underline{P}) [\underline{\delta P}]$ et on a compte-tenu de 2.27 :

$$\begin{aligned} D_{\underline{P}^*} \hat{J}(\underline{\phi}, \underline{P}) [\underline{\delta P}] &= \int_{\Omega_0} \left\{ - \left(\frac{\partial \omega^c}{\partial \underline{S}^*} \right)^T + \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^T \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi} - \underline{\underline{1}} \right] \right\} : \left[\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{-1} \cdot \underline{\delta P} \right] d\Omega_0 \\ &\quad - \int_{\partial_u \Omega_0} \underline{\delta P} \cdot \underline{N}(\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) d\Gamma_0 \end{aligned}$$

La condition de stationnarité de \hat{J} , par rapport à $\underline{\underline{P}}^*$ s'écrit :

$$D_{,\underline{\underline{P}}^*} \hat{J}(\underline{\underline{\phi}}, \underline{\underline{P}}) [\underline{\underline{\delta P}}] = 0 \forall \underline{\underline{\delta P}} \text{ vérifiant } \left(\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \cdot \underline{\underline{\delta P}} \right) \text{ symétrique}$$

et conduit donc aux deux relations :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \omega^c}{\partial \underline{\underline{S}}} \right)_{sym} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\nabla \phi^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla \phi}} - \underline{\underline{1}} \right] & \text{dans } \Omega_0 \\ \underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\phi^d}} & \text{sur } \partial_u \Omega_0 \end{cases}$$

Cette dernière relation est obtenue car $\underline{\underline{\delta P}} \cdot \underline{\underline{N}}$ décrit des champs réguliers sur $\partial_u \Omega_0$.

Stationnarité par rapport à $\underline{\underline{\phi}}$

La présence du terme en $\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}}$ dans l'expression de \hat{J} complique l'écriture de la stationnarité par rapport à $\underline{\underline{\phi}}$. La relation entre la variation de $\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}}$ et $\underline{\underline{\delta \phi}}$ est obtenue à partir de l'égalité

$$\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \cdot \underline{\underline{\nabla \phi}} = \underline{\underline{1}}$$

qui conduit à :

$$\delta \left(\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \right) = - \underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \cdot \underline{\underline{\nabla \delta \phi}} \cdot \underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \quad (2.28)$$

On vérifie alors, compte-tenu de 2.5,

$$\begin{aligned} D_{,\underline{\underline{\phi}}} \omega^c(\underline{\underline{\phi}}, \underline{\underline{P}}) [\underline{\underline{\delta \phi}}] &= \frac{\partial \bar{\omega}^c}{\partial \underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}}} : \delta \left(\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \right)^T = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \underline{\underline{S}}} \cdot \underline{\underline{P^T}} \right) : \delta \left(\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \right)^T \\ &= - \left[\underline{\underline{\nabla \phi^{-T}}} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \underline{\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{P^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla \phi^{-T}}} \right] : \underline{\underline{\nabla \delta \phi^T}} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{\underline{P}} : \left[\underline{\underline{\nabla \delta \phi^T}} - \delta \left(\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \right) \right] &= \frac{1}{2} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\nabla \delta \phi^T}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{P}} : \left(\underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \cdot \underline{\underline{\nabla \delta \phi}} \cdot \underline{\underline{\nabla \phi^{-1}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\nabla \delta \phi^T}} + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla \phi^{-T}}} \cdot \underline{\underline{P^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla \phi^{-T}}} \right) : \underline{\underline{\nabla \delta \phi^T}} \end{aligned}$$

La variation de \hat{J} par rapport à $\underline{\phi}^*$ dans la direction $\underline{\delta\phi}$ calculée au point $(\underline{\phi}, \underline{P})$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} D_{,\underline{\phi}^*} \hat{J}(\underline{\phi}, \underline{P})[\underline{\delta\phi}] &= \int_{\Omega_0} \left[\underline{\underline{\nabla\phi^{-T}}} \cdot \left(\frac{\partial\omega^c}{\partial\underline{\underline{S}}} \right) \cdot \underline{\underline{P^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi^{-T}}} \right] : \underline{\underline{\nabla\delta\phi^T}} d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\nabla\delta\phi^T}} + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla\phi^{-T}}} \cdot \underline{\underline{P^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi^{-T}}} \right) : \underline{\underline{\nabla\delta\phi^T}} \right\} : \underline{\underline{\nabla\delta\phi^T}} d\Omega_0 \\ &- \int_{\partial_T\Omega_0} \underline{\underline{T_0^d}} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} d\Gamma_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{\nabla\phi^{-T}}} \cdot \left(\frac{\partial\omega^c}{\partial\underline{\underline{S}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{1}} \right) \cdot \underline{\underline{P^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi^{-T}}} \right\} : \underline{\underline{\nabla\delta\phi^T}} d\Omega_0 \\ &- \int_{\partial_T\Omega_0} \underline{\underline{T_0^d}} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} d\Gamma_0 \end{aligned}$$

Or, la stationnarité de \hat{J} par rapport à \underline{P}^* a conduit à la relation

$$\frac{\partial\omega^c}{\partial\underline{\underline{S}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{1}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\nabla\phi^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi}}$$

on obtient donc :

$$D_{,\underline{\phi}^*} \hat{J}(\underline{\phi}, \underline{P})[\underline{\delta\phi}] = \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{P}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\nabla\phi}} \cdot \underline{\underline{P^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi^{-T}}} \right\} : \underline{\underline{\nabla\delta\phi^T}} d\Omega_0 - \int_{\partial_T\Omega_0} \underline{\underline{T_0^d}} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} d\Gamma_0$$

Mais, $(\underline{\phi}, \underline{P}) \in \mathbf{E}_P$ donc

$$\underline{\underline{\nabla\phi^{-1}}} \cdot \underline{\underline{P}} = \left(\underline{\underline{\nabla\phi^{-1}}} \cdot \underline{\underline{P}} \right)^T = \underline{\underline{P^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi^{-T}}}$$

ce qui donne finalement :

$$D_{,\underline{\phi}^*} \hat{J}(\underline{\phi}, \underline{P})[\underline{\delta\phi}] = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\nabla\delta\phi^T}} - \int_{\partial_T\Omega_0} \underline{\underline{T_0^d}} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} d\Gamma_0$$

qui conduit, par application de la formule de Green au premier terme, à :

$$\begin{aligned} D_{,\underline{\phi}^*} \hat{J}(\underline{\phi}, \underline{P})[\underline{\delta\phi}] &= - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} d\Gamma_0 + \int_{\partial_T\Omega_0} \{ \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{N}} - \underline{\underline{T_0^d}} \} \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} d\Gamma_0 \\ &+ \int_{\Gamma_0^{1,2}} \left[(\underline{\underline{P^2}} - \underline{\underline{P^1}})_{|\Gamma_0^{1,2}} \cdot \underline{\underline{N^{2,1}}} \right] \cdot \underline{\underline{\delta\phi}} d\Gamma_0^{1,2} \end{aligned}$$

La condition de stationnarité de \hat{J} par rapport à $\underline{\phi}^*$, $D_{\underline{\phi}^*} \hat{J}(\underline{\phi}, \underline{P}) [\delta\phi] = 0 \forall \delta\phi \in E_\phi$ conduit donc aux trois relations supplémentaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div } \underline{P} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \\ [\underline{P}^2 - \underline{P}^1]_{|\Gamma_0^{1,2}} \cdot \underline{N}^{2,1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^{1,2} \\ \underline{P} \cdot \underline{N} = \underline{T}_0^d \quad \text{sur } \partial_T \Omega_0 \end{array} \right.$$

Pour conclure, on peut énoncer le résultat suivant :

Un couple $(\underline{\phi}, \underline{P})$ appartenant à E_P rendant stationnaire la fonctionnelle \hat{J} définie par :

$$\begin{aligned} \hat{J}(\underline{\phi}^*, \underline{P}^*) &= \int_{\Omega_0} -\omega^c(\underline{S}(\underline{\phi}^*, \underline{P}^*)) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{P} : \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \underline{\phi}^{*T} - \underline{\nabla} \underline{\phi}^{*-1}] d\Omega_0 \\ &\quad - \int_{\partial_T \Omega_0} \underline{T}_0^d \cdot (\underline{\phi}^*) d\Gamma_0 - \int_{\partial_u \Omega_0} (\underline{P}^* \cdot \underline{N}) \cdot (\underline{\phi}^* - \underline{\phi}^d) \end{aligned} \quad (2.29)$$

est solution du problème (P) .

Conclusion

Deux principes mixtes en grandes transformations écrits sur la configuration de référence sont proposés.

Ils font apparaître :

- Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\underline{\underline{P}}$, qui possède par définition un sens physique.
- Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\underline{\underline{S}}$, qui ne possède pas de sens physique immédiat.

La première formulation variationnelle proposée utilise la fonctionnelle J , dont les variables indépendantes sont la transformation $\underline{\phi}$ et $\underline{\underline{S}}$.

La seconde formulation variationnelle est construite par changement de variable à partir de la précédente et utilise la fonctionnelle \hat{J} dont les variables indépendantes sont $\underline{\phi}$ et $\underline{\underline{P}}$.

Dans chacune des deux fonctionnelles proposées, on a vérifié qu'un point stationnaire vérifie l'ensemble des équations du problème mécanique formulé à l'aide du jeu de variables considérées.

Ces deux formulations mixtes lagrangiennes vont donc être candidates pour la modélisation envisagée. Le choix de l'une d'entre elle sera justifié dans la partie suivante.

Chapitre 3

Etude Lagrangienne de poutres en grandes transformations

L'OBJECTIF de ce travail de thèse est de construire un modèle simplifié de poutre multicouche en grandes transformations à partir d'une fonctionnelle mixte. Il sera utile de comparer notre modèle à quelque uns des modèles cités dans la littérature. Dans ce chapitre, nous donnerons quelques éléments d'information sur ces modèles.

E. Reissner et J.C Simo ont largement contribué à la modélisation des poutres en grandes transformations.

Reissner s'est tout d'abord intéressé à la modélisation de poutres de type Timoshenko plane. Rappelons qu'une cinématique de type Timoshenko [Timoshenko 61], que nous aurons l'occasion de développer un peu plus loin, impose à chaque section initialement droite une rotation qui lui est propre et qui est distincte de la rotation locale de la fibre neutre. [Reissner 72] travaille sur la géométrie de la poutre dans sa configuration déformée. Il fait le bilan des efforts s'appliquant sur une section de la configuration déformée et retient un effort normal à la section, un effort tranchant situé dans le plan de la section et un moment de flexion. Les équations d'équilibre sont alors écrites à l'aide de ces grandeurs ainsi que des paramètres cinématiques intervenant logiquement lors des projections de ces efforts dans la base repérant la configuration déformée. Se pose alors le problème des définitions des déformations duales des efforts précédemment définis. Elles sont obtenus par identification après injection des équations d'équilibre précédemment trouvées dans l'expression du principe des travaux virtuels.

Partant de l'étude de Reissner, [Simo 82], va traiter le cas d'une cinématique plus générale autorisant notamment le gauchissement de chaque section dans le plan de la transformation. En se restreignant ensuite à une poutre de type Timoshenko, il reprend les problèmes soulevés par Reissner en utilisant pour sa part la configuration initiale.

C'est à partir de cette étude lagrangienne que nous allons successivement traiter des points suivants :

- écriture des équations d'équilibre de poutre à partir de la formulation lagrangienne des équations d'équilibre tridimensionnelles.
- En nous restreignant au cas de poutres de type Timoshenko, définitions lagrangiennes d'efforts possédant un sens physique sur la configuration déformée par projection de la résultante du torseur des efforts extérieurs sur une base liée à la section. Puis, introduction de ces efforts dans les équations précédentes.

- Identification des déformations duales des efforts physiques précédemment introduits.
- Comportement.

3.1 Présentation du problème

3.1.1 Description géométrique du problème

Les notations restent identiques à celles utilisées au début du chapitre précédent lors de la présentation du problème mécanique général (\mathcal{P}) . En particulier, on conserve deux systèmes de coordonnées $(X_\alpha)_{\alpha=[1,3]}$ et $(x_i)_{i=[1,3]}$ et leurs repères associés $(O; \underline{E}_\alpha)_{\alpha=[1,3]}$ et $(O'; \underline{e}_i)_{i=[1,3]}$ afin de repérer la position d'un point matériel du système respectivement dans \mathcal{K}_0 par le vecteur position $\underline{X} = X_\alpha \underline{E}_\alpha$ ($\alpha = [1,3]$) et dans \mathcal{K}_t par le vecteur position $\underline{x} = x_i \underline{e}_i$ ($i = [1,3]$). Le système étudié, (\mathcal{S}) , est une poutre initialement droite de longueur L dans la direction de l'axe X_1 , choisi suivant l'axe principal d'inertie de (\mathcal{S}) . Les sections droites dans \mathcal{K}_0 , notées S_0 , sont donc définies par l'intersection des plans $X_1 = \text{cte}$ avec le volume Ω_0 de \mathbb{R}^3 occupé par l'ensemble des points matériels de (\mathcal{S}) .

Notons, qu'il n'existe pas, lors de l'établissement des équations d'équilibre de la poutre, d'hypothèses restrictives quand au chargement et aux géométries des sections S_0 . Nous supposons cependant dans la suite que S_0 est indépendant de X_1 . La figure suivante présente le cas particulier de sections S_0 rectangulaires de surfaces constantes définies par une largeur $2b \ll L$ suivant X_2 et de hauteur $H \ll L$ suivant X_3 .

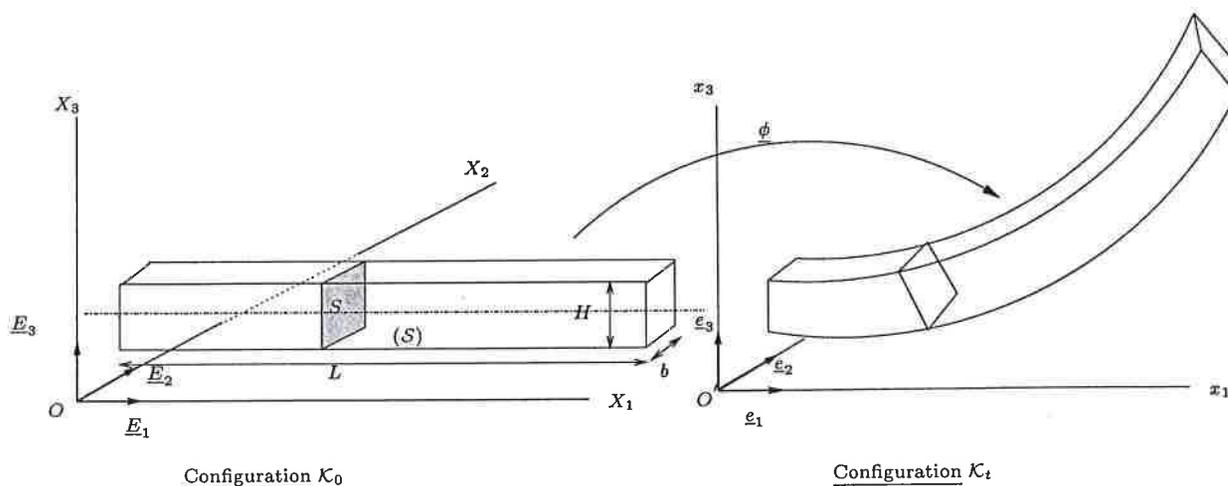


FIG. 3.1 – Géométrie de la poutre étudiée

3.1.2 Description cinématique

La transformation tridimensionnelle entre \mathcal{K}_0 et \mathcal{K}_t est encore notée $\underline{\phi}$. Elle est définie par :

$$\begin{aligned} \underline{\phi} : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{X} &\mapsto \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}) \end{aligned}$$

Dans \mathcal{K}_0 , le point P repéré par son vecteur position $\underline{X} = X_1 \underline{E}_1$ est par définition le point moyen de la section droite S_0 en X_1 . La position du point P après transformation est repérée dans \mathcal{K}_t par le vecteur $\underline{x}^0(X_1) = \underline{\phi}(X_1 \underline{E}_1)$. La position dans \mathcal{K}_t de tout point $M \neq P$ appartenant à S_0 dans \mathcal{K}_0 est alors repérée dans $(O'; \underline{e}_i)_{i=[1,3]}$ à partir de la position de P au moyen du vecteur position $\underline{r}(\underline{X})$. La cinématique tridimensionnelle générale peut donc être décrite par la transformation $\underline{\phi}$ écrite sous la forme :

$$\underline{\phi}(\underline{X}) = \underline{x}^0(X_1) + \underline{r}(\underline{X}) \quad (3.1)$$

3.2 Equations d'équilibre du système

La géométrie courante de la poutre étant une inconnue du problème, les équations d'équilibre unidimensionnelles de poutre vont être établies à partir des équations d'équilibre lagrangiennes tridimensionnelles en utilisant la géométrie de référence. En raison de la signification physique immédiate des composantes du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \underline{P} , ce sont les équations d'équilibre tridimensionnelle formulées à l'aide de ce tenseur des contraintes qui vont être utilisées comme point de départ. En supposant dans tout ce qui suit que la poutre étudiée n'est soumise à aucune densité volumique d'efforts, les équations d'équilibre exprimées à l'aide de \underline{P} et de $\underline{\phi}$, présentées au chapitre précédent s'écrivent maintenant sous forme indicielle dans Ω_0 :

$$\text{Equilibre en forces : } P_{i\alpha,\alpha} = 0 \quad \alpha \in [1, 3], \forall i \in [1, 3] \quad (3.2)$$

$$\text{Equilibre des moments : } \epsilon_{ijk} P_{j\alpha} \phi_{k,\alpha} = 0 \quad (j, k, \alpha) \in [1, 3]^3, \forall i \in [1, 3] \quad (3.3)$$

où on a introduit le tenseur antisymétrique d'ordre 3 $\underline{\epsilon}$ dont les composantes sont définies par :

$$\epsilon_{ijk} = (\underline{e}_i \wedge \underline{e}_j) \cdot \underline{e}_k$$

Par intégration des équations 3.2 et 3.3 sur une section S_0 repérée par X_1 , nous allons établir successivement les équations d'équilibre en résultante et en moments de la poutre étudiée.

3.2.1 Equilibre en résultante

L'intégration de 3.2 sur une section S_0 de \mathcal{K}_0 s'écrit :

$$\int_{S_0} P_{i\alpha,\alpha} dA = 0 \quad \alpha \in [1, 3], \forall i \in [1, 3]$$

Or le premier membre de l'équation précédente se scinde comme suit

$$\int_{S_0} P_{i\alpha,\alpha} dA = \int_{S_0} P_{i1,1} dA + \int_{S_0} P_{i\gamma,\gamma} dA \quad \gamma \in [2, 3]$$

En appliquant la formule de Green au dernier terme de l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{S_0} P_{i\gamma,\gamma} dA &= \int_{\partial S_0} P_{i\gamma} \tau_\gamma d\Gamma \\ &= f_i(X_1) \quad \forall i \in [1, 3] \end{aligned}$$

où τ_γ , $\gamma \in [2, 3]$, est la γ -ième composante du vecteur unitaire normal à la frontière de la section S_0 notée ∂S_0 située dans le plan (X_2, X_3) . La grandeur $\underline{f}(X_1) = f_i(X_1)\underline{e}_i$ représente donc une densité linéique d'efforts imposés le long de la poutre.

En supposant la section S_0 indépendante de X_1 , l'équation d'équilibre en résultante de la poutre étudiée s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{d}{dX_1} \left(\int_{S_0} \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dX_1 \right) + \underline{f}(X_1) = 0} \quad (3.4)$$

3.2.2 Equilibre en moment

L'intégration de 3.3 sur une section S_0 de \mathcal{K}_0 s'écrit :

$$\int_{S_0} \epsilon_{ijk} P_{j\alpha} \phi_{k,\alpha} dA = 0 \quad (j, k, \alpha) \in [1, 3]^3, \forall i \in [1, 3] \quad (3.5)$$

Or, compte-tenu de la forme 3.1 retenue pour la cinématique, le premier membre de l'équation précédente peut être scindé comme suit avec $\gamma = \{2, 3\}$:

$$\int_{S_0} \epsilon_{ijk} P_{j\alpha} \phi_{k,\alpha} dA = \int_{S_0} \epsilon_{ijk} P_{j1} (x_{k,1}^0 + r_{k,1}) dA + \int_{S_0} \epsilon_{ijk} P_{j\gamma} r_{k,\gamma} dA$$

où d'une part, en rappelant que S_0 est indépendant de X_1 :

$$\int_{S_0} \epsilon_{ijk} P_{j1} (x_{k,1}^0 + r_{k,1}) dA = \epsilon_{ijk} x_{k,1}^0 \left(\int_{S_0} P_{j1} dA \right) + \frac{d}{dX_1} \left(\epsilon_{ijk} \int_{S_0} P_{j1} r_k dA \right) - \epsilon_{ijk} \int_{S_0} P_{j1,1} r_k dA$$

et d'autre part d'après le théorème de la divergence :

$$\int_{S_0} \epsilon_{ijk} P_{j\gamma} r_{k,\gamma} dA = \epsilon_{ijk} \int_{\partial S_0} P_{j\gamma} \tau_\gamma r_k d\Gamma_0 - \epsilon_{ijk} \int_{S_0} P_{j\gamma,\gamma} r_k dA$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \epsilon_{ijk} P_{j\alpha} \phi_{k,\alpha} dA &= \epsilon_{ijk} x_{k,1}^0 \left(\int_{S_0} P_{j1} dA \right) + \frac{d}{dX_1} \left(\epsilon_{ijk} \int_{S_0} P_{j1} r_k dA \right) + \epsilon_{ijk} \int_{\partial S_0} P_{j\gamma} \tau_\gamma r_k d\Gamma_0 \\ &\quad - \epsilon_{ijk} \int_{S_0} \underbrace{P_{j\alpha,\alpha}}_{=0} r_k dA \end{aligned}$$

avec $P_{j\alpha,\alpha} = 0$ $\alpha \in [1, 3]$, $\forall j \in [1, 3]$ d'après 3.2.

L'équation 3.5 devient donc sous forme vectorielle :

$$\boxed{\frac{d}{dX_1} \left(\int_{S_0} \underline{r} \wedge \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA \right) + \frac{d\underline{x}^0}{dX_1} \wedge \left(\int_{S_0} \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA \right) + \underline{m}(X_1) = 0} \quad (3.6)$$

où les composantes de la densité de moments extérieurs $\underline{m}(X_1)$ le long de la poutre sont donnés par

$$m_i = \int_{\partial S_0} \epsilon_{ijk} P_{j\gamma} \tau_\gamma r_k d\Gamma_0 \quad (j, k) \in [1, 3], \gamma \in [2, 3], \forall i \in [1, 3]$$

3.3 Description cinématique bidimensionnelle du problème étudié

Afin de simplifier l'exposé qui suit, nous nous restreindrons à partir de maintenant à une étude plane dans le plan (X_1, X_3) . On fait souvent cette hypothèse simplificatrice lorsque le plan (X_1, X_3) est un plan de symétrie du matériau et que le chargement est appliqué dans ce même plan. Dans ces cas de figure, on se trouve :

- soit dans une situation de déformations planes lorsque la longueur de la poutre selon X_2 est beaucoup plus importante que suivant X_3 .
- soit dans une situation de contraintes planes lorsque la longueur suivant X_2 est faible et que les faces perpendiculaires à X_2 sont libres de contraintes.

Sous ces hypothèses, les champs mécaniques ne dépendent pas de la variable X_2 . On peut donc se contenter d'utiliser une description de la cinématique de la poutre restreinte au plan (X_1, X_3) en omettant la variable d'espace X_2 . Dans ce problème bidimensionnel, considérons alors dans \mathcal{K}_0 un point matériel P appartenant à une section S_0 de point moyen M caractérisé par son abscisse X_1 . P est repéré dans \mathcal{K}_0 par le vecteur position $\underline{X} = X_\gamma \underline{E}_\gamma$ avec $\gamma = \{1, 3\}$. Dans la configuration déformée \mathcal{K}_t , on note toujours $\underline{x}^0(X_1)$ le vecteur position de M . La position de P est alors repérée à partir de celle de M par le vecteur $\underline{r}(\underline{X})$. La cinématique bidimensionnelle utilisée est donc décrite par :

$$\underline{x} = \phi(\underline{X}) = \underline{x}^0(X_1) + \underline{r}(X_1, X_3) \quad (3.7)$$

Cette forme générale de cinématique permet de prendre en compte un éventuel allongement de la fibre neutre ainsi qu'un gauchissement des sections dans le plan (X_1, X_3) . Considérons pour X_1 donné, une section S_0 de la poutre étudiée dans sa configuration initiale \mathcal{K}_0 . Par application de la transformation 3.7 à l'ensemble des points matériels de S_0 , on vérifie en effet qu'on obtient bien une section S gauchie dans le plan (X_1, X_3) de la poutre déformée dans sa configuration courante \mathcal{K}_t .

3.3.1 Transport d'une facette appartenant à une section de poutre

Considérons un point M appartenant à une section droite S_0 de \mathcal{K}_0 et repéré par \underline{X} . On s'intéresse alors à la transformation subie par une facette $\underline{dA} = dA \underline{E}_1$ centrée en M . D'après la formule de transport 2.1, la facette \underline{dA} est transformée par $\underline{\phi}$ en une facette $\underline{da} = \underline{da}_n$ de S centrée au point repéré par $\underline{\phi}(\underline{X})$ dans \mathcal{K}_0 avec :

$$\underline{n}(\underline{X}) da = J(\underline{X}) \underline{F}^{-T}(\underline{X}) \cdot \underline{E}_1 dA \quad (3.8)$$

Nous allons par application de 3.8 donner les expressions des composantes de $\underline{n}(\underline{X})$ dans $(O'; \underline{e}_i)_{i=\{1,3\}}$ en fonction de celle de $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X})$.

Avec $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X})$ défini en 3.7, la matrice des composantes du tenseur gradient de la transformation, \underline{F} s'écrit :

$$[\underline{F}(\underline{X})] = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,3} \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,3} \end{bmatrix}$$

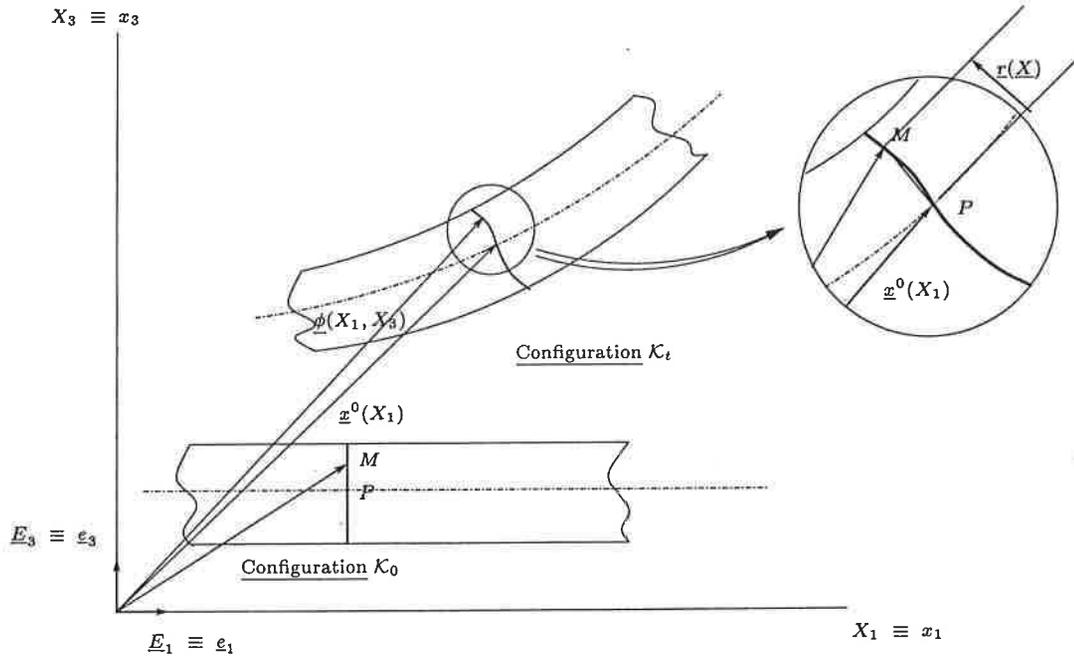


FIG. 3.2 – Cinématique bidimensionnelle du problème dans le cas $(O'; \underline{e}_i)_{i=1,3} \equiv (O; \underline{E}_\alpha)_{\alpha=1,3}$

on en déduit l'égalité :

$$J \underline{F}^{-T} \cdot \underline{E}_1 = \phi_{3,3} \underline{e}_1 - \phi_{1,3} \underline{e}_3 \quad (3.9)$$

De plus, le vecteur \underline{n} étant par définition unitaire, la relation 3.8 entraîne compte-tenu de 3.9 que le rapport des aires élémentaire est donné par :

$$\frac{da}{dA} = \|J \underline{F}^{-T} \cdot \underline{E}_1\| = \sqrt{(\phi_{1,3})^2 + (\phi_{3,3})^2} \quad (3.10)$$

La relation 3.8, se réécrit donc :

$$\underline{n}(\underline{X}) = \frac{\phi_{3,3}}{\sqrt{(\phi_{1,3})^2 + (\phi_{3,3})^2}} \underline{e}_1 - \frac{\phi_{1,3}}{\sqrt{(\phi_{1,3})^2 + (\phi_{3,3})^2}} \underline{e}_3 \quad (3.11)$$

On peut alors introduire l'angle $\psi(\underline{X})$ de rotation locale de la facette au point repéré par le vecteur position \underline{X} dans \mathcal{K}_0 .

La figure précédente est représentée dans le cas particulier $(O'; \underline{e}_i)_{i=1,3} \equiv (O; \underline{E}_\alpha)_{\alpha=1,3}$. Elle illustre les caractérisations de l'angle $\psi(\underline{X})$ à partir de la transformation $\underline{\phi}$ qui sont obtenues grâce aux relations 3.10 et 3.11 :

$$\begin{cases} \phi_{3,3} \left(\frac{da}{dA} \right)^{-1} = \frac{\phi_{3,3}}{\sqrt{(\phi_{1,3})^2 + (\phi_{3,3})^2}} = \cos \psi(\underline{X}) \\ -\phi_{1,3} \left(\frac{da}{dA} \right)^{-1} = -\frac{\phi_{1,3}}{\sqrt{(\phi_{1,3})^2 + (\phi_{3,3})^2}} = \sin \psi(\underline{X}) \end{cases}$$

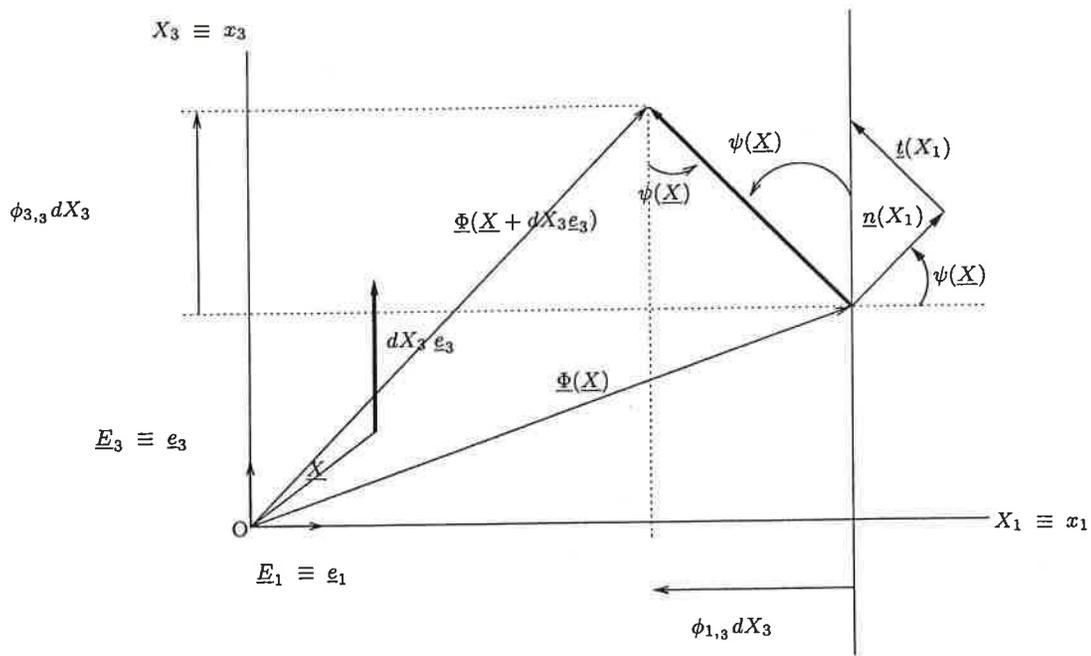


FIG. 3.3 – Rotation locale d'une facette appartenant à une section

d'où l'expression de \underline{n} dans $(O'; \underline{e}_i)_{i=1 \text{ ou } 3}$

$$\underline{n}(\underline{X}) = \cos\psi(\underline{X}) \underline{e}_1 + \sin\psi(\underline{X}) \underline{e}_3 \quad (3.12)$$

En définissant un second vecteur dans le plan de la facette \underline{da} , noté $\underline{t}(\underline{X})$ tel que :

$$\underline{t}(\underline{X}) = \underline{n}(\underline{X}) \wedge \underline{e}_2$$

on obtient immédiatement à partir de 3.12 l'écriture de $\underline{t}(\underline{X})$ dans $(O'; \underline{e}_i)_{i=1 \text{ ou } 3}$ en fonction de $\psi(\underline{X})$:

$$\underline{t}(\underline{X}) = -\sin\psi(\underline{X}) \underline{e}_1 + \cos\psi(\underline{X}) \underline{e}_3 \quad (3.13)$$

Remarquons que le résultat précédent aurait pu être établi en normant le vecteur obtenu par transport convectif [Salençon 89] d'un vecteur élémentaire situé suivant \underline{E}_3 dans \mathcal{K}_0 , comme l'illustre la figure 3.3 :

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \frac{\underline{F} \cdot \underline{E}_3}{\|\underline{F} \cdot \underline{E}_3\|} \\ &= \frac{\phi_{1,3}}{\sqrt{(\phi_{1,3})^2 + (\phi_{3,3})^2}} \underline{e}_1 + \frac{\phi_{3,3}}{\sqrt{(\phi_{1,3})^2 + (\phi_{3,3})^2}} \underline{e}_3 \\ &= -\sin\psi(\underline{X}) \underline{e}_1 + \cos\psi(\underline{X}) \underline{e}_3 \end{aligned}$$

3.3.2 Transport d'une facette initialement orthogonale à une section de poutre

Considérons maintenant une facette orthogonale à une section droite S_0 de la poutre dans \mathcal{K}_0 . Cette facette orientée par \underline{E}_3 est donc maintenant notée $\underline{dA} = dA \underline{E}_3$. L'image de \underline{dA} par la transformation $\underline{\phi}$, est une facette de \mathcal{K}_t notée $\underline{da} = da \underline{n}^\perp$ où \underline{n}^\perp est lié à $\underline{\phi}$ et \underline{E}_3 par la formule de transport 2.1. On a donc :

$$\underline{n}^\perp(\underline{X}) = \left(\frac{da}{dA} \right)^{-1} J(\underline{X}) \underline{F}^{-T}(\underline{X}) \cdot \underline{E}_3 \quad (3.14)$$

avec

$$J(\underline{X}) \underline{F}^{-T}(\underline{X}) \underline{E}_3 = -\phi_{3,1} \underline{e}_1 + \phi_{1,1} \underline{e}_3$$

D'où les composantes de \underline{n}^\perp dans $(O'; \underline{e}_l)_{l=\{1,3\}}$:

$$\underline{n}^\perp(\underline{X}) = \frac{-\phi_{3,1}}{\sqrt{(\phi_{1,1})^2 + (\phi_{3,1})^2}} \underline{e}_1 + \frac{\phi_{1,1}}{\sqrt{(\phi_{1,1})^2 + (\phi_{3,1})^2}} \underline{e}_3 \quad (3.15)$$

On définit alors le vecteur \underline{t}^\perp , comme cela été fait pour \underline{t} , en écrivant cette fois-ci :

$$\underline{t}^\perp(\underline{X}) = \frac{-\underline{F} \cdot \underline{E}_1}{\|\underline{F} \cdot \underline{E}_1\|}$$

d'où :

$$\underline{t}^\perp = \frac{-\phi_{1,1}}{\sqrt{(\phi_{1,1})^2 + (\phi_{3,1})^2}} \underline{e}_1 - \frac{\phi_{3,1}}{\sqrt{(\phi_{1,1})^2 + (\phi_{3,1})^2}} \underline{e}_3 \quad (3.16)$$

3.4 torseur des efforts extérieurs appliqués sur une section dans \mathcal{K}_t

Après avoir étudié la cinématique d'une facette nous nous intéressons à l'effort élémentaire qui s'y applique. On notera \underline{df} le vecteur force élémentaire s'appliquant sur la facette \underline{da} de \mathcal{K}_t ayant pour antécédent par $\underline{\phi}$ la facette $\underline{dA} = dA \underline{E}_1$ de \mathcal{K}_0 . Nous avons vu précédemment que par définition, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \underline{P} , donne accès à \underline{df} en utilisant non plus comme le tenseur des contraintes de cauchy, $\underline{\sigma}$, la facette élémentaire \underline{da} de \mathcal{K}_t sur laquelle \underline{df} s'applique, mais son antécédent dans la transformation : la facette \underline{dA} de \mathcal{K}_0 . On a donc, conformément à ce qui a été exposé en 2.3 :

$$\underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA = \underline{df} \quad (3.17)$$

La résultante des efforts élémentaires s'appliquant sur l'ensemble de la section S est ainsi accessible par intégration sur la section S_0 connue. Si on appelle \underline{R} cette résultante, le tenseur \underline{P} donne accès à \underline{R} par l'intégration sur S_0 de la relation précédente :

$$\boxed{\int_{S_0} \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA = \int_{S_0} \left(\frac{\underline{df}}{dA} \right) dA = \underline{R}(X_1)} \quad (3.18)$$

De plus, dans le cas plan étudié, le moment résultant calculé au point moyen de la section S , noté $\underline{M}(X_1)$, est porté par \underline{e}_2 . Son expression en fonction de \underline{P} est donnée par la relation :

$$\int_{S_0} (\underline{x} - \underline{x}^0) \wedge \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA = -M(X_1) \underline{e}_2$$

Le champ scalaire $M(X_1)$ a donc pour expression :

$$M(X_1) = - \left[\int_{S_0} (\underline{x} - \underline{x}^0) \wedge \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA \right] \cdot \underline{e}_2 \quad (3.19)$$

$\underline{R}(X_1)$ et $\underline{M}(X_1)$ constituent les éléments de réductions au point moyen de la section S de \mathcal{K}_t du torseur des efforts extérieurs s'appliquant sur S . On peut alors réécrire les équations d'équilibre 3.4 et 3.6 en introduisant $\underline{R}(X_1)$ et $\underline{M}(X_1)$.

La relation 3.4 s'écrit alors :

$$\frac{d\underline{R}}{dX_1}(X_1) + \underline{f}(X_1) = 0 \quad (3.20)$$

Alors que la relation 3.6 projetée suivant \underline{e}_2 s'écrit quand à elle :

$$\frac{dM}{dX_1}(X_1) - \left[\frac{d\underline{x}^0}{dX_1} \wedge \underline{R}(X_1) \right] \cdot \underline{e}_2 + m(X_1) = 0 \quad (3.21)$$

où $-m(X_1)$ est la composante de $\underline{m}(X_1)$ suivant \underline{e}_2 (seule composante non nulle). On retrouve donc les expressions classiques des équations de poutre. L'intérêt des calculs précédents est d'avoir explicité $\underline{R}(X_1)$ et $\underline{M}(X_1)$ à l'aide de S_0 en utilisant \underline{P} .

3.4.1 Contraintes élémentaires normales et tangentés à S

Définitions

Revenons au niveau local de la facette da sur laquelle s'applique \underline{df} . Définissons des efforts élémentaires normaux et tranchants, respectivement δN et δQ par projection de \underline{df} sur la base locale $(\underline{n}, \underline{t})$. Notons que le sens physique de ces efforts est évidemment donné par la configuration courante et nécessite donc l'intervention de la cinématique dans les expressions en \underline{P} de ces composantes :

$$\begin{aligned} \delta N &= \underline{df} \cdot \underline{n}(X) = (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) \cdot \underline{n}(X) dA \\ \delta Q &= \underline{df} \cdot \underline{t}(X) = (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) \cdot \underline{t}(X) dA \end{aligned} \quad (3.22)$$

En utilisant les relations 3.12 et 3.13 dans les égalités 3.22 on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\delta N}{dA} &= (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) \cdot \underline{n}(X) = P_{11} \cos \psi(X) + P_{31} \sin \psi(X) \\ \frac{\delta Q}{dA} &= (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) \cdot \underline{t}(X) = -P_{11} \sin \psi(X) + P_{31} \cos \psi(X) \end{aligned} \quad (3.23)$$

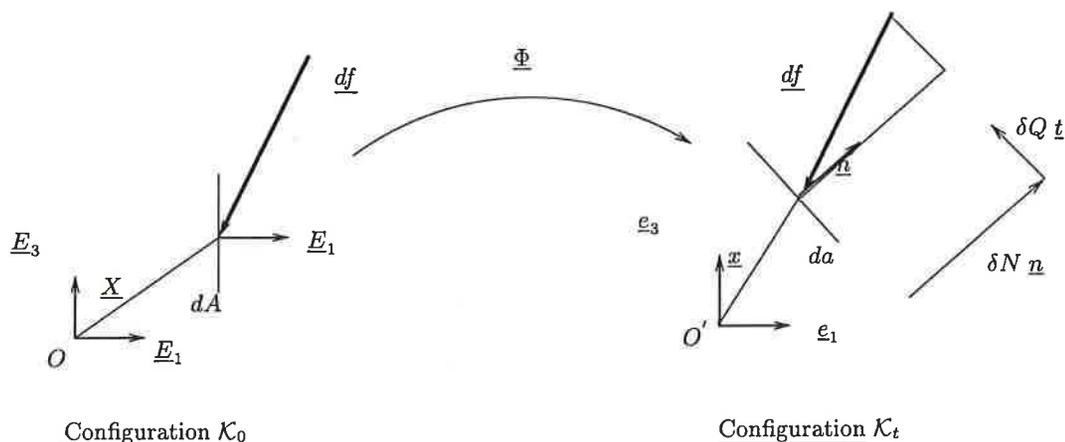


FIG. 3.4 – Décomposition de l'effort élémentaire

Soit sous forme matricielle, l'expression des composantes de $\underline{P} \cdot \underline{E}_1$ en fonction de $\frac{\delta N}{dA}$ et $\frac{\delta Q}{dA}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$:

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi(\underline{X}) & -\sin\psi(\underline{X}) \\ \sin\psi(\underline{X}) & \cos\psi(\underline{X}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\delta N}{dA}(\underline{X}) \\ \frac{\delta Q}{dA}(\underline{X}) \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Lien avec le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

On rappelle tout d'abord que le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \underline{S} , est défini à partir de \underline{P} à l'aide de la définition suivante :

$$\underline{S} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{P}$$

On peut alors, partant des expressions de $\frac{\delta N}{dA}$ et de $\frac{\delta Q}{dA}$ en fonction de \underline{P} , injecter la relation précédente afin d'obtenir leurs expressions en fonction des composantes \underline{S} .

Nous avons

$$\frac{\delta N}{dA} = \underline{n} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_1)$$

donc d'après 2.1

$$\frac{\delta N}{dA} = \left(\frac{da}{dA} \right)^{-1} J(\underline{F}^{-T} \cdot \underline{E}_1) \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_1)$$

qui se réécrit :

$$\frac{\delta N}{dA} = \left(\frac{da}{dA} \right)^{-1} J \underbrace{\underline{E}_1 \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{P}) \cdot \underline{E}_1}_{S_{11}}$$

où on a fait apparaître la composante S_{11} de \underline{S} .

$\frac{\delta N}{dA}$ est donc relié à \underline{S} par la relation :

$$\boxed{\frac{\delta N}{dA} = \left(\frac{da}{dA}\right)^{-1} JS_{11}} \quad (3.25)$$

De même, $\frac{\delta Q}{dA}$ a été défini par :

$$\frac{\delta Q}{dA} = \underline{t} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_1)$$

avec $\underline{t} = \left(\frac{da}{dA}\right)^{-1} \underline{F} \cdot \underline{E}_3$ on obtient donc successivement :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{dA} &= \left(\frac{da}{dA}\right)^{-1} (\underline{F} \cdot \underline{E}_3) \cdot (\underline{F} \cdot \underline{S} \cdot \underline{E}_1) \\ &= \left(\frac{da}{dA}\right)^{-1} \underline{E}_3 \cdot \underbrace{(\underline{F}^T \cdot \underline{F})}_{\underline{C}} \cdot \underline{S} \cdot \underline{E}_1 \\ &= \left(\frac{da}{dA}\right)^{-1} [C_{31}S_{11} + C_{33}S_{31}] \end{aligned}$$

De plus

$$C_{33} = \left(\frac{da}{dA}\right)^2$$

et compte tenu de 3.25 on obtient donc finalement :

$$\boxed{\frac{\delta Q}{dA} = 2E_{13} \frac{1}{J} \frac{\delta N}{dA} + \left(\frac{da}{dA}\right) S_{13}} \quad (3.26)$$

3.5 Le cas particulier de la poutre de type Timoshenko

3.5.1 La cinématique de Timoshenko

La cinématique de Timoshenko est caractérisée par les deux hypothèses cinématiques suivantes :

- La fibre neutre subie une extension $\xi(X_1)$ et une rotation d'angle $\alpha(X_1)$. Nous noterons donc $\underline{\xi}(X_1)$ le vecteur défini par :

$$\underline{\xi}(X_1) = \frac{d}{dX_1} \underline{\phi}(X_1, X_3 = 0) = \xi(X_1) (\cos\alpha(X_1)\underline{e}_1 + \sin\alpha(X_1)\underline{e}_3)$$

- Chaque section, caractérisée par son abscisse X_1 dans \mathcal{K}_0 , subie une rotation de corps rigide qui lui est propre.

