



**HAL**  
open science

# Approche de la modélisation d'objets géologiques déformés : conception, structure logique et algorithmique, résultats

Mohamad Cheaito

► **To cite this version:**

Mohamad Cheaito. Approche de la modélisation d'objets géologiques déformés : conception, structure logique et algorithmique, résultats. Synthèse d'image et réalité virtuelle [cs.GR]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne; Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 1993. Français. NNT : 1993STET4026 . tel-00838753

**HAL Id: tel-00838753**

**<https://theses.hal.science/tel-00838753>**

Submitted on 26 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **THESE**

Présentée par

**Mohamad CHEAITO**

pour obtenir le titre de

## **DOCTEUR**

DE L'UNIVERSITE DE SAINT-ETIENNE  
ET DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

(Spécialité: Informatique, Image, Intelligence artificielle et algorithmique)

## **APPROCHE DE LA MODELISATION D'OBJETS GEOLOGIQUES DEFORMES**

Conception, structure logique et algorithmique, résultats.

Soutenue à SAINT-ETIENNE le 20 décembre 1993

### *composition du jury:*

Monsieur B. PEROCHE

Président

Monsieur G. BRONNER

Rapporteur

Monsieur D. VANDORPE

Rapporteur

Messieurs J. AZEMA

Examineurs

D. BONIJOLY

M. PERRIN



672507

**THESE**

Présentée par

**Mohamad CHEAITO**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

DE L'UNIVERSITE DE SAINT-ETIENNE

ET DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

(Spécialité: Informatique, Image, Intelligence artificielle et algorithmique)

**APPROCHE DE LA MODELISATION D'OBJETS  
GEOLOGIQUES DEFORMES**

Conception, structure logique et algorithmique, résultats.

Soutenue à SAINT-ETIENNE le 20 décembre 1993

*composition du jury:*

Monsieur B. PEROCHE

Monsieur G. BRONNER

Monsieur D. VANDORPE

Messieurs J. AZEMA

D. BONIJOLY

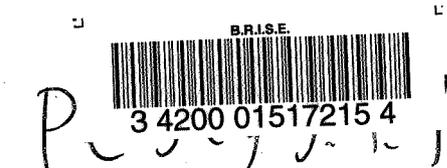
M. PERRIN

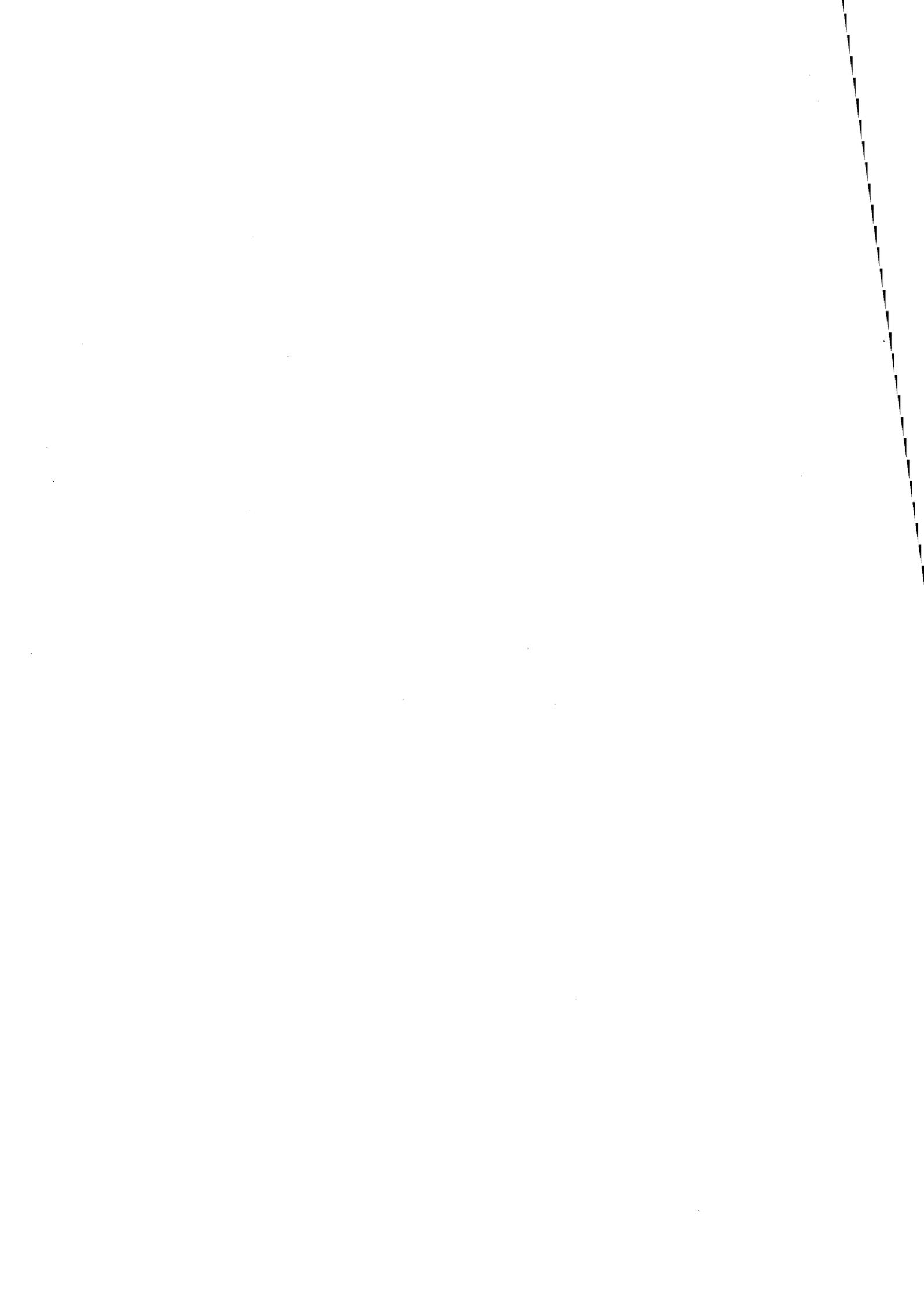
Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineurs







## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le professeur Bernard PEROCHE, directeur du département Informatique Appliquée de l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, qui a bien voulu m'accueillir dans la formation doctorale "Images" et qui a accepté de superviser la partie proprement informatique de ce travail, j'ai eu avec lui des discussions fructueuses qui ont largement contribué à déterminer le choix d'une structure de données adaptée au problème qui m'était posé.

Je dois l'essentiel de l'évolution et des résultats de mon travail à Monsieur le professeur Michel PERRIN, directeur de recherche à l'Ecole des Mines de Paris, je tiens à le remercier tout spécialement: son intérêt immédiat pour les difficultés rencontrés, son enthousiasme sans limite, son incroyable capacité à comprendre les problèmes et à trouver des solutions efficaces, sa grande patience, m'ont particulièrement impressionnés. Il m'a fait une grande confiance en m'invitant dans son groupe de recherche et en tenant compte de mes idées et remarques; je n'oublierai jamais le temps qu'il m'a consacré pour encadrer ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur le professeur Denis VANDORPE, de l'Université Claude Bernard Lyon I, et Monsieur Georges BRONNER, maître de conférence à l'Université de Marseille St-Jérôme, qui ont chacun dans leur spécialité accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie Monsieur Didier BONJOLY, du BRGM, pour sa participation au jury, pour les remarques qu'il a bien voulu faire sur les aspects géologiques de ce travail et pour l'appui qu'il a dû me fournir de la part du BRGM.

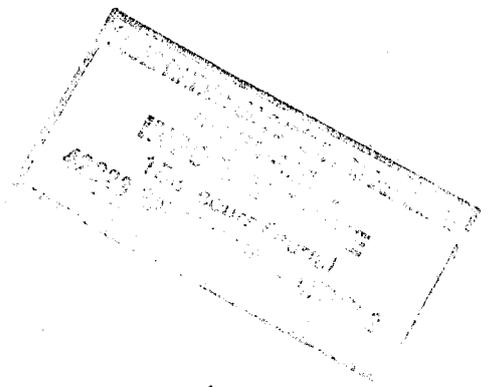
Je remercie encore Monsieur Jean AZEMA, maître de conférence de l'Université de Saint-Etienne, pour sa participation au jury.

Je voudrais remercier Monsieur le professeur Bernard BEAUDOIN, et Sabah MOSTEFAI qui ont accepté de fournir un exemple géologique réel illustré en Annexe de ce travail, et dont le traitement permet de situer l'intérêt de la démarche suivie.

J'exprime mes vifs remerciements à mon collègue de bureau, Jean Michel OLIVA, dont le support moral et linguistique m'a été précieux, à Dominique MICHELUCCI, et à Pascale ROUDIER, sur les discussions que nous avons eu lors de la définition de ce travail, ainsi qu'à tous les membres du CGGM de l'Ecole des Mines de Paris.

Je souhaite enfin remercier ma famille, et mes amis qui m'ont aidé à surmonter les multiples problèmes rencontrés lors de cette thèse.

Je soulignerai enfin que l'appui contractuel apporté par le BRGM et l'aide du CROUS ont permis que ce travail se déroule matériellement dans de bonnes conditions, ces organismes en soient remerciés.



## TABLE DES MATIERES

<b>AVERTISSEMENT AU LECTEUR</b>	1
<b>RESUME</b>	3
<b>ABSTRACT</b>	5
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	9

---

### **PREMIERE PARTIE: REFLEXION SUR LES MODELES GEOLOGIQUES.**

---

#### **CHAPITRE.1 : OBJETS GEOLOGIQUES ET MODELES CONSTRUITS PAR LES GEOLOGUES.**

1.1 Introduction	19
1.2 Les corps géologiques	20
- Corps exogènes	20
- Les corps endogènes	22
1.3- Déformations subies par les objets géologiques	27
- Généralités	27
- Déformations souples	28
- Déformations cassantes (failles)	35
- Déformation à grande échelle	38
1.4 Les outils de la description géologique	39
1.5 Interpolation et extrapolation des données géologiques, les modèles construits par les géologues	42

#### **CHAPITRE 2 : MODELISATION DE LA SCENE GEOLOGIQUE: REFLEXION SUR LA DEMARCHE.**

2.1 Généralités	47
2.2 Particularités concernant la modélisation géométrique d'une scène géologique	50
2.3 Modélisation réalisées antérieurement	52
- Modèles statiques (Exemple du logiciel GOCAD)	52

- Modèles dynamique(Exemple: LOCACE et POLYPLI)	58
2.4 Conclusion. Cahier des charges concernant une modélisation générationnelle fidèle	71

### **CHAPITRE 3 : LES ELEMENTS DE LA MODELISATION: OBJETS ET OPERATEURS.**

3.1 Propriétés géométriques de la "scène géologique" et des objets qui la compose	75
3.2 Caractéristiques géométriques des modèles représentatifs des objets	76
3.3 Contraintes géométriques sur les opérateurs	79
3.4 Opérateurs simulant des déformations. Exemple des transformations des types semblable (TTS)	81
- Définition mathématique d'une TTS	81
- Déformation d'un plan par une TTS	82
- Déformation de plans parallèles(création d'un pli semblable)	84
3.5 Caractéristiques des opérateurs de type ensembliste	88
3.6 Particularités géométriques liées à l'âge relatif des objets et des opérateurs	91

---

## **DEUXIEME PARTIE: CONSTRUCTION ET DEFORMATION D'UN CORPS GEOLOGIQUE DE FORME COMPLEXE.**

---

<b>INTRODUCTION: PROBLEME POSE ET DEMARCHE ADOPTEE.</b>	99
---	----

### **CHAPITRE.4 : INTERET ET INCONVENIENTS DES REPRESENTATIONS PAR FRONTIERES (B.rep)**

4.1 Définition. Généralités	107
4.2 Construction et manipulation d'objets grâce à une B.rep. Problème de la conservation de la validité	111
4.3 Manipulation par des opérateurs(compositions booléennes, TTS)	113
4.4 Complexité des opérations	115
4.5 Problème de la création d'objets représentés sous forme de B.rep	117
4.5 Conclusions: avantages et inconvénients de l'utilisation de structures de type B.rep	119

## **CHAPITRE.5 : QUELQUES SOLUTIONS A EXCLURE:**

**- STRUCTURES CONSTRUCTIVES.**

**- PARTITIONS A PRIORI DE L'ESPACE.**

5.1 Les structures constructives	123
5.2 Enumération spatiale	124
5.3 Représentation par tranches horizontales superposées	129
5.4 Arbre octal	130
- Avantages de la représentation	131
- Inconvénients	133
5.5 Un exemple de structure hybride: les arbres octaux mixtes	136

## **CHAPITRE.6 : INTERET D'UNE PARTITION DE L'ESPACE INTRINSEQUE A L'OBJET: STRUCTURE BSP CLASSIQUE ET SES LIMITES.**

6.1 Principe de la partition binaire de l'espace	143
6.2 Avantages des représentations de type BSP	149
6.3 Inconvénients	156

## **CHAPITRE.7 : DEFINITION D'UNE STRUCTURE HYBRIDE REPOUNDANT AUX OBJECTIFS FIXES LA "BSP MIXTE".**

7.1 Introduction	161
7.2 Définition de la "BSP mixte". Représentation des objets	162
7.3 Construction d'un arbre BSP mixte	169
7.4 Division de la structure par un plan séparateur. Notion de partiel	172
7.5 Déformation d'un objet par une ou plusieurs TTS	182
7.6 Application d'opérateurs ensemblistes	189
7.7 La visualisation	197
7.8 Problèmes liés aux approximations numériques	200
7.9 Conclusion	202

---

## **TROISIEME PARTIE: RESULTATS ET CONCLUSION.**

---

### **CHAPITRE.8 : RESULTATS, DISCUSSION CONCLUSION.**

8.1 Les objets de départ	207
8.2 Spécification d'un opérateur TTS	208
8.3 Exemples	211
8.4 Limites du travail effectué	219
8.5 Place du présent travail dans la perspective de la modélisation dynamique d'une scène géologique complète	222

<b>CONCLUSION GENERALE</b>	225
----------------------------	-----

<b>ANNEXE</b>	229
---------------	-----

<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	237
----------------------	-----





## AVERTISSEMENT AU LECTEUR

---

Comme son titre l'indique, le présent mémoire présente une réflexion sur l'application possible à la représentation d'objets "géologiques" d'un certain nombre de méthodes informatiques (modélisation solide, informatique graphique,...) couramment utilisées pour concevoir et visualiser des objets manufacturés. La géométrie des objets ou corps "géologiques" auxquels nous nous intéressons est fort différente et spécifique à de nombreux points de vue (forme des objets et de leurs frontières, relations avec les objets voisins etc ...), elle fait l'objet d'une discipline à part entière: la géologie structurale.

L'exposé qui suit se situe donc à l'interface entre des disciplines très différentes et s'adresse à des catégories de lecteurs également différents: géologues qui, nous l'espérons, pourront trouver quelques idées concernant une représentation possible des objets qui leur sont familiers, informaticiens pour qui les objets géologiques de par leurs spécificités peuvent poser des problèmes intéressants et nouveaux.

Touchant à des mondes entre lesquels peu de communications sont pour l'instant établies, l'exposé risque d'apparaître imparfait à de nombreux égards: les lecteurs informaticiens trouveront fastidieux ou schématiques un certain nombre de rappels de notions très classiques concernant la modélisation et trop sommaire l'exposé de notions de géologie considérées comme élémentaires par tout géologue. A l'inverse, le lecteur géologue risque de trouver obscurs des développements informatiques strictement indispensables.

Conscients que le texte présenté ne pouvait éviter complètement ces défauts, nous avons fait le choix de rappeler sommairement chaque fois que cela paraissait possible et nécessaire, des notions même élémentaires qui pouvaient ne pas être familières à au moins une catégorie de lecteurs potentiels. Il en résulte une présentation qui pourra paraître aux uns ou aux autres, selon les chapitres à la fois lourde et schématique. Nous prions le lecteur de bien vouloir nous en excuser.



## RESUME

---

Le présent travail prend place au sein d'une recherche d'ensemble sur la modélisation 3D des scènes géologiques. Son apport spécifique est le suivant:

1) une réflexion générale est menée sur la géométrie des principaux types de corps géologiques ainsi que sur la géométrie de l'ensemble de la "scène géologique". Nous montrons que ces géométries dépendent souvent étroitement des processus qui sont à l'origine de la formation des objets (altération supergène, érosion, sédimentation, intrusion ou extrusion de magma) ou qui les ont ultérieurement modifiés (déformations souples ou cassante, métamorphisme...). Nous montrons de plus, que l'appréhension de la géométrie de ces objets au vu des données disponibles (levés de terrain, données de sondage...), n'est généralement pas immédiate et est sous la dépendance d'une interprétation géologique qui est préalable à toute modélisation. Ainsi la modélisation informatique d'une scène géologique est le plus souvent un modèle de modèle.

2) une réflexion est également menée, au vu notamment des travaux réalisés antérieurement, sur les différents types de démarches qui peuvent guider la modélisation d'une scène géologique. Il y a, dans de nombreux cas, avantage à tenir compte de la spécificité des objets voire plus précisément des processus qui les engendrent (démarche "dynamique" ou "générationnelle"). Nous posons également le problème des relations que le modèle peut entretenir avec les données ( modèles "exacts" ou au contraire analogues susceptibles d'être seulement des outils d'interprétation). Nous soulignons l'intérêt d'une méthode par aller et retour pour construire des modèles génératifs fidèles.

3) à la suite de cette réflexion d'ensemble, nous centrons la réflexion sur un problème particulier: celui de la modélisation d'objets de forme quelconque susceptibles d'être déformés ou d'être composés entre eux (comme cela s'observe dans la nature pour des intrusions granitiques digérant partiellement les terrains qu'elles intrudent).

Nous montrons que la question essentielle sous jacente à une modélisation est celle du choix d'une structure de données répondant à des

exigences précises: exactitude, facilité de définition des objets représentés, validité de ces objets, aptitude à être manipulée à l'aide d'opérateurs booléens simulant des relations d'intrusion avec digestion de l'encaissant et à l'aide d'opérateurs de type TTS simulant de déformations par plis et failles.

4) après avoir présenté l'intérêt mais également les difficultés de mise en oeuvre de structure représentant les objets par leurs frontières (B.rep) et après avoir exclu certaines représentations classiques (structures constructives et partitions a priori de l'espace), nous soulignons l'intérêt que présentent les partitions binaires de l'espace (BSP). Celles-ci ont en effet l'avantage de reposer sur une structuration de l'espace intrinsèque à l'objet (et donc invariante dans les déplacements et plus généralement dans les transformations affines). Compte tenu de ces avantages nous avons été amenés à définir une structure hybride, l'arbre BSP mixte, qui autorise dans le même temps une mise en oeuvre relativement aisée des opérateurs de déformation de type TTS. La représentation des objets composés ou déformés peut alors être déduite de manière simple des arbres représentant les objets de départ.

5) au terme de la réflexion, nous avons construit le logiciel GRANITE, qui permet de représenter, sous forme d'arbre BSP mixte, tout solide facettisé, de le composer avec d'autres solides analogues et de le déformer par des opérateurs TTS simulant des plis et des failles. Des résultats impliquant jusqu'à trois ou quatre opérateurs sont présentés. Ils démontrent les facilités qu'offre GRANITE de produire des objets de forme complexe (comportant plusieurs milliers de facettes) avec des temps de calcul raisonnables.

## ABSTRACT

The present study is concerned with some aspects of 3D geometrical modeling of a " geological scenary":

1) We consider the geometries of the most commonplace geological bodies as well as that of the whole "scenary". Such geometries most often depend from the geological processes that generated the objects (surface alteration, erosion, sedimentation, magma intrusion or extrusion...) or that transformed them (folding, faulting, metamorphism...). Besides, deducing a geometry from local data (field mapping, drilling data...) is generally not a straightforward process: it relies on a geological interpretation which takes place before any other modeling. Thus computer aided modeling most frequently provides a "model of model".

2) The review of some of the modelings that have been undertaken prior to the present study put some light on the various possible approaches. We show that it may be profitable in many cases to take into account the geological specificities of the modeled objects and thus to approximate by mean of a "dynamic" or "generative" approach the geometrical consequences of the processes that affected these objects. We also consider the relationships that a computer aided model may bear with the original data: it may be desirable either to get a "truly exact model" or on the contrary an "analogue" that may be used as a mere interpolation tool. We insist on the interest of a "forward-backward" method in order to obtain faithful generative models.

3) We then focus on a particular problem: the modeling of irregularly shaped objects which may be either deformed or combined with each others by mean of boolean operations, as it is the case for granitic intrusions and for the surrounding terrains that are intruded and partly digested.

We show that such a modeling depends on the choice of an adequate data structure: this must allow an easy definition of the object and, above all, must not be too sensitive to manipulations through boolean operators and through similar type transformations (STT) which allow to simulate folding and faulting.

4) We review some classical data structures. Boundary representations (B.rep) are of very common use in solid modeling and have several advantages, but their practical implementation for representing geological bodies may be rather complicated. CSG and space partitionings that are independent from the represented objects ( horizontal slices, classical or mixt octtrees) appear inadequate, since they are destroyed, when the objects are deformed.

In contrast, binary space partitionings (BSP) are very appealing, since they are only dependent from the objects themselves and are thus unaffected by displacements and more generally by affine transformations. We consequently define an hybrid structure, the BSP mixt tree, which allows in addition manipulations of the object by STT operators. Objects that are deformed or composed by boolean operators can thus be represented by trees that are easily deduced from those representing the original objects.

5) The GRANITE software which has been built, allows to represent as a BSP tree any polyedric object, even if it is composed of disconnected volumes or if it comprises holes, to add or to subtract if from similar objects and to deform it using STT operators. We present results which allow to produce objects showing very irregular shapes and comprising thousands of faces, in rather limited computation times.





## INTRODUCTION GENERALE

---

L'écorce terrestre est composée d'ensembles rocheux qui sont constitués en corps géologiques. Ces corps ont des propriétés diverses liées à leur géométrie, à leur composition chimique et minéralogique, à leur propriétés mécaniques..., Ils entretiennent entre eux des relations précises notamment sur le plan spatial.

Le sujet de la présente étude concerne la géométrie de ces objets et plus précisément sa représentation à l'aide de l'outil informatique. Nous serons amenés à nous intéresser à la forme des divers objets géologiques observables dans la nature et aux relations spatiales qu'ils entretiennent les uns avec les autres. Plus précisément, notre étude prendra sa place dans une démarche visant à décrire une "**scène géologique**": ensemble d'objets spatialement structurés. Nous serons concernés par le rendu de la forme individuelle des différents objets, par le rendu de leurs relations spatiales et par la visualisation de la scène. Les techniques informatiques employées pour cela seront celles développées en Synthèse d'Image (Computer Graphics).

La scène géologique correspond à la représentation d'une fraction du sous sol. Nous considérons qu'elle est constituée par un ensemble de solides rigides jointifs, la présence de vides ou de masses fluides occupant seuls des volumes significatifs à l'intérieur de la terre n'étant qu'exceptionnelle.

Représenter une scène suppose les étapes suivantes:

- 1)-caractériser la forme des différents objets qui la composent ainsi que le positionnement géométrique relatif de ces objets les uns par rapport aux autres.
- 2)-créer un modèle géométrique explicite ou implicite.
- 3)-se donner les moyens de le visualiser.

Des difficultés supplémentaires apparaissent en géologie qui tiennent aux facteurs suivants:

-les objets géologiques sont de tailles très variées allant de la chaîne de montagne à l'échantillon décimétrique.

-lorsqu'ils sont de grande taille, ils ne sont connus en général que par des données ponctuelles, discontinues, souvent hétérogènes (pendages, contours cartographiques, sondages discrets... ). Ces données doivent donc la plupart du temps être interpolées.

-la scène géologique est susceptible d'être très complexe: objets nombreux, montrant des formes irrégulières, agencés entre eux de manière compliquée (cf. figure.1 et son légende à la fin de ce chapitre).

Une option possible pour représenter les objets géologiques et leurs relations est de les considérer comme des objets ordinaires. Pour construire la scène, il convient alors de se donner les moyens de traduire correctement les formes de différents objets puis de les assembler entre eux en respectant leur organisation spatiale. Les difficultés tiennent à la complexité des formes et à la complexité de l'agencement des objets.

Une autre option consiste à essayer de tirer parti du caractère "géologique" des objets et de leur assemblage. Ceci suppose qu'on examine les particularités de ces objets et qu'on tente d'en dégager les spécificités. C'est le point de vue qui sera adopté dans le présent travail.

Ce point de vue conditionne l'organisation de notre mémoire:

**Dans la première partie**, nous nous efforcerons de caractériser la géométrie des objets et des assemblages géologiques les plus courants. Nous verrons que leur spécificité est étroitement liée à leur histoire, c'est à dire à la chaîne des processus qui au cours de l'évolution géologique ont déterminé les caractéristiques de la scène à représenter. Pour cette raison, nous examinerons la possibilité d'une définition géométrique des objets qui s'appuie sur l'analyse des transformations successives subies par leur forme originelle. Ainsi nous verrons qu'il est souvent plus simple de définir des objets géologiques, non pas en tentant d'approcher directement leur forme actuelle -par exemple par interpolation directe de données de terrain mais en partant de la forme qu'ils avaient à une étape antérieure de leurs histoire. Nous dégagerons ainsi une méthodologie, la modélisation dynamique, qui visera en partant des formes originelles à définir les objets en les simulant à l'aide d'opérateurs convenables, les transformations géométriques qu'ils ont subi sous l'effet de processus géologique

déterminés (plissements, injection ou digestion de matériaux rocheux ...). Il résultera de cette approche que l'informatique graphique devra être, dans le cas qui nous occupe, non seulement un outil de modélisation des formes, mais également un outil de modélisation des processus, ou au moins des conséquences géométriques de ceux-ci.

Cette démarche sera comparée aux principales démarches adoptées jusqu'à présent par les modélisateurs s'intéressant aux terrains géologiques.

**Dans la deuxième partie**, nous nous efforcerons de faire l'inventaire des moyens informatiques disponibles pour atteindre le but fixé et de proposer des choix. Ceux-ci porteront sur:

- le mode de représentation des formes.

- le mode de représentation des processus. Ceux-ci devront se traduire par des opérateurs géométriques qui devront pouvoir être appliqués commodément aux objets, et nous le verrons être inversibles.

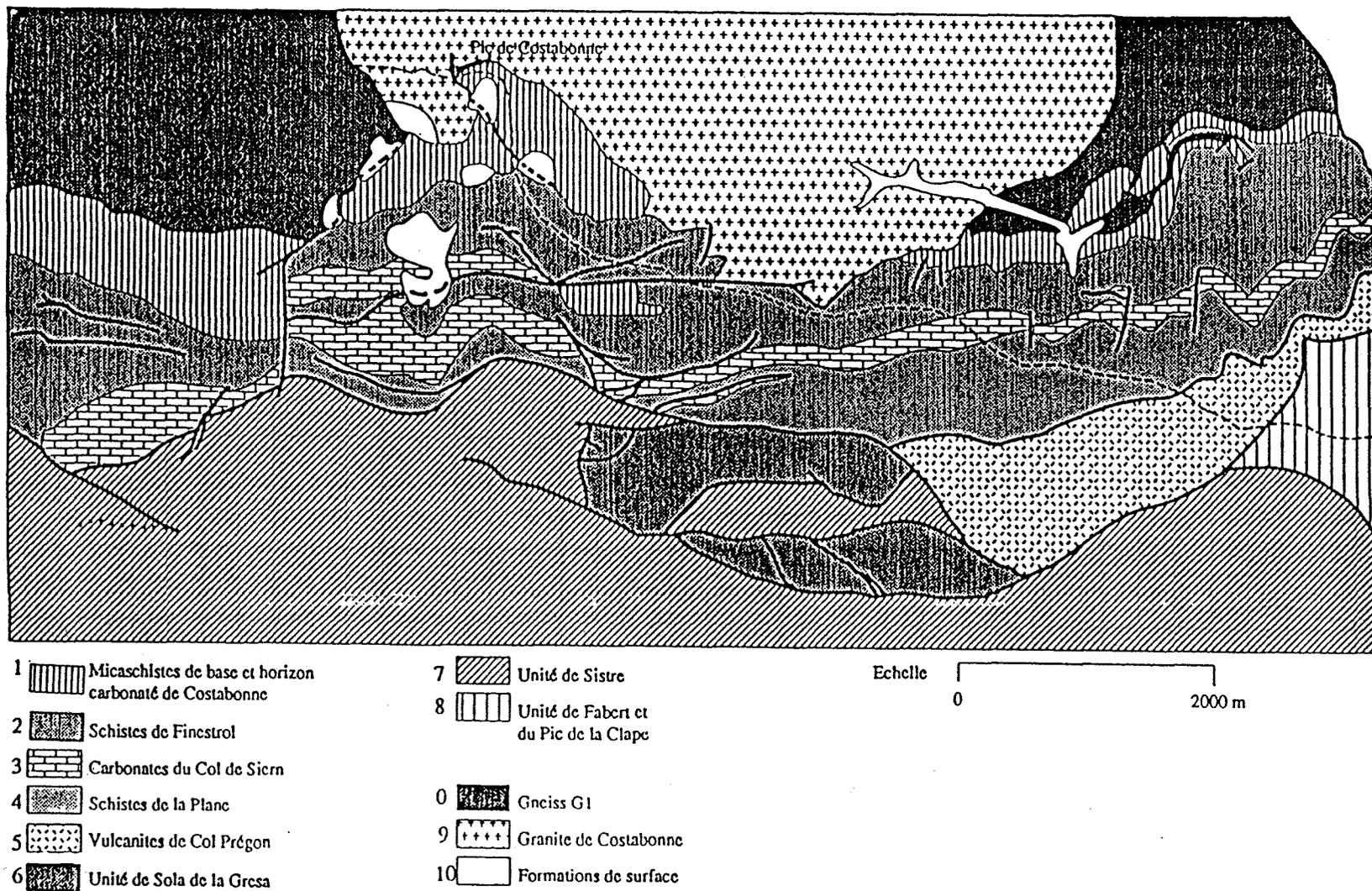
- le mode d'assemblage des objets entre eux (définition d'une structure hiérarchique au niveau de la scène).

- le mode de visualisation de la scène mais aussi des objets individuels et de leurs particularités.

Ces choix supposent notamment une réflexion sur la structuration des données et un choix préalable à ce niveau. Nous verrons que la sélection d'une structure de données doit tenir compte de problèmes divers: traitement des objets par les opérateurs convenables, temps de calcul, place mémoire, validité, ... et qu'elle ne peut résulter que d'un compromis.

Ensuite nous nous efforcerons d'appliquer la méthodologie dégagée auparavant à la résolution du problème particulier posé par les objets géologiques non stratifiés. Nous dégagerons ainsi les étapes de la réalisation d'un véritable modéleur géologique 3D qui est le résultat tangible du présent travail en termes de construction logicielle.

**Dans la troisième partie**, nous présenterons quelque résultats du modèle réalisé, ainsi nous fermerons les derniers pages de ce rapport en décrivant la conclusion de cette démarche.



*Figure 1: Exemple de "scene géologique" , extrait de la carte géologique du secteur de Costabonne (Pyrénées Orientales) d'après [BAE89]*

**- Légende de la figure 1:**

La carte représente la géométrie de terrains situés dans le Pyrénées Orientales franco-espagnoles dans l'environnement du gîte de Tungstène de Costabonne. Elle a été levée par E.BAETENS [BAE 89] dans le cadre d'un travail de thèse à l'Ecole des Mines de Paris.

Au dessus des gneiss G1, les terrains 1 à 8, correspondent à une série lithostratigraphique originellement continue, actuellement dilacérée par des failles et des contacts anormaux dans sa partie supérieure (ensembles 5 à 8). Le pendage moyen d'ensemble de la série est 30° sud environ.

Le granite de Costabonne 9, est intrusif dans la partie inférieure de la série.

L'ordre des événements est le suivant:

- 1- Dépôt au dessus des gneiss G1 (0), de la série 1 à 8. Déformation de cette série par plusieurs phases de plis. (les deux bandes de carbonates du Col de Siern 3, correspondent à une structure en plis isoclinaux).
- 2- Intrusion du granite de Costabonne (9)
- 3- Déformation de l'ensemble de la série par des failles plates (contacts anormaux) puis par des failles à plan redressé.
- 4- Dépôt des formations superficielles.

L'ordre d'âge est le suivant:

- La série 1 à 8 est d'âge vraisemblablement cambrien et peut-être ordovicien pour sa partie supérieure (âges compris entre -580 et -450 millions d'années).
- Le granite de Costabonne est hercynien. Age probable -280 millions d'années.
- La plupart des déformations cassantes sont d'âge alpin (-50 à -70 millions d'années).

- Les formations récentes ont un âge sans doute inférieur à 1 millions d'années.

La carte donne ainsi une idée des échelle de temps et de l'importance de l'histoire géologique du point de vue de la structuration de la "scène géologique". Tout géologue sait reconnaître que le granite G1 recoupe les terrains 1 et 2 ( et qu'il est donc postérieur au moins à l'horizon 2). De même, les failles sont clairement postérieures à l'ensemble des terrains qu'elle décalent...





**PREMIERE PARTIE**

**REFLEXION SUR LES MODELES  
GEOLOGIQUES.**



## **CHAPITRE -1-**

### **OBJETS GEOLOGIQUES ET MODELES CONSTRUITS PAR LES GEOLOGUES**

---

#### **1.1-Introduction:**

Ce chapitre sera consacré en premier lieu à la présentation de la scène géologique et de son contenu.

Nous nous intéresserons aux géométries: celle des objets individuels et celle de la scène dans son ensemble.

Nous montrerons que ces géométries présentent des particularités liés à l'origine des objets: corps géologiques d'origine exogènes résultant d'un dépôt ou d'une érosion, corps endogènes résultant de la cristallisation d'un magma en profondeur ou en surface ou ensembles métamorphiques, et/ou aux déformations souples (plis) ou cassantes (failles) qu'ils ont subies.

Nous verrons que ces particularités ont des conséquences simples quant à la topologie des objets et de la scène.

Nous examinerons également la manière dont ces objets sont identifiés par les géologues et nous poserons le problème de la modélisation des corps géologiques de grande dimension connus seulement par des données de type local.

Ceci nous conduira à définir les particularités des modèles géologiques conçus par les géologues, au vu des données de terrain, et à poser notamment les problèmes de l'interpolation et de l'extrapolation des données géologiques.

## **1.2-Les corps géologiques:**

L'écorce terrestre est constituée de matériel rocheux, organisé en corps géologiques, c'est-à-dire en ensembles structurés groupant un ou plusieurs types de roches : pluton granitique, cône volcanique, ou ensemble de strates sédimentaires par exemple.

Nous distinguerons, en fonction de leur origine, deux grands types de corps géologiques.

- 1) des corps d'origine externe (exogènes) qui se sont formés à la surface du globe.
- 2) des corps d'origine interne (endogènes) qui se sont formés, pour partie au moins, à l'intérieur du globe. Ces deux types peuvent, à leur tour, être subdivisés.

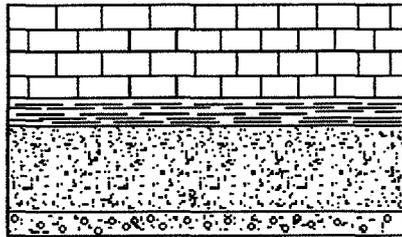
### **1.2.1-Corps exogènes:**

On distingue parmi ces corps, ceux qui résultent d'un dépôt et ceux qui résultent d'une érosion.

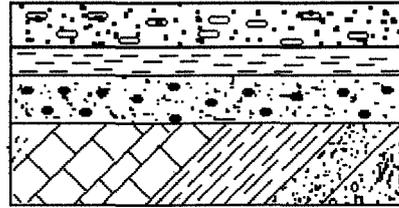
#### **-Corps sédimentaires résultant d'un dépôt:**

Ils sont construits avec des matériaux qui ont été transportés puis ultérieurement déposés. La formation de ces corps exige la participation d'un certain nombre de processus, qui interviennent sur un objet de départ et qui permettent de transporter certains éléments de celui-ci par divers agents de transports, tel que l'eau, la glace ou le vent, et de les déposer dans des milieux de sédimentation comme la mer, les lacs.

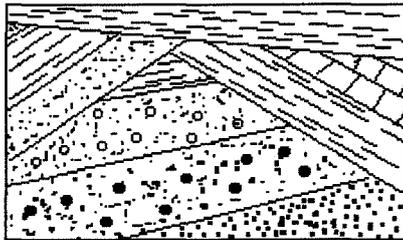
Les corps géologiques générés par ces processus sont fréquemment stratifiés, et constituent alors des piles sédimentaires. La figure 1.1 présente quelques unes des formes géométriques couramment observées.



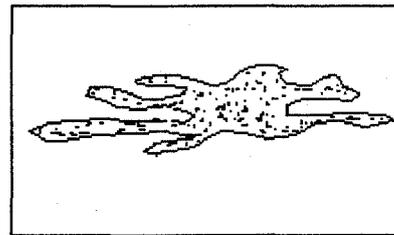
a) Strates horizontales.



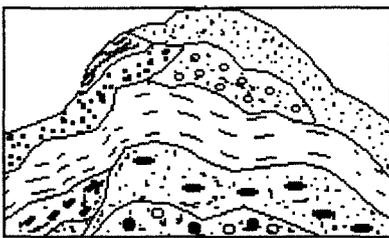
b) Discordance.



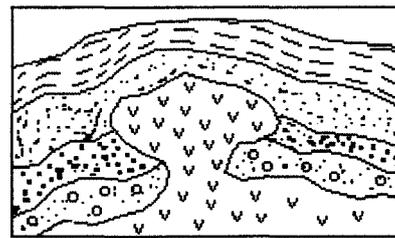
c) Stratifications entrecroisées.



d) Lentille sédimentaire.



e) Sédiments originellement déposés à la surface d'un glacier.



f) Dôme de sel.

**Figure 1.1: Corps sédimentaires (vus en coupe).**

### -Corps exogènes résultant d'une érosion:

La destruction des roches ( érosion ) se fait à la fois par altération chimique sous l'effet des eaux courantes plus ou moins chargées en gaz carbonique et par simple désagrégation mécanique. Dans ce dernier cas, les écarts de température et l'humidité de l'atmosphère ainsi que certaines actions mécaniques comme celle du choc des vagues, celle du vent chargé de sable, celle des torrents de montagne jouent un rôle essentiel.

Les corps géologiques soumis à des processus d'érosions acquièrent des formes particulières, souvent irrégulières.(cf.figure 1.2).

### **1.2.2-Les corps endogènes:**

On distingue dans cet ensemble, les corps éruptifs plutoniques ou volcaniques et les corps métamorphiques.

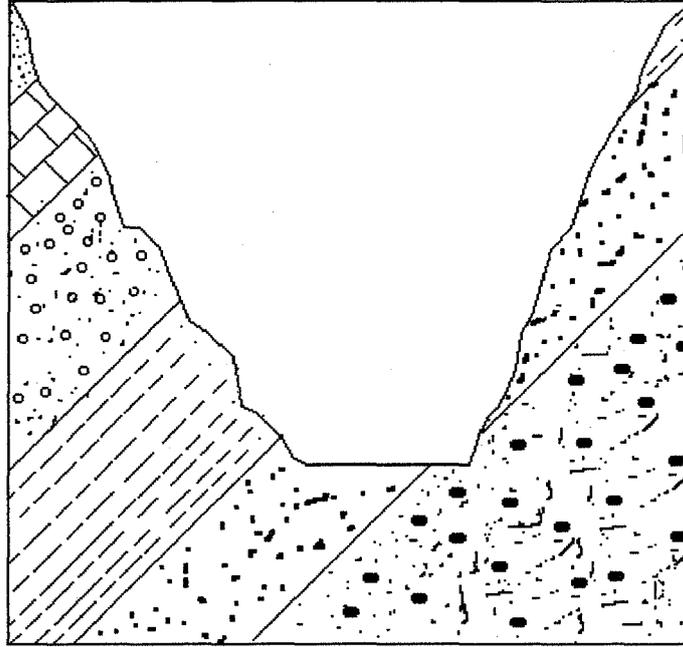
#### -Corps éruptifs:

Il existe dans les profondeurs de la croûte terrestre des zones totalement ou partiellement fondues, occupées par des liquides silicatés (magma). Lorsque la densité de ces liquides est inférieure à celle de leur environnement ils sont susceptibles de remonter et cristalliser en profondeur ou, s'ils arrivent à émerger, à la surface de la terre. Dans le premier cas ils sont à l'origine de corps plutoniques, dans le second de coulées de laves.

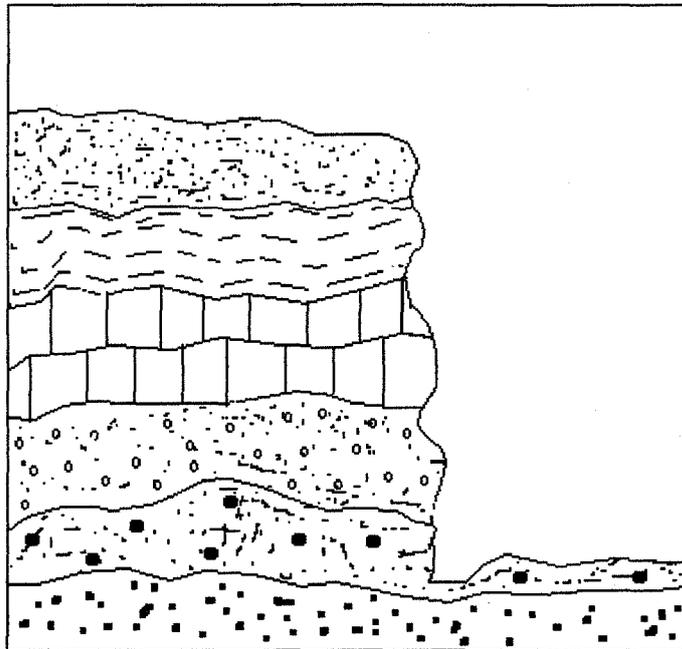
#### -Corps plutoniques (corps granitiques):

La chaîne de processus qui est à l'origine de la formation de ces corps, est complexe, puisqu'elle implique une fusion de matériaux profonds, une migration vers le haut des liquides silicatés et une recristallisation qui se produit le plus souvent par étapes (cristallisation fractionnée) .

Ces processus sont pour la plupart sous la dépendance des gradients de pression et de température existant dans la croûte et décroissants vers le haut.



a) Profil d'une vallée glaciaire.



b) Falaise.

---

**Figure 1.2:** Corps géologiques résultant d'une érosion.

On distingue habituellement des corps intrusifs qui se mettent en place au sein de roches préexistantes, qu'ils repoussent (et dont ils modifient donc la géométrie) et des corps migmatitiques qui correspondent à une granitisation sans changement de géométrie. Dans ce dernier cas, les roches préalablement en place sont fondues partiellement et injectées par le liquide silicaté qui recristallise ensuite sur place. Ce processus complexe peut être assimilé à un simple changement de nature de la roche, avec conservation des volumes et conservation de la géométrie des roches non digérées (encaissant). Le processus dépend alors non seulement des gradients thermodynamiques mais aussi de la nature des roches granitisées (qui peuvent être plus ou moins "digestes") et éventuellement de leur état de fissuration. Compte tenu des processus complexes qui conditionnent leur mise en place ces granites sont susceptibles d'avoir des formes variées (cf. figure 1.3).

L'épanchement de magma en surface peut donner des coulées de formes variées (cf. figure 1.4).

D'autres corps géologiques sont engendrés par le volcanisme:

exemples:

- 1- Niveaux de cendre (stratifiés).
- 2- Coulées de boue.

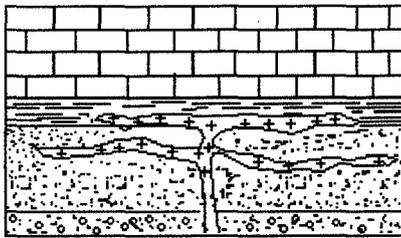
#### -Les ensembles métamorphiques:

Ce groupe comprend des corps géologiques qui résultent de la transformation, sur place, d'ensembles rocheux sous l'influence d'agents d'origine interne (pression, température, fluides aqueux). Ces transformations peuvent être d'importance très variable:

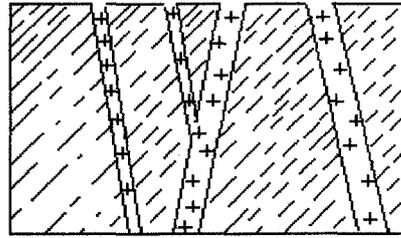
- lorsque les conditions de température et de pressions sont peu sévères, elles se traduisent essentiellement par des changements de minéralogie (destruction de certains minéraux devenus instables et apparition de nouvelles espèces). Dans ce cas la texture et la géométrie des ensembles rocheux concernés sont conservées. On peut donc géométriquement assimiler ces roches à celles dont elles dérivent.
- dans des conditions plus sévères, on peut aboutir à une fusion partielle ou totale des roches. Il y a alors création de magma qui peut soit recristalliser sur place soit migrer dans les profondeurs de la croûte. Ces phénomènes sont

très complexes. Nous retiendrons seulement qu'il peuvent produire des roches "granitisées" résultant de la cristallisation d'un magma en un lieu où les roches originelles ont été entièrement fondues.

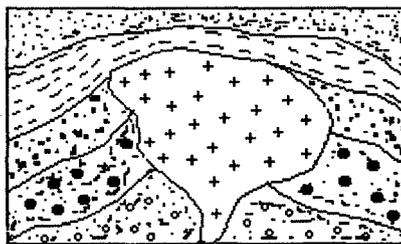
Dans des conditions métamorphiques sévères nous admettrons ainsi que des volumes rocheux de forme souvent irrégulière correspondent à des granites qui se sont substitués à des roches préexistantes grâce à ce mécanisme.



a) **Sill**: Insertion de magma entre des couches horizontales.



b) **Dykes**: Insertion de magma dans des fissures verticales.

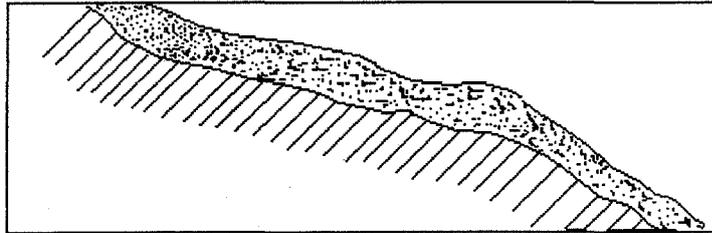


c) **Pluton**: Insertion de magma à travers des couches préexistantes qu'il repousse.

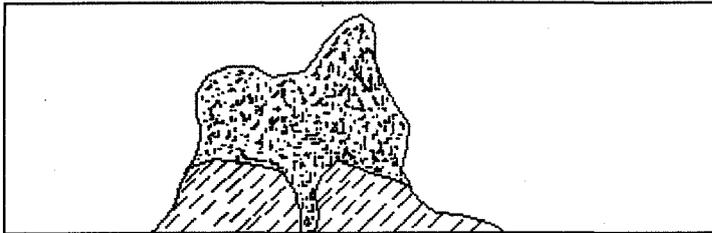


d) **Forme complexe**: (granite migmatitique) sans modification de la géométrie de l'encaissant.

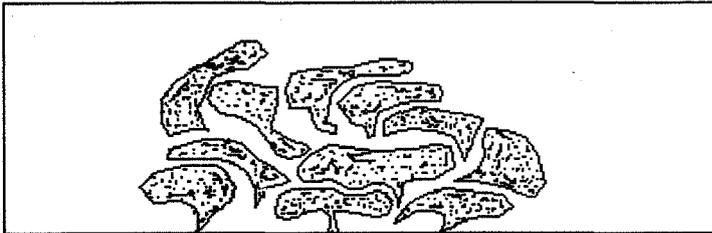
**Figure 1.3: Corps granitiques.**



a) Coulée stratiforme (lave visqueuse).



b) Coulée visqueuse donnant une forme trapue.



c) Laves en "coussins" (pillow lavas) résultent d'une coulée s'épanchant sous l'eau (fond marin).

---

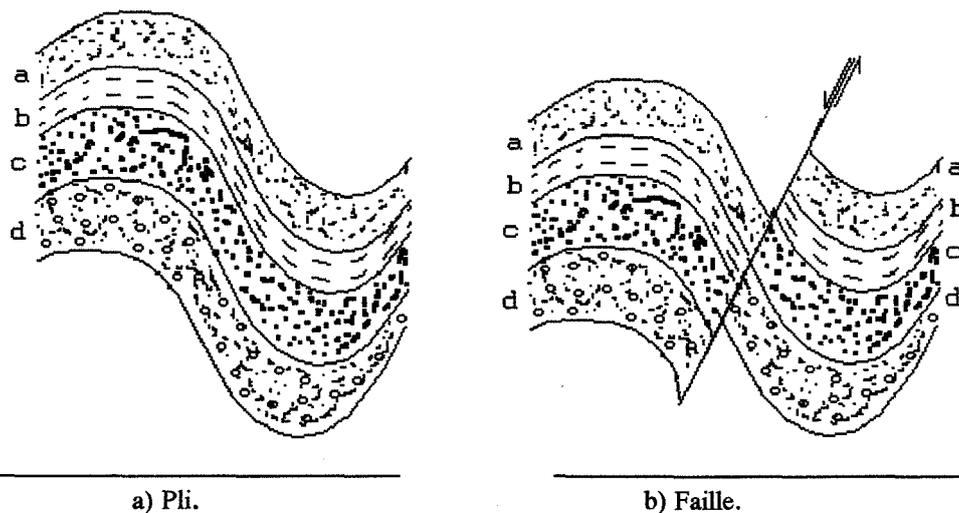
**Figure 1.4:** *Formes des corps d'origines volcaniques.*

### **1.3-Déformations subies par les objets géologiques:**

#### **1.3.1-Généralités:**

Chacun des objets présent au sein de la scène géologique a une forme qui résulte en général d'une certaine histoire: l'objet avait, lors de son apparition, (sédimentation d'une strate, injection d'un granite...) une certaine forme qui a pu subir des changements ultérieurs (plissement, dislocation induite par des failles, digestion partielle par des corps intrusifs plus récents...). De même, les relations géométriques entre les différents objets de la scène correspondent à un certain "état du système", généralement différent d'un certain nombre d'états antérieurs. Il existe donc un lien, que les géologues savent établir entre les formes parfois très complexes des objets et des assemblages et l'enchaînement des processus naturels auxquels ils ont été soumis.

Nous examinerons succinctement, dans ce paragraphe les caractéristiques de quelques uns des processus géologiques simples qui induisent des déformations, en nous intéressant qu'à l'aspect géométrique. La géométrie des objets déformés sera saisie au moyen de repères. Ainsi un plissement pourra-t-il être caractérisé par la déformation d'une ou plusieurs surfaces de stratification initialement planes, une faille par le décalage subi par ces même surfaces...(cf.figure 1.5).



**Figure 1.5: Strates plissées, faillées.**

### **1.3.2-Déformations souples:**

La déformation souple des objets géologiques implique le plus souvent un raccourcissement dans une direction déterminée et un allongement dans une direction perpendiculaire. (une sphère est transformée en un ellipsoïde). Cette déformation ne crée ni vide ni discontinuité importants dans l'objet. Nous la symboliserons par une fonction continue

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Une déformation souple induit généralement le plissement de surfaces continues initialement planes, les objets ainsi déformés étant qualifiés de plis. Ainsi un pli sera-t-il un volume minéral compris entre deux surfaces plissées emboîtées l'une dans l'autre [VRG 76]. Les surfaces limites correspondront les plus souvent à des surfaces de stratification.

#### **1.3.2.1-Surfaces plissées:**

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, une surface simplement plissée sera la transformée  $S'$  d'une surface plane continue  $S$  par la fonction de transformation souple  $\Phi$ :

$$S' = \Phi(S).$$

$\Phi$  possède les deux caractéristiques suivantes:

- 1) être biunivoque.
- 2) être telle que si une ligne  $AB$  tracée sur  $S$  a pour image une ligne  $CD$  tracée sur  $S'$ , tout point  $M$  situé entre  $A$  et  $B$  sur  $AB$  aura pour image un point  $M'$  situé entre  $C$  et  $D$  sur  $CD$ .

#### **1.3.2.2-Surface plissée cylindrique:**

De nombreux plis peuvent être assimilés en première approximation à un ensemble de surfaces cylindriques parallèles [RAM 67].

Rappelons qu'une surface cylindrique est une surface engendrée par une famille de droites de direction fixe (génératrices) s'appuyant sur une courbe donnée. La direction des génératrices sera appelée ici **direction axiale**. Par simplicité, nous supposons que la courbe d'appui est choisie dans un plan perpendiculaire à la direction de génératrice et cette courbe sera appelé **profil**. Nous introduisons en outre les définitions suivantes (cf. figure 1.6):

-*Charnière*: c'est la région du plus petit rayon de courbure.

-*Flancs*: ce sont les secteurs les moins incurvés de la surface considérée .

-*Droites d'inflexions*: ce sont les droites qui s'appuient sur les points d'inflexion du profil de la surface considérée.

-*Arche*: c'est le secteur compris entre deux droites d'inflexions consécutives.

Pour une arche donnée, l'axe est le lieu géométrique des points ayant le rayon de courbure minimal: c'est une droite parallèle à la direction de la génératrice de la surface cylindrique.

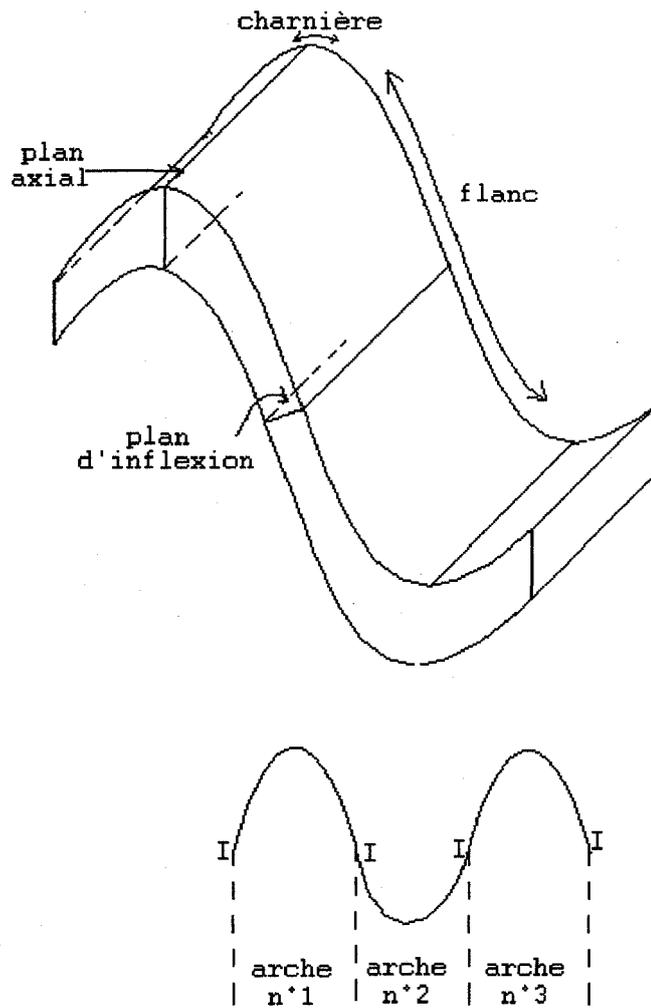
### 1.3.2.3-Les Plis:

Comme nous l'avons vu un pli est un volume minéral limité par deux surfaces plissées continues et non intersectantes S1, S2. Un certain nombre de surfaces plissées intermédiaires peuvent s'intercaler éventuellement entre S1 et S2.

Dans le cas où les deux surfaces S1, S2 sont cylindriques où elles ont la même direction de génératrice, on dit que le pli est cylindrique. Dans le cas où chaque arche de la surface S1 est emboîtée dans une seule arche de la surface S2, le pli sera dit harmonique. Dans le cas de plis cylindriques harmoniques nous introduisons en outre les définitions suivantes:

-*Surface axiale*: c'est la surface qui contient l'ensemble des axes des différentes surfaces plissées intermédiaires se trouvant sur une même arche. Dans le cas où cette surface est plane, on l'appelle plan axial et le pli correspondant sera qualifié de pli simple.

-*Surface d'inflexion*: c'est la surface reliant les différentes lignes d'inflexion sur les surfaces intermédiaires, à la limite d'une même arche.



---

**Figure 1.6:** Nomination des éléments élémentaire d'une surface plissée.

#### **1.3.2.4-Classification des plis cylindriques harmoniques:**

Les plis cylindriques harmoniques simple peuvent être classés en fonction de l'angle que fait leur plan axial avec l'horizontale [TM 80].

On distingue ainsi des plis droits, déjetés, déversés, en genou, renversés, couchés (cf.figure 1.7.a). Ces même plis peuvent également être classés en fonction de l'ouverture et de la forme de leurs flancs.

On distingue ainsi des plis ouverts, anguleux, kinks, arrondis, isoclinaux, coffrés, dissymétriques, en chevrons... (cf.figure 1.7.b).

Plus fondamentalement, les plis peuvent être classés selon les relations qu'entretiennent entre elles les différentes surfaces plissées [RAM 67].

On distingue ainsi notamment:

-*Des plis semblables*: ils sont tels que les épaisseurs entre les surfaces mesurées parallèlement au plan axial restent constantes. (cf.figure 1.8.a).

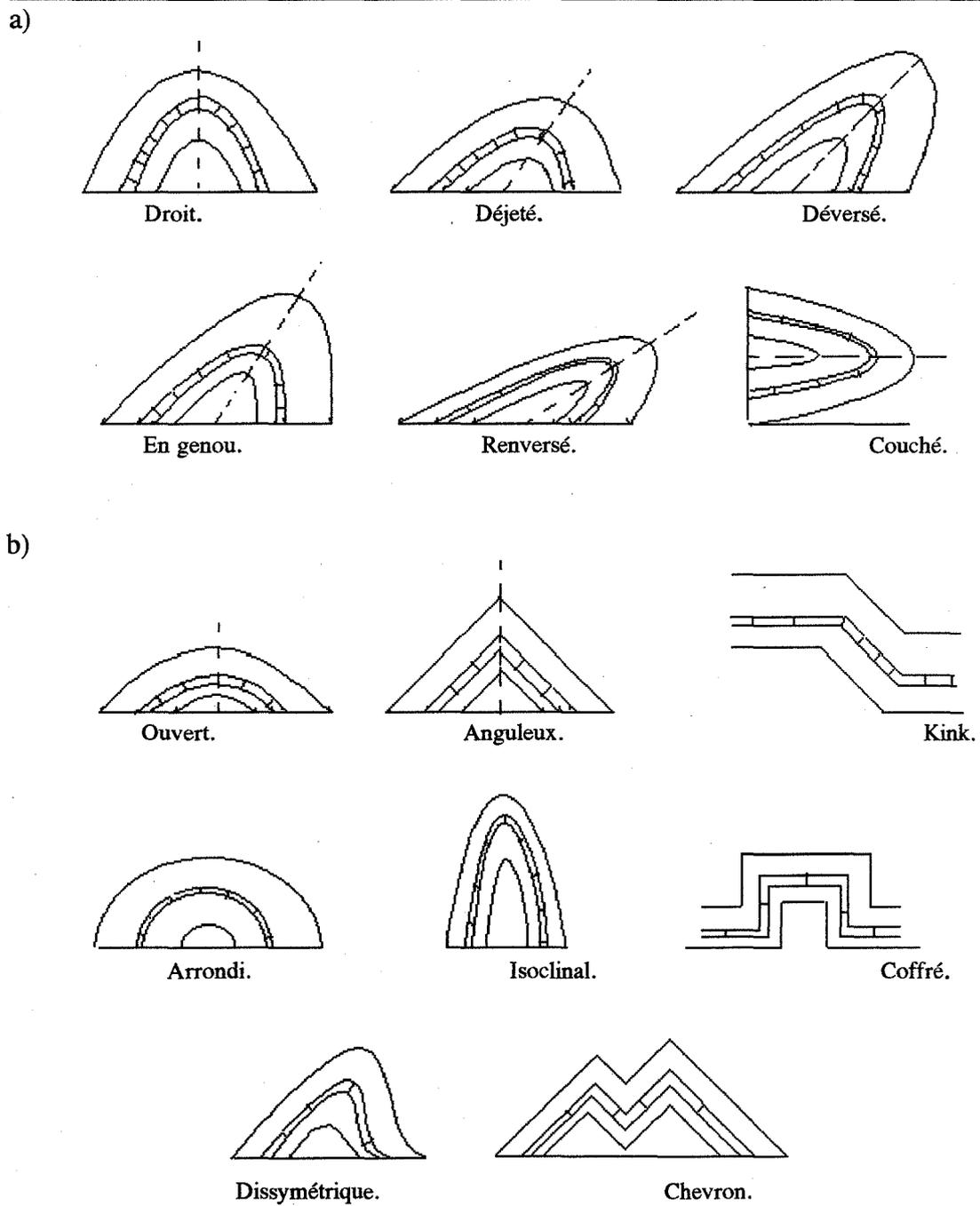
-*Des plis concentriques*: ils sont tels que les épaisseurs mesurées perpendiculairement aux différentes surfaces restent constantes. (cf.figure.1.8.b).

