



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation du magnétisme statique et dynamique pour le génie électrique

Romain Marion

► **To cite this version:**

Romain Marion. Contribution à la modélisation du magnétisme statique et dynamique pour le génie électrique. Autre. Université Claude Bernard - Lyon I, 2010. Français. NNT : 2010LYO10338 . tel-00839041

**HAL Id: tel-00839041**

**<https://theses.hal.science/tel-00839041>**

Submitted on 27 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

délivrée par

**L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1**

préparée au sein de

**L'ECOLE DOCTORALE  
ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE  
DE LYON**

**DIPLOME DE DOCTORAT**

(arrêté du 7 août 2006)

soutenue publiquement le 13 décembre 2010

par

**M. MARION Romain**

TITRE :

**Contribution à la modélisation du magnétisme statique et  
dynamique pour le génie électrique**

Directeur de thèse : M. KRÄHENBÜHL Laurent  
Co-directrice de thèse : Mme RAULET Marie-Ange

JURY :

M Burais Noël

M Dular Patrick (rapporteur)

M Fraisse Hervé

Mme Kedous-Lebouc Afef (rapporteur)

M Krähenbühl Laurent

Mme Raulet Marie-Ange

M Sadowski Nelson



---

## RESUME

De nos jours, la modélisation numérique constitue un outil indispensable pour le prototypage de convertisseurs électromagnétiques. Les matériaux magnétiques jouent un rôle essentiel dans la conversion de l'énergie, il est donc nécessaire de maîtriser leur comportement et leur représentation. L'objectif de ce travail s'inscrit dans ce cadre et s'attache à élaborer des lois réalistes de comportement de matériaux afin de les inclure dans des simulateurs de circuits. Concernant le comportement statique, le modèle de Jiles-Atherton a été implémenté puis adapté, simplifié et modifié afin d'en améliorer la précision et l'implémentation. La modélisation dynamique du matériau a été effectuée grâce au modèle DWM élaboré au laboratoire Ampère. Ce modèle intègre les effets dynamiques excédentaires grâce à une loi « dynamique de matériau » implémentée au sein de l'équation de diffusion magnétique. Ce modèle a été ensuite homogénéisé afin d'en améliorer son implémentation future dans un simulateur de circuit. Chacun des différents modèles a été testé et validé sur plusieurs échantillons.

---

## MOTS-CLES

Hystérésis statique ; Hystérésis dynamique ; Modélisation numérique ; Matériaux magnétiques ; Physique du magnétisme ; Homogénéisation de l'équation de diffusion magnétique.

---

## TITLE

Contribution of static and dynamic magnetism modelings for electrical engineering

---

## ABSTRACT

Nowadays, numerical modeling is an indispensable tool for the prototyping of electromagnetic converters. Magnetic materials play an essential role into the energy conversion so it is necessary to control their behavior as well as their modeling. The objective of this work is to develop realistic laws of material behavior for circuit simulators use. Regarding the static behavior, the Jiles-Atherton model has been implemented and adapted, simplified and modified to improve accuracy and implementation. Dynamic modeling of the material was performed using the model DWM developed into the Ampere laboratory. This model incorporates the excedentary dynamic effects thanks to a "dynamical material law" implemented into the magnetic diffusion equation. Then this model was homogenized to improve its future implementation in a circuit simulator. Each of the different models has been tested and validated on several samples.

---

## KEYWORDS

Static hysteresis ; Dynamic hysteresis ; Numeric modeling ; Magnetic materials ; Physics of the magnetism ; Magnetic diffusion equation homogenization.

---

## INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE :

Laboratoire AMPERE, UMR 5005, Bâtiment OMEGA, Université Lyon 1  
43 Bd du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne



# UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

## Président de l'Université

Vice-président du Conseil Scientifique

Vice-président du Conseil d'Administration

Vice-président du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire

Secrétaire Général

## M. le Professeur L. Collet

M. le Professeur J-F. Mornex

M. le Professeur G. Annat

M. le Professeur D. Simon

M. G. Gay

## *COMPOSANTES SANTE*

Faculté de Médecine Lyon Est – Claude Bernard

Faculté de Médecine Lyon Sud – Charles Mérieux

UFR d'Odontologie

Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques

Institut des Sciences et Techniques de Réadaptation

Département de Biologie Humaine

Directeur : M. le Professeur J. Etienne

Directeur : M. le Professeur F-N. Gilly

Directeur : M. le Professeur D. Bourgeois

Directeur : M. le Professeur F. Locher

Directeur : M. le Professeur Y. Matillon

Directeur : M. le Professeur P. Farge

## *COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE*

Faculté des Sciences et Technologies

Département Biologie

Département Chimie Biochimie

Département GEP

Département Informatique

Département Mathématiques

Département Mécanique

Département Physique

Département Sciences de la Terre

UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives

Observatoire de Lyon

Ecole Polytechnique Universitaire de Lyon 1

Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1

Institut de Science Financière et d'Assurance

Institut Universitaire de Formation des Maîtres

Directeur : M. le Professeur F. Gieres

Directeur : M. le Professeur C. Gautier

Directeur : Mme le Professeur H. Parrot

Directeur : M. N. Siauve

Directeur : M. le Professeur S. Akkouche

Directeur : M. le Professeur A. Goldman

Directeur : M. le Professeur H. Ben Hadid

Directeur : Mme S. Fleck

Directeur : M. le Professeur P. Hantzpergue

Directeur : M. C. Collignon

Directeur : M. B. Guiderdoni

Directeur : M. le Professeur J. Lieto

Directeur : M. le Professeur C. Coulet

Directeur : M. le Professeur J-C. Augros

Directeur : M R. Bernard



*A Elliot & Audrey*

*Ma raison d'être*



## Remerciements

Les études menant au doctorat sont longues et souvent en dents de scie. La recherche est parfois ingrate et infructueuse et souvent l'envie d'abandonner une piste nous traverse l'esprit. Mais l'ambiance qui régna au laboratoire AMPERE durant mes années de « thésard » me permit de surmonter ces difficultés grâce à des personnes à l'écoute, de bonne humeur et toujours présentes en cas de coup de mou. Par ces quelques mots je tiens à les remercier chaleureusement car ce mémoire n'aurait pas vu le jour sans eux.

Je tiens particulièrement à remercier Marie-Ange qui fut toujours là pour moi, me soutenant et m'encourageant. Même lorsque mon nouvel emploi m'emmena à des centaines de kilomètres de Lyon, elle sut me remotiver pour achever ma rédaction qui commençait à sombrer dans l'oubli.

D'autres personnes ont aussi beaucoup compté pour moi au sein du laboratoire : Fabien pour ses conseils avisés et sa débrouillardise pour réparer le banc de mesure, Nico pour ses « coups de gueule » qui animaient toujours nos repas, Riccardo pour sa gentillesse, sa disponibilité et son impressionnante connaissance de Matlab, Polo pour les franches rigolades sur les supercondos, René pour ses connaissances sur la physique du magnétisme et son écoute, Pascal pour sa vivacité et sa joie de vivre, Michelle pour l'administratif, ... Outre les qualités que j'ai énumérées, c'est surtout leur humanité qui me restera en mémoire.

Je remercie aussi tout particulièrement Mathieu pour ses conseils lors de nos longues discussions ainsi que pour ses qualités de graphiste.

Ces derniers mots sont pour ma famille :

Tout simplement, merci !



## Table des matières

Remerciements .....	9
I. Introduction .....	15
II. Physique du magnétisme .....	17
A. Introduction.....	17
B. Et ainsi tout commença .....	19
1. L'atome de Bohr.....	19
2. Les quatre nombres quantiques .....	21
3. Les orbitales.....	23
4. Corrélacion avec les moments magnétiques .....	24
C. Modèle vectoriel d'un atome : couplage de Russell-Saunders.....	24
D. Du paramagnétisme au ferromagnétisme : quand Langevin rencontre Weiss	27
1. Paramagnétisme des atomes libres .....	27
2. L'interaction d'échange de Heisenberg et le champ de Weiss : une explication au ferromagnétisme .....	29
3. Représentation sommaire de l'hystérésis.....	31
E. Domaines magnétiques.....	33
1. Energie magnétostatique d'un matériau uni-domaine .....	35
2. Energie magnétocristalline .....	36
3. L'énergie de paroi .....	36
F. Synthèse – Conclusion.....	38
III. Modèle de Jiles-Atherton .....	39
A. Une autre source d'hystérésis : les sites d'ancrage.....	39
B. Déformations réversibles des parois .....	40
C. Modèle de Jiles-Atherton complet.....	41
D. Algorithme de résolution .....	42
E. Identification des paramètres.....	43

1.	Identification itérative.....	43
2.	Identification par algorithme génétique .....	45
3.	Identification par PSO.....	45
4.	Comparatif.....	49
F.	Critique au modèle de Jiles-Atherton.....	55
G.	Modèle de Jiles-Atherton modifié .....	57
1.	Modification de l'aimantation anhystérétique .....	57
2.	Modèle « product ».....	57
3.	Terme d'ordre supérieur pour le champ effectif de Weiss .....	58
H.	Synthèse des modifications .....	59
I.	Validation expérimentale : Comparaison entre les modèles .....	60
J.	Synthèse – Conclusion.....	62
IV.	Modèle dynamique.....	65
A.	Introduction.....	65
B.	Processus physique de l'aimantation dynamique .....	66
1.	Expression analytique avec un matériau linéaire .....	66
2.	Résolution de l'équation de diffusion dans le cas d'un matériau réel .....	68
3.	Importance des courants induits par le déplacement des parois .....	71
C.	Fondements du modèle DWM : Diffusion and Wall Motion.....	74
1.	Dynamique d'une paroi isolée.....	74
2.	Modèle de comportement dynamique de matériau dû aux mouvements de parois.....	75
3.	Modèle de diffusion incluant la dynamique des parois : DWM model .....	76
D.	Implémentation du modèle DWM.....	77
1.	Modèle « direct » pour champ de surface imposé.....	77
2.	Modèle « inverse » pour flux imposé .....	78
E.	Un modèle d'hystérésis statique précis : est-ce bien utile ? .....	79
F.	Validation du modèle DWM.....	82

1. Cas particulier de l'échantillon 2.....	82
2. Validation du modèle « direct ».....	83
3. Validation du modèle « inverse ».....	85
G. Synthèse – Conclusion.....	86
V. Simplification du modèle DWM.....	87
A. Simplification du modèle DWM.....	87
B. Discussion.....	89
C. Validation expérimentale du modèle homogénéisé.....	90
1. Echantillon N°1.....	90
2. Echantillon N°2.....	93
D. Comparaison au modèle de Bertotti.....	95
1. Modèle DWM homogénéisé « corrigé ».....	96
2. Cas d'une induction de forme sinusoïdale.....	98
E. Conclusion.....	100
VI. Conclusion générale et perspectives.....	103
VII. Annexes.....	105
Echantillons utilisés.....	105
Bibliographie.....	107



## I. Introduction

Les matériaux magnétiques constituent un composant de base des dispositifs électromagnétiques dont il faut de plus en plus maîtriser le comportement pour répondre à des contraintes économique, environnementale et de sûreté de fonctionnement. Dans les machines électriques par exemple, les matériaux sont soumis à des sollicitations extrêmes qui sont très différentes des conditions de caractérisation habituelles ou normalisées. Ainsi outre la fréquence de travail qui peut varier, le matériau est soumis à des formes d'ondes très diverses qui sont imposées par l'alimentation du circuit mais aussi générées par la saturation du matériau, la géométrie du circuit magnétique, les aimants, les fuites, etc. Les caractéristiques standards sont alors insuffisantes pour prédire le comportement du circuit magnétique, et l'évaluation préalable des pertes fer reste donc aujourd'hui un problème délicat que les constructeurs de dispositifs électriques contournent par l'utilisation de facteurs correctifs empiriques.

Les logiciels de simulation de dispositifs électromagnétiques tels que Flux 2D, Flux 3D, Maxwell, Vector flux, utilisent une loi de matériau simplifiée ne décrivant pas l'hystérésis et le calcul des pertes fer est effectué a posteriori. Ils donnent de bons résultats pour le but recherché, c'est-à-dire le dimensionnement des machines électriques mais ils sont très insuffisants quant à l'étude des formes d'ondes et le calcul précis des pertes. Pour pouvoir représenter correctement ces formes d'ondes et ces pertes nous devons prendre en compte simultanément des lois de matériaux réalistes et tenir compte de l'ensemble des sollicitations en formulation temporelle. Des logiciels élaborés par des équipes de recherche travaillant sur le couplage des lois de matériaux à des simulateurs de circuits existent et constituent des outils de laboratoire.

Le but de notre travail est d'élaborer des lois de comportements de matériaux magnétiques afin qu'elles puissent être implémentées dans des modèles de simulateurs de dispositifs.

Notre objectif est guidé par deux contraintes : la première est de définir des lois précises et réalistes de comportement de matériaux, la seconde est liée à la facilité d'implémentation, à la rapidité de calcul et au faible nombre de

paramètres. Notre travail s'inscrit dans la continuité des activités menées au sein de l'équipe « matériaux » du laboratoire (1).

La première partie de ma thèse est destinée à donner une signification physique au magnétisme avant de le percevoir d'une manière industrielle. Je n'ai aucunement la prétention de résumer la physique du magnétisme en une vingtaine de pages (énormément de livres le font beaucoup mieux que moi) mais je souhaitais juste donner une approche physique afin de pouvoir corrélérer nos modèles à une approche concrète et non purement mathématique.

La deuxième partie du manuscrit est consacrée à la modélisation de l'hystérésis statique qui constitue un préalable indispensable à l'élaboration d'un modèle dynamique de matériau. Parmi les différents modèles d'hystérésis statiques, notre choix s'est porté sur le modèle de Jiles-Atherton dont je fais la présentation et auquel j'ai apporté plusieurs modifications afin de le rendre plus précis et performant.

Ce modèle modifié est utilisé dans la troisième partie afin de l'inclure dans un modèle dynamique de matériau développé au sein du laboratoire.

Ce modèle dynamique est enfin simplifié dans la dernière partie afin de le rendre plus facilement implémentable dans un modèle de simulation de dispositifs électromagnétiques.

Nous terminons ce manuscrit par une conclusion générale suivie de perspectives.

## II. Physique du magnétisme

Pour ce chapitre, les références bibliographiques utilisées sont (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14).

### A. Introduction

Trop souvent, les recherches dans le secteur du génie électrique négligent les fondements physiques de la science si complexe qu'est le magnétisme. Cette science étant presque bicentenaire (expérience du fil d'Oersted en 1820), la multiplication des ouvrages sur le sujet provoque chez un lecteur avide de s'instruire un découragement face à cette accumulation de connaissances qu'il faudrait assimiler.

Il est vrai que, dans le monde du génie électrique, ces connaissances peuvent paraître superflues du fait d'une utilisation « industrielle » de cette science. Cependant, afin de comprendre au mieux les effets macroscopiques que nous apercevons, il nous est, à mon sens, indispensable d'imaginer ces effets comme une résultante d'effets microscopiques « invisibles ». Nous distinguons ainsi plusieurs échelles d'étude pour le magnétisme comme nous pouvons le voir sur la Figure II-1.

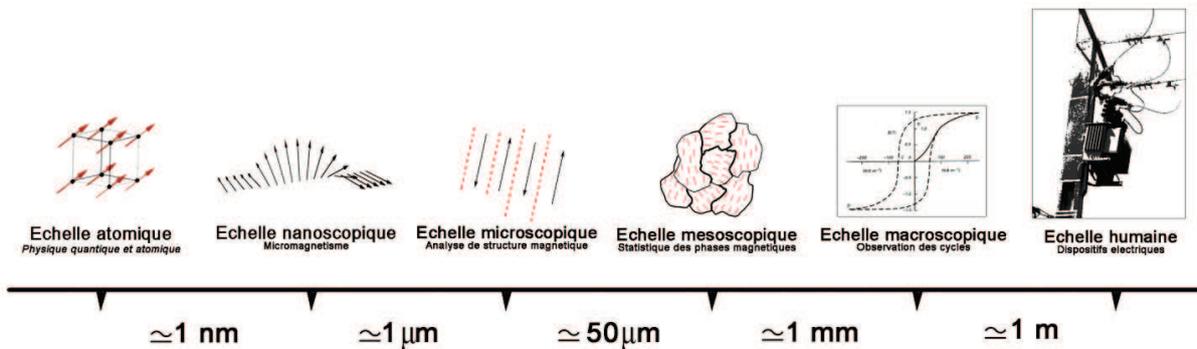


Figure II-1 : Différentes échelles d'étude du magnétisme

#### ✚ Echelle atomique

Au niveau atomique, nous décrivons l'origine et les interactions mutuelles entre moments magnétiques élémentaires au sein d'un groupe d'atomes d'une maille élémentaire cristalline. Les propriétés telles que l'aimantation à saturation, la constante d'échange entre moments ou encore la constante d'anisotropie sont alors définies (5). Ces moments sont portés par les électrons et sont dus à leurs moments cinétiques orbitaux et de spins.

### ✚ Echelle nanoscopique

A cette échelle, les éléments constitutifs de la matière sont vus comme des éléments de volume, de l'ordre de quelques nanomètres, contenant un nombre conséquent de moments magnétiques pouvant adopter plusieurs configurations possibles. De manière simplifiée, la distribution spatiale des moments est soit uniforme (à l'intérieur d'un domaine magnétique) soit rotationnelle (à l'intérieur d'une paroi magnétique). Ces deux zones distinguées constituent deux objets microscopiques caractéristiques presque toujours rencontrés dans les matériaux doux, (7).

### ✚ Echelle microscopique

Il s'agit maintenant de s'éloigner un peu pour observer ce que l'on appelle la structure magnétique caractéristique du matériau. Elle dépendra de plusieurs propriétés physiques microscopiques (*métallographie, anisotropie, échanges, ...*), mais peu de la géométrie macroscopique tant que nous avons affaire à une pièce suffisamment grande. Celle-ci se présente très souvent sous la forme de domaines (*domaines de Weiss*) et parois magnétiques (*parois de Bloch*), et autres objets magnétiques caractéristiques (*domaines de fermetures par exemple*). Il est possible de mettre en évidence cette structure interne à l'aide de plusieurs outils expérimentaux. La structure magnétique résulte de la minimisation des énergies d'anisotropie magnétocristalline, d'échange entre moments et de champ démagnétisant (*l'énergie magnéto-élastique intervient aussi parfois*). La solution trouvée est une structuration en domaines (à cause de l'anisotropie) à parois fines (à cause de l'échange), parois d'autant plus denses que les grains seront petits (à cause du champ démagnétisant). Tout ceci sera expliqué plus loin à l'aide de considérations énergétiques plus quantitatives.

### ✚ Echelle mésoscopique

Il s'agit de s'éloigner encore un peu plus pour traiter un élément de volume, à la fois assez grand pour contenir un échantillon statistique significatif des configurations microscopiques possibles et assez petit par rapport à la taille réelle de la pièce. A cette échelle, les domaines et les parois ne sont plus traités que de manière ensembliste (*Théorie des phases, (15)* ).

## ✚ Echelle macroscopique

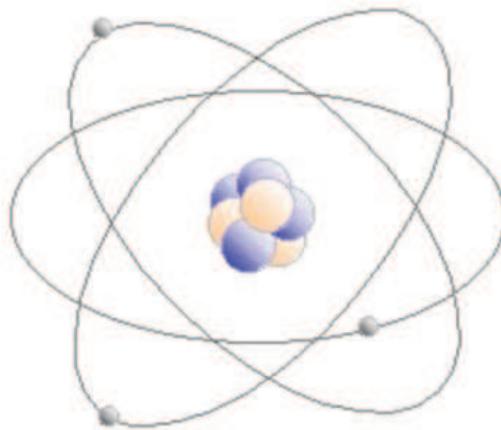
La dernière échelle d'observation correspond à la pièce ou à l'échantillon considéré dans sa totalité. Nous n'avons plus accès expérimentalement qu'à son comportement moyenné : le cycle d'hystérésis.

La Figure II-1 récapitule de manière synthétique ces différentes échelles d'observation. Au cours des différents chapitres de cette partie, nous allons aborder l'origine du magnétisme au sein de la matière afin de recadrer certaines idées reçues, puis nous élargirons notre spectre à une vision plus grossière permettant d'expliquer une structure en domaines. Nous finirons ainsi par une interprétation macroscopique débouchant sur un modèle exploitable dans le génie électrique.

## B. Et ainsi tout commença ...

### 1. L'atome de Bohr

L'atome est formé d'un noyau où toute sa masse est pratiquement concentrée et d'électrons légers qui gravitent autour ; les électrons sont chargés négativement ; le noyau comprend des protons chargés positivement, et des neutrons électriquement neutres. Il y a autant de protons que d'électrons, de sorte que l'atome, dans son ensemble, est neutre. Un atome qui a perdu (ou gagné) un ou plusieurs électrons est un ion positif (ou négatif). L'atome le plus simple est l'atome d'hydrogène qui comprend un noyau de charge  $+e$  autour duquel gravite un électron de charge  $-e$ .



**Figure II-2 : Représentation planétaire de l'atome de lithium (le noyau est grossi par rapport aux dimensions des orbites)**

Il est nécessaire d'introduire des conditions de quantification ne serait-ce que pour expliquer la stabilité de l'atome. Supposons en effet (cette approximation est très grossière) que l'électron décrive une orbite circulaire avec un mouvement uniforme ; d'après les lois de l'électromagnétisme classique, l'électron animé d'un tel mouvement devrait rayonner ; il verrait alors son énergie décroître entraînant donc une diminution du rayon de son orbite. La théorie classique conduit donc à penser que l'électron devrait tomber rapidement sur le noyau : elle ne peut expliquer la stabilité de l'atome.

En 1923, Niels Bohr établit une nouvelle théorie introduisant une condition de quantification, comme développement de la théorie des quanta émise par Max Planck vers 1900. D'après cette dernière, l'énergie électromagnétique ne peut être émise de manière continue, mais uniquement en paquets d'énergie appelés quanta. Une radiation de fréquence  $\nu$  est émise en quanta d'énergie de valeur  $h\nu$ .

Bohr admet que l'électron ne peut décrire que certaines orbites discrètes, c'est-à-dire séparées les unes des autres, sur lesquelles il ne rayonne pas, et qui peuvent donc être stables. A chacune de ces orbites correspond une énergie déterminée ; l'émission électromagnétique a lieu lorsque l'électron « saute » d'une trajectoire à une autre. Il passe d'un niveau d'énergie donné à un niveau d'énergie inférieur et l'énergie libérée apparaît sous forme de lumière de longueur d'onde bien déterminée. La théorie de Bohr explique donc l'existence de spectres de raies émis par les atomes : comme les radiations émises forment une suite discontinue, on ne voit que de minces raies lumineuses correspondant à des longueurs d'onde précises, et non des bandes de lumière comprenant un grand nombre de longueurs d'onde.

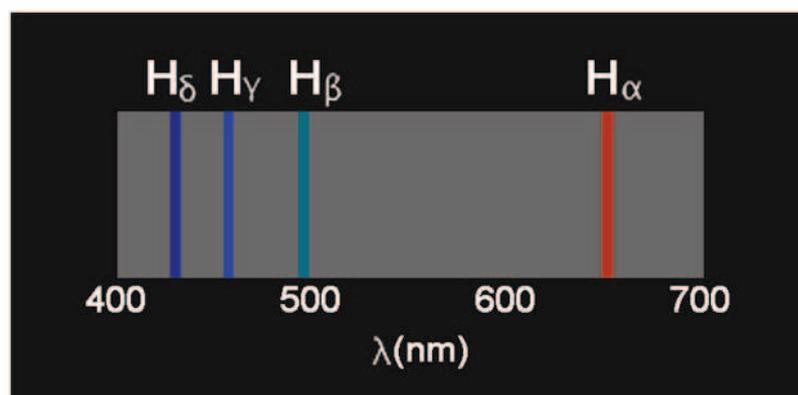


Figure II-3 : Spectre d'émission de l'hydrogène

La condition de quantification de Bohr, introduite de façon à peu près gratuite, était donc un choix des orbites possibles de l'électron. La même relation mathématique que celle donnée par Bohr fut introduite à nouveau, mais de façon plus logique, dans le cadre de la Mécanique Ondulatoire de Louis de Broglie (1924).

Dans cette théorie, à toute particule en mouvement est associée une onde dont la longueur d'onde  $\lambda$  est reliée à la masse  $m$  et à la vitesse  $v$  de la particule par la relation :

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (\text{II-1})$$

Il est alors assez naturel d'admettre que le mouvement de l'électron sur une orbite n'est stable que si la longueur d'onde de l'orbite est un multiple entier  $n$  de la longueur d'onde associée à l'électron.

## 2. Les quatre nombres quantiques

Cet entier  $n$  est appelé nombre quantique principal. Il peut prendre toutes les valeurs entières positives. Il fixe la valeur de l'énergie qui est inversement proportionnelle à  $n^2$ . Dans le cas où il y a plus d'un électron autour du noyau, l'énergie de cette orbite est légèrement modifiée du fait des interactions entre électrons ; ce couplage sera discuté dans la section II.C. Les électrons dont les orbites ont les valeurs  $n = 1, 2, 3, \dots$  appartiennent respectivement aux couches  $K, L, M, \dots$

Pour caractériser le mouvement de l'électron, il faut introduire d'autres paramètres. Le nombre quantique secondaire (ou azimutal)  $l$  fixe la valeur du moment cinétique de l'électron par rapport au noyau. Pour une valeur  $l$  fixée, le module du moment cinétique orbital  $\vec{L}$  vaut  $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ . Ce nombre  $l$  peut prendre  $n$  valeurs distinctes ( $l = 0, 1, \dots, n-1$ ) en fonction de l'allure de l'orbite.

Le moment cinétique orbital pour un électron peut être imaginé comme un modèle vectoriel où le vecteur  $\vec{L}$  subi une précession dans une direction de l'espace. Ainsi, seulement une valeur  $l$  peut être mesurée le long de cette direction (Figure II-4).

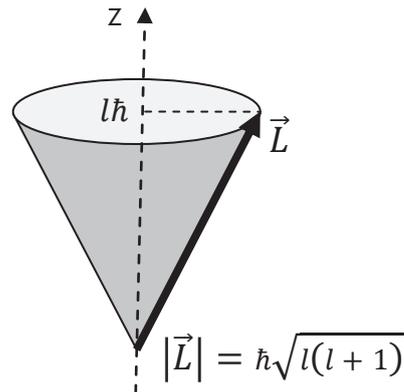


Figure II-4 : Modèle vectoriel du moment cinétique orbital

Si le nombre  $l$  fixe la norme du vecteur du moment cinétique orbital  $\vec{L}$ , le nombre quantique  $m_l$  appelé nombre quantique magnétique caractérise la direction de ce vecteur par rapport à un axe donné. Son nom provient du rôle essentiel qu'il joue lorsque l'atome est placé dans un champ magnétique (effet Zeeman). Introduire  $l$  et  $m_l$ , c'est dire que non seulement la norme du moment cinétique ne peut prendre que des valeurs discontinues mais qu'il en est de même de l'angle entre ce vecteur et un axe donné (Figure II-5). Pour une valeur donnée de  $l$ , le nombre  $m_l$  peut prendre les valeurs entières comprises entre  $-l$  et  $+l$ .

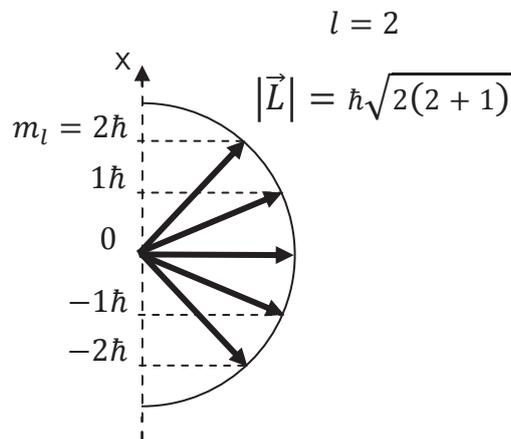
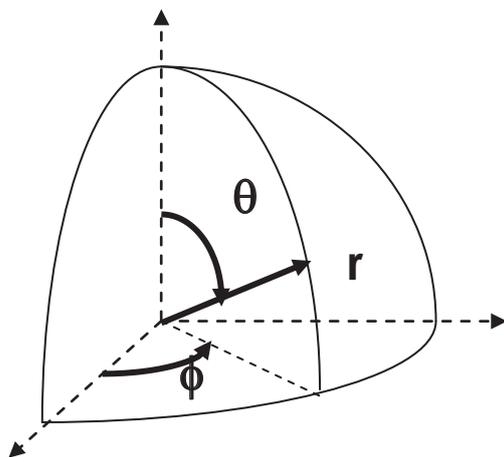


Figure II-5 : Orientation possible de  $\vec{L}$  suivant les valeurs discrètes de  $m_l$

Pour une représentation plus facile de la correspondance de ces trois nombres quantiques ( $n$ ,  $l$  et  $m_l$ ), nous pouvons effectuer une analogie à l'aide du système de coordonnées sphériques (Figure II-6).



$r$  peut être assimilé  
au nombre principal  $n$

$\theta$  peut être assimilé  
au nombre azimutal  $l$

$\phi$  peut être assimilé  
au nombre magnétique  $m_l$

Figure II-6 : Analogie entre nombres quantiques et coordonnées sphériques

L'état d'un électron ne dépendant que de ces trois nombres quantiques, certains résultats expérimentaux ne peuvent être expliqués. En effet l'expérience de Stern et Gerlach (1920) laisse supposer qu'il existe deux types d'électrons n'ayant pas la même énergie. Ainsi, dès 1925, la notion de spin a été formulée. Tout comme l'électron a un moment cinétique orbital  $\vec{L}$  du fait de son mouvement autour du noyau, il possède également un moment cinétique intrinsèque ou de spin  $\vec{S}$ . Le moment cinétique de spin doit obéir aux mêmes règles que le moment cinétique orbital c'est-à-dire à la quantification de son module et de sa projection. Ainsi,  $|\vec{S}| = \hbar\sqrt{s(s+1)}$  (où  $s$  est appelé spin de l'électron et prend la valeur  $\frac{1}{2}$ ). Sa projection prend les valeurs  $m_s\hbar$  (où  $m_s$  est appelé nombre quantique magnétique de spin et prend les valeurs  $\pm\frac{1}{2}$ ).

### 3. Les orbitales

Nous avons donné de l'atome l'image proposée au début du XX<sup>ème</sup> siècle : l'atome est en quelque sorte un petit système solaire avec un noyau semblable au Soleil autour duquel gravitent les électrons, comme les planètes, sur leurs trajectoires. Ces conceptions ont été abandonnées lorsque Heisenberg a montré, avec le principe d'indétermination qui porte son nom, que l'on ne pouvait connaître simultanément la position et la vitesse d'une particule : si l'une de ces quantités est connue, on n'a alors absolument aucun renseignement sur l'autre<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Les opérateurs  $x$  et  $p$  ne commutent pas : une particule ne possède donc pas ces deux caractéristiques en même temps. Ainsi aucune trajectoire ne peut être définie.

On ne peut plus, dans ces conditions, parler de trajectoire. Mais dans une résolution purement mathématique des équations de la mécanique quantique, les trois nombres  $n$ ,  $l$  et  $m_l$  définissent une orbitale. Une orbitale donnée ne peut recevoir que deux électrons de spin opposé. Le mouvement d'un électron est caractérisé par une fonction, qui, à un instant donné, donne la probabilité de présence de l'électron en tout point de l'espace.

#### 4. Corrélation avec les moments magnétiques

Le moment cinétique orbital  $\vec{L}$  et le moment magnétique  $\vec{\mu}_l$  créé par le mouvement de l'électron autour du noyau sont opposés. Leurs modules sont liés par la relation :

$$\frac{|\vec{\mu}_l|}{|\vec{L}|} = \frac{e}{2m_0} \quad (\text{II-2})$$

Ainsi, d'après la relation définie dans la section II.B.2, nous pouvons en déduire le moment magnétique orbital par l'équation suivante :

$$|\vec{\mu}_l| = \sqrt{l(l+1)} \frac{\hbar e}{2m_0} \quad (\text{II-3})$$

Le ratio  $\frac{\hbar e}{2m_0}$  est appelé le magnéton de Bohr. Il est noté  $\mu_B$  ( $\mu_B \approx 9,274 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ ).

