HAL
open science

Répartition spatiale en théorie des jeux évolutionnaires

Rémi Dorat

To cite this version:

Rémi Dorat. Répartition spatiale en théorie des jeux évolutionnaires. Intelligence artificielle [cs.AI]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2009. Français. NNT : . tel-00839387

HAL Id: tel-00839387

https://theses.hal.science/tel-00839387v1

Submitted on 27 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE 1

En informatique

Présentée et soutenue publiquement par

DORAT Rémi

le 28 juin 2009

REPARTITION SPATIALE EN THEORIE DES JEUX EVOLUTIONNAIRES

Directeur de thèse : Jean-Paul DELAHAYE,

Professeur des Universités en informatique

Rapporteurs :

Jean-Benoit Zimmermann, Directeur de Recherche CNRS, (GREQAM)

Matthieu Latapy, Chargé de Recherche CNRS, Habilité (Université Paris VI)

Examinateurs

Nicolas Vaneecloo, Professeur, Université de Lille 1,

Jean-Paul Delahaye, Professeur, Université de Lille 1,

Philippe Mathieu, Professeur, Université de Lille 1,

Marc Barthélémy, Chargé de Recherche au CEA.

Je dédie ce travail à ceux qui m'ont guidé vers la connaissance et m'ont montré différentes manières de l'aimer et de la faire vivre :

A Monsieur Duperrier, un beau profil de géomètre athénien.

A Bernard Touron qui m'a a fait monter sur Pergame et regretter Démosthène.

A Monsieur Franchini qui m'a fait découvrir le cynisme et la passion des objets mathématiques.

A Monsieur Meaudre avec qui l'Histoire est devenue économique, sociale et Histoire de la pensée en action.

A Bertrand Munier. De l'ambition de modéliser le comportement humain...

A Alain Goergen, ... du caractère intraitable des dynamiques qui en résultent.

A Bernard Conein, l'humanité et la curiosité sans âge.

A Mathieu Latapy, un guide efficace et sûr.

A Jean-Paul Delahaye, l'ambition de l'esprit ne doit ni méconnaître ses limites, ni limiter ses connaissances.

Sommaire

Introduction p 7

Plan p 15

Chapitre I. État de l'art p 20

Section I.1 Théorie des jeux évolutionnaires p 20

A) Théorie des jeux et dynamique p 20

B) Théorie des jeux évolutionnaires et problématique de la coopération p 22

Section I.2 Théorie des graphes et diffusion p 26

A) Génération de graphes p 27

B) Diffusion sur les graphes p 30

Section I.3 Théorie des jeux évolutionnaires et répartition spatiale p 31

A) Un modèle pionner : le modèle de Nowak et May p 31

B) Variations autour du modèle de Nowak et May p 38

C) D'autres modèles d'évolution de la coopération sur des graphes p 41

D) Autres modèles de répartition des jeux sur des graphes p 47

Section I.4 Approche générale de la répartition spatiale p 49

Chapitre II. Réseaux de communautés et coopération p 54

Section II.1 Dynamique et condition suffisante à la coopération p 55

A) Contexte p 55

B) Dynamique évolutionnaire pour les réseaux de communautés p 56

C) Émergence de la coopération sur une topologie régulière p 61

D) Convergence pour des topologies non régulières p 64

Section II.2 Évolutions périodiques de la coopération p 66

A) Phénomène cyclique p 66

B) Dynamique et résistance des cycles p 68

Chapitre III. Dominance cyclique p 72

Section III.1 Populations RPS et impact de la répartition spatiale sur la synchronisation p 73

A) Populations RPS, dynamique de synchronisation et graphes complets p 73

B) Répartition spatiale et limites à la synchronisation p 78

C) Populations RPS et réseaux de communautés p 87

Section III.2 Versions déterministes de l'évolution des populations RPS p 92

A) Démarche et mécanisme déterministe p 92

B) Les périodes pour le cas de l'anneau torique p 93

C) Le cas des anneaux toriques à N nœuds et K<=N nœuds associés p 110

D) Grilles toriques et cycles p 118

E) Généralisations des résultats p 126

Chapitre IV Répartition spatiale et dynamiques cycliques p 134

Section IV.1 Matrices et cycles p 135

A) Dynamique écologique et équilibre p 135

B) Forme de la matrice et évolutions périodiques p 138

C) Impact des variations de la population totale p 143

D) Dilemme du prisonnier et évolutions périodiques p 145

Section IV.2 Recherche de cycles et impact de la topologie sur la

forme des cycles p 148

A) Généralisation des dynamiques évolutionnaires p 148

B) Démarche de simulation p 150

C) Résultats et caractéristiques des cycles p 153

D) Formes des cycles p 158

Chapitre V. Étude de l'émergence d'un équilibre de cartel p 165

Section IV.1 Émergence de la coopération dans un marché concurrentiel

en prix et en quantités à travers un processus évolutionnaire. p 167

A) Représentation d'un marché et configuration du marché étudié p 167

B) Taxonomie, comportements et équilibres p 171

C) Démarche évolutionnaire p 183

D) Résultats de l'évolution p 185

E) Variations autour de l'évolution de base p 189

Section IV.2 Réseaux de marchés et évolution de la coopération p 194

A) Comportements uniquement connectés sur leur marché-connexion intra-marchés p 195

B) Connexions inter-marchés et régimes possibles p 197

Conclusion et Perspectives p 203

Bibliographie p 207

Annexe : les principaux algorithmes utilisés p 219

Introduction

La plupart des approches de modélisation des interactions du vivant et notamment de la dynamique des populations sont mathématiques. Les formulations reposant sur des équations limitent cependant les hypothèses possibles. Si on veut se permettre de rajouter des hypothèses pour améliorer l'approximation du réel, le traitement mathématique devient rapidement très ardu voire impossible. La simulation informatique permet de faire évoluer des systèmes plus complexes, mais l'interprétation en est alors plus difficile. La simulation informatique consiste en la transcription dans un langage de programmation d'un système donné et l'étude des propriétés de ce système : si le système est déterministe, on regarde son résultat final unique, s'il a des composantes aléatoires, on le simule à plusieurs reprises et on tire des conclusions sur l'ensemble des simulations qui ont été menées.

Les systèmes biologiques sont de ceux pour lesquels l'approche par la simulation informatique s'est développée considérablement, que ce soit pour étudier l'évolution de la biodiversité, pour simuler la croissance d'une plante, comprendre les interactions entre des populations animales ou pour illustrer les mécanismes de régulation ou de croissance des populations etc. Au sein des dynamiques que les biologistes étudient, certaines sont théoriques et ne cherchent pas à approcher le comportement d'une population en particulier, mais à explorer les conséquences d'une caractéristique, d'un comportement d'une population. Cette caractéristique, ou comportement, pourrait se retrouver sur beaucoup de populations différentes, aussi bien au niveau microscopique qu'au niveau macroscopique. Supposons par exemple une population d'agents pouvant choisir entre coopérer ou ne pas coopérer. Comment une telle population va évoluer ? Comment la coopération va t-elle évoluer ? Ce type de question est d'intérêt aussi bien en biologie où on retrouve la question de l'organisation de la coopération, voire de son émergence, que pour l'étude de groupes humains ou de systèmes économiques, où la coopération peut s'interpréter de diverses manières et notamment comme un comportement d'entente oligopolistique.

Le corpus des sciences informatiques contient des résultats susceptibles d'influencer massivement les considérations sur les dynamiques de populations. Dans ses développements récents, la théorie des graphes met en évidence l'importance de la structure d'une population pour en comprendre les évolutions. La notion de graphe est une abstraction qui, à l'instar de la notion de triangle, subsume un ensemble de réalités. Le réseau du métro parisien est un graphe, Internet est un graphe, le réseau des gens qui se connaissent est un graphe, celui des gens qui travaillent ensemble en est un autre. Si on considère une population, on peut la considérer sans structure, ou bien considérer qu'elle est structurée sur un graphe. L'une des problématiques de la théorie des graphes est la forme des dynamiques au sein d'une population en fonction de la forme de sa structure, de son graphe sous-jacent. Il s'avère que le choix d'une

forme modifie considérablement les dynamiques au sein d'une population avec des conséquences sur un ensemble de domaines : la biologie, la physique ou l'économie etc. [Szabo 04][Kerr 02][Szabo et Vukov 04]

Le travail de thèse présenté ici explore et développe des dynamiques de populations, structurées ou non par des graphes, et donne des interprétations aux phénomènes mis en évidence. Ce travail s'adresse à certaines problématiques des systèmes multi-agents comme l'évolution de la coopération ou de la coordination. Les agents utilisés sont cependant en général très faiblement cognitifs ici, l'objectif étant de spécifier des modèles qui permettent des interprétations, voire des approximations mathématiques.

L'étude de l'évolution des dynamiques de populations en fonction de leur structure rejoint les problématiques de la diffusion dans les graphes [Nowak 93][Szabo 04][Abramson 01] . A ce titre, la méthodologie du travail et les concepts utilisés sont pour partie issus de la théorie des graphes.

La thèse poursuit le travail mené dans le domaine de la théorie des jeux évolutionnaires. Cette théorie étudie des dynamiques de population. Elle a été introduite par un biologiste, John Maynard Smith, au début des années 80 [Smith 82]. Un des ouvrages les plus complets est celui de Hofbauer et Sigmund [Hofbauer 98]. La théorie repose sur l'utilisation de dilemmes de la théorie des jeux [Gibbson 92][Binmore 99]. Pour les joueurs d'un dilemme, différents comportements sont possibles. Le dilemme définit les différentes issues en fonction des comportements adoptés par les joueurs. A titre d'exemple, le dilemme du prisonnier :

	La stratégie 2 adopte le comportement C	La stratégie 2 adopte le comportement D
La stratégie 1 adopte le comportement C	3,3	0,5
La stratégie 1 adopte le comportement D	5,0	1,1

Pour chaque case, la première valeur est le score de la stratégie 1, chaque ligne correspondant à un comportement possible pour cette stratégie, la seconde valeur est le score de la stratégie 2, chaque colonne correspondant à un comportement possible pour cette stratégie. Par exemple, si la stratégie 1 adopte le comportement D et son adversaire le comportement C, la stratégie 1 reçoit 5, l'autre reçoit 0.

John Maynard Smith a considéré des populations de stratégies jouant un même dilemme. Par exemple, s'il s'agit du dilemme du prisonnier, la population est composée de stratégies adoptant le comportement C ou le comportement D. A chaque génération, chaque stratégie interagit avec toutes les autres stratégies en présence. Pour

chaque rencontre entre deux stratégies, chacune obtient un score déterminé par la matrice. Ainsi, chaque stratégie obtient un score global contre le reste de la population et pour chaque comportement (C ou D), on peut lui associer le score total des stratégies ayant adopté ce comportement. Cette **phase de calcul des scores** totaux par comportement est suivie d'une **phase de redistribution des effectifs par comportement**. La nouvelle fréquence d'un comportement dépend du score moyen obtenu par ce comportement par rapport au score moyen obtenu sur l'ensemble des comportements. On parle de "replicator dynamics" ou **dynamique de réplication**. Certains comportements se diffusent : ceux dont le score est supérieur au score moyen des autres comportements. Pour les autres, il y a moins de stratégies les adoptant à la génération suivante. L'amplitude de l'augmentation ou de la diminution est proportionnelle à la différence avec le score moyen. **Il se crée un processus dynamique d'évolution des fréquences des comportements**. Dans le cas du dilemme du prisonnier, pour des raisons qui sont évoquées dans le chapitre I sur l'état de l'art, le comportement C est appelé coopération. La dynamique obtenue à partir du dilemme est alors interprétable comme évolution de la coopération. **L'évolution selon la dynamique de réplication élimine les coopérateurs pour une population de stratégies adoptant le comportement D ou le comportement C**. En effet quelque soit le jeu de l'adversaire, un individu a toujours intérêt à adopter le comportement D, on dit que le comportement D **domine strictement** le comportement C dans le dilemme du prisonnier. De fait ce comportement garantit un meilleur score que le comportement C en jouant contre l'ensemble de la population et la dynamique tend vers l'élimination des comportements C. **En faisant varier soit le dilemme utilisé, soit la structure des interactions de la population**, la théorie des jeux évolutionnaires permet de mettre en évidence des modèles de maintien des comportements coopératifs pourtant strictement dominés.

L'étude de l'évolution de la coopération a donné lieu à de nombreux développements notamment en biologie. L'une des hypothèses principales à l'émergence et au maintien de la coopération est la **Kin Selection** [Hamilton 63]. L'explication porte au niveau des gènes : un individu interagit avec un groupe de proches. Ses proches ont de fortes chances de partager un patrimoine génétique commun et donc un individu ayant des gènes coopératifs a de fortes chances d'interagir avec des individus ayant les gènes codant le comportement coopératif, de sorte que la coopération peut s'établir dans le groupe. L'individu qui adopte une attitude coopérative n'est pas victime du comportement opportuniste d'un pair. De manière générale, **la plupart des modèles d'évolution vers des issues coopératives supposent que les coopérateurs interagissent plus entre eux que ce qu'ils n'interagissent avec le reste de la population**. Beaucoup des développements de la théorie des jeux évolutionnaires concernent l'évolution de la coopération. Axelrod [Axelrod 84] propose un modèle d'émergence de la coopération. Ce modèle repose sur la sélection de comportements pouvant coopérer sur la base **d'interactions répétées qui leur permettent de se coordonner**. En

spécifiant un comportement qui coopère sauf s'il constate que son adversaire ne fait pas de même, on peut montrer qu'une sous-population composée de tels agents peut envahir la population totale. **La coopération tient alors au fait que chaque comportement a une interaction qui dure avec chacun des autres comportements de la population**. S'il perçoit que le comportement rencontré ne coopère pas, il peut réagir, sinon, la coopération s'établit. Sans que l'interaction entre des agents coopératifs ne soit favorisée, les coopérateurs se coordonnent en interagissant. L'aspect réactif des comportements suppose qu'ils aient de la mémoire. Pour ce modèle, une série de dynamiques variées sont susceptibles d'émerger [Sigmund 92][Mathieu 00].

Une hypothèse alternative aux interactions répétées pour fonder le maintien de la coopération a émergé. Elle apparaît déjà de manière embryonnaire chez Axelrod [Axelrod 84]. Les agents n'interagissent plus chacun contre l'ensemble de la population mais ils **interagissent avec un nombre limité d'agents de cette population et toujours avec les mêmes agents.** Le réseau des agents interagissant ensemble forme un graphe. On parle alors de **répartition spatiale**. Nowak et May [Nowak 93][Nowak et May 93] montrent que si chaque agent calcule son score comme la somme des scores des interactions avec ses voisins et actualise son comportement en copiant celui de l'agent voisin de plus fort score, les agents coopératifs peuvent survivre sous la forme de groupes au sein du graphe. Ils sont performants parce qu'interagissant avec d'autres coopérateurs et sont donc copiés. Ceci garantit la survie et la diffusion des comportements C. Sans avoir à supposer que l'interaction entre deux individus se répète sur plusieurs périodes, sans supposer de mémoire, on génère des dynamiques où se maintiennent des coopérateurs C alors qu'ils disparaîtraient dans le cas sans structure, hors de la répartition spatiale. La fixité des relations garantit le maintien de la coopération. Cette fixité ne se rencontre pas dans les modèles précédents de la théorie des jeux évolutionnaires où les individus interagissent tous ensemble ou contre un nombre limité de voisins mais choisis au hasard à chaque génération.

Le chapitre II du présent mémoire propose de nouvelles formes de survie des comportements C dans les graphes en utilisant un cadre théorique différent : **les réseaux de communautés**. Il s'agit d'un autre mode de répartition spatiale. On ne considère plus que ce sont les agents qui sont en réseau, mais des communautés d'agents. Cette spécification intermédiaire entre l'évolution de populations non structurées et des populations fortement structurées ouvre la voie à de nouvelles dynamiques et à de nouvelles interprétations sur l'évolution de la coopération. On met notamment en évidence la possibilité de survie des coopérateurs dans des évolutions cycliques, cette survie des comportements C étant dûe à une redistribution des effectifs vers les communautés de C les moins exposées aux comportements agressifs.

La diffusion de la coopération dans le cas de la répartition spatiale est un problème de **diffusion sur les graphes** [Ganesh 05]. Dans ce domaine, il s'agit d'étudier comment la forme d'un graphe modifie la diffusion. Il s'agit par

exemple d'étudier comment la forme d'un graphe d'individus ou d'un réseau informatique modifie la propagation de virus biologiques ou informatiques [Dickermann 00]. Les perspectives de ce domaine se sont beaucoup élargies lorsque, à la fin des années 90s, Watts et Stroagtz [Watts 98][Watts 99] ont remis en doute la capacité des modèles de graphes utilisés à capturer les propriétés des graphes sociaux. Notamment les modèles de graphes utilisés précédemment sous-estimaient l'importance des groupes. Ce constat sur la forme des graphes a des conséquences en terme de diffusion : un processus de diffusion est susceptible de beaucoup changer en fonction de la forme de la topologie [Kuperman 01]. Watts et Strogatz ont introduit les graphes petit-monde pour une meilleure approximation des réseaux sociaux. Les modifications potentielles dans la diffusion des stratégies du dilemme du prisonnier itéré sont évoquées dans l'ouvrage de Watts [Watts 99]. La population considérée est homogène. Chaque stratégie coopère si une part significative de ses voisins coopère. Dans ce cas, un graphe aléatoire, qui contient peu de groupes, a une probabilité plus faible de faire émerger la coopération qu'un graphe petit-monde. L'impact des graphes sur les évolutions de populations du dilemme du prisonnier itéré est abordé au chapitre IV. Un certain nombre d'ensembles de comportements pour ce dilemme provoquent des évolutions cycliques sous l'effet de la dynamique de réplication [Nowak 89][Mathieu 00][Imhof 05]. En généralisant la dynamique évolutionnaire aux réseaux de communautés, on constate que **la répartition spatiale favorise l'apparition de cycles** : des cas de cycles apparaissent pour des comportements qui n'oscillent pas hors de la répartition spatiale et la fréquence des cas cycliques augmente.

L'étude d'évolutions de populations réparties sur des graphes et jouant les dilemmes de la théorie des jeux est d'intérêt pour plusieurs champs disciplinaires. Pour les biologistes, cette étude apporte des réponses à la question du **maintien de la biodiversité** [Kerr 02]. Soit par exemple le cas de la bactérie Escherichia Coli. Cette bactérie existe sous la forme de trois états : saine, infectée et résistante. Les bactéries infectées se substituent aux saines, les résistantes se substituent aux infectées et les saines se substituent aux résistantes. Cette population peut être représentée par un dilemme simple. Cependant, l'évolution d'une population selon ce dilemme converge vers une disparition de deux des trois états si on ne suppose pas de répartition spatiale. En imposant une répartition spatiale des stratégies on observe de nouvelles formes de convergence. En fonction de la topologie retenue, il y a soit disparition de la biodiversité, soit des évolutions cycliques ou des états stationnaires tels que les trois états coexistent [Szabo 04][Szabo et Szolnoki 04] [Szollosi 07]. Le chapitre III reprend les résultats du domaine et propose des développements complémentaires sur le rapport entre la forme des cycles et le type de graphe retenu. Dans sa seconde section, le chapitre propose un automate cellulaire déterministe approximant le comportement du système et montre les formes d'organisation qui apparaissent en fonction du graphe retenu. Le chapitre termine en conjecturant qu'un dilemme fondé sur des comportements symétriques conduit systématiquement à des cycles courts dans le graphe.

La possibilité de faire apparaître différents types de régimes d'évolution sur les automates cellulaires est d'intérêt pour les physiciens, de même que l'ensemble des modèles de répartition de population d'agents de la théorie des jeux sur les graphes. En fonction des valeurs de la matrice du dilemme du prisonnier retenues, on peut faire apparaître différentes formes d'organisation spatiale et des régimes à périodes très courtes dans le modèle de Nowak et May ou des régimes à périodes extrêmement longues, que les auteurs qualifient d'évolutions chaotiques [Nowak et May 93]. Les auteurs assimilent alors la variation des paramètres de la matrice à des variations de la température qui agissent sur la structuration d'un matériau, la plage des paramètres conduisant à des évolutions chaotiques étant désignée comme phase critique [Duran 03].

Enfin les sciences économiques pourraient trouver dans la théorie des jeux évolutionnaires une source vers de nouveaux modèles. Il existe encore assez peu de travaux intermédiaires valorisant la démarche de la théorie des jeux évolutionnaires pour les sciences économiques. L'impact de tels modèles sur l'évolution de la coopération, la diffusion des opinions et des comportements présente cependant un intérêt immédiat. Le chapitre V s'inscrit dans cette perspective. Le maintien de l'équilibre de cartel sur un marché est une problématique assimilable à l'évolution de la coopération. En effet, en restreignant ses quantités et en augmentant ses prix, un offreur ne peut voir son profit s'améliorer qu'à la condition que ses pairs n'adoptent pas un comportement opportuniste, à l'instar d'un coopérateur jouant le dilemme du prisonnier. En copiant les approches permettant le maintien de la coopération dans le dilemme du prisonnier itéré, il est possible de spécifier un certain nombre de comportements d'offre et d'en trouver qui soutiennent la coopération. Le chapitre V spécifie de tels comportements, teste leur résistance dans un processus évolutionnaire et discute des équilibres de marché à la fin de l'évolution. Par ailleurs, les relations des offreurs entre eux, des demandeurs entre eux ou entre les offreurs et les demandeurs d'un marché incitent à proposer différentes modélisations reposant sur des graphes. Parmi celles-ci, le chapitre étudie comment l'hypothèse d'un graphe reliant les offreurs modifie l'évolution de la coopération sur un marché.

Les modèles sont étudiés par simulation. Il est possible d'obtenir des résultats mathématiques sur la théorie des jeux évolutionnaires que ce soit dans le cas avec répartition ou non. Néanmoins, dans le cas de la répartition spatiale, le nombre des graphes possibles est tel qu'il devient ardu d'obtenir des résultats formels. C'est donc une démarche de simulation qui est adoptée dans la majeure partie du document. Si le système considéré est déterministe, on le simulera en observant son résultat unique alors que dans le cas d'un système probabiliste, on simulera N occurrences du système en prenant comme résultat la distribution d'une ou des propriétés du système. Par exemple, pour une

population de stratégies jouant le dilemme itéré du prisonnier et initialisée aléatoirement, on peut lancer différentes évolutions en regardant la distribution du taux de coopération ou de la fréquence d'un comportement sur l'ensemble des états finaux obtenus. Cette démarche est classique pour l'étude de la diffusion sur les graphes et notamment sur des graphes non réguliers. On définit un processus de diffusion sur le graphe, on génère N graphes aléatoires selon un principe identique et on lance le processus de diffusion sur ces N graphes en observant la distribution des propriétés sur les N systèmes finaux obtenus. Par exemple, une propriété observable dans le cas de la diffusion d'un virus est le nombre d'agents de la population qui sont infectés dans la situation finale. Ainsi, les conséquences de telle topologie sur la diffusion d'un virus seront explorées en générant N graphes pour cette topologie. Pour chaque graphe, on initialise chaque nœud par un agent infecté ou sain. On laisse évoluer les N systèmes jusqu'à un état stable (cycle ou état stationnaire) pour chacun des systèmes et on en déduit la distribution de la fréquence des agents infectés. Celle-ci pourra ensuite être comparée à une distribution obtenue de manière similaire mais pour une autre topologie.

Il est généralement impossible de s'assurer totalement de la forme de la convergence, ce qui pose des problèmes sur l'interprétation de la distribution des propriétés, puisque qu'il n'est pas certain que les générations suivantes ne vont pas produire un phénomène absolument nouveau. On peut se prémunir en partie de cette critique en observant l'évolution des propriétés sur les dernières générations. Dans le mémoire, les commentaires sur les simulations sont parfois très descriptifs et sont d'autres fois couplés à une démarche mathématique. Dans le premier cas, on décrit les phénomènes qu'a produit le système, dans le second, soit on interprète ce que l'on voit en utilisant des résultats pré-établis sur le domaine, soit la simulation appelle à rechercher un résultat mathématique. A l'instar de ce qui se fait en théorie des graphes, on ne ramène une propriété du système à une propriété P du graphe sous-jacent qu'après avoir considéré le résultat sur d'autres graphes ne présentant pas cette propriété P. A ce titre, des graphes comme les grilles ou les graphes aléatoires à la Erdős et Rényi sont utilisés comme des références.

L'espace d'exploration associé aux modèles est considérable. **Un système est défini par la donnée d'un graphe, du choix d'une population de la théorie des jeux, le choix d'un mode de répartition et le choix d'une dynamique.** L'ensemble du travail de thèse se fonde sur l'idée de spécifier des modèles simples dont la complexité combinatoire empêche cependant le traitement formel direct et sur lesquels on ne peut a priori établir que quelques résultats mathématiques ou des approximations plus ou moins grossières. Quelques résultats sont établis de manière mathématique, mais beaucoup plus systématiquement par la simulation, en essayant de produire des modèles suffisamment simples pour conserver une possibilité d'interprétation des phénomènes observés.

Dans une démarche de reproduction du réel, dans les formes classiques de la biologie ou de l'économie, on cherche les hypothèses pertinentes à l'explication d'un phénomène (rasoir d'Occam) en se fixant l'objectif de reproduire

telle ou telle caractéristique observable. La perspective de la thèse et des domaines auxquels elle se rattache n'est pas celle-là. Elle est d'illustrer les conséquences d'une hypothèse unique ou de quelques hypothèses sans chercher à approximer un comportement observable : que devient une population où les individus ont le choix entre coopérer ou ne pas coopérer ? Il s'agit d'essayer de mettre en évidence des phénomènes pertinents à partir d'hypothèses relativement faibles. **Dans cette perspective la répartition topologique est un relais puissant dans la diversification des dynamiques et des formes d'organisation qu'elle permet**. Par suite, les dynamiques mises en évidence peuvent guider le choix de variables pour la simulation d'un phénomène réel et donc guider la modélisation et l'approximation du réel.

Les simulations ont été réalisées en utilisant principalement deux langages de programmation : java et C. De manière occasionnelle, Maple a été utilisé pour traiter des systèmes d'équations et VBA pour retraiter des données. Le temps machine consacré est d'environ 6000 heures réparties sur deux processeurs de 2.1 et 2.3 Ghz respectivement, mais la durée des simulations correspondant aux travaux effectivement présentés ici ne représente qu'environ 10% de ce total.

Trois ensembles de classes ont été produites à partir de l'API java :

- Un programme java a été produit pour l'ensemble des évolutions sur des graphes avec un agent par nœud et selon une matrice de la théorie des jeux. Différentes dynamiques sont proposées : l'imitation du voisin de meilleur score, l'évolution des agents de score négatif etc... Une interface graphique a été produite permettant de faire des tests pour un certain nombre de dynamiques, de graphes et de configurations.
- Un autre ensemble de classes java a été réalisé qui permet les simulations de marché pour le chapitre IV.
- Un ensemble de classes permet enfin de tester les évolutions sur les réseaux de communautés.

La majeure partie des codes sources est disponible en ligne : http://rdorat.free.fr/Recherche/Sources/

Des applets ont été produites à partir de ces implémentations. Celles-ci sont disponibles à l'adresse http://rdorat.free.fr/Recherche/Applets/. Le lecteur sera invité à s'y référer en cours de lecture. L'une d'elles permet la simulation des comportements d'offre présentés au chapitre V, l'autre permet de tester la dynamique de populations non réparties et la dernière permet de tester l'évolution des populations réparties spatialement. Cette dernière permet notamment de tester le modèle de Nowak et May [Nowak 93] évoqué dans le chapitre I et les évolutions présentées au chapitre III.

Le code produit en C permet la simulation du modèle des communautés, il a été produit à des fins d'optimisation des simulations. Ce code a été utilisé pour des simulations massives sur les chapitre II et IV notamment.

Plan

Les chapitres sont organisés autour de thèmes que la lecture du chapitre I, établissant un état de l'art, présente. Ce premier chapitre synthétise quelques travaux sur le domaine et donne des références sur les domaines connexes à la thèse. Au travers des différents chapitres qui suivent, c'est la même problématique **d'évolution de la dynamique avec le passage d'une population non répartie à une population répartie qui est étudiée. Cette étude est menée pour le cas particulier de populations issues de la théorie des jeux évolutionnaires**. Dans le chapitre II, on étudie l'évolution d'une population de C et D lorsque elle est répartie en réseaux de communautés en montrant que cette répartition permet la survie des comportements C. Le chapitre III traite du cas de populations conduisant à des évolutions cycliques dans le cas non réparti et montre l'évolution des cycles lorsque la population est répartie spatialement. Le chapitre IV traite également des cycles mais dans une démarche de recherche, par des simulations massives, d'ensembles de comportements qui génèrent des dynamiques cycliques seulement lorsqu'ils sont répartis. Enfin, le chapitre V s'intéresse au problème de la cartellisation sur un marché, c'est-à-dire à une forme de coopération particulière. En spécifiant différents comportements d'offre, on essaye de voir quelles hypothèses permettent de rendre soutenable l'équilibre de cartel sur les marchés. L'évolution dans la sélection des comportements avec la répartition spatiale est évoquée dans un deuxième temps.

I- État de l'art

I.Section 1 Théorie des jeux évolutionnaires

I.Section 2 Théorie des graphes et diffusion

I.Section 3 Théorie des jeux évolutionnaires et répartition spatiale

I.Section 4 Approche générale de la répartition spatiale

II- Réseaux de communautés et coopération

II.Section.1 Dynamique et condition suffisante à la coopération

II.Section 2 Évolutions périodiques de la coopération

On travaille sur des populations de stratégies jouant le dilemme du prisonnier. Ces stratégies sont réparties sur

des communautés. Les liens entre les communautés forment un graphe ou réseau de communautés. Toutes les stratégies d'une même communauté adoptent un même comportement C ou D. Chaque stratégie interagit avec les stratégies de sa communauté et celles des communautés voisines de la sienne. Une communauté croît si son score moyen est supérieur au score moyen de l'ensemble des communautés. Plusieurs dynamiques sont alors possibles. Soit le système contient une communauté d'agents C qui n'a pas pour voisin une communauté D et dans ce cas, la convergence se fait vers des C seulement (Section.1). Soit il n'existe pas une telle communauté et dans ce cas, il y a évolution vers une population de D seulement ou vers des évolutions cycliques (Section.2). Tous les cas de survie des coopérateurs correspondent à une organisation clusterisée des communautés de C. Dans le cas des évolutions cycliques, la survie des coopérateurs correspond à la redistribution constante des effectifs vers les communautés de C soumises à l'environnement le plus favorable. Les configurations cycliques mises en évidence s'avèrent robustes aux perturbations.

III- Dominance cyclique et évolutions topologiques

III.Section 1 Populations RPS et impact de la répartition spatiale sur la synchronisation

III.Section 2 Versions déterministes de l'évolution des populations RPS

Le chapitre commence par introduire un type de population particulière. Pour ce type de population, lorsqu'elle est composée de trois stratégies, l'évolution conduit à la substitution des stratégies de type 1 à celle de type 3, la substitution des stratégies de type 2 à celles de type 1 et la substitution des stratégies de type 3 à celles de type 2. On parle de population RPS pour rock-paper-scissor ou papier caillou ciseau. C'est par exemple le cas de la bactérie Escherichia Coli qui existe sous forme de trois états (saine-infectée-résistante). Dans le cas d'une population non répartie de taille finie, l'évolution conduit à la synchronisation : des évolutions d'amplitude croissante jusqu'à ce qu'un état occupe l'ensemble de la population. Une littérature récente [Szabó 04][Szabó et Szolonki 04] a mis en évidence la possibilité de survie des 3 comportements dans le cas où la population est spatialement répartie avec l'apparition de différents types d'attracteurs en fonction de la forme de la topologie sous-jacente à la population. Cette forme de survie est validée par des approches expérimentales [Kerr 02]. La section 1 illustre ces résultats et rajoute des éléments sur les formes de la convergence en fonction des graphes. On caractérise notamment la transition des graphes aléatoires depuis une situation de maintien de la biodiversité dans des cycles d'amplitude constante pour de faibles valeurs du degré moyen, vers une disparition de la biodiversité avec des cycles d'amplitude croissante pour des valeurs du degré

moyen supérieures (on parle de synchronisation). Par ailleurs, on montre que dans le cas où les stratégies sont réparties dans des réseaux de communautés et non pas à raison d'un agent par nœud, le phénomène de synchronisation disparaît quelque soit le graphe, et donc, la biodiversité se maintient. Dans cette section, la démarche adoptée est descriptive.

Dans la deuxième section, on développe des résultats sur un automate cellulaire avec le même type de population mais qui évolue alors selon un mécanisme déterministe. Ce mécanisme déterministe est une approximation du mécanisme asynchrone et aléatoire utilisé plus haut. La section énumère les attracteurs pour des topologies simples, montre et analyse les formes de convergence qui apparaissent pour des topologies plus complexes. Dans ce dernier cas, les systèmes générés tendent à s'auto-organiser de manière uniforme avec des sous-structures oscillantes qui imposent leur oscillation au reste du graphe.

IV- Répartition spatiale et dynamiques cycliques

IV.Section 1. Matrices et cycles

IV.Section 2. Recherche de cycles et impact de la topologie sur la forme des cycles

Pour des populations non réparties du dilemme itéré des prisonniers, des recherches antérieures ont mis en évidence la possibilité d'évolutions cycliques dans le cas ou la population est composée d'au moins trois comportements [Nowak 89][Mathieu 00][Imhof 05]. Ces travaux énumèrent des ensembles de comportements produisant des évolutions cycliques dans le cadre de populations non réparties. L'introduction de la spatialité consiste alors à tester la dynamique de ces populations lorsqu'elles sont réparties sur un graphe. Au contraire de ces démarches et après en avoir rendu compte, le chapitre met en évidence des cas de cycles qui apparaissent du fait de la répartition spatiale. En considérant simplement un réseau de deux communautés liées, et en cherchant systématiquement par simulation les configurations périodiques pour cette topologie, on constate que la répartition spatiale favorise l'apparition de configurations cycliques. Pour des comportements pour lesquels il n'est pas possible d'obtenir des cycles hors de la répartition spatiale, on montre qu'il est toujours possible de trouver une configuration les faisant osciller en répartissant les stratégies entre deux communautés. Par ailleurs, sur un même ensemble d'initialisations, on montre que la situation où la population est répartie produit plus de cycles que la situation de non répartition de la population.

V- Étude de l'émergence d'un équilibre de cartel – équilibre coopératif

V.Section.1 Émergence de la coopération dans un marché concurrentiel

V.Section.2 Réseaux de marchés et évolution de la coopération

Le chapitre commence par une introduction rapide sur la modélisation classique d'un marché en sciences économiques et la présentation des points caractéristiques que sont l'équilibre concurrentiel et l'équilibre de cartel. L'équilibre de cartel est celui qui émergerait dans le cas d'un offreur en situation de monopole. La problématique consiste, dans le cas où il y a plus d'un offreur, dans la détermination des conditions de coordination et de maintien de cet équilibre. En effet, s'il y a plusieurs offreurs, et que tous jouent le coup de cartel, c'est à dire réduisent les quantités qu'ils mettent en vente et augmentent leur prix, chaque offreur a intérêt à jouer à un prix légèrement moindre en produisant beaucoup plus : dans ce cas, il se substitue à tous les offreurs, leur inflige des pertes et obtient un gain supérieur au gain du point de cartel. La situation peut être représentée par un dilemme du prisonnier où jouer le coup de cartel c'est coopérer (C) et jouer en dessous de ce prix en augmentant les quantités vendues et en faisant supporter des invendus aux autres, c'est trahir (D). Le système ne se ramène pas cependant à un dilemme du prisonnier simple. D'une part, il s'agit ici d'un **jeu à N joueurs** puisque les joueurs interagissent ensemble sur le marché et non pas deux à deux. D'autre part, les comportements ne se définissent pas seulement par un niveau de coopération : dans le dilemme du prisonnier, les comportements sont C ou D, ici **un comportement est un couple (prix, quantité)** qui sont deux réels. Dans la section 1, on spécifie douze stratégies selon une première taxonomie, on étudie leur impact sur la possibilité d'atteindre le coup de cartel en faisant évoluer la population des stratégies dans une démarche évolutionnaire. On constate que la convergence attendue vers la concurrence ne se produit pas et que des comportements coopératifs se maintiennent. Par ailleurs, les spécifications du modèle conduisent à un résultat étonnant qui est que la coopération est favorisée par le nombre des agents sur un marché.

La section 2 propose une extension topologique du modèle. Les offreurs interagissent sur des marchés mais le mécanisme d'évolution des comportements n'est plus le même : les offreurs sont reliés par un graphe ou graphe des offreurs généré de manière aléatoire. A chaque génération, un offreur modifie son comportement en copiant l'offreur de plus fort profit de son voisinage. On constate alors que pour des graphes fortement connectés ou trop faiblement connectés, les comportements opportunistes se diffusent et que pour un intervalle intermédiaire des probabilités de connexion, les comportements coopératifs se diffusent à l'ensemble de la population.

Si tous les chapitres traitent d'un thème commun qui est la modification des dynamiques avec le passage à des populations réparties, ils s'inscrivent dans des perspectives diverses, à l'image du domaine de la théorie des jeux évolutionnaires, construite d'apports hétérogènes.

Les modèles proposés n'ont pas tous la même portée. Les modèles du chapitre V et de la première section du chapitre III trouvent des interprétations très directes dans les domaines de l'économie et de la biologie. Le chapitre V propose une démarche de simulation encore faiblement diffusée dans la communauté économique. Dans un contexte de sélection écologique, il est possible de faire émerger l'équilibre de cartel (équilibre coopératif) en introduisant certains comportements coopératifs. Cet équilibre finit néanmoins par disparaître au profit d'une situation de prix fluctuant sur le marché. Pour la section 1 du chapitre III, elle relie très directement le maintien de la biodiversité à l'hypothèse de répartition spatiale et met en évidence des formes d'organisation intermédiaires entre populations réparties et populations non réparties. Pour l'ensemble des hypothèses de répartition spatiale concourantes au maintien de la biodiversité, elles trouvent toutes des interprétations biologiques très directes.

Le chapitre II est très simple et présente un modèle général d'évolution de la coopération qui justifie une approche par les réseaux de communautés. La survie des comportements coopératifs repose alors sur l'organisation en clusters des communautés coopératives.

Enfin, le chapitre IV et la section 2 du chapitre III traitent de dynamiques théoriques. Ce type d'études est nécessaire dans un domaine où un nombre très important de modèles sont déjà spécifiés. L'étude de la section 2 du chapitre III est une première tentative vers une analyse générale des évolutions déterministes dans le cas des matrices à comportements symétriques et met en évidence que les automates cellulaires construits à partir de telles matrices tendent à s'organiser sur des cycles très courts. Pour le chapitre IV, il met en évidence le fait que la répartition spatiale, couplée à une contrainte sur le nombre des stratégies sur un nœud est un facteur favorable à l'apparition de dynamiques cycliques des populations. Il met en évidence la possibilité de cycles propres à des populations réparties spatialement et notamment des attracteurs périodiques au sein desquels les comportements C survivent. Si ces modèles ne sont pas directement interprétables en termes économiques ou biologiques, ils visent l'obtention de résultats généraux sur le domaine, ce qui s'avère nécessaire au sein d'un espace d'exploration considérable. Par ailleurs, ils mettent en évidence des résultats utilisables pour la conception d'autres modèles.

Chapitre I. Introduction aux jeux évolutionnaires sur des graphes

Section I.1. Théorie des jeux évolutionnaires

A. Théorie des jeux et dynamique

Théorie des jeux

Cette section introduit la théorie des jeux évolutionnaires initiée par John Maynard Smith [Smith 82]. Il s'agit d'un cadre de modélisation de populations de stratégies jouant des dilemmes classiques de la théorie des jeux non-coopératifs [Von Neumann 44]. Les stratégies interagissent selon les dilemmes, obtiennent un score et les effectifs par stratégie sont redistribués en fonction des scores. L'évolution est alors équivalente à un critère simple : l'effectif d'une stratégie augmente si son score est supérieur au score moyen des stratégies de la population, il diminue si son score est inférieur au score moyen. On parle de "**Replicator Dynamics" ou dynamique de réplication**.

Soit par exemple un jeu avec 3 comportements par stratégie et la matrice qui en découle :

	C1	C2	C3
C1	α_1	α_2	α_3
C2	α_4	α_5	α_6
C3	α_7	α_8	α_9

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \end{pmatrix}$$

Le score de la case i,j est le score du comportement i contre le comportement j, ainsi α_4 est le score du comportement C2 contre le comportement C1 et α_2 le score du comportement C1 contre le comportement C2. L'exemple se place volontairement dans le cas d'une population homogène : toutes les stratégies sont d'un même type : elles choisissent leur comportement dans un même ensemble de comportements. Un cadre plus général serait celui d'une population non homogène d'individus avec une matrice des scores qui aurait la forme suivante :

$$B=\begin{pmatrix} \alpha_{1,}\gamma_1 & \alpha_{2,}\gamma_2 & \alpha_{3,}\gamma_3 \\ \alpha_{4,}\gamma_4 & \alpha_{5,}\gamma_5 & \alpha_{6,}\gamma_6 \\ \alpha_{7,}\gamma_7 & \alpha_{8,}\gamma_8 & \alpha_{9,}\gamma_9 \\ \alpha_{10,}\gamma_{10} & \alpha_{11,}\gamma_{11} & \alpha_{12,}\gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on a deux types de stratégies dans la population. La stratégie S1 peut choisir entre 4 comportements (les 4 lignes de la matrices) quand la stratégie S2 ne peut choisir que parmi 3 comportements (les 3 colonnes de la matrice). La valeur α_4 de la case 2,1 correspond au score du comportement C2 de la stratégie S1 contre le comportement C1

de la stratégie S2 et le score du comportement de la stratégie S1 est alors γ_4 .

Dans le cas de la matrice A, le nombre de dimensions est le nombre de joueurs quand une dimension de la matrice B correspond à un type de stratégie. On ne travaille qu'avec des **populations homogènes** dans ce qui suit et donc les matrices de gain utilisées sont du type de la matrice A.

Dynamique de réplication

En théorie des jeux évolutionnaires, on considère principalement des populations de stratégies homogènes, chaque stratégie ayant adopté l'un ou l'autre des comportements définis par la matrice. L'état d'une population de stratégies est un **vecteur contenant les fréquences des comportements au sein de la population homogène.** Pour ce vecteur, la $i^{ème}$ composante correspond à la fréquence du $i^{ème}$ comportement dans la population totale. L'état de la population au moment t est noté : $X_t=(x_1^t, x_2^t, ..., x_N^t)$ dans le cas d'un dilemme où N comportements sont possibles. x_i^t est la fréquence du comportement i à la génération $t.$ On suppose une matrice des gains $A=(\alpha_{i,j})$ de taille $N*N$ avec $(\alpha_{i,j})$ qui est le score du comportement i contre le comportement $j.$ $A\,X_t$ est un vecteur tel que sa $i^{ème}$ composante est le score associé aux stratégies ayant adopté le comportement $i.$ En effet, si on développe :

$$A\,X_t=(\sum_{j=1}^{N}\alpha_{1,j}\times x_j^t, ..., \sum_{j=1}^{N}\alpha_{N,j}\times x_j^t)$$

avec $\sum_{j=1}^{N}\alpha_{i,j}\times x_j^t$ qui est le score d'un comportement i **contre l'ensemble de la population**.

$X_t^T\,A\,X_t$ est le score moyen (le score de chaque comportement pondéré par sa fréquence) dans l'ensemble de la population. L'évolution selon la dynamique de réplication s'exprime alors :

$$x_i^{t+1}-x_i^t=x_i^t((AX_t)_i-X_t^T\,A\,X_t)$$ [Haufbauer 98]

La croissance ou la décroissance de la fréquence d'un comportement dépend d'une part de la fréquence des comportements dans la population et d'autre part de la matrice des gains. Une conséquence immédiate de l'équation est que l'effecif des comportements qui ont un score supérieur au score moyen augmente, l'effectif des comportements qui ont un score inférieur au score moyen diminue. En appliquant l'équation plusieurs fois, on obtient un processus évolutionnaire.

Les ouvrages de référence sont ceux de John Maynard Smith [Smith 82], d'Axlerod [Axelrod 84] et de Sigmund et Hofbauer [Hofbauer 98]. L'ouvrage de Maynard Smith introduit ce type de dynamique, fixe un certain nombre de

définitions et notamment la notion **d'ESS ou stratégie évolutionnairement stable**. Si on suppose une matrice des scores A de dimension 2, alors le comportement 1 est évolutionnairement stable si :

$$\alpha_{1,1} > \alpha_{2,1}$$
$$OU\, \alpha_{1,1} = \alpha_{2,1}\, et\, \alpha_{1,2} > \alpha_{2,2}$$ [Smith 73]

Si un tel comportement est de fréquence 1, alors le système est en équilibre stationnaire : si un individu adopte le comportement 2, il sera éliminé de la population.

Soit un comportement tel que la situation où tous les joueurs l'adoptent est un équilibre de Nash de la matrice. Dans ce cas, une population composée de stratégies ayant toutes adopté ce comportement est un ESS.

Supposons qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégie pure pour le jeu considéré, mais qu'il est possible de trouver un équilibre de Nash en stratégie mixte avec une probabilité p de jouer 1, une probabilité (1-p) de jouer 2. Dans ce cas, l'état de la population pour lequel une part p des individus adopte le comportement 1, l'autre part adoptant le comportement 2 est un équilibre du système. En effet, si la part des comportements 1 est supérieure (resp. inférieure) à p, elle tend à décroître (resp. croître).

B. Théorie des jeux évolutionnaires et problématique de la coopération

En introduisant des dilemmes où certains comportements sont interprétables comme des comportements coopératifs, la théorie des jeux évolutionnaires apporte de nouveaux résultats dans le débat sur l'évolution de la coopération. Cette problématique a conduit à un certain nombre de développements en biologie pour expliquer certaines formes de l'interaction animale. Darwin notait qu'il est impossible de faire apparaître des actes altruistes, compris comme le fait que les individus **doivent baisser leur efficacité compétitive en augmentant celle des autres** [Darwin 59]. Cependant des cas de comportements coopératifs ont été documentés [Dugatkin 97][Axelrod 84].

Une hypothèse centrale pour le maintien de la coopération est la **kin selection** [Hamilton 63]. L'explication porte au niveau des gènes : un individu interagit avec un groupe de proches. Ses proches ont de fortes chances de partager un patrimoine génétique commun et donc un individu ayant des gènes coopératifs a de fortes chances d'interagir avec des individus ayant les gènes codant le comportement coopératif, de sorte que la coopération peut s'établir dans le groupe. L'individu qui adoptera une attitude coopérative ne sera pas victime du comportement opportuniste d'un pair.

D'autres modèles pour l'évolution de la coopération ont été développés. Certains consistent à proposer des stratégies qui ont une connaissance sur les autres stratégies de la population : une stratégie réagit différemment en

fonction du fait qu'elle est confrontée à une stratégie avec laquelle elle préfère interagir ou avec une stratégie choisie au hasard. Dans ce cas la coopération s'établit comme un comportement entre des stratégies qui se préfèrent, alors que les stratégies tendent à refuser de coopérer avec les stratégies qu'elles ne préfèrent pas [Hruschka 06]. Ce type de modèle exige cependant de définir des stratégies qui utilisent beaucoup d'information et suppose notamment que les stratégies soient capables de se reconnaître.

D'autres modèles ont été développés qui ne sont pas décrits ici : la sélection de groupes [Wilson 94], la réciprocité indirecte [Pollock 92], les théories de l'apprentissage social [Boyd 82]. On pourra trouver une présentation synthétique de ces modèles dans [Dugatkin 97] ou [Mui 02]. Dans ce qui suit, on présente une approche centrale à la théorie des jeux évolutionnaires et qui fonde la coopération sur la **réciprocité directe**.

La théorie des jeux introduit des dilemmes qui permettent de caractériser les interactions coopératives. Dans la suite de la thèse, **la coopération est comprise comme un comportement qui améliore la performance évolutive d'autrui, mais diminue celle de l'individu qui l'adopte**. Supposons que faire une action profitant à B coûte d à A et rapporte c à B. Si A fait cette action mais pas B, A obtient -d et B obtient c, si A fait cette action et B aussi : les deux obtiennent c-d , enfin si les deux ne font pas l'action, ils obtiennent 0. En posant c=5 et d=2, on obtient :

	Agit en faveur de l'autre	N'agit pas
Agit en faveur de l'autre	R=3	S=-2
N'agit pas	T=5	P=0

Pour un dilemme de cette forme, **T>R>P>S et 2×R>T+S, on parle de dilemme du prisonnier**. L'équilibre de Nash du dilemme est le cas où les deux agents choisissent de ne pas agir, comportement qu'on notera D pour defection – trahison, l'autre comportement étant noté C pour coopération. En effet, pour un tel dilemme, chaque offreur constate qu'il gagne toujours plus en jouant D quelque soit le jeu de son adversaire. Un offreur rationnel joue donc D plutôt que C et donc, l'interaction de deux offreurs rationnels conduit à (D,D), se faisant, chacun obtient P=0 **alors même que le coup coopératif, qui maximise le gain collectif, leur permettrait d'atteindre chacun un score de 3.**

Un jeu de valeurs plus utilisé dans la littérature [Axelrod 84] :

	C	D
C	R=3	S=0
D	T=5	P=1

Les lettres correspondent respectivement à **R**eward (récompense), **T**reason (trahison), **S**ucker (dupe) et **P**unishement (punition).

L'évolution d'une population de stratégies adoptant les comportements C et D sous l'effet de la dynamique de réplication est triviale. Du fait de la matrice des gains, l**e comportement D domine strictement le comportement C**, c'est-à-dire que quel que soit le comportement de l'adversaire, un joueur gagne toujours plus en jouant D. De fait, l'évolution d'une population composée de ces deux comportements conduit à la disparition du second, ou, si la population est supposée de taille infinie, la fréquence des comportements C tend vers 0.

Pour permettre l'établissement de la coopération, Axelrod [Axelrod 84] propose un dilemme dérivé du dilemme du prisonnier : **le dilemme itéré des prisonniers**. Le dilemme est alors une abstraction de la situation où des agents interagissent à plusieurs reprises à chaque génération. Par exemple, ils vont interagir pendant 6 échanges ensemble à chaque génération. Pour chacun des 6 échanges, chaque joueur choisit entre jouer C ou D et obtient un score en fonction de la matrice du dilemme du prisonnier. Soit par exemple une séquence de 6 échanges :

Joueur 1 : C D C C C D

Joueur 2 : D D D C C C

Dans ce cas, le premier joueur gagne 0 lors du premier échange, 1 au deuxième, etc. Au bout de 6 échanges, son score est 12 et celui du second joueur est 17. On dégage alors une nouvelle matrice des scores :

	Comportement CDCCCD	Comportement DDDCCC
Comportement CDCCCD	15	12
Comportement DDDCCC	17	12

La dynamique de réplication s'applique ensuite de la même manière que pour le cas des autres matrices. L'introduction de certains comportements permet alors de rendre soutenable la coopération.

Plutôt que des comportements fixés sur T périodes comme ceux de la matrice précédente, on s'intéresse à des comportements descriptibles sous forme réduite avec l'idée d'en trouver certains qui, en utilisant le passé pour réussir à améliorer leurs performances, permettent des interactions coopératives et peuvent être interprétés dans le sens de l'interaction humaine : punition, réciprocité, proposition de la coopération etc.

Soit par exemple un comportement extrêmement simple mais célèbre parce qu'il s'avère non-trivial de trouver un comportement plus performant [Beaufils 00] : le comportement **TFT** (pour "Tit for Tat" traduit par "donnant-donnant"). Ce comportement joue à la première génération le coup C et aux générations suivantes le coup joué par son adversaire

à la période précédente. La séquence de jeu contre une stratégie qui joue CCD périodiquement :

Comportement TFT : C C C D C C D

Comportement Per-ccd : C C D C C D C

Les deux comportements gagnent un score de 19. Les coups joués aux générations 4 et 7 par le comportement TFT sont en réaction au coup D de l'autre comportement aux générations 3 et 6 respectivement. On peut alors parler de punition, de défense du comportement en réaction au jeu agressif de l'autre comportement. L'interaction de deux comportements TFT donne une série de coups C-C. **L'introduction d'un groupe de TFT au sein d'une population peut faire converger cette population vers une issue coopérative.**

Axelrod [Axelrod 84] montre que le comportement qui trahit toujours, noté All-D, est un ESS : ce comportement ne peut pas être envahi par un individu mutant. En revanche, il peut être envahi par une population de stratégies TFT. Les TFT peuvent résister aux comportements agressifs en place et établir la coopération entre elles et donc leur part tend à croître au sein d'une population de stratégies All-D. Pour illustrer la richesse des dynamiques possibles pour le dilemme du prisonnier, différents articles [Nowak 89][Imhof 05] considèrent des populations de trois comportements All-D, TFT et All-C (joue toujours C) en configurant les TFT de manière à ce qu'elles puissent être envahies par une population de All-C. En fonction du choix des fréquences initiales, les dynamiques possibles sont diverses. Notamment, il est possible de mettre en évidence des phénomènes cycliques où la présence des All-C favorise la croissance des All-D : la population évolue vers une majorité de All-D, mais à partir d'un certain seuil, il y a croissance des TFT qui deviennent majoritaires à leur tour, leur population pouvant alors être envahie à partir d'un individu mutant All-C etc. La coopération est rendue soutenable par la présence des TFT.

Les stratégies qu'il est possible d'inventer pour le dilemme du prisonnier sont multiples [Axelrod 84][Beaufils 00] et les dynamiques possibles sont très nombreuses, ainsi que les interprétations sur la coopération. Un certain nombre de travaux mettent en avant la possibilité qu'apparaissent des dynamiques périodiques avec certains triplets de stratégies déterministes (c'est-à-dire jouant selon une règle déterministe). Dans [Mathieu 00], les auteurs mettent en évidence, à l'issue d'une recherche systématique, des triplets de stratégies du dilemme itéré des prisonniers produisant des cycles. [Nowak et Sigmund 93] montrent qu'une population de stratégies probabilistes jouant le dilemme du prisonnier avec une mémoire 1 évolue périodiquement vers une issue coopérative, dans ce cas, des mutations finissent toujours par remettre en question l'équilibre coopératif, les phases coopératives étant cependant de plus en plus longues au cours de l'évolution. Une partie des dynamiques présentées ici peuvent être testées en utilisant l'applet EGT

disponible à http://rdorat.free.fr/Recherche/Applets/.

Section I.2. Théorie des graphes et diffusion

La théorie des jeux évolutionnaires a connu un ensemble de nouveaux développements et de nouveaux résultats (nouvelles dynamiques, émergence de nouvelles hypothèses fondant la coopération etc...) par l'introduction de structures sur les populations des stratégies. Dans ce qui précède, l'utilisation de la dynamique de réplication suppose l'interaction de toutes les stratégies en présence contre toutes les autres.

Introduire une structure sur la population c'est contraindre que les stratégies **interagissent toujours avec les mêmes autres stratégies**. On parle également de **répartition spatiale de la population**. Les évolutions avec une population structurée vont alors dépendre de la forme de cette structure, soit de la forme d'un graphe. La section I.3 traitera des nouveaux modèles qui émergent en répartissant des populations de stratégies sur des graphes. La présente section dresse un panel rapide de certains développements de la théorie des graphes**.**

La notion de graphe est très générale et la recherche sur les graphes vise l'obtention de résultats portant aussi bien sur les réseaux informatiques, que sur les problèmes d'optimisation de flux, ou les réseaux sociaux et la propagation de virus ou de rumeurs.

La théorie des graphes se décline en sous-domaines, chaque sous-domaine ayant des problématiques et des démarches scientifiques propres. On limite ici le propos aux sous-domaines de la génération de graphes et de la diffusion sur les graphes, ces problèmes étant connexes aux problématiques d'algorithmique de graphe, c'est à dire aux questions de complexité de parcours, de détermination des propriétés fondamentales des graphes etc.

Propriétés d'intérêt des graphes

Un graphe est noté $G=(N,A)$ avec N un ensemble de nœuds dont le nombre d'éléments, ou cardinalité, est noté $card(N)$, A une relation telle que nAm correspond au fait que les nœuds n et m sont liés par un arc. **Dans ce qui suit, on ne considère que des graphes non orientés**, soit A est une relation symétrique : $nAm \quad ssi \quad mAn$

Le **degré d'un nœud** est le nombre de voisins de ce nœud. Pour le nœud n, on note $V(n)$ son voisinage que l'on définit : $V(n)=\{m/mAn\}$, le degré de n est $|V(n)|$.

Le **clustering** d'un nœud est la part de ses voisins qui sont liés entre eux : $C(n)=p(yAm/yAn \quad et \quad mAn)$. On peut en déduire un coefficient de clustering sur l'ensemble du graphe :

$\frac{1}{card(N)} \times \sum_{i=1}^{card(N)} C(i)$. Il existe d'autres manières d'évaluer le clustering mais elles ne sont pas évoquées ici.

Un **chemin entre deux nœuds** n et m est une séquence de nœuds $a_1, \ldots, a_t$ telle que $nAa_1 \;\; a_1 A a_2 \;\; \ldots \;\; a_t A m$

La **distance entre deux nœuds** n et m notée $d(n,m)$ est la valeur t telle qu'existe un chemin $a_{1,} \ldots a_{t-1}$ entre n et m et qu'il n'existe pas de chemin $f_1, \ldots, f_{h-1}$ entre n et m avec $h<t$. Dans le cas où il n'existe pas de chemin entre deux nœuds, on note $d(n,m)=\infty$. L'une des caractéristiques généralement considérée sur les graphes est la distance moyenne entre l'ensemble des couples de nœuds du graphe, en excluant les nœuds non liés.

La **distance moyenne dans le graphe** est la distance entre l'ensemble des couples de nœuds :

$$distance\,moyenne(G)=\frac{2}{N\times(N-1)}\sum_{(n,m)\in N*N} d(n,m)$$

On dira qu'un sous-ensemble de nœuds $E \subset N$ forme une composante connexe si $\forall (n,m) \in E \times E$ on a, $d(n,m)<\infty$.

De manière générale, dans les différents modèles, on associera à chaque nœud, un état. Pour le nœud n , on note son état $S(n)$. Un **cluster de nœuds de même état** est un ensemble de nœuds E tel $\forall (n,m) \in E \times E$, il existe un chemin $a_1, \ldots, a_t$ entre n et m tel que $\forall i \; S(a_i)=S(n)=S(m)$.

A. Génération de graphes

La problématique centrale de la génération des graphes est la suivante : à partir des propriétés constatées par des études empiriques sur les graphes sociaux, quels algorithmes de génération de graphes permettent de générer des propriétés similaires ? Par réseau social, on entend un ensemble d'individus ou de groupes humains qui sont en contact ou interagissent entre eux [Newman 03]. Cette définition recouvre un nombre considérable de réalités. Des études sur ces réseaux mettent en évidence qu'ils présentent généralement deux caractéristiques communes : d'une part, la distance moyenne dans ces réseaux est faible : on parle d'effet Small-World ou effet petit-monde, d'autre part, ces structures sont significativement clusterisées [Watts 98][Travers 69]. L'effet petit-monde correspond au fait que la croissance de la cardinalité n'implique pas une croissance de la distance moyenne plus rapide que

$\ln(cardinalite)$ à degré moyen constant. Dans ce qui suit, on donne un aperçu des structures qui ont été utilisées pour les simulations des chapitres suivants en discutant de leur capacité à reproduire les propriétés des réseaux sociaux.

Les grilles (voir la figure suivante) constituent une première forme de répartition spatiale. Ce type de topologie est utilisé dans un certain nombre de simulations et notamment pour le jeu de la vie de Conway [Wolfram 83].

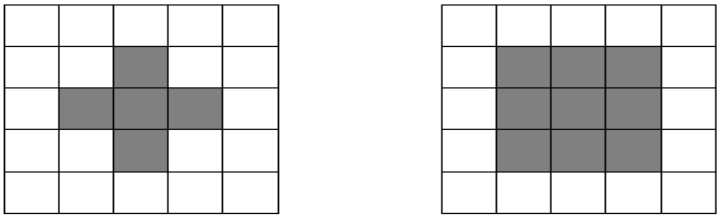


Figure A.1 : Les deux types de grilles possibles. Les zones grisées représentent le nœud central et son voisinage. A gauche, le nœud central a 4 voisins, on parle de **voisinage de Von Neumann**, à droite, le nœud central a 8 voisins, on parle de **voisinage de Moore**

Cette topologie présente cependant des caractéristiques très spécifiques et éloignées des caractéristiques des réseaux sociaux. En effet, pour ces graphes, on a notamment une distance moyenne qui augmente plus rapidement que $\ln(cardinalite)$.

Un modèle de graphe permettant d'obtenir une topologie non régulière avec une faible distance moyenne est le graphe aléatoire selon **Erdős et Rényi** [Erdős 59]. La génération de ce type de graphe consiste, à partir d'un ensemble de nœuds N, à relier 2 nœuds entre eux avec une probabilité p. Dans ce cas, le graphe obtenu présente une distribution des degrés des nœuds qui suit une loi de Poisson : les degrés des nœuds sont homogènes. La distance dans le graphe est de la forme $\frac{\ln(cardinalite)}{\ln(degre\,moyen)}$. Les graphes Erdős et Rényi permettent donc la reproduction de l'effet petit-monde tel que donné plus haut [Newman 2004].

Néanmoins, à la fin des années 90, plusieurs travaux ont remis en cause la capacité des graphes aléatoires à la Erdős et Rényi à capturer les propriétés des réseaux sociaux à partir d'études empiriques (graphe du Web, graphes de Co-auteurs etc.). En effet, ce type de graphe sous-estime le clustering par rapport à celui constaté pour les réseaux sociaux [Watts 98][Guillaume 05]. Dans [Watts 98], les auteurs proposent une nouvelle démarche de génération des graphes pour obtenir des structures avec un clustering significatif et une distance moyenne faible, répondant au critère des graphes petits-mondes. La démarche consiste à partir d'un graphe régulier présentant un certain niveau de clustering et à modifier certains arcs. On note m le nombre des arcs de ce graphe. La procédure consiste à tirer l'un

de ces arcs au hasard, à éliminer cet arc, puis à tirer deux nœuds non liés et à créer un arc entre ces deux nœuds. On répète cette procédure jusqu'à ce qu'un taux q des arcs initiaux ait été modifié. On parle de "rewiring" ou réaffectation des arcs. En appliquant cette procédure, le degré moyen dans le graphe reste constant. Pour q=0, le graphe régulier initial reste inchangé. Pour q=1, on obtient un graphe aléatoire à la Erdős et Rényi. Les propriétés caractéristiques du graphe se trouvent rapidement modifiées en ne faisant évoluer que quelques arcs.

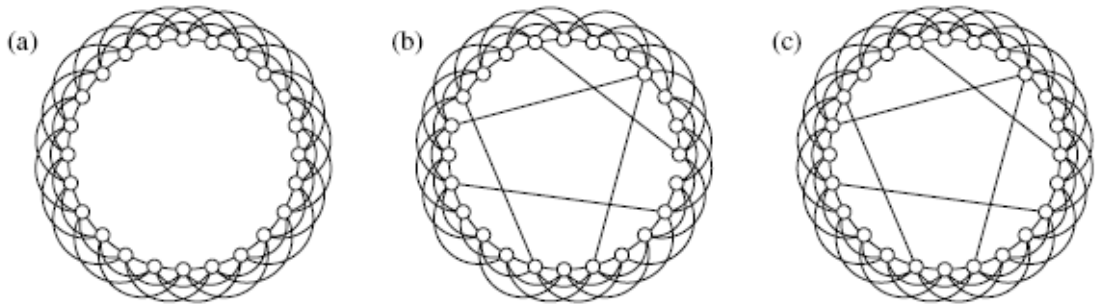


Figure A.2 : (a) est un graphe régulier : les nœuds sont organisés en anneau et chaque nœud est relié à 6 voisins. (b) et (c) sont obtenus par une procédure de réaffectation. Dans le cas de (b), les arcs à réaffecter sont choisis aléatoirement, on conserve une extrémité de l'arc qu'on réaffecte et on tire une autre extrémité au hasard. Pour (c), on choisit un arc au hasard, on l'élimine et on en crée un nouveau en tirant ses deux extrémités au hasard.

Pour des valeurs intermédiaires de q, on trouve des topologies telles que le niveau de clustering est significativement supérieur à celui des graphes à la Erdős et Rényi et telles que la distance moyenne dans le graphe croît moins vite que $\ln(cardinalite)$. Les graphes obtenus par la procédure de rewiring de Watts et Strogatz s'avèrent de meilleurs candidats que les graphes aléatoires à la Erdős et Rényi pour reproduire les propriétés des réseaux sociaux.

Pour ces graphes, ils échouent cependant à capturer une propriété observée sur les réseaux sociaux : la distribution des degrés selon une loi puissance. On parle alors de graphes à invariance d'échelle (scale-free networks). Des graphes permettant de capturer cette propriété ont été introduits, leur construction permet de mettre en évidence des nœuds fortements connectés ou hubs et des nœuds faiblement connectés [Barabási 99].

Dans la suite, on utilise tous les types de graphes présentés : les graphes réguliers comme les anneaux ou les grilles, qui sont très limités pour représenter les interactions du réel, permettent en revanche d'obtenir des résultats et d'illustrer le fonctionnement des dynamiques. Ils peuvent également permettre de démontrer des propositions favorisant ensuite l'interprétation des phénomènes sur les graphes non réguliers et dont les caractéristiques approximent mieux les propriétés des graphes sociaux.

La théorie des graphes se construit sur un ensemble de résultats formels et sur la base de résultats qui proviennent de la simulation. Dans ce dernier cas, établir une propriété P sur un type de graphe construit de manière aléatoire consiste à générer N graphes tirés au hasard selon le type de graphe et à observer la distribution de la propriété P sur l'ensemble des N graphes. Par exemple, si on veut étudier le clustering lié au processus de création d'un graphe aléatoire, on créera N graphes selon ce processus de création et on calculera le clustering pour chacun de ces graphes : on obtient une distribution de la propriété.

De même pour étudier une dynamique de diffusion d'un état dans le graphe, on générera N graphes sur lesquels on lancera le processus de diffusion, en s'intéressant à la proportion finale de tel ou tel état sur les N graphes par exemple.

B. Diffusion sur les graphes

Un domaine d'étude important et très lié à celui de la génération des graphes est celui de la diffusion sur les graphes. Les différences dans la forme des graphes ont des conséquences importantes en terme de diffusion. Un certain nombre d'articles se sont penchés sur la question de la diffusion d'un virus qu'il soit biologique ou informatique en fonction de la probabilité que le lien entre deux "sites" propage l'infection

Deux types de modèles épidémiques ont reçu une attention particulière : les modèles SIS pour lesquels les nœuds passent de l'état "susceptible" à l'état "infecté" puis de nouveau à l'état "susceptible", et les modèles SIR où les nœuds passent de l'état "susceptible" à l'état "infecté" puis dans l'état "résistant". Le mécanisme d'infection repose généralement sur un taux σ ou taux d'infection. Pour un nœud "susceptible" avec t voisins infectés, il a une probabilité $t \times \sigma$ d'être infecté. Pour les modèles SIS, dans les réseaux aléatoires, il existe une valeur seuil telle que si le taux d'infection est inférieur à ce seuil, il finit par n'y avoir plus aucun nœud infecté dans le graphe [Diekmann 00]. Au dessus de la valeur seuil, les infections se maintiennent à long terme dans le graphe. Pour les réseaux à invariance d'échelle, cette dépendance au seuil disparaît et les infections perdurent dans le réseau, indépendamment du taux d'infection σ [Ganesh 05][Pastor-Satorras 01]. Dans [Kuperman 01], les auteurs montrent que dans le cas SIR, la survie des 3 états est endémique sur les topologies régulières du type grille. En réaffectant un petit nombre de liens, selon la démarche proposée par Watts et Strogatz, on constate d'abord une augmentation de la fréquence des états infectés, cette fréquence se maintenant à un niveau stable. Pour des augmentations supérieures du taux de liens réaffectés, on constate une évolution cyclique de la fréquence des cas infectés et des autres états.

En théorie des jeux évolutionnaires, dans le cas de la répartition spatiale, à chaque nœud est associé un état ou stratégie. L'état des nœuds (le comportement des stratégies) évolue en fonction de la matrice régissant les rapports entre les comportements. Il s'agit là d'un processus de diffusion sur un graphe, à l'instar des modèles qui viennent d'être évoqués.

Section I.3. Théorie des jeux évolutionnaires et répartition spatiale

En répartissant les stratégies sur les graphes, on fixe leurs interactions : elles n'interagissent plus avec toute la population ou avec des stratégies tirées au hasard à chaque génération, mais toujours avec les mêmes stratégies.

Dans le cas de la dynamique de réplication présentée dans la section I.1, le réseau des interactions sous-jacent est en fait un graphe complet : chaque stratégie calcule son score en interagissant contre toutes les stratégies de la population et chaque stratégie peut adopter le comportement de n'importe quelle autre stratégie d'une génération sur l'autre. Dans ce cas, la coopération peut émerger du fait de la présence de stratégies agissant sur la base de la réciprocité directe, ce qui implique notamment que les stratégies aient de la mémoire.

En considérant une population répartie, **les interactions vont se faire d'un nœud vers ses voisins et la diffusion d'un comportement va se limiter aux agents de son voisinage**. Le modèle de Nowak et May [Nowak 93] [Nowak et May 93] illustre que dans ce cas, il n'est plus nécessaire de supposer que deux agents aient le temps de se coordonner, ni qu'ils se reconnaissent. Dans ce modèle, les stratégies établissent la coopération sans mémoire.

A. Un modèle pionnier : le modèle de Nowak et May

Axelrod [Axelrod 84] suggère l'idée de la répartition spatiale pour des stratégies du dilemme itéré, mais c'est le modèle de Nowak et May qui met en évidence la possibilité de survie et de la diffusion de la coopération avec des comportements du dilemme simple du prisonnier alors même que la coopération est un comportement strictement dominé dans ce cas.

Sur chaque nœud du modèle de Nowak et May, on a une stratégie qui adopte le comportement C ou D. A chaque génération, **cette stratégie interagit avec chacun de ses voisins**. Si elle adopte un comportement C, elle gagne 1 contre un voisin de comportement C, 0 contre un voisin D. Si elle adopte un comportement D, elle gagne t contre un C, 0 contre un D. Les scores se calculent donc selon la matrice :

	C	D
C	R=1	S=0
D	T=b	P=0

Figure A.1 La matrice de dilemme du prisonnier utilisée par Nowak et May. Ce n'est cependant pas une matrice de dilemme du prisonnier au sens strict, néanmoins, leur résultat a également été validé avec une matrice classique du dilemme du prisonnier.

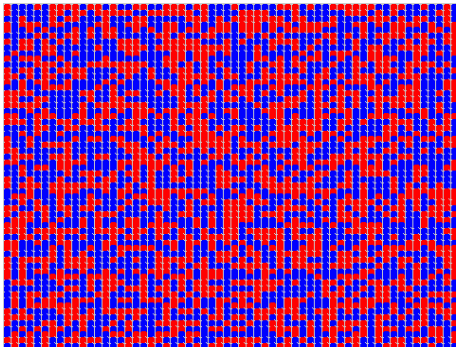
Cette matrice n'est pas une matrice du dilemme du prisonnier au sens strict puisque ici S=P : le comportement D ne domine pas strictement le comportement C. Néanmoins, des conclusions absolument similaires à celles qui suivent seraient mises en évidence avec les valeurs classiques du dilemme .

A chaque génération, **chaque stratégie copie le comportement de son voisin de meilleur score.** Le mécanisme peut être spécifié de manière asynchrone (on tire un individu qui calcule son score et actualise son état, puis un autre individu etc.) ou synchrone : les individus calulent leurs scores simultanément et copient le meilleur comportement voisin simultanément. C'est cette dernière version qui est utilisée dans la présentation initiale de Nowak et May. Des conclusions similaires seraient tirées en spécifiant un modèle asynchrone de mise à jour des comportements [Huberman et Glance 93][Nowak 94]. Il est également possible d'envisager l'auto-interaction des nœuds, c'est à dire que l'agent interagit non seulement avec ses voisins, mais aussi avec lui même, hypothèse posée comme métaphore du cas où un nœud correspond en fait à une population uniforme et non pas à un individu. Les résultats globaux ne se trouvent pas modifiés par cette hypothèse.

