



**HAL**  
open science

## Gravimétrie atomique sur puce et applications embarquées

Landry Huet

► **To cite this version:**

Landry Huet. Gravimétrie atomique sur puce et applications embarquées. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT: . tel-00839785v1

**HAL Id: tel-00839785**

**<https://theses.hal.science/tel-00839785v1>**

Submitted on 30 Jun 2013 (v1), last revised 24 Mar 2014 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THALES UNDERWATER SYSTEMS**  
**THALES RESEARCH AND TECHNOLOGY**  
**UNIVERSITÉ PARIS EST – ÉCOLE DOCTORALE MSTIC**

**Thèse de doctorat**  
**en Sciences et Technologies de l'Information Géographique**  
**présentée par Landry HUET**

# **Gravimétrie atomique sur puce et applications embarquées**

Soutenue le 11 janvier 2013 devant le jury composé de

M. Philippe BOUYER	Président du jury
M. Jean-Philippe BRUNET	
M. Michel DIAMENT	Rapporteur
M. Michel KASSER	Directeur de thèse
Mme Marie-Françoise LEQUENTREC-LALANCETTE	
M. Franck PEREIRA DOS SANTOS	Rapporteur
M. Thorsten SCHUMM	
M. Sylvain SCHWARTZ	



## **Résumé : Gravimétrie atomique sur puce et applications embarquées**

Dans la première partie de ce travail de thèse on a étudié les causes d'anomalie de pesanteur, et plusieurs causes de bruit afin d'en tirer des conclusions sur la faisabilité de certaines applications qui impliqueraient notamment l'utilisation d'instruments embarqués. On envisage en particulier la possibilité de constituer un système de prévention des collisions pour la navigation sous-marine, d'utiliser un gravimètre pour détecter des cavités enfouies ou encore d'observer l'anomalie de pesanteur créée par le passage d'une vague de tsunami d'une part, et d'autre part on cherche autant que possible à quantifier les bruits classiques rencontrés en gravimétrie embarquée, ainsi que le bruit gravitationnel causé par les vagues.

Dans la seconde partie on décrit la réalisation d'un projet de gravimètre à ondes de matière, qui aura la particularité d'utiliser des atomes piégés au voisinage d'une puce en carbure de silicium. Le développement des gravimètres à ondes de matière est extrêmement prometteur en terme d'exactitude de mesure de la pesanteur, mais le principe de réalisation utilisé jusqu'à maintenant implique que la sensibilité limite de l'instrument est proportionnelle à sa taille. D'un autre côté depuis une dizaine d'années des puces constituées de fils conducteurs déposés sur un substrat ont été développées pour le piégeage et le refroidissement d'atomes. La puce à atomes permettra de démontrer la possibilité de mesurer le champ de pesanteur avec une sensibilité indépendante de la taille de l'instrument. Le défi de ce démonstrateur est d'effectuer pour la première fois la séparation spatiale cohérente d'un nuage d'atomes sur une puce atomique, à des fins de métrologie.

**Mots-clés :** gravimétrie, gradiométrie, géophysique, physique atomique, ondes de matière, atomes froids, interférométrie atomique, puces à atomes

## **Abstract : On-chip atomic gravity measurements and onboard applications**

In the first part of this work causes of gravity anomalies are studied, along with causes of noise. The feasibilities of a few industrial applications involving mobile gravity or gravity gradient meters were hence evaluated. These applications include in particular the possible realization of a collision avoidance device for underwater navigation, underground void spaces detection and tsunami wave detection. Classical noises encountered in onboard gravity measurements are studied, as well as the less conventional gravity noise caused by ocean waves.

The second part of the work is devoted to the implementation of a matter wave interferometry gravimeter. The particularity of the device is to use atoms trapped in the vicinity of a silicon carbide atom chip. The goal of the project is to reach for the measurement accuracies of current matter waves gravimeters with free falling atoms, with a new principle that does not imply a proportionality between the size of the device and its sensitivity limit. We hope to demonstrate a proof of concept that may lead to a new generation of atomic gravimeters that are compact and therefore better suited for mobile uses. Coherent splitting of a non-condensed atom cloud for metrology purposes may be the main challenge of the project.

**Keywords :** gravity, gravity gradient, geophysics, atomic physics, matter waves, cold atoms, atom interferometry, atom chips

## **Laboratoire de rattachement:**

Micro-nano-physique, Thales Research and Technology

1 av Augustin Fresnel, 91767 Palaiseau Cedex



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Ordres de grandeur en gravimétrie . . . . .	13
1.2	Rôles classiques de la gravimétrie . . . . .	16
1.3	Autres applications envisagées . . . . .	20
1.4	Atomes froids et gravimétrie . . . . .	20
1.5	Plan de la thèse . . . . .	22
 <b>Partie I Objectifs en gravimétrie embarquée</b>		<b>25</b>
<b>2</b>	<b>Instruments pour la gravimétrie embarquée</b>	<b>27</b>
2.1	Mesures et instruments en gravimétrie . . . . .	27
2.2	Contraintes opérationnelles . . . . .	32
2.3	Etude d'instruments . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Gravimètre à levier miniature</b>	<b>43</b>
3.1	Principe de fonctionnement mécanique . . . . .	43
3.2	Mesure de la flexion . . . . .	49
3.3	Difficultés intrinsèques . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Signaux et bruits en gravimétrie</b>	<b>61</b>
4.1	Bilan des incertitudes classiques . . . . .	61
4.2	Effet gravitationnel des vagues . . . . .	78
4.3	Essais de mesures en gravimétrie . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Dimensionnement des applications envisagées</b>	<b>103</b>
5.1	Dispositif anti-collision . . . . .	103
5.2	Détection de conduites enfouies . . . . .	114
5.3	Détection de tsunami . . . . .	115
 <b>Partie II Gravimètre atomique sur puce</b>		<b>119</b>
<b>6</b>	<b>Principaux choix de conception</b>	<b>121</b>
6.1	Principe de l'interféromètre . . . . .	122
6.2	Piégeage des atomes . . . . .	122
6.3	Espèce et états électroniques . . . . .	127
6.4	Etat collectif des atomes . . . . .	128
6.5	Séparation et recombinaison spatiale cohérente . . . . .	133

<b>7</b>	<b>Principes de la gravimétrie à atomes piégés</b>	<b>139</b>
7.1	Mesure du champ de pesanteur avec des atomes piégés . . . . .	139
7.2	Comparaison aux gravimètres à atomes en chute libre . . . . .	143
7.3	Autres projets de gravimètres compacts . . . . .	149
7.4	Causes d'incertitudes dans l'interféromètre . . . . .	150
<b>8</b>	<b>Réalisation technique</b>	<b>159</b>
8.1	Démarche de la mise au point . . . . .	159
8.2	Cahier des charges pour chaque étape . . . . .	162
8.3	Mise en œuvre . . . . .	169
<b>9</b>	<b>Carbure de silicium et atomes froids</b>	<b>191</b>
9.1	Le piégeage magnéto-optique sur puce . . . . .	191
9.2	Réglage de polarisation des faisceaux . . . . .	193
9.3	Publication . . . . .	199
<b>10</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>203</b>
	<b>Annexes</b>	<b>205</b>
<b>A</b>	<b>Explication des notations</b>	<b>207</b>
A.1	Transformations de Fourier . . . . .	207
A.2	Gravimétrie . . . . .	207
A.3	Etats électroniques des atomes . . . . .	209
<b>B</b>	<b>Concepts de métrologie</b>	<b>211</b>
B.1	Point de vue de l'utilisateur : la mesure unique . . . . .	211
B.2	Dépendances temporelles . . . . .	213
B.3	Autres concepts utiles de métrologie . . . . .	216
<b>C</b>	<b>Calculs</b>	<b>219</b>
C.1	Constantes physiques . . . . .	219
C.2	Gravimétrie . . . . .	219
C.3	Gradiométrie . . . . .	220
C.4	Anomalie créée par une falaise infinie . . . . .	221
C.5	Effets des imperfections des pièges à atomes . . . . .	224
	<b>Acronymes</b>	<b>229</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>233</b>



À Soline et Amandine.