En ce qui concerne le moment créé par le spin, l'expérience montre que le rapport entre le moment cinétique et le moment magnétique de spin est le double de celui créé par l'orbitale. Ainsi

$$\frac{|\vec{\mu}_s|}{|\vec{S}|} = \frac{g_e e}{2m_0} \quad (\text{II-4})$$

avec  $g_e = 2,002290716$  le facteur  $g$  d'un électron libre. Ainsi le moment magnétique total d'un électron libre est :

$$|\vec{\mu}| = \left( \sqrt{l(l+1)} + g_e \sqrt{s(s+1)} \right) \mu_B \quad (\text{II-5})$$

### C. Modèle vectoriel d'un atome : couplage de Russell-Saunders

Prenons par exemple la structure de l'atome de fer ( $Z=26$  - Table II-1).

Couch $n$	Répartition sur les sous-couches									
	$l = 0$	$l = 1$				$l = 2$				
$m_l$	0	-1	0	1	-2	-1	0	1	2	
1	↑↓		-				-			
2	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓			-			
3	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	↑	↑
4	↑↓		-				-			

Table II-1 : Structure électronique de l'atome Fe

Dans une sous-couche pleine, il y a autant de spins « up » que de spins « down ». De plus il y a autant de valeurs positives pour  $m_l$  que de valeurs négatives : toutes les sources de moments magnétiques s'annulent deux à deux. Il suffit donc de s'intéresser à la couche électronique incomplète (dans notre exemple, la 3d correspondant à  $n = 3$  et  $l = 2$ ).

On définit le couplage entre spins  $S$ , le couplage entre orbitales  $L$  et le couplage spin-orbitale  $J$  suivant les trois règles de Hund suivantes :

- 1)  $S = \sum_{i=1}^{N_{\text{électrons}}} m_{s_i}$
- 2)  $L = \sum_{i=1}^{N_{\text{électrons}}} m_{l_i}$
- 3)  $J = |L + S|$  si la couche est remplie plus que de moitié sinon  $J = |L - S|$

Dans notre exemple,  $S = 2$ ,  $L = 2$  et donc  $J = 4$ .

Ainsi on peut définir le moment magnétique total de l'atome par l'équation :

$$|\vec{\mu}| = g_J \sqrt{J(J+1)} \mu_B \quad (\text{II-6})$$

où  $g_J$  est appelé le facteur de Landé défini par la relation :

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (\text{II-7})$$

La détermination des moments magnétiques à l'aide de cette formule est cohérente dans le cas des terres rares par exemple (Table II-2).

Cependant, Stoner, en 1929, remarque une incohérence entre le calcul et les mesures expérimentales effectuées pour les ions appartenant au groupe du fer (Table II-3).

Ion	Configuration	$g_J\sqrt{J(J+1)}\mu_B$	Moment mesuré
Ce <sup>3+</sup>	4f <sup>1</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>6</sup>	2.54	2.4
Pr <sup>3+</sup>	4f <sup>2</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>6</sup>	3.58	3.5
Nd <sup>3+</sup>	4f <sup>3</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>6</sup>	3.62	3.5
Gd <sup>3+</sup>	4f <sup>7</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>6</sup>	7.94	8.0

Table II-2 : Validation du couplage de Russell-Saunders pour certain ions terres rares d'après (6)

Toutefois, si l'on considère uniquement le spin comme source de moment magnétique (moment orbital bloqué), on peut calculer le moment magnétique total en utilisant l'équation suivante :

$$|\vec{\mu}| = g_e\sqrt{S(S+1)}\mu_B \quad (\text{II-8})$$

Ce blocage est dû aux fortes interactions que les atomes qui entourent un ion magnétique exercent sur lui : le moment cinétique orbital est bloqué par le champ cristallin. L'étude de ces interactions ne conduit pas à un corps de doctrine aussi général que le magnétisme des atomes libres : chaque ion est un cas particulier qu'il faut traiter en lui-même.

Z	Ion	Ground term	L	S	J	$M_{\text{eff.exp}}$	$\frac{g\sqrt{J(J+1)}}{g\sqrt{L(L+1)+4S(S+1)}}$	$\frac{2\sqrt{S(S+1)}}{g\sqrt{L(L+1)+4S(S+1)}}$	
18	K <sup>+</sup> , V <sup>5+</sup>	<sup>1</sup> S <sub>0</sub>	0	0	0	diam.	0	0	0
19	Sc <sup>2+</sup> , Ti <sup>3+</sup> , V <sup>4+</sup>	<sup>2</sup> D <sub>3/2</sub>	2	1/2	3/2	1.73	1.55	3.01	1.78
20	Ti <sup>2+</sup> , V <sup>3+</sup>	<sup>3</sup> F <sub>2</sub>	3	1	2	2.83	1.63	4.49	2.83
21	V <sup>2+</sup> , Cr <sup>3+</sup> , Mn <sup>4+</sup>	<sup>4</sup> F <sub>3/2</sub>	3	3/2	3/2	3.82	0.70	5.21	3.87
22	Cr <sup>2+</sup> , Mn <sup>3+</sup>	<sup>5</sup> D <sub>0</sub>	2	2	0	4.81	0	5.50	4.91
23	Mn <sup>2+</sup> , Fe <sup>3+</sup>	<sup>6</sup> S <sub>5/2</sub>	0	5/2	5/2	5.85	5.92	5.92	5.92
24	Fe <sup>2+</sup>	<sup>5</sup> D <sub>4</sub>	2	2	4	5.52 – 5.22	6.71	5.50	4.91
25	Co <sup>2+</sup>	<sup>4</sup> F <sub>9/2</sub>	3	3/2	9/2	5.20 – 4.43	6.63	5.21	3.87
26	Ni <sup>2+</sup>	<sup>3</sup> F <sub>4</sub>	3	1	4	3.23	5.59	4.49	2.83
27	Cu <sup>2+</sup>	<sup>2</sup> D <sub>5/2</sub>	2	1/2	5/2	2.02 – 1.81	3.55	3.01	1.73

Table II-3 : Validation du calcul de Stoner pour les éléments du groupe Fer d'après (6)

## D. Du paramagnétisme au ferromagnétisme : quand Langevin rencontre Weiss

Dans la section précédente, nous avons vu qu'un atome libre peut acquérir un moment magnétique grâce aux mouvements orbital et de spin de ses électrons. Quand les atomes sont condensés dans un solide cristallin, une aimantation peut (ou ne peut pas) apparaître : cela dépend du couplage entre les moments dans le solide. Cependant, il est utile de présenter d'abord la théorie du paramagnétisme de type Langevin.

### 1. Paramagnétisme des atomes libres

Brillouin a montré que la composante du moment magnétique  $\mu$  des atomes peut être quantifiée dans la direction du champ  $H$ . Ainsi, pour chaque atome en présence d'un champ, il existe, en plus des caractéristiques  $L$ ,  $S$  et  $J$ , un ordre de dégénérescence  $2J + 1$  correspondant au nombre de possibilités différentes d'orientation du moment cinétique  $\vec{J}$  par rapport à un axe donné. Ces possibilités sont décrites par l'introduction d'un nouveau nombre quantique  $M_a = [J, J - 1, \dots, -J + 1, -J]$  qui représente la projection de ce moment suivant l'axe ( $Oz$ ). Lorsqu'aucun champ n'est appliqué, toutes ces orientations ont la même énergie. Cependant, il n'en est pas de même lors de l'application d'un champ magnétique  $H$  : à ces différentes orientations correspondent différentes énergies (Figure II-7).

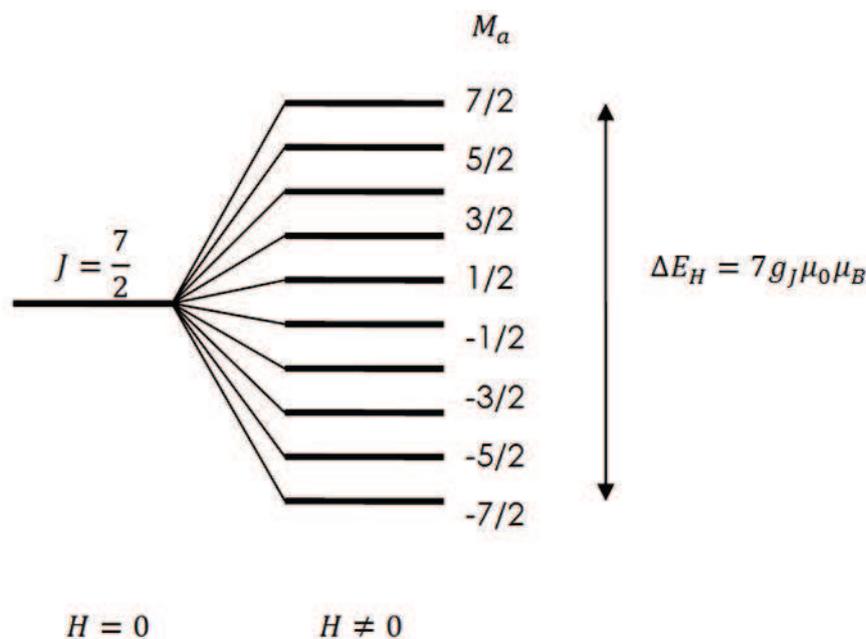


Figure II-7 : Dégénérescence des énergies sous l'application d'un champ  $H$  pour le cas  $J = \frac{7}{2}$

Ainsi pour chaque possibilité d'orientation l'énergie correspondante vaut :

$$E_H = g_J \mu_B \vec{M}_a \cdot \mu_0 \vec{H} \quad (\text{II-9})$$

Donc, en appliquant les lois de Maxwell-Boltzmann qui définissent de manière probabiliste un équilibre entre l'ordre créé par l'application d'un champ magnétique et le désordre créé par l'agitation thermique, nous pouvons obtenir, dans le cas d'un solide contenant  $N$  atomes, une expression de l'aimantation globale  $M$  de ce groupement d'atomes :

$$M = N \frac{\sum_{M_a=-J}^{M_a=J} g_J M_a \mu_B \cdot e^{\frac{g_J M_a \mu_0 \mu_B H}{kT}}}{\sum_{M_a=-J}^{M_a=J} e^{\frac{g_J M_a \mu_0 \mu_B H}{kT}}} \quad (\text{II-10})$$

Dans le cas où le champ appliqué  $H$  est faible ou bien dans le cas d'une température élevée (c'est-à-dire  $\frac{g_J M_a \mu_0 \mu_B H}{kT} \ll 1$ ), on peut exprimer la susceptibilité  $\chi$  par :

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{N \mu_0 J(J+1) g_J^2 \mu_B^2}{3kT} = \frac{C}{T} \quad (\text{II-11})$$

Nous retrouvons ainsi l'expression de la loi de Curie énoncée par ce dernier en 1895, expression seulement justifiée à l'époque par des fondements expérimentaux.

Dans le cas où le champ appliqué  $H$  soit suffisamment fort ou que la température soit assez basse, l'expression précédente ne peut plus être négligée vis-à-vis de l'unité. Nous obtenons ainsi la relation :

$$M = NJ g_J \mu_B B_J \left( \frac{H}{a} \right) \quad (\text{II-12})$$

Avec  $B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right)$  et  $a = \frac{g_J \mu_0 J \mu_B}{kT}$

La fonction  $B_J(x)$  est appelée fonction de Brillouin. La loi de Curie n'est en fait qu'une approximation de cette fonction par sa tangente à l'origine (c'est-à-dire pour un rapport  $\frac{H}{T}$  faible). Ces résultats ont fait l'objet de nombreuses vérifications expérimentales comme les mesures effectuées à basse température par Henry en 1952 (Figure II-8).

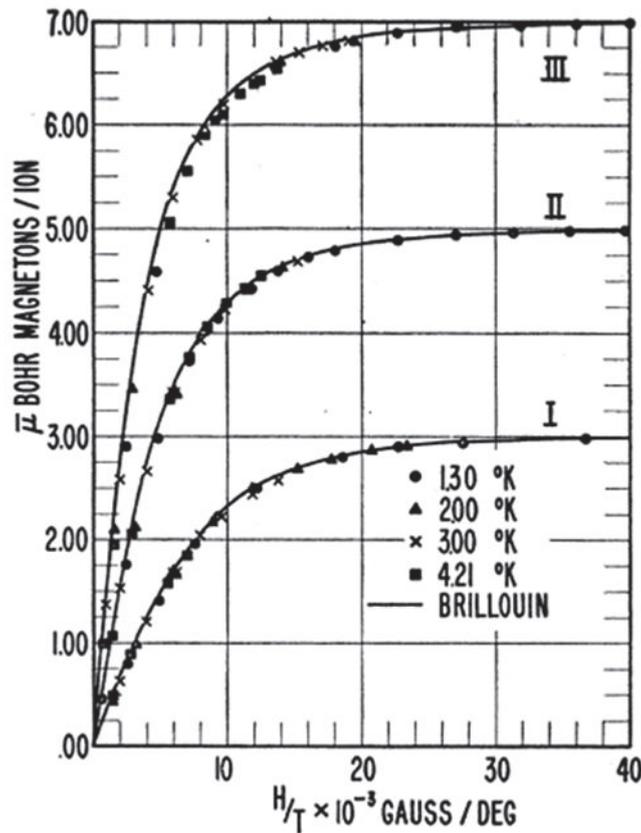


Figure II-8 : Courbes d'aimantation de trois sels paramagnétiques I : Ion  $\text{Cr}^{3+}$  ( $J = \frac{3}{2}$ ) - II : Ion  $\text{Fe}^{3+}$  ( $J = \frac{5}{2}$ ) - III : Ion  $\text{Gd}^{3+}$  ( $J = \frac{7}{2}$ ) d'après (16)

## 2. L'interaction d'échange de Heisenberg et le champ de Weiss : une explication au ferromagnétisme

Il nous faut comprendre maintenant par quels mécanismes physiques des matériaux exceptionnels (comme le fer par exemple) peuvent acquérir une induction de l'ordre du Tesla alors que la théorie du paramagnétisme ne conduit qu'à des valeurs bien plus petites. En effet, on constate sur la Figure II-8 que l'alignement parallèle de tous les moments n'est obtenu que pour une valeur élevée de champ  $H$  appliqué et pour des valeurs relativement faibles de température. Ce comportement contraste avec le comportement observé dans certains métaux magnétiques tels que le fer, le cobalt ou le nickel. Dans ceux-ci une forte aimantation est possible même lorsqu'aucun champ n'est appliqué. Ces matériaux sont appelés ferromagnétiques et sont caractérisés par une aimantation spontanée.

Cette aimantation spontanée se dissipe au-delà d'une certaine température  $T_c$  appelée température de Curie. A haute température, l'énergie calorifique permet de vaincre l'interaction d'échange et les moments magnétiques prennent des

directions aléatoires : ils se comportent donc comme des matériaux paramagnétiques. En dessous de cette température  $T_c$ , le matériau est dit ordonné de manière ferromagnétique.

Sur la base de la compréhension de l'aimantation telle que nous l'avons vue dans la section II.D.1, la présence d'une aimantation spontanée peut être expliquée par un fort champ interne  $H_m$ . Ce champ interne est en fait capable de créer un saut d'énergie si fort que seul le plus bas niveau de dégénérescence  $M_a = -J$  est « peuplé ». Heisenberg a montré en 1928 que ce champ interne découle uniquement d'une interaction entre les spins totaux des atomes : on dit qu'il existe une interaction d'échange entre eux. L'interaction d'échange constitue en réalité une interaction entre atomes proches voisins par l'intermédiaire d'électrons mis en commun. Elle s'exprime en fonction des orientations des spins  $S_i$  et  $S_j$  des atomes voisins sous la forme :

$$W_{ij} = -2J_{ij}\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (\text{II-13})$$

Dans cette expression,  $J_{ij}$  désigne une constante d'échange entre les atomes  $i$  et  $j$ . Elle dépend entre autre de la distance séparant ces deux atomes.

On peut donc construire le hamiltonien de l'énergie d'échange d'un système composé de  $N$  atomes :

$$\mathcal{H}_{\text{échange}} = - \sum_{i < j} 2J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (\text{II-14})$$

La résolution étant complexe, nous ne détaillerons pas les calculs (8). Cependant cette résolution conduit au même résultat que Weiss avait émis en 1907 alors que la théorie quantique n'était pas encore née :

$$H_m = \alpha M \quad (\text{II-15})$$

$\alpha$  est appelée la constante de champ moléculaire et  $H_m$  est nommé le champ moléculaire de Weiss. Pour simplifier, son expression peut se ramener à  $\alpha = \frac{T_c}{c}$ .

Donc le champ total perçu par les moments magnétiques est défini par :

$$H_{\text{tot}} = H + \alpha M \quad (\text{II-16})$$

où  $H$  représente le champ extérieur appliqué.

Ainsi en combinant (II-12) et (II-16) nous pouvons recalculer l'aimantation globale dans le cas d'un matériau ferromagnétique :

$$M = NJg_j\mu_B B_j\left(\frac{H_{tot}}{a}\right) \quad \text{avec} \quad a = \frac{g_j\mu_0 J\mu_B}{kT} \quad (\text{II-17})$$

La finalité de la théorie de Weiss est de définir la constante  $NJg_j\mu_B$  comme la valeur de l'aimantation à saturation  $M_s$  et d'utiliser, à la place de la fonction de Brillouin  $B_j(x)$ , la fonction de Langevin<sup>2</sup>  $L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$ . Ainsi on obtient :

$$M = M_s L\left(\frac{H_{tot}}{a}\right) \quad \text{avec} \quad a = \frac{g_j\mu_0 J\mu_B}{kT} \quad (\text{II-18})$$

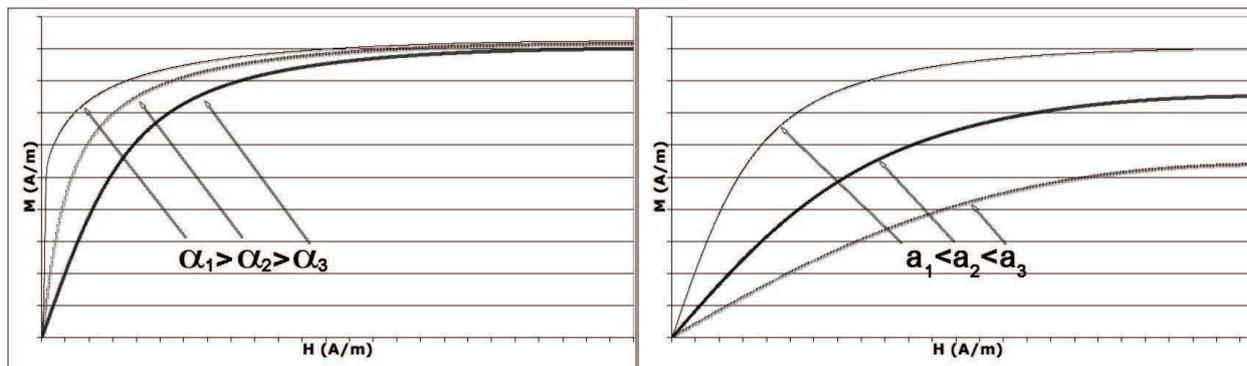


Figure II-9 : Représentation de l'aimantation par la fonction de Langevin – Variation avec les différents paramètres pour  $H_{tot}$  croissant

### 3. Représentation sommaire de l'hystérésis

Le cas simple d'une saturation brutale  $M = \pm M_s$ , avec un coude à  $H_{tot} = \pm H_s$ , permet de faire la différence entre paramagnétisme et ferromagnétisme. Les équations sont représentées sous forme de schéma bloc sur la Figure II-10. La pente  $\chi = \frac{C}{T}$  est issue de l'approximation de la susceptibilité par la loi de Curie (II-10).

Une telle représentation est rarement utilisée en physique. Elle est plus classique en Génie Electrique, pour l'étude des amplificateurs opérationnels par exemple. Les critères de stabilité découlent directement de ce schéma bloc ; ils expliquent qualitativement le magnétisme.

Avec un gain en boucle ouverte  $\frac{T_c}{T} < 1$ , le gain en boucle fermée, que l'on appelle susceptibilité,  $\chi = \frac{M}{H_{ext}} = \frac{C}{T - T_c}$  est positif.  $M$  et  $H_{ext}$  sont de même signe. La susceptibilité est inversement proportionnelle à la température.  $M$  peut prendre

<sup>2</sup> On remarque que si  $J \rightarrow \infty$ , alors  $B_j(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} = L(x)$  où  $L(x)$  s'appelle la fonction de Langevin. Ainsi l'utilisation de cette fonction à la place de la fonction de Brillouin n'introduit qu'une erreur minime si  $J$  est assez élevée.

n'importe quelle valeur comprise entre 0 et  $M_s = \frac{C}{T} H_s$ . Avec  $H_{ext} < H_s \left(1 - \frac{T_c}{T}\right)$ , on a  $M < M_s$ . Le corps s'aimante peu, il est donc paramagnétique.

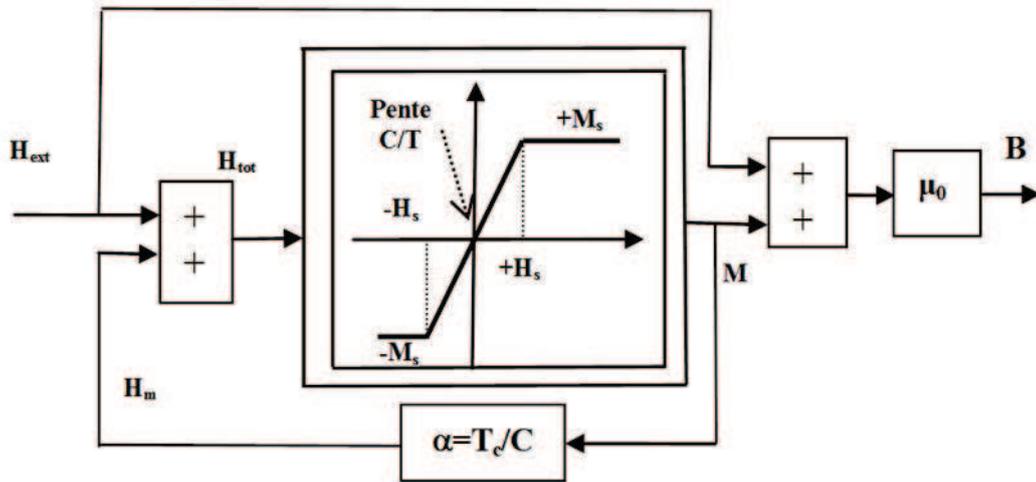


Figure II-10 : Modélisation simple d'hystérésis à l'aide d'une analogie avec un trigger

Avec un gain en boucle ouverte  $\frac{T_c}{T} > 1$ , la susceptibilité  $\chi$  est négative, les équations précédentes ont une solution avec  $H_{ext}$  et  $M$  de signe contraire. Cette solution existe théoriquement, elle est indiquée sur la Figure II-11 dans le plan  $M(H_{ext})$ , par une droite reliant les 2 points rouges, mais elle n'est pas stable. Le matériau bascule dans la situation  $M = +M_s$ . C'est le ferromagnétisme classique en dessous de la température de Curie (la susceptibilité est là aussi inversement proportionnelle à la température).

En dessous de la température de Curie  $T_c$  le fer se comporte, dans le plan  $M(H_{ext})$ , comme un « trigger » dont la caractéristique est donnée sur la Figure II-11. Il apparaît un champ coercitif de valeur :

$$H_c = H_s \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) = M_s \frac{T_c - T}{C} \quad (\text{II-19})$$

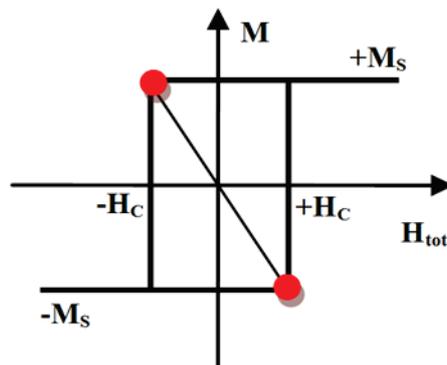
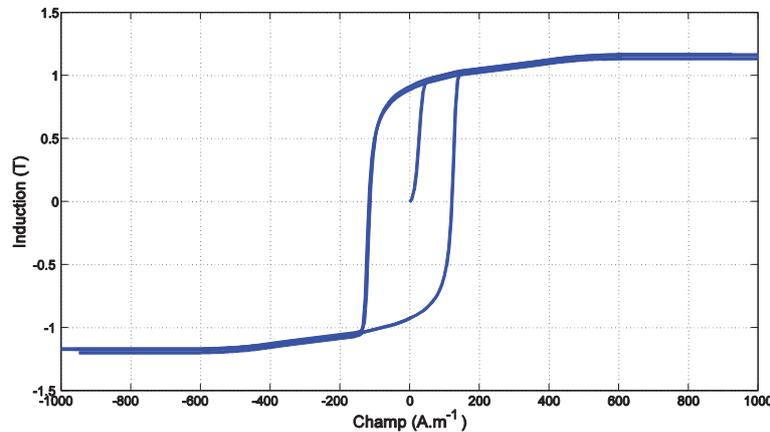


Figure II-11 : Bascule « hystérétique » émanant de la théorie du champ moléculaire de Weiss

Si maintenant nous utilisons dans notre simulation de la Figure II-10 la loi anhystérétique telle que Weiss la définit (II-18) à la place de la simple saturation précédente, nous obtenons une simulation donnant une courbe hystérétique (Figure II-12).



**Figure II-12 : Cycle d'hystérésis obtenu par couplage d'une fonction de Langevin au champ moléculaire de Weiss ( $M_s = 10^6$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$  et  $a = 100$ )**

La théorie du champ moléculaire explique le coercitif et le rémanent mais présente des limites. La plus importante est l'impossibilité d'expliquer que la matière puisse être dans un état désaimanté ( $B$  n'est jamais nul). Le fait est discuté dans la section II.E et conduit à la notion de domaine. Le magnétisme est loin d'être correctement décrit par un modèle aussi simple. La spectroscopie et la mécanique quantique sont venues compléter les premiers points de vue. La physique du magnétisme est sûrement trop complexe pour être correctement décrite ici. Le champ moléculaire est cependant à l'origine de nombreux modèles de simulation pour représenter la non-linéarité du fer dans le domaine du Génie Electrique.

## E. Domaines magnétiques

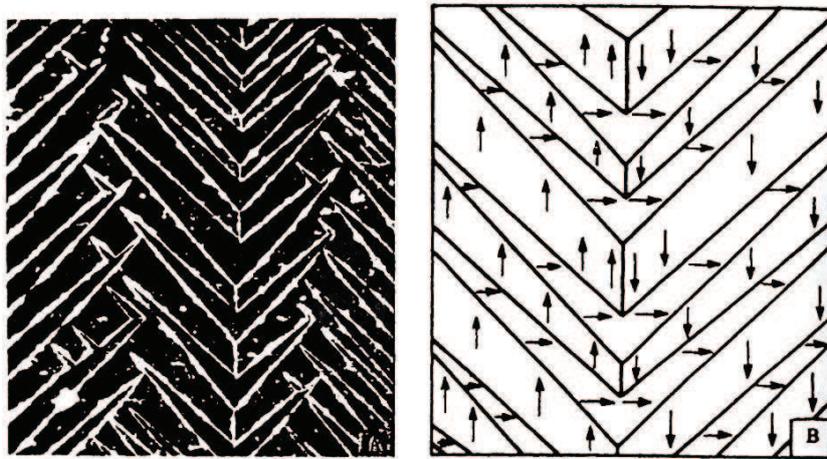
Nous avons vu que, du fait de l'interaction d'échange d'Heisenberg, les moments magnétiques atomiques ont tendance à tous s'orienter dans la même direction au sein d'un matériau ferromagnétique.

Cependant, dans un matériau, l'aimantation globale est nulle lorsqu'il est démagnétisé. On peut donc supposer que ce matériau est « découpé » en régions où l'aimantation prend des orientations différentes pour chacune de ces régions de telle sorte que, d'une manière globale, la somme de ces moments s'annule : ces régions sont appelées domaines.

Il y a eu deux importantes observations expérimentales dans les années qui ont suivi le travail de Weiss afin de confirmer cette hypothèse de structure en domaines magnétiques.

La première confirmation fut la détection « indirecte » des domaines magnétiques par l'effet Barkhausen (17). La réorientation des moments magnétiques dans un matériau ferromagnétique, due à des changements brutaux dans le champ magnétique entourant ce matériau, put être détectée par une amplification adaptée d'un signal provenant d'une bobine encerclant le matériau. Ce soudain déplacement discontinu des parois des domaines peut générer une émission magnéto-acoustique (18), émission mise en évidence la première fois par Lord en 1975. De récents progrès ont été faits dans ce domaine notamment dans (19) et (17).

La seconde confirmation a été faite par des observations « directes » de la structure en domaines sur la surface d'un échantillon par la technique des poudres de Bitter (20) (Figure II-13). Cette méthode fut remise au goût du jour dans (21).



**Figure II-13 : Visualisation de domaines magnétiques à la surface d'une tôle de fer à l'aide de la méthode Bitter (22)**

D'autres méthodes telles que des méthodes magnéto-optiques (effet Kerr (23) et effet Faraday (24) , TEM, SEM, topographie par rayons X, etc...) sont actuellement utilisées.

En 1935, Landau et Lifshitz (25) ont montré que cette structuration est la conséquence de la minimisation de diverses énergies mises en jeu au sein du matériau ferromagnétique.

- ✚ L'énergie magnétostatique qui est liée au champ démagnétisant et qui tend à minimiser le parcours des lignes de champ dans l'air.
- ✚ L'énergie magnétocristalline qui permet de tenir compte des axes de facile aimantation et ainsi d'expliquer la rotation des moments magnétiques
- ✚ L'énergie de paroi qui est l'énergie stockée dans la paroi afin d'équilibrer la diminution de l'énergie magnétostatique.
- ✚ L'énergie d'échange que nous avons expliquée plus haut (cf section II.D.2).
- ✚ L'énergie magnéto-élastique qui résulte de l'orientation préférentielle de l'aimantation lorsqu'il est sous une contrainte mécanique. Nous en ferons abstraction dans notre étude.

Nous allons donc mettre en évidence l'existence de ces énergies au sein d'un matériau. Toutefois la minimisation de ces énergies conduisant à une étude du micromagnétisme ne permet pas d'obtenir un modèle exploitable en tant que tel dans le monde du génie électrique (26) (27).

Ainsi nous ne rentrerons pas dans les détails de calcul de ces énergies mais nous ferons juste un état de l'art de ces diverses énergies mises en jeu. Cependant ce concept d'énergie nous servira dans le chapitre suivant lors de l'élaboration d'un modèle exploitable à l'aide de grandeurs macroscopiques.

### 1. Energie magnétostatique d'un matériau uni-domaine

L'énergie par unité de volume d'un dipôle magnétique d'aimantation  $M$  dans un champ magnétique  $H$  est donnée par la relation

$$E = -\mu_0 \int_V H \cdot dM \quad (\text{II-20})$$

Quand ce dipôle est seulement soumis à son champ démagnétisant  $H_d = -N_d M$  ( $N_d$  est le facteur démagnétisant), son énergie devient

$$E = \frac{\mu_0}{2} N_d M^2 \quad (\text{II-21})$$

Ainsi lorsque ce matériau est soumis à un champ extérieur  $H$  faisant un angle  $\phi - \theta$  avec l'aimantation  $M$  ( $M$  fait un angle  $\theta$  avec l'axe de facile aimantation cristalline – voir section II.E.2), son énergie vaut

$$E = -HM \cos \theta + \frac{\mu_0}{2} N_d M^2 \quad (\text{II-22})$$

Le calcul de cette énergie pour un matériau multi-domaines est plus complexe mais nous pouvons toutefois noter que si l'aimantation globale  $M$  d'un matériau est réduite par une création de structure en domaines, il en est de même pour l'énergie magnétostatique « intrinsèque » (c'est-à-dire celle générée par le champ démagnétisant). La taille de ces domaines est déterminée par un autre facteur que nous n'avons pas encore considéré : l'énergie d'une paroi séparant deux domaines.