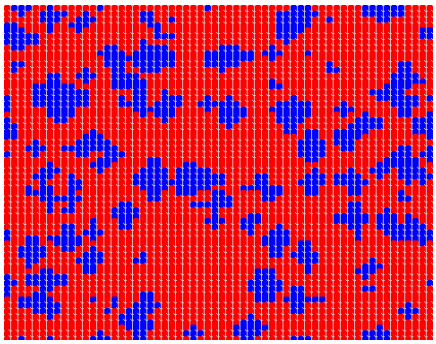
Dans ce qui suit, on donne des copies d'écran de l'évolution du modèle pour différentes valeurs de b. Toutes les simulations sont données pour une grille torique 60×60 à voisinage de Von Neumann (chaque nœud a 4 voisins). Les nœuds d'état C sont représentés en bleu, les nœuds d'états D sont représentés en rouge. Les grilles sont initialisées aléatoirement. Le modèle peut être simulé en utilisant l'applet GoG disponible en ligne à :

http://rdorat.free.fr/Recherche/Applets/

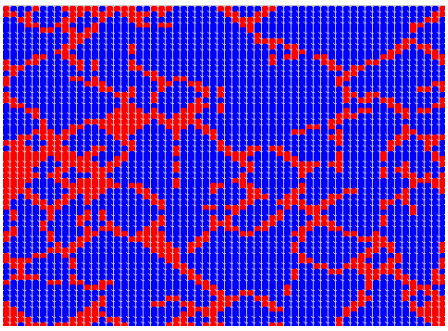
b=1.2 : majorité de comportements coopératifs



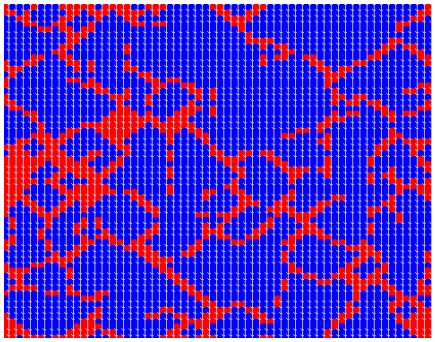
Génération 0



Génération 3

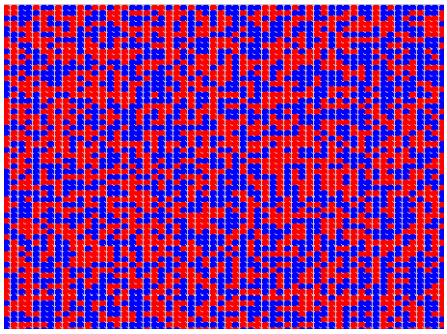


Génération 30

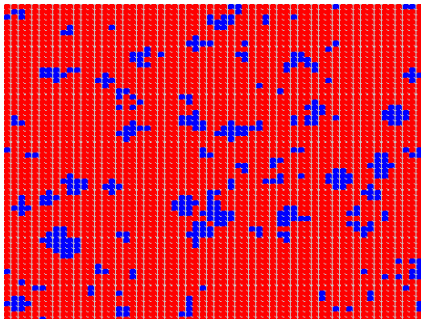


Génération 60

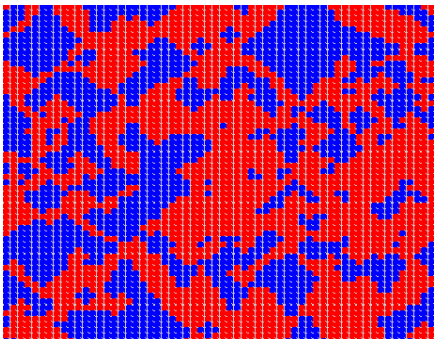
b=1.45 : Chaos



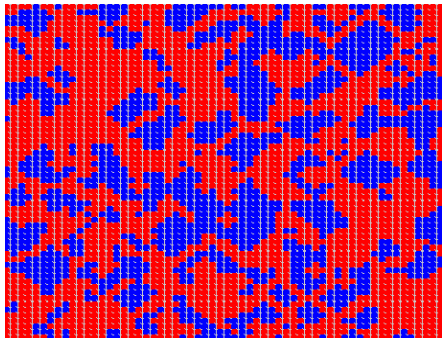
Génération O



Génération 3

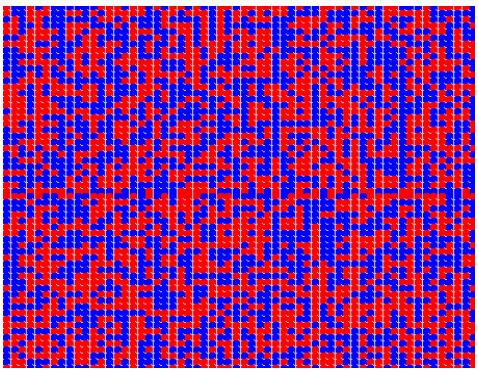


Génération 30

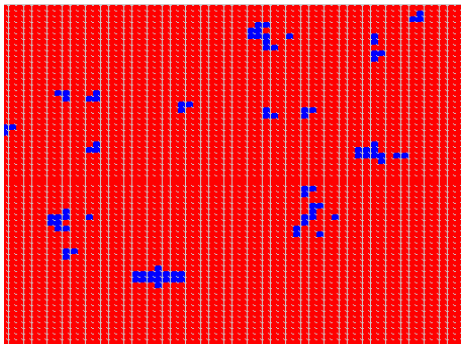


Génération 60

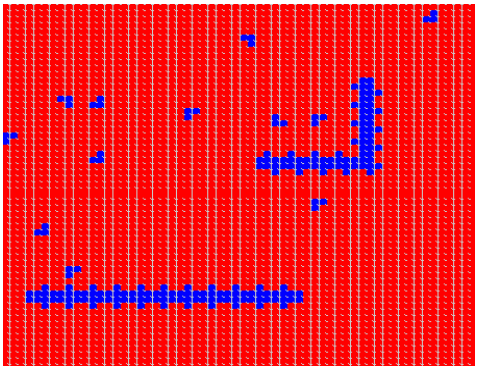
b=1.85 : Domination des comportements D



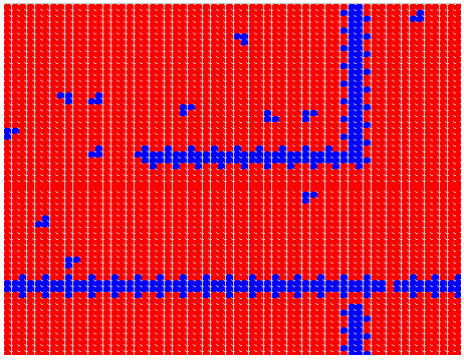
Génération 0



Génération 3



Génération 30



Génération 60

Figure A.2 : Évolutions dans le modèle de Nowak et May pour différentes valeurs de l'incitation à trahir b sans auto-interaction. La topologie est une grille torique de Von Neumann de taille 60×60. Chaque nœud est initialisé avec un comportement C avec une probabilité 0.5, avec un comportement D avec une probabilité 0.5. Les comportements C apparaissent en bleu, les comportements D en rouge.

Dans ce modèle, les nœuds d'état C liés à un faible nombre de nœuds d'état D sont les meilleurs voisins des nœuds qui leur sont adjacents, de sorte que le comportement C se diffuse sur ces nœuds adjacents.

Les différentes valeurs du paramètre b permettent de mettre en évidence trois types d'évolution et de formes de convergence. Pour $b \in [1, \frac{8}{5}]$, il y a diminution initiale de la fréquence des comportements C. Celle-ci est due au fait que les D sont initialement entourés d'autant de C que les C en moyenne, de sorte que les D se diffusent. Les comportements C qui survivent sont organisés en clusters de nœuds de même état. Cette organisation garantit la survie des comportements C. Dans un second temps, la coopération se développe jusqu'à atteindre un niveau stationnaire. Dans cette phase, les comportements C se diffusent à partir de clusters.

D D
D **C** **C** D
D **C** **C** D
D D

Figure A.2 : Un cluster de C entouré de comportements D.

Pour illustrer l'évolution du système on part du cluster présenté sur la figure A.2. Supposons b=1.5. Chacun des C gagne 2 et chaque D est relié à un unique C et gagne donc 1.5 : les comportements C sont les meilleurs voisins des comportements D. **Les comportements C vont se diffuser sur les D à la génération suivante ici**. La survie et la diffusion d'un cluster du type de celui de la figure vient du fait qu'un nœud C entouré de 2 nœuds C et deux nœuds D obtient un meilleur score qu'un D relié à un C, soit que $2\mathrm{R}+2\mathrm{S}>3\mathrm{P}+T$. Avec $S=0$, $R=1$, $T=b$, et $P=0$, la condition devient $2>b$. Tant que cette condition est respectée, le cluster de C n'est pas envahi par un comportement D et les comportements C se diffusent. En revanche, si $b>2$, le cluster disparaît. Considérons un autre cluster :

D D
D D C D
D **C** **C** D
D **C** **C** D
D D

Figure A.3 : Un cluster de C entouré de comportements D.

Pour ce cluster de C, il disparaît si un nœud C entouré de 3 nœuds C a un score moindre qu'un nœud D entouré de deux nœuds C. En effet, ce cluster disparaît si le nœud coloré en vert sur la figure a pour meilleur voisin le nœud coloré en rouge et non pas le nœud coloré en bleu. Donc le cluster disparaît si $2\times b>3$, soit $b>\frac{3}{2}$. Pour chaque cluster de C, on peut déterminer un seuil tel que ce cluster disparaît si l'incitation à trahir dépasse ce seuil.

En fonction du niveau de l'incitation à trahir, les clusters de C disparaissent se maintiennent ou se diffusent : la fréquence d'équilibre des coopérateurs évolue selon différentes phases en fonction de b ainsi qu'illustré sur la figure A.6.

Pour $b\in[1,\frac{8}{5}]$ la convergence se fait vers des évolutions périodiques de périodes courtes et les comportements C sont majoritaires.

Pour $b \in [\frac{5}{3}, 2]$ la convergence se fait vers une majorité de D. Ne survivent que les clusters de C qui sont les plus résistants. La figure suivante illustre la survie d'un cluster de C dans des évolutions périodiques de période 2 :

D D D D	D **C** D D	D D D D
D **C** **C** D	**C** **C** D D	D **C** **C** D
D **C** D D	D D D D	D **C** D D
D D D D	D D D D	D D D D

Figure A.4 : Évolution d'un cluster de C sur 3 générations dans une grille de Von Neumann avec b=1.95. La structure est périodique de période 2. Pour observer cette évolution, il faut 2×R>T et 2×T>R. Soit avec les paramètres courants 2>b et 2×b>1.

Le système global est composé de structures de C qui évoluent périodiquement sur un petit nombre de générations ou de structures qui restent stables au cours des générations. Le système global évolue donc de manière périodique sur un petit nombre de générations.

Pour $b \in [\frac{8}{5}, \frac{5}{3}]$ au contraire des cas précédents, les auteurs qualifient le système de chaotique ou régime critique. Il s'agit d'un système à périodes extrêmement longues. Les comportements se déplacent, au contraire des autres cas. Des clusters de C peuvent se développer dans des régions de D (ce qui n'est pas vrai si $b > \frac{5}{3}$), des clusters de D peuvent se développer dans des régions de C (ce qui n'est pas vrai si $b < \frac{8}{5}$). Ce type de système est alors très sensible aux conditions initiales.

La dimension ne constitue pas un paramètre modifiant considérablement l'état final. Les systèmes convergent vers des situations finales homogènes en partant de différentes initialisations aléatoires. C'est seulement en partant d' initialisations particulières comme par exemple une initialisation par un cluster de C central entouré de D ou avec un nœud d'état D au milieu des C que l'on obtient des formes dépendantes de la dimension. La figure suivante montre un exemple de telles formes.

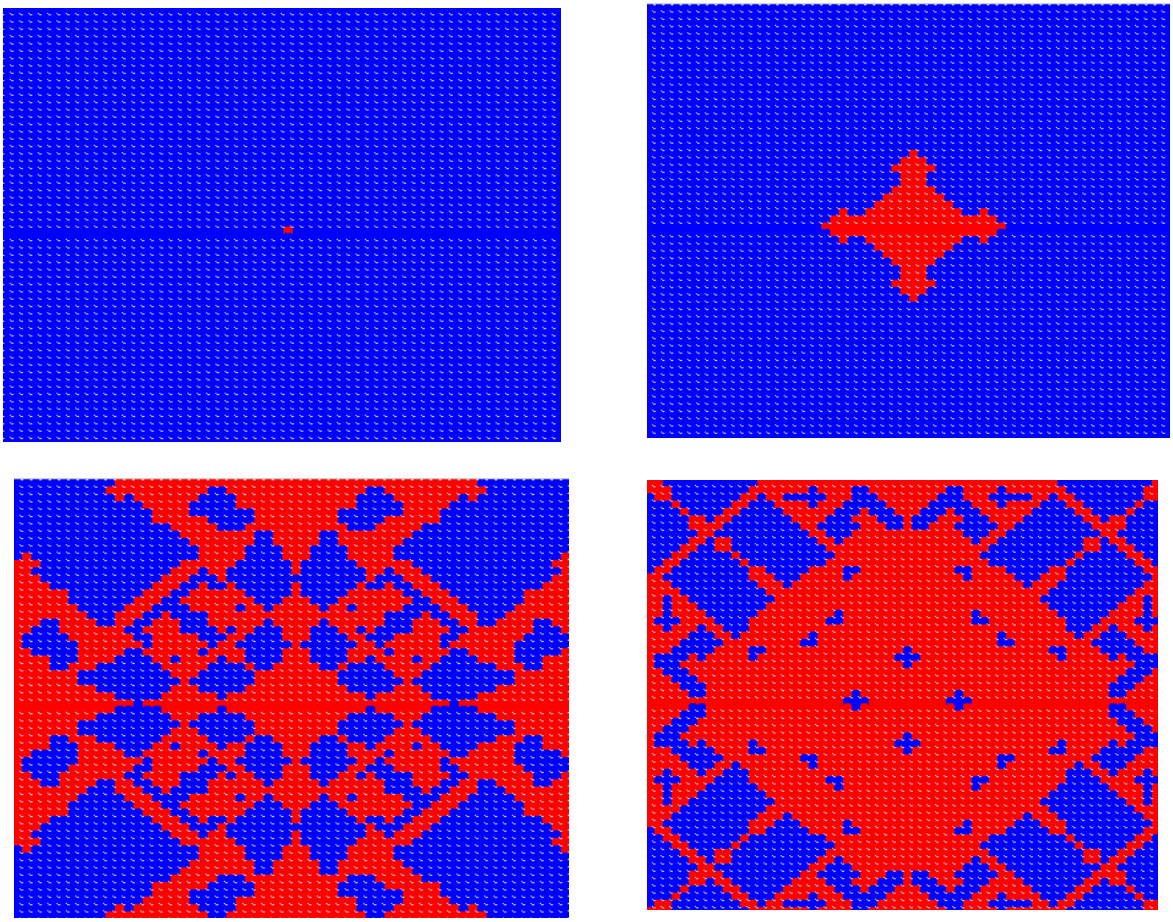


Figure A.5 Évolution du modèle de Nowak et May sur une grille au voisinage de Von Neumann avec b=1.45. L'initialisation est faite par 1 nœud D au centre. La grille est 60×60. Les graphiques correspondent aux générations 0, 10, 40 et 100.

Les fréquences de coopérateurs à l'équilibre peuvent être données en fonction du taux b :

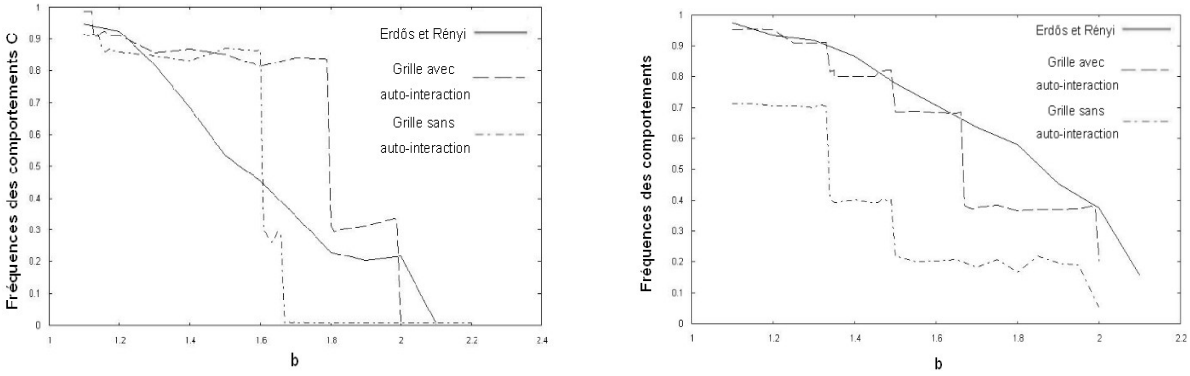


Figure A.6 : Evolution du taux de coopérateurs en fonction de b pour différentes topologies. Le graphique de gauche correspond aux grilles de Von Neumann et aux graphes aléatoires à la Erdős et Rényi de degré moyen 4. Le graphique de droite concerne les grilles à voisinage de Moore et les graphes aléatoires à la Erdős et Rényi de degré 8. Les courbes avec des paliers sont les évolutions pour les grilles. Pour chaque grille, on a deux cas : le cas où chaque nœud est considéré comme un de ses propres voisins et le cas sans cette forme d'auto-interaction.

Sur la figure A.6, on constate l'apparition de transitions de phase dans le cas des topologies régulières, ce que l'on ne constate pas dans le cas de graphes aléatoires à la Erdős et Rényi.

En fonction de la valeur b, un cluster de C peut soit se maintenir, soit se développer, soit disparaître. Par exemple, le cluster de la figure A.2 disparaît pour b>2, se développe pour b<2. Avec l'augmentation de la valeur de b, différents clusters sont envahis. L'évolution par paliers s'explique par l'existence de valeurs seuils telles qu'au-dessous de ces valeurs, un type de cluster peut se maintenir, quand il disparaît pour une valeur supérieure. Entre deux valeurs seuils, le système évolue de la même manière indépendamment de la valeur de b. Une approche analytique du modèle pour le cas des grilles est donnée dans [Shweitzer 02]. Les auteurs obtiennent des résultats sur les formes des clusters qui survivent en fonction des paramètres.

Le modèle de Nowak et May est le premier qui fait reposer la coopération sur la fixité des relations. Il permet la survie de comportements coopératifs très simplifiés. La survie des comportements passe alors par une organisation clusterisée des comportements C. Ce modèle a donné lieu à un nombre de développements considérables dont certains sont présentés dans la partie suivante.

B. Variations autour du modèle de Nowak et May

Le modèle de Nowak et May est le point de départ d'une série de travaux qui discutent du résultat du modèle en en faisant varier les différents paramètres. Le modèle est résistant à une série de variations sur la forme du dilemme. Dans la version initiale proposée par Nowak et May, le dilemme utilisé n'est pas un DP au sens strict puisque le gain d'un comportement D contre un comportement D est le même que celui d'un comportement C contre un comportement D, c'est-à-dire P=S. Néanmoins, **l'introduction d'une matrice classique du dilemme du prisonnier ne change pas les résultats**. La variation des paramètres provoque une modification numérique des valeurs de transition et des taux de coopérateurs en état stationnaire.

Les résultats principaux du modèle sont également conservés que l'on ait ou non voisinage torique ou que l'on ait un voisinage de Von Neumann ou de Moore. Dans ce dernier cas, le nombre de transitions est supérieur (figure A.6).

D'autres variations ont été testées qui ne sont pas reportées ici, on peut notamment consulter [Nowak 94]. Dans ce qui suit, on se limite à évoquer la modification du mécanisme d'imitation et le passage à d'autres topologies que les topologies de grille.

Introduction de bruit dans l'imitation

Des articles s'intéressent à l'introduction de bruit dans le mécanisme de copie [Szabó 97][Szabó 05]. Dans ce cas, la copie du meilleur comportement ne se fait plus de manière déterministe. La copie est alors d'autant plus probable que la différence des scores est importante. La probabilité qu'un nœud X copie un nœud Y est de la forme :

$$p(X\,copie\,Y)=\frac{1}{1+\exp^{\left(\frac{score_X-score_Y}{K}\right)}} \tag{B.1}$$

K est un paramètre qui bruite le mécanisme d'imitation. Pour K qui tend vers 0, la probabilité de copier tend vers 1 si la différence $(score_X - score_Y)$ est négative. La copie est alors certaine : le mécanisme déterministe utilisé chez Nowak et May est la limite du mécanisme de copie aléatoire pour le bruit qui tend vers 0. Si la différence de score est positive, l'augmentation du niveau de K tend à faire augmenter la probabilité de copier et peut donc provoquer une copie erronée. Si K tend vers l'infini, la probabilité qu'un nœud copie son voisin est $\frac{1}{2}$ indépendamment des scores associés à chaque nœud.

Les auteurs étudient l'effet de la variation du bruit K sur le seuil b_{cr} de la tentation à trahir pour lequel la coopération disparaît. Cet effet varie en fonction de la topologie sans que les auteurs ne rapportent cette propriété à des caractéristiques topologiques particulières. Deux régimes d'évolution sont possibles :

(1) Il existe un niveau optimal de bruit K C'est-à-dire, il existe un niveau de bruit $K>0$ qui maximise b_{cr}, l'incitation à trahir pour laquelle la coopération disparaît. Ce régime est présenté sur le graphique de gauche de la figure B.1

(2) Dans le second régime, l'augmentation de K fait diminuer b_{cr} de manière monotone, ce régime est illustré par le graphique de droite de la figure B.1. Dans ce régime, le bruit est toujours défavorable à la coopération.

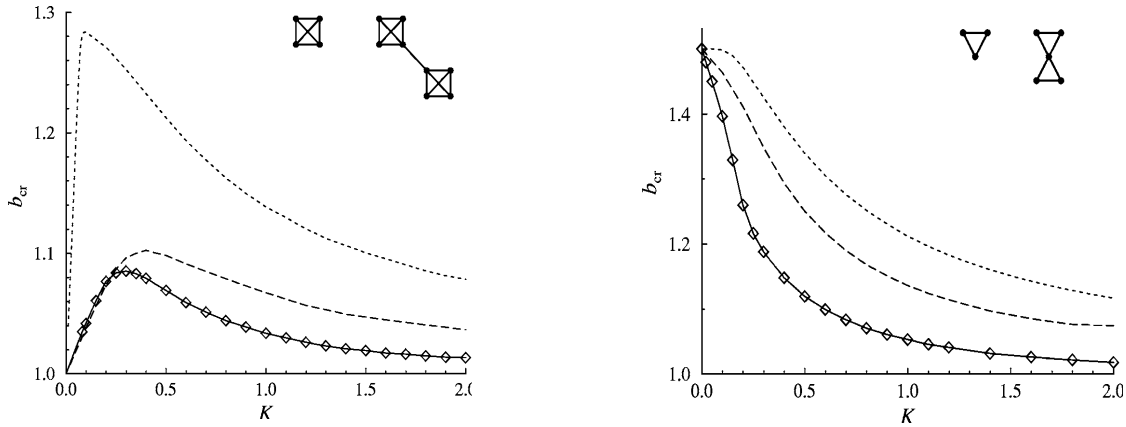


Figure B.1 : Evolution de la coopération en fonction du bruit dans l'imitation. Il apparaît deux régimes en fonction de la topologie sous-jacente : à gauche, la coopération atteint un maximum avec K, à droite, la coopération diminue de manière continue avec K.

Les grilles de Von Neumann conduisent au régime (1) tandis que d'autres topologies régulières, type Kagome (voire la figure suivante), dépendent du second régime.

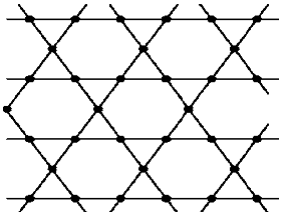


Figure B.2 Topologie de Type Kagome

Variations topologiques

Une série de variations topologiques ont été proposées pour le modèle de Nowak et May. Dans leurs articles, les auteurs ont étudié l'impact de leur modèle pour les deux types de voisinage de grille possibles (Moore et Von Neumann). Des extensions à des topologies régulières ont été proposées [Vukov 05] [Szabó 97].

L'extension du modèle au cas des graphes aléatoires modifie les résultats [Duran 2003]. Alors que dans le cas des graphes avec une connectivité fixe, on observe 3 phases, dans le cas des graphes aléatoires, l'évolution de la fréquence des coopérateurs est continue avec b, ainsi qu'il apparaît sur la figure A.6.

Pour les graphes aléatoires, on constate sur la figure A.6 que le passage des grilles à des graphes aléatoires de même degré moyen n'a pas le même impact sur la fréquence des coopérateurs en fonction du degré moyen : les grilles de Von Neumann sont plus favorables à la coopération que les graphes aléatoires de degré moyen 4, quand les grilles de Moore sont moins favorables à la coopération que les graphes aléatoires de degré moyen 8. Le passage des graphes réguliers aux graphes aléatoires est étudié par [Abramson 01] pour différents niveaux de degré moyen. Les

auteurs partent d'un anneau avec 2×k voisins par nœuds et réaffectent une fraction e des arcs du graphe. L'évolution des comportements se fait sur la base de la copie du score moyen obtenu à chaque site dans ce modèle. Après avoir mis en évidence un phénomène général qui est que plus de nœuds évoluent et plus fréquemment avec l'augmentation de e, ils mettent en évidence une variabilité de la coopération. En effet, pour certaines valeurs de k et certaines valeurs de e, on trouve des niveaux de coopération très faibles avec des évolutions non monotones de la fréquence des coopérateurs en fonction des paramètres.

Cette mise en évidence d'une plus grande part de comportements agressifs en régime stationnaire dans le cas des graphes petit-monde (Small-World) est remise en question par d'autres articles [Perec 05][Santos 05] qui concluent à un soutien renforcé de la coopération pour les graphes petit-monde. Les différences dans les conclusions des trois articles précédents reposent cependant sur des mécanismes évolutionnaires différents. Dans [Wu 05], 3 mécanismes de copie du voisin le plus performant sont testés.

(1) Copie du voisin qui obtient le meilleur score moyen

(2) Copie probabiliste d'un voisin en fonction de la différence d'un score d'un nœud à son voisin

(3) Le mécanisme est identique à (2) mais on rajoute un bruit d'erreur, de sorte que la copie devient similaire à celle utilisée en (B.1).

Les auteurs montrent que les conclusions sur la coopération dans les graphes petit-monde sont particulièrement sensibles au mécanisme d'imitation retenu : **ces graphes ne favorisent ni ne défavorisent en eux-mêmes la coopération**.

C. D'autres modèles d'évolution de la coopération sur des graphes.

Le modèle de Nowak et May repose sur la répartition d'une population de stratégies jouant le dilemme du prisonnier simple. Des développements ultérieurs étudient la répartition d'autres populations de stratégies. Parmi les populations de stratégies qui peuvent ou non adopter un comportement interprétable comme comportement coopératif, on a notamment :

- le dilemme du prisonnier itéré
- le dilemme colombes et faucons ("hawk-doves dilemma") ou "snowdrift dilemma"
- le dilemme du prisonnier simple auquel on rajoute le comportement solitaire ("Loners")

La répartition spatiale des populations associées à ces dilemmes modifie la dynamique évolutionnaire dans chacun des cas.

Dilemme du prisonnier itéré

Dans la continuité des travaux sur l'évolution de la coopération en théorie des jeux évolutionnaires, beaucoup de travaux se font autour du dilemme du prisonnier itéré, les simulations se limitant souvent à des classes de stratégies particulières [Beaufils 00]. Notamment, beaucoup des travaux étudient les populations de stratégies à mémoire 1 de ce dilemme. Pour certains, ils considèrent la version déterministe de ces stratégies, pour d'autres la version aléatoire.

Le dilemme itéré du prisonnier, présenté dans la section 1 du présent chapitre, est en soi un cadre permettant d'établir la coopération avec l'introduction du comportement TFT par exemple. Néanmoins, la portée du résultat est limitée. En effet, chez Axelrod [1984], c'est la possibilité d'interactions futures qui engage les individus à coopérer dès les premières générations. Parce que l'interaction va être renouvelée, mieux vaut rapidement établir la coopération. Ce modèle suppose donc des interactions répétées entre deux individus pour fonder la coopération. Cependant, des exemples économiques et biologiques montrent que la coopération peut s'établir alors même que les relations individuelles sont courtes et que les agents changent de comportement. Ayant établi ce constat, Cohen, Riolo et Axelrod [Cohen 01] développent un nouveau modèle reposant sur la répartition spatiale d'agents jouant le dilemme du prisonnier itéré. Ils veulent d'abord mettre en évidence le rôle de la spatialité dans l'évolution de la coopération et discuter ensuite de l'importance du fait que la structure de la population soit ou non clusterisée.

Les auteurs considèrent une population de stratégies jouant le dilemme du prisonnier itéré. Ils se limitent au cas des stratégies probabilistes à mémoire 1 sur le coup de leur adversaire. Ces stratégies sont définies par 3 paramètres : la probabilité de coopérer au premier coup, la probabilité de coopérer après que l'adversaire ait coopéré et la probabilité de coopérer après que l'adversaire ait joué un coup agressif. **Les stratégies copient celui des comportements avec lesquels ils ont interagit qui a obtenu le plus fort score**. Sont comparés différents modes d'interaction pour la population des stratégies dans le but de tester si c'est la fixité des relations seule ou la fixité des relations et leur organisation clusterisée qui conditionnent la convergence vers des équilibres coopératifs et leur maintien.

	Fréquence des cas ayant atteint de "hauts niveaux" de coopération	Gain Moyen des relations	Fréquence des simulations pour lesquelles la coopération se maintient.
Population non répartie. Rencontres aléatoires à chaque génération	0.3	1091	0.015
Population répartie sur une grille 16×16	1	2.557	0.997
Population répartie sur un graphe aléatoire	1	2.575	0.995
Population répartie sur un graphe aléatoire avec variation de 30% des relations	1	2.1	0.402
Population répartie sur un graphe aléatoire avec variation de 50% des relations	0.93	1.257	0.061

Tableau C.1 : Statistiques caractéristiques pour l'évolution de la coopération dans le cas des interactions pour le modèle proposé par [Cohen 01]. Les valeurs du dilemme du prisonnier utilisées sont : T=5, C=3, P=1, S=0.

Le premier résultat mis en évidence est proche de celui de Nowak et May et de ceux des premiers travaux sur la répartition de populations du dilemme du prisonnier itéré [Lombord 96]. Dans le cas où chacun des voisins rencontre 4 voisins choisis au hasard dans la population à chaque génération, la coopération atteint des "hauts niveaux" seulement dans une minorité des cas et les équilibres coopératifs ne sont pas stables. Au contraire, **la répartition spatiale permet l'émergence systématique et le maintien des équilibres coopératifs**, le gain moyen par relation se trouvant alors fortement renforcé.

Le test de la répartition sur des graphes aléatoires montre que l'évolution vers la coopération n'est pas due à des particularités des topologies de grilles. Pour tester l'importance de l'hypothèse de fixité des relations, des modes d'interaction différents sont testés : les deux dernières lignes du tableau renvoient à des mécanismes où les agents sont reliés entre eux par des relations fixes, formant un graphe aléatoire. A chaque instant, on détermine le voisinage V d'un agent et on modifie une part p des agents de V en choisissant des voisins au hasard. L'agent interagit alors avec ce voisinage modifié. Le tableau montre qu'en augmentant p au delà d'un certain niveau, on continue de faire apparaître des équilibres coopératifs, mais ces équilibres sont beaucoup plus instables et le gain moyen est fortement dégradé : on se rapproche de la forme d'évolution constatée sur la population non répartie. C'est donc la fixité des relations plus que l'aspect clusterisé du graphe qui importe. En effet, il n'apparaît pas de différence notoire entre les graphes aléatoires et les grilles.

Une étude complète des formes clusterisées qui peuvent apparaître en fonction des stratégies est [Brauchli

99] : les auteurs étudient un ensemble de stratégies à mémoire 1 sur leur coup et le coup de l'adversaire, soit un ensemble de stratégies plus important que l'ensemble considéré chez [Cohen 01] qui ne considère que des stratégies à mémoire 1 sur le coup de l'adversaire. [Bracuhli 99] obtient un résultat central qui est que la coopération passe par des formes clusterisées, mais met en évidence une grande diversité de clusters possibles (forme et types de stratégies).

Le dilemme faucon colombe

Ce dilemme est également connu comme "Hawk-Doves Dilemma", "Snowdrift Dilemma" ou "Chiken Game" [Binmore 99]. On le donne sous sa forme classique [Smith 73]:

	H	D
H	$\frac{1}{2}*(V-C)$	V
D	0	$\frac{V}{2}$

Figure C.2 : Matrice des scores pour le dilemme faucons colombes

Ce dilemme symbolise la situation ou deux populations animales, les faucons et les colombes, s'affrontent pour un territoire : dans le cas où deux faucons ("Hawks") se rencontrent, ils s'affrontent et se partagent le territoire : ils gagnent chacun $\frac{V}{2}$ pour le partage du territoire, mais leur affrontement leur cause un dommage $\frac{-C}{2}$. Dans le cas d'une colombe ("Dove") qui rencontre un faucon, le territoire est partagé à l'avantage du faucon qui gagne V, la colombe a un score de 0. Enfin, dans le cas de la rencontre de deux colombes, la coexistence se fait de manière pacifique sur le territoire qui est partagé sans affrontement : chaque colombe gagne $\frac{V}{2}$.

Pour avoir un dilemme faucon-colombe, il faut $C>V$: face à un acteur agressif, un faucon, mieux vaut jouer le coup D (colombe). Dans ce cas, le dilemme présente deux équilibres de Nash en stratégies pures (H,D) et (D,H) et un équilibre en stratégies mixtes : jouer H avec une probabilité p_E, jouer D avec une probabilité $1-p_E$.

A cet équilibre en stratégies mixtes du jeu correspond un équilibre d'une population de stratégies jouant ce jeu : une population composée d'une part p_E des stratégies jouant H et une part $1-p_E$ jouant D est en équilibre. En calculant, on obtient $p_E=\frac{V}{C}$ [Smith 82].

Certains auteurs considèrent le comportement Colombe comme une forme de coopération, le comportement

Faucon comme un comportement agressif. En effet, l'adoption du comportement colombe par un joueur augmente toujours le score de son adversaire, soit une approche plus large de la coopération que celle donnée dans la partie B de la section 1.

Le dilemme a lui aussi été étudié dans le cadre de la répartition spatiale en utilisant une dynamique d'imitation du meilleur voisin [Killingback 96][Nowak 94][Hauert 04]. L'enjeu n'est pas le même que dans le cas du dilemme du prisonnier ici **puisque la survie des comportements coopératifs est garantie dans le dilemme**. En effet, un équilibre de la population non répartie est mixte : dans une population de stratégies agressives, une stratégie augmente sa performance en adoptant le comportement coopératif.

Dans le cas de ce dilemme, [Hauert 04] montre que l'impact de la topologie dépend des paramètres du modèle et de la matrice des jeux pour une même dynamique d'imitation du comportement voisin le plus performant que celle introduite avec le modèle de Nowak et May. Comme indiqué plus haut, p_E est la part d'équilibre des comportements de type faucon dans la population non répartie, cette part augmente avec la diminution du risque C de blessure par rapport au gain V. **Pour chaque topologie, il existe un seuil p_S tel que, pour $p_E < p_S$, la fréquence des coopérateurs est améliorée par le passage à des interactions topologiques**, alors que sinon, la part des comportements coopératifs diminue avec la répartition topologique. Notamment, plus le degré des nœuds augmente, plus le seuil p_S est bas : c'est à dire que se restreint la plage des paramètres pour laquelle la coopération est augmentée avec le passage aux interactions topologiques. Pour comprendre ce résultat, il faut noter que tout joueur confronté à k faucons a intérêt à jouer le coup colombe : il gagnera 0 au lieu de $\frac{k}{2}\times(V-C)<0.$ Donc quelque soit la taille du groupe, un individu a toujours intérêt à adopter le comportement colombe face à un groupe composé uniquement de faucons. En revanche, si un voisin a déjà adopté le comportement colombe, il existe un nombre de faucons tel qu'il n'est opportun pour aucun d'eux de changer de comportement. Notons k ce nombre. Ceci signifie qu'un groupe de k-2 faucons et 1 colombe est stable mais aussi qu'un groupe de k-3 faucons et 1 colombe est stable. Dans un cas comme dans l'autre, il y a une seule colombe à l'équilibre alors que la taille du groupe a varié. En répartissant spatialement la population et diminuant le degré moyen, c'est à dire la taille des groupes d'interaction, on augmente la proportion des comportements C, à l'inverse, en augmentant le degré moyen, on augmente la taille des groupes d'interaction et on fait baisser le nombre des comportements C en état stable, de sorte que le seuil p_S diminue avec le degré moyen.

Figure C.3 : Pour une même grille de Von Neumann, la figure de gauche présente l'organisation obtenue dans le cas d'une population jouant le dilemme du prisonnier itéré, quand la figure de droite correspond au cas d'une population jouant le dilemme snowdrift. Les coopérateurs apparaissent en noir.

La figure C.3 montre les formes d'organisation comparées pour le dilemme faucon-colombe et le dilemme du prisonnier. Dans ce dernier cas, un coopérateur doit être isolé des D pour être efficace, alors que dans le premier cas, la coopération est plus performante en présence de comportements agressifs : les comportements coopératifs sont organisés en fils. Ceux-ci sont issus d'un coopérateur initial dont le comportement s'est diffusé. Une référence sur l'évolution spatiale des populations du Snowdrift est [Doebeli 05].

Introduction des solitaires dans le domaine du prisonnier

L'une des extensions à l'étude spatiale du dilemme du prisonnier est l'introduction d'un troisième comportement : le comportement solitaire (Loner), en plus des comportements C et D. Ce comportement consiste à refuser le dilemme. Les stratégies adoptant ce comportement sont alors défavorisées par rapport à une population de stratégies coopératives qui sont parvenues à établir la coopération entre elles, mais elles sont avantagées par rapport aux stratégies D puisqu'elles évitent l'agression. La présence de ce type de comportement permet l'instauration durable de la coopération.

Dans ce cas, la matrice des gains a cette forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma \\ b & 0 & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

avec $0<\sigma<1$ qui est le gain certain hors de toute interaction. Les deux premières lignes et colonnes reproduisant le dilemme du prisonnier simple.

En faisant évoluer ces populations sur une grille [Szabó 02], on constate que les comportements solitaires disparaissent si b est trop faible. Si b est au dessus de ce seuil de disparition, il y a augmentation monotone de

la part des solitaires avec b.

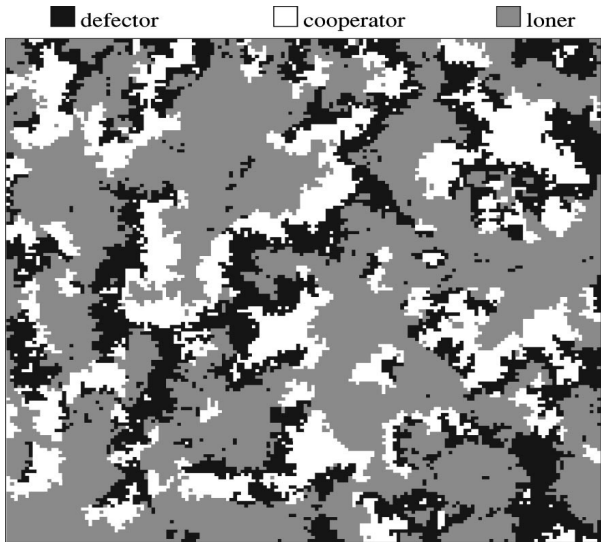


Figure C.4 : Etat d'une grille pour les trois comportements : solitaire, C et D.

Ici, la coopération survit pour une très large plage des valeurs de la matrice de gain et notamment, **quelle que soit la valeur de b au dessus de la valeur seuil, la coopération survit** [Szabó 04][Hauert 02][Michor 02]. Ce résultat est différent de celui du modèle de Nowak et May pour lequel il existe un seuil de la propension à trahir tel qu'au dessus de ce seuil, les coopérateurs disparaissent. Ici, un fort niveau de b implique une fréquence importante des solitaires, soit des zones du graphe sans comportements D où les comportements C peuvent se développer. Les clusters qui apparaissent sur le graphe C.4 sont en mouvement constant dans le graphe. Les auteurs parlent de "Red Queen Mechanism", faisant référence à "Alice au Pays des Merveilles" de L. Carroll : As in the land of the Red Queen, “it takes all the running you can do, to keep in the same place.”. C'est à dire que la conservation des coopérateurs passe par des évolutions constantes des clusters de C dans le graphe : il n'y a pas de site fixe dans le graphe. La survie des coopérateurs devient alors un phénomène similaire à la survie des comportements dans les modèles SIR mis en évidence dans la théorie des graphes (I.C).

D. Autres modèles de répartition de jeux sur des graphes

Le dernier mécanisme évoqué dans la partie précédente fait reposer la coopération sur le fait qu'apparaissent des évolutions telles que les stratégies solitaires dominent les stratégies D qui dominent les stratégies C, celles-ci dominant les stratégies solitaires. On parle de situation de **dominance cyclique** pour des populations de cette forme.

Une large attention a été portée à de telles populations dans la littérature autour de la recherche des conditions au maintien de la biodiversité des comportements. Ces travaux sont largement évoqués dans le chapitre III.

La problématique du maintien de la biodiversité émerge si on considère une matrice à trois comportements se dominant cycliquement et qui sont parfaitement symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les populations sont appelées populations RPS pour Rock-Paper-Scissor en référence au célèbre jeu Papier Caillou Ciseau où les trois stratégies sont parfaitement équivalentes. Dans le cas d'une population finie de stratégies contenant les trois comportements, il se produit un phénomène de synchronisation : les fréquences des comportements évoluent cycliquement avec une augmentation de l'amplitude des cycles jusqu'à disparition de deux des comportements [Hofbauer 98].

La répartition topologique permet le maintien des 3 comportements. En fonction de la topologie, les fréquences se maintiennent en situation d'équilibre stationnaire (grille) ou convergent vers un cycle limite (petit-mondes) [Szabó et Szlonoki 04].

Un grand nombre de résultats existent sur des spécifications connexes à celles qui ont été présentées ci-desus. Par exemple, le fait de supposer une dynamique écologique en plus de la dynamique de redistribution des comportements modifie les résultats. Dans [Alonso 06], l'idée que le contexte et la pression de l'environnement jouent un rôle dans l'apparition de la coopération est proposée. Le modèle est similaire à celui de Nowak et May, à une différence près sur le mécanisme de copie du meilleur voisin. Si le score du meilleur voisin est inférieur à un seuil U_{min} : l'agent choisit le comportement opposé à celui du meilleur voisin avec une probabilité p : dans ce cas, la coopération est plus fréquente que dans le modèle de Nowak et May. [Hauert et Holmes 06] montrent qu'en relâchant l'hypothèse de population de taille fixe au cours des générations, on peut favoriser la coopération. Enfin, une extension au domaine est de supposer des hypothèses intermédiaires entre les réseaux fixes et les populations non réparties en faisant co-évoluer les agents et la structure de répartition spatiale [Zimmermann 03].

Section I.4. Approche générale de la répartition spatiale

Certains articles proposent une vue générale sur l'impact de la répartition spatiale. [Hauert 01] étudie cet impact pour l'ensemble des dilemmes à deux joueurs. Un dilemme à deux joueurs est de la forme :

	C	D
C	R,R	S,T
D	T,S	P,P

En notant R=1 et P=0, il est possible de considérer l'ensemble des dilemmes à 2 joueurs et 2 coups par joueur en faisant varier T et S et d'en déduire les équilibres pour chaque dilemme. 4 dilemmes sont possibles. Les équilibres de Nash apparaissent en bleu dans les matrices :

T>1 et S<0 (a)

	C	D
C	1,1	S,T
D	T,S	**0,0**

Ce cas correspond au dilemme du prisonnier vu dans la partie précédente. Dans ce cas, la dynamique de réplication conduit à un équilibre avec seulement des stratégies D.

T>1 et S>0 (b)

	C	D
C	1,1	**S,T**
D	**T,S**	0,0

Ce cas correspond au dilemme faucon-colombe vu plus haut. L'équilibre avec seulement des C et l'équilibre avec seulement des D sont instables, l'équilibre mixte est un équilibre attracteur.

T<1 et S<0 (c)

	C	D
C	**1,1**	S,T
D	T,S	**0,0**

Dans ce cas, il existe un équilibre mixte instable, les équilibres avec seulement des stratégies C et seulement des stratégies D étant stables. On parle de **bi-stabilité**.

T<1 et S>0 (d)

	C	D
C	1,1	S,T
D	T,S	0,0

Dans ce cas, le seul équilibre est l'équilibre avec seulement des C.

La figure suivante, issue de [Hauert 01] synthétise les formes de convergence des populations non réparties en fonction des paramètres T et S, en conservant R=1 et P=0 :

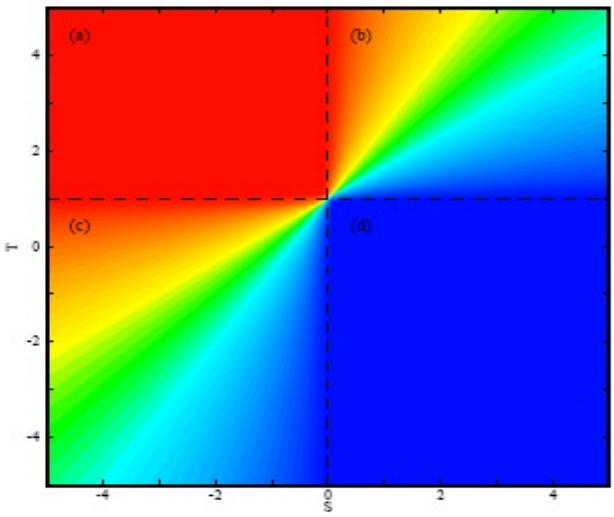


Figure A.1 : La figure est tirée de [Hauert 01]. La couleur rouge correspond au cas où le taux de C est nul ou tend vers 0. A l'inverse, la couleur bleue correspond au cas où le taux de D est nul ou tend vers 0. Les couleurs intermédiaires correspondent aux différentes fréquences possibles de C, la composante de bleu traduisant la fréquence moyenne des comportements C. (a) correspond à la convergence vers une population de D seulement, (b) correspond à la coexistence, (c) correspond à la bistabilité et (d) correspond à la convergence vers la coopération.

Les 4 régimes qui apparaissent, majorité de C, majorité de D, équilibre mixte et bi-stabilité, sont généralisables au cas de N joueurs. C'est à dire aux cas des versions généralisées des 4 dilemmes où les joueurs ne jouent pas 2 à 2,

mais N à N. Dans le cas du dilemme du prisonnier, la généralisation au cas de N joueurs est un jeu de bien public [Hardin 68]. Dans ce cas, si un offreur coopère, il augmente le bien public total mais chaque agent est incité à ne pas coopérer et à profiter des efforts des autres sans supporter de coût. L'évolution sélectionne alors les comportements opportunistes au défaut des comportements coopératifs. Des généralisations des dilemmes (b), (c) et (d) sont également envisageables au cas à N joueurs. Dans chacun des cas, on retrouve des équilibres similaires entre les stratégies C et D pour la généralisation des jeux [Hauert et Michor 06].

Les figures suivantes sont construites sur le même principe que la figure A.1 mais traitent des dilemmes 2×2 dans **le cas de population répartie spatialement avec une dynamique d'imitation du meilleur voisin.**

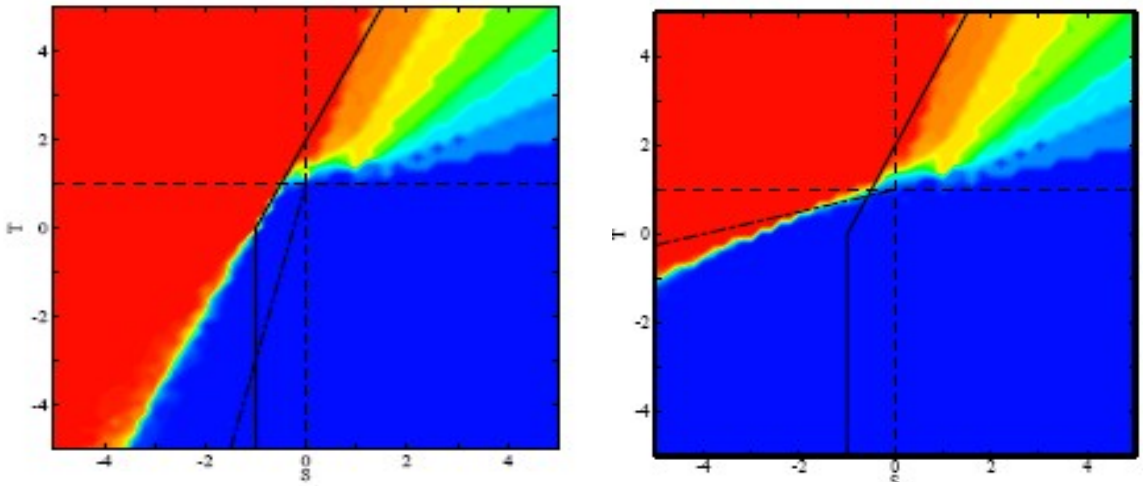


Figure A.2 : Les schéma sont extraits de [Hauert 01], ils s'interprètent à l'instar de la figure A.1. Le graphique de gauche correspond à un grille de Von Neumann avec une initialisation avec 20% de coopérateurs, le graphique de droite correspond à une grille de Von Neumann avec une initialisation de 80% de coopérateurs initiaux.

La figure A.2 met en évidence que l'impact de la topologie est différent en fonction de l'initialisation en nombre de coopérateurs, notamment dans la région où les paramètres correspondent à la bistabilité. Ce sont les conditions d'évolution des clusters qui déterminent la convergence globale des systèmes. Le résultat de l'évolution avec la spatialité reste très peu sensible au mode d'actualisation retenu (asynchrone, synchrone, variation du mode d'actualisation). Le modèle de Nowak et May correspond à la petite zone du cadrant supérieur gauche (T>1, S<0) qui n'est plus colorée en rouge mais en bleu, vert et jaune sur la figure A.2 alors qu'elle est en rouge sur la figure A.1. De même, on retrouve l'effet de diminution de la coopération avec le dilemme faucon colombe en répartissant les populations de stratégies : la zone bleue diminue dans le cadrant supérieur droit dans le passage de la figure A.1 à la figure A.2 (T>1, S>0). La ligne en trait plein de la figure A.2 correspond à la condition de survie du cluster le plus performant dans le graphe de Von

Neumann. Pour ce graphe, ce cluster est celui qui maximise le nombre des voisins C par rapport au nombre de voisins D, soit le cluster présenté à la figure A.2 de la section I.3 du présent chapitre, et pour lequel la condition de survie s'exprime : 2S+2R=T.

Une poursuite de cette étude et une étude plus fondamentale des clusters peut être trouvée dans [Hauert 05], de même, une étude générale sur la répartition spatiale est [Hauert 06].

Conclusion

Le domaine de la théorie des jeux évolutionnaires a connu un développement considérable dans les dernières années. Ce domaine constitue une extension importante de la théorie des jeux. La théorie des jeux évolutionnaires permet de compléter l'analyse classique et statique de la théorie des jeux par une analyse dynamique. Cette démarche était envisagée dès les prémisses de la théorie des jeux par Von Neumann et Morgenstern [Von Neumann 44]. Alors que l'analyse classique des jeux doit poser des hypothèses de rationalité forte et des notions complémentaires à l'équilibre de Nash pour parvenir à trouver un équilibre à certains jeux, la théorie des jeux évolutionnaires fait émerger des équilibres pour les jeux sans avoir à supposer des agents par trop rationnels. Par ailleurs, elle permet de mettre en évidence des formes de convergence même pour les jeux pour lesquels il n'y a pas d'équilibre de Nash ou pour les jeux pour lesquels il y a différents équilibres de Nash.

Le cadre de modélisation de la théorie des jeux évolutionnaires a permis de mettre en évidence un certain nombre de résultats sur l'évolution de la coopération que ce soit au travers de l'étude du dilemme du prisonnier itéré ou au travers de l'étude du dilemme faucons-colombes. Les nombreuses études consacrées au dilemme itéré du prisonnier ont illustré que la coopération pouvait émerger sur la base de la présence d'un comportement simple et réactif, le comportement Tit-For-Tat. La présence de ce comportement ou d'autres peut permettre de faire apparaître des dynamiques complexes dont par exemple des évolutions cycliques de la coopération.

Le domaine constitue un cadre complémentaire aux démarches évolutionnaires qui ont été développées dans le domaine des systèmes multi-agents. Il trouve par ailleurs un enrichissement considérable à l'introduction de l'hypothèse de répartition spatiale qui a conduit à une série de modèles se rapprochant des modèles de diffusion sur des graphes. Ces modèles permettent notamment de mettre en évidence la survie des comportements coopératifs les plus simples dans des graphes. Ces comportements disparaîtraient hors de la répartition spatiale, face à des comportements agressifs, puisqu'ils sont alors strictement dominés. Dans le cas de la répartition spatiale, ils survivent selon diverses modalités : au travers d'organisations clusterisées dans le modèle de Nowak et May [Nowak 93] ou dans les modèles introduisant les comportements solitaires [Szabó 04][Hauert 02][Michor 02]. D'autres modèles utilisent la répartition

spatiale et permettent de fonder le maintien de la biodiversité sur cette hypothèse. Diverses dynamiques sont alors susceptibles d'émerger en fonction des topologies retenues. Une référence sur les aspects spatiaux de la théorie des jeux évolutionnaires est [Szabó 07].

La plupart des interprétations proposées sont majoritairement d'inspiration biologique, de même que beaucoup des contributions au domaine. Les modèles et démarches auraient cependant vocation à se développer dans le champ des sciences économiques, notamment dans l'optique de mettre en évidence de nouveaux équilibres ou de redécouvrir des équilibres classiques mais en ne les faisant plus reposer sur les mêmes hypothèses de rationalité.

Chapitre II. Réseaux de communautés et coopération

Résumé

Le chapitre introduit les réseaux de communautés comme nouveau mode de répartition spatiale des populations de stratégies. Ces réseaux ont été initialement proposés par Briffaut et Delahaye [Briffaut 04]. On ne considère plus un graphe où à chaque nœud correspond une stratégie, mais un graphe où à chaque nœud correspond une communauté de stratégies. Dans ce contexte le chapitre propose un nouveau mécanisme simple d'évolution vers des états coopératifs pour le cas d'une population de stratégies sans mémoire jouant le dilemme du prisonnier.

L'introduction d'un nouveau mode de répartition spatiale nécessite de définir un nouveau mode d'évolution. La dynamique retenue est simple ici. Chaque agent appartient à une communauté et interagit avec les stratégies de sa communauté et les stratégies des communautés voisines. **Une communauté croît (resp. décroît) si le score moyen de ses membres est supérieur (resp. inférieur) au score moyen pris sur l'ensemble de la population**. Le fait de substituer les stratégies les plus performantes aux moins performantes se retrouve dans d'autres modèles où la substitution se fait notamment par l'imitation des comportements les plus performants [Nowak 93]. A partir d'une initialisation aléatoire, le système peut converger vers **une majorité de coopérateurs, l'élimination des coopérateurs ou vers une situation d'évolutions périodiques de la population des coopérateurs et des stratégies agressives**. La présence initiale de clusters de communautés C telle qu'au moins l'une des communautés est isolée garantit de l'évolution vers un état de coopération généralisée. Des initialisations aléatoires sont testées pour différentes topologies : des graphes aléatoires à la Erdős et Rényi, des grilles et des graphes petit-monde. Les clusters de communautés C n'ont pas la même fréquence d'apparition en fonction de ces topologies. De fait, il y a des différences significatives entre les nombres moyens de coopérateurs par topologie. Les graphes aléatoires favorisent la coopération alors que les grilles tendent à la limiter. L'impact de la topologie sur les évolutions périodiques est moins net. Dans le cas des évolutions périodiques, l'organisation clusterisée des communautés C reste centrale. C'est donc un mécanisme d'évolution de la coopération très sensible aux conditions initiales qui est mis en évidence ici.

Section II.1. Dynamique et condition suffisante à la coopération

A. Contexte

La recherche sur les conditions d'émergence de la coopération constitue un champ de recherche actif. Différents modèles ont été étudiés. Le travail initial d'Axelrod [Axelrod 81][Axelrod 84] montre comment la coopération émerge avec des individus engagés dans des interactions répétées. Dans ce cas, un individu coopère dans l'intention d'inciter son partenaire à coopérer dans les interactions futures. L'émergence de la coopération dans ce type de modèle a été largement documentée [Boyd 87][Nowak 90][Nowak et Sigmund 90][Delahaye 92].

Un autre mécanisme fondant la coopération a été mis en évidence sous la forme de la "cliquishness" [Hruschka 06]. Dans ce cadre, chaque agent a un ensemble d'agents préférés. Face aux agents qu'il préfère, il propose la coopération et est tolérant. Il accepte des comportements agressifs ponctuels de leur part. En revanche, il est plus susceptible d'être agressif ou de réagir face aux autres agents. La coopération est alors soutenable même dans le cas où les agents sont susceptibles de faire des erreurs. Néanmoins, l'établissement de la coopération repose alors sur des stratégies assez élaborées, qui nécessitent notamment de retenir de l'information sur les autres agents.

Nowak and May [Nowak 1993][Nowak 1994][Nowak et Bonhoeffer 1994] ont développé un modèle où les agents sans mémoire peuvent survivre et envahir des populations de stratégies agressives. La diffusion des comportements se fait par l'imitation par chaque stratégie du comportement de son voisin le plus performant. L'émergence de la coopération est alors le fait de la distribution spatiale des stratégies et de l'organisation des stratégies jouant C en clusters [Szbaó 97][Schweitzer 02]. En effet, une stratégie C avec suffisamment de voisins C peut devenir performante et être copiée par les stratégies voisines. Les clusters de stratégies C sont les structures de base permettant à la coopération de survivre et de se diffuser.

L'importance des structures clusterisées dans l'émergence de la coopération était déjà soulignée par [Watts 99] dans le cas de populations d'agents homogènes qui coopèrent si un certain nombre de leurs voisins coopèrent.

Le chapitre présente un nouveau mécanisme simple pour l'émergence de la coopération. Le modèle se distingue de celui de Nowak et May mais en utilisant les mêmes stratégies, soit une population de stratégies jouant le dilemme du prisonnier simple.

On considère des réseaux de communautés. **Les communautés sont des ensembles de stratégies**. Une stratégie d'une communauté interagit avec les stratégies de sa communauté et avec les stratégies des communautés voisines. Pour chaque stratégie, on calcule un score moyen sur l'ensemble de ses interactions. Le mécanisme

évolutionnaire retenu implique la croissance (resp. décroissance) des communautés dont les stratégies ont un fort (resp. faible) score moyen. La partie B de cette section décrit plus précisément le mécanisme évolutionnaire. La partie C donne un critère simple d'évolution vers des états coopératifs dans le cas des grilles.

Comme pour le modèle de Nowak et May, la dynamique change beaucoup en fonction des topologies retenues. [Veistein 01] considère le modèle de Nowak et May comme le cas particulier d'un modèle plus général où chaque cellule peut être de trois types : C, D, vide. Le fait que certains sites sont vides est une forme d'aléa de la structure. La coopération augmente en augmentant le nombre des sites vides. [Abramson 01] a exploré le modèle de Nowak et May sur une structure de type petit-monde [Watts 98]. Les auteurs montrent que pour certains nombres de voisins et certains taux de réaffectation des arcs, il y a des augmentations significatives dans la fréquences des defecteurs. Des variations de topologies sont testées pour l'évolution de la coopération selon les réseaux de communautés dans la partie D.

Avec le mécanisme évolutionnaire retenu, les réseaux de communautés convergent majoritairement vers deux états stationnaires : un pour lequel la coopération est majoritaire, l'autre pour lequel la coopération disparaît. Cependant, certaines initialisations ne convergent pas vers un état stationnaire. Pour ces initialisations, les évolutions des populations de C et de D sont cycliques. La fréquence des initialisations qui conduisent à de telles évolutions dépendent de la topologie utilisée. La section 2 traite du cas des évolutions périodiques en fonction des topologies retenues.

B. Dynamique évolutionnaire pour les réseaux de communautés

Les agents considérés sont des agents sans mémoire jouant le dilemme du prisonnier simple. Deux types d'agents sont possibles : les coopérateurs C et les défecteurs D. La matrice du jeu détermine les interactions :

	C	D
C	(3,3)	(5,0)
D	(0,5)	(1,1)

On définit une communauté comme un ensemble de stratégies. Dans le reste du chapitre, on ne considère que des ensembles de stratégies C et des ensembles de stratégies D, on parle de communautés-C et de communautés-D. $type_i \in \{C, D\}$ est le comportement des stratégies de la communauté j. Le nombre de stratégies de la communauté j à la génération t : ej^t. Les communautés sont liées et forment un graphe (on ne considère que des graphes non orientés ici). N est le nombre de communautés dans le graphe. $V(j)$ est l'ensemble des

communautés voisines de la communauté j.

Une stratégie de la communauté j joue un jeu type dilemme du prisonnier contre toutes les stratégies de sa communautés. Son score interne est :

$$scoreI_j^t = (e_j^t - 1) \times score(type_j, type_j) \tag{B.1}$$

où $score(type_j, type_j)$ est le score d'une stratégie de type i contre le score d'une stratégie de type j. L'équation (B.1) signifie que chaque stratégie joue contre l'ensemble des autres stratégies de la population sauf elle-même. La stratégie joue aussi contre les stratégies des communautés de $V(j)$, son score externe est :

$$scoreE_j^t = \sum_{i=1}^{N} (e_i^t) \times score(type_j, type_i) \tag{B.2}$$

Le nombre de contacts d'une stratégie de la communauté j est le nombre des agents avec lesquels un agent de la communauté j interagit :

$$nbContacts_j^t = (e_j^t - 1) + \sum_{i \in V(j)} e_i^t \tag{B.3}$$

Le score moyen d'une stratégie de la communauté j au temps t est alors :

$$scoreN_j^t = \frac{scoreI_j^t + scoreE_j^t}{nbContacts_j^t} \tag{B.4}$$

A chaque génération, on peut calculer un score moyen pour une communauté. L'évolution est alors donnée par l'équation suivante :

$$e_j^t = \frac{scoreN_j^{t-1} \times e_j^{t-1}}{\sum_{i=1}^{N} scoreN_i^{t-1} \times e_j^{t-1}} \times \sum_{i=1}^{N} e_i^{t-1} \tag{B.5}$$

Les e_j^t sont des réels, on les arrondit à la valeur la plus proche pour que les populations des communautés soient des valeurs entières. On verra plus loin que ce choix d'arrondi a un impact sur les formes de convergence obtenues.

Avec l'équation (B.5), le nombre total des stratégies reste constant au cours de l'évolution. On pourrait faire l'hypothèse d'augmentation ou de diminution de la population totale, mais les résultats principaux resteraient inchangés.

Le mécanisme évolutionnaire se ramène à un critère simple. Définissions le score moyen total comme :

$$Q^{t-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} scoreN_i^{t-1} \times e_i^{t-1}}{\sum_{i=1}^{N} e_i^{t-1}} \tag{B.6}$$

à partir de (B.5) et (B.6), on déduit :

$$\frac{e_i^t}{e_i^{t-1}} = \frac{scoreN_i^{t-1}}{Q^{t-1}} \tag{B.7}$$

Le mécanisme évolutionnaire est donc équivalent au critère suivant : une communauté croît (resp. décroît) si son score moyen est supérieur (resp. inférieur) au score moyen pris sur l'ensemble du graphe. Comme la population globale reste constante (B.5), la dynamique est équivalente à la redistribution des stratégies vers les communautés les plus performantes c'est à dire celles qui ont le score moyen le plus fort. La réussite d'une stratégie est directement liée à la performance moyenne dans ses interactions comparée à la performance moyenne des autres stratégies, qui est une variable globale, résumant l'information sur l'ensemble des nœuds du graphe. La sélection sur la base du score moyen est fondée par le fait qu'un individu ne peut entretenir qu'un nombre limité de contacts. Le nombre total des relations dans le graphe est borné : les ressources sont limitées, d'où le fait d'évaluer la performance d'un agent au regard du nombre de ses contacts.

La démarche de simulation utilisée est la suivante : on génère une topologie et on affecte une communauté pour chaque nœud. p est la probabilité d'initialiser un nœud avec une communauté C, (1-p) la probabilité de l'initialiser avec une communauté D. On étudie les évolutions de la coopération en fonction du type de graphe généré et de p.

Un simple exemple illustre le mécanisme évolutionnaire. On considère une communauté C de taille e_0 liée à une communauté D de taille e_1.

Soit q_0 le score moyen d'une stratégie ayant adopté le comportement C et q_1 le score moyen d'une stratégie ayant adopté le comportement D. N est le nombre total de stratégies. De fait, pour toute génération t :

$$N = e_1^t + e_0^t \tag{B.8}$$

Avec ces notations, on a :

$$e_1^t = \frac{q_1 \times e_1^{t-1}}{q_1 \times e_1^{t-1} + q_0 \times e_0^{t-1}} \times N \tag{B.9}$$

et donc :

$$\frac{e_1^t}{e_1^{t-1}} = \frac{q_1}{q_1 \times e_1^{t-1} + q_0 \times e_0^{t-1}} \times (e_0^{t-1} + e_1^{t-1})$$

soit :

$$\frac{e_1^t}{e_1^{t-1}} = \frac{q_1 \times e_1^{t-1} + q_1 \times e_0^{t-1}}{q_1 \times e_1^{t-1} + q_0 \times e_0^{t-1}} \tag{B.10}$$

Le fait que le jeu soit un dilemme du prisonnier implique $q_1 > q_0$ pour toute valeur e_1 et e_0, de fait :

$$\frac{e_1^t}{e_1^{t-1}} > 1 \tag{B.11}$$

De fait, le système converge vers la situation où les C disparaissent. La communauté de C se vide au cours de l'évolution.

Le résultat obtenu sur deux communautés liées correspond à un résultat général sur des graphes complets. Les graphes complets sont équivalents au cas de populations non réparties. Dans le cas des populations non réparties, les stratégies C sont éliminées, que la dynamique soit celle spécifiée par Nowak et May ou celle présentée ici. Ce résultat est une conséquence directe du fait que D est une stratégie strictement dominante dans le jeu du dilemme du prisonnier. **C'est la limitation des contacts entre les communautés qui permet que des agents coopératifs sans mémoire survivent dans certaines configurations**.

Les figures suivantes illustrent le phénomène sur deux topologies simples :

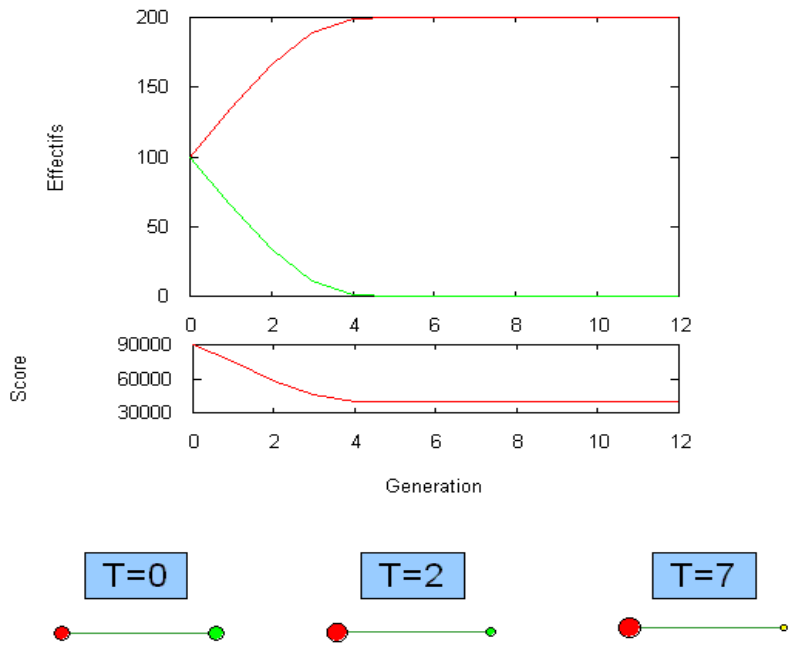


Figure B.1 : Évolution d'un réseau de deux communautés. Les agents D sont représentés en rouge, les agents C en vert. Quand une communauté est vide, elle est représentée en jaune.

Sur la figure B.1, on met en évidence la convergence vers une situation avec seulement des stratégies D à partir d'une situation de deux communautés liées.

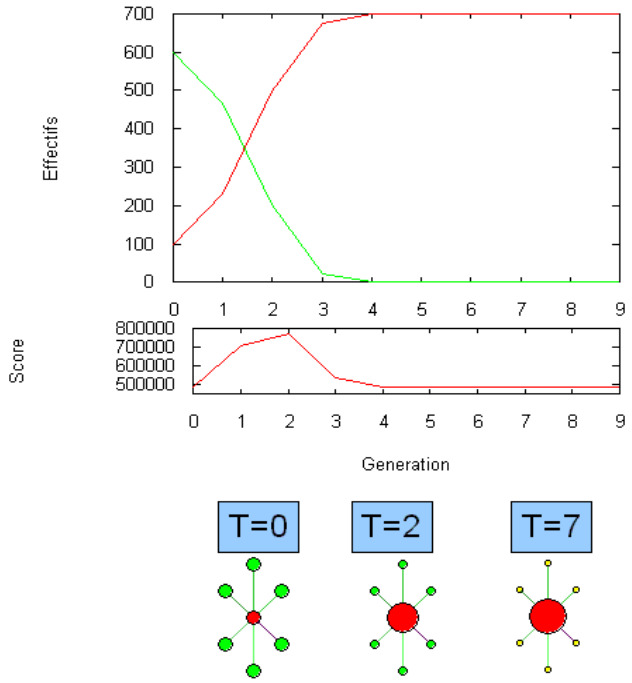


Figure B.2 : Évolution d'un réseau en étoile. Les agents D sont représentés en rouge, les agents C en vert. Quand une communauté est vide, elle est représentée en jaune.

Sur la figure B.2, la communauté D centrale finit par absorber l'ensemble de la population. **Pendant un temps le score total dans le graphe augmente alors même que le nombre des agents C diminue**. Dans tous les cas de dilemme du prisonnier, si on substitue des D à des C dans une population non répartie, alors le score global diminue [Dorat 06]. Dans le modèle des réseaux de communautés, la substitution des D à des C peut conduire à une hausse du score global comme le montre l'exemple.

Dans la partie suivante, on analyse le cas de grilles de dimension 2.

C. Émergence de la coopération sur une topologie régulière

Les premiers résultats sont obtenus sur des grilles toriques de dimension 10×10. Chaque communauté interagit avec ses 8 voisins directs (voisinage de Moore). L'effectif de chaque communauté est fixé à 100. Dans le cas d'une topologie de grille, le système peut être interprété comme une automate cellulaire avec $2 \times 100 \times N$ états possibles pour chaque cellule.

Trois états finaux sont possibles ici. Dans un premier cas, le système converge vers un état stationnaire avec une large majorité de coopérateurs, c'est le succès de la coopération. Pour un deuxième cas, le système converge vers l'élimination totale des stratégies C, seules des communautés D, avec un score moyen de 1, se maintiennent. Enfin, le dernier cas possible est celui d'une évolution périodique : le système ne converge pas et les stratégies C et D survivent dans des proportions proches dans des évolutions cycliques.

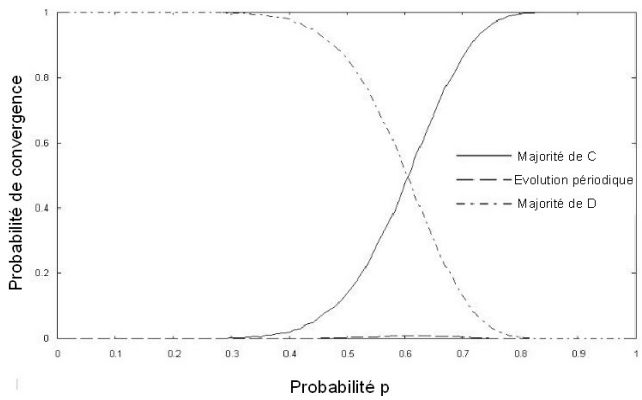


Fig. C.1 : Cette figure présente l'évolution des fréquences des différentes issues en fonction de la probabilité p d'initialiser une communauté avec seulement des comportements C.

L'évolution vers des situations périodiques est de probabilité non nulle pour p entre 0.4 et 0.7. Cependant,

même dans cet intervalle, les probabilités d'évolution périodiques restent très basses. Ces cas sont traités dans la section 2. Le résultat principal sur le graphique C.1 est que la probabilité de convergence vers les états coopératifs augmente linéairement avec p. Ceci s'explique par le fait que, dans le modèle, l'émergence de la coopération est dûe à des organisations particulières dont l'émergence est favorisée par de fortes valeurs de p. On parle de communautés protégées.

On définit une **communauté protégée** comme une communauté de C dont tous les voisins sont des communautés C. Pour de telles communautés, le score moyen est constant à 3.

Le score moyen d'autres communautés peut être supérieur à 3 : c'est le cas pour les communautés D entourées par des communautés de type C par exemple. Comme la population des communautés C proches des communautés D tend à diminuer, il y a une diminution du score moyen des communautés D dans l'évolution. Le score de ces communautés D deviendra finalement inférieur à 3 et leurs populations seront redistribuées vers les communautés protégées si ces communautés n'ont pas été vidées pendant l'évolution.

Les simulations montrent que la présence initiale des communautés protégées provoque la convergence vers une majorité de coopérateurs. Dans ce cas, une large part de la population est concentrée sur les communautés protégées à la fin de l'évolution. Depuis chaque simulation expérimentale débutant avec au moins une communauté protégée, on constate cette convergence. Dans ces cas, il reste encore des communautés D : elles sont liées aux communautés protégées C. La survie des stratégies D est artificielle : elle dépend de la manière d'obtenir des valeurs entières depuis (B.5). Si on avait choisi d'obtenir des entiers par troncature sur les valeurs réelles plutôt qu'en arrondissant à l'entier le plus proche, la présence initiale de communautés protégées aurait produit des états finaux où les seules communautés non vides sont les communautés protégées, la population totale étant répartie entre ces communautés.

Dans la suite, on montre qu'il n'est pas possible que les communautés protégées se vident pendant l'évolution. Il n'a pas encore été trouvé de preuve mathématique pour soutenir que les communautés protégées ne peuvent pas être vidées pendant l'évolution. L'argument est heuristique et fondé sur une approximation.

On peut en effet approximer le score moyen global (le score moyen calculé sur l'ensemble du graphe). On peut ensuite comparer ce score à 3, le score obtenu par une communauté protégée.

On note APD la population moyenne d'une communauté de D et APC la population moyenne d'une communauté de C. ASC(k) (resp. ASD(k)) est le score moyen pour une stratégie de communauté C (resp. de communauté D) entourée de k communautés C. On a l'approximation suivante :

$$ASD(k)=\frac{5k\times APC+(8-k)APD+APD-1}{APD-1+k\times APD+(8-k)\times APD} \quad \text{(C.1)}$$

$$ASC(k)=\frac{3\times(APC\times k)+APC-1}{APC-1+k\times APC+(8-k)\times APD} \quad \text{(C.2)}$$

En notant SNC(p) (resp. SND(p)) le score moyen d'une communauté de C (resp. d'une communauté de D), on peut établir, en notant par X le nombre des voisins C pour une stratégie choisie au hasard :

$$SNC(p)=\sum_{k=0}^{N} p(X=k)\times ASC(k) \quad \text{(C.3)}$$

$$SND(p)=\sum_{k=0}^{N} p(X=k)\times ASD(k) \quad \text{(C.4)}$$

On peut alors générer des approximations pour le score moyen global. En calculant des approximations du score moyen global pour toutes les valeurs possibles de APD, APC et p, on conclut que le sore moyen global reste toujours inférieur à 3. Ceci est mis en évidence sur le graphique C.2.

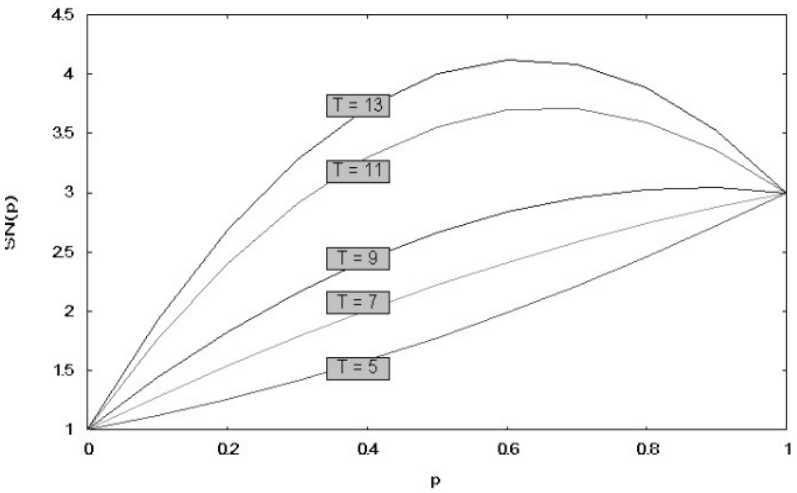


Figure C.2 : Évolution de l'approximation du score moyen total en fonction de p pour différents niveaux de T. On constate notamment que pour T=5, SNC reste inférieur à 3.