Cette dernière hypothèse entraîne que la rotation d'une section S_0 repérée dans \mathcal{K}_0 par X_1 , est donnée par la rotation de toute facette $d\mathbf{A} = dA\mathbf{E}_1$ appartenant à \mathcal{K}_0 qui a été définie par ψ . On a donc maintenant ψ qui ne dépend plus de X_3 :

$$\psi \equiv \psi(X_1)$$

Les vecteurs \underline{n} et \underline{t} précédemment définis sur l'image d'une facette $d\mathbf{A} = dA\mathbf{E}_1$ de S_0 sont alors indépendants de X_3 et sont identiques pour tous les points de S_0 . Ils deviennent donc respectivement les vecteurs normaux et tangent à l'image de S_0 par $\underline{\phi}$. La transformation $\underline{\phi}$ est donc décrite à l'aide de $\underline{\xi}$ et \underline{t} par :

$$\underline{\phi}(X_1, X_3) = \int_0^{X_1} \underline{\xi}(u) du + X_3 \underline{t}(X_1) \quad (3.27)$$

avec d'après 3.13 :

$$\underline{t} \equiv \underline{t}(X_1) = -\sin\psi(X_1)\mathbf{e}_1 + \cos\psi(X_1)\mathbf{e}_3 \quad (3.28)$$

La 3.12 donne également :

$$\underline{n} \equiv \underline{n}(X_1) = \cos\psi(X_1)\mathbf{e}_1 + \sin\psi(X_1)\mathbf{e}_3 \quad (3.29)$$

En remarquant que :

$$\underline{t}' = -\psi' \underline{n}$$

le gradient de cette transformation s'écrit :

$$\underline{\underline{F}}(X_1, X_3) = \left[\underline{\xi}(X_1) - \psi'(X_1)X_3 \underline{n}(X_1) \right] \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{t}(X_1) \otimes \underline{\mathbf{E}}_3 \quad (3.30)$$

D'après l'expression précédente, le jacobien de $\underline{\phi}$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} J(X_1, X_3) &= - \left[\underline{\xi}(X_1) \wedge \underline{t}(X_1) \right] \cdot \mathbf{e}_2 - \psi'(X_1)X_3 \\ &= \left[\mathbf{e}_2 \wedge \underline{t}(X_1) \right] \cdot \underline{\xi}(X_1) - \psi'(X_1)X_3 \\ &= \underbrace{\underline{\xi}(X_1) \cdot \underline{n}(X_1)}_{\xi_n} - \psi'(X_1)X_3 \end{aligned} \quad (3.31)$$

où ξ_n représente donc l'allongement de la fibre neutre dans la direction \underline{n} .

Efforts physiques résultants

- L'expression de la résultante des efforts extérieurs s'appliquant dans \mathcal{K}_t sur l'image d'une section S_0 repérée par X_1 dans \mathcal{K}_0 est donnée par 3.18 en fonction de $\underline{\underline{P}}$. Avec la cinématique de Timoshenko, l'image par $\underline{\phi}$ de la section S_0 restant plane dans \mathcal{K}_t , on peut définir :

- un effort normal résultant, noté N , par projection de la résultante \underline{R} suivant la direction normale à la section considérée \underline{n} :

$$N(X_1) = \underline{R}(X_1) \cdot \underline{n}(X_1) \quad (3.32)$$

- un effort de cisaillement résultant, noté Q , par projection de la résultante \underline{R} suivant la direction tangente à la section considérée \underline{t} :

$$Q(X_1) = \underline{R}(X_1) \cdot \underline{t}(X_1) \quad (3.33)$$

En écrivant la décomposition de \underline{R} dans $(O'; \underline{e}_1, \underline{e}_3)$:

$$\underline{R} = R_1 \underline{e}_1 + R_3 \underline{e}_3$$

les définitions 7.27 et 7.25 donnent alors sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi(X_1) & \sin\psi(X_1) \\ -\sin\psi(X_1) & \cos\psi(X_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

- Des contraintes élémentaires normale, $\frac{\delta N}{dA}$, et tangente, $\frac{\delta Q}{dA}$ ont été définies dans la sous-section 3.4.1. Le passage de ces contraintes élémentaires aux composantes de \underline{P} ont été donné après l'introduction de l'angle de rotation locale ψ par la relation 3.24.

Dans la cinématique 3.27, la relation 3.24 s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi(X_1) & -\sin\psi(X_1) \\ \sin\psi(X_1) & \cos\psi(X_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\delta N}{dA} \\ \frac{\delta Q}{dA} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Les définitions 3.18 de \underline{R} et 7.27 de N conduisent à :

$$\begin{aligned} N &= \left(\int_{S_0} \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA \right) \cdot \underline{n}(X_1) \\ &= \int_{S_0} (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) \cdot \underline{n}(X_1) dA \end{aligned}$$

compte-tenu de 7.26 et 3.35 on a alors sous forme matricielle :

$$N = \int_{S_0} \left\{ \frac{\delta N}{dA} \quad \frac{\delta Q}{dA} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi(X_1) & -\sin\psi(X_1) \\ \sin\psi(X_1) & \cos\psi(X_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\psi(X_1) \\ \sin\psi(X_1) \end{Bmatrix} dA$$

d'où

$$\boxed{N = \int_{S_0} \left(\frac{\delta N}{dA} \right) dA} \quad (3.36)$$

De même avec 7.24 et 3.35 on établit aisément :

$$Q = \int_{S_0} \left(\frac{\delta Q}{dA} \right) dA \quad (3.37)$$

Deux remarques peuvent être faites :

- C'est la résultante des efforts extérieurs qui possède un sens physique réel. C'est pourquoi, les efforts N et Q sont définis à partir de \underline{R} .
- La cinématique de Timoshenko imposant à la section considérée de rester plane, on trouve logiquement que la projection de la résultante dans la direction \underline{n} (resp. \underline{t}) est égale à la résultante des projections élémentaires suivant \underline{n} (resp. \underline{t}). Il est dans ce cas possible de remplacer la notation $\frac{\delta N}{dA}$ et $\frac{\delta Q}{dA}$ par une notation différentielle $\frac{dN}{dA}$ et $\frac{dQ}{dA}$. Dans le cas plus général où la cinématique autorise un gauchissement de la section, la normale \underline{n} n'étant plus constante sur cette section déformée ce résultat n'est plus valable.

Equations d'équilibre formulées à l'aide des efforts physiques résultants

• La relation 3.34 peut être facilement inversée et réinjectée dans l'équation vectorielle en résultante 3.20 afin d'exprimer ces dernières à l'aide de N et Q . On obtient alors les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dX_1} (\cos\psi N - \sin\psi Q) + f_1(X_1) = 0 \\ \frac{d}{dX_1} (-\sin\psi N + \cos\psi Q) + f_3(X_1) = 0 \end{cases}$$

• De même, l'inversion de 3.34 et son injection dans l'équation scalaire d'équilibre en moment 3.21 conduit à :

$$\frac{dM}{dX_1} + \xi(X_1)\alpha'(X_1) [-\sin(\alpha - \psi) N + \cos(\alpha - \psi) Q] + m(X_1) = 0$$

3.6 Recherche des déformations duales des efforts physiques sous les hypothèses de Timoshenko

3.6.1 Expression de la variation d'énergie de déformation

La recherche des déformations duales des efforts physiques N , Q et M consiste à écrire l'expression de la variation d'énergie de déformation de la poutre et à exhiber les grandeurs duales des quantités N , Q et M .

Cette variation d'énergie de déformation par rapport à la cinématique exprimée sur la configuration initiale s'écrit :

$$\delta W = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\delta F}}^T d\Omega_0$$

Variation du gradient de la transformation

La cinématique 3.27 est décrite par trois champs scalaires : $\xi_1(X_1)$, $\xi_3(X_1)$ et $\psi(X_1)$. La variation des vecteurs \underline{n} et \underline{t} s'exprime simplement à l'aide de $\delta\psi$:

$$\begin{cases} \delta\underline{n} = \delta\psi \underline{t} \\ \delta\underline{t} = -\delta\psi \underline{n} \end{cases}$$

Compte-tenu de l'écriture 3.30 du gradient de la transformation on obtient alors l'expression suivante de sa variation où la dépendance des variables en X_1 est omise :

$$\delta\underline{F} = \left\{ \delta\underline{\xi} - X_3 \left[\delta\psi' \underline{n} + \psi' \delta\psi \underline{t} \right] \right\} \otimes \underline{E}_1 - \delta\psi \underline{n} \otimes \underline{E}_3 \quad (3.38)$$

Expression de δW

En écrivant \underline{P} sous la forme $\underline{P} = (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) \otimes \underline{E}_1 + (\underline{P} \cdot \underline{E}_3) \otimes \underline{E}_3$, et en utilisant l'expression 3.38 de $\delta\underline{F}$, le double produit contracté $\underline{P} : \delta\underline{F}^T$ définissant δW possède une expression simple. On a en effet :

$$\underline{P} : \delta\underline{F}^T d\Omega_0 = \left[\delta\underline{\xi} - \delta\psi' X_3 \underline{n} - \delta\psi \psi' X_3 \underline{t} \right] \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) - \delta\psi \underline{n} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_3)$$

L'expression de δW devient donc :

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{[0,L]} \left\{ \delta\underline{\xi} \int_{S_0} \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA - \delta\psi' \int_{S_0} X_3 \underline{n} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) dA \right. \\ \left. - \delta\psi \left[\psi' \int_{S_0} X_3 \underline{t} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) dA + \int_{S_0} \underline{n} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_3) dA \right] \right\} dX_1 \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de transformer les expressions des cofacteurs des variations des paramètres cinématiques.

• Par la définition 3.18 de \underline{R} , et par la définition 7.27 (resp. 7.25) de N (resp. de Q), il vient alors que :

$$\delta\underline{\xi} \int_{S_0} \underline{P} \cdot \underline{E}_1 dA = \delta\underline{\xi} \cdot \underline{R} = (\delta\underline{\xi} \cdot \underline{n}) N + (\delta\underline{\xi} \cdot \underline{t}) Q$$

• En utilisant la relation $\underline{n} = -\underline{t} \wedge \underline{e}_2$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{S_0} X_3 \underline{n} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) dA &= \left(\int_{S_0} X_3 \underline{t} \wedge (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) dA \right) \cdot \underline{e}_2 \\ &= -M(X_1) \end{aligned}$$

• D'après 3.23 :

$$\int_{S_0} X_3 \underline{t} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_1) dA = \int_{S_0} X_3 \frac{dQ}{dA} dA$$

• Compte-tenu de l'hypothèse d'indéformabilité des sections, on a $\frac{da}{dA} = 1$ dans la relation 3.14 qui devient :

$$\underline{n}(X) = J(X) \underline{F}^{-T}(X) \cdot \underline{E}_1$$

ce qui permet de d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \underline{n} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_3) dA &= \int_{S_0} J (\underline{F}^{-T} \cdot \underline{E}_1) \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_3) dA \\ &= \int_{S_0} J \underline{E}_1 \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{P}) \cdot \underline{E}_3 dA \\ &= \int_{S_0} J S_{13} dA \end{aligned}$$

Or 3.26 dans laquelle l'indéformabilité impose $\frac{da}{dA} = 1$ entraîne :

$$J S_{13} = J \frac{dQ}{dA} - 2E_{13} \frac{dN}{dA}$$

où d'après l'expression 3.30 de \underline{F} :

$$2E_{13} = \underline{E}_1 \cdot (\underline{F}^T \cdot \underline{F}) \cdot \underline{E}_3 = \underline{\xi} \cdot \underline{t} = \xi_t$$

avec ξ_t est donc défini comme l'allongement de la fibre neutre dans la direction \underline{t} .

On trouve donc :

$$\int_{S_0} \underline{n} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_3) dA = \int_{S_0} J \frac{dQ}{dA} - \xi_t N$$

qui grâce à l'expression 3.31 de J, et aux relations 3.36 et 3.37 donne :

$$\int_{S_0} \underline{n} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{E}_3) dA = \xi_n Q - \psi' \int_{S_0} X_3 \frac{dQ}{dA} dA - \xi_t N$$

Finalement, l'expression de la variation d'énergie de déformation devient :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{[0,L]} \left\{ (\delta \underline{\xi} \cdot \underline{n}) N + (\delta \underline{\xi} \cdot \underline{t}) Q + \delta \psi' M - \delta \psi [\xi_n Q - \xi_t N] \right\} dX_1 \\ &= \int_{[0,L]} \left\{ (\delta \underline{\xi} \cdot \underline{n} + \delta \psi \xi_t) N + (\delta \underline{\xi} \cdot \underline{t} - \delta \psi \xi_n) Q + \delta \psi' M \right\} dX_1 \end{aligned}$$

or,

$$\begin{cases} \delta \xi_n = \delta (\underline{\xi} \cdot \underline{n}) = \delta \underline{\xi} \cdot \underline{n} + \delta \psi \underline{\xi} \cdot \underline{t} = \delta \underline{\xi} \cdot \underline{n} + \delta \psi \xi_t \\ \delta \xi_t = \delta (\underline{\xi} \cdot \underline{t}) = \delta \underline{\xi} \cdot \underline{t} - \delta \psi \underline{\xi} \cdot \underline{n} = \delta \underline{\xi} \cdot \underline{t} - \delta \psi \xi_n \end{cases}$$

ce qui donne le résultat :

$$\boxed{\delta W = \int_{[0,L]} \left\{ \delta \xi_n N + \delta \xi_t Q + \delta \psi' M \right\} dX_1} \quad (3.39)$$

Conclusion

La forme 3.39 de la variation de l'énergie de déformation met en évidence les relations suivantes entre les efforts et les variations de déformations associées :

$$\begin{array}{l} N \longleftrightarrow \delta\xi_n \\ Q \longleftrightarrow \delta\xi_t \\ M \longleftrightarrow \delta\psi' \end{array}$$

- Le taux de déformation dual de l'effort normal N est le taux d'élongation de la fibre neutre dans cette direction normale.
- Le taux de déformation dual de l'effort tranchant Q , est le taux d'élongation dans la direction de la section ξ_t .
- Le taux de déformation dual du moment fléchissant M est le taux de rotation de la section ψ' .

3.6.2 Loi de comportement

A ce moment de la construction du modèle, les auteurs postulent généralement un comportement découplant les efforts intérieurs en prenant : N proportionnel à $\xi_n - 1$, Q proportionnel à $\xi_t - 1$ et M proportionnel à ψ' . Pour établir les coefficients de proportionnalité, ces auteurs les identifient à leurs équivalents en H.P.P. Ce qui donne :

$$\begin{array}{l} N(X_1) = E A(X_1) (\xi_n(X_1) - 1) \\ Q(X_1) = G A(X_1) \xi_t(X_1) \\ M(X_1) = E I(X_1) \psi' \end{array}$$

On peut cependant s'interroger sur la validité de ces hypothèses de comportement lorsqu'on envisage leur généralisation au cas de multicouches. C'est l'un des buts de ce travail de recherche que de construire un modèle simplifié de poutre multicouche sans avoir à recourir à ces hypothèses fortes au niveau du comportement.

Conclusion

Cette étude se restreint au cas des poutres en grandes transformations planes.

Le tenseur des efforts extérieurs est écrit sur la configuration de référence à l'aide du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

Dans le cas particulier d'une cinématique où les sections restent planes au cours de la transformation, l'objectif est de proposer une expression simple de la densité d'énergie de déformation, formulée à l'aide de grandeurs possédant un sens physique sur la configuration déformée.

La résultante du tenseur des efforts extérieurs est alors projetée suivant deux directions privilégiées liées à la section :

- La direction normale à la section, qui définit la composante résultante normale à la section de l'effort résultant.*
- La direction tangente à la section qui définit la composante de cisaillement de l'effort résultant.*

Les variations des déformations duales de ces composantes sont alors identifiées en écrivant l'expression de la variation du travail des efforts intérieurs. On identifie respectivement :

- La variation de la projection suivant la direction normale de l'élongation de la fibre neutre.*
- La variation de la projection suivant la direction tangente de l'élongation de la fibre neutre.*

Une intégration de ces variations est présentée et une densité d'énergie quadratique découplant les efforts intérieurs écrite à l'aide des déformations obtenues est alors proposée.

Deuxième partie
construction du modèle

Chapitre 4

Présentation du modèle

Nous évaluerons dans un premier temps les différentes alternatives afin d'adapter au cadre des grandes transformations planes de poutres multicouches la modélisation multiparticulaire développée en H.P.P. pour des plaques. Ce chapitre s'articulera autour de trois sections.

- Après avoir mis en évidence les deux propriétés principales permettant la construction des modèles “M4”, nous verrons qu’il est nécessaire de modifier l’approche précédente. Nous présenterons la stratégie adoptée pour construire le modèle proposé en précisant notamment le choix de la fonctionnelle mixte lagrangienne et en justifiant la nature des approximations introduites.
- Dans un second temps, nous présenterons le type de problème que vise la modélisation proposée. Nous donnerons ensuite l’ensemble des notations qui seront constamment utilisées par la suite.
- Enfin, nous donnerons l’expression du principe mixte retenu dans le cas particulier des problèmes précédemment présentés.

4.1 Principes de la modélisation

4.1.1 Les point clés de la modélisation “M4”

La construction de la famille de modèles “M4” repose sur deux propriétés importantes. Il s’agit, d’une part, du sens physique des contraintes généralisées et d’ autre part de la linéarité des déformations par rapport aux déplacements.

Sens physique des contraintes généralisées

Les modèles construits ne sont “opérationnels” que si leurs variables possèdent un sens physique immédiat. C’est pourquoi, un soin particulier est apporté à définir les contraintes généralisées du modèle avec le plus grand sens physique possible. Notons que d’une part le sens physique de $\underline{\sigma}$ facilite cette opération, mais que d’autre part, plus le degré des développements est élevé, plus les contraintes généralisées à définir sont nombreuses et plus il devient alors difficile d’assurer à chacune d’entre elles un sens physique.

Linéarité des déformations

Techniquement, la possibilité de ne réaliser qu'une approche en contraintes est une conséquence directe de la forme du terme volumique mixte apparaissant dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner. En effet, dans le cas simplifié où il n'existe que des efforts imposés sur la frontière, \mathbf{J}_{HR} s'écrit :

$$\mathbf{J}_{HR}(\underline{u}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*) = - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^* d\Omega}_{W^c(\underline{\underline{\sigma}}^*)} + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{grad}} u^* d\Omega}_{T(\underline{u}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*)} - \int_{\partial_T \Omega} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{u}^* d\Gamma$$

Elle est composée de deux morceaux :

- une énergie complémentaire, $W^c(\underline{\underline{\sigma}}^*)$ qui ne s'écrit qu'à l'aide de $\underline{\underline{\sigma}}^*$.
- un terme mixte, $T(\underline{u}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*)$

Comme nous l'avons précédemment vu, la cinématique duale est exhibée à partir de l'introduction de l'approximation $\underline{\underline{\sigma}}_a^c$ dans le terme :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{grad}} u^* d\Omega$$

On constate que c'est la linéarité du terme en déplacements doublement contracté avec $\underline{\underline{\sigma}}^*$ qui permet alors d'accéder à une cinématique duale.

4.1.2 Comparaison des formulations mixtes Lagrangiennes

Nous avons proposé deux principes mixtes lagrangiens utilisant pour le premier une fonctionnelle en $\underline{\phi}$ et $\underline{\underline{S}}$ et pour le second une fonctionnelle en $\underline{\phi}$ et $\underline{\underline{P}}$.

Les sens physiques des tenseurs $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{S}}$ ont été discutés dans la partie précédente.

La non-linéarité des mesures de déformations duales de $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{S}}$ par rapport à $\underline{\phi}$ est évidente compte-tenu de la nature du problème. Il est cependant utile de rappeler les dépendances par rapport à $\underline{\phi}$ de ces deux fonctionnelles.

La formulation en $(\underline{\phi}, \underline{\underline{P}})$

- Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\underline{\underline{P}}$, possède par définition un sens physique aussi direct que celui de $\underline{\underline{\sigma}}$. Il semblerait donc judicieux de faire porter l'approximation en contraintes sur ce tenseur afin d'introduire des contraintes généralisées possédant un sens physique comme cela est réalisé en H.P.P avec $\underline{\underline{\sigma}}$.

- Le problème vient alors de l'expression de la fonctionnelle rappelée ci-dessous dans le cas où $\partial\Omega_0 = \partial_T \Omega_0$

$$\hat{\mathbf{J}}(\underline{\phi}^*, \underline{\underline{P}}^*) = \underbrace{\int_{\Omega_0} -\omega^c(\underline{\underline{S}}(\underline{\phi}^*, \underline{\underline{P}}^*)) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}}^* : \frac{1}{2} [\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*T} - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}^{*-1}] d\Omega_0}_{\hat{\mathbf{T}}(\underline{\phi}^*, \underline{\underline{P}}^*)} - \int_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\phi}^* d\Gamma_0$$

On constate que le terme mixte en $(\underline{\phi}^*, \underline{\underline{P}}^*)$ désigné par $\hat{\mathbf{T}}(\underline{\phi}^*, \underline{\underline{P}}^*)$ possède une dépendance complexe en $\underline{\phi}^*$.

- D'une part, la mesure de déformation duale de \underline{P} a pour expression : $\frac{1}{2} [\underline{\nabla\phi^T} - \underline{\nabla\phi^{-1}}]$
- D'autre part, la densité d'énergie complémentaire exprimée en fonction de \underline{P} est elle aussi une fonction de $\underline{\phi}$, comme cela a été justifié au chapitre 2 de la première partie.

La formulation en $(\underline{\phi}, \underline{S})$

• La définition de contraintes généralisées à l'aide de \underline{S} uniquement, ne leur assure pas de sens physique. \underline{S} n'est donc a priori pas un bon candidat à une approximation du type de celle réalisée sur $\underline{\sigma}$ dans les modèles "M4".

• En nous restreignant au cas simplifié d'une unique densité d'efforts appliqués sur la frontière de $\partial\Omega$ la fonctionnelle :

$$J(\underline{\phi}^*, \underline{S}^*) = \int_{\Omega_0} -\omega^c(\underline{S}^*) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{S}^* : \frac{1}{2} [\underline{\nabla\phi^*} \cdot \underline{\nabla\phi^*} - \underline{1}] d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \underline{T} \cdot \underline{\phi}^* d\Gamma_0 \quad (4.1)$$

présente une forme relativement similaire à celle de J_{HR} . Mais dans le terme volumique mixte, la déformation est maintenant logiquement une fonction non linéaire de $\underline{\phi}$.

$$\int_{\Omega_0} \underline{S}^* : \frac{1}{2} [\underline{\nabla\phi^*} \cdot \underline{\nabla\phi^*} - \underline{1}] d\Omega_0$$

Elle ne permettra donc pas d'accéder facilement à une cinématique généralisée par la simple introduction d'une approximation en contraintes.

• Remarquons de plus, qu' en cas de déplacements imposés sur une frontière, il faut rajouter à l'expression 4.1 le terme suivant :

$$\int_{\partial_u\Omega_0} (\underline{\nabla\phi} \cdot \underline{P}) \cdot \underline{N} (\underline{\phi} - \underline{\phi}^d) d\Gamma$$

qui dépend de $\underline{\phi}$ mais également de $\underline{\nabla\phi}$.

4.1.3 Conclusion

L'approche de [Chabot 97] n'est pas directement transposable au cas de notre problème.

Variables approximées

Etant donné les dépendances respectives vis à vis de $\underline{\phi}$ des deux fonctionnelles $J(\underline{\phi}, \underline{P})$ et $\hat{J}(\underline{\phi}, \underline{S})$, une approximation ne portant que sur les contraintes n'est pas suffisante pour pouvoir exhiber une cinématique duale de cette approximation. Afin de lever cette difficulté, on pense alors à approximer les contraintes mais aussi les transformations. Le problème qui se pose alors est celui du choix du principe mixte et donc du type de contraintes à approximer.

Choix de la fonctionnelle mixte

Dans $J(\underline{\phi}, \underline{P})$, la densité d'énergie $\bar{\omega}^c(\underline{\phi}, \underline{P})$ n'est écrite que par changement de variable à partir d'une forme $\omega^c(\underline{S})$ donnée. De plus, la dépendance en $\underline{\phi}$ de $\hat{J}(\underline{\phi}, \underline{S})$, plus simple que celle de $J(\underline{\phi}, \underline{P})$, semble plus exploitable dans l'optique de l'introduction d'une approximation sur $\underline{\phi}$. C'est donc le principe mixte utilisant les variables $\underline{\phi}$ et \underline{S} que nous choisissons d'utiliser.

Nature des approximations

L'avantage d'une décomposition sur une base de polynômes de Legendre réside dans l'utilisation de la propriété d'orthogonalité de ces polynômes. Il est donc judicieux de faire apparaître dans les différents morceaux de la fonctionnelle $\hat{J}(\underline{\phi}, \underline{S})$ des produits de polynômes de Legendre et d'opérer des intégrations afin d'utiliser cette orthogonalité. On choisit donc naturellement, aussi bien pour les contraintes que pour les transformations des approximations de type développement par couche sur des bases de polynômes de Legendre définies par couche. La question qui va se poser tient alors aux degrés retenus pour ces développements. Les justifications de ces choix seront données au chapitre suivant lors de la construction du modèle.

Sens physique des grandeurs généralisées

L'approche "M4" consistait à introduire dans les coefficients des développements de $\underline{\sigma}$ des contraintes généralisées préalablement choisies et définies avec un sens physique maximal directement déduit de celui de $\underline{\sigma}$.

- Le manque de sens physique de \underline{S} ne permettra pas ici une telle opération. Les grandeurs généralisées en contraintes seront donc directement les coefficients du développement de \underline{S} .
- En ce qui concerne les développements de la transformation, il sera par contre possible de faire apparaître dans les coefficients de ces développements des transformations pertinentes.

Principe de la modélisation

Ces approximations vont ensuite être injectées dans le principe mixte en $\underline{\phi}$ et \underline{S} . Les intégrations sur les épaisseurs de chaque couche, facilitées par l'orthogonalité des polynômes de base, permettent de faire disparaître simplement la variable d'espace associée à la direction d'empilement. On modifie ainsi la fonctionnelle $\hat{J}(\underline{\phi}, \underline{S})$ en une fonctionnelle dont les variables indépendantes sont maintenant les contraintes généralisées et les transformations généralisées.

4.2 Description du problème étudié

4.2.1 Géométrie tridimensionnelle de la poutre étudiée

Le modèle présenté vise l'étude des poutres multicouches en grandes transformations planes. La formulation choisie pour le problème est totalement lagrangienne. On s'intéresse donc à une poutre multicouche dans sa configuration de référence.

Ce système est plongé dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et muni d'un repère orthonormé direct

$\mathcal{R} = (O; \underline{E}_\alpha)_{\alpha \in [1,3]}$. Pour simplifier la section est supposée rectangulaire de dimension $2b$ dans la direction de \underline{E}_2 .

Le système de coordonnées $(X_\alpha)_{\alpha \in [1,3]}$ associé à \mathcal{R} permet de repérer un point matériel de la poutre étudiée dans sa configuration de référence \mathcal{K}_0 par le vecteur position $\underline{X} = X_\alpha \underline{E}_\alpha$ $\alpha \in [1, 3]$

L'empilement des NC couches est réalisé suivant la direction de \underline{E}_3 . Chaque couche

- est repérée par l'indice variable $c \in [1, NC]$.
- est délimitée par $[0, L] \times [-b, b] \times [H_-^c, H_+^c]$.
- possède une épaisseur $E_p^c = H_+^c - H_-^c$
- a une côte moyenne $\bar{H}^c = \frac{H_+^c + H_-^c}{2}$.

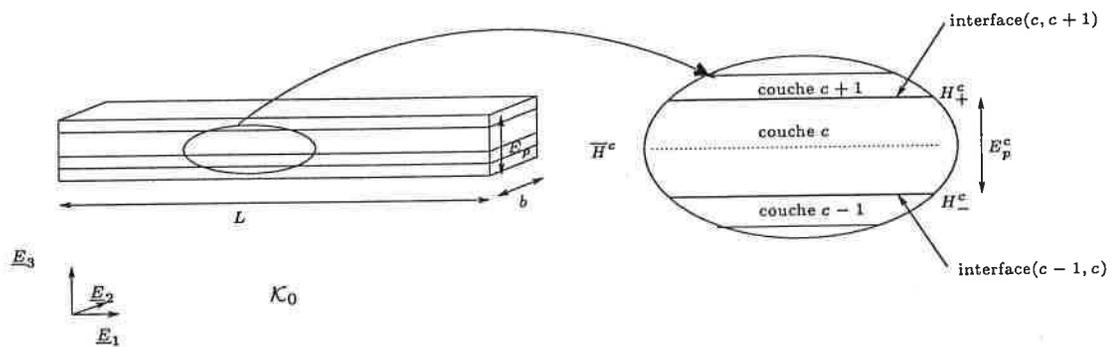


FIG. 4.1 – Géométrie de la poutre étudiée dans \mathcal{K}_0

Dans ce qui suit, on note Ω_0 , l'ensemble des points matériels constituant la poutre étudiée dans \mathcal{K}_0 . On a donc :

$$\Omega_0 = [0, L] \times [-b, b] \times [H_-^1, H_+^N]$$

La frontière du système notée $\partial\Omega_0$ est quand à elle divisée en six parties :

$$\partial\Omega_0 = \bigcup_{p=1}^6 \partial_p \Omega_0$$

avec

$$\begin{array}{l|l} \partial_1 \Omega_0 = \Omega_0 \cap \{X_1 = 0\} & \partial_2 \Omega_0 = \Omega_0 \cap \{X_3 = H_+^{NC}\} \\ \partial_3 \Omega_0 = \Omega_0 \cap \{X_1 = L\} & \partial_4 \Omega_0 = \Omega_0 \cap \{X_3 = H_-^1\} \\ \partial_5 \Omega_0 = \Omega_0 \cap \{X_2 = -b\} & \partial_6 \Omega_0 = \Omega_0 \cap \{X_2 = b\} \end{array}$$

Comme nous l'avons déjà fait, le système dans sa configuration courante, notée \mathcal{K}_t , est repéré par $(O'; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

4.2.2 Comportement des matériaux constitutifs

choix de la loi de comportement

Les matériaux constitutifs des différentes couches de la poutre étudiée sont supposés posséder un comportement hyperélastique linéaire. Pour chaque couche $c \in [1, NC]$, on note \underline{S}^c la

restriction du tenseur tridimensionnel $\underline{\underline{S}}$ à la couche c . Nous choisissons pour simplifier l'exposé la densité d'énergie complémentaire ω^c quadratique en $\underline{\underline{S}}^c$. Elle s'écrit donc à l'aide du tenseur d'ordre 4 de souplesse de la couche $\underline{\underline{K}}^c$ [Ehrlacher 97].

$$\omega^c(\underline{\underline{S}}^c) = \frac{1}{2} \underline{\underline{S}}^c : \underline{\underline{K}}^c : \underline{\underline{S}}^c \quad (4.2)$$

Cette définition, nous permettra de nous placer ultérieurement dans le cas plus simple du comportement de type Saint-Venant Kirchhoff (comportement isotrope) qui n'est autre que la généralisation aux grandes transformations de la loi de Hooke.

4.2.3 Formulation plane du problème

Hypothèse de déformations planes

Toujours pour simplifier l'exposé, nous restreignons ci-dessous la présentation du problème au cas "plan". La géométrie du système et le repère \mathcal{R} ont été choisis tels que le plan $(\underline{E}_1, \underline{E}_3)$ soit un plan de symétrie pour les sections de la poutre. Dans la suite, nous supposons confondus les repères $(O; \underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$ et $(O'; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Nous allons formuler les deux hypothèses suivantes :

- On souhaite se restreindre à des cas de chargement ne s'appliquant que dans $(\underline{E}_1, \underline{E}_3)$.
- On suppose de plus que les déplacements suivants $\underline{e}_2 \equiv \underline{E}_2$ sont empêchés sur les deux frontières $\partial_5 \Omega_0$ et $\partial_6 \Omega_0$

Ces hypothèses nous autorisent à nous placer dans le cadre des déformations planes. La transformation correspondante peut donc s'écrire :

$$\underline{\phi}(\underline{X}) = \phi_1(X_1, X_3) \underline{e}_\alpha + X_2 \underline{e}_2 + \phi_3(X_1, X_3) \underline{e}_3 \quad \text{avec } \alpha = \{1, 3\} \quad (4.3)$$

Les champs $\phi_1(X_1, X_3)$ et $\phi_3(X_1, X_3)$ sont donc les inconnues cinématiques d'une telle transformation.

Loi de comportement hyperélastique linéaire de déformations planes

Avec la définition 4.2, le comportement peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\underline{E}}^c = \left(\underline{\underline{K}}^c \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{S}}^c$$

Les hypothèses de déformations planes entraînent que pour $(i, j, k) \in [1, 3]^3$ et $(\alpha, \beta) \in \{1, 3\}^2$:

$$E_{\alpha\beta} = \left(\underline{\underline{K}}^c \right)_{\alpha\beta jk}^{-1} S_{jk}^c \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

$$E_{i2} = \left(\underline{\underline{K}}^c \right)_{i2\alpha\beta}^{-1} S_{\alpha\beta}^c + \left(\underline{\underline{K}}^c \right)_{i2j2}^{-1} S_{j2}^c = 0 \quad (4.6)$$

Les équations 4.6 constituent un système linéaire de trois équations à trois inconnues permettant d'exprimer chaque S_{j2}^c , $\forall j \in [1, 3]$ en fonction des $S_{\alpha\beta}^c$, $\forall (\alpha, \beta) \in \{1, 3\}$. En injectant ces expressions dans 4.4, on fait alors apparaître un tenseur d'ordre 4, $\underline{\underline{K}}^c$, le tenseur plan de souplesse de la couche c en déformations planes, qui relie les composantes planes de $\underline{\underline{E}}^c$ aux composantes planes de $\underline{\underline{S}}^c$. La densité d'énergie complémentaire correspondante s'écrira donc sous forme indicielle :

$$\omega^c(S_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}^c \left(\underline{\underline{K}}^c \right)_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^c \quad (4.7)$$

Prenons l'exemple de la loi de comportement de type Saint-Venant-Kirchhoff.

Elle est caractérisée par les deux coefficients matériaux caractéristiques de la couche $c \in [1, NC]$, λ^c et G^c reliant $\underline{\underline{S}}^c$ à $\underline{\underline{E}}^c$ par :

$$\underline{\underline{S}}^c = \lambda^c \text{tr} \underline{\underline{E}}^c \underline{\underline{1}} + 2G^c \underline{\underline{E}}^c \quad (4.8)$$

La cinématique de déformations planes est telle que $E_{2J}^c = 0 \forall J \in [1, 3]$ et donc $\text{tr} \underline{\underline{E}}^c = E_{11}^c + E_{33}^c$. Or 4.8 entraîne l'existence d'une composante :

$$S_{22}^c = \lambda^c \text{tr} \underline{\underline{E}}^c \neq 0 \quad (4.9)$$

On déduit alors en prenant la trace de 4.8 et en injectant l'égalité précédente :

$$S_{11}^c + S_{33}^c = [(3\lambda^c + 2G^c) - \lambda^c] \text{tr} \underline{\underline{E}}^c$$

ce qui permet d'exprimer $\text{tr} \underline{\underline{E}}^c$ en fonction de la trace de la partie plane de $\underline{\underline{S}}^c$:

$$\underline{\underline{E}}^c = \frac{1}{2(\lambda^c + G^c)} [S_{11}^c + S_{33}^c]$$

et conduit à l'inversion de 4.8 où n'apparaissent plus que S_{11}^c et S_{33}^c :

$$\underline{\underline{E}}^c = \frac{1}{2G^c} \left\{ \underline{\underline{S}}^c - \frac{\lambda^c}{2(\lambda^c + G^c)} [S_{11}^c + S_{33}^c] \underline{\underline{1}} \right\}$$

On peut donc ne travailler qu'avec les composantes planes de $\underline{\underline{S}}^c$ et calculer a posteriori S_{22}^c par 4.9.

Nouvelles notations

Afin de simplifier les notations à venir, nous conserverons les notations utilisées précédemment pour désigner non plus des grandeurs tridimensionnelles, mais leurs restrictions au plan

de la transformation.

Anciennes notations	Nouvelles notations
• \underline{X} : vecteur position dans \mathcal{R}	• \underline{X} : vecteur position dans $(O; \underline{E}_1, \underline{E}_3)$
• $\underline{\phi} : \Omega_0 \mapsto \mathbb{R}^3$	• $\underline{\phi} : (\underline{E}_1, \underline{E}_3) \mapsto (\underline{e}_1, \underline{e}_3)$
$\forall \underline{X} \in \mathbb{R}^3, \forall (i, j) \in [1, 3]^2 :$	$\forall \underline{X} \in \mathbb{R}^2, \forall (\alpha, \beta) \in \{1, 3\}^2 :$
• $\underline{F}(\underline{X}) = \underline{\nabla} \underline{\phi} = \phi_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$	• $\underline{F}(\underline{X}) = \underline{\nabla} \underline{\phi}(\underline{X}) = \phi_{\alpha,\beta}(\underline{X}) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta$
• $\underline{E}(\underline{X}) = E_{ij}(\underline{X}) \underline{E}_i \otimes \underline{E}_j$	• $\underline{E}(\underline{X}) = E_{\alpha\beta}(\underline{X}) \underline{E}_\alpha \otimes \underline{E}_\beta$
• $\underline{S}(\underline{X}) = S_{ij}(\underline{X}) \underline{E}_i \otimes \underline{E}_j$	• $\underline{S}(\underline{X}) = S_{\alpha\beta}(\underline{X}) \underline{E}_\alpha \otimes \underline{E}_\beta$

Etude bidimensionnelle de (\mathcal{S})

Sous les hypothèses précédemment mentionnées, on peut donc se contenter de restreindre l'étude à n'importe quel plan défini par $X_2 = cste$ avec $X_2 \in [-b, b]$.

• La géométrie du système plan \mathcal{S}_p est maintenant donnée par l'intersection de Ω_0 avec le plan $(\underline{E}_1; \underline{E}_3)$. Sa surface est notée Σ_0

$$\Sigma_0 = [0, L] \times [H_-^1, H_+^{NC}] = \sum_{c=1}^{NC} \Sigma_0^c$$

où Σ_0^c définit le domaine plan de \mathbb{R}^2 occupé par chaque couche c .

Sa frontière $\partial\Sigma_0$ est donc divisée en quatre parties $\partial\Sigma_0 = \bigcup_{p=1}^4 \partial_p \Sigma_0$, avec :

$$\begin{array}{l|l} \partial_1 \Sigma_0 = [X_1 = 0] \times [H_-^1, H_+^{NC}] & \partial_3 \Sigma_0 = [X_1 = L] \times [H_-^1, H_+^{NC}] \\ \partial_2 \Sigma_0 = [0, L] \times [X_3 = H_+^{NC}] & \partial_4 \Sigma_0 = [0, L] \times [X_3 = H_-^1] \end{array}$$

• Conditions aux limites : Pour simplifier encore l'exposé, nous nous plaçons ci-dessous dans le cas des conditions aux limites particulières suivantes :

- En déplacements : encastrement total sur $\partial_1 \Sigma_0$
- En efforts imposés : densité d'efforts par unité de longueur suivant X_3 notée \underline{T}^d et appliquée sur $\partial_3 \Sigma_0$. Les portions de frontières $\partial_2 \Sigma_0$ et $\partial_4 \Sigma_0$ restent libres d'efforts.

Le système \mathcal{S}_p soumis aux conditions aux limites décrites précédemment constitue le problème plan à résoudre que nous noterons (\mathcal{P}_p) .

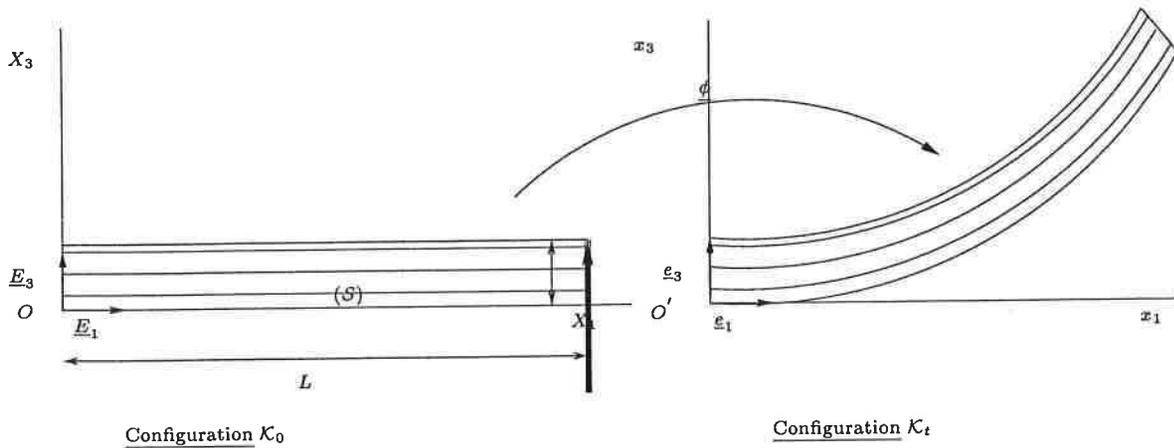


FIG. 4.2 – Etude bidimensionnelle de la poutre

4.3 Expression du principe mixte correspondant

4.3.1 Expression de la fonctionnelle mixte correspondant au problème (\mathcal{P}_p)

La nature plane du problème permet de ramener son étude du domaine tridimensionnel Ω_0 à la portion de surface Σ_0 de \mathbb{R}^2 . L'expression du principe mixte tridimensionnelle a été donnée en 2.22. En utilisant les nouvelles notations définies en 4.2.3, la solution plane du problème (\mathcal{P}_p) précédemment décrit est recherchée en tant que point stationnaire, sur un ensemble que nous précisons plus loin, de la fonctionnelle écrite sur Σ_0 suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(\underline{\underline{S}}^*, \underline{\underline{\phi}}^*) &= \underbrace{-\int_{\Sigma_0} \bar{\omega}^c(\underline{\underline{S}}^*) d\Sigma_0}_{\mathbf{J}_1(\underline{\underline{S}})} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \underline{\underline{S}}^* : [\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\phi}}^{*T} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\phi}}^* - \underline{\underline{1}}]}_{\mathbf{J}_2(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{\phi}})} d\Sigma_0 \\
 &\quad - \underbrace{\int_{\partial_T \Sigma_0} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\phi}}^* d\gamma}_{\mathbf{J}_3(\underline{\underline{\phi}})} - \underbrace{\int_{\partial_u \Sigma_0} [(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\phi}}^* \cdot \underline{\underline{S}}^*) \cdot \underline{\underline{N}}] \cdot (\underline{\underline{\phi}}^* - \underline{\underline{\phi}}^d) d\gamma}_{\mathbf{J}_4(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{\phi}})}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Sigma_0 = [0, L] \times [H_-^1, H_+^{NC}] \\
 \partial_u \Sigma_0 = \partial_1 \Sigma_0 = [X_1 = 0] \times [H_-^1, H_+^{NC}] \\
 \partial_T \Sigma_0 = \partial_3 \Sigma_0 = [X_1 = L] \times [H_-^1, H_+^{NC}]
 \end{array} \right.$$

et ici

$$\underline{\underline{\phi}}^d(X_3) = X_3 \underline{\underline{E}}_3$$

Pour plus de clareté dans les calculs qui vont suivre, nous avons présenté l'expression de la fonctionnelle 4.10 comme une somme de quatre grandeurs ayant leurs dépendances propres vis

à vis des variables ϕ et \underline{S} :

$$\mathbf{J}(\underline{S}, \phi) = \mathbf{J}_1(\underline{S}) + \mathbf{J}_2(\underline{S}, \phi) + \mathbf{J}_3(\phi) + \mathbf{J}_4(\underline{S}, \phi)$$

Dans chaque quantité \mathbf{J}_ξ , $\xi \in [1, 4]$, nous allons successivement mettre en évidence les intégrales sur l'épaisseur de chacune des couches, et donc faire apparaître les restrictions des champs ϕ et \underline{S} aux couches considérées :

Expression de \mathbf{J}_1

Avec la densité 4.7, on a directement :

$$\mathbf{J}_1(\underline{S}^*) = - \int_{[0,L]} \left[\sum_{i=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \frac{1}{2} \underline{S}^{*c} : \underline{\underline{K}}^c : \underline{S}^{*c} dX_3 \right] dX_1 \quad (4.11)$$

Expression de \mathbf{J}_2

$$\mathbf{J}_2(\phi^*, \underline{S}^*) = \int_{[0,L]} \left\{ \sum_{i=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} S^c(X_1, X_3) : \underbrace{\frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\nabla}} \phi^{*cT}(X_1, X_3) \cdot \underline{\underline{\nabla}} \phi^{*c}(X_1, X_3) - \underline{\underline{1}} \right]}_{\underline{\underline{E}}(\phi^{*c}(X_1, X_3))} dX_3 \right\} dX_1 \quad (4.12)$$

Expression de \mathbf{J}_3

Avec \underline{T}^d la densité linéique par unité de longueur suivant X_3 d'efforts imposés, choisie uniforme sur toute l'épaisseur de la poutre pour simplifier, on a :

$$\mathbf{J}_3(\phi^*) = - \sum_{c=1}^{NC} \underline{T}^d \cdot \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \phi^{*c}(L, X_3) dX_3 \right) \quad (4.13)$$

Expression de \mathbf{J}_4

$$\mathbf{J}_4(\phi^*, \underline{S}^*) = - \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \left\{ \left(\underline{\underline{\nabla}} \phi^{*c} \cdot \underline{S}^{*c} \right) \Big|_{X_1=0} \cdot (-\underline{E}_1) \right\} \cdot \left(\phi^{*c} \Big|_{X_1=0} - X_3 \underline{E}_3 \right) dX_3 \quad (4.14)$$

On obtient donc l'expression finale de la fonctionnelle mixte correspondant au problème plan de type encastrement à l'origine et densité uniforme d'efforts appliqués à l'extrémité.