#### **1.3.2.5-Autres plis:**

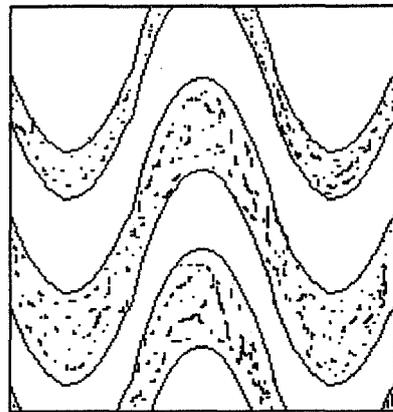
Les plis non cylindriques peuvent être de différents types: plis à axe courbe, plis coniques..., La figure 1.9 montre l'allure de certains de ces plis ainsi que des exemples de plis disharmoniques.

#### **1.3.2.6-Surfaces polyplissées et plis complexes. Notion de phase de déformation:**

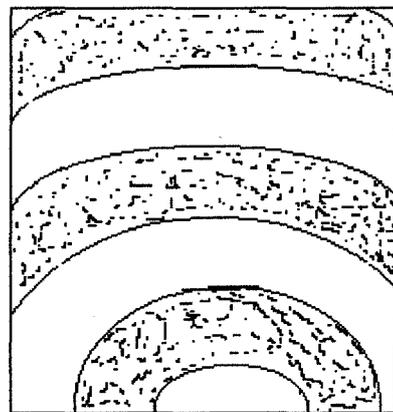
Certains plis complexes harmoniques peuvent être analysés comme résultat de la déformation d'un ensemble de strates originellement planes par un enchaînement de plusieurs plissements cylindriques simples [RAM 62] et [THI 86].



**Figure 1.7: Types de plis cylindriques (Vue en coupe).**



a) Pli semblable.

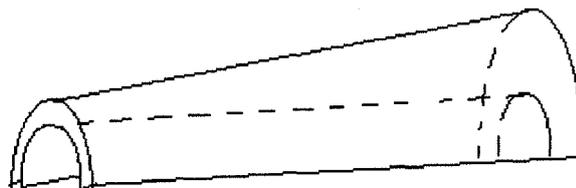


b) Pli concentrique.

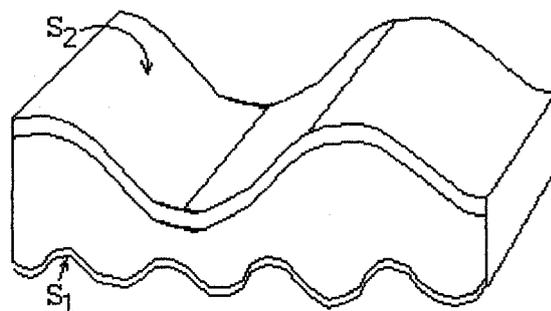
**Figure 1.8:** (Vus en coupe).



a) Pli a axe courbe.



b) Pli conique.



c) Pli disharmonique.

**Figure 1.9:** Pli assez compliqué.

Une surface plissée initiale  $S$  est ainsi transformée en une surface image  $S_n$  par  $n$  phases de transformation  $\Phi$ , successives:

$$S_0 = S$$

$$S_i = \Phi_i(S_{i-1}) \quad \text{pour } i \text{ allant de } 1 \text{ à } n.$$

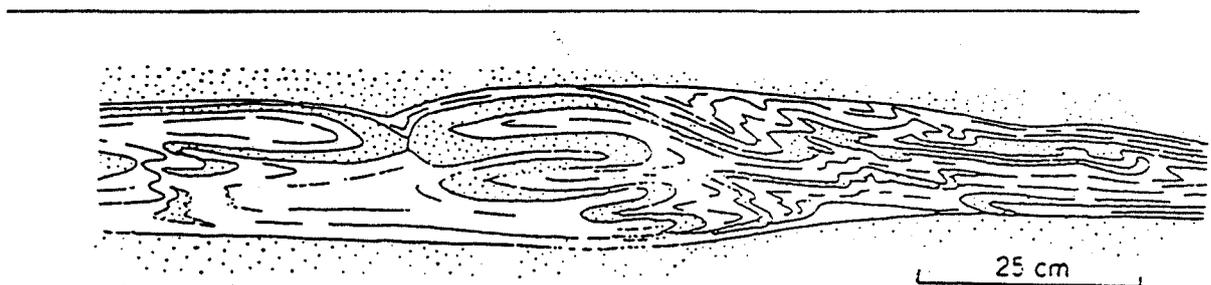
Dans le cas où les transformations élémentaires sont simples (plis semblables par exemple), leur modélisation devient alors aisée [PCB<sup>+</sup> 92].

### 1.3.2.7-Autres types de déformations souples:

Nous en citerons deux:

*a)-déformations souples synsédimentaires("Slumps"):* elles affectent des sédiments encore mous présents au fond des lacs ou des mers. Elles ont l'allure de plis mais on passe en continuité vers le haut et vers le bas à des sédiments non déformés (Figure 1.10).

*b)-rebroussement de couches au voisinage d'un diapir ou d'un pluton granitique* (Figure: 1.1 f,1.3.c).



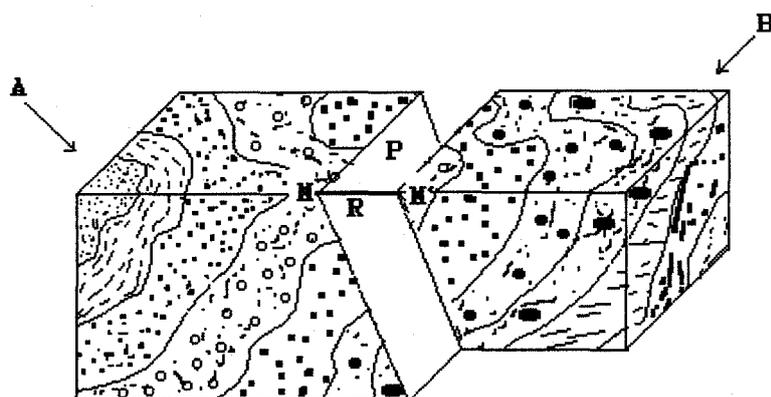
**Figure 1.10: Slump.**

[HMW 76].

### 1.3.3-Déformations cassantes (failles):

#### 1.3.3.1-Généralités:

De telles déformations impliquent un déplacement d'une partie de l'objet par rapport à une autre dans une direction bien déterminée. La surface limite séparant les parties qui subissent le déplacement relatif est appelée **faille** [MAT 80] Ce type de déformation conserve la topologie de chaque partie de l'objet résultant mais pas celle de l'ensemble (cf. figure.1.11).



*Figure 1.11: Trace d'une faille sur un bloc diagramme ( D'après [MAT 80] modifié)*

Sur la figure 1.11, si M et M' sont deux points originellement voisins situés au voisinage de la surface limite respectivement sur le panneau A et sur le panneau B, la distance MM' séparant ces points homologues sera définie comme rejet au point M, et bien entendu au point M'.

#### 1.3.3.2-Géométrie des failles:

Deux grands catégories de failles peuvent être distinguées selon que les parties déplacées subissent ou non une déformation interne. Nous distinguerons ainsi des failles sans déformation interne et des failles complexes.

-Failles sans déformation interne:

Une condition nécessaire pour que chacun des compartiments situés de part et d'autre de la surface limite ne subisse aucune déformation interne est que cette surface soit superposable à elle-même en tout point. Cette condition est notamment réalisée s'il s'agit d'un plan.

Nous définirons comme "failles semblables" des failles à surface limite plane résultant du simple déplacement d'un compartiment relativement à l'autre dans une direction déterminée (Figure 1.11).

Dans ce cas tout couple de points homologues (M, M') vérifiera la relation:  $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$ ,  $\vec{V}$  étant un vecteur de glissement de direction et d'intensité constante.

De telles failles traverseront donc l'ensemble du modèle en conservant sur tout leur trajet un même rejet.

Les géologues distinguent couramment quatre grands types de failles à surface limite plane, failles normales, failles inverses, cisaillements dextres ou senestres. Ces failles sont souvent regroupées en systèmes conjugués (Figure 1.12).

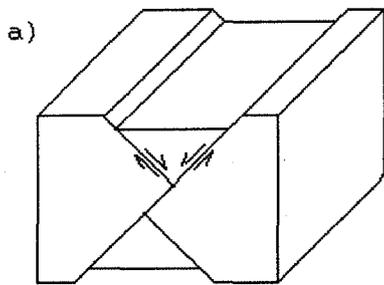
Il peut également être observé des failles sans déformation interne, à surface limite plane dont le rejet est variable, une faille "en ciseaux" correspond ainsi à la rotation d'un des compartiment relativement à l'autre (Figure 1.13).

-Failles complexes:

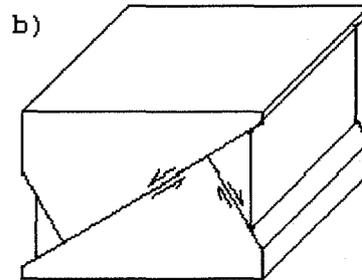
Nous ne donnerons que des exemples:

-une *faille listrique* est telle que l'un des compartiment glisse par rapport à l'autre en se déformant mais en conservant son volume (Figure 1.14).

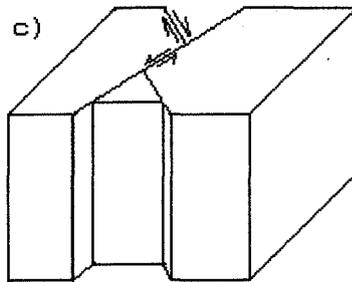
-une *faille synsédimentaire* est telle que le dépôt de matériel sédimentaire se poursuit d'une manière non uniforme dans les deux compartiments au moment où ils jouent l'un par rapport à l'autre. Les épaisseurs des couches séparées par la surface de faille sont donc inégales et ces couches apparaissent courbées (Figure 1.15).



Système de failles normales.

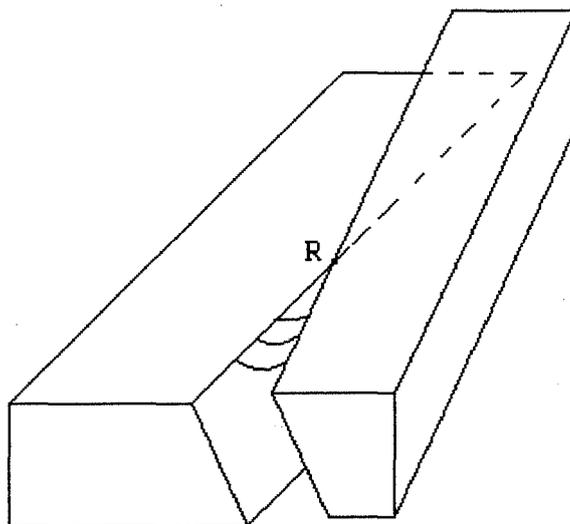


Système de failles inverses.



Décrochements (senestre, dextre).

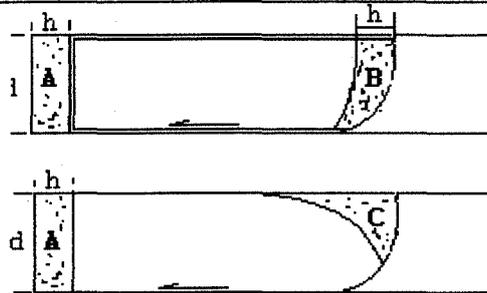
**Figure 1.12:** Typologie des failles a surface limite plane (D'après [VRG76]).



Le rejet est nul au point R, la faille a un jeu "normal" en avant de R et "inverse" en arrière de ce point.

**Figure 1.13:** Schéma d'une faille en ciseaux.

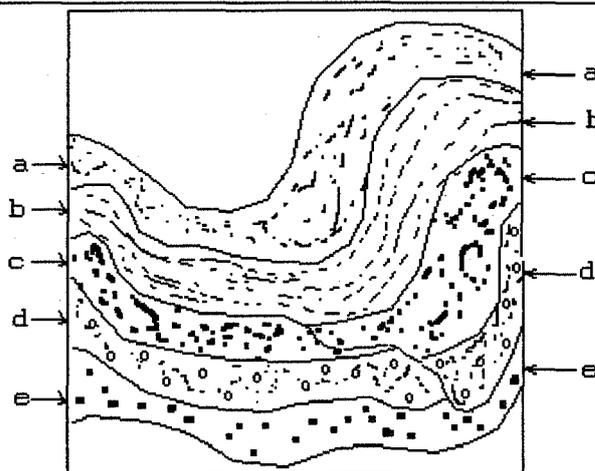
(D'après [MAT80]).



Le compartiment gauche est déformé, le volume B étant éliminé et compensé par un allongement en A. Il apparaît un vide de volume égal à A et B en C

**Figure 1.14:** *Modele de faille listrique*

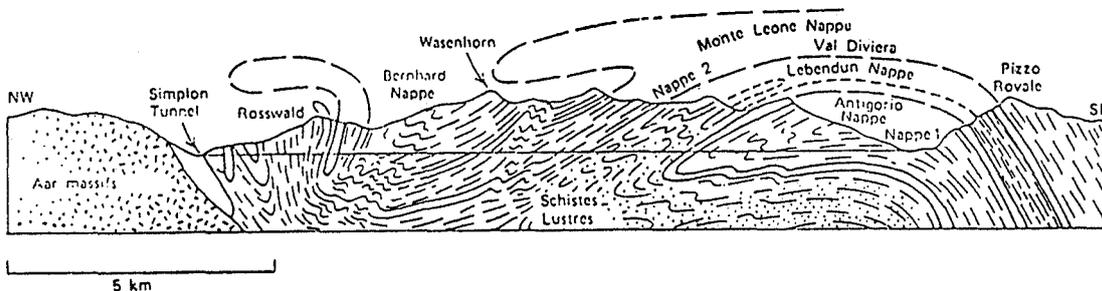
(D'après [GIB83]).



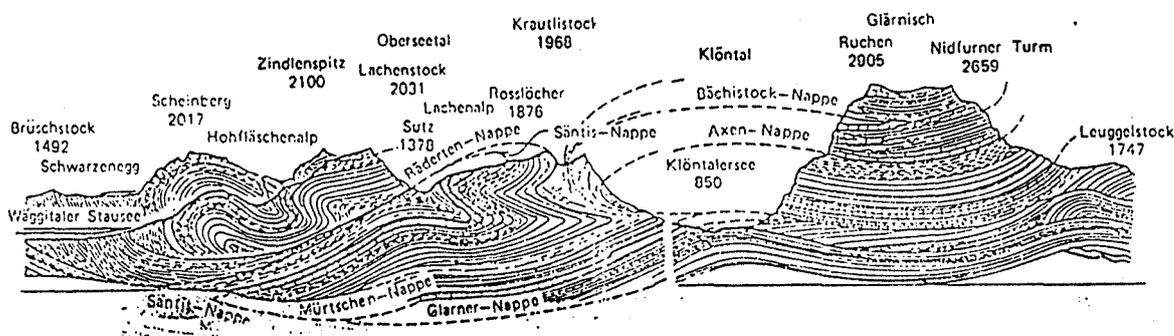
**Figure 1.15:** *Modele de faille syndépimentaire.*

#### **1.3.4-Déformation à grande échelle:**

Les géologues décrivent des déplacements relatifs observables dans certaines parties des chaînes de montagne qui correspondent à une translation, sur des distances de quelques dizaines de kilomètres ou plus, de masses de terrains plissés. Ces terrains déplacés, dits allochtones, reposent sur des terrains non déplacés, dits autochtones. Ce phénomène est globalement décrit comme un charriage et la masse des terrains déplacés est nommée **nappe de charriage** (cf.figure 1.16).



Nappes penniques inférieures au dessus du massif de l'Aar (Alpes suisses et italiennes)  
(D'après Schardt -1904- dans [HMW76]).



Coupe à travers les Alpes de glarner(Suisse)

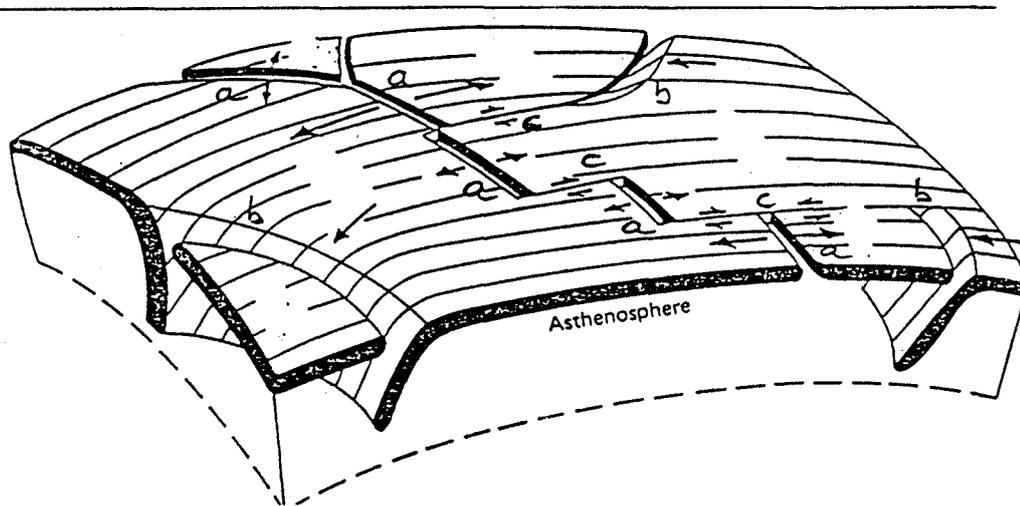
(D'après Heim-1919- dans [HMW76])

**Figure 1.16: Exemple de nappes de charriage.**

A plus grande échelle encore, des portions entières de l'enveloppe rigide de la terre peuvent subir des mouvements relatifs importants décrits dans le cadre de la théorie des plaques lithosphériques (Figure 1.17) Ces déplacements (expension, subduction, mouvements transformants) ne nous concerneront pas directement ici.

#### **1.4-Les outils de la description géologique:**

Au vu des données dont il dispose, le géologue doit s'efforcer de fournir une description lisible de la réalité. Il doit traiter pour cela des données de différents types: observations et mesures faites sur des affleurements discrets ou continus( nature de roches, orientations de plans caractéristiques...), observations à distance d'une portion de la surface terrestre par photos aériennes ou satellitaire, levés de galeries de mines, carottes de sondages, données sismiques, etc...



a: Expansion.

b: Subduction

c: Mouvements transformants.

**Figure 1.17: Mouvements relatifs aux limites des plaques lithosphériques.**

Ces différentes observations sont rassemblées sur des documents de différents types: minutes de terrain synthétisant les observations de surface, "logs" de sondages, coupes-temps...

A partir de telles données, il est possible d'élaborer des documents interprétatifs, dont nous citerons quelques types courants:

- *la carte géologique*: représentation le plus souvent sur un fond topographique des différents terrains présents à la surface du sol ou à son voisinage immédiat. Chaque terrain est repéré par une couleur spécifique et les limites entre ces terrains de nature et/ou d'âge différentes, sont représentées par un contour linéaire. Pour des exemples on pourra se référer à la carte géologique de France au 1/50000 par exemple [CGF].

Lorsque la topographie est accidentée le tracé d'une telle limite permet de reconstituer l'orientation de la limite entre couches (pendages). Les pendages peuvent être également indiqués directement sur la carte avec leurs valeurs.

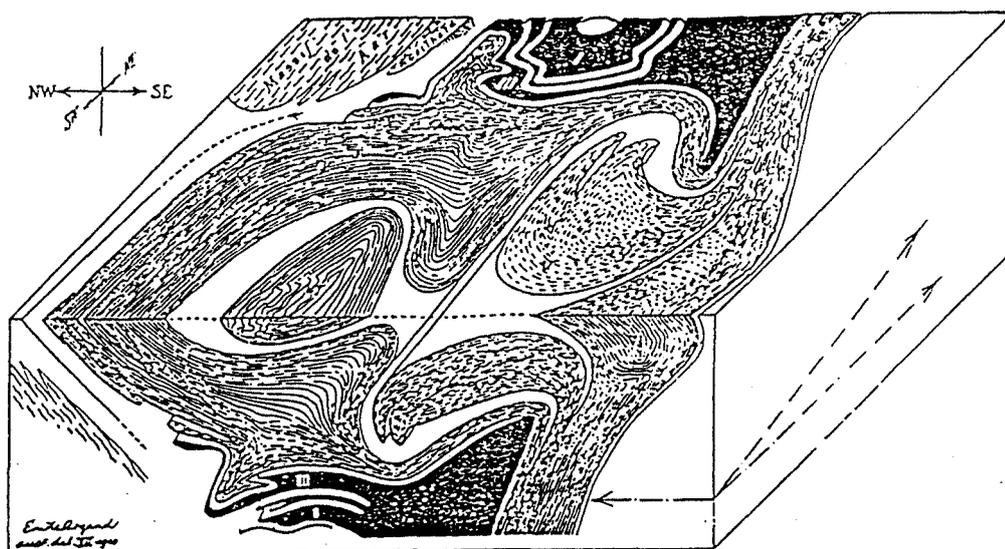
- *le schéma structural*: projection, sur un plan horizontal ne comportant généralement pas de topographie, des différents éléments permettant de caractériser la nature et l'orientation géométrique des contacts géologiques.

Un tel schéma comporte des contours, repérés par différents types des traits selon leur nature( contact stratigraphique normal entre couches sédimentaires concordantes, faille, contact anormal, chevauchement...), des indications concernant les pendages et les structures plissées (axes des anticlinaux et des synclinaux, direction de schistosités...)

- *la carte topographique d'un horizon géologique particulier*: une surface géologique particulière -limite entre deux couches notamment- peut être représentée par une carte en courbes de niveaux

- *la coupe*: représente la section d'une portion de terrains par un plan vertical d'orientation donnée (ex Figure 1.16.a/b/). Un tel document n'entretient en général que des relations indirectes avec les données d'observations sauf dans des cas très particuliers (observations le long d'une falaise verticale, interprétation géologique d'une coupe temps sismique). Il s'agit donc plus encore que dans les cas précédents, d'un document interprétatif.

- *le bloc diagramme*: représentation perspective "3D" de la portion de terrain considérée construite à partir de cartes et de coupes, souvent de manière approximative (Figure 1.18).



**Figure 1.18:** Bloc diagramme des Alpes pennins

(D'après [ARG 11]).

## **1.5-Interpolation et extrapolation des données géologiques, les modèles construits par les géologues:**

La réalisation des documents de synthèse qui viennent d'être cités à partir des données géologiques brutes pose un certain nombre de problèmes:

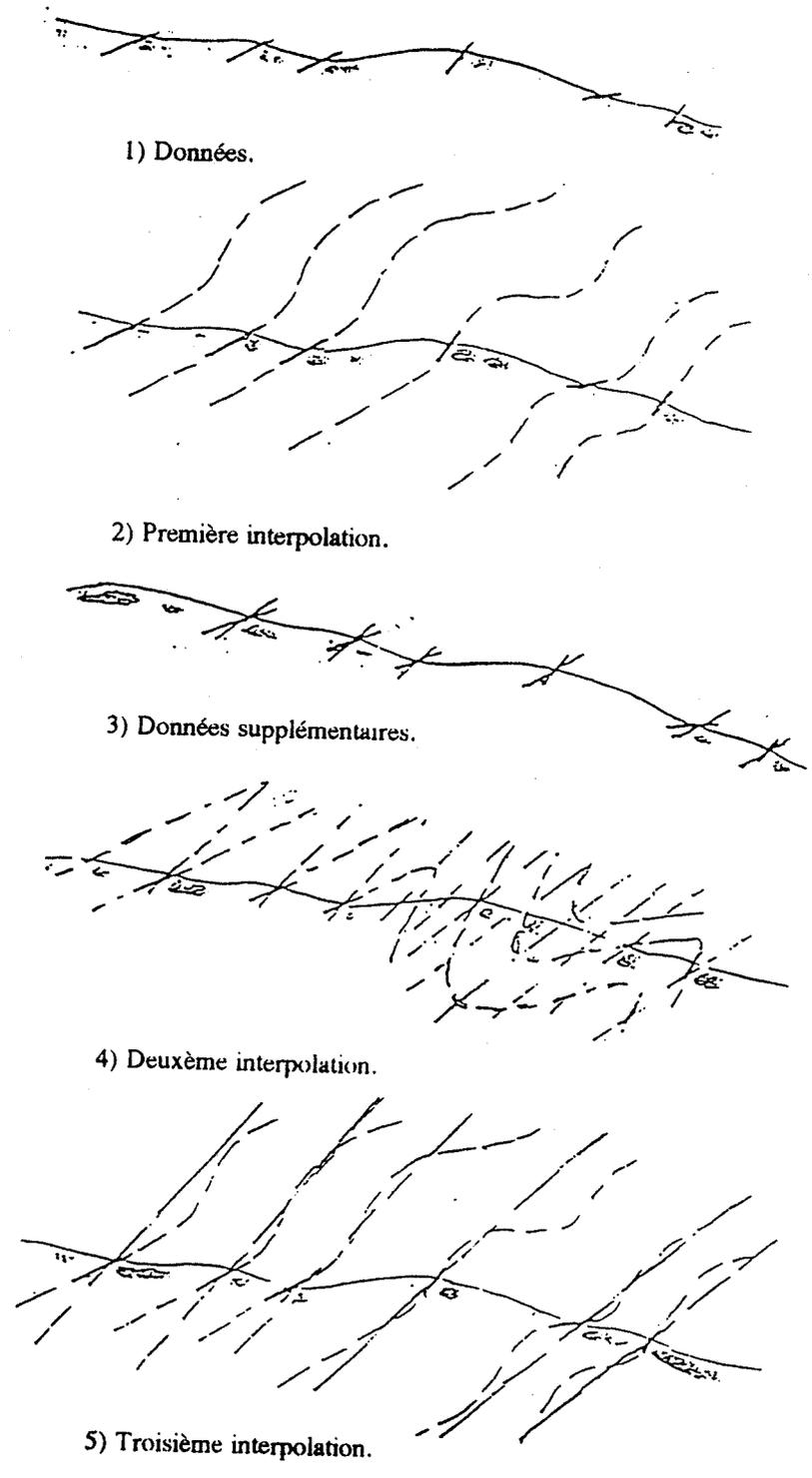
- 1) les données de terrain correspondent à des observations ponctuelles. Il y a de nombreuses zones où l'on ne voit rien (couverture superficielle, couverture végétales,...).
- 2) les objets sont de taille très variée, il existe par exemple des plis à l'échelle de l'échantillon (quelques centimètres), à l'échelle de l'affleurement (quelques mètres) ou à l'échelle régionale (quelques kilomètres).
- 3) les objets géologiques peuvent être de forme très complexe et ils figurent en grand nombre au sein de la scène géologique.

Le but poursuivi par le géologue est de fournir une description lisible de la réalité. Il doit donc s'efforcer de synthétiser ses observations à l'aide de notes mais encore plus à l'aide de documents graphiques tels que des coupes ou des cartes. Pour constituer de tels documents, il doit notamment être en mesure de reconstituer le continu à partir du discret et le grand à partir du petit. Il faut pouvoir **interpoler et extrapoler**. Ceci implique que pour comprendre et traduire graphiquement, par exemple sous forme de carte ou de coupe, la réalité qu'il observe, le géologue doit se donner des lois d'interpolation et d'extrapolation. L'application de ces lois aux données d'observation lui permet ainsi de créer une image de la réalité, c'est à dire un modèle.

Cette démarche peut être illustrée à partir d'un exemple (Figure 1.19)

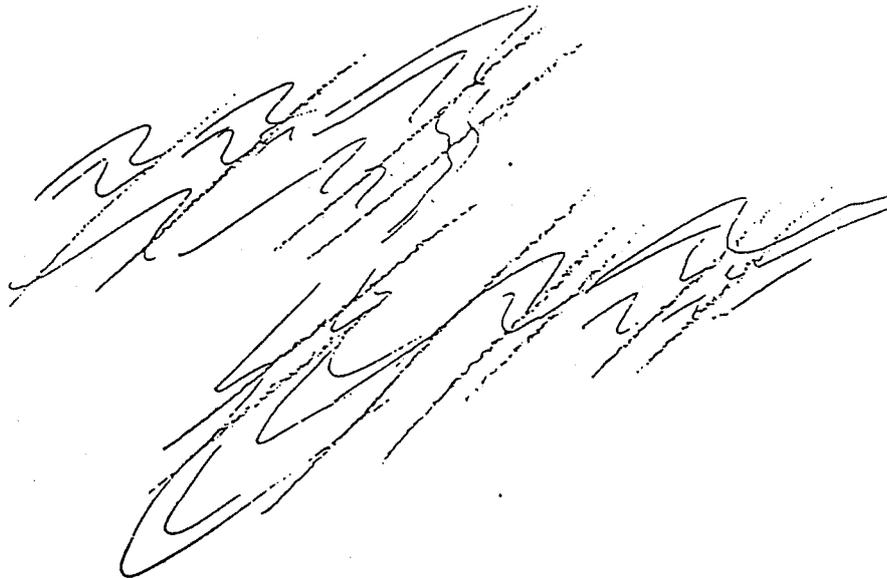
Supposons que les orientations (**pendages**) d'un ensemble de couches sont observées le long d'une route sur quelques kilomètres. (Figure 1.19.1).

On peut assimiler ces couches à un ensemble stratifié ondulé tel que celui représenté sur la figure 1.19.2.



**Figure 1.19:**Exemple d'Interpolation de données géologiques par les géologues.

Cependant un géologue averti se posera le problème d'assimiler les changements d'orientation à un style de pli observable dans la même région, car son expérience lui indique qu'à l'échelle régionale, des plis de différentes tailles conservent un même style. Ainsi sera-t-il tenté de se poser la question de la similitude possible entre cette grande structure et des petits plis couramment observés dans la même région illustrés sur la figure 1.20. Ces plis sont caractérisés par la présence d'un réseau de fractures faiblement espacées les unes des autres, parallèles au plan axial des plis, que les géologues appellent schistosité. Il sera donc tenté de rechercher le long de la route trace d'une schistosité. Supposons qu'il en trouve effectivement comme indiqué sur la figure 1.19.3.



---

**Figure 1.20:** *Style de plis a petite échelle.*

Ceci pourra le conduire à proposer une deuxième interpolation, très différente de la première, illustrée sur la figure 1.19.4.

Il se pourra qu'il observe cependant que la schistosité observée le long de la route entretient avec les couches des relations très différentes de celles visibles sur les petits

plis de la figure 1.20. Cette schistosité ne semble pas associée à des déformations de la matière par étirement mais recoupe les couches sans les perturber. Il pourra même observer localement qu'un même plan de schistosité recoupe plusieurs fois la même couche. Il en conclura alors que la structure plissée n'est pas associée à la schistosité mais lui est antérieure et il se peut qu'il revienne à une interprétation plus proche de celle qu'il avait proposée au premier abord (Figure 1.19).

Cet exemple illustre l'importance du schéma a priori qui guide la construction d'un modèle quelconque, c'est à dire qui fixe les lois d'interpolation et d'extrapolation. Ainsi, à partir de données brutes apparemment semblables, plusieurs modèles sont possibles entre lesquels seule une observation plus fine et surtout l'expérience professionnelle du géologue permet de trancher.

Le modèle se traduit notamment par des documents graphiques (coupes, cartes,...) qui sont les résultats concrets de l'interpolation et de l'extrapolation.

La qualité des résultats se juge:

- à la **fidélité** du modèle. c'est-à-dire à la plus ou moins grande aptitude à traduire correctement l'ensemble des données d'observations avec toute la finesse voulue. Ainsi les interprétations 1.2.3 s'appuient sur des observations de plus en plus fines guidées dans chaque cas par l'expérience du géologue.
- à sa **lisibilité** et à sa **maniabilité**:

De ce point de vue les documents tels que les coupes ou les cartes présentent souvent des inconvénients:

- **lecture difficile.**
- **difficulté de réalisation:** une carte synthétique est un document long à établir. A partir d'une carte ou d'une série de coupes d'orientation donnée, il n'est pas toujours facile de réaliser une coupe dans une orientation différentes.

Ceci pose le problème de l'intérêt et de l'utilité d'une aide informatique à la réalisation de cartes ou de coupes et celui de l'élaboration de modèles géologiques complets utilisant l'informatique graphique.



## CHAPITRE -2-

### MODELISATION DE LA SCENE GEOLOGIQUE. REFLEXION SUR LA DEMARCHE.

---

#### 2.1-Généralités:

Nous avons vu au chapitre précédent, qu'en géologie comme dans bien d'autres domaines, un modèle est le véhicule indispensable qui permet à un observateur l'appréhension de la réalité physique. Il faut cependant s'interroger un peu plus en détail sur la chaîne qui permet de passer des données d'observation à l'image que nous pouvons nous faire de la scène géologique.

Cette chaîne peut être décrite par le schéma suivant:

Données → Modélisation → Modèle → Visualisation → Image

Examinons les différents termes de cette chaîne:

*-Les données:* correspondent à des observations qui, nous l'avons vu, sont guidées par l'expérience professionnelle du géologue ( on ne voit jamais tout mais on sélectionne ce qui paraît important) et par les conditions de l'observation:

Il existe des masques (végétation, dépôts récents...) et les objets, surtout s'ils sont de grande taille, ne peuvent être connus qu'à partir d'observations locales, nécessairement éparses. Les données locales ne sont donc pas toujours suffisantes pour permettre la modélisation: elles doivent être "interpolées" par le géologue préalablement à tout traitement informatique. Le modèle informatique que l'on visera à réaliser sera alors un modèle de modèle, le modèle géologique préalable étant celui élaboré par le géologue grâce à "l'interpolation" qu'il fait des données brutes selon le processus décrit

à la fin du chapitre précédent. Cette "interpolation" première doit être alors considérée elle-même comme une donnée qui, à la différence des données spatiales brutes éventuellement révisable.

*-La modélisation informatique:* correspond au chemin que l'on prend pour bâtir une représentation abstraite de la réalité: un modèle -Elle sous-entend donc l'adoption d'une certaine démarche qui, nous le verrons peut être relativement variable. Ce sera là l'objet principal de notre réflexion, dans la première partie de ce chapitre.

*-Le modèle:* situé au centre de la chaîne, le "modèle" n'est pas directement appréhendable par l'utilisateur. Il diffère en cela radicalement tant des données initiales que de l'image qui constitue le résultat final, puisque ces éléments peuvent être vus directement. L'image d'un modèle 3D sur un écran d'ordinateur diffère en effet du modèle lui-même, puisqu'il ne peut s'agir que d'une coupe à travers ce modèle ou d'une projection de celui-ci sur un certain plan et adoptant un certain point de vue...

Le modèle est à la fois plus riche et moins riche que la réalité:

-plus riche car il s'efforce d'intégrer les données discrètes et de rétablir la complétude de l'objet: la surface extérieure d'un volume 3D représentant un corps géologique quelconque ne comportera plus de masques ou de blancs.

-moins riche, car nous l'avons vu au chapitre précédent, on ne construit un "modèle" qu'après avoir sélectionné les observations brutes et adopté une démarche définie, nécessairement inspirée par l'idée a priori que l'on peut se faire de la réalité à décrire.

*-La visualisation et l'image:* La production à partir du modèle d'une image concrète passe par la définition d'une méthode de visualisation. Cette opération est souvent réductrice car la vision humaine ne perçoit que les faces visibles des objets, compte tenu de la position de l'observateur, dans une gamme finie de distance (compris entre le punctum proximum et le punctum remotum).

Une image sur un écran d'ordinateur est constituée d'un nombre fini de pixels. S'il s'agit d'une coupe, elle ne concerne qu'une tranche déterminée de

l'objet, s'il s'agit d'une vue depuis l'extérieur, celle-ci suppose l'élimination des parties cachées...

Les problèmes de visualisation ne seront qu'au second plan de nos préoccupations dans le présent chapitre.

Revenons sur le point central de la chaîne décrite ci-dessus: le modèle.

Un modèle peut être une transcription de la réalité sous différents aspects. Dans le domaine auquel nous nous intéressons, la géologie, il peut

- être essentiellement descriptif, visant modestement à ordonner les données disponibles et à les rassembler pour présenter leur réalité sous une forme synthétique utilisable.

- viser à l'inverse à décrire "l'esprit" de la réalité, plus que sa lettre et donc à être essentiellement interprétatif. En Physique, en Biologie, voire en Sociologie, des modèles de ce type peuvent être construits pour tester la validité d'une théorie et en prévoir les implications. Il ne s'agira pas alors de construire des objets directement à partir des données mais de les reconstruire en simulant tout ou partie des processus qui les engendrent dans la nature ou au cours de l'expérience à laquelle on s'intéresse.

Les a priori qui sous tendent ces deux types de modèles sont eux-même différents:

- dans le premier cas, ils concernent, pour l'essentiel, le type et le nombre des données qui doivent être prises en compte et la manière dont elles peuvent être interpolées ou extrapolées. Par contre, un modèle descriptif peut partiellement être conçu sans mettre d'a priori quant à la genèse des objets représentés.

- dans le second cas, un tel a priori est au contraire essentiel puisque c'est lui qui dicte directement la ou les lois de reconstruction nécessaires à l'élaboration du modèle.

Remarquons enfin qu'en géologie le second type de modèle peut être utilisé à une toute autre fin que la simple vérification de théories: lorsque la réalité à saisir est structurée de manière complexe, une modélisation simulant les conséquences du ou

des processus qui sont responsable de sa structuration peut être le moyen le plus commode, voire le seul, qui permette de la décrire correctement.

Nous verrons que ceci est particulièrement vrai dans le cas de la plupart des scènes géologiques.

## **2.2-Particularités concernant la modélisation géométrique d'une scène géologique:**

### **-Finalités poursuivies:**

La modélisation géométrique d'un ensemble rocheux répond le plus souvent à l'une ou l'autre des préoccupations suivantes:

- 1) Fournir un cadre géométrique adéquat pour des études ou des modélisations pour lesquelles la géométrie n'est qu'un support ( ex: modèle de percolation de fluides, ou de comportement géomécanique des massifs rocheux).
- 2) Fournir des outils d'aide à l'interprétation structurale et à l'interpolation géologique ( aide à la cartographie par exemple).
- 3) Fournir des modèles quantitatifs précis, destinés à faciliter l'exploration et notamment l'implantation de sondages.

Dans le cas où les finalités poursuivies sont de type 1) ou 3), les modèles géométriques requis peuvent souvent être de type descriptif. De tels modèles ont cependant des limites, notamment lorsque la scène comporte un grand nombre d'objets dont la structuration résulte d'une histoire géologique commune ( exemple: ensemble de strates sédimentaires déformés par une même séquence d'événements, plis ou failles).

Des modèles réalisés en simulant les conséquences géométriques des processus auxquels les objets ont été soumis peut alors être intéressante. Une telle démarche est par ailleurs strictement requise dans le cas où l'on vise à construire des outils d'aide à l'interprétation géologique (finalité 2/).

-Les différentes démarches:

Nous avons vu au chapitre 1 que l'interpolation et/ou l'extrapolation de données géologiques ne peut être faite que selon des lois définies, dont le choix détermine fortement le modèle réalisé. Il convient donc de s'interroger sur la démarche qui peut guider un tel choix, et sur les conséquences de celui-ci.

Pour éclairer cette discussion, il nous apparaît que toute démarche de modélisation fondée sur l'interpolation et l'extrapolation de données participe de deux tendances qui se combinent dans des proportions variables: une approche "descriptive" ou encore "statique" d'une part et une approche "interprétative" ou encore "dynamique" d'autre part (cf. [LAN81]).

L'approche "**statique**" visera essentiellement à trouver, pour les objets géologiques considérés essentiellement comme des objets "ordinaires", des modes d'interpolation généraux efficaces qui permettent de restituer leur forme observable à partir d'un nombre discret de données. Pour cela il n'est pas forcément nécessaire d'introduire des spécifications importantes quant aux objets interpolés.

Dans une démarche statique, les objets géologiques seront donc vus comme une catégorie particulière d'objets matériels, ils seront considérés dans leur état actuel et leur histoire n'aura aucune importance. Cette démarche est ainsi purement descriptive.

L'approche "**dynamique**" part, à l'inverse, de l'idée qu'il est difficile de restituer harmonieusement la géométrie d'une collection d'objets de forme compliquée, structurés de manière spécifique au sein d'une scène géologique, en faisant abstraction des processus responsables des formes prises par ces objets et des positions qu'ils occupent les uns par rapport aux autres.

Dans une telle approche, on visera donc à se donner les moyens de simuler les conséquences géométriques des processus géologiques qui sont à l'oeuvre. Si ceci est réalisé, il sera possible de "transformer" la scène, c'est à dire de la faire passer d'un état donné à un état postérieur (par exemple en opérant un plissement ou en faisant jouer un système de failles). On pourra donc songer après avoir défini l'état initial à reconstruire la scène par étapes, l'analyse des processus opérant et la fidélité de la simulation de leurs effets géométriques étant alors une condition essentielle de l'efficacité de la démarche. Une telle approche pourra être qualifiée d'"interprétative", non pas parce que la compréhension des phénomènes géologiques à

l'action en est le but final, mais parce que cette compréhension est un moyen jugé indispensable à la restitution de la scène.

Un problème essentiel est toutefois posé dans le cas de l'approche "dynamique", telle que nous venons de l'envisager: celui de la relation du modèle avec les données de départ qui concernent de toute évidence l'état actuel et donc l'état final de la scène. Il n'y a aucune raison en effet que la transformation d'un état initial arbitraire par une cascade de processus simulés, même de manière très réaliste, conduise à un résultat intégrant les données disponibles. Il faut pouvoir utiliser celles-ci pour contraindre l'état initial lui-même, faute de quoi il ne sera pas possible de "caler" le modèle. Ceci suppose que l'on sache transporter les données d'observations dans des états antérieurs de la scène et ce, jusqu'à l'état initial, afin de pouvoir faire passer les objets par les points dans la scène initiale elle-même, ce qui suppose notamment que les opérateurs employés pour les processus considérés soient inversibles.

Une telle approche peut être qualifiée de démarche par aller et retour et nous nous efforcerons dans la suite, au vu des travaux réalisés jusqu'à présent d'en dégager l'intérêt.

## **2.3-Modélisations réalisées antérieurement:**

### **2.3.1-Modèles statiques (Exemple du logiciel GOCAD):**

Les systèmes de conception assistés par ordinateur (CAO) utilisés dans divers domaines industriels (construction automobile ou aéronautique par exemple) font appel à différents outils de modélisation des courbes et des surfaces. Dans la mesure où l'on prend le parti de modéliser les objets géologiques, en les considérant comme des objets ordinaires, on peut examiner la pertinence de ces outils en matière de représentation de formes géologiques.

Un objet déterminé peut toujours être défini comme le volume compris à l'intérieur d'une surface unique -son enveloppe externe- ou comme le volume délimité par un certain nombre de surfaces, ce qui permet de le définir comme différence ou comme union entre des volumes préexistants, connus par leurs surfaces extérieures. Il est donc possible de définir des objets -géologiques ou non- dès lors que l'on sait, d'une part, construire des surfaces, et d'autre part les faire s'intersecter.

Nous ne nous attarderons pas dans le présent chapitre sur le second de ces problèmes, dans le mesure où sa résolution est étroitement sous la dépendance de la structure de données choisie pour représenter les surfaces et/ou les volumes; le problème des intersections sera abordé aux chapitres suivantes et une solution possible sera présentée comme résultat de ce travail au chapitre 7, pour des surfaces définies par des facettes polygonales en utilisant une structure de données de type **BSP** (Binary Space Partitioning).

Le premier problème se ramène lui au calcul d'une surface interpolée, en partant d'un nombre discret de points connus appartenant à cette surface. Les outils les plus généraux dont on dispose pour résoudre ce problème sont les interpolations de type surface de Bézier ou B-Spline (cf: [LEO 91], [LS87] et [RSR83]). Dans ces deux cas, le résultat du calcul est une surface paramétrique connue par son équation et dont la valeur peut donc être calculée en chacun de ces points. Toutefois, ces méthodes deviennent difficilement praticables de manière économique, dès lors que les points connus (points de contrôles) ne sont pas disposés aux noeuds d'un maillage régulier, car il faut alors construire un tel maillage de toutes pièces.

Une méthode plus adaptée au traitement des problèmes géologiques (qui comportent des données réparties de manière irrégulière dans l'espace) est proposée par [MAL88]- et [MAL89]. Elle repose sur la définition d'une triangulation dont les sommets correspondent pour partie, aux points connus -points de contrôles- et , pour partie, à d'autres points dont la position est fixée par interpolation. Le calcul de la surface interpolée suppose la définition d'un critère permettant de choisir une solution convenable parmi l'infinité des solutions possibles. Ce critère est défini comme minimisation d'une "rugosité" dont les différents termes sont calculés sur chacun des points de la grille. Cette rugosité est définie sur la base de choix faits par l'utilisateur: définition d'un voisinage local (qui détermine le nombre des voisins qui influent sur le point calculé) et de critères de forme (dans le cas de points disposés régulièrement aux noeuds d'une grille rectangulaire on peut imaginer par exemple la minimisation des variations parallèlement aux axes de coordonnées  $O_x$  et  $O_y$ , la minimisation de la courbure locale de la surface ...). Ces différents critères peuvent, eux même, être librement pondérés. Le calcul procède par itérations en partant d'une solution approximative initialement fixée; les différentes itérations convergent rapidement vers la solution cherchée.

Outre son efficacité sur le plan algorithmique, cette méthode présente un certain nombre d'avantages:

1) dans la mesure où le voisinage utilisé par l'interpolation peut être défini librement, il est possible de représenter aisément des discontinuités (en supprimant l'influence des voisins séparés du point considéré par la discontinuité que l'on veut représenter).

2) il est possible de tenir compte de certaines relations topologiques utiles en géologie: on peut, par exemple, localiser un plan de faille et imposer un rejet le long de ce plan. De même, il est possible de représenter des surfaces en surplomb (telles que celles observables dans les flancs inverses de certains plis ou aux flancs d'un diapir).

3) il est possible de traiter de manière interactive des modifications locales des données. L'introduction de points de contrôle supplémentaires ou la suppression de certains points de contrôle existants, n'entraîne pas la destruction intégrale de la solution précédemment trouvée. Celle-ci peut, au contraire, être considérée comme une nouvelle approximation de départ, à partir de laquelle on peut de nouveau converger aisément vers une solution satisfaisante.

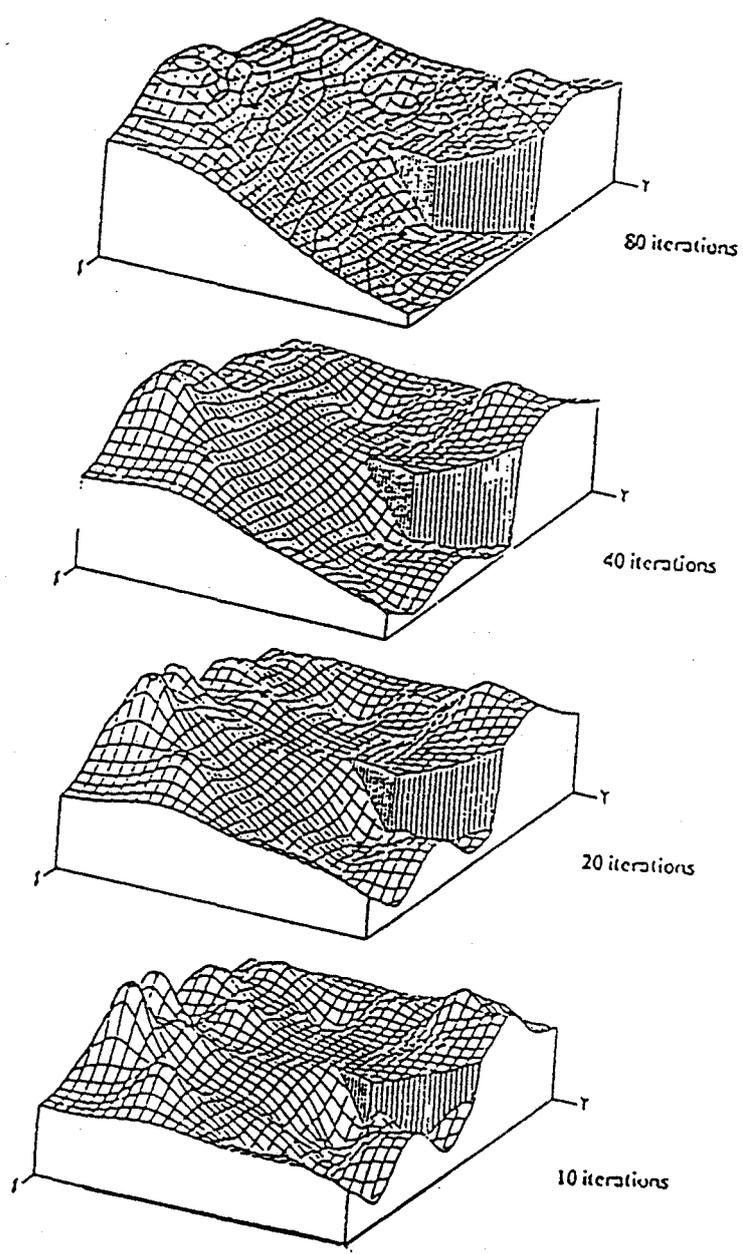
4) il est possible éventuellement d'intégrer des données connues seulement avec un certain degré de probabilité. La méthode procure donc une interface possible avec des résultats issus de la géostatistique.

5) les points calculés de la surface résultante sont localisés aux noeuds d'un réseau, ce qui permet d'affecter aisément à ces mêmes points des paramètres physiques ( ex: dureté, porosité etc ...). La méthode fournit donc des surfaces éventuellement utilisables dans des modélisations de processus physiques.

Les figures 2.1 et 2.2 donnent des exemples de résultat.

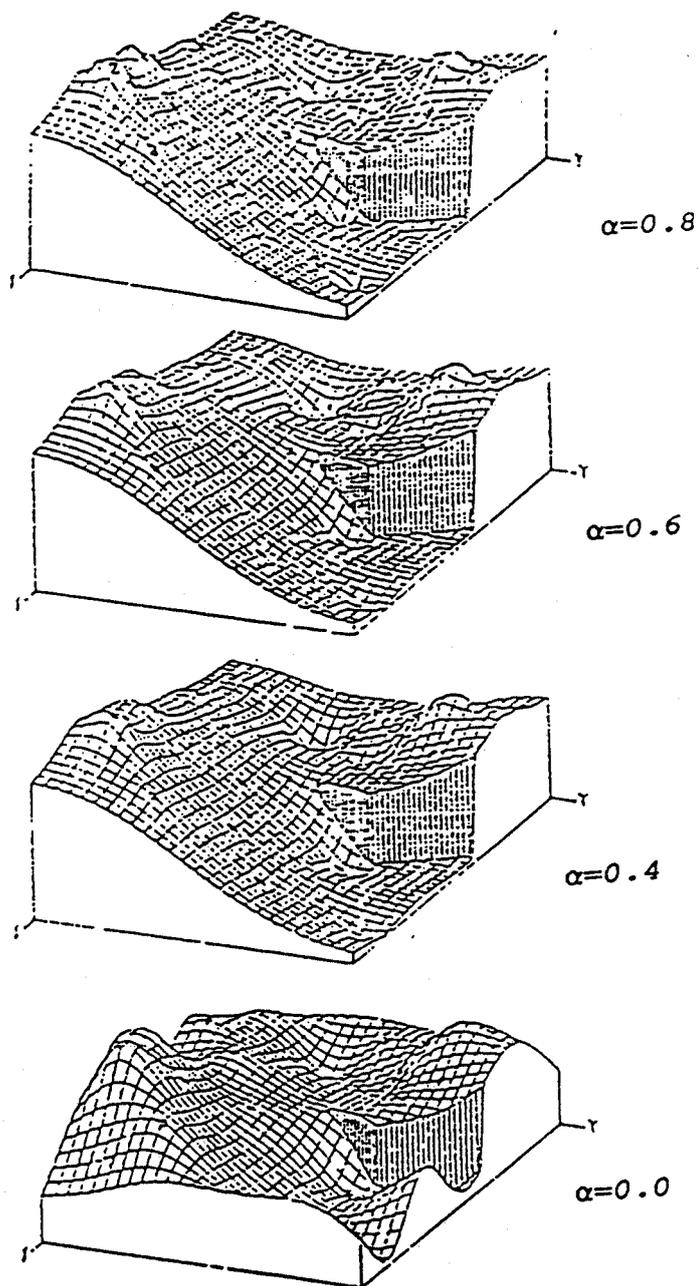
Le logiciel correspondant, GOCAD, offre en outre la possibilité de procéder aisément à des intersections et des unions de surfaces (permettant la définition d'objets) et à l'intersection de surfaces par des rayons (ce qui permet la réalisation de sondages). La méthode paraît ainsi bien adaptée à la réalisation de modèles géologiques et procure certains résultats spectaculaires (cf. figures 2.3 et 2.4).

UNIVERSITÉ DE QUÉBEC  
MONTREAL  
158, cours Laurier  
EST  
H3C 3P8  
TÉLÉPHONE (514) 987-3131



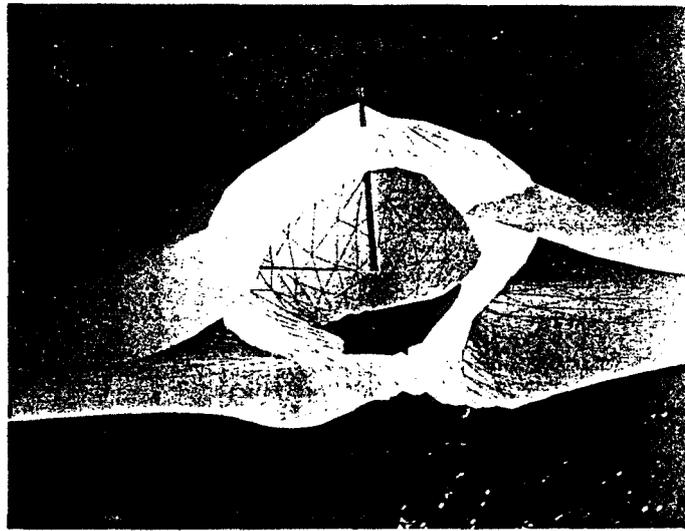
**Figure 2.1:** Solutions resultant d'une critere de rugosité:

$$R(\phi) = \alpha(\delta\phi/\delta x + \delta\phi/\delta y) + (1-\alpha)(\delta^2\phi/\delta x^2 + \delta^2\phi/\delta y^2).$$



---

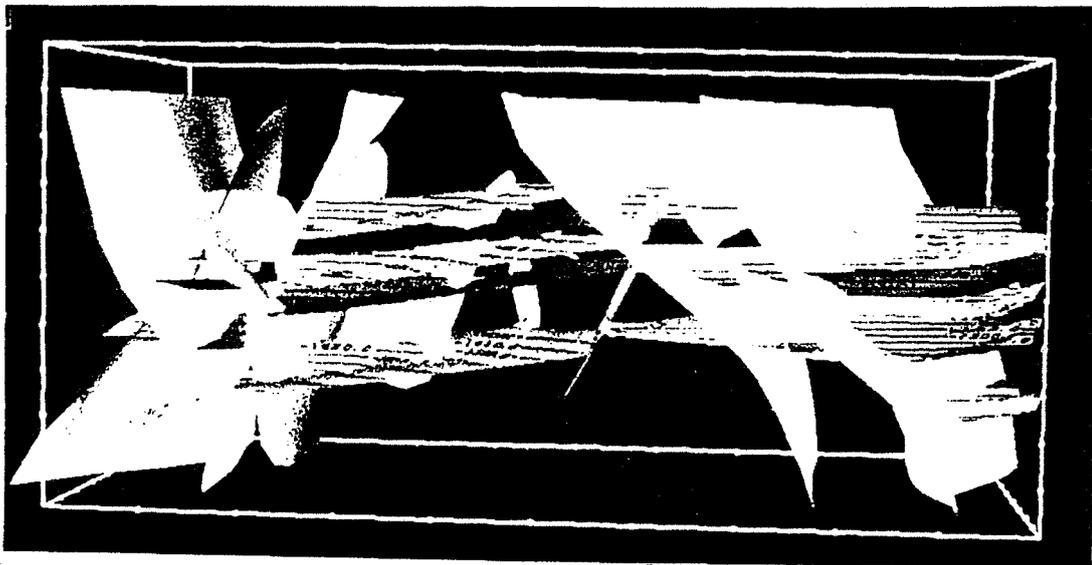
**Figure 2.2:** Influence du parametre  $\alpha$  pour la solution proposé sur la figure 3.1.



---

*Figure 2.3: Modélisation d'un diapir.*

---



---

*Figure 2.4: Modélisation de couches et un système de faille par GOCAD.*

---

Certains critiques peuvent néanmoins être faites:

- 1) la méthode suppose une triangulation initiale et les points connus de la surface résultat sont repartis de manière discrète (noeuds du réseau). Un lissage ultérieur peut donc dans certains cas s'avérer nécessaire.
- 2) la méthode est présentée comme interactive, les différents points de contrôle pouvant être introduits à la souris avec vision du résultat sur l'écran. Toutefois la réalisation de surfaces satisfaisantes par ce procédé demande à l'utilisateur un apprentissage assez délicat.
- 3) les données géologiques qui peuvent être introduites sont essentiellement ponctuelles ou linéaires. Il ne semble pas avoir été envisagé, pour l'instant, d'introduire des objets entiers dont la forme soit définie non pas par une collection de données locales mais par des lois (pli régulier ou faille listrique par exemple).
- 4) la méthode est rapide, et efficace, dans le cas où l'on a affaire à un nombre limité de surfaces. Il n'est pas sûr toutefois qu'elle soit aussi aisément praticable si la scène comporte des surfaces nombreuses et compliquées. Dans ce cas, si ces surfaces sont agencés les unes par rapport aux autres selon des lois déterminées (surfaces sédimentaires entrecroisées ou emboîtées au sein d'un pli préexistant), on peut se demander si une méthode d'interpolation directe de ce type est le mieux adaptée. Ceci pose d'une manière générale le problèmes des limites des méthodes purement statiques dont GOCAD est un exemple élaboré.