# Remerciements

La thèse, c'est fini! Après plus de trois ans de découvertes, d'apprentissage, de modèles physiques et de travail de laboratoire, de remises en question, de joies et de satisfactions lorsque viennent les résultats, il est temps d'écrire quelques mots de remerciement pour clore définitivement mon manuscrit. Il me vient la nostalgie d'une belle aventure qui s'achève, l'appétit de toutes celles qui s'ouvrent, et une immense gratitude pour tous ceux qui m'ont entouré et qui m'ont aidé à soutenir une belle thèse.

Commençons comme de coutume par ceux sans lesquels rien n'aurait été possible, matériellement. Je remercie ainsi tout d'abord Thales Underwater Systems (TUS), l'Université Paris Est et l'Association Nationale Recherche Technologie (ANRT) grâce auxquels ma convention Cifre a été montée. Merci également à Thales Research and Technology France (TRT), qui m'a accueilli dans ses locaux. Dans ces institutions je tiens en particulier à remercier Pascale Solé et Yves Doisy, responsables successifs de l'équipe Etudes Générales Sonar (EGS) à laquelle j'ai été rattaché dans TUS, Bernard Saint-Girons, président de l'Université Paris Est, Djalil Chafaï, directeur de l'École doctorale MSTIC, Bertrand Demotes Mainard et son successeur Erick Lansard, présidents de Thales Research and Technology, Pierre Dufond et Marie Ros-Guézet, responsables successifs du site de Palaiseau, les responsables du groupe de physique à TRT, d'abord Emmanuel Desurvire, puis Daniel Dolfi.

## Collaborateurs directs

Ma gratitude la plus profonde va sans aucun doute à mes collaborateurs directs, tout particulièrement mes encadrants. Mon encadrant industriel officiel Jean-Philippe Brunet, qui a lancé le sujet de thèse et qui décidément, ne manquera jamais d'idées pour l'innovation technologique. Michel Kasser, mon directeur de thèse, toujours attentif aux objectifs académiques de la thèse, et très disponible malgré la distance. Sylvain Schwartz, qui dirige notre petite équipe du capteur à ondes de matières à TRT. Je remercie Sylvain de la confiance et des encouragements qu'il m'a donnés pendant tout le temps de notre collaboration, et pour tout ce qu'il m'a appris. Merci aussi pour sa patience au cours de la phase de rédaction et juste avant la soutenance.

Parmi les autres membres de l'équipe, merci à Mahdi Ammar, co-thésard sur la manip' atomes froids pour sa gentillesse, son humour, et ses puces à atomes. Merci à Cécile Clément, qui a eu assez de patience pour affronter toutes les vagues de tsunami, et une bonne dose de mathématiques appliquées. Merci à Sophie Dorizon, qui s'est promenée de façon très indépendante un gravimètre à la main à travers TRT, et jusqu'à Sèvres. Merci à Matthieu Dupont-Nivet, qui a repris le flambeau au laboratoire, avec lui les atomes n'ont qu'à bien se tenir. Bon courage! Merci à Christine Guerlin, qui m'a aidé à passer du stade

de bricoleur enthousiaste à celui d'expérimentateur (à peu près) soigneux et rigoureux. Merci à Jean-Paul Pocholle, pour ses conseils aussi bien scientifiques que professionnels, ainsi que pour l'importance qu'il accorde toujours à la pédagogie de ses explications. Merci à toutes ces personnes pour la bonne humeur de tous les jours, et l'humour en toutes circonstances, ce qui m'a véritablement porté.

Le projet de gravimètre à atomes froids sur puce est le fruit d'une collaboration entre plusieurs organismes, et j'aimerais saluer le travail des collaborateurs en-dehors de TRT. Au III-V Lab, merci à Raphaël Aubry, à Sylvain Delage, à Michel Krakowski, à Erwan Morvan à Stéphane Piotrowicz, à Olivier Patard et à Nicolas Sarazin, spécialistes de la fabrication des puces et des lasers. A l'Institut d'Optique, merci à Isabelle Bouchoule et à Chris Westbrook pour leurs lumières théoriques dans l'art de piéger les atomes. Je suis aussi très reconnaissant à Chris pour ses précieux conseils concernant la rédaction et la présentation de thèse. Merci à Jérôme Estève et à Jakob Reichel, du laboratoire Kastler Brossel, pour leurs conseils concernant aussi bien les parties théoriques qu'expérimentales de la physique atomique et des puces à atomes. Merci à Peter Rosenbusch et à ses étudiants de nous avoir accompagnés sur la route de la métrologie atomique sur puce depuis l'Observatoire de Paris.

Mais il n'y a pas que la physique atomique dans la thèse. Un grand merci ainsi à Jacques Hinderer et à Luis Rivera, de l'Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre, de nous avoir aidés à démêler avec Cécile Clément les calculs concernant les tsunamis et le bruit gravimétrique sous-marin. Du côté de la gravimétrie et de son utilisation je tiens à remercier mes collaborateurs thalésiens de Sophia-Antipolis. Nommément Georges Bienvenu, dont la modestie et la gentillesse excèdent la grande érudition scientifique, puisse-t-il ne jamais croiser de navire genre, mauvais genre ; Martine Doisy, qui m'a encouragé au début de la thèse, et au moment du virage vers la physique atomique ; Jean-Michel Passerieux, dont la gentillesse discrète, la disponibilité et les lumières m'ont accompagné depuis le début ; Denis Pillon, qui peut d'un trait d'humour dédramatiser les réunions tendues ou ennuyeuses, et nous aide ainsi à rester sur la bonne trajectoire ; et Louis Raillon, à la pointe du non-acoustique. Merci de nouveau à Pascale Solé, dont la rigueur et l'efficacité ont guidé la première partie du projet.

Merci enfin à Odile Bezencenet et à Bernard Chaumet, pour leurs conseils sur les microstructures, ainsi qu'à Giovanni Occhipinti et indirectement à Hélène Hébert de m'avoir transmis les résultats d'une simulation concernant le tsunami de 2004, même s'il s'est finalement avéré que ce n'était pas le bon angle par lequel attaquer le problème.

## Collègues

Il y a aussi tous ceux avec lesquels la collaboration a été plus occasionnelle, mais que je souhaite remercier également pour toutes les discussions sympathiques, une fois par an ou tous les jours, sur des sujets parfois essentiels, parfois anodins voire philosophiques. Je salue ici amicalement ces collègues, à côté desquels et avec lesquels j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler. Nommons ainsi, dans un ordre plus ou moins aléatoire :

Les collaborateurs de Mevix/Mécavac, et en particulier Alain Sucrau et Christian Lucas. C'est en grande partie grâce à leurs esprits pratiques et à leurs tours de perceuse que la fameuse manip' a pu être montée.

Gilles Feugnet, Gaël Désilles et Fabien Bretenaker, les *gyro-men*. Merci à Gilles d'avoir

été de l'autre côté du mur, bien présent quand il est là ! Gaël m'a donné une perspective industrielle essentielle sur les applications inertielles, grâce lui en soient rendues. Passionnant et passionné, Fabien a été présent à plusieurs reprises quand il s'est agi de discuter d'optique électromagnétique ou atomique, ainsi que pour la préparation de ma soutenance, malgré sa liste de priorités à rallonges !

Je remercie de leur voisinage sympathique Pierre Colman, Sylvain Combrié, Alfredo Derossi et Christophe Wilhelm ; Perrine Berger et Jérôme Bourderionnet un peu plus loin ; Mayeul Chipaux et Thierry Debuisschert, qui ont tenté de répondre à mes questions improbables sur la physique quantique. Bien sûr également *le chef* Arnaud Brignon, jamais effrayé par les arcanes bureaucratiques de la recherche, et toujours de bon conseil sur la manip et la thèse.

Citons également, un couloir plus loin, Muriel Schwarz (et ses gâteaux), Dominique Papillon (et ses bandes dessinées), Eric Lallier, Christian Larat aux jambes rapides et au verbe un brin moqueur, et ses pauvres thésards les excellents Cindy Bellanger, Guillaume Bloom puis Marie Antier. A proximité immédiate, en prenant garde à son laser redoutable remerçons au passage Maître François Gutty.