4.3.2 Enoncé du principe mixte correspondant au problème (\mathcal{P}_p)

Définissons les deux espaces fonctionnels suivant :

$$\mathbf{E}_{\underline{\phi}} = \left\{ \underline{\phi} \in (C^0(\Sigma_0))^2, \underline{\phi}|_{\Sigma_0^c} \in (C^1(\Sigma_0^c))^2 \forall c \in [1, NC] \right\} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{E}_{\underline{S}} = \left\{ \underline{S} / \underline{S}|_{\Sigma_0^c} \in (C^1(\Sigma_0^c))^3 \forall c \in [1, NC] \right\} \quad (4.16)$$

Notons que nous avons imposé la continuité de $\underline{\phi}$ sur Σ_0 mais que les gradients de la transformation et les contraintes peuvent être discontinus aux interfaces entre les couches. Notons également que nous n'imposons pas la continuité du vecteur contrainte $\underline{P} \cdot \underline{E}_3$ aux interfaces. L'énoncé du principe mixte correspondant au problème (\mathcal{P}_p) devient alors :

Le couple $(\underline{\phi}, \underline{S}) \in \mathbf{E}_{\underline{\phi}} \times \mathbf{E}_{\underline{S}}$ rendant stationnaire la fonctionnelle \mathbf{J} définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\underline{S}^*, \underline{\phi}^*) &= - \int_{[0,L]} \left[\sum_{i=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \frac{1}{2} \underline{S}^{*c}(\underline{X}) : \underline{K}^c : \underline{S}^{*c}(\underline{X}) dX_3 \right] dX_1 \\ &+ \int_{[0,L]} \left\{ \sum_{i=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} S^c(\underline{X}) : \frac{1}{2} \left[\underline{\nabla} \underline{\phi}^{*cT}(\underline{X}) \cdot \underline{\nabla} \underline{\phi}^{*c}(\underline{X}) - \underline{1} \right] dX_3 \right\} dX_1 \\ &- \sum_{c=1}^{NC} \underline{T}^d \cdot \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{\phi}^{*c}(L, X_3) dX_3 \right) \\ &+ \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \left\{ \left(\underline{\nabla} \underline{\phi}^{*c} \cdot \underline{S}^{*c} \right) |_{X_1=0} \cdot (\underline{E}_1) \right\} \cdot \left(\underline{\phi}^{*c} |_{X_1=0} - X_3 \underline{E}_3 \right) dX_3 \end{aligned}$$

est solution du problème (\mathcal{P}_p)

Conclusion

L'adaptation de la modélisation multiparticulaire au cadre des grandes transformations modifie notablement la démarche initiale.

Nous proposons d'utiliser la formulation mixte en $\underline{\phi}$ et \underline{S} présentée dans la première partie en approximant simultanément la cinématique et les contraintes.

Le problème simple que nous présentons pour expliquer la construction du modèle simplifié est celui d'une poutre multicouches encastree à une extrémité et soumise à une densité d'efforts à l'autre extrémité. La nature de ce problème nous autorise à nous restreindre à une étude bidimensionnelle.

L'expression du principe mixte bidimensionnel correspondant à ce problème est donnée.

Chapitre 5

Le principe mixte modifié

Comme nous venons de le justifier au chapitre précédent, la modélisation proposée repose sur des approximations par couche à la fois de la transformation et des composantes du second tenseur des contraintes de Piola-kirchhoff. Ces approximations consistant en des développements sur des bases de polynômes de Legendre définis pour chaque couche, nous présenterons donc dans un premier temps les définitions et les propriétés des polynômes constitutifs de ces bases. Nous détaillerons ensuite successivement la construction des approximations de la cinématique et des contraintes en présentant les variables généralisées introduites dans le modèle proposé. L'introduction de ces approximations dans le principe mixte retenu permettra alors de donner l'expression d'un principe mixte modifié formulé à l'aide des variables généralisées.

5.1 Définition des bases de polynômes de Legendre

La formulation étant Lagrangienne, ces polynômes ont pour variable la coordonnée X_3 associée à la direction d'empilement dans la configuration de référence. Pour chaque couche $c \in [1, NC]$, les bases de polynômes sont définies par $\mathcal{B}^c = \{Q_\alpha^c(X_3)\}_{\alpha \in [1, NC]}$ où α indique le degré en X_3 du polynôme de Legendre considéré.

5.1.1 Définitions des polynômes utilisés

Comme nous le verrons par la suite, pour chaque couche c , seuls les cinq premiers polynômes de la base \mathcal{B}^c seront utilisés. En rappelant que \bar{H}^c désigne la côte moyenne de la couche c alors que E_p^c désigne son épaisseur les expressions de ces cinq polynômes sont les suivantes :

$$Q_0^c(X_3) = 1 \quad (5.1)$$

$$Q_1^c(X_3) = \frac{X_3 - \bar{H}^c}{E_p^c} \quad (5.2)$$

$$Q_2^c(X_3) = -6(Q_1^c)^2(X_3) + \frac{1}{2} \quad (5.3)$$

$$Q_3^c(X_3) = -2(Q_1^c)^3(X_3) + \frac{3}{10}Q_1^c(X_3) \quad (5.4)$$

$$Q_4^c(X_3) = \frac{560}{3}(Q_1^c)^4(X_3) - 40(Q_1^c)^2(X_3) + 1 \quad (5.5)$$

5.1.2 Propriétés

Propriété d'orthogonalité et intégration sur l'épaisseur

Ces polynômes sont construits de telle sorte qu'ils vérifient la propriété d'orthogonalité au sens du produit scalaire suivant :

$$\forall \alpha \geq 1, \forall \beta \geq 0, \alpha \neq \beta \quad \int_{H_-^c}^{H_+^c} Q_\alpha^c(X_3) \cdot Q_\beta^c(X_3) dX_3 = 0 \quad \forall c \in [0, NC] \quad (5.6)$$

On utilisera en particulier la propriété obtenue pour $\beta = 0$:

$$\int_{H_-^c}^{H_+^c} Q_\alpha^c(X_3) dX_3 = 0 \quad \forall \alpha \geq 1 \quad (5.7)$$

De plus, lorsque $\alpha = \beta \in [1, 2]$ on a :

$$\int_{H_-^c}^{H_+^c} Q_0^c(X_3) dX_3 = E_p^c$$

$$\int_{H_-^c}^{H_+^c} (Q_1^c)^2(X_3) dX_3 = \frac{1}{12}E_p^c$$

$$\int_{H_-^c}^{H_+^c} (Q_2^c)^2(X_3) dX_3 = \frac{1}{5}E_p^c$$

Valeurs sur les faces inférieures et supérieures de la couche c

$$Q_1^c(H_-^c) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad Q_1^c(H_+^c) = \frac{1}{2} \quad (5.8)$$

$$Q_2^c(H_-^c) = -1 \quad ; \quad Q_2^c(H_+^c) = -1 \quad (5.9)$$

$$Q_3^c(H_-^c) = \frac{1}{10} \quad ; \quad Q_3^c(H_+^c) = -\frac{1}{10} \quad (5.10)$$

Dérivation par rapport à X_3

Nous aurons également besoin par la suite des expressions des dérivées des polynômes par rapport à X_3 .

$$Q_1^{c'}(X_3) = \frac{1}{E_p^c} \quad (5.11)$$

$$Q_2^{c'}(X_3) = -\frac{12}{E_p^c} Q_1^c(X_3) \quad (5.12)$$

$$Q_3^{c'}(X_3) = \frac{1}{E_p^c} Q_2^c(X_3) - \frac{2}{10E_p^c} \quad (5.13)$$

C'est sur ces bases \mathcal{B}^c pour les différentes couches que nous proposons de développer la cinématique, d'une part, et les contraintes d'autre part. Des choix vont devoir être faits et justifiés quand au degré par rapport à X_3 de ces développements. Nous allons donc successivement traiter du cas de la cinématique et des contraintes.

5.2 Approximations de la cinématique

La formulation mixte qui a été retenue utilise comme variable cinématique la transformation plane $\underline{\phi}$. On rappelle que, la restriction de $\underline{\phi}$ à la couche c est notée $\underline{\phi}^c$ et est donc définie par :

$$\forall c \in [1, NC], \quad \underline{\phi}^c(\underline{X}) = \underline{\phi}(\underline{X}) \quad \forall \underline{X} \in [0, L] \times [H_-, H_+] \quad (5.14)$$

5.2.1 Forme du développement

Sur chaque couche $c \in [1, NC]$, on approxime $\underline{\phi}^c(\underline{X})$ par un développement sur la base de polynômes de Legendre $\mathcal{B}^c = \{Q_\alpha^c(X_3)\}$

L'approximation de $\underline{\phi}^c$ sera notée $\underline{\phi}_a^c$.

Le problème qui se pose alors est le choix du degré maximal en X_3 de ce développement et donc du polynôme de \mathcal{B}^c correspondant. Nous avons vu qu'une expression de $\underline{\phi}_a^c$ à l'ordre un en X_3 permet au mieux de retrouver la théorie de Timoshenko pour chaque couche dans laquelle chaque section possède sa propre rotation de corps rigide, différente de la rotation locale de la fibre neutre. Dans le cas de grandes transformations, il semble réaliste d'introduire une cinématique par couche plus riche, permettant notamment de prendre en compte un gauçhissement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ de chaque section à l'intérieure de chacune des couches.

Ainsi, nous faisons l'hypothèse cinématique simplifiée suivante :

$\forall c \in [1, NC]$, $\underline{\phi}^c$ est développée jusqu'en $Q_2^c(X_3)$ et est donc d'ordre 2 en X_3 .

Les approximations de la restriction de la transformation $\underline{\phi}$ sur chaque couche $\forall c \in [1, NC]$ sont donc choisies avec la forme suivante :

$$\underline{\phi}_a^c(\underline{X}) = \underline{\phi}_0^c(X_1)Q_0^c + \underline{\phi}_1^c(X_1)Q_1^c(X_3) + \underline{\phi}_2^c(X_1)Q_2^c(X_3) \quad (5.15)$$

où $\forall c \in [1, NC]$ les coefficients $\underline{\phi}_0^c(X_1)$, $\underline{\phi}_1^c(X_1)$ et $\underline{\phi}_2^c(X_1)$ dans les développements précédents représentent 6 champs scalaires à déterminer.

5.2.2 Introduction des transformations généralisées

Il s'agit maintenant de choisir 6 grandeurs cinématiques généralisées et d'exprimer les 6 coefficients du développement 5.15, $\underline{\phi}_\gamma^c(X_1)$ $\gamma \in [0, 2]$ à l'aide de ces 6 transformations généralisées. Ces transformations généralisées seront destinées à devenir les nouvelles inconnues du problème simplifié.

Transformations d'interface

L'un des objectifs de la modélisation étant d'apporter une information sur les phénomènes d'interface, on choisit donc de faire entrer dans le modèle comme transformations généralisées, les valeurs des transformations aux interfaces. Ainsi, pour chaque couche c , on définit les deux transformations généralisées :

$$\begin{cases} \underline{\phi}^{c-}(X_1) = \underline{\phi}(X_1, X_3 = H_-^c) : \text{valeur de la transformation à l'interface}(c-1, c) \\ \underline{\phi}^{c+}(X_1) = \underline{\phi}(X_1, X_3 = H_+^c) : \text{valeur de la transformation à l'interface}(c, c+1) \end{cases}$$

transformation moyenne sur l'épaisseur

La troisième transformation généralisée retenue sur la couche c est la moyenne des transformations des points matériels d'une section de la couche étudiée. Ce choix conduit en effet aux calculs les plus simples compte-tenu de la propriété 5.7. Elle s'écrit :

$$\overline{\underline{\phi}}^c(X_1) = \frac{1}{E_p^c} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{\phi}^c(X_1, X_3) dX_3 \quad (5.16)$$

La figure précédente illustre le choix de ces trois transformations généralisées :
Notons d'ailleurs que :

$$\overline{\underline{\phi}}^c(X_1) \neq \underline{\phi}(X_1, X_3 = 0)$$

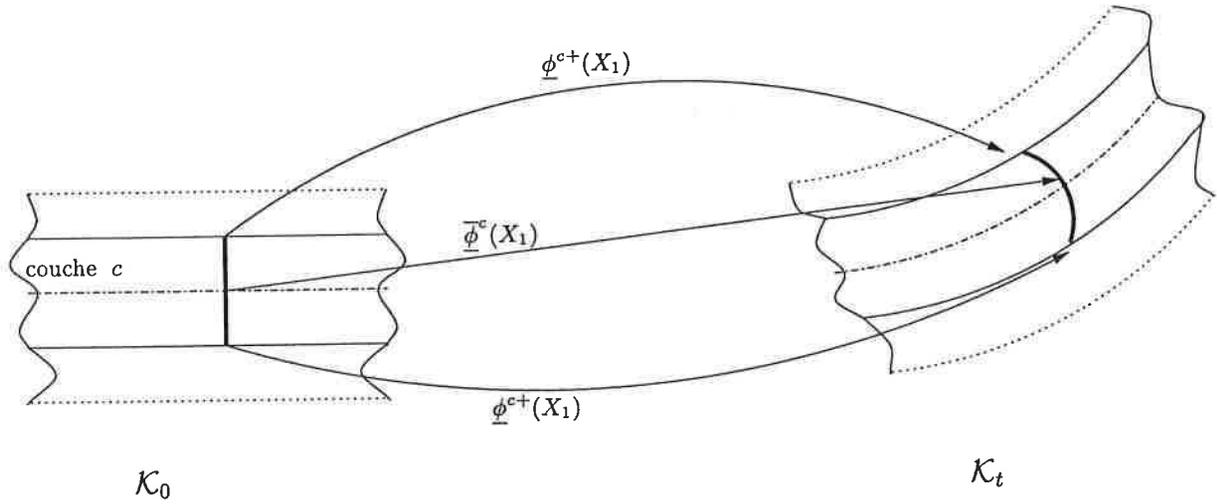
La moyenne de la transformation des points matériel d'une section en X_1 ne correspond pas à la transformation du point moyen de cette section.

A ce stade, le modèle présente donc pour l'ensemble de la structure étudiée, $6NC$ transformations généralisées inconnues.

Continuité de la transformation aux interfaces

On fait alors la seconde hypothèse cinématique suivante :

La continuité de $\underline{\phi}$ sur chaque interface $[c, c+1] \forall c \in [1, NC-1]$ est imposée.

FIG. 5.1 – Illustration de la cinématique généralisée choisie sur la couche c

Elle est prise en compte en introduisant un unique champ de transformations $\underline{\phi}^{c,c+1}(X_1)$ sur chaque interface $[c, c+1] \forall c \in [1, NC-1]$ tel que :

$$\underline{\phi}^{c,c+1}(X_1) = \underline{\phi}^{c+1}(X_1) = \underline{\phi}^{(c+1)-}(X_1) \quad \forall c \in [1, (NC-1)] \quad (5.17)$$

Le recensement de l'ensemble des champs cinématiques inconnus pour la structure constituée de NC couches, soient $(NC-1)$ interfaces, conduit donc au nombre suivant d'inconnues généralisées :

$$\begin{cases} 2NC & \text{champs } \bar{\phi}_\alpha(X_1) \\ 2(NC-1) + 4 & \text{champs } \phi_\alpha^{c,c+1}(X_1) \end{cases}$$

avec les notations :

$$\begin{cases} \phi_\alpha^{0,1}(X_1) & = \phi_\alpha(X_1, X_3 = H_-^1) \\ \phi_\alpha^{NC,NC+1}(X_1) & = \phi_\alpha(X_1, X_3 = H_+^{NC}) \end{cases}$$

Les transformations généralisées pour l'ensemble des NC couches de la structure étudiée sont regroupées dans un vecteur noté Φ . On a donc :

$$\Phi = \left\{ \bar{\phi}_{|c \in [1, NC]}^c, \phi_{|c \in [0, NC]}^{c,c+1} \right\} \quad (5.18)$$

Forme de l'approximation cinématique

Il suffit alors d'écrire les définitions 5.17 et 5.16 à l'aide du développement 5.15 pour obtenir un système permettant de relier simplement sur chaque couche, les coefficients $\underline{\phi}_\gamma^c(X_1)$ $\gamma \in [0, 2]$ du développement 5.15 aux transformations généralisées $\bar{\phi}^c$, $\underline{\phi}^{c-1,c}$ et $\underline{\phi}^{c,c+1}$. On

trouve les relations :

$$\underline{\phi}_0^c(X_1) = \overline{\phi}^c(X_1) \quad (5.19)$$

$$\underline{\phi}_1^c(X_1) = \underline{\phi}^{c,c+1}(X_1) - \underline{\phi}^{c-1,c}(X_1) \quad (5.20)$$

$$\underline{\phi}_2^c(X_1) = \overline{\phi}^c(X_1) - \frac{\underline{\phi}^{c,c+1}(X_1) + \underline{\phi}^{c-1,c}(X_1)}{2} \quad (5.21)$$

En ne faisant plus apparaître que la cinématique généralisée dans les coefficients des développements, on obtient donc l'expression suivante du développement de $\underline{\phi}^c(X_1, X_3)$ sur \mathcal{B}^c :

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_a^c(X_1, X_3) &= \overline{\phi}^c(X_1) Q_0^c(X_3) + (\underline{\phi}^{c,c+1}(X_1) - \underline{\phi}^{c-1,c}(X_1)) Q_1^c(X_3) \\ &+ \left(\overline{\phi}^c(X_1) - \frac{\underline{\phi}^{c,c+1}(X_1) + \underline{\phi}^{c-1,c}(X_1)}{2} \right) Q_2^c(X_3) \end{aligned} \quad (5.22)$$

On rappelle la définition de l'espace fonctionnel $\mathbf{E}_{\underline{\phi}}$ introduit au chapitre précédent :

$$\mathbf{E}_{\underline{\phi}} = \left\{ \underline{\phi} \in (\mathcal{C}^0(\Sigma_0))^2, \underline{\phi}|_{\Sigma_0^c} \in (\mathcal{C}^1(\Sigma_0^c))^2 \forall c \in [1, NC] \right\}$$

Le choix de fonctions définies par 5.22 nous restreint à un sous-espace de $\mathbf{E}_{\underline{\phi}}$, noté $s\mathbf{E}_{\underline{\phi}}$ qui est donc définie par :

$$s\mathbf{E}_{\underline{\phi}} = \left\{ \underline{\phi} \in \mathbf{E}_{\underline{\phi}} / \underline{\phi}|_{\Sigma_0^c} \text{ de la forme 5.22 } \forall c \in [1, NC] \right\} \quad (5.23)$$

On note $\Phi(X_1)$, le vecteur à $4NC + 2$ composantes :

$$\Phi(X_1) = \left\{ \overline{\phi}_\alpha^c \quad c \in [1, NC], \alpha \in \{1, 3\}; \underline{\phi}_\alpha^{c,c+1} \quad c \in [0, NC], \alpha \in \{1, 3\} \right\} \quad (5.24)$$

Le champs de vecteurs $\Phi(X_1)$ $X_1 \in [0, L]$ regroupant l'ensemble des $2(NC + 1)$ champs de transformations généralisées est donc tel que :

$$\Phi \in \left\{ (\mathcal{C}^1([0, L]))^{2NC+2} \right\}$$

On peut également définir le champs de vecteur auxiliaire à $6NC$ composantes :

$$\hat{\Phi}(\hat{X}_1) = \left\{ \left(\frac{\phi^c}{\underline{\gamma}} \right)_\alpha \quad c \in [1, NC], \gamma \in \{0, 2\}, \alpha \in \{1, 3\} \right\} \quad (5.25)$$

Cet ensemble de $6NC$ champs scalaires sur $[0, L]$ est tel que :

$$\hat{\Phi} \in \left\{ (\mathcal{C}^1([0, L]))^{6NC} \right\}$$

L'objectif est maintenant de donner l'expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange sur la couche c correspondant à l'approximation 5.22 de $\underline{\phi}^c$. On commencera par étudier le gradient de $\underline{\phi}_a^c$.

Notons qu'en raison de l'hypothèse cinématique imposant la continuité de la transformation sur les $NC - 1$ interfaces, les $6NC$ composantes de $\hat{\Phi}$ ne sont pas indépendantes. Chaque $\underline{\phi}_\gamma^c \in \hat{\Phi}$ s'exprime en fonction d'une combinaison linéaire des composantes de Φ comme établie de 5.19 à 5.21. Nous noterons L l'application linéaire liant $\hat{\Phi}$ à Φ . On a donc :

$$\hat{\Phi} = L \cdot \Phi \quad (5.26)$$

$$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{6NC}; \mathbb{R}^{4NC+2})$$

En comparant les expressions 5.15 et 5.22, il semble plus judicieux afin de manipuler des équations plus compactes de travailler le plus longtemps possible à l'aide du vecteur $\hat{\Phi}$ et d'utiliser ensuite la relation 5.26 permettant le passage de $\hat{\Phi}$ à Φ .

C'est ce que nous allons faire pour établir les expressions d'une partie du tenseur des déformations de Green-Lagrange correspondant à l'approximation cinématique proposé. Ce calcul nécessitera d'exprimer le gradient de $\underline{\phi}_a^c$ pour $c \in [0, NC]$.

5.2.3 Gradient de la transformation plane approchée sur la couche

$$c : \underline{\underline{F}}_a^c(X_1, X_3)$$

L'approximation de $\underline{\phi}^c$ s'écrivant sous forme d'un développement sur \mathcal{B}^c jusqu'en $Q_2^c(X_3)$, son gradient, $\underline{\underline{\nabla}}\underline{\phi}^c = \underline{\underline{F}}_a^c$ admet donc lui aussi un développement sur \mathcal{B}^c jusqu'en $Q_2^c(X_3)$ et s'écrit donc sous la forme : $\forall X \in [0, L] \times [H_-^c, H_+^c]$:

$$\underline{\underline{F}}_a^c(X_1, X_3) = \underline{\underline{F}}_0^c(X_1) + \underline{\underline{F}}_1^c(X_1)Q_1^c(X_3) + \underline{\underline{F}}_2^c(X_1)Q_2^c(X_3) \quad (5.27)$$

En notation indicielle, on a pour $i = \{1, 3\}$:

$$\underline{\phi}_a^c = \left(\underline{\phi}_a^c \right)_i e_i$$

d'où :

$$\underline{\underline{F}}_a^c = \underline{\underline{\nabla}}\underline{\phi}_a^c = \left(\underline{\phi}_a^c \right)_{i,1} e_i \otimes \underline{E}_1 + \left(\underline{\phi}_a^c \right)_{i,3} e_i \otimes \underline{E}_3 \quad \text{pour } i = \{1, 3\}$$

On tire alors des propriétés 5.11 et 5.12 les expressions des trois coefficients $\underline{\underline{F}}_0^c(X_1)$, $\underline{\underline{F}}_1^c(X_1)$ et $\underline{\underline{F}}_2^c(X_1)$ en fonction des coefficients du développement 5.15 de $\underline{\phi}_a^c$:

$$\underline{\underline{F}}_0^c = \underline{\phi}_0^{c'} \otimes \underline{E}_1 + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c \otimes \underline{E}_3 \quad (5.28)$$

$$\underline{\underline{F}}_1^c = \underline{\phi}_1^{c'} \otimes \underline{E}_1 - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c \otimes \underline{E}_3 \quad (5.29)$$

$$\underline{\underline{F}}_2^c = \underline{\phi}_2^{c'} \otimes \underline{E}_1 \quad (5.30)$$

On peut également représenter sous forme matricielle les composantes des trois tenseurs précédents. En notant ' la dérivation par rapport à la variable d'espace X_1 qui n'est pas mentionnée, on a ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}_0^c &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{0}}}\right)'_1 & \frac{1}{E_p^c} \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{1}}}\right)'_1 \\ \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{0}}}\right)'_3 & \frac{1}{E_p^c} \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{1}}}\right)'_3 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{F}}_1^c = \begin{bmatrix} \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{1}}}\right)'_1 & -\frac{12}{E_p^c} \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{2}}}\right)'_1 \\ \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{1}}}\right)'_3 & -\frac{12}{E_p^c} \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{2}}}\right)'_3 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{F}}_2^c &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{2}}}\right)'_1(X_1) & 0 \\ \left(\frac{\phi^c}{\underline{\underline{2}}}\right)'_3(X_1) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2.4 Tenseur plan des déformations de Green-Lagrange approchés

Si on appelle $\underline{\underline{E}}_a^c$, le tenseur des déformations de Green-Lagrange associé à l'approximation ϕ_a^c de ϕ . Le tenseur $\underline{\underline{E}}_a^c$ est par définition relié au tenseur $\underline{\underline{F}}_a^c$ précédemment étudié par :

$$\underline{\underline{E}}_a^c(X_1, X_3) = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{F}}_a^{cT}(X_1, X_3) \cdot \underline{\underline{F}}_a^c(X_1, X_3) - \underline{\underline{1}} \right]$$

Le tenseur $\underline{\underline{F}}_a^c$ est développé jusqu'en $Q_2^c(X_3)$ sur \mathcal{B}^c conformément à 5.27. Le produit $\underline{\underline{F}}_a^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_a^c$ définissant $\underline{\underline{E}}_a^c$ est donc d'ordre 4 en X_3 . On peut donc écrire $\underline{\underline{E}}_a^c(X_1, X_3)$ sous la forme d'un développement sur \mathcal{B}^c jusqu'en $Q_4^c(X_3)$:

$$\underline{\underline{E}}_a^c(X_1, X_3) = \underline{\underline{E}}_0^c(X_1)Q_0^c + \underline{\underline{E}}_1^c(X_1)Q_1^c(X_3) + \underline{\underline{E}}_2^c(X_1)Q_2^c(X_3) + \underline{\underline{E}}_3^c(X_1)Q_3^c(X_3) + \underline{\underline{E}}_4^c(X_1)Q_4^c(X_3) \quad (5.31)$$

Compte-tenu des définitions 5.1 à 5.5 des polynômes de Legendre sur la couche c et de la forme 5.27 de $\underline{\underline{F}}_a^c$, les coefficients E_α^c , $\alpha \in [0, 4]$ du développement de $\underline{\underline{E}}_a^c$ sont des combinaisons linéaires de produits du type $\underline{\underline{F}}_\alpha^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_\beta^c$ avec $(\alpha, \beta) \in ([0, 2])^2$. On a en effet :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}_a^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_a^c &= \left(\underline{\underline{F}}_0^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_0^c \right) Q_0^c + \left(\underline{\underline{F}}_0^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_1^c + \underline{\underline{F}}_1^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_0^c \right) Q_1^c + \left(\underline{\underline{F}}_0^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_2^c + \underline{\underline{F}}_2^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_0^c \right) Q_2^c \\ &+ \left(\underline{\underline{F}}_1^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_1^c \right) (Q_1^c)^2 + \left(\underline{\underline{F}}_2^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_1^c + \underline{\underline{F}}_1^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_2^c \right) Q_1^c \cdot Q_2^c + \left(\underline{\underline{F}}_2^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_2^c \right) (Q_2^c)^2 \end{aligned}$$

Il faut alors exprimer ces produits de polynômes en fonction de polynômes de base de degrés supérieurs.

La définition 5.3 donne directement :

$$(Q_1^c)^2 = -\frac{1}{6}Q_2^c + \frac{1}{12}Q_0^c$$

Pour le calcul de $Q_1^c \cdot Q_2^c$, on utilise la définition de 5.4 :

$$\begin{aligned} Q_1^c \cdot Q_2^c &= -6 (Q_1^c)^3 + \frac{1}{2} Q_1^c \\ &= 3Q_3^c - \frac{2}{5} Q_1^c \end{aligned} \quad (5.32)$$

et enfin, 5.5 donne :

$$\begin{aligned} (Q_2^c)^2 &= 36 (Q_1^c)^4 - 6 (Q_1^c)^2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{27}{140} Q_4^c + \frac{12}{7} (Q_1^c)^2 + \frac{2}{35} \\ &= \frac{27}{140} Q_4^c - \frac{2}{7} Q_2^c + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

On obtient donc l'expression finale du développement de \underline{E}_a^c sur \mathcal{B}^c en fonction des coefficients du développement de \underline{F}^c sur cette même base :

$$\begin{aligned} \underline{E}_a^c(X_1, X_3) &= \left\{ \frac{1}{2} \left[\underline{F}_{=0}^{cT} \cdot \underline{F}_{=0}^c + \frac{1}{12} \underline{F}_{=1}^{cT} \cdot \underline{F}_{=1}^c + \frac{1}{5} \underline{F}_{=2}^{cT} \cdot \underline{F}_{=2}^c - \underline{1} \right] (X_1) \right\} Q_0^c \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \left[\underline{F}_{=0}^{cT} \cdot \underline{F}_{=1}^c + \underline{F}_{=1}^{cT} \cdot \underline{F}_{=0}^c - \frac{2}{5} \left(\underline{F}_{=1}^{cT} \cdot \underline{F}_{=2}^c + \underline{F}_{=2}^{cT} \cdot \underline{F}_{=1}^c \right) \right] (X_1) \right\} Q_1^c(X_3) \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \left[\underline{F}_{=0}^{cT} \cdot \underline{F}_{=2}^c + \underline{F}_{=2}^{cT} \cdot \underline{F}_{=0}^c - \frac{1}{6} \underline{F}_{=1}^{cT} \cdot \underline{F}_{=1}^c - \frac{2}{7} \underline{F}_{=2}^{cT} \cdot \underline{F}_{=2}^c \right] (X_1) \right\} Q_2^c(X_3) \quad (5.33) \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} 3 \left[\underline{F}_{=1}^{cT} \cdot \underline{F}_{=2}^c + \underline{F}_{=2}^{cT} \cdot \underline{F}_{=1}^c \right] (X_1) \right\} Q_3^c(X_3) \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{140} \left[\underline{F}_{=2}^{cT} \cdot \underline{F}_{=2}^c \right] (X_1) \right\} Q_4^c(X_3) \end{aligned}$$

Nous n'aurons besoin en fait dans la suite des développements, que des expressions de \underline{E}_0^c et de \underline{E}_1^c en fonction des coefficients $\underline{\phi}_\gamma^c(X_1)$ $\gamma \in [0, 2]$.

Expression de \underline{E}_0^c

On identifie dans l'expression 5.33 :

$$\underline{E}_0^c(X_1) = \frac{1}{2} \left[\underline{F}_{=0}^{cT} \cdot \underline{F}_{=0}^c + \frac{1}{12} \underline{F}_{=1}^{cT} \cdot \underline{F}_{=1}^c + \frac{1}{5} \underline{F}_{=2}^{cT} \cdot \underline{F}_{=2}^c - \underline{1} \right] (X_1)$$

D'après les relations 8.4, 8.5 et 8.6, on établit aisément les expressions suivantes dans lesquelles la variable X_1 est omise :

$$\underline{\underline{F}}_0^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_0^c = \|\underline{\phi}_0^{c'}\|^2 \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_1^c (\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1) + \frac{1}{(E_p^c)^2} \|\underline{\phi}_1^c\|^2 \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3$$

$$\underline{\underline{F}}_1^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_1^c = \|\underline{\phi}_1^{c'}\|^2 \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_1^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^c (\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1) + \frac{144}{(E_p^c)^2} \|\underline{\phi}_2^c\|^2 \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3$$

$$\underline{\underline{F}}_2^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_2^c = \|\underline{\phi}_2^{c'}\|^2 \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1$$

On en déduit par conséquent l'expression de $\underline{\underline{E}}_0^c$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_0^c &= \frac{1}{2} \left\{ \|\underline{\phi}_0^{c'}\|^2 + \frac{1}{12} \|\underline{\phi}_1^{c'}\|^2 + \frac{1}{5} \|\underline{\phi}_2^{c'}\|^2 - 1 \right\} \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{E_p^c} \left\{ \underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_1^c - \underline{\phi}_1^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^c \right\} (\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(E_p^c)^2} \left[\|\underline{\phi}_1^c\|^2 + 12 \|\underline{\phi}_2^c\|^2 \right] - 1 \right\} \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Expression de $\underline{\underline{E}}_1^c$

On identifie dans l'expression 5.33 :

$$\underline{\underline{E}}_1^c(X_1) = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{F}}_0^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_1^c + \underline{\underline{F}}_1^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_0^c - \frac{2}{5} \left(\underline{\underline{F}}_1^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_2^c + \underline{\underline{F}}_2^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_1^c \right) \right] (X_1)$$

On a encore :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}_0^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_1^c &= \underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_1^{c'} \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^c \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 \\ &\quad + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c \cdot \underline{\phi}_1^{c'} \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1 - \frac{12}{(E_p^c)^2} \underline{\phi}_1^c \cdot \underline{\phi}_2^c \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3 \end{aligned}$$

et

$$\underline{\underline{F}}_1^{cT} \cdot \underline{\underline{F}}_2^c = \underline{\phi}_1^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^{c'} \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c \cdot \underline{\phi}_2^{c'} \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1$$

qui conduisent alors à l'expression cherchée de \underline{E}_1^c :

$$\begin{aligned} \underline{E}_1^c &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_1^{c'} \right) - \frac{4}{5} \left(\underline{\phi}_1^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^{c'} \right) \right\} \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{1}{E_p^c} \left\{ \left(-12 \underline{\phi}_0^c \cdot \underline{\phi}_2^c + \underline{\phi}_1^c \cdot \underline{\phi}_1^c \right) + \frac{24}{5} \underline{\phi}_2^c \cdot \underline{\phi}_2^c \right\} (\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1) \\ &\quad - \frac{12}{(E_p^c)^2} \left(\underline{\phi}_1^c \cdot \underline{\phi}_2^c \right) \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3 \end{aligned} \quad (5.35)$$

5.3 Approximations des contraintes

5.3.1 Degré du développement

Après le choix d'une cinématique développée à l'ordre deux en X_3 , on fait le choix, afin de ne pas construire un modèle trop lourd à manipuler, d'introduire comme approximation sur les contraintes un développement par couche à l'ordre un en X_3 .

- Hypothèse sur les contraintes

Sur chaque couche $c \in [0, NC]$, $\underline{S}^c(\underline{X})$, est développé jusqu'en $Q_1^c(X_3)$

L'approximation de la restriction de \underline{S} à la couche $c \in [1, NC]$ est notée \underline{S}_a^c et s'écrit :

$$\underline{S}_a^c(\underline{X}) = \underline{S}_0^c(X_1) Q_0^c(X_3) + \underline{S}_1^c(X_1) Q_1^c(X_3) \quad (5.36)$$

où en raison de l'équilibre en moments, $\underline{S}_0^c(X_1)$ et $\underline{S}_1^c(X_1)$ sont symétriques.

Comme nous l'avons déjà mentionné, du fait de l'absence de sens physique pour \underline{S} les deux coefficients $\underline{S}_0^c(X_1)$ et $\underline{S}_1^c(X_1)$ du développement 5.36 constituent directement les contraintes généralisées du modèle et vont devenir les nouvelles inconnues en contraintes du problème simplifié. Il existe donc $6NC$ contraintes généralisées que l'on regroupe dans le vecteur \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \left\{ \left(\underline{S}_0^c \right)_{11}, \left(\underline{S}_0^c \right)_{13}, \left(\underline{S}_0^c \right)_{33}, \left(\underline{S}_1^c \right)_{11}, \left(\underline{S}_1^c \right)_{13}, \left(\underline{S}_1^c \right)_{33} \right\}_{c=1}^{NC} \quad (5.37)$$

On rappelle la définition de l'espace fonctionnel \underline{E}_S introduit au chapitre précédent :

$$\underline{E}_S = \left\{ \underline{S} / \underline{S}|_{\Sigma_0^c} \in (C^1(\Sigma_0^c))^3 \quad \forall c \in [1, NC] \right\}$$

Le choix de \underline{S} défini par 5.36 nous restreint à un sous espace de \underline{E}_S , note $s\underline{E}_S$ défini par :

$$s\underline{E}_S = \left\{ \underline{S} \in \underline{E}_S / \underline{S}(X_1) \text{ de forme 5.36 sur } \Sigma_0^c, \quad \forall c \in [1, NC] \right\} \quad (5.38)$$

Le vecteur \mathbf{S} regroupant l'ensemble des contraintes généralisées est donc tel que :

$$\mathbf{S} \in \left\{ (C^1([0, L]))^{6NC} \right\}$$

5.4 Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff approché sur la couche c

Nous avons proposé une approximation pour $\underline{\phi}^c$ et pour \underline{S}^c , $\forall c \in [1, NC]$. On rappelle que le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, \underline{P} est relié à \underline{S} et à $\underline{\phi}$ par la relation :

$$\underline{P} = \underline{\nabla \phi} \cdot \underline{S}$$

Nous pouvons donc donner l'expression de l'approximation de la restriction à la couche c de \underline{P} en fonction de la cinématique généralisée et des contraintes généralisées.

5.4.1 Construction de $(\underline{P}^c)_a$

Expression de $(\underline{P}^c)_a$

On note \underline{P}_a^c , l'approximation de \underline{P}^c sur la couche c . On applique donc la relation

$$\underline{P}_a^c = \underline{\nabla \phi}^c \cdot \underline{S}_a^c \quad (5.39)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{F}_a^c &= \underline{F}_0^c Q_0^c + \underline{F}_1^c Q_1^c + \underline{F}_2^c Q_2^c \\ \underline{S}_a^c &= \underline{S}_0^c Q_0^c + \underline{S}_1^c Q_1^c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{P}_a^c &= \underline{F}_a^c \cdot \underline{S}_a^c = \left(\underline{F}_0^c \cdot \underline{S}_0^c \right) Q_0^c + \left(\underline{F}_0^c \cdot \underline{S}_1^c + \underline{F}_1^c \cdot \underline{S}_0^c \right) Q_1^c + \left(\underline{F}_1^c \cdot \underline{S}_1^c \right) (Q_1^c)^2 \\ &\quad + \left(\underline{F}_2^c \cdot \underline{S}_0^c \right) Q_2^c + \left(\underline{F}_2^c \cdot \underline{S}_1^c \right) Q_1^c Q_2^c \end{aligned}$$

Les propriétés 5.32, permettent alors d'exprimer \underline{P}_a^c sous la forme :

$$\underline{P}_a^c(X_1, X_3) = \underline{P}_0^c(X_1) Q_0^c + \underline{P}_1^c(X_1) Q_1^c(X_3) + \underline{P}_2^c(X_1) Q_2^c(X_3) + \underline{P}_3^c(X_1) Q_3^c(X_3) \quad (5.40)$$

avec

$$\underline{P}_0^c = \underline{F}_0^c \cdot \underline{S}_0^c + \frac{1}{12} \underline{F}_1^c \cdot \underline{S}_1^c \quad (5.41)$$

$$\underline{P}_1^c = \underline{F}_0^c \cdot \underline{S}_1^c + \underline{F}_1^c \cdot \underline{S}_0^c - \frac{2}{5} \underline{F}_2^c \cdot \underline{S}_1^c \quad (5.42)$$

$$\underline{P}_2^c = \underline{F}_2^c \cdot \underline{S}_0^c - \frac{1}{6} \underline{F}_1^c \cdot \underline{S}_1^c \quad (5.43)$$

$$\underline{P}_3^c = 3 \underline{F}_2^c \cdot \underline{S}_1^c \quad (5.44)$$

Il sera utile, pour les calculs à venir, de donner les expressions, pour $c \in [0, NC]$, des vecteurs $\underline{P}_\gamma \cdot \underline{E}_1$ et $\underline{P}_\gamma \cdot \underline{E}_3$ pour $\gamma \in [0, 3]$ en fonction des contraintes généralisées et des coefficients

$\underline{\phi}_0^c$, $\underline{\phi}_1^c$ et $\underline{\phi}_2^c$, combinaisons linéaires des transformations généralisées. Ces expressions sont facilement obtenues en utilisant la propriété de calcul tensoriel suivante : Considérons deux champs de tenseurs d'ordre 2 $\underline{T}_{\underline{1}}(X_1)$ et $\underline{T}_{\underline{2}}(X_1)$ s'écrivant sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{T}_{\underline{1}}(X_1) = \underline{A}(X_1) \otimes \underline{E}_1 + \underline{B}(X_1) \otimes \underline{E}_3 \\ \underline{T}_{\underline{2}}(X_1) = \underline{C}(X_1) \otimes \underline{E}_1 + \underline{D}(X_1) \otimes \underline{E}_3 \end{cases}$$

On a alors, en omettant les dépendances par rapport à X_1 les deux résultats suivants :

$$\left(\underline{T}_{\underline{1}} \cdot \underline{T}_{\underline{2}} \right) \cdot \underline{E}_1 = \underline{A}(\underline{C} \cdot \underline{E}_1) + \underline{B}(\underline{C} \cdot \underline{E}_3) \quad (5.45)$$

et

$$\left(\underline{T}_{\underline{1}} \cdot \underline{T}_{\underline{2}} \right) \cdot \underline{E}_3 = \underline{A}(\underline{D} \cdot \underline{E}_1) + \underline{B}(\underline{D} \cdot \underline{E}_3) \quad (5.46)$$

En utilisant alors d'une part les expressions 8.4 à 8.6 des $\underline{F}_{\underline{\gamma}}^c$, $\gamma[0, 2]$ et d'autre part les expressions de $\underline{S}_{\underline{\mu}}^c$, $\mu[0, 1]$ sous la forme :

$$\underline{S}_{\underline{\mu}}^c = \left(\underline{S}_{\underline{\mu}}^c \cdot \underline{E}_1 \right) \otimes \underline{E}_1 + \left(\underline{S}_{\underline{\mu}}^c \cdot \underline{E}_3 \right) \otimes \underline{E}_3$$

les expressions cherchées donnent directement :

$$\underline{P}_{\underline{0}}^c \cdot \underline{E}_1 = \underline{\phi}_0^c (S_0^c)_{11} + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c (S_0^c)_{13} + \frac{1}{12} \underline{\phi}_1^c (S_1^c)_{11} - \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c (S_1^c)_{13} \quad (5.47)$$

$$\underline{P}_{\underline{0}}^c \cdot \underline{E}_3 = \underline{\phi}_0^c (S_0^c)_{13} + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c (S_0^c)_{33} + \frac{1}{12} \underline{\phi}_1^c (S_1^c)_{13} - \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c (S_1^c)_{33} \quad (5.48)$$

$$\underline{P}_{\underline{1}}^c \cdot \underline{E}_1 = \underline{\phi}_0^c (S_1^c)_{11} + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c (S_1^c)_{13} + \underline{\phi}_1^c (S_0^c)_{11} - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c (S_0^c)_{13} - \frac{2}{5} \underline{\phi}_2^c (S_1^c)_{11} \quad (5.49)$$

$$\underline{P}_{\underline{1}}^c \cdot \underline{E}_3 = \underline{\phi}_0^c (S_1^c)_{13} + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c (S_1^c)_{33} + \underline{\phi}_1^c (S_0^c)_{13} - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c (S_0^c)_{33} - \frac{2}{5} \underline{\phi}_2^c (S_1^c)_{13} \quad (5.50)$$

$$\underline{P}_{\underline{2}}^c \cdot \underline{E}_1 = \underline{\phi}_2^c (S_0^c)_{11} - \frac{1}{6} \underline{\phi}_1^c (S_1^c)_{11} + \frac{2}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c (S_1^c)_{13} \quad (5.51)$$

$$\underline{P}_{\underline{2}}^c \cdot \underline{E}_3 = \underline{\phi}_2^c (S_0^c)_{13} - \frac{1}{6} \underline{\phi}_1^c (S_1^c)_{13} + \frac{2}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c (S_1^c)_{33} \quad (5.52)$$

$$\underline{P}_{\underline{3}}^c \cdot \underline{E}_1 = 3 \underline{\phi}_2^c (S_1^c)_{11} \quad (5.53)$$

$$\underline{P}_{\underline{3}}^c \cdot \underline{E}_3 = 3 \underline{\phi}_2^c (S_1^c)_{13} \quad (5.54)$$

Conséquences sur $\underline{P}_{\underline{a}}^c$ des hypothèses faites sur $\underline{\phi}^c$ et \underline{S}^c

Des hypothèses ont été faites séparément concernant les formes des approximations sur chaque couche de la cinématique d'une part et des contraintes d'autre part. Aucune hypothèse

ne porte donc sur $\underline{\underline{P}}_a^c$.