### **2.3.2-Modèles dynamiques (Exemple: LOCACE et POLYPLI):**

#### **-Modélisation d'états antérieurs. Exemple du logiciel LOCACE (IFP):**

Une modélisation de type statique, telle que celle qui vient d'être décrite au paragraphe précédent, est inadaptée à la solution de problèmes qui se fixent comme objectif non pas la modélisation d'une scène géologique "actuelle" (c'est à dire accessible actuellement grâce à des observations directes ou indirectes: affleurements, données de sondages, coupes sismiques...) mais d'une "scène géologique passée". Ce type de modélisation est cependant couramment requis, par exemple comme outil d'aide à la prospection pétrolière. Les gisements d'hydrocarbures naturels liquides (pétrole) ou gazeux (gaz naturel) résultent en effet d'une chaîne de processus complexes:

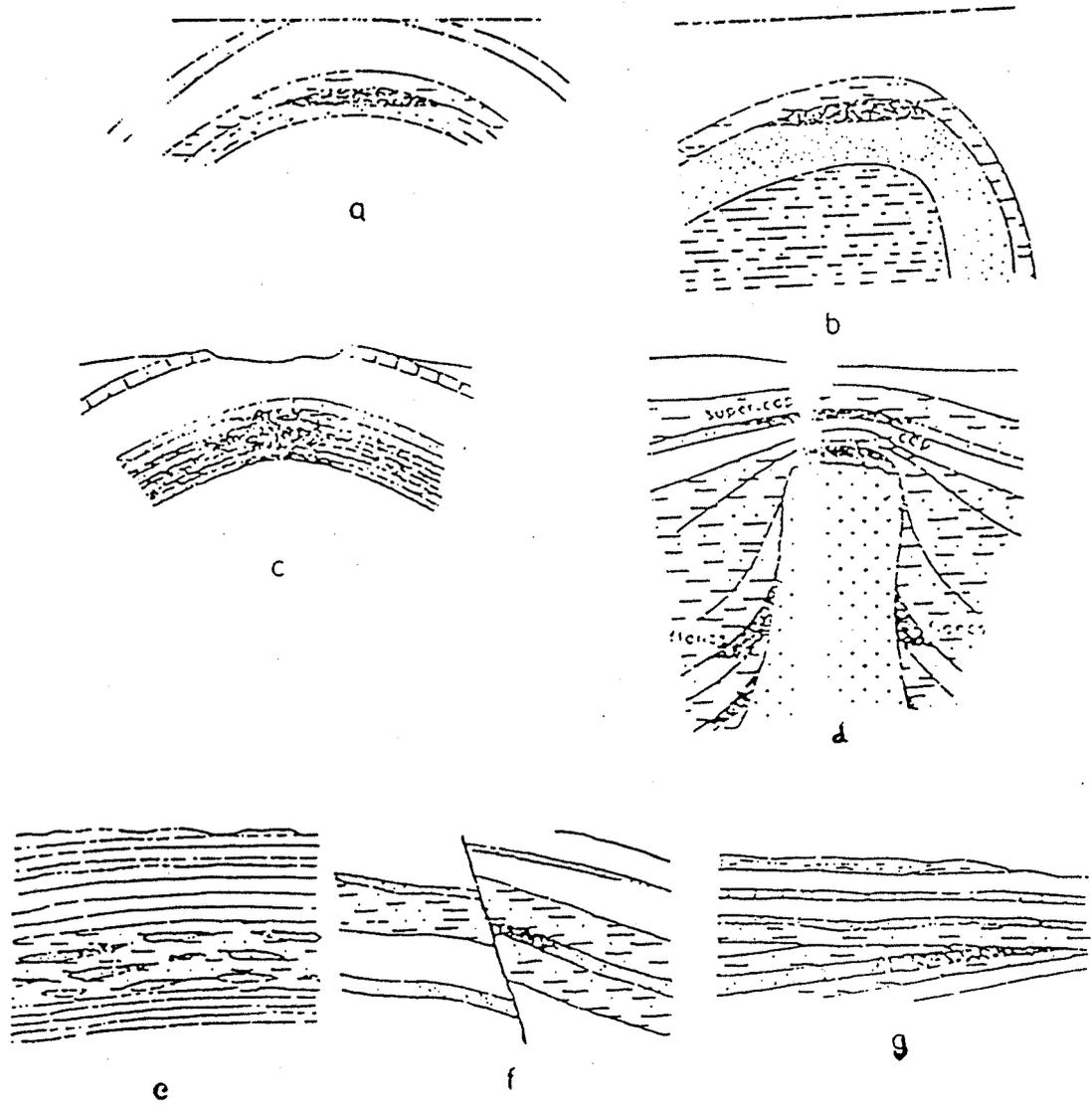
- dépôt de sédiments riches en matière organique végétale (spores, pollens...)
- enfouissement de cette matière organique sous une masse de sédiments plus récents, avant qu'elle ait eu le temps de s'oxyder.
- "maturation" de cette matière organique et transformation en pétrole ou en gaz dans les conditions de l'enfouissement (températures de plusieurs centaines de degrés, pression de quelques centaines de bars, fugacité d'oxygène faible).
- migration vers le haut des hydrocarbures formés qui percolent à travers les roches poreuses et se rassemblent dans des pièges structuraux, poches naturelles constituées de roches poreuses fermées vers le haut par des niveaux imperméables (cf. figure 2.5).

Pour évaluer le potentiel des réservoirs qu'ils identifient en profondeur, les pétroliers sont intéressés à modéliser l'ensemble de ces étapes et notamment à remonter au bassin sédimentaire initial, ce qui permet une quantification plus aisée de la matière organique qui est à l'origine du gisement. Partant de coupes sismiques qui fournissent l'image d'une section verticale à travers le gisement potentiel, ils souhaitent annuler les plissements et les failles et décompacter les terrains afin de reconstituer le bassin initial (cf. figure 2.6).

Dans des cas de ce genre, la scène géologique ne peut pas être modélisée en utilisant directement les données actuelles, mais en transformant au préalable celles-ci, afin de les ramener à l'état antérieur qui concerne la scène choisie. Il faut donc faire appel à une démarche dynamique inverse (c'est-à-dire partant de l'état actuel et remontant à un état préalable plus ancien).

Pour situer l'intérêt et les contraintes de ce type d'approche nous examinerons le logiciel LOCACE, produit par l'Institut Français du Pétrole (IFP), qui applique cette démarche à des coupes sismiques (logiciel 2D)-([MTE89], [ML89] et [KGG86]). LOCACE utilise deux types de données de départ:

- *des données localisées*: elles sont rassemblées dans la coupe sismique qui est traitée. Ce document donne une image en coupe des couches présentes dans le sous sol, repérées à l'aide d'un rayonnement sonore (analyse des temps d'arrivée d'un ébranlement produit artificiellement à la surface du sol, après qu'il ait traversé une épaisseur plus ou moins grande de terrains).



a: anticlinal simple.  
 b: anticlinal asymétrique.  
 c: anticlinal possédant des  
 réservoirs superposés.

d: pièges liés à un dôme de sel (diapir).  
 e: lentilles sabuleuses.  
 f: piège de faille.  
 g: biseau sous discordance.

**Figure 2.5: Exemples de pièges pétroliers**

(D'après [ABL75]).

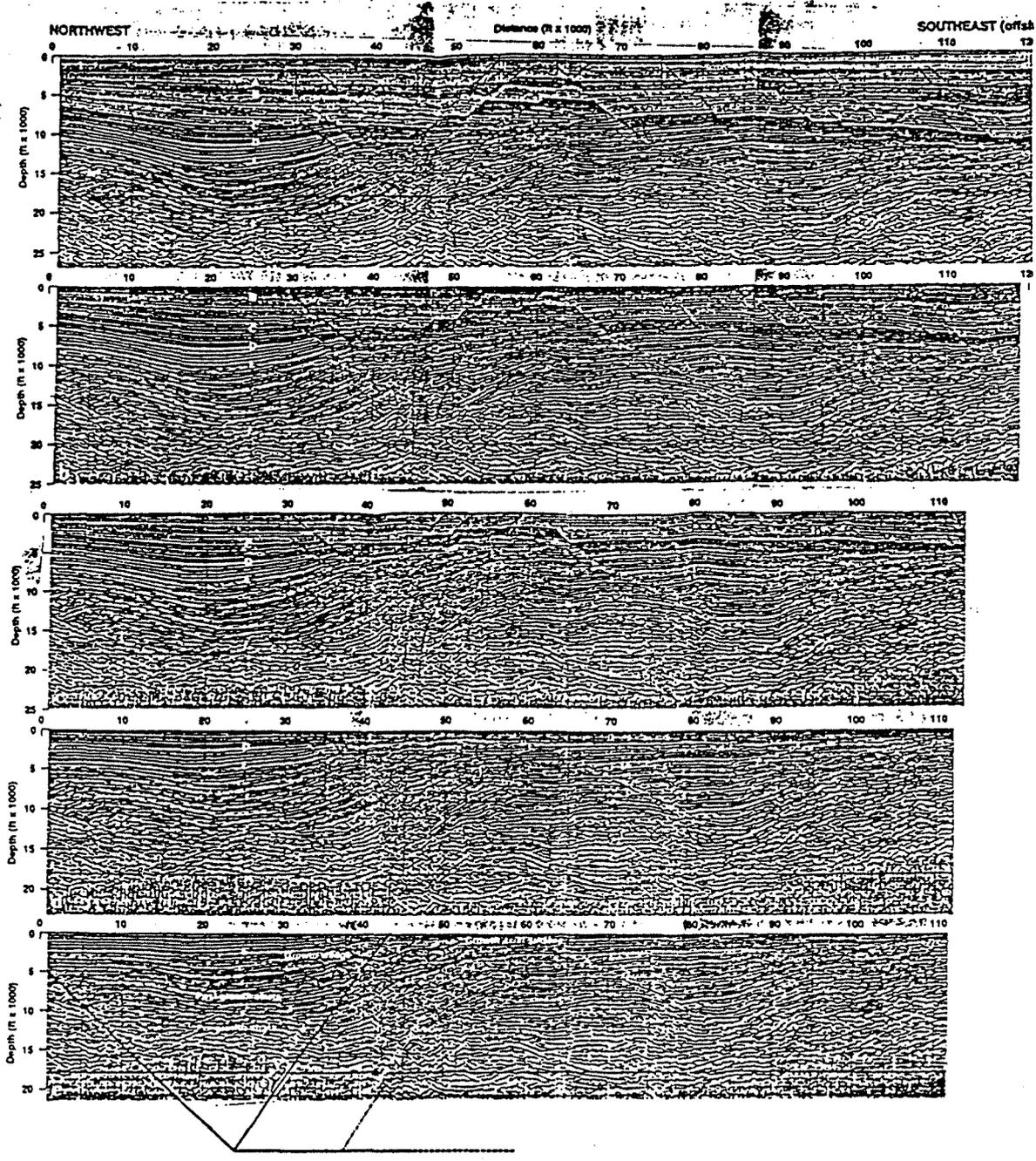


Figure 2.6: Restitution d'une coupe sismique

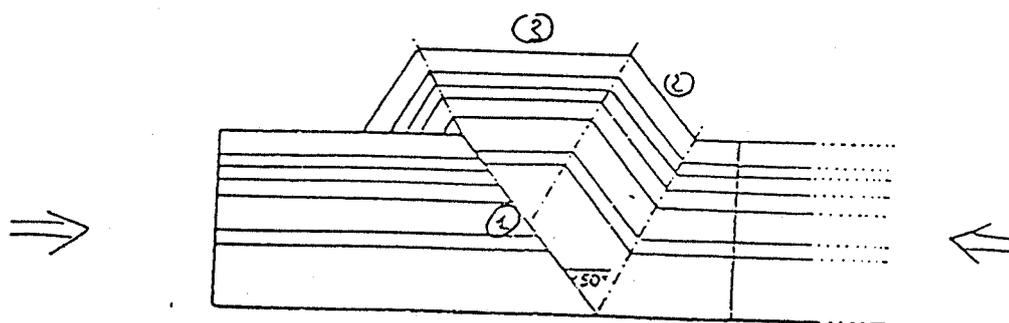
(D'après [NUN91]).

- des données interprétatives: il s'agit du "scénario" imaginé par le géologue pour expliquer la liaison entre la configuration observée et la disposition primitive des couches dans le bassin sédimentaire, au moment de leur dépôt. Ce scénario comporte une part d'hypothèse puisqu'il est interprétatif. Le logiciel peut d'ailleurs travailler sur plusieurs scénarios possibles, dont il permet de tester la validité.

Pour passer de l'état final (coupe sismique observée) à un état antérieur: configuration du bassin lors du dépôt de telle ou telle couche, LOCACE met à la disposition de l'utilisateur des outils de transformation qui permettent au choix:

- de déplisser les couches ou de les plisser, en conservant les volumes ainsi que les épaisseurs de couches et/ou leur longueur mesurée sur la coupe. Le plissement simulé est obtenu par glissement de couches rigides les unes sur les autres le long des surfaces de stratification (plissement de type plat et rampe [KGG 86] (cf. figure 2.7)).

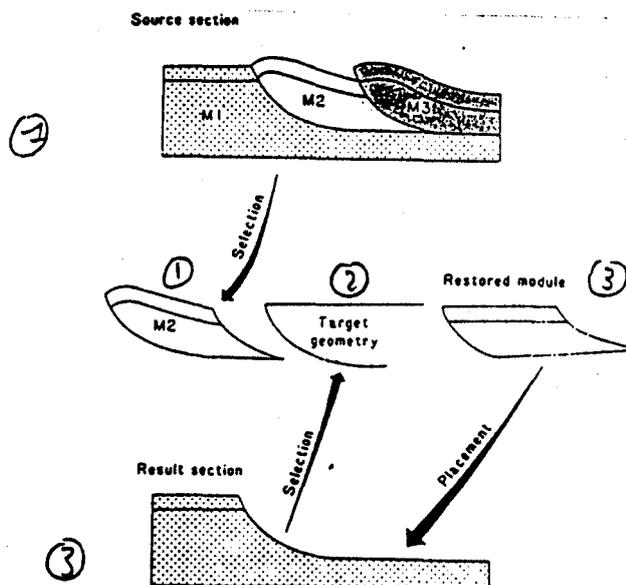
- d'annuler les failles en faisant subir aux couches faillées un cisaillement différentiel vertical ou oblique.



1. faille initiative.      2. Rampe      3. Plat

**Figure 2.7: Pli de type plat et rampe.**

Le logiciel fonctionne par allers et retours: en partant d'un scénario donné, l'utilisateur s'efforce de transformer la position de la coupe sismique de départ qu'il examine (par exemple un panneau limité par des failles) en une "forme cible", dans laquelle la couche la plus récente est ramenée à l'horizontale afin de simuler l'état du bassin lors du dépôt de celle-ci (démarche aller) (Figure 2.8). Si l'application de la transformation ou de la succession des transformations envisagées sur un panneau permet effectivement de reconstituer la forme cible, le résultat est jugé satisfaisant et le scénario envisagé est du même coup validé. Dans le cas contraire, il faut procéder à des ajustements; on peut notamment déformer la forme cible et comparer le résultat avec le panneau considéré (démarche retour). On procède ainsi par essais/erreurs, en effectuant plusieurs allers et retours successifs et en ajustant de manière interactive les résultats obtenus à chaque étape.



Logiciel LOCACE. Passage de la coupe traitée (source section 1) à l'état antérieur que l'on veut modéliser (resultat section 3)  
 En supposant que le panneau M1 ne subit pas de déformation on déplisse les panneaux M2 et M3 en fixant comme forme cible, (target geometry 2) le vide qu'ils doivent occuper la section resultat 3.

**Figure 2.8:** Exemple d'un modèle traité par LOCACE

Une telle méthode permet de corriger de faibles différences de géométrie, en procédant étape par étape à des ajustements mineurs. Toutefois, si les différences sont trop importantes, la démarche ne peut pas aboutir à un résultat satisfaisant. Il faut alors revoir le scénario, en changeant les outils utilisés ou en modifiant la succession des événements envisagés.

Une des hypothèses les plus contraignantes qui se pose pour la restitution d'une coupe sismique est la traduction de la conservation du volume (entre son état initial et son état actuel déformé) en une conservation des surfaces au sein des coupes géologiques (cf.[EM90]). Cette nécessité implique par exemple que la valeur de la déformation perpendiculaire à la coupe géologique soit nulle, ou au moins ait une valeur homogène sur l'ensemble de la coupe. Dans la plupart des cas, cela suppose que le scénario imaginé ne s'applique qu'à des structures cylindriques. Cette limitation importante exclut notamment l'application de LOCACE à l'étude des zones d'amortissement longitudinal de plis ou de failles et à celle de l'ensemble d'une structure arquée dans un plan perpendiculaire au plan de coupe.

D'une manière générale LOCACE ne peut pas donner de résultat précis dans le cas d'une structure géologique hétérogène dans le plan horizontal. C'est un logiciel strictement 2D.

#### **-Modélisation d'un état actuel. Exemple du logiciel POLYPLI:**

L'exemple du logiciel LOCACE démontre l'importance du scénario, dès lors qu'on met en oeuvre une modélisation de type dynamique. En effet, LOCACE ne permet pas seulement de remonter à un état initial satisfaisant, par ajustement d'un panneau sur une forme cible, il se révèle dans le même temps être un outil de validation du scénario envisagé. Le fait que, moyennant des ajustements mineurs, il soit possible d'atteindre le résultat, prouve que la démarche adoptée est valide. On a donc la clé d'une utilisation possible de la méthode dynamique comme outil d'aide à l'interprétation.

Une utilisation plus directe de la modélisation dynamique à cette fin a été proposée par [POC88], par le biais du logiciel POLYPLI. Il s'agit là non plus de remonter à un état antérieur comme le fait LOCACE, mais au contraire, en se fixant un état initial relativement arbitraire (empilement de couches d'épaisseurs uniformes), de créer un modèle qui simule la géométrie de terrains polyplissés et polyfaillés observés dans des exemples naturels. On vise donc là à créer une scène géologique

analogue à un exemple de terrain, le degré de similitude obtenu permettant de juger la pertinence du scénario utilisé (c'est à dire la cascade des déformations de type plis et failles qui ont modifié la géométrie de l'état initial que l'on s'est fixé). Dans ce cas , c'est donc la validation du scénario qui devient le but essentiel.

Dans son principe, POLYPLI considère que la géométrie de tout pli ou faille, qui déforme une série sédimentaire, est le résultat de l'application à un ensemble de strates primitivement planes d'une transformation apte à décrire les mouvements subis par chacun des points matériels de l'ensemble. Il considère, en outre que la déformation subie par les couches d'un terrain polyplissé et polyfaillé peut être décomposée en une succession de déformations élémentaires de type pli ou faille [RAM62]. Il est alors possible de modéliser ce terrain, en appliquant à la stratification primitive la succession des transformations géométriques correspondantes.

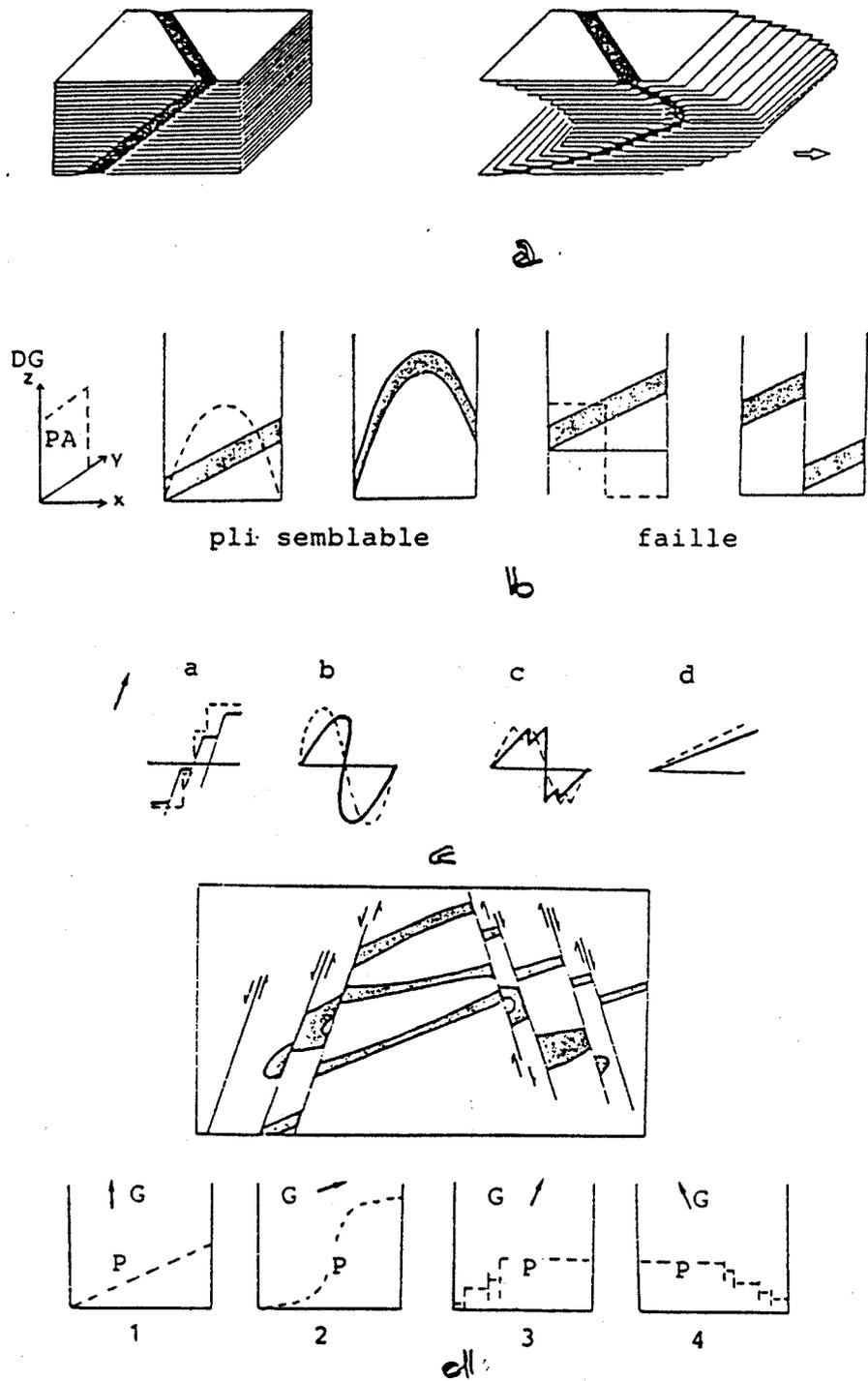
Une faille traduit un décalage subi par deux portions de terrain de part et d'autre d'un "plan de faille".

Les plis semblables, qui sont les déformations souples les plus répandues dans les terrains ayant subi des déformations en profondeur, peuvent être représentées géométriquement par un modèle dans lequel des plans de matière orientés dans une direction particulière, le "plan axial" du pli, glissent les uns sur les autres parallèlement à une direction déterminée dite "direction de glissement". (Figure 2.9). Le déplacement des différents points matériels, parallèle dans les deux cas à une direction fixe, a la même valeur:

- dans le cas d'une faille, respectivement pour tous les points qui appartiennent à l'un ou à l'autre des demi espaces limités par le plan de faille.
- dans le cas d'un pli semblable, pour tous les points qui appartiennent à un même plan de glissement.

Les transformations ainsi définies sont dites de "type semblable" [POC88]. Elles sont caractérisés (Figure 2.10).

- par une direction de plan (plan de faille ou **plan axial**).
- par une direction de droite dans ce plan (**direction de glissement**).
- par une **fonction profil**  $F(x)$ .



**Figure 2.9: Elaboration de failles et de plis semblables.**

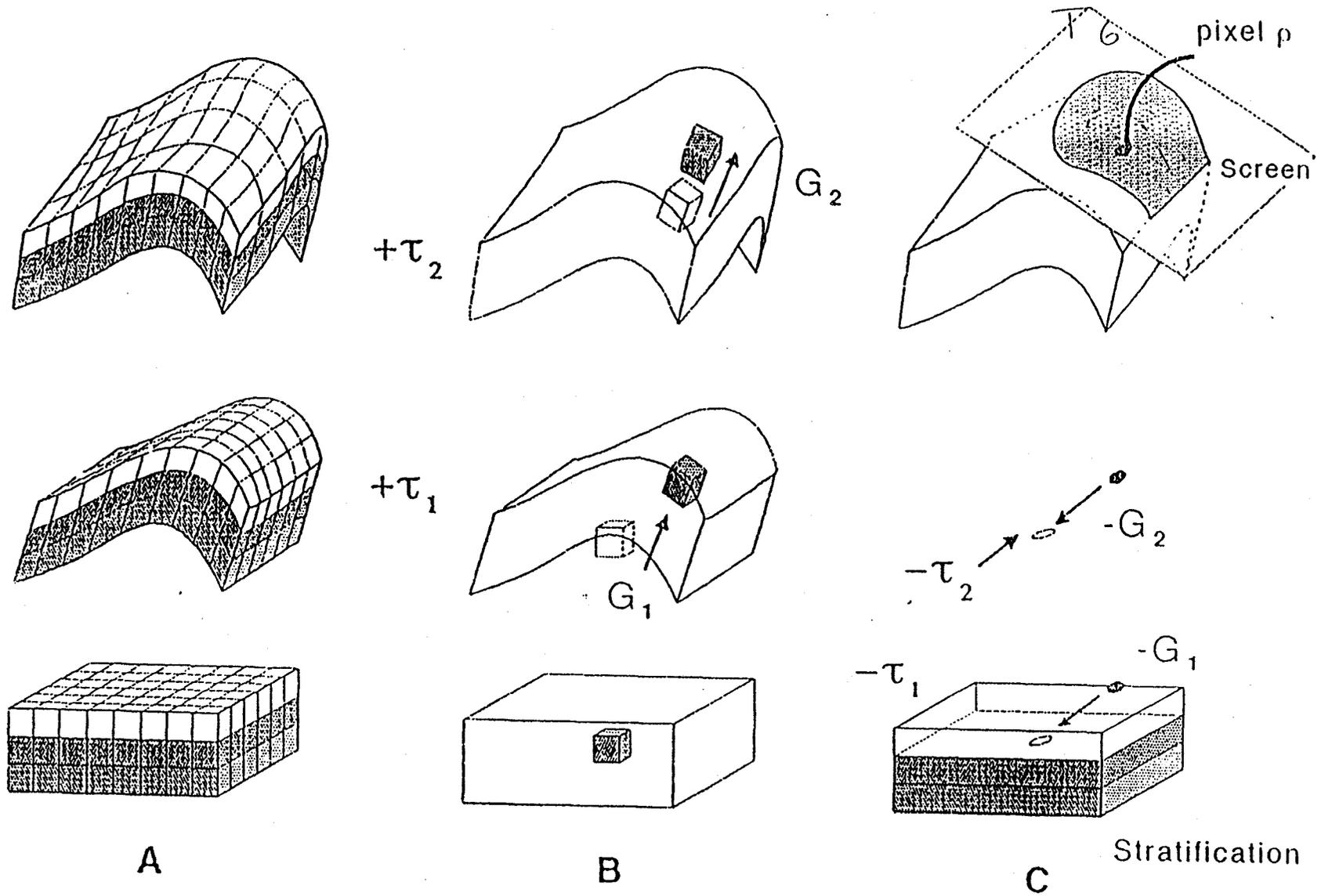


Figure 2.10: Transformation de type semblable

(D'après [PCB<sup>+</sup>92]).

Dans POLYPLI, le modèle réalisé reste implicite. On considère qu'il est entièrement défini par le scénario, c'est à dire par la succession des transformations de type semblable appliquées et par les caractéristiques de chacune d'entre elles, ainsi que par la stratification originelle: succession et épaisseurs des différentes couches.

Le logiciel construit uniquement des coupes ou des blocs diagrammes dans toute direction choisie. Ainsi l'utilisateur appréhende-t-il le modèle uniquement par le biais des réalisations particulières qu'il choisit.

La construction d'une section est réalisée point par point, le logiciel recherchant la position de chacun des points de la section dans la stratification originelle et affectant ainsi, à chacun des pixels de l'écran, une couleur qui est celle de la couche à laquelle appartient le point correspondant (voir figure 3.10). La démarche est possible dans la mesure où les transformations de type semblable sont aisément inversibles.

Un intérêt du logiciel POLYPLI tient au fait qu'il permet de construire des analogues de terrain, ayant subi des déformations intenses et compliquées. En effet, le résultat obtenu dès lors qu'on applique à la stratification initiale deux transformations de type semblable ou plus donne des figures complexes, qui simulent parfois, de manière relativement réaliste, des situations de terrain qu'il serait difficile d'appréhender par une autre méthode. (Figure 2.11).

Certaines critiques peuvent être néanmoins être faites:

- POLYPLI fait appel, à la méthode "**point par point**", dont l'emploi pose le problème du stockage d'un nombre important de données correspondant à l'ensemble des points matériels qui fourniraient une description volumique du modèle (la place mémoire requise dépasse largement les possibilités habituelles à moins que ces données puissent être comprimés efficacement). Par ailleurs, comme les sections que l'on souhaite visualiser peuvent varier à l'infini, il n'est pas intéressant de stocker préférentiellement telle ou telle d'entre elles. On choisit donc de construire entièrement chacune des sections requises, à chaque fois qu'on en a besoin. Ainsi le modèle reste-t-il plus moins virtuel: tout changement de vue implique une reconstruction totale.

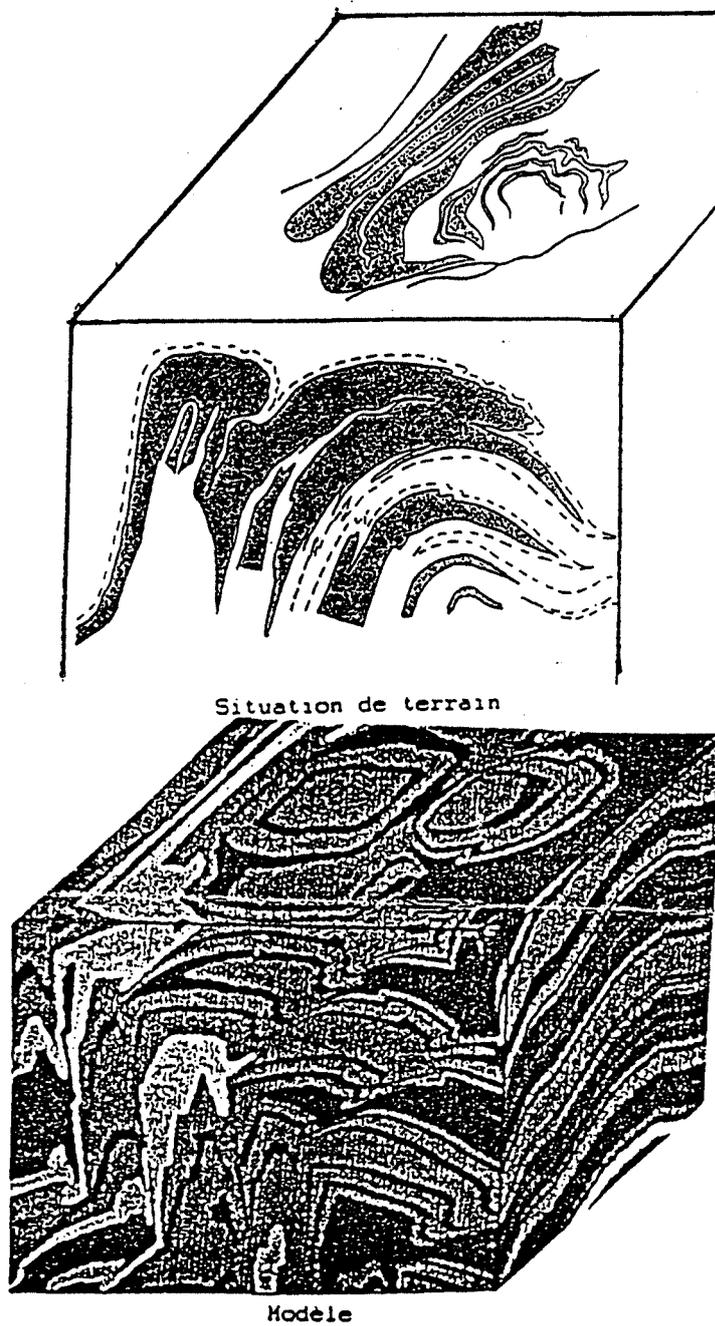


Figure 2.11: Modèle du "montagne noir" par POLYPLI (bloc diagramme).  
(D'après [DEM79]).

- un deuxième problème tient à la démarche de modélisation employée: cette démarche est pour l'essentiel "directe" ce qui signifie qu'on part d'un état initial plus ou moins arbitraire (un empilement de strates d'épaisseurs uniformes), pour le soumettre à l'ensemble des processus qui ont joué lors de l'évolution géologique, dans l'ordre où ceux-ci ont opéré, depuis l'état initial jusqu'à l'état final. Cette démarche permet de bien saisir la contribution de chacun des processus à la réalisation du modèle. Ainsi, si le scénario envisagé est judicieux et si chacune des phases de déformations est simulée de manière correcte (orientation correcte du plan axial et de la droite de glissement, fonction profil réaliste), on peut espérer créer un analogue ressemblant de la réalité que l'on veut construire et donc valider de manière satisfaisante le scénario (Figure 2.11). La réalisation d'un modèle entièrement fidèle, susceptible de reproduire les observations effectuées en un certain nombre de points connus, est par contre, pratiquement impossible. Ceci tient à deux types de raisons:

1) le modèle fonctionne à partir de certains a priori:

- lithostratigraphie de départ supposée latéralement homogène en tout point.
- succession de phases de plis cylindriques, sans amortissement axial.
- caractère "semblable" de ces plis: conservation des épaisseurs des couches dans la direction du plan axial uniquement.

Ces différentes hypothèses ne sont pratiquement jamais entièrement réalisées dans la réalité.

2) il n'existe dans POLYPLI aucune procédure simple, qui permette de contraindre strictement l'état initial en fonction de données localisées concernant l'état final, donc qui permette de faire passer sans ambiguïté une surface donnée par un point donné d'observation. Des contrôles indirects existent certes, "calage" horizontal des profils, possibilité de modifier ceux-ci manuellement..., mais ce ne sont là que des moyens d'efficacité limitée. Il n'y a pas la possibilité dans POLYPLI de procéder par essais erreurs à l'aide d'une méthode de type aller et retour, telle que celle mise en oeuvre dans LOCACE: POLYPLI ne produit en substance que des analogues.

## **2.4- Conclusion. Cahier des charges concernant une modélisation générative fidèle:**

### **-Démarche à adopter:**

Nous avons vu auparavant que la modélisation des objets géologiques peut être réalisée en employant une démarche statique, apte à reproduire un état de la réalité (exemple: carte, coupe, ...), mais non à rendre compte de son évolution, ou une démarche dynamique.

Cette dernière démarche semble plus intéressante, dans la mesure où les formes des objets présents au sein de la scène géologique et les relations mutuelles entre ces objets, résultent d'une évolution connue à partir d'un état initial plus simple.

Une modélisation dynamique, c'est à dire générative, présente, de plus une grande souplesse d'application. Elle peut permettre en effet:

- 1) observant un état donné, de mettre en évidence l'ensemble des processus dont le jeu normal a produit ce que l'on constate actuellement.
- 2) observant une partie seulement d'un état (par exemple la forme des plissements en surface) et étant capable de reproduire ce que l'on voit d'en déduire quel doit être probablement l'état de ce que l'on ne peut pas observer (déformations en profondeur par exemple).
- 3) de montrer éventuellement qu'un état observé ne peut pas être la conséquence des processus que l'on supposait avoir joués et qu'il faut imaginer un autre scénario, le premier résultat obtenu étant en contradiction avec l'observation.
- 4) prévoir quel serait un état futur, résultat du jeu des processus déterminés.

Quand on connaît les lois reliant la cause à l'effet, il reste généralement à déterminer quelles sont les valeurs des paramètres qui s'appliquent au cas étudié. Il faudra fixer les valeurs de paramètres, tels que la densité, l'élasticité, l'intensité des forces, ... On y parvient généralement en déterminant des ordres de grandeur vraisemblables, et en faisant fonctionner le modèle pour ajuster le résultat à la réalité observée.

Un tel ajustement qui correspond à un "calage" du modèle est réalisé d'une manière générale par essais/erreurs. Nous avons vu de ce point de vue l'efficacité d'une démarche de type aller et retour du type de celle adoptée dans le logiciel "LOCACE".

On doit naturellement se poser la question de l'unicité de la solution trouvée: "n'existe-t-il pas d'autres jeux de processus (d'autre "scénarios") capables de reproduire le même état observé ? et dans ce cas, quelles différences existe-t-il entre ces divers solutions".

Il n'y a bien entendu pas de réponse toute faite à ce genre de question. Dans la mesure notamment où seule la géométrie est prise en compte, il est possible de trouver de nombreux exemples où plusieurs scénarios possibles peuvent conduire à un résultat identique: il suffit pour cela, par exemple, que les différentes transformations appliquées soient commutatives. Le choix entre de tels scénarios fera alors appel, avant tout, au sens critique du géologue et aux données supplémentaires que sa connaissance du terrain peut lui permettre d'introduire. Il faut seulement retenir que la validation d'un scénario, au vu du résultat géométriquement correct qu'il induit, est une validation faible: on démontre ainsi que le scénario retenu est plausible, en aucun cas qu'il est l'unique possible.

#### **-Schéma logique de modélisation:**

Le tableau 2.1 proposé par [PER90] montre un schéma logique possible pour une modélisation dynamique s'inspirant de la problématique qui vient d'être exposée.

On peut envisager un fonctionnement du type suivant:

Les données locales issues de la carte sont entrées à la table à digitaliser (1). Elles peuvent être complétées par des données graphiques supplémentaires tracées par l'utilisateur (2), (4). Celui-ci a également la possibilité de définir interactivement des phases de déformation (3).

La modélisation est entièrement pilotée par l'utilisateur, qui peut déclencher à volonté les différentes procédures, ce qui autorise une démarche par essais erreurs et permet la mise en oeuvre de la méthode inverse et/ou directe de manière souple. Les procédures peuvent opérer, soit sur les données lors de la phase inverse (partie gauche

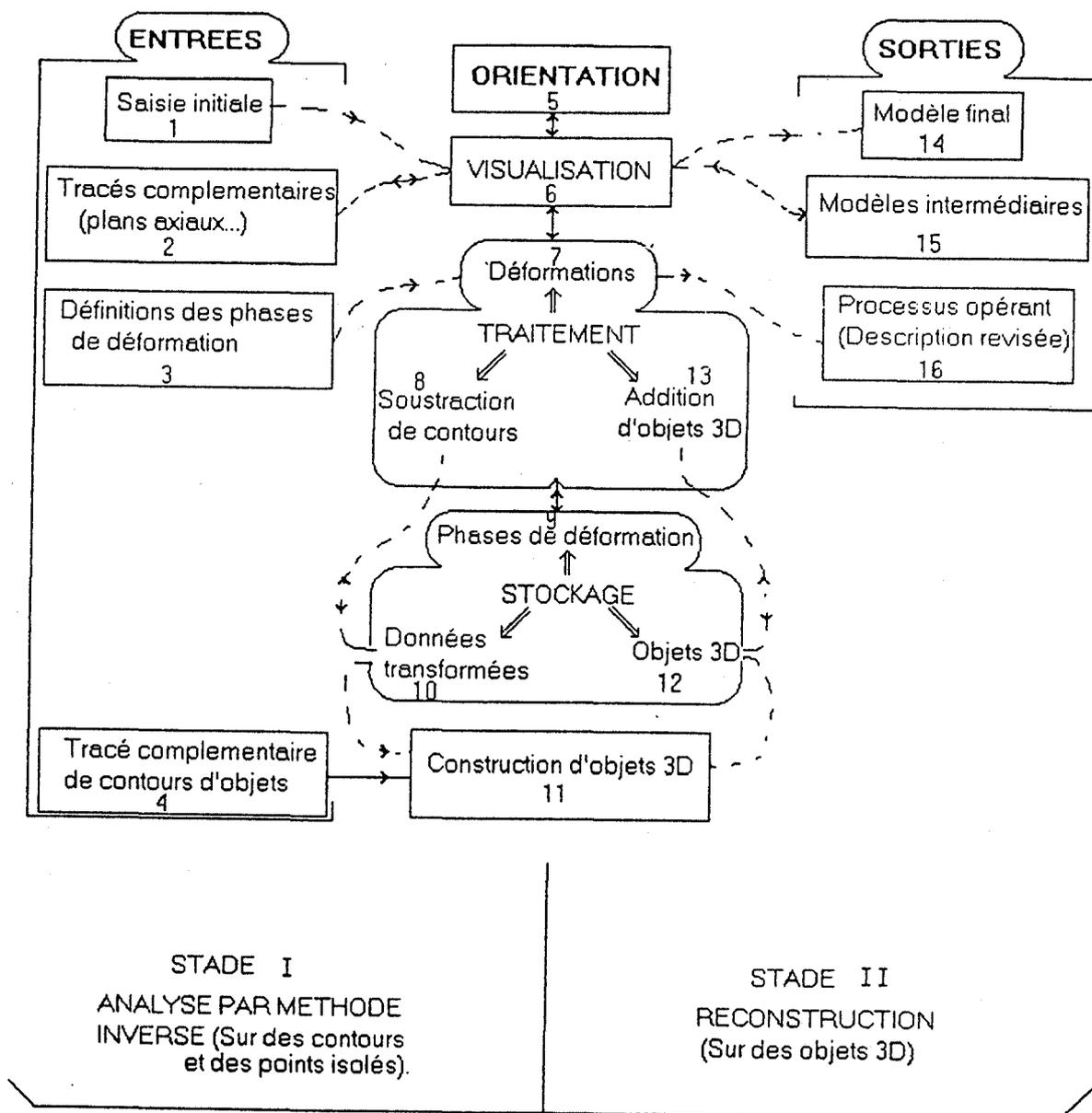


Tableau 2.1: Schéma logique de la modélisation envisagé.

[PER90].

du schéma = analyse), soit sur des objets 3D lors de la phase directe (partie droite du schéma = reconstruction). Les procédures sont du type orientation i.e. positionnement des objets selon toute orientation désirable (5), visualisation (6), traitement, i.e. mise en oeuvre des procédures représentatives des processus géologiques dans le sens direct ou inverse (7) (8) (13), stockage des résultats intermédiaires (9) (10) (12).

Enfin, le passage entre les données éventuellement transformées et les objets 3D de la modélisation est assuré par un module spécifique (11).

Les résultats obtenus se traduisent sous forme d'un modèle final (14) et de modèles intermédiaires (15) correspondant à des stades antérieurs de l'évolution géologique. Celle-ci est décrite par une série de processus géologiques, dont les caractéristiques de détail ont été précisées lors de la construction même du modèle. Cette description révisée des processus opérants, valorisée par le réalisme du modèle final est également un produit de la modélisation (16).

Nous verrons les implications d'un tel schéma du point du choix d'une structure de données dans les prochains chapitres.

## CHAPITRE -3-

### LES ELEMENTS DE LA MODELISATION: OBJETS ET OPERATEURS

---

#### **3.1- Propriétés géométriques de la "scène géologique" et des objets qui la composent:**

La "scène géologique" 3D est une représentation d'un assemblage de terrains, à un instant donné, correspondant à un état déterminé du système. Deux caractéristiques peuvent être soulignées:

- elle représente une partie du système et est donc limitée par des bords.
- les objets qui la composent sont jointifs, c'est à dire qu'à l'intérieur de la scène, il n'y a pas de vide entre eux.

Une telle scène peut être considérée comme un assemblage rigide de corps solides. La scène dans son ensemble, tout comme chacun des objets qui la compose, vérifie les propriétés classiquement définies par REQUICHA pour les solides [REQ77]:

- 1-*Rigidité*: forme invariante, indépendante de la position et de l'orientation du corps considéré.
- 2-*Tridimensionnalité homogène*: intérieur bien défini et absence de points isolés ou de portions ballantes.
- 3-*Finitude spatiale*: les solides occupent une partie finie de l'espace.
- 4-*Clôture par rapport aux opérations de positionnement géométrique et aux opérations de composition*: ces opérations appliquées à des objets valides fournissent des objets valides.
- 5-*Finitude descriptive*: possibilité de décrire chaque objet à partir d'un nombre fini d'éléments.

6-*Déterminisme de frontière*: la frontière décrit sans ambiguïté l'intérieur de l'objet.

Les caractéristiques qui ont été rappelées impliquent par ailleurs:

- que la frontière d'un objet puisse au moins partiellement correspondre à un bord de la scène.
- qu'en dehors des portions correspondant à un bord, cette frontière soit constituée d'un assemblage de surfaces élémentaires, communes chacune à deux objets et à deux seulement.

Les objets de la scène et la scène elle-même devront être représentés à l'aide de données susceptibles d'être structurées de manière variable (assemblage de primitives, partitions de l'espace, représentation par frontière, ...), ainsi que cela sera détaillé dans la suite. Compte tenu des caractéristiques qui viennent d'être rappelées, il faudra donc vérifier, dans chaque cas d'espèce, que la structure de données correspondant au mode de représentation choisi, produit des objets valides.

### **3.2- Caractéristiques géométriques des modèles représentatifs des objets:**

Comme nous l'avons dit, les géologues sont, en principe, plus intéressés par la forme des objets que par leur rendu. Pour cette raison, nous définirons les différents corps géologiques uniquement à l'aide de solides polyédriques limités par des faces planes. On pourrait bien entendu envisager de simuler de tels solides à l'aide d'objets à surface lisse au stade de la visualisation de la scène finale, si cela était jugé nécessaire.

Chacun des objets polyédriques sera considéré comme "régulier", ce qui implique que les surfaces qui limitent le volume correspondant sont connexes, orientables, non auto-intersectantes et de dimension finie [MOR 85]. Les contours qui limitent chacune des facettes, doivent eux-même vérifier la propriété de non auto-intersection [MÄN88].

Les propriétés et règles d'orientation des différents éléments composant un solide polyédrique sont rappelés dans le tableau 3.1. Les règles d'orientation adoptées sont les règles de Möbius [MOR 85], qui garantissent la cohérence topologique de l'objet.

Dimension	Objet		Limites	
	Spécification	Propriétés et conventions	Spécification	Propriétés et conventions
3D	Objet polyédrique régulier	Objet borné	Surfaces polyédriques réguliers	<p>Au moins une surface extérieure. Toute surface intérieure est englobée dans une surface extérieure.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- les normales aux différentes facettes sont orientées vers l'extérieur de l'objet.</li> <li>- sens des arêtes inversé d'une facette à la facette voisine.</li> </ul>
2D	Facettes polyédriques	Orientation de la normale vers l'extérieur de l'objet	Contours polygonaux fermés réguliers	<p>Au moins un contour extérieur. Toute contour intérieur est englobé dans un contour extérieur.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- sens horaire pour un contour extérieur.</li> <li>- sens antihoraire pour un contour intérieur.</li> </ul>
1D	Arêtes	Normale orienté à gauche	Sommets	

**Tableau 3.1: Caractéristiques des éléments de la modélisation.**

Nous rappellerons par ailleurs que les éléments appartenant à un solide polyédrique vérifient la relation d'Euler. [MÄN88].

$$v - e + f = 2(s - h).$$

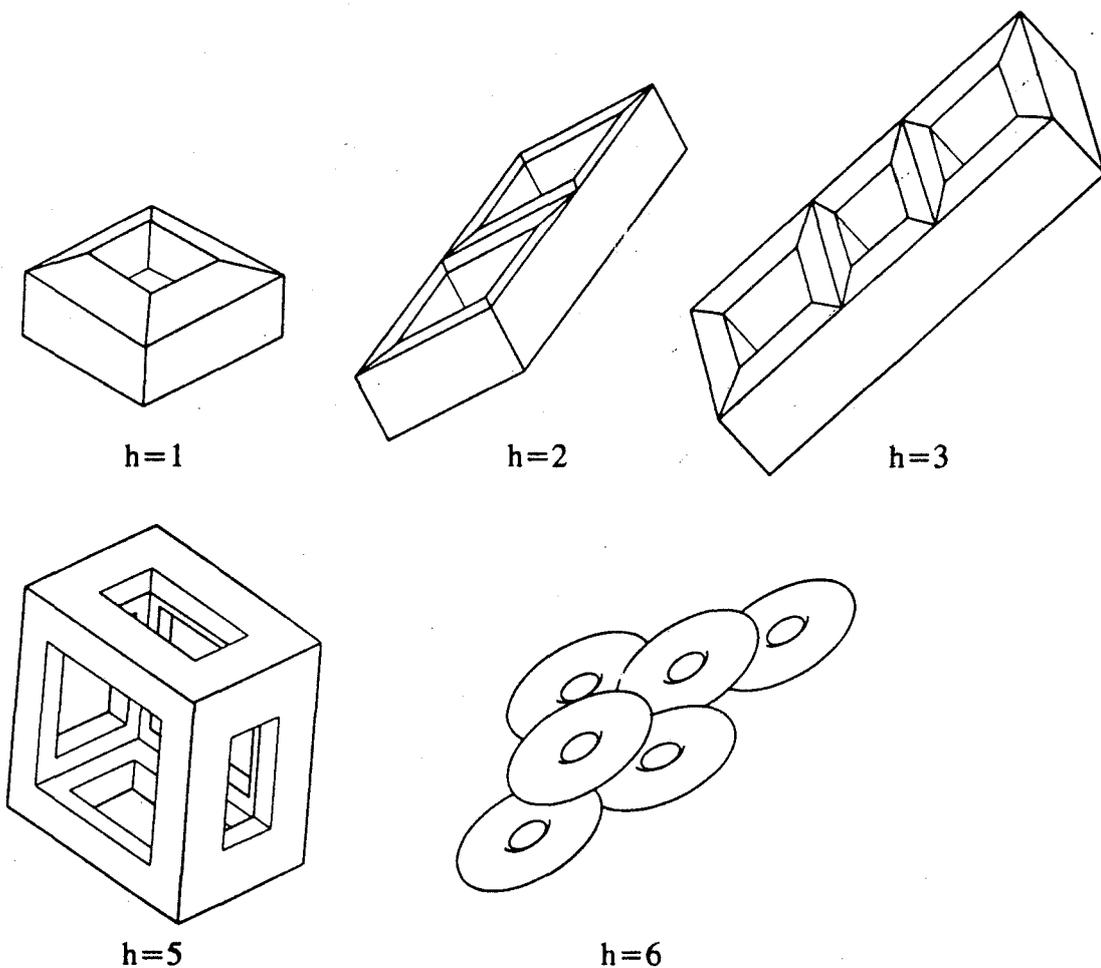
v: étant le nombre de sommets.

e: étant le nombre d'arêtes

f: étant le nombre de faces

s: le nombre de surfaces connexes limitant l'objet.

h: le "genre" de la surface (0 pour une surface ne comportant pas d'"anse", n pour une surface comportant n "anses") (cf. figure.3.1).



**Figure 3.1:** Exemples de solides complexes comportant des "anses".

### **3.3- Contraintes géométriques sur les opérateurs:**

La définition d'opérateurs simulant les conséquences géométriques des processus géologiques susceptibles d'être à l'origine de la scène, est au centre de la démarche générative que nous avons choisie d'adopter.

Ces opérateurs qui agissent sur tout ou partie des objets d'une scène permettent de transformer celle-ci en une scène postérieure (démarche directe) ou antérieure (démarche inverse). Il est possible ainsi de réaliser une scène comportant des terrains plissés en appliquant à une scène de départ constituée d'un empilement de couches planes, un ou plusieurs opérateurs simulant le plissement. Il est possible à l'inverse de reconstituer la scène de départ en appliquant dans l'ordre inverse à la scène plissée les inverses des opérateurs précédents, en supposant ceux-ci inversibles.

Nous rangerons les opérateurs utilisés dans deux grands catégories:

1°) *Les déformations*: qui conservent l'identité et le volume de chacun des objets de la scène, mais pas leur forme (cf.figure.3.2).

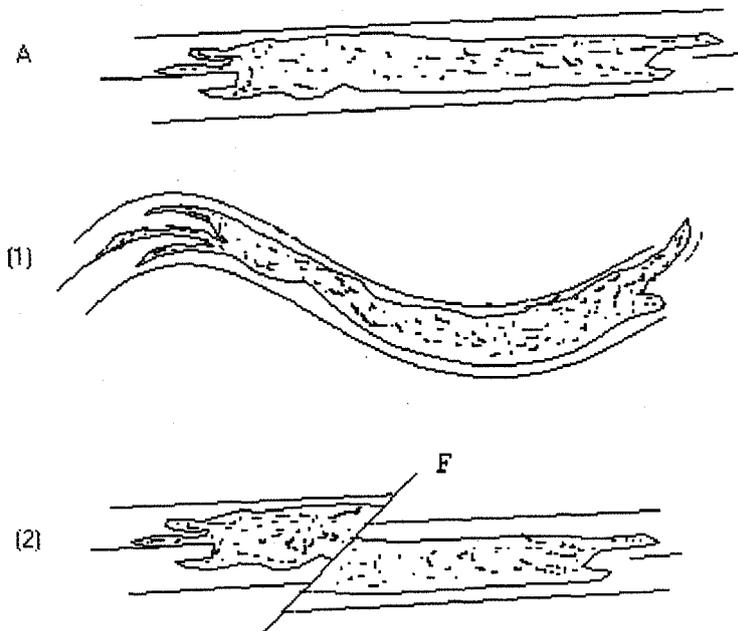
Les déformations pourront être continues (plis conservant la topologie partout) ou discontinues (failles au niveau desquelles la topologie n'est conservée que dans deux demi-espaces séparés par une surface de discontinuité).

2°) *Les opérateurs booléens*: qui correspondent à des opérations ensemblistes et qui ne conservent que le volume global de la scène. Nous citerons par exemple:(cf.figure 3.3).

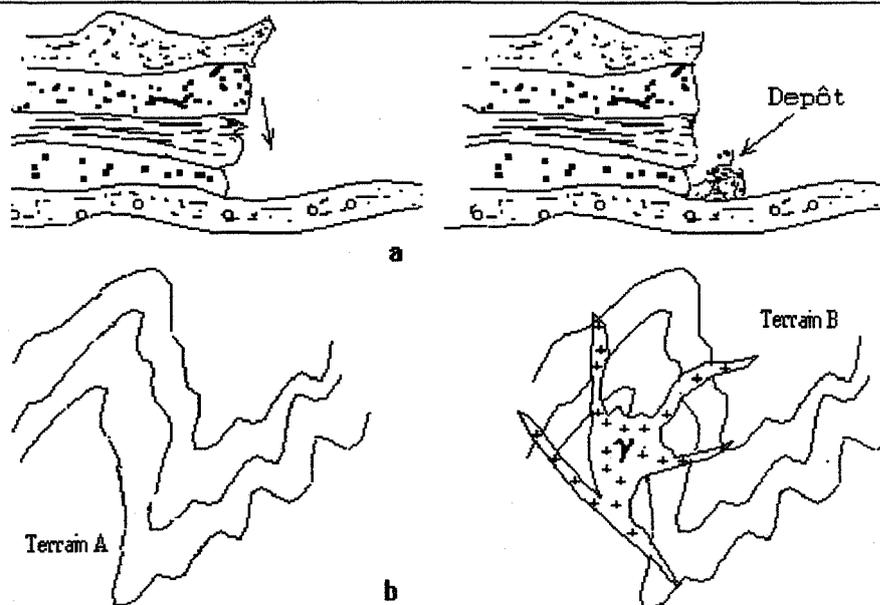
- a) les dépôts discordants.
- b) les intrusions granitiques.

Les opérateurs de la première catégorie modifient la forme des surfaces extérieures des objets. Ceux de la seconde conservent la géométrie des objets et la forme des surfaces mais non l'intégrité des uns et des autres.

En conséquence, l'ensemble des scènes qui résultent de l'application d'opérateurs géologiques vérifient, dans tous les cas, la condition de conservation de volume, mais ne vérifient la condition de rigidité que si ces opérateurs sont tous de type booléen.



**Figure 3.2:** Propriétés topologiques des opérateurs de déformation: (1) plissement de A , la topologie est conservé sur l'ensemble de la scène; par contre en (2) la topologie n'est conservée que dans chacun de demi espaces séparés par le plan de la faille F.



**Figure 3.3 :** Exemple de scene dont la représentation doit faire appel a des opérateurs booléens a) dépôt resultant de l'écroulement d'une falaise , b) granite intrusif ne déplaçant pas l'encaissant.

Les cinq autres propriétés de REQUICHA et la condition d'absence de vides intérieurs doivent rester vérifiées dans tous les cas pour l'ensemble des scènes. Afin de vérifier ce point, il convient d'entrer un peu plus dans les détails des opérateurs susceptibles d'être utilisés.

### **3.4-Opérateurs simulant des déformations. Exemple des transformations de type semblable (TTS):**

Divers types d'opérateurs simulant des déformations continues ou discontinues ont été proposés dans la littérature. Nous n'envisagerons ici à titre d'exemple que l'opérateur TTS ([POC88] , [PP89], [POR<sup>+</sup>87]), d'emploi relativement souple et général dans la mesure où c'est celui que nous utiliserons dans la suite du travail.

#### **3.4.1-Définition mathématique d'une TTS:**

Les transformations de type semblable, définies par [POC 88] sont, nous l'avons vu, à la base de la conception du logiciel POLYPLI. Elles permettent de modéliser des plis résultant d'un cisaillement simple dans une direction particulière, des interférences de pli de ce type ainsi que des failles planes ne comportant pas de déformation interne des compartiments (failles "semblables").

Mathématiquement, une transformation de type semblable (TTS) est une application de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même. Elle est définie par une direction de plan (plan axial dont le pôle sera noté  $\vec{D}$ ), qui correspond à l'orientation des plans matériels glissant les uns sur les autres lors de la déformation, par une direction de droite parallèle au plan axial (droite de glissement  $\vec{G}$ ), qui matérialise la direction dans laquelle se fait le mouvement des différents points matériels et par une fonction profil qui précise l'amplitude de déplacements des différents points.

Une transformation  $T$  de ce type a une expression particulièrement simple lorsque l'on choisit un repère orthonormé (Oxyz) tel que:

Oz soit parallèle à la direction  $\vec{G}$ .

Oyz soit normal à  $D$  et donc parallèle à la direction du plan axial.

La fonction profil pourra alors s'exprimer sous la forme:

$$z=f(x).$$

puisque le pli ou la faille modélisés par **T** sont réputés cylindriques (cylindre de génératrice Oy).

Dans le repère local lié à la transformation **T**, tout point  $M(x,y,z)$  est transformé en  $M'(X,Y,Z)$ , de la manière suivante:

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \\ Z &= z+f(x) \end{aligned}$$

Dans ce repère, on voit aisément que la transformation est **inversible**, puisque:

$$\begin{aligned} x &= X \\ y &= Y \\ z &= Z-f(X) \end{aligned}$$

et qu'elle **conserve les volumes** (cf.figure.3.4) ainsi que les distances selon Oz, puisque si un point R est à la distance d de M selon Oz, il a pour coordonnées  $(x,y,z+d)$ , et il est transformé en  $R'[x,y,z+d+f(x)]$  situé à la distance d de  $M'[x,y,z+f(x)]$ .

L'application de la transformation **T** à un point repéré dans un système orthonormé quelconque (repère du monde) s'exprimera de la manière suivante:

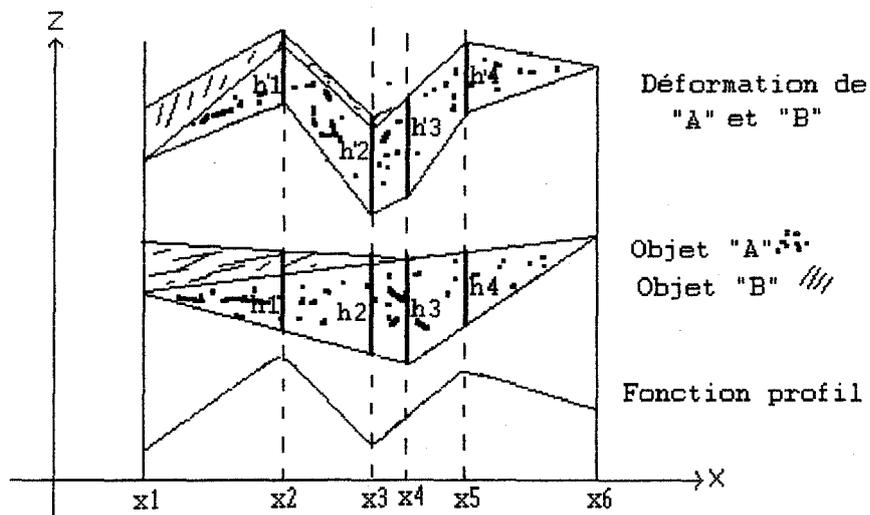
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P^{-1} * M * P * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

**P** étant la matrice de passage entre le repère du monde et le repère local lié à **T** et **M** la matrice associée à **T**.

### **3.4.2-Déformation d'un plan par une TTS:**

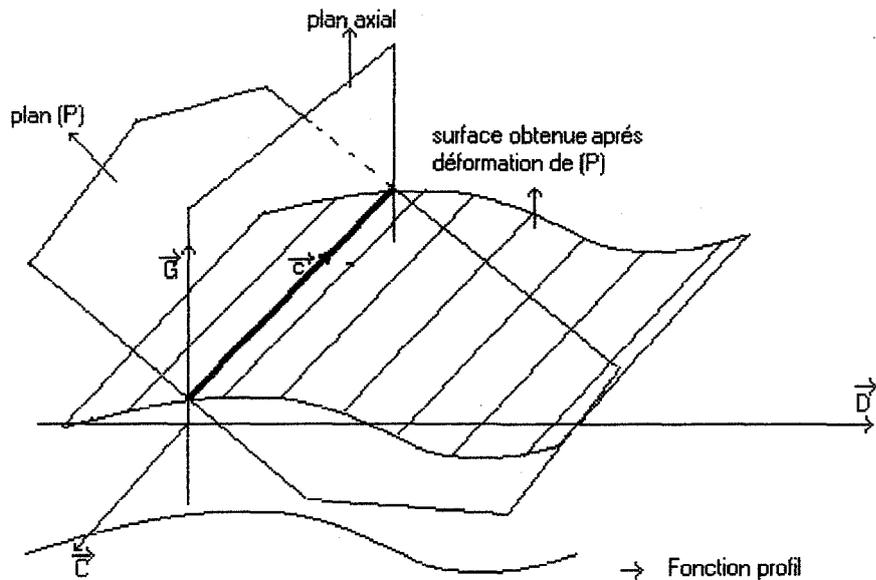
Le transformé d'un plan P par l'application **T**, est une surface cylindrique:

en effet, si  $\vec{c}$  est la direction d'intersection de P avec le plan axial (Oyz), toute droite de direction  $\vec{c}$  contenue dans P sera transformée en une droite parallèle contenue dans le même plan axial (cf.figure 3.5).



$h'1=h1, h'2=h2, h'3=h3, h'4=h4$ . Il en résulte que chacun des "morceaux de l'objet" compris entre deux plans axiaux successifs  $X=x_i$  et  $X=x_{i+1}$  conserve la même surface, ce qui entraîne que la surface de l'objet déformé reste égale à celle de l'objet avant déformation.