Je me souviendrai longtemps encore du gang du A3, groupe qui parvient à être à la fois très soudé et ouvert à tous les nouveaux. Ce sont les premières personnes à m'avoir accueilli, à bras ouverts, à mon arrivée, alors que j'étais encore assez isolé dans TRT. Un grand merci à Hamza Alami, Mehdi Alouini, Ghaya Baili, Patrick Feneyrou, Luc Leviandier, Héloïse Linget, Jérémy Maxin, Loïc Ménager, Stéphanie Molin, Loïc Morvan, Pascale Noucchi, Grégoire Pillet et Olivier Vaudel. Je manque de mots pour remercier chacun. J'en profite toutefois pour souhaiter à Joachim Börner, à Nils Girard et Arnaud Peigné encore de nombreux pique-niques pimentés. Merci aussi à Frédéric Van Dijk et à ses collaborateurs, aperçus à maintes reprises autour de la machine à café, élément indispensable qui incite à trouver dans les laboratoires.

Merci aux voisins de mon ancien bureau : Giuseppe Bellomonte, Romain Czarny, Anne Delboulbé, Frédéric Diaz, Laure Lee et Brigitte Loiseaux.

Merci aux chimistes, particulièrement Christophe Galindo et Françoise Soyer. Pour leurs gentils bonjours lorsqu'ils se sont aventurés jusqu'à la RMN, et leur aide au moment du collage des contacts sur la puce. Si vous lisez ces lignes, saluez de ma part le Docteur Zoidberg.

Un peu plus loin encore, merci aux *experts* : Joseph Colineau, pour tous ses conseils concernant l'électronique, et Julien Nagle, pour la propriété industrielle. Merci à Jean-Pierre Huignard, premier contact chez Thales, et qui m'a envoyé vers les bonnes personnes.

Merci à Renato Bisaro, Denis Crété, Olivier Delande, Nicolas Reyren, Charles Robinson et Alexandre Shen, rencontrés de façon fortuite. Merci pour les sympathiques échanges et les occasionnels coups de pouce techniques, dans des domaines qui me sont étrangers.

Encore plus loin, du côté de Vélizy, merci à Virgile Hermann, maître du temps et du vide, pour ses conseils.

Merci enfin aux assistantes sans lesquels bien des problèmes resteraient sans solution : Barbara Petit, à TRT, et Patricia Stummer, du côté de Sophia-Antipolis.

La difficulté, dans cet exercice, c'est qu'on oublie forcément quelqu'un, et qu'un autre aura sans doute des raisons légitimes d'estimer ne pas être remercié de la meilleure manière. Qu'ils soient remerciés ici de leur patience et de leur indulgence ! Une fois pour toutes, je salue les qualités techniques et le professionnalisme de mes interlocuteurs, et je les remercie encore plus de leur enthousiasme et de leur sympathie !



## Et tous les autres !

Il y a enfin les inclassables, qui comptent bien que ne rentrant pas dans la catégorie des collègues ou celle des collaborateurs proches.

A commencer par le jury de thèse. Merci à chacun de ses membres d'avoir pris le temps de lire mon manuscrit, tout particulièrement les rapporteurs qui ont dû écrire... leurs rapports. Un merci particulier à Michel Diamant de nous avoir prêté le gravimètre ayant servi lors du stage de Sophie Dorizon.

Merci à Sylvie Cach, de l'ED MSTIC, pour sa grande efficacité dans la résolution des questions administratives de la thèse, tout particulièrement au moment de rendre le manuscrit et de soutenir la thèse. Grâce à Sylvie Cach, même les courts et les longs ne sont plus problématiques, pour les délais administratifs.

Je ne sais pas si elles liront jamais ce paragraphe, mais j'en profite tout de même pour saluer toutes les personnes sympathiques rencontrées à l'Institut de Physique du Globe de Paris, à l'Institut d'Optique, rue Lhomond, et finalement lors de la session 2010 de physique des atomes froids à l'école des Houches. Je ne les oublie pas, elles se reconnaîtront !

Faut-il remercier la bibliothèque du CE de TRT, après les heures perdues dans les transports en commun à lire des bandes dessinées, plutôt que de sérieux articles scientifiques, ce qui aurait pu être tellement plus productif ? Bien sûr que oui, car sinon, c'est sûr, j'aurais craqué avant la fin. Merci aux bénévoles qui animent ce coin de détente.

Merci à ceux qui m'ont conduit vers la thèse. Mes professeurs de master et d'école d'ingénieur bien sûr, mais au moins autant mes professeurs de classes préparatoires et du secondaire. Merci également à mes anciens encadrants scientifiques, au Canada et en Californie.

Merci à Brassens, Chopin, Christophe Colomb, Daft Punk, Mozart, Schubert et les autres, ainsi qu'à mes voisins plus ou moins compréhensifs. Sans eux, le labo et les bêtises numériques du quotidien auraient été nettement moins drôles.

Merci à tous les survivants du RER B, compagnons quotidiens d'infortune pendant trois ans. Parmi eux, bon nombre de collègues et de camarades, avec lesquels on peut discuter, parfois des heures durant. Merci aussi aux anonymes, que l'on reconnaît jour après jour. Quand ils descendent du train, on sait que l'on est arrivé. Quand c'est l'enfer, on sait que l'on n'est pas seul.

Pour finir sur une note peu originale, mais pourtant bien sincère, merci à tous les autres, qui m'ont soutenu, avant que je ne soutienne. Il y a ma famille, mes amis, et bien sûr Soline. La science et le travail n'apportent pas ce bonheur-là.

# Chapitre 1

## Introduction

EN guise d'introduction, présentons comme c'est l'usage quelques généralités sur la gravimétrie et la technologie des atomes froids. D'abord quelques ordres de grandeur concernant le champ de pesanteur et ses variations à la section 1.1 page 13, puis des exemples d'applications classiques section 1.2 page 16, et moins classiques section 1.3 page 20. Une fois ébauché l'intérêt de développer de nouveaux capteurs, on poursuit section 1.4 page 20 par quelques mots sur les gravimètres à ondes de matière existants et futurs, qui motivent la thèse, avant de conclure cette introduction par le plan du manuscrit, page 22.

### 1.1 Ordres de grandeur en gravimétrie

La [National Aeronautics and Space Administration - Agence aérospatiale américaine \(NASA\)](#) indique une valeur du champ de pesanteur à la surface terrestre de  $9,80665 \text{ m s}^{-2}$  [[NASA, 2012](#)]. Les six chiffres significatifs affichés sont trompeurs quant à la disparité spatiale et aux variations temporelles du champ de pesanteur. Les ordres de grandeur des variations principales et de leurs causes, présentés dans cette section, sont résumés dans le tableau 1.1 page 17.

#### 1.1.1 Effets sismiques

Les effets sismiques ou micro-sismiques, d'origine naturelle aussi bien qu'humaine représentent une source majeure de bruit en gravimétrie. Un gravimètre est avant tout un accéléromètre conçu pour mesurer les signaux basse fréquence avec une très grande sensibilité. Un gravimètre mesure à ce titre aussi bien le champ de pesanteur que l'accélération du référentiel auquel il est lié. Même en l'absence de tremblement de terre notable, il subsiste un bruit de fond supérieur dans bien des cas à la résolution de l'instrument. Peterson [[Peterson, 1993](#)] présente par exemple deux modèles de spectres de bruit sismique, le *New Low Noise Model* et le *New High Noise Model*, qui sont représentés sur la figure 1.1. Le *New Low Noise Model* est la compilation par fréquence des plus bas bruits sismiques observés mondialement. Le *New High Noise Model* est calculé pour sa part comme la moyenne des bruits observés dans des stations réputées bruyantes.