On constate que pour T=5, dans le cas d'une grille, la population des communautés protégées ne peut pas diminuer puisque le score moyen global reste inférieur à 3. L'existence des communautés D avec des scores moyens

supérieurs à 3 est compensée par l'existence de communautés C de score moyen inférieur à 3 et le score moyen global reste supérieur à 3. Comme les communautés protégées ne peuvent pas disparaître, on est assuré que ces communautés vont croître au bout de quelques générations. Donc, **l'existence des communautés protégées dans une grille est une condition suffisante pour assurer la convergence vers un état stationnaire avec une majorité de coopérateurs**. La condition suffisante pour la convergence vers une majorité de coopérateurs devient une condition suffisante pour la convergence vers une population composée seulement de stratégies C si on modifie la manière d'obtenir des entiers depuis (B.5), notamment si on tronque les valeurs réelles.

D. Convergence pour des topologies non régulières

Après avoir établi la condition suffisante sur les grilles, on s'intéresse aux conséquences de la dynamique sur des topologies plus réalistes. On considère l'évolution de la coopération dans le cas de graphes obtenus selon la procédure de réaffectation des arcs définie par Watts et Strogatz [Watts 98][Barabási 2002] et dans le cas des graphes aléatoires à la Erdös-Rényi [Erdős 59]. Le paramètre p est toujours la probabilité qu'une communauté soit une communauté C.

La méthode de réaffectation des arcs consiste à générer une topologie régulière (on part d'une grille à voisinage de Moore ici). Pour chacun des arcs de la topologie, on l'élimine avec une probabilité e et on le remplace par un arc tiré au hasard. On obtient une série de topologies intermédiaires entre le graphe régulier retenu à la base (pour e=0) et le graphe aléatoire (pour e=1). En modifiant seulement une partie des arcs, on constate des modifications sur les propriétés topologiques principales (voir le chapitre I). Dans ce qui suit, e=0.1.

On génère des graphes avec la même cardinalité et le même degré moyen que dans le cas de la grille de la partie C : la cardinalité est fixée à 100, le degré moyen à 8. Les graphes sont initialisés de la même manière que dans la partie C.

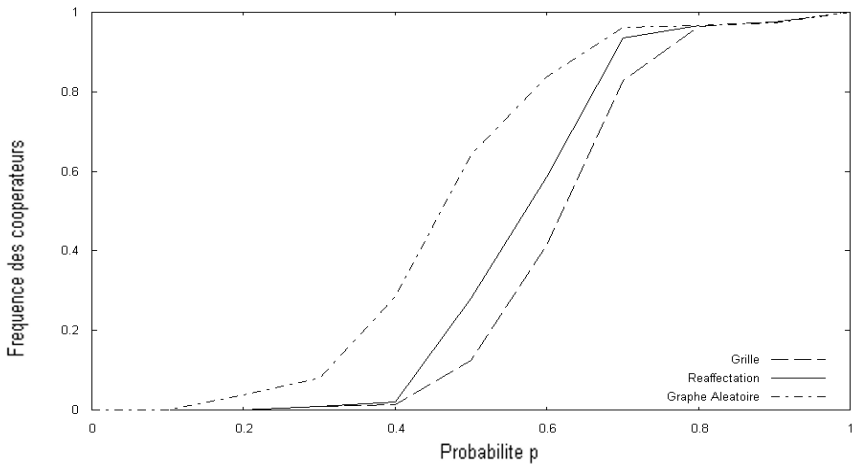


Fig. D.1 Évolution de la fréquence moyenne des coopérateurs. Chaque courbe correspond à une topologie différente. La cardinalité de chaque graphe est 100 et le degré moyen 8. Pour le graphe généré selon la procédue définie par Watts et Strogatz, la probabilité de réaffectation retenue est 0.1.

La figure D.1 montre l'évolution de la fréquence moyenne des coopérateurs en fonction de p et des trois graphes qui ont été introduits. La coopération est favorisée par des graphes aléatoires.

On peut expliquer ces résultats par la probabilité de générer des communautés protégées associée à chaque topologie. Considérons les graphes Erdös-Rényi. Soit q la probabilité qu'une communauté choisie au hasard soit une communauté protégée. On a :

$$q(p)=p\times\sum_{k=0}^{N} p_k\times p(communaute\,isolee/d=8) \qquad \text{(D.1)}$$

avec p_k la probabilité qu'une communauté choisie au hasard soit de degré k, $p(communaute\,isolee/d=8)$ étant la probabilité pour une communauté d'être protégée, sachant que son degré est 8.

La distribution des degrés pour un graphe aléatoire suit une loi de Poisson (une démonstration de résultat classique peut être trouvée dans [Barabási 1999]) : en utilisant ce résultat, il est possible de calculer les valeurs $q(p)$. $q(p)$ représente la probabilité d'avoir une communauté protégée, d'où $1\times q(p)$ est la fréquence moyenne des coopérateurs si on considère qu'une communauté protégée initiale suffit à la convergence vers un état sans stratégies D. On compare les valeurs $q(p)$ aux fréquences moyennes de coopérateurs obtenues expérimentalement dans la figure D.1.

Les valeurs théoriques coïncident bien avec les valeurs empiriques. Dans le cas des graphes obtenus selon la

procédure de réaffectation proposée par Watts et Strogatz, on mène une expérience similaire. A partir de 10^4 initialisations par valeur de p sur des graphes à liens réaffectés, on évalue la fréquence $f(p)$ des initialisations avec des communautés C protégées. On compare ces valeurs avec les valeurs empiriques de la fréquence des coopérateurs. Là aussi, l'ajustement fonctionne.

Les différences dans la fréquence moyenne des coopérateurs pour le cas de chaque graphe viennent des différences dans les probabilités de générer des communautés protégées sur chaque graphe. Dans les graphes aléatoires à la Erdös-Rényi, le fait que la probabilité de convergence vers une large majorité de coopérateurs soit renforcée vient du fait de l'existence de communautés avec des degrés inférieurs au degré moyen et du fait que chaque communauté D peut seulement avoir un contact limité avec des communautés D puisque leur degré ne peut pas beaucoup varier par rapport au degré moyen.

Des conclusions similaires seraient tirées en considérant des graphes de degré moyen 4 ou 12.

Section II.2. Évolutions périodiques de la coopération

A. Phénomène cyclique

En plus des deux cas principaux de convergence mis en évidence dans la section précédente (convergence vers une majorité de coopérateurs, convergence vers une population composée seulement de stratégies D), il existe une possibilité d'évolutions périodiques des populations des comportements C et D. On donne un exemple de telles évolutions dans les figures A.1 et A.2.

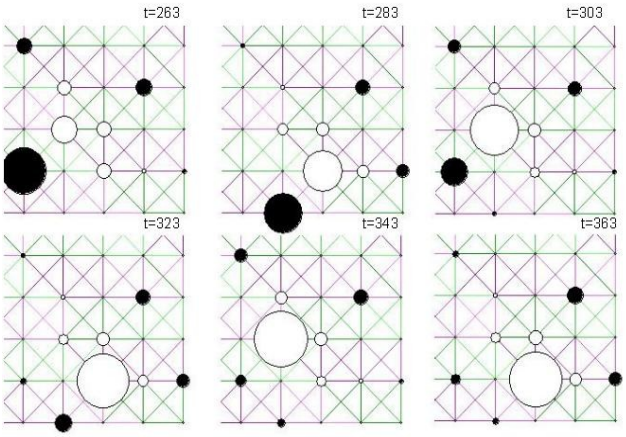


Fig. A.1 : 6 générations successives d'un cycle. La période du système est 132 générations. L'exemple a été obtenu à partir d'une grille de degré 8 avec p=0.6. Au cours de l'évolution, toutes les communautés se sont vidées à l'exception de celles qui apparaissent ici.

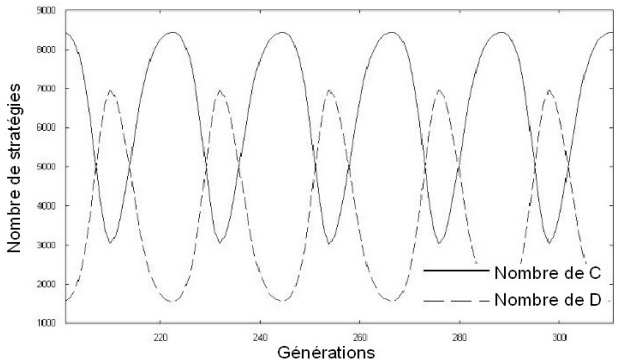


Fig. A.2 : Évolution de la population totale de C et de D sur une période pour le même cas que celui présenté à la figure A.1.

Les cas d'évolutions cycliques sont rares : dans la partie D de la section 1, on a pu établir de bonnes approximations de la fréquence moyenne des coopérateurs sans prendre en compte la possibilité de survie des stratégies C dans des évolutions périodiques. En fait, pour les graphes aléatoires à la Erdös-Rényi, les probabilités d'évolution cyclique sont très faibles. En observant la probabilité d'évolutions cycliques pour différentes probabilités de réaffectation, on constate que la probabilité de cycle diminue avec le nombre d'arcs réaffectés. Le tableau suivant donne les probabilités qu'une initialisation aléatoire converge vers des évolutions périodiques.

	Grille	Graphe aléatoire
p=0.4	0.002	0
p=0.5	0.005	0.00025
p=0.6	0.012	0.002
p=0.7	0.008	0

Figure A.3 Probabilité d'évolution périodique en fonction de la topologie.

Dans les évolutions périodiques, seules quelques communautés demeurent non vides, l'ensemble de la population totale se concentre alors sur ces communautés. Les communautés C non vides sont alors organisées en clusters alors que les communautés D ne le sont pas. Un cas d'évolution périodique est un cas de cluster de C entouré par une frontière de communautés D. Les différences entre les probabilités d'évolution cyclique pour chaque topologie sont en partie dues à la différence dans la probabilité de faire émerger des clusters de C dans chaque topologie.

Le tableau suivant donne des informations en moyenne sur les cas périodiques. Les valeurs moyennes sont

obtenues sur des ensembles de cas périodiques obtenus par une simulation massive pour p=0.5. Pour chaque topologie, on a testé 10^6 configurations initiales.

	Grille	Graphe aléatoire
Nombre moyen de communautés C non vides	5.874	9.833
Nombre moyen de communautés D non vides	5.922	12.833
Nombre moyen de voisins C pour une communauté C non vide	3.134	2.58
Nombre moyen de voisins D pour une communauté C non vide	1.17	1.39
Nombre moyen de voisins D pour une communauté D non vide	0.62	0.36
Nombre moyen de voisins C pour une communauté D non vide	1.16	1.065

Tableau A.4 Propriétés moyennes sur les cas périodiques. Chaque valeur est obtenue comme une moyenne sur un nombre de cas périodiques.

Les données du tableau confirment l'existence de clusters de communautés C dans les cas d'évolutions périodiques. Pour toutes les topologies, une communauté C n'est liée en général qu'à une communauté D : la condition suffisante des parties C et D de la section 1 assure que chaque communauté est liée avec au moins un voisin D, sinon, il y aurait une communauté C protégée et évolution vers un état avec une majorité de coopérateurs.

B. Dynamique et résistance des cycles

Une analyse systématique des cas périodiques met en évidence l'existence d'une sous-structure particulière parmi les communautés non vides qui apparaît dans chacun de ces cas. Cette configuration apparaît dans la figure suivante :

Figure B.1 Une configuration de 4 communautés qui est toujours présente dans les configurations périodiques. C1 et C2 des communautés de stratégies C, D1 et D2 sont des communautés de stratégies D.

C1 et C2 sont des communautés C alors que D1 et D2 sont des communautés de D. Dans cette configuration, la croissance des C1 provoque une augmentation des D1. Cette croissance de la population de D1 constitue une augmentation dans le nombre de contacts de D2 : les stratégies de D2 deviennent moins performantes et il y a

décroissance de la population de D2. Cette évolution conduit à une augmentation du score moyen des stratégies de C2 alors même que C1 croît et D2 décroît. Après un certain nombre de générations, C2 commence à croître et C1 commence à décroître. La situation est alors similaire à la situation initiale qui avait été supposée. Cette dynamique explique l'évolution périodique sur l'ensemble des communautés restées non vides.

On teste la robustesse de la dynamique dans le modèle. A partir d'une topologie de grille, on lance 10^6 simulations. Pour chaque configuration initiale conduisant à une évolution périodique, on lance une évolution de 500 générations. On extrait alors l'ensemble des tailles de population pour les communautés non vides pour un état donné du cycle choisi entre la génération 100 et la génération 500. Pour chaque valeur entière, on la bruite en ajoutant une valeur tirée aléatoirement selon une loi N(0,G). Si la population d'une communauté atteint 0 du fait du bruit, on fixe sa population à 1. On obtient un nouvel ensemble d'entiers pour les populations des communautés. On relance la simulation à partir de ces valeurs. Pour chaque valeur de G, on établit la fréquence des cas perturbés qui donnent des évolutions périodiques. Les résultats sont donnés dans la figure B.2.

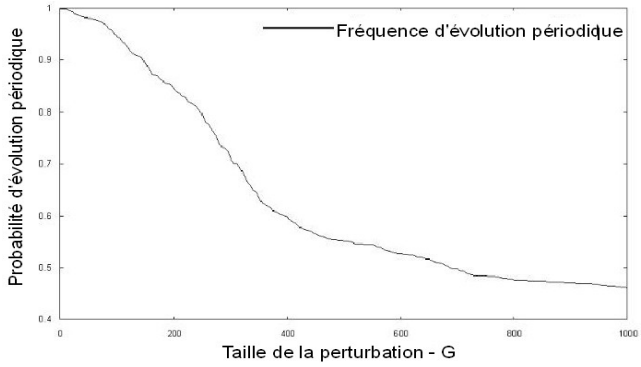


Figure B.2 Évolution de la fréquence des cas périodiques parmi les cas bruités. La population totale est 10^4.

Le phénomène cyclique est robuste : il se maintient même pour des perturbations importantes. Par ailleurs, le cycle vers lequel les cas perturbés convergent sont majoritairement différents des cycles des cas initiaux : la structure des communautés restantes à la fin de l'évolution ne produit pas un cycle limite unique mais une multitude de cycles limites.

Conclusion

Les résultats de cette partie ont été publiés dans [Dorat 08]. Le modèle introduit un nouveau mécanisme simple pour l'émergence de la coopération avec des stratégies simples. Comme dans d'autres modèles, l'émergence et le maintien de la coopération correspondent ici au fait que les stratégies coopératives interagissent plus entre elles qu'avec les stratégies agressives. A l'instar des résultats mis en évidence dans le modèle de Nowak et May [Nowak 93], la survie

des comportements coopératifs repose ici sur l'existence initiale de clusters de communautés C. Comme dans le modèle de Nowak et May, la convergence peut se faire vers des situations de dominance des populations de C sur les populations de D ou d'évolutions cycliques des populations de C et D.

Dans le modèle de Nowak et May, l'évolution vers telle ou telle forme de convergence est déterminée par le niveau de l'incitation à trahir, presque toutes les initialisations conduisant à un même taux de coopération à l'équilibre pour un niveau d'incitation à trahir donné. Au contraire, dans le modèle présenté ici, on constate une très forte sensibilité à la forme de l'initialisation et notamment une dépendance à la présence initiale d'un cluster de C puisque la présence d'une communauté C isolée garantit de la convergence vers la coopération. Si on augmentait le nombre de nœuds dans le présent modèle, on ferait diminuer la probabilité de convergence vers un état avec seulement des D en augmentant la probabilité qu'une initialisation aléatoire contienne un cluster de C. A la limite, sur une grille de taille infinie, on serait assuré d'avoir une communauté C isolée et donc d'avoir la convergence vers une majorité de C, tandis que dans le modèle de Nowak et May, il n'y aurait pas de changement fondamental dans la fréquence des C en passant à une grille de taille infinie.

Dans le modèle, les propriétés globales observées viennent des interactions entre un niveau local et un niveau global. L'état de chaque nœud influence l'état de chaque autre nœud du graphe puisque la population de chaque communauté est définie en utilisant le score moyen total calculé sur l'ensemble des stratégies du réseau. Le mode d'interaction est différent de celui spécifié chez Nowak et May. Dans le modèle de Nowak et May, le calcul des scores et la diffusion des comportements sont locaux : le score est calculé dans les interactions avec les voisins, les comportements susceptibles d'être adoptés sont ceux des voisins. Ici, si le calcul des scores dépend également de la structure locale du voisinnage, l'évolution des comportements se fait par comparaison à une variable globale, le score moyen dans le graphe. Il n'y a pas de diffusion à proprement parler puisque les communautés ne changent pas de type, elles peuvent juste augmenter ou diminuer. Si le calcul des scores se faisait de manière globale, les comportements C disparaîtraient (section1.B). Le modèle illustre que la coopération peut s'établir en supposant que seul le calcul des scores se fait sur la base d'interactions locales.

Pour le cas où on constate une évolution cyclique, il est possible d'interpréter chaque communauté C comme une communauté ayant développé un bien public ou exploitant harmonieusement une ressource. Pour celles des communautés qui ont le plus de ressources, elles attirent les comportements opportunistes D dont l'afflux finit par consommer la ressource ou le bien public. Dans cette situation, les coopérateurs migrent vers d'autres communautés ou deviennent des comportements D qui exploitent la ressource, le bien public, au lieu d'y contribuer. Le bien public devient à ce point dégradé ou la ressource épuisée que les comportements agressifs mêmes finissent par migrer vers d'autres

communautés. La comparaison au score global s'interprète alors, pour chaque individu de la population dont le score est inférieur, comme une incitation à changer de comportement et / ou de communauté.

Chapitre III. Dominance Cyclique

Résumé

Au sein de la théorie des jeux évolutionnaires, un type de population de stratégies suscite un intérêt particulier. Cet intérêt est lié autant à la possibilité de générer des dynamiques non triviales et variées à partir d'un dilemme simple qu'à la possibilité d'interprétations biologiques très directes des résultats observés.

Pour ce type de population, lorsqu'elle est composée de trois comportements, l'évolution conduit à la substitution des stratégies de type 1 à celles de type 3, la substitution des stratégies de type 2 à celles de type 1 et la substitution des stratégies de type 3 à celles de type 2. C'est par exemple le cas de la bactérie Escherichia Coli qui existe sous forme de trois états (saine-infectée-résistante). Ce type de population est désigné comme population RPS (pour Rock-Paper-Scissors ou Papier-Cailloux-Ciseaux) en référence au célèbre jeu [Smith 82].

Dans le cas de populations finies et non réparties de stratégies se dominant cycliquement, la convergence se fait vers une population monomorphe, c'est-à-dire qu'une seule stratégie survit, les deux autres étant éliminées. Il se produit un phénomène de synchronisation : dès que le nombre d'agents n'est plus le même pour chaque type, la population se met à fluctuer dans des cycles d'amplitude croissante jusqu'à ce qu'un état envahisse l'ensemble de la population. Ce phénomène ne se produit pas dans le cas d'une population infinie. Sigmund et Hofbauer [Hofbauer 98], sous l'hypothèse d'une population infinie, mettent en évidence l'existence d'une série d'attracteurs cycliques pour les évolutions de la population. L'étude des populations jouant le dilemme est alors motivée par la recherche de conditions au maintien de la biodiversité, soit à la survie des trois comportements.

Dans le cadre de populations finies, l'hypothèse la plus étudiée pour fonder le maintien de la biodiversité est celle de la **répartition spatiale** [Frean 01][Szabó 04][Szabó et Szlonoki 04]. En répartissant les stratégies sur un graphe, on fait apparaître différents régimes. Pour certaines topologies, le phénomène d'augmentation de l'amplitude des cycles jusqu'à convergence se maintient. En revanche, pour d'autres topologies, le système converge vers des cycles limites ou vers des états stationnaires. Les stratégies sont alors organisées en clusters de nœuds de même état en constante évolution.

Le chapitre reprend les résultats de base sur la synchronisation (Section I.A) et l'évolution du phénomène avec la répartition spatiale (Section I. B). Il développe également des résultats complémentaires à ceux de la littérature sur le domaine en étudiant l'apparition du phénomène de synchronisation avec l'augmentation du degré moyen pour des graphes aléatoires (Section I.B). En ne considérant plus une répartition spatiale à un individu par nœud, mais une

répartition en réseaux de communautés (Section I.C), on obtient de nouvelles formes de convergence en fonction des propriétés du graphe utilisé. Chaque communauté convergerait vers une population monomorphe si elle était isolée des autres communautés, mais le lien entre les communautés "desynchronise" chaque communauté. Dans les configurations qui ont été testées pour ce modèle, on ne retrouve pas de phénomène de synchronisation : les réseaux de communautés permettent le maintien de la biodiversité.

L'approche de la première section est descriptive et repose sur l'utilisation de simulations massives et de tests de convergence pour étudier l'évolution du phénomène en fonction de différentes topologies.

Dans la deuxième section, est introduit un modèle déterministe d'évolution des populations RPS proche du mécanisme asynchrone utilisé dans la première section. Les formes d'évolution et de convergence possibles pour ce modèle sont étudiées au travers de différentes topologies. Les premiers résultats caractérisent entièrement les attracteurs périodiques pour des topologies simples et notamment pour les anneaux pour lesquels on établit une condition nécessaire et suffisante de cyclicité (Section II.B). Dans ce cas, les cycles ont des périodes d'ordre la cardinalité de l'anneau. En modifiant légèrement la topologie, de manière à ce que des cycles plus courts puissent apparaître, on constate que le système tend à s'organiser majoritairement vers ces cycles les plus courts. C'est notamment le cas sur les topologies de grille (Section II.D). Dans ce cas, des sous-structures du graphe oscillent et imposent leur oscillation et ses propriétés au reste du graphe. L'étude d'autres mécanismes déterministes proches tend à faire penser que cette forme d'auto-organisation est très générale et liée à l'équivalence des stratégies dans la matrice des gains.

Section III.1.Populations RPS et impact de la répartition spatiale sur la synchronisation

A. Populations RPS, dynamique de synchronisation et graphes complets

Au sein de la théorie des jeux évolutionnaires, il existe un ensemble de travaux qui reposent sur l'étude d'une population composées de trois comportements tels que la présence du premier favorise la présence du deuxième, celle du deuxième favorise la présence du troisième et la présence du troisième comportement favorise le premier comportement. Imhof, Fudenberg et Nowak [Imhof 05] se placent dans le cadre du dilemme du prisonnier itéré et étudient des populations de stratégies All-C (joue toujours C), All-D (joue toujours D) et Tit-For-Tat (TFT) en supposant

que les TFT ont un score légèrement inférieur à celui des All-C au sein d'une population d'individu coopératifs, de sorte qu'une population de All-C peut les envahir. Les évolutions sont alors telles que la population des All-C diminue fortement du fait de la présence des All-D. Une fois que la fréquence des All-C a trop diminué, les All-D ont une population qui se réduit fortement du fait de la présence des TFT qui peuvent établir la coopération entre elles. Enfin les All-C peuvent prospérer au sein d'une population composée majoritairement de TFT et se substituer aux TFT. En fonction de l'initialisation et des valeurs numériques choisies pour la matrice des scores, différentes dynamiques sont susceptibles d'apparaître et notamment des évolutions cycliques des effectifs.

En partant non plus du dilemme itéré mais du dilemme simple du prisonnier, certains articles [Hauert 03][Szabó 02] enrichissent le modèle de Nowak et May [Nowak 93] en rajoutant un comportement "solitaire" qu'ils interprètent comme un comportement d'évitement de la confrontation et qui est conçu de manière à envahir les populations de D mais qui est envahit par des populations de C. L'introduction de ce comportement permet de nouvelles formes d'organisation spatiale et des évolutions cycliques et notamment la survie des comportements C.

L'étude des populations RPS se distingue de ces travaux **en supposant des comportements parfaitement équivalents**, la matrice du jeu est alors de la forme [Smith 82][Hofbauer 98]:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure A.1 La matrice du jeu RPS.

On se place dans le cadre de la dynamique de réplication. En considérant cette matrice, en supposant une population infinie, on constate que le système présente 4 états stationnaires : les états où il ne reste plus qu'un comportement et l'état où chaque comportement est de fréquence 1/3. Le système présente également une série de cycles limites [Hofbauer 98]. Ces cycles sont constitués d'états du système tels que d'une génération à l'autre le produit $x_1(t) \times x_2(t) \times x_3(t)$ reste constant. En effet, on peut montrer que la **dynamique de réplication** implique $(x_1 \times \dot{x}_2 \times x_3) = 0.$ Ce résultat signifie qu'une **population de taille infinie** reste sur un état stationnaire ou sur un cycle limite, si les effectifs initiaux ne sont pas (1/3,1/3,1/3). En revanche, si on considère une **population de taille finie**, si les effectifs initiaux ne sont pas (1/3,1/3,1/3), la population tend à évoluer avec des cycles d'amplitude croissante jusqu'à **converger vers un état unique**. On parle de **synchronisation**. Toute variation depuis l'équilibre instable d'équi-répartition se traduit alors par l'apparition d'un comportement i de fréquence maximale X_1. Au bout de quelques générations, le comportement i+1[3] est majoritaire de fréquence $X_2 > X_1$, au bout de quelques générations, le comportement i-1[3] est majoritaire de fréquence $X_3 > X_2$ etc. Le processus converge vers une stratégie unique

dans la population.

Mécanisme d'évolution sur les graphes et synchronisation pour les graphes complets

Avec la dynamique de réplication, chaque agent calcule son score contre l'ensemble de la population : chaque agent interagit avec l'ensemble de la population. Le réseau des interactions sous-jacent a donc la forme d'un graphe complet. En se ramenant à la terminologie des graphes, chaque nœud du graphe est une stratégie et l'état d'un nœud est le comportement adopté par cette stratégie.

Il est possible de spécifier un mécanisme d'évolution sur les graphes qui, dans le cas d'un graphe complet, provoque une dynamique de synchronisation à l'instar de ce qui se passe avec la dynamique de réplication. On étudiera ensuite l'impact de ce mécanisme sur des graphes déconnectés par rapport au graphe complet.

On considère un ensemble de M états notés S_i=i avec i dans [1,M]. Soit un graphe G de cardinalité N. On initialise chaque nœud en tirant uniformément au hasard dans l'ensemble des M états.

Le mécanisme d'évolution est aléatoire. La règle d'évolution est la suivante : **à chaque génération, on tire N nœuds au hasard**. Pour chaque nœud, on tire un voisin. On note par S_{node} l'état du nœud sélectionné et par S_{voisin} l'état du voisin choisi. Trois cas sont possibles :

- (1) $S_{voisin} \equiv (S_{node}+1)[M]$ Dans ce cas, les deux nœuds passent dans l'état S_{voisin}

- (2) $S_{node} \equiv (S_{voisin}+1)[M]$ Dans ce cas, les deux nœuds passent dans l'état S_{node}

- Le cas où on a ni la relation (1), ni la relation (2). Dans ce cas, il n'y a pas d'évolution.

La donnée de l'évolution du système est donc équivalente à la donnée d'une séquence de couples de nœuds. L'aléa introduit dans le système correspond seulement au choix aléatoire des couples. Dans tout le reste du chapitre, on pose M=3 par défaut.

Avec ce mécanisme, le phénomène de synchronisation se maintient si on prend pour G un graphe complet. Le graphique suivant donne l'évolution du temps moyen de convergence vers un état stationnaire en fonction de la cardinalité pour un graphe complet évoluant selon le mécanisme qui vient d'être défini, la convergence se faisant systématiquement vers des états monomorphes.

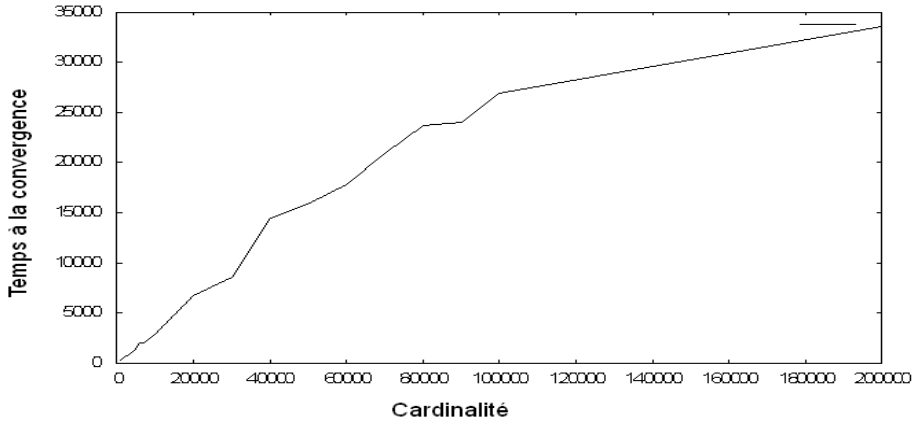


Figure A.2 : Pour chaque niveau de cardinalité, le temps moyen de convergence vers un ES à une unique stratégie sur un graphe complet

La vitesse de convergence augmente moins rapidement que proportionnellement à la cardinalité. Les graphiques A.3 et A.4 illustrent le phénomène de synchronisation.

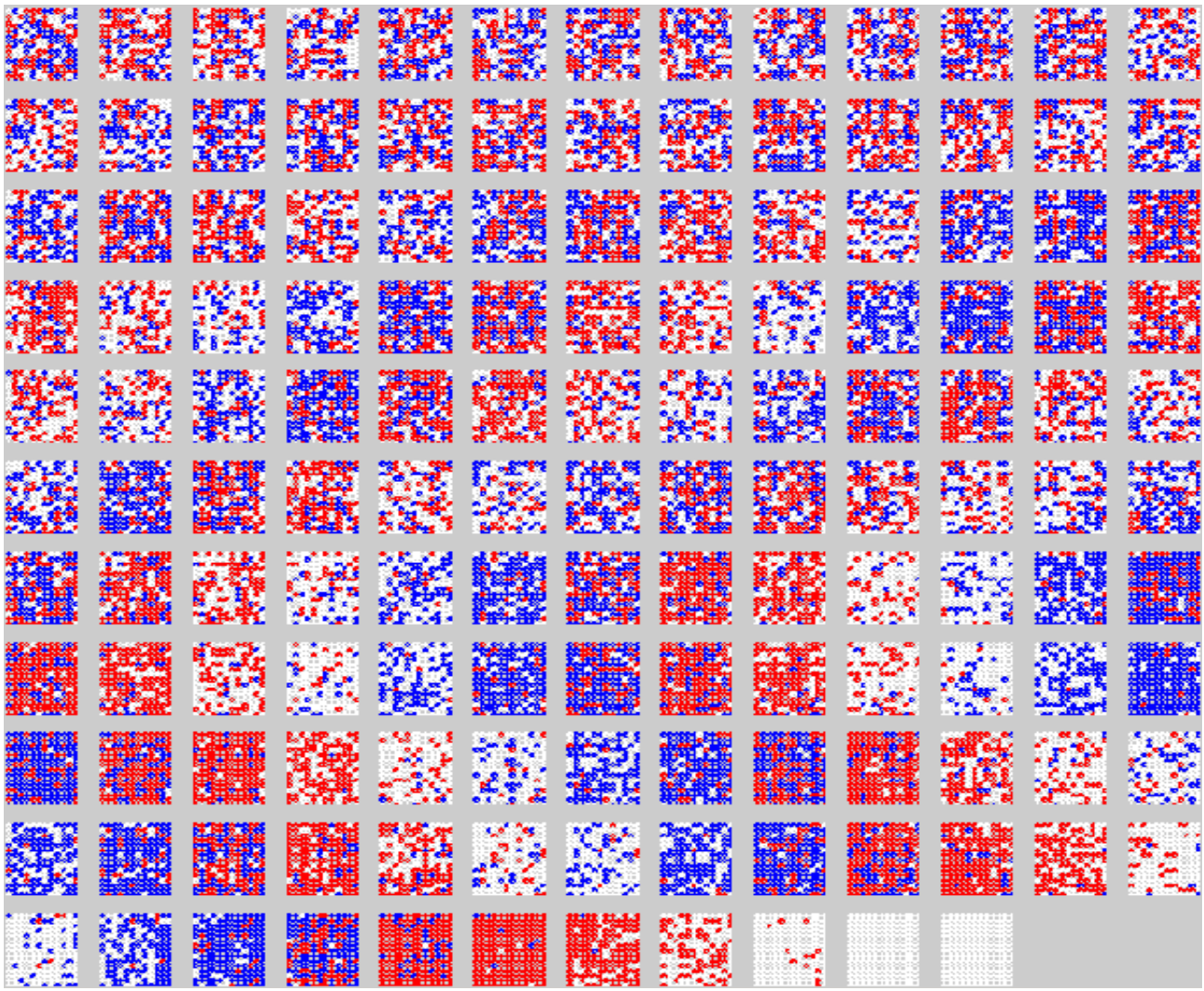


Figure A.3 : Évolution complète pour un graphe complet 25×25 initialisé de manière uniforme avec 3 états.

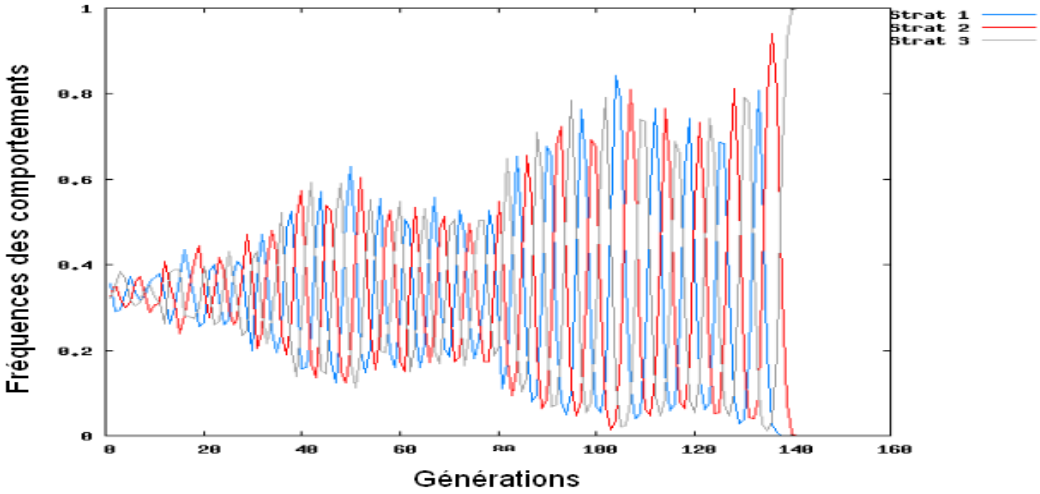
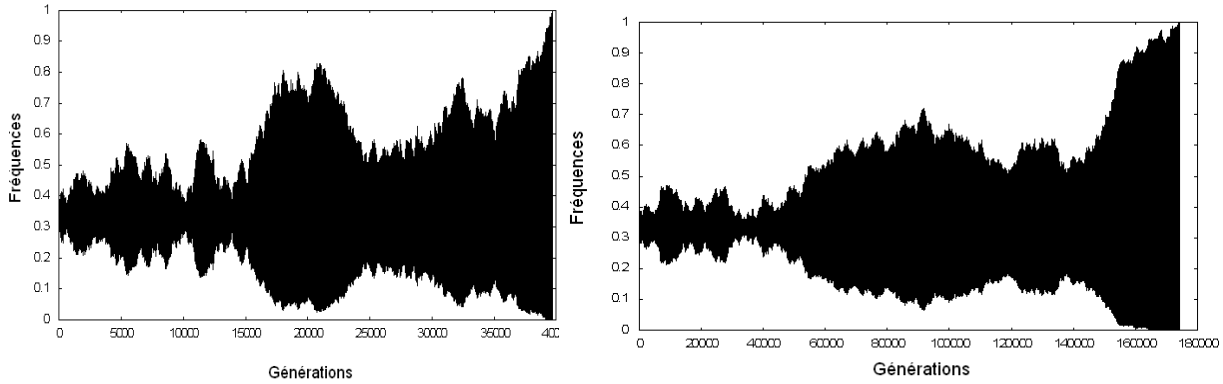


Figure A.4 Évolution des fréquences par état pour le système présenté en A.3

A partir de l'équirépartition des effectifs, les tirages aléatoires amènent à ce qu'une stratégie i devienne majoritaire. La présence de cette stratégie majoritaire i va lancer la croissance de la stratégie i+1[M]. La fréquence de la stratégie i+1[M] croît alors tant que la probabilité de tirer des couples (i,i+1[M]) reste supérieure à la probabilité de tirer des couples (i+1[M], i+2[M]). A partir du moment où la croissance des i+1[M] sature la condition précédente, il y a croissance des stratégies i+2[M]. La figure A.5 présente des évolutions obtenues sur des graphes complets de cardinalité $N=10^5$ et $N=10^6$ respectivement.



(a) (b)

Figure A.5 Évolution sur des graphes complets de taille 10^5 (a) et 10^6 (b) nœuds. Les figures correspondent à l'évolution de la fréquence d'un état, l'évolution de la fréquence des autres états ayant une forme très similaire. Les exemples donnés sont prototypiques des évolutions observées.

Le phénomène est similaire à celui observé sur la figure A.4. A l'instar de ce qui apparaît sur la figure A.4, l'amplitude des cycles peut diminuer : on se rapproche ponctuellement de l'état (1/3,1/3,1/3). Ceci est dû au fait que les chocs aléatoires peuvent "desynchroniser" le système. Soit x_i^t la fréquence associée à l'état i et soit un état

(x_1^t, x_2^t, x_3^t) tel que $x_1^t > x_2^t > x_3^t$. Cette situation est intermédiaire entre un état du système où les stratégies ayant adopté le comportement 1 étaient majoritaires et à une fréquence maximale x_1^{t-k}, et un état à venir où les stratégies de comportements 2 seront majoritaires et à un maximum. Dans l'état (x_1^t, x_2^t, x_3^t), l'effectif associé au comportement 2 est en situation de croissance, les 1 et les 3 sont en situation de décroissance. A partir de ces fréquences, on pourrait calculer les fréquences $(x_1^{t+1}, x_2^{t+1}, x_3^{t+1})$ de la génération suivante. En effet, en moyenne, on a $x_i^{t+1} - x_i^t = x_i^t * x_{i-1}^t - x_i^t * x_{i+1}^t$, d'où il est possible de calculer le vecteur $(x_1^{t+1}, x_2^{t+1}, x_3^{t+1})$ qu'on obtient en moyenne à partir de (x_1^t, x_2^t, x_3^t). Comme l'évolution est aléatoire, un tirage aléatoire peut conduire à des fréquences $x_1 / x_1 < x_1^{t+1}, x_3 / x_3 > x_3^{t+1}$. Dans ce cas, la fréquence maximale future des stratégies 2 sera inférieure à ce qu'elle aurait été en moyenne, voire elle sera inférieure à x_1^{t-k}. La fréquence maximale peut donc diminuer ponctuellement. Néanmoins, il y a autant de chances de tirer un choc aléatoire provoquant une désynchronisation qu'un choc accélérant le phénomène de synchronisation : en moyenne, la fréquence maximale augmente et le phénomène de synchronisation se maintient.

B. Répartition spatiale et limites à la synchronisation

En conservant le mécanisme d'évolution, mais pour d'autres topologies que le graphe complet, différents régimes dynamiques sont susceptibles d'émerger. Un premier résultat :

Théorème B.1

Les systèmes finissent toujours par s'uniformiser.

Démonstration

On montre d'abord que pour tout graphe connexe et pour toute configuration initiale donnée, il existe un tirage d'arcs conduisant l'un des états à tout envahir. Le raisonnement se fait par récurrence. Prenons un graphe connexe de talle n et une configuration initiale donnée. Nous allons montrer que pour tout entier p inférieur ou égal à n, il existe une suite de tirages d'arcs conduisant (quand on effectue dans l'ordre tous les combats déterminés par les arcs) à un paquet de p nœuds formant un sous-graphe connexe de même état S. Cette propriété est vraie pour p=1.

Supposons que la propriété est vraie pour p<n et considérons la séquence de choix d'arcs qui conduit à un paquet connexe de p état S identiques. Montrons qu'on peut en déduire une suite de choix d'arcs qui conduit à un

paquet connexe de p+1 états identiques (d'après le principe du raisonnement par récurrence cela nous donnera le résultat). Soit un nœud N, voisin de ce paquet : il y en a au moins un, car le graphe entier est connexe. Si ce nœud N est d'état S, nous avons un paquet connexe de p+1 états S et le raisonnement est terminé. Supposons alors que N soit d'état S' différent de S. Si S' est battu par S (S'=S+1[3]), on tire l'arc liant le nœud N au paquet de S et on a une suite de choix d'arcs qui conduit à un paquet connexe d'état S de taille p+1 : le raisonnement est terminé. Si S est battu par S', on choisit la même séquence d'arcs que celle qui conduisait au paquet de p symboles S, suivi d'une suite de tirages progressifs de ces arcs de proche en proche qui font que S' envahit tout le paquet de S, lequel devient donc un paquet connexe de p+1 états S'. Cela est possible, car le paquet de p états S est connexe. On a alors un paquet de p+1 états S'. Dans chaque cas possible, on dispose d'une suite des choix d'arcs conduisant à un paquet connexe de p+1 états identiques. Le raisonnement par récurrence est terminé.

Notons que la longueur de la suite d'arcs qui fait passer d'un paquet de p nœuds identiques à un paquet de p+1 nœuds identiques s'obtient en ajoutant au plus p arcs à celle nécessaire pour avoir un paquet de p nœuds identiques. Au total si le graphe possède n nœuds, on sera certain d'avoir un graphe uniforme en utilisant une suite d'arcs déterminant les combats successifs de longueur au plus $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n-1)}{2}$. Montrons maintenant que l'uniformisation survient avec une probabilité de 1. Cette seconde partie du raisonnement utilise l'évidence probabiliste qu'en répétant un tirage au hasard dans l'attente d'un événement ayant une probabilité non nulle de se produire, il finit par se réaliser, ou plus exactement, il se réalise “à l'infini” avec une probabilité de 1.

Partant d'un graphe de n nœuds dans une configuration donnée, nous savons qu'il existe une suite d'arcs qui uniformise le graphe. Cette suite a une longueur inférieure à $\frac{n\times(n-1)}{2}$. La probabilité qu'un arc donné soit choisi lors d'une étape du processus d'évolution aléatoire est plus grande que $\frac{1}{nk}$ (un nœud est choisi avec une probabilité $\frac{1}{n}$ et un voisin avec une probabilité $\frac{1}{k}$ au plus, où k est le nombre maximum de voisins que possède un nœud du graphe). La probabilité pour qu'une suite d'arcs qui uniformise le graphe soit choisie est donc supérieure à $(\frac{1}{nk})^{(\frac{n\times(n-1)}{2})}$, un nombre strictement positif. A l'infini la probabilité pour qu'au moins une fois la séquence conduisant à l'uniformisation est donc de 1.

CQFD

Le théorème B.1 s'applique quelque soit le graphe retenu pour l'évolution. Néanmoins, si pour certains graphes, il reste possible de les faire évoluer jusqu'à observer une situation de convergence, ceci n'est plus vrai pour d'autres topologies dès qu'on augmente la cardinalité. Le graphique suivant montre l'état à la génération 100 d'une grille à voisinage de Von Neumann en associant une couleur à chacun des états.

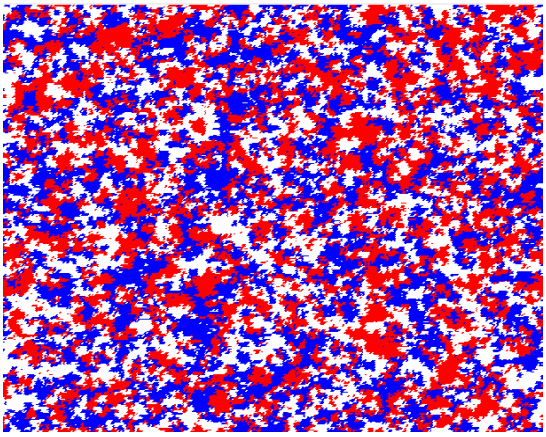


Figure B.1 100ème génération sur une grille 316×316 (la grille est à voisinage de Von Neumann)

En répartissant la population sur une grille, on obtient un état stationnaire [Szabó 04]. Le système n'étant pas déterministe, il n'y a cependant pas reproduction parfaite d'un état d'une génération à l'autre. **L'état stationnaire est alors caractérisé par le fait que les variations autour de l'état (1/3,1/3,1/3) constituent un bruit blanc et notamment ne présentent pas de tendance.** D'après le théorème B.1, on sait que cette structure finira par converger. On donne l'évolution du temps à la convergence en fonction de la dimension d'une grille :

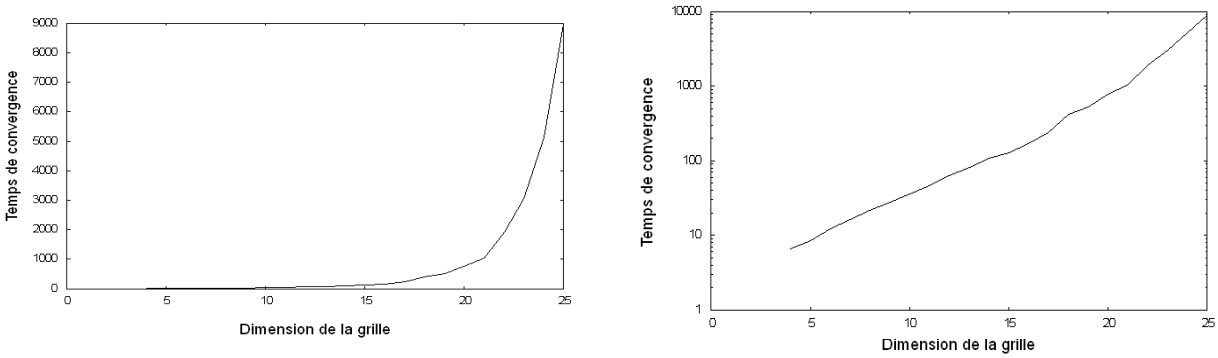


Figure B.2 L'évolution du temps de convergence dans le cas d'une grille à voisinage de Von Neumann en fonction de la taille de la dimension.

Le deuxième graphique est en échelle logarithmique.

Sur la figure B.2, on constate que le nombre moyen de générations à la convergence se comporte comme une

fonction exponentielle de la dimension de la grille. L'état de la figure B.1 peut être traité comme un état stable : la convergence n'est pas simulable. On constate dans la suite de la partie que la probabilité de dévier par rapport à (1/3,1/3,1/3) est extrêmement faible.

De même, pour certaines topologies, on va pouvoir mettre en évidence la convergence vers des cycles limites. Là aussi, il est abusif de parler de cycle limite : le théorème B.1 garantit que le système finira par converger vers un état stationnaire à un seul comportement. Cependant cette convergence n'est rapidement plus simulable avec l'augmentation de la cardinalité.

Convergences globales en conservant le degré par nœud

Dans le cas de la grille à voisinage de Von Neumann (le degré de chaque nœud est de 4), le système converge vers un état stationnaire maintenant la biodiversité (1/3,1/3,1/3). D'autres graphes permettent de mettre en évidence une convergence vers des évolutions périodiques. Dans [Szabó 04], les auteurs considèrent une série de topologies intermédiaires entre une grille à voisinage de Von Neumann et un graphe aléatoire de degré moyen 4. Ces topologies sont construites en redistribuant une part Q des arcs du graphe régulier initial **de manière à maintenir constant le degré moyen** par nœud à 4. On parle de **regular small world**. Les auteurs considèrent la même dynamique que celle présentée dans la partie A sur cet ensemble de topologies en initialisant chaque nœud avec l'un des trois états pris au hasard.

Les auteurs mettent en évidence une valeur de transition de phase Q1 : **pour Q>Q1, le système converge vers un cycle limite alors que pour Q<Q1, la convergence se fait vers l'état stationnaire**.

Les auteurs étudient également une variante du mécanisme évolutionnaire fondée sur une probabilité P. Le nouveau mécanisme consiste à tirer un nœud T au hasard, à récupérer l'ensemble de ses voisins V. Pour chaque nœud de V, on le retire de l'ensemble V avec une probabilité P et on lui substitue un nœud tiré au hasard dans l'ensemble des nœuds du graphe. On tire au hasard un nœud H de V et on fait évoluer l'état de T ou H si l'un d'eux est d'état i et l'autre d'état i+1[M]. Pour P=1, la population évolue comme si elle était répartie sur un graphe complet. En faisant varier P, deux transitions de phase apparaissent pour les valeurs P1 et P2 avec P2>P1. Pour P>P1, le système converge vers des cycles limites d'amplitude croissante avec P. Pour P>P2, le système évolue dans des oscillations amplifiées jusqu'à disparition d'un type de stratégie.

L'apparition de plusieurs phases dans le passage des grilles vers les graphes aléatoires est généralisable en partant de plusieurs graphes réguliers [Szabó et Szolnoki 04]. Le constat d'une transition de phase en fonction de Q se

maintient, de même, le constat d'une double transition de phase en fonction de P se maintient pour des graphes de degré inférieur ou égal à 4. Pour des topologies de degré supérieur à 4, il n'y a qu'une transition de phase en fonction de P. Elle sépare des systèmes restant en situation d'équilibre stationnaire et des systèmes évoluant cycliquement avec une augmentation de l'amplitude des cycles.

Convergences globales en faisant varier le degré par nœud

Dans ce qui précède, les auteurs ont étudié les phénomènes périodiques pour différentes topologies intermédiaires mais toujours en maintenant constant le degré par nœud. On donne ici des résultats complémentaires sur la convergence en considérant des topologies de graphes aléatoires à la Erdős et Rényi pour différents niveaux de degré moyen. On commence par donner l'évolution de la probabilité de converger en 1000 générations sur 1000 tests.

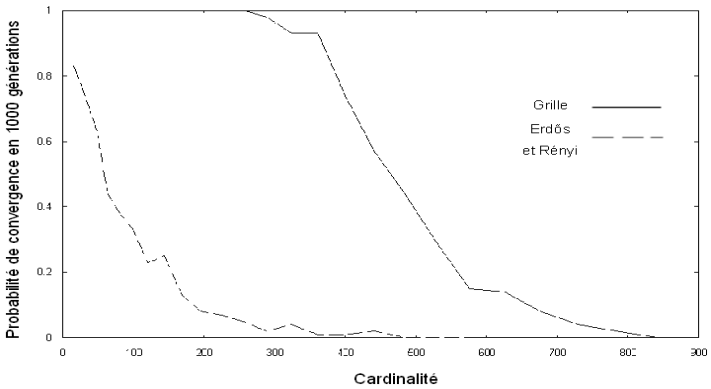


Figure B.3 Évolution de la probabilité que le système ait convergé en 1000 générations. En pointillés, l'évolution de la probabilité pour un graphe Erdős et Reyni de degré moyen 4, en trait plein pour une grille au voisinage de Von Neumann. Chaque valeur est obtenue pour 1000 simulations par niveau de N

La probabilité de converger diminue avec la cardinalité. Dans le cas des grilles et des graphes aléatoires de degré moyen 4, à même niveau de cardinalité, la probabilité que la grille de degré moyen 4 converge est supérieure à la probabilité que le graphe aléatoire converge. On donne le même graphe pour les grilles de Von Neumann et les graphes aléatoires de degré moyen 8 :

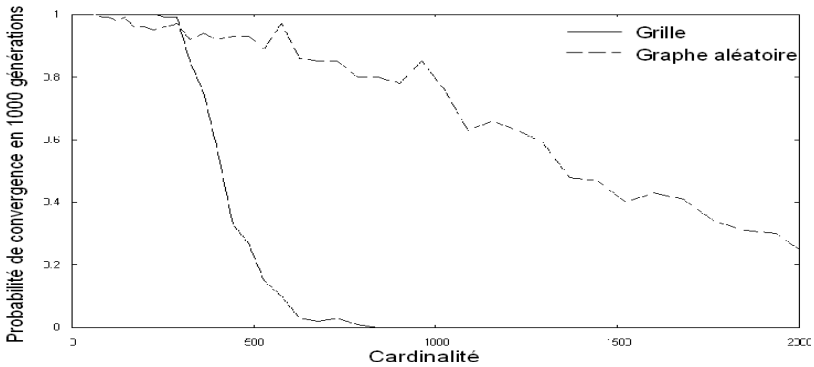
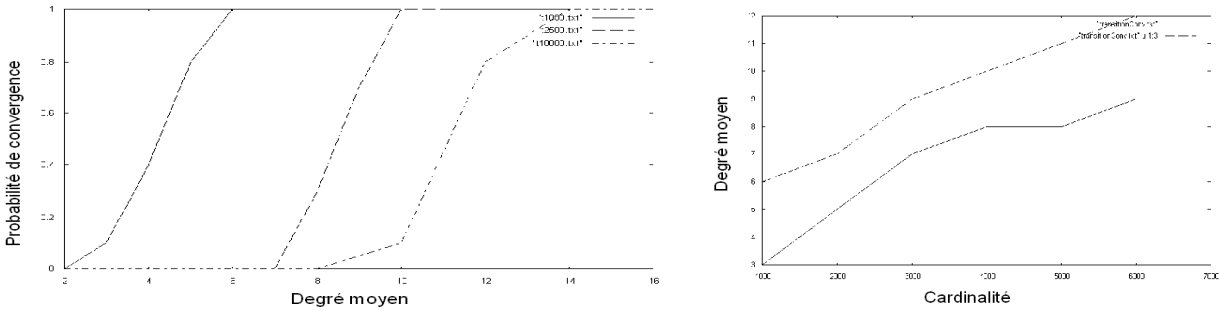


Figure B.4 Évolution de la probabilité que le système ait convergé en 1000 générations. En pointillés, on donne l'évolution de la probabilité pour un graphe Erdős et Reyni de degré moyen 8, en trait plein pour une grille au voisinage de Moore. Chaque valeur est obtenue pour 1000 simulations par niveau de N

Ici ce sont les graphes aléatoires qui ont une plus forte propension à converger. il existe encore des cas qui convergent en 1000 générations pour des cardinalités de 2000 nœuds.

On s'intéresse de façon plus précise à la relation entre l'apparition du phénomène de synchronisation et le degré du graphe considéré pour un ensemble de simulations.



(a) (b)

Figure B.5 : (a) Évolution de la probabilité de convergence en 1000 générations en fonction du degré moyen pour différents graphes aléatoires à la Erdős et Rényi. Les trois courbes correspondent respectivement à N=1000, N=5000 et N=10000 de gauche à droite. (b). En fonction de la cardinalité, la courbe la plus haute donne le niveau de degré moyen tel qu'on observe toujours le phénomène de synchronisation, la courbe la plus basse donne le niveau de degré moyen pour lequel, sur 1000 simulations, il n'y a jamais convergence.

Sur la figure B.5, un phénomène similaire apparaît pour différentes valeurs de N pour des graphes aléatoires à la Erdős et Rényi : la probabilité de convergence est d'abord nulle puis augmente pour devenir égale à 1 avec l'augmentation du degré moyen. L'apparition ou non du phénomène de synchronisation **dépend à la fois de la cardinalité et du niveau de degré moyen**. On peut faire l'hypothèse que le phénomène de synchronisation est très dépendant de la distance moyenne dans le graphe, une faible distance moyenne favorisant le phénomène.

Dans ce qui suit, on s'intéresse de manière plus précise à la transition depuis des graphes aléatoires où la convergence se fait vers des cycles limites ou vers l'état d'équirépartition vers des graphes aléatoires où les évolutions sont caractérisées par des cycles d'amplitude croissante.

Propriétés de plus bas niveau et convergence

Sur la figure B.1, on constate que le système a convergé vers une situation où les nœuds sont regroupés en clusters de même état. L'organisation en des formes clusterisées apparaît dès les premières générations de l'évolution depuis l'initialisation aléatoire. On propose ici une étude de **quelques propriétés de la distribution des tailles des clusters de même état en fonction de la forme de la topologie sous-jacente**.

Pour repérer les clusters de même état, on utilise un algorithme dérivé du parcours en largeur ou breadth first search [Lacomme 02]. Cet algorithme vise à passer en revue l'ensemble des nœuds d'une composante connexe. A partir d'un nœud A, on détermine l'ensemble de ses voisins. A partir de cet ensemble de voisins, on détermine l'ensemble des voisins à distance 2 du nœud etc. On poursuit cette procédure jusqu'à construire un voisinage à distance k qui est un ensemble vide. A la fin de la procédure, on a parcouru l'ensemble des nœuds qui appartiennent à la même composante connexe que le nœud A.

La modification consiste ici, à partir d'un nœud, à construire l'ensemble des voisins qui sont de même état que lui, puis l'ensemble des voisins à distance 2 de même état etc. Cet algorithme permet d'obtenir **la série des clusters de nœuds de même état du graphe**, de sorte qu'il est possible de calculer à chaque génération la taille moyenne des clusters de nœuds de même état, puis la fréquence moyenne des clusters de nœuds de même état. On peut ensuite observer l'évolution de cette statistique :

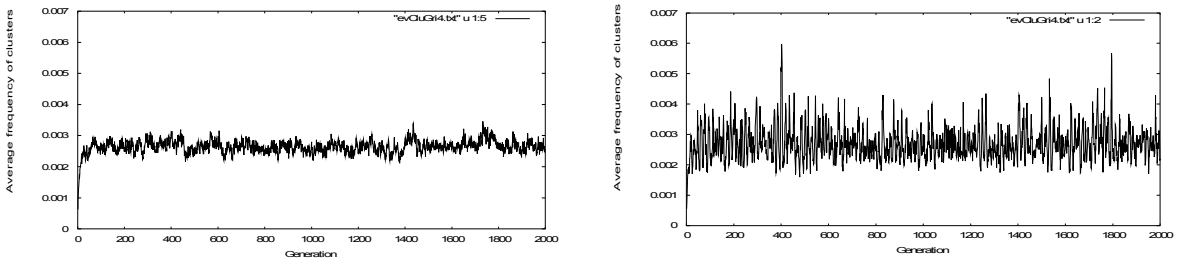


Figure B.6 Pour une grille au voisinage de Von Neumann 100×100, l'évolution de la fréquence moyenne des clusters de nœuds de même état sur 2000

générations. Le second graphique donne l'évolution de la fréquence moyenne des clusters pour un seul état sur la même évolution : on calcule la fréquence moyenne seulement sur les clusters de nœuds d'état 1 par exemple.

Sur la figure B.6, on constate une augmentation initiale de la fréquence moyenne qui correspond au phénomène de clusterisation intervenant dans les premières générations. Après cette phase initiale, la fréquence moyenne se stabilise autour d'une valeur qui dépend de la topologie. Sur la figure suivante, on donne les mêmes indices pour un graphe aléatoire de Erdős Rényi de degré moyen 4 :

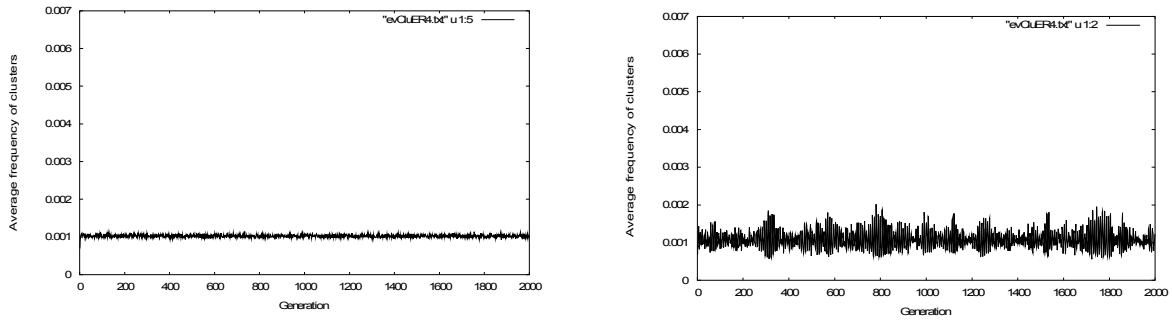


Figure B.7 Évolution de la fréquence moyenne des clusters dans le cas d'un graphe aléatoire de degré moyen 4 pour cardinalité de 10000. Le second graphique donne l'évolution de la fréquence moyenne des clusters pour un seul état sur la même évolution.

Les graphiques B.6 et B.7 sont pris sur la même échelle. Les évolutions sont d'ampleur moindre dans le cas des graphes aléatoires de degré moyen 4 que dans les cas de grille à voisinage de Von Neumann. Ceci se constate notamment sur la figure B.7, pour le cas où la fréquence moyenne est établie seulement sur un état (le graphique de droite) : des amplitudes notoirement supérieures sont possibles dans le cas des grilles (figure B.6). Ce résultat est cohérent avec celui obtenu à partir de la figure B.3 : la probabilité de converger est supérieure pour une grille de Von Neumann. En observant la fréquence moyenne des clusters pour un état particulier, on observe que les maxima atteints et l'amplitude des variations sont moindres que dans le cas des grille de même degré.

Si on augmente le degré moyen du graphe aléatoire, les maxima atteints et l'amplitude des variations sont plus importantes :

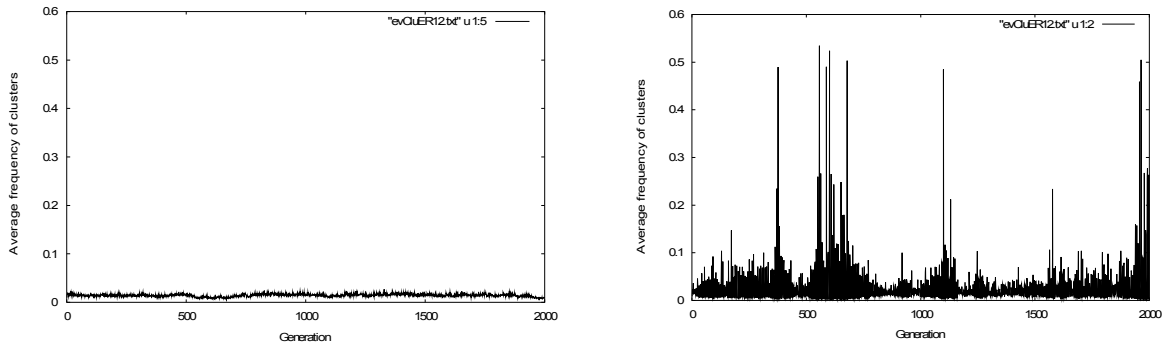


Figure B.7 Évolution de la fréquence moyenne des clusters dans le cas d'un graphe aléatoire de degré moyen 12 pour cardinalité de 10000. Le second

graphique donne l'évolution de la fréquence moyenne des clusters pour un seul état sur la même évolution.

On constate qu'apparaissent des variations bien supérieures dans la fréquence moyenne des clusters par rapport au cas des graphes aléatoires de degré moyen 4. Les périodes où sont atteintes des maxima dans la fréquence moyenne des clusters d'un état (graphique de droite) sont des périodes où la fréquence moyenne des clusters diminue (figure B.7 à gauche). En effet, le phénomène d'apparition d'un cluster de nœuds d'un même état majoritaire s'accompagne de l'apparition de clusters de nœuds isolés ou de cardinalité faible pour les autres états. Le grand cluster "déconnecte" les clusters des autres états et une dissymétrie apparaît dans la distribution de la fréquence des clusters. **Ici, les hausses dans la fréquence des clusters sont absorbées** : il n'y a pas de phénomène d'augmentation tendancielle de la fréquence moyenne des clusters d'un état, à la différence de ce qui se produit pour un graphe aléatoire à la Erdős et Rényi de degré moyen 16 :

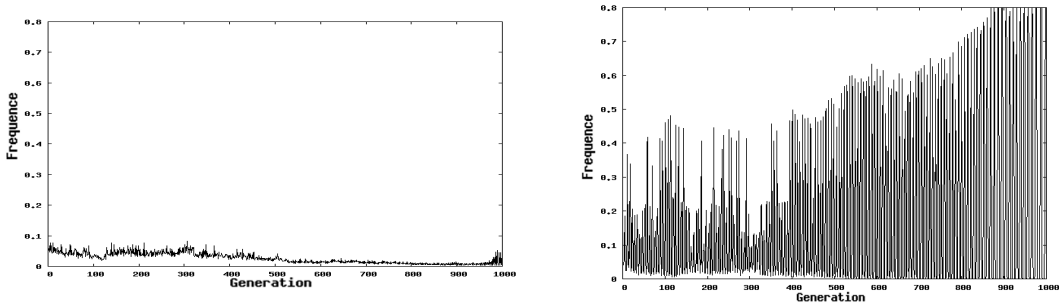


Figure B.8 Évolution de la fréquence moyenne des clusters dans le cas d'un graphe aléatoire de degré moyen 16 pour cardinalité de 10000. Le second graphique donne l'évolution de la fréquence moyenne des clusters pour un seul état sur la même évolution.

Sur la figure B.8, on constate une augmentation tendancielle de l'amplitude de la fréquence moyenne des clusters par état qui n'apparaît pas dans les cas précédents pour lesquels les chocs sont absorbés. Dans ce type de configuration, un cluster de taille maximale apparaît au bout de quelques générations et grandit tendanciellement au cours de l'évolution jusqu'à envahir l'ensemble des nœuds du graphe.

Interprétations biologiques.

Certains des résultats théoriques sont confirmés par des approches expérimentales. Les populations de bactéries Escherichia Coli constituent des populations se dominant cycliquement. 3 types d'individus coexistent dans ces populations : les individus sains (S), les individus dégageant une toxine (T) et les individus résistants (R). Des bactéries toxiques peuvent envahir une population de bactéries saines. Une population toxique peut elle-même être envahie par une population résistante. Le fait d'être résistant contrevient au fonctionnement normal de la cellule, de sorte que les bactéries saines envahissent les bactéries résistantes. Des tests effectués en contraignant les interactions des bactéries

dans un espace en deux dimensions au moyen d'une boîte de Pétri ont montré qu'émergent des organisations qui ressemblent visuellement à celles que prévoit la théorie en supposant la répartition sur une grille des interactions entre les individus de la population [Kerr 02] : notamment les trois états de la bactérie survivent dans ce cas là. Un autre type de population qu'on peut dire de type RPS : la population de Uta stansburiana, des lézards californiens étudiés par Sinervo et Lively [Sinervo 96]. Certains biologistes font l'hypothèse que ce type de rapports est un moyen de conserver la biodiversité dans un environnement avec peu de ressources [Kerr 02].

C. Populations RPS et réseaux de communautés

En considérant des réseaux de communautés pour la répartition topologique de la population, on fait apparaître de nouvelles formes dynamiques et notamment, on met en évidence de nouvelles hypothèses au maintien de la biodiversité.

Dynamique de populations RPS sur des réseaux de communautés

La répartition consiste à placer K stratégies sur chacune des N communautés du réseau. Chaque communauté est initialisée par un vecteur aléatoire, en tirant au hasard le nombre de stratégies de comportement 1, le nombre de stratégies de comportement 2 et le nombre de stratégies de comportements 3 de sorte que la somme du nombre des stratégies soit K.

La dynamique est divisée en générations. Dans la première phase d'une génération, chaque communauté évolue selon le mécanisme présenté dans la partie A. Cette évolution se produit au sein des communautés : on tire N couples de stratégies de la communauté et il y a évolution si l'une est d'état i et l'autre d'état i+1[M]. Dans la seconde phase, les liens entre les communautés sont pris en compte et les stratégies se diffusent d'une communauté à l'autre. Pour tout lien d'une communauté C1 vers une communauté C2, on tire T stratégies de C1 au hasard, on les retire de la population de C1 et on les ajoute à celle de C2.

A chaque génération, chaque communauté conserve une population constante : soit d le degré d'une communauté, elle perd T×d stratégies et en gagne T×d. Le mécanisme est illustré à la figure suivante.

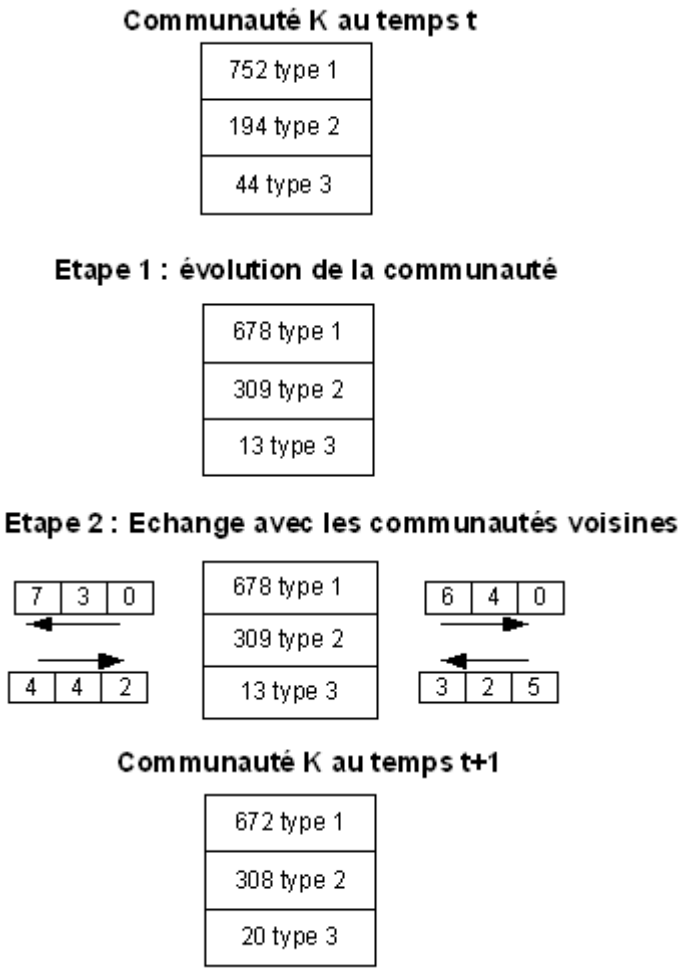


Figure C.1 : Exemple d'évolution d'une communauté pour M=3, T=10 et 1000 stratégies par communauté

Pour une communauté qui ne serait liée à aucune autre, elle convergerait vers une population monomorphe sous l'effet du phénomène de synchronisation. Dans ce qui suit, on montre que les liens entre les communautés "desynchronisent" les communautés et la biodiversité se maintient sur chaque communauté.

Résultats

On considère N=500, M=3, T=10 et K=5000 par défaut. On donne l'évolution pour différentes topologies sous la forme de l'évolution de la **fréquence d'un comportement dans la population globale**.