**Figure 3.4:** Conservation de la surface par une déformation de type TTS.



**Figure 3.5:** Déformation d'un plan par un TTS.

### 3.4.3-Déformation de plans parallèles (création d'un pli semblable):

Soit un point  $M_1$  se trouvant transformé par  $T$  en  $N_1$ . Tout point  $M_2$  situé à la distance  $\delta$  de  $M_1$  suivant  $\vec{C}$  ( $\overrightarrow{M_1M_2} = \delta * \vec{C}$ ) se trouve transformé par la transformation  $T$  en  $N_2$ , situé à la distance  $\delta$  de  $N_1$  suivant  $\vec{C}$  ( $\overrightarrow{N_1N_2} = \delta * \vec{C}$ ), puisque  $T$  conserve les distances selon  $\vec{C}$ .

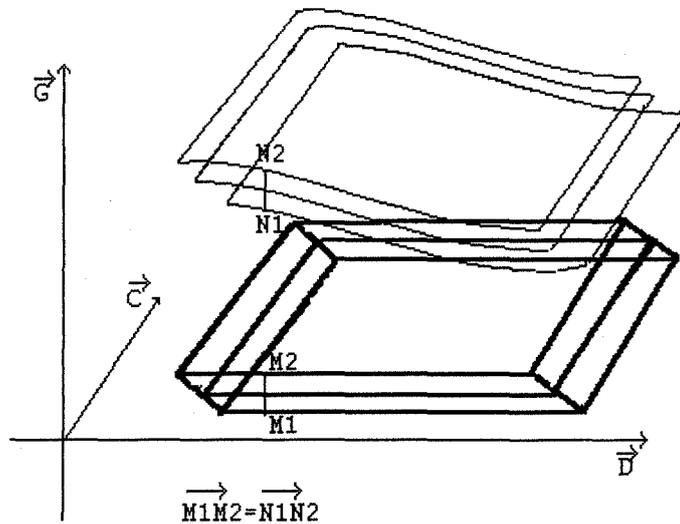
Une famille de plans parallèles, distants les uns des autres de  $\delta$  suivant  $\vec{C}$  est donc transformée en une famille de surfaces cylindriques parallèles, également distantes les unes des autres de  $\delta$  suivant  $\vec{C}$ .

Si l'on désigne sous le nom de "couche", le volume délimité par deux surfaces parallèles, la transformation  $T$  transforme ainsi une couche plane en une "couche plissée".

Plaçons nous dans l'hypothèse où le profil de  $T$  est approximé par une chaîne de segments, ce qui est le cas pour les TTS utilisées dans le logiciel POLYPLI et ce qui sera le cas dans l'utilisation que nous ferons de ces opérateurs. Il est alors possible de faire passer par chaque sommet du profil un plan parallèle à la direction du plan axial de la TTS considérée et de diviser ainsi l'espace en un certain nombre de tranches parallèles de dimension infinie. Dans chacune de ces tranches l'application de la TTS revient à opérer une transformation affine qui conserve le volume de la portion de couche présentée à l'intérieur de la tranche considérée (cf.figure.3.4). Il en résulte que globalement, une TTS ainsi définie conserve le volume de chacune des couches sur laquelle elle opère.

Cette propriété est également vérifiée sur toutes les sections, quelles que soient leurs orientations. Les courbes résultant de l'intersection des différentes surfaces plissées par un plan de section quelconque se déduisent les uns des autres par une translation selon le vecteur qui est la projection de  $\delta * \vec{C}$  sur le plan de section considérée (cf.figure 3.6).

Si la fonction profil de  $T$  est continue, la transformation conserve la continuité des couches qu'elle affecte et celle de leur trace sur tout plan qui les recoupe. De plus, dans chacune des tranches et donc dans l'ensemble de l'espace, le caractère intersectant ou non intersectant des surfaces est conservé (cf. relation entre les objets "A" et "B" sur la



**Figure 3.6:** conservation de l'épaisseur entre les plan paralleles apres déformations par une TTS.

figure 3.4). Il en résulte que dans ce cas, la topologie de la scène est strictement conservée. A l'inverse, lorsque la fonction profil  $f(x)$  est discontinue (profil simulant "des failles"), cette topologie est conservée par "morceaux", de part et d'autre des surfaces de discontinuité correspondant au plan de faille, les couches venant mourir le long des surfaces de faille (cf. figure 3.7).

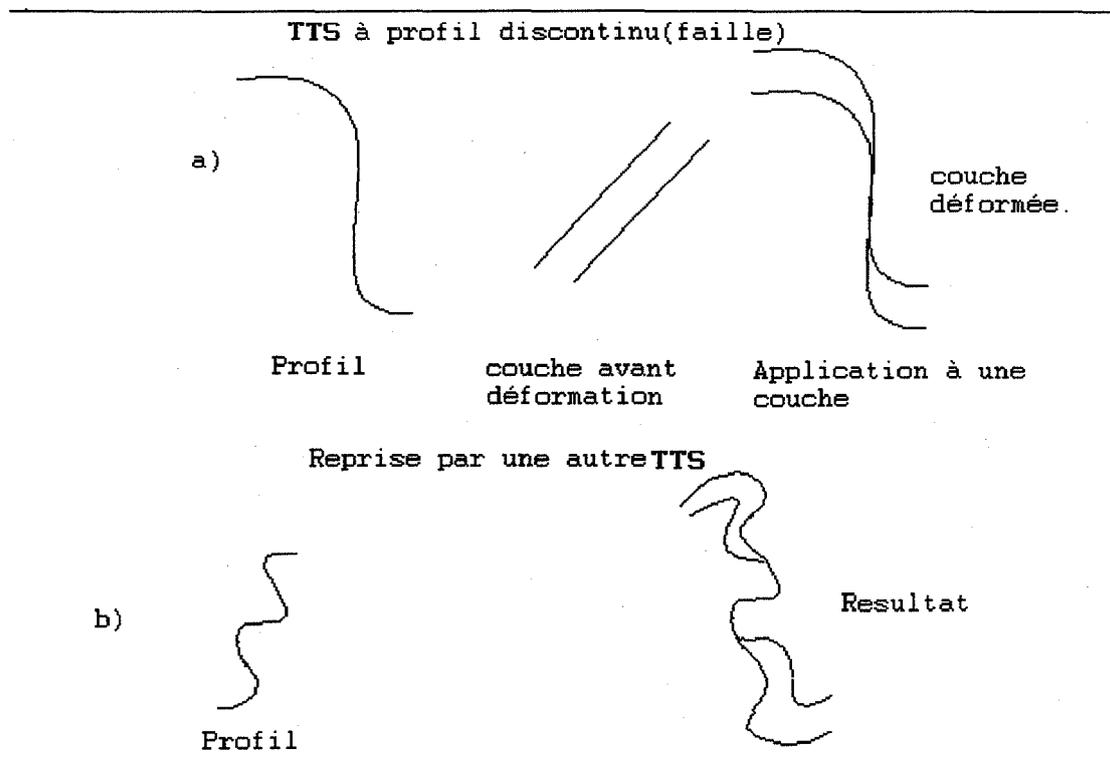
La simulation des transformations géologiques complexes peut être obtenue par superposition de plusieurs TTS différentes, la transformation correspondante s'exprimant sous la forme:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P^{-1} * \left( \prod_{i=1}^{n-1} M_i * \phi_{i, i+1} \right) * M_n * P * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$n$  étant le nombre de TTS appliquées.

$M_i$  les matrices transformations de chacune de ces TTS dans un repère local qui leur est lié.

$\phi_{i, i+1}$  étant la matrice permettant de passer du repère de la transformation  $i$  à celui de transformation  $i+1$ .



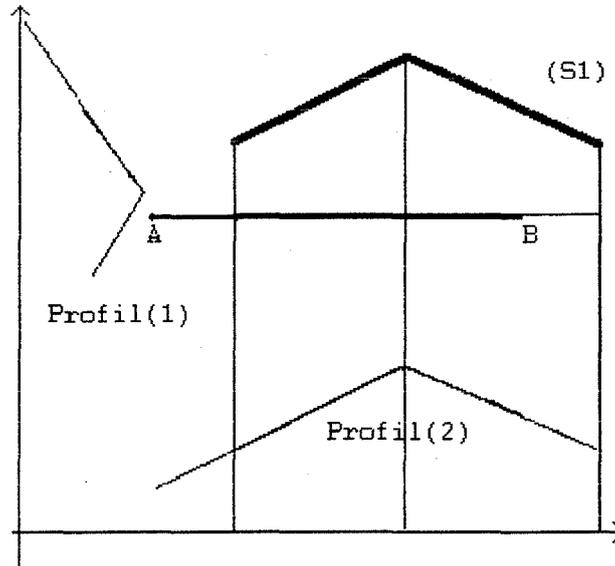
**Figure 3.7:** Reprise d'une TTS à profil discontinu par une TTS à profil continu.

Cette transformation reste inversible puisqu'on peut écrire:

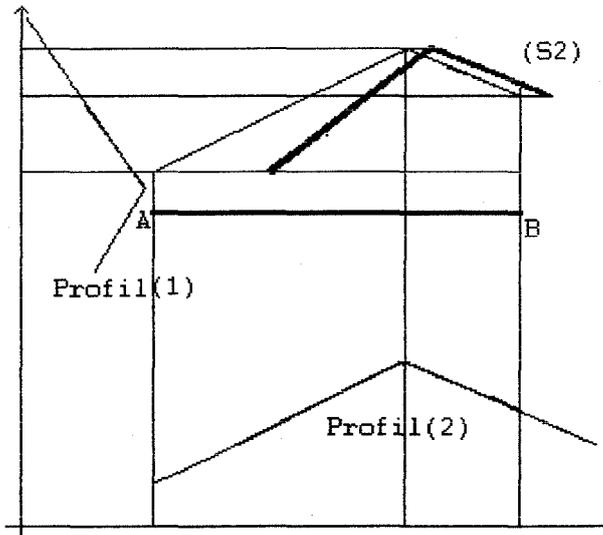
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1} * \left( \prod_{i=n}^2 M_i^{-1} * \phi_{1, i-1} \right) * M_1^{-1} * P * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Il faut noter toutefois que ces diverses TTS ne sont généralement pas commutatives, sauf dans le cas où elles ont une même direction de glissement (cf. figure.3.8).

Les volumes étant conservés par chacune des transformations élémentaires, ils sont bien entendu conservés pour la transformation globale. Par contre, dans le cas où ces diverses TTS ont des directions de glissement quelconques, il n'y a en principe, plus de conservation de distance.



Cas de la déformation de AB par Profil(1)+Profil(2)



Cas de déformation de AB par Profil(2)+Profil(1)

**Figure 3.8:** Non commutativité de TTS ((S1)+(S2))

Un plan sera transformé, par la succession de plusieurs TTS quelconques, en une surface gauche non cylindrique. Une famille de plans parallèles sera transformée en une famille de surfaces qui resteront parallèles, dans le cas où ces différentes TTS ont des fonctions profils continues et qui, dans le cas contraire, seront de toute façon, non

intersectantes, certaines couches pouvant seulement venir mourir le long de surface de discontinuité éventuellement gauches (cf.figure 3.7.a).

Eu égard aux critères rappelés précédemment (critères de REQUICHA et absence de vides au sein de la scène), le principal problème posé par les TTS tient à la non conservation de la forme extérieure de la scène. Si une scène initiale est limitée par des bords plans perpendiculaires les uns aux autres, il n'en sera évidemment pas ainsi de la scène transformée.

Si l'on souhaite imposer à l'ensemble des scènes une forme extérieure et une dimension standard, comme cela semble raisonnable (cf.figure 3.9) , il faudra alors:

1- imposer à l'objet initial des dimensions telles que la scène finale et l'ensemble des scènes intermédiaires soient, compte tenu de la dimension standard qu'on souhaite leur imposer, entièrement incluses dans les transformés de la scène initiale qui leur correspondent. Le volume de la scène initiale devra donc être beaucoup plus grand que celui de la scène finale.

2- réaliser la scène finale et les scènes intermédiaires par intersection du transformé de la scène initiale et d'un solide de forme et de dimension standard initialisé comme vide.

### **3.5- Caractéristiques des opérateurs de type ensembliste:**

Nous avons vu, au chapitre précédent, que certains processus autres que les déformations (granitisations migmatitiques, érosion,...) peuvent aisément être modélisés par des opérateurs logiques de type ensembliste. Ces opérateurs (union, intersection, complément, différence) sont bien connus en terme d'informatique et d'informatique graphique et systématiquement utilisés par exemple dans les méthodes de type CSG.

Nous ferons appel pour notre part dans la suite du présent travail aux opérateurs suivants, appliqués à des objets initiaux A et B:

Complémentaires	$C(A)$	$C(B)$	
Intersection	$A \cap B$		
Union	$A \cup B$		
Différence	$A - B = A \cap C(B) = C[B \cup C(A)]$		(1)

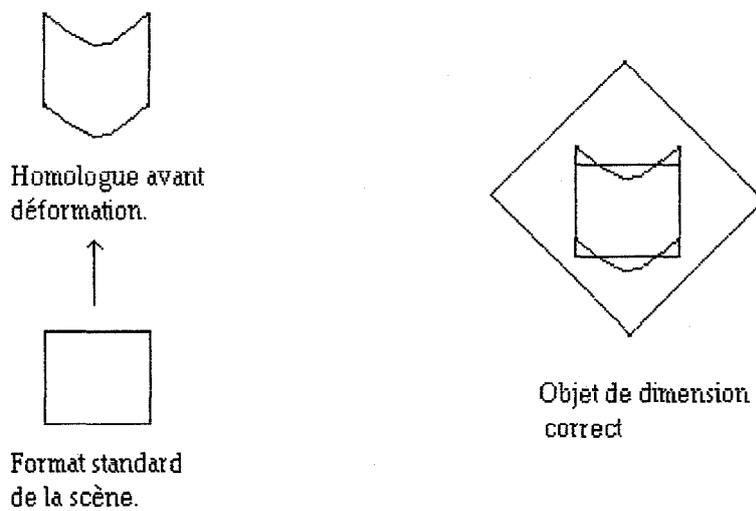
---

1) l'objet initial et l'objet déformé doivent rentrer dans le format choisi pour représenter la scène:



Objets trop petits

2) Pour assurer cette double condition, il faut et il suffit vérifier que sont inclus dans l'objet initial, le format standard de la scène et l'homologue de ce format standard avant déformation:



---

**Figure 3.9:** Scène que l'on cherche à visualiser.

L'utilisation de ce type d'opérateurs pose des problèmes de cohérence géologique et de cohérence topologique.

Sur le plan géologique, les problèmes tiennent au fait que nous souhaitons n'utiliser que des opérateurs inversibles. Ainsi la granitisation de terrains A étant simulée par l'opérateur:

$$A \xrightarrow{\quad} B = (A - \gamma) + \gamma$$

A: terrains initiaux,  $(A - \gamma)$ : terrains non granitisés  $\gamma$ : granite

$\gamma$  étant la forme du corps granitique résultant (cf. figure.3.3.b).

il faut être aussi capable de "dégranitiser" l'ensemble  $B + \gamma$

$$B + \gamma \xrightarrow{\quad} A$$

Une telle opération nécessite que l'on mémorise au sein de l'objet  $\gamma$  la trace de la fraction de l'objet A auquel il s'est substitué, ce qui peut poser des problèmes délicats.

Sur le plan topologique, la cohérence des objets eu égard aux critères de REQUICHA, ne peut être assurée que si les opérateurs ensemblistes utilisés sont des opérateurs réguliers tels qu'ils sont définis par [TIL 80]

$$A \cup^* B = r(A \cup B)$$

$$A \cap^* B = r(A \cap B)$$

$$A -^* B = r(A - B)$$

$$C^*(A) = r(C(A))$$

où  $r$  désigne l'application qui à un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^3$  associe l'adhérence de son intérieur.

Remarquons que la finitude spatiale n'est pas conservée par l'opérateur complémentaire. Toutefois les seules opérations effectivement utiles en modélisation géologique sont en fait les unions, les intersections et les différences, l'opérateur

complémentaire n'étant utilisé que pour faciliter les opérations différence grâce à la relation:

$$A-B = A \cap C(B)$$

Il en résulte que puisque l'intersection entre un objet vérifiant une condition de finitude spatiale et un objet infini est un objet qui vérifie lui-même la condition de finitude, l'opérateur complémentaire pourra dans notre cas être utilisé sans précaution particulière.

### **3.6- Particularités géométriques liées à l'âge relatif des objets et des opérateurs:**

La particularité la plus remarquable d'une scène géologique tient au fait qu'elle comporte des éléments engendrés à des époques différents.

Ceci a des conséquences sur le plan géométrique: en effet un événement déterminé ( par exemple le dépôt d'une couche, l'intrusion d'un granite, la création d'un plissement ou d'une famille de failles) est susceptible d'affecter la géométrie des objets créés antérieurement mais, à l'inverse, est sans conséquence sur la géométrie des objets plus jeunes que lui.

Nous donnerons quelques exemples:

a)- Le dépôt régulier sur un fond plat de matériel sédimentaire (débris de roches, de minéraux, d'organismes...) peut engendrer une pile sédimentaire constituée de strates parallèles les unes aux autres. Cependant, dès que des mouvements, même minimes, affecteront ces dépôts ( par exemple basculement du fond sous l'effet d'une contrainte ou par glissement de sédiments mous les uns par rapport aux autres), cette pile sédimentaire pourra voir sa forme se modifier ( perte de l'horizontalité des couches, apparition de slumps...). Si un dépôt plus récent intervient à la suite, la stratification correspondant à celui-ci recoupera la stratification de la pile ancienne. Un tel dispositif porte le nom de discordance sédimentaire (cf. figures 1.1 et 1.10).

b)- nous avons vu qu'il est possible qu'en profondeur, un liquide silicaté digère des roches préexistantes et cristallise sous forme de granite intrusif. Le corps granitique correspondant aura des limites (épointes) qui recoupent les limites des terrains préexistants. [cf. figure 1.3 (c), (d)].

c)- l'érosion entame, de manière plus ou moins irrégulière, les couches géologiques, engendrant une surface qui recoupe donc les limites entre ces couches (cf. figure 1.2).

Il résulte de cela qu'une scène géologique simple peut être lue au vu de sa géométrie en terme de chronologie relative.

La plupart des objets volumiques de la scène géologique couche, corps granitique,... n'ont pas d'âge ponctuel, leur formation s'étant effectuée durant un certain laps de temps. Par contre des âges ponctuels au moins relatifs peuvent généralement être attribués sans ambiguïté aux différentes surfaces de la scène. Ainsi sur la figure 3.10, les surfaces peuvent être ordonnées de la manière suivante, de la plus ancienne à la plus récente (cf. figure.3.10.b):

Surface 1 à 6 Bases de couches concordantes

Surface 7 surface extérieure d'un granite (=limite extérieure de la granitisation).

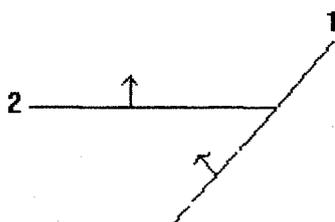
Surface 8. Base de couche discordante.

Surface 9. Base de couche concordante.

Surface 10 et 11 Failles.

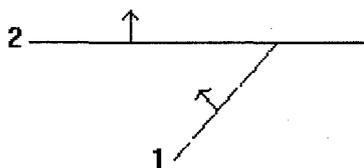
Surface 12 Base de couche discordante.

Les bases de couches seront supposées orientées vers le haut. En supposant qu'il n'y a jamais plus de deux surfaces s'intersectant au même point, il est possible en outre de définir deux types de relations entre surfaces:



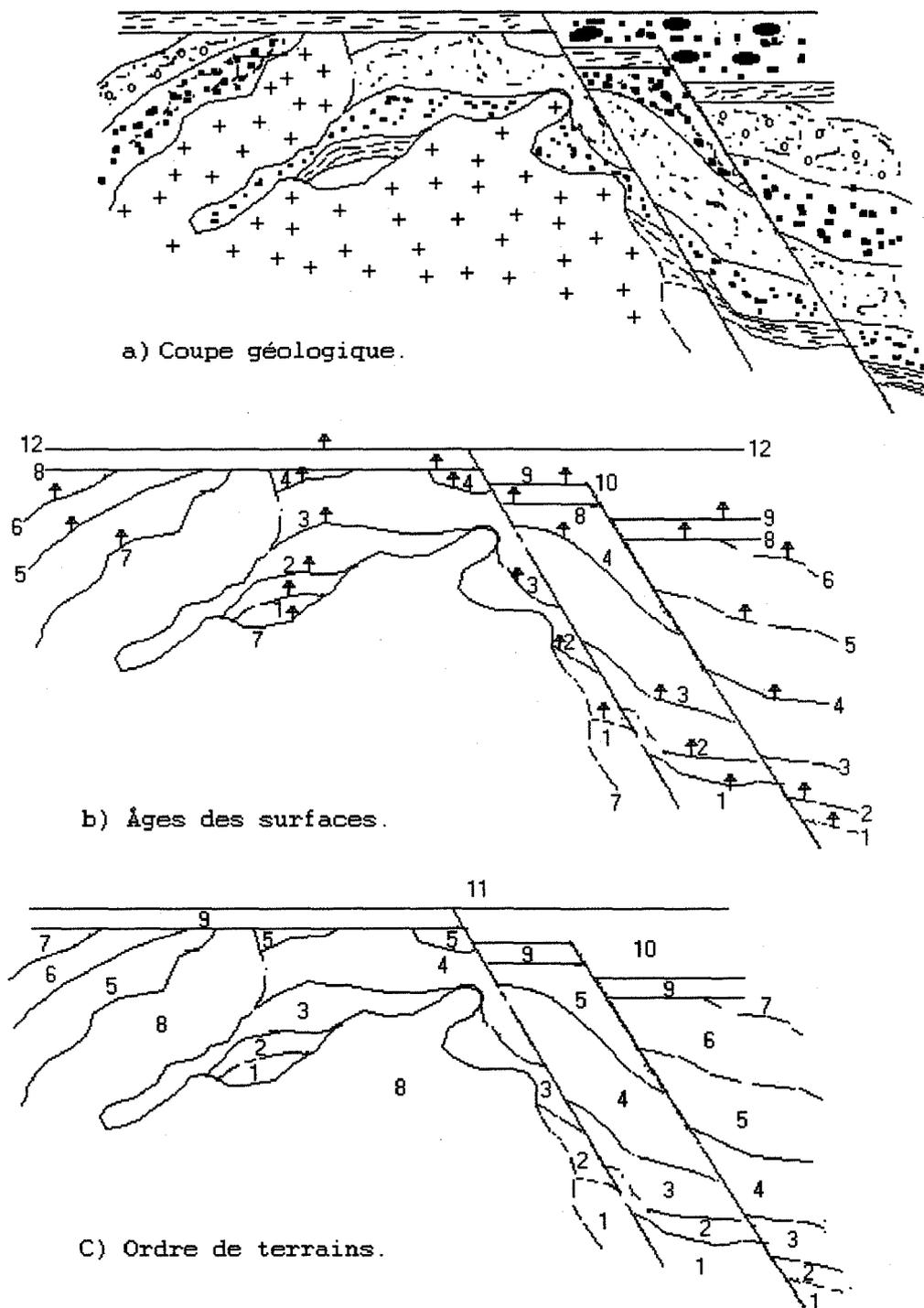
Concordance :

La surface la plus jeune respecte la surface la plus ancienne qui n'est pas fractionnée.



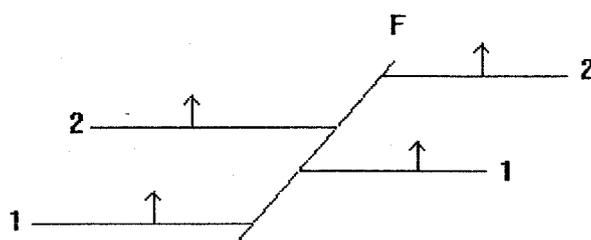
Discordance:

La surface la plus jeune recoupe la surface la plus ancienne qui est fragmentée et en partie détruite (érosion, digestion par un granite...).



**Figure 3.10:** Scène géologique simple lue en terme de chronologie.

On remarquera que les termes de "concordance" et "discordance" doivent être entendus ici en terme purement géométrique et non plus géologique. Ainsi une faille apparait comme une surface "discordante" par rapport à des surfaces antérieures situées de part et d'autre (cf.figure 3.11):



**Figure.3.11:** Représentation d'une faille.

Comme l'illustre la figure 3.10.c ces éléments permettent de déduire des fourchettes d'âge pour les différents objets de la scène, sur la base des règles suivantes:

âge minimal = âge de la plus jeune des bases de couches limitant l'objet (cas d'une couche sédimentaire) ou à défaut, le plus jeune des âges des couches recoupées par cette discordance (cas d'un granite intrusif).

âge maximal = âge de la plus ancienne des autres surfaces limitant l'objet.

La composition d'une scène complète n'ayant pas fait directement l'objet du présent travail, nous nous limiterons ici aux quelques remarques qui viennent d'être faites. Elles pourraient conduire à de nombreux approfondissements, la réflexion des géologues dans ce domaine en étant encore à ses débuts (voir par exemple [SMW 93] et [MAY 93]).





## **DEUXIEME PARTIE**

### **CONSTRUCTION ET DEFORMATION D'UN CORPS GEOLOGIQUE DE FORME COMPLEXE.**



## **INTRODUCTION: PROBLEME POSE ET DEMARCHE ADOPTEE**

---

Dans la première partie de ce travail, nous venons de mener une réflexion d'ensemble relativement générale sur les problèmes liés à la modélisation d'une scène géologique. Il en ressort qu'il y a de nombreux avantages à tenir compte de la spécificité des objets modélisés, et donc de leur histoire, voire plus précisément des processus qui déterminent leurs formes et leurs relations. Nous avons vu qu'une approche "dynamique" de la modélisation envisagée, paraît particulièrement intéressante et nous avons suggéré un schéma logique possible sous-tendant une telle approche. Nous allons maintenant développer les conséquences de cette démarche en exposant les résultats concrets qui font l'objet spécifique du présent travail.

Le schéma logique exposé en conclusion du chapitre 2 est relativement ambitieux puisqu'il trace le cadre général dans lequel la modélisation complète d'une scène géologique peut être abordée. Une telle modélisation suppose que soient résolus des problèmes différents, qui sont au moins de deux ordres:

### **1)- Des problèmes touchant au mode de représentation des objets et leurs relations:**

a)- au niveau de leur détermination: les objets géologiques sont des constructions qui résultent de l'intégration de données diverses (connaissance locale de la nature des terrains, de l'orientation de couches...) susceptibles de se présenter sous des formats variés (point matériel, pendage, sondage,...)

La tableau 1 explicite les formats les plus couramment rencontrés

b)- au niveau de leur comportement dans le modèle: ces objets doivent pouvoir être construits en tant qu'objets 3D, à partir de données hétérogènes. Une telle construction est un problème en soi, qui a donné lieu de très nombreux travaux, et qui n'est pas l'objet spécifique du présent travail. Précisons cependant:

---

<b><i>Point matériel</i></b>	●	point de l'espace dont la nature est connue (intérieur ou extérieur à l'objet).
<b><i>Contact sans pendage</i></b>	○ ●	point de l'espace situé sur la surface de l'objet, sans que le plan tangent à la surface le soit connu.
<b><i>Contact avec pendage</i></b>	○/●	point de la surface de l'objet où le plan tangent à la surface est connu.
<b><i>Contour</i></b>		ligne appartenant à la surface de l'objet. Cette ligne peut être connue sans que les plans tangents en ses différents points le soient.
<b><i>Sondage</i></b>		segment le long duquel la nature de différents points est connue (intérieurs ou extérieurs à l'objet).

---

**Tableau 1:** Exemple de Formats concernant les données départ.

- qu'il nécessite qu'on se soit défini des lois d'interpolation et d'extrapolation.

- qu'il peut être selon les cas traité de manière entièrement automatique ou de manière interactive, ce qui permet à l'utilisateur d'introduire le moment voulu des connaissances supplémentaires.

Le modèle 3D est lui même réalisé par étapes, ce qui nécessite que les objets correspondants soient manipulés par différents types d'opérateurs (déplacements, déformations, opérations booléennes,...). Il faut donc, du point de vue des structures de données, trouver des représentations adéquates.

## **2)- Problèmes touchant aux opérateurs:**

Les opérateurs que nous avons envisagés appartiennent pour l'essentiel à trois catégories différentes: (1- déplacements. 2- déformations. 3- opérations booléennes.) qui conservent très inégalement les différentes caractéristiques de la scène ( positions, distances euclidiennes ou angulaires, topologie,...).

De plus, au stade actuel de développement des modélisation entreprises par nous même, comme par d'autres, ces opérateurs sont encore peu nombreux et donc inaptes à fournir des représentations adéquates pour l'ensemble des caractéristiques d'une scène complexe.

## **1- Objectif du travail de construction logicielle:**

La résolution de l'ensemble de ces problèmes et donc la construction d'un modèle général conforme au schéma logique exposé, dépassait largement ce qu'il était possible de réaliser dans le cadre du présent travail de thèse. Des choix ont donc dû être faits:

- au niveau des types d'objets à représenter;
- au niveau de leur intégration dans le schéma proposé;
- au niveau des caractéristiques d'ensemble du modèle;

Du point de vue des objets qui, nous l'avons vu, peuvent être fort variables (strates isopaques ou non, strates discordantes, corps sédimentaires, lenticulaires, corps intrusifs...), nous avons fait le choix de nous intéresser à un seul problème réputé relativement difficile, celui de la **représentation de corps granitiques de forme irrégulière**.

De plus nous nous sommes limités ici au seul cas de corps granitiques résultant de la "granitisation" de terrains préexistants (corps migmatitiques), en excluant ceux où un magma est injecté entre des couches préexistantes, qu'il repousse. Nous considérerons donc que la "granitisation" représente un simple changement de nature des terrains qui sont digérés, et que cette digestion se fait sans changement de volume appréciable. Les corps granitiques migmatitiques peuvent aussi être considérés comme des objets solides ordinaires de forme géométrique complexe: ils peuvent être composés de plusieurs volumes élémentaires disjoints et comporter des trous.

Conformément à l'esprit de la modélisation exposé dans la première partie, nous nous intéressons non seulement à la définition de ces objets sous une forme acceptable mais également à leur manipulation possible par des transformations inversibles nécessaires à la mise en oeuvre de la démarche allers et retours. Nous visons donc à pouvoir déplacer, déformer et combiner ces objets.

Par ailleurs, nous viserons à ce que le modèle construit soit un authentique modèle 3D, susceptible d'être manipulé, stocké et visualisé en tant que tel.

Il conviendra enfin que les temps requis par ces différentes opérations restent raisonnables (élaboration d'un modèle en quelques dizaines de secondes tout au plus sur une station de travail) avec visualisation quasi instantanée du résultat, et que le stockage soit possible en conservant une taille mémoire acceptable (ordre de grandeur quelque méga octets).

Cette deuxième partie va donc s'intéresser à la représentation dynamique 3D de corps granitiques migmatitiques, éventuellement déformés.

## 2- Nécessité d'une réflexion poussée concernant le choix d'une structure de données:

La résolution du problème posé suppose avant tout que soit menée une réflexion poussée et critique sur les structures de données, susceptible d'orienter un choix motivé.

Rappelons que le choix d'une telle structure doit être fait selon les exigences qui sont posées par le modèle que nous envisageons de réaliser. Celles-ci sont de différentes natures:

- exigences liées aux caractéristiques géométriques des **objets modélisés**. Il importe que les objets créés et manipulés restent, dans tous les cas, **valides** selon les critères de REQUICHA.
- exigences liées aux opérateurs mathématiques utilisés pour simuler l'évolution géologique. La structure choisie doit autoriser une mise en oeuvre aisée des opérateurs choisis et plus particulièrement des **transformations de type semblable** (simulant des plis et des failles) et les **opérateurs booléens** (permettant notamment de simuler des granitisations).
- exigences liées aux nécessités de **stockage du modèle** et de minimisation des **temps de calcul**.

Ces exigences se rajoutent à des spécifications d'ordre général: possibilité de création aisée des objets, possibilité de passage de la structure choisie à une structure différente requise éventuellement pour certaines applications...

## 3-Contraintes liées au type de représentation volumique désirée et aux possibilités de stockage:

Selon l'usage que l'on veut faire du modèle réalisé, plusieurs types de représentations volumiques sont possibles:

Si l'on souhaite seulement pouvoir visualiser commodément les objets, en considérant chacun d'eux comme entièrement homogène, on peut se contenter de les définir par leur surface externe; dans ce cas, chaque objet (couche, corps granitique,...) pourra être représenté, sur l'écran d'ordinateur, par une couleur

homogène. Un tel modèle, apte à représenter des objets de grande taille, sera cependant insuffisant, si l'on a besoin de spécifier chacun des points intérieurs à l'objet, par exemple pour être en mesure de lui attribuer des propriétés physiques particulières, susceptibles de varier en continu à l'intérieur d'un même objet selon des gradients définis.

Le choix ci-dessus a des conséquences importantes du point de vue de la place mémoire requise pour stocker le modèle réalisé. Par exemple lorsqu'on met en œuvre une démarche point par point, telle que celle qui est à la base du logiciel POLYPLI, il est exclu de stocker individuellement chaque point du modèle. Rappelons en effet que le stockage de chacun des voxels d'un cube mesurant 512\*512\*512 pixels occuperait un place mémoire de l'ordre de 128 méga octets.

En discutant des structures de données possibles, nous devons garder ce problème en tête:

- soit pour trouver des partitions de l'espace qui permettent de spécifier les différents points internes du modèle de manière plus économique.
- soit pour renoncer délibérément à une représentation volumique, après en avoir mesuré les conséquences.

#### **4-Contraintes liées au temps de calcul:**

Dans le modèle POLYPLI qui a été présenté précédemment, la portion de l'objet à visualiser (section plane) est entièrement calculée en fonction de données initiales, sans qu'existe un modèle 3D autre que purement virtuel; dans ce cas, il n'y a pas lieu de distinguer, du point de vue du calcul, entre temps requis par la construction du modèle et temps requis par le processus de visualisation. POLYPLI fournit les performances suivantes pour une image de taille moyenne 400\*500 pixels:

Déformation par une seule TTS	: temps=	40 secondes.
Déformation par deux TTS	: temps=	50 secondes.
Déformation par cinq TTS	: temps=	80 secondes.

Le temps de calcul d'un modèle déterminé et la visualisation de ce même modèle doivent cependant être distingués, dès lors que l'on envisage de stocker un véritable

modèle 3D, comme nous nous proposons de le faire. Dans cette perspective, les exigences sont les suivantes:

- visualisation: elle doit pouvoir être opérée à chaque étape (modèles partiels et modèle final) et être quasi instantanée, afin de permettre un usage interactif.
- construction du modèle: il peut être acceptable que celle-ci soit un peu plus longue, il faut cependant rester compatible avec la mise en oeuvre de la démarche "aller retour" que nous nous proposons d'utiliser. On doit ainsi viser à des temps de calcul moyens qui n'excèdent pas quelques dizaines de secondes.

Ces différents temps sont pris en référence avec les performances de stations de travail de type SUN4, correspondant à l'environnement dans lequel notre modélisation a été effectuée .

Ce type d'environnement a permis d'obtenir la qualité graphique souhaitée au niveau de la visualisation.

\*\*\*

Dans les chapitres ci-après, nous procéderons tout d'abord à un examen critique de l'intérêt des structures de données classiquement utilisées pour la modélisation des corps solides (Solid Modeling [MOR 85] , [MAN 88], [HOF 89]) notamment dans le domaine industriel. Nous envisagerons successivement

- les représentations par frontières (B.rep) (chapitre 4).
- les structures constructives ( arbre CSG ...), et les partitions a priori de l'espace, arbres octaux notamment (chapitre 5).
- les partitions de l'espace intrinsèques à l'objet (chapitre 6).

Nous nous efforcerons ensuite (chapitre 7) de définir une structure adaptée au problème qui nous est posé: il s'agira d'une structure hybride, directement dérivée des partitions binaires de l'espace (Binary Space Partitioning=BSP).



## CHAPITRE -4-

### INTERET ET INCONVENIENTS DES REPRESENTATIONS PAR FRONTIERES (B.rep).

---

#### **4.1- Définition. Généralités:**

L'une des méthodes les plus naturelles pour modéliser un solide consiste à représenter la surface qui le délimite. Ce type de représentation pose plusieurs types de problèmes:

#### *- nature des éléments utilisés:*

La surface externe des objets courants et a fortiori des corps géologiques n'est généralement pas susceptible d'une représentation analytique simple. Il s'agit d'une surface irrégulière qui doit être décrite par morceaux.

Un choix doit donc être fait quant au découpage adopté (maillage régulier ou non) et surtout quant à la nature des surfaces élémentaires utilisées pour approximer la surface réelle: facettes planes, quadriques [LEV 79], surfaces libres ajustées sur des points appartenant à la frontière du modèle: surfaces de COONS, de BEZIER, Bsplines rationnelles ([BEZ 86], [RA 90], [LEO 91]). Dans le cas qui nous occupe, nous avons vu que les géologues sont plus attachés à la restitution d'une forme globalement exacte et aisément manipulable que par l'aspect extérieur plus ou moins lissé et agréable de la surface des objets représentés. Dans la mesure où il est possible d'approximer une surface aussi finement que l'on souhaite à l'aide de facettes planes suffisamment nombreuses, nous n'examinerons ici que le cas de solides polyédriques. Nous considérerons donc que les objets à représenter sont délimités par des facettes planes polygonales.

#### *- cohérence géométrique et topologique:*

On pourrait imaginer de représenter la surface externe d'un objet en fournissant simplement la liste de l'ensemble des facettes planes qui lui appartient. Une telle

représentation est dite surfacique [MIC 87]. Rien ne garantit cependant qu'une simple liste de facettes délimite effectivement l'intérieur et l'extérieur d'un solide authentique et a fortiori qu'un solide ainsi défini vérifie l'ensemble des propriétés de REQUICHA. Un certain nombre de conditions doivent donc être ajoutées qui permettent de transformer une telle représentation surfacique en une authentique représentation volumique [MIC 87].

On définit ainsi une représentation par frontière (B.rep=Boundary représentation) comme une structure de données qui fournit non seulement la liste de l'ensemble des éléments appartenant à la surface extérieure de l'objet (la liste des facettes planes dans le cas qui nous occupe), mais qui assure également la cohérence à la fois du contour et de l'objet défini lui-même.

La structure doit donc garantir que les éléments auxquels elle fait appel (facettes mais également arêtes et sommets) sont géométriquement valides et fournir un moyen de les relier les uns aux autres afin qu'ils définissent un solide qui soit aussi valide topologiquement.

Ces conditions de cohérence géométrique dans le cas d'un objet polyédrique stipulent que tous les sommets sont distincts et que ni les arêtes ni les facettes ne sont intersectantes [REQ 80]. En ce qui concerne la cohérence topologique, [REQ 80] stipule les conditions suivantes, concernant les facettes:

- (1) chaque facette est un sous ensemble de la frontière de l'objet.
- (2) l'union de l'ensemble des facettes est égale à la frontière de l'objet.
- (3) chaque facette est un sous ensemble d'une surface primitive  $S_i$ .
- (4) chaque facette, ne contient ni arêtes ballantes ni points isolés.

Des conditions existent également sur les arêtes et les sommets:

- chaque arête doit comporter deux extrémités et deux seulement, et appartenir à un nombre pair de facettes.
- dans chaque facette, chaque sommet doit être extrémité de deux arêtes et deux seulement.

De plus, les arêtes et les facettes doivent être orientées selon les règles de Möbius.

- Les B.rep

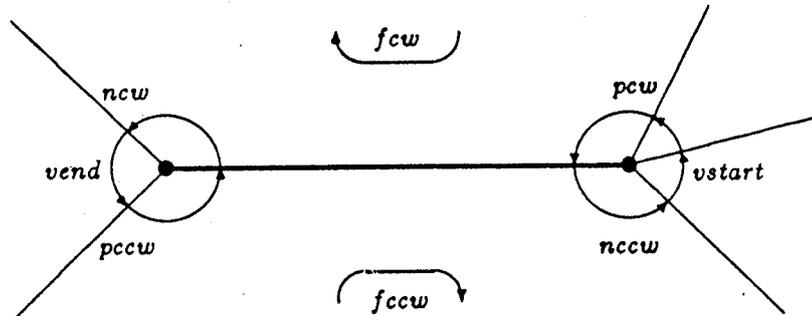
Les B.rep constituent une famille de structures de données variées qui ont fait l'objet de très nombreux travaux. Elles diffèrent les unes des autres essentiellement de par la manière dont les différents éléments qui composent la structure (sommets, arêtes, facettes) sont organisés entre eux. En effet une B.rep doit permettre d'identifier et de manipuler rapidement tout élément utile. Il faut pouvoir par exemple:

- trouver l'ensemble des facettes voisines d'une facette donnée.
- trouver les sommets ou les arêtes appartenant à une facette.
- trouver les facettes voisines d'une arête.
- trouver les différentes arêtes partant d'un sommet.

etc....

De plus il est souhaitable que les éléments de base de la structure (sommets) ne soient répétés qu'un nombre minimum de fois: il est exclu par exemple que la structure répète pour chacune des facettes la liste complète des sommets qui en constituent le contour. La structure doit donc comporter un nombre plus ou moins grand de pointeurs qui permettent de relier les éléments les uns aux autres. Les sommets peuvent être alors répertoriés avec leurs coordonnées dans une liste unique, ce qui permet d'opérer des déplacements ou des déformations n'affectant pas la forme de l'objet, en modifiant simplement les coordonnées des points de la liste.

La "winged-edge structure" [BAU 75] qui a été historiquement l'une des premières B.rep introduites, donne un bon exemple du principe de fonctionnement de ce type de structures de données (cf.figure.4.1). La "Double Connected Edge List" (DCEL) est une variante très employée de cette structure [MP78].



(a)

edge	vstart	vend	f1	f2	ncw	pcw	nccw	pccw
e1	v1	v2	f1	f2	e2	e4	e5	e6
e2	v2	v3	f1	f3	e3	e1	e6	e7
e3	v3	v4	f1	f4	e4	e2	e7	e8
e4	v4	v1	f1	f5	e1	e3	e8	e5
e5	v1	v5	f2	f6	e9	e1	e4	e12
e6	v2	v6	f3	f2	e10	e2	e1	e9
e7	v3	v7	f4	f3	e11	e3	e2	e10
e8	v4	v8	f5	f4	e12	e4	e3	e11
e9	v5	v6	f2	f6	e6	e5	e12	e10
e10	v6	v7	f3	f6	e7	e6	e9	e11
e11	v7	v8	f4	f6	e8	e7	e10	e12
e12	v8	v5	f5	f6	e5	e8	e11	e9

vertex	first edge	coordinates	face	first edge
v1	e1	x1 y1 z1	f1	e1
v2	e2	x2 y2 z2	f2	e9
v3	e3	x3 y3 z3	f3	e6
v4	e4	x4 y4 z4	f4	e7
v5	e9	x5 y5 z5	f5	e12
v6	e10	x6 y6 z6	f6	e9
v7	e11	x7 y7 z7		
v8	e12	x8 y8 z8		

(b)

Sommets

vstart: origine vend: extrémité.

faces (par rapport à une arête donnée)

f1: voisine sens horaire f2: voisine sens antihoraire.

arêtes (par rapport à un sommet donné)

pcw: précédent sens horaire pccw: précédent sens antihoraire.  
 ncw: suivante sens horaire nccw: suivante sens antihoraire.

Figure 4.1: la "full winged-edge data structure" (d'après [MÄN88]).

## 4.2- Construction et manipulation d'objets grâce à une B.rep. Problème de la conservation de la validité:

### -Construction de solides valides:

La reconnaissance du caractère valide d'un solide représenté par une B.rep n'est pas nécessairement évidente, compte tenu du grand nombre d'éléments manipulés par la structure et du caractère souvent redondant de certaines informations.

Pour assurer la validité des objets, il faut alors n'utiliser pour leur définition et leur manipulation que des règles qui garantissent en elles-mêmes de cette validité: on fait couramment appel pour cela aux opérateurs d'Euler ([BHS 80], [MÄN 88]). Ceux-ci permettent de créer ou de transformer un solide par addition ou soustraction de sommets, d'arêtes, de faces, de cavités etc..., en s'assurant à chaque fois que la relation d'Euler reste respectée (cf.chapitre.3). Le système GWB (Géométric WorkBench [MS82]) est un bon exemple de cette approche. La figure 4.2 présente les opérateurs employés et la figure 4.3 illustre leur emploi possible pour la construction d'un tétraèdre.

	V	E	F	H	2B	2P
	1	-1	1	-1	2	-2
MEV	1	1	0	0	0	0
MFE	0	1	1	0	0	0
MBFV	1	0	1	0	1	0
MRB	0	0	0	0	1	1
ME-KH	0	1	0	-1	0	0
KEV	-1	-1	0	0	0	0
KFE	0	-1	-1	0	0	0
KBFV	-1	0	-1	0	-1	0
KRB	0	0	0	0	-1	-1
KE-MH	0	-1	0	1	0	0

Par exemple: l'opérateur MEV crée un sommet et une arête supplémentaire sans modifier les autres éléments. l'opérateur KEV fait l'opération inverse ( suppression d'un sommet et d'une arête), l'opérateur MFE crée une arête et une facette.

*Figure 4.2: Opérateurs d'Euler (d'après [MOR 85])*

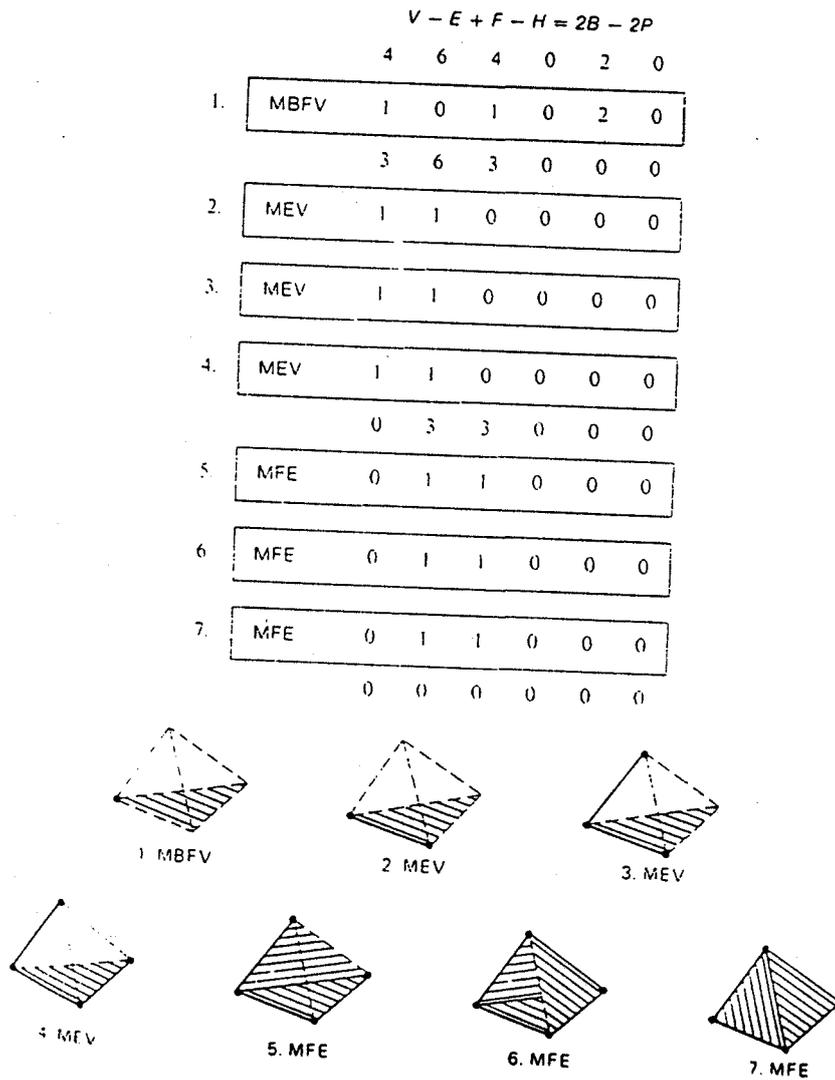


Figure 4.3: Exemple de construction d'un tétraédre à l'aide des opérateurs d'Euler ( d'après [MOR85]).

Il en résulte toutefois des contraintes assez lourdes qui limitent la souplesse d'utilisation de la représentation correspondante, les algorithmes utilisés n'étant pas triviaux [MM 87].

D'autres solutions ont été proposées pour assurer ou au moins améliorer la validité de certaines opérations effectuées sur des solides représentés sous forme de B.rep. [MIC87] suggère par exemple une structure à priori moins riche que la "winged-edge structure" ou que la DCEL, mais dans laquelle l'absence pratiquement de toute redondance permet d'imposer des contraintes de cohérence fortes. La contrepartie est toutefois que les diverses informations utiles ne sont pas disponibles directement mais seulement en faisant appel à des procédures de reconstruction, impliquant généralement un parcours linéaire de la structure.

#### **4.3- Manipulation par des opérateurs (compositions booléennes, TTS):**

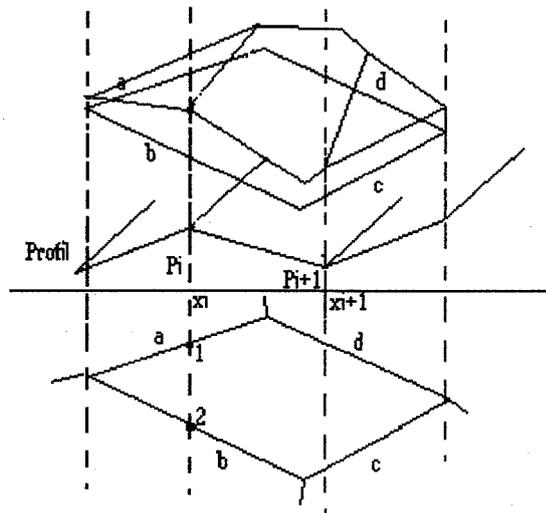
1) Les deux types d'approches qui viennent d'être envisagés sont également utilisées pour réaliser entre solides valides des opérations de composition booléenne. Elles assurent la clôture de la représentation vis à vis de telles opérations, les solides engendrés par composition étant alors par construction valides.

Dans le cas qui nous occupe, nous envisageons d'effectuer, outre des déplacements et des compositions booléennes, des déformations de type TTS. Afin de conserver le caractère polyédrique des objets traités, nous supposons que les profils correspondants sont définis par des chaînes de segments.

2) une TTS ainsi définie n'est jamais qu'une fonction affine "par morceaux". En effet tout point  $M(x,y,z)$  situé dans la tranche d'espace délimitée par deux plans parallèles au plan axial, passant par deux points consécutifs.  $P_i(x_i, z_i)$  et  $P_{i+1}(x_{i+1}, z_{i+1})$  du profil subit selon la direction de glissement un déplacement:

$$\delta = z - z_i = (z_{i+1} - z_i)(x - x_i) / (x_{i+1} - x_i).$$

Pour transformer une facette déterminée, on pourra donc la découper selon les différents plans  $P_i$  qui l'intersectent et faire subir à chacune des sous facettes ainsi délimitées l'affinité correspondante (cf. figure.4.4).



**Figure 4.4.** Transformation d'une facette par une TTS.

Le découpage d'une facette peut sans difficulté être effectué de manière "eulérienne" en préservant la topologie. Dans le cas de la figure 4.4 par exemple une approche utilisant les opérateurs d'Euler conduirait à construire les sommets 1 et 2 en découpant chacune des arêtes a et b en deux grâce à deux opérateurs de type MEV puis à relier 1 et 2 entre eux par une arête supplémentaire découpant en deux la facette initiale, grâce à un opérateur MFE. Une opération du même type serait répétée à partir des arêtes c et d.

Une fois le découpage effectué, la TTS se résumera alors à une suite d'affinités qui pourront être effectuées en traitant simplement la liste des sommets.

On voit donc que moyennant certaines précautions, il est possible d'utiliser des opérateurs de type TTS sans détruire la cohérence topologique d'une B.rep. Ce type de représentation ne pose donc pas de difficulté particulière de ce point de vue.

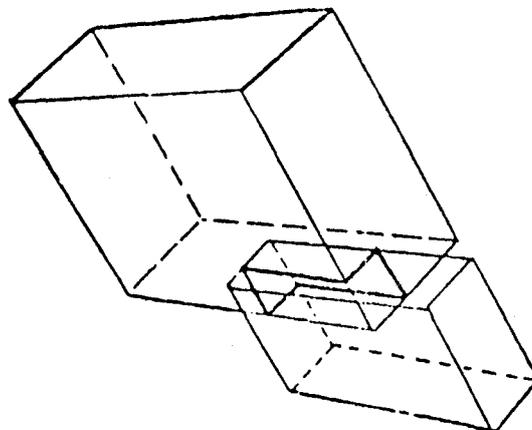
#### 4.4- Complexité des opérations:

La manipulation de B.rep par des opérateurs booléens ou par de TTS ne pose pas seulement des problèmes liés à la validité des objets créés. Il faut aussi examiner la complexité des opérations correspondantes. Nous envisagerons successivement le cas des opérateurs booléens et celui des TTS.

##### 1)- Opérateurs booléens:

L'application d'un opérateur booléen à deux objets A et B dont les B.rep comportent respectivement m et n facettes, suppose avant tout que la frontière séparant les deux objets soit calculée. Ceci suppose que l'ensemble des couples de facettes qui s'intersectent aient été détectés et que les intersections correspondantes aient été effectuées. L'algorithme naïf de détection des couples de facettes intersectantes est en  $O(m*n)$ , chacune des facettes de A devait être testée par rapport à toutes les facettes des B.

Il semble ne pas y avoir de moyen évident de réduire à coup sûr cette complexité. En pratique, les méthodes les plus couramment employées pour éviter de tester l'ensemble des intersections possibles, consistent à utiliser des boîtes englobantes [MT83]. Ainsi deux facettes appartenant respectivement à A et B ne pourront s'intersecter que si elles appartiennent à une portion de l'espace intersection de boîtes parallélépipédiques contenant respectivement les solides A et B (cf.figure.4.5)



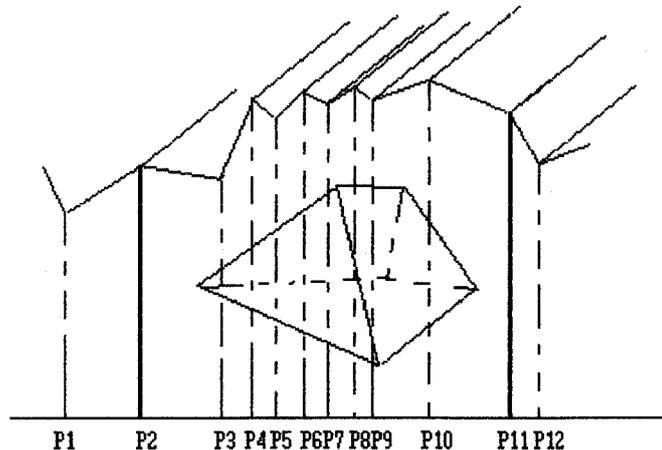
---

**Figure 4.5.** Intersection de deux boîtes englobantes (d'après [MT83]).

Bien qu'une telle méthode ne réduise pas la complexité théorique, des algorithmes sont proposés qui en pratique ont des performances plus proches de  $O(n)$  que de  $O(n^2)$  [MT83]. Par ailleurs dans ce cas, [MIC87] estime qu'en utilisant des méthodes de type "multidimensionnel searching" [PS85], la complexité théorique pourrait être réduite à  $O(K + \log^2 N)$ ,  $K$  étant le nombre de couples de facettes s'intersectant et  $N$  le nombre total des facettes  $N = m + n$ .

2)- Transformations de type semblable:

L'application d'opérateurs de type TTS pose un problème voisin du précédent, puisque si le profil de la TTS considérée est constitué par une chaîne de segments, on a essentiellement à diviser l'objet par une famille de plans parallèles au plan axial de la TTS et passant par les différents sommets du profil. Les plans parallèles qui doivent être considérés sont tous ceux qui coupent effectivement l'objet. Pour trouver ceux-ci il suffit d'insérer l'objet dans une tranche d'espace délimitée par deux plans limites parallèles au plan axial de la TTS (cf. figure.4.6).



**Figure 4.6:** Plans diviseurs devant être considérés lors de la déformation d'un objet par une TTS. Dans le cas d'espece, l'objet s'insere dans une tranche d'espace délimitée par P2 et P11.

Si l'objet comporte  $m$  facettes et si le nombre de plans diviseurs est  $n$ , la complexité théorique reste en  $O(m*n)$ . Dans ce cas cependant, elle ne pourra être réduite par suppression de certains plans diviseurs, puisque dans la tranche considérée tous les plans diviseurs recouperont effectivement l'objet et devront donc être traités.

#### **4.5- Problème de la création d'objets représentés sous forme de B.rep:**

On peut envisager de représenter l'objet:

- soit par des surfaces décrites à l'aide d'un maillage régulier.
- soit par une surface comportant un réseau de facettes planes irrégulières.

Nous envisagerons ces deux cas successivement:

##### **1) surface externe décrite à l'aide d'un maillage régulier.**

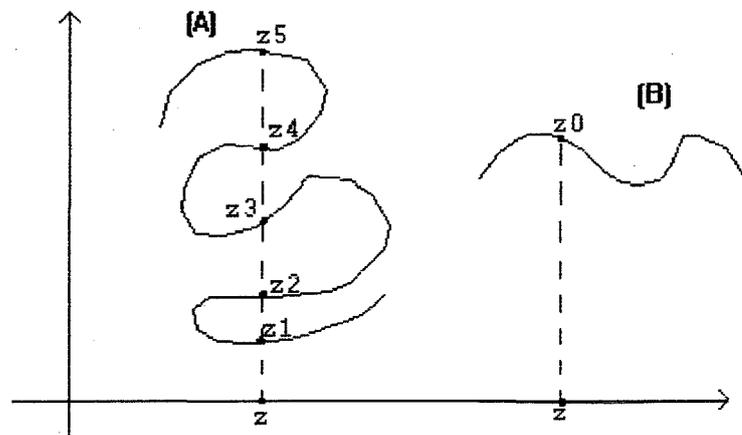
La représentation correspondante peut être obtenue en associant une altitude  $z_{i,j}$  à chacun des noeuds  $(i,j)$  d'un réseau 2D carré, rectangulaire, triangulaire, hexagonal... [PK87]. On obtient ainsi une surface altimétrique.

Une difficulté existe cependant. Au départ, une surface unique n'est pas susceptible en effet de représenter un objet délimité par un contour fermé, puisque seules peuvent être représentées des "surfaces normales" ne comportant pas de surplombs (une seule valeur de  $z$  à chaque noeud  $(i,j)$  de la grille cf. figure.4.7).

Les objets ne peuvent donc être définis, dans ce type de représentation que par composition de plusieurs surfaces altimétriques. Encore convient-il d'assurer dans ce cas que les objets créés sont topologiquement valides, ce qui n'est pas toujours simple à réaliser [MT83].

En supposant ces problèmes résolus, on peut voir dans ce type de représentation un certain nombre d'avantages:

- les calculs à partir d'une grille régulière sont rapides, et il existe de nombreux algorithmes disponibles dans les cas classiques.



**Figure 4.7:** une représentation à l'aide d'une grille altimétrique est possible pour la surface B mais pas pour la surface A.

- la précision peut être modulée en resserrant la grille dans les zones complexes et en l'espaçant dans les zones plus simples. Ceci permet de gagner de la place mémoire.
- les paramètres quantitatifs (surface, volume, ...) peuvent être calculés aisément.

Ce mode de représentation a cependant deux inconvénients importants:

- la définition des objets passe par l'attribution de valeurs à tous les points du maillage ce qui suppose des calculs d'interpolation.
- une grille régulière supporte difficilement les déplacements (changements de systèmes de coordonnées) et encore moins les déformations.

Ce dernier inconvénient semble dans le cas qui nous occupe rédhibitoire. Si une représentation par maillage régulier était adoptée, elle serait détruite lors de l'application de déformations et devrait donc être reconstruite après chacune des ces opérations. ce qui semble déraisonnable.

## 2) Représentation de la surface à l'aide de facettes planes, intrinsèques à l'objet:

C'est la seule solution qui peut être envisageable. Sa mise en oeuvre requiert deux types d'opérateurs:

1) des opérateurs d'approximation: chaque facette plane correspond à un plan tangent de l'objet en un point particulier et le nombre des facettes à définir dépend de l'approximation que l'on se fixe.