Le *New Low Noise Model* est en tout cas bien inférieur au bruit causé par les accélérations parasites dans un environnement humain ou dans un véhicule. Ainsi les accélérations parasites sur un navire atteignent  $0,1 \text{ m s}^{-2}$  lorsque la mer est belle, et dépassent  $1 \text{ m s}^{-2}$

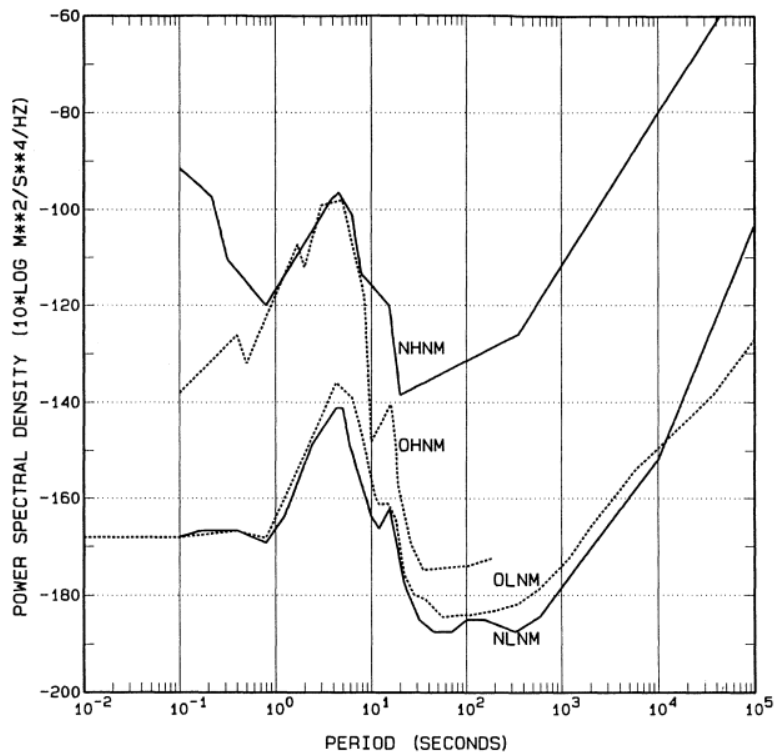


FIGURE 1.1: Densité spectrale de bruit sismique présentée dans [Peterson, 1993]. On notera la courbe du *New Low Noise Model* et celle du *New High Noise Model*, avec les légendes NLNM et NHHM respectivement. Les autres modèles de bruit représentés sont l'*Original Low Noise Model* (OLNM) et l'*Original High Noise Model* (OHNM).

lorsqu'elle est mauvaise, avec des périodes typiques comprises entre 2 s et 20 s [Balmino et al., 1982].

### 1.1.2 Variations géographiques

Les variations spatiales prépondérantes du champ de pesanteur sur Terre sont liées à la latitude et à l'altitude. L'aplatissement de la Terre aux pôles, et la distance variable à l'axe de rotation terrestre modifient en effet le champ, puisque la pesanteur est définie comme la somme de l'accélération liée à l'attraction gravitationnelle et de l'accélération centrifuge due à la rotation terrestre [Torge, 1989].

La référence [Torge, 1989] propose la formule approchée suivante pour les variations à altitude constante du champ avec la latitude, en tenant compte du bourrelet équatorial :

$$g = g_e \left( 1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2(2\varphi) \right) \quad (1.1)$$

où  $\varphi$  est la latitude,  $g_e$  le champ équatorial et  $\beta$  et  $\beta_1$  des paramètres. D'après la référence [Torge, 1989]  $g_e = 9,780327 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\beta = 5,3024 \cdot 10^{-3}$  et  $\beta_1 = 5,8 \cdot 10^{-6}$ , de sorte que le champ est globalement compris entre  $9,78 \text{ m s}^{-2}$  et  $9,83 \text{ m s}^{-2}$ .

A la surface terrestre le champ de pesanteur varie pratiquement linéairement avec l'altitude. Le champ diminue avec l'altitude, au fur et à mesure que l'on s'éloigne du noyau terrestre. Le gradient vertical  $T_{zz}$  de champ est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ , la valeur précise dépendant de la latitude du fait de l'aplatissement aux pôles [Torge, 1989]. Ce gradient

représente donc une différence de pesanteur de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  entre le fond de la fosse des Mariannes, à 10911 m sous l'eau, et le sommet du Mont Everest, à 8848 m d'altitude.

### 1.1.3 Anomalies géologiques

Les anomalies d'une grandeur sont les écarts de cette grandeur par rapport à un modèle de référence. L'anomalie de masse volumique liée à un élément topographique ou à une formation géologique est ainsi la différence entre la distribution de masse volumique avec cet élément, et sans l'élément, c'est-à-dire comme si l'élément topographique ou la formation géologique était remplacée par le milieu environnant dans le modèle considéré. Dans ce manuscrit le modèle de référence de masse volumique sera en général implicite. De la même manière l'anomalie de pesanteur est la différence entre la valeur d'un signal de pesanteur avec celui qui correspond à un modèle. Le modèle de référence sera là encore souvent implicite. On donne parfois dans ce manuscrit un sens élargi au terme *anomalie*, en tant que variations de la pesanteur par rapport à une moyenne hypothétique, donnée par exemple par un modèle global ou par un modèle local aux alentours des points de mesure.

Une seconde cause d'inhomogénéité du champ de pesanteur est la nature variable du sous-sol. Les inhomogénéités de densité influencent directement le champ de pesanteur environnant, suivant la formule de Newton. Certaines anomalies locales de densité, comme par exemple une cavité souterraine, provoquent des anomalies gravimétriques de quelques dizaines ou centaines de  $\text{nm s}^{-2}$  à la surface, tandis que les anomalies créées par les grandes formations géologiques comme les chaînes montagneuses peuvent atteindre le  $\text{mm s}^{-2}$  [Diament, 2005].

La géologie du sous-sol cause également des variations temporelles du champ de pesanteur. Ces variations peuvent par exemple être liées à des évolutions du magma dans les zones volcaniques, ou aux mouvements tectoniques importants, qui provoquent par ailleurs des séismes.

L'extension spatiale et l'amplitude sont des grandeurs importantes pour l'étude des anomalies gravimétriques d'origines géologiques. Lorsque l'on souhaite étudier les effets géologiques, il est utile de normaliser les mesures de pesanteur afin de supprimer les variations qui ne sont pas dues à la nature du sous-sol. Les procédures de normalisation utilisées couramment sont décrites en détail dans la référence [Torge, 1989]. Le calcul de *l'anomalie à l'air libre* consiste à retirer de la mesure le champ normal, c'est-à-dire issu d'un modèle géographique qui prend en compte la latitude, l'altitude et l'effet des marées gravimétriques (décrit à la section suivante). On calcule parfois aussi *l'anomalie de Bouguer*, dans laquelle la topographie est également considérée, de sorte que les anomalies de densité du sous-sol soient les sources prépondérantes de l'anomalie de Bouguer.

### 1.1.4 Marées gravimétriques

Les marées océaniques sont causées par les attractions différentielles de la Lune et du Soleil. Ces attractions différentielles se traduisent également par des variations périodiques du champ de pesanteur en un lieu, par plusieurs biais. L'effet direct de l'attraction des corps célestes est en général le plus important, suivi par les variations d'altitude du sol dues aux déformations de la croûte terrestre sous ces mêmes influences célestes. Les mouvements

marins jouent un rôle plus subtil. Les masses d'eau ont une influence gravitationnelle directe. Leur surcharge à marée haute provoque en outre l'enfoncement du plateau continental, d'où un léger changement d'altitude supplémentaire dans le gradient de champ terrestre qui affecte les appareils de mesure. D'après [Torge, 1989], les variations maximales du champ de pesanteur liées aux marées sont de  $2,8 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$ , dont 14% environ sont causées par les déformations élastiques de la croûte terrestre. Suivant les endroits, les effets de surcharge océanique peuvent atteindre  $10^{-8} \text{ m s}^{-2}$  à  $10^{-7} \text{ m s}^{-2}$ , voire jusqu'à  $2 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$  dans certaines régions côtières [Torge, 1989]. Les effets continentaux sont très bien modélisés. La part océanique des marées peut également l'être, surtout à l'intérieur des terres, mais elle nécessite de prendre en compte la réponse locale aux surcharges, qui est contrôlée par la rhéologie et la nature des milieux.

### 1.1.5 Effets hydrologiques et atmosphériques

Les variations temporelles liées aux différences de pression atmosphérique ainsi qu'aux niveaux des nappes phréatiques sont détectables par les gravimètres. Les effets sont provoqués par l'influence gravitationnelle directe des masses d'air et d'eau dans les deux cas. La surcharge atmosphérique du sol est de plus modifiée par les variations de pression, ce qui peut créer un effet supplémentaire à cause des variations d'altitude de l'instrument de mesure, comme dans le cas des marées.