En particulier, il n'est pas imposé à $\underline{\underline{P}}_a^c$ de vérifier :

$$\text{Les équations d'équilibre} : \underline{\underline{Div}} \underline{\underline{P}}_a^c = 0 \quad \forall c \in [1, NC] \quad (5.55)$$

$$\text{La continuité du vecteur contrainte} : \left[\underline{\underline{P}}_a^{c+1} |_{H_{c+1}^-} - \underline{\underline{P}}_a^c |_{H_c^+} \right] \cdot \underline{\underline{E}}_3 = 0 \quad (5.56)$$

$$\forall c \in [1, NC - 1]$$

Les équations 5.55 et 5.56 ne seront vérifiées pour notre modèle que sous forme approchée. Il est cependant intéressant d'établir dès maintenant les expressions des membres de gauche de 5.55 et 5.56 en fonction des grandeurs généralisées de façon à les confronter ultérieurement aux équations d'équilibre généralisées du modèle.

5.4.2 Expression de $\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{P}}_a^c$

Nous recherchons ici les expressions en fonction des grandeurs généralisées, des cofacteurs des polynômes de base dans le terme $\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{P}}_a^c$ qui s'écrit :

$$\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{P}}_a^c = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\underline{\underline{P}}_a^c \cdot \underline{\underline{E}}_1 \right) + \frac{\partial}{\partial X_3} \left(\underline{\underline{P}}_a^c \cdot \underline{\underline{E}}_3 \right)$$

La dérivation par rapport à X_3 a été distinguée afin d'utiliser les propriétés 5.11 à 5.13 des polynômes de \mathcal{B}^c dans l'expression 5.40 de $\underline{\underline{P}}_a^c$. Ces dernières conduisent à écrire $\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{P}}_a^c$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Div}} \underline{\underline{P}}_a^c &= \underline{\underline{Div}}_0 \underline{\underline{P}}_a^c (X_1) Q_0^c + \underline{\underline{Div}}_1 \underline{\underline{P}}_a^c (X_1) Q_1^c (X_3) \\ &+ \underline{\underline{Div}}_2 \underline{\underline{P}}_a^c (X_1) Q_2^c (X_3) + \underline{\underline{Div}}_3 \underline{\underline{P}}_a^c (X_1) Q_3^c (X_3) \end{aligned} \quad (5.57)$$

où

$$\underline{\underline{Div}}_0 \underline{\underline{P}}_a^c = \left(\underline{\underline{P}}_0^c \cdot \underline{\underline{E}}_1 \right)' + \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{\underline{P}}_1^c \cdot \underline{\underline{E}}_3 \right) - \frac{1}{5} \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{\underline{P}}_3^c \cdot \underline{\underline{E}}_3 \right) \quad (5.58)$$

$$\underline{\underline{Div}}_1 \underline{\underline{P}}_a^c = \left(\underline{\underline{P}}_1^c \cdot \underline{\underline{E}}_1 \right)' - \frac{12}{E_p^c} \left(\underline{\underline{P}}_2^c \cdot \underline{\underline{E}}_3 \right) \quad (5.59)$$

$$\underline{\underline{Div}}_2 \underline{\underline{P}}_a^c = \left(\underline{\underline{P}}_2^c \cdot \underline{\underline{E}}_1 \right)' + \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{\underline{P}}_3^c \cdot \underline{\underline{E}}_3 \right) \quad (5.60)$$

$$\underline{\underline{Div}}_3 \underline{\underline{P}}_a^c = \left(\underline{\underline{P}}_3^c \cdot \underline{\underline{E}}_1 \right)' \quad (5.61)$$

En injectant 5.47 à 5.54 dans les expressions 5.58 à 5.61, on trouve que :

le terme 5.58 s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{Div}_0 \underline{P}^c &= \frac{d}{dX_1} \left\{ \underline{\phi}_0^{c'} \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c \left(\underline{S}_0^c \right)_{31} + \frac{1}{12} \underline{\phi}_1^{c'} \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} - \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{31} \right\} \\ &+ \frac{1}{E_p^c} \left\{ \underline{\phi}_0^{c'} \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{33} + \underline{\phi}_1^{c'} \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c \left(\underline{S}_0^c \right)_{33} - \underline{\phi}_2^{c'} \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \right\} \end{aligned} \quad (5.62)$$

l'équation 5.59 s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{Div}_1 \underline{P}^c &= \frac{d}{dX_1} \left\{ \underline{\phi}_0^{c'} \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{31} + \underline{\phi}_1^{c'} \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c \left(\underline{S}_0^c \right)_{31} - \frac{2}{5} \underline{\phi}_2^{c'} \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \right\} \\ &- \frac{12}{E_p^c} \left\{ \underline{\phi}_2^{c'} \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} - \frac{1}{6} \left[\underline{\phi}_1^{c'} \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{33} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.63)$$

l'équation 5.60 s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{Div}_2 \underline{P}^c &= \frac{d}{dX_1} \left\{ \left(\underline{\phi}_2^{c'} \right)_i \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} - \frac{1}{6} \left[\left(\underline{\phi}_1^{c'} \right)_i \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} - \frac{12}{E_p^c} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_i \left(\underline{S}_1^c \right)_{31} \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{E_p^c} \left\{ 3 \left(\underline{\phi}_2^{c'} \right)_i \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \right\} \end{aligned} \quad (5.64)$$

et l'équation 5.61 s'écrit :

$$\underline{Div}_3 \underline{P}^c = \frac{d}{dX_1} \left\{ 3 \left(\underline{\phi}_2^{c'} \right)_i \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \right\} \quad (5.65)$$

5.4.3 Discontinuité du vecteur contrainte aux interfaces

La discontinuité du vecteur contrainte aux interfaces $(c, c+1) \forall c = \{1, (NC-1)\}$ s'écrit :

$$\left[\underline{P}^{c+1} |_{H_{c+1}^-} - \underline{P}^c |_{H_c^+} \right] \cdot \underline{E}_3 = 0 \quad (5.66)$$

D'après les propriétés 5.8 à 5.10 la discontinuité du vecteur contrainte 5.66 s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \left[\underline{P}^{c+1} |_{H_{c+1}^-} - \underline{P}^c |_{H_c^+} \right] \cdot \underline{E}_3 &= \left[\left(\underline{P}_0^{c+1} \cdot \underline{E}_3 \right) - \left(\underline{P}_0^c \cdot \underline{E}_3 \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\underline{P}_1^{c+1} \cdot \underline{E}_3 \right) + \left(\underline{P}_1^c \cdot \underline{E}_3 \right) \right] \\ &- \left[\left(\underline{P}_2^{c+1} \cdot \underline{E}_3 \right) - \left(\underline{P}_2^c \cdot \underline{E}_3 \right) \right] + \frac{1}{10} \left[\left(\underline{P}_3^{c+1} \cdot \underline{E}_3 \right) + \left(\underline{P}_3^c \cdot \underline{E}_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.67)$$

5.5 Obtention de la fonctionnelle modifiée

Nous recherchons une solution du problème (\mathcal{P}_p) tel qu'il a été décrit au chapitre précédent. Une solution $(\underline{\phi}, \underline{S}) \in \underline{E}_{\underline{\phi}} \times \underline{E}_{\underline{S}}$ de (\mathcal{P}_p) est recherchée comme point stationnaire de la fonctionnelle J avec l'expression de J ainsi que les définitions de $\underline{E}_{\underline{S}}$ et $\underline{E}_{\underline{\phi}}$ données dans la sous-section 4.3.2.

Nous avons proposé d'approximer $\underline{\phi}$ par $\underline{\phi}_a \in \underline{sE}_{\underline{\phi}} \subset \underline{E}_{\underline{\phi}}$ et \underline{S} par $\underline{S}_a \in \underline{sE}_{\underline{S}} \subset \underline{E}_{\underline{S}}$. La modélisation que nous proposons consiste à simplifier la recherche de la solution par le principe précédent en nous restreignant à des sous espaces adéquats. Nous allons donc rechercher une solution approchée-du problème (\mathcal{P}_p) , notée $(\underline{\phi}_a, \underline{S}_a)$ sur $\underline{sE}_{\underline{\phi}} \times \underline{sE}_{\underline{S}}$ comme point stationnaire de la fonctionnelle $J(\underline{\phi}_a^*, \underline{S}_a^*)$.

L'intérêt des espaces $\underline{sE}_{\underline{\phi}}$ et $\underline{sE}_{\underline{S}}$ réside dans la simplification de l'expression de $J(\underline{\phi}_a^*, \underline{S}_a^*)$ pour $(\underline{\phi}_a^*, \underline{S}_a^*) \in \underline{sE}_{\underline{\phi}} \times \underline{sE}_{\underline{S}}$ qui devient une fonctionnelle modifiée notée \tilde{J} ne dépendant plus que de la variable d'espace X_1 et dont les variables indépendantes sont les grandeurs généralisées.

C'est l'expression de $J(\underline{\phi}_a^*, \underline{S}_a^*)$ pour $(\underline{\phi}_a^*, \underline{S}_a^*) \in \underline{sE}_{\underline{\phi}} \times \underline{sE}_{\underline{S}}$ que nous nous proposons d'établir dans cette section.

5.5.1 Rappel de l'expression de la fonctionnelle mixte utilisée

L'expression de $J(\underline{\phi}, \underline{S})$ pour $(\underline{\phi}^*, \underline{S}^*) \in \underline{E}_{\underline{\phi}} \times \underline{E}_{\underline{S}}$ donnée en 4.3.2 fait apparaître quatre termes :

$$J(\underline{\phi}^*, \underline{S}^*) = -J_1(\underline{S}^*) + J_2(\underline{\Phi}^*, \underline{S}^*) + J_3(\underline{\Phi}^*) + J_4(\underline{\Phi}^*, \underline{S}^*) \quad (5.68)$$

avec

$$J_1(\underline{S}) = \sum_{c=1}^{NC} \int_{[0,L]} \left\{ \int_{H_-^c}^{H_+^c} \frac{1}{2} \underline{S}^c : \underline{K} : \underline{S}^c dX_3 \right\} dX_1 \quad (5.69)$$

$$J_2(\underline{\Phi}, \underline{S}) = \sum_{c=1}^{NC} \int_{[0,L]} \left\{ \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{S}^c : \underline{E}^c(\underline{\phi}^c) dX_3 \right\} dX_1 \quad (5.70)$$

$$J_3(\underline{\Phi}) = - \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d \cdot \underline{\phi}^c(X_1 = L) dX_3 \quad (5.71)$$

$$J_4(\underline{\Phi}, \underline{S}) = - \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \left[(\underline{\nabla} \underline{\phi}^c \cdot \underline{S}^c) \cdot (-\underline{E}_1) \right]_{|X_1=0} \cdot (\underline{\phi}^c - \underline{\phi}^d)_{|X_1=0} dX_3 \quad (5.72)$$

Cette écriture nous permettra de travailler successivement sur chacun des morceaux constituant l'expression de J .

5.5.2 Restriction de J à $sE_{\underline{\phi}} \times sE_{\underline{S}}$

En remplaçant $\underline{\phi}^c$ et \underline{S}^c par leurs approximations polynômiales respectivement $\underline{\phi}_a^c$ et \underline{S}_a^c on fait apparaître dans les différents morceaux précédents des produits de polynômes de base dont les coefficients sont des fonctions des grandeurs généralisées. La variable d'espace X_3 disparaît alors en réalisant les intégrations suivant les épaisseurs de chacune des couches qui s'effectuent simplement en raison de l'orthogonalité des polynômes de base.

On obtient, finalement, une fonctionnelle modifiée par les approximations introduites, notée \tilde{J} , dont les variables indépendantes sont les grandeurs généralisées.

Introduisons successivement les approximations en cinématiques et en contraintes dans les quatre termes constituant J et définis de 5.69 à 5.72.

Modification de $J_1(\underline{S})$

$$\begin{aligned} \underline{S}_a^c : \underline{K}^c : \underline{S}_a^c &= \left[\underline{S}_0^c : \underline{K}^c : \underline{S}_0^c + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1^c : \underline{K}^c : \underline{S}_1^c \right) \right] Q_0^c \\ &+ 2 \left[\underline{S}_0^c : \underline{K}^c : \underline{S}_1^c \right] Q_1^c - \frac{1}{6} \left[\underline{S}_1^c : \underline{K}^c : \underline{S}_1^c \right] Q_2^c \end{aligned}$$

qui par intégration sur l'épaisseur conduit donc à :

$$\sum_{c=1}^{NC} \int_{H_c^-}^{H_c^+} \underline{S}^c : \underline{K}^c : \underline{S}^c dX_3 = \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \left\{ \underline{S}_0^c : \underline{K}^c : \underline{S}_0^c + \frac{1}{12} \left[\underline{S}_1^c : \underline{K}^c : \underline{S}_1^c \right] \right\}$$

Modification de $J_2(\underline{S}, \underline{\phi})$

le terme $\underline{S}_a^c : \underline{E}_a^c$ conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{S}_a^c : (\underline{E}^c)_a &= \left[\underline{S}_0^c : \underline{E}_0^c \right] Q_0^c + \left[\underline{S}_1^c : \underline{E}_0^c + \underline{S}_0^c : \underline{E}_1^c \right] Q_1^c + \left[\underline{S}_1^c : \underline{E}_1^c \right] (Q_1^c)^2 \\ &+ \left[\underline{S}_0^c : \underline{E}_2^c \right] Q_2^c + \left[\underline{S}_0^c : \underline{E}_3^c \right] Q_3^c + \left[\underline{S}_0^c : \underline{E}_4^c \right] Q_4^c \\ &+ \left[\underline{S}_1^c : \underline{E}_2^c \right] Q_1^c \cdot Q_2^c + \left[\underline{S}_1^c : \underline{E}_3^c \right] Q_1^c \cdot Q_3^c + \left[\underline{S}_1^c : \underline{E}_4^c \right] Q_1^c \cdot Q_4^c \end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{c=1}^{NC} \int_{H_c^-}^{H_c^+} \underline{S}_a^c : \underline{E}_a^c dX_3 = \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \left[\underline{S}_0^c : \underline{E}_0^c + \frac{1}{12} \underline{S}_1^c : \underline{E}_1^c \right]$$

Modification de $J_3(\underline{\phi})$

On note \underline{T}^d la densité linéique uniforme d'efforts suivant la direction X_3 . L'intégration sur l'épaisseur ne porte alors que sur le développement de $(\underline{\phi}^c)_a$ où les termes en Q_1^c et Q_2^c

disparaissent :

$$\sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d \cdot \underline{\phi} \, dX_3 = \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \underline{T}^d \cdot \underline{\phi}_0^c(X_1 = L)$$

Modification de $J_4(\underline{\phi}, \underline{S})$

Sur la portion de frontière $X_1 = 0$, de normale $(-\underline{E}_1)$, la restriction à la couche c de la transformation imposée, notée $\underline{\phi}^{dc}$ s'écrit :

$$\underline{\phi}^{dc} = \underbrace{\overline{H}^c \underline{e}_3}_{(\underline{\phi}_0^c)^d} + \underbrace{E_p^c \underline{e}_3}_{(\underline{\phi}_1^c)^d} Q_1^c(X_3) + \underbrace{0}_{(\underline{\phi}_2^c)^d} Q_2^c(X_3) \quad (5.73)$$

Avec la définition 5.40, l'introduction des approximations dans J_4 conduit à :

$$\tilde{J}_4(\underline{\Phi} |_{X_1=0}, \underline{S} |_{X_1=0}) = \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{P}_a^c |_{X_1=0} \cdot \underline{E}_1 \cdot \left[\underline{\phi}_a^c - \underline{\phi}^{dc} \right] |_{X_1=0} \, dX_3$$

où

$$\begin{cases} \underline{P}_a^c |_{X_1=0}(X_3) &= \underline{P}_0^c(0) Q_0^c + \underline{P}_1^c(0) Q_1^c(X_3) + \underline{P}_2^c(0) Q_2^c(X_3) + \underline{P}_3^c(0) Q_3^c(X_3) \\ \left(\underline{\phi}^c - \underline{\phi}^{dc} \right) |_{X_1=0}(X_3) &= \left\{ \underline{\phi}_0^c(0) - \overline{H}^c \underline{e}_3 \right\} Q_0^c + \left\{ \underline{\phi}_1^c(0) - E_p^c \underline{e}_3 \right\} Q_1^c(X_3) + \underline{\phi}_2^c(0) Q_2^c(X_3) \end{cases}$$

L'utilisation de l'orthogonalité entraîne :

$$\begin{aligned} \hat{J}_4(\underline{\Phi} |_{X_1=0}, \underline{S} |_{X_1=0}) &= E_p^c \left\{ \left(\underline{P}_0^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_0^c \right)_1 + \left(\underline{P}_0^c \right)_{31} \left[\left(\underline{\phi}_0^c \right)_3 - \overline{H}^c \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left(\underline{P}_1^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_1^c \right)_1 + \frac{1}{12} \left(\underline{P}_1^c \right)_{31} \left[\left(\underline{\phi}_1^c \right)_3 - E_p^c \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \left(\underline{P}_2^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_1 + \frac{1}{5} \left(\underline{P}_2^c \right)_{31} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_3 \right\} (X_1 = 0) \end{aligned} \quad (5.74)$$

où les $\underline{P}_\gamma^c(X_1)$, $\forall \gamma \in [0, 3]$ dépendent des inconnues généralisées par les relations mises en évidence de 5.47 à 5.54.

5.5.3 Expression du principe mixte modifié

Nous proposons donc de rechercher une solution approchée $(\underline{\phi}_a, \underline{S}_a) \in \mathbf{sE}_\phi \times \mathbf{sE}_S$ définie par le couple de grandeurs généralisées $(\underline{\Phi}, \underline{S}) \in (\mathcal{C}^1([0, L]))^{4NC+2} \times (\mathcal{C}^1([0, L]))^{6NC}$ rendant

stationnaire la fonctionnelle $\hat{J}(\Phi^*, S^*)$ définie par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}(\Phi^*, S^*) = & - \int_0^L \frac{1}{2} \left\{ \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \left[\underline{S}_0^{c*}(X_1) : \underline{\underline{K}} : \underline{S}_0^{c*}(X_1) + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1^{c*}(X_1) : \underline{\underline{K}} : \underline{S}_1^{c*}(X_1) \right) \right] \right\} dX_1 \\
 & + \int_0^L \left\{ \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \left[\underline{S}_0^{c*}(X_1) : \underline{E}_0^{c*}(X_1) + \frac{1}{12} \underline{S}_1^{c*}(X_1) : \underline{E}_1^{c*}(X_1) \right] \right\} dX_1 \\
 & - \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \underline{T}^d \cdot \underline{\phi}_0^*(X_1 = L) \\
 & + \tilde{J}_4(\Phi^*|_{X_1=0}, S^*|_{X_1=0})
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

avec $\tilde{J}_4(\Phi|_{X_1=0}, S|_{X_1=0})$ donnée par 5.74 ainsi que \underline{E}_0^{c*} et \underline{E}_1^{c*} donnés par 8.2 et 5.35.

Conclusion

La transformation $\underline{\phi}$ et le tenseur des contraintes \underline{S} sont approximés par des développements polynomiaux par couche sur des bases de polynômes de Legendre définies sur chacune des couches.

Le développement de $\underline{\phi}^c$ est effectué jusqu'au degré 2 en X_3 , ce qui autorise à introduire dans les coefficients des développements :

- des transformations généralisées moyennes sur les épaisseurs des couches.
- des transformations généralisées définies aux interfaces.

Les développements sur \underline{S}^c sont effectués jusqu'au degré 1 en X_3 afin de ne pas développer un modèle trop lourd. Le tenseur \underline{S}^c ne possédant pas de sens physique, les coefficients des développements constituent directement les contraintes généralisées.

Nous proposons donc d'obtenir une solution approchée du problème en recherchant dans les espaces fonctionnels définis par ces approximations un point stationnaire de la fonctionnelle mixte établie au chapitre précédent. L'expression de cette fonctionnelle est modifiée par l'introduction de ces approximations. Ses variables indépendantes deviennent les grandeurs généralisées unidimensionnelles.

Chapitre 6

Les équations du modèle

Dans ce chapitre, nous proposons de mettre en oeuvre le principe approché établi au chapitre précédent afin d'écrire l'ensemble des équations du modèle formulées en variables généralisées.

- La première section de ce chapitre est destinée à simplifier la présentation des calculs de stationnarité de \tilde{J} .
- Nous présenterons alors dans la seconde section les équations de stationnarité de \tilde{J} vis à vis de ces contraintes généralisées. Ces dernières s'établissent facilement compte-tenu de la dépendance simple de \tilde{J} par rapport aux contraintes généralisées.
- La dépendance de \tilde{J} par rapport aux transformations généralisées est elle plus complexe. L'écriture des conditions de stationnarité de la fonctionnelle par rapport à la cinématique généralisée est donc un peu plus technique : elle est présentée dans la troisième section.

6.1 Commentaire sur la présentation des équations de stationnarité

6.1.1 Forme de la fonctionnelle $\tilde{J}(\Phi^*, S^*)$

L'expression de la fonctionnelle \tilde{J} donnée en 5.75 possède la forme générale suivante :

$$\tilde{J}(\Phi^*, S^*) = \int_{[0,L]} F(\hat{\Phi}^*, \hat{\Phi}^*, S^*, X_1) dX_1 + f_1(\hat{\Phi}^*(L)) + f_2(\hat{\Phi}^*(0), \hat{\Phi}^*(0), S^*(0)) \quad (6.1)$$

avec comme définie en 5.26 :

$$\hat{\Phi}^* = L.\Phi^*$$

où $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{6NC}, \mathbb{R}^{4NC+2})$ est une application linéaire.
Par identification de 6.1 avec 5.75 on a donc :

$$F(\hat{\Phi}^{*'}, \hat{\Phi}^*, \mathbf{S}^*, X_1) = \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \left\{ -\frac{1}{2} \left[\underline{\underline{S}}_0^c : \underline{\underline{K}}^c : \underline{\underline{S}}_0^c + \frac{1}{12} \left(\underline{\underline{S}}_1^c : \underline{\underline{K}}^c : \underline{\underline{S}}_1^c \right) \right] + \left[\underline{\underline{S}}_0^c : \underline{\underline{E}}_0^c + \frac{1}{12} \underline{\underline{S}}_1^c : \underline{\underline{E}}_1^c \right] \right\} \quad (6.2)$$

$$f_1(\hat{\Phi}^*(L)) = - T_i^d \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \left(\phi_0^c \right)_i (L) \quad (6.3)$$

$$f_2(\hat{\Phi}^{*'}(0), \hat{\Phi}^*(0), \mathbf{S}^*(0)) \equiv \tilde{J}_4(\Phi^*|_{X_1=0}, \mathbf{S}^*|_{X_1=0}) \quad (6.4)$$

où $\underline{\underline{E}}_0^c$ et $\underline{\underline{E}}_1^c$ fonctions des $\hat{\Phi}$ sont donnés en 8.2 et 5.35 et \tilde{J}_4 est définie en 5.74.

6.2 Stationnarité par rapport aux contraintes généralisées

6.2.1 Forme générale

La variation de \tilde{J} par rapport à \mathbf{S}^* dans la direction $\delta\mathbf{S} \in (\mathcal{C}^1([0, L]))^{6NC}$ calculée au point $(\Phi, \mathbf{S}) \in (\mathcal{C}^1([0, L]))^{2(NC+1)} \times (\mathcal{C}^1([0, L]))^{6NC}$ s'écrit :

$$D_{\mathbf{S}^*} \tilde{J}(\Phi, \mathbf{S})[\delta\mathbf{S}] = \int_{[0, L]} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}^*}(\hat{\Phi}', \hat{\Phi}, \mathbf{S}, X_1) \delta\mathbf{S} dX_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{S}^*(0)}(\hat{\Phi}'(0), \hat{\Phi}(0), \mathbf{S}(0)) \delta\mathbf{S}(0)$$

La condition de stationnarité

$$D_{\mathbf{S}^*} \tilde{J}(\Phi, \mathbf{S})[\delta\mathbf{S}] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{S} \in (\mathcal{C}^1([0, L]))^{6NC} \quad (6.5)$$

entraîne donc que le point $(\hat{\Phi} = L.\Phi), \mathbf{S}$ vérifie les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}^*}(\hat{\Phi}', \hat{\Phi}, \mathbf{S}, X_1) = 0 \quad \forall X_1 \in [0, L] \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{S}^*(0)}(\hat{\Phi}'(0), \hat{\Phi}(0), \mathbf{S}(0)) = 0 \quad (6.7)$$

6.2.2 Loi de comportement généralisée

L'opérateur F étant quadratique en \mathbf{S}^* , 6.6 s'écrit donc $\forall c \in [1, NC]$:

$$\begin{cases} -\underline{\underline{K}}^c : \underline{\underline{S}}_0^c + \underline{\underline{E}}_0^c = 0 \\ -\underline{\underline{K}}^c : \underline{\underline{S}}_1^c + \underline{\underline{E}}_1^c = 0 \end{cases}$$

Moyennant l'inversion des relations précédentes, la condition de stationnarité 6.5, entraîne donc que le point stationnaire (ϕ, \mathbf{S}) doit vérifier :

$$\underline{\underline{S}}_0^c = \left(\underline{\underline{K}}^c \right)^{-1} : \underline{\underline{E}}_0^c \quad (6.8)$$

$$\underline{\underline{S}}_1^c = \left(\underline{\underline{K}}^c \right)^{-1} : \underline{\underline{E}}_1^c \quad (6.9)$$

Cas particulier du comportement de type Saint-Venant-Kirchhoff

On se place maintenant dans le cas particulier d'une poutre multicouche dans laquelle chaque couche est constituée d'un matériau dont le comportement est modélisé par une loi du type Saint-Venant-Kirchhoff. Les expressions des tenseurs de souplesse de chaque couche, $\left(\underline{\underline{K}}^c \right)^{-1}$, s'écrivent dans ce cas simplement à l'aide des deux coefficients matériaux λ^c et G^c .

• Grâce aux relations 8.2 et 5.35, les conditions 6.8 écrites au point stationnaire recherché $(\hat{\Phi} = \mathbf{L} \cdot \Phi, \mathbf{S})$ fournissent les relations suivantes entre :

– $(S_0^c)_{11}$ et $\hat{\Phi}$:

$$\begin{aligned} (S_0^c)_{11} = & (\lambda^c + 2G^c) \frac{1}{2} \left[\|\underline{\phi}_0^{c'}\|^2 + \frac{1}{12} \|\underline{\phi}_1^{c'}\|^2 + \frac{1}{5} \|\underline{\phi}_2^{c'}\|^2 - 1 \right] \\ & + \lambda^c \frac{1}{2} \frac{1}{(E_p^c)^2} \left[\|\underline{\phi}_1^c\|^2 + 12 \|\underline{\phi}_2^c\|^2 - (E_p^c)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

– $(S_0^c)_{33}$ et $\hat{\Phi}$:

$$\begin{aligned} (S_0^c)_{33} = & (\lambda^c + 2G^c) \frac{1}{2} \frac{1}{(E_p^c)^2} \left[\|\underline{\phi}_1^c\|^2 + 12 \|\underline{\phi}_2^c\|^2 - (E_p^c)^2 \right] \\ & + \lambda^c \frac{1}{2} \left[\|\underline{\phi}_0^{c'}\|^2 + \frac{1}{12} \|\underline{\phi}_1^{c'}\|^2 + \frac{1}{5} \|\underline{\phi}_2^{c'}\|^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

– $(S_0^c)_{13}$ et $\hat{\Phi}$

$$(S_0^c)_{13} = 2G^c \frac{1}{2} \frac{1}{E_p^c} \left[\underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_1^c - \underline{\phi}_1^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^c \right] \quad (6.12)$$

• Grâce aux relations 8.2 et 5.35, les conditions 6.9 écrites au point stationnaire recherché $(\hat{\Phi} = \mathbf{L} \cdot \Phi, \mathbf{S})$ fournissent les relations suivantes entre :

– $(S_1^c)_{11}$ et $\hat{\Phi}$

$$(S_1^c)_{11} = (\lambda^c + 2G^c) \left[\underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_1^{c'} - \frac{2}{5} \underline{\phi}_1^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^{c'} \right] - \lambda^c \cdot \frac{12}{(E_p^c)^2} \underline{\phi}_1^c \cdot \underline{\phi}_2^c \quad (6.13)$$

– $(\underline{S}_1^c)_{33}$ et $\hat{\Phi}$

$$(\underline{S}_1^c)_{33} = -(\lambda^c + 2G^c) \cdot \frac{12}{(E_p^c)^2} \underline{\phi}_1^c \cdot \underline{\phi}_2^c + \lambda^c \left[\underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_1^{c'} - \frac{2}{5} \underline{\phi}_1^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^{c'} \right] \quad (6.14)$$

– $(\underline{S}_1^c)_{13}$ et $\hat{\Phi}$

$$(\underline{S}_1^c)_{13} = G^c \cdot \frac{1}{E_p^c} \left[-12 \underline{\phi}_0^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^c + \underline{\phi}_1^{c'} \cdot \underline{\phi}_1^c + \frac{24}{5} \underline{\phi}_2^{c'} \cdot \underline{\phi}_2^c \right] \quad (6.15)$$

6.2.3 Conditions aux limites en transformations

Les conditions aux limites en transformations sont obtenues en écrivant la relation 6.7

stationnarité par rapport à $(\underline{S}_0^c)_{11}$

La composante $(\underline{S}_0^c)_{11}$ de 6.7 a pour expression :

$$\begin{aligned} & \left\{ (\underline{\phi}_0^{c'})_1(0) (\underline{\phi}_0^c)_1(0) + (\underline{\phi}_0^{c'})_3(0) \left[(\underline{\phi}_0^c)_3(0) - \overline{H}^c \right] \right. \\ & + E_p^c \frac{1}{12} \left\{ (\underline{\phi}_1^{c'})_1(0) (\underline{\phi}_1^c)_1(0) + (\underline{\phi}_1^{c'})_3(0) \left[(\underline{\phi}_1^c)_3(0) - E_p^c \right] \right\} \\ & \left. + E_p^c \frac{1}{5} \left[(\underline{\phi}_2^{c'})_1(0) (\underline{\phi}_2^c)_1(0) + (\underline{\phi}_2^{c'})_3(0) (\underline{\phi}_2^c)_3(0) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

stationnarité par rapport à $(\underline{S}_0^c)_{13}$

La composante $(\underline{S}_0^c)_{13}$ de 6.7 a pour expression :

$$\begin{aligned} & \left\{ (\underline{\phi}_1^c)_1(0) (\underline{\phi}_0^c)_1(0) + (\underline{\phi}_1^c)_3(0) \left[(\underline{\phi}_0^c)_3(0) - \overline{H}^c \right] \right. \\ & \left. - (\underline{\phi}_2^c)_1(0) (\underline{\phi}_1^c)_1(0) - (\underline{\phi}_2^c)_3(0) \left[(\underline{\phi}_1^c)_3(0) - E_p^c \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

stationnarité par rapport à $\left(\underline{S}_1^c\right)_{11}$

La composante $\left(\underline{S}_1^c\right)_{11}$ de 6.7 a pour expression :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\underline{\phi}_1^{c'}\right)_1(0) \left(\underline{\phi}_0^c\right)_1(0) + \left(\underline{\phi}_1^{c'}\right)_3(0) \left[\left(\underline{\phi}_0^c\right)_3(0) - \overline{H}^c \right] \right\} \\ & + \left\{ \left[\left(\underline{\phi}_0^{c'}\right)_1(0) - \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_2^{c'}\right)_1(0) \right] \left(\underline{\phi}_1^c\right)_1(0) + \left[\left(\underline{\phi}_0^{c'}\right)_3(0) - \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_2^{c'}\right)_3(0) \right] \left[\left(\underline{\phi}_1^c\right)_3(0) - E_p^c \right] \right\} \\ & - \frac{2}{5} \left\{ \left(\underline{\phi}_1^{c'}\right)_1(0) \left(\underline{\phi}_2^c\right)_1(0) + \left(\underline{\phi}_1^{c'}\right)_3(0) \left(\underline{\phi}_2^c\right)_3(0) \right\} = 0 \end{aligned}$$

stationnarité par rapport à $\left(\underline{S}_1^c\right)_{13}$

La composante $\left(\underline{S}_1^c\right)_{13}$ de 6.7 a pour expression :

$$\begin{aligned} & \left\{ - \left(\underline{\phi}_2^c\right)_1(0) \left(\underline{\phi}_0^c\right)_1(0) - \left(\underline{\phi}_2^c\right)_3(0) \left[\left(\underline{\phi}_0^c\right)_3(0) - \overline{H}^c \right] \right\} \\ & + \frac{1}{12} \left\{ \left(\underline{\phi}_1^c\right)_1(0) \left(\underline{\phi}_1^c\right)_1(0) + \left(\underline{\phi}_1^c\right)_3(0) \left[\left(\underline{\phi}_1^c\right)_3(0) - E_p^c \right] \right\} \\ & + \frac{2}{5} \left\{ \left(\underline{\phi}_2^c\right)_1(0) \left(\underline{\phi}_2^c\right)_1(0) + \left(\underline{\phi}_2^c\right)_3(0) \left(\underline{\phi}_2^c\right)_3(0) \right\} = 0 \end{aligned}$$

6.2.4 Remarques sur les conditions aux limites en transformations

Les conditions aux limites en $X_1 = 0$ trouvées précédemment ont été obtenues en appliquant au point recherché (Φ, S) de $\in (\mathcal{C}^1([0, L]))^{2(NC+1)} \times (\mathcal{C}^1([0, L]))^{6NC}$ la condition de stationnarité :

$$D_{,S}f_2(\Phi(0), S(0))[\delta S(0)] = 0 \quad \forall \delta S(0) \in \mathbb{R}^{6NC} \quad (6.16)$$

Définition du terme Φ^d

Nous avons choisi de traiter le cas d'un encastrement en $X_1 = 0$. La transformation imposée correspondante s'écrit :

$$\underline{\phi}^d(X_3) = X_3 \underline{E}_3$$

La décomposition 5.73 de $\underline{\phi}^d$ permet définir comme cela a été fait pour Φ à partir de $\underline{\phi}$, le vecteur $\Phi^d \in \mathbb{R}^{4NC+2}$ regroupant les $4NC + 2$ transformations généralisées imposées. Remarquons que compte-tenu de la forme de la décomposition 5.73 de $\underline{\phi}^d$, le vecteur Φ^d ne possède que $2NC + 1$ composantes non nulles.

Forme du terme f_2

L'expression de $f_2 \equiv \tilde{J}_4$ est donnée par 5.74. Nous souhaitons distinguer clairement dans cette expression les dépendances respectives par rapport d'une part à $\mathbf{S}^*(0)$ et d'autre part à $\Phi^*(0)$ et $\Phi^{*'}(0)$ afin d'exploiter plus facilement les équations de stationnarité portant sur le terme f_2 . L'expression 5.74 de f_2 fait apparaître sa linéarité par rapport à $\mathbf{S}^*(0)$ et à $\Phi^{*'}(0)$, ainsi que sa non linéarité par rapport à $\Phi^*(0)$. On peut donc réécrire f_2 à l'aide des notations tensorielles suivantes :

$$f_2 \left(\Phi^{*'}(0), \Phi^*(0), \mathbf{S}^*(0) \right) = \mathbf{S}_1^* \cdot \left[\underline{\underline{a}} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Phi^*(0) \\ \Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \right] \cdot (\Phi^*(0) - \Phi^d) \quad (6.17)$$

où :

- le vecteur \mathbf{S}_1^* regroupe les composantes dans des vecteurs $\underline{\underline{S}}_a^{*c} \cdot \underline{E}_1$, $c \in [1, NC]$ dans $(\underline{E}_1, \underline{E}_3)$, seules composantes $\underline{\underline{S}}_a^{*c}$ intervenant dans f_2 . L'ensemble des composantes de \mathbf{S}_1^* est donc donné par :

$$\{\mathbf{S}_1^*\}^T = \left\{ \dots \{S_1^{*c}\}^T \dots \right\} \in \mathbb{R}^{4NC} \quad (6.18)$$

où $\forall c \in [1, NC]$:

$$\{S_1^{*c}\}^T = \{(S_0^{*c})_{11}(0), (S_0^{*c})_{13}(0), (S_1^{*c})_{11}(0), (S_1^{*c})_{13}(0)\}$$

- $\underline{\underline{a}}$ désigne un tenseur d'ordre 3 appartenant à $\mathbb{R}^{4NC} \otimes \mathbb{R}^{8NC+4} \otimes \mathbb{R}^{4NC+2}$.
- le vecteur $\left\{ \begin{array}{c} \Phi^*(0) \\ \Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^{8NC+4}$. Ses $4NC + 2$ premières composantes étant données par les composantes de $\Phi^*(0)$, et les $4NC + 2$ dernières composantes données par celles de $\Phi^{*'}(0)$.
- le vecteur $(\Phi^*(0) - \Phi^d) \in \mathbb{R}^{4NC+2}$ où Φ^d a été défini précédemment.

Le terme portant sur f_2 dans l'écriture de la stationnarité de \tilde{J} par rapport à \mathbf{S}^* est donné par 6.7. Compte-tenu de la forme 6.17 de f_2 , cette condition se réécrit au point recherché (Φ, \mathbf{S}) sous la forme du système non-linéaire :

$$\boxed{\left[\underline{\underline{a}} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Phi(0) \\ \Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \right] \cdot (\Phi(0) - \Phi^d) = \{0\} \in \mathbb{R}^{4NC}} \quad (6.19)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\underline{\underline{a}} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Phi(0) \\ \Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \right] \in \mathbb{R}^{4NC} \otimes \mathbb{R}^{4NC+2} \\ (\Phi(0) - \Phi^d) \in \mathbb{R}^{4NC+2} \end{array} \right.$$

Ce système présente donc une indétermination de rang 2 qui traduit pour l'instant l'incapacité du modèle à imposer la condition $\Phi(0) = \Phi^d$ pour l'ensemble des $4NC + 2$ transformations généralisées en $X_1 = 0$. Deux remarques peuvent être formulées :

- Le vecteur $\Phi(0) \in \mathbb{R}^{4NC+2}$ vérifiant :

$$\Phi(0) = \Phi^d \in \mathbb{R}^{4NC+2}$$

est bien entendu une solution de 6.19.

• La taille du système non-linéaire 6.19 est conditionnée par le degré du développement retenu pour l'approximation réalisée sur S_a^c . En augmentant par exemple ces développements jusqu'en Q_2^c la matrice du système non linéaire devient telle que :

$$\left[\underset{\equiv}{a} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \end{array} \right\} \right] \in \mathbb{R}^{6NC} \otimes \mathbb{R}^{4NC+2}$$

Le système présente donc $6NC$ équations pour $(4NC + 2)$ inconnues. Mais la encore, $(\Phi(0) - \Phi^d) = \{0\} \in \mathbb{R}^{4NC+2}$ est une solution.

6.3 Stationnarité par rapport à la cinématique généralisée

6.3.1 Forme générale des équations de stationnarité

La variation de \tilde{J} dans la direction $\delta\Phi \in (C^1([0, L]))^{6NC}$ calculée au point $(\hat{\Phi}, S)$ appartenant à $(C^1([0, L]))^{2(NC+1)} \times (C^1([0, L]))^{6NC}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} D_{\Phi^*} \tilde{J}(\Phi, S) [\delta\Phi] &= \int_{[0, L]} \left[\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \cdot \frac{d\hat{\Phi}^{*'}}{d\Phi^{*'}} \delta\Phi' dX_1 + \frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^*} \cdot \frac{d\hat{\Phi}^*}{d\Phi^*} \delta\Phi \right] dX_1 \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\Phi}^*(L)} (\hat{\Phi}(L)) \cdot \frac{d\hat{\Phi}^*(L)}{d\Phi^*(L)} \delta\Phi(L) \\ &= \int_{[0, L]} \left\{ -\frac{d}{dX_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \cdot \frac{d\hat{\Phi}^{*'}}{d\Phi^{*'}} \right) + \frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^*} \cdot \frac{d\hat{\Phi}^*}{d\Phi^*} \right\}_{|(\Phi, S)} \cdot \delta\Phi dX_1 \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \cdot \frac{d\hat{\Phi}^{*'}}{d\Phi^{*'}} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\Phi}^*(L)} \cdot \frac{d\hat{\Phi}^*(L)}{d\Phi^*(L)} \right]_{|X_1=L} \delta\Phi(L) \\ &\quad + \left[- \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \cdot \frac{d\hat{\Phi}^{*'}}{d\Phi^{*'}} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{\Phi}^*(0)} \cdot \frac{d\hat{\Phi}^*(0)}{d\Phi^*(0)} \right]_{|X_1=0} \delta\Phi(0) \end{aligned}$$

Les conditions de stationnarité de \tilde{J} par rapport à ϕ^* entraînent donc que le point $(\hat{\Phi} = L \cdot \Phi, S)$ doit vérifier les trois relations suivantes :

$$\left[-\frac{d}{dX_1} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \cdot d\hat{\Phi}^{*'} \right) + \frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^*} \cdot d\hat{\Phi}^* \right] (\hat{\Phi}', \hat{\Phi}, S, X_1) = \mathbf{0} \quad \text{sur } [0, L] \quad (6.20)$$

$$\left[\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \cdot d\hat{\Phi}^{*'} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\Phi}^*(L)} \cdot d\hat{\Phi}^*(L) \right]_{|X_1=L} = \mathbf{0} \quad (6.21)$$

$$\left[-\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \cdot d\hat{\Phi}^{*'} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{\Phi}^*(0)} \cdot d\hat{\Phi}^*(0) \right]_{|X_1=0} = \mathbf{0} \quad (6.22)$$

où $\mathbf{0}$ désigne l'application linéaire nulle de \mathbb{R}^{4NC+2} dans \mathbb{R} . Or l'application L étant linéaire, l'opérateur :

$$\frac{d\hat{\Phi}^*}{d\Phi^*} \equiv \frac{d\hat{\Phi}^{*'}}{d\Phi^{*'}} \equiv L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{6NC}, \mathbb{R}^{4NC+2})$$

est constant.

Les équations 6.20 s'écrivent donc :

$$\left[-\frac{d}{dX_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \right) + \frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^*} \right] (\hat{\Phi}', \hat{\Phi}, S, X_1) \cdot L = \mathbf{0} \quad \text{sur } [0, L]$$

Elles sont donc obtenues par des combinaisons linéaires des termes :

$$\boxed{\left[-\frac{d}{dX_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \right) + \frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^*} \right] (\hat{\Phi}', \hat{\Phi}, S, X_1)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{6NC}; \mathbb{R}) \quad (6.23)$$

De même les équations 6.21 s'écrivent :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\Phi}^*(L)} \right]_{|X_1=L} \cdot L = \mathbf{0}$$

et sont donc obtenues par combinaisons linéaires des termes :

$$\boxed{\left[\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{\Phi}^*(L)} \right]_{|X_1=L}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{6NC}; \mathbb{R}) \quad (6.24)$$

Et enfin on a encore 6.22 qui s'écrivent :

$$\left[-\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{\Phi}^*(0)} \right]_{|X_1=0} \cdot L = \mathbf{0} \quad (6.25)$$

Elles sont donc obtenues par combinaisons linéaires des termes :

$$\boxed{\left[-\left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial \hat{\Phi}^*(0)} \right]_{|X_1=0}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{6NC}; \mathbb{R}) \quad (6.26)$$

Nous allons dans un premier temps mettre en évidence les termes 6.23, 6.24 et 6.26. Nous préciserons dans un second temps pour chaque transformation généralisée la nature de la combinaison linéaire à réaliser sur les termes précédents afin d'obtenir les équations de stationnarité par rapport à cette transformation généralisée. Notons que ces dernières seront exprimées sous une forme plus compacte à l'aide du vecteur $\hat{\Phi}$.

Remarque sur le terme f_2

Le traitement des conditions aux limites en transformation, nous a conduit à écrire le terme f_2 sous la forme 6.17. On s'intéresse ici à sa variation par rapport à $\Phi^*(0) \in \mathbb{R}^{4NC+2}$ calculée au point $(\Phi(0), \mathcal{S}(0))$.