## 2. Energie magnétocristalline

Dans un matériau ferromagnétique cristallin, le vecteur de l'aimantation ne peut pas prendre n'importe quelle direction. Certaines directions cristallographiques, appelées directions (ou axes) de facile aimantation, sont privilégiées.

L'énergie à fournir pour amener le matériau de l'état désaimanté à un état aimanté donné dépendra de l'angle du champ extérieur par rapport à ces directions. On peut donc définir certaines constantes appelées constantes d'anisotropie.

Ainsi dans une structure uniaxiale (cristal hexagonal ou tétragonal), si le vecteur de l'aimantation  $\vec{M}$  fait un angle  $\theta$  avec l'axe de facile aimantation, son énergie d'anisotropie  $E_{ani}$  vaut :

$$E_{ani} = K_1 \sin^2 \theta + K_2 \sin^4 \theta + K_3 \sin^6 \theta \quad (\text{II-23})$$

avec  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  les constantes d'anisotropie du matériau.

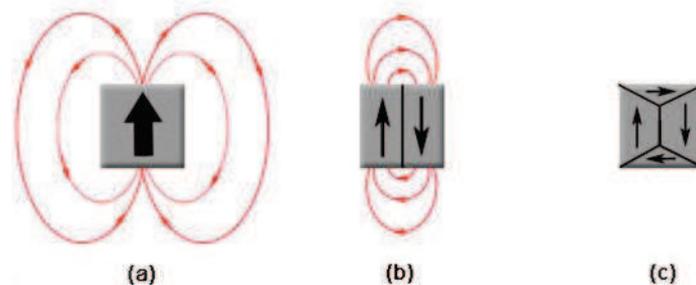
## 3. L'énergie de paroi

Il existe une autre énergie, découlant des précédentes, qui contribue à la configuration de la structure en domaines, c'est l'énergie des parois.

En effet, le passage d'un domaine de direction donnée à un autre domaine de direction différente ne peut pas se faire brutalement (entre deux atomes

consécutifs) sans augmenter, localement, le terme d'énergie d'échange d'une quantité importante. Il se forme une zone entre ces deux domaines où les moments de spin des atomes ne sont pas parallèles et assurent une transition angulaire « douce ». Ces zones sont appelées des parois de Bloch (rotation hélicoïdale des spins, donc hors du plan des domaines) ou parois de Néel (rotation des spins dans le plan des domaines). Une modification locale de l'énergie d'échange et de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline induit la notion d'épaisseur de la paroi. L'énergie stockée dans la paroi correspond à l'augmentation de l'énergie interne nécessaire pour « désaligner » les moments de spin (modification de l'énergie d'échange), et les éloigner de la direction de facile aimantation (modification de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline).

À chaque fois qu'une paroi se crée,  $E_{ms}$  diminue, mais  $E_{ech}$  et  $E_{ani}$  augmentent. Il se crée donc un équilibre qui limite le nombre de domaines (Figure II-14).



**Figure II-14 : Exemple de configurations en domaines magnétiques d'un monocristal de fer : (a) aimantation uniforme ; (b) aimantation en domaines antiparallèles ; (c) domaines antiparallèles accompagnés de domaines de fermeture.**

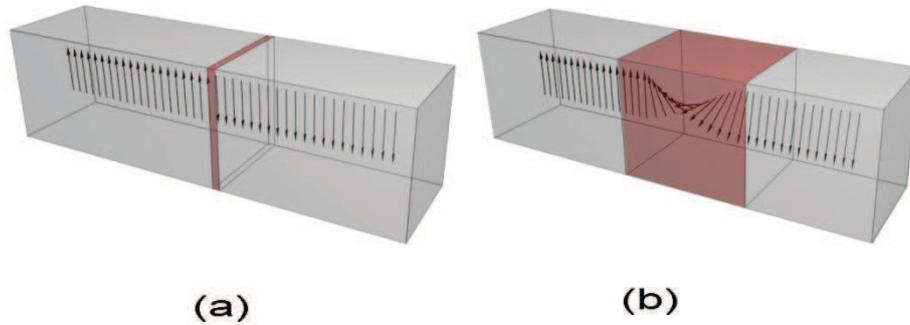
La configuration (a) minimise les énergies d'échange et d'anisotropie mais l'énergie magnétostatique est alors importante car les « pôles » sont éloignés les uns des autres (ceci est à prendre en considération par rapport aux autres échantillons de même taille).

Dans le cas de la configuration (b), l'énergie magnétostatique est diminuée, en revanche l'énergie d'échange augmente (pour un échantillon de même taille que le (a)).

Dans la configuration (c), l'introduction de domaines de fermeture supprime les pôles et donc l'énergie magnétostatique. En revanche, si le monocristal est

magnétostrictif, les domaines à  $90^\circ$ , qui tendent à se déformer dans la direction de l'aimantation du domaine, font apparaître une énergie magnéto-élastique.

Dans ce cas de figure, la largeur des parois résulte de la balance entre l'énergie magnéto-élastique et l'énergie de paroi.



**Figure II-15 : Transition entre deux domaines à  $180^\circ$  : (a) la transition est brutale, ce cas n'existe pas ; (b) la transition est progressive, la zone de transition est, ici, une paroi de Bloch.**

## F. Synthèse – Conclusion

Le magnétisme est une science si complexe que toute une vie ne serait pas suffisante pour l'approfondir.

Le but de ce chapitre était donc de « survoler » cette branche de manière à rappeler les différents procédés mis en jeu lors de l'aimantation d'un matériau. Cet éclaircissement permet donc d'aborder sereinement les différents modèles qui vont être présentés et qui ont toujours une approche expérimentale ou physique et non un raisonnement purement mathématique.

Le lecteur souhaitant approfondir certaine notion peut se référer à la bibliographie afin d'y trouver de plus amples explications.

### III. Modèle de Jiles-Atherton

#### A. Une autre source d'hystérésis : les sites d'ancrage

Le mouvement des parois est entravé par la présence de sites d'ancrage dans le matériau tels que des inclusions d'objets non magnétiques ou des régions de contraintes inhomogènes. Ces sites d'ancrage ont pour effet de causer une diminution de la perméabilité initiale d'un matériau ferromagnétique.

Globus (28) conclut que les changements irréversibles de l'aimantation (mis en évidence par Barkhausen) étaient causés par des sauts de parois allant d'un site d'ancrage vers un autre site d'ancrage (Figure III-1).

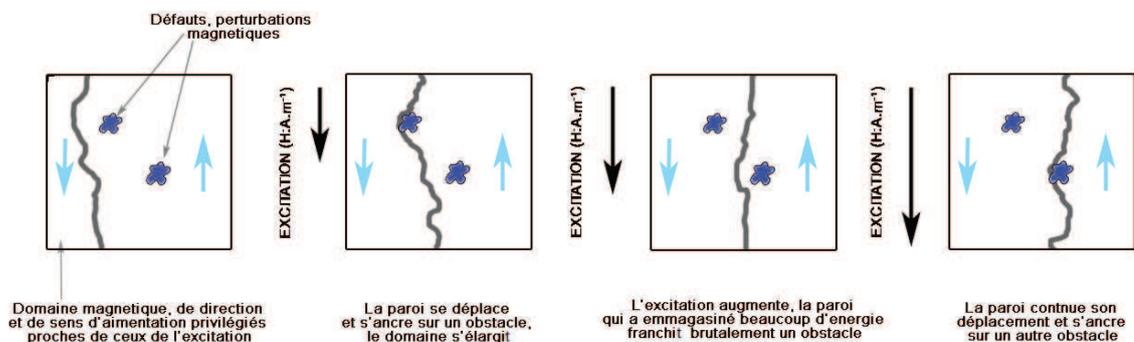


Figure III-1 : Phénomène d'ancrage lors du déplacement d'une paroi

Le développement effectué par Jiles et Atherton en 1986 dans (29) permet de définir un paramètre  $k$ , indépendant de l'aimantation  $M$  d'un matériau, qui tient compte de ces phénomènes d'ancrages afin d'expliquer le phénomène d'irréversibilité. L'énergie moyenne ainsi dissipée par phénomène d'ancrage au sein d'un matériau est donnée par la relation :

$$E_{pin}(M) = k \int_0^M \delta M \quad (\text{III-1})$$

où  $\delta$  vaut +1 si le volume du domaine augmente et -1 dans le cas contraire.

Les développements mathématiques dans (29) permettent d'arriver à une équation différentielle régissant l'aimantation irréversible du matériau :

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{\delta k - \alpha(M_{an} - M_{irr})} \quad (\text{III-2})$$

où  $M_{an}$  représente l'aimantation anhystérétique, définie par l'équation (II-18).

En utilisant la relation différentielle (III-3) ci-dessous, on peut donc exprimer la différentielle de l'aimantation irréversible vis-à-vis du champ effectif de Weiss  $H_{tot}$  défini par la relation (II-16)

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH_{tot}} \frac{dH_{tot}}{dH} \quad (\text{III-3})$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_{tot}} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{\delta k}$$

Cependant cette équation différentielle suppose que les déplacements de parois sont essentiellement discontinus. Ainsi la nature de l'aimantation est entièrement irréversible ( $M = M_{irr}$ ). La section suivante permet d'introduire la composante réversible du processus d'aimantation.

## B. Déformations réversibles des parois

Les hypothèses de parois rigides et planes longtemps utilisées furent critiquées par Néel (30). Il nota que les parois devaient être flexibles afin qu'elles puissent se déformer sans se détacher des points d'ancrage (Figure III-2).

Cette théorie fut développée dans (31). Il tient compte ainsi de la composante réversible de l'aimantation due à cette déformation par l'introduction d'un paramètre  $c$  tel que :

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (\text{III-4})$$

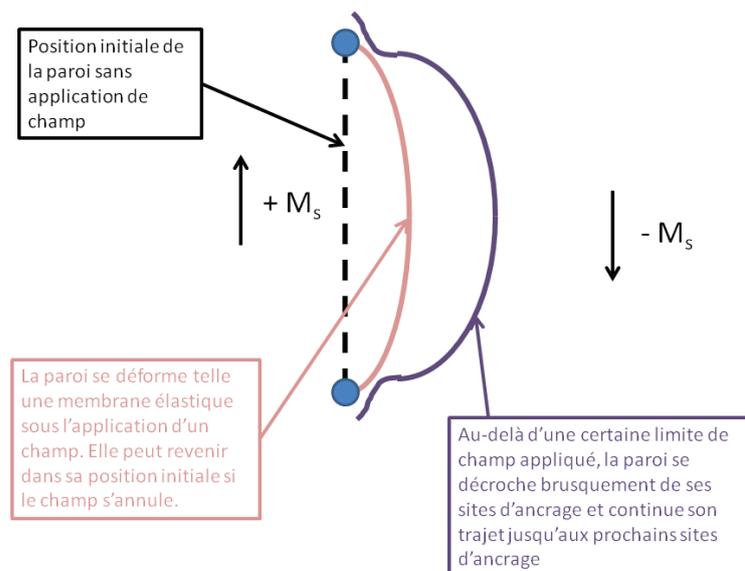


Figure III-2 : Déformation réversible d'une paroi sous l'influence d'un champ extérieur

En première approximation, le paramètre  $c$  peut être assimilé au rapport entre les susceptibilités initiales de première aimantation  $\chi_{0PA}$  et anhystérétique  $\chi_{0anhyst}$  (29).

$$c = \frac{\chi_{0PA}}{\chi_{0anhyst}} \quad (\text{III-5})$$

### C. Modèle de Jiles-Atherton complet

L'aimantation totale  $M$  peut être donc considérée comme la somme des composantes réversible (cf section III.B) et irréversible (cf section III.A) (29).

$$M = M_{rev} + M_{irr} \quad (\text{III-6})$$

L'aimantation irréversible étant donnée sous forme différentielle (III-2), il nous faut définir la différentielle de l'aimantation réversible :

$$\frac{dM_{rev}}{dH} = c \left( \frac{dM_{an}}{dH} - \frac{dM_{irr}}{dH} \right) \quad (\text{III-7})$$

Ainsi la différentielle de l'aimantation totale  $M$  est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dH} &= \frac{dM_{rev}}{dH} + \frac{dM_{irr}}{dH} \\ \frac{dM}{dH} &= c \frac{dM_{an}}{dH} + (1 - c) \frac{dM_{irr}}{dH} \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

Toutefois  $M_{an}$  est définie à l'aide du champ total  $H_{tot}$  incluant le champ moléculaire de Weiss ((II-16) et (II-18)). Ainsi il serait plus facile de calculer la différentielle d'aimantation anhystérétique par rapport à ce champ total. Dans ce cas le terme  $\frac{dM_{an}}{dH}$  dans (III-8) pourrait être remplacé par :

$$\frac{dM_{an}}{dH} = \frac{dM_{an}}{dH_{tot}} \frac{dH_{tot}}{dH} \quad (\text{III-9})$$

mais d'après (II-16) :

$$\frac{dH_{tot}}{dH} = 1 + \alpha \frac{dM}{dH} \quad (\text{III-10})$$

ainsi  $\frac{dM_{an}}{dH}$  peut être remplacé par :

$$\frac{dM_{an}}{dH} = \frac{dM_{an}}{dH_{tot}} \left( 1 + \alpha \frac{dM}{dH} \right) \quad (\text{III-11})$$

L'utilité de cette modification est de pouvoir calculer ce terme car pour obtenir  $\frac{dM_{an}}{dH_{tot}}$  il suffit de différencier (II-18). On obtient ainsi :

$$\frac{dM_{an}}{dH_{tot}} = \frac{M_s}{a} \left( 1 - \coth^2 \frac{H_{tot}}{a} + \left( \frac{a}{H_{tot}} \right)^2 \right) \quad (\text{III-12})$$

En effectuant de même pour la composante irréversible  $M_{irr}$ , l'équation (III-8) devient :

$$\frac{dM}{dH} = \frac{(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_{tot}} + c \frac{dM_{an}}{dH_{tot}}}{1 - \alpha c \frac{dM_{an}}{dH_{tot}} - \alpha(1-c) \frac{dM_{irr}}{dH_{tot}}} \quad (\text{III-13})$$

#### D. Algorithme de résolution

Il est possible de résoudre l'équation différentielle (III-13) par une méthode itérative dans le temps, généralement par la méthode d'Euler.

Pour une faible valeur de  $\frac{H_{tot}}{a}$  on peut réécrire la fonction  $\coth$  en utilisant un développement de Taylor afin d'éviter les problèmes de convergence. Ainsi :

$$\coth \frac{H_{tot}}{a} = \frac{1}{\frac{H_{tot}}{a}} + \frac{\frac{H_{tot}}{a}}{3} - \frac{\left(\frac{H_{tot}}{a}\right)^3}{45} + \frac{2\left(\frac{H_{tot}}{a}\right)^5}{945} + \dots \quad (\text{III-14})$$

On peut donc dans ce cas, en tronquant au deuxième terme, obtenir les relations suivantes :

$$M_{an} = M_s \frac{H_{tot}}{3a} \quad \text{et} \quad \frac{dM_{an}}{dH_{tot}} = M_s \frac{1}{3a} \quad (\text{III-15})$$

Cependant, au voisinage de la saturation, la susceptibilité différentielle devient négative du fait que  $\frac{dM_{irr}}{dH_{tot}} < 0$ . Cela représente un cas non physique pour un matériau réel (voir Figure III-3). En effet, le modèle de Jiles-Atherton représente un modèle statique et dans l'hypothèse d'un modèle quasi-statique, ce phénomène ne peut exister car il signifierait une augmentation de l'aimantation alors que le champ appliqué diminue (et inversement).

Au voisinage de la saturation, l'aimantation est presque entièrement due à la composante irréversible de l'aimantation. Ainsi, afin d'éviter ce comportement, nous introduisons la condition suivante (32):

$$\text{Si } \frac{dM_{irr}}{dH_{tot}} < 0 \quad \text{alors} \quad \frac{dM_{irr}}{dH_{tot}} = 0 \quad (\text{III-16})$$

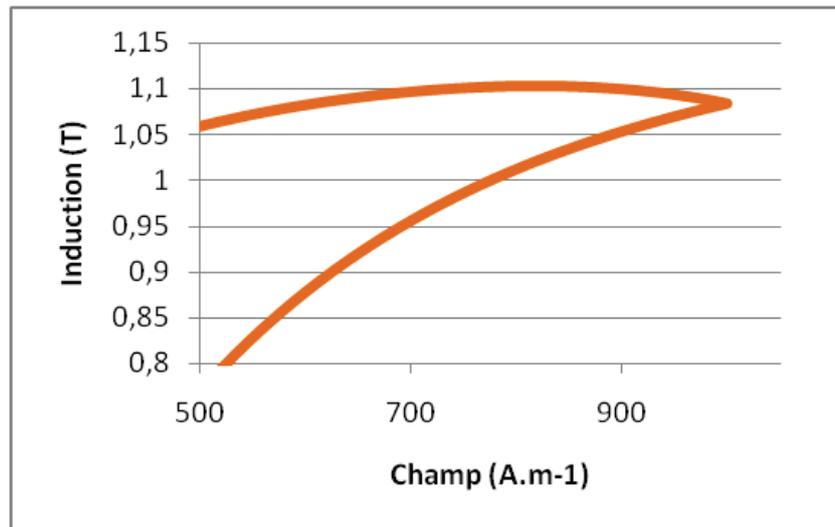


Figure III-3 : Comportement non physique au voisinage de la saturation

### E. Identification des paramètres

Ainsi le modèle de Jiles-Atherton est entièrement défini par 5 paramètres rappelés dans la Table III-1.

Paramètres	Corrélation physique
$\alpha$	Lié au couplage entre les moments magnétiques atomiques
$a$	Facteur de forme pour $M_{an}$
$c$	Coefficient de réversibilité des parois
$k$	Lié à l'irréversibilité du mouvement des parois (phénomène d'ancrage)
$M_s$	Aimantation à saturation

Table III-1 : Rappels des différents paramètres du modèle de Jiles-Atherton

La génération d'un cycle à l'aide du modèle de Jiles-Atherton suppose une connaissance exacte des paramètres du modèle. Il faut donc les déterminer à partir de données expérimentales obtenues par mesures ou bien fournies par le constructeur du matériau.

Nous allons présenter ici plusieurs méthodes différentes afin de déterminer ces paramètres à partir de données expérimentales.

#### 1. Identification itérative

La procédure la plus simple pour la résolution du problème d'identification des paramètres du modèle de Jiles-Atherton a été proposée par Jiles lui-même (33). La

solution du problème est obtenue en utilisant la susceptibilité différentielle initiale  $\chi_{ini}$ , la susceptibilité différentielle anhystérétique  $\chi_{an}$ , le champ coercitif  $H_c$ , la susceptibilité différentielle au champ coercitif  $\chi_c$ , l'aimantation rémanente  $M_r$ , la susceptibilité différentielle  $\chi_r$  à l'aimantation rémanente et les coordonnées du point à saturation du cycle ( $H_s$ ;  $M_s$ ). Ces données sont récapitulées sur la Figure III-4.

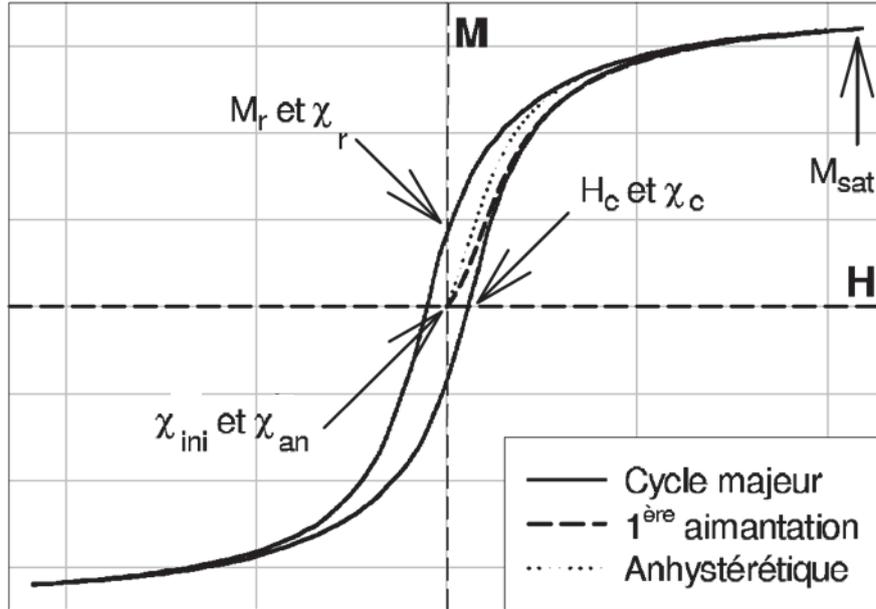


Figure III-4 : Ensemble des paramètres expérimentaux utiles à l'identification - extrait de (32)

Dans (33), les développements mathématiques conduisent à des expressions couplées permettant de trouver les paramètres.  $M_s$  est le plus évident car il se lit directement sur la courbe à l'aide de la valeur de l'aimantation à saturation. Pour les 4 autres paramètres, ils sont définis par les relations suivantes :

$$a = \frac{M_s}{3} \left( \frac{1}{\chi_{an}} + \alpha \right) \quad \text{(III-17)}$$

$$c = \frac{3a\chi_{ini}}{M_s} \quad \text{(III-18)}$$

$$k = \frac{M_{an}(H_c)}{1-c} \left( \alpha + \frac{1}{\frac{1-c}{1-c}\chi_c - \frac{c}{1-c}\frac{dM_{an}}{dH}(H_c)} \right) \quad \text{(III-19)}$$

$$M_r = M_{an}(M_r) + \frac{k}{\frac{\alpha}{1-c} + \frac{1}{\chi_r - c\frac{dM_{an}}{dH}(M_r)}} \quad \text{(III-20)}$$

La procédure proposée dans (33) se décline de la manière suivante :

- ✚ choix arbitraire d'une valeur initiale de  $\alpha$
- ✚ calcul de  $a$
- ✚ calcul de  $c$
- ✚ calcul de  $k$
- ✚ calcul de  $\alpha$
- ✚ retour au deuxième point jusqu'à la convergence de la procédure

Toutefois, cette méthode peut se révéler très instable numériquement et conduire à des solutions non physiques, en particulier pour les paramètres  $\alpha$  et  $c$ .

## 2. Identification par algorithme génétique

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation s'appuyant sur des techniques dérivées de la génétique et de l'évolution naturelle : croisements, mutations, sélections, etc...

Les algorithmes génétiques ont déjà une histoire relativement ancienne puisque les premiers travaux de Holland sur les systèmes adaptatifs remontent à 1962 (34).

Dans le cas de notre problème, plusieurs auteurs ont utilisé les algorithmes génétiques pour optimiser les paramètres du modèle de Jiles-Atherton (35) (36) (37) (38) (39) (40).

Ces algorithmes sont très performants mais cependant ils restent difficiles d'utilisation de part le grand nombre de réglages à effectuer (probabilités et types de croisement, de mutation et de sélection, taux d'élitisme, etc...).

Notre choix s'est donc orienté vers un autre algorithme : l'optimisation par essaim particulière. Toutefois nous utiliserons la toolbox de Matlab sur les algorithmes génétiques (avec les réglages définis dans (40)) afin de valider notre algorithme d'optimisation.

## 3. Identification par PSO

L'optimisation par essaims particulaires (OEP ou PSO : Particle Swarm Optimization en anglais) est une méthode d'optimisation métaheuristique, inventée par Russel Eberhart (ingénieur en électricité) et James Kennedy (socio-psychologue) en 1995 (41).

Cet algorithme s'inspire à l'origine du monde du vivant. Il s'appuie notamment sur un modèle développé par le biologiste Craig Reynolds à la fin des années 1980, permettant de simuler le déplacement d'un groupe d'oiseaux. Une autre source d'inspiration, revendiquée par les auteurs, est la socio-psychologie.

Cette méthode d'optimisation se base sur la collaboration des individus entre eux. Elle a d'ailleurs des similarités avec les algorithmes de colonies de fourmis, qui s'appuient eux aussi sur le concept d'auto-organisation. Cette idée veut qu'un groupe d'individus peu intelligents puisse posséder une organisation globale complexe.

Ainsi, grâce à des règles de déplacement très simples (dans l'espace des solutions), les particules peuvent converger progressivement vers un minimum local. Cette métaheuristique semble cependant mieux fonctionner pour des espaces en variables continues.

Au départ de l'algorithme chaque particule est donc positionnée aléatoirement dans l'espace de recherche du problème. Chaque itération  $k$  fait bouger chacune des particules  $i$  en fonction de 3 composantes :

- ✚ Sa vitesse actuelle  $V_k(i)$  et sa position actuelle  $X_k(i)$ ,
- ✚ La meilleure position de la particule notée  $x_{pbest}(i)$ ,
- ✚ La meilleure position obtenue dans son voisinage (i.e. la meilleure position toutes particules confondues) notée  $x_{gbest}$ .

Cela donne l'équation de mouvement suivante :

$$V_{k+1}(i) = \omega V_k(i) + c_1 (x_{pbest}(i) - X_k(i)) + c_2 (x_{gbest} - X_k(i)) \quad \text{(III-21)}$$

$$X_{k+1}(i) = X_k(i) + V_{k+1}(i)$$

avec  $\omega$  correspondant à l'inertie de la particule,  $c_1$  et  $c_2$  deux paramètres compris entre 0 et 1 représentant respectivement la prépondérance cognitive et sociale.

Dans notre cas, chaque particule  $i$  de l'essaim est définie comme solution de notre optimisation dans un espace à 5 dimensions. Chaque particule  $i$  est associée à une position  $X(i) = (\alpha_i ; a_i ; c_i ; k_i ; M_{S_i})$ .

On définit, pour une particule  $i$ , la fonction objectif à minimiser comme l'erreur quadratique entre le cycle mesuré et celui simulé à l'aide des paramètres de la position  $X(i)$ .

$$OF_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \frac{B_{exp}(j) - B_{sim}(j)}{\max(B_{exp})} \right)^2} \quad (\text{III-22})$$

où  $N$  correspond au nombre de points pour la mesure,  $B_{exp}$  l'induction mesurée et  $B_{sim}$  celle simulée à l'aide du modèle de Jiles-Atherton.

La position avec la plus petite fonction objectif est définie comme la meilleure position pour tout l'essaim ( $x_{gbest}$ ). De plus, à chaque itération de l'optimisation, chaque particule  $i$  garde une trace de sa meilleure position appelée la meilleure position personnelle  $x_{pbest}(i)$ .

A l'itération  $k$ , la position  $X_k(i)$  de chaque particule est régie par la nouvelle vitesse  $V_{k+1}(i)$  définie par (III-21) de telle sorte que la position de chaque particule est mise à jour à l'aide de la relation (III-21).

La valeur  $\omega$  représentant l'inertie des particules est graduellement diminuée afin d'augmenter la précision durant les derniers pas de temps de l'optimisation. Cette valeur est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\omega = \frac{(\omega_{start} - \omega_{end})(MAX_{iter} - iter)}{MAX_{iter}} + \omega_{end} \quad (\text{III-23})$$

L'utilisation d'une valeur trop faible pour  $\omega_{end}$  provoque des changements de direction trop importants pour les particules et nuit à la convergence. D'un autre côté, l'utilisation d'une valeur trop élevée pour  $\omega_{end}$  empêche les particules de changer de direction et rend leur « vitesse propre » trop prépondérante par rapport à la dimension sociale de l'essaim. Grâce à la littérature et à notre expérience actuelle, nous choisissons généralement les valeurs  $\omega_{start} = 0.9$  et  $\omega_{end} = 0.4$ .

Afin d'éviter des problèmes de convergence, on restreint la vitesse  $V_k(i)$  à une valeur maximale  $V_{max}$ . Ainsi l'on s'assure que tout l'espace est parcouru afin de ne pas « sauter » de solution.

Un schéma synthétique d'une itération est donné Figure III-5.

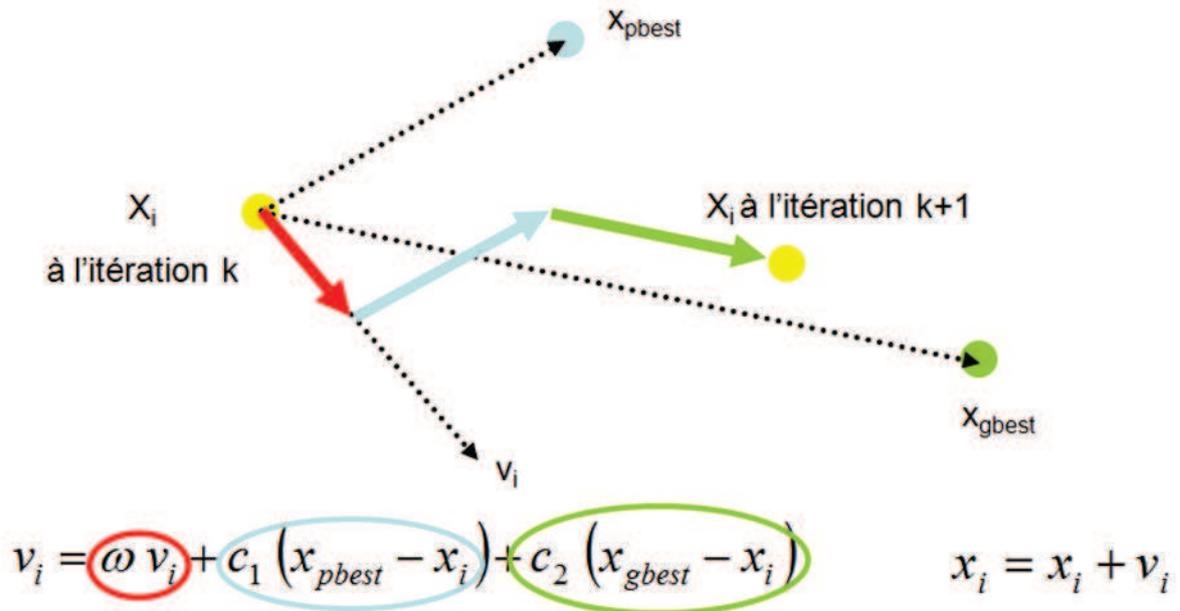


Figure III-5 : Principe d'une itération de PSO dans un espace de recherche à deux dimensions

### Améliorations

La fonction objectif définie par l'erreur quadratique n'est pas un critère assez satisfaisant pour une optimisation de qualité. Ainsi afin d'améliorer la convergence on introduit une seconde fonction objectif qui représente l'erreur entre l'aire du cycle mesuré et l'aire du cycle simulé (III-24).

$$OF_2 = \frac{|Aire_{sim} - Aire_{mes}|}{Aire_{mes}} \quad (III-24)$$

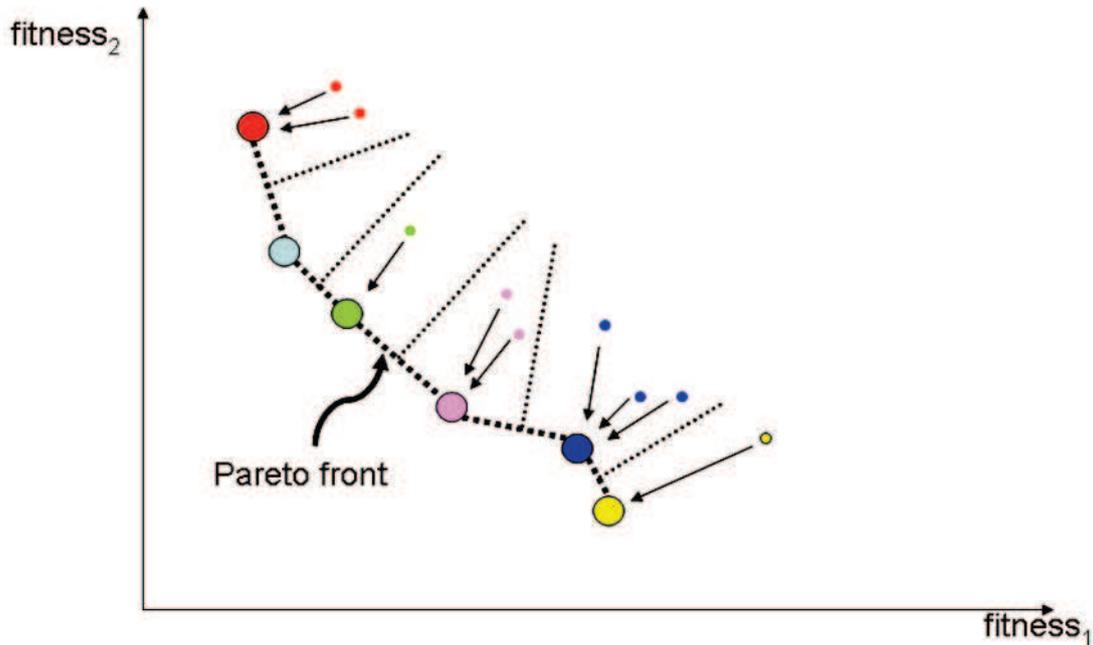
Le choix de ces deux fonctions n'est pas arbitraire. La première fonction objectif  $OF_1$  est représentative de la qualité de la forme d'onde de l'induction dans le temps tandis que la deuxième fonction  $OF_2$  permet d'optimiser les paramètres afin d'obtenir une image satisfaisante des pertes du matériau. Ces deux critères sont très importants et représentent globalement le « cahier des charges » d'un modèle d'hystérésis macroscopique.