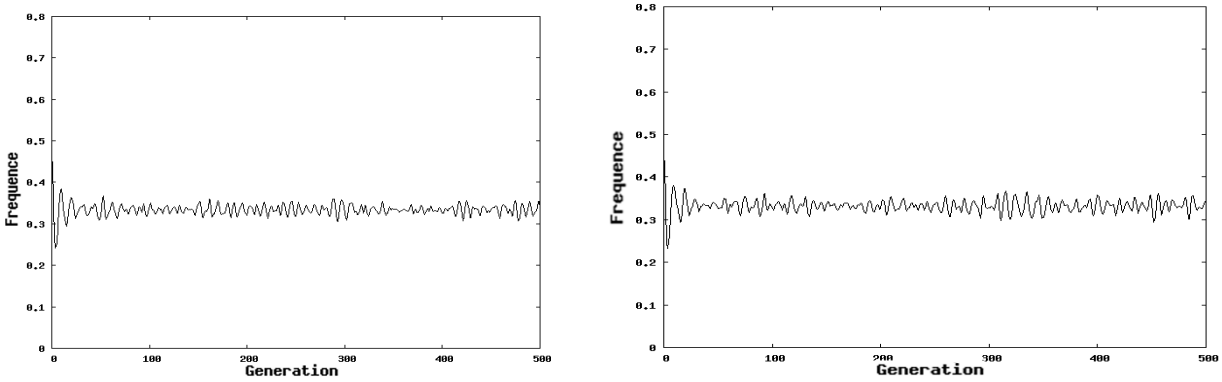


Figure C.2 : grille Von Neumann et graphe aléatoire Erdős Rényi de degré moyen 4 (probabilité de connexion de 0.008)

On constate que la fréquence se stabilise. Cette homogénéité au niveau global cache éventuellement une hétérogénéité au niveau des situation des communautés qui n'est pas évoquée ici. En testant des graphes aléatoires avec différents niveaux de degré moyen :

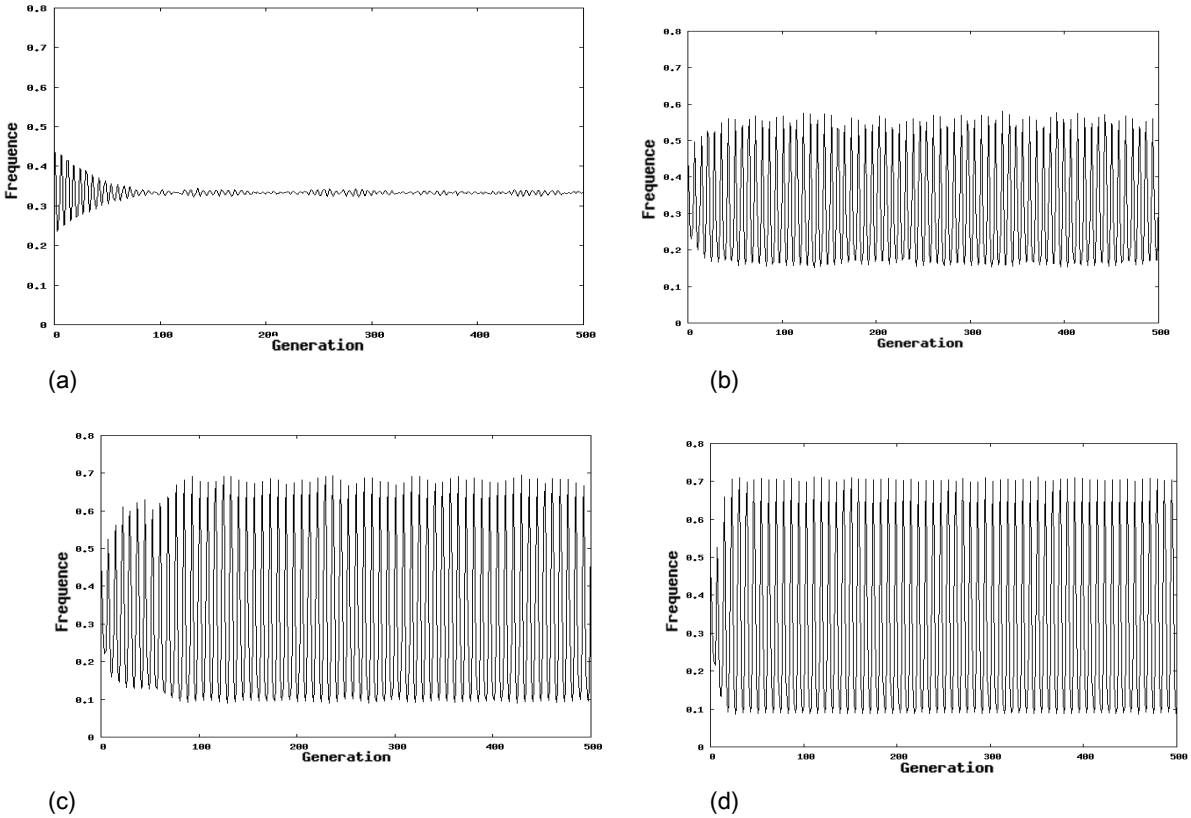


Figure C.3 : Évolution de la fréquence d'un comportement pour un graphe d'Erdős et Rényi avec différentes probabilités de connexion. (a) p=0.5, (b) p=0.9, (c) p=0.95, (d) Graphe complet

On constate qu'il apparaît un phénomène d'évolution périodique de la fréquence dans le cas du graphe complet

et dans le cas des graphes aléatoires à la Erdős et Rényi dont la probabilité de connexion est proche de 1. L'amplitude des cycles de la population totale reste ici constante : on ne constate pas de phénomène de synchronisation. Il convient cependant de noter que les valeurs des paramètres correspondent à un rapport particulier dans le cas des graphes complets, comme dans ce cas, le degré de chaque nœud est $N=500$ et comme on a choisi $T=10$ et $K=5000$, on a l'égalité :

$$T \times Degre = K$$

Toutes les stratégies d'une communauté sont redistribuées vers les autres communautés à chaque génération du fait des paramètres retenus ici. En sortant du cadre de cette égalité, on constate que les évolutions périodiques des fréquences mises en évidence sur les figures C.3 (c) et C.3 (d) ne se retrouvent pas. En effet, sur la figure C.4, on fait respectivement varier les paramètres T et K :

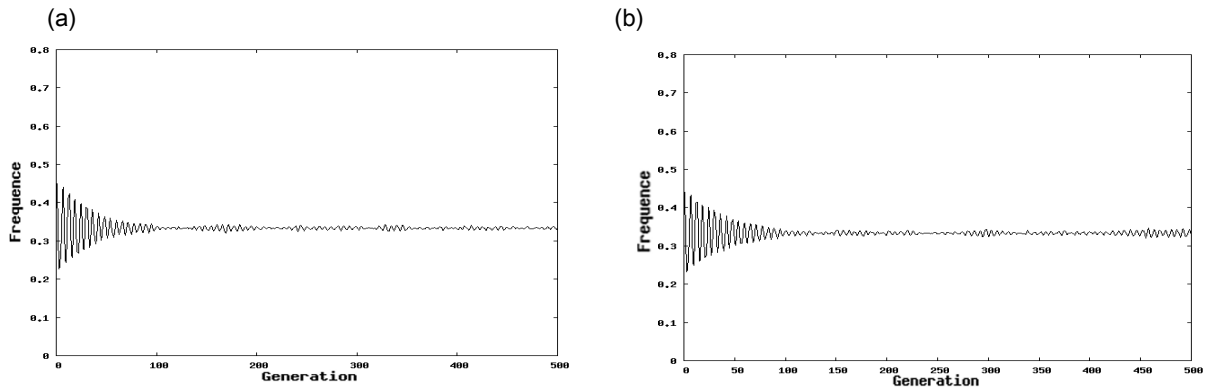
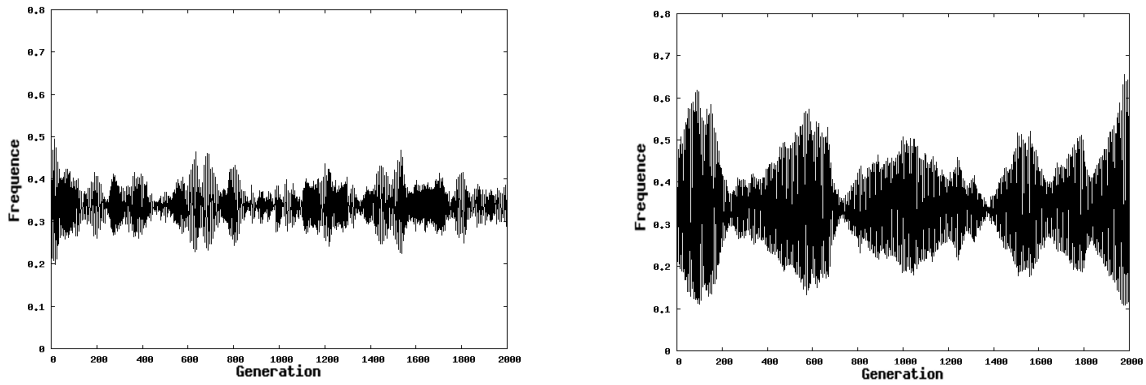


Figure C.4 : (a) Situation de graphe complet avec population de K=10000 par nœuds. (b) Situation de graphe complet, population de K=5000 par nœud mais transfert de T=5 agents d'une communauté à l'autre seulement.

La diminution de T ou l'augmentation de K jouent un rôle similaire de stabilisation ici : en ne supposant plus la redistribution de l'ensemble des comportements depuis chaque communauté vers ses voisins, on n'a plus la convergence du système vers un cycle limite.

Peut-on alors provoquer un phénomène cyclique depuis les autres topologies en prenant des paramètres tels que $T \times Degre = K$? Dans la figure suivante, on mène une telle démarche sur des grilles :



(a) (b)

Figure C.5 : (a) : Grille de Von Neumann, K=40, T=10. (b) : Grille de Moore, K=80, T=10. Pour les deux topologies, on a T×degré=K

Il apparaît des évolutions cycliques comme dans le cas du graphe complet, mais les cycles sont d'amplitude fluctuante.

Dans tous les cas testés, il y a convergence vers des situations où la biodiversité se maintient et notamment dans le cas des graphes complets. Les résultats sur la topologie sont ici différents de ceux obtenus dans la partie B : si l'évolution continue d'être dépendante de la forme de la topologie retenue, ce n'est plus le même type de dépendance, notamment ici, on n'a pas trouvé de conditions à la synchronisation dans des réseaux de communautés. Les liens entre les communautés tendent à désynchroniser chaque communauté et la convergence se fait, pour une large plage des paramètres, vers une situation d'état stationnaire où les 3 comportements sont d'égales fréquences. Il est également possible de faire apparaître un régime cyclique d'évolution des fréquences associées aux différents comportements en redistribuant l'ensemble des stratégies vers les communautés voisines à chaque génération.

La possibilité de passer à plusieurs stratégies par nœud a été évoquée dans [Szollosi 07]. Cet article justifie de l'intérêt biologique d'une telle modélisation en envisageant que le maintien de la biodiversité au sein d'une population de bactéries, type Escherichia Coli, pourrait reposer sur les interactions d'une population support ou population méta : par exemple les bactéries existent au sein d'une population de souris qui s'échangent des populations de bactéries dans leurs contacts permettant, de fait, la survie de la biodiversité des populations de bactéries.

Section III.2. Versions déterministes de l'évolution des populations RPS

A. Démarche et mécanisme déterministe

Dans la section précédente, les évolutions proposées comportent une composante aléatoire : les arcs sont tirés au hasard. Pour un arc tiré au hasard, il y a évolution si un nœud de l'arc est d'état i et l'autre d'état i+1[M] : dans ce cas, les deux nœuds deviennent i+1[M]. Ce mécanisme suppose deux types d'aléa : le choix d'un nœud au hasard et le choix d'un voisin au hasard. Il est possible d'éliminer une source d'aléa en considérant des évolutions synchrones : on tire systématiquement, pour chaque nœud du graphe, un voisin au hasard et il y a évolution si un nœud est d'état i et l'autre d'état i+1[M], les évolutions se faisant simultanément. Un tel mécanisme ne modifie cependant pas les principales caractéristiques dynamiques constatées.

Cette section étudie une approximation déterministe du mécanisme d'évolution. Elle est extraite d'une étude plus complète qu'il est possible de trouver dans [Dorat 08]. Un certain nombre de résultats et de démonstrations n'ont pas été reportés ici

Le mécanisme déterministe étudié est le suivant : **un nœud d'état i évolue vers i+1[M] si son voisinage comporte plus de voisins i+1[M] que de voisins i-1[M]**. Le mécanisme s'inspire du mécanisme asynchrone de la section précédente pour lequel un nœud a une probabilité d'autant plus forte d'évoluer vers i+1[M] que la probabilité de tirer un voisin i+1[M] est forte, soit que le nombre de voisins i+1[M] est élevé.

L'évolution est triviale dans le cas du graphe complet. Pour M=3, il y a stabilisation en deux générations au plus. En effet, soit les effectifs par type d'état sont égaux dès la première génération, et dans ce cas, le système est en équilibre, soit les effectifs ne sont pas égaux à la première génération. Dans ce cas, l'état i, tel que les états i+1[M] sont plus nombreux que les états i-1[M], est éliminé à la première génération. A la deuxième génération, l'état i+1[M] est éliminé : il ne reste plus que des nœuds d'état i-1[M] dans le graphe.

Pour des graphes non complets, la probabilité d'initialiser le graphe de manière à converger vers un état stationnaire diminue rapidement en diminuant le nombre des arcs. Il est toujours possible de construire des initialisations ad hoc qui convergent vers un équilibre stationnaire mais, dans la majorité des cas, les systèmes construits convergent vers un attracteur périodique.

Les parties suivantes étudient le mécanisme et les évolutions auxquelles il conduit en fonction de diverses topologies et pour M=3. Pour de petites cardinalités, il est possible de faire une exploration massive de l'ensemble des états du système et de déterminer ainsi l'ensemble des évolutions périodiques possibles pour une topologie donnée. A

partir de ces simulations, les premiers résultats ont été établis sur des topologies simples. Une telle démarche est menée pour les anneaux dans la partie B où on caractérise totalement les évolutions et les cycles possibles pour cette topologie. La partie C montre que pour des topologies légèrement plus complexes, un autre phénomène apparaît et les systèmes obtenus tendent à converger vers des cycles courts. Les résultats de la partie C sont étendus au cas des grilles et des graphes aléatoires dans la partie D, on y discute également du temps de convergence des système. Enfin, la partie E teste la persistance des résultats pour des mécanismes d'évolution proches.

B. Les périodes pour le cas de l'anneau torique

On considère ici le cas des anneaux et la forme des cycles qui émergent sur cette topologie pour le mécanisme défini dans la partie précédente . Ce sont les anneaux les plus simples qui sont considérés ici : chaque nœud est lié à 2 autres nœuds. Ainsi, si on considère un anneau de cardinalité N et que l'on numérote les nœuds de 1 à N , le nœud 1 est lié au nœud N et au nœud 2, le nœud 2 est lié au nœud 1 et au nœud 3 ... le nœud N est lié au nœud $N-1$ et au nœud 1. L'ensemble des états du système est de taille 3^N , **un état étant une suite des états individuels des nœuds**. Par exemple, sur un anneau de taille 7, 0111200 est un état : l'état pour lequel le nœud 1 est d'état 0, le nœud 2 d'état 1 etc... On parlera d'état de l'anneau en l'occurrence et, de manière générale, on parlera d'état de la topologie. Pour les séquences d'états formant un cycle, on parlera indifféremment d'évolutions périodiques, de séries de configurations cycliques ou de cycles de l'anneau dans la suite.

On commence par une exploration systématique : pour une cardinalité d'anneau donnée, on passe en revue l'ensemble des états possibles pour cette cardinalité. A partir de chacun des états, on fait évoluer le système jusqu'à ce qu'il ait convergé vers un cycle ou un état stationnaire. Le tableau B.1 consigne l'ensemble des périodes possibles pour des anneaux toriques de différentes cardinalités.

Pour une cardinalité inférieure à 4, il n'est pas possible de produire un cycle, une simple énumération des états possibles permet de s'en convaincre.

Cardinalité	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Périodes qui sont des diviseurs de cardinalité			6	7	8	9	10	11	6-12	13	7-14	15	8-16
Périodes qui ne sont pas diviseurs de cardinalité	12	15		21	12-24		15-30	33		39	21-42		12-24-28

Tableau B.1 Les périodes constatées expérimentalement en parcourant l'ensemble des états d'anneaux toriques de diverses cardinalités.

Dans ce qui suit, on établit des conditions nécessaires et suffisantes à ce que l'organisation des états des nœuds d'un anneau produise une évolution périodique et on caractérise les modes d'organisation qui correspondent à chacune des périodes possibles. Les propriétés B.1 et B.2 établissent une condition nécessaire pour que l'état d'un anneau soit état d'un cycle. Les propriétés suivantes énumèrent les différents ensembles d'états respectant la condition nécessaire en notant pour chacun s'il provoque une évolution périodique et le cas échéant, les périodes correspondantes.

On note par [i] un cluster de nœuds d'états i. Il est alors possible de noter la succession des clusters : [0][1][2][0] qui dénote une suite de nœuds d'état 0, de nœuds d'états 1, de nœuds d'état 2 et de nœuds d'état 0, chaque cluster étant de taille au moins 1. [0][1][2][0] est une séquence ou suite de clusters qui peut dénoter plusieurs suites d'états : 0111200 est une telle suite, 001111122220000 en est une autre. La donnée d'une séquence de clusters [0][1][2][0] peut correspondre à une partie de l'anneau ou à l'ensemble de l'anneau.

Les deux propriétés suivantes établissent une condition nécessaire sur la forme des suites des clusters possibles dans les évolutions périodiques sur les anneaux. **En effet, seul un sous-ensemble des suites de clusters est possible dans les évolutions cycliques**. Toutes les propositions qui suivent concernent les anneaux.

Proposition B.1

Soit un état participant d'un cycle, il n'existe pas de sous-suite de clusters de type [i][i+1][i] au sein de la suite des clusters correspondant à l'état.

Démonstration

On se contente de démontrer la propriété pour le cas des états 0 et 1, ce qui, par équivalence des états, valide la propriété pour tous les couples d'états i, i+1.

Pour qu'une configuration particulière des états de certains nœuds du graphe soit compatible avec l'évolution périodique, il faut soit que cette configuration émerge au cours des évolutions périodiques (hypothèse 1), soit qu'elle soit présente depuis les premières générations et ne disparaisse pas tandis que les autres nœuds évoluent selon un mouvement périodique (hypothèse 2). On montre que les deux possibilités conduisent à des contradictions.

Hyp 1 - On commence par supposer que les organisations de type [0][1][0] émergent dans le cadre d'évolutions périodiques. On donne un premier résultat sur les structures 010 et 0110.

Soit la structure où chaque cluster est de taille 1 (ici les nœuds A et C ont des voisins qui ne sont pas représentés):

A	B	C
0	1	0

Si cette organisation émerge dans le cadre d'évolutions périodiques, alors il existe une configuration antécédente qui a évolué en 010, ce qui signifie que l'un des nœuds au moins a évolué entre la configuration antécédente et la configuration 010. On note T la génération où apparaît le motif 010, on se réfère donc à la configuration antécédente comme étant la configuration T-1.

- On suppose que A vient d'évoluer : A était d'état 2 en T-1. L'évolution de A=2 en T-1 vers A=0 en T n'est possible que si A n'avait pas de voisin d'état 1 en T-1. D'où B était 0 en T-1. Cependant, B aurait alors été un nœud d'état 0 avec un voisin d'état 2 à la période T-1. Donc B n'aurait pas pu évoluer. Donc A ne peut pas avoir évolué, de même pour C par symétrie.
- On suppose que B vient d'évoluer. Donc B avait un voisin d'état 1 à la période T-1. Or, ni A ni C ne pouvaient être 1 au coup précédent : il est donc impossible que B ait évolué de T-1 à T.

Donc la structure 010 n'a pas d'antécédent : elle ne peut pas apparaître dans le cours d'évolutions périodiques.

Soit la structure :

A	B	C	D
0	1	1	0

- De la même manière que dans le cas de la structure précédente, on peut montrer que ni A ni D n'ont évolué dans le passage de T-1 à T.
- On suppose que B vient d'évoluer. Dans ce cas, B était 0 en T-1. Ceci implique que en T-1 on avait une structure A=0, B=0, C=1, D=0 puisque A et D n'ont pas évolué et qu'il faut supposer que C était 1 pour avoir un voisin d'état 1 de B. Le seul antécédent possible est donc : 0010 ou 0100 par symétrie, en supposant une évolution de C, l'évolution conjointe de B et de C étant impossible.

Donc 0110 a pour seul antécédent possible : 0010, structure qui n'a pas d'antécédent puisque la configuration 010 n'a pas d'antécédent.

Soit, de manière générale la structure

Cl-1	Cl	Cl+1
0	[1]	0

Pour cette structure, les états 0 aux extrémités n'ont pas pu apparaître aux générations précédentes pour les mêmes raisons qu'évoquées pour les cas 010 et 0110. Supposer un antécédent c'est donc supposer qu'un certain nombre de nœuds d'état 1 en T étaient 0 en T-1. De fait, la structure 0[1]0 est précédée par un ensemble de structures 0[1]0 pour lesquelles le nombre des 1 est inférieur à ce qu'il est pour le cluster Cl. Or ces structures mêmes ont pour antécédents des structures du type 0[1]0 de taille inférieure. En remontant la chaîne des antécédents, on a un antécédent 010 dont on sait qu'il s'agit d'une structure sans antécédent.

Ce résultat signifie que l'organisation 0[1]0 ne peut pas émerger au cours d'une évolution. Donc, pour construire un système périodique avec ce type d'organisation, il faut supposer que cette structure existe depuis les premières générations (Hyp2) et se maintient alors que le reste du système évolue de manière périodique. Qu'implique le maintien d'une structure 0[1]0 ? On considère l'organisation autour du cluster Cl de nœuds d'état 1, on numérote par Cl+1 le nœud d'état 0 à droite du cluster Cl de nœuds d'état 1, par Cl-1 le nœud d'état 0 à gauche de Cl. De manière générale, Cl+j dénote le $j^{ème}$ nœud à droite du cluster Cl, Cl-j dénote le $j^{ème}$ nœud à gauche du cluster Cl.

On étudie l'organisation qui permet de maintenir Cl+1 et Cl-1 dans l'état 0. Pour que ces nœuds restent dans le même état et que l'on continue d'avoir une organisation 0[1]0, il faut avoir Cl+2 et Cl-2 d'état 2 pour empêcher l'évolution des nœuds Cl+1 et Cl-1. Pour que les nœuds Cl+2 et Cl-2 restent dans l'état 2, il faut avoir les nœuds Cl+3 et Cl-3 d'état 1 etc... De manière générale, il faut que les nœuds Cl+3×p et Cl-3×p soient d'état 1, que les nœuds Cl+3×p+1 et Cl +3×p-1 soient d'état 0 et que les nœuds Cl+3×p+2 et Cl+3×p-2 soient d'état 2. Deux cas se présentent : le nombre de nœuds hors du cluster Cl est pair ou impair. Dans le cas où le nombre de nœuds hors du cluster est k, pair : les nœuds Cl+k/2 et Cl-k/2 forment un cluster de nœuds de même état j entourés de nœuds (Cl+k/2-1 et Cl-k/2+1) d'états j+1[3]. Le fait que les nœuds Cl+k/2 et Cl-k/2 soient dans l'état j a été déduit comme une condition nécessaire au maintien de l'organisation autour du cluster Cl. Or ce cluster de j entouré de stratégies j+1 disparaît ici et la construction qui permet le maintien des nœuds Cl+1 et Cl-1 s'avère n'être pas stable. Il n'est donc pas possible de construire une configuration qui permette le maintien d'une structure 0[1]0 si le nombre de nœuds hors du cluster de 2 est pair. Dans le cas où ce nombre est impair, les nœuds Cl+E[k/2]-1 et Cl-E[k/2]+1 sont d'état j et le nœud Cl+E[k/2]+1 est forcément d'état j-1[3]. Or, dans ce cas, le nœud est de type j-1 entouré de j, il évolue : comme son maintien est condition nécessaire au maintien de la structure 0[1]0, cette structure ne peut pas se maintenir.

Il est impossible de maintenir la structure 0[1]0 alors que le reste du système évolue de manière périodique. A fortiori, il n'est pas possible de maintenir une structure [0][1][0]. Cette structure ne peut donc ni apparaître dans le cadre d'évolutions périodiques, ni se maintenir pendant que le reste des nœuds évolue : **cette structure est incompatible**

avec l'évolution périodique. Comme les états 0, 1 et 2 sont équivalents, la propriété établie pour 0 et 1 pourrait être établie pour 1 et 2 ou 2 et 0 : un état dont la suite des clusters contient une sous-suite de clusters [i][i+1][i] ne peut pas induire une évolution périodique de l'anneau.

CQFD

Proposition B.2

Soit un état participant d'un cycle, il n'existe pas de sous-suite de clusters de type [i+1][i][i+1] au sein de la suite des clusters correspondant à l'état.

Démonstration

Là encore, on raisonne seulement avec les états 0 et 1. On suppose une évolution périodique avec une structure [1][0][1] (qu'elle émerge au cours d'une évolution périodique ou qu'elle se maintienne). Sous la contrainte la propriété B.1, on est conduit à construire la structure adjacente de cette manière pour avoir une structure permettant l'évolution périodique :

C-2	C-1	C	C+1	C+2
[2]	[1]	[0]	[1]	[2],

structure qui est elle-même organisée de cette manière, toujours d'après la propriété 1 :

C-3	C-2	C-1	C	C+1	C+2	C+3
[0]	[2]	[1]	[0]	[1]	[2]	[0]

etc...

On a donc deux suites de clusters :

	C	C+1	C+2	C+3
S1 :	[0]	[1]	[2]	[0]....

	C	C-1	C-2	C-3
S2 :	[0]	[1]	[2]	[0]...

Comme l'anneau est torique, il existe un cluster qui est le premier cluster conjoint aux deux suites. Ce cluster est bordé

par le cluster C-j et par le cluster C+k. On note i l'état du cluster C-j. Dans ce cas, l'état du cluster conjoint est i+1 par cohérence de la suite S1 :

C-j	C-j-1/C+k+1	C+k
i	i+1	?

Trois cas sont alors possibles :

- le cluster C+k est i, dans ce cas, les trois clusters forment une suite [i][i+1][i] qui est incompatible avec l'évolution périodique (propriété B.1)
- le cluster C+k est i+1, dans ce cas, le cluster C+k-1 est d'état i et donc, la suite formée est de la forme : [i][i+1][i+1][i] soit [i][i+1][i] qui est incompatible avec l'évolution périodique d'après la propriété B.1.
- le cluster C+k est i-1, dans ce cas, le cluster C+k-1 est d'état i+1 et donc la suite formée est de la forme : [i][i+1][i-1][i+1], or la structure [i+1][i-1][i+1] est équivalente à une structure [i][i+1][i] pour M=3, soit une structure qui est incompatible avec l'évolution périodique.

L'existence d'une structure [1][0][1] implique nécessairement l'existence d'une structure [i][i+1][i], structure incompatible avec l'évolution périodique d'après la propriété B.1 : c'est donc que la structure [1][0][1] est incompatible avec l'évolution périodique. De manière générale, là aussi, comme les états sont équivalents entre eux, cela signifie qu'il n'est pas possible d'avoir un cluster de nœuds [i+1][i][i+1] dans une configuration périodique.

CQFD

Les propriétés B.1 et B.2 impliquent que la succession de trois clusters est nécessairement de la forme [0][1][2] ou [2][1][0] pour tout état d'un anneau qui évolue périodiquement. Par extension de ce principe, les seules suites de clusters possibles dans les évolutions cycliques sont de la forme : [0][1][2][0][1][2][0]... **L'organisation selon cette forme de la suite des clusters pour un état de l'anneau est une condition nécessaire à ce que cet état soit cyclique.** Dans la suite de cette partie, on explore les organisations possibles dans le cadre de telles suites de clusters. La démarche consiste à partitionner l'ensemble des configurations respectant la condition nécessaire et à traiter chaque sous-ensemble : c'est le sens des propriétés B.3 à B.7.

Définition-Motif :

On appelle motif une suite ordonnée d'états 0, 1, 2 (chaque cluster étant de taille au moins 1), qui n'est pas générée par une sous-suite de clusters qui serait répétée. Par exemple :

0001122001222 001222 001122000112 201002

sont des motifs alors que 0011100 n'est pas un motif, 012012 n'est pas un motif (répétition du motif 012), 0012200122 n'est pas un motif (répétition du motif 00122).

Définition-Recouvrement d'un anneau par un motif ou motif couvrant :

On dit qu'il y a recouvrement d'un anneau par un motif lorsque un motif répété k fois recouvre l'ensemble des nœuds de l'anneau avec chaque nœud qui appartient à un et un seul motif. On parle alors de motif couvrant. Par exemple : 00122 est un motif couvrant pour l'anneau de 10 nœuds initialisé de la sorte : 0012200122.

Proposition B.3

Soit un motif de taille T qui, placé sur un anneau torique de taille T donne un cycle de période P. Dans ce cas, l'anneau de taille k×T, k>2, recouvert par ce motif évolue avec période P.

Cette proposition signifie par exemple que l'anneau de 12 nœuds et d'état 012201220122 évolue avec la même période que l'anneau de 4 nœuds 0122.

Démonstration

La démonstration n'est pas donnée ici, elle peut être trouvée dans [Dorat 08]. Elle repose sur le fait que chaque motif de taille T évolue de la même manière. Le nœud à la fin d'un motif M1 est en contact avec le premier nœud du motif suivant M2 qui est du même état que le premier nœud de M1 : le motif M1 évolue comme s'il était réparti sur un anneau torique.

Du fait de la proposition B.3, si l'anneau est recouvert par un motif, la périodicité de l'anneau se ramène à celle du motif couvrant. Restent donc à voir les cas sans motif couvrant. On regarde d'abord les cas où tous les clusters sont de taille au moins 2 (proposition B.4), puis les cas où tous les clusters sont de taille au moins 2 ou de taille 1 (proposition B.5), les cas où tous les clusters sont de taille 1 (proposition B.6) et le cas où les clusters sont seulement de taille 2 ou 1 (proposition B.7).

Proposition B.4

Soit un anneau sans motif couvrant. Dans le cas où tout cluster est au moins de taille 2 : le système est périodique de période la cardinalité de l'anneau.

Démonstration

Pour un tel système, la suite des clusters ne change pas, elle se "déplace".

Soit un anneau de taille T. Pour chaque cluster de la suite, à un moment donné du temps, il gagne un nœud et il perd un nœud. En effet, soit un cluster C quelconque d'état i qui va du nœud j au nœud j+H-1 avec H>=2 par hypothèse. On suppose que j+H est un nœud d'état i-1 (et subséquemment, j-1 est un nœud d'état i+1 d'après la propriété B.1).

j-1	j	j+1	...	j+H-1	j+H	j+H+1
i+1	i	i	...	i	i-1	i-1

La configuration décrite dans le texte.

Comme le cluster qui commence sur le nœud j+H est de taille au moins 2, le nœud j+H est un nœud i-1 avec un voisin i et un voisin i-1 (**puisque tous les clusters sont supposés de taille au moins 2**) : le nœud j+H évolue et passe dans l'état i, et donc le cluster C voit sa taille augmenter de 1. Parallèlement, comme H>=2, alors le nœud j est un nœud d'état i entouré d'un nœud i et d'un nœud i+1, sa taille diminue de 1. On avait un cluster d'état i de taille H entre le nœud j et le nœud j+H-1, on a à la génération suivante un cluster d'état i de taille H entre le nœud j+1 et le nœud j+H. La série des clusters est identique après chaque génération, mais le premier élément de la série se déplace de 1 nœud à chaque génération : au bout de N générations, on est assuré que le premier élément de la série sera revenu à sa position initiale. Le système admet donc une période N, la taille de l'anneau.

Supposons qu'il existe une période p<N. Dans ce cas, la série des clusters à partir d'un nœud n quelconque est la même que la série des clusters à partir du nœud n+p : il existe un motif couvrant de taille p pour le graphe dans ce cas : il ne peut pas y avoir de période inférieure à la taille de l'anneau pour le cas où tous les clusters sont de taille au moins 2 dans le cas où il n'y a pas de motif couvrant.

CQFD

Proposition B.5

Soit l'état d'un anneau tel que la série des clusters associée contient au moins un cluster de taille 3 ou plus et un cluster de taille 1 : l'évolution n'est pas périodique

Démonstration

On va prouver que s'il existe un cluster de taille 1 dans la séquence des clusters correspondant à l'état de l'anneau alors l'existence d'un cluster de taille 3 est incompatible avec les évolutions périodiques. Pour prouver qu'une structure est incompatible avec l'évolution périodique, on procède comme pour la propriété B.1 en prouvant d'une part (1) que la structure ne peut pas émerger dans le cadre d'évolutions périodiques et d'autre part (2) que la structure ne

peut pas se maintenir dans le cadre d'évolutions périodiques du reste de la structure.

(1) Établissons d'abord qu'il n'est pas possible de faire émerger un cluster de taille $T \geq 3$ s'il ne préexiste pas un cluster de taille $T1 \geq T$ dans le graphe. On recherche l'antécédent d'un cluster de nœuds d'état i de taille supérieure ou égale à 3. Le cluster de nœuds i a cette forme :

i+1 i i i ... i **i** i-1

Le seul nœud du cluster qui peut avoir évolué depuis la génération précédente est le nœud i voisin du nœud i-1, repéré en gras sur la figure. En effet supposons que n'importe quel autre nœud i du cluster vient d'évoluer, comme on ne peut pas supposer qu'à la génération précédente l'anneau contenait une séquence i i-1 i, alors on est conduit à supposer que tous les nœuds i étaient i-1 à la génération précédente, ce qui est impossible. De fait, seul le nœud i voisin de i-1 peut avoir évolué. Donc, par rapport à sa taille de la génération précédente, le cluster a gagné au plus un nœud dans l'évolution du nœud i voisin de i-1 et a nécessairement perdu un nœud. De fait, pour avoir un cluster de taille T, on est conduit à supposer avoir un cluster de taille au moins T à la génération précédente.

(2) Montrons que pour un cluster de nœuds i de taille $T \geq 3,$ il est impossible qu'il se maintienne dans le cas où il existe un cluster de taille 1 dans le graphe. On passe en revue l'ensemble des cas possibles en fonction de la position du cluster de taille 1 le plus proche:

- Soit le cas où on a un cluster de nœuds i de taille $T \geq 3$ avec le nœud i-1 de taille 1 immédiatement à droite du cluster. Deux cas sont possibles :

  1er cas et générations suivantes :

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \textit{cluster de i est de taille } T & i & i & i & \ldots & i & i & i & \boldsymbol{(i-1)} & (i+1) & i & \ldots \\ \textit{cluster de i est de taille } T-1 & i+1 & i & i & \ldots & i & i & i & \boldsymbol{(i-1)} & (i+1) & \ldots & \ldots \\ \textit{cluster de i est de taille } T-2 & i+1 & i+1 & i & \ldots & i & i & i & \boldsymbol{(i-1)} & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

  2ème cas et générations suivantes :

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \textit{cluster de i est de taille } T & i & i & i & \ldots & i & i & i & \boldsymbol{(i-1)} & (i+1) & (i+1) & \ldots \\ \textit{cluster de i est de taille } T-1 & i+1 & i & i & \ldots & i & i & i & (i-1) & (i-1) & \ldots & \ldots \\ \textit{cluster de i est de taille } T-1 & i+1 & i+1 & i & \ldots & i & i & i & i & (i-1) & \ldots & \ldots \end{array}$$

  On constate une diminution de la taille du cluster de nœuds i dans les deux cas. Si la taille d'un cluster est supérieure ou égale à 3, et qu'il est suivi d'un cluster de taille 1, cette taille diminue nécessairement.

- Soit le cas où on a un cluster de nœuds i de taille $T \geq 3,$ un ensemble de clusters de nœuds de taille 2 et

un cluster de taille 1. Soit p le nombre de clusters entre le cluster de taille T et le cluster de taille 1. Dans ce cas, au bout de p générations, le cluster de taille T est à côté d'un cluster de taille 1 : un cluster de taille 2 intermédiaire disparaît à chaque génération.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
[i] & (i-1) & (i-1) & (i+1) & (i+1) & i & i & (i-1) & (i-1) & \boldsymbol{i+1} & i \\
[i] & i & (i-1) & (i-1) & (i+1) & (i+1) & i & i & \boldsymbol{i-1} & (i+1) & (i+1) \\
[i] & i & i & (i-1) & (i-1) & (i+1) & (i+1) & \boldsymbol{i} & (i-1) & (i-1) & (i+1) \\
[i] & i & i & i & (i-1) & (i-1) & \boldsymbol{i+1} & i & i & (i-1) & (i-1) \\
[i] & i & i & i & i & \boldsymbol{i-1} & (i+1) & i & i & (i-1) & (i-1)
\end{array}
$$

On se ramène au cas précédent du cluster de taille T à côté d'un cluster de taille 1.

- Soit le cas où le cluster de taille T est séparé d'un cluster de taille 1 par des clusters de toutes tailles dont des clusters de taille $T1 \geq 3$. Le cluster de taille $T1 \geq 3$ le plus proche d'un cluster de taille 1 va disparaître et se ramener à un cluster de taille 2 ou de taille 1 et récursivement tous les clusters de taille $T1 \geq 3$ vont se ramener au cas de cluster de taille 2 (ou bien les nœuds de taille 1 disparaître), de sorte que le cluster de taille T finit par être dans la situation d'un cluster de taille T séparé par des clusters de taille 2 d'un cluster de taille 1, ou bien à côté d'un cluster de taille 1, cas traités plus hauts et n'étant pas possibles dans le cours d'évolutions périodiques. Il est aussi possible que les clusters de taille 1 disparaissent au contact des clusters de taille T et que donc l'évolution conduise à un cas avec tous les clusters de taille au moins 2, auquel cas, l'état initial ne sera plus accessible.

Donc, dans le cas où la série des clusters contient à la fois un cluster de taille 1 et un cluster de taille T>2, le cluster de taille T va disparaître et on sait d'après (1) qu'il est alors impossible de ré-obtenir un cluster de taille T s'il ne préexiste pas un cluster de taille supérieure.

Les états d'anneau induisant une série de clusters contenant des clusters de tailles supérieures ou égales à 3 et des clusters de taille 1 ne sont pas des états induisant des évolutions périodiques.

CQFD

Proposition B.6

Pour une cardinalité divisible par 3, le recouvrement par le motif 012 (ou cas avec tous les clusters de taille 1) : 012012012 est un état stationnaire.

Démonstration

La démonstration est évidente : chaque nœud i est entouré d'un nœud de type i+1 et d'un nœud de type i-1, donc aucun nœud n'évolue.

CQFD

Proposition B.7

Soit un anneau de taille N sans motif couvrant. On suppose que parmi la série des clusters, il y a au moins un cluster de taille 1 et un cluster de taille 2 et que tous les clusters sont de taille 1 ou 2. On note d le nombre de clusters de deux nœuds dans le graphe. Dans ce cas, en N générations chaque nœud change d fois d'état et donc :

- **si d est multiple de 3, le système admet N comme période puisque alors chaque nœud change d=3×d' fois d'état,**
- **sinon en 3×N générations, chaque nœud change 3×d fois d'état : le système est périodique et admet 3×N comme période.**

Démonstration

Soit un anneau de taille N avec seulement des clusters de taille 1 ou 2 et au moins 1 de chaque. Pour chaque cluster de 2, il se déplace de 1 dans le graphe à chaque génération et les nœuds par lesquels il passe évoluent d'un état. En effet, considérons l'évolution à chaque génération à partir d'une génération G. Soit un cluster de taille 2, la structure est nécessairement de la forme suivante à la génération G :

$$\begin{array}{ccccc} K-1 & \boldsymbol{K} & \boldsymbol{K+1} & K+2 & K+3 \\ i-1 & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} & i+1 & i-1\, ou\, i+1 \end{array}$$

Cette structure évolue forcément en G+1 vers

$$\begin{array}{ccccc} K-1 & K & \boldsymbol{K+1} & \boldsymbol{K+2} & K+3 \\ ? & i & \boldsymbol{i+1} & \boldsymbol{i+1} & i-1 \end{array}$$

Le nœud K+3 est nécessairement de type i-1 en G+1 : soit il était i-1 en G et n'a pas évolué, soit il était i+1 en G alors, par hypothèse d'un système à clusters de taille au plus 2, le nœud K+4 était i-1 et son état s'est diffusé.

Soit en G+2 :

$$\begin{array}{ccccc} K-1 & K & K+1 & \boldsymbol{K+2} & \boldsymbol{K+3} \\ ? & ? & i+1 & \boldsymbol{i-1} & \boldsymbol{i-1} \end{array}$$

Ce simple développement permet de constater que quelque soit la forme de la structure adjacente au cluster de taille 2 (qu'il y ait ou non un cluster de taille 2 sur les nœuds K+2 et K+3), le cluster de taille 2 se "déplace" d'un nœud à chaque

génération et les nœuds par lesquels passe le cluster de taille 2 évoluent de 1 état. Si le cluster de 2 était le seul cluster de 2 du graphe, en N générations, il reviendrait à sa position initiale et tous les nœuds du graphe auraient évolué de 1 état.

Par extension, soit un ensemble de nœuds entre P et Q, s'il existe d clusters doubles dont on note la position initiale Pw tels que $\forall w \in [1:d], P > P_w \, et \, Q < P_w + t + 1[N]$ alors on a évolution de d états de chacun des nœuds entre P et Q inclus sur t périodes. Notamment pour t=N, on a évolution de chacun des nœuds du graphe d fois si on a d clusters doubles initiaux dans le graphe.

Si d est un nombre divisible par 3, alors, chaque nœud change 3 fois d'état en N générations : on retrouve la configuration initiale en N générations, sinon le système admet une période 3×N : en 3×N générations, chaque nœud change 3×d fois d'état, soit un nombre divisible par 3.

CQFD

Corollaire de la proposition B.7

Pour un anneau de taille T avec des clusters de tailles 1 et 2 seulement, il évolue selon un cycle de période T ssi T est divisible par 3, dans tous les autres cas, il évolue selon un cycle de période 3×T.

Démonstration

Si on note par c le nombre des clusters et d le nombre des clusters doublés, alors : T=3×c+d

=> On suppose qu'il existe un cycle de période T, cela signifie d'après B.7 que le nombre de clusters de taille 2 est multiple de 3, soit d=3k. Dans ce cas, T = 3×c+3×k, soit T est multiple de 3.

<= On suppose avoir une cardinalité multiple de 3 : T=3k=3c+d : dans ce cas d le nombre de clusters de taille 2 est multiple de 3 et donc, T est période pour le système.

CQFD

Les résultats précédents amènent au théorème B.8. On parle de période programmable pour une période telle qu'il est possible d'initialiser l'anneau de manière à obtenir un cycle de cette période

Théorème B.8

Pour tout anneau de cardinalité non multiple de 3, les périodes programmables sont les diviseurs de la cardinalité supérieurs ou égaux à 6 et les nombres de la forme 3×d avec d un diviseur de la cardinalité supérieur ou égal à 4 et non divisible par 3. Par ailleurs, ces périodes sont les seules périodes programmables pour ce type d'anneau.

Pour tout anneau de cardinalité multiple de 3, les périodes programmables sont les diviseurs de la cardinalité de taille supérieure ou égale à 6 et ce sont les seules périodes programmables pour ce type d'anneau.

Démonstration

Soit un anneau A de cardinalité N non multiple de 3. Explorons l'ensemble des états possibles pour cet anneau.

- Le cas où l'anneau est recouvert d'un motif couvrant de taille inférieure ou égale à la taille du graphe, avec chaque cluster de taille au moins 2 (donc le motif couvrant est de taille au moins 6). Alors, d'après la propriété B.4 et la propriété B.3, l'anneau est périodique de période la taille du motif. Cette taille est un diviseur de la cardinalité puisque par définition d'un motif couvrant, les seules tailles de motif couvrant possibles sont les diviseurs de la cardinalité. Réciproquement, pour chacun des diviseurs de la cardinalité supérieurs ou égal à 6, il est possible de construire un motif qui, en le répartissant sur l'anneau A, rend A périodique de période ce diviseur. Soit T ce diviseur, alors si on construit le motif avec T-4 nœuds de type i, 2 nœuds de type i-1 et 2 nœuds de type i+1, et en répétant le motif N/T fois pour recouvrir A, on obtient un système périodique de période T d'après les propriétés B.4 et B.3.
- Soit l'anneau est recouvert d'un motif couvrant de taille T supérieure ou égale à 4 ne contenant que des clusters de taille 2 ou des clusters de taille 1, avec au moins 1 cluster de chaque type, soit également le cas où il n'y a pas de motif couvrant, mais où le graphe ne comporte que des clusters de taille 2 ou 1 avec 1 de chaque au moins. Dans ce cas le système est périodique, de période, 3×T (avec la taille T qui est un diviseur de A par définition d'un motif couvrant) d'après les propriétés B.3 et B.7. Réciproquement, pour tout diviseur de la cardinalité N, $T \geq 4$, il est possible de construire un motif de taille T qui répété N/T fois produit une période 3×T. Cf. par exemple la construction d'un cluster avec T-2 clusters de taille 1 et 1 cluster de taille 2 si T-1 est multiple de 3, la construction d'un cluster avec T-4 clusters de taille 1 et 2 clusters de taille 2 si T-2 est multiple de 3.
- Pour les autres cas : soit on a des clusters de taille supérieure à 2 et des clusters de taille 1, ce qui ne conduit pas à des évolutions périodiques d'après la propriété B.5, soit on a seulement des clusters de taille 1, ce qui correspond à un état stationnaire (propriété B.6) : il n'existe pas d'autres configurations donnant des évolutions périodiques que celles évoquées dans les deux points précédents.

Dans le cas d'un anneau de cardinalité non multiple de 3, les seules périodes possibles sont les diviseurs de l'anneau qui sont supérieurs ou égaux à 6 et 3×diviseurs de l'anneau qui sont supérieurs ou égaux à 4. Par ailleurs, chacune de ces périodes potentielles est programmable.

Soit un anneau A de cardinalité N multiple de 3, dans ce cas. Explorons l'ensemble des cas possibles pour cet anneau

- Le cas où l'anneau est recouvert d'un motif couvrant de taille inférieure ou égale à la taille du graphe, avec

chaque cluster de taille au moins 2 (donc le motif couvrant est de taille au moins 6) : ce cas aboutit à la même conclusion que pour les anneaux de cardinalité non multiple de 3.

- Soit l'anneau est recouvert d'un motif couvrant de taille T supérieure ou égale à 4 ne contenant que des clusters de taille 2 ou des clusters de taille 1, avec au moins 1 cluster de chaque type ou soit le cas avec le même type de clusters mais sans motif couvrant. Dans le cas où T n'est pas un multiple de 3, la période obtenue est 3×T qui est un diviseur de N puisque N est multiple de 3 et T est diviseur de N non multiple de 3. Dans le cas où T est multiple de 3, la période obtenue est T (cf. le corollaire de la propriété B.7). Donc les périodes possibles sont les diviseurs de N de taille supérieure ou égale à 4 qui sont multiples de 3 et 3×diviseurs supérieurs ou égaux à 4 qui ne sont pas des diviseurs de 3. On note que l'ensemble des périodes et des diviseurs que l'on peut obtenir ici peut être obtenu dans le cas de motif couvrant avec chaque cluster de taille au moins 2.
- Pour les autres cas : soit on a des clusters de taille supérieure à 2 et des clusters de taille 1, ce qui ne conduit pas à des évolutions périodiques d'après la propriété B.5, soit on a seulement des clusters de taille 1, ce qui correspond à un état stationnaire (propriété B.6) : il n'existe pas d'autres configurations donnant des évolutions périodiques.

Dans le cas d'un anneau multiple de 3, les seules périodes possibles sont les diviseurs de l'anneau de taille supérieure ou égale à 6. Par ailleurs, chacun des diviseurs supérieur ou égal à 6 est effectivement programmable.

CQFD.

Le tableau suivant résume les périodes possibles pour différentes topologies en fonction des distinctions opérées par le théorème B.8. Il est à mettre en relation avec le tableau B.1 pour lequel les mêmes périodes étaient obtenues de manière expérimentale.

	Anneau de cardinalité 4		Anneau de cardinalité 16		Anneau de cardinalité 50		Anneau de cardinalité 60	
$Diviseur \geq 6$ => période diviseur			Diviseur=8 Diviseur=16	Période 8 Période 16	Diviseur 10 Diviseur 25 Diviseur 50	Période 10 Période 25 Période 50	Diviseur=6 Diviseur=10 Diviseur=12 Diviseur=15 Diviseur=20 Diviseur=30 Diviseur=60	Période 6 Période 10 Période 12 Période 15 Période 20 Période 30 Période 60
$Diviseur \geq 4$ $et\ non\ multiple\ de\ 3$ 3×diviseur est une période	Diviseur=4	Période 12	Diviseur=4 Diviseur=8 Diviseur=16	Période 12 Période 24 Période 48	Diviseur 5 Diviseur 10 Diviseur 25 Diviseur 50	Période 15 Période 30 Période 75 Période 150	Diviseur=5 Diviseur=10 Diviseur=20	Période 15 Période 30 Période 60

Tableau B.2 Le tableau illustre l'ensemble des périodes pour différents anneaux.

Des exemples d'anneaux évoluant selon le mécanisme déterministe sont proposés dans l'applet http://rdorat.free.fr/Recherche/Applets/GoG.jar

Configurations périodiques et fréquences

Le théorème B.8 traite de l'ensemble des périodes et des configurations possibles. Néanmoins, le résultat établi ne permet pas de préjuger du bassin d'attraction de chaque attracteur (cycle ou état stationnaire). Dans ce qui suit, on considère l'ensemble des états d'un anneau de N nœuds pour différentes valeurs de N en donnant pour chaque période possible, la part des états de l'ensemble total des états qui convergent vers cette période. Les graphiques suivants donnent la distribution de l'ensemble des états-configurations sur les périodes vers lesquels ils convergent, l'échelle est logarithmique :

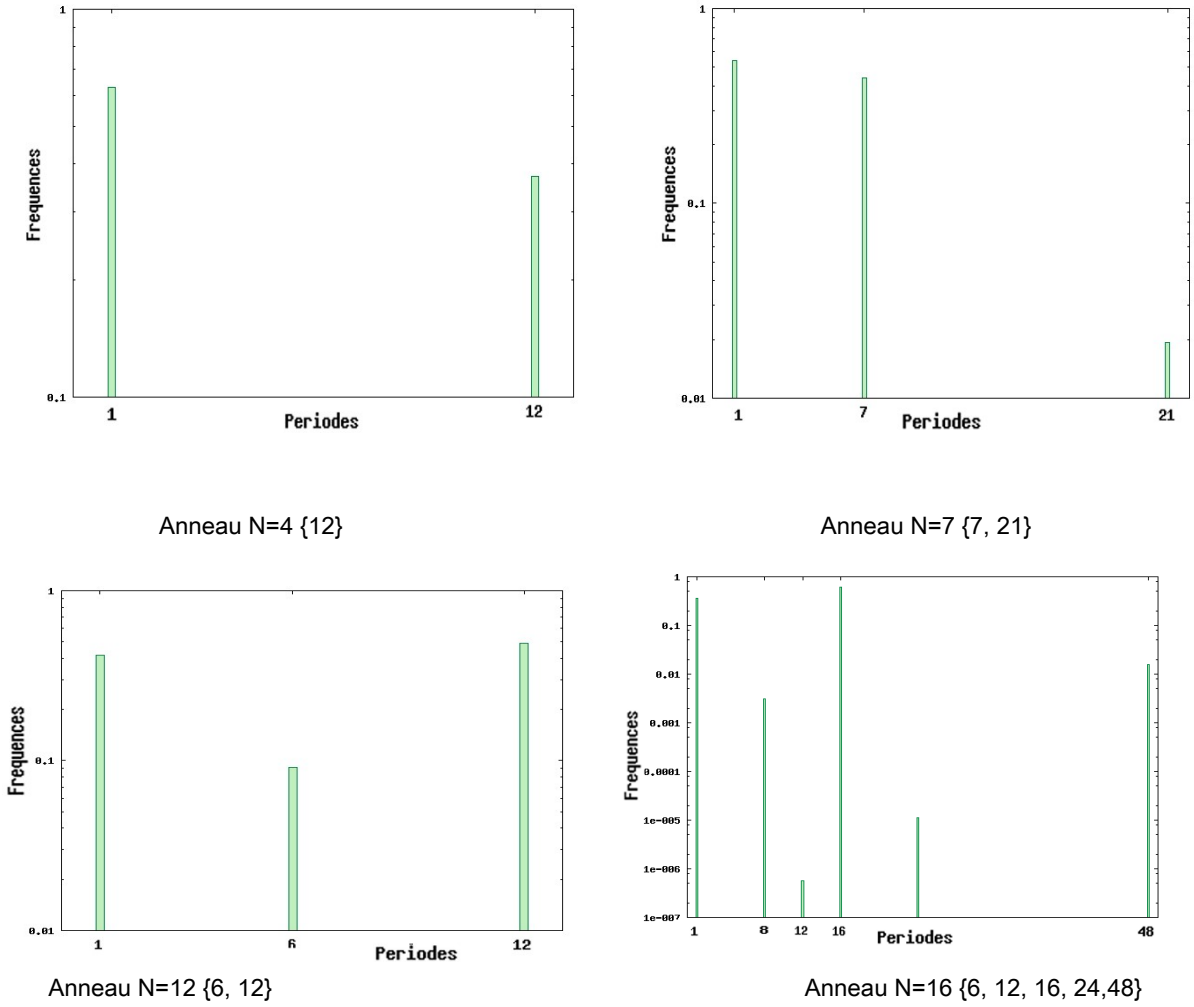


Figure B.3 : pour différentes cardinalités d'anneau, la répartition des états en fonction des périodes vers lesquelles ils convergent. L' échelle des ordonnées est logarithmique. La fréquence de convergence vers un état stationnaire est celle associée à la période 1. Pour chaque cardinalité d'anneau, on précise l'ensemble des périodes programmables.

Soit d un diviseur de la cardinalité. L'observation des fréquences de cas convergeant vers chaque période permet d'établir certains faits. On constate que la période d est d'autant plus fréquente que d est grand, que les périodes de la forme 3×d sont d'autant plus fréquentes que d est grand et que pour un diviseur d non multiple de 3, la période 3×d est moins fréquente que la période d. Le fait qu'il est plus probable d'avoir un cycle de période d qu'un cycle de période 3×d se comprend assez directement. L'émergence d'un cycle à période 3×d exige de maintenir au moins un cluster de taille 1. Pour qu'un tel cluster se maintienne, il est nécessairement entouré d'un nœud d'état i+1 et d'un nœud d'état i-1. La probabilité de trouver une telle structure est très faible à partir d'une initialisation aléatoire et de quelques générations d'évolution. Plus précisément, la structure i+1 i i-1 a deux antécédents dans l'ensemble des suites d'états possibles pour 3 nœuds, quand les autres structures possibles sur 3 nœuds et qui apparaissent dans des évolutions cycliques ont au moins 3 antécédents et donc une plus forte probabilité d'émergence.

Par ailleurs, plus un diviseur est petit, moins le nombre de configurations possibles est important. Par exemple, un motif de taille 4 produisant une période 12 est toujours de la forme 0122 tandis qu'un motif de taille 8 produisant une période de 24 peut s'organiser de plusieurs manières : 01122012 ou 01120122 etc. La couverture d'un anneau de taille 16 avec un motif de taille 4 correspond à un état unique alors que la couverture d'un anneau de taille 16 avec un motif de taille 8 peut correspondre à différents états. La probabilité de converger vers un cycle de période 8×3 est donc supérieure à la probabilité de converger vers un cycle 4×3 à partir d'une initialisation aléatoire de l'anneau. Plus un diviseur d est petit, moins les périodes associées d ou 3×d sont fréquentes [Dorat 08].

Le cas d'une topologie de deux anneaux liés à 1 nœud commun

A partir des résultats sur les anneaux toriques, il est possible d'inférer des résultats sur d'autres topologies. En effet, chaque période obtenue sur un anneau est programmable sur d'autres topologies comme les topologies de grille : soit une grille L×C, le cas où chaque colonne est initialisée uniformément évoluera comme un anneau de cardinalité C par exemple. Donc, pour une grille torique dont l'une des dimensions est de taille N, il est possible de programmer l'ensemble des périodes d'un anneau de cardinalité N. Des extensions similaires sont immédiates et les périodes d'un anneau sont programmables sur des rubans de Möbius, sur des bouteille de Klein, sur des sphères . Il peut bien sûr apparaître d'autres périodes pour ces topologies. On traite notamment du cas des grilles dans la partie D. Dans la fin du paragraphe, on étudie la généralisation au cas de deux anneaux liés.

On considère **le cas de deux anneaux partageant un unique nœud commun**. Soit E1 l'ensemble des périodes qui sont possibles sur le premier anneau, si on le considère hors du lien avec le second, d'après le théorème B. 8, soit E2 l'ensemble des périodes qui sont possibles sur le second. Alors E1 U E2 sont des périodes programmables pour l'anneau joint. Plus précisément, on peut prouver que quelque soit la séquence cyclique des états de l'anneau, on peut trouver une séquence des états sur le second nœud qui est compatible [Dorat 08] de sorte que le système évolue cycliquement selon une période de l'anneau 1.

Un second point de résultat sur les formes de convergence majoritaires est la tendance à ce que la période soit celle de l'anneau de cardinalité la plus faible : c'est à dire qu'au sein de l'ensemble des cycles potentiels du système, ce sont les cycles les plus courts qui sont sélectionnés. Le graphique suivant montre l'évolution de la probabilité de converger vers un cycle sur le plus petit anneau en fonction de la taille du plus grand.

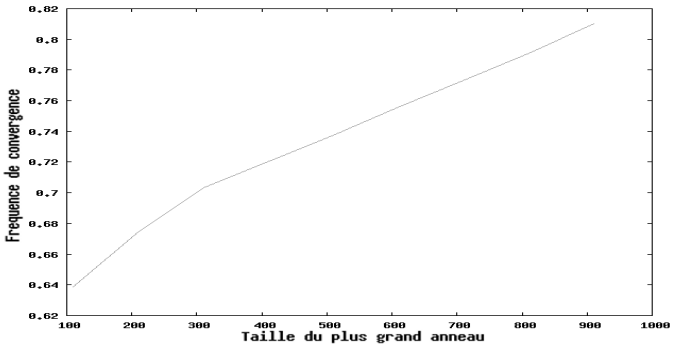


Figure B.4 On tire la taille du premier anneau dans [6:100]. Pour différents niveaux d'abscisses x, on tire la taille du second anneau dans [x;x+100]. La courbe représente la probabilité de convergence vers une période de l'anneau de plus petite taille.

On constate que la convergence vers un cycle de l'anneau de petite cardinalité est plus probable et d'autant plus probable que le différentiel de taille est important. Dans ce qui suit, on complexifie encore la topologie utilisée et on illustre l'apparition d'un nouveau phénomène.

C. Le cas des anneaux toriques à N nœuds et K<=N nœuds associés

Cette partie propose une forme de généralisation de la notion de topologie d'anneau torique, celle-ci permet de faire apparaître de nouvelles formes de configurations cycliques. La généralisation consiste, à partir d'un anneau torique de cardinalité N, à rajouter K nœuds numérotés N+1,..., N+K. Pour chacun des nœuds rajoutés, ou nœuds associés, il existe un unique nœud de l'anneau de base auquel il est rattaché et un nœud de l'anneau de base a au plus un nœud qui lui est rattaché parmi les nœuds N+1...N+K. **Deux nœuds rajoutés sont liés ssi les deux nœuds de base auxquels ils sont associés sont liés entre eux**. On parle des nœuds de l'anneau pour faire référence à la structure d'anneau et aux nœuds associés pour faire référence à ceux qui sont rajoutés, la figure C.5 illustre cette topologie.

Dans un premier temps, on cherche des conditions suffisantes sur l'organisation des nœuds associés telles que la succession des états sur l'anneau constitue un cycle de l'anneau : c'est à dire qu'on cherche pour chaque état cyclique de l'anneau une configuration des nœuds associés telle que l'anneau évolue comme il évoluerait sans les nœuds associés. On arrive à la conclusion que pour quasiment toutes les successions d'états cycliques d'un anneau qui ont été mises en évidence dans la partie B, il est possible de trouver des configurations sur les nœuds associés telles que les nœuds de l'anneau évoluent comme ils auraient évolué sans les liens vers ces nœuds. Plus précisément, [Dorat 08] montre que pour tout état avec au moins deux nœuds par cluster, il existe toujours une configuration des nœuds

associés permettant de reproduire l'évolution cyclique correspondant à cet état. Pour les états avec des clusters de taille 1 et 2, le résultat est moins général. Si K est la distance minimale entre deux clusters de taille 1 et H le nombre de nœuds associés consécutifs, on peut alors établir que si K>H, il est toujours possible de trouver une configuration des nœuds associés respectant l'évolution cyclique des nœuds de l'anneau. **Dans la suite du propos, il suffit de savoir que la plupart des périodes de l'anneau sont reproductibles sous la condition énoncée.**

Déformation du phénomène cyclique : apparition d'une période de référence

On s'intéresse à l'ensemble des périodes programmables pour un anneau avec des nœuds associés. On considère une topologie de cardinalité 28 avec différents nombres de nœuds associés en regardant les périodes obtenues en laissant converger 10^6 initialisations aléatoires pour différents nombres de nœuds associés. On commence par déterminer les cycles programmables du fait de la structure d'anneau. Pour un anneau de cardinalité 28, l'ensemble des périodes programmables est, d'après le théorème B.8, F={7,12,14,21,28,42,84}. D'après les théorèmes évoqués dans le paragraphe précédent, il est possible de trouver au moins une configuration cyclique pour chacunes de ces périodes quelque soit le nombre de nœuds associés, sauf pour certains nombres de nœuds associés et pour certains cycles reposant sur la présence de clusters de taille 1 et 2 . Le tableau suivant consigne les résultats :

Pér.	Fréquence dans le cas d'un anneau de cardinalité 28	Fréquence dans le cas d'un anneau de cardinalité 28 à deux nœuds associés	Fréquence dans le cas d'un anneau de cardinalité 28 à 3 nœuds associés	Fréquence dans le cas d'un anneau de cardinalité 28 à 6 nœuds associés	Fréquence dans le cas d'un anneau de cardinalité 28 à 12 nœuds associés	Fréquence dans le cas d'un anneau de cardinalité 28 à 20 nœuds associés	Fréquence dans le cas d'un anneau de cardinalité 28 à 28 nœuds associés.
1	0.503114	0.458496	0.451955	0.400621	0.305193	0.207202	0.488803
7	0	0	0	0	0	0	**0**
9	**0**	**0**	**0**	**0.001625**	**0.006172**	**0.011447**	**0**
12	0	0.085357	0.106452	0.2133	0.422776	0.64487	**0**
14	0.001111	0.001035	0.001026	5.09E-4	2.39E-4	6.7E-5	0.00119
21	0	0	0	0	0	0	0
28	0.494592	0.453924	0.438748	0.38226	0.263275	0.133815	0.508657
30	**0**	**0**	**0**	**0**	**1.1E-5**	**3.0E-6**	**0**
32	**0**	**0**	**0**	**1.05E-4**	**2.59E-4**	**2.58E-4**	**0**
34	**0**	**0**	**0**	**5.4E-5**	**7.48E-4**	**0.001238**	**0**
42	0	0	0	0	0	0	0
45	**0**	**0**	**5.6E-5**	**2.7E-5**	**3.1E-5**	**5.0E-6**	**0**
84	1.84E-4	1.89E-4	1.36E-4	5.9E-5	1.3E-5	0	3.51E-4
90	**0**	**0**	**6.28E-4**	**4.41E-4**	**2.82E-4**	**8.2E-5**	**0**
102	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2.0E-6**	**0**
108	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2.0E-6**	**0**
114	**0**	**0**	**0**	**0**	**2.0E-6**	**6.0E-6**	**0**
120	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**4.0E-6**	**0**

Tableau C.1 Distribution des périodes atteintes à partir de 10^6 initialisations aléatoires et pour différents nombres de nœuds associés construits autour d'un anneau de cardinalité 28. En gras dans les cellules grisées, les périodes qui ne sont pas celles programmables sur l'anneau de base.

Pour la plupart des fréquences associées aux périodes de F, elles tendent à diminuer avec l'augmentation du nombre de nœuds associés. Pour K<N, on constate que seule la période 12 de F a une fréquence qui augmente avec K, que la fréquence d'état stationnaire diminue avec K et qu'apparaissent d'autres périodes que celles de F. Le cas K=N=28 fait exception et se comporte comme l'anneau sans nœuds associés.

On a observé, dans le paragraphe sur les fréquences de la partie B, que la probabilité d'émergence de configurations reposant sur un motif répété est d'autant moins grande que la taille du motif est petite. La période 12 est programmable pour l'anneau de taille 28 dans le cas d'une configuration avec un motif répété de taille 4 : la probabilité de convergence devrait être la plus faible des probabilités associées à des fréquences de F. On constate en effet que pour l'anneau sans nœud associé (2ème colonne du tableau), on ne tombe jamais sur une telle période sur 10^6 initialisations aléatoires. Or, la fréquence d'une telle période est de 0.64 environ pour 20 nœuds associés : **il apparaît un nouveau phénomène qui sous-tend l'émergence de cette période ici. De même pour l'apparition des périodes différentes de celles programmables pour l'anneau.**

La période de 12 est plus fréquente avec l'augmentation du nombre de nœuds associés, ce qu'illustre le graphique suivant :

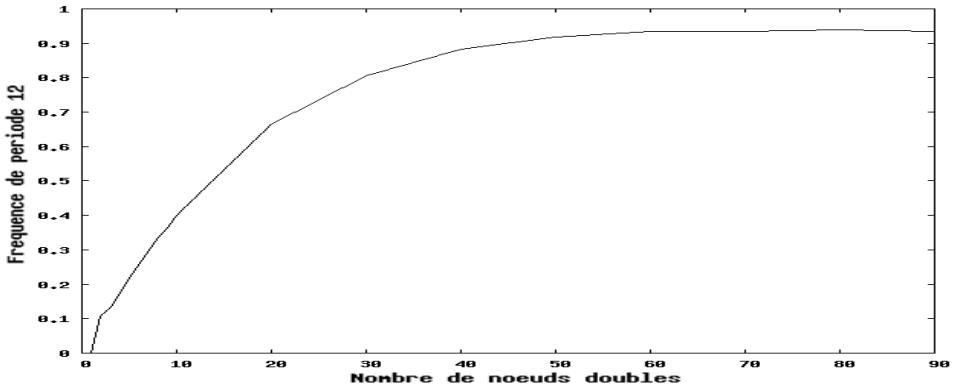


Figure C.2 Évolution de la fréquence d'un cycle de période 12 en fonction du nombre des nœuds associés avec un anneau de taille 100.

Quand pour une topologie donnée, une fréquence est largement plus probable que les autres à partir d'une initialisation aléatoire de la structure et que sa probabilité augmente avec l'augmentation de la cardinalité de la structure, on parlera de **période de référence**. Soit ici : 12 est période de référence pour la topologie d'anneau avec des nœuds associés. Dans le cas des anneaux, leur cardinalité est la période de référence. Le paragraphe suivant approfondi la connaissance sur les nouvelles formes de convergence : que ce soit la convergence vers la période de référence ou vers d'autres nouvelles périodes qui sont apparues dans le tableau, les deux participant d'un même phénomène.

Arbre des ascendances

Les périodes qui ne découlent pas d'un cycle sur la structure sous-jacente d'anneau partagent des caractéristiques communes.

On commence par définir l'**arbre des ascendances**. Pour chaque nœud d'état i, un certain nombre des nœuds qui l'entourent sont dans l'état i+1 [3] à la génération précédant l'évolution du nœud : ce sont les voisins qui provoquent son changement d'état. Il est possible de construire un arbre, avec pour chaque nœud, ses nœuds fils qui sont les nœuds porteurs de l'état i+1[3] lorsqu'il évolue. La figure C.3 donne un exemple.

i	i+1	i
i-1	i	i+1
i-1	i	i+1

Figure C.3 : A partir de cette génération, le nœud central va évoluer sous l'influence des nœuds d'état i+1(les cases à fond rouge). Dans le graphe des ascendances, le nœud central aura ces 3 nœuds comme nœuds fils

Pour chaque branche, on est assuré qu'elle contient un cycle puisque le graphe est de taille finie. La taille du cycle d'un sous-arbre est au maximum de l'ordre de celle du graphe sous-jacent. C'est notamment le cas pour les configurations cycliques sur les anneaux où, du fait de l'organisation, le nœud 1 évolue sous l'effet de la diffusion de l'état du nœud 2, ce dernier évolue sous l'effet de la diffusion de l'état du nœud 3 etc. De sorte que dans le cas des anneaux, chaque nœud de l'arbre des ascendances a un et un seul nœud fils, et le cycle obtenu en construisant l'arbre à partir de n'importe quel nœud est de taille N, la cardinalité.

Pour les nouvelles périodes que l'on observe et notamment la période 12 dans le cas du paragraphe précédent, on constate que les branches des arbres des ascendances présentent toutes **des cycles très courts par rapport à la cardinalité, avec la taille de ces cycles qui est indépendante de la taille du graphe**. Notamment, la période de référence de 12 correspond à l'existence de quatre nœuds (2 nœuds liés j, j+1 et leurs associés N+j et N+j+1) tels que toutes les branches se terminent sur ce cycle :

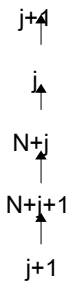


Figure C.4 Graphe des ascendances. Le graphe se lit ainsi : lorsqu'il évolue le nœud j+1 d'état i a un voisin d'état i+1[M] : le nœud j, lorsqu'il évolue le nœud j d'état i a un voisin d'état i+1[m], le nœud N+j. Ici le nœud j+1participe d'un cycle de taille 4.

Ceci signifie que l'évolution de chacun des nœuds du graphe est une conséquence de la diffusion des états i +1[M] émis par ces quatre nœuds. On parle de source dans ce qui suit.

Le paragraphe suivant développe l'évolution de l'anneau à nœuds associés pour la période 12 et d'autres périodes qui apparaissent fondées sur un principe similaire.

Nouvelles configurations cycliques

Pour le cas d'une période de 12, sur le schéma suivant, on fait apparaître à gauche la configuration périodique, à droite la représentation de l'anneau avec :

- en rouge les 4 nœuds qui participent du cycle de taille 4.
- en bleu les autres nœuds : en descendant dans l'arbre des ascendances à partir de ces nœuds, on retombe toujours sur le cycle des 4 nœuds précédents.

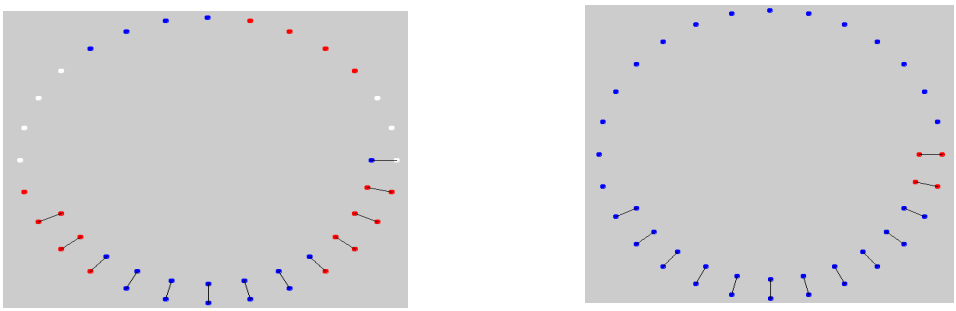


Figure C.5 Configuration évoluant à période 12, sur le graphique de gauche, en rouge, on fait apparaître les nœuds qui participent des cycles de taille inférieure ou égale à 4 dans l'arbre des ascendances, en bleu les autres nœuds. Le graphe est un anneau de taille 28 avec 13 nœuds associés.

Sur 4 générations, on constate l'évolution suivante autour des nœuds-sources :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} & & \\ \ldots & i & i & \boldsymbol{i+1} & \boldsymbol{i-1} & i+1 & i+1 & \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \boldsymbol{i+1} & \boldsymbol{i} & & & \\ \ldots & i & i+1 & & \boldsymbol{i+1} & \boldsymbol{i-1} & i-1 & i+1 & \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \boldsymbol{i+1} & \boldsymbol{i} & & & \\ \ldots & i+1 & i+1 & & \boldsymbol{i-1} & \boldsymbol{i-1} & i-1 & i-1 & \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \boldsymbol{i+1} & \boldsymbol{i} & & & \\ \ldots & i+1 & i-1 & & \boldsymbol{i-1} & \boldsymbol{i} & i-1 & i-1 & \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & \boldsymbol{i+1} & \boldsymbol{i+1} & & & \\ \ldots & i+1 & i-1 & \boldsymbol{i-1} & \boldsymbol{i} & i-1 & i-1 & \ldots \end{array}$$

etc.

Les 4 nœuds forment une sous-structure organisée en anneau. Cet anneau évolue selon la séquence des états qu'il suivrait s'il n'était pas lié au reste de la structure. Les états se diffusent au reste du graphe à partir de cet anneau. L'anneau est de taille 4 et donc tous les nœuds changent d'état une fois en 4 générations d'après la proposition B.7 : on retrouve le même état à une bijection près toutes les 4 générations. Cette propriété, ainsi que la période de l'anneau, s'imposent au reste du graphe qui est un espace de diffusion des états de la sous-structure d'anneau.

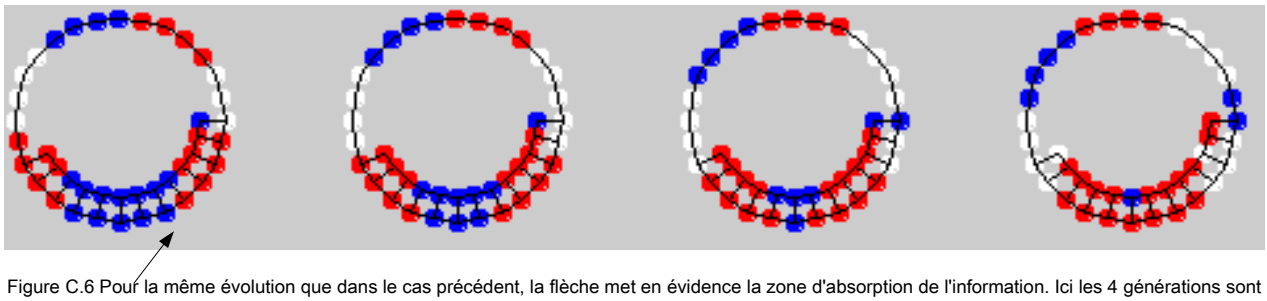


Figure C.6 Pour la même évolution que dans le cas précédent, la flèche met en évidence la zone d'absorption de l'information. Ici les 4 générations sont consécutives.

L'augmentation de la probabilité de la période de référence avec le nombre de nœuds associés trouve ici des éléments d'explication : en augmentant le nombre des nœuds associés, on augmente le nombre des sous-structures d'anneau : c'est autant de sites qui peuvent s'organiser en source.

Dans ce premier exemple, la source était unique, mais il existe des configurations différentes. Parmi les autres configurations qui apparaissent, certaines des plus fréquentes sont les configurations évoluant avec une période 9 :

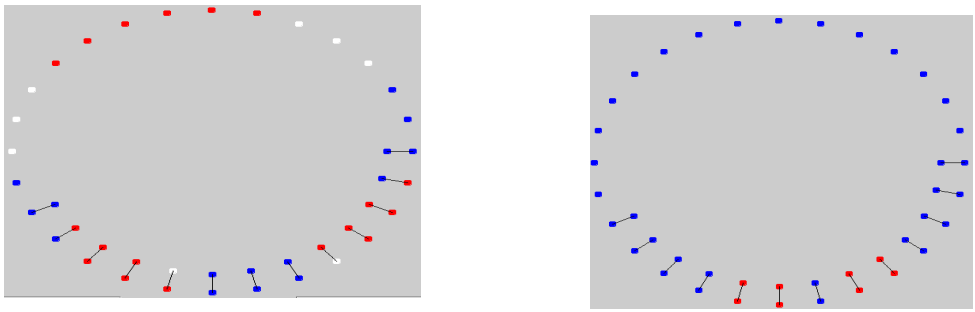


Figure C.7 Configuration évoluant à période 9. Sur le graphique de gauche, en rouge, on fait apparaître les nœuds qui participent de cycles de taille inférieure ou égale à 4 dans l'arbre des ascendances, en bleu les autres nœuds. Le graphe est un anneau de taille 28 avec 13 nœuds associés.

Dans cette configuration, deux sources sont mises en évidence. Dans l'arbre des ascendances, ceci correspond au fait qu'il existe deux cycles et que toutes les branches se terminent par l'un ou l'autre de ces cycles. Les

deux sources évoluent de la même manière en passant par les états :

$$\begin{matrix} i+1 & i-1 \\ i & i-1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} i+1 & i-1 \\ i & i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} i+1 & i-1 \\ i+1 & i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} i-1 & i \\ i+1 & i \end{matrix}$$

Chacune des sous-structures d'anneau n'évolue pas indépendamment du reste de la structure ici : les deux sous-structures interagissent : elles oscilleraient avec une période de 12 si leurs évolutions étaient indépendantes. On constate que c'est la même séquence qui se reproduit toutes les 3 générations, à une bijection près. Ce n'est ici qu'une configuration possible pour un cas d'évolution période à 9. D'autres configurations cycliques produisant une période similaire sont possibles.

D'autres périodes sont possibles qui participent d'autres formes d'interaction entre des sources. Nomment, il est possible d'obtenir des cas pour lesquels on ne constate pas la reproduction constante de la même période à une bijection près et donc, des cas où la période n'est plus un multiple de 3 :

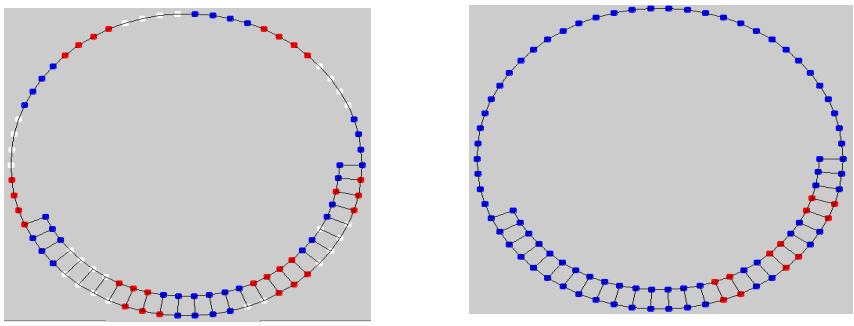


Figure C.8 Configuration évoluant à période 70. Le graphe est un anneau de taille 62 avec 28 nœuds associés.