Cette variation s'écrit :

$$D_{,\Phi^*(0)} f_2 [\delta\Phi(0)] = \mathcal{S}_1 \cdot \left[\underline{a} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Phi^*(0) \\ \Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \right] \cdot \delta\Phi + \mathcal{S}_1 \cdot \left[\underline{a} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \delta\Phi^*(0) \\ \delta\Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \right] \cdot (\Phi^*(0) - \Phi^d)$$

La condition de stationnarité 6.22 en $X_1 = 0$ possède alors l'expression suivante :

$$\underbrace{\left[- \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \right) + \mathcal{S}_1 \cdot \left(\underline{a} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Phi^*(0) \\ \Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \right) \right]}_{(i)} \cdot \delta\Phi(0) + \mathcal{S}_1 \cdot \left[\underline{a} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \delta\Phi^*(0) \\ \delta\Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \right] \cdot (\Phi^*(0) - \Phi^d) = 0$$

$$\forall (\delta\Phi(0), \delta\Phi'(0)) \in \mathbb{R}^{4NC+2} \times \mathbb{R}^{4NC+2} \quad (6.27)$$

Elle fait apparaître un terme noté (i) qui appelle le commentaire suivant :

D'après la définition 6.2 de F le terme : $\left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \right)_{|X_1=0}$ est issu de l'intégration par partie du terme :

$$\int_0^L \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{S}_a^c : \delta \underline{E}_a^c dX_3 dX_1 = \int_0^L \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{P}_a^c : \delta \underline{F}_a^{cT} dX_3 dX_1$$

qui fait apparaître :

$$\int_0^L \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \left[\underline{P}_a^c \cdot \delta \underline{\phi}_a^c \right]_{,1} dX_3 dX_1$$

On a donc

$$- \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{\Phi}^{*'}} \right)_{|X_1=0} = - \left[\sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \left(\underline{P}_a^c \cdot \underline{E}_1 \right) \cdot \delta \underline{\phi}_a^c dX_3 \right]_{|X_1=0}$$

Mais la définition 6.4 de f_2 est équivalente à :

$$f_2 = - \left[\sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \left[\underline{P}_a^c \cdot (-\underline{E}_1) \right] \cdot \left(\underline{\phi}_a^c - \underline{\phi}^d \right) dX_3 \right]_{|X_1=0}$$

En écrivant la variation de f_2 au point (Φ, \mathcal{S}) dans la direction $\delta\Phi$, on fait apparaître deux termes. La variation sur $\underline{\phi}$ porte à la fois :

– sur le terme $(\underline{\phi}^c - \underline{\phi}^d)$ et conduit précisément après réécriture du terme à l'expression :

$$S_1 \cdot \left(\underline{a} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \end{array} \right\} \right) \cdot \delta\Phi(0)$$

– sur le terme \underline{P}_a^c et conduit après réécriture au terme :

$$S_1 \cdot \left[\underline{a} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \delta\Phi(0) \\ \delta\Phi'(0) \end{array} \right\} \right] \cdot (\Phi^*(0) - \Phi^d)$$

On en déduit donc que le terme (i) est nul.

L'équation 6.27 se restreint donc à :

$$S_1 \cdot \left[\underline{a} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \delta\Phi^*(0) \\ \delta\Phi^{*'}(0) \end{array} \right\} \right] \cdot (\Phi^*(0) - \Phi^d) = 0 \quad (6.28)$$

$$\forall (\delta\Phi(0), \delta\Phi'(0)) \in \mathbb{R}^{4NC+2} \times \mathbb{R}^{4NC+2}$$

Conclusion : Les relations 6.19 et 6.28 provenant de l'écriture au point (Φ, S) de la stationnarité de \tilde{J} par rapport à S^* et par rapport à Φ^* en $X_1 = 0$ imposent donc $(12NC + 4)$ conditions non linéaires reliant $(\Phi(0) - \Phi^d) \in \mathbb{R}^{4NC+2}$, S_1 et $\Phi'(0)$.

Il semble difficile de démontrer rigoureusement que l'ensemble de ces conditions imposent

$$\Phi(0) = \Phi^d \quad (6.29)$$

Notons cependant qu'un Φ vérifiant 6.29 est bien une solution de l'ensemble des équations 6.19 et 6.28. On peut raisonnablement envisager que d'éventuels cas contraires soient pathologiques. C'est pourquoi, nous admettrons donc dans toute la suite que l'ensemble des équations de stationnarité écrites en $X_1 = 0$ conduisent à la relation 6.29.

6.3.2 Expressions des termes 6.23, 6.24

Pour la composante $\underline{\phi}_0^c$ de $\hat{\Phi}$, $\forall c \in [1, NC]$

– Le terme 6.23 s'écrit donc :

$$E_p^c \frac{d}{dX_1} \left\{ \underline{S}_0^c : \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i} + \frac{1}{12} \underline{S}_1^c : \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i} \right\} \quad (6.30)$$

– Le terme 6.24 en $X_1 = L$ s'écrit :

$$E_p^c \left\{ \underline{S}_0^c : \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i} + \frac{1}{12} \underline{S}_1^c : \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i} \right\} \Big|_{X_1=L} - E_p^c T_i^d \quad (6.31)$$

Les expressions 8.2 et 5.35 permettent de calculer les quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i} = \frac{1}{2} \left\{ 2 (\underline{\phi}_0^c)_i \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 + \frac{1}{E_p^c} (\underline{\phi}_1^c)_i [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] \right\} \\ \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i} = \frac{1}{2} \left\{ 2 (\underline{\phi}_1^c)_i \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 - \frac{12}{E_p^c} (\underline{\phi}_2^c)_i [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] \right\} \\ \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i} = 0 \\ \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i} = 0 \end{array} \right.$$

Le terme 6.30 a donc pour expression :

$$\boxed{E_p^c \frac{d}{dX_1} \left\{ (\underline{S}_0^c)_{11} (\underline{\phi}_0^c)_i + \frac{1}{E_p^c} (\underline{S}_0^c)_{13} (\underline{\phi}_1^c)_i + \frac{1}{12} \left[(\underline{S}_1^c)_{11} (\underline{\phi}_1^c)_i - \frac{12}{E_p^c} (\underline{S}_1^c)_{13} (\underline{\phi}_2^c)_i \right] \right\}} \quad (6.32)$$

Le terme 6.31 a donc pour expression :

$$\boxed{E_p^c \left\{ (\underline{S}_0^c)_{11} (\underline{\phi}_0^c)_i + \frac{1}{E_p^c} (\underline{S}_0^c)_{13} (\underline{\phi}_1^c)_i + \frac{1}{12} \left[(\underline{S}_1^c)_{11} (\underline{\phi}_1^c)_i - \frac{12}{E_p^c} (\underline{S}_1^c)_{13} (\underline{\phi}_2^c)_i \right] \right\} \Big|_{X_1=L} - E_p^c T_i^d} \quad (6.33)$$

Nous nommerons $(\Gamma_0)^c$ l'ensemble des termes 6.32, 6.33 écrits sur la couche c .

Pour la composante $\underline{\phi}_1^c$ de $\hat{\Phi}$, $\forall c \in [1, NC]$

- Le terme 6.23 pour la composante $(\underline{\phi}_1^c)_i$ s'écrit :

$$-E_p^c \frac{d}{dX_1} \left\{ \underline{S}_0^c : \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i} + \frac{1}{12} \underline{S}_1^c : \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i} \right\} + E_p^c \underline{S}_0^c : \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i} + \frac{E_p^c}{12} \underline{S}_1^c : \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i} \quad (6.34)$$

- Le terme 6.24 s'écrit :

$$E_p^c \left[\underline{S}_0^c : \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\phi_{-1}^{c'})_i} + \frac{1}{12} \underline{S}_{-1}^c : \frac{\partial \underline{E}_{-1}^c}{\partial (\phi_{-1}^{c'})_i} \right]_{|X_1=L} \quad (6.35)$$

Les expressions 8.2 et 5.35 permettent de calculer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\phi_{-1}^{c'})_i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} (\phi_{-1}^{c'})_i \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 - \frac{1}{E_p^c} (\phi_2^c)_i [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] \right\} \\ \frac{\partial \underline{E}_{-1}^c}{\partial (\phi_{-1}^{c'})_i} = \frac{1}{2} \left\{ \left[2 (\phi_0^{c'})_i - \frac{4}{5} (\phi_2^{c'})_i \right] \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 + \frac{1}{E_p^c} (\phi_{-1}^c)_i [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] \right\} \\ \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\phi_{-1}^c)_i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{E_p^c} (\phi_0^{c'})_i [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] + \frac{1}{(E_p^c)^2} 2 (\phi_{-1}^c)_i \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3 \right\} \\ \frac{\partial \underline{E}_{-1}^c}{\partial (\phi_{-1}^c)_i} = \frac{1}{2} \frac{1}{E_p^c} (\phi_{-1}^{c'})_i [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] - \frac{12}{(E_p^c)^2} (\phi_2^c)_i \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3 \end{array} \right.$$

Le terme 6.34 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & -E_p^c \frac{d}{dX_1} \left\{ \left[(\underline{S}_0^c)_{11} \frac{1}{12} (\phi_{-1}^{c'})_i - \frac{1}{E_p^c} (\underline{S}_0^c)_{13} (\phi_2^c)_i \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{12} \left[(\underline{S}_{-1}^c)_{11} \left[(\phi_0^{c'})_i - \frac{2}{5} (\phi_2^{c'})_i \right] + \frac{1}{E_p^c} (\phi_{-1}^c)_i (\underline{S}_{-1}^c)_{13} \right] \right\} \\ & + (\underline{S}_0^c)_{13} (\phi_0^{c'})_i + \frac{1}{E_p^c} (\underline{S}_0^c)_{33} (\phi_{-1}^c)_i \\ & + \frac{1}{12} (\underline{S}_{-1}^c)_{13} (\phi_{-1}^{c'})_i - \frac{1}{E_p^c} (\underline{S}_{-1}^c)_{33} (\phi_2^c)_i \end{aligned} \quad (6.36)$$

Le terme 6.35 s'écrit :

$$\begin{aligned} & E_p^c \left\{ \left[(\underline{S}_0^c)_{11} \frac{1}{12} (\phi_{-1}^{c'})_i - \frac{1}{E_p^c} (\underline{S}_0^c)_{13} (\phi_2^c)_i \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{12} \left[(\underline{S}_{-1}^c)_{11} \left[(\phi_0^{c'})_i - \frac{2}{5} (\phi_2^{c'})_i \right] + \frac{1}{E_p^c} (\phi_{-1}^c)_i (\underline{S}_{-1}^c)_{13} \right] \right\}_{|X_1=L} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Nous nommerons $(\Gamma_1^c)^c$ l'ensemble des termes 6.36 et 6.37 écrits sur la couche c .

Pour la composante $\underline{\phi}_2^c$ de $\hat{\Phi}$, $\forall c \in [1, NC]$

– Pour la composante $(\underline{\phi}_2^c)_i$ le terme 6.23 s'écrit :

$$-E_p^c \frac{d}{dX_1} \left\{ \underline{S}_0^c : \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} + \frac{1}{12} \underline{S}_1^c : \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} \right\} + E_p^c \underline{S}_0^c : \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} + \frac{E_p^c}{12} \underline{S}_1^c : \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} \quad (6.38)$$

– De même 6.21 s'écrit :

$$E_p^c \left[\underline{S}_0^c : \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} + \frac{1}{12} \underline{S}_1^c : \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} \right]_{X_1=L} \quad (6.39)$$

Les expressions 8.2 et 5.35 permettent de calculer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} = \frac{1}{5} (\underline{\phi}_2^c)_i \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 \\ \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} = -\frac{2}{5} (\underline{\phi}_1^c)_i \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 + \frac{12}{5} \frac{1}{E_p^c} (\underline{\phi}_2^c)_i [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] \\ \frac{\partial \underline{E}_0^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} = -\frac{1}{2} \frac{1}{E_p^c} (\underline{\phi}_1^c)_i [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] + \frac{12}{(E_p^c)^2} (\underline{\phi}_2^c)_i \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3 \\ \frac{\partial \underline{E}_1^c}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} = \frac{1}{2} \frac{1}{E_p^c} \left[-12 (\underline{\phi}_0^c)_i + \frac{24}{5} (\underline{\phi}_2^c)_i \right] [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] \\ \quad - \frac{12}{(E_p^c)^2} (\underline{\phi}_1^c)_i \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_3 \end{array} \right.$$

Le terme 6.38 a donc pour expression :

$$\begin{aligned} & -E_p^c \frac{d}{dX_1} \left\{ \frac{1}{5} (\underline{S}_0^c)_{11} (\underline{\phi}_2^c)_i + \frac{1}{12} \left[-\frac{2}{5} (\underline{S}_1^c)_{11} (\underline{\phi}_1^c)_i + \frac{24}{5} \frac{1}{E_p^c} (\underline{S}_1^c)_{13} (\underline{\phi}_2^c)_i \right] \right\} \\ & - (\underline{S}_0^c)_{13} (\underline{\phi}_1^c)_i + \frac{12}{E_p^c} (\underline{S}_0^c)_{33} (\underline{\phi}_2^c)_i \\ & + \frac{1}{12} \left[(\underline{S}_1^c)_{13} \left(-12 (\underline{\phi}_0^c)_i + \frac{24}{5} (\underline{\phi}_2^c)_i \right) - \frac{12}{E_p^c} (\underline{S}_1^c)_{33} (\underline{\phi}_1^c)_i \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

Le terme 6.39 a donc pour expression :

$$E_p^c \left\{ \frac{1}{5} (\underline{S}_0^c)_{11} (\underline{\phi}_2^{c'})_i + \frac{1}{12} \left[-\frac{2}{5} (\underline{S}_1^c)_{11} (\underline{\phi}_1^{c'})_i + \frac{24}{5} \frac{1}{E_p^c} (\underline{S}_1^c)_{13} (\underline{\phi}_2^c)_i \right] \right\} \Big|_{x_1=L} \quad (6.41)$$

Nous nommerons $(\Gamma_2)^c$ l'ensemble des termes 6.40 et 6.41 écrits sur la couche c .

6.3.3 Stationnarité par rapport aux transformations généralisées

Stationnarité par rapport à $\bar{\phi}^c$

D'après 5.19 et 5.21 on a :

$$\begin{cases} \underline{\phi}_0^c = \bar{\phi}^c \\ \underline{\phi}_2^c = \bar{\phi}^c - \frac{\underline{\phi}^{c,c+1} + \underline{\phi}^{c-1,c}}{2} \end{cases}$$

La relation 6.20 s'écrit donc pour la composante $\bar{\phi}_i^c$:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\phi}_i^c} = \frac{\partial F}{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i} \frac{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i}{\partial \bar{\phi}_i^c} + \frac{\partial F}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} \frac{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i}{\partial \bar{\phi}_i^c}$$

avec par dérivation de 5.19 et 5.21

$$\begin{cases} \frac{\partial (\underline{\phi}_0^{c'})_i}{\partial \bar{\phi}_i^{c'}} = \frac{\partial (\underline{\phi}_0^c)_i}{\partial \bar{\phi}_i^c} = 1 \\ \frac{\partial (\underline{\phi}_2^{c'})_i}{\partial \bar{\phi}_i^{c'}} = \frac{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i}{\partial \bar{\phi}_i^c} = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des équations de stationnarité de \bar{J} par rapport à la composante $\bar{\phi}^c$, $\forall i = \{1, 3\}$ et $\forall c \in [1, NC]$, est obtenue en sommant les deux termes $(\Gamma_0)^c$ et $(\Gamma_2)^c$:

$$\boxed{(\Gamma_0)^c + (\Gamma_2)^c} = 0$$

En appliquant cette combinaison linéaire :

– aux équations 6.32 et 6.40, on obtient les deux premières équations d'équilibre du modèle

par couche, soient $2NC$ équations d'équilibre pour la structure :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dX_1} \left\{ \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} \left[\frac{1}{5} \left(\underline{\phi}_2^{c'} \right)_i + \left(\underline{\phi}_0^{c'} \right)_i \right] + \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_1^c \right)_i \right. \\
 & \left. + \left[\frac{1}{20} \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_1^{c'} \right)_i - \frac{3}{5} \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_i \right] \right\} \\
 & - \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_1^{c'} \right)_i + \frac{12}{\left(E_p^c \right)^2} \left(\underline{S}_0^c \right)_{33} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_i \\
 & + \left[\frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \left[- \left(\underline{\phi}_0^{c'} \right)_i + \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_2^{c'} \right)_i \right] - \frac{1}{\left(E_p^c \right)^2} \left(\underline{S}_1^c \right)_{33} \left(\underline{\phi}_1^c \right)_i \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

– aux équations 6.33 et 6.41, on obtient les équations de conditions aux limites en efforts en $X_1 = L$:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_0^{c'} \right)_i + \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_1^c \right)_i + \frac{1}{12} \left[\left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_1^{c'} \right)_i - \frac{12}{E_p^c} \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_i \right] \right\}_{|X_1=L} \\
 & + \left\{ \frac{1}{5} \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_2^{c'} \right)_i + \frac{1}{12} \left[-\frac{2}{5} \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_1^{c'} \right)_i + \frac{24}{5} \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_i \right] \right\}_{|X_1=L} = T_i^d
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Stationnarité par rapport à $\underline{\phi}^{c,c+1} \forall c \in [1, NC - 1]$

$\forall i = \{1, 3\}$ et $\forall c \in [1, NC - 1]$, on a d'après 5.20 et 5.21 :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \left(\underline{\phi}_1^c \right)_i &= \phi_i^{c,c+1} - \phi_i^{c-1,c} \\
 \left(\underline{\phi}_2^c \right)_i &= \bar{\phi}_i^c - \frac{\phi_i^{c,c+1} + \phi_i^{c-1,c}}{2} \\
 \left(\underline{\phi}_1^{c+1} \right)_i &= \phi_i^{c+1,c+2} - \phi_i^{c,c+1} \\
 \left(\underline{\phi}_2^{c+1} \right)_i &= \bar{\phi}_i^{c+1} - \frac{\phi_i^{c+1,c+2} + \phi_i^{c,c+1}}{2}
 \end{aligned} \right.$$

ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \phi_i^{c,c+1}} = \frac{\partial F}{\partial (\underline{\phi}_1^{c+1})_i} \frac{\partial (\underline{\phi}_1^{c+1})_i}{\partial \phi_i^{c,c+1}} + \frac{\partial F}{\partial (\underline{\phi}_2^{c+1})_i} \frac{\partial (\underline{\phi}_2^{c+1})_i}{\partial \phi_i^{c,c+1}} \\ \quad + \frac{\partial F}{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i} \frac{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i}{\partial \phi_i^{c,c+1}} + \frac{\partial F}{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i} \frac{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i}{\partial \phi_i^{c,c+1}} \end{array} \right.$$

avec par dérivation de 5.20 et 5.21 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\underline{\phi}_1^{c+1})_i}{\partial \phi_i^{c,c+1}} &= -\frac{\partial (\underline{\phi}_1^c)_i}{\partial \phi_i^{c,c+1}} = -1 \\ \frac{\partial (\underline{\phi}_2^{c+1})_i}{\partial \phi_i^{c,c+1}} &= \frac{\partial (\underline{\phi}_2^c)_i}{\partial \phi_i^{c,c+1}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des équations de stationnarité de \tilde{J} par rapport à la composante $\phi_i^{c,c+1}$, $\forall i = \{1, 3\}$ et $c \in [1, NC - 1]$ est donné par la combinaison linéaire :

$$\boxed{-\left[(\Gamma_1)^{c+1} + \frac{1}{2} (\Gamma_2)^{c+1} \right] + \left[(\Gamma_1)^c - \frac{1}{2} (\Gamma_2)^c \right] = 0}$$

Cette combinaison linéaire appliquée :

- aux équations 6.36 et 6.40 conduit donc à 2 nouvelles équations d'équilibre pour chaque interface, soient $2(NC - 1)$ équations d'équilibre supplémentaires pour l'ensemble de la structure. Leurs expressions sont données ci-après en 6.44.

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{dX_1} \left\{ -E_p^{c+1} \left(\underline{S}_{\underline{0}}^{c+1} \right)_{11} \left[\frac{1}{12} \left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c+1'} \right)_i + \frac{1}{10} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c+1'} \right)_i \right] \right. \\
& + E_p^c \left(\underline{S}_{\underline{0}}^c \right)_{11} \left[\frac{1}{12} \left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c'} \right)_i - \frac{1}{10} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c'} \right)_i \right] + \left(\underline{S}_{\underline{0}}^{c+1} \right)_{13} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c+1} \right)_i - \left(\underline{S}_{\underline{0}}^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^c \right)_i \\
& - \frac{E_p^{c+1}}{12} \left(\underline{S}_{\underline{1}}^{c+1} \right)_{11} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{0}}^{c+1'} \right)_i - \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c+1'} \right)_i - \frac{1}{5} \left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c+1'} \right)_i \right] \\
& + \frac{E_p^c}{12} \left(\underline{S}_{\underline{1}}^c \right)_{11} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{0}}^{c'} \right)_i - \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c'} \right)_i + \frac{1}{5} \left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c'} \right)_i \right] \\
& - \frac{1}{12} \left(\underline{S}_{\underline{1}}^{c+1} \right)_{13} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c+1} \right)_i + \frac{12}{5} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c+1} \right)_i \right] + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_{\underline{1}}^c \right)_{13} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^c \right)_i - \frac{12}{5} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^c \right)_i \right] \left. \right\} \\
& - \left(\underline{S}_{\underline{0}}^{c+1} \right)_{13} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{0}}^{c+1'} \right)_i - \frac{1}{2} \left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c+1'} \right)_i \right] + \left(\underline{S}_{\underline{0}}^c \right)_{13} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{0}}^{c'} \right)_i + \frac{1}{2} \left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c'} \right)_i \right] \\
& - \frac{1}{E_p^{c+1}} \left(\underline{S}_{\underline{0}}^{c+1} \right)_{33} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c+1} \right)_i + 6 \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c+1} \right)_i \right] + \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_{\underline{0}}^c \right)_{33} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^c \right)_i - 6 \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^c \right)_i \right] \\
& - \frac{1}{12} \left(\underline{S}_{\underline{1}}^{c+1} \right)_{13} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c+1'} \right)_i + 6 \left[- \left(\underline{\phi}_{\underline{0}}^{c+1'} \right)_i + \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c+1'} \right)_i \right] \right] \\
& + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_{\underline{1}}^c \right)_{13} \left[\left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c'} \right)_i - 6 \left[- \left(\underline{\phi}_{\underline{0}}^{c'} \right)_i + \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c'} \right)_i \right] \right] \\
& + \frac{1}{E_p^{c+1}} \left(\underline{S}_{\underline{1}}^{c+1} \right)_{33} \left[- \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^{c+1} \right)_i - \frac{1}{2} \left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^{c+1} \right)_i \right] + \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_{\underline{1}}^c \right)_{33} \left[- \left(\underline{\phi}_{\underline{2}}^c \right)_i + \frac{1}{2} \left(\underline{\phi}_{\underline{1}}^c \right)_i \right] = 0
\end{aligned}$$

(6.44)

– aux équations 6.37 et 6.41 conduit à $2(NC - 1)$ nouvelles équations de conditions aux limites en $X_1 = L$ dont les expressions sont données ci-après en 6.45.

$$\begin{aligned}
& -E_p^{c+1} \left\{ \left[\left(\underline{S}_0^{c+1} \right)_{11} \frac{1}{12} \left(\underline{\phi}_1^{c+1'} \right)_i - \frac{1}{E_p^{c+1}} \left(\underline{S}_0^{c+1} \right)_{13} \left(\underline{\phi}_2^{c+1} \right)_i \right] \right. \\
& + \left. \frac{1}{12} \left[\left(\underline{S}_1^{c+1} \right)_{11} \left[\left(\underline{\phi}_0^{c+1'} \right)_i - \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_2^{c+1'} \right)_i \right] + \frac{1}{E_p^{c+1}} \left(\underline{\phi}_1^{c+1} \right)_i \left(\underline{S}_1^{c+1} \right)_{13} \right] \right\}_{|X_1=L} \\
& -E_p^{c+1} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{5} \left(\underline{S}_0^{c+1} \right)_{11} \left(\underline{\phi}_2^{c+1'} \right)_i \right. \\
& + \left. \frac{1}{12} \left[-\frac{2}{5} \left(\underline{S}_1^{c+1} \right)_{11} \left(\underline{\phi}_1^{c+1'} \right)_i + \frac{24}{5} \frac{1}{E_p^{c+1}} \left(\underline{S}_1^{c+1} \right)_{13} \left(\underline{\phi}_2^{c+1} \right)_i \right] \right\}_{|X_1=L} \\
& + E_p^c \left\{ \left[\left(\underline{S}_0^c \right)_{11} \frac{1}{12} \left(\underline{\phi}_1^{c'} \right)_i - \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_i \right] \right. \\
& + \left. \frac{1}{12} \left[\left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \left[\left(\underline{\phi}_0^{c'} \right)_i - \frac{2}{5} \left(\underline{\phi}_2^{c'} \right)_i \right] + \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{\phi}_1^c \right)_i \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \right] \right\}_{|X_1=L} \\
& -E_p^c \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{5} \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_2^{c'} \right)_i + \frac{1}{12} \left[-\frac{2}{5} \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \left(\underline{\phi}_1^{c'} \right)_i + \frac{24}{5} \frac{1}{E_p^c} \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \left(\underline{\phi}_2^c \right)_i \right] \right\}_{|X_1=L} = 0
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Stationnarité par rapport à $\underline{\phi}^{0,1}$

D'après 5.19 et 5.21 on a :

$$\begin{cases} \underline{\phi}_1^1 &= \underline{\phi}^{1,2} - \underline{\phi}^{0,1} \\ \underline{\phi}_1^2 &= \underline{\phi}^1 - \frac{\underline{\phi}^{1,2} + \underline{\phi}^{0,1}}{2} \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\phi}^{0,1}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\phi}_1^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \underline{\phi}_1^2}$$

On en déduit que l'ensemble des équations de stationnarité de \tilde{J} par rapport à $\underline{\phi}_i^{0,1} \forall i = \{1, 3\}$ est obtenue par la combinaison linéaire suivante :

$$\boxed{(\Gamma_1)^1 + \frac{1}{2} (\Gamma_2)^1 = 0}$$

En appliquant cette combinaison linéaire :

- aux équations 6.36 et 6.40 pour la couche $c = 1$, on obtient 2 équations d'équilibre supplémentaires :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dX_1} \left\{ E_p^1 (\underline{S}_0^1)_{11} \left[\frac{1}{12} (\underline{\phi}_1^1)'_i + \frac{1}{10} (\underline{\phi}_2^1)'_i \right] - (\underline{S}_0^1)_{13} (\underline{\phi}_2^1)_i \right. \\
 & + \frac{E_p^1}{12} (\underline{S}_1^1)_{11} \left((\underline{\phi}_0^1)'_i - \frac{2}{5} (\underline{\phi}_2^1)'_i - \frac{1}{5} (\underline{\phi}_1^1)'_i \right) + (\underline{S}_1^1)_{13} \left[\frac{1}{12} (\underline{\phi}_1^1)'_i + \frac{1}{5} (\underline{\phi}_2^1)'_i \right] \left. \right\} \\
 & + (\underline{S}_0^1)_{13} \left[(\underline{\phi}_0^1)'_i - \frac{1}{2} (\underline{\phi}_1^1)'_i \right] + \frac{1}{E_p^1} (\underline{S}_0^1)_{33} \left[(\underline{\phi}_1^1)'_i + 6 (\underline{\phi}_2^1)'_i \right] \\
 & + \frac{1}{12} (\underline{S}_1^1)_{13} \left[(\underline{\phi}_1^1)'_i + 6 \left[-(\underline{\phi}_0^1)'_i + \frac{2}{5} (\underline{\phi}_2^1)'_i \right] \right] - \frac{1}{E_p^1} (\underline{S}_1^1)_{33} \left[(\underline{\phi}_2^1)'_i + \frac{1}{2} (\underline{\phi}_1^1)'_i \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

- aux équations 6.37 et 6.41 pour la couche $c = 1$, on obtient deux conditions aux limites en $X_1 = L$:

$$\begin{aligned}
 & + E_p^1 \left\{ \left[(\underline{S}_0^1)_{11} \frac{1}{12} (\underline{\phi}_1^1)'_i - \frac{1}{E_p^1} (\underline{S}_0^1)_{13} (\underline{\phi}_2^1)'_i \right] \right. \\
 & + \frac{1}{12} \left[(\underline{S}_1^1)_{11} \left((\underline{\phi}_0^1)'_i - \frac{2}{5} (\underline{\phi}_2^1)'_i \right) + \frac{1}{E_p^1} (\underline{\phi}_1^1)'_i (\underline{S}_1^1)_{13} \right] \left. \right\}_{|X_1=L} \\
 & + E_p^1 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{5} (\underline{S}_0^1)_{11} (\underline{\phi}_2^1)'_i + \frac{1}{12} \left[-\frac{2}{5} (\underline{S}_1^1)_{11} (\underline{\phi}_1^1)'_i + \frac{24}{5} \frac{1}{E_p^1} (\underline{S}_1^1)_{13} (\underline{\phi}_2^1)'_i \right] \right\}_{|X_1=L} \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Stationnarité par rapport à $\underline{\phi}^{NC,NC+1}$

D'après 5.19 et 5.21 on a :

$$\begin{cases} \underline{\phi}_1^{NC} &= \underline{\phi}^{NC,NC+1} - \underline{\phi}^{NC-1,NC} \\ \underline{\phi}_1^2 &= \underline{\phi}^{NC} - \frac{\underline{\phi}^{NC,NC+1} + \underline{\phi}^{NC-1,NC}}{2} \end{cases}$$

D'où par conséquent :

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\phi}^{NC,NC+1}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\phi}_1^{NC}} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \underline{\phi}_1^2}$$

On déduit alors que les équations de stationnarité de \tilde{J} par rapport à $\underline{\phi}_i^{NC,NC+1} \forall i = \{1, 3\}$ sont obtenues par la combinaison linéaire suivante :

$$\boxed{(\Gamma_1)^{NC} - \frac{1}{2} (\Gamma_2)^{NC} = 0}$$

En réalisant la combinaison linéaire précédente :

- sur les relations 6.36 et 6.40 pour $c = NC$, on obtient 2 équations d'équilibre supplémentaires :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dX_1} \left\{ E_p^{NC} (\underline{S}_0^{NC})_{11} \left[\frac{1}{12} (\underline{\phi}_1^{NC'})_i - \frac{1}{10} (\underline{\phi}_2^{NC'})_i \right] - (\underline{S}_0^{NC})_{13} (\underline{\phi}_2^{NC})_i \right. \\
 & + \frac{E_p^{NC}}{12} (\underline{S}_1^{NC})_{11} \left[(\underline{\phi}_0^{NC'})_i - \frac{2}{5} (\underline{\phi}_2^{NC'})_i + \frac{1}{5} (\underline{\phi}_1^{NC'})_i \right] \\
 & + \frac{1}{12} (\underline{S}_1^{NC})_{13} \left[(\underline{\phi}_1^{NC})_i - \frac{12}{5} (\underline{\phi}_2^{NC})_i \right] \left. \right\} \\
 & + (\underline{S}_0^{NC})_{13} \left[(\underline{\phi}_0^{NC'})_i + \frac{1}{2} (\underline{\phi}_1^{NC'})_i \right] + \frac{1}{E_p^{NC}} (\underline{S}_0^{NC})_{33} \left[(\underline{\phi}_1^{NC})_i - 6 (\underline{\phi}_2^{NC})_i \right] \\
 & + \frac{1}{12} (\underline{S}_1^{NC})_{13} \left[(\underline{\phi}_1^{NC'})_i - 6 \left[- (\underline{\phi}_0^{NC'})_i + \frac{2}{5} (\underline{\phi}_2^{NC'})_i \right] \right] \\
 & - \frac{1}{E_p^{NC}} (\underline{S}_1^{NC})_{33} \left[(\underline{\phi}_2^{NC})_i - \frac{1}{2} (\underline{\phi}_1^{NC})_i \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

- sur les relations 6.37 et 6.41 pour $c = NC$, on obtient 2 conditions aux limites supplémentaires en $X_1 = L$ données par :

$$\begin{aligned}
 & E_p^{NC} \left\{ \left[(\underline{S}_0^{NC})_{11} \frac{1}{12} (\underline{\phi}_1^{NC'})_i - \frac{1}{E_p^{NC}} (\underline{S}_0^{NC})_{13} (\underline{\phi}_2^{NC})_i \right] \right. \\
 & + \frac{1}{12} \left[(\underline{S}_1^{NC})_{11} \left[(\underline{\phi}_0^{NC'})_i - \frac{2}{5} (\underline{\phi}_2^{NC'})_i \right] + \frac{1}{E_p^{NC}} (\underline{\phi}_1^{NC})_i (\underline{S}_1^{NC})_{13} \right] \left. \right\}_{|X_1=L} \\
 & - \frac{1}{2} E_p^{NC} \left\{ \frac{1}{5} (\underline{S}_0^{NC})_{11} (\underline{\phi}_2^{NC'})_i \right. \\
 & + \frac{1}{12} \left[-\frac{2}{5} (\underline{S}_1^{NC})_{11} (\underline{\phi}_1^{NC'})_i + \frac{24}{5} \frac{1}{E_p^{NC}} (\underline{S}_1^{NC})_{13} (\underline{\phi}_2^{NC})_i \right] \left. \right\}_{|X_1=L}
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

6.3.4 Remarque sur les conditions aux limites en efforts

Nous nous sommes restreint, afin de simplifier la présentation précédente, au cas de conditions aux limites en efforts imposés de type densité uniforme le long de $X_1 = L$.

Nous avons vu que l'approximation réalisée sur \underline{S} pose un problème au niveau des conditions aux limites en transformation imposée. On doit maintenant envisager un cas de chargement imposé plus général que la densité uniforme afin de mesurer l'influence de l'approximation de \underline{S} sur ce type de conditions aux limites.

Le terme d'effort imposé a été noté f_1 . Dans le cas général d'une densité d'efforts imposés non uniforme, l'expression de f_1 est donnée par :

$$\begin{aligned}
-f_1(\Phi) = & \sum_{c=1}^{NC} \left[\left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d Q_0^c dX_3 \right) + \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d Q_2^c dX_3 \right) \right] \cdot \underline{\phi}^c \\
& + \sum_{c=1}^{NC-1} \left[- \left(\int_{H_-^{c+1}}^{H_+^{c+1}} \underline{T}^d Q_1^{c+1} dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^{c+1}}^{H_+^{c+1}} \underline{T}^d Q_2^{c+1} dX_3 \right) \right. \\
& \left. + \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d Q_1^c dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d Q_2^c dX_3 \right) \right] \cdot \underline{\phi}^{c,c+1} \\
& \left[- \left(\int_{H_-^1}^{H_+^1} \underline{T}^d Q_1^1 dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^1}^{H_+^1} \underline{T}^d Q_2^1 dX_3 \right) \right] \cdot \underline{\phi}^{0,1} \\
& \left[\left(\int_{H_-^{NC}}^{H_+^{NC}} \underline{T}^d Q_1^{NC} dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^{NC}}^{H_+^{NC}} \underline{T}^d Q_2^{NC} dX_3 \right) \right] \cdot \underline{\phi}^{NC,NC+1}
\end{aligned}$$

où on peut identifier :

- $\underline{T}^{cd} = \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d Q_0^c dX_3 \right)$ un effort moyen sur l'épaisseur de la couche c .
- $\underline{M}^{cd} = \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d Q_1^c dX_3 \right)$ un moment moyen sur l'épaisseur de la couche c .
- $\underline{G}^{cd} = \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{T}^d Q_2^c dX_3 \right)$ un effort que nous baptiserons le "gauchissement moyen sur l'épaisseur de la couche c ".

La condition aux limites en $X_1 = L$ est de la forme :

$$[\mathcal{Q}] \cdot \{\mathcal{S}_1\} = \{F^d\}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
[\mathcal{Q}] = [\mathcal{Q}](\Phi'(L), \Phi(L)) \in \mathbb{R}^{4NC+2} \times \mathbb{R}^{4NC} \\
\{\mathcal{S}_1\} \in \mathbb{R}^{4NC} \text{ défini dans la sous-section 6.2.4} \\
\{F^d\} \in \mathbb{R}^{4NC+2} \text{ fonction de } \underline{T}^{cd}, \underline{M}^{cd}, \underline{G}^{cd} \quad \forall c \in [1, NC]
\end{array} \right.$$

L'approximation en contraintes choisie ne permet pas ici non plus de récupérer l'ensemble des efforts imposés. La solution, tout comme dans le cas des conditions aux limites en transformations serait d'augmenter le degré en X_3 des développements de \underline{S}^c .

6.4 Commentaire sur la forme des équations d'équilibre du modèle

6.4.1 Rappels

La méthode proposée consiste à faire porter les approximations retenues à la fois sur \underline{S} et $\underline{\phi}$. On approxime donc par définition, la restriction de \underline{P} sur chaque couche par un développement sur \mathcal{B}^c jusqu'en $Q_3^c(X_3)$ que l'on note \underline{P}_a^c . Mais rappelons que :

- D'une part nous nous n'imposons pas à \underline{P}_a^c de vérifier l'équation :

$$\text{Div } \underline{P}_a^c(\underline{X}) = \underline{0} \quad \forall \underline{X} \in \Sigma_0^c, \forall c \in [1, NC] \quad (6.50)$$

- Et d'autre part, nous n'imposons pas non plus à \underline{P}_a^c d'assurer la continuité du vecteur contrainte sur chaque interface qui s'écrit :

$$\left[\underline{P}_{|H_-^{c+1}}^{c+1} - \underline{P}_{|H_+^c}^c \right] \cdot \underline{E}_3 = 0 \quad \forall c \in [1, NC - 1] \quad (6.51)$$

Les expressions des équations 6.50 et 6.51 ont été établies au chapitre précédent. L'objet de cette section est maintenant de faire le lien entre les équations d'équilibre du modèle proposé qui viennent d'être établies et ces relations.

6.4.2 Variation de l'énergie de déformation par rapport à la transformation $\underline{\phi}^* \in \mathbf{sE}_{\underline{\phi}}$

Les espaces $\mathbf{E}_{\underline{\phi}}$ et $\mathbf{E}_{\underline{S}}$ ont été définis respectivement en 4.15 et 4.16. Considérons alors la fonctionnelle mixte $J(\underline{\phi}^*, \underline{S}^*)$ avec $(\underline{\phi}^*, \underline{S}^*) \in \mathbf{E}_{\underline{\phi}} \times \mathbf{E}_{\underline{S}}$ sous sa forme 5.68.

Les équations d'équilibre en un point $(\underline{\phi}, \underline{S}) \in \mathbf{E}_{\underline{\phi}} \times \mathbf{E}_{\underline{S}}$ sont obtenues en annulant le cofacteur de $\delta \underline{\phi}$ dans l'intégrale sur \mathcal{S}_0 provenant du terme

$$D_{,\underline{\phi}^*} J_2(\underline{\phi}, \underline{S}) [\delta \underline{\phi}]$$

Or, on a l'égalité (voir annexe 2) :

$$\int_{[0,L]} \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{S}^c \cdot \delta \underline{E}^c dX_3 dX_1 = \int_{[0,L]} \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{P}^c : \delta \underline{\nabla} \underline{\phi}^{cT} dX_3 dX_1$$

Les équations d'équilibre sont donc également obtenues en annulant le cofacteur de $\delta \underline{\phi}$ dans l'intégrale sur \mathcal{S}_0 provenant du terme :

$$\int_{[0,L]} \sum_{c=1}^{NC} \int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{P}^c : \delta \underline{\nabla} \underline{\phi}^{cT} dX_3 dX_1 = \delta W \quad (6.52)$$

où

- $(\underline{\phi}, \underline{P}) \in \mathbf{E}_{\underline{\phi}} \times \mathbf{E}_{\underline{P}}$ avec $\mathbf{E}_{\underline{P}}$ défini en 2.26.
- δW représente donc la variation par rapport à la transformation de l'énergie de déformation.

Formes des équations d'équilibre obtenue en un point $(\underline{\phi}, \underline{P}) \in \mathbf{sE}_{\underline{\phi}} \times \mathbf{E}_P$.

Recherchons dans un premier temps, les formes des équations d'équilibre obtenues en un point $(\underline{\phi}, \underline{P}) \in \mathbf{sE}_{\underline{\phi}} \times \mathbf{E}_P$. Il s'agit donc d'intégrer par partie le terme 6.52 dans lequel par définition de $\mathbf{sE}_{\underline{\phi}}$ on a $\forall c \in [1, NC]$:

$$\begin{aligned} \delta \underline{\phi}^c(X_1, X_3) &= \delta \bar{\underline{\phi}}(X_1) Q_0^c + (\delta \underline{\phi}^{c,c+1} - \delta \underline{\phi}^{c-1,c})(X_1) Q_1^c(X_3) \\ &\quad + \left(\delta \bar{\underline{\phi}} - \frac{\delta \underline{\phi}^{c,c+1} + \delta \underline{\phi}^{c-1,c}}{2} \right) (X_1) Q_2^c(X_3) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{[0,L]} \sum_{c=1}^{NC} \left[\left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{Div} \underline{P}^c dX_3 \right) + \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{Div} \underline{P}^c Q_1^c dX_3 \right) \right] \cdot \delta \bar{\underline{\phi}}^c \\ &\quad \sum_{c=1}^{NC-1} \left\{ \left[- \left(\int_{H_-^{c+1}}^{H_+^{c+1}} \underline{Div} \underline{P}^{c+1} Q_1^{c+1} dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^{c+1}}^{H_+^{c+1}} \underline{Div} \underline{P}^{c+1} Q_2^{c+1} dX_3 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{Div} \underline{P}^c Q_1^c dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{Div} \underline{P}^c Q_2^c dX_3 \right) \right] \\ &\quad - \left[\underline{P}_{H_-^{c+1}}^{c+1} - \underline{P}_{H_+^c}^c \right] \cdot \underline{E}_3 \} \cdot \delta \underline{\phi}^{c,c+1} \\ &\quad \left[- \left(\int_{H_-^1}^{H_+^1} \underline{Div} \underline{P}^1 Q_1^1 dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^1}^{H_+^1} \underline{Div} \underline{P}^1 Q_2^1 dX_3 \right) \right] \cdot \delta \underline{\phi}^{0,1} \\ &\quad \left[\left(\int_{H_-^{NC}}^{H_+^{NC}} \underline{Div} \underline{P}^{NC} Q_1^{NC} dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^{NC}}^{H_+^{NC}} \underline{Div} \underline{P}^{NC} Q_2^{NC} dX_3 \right) \right] \cdot \delta \underline{\phi}^{NC,NC+1} dX_1 \end{aligned}$$

On déduit alors les expressions suivantes des équations d'équilibres pour $\underline{P} \in \mathbf{E}_{\underline{P}}$:

- $\forall c \in [1, NC], \forall X_1 \in [0, L]$:

$$\boxed{\left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{Div} \underline{P}^c dX_3 \right) + \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{Div} \underline{P}^c Q_1^c dX_3 \right) = 0} \quad (6.53)$$

- $\forall c \in [1, NC - 1], \forall X_1 \in [0, L] :$

$$\boxed{\begin{aligned} & \left[- \left(\int_{H_-^{c+1}}^{H_+^{c+1}} \underline{Div} \underline{P}^{c+1} Q_1^{c+1} dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^{c+1}}^{H_+^{c+1}} \underline{Div} \underline{P}^{c+1} Q_2^{c+1} dX_3 \right) \right. \\ & \left. + \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{Div} \underline{P}^c Q_1^c dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^c}^{H_+^c} \underline{Div} \underline{P}^c Q_2^c dX_3 \right) \right] \\ & - \left[\underline{P}_{H_-^{c+1}}^{c+1} - \underline{P}_{H_+^c}^c \right] \cdot \underline{E}_3 = 0 \end{aligned}} \quad (6.54)$$

- $\forall X_1 \in [0, L] :$

$$\boxed{- \left(\int_{H_-^1}^{H_+^1} \underline{Div} \underline{P}^1 Q_1^1 dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^1}^{H_+^1} \underline{Div} \underline{P}^1 Q_2^1 dX_3 \right) = 0} \quad (6.55)$$

- $\forall X_1 \in [0, L] :$

$$\boxed{\left(\int_{H_-^{NC}}^{H_+^{NC}} \underline{Div} \underline{P}^{NC} Q_1^{NC} dX_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{H_-^{NC}}^{H_+^{NC}} \underline{Div} \underline{P}^{NC} Q_2^{NC} dX_3 \right) = 0} \quad (6.56)$$

6.4.3 Effet de l'approximation sur \underline{S}

L'approximation qui est de plus réalisée sur \underline{S} dans le modèle proposé, a pour effet d'approximer \underline{P}^c sur chaque couche par un développement donné par :

$$\underline{P}_a^c(X_1, X_3) = \underline{P}_0^c(X_1)Q_0^c + \underline{P}_1^c(X_1)Q_1^c(X_3) + \underline{P}_2^c(X_1)Q_2^c(X_3) + \underline{P}_3^c(X_1)Q_3^c(X_3) \quad (6.57)$$

où les dépendances des \underline{P}_γ^c ($\gamma \in [0, 3]$) par rapport aux grandeurs généralisées sont données par les relations 5.41 à 5.44.