Nous définissons ainsi un front de Pareto à l'aide de ces deux fonctions objectif. Cependant l'apparition de ce front signifie la disparition du meilleur personnel  $x_{pbest}$  et du meilleur global  $x_{gbest}$  : il est impossible de définir un unique « leader » pour tout l'essaim. Il faut donc revoir le cœur même de l'algorithme.

Afin de résoudre ce problème, nous remplaçons l'unique  $x_{gbest}$  utilisé par tout l'essaim par la notion de plus proche particule non dominée. On définit ainsi, pour chaque particule, la norme (III-25) :

$$OF = \sqrt{OF_1^2 + OF_2^2} \quad (\text{III-25})$$

Ainsi chaque particule a son propre  $x_{g_{best}}$  en fonction de sa situation dans l'espace des fonctions objectif (Figure III-6).



**Figure III-6 : Exemple d'utilisation d'un critère multiobjectif : chaque particule sur le front de Pareto domine une partie de l'espace**

Plus d'informations sur la notion de voisinage et de multi-objectifs sont données dans (42) (43) (44).

Souvent des particules génèrent un cycle non physique. Afin de les exclure nous comparerons leur fonction objectif  $OF$  avec la fonction objectif de la meilleure particule de l'essaim. Si leur rapport est supérieur à  $10^6$  alors nous la réinitialiserons aléatoirement dans l'espace de recherche.

#### 4. Comparatif

Ces résultats sont extraits de (42).

L'algorithme génétique et le PSO sont utilisés dans la détermination des paramètres des échantillons 1 et 2 (cf Annexe). Pour donner un étalon de comparaison, la fonction *fminsearch* de Matlab est aussi utilisée. *fminsearch* et PSO sont mono-objectif tandis que PSO+ et AG sont multi-objectifs. Les optimisations sont lancées 50 fois chacune afin de s'assurer de leur reproductibilité. Les critères de convergence sont les suivants :

$$OF < 10^{-3}$$

$$MAX_{iter} = 250$$
(III-26)

### a) Échantillon 1

La mesure de référence est effectuée à 1Hz. Le courant d'excitation est sinusoïdal. Le cycle est un cycle majeur avec des coordonnées à saturation  $H_s = 1500 \text{ A.m}^{-1}$  et  $B_s = 1.37 \text{ T}$ , un champ coercitif  $H_c = 40 \text{ A.m}^{-1}$  et une induction rémanente  $B_r = 0.825 \text{ T}$ . ( Figure III-7)

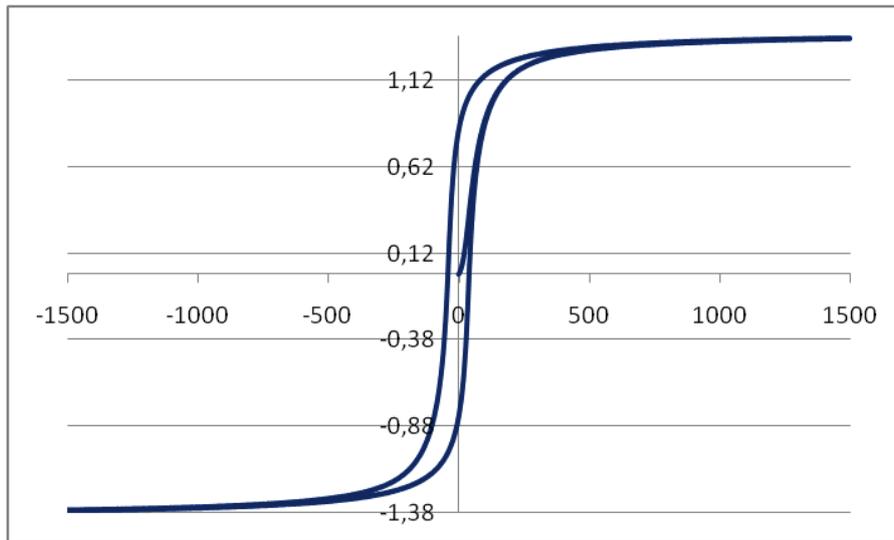


Figure III-7 : Cycle majeur de l'échantillon 1 utilisé lors de l'optimisation (abscisse : H [A/m] ordonnée : B [T])

La Table III-2 regroupe les différentes valeurs des paramètres trouvés (moyennées sur les 50 essais – l'écart type est inférieur à 5%) à l'aide du PSO mono-objectif, du PSO multi-objectifs avec front de Pareto (PSO+), de l'algorithme génétique (AG) et de la fonction *fminsearch*.

Paramètres	PSO	PSO+	<i>fminsearch</i>	AG
$\alpha$	$8.8448 \cdot 10^{-5}$	$8.8163 \cdot 10^{-5}$	$7.755 \cdot 10^{-5}$	$8.746 \cdot 10^{-5}$
$a$	38.3704	38.5632	35.4831	38.6395
$c$	0.13568	0.14238	0.22365	0.14189
$k$	50.7865	51.6492	56.9687	52.7493
$M_s$	$1.1163 \cdot 10^6$	$1.1158 \cdot 10^6$	$1.1129 \cdot 10^6$	$1.1148 \cdot 10^6$
Itérations	134	46	226	53

Table III-2 : Résultats des différentes optimisations pour l'échantillon 1

PSO+ et AG convergent en un nombre similaire d'itérations contrairement à la fonction *fminsearch* qui requiert 5 fois plus d'itérations. La précision des paramètres trouvés reste correcte.

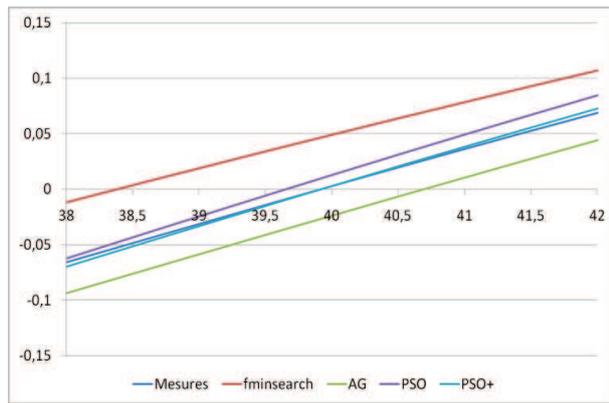
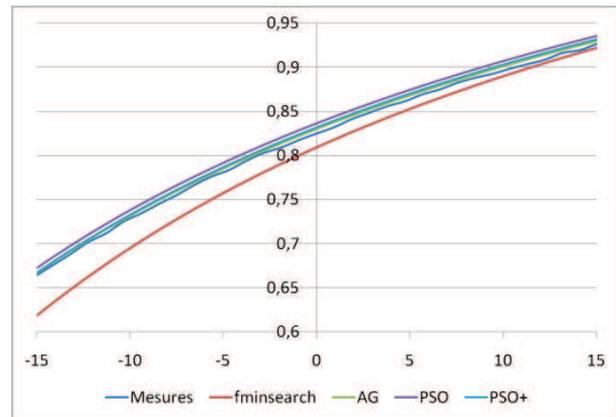
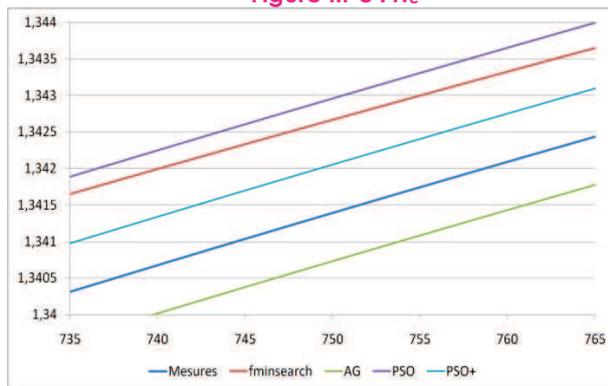
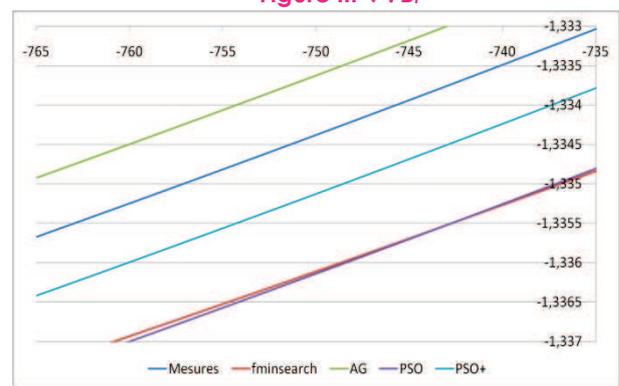
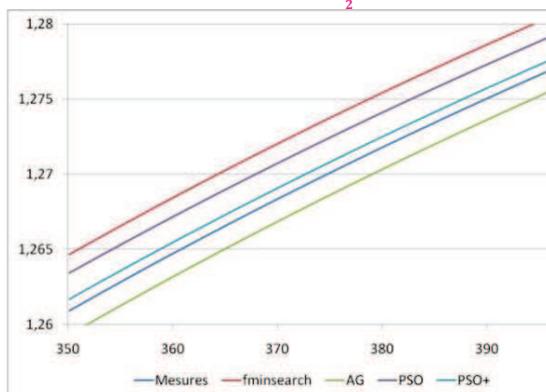
Afin de mieux comparer ces algorithmes entre eux, un calcul d'incertitude entre la mesure et la simulation est effectué en quelques points caractéristiques du cycle :

- ✚ Le champ coercitif  $H_c$ .
- ✚ L'induction rémanente  $B_r$ .
- ✚  $B_{\frac{1}{2}}$  est le point appartenant à la partie descendante du cycle et correspondant au champ  $0.5H_s$ .
- ✚  $B_{-\frac{1}{2}}$  est le point appartenant à la partie descendante du cycle et correspondant au champ  $-0.5H_s$ .
- ✚  $B_{1M}$  est le point appartenant à la courbe de première aimantation et correspondant au champ  $0.25H_s$ .

Ces résultats sont regroupés dans la Table III-3 et sur les figures ci-dessous.

Points caractéristiques	PSO erreur	PSO+ erreur	<i>fminsearch</i> erreur	AG erreur
$H_c$	1.05 %	0.50 %	3.41 %	1.30 %
$B_r$	1.44 %	0.86 %	1.89 %	0.62 %
$B_{\frac{1}{2}}$	0.12 %	0.05 %	0.10 %	0.05 %
$B_{-\frac{1}{2}}$	0.13 %	0.06 %	0.13 %	0.06 %
$B_{1M}$	0.19 %	0.06 %	0.29 %	0.12 %

**Table III-3 : Estimation de l'erreur en certains points caractéristiques pour l'échantillon 1**

Figure III-8 :  $H_c$ Figure III-9 :  $B_r$ Figure III-10 :  $B_{\frac{1}{2}}$ Figure III-11 :  $B_{-\frac{1}{2}}$ Figure III-12 :  $B_{1M}$ 

Figures III-8 à III-12 :  
Abscisse :  $H$  [A/m]  
Ordonnée :  $B$  [T]

### Conclusion

L'estimation des paramètres pour ce matériau se révèle assez aisée. Les quatre méthodes donnent une précision satisfaisante aux points de contrôle effectués. Cependant, en termes de rapidité de convergence, l'algorithme génétique et le PSO modifié se démarquent. Nous allons donc effectuer ce même test mais cette fois pour l'échantillon 2 qui, du fait de sa forte perméabilité, reste très difficile à modéliser.

### b) Échantillon 2

La mesure est effectuée à très basse fréquence (0,05Hz) du fait de la forte épaisseur de l'échantillon. Le cycle est un cycle majeur avec des coordonnées à saturation  $H_s = 18,7 \text{ A.m}^{-1}$  et  $B_s = 0,65 \text{ T}$ , un champ coercitif  $H_c = 0,88 \text{ A.m}^{-1}$  et une induction rémanente  $B_r = 0,477 \text{ T}$ .

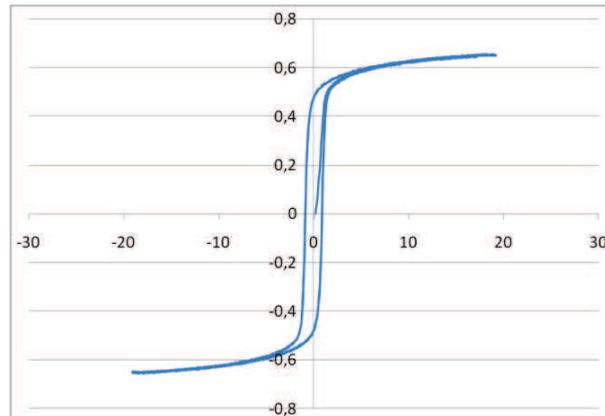
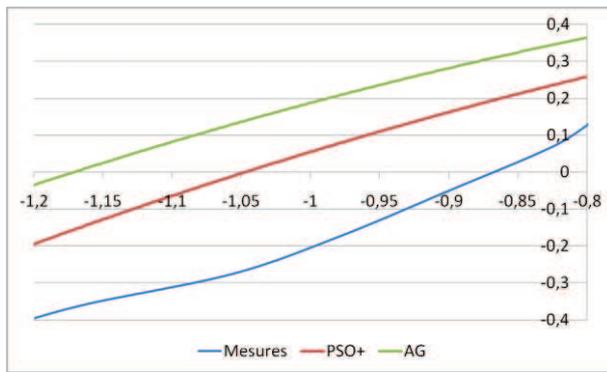
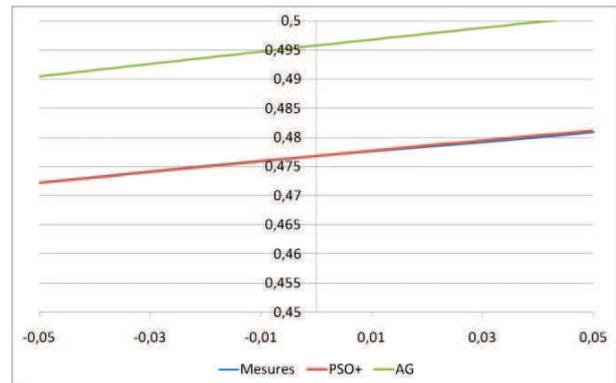
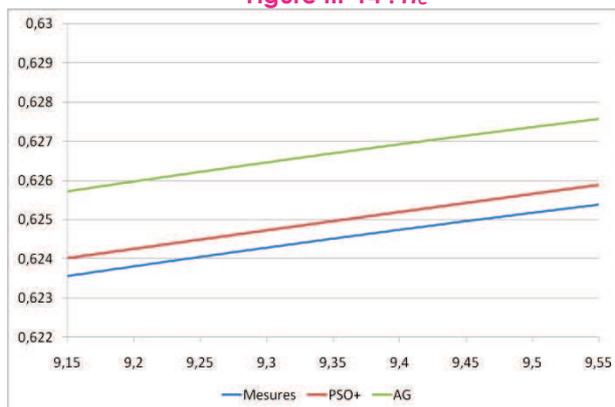
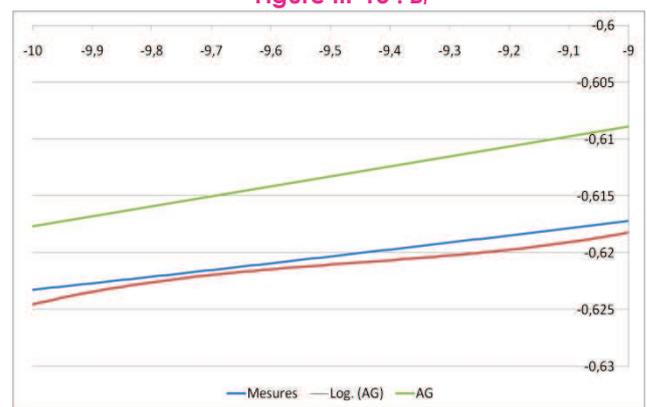
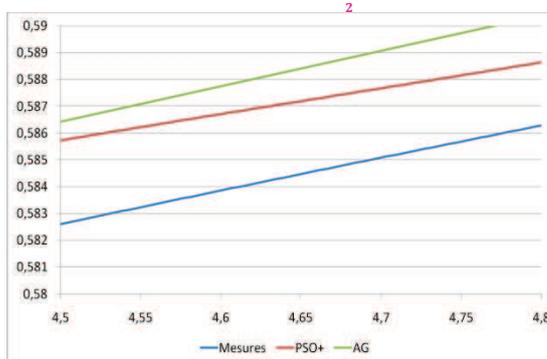


Figure III-13 : Cycle majeur de l'échantillon 2 utilisé lors de l'optimisation (abscisse : H [A/m] ordonnée : B [T])

L'utilisation de la fonction *fminsearch* conduit à des jeux de paramètres négatifs et non physiques. La Table III-4 regroupe les différentes valeurs des paramètres trouvés à l'aide du PSO multi-objectifs avec front de Pareto (PSO+) et de l'algorithme génétique. Les figures III-14 à III-18 montrent les résultats obtenus aux points caractéristiques.

Paramètres	PSO+	AG	Point	PSO+ erreur	AG erreur
$\alpha$	$6.3452 \cdot 10^{-5}$	$4.8493 \cdot 10^{-5}$	$H_c$	25 %	42 %
$a$	14.6830	12.6392	$B_r$	0.3 %	3.98 %
$c$	0.8326	0.8930	$B_{\frac{1}{2}}$	0.04 %	0.35 %
$k$	5.6289	6.3275	$B_{-\frac{1}{2}}$	0.4 %	0.8 %
$M_s$	$9.2367 \cdot 10^5$	$9.2689 \cdot 10^5$	$B_{1M}$	0.5 %	0.8 %
Itérations	85	139			

Table III-4 : Résultats de l'optimisation et estimation de l'incertitude pour l'échantillon 2

Figure III-14 :  $H_c$ Figure III-15 :  $B_r$ Figure III-16 :  $B_{\frac{1}{2}}$ Figure III-17 :  $B_{-\frac{1}{2}}$ Figure III-18 :  $B_{1M}$ 

Figures III-14 à III-18 :  
Abscisse :  $H$  [A/m]  
Ordonnée :  $B$  [T]

La forte valeur d'erreur relevée pour le champ coercitif  $H_c$  n'est pas significative du fait de sa faible valeur ( $H_c < 1 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

Afin d'aller plus loin dans la comparaison entre AG et PSO, nous faisons une étude sur la convergence et le temps de calcul lorsque l'on fait varier la taille de population initiale (Table III-5).

Nous remarquons que pour une population de 10 particules, l'algorithme génétique ne converge pas alors que le PSO converge (en atteignant tout de même le maximum d'itérations de 250). Cette tendance se confirme pour 20 particules.

Pour les autres simulations, les deux méthodes convergent. Cependant PSO semble plus rapide que l'algorithme génétique.

Méthodes	Taille population	Nb itérations	Temps (s)	OF <sub>1</sub>	OF <sub>2</sub>
GA	10	250	Pas de convergence		
PSO+	10	250	234	$2.4738 \cdot 10^{-2}$	$6.9368 \cdot 10^{-3}$
GA	20	250	Pas de convergence		
PSO+	20	42	168	$5.8946 \cdot 10^{-5}$	$5.2789 \cdot 10^{-4}$
GA	30	94	268	$4.9824 \cdot 10^{-4}$	$7.8393 \cdot 10^{-5}$
PSO+	30	54	216	$7.8932 \cdot 10^{-4}$	$1.9930 \cdot 10^{-4}$
GA	40	112	467	$6.6832 \cdot 10^{-5}$	$7.6389 \cdot 10^{-4}$
PSO+	40	68	268	$1.6893 \cdot 10^{-4}$	$3.6892 \cdot 10^{-5}$
GA	50	139	624	$4.8021 \cdot 10^{-4}$	$5.3789 \cdot 10^{-4}$
PSO+	50	85	348	$4.6892 \cdot 10^{-4}$	$5.6830 \cdot 10^{-4}$

Table III-5 : Comparaison entre PSO et AG pour l'échantillon 2

### Conclusion

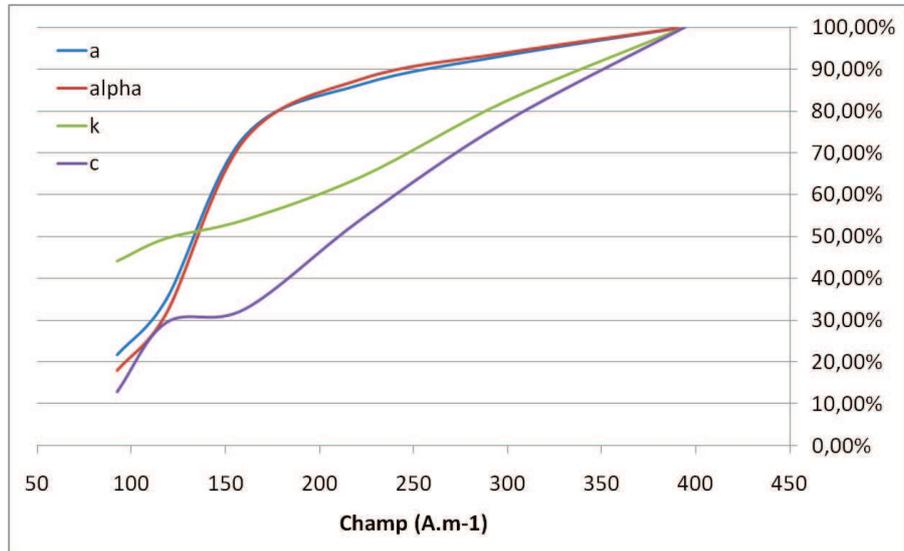
L'estimation des paramètres pour ce matériau est bien plus difficile que celle de l'échantillon 1. Cependant l'algorithme génétique et le PSO modifié donnent une précision satisfaisante aux points de contrôle effectués. En termes de rapidité de convergence, la tendance rencontrée pour le premier échantillon se confirme : l'algorithme génétique reste plus lent que le PSO modifié. Vis-à-vis du réglage de la taille de la population, l'algorithme génétique reste délicat à paramétrer tandis que le PSO modifié semble robuste.

### F. Critique au modèle de Jiles-Atherton

Ces dernières vingt années, le modèle de Jiles-Atherton a attiré l'attention des communautés scientifiques et d'ingénierie par le fait de sa simplicité de mise en œuvre et pour la correspondance physique de ses paramètres (à contrario des modèles à grosses composantes mathématiques comme le modèle d'Issing ou de Preisach (32) (45)).

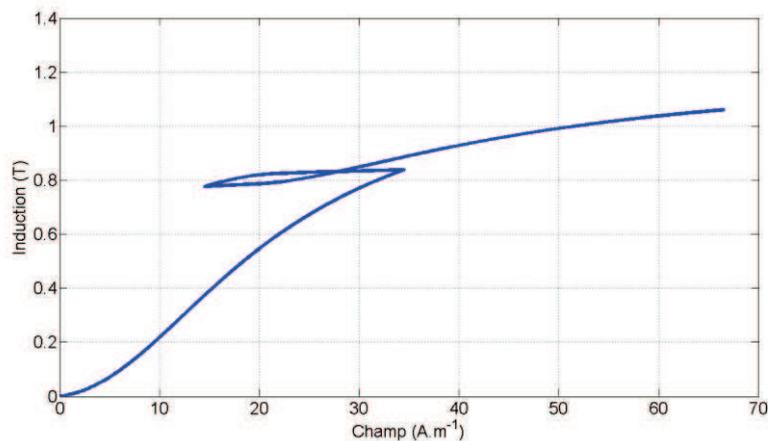
Cependant des limitations apparaissent par la même occasion. Les deux plus flagrantes (et gênantes) sont :

- ✚ La variation des paramètres en fonction de la valeur de champ maximal appliqué pour certaines familles de matériaux comme le montre la Figure III-19. Pour cette figure, les mesures ont été effectuées sur des tôles FeSi GNO de 0,5 mm d'épaisseur).



**Figure III-19 : Variation des paramètres du modèle de Jiles-Atherton en fonction du champ appliqué (100% correspond aux valeurs obtenues pour le cycle majeur) d'après (46)**

- ✚ La non-congruence des cycles mineurs : Après un renversement du champ appliqué et un retour à sa valeur d'avant renversement, la valeur d'induction n'est plus la même et ainsi les cycles ne se « referment » pas au point de premier renversement (Figure III-20).



**Figure III-20 : Mise en évidence de la non-congruence du modèle lors d'une boucle mineure**

De nombreux auteurs travaillent actuellement sur l'utilisation de paramètres variables (46) (47) (48) (49).

## G. Modèle de Jiles-Atherton modifié

Afin d'améliorer les performances du modèle de Jiles-Atherton, nous avons apporté plusieurs modifications (50). Ces modifications ont été inspirées des récents travaux de Kadar sur le modèle « product » de Preisach notamment au niveau de l'interprétation de la composante réversible de l'aimantation.

### 1. Modification de l'aimantation anhystérétique

Tout d'abord, l'utilisation de la fonction de Langevin pour décrire l'aimantation anhystérétique  $M_{an}$  est en fait un cas particulier de la fonction de Brillouin (cf section II.D.2). En effet, l'aimantation anhystérétique est normalement donnée par la relation

$$M_{an} = M_s \left( \frac{2J+1}{2J} \coth \left( \frac{(2J+1)x}{2J} \right) - \frac{1}{2J} \coth \frac{x}{2J} \right) \quad (\text{III-27})$$

où  $x = \frac{H_{tot}}{a}$  et  $J$  le nombre quantique représentatif du couplage spin-orbitale.

L'utilisation de la fonction de Langevin à la place de celle de Brillouin est correcte quand  $J \rightarrow \infty$ . Graphiquement, les deux courbes coïncident à partir de  $J = 20$ . Or dans le cas d'une tôle FeSi 3%, la valeur de  $J$  est généralement de l'ordre de 1. L'erreur commise par l'utilisation de la fonction de Langevin ne peut donc plus être négligée. Cette modification a été correctement implémentée dans (51).

### 2. Modèle « product »

Une modification du modèle classique de Preisach a été introduite par Kadar (52) (53). Cette modification permet de rendre congruent le modèle de Preisach et de définir la susceptibilité réversible quand le champ tend vers zéro d'une manière différente de celle proposée dans la section III.D.

Suivant l'idée du modèle « product », nous définissons la susceptibilité différentielle totale par l'équation :

$$\frac{dM}{dH} = R(m) \left( \psi + \frac{dM_{irr}}{dH} \right) \quad (\text{III-28})$$

où  $m$  représente l'aimantation réduite  $\frac{M}{M_s}$  et  $R(m)$  est une fonction « enveloppe » introduite de manière à enlever la non congruence des boucles mineures (54).

$R(m)\psi$  représente donc ainsi la composante réversible de la susceptibilité différentielle. Elle est facilement identifiable à partir de mesures effectuées dans la

zone de Railegh, zone où les effets irréversibles peuvent être négligés. Cette technique est présentée dans (55).

D'après (52) (53), la fonction  $R(m)$  doit avoir son maximum pour  $m = 0$  et doit tendre vers 0 quand  $m$  tend vers  $\pm 1$ . Ainsi, la simple parabole  $R(m) = 1 - m^2$  satisfait ces contraintes.

Le modèle de Jiles-Atherton devient donc :

$$\frac{dM}{dH} = \frac{R(m)(\psi k \delta + (M_{an} - M_{irr}))}{k \delta - R(m)\alpha(M_{an} - M_{irr})} \quad (\text{III-29})$$

Afin de satisfaire l'équation (III-16) pour exclure les cas non physique, on introduit un nouveau paramètre  $\delta_M$ . Le rapport  $\frac{dM_{irr}}{dH_{TOT}}$  est négatif quand le produit  $(M_{an} - M_{irr}) \cdot \frac{dH}{dt}$  est négatif. Le modèle de Jiles-Atherton utilisant ce nouveau paramètre est donné dans (III-30)

$$\delta_M = 0.5 \left( 1 + \text{signe} \left( (M_{an} - M_{irr}) \frac{dH}{dt} \right) \right) \quad (\text{III-30})$$

$$\frac{dM}{dH} = \frac{R(m)(\psi k \delta + \delta_M (M_{an} - M_{irr}))}{k \delta - R(m)\alpha \delta_M (M_{an} - M_{irr})}$$

Remarquons qu'un modèle inverse de Jiles-Atherton  $H(B)$  nécessaire lors de calculs par notre modèle dynamique peut facilement être retrouvé grâce à la relation :

$$\frac{dM}{dB} = \frac{\frac{dM}{dH}}{\mu_0 \left( 1 + \frac{dM}{dH} \right)} \quad (\text{III-31})$$

### 3. Terme d'ordre supérieur pour le champ effectif de Weiss

La formule pour calculer le champ moléculaire de Weiss est étendue à un terme de plus haut degré. Cette extension est proposée et expliquée dans (56).

$$H_{tot} = H + \alpha_1 M - \alpha_3 M^3 \quad (\text{III-32})$$

## H. Synthèse des modifications

Ainsi les équations finales pour le calcul de la susceptibilité différentielle sont (modèles direct et inverse) :

$$\frac{dM}{dH} = \frac{R(m)(\psi + \Delta_M)}{1 - R(m)\Delta_M(\alpha_1 - 3\alpha_3 M^2)} \quad (\text{III-33})$$

$$\frac{dB}{dH} = \frac{R(m)(\psi + \Delta_M)}{\mu_0(1 + R(m))(\psi + \Delta_M(1 - \alpha_1 - 3\alpha_3 M^2))} \quad (\text{III-34})$$

$$\text{avec } \Delta_M = \frac{\delta_M(M_{an} - M_{irr})}{k\delta}$$

Les paramètres à identifier pour le modèle modifié sont donc :  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $a$ ,  $J$ ,  $\psi$ ,  $k$  et  $M_s$ . Il nous faut donc déterminer des bornes au sein desquelles l'optimisation de ces paramètres peut avoir lieu. Les définitions de ces bornes ont été discutées dans (57), (50) et (58). Elles sont résumées dans la Table III-6 :

Paramètres	Définitions des bornes
$\alpha_1$	Les bornes minimales pour ces deux paramètres seraient en théorie 0 ce qui correspondrait à une absence totale d'interaction entre les moments magnétiques. En pratique on choisira $10^{-36}$ car en dessous nous sommes dans l'imprécision de calcul des ordinateurs.
$\alpha_3$	En ce qui concerne les bornes maximales, on peut supposer que, à l'approche de la saturation, les contributions des moments magnétiques est moindre que celle du champ appliqué donc $\alpha_1 < H_{max}/M_{max}$ et $\alpha_3 < H_{max}/3M_{max}^3$ (58)
$a$	Le paramètre $a$ prend des valeurs comparables à $k$ . Cependant nous avons remarqué que des valeurs trop faibles pour ce paramètre conduisent à des divergences lors de la résolution des équations différentielles du modèle. L'intervalle choisi est donc $[0.5H_c \ 5H_c]$
$J$	$J$ représente un nombre quantique donc il ne peut prendre que des valeurs discrètes de 0.5 en 0.5. Pour une tôle de FeSi il est d'usage de choisir $J = 1$ (51)
$\psi$	Ce paramètre est lié à la réversibilité de l'aimantation. Ainsi, grâce à une mesure dans la zone de Rayleigh on peut facilement le déterminer après une superposition du modèle de Rayleigh sur la mesure (Figure III-21). Toutefois on s'autorise une variation de $\pm 10\%$ afin de compenser l'incertitude de la mesure.
$k$	D'après (33), le paramètre d'ancrage $k$ est environ égal au champ coercitif $H_c$ . On choisira donc un intervalle $[0.2H_c \ 5H_c]$
$M_s$	Le plus simple à déterminer car il suffit de choisir un cycle allant dans les forts champs pour la déduire. On choisira donc un intervalle allant jusqu'à 20% de plus que l'aimantation maximale mesurée soit $[M_{max} \ 1.2M_{max}]$

Table III-6 : Bornes utilisées pour l'optimisation des paramètres

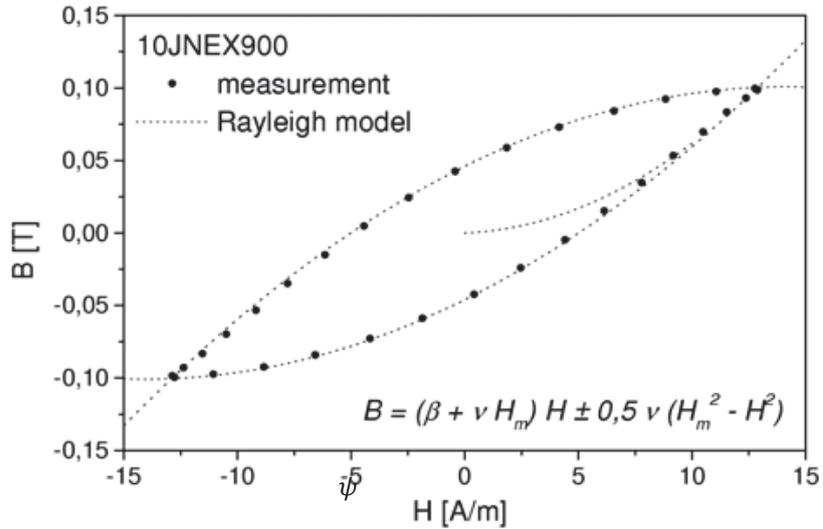


Figure III-21 : Détermination du paramètre  $\psi$  via une mesure dans la zone de Rayleigh (50)

### I. Validation expérimentale : Comparaison entre les modèles

Une comparaison entre le modèle original de Jiles-Atherton et notre modèle modifié est effectuée sur différentes mesures provenant de l'échantillon 3 (cf Annexe). Ces mesures sont effectuées à induction sinusoïdale imposée pour différentes valeurs allant de 0.1 T jusqu'à 1.3 T. La Figure III-22 regroupe les différentes mesures utilisées.