Alors que dans les configurations présentées plus haut (périodes 12 et 9), les clusters de 4 nœuds-sources évoluaient de la même manière, ici, les clusters suivent des évolutions différentes et l'évolution de l'un est influencée par la diffusion des états de l'autre pour certaines transitions, ce qui explique que les sources ne soient pas synchronisées sur une période 12.

D'autres cas convergent vers des cycles plus longs :

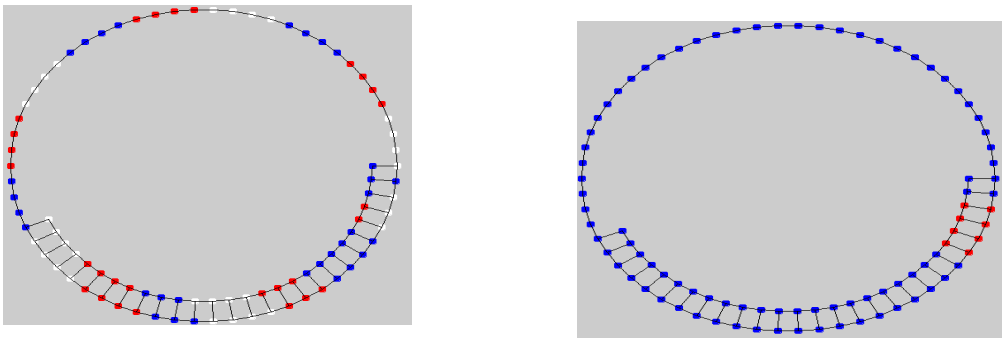


Figure C.9 Configuration évoluant à période 162. Le graphe est un anneau de taille 62 avec 28 nœuds associés.

En consultant le tableau C.1 des fréquences pour les différentes périodes, on constate que pour chacunes des nouvelles périodes, elle augmente avec le nombre de nœuds associés : à l'instar de ce qui a été dit pour la période 12, l'augmentation du nombre de nœuds associés constitue autant de nouvelles sous-structures pouvant potentiellement s'organiser pour devenir une source.

Généralisation

En complexifiant la structure, on a fait apparaître des sous-structures susceptibles d'osciller.

Le phénomène de convergence majoritaire est lié à **l'évolution d'un anneau de taille 4, sous-structure rendue possible par l'ajout de nœuds associés**. Une autre manière de décrire la structure précédemment obtenue est qu'on intersecte l'anneau avec un anneau de taille 4 et que la période de l'anneau de taille 4 s'impose au reste du graphe qui devient un espace de diffusion. Si plusieurs sous-structures se mettent à osciller, leurs interactions peuvent produire d'autres phénomènes, d'autres périodes.

Que se passe t-il si on généralise la notion en intersectant l'anneau avec un anneau de taille supérieure ? Dans [Dorat 08], on montre que si on intersecte deux anneaux sur deux nœuds, on a majoritairement convergence vers les périodes programmables sur l'anneau de plus petite taille qui sont données par le théorème B.8. De même, si on intersecte un anneau avec différents autres anneaux, on peut produire des périodes très diverses, à l'instar de l'obtention des périodes 70 ou 162 dans le paragraphe précédent.

De manière générale, les systèmes que l'on produit tendent à s'organiser en espace de diffusion et espace cyclique au sens strict. **Un petit ensemble de nœuds diffuse sa séquence d'états au reste du graphe. Les propriétés de cyclicité du système sont alors celles de cet ensemble de nœuds ou source. Dans le cas de l'évolution à période de référence 12, la source reproduit la même séquence d'états toutes les 4 générations, à une bijection près, cette propriété se retrouvant pour l'ensemble de la topologie.**

Les systèmes tendent à s'organiser en période courte, mais ce ne sont pas toujours les périodes les plus

courtes qui sont sélectionnées : alors que la période 9 est possible, la période 12 est plus probable. Ceci est notamment du au fait que la période 9 repose sur une organisation plus contrainte avec 8 nœuds-sources, quand la période 12 repose seulement sur 4 nœuds-sources.

D. Grilles toriques et cycles

On considère le cas des grilles toriques. Les évolutions cycliques et les périodes de l'anneau sont programmables. En effet, ainsi qu'il a été noté à la fin de la partie B, toute évolution d'un anneau de taille N peut être reproduite par une grille à Von Neumann de N lignes et K colonnes (ou K lignes et N colonnes). La probabilité de converger vers de telles configurations assimilables à celles de l'anneau est cependant extrêmement faible en partant d'initialisations aléatoires. Le phénomène cyclique majoritaire est similaire à celui mis en évidence dans la partie C. La figure suivante présente des états extraits d'un cycle de la période de référence pour des grilles.

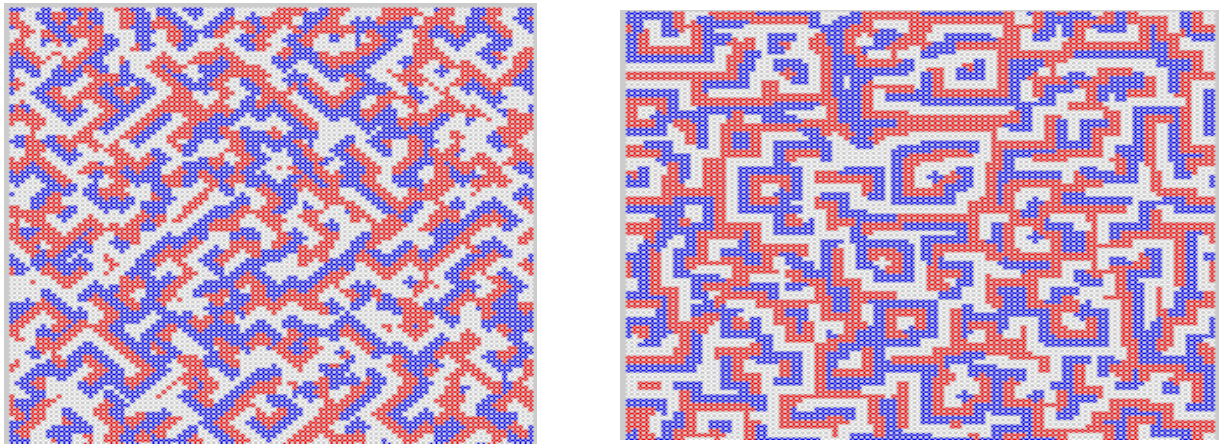


Figure D.1 : Cas de grilles 100×100, M=3, 100ème génération. A Gauche : le cas d'une grille de Von Neumann (évolution avec une période de 9) et à droite le cas d'une grille de Moore (évolution avec une période de 6).

Dans ce qui suit, on consacre la plupart des développements aux grilles de Von Neumann tout en sachant que des conclusions similaires seraient obtenues en partant des grilles à voisinage de Moore. Les grilles à voisinage de Moore tendent à converger vers une période de référence de 6, quand les grilles de Von Neumann tendent à converger vers une période de référence de 9. Les évolutions des grilles selon le mécanisme déterministe sont testables en utilisant l'applet http://rdorat.free.fr/Recherche/Applets/GoG.jar.

Le phénomène d'apparition d'une période de référence s'étend au cas des graphes non réguliers. Dans le cas de tous les graphes non réguliers testés (graphes modifiés selon une procédure de Watts et Strogatz, graphes aléatoires à la Érdos-Rényi, graphes à invariance d'échelle générés selon la procédure de Barabási et Albert), la convergence se

fait majoritairement vers une période de référence de 6. Ce résultat est également vrai dans le cas des graphes non réguliers de degré moyen 4. Or, les grilles de degré 4 produisent des systèmes à période 9. Dans l'évolution continue depuis la grille régulière vers les graphes aléatoires en passant par des graphes rewirés, il existe une valeur de la probabilité de réaffectation pour laquelle il y a une transition. Pour l'ensemble des grilles à degré moyen 4, on donne la probabilité de réaffectation des arcs telle qu'au dessus les cas convergent vers un système à période 6 et qu'en dessous, la période 9 se maintient.

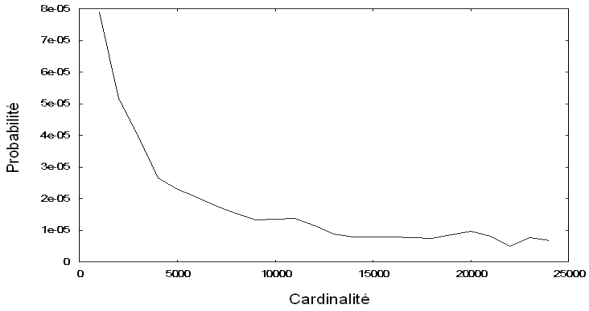


Figure D.2 : Pour chaque cardinalité, probabilité de réaffectation à partir d'une grille de Von Neumann telle qu'au dessus de cette probabilité, les graphes convergent majoritairement vers une période de 6, quand avec un taux de réaffectation inférieur, ils convergent majoritairement vers une période de 9.

Convergence sur des topologies non régulières

On établit quelques constats généraux, tant sur les grilles que sur les graphes aléatoires à partir des trois figures suivantes :

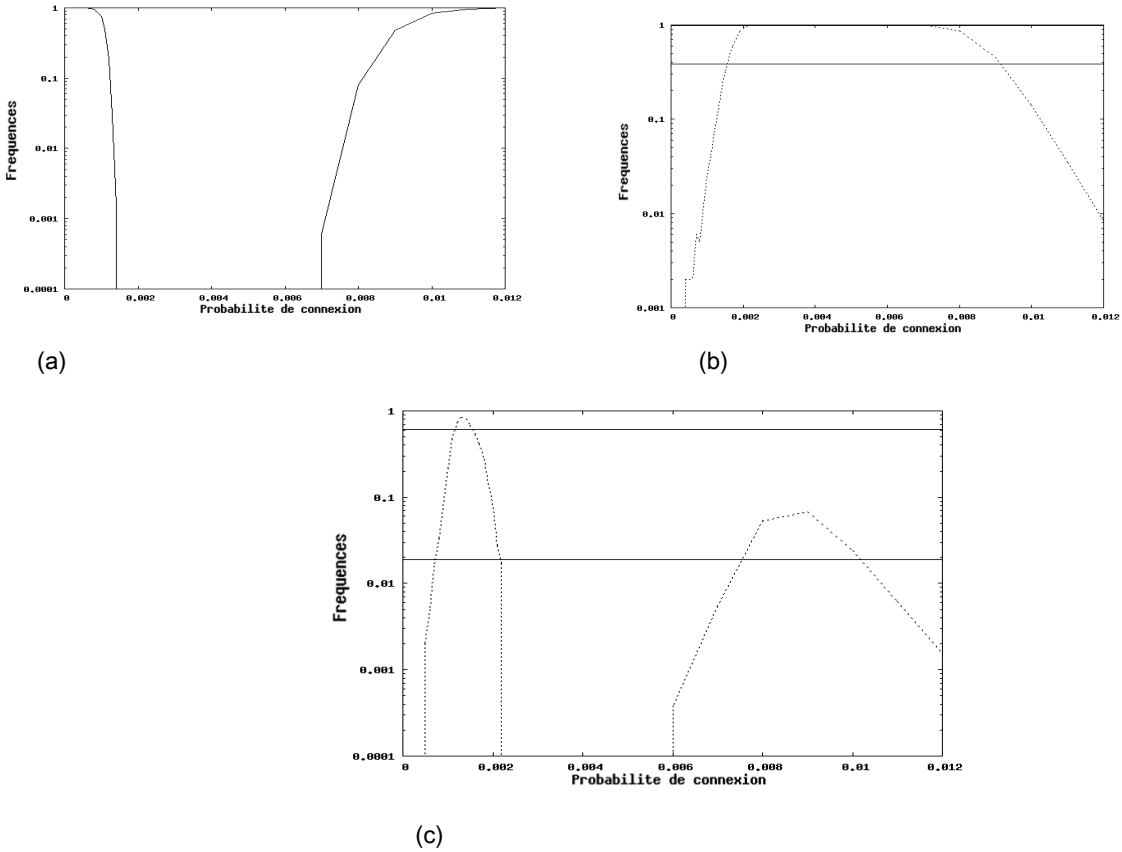


Figure D.3. Pour une cardinalité de 1000 nœuds. En abscisse, on fait varier la probabilité de connexion. Pour chaque probabilité, on génère 50000 graphes aléatoires initialisés aléatoirement et on fait converger le système. (a) Le premier graphique donne l'évolution de la fréquence de convergence vers un état stationnaire. Cette fréquence est nulle pour les grilles sur un ensemble de 50000 simulations. (b) Le second graphique donne l'évolution de la fréquence des cas convergeant vers la période de référence. Cette fréquence est 0.3875 pour les grilles de Von Neumann, c'est la courbe horizontale représentée sur le graphique. La fréquence est de 0.9812 pour les grilles de Moore. (c) Le troisième graphique donne l'évolution de la fréquence des cas convergeant vers d'autres périodes que la période de référence. Cette fréquence est 0.0188 pour les grilles de Moore et 0.6125 pour les grilles de Von Neumann, ce sont les deux courbes horizontales représentées.

La convergence vers la période de référence est beaucoup plus probable, à partir d'une initialisation aléatoire, dans le cas des grilles de Moore que dans le cas des grilles de Von Neumann (0.9812 contre 0.3875). Les grilles de Von Neumann induisent une forme de rigidité qui limite la convergence spontanée vers la période de référence. Cette différence se retrouve sur la diversité des périodes rencontrées sur le panel des 50000 simulations. Les périodes différentes de la période de référence sont beaucoup plus fréquentes dans le cas des grilles de Von Neumann : il est probable qu'une même diversité de périodes est programmable dans le cas des grilles de Moore, mais la convergence vers une période "originale" est beaucoup plus rare **du fait de la plus forte propension d'une grille de Moore à converger vers sa période de référence**.

Dans le cas des grilles de Von Neumann, non seulement la fréquence des périodes différentes de la période de

référence est supérieure à ce qu'elle est pour le cas des grilles de Moore, mais le nombre des périodes rencontrées l'est aussi. Ainsi, pour les grilles de Moore, sur le panel des 50000 tests réalisés pour établir la figure précédente, on tombe sur 8 périodes possibles réparties dans [6:684] (dont 83% de périodes multiples de 3) tandis que pour les grilles de Von Neumann, on tombe sur 95 périodes possibles réparties dans [6:1056] (dont 66% de périodes multiples de 3).

Pour les graphes aléatoires, on constate que la probabilité de converger vers la période de référence est forte pour les cas où la probabilité de connexion est comprise dans [0.0018:0.008]. Au sein de cet intervalle, la probabilité de converger vers une période différente de la période de référence est très faible. Autour de cet intervalle, la probabilité de converger vers une période autre est forte sur les intervalles [0.001:0.0018] et [0.008:0.01]. Cependant, la diversité des périodes est beaucoup plus importante sur le premier intervalle que sur le second. Pour 0.0012, on obtient 238 périodes réparties sur [6:6900] alors que pour 0.009, on obtient 19 périodes réparties dans [6:105]. **Plus le système est connecté, plus il tend à s'organiser selon des cycles courts et de manière uniforme,** à l'instar de la différence entre les grilles de Moore et les grilles de Von Neumann.

Pour la convergence vers la période de référence qui est la plus fréquente, elle a une propriété complémentaire constatée dans tous les cas de convergence, pour tous les graphes. Non seulement, le graphe tend vers une période de référence qui est toujours un multiple de M=3 mais, en plus, chaque état se reproduit périodiquement toutes les périodes/3 générations à une bijection près. Pour le cas des grilles de Moore, dont la période de référence est 6, ceci signifie que le 6ème état du cycle est le 4ème état du cycle avec chaque nœud qui a avancé d'un état, le 4ème état du cycle étant lui même équivalent au 2ème état du cycle avec chaque nœud qui a évolué une fois. Au niveau des nœuds, cela signifie que chaque nœud évolue toutes les 2 générations et **que c'est toujours la même transition qui s'applique : la diffusion se fait toujours par les mêmes nœuds. Cette propriété se vérifie pour l'ensemble des graphes testés : une configuration cyclique à période de référence de 6 correspond à deux états se répétant à une bijection près toutes les 2 générations (cas d'une grille de Moore), une configuration cyclique à période de référence de 9 correspond à trois états se répétant à une bijection près toutes les 3 générations (cas d'une grille de Von Neumann)**. Là encore, ce résultat a été constaté expérimentalement sur l'ensemble des évolutions périodiques obtenues et il ne préjuge pas du fait qu'existent des évolutions cycliques à période de référence ne présentant pas cette propriété ou des constructions de graphes convergeant massivement vers une période de référence, sans qu'il y ait cette aspect d'équivalence des états entre eux. Cette propriété des attracteurs cycliques à période de référence a une conséquence sur l'organisation constatable topologiquement. Par exemple pour les grilles de Moore, pour lesquelles chaque nœud évolue toutes les deux générations, chaque nœud d'état i doit être au plus à distance 2 d'un nœud de type i+1. Cette forme de cycle avec reproduction périodique des états toutes les périodes/3 générations, à une bijection près, se retrouve pour toutes les périodes multiples de 3.

Arbres des ascendances et isolement des sources

En construisant l'arbre des ascendances des graphes ayant convergé vers la période de référence, on constate l'apparition de cycles courts, à l'instar de ce qui a été observé dans la partie précédente avec les anneaux à nœuds associés. La figure suivante donne à gauche un état du cycle d'une grille et à droite les nœuds qui participent de cycles de taille 3 ou 4 au maximum dans le graphe des ascendances. Ces nœuds-sources ont été colorés en rouge.

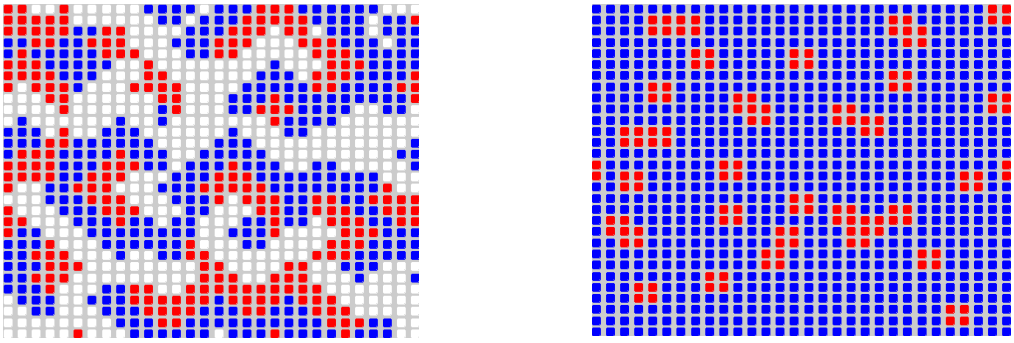


Figure D.4 : La première copie d'écran correspond à une grille de Von Neumann de période 9. Sur le même système, la deuxième copie d'écran représente en rouge les nœuds qui participent d'un cycle de taille au plus 4 dans l'arbre des ascendances.

Les nœuds participant de cycles apparaissent logiquement organisés en amas. Tous ces amas ne sont pas équivalents. En conservant les états pour les nœuds d'un amas et pour un voisinage d'une certaine taille autour de ces nœuds et en reportant ces états sur une grille où tous les autres états sont initialisés de manière uniforme, on peut obtenir une organisation périodique de l'ensemble du graphe à partir de certains amas. On relance la simulation en extrayant l'amas de taille la plus importante, un voisinage de taille 2, et en initialisant le reste du graphe de manière uniforme :

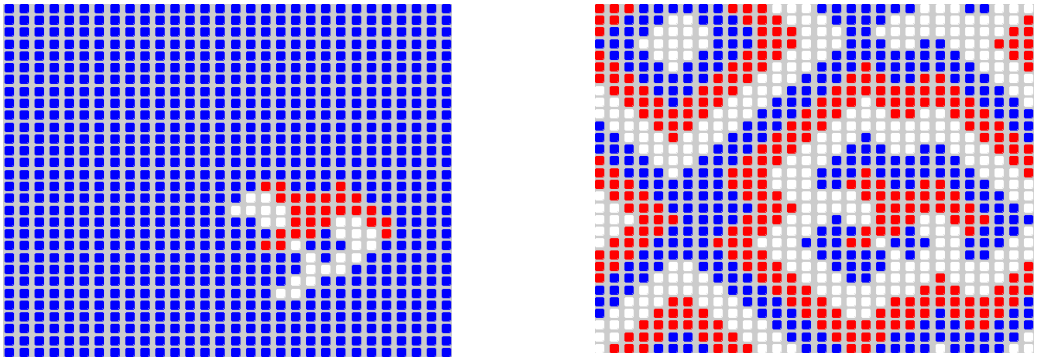


Figure D.5 : A gauche le système initialisé par l'amas extrait et un voisinage proche, à droite, l'état du système ayant convergé. Le système converge vers un cycle de période 9.

On constate l'apparition d'un phénomène cyclique sur la nouvelle configuration générée avec une période 9, soit la période de la configuration dont a été extrait le cluster. Cette démarche peut être répétée sur les autres sources du graphe initial. Ce faisant, on obtient des grilles qui convergent vers la période de la configuration dont on a extrait l'oscillateur, des grilles qui convergent vers un état stationnaire et des grilles qui convergent vers d'autres périodes que la période de référence. Dans le cas des grilles à voisinage de Von Neumann, les premières études ont permis de mettre en évidence deux types de sources qui apparaissent fréquemment : des sources à période 9 et des sources à période 12. La figure suivante illustre l'évolution complète d'une structure extraite depuis une configuration ayant convergé vers la période de référence :

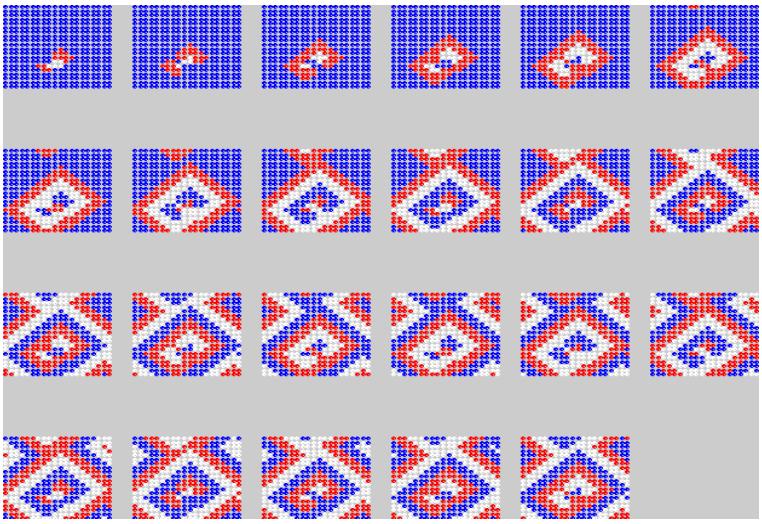


Figure D.6 : illustration de l'évolution vers un cycle de période 9 depuis un oscillateur extrait d'une configuration ayant convergé vers une période 9.

L'oscillation se développe depuis le cluster initial et le cycle du cluster s'impose au graphe. Il est également possible de procéder à une initialisation avec un cluster qui ferait osciller le graphe avec une période 12 s'il était seul et un autre qui la ferait osciller avec une période 9 s'il était seul sur la grille vierge :

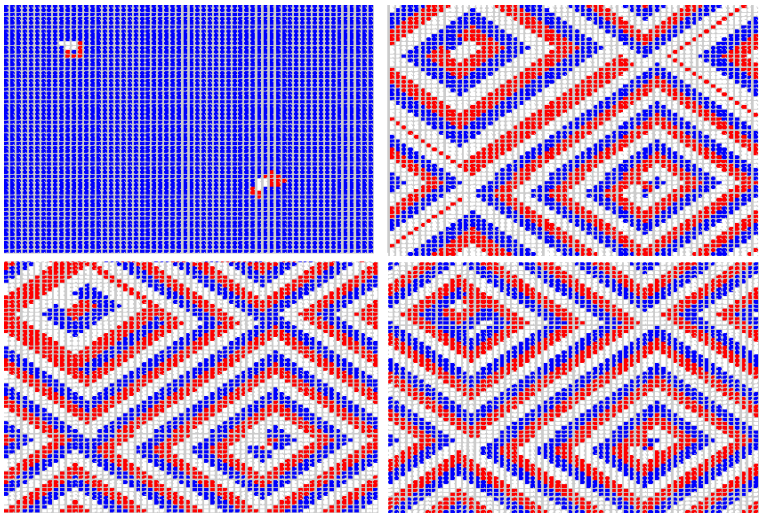


Figure D.7 De gauche à droite et de haut en bas : Générations 0, 50, 142, 202 (première génération périodique). Ici on initialise le système avec un générateur de cycle à 12 en haut à gauche et un générateur de cycle à 9 en bas à droite. 202 est la première génération périodique pour un cycle de 9

La période 9 s'impose ici. La séquence de nœuds i i-1 i correspond à la frontière des espaces de diffusion des deux clusters. Au cours des générations, la distance de cette frontière au cluster cyclique de période 12 initiale (en haut à gauche) diminue jusqu'à ce que le cluster de 12 soit modifié par la diffusion depuis le cluster de 9. Dans l'état final, le cluster de 12 est devenu un oscillateur de période 9. A partir de cette expérience, on pourrait faire l'hypothèse que l'augmentation de la probabilité de la période de référence avec l'augmentation de la cardinalité provient de l'augmentation de la probabilité de voir apparaître des sources à période de référence qui vont modifier les autres sources.

On vient de constater que dans une initialisation avec plusieurs clusters de périodes différentes, il y a synchronisation sur une même période.

Convergence vers les évolutions périodiques

Pour chaque type de topologie, il est possible de chercher le délai à la convergence vers un cycle oscillant selon la période de référence. On donne le graphe du temps à la convergence pour le cas d'une grille de Moore en fonction de la cardinalité :

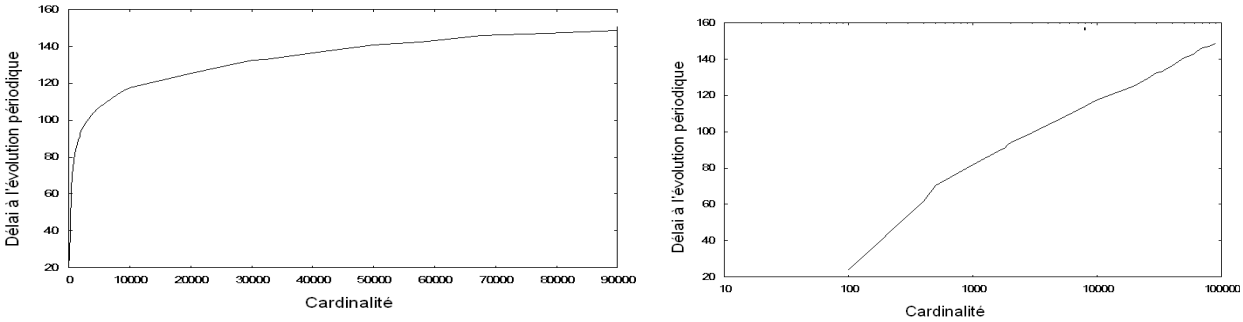


Figure D.8 : Évolution du temps au régime périodique en fonction de la cardinalité, cas d'une grille de Moore . A droite, la même courbe en échelle logarithme sur les abscisses.

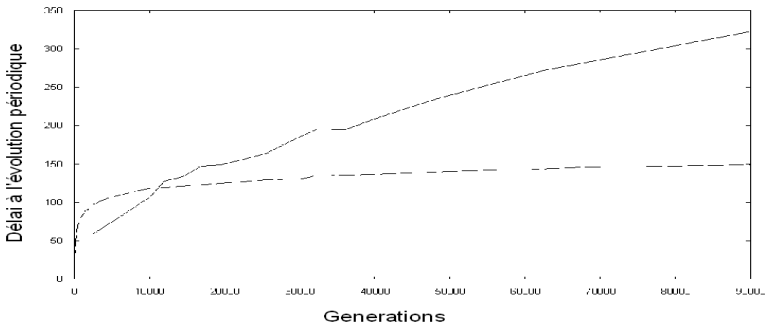


Figure D.9 : Évolution comparée du temps moyen à la convergence dans le cas des graphes aléatoires (trait plein) et des grilles (pointillés) pour le degré moyen 8. Le temps de convergence augmente plus vite dans le cas des graphes aléatoires.

La forme logarithmique, qui se confirme dans le cas des grilles de Von Neumann, n'est pas totalement expliquée dans ce qui suit, néanmoins, on donne une intuition sur une voie d'explication. On reporte sur le graphique suivant les résultats de l'expérience suivante : pour différentes cardinalités, on initialise 100 grilles vierges avec K clusters oscillants à la période 9 placés de manière aléatoire au sein d'un graphe où l'ensemble des autres nœuds est initialisé de manière uniforme. Cette démarche est similaire à celle illustrée dans la figure D.5 à ceci près qu'il n'y a pas 1 mais K clusters oscillants après l'initialisation du graphe. On calcule le temps moyen à la cyclicité. Le graphique donne deux courbes : l'une correspond à K=10, l'autre à K=15.

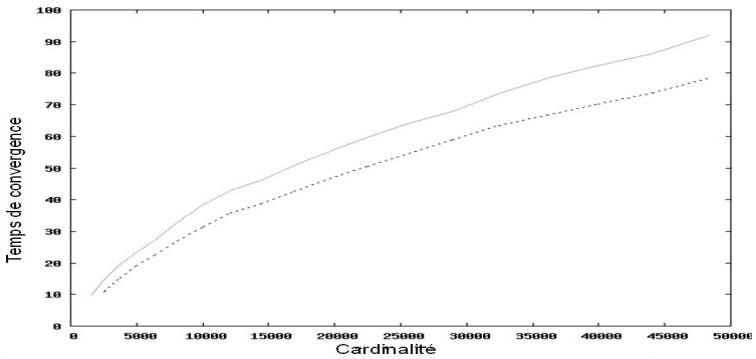


Figure D.10: Évolution du temps à la convergence en initialisant une grille vierge avec respectivement 10 et 15 clusters oscillants à la période 9. Le résultat est établi pour une grille de Von Neumann.

On constate que les temps de convergence obtenus présentent une forme logarithmique à l'instar du temps de convergence observé sur la figure D.8. Cet effet serait encore renforcé en prenant en compte le fait que plus la grille est importante, plus il y a d'oscillateurs qui émergent. La forme logarithmique du temps de convergence semble donc un phénomène directement lié à l'organisation locale en clusters oscillants.

Si l'explication donnée semble relever d'une intuition correcte, on est loin d'une explication complète du phénomène observé.

E. Généralisations des résultats

Généralisation sur le nombre des états M

Dans ce qui précède, les propriétés ont été établies pour M=3. Par exemple, dans la démonstration de la propriété B.2, on montre que la séquence de clusters [i+1][i][i+1] n'est pas possible et la démonstration repose notamment sur le fait que pour 3 états, [i+1][i-1][i+1] est équivalent à [i+1][i][i+1]. Cependant une généralisation des propriétés B.1 et B.2 semble possible en formulant qu'il est impossible d'avoir une séquence [i][i+1][j] si j est différent de i +2[M]. Dans ce cas on retrouve une condition nécessaire similaire à celle correspondant aux propriétés B.1 et B.2.

A l'instar de cette généralisation des propriétés B.1 et B.2, il serait possible de généraliser chacunes des autres propriétés de la partie B. Sans s'astreindre à cet exercice, on se contente d'une approche expérimentale. On teste les périodes obtenues pour un anneau de cardinalité 71 avec M=4.

Si on lance une recherche massive sur 10000 initialisations aléatoires, on trouve une probabilité de 0.9 de converger vers un équilibre stationnaire contre une probabilité de 0.1 de converger vers un cycle de période 71. En forçant l'initialisation avec seulement des clusters de 2 et des clusters de 1, on retrouve un système convergeant vers

une période 284, soit cardinalité×M, à l'instar de la convergence vers 3×cardinalité pour le cas des initialisations avec des clusters de taille 2 et 1 dans le cas de cardinalités non multiples de 3.

Il semble donc que les premières propriétés constatées pour M=3 sont toujours vraies pour M=4. A priori, la généralisation des résultats devrait pouvoir tenir sur l'ensemble des résultats présentés.

Réinterpréter le mécanisme déterministe : le jeu sur une matrice et variations possibles

Le mécanisme déterministe introduit dans cette section peut être réinterprété à partir d'une matrice de jeu. Soit la matrice classique associée au jeu RPS :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de cette matrice, on peut associer un score à chaque nœud : son score est la somme des scores obtenus dans les rencontres individuelles avec ses voisins. Le critère d'évolution utilisé dans les parties précédente : "un nœud évolue s'il a plus de voisins i+1[M] que de voisins i-1[M]" est alors équivalent au critère d'évolution suivant : **un nœud évolue si son score est strictement négatif**. On envisage alors de conserver ce nouveau mécanisme déterministe en faisant varier les coefficients de la matrice.

Modifications sur la diagonale de la matrice

Ce qui suit traite des modifications obtenues en rajoutant des spécifications sur la diagonale de la matrice des scores. Les matrices étudiées conservent la symétrie et sont de ce type :

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Il est possible de déterminer les valeurs candidates à un changement de comportement du système global. Soit un nœud de type i, si on note x_i son nombre de voisins de type i , son score est alors :

$$ax_i + x_{i+1} + x_{i-1}$$

Le changement de comportement est susceptible de se produire autour de valeurs de a qui annulent cette quantité :

$$ax_i + x_{i+1} + x_{i-1} = 0$$

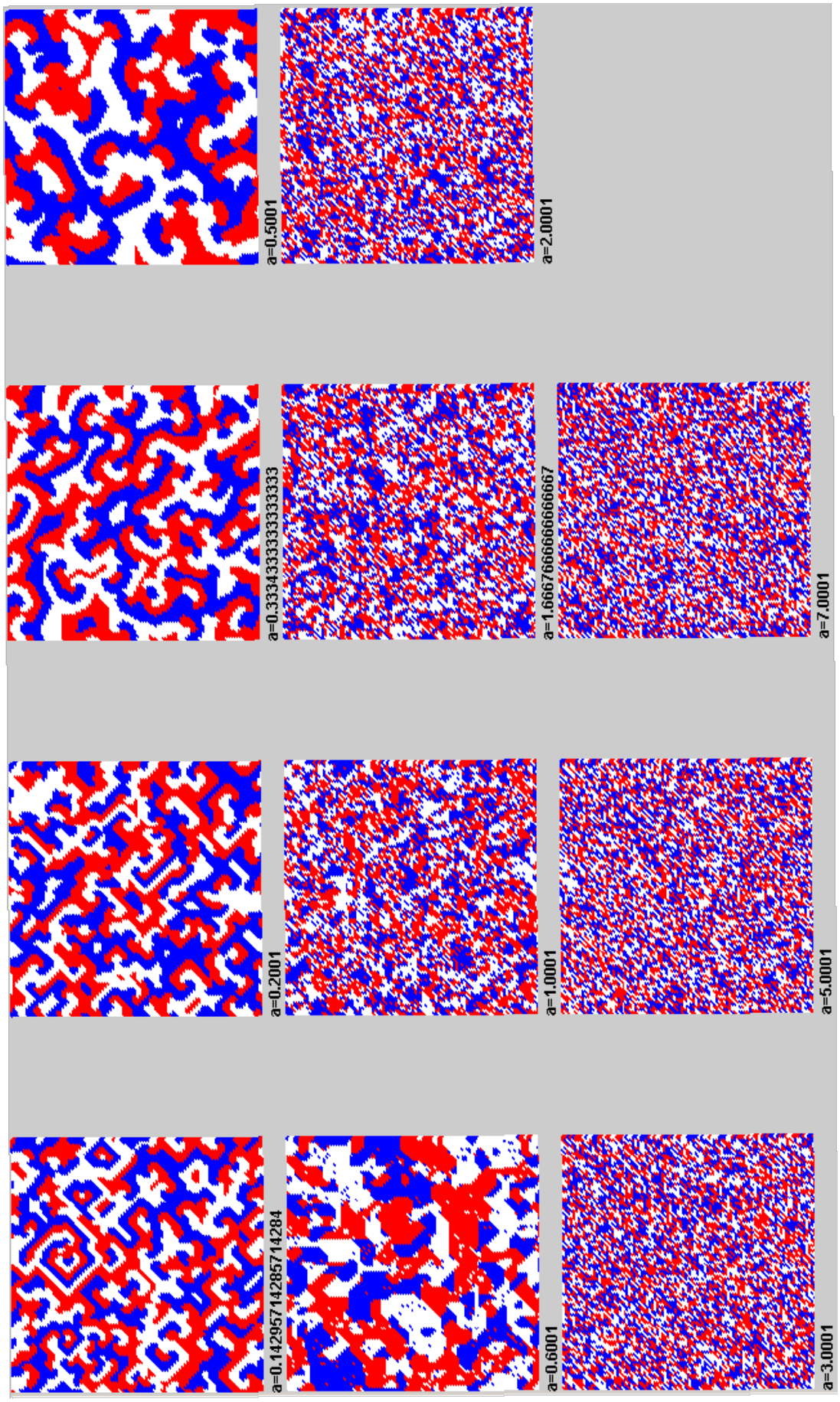
Dans le cas d'un graphe régulier où chaque nœud a le même nombre de voisins noté d, on a l'égalité :

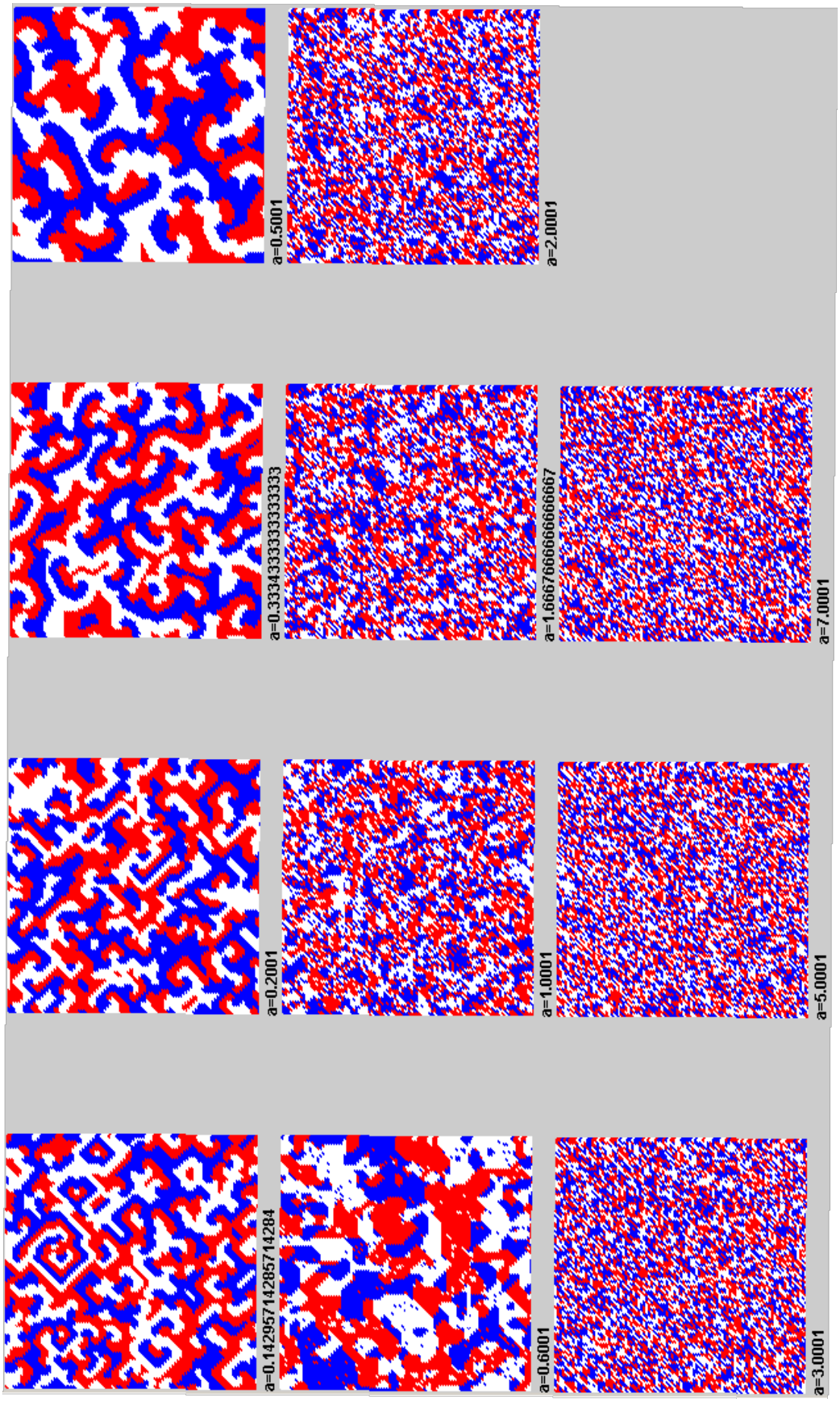
$$d = x_i + x_{i+1} + x_{i-1}$$

Donc, les valeurs transitions pour le comportement global du système sont les valeurs a telles que :

$$a=\frac{d-x_i-2\mathrm{x}_{i+1}}{x_i}$$

Il est alors possible de déduire une série de valeurs de transitions. Pour chaque couple de valeurs x_i, x_{i+1} / $x_{i+1}+x_i \leq d$, on peut trouver une valeur de transition différente. On établit l'ensemble de ces valeurs pour d=8 dans le cas d'une grille de Moore et on lance l'évolution pour ces valeurs :


a=0.1429571428571428 4
a=0.2001
a=0.333433333333333 3
a=0.5001
a=0.6001
a=1.0001
a=1.6667666666666667
a=2.0001
a=3.0001
a=5.0001
a=7.0001


a=0.5001
a=2.0001
a=0.333433333333333
a=1.66676666666667
a=7.0001
a=0.2001
a=1.0001
a=5.0001
a=0.142957142857142 84
a=0.6001
a=3.0001

Intervalle	Période moyenne	Temps de convergence moyen
$]\ inf\,;-7\ [$	3	6.69
$[\ -7\,;-5\ [$	3	5.6
$[\ -5\,;-3\ [$	3	12
$[\ -3\,;-2\ [$	3	24.4
$[\ -2\,;-\frac{5}{3}\ [$	9	435.7
$[\ \frac{-5}{3};-1\ [$	8.4	356.6
$[\ -1\,;-\frac{3}{5}\ [$	11.2	553
$[\ \frac{-3}{5};-\frac{2}{5}\ [$	6	527.9
$[\ \frac{-2}{5};-\frac{1}{3}\ [$	6	33.8
$[\ \frac{-1}{3};-\frac{1}{5}\ [$	6	24.4
$[\ \frac{-1}{5};-\frac{1}{7}\ [$	6	17.1
$[\ \frac{-1}{7};0\ [$	6	17.4
$[\ 0\,;\frac{1}{7}\ [$	6	108.9
$[\ \frac{1}{7};\frac{1}{5}\ [$	759.3	965.4
$[\ \frac{1}{5};\frac{1}{3}\ [$	852	1661.2
$[\ \frac{1}{3};\frac{1}{2}\ [$	23.6	584.5
$[\ \frac{1}{2};\frac{3}{5}\ [$	39.15	829.05
$[\ \frac{3}{5};1\ [$	1	54.3
$[\ 1;\frac{5}{3}\ [$	1	10
$[\ \frac{5}{3};2\ [$	1	6.8
$[\ 2\,;3\ [$	1	5.2
$[\ 3;5\ [$	1	3.2
$[\ 5;7\ [$	1	1.9
$[\ 7\,;inf\ [$	1	1

Tableau E.4 : les évolutions de la période en fonction des conditions d'évolution. La zone grisée correspond au mécanisme défini dans la partie A. La simulation est faite sur 100 systèmes à chaque fois.

Pour des valeurs $a>\frac{3}{5}$, on a une période de référence de 3, dans ce cas, chaque nœud d'état i a un voisin i+1[3], chaque nœud évolue à tout instant et le passage d'une génération à l'autre correspond à l'évolution de tout nœud d'état i vers l'état i+1. Pour le cas des valeurs fortes, l'organisation clusterisée qui apparaît dans les premières générations garantit qu'il n'y ait plus d'évolution des nœuds. La plage des situations intermédiaires est diverse, les temps moyens de convergence les plus longs sont ceux des situations de transition de périodes : entre les périodes 3 et 6, entre les périodes 6 et 1. Par exemple, pour $[\ \frac{-3}{5};-\frac{2}{5}\ [$, il y a un temps de convergence de 527.9 en moyenne contre 17.1 pour $[\ \frac{-1}{5};-\frac{1}{7}\ [$.

Conclusion

La dynamique des populations en situation de dominance cyclique est modifiée par la répartition spatiale. Dans le cas où les agents interagissent avec N membres de la population tirés au hasard à chaque génération, il y a synchronisation. Szabó et al. montrent qu'au contraire, si chaque agent interagit toujours avec les N mêmes voisins, la population peut converger vers des cycles limites ou des états stationnaires maintenant la biodiversité [Szabó 04]. En passant d'une population dont les individus interagissent en choisissant leurs partenaires au hasard à chaque génération à une population où les relations sont fixes, on passe d'une convergence vers des cycles d'amplitude croissante à une convergence vers des cycles limites ou des états stationnaires. Dans la section 1, on mène une étude complémentaire qui montre l'évolution de la dynamique des populations en augmentant le degré des graphes jusqu'au graphe complet pour lequel il y a synchronisation. On constate qu'entre les niveaux de degré moyen pour lesquels on n'observe pas le phénomène de synchronisation et ceux pour lesquels on l'observe il y a une différence dans la capacité d'absorber les chocs : dans le second cas en effet, l'augmentation de la taille d'un cluster est cumulative : la probabilité qu'une telle augmentation soit amplifiée jusqu'à la convergence est forte alors qu'un choc est généralement absorbé et disparaît pour des degrés moyens plus faibles.

Le maintien théorique de la biodiversité par la répartition spatiale à raison d'une stratégie par nœud est utilisée par certains auteurs pour expliquer le comportement des populations de bactéries Escherichia Coli [Kerr 02]. D'autres formes d'interactions biologiques peuvent inspirer d'autres modèles. Par exemple, au sein d'une population de souris, chacune peut être vue comme une colonie de bactéries. Les contacts entre elles sont l'occasion d'échange de quelques bactéries. En modélisant cette situation sous la forme d'un réseaux de communauté où chaque communauté évolue indépendamment mais où les communautés échangent entre elles un certain nombre de stratégies, on peut faire apparaître de nouvelles formes dynamiques. On constate notamment que quelque soit le choix de la topologie (graphe complet ou graphe avec peu de liens), la biodiversité est toujours maintenue. Chaque communauté tendrait indépendamment à se synchroniser, mais les liens entre les communautés les désynchronisent. Il apparaît des fluctuations cycliques dans la population globale lorsque l'ensemble des stratégies de chaque communauté sont redistribuées vers les communautés voisines sans que ce constat n'ait été expliqué.

Dans le cas des systèmes déterministes étudiés dans la section 2, on constate une forte propriété d'auto-organisation. A partir d'initialisations aléatoires, le système s'organise : des sous-structures oscillent et imposent leur oscillation au reste du graphe. Les propriétés des sous-structures oscillantes s'imposent au reste du graphe. Notamment ces sous-structures oscillantes convergent généralement vers des périodes multiples de M, le nombre de comportements, du fait de la symétrie des comportements utilisés. La période majoritaire reste la même quelle que soit

la taille du graphe : la probabilité de converger vers cette période augmente avec la taille du graphe. En effet, avec l'augmentation de la cardinalité augmente également la probabilité d'émergence d'une structure d'oscillation de faible période qui s'impose au reste du graphe. L'organisation en sous-structures oscillantes permet d'expliquer l'évolution logarithmique du temps de convergence en fonction de la cardinalité du graphe.

Les perspectives théoriques dégagées ici pourraient être poursuivies pour interpréter les phénomènes qui apparaissent dans des populations de stratégies qui se dominent cycliquement sans que les stratégies soit équivalentes. Notamment, on peut ici faire la conjecture que l'équivalence des stratégies empêche que le système déterministe connaisse des évolutions chaotiques ie à période extrêmement longues.

Chapitre IV. Répartition spatiale et dynamiques cycliques

Résumé

Le chapitre étudie l'émergence de dynamiques cycliques dans des populations de stratégies déterministes jouant le dilemme du prisonnier itéré. De nombreux travaux ont été consacrés aux cycles qui émergent pour des matrices de taille 3×3 ou de taille supérieure sous l'hypothèse d'une dynamique évolutionnaire. Ces matrices peuvent synthétiser l'interaction de plusieurs stratégies du dilemme du prisonnier itéré [Imhof 05] ou l'interaction des comportements du dilemme simple, C, D auxquels on rajoute le comportement L-solitaire [Michor 02]. Dans tous les cas présentés, ce qui fonde la dynamique c'est qu'un comportement A privilégie un comportement B qui privilégie un comportement C qui privilégie A : on dit que les comportements se dominent cycliquement. Certains articles procèdent à une recherche systématique d'ensembles de 3 ou 4 comportements produisant des évolutions cycliques [Mathieu 00] à partir d'un ensemble donné de comportements du dilemme du prisonnier itéré. Sur les cas d'évolutions cycliques qui sont mis en évidence dans la littérature, on constate que **c'est toujours le principe de dominance cyclique entre les comportements de la matrice qui fonde l'apparition de cycles**. Le présent chapitre met en évidence des dynamiques cycliques qui ne reposent pas sur une relation de dominance cyclique entre les stratégies, mais sur la répartition topologique des stratégies.

La section 1 reprend les résultats établis dans la littérature et présente les évolutions cycliques qui sont susceptibles d'apparaître dans le cas de populations de stratégies interagissant selon des matrices 3×3 et plus spécifiquement, dans le cas de comportements du dilemme du prisonnier itéré. La section traite de la forme des matrices qui produisent des évolutions cycliques ainsi que de l'impact de la taille de la population totale sur la simulation du phénomène cyclique.

La section 2 étudie **l'impact de la répartition spatiale sur le phénomène cyclique**. Dans les études précédentes, dont certaines sont référencées au chapitre III, les auteurs partent de populations qui produisent des évolutions cycliques sans être réparties spatialement et étudient le changement dans la dynamique avec la répartition spatiale. Dans le chapitre précédent, on a en effet évoqué le fait que la répartition spatiale permet de passer d'une dynamique de synchronisation pour des populations non réparties à une dynamique de convergence vers des cycles limites ou des états stationnaires, en fonction de la forme de la répartition spatiale. Les résultats ont été établis en partant d'une population produisant des cycles même lorsqu'elle n'est pas répartie. Au contraire, la démarche de la section 2 du présent chapitre consiste à mettre en évidence des cas de cycles qui sont liés à la répartition en réseaux de communautés. On part d'un ensemble de comportements jouant le dilemme du prisonnier itéré. Pour cet ensemble de

comportements interagissant au sein d'une population non répartie, une recherche systématique permet de mettre en évidence un certain nombre de cas d'évolutions cycliques. La démarche consiste à considérer chaque triplet de comportements possibles au sein de l'ensemble des comportements et à simuler l'évolution d'une population de stratégies adoptant l'un ou l'autre de ces 3 comportements. Pour un petit nombre de triplets, la convergence va se faire vers un cycle limite. En revanche, la majeure partie des comportements n'apparaît dans aucun triplet produisant des évolutions cycliques. La section 2 propose une démarche de recherche systématique de même nature, mais à partir d'une population de stratégies réparties sur un réseau. On montre qu'**en répartissant les comportements sur une topologie très simple de deux communautés liées et en effectuant la redistribution des effectifs au sein de chaque communauté et non plus de la population totale, il devient possible, pour tout comportement, de trouver une configuration qui le fait osciller**. A ce résultat qualitatif s'ajoute un résultat quantitatif : la répartition spatiale et la redistribution des comportements au sein de chaque communauté produit plus de cas cycliques que la population non répartie.

Section IV.1.Matrices et cycles

A. Dynamique écologique et équilibre

Dynamique écologique

La théorie des jeux évolutionnaires étudie les dynamiques de populations dont les rapports sont définis par les matrices de gain extraites de la théorie des jeux. L'objectif est d'obtenir des résultats sur les dynamiques de populations dont les interactions peuvent être modélisées par des dilemmes classiques de la théorie des jeux. La présente section s'intéresse plus particulièrement aux **dynamiques cycliques de populations de stratégies** et aux caractéristiques des matrices, ou stratégies, qui produisent de telles évolutions.

On utilise une dynamique écologique similaire à celle employée dans le chapitre II, à la différence près que le score n'est pas pris comme le score moyen ici.

On considère une population non repartie à N comportements et telle que les effectifs entiers par comportement sont, à la génération t : $e_1^t, e_2^t, \dots, e_N^t$. Soit M la matrice du jeu telle que $M_{i,j}$ est le score du comportement i contre le comportement j. Dans ce cas, le score d'une stratégie de comportement i de la population est, à la génération t :

$$score_i^t = \sum_{j=1}^{N} e_j^t \times M_{i,j} - M_{i,i} \qquad (A.1)$$

Le calcul du score traduit le fait qu'une stratégie interagit avec chacune des stratégies de la population, sauf elle-même. On en déduit la part du comportement dans la population totale pour la génération suivante :

$$p_i^{t+1} = \frac{score_i^t \times e_i^t}{\sum_{j=1}^{N} score_j^t \times e_j^t} \qquad (A.2)$$

On en déduit les valeurs réelles des effectifs, en notant par $T = \sum_{j=1}^{N} e_j^t$ la population totale :

$$x_i^{t+1} = \frac{score_i^t \times e_i^t}{\sum_{j=1}^{N} score_j^t \times e_j^t} \times T \qquad (A.3)$$

En arrondissant les x_i^{t+1} à l'entier le plus proche, on obtient les valeurs des e_i^{t+1} pour la génération suivante. Avec l'équation $(A.3)$, la part d'un comportement dans la population totale correspond à la part du score des stratégies ayant adopté ce comportement dans le score total de la population de la génération précédente. A l'instar de la dynamique de réplication, cette dynamique produit des évolutions cycliques pour certaines matrices M.

Dans le cas d'un système produisant potentiellement des dynamiques cycliques, toute répartition initiale des effectifs ne converge pas nécessairement vers une situation cyclique. On parle de **système cyclique** pour la donnée d'une matrice et d'une valeur d'effectif total N telle qu'existent des valeurs d'effectif $e_1, e_2, \ldots, e_N$ à partir desquelles apparaissent des évolutions cycliques.

Les simulations étudiées le sont avec des effectifs entiers ici et non pas en fréquence. Arrondir les valeurs d'effectifs produit des attracteurs supplémentaires. Tel état $e_1^t, e_2^t, \ldots, e_N^t$ est un équilibre stationnaire à partir du moment où $\forall i \left| x_i^{t+1} - e_i^t \right| < 0.5$: aucun effectif n'évolue par le mécanisme d'arrondi à l'entier le plus proche. Le fait d'arrondir conduit donc à augmenter le nombre des états stationnaires du système. De la même manière, l'arrondi modifie le nombre des attracteurs cycliques, mais on ne peut pas déterminer si le fait d'arrondir augmente ou diminue le nombre des cycles. En effet, le fait d'arrondir risque de piéger la dynamique dans un état stationnaire et pour des effectifs totaux trop réduits, de faire disparaître un cycle en valeurs réelles. A l'inverse, si on suppose qu'existe un cycle en valeurs réelles, il peut exister plusieurs cycles en valeurs arrondies autour de ce cycle en valeurs réelles.

Effectuer les simulations avec des effectifs entiers est cependant fondé par l'impossibilité de l'alternative pour deux raisons. D'une part, en travaillant avec les fréquences de chaque comportement, on provoque quand même des arrondis sur les valeurs lors des simulations informatiques, ces arrondis étant la limite du codage des valeurs réelles par la machine et le langage retenu. D'autre part, la convergence vers un attracteur cyclique serait beaucoup plus difficile à

constater en utilisant des fréquences puisque le temps de simulation pour retomber sur des valeurs similaires en fréquence serait considérablement allongé.

Équilibre

Pour la dynamique présentée plus haut, on caractérise son équilibre L'équilibre est la situation où l'effectif n'évolue pas en passant de t à $t+1$, on le détermine en fréquence. L'équilibre est la situation telle que :

$$\forall i, x_i^t = x_i^{t+1}$$

L'équilibre correspond donc à un vecteur de fréquences $x_1, x_2, \ldots, x_N$ qui respecte N conditions $(1), \ldots, (N)$ de la forme de la condition (i), déduite de l'équation $(A.3)$:

$$x_i = \frac{score_i \times x_i}{\sum_{j=1}^{N} score_j \times x_j} \times \sum_{j=1}^{N} x_j \qquad (i)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=1}^{N} score_j * x_j = score_i * \sum_{j=1}^{N} x_j \qquad (i)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=1}^{N} (score_j - score_i) \times x_j = 0 \qquad (i)$$

Dans ce cas, on peut montrer que les conditions $(1) \ldots (N)$ impliquent :

$$score_1 = score_2$$
$$score_2 = score_3$$
$$\ldots$$
$$score_{N-1} = score_N$$

où $\forall i, score_i = \sum_{j=1}^{N} M_{i,j} \times score_j$

L'égalité des scores par comportement constitue une condition nécessaire à $(1) \ldots (N)$ mais représente également une condition suffisante pour $(1) \ldots (N)$, de sorte que cette condition est équivalente à $(1) \ldots (N)$ et donc le fait que les scores par comportement soient égaux deux à deux constitue une condition nécessaire et suffisante de l'équilibre.

Théorème 1

L'équilibre est un vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ de $\mathbb{R}^N$ tel que les scores par comportement sont égaux pour ces fréquences.

Chaque $score_i$ est une fonction linéaire des fréquences $x_1, x_2, \dots, x_N$. L'égalité des scores correspond donc à un système d'équations de $N-1$ équations à $N-1$ inconnues (l'effectif total étant constant, l'effectif des stratégies associé au comportement N est déterminé par les effectifs associés aux $N-1$ autres comportements). En général, les équations seront indépendantes et le système aura une **solution unique et donc un seul équilibre**. Pour les matrices que l'on considère dans la suite, on cherche à déterminer l'équilibre du système pour ensuite discuter des évolutions cycliques par rapport à cet équilibre. Le paragraphe suivant évoque les formes des matrices et les cycles qui peuvent apparaître en fonction des rapports entre les comportements dans la matrice.

B. Forme de la matrice et évolutions périodiques

Un premier résultat est donné dans le théorème suivant.

Théorème 2

Les évolutions de population sont monotones pour une matrice 2×2.

La démonstration de ce résultat est donné dans [Samy Modeliar 06]. Il implique notamment qu'il n'est pas possible de faire apparaître de cycle dans le cas des matrices 2×2. Il faut donc supposer au moins trois comportements et donc des matrices 3×3 pour voir apparaître des évolutions périodiques. On commence par considérer une matrice 3×3 qui produit des évolutions cycliques des populations puis on étudie la persistance des cycles en modifiant la forme de la matrice, l'objectif étant de trouver des **conditions minimales à l'apparition de cycles.**

Les phénomènes d'évolution cyclique ont principalement été étudiés dans le cadre d'un modèle de trois comportements équivalents ou comportements RPS (rock-paper-scissors) dans les travaux précédents. L'évolution d'une telle population est simulée à partir de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice proposée ici n'est pas une matrice RPS classique, mais une forme dérivée où tous les scores ont été augmentés de 1 pour ne pas tomber sur des dénominateurs nuls dans (A.2) ou (A.3). Avec cette matrice, les scores par comportement sont :

$$score_0 = 2 \times x_2 + x_0$$
$$score_1 = 2 \times x_0 + x_1$$
$$score_2 = 2 \times x_1 + x_2$$

La condition nécessaire et suffisante d'équilibre donnée par le théorème 1 est alors :

$$score_0 = score_1$$
$$score_1 = score_2$$

cette condition donne un équilibre en fréquence à $(x_{1,} x_{2,} x_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Les dynamiques engendrées par ce type de matrice sont étudiées par Sigmund et Hofbauer [Hofbauer 98]. Dans le cas de l'évolution de populations de stratégies au sein d'un effectif de taille finie, les dynamiques, que ce soit la dynamique écologique présentée plus haut ou la dynamique de réplication, conduisent à la convergence vers une population monomorphe avec seulement l'un des trois comportements présent à la fin de l'évolution. La fréquence de chaque comportement évolue cycliquement avec des cycles d'amplitude constante jusqu'à ce que l'un des comportements soit adopté par toutes les stratégies de la population. Dans le cas d'une population inifinie, le système est périodique et le produit des fréquences associées aux comportements est maintenu constant au cours de l'évolution. Que ce soit en population finie ou infinie, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est une situation d'équilibre, mais cet équilibre est instable.

Ainsi qu'indiqué plus haut, dans le cas de système à N comportements, le système peut être décrit par $N-1$ variables. Donc, il suffit de deux variables pour décrire le système dans le cas d'une matrice 3×3. Pour chaque comportement k, la condition d'équilibre de son effectif est :

$$\sum_{i=1}^{n} (score_k - score_i) \times e_i = 0 \qquad (A.4)$$

Soit en développant pour $k=1$:

$$e_2 \times (score_1 - score_2) + (N - e_1 - e_2) \times (score_1 - score_3) = 0$$

Comme $score_i$ est une fonction linéaire de l'ensemble des e_i, il est possible de réécrire la condition $(A.4)$ sous forme d'un polynôme de degré 2 et de le résoudre soit en e_1, , auquel cas, on obtient deux conditions sur e_2 de la forme $f_1(e_2)=e_1$, $f_2(e_2)=e_1$, soit de le résoudre en e_2, auquel cas, on obtient deux conditions sur e_1. De la même manière qu'on a obtenu cette expression en prenant $(A.4)$ avec $k=1$, on peut établir la condition d'équilibre des stratégies 2 et des conditions similaires en prenant $(A.4)$ pour $k=2$. On obtient alors deux fonctions $e_2=g_1(e_1)$ et $e_2=g_2(e_1)$. On obtient donc 4 courbes. 2 de ces courbes donnent la valeur d'équilibre de e_1 en fonction de la valeur de e_2, 2 donnent la valeur d'équilibre de e_2 en fonction de la valeur de e_1 . On trace les courbes dans l'espace $[0;N]\times[0;N]$. Le croisement des deux courbes à valeurs dans cet espace donne la valeur d'équilibre du système. Dans la figure suivante, le premier graphique donne une représentation de cet équilibre, le second est identique et on y rajoute une trace d'évolution. L'initialisation est légèrement différente de celle du point d'équilibre. Sur cette trace d'évolution, on constate effectivement une évolution cyclique avec une amplitude croissante, jusqu'à stabilisation en population monomorphe.

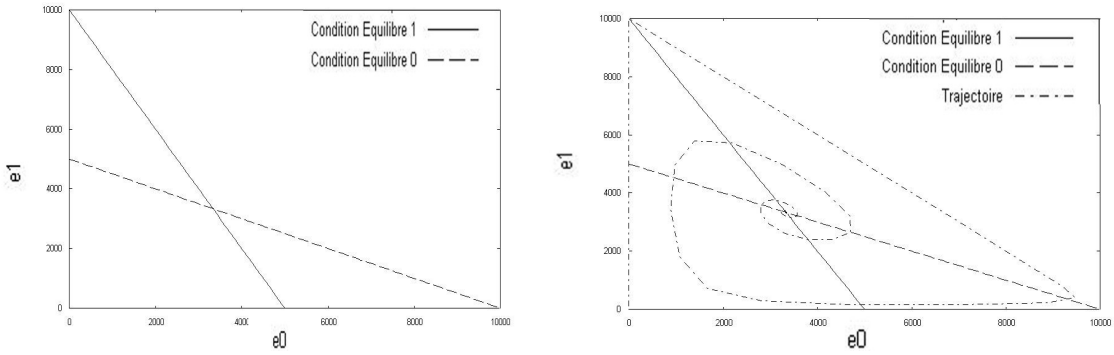


Figure B.1 : A partir d'une matrice RPS, le graphique de gauche illustre les courbes d'équilibre. Le graphique de droite rajoute une trace d'évolution sur ce graphique, le point de départ de cette évolution est e1=3330, e2=3335 pour une population totale de 10000.

L'évolution cyclique conduit à la disparition de deux des trois comportement avec une évolution vers des cycles d'amplitude croissante. Dans le cas de la simulation de cette population avec un effectif de taille finie, il n'est pas possible de trouver d'attracteur cyclique.

Des versions modifiées de la matrice des gains permettent d'obtenir des systèmes parfaitement périodiques en

population finie. En conservant l'équivalence des comportements, avec une matrice de type

$$\begin{pmatrix} b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

telle que $a<b<c$ (les mêmes rapports que dans la matrice RPS), il est possible de trouver des triplets de valeurs (a,b,c) pour lesquels on rencontre des attracteurs cycliques. Pour vérifier qu'effectivement des attracteurs cycliques existent avec une telle matrice, on a lancé une série de tirages aléatoires pour les valeurs de la matrice en prenant chaque coefficient dans $[0:1000]$. Pour chacune des matrices ainsi obtenues, on a lancé une évolution écologique à partir d'une situation proche de l'équirépartition pour une population de taille $1000(333,333,334)$. On a effectivement trouvé des valeurs (a,b,c) respectant la condition et produisant des évolutions cycliques.

En procédant de la même façon mais en relâchant encore la forme de la matrice des gains, on trouve de nouveaux cas de cycles : une matrice de type :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

avec les relations :

$$\begin{matrix} a_{1,2}<a_{1,1}<a_{1,3} \\ a_{2,3}<a_{2,2}<a_{2,1} \\ a_{3,1}<a_{3,3}<a_{3,2} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} a_{3,1}<a_{1,1}<a_{2,1} \\ a_{1,2}<a_{2,2}<a_{3,2} \\ a_{2,3}<a_{3,3}<a_{1,3} \end{matrix}$$

ou une matrice qui ne conserve que les relations

$$\begin{matrix} a_{3,1}<a_{1,1}<a_{2,1} \\ a_{1,2}<a_{2,2}<a_{3,2} \\ a_{2,3}<a_{3,3}<a_{1,3} \end{matrix}$$

peuvent faire émerger des évolutions cycliques pour certaines valeurs de la matrice et pour certaines valeurs des effectifs initiaux par comportement.

On considère le cas avec seulement les relations suivantes :

$$\begin{matrix} a_{3,1}<a_{2,1} \\ a_{1,1}<a_{2,1} \\ a_{1,2}<a_{3,2} \\ a_{2,2}<a_{3,2} \\ a_{2,3}<a_{1,3} \\ a_{3,3}<a_{1,3} \end{matrix} \qquad \text{(CI)}$$

Par une recherche massive sur une population de 10000 stratégies, on trouve des matrices qui respectent ces

conditions et conduisent à des évolutions cycliques. Soit par exemple la matrice :

674	110	786
819	298	598
503	917	669

La figure suivante est construite de la même manière que la figure B.1, à partir de la matrice ci-dessus :

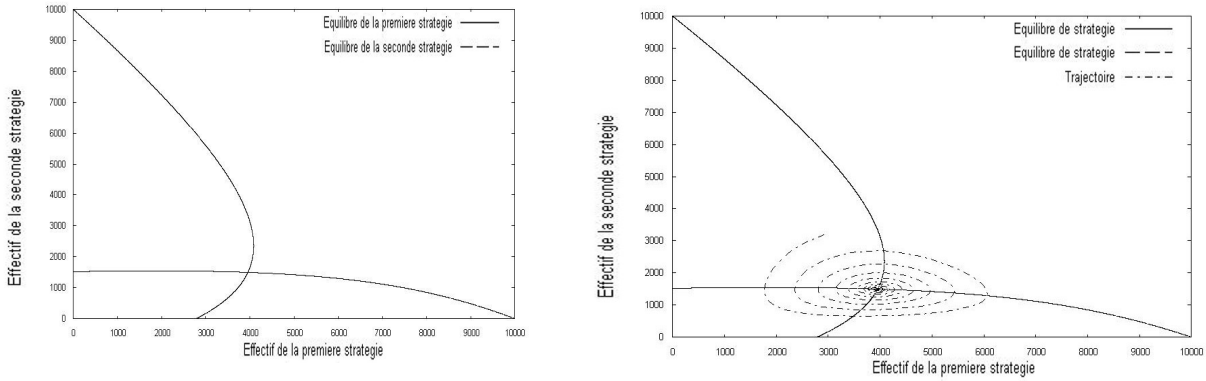


Figure B.2 : Évolution dans le cas d'une matrice ad-hoc produisant des cycles. En pointillés, est représentée la trajectoire à partir d'un point proche de l'équirépartition.

La figure de gauche donne les courbes représentant les conditions d'équilibre du système, la figure de droite rajoute une trajectoire partant d'un point proche de l'équirépartition. Le système converge vers un cycle limite.

L'ensemble de relations (CI) apparaît comme minimal au sens où dans la littérature sur le domaine, l'ensemble des évolutions cycliques dans le cas de trois comportements sont générées par une matrice répondant à cette condition. Il existe cependant des matrices avec 3 comportements qui ne respectent pas ce type de relation et produisent pourtant des cycles. Ces matrices ont été découvertes en initialisant des matrices au hasard et en testant les évolutions qu'elles provoquent. Sur un grand nombre de matrices testées (10^6), seuls les cas répondant aux conditions (CI) et les cas de la forme suivante donnent des cycles :

978	**662**	132
437	165	**751**
877	255	533

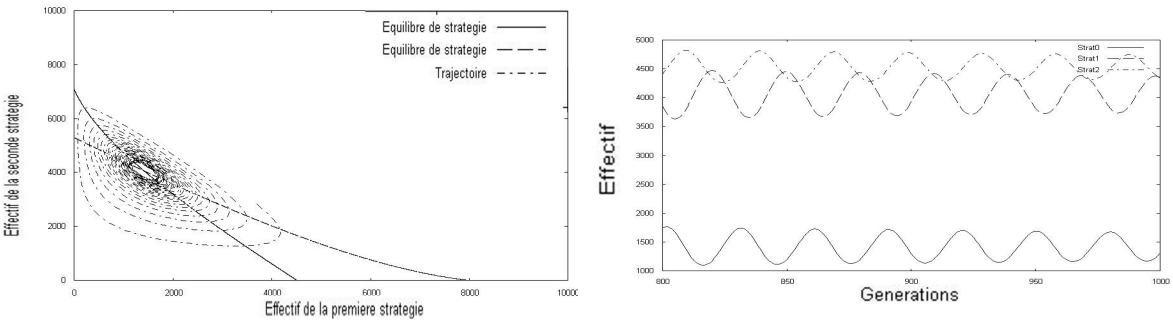


Figure B.3 : A gauche, on donne les courbes d'équilibre du système et une trajectoire. A droite, le graphique correspond à l'évolution des effectifs par génération. Les stratégies adoptant le comportement 0 ont la plus faible fréquence moyenne, les stratégies adoptant le comportement 2 ont la plus forte fréquence moyenne.

Dans ce type de cas, des cycles apparaissent. Les comportements 0 et 2 croissent jusqu'à un maximum des stratégies adoptant le comportement 0 : celles-ci commencent à diminuer du fait de la diminution des stratégies adoptant le comportement 1 qui réduit leur score moyen. Au bout d'un temps les stratégies 0 ont suffisamment baissé et les 2 suffisamment augmenté pour favoriser la croissance des 1. La croissance des 1 finira par relancer la croissance des 0.

Le classement des scores moyens individuels non pondérés ne laisse pas présager du résultat de l'évolution. **Le comportement 0 qui a le plus fort score moyen dans la matrice est celle qui a les effectifs les plus faibles lorsque le système évolue périodiquement.**

Dans ce qui précède, on a étudié le phénomène cyclique au travers des relations entre les valeurs de la matrice des gains. Pour simuler un cycle particulier, **il faut la donnée d'une matrice, d'un effectif total entier (un système cyclique) et d'une initialisation**, c'est à dire d'une répartition de l'effectif total entre les comportements de la matrice.

C. Impact des variations de la population totale

Fréquences des cycles et convergence

Pour avoir des informations sur le nombre des attracteurs et le type de convergence en fonction de l'effectif total, une première simulation est présentée. Pour chaque valeur d'effectif total en abscisse, on génère aléatoirement un certain nombre de matrices qui respectent les conditions (CI) et qui donnent des cycles pour cet effectif total. Ensuite, pour différents états initiaux, on observe la convergence obtenue. On peut alors observer la fréquence de convergence vers un cycle, le nombre d'attracteurs cycliques différents pour une même matrice et le nombre d'états stationnaires

rencontrés. La figure suivante donne l'évolution de ces trois valeurs avec l'augmentation de l'effectif de la population totale.

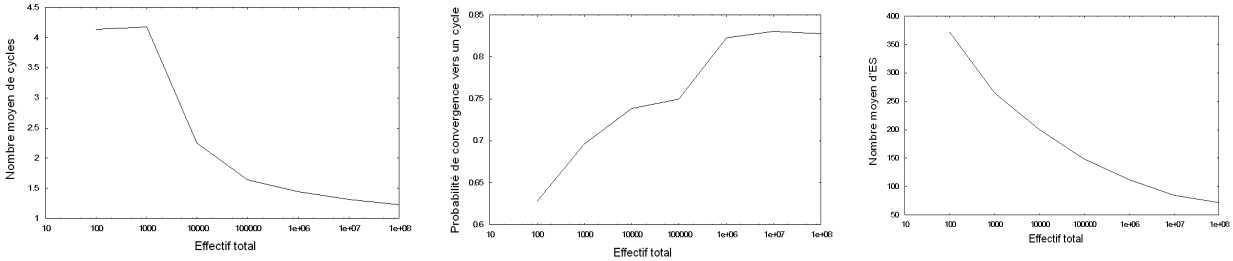


Figure C.1 : Évolution du nombre moyen d'attracteurs cycliques rencontrés, de la probabilité moyenne de convergence vers un cycle et du nombre moyen d'états stationnaires en fonction de l'effectif total. Pour chaque valeur de l'effectif total : génération de 1000 matrices. Pour chaque matrice, on a tiré 100 états initiaux.

Ces graphiques doivent être interprétés avec l'idée qu'un effectif supérieur implique un nombre d'états possibles beaucoup plus important et donc une probabilité de retomber sur les mêmes cycles moindre, or ici, on trouve moins de cycles pour des effectifs totaux de taille plus importante (le nombre des cycles rencontrés par matrice diminue) alors même que le nombre des cas convergeant vers des cycles augmente. Par ailleurs, les systèmes cycliques deviennent moins sensibles à l'initialisation avec cette augmentation : **on retombe sur des cycles identiques avec une plus forte probabilité avec l'augmentation de l'effectif total**.