Les effets hydrologiques peuvent atteindre  $10^{-6} \text{ m s}^{-2}$ , tandis que les effets atmosphériques sont au plus de l'ordre de quelques dizaines de  $\text{nm s}^{-2}$ . Les échelles de temps vont de quelques heures à des périodes annuelles [Torge, 1989]. L'influence des variations de pression est maintenant bien comprise et peut être modélisée [Zürn et Widmer, 1995]. L'hydrologie demande quant à elle une bonne connaissance de la géologie locale. L'influence de la pression atmosphérique et de la température sur l'instrument de mesure est en outre à prendre en compte dans certains cas.

### 1.1.6 Autres variations temporelles

Torge mentionne encore trois autres sources de variations temporelles du champ de pesanteur dans [Torge, 1989]. D'abord les mouvements du pôle, c'est-à-dire de l'axe de rotation terrestre, qui sont causés par des redistributions de masse internes dans la Terre ainsi que par des oscillations forcées avec des causes météorologiques. Les variations de pesanteur associées sont inférieures à  $10^{-7} \text{ m s}^{-2}$ . Elles se partagent entre des périodes annuelles pour les causes climatiques, et des périodes de 435 jours pour les causes géologiques. Le ralentissement de la rotation terrestre, lié aux frictions des masses terrestres fluides et solides lors des marées, pourrait pour sa part contribuer à des variations comprises entre  $7 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$  et  $7 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2}$  sur de longues périodes temporelles. Enfin certains physiciens ont envisagé que la constante universelle de gravitation  $G$  puisse varier avec l'âge de l'univers. Dans [Gillies, 1997] Gillies dresse un bilan des recherches dans ce domaine. Les variations temporelles relatives pourraient être de l'ordre de  $10^{-11}$  par an.

## 1.2 Rôles classiques de la gravimétrie

On peut distinguer deux types d'utilisation des mesures du champ de pesanteur, selon que la mesure est une fin en elle-même, ou qu'elle représente seulement un moyen d'accéder

<b>Variations spatiales</b>	
Cause	Amplitude (m s <sup>-2</sup> )
Latitude	$5 \cdot 10^{-2}$
Altitude	$6 \cdot 10^{-2}$
Géologie	$10^{-8}$ à $10^{-3}$
<b>Variations temporelles</b>	
Cause	Amplitude (m s <sup>-2</sup> )
Effets sismiques	grande <sup>a</sup>
Marées	$2,6 \cdot 10^{-6}$
Hydrologie	$10^{-7}$
Climat	$10^{-8}$
Mouvement du pôle	$10^{-7}$
Décélération rotatoire	$< 7 \cdot 10^{-9}$
Variation relative de $G$ (par an) <sup>b</sup>	$10^{-11}$

*a.* Un indicateur synthétique d'amplitude n'est pas pertinent ici. voir la sous-section 1.1.1 et la figure 1.1.

*b.* Valeur très hypothétique, d'après [Gillies, 1997].

TABLEAU 1.1: Causes et amplitudes des variations principales du champ de pesanteur à la surface de la Terre, dans le temps et dans l'espace.

à d'autres grandeurs [Torge, 1989].

### 1.2.1 Utilisations directes

Certaines utilisations de la gravimétrie justifient la connaissance du champ pour lui-même, avec une modélisation possible mais sans besoin fondamental de comprendre les causes des variations spatio-temporelles du champ.

#### Référenciation inertielle

D'après le principe d'équivalence, l'attraction gravitationnelle ne peut pas être distinguée de l'accélération. Ainsi une centrale inertielle, qui mesure l'accélération et la rotation d'un véhicule afin d'en déduire la position par double intégration, a besoin de connaître à l'avance le champ de pesanteur local pour corriger les mesures de ses capteurs. L'exactitude de la connaissance du champ de pesanteur doit être à la mesure des caractéristiques métrologiques de la centrale inertielle. Le modèle de champ doit couvrir l'ensemble des zones de navigation aérienne [Balmino *et al.*, 1982].

L'estimation du champ de gravité local permet en outre la détermination fiable des trajectoires principalement balistiques, comme celles des satellites ou des fusées à certaines étapes de leurs parcours [Balmino *et al.*, 1982].

Enfin comme évoqué à la section 1.1.1 page 13, un gravimètre est avant tout un accéléromètre qui privilégie la stabilité et la sensibilité à l'extension de la bande passante. Un gravimètre peut par conséquent également être utilisé pour mesurer un signal d'accélération.

Ainsi les gravimètres de laboratoire sont couramment utilisés pour enregistrer les ondes sismiques basse fréquence [Crossley *et al.*, 1999].

## Métrologie

Grâce à la relation  $P = mg$ , la mesure du poids constitue un outil essentiel de détermination de la masse  $m$ , ou au contraire d'étalon de force. Dans les deux cas l'exactitude de l'étalon dépend directement de la connaissance du champ de pesanteur local  $g$ . Cette relation entre poids et masse est par exemple centrale dans le principe de la Balance du watt [Merlet *et al.*, 2008, Merlet, 2010], qui vise à relier le kilogramme à la constante de Planck dans le but de redéfinir le kilogramme en séparant sa définition de l'étalon massif du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).

## Géodésie

La géodésie est la mesure de la forme de la Terre et de son champ de pesanteur, et depuis quelques décennies, elle inclut aussi la mesure des variations temporelles de ces grandeurs. La détermination par rapport au terrain des surfaces équipotentielles du champ de pesanteur donne un moyen physique de définir l'altitude. Une de ces surfaces équipotentielles, proche du niveau moyen des mers, est prise comme référence et appelée géoïde. L'ellipsoïde de référence mondial, figure mathématique simple aidant à la représentation cartographique, est conçu comme une approximation optimale du géoïde, par rapport auquel il s'écarte d'environ 100 m au maximum.

## Physique fondamentale

La gravitation est au cœur de la théorie de la relativité générale. Sa compréhension est essentielle à la bonne interprétation des données astronomiques. Son observation est donc plus que jamais d'actualité en physique fondamentale.

Le principe d'équivalence faible stipule que des objets dans le même champ de pesanteur tombent dans le vide de la même manière, indépendamment de leur masse et de leur nature. Plusieurs projets tâchent aujourd'hui de comparer la chute d'objets différents pour vérifier le principe d'équivalence faible avec des exactitudes jusque-là inégalées. Certaines expériences menées dans le cadre de ces projets étudient la trajectoire balistique d'objets macroscopiques [Touboul *et al.*, 2002] ou d'atomes refroidis [Varoquaux *et al.*, 2009, Rudolph *et al.*, 2011, Dimopoulos *et al.*, 2007].

Les ondes gravitationnelles sont un autre phénomène prédit par la théorie de la relativité générale, que l'on cherche aujourd'hui à mettre en évidence expérimentalement. De la même manière qu'un dipôle électrique ou magnétique oscillant crée des ondes électromagnétiques, un système de masses oscillant devrait créer une onde gravitationnelle qui se propagerait dans l'espace. On espère pouvoir détecter les ondes émises par certains systèmes astrophysiques qui combinent des masses gigantesques et des vitesses relativistes. La méthode utilisée jusqu'à présent consiste à étudier le signal d'un interféromètre de Michelson dont les bras de plusieurs kilomètres seraient déformés au passage de l'onde [Caron *et al.*, 1997b, Caron *et al.*, 1997a]. D'autres propositions ont été faites pour observer les ondes gravitationnelles à l'aide d'interféromètres à ondes de matière [Dimopoulos *et al.*, 2009], à la surface terrestre [MIG, 2012] ou bien en micro-gravité dans des véhicules spatiaux [Hogan *et al.*, 2011].

La loi de Newton mérite également d'être mise à l'épreuve. Tout d'abord par la mesure de la constante universelle de gravitation  $G$ , assez mal connue pour l'instant, et par l'étude de ses éventuelles variations [Gillies, 1997, Davis, 2010]. Très bien vérifiée dans le système solaire, la loi de Newton reste à observer à courte portée, et à vérifier à très grande distance, avec l'éventualité d'expliquer l'anomalie de répartition des vitesses angulaires dans les galaxies [Bosma, 1978].