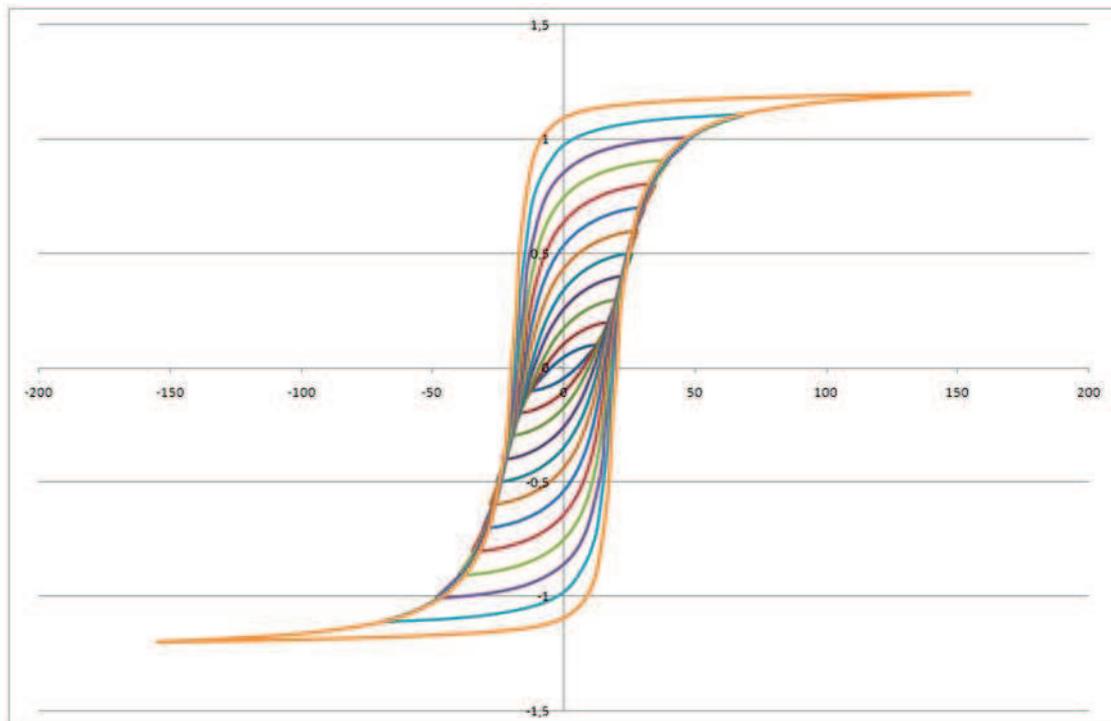


Figure III-22 : Mesures statiques, à induction sinusoïdale, utilisées pour la validation du modèle de Jiles-Atherton modifié (abscisse : H [A/m], ordonnée : B [T])

Les paramètres du modèle modifié de Jiles-Atherton sont identifiés à l'aide de l'algorithme PSO+ présenté dans la section III.E.3. Pour mettre en évidence l'apport des modifications, les paramètres du modèle classique de Jiles-Atherton sont aussi identifiés.

Les résultats de ces identifications sont récapitulés dans les Figure III-23 et Figure III-24. La valeur 100% d'un paramètre correspond à la valeur identifiée pour le cycle ayant la plus importante amplitude en induction ( $1.3 T$ ), c'est-à-dire  $\alpha = 3.15 \cdot 10^{-5}$  ;  $a = 27.8$  ;  $c = 0.2243$  ;  $k = 22$  ;  $M_s = 1.28 \cdot 10^6$  pour le modèle classique et  $\alpha_1 = 1.6 \cdot 10^{-5}$  ;  $\alpha_3 = 7.9 \cdot 10^{-18}$  ;  $a = 21$  ;  $k = 18.1$  ;  $\psi = 6.9 \cdot 10^{-4}$  ;  $M_s = 1.28 \cdot 10^6$  pour le modèle modifié.

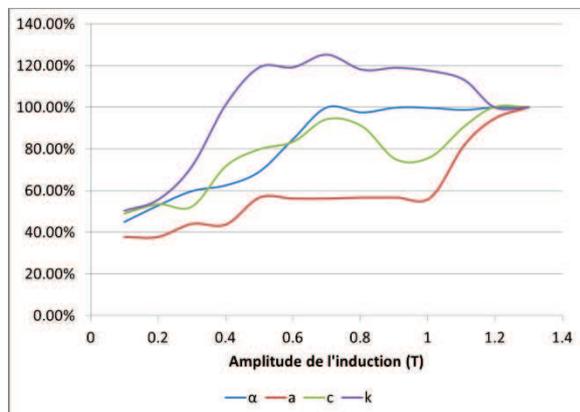


Figure III-23 : Variation des paramètres du modèle de Jiles-Atherton classique en fonction de l'amplitude de l'induction pour l'échantillon 3

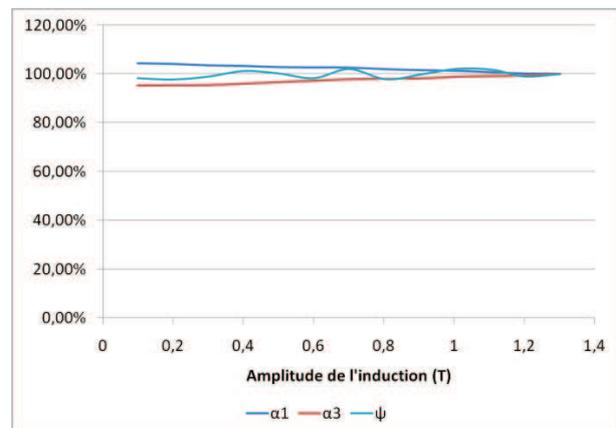


Figure III-24 : Variation des paramètres  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$  et  $\psi$  du modèle de Jiles-Atherton modifié en fonction de l'amplitude de l'induction pour l'échantillon 3

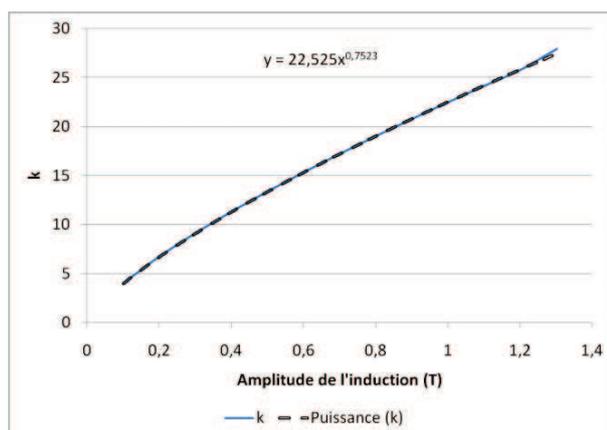


Figure III-25 : Variation du paramètre  $a$  du modèle de Jiles-Atherton modifié en fonction de l'amplitude de l'induction pour l'échantillon 3

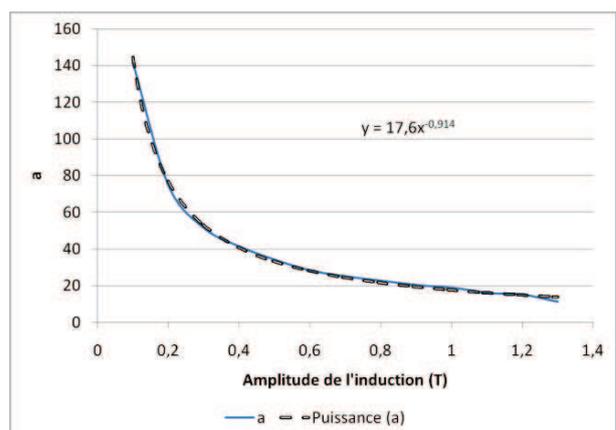


Figure III-26 : Variation du paramètre  $k$  du modèle de Jiles-Atherton modifié en fonction de l'amplitude de l'induction pour l'échantillon 3

Les variations des paramètres du modèle de Jiles-Atherton classique sont complètement désordonnées : aucune tendance ne peut être décelée tout comme on avait pu le remarquer sur la Figure III-19. Le modèle classique montre ici l'étendue de ses limites.

En ce qui concerne le modèle de Jiles-Atherton modifié, les paramètres  $\alpha_1, \alpha_3$  et  $\psi$  restent constants quelque soit l'amplitude de l'induction. Seulement les deux paramètres  $a$  et  $k$  varient et, de plus, une tendance peut être dégagée. On remarque qu'une courbe de tendance en puissance pour  $a$  et hyperbolique pour  $k$  est cohérente avec les résultats obtenus (Figure III-25 et Figure III-26).

Ces deux variations sont à prendre en compte afin de ne pas fausser « l'allure du cycle » simulé par le modèle de Jiles-Atherton modifié. Une très bonne concordance entre mesure et simulation est obtenue (Figure III-27 et Figure III-28).

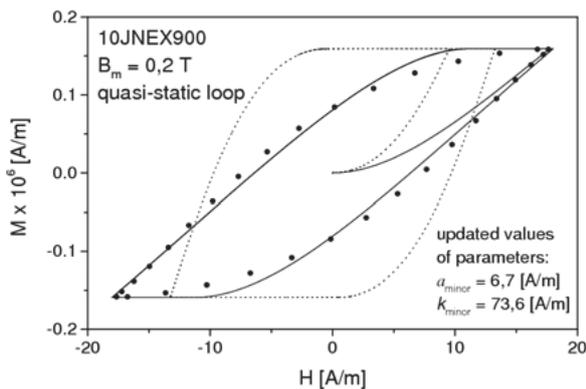


Figure III-27 : Mesure (points), simulation avec paramètres non mis à jour (pointillés) et simulation avec mise à jour des paramètres  $a$  et  $k$  (trait plein) pour l'échantillon 3 pour une amplitude d'induction de 0.2 T d'après (50)

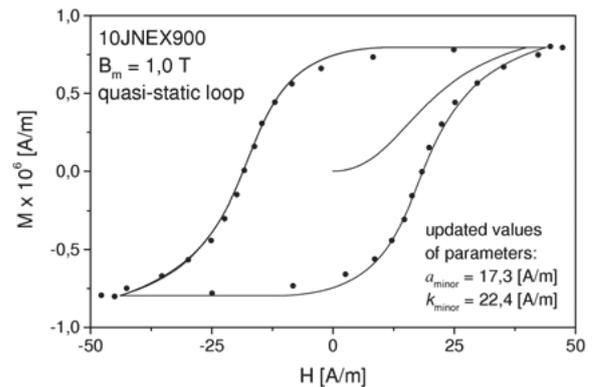


Figure III-28 : Mesure (points) et simulation avec mise à jour des paramètres  $a$  et  $k$  (trait plein) pour l'échantillon 3 pour une amplitude d'induction de 1 T d'après (50)

## J. Synthèse – Conclusion

Une nouvelle approche physique du modèle de Jiles-Atherton a été étudiée de manière à la généraliser aux formes d'onde « classiques » d'induction sinusoïdale. Les résultats obtenus pour le matériau testé apportent satisfaction. Il faudrait aussi refaire une étude similaire sur un autre matériau de manière à conforter le modèle émis.

L'essence même de ce modèle qui se basait sur des considérations purement physiques est entachée par un ajustement mathématique des paramètres  $a$  et  $k$ . Par

faute de temps, nous n'avons pas pu « fouiller » plus cette piste de manière à la corréler à une approche physique de l'aimantation au sein d'un matériau.

Actuellement une autre méthode d'optimisation est appliquée à l'identification des paramètres de Jiles-Atherton : il s'agit de la méthode DiRect (Dividing Rectangle). Le plus gros avantage de cette méthode est l'unicité de la convergence car, contrairement au PSO, elle n'initialise pas de population aléatoirement. Cette méthode est encore à l'étude mais les premiers résultats semblent prometteurs (59) (57) (60).

On peut aussi s'interroger sur l'utilisation d'une autre fonction de forme  $R(m)$  différente de  $1 - m^2$  et son impact sur la prise en compte du phénomène de réversibilité de l'aimantation.



## IV. Modèle dynamique

### A. Introduction

La plupart des matériaux magnétiques utilisés en génie électrique sont à base de métaux, donc de bons conducteurs électriques. Lors d'une aimantation dynamique (c'est-à-dire lorsque le régime d'induction est variable), ces matériaux sont le siège de boucles de courants induits. Ces boucles de courants sont appelées courants de Foucault. Supposons maintenant que ces matériaux soient laminés afin de réduire la majeure partie de ces courants induits, nous verrons rapidement que, malgré cette précaution, les pertes par courants induits subsistent et se traduisent par l'échauffement des tôles. L'échauffement n'est pas le seul défaut lors d'une aimantation dynamique. En effet, les courants induits s'opposent à la pénétration du flux, phénomène couramment corrélé à l'épaisseur de peau et modélisé par la diffusion magnétique à laquelle nous nous sommes intéressés.

Après avoir fait un bref retour sur un « cas d'école » permettant de trouver la solution de l'équation de diffusion magnétique au sein d'un échantillon de matériau de manière analytique, nous montrerons que la résolution de cette équation incluant une loi d'hystérésis statique est insuffisante pour rendre compte de tous les effets dynamiques développés dans l'échantillon de matériau. En effet, l'expérience montre l'existence de pertes supplémentaires, pertes classiquement appelées « pertes excédentaires », différentes des pertes créées par les courants induits. Nous introduirons ainsi une loi dynamique de matériau permettant de tenir compte des effets dynamiques excédentaires, non modélisés par le modèle classique de diffusion magnétique. Nous finirons par une validation expérimentale sur différents échantillons.

## B. Processus physique de l'aimantation dynamique

### 1. Expression analytique avec un matériau linéaire

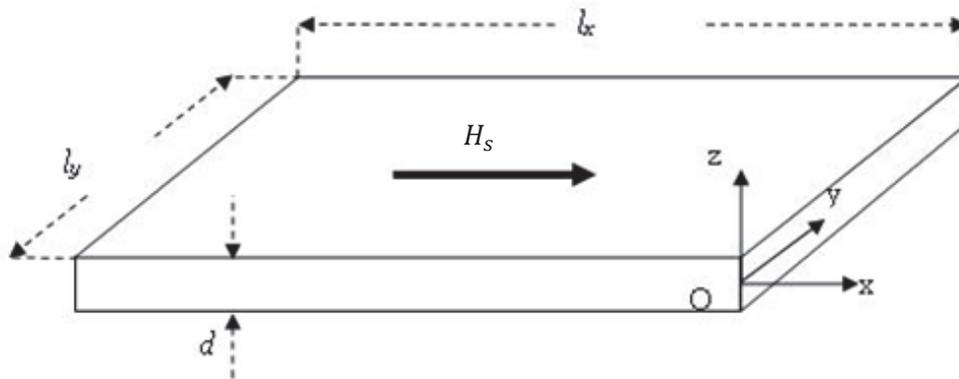


Figure IV-1 : Données géométriques du problème

On considère une tôle mince magnétique et conductrice, d'épaisseur  $d$  très petite vis-à-vis des autres dimensions  $l_x$  et  $l_y$  (tôle infinie – Figure IV-1), soumise en surface à un champ d'excitation sinusoïdal uniforme d'expression complexe :

$$H_s(t) = \widehat{H}_s e^{j\omega t} \quad (\text{IV-1})$$

où  $\omega$  désigne la pulsation du champ d'excitation et  $\widehat{H}_s$  son amplitude.

Afin de simplifier le problème, on suppose que le matériau a un comportement magnétique et électrique linéaire, caractérisé seulement par :

- ✚ Sa conductivité électrique  $\sigma$  supposée constante et homogène.
- ✚ Sa perméabilité magnétique  $\mu$  définie par la relation  $B = \mu H$

Pour ce problème de magnétodynamique, les grandeurs magnétiques  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  dans le circuit satisfont les deux équations de Maxwell :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \text{ et } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{IV-2})$$

Les lois constitutives sont  $J = \sigma E$  et  $B = \mu H$  où  $J$  représente la densité de courants induits.

Le champ d'excitation magnétique est appliqué parallèlement à la tôle, suivant la direction  $Ox$ . Compte tenu des dimensions de la tôle ( $d \ll l_y$ ), on peut considérer ce problème d'un point de vue monodimensionnel (selon la dimension de l'épaisseur). Le problème de diffusion magnétique résultant de IV-2 et des lois constitutives est défini par :

$$\frac{\partial^2 B_x(z, t)}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial B_x(z, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \quad (\text{IV-3})$$

Afin d'écrire plus simplement une solution analytique du problème, on introduit un paramètre supplémentaire  $\delta$  appelé épaisseur de peau et défini par la relation :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (\text{IV-4})$$

Compte tenu de la symétrie du problème,  $B_x(z, t)$  est nécessairement une fonction paire de  $z$ . Une solution analytique s'écrit donc :

$$B_x(z, t) = \widehat{B}_s \frac{\cosh\left(\frac{(1+j)z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{(1+j)d}{2\delta}\right)} e^{j\omega t} \quad (\text{IV-5})$$

où  $\widehat{B}_s$  désigne l'amplitude de  $B_x(z, t)$  à la surface de la tôle i.e. pour  $z = \pm \frac{d}{2}$ . Ainsi  $\widehat{B}_s = \mu\widehat{H}_s$ . Les développements de ce calcul peuvent se retrouver dans (3).

La solution (IV-5) rend compte à la fois de l'atténuation de l'amplitude de  $B_x(z, t)$  et de son déphasage par rapport à  $H_s(t)$  à différentes profondeurs de la tôle. L'atténuation et le déphasage sont maximaux au centre de la tôle. En effet, si l'on suppose la longueur  $l_y$  unitaire, le flux  $\phi(t)$  à travers la section contenue dans le plan  $Oyz$  vaut :

$$\phi(t) = 2 \int_0^{\frac{d}{2}} B_x(z, t) dz = \widehat{B}_s \frac{2\delta}{1+j} \tanh\left[(1+j) \frac{d}{2\delta}\right] e^{j\omega t} \quad (\text{IV-6})$$

Ainsi l'induction moyenne  $\bar{B}(t)$  suivant l'épaisseur de la tôle, mesurée par exemple à l'aide d'une spire encerclante, vaut :

$$\bar{B}(t) = \underline{K} \widehat{B}_s e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{K} = \frac{2\delta}{(1+j)d} \tanh\left[(1+j) \frac{d}{2\delta}\right] \quad (\text{IV-7})$$

Le module de  $\underline{K}$  rend compte de l'atténuation de l'amplitude de  $\bar{B}(t)$  alors que son argument rend compte du déphasage entre  $H_s(t)$  et  $\bar{B}(t)$  ( Figure IV-2 ).

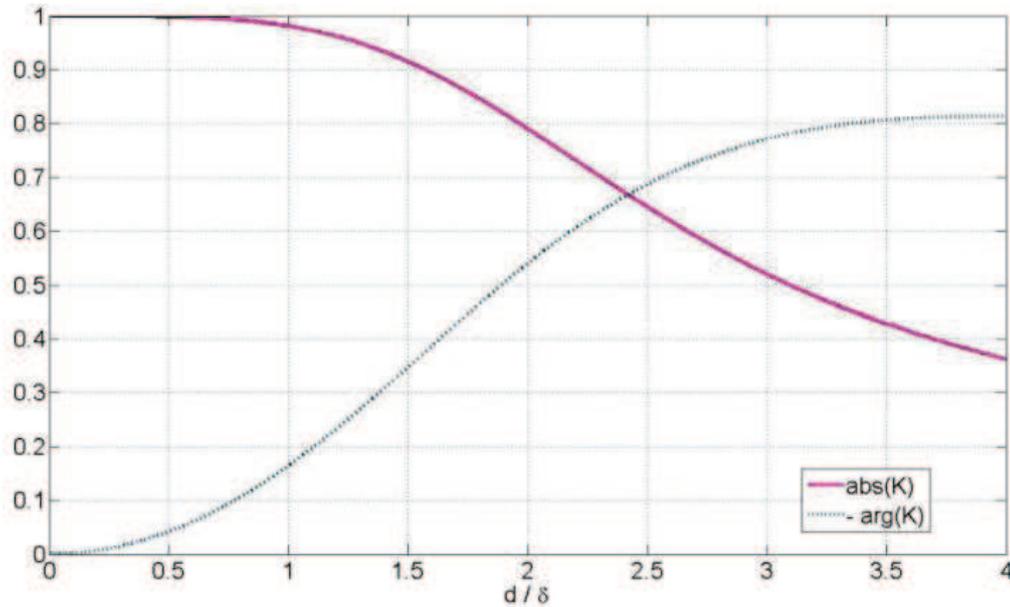


Figure IV-2 : Variation du module et de l'argument (en radians) de  $\underline{K}$  en fonction de  $\frac{d}{\delta}$

Dans la Figure IV-3, on s'aperçoit que, bien que l'on choisisse une loi statique linéaire (de perméabilité relative  $\mu_r = 1000$ ), on observe l'apparition d'un cycle ellipsoïdal pour la courbe  $\bar{B}(H_s)$  de plus en plus large que  $\frac{d}{\delta}$  grandit (ici  $\frac{d}{\delta} = 2$ ).

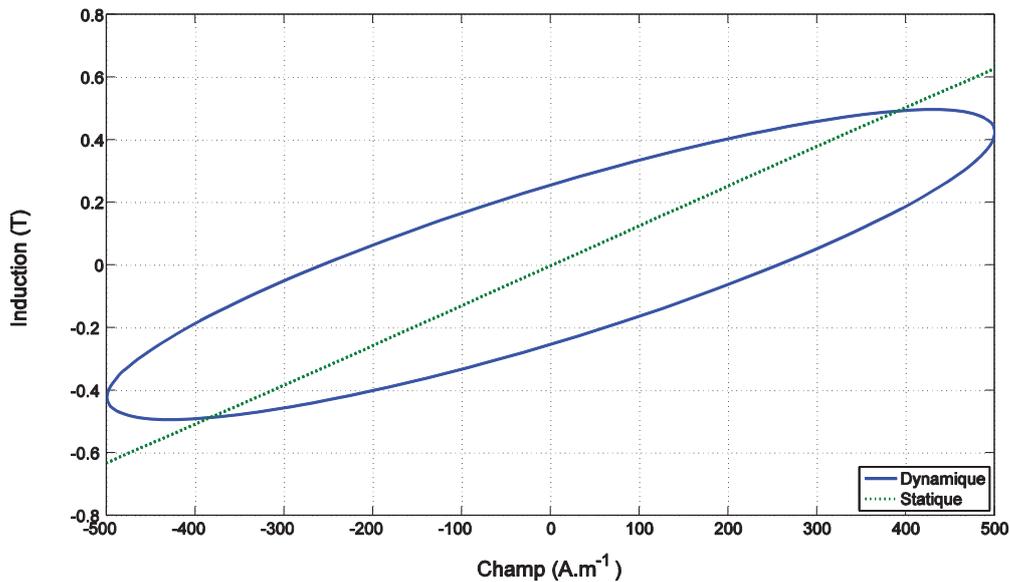


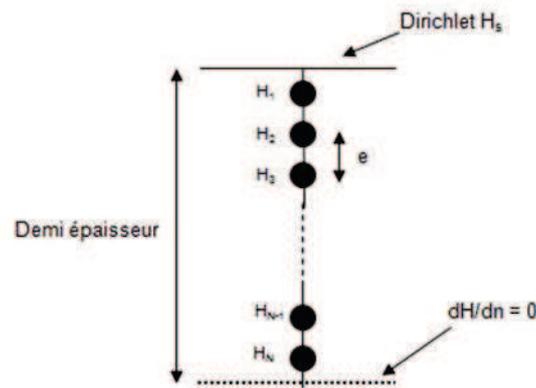
Figure IV-3 : Cycle d'hystérésis dynamique obtenu à l'aide de la loi statique linéaire considérée

## 2. Résolution de l'équation de diffusion dans le cas d'un matériau réel

Dans la plupart des applications, les matériaux magnétiques entrent en saturation. Du fait de cette non-linéarité magnétique, il n'existe pas de solution analytique pour un matériau soumis à des conditions réelles de fonctionnement. Nous allons donc implémenter un code en différences finies de l'équation de

diffusion magnétique afin de déterminer le plus précisément possible l'induction moyennée dans le circuit magnétique.

La géométrie du problème imposant généralement une épaisseur  $d$  très inférieure aux deux autres dimensions  $l_x$  et  $l_y$ , une discrétisation monodimensionnelle suivant la demi-épaisseur de la tôle est effectuée (Figure IV-4).



**Figure IV-4 : Discrétisation de la géométrie étudiée**

L'équation de diffusion magnétique IV-3 faisant intervenir les variables  $H_x(z, t)$  et  $B_x(z, t)$  doit être résolue et se ramène à l'équation :

$$\frac{\partial^2 H_x(z, t)}{\partial z^2} = \sigma \frac{\partial B_x(z, t)}{\partial t} \quad \text{avec} \quad -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \quad (\text{IV-8})$$

Le modèle de Jiles-Atherton est utilisé comme loi constitutive statique reliant  $\vec{H}$  à  $\vec{B}$  à la place de la loi linéaire utilisée dans la section IV.B.1. Les conditions aux limites imposées sont le champ d'excitation  $H_s(t)$  imposé à la surface du matériau (condition de Dirichlet) et  $\frac{\partial H(z, t)}{\partial z} = 0$  au centre de la tôle (condition de Neumann). A chaque nœud du maillage, l'équation (IV-8) est résolue. Ce modèle est par la suite comparé à des mesures effectuées sur les échantillons 1 et 2 (voir Annexe).

L'échantillon 1 est constitué de quatre rondelles empilées de FeSi 3% d'épaisseur 0,35 mm chacune. Pour une mesure à 500 Hz, le rapport  $\frac{d}{\delta}$  est de l'ordre de 2,5.

L'échantillon 2 est constitué d'un tore de FeNi d'épaisseur 1,1 mm. Pour une mesure à 100 Hz, le rapport  $\frac{d}{\delta}$  est de l'ordre de 3,5.

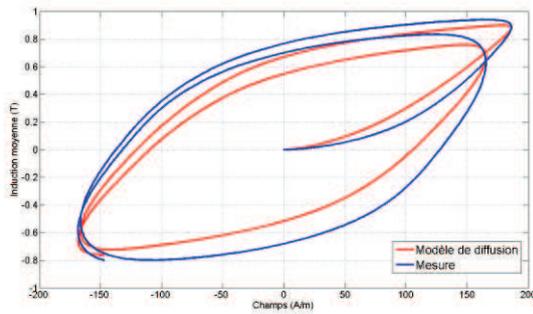


Figure IV-5 : Simulation et mesure à 500Hz pour l'échantillon 1

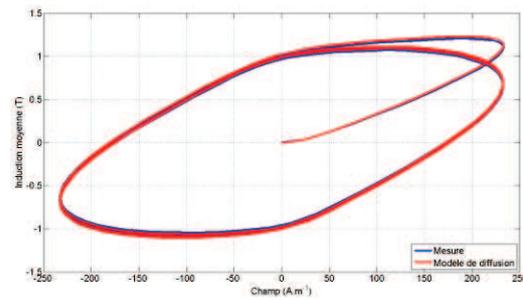


Figure IV-6 : Simulation et mesure à 100 Hz pour l'échantillon 2

On s'aperçoit que pour l'échantillon 2 (Figure IV-6) il y a concordance entre mesure et simulation alors que pour l'échantillon 1 (Figure IV-5), la simulation sous-estime le champ pour un niveau d'induction donné.

Ces deux résultats mettent en évidence la théorie de la subdivision des pertes (61). En effet, les pertes totales dans le circuit magnétique peuvent se scinder en trois composantes :

- ✚ Les pertes statiques : Les pertes par hystérésis en régime statique sont donc uniquement liées, de manière intrinsèque, aux propriétés physiques du matériau. Elles sont mesurées à l'aide d'un cycle quasi-statique et sont représentées dans notre cas par le modèle de Jiles-Atherton.
- ✚ Les pertes dynamiques macroscopiques : Ces pertes, aussi appelées pertes par courants de Foucault, sont mises en évidence dans la section IV.B.1. L'utilisation de matériaux magnétiques à résistivité très élevée, les ferrites par exemple, permet de réduire les pertes ayant pour origine ces courants induits macroscopiques. Pour des matériaux tels que les tôles magnétiques à base de fer, la solution classique consiste à feuilletter le matériau afin de réduire ces courants macroscopiques. En effet, la circulation des courants de Foucault se faisant selon les sections droites, ce type de procédé augmente la résistance apparente dans l'épaisseur de la tôle. On peut aussi réduire la conductivité de tels matériaux en y adjoignant des particules amagnétiques de Silicium dans les tôles FeSi ou de Nickel dans les tôles FeNi. En régime dynamique, les courants de Foucault produisent un gonflement du cycle d'hystérésis  $\bar{B}(H_s)$  plus ou moins notable selon le matériau étudié.

- ✚ Les pertes par dynamique de parois : Ces pertes, appelées aussi pertes excédentaires ou bien encore pertes dynamiques microscopiques, sont dues à la présence de micro-courants circulant autour des parois. Ces courants sont induits lors du déplacement des parois. Le modèle de Pry et Bean en 1958 (62) fut le premier à pouvoir calculer le rapport entre les pertes dynamiques totales et celles seulement dues aux courants de Foucault.

Lors de la résolution de l'équation de diffusion considérant une loi statique reliant  $B_x(z, t)$  et  $H_x(z, t)$ , les courants induits par le déplacement des parois ne sont pas pris en compte ce qui explique que le cycle simulé Figure IV-5 ne soit pas « assez dynamique » par rapport à celui issu de la mesure. Pour la Figure IV-6, la mesure et la simulation coïncident car, du fait du caractère massif de l'échantillon, les courants induits macroscopiques sont prépondérants et masquent ainsi les effets des courants induits par le déplacement des parois.