2) des opérateurs d'arrangement de ces facettes entre elles, afin que la topologie du polyèdre résultant soit valide et reflète fidèlement la topologie de l'objet. Nous avons vu que cela peut exiger la mise en oeuvre d'algorithmes complexes, si l'on emploie par exemple des opérateurs d'Euler.

## 4.6- Conclusions: avantages et inconvénients de l'utilisation de structures de type B.rep:

### - Caractère surfacique de la représentation:

Dans leur principe, de telles représentations présentent l'intérêt de caractériser de manière directe la surface extérieure des objets représentés. Dans le cas d'objets géologiques, cet intérêt est incontestable, puisque nous avons vu que cette surface présente des caractéristiques importantes du point de vue de la compréhension de l'ensemble de la scène: âge, relations topologiques avec les surfaces voisines (concordance ou discordance).

En contrepartie, les B.rep n'autorisent qu'une représentation purement surfacique des objets. Il est donc difficile, par ce seul moyen, d'attribuer des propriétés physiques à un quelconque point matériel situé à l'intérieur de l'objet, c'est là un des inconvénients que nous avons signalé dans le cas du logiciel GOCAD par exemple.

### -Place mémoire, comportement dans les déplacements:

La B.rep doit permettre le stockage des coordonnées des sommets de l'ensemble des facettes de l'objet à décrire et de l'ensemble des informations topologiques. Elle reste toutefois relativement modeste. De plus, le regroupement de ces données de base dans une liste unique permet aisément d'opérer des déplacements et des transformations affines.

- Visualisation:

La visualisation d'objets polyédriques représentés par des B.rep est un problème classique, qui a fait l'objet de nombreux travaux. Des algorithmes classiques ([FOL82], [BEI88], [SSS74]) existent qui permettent donc que ce problème soit résolu efficacement.

D'autres avantages et inconvénients apparaissent plus spécifiquement selon le type de B.rep envisagé:

- Exactitude de la représentation:

- dès lors que la représentation choisie présente des garanties de maintien de la cohérence topologique de l'objet, comme c'est le cas pour nombre des logiciels couramment employés en modélisation solide dans l'industrie (GWB, GMSolid, [MS82], [BG82]), elle peut être considérée comme "exacte" dans la mesure où aux inexactitudes numériques près, il n'existe pas de distorsion entre l'approximation de la forme qui a été choisie et sa représentation informatique. De plus, cette représentation est stable lorsqu'on applique à l'objet des opérateurs de déplacement ou de déformation.

- Comportement dans les opérations booléennes et les TTS:

Les structures de type B.rep autorisent, comme nous l'avons vu, ces opérations, même si leur complexité peut apparaître importante du moins théoriquement. Toutefois des précautions doivent être prises pour que, là encore la validité topologique des objets soit respectée. On peut pour cela sélectionner une B.rep qui garantisse le maintien de la validité des objets lors d'opérations booléennes [MIC87], mais ces représentations ne sont pas les plus couramment adoptées: ainsi la DCEL à laquelle font appel la plupart des méthodes courantes, ne comporte pas en elle-même de moyens infallibles de validation des objets. Une autre approche est de ne faire appel qu'à des opérateurs qui garantissent la validité [MS82], mais cela complique sensiblement la mise en oeuvre.

- Manipulation. Souplesse de mise en oeuvre:

Les problèmes principaux liés à la mise en oeuvre de représentations de type B.rep nous apparaît tenir précisément aux nombreuses précautions qui doivent être

prises pour assurer des représentations valides tout en maintenant dans le même temps la complexité dans des limites raisonnables.

Les logiciels qui dans le domaine industriels font appel à ce genre de structure pour décrire des objets manufacturés (GWB, GMSolide, ...) sont des logiciels lourds. Les représentations utilisées font appel à un grand nombre de pointeurs et sont la plupart du temps hautement sophistiquées. La conception d'un logiciel du même type adapté à une représentation "dynamique" des objets géologiques apparait a priori encore plus complexe puisque les objets traités peuvent avoir des formes très irrégulières, et qu'ils doivent subir non seulement des déplacements ou des compositions booléennes mais également des déformations risquant d'entraîner d'importantes modifications topologiques.

Par ailleurs, la réduction en pratique d'une complexité théorique qui dans le cas d'application d'opérateurs booléens ou de TTS reste fondamentalement en  $O(m*n)$  exige:

- soit qu'on procède d'une manière ou d'une autre à un prédécoupage des objets: partition de l'espace à l'aide de boîtes englobantes [MT83], superposition d'un découpage régulier de l'espace permettent de limiter le nombre des intersections possibles [MAY 93]
- soit que l'on choisisse une B.rep suffisamment élaborée pour qu'elle rende grâce à des procédures simple l'environnement de chaque élément, afin que l'intersection puisse par exemple être "suivie" d'une facette à l'autre sur chacun des objets traités [FV88].

Ces différentes contraintes impliquent que l'implantation d'une B.rep répondant à l'ensemble des exigences formulées sera nécessairement délicate: la structure devra comporter un grand nombre de pointeurs et les procédures correspondantes devront fréquemment prendre en compte un nombre plus ou moins grand de cas particuliers.

Pour toutes ces raisons, les B.rep même si elles sont d'un emploi très courant dans les domaines industriels apparaissent comme des structures de données relativement inconfortables. Pour les raisons que nous avons évoquées, cet inconfort risque d'être encore aggravé dans le cas des objets géologiques qui nous intéressent. Ceci nous a donc amenés à examiner l'intérêt de structures reposant sur des principes différents.



## CHAPITRE -5-

### QUELQUES SOLUTIONS A EXCLURE:

- STRUCTURES CONSTRUCTIVES.
  - PARTITIONS A PRIORI DE L'ESPACE.
- 

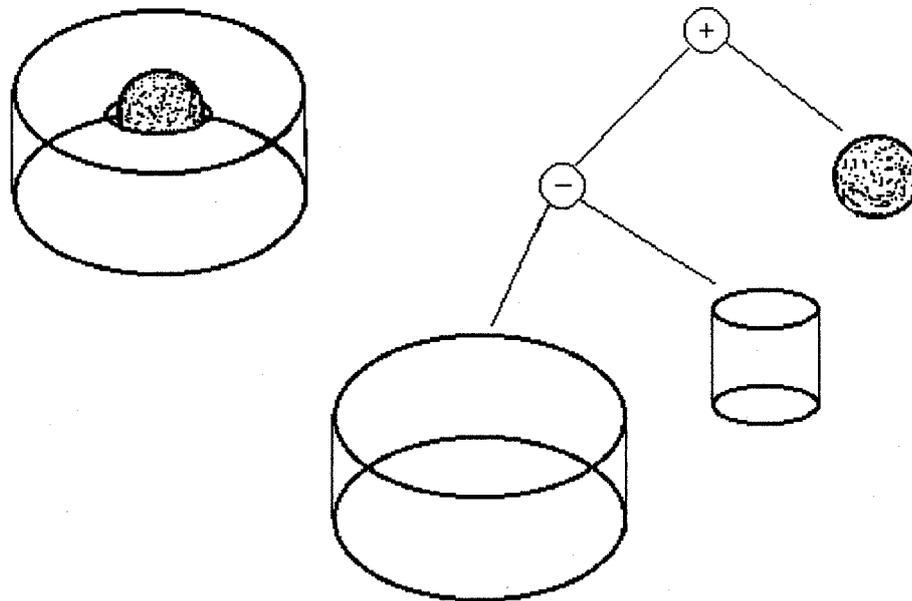
#### **5.1-Les structures constructives:**

Ces structures sont assez communément employées en CAO notamment dans la composition et le dessin de pièces mécaniques. Elles utilisent des primitives qui sont le plus souvent des volumes relativement simples: sphères, parallélépipèdes etc..., qui peuvent être composés entre eux à l'aide d'opérateurs ensemblistes (union, intersection, différence, ...). Une structure classique de type CSG (Constructive Solid Geometry [REQ80], [LTH86], [CAM91], [JUA88],...) représente aussi un volume sous forme d'arbre binaire dont les noeuds sont des opérateurs de composition et les feuilles des volumes de base (cf.figure.5.1).

Sous cette forme élémentaire, les structures de type CSG semblent totalement inadaptées à la représentation de scènes géologiques qui comportent très généralement des objets de forme complexe et irrégulière. La possibilité existe cependant de concevoir des structures dans lesquelles les primitives mises en oeuvre sont beaucoup plus complexes et éventuellement modulables [BG82]. On peut ainsi se poser la question d'un usage possible de ces techniques pour la représentation d'une scène comportant des objets multiples qui pourraient ainsi être par ce biais aisément composés.

Plusieurs problèmes sont susceptibles de se poser cependant:

- comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, les relations entre objets, qu'il est utile d'exprimer au sein d'une scène géologique, sont sensiblement plus riches que celles qui peuvent être traduites par de simples compositions booléennes, du moins si la modélisation envisagée se veut dynamique. Des relations d'âge entre objets et entre surfaces limites interviennent qui doivent pouvoir trouver une expression spécifique.



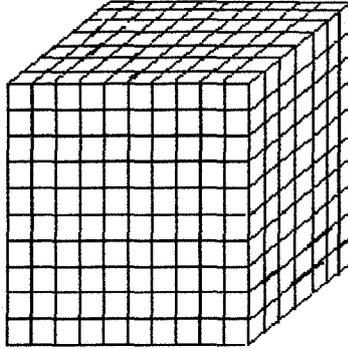
*Figure 5.1: Principe de la représentation d'un objet par un arbre CSG.*

- si un arbre résultant de la composition de primitives est susceptible de supporter aisément des opérateurs de translation ou de composition, il est moins évident qu'il supporte des opérateurs de déformation qui modifient la forme des primitives voire qui détruisent en partie la topologie de la scène.

Pour ces raisons au moins, l'utilisation de méthodes constructives ne sera pas envisagée plus avant et les structures qui vont être examinées à la suite correspondent toutes à des partitions de l'espace.

## **5.2-Enumération spatiale:**

Cette structure est la plus simple que l'on puisse imaginer, puisque les objets sont définis par l'énumération de l'ensemble des éléments de volumes (voxels) ([OUT85], [UDU83], [YS83],...) qui les composent (cf. figure 5.2). Par définition, un voxel est le plus petit élément de volume qui puisse être distingué, c'est à dire l'équivalent en 3D du pixel, point élémentaire visible sur l'écran de l'ordinateur.



---

**Figure 5.2:** Représentation d'un cube par voxels.

Bien qu'elle requiert une place mémoire importante [PER91] la description d'un objet à l'aide d'une telle structure présente a priori de nombreux avantages:

- elle est non ambiguë, chaque voxel étant soit entièrement interne à l'objet décrit, soit entièrement externe. La taille du voxel définit la "résolution" de la représentation ou si l'on veut le "grain" de l'objet. Le repérage de chaque voxel peut être effectué aisément en coordonnées trirectangulaires, ce qui permet une création relativement aisée de l'objet que l'on veut décrire, par repérage par rapport à n'importe quel élément surfacique (plan, surface analytique,...).
- une telle structure permet a priori une mise en oeuvre aisée aussi bien des opérations de type ensembliste (il suffit de réaliser l'opération sur chacun des voxels) que des transformations affines du type TTS: c'est la structure de données utilisées dans le logiciel POLYPLI.

La pertinences de l'énumération spatiale pour représenter des solides, eu égard aux critères de REQUICHA, doit être examinée avec attention. Les objets représentés consistent en un assemblage d'un nombre fini de volumes élémentaires, ce qui les rend a priori valides en tant qu'objets 3D. Deux problèmes se posent cependant:

- problemes de la définition des frontières:

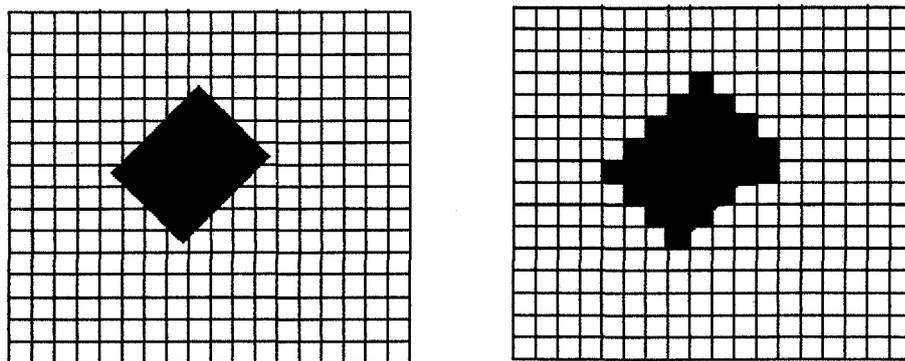
celle-ci ne fait pas a priori l'objet d'une définition explicite, l'intérêt de l'énumération spatiale tenant précisément au fait que les algorithmes permettant la manipulation de cette structure de données fonctionnent sans référence à une frontière.

Il y a cependant là un inconvénient eu égard à l'importance des frontières dans le cas des objets géologiques, soulignée au chapitre 4. Si les frontières ne sont pas connues explicitement, il n'est pas possible de tester entre elles des relations de concordance, discordance, d'établir des âges relatifs etc ... (cf.§.3.6). Ceci peut être un inconvénient sérieux dans le cas de la modélisation d'une scène complexe dont une représentation par voxels risque alors de donner une image fortement réductrice.

- *probleme de l'approximation liée au "grain de la structure"* :

La représentation suppose que les voxels ne sont pas divisibles. Un solide est donc représenté par un nombre fini d'éléments de forme et de dimensions fixes, ce qui représente une approximation qui sera d'autant plus grossière que la taille des voxels utilisés sera importante. Cette approximation est celle du "grain" de l'objet.

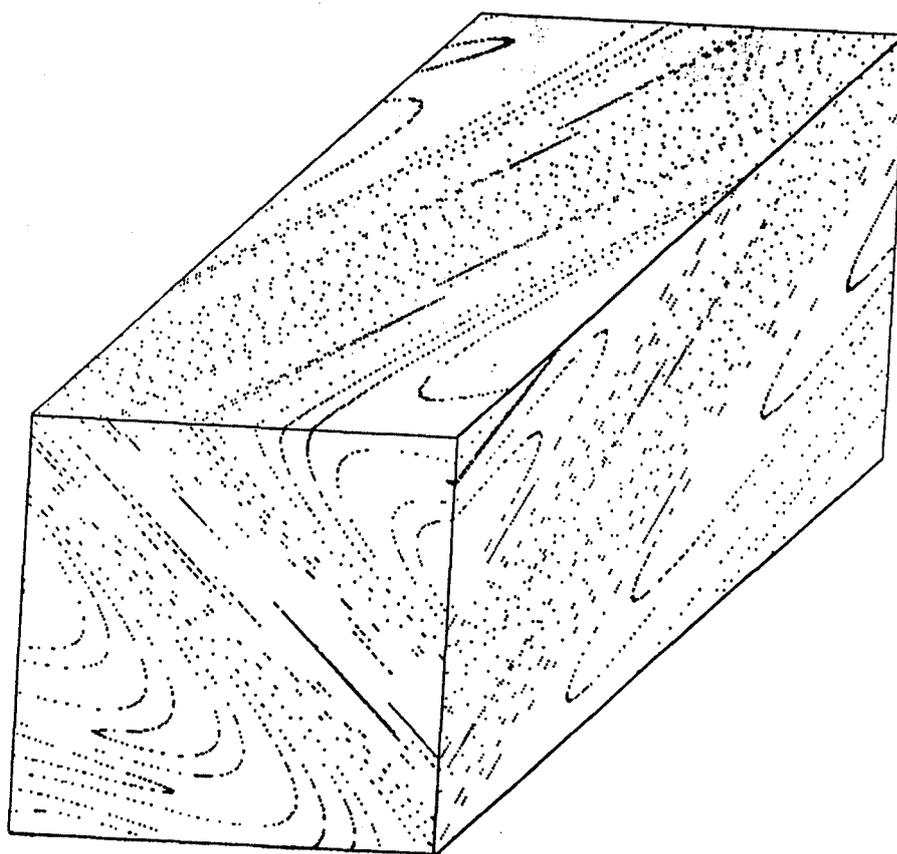
La cloture de la représentation vis a vis d'opérations de positionnement telles que les rotations par exemple, n'est alors elle même qu'approximative comme le prouve la figure 5.3, de même que la "rigidité" des objets qui n'est vérifiée qu'au grain de l'objet près.



**Figure.5.3:** *Approximation par voxel après rotation.*

Dans le cas qui nous occupe, cette approximation est aussi sensible dans le cas de l'application d'opérateurs de déformation tels que les TTS par exemple. Dans ce cas , le grain de la représentation est déterminé par les possibilités de visualisation et est pris comme égal en 2D à la taille d'un pixel. Pour un objet ayant pour dimension maximale la longueur de l'écran (1024 par exemple), la précision relative du positionnement d'un point n'est alors qu'environ  $10^{-3}$  , ce qui est extrêmement médiocre. Il en résulte que la déformation d'un objet peut se traduire par des distortions importantes voire par une rupture de la continuité spatiale. C'est là un inconvénient du modèle POLYPLI (cf.figure.5.4).

---



---

**Figure 5.4:** Rupture de la continuité spatiale: dans le cas de couches très minces (logiciel POLYPLI).

La non exactitude de la représentation par voxels pose par ailleurs de sérieux problèmes quant à la conversion entre ce mode de représentation et des représentations par frontières.

Des lois d'approximation doivent être définies:

Pour convertir une représentation par frontière en une représentation par voxels, on pourra convenir qu'un voxel appartiendra à l'objet si son centre est situé dans l'espace intérieur de l'objet, tel qu'il est défini par la frontière, ou bien si le voxel en question est entièrement compris dans cet espace intérieur ou bien encore si une partie quelconque de ce voxel appartient à cet espace intérieur.

Dans tous les cas, un contour extérieur linéaire est alors transformé en un ensemble de lignes brisées. (cf. figure.5.3).

Une telle structure de données n'est donc praticable que dans des conditions très particulières:

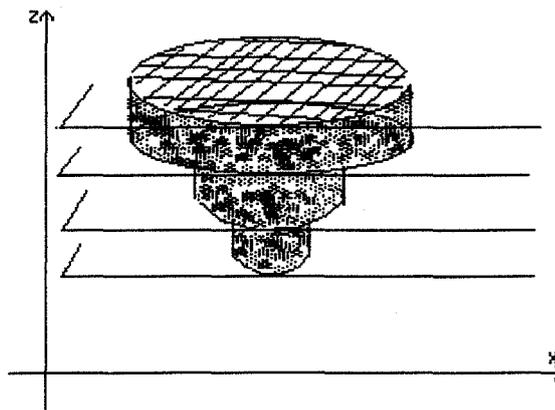
- soit en acceptant que le modèle ne soit connu que par les lois qui le définissent: cette solution est celle pratiquée dans le logiciel POLYPLI. Lorsqu'on souhaite alors obtenir une réalisation particulière (une section par un plan donné par exemple), il faut calculer chaque pixel de la dite section en appliquant au point correspondant l'ensemble des lois qui définissent le modèle et non un simple algorithme de visualisation. Il en résulte une manque de souplesse évident de la méthode dans la mesure où les temps de calcul requis risquent de devenir rapidement importants puisqu'il y a un grand nombre de valeurs élémentaires à calculer. Cette démarche n'est toutefois pas à exclure totalement, comme le prouvent les résultats honorables fournis par le logiciel POLYPLI.

- soit en associant un codage qui évite de conserver en mémoire l'ensemble des voxels: les données doivent donc être comprimées ou converties.

Pour le reste, la visualisation d'objets définis par énumération spatiale ne pose pas de difficulté particulière, les méthodes classiques de type algorithme du peintre, étant applicables. Le seul problème tient, encore une fois, au nombre considérable de voxels élémentaires qui doivent être traités.

### **5.3- Représentation par tranches horizontales superposées:**

Le découpage d'un objet en tranches horizontales superposées permet d'adopter, pour chacune de ces tranches, une représentation 2D, qui peut, selon les cas, être une partition spatiale 2D ou une représentation par frontière. On suppose alors que chaque tranche est cylindrique (cf. figure 5.5).



*Figure 5.5: Représentation par tranches horizontales.*

Une telle représentation a, elle aussi, une "résolution" qui dépend directement de l'espacement entre les tranches ([RMC 89], [PLE90]). Pour des objets de forme irrégulière, la représentation cesse d'être satisfaisante dès que cet espacement devient important. De plus, le raccord entre les divers éléments cylindriques crée des discontinuités gênantes, à moins qu'un lissage en  $z$  ne soit introduit en supplément.

La création d'un modèle défini par ce type de structure n'est pas difficile, dès lors que les différentes sections horizontales peuvent être obtenues aisément, ce qui dépend de la manière dont celles-ci sont elles-mêmes générées (entrée à la main par l'utilisateur, résultat de calcul ...). L'économie réalisée par l'introduction de couches horizontales dépend, elle-même, strictement du mode de représentation adopté pour définir chacune des tranches (elle sera grande si chaque tranche résulte d'un calcul

simple dépendant d'un petit nombre de paramètres, moins importante si cette même tranche est sous la dépendance de multiples données ponctuelles).

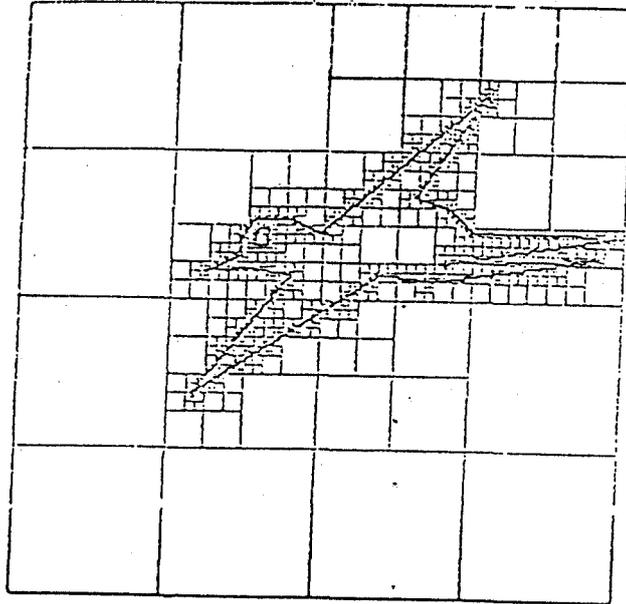
La manipulation d'objets définis par superposition de tranches horizontales n'est aisée que si l'opération conserve la partition en tranches de l'objet. Il s'agit là d'une contrainte assez sévère, qui exclut notamment que des transformations affines du type TTS d'orientation quelconque puissent être utilisées (puisque un plan horizontal est alors transformé en une surface cylindrique d'orientation quelconque).

Remarquons par ailleurs que ces difficultés de manipulation par des TTS existent pour toute structure de données comportant une division de l'objet en tranches, ce qui nous a dissuadé d'examiner par exemple, des représentations possibles d'objets à l'aide d'extrusions (balayage de l'espace à l'aide d'une forme plane se déplaçant le long d'une trajectoire). Les difficultés de manipulation d'objets définis par des tranches horizontales lors de la mise en oeuvre d'opérateurs de type TTS, nous ont paru suffisamment importantes pour que ce type de représentation n'ait pas été envisagé pour des objets géologiques susceptibles d'être déformés. Nous verrons cependant qu'elle est intéressante pour permettre une définition initiale précise d'objets 3D à partir d'un nombre restreint de données (travaux de [OLI 92]). La représentation par tranches de ces objets devra toutefois être convertie avant toute manipulation extérieure.

#### **5.4-Arbre octal:**

L'énorme place mémoire occupée par les représentations par voxels a conduit classiquement à concevoir une amélioration intéressante de cette approche générale par l'introduction des arbres octaux (octrees) ([MEA 82], [ABJ<sup>+</sup>85], [NAB86], [HUN 78], [YKF84]), qui permettent de représenter des volumes par une succession hiérarchique de cubes de taille variable.

Le processus de représentation d'un objet par un arbre octal consiste à englober cet objet dans un cube de dimension prédéfinie, puis à subdiviser récursivement ce cube en huit cubes de taille égale, tant qu'il n'est pas, soit entièrement intérieur, soit entièrement extérieur à l'objet. Cette subdivision est poursuivie, si nécessaire, jusqu'à ce que la taille atteinte par les cubes soit égale à une taille minimale arbitrairement fixée (voxel). On convient alors que tout voxel mixte (non entièrement intérieur ou extérieur à l'objet) est soit intérieur, soit extérieur. La figure 5.6 illustre la méthode dans le cas 2D (quadtree) [SAM84], [ST83].



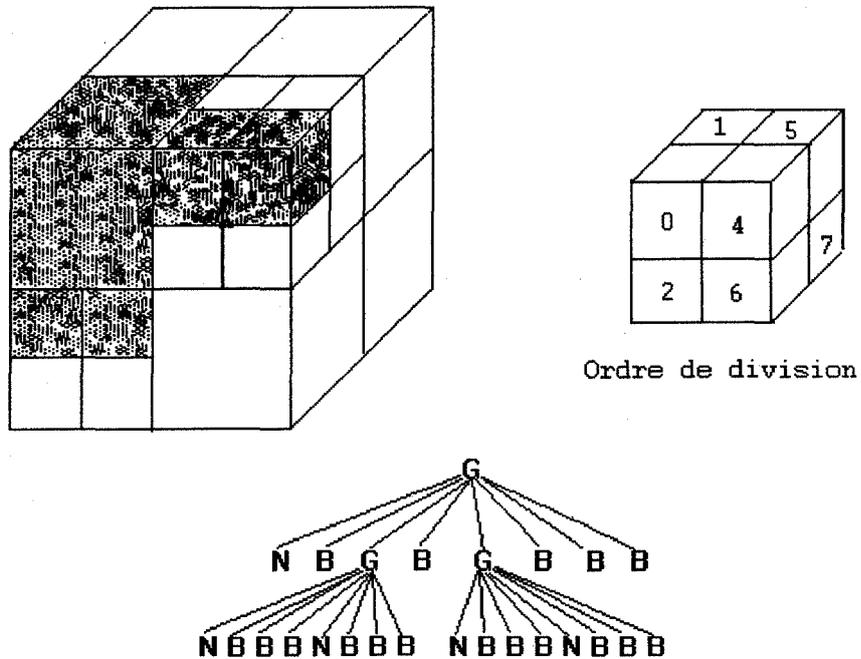
*Figure 5.6: Affichage de carrés correspondant à l'arbre quaternaire d'un objet 2D.*

Dans ces conditions, l'objet peut être représenté par un arbre octal dont la racine est le cube englobant de départ. A chaque noeud et feuille de l'arbre est associé un type (Noir(N), Blanc(B), Gris(G)) indiquant que le cube correspondant est situé entièrement à l'intérieur de l'objet, entièrement à l'extérieur, ou en partie à l'intérieur et en partie à l'extérieur (cf. figure 5.7).

#### **5.4.1-Avantages de la représentation:**

##### **-Place mémoire:**

Le principal avantage de la représentation par arbre octal classique est l'important gain de mémoire réalisé par cette méthode de type "divide and conquer". En effet, des parties homogènes de volumes important peuvent être représentées par une seule feuille de l'arbre octal. L'avantage est toutefois beaucoup plus sensible pour la représentation de parties internes à l'objet (y compris des trous éventuels) que pour la représentation des régions frontières, (cf. figure 5.6). Le gain en mémoire sera donc a priori d'autant plus important que:



**Figure 5.7:** Exemple de construction d'un arbre octal.

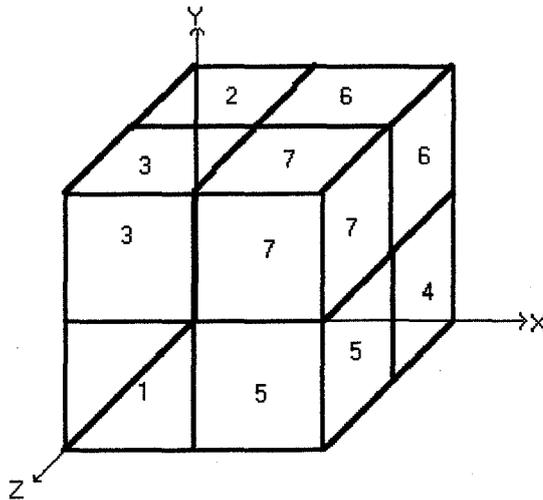
- le volume de l'objet sera grand par rapport à sa surface (objet de forme "simple").
- la taille de l'objet sera grande par rapport à celle du voxel.

***-Facilité de composition:***

Les opérations ensemblistes (Intersection, Union, Complément, Différence) sont faciles à effectuer [ABB<sup>+</sup>91]. En effet, une opération ensembliste entre deux objets revient à parcourir de manière synchronisée les deux arbres octaux correspondants et à créer l'arbre octal du volume résultat, en fonction des types de noeuds et des feuilles des arbres d'origine.

-Facilité de visualisation:

La visualisation avec élimination des parties cachées d'un objet représenté sous forme d'un arbre octal est simple et rapide. Il suffit en effet de parcourir l'arbre et d'afficher ses noeuds terminaux dans l'ordre de leur numérotation implicite dans l'arbre. Ainsi sur la figure 5.8, pour un observateur situé dans un espace dont les points forment un angle de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  avec chacun des axes (1<sup>er</sup> octant), l'ordre d'affichage sera (0,1,2,3,4,5,6,7) [PLE90].



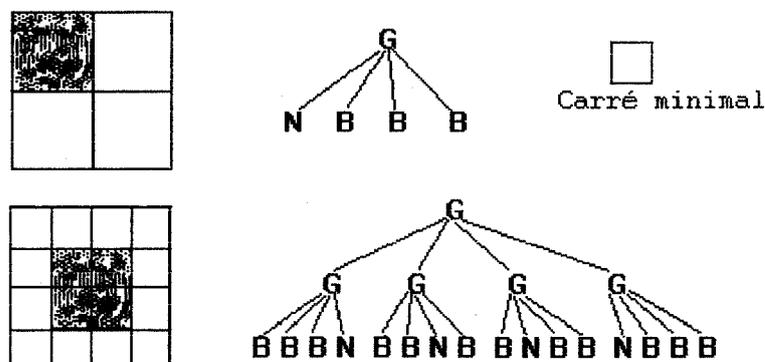
**Figure 5.8:** Arbre octal: ordre d'affichage des huit divisions d'un cube.

Comme il existe huit cas différents selon l'emplacement de l'observateur, il suffit de détecter ces cas et d'appliquer un traitement préalable à l'arbre octal (changement éventuel de l'ordre des enfants de chaque noeuds) avant d'effectuer un parcours complet de l'arbre et d'afficher les noeuds terminaux dans l'ordre.

**5.4.2-Inconvénients de la représentation:**

A côté de ces avantages, la représentation par arbre octal classique présente un certain nombre d'inconvénients.

A cet égard il convient de remarquer tout d'abord que nombre de difficultés sérieuses posées par l'énumération spatiale (absence de frontières explicites, "grain" de la structure entraînant une résolution médiocre et des risques de changement du détail de la forme extérieure des objets voire de rupture de la continuité) s'appliquent intégralement aux arbres octaux. Ceux-ci ne sont jamais en effet que des énumérations spatiales comprimées. Un ordre de difficulté supplémentaire tient à la non conservation de la structure dans la plupart des transformations. Ainsi une rotation ou même une simple translation de l'objet modifie totalement l'allure de l'arbre (cf.figure.5.9).



**Figure 5.9:** Non invariance par translation du codage par arbre quaternaire.

Cette non conservation de la structure interdit son utilisation directe lorsqu'on fait appel à des transformations plus complexes telles que les TTS. En supposant que ce mode de représentation soit choisi, il faut donc envisager que l'arbre octal représentatif d'un objet déformé soit reconstruit après chacune des déformations subies. Cela limite considérablement les possibilités d'utilisation de TTS en cascade, à l'instar de ce qui est fait dans POLYPLI. L'arbre octal ne peut raisonnablement être envisagé que comme structure de définition des objets initiaux ou de représentation du modèle final, mais difficilement comme structure apte aux calculs intermédiaires autres que ceux impliqués par des opérations ensemblistes.

Ceci pose la question des possibilités de définition initiale des objets à l'aide d'arbre octal, et de la conversion de celui-ci en d'autres types de données:

- *Définition initiale des objets*: les objets initiaux peuvent être définis de manière plus ou moins aisée selon qu'il est plus ou moins facile de réaliser le test d'intersection de l'objet par les cubes qui définissent l'arbre octal. Ceci dépend de la forme sous laquelle les données initiales sont disponibles (facettes, surfaces paramétriques, etc...). Des algorithmes classiques définissent les arbres octaux à partir de données initiales concernant la surface externe de l'objet. Certains problèmes se posent cependant, puisque la représentation par arbre octal n'est pas plus exacte que la représentation par énumération spatiale, le grain initial étant défini, là encore, par la taille du voxel.

- *Conversion vers d'autres types de représentation*: une telle conversion, notamment celle qui permet de passer d'un arbre octal à une représentation par frontière (B.Rep), est elle aussi inexacte. Ce problème d'inexactitude sera d'autant plus sensible en cas de conversions multiples, puisqu'on cumule alors les erreurs.

Envisageons le scénario suivant, courant dans le type de modélisation dynamique que nous envisageons:

Objets initiaux:  $S_0$  encaissant et  $G_1$  granite intrusif.

Composition de ces objets:

$S_1 = /S_0 - G_1 / + G_1$  (insertion de  $G_1$  dans  $S_0$ )

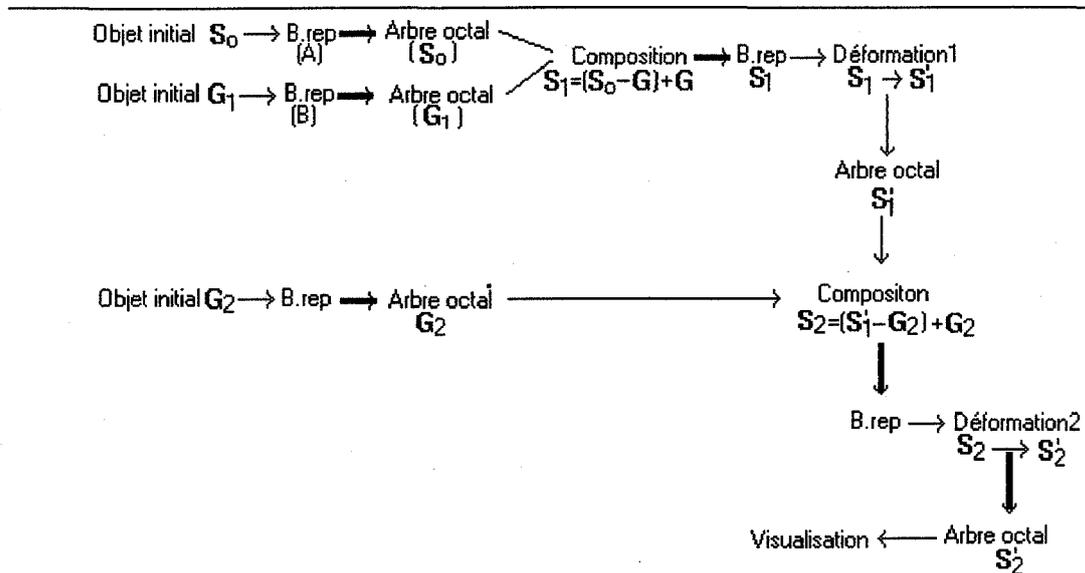
Déformation (1) de  $S_1 \rightarrow S'_1$

Composition par un granite intrusif  $G_2$ .

$S_2 = /S'_1 - G_2 / + G_2$

Déformation (2) de l'ensemble  $S_2 \rightarrow S'_2$ .

La figure.5.10 illustre les transformations qui seront nécessaires à l'obtention de  $S'_2$  et à sa visualisation. On voit qu'elles font intervenir un minimum de cinq conversions inexactes, ce qui risque d'être extrêmement pénalisant du point de vue de la précision de la représentation. Ceci confirme une fois encore l'inaptitude de l'arbre octal classique à être utilisé comme structure de calcul intermédiaire. Ceci est d'autant plus regrettable que les opérations ensemblistes, pour lesquelles cette structure est bien adaptée, peuvent a priori prendre place à n'importe quel stade du scénario et non uniquement au stade initial ou final.

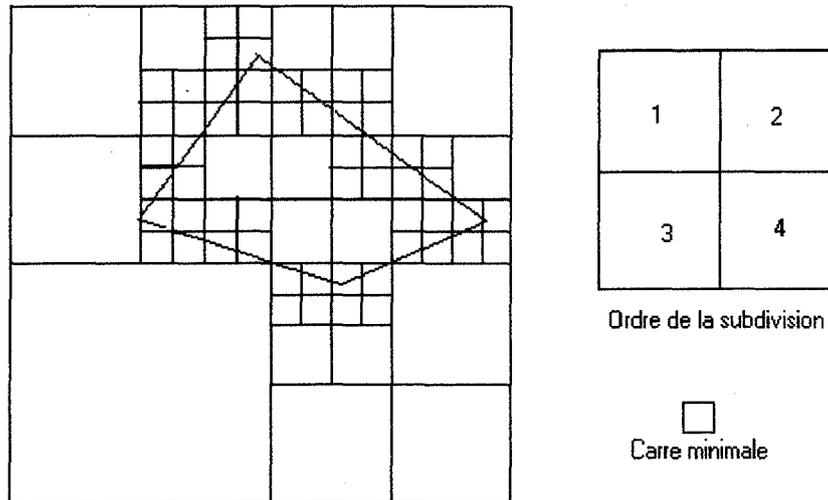


Les flèches épaisses représentent les différentes conversions nécessaires.

**Figure 5.10:** Modélisation d'une scène comportant deux granites intrusifs et deux phases de déformations (cf. texte): schéma logique faisant apparaître neuf conversions nécessaires entre arbre octal et B.rep.

### 5.5- Un exemple de structure hybride: les arbres octaux mixtes:

Afin de pallier certains des inconvénients de l'arbre octal classique, l'équipe de recherche de P. BRUNET de l'Université polytechnique de Barcelone a proposé en 1985 ([ABJ<sup>+</sup>85], [BN85], [NAB86]), une structure mixte, consistant à marier arbre octal et représentation par frontière. Ils remarquent, en effet, qu'un des inconvénients majeurs de la représentation par arbre octal classique tient au mauvais comportement des frontières de l'objet (cf. figure.5.11). A leur voisinage, en général, la dimension des cubes est minimale (égale à la dimension du voxel), ce qui contribue à augmenter considérablement le volume de la représentation (et donc la place mémoire nécessaire au stockage de la structure). De plus, nous l'avons vu, la représentation des frontières n'est pas exacte.



**Figure.5.11:** *Probleme de la représentation des frontieres par l'arbre quaternaire classique: sur 44 carrés internes à l'objet, 40 ont la taille minimale.*

L'équipe de Barcelone suppose que l'objet à représenter est défini par une surface externe polyédrique constituée donc de facettes planes ou, en 2D, par un contour polygonal. Leur idée directrice est de conserver une représentation exacte de cette frontière (équation des plans des facettes ou en 2D des arêtes) dans tous les éléments de volume (ou de surface) qui ne sont intersectés que par une facette (ou en 2D une arête) et une seule ou qui ne comportent en leur sein qu'une seule arête ou sommet (ou en 2D qu'un seul sommet).

La démarche est illustrée sur la figure 5.12 dans le cas 2D.

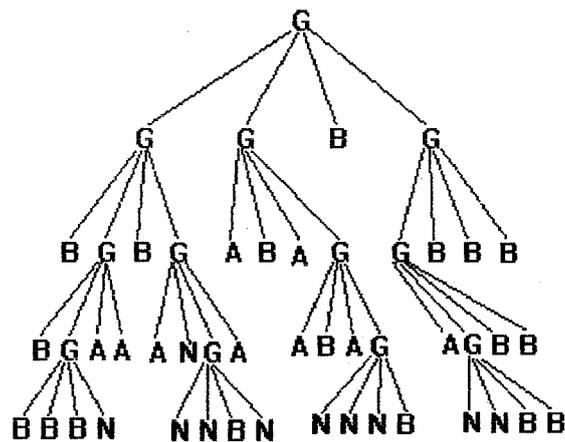
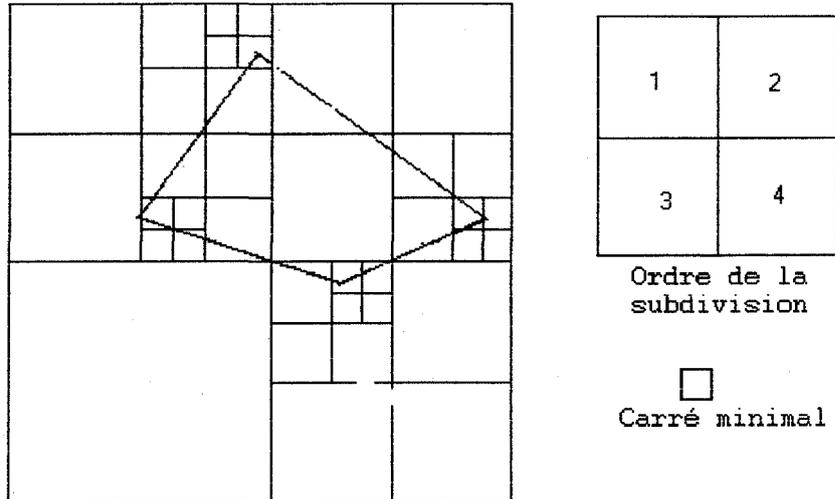
Les noeuds et les feuilles de l'arbre sont, cette fois, de type [Noir(N), Blanc(B), Gris(G), Arête(A)].

N: le carré est entièrement à l'intérieur.

B: le carré est entièrement à l'extérieur.

G: en partie intérieur et en partie extérieur.

A: le carré est coupé par une arête et une seule de l'objet.



**Figure 5.12:** Représentation par arbre quaternaire mixte de la forme de la figure 5.11. Dans ce cas le nombre de carrés internes à l'objet est 18, dont 9 seulement ont la taille minimale.

Le calcul est effectué de manière récursive, comme dans le cas d'un arbre quaternaire classique, tant que le noeud considéré rend la valeur Gris et n'a pas atteint la taille minimale. Pour les carrés de type (A), l'équation de l'arête unique qui recoupe la cellule est conservée en mémoire, ce qui assure le caractère de représentation de la frontière.

On peut choisir d'introduire éventuellement un cinquième type correspondant au cas où un sommet et un seul se trouve à l'intérieur de la cellule, ce qui permet

d'atteindre une représentation entièrement exacte, en mémorisant les coordonnées du sommet correspondant.

En 3D, le principe de représentation est le même, on peut choisir de considérer

**4 types** = { Noir(N), Blanc(B), Face(F), Gris(G) } ou  
**5 types** = { Noir(N), Blanc(B), Face(F), Arête(A), Gris(G) } ou  
**6 types** = { Noir(N), Blanc(B), Face(F), Arête(A), Sommet(S), Gris(G) }

en procédant de manière récursive jusqu'au Gris de taille minimale..

***Le type Face*** correspond au cas où une cellule cubique est recoupée par une facette et une seule de l'objet (supposé polyédrique). L'équation de la facette est alors mémorisée.

***Le type Arête*** correspond au cas où une arête et une seule recoupe le cellule. son équation est alors mémorisée.

***Le type Sommet*** correspond enfin au cas où un sommet et un seul est présent à l'intérieur de la cellule. Les coordonnées du sommet sont alors mémorisées.

Seule la représentation incluant 6 types est totalement exacte, dans la mesure où les coordonnées des différents sommets sont mémorisées.

#### **-Avantages et inconvénients des arbres octaux mixtes:**

Outre le gain de place mémoire qu'ils permettent souvent de réaliser, les arbres octaux mixtes permettent, on le voit, d'aboutir éventuellement à des représentations exactes des objets. Ceci simplifie notablement leur conversion vers des représentations par frontières (B.rep).

Par ailleurs, dès lors qu'une information précise sur les frontières est conservée, l'approximation avec laquelle est connue la forme extérieure de l'objet se trouve considérablement améliorée. L'approximation sur le calcul de la position d'un plan résulte de calculs effectués à epsilon près, valeur qui peut être comparée avec l'incertitude de  $10^{-3}$  signalée précédemment.

L'introduction d'un plus grand nombre de types pour les noeuds complique toutefois certaines opérations ensemblistes. Si la recherche du complémentaire d'un objet n'est pas affectée, il n'en est pas de même pour l'intersection entre deux objets A et B.

Pour un arbre quaternaire mixte (objet 2D), la procédure reste à peu près la même que dans le cas d'un arbre quaternaire classique, mais le nombre de cas possibles est sensiblement accru (cf. figure.5.13).

La complexité est plus grande encore dans le cas des arbres octaux mixtes. A titre d'exemple les différents cas possibles dans le cas d'arbres octaux comportant les types N, B, G, F, A, est resumé dans le tableau d'intersection (tableau.5.1).

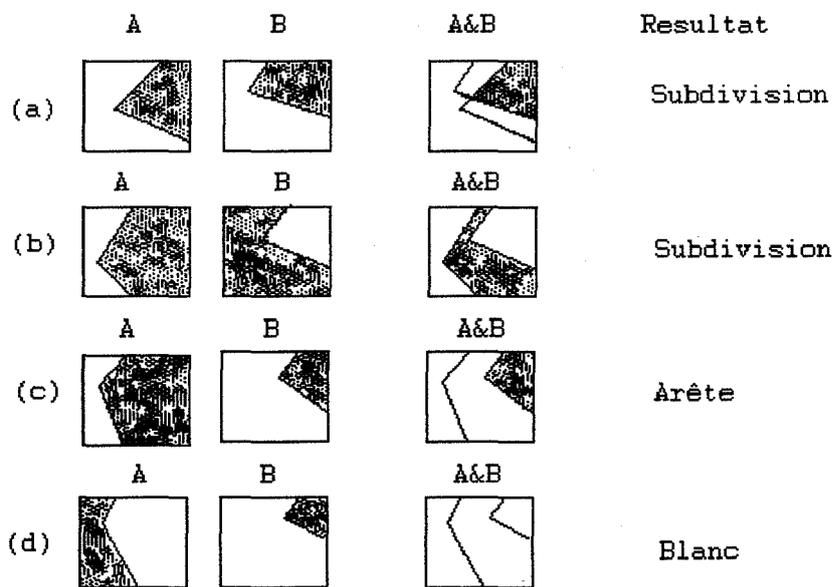
De plus, dans les cas où on a une intersection de type F ou A avec F ou A, on est ramené à tester les quatre cas illustrés sur la figure 5.14.

A	B	A&B	Intersection
			Subdivision
			Arête
			Blanc
			Subdivision

**Figure 5.13:** Intersection de noeuds homologues de type "A" (Arête).

&	N	B	G	F	A
N	N	B	G	F	A
B	B	B	B	B	B
G	G	B	G	G	G
F	F	B	G	G,F,B	G,F,B
A	A	B	G	G,F,B	G,F,B

**Tableau 5.1:** Intersection entre deux arbres octaux mixtes de type 5.



**Figure 5.14:** Divers cas possibles dans le cas d'une intersection de type (A ou F)/(F ou A). Ces cas sont représentés en projection 2D pour plus de clarté.

En conclusion on voit donc que le gain sensible acquis en place mémoire et en exactitude de la représentation en multipliant les cas, est compensé par une augmentation rapide de la complexité de certaines des procédures de calcul.

De plus, les arbres mixtes présentent les mêmes inconvénients que les arbres classiques du point de vue de leur comportement vis à vis des rotations et des transformations affines. Une conversion, certes plus facile à opérer que dans le cas d'arbre classique, doit donc, là encore, être envisagée avant d'appliquer des transformations de type semblable.

## CHAPITRE -6-

### INTERET D'UNE PARTITION DE L'ESPACE INTRINSEQUE A L'OBJET: STRUCTURE BSP CLASSIQUE ET SES LIMITES

---

Nous venons de voir à la fin du chapitre précédent que le choix de structures de données reposant sur des partitions a priori de l'espace ne constitue pas une alternative valable au choix de représentations de type B.rep. En effet, de telles partitions sont détruites dès que les objets sont déplacés, ce qui est particulièrement gênant dans le cas d'une modélisation dynamique.

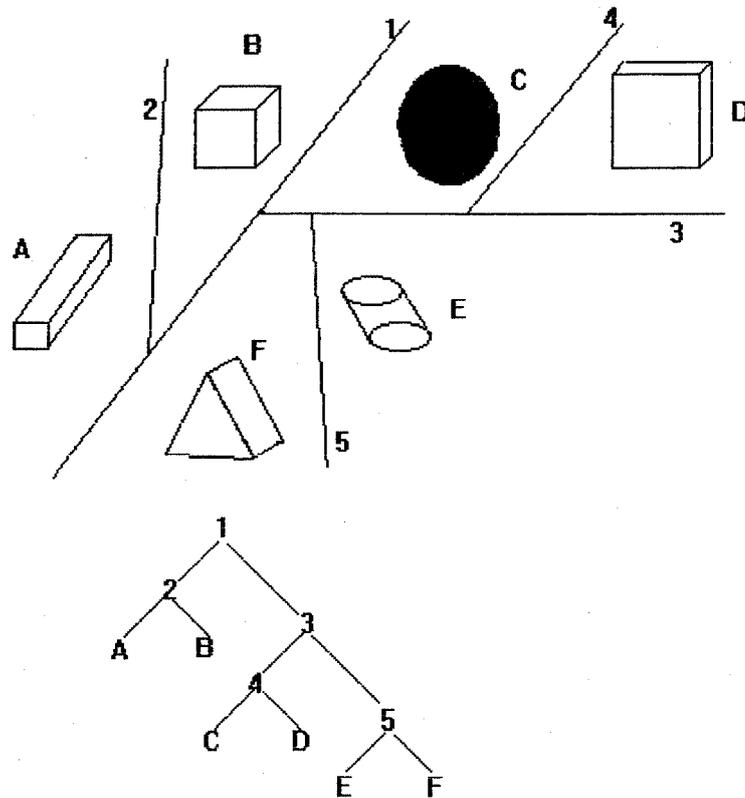
Le problème peut être en partie résolu en faisant appel à une partition qui repose sur des séparateurs intrinsèques à l'objet, a priori invariants dans les déplacements.

Nous envisagerons ici essentiellement les structures de type partition binaire de l'espace (Binary Space Partitioning=BSP).

#### **6.1- Principe de la partition binaire de l'espace:**

Dans son principe une structure de type partition binaire de l'espace repose sur l'utilisation récursive de plans séparateurs divisant en deux un espace donné ([NAY90], [NT86], [PY90], [TOR90], [FKN80], [CS92]). La position de tels plans n'est pas fixée a priori mais dépend de la représentation de l'objet lui-même (scène complète, objet isolé,...).

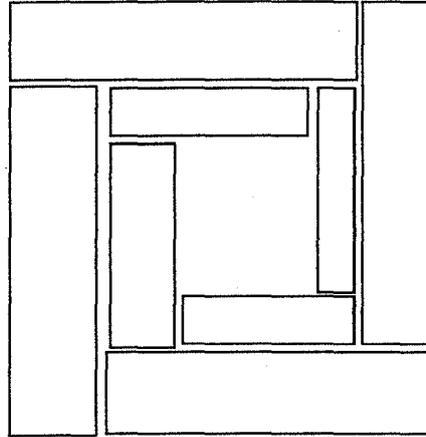
Un exemple d'utilisation de ce type de structure pour la représentation d'une scène complexe est fourni par [SBG<sup>+</sup>69] et illustré sur la figure 6.1. L'espace est structuré à l'aide d'un arbre binaire dont les noeuds sont des plans séparateurs et les feuilles des objets appartenant à la scène.



**Figure 6.1:** Partition binaire de l'espace à l'aide de plans séparateurs.

Il faut remarquer que la structure n'est pas nécessairement facile à construire; elle peut nécessiter de découper ou de regrouper des objets. La figure 6.2 présente un exemple où, si l'on veut utiliser des séparateurs plans, un découpage des objets est nécessaire. Si les objets sont complexes, un tel découpage risque de nécessiter de nombreuses opérations de partition de facettes élémentaires et donc être très pénalisant.

Le cas qui nous préoccupera plus particulièrement est celui de la représentation d'un solide unique éventuellement composé de fractions disjointes et pouvant comporter des trous.



---

**Figure 6.2:** Le positionnement des plans séparateurs est impossible sans découpage des objets. (D'après [COQ 84])

THIBAULT et NAYLOR -1987- ([TN87]) définissent une partition binaire récurrente d'un espace à  $d$ -dimensions à l'aide d'un arbre dit **BSP** (Binary Space Partitioning). L'espace est divisé en deux sous espaces par un hyperplan, chacun de ces deux sous espaces est lui même redivisé par un autre hyperplan, l'opération étant poursuivie de manière récursive jusqu'à une limite qui peut être fixée arbitrairement. La figure 6.3 illustre la relation entre la subdivision de l'espace et l'arbre **BSP** correspondant, dans le cas d'un espace 2D.

Sur la figure 6.3.a, nous voyons que l'algorithme consiste à subdiviser l'espace  $\mathbb{R}^2$  par une ligne droite  $u$ , en indiquant par une flèche la normale à cette droite pour séparer la partie positive de la partie négative de la subdivision; chacun des sous-espaces de part et d'autre de  $u$  est lui-même subdivisé par  $y$  et  $w$  respectivement. Après la récursion suivante par les éléments  $x$  et  $z$ , on obtient six régions de l'espace séparées indépendamment.

La figure 6.3.b, représente l'arbre BSP correspondant: les noeuds sont les droites ou portions de droites qui structurent l'espace et les feuilles de l'arbre correspondent aux différentes régions qui résultent de la subdivision. Chaque noeud ( $y$  par exemple) sépare un sous arbre droit qui représente le sous espace délimité par l'élément rectiligne ( $y$ ) vers lequel pointe la normale à cet élément et un sous arbre gauche qui représente l'autre sous-espace délimité par l'élément rectiligne considéré.

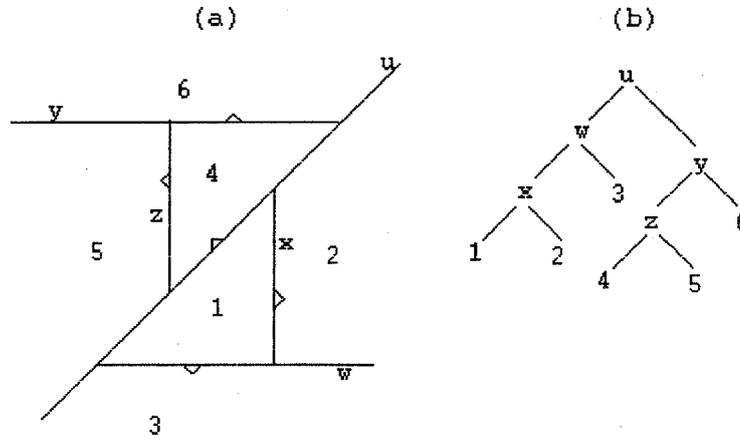


Figure 6.3: Exemple d'arbre BSP (2D).

Formellement:

un hyperplan:

$$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) / a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d + a_{d+1} = 0\}$$

divise l'espace en deux sous-espaces

un sous-espace droit

$$H^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) / a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d + a_{d+1} > 0\}$$

et un sous-espace gauche

$$H^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) / a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d + a_{d+1} < 0\}$$

A chaque noeud  $v$  de l'arbre correspond une région  $R(v)$ , définie comme l'intersection des sous-espaces qui commencent à la racine de l'arbre et vont jusqu'en  $v$ . Ainsi sur la figure 6.3.b

$$R(x) = u^- \cap w^-$$

$$R(z) = u^+ \cap y^-$$

Par ailleurs, chaque feuille résulte elle-même de l'intersection des différents sous-espaces délimités par les noeuds qui la séparent de la racine.

$$R(2) = u^- \cap w^- \cap x^+$$

$$R(6) = u^+ \cap y^+$$

Les solides que nous souhaitons représenter sont de forme polyédriques: leur frontière est constituée par conséquent d'un ensemble de facettes planes polygonales.

Le principe de la représentation d'un tel solide par une structure BSP peut être compris aisément en examinant tout d'abord le problème plus simple de la représentation 2D d'une facette F limitée par un contour polygonal.

Dans ce cas, si l'on prend pour séparateurs les droites qui portent chacune des arêtes du contour, il est possible, en faisant jouer ces séparateurs de manière récursive de construire un arbre 2D descriptif du plan contenant F et de classer chacune des sous-régions placée dans une feuille de cet arbre en "in" ou "out" selon qu'elle appartient à l'intérieur ou à l'extérieur de F (cf. figure.6.4)

D'un point de vue formel si e est une arête d'équation:  $ax+by+c=0$ , elle sépare l'espace en deux régions:

$$R^+ : ax+by+c > 0$$

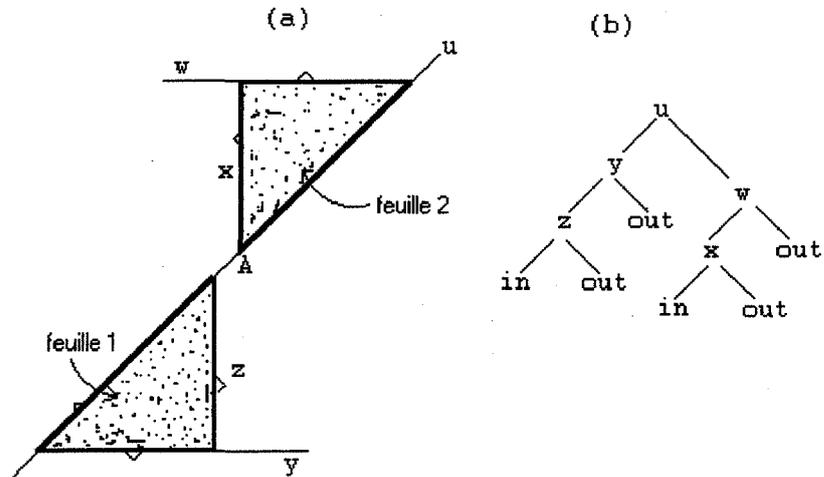
$$R^- : ax+by+c < 0$$

Dans l'espace 3D, la représentation d'un solide polyédrique S peut être effectuée de manière analogue en utilisant comme séparateurs les plans des différentes facettes, en construisant à l'aide de ces séparateurs un arbre 3D dont les noeuds sont les plans des différentes facettes et les feuilles des sous régions de l'espace 3D, et en classant les différentes feuilles de l'arbre en "in" ou "out" selon qu'elles appartiennent ou non à S.

Du point de vue formel, un plan de facette d'équation:  $ax+by+cz+d=0$ , sépare l'espace en deux régions:

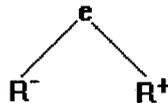
$$R^+ : ax+by+cz+d > 0$$

$$R^- : ax+by+cz+d < 0$$



**Figure 6.4:** *Arbre BSP d'un ensemble a contour polygonal constitué de plusieurs plages. Le contour est souligné en gras.*

Par convention un tel plan sera représenté comme noeud de l'arbre BSP sous la forme suivante:



Une feuille d'un arbre BSP correspond à une région de l'espace, ouverte ou fermée, entièrement limitée par les séparateurs correspondant à des noeuds de l'arbre, et donc à des facettes (3D) de l'objet.

Remarquons que dans une telle structure, les facettes planes qui délimitent l'objet  $S$ , ne sont pas décrites en elles-mêmes, les plans contenant ces différentes facettes étant seuls connus et utilisés comme séparateurs. La structure est donc a priori descriptive de l'objet, mais pas de sa frontière.

## **6.2- Avantages des représentations de type BSP:**

Nous avons vu précédemment qu'un inconvénient possible des partitions de l'espace tient à l'absence de définition explicite des frontières. Dans le cas des structures utilisant des partitions a priori, les objets sont représentés avec une résolution assez faible et leur forme n'est conservée lors des déplacements qu'à l'approximation du grain de la structure près.

Ce dernier inconvénient disparaît dans le cas d'une représentation de type BSP dans le mesure où à l'approximation des calculs près, il s'agit pour les objets polyédriques qui nous intéressent d'une représentation exacte, puisque les différents séparateurs appartiennent strictement à la frontière de l'objet. Dans ce cas il n'y a pas de "grain".

Comme pour toute représentation par partition de l'espace, un objet déterminé est défini comme l'union d'un certain nombre de volume élémentaires disjoints, connexes ou non. L'intérieur comme l'extérieur de l'objet sont ainsi parfaitement définis.

### **- Détermination de frontière:**

Bien qu'elle ne comporte pas de représentation explicite de la frontière la structure permet une classification très directe de tout point de l'espace comme intérieur, extérieur ou frontalier de l'objet. Cette classification est obtenu en insérant le point M considéré dans l'arbre et en parcourant celui-ci en testant récursivement la puissance de M par rapport aux plans du noeuds rencontrés jusqu'à le classer dans un ou plusieurs feuilles de l'arbre [FKN80], [FAG83].