### 1.2.2 Produits dérivés de la gravimétrie

Le champ de pesanteur est créé par les masses environnantes et par la rotation terrestre. L'analyse des anomalies de pesanteur permet ainsi l'étude des variations de la rotation terrestre et des anomalies de masse.

#### Exploration géophysique

Le champ de pesanteur est directement influencé par les masses géologiques du sous-sol. Une anomalie de pesanteur traduit donc une anomalie de densité. Cette propriété permet d'utiliser des mesures de champ pour étudier les structures géologiques [Torge, 1989, Bonvalot *et al.*, 2008].

#### Prospection pétrolière et minière

Parmi les structures du sous-sol, certaines ont un intérêt industriel car elles traduisent la possible présence de ressources fossiles, organiques ou minérales [Torge, 1989]. Les dômes de sel sont par exemple recherchés pour la prospection pétrolière, et ils causent des minima de champ mesurables [Torge, 1989]. Des mesures répétées dans le temps permettent par ailleurs d'évaluer l'évolution d'un gisement au cours de son exploitation [Sasagawa *et al.*, 2008].

#### Exploration topographique

Pour des densités de roches environnantes à peu près uniformes, typiquement de l'ordre de celle du granite, soit  $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , la pesanteur dépend principalement de la topographie et elle peut donc être utile pour la caractériser [Ramillien et Wright, 2002]. La recherche de cavité dans le sous-sol par cette méthode [Butler, 1984] est particulièrement intéressante, par exemple à des fins archéologiques ou avant la construction d'un ouvrage de génie civil.

#### Etude des mouvements géophysiques

L'observation très fine des variations temporelles de pesanteur grâce aux instruments d'observatoires fait partie des outils d'étude de la dynamique terrestre [Crossley *et al.*, 1999]. Les variations temporelles de la gravimétrie permettent ainsi d'observer certains mouvements hydrologiques, notamment à l'aide de mesures par satellite [Chen *et al.*, 2009, Yeh *et al.*, 2006].



## 1.3 Autres applications envisagées

En plus des applications évoquées plus haut, des applications moins courantes ont été envisagées au cours de la thèse.

### 1.3.1 Navigation

Voir la section 5.1 du chapitre 5, page 103.

La collision avec un élément de terrain ou avec un autre navire est un événement redouté par les sous-marinières. Il y a en effet une contradiction entre la mission du sous-marin, qui exige une discrétion totale, et sa sécurité qui ne peut être assurée que par la connaissance de l'environnement, grâce à la veille périscopique et à l'utilisation du sonar. La détection d'anomalie de pesanteur pourrait constituer un moyen complémentaire discret de prévention des collisions, notamment pour la navigation côtière [Moryl *et al.*, 1998].

En navigation inertielle par ailleurs, un véhicule mesure son accélération et sa rotation ou son taux de rotation, et en déduit par double intégration son attitude et sa position. Les erreurs étant intégrées deux fois, le système a tendance à dériver et nécessite un recalage occasionnel sur une position connue. Cela peut se faire par exemple grâce à un signal **Global Navigation Satellite System - Système satellitaire de localisation mondial (GNSS)**, ou même visuellement au passage d'un amer en aéronautique. Une alternative serait d'utiliser le signal de pesanteur combiné à une carte détaillée du champ pour recalibrer la centrale inertielle [Balmino *et al.*, 1982, Moryl *et al.*, 1998]. Cette application particulière n'a pas été étudiée en détail au cours de la thèse.

### 1.3.2 Détection de canalisation

Voir la section 5.2 du chapitre 5, page 114.

Pour la sécurité du personnel effectuant des travaux à proximité, il est nécessaire de disposer d'une bonne cartographie des canalisations souterraines. Si les conduites enfouies à l'heure actuelle peuvent être repérées convenablement, la position des anciennes conduites doit être récupérée. Une possibilité est d'effectuer des levés gravimétriques à cette fin.

### 1.3.3 Détection de tsunami

Voir la section 5.3 du chapitre 5, page 115.

Le tsunami du mois de décembre 2004 a montré l'étendue des dégâts provoqués par une vague traversant l'Océan indien jusqu'en Indonésie. On a étudié la possibilité de détecter la propagation d'une vague de tsunami grâce à un réseau de gravimètres posés au fond de la mer.

## 1.4 Atomes froids et gravimétrie

Depuis soixante ans maintenant les horloges atomiques ont révolutionné la métrologie du temps. La période de radiation de la transition entre les deux états hyperfins de l'atome de césium a remplacé le jour solaire comme étalon dans la définition du temps ; l'utilisation des horloges atomiques s'est maintenant répandue, et ce sont des composants essentiels des **GNSS**.

### 1.4.1 Gravimétrie à atomes lâchés

Initialement fondée sur des systèmes de pendules et de ressorts tout comme la mesure du temps, la métrologie de la pesanteur peut désormais elle aussi avoir recours à des dispositifs à ondes de matières (voir la section 2.3.5 page 40 du chapitre 2 pour une description pratique puis la section 7.2 page 143 du chapitre 7 pour une introduction à la théorie de ce genre d'interféromètre atomique). Les dispositifs actuels à atomes en chute libre peuvent être vus comme le prolongement des gravimètres balistiques, dans lesquels on remplace la masse d'épreuve macroscopique par un paquet d'atomes froids, et l'interférométrie optique par l'interférométrie atomique pour la mesure de la trajectoire.

### 1.4.2 Le projet de gravimètre à atomes piégés

Les instruments atomiques actuels, à atomes en chute libre, sont déjà sur le point de dépasser en performances les instruments classiques, mais leur sensibilité est proportionnelle à la hauteur de l'instrument, et les performances actuelles sont obtenues pour des chutes de l'ordre du mètre. Le projet **Chips for ATomic Sensors - Capteurs atomiques sur puce (CATS)**, lancé par THALES en partenariat avec le laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'optique, le laboratoire Kastler-Brossel de l'Ecole normale supérieure de Paris, le laboratoire Systèmes de référence temps-espace de l'Observatoire de Paris et le III-V Lab, vise à combiner la technologie des puces à atomes [Reichel et Vuletić, 2011] et celle des gravimètres atomiques pour améliorer la compacité du dispositif. L'objectif est de concevoir un modèle de gravimètre avec des qualités métrologiques aussi bonnes que possibles, et intrinsèquement moins encombrant que les gravimètres à atomes lâchés.

### 1.4.3 Atomes froids, atomes piégés

Comme on le verra notamment au chapitre 8 page 159 concernant la réalisation expérimentale d'un gravimètre à atomes piégés sur puce, une part importante du dispositif expérimental a pour but de permettre le refroidissement du nuage atomique que l'on souhaite faire interférer. Mais au fond, pourquoi des atomes *froids* ?

Après tout, le premier démonstrateur d'horloge atomique au césium date de 1955 [Essen et Parry, 1955], bien avant l'invention du refroidissement par laser en 1975 [Hänsch et Schawlow, 1975, Wineland et Dehmelt, 1975]. En revanche la première expérience de gravimétrie à atomes en chute libre utilisait déjà des atomes refroidis dans un piège magnéto-optique [Kasevich et Chu, 1991]. Une faible dispersion de vitesses dans un gaz atomique est en général souhaitable pour un interféromètre à atomes en chute libre. Elle permet d'abord que les atomes restent plus longtemps dans l'interféromètre avant qu'ils ne diffusent au point qu'une part significative des particules quitte l'interféromètre. Ensuite la longueur de cohérence  $\lambda_c$  d'un ensemble d'atomes dépend de sa dispersion en impulsion [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 17], donc le contraste des franges d'interférences est meilleur lorsque la dispersion de vitesses est faible. Pour affiner la distribution de vitesses dans un nuage on peut sélectionner une classe d'atomes de vitesse donnée, comme par exemple dans un interféromètre type *trous de Young* [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 17]. A l'équilibre thermique dans un gaz parfait, l'écart

type  $\sigma_v$  des vitesses suivant chaque dimension est relié à la température  $\Theta$  par la formule

$$\frac{1}{2}m\sigma_v^2 = \frac{1}{2}k_B\Theta$$

$m$  étant la masse atomique des particules du gaz. Le refroidissement du gaz permet ainsi d'affiner la distribution en impulsion sans rejeter d'atome par sélection. L'influence de la température sur la cohérence dans un gravimètre à atomes piégés sera discuté plus en détail à la section 6.4 page 128 du chapitre 6, ainsi qu'à la section 7.4 page 150 du chapitre 7. La dispersion en vitesse et la longueur de cohérence en fonction de la température des atomes sont illustrées figure 1.2.