On établit une donnée supplémentaire. Pour différentes valeurs de l'effectif total, 10^2, 10^3...10^7, on tire des matrices au hasard qui respectent l'ensemble de relations (C1) défini plus haut. Pour chaque matrice qui donne des cycles pour un effectif total 10^k, on teste pour chaque valeur d'effectif 10^2, 10^3...10^7 un certain nombre d'initialisations et on calcule la probabilité de générer des évolutions cycliques à partir de cette matrice. Par exemple, sur le graphique suivant, pour la courbe paramétrée par 100, elle correspond au fait de générer des matrices qui donnent des cycles pour des populations de taille totale 100. Pour chaque valeur de la population totale en abscisse, on génère un certain nombre d'initialisations et on compte le nombre de convergences vers des cycles.

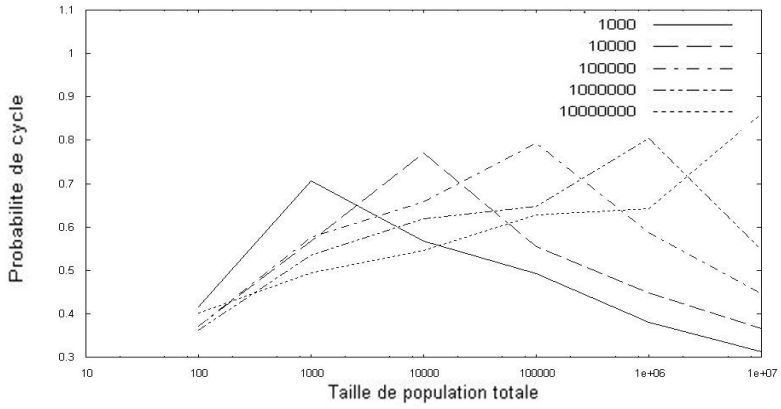


Figure C.2 : Chaque courbe est paramétrée pour une valeur d'effectif total EF. Pour différentes matrices donnant des cycles pour EF, on teste différentes valeurs de l'effectif total, on calcule la probabilité de converger vers un cycle avec cet effectif total et la matrice courante.

Les résultats de la figure C.2 montrent que pour une matrice générée avec une valeur d'effectif donnée, c'est cette valeur qui génère le plus de cycles. Pour d'autres valeurs de l'effectif total, la probabilité de générer des cycles diminue, que ce soit en augmentant ou en diminuant l'effectif total. Par ailleurs, la probabilité d'obtenir des cycles augmente avec la population totale.

D. Dilemme itéré du prisonnier et évolutions périodiques

On se limite, pour cette section et la suivante, au cas des matrices qui sont issues des interactions entre des comportements du **dilemme du prisonnier itéré**. Les études sur les évolutions cycliques sont souvent menées sur de tels ensembles de comportements et non pas à partir de matrices tirées au hasard. Il ne s'agit plus alors de sélectionner une matrice 3×3 qui donne des cycles à partir de valeurs artificielles, mais de trouver des ensembles de 3 comportements pour lesquels la matrice des scores donne des cycles. En effet, en utilisant des matrices tirées au hasard, on perd la capacité d'interprétation alors qu'en retenant des matrices issues de l'interaction de comportements particuliers, on conserve une capacité d'interprétations en terme notamment d'évolution de la coopération. Ce type d'étude apparaît dans un certain nombre d'articles sous des formes diverses avec des matrices qui respectent les conditions (CI).

Dans le cas du dilemme du prisonnier itéré, on peut démontrer qu'il n'existe pas un meilleur comportement [Axelord 84], mais des meilleurs comportements adaptés à des contextes. En considérant par exemple le comportement per_ccd (la stratégie du dilemme itéré qui joue d'abord C puis C puis D puis qui répète la séquence), on constate qu'il prospère en présence de stratégies adoptant le comportement soft-majo (joue C au premier coup, puis joue le coup le plus joué par son adversaire) mais, le comportement per_ccd est naïf et exploitable : il sera généralement éliminé dans

le cadre d'une évolution écologique sans soft-majo ou en l'absence d'autres comportements le privilégiant.

La valeur d'un comportement dépend donc du contexte, c'est à dire des autres comportements en présence et du nombre des stratégies les adoptant. Pour caractériser les rapports entre les comportements, on définit une relation :

Définition

Soit un ensemble E de comportements et la matrice M régissant les rapports entre ces comportements , S et T des comportements, on note :

$$S\,P_E\,T \text{ est equivalent à } \forall\, D \in E\,,\, M_{D,S} \leq M_{T,S}$$

$S\,P_E\,T$ signifie donc que S "privilégie" T au sein de l'ensemble E . Pour une population de comportements de E , l'augmentation de l'effectif des stratégies adoptant le comportement S conduit à l'augmentation du nombre des stratégies adoptant le comportement T toute chose égale par ailleurs.

Une matrice qui valide la série de conditions (CI) peut se réinterpréter comme la matrice des interactions de l'ensemble des comportements $E = \{S1, S2, S3\}$ telle que $S1\,P_E\,S2\,P_E\,S3\,P_E\,S1.$

Des évolutions cycliques reposant sur des stratégies respectant ces conditions ont fait l'objet d'études diverses. A partir de populations de stratégies All-C, Tit-For-Tat et All-D, [Imhof 05] met en évidence la possibilité de dynamiques complexes et sensibles aux états initiaux du système. Notamment, est mise en évidence la possibilité de cycles, ceux-ci reposant cependant sur le fait qu'une population de Tit-For-Tat peut être envahie par une population de All-C puisque les stratégies Tit-For-Tat ont un score légèrement inférieur à celui des All-C dans le cas d'une population de stratégies coopératives dans cet article.

Dans d'autres travaux, les cycles sont étudiés de manière plus directe. L'article de Nowak et Sigmund [Nowak 89] met en évidence de telles évolutions dans le cas de stratégies probabilistes. Précisément, les auteurs considèrent des initialisations à base de stratégies qui prennent leur comportement dans l'ensemble des comportements probabilistes à mémoire 1 pour le dilemme du prisonnier. Ils trouvent des cas d'évolution cyclique dans cet ensemble.

Dans le cas de stratégies déterministes du dilemme itéré, Mathieu, Beaufils et Delahaye [Mathieu 00] ont mis en évidence des dynamiques cycliques, fondées sur le même principe $S1\,P_E\,S2\,P_E\,S3\,P_E\,S1.$ A partir d'une recherche massive sur un ensemble de comportements, sont mis en évidence des triplets de comportements validant ce schéma et provoquant des évolutions cycliques. Par exemple, pour le triplet per-ccd, per-ddc, soft-majo, les populations des stratégies évoluent cycliquement. La figure suivante illustre ce cycle pour lequel la matrice est

	per-ccd	per-ddc	soft-majo
per-ccd	2334	1665	3666
per-ddc	3335	1666	671
soft-majo	2001	2331	3000

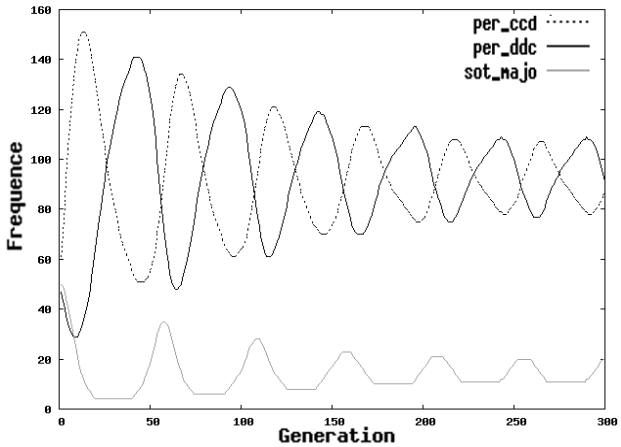


Figure D.1 : Évolution d'une population composée de per-ccd, per-ddc et soft-majo

La section suivante aborde l'évolution des populations de stratégies dans des cas de répartition spatiale. L'objectif est d'évaluer l'impact de la répartition topologique sur le phénomène cyclique. Comme les chapitres I et III l'ont montré, la dynamique des populations est profondément modifiée par la répartition spatiale des stratégies. Des cas de cycles reposant sur la répartition spatiale vont notamment être mis en évidence dans le cadre des réseaux de communautés pour des comportements pour lesquels il n'est pas possible de trouver des ensembles de comportements au sein desquels ils oscillent hors de la répartition spatiale.

Section IV.2.Emergence de cycles avec la répartition spatiale

A. Généralisation des dynamiques évolutionnaires

La dynamique écologique présentée dans la section I peut être généralisée de différentes manières pour des évolutions dans le cas des réseaux de communautés. Ces généralisations reposent sur des modifications dans le calcul des scores et dans la redistribution des stratégies. On introduit deux nouvelles formes d'évolution, **l'évolution locale et l'évolution globale**. Pour ces deux formes d'évolution, le calcul des scores se fait de la même manière.

Calcul des scores

On note par $e^t_{C,j}$ l'effectif des stratégies pour le comportement j sur la communauté C au temps t.

Les stratégies de type j obtiennent un score en interagissant avec les stratégies de la communauté C :

$$scoreI^t_{C,j} = \sum_{i=1}^{N} e^t_{C,i} \times M_{j,i} - M_{j,j}$$

Les stratégies de type j de la communauté C obtiennent un score un score en interagissant avec l'ensemble des communautés voisines de C noté $V(C)$;

$$scoreE^t_{C,j} = \sum_{H \in V(C)} \sum_{i=1}^{N} e^t_{H,i} \times M_{j,i}$$

Le score d'une stratégie de type j sur une communauté C se traduit :

$$score^t_{C,j} = scoreI^t_{C,j} + scoreE^t_{C,j}$$

Évolution Locale

Le nouvel effectif du comportement j sur une communauté C est calculé de la façon suivante :

$$e^{t+1}_{C,j} = score^t_{C,j} \times \frac{e^t_{C,j}}{\sum_{i=1}^{N} score^t_{C,i} \times e^t_{C,i}} \times \sum_{i=1}^{N} e^t_{C,i}$$

Ici l'effectif de chaque communauté reste constant. Les effectifs de la communauté sont redistribués entre les comportements en fonction de la qualité de chaque comportement, celle-ci étant évaluée au sein de la communauté et face aux communautés voisines (voir le calcul des scores).

Évolution Globale

Le nouvel effectif d'un comportement j sur une communauté C est calculé de la façon suivante :

$$e_{C,j}^{t+1} = score_{C,j}^{t} \times \frac{e_{C,j}^{t}}{\sum_{H=1}^{C_{max}} \sum_{i=1}^{N} score_{H,i}^{t} \times e_{H,i}^{t}} \times \sum_{H=1}^{C_{max}} \sum_{i=1}^{N} e_{H,i}^{t}$$

avec $\sum_{H=1}^{C_{max}} \sum_{i=1}^{N} e_{H,i}^{t}$ qui est la population totale dans le graphe

et $\sum_{H=1}^{C_{max}} \sum_{i=1}^{N} score_{H,i}^{t} \times e_{H,i}^{t}$ qui est la somme des scores totaux dans le graphe.

L'effectif total est redistribué sur les comportements les plus performants de la population : certaines communautés ont une population qui augmente et d'autres une population qui diminue.

La différence entre les deux types d'évolution peut s'interpréter de diverses manières. On peut par exemple la voir comme une différence entre le court terme et long terme. A court terme, les ressources ne sont pas mobiles, de fait les ressources par communauté restent constantes et la redistribution se fait au sein d'une communauté. A long terme, les ressources sont mobiles et la redistribution des effectifs par comportements se fait au niveau de la population totale.

Équilibres

Dans le cas de l'évolution globale, en notant C et G des communautés, k et m des comportements, l'équilibre est donné par

$$\forall C, \forall G, \forall k, \forall m \quad score_{C,k} = score_{G,m}$$

Dans le cas de l'évolution locale, en notant C une communauté, et m des comportements, l'équilibre est donné par

$$\forall C, \forall k, \forall m \quad score_{C,k} = score_{C,m}$$

Niveaux d'interactions

En notant N la distance du voisinage dans lequel on calcule le score et en notant T la distance du voisinage dans lequel on redistribue des effectifs.

$N = \infty \; et \; T = \infty$ correspond à la dynamique d'évolution écologique présentée dans la section 1 et à la dynamique de réplication : on calcule les scores de chaque individu contre l'ensemble des individus de la population et on

redistribue les effectifs de l'ensemble de la population.

$N=1\ et\ T=\infty$ Correspond à l'évolution globale : chaque stratégie interagit avec les stratégies de son voisinage direct et celles de sa communauté, la redistribution des effectifs se fait au niveau de la population totale. Dans les cas de graphe complet, l'évolution est équivalente à l'évolution en graphe complet.

$N=1\ et\ T=0$ Correspond à l'évolution locale : chaque stratégie interagit avec les stratégies de son voisinage direct, mais la redistribution se fait au niveau de la population de la communauté.

$N=0\ et\ T=0$ Correspond au cas où on lance une évolution écologique sur chaque communauté de manière indépendante. Les liens entre les communautés n'ont aucun impact sur l'évolution des communautés.

B. Démarche de simulation

Dans ce qui suit on considère un ensemble de réseaux de communautés en testant pour chacun si les évolutions sont ou non cycliques, certains évoluant selon l'évolution globale, les autres évoluant selon l'évolution locale.

On considère une topologie extrêmement simple de **deux communautés liées** pour lesquelles il est déjà possible de mettre en évidence un certain nombre de résultats.

On introduit **41 comportements pour le dilemme du prisonnier itéré**. On rappelle (voir le chapitre I) que dans le dilemme du prisonnier itéré, deux stratégies interagissent sur plusieurs périodes en jouant C ou D à chaque période. La littérature sur le domaine a produit de nombreux comportements de natures différentes. Pour certains, ce sont des comportements "naïfs" tandis que d'autres ont été mis en avant comme de “bons” comportements [Beaufils 99][Axelrod 84]. Ces comportements sont regroupés en classes :

- La première classe de comportements : les comportements à mémoire 1. Ces comportements gardent en mémoire l'échange de la période précédente et jouent un coup uniquement basé sur ce dernier échange. Pour définir un tel comportement, il faut définir ce qu'il joue initialement, ce qu'il joue après un échange CC, ce qu'il joue après un échange CD, ce qu'il joue après un échange DC et ce qu'il joue après un échange DD. Soit par exemple le comportement noté cCDDC. Le c initial désigne le fait que le comportement joue c à la première période, il joue C si l'échange précédent était CC, joue D si l'échange précédent était CD, D si l'échange précédent était DC, C si l'échange précédent était C. Il y a donc 5 paramètres à spécifier pour définir un tel comportement, et de fait il existe donc 2^5 comportements de ce type. Dans ce qui suit on n'utilise pas l'ensemble des comportements de cette classe. En effet, il existe des couples de comportements de cette

classe qui produisent toujours la même séquence de coups. Par exemple, le comportement cCCCC et le comportement cCCDD produisent toujours la même séquence des coups : ils jouent toujours C. Pour de tels couples, on ne retient qu'un seul des deux comportements. Cette phase d'élimination conduit à écarter 6 comportements, 26 comportements de cette classe sont utilisés au final. Parmi ces 26 comportements, certains sont classiques. Cette classe contient notamment le comportement Tit-For-Tat qui est dénoté par cCDCD, le comportement coopératif naïf : cCCCC (All-C), le comportement agressif : dDDDD (All-D), le comportement pavlov : cCDDC.

- Une classe de comportements périodiques. Ces comportements jouent toujours la même séquence de coups. Soit par exemple le comportement per-cd : pour toute période impaire, il joue le coup C, pour toute période paire, il joue le coup D. Soit le comportement per-ccd : à la première génération, il joue C, à la deuxième C, à la troisième, il joue D, à la quatrième, il joue C etc. Les comportements de ce type introduits dans la simulation sont : per-cd, per-dc, per-ccd, per-ddc, per-ccccd et per_cccdcd. Un comportement proche introduit dans la simulation est c_Then_Per_dc : ce comportement joue c à la première génération et répète constamment la séquence dc dans la suite.
- Une autre classe de comportements est constituée de comportements dérivés de TFT. NtitForTat : réponse de N coups D à un coup D de l'adversaire, dans la simulation, N est pris à 3. Gradual : réponse d'un nombre croissant de coups D aux coups D de l'adversaire. Slow-TFT : coopère si l'adversaire a joué D deux fois dans les trois derniers coups. Hard-tf2T : coopère sauf si l'adversaire a joué D deux fois consécutives dans les trois derniers coups. Tf2t : coopère sauf si l'adversaire a joué D sur les deux derniers coups.
- Deux comportements qui jouent ce que l'adversaire a joué en majorité : soft-majo, hard-majo. Soft- majo commence par jouer C et joue ensuite ce que l'adversaire a joué en majorité. Hard-majo commence par jouer D et joue ensuite ce que l'adversaire a joué en majorité.
- 1 comportement prober : ce comportement joue trois premiers coups D C C pour tester les réactions de son adversaire. Si l'adversaire a coopéré aux coups 2,3, il joue toujours D dans la suite, sinon, il joue selon le comportement Tit-For-Tat.

On initialise chacune des deux communautés avec deux comportements pris dans la liste des 41.

Figure B.1 : Le schéma de deux communautés liées. Sur chaque communauté, on place deux comportements. K désigne l'effectif total d'une communauté. Initialement m stratégies adoptent le premier comportement de la communauté, K-m stratégies adoptent le second comportement.

La structure de deux communautés liées est une forme de répartition spatiale extrêmement simple. On choisit néanmoins d'étudier l'impact de la répartition spatiale à partir de cette structure pour deux raisons. D'une part, dans le cas de graphes plus grands, il est difficile de trouver des cycles : ils deviennent rares au sein d'un espace d'exploration dont la taille augmente beaucoup (du fait de la combinatoire des graphes et des populations de stratégies). D'autre part, cette configuration est la configuration minimale pour faire apparaître des cycles en évolution locale.

Dans le cas de l'évolution globale, le système est équivalent au cas sans répartition spatiale des stratégies puisque deux communautés liées forment un graphe complet. Donc, dans le cas de l'évolution globale, 3 comportements suffisent à produire une dynamique cyclique. En revanche, **il est impossible d'obtenir des cycles avec 3 comportements oscillant dans le cas de l'évolution locale,** si ces comportements ne sont pas répartis sur une même communauté. En effet, comme on répartit 2 comportements sur chaque communauté, l'oscillation des effectifs associés à un comportement sur une communauté est équivalente à l'oscillation des effectifs associés au second comportement de la communauté puisque l'effectif total est constant. Donc la configuration minimale pour obtenir des cycles à partir de stratégies réparties spatialement en communautés est la configuration de deux communautés liées dans le cas de l'évolution locale.

L'espace de recherche considéré est donc l'ensemble des couples de couples de comportements possibles à partir d'un ensemble de comportements donné de cardinalité $N=41$. Pour un ensemble de taille N , le nombre de configurations cycliques à explorer est de taille :

$$C(N)=\frac{C_N^2\times C_N^2-C_N^2}{2}+C_N^2 \qquad \text{(B.1)}$$

En effet, $C_N^2\times C_N^2$ est le nombre de couples de couples de comportements possibles. On ôte les C_N^2

cas de deux couples identiques de la forme $C1, C2$ lié à $C1, C2.$ On divise $C_N^2 \times C_N^2 - C_N^2$ par 2 pour ne pas prendre en compte et le cas $C1, C2$ lié à $C3, C4$ et le cas $C3, C4$ lié à $C1, C2.$ Enfin, on réintroduit les C_N^2 cas avec le même couple répété sur les deux nœuds. L'ensemble des configurations considérées est de taille $C(41) = 336610.$

On passe l'ensemble des $C(41)$ configurations en revue. Pour chacune, on affecte 50 stratégies à chaque comportement : la population de chaque communauté est 100, la population totale de 200. On obtient un système de la forme de celui présenté sur la figure B.1. Ce système est ensuite simulé d'abord selon l'évolution globale et ensuite selon l'évolution locale. Au total on simule donc $2 \times C(41)$ systèmes.

Pour chaque système, on lance l'évolution sur 5000 générations. Le test de l'ensemble des configurations à la fois en évolution locale et en évolution globale représente environ 392 minutes de traitement machine sur un processeur cadencé à 2.1 GHz. On retient qu'une configuration et un mode d'évolution donnent des cycles si pour chaque communauté, les évolutions des effectifs d'un des comportements de cette communauté présentent au moins **6 changements de monotonie**. Ce faisant, on retient 2469 cas en évolution locale et 3905 cas en évolution globale. On enregistre ces cas de fichiers au format .xml. Tous les systèmes obtenus ne sont pas purement périodiques : certains ont des évolutions cycliques à amplitude croissante jusqu'à disparition d'une des stratégies, d'autres ont des évolutions d'amplitude décroissantes jusqu'à stabilisation, d'autres enfin produisent des évolutions parfaitement cycliques. Pour chaque fichier retenu, on relance l'évolution jusqu'à arriver à un état stationnaire ou un attracteur périodique. On retient les **cas qui ont convergé vers un attracteur périodique comme les cas de cycles parfaits**. Dans ce qui suit, on compare les attracteurs périodiques obtenus dans le cas de l'évolution locale et ceux obtenus dans le cas de l'évolution globale.

C. Résultats et caractéristiques des cycles

Fréquence des cycles

Pour les cycles parfaits vers lesquels convergent les différents cas testés, ils sont de deux types : le cas où les effectifs de 3 comportements oscillent et le cas où les 4 comportements en présence oscillent. Dans le cas de l'évolution locale, seuls les cas avec 4 stratégies oscillantes sont possibles ainsi qu'on l'a noté dans la partie B. En général pour les cas cycliques, le fait qu'ils ne soient pas parfaits est lié à l'utilisation d'un effectif total entier de taille trop peu importante. Pour ces cas, on constate soit une convergence vers un équilibre stationnaire sans qu'aucun comportement ne soit éliminé, soit on constate une évolution avec des cycles d'amplitudes croissante jusqu'à disparition d'un des

comportements. Tous les ensembles de comportements conduisant à des cycles imparfaits ont été testés pour des effectifs plus importants et on constate que tous convergent vers des attracteurs cycliques. Par exemple, le couple de comportements {All-C, Tit-For-Tat} lié aux comportements {All-D, mistrust} donne, en évolution locale, des variations cycliques avec des cycles d'amplitude croissante pour une population totale de taille 200, alors que cette configuration conduit à des cycles parfaits pour un effectif de 1000 par communauté. A la limite, les populations de stratégies RPS interagissant selon la matrice classique

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'évoluent périodiquement avec une amplitude constante des cycles que dans le cas d'une population de taille infinie (voir le chapitre III et [Hofbauer 98]).

Sur l'ensemble des cas testés selon la démarche exposée dans la partie B, on donne la fréquence des différentes forme de cycles :

	2 communautés liées - évolution locale	2 communautés liées - évolution globale
Probabilité de cas cycliques (parfaits ou non parfaits)	0.00733	0.0116
Probabilité de cas cycliques parfaits	0.00425	0.00504
Probabilité de cas cycliques à 3 stratégies en mouvement	0	0.00269
Probabilité de cas à 4 stratégies en mouvement	0.00425	0.00236

Tableau C.1 Le tableau des fréquences des différents cas de cycles selon le type d'évolution.

Que se soit sur le nombre des cycles parfaits ou sur l'ensemble des cas cycliques sélectionnés au seuil de 6 changements de monotonie, on constate qu'il existe plus de configurations cycliques dans le cas de l'évolution globale. Il convient néanmoins de nuancer les résultats qui apparaissent de prime abord à la consultation du tableau. Parmi les configurations cycliques qui sont mises en évidence pour le cas de l'évolution globale, certaines sont telles que 3 stratégies seulement oscillent. En effet, dans certains cas, la 4ème stratégie disparaît et les 3 stratégies restantes oscillent, ce qui n'est pas possible en évolution locale.

Si on élimine les cas où un comportement disparaît de la population, la probabilité de cas parfait en évolution globale est : 0.00236. De sorte que la part des cas qui oscillent en évolution globale avec 4 comportements différents est

inférieure à celle des cas qui oscillent en évolution locale (0.00425). Les parties suivantes vont développer la comparaison entre les configurations sélectionnées pour les deux modes d'évolution en considérant les propriétés des oscillations et des comportements qui participent de ces oscillations.

Caractéristiques des cycles

Pour chaque cas de cycle parfait, on peut établir un certain nombre de propriété le caractérisant : le nombre des changements de monotonies, l'amplitude des cycles et le numéro de la première génération périodique (la première génération qui sera reproduite). Par suite, on peut établir la distribution de ces propriétés pour l'ensemble des cycles parfaits en évolution locale et l'ensemble des cycles parfaits en évolution globale.

L'amplitude des cycles se calcule à partir de la suite des maxima locaux et minima locaux atteints lors des variations de l'effectif d'un comportement :

$$Amplitude = \frac{1}{n} \times \sum_{(i=0)}^{n} (maxima_i - minima_i)$$

Dans le cas de l'évolution locale, cette valeur ne peut pas dépasser l'effectif par communauté, soit 100. Pour le numéro de la première génération périodique c'est la valeur t ainsi définie :

$$t / \exists\, n, \forall\, i, e_i^t = e_i^{t+n}$$

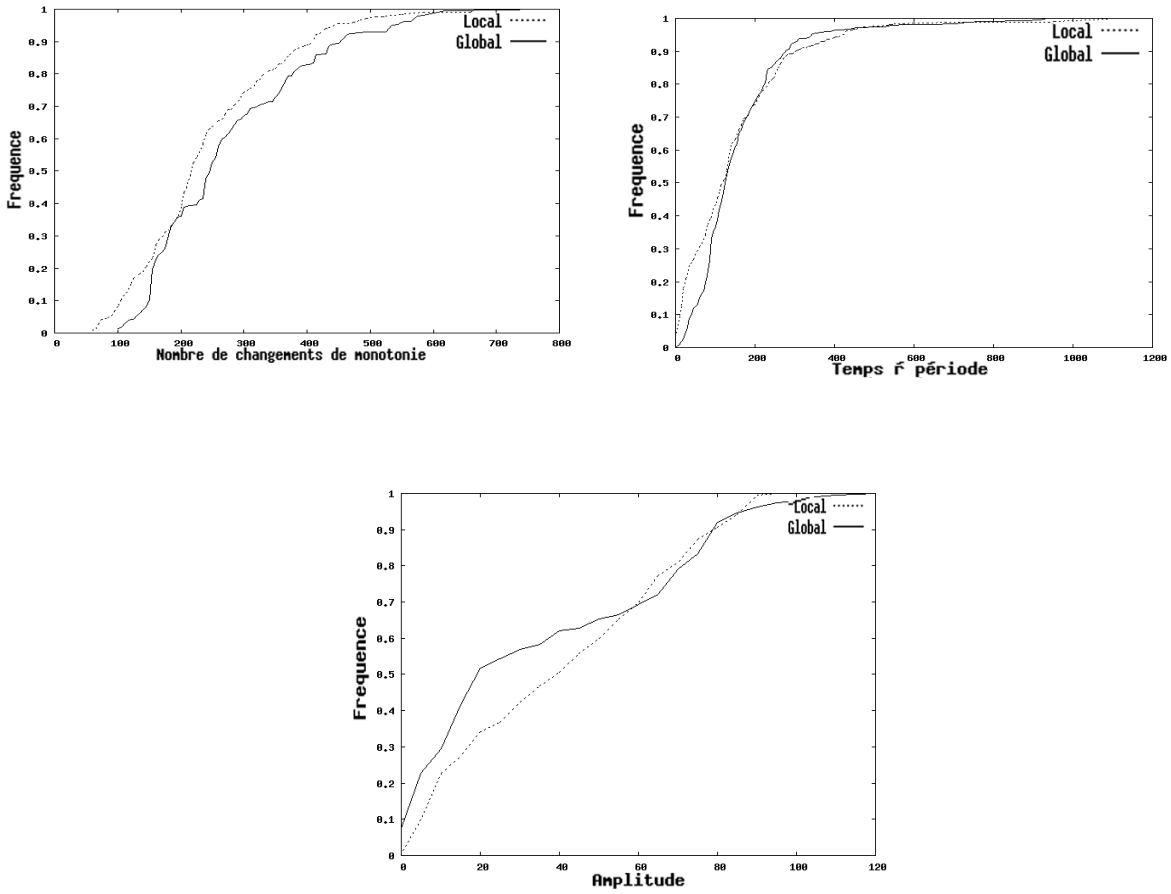


Figure C.2 : Le premier graphique donne la distribution cumulée des configurations cycliques sur le nombre de changement de monotonie, respectivement pour l'évolution globale et l'évolution locale. Le second graphique donne la distribution cumulée sur le numéro de la première génération périodique. Enfin, le troisième graphique donne la distribution cumulée sur l'amplitude des cycles.

Ces graphiques ne mettent en évidence que quelques différences. On constate que le nombre de changements de monotonie est tendanciellement plus élevé dans les configurations cycliques en évolution globale qu'il n'est en évolution locale. Sur la base du numéro de la première génération périodique, on constate que généralement les cas en évolution locale mettent moins de temps à converger, sauf quelques rares cas en évolution locale qui mettent plus de temps à converger que l'ensemble des cas en évolution globale. Sur le critère de l'amplitude enfin, on constate que les cas obtenus en évolution globale sont généralement d'amplitude moindre. A ces premières données, le paragraphe suivant en ajoute une autre qui permet d'obtenir une distinction plus marquée entre les configurations cycliques issues des deux modes d'évolution.

Comportements intervenant dans les cycles

En étudiant la fréquence des configurations cycliques en fonction des modes d'évolution (tableau C.1), on a mis

en évidence une différence quantitative : il y a plus de configurations susceptibles d'osciller en évolution locale avec les effectifs des 4 comportements qui oscillent. Il est également possible d'obtenir un résultat qualitatif sur les cycles. Soit la probabilité pour chaque comportement qu'une configuration dans laquelle il est placé oscille. Cette probabilité est prise comme

$$\frac{\textit{Ensemble des configurations qui évoluent cycliquement et pour lesquelles C apparaît}}{\textit{Ensemble des configurations dans lesquelles C est present}}$$

On parle de la **probabilité de produire des cycles**. Il est possible d'obtenir cette probabilité pour chacun des 41 comportements de l'ensemble. Le graphique suivant donne en fonction de la probabilité en abscisse, le nombre des comportements qui ont une probabilité inférieure de produire des cycles.

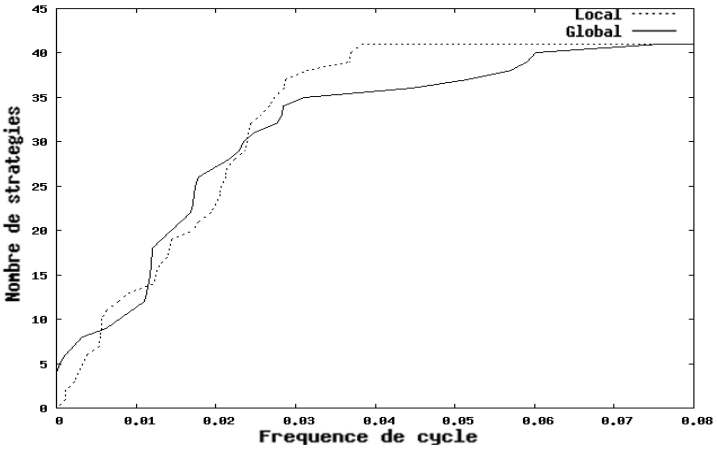


Figure C.3 : Pour chaque niveau de probabilité, on associe le nombre des comportements qui ont une probabilité inférieure de produire des cycles.

Dans le cas de l'évolution globale, certains comportements ne participent d'aucune configuration cyclique (le graphique montre que 4 comportements ont une probabilité de produire des cycles de 0). En revanche, **la probabilité de produire des cycles n'est nulle pour aucun comportement en évolution locale**. Par ailleurs, la probabilité d'un cycle à partir de la présence d'un comportement ne dépasse pas 0.04 dans le cas de l'évolution locale alors que certains comportements ont une probabilité double de produire des cycles en évolution globale. Ces deux éléments conduisent à la conclusion que les comportements jouent un rôle plus indifférencié dans l'évolution locale par rapport à l'évolution globale. **Le phénomène cyclique en évolution globale repose plus sur la présence de certains comportements que dans le cas de l'évolution locale**.

En évolution globale, les stratégies qui ne donnent aucun cycle sont Gradual, TFT, NTit-For-Tat, Spiteful, soit des comportements considérés classiquement comme performants. En effet, puisque pour avoir des cycles, il faut

pouvoir produire des phases de décroissance de tous les comportements : il faut donc qu'existent des répartitions des effectifs telles que le score moyen de ces comportements est inférieur au score moyen des autres comportements. De telles configurations sont plus rares, voire n'existent pas dans le cas de comportements performants. De même, les comportements très peu performants produisent peu de cycles puisque les contextes dans lesquels ils croissent sont rares. A l'inverse les comportements qui ont les plus fortes probabilité (>0.07) de produire des cycles sont des comportements plutôt moyens et pour lesquels on trouve assez simplement des contextes permettant leur croissance ou leur décroissance : slow_TFT, soft_majo, per_ddc.

En évolution locale, les probabilités de produire des cycles sont beaucoup moins hétérogènes. Une règle similaire s'applique cependant : les comportements qui produisent des cycles avec la plus faible probabilité en local sont les plus performants et les moins performants. Les comportements ayant une probabilité de cycle inférieure à 0.005 : mistrust, spiteful, dCCCD, gradual, tit for tat. Les comportements les plus performants pour donner des cycles en local : (probabilité >0.05) slow_TFT, soft_majo, easy_go.

D. Formes des cycles

Forme des cycles globaux

Sur l'ensemble des cas parfaits qui ont été découverts en évolution globale, l'étude des relations entre les comportements de la matrice des scores permet de mettre en évidence des familles de cas se distinguant **sur la forme de la matrice associée et le type de convergence de la population observée** (y a t'il 3 ou 4 comportements qui oscillent ?). Les différents cas :

- A l'instar des cycles mis en évidence dans les travaux précédents [Mathieu 00], des cas d'oscillation de 3 comportements en situation de dominance cyclique.
- Un cas d'oscillation à 4 stratégies avec un ensemble $E=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ de comportements tels que $C_1 P_E C_2, C_2 P_E C_3, C_3 P_E C_4, C_4 P_E C_1$. Il s'agit ici d'une situation de dominance cyclique à 4 comportements. Le quadruplet de ce type découvert dans la démarche d'exploration systématique contient le comportement All-C, le comportement coopératif naïf.
- Un cas d'oscillation à 4 comportements avec $E=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ avec 3 des 4 comportements qui sont en situation de dominance cyclique et un 4ème comportement qui se maintient dans les évolutions cycliques, différentes formes étant possibles
- Un ensemble de cas qui échappent aux règles précédentes et pour lesquels 4 comportements différents

oscillent.

Forme des cycles locaux

Là aussi, les cas parfaits peuvent être regroupés en familles en fonction des relations entre les comportements des communautés en présence. On note 0 et 1 les comportements de la première communauté, 2 et 3 les comportements de la seconde communauté (cf . On note par une flèche d'un comportement vers un autre le fait que le premier comportement favorise la croissance du second. Donc une flèche à partir d'un comportement C vers le comportement 0 (resp. le comportement 1) signifie : $C\,P_{0,1}\,0$ (resp. $C\,P_{0,1}\,1$).

Soit par exemple la matrice :

	0 All-C	1 tit for tat	2 All-D	3 mistrust
0 All-C	3000	3000	0	2997
1 tit for tat	3000	3000	999	2500
2 All-D	5000	1004	1000	1000
3 mistrust	3002	2500	1000	1000

A partir de cette matrice, on déduit l'ensemble des relations

$$0\,P_{2,3}\,2$$
$$1\,P_{2,3}\,3$$
$$2\,P_{0,1}\,1$$
$$3\,P_{0,1}\,0$$

ce qui se traduit par le schéma suivant :

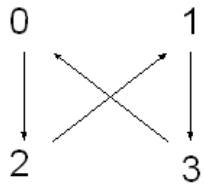


Figure D.1 : Schéma des relations entre les comportements. 0 : All-C, 1 : TFT, 2 : All-D, 3 : mistrust.

Ici il faut lire que la présence des stratégies adoptant le comportement 0 sur le nœud 1 favorise les stratégies adoptant le comportement 2 sur le nœud 2 et la présence des stratégies de comportement 1 sur le nœud 1 favorise la présence des stratégies 3 sur le nœud 2 etc.

Le phénomène cyclique fondé sur l'ensemble des relations représentées sur la figure D.1 se comprend comme le fait que la croissance des effectifs de n'importe lequel des comportements, mettons 0, entraîne la croissance du

comportement 2 sur l'autre nœud. Ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que la croissance des effectifs du comportement 2 implique que les stratégies de comportement 1 aient un meilleur score que les stratégies ayant adopté le comportement 0. A partir de ce point, les stratégies ayant adopté le comportement 1 croissent. Cette croissance du comportement 1, qui correspond à une décroissance de 0, favorise les comportements 3 de la deuxième communauté et à terme, les 1 se mettent à décroître, les 0 à croître.

Combien de schéma de la forme de celui de la figure D.1 peut on produire ? Pour un comportement, mettons le comportement 0, il faut définir :

- son impact sur la communauté sur laquelle il est présent. Soit il privilégie le comportement 1, soit il se privilégie, soit il n'en privilégie aucun. C'est à dire : soit $score_{1,0} > score_{0,0}$ et dans ce cas $0 P_{0,1} 1$, soit $score_{0,0} > score_{1,0}$ et dans ce cas $0 P_{0,1} 0$, soit $score_{1,0} = score_{0,0}$ et dans ce cas, on n'a ni $0 P_{0,1} 1,$ ni $0 P_{0,1} 0.$ Il y a trois types d'impact du comportement 0 sur sa communauté.
- son impact sur la communauté voisine. Soit il privilégie le comportement 2, soit il privilégie le comportement 3, soit il n'en privilégie aucun. C'est à dire : soit $score_{2,0} > score_{3,0}$ et dans ce cas $0 P_{2,3} 2,$ $soit\ score_{3,0} > score_{2,0}$ et dans ce cas $0 P_{2,3} 3,$ soit $score_{2,0} = score_{3,0}$ et dans ce cas, on n'a ni $0 P_{2,3} 2,$ ni $0 P_{2,3} 3.$ Il y a trois types d'impact du comportement 0 sur la communauté voisine.

Pour chaque comportement, il a donc 9 types d'impact de son comportement. Comme ceci est vrai pour chacun des 4 comportements, on a 9^4=6561 schéma différents possibles.

Pour chaque cas cyclique parfait rencontré lors de la simulation en évolution locale, on en extrait la matrice, à partir de cette matrice, on détermine son schéma. On compare ce schéma à celui des autres schéma rencontrés. Par exemple, soient les deux schéma :

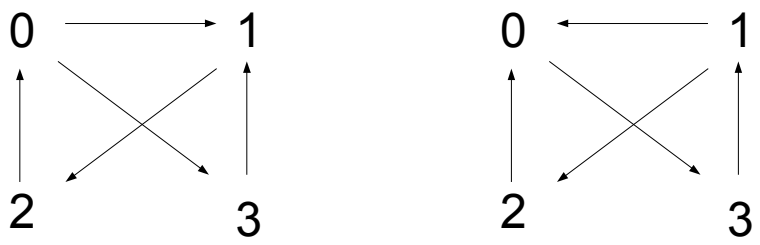
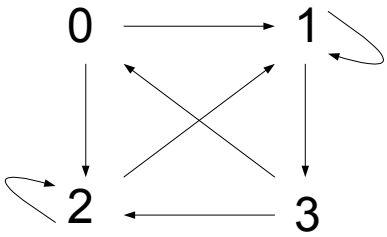


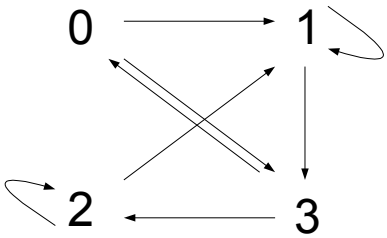
Figure D.2 Exemple de deux schéma qui seront considérés comme identiques

On considère ces deux schéma comme identiques. On ajoute un schéma à la liste des schéma si un schéma identique n'a pas déjà été pris en compte. Au final, on trouve 26 schéma différents. La plupart comprennent les relations qui sont présentées sur la figure C.5 avec en plus d'autres flèches qui s'ajoutent sur le schéma. La figure suivante donne

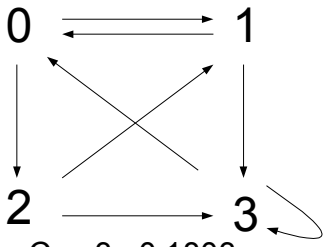
l'ensemble des schéma rencontrés dans la simulation et leur fréquence:



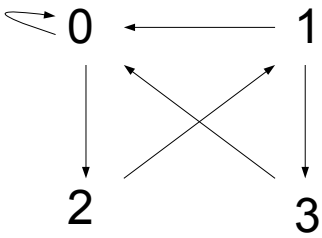
Cas 1 - 0.406



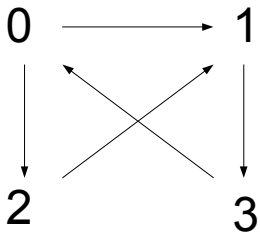
Cas 2 - 0.0126



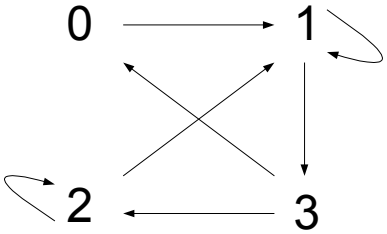
Cas 3 - 0.1803



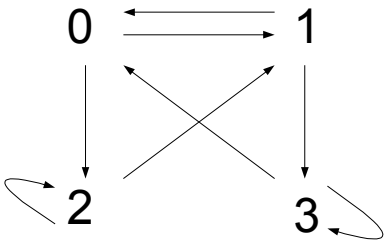
Cas 4 - 0.202



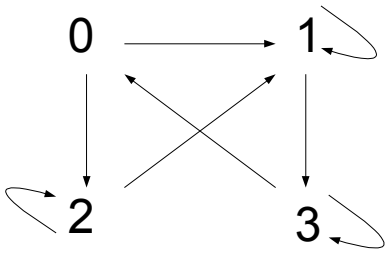
Cas 5 - 0.0014



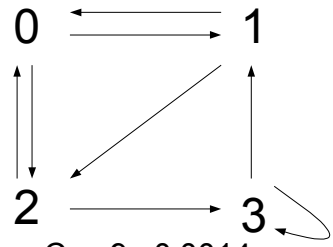
Cas 6 - 0.0084



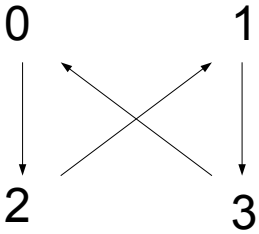
Cas 7 - 0.0433



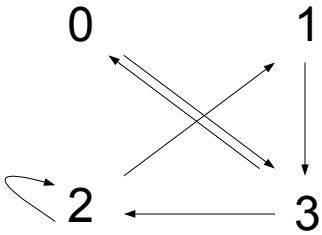
Cas 8 - 0.0419



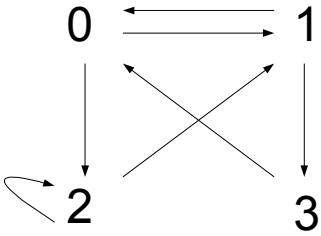
Cas 9 - 0.0014



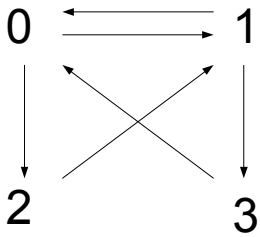
Cas 10 - 0.0182



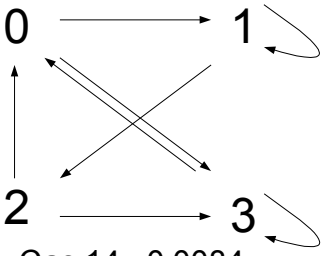
Cas 11 - 0.0056



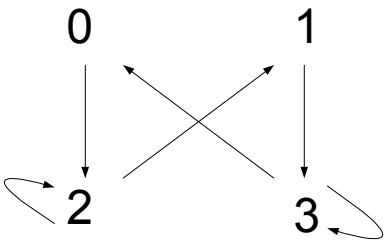
Cas 12 - 0.0217



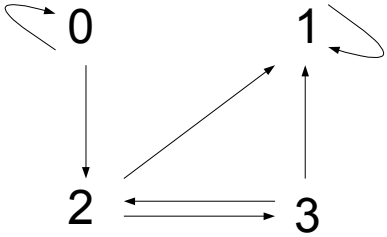
Cas 13 - 0.03



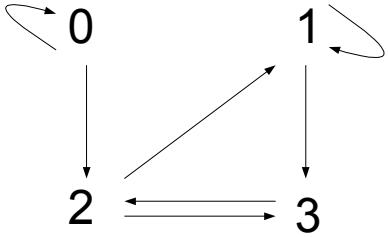
Cas 14 - 0.0084



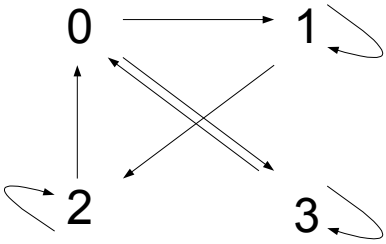
Cas 15 - 0.0014



Cas 16 - 0.0021



Cas 17 - 0.0007



Cas 18 - 0.0007

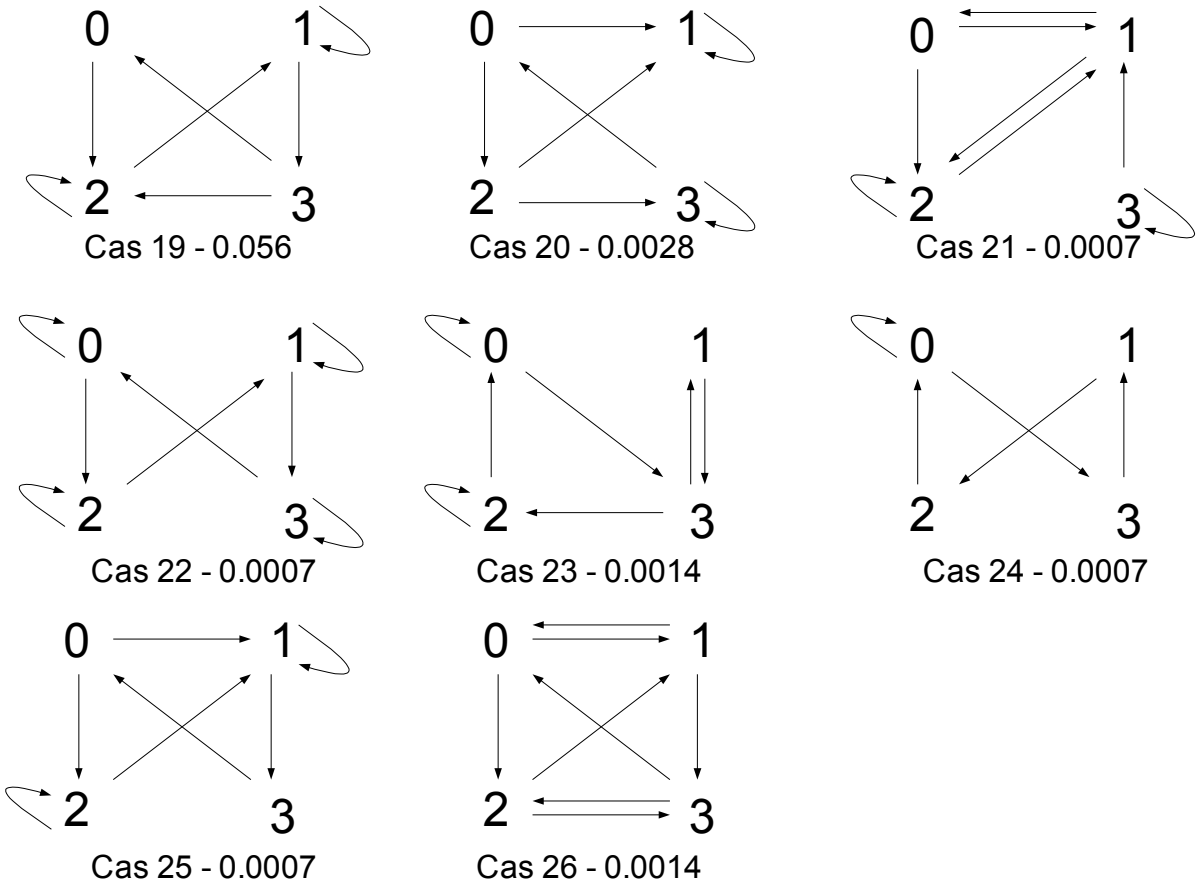


Figure D.2 : L'ensemble des schéma rencontrés dans la simulation massive et leurs fréquences associées.

Le nombre de cas par schéma et le nombre des schéma possibles augmente avec les effectifs par nœuds..

Ce sont les structures présentées sur la figure D.2 qui expliquent la survie des comportements. A l'instar du mécanisme de survie des comportements dans une population en situation de dominance cyclique, les comportements survivent ici dans des cycles. Ces cycles sont liés à la répartition spatiale des comportements et il est possible de faire apparaître au moins une configuration cyclique pour n'importe lequel des comportements.

Conclusion

La répartition spatiale permet de faire apparaître des évolutions cycliques pour des populations qui convergeraient vers un état stationnaire monomorphe sans être réparties sur un graphe. C'est le cas des populations étudiées dans le chapitre III notamment, c'est aussi le cas des populations de stratégies C et D : alors que ces populations devraient converger vers l'élimination des comportements C, la répartition spatiale permet le maintien de ces

comportements et leur diffusion [Nowak 93]. Pour les populations jouant le dilemme du prisonnier itéré, des auteurs ont mis en évidence la possibilité de survie de différents comportements alors même que la population n'est pas répartie spatialement [Mathieu 00][Imhof 05]. Le chapitre montre que la répartition spatiale des stratégies jouant le dilemme du prisonnier itéré est favorable à l'émergence de cycle et augmente la diversité des comportements susceptibles de survivre dans des évolutions écologiques. En effet, alors que la possibilité d'évolutions cycliques ne concerne qu'un sous-ensemble des comportements dans le cas de populations non réparties, il devient possible de trouver pour chaque comportement au moins une configuration dans laquelle il survit au sein de fluctuations cycliques. Par ailleurs, en parcourant un ensemble similaire d'initialisations, on trouve plus de configurations cycliques dans le cas où les stratégies sont réparties spatialement. Notamment d'autres formes de survie des comportements C sont possibles sans qu'il soit besoin de supposer que les C survivent grâce à la présence des Tit-for-tat avec ces dernières qui voient leur score réduit d'un coût c qui ne touche pas les stratégies C [Imhof 05]. C'est en effet en supposant un tel coût qu'il est possible de faire en sorte que le comportement C s'impose à partir une population de stratégies jouant C et de TFT. Ce constat est un nouvel élément dans la discussion sur la coopération qui a été développée aux chapitres I et II notamment.

Ce résultat est obtenu par une démarche d'exploration systématique d'un ensemble de comportements pour le dilemme du prisonnier itéré. Les résultats obtenus pour l'ensemble des 41 comportements qui ont été retenus ont été testés sur d'autres ensembles de comportements, notamment sur des sous-ensembles des comportements qui sont utilisés ici, afin de tester si les résultats sont liés à l'un ou l'autre des sous-groupes spécifiques de comportements. Des tests ont été menés avec seulement des stratégies jouant périodiquement. D'autres tests ont été menés avec seulement des stratégies à mémoire 1. On constate que les résultats se maintiennent en adoptant la même démarche de simulation sur ces sous-ensembles de stratégies.

Les résultats présentés reposent sur une implémentation de la notion de spatialité. D'autres spécifications auraient été possibles. Dans ce qui précède, on impose que la population reste constante par communauté pour mettre en évidence le phénomène d'apparition de configurations cycliques. Par ailleurs, la répartition se fait seulement sur deux communautés puisque comme il a été noté plus haut, une recherche sur un plus grand nombre de nœuds n'a pas permis de mettre en évidence de configurations cycliques. La démarche retenue a consisté à chercher tous les cycles avec deux comportements répartis sur deux communautés, ce qui constitue le cas minimal à l'apparition de cycles. Les premiers résultats mis en évidence pourront être utilisés dans la suite pour guider des recherches sur des topologies de plus grande importance par exemple en considérant un couple de communautés donnant des cycles et en initialisant chaque nœud d'un grand graphe avec l'une ou l'autre des communautés et en observant la dynamique obtenue. Par ailleurs une autre démarche pourrait être d'utiliser les formes de cycles mises en évidence ici pour guider la recherche

de cycles pour de plus grandes topologies. Le but de ces études serait de voir si, de manière plus générale, la répartition spatiale favorise ou non l'apparition de cycles.

Chapitre V. Etude de l'émergence d'un équilibre de cartel

Résumé

La théorie économique repose sur un résultat classique : si l'information des participants au marché est parfaite, si le bien offert est identique pour tous les offreurs, si tous les offreurs sont rationnels et s'ils sont en nombre suffisant, alors le marché converge vers une situation concurrentielle [Kreps 90][Ekland 79]. En s'éloignant des hypothèses de ce résultat, on trouve des conditions d'émergence d'équilibres non concurrentiels. Par exemple, s'il y a un seul offreur sur le marché, c'est un équilibre de monopole qui émerge, si les biens ne sont pas homogènes, certains demandeurs vont discriminer entre les offreurs sur la qualité de leurs produits etc. Sous certaines conditions, dans le cas de plusieurs offreurs sur le marché, c'est une situation de cartel qui est susceptible d'émerger et de se maintenir. La question des conditions de l'émergence et du maintien du cartel est classique en organisation industrielle. Un résultat généralement admis est qu'il est d'autant moins soutenable que le nombre des agents est important sur le marché [Tirole 88][Hauert 02].

Le maintien du point de cartel se pose comme un problème d'évolution de la coopération. Adopter le comportement de cartel c'est restreindre ses quantités et augmenter ses prix. Donc adopter le comportement de cartel c'est s'exposer à des comportements opportunistes qui peuvent tenter une guerre des prix pour essayer de conquérir le marché. Or, si les agents choisissent collectivement le coup de cartel, ils obtiennent un profit collectif supérieur à toute autre situation. On retrouve donc un schéma similaire à celui d'un jeu de bien public, soit un dilemme du prisonnier généralisé à N joueurs, avec le comportement de cartel qui est assimilable à la coopération. L'interaction est cependant plus complexe que celle du dilemme du prisonnier : d'une part le dilemme se joue à N joueurs puisque les offreurs interagissent tous en même temps et, d'autre part, le nombre des coups n'est pas limité à 2, l'ensemble des coups possibles étant un ensemble de couples (prix,quantité).

Dans la présentation stylisée traditionnelle de l'équilibre de marché, la situation de concurrence correspond à un équilibre de Nash. La question de la convergence des marchés ne se pose pas dans ce cas. En retenant d'autres hypothèses que celles qui conduisent à ce résultat et notamment dans la situation d'un marché à prix affichés (les prix sont fixés par les offreurs) et production anticipée (la quantité produite est décidée avant l'étape d'échange sur le marché), il n'y a plus d'équilibre de Nash [Alger 79] et conséquemment, se pose la question de la convergence qui peut être observée sur les marchés. Des évolutions de marché alternatives à la situation de convergence vers la concurrence ont été introduites. Notamment, les cycles d'Edgeworth [Edgeworth 25][Dasgupka 86] qui sont une forme d'oscillation entre l'équilibre de cartel et l'équilibre concurrentiel : quand le marché est proche de l'équilibre concurrentiel, ils tentent

de jouer l'équilibre de cartel, quand le marché est proche de l'équilibre de cartel, chaque offreur tend à dévier de cet équilibre en adoptant un comportement opportuniste, ce qui conduit les comportements à s'engager collectivement dans une guerre des prix jusqu'à converger à nouveau vers l'équilibre concurrentiel. Les travaux présentés dans ce chapitre étudient les formes de convergence observées sur un marché pour lequel les comportements des offreurs sont sélectionnés ou éliminés par un mécanisme évolutionnaire à l'instar de la démarche de la théorie des jeux évolutionnaires.

Les travaux présentés ont été menés en collaboration avec des économistes du CLERSE, Raluca Parvulescu et Nicolas Vaneecloo. Les comportements retenus sont de trois types : des coopérateurs, capables d'atteindre l'équilibre de cartel, des preneurs de prix, qui convergent collectivement vers l'équilibre concurrentiel et des comportements stratégiques qui cherchent à tirer le meilleur profit de la situation courante de marché et font osciller le marché. La démarche présentée dans la suite consiste à faire évoluer des populations d'agents présentant ces comportements A chaque instant, on tire K agents de la population totale qu'on fait interagir sur un marché. Les comportements les moins performants disparaissent tandis que l'effectif des comportements les plus efficaces augmente. En répétant cette procédure un certain nombre de fois, on crée une dynamique d'évolution de la population des agents. Celle-ci est similaire aux dynamiques écologiques des populations non réparties d'agents classiques en théorie des jeux évolutionnaires qui ont été introduites aux chapitres II et IV.

Le mécanisme de sélection des comportements converge vers une majorité de comportements coopératifs. Les marchés convergent alors soit vers l'issue de cartel, soit vers une situation d'oscillation entre l'équilibre de cartel et un état proche de l'équilibre concurrentiel. En augmentant le nombre des offreurs sur les marchés, on constate une augmentation de la part des comportements coopératifs dans la population totale, ce qui représente un résultat surprenant par rapport aux constats habituels sur le maintien des coalitions. Ces résultats, ainsi qu'une présentation contextuelle de la démarche économique standard, constituent la section 1.

Dans la section 2, on suppose que les offreurs sont reliés par un graphe et que l'évolution se fait sur la base de la copie du voisin de meilleur profit [Nowak 93]. En retenant cette hypothèse et pour les mêmes paramètres que dans la section 1, on montre qu'en fonction de la topologie retenue, il est possible de faire apparaître différentes formes de convergence de la population totale. Il peut y avoir convergence vers une majorité de comportements concurrentiels, vers une majorité de comportements stratégiques ou vers une majorité de comportements coopératifs.

Section V.1.Émergence de la coopération dans un marché concurrentiel en prix et en quantités à travers un processus évolutionnaire

A. Représentation d'un marché et configuration du marché étudié

C'est une présentation extrêmement simplifiée du modèle économique de base qui est développée ici. Les justifications de ce modèle ne sont pas données ou elles le sont très partiellement pour expliquer la démarche. Des références introductives à la microéconomie sont [Kreps 90], [Ekland 79].

Un marché est d'abord défini par **une courbe de demande**. Cette courbe associe à un niveau de prix une quantité demandée pour un bien. On note $D(p)$ la demande lorsque le prix du bien est p. Dans le cas général, cette courbe est prise décroissante avec le prix. La vitesse de la décroissance s'interprète comme la sensibilité au prix de la demande. On n'insiste pas plus sur le comportement du consommateur-demandeur, sauf pour dire qu'ici on fait l'hypothèse du **marché d'un bien homogène :** les demandeurs ne discriminent entre les offreurs que sur le critère de prix : ils achètent au plus bas prix possible.

Quel est le comportement du producteur ? Celui-ci est contraint par une fonction de production. Cette fonction synthétise l'état de la technologie et de l'organisation productive dont il dispose. Elle associe à un niveau de production, un coût de production. C'est à dire qu'à toute quantité produite Q, elle associe son coût de production $C(Q)$. On appelle coût marginal la fonction dérivée de la fonction de coût. Cette fonction associe à tout niveau de production Q le coût de production d'une unité supplémentaire du bien. On choisit une fonction C telle que les **coûts marginaux sont ici croissants**. Ceci signifie que le coût de production d'une unité supplémentaire du bien augmente avec le nombre des unités qui ont déjà été produites. Les offreurs sont supposés des individus égoïstes et parfaitement rationnels dont le but unique est la maximisation du profit : ils choisissent leur offre dans cette perspective.

Deux cas sont à distinguer : le cas où les offreurs sont trop nombreux pour pouvoir influencer le prix de marché et le cas où le comportement des offreurs est susceptible de faire varier ce prix.

Dans le premier cas, le prix de marché ne dépend pas de la quantité mise en vente par le producteur. On dit qu'il est **preneur de prix** : il constate le prix de marché p et vend à ce prix. Le **programme du producteur** est donc de choisir Q de manière à maximiser le profit qui s'écrit :

$$\pi(Q)=p\times Q-C(Q)$$

L'optimisation du profit se fait donc par le choix de la quantité et vise à maximiser le profit. La quantité est choisie telle que :

$$\frac{d\pi}{dQ}=0$$

ce qui est équivalent à

$$0=p-C'(Q)$$

Soit :

$$p=C'(Q)$$

Ceci signifie que **pour un prix donné, le producteur maximise son profit en produisant une quantité qui égalise son coût marginal au prix**. Le coût marginal est supposé croissant ici : plus l'offreur produit plus la dernière unité lui coûte cher à produire, il va continuer à produire tant que le prix est supérieur au coût marginal, de manière à augmenter son profit. Pour chaque offreur i, la relation d'égalité du prix au coût marginal induit une courbe dans l'espace (p,Q), on parle de **courbe d'offre et on note** $\boldsymbol{O_i(p)}$. En agrégeant les courbes d'offre de tous les offreurs, on obtient une courbe d'offre pour le marché $\boldsymbol{O(p)}$.

Le marché est défini par la courbe d'offre et la courbe de demande :

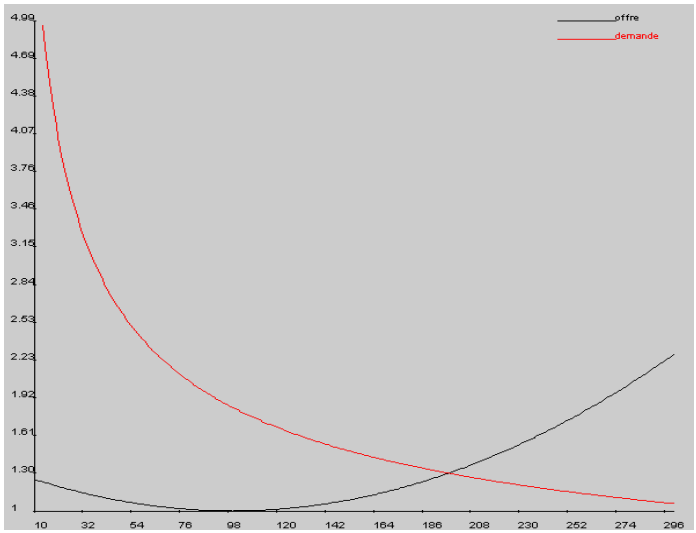


Figure A.1 La forme classique d'un marché avec la courbe d'offre en noire et la courbe de demande en rouge. Les prix sont en ordonnée, les quantités en abscisse. Le paramétrage des courbes est celui qui sera utilisé dans la suite.

Au croisement des courbes d'offre et de demande, on a un point pour lequel $D(p)=O(p)$, notons le (P_c,Q_c). Pour un prix $P_t>P_c$, la quantité produite $O(P_t)$ est supérieure à la demande $D(P_t)$: les producteurs subissent des invendus dans cette situation. De fait, les producteurs vont tendre à baisser leur prix. Pour un prix $P_c>P_t$, la quantité produite est inférieure à la quantité demandée : les producteurs vont tendre à augmenter

leur prix. Le point (P_c, Q_c) est donc un équilibre vers lequel le marché converge en présence de multiples offreurs, on parle d'**équilibre concurrentiel**.

Dans le second cas, l'agent n'est plus preneur de prix, mais il est l'unique offreur du marché, soit un offreur en **situation de monopole**, le prix de vente dépend de la quantité qu'il met en vente. Le programme du producteur est alors :

$$\pi(p, Q) = p \times D(p) - C(D(p))$$

Le producteur doit en effet produire une quantité sur la courbe de demande. Au dessus, il subirait des invendus. La résolution du programme donne un point (P_m, Q_m) avec $P_m > P_c$ et $Q_c < Q_m$ qu'on appelle **équilibre de monopole**. Le profit associé à l'équilibre de monopole (π_m) est bien sûr supérieur au profit associé à l'équilibre concurrentiel (π_C) : $\pi_m > \pi_c$.

Les deux cas précédents donnent deux points de référence du marché qui reposent sur l'hypothèse que les offreurs sont égoïstes et rationnels. En considérant d'autres formes de comportement, il devient possible d'envisager d'autres formes de convergence. Dans le cas où on a plusieurs offreurs identiques, notons leur nombre K, on peut définir un **point de cartel** en considérant la courbe d'offre O(p) qui est la somme des offres individuelles pour le niveau de prix p. Si chaque agent joue un coup $(p_m, \frac{Q_m}{K})$, tous gagnent plus qu'au coup de concurrence : les offreurs **reproduisent de manière décentralisée l'équilibre de monopole**. Néanmoins, dans cette situation chaque offreur a intérêt à jouer : $(p_m - \epsilon, Q_{opt})$ avec Q_{opt} la quantité telle que $p_m - \epsilon = C'(Q_{opt})$, c'est-à-dire la quantité maximisant le profit pour ce prix. Dans ce cas, l'offreur qui joue ce coup obtient un profit plus fort que le profit de cartel, mais les autres offreurs, qui jouent le cartel, subissent des invendus sur tout ou partie de leur production et ils subissent des pertes. Ceci signifie que tous les offreurs ont intérêt à dévier du coup de cartel, mais si tous le font, le profit collectif est moindre que ce qu'il aurait été en restant au point de cartel. Le cartel représente l'engagement d'un coût. L'offreur qui joue un tel coup s'expose à être "trahi" et à subir des pertes. Le cartel est pourtant le point qui dégage le plus fort profit collectif. On retrouve un schéma ayant la forme d'un jeu de bien public, soit un jeu de dilemme du prisonnier à N joueurs : le fait de jouer le coup de cartel est une forme de coopération et le fait de jouer à un prix en dessous du prix de cartel avec des quantités provoquant des invendus chez les autres est un coup agressif. Le maintien du coup de cartel est une problématique qui a déjà reçu un traitement en économie [Tirole 88]. L'analyse traditionnelle, en supposant des individus égoïstes et rationnels, soutient que, dès lors que le nombre d'offreurs sur le marché est élevé, il converge vers l'équilibre concurrentiel : les vendeurs, du fait de leur nombre, s'y considèrent comme simples preneurs de prix et proposent, au prix du marché, une quantité qui maximise leurs revenus (règle d'égalisation du coût marginal au prix).

Dans ce cas, la convergence se fait naturellement vers l'équilibre concurrentiel qui est également un équilibre de Nash.

En retenant des hypothèses différentes, l'équilibre concurrentiel n'est plus nécessairement un équilibre de Nash. C'est notamment le cas sur un marché à production anticipée et à prix affichés. Sur un marché à prix affichés, les offreurs choisissent leur prix de manière décentralisée. Sur un marché à production anticipée, la production est déterminée avant la phase d'échange : lors de la phase d'échange, il peut donc y avoir une partie de la demande qui n'est pas satisfaite puisque les offreurs sous-produisent par rapport à la demande ou il peut y avoir des situations où les offreurs se trouvent rationnés, c'est à dire qu'ils n'écoulent pas l'ensemble des quantités qu'ils ont produit dans la phase précédente. [Alger 79] **a montré que dans le cas de marchés à production anticipés et à prix affichés, il n'y a pas d'équilibre de Nash et notamment, la situation de concurrence n'est pas un équilibre de Nash**. Dans ce cas, il n'y a pas de résultat sur la forme de la convergence. L'absence d'équilibre est susceptible de conduire à une situation d'oscillation entre l'équilibre de cartel et l'équilibre concurrentiel. En effet, à partir de l'équilibre concurrentiel, les individus ont intérêt à jouer l'équilibre de cartel qui leur donne un profit supérieur. A partir du point de cartel chaque offreur va tenter d'exploiter le jeu des autres en proposant un prix inférieur au prix de cartel et en augmentant les quantités mises en vente. Tous les offreurs adoptent ce comportement qui les engage dans une guerre des prix inefficace. Au bout de quelques périodes, la diminution des prix ramène les offreurs à l'équilibre concurrentiel et un nouveau cycle commence. Les travaux présentés dans ce chapitre étudient les formes de convergence observées sur un marché à prix affichés et production anticipée pour lequel les comportements des offreurs sont sélectionnés ou éliminés par un mécanisme évolutionnaire à l'instar de la démarche de la théorie des jeux évolutionnaires.

On propose dans la suite une **démarche évolutionnaire en introduisant différents comportements présentant des niveaux et des formes de rationalités variés en étudiant l'évolution de la coopération en fonction de l'évolution de ces comportements et en caractérisant les formes de convergence qui apparaissent sur les marchés**. Les comportements vont être spécifiés comme des comportements d'offre sur le marché d'un bien non stockable et à **production anticipée**. Chaque offreur du marché adopte l'un ou l'autre des comportements.

Il détermine un prix de vente et une quantité à mettre en vente à ce prix. Suit une phase d'interaction des offreurs et des demandeurs sur le marché. Chaque offreur constate ensuite ses invendus et ses profits. En fonction de l'expérience qu'il retire de l'interaction de marché, il régule son offre pour la prochaine vente. On peut ainsi distinguer des **périodes** du jeu de marché. Une période est une phase de détermination de leurs offres par les offreurs, suivie d'une phase d'interaction sur le marché. Chaque comportement détermine une offre (prix, quantité) à chaque période en utilisant éventuellement l'information des périodes passées. Sur le marché, les offreurs diffèrent du point de vue de leurs comportements, soit de leur mode de détermination du prix et des quantités, mais ils sont soumis aux **mêmes conditions de production** : la

fonction de production est la même pour tous.

B. Taxonomie, comportements et équilibres

Cette partie décrit plus précisément le fonctionnement des marchés et les comportements retenus. Ceux-ci sont réunis au sein de 4 catégories présentées dans ce qui suit : les coopératifs, les stratégiques, les preneurs de prix et les imitateurs. Pour chacun des comportements, on illustre son fonctionnement en montrant l'évolution des prix moyens et de la coopération sur un marché avec K=10 comportements de ce type et pour M=100 périodes en partant de l'équilibre concurrentiel. Certains comportements convergent collectivement vers une situation stable qui peut être la situation concurrentielle, la situation de cartel ou une autre situation. D'autres conduisent à des évolutions cycliques, dont des situations de cycle d'Edgeworth. D'autres enfin conduisent à des évolutions du prix moyen qui s'apparentent à des marches aléatoires. Parmi ces derniers comportements, on compte notamment les comportements d'imitation : ce sont des comportements qui ne prennent sens qu'en présence de comportements reposant sur les fondamentaux du marché et qu'il est possible de copier. Lorsque de tels comportements sont seuls sur un marché, ils se copient les uns les autres.

D'autres taxonomies que celle présentée ici seraient possibles sur les mêmes comportements. Notamment les comportements pourraient être classés en fonction de leur niveau de rationalité : certains se contentent d'imiter les stratégies qui génèrent du profit, d'autres connaissent les points caractéristiques du marché (équilibre concurrentiel, équilibre de cartel) et jouent selon ces points, d'autres encore font des calculs pour évaluer la meilleure réponse à l'état du marché de la période précédente etc. La taxonomie présentée ci-dessous classe les comportements sur la similarité de leurs modes de fonctionnement et des issues qu'ils produisent. Les comportements coopératifs jouent sur la courbe de demande et permettent l'émergence de la coopération. Les stratégiques cherchent la meilleure réponse à l'état du marché et sont susceptibles de faire apparaître des évolutions cycliques. Enfin, les preneurs de prix jouent toujours en choisissant une quantité égalisant le prix au coût marginal et font tendre le marché vers l'issue concurrentielle.

Un marché évolue sur M=100 périodes, cette valeur a été retenue parce qu'elle permet la convergence des marchés pour les comportements retenus. Chaque période de marché est divisée en trois sous-étapes :

- Détermination d'une offre (prix,quantité) pour chaque offreur.
- Bruitage des offres . Pour introduire une certaine diversité, la détermination des offres est légèrement bruitée : une fois que le prix et la quantité ont été choisis par chaque offreur, on les modifie en tirant un bruit blanc normal $N(0,\sigma_{prix})$ sur les prix et un bruit similaire $N(0,\sigma_{quantite})$ sur les quantités. Pour éviter

des écarts trop importants, on contraint le bruit dans $[-2\times\sigma;2\times\sigma]$. Soit x le bruit tiré, le prix est modifié par un facteur multiplicatif $(1+x)$, les quantités sont modifiées de la même manière. Par défaut, les bruits sur les prix et les quantités sont pris à $\sigma_p=0.02 \;\; et \;\; \sigma_Q=0.02$.

- Interaction sur le marché : on considère les agents par ordre croissant de prix, le premier offreur $(p_{1,}Q_1)$ écoule $Min(D(p_1),Q_1)$, la demande restante est $\forall\, p>p_1 D_1(p)=D(p)-Min(D(p_1),Q_1)$. Pour le second offreur de plus faible prix, son offre $(p_{2,}Q_2)$ détermine la quantité qu'il écoule : $Min(D_1(p_2),Q_2)$. De même, l'offre du troisième offreur de plus faible prix est déterminée sur la demande restante etc.

Pour caractériser les évolutions sur les marchés, on spécifie deux indices. Un indice de coordination et un indice de coopération. L'**indice de coordination** est calculé sur une période et sert à savoir s'il y a ou non excédent d'offre sur le marché. Si on note par (p_i,Q_i) l'offre déterminée par l'offreur i, l'indice de coordination est calculé de la sorte, pour une période de marché :

$$\sum_{i=1}^{K}\frac{Q_i}{D(p_i)}-1$$

On peut donner des valeurs de référence pour cet indice. Si chaque offreur i joue une quantité à $Q_i=\frac{D(p_i)}{K}$,

alors $\sum_{i=1}^{K}\frac{Q_i}{D(p_i)}=1$ et l'indice de coordination est à 0 dans ce cas. Lorsque chaque offreur joue le $K^{ème}$ de la demande totale pour le prix qu'il affiche, il assure que les autres offreurs pourraient jouer le même coup sans être rationné. La valeur nulle signifie que tous les agents écoulent leurs quantités et qu'il n'y a pas de demandeur non servi. Une valeur positive indique une situation d'excès d'offre et une valeur négative une situation d'excès de la demande.