### 3. Importance des courants induits par le déplacement des parois

Nous venons donc de voir que le calcul classique des pertes par courants induits ignore la subdivision du matériau en domaines élémentaires. Or la prise en compte de cette subdivision peut profondément modifier le résultat du calcul. Pour imaginer ce fait, nous allons raisonner sur un cas simple traité la première fois par Chikazumi (5).

On suppose un cylindre infiniment long, de rayon  $r_0$ , de conductivité  $\sigma$ , soumis à une induction axiale sinusoïdale d'expression

$$B(t) = \hat{B} \sin(\omega t) \quad (\text{IV-9})$$

Nous allons calculer les pertes de deux manières différentes : la première où le cylindre possède une aimantation uniforme et la seconde où l'on imagine que les variations d'aimantation sont engendrées par le déplacement d'une unique paroi de Bloch cylindrique de  $R(t)$  (Figure IV-7).

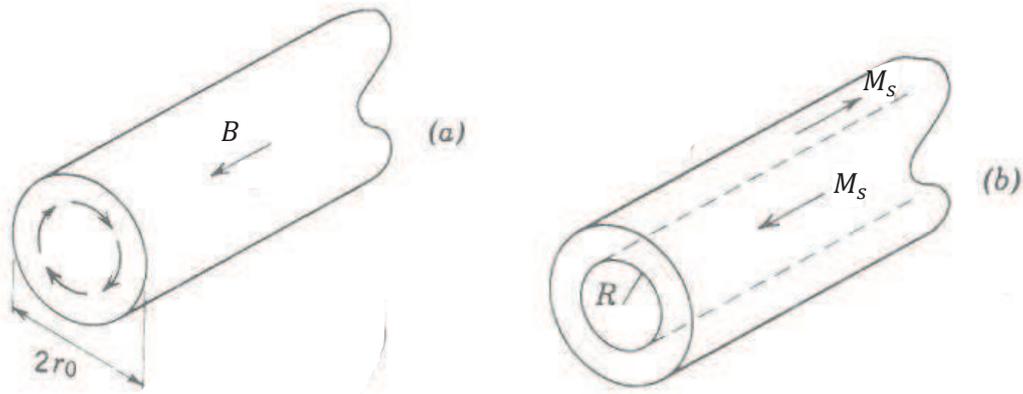


Figure IV-7 : (a) : cylindre avec aimantation uniforme – (b) : cylindre avec paroi de Bloch

### a) Modèle à aimantation uniforme

Le champ électrique induit  $E$  est un champ électrique tangential. A l'aide de la loi de Faraday, on peut le calculer à une distance  $r$  de l'axe par la relation :

$$2\pi r E(r, t) = - \frac{d(\pi r^2 \hat{B} \sin(\omega t))}{dt} \quad (\text{IV-10})$$

soit

$$E(r, t) = - \frac{r \hat{B} \omega \cos(\omega t)}{2} \quad (\text{IV-11})$$

Dans un mince tube creux de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  (de longueur unitaire), les pertes par effet thermique valent en moyenne sur une période :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma E(r, t)^2 2\pi r dr dt = \frac{\pi \sigma \omega^2 \hat{B}^2}{4} r^3 dr \quad (\text{IV-12})$$

soit pour l'ensemble du cylindre

$$W_1 = \int_0^{r_0} \frac{\pi \sigma \omega^2 \hat{B}^2}{4} r^3 dr = \frac{\pi \sigma \omega^2 \hat{B}^2 r_0^4}{16} \quad (\text{IV-13})$$

### b) Modèle à déplacement de paroi

Il s'agit d'un modèle comportant deux domaines d'aimantations respectives opposées  $+M_s$  et  $-M_s$  séparés par une paroi mobile cylindrique de rayon  $R(t)$ . L'induction moyenne apparente résulte à chaque instant de la différence des volumes occupés par les deux domaines. Cette induction moyenne est calculable par :

$$\bar{B}(t) = \mu_0 \left( \frac{2R^2(t)}{r_0^2} - 1 \right) M_s \quad (\text{IV-14})$$

Il n'existe aucun courant induit dans la partie intérieure du cylindre ( $r < R(t)$ ) puisqu'il n'y a pas de variation de flux dans ce domaine. Ainsi

$$E(r, t) = 0 \quad (r < R(t)) \quad (\text{IV-15})$$

Dans la partie extérieure ( $r > R(t)$ ), le champ électrique induit est tangentiel et vaut, d'après la loi de Faraday :

$$2\pi r E(r, t) = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{IV-16})$$

Or dans cette « couronne » du cylindre ( $r > R(t)$ ),  $B$  ne varie pas en fonction du temps et il reste constant ( $B = -\mu_0 M_s$ ). Par contre la surface de cette couronne, utilisée pour calculer le flux, varie temporellement car elle est dépendante de  $R(t)$ .

$$2\pi r E(r, t) = - \frac{d(-\mu_0 M_s 2\pi(r^2 - R(t)^2))}{dt} \quad (\text{IV-17})$$

On en déduit donc l'expression du champ électrique  $E(r, t)$  :

$$E(r, t) = -2\mu_0 M_s \frac{R(t)}{r} \frac{dR(t)}{dt} \quad (\text{IV-18})$$

Ainsi les pertes totales dans le cylindre de longueur unitaire peuvent être calculées par l'intégrale (IV-19):

$$P(t) = \int_{R(t)}^{r_0} \sigma E(r, t)^2 2\pi r dr = 8\pi\mu_0^2 M_s^2 \sigma R(t)^2 \left( \frac{dR(t)}{dt} \right)^2 \ln \left( \frac{r_0}{R(t)} \right) \quad (\text{IV-19})$$

En dérivant (IV-14) on peut ainsi corréler la dérivée temporelle de  $R(t)$  avec celle de  $B(t)$ .

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{dB(t)}{dt} \frac{r_0^2}{4\mu_0 M_s R(t)} \quad (\text{IV-20})$$

En l'injectant dans (IV-19) on simplifie l'expression des pertes qui devient :

$$P(t) = \frac{1}{2} \pi \sigma r_0^4 \left( \frac{dB(t)}{dt} \right)^2 \ln \left( \frac{r_0}{R(t)} \right) \quad (\text{IV-21})$$

On s'aperçoit que ces pertes dépendent donc du rapport du rayon de la paroi par rapport au rayon total du cylindre (facteur  $\ln \left( \frac{r_0}{R(t)} \right)$ ). Toutefois en moyenne on a :

$$\overline{\ln\left(\frac{r_0}{R}\right)} = \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} \ln\left(\frac{r_0}{R}\right) dR = 1 \quad (\text{IV-22})$$

Donc les pertes peuvent se ramener sans trop d'erreur à l'expression suivante de « pertes moyennées » sur une période :

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \pi \sigma r_0^4 \left( \frac{dB(t)}{dt} \right)^2 dt \quad (\text{IV-23})$$

En utilisant l'expression de  $B(t)$  donnée dans l'équation (IV-9) on peut calculer l'expression des pertes moyennes sur une période :

$$W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \pi \sigma r_0^4 \left( \frac{d(\hat{B} \sin(\omega t))}{dt} \right)^2 dt = \frac{\pi \sigma r_0^4 \omega^2 \hat{B}^2}{4} \quad (\text{IV-24})$$

### c) Comparaison des deux modèles

Ainsi en comparant le rapport  $W_2$  sur  $W_1$ , on constate que les pertes du modèle comportant une paroi sont quatre fois plus grandes que celles du modèle classique.

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{\pi \sigma r_0^4 \omega^2 \hat{B}^2}{4}}{\frac{\pi \sigma r_0^4 \omega^2 \hat{B}^2}{16}} = 4 \quad (\text{IV-25})$$

Quand on prend en compte l'existence des domaines, on arrive donc nécessairement à une répartition plus inhomogène des courants induits ce qui entraîne un accroissement des pertes associées. Parce qu'il ne tient pas compte de l'existence des domaines, il est donc évident que le modèle classique de diffusion magnétique entraîne une sous-estimation systématique des pertes par courants induits (Figure IV-5).

## C. Fondements du modèle DWM : Diffusion and Wall Motion

### 1. Dynamique d'une paroi isolée

Les physiciens américains H-J Williams, W. Shockley et C. Kittel ont établi définitivement dès 1950 (63) que les parois de Bloch subissaient dans les matériaux ferromagnétiques conducteurs un freinage visqueux ayant les courants induits pour origine.

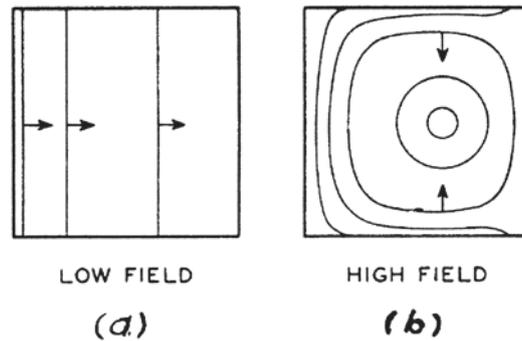


Figure IV-8 : (a) : déplacement de paroi en champ faible – (b) : déplacement de paroi en champ fort d'après (63)

Ces physiciens ont observé sur des monocristaux simples ne comportant qu'une seule paroi à 180° que la vitesse de déplacement de cette paroi varie linéairement avec le champ appliqué (Figure IV-8 – (a)). Ainsi la position  $x$  d'une paroi est régie par l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \eta(H - H_c) \quad (\text{IV-26})$$

Le coefficient  $\eta$  s'appelle la mobilité de la paroi et dépend de la conductivité du milieu. Elle est de l'ordre de  $10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ A}^{-1}$  dans le fer.  $H_c$  est un champ seuil variant en fonction de la position  $x$  de la paroi et  $H$  représente le champ appliqué.

Cette équation est valable dans les champs faibles (la paroi restant plane). Toutefois dans les champs moyens et forts, le comportement reste similaire avec une mobilité  $\eta$  augmentée, comportement explicable par la manifestation d'une nouvelle structure de paroi (Figure IV-8 – (b)).

## 2. Modèle de comportement dynamique de matériau dû aux mouvements de parois

En se basant à la fois sur les découvertes expérimentales de Williams mais aussi sur le vécu du laboratoire (64), (65), (66), (67), une loi de comportement dynamique de matériau permettant de rendre compte des effets liés aux mouvements de parois a été élaborée au sein du laboratoire AMPERE

En se plaçant dans le cas d'une seule paroi à 180° comme dans la section IV.C.1, le terme  $\frac{dx}{dt}$  est proportionnel à la variation temporelle du volume du domaine  $\frac{dV}{dt}$ . Or s'il y a une variation du volume  $V$  du domaine alors il y a donc une variation de l'aimantation globale  $M$  du matériau. Ainsi on peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = K \frac{dM}{dt} \quad (\text{IV-27})$$

ou  $K$  est une constante de proportionnalité.

Le champ seuil  $H_c$  défini dans (IV-26) correspond au champ minimal à appliquer pour faire « bouger » la paroi et dépend de la position de cette dernière donc de l'induction moyenne du matériau. Ainsi ce champ seuil est fonction de  $B$ . Si la fréquence tend vers 0, alors  $\frac{dx}{dt} \rightarrow 0$  et ainsi le champ appliqué  $H \rightarrow H_c$ . Or en quasi-statique, le champ  $H$  appliqué est le champ statique que nous notons  $H_{stat}(B)$ . Ainsi :

$$H_c = H_{stat}(B) \quad d'où \quad \frac{dM}{dt} = \frac{1}{K}(H - H_{stat}(B)) \quad (\text{IV-28})$$

Pour les matériaux ferromagnétiques, le rapport  $\frac{B}{\mu_0}$  est généralement très grand par rapport à  $H$ . Ainsi on peut assimiler l'aimantation à ce rapport sans faire une trop grosse approximation.

$$M \approx \frac{B}{\mu_0} \quad (\text{IV-29})$$

Ainsi le modèle de comportement dynamique développé dans notre laboratoire est donné par la relation différentielle suivante :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{\beta}(H - H_{stat}(B)) \quad (\text{IV-30})$$

où le paramètre  $\beta$  représente un paramètre structurel propre au matériau, indépendamment de la forme de l'échantillon et  $H_{stat}(B)$  représente le champ statique obtenu par le modèle inverse de Jiles-Atherton pour l'induction donnée  $B$ . Il n'existe pas de relation physique ou mathématique permettant de déterminer la valeur du paramètre  $\beta$ . Sa valeur est par conséquent définie à partir d'une comparaison entre un cycle dynamique mesuré pour une excitation donnée et le cycle dynamique simulé par le modèle DWM pour la même excitation.

### 3. Modèle de diffusion incluant la dynamique des parois : DWM model

Le modèle de loi dynamique de matériau défini par (IV-30) est considéré en remplacement de la loi statique constitutive du matériau dans l'équation classique de diffusion (IV-8). Le modèle complet de diffusion magnétique, baptisé DWM (Diffusion & Wall Motion) est élaboré. Dans l'équation IV-31 régissant le modèle DWM, le terme en dérivée temporelle de l'induction n'apparaît plus, cependant le

caractère de diffusion est conservé car le calcul de  $B$  se fait implicitement pour chaque pas de temps par la résolution de l'équation traduisant la loi dynamique du matériau (IV-30).

$$\frac{\partial^2 H_x(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\sigma}{\beta} (H_x(z, t) - H_{stat}(B_x(z, t))) \quad (\text{IV-31})$$

## D. Implémentation du modèle DWM

Deux formulations du modèle sont élaborées. La première considère un champ d'excitation de surface appliqué et la seconde correspond à un flux imposé.

### 1. Modèle « direct » pour champ de surface imposé

Si l'on suppose la longueur et la largeur de l'échantillon très supérieures à son épaisseur, on peut se ramener au cas monodimensionnel détaillé dans la section IV.B.2. et le problème se résume à la résolution de l'équation (IV-31). Par souci de commodité nous noterons maintenant  $H$  pour  $H_x$  et  $B$  pour  $B_x$ .

Compte tenu de la simplicité du domaine d'étude, l'implémentation numérique de ce problème s'effectue en différences finies. La discrétisation utilisée est celle présentée Figure IV-4. La formule de Taylor permettant d'obtenir l'approximation au nœud  $i$  de la dérivée seconde du champ  $H$  par rapport à  $z$  est :

$$\left( \frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} \right)_i = \frac{H(i+1, t) - 2H(i, t) + H(i-1, t)}{e^2} \quad (\text{IV-32})$$

où  $e$  représente l'écart entre deux nœuds consécutifs.

Ainsi le problème devient, une fois discrétisé temporellement et spatialement, un ensemble de  $N$  équations correspondant aux  $N$  nœuds de la discrétisation. L'équation (IV-31) formulée pour le nœud  $i$  est :

$$\frac{H(i+1, t) - 2H(i, t) + H(i-1, t)}{e^2} = \frac{\sigma}{\beta} (H(i, t) - H_{stat}(B(i, t))) \quad (\text{IV-33})$$

soit d'une manière matricielle

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 + \frac{\sigma e^2}{\beta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(i-1, t) \\ 2H(i, t) \\ H(i+1, t) \end{pmatrix} = \frac{\sigma e^2}{\beta} H_{stat}(B(i, t)) \quad (\text{IV-34})$$

En introduisant les conditions aux limites (à savoir le champ à la surface de l'échantillon  $H_s(t)$  et la condition de Neumann au centre de la tôle), le système matriciel décrivant l'ensemble du système se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{\sigma e^2}{\beta} & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \frac{\sigma e^2}{\beta} & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 + \frac{\sigma e^2}{\beta} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 + \frac{\sigma e^2}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(1,t) \\ H(2,t) \\ \vdots \\ H(N-1,t) \\ H(N,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_s(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sigma e^2}{\beta} \begin{pmatrix} H_{stat}(B(1,t)) \\ H_{stat}(B(2,t)) \\ \vdots \\ H_{stat}(B(N-1,t)) \\ H_{stat}(B(N,t)) \end{pmatrix} \quad (\text{IV-35})$$

Ce système a l'avantage de ne nécessiter qu'une unique fois l'inversion de la matrice de raideur car elle est indépendante du temps et peut donc être pré-calculée. A chaque pas de temps, la valeur  $H_{stat}(B(i,t))$  est calculée à l'aide de l'algorithme inverse de Jiles-Atherton. Avant ce calcul et afin de connaître la répartition de l'induction  $B(i,t)$  au sein de la tôle, l'équation (IV-30) est utilisée grâce à la méthode d'Euler.

## 2. Modèle « inverse » pour flux imposé

De nombreux systèmes électromagnétiques ne nous donnent pas accès à une mesure directe du champ à la surface des matériaux magnétiques qui les composent. Cependant une mesure de la variation de flux qu'ils imposent est possible au travers d'une mesure de tension. Si l'on considère la géométrie Figure IV-1 ainsi que les hypothèses simplificatrices utilisées pour le modèle direct, le flux  $\phi(t)$  à travers la section de la tôle est donné par la relation suivante :

$$\phi(t) = l_y \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} B_x(z,t) dz \quad (\text{IV-36})$$

En effectuant une moyenne spatiale de l'équation de diffusion (IV-8) i.e. en intégrant cette équation sur l'épaisseur de la tôle, on obtient la relation :

$$2 \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} \Big|_{surface} = \sigma \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\partial B(z, t)}{\partial t} dz = \frac{\sigma}{l_y} \frac{\partial \left( l_y \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} B(z, t) dz \right)}{\partial t} = \frac{\sigma}{l_y} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (IV-37)$$

Finalement :

$$\frac{\partial H(z, t)}{\partial z} \Big|_{surface} = \frac{\sigma}{2l_y} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (IV-38)$$

Cette relation peut s'exprimer à l'aide des différences finies de la manière suivante :

$$\frac{H_s(t) - H(1, t)}{e} = \frac{\sigma}{2l_y} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (IV-39)$$

Ainsi on obtient une relation liant  $H_s(t)$  à  $\phi(t)$  que l'on peut réinjecter dans le système matriciel (IV-35). On obtient le nouveau système propre au modèle inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sigma e^2}{\beta} & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \frac{\sigma e^2}{\beta} & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 + \frac{\sigma e^2}{\beta} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 + \frac{\sigma e^2}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(1, t) \\ H(2, t) \\ \vdots \\ H(N-1, t) \\ H(N, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma e}{2l_y} \frac{d\phi(t)}{dt} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sigma e^2}{\beta} \begin{pmatrix} H_{stat}(B(1, t)) \\ H_{stat}(B(2, t)) \\ \vdots \\ H_{stat}(B(N-1, t)) \\ H_{stat}(B(N, t)) \end{pmatrix} \quad (IV-40)$$

## E. Un modèle d'hystérésis statique précis : est-ce bien utile ?

L'équation (IV-31) nous montre le besoin d'avoir un modèle d'hystérésis statique de manière à pouvoir calculer le champ statique  $H_{stat}$  correspondant à un niveau d'induction  $B$  donné. Cependant la question de la précision de ce modèle statique peut être soulevée. En d'autres termes quelle est l'influence du modèle statique sur la modélisation dynamique d'un matériau ?

Une première approche « simpliste » est de résumer le modèle statique à une simple interpolation le long d'une courbe anhystérétique. La Figure IV-9 montre la courbe anhystérétique de l'échantillon 2 obtenue après traitement d'une mesure statique à 0,05Hz .

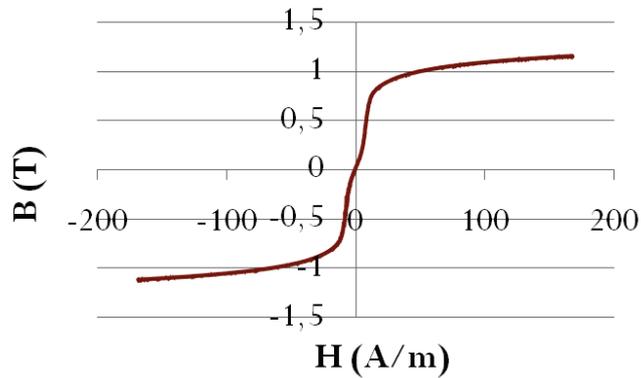


Figure IV-9 : Courbe anhystérique mesurée pour l'échantillon 2

En utilisant cette courbe comme modèle statique intervenant dans le modèle DWM, nous obtenons, lors d'une excitation décentrée sinusoïdale à 50 Hz par exemple, une erreur relativement importante (Figure IV-10).

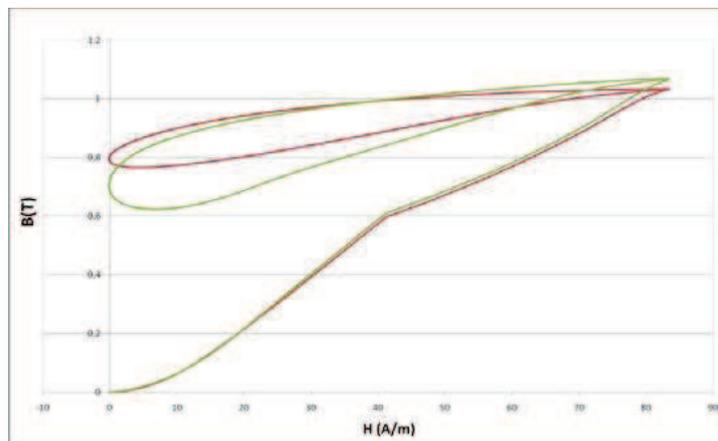


Figure IV-10 : Mesure (en rouge) et simulation à l'aide du modèle DWM (en vert) lors d'une excitation décentrée sinusoïdale à 50 Hz pour l'échantillon 2. ( $\beta = 0.01$ )

En effet cette interpolation « simpliste » ne prend pas en compte la rémanence ce qui explique la divergence entre simulation et mesure lorsque le champ tend à s'annuler.

Durant les premiers mois de ma thèse, l'utilisation du modèle classique de Jiles-Atherton en tant que modèle statique intégré au modèle DWM me semblait satisfaisante. Les simulations donnaient des résultats avec une erreur maximale de 8 % sur la forme d'onde obtenue dans le pire des cas. La Figure IV-11 montre une simulation et sa mesure associée pour l'échantillon 1.

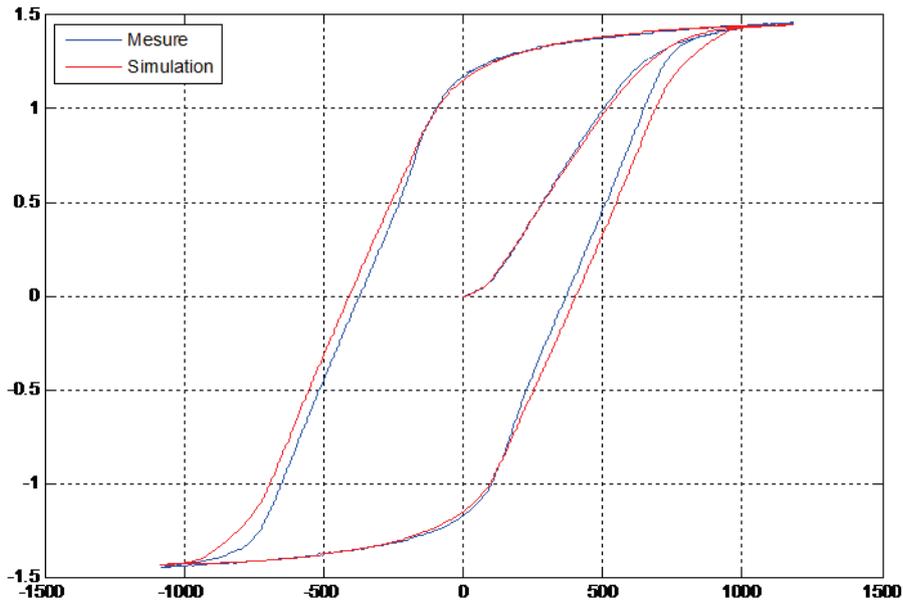


Figure IV-11 : Mesure et simulation avec une excitation sinusoïdale de 1000 Hz (échantillon 1) –  $\beta = 0.0045$  - Modèle DWM + Jiles Atherton classique (abscisse : H [A/m] ; ordonnée : B [T])

Cependant lors de différents essais à des niveaux d'induction différents de ceux proches de la saturation, les erreurs entre mesures et simulations deviennent énormes et avoisinent les 70 % dans le pire des cas. Ces problèmes ont été présentés lors de SMM 2008 (68). Ce problème fut aussi soulevé dans (69). La première intention fut d'essayer d'ajuster le paramètre  $\beta$  afin de compenser ces erreurs mais aucune déduction logique ou physique ne put étayer cette approche.

Les critiques faites au modèle de Jiles-Atherton exposées dans la section III.F ont permis de comprendre que les erreurs commises n'étaient pas dues à une mauvaise définition du modèle dynamique mais plutôt à une imprécision du modèle statique utilisé. La même mesure que celle présentée Figure IV-11 est réutilisée pour une simulation avec le modèle DWM mais cette fois avec le modèle de Jiles-Atherton modifié comme modèle statique. La valeur du paramètre  $\beta$  trouvée dans ce cas là est différente car dans la simulation précédente, les défauts du modèle de Jiles-Atherton classique étaient compensés en partie par une mauvaise estimation du paramètre  $\beta$ . La Figure IV-12 montre la bonne concordance entre la mesure et la simulation.

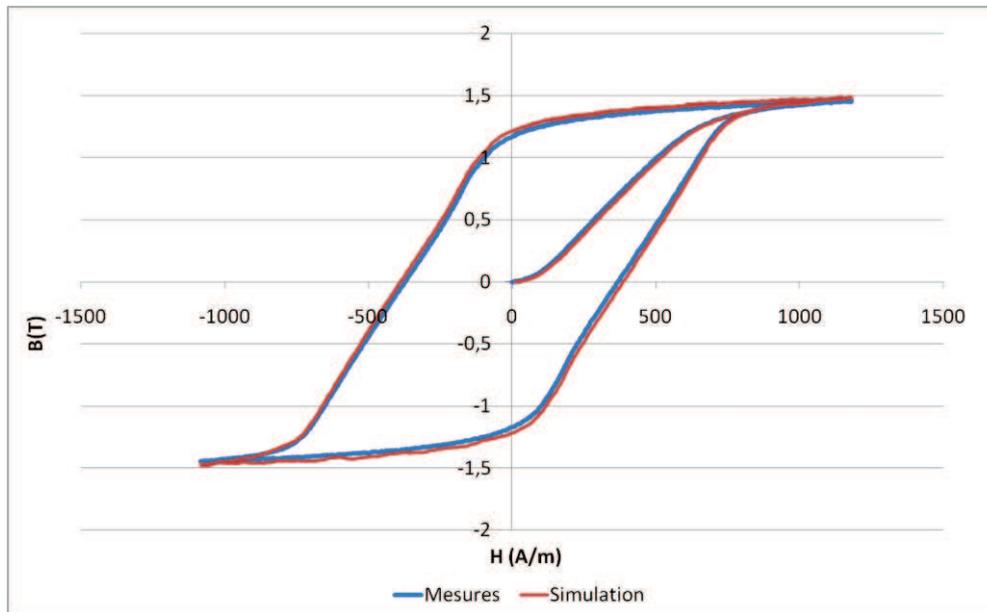


Figure IV-12 : Mesure et simulation avec une excitation sinusoïdale de 1000 Hz (échantillon 1) –  $\beta = 0.014$  - Modèle DWM + Jiles Atherton modifié

Ainsi l'utilité d'un modèle d'hystérésis statique précis dans un modèle de comportement dynamique de matériau est prouvée. Dans le cas contraire, cette imprécision entrainera une mauvaise séparation des comportements statique d'une part et dynamique de l'autre, provoquant ainsi une compensation de l'erreur due au modèle statique par le modèle dynamique : le paramètre de ce dernier serait donc faussé entrainant ainsi une incompréhension des mécanismes de l'aimantation dynamique.

## F. Validation du modèle DWM

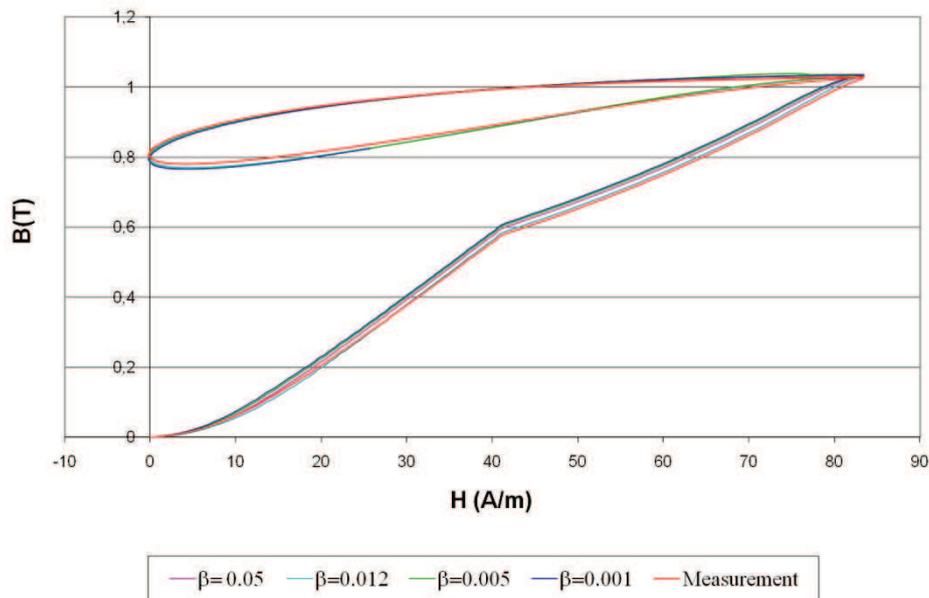
Une étude de validation de ce modèle a été effectuée dans (1). Toutefois nous nous proposons de faire une validation succincte supplémentaire du modèle DWM en formulation directe et inverse. L'utilisation du modèle de Jiles-Atherton modifié a nécessité une refonte complète du code de calcul initialement effectué sous *Simulink*. La simplicité des schémas-blocs en était un atout mais cependant son ergonomie pour traiter une discrétisation et résoudre des équations aux dérivées partielles nous a incités à « recoder » ces modèles en fonction interprétable sous *Matlab*.

### 1. Cas particulier de l'échantillon 2

Dans la section IV.B.2 nous avons montré que du fait de son caractère massif, l'utilisation d'un modèle statique dans l'équation de diffusion était suffisante pour décrire le comportement dynamique du matériau (cf Figure IV-6).

En utilisant tout de même le modèle DWM, on s'aperçoit que la valeur du paramètre  $\beta$  importe peu dans la simulation. Les courants Foucault sont donc prépondérants par rapport aux courants induits par les déplacements de parois.

La figure IV-13 montre l'apport d'une loi statique précise et réaliste sur les performances du modèle DWM. Le matériau testé est celui de l'échantillon 2 soumis à la même sollicitation que celle décrite pour la figure IV-10. L'apport d'une loi statique précise est frappant lorsqu'on compare les figures IV 10 et IV 13.



**Figure IV-13 : Simulation à l'aide du modèle DWM+JA modifié pour différentes valeurs de  $\beta$  pour l'échantillon 2 pour la même mesure que la Figure IV-10**

L'échantillon 2 étant « insensible » aux effets dus aux mouvements de parois du fait de son caractère massif, nous avons donc décidé de valider l'algorithme direct à l'aide de mesures à champ imposé sur l'échantillon 1 et de valider l'algorithme inverse à l'aide de mesures à flux imposé sur l'échantillon 3 (voir Annexe).

## 2. Validation du modèle « direct »

Le modèle de Jiles-Atherton modifié est utilisé (cf section IV.E). La valeur de  $\beta$  identifiée est celle donnée plus haut, à savoir  $\beta = 0.014$ . Le modèle DWM direct est testé sur des mesures de l'échantillon 1 pour différentes valeurs de fréquence et d'induction maximale. Les mesures étant effectuées à champ de surface imposé, le critère de comparaison retenu est la différence entre la valeur temporelle de

l'induction de la simulation et celle de la mesure, différence exprimée en pourcentage et donnée par la relation suivante :

$$\left| \frac{\frac{1}{N_{points}} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_{points}} (B_{mes}(k))^2} - \frac{1}{N_{points}} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_{points}} (B_{sim}(k))^2}}{\frac{1}{N_{points}} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_{points}} (B_{mes}(k))^2}} \right| \times 100 \quad (IV-41)$$

Toutes les simulations ont donné un critère de comparaison inférieur à 1,5%. Ces différents résultats sont consignés dans les figures suivantes ( Figure IV-14 à Figure IV-17).