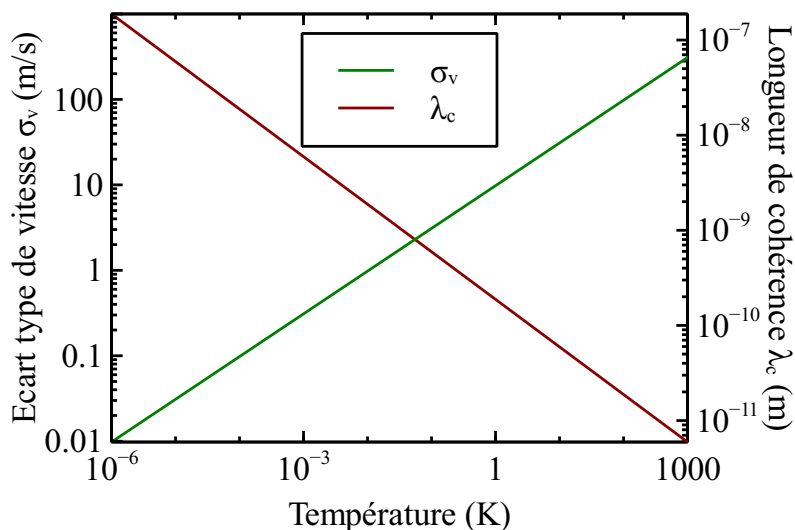


FIGURE 1.2: Ecart type en vitesse  $\sigma_v$  et longueur de cohérence  $\lambda_c$  pour un gaz parfait de rubidium 87 à l'équilibre thermique. Le calcul représenté suppose que le nuage d'atomes ne forme pas un condensat de Bose-Einstein. La longueur de cohérence correspond ici à la longueur d'onde thermique de de Broglie du gaz  $\frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B\Theta}}$  [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 17].

Pour un interféromètre à atomes *piégés*, le refroidissement préalable des atomes est intéressant pour une raison supplémentaire. Un piège magnétique comme celui qui contiendra les atomes pendant l'étape d'interférométrie de notre démonstrateur a en effet une profondeur limitée, et il est approximativement harmonique seulement pour les basses énergies, à proximité du centre. Un piège magnétique sur puce typique a ainsi une profondeur de  $k_B\Theta_{\text{piège}}$  avec  $\Theta_{\text{piège}} \sim 1$  mK [Treutlein, 2008]. Pour qu'une part significative du nuage atomique utilisé pour charger le piège soit capturée, il faut donc que la température de ce nuage soit inférieure à  $\Theta_{\text{piège}}$  [Lewandowski *et al.*, 2003].

## 1.5 Plan de la thèse

La thèse s'est déroulée en deux temps. Dans un premier temps on a principalement étudié le signal de pesanteur, et on a tâché d'en tirer des conclusions au sujet des possibilités industrielles évoquées plus haut. La participation à l'étude et à la réalisation pratique

d'un gravimètre à atomes froids confinés au voisinage d'une puce en carbure de silicium a constitué la deuxième partie du travail de thèse. Le plan du manuscrit suit l'ordre chronologique de ce travail.

Dans la partie **I** page 27 du manuscrit, on décrit ainsi au chapitre 2 page 27 l'état de l'art en matière d'instrumentation de mesure de la pesanteur ; on présente alors au chapitre 3 page 43 un essai théorique de dimensionnement de gravimètre à mini levier en matériau monocristallin ; au chapitre 4 page 61 on expose l'analyse des bruits classiques et moins classiques pour les applications envisagées, ainsi que les essais de mesure de champ faits sur le site de **Thales Research and Technology - Thales Recherche et Technologie (TRT)** à Palaiseau. Enfin au chapitre 5 page 103 on montre le travail effectué sur les signaux pour les applications envisagées.

La partie **II** (page 121) est consacrée au développement du gravimètre à atomes froids sur puce. L'objectif du projet, son principe général et les choix principaux pour le démonstrateur sont expliqués au chapitre 6 page 121. Un modèle théorique, qui comprend notamment une comparaison entre le projet de gravimètre à atomes piégés sur puce et les gravimètres à atomes en chute libre, ainsi qu'une étude théorique sur l'effet de plusieurs imperfections possibles du dispositif sur la qualité de la mesure sont présentés au chapitre 7 page 139. On présente au chapitre 8 page 159 le montage de l'expérience effectué pendant la thèse. Le chapitre 9 page 191 reprend enfin les résultats principaux sur l'utilisation innovante du carbure de silicium pour les expériences avec puce à atomes.

En annexe, avant les références bibliographiques page 245, on trouve le résumé des notations à l'annexe **A** page 207. A l'annexe **B** page 211 on explicite les notions et les termes de métrologie employés dans ce manuscrit. L'annexe **C** page 219 regroupe quelques notions élémentaires de gravimétrie ainsi que les calculs qui n'ont pas leur place dans le corps du texte mais qui sont explicités par souci des détails dans lesquels le diable se cache si souvent.

L'index des acronymes se trouve page 227.

En vous souhaitant une bonne lecture, je vous laisse avec un sujet grave mais qu'on espère non pesant !



## **Première partie**

### **Objectifs en gravimétrie embarquée**



# Chapitre 2

## Instrumentes pour la gravimétrie embarquée

L'objet de ce chapitre est d'envisager les solutions actuelles à la mesure embarquée du champ de pesanteur. On présente d'abord à la section 2.1 page 27 les types de signaux rencontrés en gravimétrie, et les instruments associés. On décrit ensuite à la section 2.2 page 32 les contraintes que l'embarquement fait peser sur les appareils de mesure, et on analyse les caractéristiques d'une sélection d'instruments à la section 2.3 page 34. On conclut page 41 sur l'intérêt de développer un nouveau type de capteur à ondes de matière. Ce chapitre est principalement fondé sur une étude bibliographique, effectuée par l'auteur.

### 2.1 Mesures et instruments en gravimétrie

La gravimétrie consiste à mesurer le champ de pesanteur, souvent pour en déduire des informations sur la répartition des masses environnantes. On peut ranger les mesures et les instruments dans plusieurs catégories, suivant le type de mesure effectuée, le principe physique de mesure, et l'environnement d'utilisation.

#### 2.1.1 Types de mesures

Le signal mesuré le plus souvent lors d'une étude gravimétrique est la projection du champ de pesanteur sur un axe sensible. On choisit en général la verticale comme axe sensible, ce qui donne accès au module du champ de pesanteur. D'autres types de mesures sont cependant parfois envisagés.

##### Mesure multi-axes du champ

D'autres axes que la verticale peuvent être intéressants. On peut également choisir de mesurer deux ou trois axes en même temps, afin d'exploiter l'intégralité de l'information fournie par le champ, et non juste son module. Cette approche permet d'obtenir une information directionnelle avec une portée de détection des sources meilleure asymptotiquement que pour la gradiométrie, qui est l'autre méthode pour obtenir une information de ce type. En micro-gravité la verticale n'est plus bien définie, si bien qu'une information sur la direction de mesure ou bien la mesure de plusieurs axes devient de toute façon nécessaire



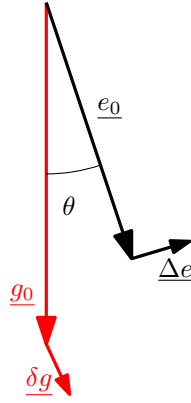


FIGURE 2.1: Champ de pesanteur et axe de mesure.

pour exploiter le signal. Dans le champ de pesanteur terrestre, la mesure non verticale du champ est cependant soumise à deux difficultés en particulier.

D'abord une référence d'attitude non liée au champ de pesanteur devient nécessaire, comme en micro-gravité. Cette référence peut être déterminée de façon interne grâce à un système de gyromètres, ou bien à l'aide d'un système de positionnement externe, par exemple un pointeur d'étoiles comme pour le satellite [Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer - Explorateur du champ de pesanteur et des courants océaniques permanents \(GOCE\)](#) [Visser, 2009].