Même dans le cas où l'indice de coordination est proche de 0, il peut ne pas y avoir coopération. Par exemple, pour le cas de l'équilibre concurrentiel, le niveau de coordination est 0 puisque les quantités offertes sont égales aux quantités demandées. Cependant, le niveau de profit est différent de ce qu'il serait dans le cas d'une situation où tous joueraient le coup de cartel. On détermine un nouvel indice, l'**indice de coopération** qui est calculé sur une période :

$$\frac{profit\,cumule\,total-profit\,total\,de\,concurrence}{profit\,total\,de\,cartel-profit\,total\,de\,concurrence}$$

Cet indice est au maximum de 1, il atteint ce niveau lorsque tous les offreurs jouent le point de cartel. Cet indice est à 0 lorsque les offreurs jouent le coup de concurrence. Cet indice est négatif pour le cas où le profit cumulé total est inférieur au profit de concurrence.

Pour simuler les marchés, la fonction de demande retenue est :

$$D(p)=K\times A\times p^{-\alpha}$$

L'élasticité de la demande est $\alpha=-2$, ce coefficient correspond à la réaction de la demande lors d'une variation de prix. Plus la valeur absolue de l'élasticité est forte, plus la demande réagit à une variation de prix. Si l'élasticité est positive, la demande augmente avec le prix, sinon, la demande diminue avec le prix.

Le paramètre $A=336.78$ n'appelle pas d'interprétation économique, il est ajouté pour que les quantités évoluent dans un certain intervalle qui soit significatif pour des sujets expérimentaux soumis aux conditions de marché.

La demande dépend du nombre des offreurs sur le marché K. Cette spécification est faite pour que les simulations avec des nombres d'agents différents soient comparables. Si on conservait la même courbe de demande indépendamment de K, on aurait une variation des équilibres de concurrence et de cartel avec la variation du nombre des offreurs sur le marché, ce qui rendrait plus difficile la comparaison des évolutions. On fera référence à la fonction $\frac{D(p)}{K}$ comme fonction de **demande individuelle**. Notamment si tous les agents jouent sur leur courbe de demande individuelle, il n'y a pas de rationnement (c'est à dire que tous les offreurs écoulent l'ensemble de leurs quantités) et l'indice de coordination est à 0.

La fonction de coût utilisée pour les offreurs est :

$$CT(Q)=\frac{1}{3}aQ^3-aq_oQ^2+a\times(q_0^2+b)+CF$$

$CF=30$ sont les coût fixes (les coûts pour CT(0)). $q_0=100$ est la quantité pour laquelle le coût marginal est minimum. $b=1$ Est le minimum du coût marginal. $a=3.18\times10^{-5}$ est un paramètre de calibrage du modèle.

Avec ces paramètres et ces fonctions, l'équilibre concurrentiel est celui pour lequel les offreurs jouent : (1.307,198) et l'équilibre de cartel est celui pour lequel les offreurs jouent : (2.037,82).

Enfin, pour fonder le comportement de certains des offreurs, on identifie un point supplémentaire dans l'espace (prix,quantité), **le coup prudent**. On appelle **demande fractionnelle** la demande qui s'adresse à un agent pour un niveau de prix si tous les autres agents jouent au même prix en proposant une quantité égalisant prix et coût marginal. Le coup prudent est le coup qui génère le plus de profit pour un offreur sur sa courbe de demande fractionnelle. Ce coup est donc calculé comme la maximisation du profit sous contrainte que les autres agents jouent le jeu le plus défavorable pour l'agent : le coup prudent est un **maximin**, soit le coup maximisant le profit minimum [Binmore 99]. Certains comportements reposent sur ce coup prudent pour la détermination de leur offre. Le coup prudent est : (1.313,188).

Les comportements coopératifs

Les comportements coopératifs jouent toujours des coups sur leur courbe de demande individuelle ou des coups proches. En présence de ces comportements, il est toujours possible à un comportement de jouer le coup de cartel sans subir de perte et ces comportements évoluent collectivement vers le coup de cartel. Parmi ces comportements, on a un comportement "pur" qui joue toujours le coup de cartel et 3 comportements réactifs qui réagissent s'ils subissent des invendus. Ceux-ci se rapprochent plus ou moins du coup de cartel s'ils perçoivent que l'environnement leur est ou non favorable.

- Coopératif de type 1 : joue toujours le coup de cartel.

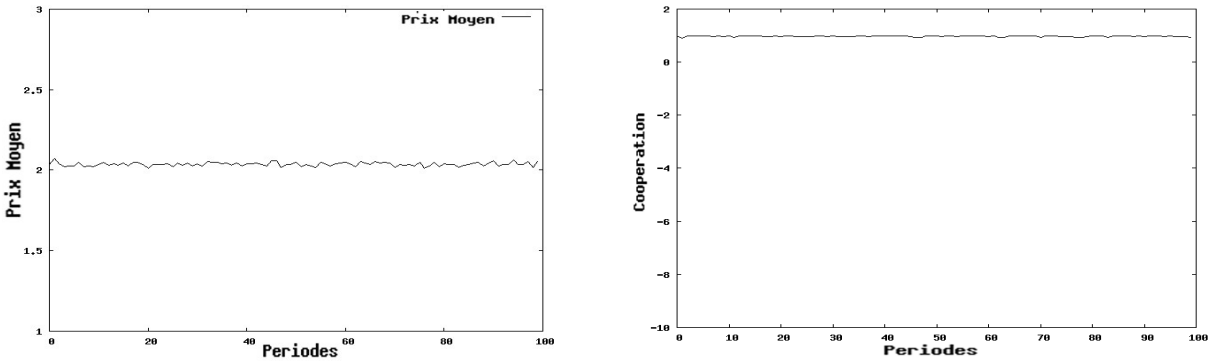


Figure B.1 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de coopératifs de type 1

Les prix sont stabilisés autour de l'issue de cartel et le niveau de coopération est à 1. L'équilibre de cartel mis en évidence sur le graphique est celui qui dégage le plus fort profit collectif.

- Coopératif de type 2 : cet offreur détermine son prix comme une moyenne pondérée du prix de concurrence et du prix de cartel :

$$prix = \alpha \times p_M + (1-\alpha) \times p_c$$

Si cet offreur subit un rationnement inférieur à 5%, c'est-à-dire s'il subit des invendus pour moins de 5% de la quantité qu'il met en vente, il augmente son coefficient α de 5% et se rapproche du coup de cartel, sinon, il diminue ce coefficient de 5% en le conservant toujours dans [0:1]. L'offreur choisit sa quantité comme la quantité correspondant à la demande individuelle pour son prix.

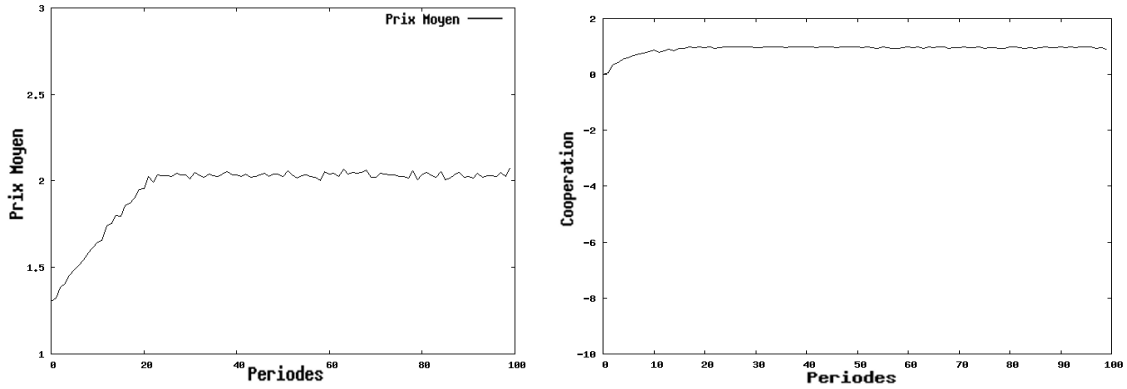


Figure B.2 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de coopératifs de type 2

Comme tous les offreurs jouent sur la demande individuelle, aucun ne subit jamais de rationnement, sauf éventuellement du fait de l'augmentation des quantités offertes sous l'impact du bruit. De fait, les offreurs se rapprochent progressivement du coup de cartel jusqu'à atteindre ce coup. Les offreurs se stabilisent collectivement à l'équilibre de cartel.

- Coopératif de type 3 : s'il ne subit pas de mévente, cet offreur augmente son prix de 5% et ne change pas la quantité qu'il offre. S'il subit des méventes, cet offreur se place en dessous du plus haut prix pour lequel il n'y a pas eu de rationnement et joue à la demande individuelle pour ce prix.

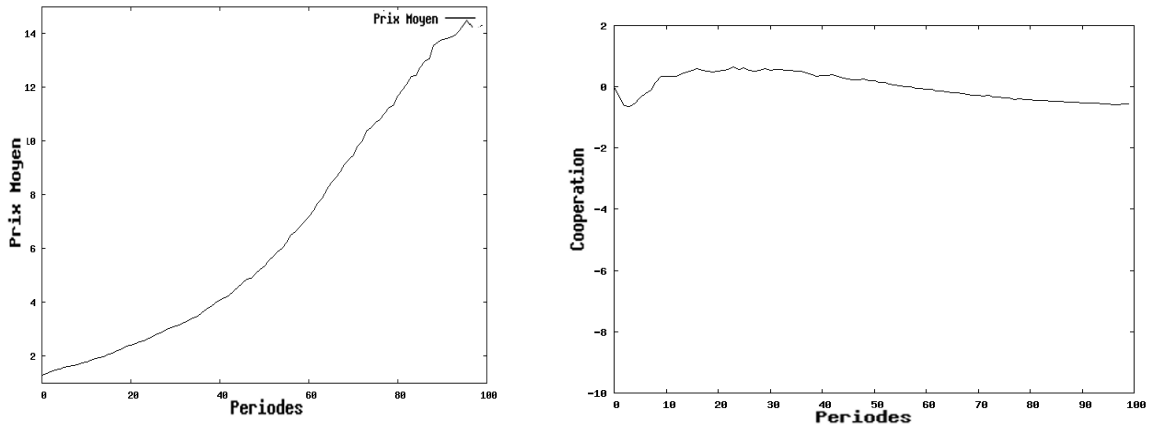


Figure B.3 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de coopératifs de type 3

Pour l'interprétation, il faut ici noter le changement d'échelle pour la courbe des prix moyens : les prix augmentent bien au delà du prix de cartel. Les offreurs se coordonnent et parviennent au coup de cartel, mais ils continuent ensuite le processus de restriction des quantités produites et d'augmentation des prix. Dans la situation finale, ils se stabilisent en étant rentables et en ne servant que la demande qui continue d'exister pour des prix bien supérieurs au prix de cartel.

- Coopératif de type 4 : des offreurs de ce type jouent le coup prudent si le rationnement moyen du marché est supérieur à 5%, sinon ils jouent le coup de cartel

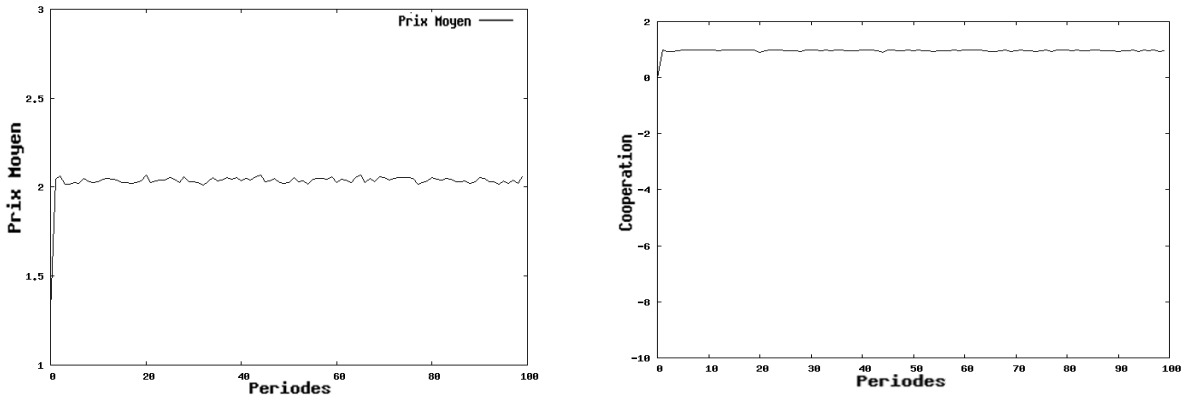


Figure B.4 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de coopératifs de type 4

Ces offreurs reposent sur le calcul du coup prudent présenté plus haut. En jouant le coup de concurrence à la première génération, aucun offreur n'est rationné, de sorte que les offreurs jouent le coup de cartel dès le coup précédent. Ici les offreurs se maintiennent ensuite au coup de cartel. L'aspect très réactif du comportement

n'est pas illustré ici puisqu'aucun comportement ne tente de dévier.

Les comportements stratégiques

Un comportement stratégique tente de tirer le meilleur parti d'une situation donnée. Son schéma général est d'essayer de baisser son prix par rapport aux autres en essayant de produire à l'optimum (au coût marginal). La présence de ce type de comportement conduit à des pertes pour les autres comportements s'ils maintiennent leur prix. Par ailleurs, il peut provoquer une guerre des prix en face d'agents du même type qui vont répondre en diminuant encore plus leurs prix. La plupart de ces comportements produisent des cycles d'Edgeworth. Alors que tous les comportements de la classe précédente obtiennent collectivement des profits positifs, les offreurs de la présente catégorie agissent de manière agressive et convergent collectivement vers des situations de profits négatifs. Même si la situation de cartel émerge, ils anticipent qu'ils pourraient récupérer la part de marché des autres agents et tentent individuellement de le faire, ce qui les conduit à s'engager dans des guerres de prix. De fait, les profits individuels de tous les agents sont négatifs ici quand ils interagissent entre eux.

- Stratégique 1 : ce comportement compare deux offres. Pour la première, l'offreur calcule la part de demande qui lui est laissée par le comportement observé des autres offreurs. Il calcule au prix de cartel une quantité basée sur cette part de demande. Il en déduit un profit potentiel. Soit les autres offreurs ont un comportement agressif et sur-produisent, auquel cas, le profit potentiel du coup de cartel est négatif, soit les autres offreurs sont coopératifs et le profit potentiel du coup de cartel est positif. L'offreur compare le profit potentiel du coup de cartel au profit d'une offre agressive qui consiste à adopter un prix de 5% inférieur au plus haut prix non rationné sur le marché et à produire une quantité égalisant le prix au coût marginal. Il joue l'offre qui rapporte le plus potentiellement. Donc dans un marché coopératif, le comportement stratégique 1 joue proche du coup de cartel, dans un marché non coopératif, il joue une offre agressive en diminuant les prix.

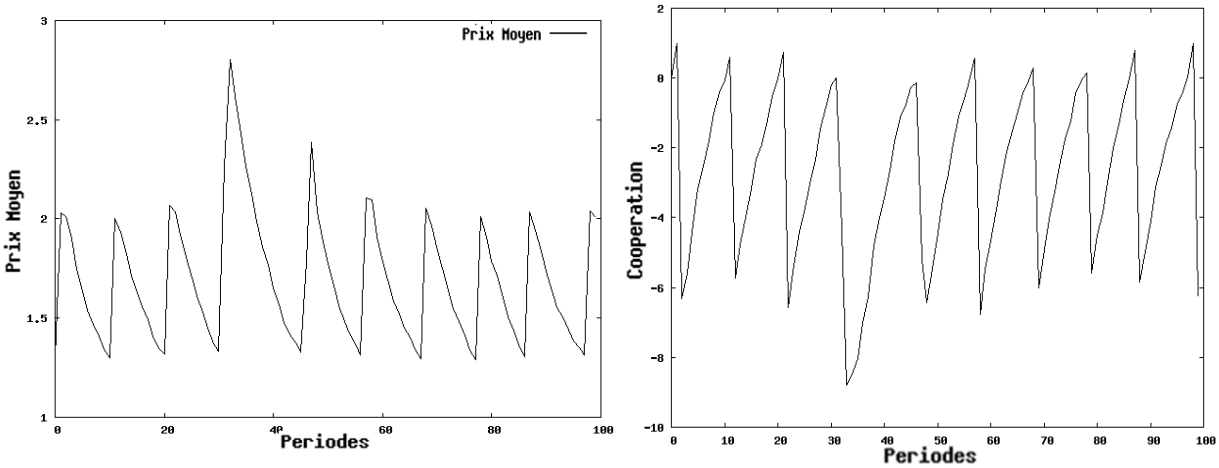


Figure B.5 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de stratégiques de type 1

On constate l'apparition de cycles de prix. Lorsque les offreurs sont proches du coup de concurrence (période t), chacun d'entre eux anticipe qu'il peut jouer près du coup de cartel et joue donc un tel coup : l'ensemble des offreurs joue au coup de cartel (période t+1). A partir de ce coup, le fait de jouer le plus haut prix saturé et au coût marginal donne potentiellement un fort profit : tous les offreurs jouent un coup agressif légèrement en dessous du prix de cartel (période t+2). L'indice de coordination est très élevé à ce moment : à la période suivante chaque agent joue à un prix légèrement inférieur au plus haut prix saturé et au coût marginal : les agents s'engagent dans une guerre des prix avec un excès d'offre qui se maintient jusqu'à ce que les offreurs soient proches de l'équilibre concurrentiel, ce sont les phases de baisse des prix que l'on constate sur le graphique. En arrivant à l'équilibre concurrentiel, le jeu au coup marginal ne provoque pas d'invendus. De fait, les agents perçoivent individuellement qu'il est possible de jouer proche du coup de cartel et l'ensemble des agents rejoue au coup de cartel à la génération suivante : un nouveau cycle commence.

- Stratégique 2 : cet offreur joue comme un stratégique de type 1 si le rationnement qu'il a subi est inférieur à 5% de la quantité qu'il a mis en vente, sinon, il joue en diminuant son prix de 5% et en maintenant ses quantités.

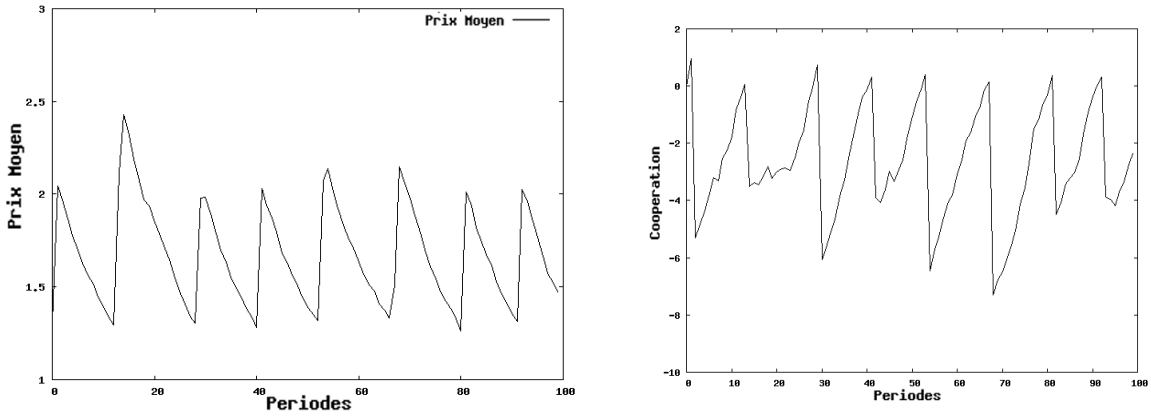


Figure B.6 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de stratégiques de type 2

A l'instar de ce qui est observé pour le comportement stratégique 1, on constate des cycles de prix. Ce qui change ici c'est la forme de la guerre des prix dans laquelle s'engagent les agents : lors d'une guerre des prix, les agents ne vont pas s'aligner sur le prix de l'offreur de plus haut prix non rationné, ils vont jouer en diminuant de 5% leur prix, ce qui provoque un ralentissement des phases (le coup de cartel est joué 10 fois pour les stratégiques de type 1, 8 fois pour les stratégiques de type 2 : les phases de diminution des prix sont plus lentes pour les stratégiques 2).

- Stratégique 3 : si le rationnement subi est inférieur à 5%, le comportement augmente son prix de 5% et maintient sa quantité offerte, sinon, il joue à 5% en dessous du plus haut prix non rationné et détermine sa quantité en égalisant le coût marginal au prix.

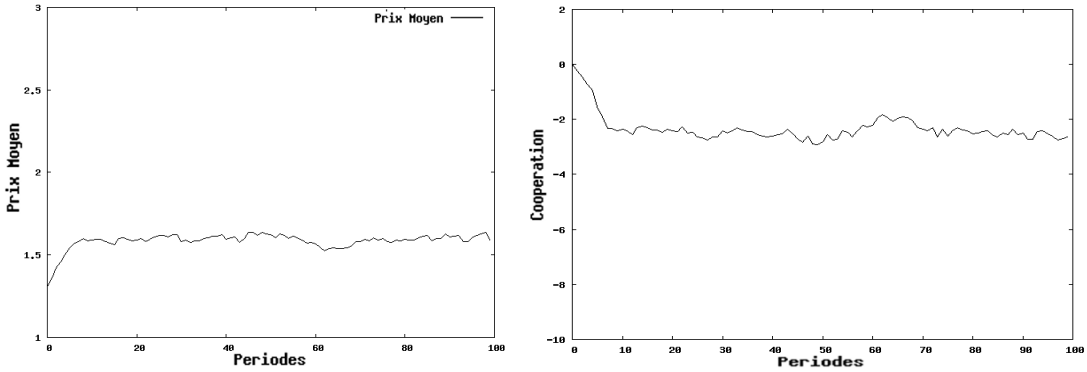


Figure B.7 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de stratégiques de type 3

Ce comportement se stabilise collectivement à un prix intermédiaire entre le prix de concurrence et le prix de cartel. La situation stabilisée est telle qu'à chaque période, on a une part des offreurs qui sont rationnés et l'autre qui ne l'est pas. Ceux qui ne le sont pas augmentent leur prix de 5% et ceux qui le sont s'alignent sur le plus haut prix non rationné. La stabilisation se fait à un niveau où le nombre d'agents est telle que la moyenne de la diminution est compensée par la moyenne de l'augmentation.

- Stratégique 4 : ce comportement prédit l'offre que produirait un stratégique de type 1 dans la configuration du marché à la période précédente. Il joue un comportement de meilleur réponse par rapport à ce coup en offrant à un prix de 5% inférieur et une quantité égalisant le prix au coût marginal.

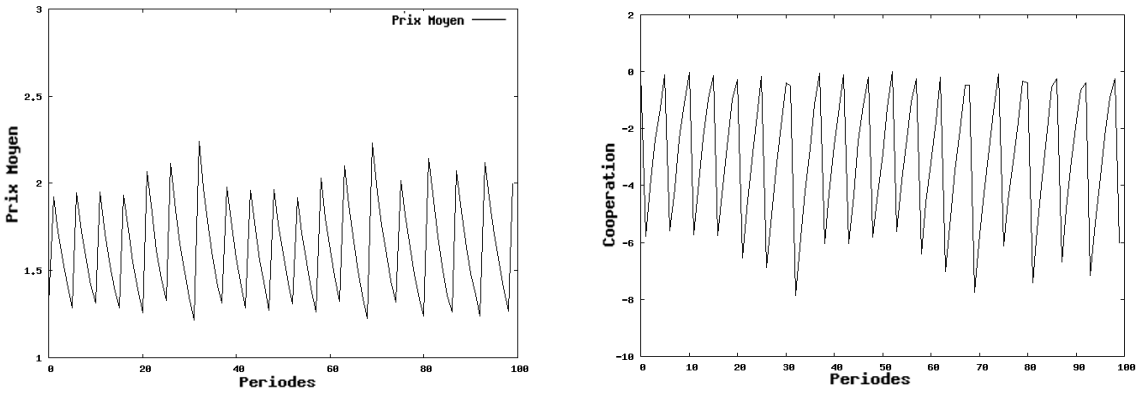


Figure B.8 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de stratégiques de type 4

Le comportement conduit à une accélération des cycles par rapport aux évolutions de prix que donne une population de stratégiques de type 1.

Les comportements preneurs de prix

Ces comportements partent de l'hypothèse que les comportements sont suffisamment nombreux sur le marché pour que la convergence se fasse vers l'équilibre concurrentiel. Ils choisissent un prix soit en copiant le prix moyen, soit en imitant le prix de l'offreur qui a obtenu le meilleur profit, puis ils choisissent la quantité qui maximise le profit pour ce prix, soit la quantité qui égalise le coût marginal au prix. Ces agents ne connaissent pas tous le prix d'équilibre concurrentiel et se distinguent par la manière de choisir un prix d'offre.

- Preneur de prix 1 : joue toujours le coup concurrentiel. Cet offreur connaît le prix d'équilibre concurrentiel du marché et joue à ce prix.

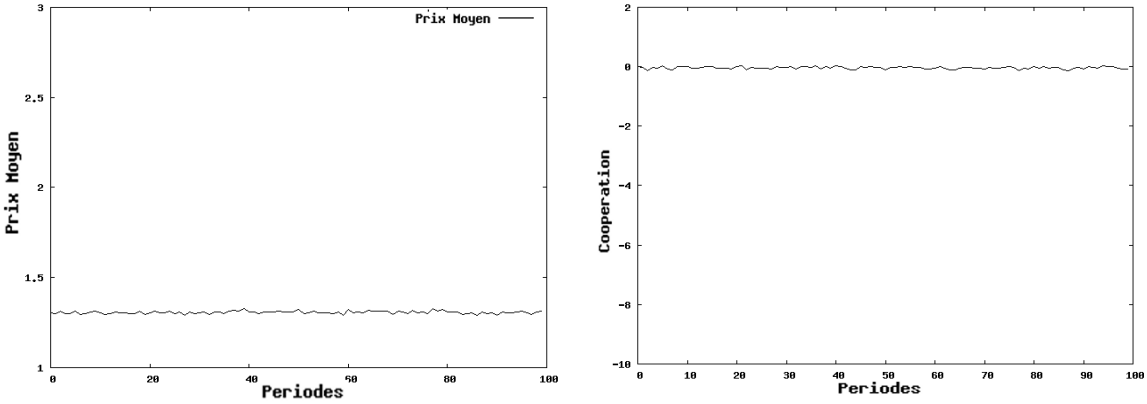


Figure B.9 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de preneurs de prix de type 1

Ces offreurs sont les seuls preneurs de prix qui sont profitables. Ils convergent vers une situation où la coopération est de 0 du fait même de la définition de l'indice de coopération.

- Preneur de prix 2 : cet offreur fixe son prix au prix moyen du marché à la génération précédente et choisit sa quantité de manière à égaliser prix et coût marginal.

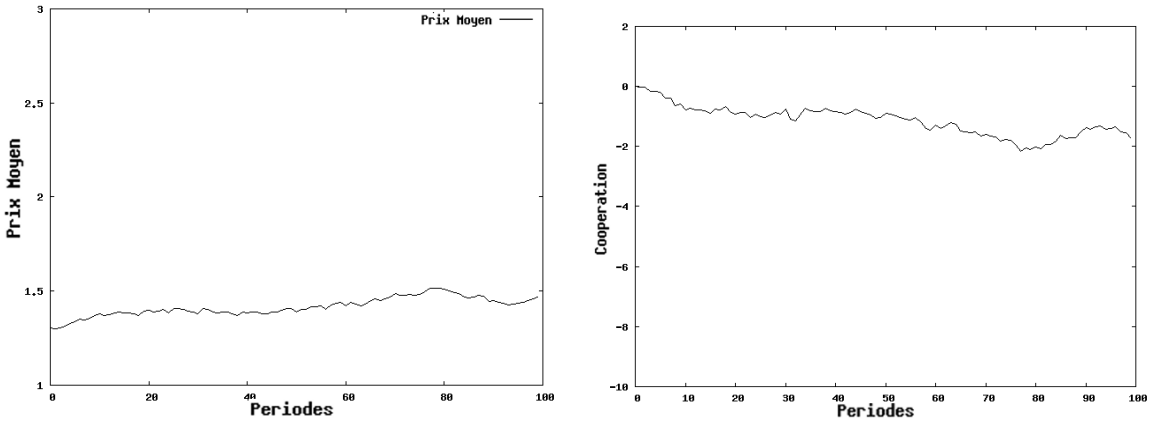


Figure B.10 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de preneurs de prix de type 2

Ici, l'évolution du prix moyen ou de la coopération prend la forme d'une marche aléatoire qui pourrait prendre beaucoup de formes différentes : le profit ou le rationnement subi n'exercent pas de forces de rappel, les prix peuvent donc dériver. Ce comportement devient plus pertinent en présence d'autres comportements.

- Preneur de prix 3 : cet offreur fixe son prix au prix de l'offreur qui a eut le plus fort profit à la génération précédente et choisit sa quantité de manière à égaliser prix et coût marginal.

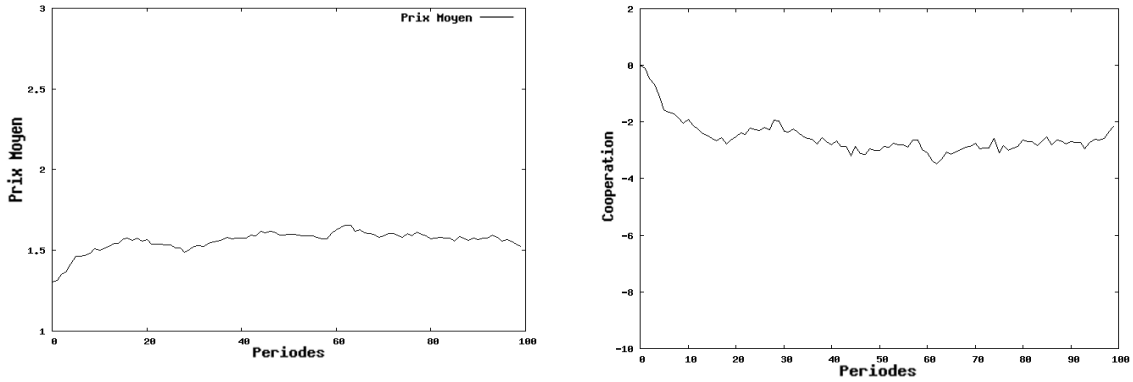


Figure B.11 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de preneurs de prix de type 3

Comme pour les preneurs de prix 2, il n'est pas possible de donner une interprétation de l'évolution. A partir du coup concurrentiel, un offreur peut obtenir un meilleur profit en augmentant légèrement son prix sous l'effet du bruit. Cet offreur sera imité par tous les autres à la génération suivante, rendant le coup joué inefficace. Par la suite, différents scénarii sont possibles.

- Preneur de prix 4 : l'offreur augmente son prix de vente s'il a subi un rationnement inférieur à 5%, sinon, il baisse son prix de 5%.

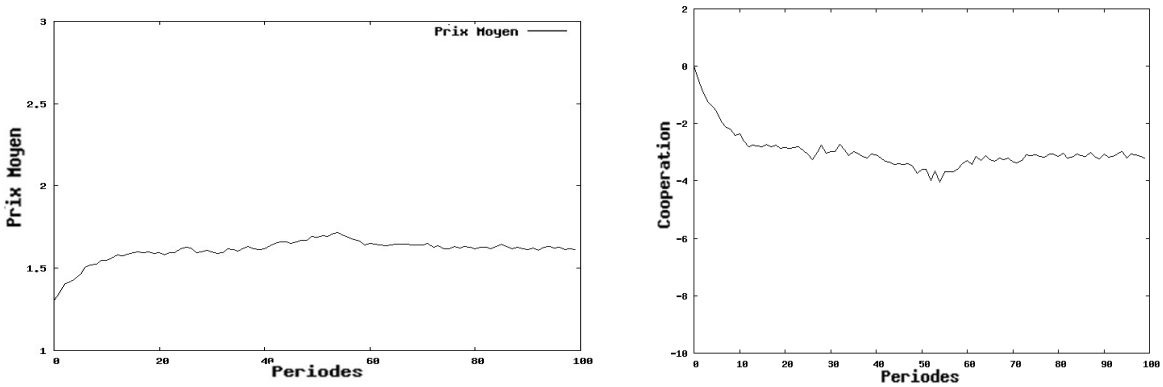


Figure B.12 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population de preneurs de prix de type 4

La stabilisation du prix de marché intervient dans une situation où une partie des offreurs sont rationnés et l'autre non : ceux qui ne le sont pas augmentent leur prix de 5%, les autres le diminuent.

Les 12 comportements précédents constituent une première liste qui va faire l'objet de l'étude principale dans la partie suivante. Seront également étudiées d'autres listes de comportements, dont une liste contenant les comportements d'imitation.

Les comportements d'imitation

Au sein de cette catégorie, on a seulement introduit le comportement mimétique qui consiste à copier le prix et la quantité pratiqués par l'offreur qui a le plus de profit à la génération précédente.

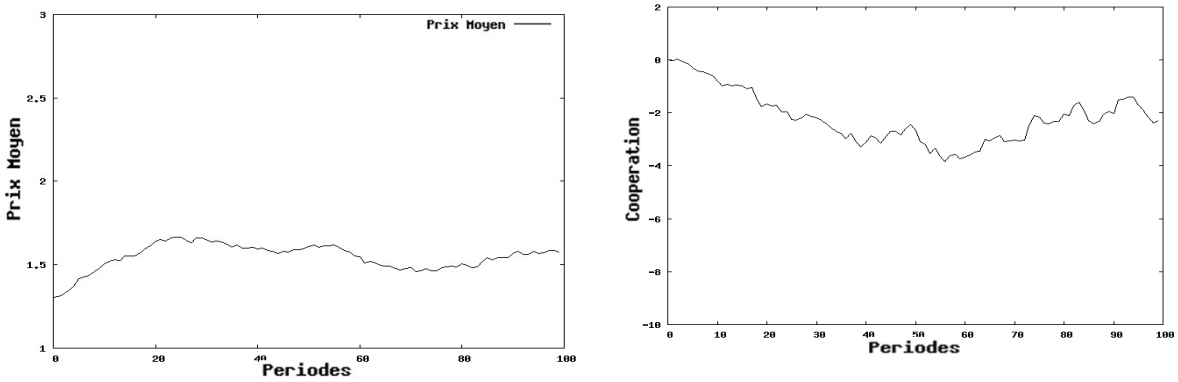


Figure B.13 : Évolution du prix moyen et de la coopération pour une population d'imitateurs

Ici les comportements subissent des pertes d'importance, même si le profit exerce une force de rappel.

Dans ce qui précède, un certain nombre de comportements repose sur la réaction à un seuil de rationnement et un certain nombre de comportements augmentent ou diminuent leur prix par rapport à la période précédente. Les valeurs de ces coefficients ont été uniformisées. La réaction à un rationnement ne se produit que si ce rationnement est supérieur à 5% de la quantité de référence, la variation à la hausse ou à la baisse autour d'un prix est une variation de 5% .

C. Démarche évolutionnaire

La démarche évolutionnaire repose sur l'interaction d'offreurs au sein de marchés et c'est le succès relatif de tel ou tel comportement sur les marchés qui va faire que ce comportement progresse au sein de la population globale ou diminue. Pour les marchés, on conserve le même paramétrage que celui défini dans la partie précédente.

On spécifie une démarche évolutionnaire pour voir quels comportements sont sélectionnés, comment la coopération évolue sur le marché et quels sont les équilibres de marché finaux. Cette démarche s'inspire de la démarche de la théorie des jeux évolutionnaires. La démarche commence par la création d'une population d'offreurs de différents comportements. Pour chaque comportement, un nombre égal d'offreurs l'adopte. Cette population évolue

ensuite de manière asynchrone. A chaque génération on fait interagir des agents entre eux. Plus précisément, on retire K offreurs de la population totale et on les fait interagir sur un marché sur M périodes. Chaque offreur accumule un score, son profit cumulé. A l'instar de la dynamique de réplication, le comportement de chaque offreur se diffuse en fonction de la part du profit accumulé par cet offreur dans le profit total généré sur le marché. Les comportements les moins performants se trouvent éliminés et les comportements performants se diffusent. A la fin des M périodes de marché, on a toujours K offreurs, mais les comportements ont évolué. On réintègre les K offreurs dans la population globale. En répétant cette procédure sur un certain nombre de générations, on observe des évolutions de la part de chaque comportement dans la population totale. La suite développe précisément la démarche évolutionnaire.

On crée une population avec N occurrences de chacun des 12 comportements. C'est cette population de 12×N comportements que l'on va faire évoluer. L'évolution est spécifiée de la manière suivante :

On lance l'évolution sur G générations. Pour chaque génération, on retire au hasard K offreurs des 12×N offreurs de la population totale. On fait interagir les K offreurs entre eux sur un marché. On obtient pour chaque offreur un profit cumulé, on note les profits cumulés par offreur :

$$\pi C_{1,} \pi C_{2,} \ldots \pi C_K$$

Parmi ces profits cumulés, on récupère le profit le plus faible sur le marché :

$$\pi C_{min} / \forall j, \pi C_j \geq \pi C_{min}$$

Pour chaque profit cumulé, on le diminue du plus faible profit cumulé :

$$\forall j, \pi C'_j = \pi C_j - \pi C_{min}$$

Ce retraitement est effectué pour le cas de profits cumulés négatifs : les coefficients $\pi C'_i$ sont tous supérieurs ou égaux à 0.

Le comportement de chaque offreur se diffuse. eff_j est le nombre d'offreurs qui auront adopté le comportement de l'offreur j à la période suivante :

$$\forall j, eff_j = \frac{\pi C'_j}{\sum_{i=1}^{K} \pi C'_i} \times K$$

Les eff_j sont des réels. Quel que soit le mécanisme retenu pour obtenir des entiers, il peut y avoir des ensembles de valeurs entières tels que

$$\sum_{i=1}^{K} arrondi(eff_i) \neq K$$

On rajoute alors un mécanisme correctif pour que la somme des effectifs soit bien K. Tant que l'on a un effectif total supérieur à K, on tire au hasard un offreur i tel que $eff_i = 1,$ c'est à dire un offreur dont le comportement ne

s'est pas diffusé et qui n'a pas été éliminé, et on diminue son effectif à 0. Tant que l'on a un effectif total inférieur à K, on tire au hasard un comportement tel que $eff_i \geq 1$ et on augmente cet effectif de 1. On réintègre dans la population totale eff_i occurrences du comportement i, soit K comportements au total : la population totale est maintenue à un effectif constant.

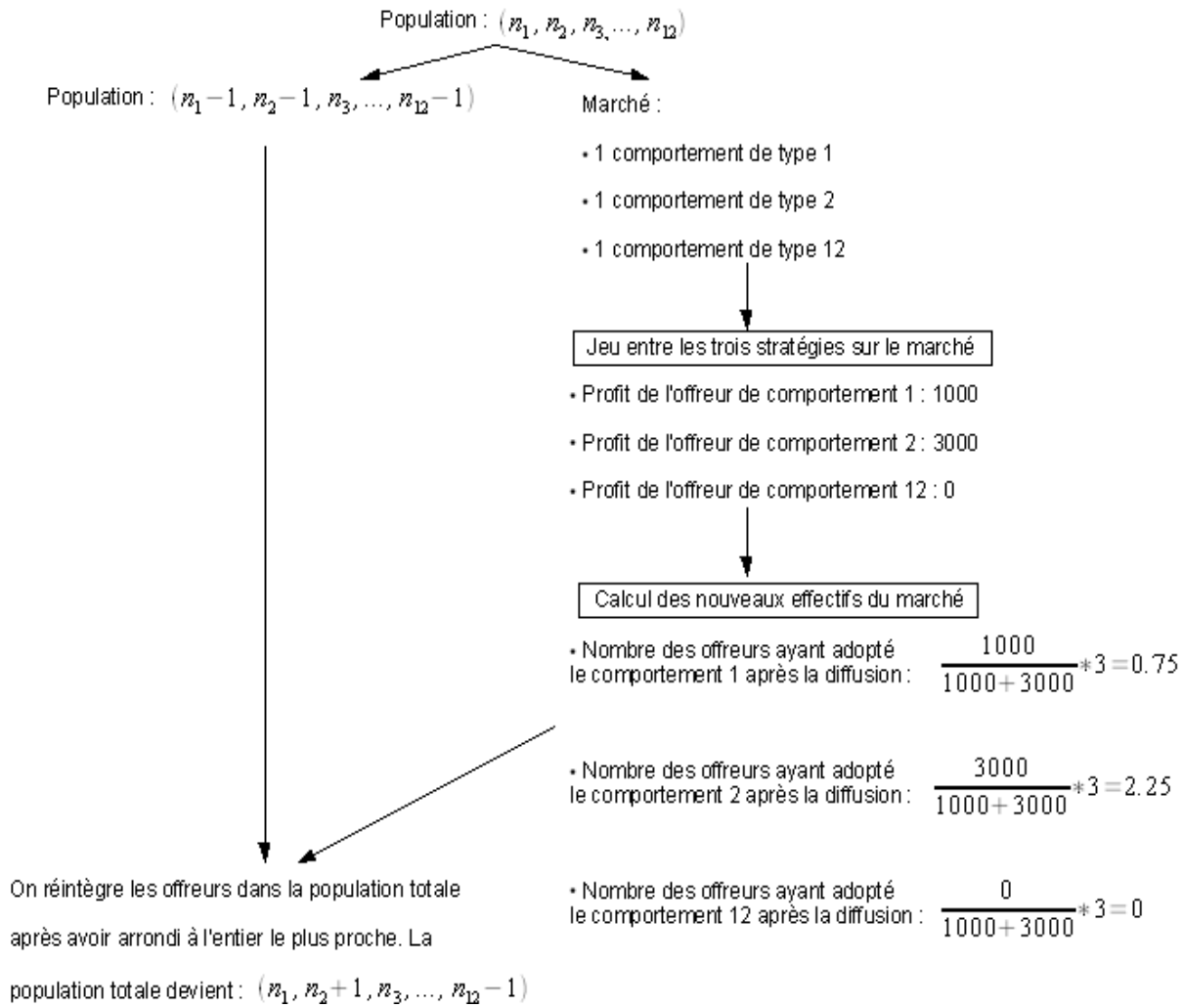
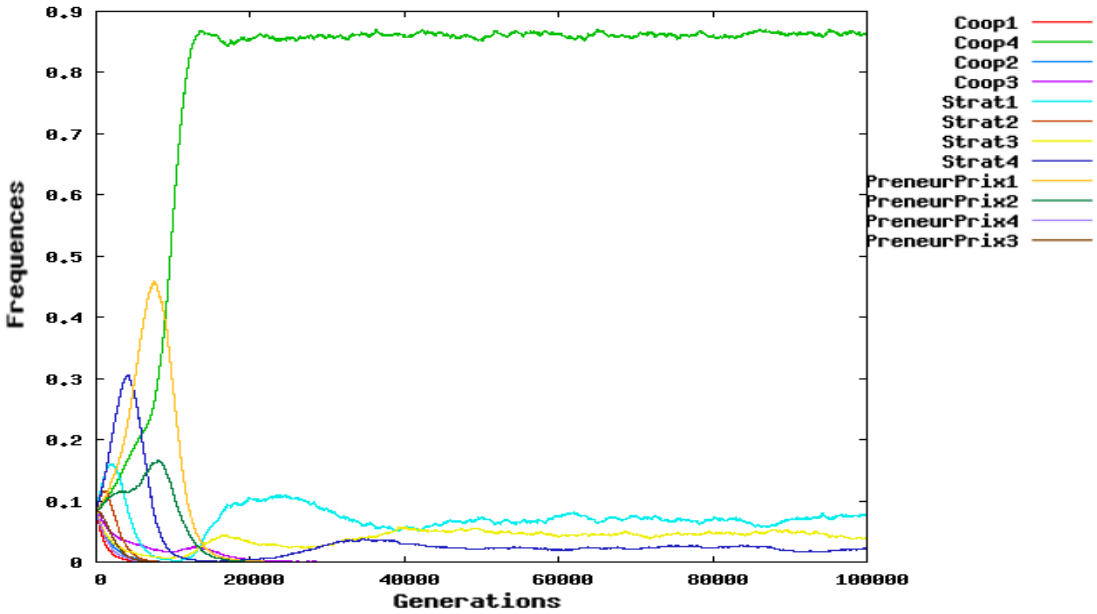


Figure C.1 : Présentation du mécanisme évolutionnaire. Illustration pour le cas K=3

D. Résultats de l'évolution

Dans ce qui suit, on présente les résultats d'une première simulation écologique (S1) sur la liste des 12 premiers comportements présentés dans la partie B : les 4 stratégiques, les 4 coopératifs et les 4 preneurs de prix. Dans cette simulation, on prend un effectif de N=1000 par comportement, soit une population totale de 12000 comportements. Pour introduire de la diversité dans les comportements, on initialise les marchés sur des offres intermédiaires entre l'offre

concurrentielle et l'offre de cartel. Les indices de coopération, de coordination et de prix seront calculés en moyenne sur les 80 dernières périodes de chaque marché pour ne pas introduire un biais qui soit lié à la situation initiale dans la prise en compte des statistiques. Les graphiques suivants représentent l'évolution de la population des stratégies, de la coopération et de la coordination.



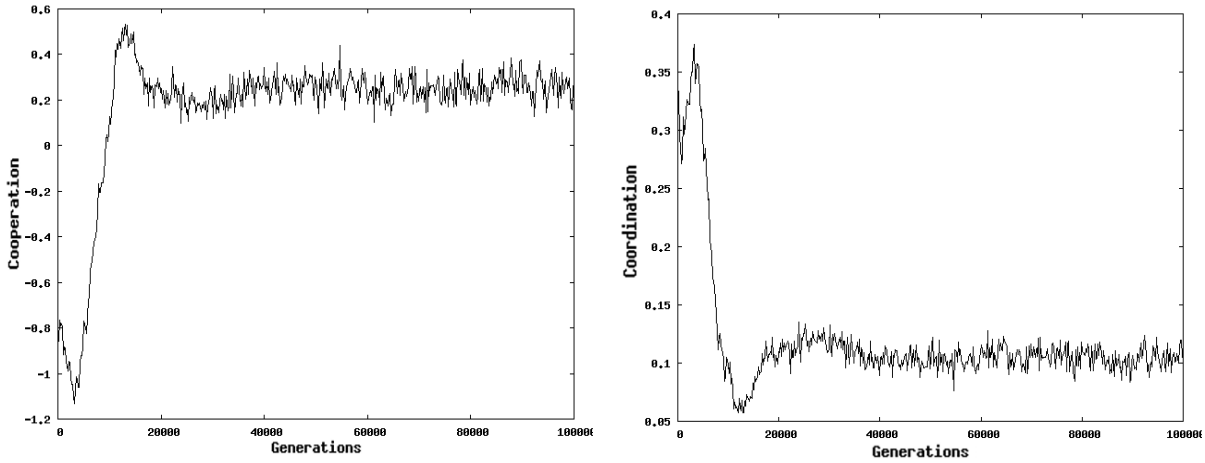


Figure D.1 Évolution des fréquences des comportements, de la coopération et de la coordination pour l'évolution de base

Contrairement à l'opinion dominante sur la non-tenabilité des comportements coopératifs |Tirole 88], ce sont ces comportements qui s'imposent et la coopération oscille en étant constamment significativement supérieure à 0 dans la situation finale. On distingue deux phases principales dans l'évolution de la coopération. D'abord une phase d'augmentation qui correspond à phase de croissance des coopératifs de type 4 et à une amélioration continue de la coordination (diminution de l'indice). Cette phase se décompose. Dans un premier temps il y a croissance des comportements non-coopératifs qui bénéficient de la présence de comportements coopératifs qui ne sont pas suffisamment réactifs. Dans un second temps, ces comportements non-coopératifs sont devenus trop nombreux et ont éliminé les comportements exploitables. Cette phase se termine avec le maximum de la coopération qui correspond également à un maximum de la fréquence des coopérateurs de type 4.

On observe ensuite une phase de diminution de la coopération jusqu'à une stabilisation. Au niveau des comportements, cette phase correspond à une diminution de la fréquence des coopératifs de type 4 et à une remontée de la fréquence de certains comportements stratégiques.

A la fin de l'évolution, on a une situation avec les proportions suivantes, qui sont relativement stables:

Coopératif 4	Stratégique 1	Stratégique 3	Stratégique 4
0.8602	0.0768	0.0407	0.0223

Dans ce cas, on peut en déduire les probabilités de tirer tel ou tel marché à chaque génération, c'est à dire la probabilité, en tirant K=10 comportements dans la population, de tirer un marché avec un stratégique 1 et 9 coopératifs 4 par

exemple. Le marché le plus fréquent est celui avec 10 coopératifs de type 4 (probabilité de 0.223), ce marché converge immédiatement et se maintient à l'équilibre de cartel (partie B). On donne, pour les autres marchés les plus fréquents, leur probabilité d'émergence et l'évolution des prix moyens et de la coopération sur ces marchés.

- Le marché avec 9 coopératifs de type 4 et un stratégique 1 : probabilité = 0.198

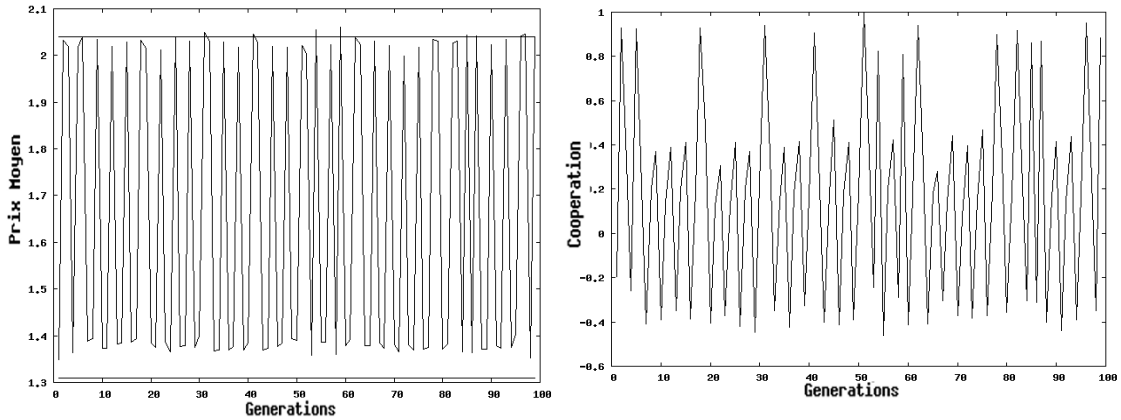


Figure D.2 Évolution des prix moyens et de la coopération pour un marché avec 9 coopératifs 4 et un stratégique 1

- Le marché avec 9 coopératifs de type 4 et un stratégique 3 : probabilité = 0.105

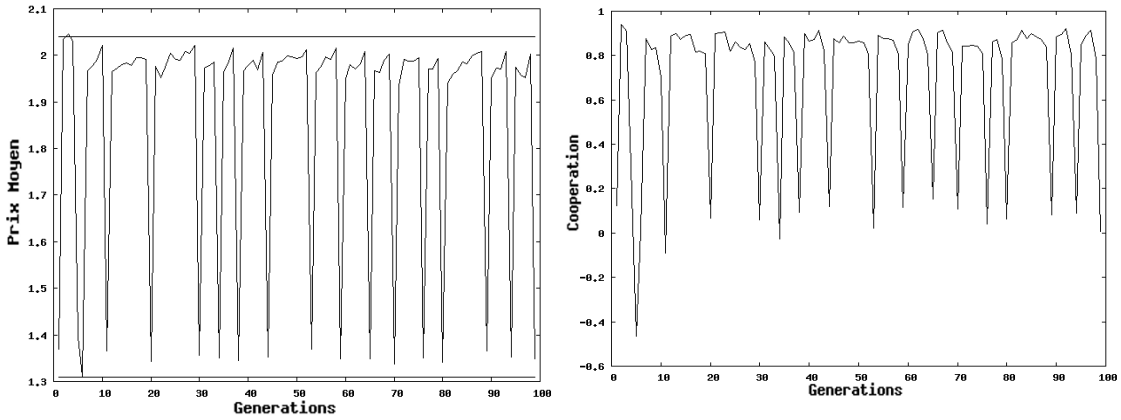


Figure D.3 Évolution des prix moyens et de la coopération pour un marché avec 9 coopératifs 4 et un stratégique 3

- Le marché avec 9 coopératifs de type 4 et un stratégique 4 : probabilité = 0.058

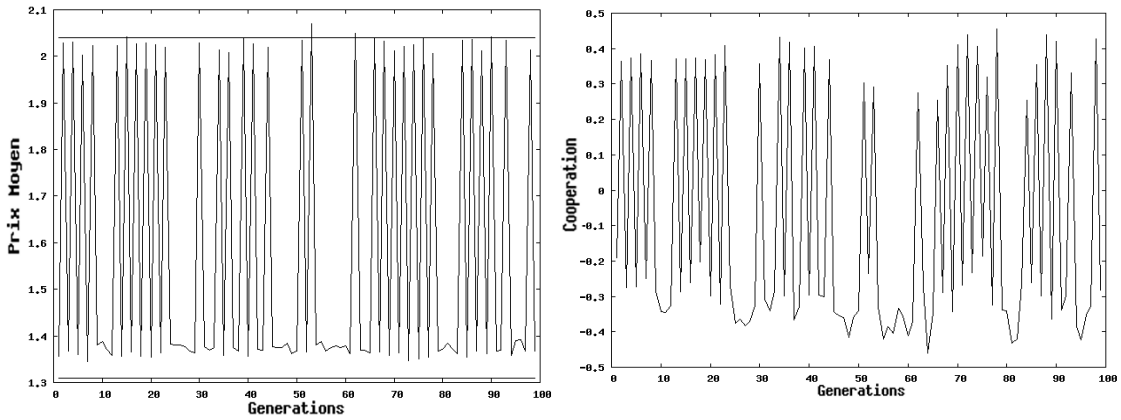


Figure D.4 Évolution des prix moyens et de la coopération pour un marché avec 9 coopératifs 4 et un stratégique 4

On constate l'apparition de cycles. Ces cycles se décomposent de manière générale. On a une succession de 3 états : équilibre de cartel en t, jeu agressif de la part des stratégiques en t+2, réaction des coopératifs de type 4 en t+3 : ceux-ci jouent au coup prudent. Dans les générations suivantes, les stratégiques baissent leur prix jusqu'à retrouver une situation de vente de toutes les quantités proposées. Les coopératifs de type 4 restent au coup prudent. Enfin, lorsque les stratégiques atteignent un niveau de prix tel qu'ils ne sont plus rationnés sur le marché, ils jouent le coup de cartel. A ce moment, les coopératifs 4, ne percevant plus de rationnement, jouent également le coup de cartel : la situation est similaire à celle de la période t. Ce type d'évolution sur le marché se constate au delà des configurations avec un stratégique et des coopératifs de type 4. Si on considère l'ensemble des autres marchés, qui sont moins fréquents, c'est toujours une situation de cycles de prix qui est constatée. Les deux issues de marché possibles à partir de la population globale à la fin du processus évolutionnaire sont donc l'issue de cartel avec une probabilité 0.223 et l'évolution vers des cycles d'Edgeworth avec une probabilité 0.777.

Sur l'évolution écologique, les comportements stratégiques ont beaucoup diminué dans la première phase, ceux qui ré-augmentent dans la seconde phase peuvent profiter de la présence des coopératifs de type 4 sur un marché s'ils restent suffisamment peu fréquents. En effet, dans le cas où leur fréquence globale est suffisamment faible, ils peuvent exploiter la présence des comportements coopératifs de type 4, mais dès que leur fréquence augmente, les marchés qui apparaissent leur sont défavorables. Plus précisément, si les fréquences des comportements dans la population totale sont telles qu'en moyenne il y a un comportement stratégique sur les marchés tirés, ces comportements se maintiennent et tendent à se diffuser : un comportement stratégique isolé parvient à exploiter la présence des coopératifs. En revanche si les fréquences des stratégiques dans la population totale sont telles qu'en moyenne il y a deux comportements stratégiques par marché, les stratégiques s'avèrent moins performants que les

coopératifs : ils s'engagent dans une guerre de prix et subissent des pertes, quand les coopératifs jouent au coup prudent et maintiennent un profit positif.

La forme et les résultats mis en évidence ici sont généraux à plusieurs simulations. Les conclusions de dominance des comportements coopératifs au travers des coopératifs 4 et l'évolution vers un niveau de coopération significativement non nul vont tenir dans un certain nombre de configurations voisines de celle présentée ici. Le paragraphe suivant observe l'évolution du résultat au travers de simulations faisant varier l'un ou l'autre des paramètres de la présente simulation.

E. Variations autour de l'évolution de base

Il est possible de faire varier certains éléments du mécanisme évolutionnaire. Parmi ceux-ci, citons le panel des comportements, leur paramétrage, le mode de fonctionnement des marchés etc. Cette section propose l'étude d'un certain nombre de variations autour des paramètres de base qui ont été retenus dans ce qui précède. Cette démarche d'étude des variations n'est pas exhaustive, néanmoins sont passées en revue les principales hypothèses de la simulation présentée au paragraphe précédent.

Dans la suite, on fait référence à la simulation du paragraphe précédent comme la simulation S1. Par rapport à cette simulation, des variations quantitatives ont été testées : variation du nombre des agents sur les marchés (S2 et S3), variation du bruit sur les décisions des agents (S6 et S7), variation du paramétrage des agents (le seuil de déclenchement d'une réaction et le niveau d'une variation de prix) (S4 et S5), enfin variation de l'élasticité de la courbe de demande (S8 et S9). D'autres simulations concernent des variations qualitatives et notamment le panel des agents retenus. Dans le panel actuel, des comportements utilisant une information parfaite ont été retenus alors que d'autres utilisent une information imparfaite. On peut tester l'évolution que provoqueraient des stratégies spécifiées selon les mêmes principes mais utilisant seulement de l'information parfaite (S10). Par exemple, le coopératif 2 augmente son prix s'il est rationné et le diminue sinon, faire passer cet offreur en information parfaite consiste à le faire réagir au rationnement global sur le marché : s'il perçoit du rationnement sur le marché, il diminue son prix, sinon il l'augmente. On peut également tenter de voir ce que donnerait le phénomène de base en éliminant les stratégiques de type 1 (S11 et S12) qui sont les comportements les plus fréquents après les coopératifs 4 dans la première simulation. Enfin, on teste le rajout d'un comportement classique en théorie évolutionnaire, un comportement mimétique (S13).

Les tableaux suivants donnent respectivement les fréquences à la fin de l'évolution de chacun des comportements, les valeurs de la coopération, de la coordination et des prix au moment où la coopération atteint un maximum et les valeurs de ces indices dans l'état final.

	Coop1	Coop2	Coop3	Coop4	Strat1	Strat2	Strat3	Strat4	PP1	PP2	PP3	PP4	Imitation
S1	0	0	0	0.8602	0.0768	0	0.0407	0.0223	0	0	0	0	-
S2	0	0	0.0026	0.6037	0.2098	0	0	0	0.1839	0	0	0	-
S3	0	0	0	0.8943	0	0	0.1057	0	0	0	0	0	-
S4	0	0	0.158	0.6463	0	0	0.0065	0	0	0.1893	0	0	-
S5	0	0.0695	0	0	0	0	0	0	0.7104	0.2201	0	0	-
S6	0	0	0.0038	0.7006	0	0	0.0388	0.12	0.1368	0	0	0	-
S7	0	0	0.1858	0.6918	0	0	0.1029	0.0196	0	0	0	0	-
S8	0	0	0	0.7863	0.0016	0	0	0	0.0006	0.2115	0	0	-
S9	0	0	0	0.6531	0	0	0.0006	0.1039	0.2424	0	0	0	-
S10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
S11	0	0	0	0.8972	-	0	0.1028	0	0	0	0	0	-
S12	0	0	0.057	0.9427	-	0	-	0.0001	0.0002	0	0	0	-
S13	0	0	0	0.8592	0.1013	0	0.0241	0.0154	0	0	0	0	0

Tableau E.1 : Évolution des fréquences des comportements de stratégies à la fin de l'évolution. S1 à S9 constituent des variations sur les paramètres numériques de l'évolution, S10 à S13 constituent des variations sur les comportements en présence.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13
Coopération	0.525	0.319	0.664	0.577	-0.01	0.473	0.221	0.267	0.62	0.973	0.769	0.937	0.612
Coordination	0.058	0.102	0.04	0.009	0.018	0.059	0.109	0.152	0.028	0.0004	0.023	0.008	0.046
Prix moyens	1.82	1.8	1.88	1.76	1.37	1.78	1.79	2.27	1.58	2.04	1.92	2.03	1.85

Tableau E.2 : Valeurs intermédiaires de la coopération, de la coordination et des prix moyens au moment du maxima de la coopération.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13
Coopération	0.263	-0.013	0.261	-0.034	-0.012	-0.07	0.123	0.01	-0.094	0.973	0.62	0.901	0.214
Coordination	0.105	0.172	0.083	0.108	0.0183	0.146	0.137	0.293	0.091	0.0004	0.04	0.011	0.115
Prix moyens	1.74	1.73	1.68	1.54	1.35	1.62	1.71	2.19	1.44	2.04	1.84	2.08s	1.73

Tableau E.3 : Valeurs stabilisées de la coopération, de la coordination et des prix moyens en situation finale pour les différentes simulations

Certaines des simulations sont très proches de la simulation initiale présentée : elles conservent à la fois la forme de l'évolution avec d'abord une augmentation du nombre des coopératifs 4 et de la coopération jusqu'à un maximum, puis une phase de diminution des coopératifs et de manière encore plus marquée de la coopération pour arriver à une stabilisation avec quelques comportements non-coopératifs qui se maintiennent. C'est le cas pour la variation du bruit dans les simulations S2 et S3. Sur ces simulations, on constate que la fréquence des comportements coopératifs 4 est d'autant plus forte que le nombre des offreurs sur les marchés (K) est élevé. En effet, dans le modèle, à fréquence égale des coopératifs 4, la probabilité de tirer un marché avec au moins deux comportements non coopératifs est d'autant plus forte que le nombre d'agents sur le marché K est fort. Ce qui signifie que plus K est important, plus on tire plus souvent des marchés avec au moins deux offreurs non-coopératifs, soit des marchés convergeant vers des guerres des prix inefficaces, marchés pour lesquels les offreurs non-coopératifs accumulent des pertes : leur fréquence d'équilibre tend à baisser.

Les simulations S4 et S5 reposent sur l'évolution de deux paramètres communs à plusieurs des comportements : le seuil de rationnement à partir duquel il y a réaction du comportement et le niveau de variation de prix des comportements. Dans le cas où le paramétrage passe à 0.01 (S4), la forme de l'évolution est conservée, mais avec une moindre coopération à la fin de l'évolution et les comportements non-coopératifs présents sont : les stratégiques 3 et les preneurs de prix 2. En revanche, dans le cas de S5, où le paramétrage passe à 0.09, les coopératifs 4 disparaissent. Sans chercher à préciser le résultat par des expérimentations complémentaires, on peut faire l'hypothèse qu'en passant le seuil de réaction des coopératifs 4 à 0.09, on conduit à ce que les coopératifs 4 ne soient plus assez réactifs et vont donc se maintenir trop longtemps au coup de cartel, en étant rationnés sur plusieurs périodes. S5 converge vers une situation proche de l'équilibre concurrentiel (l'indice de coordination est faible et la coopération est proche de 0).

La diminution du bruit (S6) donne plus d'amplitude aux phases en augmentant le niveau maximal de la coopération par rapport à S1 et en faisant diminuer la coopération en phase finale par rapport à S1. L'augmentation du bruit (S7) provoque, à l'inverse, une diminution de l'ampleur des phases : les phénomènes sont moins marqués parce que plus bruités. Les deux dernières simulations sur des paramètres numériques, S8 et S9, correspondent respectivement à une augmentation et à une baisse de l'élasticité. Elles conservent les résultats principaux de l'évolution.

Les modifications S10 à S13 concernent des variations de l'ensemble des stratégies. La simulation S13 introduit des stratégies mimétiques en plus des stratégies de l'ensemble de base : ces comportements copient le meilleur comportement avec une génération de retard. Ces comportements sont au final éliminés de la population totale

et la convergence est similaire à celle de S1. La simulation S11 part du résultat de la simulation S1 et élimine de la liste des stratégies le meilleur comportement de la simulation S1 après les coopératifs 4, soit les stratégiques 1. Dans ce cas, la coopération augmente et il reste un unique comportement stratégique, le stratégique de type 3. Dans la simulation S12, on élimine les comportements stratégiques 1 et 3 par rapport à S1 : on constate que l'ensemble des comportements non coopératifs sont éliminés du marché. Une dernière simulation (S10) part du constat qu'il existe une différence dans l'information entre les stratégies. Certaines utilisent une information globale sur le marché (les coopératifs 4 réagissent au rationnement moyen sur le marché), d'autres utilisent seulement l'information qu'ils tirent de leur performance sur le marché, sans prendre en compte la performance des autres agents (les coopératifs de type 2 augmentent ou diminuent leur prix sur la base du rationnement qu'ils ont subi). En faisant utiliser de l'information parfaite aux agents qui utilisent de l'information imparfaite dans S1, on arrive au résultat de l'élimination des coopératifs 4, dans ce cas, ce sont les coopératifs 2 qui s'imposent et établissent l'équilibre coopératif final. La forme de l'évolution est alors la suivante :

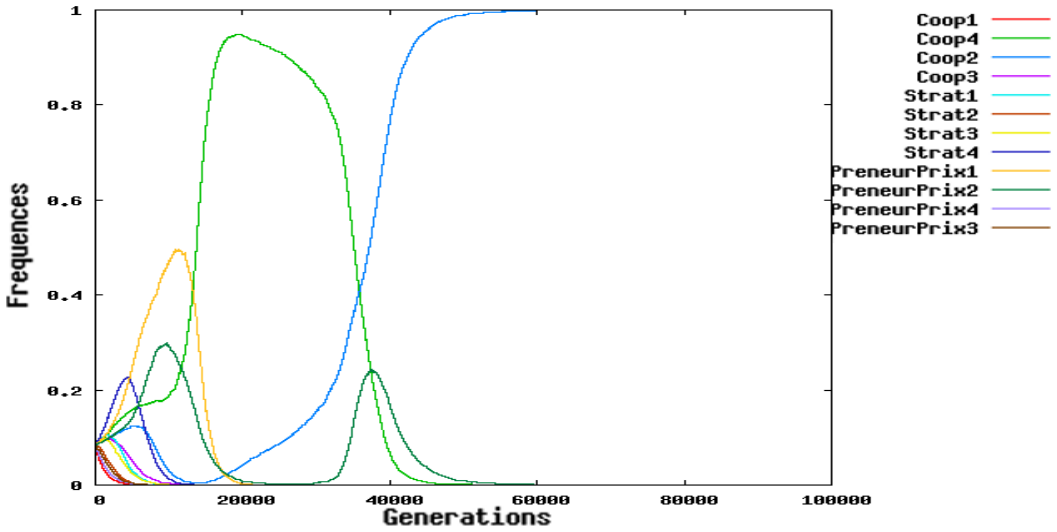


Figure D.8 : Évolution dans le cas de l'information parfaite.

La croissance des comportements coopératifs de type 2 et le fait que ces comportements envahissent l'ensemble de la population sont liés à la croissance précédente des coopératifs de type 4. Les coopératifs de type 2 décroissent dans une première phase, ils ne croissent ensuite que lorsque la population totale est majoritairement composée de stratégies ayant adopté le comportement de type 4. Les coopératifs de type 2 s'imposent dans une population de coopératifs parce qu'ils sont moins sensibles au bruit que les coopératifs de type 4. En effet, sous l'hypothèse de l'information parfaite, les deux comportements réagissent au rationnement global sur le marché. Si ce rationnement s'avère supérieur au seuil de 5%, les coopératifs de type 4 jouent au coup prudent tandis que les coopératifs de type 2 jouent sur la courbe de demande un peu en dessous du prix de cartel : de fait les coopératifs de type 4 réagissent trop fortement. Si en présence d'offreurs agressifs, la réaction des coopératifs de type 4 s'avère efficace, elle est trop importante en présence seulement d'offreurs coopératifs.

Synthèse

Le résultat présenté ici est un résultat d'émergence de la coopération grâce à une stratégie réactive qui joue la coopération (le cartel) quand elle ne perçoit pas de comportement agressif sur le marché et joue un coup prudent, de la forme maximin sinon. La forme de ce comportement se rapproche de celle de la stratégie TFT. L'assimilation est cependant imparfaite : **il n'existe pas de généralisation parfaite du comportement TFT dans le cadre considéré ici**. Le coup D joué par la stratégie TFT dans le dilemme du prisonnier est à la fois un coup qui punit l'adversaire et un coup prudent puisqu'il maximise le gain minimum obtenu, soit un maximin. Les coopératifs de type 4 ne punissent pas l'adversaire ici, ils jouent le coup prudent, un maximim. Pour spécifier un comportement comme TFT, il faudra réagir à

l'agression à la fois en punissant (en augmentant les quantités produites de manière à rationner les adversaires) et en se protégeant (en ne produisant pas une quantité trop importante de manière à ne pas subir de rationnement), les deux décisions étant incompatibles.

Les résultats mis en évidence sont globalement robustes ici. En plus des variations qui ont été présentées ici, un certain nombre d'autres ont été testées. Il serait notamment possible d'améliorer l'indice de coopération obtenu. Dans les évolutions asynchrones telles qu'elles sont spécifiées ici, la performance collective d'une stratégie n'a pas d'impact. Si on tire un marché avec seulement des coopératifs de type 4 dans S1, ce marché n'a pas d'impact sur la population totale, puisque la redistribution des offreurs se fait entre les comportements d'un même marché. En faisant interagir les offreurs sur plusieurs marchés de suite sans redistribuer les comportements après chaque marché, mais en redistribuant sur la base des profits cumulés sur plusieurs marchés, on fait augmenter la fréquence finale des coopératifs de type 4 et le niveau de coopération. Enfin, il aurait été possible de concevoir des modes d'évolution synchrones. Ceci consiste à répartir l'ensemble de la population dans $\frac{12 \times N}{K}$ marchés, à simuler ces marchés, à calculer les nouveaux effectifs par comportement pour chaque marché en fonction des profits cumulés et à recomposer la population globale avec ces nouveaux effectifs.

Dans la situation finale de la simulation de référence présentée plus haut, la majorité des interactions conduisent à des cycles d'Edgeworth. La simulation met également en évidence l'amélioration significative de la coopération qui repose sur la présence de comportements coopératifs et réactifs. Les interactions coopératives représentent alors environ 20% des interactions.

Section V.2.Réseaux de marchés et évolution de la coopération

On conserve les mêmes paramètres de marché que précédemment. On considère une population avec N=500 occurrences de chaque comportement sur la liste des 12 comportements utilisée pour S1. La population totale est donc de 6000 agents. Ces agents sont répartis en marchés avec K=10 agents par marché. A chaque génération, chaque agent interagit sur le marché auquel il est rattaché.

La dynamique d'évolution de la population est fondée sur un graphe. Chaque offreur est relié à un certain

nombre d'autres offreurs, qu'ils soient ou non des offreurs sur le même marché. On parle de **graphe des offreurs**. A chaque génération les offreurs interagissent sur les $\frac{12 \times N}{K}$ marchés pendant M=100 périodes. La sélection se fait ensuite sur la base du profit cumulé : chaque agent copie le comportement de son voisin de plus fort profit. Ce mécanisme d'évolution des comportements est très utilisé pour faire évoluer des populations de stratégies réparties dans un graphe. On a vu, au chapitre I, que c'est notamment le mécanisme utilisé par Nowak et May [Nowak 93].

Dans la présente section, on distingue la structure d'interaction qui permet l'évaluation des stratégies (les marchés) et la structure de redistribution des comportements (le graphe des offreurs). Ces deux structures sont confondues dans la plupart des modèles de répartition spatiale, et par exemple dans le modèle de Nowak et May : le score est calculé contre les voisins et ce sont les comportements des voisins qui sont susceptibles d'être copiés.

La démarche d'évolution reposant sur un graphe des offreurs et sur la dynamique d'imitation du comportement voisin le plus performant fait émerger une série de nouvelles convergences : la domination des coopératifs 4 est une issue possible, mais ce n'est pas la seule.

A. Comportements uniquement connectés sur leur marché - connexion intra-marchés

Cette partie traite du cas où les offreurs ne sont reliés qu'aux offreurs de leur marché. Dans ce cas, le graphe des offreurs est composé de $\frac{12 \times N}{K}$ graphes qui sont déconnectés les uns des autres. Les comportements des K offreurs de chaque marché sont tiré au hasard selon une loi uniforme.

Supposons avoir un graphe complet sur les offreurs d'un marché, la convergence se fait en une génération (tous les offreurs copient le comportement qui a obtenu le plus fort profit sur le marché). En faisant cela sur 600 marchés de taille 10 qui regroupent les 6000 agents, on obtient les fréquences d'équilibre suivantes :

Stratégique 1	Stratégique 2	Stratégique 4	Preneur de prix 2
0.52	0.397	0.0133	0.07

Chaque marché converge en une génération vers l'un des 4 comportements, de sorte qu'au bout d'une génération, on a 312 marchés avec seulement des stratégiques 1, 238 avec seulement des stratégiques 2, 8 marchés avec seulement des stratégiques 4 et 42 avec seulement des preneurs de prix 2. Sur le graphique D.1 de la section 1, correspondant à la

simulation S1, on constate que la croissance des stratégiques 1 et 4 est plus forte que la croissance des coopératifs 4 dans les premières générations : là aussi, la diffusion des comportements stratégiques est plus importante que celles des autres comportements à partir d'une situation où tous les comportements ont une fréquence similaire.

En ne conservant que des connexions entre les agents d'un même marché et en faisant passer la probabilité de connexion entre les offreurs d'un marché à 0.5 et, on a de nouveau certains marchés qui convergent en une génération, mais d'autres marchés ne convergent pas et la population globale évolue périodiquement sur deux générations :

Coopératif3	Coopératif4	Stratégique1	Stratégique2	Stratégique4	Preneur Prix1	Preneur Prix 2
0.0007	0.0902	0.3788	0.0433	0.367	0.1167	0.0033

Coopératif3	Coopératif4	Stratégique1	Stratégique2	Stratégique4	Preneur Prix1	Preneur Prix 2
0.0007	0.0945	0.377	0.0433	0.3652	0.1167	0.0033

Tout les comportements ne participent pas de l'évolution périodique. Seules les fréquences des coopératifs 4, des Stratégiques 1 et des stratégiques 4 oscillent. Il est possible d'envisager des cas très simples d'oscillation de ces comportements. Soit par exemple un marché avec 9 agents coopératifs 4 et 1 offreur stratégique 1, l'offreur A. On suppose en outre qu'il existe au moins un offreur coopératif 4 qui n'est pas relié à l'offreur A, l'offreur B. Le jeu de marché privilégie le comportement stratégique 1 de l'offreur A. Conséquemment son comportement se diffuse à tous ses voisins. Le comportement coopératif 4 se maintient pour l'agent B puisqu'il n'est pas lié à l'offreur A. A la génération suivante, le jeu de marché avantage l'agent B qui joue au coup prudent quand la co-présence des comportements stratégiques les rend inefficaces. Le comportement de l'offreur B se diffuse. Le comportement de l'agent A reste cependant stratégique 1 puisque cet agent n'est pas relié à l'agent B et qu'il n'est relié qu'à des stratégiques 1.