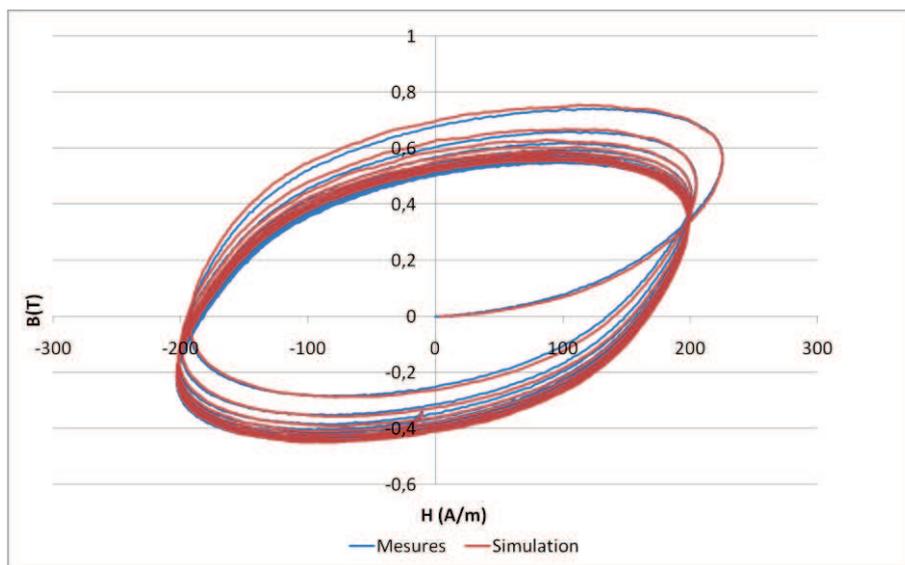


Figure IV-14 : Mesure et simulation à l'aide du modèle DWM pour l'échantillon 1 à  $f = 2000\text{Hz}$  et  $B_{max} = 0.6\text{T}$

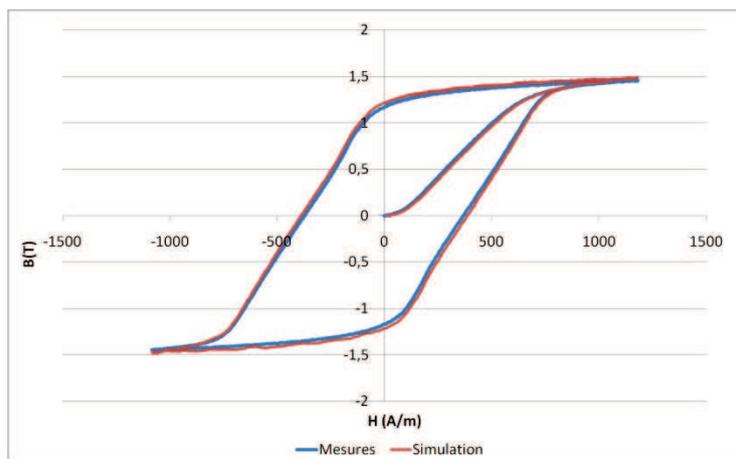


Figure IV-15 : Mesure et simulation à l'aide du modèle DWM pour l'échantillon 1 à  $f = 1000\text{Hz}$  et  $B_{max} = 1.5\text{T}$

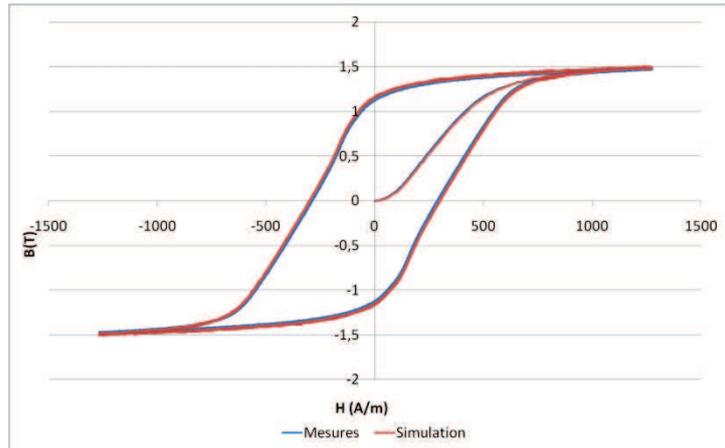


Figure IV-16 : Mesure et simulation à l'aide du modèle DWM pour l'échantillon 1 à  $f = 500\text{Hz}$  et  $B_{max} = 1.5\text{T}$

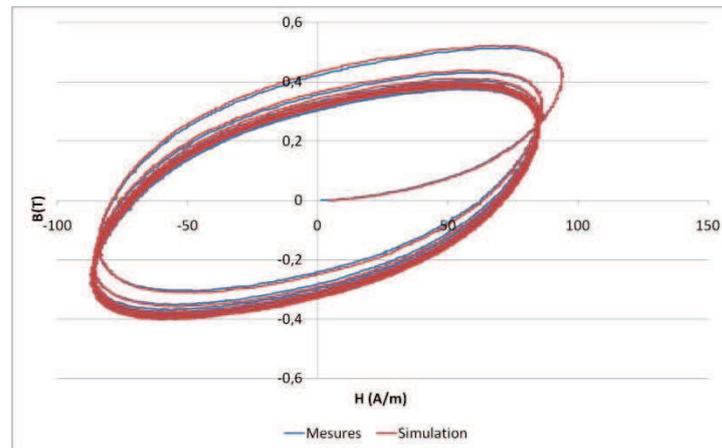


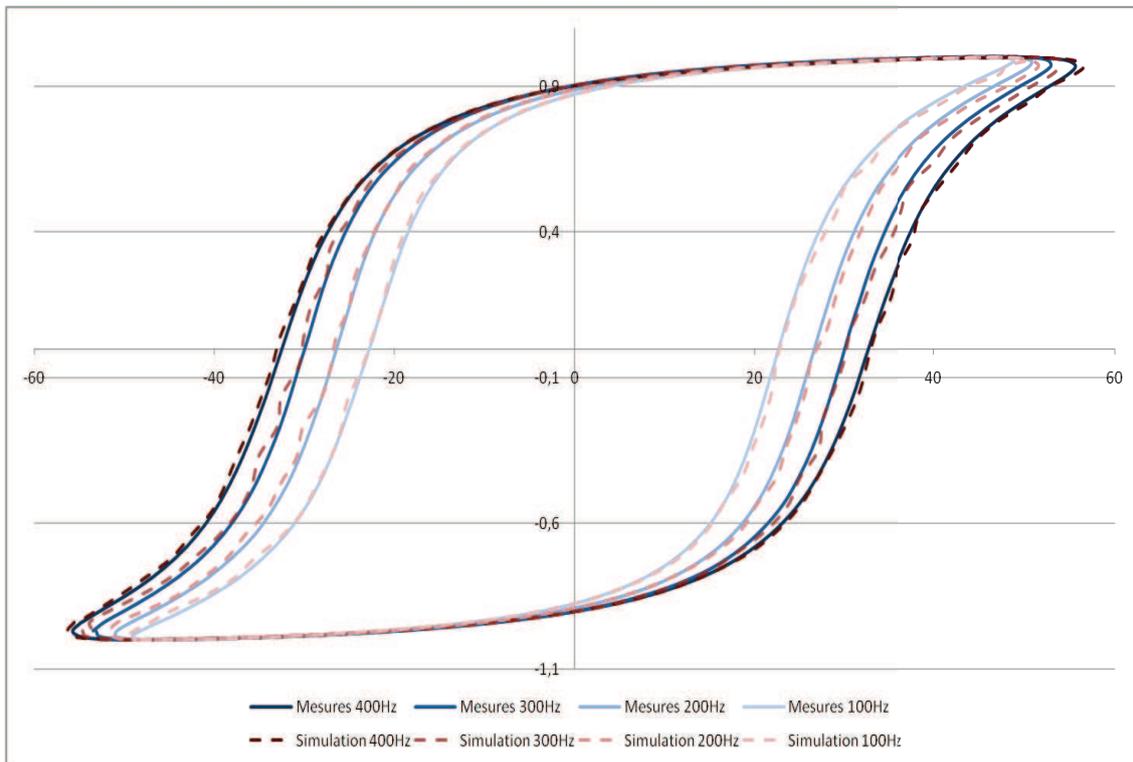
Figure IV-17 : Mesure et simulation à l'aide du modèle DWM pour l'échantillon 1 à  $f = 500\text{Hz}$  et  $B_{max} = 0.4\text{T}$

### 3. Validation du modèle « inverse »

Le modèle de Jiles-Atherton modifié est utilisé (cf section IV.E). La valeur de  $\beta$  identifiée est  $\beta = 0.0057$ . Le modèle DWM inverse est testé sur des mesures de l'échantillon 3 pour différentes valeurs de fréquences et d'inductions maximales. Les mesures étant effectuées à induction imposée, le critère de comparaison retenu est la différence entre la valeur temporelle du champ de la simulation et celle de la mesure, différence exprimée en pourcentage et donnée par la relation suivante :

$$\frac{\left| \frac{1}{N_{points}} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_{points}} (H_{mes}(k))^2} - \frac{1}{N_{points}} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_{points}} (H_{sim}(k))^2} \right|}{\frac{1}{N_{points}} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_{points}} (H_{mes}(k))^2}} \times 100 \quad (\text{IV-42})$$

Toutes les simulations ont donné un critère de comparaison inférieur à 2%. Quelques résultats sont consignés dans la Figure IV-18.



**Figure IV-18 : Mesure et simulation à l'aide du modèle DWM pour l'éch 3 à  $B_{max} = 1T$   
Abscisse : H [A/m] ; Ordonnée : B [T]**

## G. Synthèse – Conclusion

Le remplacement de la loi statique par une loi dynamique (modèle DWM) au sein de l'équation de diffusion permet de bien prendre en compte les divers phénomènes mis en jeu lors d'une aimantation dynamique.

Cependant, notre système d'acquisition actuel ne nous permettant pas d'obtenir des mesures correctes dans la gamme de fréquence supérieure à 5 kHz, nous n'avons pas pu mener une étude plus poussée de ce modèle dans les fréquences très nettement supérieures à la fréquence industrielle.

L'identification du paramètre  $\beta$  se fait encore purement de manière empirique : aucune relation physique ne permet actuellement de le corrélérer à une constante physique propre au matériau. Cependant des travaux antérieurs ont permis de mettre en évidence que, pour deux échantillons d'épaisseurs différentes d'un même matériau, aucune variation sur le paramètre  $\beta$  n'est constatée (70). Néanmoins, une conclusion probante ne pourra être faite qu'à la suite de tests systématiques effectués sur plusieurs échantillons d'épaisseurs différentes.

## V. Simplification du modèle DWM

Le modèle DWM, présenté dans le chapitre précédent, permet de modéliser correctement le phénomène de diffusion au sein d'un matériau en prenant en compte les pertes excédentaires dues aux mouvements de parois (61).

Toutefois la nécessité de discrétiser l'épaisseur du matériau et d'utiliser une méthode numérique par différences finies peut se révéler fastidieux lors de l'implémentation de ce modèle dans un code de calcul de champ ou dans un simulateur de circuits.

Par exemple, la modélisation par éléments finis d'un dispositif électromagnétique se ramène, avec une loi dynamique classique, à un problème en deux dimensions. L'introduction du modèle DWM nécessiterait donc d'introduire une discrétisation supplémentaire suivant l'épaisseur ce qui ramènerait à utiliser une modélisation en trois dimensions, modélisation gourmande en mémoire et en temps de calcul.

Une réflexion sur une simplification du modèle DWM afin de pouvoir l'inclure dans un simulateur de dispositifs électromagnétiques sans en alourdir l'implémentation ni le temps de calcul a été menée.

En premier lieu nous simplifierons notre modèle afin de le rendre plus facilement implémentable. Puis nous comparerons les résultats obtenus par le modèle simplifié à ceux obtenus avec un des modèles connus de la communauté scientifique, celui de Bertotti. Cette étude nous amènera à réfléchir sur les possibles modifications du modèle DWM et permettra de définir plus précisément son domaine de validité.

### A. Simplification du modèle DWM

Le modèle DWM est basé sur le couplage de l'équation de diffusion magnétique classique (IV-8) et d'une loi dynamique de matériau magnétique (IV-30).

Des travaux d'homogénéisation ont été effectués dans (71) et (72), cependant ces homogénéisations n'intègrent aucunement les effets dynamiques dus aux mouvements des parois, phénomènes reliés aux pertes excédentaires.

Nous avons décidé d'homogénéiser le modèle DWM. Ce travail s'est effectué selon deux étapes successives que nous décrivons.

Dans un premier temps, seule la formulation de l'équation de diffusion magnétique classique est considérée (IV-8). On intègre une première fois cette équation suivant l'épaisseur. Par raison de symétrie, on considère seulement la demi-épaisseur de la tôle.

$$\int_0^z \frac{\partial^2 H_x(z, t)}{\partial z^2} dz = \sigma \int_0^z \frac{\partial B_x(z, t)}{\partial t} dz \quad (\text{V-1})$$

Du fait de la faible épaisseur de la tôle vis-à-vis des autres dimensions, l'induction  $B_x(z, t)$  selon l'épaisseur varie peu et peut être confondue avec l'induction moyenne  $B_m(t)$  au sein de la tôle. Ainsi on obtient :

$$\left[ \frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} \right]_0^z = \sigma \frac{dB_m(t)}{dt} \int_0^z dz \quad (\text{V-2})$$

Soit

$$\frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sigma \frac{dB_m(t)}{dt} z \quad (\text{V-3})$$

Au milieu de la tôle, c'est-à-dire pour  $z = 0$ , la dérivée normale du champ  $H_x(z, t)$  est nulle par raison de symétrie. Une nouvelle intégration sur la demi-épaisseur nous conduit à une expression du champ d'excitation  $H_x(z, t)$ .

$$\int_{\frac{d}{2}}^z \frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} dz = \sigma \frac{dB_m(t)}{dt} \int_{\frac{d}{2}}^z z dz \quad (\text{V-4})$$

Soit

$$H_x(z, t) = \sigma \frac{dB_m(t)}{dt} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{d^2}{8} \right) + H_x \left( \frac{d}{2}, t \right) \quad (\text{V-5})$$

En remarquant que  $H_x \left( \frac{d}{2}, t \right) = H_s(t)$  et en effectuant la moyenne spatiale dans l'épaisseur de la tôle, nous en déduisons l'expression du champ d'excitation moyen  $H_m(t)$  qui n'a aucun sens physique mais qui est un artifice de calcul:

$$H_m(t) = \frac{2}{d} \int_0^{\frac{d}{2}} H_x(z, t) dz = -\frac{\sigma d^2}{12} \frac{dB_m(t)}{dt} + H_s(t) \quad (\text{V-6})$$

Or, d'après l'équation de la loi de matériau dynamique (IV-30) que nous intégrons de la même façon que l'équation (IV-8), on peut retrouver l'expression du champ moyen  $H_m(t)$  :

$$H_m(t) = \beta \frac{dB_m(t)}{dt} + H_{stat}(B_m(t)) \quad (\text{V-7})$$

Ainsi en combinant les équations (V-6) et (V-7) on obtient un modèle homogénéisé prenant en compte les effets dynamiques dus aux déplacements des parois.

$$H_s(t) = \gamma \frac{dB_m(t)}{dt} + H_{stat}(B_m(t)) \quad \text{avec} \quad \gamma = \beta + \frac{\sigma d^2}{12} \quad (\text{V-8})$$

## B. Discussion

Nous remarquons que le modèle DWM homogénéisé (V-8) n'est rien d'autre que le modèle DSF (Dynamic Static Feedback) c'est-à-dire un modèle « global » de représentation dynamique de circuit élaboré il y a plusieurs années au laboratoire (73). L'homogénéisation du modèle DWM a permis d'apporter une précision quant à l'identification du paramètre dynamique de circuit noté  $\gamma$  associé au modèle DSF. Ce paramètre apparaît clairement comme la résultante de deux termes :

- ✚ Le premier est lié à la présence des courants de Foucault (terme lié à  $\frac{\sigma d^2}{12}$ ), la valeur de ce terme dépend notamment de l'épaisseur  $d$  de l'échantillon
- ✚ Le second est étroitement apparenté au comportement dynamique structurel du matériau (terme en  $\beta$ ).

Un travail précédent (70), basé sur une démarche expérimentale, avait mis en évidence la décomposition du paramètre  $\gamma$  en deux termes, l'un clairement identifié (lié à la présence des courants de Foucault), l'autre lié aux pertes excédentaires mais non précisé.

Les résultats de cette homogénéisation permettent de conforter les travaux précédents.

### C. Validation expérimentale du modèle homogénéisé

Ces résultats sont issus de (74). Notre objectif est double. Il s'agit de vérifier la validité de la relation (V-8) mais aussi de discuter des domaines de validité et d'utilisation du modèle DWM homogénéisé.

Deux échantillons de circuits constitués de différents matériaux ferromagnétiques sont considérés. Afin de garantir l'hypothèse d'homogénéité, des sollicitations en flux sinusoïdal imposé, à fréquences relativement faibles sont utilisées. Pour chaque test opéré, une estimation de l'épaisseur de peau  $\delta$  définie par (IV-4) est précisée.

L'utilisation de l'épaisseur de peau  $\delta$  est discutable mais donne néanmoins une première indication sur l'hypothèse d'homogénéité du circuit magnétique étudié.

Pour chacun des échantillons, la valeur du paramètre  $\beta$  est déterminée à partir d'une comparaison entre les cycles mesuré et simulé grâce au modèle DWM pour la fréquence de travail la plus élevée définie par la mesure. La valeur du paramètre  $\gamma$  déduite de la relation (V-8) est maintenue constante pour toutes les simulations effectuées.

La quantification des erreurs commises est définie par les formules (V-11) (erreur quadratique moyenne) et (V-12) (erreur sur l'aire du cycle). Elles sont calculées à partir de la dernière période des cycles dynamiques obtenus lorsque le régime permanent est établi.

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{B_{\text{simulé}}(i) - B_{\text{mesuré}}(i)}{\max(B_{\text{mesuré}})} \right)^2} \cdot 100 \quad (\text{V-9})$$

$$\epsilon_2 = \left| \frac{\text{Aire}_{\text{mesurée}} - \text{Aire}_{\text{simulée}}}{\text{Aire}_{\text{mesurée}}} \right| \cdot 100 \quad (\text{V-10})$$

#### 1. Echantillon N°1

Il s'agit de l'échantillon N°1 défini dans l'annexe. L'identification des paramètres du modèle DWM homogénéisé est effectuée à la fréquence de 2000 Hz, on trouve :

$$\frac{\sigma d^2}{12} = 0,023 \quad \text{et} \quad \beta = 0,014 \quad (\text{V-11})$$

La Table V-1 fournit les valeurs des deux erreurs quadratiques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  obtenues et la profondeur de peau  $\delta$  ainsi que celle du rapport  $\frac{\delta}{\frac{d}{2}}$  pour les différentes fréquences de sollicitations considérées.

$f$ (Hz)	50	100	200	500	1000	2000
$\delta$ (mm)	0,43	0,31	0,218	0,138	0,097	0,069
$\frac{\delta}{\frac{d}{2}}$	2,49	1,76	1,25	0,788	0,557	0,394
$\epsilon_1$ (%)	2,15	1,98	2,05	3,05	5,23	7,85
$\epsilon_2$ (%)	1,23	1,46	1,06	1,03	3,29	3,69

Table V-1 : Erreurs  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  pour différentes fréquences de sollicitation pour l'échantillon N°1

A la lecture de la Table V-1 on remarque que, tant que l'hypothèse d'homogénéité est vérifiée (en première approximation indiquée par la valeur de  $\delta$  comparée à celle de  $\frac{d}{2}$ ), le modèle DWM homogénéisé permet de donner des résultats précis.

Pour l'échantillon considéré, la fréquence de 500Hz semble constituer la limite du domaine de validité où l'épaisseur de peau  $\delta$  représente environ 80% de la demi-épaisseur de tôle. Pour cette fréquence, les cycles moyens simulé et mesuré sont néanmoins pratiquement confondus (l'erreur sur l'aire des cycles vaut 3%) comme on peut l'observer sur la Figure V-1.

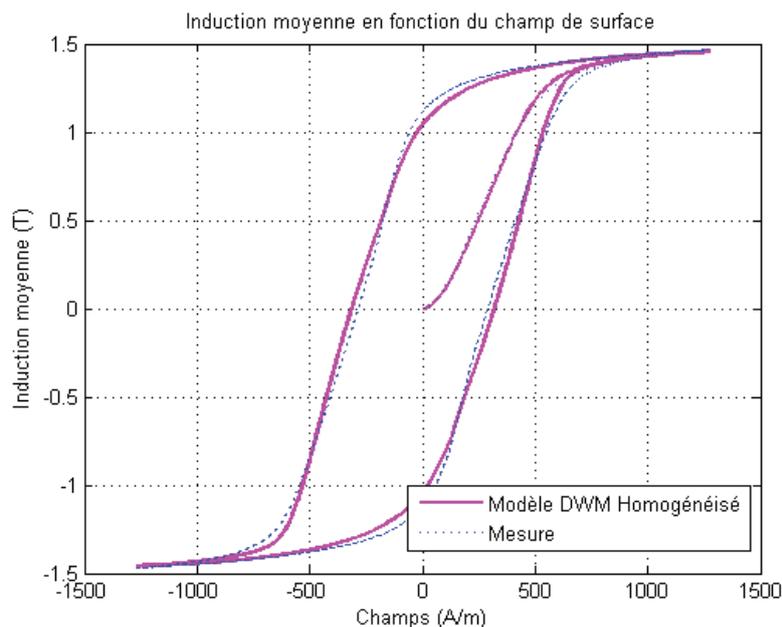
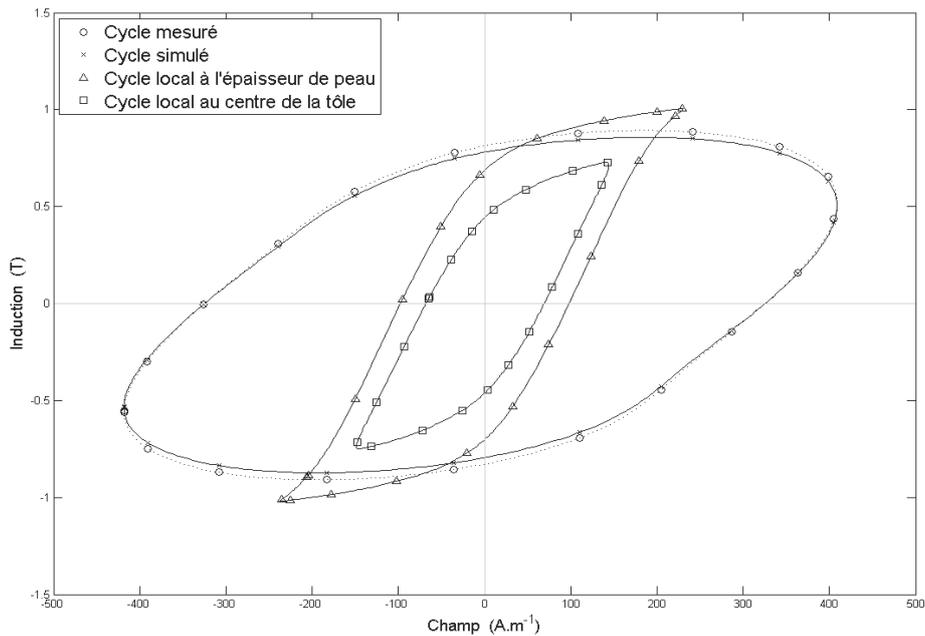


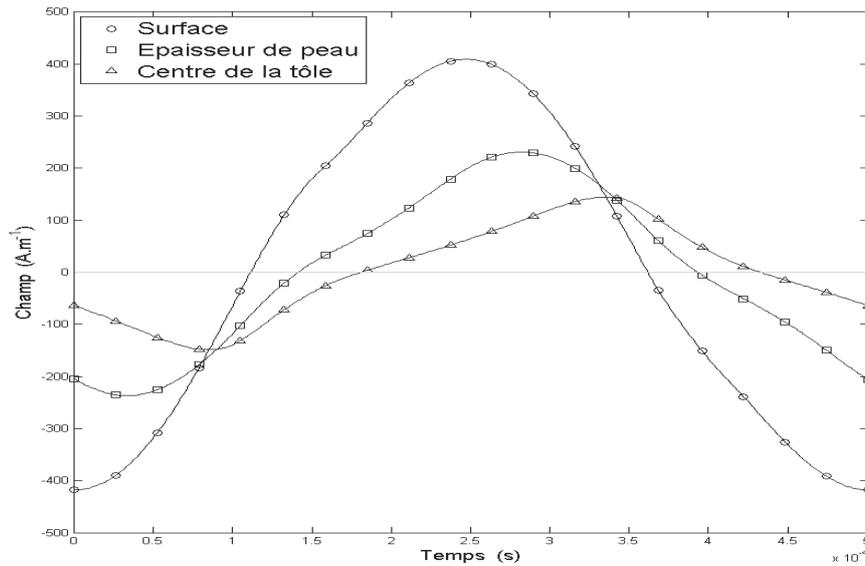
Figure V-1 : Cycles moyens mesuré et simulé par le modèle DWM homogénéisé  $f = 500\text{Hz}$

S'écartant davantage de l'hypothèse d'homogénéité définie par la relation (IV-4), la Figure V-2 compare les cycles mesuré et simulé par le modèle DWM homogénéisé puis les cycles locaux au centre de la tôle et à l'épaisseur de peau  $\delta$  simulés par le modèle DWM pour la fréquence de 2000Hz à laquelle l'hypothèse d'homogénéisation est outrepassée.



**Figure V-2 : Cycles moyens mesuré et simulé par le modèle DWM homogénéisé et cycles locaux simulés par le modèle DWM  $f = 2000\text{Hz}$**

A cette fréquence, la profondeur de peau  $\delta$  vaut environ 40% de la demi épaisseur de tôle, le champ d'excitation magnétique (a fortiori l'induction magnétique) n'est plus homogène selon l'épaisseur de la tôle comme on peut l'observer sur la Figure V-3 qui compare les valeurs temporelles des champs d'excitation obtenus grâce au modèle DWM sur la surface, à la profondeur de peau  $\delta$  et au centre de l'épaisseur de l'échantillon.



**Figure V-3 : Valeurs temporelles du champ d'excitation magnétique à la surface, à la profondeur de peau  $\delta$  et au centre de l'échantillon  $f = 2000\text{Hz}$**

Les résultats locaux simulés confirment bien la non vérification de l'hypothèse d'homogénéité des grandeurs magnétiques. Malgré une condition d'application en dehors du domaine de validité, le modèle DWM homogénéisé garantit des résultats à une erreur de seulement 3% sur l'aire des cycles et 8% sur l'erreur quadratique moyenne.

En conclusion, pour ce type de circuit et de matériau où la proportion des effets dynamiques excédentaires (représenté par le paramètre  $\beta$ ) sont non négligeables devant ceux créés par les courants de Foucault ( $\frac{\sigma d^2}{12}$ ), le domaine de validité du modèle DWM homogénéisé peut être étendu et dépasser la limite fournie par la valeur de la profondeur de peau.

## 2. Echantillon N°2

Pour les données techniques du matériau, se référer à l'annexe. L'identification des paramètres du modèle DWM homogénéisé est effectuée à la fréquence de 200 Hz, on trouve :

$$\frac{\sigma d^2}{12} = 0,21 \quad \text{et} \quad \beta = 0,0013 \quad (\text{V-12})$$

La Table V-2 fournit les valeurs des deux erreurs quadratiques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  obtenues et la profondeur de peau  $\delta$  ainsi que celle du rapport  $\frac{\delta}{\frac{d}{2}}$  pour les différentes fréquences de sollicitations considérées. Compte tenu du caractère fortement massif de l'échantillon, la fréquence ne dépasse pas 200 Hz et la fréquence basse de 2 Hz constitue déjà une sollicitation dynamique pour le matériau (la caractéristique statique est relevée pour 0,1 Hz).

$f$ (Hz)	2	20	50	200
$\delta$ (mm)	0,671	0,212	0,134	0,0671
$\frac{\delta}{\frac{d}{2}}$	1,220	0,386	0,244	0,122
$\epsilon_1$ (%)	4,65	15,31	38,42	64,58
$\epsilon_2$ (%)	6,32	11,48	18,23	29,38

Table V-2 : Erreurs  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  pour différentes fréquences de sollicitation pour l'échantillon N°2

La Figure V-4 compare les cycles moyens  $B_m(H_s)$  mesuré et simulé par le modèle DWM homogénéisé pour une fréquence de sollicitation de 20 Hz correspondant à un rapport  $\frac{\delta}{\frac{d}{2}}$  d'environ 39%.

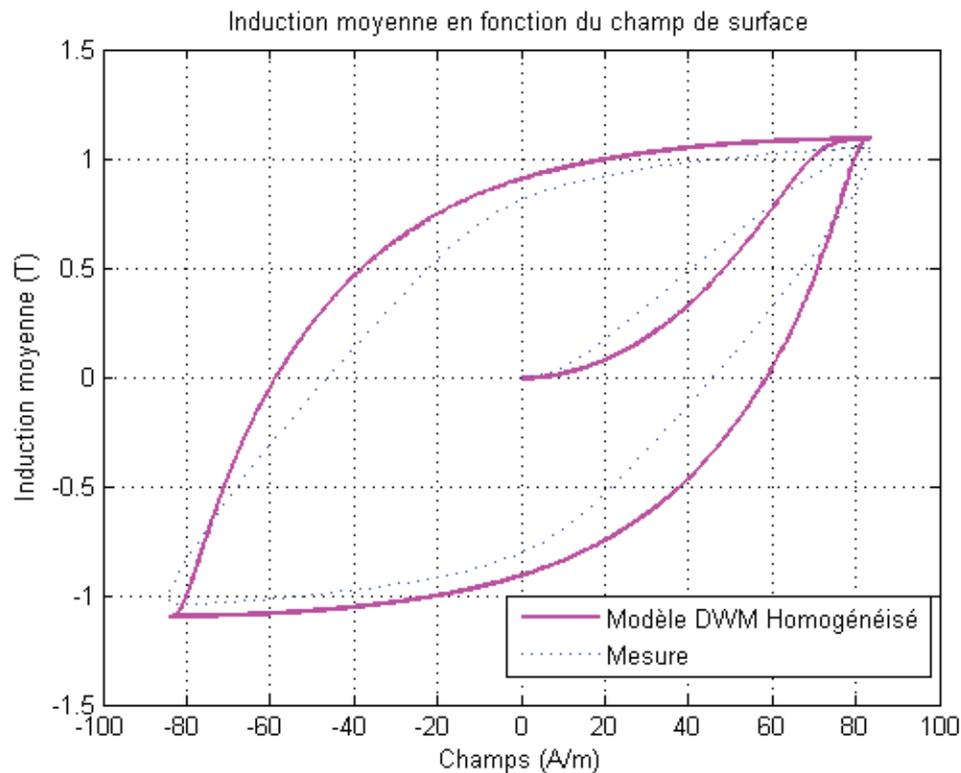


Figure V-4 : Cycles moyens mesuré et simulé par le modèle DWM homogénéisé  $f = 20\text{Hz}$

Contrairement à l'échantillon précédent où, pour un même rapport de  $\frac{\delta}{d}$ , une erreur relative de seulement 3% sur les cycles mesuré et simulé était obtenue, une erreur bien plus conséquente de 12% est constatée pour  $\epsilon_2$ . L'hypothèse de non homogénéité donnée par la relation (V-10) est largement outrepassée.

Les effets dynamiques apparaissant dans le circuit sont en quasi-totalité dus aux courants de Foucault ( $\frac{\sigma d^2}{12} \gg \beta$ ) rendant fortement et très rapidement inhomogène la répartition des grandeurs magnétiques selon l'épaisseur du tore massif.