\underline{P} appartient donc a un sous espace de \mathbf{E}_P , noté \mathbf{sE}_P défini par :

$$\mathbf{sE}_P = \left\{ \underline{P} \in \mathbf{E}_P / \underline{P}_{|\Sigma_0^c} \text{ de la forme 6.57 } \forall c \in [0, NC] \right\}$$

En réutilisant les notations 5.57, on vérifie alors que les équations d'équilibre 6.53 à 6.56 trouvées précédemment pour $\underline{P} \in \mathbf{E}_P$ s'écrivent pour $\underline{P} \in \mathbf{sE}_P$:

- $\forall c \in [1, NC], \forall X_1 \in [0, L] :$

$$\boxed{\underline{Div}_0 \underline{P}_a^c + \frac{1}{5} \frac{1}{E_p^c} \underline{Div}_2 \underline{P}_a^c = 0} \quad (6.58)$$

- $\forall c \in [1, NC - 1], \forall X_1 \in [0, L] :$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} E_p^{c+1} \underline{\underline{Div}}_1 \underline{\underline{P}}^{c+1} + \frac{1}{10} E_p^{c+1} \underline{\underline{Div}}_2 \underline{\underline{P}}^{c+1} \\ & - \frac{1}{12} E_p^c \underline{\underline{Div}}_1 \underline{\underline{P}}^c + \frac{1}{10} E_p^c \underline{\underline{Div}}_2 \underline{\underline{P}}^c - \left[\underline{\underline{P}}_{|H_-^{c+1}}^{c+1} - \underline{\underline{P}}_{|H_+^c}^c \right] \cdot \underline{\underline{E}}_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.59)$$

- $X_1 \in [0, L] :$

$$-\frac{1}{12} E_p^1 \underline{\underline{Div}}_1 \underline{\underline{P}}_a^1 - \frac{1}{10} E_p^1 \underline{\underline{Div}}_2 \underline{\underline{P}}_a^1 = 0 \quad (6.60)$$

- $X_1 \in [0, L] :$

$$\frac{1}{12} E_p^{NC} \underline{\underline{Div}}_1 \underline{\underline{P}}_a^{NC} - \frac{1}{10} E_p^{NC} \underline{\underline{Div}}_2 \underline{\underline{P}}_a^{NC} = 0 \quad (6.61)$$

Conclusion

Nous avons mis en évidence que la nature des approximations réalisées sur $\underline{\underline{\phi}}$ et sur $\underline{\underline{S}}$ conduit à des équations d'équilibre données par 6.59 à 6.61 et qui s'écrivent comme des combinaisons linéaires

- des équations $\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{P}}_a^c = 0$ dans \mathcal{S}_0 qui sont données de 5.62 à 5.65.
- et des équations 5.66 de continuité du vecteur contrainte aux interfaces :

$$\left[\underline{\underline{P}}_{|H_-^{c+1}}^{c+1} - \underline{\underline{P}}_{|H_+^c}^c \right] \cdot \underline{\underline{E}}_3 = 0 \quad \forall c \in [1, NC - 1]$$

6.5 Application au cas du monocouche avec gauchissement

On peut tirer des équations précédemment établies, les équations correspondant au cas simplifié du monocouche ($NC = 1$) avec gauchissement. Pour plus de lisibilité, nous présenterons celles-ci en adimensionnalisant les paramètres cinématiques.

6.5.1 Adimensionnalisation de la cinématique

La transformation

Nous allons introduire les quantités adimensionnalisées :

$$X_a = \frac{X}{E_p} \quad (6.62)$$

$$\underline{\underline{\phi}}_a(X_a) = \frac{1}{E_p} \underline{\underline{\phi}}(E_p X_a) \quad (6.63)$$

$$\underline{\underline{\theta}}_a(X_a) = \frac{1}{E_p} [\underline{\underline{\phi}}^+(E_p X_a) - \underline{\underline{\phi}}^-(E_p X_a)] \quad (6.64)$$

$$\underline{\underline{\zeta}}_a(X_a) = \frac{1}{E_p} \left(\underline{\underline{\phi}}(E_p X_a) - \frac{\underline{\underline{\phi}}^+(E_p X_a) + \underline{\underline{\phi}}^-(E_p X_a)}{2} \right) \quad (6.65)$$

Formes adimensionnalisées de $\underline{\underline{E}}_0$ et $\underline{\underline{E}}_1$

On trouve successivement les expressions de $\underline{\underline{E}}_0$ et de $\underline{\underline{E}}_1$ en fonction des paramètres cinématiques adimensionnalisés donnés précédemment.

- En appliquant 8.2

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_0 &= \frac{1}{2} \left\{ \|\bar{\phi}'_a\|^2 + \frac{1}{12} \|\theta'_a\|^2 + \frac{1}{5} \|\zeta'_a\|^2 - 1 \right\} \underline{\underline{E}}_1 \otimes \underline{\underline{E}}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \bar{\phi}'_a \cdot \theta'_a - \theta'_a \cdot \zeta'_a \right\} (\underline{\underline{E}}_1 \otimes \underline{\underline{E}}_3 + \underline{\underline{E}}_3 \otimes \underline{\underline{E}}_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \|\theta'_a\|^2 + 12 \|\zeta'_a\|^2 - 1 \right\} \underline{\underline{E}}_3 \otimes \underline{\underline{E}}_3 \end{aligned} \quad (6.66)$$

- en appliquant 5.35

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \bar{\phi}'_a \cdot \theta'_a - \frac{4}{5} \theta'_a \cdot \zeta'_a \right\} \underline{\underline{E}}_1 \otimes \underline{\underline{E}}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -12 \bar{\phi}'_a \cdot \zeta'_a + \theta'_a \cdot \theta'_a + \frac{24}{5} \zeta'_a \cdot \zeta'_a \right\} (\underline{\underline{E}}_1 \otimes \underline{\underline{E}}_3 + \underline{\underline{E}}_3 \otimes \underline{\underline{E}}_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} 24 \theta'_a \cdot \zeta'_a \underline{\underline{E}}_3 \otimes \underline{\underline{E}}_3 \end{aligned} \quad (6.67)$$

6.5.2 Loi de comportement

On rappelle les expressions 6.8 et 6.9 de la loi de comportement généralisée :

$$\begin{cases} \underline{\underline{S}}^0 = \underline{\underline{K}}^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 \\ \underline{\underline{S}}^1 = \underline{\underline{K}}^{-1} : \underline{\underline{E}}^1 \end{cases}$$

Si on part d'une loi de comportement tridimensionnelle dans l'écriture de la loi de type Saint-Venant Kirchhoff, en remplaçant le jeu de paramètres matériau (λ, G) par le couple (E, ν) , la loi de comportement généralisée du modèle relie pour $\gamma = \{0, 1\}$, les composantes du tenseur $\underline{\underline{S}}_\gamma$ en fonction des composantes de $\underline{\underline{E}}_\gamma$ par :

$$\left(\underline{\underline{S}}_\gamma \right)_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(\underline{\underline{E}}_\gamma \right)_{11} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(\underline{\underline{E}}_\gamma \right)_{33} \quad (6.68)$$

$$\left(\underline{\underline{S}}_\gamma \right)_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(\underline{\underline{E}}_\gamma \right)_{33} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left(\underline{\underline{E}}_\gamma \right)_{11} \quad (6.69)$$

$$\left(\underline{\underline{S}}_0 \right)_{13} = \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{E}}_\gamma \right)_{13} \quad (6.70)$$

Afin d'alléger l'écriture nous introduirons en particulier les 3 constantes ne dépendant que de ν , $c_1(\nu)$, $c_2(\nu)$ et $c_3(\nu)$ qui sont respectivement définies par :

$$c_1(\nu) = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (6.71)$$

$$c_2(\nu) = \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (6.72)$$

$$c_3(\nu) = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (6.73)$$

En reportant les expressions de \underline{E}_0 et \underline{E}_1 sous leurs formes 6.66 et 6.67, dans les relations 6.10 à 6.15, on obtient les expressions des composantes de \underline{S}^0 et de \underline{S}^1 en fonction des grandeurs adimensionnalisées :

Expression de \underline{S}_0

$$S_{11}^0 = Ec_1(\nu) \frac{1}{2} \left\{ \|\underline{\bar{\phi}}_a'\|^2 + \frac{1}{12} \|\underline{\theta}_a'\|^2 + \frac{1}{5} \|\underline{\zeta}_a'\|^2 - 1 \right\} + Ec_2(\nu) \frac{1}{2} \left\{ \|\underline{\theta}_a\|^2 + 12 \|\underline{\zeta}_a\|^2 - 1 \right\} \quad (6.74)$$

$$S_{33}^0 = Ec_1(\nu) \frac{1}{2} \left\{ \|\underline{\theta}_a\|^2 + 12 \|\underline{\zeta}_a\|^2 - 1 \right\} + Ec_2(\nu) \frac{1}{2} \left\{ \|\underline{\bar{\phi}}_a'\|^2 + \frac{1}{12} \|\underline{\theta}_a'\|^2 + \frac{1}{5} \|\underline{\zeta}_a'\|^2 - 1 \right\} \quad (6.75)$$

$$S_{13}^0 = Ec_3(\nu) \frac{1}{2} \left\{ \underline{\bar{\phi}}_a' \cdot \underline{\theta}_a - \underline{\theta}_a' \cdot \underline{\zeta}_a \right\} \quad (6.76)$$

Expression de \underline{S}_1

$$S_{11}^1 = Ec_1(\nu) \frac{1}{2} \left\{ \underline{\bar{\phi}}_a' \cdot \underline{\theta}_a' - \frac{4}{5} \underline{\theta}_a' \cdot \underline{\zeta}_a' \right\} - Ec_2(\nu) 12 \underline{\theta}_a \cdot \underline{\zeta}_a \quad (6.77)$$

$$S_{33}^1 = -Ec_1(\nu) 12 \underline{\theta}_a \cdot \underline{\zeta}_a + Ec_2(\nu) \frac{1}{2} \left\{ \underline{\bar{\phi}}_a' \cdot \underline{\theta}_a' - \frac{4}{5} \underline{\theta}_a' \cdot \underline{\zeta}_a' \right\} \quad (6.78)$$

$$S_{13}^1 = Ec_3(\nu) \frac{1}{2} \left\{ -12 \underline{\bar{\phi}}_a \cdot \underline{\zeta}_a + \underline{\theta}_a' \cdot \underline{\theta}_a + \frac{24}{5} \underline{\zeta}_a' \cdot \underline{\zeta}_a \right\} \quad (6.79)$$

6.5.3 Equations d'équilibre et conditions aux limites

Stationnarité par rapport à $\underline{\bar{\phi}}$

Dans le cas du monocouche, à l'aide des notations 6.62 à 6.65

– L'équation 6.42 devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dX_a} \left\{ \left(\underline{S}_0 \right)_{11} \left[\bar{\phi}'_a + \frac{1}{5} \zeta'_a \right] + \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \theta_a + \frac{1}{20} \left(\underline{S}_1 \right)_{11} \theta'_a - \frac{3}{5} \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \zeta'_a \right\} \\ & + 12 \left(\underline{S}_0 \right)_{33} \zeta'_a - \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \theta'_a - \left(\underline{S}_1 \right)_{33} \theta_a + \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \left[-\bar{\phi}'_a + \frac{2}{5} \zeta'_a \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.80)$$

– Les équations 6.43 fournissant les conditions aux limites correspondantes devient :

$$\left\{ \left(\underline{S}_0 \right)_{11} \left[\bar{\phi}'_a + \frac{1}{5} \zeta'_a \right] + \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \theta_a + \frac{1}{20} S_{11}^1 \theta'_a - \frac{3}{5} \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \zeta'_a \right\} |_{X=L} = T^d \quad (6.81)$$

Stationnarité par rapport à $\phi^{0,1}$

– D'après 6.46 on a :

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dX_a} \left\{ \left(\underline{S}_0 \right)_{11} \left[\frac{1}{12} \theta'_a + \frac{1}{10} \zeta'_a \right] + \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \zeta'_a + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1 \right)_{11} \left[\bar{\phi}'_a - \frac{2}{5} \zeta'_a - \frac{1}{5} \theta'_a \right] \right. \\ & \quad \left. + \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \left[\frac{1}{12} \theta_a + \frac{1}{5} \zeta_a \right] \right\} \\ & + \left(\underline{S}_0 \right)_{33} \left[\theta_a + 6 \zeta_a \right] + \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \left[\bar{\phi}'_a - \frac{1}{2} \theta'_a \right] - \left(\underline{S}_1 \right)_{33} \left[\zeta_a + \frac{1}{2} \theta_a \right] \\ & + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \left[-6 \bar{\phi}'_a + \theta'_a + \frac{12}{5} \zeta'_a \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.82)$$

– D'après 6.47 les conditions aux limites en $X_a = \frac{L}{E_p}$ correspondantes sont données par :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\underline{S}_0 \right)_{11} \left[\frac{1}{12} \theta'_a + \frac{1}{10} \zeta'_a \right] + \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \zeta'_a + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1 \right)_{11} \left[\bar{\phi}'_a - \frac{1}{5} \theta'_a - \frac{2}{5} \zeta'_a \right] \right. \\ & \quad \left. + \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \left[\frac{1}{12} \theta_a + \frac{1}{5} \zeta_a \right] \right\} |_{X=L} = 0 \end{aligned} \quad (6.83)$$

Stationnarité par rapport à $\underline{\phi}^{1,2}$

- L'équation 6.48 conduit à :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dX_a} \left\{ \left(\underline{S}_0 \right)_{11} \left[+\frac{1}{12} \underline{\theta}_a' - \frac{1}{10} \underline{\zeta}_a' \right] - \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \underline{\zeta}_a + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1 \right)_{11} \left[\bar{\underline{\phi}}_a' + \frac{1}{5} \underline{\theta}_a' - \frac{2}{5} \underline{\zeta}_a' \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \left[\frac{1}{12} \underline{\theta}_a - \frac{1}{5} \underline{\zeta}_a \right] \right\} \\
 & \quad + \left(\underline{S}_0 \right)_{33} \left[\underline{\theta}_a - 6 \underline{\zeta}_a \right] + \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \left[\bar{\underline{\phi}}_a' + \frac{1}{2} \underline{\theta}_a' \right] - \left(\underline{S}_1 \right)_{33} \left[\underline{\zeta}_a - \frac{1}{2} \underline{\theta}_a \right] \\
 & \quad + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \left[6 \bar{\underline{\phi}}_a' + \underline{\theta}_a' - \frac{12}{5} \underline{\zeta}_a' \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

- L'équation 6.49 donne les conditions aux limites correspondantes :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\underline{S}_0 \right)_{11} \left[\frac{1}{12} \underline{\theta}_a' - \frac{1}{10} \underline{\zeta}_a' \right] - \left(\underline{S}_0 \right)_{13} \underline{\zeta}_a + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1 \right)_{11} \left[\bar{\underline{\phi}}_a' + \frac{1}{5} \underline{\theta}_a' - \frac{2}{5} \underline{\zeta}_a' \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1 \right)_{13} \left[\underline{\theta}_a - \frac{12}{5} \underline{\zeta}_a \right] \right\} \Big|_{X=L} = 0
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

6.5.4 Vérification dans le cas de la traction uniaxiale

On peut aisément vérifier les équations précédentes en se plaçant dans le cas simple de la traction uniaxiale. La densité uniforme d'efforts appliquée en $X_a = \frac{L}{E_p}$ est donc de la forme

$$\underline{T}^d = \frac{F}{bE_p} \underline{E}_1.$$

On recherche une position d'équilibre sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{\underline{\phi}}(X) = \beta X \underline{e}_1 \\ \underline{\phi}^+(X) = \beta X \underline{e}_1 + E_p \alpha \underline{e}_3 \\ \underline{\phi}^-(X) = \beta X \underline{e}_1 - E_p \alpha \underline{e}_3 \end{cases} \tag{6.86}$$

où les deux paramètres cinématiques α et β sont sans dimension. Les grandeurs adimensionnelles correspondantes prennent alors les formes suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\underline{\phi}}_a = \beta \underline{e}_1 \\ \underline{\theta}_a = 2\alpha \underline{e}_3 \\ \underline{\zeta}_a = \underline{0} \end{cases}$$

D'après 6.66 et 6.67, les tenseur des déformations de Green-Lagrange correspondants, $\underline{\underline{E}}_0$ et $\underline{\underline{E}}_1$ sont tels que :

$$\underline{\underline{E}}_0 = \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) \underline{\underline{E}}_1 \otimes \underline{\underline{E}}_1 + \frac{1}{2} (4\alpha^2 - 1) \underline{\underline{E}}_3 \otimes \underline{\underline{E}}_3 \quad (6.87)$$

$$\underline{\underline{E}}_1 = \underline{\underline{0}} \quad (6.88)$$

où $\underline{\underline{0}}$ est le tenseur d'ordre 2 nul.

Le problème consiste donc à trouver le couple (α, β) ainsi que $\underline{\underline{S}}_0$ et $\underline{\underline{S}}_1$ vérifiant l'ensemble des équations 6.74 à 6.79 d'une part et 6.80 à 6.85 d'autre part.

On a

– d'après 6.74 et 6.75 :

$$\left(\underline{\underline{S}}_0\right)_{11} = Ec_1(\nu) \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) + Ec_2(\nu) \frac{1}{2} (4\alpha^2 - 1) \quad (6.89)$$

$$\left(\underline{\underline{S}}_0\right)_{33} = Ec_2(\nu) \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) + Ec_1(\nu) \frac{1}{2} (4\alpha^2 - 1)$$

– d'après 6.76 à 6.79 :

$$\left(\underline{\underline{S}}_0\right)_{13} = 0 \quad (6.90)$$

$$\underline{\underline{S}}_1 = \underline{\underline{0}} \quad (6.91)$$

– compte-tenu de 6.90 et 6.91, d'après la projection suivant \underline{e}_1 de 6.81 :

$$\left(\underline{\underline{S}}_0\right)_{11} \beta = \frac{F}{E_p b} \quad (6.92)$$

– compte-tenu de 6.90 et 6.91, d'après la projection suivant \underline{e}_3 de 6.82 et 6.85

$$\left(\underline{\underline{S}}_1\right)_{33} 2\alpha = 0 \quad (6.93)$$

les autres relations conduisant toutes à des identités.

On retrouve donc bien la solution classique de traction car

– Cette solution classique donne

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F}{E_p b} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

Or avec

$$\underline{\phi}_a(X_1) = \beta X_1 \underline{e}_1 + 2\alpha \underline{e}_3$$

on a

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}_a^{-1} = \underline{\underline{F}}_a^{-1} = \frac{1}{\beta} \underline{\underline{E}}_1 \otimes \underline{e}_1$$

Le passage de $\underline{\underline{\sigma}}$ à $\underline{\underline{S}}$ s'effectuant par :

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}}_a^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}_a^{-T}$$

on obtient finalement

$$\left(\underline{S}_0\right)_{11} = \frac{1}{\beta} \sigma_{11}$$

qui correspond à la relation 6.92.

- De plus en injectant 6.90 dans 6.93, on retrouve bien la relation classique dans le cas déformations planes :

$$\boxed{\frac{1}{2} (4 \alpha^2 - 1) = -\frac{\nu}{1 - \nu} \frac{1}{2} (\beta^2 - 1)} \quad (6.94)$$

Conclusion

On recherche une solution (ϕ, \underline{S}) du problème mécanique dans les sous-espaces définis par les approximations retenues pour ces variables.

Cette solution est recherchée comme point stationnaire de la fonctionnelle modifiée dont l'expression a été établie au chapitre précédent.

- *La stationnarité par rapport aux transformations généralisées conduit :*

- *aux équations d'équilibre approchées.*
- *aux conditions aux limites en efforts approchés.*

- *La stationnarité par rapport aux contraintes généralisées conduit à la loi de comportement généralisée*

Deux observations sont à dégager :

- *Les équations d'équilibre sont des combinaisons linéaires des équations $\underline{\text{Div}} \underline{P}_a^c = \underline{0}$ et des équations de continuité du vecteur contrainte sur chaque interface*
- *Les conditions aux limites ne sont vérifiées que de manière approchée en raison des choix retenus pour les approximations.*

Ces deux résultats sont des conséquences directes du fait que les variations qui apparaissent lors de l'écriture de la stationnarité n'ont lieu que dans des sous-espaces des espaces utilisés dans le principe général.

Chapitre 7

Introductions des efforts possédant un sens physique

Comme nous l'avons déjà montré, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\underline{\underline{S}}$, avec lequel nous avons défini les contraintes généralisées du modèle, ne possède pas de sens physique direct. L'objectif est maintenant de relier ces contraintes généralisées à des efforts possédant effectivement un sens physique dans la configuration déformée.

Le plan de ce chapitre va être guidé par les deux remarques suivantes :

- La cinématique du modèle proposé est suffisamment riche pour prendre en compte un gauchissement des sections dans le plan de la transformation. Elle peut être dégénérée, moyennant certaines hypothèses supplémentaires, afin de redonner la cinématique de Timoshenko.
- Des efforts possédant un sens physique sur la configuration déformée ont déjà été définis dans le cas d'une poutre monocouche de type Timoshenko.
 - Dans la première section, nous traiterons donc du cas particulier monocouche et nous ramènerons la cinématique du modèle à celle de Timoshenko. Les contraintes généralisées du modèle seront alors reliées aux efforts physiques définis dans le chapitre 4 de la première partie.

- Dans la seconde section, nous conserverons toute la généralité du modèle cinématique proposé : cas d'une poutre multicouche avec gauchissement des sections propres à chaque couche. Il s'agira alors :

- dans un premier temps, de définir des efforts possédant un sens physique à l'intérieur de chaque couche à l'aide de la résultante des efforts extérieurs s'appliquant sur une section gauchie.
- dans un second temps, de définir des contraintes possédant cette fois-ci un sens physique sur chaque interface.

L'ensemble des efforts physiques ainsi définis seront finalement écrit à l'aide des variables généralisées du modèle.

7.1 Poutre monocouche de Timoshenko

La poutre considérée ici ne comporte plus qu'une seule couche. L'ensemble de ses points matériels occupe dans la configuration de référence un volume Ω_0 défini par

$$\Omega_0 = [0, L] \times [-b, b] \times \left[-\frac{E_p}{2}, \frac{E_p}{2} \right]$$

L'étude bidimensionnelle autorisée par la nature du problème est donc restreinte à la surface Σ_0 :

$$\Sigma_0 = [0, L] \times \left[-\frac{E_p}{2}, \frac{E_p}{2} \right]$$

La côte moyenne, notée \bar{H} , de la couche étudiée est telle que $\bar{H} = 0$. Le polynôme de Legendre Q_1 défini sur cette couche vaut donc :

$$Q_1(X_3) = \frac{X_3}{E_p} \quad (7.1)$$

Dans l'approximation de la transformation retenue en 5.15, l'indice c repérant les différentes couches disparaît et cette approximation s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_a(X_1, X_3) &= \underline{\phi}_0(X_1)Q_0 + \underline{\phi}_1(X_1)Q_1(X_3) + \underline{\phi}_2(X_1)Q_2(X_3) \\ \forall (X_1, X_3) &\in [0, L] \times \left[-\frac{E_p}{2}, \frac{E_p}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

Les coefficients $\underline{\phi}_\gamma(X_1)$, $\gamma \in [0, 2]$ sont donc définis conformément à 5.19, 5.20 et 5.21 par :

$$\begin{cases} \underline{\phi}_0(X_1) &= \bar{\phi}(X_1) \\ \underline{\phi}_1(X_1) &= \underline{\phi}^{1,2}(X_1) - \underline{\phi}^{0,1}(X_1) \\ \underline{\phi}_2(X_1) &= \underline{\phi}_1(X_1) - \frac{\underline{\phi}^{1,2}(X_1) + \underline{\phi}^{0,1}(X_1)}{2} \end{cases} \quad (7.3)$$

avec $\underline{\phi}^{0,1}(X_1) = \underline{\phi}_a(X_1, X_3 = -\frac{E_p}{2})$ et $\underline{\phi}^{1,2}(X_1) = \underline{\phi}_a(X_1, X_3 = \frac{E_p}{2})$

7.1.1 Dégénérescence de la cinématique du modèle

Nous allons faire les hypothèses nécessaires sur les coefficients $\underline{\phi}_\gamma(X_1)$, $\gamma \in [0, 2]$ du développement 7.2 afin de nous ramener à une cinématique de type Timoshenko dans laquelle les sections restent planes et indéformables.

Les définitions 7.3, font clairement apparaître les significations physiques des coefficients $\underline{\phi}_\gamma$ $\gamma \in [0, 2]$:

- Le terme $\underline{\phi}_2$ défini par la différence entre la moyenne des transformations des points d'une section et la moyenne des transformations de ses deux points extrêmes traduit le gauçhissement de la section.

Afin de ne plus prendre en compte ce gauchissement des sections dans le modèle, il suffit donc d'imposer la condition :

$$\underline{\phi}_2(X_1) \equiv 0 \quad \forall X_1 \in [0, L] \quad (7.4)$$

• Avec cette condition, les sections restent donc planes au cours de la transformation. Le terme $\frac{1}{E_p} \|\underline{\phi}_1(X_1)\|$ traduit alors une élongation dans la direction de la section déformée. La cinématique de Timoshenko supposant la section indéformable, il faut donc de plus, pour vérifier cette hypothèse, imposer la condition suivante :

$$\|\underline{\phi}_1(X_1)\| = E_p \quad \forall X_1 \in [0, L] \quad (7.5)$$

L'angle entre \underline{e}_3 et le vecteur unitaire $\frac{\underline{\phi}_1(X_1)}{E_p}$ traduit alors la rotation de la section dans le plan de la transformation.

Forme de la transformation

La cinématique de type Timoshenko est donc obtenue par une approximation de $\underline{\phi}$ sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\phi}_a(X_1, X_3) = \underline{\phi}_0(X_1)Q_0 + \underline{\phi}_1(X_1)Q_1(X_3) \\ \|\underline{\phi}_1(X_1)\| = E_p \end{cases}} \quad (7.6)$$

avec $Q_1(X_3)$ définie en 7.1.

On remarque que l'on a maintenant :

$$\underline{\phi}_0(X_1) = \underline{\phi}_a(X_1, X_3 = 0) \quad (7.7)$$

On peut alors se ramener aux notations 3.27 faisant apparaître l'élongation de la fibre neutre $\underline{\xi}(X_1)$ et l'angle de rotation de la section $\psi(X_1)$. L'expression 7.6 prend donc la forme 3.27 avec :

$$\underline{\phi}_0(X_1) = \int_0^{X_1} \underline{\xi}(u) du \quad (7.8)$$

$$\underline{\phi}_1(X_1) = E_p \underbrace{[-\sin\psi(X_1)\underline{e}_1 + \cos\psi(X_1)\underline{e}_3]}_{\underline{t}(X_1)} \quad (7.9)$$

où $\underline{t}(X_1)$ est le vecteur tangent à la section droite repérée dans la configuration de référence par l'abscisse X_1 .

Gradient de la transformation approchée correspondante

Le développement de $\underline{\phi}_a$ s'effectuant jusqu'au degré 1 en X_3 , le gradient de la transformation approchée correspondante s'écrit sous la forme :

$$\underline{F}_a(X_1, X_3) = \underline{F}_0(X_1)Q_0 + \underline{F}_1(X_1)Q_1(X_3)$$

En remplaçant 7.6 dans 8.4 et 8.5 on trouve :

$$\underline{\underline{F}}_0(X_1) = \underline{\phi}'_0(X_1) \otimes \underline{E}_1 + \frac{1}{E_p} \underline{\phi}'_1(X_1) \otimes \underline{E}_3 \quad (7.10)$$

$$\underline{\underline{F}}_1^c(X_1) = \underline{\phi}'_1(X_1) \otimes \underline{E}_1 \quad (7.11)$$

avec les relations 7.8 et 7.9 qui entraînent :

$$\underline{\phi}'_0(X_1) = \underline{\xi}(X_1) \quad (7.12)$$

$$\underline{\phi}'_1(X_1) = -E_p \psi'(X_1) \underbrace{[\cos\psi(X_1) \underline{e}_1 + \sin\psi(X_1) \underline{e}_3]}_{\underline{n}(X_1)} \quad (7.13)$$

où $\underline{n}(X_1)$ est le vecteur normal à la section droite repérée dans la configuration de référence par l'abscisse X_1 .

Tenseur des déformations de Green-Lagrange approchées

• Dans le cas particulier du monocouche pour lequel l'approximation de la transformation retenue est de la forme 7.6, les formes générales 8.2 et 5.35 des tenseurs $\underline{\underline{E}}_0^c$ et $\underline{\underline{E}}_1^c$ deviennent :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_0(X_1) &= \frac{1}{2} \left\{ \|\underline{\phi}^{c'}_0\|^2 + \frac{1}{12} \|\underline{\phi}^{c'}_1\|^2 - 1 \right\} \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{E_p} \left\{ \underline{\phi}^{c'}_0 \cdot \underline{\phi}^{c'}_1 \right\} (\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{E}}_1(X_1) = \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\underline{\phi}^{c'}_0 \cdot \underline{\phi}^{c'}_1 \right) - \frac{4}{5} \left(\underline{\phi}^{c'}_1 \cdot \underline{\phi}^{c'}_2 \right) \right\} \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1$$

• Les expressions précédentes peuvent être réécrites à l'aide des paramètres cinématiques $\underline{\xi}$ et ψ en utilisant les relations 7.8, 7.9, 7.12 et 7.13. On obtient alors

- Pour $\underline{\underline{E}}_0$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_0(X_1) &= \frac{1}{2} \left\{ [\xi^2(X_1) - 1] + \frac{E_p^2}{12} \psi'^2(X_1) \right\} \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \xi_t(X_1) [\underline{E}_1 \otimes \underline{E}_3 + \underline{E}_3 \otimes \underline{E}_1] \end{aligned} \quad (7.14)$$

- Pour $\underline{\underline{E}}_1$:

$$\underline{\underline{E}}_1(X_1) = -E_p \psi'(X_1) \xi_n(X_1) \underline{E}_1 \otimes \underline{E}_1 \quad (7.15)$$

où on rappelle les définitions introduites dans le chapitre 3 de la partie I :

$$\xi(X_1) = \|\underline{\xi}(X_1)\| \quad (7.16)$$

$$\xi_n(X_1) = \underline{\xi}(X_1) \cdot \underline{n}(X_1) \quad (7.17)$$

$$\xi_t(X_1) = \underline{\xi}(X_1) \cdot \underline{t}(X_1) \quad (7.18)$$

7.1.2 Approximation des contraintes

L'approximation des contraintes est celle présentée dans la partie précédente. Elle consiste à écrire \underline{S} sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{S}_a(X_1, X_3) &= \underline{S}_0(X_1)Q_0 + \underline{S}_1(X_1)Q_1(X_3) \\ \forall (X_1, X_3) &\in [0, L] \times \left[-\frac{E_p}{2}, \frac{E_p}{2}\right] \end{aligned} \quad (7.19)$$

7.1.3 Le tenseur des efforts intérieurs

Nous cherchons à donner les expressions des éléments de réduction du tenseur des efforts extérieurs s'appliquant sur une section de la configuration déformée en fonction des contraintes généralisées introduites dans la partie précédente. Ces éléments de réduction étant définis à partir du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \underline{P} , il suffit pour cela :

- d'exprimer l'approximation de \underline{P} , notée \underline{P}_a , à partir de l'approximation cinématique 7.6 et de l'approximation 7.19 de \underline{S} dans laquelle apparaissent les contraintes généralisées.
- puis d'écrire les définitions des éléments de réduction du tenseur des efforts extérieurs à l'aide de l'expression précédente de \underline{P}_a .

Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff correspondant

L'approximation cinématique 7.6 entraînant $\underline{F}_2 \equiv 0$, l'expression 5.40 du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff approché devient :

$$\begin{aligned} \underline{P}_a(X_1, X_3) &= \left\{ \left(\underline{F}_0 \cdot \underline{S}_0 + \frac{1}{12} \underline{F}_1 \cdot \underline{S}_1 \right) (X_1) \right\} Q_0 + \left\{ \left(\underline{F}_0 \cdot \underline{S}_1 + \underline{F}_1 \cdot \underline{S}_0 \right) (X_1) \right\} Q_1(X_3) \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{6} \left(\underline{F}_1 \cdot \underline{S}_1 \right) (X_1) \right\} Q_2(X_3) \end{aligned} \quad (7.20)$$

avec \underline{F}_0 et \underline{F}_1 définis respectivement par 7.10 et 7.11

Expression de la résultante des efforts intérieurs en fonction des contraintes généralisées

Dans le système étudié, toute section de la configuration déformée a comme antécédent dans la transformation $\underline{\phi}_a$ une section droite S_0 définie par :

$$S_0 = [0, b] \times \left[-\frac{E_p}{2}, \frac{E_p}{2} \right]$$

D'après la définition générale 3.18, la résultante des efforts extérieurs appliqués sur une section de la configuration déformée du système a donc pour expression :

$$\underline{R}(X_1) = b \int_{-\frac{E}{2}}^{\frac{E}{2}} \underline{P}(X_1, X_3) \cdot \underline{E}_1 dX_3$$

En introduisant dans la relation précédente l'approximation \underline{P}_a de \underline{P} définie par 7.19, on obtient alors, compte-tenu des propriétés d'intégration sur l'épaisseur des polynômes de base :

$$\underline{R}(X_1) = bE_p \left(\underline{P}_0(X_1) \cdot \underline{E}_1 \right)$$

Par application de la formule de calcul tensoriel 5.45 avec les expressions 7.10 (resp. 7.11) de \underline{F}_0 (resp. \underline{F}_1), on obtient alors directement, en omettant la dépendance en X_1 :

$$\underline{P} \cdot \underline{E}_1 = \underline{\phi}'_0 \left[\left(\underline{S}_0 \cdot \underline{E}_1 \right) \cdot \underline{E}_1 \right] + \frac{1}{E_p} \underline{\phi}_1 \left[\left(\underline{S}_0 \cdot \underline{E}_1 \right) \cdot \underline{E}_3 \right] + \frac{1}{12} \underline{\phi}'_1 \left[\left(\underline{S}_1 \cdot \underline{E}_1 \right) \cdot \underline{E}_1 \right]$$

soit

$$\underline{R} = bE_p \left\{ \underline{\phi}'_0 \left(\underline{S}_0 \right)_{11} + \frac{1}{E_p} \underline{\phi}_1 \left(\underline{S}_0 \right)_{13} + \frac{1}{12} \underline{\phi}'_1 \left(\underline{S}_1 \right)_{11} \right\} \quad (7.21)$$

Expression du moment des efforts intérieurs en fonction des contraintes généralisées

Le moment résultant des efforts appliqués sur une section est donné d'après 3.19 par :

$$M(X_1) = - \left\{ b \int_{-\frac{E}{2}}^{\frac{E}{2}} \left[\underline{\phi}(X_1, X_3) - \underline{\phi}(X_1, X_3 = 0) \right] \wedge \left(\underline{P} \cdot \underline{E}_1 \right) dX_3 \right\} \cdot \underline{e}_2$$

L'introduction des approximations en contraintes et en cinématique dans la relation précédente, compte-tenu de la remarque 7.7 conduit à l'expression :

$$M(X_1) = - \left\{ b \int_{-\frac{E}{2}}^{\frac{E}{2}} \underline{\phi}_1(X_1) Q_1(X_3) \wedge \left(\underline{P}_a \cdot \underline{E}_1 \right) dX_3 \right\} \cdot \underline{e}_2$$

qui compte-tenu de l'expression 7.20 de \underline{P}_a et de l'orthogonalité des polynômes de base se réécrit en omettant X_1 :

$$M = -bE_p \frac{1}{12} \left\{ \underline{\phi}_1 \wedge \left(\underline{P}_1 \cdot \underline{E}_1 \right) \right\} \cdot \underline{e}_2 \quad (7.22)$$

L'expression de $\underline{P}_1 \cdot \underline{E}_1 = \left(\underline{F}_0 \cdot \underline{S}_1 + \underline{F}_1 \cdot \underline{S}_0 \right) \cdot \underline{E}_1$ en fonction de $\underline{\phi}_0$ et $\underline{\phi}_1$ et de leurs dérivées s'obtient en utilisant de nouveau la formule 5.45 qui conduit à :

$$\underline{P}_1 \cdot \underline{E}_1 = \underline{\phi}'_0 \left(\underline{S}_1 \right)_{11} + \frac{1}{E_p} \underline{\phi}_1 \left(\underline{S}_1 \right)_{13} + \underline{\phi}'_1 \left(\underline{S}_0 \right)_{11}$$

On obtient donc finalement en remplaçant dans 7.22 :

$$M = b \frac{E_p}{12} \left\{ \left[\left(\underline{\phi}'_0 \wedge \underline{\phi}_1 \right) \cdot \underline{e}_2 \right] \left(\underline{S}_1 \right)_{11} + \left[\left(\underline{\phi}'_1 \wedge \underline{\phi}_1 \right) \cdot \underline{e}_2 \right] \left(\underline{S}_0 \right)_{11} \right\} \quad (7.23)$$

7.1.4 Liens entre les contraintes généralisées et les efforts possédant un sens physique

L'effort tranchant Q

Le vecteur \underline{t} qui apparaît dans 7.9 est bien le vecteur tangent à la section dans la configuration déformée. On a :

$$\underline{t} = \frac{1}{E_p} \underline{\phi}_1 \quad (7.24)$$

L'effort tranchant a été défini dans le cas de la cinématique de type Timoshenko comme la projection de la résultante des efforts extérieurs appliqués sur la section suivant la direction \underline{t} . Par application de cette définition avec 7.21 et 7.24 on obtient donc en omettant de nouveau X_1 :

$$Q = b \left\{ \left[\underline{\phi}'_0 \cdot \underline{\phi}_1 \right] \left(\underline{S}_0 \right)_{11} + E_p \left(\underline{S}_0 \right)_{31} + \frac{1}{12} \left[\underline{\phi}'_1 \cdot \underline{\phi}_1 \right] \left(\underline{S}_1 \right)_{11} \right\} \quad (7.25)$$

L'effort normal N

Le vecteur normal à la section noté \underline{n} , a été défini tel que

$$\underline{n} = \underline{t} \wedge \underline{e}_2 \quad (7.26)$$

où \underline{t} est relié à $\underline{\phi}_1$ par 7.24.

Pour le cas particulier de la cinématique de Timoshenko, l'effort normal à la section a été définie en comme la projection de la résultante suivant la direction de la normale à cette section. Par application de cette définition à l'aide des relations 7.21 et 7.26 on obtient alors le lien cherché entre les grandeurs généralisées et l'effort normal N :

$$N = b \left\{ \left[\left(\underline{\phi}_1 \wedge \underline{\phi}'_0 \right) \cdot \underline{e}_2 \right] \left(\underline{S}_0 \right)_{11} + \frac{1}{12} \left[\left(\underline{\phi}_1 \wedge \underline{\phi}'_1 \right) \cdot \underline{e}_2 \right] \left(\underline{S}_1 \right)_{11} \right\} \quad (7.27)$$

7.1.5 Comparaison avec les résultats de la première partie

Expressions de N , Q et M en fonction de $\underline{\xi}$, ψ , \underline{S}_0 et \underline{S}_1

Nous allons réécrire successivement les expressions de N , Q , et M à l'aide des trois paramètres cinématique ξ_n , ξ_t et ψ dont les définitions ont respectivement été rappelés en 7.17, 7.18 et 7.9 et des contraintes généralisées.

- Expression de N et de M : On a
- d'une part 7.9 et 7.12 qui conduisent à :

$$\left(\underline{\phi}_1 \wedge \underline{\phi}'_0\right) \cdot \underline{e}_2 = E_p \left(\underline{t} \wedge \underline{\phi}'_0\right) \cdot \underline{e}_2 = E_p \underline{\phi}'_0 \cdot \underline{n} = E_p \xi_n$$

- Et d'autre part 7.9 et 7.13 qui conduisent à :

$$\left(\underline{\phi}_1 \wedge \underline{\phi}'_1\right) \cdot \underline{e}_2 = E_p \left(\underline{t} \wedge \underline{\phi}'_1\right) \cdot \underline{e}_2 = E_p \underline{\phi}'_1 \cdot \underline{n} = -E_p^2 \psi'$$

On en déduit en injectant dans 7.27 :

$$\boxed{N = bE_p \xi_n \left(\underline{S}_0\right)_{11} - b \frac{E_p^2}{12} \psi' \left(\underline{S}_1\right)_{11}} \quad (7.28)$$

et en injectant dans 7.23 :

$$\boxed{M = -b \frac{E_p^2}{12} \left[\xi_n \left(\underline{S}_1\right)_{11} - E_p \psi' \left(\underline{S}_0\right)_{11} \right]} \quad (7.29)$$

- Expression de Q : On a
- D'une part, d'après 7.12 et 7.13 :

$$\underline{\phi}'_0 \cdot \underline{\phi}_1 = E_p \xi_t$$

- et d'autre part, d'après 7.13 et 7.9 :

$$\underline{\phi}'_1 \cdot \underline{\phi}_1 = E_p \psi' \underline{t} \cdot \underline{n} = 0$$

On en déduit que

$$\boxed{Q = bE_p \left[\xi_t \left(\underline{S}_0\right)_{11} + \left(\underline{S}_0\right)_{31} \right]} \quad (7.30)$$

Expressions de N , Q et M en fonction de $\underline{\xi}$, ψ et des coefficients matériaux

Les expressions des tenseurs \underline{E}_0 et \underline{E}_1 en fonction des paramètres cinématiques $\underline{\xi}$ et ψ ont été respectivement données en 7.14 et 7.15. La loi de comportement généralisée du modèle, reliant les contraintes généralisées aux tenseurs \underline{E}_0 et \underline{E}_1 a été caractérisée pour un matériau de type Saint-Venant Kirchhoff par par les relations :

$$\begin{cases} \underline{S}_0 = \lambda \left(\text{tr} \underline{E}_0\right) \underline{1} + 2G \underline{E}_0 \\ \underline{S}_1 = \lambda \left(\text{tr} \underline{E}_1\right) \underline{1} + 2G \underline{E}_1 \end{cases}$$

En injectant 7.14 et 7.15 dans les deux relations précédentes, on obtient donc les expressions des composantes des deux tenseurs $\underline{\underline{S}}_0$ et $\underline{\underline{S}}_1$ en fonction des coefficients matériaux λ et G et des paramètres cinématiques $\underline{\xi}$ et ψ . On a en particulier :

$$\begin{cases} \left(\underline{\underline{S}}_0\right)_{11} = (\lambda + 2G) \underbrace{\frac{1}{2} \left[(\xi^2 - 1) + \frac{E_p^2}{12} \psi'^2 \right]}_{\left(\underline{\underline{E}}_0\right)_{11}} \\ \left(\underline{\underline{S}}_0\right)_{13} = G \xi_t \\ \left(\underline{\underline{S}}_1\right)_{11} = -(\lambda + 2G) E_p \psi' \xi_n \end{cases}$$

En remplaçant respectivement dans les relations 7.28, 7.30 et 7.29 on obtient les expressions cherchées de N , Q et M

$$N = b E_p (\lambda + 2G) \xi_n \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + b \frac{E_p^3}{8} (\lambda + 2G) \xi_n \psi'^2 \quad (7.31)$$

$$Q = b E_p G \xi_t + b E_p (\lambda + 2G) \xi_t \left[\frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + \frac{E_p^2}{24} \psi'^2 \right] \quad (7.32)$$

$$M = b \frac{E_p^3}{12} (\lambda + 2G) \psi' \xi_n^2 + b \frac{E_p^3}{12} (\lambda + 2G) \psi' \left[\frac{1}{2} (\xi^2 - 1) + \frac{E_p^2}{24} \psi'^2 \right] \quad (7.33)$$

Comparaison avec les résultats de la première partie

Il s'agit maintenant de comparer les expressions précédentes de N , Q et M à celles proposées par [Simo 82] présentées au chapitre 3 de la première partie.

Pour ce faire, plaçons-nous dans le cas de petites déformations :

- L'élongation $\underline{\xi}$ de la fibre neutre s'écrit sous la forme :

$$\underline{\xi} = (1 + u) \underline{n} + \xi_t \underline{t}$$

où les deux champs scalaires de déformation $u(X_1)$ et $\xi_t(X_1)$ sont des infiniment petits du premier ordre. Ce qui permet d'écrire :

$$\xi^2 = 1 + 2u + \dots$$

- Le champ ψ' est lui aussi un infiniment petit du premier ordre.

On peut ensuite réécrire les expressions de N , Q et M en fonction des infiniments petits d'ordre 1 u , ξ_t et ψ' .

- La relation 7.31 se réécrit :

$$N = b E_p (\lambda + 2G) u + \dots \quad (7.34)$$

– La relation 7.32 se réécrit :

$$Q = b E_p G \xi_t + \dots \quad (7.35)$$

– et enfin, la relation 7.33 se réécrit :

$$M = b \frac{E_p^3}{12} (\lambda + 2G) \psi' + \dots \quad (7.36)$$

• Trois remarques concernant les notations peuvent alors être faites :

– Les expressions de $\underline{\underline{E}}_0$ et $\underline{\underline{E}}_1$ ont été respectivement données en 7.14 et 7.15. Elles font apparaître que :

$$\left(\underline{\underline{E}}_0\right)_{33} = \left(\underline{\underline{E}}_1\right)_{33} = 0$$

qui traduit que dans cette cinématique : $\underline{\underline{E}}_{33}(X_1, X_3) = 0$ puisque les sections sont indéformables. Avec une telle cinématique dans une loi de comportement de type Saint-Venant Kirchhoff, la grandeur matériau $(\lambda + 2G)$ correspond donc au coefficient de proportionnalité entre la contrainte $\left(\underline{\underline{S}}\right)_{11}$ et la déformation $\left(\underline{\underline{E}}\right)_{11}$. On peut donc noter :

$$\lambda + 2G = E$$

– Les sections considérées sont rectangulaire de hauteur E_p et de largeur b .

Aire de la section : L'aire de cette section, notée A est donc telle que :

$$A = b E_p$$

inertie de la section : Le moment d'inertie par rapport à l'axe Oe_2 , notée I , de cette section rectangulaire est donné par :

$$I = b \frac{E_p^3}{12}$$

Avec ces notations les expressions 7.34, 7.35 et 7.36 deviennent successivement :

$$\boxed{N = E A (\xi_n - 1) + \dots} \quad (7.37)$$

$$\boxed{Q = G A \xi_t + \dots} \quad (7.38)$$

$$\boxed{M = E I \psi' + \dots} \quad (7.39)$$

La démarche présentée permet donc la construction d'un comportement formulé à l'aide d'efforts et de déformations possédant un sens physique direct.

Ce comportement est établi pour une cinématique de type Timoshenko, à partir de deux hypothèses supplémentaires :

- une approximation sur la forme du tenseur des contraintes $\underline{\underline{S}}$
- un comportement tridimensionnel reliant linéairement $\underline{\underline{S}}$ à $\underline{\underline{E}}$

Il permet de prendre en compte le cas des grandes transformations. Le comportement postulé par [Simo 82] n'est ainsi que le cas particulier, restreint au cas des petites déformations du comportement obtenu par la démarche proposée.