1) si M n'appartient à aucun des séparateurs de l'arbre, il est alors sûrement intérieur ou extérieur à l'objet. Il se retrouve donc classé au terme de la procédure dans une feuille de l'arbre et une seule, et donc comme "in" ou "out".

2) si M appartient à un plan séparateur et à un seul (cf.figure.6.5) plusieurs cas peuvent se produire:

- lors de son insersion dans l'arbre M se trouve classé dans une feuille sans que le noeud N correspondant au plan séparateur dans lequel il est contenu ait été atteint. Dans ce cas M ne peut appartenir à la frontière

de l'objet. Il est classé "in" ou "out" selon la valeur de la feuille dans laquelle il se trouve (position M1 sur la figure 6.5).

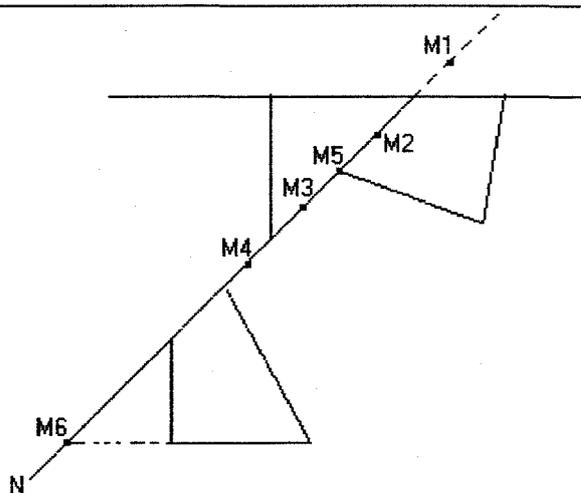
- si le noeud N est atteint, M est frontalier des deux demi-espaces séparés par le plan correspondant. En insérant M dans les sous arbres descriptifs de ces deux demi espaces, on atteindra deux feuilles de l'arbre A, et deux seulement.

Si ces deux feuilles ont même valeur "in" ou "out", M sera classé comme intérieur ou extérieur respectivement (position M2 et M4 sur la figure 6.5).

Si les deux feuilles ont des valeurs différentes M appartiendra à la frontière de l'objet, et cette frontière sera nécessairement valide puisqu'elle sépare, au niveau de M, deux sous-espaces respectivement intérieur et extérieur.

3) si M est placé sur plusieurs séparateurs, le raisonnement précédent peut être appliqué en explorant à partir de chaque noeud de l'arbre correspondant à un plan contenant M, les deux sous arbres fils.

Si M est contenu dans  $n$  séparateurs, il sera alors classé dans  $n+1$  feuilles de l'arbre.



**Figure 6.5:** Classification d'un point par rapport à un objet 2D.

Si toutes ces feuilles ont même valeur, M a la valeur correspondante, sinon M appartient à la frontière de l'objet.

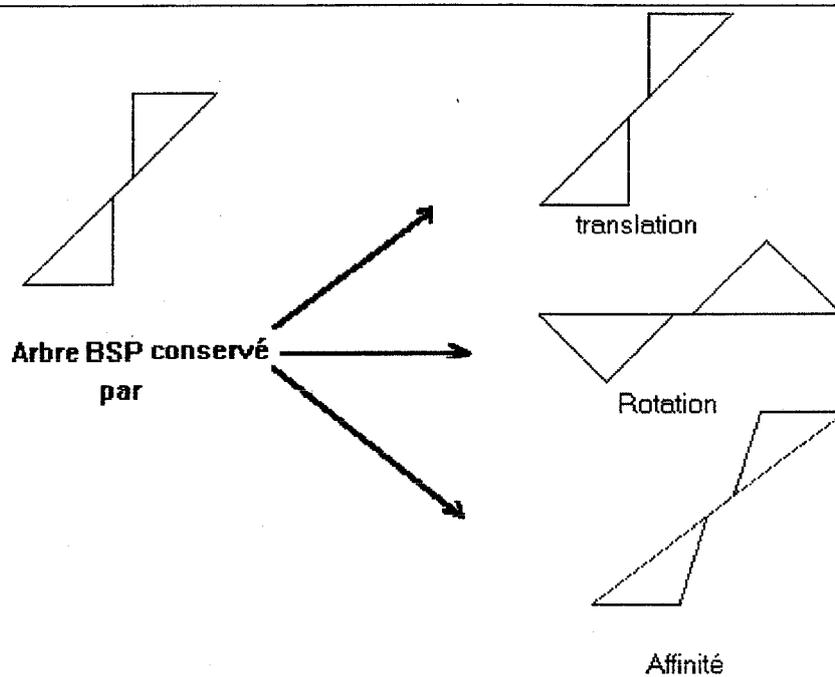
Sur un plan formel cette procédure peut être écrite de la manière suivante:

```
Procédure ClassificationPoint(E:point,T:ArbreBSP)
    return {"in", "out", "on"}

if type(T) est une feuille
    return(type(T))
else
début
    D=puissance du plan de T par rapport à E
    if D=0
        début
            l=ClassificationPoint(E,T->gauche)
            r=ClassificationPoint(E,T->droite)
            if l=r
                return(r);
            else
                return "on"
        findébut
    if D > 0
        ClassificationPoint(E,T->droite);
    if D < 0
        ClassificationPoint(E,T->gauche);
    findébut
finProcédure
```

### -Invariance de l'arbre dans les transformations affines:

Comme nous l'avons précisé au départ, l'intérêt principal d'une représentation de type BSP tient au fait que pour décrire un objet elle le fragmente à l'aide de séparateurs qui sont intrinsèques à l'objet lui-même puisqu'ils contiennent sa frontière. Les relations entre les différentes portions de l'objet sont donc a priori invariantes dans toutes les transformations qui conservent les relations de puissance par rapport à des éléments plans: déplacements, et plus généralement toutes les transformations affines (cf. figure 6.6).



**Figure 6.6:** Conservation de l'arbre BSP.

Envisageons par exemple le cas de l'affinité correspondant à une TTS à profil droit:  $f(x) = ax + b$  (cf.figure.6.7).

$A'B'$  est le transformé de  $AB$  et  $M'$  le transformé de  $M$  par la TTS considérée. On a:

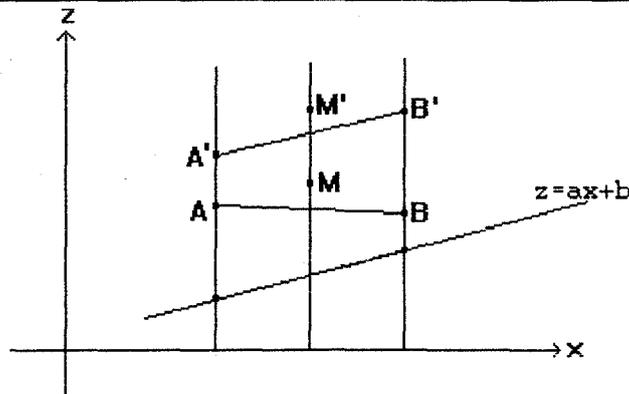
$$\begin{aligned} A' &(x_A, z_A + ax_A + b). \\ B' &(x_B, z_B + ax_B + b). \\ M' &(x_M, z_M + ax_M + b). \end{aligned}$$

La puissance de  $M'$  par rapport à  $A'B'$  est:

$$P(M') = (x_{M'} - x_{A'}) * (z_{B'} - z_{A'}) - (z_{M'} - z_{A'}) * (x_{B'} - x_{A'})$$

en remplaçant  $x_{M'}, z_{M'}, x_{A'}, z_{A'}, x_{B'}, z_{B}'$ , par leur expression en fonction de  $x_M, z_M, x_A, z_A, x_B, z_B$  on constate que:

$$P(M') = (x_M - x_A) * (z_B - z_A) - (z_M - z_A) * (x_B - x_A) = \text{puissance de } M \text{ par rapport à } AB, \text{ ce qui exprime la conservation des relations d'intérieurité extérieurité.}$$



**Figure 6.7:** Conservation des relations topologiques entre un point et un segment dans le cas d'une TTS à profil droit.

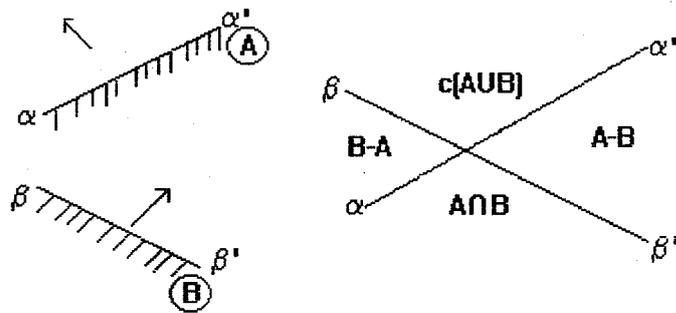
Il en résulte que la structure de l'arbre descriptif de l'objet restera invariante dans la transformation, celle-ci ne faisant que changer la valeur des noeuds.

- Conservation partielle de la structure par les opérateurs booléens:

Si un solide polyédrique  $S$  résulte de la composition booléenne de deux solides de départ  $A$  et  $B$ , chacune des facettes qui le délimitent est a priori coplanaire d'une facette appartenant à  $A$  ou à  $B$ . Donc si  $A$  et  $B$  sont décrits chacun par une structure BSP, on pourra trouver une description BSP de  $S$  utilisant les séparateurs figurant dans les arbres descriptifs de  $A$  et de  $B$  [NAT90], [TN87].

Plus précisément, il est possible de réaliser une composition booléenne entre deux objets  $A$  et  $B$  par "insertion" d'un de deux arbres dans l'autre et par attribution aux feuilles de l'arbre résultant de valeurs appropriées selon l'opération effectuée.

Pour comprendre le principe de la méthode, on peut considérer deux objets élémentaires  $A$  et  $B$  constitués chacun par un demi-plan (figure.6.8).

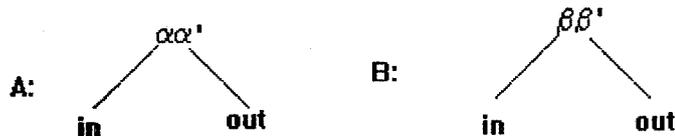


**Figure 6.8.** Opérations booléennes.

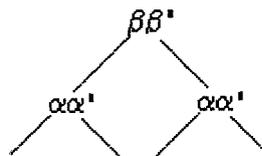
Les limites de ces deux objets sont deux droites  $\alpha\alpha'$  et  $\beta\beta'$  qui divisent le plan en quatre régions:

intérieure à A et B	$A \cap B$
intérieure à A et extérieure à B	A-B
Intérieure à B et extérieure à A	B-A
extérieure à A et à B	$C(A \cup B)$

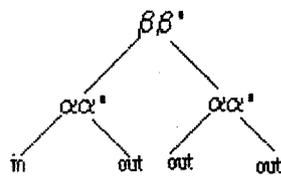
A et B peuvent être représentés par les deux arbres suivants:



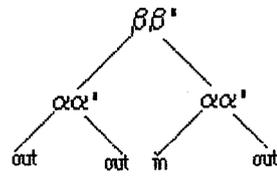
L'insertion de A dans B consiste à situer chaque élément de A dans l'arbre représentatif de B. Dans le cas d'espèce cette opération donne l'arbre:



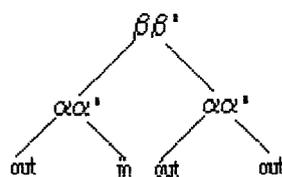
Il est alors possible de représenter les quatre régions élémentaires de l'espace délimités par  $\alpha\alpha'$  et  $\beta\beta'$ , en attribuant aux feuilles les valeurs ci dessous:



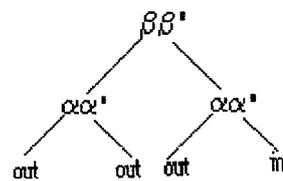
**$A \cap B$**



**$A - B$**

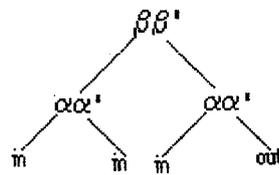


**$B - A$**



**$c(A \cup B)$**

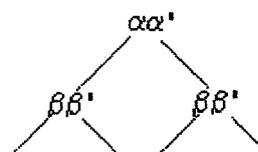
et par combinaison de ces résultats, on peut représenter, en attribuant aux feuilles les valeurs convenables, toutes composition booléenne à partir de A et de B. Ainsi on a par exemple:



**$A \cup B$**

Il faut remarquer d'ailleurs que l'opération complémentaire est réalisée très simplement à partir d'un arbre donné par simple inversion des valeurs "in" ou "out" des différentes feuilles.

On voit par ailleurs qu'une autre manière de procéder aurait été d'insérer B dans A on aurait eu alors:



et les valeurs des feuilles auraient pu être attribuées de manière analogue en fonction de l'opération booléenne à réaliser.

L'insertion d'arbres complexes l'un dans l'autre est une opération de base dans la manipulation des arbres BSP, dont la complexité théorique pour deux arbres de dimension  $n$  est  $\Theta(n^2)$  [NAT90]. Toutefois dans la pratique de bien meilleurs résultats sont à attendre, dès lors que les arbres manipulés sont "bons", c'est-à-dire équilibrés [NAT90]. Nous reviendrons plus en détail ci-après dans les chapitres 7 et 8 sur cet écart entre complexité théorique et résultats pratiques, en discutant les performances possibles des algorithmes effectivement utilisés et en examinant les résultats que nous avons obtenus lors de la manipulation de nos propres objets.

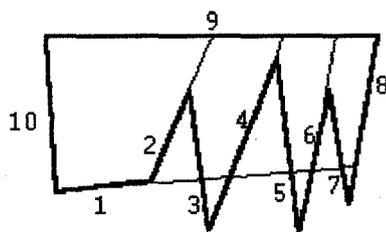
On voit que cette manière de procéder présente un avantage important: il est possible de construire un arbre unique à partir duquel toute opération booléenne peut être effectuée par simple attribution aux feuilles des valeurs convenables.

Cette facilité d'utilisation de l'ensemble des opérateurs booléens a cependant une contrepartie: nous avons vu en effet qu'un même arbre peut moyennant une simple inversion des valeurs de chacune des feuilles représenter un objet et son complémentaire: ainsi la structure en soi ne garantit pas mutuellement la finitude spatiale des objets représentés. Cet inconvénient n'est toutefois pas très sérieux puisque nous avons vu (§.3.5) que les opérateurs utiles dans les cas qui nous occupent (unions, intersections, différences) respectent cette finitude, l'opérateur complémentaire n'étant éventuellement utilisé à un stade intermédiaire que pour faciliter ces opérations.

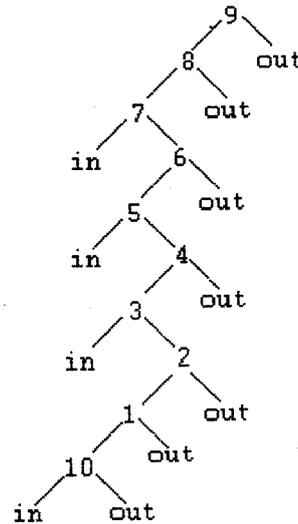
### **6.3- Inconvénients des représentations de type BSP:**

#### **-Non unicité de la représentation par arbre BSP. Place mémoire requise:**

Un inconvénient des structures BSP, classiquement mis en avant, tient à la non unicité de la représentation, le choix du plan qui est mis à la racine de l'arbre, puis des plans qui sont placés aux différents noeuds est arbitraire. L'ordre de positionnement des différents plans aux noeuds a une influence importante sur le nombre des noeuds de l'arbre BSP comme le montre la figure 6.9.



1) Bon choix de l'arête placée à la racine pas d'arêtes recoupées



2) Mauvais choix:

Le choix de l'arête 1 comme arête de départ puis des arêtes 2, 3, ... à la suite entraîne que les arêtes 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont recoupées chacune une fois et que l'arête 9 est recoupée trois fois.

Figure 6.9: Probleme du choix d'un ordre pour la construction de l'arbre BSP.

On peut d'ailleurs remarquer que l'ordre dans lequel les plans sont entrées peut être absolument quelconque: **il n'est notamment pas nécessaire de les rentrer en respectant une quelconque contigüité**, ce qui, nous le verrons par la suite, ne présente pas que des inconvénients.

Il reste que l'ordre d'entrée des plans séparateurs a une influence considérable sur la taille des représentations. Ceci impose d'abord que dans les raisonnements faits sur la complexité que l'on distingue avec un soin particulier les configurations liées aux pires des cas et les configurations les plus couramment obtenues, de taille généralement beaucoup plus modeste.

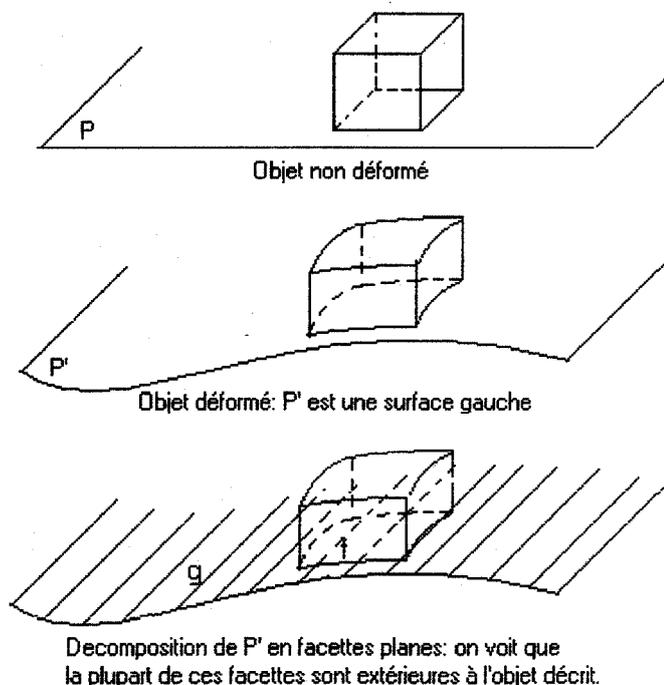
Par ailleurs, la possibilité d'apparition de découpages défavorables n'est pas aisée à estimer. Il en résulte que l'appréciation de la complexité effective au sein de la fourchette souvent large séparant le meilleur du pire des cas n'est pas aisée et ne peut être faite en général que de manière empirique. Ceci complique souvent sensiblement les possibilités d'estimation des performances des algorithmes utilisant les structures BSP.

Dans ces conditions on peut se poser la question d'une optimisation possible de l'ordre d'entrée des plans séparateurs, il n'existe toutefois pas de solution totalement évidente à ce problème; l'optimisation des arbres BSP étant réputée être un problème difficile [TN 87].

- problème de comportement de la représentation BSP dans le cas de déformation non affines:

Le problème du comportement général d'une représentation BSP dans les déformations apparaît délicat. En effet une déformation transforme a priori un séparateur plan  $P$  en une surface gauche  $P'$  au mieux cylindrique dans le cas d'un opérateur de type TTS (cf. figure 6.10).

La plupart des propriétés de la structure BSP que nous avons énumérées jusqu'à présent ne sont pas strictement conditionnées par le caractère plan des séparateurs. Il reste que l'utilisation de séparateurs constitués par des surfaces gauches ou cylindriques poserait des problèmes délicats:



**Figure 6.10:** Comportement d'un séparateur plan déformé par une transformation de type semblable.

- le classement des points de l'espace par rapport à de telles surfaces deviendrait sensiblement plus complexe, à moins que celles-ci n'aient une expression algébrique particulièrement simple.
- l'insertion d'arbres les uns dans les autres nécessiterait le découpage de telles surface. La réalisation d'opérations booléennes deviendrait donc complexe.

Pour ces raisons, l'utilisation de séparateurs non plans ne sera pas envisagée ici, pas plus qu'elle ne l'est dans les travaux classiques concernant les BSP.

Dans le cas d'une TTS  $\Phi$ , il est possible toutefois d'approximer la fonction profil par une chaîne constituée de  $n$  séparateurs comme cela est d'ailleurs fait systématiquement dans le logiciel POLYPLI. Un séparateur quelconque  $P$  est alors transformé par  $\Phi$  en une surface constituée de  $n$  "lattes" planes de longueur infinie, parallèles à l'intersection de  $P$  avec le plan axial de  $\Phi$ .

Il semble toutefois exclu d'utiliser chacune des  $n$  lattes comme séparateur d'un arbre BSP descriptif de l'objet  $O$ , puisqu'aussi bien seul un petit nombre d'entre elles contiennent effectivement une facettes appartenant à la frontière de  $O$ . Ceci est d'autant plus exclu que si l'on procédait ainsi en enchaînant plusieurs TTS, la complexité augmenterait de manière exponentielle, chaque séparateur étant redivisé à chaque opération en autant d'éléments que le profil de la TTS considérée comporte de segments.

Pour cette raison il semble exclu de pouvoir utiliser sans précaution les BSP dès lors que les TTS doivent être appliquées. Leur utilisation ne serait envisageable que dans la mesure où il serait possible de conserver comme séparateurs à l'issue de l'application d'une TTS, les seuls éléments plans qui appartiennent à la surface extérieure de l'objet déformé. Ceci impliquerait que la structure comporte une désignation explicite de la frontière de l'objet, ce qui n'est généralement pas prévu dans les structures BSP classiques.



## CHAPITRE -7-

### DEFINITION D'UNE STRUCTURE HYBRIDE REPENDANT AUX OBJECTIFS FIXES LA "BSP MIXTE".

---

#### **7.1-Introduction:**

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la structure BSP ne semble pas apte à supporter aisément des déformations de type TTS. Elle apparaît toutefois intéressante à de nombreux égards:

- sa complexité théorique est la même que celle des B.rep.
- les algorithmes sont plus simple à construire et à manipuler.
- il n'y a pas de problèmes importants de validation.
- elle supporte bien les transformations affines et les opérations booléennes.

Il reste donc à savoir s'il serait possible d'aménager cette structure pour qu'elle "supporte" mieux les TTS. Cela implique de concevoir une structure où les arbres puisse être conservés au moins "par morceaux" entre les différents plans axiaux passant par les sommets du profil de la TTS considérée.

Ces plans doivent donc pouvoir être considérés comme des plans séparateurs au même titre que les plans des facettes des objets. Cependant il n'est pas souhaitable qu'ils soient redivisés lorsqu'ils sont extérieurs à l'objet. Il faut donc que la structure permette une individualisation commode et rapide des parties de ces plans qui sont extérieures. Si l'on veut éviter que cette individualisation implique un parcours complet d'arbres il faut que la structure fasse mention sous une forme ou sous une autre de la frontière de l'objet.

La BSP mixte que nous allons proposer est une structure hybride qui vise à répondre à ces objectifs.

## 7.2- Définition de la "BSP mixte". Représentation des objets:

La représentation de la frontière des objets décrits n'est pas envisagée en tant que telle dans les travaux classiquement disponibles sur les BSP [FKN80], [NAT90], [TN87]. Nous proposons cependant de l'inclure en mentionnant, aux noeuds de l'arbre BSP, les portions des droites ou de plans séparateurs qui correspondent effectivement à de portions de frontière. La figure 7.1 donne un exemple de l'arbre obtenu dans le cas d'un polygone (2D). Nous conviendrons d'appeler cette structure "BSP mixte".

Les types qui seront utilisés par la structure seront les suivants:

### -Point:

Un **point** est désigné par ses coordonnées homogènes. Si  $(x,y,z)$  sont les coordonnées d'un point M dans repère R, ses coordonnées homogènes seront  $(X,Y,Z,T)$  avec:

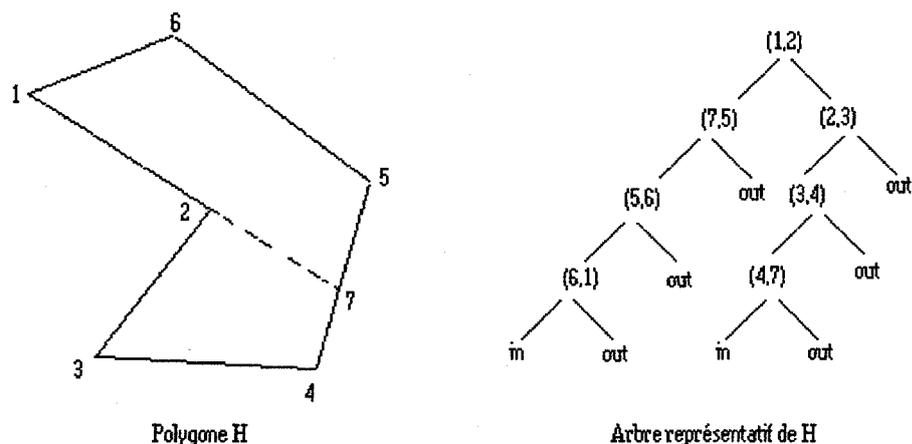


Figure.7.1: Arbre "BSP mixte" représentatif d'un polygone.

$$x=X/T, y=Y/T, z=Z/T.$$

Il sera représenté sous la forme suivante:

```
typedef struct Point{ float X,Y,Z,T; }Point;
```

- Segment:

Un **segment** est défini par ses extrémités, désignées à l'aide de deux pointeurs, l'un sur l'origine est l'autre sur l'extrémité. Il sera représenté par:

```
typedef struct segment { Point *Org, *Ext} segment;
```

- Droite:

Une **droite** est désignée par deux points mais il ne fait pas l'objet d'un type particulier.

- Facettes polygonales:

Une facette polygonale sera définie par un arbre binaire (cf.figure.7.2) constitué de noeuds et de feuilles tel que:

a) un noeud comporte:

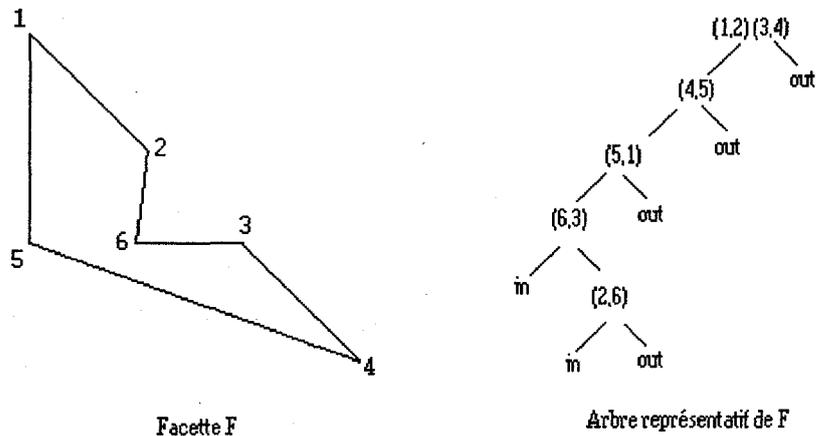
1- un ou plusieurs pointeurs sur les arêtes délimitant cette facette.

2- un pointeur sur son fils gauche et un autre sur son fils droit.

b) une feuille correspond à une cellule du plan de la facette et est mentionnée comme "out" (extérieure à la facette) ou "in" (intérieure à la facette).

Cette représentation est un arbre BSP mixte 2D. Le type correspondant peut être explicité sous la forme suivante:

```
typedef struct FACETTE { struct FACETTE *fils_gauche;
                        struct FACETTE *fils_droite;
                        Point *extrémité, *origine; } FACETTE;
```



**Figure 7.2:** *Arbre représentatif d'une facette polygonale.*

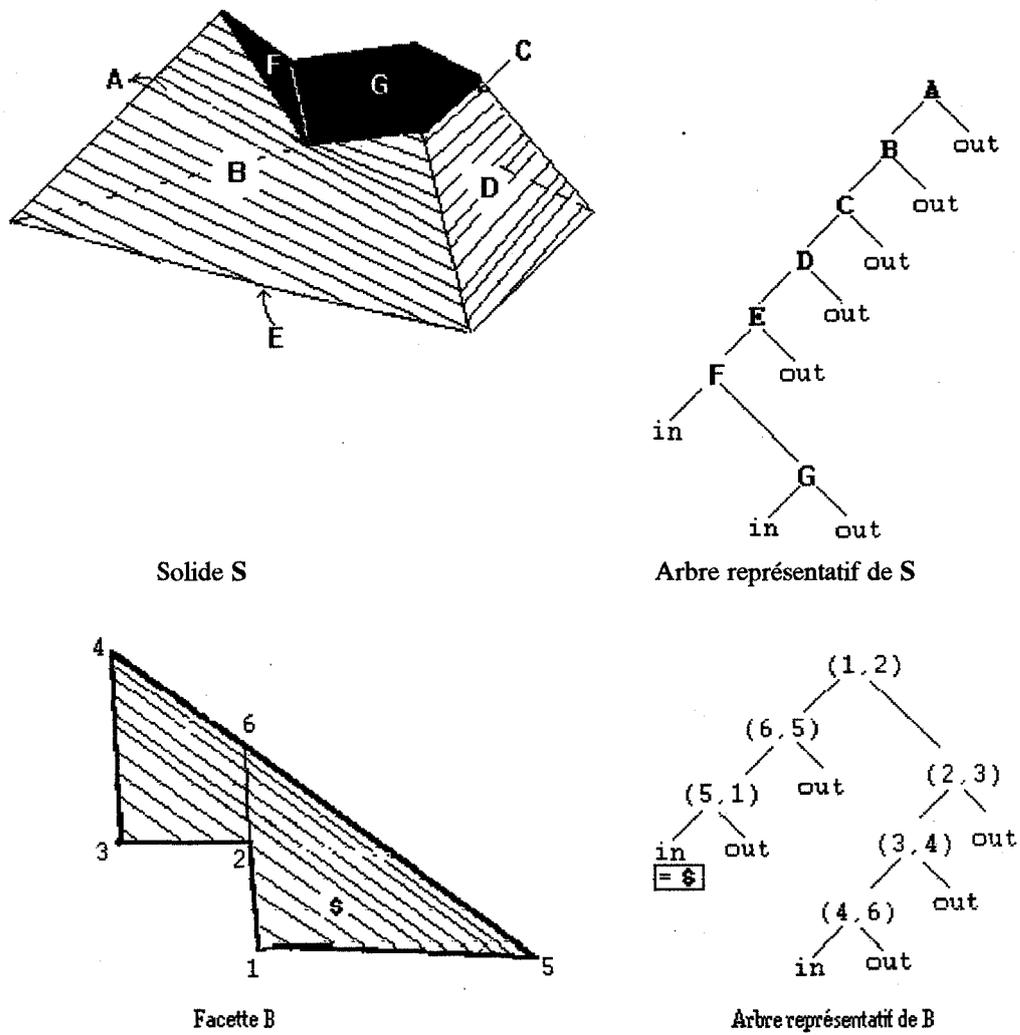
**-Objets polyédriques:**

Un objet polyédrique est défini par un ensemble de facettes polygonales dont chacune peut être décrite par un arbre représentatif de type "FACETTE". L'objet dans son ensemble sera représenté par un arbre binaire (cf. figure.7.3) tel que:

a) un noeud comporte:

- 1- un ou plusieurs pointeurs sur les arbres représentatifs des facettes composant la frontière de l'objet; deux facettes coplanaires sont placées à un même noeud
- 2- un pointeur sur le quadruplet  $(a,b,c,d)$  de l'équation du plan de ces facettes.
- 3- un pointeur sur le fils gauche et un autre sur le fils droit du noeud considéré.

b) une feuille correspond à une cellule "out" (extérieure à l'objet) ou "in" (intérieure à l'objet).



**Figure.7.3:** Structure et exemple d'arbre BSP mixte représentant un solide..

La représentation correspond à un arbre BSP mixte 3D :

```
typedef struct ARBRE_OBJ { struct ARBRE_OBJ *fils_gauche;
                          struct ARBRE_OBJ *fils_droite;
                          FACETTE *f;
                          réels a, b, c, d; } ARBRE_OBJ;
```

Remarquons que la structure ci-dessus est une structure redondante, dans laquelle les séparateurs sont représentés à la fois par leur équation et par leurs limites (contour polygonal de facettes planes, dans le cas 3D, limites de segments dans le cas 2D). La frontière de l'objet est ainsi décrite deux fois: une fois de manière explicite par les contours polygonaux ou les segments figurant aux noeuds et une fois implicitement, puisqu'il est possible, à partir de la simple connaissance des équations des séparateurs, de rétablir la frontière de l'objet décrit selon la procédure explicitée au §.6.2.

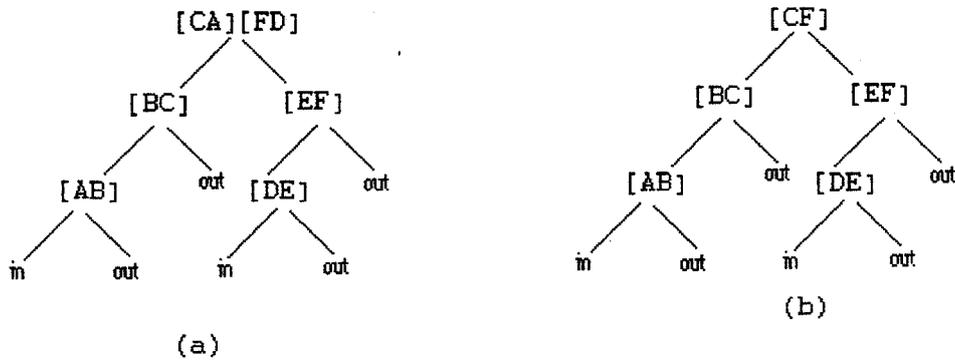
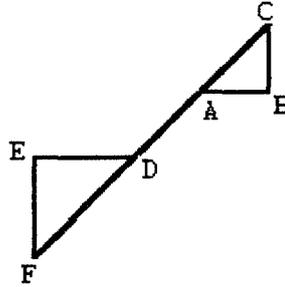
Cette double représentation de la frontière peut théoriquement être source de contradictions: en effet alors que la frontière décrite implicitement par les séparateurs est, nous l'avons vu, valide par construction, il n'y a aucune raison qu'il en soit de même pour la frontière mentionnée explicitement aux noeuds.

On peut imaginer de décrire l'objet représenté sur la figure 7.4 à l'aide de l'un de deux arbres 7.4.a ou 7.4.b, mais tandis que la frontière explicitement mentionnée en 7.4.a correspond à la frontière valide de l'objet décrite implicitement par la structure, celle explicitement mentionnée en 7.4.b comporte en outre une arête sans intérieur ([DA]).

Rien ne garantit donc a priori la validité de la frontière figurant aux noeuds.

Il en résulte que si l'on souhaite que cette frontière explicite soit valide, il faudra prendre soin de la construire comme telle et de n'effectuer que des opérations qui garantissent le maintien de cette validité.

Toutefois comme la structure décrit implicitement une frontière valide ainsi que nous l'avons vu au §.6.2, il existe dans tous les cas un moyen simple de s'assurer si nécessaire la validité de la frontière explicite en la comparant à la frontière décrite implicitement. Ceci peut être fait par un simple parcours du sous arbre aval pour chacun des segments situés aux noeuds.



**Figure 7.4:** *Objet non valide comportant une portion sans épaisseur (arête DA).*

L'algorithme correspondant consiste à positionner le ou les segments figurant à chacun des noeuds dans les feuilles du sous arbre aval en le divisant si nécessaire. Il peut être écrit de la manière suivante:

```
ARBRE_OBJ *ARBRE_VALIDE(T: ARBRE_OBJ)
    return(T);
```

**Début**

Si T n'est pas une feuille

$F_T = \text{FACET\_VALIDE}(F_T, T \rightarrow \text{gauche}, T \rightarrow \text{droite});$  /\* $F_T$  facettes localisées dans le noeud T\*/

$T \rightarrow \text{gauche} = \text{ARBRE\_VALIDE}(T \rightarrow \text{gauche});$

$T \rightarrow \text{droite} = \text{ARBRE\_VALIDE}(T \rightarrow \text{droite});$

**FinSi**

**FinDébut**

Elle fait appel à la fonction:

```

FACETTE *FACET_VALIDE(f,T1,T2)
    return(f);
typedef struct FACET { FACETTE: left, right}FACET;
FACET f;
Début
    Si T1 n'est pas une feuille
        f = Division(PT1,f) /* division de f par le plan PT1 */
        f .left = FACET_VALIDE(f .left, T1->gauche, T2);
        f .right = FACET_VALIDE(f .right, T1->droite, T2);
    Sinon
        Si T2 n'est pas une feuille
            f = Division(PT2,f) /* division de f par le plan PT2 */
            f .left = FACET_VALIDE(f .left, T1, T2->gauche);
            f .right = FACET_VALIDE(f .right, T1, T2->droite);
        Sinon
            Si T2 est "in"
                Si T1 est "out"
                    return(f);
                FinSi
            Sinon
                Si T1 est "in"
                    return(f);
                FinSi
            FinSinon
        FinSinon
    FinSinon
FinDébut

```

Dans le cas de l'exemple de la figure 7.4.b cet algorithme indiquera que le séparateur [CF] situé à la racine est divisé par les séparateurs [AB] et [DE] en trois portions [CA], [AD] et [DF].

Le segment [CA] est en position "in" par rapport aux séparateurs [BC] et [AB] du sous arbre gauche et en position "out" par rapport aux séparateurs [EF] et [DE] du sous-arbre droit. Il fait donc partie de la frontière valide de l'objet.

Le segment [DF] est, de même, en position "out" par rapport aux séparateurs [BC] et [AB] du sous arbre gauche et en position "in" par rapport aux séparateurs [EF] et [DE] du sous-arbre droite. Il fait donc partie de la frontière valide de l'objet.

Par contre le segment [AD] est "out" à la fois par rapport aux sous-arbre gauche et sous-arbre droit. Cette portion ne fait donc pas partie de la frontière.

### 7.3- Construction d'un arbre BSP mixte:

Préalablement à tout examen des propriétés de la structure que nous venons d'explicitier, il nous faut examiner les algorithmes de base qui permettent de définir les objets.

La construction d'un arbre BSP mixte représentant un objet polyédrique, peut être effectuée en introduisant récursivement dans l'arbre T, l'ensemble de facettes délimitant l'objet considéré (cf. figure.7.5).

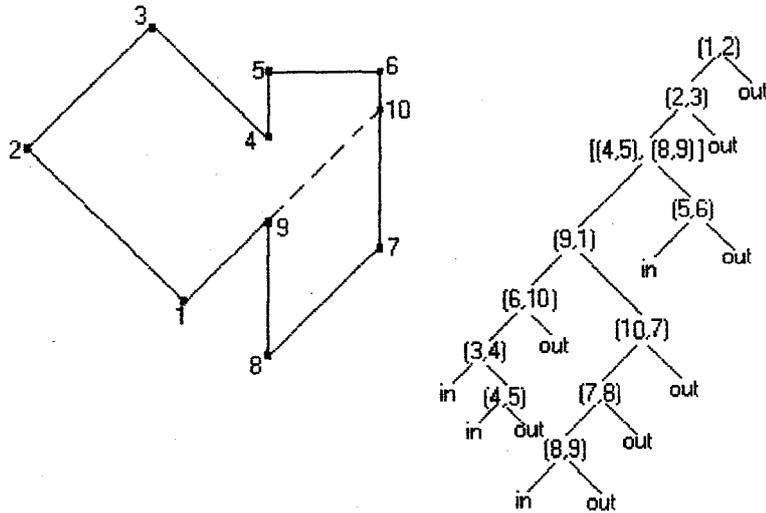
Pour introduire une facette f dans T, on fait appel à un algorithme comparant f avec les éléments (feuille ou noeud) de T en partant de la racine. Deux cas peuvent se présenter:

a- f ou une partie  $f_i$  de f est positionnée dans une feuille de l'arbre.

b- f ou une partie  $f_i$  de f est positionnée dans un noeud v de l'arbre.

Dans l'hypothèse (a) la facette f ou  $f_i$  est copiée dans l'arbre de construction de la manière suivante:





**Figure 7.5:** Exemple d'un arbre BSP.

Dans l'hypothèse (b) quatre cas peuvent se présenter:

- 1- le plan de  $v$  coupe  $f$  en deux sous facettes  $f\_left$  (partie négative) et  $f\_right$  (partie positive) (sur la figure 7.5 ce cas est celui de la facette (6,7) qui est partagée par la facette (9,1) en (6,10) partant à gauche et (10,7) partant à droite). On répète l'algorithme une fois en comparant  $f\_left$  avec le fils gauche de  $v$ , et une deuxième fois en comparant  $f\_right$  avec le fils droit de  $v$ .
- 2-  $f$  se trouve dans le sous-espace gauche du plan de  $v$ . Dans ce cas on répète l'algorithme en comparant  $f$  avec le fils gauche de  $v$ .
- 3-  $f$  se trouve dans le sous-espace droit du plan de  $v$ . Dans ce cas on répète l'algorithme en comparant  $f$  avec le fils droit de  $v$ .
- 4-  $f$  est dans le plan  $P$  de  $v$ . Dans ce cas,  $f$  est stockée dans  $v$  (c'est le cas sur la figure 7.5 de la facette (8,9) située dans le plan de la facette (4,5)).

On remarquera que cet algorithme ne garantit pas en lui-même la validité de la frontière explicite de l'objet mentionnée aux noeuds. Cette validité est toutefois vérifiée dès lors que les facettes introduites sont valides, puisque chaque arête est soit

conservée telle quelle, soit divisée avec conservation des seules portions intérieures à l'objet.

La fonction de construction de l'arbre de départ peut ainsi être écrite de la manière suivante:

```
ARBRE_OBJ *CONST_ARBRE_BSP(F[]: Tableau de n facettes)
    return(T);
Début
    T est une feuille          /* initialisation de T */
    Pour i=1 jusqu'à n faire
        T=RANGER_FACET_DANS_ARBRE(F[i],T);
    FinPour
FinDébut
```

Elle fait appel à la fonction:

```
ARBRE_OBJ *RANGER_FACET_DANS_ARBRE(f:FACETTE, T:ARBRE_OBJ)
    return(T);
typedef struct FACET{ FACETTE left,right;}FACET;
FACET f;
Début
    Si T est une feuille
        Copier(f,T);          /* voir texte hypothèse (a) */
    Sinon
        Si f est carrément dans PT      /* PT plan du noeud T */
            Copier(f,T);          /* voir texte hypothèse (b) cas 4 */
        Sinon
            f' = CONST_PARTIEL2D(PT,f);
            Si f'.left est non NULL
                T->gauche=RANGER_FACET_DANS_ARBRE(f'.left,T->gauche);
            FinSi
            Si f'.right non NULL
                T->droite=RANGER_FACET_DANS_ARBRE(f'.right,T->droite);
            FinSi
        FinSinon
    FinSinon
FinDébut
```

Dans leur principe, les deux fonctions, CONST\_ARBRE\_BSP() et RANGER\_FACET\_DANS\_ARBRE(), sont identiques à celles qui permettent de construire un arbre BSP classique. Cependant, la seconde suppose que l'on sache diviser explicitement une facette par un plan et déduire les sous-arbres correspondant aux deux sous-facettes résultant de cette division. Cette opération est effectuée grâce à la procédure CONST\_PARTIEL2D(). Ainsi que nous allons le voir ci-dessous, elle

est grandement facilitée par la mention explicite, au noeud de l'arbre de la facette, de la frontière de la ou des facettes contenues dans le plan du noeud.

#### **7.4- Division de la structure par un plan séparateur. Notion de partiel:**

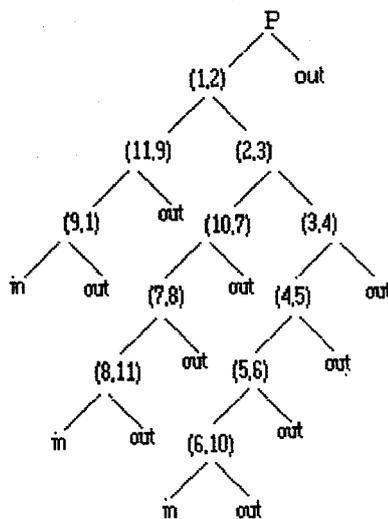
Nous désignerons par partiel d'un arbre BSP mixte T représentatif d'un objet O, un arbre mixte issu de T et représentatif d'une partie de O.

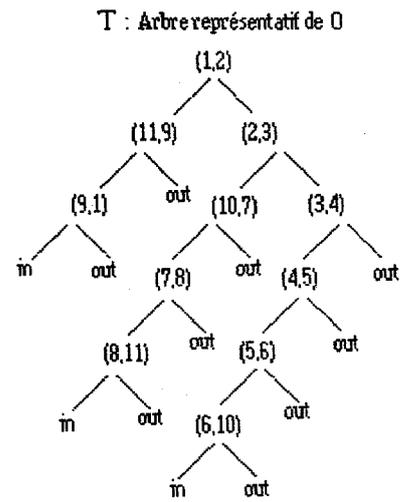
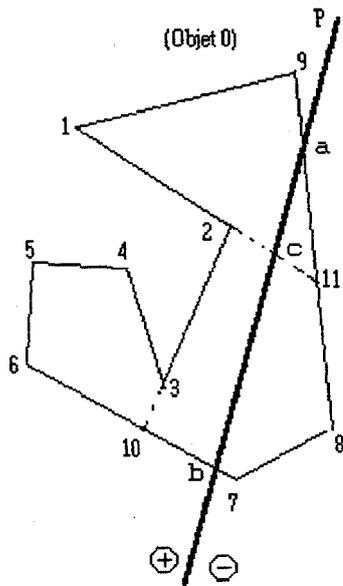
Nous allons examiner le problème suivant:

Etant donné un objet O représenté par un arbre T et un plan P recoupant O, chercher une représentation des parties de O situées respectivement dans l'un ou l'autre des deux demi-espaces (positif et négatif) séparés par P, à l'aide de deux partiels de T.

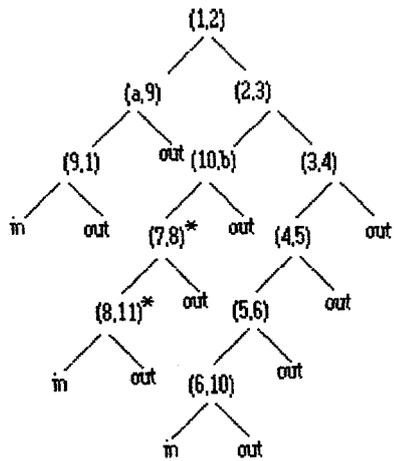
La manière la plus facile de représenter la partie de l'objet  $O^+$  (resp  $O^-$ ) située dans le demi espace positif  $P^+$  (resp. négatif  $P^-$ ) relatif au plan P, consiste à placer le plan P à la racine de l'arbre représentatif de  $O^+$  et à recopier l'arbre T à droite (resp. à gauche) de cette racine.

Sur l'exemple de la figure 7.6 le résultat pour l'objet  $O^+$  est le suivant:





T\_left



T\_right

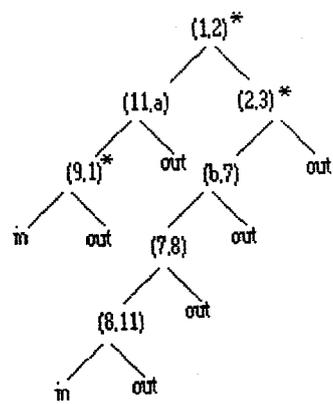


Figure.7.6: Partiel gauche et partiel droit d'un objet coupé par un plan .

Une telle représentation présente un double inconvénient:

- elle met en jeu des séparateurs tels que (7,8) qui ne sont pas pertinents par rapport à l'objet représenté.
- elle ne permet pas d'appréhender commodément la frontière de l'objet.

Pour pallier ces inconvénients, nous proposons une méthode consistant à déduire de l'arbre représentatif  $T$  de  $O$  les deux partiels gauche ( $T_{left}$ ) et droit ( $T_{right}$ ) en suivant la trace du plan  $P$  à travers l'arbre  $T$  depuis la racine jusqu'aux feuilles en un seul parcours.

On suppose que  $T_{left}$  et  $T_{right}$  sont au départ deux arbres vides dont les racines sont  $l$  et  $r$  considérées au départ comme les éléments cibles de  $T_{left}$  et  $T_{right}$  respectivement.

Partant de la racine de  $T$ , on applique récursivement l'algorithme suivant:

Position de  $P$ ? Deux cas peuvent se présenter:

- (a)  $P$  ou une partie  $P_i$  de  $P$  est positionné dans une feuille de  $T$ .
- (b)  $P$  ou une partie  $P_i$  de  $P$  est positionné dans un noeud  $v$  de  $T$ .

Dans l'hypothèse (a) si la feuille rencontrée est "in", la partie de  $P$  positionnée dans cette feuille est conservée comme élément appartenant à la frontière de l'objet divisé (sur la figure 7.6 c'est le cas de la partie (a,c) du plan  $P$ ).

Dans l'hypothèse (b) quatre cas peuvent se présenter:

1- si la facette  $f$  qui se trouve dans  $v$  est coupée par  $P$  en  $f_{left}$  (partie positive) et  $f_{right}$  (partie négative) (sur la figure 7.6 c'est le cas de la facette (9,11)),  $f_{left}$  est copiée dans l'élément cible  $l$  sur  $T_{left}$  (voir Eq 7.1), et  $f_{right}$  dans  $r$  sur  $T_{right}$ .

Bien entendu  $P$  est lui-même alors divisé par le plan de  $v$  en  $P_{left}$  et  $P_{right}$ . On répète donc une fois l'algorithme en comparant  $P_{left}$  avec le fils gauche de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils gauches de  $l$  et  $r$ , puis une deuxième fois en comparant  $P_{right}$  avec le fils droit de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils droits de  $l$  et  $r$ .

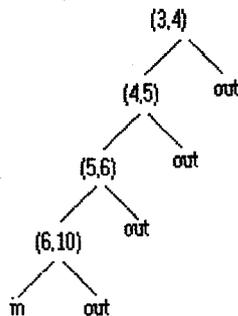
2- si la facette  $f$  qui se trouve dans  $v$  est entièrement localisée dans la partie gauche (positive) de  $P$  alors  $f$  est copiée comme un noeud ordinaire dans  $l$  (cf Eq 7.1) et comme un plan séparateur, marqué par un astérisque \*, dans  $r$  (sur la figure 7.6 c'est le cas de la facette (1,2)). Trois nouveaux cas peuvent se présenter:

i-  $P$  est divisé en  $P_{left}$  et  $P_{right}$  par le plan qui se trouve dans  $v$ , On répète donc une fois l'algorithme en comparant  $P_{left}$  avec le fils gauche de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils gauches de  $l$  et  $r$ , puis une deuxième fois en comparant  $P_{right}$  avec le fils droit de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils droits de  $l$  et  $r$ .

ii-  $P$  est dans la partie gauche(positive) du plan de  $v$ . Dans ce cas le sous arbre droit de  $v$  est copié mot à mot dans  $T_{left}$  à droite de  $l$ , Puis l'algorithme est répété en comparant  $P$  avec le fils gauche de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils gauches de  $l$  et  $r$ .

Sur l'exemple de la figure 7.6 ce cas correspond à celui de la facette (2,3).

Le sous arbre :



est copié mot à mot dans  $T_{left}$ .

On peut remarquer que cette copie est faite après la seule comparaison de la facette (2,3) avec le plan  $P$ . Cette possibilité de copie mot à mot de sous arbres entiers suite à **une seule comparaison** est susceptible de réduire en pratique la complexité de l'algorithme de manière très sensible dans les cas "favorables".

iii-  $P$  est localisé dans la partie droite(négative) du plan de  $v$ . Dans ce cas le sous arbre gauche de  $v$  est copié mot à mot dans  $T_{left}$  à gauche de  $l$ , puis l'algorithme est répété en comparant  $P$  avec le fils droit de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils droits de  $l$  et  $r$ .

3- si la facette  $f$  qui se trouve dans  $v$  est entièrement localisée dans la partie droite (négative) de  $P$  alors  $f$  est copiée comme un noeud ordinaire dans  $r$  (cf Eq 7.1) et comme un plan séparateur marqué par un astérisque  $*$  dans  $l$  (sur la figure 7.6 c'est le cas de la facette (1,2)). Trois nouveaux cas peuvent se présenter:

i-  $P$  est divisé en  $P_{left}$  et  $P_{right}$  par le plan qui se trouve dans  $v$ , On répète donc une fois l'algorithme en comparant  $P_{left}$  avec le fils gauche de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils gauches de  $l$  et  $r$ , puis une deuxième fois en comparant  $P_{right}$  avec le fils droit de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils droits de  $l$  et  $r$ .

ii-  $P$  est dans la partie gauche(positive) du plan de  $v$ . Dans ce cas le sous arbre droit de  $v$  est copié mot à mot dans  $T_{right}$  à droite de  $r$ , Puis l'algorithme est répété en comparant  $P$  avec le fils gauche de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils gauches de  $l$  et  $r$ .

iii-  $P$  est localisé dans la partie droite(négative) du plan de  $v$ . Dans ce cas le sous arbre gauche de  $v$  est copié mot à mot dans  $T_{right}$  à gauche de  $r$ , puis l'algorithme est répété en comparant  $P$  avec le fils droit de  $v$  en prenant comme éléments cibles les fils droits de  $l$  et  $r$ .

4- si la facette  $f$  qui se trouve dans  $v$  est localisée dans  $P$  lui-même alors deux cas peuvent se présenter:

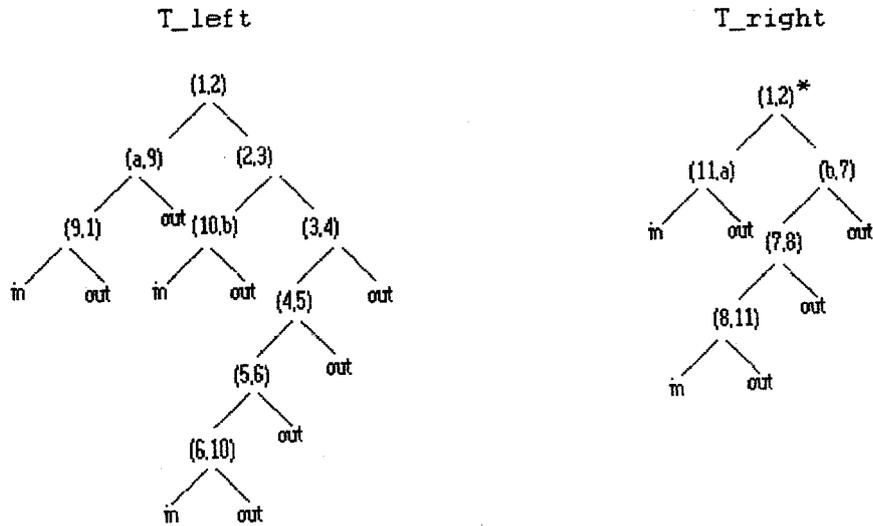
i- le plan  $P$  et le plan qui se trouve dans  $v$  sont orientés dans le même sens; dans ce cas  $l$  est alors remplacé par le sous arbre gauche de  $v$  et  $r$  par le sous arbre droit.

ii- le plan  $P$  et le plan qui se trouve dans  $v$  sont orientés dans des sens opposés,  $l$  est alors remplacé par le sous arbre droit de  $v$  et  $r$  par le sous arbre gauche.

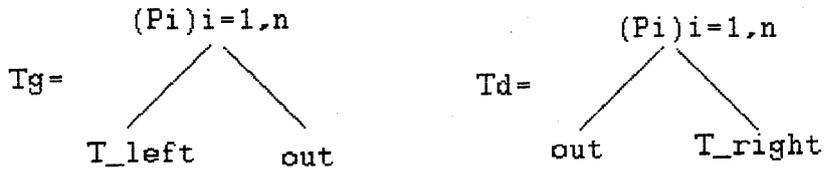
Remarquons que  $l$  et  $r$  sont toujours des feuilles respectivement de  $T_{left}$  et  $T_{right}$ . et qu'un élément de l'arbre marqué par un astérisque  $*$  est un simple séparateur qui pointe sur une équation de droite en 2D ou de plan en 3D.

Il est possible d'optimiser les deux arbres résultant  $T_{left}$  et  $T_{right}$  en ne conservant parmi les séparateurs marqués par un astérisque  $*$ , que les plans qui séparent effectivement des facettes appartenant à la frontière de l'objet recherché. Ainsi sur la figure 7.6  $T_{left}$  peut être optimisé en supprimant  $(7,8)^*$  et  $(8,11)^*$  et

T\_right en supprimant (2,3)\* et (9,1)\* et en ne conservant que (1,2)\* . Les arbres finaux se présenteront ainsi de la manière suivante:

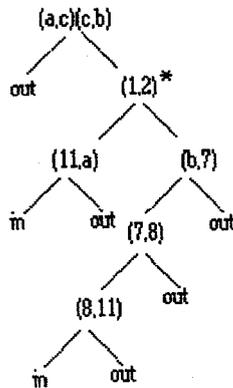


Les objets localisés respectivement dans les sous espaces positif et négatif délimités par P peuvent alors être décrits par les deux arbres suivants:



$(P_i)_{i=1,n}$  correspondant aux différentes parties de P positionnées dans les feuilles "in" de T, ce qui garantit la validité de l'objet résultant.

Sur l'exemple de la figure 7.6 Td sera:



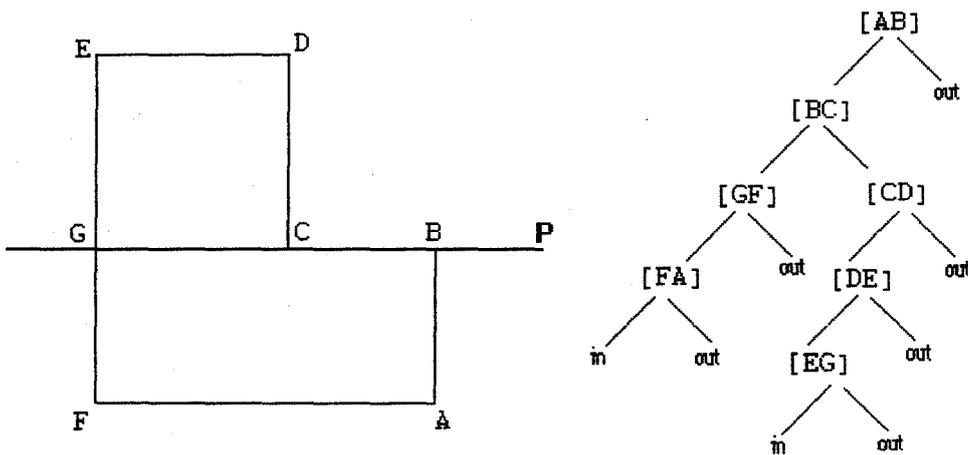
Dans le cas où P est confondu avec des séparateurs de T (facette incluse dans le plan P) (figure 7.7). On vérifie bien que l'algorithme permet de rétablir une frontière valide pour les deux objets situés dans les demi-espaces positif et négatif relatifs au plan P. En effet:

- dans le demi-espace positif (à gauche de P):

on ne conserve à la racine de l'arbre que les parties de P situées dans une feuille in du sous arbre T\_left, (dans le cas de la figure 7.7, on conserve BG après avoir supprimé les parties extérieures à AB et GF) .

- dans le demi espace négatif (à droite de P):

on ne conserve à la racine de l'arbre que les parties de P situées dans une feuille in du sous arbre T\_right. (dans le cas de la figure 7.7, BC fait partie de la frontière de l'objet original et est extérieure au séparateur CD situé dans T\_right. BC est donc éliminée et il ne subsiste pour la frontière de l'objet que GC) .