Compte tenu du domaine de validité restreint en fréquence ( $f < 4\text{Hz}$ ), le modèle homogénéisé n'apparaît pas comme un outil adapté pour représenter le comportement dynamique d'un circuit massif en FeNi. Le modèle de diffusion classique s'avère être indispensable et suffisant pour apporter une solution au problème de représentation des effets dynamiques de ce type de circuit

#### D. Comparaison au modèle de Bertotti

Cette partie est inspirée de (75). Afin de comprendre la cause de la diminution de précision du modèle DWM homogénéisé constatée pour les fréquences autres que celle permettant l'ajustage du paramètre dynamique  $\beta$ , nous avons pris comme référence les travaux menés par Bertotti sur l'origine des pertes fer (61).

Ses travaux effectués pour comprendre le mécanisme des pertes fer dans les tôles magnétiques ainsi que le principe de séparation des pertes fer aboutissent à une représentation macroscopique des pertes ferromagnétiques. Au terme dû aux pertes statiques, est rajouté un terme clairement identifié permettant de traduire les pertes classiques (par courants de Foucault) puis un terme supplémentaire représentant les pertes excédentaires dont l'origine est due aux micro-courants induits autour des parois lors de leur mouvement.

Lorsqu'il s'agit de donner une représentation macroscopique des effets dynamiques liés à la circulation des courants induits macroscopiques, une relation faisant intervenir la dérivée temporelle de l'induction moyenne  $\frac{dB_m(t)}{dt}$  est clairement authentifiée, admise et mise en œuvre dans de nombreuses applications. Dans le cas où le matériau magnétique présente des pertes excédentaires liées aux

déplacements des parois, une formulation de ces pertes en dérivée temporelle de l'induction moyenne prise à une puissance  $\frac{1}{2}$  est définie  $\left(\left(\frac{dB_m(t)}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$  selon la théorie définie par Bertotti.

Exprimé à partir d'une formulation en  $\frac{dB_m(t)}{dt}$ , le modèle DWM homogénéisé apparaît en bonne adéquation avec la théorie définie par Bertotti pour représenter les effets dynamiques dus aux courants de Foucault et semble toutefois en contradiction en ce qui concerne la formulation mathématique pour la représentation des effets dynamiques conduisant aux pertes excédentaires.

L'idée est de s'appuyer sur les travaux de Bertotti pour proposer une correction à l'approche du modèle DWM homogénéisé en  $\frac{dB_m(t)}{dt}$  de façon à tenir compte de façon rigoureuse du bilan énergétique dû aux déplacements des parois prédit par la théorie établie par Bertotti.

### 1. **Modèle DWM homogénéisé « corrigé »**

Une tôle magnétique soumise à une sollicitation variable dans le temps est le siège de phénomènes statiques et dynamiques conduisant à des pertes ferromagnétiques qui, selon le principe admis de décomposition s'explicitent :

$$W_{tot} = W_S + W_{cl} + W_{exc} \quad (\text{V-13})$$

Où  $W_S$  représente l'énergie associée aux phénomènes liés à l'hystérésis statique,  $W_{cl}$  constitue l'énergie nécessaire pour vaincre les effets dynamiques associés à la circulation des courants de Foucault et  $W_{exc}$  définit l'énergie excédentaire à appliquer à la tôle pour contrecarrer les effets associés à la circulation des micro-courants induits autour des parois lors de leur déplacement.

La valeur de l'énergie par unité de masse [J/kg] liée aux courants de Foucault est clairement identifiée dans le cas où l'effet de peau est négligeable par la relation:

$$W_{cl} = \frac{1}{mv} \frac{\sigma d^2}{12} \int_t^{t+T} \left(\frac{dB_m(t)}{dt}\right)^2 dt \quad (\text{V-14})$$

Rappelons que  $d$  représente l'épaisseur de la tôle,  $\sigma$  est la conductivité électrique du matériau,  $mv$  représente la masse volumique du matériau magnétique et  $T$  constitue la période du signal de sollicitation magnétique du circuit.

L'énergie excédentaire  $W_{exc}$  mise en jeu pendant  $T$  et liée à la circulation des micro-courants induits autour des parois en mouvement, s'explique selon les travaux de Bertotti :

$$W_{exc} = \frac{1}{mv} \sqrt{\sigma G V_0 S} \int_t^{t+T} \left| \frac{dB_m(t)}{dt} \right|^{1,5} dt \quad (V-15)$$

Le coefficient associé à cette expression fait intervenir la conductivité électrique  $\sigma$  du matériau ainsi que la section du circuit  $S$ .  $G$  est un coefficient sans unité et valant 0,1356.  $V_0$  représente la valeur d'un champ magnétique corrélé au champ magnétique excédentaire. Ce champ est indépendant du niveau d'induction donné et reste propre à chaque matériau (61).

A partir de ces expressions définissant les énergies dites classiques et excédentaires peuvent être déduites les relations définissant les valeurs temporelles des champs d'excitation  $H_{cl}(t)$  et  $H_{exc}(t)$  à appliquer en plus du champ d'excitation statique  $H_{stat}(t)$  à la surface de l'échantillon pour obtenir l'induction moyenne  $B_m(t)$  à travers la section de la tôle.

$$H_s(t) = H_{stat}(B_m(t)) + H_{cl}(t) + H_{exc}(t) \quad (V-16)$$

avec :

$$H_{cl}(t) = \frac{\sigma d^2}{12} \frac{dB_m(t)}{dt} \quad (V-17)$$

$$H_{exc}(t) = \sqrt{\sigma G V_0 S} \left| \frac{dB_m(t)}{dt} \right|^{0,5} \text{signe} \left( \frac{dB_m(t)}{dt} \right) \quad (V-18)$$

L'identification de (V-16) et de (V-8) définissant le modèle DWM homogénéisé conduit au fait que la valeur du paramètre  $\gamma$  du modèle DWM homogénéisé doit être en partie définie par la valeur du terme  $\frac{\sigma d^2}{12}$  mais pas uniquement comme le montrent les résultats de l'étude précédente. La perte de précision du modèle DWM homogénéisé lorsque la fréquence varie s'explique par le fait d'une formulation unique en  $\frac{dB_m(t)}{dt}$  pour représenter tous les effets dynamiques ce qui est en contradiction avec les relations établies par Bertotti.

Afin de pallier ce problème, l'idée est de définir une nouvelle expression du champ excédentaire, analogue à celle du champ classique à savoir de garder une expression en  $\frac{dB_m(t)}{dt}$  de façon à conserver la formulation en  $\frac{dB_m(t)}{dt}$  du modèle DWM

homogénéisé. La nouvelle expression de champ excédentaire ainsi définie doit permettre de retrouver rigoureusement la même énergie  $W_{exc}$  que celle définie par Bertotti.

Pour satisfaire cette condition, l'expression définissant le champ excédentaire issue d'une formulation en  $\frac{dB_m(t)}{dt}$  est multipliée par un coefficient  $K$  dont la valeur est obtenue en égalant les énergies obtenues par le modèle DWM homogénéisé modifié et celui de Bertotti.

$$H_{exc}(t) = K \frac{dB_m(t)}{dt} \quad (\text{V-19})$$

De cette égalité, en découle la valeur à attribuer au coefficient  $K$  permettant la correction du modèle DWM homogénéisé défini par (V-8) :

$$K = \sqrt{\sigma G V_0 S} \frac{\int_t^{t+T} \left| \frac{dB_m(t)}{dt} \right|^{1,5} dt}{\int_t^{t+T} \left( \frac{dB_m(t)}{dt} \right)^2 dt} \quad (\text{V-20})$$

$$H_s(t) = H_{stat}(B_m(t)) + \left( \frac{\sigma d^2}{12} + K \right) \frac{dB_m(t)}{dt} \quad (\text{V-21})$$

Cette étude propose une correction au modèle DWM homogénéisé permettant de déterminer de façon rigoureuse les mêmes énergies liées à la circulation de courants d'origine macroscopique et microscopique que les énergies prédites par les travaux de Bertotti.

Dans le but d'analyser la performance de la correction apportée au modèle DWM homogénéisé, l'étude analytique qui suit s'intéresse au cas usuel d'une tôle soumise à une induction sinusoïdale. Pour cette étude théorique, la valeur du coefficient de Bertotti  $\sqrt{\sigma G V_0 S}$  est fixée à 1 et les formes d'ondes temporelles des champs excédentaires calculés par les modèles de Bertotti et DWM homogénéisé corrigé sont comparées.

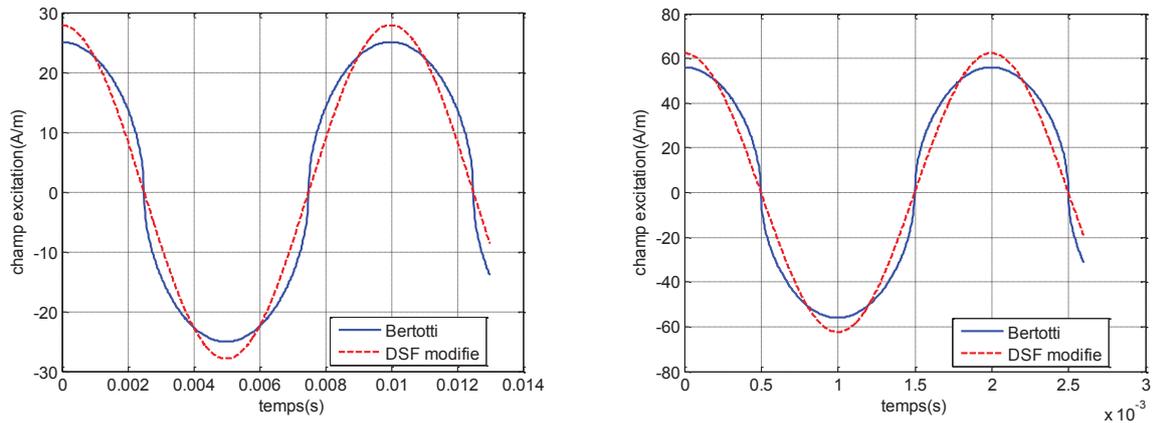
## 2. Cas d'une induction de forme sinusoïdale

Le cas analysé correspond à une condition ordinaire de travail des tôles dans de nombreux dispositifs électromagnétiques alimentés par une tension sinusoïdale tels que des transformateurs ou des machines tournantes.

En notant  $B_{MAX}$  la valeur crête de l'induction moyenne et  $f$  sa fréquence, l'application de (V-22) permet de définir la valeur à attribuer à  $K$ .

$$K = \frac{\sqrt{\sigma G V_0 S} \int_t^{t+T} |\sin(\omega t)|^{1,5} dt}{\sqrt{B_{MAX} \omega} \int_t^{t+T} (\sin(\omega t))^2 dt} = \frac{\sqrt{\sigma G V_0 S}}{\sqrt{B_{MAX} \omega}} 1,1128 \quad (V-22)$$

La Figure V-5 compare les valeurs temporelles des champs magnétiques excédentaires simulés par le modèle DWM homogénéisé corrigé et celui de Bertotti. L'induction a une amplitude de 1 T et deux fréquences de 100Hz et 500Hz sont successivement considérées, la valeur du coefficient  $K$  est fixée à partir de la relation (V-24). Une différence minimale apparaît entre les deux courbes et l'écart  $\epsilon$  calculé à partir de la formule (V-25) vaut seulement 5% pour chacune des fréquences.

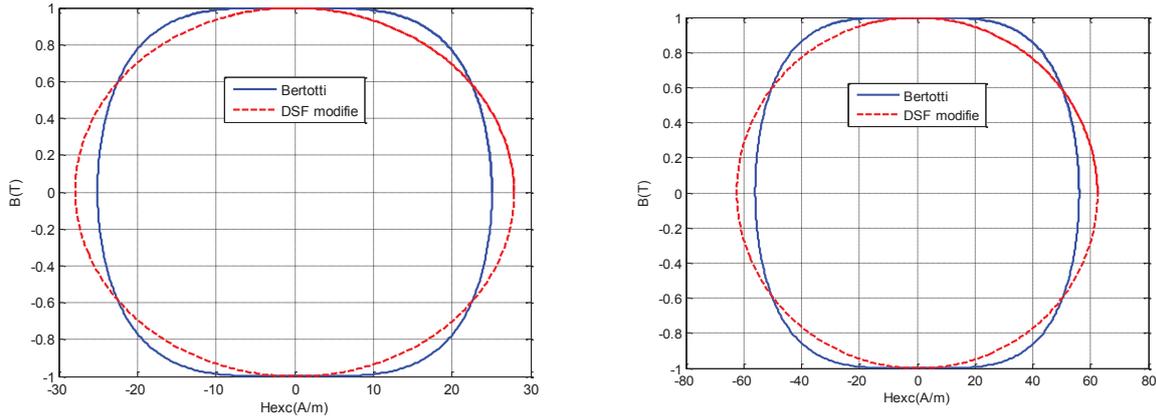


**Figure V-5 : Superposition des champs excédentaires simulés par les modèles de BERTOTTI et DWM homogénéisé corrigé. à gauche  $f = 100\text{Hz}$  et à droite  $= 500\text{Hz}$ .**

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{H_{excBERTOTTI}(i) - H_{excDWM}(i)}{\max(H_{excBERTOTTI})} \right)^2} \quad (V-23)$$

L'avantage de cette correction est de garantir le même écart  $\epsilon$  entre les deux champs excédentaires quelle que soit la fréquence considérée.

Les cycles  $B_m(H_{exc})$  obtenus par les deux modèles (Figure V-6) ont des allures très proches, leurs aires qui constituent une grandeur représentative des pertes excédentaires sont rigoureusement égales.



**Figure V-6 : Cycles  $B_m(H_{exc})$  simulés par les modèles de BERTOTTI et DWF homogénéisé corrigé.  $f = 100\text{Hz}$  à gauche et  $f = 500\text{Hz}$  à droite.**

Cette étude apporte un élément d'explication aux résultats obtenus par le modèle DSF d'origine et permet de définir la valeur à donner au paramètre  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{\sigma d^2}{12} + K \quad (\text{V-24})$$

Identifiée pour une fréquence fixe donnée, la valeur de  $\gamma$  permet au modèle DWF homogénéisé d'origine de fournir une bonne représentation du comportement dynamique du matériau pour la fréquence considérée mais la précision fournie par le modèle ne peut être garantie en gardant constante la valeur de son paramètre conformément à l'analyse faite.

## E. Conclusion

L'homogénéisation du modèle DWF permet de rendre aisée son implémentation dans une modélisation de dispositifs électromagnétiques basée sur une approche par calculs de champs ou par schémas magnétiques équivalents tout en gardant une précision tout à fait satisfaisante. Toutefois, pour les matériaux fortement inhomogènes, ce modèle montre rapidement ses limites. Une piste pour résoudre ce problème est donnée dans les perspectives.

L'étude menée sur la comparaison du modèle DWF homogénéisé avec celui de Bertotti, actuellement considéré comme la référence dans la modélisation des pertes fer dans les alliages métalliques, fait apparaître une contradiction des deux modèles concernant la formulation des effets dynamiques excédentaires.

La réflexion faite afin de corréler le modèle DWM homogénéisé au modèle de Bertotti est efficace mais nécessite de recalculer le coefficient  $K$  pour chaque simulation. La comparaison effectuée constitue plus une piste permettant de préciser le domaine de validité du modèle DWM homogénéisé que d'en définir une correction.

Gardons à l'esprit que notre objectif est de définir des modèles à la fois réalistes, rapides d'exécution et possédant peu de paramètres. Le modèle DWM homogénéisé couplé au modèle de Jiles-Atherton garde alors tout son intérêt.



## VI. Conclusion générale et perspectives

Ces travaux sur la modélisation du comportement hystérétique des matériaux magnétiques ont permis de mettre en évidence la complexité du magnétisme au sein des matériaux ainsi que la difficulté à obtenir une modélisation simple et précise de tous les phénomènes mis en jeu.

Dans une première étape, nous avons rappelé les fondements physiques qui définissent le magnétisme à différentes échelles : atomique, nanoscopique, microscopique et mésoscopique. Ces rappels ont permis d'avoir une vision globale des différents phénomènes mis en jeu et d'expliquer l'origine physique des modèles macroscopiques de Langevin et du champ moléculaire de Weiss. Ces deux modèles sont utilisés lors de l'élaboration du modèle d'hystérésis statique de Jiles-Atherton que nous avons considéré.

L'approche originale d'identification des paramètres du modèle de Jiles-Atherton par la technique PSO multi-objectif a été mise en œuvre avec succès dans la seconde partie de notre travail. Nous avons aussi apporté des modifications au modèle de Jiles-Atherton afin de pallier certaines limitations et d'étendre son domaine de validité.

Ce modèle corrigé d'hystérésis statique est par la suite intégré dans un modèle d'hystérésis dynamique incluant la dynamique des parois, le modèle DWM. Le remplacement de la loi statique par une loi dynamique au sein de l'équation de diffusion permet d'obtenir le modèle DWM qui prend en compte les divers phénomènes mis en jeu lors d'une aimantation dynamique. Ceci fut vérifié à l'aide d'une comparaison entre mesures et simulations pour différents échantillons.

La dernière étape consiste à homogénéiser le modèle DWM afin de le rendre plus facilement implémentable dans des simulateurs de dispositifs électromagnétiques. De cette façon l'effet de diffusion, visible en discrétisant le matériau suivant l'épaisseur, est globalisé afin de se ramener à une loi faisant intervenir des grandeurs macroscopiques

En perspectives de ce travail, une étude plus approfondie du modèle de Jiles-Atherton modifié serait utile. Plusieurs pistes, aussi bien l'identification des paramètres par la méthode DiRect que l'utilisation d'une autre fonction enveloppe  $R(m)$  seraient à approfondir. De plus, l'ajustement des paramètres  $a$  et  $k$  doit

vraisemblablement pouvoir s'expliquer par des considérations énergétiques et thermiques au sein du matériau.

La limitation en fréquence de notre banc de mesure n'a pas permis une validation du modèle DWM au-dessus d'une fréquence de 5 kHz. Une autre perspective serait de mener une étude plus poussée en fréquence afin de vérifier la stabilité du paramètre  $\beta$  du modèle DWM par rapport à la fréquence d'utilisation du matériau.

Une autre perspective serait d'augmenter le degré d'homogénéisation du modèle DWM afin de pouvoir tenir compte de l'hétérogénéité du champ au sein de l'épaisseur. Nous avons mis en place une homogénéisation à l'ordre zéro mais il serait intéressant de l'augmenter à l'ordre deux (ou supérieur) afin de voir l'amélioration apportée par une telle modification.

Enfin, un travail pertinent serait d'implémenter ces modèles dynamiques homogénéisés de comportement de matériaux dans des simulateurs de convertisseurs électromagnétiques.

## VII. Annexes

### Echantillons utilisés

- ✚ Echantillon 1 : Empilement de rondelles de FeSi 3% à GNO d'épaisseur de 0,35 mm chacune, la résistivité  $\rho$  vaut  $45 \cdot 10^{-8} [\Omega \cdot m]$
- ✚ Echantillon 2 : Tore massif de FeNi80/20 de 1,1 mm d'épaisseur, de résistivité  $\rho = 48 \cdot 10^{-8} [\Omega \cdot m]$
- ✚ Echantillon 3 : Empilement de rondelles FeSi 6,5% à GNO d'épaisseur de 0,05 mm chacune, la résistivité  $\rho$  vaut  $82 \cdot 10^{-8} [\Omega \cdot m]$



## Bibliographie

1. **Ducharne, Benjamin.** *Caractérisation et modélisation de circuits magnétiques : du global vers le local.* s.l. : Thèse de doctorat - UCBL , 2003.
2. **Buschow, K.H.J. et De Boer, F.R.** *Physics of Magnetism and Magnetic Materials.* s.l. : Springer, 2003.
3. **Brissonneau, Pierre.** *Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique.* s.l. : Hermès, 1997.
4. **sous la direction de Kedous-Lebouc, Afef.** *Matériaux magnétiques en génie électrique 1.* s.l. : Hermès, 2006.
5. **Chikazumi, Sushin.** *Physics of magnetism.* s.l. : Krieger Pub Co, 1978.
6. **Chen, Chih-Wen.** *Magnetism and metallurgy of soft magnetic materials.* s.l. : Dover publications, 1986.
7. **Jiles, David C.** *Introduction to magnetism and magnetic materials.* s.l. : Springer, 1990.
8. **Herpin, André.** *Théorie du magnétisme.* s.l. : Institut national des sciences et techniques nucléaires, 1968.
9. **Geoffroy, Olivier.** *Physique des matériaux magnétiques. Techniques de l'ingénieur.* D2080.
10. **Pauthenet, René.** *Théorie du magnétisme. Techniques de l'ingénieur.* D175.
11. **Nozières, Jean-Pierre.** *Ferromagnétisme. Techniques de l'ingénieur.* E1730.
12. **Goodenough, Jonh B.** *Summary of losses in magnetic materials. IEEE Transactions on magnetics.* 2002, Vol. 38, 5, pp. 3398-3408.
13. **Néel, Louis.** *Annales de l'université de Grenoble.* 1946, Vol. 61, pp. 48-60.
14. **Maloberti, Olivier.** *Contribution à la modélisation de la dynamique d'aimantation dans les matériaux magnétiques doux : caractérisation et simulation.* s.l. : Thèse - INPG, 2006.
15. **Hubert, A. et Schafer, R.** *Magnetic domains.* s.l. : Springer, 2000.

16. **Henry, Warren E.** Spin paramagnetism of  $cr^{+++}$ ,  $fe^{+++}$  and  $gd^{+++}$  at liquid helium temperatures and in strong magnetic fields. *Physical Review*. 1952, Vol. 88, 3, pp. 559-562.
17. **Guinand, Benjamin.** *Contribution à l'identification expérimentale du bruit de Barkhausen*. s.l. : Thèse - UCBL, 2007.
18. **Ono, K. et Shibato, M.** *Materials evolution*. 1980.
19. **Alessandro, B., et al., et al.** *Journal of applied physics*. 1990, Vol. 68, p. 2901.
20. **Bitter, F.** *Physical review*. 1931, Vol. 38, p. 1903.
21. **Jones, G. A. et Puchalska, I.** *Physics of the solid state*. 1979, Vol. A51, p. 549.
22. **Williams, H. J., Bozorth, R. M. et Shockley, W.** *Physical review*. 1949, Vol. 75, p. 155.
23. **Kerr, F.** *Representative british association*. 1876, Vol. 5.
24. **Faraday, Michel.** *Philosophical transactions of the royal society*. 1846, Vol. 136, 1.
25. **Landau, L. D. et Lifshitz, E. M.** On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Zeits. Sowjetunion*. 1935, Vol. 8.
26. **Bertotti, Giorgio.** *Hysteresis in magnetism*. s.l. : Academic press, 1998.
27. **De Simone, Antonio.** Energy minimizers for large ferromagnetic bodies. *Arch. rat. mech. anal.* 1993, Vol. 125, pp. 99-143.
28. **Globus, A.** *Comptes-rendus des séances de l'académie*. 1962, Vol. 255, p. 1709.
29. **Jiles, D. C. et Atherton, D. L.** Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of magnetism and magnetic materials*. 1986, Vol. 61, pp. 48-60.
30. **Néel, Louis.** Influence de la subdivision en domaines élémentaires sur la perméabilité en haute fréquence des corps ferromagnétiques conducteurs. *Annales de l'institut Fourier*. 1951, 3, pp. 301-319.

31. **Globus, A., Duplex, P. et Guyot, M.** *IEEE transactions on magnetics*. 1971, p. 617.
32. **Benabou, Abdelkader.** *Contribution à la caractérisation et à la modélisation de matériaux magnétiques en vue d'une implantation dans un code de calcul de champ*. s.l. : Thèse - Université de Lille I, 2002.
33. **Jiles, D. C., Thielke, J. B. et Devine, M. K.** Numerical determination of hysteresis parameters for the modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis. *IEEE transactions on magnetics*. 1992, Vol. 28, 1, pp. 27-35.
34. **Haupt, R. L. et Haupt, S. E.** *Practical genetic algorithms*. s.l. : John Wiley & Sons, 1998.
35. **Wilson, P. R., Ross, J. N. et Brown, A. D.** Optimizing the Jiles-Atherton model of hysteresis by a genetic algorithm. *IEEE transactions on magnetics*. 2001, Vol. 37, 2, pp. 989-993.
36. **Salvini, A. et Fulginei, F. R.** Genetic algorithms and neural networks generalizing the Jiles-Atherton model of static hysteresis for dynamic loops. *IEEE transactions on magnetics*. 2002, Vol. 38, 2, pp. 873-876.
37. **Cao, Shuying, et al., et al.** Optimization of hysteresis parameters for the Jiles-Atherton model using a genetic algorithm. *IEEE transactions on applied superconductivity*. 2004, Vol. 14, 2, pp. 1157-1160.
38. **Leite, J. V., et al., et al.** Real coded genetic algorithm for Jiles-Atherton model parameters identification. *IEEE transactions on magnetics*. 2004, Vol. 40, 2, pp. 888-891.
39. **Fulginei, F. R. et Salvini, A.** Softcomputing for the identification of the Jiles-Atherton model parameters. *IEEE transactions on magnetics*. 2005, Vol. 41, 3, pp. 1100-1108.
40. **Chwastek, K. et Szczyglowski, J.** Identification of a hysteresis model parameters with genetic algorithms. *Mathematics and computers in simulation*. 2006, pp. 206-211.
41. **Kennedy, J. et Eberhart, R.** Particle swarm optimization. *Proceedings IEEE international conference on neural networks*. 1995, Vol. 4, pp. 1942-1948.

42. **Marion, Romain, et al., et al.** Identification of Jiles-Atherton model parameters using particle swarm optimization. *IEEE transactions on magnetics*. 2008.
43. **Reyes-Sierra, Margarita et Coello Coello, Carlos A.** Multi-objective particle swarm optimizers : a survey of the state-of-the-art. *International journal of computational intelligence research*. 2006, Vol. 2, 3, pp. 287-308.
44. **Suganthan, P. N.** Particle swarm optimiser with neighbourhood operator. *Proceeding IEEE of the 1999 congress on evolutionary computation*. 1999, Vol. 3, pp. 1958-1962.
45. **Ouled Amor, Yassine.** *Contribution à la modélisation de l'hystérésis magnétique en vue de l'analyse par éléments finis des systèmes de chauffage par induction*. s.l. : Thèse - Université de Nantes, 2000.
46. **Wang, X., et al., et al.** Characteristics of Jiles-Atherton model parameters and their application to transformer inrush current simulation. *IEEE transactions on magnetics*. 2008, Vol. 44, 3, pp. 340-345.
47. **Benabou, Abdelkader, et al., et al.** Minor loops modelling with a modified Jiles-Atherton model and comparison with the Preisach model. *Journal of magnetism and magnetic materials*. 2008.
48. **Miljavec, Damian et Zidaric, Bogomir.** Introducing a domain flexing function in the Jiles-Atherton hysteresis model. *Journal of magnetism and magnetic materials*. 2008, Vol. 320, pp. 763-768.
49. **Wlodarski, Zdzislaw.** The Jiles-Atherton model with variable pinning parameter. *IEEE transactions on magnetics*. 2003, Vol. 39, 4, pp. 1990-1992.
50. **Marion, Romain, et al., et al.** Modelling minor hysteresis loops of high silicon steel. *10th international workshop on 1&2 dimensional magnetic measurement and testing*. 2008.
51. **Boukhtache, S., Azoui, B. et Féliachi, M.** A novel model for magnetic hysteresis of silicon-iron sheets. *European physical journal applied physics*. 2006, Vol. 34, pp. 201-204.
52. **Kadar, Gyorgy.** On the product Preisach model of hysteresis. *Physica B*. 2000, Vol. 275, pp. 40-44.

53. —. The Preisach-type product model of magnetic hysteresis. [auteur du livre] A. Ivanyi. *Preisach memorial book*. 2005, pp. 15-27.
54. **Kadar, Gyorgy et Torre, E.** Hysteresis modeling : I. non-congruency. *IEEE transactions on magnetics*. 1987, Vol. 23, 5, pp. 2820-2822.
55. **Hirsinger, L. et Billardon, R.** Identification of the reversible domain of magnetisation of soft magnetic materials. *Journal of magnetism and magnetic materials*. 2001, pp. 1257-1259.
56. **Basso, V., et al., et al.** Preisach model study of connection between magnetic and microstructural properties of soft magnetic materials. *IEEE transactions on magnetics*. 1995, Vol. 31, 6, pp. 4000-4005.
57. **Chwastek, Krzysztof et Szczyglowski, Jan.** An alternative method to estimate the parameters of the Jiles-Atherton model. *Journal of magnetism and magnetic materials*. 2007, Vol. 314, pp. 47-51.
58. **Chwastek, Krzysztof.** Higher order term of magnetization in the effective. *IOP Publishing*. 2008, Vol. En soumission.
59. **Marion, Romain, et al., et al.** A comparison of identification techniques for the Jiles-Atherton model of hysteresis. *Proceedings of EPNC08 - Lille*. 2008.
60. **Finkel, D. E.** [http://www4.ncsu.edu/ctk/finkel\\_direct/](http://www4.ncsu.edu/ctk/finkel_direct/). [En ligne]
61. **Bertotti, Giorgio.** General properties of power losses in soft ferromagnetic materials. *IEEE Transactions on magnetics*. 1988, Vol. 24, 1, pp. 621-630.
62. **Pry, R. H. et Bean, C. P.** Calculation of the energy loss in magnetic sheet materials using a domain mode. *Journal of applied physics*. 1958, Vol. 29, 3, pp. 532-533.
63. **Williams, H. J., Shockley, W. et Kittel, C.** Studies of the propagation velocity of a ferromagnetic domain boundary. *Physical review*. 1950, Vol. 80, 6, pp. 1090-1094.
64. **Raulet, Marie-Ange, Masson, Jean-Pierre et Gaude, Daniel.** Presentation and experimental validation of a behavioral model dynamic properties for magnetic materials. *Journal de physique IV France*. 1998, Vol. 8, pp. 619-622.

65. **Raulet, Marie-Ange, Masson, Jean-Pierre et Nicolas, Alain.** Reduction of a 2D problem of magnetic field diffusion including dynamic hysteresis through the cross section of a magnetic lamination. *IEEE proceeding of COMPUMAG 99*. 1999.

66. **Raulet, Marie-Ange, Masson, Jean-Pierre et Fraise, Hervé.** Test of the sample geometry independence of a dynamic hysteresis behavioral model. *Journal of magnetism and magnetic materials*. 2000.

67. **Raulet, Marie-Ange, et al., et al.** The magnetic field diffusion equation including dynamic hysteresis : a linear formulation of the problem. *IEEE transactions on magnetics*. 2004, Vol. 40, pp. 872-875.

68. **Marion, Romain, et al., et al.** Discussion About The Validity Domain Of A Simple Magnetic Diffusion Model Including Wall Motion. *Proceedings of SMM 2008*. 2008.

69. **Maloberti, O., et al., et al.** Field diffusion-like representation and experimental identification of a dynamic magnetization property. *Journal of magnetism and magnetic materials*. 2006, Vol. 304, pp. 507-509.

70. **Raulet, Marie-Ange, et al.** Limits and rules of use of a dynamic flux tube model. *COMPEL Int J for Computation and Maths in Electrical and Electronic Eng.* 2008, Vol. 27, 1.

71. **Gyselinck, J., et al., et al.** Calculation of Eddy Currents and Associated Losses in Electrical Steel Laminations. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1999, Vol. 35, 3, pp. 1191-1194.

72. **Bergqvist, Anders J. et Engdahl, S. Göran.** A Homogenization Procedure of Field Quantities in Laminated Electric Steel. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2001, Vol. 37, 5, pp. 3329-3331.

73. **Mathouret, Franck, Masson, Jean-Pierre et Fraise, Hervé.** Modelling of a non-linear conductive magnetic circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1995, Vol. 31, pp. 4065-4067.

74. **Marion, Romain, et al., et al.** Homogénéisation d'un modèle complet de diffusion magnétique : un modèle simple de représentation dynamique de circuit. *European Journal of Electrical Engineering*. 2009, Vol. 12, 4, pp. 475-486.

75. **Raulet, Marie-Ange.** Notes de travail. 2009.