7.2 Efforts possédant un sens physique dans le cas du gauchissement des sections

L'étude précédente n'illustre qu'un cas particulier du modèle proposé, permettant ainsi de faire le lien avec une théorie bien connue de la littérature.

Considérons de nouveau la poutre multicouches telle qu'elle a été présentée au début de la partie précédente, ainsi que l'approximation 5.15 de la transformation permettant de prendre en compte un gauchissement des sections propre à chacune des couches.

Le problème qui se pose maintenant est de relier les contraintes généralisées du modèle à des grandeurs, à définir, possédant le plus grand sens physique possible sur la configuration déformée décrite par l'approximation 5.15 de la transformation.

Ce travail comportera quatre développements :

- Nous commenterons dans un premier temps la forme de l'approximation 5.15 afin de mettre en évidence des directions privilégiées de la configuration déformée définies à l'aide des transformations généralisées.
- Nous donnerons ensuite les expressions des éléments de réduction du tenseur des efforts intérieurs en fonction des grandeurs généralisées.

Il sera alors possible de définir :

Des efforts physiques à l'intérieur de chaque couche : Il s'agira alors d'adapter au cas d'une surface gauchie, le travail effectué sur un monocouche de type Timoshenko en définissant un effort normal résultant et un effort tangent résultant.

Des contraintes d'interfaces : L'aspect multicouche de la structure devra être pris en compte en définissant des contraintes possédant un sens physique sur chaque interface.

7.2.1 Interprétation physique de l'approximation de la transformation

D'après 5.15, sur chaque couche $c \in [1, NC]$ la restriction de l'approximation de transformation s'écrit :

$$\underline{\phi}_a^c(X_1, \bar{X}_3) = \underline{\phi}_0^c(X_1) + \underline{\phi}_1^c(X_1) \bar{X}_3 + \underline{\phi}_2^c(X_1) \left(-6\bar{X}_3^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (7.40)$$

où on a noté \bar{X}_3 la variable d'espace adimensionnée telle que pour $X_3 \in [H_-^c, H_+^c]$:

$$\bar{X}_3 \equiv Q_1^c(X_3) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

Rotation et élongation de la section avant gauchissement

Le champ de vecteur $\underline{\phi}_1^c$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\phi}_1^c(X_1) = \mu(X_1) \frac{\underline{\phi}_1^c(X_1)}{\|\underline{\phi}_1^c(X_1)\|} = \mu(X_1) \underline{t}^c(X_1)$$

où :

– le vecteur unitaire \underline{t}^c est défini par l'angle de rotation $\psi(X_1)$ tel que :

$$\underline{t}^c(X_1) = \frac{\underline{\phi}_1^c(X_1)}{\|\underline{\phi}_1^c(X_1)\|} = -\sin\psi(X_1) \underline{e}_1 + \cos\psi(X_1) \underline{e}_3 \quad (7.41)$$

– l'élongation dans la direction \underline{t}^c

$$\mu(X_1) = \|\underline{\phi}_1^c(X_1)\|$$

Le vecteur \underline{t}^c permet également de définir le vecteur \underline{n}^c par :

$$\underline{n}^c = \underline{e}_2 \wedge \underline{t}^c \quad (7.42)$$

Elongation de la ligne de tranformation moyenne

Pour $c \in [1, NC]$ donné, la ligne des tranformations moyennes de l'ensemble des sections S_0^c de la couche c dans la configuration initiale est notée $\bar{\Gamma}^c$ et est donnée par :

$$\bar{\Gamma}^c = \left\{ M \text{ repérés par } \underline{\phi}_0^c(X_1), X_1 \in [0, L] \right\}$$

On introduit alors comme paramètre cinématique l'élongation de $\bar{\Gamma}^c$, notée $\underline{\xi}^c$, défini par :

$$\underline{\phi}_0^{c'}(X_1) = \underline{\xi}^c(X_1)$$

Les deux directions \underline{n}^c et \underline{t}^c précédemment introduites permettent de définir les projections de l'élongation de $\bar{\Gamma}^c$ suivant ces deux directions qui seront respectivement notées ξ_n^c et ξ_t^c . On a donc :

$$\xi_n^c(X_1) = \underline{\phi}_0^{c'}(X_1) \cdot \underline{n}^c(X_1) \quad (7.43)$$

$$\xi_t^c(X_1) = \underline{\phi}_0^{c'}(X_1) \cdot \underline{t}^c(X_1) \quad (7.44)$$

Remarquons que dans cette cinématique, on a maintenant (voir 7.2.1) :

$$\underline{\phi}_a^c(X_1, 0) = \underline{\phi}_0^c(X_1) + \frac{1}{2} \underline{\phi}^c(X_1)$$

Gauchissement d'une section

Le gauchissement pris en compte grâce à $\underline{\phi}_2^c$ peut être considéré comme la combinaison de deux effets qui vont être représentés par deux champs scalaires :

Fonction de creux : Elle est introduite afin de traduire dans un premier temps le "cloquage" de la section. Cette fonction, notée ρ^c , est définie comme la projection de $\underline{\phi}_2^c$ sur la direction \underline{n}^c :

$$\rho^c = \underline{\phi}_2^c \cdot \underline{n}^c$$

Fonction de tirage : Le profile symétrique du cloquage précédent est ensuite modifié par étirement dans une direction parallèle à \underline{t}^c . La fonction traduisant ce second effet est donnée par un second champs scalaire baptisé fonction de "tirage" et est donc logiquement définie par la projection de $\underline{\phi}_2^c$ sur la direction \underline{t}^c :

$$\varepsilon^c = \underline{\phi}_2^c \cdot \underline{t}^c$$

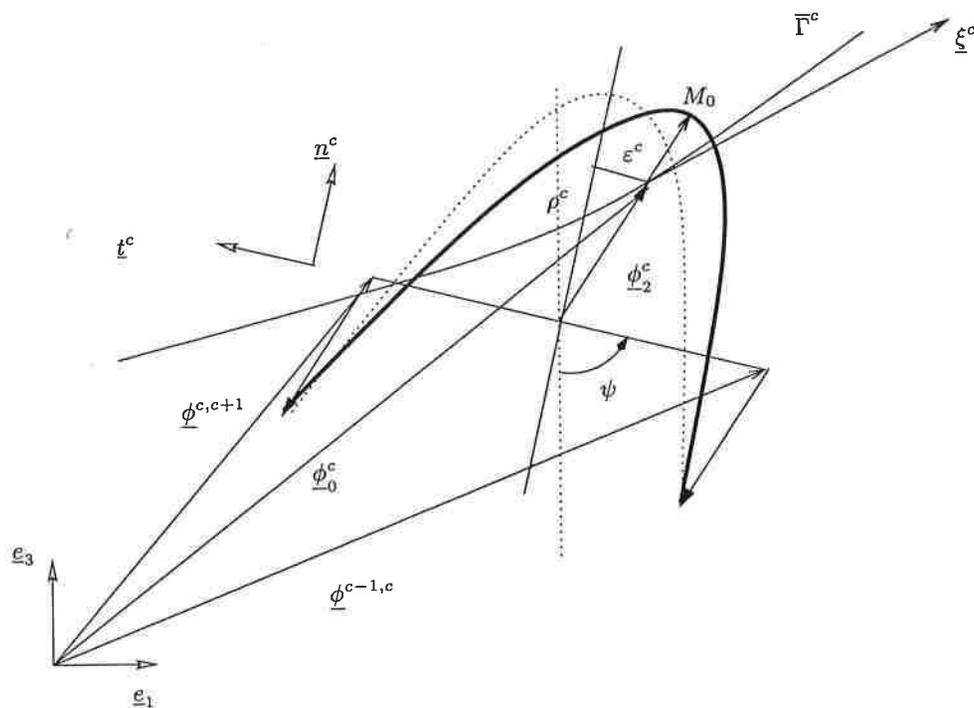


FIG. 7.1 – Cinématique du gauchissement

Expressions des dérivées de $\underline{\phi}_1^c$ et de $\underline{\phi}_2^c$

On souhaite faire apparaître les paramètres cinématiques qui viennent d'être introduits dans les expressions des éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs.

Ces éléments de réduction sont définis à l'aide de $\underline{P}_a^c \cdot \underline{E}_1 = \left(\underline{F}_a^c \cdot \underline{S}_a^c \right) \cdot \underline{E}_1$ où \underline{F}_a^c fait apparaître les dérivées par rapport à X_1 des grandeurs $\underline{\phi}_0^c$, $\underline{\phi}_1^c$ et $\underline{\phi}_2^c$.

La quantité $\underline{\phi}_0^{c'}$ a permis de définir $\underline{\xi}^c$. Il est donc utile de donner les expressions de $\underline{\phi}_1^{c'}$ et $\underline{\phi}_2^{c'}$ dans la base $(\underline{n}^c, \underline{t}^c)$ qui a été privilégiée pour décrire le gauchissement.

Avec :

$$\begin{cases} \underline{n}^{c'} = \psi^{c'} \underline{t}^c \\ \underline{t}^{c'} = -\psi^{c'} \underline{n}^c \end{cases}$$

On a donc :

$$\underline{\phi}_1^{c'} = -\mu^c \psi^{c'} \underline{n}^c + \mu^{c'} \underline{t}^c \tag{7.45}$$

$$\underline{\phi}_2^{c'} = \left(\rho^{c'} - \psi^{c'} \varepsilon^c \right) \underline{n}^c + \left(\rho^c \psi^{c'} + \varepsilon^{c'} \right) \underline{t}^c \tag{7.46}$$

La figure 7.2.1 décrit l'ensemble des paramètres cinématiques qui viennent d'être introduits.

7.2.2 Eléments de réduction du torseur des efforts intérieurs

Résultante des efforts extérieurs

Considérons la couche $c \in [1, NC]$ de la poutre étudiée. La grandeur possédant véritablement un sens physique est la résultante des efforts extérieurs s'appliquant sur une section de la couche c dans la configuration déformée. Son expression en fonction des contraintes généralisées est obtenue de la même manière que dans la section précédente.

On construit cette fois-ci le vecteur contrainte $\underline{P}_a^c \cdot \underline{E}_1$ donné par les quatre relations 5.47, 5.49, 5.51 et 5.53. La résultante $\underline{R}^c(X_1)$ des efforts s'appliquant sur une section de la couche c dans la configuration déformée est donc donnée, compte tenu des approximations 5.15 et 5.36 respectivement de la transformation et des contraintes, par :

$$\underline{R}^c(X_1) = b \int_{H_c^-}^{H_c^+} \underline{P}_a^c(X_1, X_3) \cdot \underline{E}_1 dX_3$$

qui s'écrit :

$$\underline{R}^c(X_1) = b E_p^c \left\{ \underline{\phi}_0^{c'} \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} + \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_1^c \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} + \frac{1}{12} \left[\underline{\phi}_1^{c'} \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} - \frac{12}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \right] \right\}$$

L'expression de $\underline{R}^c(X_1)$ obtenue est donc linéaire par rapport aux contraintes généralisées, les coefficients de cette expression étant eux même des combinaisons linéaires des transformations généralisées ou de leurs dérivées. Ces grandeurs généralisées sont les solutions du système d'équations différentielles non linéaires obtenu par la modélisation proposée. Le calcul de la valeur de cette résultante peut donc être envisagé en tant que post-traitement de la résolution du système issu de l'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle modifiée.

A l'aide des quatre relations 7.43, 7.44, 7.45 et 7.46, on peut donner l'expression de \underline{R}^c en fonction des paramètres cinématiques précédemment introduits :

$$\underline{R}^c(X_1) = b E_p^c \left\{ \underline{\xi}^c \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} + \frac{1}{E_p^c} \mu \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} + \frac{1}{12} \left(\mu' \underline{t}^c - \psi^{c'} \mu \underline{n}^c \right) \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} - \frac{1}{E_p^c} \underline{\phi}_2^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \right\} \quad (7.47)$$

Moment des efforts intérieurs

Il faut tout d'abord déterminer le point auquel va être calculé ce moment. L'expression la plus simple va être obtenue pour le point repéré par $\underline{\phi}_0^c$. On a en effet :

$$M^c = \left\{ b \int_{H_c^-}^{H_c^+} \left[\underline{\phi}_a^c(X_1, X_3) - \underline{\phi}_0^c \right] \wedge \left(\underline{P}_a^c \cdot \underline{E}_1 \right) dX_3 \right\} \cdot \underline{e}_2$$

soit

$$M^c = b \left\{ \left[\underline{\phi}_1^c \wedge \left(\underline{P}_1^c \cdot \underline{E}_1 \right) \right] \frac{E_p^c}{12} + \left[\underline{\phi}_2^c \wedge \left(\underline{P}_2^c \cdot \underline{E}_1 \right) \right] \frac{E_p^c}{5} \right\} \cdot \underline{e}_2$$

Avec les relations 5.49 et 5.51 on trouve l'expression suivante (où X_1 est omise) de M^c en fonction des grandeurs généralisées :

$$M^c = b E_p \left\{ \left[\frac{1}{12} (\underline{\phi}_1^c \wedge \underline{\phi}_1^{c'}) \cdot e_2 + \frac{1}{5} (\underline{\phi}_2^c \wedge \underline{\phi}_2^{c'}) \cdot e_2 \right] \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} \right. \\ \left. \left[\frac{1}{12} (\underline{\phi}_1^c \wedge \underline{\phi}_0^{c'}) \cdot e_2 - \frac{1}{30} (\underline{\phi}_1^c \wedge \underline{\phi}_2^{c'}) \cdot e_2 - \frac{1}{30} (\underline{\phi}_2^c \wedge \underline{\phi}_1^{c'}) \cdot e_2 \right] \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{E_p^c} (\underline{\phi}_1^c \wedge \underline{\phi}_2^c) \cdot e_2 \right] \left(\underline{S}_0^c \right)_{31} \right\}$$

A l'aide des quatre relations 7.43, 7.44, 7.45 et 7.46, on trouve alors l'expression de M^c en fonction des paramètres cinématiques que nous avons introduits pour caractériser la cinématique de gauchissement :

$$M^c = b E_p^c \left\{ \left[-\frac{1}{12} \mu \psi^{c'} - \frac{1}{5} \rho^c (\psi^{c'} \rho^c + \varepsilon^{c'}) + \frac{1}{5} \varepsilon^c (\rho^{c'} - \psi^{c'} \varepsilon^c) \right] \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{12} \mu \xi_n - \frac{1}{30} \mu (\rho^{c'} - \psi^{c'} \varepsilon^c) + \frac{1}{30} (\rho^c \mu^{c'} + \mu^c \varepsilon^c \psi^{c'}) \right] \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \right. \\ \left. - \frac{1}{E_p^c} \mu^c \rho^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} \right\} \quad (7.48)$$

7.2.3 Efforts possédant un sens physique à l'intérieur de chaque couche

On souhaite maintenant étendre la notion d'effort normal et d'effort tranchant, apparus précédemment dans la théorie de Timoshenko, au cas d'une section gauchie de la couche c . On veut définir ces notions par projection de la résultante des efforts extérieurs s'appliquant sur la section suivant des directions privilégiées de la configuration déformée qui sont définies à l'aide des transformations généralisées. L'idée du post-traitement évoquée pour la résultante reste donc la même pour ses projections.

Notion d'effort normal à une surface gauchie

D'après la figure 7.2.1, une extension naturelle de la notion d'effort normal défini pour la cinématique de Timoshenko est obtenue par projection de la résultante des efforts extérieurs suivant la direction \underline{n}^c définie à partir de $\underline{\phi}_1^{c'}$ suivant 7.42. L'effort normal moyen à la section gauchie, noté N^c , est donc défini par :

$$N^c(X_1) = \underline{R}^c(X_1) \cdot \underline{n}^c(X_1)$$

Son expression est donnée en fonction des paramètres cinématiques par les relations 7.47 et 7.42. On obtient directement le résultat suivant où la dépendance en X_1 est volontairement

omise :

$$N^c = b E_p^c \left\{ \xi_n^c \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} - \frac{1}{12} \psi^{c'} \mu \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} - \frac{1}{E_p^c} \rho^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \right\}$$

Notion d'effort tranchant sur une surface gauchie

L'effort tranchant moyen s'exerçant sur la surface gauchie dans la couche c , noté, Q^c est lui défini par la projection de la résultante \underline{R}^c suivant la direction \underline{t}^c :

$$Q^c(X_1) = \underline{R}^c(X_1) \cdot \underline{t}^c(X_1)$$

avec \underline{t}^c défini à partir de $\underline{\phi}_1^c$ en 7.41. Les relations 7.47 et 7.41 permettent d'accéder à l'expression suivante de Q^c en fonction des paramètres cinématiques :

$$Q^c = b E_p^c \left\{ \xi_t^c \left(\underline{S}_0^c \right)_{11} + \frac{1}{E_p^c} \mu \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} + \frac{1}{12} \mu^{c'} \left(\underline{S}_1^c \right)_{11} - \frac{1}{E_p^c} \varepsilon^c \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \right\}$$

7.2.4 Contraintes possédant un sens physique à l'interface

Il paraît judicieux dans l'étude d'une structure multicouches de tirer du modèle retenu une information concernant les phénomènes d'interfaces. Le choix des valeurs exactes des transformations aux interfaces comme transformations généralisées a été motivé par ce souci. Les définitions de contraintes d'interfaces vont maintenant être explicitées en fonction des transformations généralisées.

L'idée est de projeter le vecteur contrainte défini à l'interface suivant deux directions définies par les transformations d'interfaces.

Transformation d'une surface élémentaire sur l'interface $(c, c+1)$

Pour ce faire, nous allons tout d'abord considérer une facette de la configuration de référence située à l'interface $(c, c+1)$ et notée $\underline{dA} = dA \underline{E}_3$. Cette facette a pour image par la transformation approchée $\underline{\phi}_a$ une facette de la configuration courante $\underline{da} = da \underline{n}^{c,c+1}$ définie à partir de $\underline{\phi}_a$ et \underline{dA} par :

$$\left(\frac{da}{dA} \right)_{|X_3=H_3^c} \underline{n}^{c,c+1} = J \left[\left(\underline{F}_a^c \right)^{-T} \cdot \underline{E}_3 \right]_{|X_3=H_3^c} \quad (7.49)$$

Explicitons le terme $\left(\underline{F}_a^c \right)^{-T}$ sous forme matricielle. On a tout d'abord :

$$\left[\underline{F}_a^c \right] = \begin{bmatrix} \left(\underline{\phi}_a \right)_{1,1} & \left(\underline{\phi}_a \right)_{1,3} \\ \left(\underline{\phi}_a \right)_{3,1} & \left(\underline{\phi}_a \right)_{3,3} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$J \left[\left(\underline{\underline{F}}^c \right)^{-T} \right] = \begin{bmatrix} \left(\underline{\phi}_a^c \right)_{3,3} & - \left(\underline{\phi}_a^c \right)_{3,1} \\ - \left(\underline{\phi}_a^c \right)_{1,3} & \left(\underline{\phi}_a^c \right)_{1,1} \end{bmatrix}$$

En notant toujours ' la dérivation par rapport à la variable d'espace X_1 qui est omise, on trouve donc :

$$J \left(\underline{\underline{F}}^c \right)^{-T} \cdot \underline{E}_3 = - \left(\underline{\phi}_a^c \right)'_3 \underline{e}_1 + \left(\underline{\phi}_a^c \right)'_1 \underline{e}_3$$

qui donne en se plaçant en $X_3 = H_+^c$:

$$J \left(\underline{\underline{F}}^c \right)^{-T} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{E}_3 = - \phi_3^{c,c+1'} \underline{e}_1 + \phi_1^{c,c+1'} \underline{e}_3 \quad (7.50)$$

En prenant la norme de la relation 7.49 et en y injectant 7.50, on trouve donc :

$$\left(\frac{da}{dA} \right) \Big|_{X_3=H_+^c} = \left\| \underline{\phi}^{c,c+1'} \right\| \quad (7.51)$$

Or, par définition :

$$\underline{P} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{E}_3 = \underline{\sigma} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{n}^{c,c+1} \left(\frac{da}{dA} \right) \Big|_{X_3=H_+^c}$$

qui, avec 7.51 conduit à :

$$\underline{P} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{E}_3 = \underline{\sigma} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{n}^{c,c+1} \left\| \underline{\phi}^{c,c+1'} \right\|$$

On trouve donc finalement :

$$\underline{P} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{E}_3 \frac{1}{\left\| \underline{\phi}^{c,c+1'} \right\|} = \underline{\sigma} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{n}^{c,c+1}$$

Contrainte d'arrachement à l'interface $(c, c+1)$

Compte-tenu de 7.50 et 7.51, la relation 7.49 conduit à l'expression suivante de $\underline{n}^{c,c+1}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$:

$$\underline{n}^{c,c+1} = \frac{1}{\left\| \underline{\phi}^{c,c+1'} \right\|} \left\{ - \left(\underline{\phi}_a^c \right)'_3 \underline{e}_1 + \left(\underline{\phi}_a^c \right)'_1 \underline{e}_3 \right\}$$

On définit alors une contrainte d'arrachement, $\nu^{c,c+1}$, sur l'interface $(c, c+1) \forall c \in [1, NC-1]$ comme projection du vecteur contrainte défini sur l'interface considéré suivant la direction $\underline{n}^{c,c+1}$:

$$\nu^{c,c+1} = \left\{ \underline{\sigma} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{n}^{c,c+1} \right\} \cdot \underline{n}^{c,c+1} = \left\{ \underline{P} \Big|_{X_3=H_+^c} \cdot \underline{E}_3 \frac{1}{\left\| \underline{\phi}^{c,c+1'} \right\|^2} \right\} \cdot \left(\underline{\phi}^{c,c+1'} \wedge \underline{e}_2 \right) \quad (7.52)$$

Les relations 5.48, 5.50, 5.52 et 5.54 permettent d'exploiter la relation précédente et d'obtenir l'expression de $\nu^{c,c+1}$ en fonction des contraintes généralisées :

$$\begin{aligned} \nu^{c,c+1} = & \frac{1}{\|\underline{\phi}^{c,c+1'}\|^2} \left\{ \left[\left(\underline{\phi}_0^{c'} + \frac{1}{2}\underline{\phi}_1^{c'} - \underline{\phi}_2^{c'} \right) \wedge \underline{\phi}^{c,c+1'} \right] \cdot \underline{e}_2 \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} \right. \\ & + \frac{1}{E_p^c} \left[\left(\underline{\phi}_1^c - 6\underline{\phi}_2^c \right) \wedge \underline{\phi}^{c,c+1'} \right] \cdot \underline{e}_2 \left(\underline{S}_0^c \right)_{33} \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\underline{\phi}_0^{c'} + \frac{1}{2}\underline{\phi}_1^{c'} - \underline{\phi}_2^{c'} \right) \wedge \underline{\phi}^{c,c+1'} \right] \cdot \underline{e}_2 \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{E_p^c} \left[\left(\underline{\phi}_1^c - 6\underline{\phi}_2^c \right) \wedge \underline{\phi}^{c,c+1'} \right] \cdot \underline{e}_2 \left(\underline{S}_1^c \right)_{33} \right\} \end{aligned}$$

Contrainte de cisaillement à l'interface

La direction tangente à la facette dans la configuration déformée, notée $\underline{t}^{c,c+1}$ est définie à partir de $\underline{n}^{c,c+1}$ par :

$$\underline{t}^{c,c+1} = \underline{n}^{c,c+1} \wedge \underline{e}_2$$

qui conduit à la définition :

$$\underline{t}^{c,c+1} = \frac{\underline{\phi}^{c,c+1'}}{\|\underline{\phi}^{c,c+1'}\|}$$

On définit alors la contrainte de cisaillement $\tau^{c,c+1}$ sur l'interface $(c, c+1) \forall c \in [1, NC-1]$ comme projection du vecteur contrainte défini sur l'interface considéré suivant la direction $\underline{t}^{c,c+1}$:

$$\tau^{c,c+1} = \left\{ \underline{\sigma}_{|X_3=H_+^c} \cdot \underline{n}^{c,c+1} \right\} \cdot \underline{t}^{c,c+1} = \left\{ \underline{P}_{|X_3=H_+^c} \cdot \underline{E}_3 \frac{1}{\|\underline{\phi}^{c,c+1'}\|^2} \right\} \cdot \underline{\phi}^{c,c+1'} \quad (7.53)$$

Les relations 5.48, 5.50, 5.52 et 5.54 permettent d'exploiter la relation précédente et d'obtenir l'expression de $\tau^{c,c+1}$ en fonction des contraintes généralisées :

$$\begin{aligned} \tau^{c,c+1} = & \frac{1}{\|\underline{\phi}^{c,c+1'}\|^2} \left\{ \left[\left(\underline{\phi}_0^{c'} + \frac{1}{2}\underline{\phi}_1^{c'} - \underline{\phi}_2^{c'} \right) \cdot \right] \left(\underline{S}_0^c \right)_{13} \right. \\ & + \frac{1}{E_p^c} \left[\left(\underline{\phi}_1^c - 6\underline{\phi}_2^c \right) \cdot \underline{\phi}^{c,c+1'} \right] \left(\underline{S}_0^c \right)_{33} \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\underline{\phi}_0^{c'} + \frac{1}{2}\underline{\phi}_1^{c'} - \underline{\phi}_2^{c'} \right) \cdot \underline{\phi}^{c,c+1'} \right] \left(\underline{S}_1^c \right)_{13} \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{E_p^c} \left[\left(\underline{\phi}_1^c - 6\underline{\phi}_2^c \right) \cdot \underline{\phi}^{c,c+1'} \right] \left(\underline{S}_1^c \right)_{33} \right\} \end{aligned}$$

Conclusion

Le modèle proposé permet de définir à partir des variables généralisées, des efforts possédant un sens physique direct sur la configuration déformée.

Par l'injection d'une loi de comportement tridimensionnelle linéaire dans les définitions précédentes, on peut proposer une loi de comportement reliant ces efforts et des déformations possédant elles aussi un sens physique direct.

Dans le cas d'une cinématique de type Timoshenko, le comportement proposé par Simo [Simo 82] n'est qu'un cas particulier du comportement proposé, restreint au cas des petites déformations. Le modèle peut en effet prendre en compte des cas de grandes déformations et en particulier de grandes courbures qui présente un intérêt pratique évident.

La démarche présentée de construction d'une loi de comportement formulées en variables possédant un sens physique possède de plus l'intérêt de pouvoir prendre en compte :

- le cas d'un multicouche.*
- le cas d'une cinématique de gauchissement.*
- le cas d'un comportement tridimensionnel non linéaire.*

Troisième partie

Proposition de résolution numérique du modèle

Chapitre 8

Réécriture de la fonctionnelle

Les équations du modèle ont été établies dans la partie précédente. L'un des intérêts de cette modélisation est de ramener le problème bidimensionnel à un problème uniaxial. L'ensemble des équations du modèle constitue donc un système d'équations différentielles non linéaires. Du fait de la spécificité de cette modélisation, il ne semble pas possible d'intégrer la résolution numérique par éléments finis de ce modèle dans un code préexistant. L'ensemble des différentes étapes de résolution devront donc être réécrites.

La résolution numérique qui est proposée consiste à discrétiser la fonctionnelle mixte et à appliquer un algorithme permettant d'en rechercher un point stationnaire. Avant l'étape de discrétisation, il est nécessaire de réécrire la fonctionnelle à l'aide de notations plus adaptées à un traitement informatique. C'est cette réécriture avec notamment l'introduction d'un certain nombre de tableaux utilisés dans toute la suite qui est présentée dans ce chapitre.

8.1 Forme initiale de la fonctionnelle utilisée

La fonctionnelle mixte modifiée par l'introduction des approximations retenues qui a servi à l'établissement des équations du modèle a été donnée en 5.75.

Cependant, une approche numérique du problème va nous permettre d'imposer les conditions aux limites en transformations en $X_1 = 0$. Si nous reprenons le principe mixte utilisé dans la modélisation en nous plaçant dans un espace de transformations généralisées Φ vérifiant les conditions aux limites en transformations en $X_1 = 0$, la fonctionnelle mixte possède alors

l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(\Phi, S) = & \int_{[0,L]} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \left[\underline{S}_0^c(X_1) : \underline{K} : \underline{S}_0^c(X_1) + \frac{1}{12} \left(\underline{S}_1^c(X_1) : \underline{K} : \underline{S}_1^c(X_1) \right) \right] \right\} dX_1 \\
& + \frac{1}{2} \int_{[0,L]} \left\{ \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \left[\underline{S}_0^c(X_1) : \underline{C}_0^c(X_1) + \frac{1}{12} \underline{S}_1^c(X_1) : \underline{C}_1^c(X_1) \right] \right\} dX_1 \\
& - \frac{1}{2} \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \int_{[0,L]} \underline{S}_0^c(X_1) : \underline{1} dX_1 \\
& - \sum_{c=1}^{NC} E_p^{cT^d} \cdot \underline{\phi}_0(X_1 = L)
\end{aligned} \tag{8.1}$$

On a fait apparaître dans l'expression de \tilde{J} les coefficients \underline{C}_0^c et \underline{C}_1^c du développement sur la base \mathcal{B}^c du tenseur des dilatations \underline{C} . Le tenseur \underline{C} s'exprime par définition à l'aide de \underline{F} par la relation :

$$\underline{C} = \underline{F}^T \cdot \underline{F}$$

on déduit donc de 5.27 que :

$$\underline{C}_0 = \underline{F}_0^T \cdot \underline{F}_0 + \frac{1}{2} \underline{F}_1^T \cdot \underline{F}_1 + \frac{2}{5} \underline{F}_2^T \cdot \underline{F}_2 \tag{8.2}$$

$$\underline{C}_1 = \underline{F}_0^T \cdot \underline{F}_1 + \underline{F}_1^T \cdot \underline{F}_0 \tag{8.3}$$

8.2 Introduction des nouvelles notations

On cherche à stocker les différentes variables du modèle dans des tableaux. Nous commencerons donc par nous placer au niveau d'une couche $c \in [1, NC]$. Au niveau de cette couche les inconnues généralisée vont être stockées respectivement dans un vecteur des transformations généralisées et un vecteur des contraintes généralisées. Nous allons donc être amenés à définir un certain nombre de tableaux permettant d'exprimer les différents termes de \tilde{J} en fonction des vecteurs des contraintes généralisées, des vecteurs des transformations généralisées et de leurs dérivées.

8.2.1 Cinématique sur la couche c

Vecteur des transformations généralisées sur la couche c

Sur la couche $c \in [1, NC]$, le vecteur noté $\{\phi^c\}$, regroupe l'ensemble des transformations généralisées caractérisant la transformation approchée pour la couche considérée en les

ordonnant comme suit :

$$\{\phi_j^c\}_{j \in [1,6]}^T = \left\{ \phi_1^{c-1,c} \quad \phi_3^{c-1,c} \quad \bar{\phi}_1^c \quad \bar{\phi}_3^c \quad \phi_1^{c,c+1} \quad \phi_3^{c,c+1} \right\}$$

Vecteur gradient de la transformation sur la couche c

Le modèle fait apparaître sur la couche c les tenseurs \underline{F}_0^c , \underline{F}_1^c et \underline{F}_2^c qui sont reliés à la cinématique généralisée par :

$$\underline{F}_0^c = \phi_0^{c'} \otimes \underline{E}_1 + \frac{1}{E_p} \phi_1^c \otimes \underline{E}_3 \quad (8.4)$$

$$\underline{F}_1^c = \phi_1^{c'} \otimes \underline{E}_1 - \frac{12}{E_p} \phi_2^c \otimes \underline{E}_3 \quad (8.5)$$

$$\underline{F}_2^c = \phi_2^{c'} \otimes \underline{E}_1 \quad (8.6)$$

On définit donc le vecteur gradient sur la couche c , noté $\{F^c\}$, réunissant l'ensemble des composantes de ses 3 tenseurs dans l'ordre suivant :

$$\{F^c\}^T = \left\{ \left(\underline{F}_0^c \right)_{11} \quad \left(\underline{F}_0^c \right)_{31} \quad \left(\underline{F}_0^c \right)_{13} \quad \left(\underline{F}_0^c \right)_{33} \quad \left(\underline{F}_1^c \right)_{11} \quad \left(\underline{F}_1^c \right)_{13} \quad \left(\underline{F}_1^c \right)_{31} \quad \left(\underline{F}_1^c \right)_{33} \quad \left(\underline{F}_2^c \right)_{11} \quad \left(\underline{F}_2^c \right)_{31} \right\}$$

D'après 8.4 à 8.6, on peut donc exprimer $\{F^c\}$ en fonction de $\{\phi^c\}$ en introduisant les matrices $[G1]$ et $[G2]$ telles qu :

$$\forall k \in [1, 10] \text{ avec } j \in [1, 6] \quad F_k^c(X_1) = (G1)_{kj} \phi_j^{c'}(X_1) + \frac{1}{E_p^c} (G2)_{kj} \phi_j^c(X_1) \quad (8.7)$$

On vérifie que l'écriture de 8.7, compte-tenu des relations 8.4 à 8.6 conduit aux expressions suivantes de $[G1]$ et $[G2]$:

$$[G1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad [G2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -12 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur tenseur des dilatations sur la couche c

On a fait apparaître $\underline{\underline{C}}_0^c$ et $\underline{\underline{C}}_1^c$ dans l'expression de \tilde{J} . On définit donc également le vecteur tenseur des dilatations, noté $\{C^c\}$, regroupant les composantes des deux tenseurs $\underline{\underline{C}}_0^c$ et $\underline{\underline{C}}_1^c$ comme suit :

$$\begin{aligned} \{C^c\}^T &= \{C_j^c\}_{j \in [1,6]}^T \\ &= \left\{ \left(\underline{\underline{C}}_0^c \right)_{11} \quad \left(\underline{\underline{C}}_0^c \right)_{13} \quad \left(\underline{\underline{C}}_0^c \right)_{33} \quad \left(\underline{\underline{C}}_1^c \right)_{11} \quad \left(\underline{\underline{C}}_1^c \right)_{13} \quad \left(\underline{\underline{C}}_1^c \right)_{33} \right\} \end{aligned}$$

L'objectif est maintenant de relier le vecteur $\{C^c\}$ aux vecteurs $\{\phi^{c'}\}$ et $\{\phi^c\}$.

• Pour ce faire on écrit tout d'abord $\{C^c\}$ en fonction de $\{F^c\}$ en introduisant le tableau à 3 dimensions $[a_{ijk}]$ où $i \in [1,6]$, $(j,k) \in [1,10]^2$ tel que l'on ait en notations indicielles :

$$\forall i \in [1,6], \quad C_i^c = (a_{ijk} F_j^c) F_k^c \quad \text{avec } (j,k) \in [1,10]^2 \quad (8.8)$$

Afin d'identifier les composantes a_{ijk} ,

- On commence par identifier les composantes de la matrice $[a_{ijk} F_j^c]$ en écrivant sous forme matricielle la relation 8.8. La décomposition proposée ci-après est l'unique forme de $[a_{ijk} F_j^c]$ permettant de définir $[a_{ijk}]$ symétrique sur ses deux derniers indices.

$$[a_{ijk} F_j^c] = \begin{bmatrix} \left(\underline{F}_0^c \right)_{11} & \left(\underline{F}_0^c \right)_{31} & 0 & 0 & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{11} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{31} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \left(\underline{F}_{-2}^c \right)_{11} & \frac{1}{5} \left(\underline{F}_{-2}^c \right)_{31} \\ 0 & 0 & \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} & 0 & 0 & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} & 0 & 0 \\ \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} & \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{11} & \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{31} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{11} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{31} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{11} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{31} & 0 & 0 & a_{4j5} F_j^c & a_{4j6} F_j^c & 0 & 0 & -\frac{1}{30} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{11} & \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{31} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} & 0 & 0 & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{11} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{31} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} & a_{6j7} F_j^c & a_{6j8} F_j^c & -\frac{1}{30} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{13} & -\frac{1}{30} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{4j5} F_j^c = \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{11} - \frac{1}{30} \left(\underline{F}_{-2}^c \right)_{11} \\ a_{4j6} F_j^c = \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{31} - \frac{1}{30} \left(\underline{F}_{-2}^c \right)_{31} \\ a_{6j7} F_j^c = \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{11} - \frac{1}{30} \left(\underline{F}_{-2}^c \right)_{11} \\ a_{6j8} F_j^c = \frac{1}{12} \left(\underline{F}_{-1}^c \right)_{31} - \frac{1}{30} \left(\underline{F}_{-2}^c \right)_{31} \end{array} \right.$$

– On déduit alors de l'expression des coefficients de la matrice $[a_{ijk} F_j^c]$ les composantes du tenseur a_{ijk} présentant une symétrie sur les indices 2 et 3.

Ces composantes seront regroupées informatiquement dans un tableau à 3 dimensions $a[i, j, k]$ avec $i \in [1, 6]$ et $(j, k) \in [1, 10]^2$. Nous donnons ci-après le remplissage des composantes non nulles de ce tableau :

$a[1, 1, 1] = 1$	$a[2, 3, 3] = 1$	$a[3, 1, 3] = 1$	$a[4, 1, 5] = \frac{1}{12}$	$a[5, 3, 7] = \frac{1}{12}$	$a[6, 1, 7] = \frac{1}{12}$
$a[1, 2, 2] = 1$	$a[2, 4, 4] = 1$	$a[3, 2, 4] = 1$	$a[4, 2, 6] = \frac{1}{12}$	$a[5, 4, 8] = \frac{1}{12}$	$a[6, 2, 8] = \frac{1}{12}$
$a[1, 5, 5] = \frac{1}{12}$	$a[2, 7, 7] = \frac{1}{12}$	$a[3, 3, 1] = 1$	$a[4, 5, 1] = \frac{1}{12}$	$a[5, 7, 3] = \frac{1}{12}$	$a[6, 3, 5] = \frac{1}{12}$
$a[1, 6, 6] = \frac{1}{12}$	$a[2, 8, 8] = \frac{1}{12}$	$a[3, 4, 2] = 1$	$a[4, 5, 9] = -\frac{1}{30}$	$a[5, 8, 4] = \frac{1}{12}$	$a[6, 4, 6] = \frac{1}{12}$
$a[1, 9, 9] = \frac{1}{5}$		$a[3, 5, 7] = \frac{1}{12}$	$a[4, 6, 2] = \frac{1}{12}$		$a[6, 5, 3] = \frac{1}{12}$
$a[1, 10, 10] = \frac{1}{5}$		$a[3, 6, 8] = \frac{1}{12}$	$a[4, 6, 10] = -\frac{1}{30}$		$a[6, 6, 4] = \frac{1}{12}$
		$a[3, 7, 5] = \frac{1}{12}$	$a[4, 9, 5] = -\frac{1}{30}$		$a[6, 7, 1] = \frac{1}{12}$
		$a[3, 8, 6] = \frac{1}{12}$	$a[4, 10, 6] = -\frac{1}{30}$		$a[6, 7, 9] = -\frac{1}{30}$
					$a[6, 8, 2] = \frac{1}{12}$
					$a[6, 8, 10] = -\frac{1}{30}$
					$a[6, 9, 7] = -\frac{1}{30}$
					$a[6, 10, 8] = -\frac{1}{30}$

• En utilisant 8.7, on obtient alors l'expression cherchée de $\{C^c\}$ en fonction de $\{\phi^c\}$ et $\{\phi^{c'}\}$ et exprimée à l'aide de $[a_{ijk}]$, $[G1]$ et $[G2]$.

On a en effet :

$$\begin{aligned} C_i^c(X_1) &= a_{ijk} F_j^c(X_1) F_k^c(X_1) \\ &= a_{ijk} \left\{ [G1]_{jl} \phi_l^{c'}(X_1) + \frac{1}{E_p^c} [G2]_{kl} \phi_l^c(X_1) \right\} \left\{ [G1]_{km} \phi_m^{c'}(X_1) + \frac{1}{E_p^c} [G2]_{km} \phi_m^c(X_1) \right\} \end{aligned}$$

Pour $(i, l, m) \in [1, 6]^3$ on peut alors définir 3 autres tableaux à 3 dimensions $[b_{ilm}^1]$, $[b_{ilm}^2]$ et $[b_{ilm}^3]$ indépendants de la couche considérée tels que :

$$\begin{cases} b_{ilm}^1 &= a_{ijk} [G1]_{jl} [G1]_{km} \\ b_{ilm}^2 &= 2a_{ijk} [G1]_{jl} [G2]_{km} \\ b_{ilm}^3 &= a_{ijk} [G2]_{jl} [G2]_{km} \end{cases}$$

L'expression de $\{C^c\}$ en fonction de $\{\phi^c\}$ et $\{\phi^{c'}\}$ devient alors :

$$C_i^c(X_1) = b_{ilm}^1 \phi_l^{c'}(X_1) \phi_m^{c'}(X_1) + \frac{1}{E_p^c} b_{ilm}^2 \phi_l^{c'}(X_1) \phi_m^c(X_1) + \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{ilm}^3 \phi_l^c(X_1) \phi_m^c(X_1) \quad (8.9)$$

Vecteur des contraintes sur la couche c

Le vecteur contrainte sur la couche c , regroupe les 6 composantes des deux tenseurs symétriques $\underline{\underline{S}}_0^c$ et $\underline{\underline{S}}_1^c$:

$$\{S^c\}^T = \{S_j^c\}_{j \in [1,6]}^T = \left\{ \left(\underline{\underline{S}}_0^c \right)_{11} \quad \left(\underline{\underline{S}}_0^c \right)_{33} \quad \left(\underline{\underline{S}}_0^c \right)_{13} \quad \left(\underline{\underline{S}}_1^c \right)_{11} \quad \left(\underline{\underline{S}}_1^c \right)_{33} \quad \left(\underline{\underline{S}}_1^c \right)_{13} \right\}$$

8.3 Nouvelle expression de la fonctionnelle

On peut maintenant réécrire l'expression de la fonctionnelle mixte 8.1 en fonction de $\{S^c\}$, $\{\phi^c\}$ et $\{\phi^{c'}\}$. Afin de simplifier la présentation des calculs, nous scinderons \tilde{J} de la manière suivante.

$$\tilde{J} = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \tilde{J}_3 + \tilde{J}_4 \quad (8.10)$$

où les 4 quantités constituant l'expression de \tilde{J} sont telles que :

– Le terme \tilde{J}_1 a pour expression :

$$\tilde{J}_1 = -\frac{1}{2} \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \sum_{i,j=1}^6 \int_{[0,L]} S_i^c(X_1) [\mathbf{K}]_{ij} S_j^c(X_1) dX_1 \quad (8.11)$$

– Le terme \tilde{J}_2 a pour expression :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_2 = \frac{1}{2} \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \int_{[0,L]} \sum_{j=1}^6 \sum_{k,l=1}^8 \{ & b_{jmn}^1 S_j^c(X_1) \phi_m^{c'}(X_1) \phi_n^{c'}(X_1) \\ & + b_{jmn}^2 S_j^c(X_1) \phi_m^{c'}(X_1) \phi_n^c(X_1) \\ & + b_{jmn}^3 S_j^c(X_1) \phi_m^c(X_1) \phi_n^c(X_1) \} dX_1 \end{aligned} \quad (8.12)$$

– Le terme \tilde{J}_3 a pour expression :

$$\tilde{J}_3 = -\frac{1}{2} \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \int_{[0,L]} \{ S_1^c(X_1) + S_2^c(X_1) \} dX_1 \quad (8.13)$$

– Le terme \tilde{J}_4 a pour expression :

$$\tilde{J}_4 = -\sum_{c=1}^{NC} E_p^c \{ T_1^d \phi_3^c(X_1 = L) + T_3^d \phi_4^c(X_1 = L) \} \quad (8.14)$$

Chapitre 9

Discrétisation par éléments finis

Les développements de la méthode des éléments finis pour des problèmes de grandes transformations ont été et sont toujours très importants du fait de leurs applications pratiques. Citons pour les problèmes de coques [Taylor 81] et pour les problèmes plus spécifiques de poutres [Simo 86] et [Cariou 88].

Ces méthodes sont souvent incrémentales et reposent sur la discrétisation d'une formulation en déplacements écrite initialement sur la configuration de référence qui est ensuite éventuellement actualisée par les résultats intermédiaires des itérations.

La discrétisation de la fonctionnelle modifiée de notre modélisation va se traduire par les interpolations simultanées des contraintes généralisées et des transformations généralisées qui présentent l'avantage d'être unidimensionnelles. [Boot 87] a caractérisé l'utilisation d'éléments mixtes en élasticité linéaire. [Peseux 91] les utilisent, toujours en H.P.P mais pour l'étude de plaques multi-couches. Cependant d'autres auteurs comme [Gass 76] et [Noor 84] avait auparavant proposé leur utilisation pour la résolution de problèmes en grandes transformations.

Il est à retenir de ces études que l'efficacité de la discrétisation de formulations mixtes par éléments finis est fortement conditionnée par les degrés d'interpolations respectifs des contraintes et des champs cinématiques. Nous laisserons ici de côté ces considérations pour utiliser des fonctions d'interpolations linéaires et identiques pour les contraintes et les transformations généralisées : la présentation en est ainsi simplifiée et les développements ainsi réalisés feront apparaître que leurs adaptations à des interpolations de natures différentes et de d'ordres supérieurs ne présente pas de difficultés particulières.

9.1 Maillage unidimensionnel

La poutre est divisée en NE éléments unidimensionnels. On compte donc $(NE + 1)$ noeuds.