**Figure 7.7:** *Objet dont l'une des facettes est incluse dans le plan P.*

La procédure de construction des partiels gauche et droit délimités par un plan P peut être écrite de la manière suivante:

```

ARBRE *CONST_PARTIEL(P:plan, T:ARBRE_OBJ)
    return(T');
typedef struct ARB { ARBRE_OBJ: left,right}ARB;
typedef struct FACET{ FACETTE: left,right}FACET;
FACET: f,P';
ARB: T';
Début
  Si T n'est pas une feuille
    Si FT et P sont coplanaire    /*FT la facette du noeud T */
      /* voir texte cas 4 de l'hypothèse (b) */
      Si FT et P ont la même orientation
        Copier(T-> gauche, T'.left);
        Copier(T-> droite, T'.right);
      Sinon
        Copier(T-> gauche, T'.right);
        Copier(T-> droite, T'.left);
      FinSinon
    Sinon
      Si FT est coupé par P
        /* voir texte cas 1 de l'hypothèse (b) */
        f = CONST_PARTIEL2D(P,FT);
        Copier(f'.left, T'.left);
        Copier(f'.right, T'.right);
        P' = DIVISION(P,PT);    /*PT est le plan du noeud T */
        T'.left = T'.left-> gauche; T'.right = T'.right-> gauche;
        T' = CONST_PARTIEL(P'.left, T-> gauche);
        T'.left = T'.left-> droite; T'.right = T'.right-> droite;
        T' = CONST_PARTIEL(P'.right, T-> droite);
      Sinon
        Si FT est dans la partie gauche de P
          Copier(FT, T'.left);
          Copier((FT)', T'.right);
        Si P est coupé par PT
          /* voir texte cas 2 ,i de l'hypothèse (b)*/
          P' = DIVISION(P,PT);
          T'.left = T'.left-> gauche; T'.right = T'.right-> gauche;
          T' = CONST_PARTIEL(P'.left, T-> gauche);
          T'.left = T'.left-> droite; T'.right = T'.right-> droite;
          T' = CONST_PARTIEL(P'.right, T-> droite);
        Sinon
          Si P est dans la partie gauche de PT
            /*voir texte cas 2,ii de l'hypothèse (b) */
            Copy(T-> droite, T'.left-> droite);
            T'.left = T'.left-> gauche; T'.right = T'.right-> gauche;

```

```

    T' = CONST_PARTIEL(P, T-> gauche);
  Sinon
    /*voir texte cas 2,iii de l'hypothèse (b) */
    Copy(T-> gauche, T.left-> gauche);
    T'.left=T'.left-> droite; T'.right=T'.right-> droite;
    T' = CONST_PARTIEL(P, T-> droite);
  FinSinon
  FinSinon
  FinSinon
  Si FT est dans la partie droite de P
    /* c'est la même que dans le cas où FT est dans la partie gauche de P voir 3(b) */
  FinSi
  FinSinon
  FinSinon
  FinSi
  Findébut

```

La fonction supprimant les séparateurs marqués par un astérisque \* lorsqu'ils ne séparent pas effectivement des facettes appartenant à la frontière de l'objet recherché peut être écrite de la manière suivante:

```

ARBRE_OBJ *SUPPRIMER_SEPARATEURS_INUTILES(T)
    return(T);
début
  Si T n'est pas une feuille
    SUPPRIMER_SEPARATEURS_INUTILES(T-> gauche);
    SUPPRIMER_SEPARATEURS_INUTILES(T-> droite);
    Si T n'est pas un séparateur marqué par astérisque *
      T est conservé
    Sinon
      Si T-> gauche et T-> droite sont conservés
        T est conservé
      Sinon
        T est supprimé
    FinSinon
  FinSinon
  FinSi
  Findébut

```

On peut remarquer que la construction de T<sub>left</sub> et T<sub>right</sub> se fait en ne comparant le plan P qu'avec un nombre restreint d'éléments de T. A titre d'exemple sur la figure 7.6, P n'est comparé qu'à 7 des 11 noeuds de l'arbre.

En 2D on opère à l'aide d'une fonction **CONST\_PARTIEL2D()** strictement analogue à celle qui vient d'être décrite pour le cas 3D.

En résumé la construction de partiels telle qu'elle vient d'être exposée permet de déduire de manière relativement simple de l'arbre représentatif d'un objet, les arbres représentatifs des parties de l'objet séparées par le plan P.

La validité de la frontière explicite figurant aux noeuds de l'arbre n'est une fois de plus pas assurée en soi, mais l'est dès lors que l'objet de départ O est représenté par un arbre comportant une frontière valide. En effet, les opérations effectuées:

- n'introduisent pas de séparateur supplémentaire en dehors des fractions du plan P qui sont respectivement intérieures à l'un ou l'autre des objets décrits  $O^+$  et  $O^-$

- conservent comme séparateurs:

- ou bien les fragments des séparateurs de O qui sont respectivement intérieurs à  $O^+$  et  $O^-$ .

- ou bien des séparateurs repérés par un astérisque qui ne font pas partie de la frontière de l'objet considéré  $O^+$  et  $O^-$ .

La construction de partiel n'introduit donc pas de "distorsion" du point de vue de la validité de la frontière explicitée aux noeuds de l'objets.

Du point de vue de la complexité, l'opération est en  $O(n)$ , n étant le nombre total de facettes de l'arbre décrivant l'objet de départ. En effet le plan diviseur est susceptible de recouper chacune de ces facettes. En pratique comme nous l'avons signalé cette complexité est susceptible d'être inférieure, puisque dès lors qu'un séparateur v n'est pas divisé par P, il existe un demi espace relatif à v, pour lequel le sous arbre est susceptible d'être copié mot à mot (cas (2,ii et iii), (3,ii,iii), et (4,i,ii) de l'algorithme)

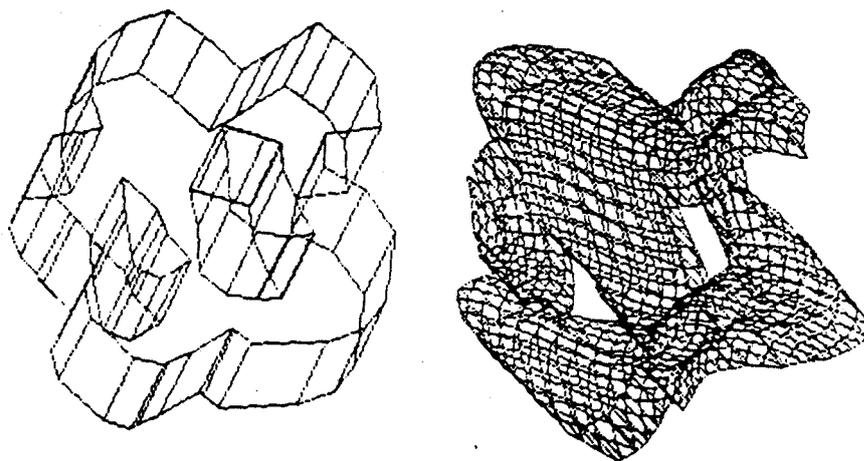
## **7.5- Déformation d'un objet par une ou plusieurs TTS:**

Comme cela a été dit auparavant, dans le cas d'une TTS  $\Phi$ , il est possible d'approximer la fonction profil par une chaîne constituée de  $n$  séparateurs comme cela est fait systématiquement dans le logiciel POLYPLI. Une facette  $f$  est alors transformée par  $\Phi$  en une chaîne de sous-facettes planes.

Tout comme l'objet de départ  $O$ , l'objet déformé  $O'$  résultant de l'application de  $\Phi$  sur  $O$ , peut être défini par un arbre mixte utilisant les facettes appartenant à la frontière de l'objet comme séparateurs. Cette frontière résulte elle-même de la déformation par  $\Phi$  de toutes les facettes planes représentant la frontière de l'objet  $O$  (cf. figure 7.8). L'arbre BSP mixte représentatif de  $O'$  peut donc être construit:

- soit en traitant par la procédure `CONST_ARBRE_BSP()`, l'ensemble des facettes correspondant à la frontière de  $O'$ .
- soit en le déduisant de l'arbre représentatif de  $O$ .

Pour un objet un tant soit peu compliqué la seconde des deux méthodes apparaît plus intéressante que la première. Elle évite en effet la construction complète d'un nouvel arbre avec toutes les opérations de comparaisons de facettes et de subdivision qu'implique l'appel à la fonction `CONST_ARBRE_BSP()`.

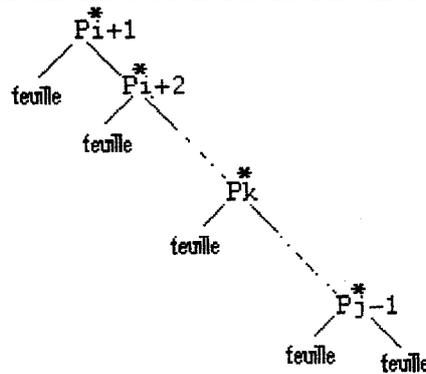


---

**Figure 7.8:** représentation d'un objet initial et sa déformation par un TTS (Résultat réalisé par le logiciel "GRANITE").

La méthode de déduction directe s'appuie sur le fait que, comme nous l'avons vu au §.6.3, lorsqu'une TTS a une fonction profil constituée d'une chaîne de segments rectilignes, elle conserve la topologie de l'objet par morceaux. Ainsi dans un repère lié à la transformation  $F$ , les plans passant par les extrémités des différents segments appartenant à la chaîne qui approxime la fonction profil, sont de la forme  $x=X_j$ . Dans l'intervalle compris entre deux plans parallèles successifs  $x=X_{j-1}$  et  $x=X_j$  respectivement, l'objet déformé peut alors être représenté par un arbre ayant même structure que l'arbre initial.

Soit  $T$  l'arbre représentatif d'un objet  $O$ , L'arbre BSP mixte  $T_D$  qui représente l'objet déformé  $O'$  peut être initialisé sous la forme suivante:



où  $i$  et  $j$  correspondent à l'intervalle minimal  $[X_i, X_j]$  tel que pour tout sommet  $S$  de l'objet  $O$ , on ait:  $X_i \leq X_S \leq X_j$ . Chaque  $P_k$  est un plan d'équation:  $x=X_k$

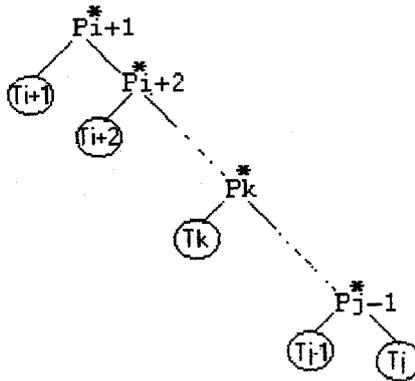
L'arbre  $T_D$  final est obtenu en examinant la position de  $T$  par rapport au différents éléments de  $T_D$  à partir de la racine de ce dernier. Deux cas peuvent se présenter:

- a-  $T$  ou un partiel  $T_i$  de  $T$  est positionné dans une feuille de  $T_D$ .
- b-  $T$  ou un partiel  $T_i$  de  $T$  est positionné dans un noeud  $v$  de  $T_D$ .

Dans l'hypothèse (a) la feuille rencontrée est remplacée par  $T$  ou  $T_i$ .

Dans l'hypothèse (b)  $T$  est divisé par le plan de  $v$  en partiel gauche ( $T_{left}$ ) et partiel droit ( $T_{right}$ ). On répète alors une fois l'algorithme en comparant  $T_{left}$  avec le fils gauche de  $v$ , et une deuxième fois en comparant  $T_{right}$  avec le fils droit de  $v$ .

$T_D$  se présentera donc sous la forme:

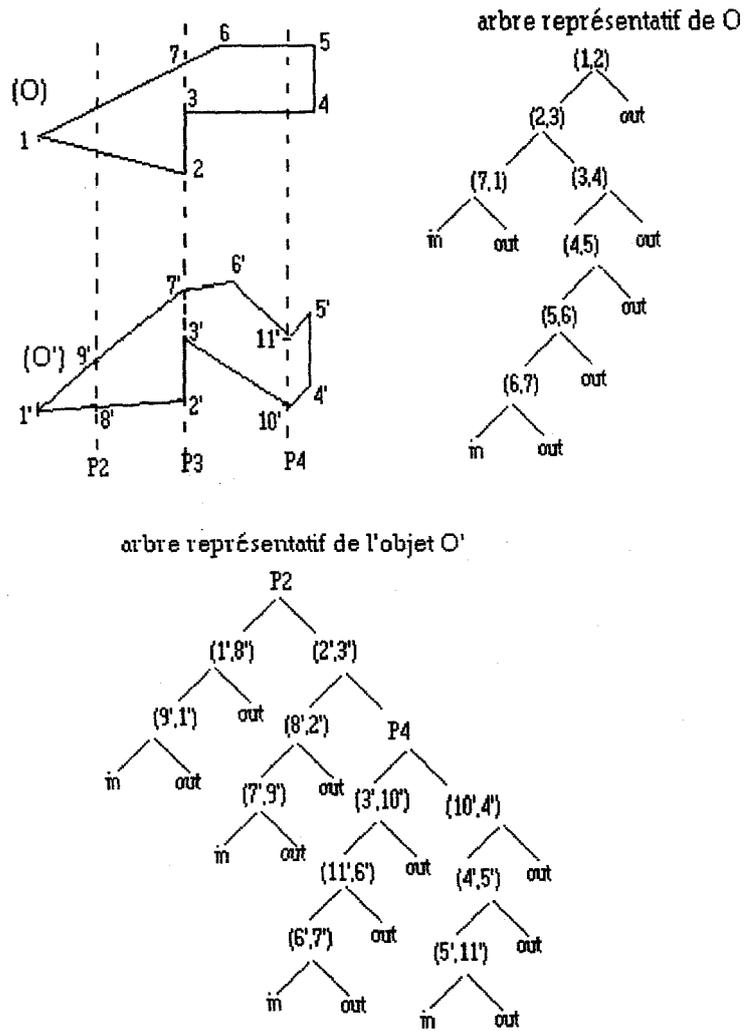


les  $T_k$ ,  $i < k \leq j$  étant des partiels déduits de  $T$ .

Il est facile d'assurer la validité de l'objet déformé  $O'$  dès lors que la frontière de l'objet  $O$  est valide.

Comme nous l'avons vu à propos de la construction de partiels (§.7.4), la division d'une facette par un plan ne génère pas en elle-même de cas d'invalidité. Le seul problème à examiner est donc celui d'une facette localisée dans un plan  $P_k$  ( $i \leq k < j$ ). Dans ce cas, la facette considérée doit être copiée comme une facette ordinaire dans le noeud de  $T_D$  correspondant à  $P_k$ ; ce noeud correspond alors à une facette de l'objet déformé et ne doit plus comporter d'astérisque (cf. figure.7.9).

Du point de vue de la complexité, l'opération est théoriquement en  $O(n \cdot m)$ ,  $n$  étant le nombre des facettes de l'objet  $O$  et  $m$  le nombre des plans  $P_k$ . En pratique cette complexité est susceptible d'être inférieure, puisque l'opération de déduction de  $T_D$  à partir de  $T$  n'implique de faire appel  $m$  fois à la procédure `CONST_PARTIEL()`, que dans le pire de cas, et puisqu'il est possible de copier mot à mot des sous arbres entiers dans les cas favorables. Dans l'exemple de la figure 7.9 où  $m=3$  et  $n=7$ , il est possible de construire  $T_D$  à l'aide de 11 comparaisons. A l'inverse, une borne inférieure pour cette complexité est bien entendu  $O(m)$ .



**Figure 7.9:** Dédudion de l'arbre BSP mixte de  $O'$  résultant de la déformation de  $O$  par une TIS.

Sur le plan formel la fonction de construction de l'arbre  $T_D$  peut être écrite de la manière suivante:

```

ARBRE_OBJ *CONST_ARBRE_DEFORME(T:ARBRE_OBJ, TD:ARBRE_OBJ)
    return(TD);
typedef struct ARB{ ARBRE_OBJ left,right;}ARB;
ARB T';
début
    Si TD est une feuille
        Copier(T, TD);
    Sinon
        T' = CONST_PARTIEL(PTD, T);
        T'.left = SUPPRIMER_SEPARATEURS_INUTILES(T'.left);
        T'.right = SUPPRIMER_SEPARATEURS_INUTILES(T'.right);
        TD -> gauche = CONST_ARBRE_DEFORME(T'.left, T -> gauche);
        TD -> droite = CONST_ARBRE_DEFORME(T'.right, T -> droite);
    FinSinon
Findébut

```

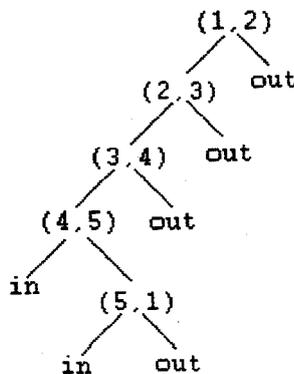
Par ailleurs la construction de l'arbre  $T_f$  d'un objet  $O_f$  résultant de la déformation par  $t$  TTS  $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_t)$  d'un objet initial  $O$  représenté par un arbre BSP mixte  $T$ , s'effectue en appliquant récursivement l'algorithme précédent pour chacun des opérateurs  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_t$ . La procédure peut être écrite de la manière suivante:

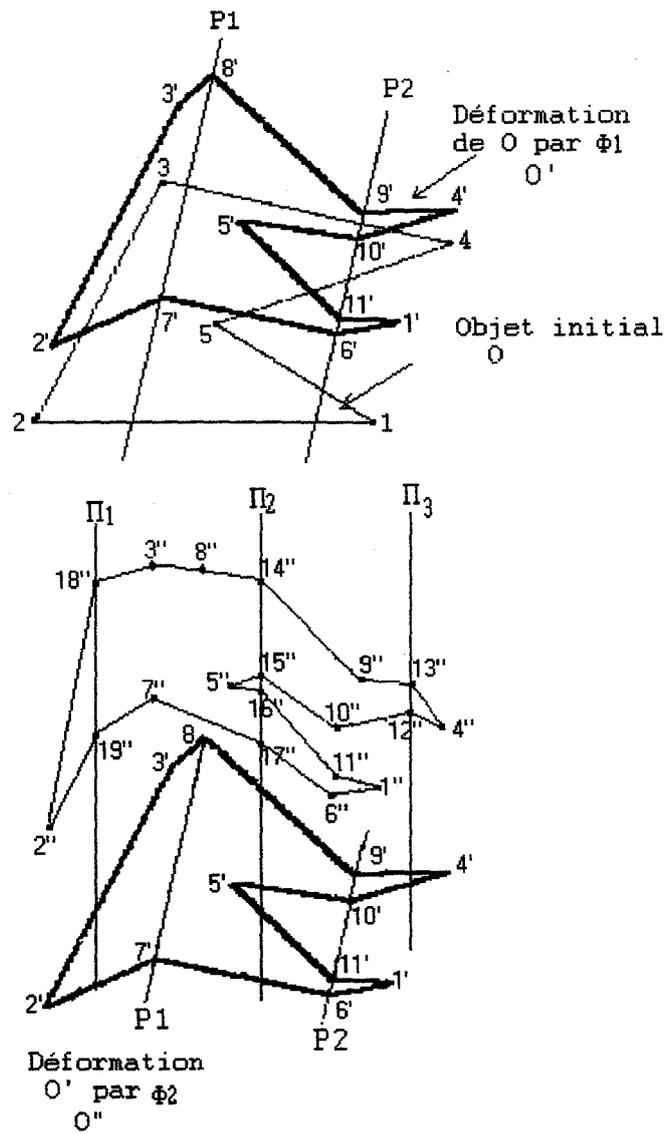
```

Pour i=1 jusqu'à n faire
    TD = CONST_ARBRE_DEFORME(T, TD);
    T = TD; /* on prend TD à la place de T */
FinPour

```

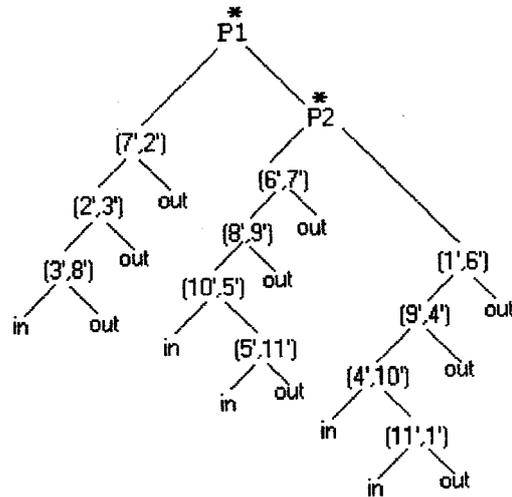
A titre d'exemple, sur la figure 7.10 l'arbre BSP mixte  $T$  de l'objet  $O$  est:



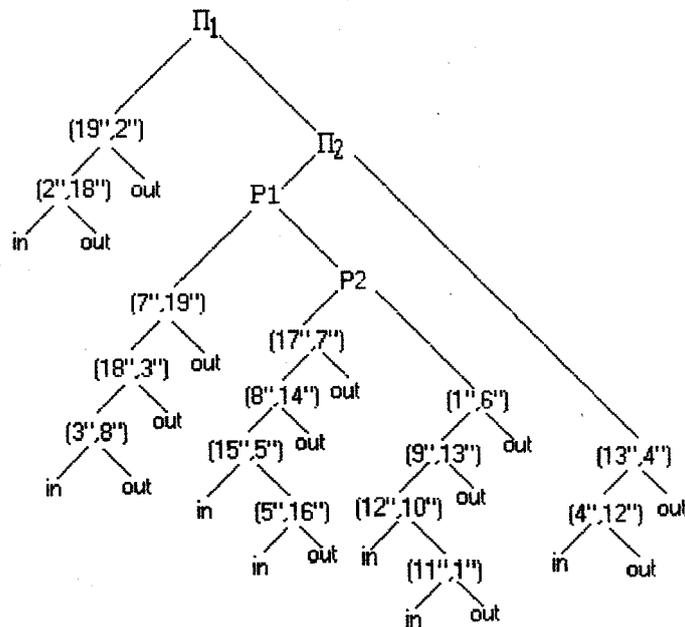


**Figure 7.10:** Déformation d'un objet  $O$  par deux TTS.

L'arbre  $T_D$  de l'objet déformé  $O'$  de  $O$  par une TTS  $\Phi_1$  s'écrit alors:



L'arbre de l'objet  $O''$  résultant de la déformation de  $O'$  par  $\Phi_2$  est alors:



Il faut remarquer que la procédure employée n'implique aucune redivision des séparateurs repérés par des astérisques lors de l'application des TTS successives. **Les plans axiaux passant par les sommets des différents fonctions profils ne sont donc pas redivisés, ce qui permet de conserver une complexité théorique en  $O(n \cdot m_1 + \dots + m_t)$ , mi étant le nombre de plans axiaux pertinents par rapport à l'objet traité.** On mesure là tout l'intérêt de la structure hybride proposée.

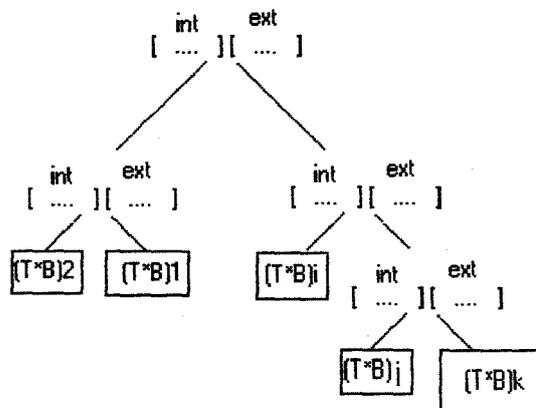
## 7.6-Application d'opérateurs ensemblistes:

Nous avons vu auparavant (§.6.2) que l'application d'opérateurs ensemblistes entre des arbres BSP classiques se traduit par la recherche des sous-arbres issus des arbres représentatifs des objets initiaux et par la recombinaison éventuelle de ces sous-arbres. Cette approche vaut bien entendu également pour les arbres mixtes tels que nous les avons définis.

Ainsi, si l'on considère deux objets A et B, structurés à l'aide de deux arbres BSP mixtes TA et TB, il suffit pour être capable de réaliser n'importe quelle opération booléenne sur A et B, de savoir positionner dans chacune des feuilles de TA, les éléments de B en partant de la racine de TA ou de savoir faire l'opération réciproque sur TB et A.

Dans le cas d'arbres BSP classiques, un certain nombre d'algorithmes utilisant cette approche ont été proposés dans les années récentes ([NAT90] et [TN87]). Nous proposerons ici pour les arbres mixtes, une variante de ces méthodes. Celle-ci implique la construction d'un **arbre intermédiaire**, à partir duquel il sera possible de réaliser n'importe laquelle des opérations booléennes mettant en jeu A et B en éliminant aisément dans chaque cas les portions de séparateurs non pertinentes.

La construction de l'arbre intermédiaire  $I(B \rightarrow A)$  s'effectue par recopiage partiel de l'arbre TB, dans les feuilles de TA, en marquant les éléments figurant aux noeuds de TA par "int" ou "ext" selon qu'ils sont intérieurs ou extérieurs à TB. D'une manière générale  $I(B \rightarrow A)$  se présente donc de la manière suivante:



les noeuds de l'arbre  $I(B \rightarrow A)$  correspondent à des éléments copiés de TA et les feuilles  $(T^*B)_i$  sont des partiels de TB.

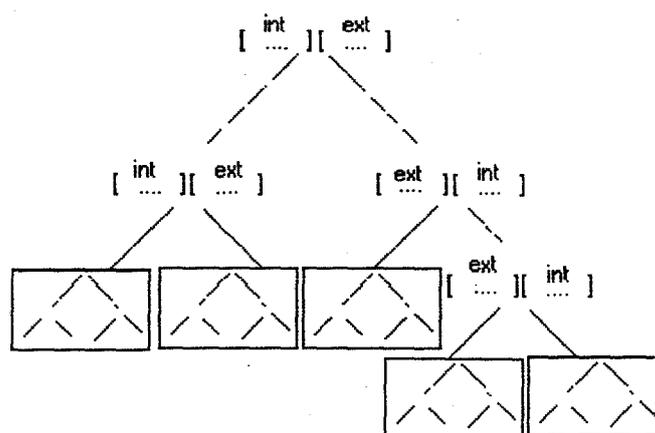
L'algorithme de copie partielle de TB dans les feuilles de TA, consiste à comparer TB avec des éléments de TA en partant de la racine de ce dernier. Deux cas peuvent se présenter:

- (a) TB ou un partiel de  $(TB)_i$  est positionné dans une feuille TA.
- (b) TB ou un partiel de  $(TB)_i$  est positionné dans un noeud v de TA.

Dans l'hypothèse (a) la feuille rencontrée est remplacée par TB ou  $(TB)_i$ , cet élément étant marqué comme "in" ou "out" selon que la feuille considérée est elle même "in" ou "out".

Dans l'hypothèse (b) on coupe TB par le plan qui se trouve dans v en partiel gauche  $(TB\_left)$  et partiel droit  $(TB\_right)$ , à l'aide de la procédure  $CONST\_PARTIEL()$ . Cette procédure divise la facette f en sous facettes qui sont chacune marquées "int" ou "ext" selon qu'elles sont localisées dans une feuille "in" ou "out" de TB. L'algorithme est répété une première fois en comparant  $TB\_left$  avec le fils gauche de v, puis une deuxième fois en comparant  $TB\_right$  avec le fils droit de v.

L'arbre intermédiaire définitif  $I(B \rightarrow A)$  est alors de la forme suivante:



Les boîtes représentées dans les feuilles de  $I(B \rightarrow A)$  correspondent à des partiels de TB.

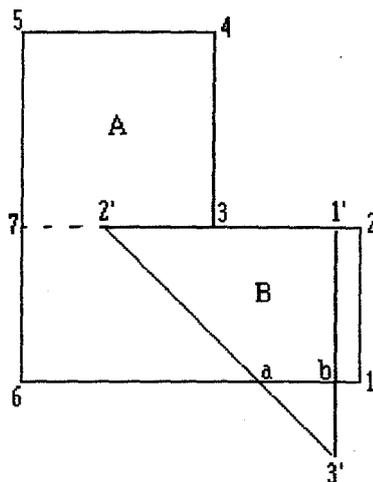
Afin de préserver la validité des objets qui pourront être déduits de l'arbre intermédiaire, on traite le cas de facettes coplanaires  $f_A$  et  $f_B$  appartenant respectivement à  $A$  et à  $B$  en prenant les précautions suivantes:

- 1) les portions de  $f_A$  intérieures ou extérieures à  $B$  sont marquées respectivement "int" ou "ext", les portions de  $f_A$  frontières de  $B$  sont marquées "bord".
- 2) les mêmes règles sont appliquées lors de la division de  $f_B$  par  $T_A$ .

Les sous-facettes marquées "bord" à la suite de ces deux opérations sont bien entendu les mêmes (cf. figure.7.11).

- 3) aux noeuds de  $T_A$ ,  $f_A$  et  $f_B$  sont remplacées par les sous facettes résultant de leur division en conservant pour chacune de ces sous facettes la marque "int", "ext" ou "bord" qui lui a été attribuée.

Les sous facettes bord obtenues à la fois par division de  $f_A$  par  $T_B$  et de  $f_B$  par  $T_A$  ne sont copiées qu'une fois.



**Figure 7.11:** Opération booléenne entre deux objets  $A$  et  $B$ .

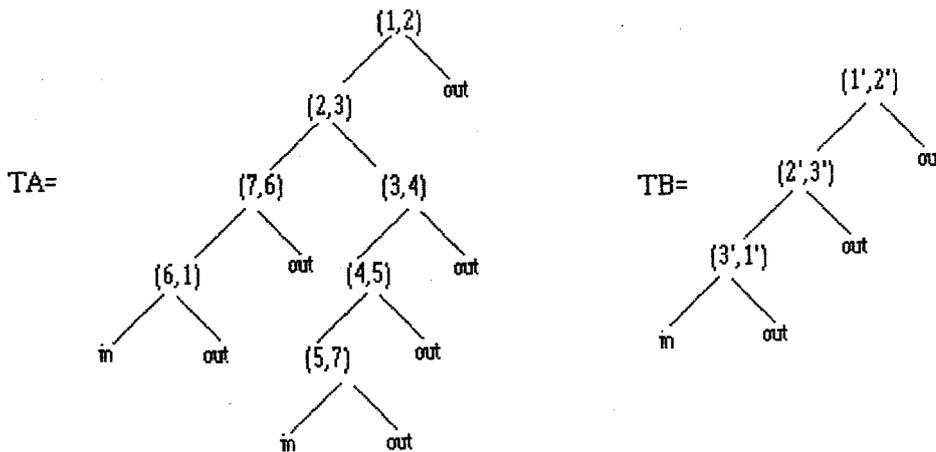
La fonction peut être écrite de la manière suivante:

```

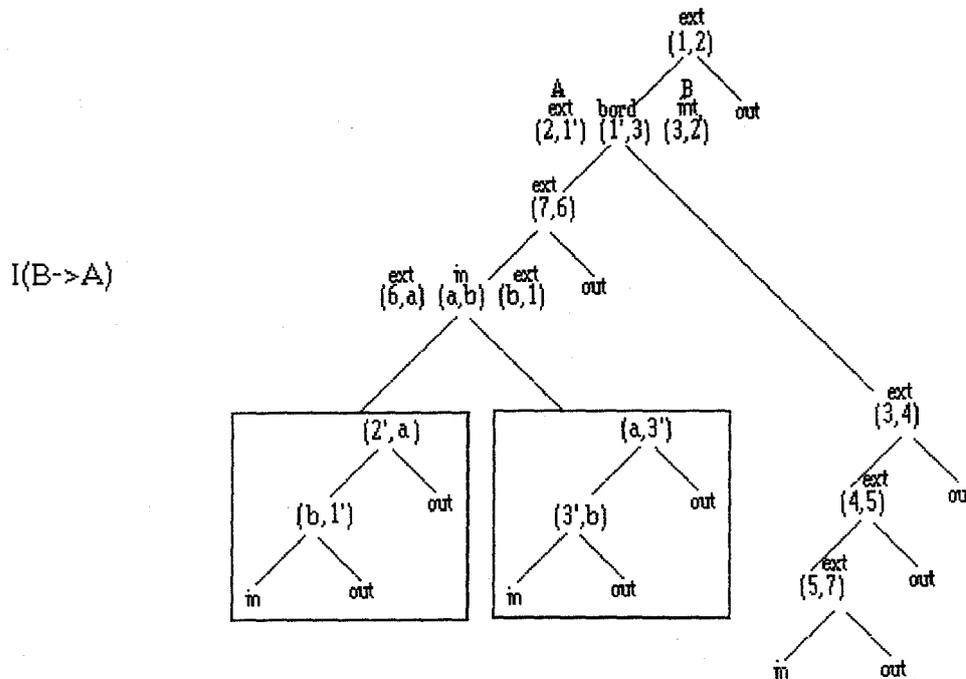
CONST_ARBRE_INTERMEDIAIRE(T,I)
    return (I);
typedef struct ARB{ARBRE_OBJ left,right;}ARB;
typedef struct FACET{FACETTE left,right;}FACET;
FACET f;  ARB T';
début
    Si I est une feuille
        /* voir texte hypothèse (a) */
        Copier(T,I);
    Sinon
        T' = CONST_PARTIEL(PI,T);
        T'.left = SUPPRIMER_SEPARATEURS_INUTILES(T'.left);
        T'.right = SUPPRIMER_SEPARATEURS_INUTILES(T'.right);
        /* on subdivise les éléments de noeud I en "int" est "ext" voir texte hypothèse (b) */
        Si T'.left non NULL
            CONST_ARBRE_INTERMEDIAIRE(T'.left,I->gauche);
        FinSi
        Si T'.right non NULL
            CONST_ARBRE_INTERMEDIAIRE(T'.right,I->droite);
        FinSi
    FinSinon
Findébut

```

A titre d'exemple pour la figure 7.11



ainsi :



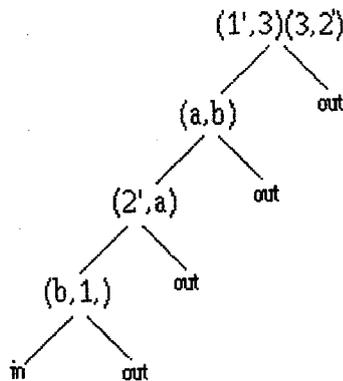
Construction de  $A \cap B$ :

L'arbre BSP mixte représentant  $A \cap B$  sera déduit directement en faisant un parcours unique de I(B->A) et en conservant :

- 1- les feuilles "in" de I(B->A).
- 2- tous les noeuds de I(B->A); sur chaque noeud, on conserve les éléments marqués par "int" ou "bord" et les noeuds ne comportant pas de tels éléments sont marqués par un astérisque \* dans l'arbre de  $A \cap B$ .

Les séparateurs inutiles qui peuvent éventuellement être présents dans l'arbre résultant peuvent être supprimés à l'aide de la procédure SUPPRIMER\_SEPARATEURS\_INUTILES().

Sur l'exemple de la figure 7.11 l'arbre représentatif de  $A \cap B$  sera:



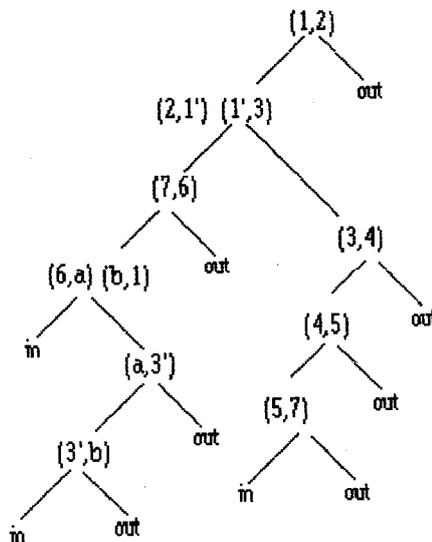
Construction de  $A \cup B$ :

L'arbre BSP mixte représentant  $A \cup B$  peut être construit par des procédures tout à fait analogues. On conservera cette fois:

- 1- les feuilles "out" de  $I(B \rightarrow A)$ .
- 2- l'ensemble des noeuds de  $I(B \rightarrow A)$  avec conservation des éléments marqués "ext" ou "bord", les noeuds ne comportant pas de tels éléments étant marqués par un astérisique.

Les séparateurs inutiles sont éliminés comme précédemment. .

Sur l'exemple de la figure 7.11 l'arbre BSP mixte de  $A \cup B$  sera:



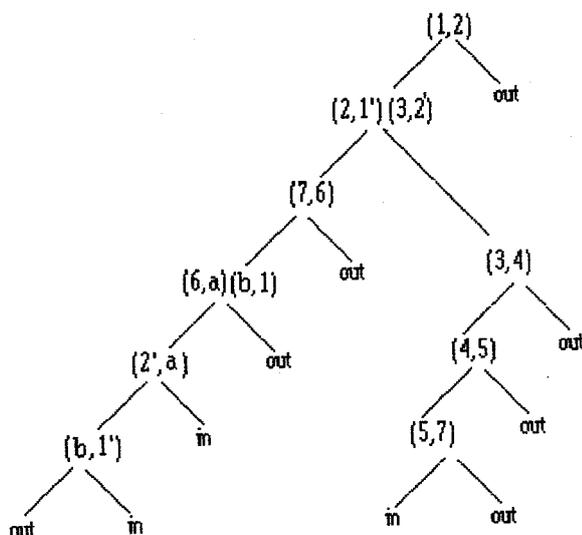
### Construction de A-B:

L'arbre BSP mixte représentant A-B est déduit directement en faisant un parcours unique de I(B->A), mais il faut dans ce cas non seulement éliminer des feuilles mais également intervertir des valeurs :

- les feuilles "in" de I(B->A) sont conservées et les valeurs "in" ou "out" dans les partiels sont interverties.
- tous les noeuds de I(B->A) sont recopiés en ne conservant que les éléments marqués "ext", les noeuds qui ne comportent pas de tels éléments étant marqués par un astérisque.

Les séparateurs inutiles sont encore une fois éliminés par un parcours supplémentaire.

Sur l'exemple de la figure 7.11, l'arbre BSP mixte de A-B sera:

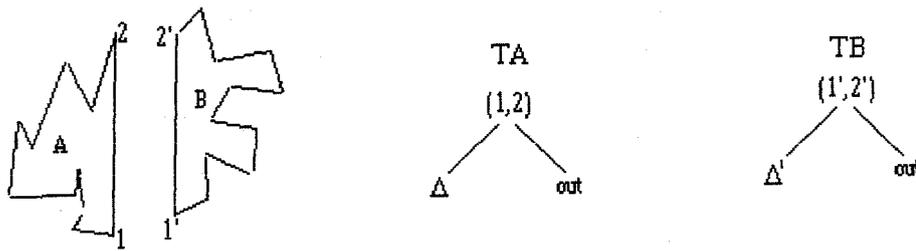


### Validité des objets:

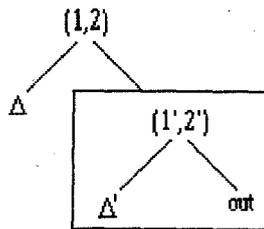
On vérifie aisément que la mise en oeuvre d'opérateurs booléens par les procédures qui viennent d'être décrites n'introduisent pas de distorsion du point de vue de la validité, des objets valides générant un résultat valide. En effet, les sous-facettes résultant de divisions restent tout au long de chacune des procédures correctement repérées par rapport à chacun des deux objets. Ceci est vrai même dans le cas de facettes coplanaires appartenant respectivement à A et à B, compte tenu des précautions qui sont prises dans ce cas particulier, ainsi que nous l'avons exposé.

Complexité des opérations booléennes:

La complexité des différentes procédures qui permettent la mise en oeuvre d'opérateurs booléens est directement dépendante de la complexité liée à la construction de l'arbre intermédiaire, puisqu'ensuite un parcours simple de l'arbre n'impliquant ni division ni comparaison de facettes permet d'aboutir au résultat. La complexité de la construction de  $I(B \rightarrow A)$  est théoriquement dans le pire des cas en  $O(m*n)$ ,  $m$  étant le nombre de noeuds de TA et  $n$  le nombre de noeuds de TB. La complexité pratique est encore une fois très dépendante du cas d'espèce. Elle peut dans le meilleur des cas être réduite à  $O(1)$  (cf. figure. 7.12) ce qui pour l'ensemble de la procédure donne alors une complexité en  $O(n+m)$ .



Une seule comparaison entre  $(1,2)$  et  $(1',2')$  permet de trouver  $I(B \rightarrow A)$  comme étant:



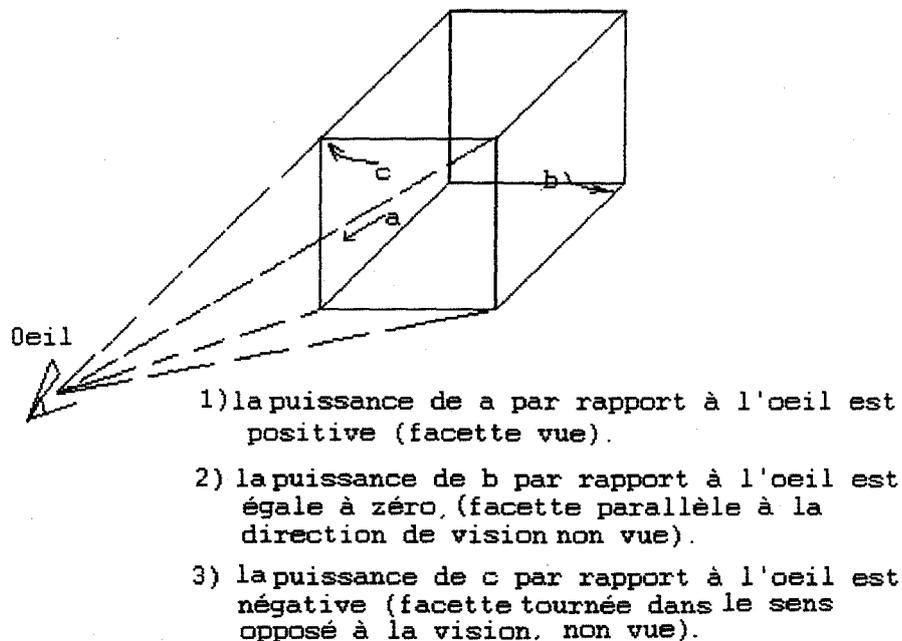
**Figure 7.12:** Opération booléenne dans le meilleur des cas.

## 7.7-La visualisation:

La visualisation d'un objet représenté par un arbre BSP mixte est une opération facile à réaliser car on peut regrouper les facettes localisées aux noeuds selon un ordre de priorité par rapport à l'observateur, comme cela est fait dans le cas des arbres classiques ([CF89] et [GC91] [FAG83], [FKN80]). Ceci permet de ne prendre en compte au départ qu'un nombre restreint des facettes.

Si l'oeil est représenté par un point E placé à l'extérieur de l'objet, on peut éliminer toutes les facettes dont le plan a une puissance par rapport à E négative ou égale à zéro. (cf. figure 7.13).

Si l'oeil est positionné à l'intérieur de l'objet, on élimine à l'inverse toutes les facettes qui ont une puissance positive ou égale à zéro par rapport à E.



---

**Figure.7.13:** Facettes vues et facettes non vues.

Un parcours unique de l'arbre permet:

1- d'éliminer les facettes non vues, en fonction de leur position intrinsèque par rapport à l'oeil.

2- de constituer une liste des facettes restant potentiellement vues, en les ordonnant, au fur et à mesure, selon une priorité de vision: l'ensemble des facettes situées du même côté que l'oeil seront prioritaires par rapport à celles situées de l'autre côté. Ainsi sur la figure 7.14 la facette 5, située du même côté de 4 que l'oeil, sera prioritaire par rapport aux facettes 7, 9a et 9b.

On peut alors afficher les différentes facettes, avec un ordre de priorité croissant en utilisant par exemple l'algorithme du peintre [PER91]: une facette prioritaire efface lors de son affichage la couleur des pixels qui appartenaient à la portion de facette non prioritaire qu'elle recouvre. (Figure 7.15).

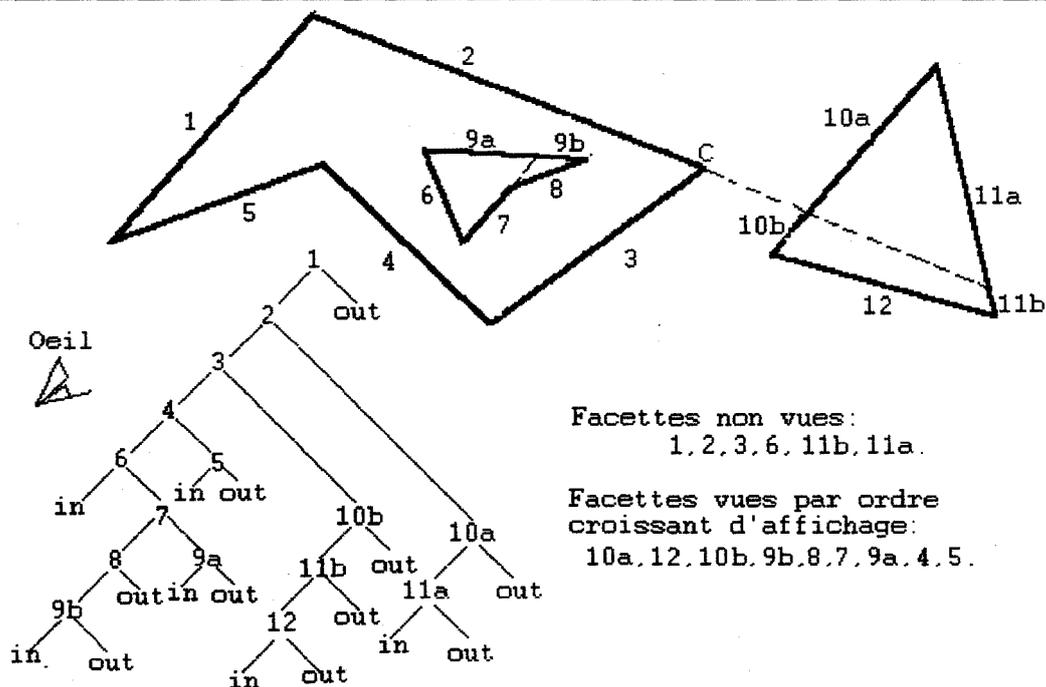
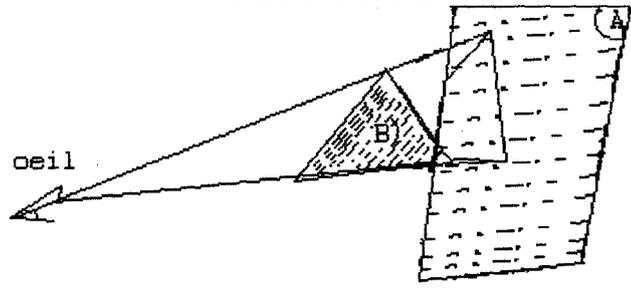
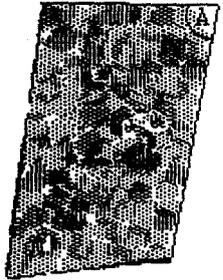


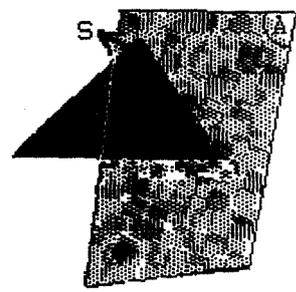
Figure.7.14: Visualisation de priorité donnée par un arbre BSP.



1) Position des facettes par rapport à l'oeil.



2) Affichage de la facette A.



3) Affichage de la facette B.

Figure 7.15: Remplissage d'un polygone.

La figure 7.14 détaille les facettes éliminées a priori ainsi que l'ordre prioritaire des facettes restantes dans le cas d'un objet 2D.

L'algorithme de visualisation dans le cas où l'oeil est à l'extérieur de l'objet peut être écrit de la manière suivante:

```

AfficheBSP(T:ARBRE_OBJ)
début
  Si T n'est pas une feuille
    D=puissance(Oeil,plan en T);
    Si D <= 0
      AfficheBSP(T->gauche);
      AfficheBSP(T->droite);
    Sinon
      AfficheBSP(T->droite);
      Peinture(facette du noeud T);
      /* remplissage du polygone situé au noeud T cf. figure.7.18*/
      AfficheBSP(T->gauche);
    FinSinon
  FinSi
Findébut

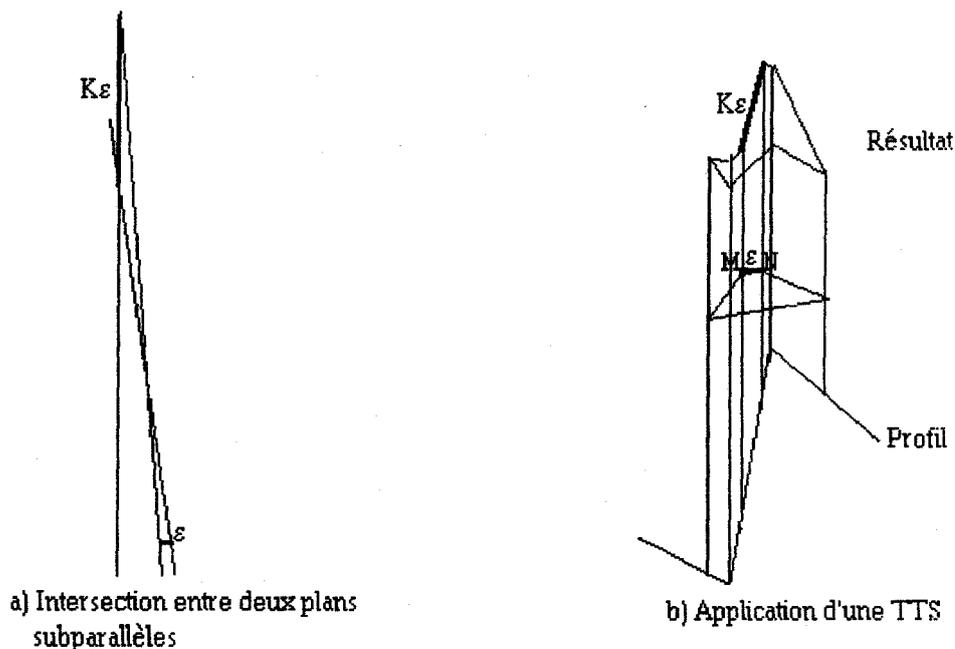
```

La complexité de cet algorithme est bien entendu en  $O(n)$ ,  $n$  étant le nombre de noeuds de  $T$ .

### **7.8- Problèmes liés aux approximations numériques:**

Les calculs effectués en virgule flottante fournissent des résultats à un epsilon près. Cette approximation est donc celle à laquelle sont déterminées les positions relatives et absolues des différents éléments composant l'objet. La forme de l'objet est ainsi "à un epsilon près", et sa validité ne vaut qu'à cette approximation.

Malgré la petitesse d'epsilon, il n'est pas exclu que cette approximation numérique puisse avoir des conséquences gênantes entraînant des risques soit de distorsion d'objets, soit d'incohérence topologique. Dans les deux cas, ces risques sont liés à la possibilité d'amplification importante des erreurs, ce qui peut se produire lors de la détermination de l'intersection entre des plans subparallèles ou lors de l'application de TTS, comme on peut constater dans le cas représenté sur la figure 7.16.



**Figure 7.16: Multiplication d'une incertitude numérique.**

Les risques possibles de distorsion d'objets sont de même nature quelle que soit la structure de données adoptée. Ils ne seront donc pas discutés en détail ici. Rappelons simplement que la différence sérieuse d'ordre de grandeur entre l'imprécision numérique (epsilon) et l'approximation liée à la visualisation ( $\varepsilon$ ) limite de toutes façons les effets possibles de ces incertitudes numériques du point de vue de la forme de l'objet.

Le risque de perte possible de la validité liée aux incertitudes numériques se pose de manière sérieuse, pour toutes les structures de données qui comme l'arbre BSP mixte ont un caractère redondant. Dans ce cas en effet, même si les opérateurs employés maintiennent théoriquement la validité, celle-ci n'est pas garantie compte tenu de l'imprécision des calculs [MIC87]. Ceci peut être compris simplement:

- dans notre représentation, une facette est connue à la fois par l'équation du plan P qui la contient, soit par quatre coefficients (a,b,c,d) et par les coordonnées  $(x_i, y_i, z_i, t_i)$  des sommets des différents points  $P_i$  qui constituent son contour externe. On peut considérer que pour un objet initial n'ayant encore été traité par aucun opérateur (TTS ou booléen), les différents sommets sont localisés sur le plan P à l'approximation numérique près. Si cet objet initial a été construit comme valide, cette validité est donc valable à  $\varepsilon$  près.

- lors de l'application d'un opérateur, les différents quadruplets (a,b,c,d),  $(x_i, y_i, z_i, t_i)$  sont traités indépendamment. Il résulte sur chacun d'eux une incertitude égale à  $k_i \varepsilon$ , les facteurs multiplicatifs  $k_i$  étant susceptibles de prendre des valeurs importants dans le cas des configurations défavorables (cf. figure 7.16). La validité est donc alors vérifiée seulement à  $K\varepsilon$  près avec  $K = \text{Sup}(k_i)$ .

Il va de soi que si l'on applique n opérateurs au terme de la procédure, l'approximation devient,  $\varepsilon * (\prod k_j)_{j=1,n}$ , ce qui peut devenir inacceptable.

De ce point de vue, la structure proposée présente toutefois un avantage puisqu'il est possible, à tout moment, de rétablir une validité complète à l'aide de l'algorithme présenté au §7.2.

## **7.9- Conclusion:**

Il apparait au terme de la réflexion menée au long du présent chapitre, qu'en aménageant une structure BSP 3D classique, par mention aux noeuds de l'arbre des facettes délimitant l'objet décrit, il est possible de définir un outil répondant à la plupart des spécificités requises par une description dynamique d'objets géologiques.

La structure hybride ainsi obtenue a été décrite sous le terme d'arbre BSP mixte. Elle est susceptible d'être mise en oeuvre de manière aisée lors de la déformation de tels objets à l'aide de TTS ou lors de leur composition booléenne grâce à l'utilisation d'une procédure clé qui permet à partir de l'arbre original l'obtention de partiels (arbres représentatifs de la partie de l'objet localisée dans l'un des deux demi-espaces séparés par un plan recoupant cet objet). Il en résulte des algorithmes d'implantation relativement aisés, puisqu'il n'est pas nécessaire de considérer des cas particuliers.

La complexité théorique des algorithmes utilisés apparait comparable à celle de ceux mis en oeuvre dans le cas des B.rep. En pratique, cette complexité est toutefois susceptible de diminuer de manière très sensible puisque, dès lors que des parties entières des arbres se trouvent localisées d'un seul côté d'un séparateur donné, il devient possible de procéder à des recopiations mot à mot. La complexité pratique des algorithmes employés sera discutée plus en détail dans la troisième partie du présent mémoire en regard des résultats obtenus.

Structurellement, les arbres BSP mixtes que nous avons définis restent, avant tout des structurations de l'espace. Il s'agit toutefois de structures redondantes, puisque la frontière des objets décrits fait l'objet d'une double représentation implicite et explicite. Ceci peut théoriquement poser certains problèmes puisque la frontière représentée explicitement ne correspond pas nécessairement à la frontière valide décrite implicitement. Rappelons toutefois:

- que les algorithmes présentés fournissent un résultat valide dès lors que le ou les objet(s) de départ sont eux mêmes valides.
- que dans la mesure où il est toujours possible de rétablir une frontière explicite valide, les risques d'invalidité liés à l'amplification d'imprécisions numériques sont eux-mêmes réduits.

Il en résulte que la structure de données proposée peut être utilisée en pratique sans inconvénients majeurs du point de vue de la validité des objets.





**TROISIEME PARTIE**  
**RESULTATS ET CONCLUSION**



## CHAPITRE -8-

### RESULTATS, DISCUSSION CONCLUSION.

---

Les résultats qui vont être présentés dans ce dernier chapitre représentent avant tout des tests, visant à éprouver la souplesse et l'efficacité de la méthode proposée. Nous sommes donc partis d'objets de départ relativement simples et nous n'avons pas cherché de raffinement particulier du réalisme géologique.

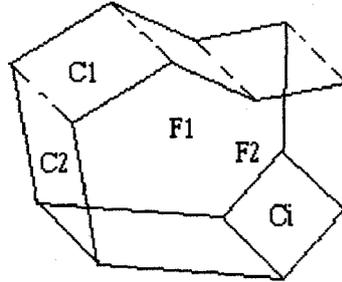
#### **8.1- Les objets de départ:**

Nous avons vu au chapitre précédent que la structure de données choisie pour la représentation et la manipulation des objets, garantit le maintien de la validité topologique de ceux-ci dès lors qu'ils sont définis au départ comme valides. L'ensemble des éléments appartenant aux objets qui vont être définis respectent donc les règles de Möbius [MOR85].

Les exemples présentés partent tous de l'un ou l'autre des deux modèles suivants:

#### ***-Modèle cylindrique:***

Il permet de définir des objets de forme cylindrique à partir d'une section plane perpendiculaire à la direction de la génératrice. Cette section dite "facette de base"  $F$ , peut être rentrée directement à l'écran, en digitalisant éventuellement un contour plan défini sur carte. Lors de la saisie de l'objet, la face  $F$  est supposée horizontale et placée à l'altitude zéro dans le repère du monde. Le cylindre à construire comporte deux facettes de base  $F_1$  et  $F_2$  semblables à  $F$ , situées dans des plans d'altitude  $z_1$  et  $z_2$ , et des facettes latérales  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ,  $n$  étant le nombre total d'arêtes de la section  $F$  (cf. figure 8.1).

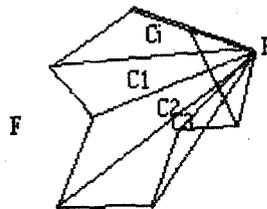



---

**Figure 8.1:** Exemple de modèle cylindrique.

**-Modèle conique:**

Un contour de base F est entré dans les mêmes conditions que pour le modèle cylindrique. On se donne en outre un point E (sommets du cône). L'objet comporte une facette de base F et des facettes latérales  $C_1, C_2, \dots, C_n$  de forme triangulaire (cf. figure .8.2).




---

**Figure 8.2:** Exemple de modèle conique.

**8.2- Spécification d'un opérateur TTS:**

Tout opérateur TTS  $\Phi$  susceptible de déformer un objet O est défini, par :

- un plan axial      P
- une droite de glissement    D
- une fonction profil  $Z=f(X)$

-Repere géologique:

Pour toute TTS  $\Phi$  le repère géologique associé OXYZ est tel que OYZ est confondu avec P et OZ avec D.

Le passage du repère du monde Oxyz au repère géologique OXYZ s'exprime par une matrice M .

Sur la figure 8.3 la position de P est repérée à l'aide des angles:

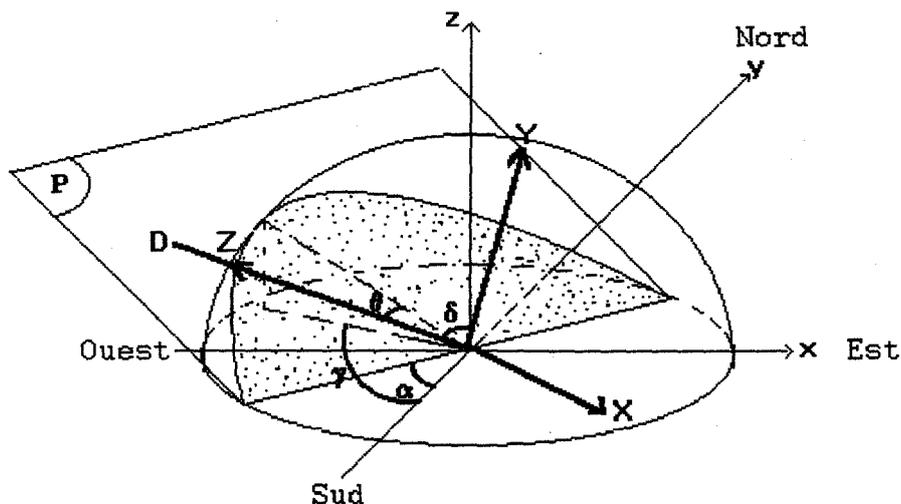
$\alpha$  = angle entre la trace de P sur le plan horizontal Oxy et l'axe NS, oy.  
(pris entre 0 et  $2\Pi$ )

$\theta$  = angle entre la ligne de plus grande pente de P et la verticale Oz ( pris  
entre 0 et  $\Pi/2$ )

La position de D est repérée à l'aide des angles:

$\gamma$  = angle entre la projection de D sur le plan horizontal Oxy et la ligne NS  
Ox ( pris entre 0 et  $\Pi$  )

$\delta$  = angle entre D et la vertical Oz ( pris entre 0 et  $\Pi/2$  )



**Figure.8.3:** Orientation du repere géologique (OXYZ) par rapport au repere du monde (oxyz).

- Fonction profil  $Z=f(X)$ :

La fonction profil  $Z=f(X)$  représente l'allure de la déformation. Cette fonction peut être digitalisée à partir de données réelles (carte, coupe, échantillon de roche...) ou être exprimée par une fonction quelconque digitalisée (sinusoïde digitalisée par exemple, dans le cas de la simulation d'un pli ). Elle se présente dans le logiciel comme une chaîne ouverte (cf.figure 8.4) telle qu'à chaque  $X$  correspond un  $Z$  et un seul.