Pour une probabilité 0.1 de connexion sur un marché, la convergence se fait vers :

Coop1	Coop2	Coop3	Coop4	Strat1	Strat2	Strat3	Strat4	PP 1	PP2	PP3	PP4
0.033	0.0383	0.049	0.111	0.132	0.109	0.0468	0.165	0.125	0.0923	0.0408	0.0582

Tous les comportements sont représentés ici. La survie de certains comportements s'explique par l'isolement des nœuds/offreurs sur lesquels ils sont représentés. La fréquence d'un comportement qui n'est présent que sur les nœuds sans voisin est 0.0323, deux comportements ont des fréquences assimilables à cette limite : les coopérateurs 1 et 2.

B. Connexion inter-marchés et régimes possibles.

On commence par tester une probabilité de connexion relativement élevée pour voir la forme de convergence à l'inverse du cas déconnecté étudié dans la partie précédente. On considère une topologie d'Erdős et Rényi pour le graphe des offreurs avec une probabilité de connexion de 0.01. Sur 100 tests, l'ensemble des cas converge vers une population composée uniquement de stratégiques 4.

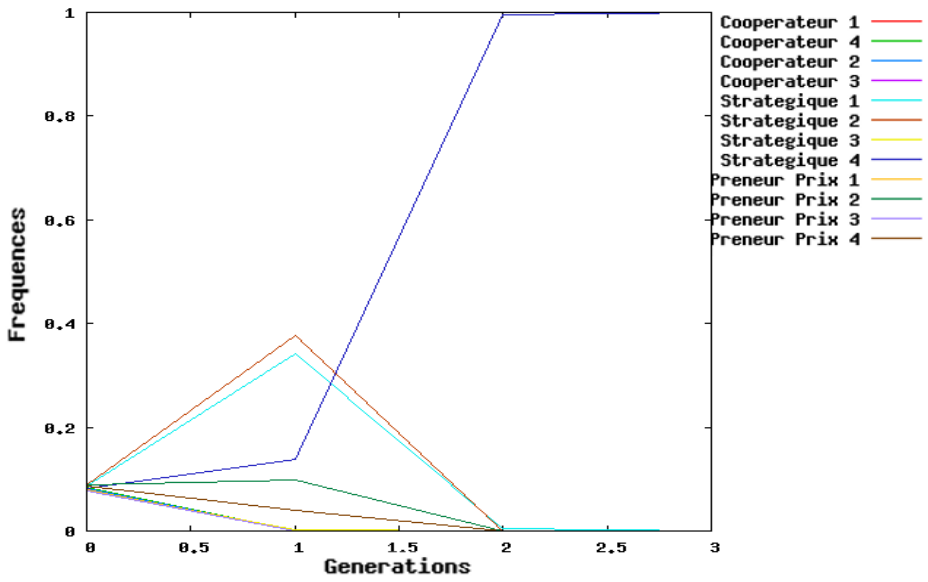


Figure B.1 Évolution d'une population de stratégies réparties selon un graphe des offreurs Erdős et Rényi avec une probabilité de connexion 0.01

Dans ce cas, tous les comportements coopératifs sont éliminés dès la première génération. L'élimination des coopératifs signifie que chaque offreur a un comportement stratégique ou preneur de prix de son voisinage qui est plus performant lors de la première génération. Ce phénomène est similaire à celui qui a été mis en évidence dans la partie précédente ou qui apparaît dans les premières générations de la simulation S1 dans la section 1 : lorsque les comportements sont équiprobables, ce sont des comportements non coopératifs qui obtiennent les meilleurs scores. Après l'élimination des comportements coopératifs, les comportements stratégiques 4 s'avèrent plus efficaces pour prendre le contre pied des autres comportements en provoquant des baisses de prix plus rapides que celles des autres offreurs.

Dans le cas d'une probabilité de connexion de 0.01, le degré moyen dans le graphe est de 60 offreurs environ. Ce type de convergence conserve une forte probabilité d'émergence même en diminuant le degré moyen dans le graphe.

Le degré moyen est 1 pour une probabilité de connexion de 0.000167. On considère le cas où la probabilité de connexion est comprise dans [0.0001;0.001]. Dans cet intervalle, différentes formes de convergence sont possibles, la fréquence de telle ou telle forme de convergence évoluant avec la probabilité de connexion. On donne pour chaque probabilité de connexion une forme d'évolution pour la convergence la plus probable sur 100 simulations.

Pour une probabilité de 0.0002 de connexion, le degré moyen dans le graphe est de 1.2. Un certain nombre des offreurs ne sont connectés à aucun autre offreur, ce qui explique qu'aucun comportement ne disparaît, la fréquence

d'un comportement sur des nœuds isolés étant 0.025. Pour l'ensemble des nœuds reliés, ils convergent vers une majorité de stratégiques 4.

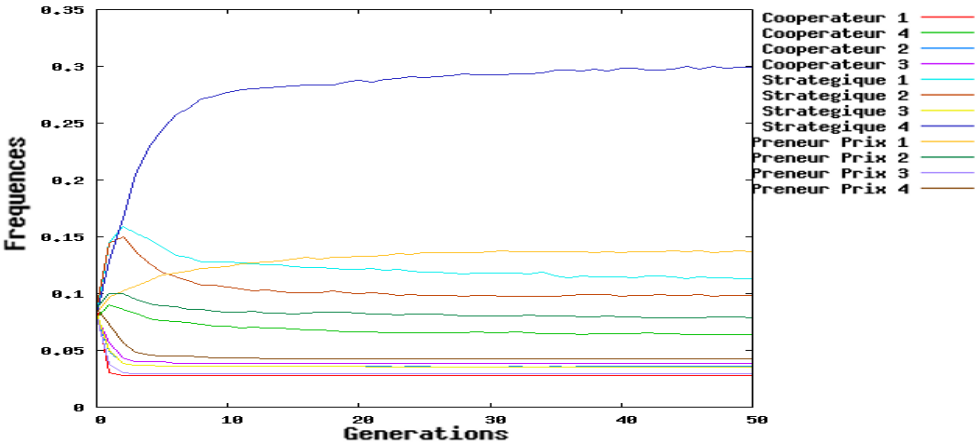


Figure B.2 Évolution d'une population de stratégies réparties selon un graphe des offreurs Erdős et Rényi avec une probabilité de connexion 0.0002

Pour une probabilité de 0.0003, l'évolution initiale à la même forme que pour p=0.0002, avec une augmentation des stratégiques 4 jusqu'à atteindre un maximum. Apparaît ensuite une phase de diminution de ces comportements et de diffusion des comportements preneurs de prix 1 et preneurs de prix 2.

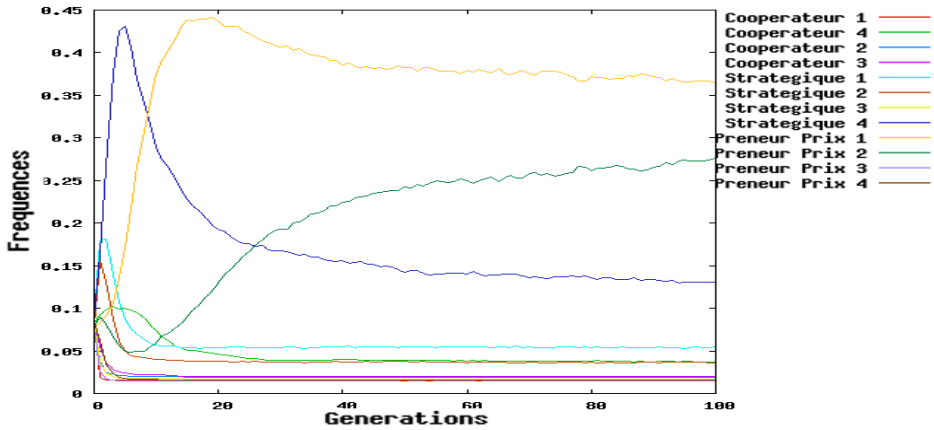


Figure B.3 Évolution d'une population de stratégies réparties selon un graphe des offreurs Erdős et Rényi avec une probabilité de connexion 0.0003

Pour une probabilité de 0.0004 En augmentant encore la probabilité de connexion :

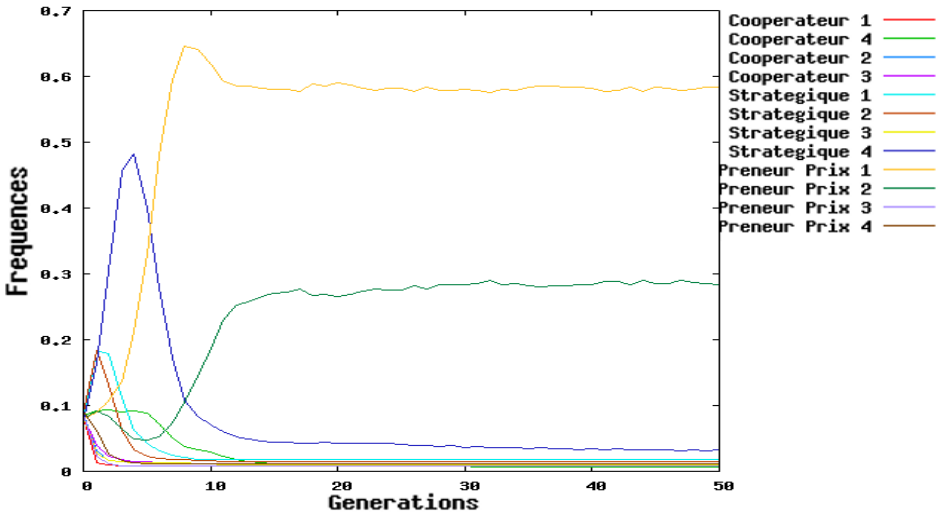


Figure B.4 Évolution d'une population de stratégies réparties selon un graphe des offreurs Erdős et Rényi avec une probabilité de connexion 0.0004

On constate ici une augmentation de la fréquence maximale par rapport au cas de p=0.0003.

En augmentant encore la probabilité de connexion, on fait apparaître une convergence vers des coopératifs 4.

Pour 0.0006 :

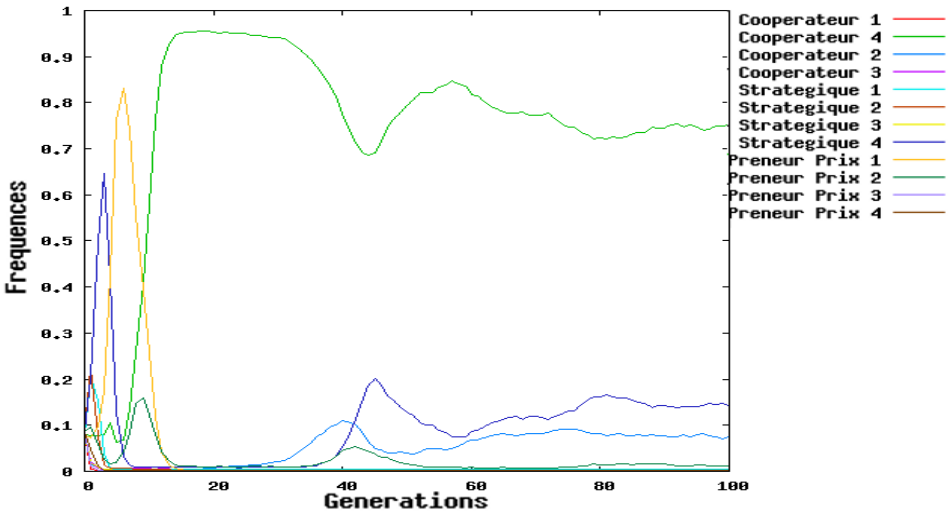


Figure B.5 Évolution d'une population de stratégies réparties selon un graphe des offreurs Erdős et Rényi avec une probabilité de connexion 0.0006

Pour 0.001

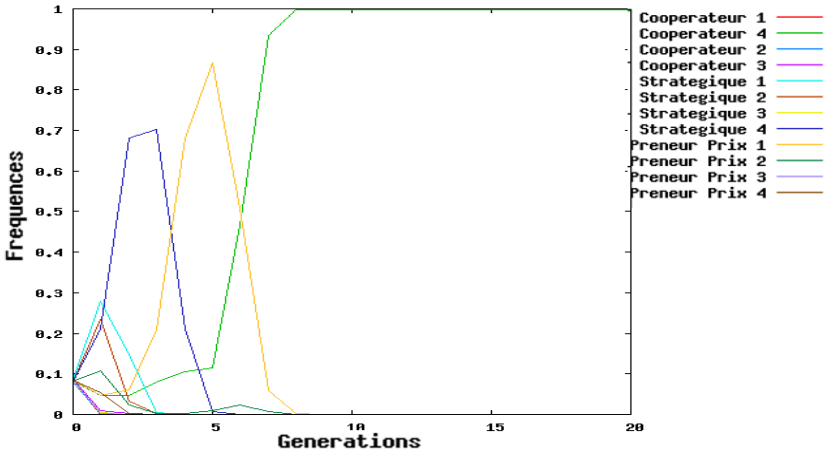


Figure B.6 Évolution d'une population de stratégies réparties selon un graphe des offreurs Erdős et Rényi avec une probabilité de connexion 0.001

En fonction de la probabilité de connexion, il est possible d'atteindre des populations et des issues de marché diverses.

Les différentes simulations participent d'un même phénomène. Sur la simulation de la figure B.6, on a une séquence des comportements de fréquence maximale. Il y a d'abord un maximum des stratégiques 1, puis un maximum des stratégiques 4, un maximum des preneurs de prix 1 et enfin un maximum des coopérateurs 4. En fonction de la probabilité de connexion, la simulation s'arrête sur l'un ou l'autre des maxima. Si la probabilité est de p=0.0002, la population se stabilise sur une majorité de stratégiques 4, pour une probabilité de p=0.0003, la population passe par un maximum de stratégiques 4 et converge ensuite vers une population composée majoritairement de preneurs de prix 1. Pour deux probabilités qui conduisent à des évolutions vers un comportement majoritaire identique, la fréquence majoritaire est plus forte si la probabilité de connexion est la plus forte : pour la simulation à p=0.0004, la fréquence des

preneurs de prix 1 est plus importante que pour la simulation à p=0.0003, de même pour les simulations à p=0.0006 et à p=0.001.

Le processus de diffusion conduit ici, pour certaines valeurs des paramètres, à des situations où les coopératifs 4 sont seuls présents sur le marché (figure B.6). Le processus de diffusion lié à la copie du meilleur voisin est plus efficace pour la diffusion de ces comportements que le processus de sélection au sein d'une population non répartie de la section I. Pour certaines valeurs des paramètres (probabilité de connexion), il est possible de mettre en évidence une situation où l'évolution conduit à l'élimination des comportements opportunistes et à la disparition des cycles de prix.

Conclusion

La théorie des jeux évolutionnaires a permis de mettre en évidence l'importance d'un comportement simple, réactif et coopératif dans l'établissement ou le maintien de la coopération : tit-fot-tat [Axelrod 81]. Le présent chapitre confirme ce résultat dans le cadre d'interactions d'offreurs sur des marchés : l'introduction du comportement Coopératif 4 qui est simple, réactif et coopératif fonde le maintien de la coopération sur les marchés.

Si le résultat développé dans l'approche évolutionnaire de la section 1 n'est pas étonnant du point de vue de la théorie des jeux évolutionnaires, il est étonnant du point de vue de l'analyse économique classique. Premièrement, l'hypothèse que l'issue concurrentielle serait la plus probable pour ce type de marché ne semble pas vérifiée. Deuxièmement, l'idée que les comportements coopératifs seraient balayés par des comportements stratégiques est manifestement infirmée. Troisièmement, l'idée que l'augmentation du nombre d'opérateurs créerait un climat défavorable à l'adoption de comportements coopératifs l'est également. Les coopératifs de type 4 permettent d'atteindre un équilibre coopératif. La capacité de cette catégorie de comportements à imposer l'issue de cartel semble éphémère (même si elle se produit bien lors de la première phase du processus de sélection) car l'intrusion des comportements non coopératifs, même modérée conduit majoritairement à des situations instables (les cycles de Edgeworth). Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [Dorat 09].

Les résultats obtenus ici, dans cette structure de marché, sont robustes à des variations de paramètres. Néanmoins, ils restent fortement dépendants de l'ensemble des comportements retenus, notamment, de la présence du comportement coopératif 4. D'autres comportements pourraient être introduits et testés, notamment des comportements plus irrationnels (c'est-à-dire moins proche de la logique supposée par l'analyse économique pour ce type de marché). On pourrait également envisager d'introduire des comportements plus complexes. Notamment des comportements qui se servent des premières périodes de marché pour voir le type d'adversaires auxquels ils sont confrontés et ensuite

prendre le contre-pied de ces adversaires. Les résultats obtenus seraient modifiés par l'introduction de ces comportements. Néanmoins, le maintien des comportements coopératifs tel qu'illustré dans ce chapitre semble valable pour tous les comportements immédiatement concevables et relativement simples.

En plus des modifications sur l'ensemble des comportements utilisés, il est également possible d'introduire une série d'hypothèses sur la forme des interactions. C'est une forme d'évolution directement issue des modèles de théorie des jeux évolutionnaires qui est proposée dans la section 2. L'introduction d'un graphe des offreurs qui fonde l'évolution des agents met en évidence la possibilité de différents régimes de convergence en fonction du graphe retenu : la population globale peut aussi bien converger vers des populations de comportements stratégiques, vers des populations de comportements preneurs de prix ou vers des populations de coopératifs. L'évolution tend à converger vers des populations de coopératifs 4, seul comportement collectivement stable dans la liste des 12 comportements. L'introduction d'autres comportements stables collectivement ou le remplacement des coopératifs 4 par un comportement ne présentant pas cette stabilité collective conduirait à des conclusions d'imprévisibilité sur la convergence en fonction de la probabilité de connexion, à l'instar des évolutions mises en évidences dans le chapitre III.

Conclusion et perspectives

Les chapitres de la thèse traitent d'un nombre varié de problématiques. Le chapitre II introduit de nouvelles formes de maintien des agents coopératifs. Dans un réseau de communautés avec seulement des communautés C et D, l'interaction de l'agent d'une communauté avec les membres de sa communauté et les membres des communautés voisines génère un score moyen. Du score moyen par agent, on déduit un score moyen sur l'ensemble de la population. Les communautés pour lesquelles le score moyen est supérieur au score moyen pris sur l'ensemble du graphe voient leur effectif augmenter, les communautés pour lesquelles le score moyen est inférieur voient leur effectif diminuer. Le modèle est interprétable comme une situation où chaque agent compare son score moyen au score moyen de l'ensemble des agents. S'il a un score inférieur au score moyen calculé sur l'ensemble des agents, il rejoint une communauté pour laquelle le score moyen est supérieur et il adopte le comportement C ou D de cette communauté.

Dans ce contexte, on met en évidence un critère simple d'évolution vers la coopération : la présence d'une communauté d'état C sans contact avec des communautés D garantit de la convergence vers une majorité de comportements C. Par ailleurs, on met en évidence la possibilité d'évolutions périodiques de la coopération. Dans certaines configurations, les coopérateurs peuvent survivre, mais ils se déplacent constamment au sein d'un cluster de communautés C. Le modèle a l'avantage, comme le modèle de Nowak et May [Nowak 93], de modéliser la survie de la coopération à partir du dilemme du prisonnier simple et comme dans le modèle de Nowak et May, ce sont des structures clusterisées de comportements C qui fondent à la fois la survie et la diffusion de la coopération. En revanche, alors que des comportements C inefficaces survivent dans le modèle de Nowak et May, en copiant des comportements C efficaces, dans le modèle du chapitre II, les comportements C survivent parce qu'ils sont plus efficaces.

Lorsque le système converge vers un attracteur cyclique avec seulement quelques communautés qui sont maintenues non vides, l'évolution peut être comparée à la migration d'individus depuis les communautés dont les ressources sont les plus faibles vers ou autour de celles dont les ressources sont les plus importantes jusqu'à ce que l'afflux de trop nombreux comportements opportunistes conduise à une consommation trop rapide de la ressource et que le flux migratoire qui se faisait vers la communauté et ses voisines se fasse depuis cette communauté.

Le chapitre III enrichit la recherche sur les conditions au maintien de la biodiversité. Ces conditions sont établies comme des conditions limites au phénomène de synchronisation. En effet, dans le cas de populations RPS non réparties, l'évolution conduit à des cycles d'amplitude croissante et à la convergence vers un comportement unique adopté par toutes les stratégies. L'organisation d'une population en réseaux de communautés avec des transferts de stratégies entre communautés permet le maintien de la biodiversité de la population. Dans le cas où l'ensemble des stratégies de chaque communauté est transféré vers les communautés voisines, il apparaît des évolutions cycliques

sans que ce phénomène n'ait reçu d'explication pour l'instant. La répartition spatiale des populations RPS, que ce soit à raison d'une stratégie par nœud ou dans des réseaux de communautés, présente un intérêt direct en biologie. Pour le cas de l'évolution des populations RPS dans les réseaux de communautés, le maintien de la biodiversité constitue une métaphore du cas où une population de bactéries survit sous différentes formes grâce aux échanges et aux contacts entre les membres de la population colonisée. Pour l'exemple donné dans le chapitre, les échanges de bactéries lors du contact entre des souris permet de maintenir la biodiversité au sein de la population de bactéries.

La section 2 du chapitre III explore le pendant déterministe des systèmes aléatoires d'évolution des populations RPS. L'évolution déterministe étudiée présente des caractéristiques particulières d'auto-organisation : des clusters de nœuds oscillent selon une certaine période et imposent leur oscillation au reste du graphe. Cette oscillation se fait généralement selon une période courte. Le chapitre conjecture que c'est la symétrie des comportements de la matrice qui fonde cette propriété.

Alors que dans le chapitre III, on explore l'impact de l'hypothèse d'une population en situation de dominance cyclique, dans le chapitre IV, on recherche des formes de cycles dans un cadre plus général et notamment, on recherche des formes de cycles reposant sur la répartition spatiale en réseaux de communautés. La répartition en réseaux de communautés suppose de définir une nouvelle dynamique. En supposant une dynamique qui maintient constante la population de chaque communauté, on augmente à la fois le nombre des cycles et le nombre de types de cycles qui apparaissent. La mise en évidence de nouveaux cycles permet notamment de mettre en évidence de nouvelles formes de survie des comportements All-C dans des évolutions cycliques. Ce résultat est une forme plus générale du résultat suivant : en répartissant les stratégies dans deux communautés, il est possible de faire osciller les effectifs de n'importe lequel des comportements. Ce résultat a été établi de manière expérimentale en passant en revue l'ensemble des configurations possibles à partir d'une liste de comportements donnés, d'un mode de répartition spatiale à raison de deux comportements par communauté et pour un mode d'évolution particulier pour lequel la population par communauté est maintenue constante. Ce premier résultat ouvre la voie à des recherches plus massives sur le phénomène cyclique en spécifiant plus de deux communautés et en recherchant des cycles à partir des cas obtenus sur deux communautés.

Le chapitre V permet de tester les principes de la théorie des jeux évolutionnaires et les comportements qui ont été mis en évidence au sein de cette théorie dans le cadre d'interactions de marché. Le problème de l'émergence et de l'évolution de l'équilibre de cartel est similaire au problème de l'émergence de la coopération : chaque individu a intérêt à diminuer les quantités qu'il met en vente et à augmenter ses prix, à partir du moment où les autres font de même. Un

comportement aussi fondamental à la théorie des jeux évolutionnaires que Tit-For-Tat n'est pas directement généralisable dans ce cadre, on montre néanmoins qu'un comportement proche rend soutenable les comportements coopératifs. Dans le cadre du chapitre, on a pu mettre en évidence la convergence vers une situation de survie des comportements coopératifs, mais co-existant avec des comportements opportunistes qui provoquent des guerre de prix (Cycles d'Edgeworth) dans le cadre d'évolution écologiques des populations. Dans ce cas, la convergence ne se fait pas vers l'équilibre concurrentiel, mais vers une situation de prix fluctuants pour une large part des marchés, tandis que sur environ 22% des marchés c'est l'équilibre de cartel qui émerge.

Le modèle des réseaux de communautés a été introduit de manière transversale aux différents chapitres. Il constitue un intermédiaire entre des populations réparties et des populations non réparties. Ce modèle permet d'envisager la répartition topologique tout en conservant une dynamique écologique pure et non pas une dynamique d'imitation. Par ailleurs, on peut envisager un nombre considérable de nouvelles dynamiques pour ce modèle. La démarche adoptée dans le chapitre II est un premier exemple : les stratégies établissent leur score dans des interactions locales et la redistribution se fait en fonction de la performance par rapport à l'ensemble des stratégies. Au chapitre V, dans la section 2, on distingue une structure au sein de laquelle les stratégies sont évaluées : les différents marchés, et une structure de diffusion des comportements : le graphe des offreurs. On pourrait envisager de tester d'autres formes de l'interaction en poursuivant la distinction entre structure d'évaluation et structure de diffusion des comportements. Dans les principaux modèles du domaine, ces deux structures sont confondues. Dans le cas d'une population répartie, est-ce parce que les stratégies se comparent à un nombre réduit de pairs ou parce que les stratégies interagissent avec un nombre réduit de pairs que la coopération se maintient ? L'hypothèse de répartition a un poids considérable dans le domaine de théorie des jeux évolutionnaires, puisqu'elle apporte une réponse au problème du maintien de la biodiversité (chapitre III) et notamment de la survie de la coopération qui apparaît comme pouvant se maintenir sous des formes variées dans des populations réparties alors qu'elle est éliminée dans des populations non réparties (chapitres II et IV). Des études sur des formes intermédiaires de l'interaction pourraient conduire à mieux cerner l'importance de l'hypothèse de répartition spatiale pour l'ensemble des problématiques évoquées.

Pour chacun des modèles qui ont été présentés, il est possible d'envisager une série de spécifications complémentaires ou de variations autour des choix de modélisation actuels. C'est le cas pour le modèle d'évolution de la coopération dans les réseaux de communautés qui a été présenté au chapitre II. C'est également le cas pour l'évolution des populations RPS dans les réseaux de communautés. Dans ce dernier cas, il conviendrait de rechercher des conditions à la synchronisation où d'expliquer pourquoi elle n'est pas possible dans les réseaux de communautés. Pour

le chapitre V, des variations dans la dynamique écologique pourraient être envisagées mais ce sont surtout des évolutions dans l'ensemble des comportements utilisés qui semblent prioritaires. Pour les nouveaux comportements à introduire, il y a d'une part une perspective théorique avec la recherche de stratégies plus performantes ou conçues selon d'autres principes et l'interprétation de leurs performances, d'autre part une perspective qui consiste à découvrir de nouveaux comportements de manière expérimentale et à voir quelles formes de convergence provoquent ces comportements. Cette démarche a commencé à partir d'une plate-forme qui permet de tester le comportement adopté par des sujets contre des offreurs artificiels (http://rdorat.free.fr/Recherche/Expe/). Les sujets sont confrontés à différents agents, un stratégique, un coopératif et un preneur de prix. Chaque interaction produit un fichier d'historique qu'il est ensuite possible d'exploiter en tentant de voir pour chaque individu quel est son comportement et s'il réagit différemment face aux différents adversaires.

Une perspective est de développer des modèles d'émergence endogène de la coopération. Dans ce qui a été présenté ici, on part d'une population où on introduit un certain nombre de comportements coopératifs et on regarde commet évolue la population des stratégies ayant adopté le comportement coopératif. On obtient alors des résultats sur la survie des comportements coopératifs ou leur diffusion. On voudrait proposer des modèles où des interations coopératives émergent sans introduire initialement des stratégies ayant adopté le comportement coopératif. Cette démarche consisterait à générer des matrices de jeu aléatoires et des comportements de hauts niveaux : des comportements qui jouent l'équilibre de Nash, des comportements qui jouent le maximin etc. On observerait alors les conditions sous lesquelles il devient possible de faire émerger des interactions coopératives.

Enfin, il serait possible d'envisager des modèles où non seulement les comportements, mais également la structure des relations évoluent en reprenant dans ce contexte les différents résultats établis précédemment. Une telle démarche a été menée à partir du modèle de Nowak et May [Nowak 93] par [Zimmerman 03], les auteurs mettent alors en évidence l'émergence de topologies particulières que des démarches ultérieures devraient comparer aux formes des réseaux sociaux.

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION ET PLAN

[Abramson 01] Abramson et Kuperman "Social games in a social network", *Phys. Rev.,* **E 63**, 030901

[Axelrod 84] Axelrod [1984] "The Evolution of Cooperation", *New-York Basic Books*.

[Binmore 99] Ken Binmore [1999] Jeux et Théorie des jeux. *De Boeck Université*.

[Diekmann 00] Diekmann et Heesterbeek [2000] "Mathematical epidemiology of infectious diseases : model building, analysis and interpretation". *John Wiley & sons, New York*.

[Duran 03] Duran et Mulet [2003] Evolutionary Prisoner's Dilema on Random Graphs

[Ganesh 05] Ganesh, Massoulie et Towsley [2005] "The Effect of Network Topology on the Spread of Epidemics", *IEEE Infocom Miami*.

[Gibbson 92] Robert Gibbson [1992] "A Primer in Game Theory". *Pearson Education*.

[Hamilton 63] Hamilton [1963] "The Evolution of Altruistic Behavior" *American Naturalist,* **97**, 354-356

[Hofbauer 98] Sigmund et Hofbauer [1998] "Evolutionary Game and Population Dynamics" *Cambridge University Press*.

[Imhof 05] Imhof, Fudenberg et Nowak [2005] "Evolutionary cycles of cooperation and defection" *PNAS*.

[Kauffman 93] Kauffman [1993] "The Origins of Ordrer", *Oxford University Press*

[Kerr 02] Kerr et al. [2002] "Local Dispersal Promotes Biodiversity", *Nature* **418** 171-174.

[Kuperman 01] Kuperman et Abramson [2001] "Small World Effect in an Epidemiological Model", *Phys. Rev. Letters* **86**, 13

[Mathieu 00] Mathieu, Beaufils et Delahaye [2000] "Studies on Dynamics in the Classical Iterated Prisoner's Dilemma with Few Strategies : is there any chaos in the pure dilemma ?", *Artificial Evolution* : 177-190.

[Nowak 89] Nowak et Sigmund [1989] "Oscillations in the Evolution of Reciprocity", *J. of Theoretical Biology* **137**: 21-26

[Nowak 92] Nowak et Sigmund [1992] "TFT in heterogeneous populations", *Letters to Nature* **355**

[Nowak 93] Nowak et May [1993] "The Spatial Dimensions of Evolutions", *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **3**: 35-78.

[Nowak et May 93] Nowak et May [1993] "Evolutionary Game and Spatial Chaos", *Nature* 359, **826-829**.

[Smith 82] John Maynard Smith [1982] "Evolution and the Theory of Games", *Cambridge University Press*.

[Szollosi 07] Szollosi et Derényi [2007] "Hierarchical mean field theory of evolutionary game on structured population". *Submited.*

[Szabó 04] Szabó, Szolnoki et Izsak [2004] "Rock scissors paper games on regular small world networks", *J. Phys.* A 37, 2599

[Szabó et Vukov 04] Szabó et Vukov [2004] "Cooperation for volunteering and partially random partnerships", *Phys. Rev.* E 69, 036107

[Szabó et Szolnoki 04] Szabó et Szolnoki [2004] "Phase transitions for rock-scissors-paper game on different networks ", *Phys. Rev. E 70, 037102.*

[Watts 98] Watts & Strogatz. [1998] "Collective Dynamics of Small World Networks", *Letters to Nature.*

[Watts 99] Watts [1999] "Small-Worlds", *Princeton University Press.*

CHAPITRE I - ETAT DE L'ART

[Abramson 01] Abramson et Kuperman "Social games in a social network", *Phys. Rev.,* **E 63**, 030901

[Axelrod 84] Axelrod [1984] "The Evolution of Cooperation", *New-York Basic Books*.

[Barabási 99] Barabási & Albert [1999] "Emergence of scaling in Random Networks", *Science* **286**. 5439, pp 509-512.

[Beaufils 00] Beaufils [2000] "Modèle et simulations informatiques des problèmes de coopération entre agents". *Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille*

[Brauchli 99] Brauchli, Killingback, Doebeli [1999] "Evolution of cooperation in Spatially Strucutred Populations", *J. Theor. Biol.* **200**, 405-417.

[Cohen 01] Cohen, Riolo and Axelrod [2001], "The role of social structure in the maintenance of cooperative regimes", *Rationality and Society* **13** pp. 5-32

[Darwin 59] Darwin "On The Origin of Species" [1859]

[Diekmann 00] Diekmann et Heesterbeek [2000] "Mathematical epidemiology of infectious diseases : model building, analysis and interpretation". *John Wiley & sons, New York*.

[Doebeli 98] Doebeli et Knowlton [1998] "The Evolution of interspecific mutualisms", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*.

[Dugatkin 97] Dugatkin et Reeve "Game Theory and Animal Behavior", *Oxford University Press*.

[Duran 03] Duran et Mulet [2003] "Evolutionary Prisoner's Dilemma in Random Graphs"

[Ebel 02] Ebel et Borhnoldt [2002] "Co-Evolutionary Games on Networks",

[Eguíluz 05] Eguiliz, Zimmermann et Cela-Conde [2005] "Cooperation and the Emergence of Role Differentiation in the Dynamics of Social Networks", *AJS*, Volume 110 Nmber 4

[Erdős 59] Erdős et Rényi [1959] "On random graphs", *Publ. Math. Debrecen* **6**, 290.

[Ganesh 05] Ganesh, Massoulie et Towsley [2005] "The Effect of Network Topology on the Spread of Epidemics", *IEEE*

Infocom Miami.

[Guillaume 05] Guillaume et Latapy [2005] "Complex network metrology. Complex Systems" *http://www.liafa.jussieu.fr/*~latapy/index.php?item=publis\&lang=fr.

[Hardin 68] Hardin [1968] *Science*, **162** 1243

[Hamilton 63] Hamilton [1963] "The Evolution of Altruistic Behavior" *American Naturalist,* **97**, 354-356

[Hauert 02] Hauert, De Monte, Hofbauer et Sigmund [2002] "Volunteering as Red Queen Mechanism for Cooperation in Public Goods Games", *Science* Vol 296.

[Hauert 04] Hauert et Doebeli [2004],"Spatial structure often inhibits cooperation in the Snowdrif Dilemma" *Letters to Nature*, **428.**

[Hofbauer 98] Sigmund et Hofbauer [1998] "Evolutionary Game and Population Dynamics" *Cambridge University Press*.

[Huberman et Glance 93] Huberman et Glance. "The outbreak of cooperation". *Journal of Mathematical sociology*, 17(4):281–302, 1993.

[Hruschka 06] Hruschka [2006] "Friendship, cliquishness and the Emergence of cooperation" *Journal of Theoretical Biology*, **239**, 1-15

[Imhof 05] Imhof, Fudenberg et Nowak [2005] "Evolutionary cycles of cooperation and defection" *PNAS*.

[Killingback 96] Killingback et Doebeli [1996] "Spatial and Game Theory : Hawks and Doves revisited", *Proceedings : Biological Sciences*, **Vol 234**, No. 1374, 1135-1144.

[Kuperman 01] Kuperman et Abramson [2001] "Small World Effect in an Epidemiological Model", *Phys. Rev. Letters* **86**, 13

[Lombord 96] Lomborg [1996] "Nucleus and Shield : The Evolution of Social Structure in the Iterated Prisoner's Dilemma", *Amercian Sociological Review*, **Vol 61**, No. 278-307.

[Mathieu 00] Mathieu, Beaufils et Delahaye [2000] "Studies on Dynamics in the Classical Iterated Prisoner's Dilemma with Few Strategies : is there any chaos in the pure dilemma ?", *Artificial Evolution* : 177-190.

[Michor 02] Michor [2002] "The Good, The Bad and the Lonely" [2002], *Nature* **Vol. 419**, 677-679

[Newman 03] Newman [2003] "The Structure and function of complex networks", *Siam Review* Vol. 45, N°2 p167-256.

[Nowak 89] Nowak et Sigmund [89] "Oscillations in the Evolution of Reciprocity", *J. Theor. Biology*, 137, 21-27

[Nowak 92] Nowak et May [1992] "Evolutionary game and Spatial Chaos", *Letters to Nature*

[Nowak 93] Nowak et May [1993] "The Spatial Dimensions of Evolutions", *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **3**: 35-78.

[Nowak et May 93] Nowak et May [1993] "Evolutionary Game and Spatial Chaos", *Nature* 359, **826-829**.

[Nowak et Sigmund 93] Nowak et Sigmund [1993] "A strategy of win-stay lose-shift that outperforms Tit-For-Tat in the Prisoner's Dilema Game ", *Nature* 364.

[Nowak 94] Nowak Bonhoffer et May [1994] "Spatial Games and the maintenance of cooperation", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **Vol. 91**, pp. 4877-4881.

[Nowak et Bonhoffer 94] Nowak Bonhoffer et May [1994] "More Spatial Game", *International Journal of Bifurcation and Chaos*.

[Nowak 95] Nowak Simgund et El-Sedy [1995]. "Automata repeated games and noise". *Journal Of Mathematical Biology*,

[Perc 06] Perc [2006] "Double resonance in cooperation induced by noise and network variation for an evolutionary

prisoner's dilemma", *New J. Physics*.

[Pastor-Satorras 01] Pastor-Satorras et Vespinani [2001] "Epidemic spreding in scalefree networks", *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3200-3203.

[Santos 05] Santos Pancheo [2005] "Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation.",

[Santos 06] Santos Pancheo [2006] "A new route for the Evolution of cooperation", *J. Th. Biol.* 19(3):726-733

[Schweitzer 02] Frank Schweitzer, Laxmidhar Behera, Heinz Mühlenbein [2002] "Evolution of Cooperation in a Spatial Prisoner's Dilemma"

[Smith 73] Maynard Smith and Price [1973] "The Logic of animal conflict", *Nature, Lond.* **246**, 15-18

[Smith 82] John Maynard Smith [1982] "Evolution and the Theory of Games", *Cambridge University Press*.

[Szabó 97] Szabó et Toke [1997] "Evolutionay Prisoner's Dilemma on a square Lattice"

[Szabó 02] Szabó et Hauert [2002] "Evolutionary PD with voluntary participation", *Phys. Rev.* **66**, 062903

[Szabó 04] Szabó et Vukov [2004] "Cooperation for volunteering and paritally Random networks", *Phys. Rev.*, **69** 036107

[Szabó et Szolnoki 04] Szabó, Szolnoki et Izsak [2004] "Rock scissors paper games on regular small world networks", *J. Phys.* A 37, 2599

[Szabó 05] Szabó, Vukov et Szlonoki [2005] "Phase diagrams for an evolutionary prisoner's dilemma on two dimensional lattices", *Phys. Rev.*, **E 72**, 047107

[Travers 69] Travers et Milgram [1969] "An Experimental Study on the Small World Problem" *Sociometry* Vol 32 N°4 pp

425-443.

[Von Neumann 44] Von Neumann et Morgenstern [1944] "Theory of Games and Economic Behavior". *Princeton Univ. Press, New Jersey.*

[Von Neumann 66] Von Neumann [1966] "Theory of Self-Reproducing Automata". *Univ. Illinois Press, Champaign*.

[Vukov 05] Vukov et Szabó [2005] "Evolutionary Prisoner's Dilemma on hiearchical lattices".

[Watts 98] Watts & Strogatz. [1998] "Collective Dynamics of Small World Networks", *Letters to Nature.*

[Wolfram 83] Wolfram [1983] "Theory and application of cellular automata", *Advance Series in Complex Systems*.

[Wu 05] Wu, Xu, Wang [2005] "Does the free-scale topology favorises the emergence of cooperation",

[Zanette 02] Zanette [2002] "Dynamics of rumor propagation on SW", *Phys. Rev.* **65**, 041908

[Zimmermann 03] Zimmermann et Eguíluz [2003] Cooperation, Social Networks and the Emergence of Leadership in a Prisoners Dilemma with Adaptative Local Interactions.

CHAPITRE II

[Abramson 01] Abramson G. & Kuperman M. [2001], "Social games in a social network", *Phys. Rev. E* **63**, 03090.

[Axelrod 81] Axelrod & Hamilton [1981] "The Evolution of Cooperation", *Science* **211**, 1390-1396.

[Axelrod 84] Axelrod [1984] "The Evolution of Cooperation", Basic Books, New York.

[Barabási 99] Barabási & Albert [1999] "Emergence of scaling in Random Networks", *Science* **286**. 5439, pp 509-512.

[Barabási 02] Barabási & Albert [2002] "Statistical Mechanics of complex networks", *Rev. of Modern Physics*, **74.**

[Briffaut 04] Briffaut et Delahaye [2004] "Modélisation des communautés d'agents sur divers types de graphes et études des dynamiques obtenues dans le cas de jeux itérés", *Mémoire de DEA - LIFL*

[Boyd 87] Boyd R. & Lorberbaum J.P [1987] "No Pure Strategy is Evolutionarily Stable in the Repeated Prisoner's Dilemma Game", *Nature*, 327:58-59.

[Delahaye 92] Delahaye J.P & Mathieu P. [1992] "Exépriences sur le dilemme itéré des prisonniers" *Publication Interne IT-233, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille*, France.

[Delahaye 06] Delahaye J.P & Dorat [2006] "Vivre serein dans un monde cruel ?" *Pour la Science, French Edition of the Scientific American* **346**

[Dorat 06] Dorat & Delahaye J.P. [2006] "Emergence et maintien de comportements coopératifs dans un modèle de communautés en réseau", *Lab. d'info. fondamentale de Lille (LIFL)*, http://rdorat.free.fr/Publications

[Dorat 08] Dorat & Delahaye J.P. [2008] "Networks of communities and evolution of cooperation", *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **Vol 18. N°7** 2123:2131.

[Erdős 59] Erdős & Rényi [1959] "On random graphs", *Publ. Math. Debrecen* **6**, 290.

[Hruschka 06] Hruschka D. J. & Henrich J. [2006] "Friendshpip cliquishness and the emergence of cooperation", *Journal of Theoretical Biology.*

[Nowak 90] Nowak M. [1990] "Stochastic Strategies in the Prisoner's Dilemma", *Theoretical Population Biology*, **38**:93-112.

[Nowak et Sigmund 90] Nowak M. & Sigmund K. [1990] "The Evolution of Stochastic Strategies in the Prisoner's Dilemma", *Acta Applicandae Mathematicae*, **20**:247-265.

[Nowak 93] Nowak & May [1993] "The Spatial Dimensions of Evolutions", *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **3**: 35-78.

[Nowak 94] Nowak & May [1994a] "Spatial Game and the maintenance of cooperation" *Proc. of the National Academy of Sciences of the USA*, **91** (11).

[Nowak et Bonhoeffer 94] Nowak, Bonhoeffer & May [1994b] "Spatial Games and the maintenance of cooperation", *Proc. of the National Academy of Sciences*, **91 :** 4877-4881.

[Schweitzer 02] Schweitzer, Behera & Mühlenbein. [2002] "Evolution of Cooperation in a Spatial Prisoner's Dilemma." *Adv. Complex Systems* **5**, 269.

[Szbaó 97] Szbaó & Tőke [1997] "Evolutionary PD on a square lattice", *Phys. Rev. E* **58**, 69.

[Veinstein 01] Veinstein & Arenzon [2001], "Disorded environenments in Spatial Games", *Phyical Review* **64**, 051905.

[Watts 98] Watts & Strogatz. [1998] "Collective Dynamics of Small World Networks", *Letters to Nature.*

[Watts 99] Watts [1999] "Small-Worlds", *Princeton University Press,* Chap. 8.

CHAPITRE III

[Dorat 08] Dorat [2008] "Etude de dynamiques déterministes pour des populations RPS", http://rdorat.free.fr/Recherche/Publications/deter_RPS.pdf.

[Frean 01] Frean et Abraham [2001] "Rock-Paper-Scissors and the Survival of the Weakest", *The Royal Society, doi* 10.1098/rspb.2001.1670

[Hauert 03] Hauert et Szabó [2003] "Prisoner's Dilemma and Public Goods Games in Different Geometries : Compulsory Versus Voluntary Interactions", *Complexity* **8**, 31-38.

[Hofbauer 98] Sigmund et Hofbauer [1998] "Evolutionary Game and Population Dynamics", *Cambridge University Press.*

[Imhof 05] Imhof, Fudenberg et Nowak [2005] "Evolutionary cycles of cooperation and defection" *PNAS*.

[Kerr 02] Kerr et al. [2002] "Local Dispersal Promotes Biodiversity", *Nature* **418** 171-174.

[Lacomme 02] P.Lacomme, Prins et Servaux [2002] "Algorithmes de graphes 2ème édition". *Ed. Eyrolles*

[Nowak 93] Nowak et May [1993] "The Spatial Dimensions of Evolutions", *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **3**: 35-78.

[Sigmund 89] Sigmund et. Nowak, "Game dynamical aspects of the Prisoner's Dilemma", *Applied Math. and Comp.* **30** (1989), 191 - 213.

[Sinervo 96] Sinervo et Lively [1996] "The Rock Paper-scissors game and the evolution of alternative mael reproduction strategies", *Nature*, **380** 240-243.

[Smith 82] John Maynard Smith [1982] "Evolution and the Theory of Games", *Cambridge University Press*.

[Szabó 02] Szabó, Hauert (2002) "Phase transitions and volunteering in spatial public goods games", *Phys. Rev. Lett.* **89** 118101.

[Szabó 04] Szabó, Szolnoki et Izsak [2004] "Rock scissors paper games on regular small world networks", *J. Phys.* A 37, 2599

[Szabó et Szolnoki 04] Szabó et Szolnoki [2004] "Phase transitions for rock-scissors-paper game on different networks ", *Phys. Rev. E 70, 037102.*

[Szollosi 07] Szollosi et Derényi [2007] "Hierarchical mean field theory of evolutionary game on structured population". *Submited.*

CHAPITRE IV

[Axelrod 84] Axelrod [1984] "The Evolution of Cooperation", Basic Books, New York.

[Beaufils 00] Beaufils [2000] "Modèle et simulations informatiques des problèmes de coopération entre agents". *Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille*

[Hofbauer 98] Sigmund et Hofbauer [1998] "Evolutionary Game and Population Dynamics" *Cambridge University Press*.

[Imhof 05] Imhof, Fudenberg et Nowak [2005] "Evolutionary cycles of cooperation and defection" *PNAS*.

[Mathieu 00] Mathieu, Beaufils et Delahaye [2000] "Studies on Dynamics in the Classical Iterated Prisoner's Dilemma with Few Strategies : is there any chaos in the pure dilemma ?", Artificial Evolution : 177-190.

[Michor 02] "The Good, The Bad and the Lonely" [2002], *Nature* **Vol. 419**, 677-679

[Nowak 89] Nowak et Sigmund [1989] "Oscillations in the Evolution of Reciprocity", *J. of Theoretical Biology* **137**: 21-26

[Samy Modeliar 06] Olga Samy Modeliar " Monotonie des effectifs lors de l'évolution écologique d'une population à deux stratégies pour un jeu quelconque" [2006], http://rdorat.free.fr/Recherche/Publications/MonotonieEffectifs.pdf

CHAPITRE V

[Alger 79] Alger D. R. [1979], "Markets Where Firms Select Both Prices and Quantities. An Essay on the Foundations of Microeconomic Theory", *PhD*, Evanston Illinois.

[Binmore 99] Ken Binmore [1999] Jeux et Théorie des jeux. *De Boeck Université*.

[Dasgupta 86] Dasgupta, Maskin [1986], "The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, I: Theory", *The Review of Economic Studies*, **vol. 53**, p. 1-26

[Dorat 09] Dorat Parvulescu Vaneecloo Delahaye [2009]. "Emergence de la coopération dans un marché concurrentiel en prix et quantité au travers d'un processus évolutionnaire". *Accepté sous condition de révision*.

[Edgeworth 25] Edgeworth [1925] "The Pure Theory of monopoly", *Papers relating to Political Economy*, Vol. I, 2, http://cepa.newschool.edu/het/texts/edgeworth/edgew1e.pdf

[Ekeland 79] Ekeland [1979] "Elements d'Economie Mathématique", *Hermann Paris*.

[Hauert 02] Hauert, De Monte, Hofbauer et Sigmund [2002] "Volunteering as Red Queen Mechanism for Cooperation in Public Goods Games", *Science* Vol 296.

[Nowak 93] Nowak et May [1993] "The Spatial Dimensions of Evolutions", *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **3**: 35-78.

[Kreps 90] Kreps [1990] "Leçons de théorie microéconomique", *PUF*

[Tirole 88] Tirole [1988] "Théorie de l'organisation industrielle", *Economica*

CONCLUSION

[Ifti 04] Ifti Killingback et Doebeli [2004] "Effect of neighbourhood size and connectivity on the Spatial Continous Prisoner's Dilemma", *Journal of Theoretical Biology* **Vol. 231**, pp. 97-106.

[Nowak 93] Nowak et May [1993] "The Spatial Dimensions of Evolutions", *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **3**: 35-78.

[Nowak 94] Nowak Bonhoffer et May [1994] "Spatial Games and the maintenance of cooperation", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **Vol. 91**, pp. 4877-4881.

ANNEXE : les principaux algorithmes utilisés

On donne les algorithmes utilisés pour simuler les principales évolutions introduites dans les différents chapitres. Pour les principaux modèles étudiés, on donne l'algorithme qui permet de générer une nouvelle génération de

la population à partir de la génération courante, en explicitant également certains choix d'implémentation.

Syntaxes et fonctions

Dans l'annexe, on utilise une forme de pseudo-algorithme. On donne quelques éléments sur la syntaxe utilisée. La déclaration des variables est notée de la manière suivante :

```
entier k
reel x
reel tab[100]
```

Ce qui précède correspond à la déclaration de k comme une variable de type entier, à la déclaration de x comme une variable de type réel, à la déclaration de tab comme une variable tableau de 100 réels : tab[0] ... tab[99]. Pour les opérateurs utilisés, outre les opérateurs arithmétiques et logiques classiques, on utilise :

"<-" comme opérateur d'affectation, "=" étant l'opérateur de comparaison

"%" comme l'opérateur modulo : a%b renvoie le reste dans la division euclidienne de a par b.

Classe Graphe

Dans certains modèles, la population étudiée est répartie sur un graphe et l'évolution dépend de ce graphe. On utilise un objet **g** d'une classe **Graphe** pour implémeter cette structure spatiale. La fonction **g.lies(entier i,entier n)** renvoie vrai si les nœuds **i** et **n** sont liés, faux sinon. **g.voisins(entier n)** renvoie l'ensemble des voisins de **n**.

Fonctions utilisées

On dispose d'une fonction aléatoire **alea(N)** qui renvoie un nombre entier compris entre **0** et **N-1**, selon un tirage aléatoire uniforme. On dispose également d'une fonction **arrondiEntierLePlusProche(reel x)** qui renvoie l'entier le plus proche du reel **x**.

On dispose d'une fonction **tirageAleatoireDistribution(reel tab[])** qui renvoie 0 avec une probabilité tab[0], 1 avec une probabilité tab[1] etc...

CHAPITRE II – Evolution des réseaux de communautés de C et D

Ici le système considéré est un réseau de communautés C et D. Le réseau des communautés est stocké sous forme d'un objet **g** de type **Graphe.** La population par communauté et par comportement est un tableau **reel population[N][nb_etats]** avec **nb_etats=2** qui est la constante entière conservant le nombre des comportements et N qui est la constante entière correspondant au nombre des communautés. Ce tableau est tel que **population[i][j]** est

l'effectif des comportements j sur la communauté i. On dispose également d'une matrice des scores **reel MS[nb_etats][nb_etats]** telle que **MS[0][1]** est le score du comportement 0 (D) contre le comportement 1 (C), **MS[1][1]** est le score du comportement 1 (C) contre le comportement 1 (C) etc.

Ici chaque communauté est initialisée par 100 comportements C avec une probabilité p ou 100 comportements D avec une probabilité (1-p). La population totale est une constante 100*N, on la note **populationTotale**.

On donne le code de l'évolution sur une génération. Dans le chapitre, on étudie seulement le cas où un seul comportement est présent sur chaque communauté, mais le code qui suit fonctionnerait aussi si plusieurs comportements étaient présents sur chaque communauté.

```
entier n1, s1, inter

        /*ON DETERMINE LA POPULATION TOTALE PAR COMMUNAUTE EN RENSEIGNANT totNoeud*/
entier totNoeud[N]
        pour n1 de 0 à N-1
        totNoeud[n1]<-0
                pour s1 de 0 à nb_etats-1
                totNoeud[n1]<-totNoeud[n1]+population[n1][s1]
                fin pour
        fin pour

        /*DETERMINATION DU NOMBRE DES CONTACTS POUR CHAQUE COMMUNAUTE*/
entier nbContacts[N]
        pour n1 de 0 à N-1
        nbContacts[n1]<-0
        fin pour
        pour n1 de 0 à N-1
                pour n2 de 0 à N-1
                        si g.lies(n1,n2)
                        nbContacts[n1]<-nbContacts[n1]+totNoeud[n2]
                        nbContacts[n2]<-nbContacts[n2]+totNoeud[n1]
                        fin si
                fin pour
        fin pour
        pour n1 de 0 à N-1
        nbContacts[n1]<-nbContacts[n1]+totNoeud[n1]-1
        fin pour


        /*DETERMINATION DU SCORE INTERNE A CHAQUE COMMUNAUTE*/
reel scores[N][nb_etats]
        pour n1 de 0 à N-1
                pour s1 de 0 à nb_etats
                scores[n1][s1]<-0
                entier eff<-population[n1][s1]
                        si(eff>0)
                                pour s2 de 0 à nb_etats-1
```

```
                                si (NON s1=s2)
                                scores[n1][s1]<-scores[n1][s1]+population[n1][s2]*MS[s1][s2]
                                fin si
                        fin pour
                scores[n1][s1]<-scores[n1][s1]+MS[s1][s1]*(eff-1)
                fin si
        fin pour
fin pour


/*DETERMINATION DU SCORE EXTERNE A CHAQUE COMMUNAUTE*/
pour n1 de 0 à N-1
        pour n2 de 0 à N-1
                si g.lies(n1,n2)
                        pour s1 de 0 à nb_etats-1
                        entier eff<-population[n1][s1]
                                si eff>0
                                pour s2 de 0 à nb_etats-1
                                scores[n1][s1]<-scores[n1][s1]+(MS[s1][s2]*population[n2][s2])
                                fin pour
                                fin si
                        fin pour
                fin si
        fin pour
fin pour


/*DETERMINATION DES SCORES NORMALISES*/
reel scoresNormalises[N][nb_etats]
pour n1 de 0 à N-1
        pour s1 de 0 à nb_etats-1
                si(nbContacts[n1]>0)
                scoresNormalises[n1][s1]<-scores[n1][s1]/nbContacts[n1]
                else
                scoresNormalises[n1][s1]<-0
                fin si
        fin pour
fin pour

/*DETERMINATION DES SCORES NORMALISES TOTAUX ET DE LEUR SOMME*/
reel sommeScoreNormalise<-0
pour n1 de 0 à N-1
        pour s1 de 0 à nb_etats
        scoresNormalise[n1][s1]<-scoresNormalise[n1][s1]*population[n1][s1]
        sommeScoreNormalise<-sommeScoreNormalise+scoreNormalise[n1][s1]
        fin pour
fin pour

/*EVOLUTION EFFECTIVE DE LA POPULATION*/
reel val<-populationTotale/sommeScoreNormalise
pour n1 de 0 à N-1
        pour s1 de 0 à nb_etats-1
```

```
            population[n1][s1]<-arrondiEntierLePlusProche(val*scoreNormalise[n1][s1])
            fin pour
        fin pour
```

Note : 0 est le score minimal (la matrice des scores n'est utilisée qu'avec des valeurs positives), sinon l'algorithme pourrait faire apparaître des scores négatifs et des effectifs négatifs.

CHAPITRE III, SECTION 1 - Evolution asyncrhone et aléatoire des graphes de populations RPS

L'algorithme qui suit est celui qui est utilisé dans les parties A et B de la section 1 du chapitre III. L'état d'un système est la donnée d'un objet **Graphe g** et d'un tableau **entier etat[N]** qui enregistre l'état des nœuds : **etat[0]** est l'état du nœud 0, **etat[1]** est l'état du nœud 1 etc. Le nombre des comportements possibles est une constante entière : **nb_etats**, dans la section 1, on s'est contenté d'étudier le cas **nb_etats=3**.

On initialise le tableau par un tirage uniforme :

```
entier i
        pour i de 0 à N-1
        etat[i]<-alea(3)
        fin pour
```

On donne l'algorithme qui fait évoluer la population d'une génération à l'autre :

```
entier t
        pour t de 0 à N-1
        entier k<-alea(N)
        Liste voisins<-g.voisins(k)
        /*|voisins| est la cardinalité de la liste des voisins*/
            si(|voisins|> 1)
            /*On tire un voisin au hasard*/
            voisHas<-alea(|voisins|)
                /*Si l'état du nœud voisin est i et l'état du nœud k est i+1[nb_etats]*/
                si (etat[k]=(etat[voisins.elt(voisHas)]+1)%nb_etats)
                etat[voisins.elt(voisHas)]<-etat[k]
                /*Si l'état du nœud k est i et l'état du nœud voisin est i+1[nb_etats]*/
                sinon si((etat[k]+1)%nb_etats=etat[voisins.elt(voisHas)])
                etat[k]<-etat[voisins.elt(voisHas)]
                fin si
            fin si
        fin pour
```

CHAPITRE III, SECTION 1 - Evolution des réseaux de communautés RPS

L'algorithme présenté ici est celui qui est utilisé dans la partie C de la section 1 du chapitre III. Ici un état du

système est la donné d'un **Graphe g** et d'un tableau **reel population[N][nb_etats]** tel que **population[i][j]** est la population de l'état **j** sur la communauté **i** avec **nb_etats** le nombre des comportements possibles. Le tableau **reel MS[nb_etats][nb_etats]** est la matrice des scores entre les comportements en présence.

On ne considère ici que le cas **nb_etats=3**. Les communautés sont initialisées de manière aléatoire avec **population_communaute** individus par communauté : on tire aléatoirement pour chaque communauté les effectifs par comportement. **population_communaute** est une constante : toutes les communautés ont la même population.

On dispose d'une fonction tirageTableau qui renvoie un tableau d'entiers :

tirageTableau(entier tab[nb_etats],entier somme)

Le tableau renvoyé par cette fonction est un tableau **entier retour[nb_etats]** déterminé aléatoirement et tel que :

- **tab[i]≤retour[i]** pour tout **i**
- **la retour[0]+retour[1]+...+retour[|retour|-1]=somme**

Cette fonction va permettre de déterminer la part des effectifs par comportement qui sont redistribués depuis une communauté vers les communautés voisins.

On fait évoluer le système en utilisant l'algorithme suivant en deux étapes. Etape 1 : on fait évoluer chaque communauté par des rencontres entre des couples d'individus : on tire des couples d'individus de la communauté au hasard et on fait évoluer le couple si l'un des deux individus est d'état i et l'autre d'état i+1[3]. Etape 2 : pour chaque communauté, elle émet **transferes** (constante entière) stratégies vers chacun de ses voisins, les stratégies transférées étant tirées uniformément au sein de la communauté.

```
/*ETAPE 1 : EVOLUTION DES COMMUNAUTES*/
        pour i de 0 à N-1
        entier tab[nb_etats]
        reel proba[nb_etats]
                pour s de 0 à nb_etats-1
                tab[s]<-population[i][s]
                proba[s]<-population[i][s]/population_communaute
                fin pour

                /*On fait se rencontrer population_communaute couples*/
                pour j de 0 à population_communaute-1
                etat1<-tirageAleatoireDistribution(proba)
                etat2<-tirageAleatoireDistribution(proba)
                        si (etat1=(etat2+1)[3])
                        tab[etat1]<-tab[etat1]+1
                        tab[etat2]<-tab[etat2]-1
                        sinon si (etat2=(etat1+1)[3])
                        tab[etat1]<-tab[etat1]-1
                        tab[etat2]<-tab[etat2]+1
                        fin si
```

```
            fin pour

            /*Affectation des nouveaux effectifs*/
            pour s de 1 à nb_etats-1
            population[i][s]<-tab[s]
            fin pour
        fin pour

/*ETAPE 2 : TRANSFERT DES STRATEGIES : ON DETERMINE L'EMISSION DEPUIS CHAQUE COMMUNAUTE*/
/*Le tableau vecteurTransfert associe à un nœud et à un état le nombre des stratégies de cet état
qu'il faut transférer depuis ce noeud*/
entier vecteurTransfert[N][nb_etats]
        pour n de 0 à N-1
        /*Determination du nombre des stratégies à transférer depuis la communauté n*/
        int nbTransfere<-|g.voisins|*transfert

            pour s de 0 à nb_etats-1
            tab[s]<-population[n][s]
            fin pour

        /*On utilise la fonction définie plus haut qui nous donne pour tab un ensemble de
        comportements à transférer depuis la communauté n*/
        tab<-tirageTableau(tab,nbTransfere)

        /*On renseigne le tableau vecteurTransfert et on ote les strategies de la communauté n*/
            pour s de 0 à nb_etats-1
            vecteurTransfert[n][s]<-tab[s]
            population[n][s]<-population[n][s]-vecteurTransfert[n][s]
            fin pour
        fin pour

        /*On ajoute les stratégies aux communautés voisins de n*/
        pour n de 0 à N-1
        Liste voisins<-g.voisins(n)
            si (|voisins|>0)
            entier numV
                pour numV de 0 à card de |voisins|-2
                numNoeud<-voisins.elt(numV)
                entier transfertNode[nb_etats]
                /*Détermination du transfert vers le voisin numNoeud*/
                transfertNode<-tirageTableau(vecteurTransfert[node],transfert)
                    pour s de 0 à nb_etats-1
                    vecteurTransfert[n][s]<-vecteurTransfert[n][s]-transfertNode[s]
                    population[numNoeud][s]<-population[numNoeud][s]+transfertNode[s]
                    fin pour
                fin pour
            /*Determination du vecteur depuis le dernier voisin : vecteurTransfert [n] ne
            contient plus que transert stratégies*/
            numNoeud<-voisins.elt(|voisins|-1)
                pour s de 0 à nb_etats-1
                population[numNoeud][s]<-population[numVème][s]+vecteurTransfert[n][s]
                fin pour
```

```
            fin si
        fin pour
```

CHAPITRE III, SECTION 2 - Evolution des graphes de population RPS selon un mode déterministe

Un système est la donnée d'un objet **Graphe g** et d'un tableau **entier etats[nb_etats]** qui associe à chaque nœud un état. **nb_etats** est la constante entière qui correspond au nombre des états. Elle est généralement prise égale à 3 dans ce qui suit.

Les initialisations sont faites de manière aléatoire par des tirages uniformes. Par suite, pour faire évoluer la population d'une génération en utilisant le principe qu'un nœud d'état i évolue si il a plus de voisins i+1[3] que de voisins i-1[3] :

```
        /*SYNTESE DE L'INFORMATION : ON PARCOURT L'ENSEMBLE DES NOEUDS*/
entier tab[N]
        Pour i de 0 à N-1
        entier nbIPlus1<-0
        entier nbIMoins1<-0
        Liste voisins<-g.voisins(i)
        entier etatCourant<-etats[i]
                pour j de 0 à voisins-1
                /*Si l'état du jème voisin est l'état du nœud i +1*/
                        si(etat[voisins.elt(j)]=(etatCourant+1)%nb_etats)
                        nbIPlus1<- nbIPlus1+1
                /*Si l'état du jème voisin est l'état du nœud i +1*/
                        sinon si(etat[voisins.elt(j)]=(etatCourant-1+3)%nb_etats)
                        nbIMoins1<-nbIMoins1+1
                        fin si
                fin pour
        tab[i]<-nbIPlus1-nbIMoins1
        fin pour

        /*DETERMINATION DE LA NOUVELLE GENERATION*/
        Pour i de 0 à N-1
                si (tab[i]>0)
                etats[i]<-((etats[i]+1)%nb_etats)
                fin si
        fin pour
```

CHAPITRE IV - Evolutions locales et globales sur les réseaux de communautés

Ici un état du système est la donnée d'un **Graphe g** et d'un tableau **reel population[N][nb_etats]** tel que **population[i][j]** est la population de l'état **j** sur la communauté **i** (le nœud **i**). La constante entière **nb_etats** est le nombre des comportements en présence. **reel MS[nb_etats][nb_etats]** est la matrice des scores entre les comportements en présence.

Que ce soit dans le cas de l'évolution locale ou dans le cas de l'évolution gloable, le calcul des scores se fait de la même manière, les opérations concourrantes au calcul des scores sont réunies au sein de la procédure **calculScores.**

```
proc calculScores(reel scores[N][nb_etats])
        /*INITIALISATION DU TABLEAU DES SCORES*/
        pour n1 de 0 à N-1
                pour s1 de 0 à nb_etats-1
                scores[n1][s1]<-0
                fin pour
        fin pour

        /*CHAQUE STRATEGIE INTERAGIT AVEC LES STRATEGIES DE SA COMMUNAUTE*/
        pour n1 de 0 à N-1
                pour s1 de 0 à nb_etats-1
                        si(population[n1][s1]>0)
                                        pour s2 de 0 à nb_etats-1
                                                si(NON s2=s1)
                                        scores[n1][s1]<-scores[n1][s1]+population[n1][s2]*MS[s1][s2]
                                                fin si
                                        fin pour
                        scores[n1][s1]<-scores[n1][s1]+MS[s1][s1]*(population[n1][s1]-1)
                        fin si
                fin pour
        fin pour


        /*CHAQUE STRATEGIE INTERAGIT AVEC LES STRATEGIES DES COMMUNAUTES VOISINES*/
        pour n1 de 0 à N-1
                pour n2 de 0 à n2
                        si(g.lies(n1,n2))
                                pour s1 de 0 à nb_etats-1
                                        si(population[n1][s1]>0)
                                                pour s2 de 0 à nb_etats-1
                                scores[n1][s1]<-scores[n1][s1]+*(MS[s1][s2]*population[n2][s2])
                                                fin pour
                                        fin si
                                fin pour
                        fin si
                fin pour
        fin pour
fin proc
```

En disposant de la procédure de calcul des scores, on peut définir une procédure d'évolution locale :

```
proc evolutionLocale()
```

```
reel scores[N][nb_etats]

        /*ON UTILISE LA FONCTION DE CALCUL DES SCORES DEFINIE PLUS HAUT*/
        calculScores(scores)

        /*ON TOURNE SUR LES COMMUNAUTES POUR LES FAIRE EVOLUER*/
        pour n1 de 0 à N-1
        /*On détermine la somme du score et des effectifs sur le nœud n1*/
        entier effectifTotNoeud<-0
        reel scoreTotNoeud<-0
                pour s1 de 0 à nb_etats-1
                effectifTotNoeud<-population[n1][s1]+effectifTotNoeud
                scoreTotNoeud<-scoreTotNoeud+population[n1][s1]*scores[n1][s1]
                fin pour

        /*On détermine les nouveaux effectifs pour le nœud n1*/
                si(scoreTotNoeud>0)
                reel coeff<-effectifTotNoeud/scoreTotNoeud
                        pour s1 de 0 à nb_etats-1
                        population[n1][s1]<-coeff*population[n1][s1]*scores[n1][s1]
                        fin pour
                fin si
        fin pour
fin proc
```

Avec le même mode de détermination des scores, la détermination des effectifs en évolution globale :

```
proc evolutionGlobale()

/*ON APPELLE LA FONCTION DE CALCUL DES SCORES*/
calculScores(scores)

/*ON CALCULE LE SCORE TOTAL ET LA POPULATION TOTALE*/
reel scoreTot<-0
entier populationTotale<-0
        pour n de 0 à N-1
                pour s de 0 à nb_etats-1
                        si(population[n][s]>0)
                        scoreTot<-scoreTot+scores[n][s]*population[n][s]
                        populationTotale<-populationTotale+population[n][s]
                        fin si
                fin pour
        fin pour

/*ON GENERE LES NOUVEAUX EFFECTIFS PAR COMMUNAUTE ET PAR STRATEGIE*/
reel coeff<-popoulationTotale/scoreTot
        pour n de 0 à N-1
                pour s de 0 à nb_etats-1
                population[n][s]<-coeff*population[n][s]*scores[n][s]
```

```
                fin pour
        fin pour
fin proc
```

Note : ici, tous les coefficients de la matrice des scores utilisée sont des réels positifs : des scores négatifs pourraient conduire à des effectifs négatifs.

CHAPITRE V - Evolution d'une population d'offreurs par des interactions sur les marchés

La population est composée d'un ensemble d'offreurs. L'implémentation repose sur une classe **Offreur**. On stocke les comportements d'offre dans un tableau de variables de type Offreur : **Offreur tab[nb_etats]**, **nb_etats** étant le nombre des comportements en présence. L'effectif associé à chaque type d'offreur est enregistré dans un tableau : **entier effectif[nb_etats]**. Ici, **effectif[0]** est l'effectif des offreurs de comportement **tab[0]**, **effectif [1]** est l'effectif des offreurs de comportement **tab[1]** etc.

Pour chaque génération, on crée un marché. On tire **nb_Agents_Marche** (constante entière) offreurs de la population, chaque offreur ayant une probabilité uniforme d'être choisi. On fait interagir ces offreurs sur le marché sur 100 périodes : chacun obtient un profit cumulé. L'effectif **nb_Agents_Marche** est redistribué entre les différents comportements d'offre en présence, les comportements qui ont obtenu le plus fort profit cumulé obtiennent le plus de descendants, ceux qui obtiennent le plus faible profit cumulé disparaissent.

On ne donne pas ici le code de l'évolution d'un marché. L'évolution d'une période sur un marché se fait de la manière suivante : d'abord, les offreurs déterminent leurs offres individuelles, puis ils sont classés par ordre croissant de prix. Ensuite, on confronte le premier offreur à la demande sur le marché, on retire de la demande totale la part de la demande qu'il satisfait, puis le second offreur interagit avec la demande de la même manière etc... On renseigne enfin la mémoire des offreurs pour qu'ils puissent fonder leurs offres futures sur le constat des offres actuelles.

On donne l'évolution d'une génération, ci-dessous :

```
/*DETERMINATION DES OFFREURS EN PRESENCE SUR LE MARCHE*/
Liste offsMarche<-{}
        pour n de 0 à nb_Agents_Marche-1
        /*Determination des frequences des offreurs*/
        reel proba[nb_etats]
                pour s de 0 à nb_etats-1
                proba[s]<-effectif[s]/population_totale
                fin pour
```

```
        /*Tirage d'un comportement au hasard et diminution de l'effectif de ce comportement*/
        entier indice<-tirageAleatoireDistribution(proba)
        effectif[indice]<-effectif[indice]-1
        /*On cree un nouvel objet par copie du comportement*/
        Offreur off<-tab[indice].copie()
        /*conservObjet est un tableau associatif qui associe à chaque variable objet le numéro du
        comportement à partir duquel il a été copié*/
        conservObjet.put(off,indice)
        /*On ajoute l'offreur à la liste offsMarche*/
        off.num<-nb
        offsMarche<-offsMarche U off
        fin pour

/*CREATION DU MARCHE ET LANCEMENT DE SON EVOLUTION SUR 100 périodes*/
Marche marcheCourant<-new Marche(offsMarche)
marcheCourant.generate(100)

/*RETRAITEMENT DES PROFITS CUMULES : ON TRANSLATE LES PROFITS DES OFFREURS DE MANIERES A CE QU'ILS
SOIENT TOUS POSITIFS*/
reel profitOffreurs[|offsMarche|]
/*On détermine le minimum des profits cumulés*/
reel profitCumuleMin<-null
        pour i de 0 à |offsMarche|-1
        Offreur off<-offsMarche.elt(i)
        profitOffreurs[i]<-off.profitCumule
                si(profitCumuleeMin=null OU profitOffreurs[i]<profitCumuleeMin)
                profitCumuleeMin<-profitOffreurs[i]
                fin si
        fin pour
/*On diminue le profit cumulé de tous les offreurs de profitCumuleMin : tous les profits cumulés
sont positifs après cette opération. On calcule aussi la somme des profits cumulés*/
reel sommeProfits<-0
        pour i de 0 à  |offsMarche|-1
        profitOffreurs[i]<-profitOffreurs[i]-profitCumuleeMin
        sommeProfits<-sommeProfits+profitOffreurs[i]
        fin pour

/*NOUVELLE REPARTITION DES EFFECTIFS*/
/*Les différentes listes servent à enregistrer les indices des comportements qui augmentent, qui
diminuent ou qui stagnent*/
Liste listeNeutre<-{}
Liste listeDiminuee<-{}
Liste listeAugmentee<-{}
entier totalRedistribue<-0
        pour i de 0 à |offsMarche|-1
        Offreur off<-offsMarche.elt(i)
        /*On calcule le nouveau nombre des offreurs issus de off*/
        entier valInter<-arrondiEntierPlusProche(|offsMarche|*profitOffreurs[i]/sommeProfits)
        /*On récupère l'indice du comportement de l'Offreur off*/
        indice<-conservObjet.get(off)
        effectif[indice]<-effectif[indice]+valInter
        totalRedistribue<-totalRedistribue+valInter
```

```
            si(valInter=1)
            listeNeutre<-listeNeutre U indice
            sinon si(valInter>1)
            listeAugmentee<-listeAugmentee U indice
            sinon
            listeDiminuee<-listeDiminuee U indice
            fin si
        fin pour

/*CORRECTION : CF DEPERDITION OU AUGMENTATION DU FAIT DE L'UTILISATION D'ENTIERS : en utilisant la fonction d'arrondi à l'entier le plus proche, on risque d'avoir redistribué un nombre d'agents différent de nb_Agents_Marche*/
        tant que(totalRedistribue>nb_Agents_Marche)
            si(|listeNeutre|>0)
            indice<-listeNeutre.elt(alea(|listeNeutre|)
            sinon
            indice<-listeDiminuee.elt(alea(|listeDiminuee|)
            fin si
        effectif[indice]<-effectif[indice]-1
        totalRedistribue<-totalRedistribue-1
        fin tant que

        tant que(totalRedistribue<nb_Agents_Marche)
            si(|listeNeutre|>0)
            indice<-listeNeutre.elt(alea(|listeNeutre|)
            sinon
            indice<-listeAugmentee.elt(alea(|listeAugmentee|)
            fin si
        effectif[indice]<-effectif[indice]+1
        totalRedistribue<-totalRedistribue+1
        fin tant que
```