- L'indice $e \in [1, NE]$ repère le numéro global du e -ième noeud dont l'abscisse est notée X^e .
- Le e -ième élément est donc repéré par le segment $[X^e, X^{e+1}]$.

9.2 Interpolations

9.2.1 Fonctions d'interpolation

Comme nous venons ici de le mentionner, nous ne présenterons que le cas de fonctions d'interpolation linéaires sur chaque élément. Afin de simplifier les intégrations portant sur les fonctions d'interpolations, on réalise le passage d'un élément quelconque à l'élément de référence grâce au changement de variable de $[-1, 1]$ dans $[X^e, X^{e+1}]$:

$$X_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)X^e + \frac{1}{2}(1 + \xi)X^{e+1} \quad (9.1)$$

On a donc :

élément courant	élément de référence
$X_1 \in [X^e, X^{e+1}]$	$\xi \in [-1, 1]$
$N_1^e(X_1) = \frac{1}{L^e}(X^{e+1} - X_1)$	$\tilde{N}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$
$N_2^e(X_1) = \frac{1}{L^e}(X_1 - X^e)$	$\tilde{N}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$

On a donc en particulier les relations suivantes qui interviendront souvent dans la suite des

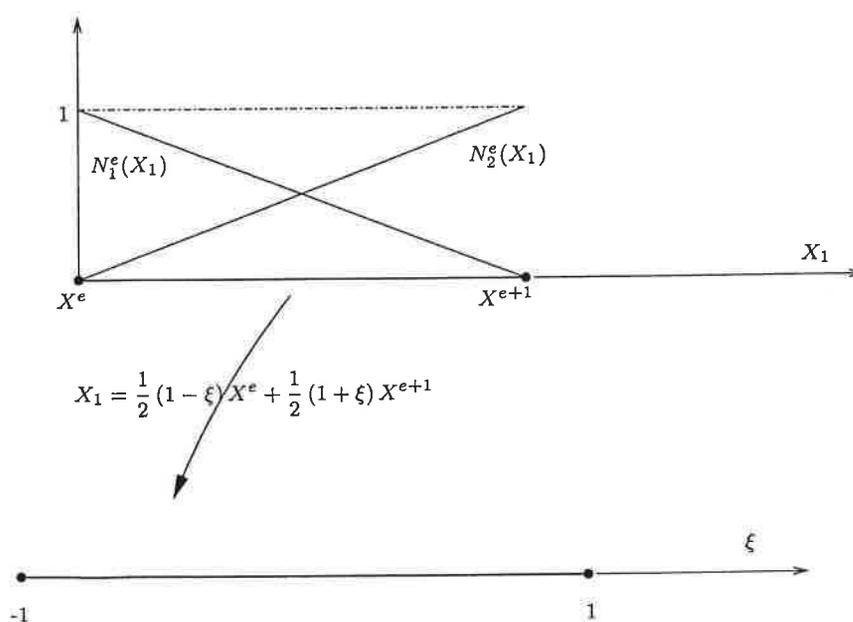


FIG. 9.1 – Interpolation sur le e-ième élément

développements :

$$\frac{dX_1}{d\xi} = \frac{L^e}{2} \quad (9.2)$$

$$\frac{d\tilde{N}_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} \quad (9.3)$$

$$\frac{d\tilde{N}_2}{d\xi} = \frac{1}{2} \quad (9.4)$$

9.2.2 Interpolation des composantes de $\{\phi^c\}$

$\forall c \in [1, NC], \forall j \in [1, 6], \forall e \in [1, NE]$:

$$\phi_j^c(X_1) = N_1^e(X_1)\phi_j^c(X^e) + N_2^e(X_1)\phi_j^c(X^{e+1}) \quad (9.5)$$

9.2.3 Interpolation des composantes de $\{S^c\}$

$\forall c \in [1, NC], \forall j \in [1, 6], \forall e \in [1, NE]$:

$$S_j^c(X_1) = N_1^e(X_1)S_j^c(X^e) + N_2^e(X_1)S_j^c(X^{e+1}) \quad (9.6)$$

9.3 Degrés de liberté

La méthode conduit en fait à l'utilisation d'un super-élément : le maillage est bien uni-dimensionnel mais en chaque noeuds sont définis des degrés de liberté relatifs à chacune des couches à cette abscisse.

L'ensemble des degrés de liberté pour la structure est regroupé dans le vecteur Z tel que

$$Z = \{Z_\gamma\}_{\gamma \in [1, (10NC+2)(NE+1)]} \quad (9.7)$$

numérotation globale

$\forall c \in [1, NC], \forall j \in [1, 6], \forall e \in [1, NE + 1]$: La position d'un degré de liberté au noeud $e \in [1, NE + 1]$ est donnée par les deux fonctions $\alpha(c, j, e)$ et $\beta(c, j, e)$ définies par :

$$\phi_j^c(X^e) = Z_{\alpha(e, c, j)}$$

$$S_j^c(X^e) = Z_{\beta(e, c, j)}$$

Elles ont donc pour expression :

$$\alpha(e, c, j) = (10NC + 2)(e - 1) + 4(c - 1) + j \quad (9.8)$$

$$\beta(e, c, j) = (10NC + 2)(e - 1) + 6(c - 1) + j \quad (9.9)$$

Le vecteur Z est l'inconnu du problème numérique.

9.4 Discrétisation de \tilde{J}

L'introduction des interpolations précédentes dans chacune des quantités définies de 8.11 à 8.14 constituant l'expression de \tilde{J} va nous permettre d'accéder à l'expression de la discrétisation de \tilde{J} notée \tilde{J}^d .

9.4.1 Discrétisation de \tilde{J}_1

Pour tout $c \in [1, NC]$, en introduisant l'interpolation 9.6 de S_j^c , $\forall j \in [1, 6]$, dans l'expression 8.11 de \tilde{J}_1 , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{[X^e, X^{e+1}]} S_i^c(X_1) [\overline{K}]_{ij} S_j^c(X_1) dX_1 &= I_{N_1 N_1}^e [\overline{S}]_{ij} Z_{\beta(e,c,i)} Z_{\beta(e,c,j)} \\ &+ 2I_{N_1 N_2}^e [\overline{S}]_{ij} Z_{\beta(e,c,i)} Z_{\beta(e+1,c,j)} \\ &+ I_{N_2 N_2}^e [\overline{S}]_{ij} Z_{\beta(e+1,c,i)} Z_{\beta(e+1,c,j)} \end{aligned}$$

où, pour $(\gamma, \delta) \in [1, 2]^2$, on a défini les quantités $I_{N_\gamma N_\delta}^e$ de la manière suivante :

$$I_{N_\gamma N_\delta}^e = \int_{[X^e, X^{e+1}]} N_\gamma^e(X_1) N_\delta^e(X_1) dX_1$$

Mais en introduisant le changement de variable 9.1 dans l'expression précédente, on trouve alors que $I_{N_\gamma N_\delta}^e$ s'écrit comme le produit de la longueur de l'élément considéré et d'une quantité indépendante de cet élément :

$$I_{N_\gamma N_\delta}^e = L^e \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{N}_\gamma^e(\xi) \tilde{N}_\delta^e(\xi) d\xi$$

L'expression discrétisée de \tilde{J}_1 , peut alors être condensée pour s'écrire :

$$\int_{[X^e, X^{e+1}]} S_i^c(X_1) [\overline{K}]_{ij} S_j^c(X_1) dX_1 = \sum_{i,j=1}^6 \sum_{\nu=1}^3 \frac{L^e}{2} K(\nu, e, i, j) Z_{\alpha(\nu,c,j)} Z_{\beta(\nu,e,c,j)}$$

où, pour $\nu \in [1, 3]$, on définit :

– les fonctions $\alpha(\nu, e, c, i)$ et $\beta(\nu, e, c, j)$ à l'aide des fonctions 9.8 et 9.9 comme suit :

$\alpha(1, e, c, i) = \beta(e, c, i)$	$\beta(1, e, c, j) = \beta(e, c, j)$
$\alpha(2, e, c, i) = \beta(e, c, i)$	$\beta(2, e, c, j) = \beta(e+1, c, j)$
$\alpha(3, e, c, i) = \beta(e+1, c, i)$	$\beta(3, e, c, j) = \beta(e+1, c, j)$

– la fonction $K(\nu, c, i, j)$, indépendante de l'élément $e \in [1, NE]$, et définie par :

$$K(1, e, c, i, j) = \bar{K}_{ij}^c \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) \tilde{N}_1(\xi) d\xi$$

$$K(2, e, c, i, j) = 2 \bar{K}_{ij}^c \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) \tilde{N}_2(\xi) d\xi$$

$$K(3, e, c, i, j) = \bar{K}_{ij}^c \int_{-1}^1 \tilde{N}_2(\xi) \tilde{N}_2(\xi) d\xi$$

9.4.2 Discrétisation de \tilde{J}_2

Pour $j \in [1, 6]$ et $c \in [1, NC]$, les interpolations 9.6 de S_j^c et 9.5 de ϕ_{ij}^c sont maintenant introduites dans l'expression 8.12 de \tilde{J}_2 . On obtient alors l'expression discrétisée de \tilde{J}_2 que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{[X^e, X^{e+1}]} S_j^c \left\{ b_{jkl}^1 \phi_k^{c'}(X_1) \phi_k^{c'}(X_1) + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \phi_i^{c'}(X_1) \phi_i^c(X_1) + \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \phi_k^c(X_1) \phi_i^c(X_1) \right\} dX_1 = \\ & \left\{ b_{jkl}^1 \frac{2}{L^e} I_{N_1 N_1' N_1'} + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 I_{N_1 N_1' N_1} + \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \frac{L^e}{2} I_{N_1 N_1 N_1} \right\} Z_{\beta(e,c,j)} Z_{\alpha(e,c,k)} Z_{\alpha(e,c,l)} \\ & + \left\{ 2b_{jkl}^1 \frac{2}{L^e} I_{N_1 N_1' N_2'} + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 I_{N_1 N_1' N_2} + 2 \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \frac{L^e}{2} I_{N_1 N_1 N_2} \right\} Z_{\beta(e,c,j)} Z_{\alpha(e,c,k)} Z_{\alpha(e+1,c,l)} \\ & + \frac{1}{E_p^c} \left\{ b_{jkl}^2 I_{N_1 N_2' N_1} \right\} Z_{\beta(e,c,j)} Z_{\alpha(e+1,c,k)} Z_{\alpha(e,c,l)} \\ & + \left\{ b_{jkl}^1 \frac{2}{L^e} I_{N_1 N_2' N_2'} + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 I_{N_1 N_2' N_2} + \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \frac{L^e}{2} I_{N_1 N_2 N_2} \right\} Z_{\beta(e,c,j)} Z_{\alpha(e+1,c,k)} Z_{\alpha(e+1,c,l)} \\ & + \left\{ b_{jkl}^1 \frac{2}{L^e} I_{N_2 N_1' N_1'} + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 I_{N_2 N_1' N_1} + \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \frac{L^e}{2} I_{N_2 N_1 N_1} \right\} Z_{\beta(e+1,c,j)} Z_{\alpha(e,c,k)} Z_{\alpha(e,c,l)} \\ & + \left\{ 2b_{jkl}^1 \frac{2}{L^e} I_{N_2 N_1' N_2'} + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 I_{N_2 N_1' N_2} + 2 \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \frac{L^e}{2} I_{N_2 N_1 N_2} \right\} Z_{\beta(e+1,c,j)} Z_{\alpha(e,c,l)} Z_{\alpha(e+1,c,l)} \\ & + \frac{1}{E_p^c} \left\{ b_{jkl}^2 I_{N_2 N_2' N_1} \right\} Z_{\beta(e+1,c,j)} Z_{\alpha(e+1,c,k)} Z_{\alpha(e,c,l)} \\ & + \left\{ b_{jkl}^1 \frac{2}{L^e} I_{N_2 N_2' N_2'} + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 I_{N_2 N_2' N_2} + \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \frac{L^e}{2} I_{N_2 N_2 N_2} \right\} Z_{\beta(e+1,c,j)} Z_{\alpha(e+1,c,k)} Z_{\alpha(e+1,c,l)} \end{aligned}$$

Cette dernière expression sera notée :

$$\tilde{J}_2^d \quad (9.10)$$

Pour $(\gamma, \delta, \mu) \in [1, 2]^3$, et $e \in [1, NE]$, on a défini dans l'expression précédente, les trois familles de grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{L^e}{2} I_{N_\gamma N_\delta N_\mu} &= \int_{[X^e, X^{e+1}]} N_\gamma^e(X_1) N_\delta^e(X_1) N_\mu^e(X_1) dX_1 \\ I_{N'_\gamma N_\delta N_\mu} &= \int_{[X^e, X^{e+1}]} N_\gamma^{e'}(X_1) N_\delta^e(X_1) N_\mu^e(X_1) dX_1 \\ \frac{2}{L^e} I_{N'_\gamma N'_\delta N_\mu} &= \int_{[X^e, X^{e+1}]} N_\gamma^{e'}(X_1) N_\delta^{e'}(X_1) N_\mu^e(X_1) dX_1 \end{aligned}$$

Le changement de variable 9.1, permet alors de faire apparaître simplement les dépendances de ces trois familles de grandeurs vis à vis de l'élément $e \in [1, NE]$. On a en effet :

$$\begin{aligned} \frac{L^e}{2} I_{N_\gamma N_\delta N_\mu} &= \frac{L^e}{2} \int_{-1}^1 \tilde{N}_\gamma(\xi) \tilde{N}_\delta(\xi) \tilde{N}_\mu(\xi) d\xi \\ I_{N'_\gamma N_\delta N_\mu} &= \int_{-1}^1 \frac{d\tilde{N}_\gamma}{d\xi} \tilde{N}_\delta(\xi) \tilde{N}_\mu(\xi) d\xi \\ \frac{2}{L^e} I_{N'_\gamma N'_\delta N_\mu} &= \frac{2}{L^e} \int_{-1}^1 \frac{d\tilde{N}_\gamma}{d\xi} \frac{d\tilde{N}_\delta}{d\xi} \tilde{N}_\mu(\xi) d\xi \end{aligned}$$

On peut alors, de la même façon que pour l'expression discrétisée de \tilde{J}_1 , condenser l'expression discrétisée précédente de \tilde{J}_2 en l'écrivant sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{[X^e, X^{e+1}]} S_j^c \left\{ b_{jkl}^1 \phi_k^{c'}(X_1) \phi_k^{c'}(X_1) + b_{jkl}^2 \phi_l^{c'}(X_1) \phi_l^c(X_1) + b_{jkl}^3 \phi_k^c(X_1) \phi_l^c(X_1) \right\} dX_1 = \\ &\sum_{j,k,l=1}^6 \sum_{\mu=1}^8 A(\mu, e, c, j, k, l) Z_{\gamma(\mu, e, c, j)} Z_{\delta(\mu, e, c, k)} Z_{\xi(\mu, e, c, l)} \end{aligned}$$

L'expression 9.10 permet d'identifier pour tous $\mu \in [1, 8]$, $e \in [1, NE]$, $c \in [1, NC]$ et $(j, k, l) \in [1, 6]^3$:

- d'une part, l'expression de la fonction $A(\mu, e, c, j, k, l)$
- d'autre part les expressions des fonctions $\gamma(\mu, e, c, j)$, $\delta(\mu, e, c, k)$ et $\xi(\mu, e, c, l)$

Expression de $A(\mu, e, c, j, k, l)$

$$\begin{aligned} A(1, e, c, j, k, l) &= \frac{2}{L^e} b_{jkl}^1 \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) d\xi + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 (\tilde{N}_1)^2(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{L^e}{2} \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \int_{-1}^1 (\tilde{N}_1)^3(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(2, e, c, j, k, l) &= \frac{4}{L^e} b_{jkl}^1 \left(-\frac{1}{4}\right) \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) d\xi + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) \tilde{N}_2(\xi) d\xi \\ &\quad + 2 \frac{L^e}{2} \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 (\tilde{N}_1)^2(\xi) \tilde{N}_2(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$A(3, e, c, j, k, l) = \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\tilde{N}_1)^2(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} A(4, e, c, j, k, l) &= \frac{2}{L^e} b_{jkl}^1 \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) d\xi + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) \tilde{N}_2(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{L^e}{2} \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 (\tilde{N}_2)^2(\xi) \tilde{N}_1(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(5, e, c, j, k, l) &= \frac{2}{L^e} b_{jkl}^1 \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \tilde{N}_2(\xi) d\xi + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) \tilde{N}_2(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{L^e}{2} \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 (\tilde{N}_1)^2(\xi) \tilde{N}_2(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(6, e, c, j, k, l) &= \frac{4}{L^e} b_{jkl}^1 \left(-\frac{1}{4}\right) \int_{-1}^1 \tilde{N}_2(\xi) d\xi + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \int_{-1}^1 (\tilde{N}_2)^2(\xi) d\xi \\ &\quad + 2 \frac{L^e}{2} \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 (\tilde{N}_2)^2(\xi) \tilde{N}_1(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$A(7, e, c, j, k, l) = \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{N}_1(\xi) \tilde{N}_2(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} A(8, e, c, j, k, l) &= \frac{2}{L^e} b_{jkl}^1 \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \tilde{N}_2(\xi) d\xi + \frac{1}{E_p^c} b_{jkl}^2 \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{1}{(E_p^c)^2} b_{jkl}^3 \int_{-1}^1 (\tilde{N}_2)^3(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Expressions de $\gamma(\mu, e, c, j)$, $\delta(\mu, e, c, k)$ et $\xi(\mu, e, c, l)$

Ces expressions sont données à partir des fonctions 9.8 et 9.9 comme suit :

μ	$\gamma(\mu, e, c, j)$	$\delta(\mu, e, c, k)$	$\xi(\mu, e, c, l)$
1	$\beta(e, c, j)$	$\alpha(e, c, k)$	$\alpha(e, c, l)$
2	$\beta(e, c, j)$	$\alpha(e, c, k)$	$\alpha(e+1, c, l)$
3	$\beta(e, c, j)$	$\alpha(e+1, c, k)$	$\alpha(e, c, l)$
4	$\beta(e, c, j)$	$\alpha(e+1, c, k)$	$\alpha(e+1, c, l)$
5	$\beta(e+1, c, j)$	$\alpha(e, c, k)$	$\alpha(e, c, l)$
6	$\beta(e+1, c, j)$	$\alpha(e, c, l)$	$\alpha(e+1, c, l)$
7	$\beta(e+1, c, j)$	$\alpha(e+1, c, k)$	$\alpha(e, c, l)$
8	$\beta(e+1, c, j)$	$\alpha(e+1, c, k)$	$\alpha(e+1, c, l)$

9.4.3 Discrétisation de \tilde{J}_3

L'introduction de l'interpolation 9.6 de S_j^c introduite dans l'expression 8.13 de \tilde{J}_3 conduit à l'expression discrétisée de \tilde{J}_3 suivante :

$$\int_{[X^e, X^{e+1}]} \{S_1^c(X_1) + S_2^c(X_1)\} dX_1 = I_{N_1^e} [Z_{\beta(e,c,1)} + Z_{\beta(e+1,c,1)}] \\ + I_{N_2^e} [Z_{\beta(e,c,2)} + Z_{\beta(e+1,c,2)}]$$

$$\forall \gamma \in [1, 2], \forall e \in [1, NE] : I_{N_\gamma^e} = \int_{[X^e, X^{e+1}]} N_\gamma^e(X_1) dX_1 = \int_{-1}^1 \tilde{N}_\gamma^e(\xi) d\xi$$

9.4.4 Discrétisation de \tilde{J}_4

L'introduction de l'interpolation 9.5 de $\phi_j^c(X_1 = L)$ introduite dans l'expression 8.14 de \tilde{J}_4 conduit à l'expression discrétisée de \tilde{J}_4 suivante :

$$\{T_1^d \phi_3^c(X_1 = L) + T_3^d \phi_4^c(X_1 = L)\} = \{T_1^d Z_{\alpha(NE+1,c,3)} + T_3^d Z_{\alpha(NE+1,c,4)}\}$$

Conclusion

L'expression discrétisée de la fonctionnelle s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}^d(\mathbf{Z}) = & -\frac{1}{2} \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \sum_{e=1}^{NE} \sum_{i,j=1}^6 \sum_{\nu=1}^3 K(\nu, e, i, j) Z_{\alpha(\nu, e, c, j)} Z_{\beta(\nu, e, c, j)} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \sum_{e=1}^{NE} \sum_{j,k,l=1}^6 \sum_{\mu=1}^8 A(\mu, e, j, k, l) Z_{\gamma(\mu, e, c, j)} Z_{\delta(\mu, e, c, k)} Z_{\xi(\mu, e, c, l)} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \sum_{e=1}^{NE} \{ I_{N_1^e} [Z_{\beta(e, c, 1)} + Z_{\beta(e+1, c, 1)}] + I_{N_2^e} [Z_{\beta(e, c, 2)} + Z_{\beta(e+1, c, 2)}] \} \\
 & - \sum_{c=1}^{NC} E_p^c \{ T_1^d Z_{\alpha(NE+1, c, 3)} + T_3^d Z_{\alpha(NE+1, c, 4)} \}
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Chapitre 10

Algorithme de résolution

10.1 L'algorithme de résolution

Principe de l'algorithme de Newton

Notons $Nddl = (10NC + 2)(NE + 1)$ le nombre de degrés de liberté pour l'ensemble de la structure.

On définit l'ensemble V tel que $Z \in V \equiv \mathbb{R}^{Nddl}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{J}^d : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\mapsto \tilde{J}^d(Z) \text{ explicitée en 9.11} \end{aligned}$$

Le problème discrétisé consiste à trouver un Z solution, noté Z^e , comme point stationnaire de \tilde{J}^d . On recherche donc $Z^e \in V$ tel que :

$$\tilde{J}_{,Z}^d(Z^e)[\delta Z] = 0 \quad \forall \delta Z \in V$$

L'expression 9.11 de \tilde{J}^d permet de poser $\forall Z \in V$ et $\forall \delta Z \in V$:

$$\tilde{J}_{,Z}^d(Z)[\delta Z] \equiv \Psi(Z)[\delta Z] - f(Z)[\delta Z]$$

où :

$$\begin{aligned} \Psi : V &\rightarrow \mathcal{L}(V; \mathbb{R}) \\ Z &\mapsto \Psi(Z) \equiv \tilde{J}_{,Z}^d(Z) \text{ non linéaire} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ désignant l'ensemble des formes linéaires sur V .

et $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ dépendant du chargement imposé. Le problème discrétisé s'écrit donc :

$$\text{Trouver } Z^e \in V / (\Psi(Z^e) - f)[\delta Z] = 0 \quad \forall \delta Z \in V$$

Compte-tenu de la non linéarité de Ψ , on recherche Z^e par une méthode incrémentale et itérative.

- Le chargement est découpé en incréments jusqu'à sa valeur finale.
- Sur chaque incrément une solution approchée au sens d'un critère préalablement choisi est recherchée.

- A l'incrément N , le chargement imposé est donné par f_N .

On note Z_N la solution approchée obtenue pour cet incrément de chargement.

Z_N vérifie donc :

$$\| \Psi(Z_N) - f_N \|_{\mathcal{L}(V; \mathbb{R})} \leq \epsilon \quad (10.1)$$

où l'opérateur $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(V; \mathbb{R})}$ désigne une norme à préciser sur $\mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ définissant le critère de convergence 10.1.

- A l'incrément $(N+1)$, le chargement passe de f_N à f_{N+1} et on recherche par itérations Z_{N+1} tel que

$$\| \Psi(Z_{N+1}) - f_{N+1} \| \leq \epsilon$$

A l'itération $\alpha \geq 0$ (avec $Z_{N+1}^0 = Z_N$) supposons connu Z_{N+1}^α tel que

$$\| \Psi(Z_{N+1}^\alpha) - f_{N+1} \| \not\leq \epsilon$$

A la $(\alpha+1)$ -ième itération de l'incrément $(N+1)$, on obtient alors $Z_{N+1}^{\alpha+1}$ en recherchant $\Delta^{\alpha+1} Z_N = Z_{N+1}^{\alpha+1} - Z_{N+1}^\alpha$ comme solution du système linéaire suivant :

$$\boxed{\Psi(Z_{N+1}^\alpha) + \Psi_{,Z}(Z_N) \cdot \Delta^{\alpha+1} Z_{N+1} = f_{N+1}} \quad (10.2)$$

où, en notant $\mathcal{L}_2(V; \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur V [Ciarlet 82] :

$$\Psi_{,Z}(Z_N) \in \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; \mathbb{R})) \equiv \mathcal{L}_2(V; \mathbb{R})$$

et donc

$$\Psi_{,Z}(Z_N) \cdot \Delta^{\alpha+1} Z_{N+1} = \Psi_{,Z}(Z_N) [\Delta^{\alpha+1} Z_{N+1}, \cdot] \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$$

Conclusion à la $(\alpha+1)$ -ième itération de l'incrément $(N+1)$

- Si $\| \Psi(Z_{N+1}^{\alpha+1}) - f_{N+1} \| \leq \epsilon$: on conclut alors que

$$\boxed{Z_{N+1}^{\alpha+1} = Z_{N+1}}$$

- Si $\| \Psi(Z_{N+1}^{\alpha+1}) - f_{N+1} \| \not\leq \epsilon$: On recherche alors $Z_{N+1}^{\alpha+2} = Z_{N+1}^{\alpha+1} + \Delta^{\alpha+2} Z_{N+1}$ avec :

$$\boxed{\Delta^{\alpha+2} Z_{N+1} / \Psi(Z_{N+1}^{\alpha+1}) + \Psi_{,Z}(Z_N) \cdot \Delta^{\alpha+2} Z_{N+1} = f_{N+1}}$$

10.2 Expression du système linéaire à résoudre à la $(\alpha+1)$ -ième itération de l'incrément $(N+1)$

Afin de construire le système linéaire 10.2 il faut trouver les expressions de $\Psi(Z_{N+1}^\alpha)$ et de $\Psi_{,Z}(Z_N) \cdot \Delta^{\alpha+1} Z_{N+1}$.

Par définition, on a :

$$\begin{cases} \Psi(Z_{N+1}^\alpha) & = \tilde{j}_Z^d(Z_{N+1}^\alpha)[\cdot] + f_{N+1}[\cdot] \\ \Psi_{,Z}(Z_N) \cdot \Delta^{\alpha+1} Z_{N+1} & = \tilde{j}_{ZZ}^d(Z_N)[\Delta^{\alpha+1} Z_{N+1}, \cdot] \end{cases}$$

d'écrire sous forme indicielle $\forall (i, j, k) \in [1, Nddl]^3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{J}_1^d = A_{ij} Z_j Z_j \\ \tilde{J}_2^d = B_{ijk} Z_k Z_j Z_i \\ \tilde{J}_3^d = C_i Z_i \\ \tilde{J}_4^d = f_i Z_i \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \text{ symétrique} \\ \mathbf{B} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \text{ non symétrique} \end{array} \right.$$

La fonctionnelle discrétisée s'écrit alors simplement :

$$\boxed{\tilde{J}^d = A_{ij} Z_j Z_j + B_{ijk} Z_k Z_j Z_i + C_i Z_i + f_i Z_i} \quad (10.3)$$

Expression de $\tilde{J}_Z^d(\mathbf{Z})$

On déduit alors simplement de 10.3 que la composante $i \in [1, Nddl]$ de $\tilde{J}_Z^d(\mathbf{Z}) \in \mathcal{L}(\mathbf{V}; \mathbb{R})$ s'écrit :

$$\boxed{\left\{ \tilde{J}_Z^d(\mathbf{Z}) \right\}_i = 2A_{ij} Z_j + (B_{kji} + B_{kij} + B_{ijk}) Z_j Z_k + C_i + f_i} \quad (10.4)$$

Expression de $\tilde{J}_{ZZ}^d(\mathbf{Z})$

On déduit également simplement de 10.3 que les composantes $(i, j) \in [1, Nddl]^2$ de $\tilde{J}_{ZZ}^d(\mathbf{Z}) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{V}; \mathbb{R})$ s'écrivent :

$$\boxed{\left[\tilde{J}_{ZZ}^d(\mathbf{Z}) \right]_{ij} = A_{ij} + (B_{kij} + B_{ikj} + B_{ijk}) Z_k} \quad (10.5)$$

Conclusion

Sur le $(N + 1)$ -ième incrément de chargement, à l'itération $(\alpha + 1)$:

- Le vecteur inconnu du système linéaire, est $\{(\Delta^{\alpha+1} \mathbf{Z}_{N+1})_i\}_{i=1}^{Nddl}$.
- La matrice de l'application linéaire tangente $\tilde{J}_{ZZ}^d(\mathbf{Z}_N) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{V}; \mathbb{R})$ dont les composantes sont données par 10.5 est constante sur tout l'incrément et constitue la matrice de notre système linéaire. Elle sera notée $[\mathbf{M}(\mathbf{Z}_N)]_T$.
- le second membre du système est constitué du vecteur des composantes de la forme linéaire sur \mathbf{V} , $\tilde{J}_{Z,Z}^d(\mathbf{Z}_{N+1}^{\alpha+1})$ qui sont données par 10.4

La stratégie de résolution du problème peut alors être schématisée ainsi :

- Initialisation de \underline{Z}^N

Boucle sur les Increments

- $[K_{\alpha\beta}^t(\underline{Z}^N)]$
- $\Delta^N \underline{V}$
- $\Delta^k \underline{Z} = 0$

Boucle sur les Iterations

- $\underline{b}(\Delta^k \underline{Z})$
- $[K_{\alpha\beta}^t(\underline{Z}^N)] \{ \Delta^{k+1} \underline{Z} \} = \{ \Delta^N \underline{V} \} - \{ \underline{b}(\Delta^{k-1} \underline{Z}) \}$
 $\longrightarrow \Delta^{k+1} \underline{Z}$
- $\Delta^k \underline{Z} = \Delta^{k+1} \underline{Z}$

Fin de boucle sur Iterations

- $\underline{Z}^N = \underline{Z}^N + \Delta^k \underline{Z}$

Fin de boucle sur Increments

Conclusions et Perspectives

La démarche proposée

Une démarche de construction d'un modèle de poutre multicouche en grandes transformations planes est présentée. Les restrictions à chacune des couches de la transformation et du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff sont approximées par des développements polynômiaux sur des bases de polynômes de Legendre. Ces polynômes de base sont définis pour chaque couche et dépendent de la variable d'espace X_3 associée à la direction d'empilement. Différents modèles peuvent être obtenus en jouant sur les degrés de ces développements.

Dans le modèle présenté ici, la cinématique est suffisamment riche pour prendre en compte un éventuel gauchissement des sections. Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est quand à lui choisi linéaire en X_3 afin de ne pas trop alourdir le modèle. Les transformations généralisées sont choisies et introduites dans les coefficients des développements réalisés sur la transformation. On introduit en particulier comme transformations généralisées la valeur exacte de la transformation sur les faces inférieures et supérieures de chaque couche et on impose la continuité de la transformation approchée au passage de chaque interface. Aucune hypothèse supplémentaire n'est formulée concernant l'approximation des contraintes. En particulier, ni les équations d'équilibre tridimensionnelles, ni les continuités des vecteurs contraintes aux interfaces ne sont a priori imposées.

Les approximations ainsi formulées sont ensuite introduites dans le principe variationnel mixte retenu. Les intégrations suivant les épaisseurs de chaque couche sont facilement opérées compte-tenu des propriétés d'orthogonalité des polynômes des bases. C'est l'écriture des équations de stationnarité dans les sous-espaces définis par les approximations de la fonctionnelle mixte utilisée qui fournit l'ensemble des équations du modèle formulées à l'aide des contraintes généralisées. Toutes les équations du modèle sont écrites. Elles constituent un système d'équations différentielles non linéaires qui reste relativement lourd. La différence entre le nombre de transformations généralisées et le nombre de contraintes généralisées semble poser problème au niveau des conditions aux limites en déplacements imposés : la condition n'est retrouvée que partiellement au point stationnaire. On peut cependant raisonnablement penser que les cas où le point stationnaire trouvé ne vérifie pas l'ensemble de la condition en déplacements imposés est pathologique.

Les contraintes généralisées possédant un sens physique

La méthode développée, adaptée de la modélisation multiparticulaire, nous a contraint à utiliser le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et par conséquent à manipuler

dans un premier temps des contraintes généralisées sans sens physique direct. Nous avons voulu palier ce handicap en définissant à l'aide des grandeurs généralisées du modèle des contraintes et efforts possédant un sens physique sur la configuration déformée.

Cette étude a donné lieu à deux développements :

- En dégénérant la cinématique du modèle en une cinématique de type Timoshenko, nous avons pu reconstruire les efforts généralisés de type résistance des matériaux introduit dans la première partie. En supposant un comportement tridimensionnel linéaire, nous avons alors reconstruit la loi de comportement généralisé écrite à l'aide de ces grandeurs possédant un sens physique. Ce comportement permet de retrouver en se plaçant sous l'hypothèse des petites déformations celui qui est communément postulé dans la littérature. Mais il permet plus généralement de prendre en compte des cas de grandes déformations.
- Nous avons proposé d'étendre les notions de contraintes généralisées R.D.M au cas d'une section gauchie et mis explicitement en évidence des déformations de gauchissement.

La proposition de résolution numérique

Malgré les approximations introduites, le système non linéaire obtenu reste relativement lourd et nécessite le recours à un traitement numérique. La mise en oeuvre numérique, du point de vue théorique est entièrement présentée et sert maintenant de base à une programmation. Le problème a été posé sous une forme adaptée à un stockage informatique et un algorithme de résolution a été proposé dans le détail.

Développements futurs

Plusieurs développements peuvent être envisagés, nous citerons les suivants :

- Il serait bien sûr souhaitable de réaliser la programmation prescrite dans la dernière partie de ce travail qui pour l'instant n'a pu être achevée faute de temps. Les résultats obtenus devront alors être comparés à ceux d'une étude bidimensionnelle d'un code aux éléments finis. Pour conclure il faudra arbitrer à partir des comparaisons des précisions et des temps de calculs.
- Le système obtenu reste relativement lourd à manipuler. Il semblerait donc intéressant de diminuer le degré des développements pour arriver à un modèle très simplifié dans lequel la cinématique n'est définie qu'à partir des transformations d'interfaces.
- Enfin, on peut songer à une extension de la démarche à des géométries plus complexes comme la plaque ou le cylindre.

Annexe

Annexe

Identification des variations des mesures de déformations duales de $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{S}}$.

Le travail des efforts intérieurs est définie par $T_{(i)} = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{gradu}}(\underline{x}) d\Omega_t$ où $grad$ désigne l'opérateur gradient par rapport aux variables d'espace eulériennes $(x_i)_{(i=1,3)}$ et $\underline{u}(\underline{x})$ le champs de déplacements eulérien. La variation de $T_{(i)}$ par rapport au déplacement \underline{u} dans la direction $\underline{\delta u}(\underline{x}) = \underline{\delta \bar{u}}(\underline{X})$ est notée $\delta_{\underline{u}} T_{(i)}$ et s'écrit donc :

$$\delta_{\underline{u}} T_{(i)} = D_{,\underline{u}} T_{(i)}(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) [\underline{\delta u}] = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{grad \delta u}} d\Omega_t$$

On va alors réécrire $\delta_{\underline{u}} T_{(i)}$ par changement de variable sur la configuration de référence afin de faire apparaître dans $\delta_{\underline{u}} T_{(i)}$ le produit doublement contracté de $\underline{\underline{P}}$ et de $\underline{\underline{S}}$ avec des grandeurs identifiées comme les variations de leur mesure de déformation duale.

On fait tout d'abord apparaître $\underline{\underline{P}}$ en utilisant 2.4 comme suit :

$$\begin{aligned} \delta_{\underline{u}} T_{(i)} &= \int_{\Omega_0} J \underline{\underline{\sigma}} : \left(\underline{\underline{\nabla \delta \bar{u}}} \cdot \underline{\underline{\phi}}^{-1} \right) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\nabla \delta \bar{u}}}^T d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}} : \delta \underline{\underline{\nabla \phi}}^T d\Omega_0 \end{aligned}$$

or par définition on a :

$$\delta \left(\underline{\underline{\nabla \phi}}^T \right) = D_{,\underline{\phi}} \underline{\underline{\nabla \phi}}^T(\underline{\phi}) [\underline{\delta \bar{u}}] = \frac{d}{d\lambda} \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\phi} + \lambda \underline{\delta \bar{u}}) \Big|_{\lambda=0} = \underline{\underline{\nabla \delta \bar{u}}}^T$$

La variation de travail virtuel exprimée sur la configuration de référence prend donc la première forme :

$$\delta_{\underline{u}} T_{(i)} = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{P}} : \delta \left(\underline{\underline{\nabla \phi}}^T \right) d\Omega_0 \quad (10.6)$$

On peut également faire apparaître $\underline{\underline{S}}$ dans $\delta_{\underline{u}}T_{(i)}$ par 2.6 comme suit :

$$\begin{aligned}\delta_{\underline{u}}T_{(i)} &= \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\nabla\phi}} \cdot \left(\underline{\underline{\nabla\phi^{-1}}} \cdot \underline{\underline{P}} \right) : \underline{\underline{\nabla\delta\bar{u}^T}} d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \underline{\underline{S}} : \left(\underline{\underline{\nabla\delta\bar{u}^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi}} \right) d\Omega_0\end{aligned}$$

Or, en notant $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur des dilatations défini par $\underline{\underline{\phi}}$ suivant :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{\nabla\phi^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi}} \quad (10.7)$$

on a :

$$\delta(\underline{\underline{C}}) = D_{,\underline{\underline{\phi}}}\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\phi}})[\delta\bar{u}] = \frac{d}{d\lambda}\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\phi}} + \lambda\delta\bar{u})|_{\lambda=0} = \underline{\underline{\nabla\delta\bar{u}^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\phi}} + \underline{\underline{\nabla\phi^T}} \cdot \underline{\underline{\nabla\delta\bar{u}}}$$

et compte-tenu de la symétrie de $\underline{\underline{S}}$, on trouve que $\delta_{\underline{u}}T_{(i)}$ s'écrit également :

$$\delta_{\underline{u}}T_{(i)} = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{S}} : \frac{1}{2}\delta(\underline{\underline{C}}) d\Omega_0 \quad (10.8)$$

Les variations des mesures de déformations duales des tenseurs des contraintes $\underline{\underline{S}}$ (respectivement $\underline{\underline{P}}$) sont donc $\delta(\underline{\underline{F}}^T)$ (respectivement $\frac{1}{2}\delta(\underline{\underline{C}})$).

Références bibliographiques

Bibliographie

- [Atluri 84] S.N. Atluri. *Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analysis of finitely deformed solids, with application to plates and shells - I theory*. Computers and structures, vol. 18, pages 93–116, 1984.
- [Boot 87] J.C. Boot. *The Uniqueness Characteristics of Mixed Finite Element Methods in Linear Elasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pages 927–944, 1987.
- [Boukamel 88] A. Boukamel. *Etude théorique de et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II, sept 1988.
- [Cariou 88] D. Cariou. *Calculs par éléments finis de structures poutres bidimensionnelles et tridimensionnelles en grands déplacements élastoplastiques sous sollicitations dynamiques*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1988.
- [Chabot 97] A. Chabot. *Analyse des efforts d'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4)*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts and Chaussées, 1997.
- [Ciarlet 82] P.G. Ciarlet & G. Geymonat. *Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible*. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, vol. 295, pages 423–426, oct 1982. Série II.
- [de Veubeke 72] B. Fraeijs de Veubeke. *A new variational principle for finite elastic displacements*. International Journal for Engineering Sciences, vol. 10, pages 745–763, 1972.
- [Dill 77] E.H. Dill. *The complementary energy principle in non linear elasticity*. Letters in applied and engineering sciences, vol. 5, pages 95–106, 1977.
- [Duvaut 90] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
- [Ehlacher 94] A. Ehlacher, J.F. CARON, A. Chabot & T. Naciri. *Analyse des efforts d'interface à l'aide d'une Modélisation Multiphasique des Matériaux Multicouches (M4)*. Comptes-rendus des 9èmes Journées Nationales sur les Composites, Saint -Etienne, 1994.
- [Ehrlacher 97] A. Ehrlacher. *Cours d'élasticité anisotrope*. Ecole Polytechnique, 1997.

- [Gass 76] N. Gass & B. Tabarrok. *Large deformation analysis of plates and cylindrical shells by a mixed finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 10, pages 731–746, 1976.
- [Imbert 90] J.F Imbert. *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues, 1990. Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
- [Kanok-Nukulchai 81] W. Kanok-Nukulchai & R. Taylor. *A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method*. Computer and Structures, vol. 13, pages 19–27, 1981.
- [Koiter 73] W.T Koiter. *On the principle of stationary complementary energy in the non linear theory of elasticity*. Journal of Applied Mathematics, 1973.
- [Lagarde 99a] L Lagarde, A Chabot, A Ehrlacher & F Lene. *A simplified model for large transformations solutions of multilayered composites*. 6th International Conference on composite engineering, 1999. Orlando (USA).
- [Lagarde 99b] L Lagarde, A Ehrlacher & F Lene. *Recherche d'un modèle simplifié de poutre multicouche en grandes transformations*. 14ème Congrès Français de Mécanique, 1999. Toulouse.
- [Levinson 65] M. Levinson. *The complementary energy theorem in finite elasticity*. Transaction of the A.S.M.E, pages 826– 828, Dec 1965.
- [Mori 97] A. Mori, P.J. Moss, A.J. Carr & N. Cooke. *Behaviour of laminated elastomeric bearings*. Structural Engineering and Mechanics, vol. 5, no. 4, pages 451–469, 1997.
- [Naciri 98] T. Naciri, A. Chabot & A. Ehrlacher. *Interlaminar stress analysis with a new Multiparticle Modelization of Multilayered Materials (M4)*. Computer Science and Technology, vol. 58, pages 337–343, 1998.
- [Noor 84] A.K. Noor, J.M. Peters & C.M. Andersen. *Mixed models and reduction techniques for large rotation non linear problems*. Journal of Computing Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 44, pages 64–89, 1984.
- [Novozhilov 58] V.V. Novozhilov. *Theory of elasticity*. Leningrad Sudpromgiz, 1958. English Version, Pergamon Press 1961.
- [Peseux 91] B. Peseux & S. Dubigeon. *Equivalent Homogeneous Finite Element for Composite Materials via Reissner Principle. Part I : Finite Element for Plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 31, pages 1477–1495, 1991.
- [Reissner 50] E. Reissner. *On a Variational Theorem in Elasticity*. jmp, vol. 29, pages 90–95, 1950.
- [Reissner 72] E. Reissner. *On one dimensional finite-strain beam theory : the plane problem*. Journal for Applied Mathematics and Physics, vol. 23, pages 785–804, 1972.
- [Reissner 84] E. Reissner. *Formulation of variational theorems in geometrically non linear elasticity*. Journal for Engineering Mechanics, vol. 110, pages 1377–1390, 1984.

- [Rey 94] C. Rey. *Developpement d'algorithmes parallèles de résolution en calcul de structures hétérogènes : application au cas d'une butée acier-élastomère*. Thèse de Doctorat, E.N.S Cachan, 1994.
- [Salençon 89] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus*. Cours de l'Ecole Polytechnique, 1989. Tomes 1 et 2.
- [Seki 87] W. Seki, Y. Fukahori & Y. Iseda. *A large-deformation finite element analysis for multilayer elastomeric bearings*. Journal of Rubber Chemistry and Technology, vol. 60, no. 5, pages 856–869, nov-déc 1987.
- [Simo 82] J.C. Simo. *A consistent formulation of non linear theories of elastic beams and plates*. University of California, Berkeley, Calif., 1982. Rep. No. UCB/SESM-82/06.
- [Simo 84] J.C. Simo & J.M. Kelly. *The analysis of multilayer elastomeric bearings*. Transactions of the A.S.M.E, vol. 51, pages 45–50, June 1984.
- [Simo 86] J.C. Simo & L. Vu-Quoc. *A three-dimensional finite strain rod model. Part II : Computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 58, pages 79–116, 1986.
- [Stumpf 79] H. Stumpf. *The derivation of dual extremum and complementary stationary principles in geometrical non-linear shell theory*. Ing.-Arch., vol. 48, pages 221–237, 1979.
- [Tabarrok 80] R. Tabarrok & S. Dost. *Some variational formulations for large deformation analysis of plates*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 22, pages 279–288, 1980.
- [Tabarrok 88] R. Tabarrok & S. Dost. *Application of mixed variational principle to buckling analysis of circular cylinders*. Z.F. Angew. Math. und Mech., pages 131–137, 1988.
- [Taylor 81] R. Taylor & T.J.R. Hughes. *A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method*. Computers and Structures, vol. 13, pages 19–27, 1981.
- [Taylor 91] R. Taylor. *Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 85, pages 273–310, 1991.
- [Timoshenko 61] S.P. Timoshenko & J.M. Gere. *Theory of elastic stability*. Mac Graw Hill book company, 1961.
- [Truesdell 65] C. Truesdell & W. Noll. *The non linear field theories of mechanics*. Handbuch der Physik, vol. III, 1965. sect. 88.
- [Valid 86] R. Valid. *Finite rotation, variational principles and buckling in shell theory*. Proceedings of the Euromech. Colloquium 197, Jablonna, Poland, 1986. Lecture notes in engineering : Finite Rotations in Structural Mechanics.
- [Zubov 70] L.M. Zubov. *The stationary principle of complementary work in non linear theory of elasticity*. Journal for Applied Mathematics and Physics, vol. 34, pages 228–232, 1970.