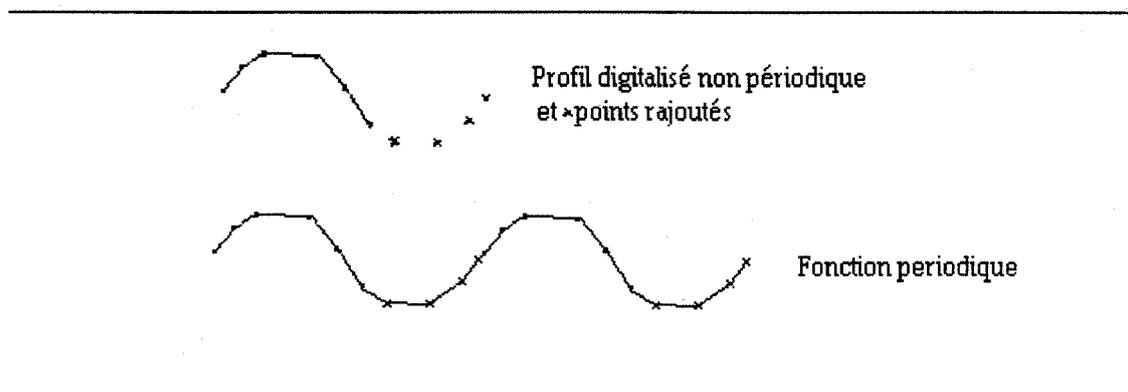
Pour assurer qu'à tout  $X$  correspond une valeur de  $Z$ , on convient de rendre cette fonction périodique en rajoutant éventuellement des points pour réduire l'importance de l'écart éventuel entre segments jouxtant le point de raccord (cf.figure 8.4.b). En conséquence  $f$  est définie dans  $\mathbb{R}$  par un ensemble de points dénombrables:

$$(Eq. 8.1) \quad E = \{(X_i, Z_i), \quad X_i < X_{i+1}, \quad i \geq 0 \}$$

tel que pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , il existe un  $i$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $X_i \leq X < X_{i+1}$

ainsi:

$$f(X) = Z_i + (Z_{i+1} - Z_i) * (X - X_i) / (X_{i+1} - X_i) .$$



**Figure 8.4: Définition d'une fonction profil.**

La fonction  $f(X)$  doit être conformée au mieux au modèle ce qui peut être obtenu en ajustant son amplitude ( $A$ ), sa longueur d'onde ( $L$ ) et son ordonnée à l'origine (décalage  $D$ ). Ces paramètres peuvent être introduits formellement dans l'ensemble  $E$  de la manière suivante:

$$(Eq. 8.2) \quad E(L,A,D) = \{ [L*(X_i-D), A*Z_i], X_i < X_{i+1}, i \geq 0 \}$$

En résumé, les éléments associés à une TTS déterminée, de plan axial  $P$ , de droite de glissement  $D$  et de profil  $f(X)$  seront:

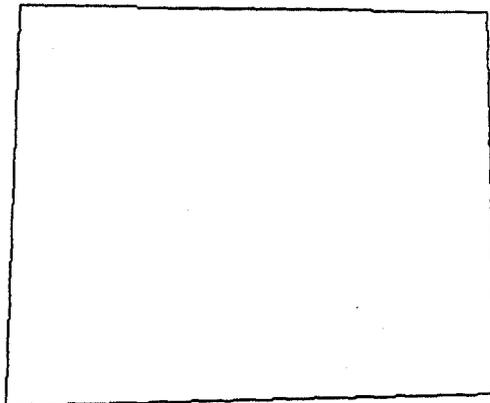
- une matrice de passage  $M$  entre le repère du monde et le repère de la TTS, tel qu'il a été défini.
- un ensemble  $E$  défini par l'équation Eq.8.1 et/ou Eq.8.2.

### **8.3-Exemples:**

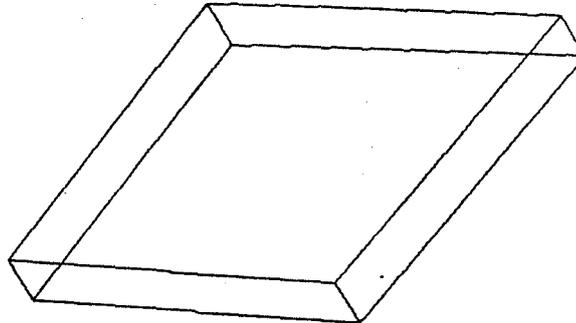
Nous présenterons ici , en premier lieu, un certain nombre d'exemples élémentaires, destinés à montrer les possibilités du modèle. Un exemple géologique plus élaboré sera présenté à la suite.

Exemple.1: Modélisation d'une couche géologique.

- 1) section de l'objet cylindrique, entrée à la souris:



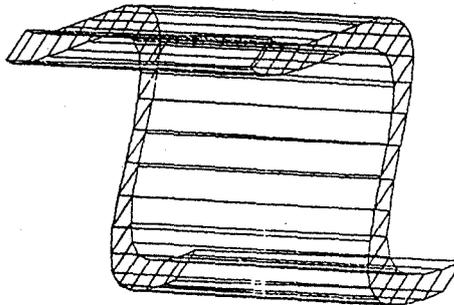
2) l'objet cylindrique "Couche1" résultant est:



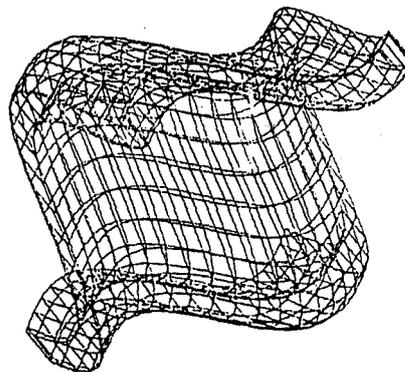
3) Définition de deux TTS:

- $\Phi 1$ : plan axial : 0 E 90  
droite de glissement : 90 S 90  
profil sinusoïdal ( amplitude=0.4, longueur d'onde=0.8)
- $\Phi 2$ : plan axial : 0 E 90  
droite de glissement : 90 S 90  
profil sinusoïdal ( amplitude=0.2, longueur d'onde=0.8)

"Model1" est le résultat de la déformation de "Couche1" par  $\Phi 1$ , on obtient:



Après basculement de "Model1" d'un angle de 90° autour de la verticale et en déformant le résultat par  $\Phi 2$ , on obtient "Model2":

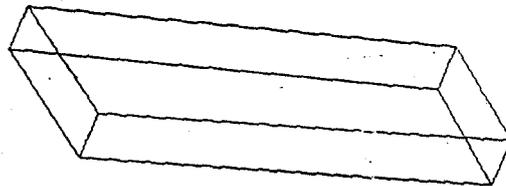


**Exemple.2:** Déformation d'une couche par des TTS à profils complexes simulant des plis et des failles.

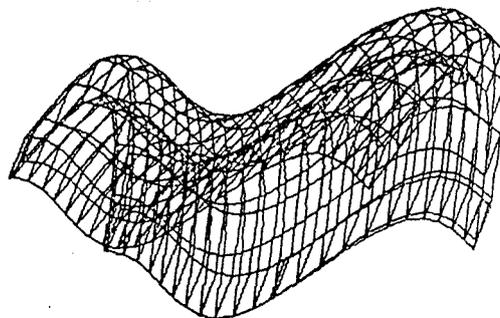
On définit les TTS:

- Φ1: plan axial : 0 E 90  
droite de glissement : 90 S 90  
profil sinusoïdal ( amplitude=0.2, longueur d'onde=0.5)
- Φ2: plan axial : 90 S 90  
droite de glissement : 0 E 90  
profil sinusoïdal ( amplitude=0.2, longueur d'onde=0.8)
- Φ3: plan axial : 0 E 75  
droite de glissement : 90 S 75  
profil P1 ( amplitude=1, longueur d'onde=0.5)

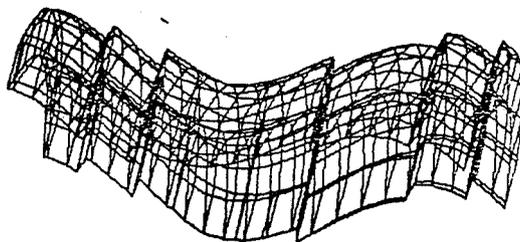
1) l'objet de départ "Couche2" est le suivant:



2) "Model3" est le résultat de la déformation de "Couche2" par Φ1 et Φ2 :

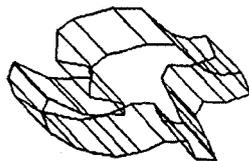


3) "Model4" est le résultat de la déformation de "Model3" par  $\Phi_3$ :

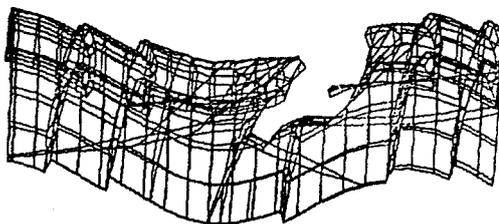


Exemple.3: Modélisation d'un corps intrusif.

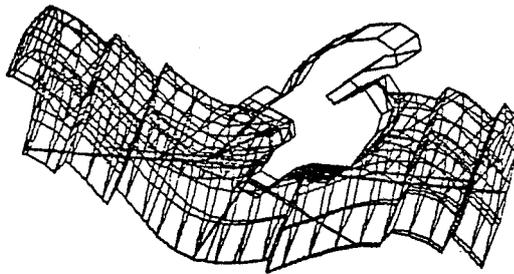
1) l'objet cylindrique "Couche3" de départ est:



2) "Model5" = ("Model4") - ("Couche3"):

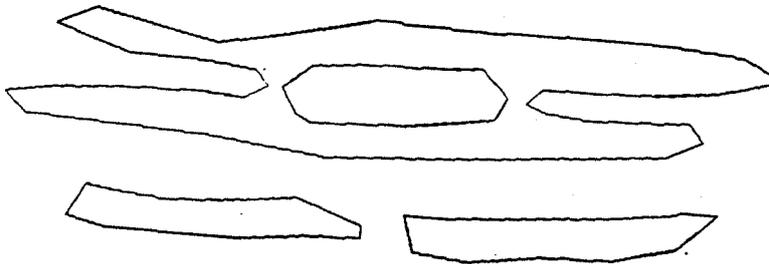


3) "Model6" = ("Model4") U ("Couche3"):



Exemple.4: Modélisation d'un objet comportant plusieurs plages.

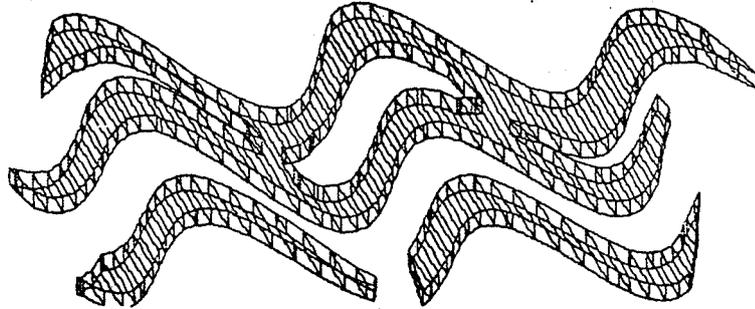
1) l'objet de départ "Lentille" est le suivant:



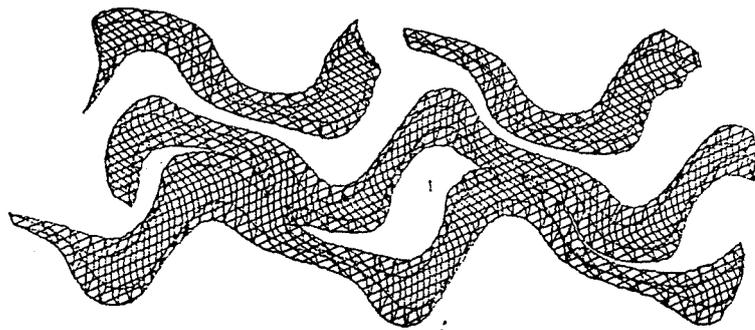
On définit les TTS:

$\Phi 1$ : plan axial : 0 E 90  
droite de glissement : 90 S 90  
profil sinusoïdal ( amplitude=0.4, longueur d'onde=0.5)  
 $\Phi 2$ : plan axial : 0 E 90  
droite de glissement : 90 S 90  
profil sinusoïdal ( amplitude=0.05, longueur d'onde=0.3)

2) "Model7" est obtenu par application de  $\Phi_1$  sur "Lentille":

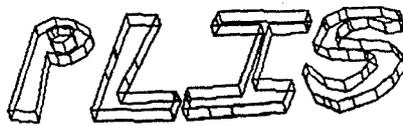


3) "Model8" est obtenu par application de  $\Phi_2$  sur "Model7":

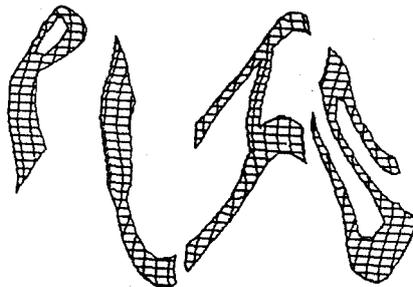


Exemple.4: Modélisation d'objet particulier:

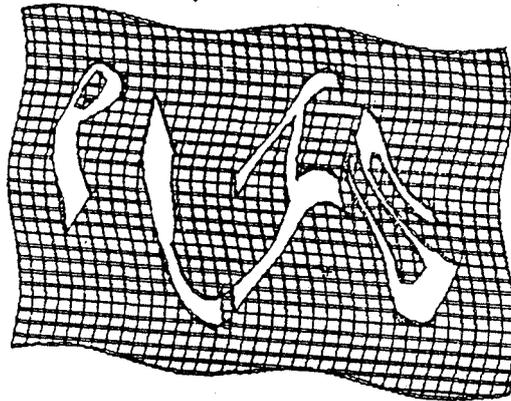
- objet avant déformation



-objet après déformation



"Model9" est le résultat d'une opération booléenne:



En termes de complexité les résultats concernant les différents objets représentés sont les suivants:

	A	B	C	D	E	F
Model1	1	110	93	116	$23*6=138$	0,116
Model2	2	1242	935	1418	$21*116=2436$	1,450
Model3	2	450	455	653	$22*39=858$	0,583
Model4	3	1071	719	1419	$7*653=4571$	2,45
Model7	1	519	516	576	$60*107=6420$	1,266

A: nombre de phases de TTS appliquées

B: nombre de comparaisons requises lors de l'application de la dernière TTS

C: nombre de facettes de l'objet résultant

D: nombre de noeuds de l'arbre résultant

E:  $n*m$  avec m: nombre de noeuds de l'arbre avant la dernière déformation.

n: nombre de séparateurs de la dernière TTS appliquée.

F: temps requis pour la construction de l'objet lors de l'application de la dernière TTS.

**Tableau 8.1: Résultats dans le cas d'objets déformés par des TTS.**

	A	B	C	D	E
Model5	2983	1001	$36*1419=51084$	2,18	0,3
Model6	2983	1544	$36*1419=51084$	2,18	0,716
Model9	58571	3771	$1441*3108=4478628$	19,5	11

A: nombre de comparaisons requises.

B: nombre de facettes de l'objet résultant.

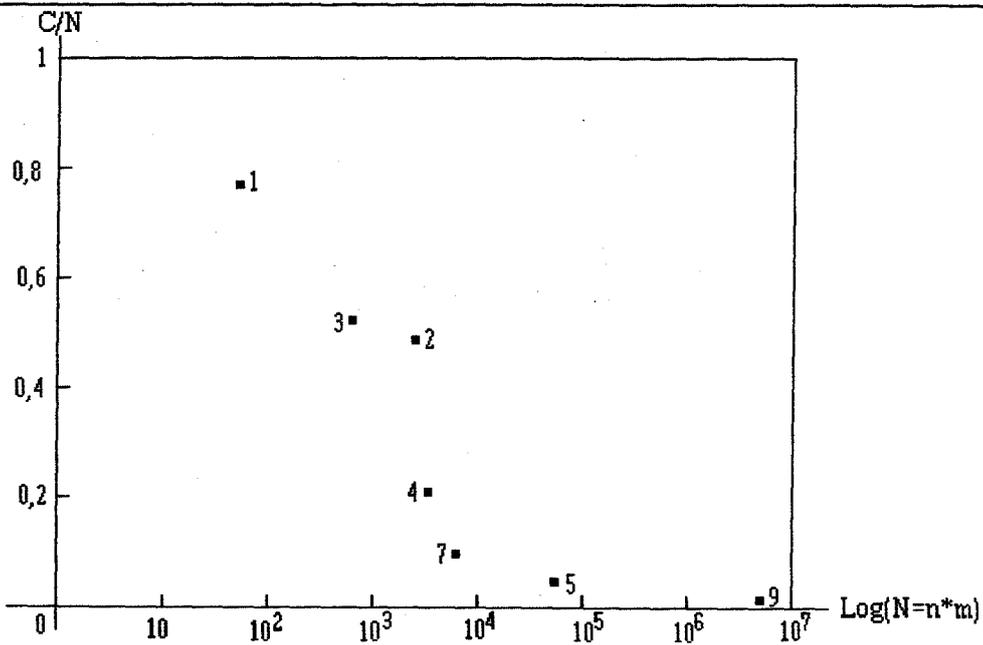
C:  $n*m$  n: nombre de noeuds de l'arbre représentatif de l'objet A.

m: nombre de noeuds de l'arbre représentatif de l'objet B.

D: temps de calcul pour la construction de l'arbre intermédiaire.

E: temps de calcul requis pour obtenir l'objet final à partir de l'arbre intermédiaire.

**Tableau 8.2: Résultats dans le cas de l'application d'opérateurs booléennes.**



**Figure 8.5 : Evolution de la complexité. (C est le nombre de comparaisons)**

Ces résultats montrent que, pour les exemples traités la complexité pratique appréciable par le nombre de comparaisons effectuées, s'éloigne très fortement des valeurs théoriques correspondant au pire de cas, aussi bien dans le cas de l'application de TTS que dans le cas de compositions booléennes. En effet, le pire de cas a une complexité théorique en  $O(n*m)$  qui correspondrait sur le diagramme de la figure 8.5 à des points situés sur la ligne  $C/N=1$ ; on constate que pour des valeurs  $N=n*m$  élevées, Les points représentatifs des résultats réels ont des ordonnées très inférieures :

$C/N=0,08$  dans le cas du modèle 7 (application d'une TTS à 60 séparateurs sur un objet comportant 107 facettes).

$C/N=0,058$  dans le cas des modèles 5 et 6 (opérations booléennes sur deux solides comportant respectivement 36 et 1419 facettes).

$C/N=0,0131$  dans le cas du modèle 9 (opération booléenne sur deux solides comportant respectivement 1441 et 3108 facettes).

On constate par ailleurs que les temps de calcul restent dans l'ensemble acceptables sauf dans le cas d'opérations booléennes entre objets comportant chacun un nombre très élevé de facettes (modèle 9).

#### **8.4- Limites du travail effectué:**

##### **- Définition des objets:**

Les objets qui sont traités à l'aide du logiciel GRANITE sont pour l'instant définis de manière assez rudimentaire: dessin d'un contour 2D à la souris sur l'écran, et définition d'un modèle cylindrique par spécification des plans inférieur et supérieur, ou d'un modèle conique par spécification d'un sommet. Le logiciel rend les arbres BSP mixtes descriptifs des cylindres ou des cônes définis.

La définition d'objets de forme quelconque a été traitée indépendamment de ce travail par J.M.OLIVA. Nous en avons décrit le principe au paragraphe 8.1. Lors de rédaction du présent mémoire, ce travail était dans sa phase conclusive: construction de la surface externe des objets et des arbres BSP mixtes correspondants. Dès que ce travail sera achevé, le logiciel GRANITE permettra le traitement sans difficulté, des objets de forme quelconque puisqu'il accepte en entrée n'importe quel objet dès lors qu'il est décrit sous format indiqué au §.7.2: arbre BSP dont les noeuds sont des facettes elles mêmes décrites par leur contour. Il est évident que l'entrée d'objets de forme quelconque, éventuellement définis à partir de contours cartographique,

réellement observés, accroîtra très sensiblement les possibilités du logiciel GRANITE, quant à la production d'objets géologiques réalistes.

- Aliassage. Elimination des facettes trop petites:

La complexité des objets qu'il est possible de réaliser à l'aide d'un nombre limité de TTS ou d'opérations booléennes implique qu'il n'est généralement pas nécessaire d'en faire jouer plus de 3 ou 4 . Ceci correspond on l'a vu à des temps de calcul qui restent raisonnables.

Un problème peut se poser cependant si les divisions de facettes liées à une intersection avec un autre objet ou les déformations de type TTS, conduisent à l'apparition de facettes de taille très petite. Celles ci risquent en effet de provoquer des phénomènes d'aliassage.

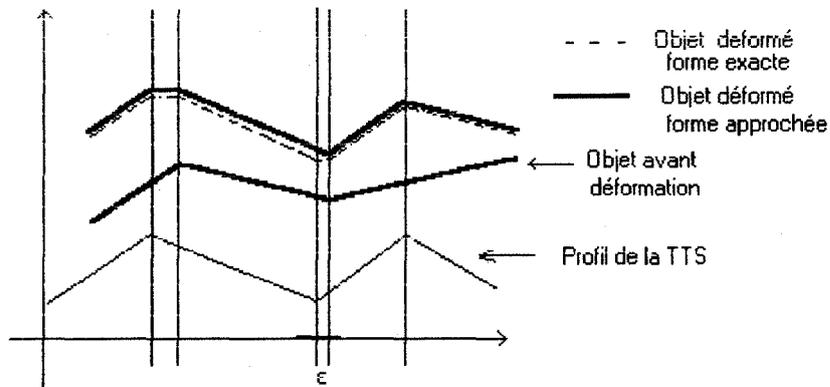
Afin de pallier cet inconvénient éventuel, nous sommes convenus de considérer comme confondus des points dont la distance est inférieure à un seuil  $\varepsilon$  qui peut être fixé par l'utilisateur ( $10^{-5}$  dans les exemples présentés). Concrètement cela signifie qu'une facette n'est pas divisée lorsque la division risque de conduire à des facettes de taille voisine de  $\varepsilon$  (cf. figure.8.6).

L'application de cette règle a permis d'éviter qu'apparaissent aucun phénomène d'aliassage sur l'ensemble des exemples traités.

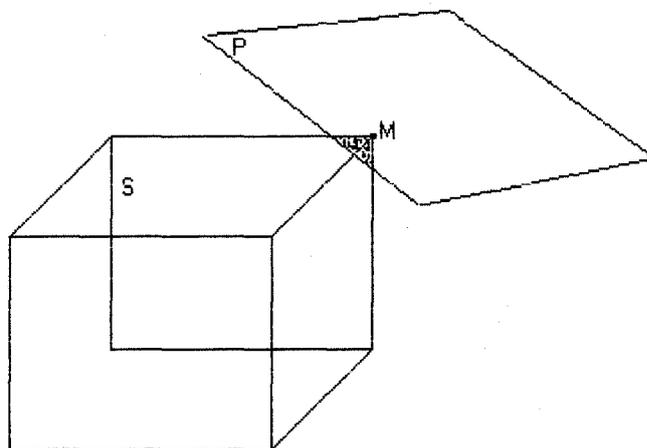
Cette approximation comporte par contre le risque de rupture sensible de la validité des objets. Rappelons cependant que celle ci peut toujours être rétablie aisément dans la représentation choisie par arbre BSP mixte.

- Visualisation:

Comme nous l'avons vu à la fin du chapitre 7, la visualisation a été réalisée de manière relativement simple sans faire intervenir d'ombrage, ni un quelconque lissage entre facettes voisines. Il en résulte un aspect morcelé de la surface extérieure des objets.



a) Application d'une TTS



b) Intersection d'objets:

Si le solide  $S$  est intersecté par le plan  $P$  de telle sorte que  $M$  soit à une distance  $d$  de  $P < \epsilon$ , on considère que  $P$  n'intersecte pas  $S$  et que  $M$  appartient à  $P$ .

**Figure.8.6:** Approximations lors du découpage d'une facette.

De nombreux algorithmes classiques existent pour réaliser lissage et ombrage [APP68]. Ceux que nous avons à notre disposition fonctionnent sur des facettes triangulaires. Nous n'y avons pas fait appel dans la mesure où ceci aurait exigé une triangulation préalable des facettes polygonales complexes qui sont produites par le logiciel GRANITE. Une telle triangulation ne pose pas de problème particulier mais il ne nous a pas été possible de la construire dans le temps qui nous était imparti. Elle pourra sans difficulté être ajoutée au logiciel par la suite.

### **8.5- Place du présent travail dans la perspective de la modélisation dynamique d'une scène géologique complète:**

Comme cela a été souligné à plusieurs reprises, le présent travail prend sa place dans une perspective visant à permettre la modélisation d'une scène géologique d'ensemble conformément au schéma présenté, en conclusion de la première partie du présent mémoire (Tableau.2.1).

Les résultats obtenus en terme de logiciel ne représentent qu'une partie du travail à effectuer. Parmi les problèmes qui restent à traiter, nous en citerons trois qui paraissent particulièrement importants.

**-Définition des objets initiaux:** dans la perspective d'une modélisation fidèle, les objets initiaux doivent être définis à partir de données réelles. Dans le cas d'objets de forme quelconque, définis par des contours situés dans des plans parallèles, un logiciel d'entrée de données susceptible de fonctionner en amont de notre logiciel GRANITE est pratiquement achevé [OLI92]. Ceci ne résoudra cependant pas tous les problèmes même dans ce cas particulier, puisque les données disponibles sont susceptible de se présenter sous des formats très divers: points matériels ou contacts isolés, sondages, etc...

**-Opérateurs disponibles:** ceux que nous avons utilisés sont en nombre très restreint même s'ils permettent d'ores et déjà d'effectuer des opérations très générales. (plissements de profil varié, failles, intrusions d'objets, discordances etc...). Certains opérateurs plus spécialisés existent déjà et devront être adaptés à nos modèles (exemple: déformations par plats et rampe), d'autres devront être créés de toutes pièces (exemple: opérateur réalisant des plis disharmoniques, des failles synsédimentaires...).

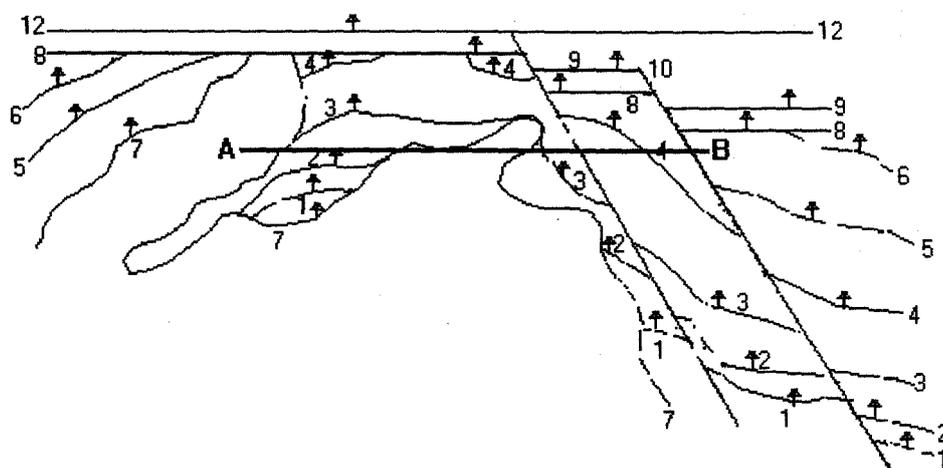
**-Traitement de la scène dans son ensemble:** le logiciel GRANITE travaille sur des objets individuels, considéré chacun comme une entité séparée. Ceci n'est pas conforme à la situation existante au niveau d'une scène géologique complète, où un grand nombre d'objets sont présents et juxtaposés de telle sorte qu'aucun espace vide n'apparaît en principe entre eux.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, les relations des différents objets entre eux sont une conséquence de la nature de ces objets (strates concordante ou discordante,

granite intrusif...) ainsi que de leurs âges relatifs et la connaissance de ces relations est pratiquement indispensable pour les situer au sein de la scène.

Un problème qui se pose typiquement est par exemple celui illustré sur la figure.8.7. Une galerie de mine doit être tracée entre les localisations A et B: trouver la succession des terrains qui sera observable le long de cette galerie en se déplaçant depuis A jusqu'en B.

La solution de ce type de problème exige que les différents objets de la scène soient inclus dans une structure hiérarchique qui traduise leurs relations géométriques (concordance, discordance) et temporelles. Comme le démontrent les quelques réflexions préliminaires exposées au chapitre 3, la détermination d'une structure hiérarchique de ce type ne peut être que le résultat d'une réflexion approfondie qui a notre connaissance n'a fait l'objet que d'un nombre restreint de travaux (cf. par exemple [MAY93], [SMW93]), et qui dépasse largement les limites du présent travail.



**Figure 8.7:** galerie de mine.



## CONCLUSION GENERALE

---

Le présent travail constitue une approche de certains des problèmes que pose la représentation 3D d'une "scène géologique" à l'aide des outils de l'informatique graphique. Il s'ordonne essentiellement autour de deux axes:

*- une réflexion sur les particularités de la "scène géologique" et sur les conditions de sa modélisation éventuelle:*

La "scène géologique" correspond à un ensemble d'objets (les différents corps géologiques) spatialement structurés. Nous avons montré que la géométrie des différents objets, tout comme les relations spatiales qu'ils entretiennent entre eux sont étroitement conditionnées par les processus géologiques qui se sont succédés, elle dépend en particulier des âges relatifs de ces objets. De plus, la forme des corps géologiques, surtout lorsqu'ils sont de grande taille, ne peut être reconstituée à partir des données discrètes de l'observation que moyennant une certaine approximation qui suppose souvent l'adoption d'un modèle géologique; le modèle informatique 3D ne vient alors qu'à l'aval de ce premier modèle.

Plusieurs types de démarches peuvent guider la modélisation géométrique 3D, selon que l'on privilégie l'exactitude ponctuelle du modèle ou sa fidélité en grand, selon que l'on vise à construire un outil de travail quantitatif ou que l'on recherche une aide à l'interprétation. La mise en oeuvre d'une démarche de modélisation dynamique, simulant les conséquences géométriques de processus géologiques, nous a paru particulièrement intéressante dans la mesure où elle permet de représenter à la fois les objets et leurs relations spatiales. L'obtention de modèles fidèles suppose de plus que l'on puisse procéder par ajustements successifs à partir des données initiales et donc que l'on puisse adopter une démarche par aller et retour.

*- une réflexion autour du problème des structures de données:*

Cette réflexion a été menée en prenant en compte un problème particulier: celui de la représentation d'un corps géologique de forme complexe, éventuellement déformé, ou intrusif dans un encaissant. La représentation adoptée doit permettre une définition des objets aisée et aussi exacte que possible. Elle doit permettre également de combiner ces objets par opération booléennes et de les déformer à l'aide d'opérateurs spécifiques, tels que les transformations de type semblables utilisées pour simuler des plis et des failles [POR + 87].

Nous montrons que les structures des données de type partition a priori de l'espace (octrees) et les structures constructives (CSG) utilisées classiquement pour la représentation d'objets en 3D ne permettent pas d'une manière exacte la modélisation des objets géologiques. Ces méthodes supposent toutes en effet une structuration de l'espace plus ou moins rigide qui n'étant pas intrinsèque aux objets représentés, et qui est détruite lorsque les objets sont déformés.

L'utilisation d'une représentation par frontières est possible mais risque de se révéler inconfortable en raison de la complexité des algorithmes à mettre en oeuvre notamment si l'on souhaite conserver de manière rigoureuse la validité topologique des objets et réduire autant qu'il est possible la complexité de la mise en oeuvre algorithmique sur le plan pratique. Nous avons donc été amenés à examiner puis à choisir une autre solution.

Les partitions binaires de l'espace, de type arbre BSP classique, présentent un intérêt indéniable dans la mesure où elle apparaissent beaucoup plus simples à mettre en oeuvre et dans la mesure également où les problèmes de validation topologique des objets ne se posent pratiquement pas. De plus la structure supporte bien les transformations affines et les opérations booléennes.

La mise en oeuvre d'opérateurs de type TTS pose toutefois dans le cas d'arbre BSP classique des difficultés sérieuses, qui ne peuvent être résolues qu'en conservant au sein de la structure une représentation explicite des frontières. Ceci nous a amené à définir une structure hybride, l'arbre BSP mixte qui tout en conservant l'essentiel des avantages des BSP classiques résout ce problème.

La manipulation d'une telle structure lors de la mise en oeuvre d'opérateurs booléens ou de TTS est grandement facilitée par la construction de "partiels", arbres représentatifs d'une portion de l'objet, qui se déduisent aisément de l'arbre représentant l'objet dans son ensemble. En prenant certaines précautions supplémentaires, telles que l'introduction de séparateurs ne correspondant à aucune limite extérieure du solide représenté et ne faisant l'objet d'aucune division ultérieure, il est possible de manipuler les arbres BSP mixtes par des opérateurs TTS, sans augmentation inacceptable de la complexité. L'arbre représentatif d'un objet déformé peut ainsi être déduit, sans difficulté majeure de l'arbre représentatif de l'objet initial. Les arbres BSP mixtes tels qu'ils ont été définis apparaissent donc bien adaptés au problème posé de la représentation d'objets polyédriques de forme complexes susceptibles d'être composés entre eux et déformés.

Sur la base de la réflexion opérée, il a été possible de construire le logiciel GRANITE qui est un maillon essentiel de la modélisation dynamique 3D dont les caractéristiques logiques ont été définies dans la première partie du travail. Des

exemples de résultats sont fournis qui impliquent la combinaison ou la déformation d'objets. On conservant des temps de calcul acceptables de combiner 3 ou 4 TTS successives et en produisant des objets comportant plusieurs milliers de facettes.

La place du logiciel construit dans le schéma logique d'ensemble de la modélisation a enfin été discutée.



## ANNEXE

### **UN EXEMPLE DE PROBLEME RELEVANT D'UNE MODELISATION DYNAMIQUE: ETUDE DE LA FISSURATION DES NODULES PRESENTS DANS LES MARNES BLEUES ALBIENNES DU BASSIN VOCONTIEN (ALPES DE HAUTES PROVENCE).**

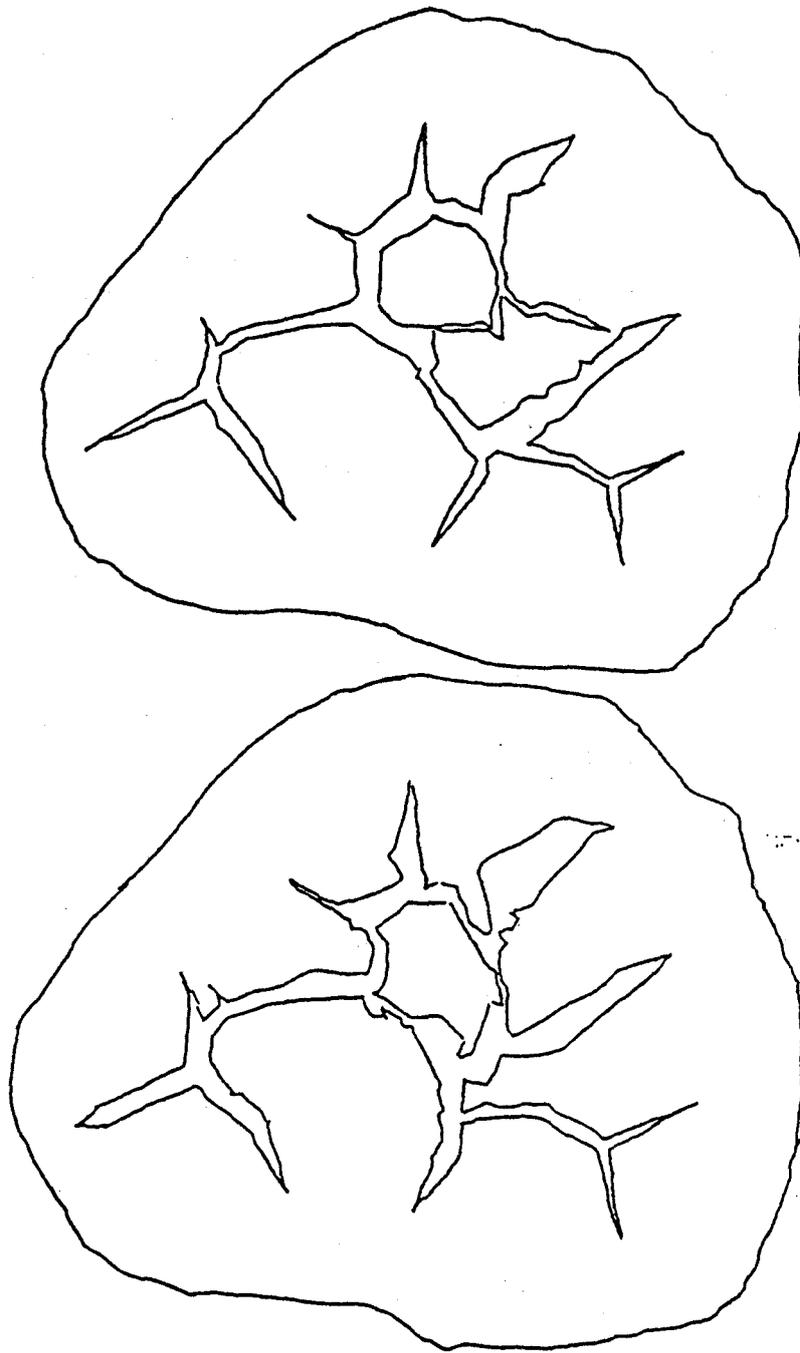
Ce problème s'inscrit dans le cadre d'une thèse préparée sous la direction du Pr. B. BEAUDOIN par S. MOSTEFAI (CGGM. Sédimentologie, Ecole des Mines de Paris). Nous en exposerons ici les grandes lignes en soulignant les éléments de modélisation utiles pour le résoudre:

#### *1- Exposé du problème:*

Dans les marnes bleues de l'Albien, qui constituent globalement des terrains tendres, on observe des cordons de nodules de taille centimétrique à pluridécimétrique. Les nodules sont des corps de forme le plus souvent ellipsoïdale. Ils sont constitués pour l'essentiel de barytine ( $BaSO_4$ ) et comportent en leur cœur un réseau de fissures de géométrie complexe.

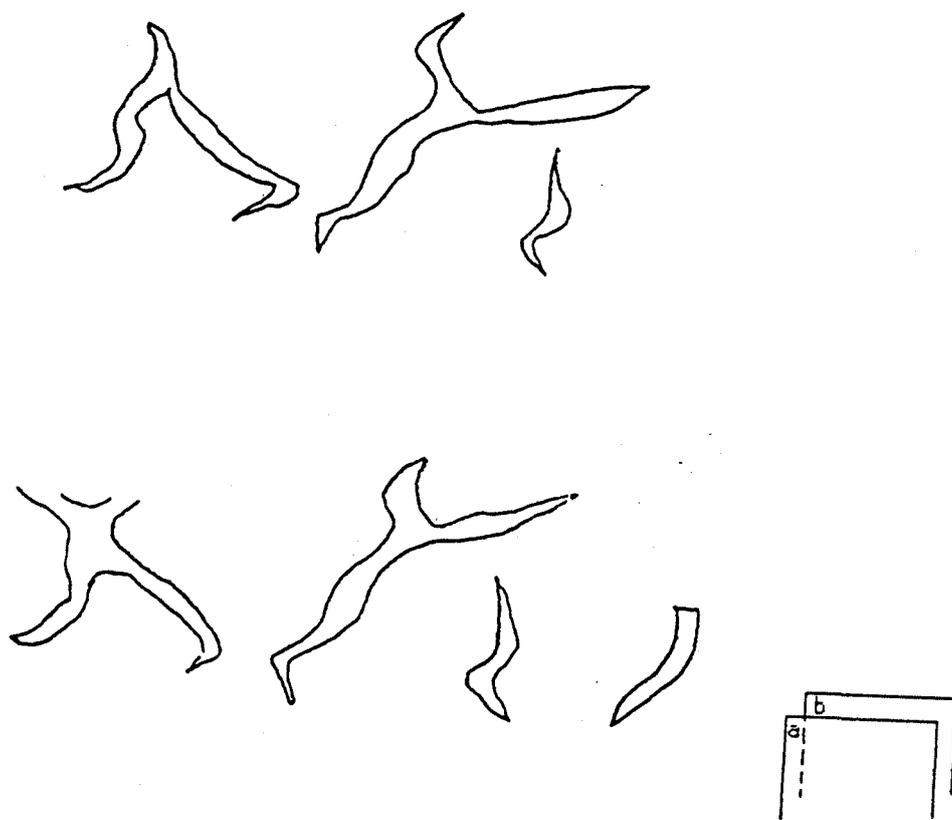
Cette géométrie peut être appréciée en découpant un nodule en tranches horizontales parallèles, d'égale épaisseur. La figure A1 montre un exemple de géométrie pour deux tranches successives.

La géométrie 3D de ces fentes est difficile à visualiser à partir des seules données sur les tranches horizontales. Il est possible, à la main, de réaliser des coupes qui reconstituent approximativement le profil de ces fentes dans un plan vertical passant par le centre du nodule. La figure A2 donne un exemple de ce type de reconstitution. On constate notamment que les fentes n'ont pas des formes simples. Elles semblent "ondulées".



---

*Figure A1: Exemple de réseau de fentes dans deux tranches horizontales successives (représentation à l'échelle 1)*



---

**Figure A2:** Réseau de fentes dans deux tranches verticales successives correspondant à une même orientation (représentation à l'échelle 1)

Plusieurs hypothèses ont été proposées quant à l'origine des ces fentes. L'une d'elle consiste à penser qu'elles sont, en tout ou partie, liées à des phénomènes de compaction: lorsque le sédiment expulse l'eau intersticielle qu'il contient, il y a diminution du volume et raccourcissement selon la verticale. Cette compaction mécanique s'accompagne de recristallisations (qui sont sans doute responsable de l'apparition de barytine). La fissuration accompagne ces phénomènes de compaction sans qu'il soit possible actuellement de préciser complètement le mécanisme qui explique l'apparition des fissures.

Afin de préciser ces mécanismes, les géologues sont intéressés à reconstituer ce qui aurait pu être la géométrie de ces fentes avant qu'une compaction sensible intervienne. C'est le problème de modélisation qui nous est posé.

## 2- Méthodologie proposée:

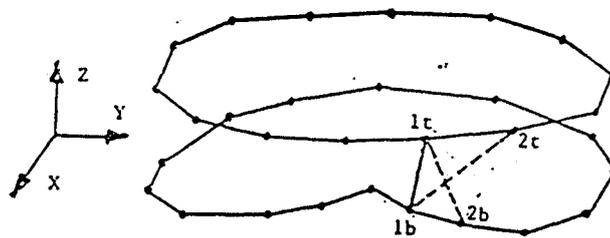
Pour résoudre ce problème il faut:

- 1) reconstituer un objet 3D correspondant à l'ensemble des fentes.
- 2) déformer cet objet afin de le décompacter.

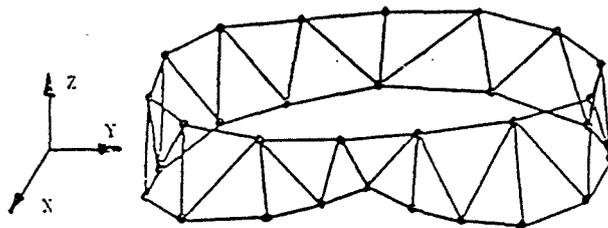
### **Problème.1: Reconstitution de l'objet 3D correspondant aux fentes:**

Cette reconstitution s'opere à l'aide du logiciel d'interpolation mis à point par J.M.OLIVA [OLI92]. Ce logiciel permet, partant d'un contour extérieur connu dans deux plans de coupes parallèles, de constituer un modèle 3D facettisé de l'objet (cf.figure A3).

Le résultat peut être présenté sous forme d'arbre BSP.



a- Triangle initial.



b- Triangulation complète.

Le principe consiste à chaque étape à considérer 4 points (1t 1b 2t 2b) sur la figure a et à choisir la triangulation qui correspond à la diagonale la plus courte. [CS78].

**Figure A3:** Triangulation a partir de deux contours situés dans des plans parallèles.

## Problème 2: Décompaction.

Il s'agit de faire subir à l'objet une dilatation dans le sens de l'axe de z. Ainsi tout point  $M(x,y,z)$  appartenant à l'objet sera transformé en un point  $M'(X,Y,Z)$  tel que

$$(1) \quad \begin{cases} X=x; \\ Y=y; \\ Z=f(z); \end{cases}$$

$f(z)$  étant une fonction exprimant la compaction. Les géologues estiment, dans le cas d'espèce que la compaction est donné par:

$$f(z) = z - z * \tau$$

avec  $\tau = \sqrt[3]{\frac{L * l}{E}}$  L étant la longueur du nodule, l sa largeur, E son épaisseur selon l'axe Oz.

Dans l'exemple traité  $\tau = 1.8$

L'opérateur mis en oeuvre grâce au système d'équations (1) est très voisin de celui mis en oeuvre dans les TTS. Le repère est celui de l'objet. La fonction profil est ici remplacée par une fonction  $f(z)$ .

Les procédures mettant en oeuvre les TTS sont donc applicables moyennant simplement une modification de la matrice M. Aucune rotation préalable de l'objet n'est ici nécessaire.

### 3- Réalisation prévue:

- 1)- Le logiciel de construction d'objet 3D est en voie d'achèvement et sera disponible dans les mois qui viennent.

2)- l'adaptation de l'opérateur disponible pour les TTS, au traitement des problèmes de compaction est pratiquement immédiate. Il est donc prévu de traiter le problème, dès que la phase 1 sera achevée.

Il sera alors possible d'examiner avec les géologues, si après decompaction, on aboutit à des formes simples pour la totalité ou pour une partie de l'ensemble des fissures. Plusieurs essais pourront éventuellement être effectués en utilisant d'autres  $f(z)$ . De plus on envisage également de tenter de refermer les fissures en tirant horizontalement dans une direction qui leur soit perpendiculaire, ce qui pourra également être effectué aisément à l'aide d'un opérateur matriciel appliqué à l'arbre BSP représentatif de l'objet.



## BIBLIOGRAPHIE

- [ABB<sup>+</sup> 91] D.AYALA, F.BATLLE, P.BRUNET, and I.NAVAZO. Boolean operations between extended octrees. Research Report LSI-91-31, Dept. of languages and Computer Science systems, University of Catalonia (Spain), 1991.
- [ABJ<sup>+</sup> 85] D.AYALA, P.BRUNET, R.JUAN, and I.NAVAZO. Object representation by means of nonminimal division of quadrees and octrees. Transactions on Graphics, 4(1), 41-59, Jan.1985.
- [ABL 75] J.AUBOUIN, R.BROUSSE, J.P.LEHMAN. Précis de géologie: pétrologie, BORDAS Paris 1975.
- [APP 68] A.APPEL. Some techniques for shading machine renderings of solids, SJCC, 1968, 37-45.
- [ARG 11] E.ARGAND. Les nappes de recouvrement des Alpes Pennines et leurs prolongements structuraux. Tafel III: Stéréogramme tectonique des Alpes Pennines. Mat. Carte géol. Suisse (N.S.) 31, 1911.
- [BAE 89] E.BAETENS. L'environnement géologique du gisement de tungstène " (pyrénées catalanes). Memoires des sciences de la terre Ecole de Mines de Paris, 1989.
- [BAU 75] B.G.BAUMGART. A polyhedro representation for computer vision. National Computer Conference, 1975, 589-596.
- [BEI 88] M.BEIGBEDER. Un développement pour la modélisation et la visualisation en synthèse d'images: CASTOR. Thèse à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, Avril 1988.
- [BEZ 86] P.BEZIER. Courbes et surfaces. Mathématiques et CAO(4), Hermès 1986,
- [BHS 80] I.C.BRAID, R.C.HILLYARD and I.A.STROUD. Stepwise construction of polyhedra in geometric modeling. In K.W Brodlie editor, Mathematical Methods in Computer Graphics and Design, 1980, 123-141.

- [BG 82] J.W.BOYSE, J.E.GILCHRIST. GMSolid: Interactive modeling for design and analysis of solids. IEEE Computer Graphics and Applications. Mai 1982, 2(2): 27-40.
- [HMW 76]: B.E.HOBBS, W.D.MEANS, P.F.WILLIAMS. An outline of structural geology. John Wiley & sous ed. 1976.
- [BN 85] P.BRUNET, I.NAVAZO. Geometric modeling using exact octree representation of polyhedral objects. EUROGRAPHICS, 1985, 159-169.
- [CAM 91] S.CAMERON. Efficient bounds in Constructive Solid Geometry. IEEE CG&A, May 1991, 68-74.
- [CF 89] N.CHIN, S.FEINER. Near real-time shadow generation using BSP trees. SIGGRAPH, 1989, 99-105.
- [CGF] Carte Géologique de France. 1/50.000:BRGM
- [COQ 84] S.COQUILLART. Représentation de paysages et tracé de rayon. Thèse, Ecole de Mines de Saint-Etienne, decembre 1984.
- [CS 78] H.N.CHRISTIANSEN, T.W.SODERBERG. Conversion of complex contour line definitions into polygonal element mosaics. Computer Graphics ACM, 1978, 187-192.
- [CS 92] Y.CHRYSANTHOU, M.SLATER. Computing dynamic changes to BSP trees. QMW, University of London, EUROGRAPHICS, 1992, vol 11 N°3, C.321-C.332
- [DEM 79] M.DEMANGE. Schéma structural de la partie orientale du massif de l'Agout (Montagne Noir). 2° série.1, 1979, 45-49.
- [EM 90] L.ENDIGNOUX, J.L.MUGNIER. The use of a forward kinematic model in the construction of balanced cross-sections. Institut Français du Pétrole, tectonics, october 1990, vol 9 N°5, 1249-1262.
- [FAG 83] H.FUCHS, G.D.ABRAM, E.D.GRANT. Near real-time shaded display of rigid objects. Computer Graphics, 1983, vol 17, N°3, 65-72.
- [FKN 80] H.FUCHS, M.KEDEM, F.NAYLOR. On visible surface generation by a priori tree structures, Computer Graphics, 1980, vol 14, N°3, 124-133

- [FOL 82] J.D.FOLEY, A.VAN DAM. Fundamentals of interactive computer graphics. Reading, Addison-Wesley, 1982.
- [FV 88] J.P.FOUQUET, P.VARY, Visualisation d'une texture déformée par des plis. Rapport à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, Mai 1988.
- [GC 91] D.GORDON, S.CHEN. Front-to-back display of BSP trees. Texas A&M University, IEEE Computer Graphics&Applications, vol 11, N°5, september 1991, 79-85
- [GIB 83] A.D.GIBBS. Balanced cross-section construction from seismic sections in areas of extensional tectonics: Journal of Structural Geology, 1983, vol 5, 153-160.
- [HD 91] A.HAGENS, J.H.DOVETON. Application of a simple cerebellar model to geologic surface mapping. Computer&Geosciences, 1991, vol 17, N°40, 561-567.
- [HOF 89] C.M.HOFFMAN. Geometric and solid modeling. Morgan Kaufman publishers, inc. San Mateo, California 1989.
- [HUN 78] G.M.HUNTER. Efficient Computation and Data Structures for Graphics. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Princeton University, Princeton, N.J., 1978.
- [JUA 88] R.JUAN. Boundary to Constructive Solid Geometry: a step towards 3D conversion. Proc EUROGRAPHICS'88, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland) 1988, 129-139.
- [KGG86] R.KLIGFIELD, P.GEISER, J.GEISER. Construction of geologic cross-sections. GEOBYTE, 1986, 60-67.
- [LAF 90] J.C.LAFON. Construction interactive du maillage parallèlepipédique d'un domaine 3 dimensions. IGG, Janvier 1990 Université de Nice-Sophia Antipolis 14-20.
- [LAN 81] S.LANÖE. Modélisation sur ordinateur d'un compartiment géologique et applications pédagogiques. Thèse. Ecole de Mines de Paris, mars 1981.
- [LEO 91] J.C.LEON, Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO, Hermès, Paris, 1991.
- [LEV 79] J.Z.LEVIN. Mathematical models for determining the intersections of quadric surfaces. Computer Graphics and Images Processing, July 1979, 11, 73-87.

- [LS 87] A.LEMEHAUTE, P.SABLONNIERE. Courbes et surfaces Bezier/B-splines. I.N.S.A de RENNES, Mathématique, Informatiques et Application. Mai 1987.
- [LTH 86] D.H.LAIDLAW, W.B.TRUMBORE and J.F.HUGHES. Constructive Solid Geometry for polyhedral objects. SIGGRAPH'86, Computer Graphics, vol 20, Number 4, 161-170, 1986.
- [MAL 89] J.L.MALLET. Discrete smooth interpolation. ACM-Transactions on Graphics, April 1989, vol 8, N°2, 121-144.
- [MAL 88] J.L.MALLET. Three-dimentional graphic display of disconnected bodies. Mathematical Geological, 1988, vol 20, N°8.
- [MÄN 88] M.MÄNTYLA. An introduction to solid modeling. Computer Science Press, Helsinki, University of Technology 1988.
- [MAT 80] M.MATTAUER. Les déformations des matériaux de l'écorce terrestre. Edition Janvier 1980.
- [MAY 93] R.MAYORAZ. Modélisation et visualisation infographique tridimensionnelle de structures et propriétés géologiques. Thèse. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1993.
- [MEA 82] D.MEAGHER. Geometric modeling using octree encoding. Computer Graphics, 1982, vol 19, 129-147.
- [ML 89] I.MORETTI, M.LARRERE. LOCACE: Computer-Aided construction of balanced geological cross-sections. Institut Français du Pétrole, GEOBYTE, october 1989, 16-24.
- [MIC 87] D.MICHELUCCI. Les représentations par les frontières, quelques constructions, difficultés rencontrés. Thèse à l'Ecole de Mines de Saint-Etienne, 1987.
- [MM 87] P.MARTIN, D.MARTIN. Les difficultés et les erreurs possibles dans les algorithmes de calcul de l'intersection de solides définis par leurs bords. mai 1987, 48-56.
- [MOR 85] M.E.MORTENSON. Geometric modeling. Copyright 1985.

- [MP 78] D.E.MULLER, F.P.PREPARATA. Finding the intersection of two convex polyhedra. Theoretical Computer Science Pub, North-Holland, July 1978, pp. 217-236.
- [MS 82] M.MANTYLA, R.SULONEN. GWB: A solid modeller with Euler operators, IEEE Computer Graphics and Applications 1982, 2(7), 17-31.
- [MT 83] M.MÄNTYLA, M. TAMMINEN. Localized set operations for solid modeling. Computer Graphics, ACM, July 1983, 17(3).
- [MTE 89] I.MORETTI, S.TRIBOULET, L ENDIGNOUX. Some remarks on the geometrical modeling of geological deformations. Institut Français du Pétrole, 1989.
- [NAB 86] I.NAVAZO, D.AYALA, P.BRUNET. A geometric modeller based on the exact octree representation of polyhedra. Universitat Politecnica de Barcelona, Computer Graphics, 1986, 91-104
- [NAT 90] B.NAYLOR, J.AMANTIDES, W.THIBAUT. Merging BSP trees yields polyhedral set operations. Computer Graphics, august 1990, vol 24, N°4, 115-124.
- [NAY 90] B.F.NAYLOR. Binary space partitioning trees as an alternative representation of polytopes. Computer Aided Design, vol 22(4), May 1990.
- [NT 86] B.F.NAYLOR, W.C.THIBAUT. Application of BSP trees to ray-tracing and CSG evaluation. Technical report GIT-ICS 86/03. School of Information and Computer Science, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332 , Feb 1986.
- [NUN 91] A.G.NUNNS. Structural restoration of seismic and geologic sections in extensional regimes. The American Association of Petroleum Geologists, februray 1991, vol 75, N°2, 278-297.
- [OUT 85] T.OHASHI, T.UCHIKI, M.TOKORO A three-dimentionnal shaded display method for voxel-based representation. Eurographics, 1985, 221-232.
- [OLI 92] J.M.OLIVA. Interpolation géométrique entre deux formes polygonales par la méthode des bissectrices. Mémoire DEA (option Images), Ecole de Mines de Saint-Etienne, 1992.
- [PCB+ 92] M.PERRIN M.CHEAITO, D.BONIJOLY, T.TURMEAUX. Visualizing multifolded and multifaulted terrain. Ecole de Mines de Paris, Computer Graphics, 1992.

- [PER 90] M.PERRIN. Modélisation géométrique de corps granitiques. 1990, rapport inédit C.G.G.M.
- [PER 91] B.PEROCHE. Les images de synthèse" . 1991.
- [PK 87] G.PETRIE, T.J.M.KENNIE. Terrain modelling in surveying and civil engineering. CAD, may 1987, vol 19 N°4, 171-178.
- [PLE 90] D.PLEMENOS. La modélisation de scènes: contributions à l'étude et au développement des techniques de modélisations, génération et visualisation de scènes. Rapport inédit, Ecole de Mines de Saint-Etienne, 1990.
- [POC 88] M.PERRIN, P.H.OLTRA, S.COQUILLART. Progress in the study and modelling of similar fold interferences. Journal of structural geologic. 1988, vol 10 N°6, 593-605.
- [POR+ 87] M.PERRIN, P.H.OLTRA, R.ROMMEL, B.P.PEROCHE. Modélisation de structure géologique par images de synthèse. Exemple: déformation d'une stratification par failles et plis semblables. Actes de Colloque FI3G. Lyon, Juin 1987, 330-339.
- [PP 89] M.PERRIN, B.PEROCHE. Modélisation géométrique dynamique des terrains géologiques, 1989, Rapport inédit
- [PS 85] F.P.PREPERATA, M.I.SHAMOS. Computational geometry: an introduction, Springer-Verlag, New-York, NY, 1985.
- [PY 90] M.S.PATERSON, F.F.YAO. Binary partitions with applications to hidden-surface removal and solid modeling. Proceedings of Fifth Symp. on computational geometry, 23-32, 1989.
- [RA 90] D.F.ROGERS, J.A.ADAMS. Mathematical elements for computer graphics. McGraw-Hill, 1990.
- [RAM 62] J.G.RAMSAY. Interferences patterns produced by the superposition folds of similar type. 1962, J.Geol. 70, 466-481.
- [RAM 67] J.G.RAMSAY. Folding and fracturing of rocks. McGraw-Hill, New-york, 1967.
- [REQ 77] A.A.G.REQUICHA. Mathematical models of rigid solid objects. Tech. Memo. 28, Production Automation project, Univ. Rochester, Rochester N.Y, Nov 1977.

- [REQ 80] A.A.G.REQUICHA. Representations for rigid solids: theory methods and systems. ACM, december 1980, vol 12, N°4, 437-464.
- [RMC 89] F.ROLLAND A.MONTANVERT, J.M.CHASSERY. Reconstruction de volumes à partir de coupes sériées. Equipe RFMQ, laboratoire TIM3-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1989, 513-525
- [RSR 83] D.F.ROGERS, S.G.SATTERFIELD, F.A.RODRIGUEZ. Ship hulls, B-spline surfaces and CAD/CAM. IEEE CG&A, december 1983, 37-45.
- [SAM 84] H.SAMET. The quadtree and related hierarchical data structures. ACM Computing Surveys, 16: 187-260, 1984.
- [SBG<sup>+</sup> 69] R.A.SCHUMACKER, R.BRAND, M.GILLILAND, W.SHARP. Study for applying computer-generated images to visual simulation. AFHRL-TR-69-14, US. Air Force Human Resources Laboratory, 1969.
- [SMW 93] K.SHIONO, S.MASUMOTO, K.WADATSUMI. Optimal determination of 3D geologic surface consistent with field observation including both equality and inequality constraints. 29<sup>th</sup> Intern. Geol. Congress Kyoto 1992.
- [SSS 74] I.E.SUTHERLAND, R.F.SPROULL, R.A.SCHUMACKER. A characterization of hidden-surface algorithms. ACM and Computing surveys, vol 6, number 1, 1-55, Mar 1974.
- [ST 83] H.SAMET, M.TAMMINEN. Computing geometric properties of images represented by linear quadtrees. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 7(2):229-240, 1985. Also appeared in Computer Science Department Report Series, University of Maryland, Report TR-1359, 1983.
- [THI 86] R.L.THIESSEN. Two-dimentional refold interference patterns. Struct. Geol 8, 1986, 563-573
- [TIL 80] R.B.TILOVE. Set membership classification: A unified approach to geometric intersection problems. IEEE, Transaction on Computers, 1980, 29(10), 874-883.
- [TM 80] R.L.THIESSEN, W.D.MEANS. Classification of fold interference patterns: a re-examination. Struct. Geol.2, 1980, 311-316.
- [TN 87] W.C.THIBAUT, B.F.NAYLOR. Set operations on polyhedra using binary space partitioning trees. Computer Graphics, july 1987, vol 21 N°4, 153-162.

- [TOR 90] E.TORRES. Optimization of the binary space partition algorithm (BSP) for visualization of dynamic scenes. EUROGRAPHICS'90 ,sept 1990.
- [UDU 83] J.J.UDUPA. Display of 3D information in discrete 3D scenes produced by computerized tomography. Proc IEEE, 71(3), 420-433, March 1983.
- [VRG 76] VIALON, M.RUHLAND, J.GROLIER. Eléments de tectonique analytique. 1976.
- [YKF 84] K.YAMAGUCHI, T.L.KUNII, K FUJIRMURA. Octree-related data structures and algoritmes. University of Tokyo, IEEE CG&A, january 1984, 53-59.
- [YS 83] M.M.YAU, S.N.SHIRARI. A hierarchical data structure for multidimensional images. Communications of the ACM, 26(7), 504-551,1983.