Une fois le plan horizontal défini, il reste un problème d'erreur de mesure. Soit  $\underline{g}_0$  le champ de référence à l'endroit de la mesure,  $\underline{\delta g}$  l'anomalie que l'on cherche à détecter, de sorte que  $\underline{g} = \underline{g}_0 + \underline{\delta g}$  est le champ total. En champ terrestre  $\|\underline{\delta g}\| \ll \|\underline{g}_0\|$ . Soit  $\underline{e}_0$  l'axe de mesure estimé du gravimètre. Celui-ci est connu à une petite rotation près. L'axe réel de mesure s'écrit donc  $\underline{e}_0 + \underline{\Delta e}$  avec  $\|\underline{\Delta e}\| \ll \|\underline{e}_0\|$ , et  $\underline{\Delta e}$  perpendiculaire à  $\underline{e}_0$ , comme dessiné sur la figure 2.1 On mesure en fait

$$g_{mes} = (\underline{e}_0 + \underline{\Delta e}) \cdot (\underline{g}_0 + \underline{\delta g})$$

soit au premier ordre en  $\frac{\|\underline{\Delta e}\|}{\|\underline{e}_0\|}$  et  $\frac{\|\underline{\delta g}\|}{\|\underline{g}_0\|}$

$$g_{mes} = \underline{e}_0 \cdot \underline{g}_0 + \underline{e}_0 \cdot \underline{\delta g} + \underline{\Delta e} \cdot \underline{g}_0 \quad (2.1)$$

Dans l'équation 2.1, le terme  $\underline{e}_0 \cdot \underline{g}_0$  est un signal supposé connu, à soustraire.  $\underline{e}_0 \cdot \underline{\delta g}$  est la projection de l'anomalie de champ, qui est la valeur cherchée. Le terme  $\underline{\Delta e} \cdot \underline{g}_0$  est la projection du champ de référence sur l'erreur d'axe de mesure. Soit  $\theta$  l'angle formé par le champ  $\underline{g}_0$  et par l'axe  $\underline{e}_0$ , on a

$$\underline{g}_0 \cdot \underline{\Delta e} = -\|\underline{g}_0\| \|\underline{\Delta e}\| \sin(\theta) \quad (2.2)$$

L'erreur de projection  $\underline{g}_0 \cdot \underline{\Delta e}$  peut être ainsi rendue faible lorsque  $\theta$  est petit. Dans le cas contraire il faut une précision extrême sur l'attitude de l'axe de mesure pour que le signal utile  $\underline{e}_0 \cdot \underline{\delta g}$  ne soit pas dominé par l'erreur de projection.

Par exemple supposons que l'axe de mesure  $\theta$  fasse une dizaine de secondes d'arc avec la verticale, comme c'est le cas lors de l'utilisation d'un gravimètre de terrain. Dans ce cas une erreur d'attitude d'une seconde d'arc provoque une erreur de projection de  $|\underline{g}_0 \cdot \underline{\Delta e}| \approx 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2}$ . La même erreur d'attitude provoque dans le cas d'une mesure

à l'horizontale ( $\theta = 90^\circ$ ) une erreur de projection qui vaut  $5 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$  ! L'effet de l'erreur d'angle de mesure sur l'incertitude est étudiée plus en détail section 4.1.1 page 65.

Un gravimètre à trois axes monté sur une plate-forme mobile a notamment été développé à l'École Supérieure des Géomètres et Topographes (ESGT) et à l'Observatoire de Paris. Son fonctionnement est fondé sur la fusion de données **Global Positioning System - Système de positionnement global (GPS)** et de données issues de capteurs inertiels à bord du véhicule. Cet instrument est décrit et modélisé en détail dans la thèse de Bertrand de Saint-Jean [de Saint-Jean, 2008].

### Gradient de champ

Une difficulté de la mesure embarquée est que le signal de pesanteur cherché ne soit pas dominé par l'accélération du porteur. Une solution possible est de faire une mesure différentielle du signal, pour rejeter en mode commun les accélérations. Un deuxième intérêt est d'obtenir une information directionnelle qui peut faciliter la localisation des sources. En pratique la mesure est faite avec deux ou plusieurs gravimètres rigidement liés. Cette technique et les traitements associés sont utilisés notamment pour la prospection aéroportée et dans le satellite de la mission **GOCE**. Ils sont par exemple décrits en détail dans la thèse de Gwendoline Pajot [Pajot, 2007]. Le gradient de champ est un tenseur  $3 \times 3$   $\underline{\underline{T}}$  qui s'écrit

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

avec  $U$  le potentiel de pesanteur. En général  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$  et  $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ , donc  $\underline{\underline{T}}$  est symétrique. Le potentiel de pesanteur est de plus gouverné par l'équation de Poisson  $\Delta U = -4\pi G\rho$  avec  $G$  la constante de Newton et  $\rho$  la densité locale de masse, soit  $\text{Tr} \underline{\underline{T}} = -4\pi G\rho$ . En général le gradiomètre est opéré en dehors des sources, c'est-à-dire que  $\rho = 0$ , donc le tenseur gradient mesuré est de trace nulle. La mesure du tenseur  $\underline{\underline{T}}$  n'est pas perturbée par les accélérations rectilignes, dans la limite de la réjection de mode commun. La rotation du capteur affecte en revanche le tenseur déterminé. La composante du tenseur mesuré qui correspond à la rotation n'est pas symétrique cependant. La mesure simultanée des neuf composantes du gradient et la projection sur l'espace des matrices symétriques permet ainsi au moins de rejeter cette perturbation vers le deuxième ordre, comme cela est démontré à la section 4.1.2 page 71.

L'information donnée par la mesure de  $\underline{\underline{T}}$  est par ailleurs de nature un peu différente de celle donnée par le champ de pesanteur. Le gradient de champ varie en effet en raison inverse du cube de la distance aux sources. Par conséquent un gradiomètre est particulièrement sensible à l'effet des sources les plus proches, ce qui réduit sa portée mais améliore la discrimination spatiale des sources, par comparaison à un gravimètre. Dit autrement, la mesure du gradient favorise les courtes longueurs d'onde du champ des sources.

### 2.1.2 Types d'instruments

On distingue deux grandes familles d'instruments qui permettent la mesure du champ de pesanteur, et plusieurs modes d'utilisation.

### Gravimètres balistiques

La loi newtonienne de chute des corps dans le vide permet le calcul direct du champ de pesanteur. Ce principe est utilisé dans les gravimètres *balistiques* comme le FG5 de Scintrex. Une masse d'épreuve est lâchée dans le vide à chaque mesure, et sa trajectoire est déterminée par interférométrie optique. Ces instruments sont souvent qualifiés d'absolus. En effet il est relativement simple, en principe, de relier la mesure de la chute à des étalons primaires ou secondaires de temps et d'espace. Par exemple le FG5 contient une référence atomique de fréquence au rubidium, et un laser dont la longueur d'onde est asservie, typiquement un laser à iode, lui-même asservi sur une raie d'absorption de l'iode [Niebauer *et al.*, 1995]. En tout cas la stabilité d'un gravimètre balistique n'est pas limitée par le cœur du capteur, qui est le système de chute. Ces instruments sont cependant assez encombrants, et demandent un entretien important du fait de la chute de pièces mécaniques lors des mesures. Leur bande passante est de plus limitée par la fréquence de répétition des chutes [Merlet *et al.*, 2010].

Un satellite dont on mesure la trajectoire constitue également un gravimètre balistique. Les gravimètres atomiques développés par exemple à l'Observatoire de Paris [Bodart *et al.*, 2010] et à Stanford [McGuirk *et al.*, 2002] peuvent aussi être vus comme des gravimètres balistiques, dans lesquels les masses d'épreuve sont des atomes froids et leur trajectoire est mesurée par interférométrie atomique plutôt qu'optique.

### Gravimètres à force de rappel

Une autre manière de mesurer le champ de pesanteur est de comparer le poids d'une masse d'épreuve connue à une force calibrée par ailleurs. Cette comparaison s'effectue en plaçant la masse d'épreuve en équilibre entre les deux forces. Une version élémentaire de système utilisant ce principe consiste à suspendre une masse d'épreuve au bout d'un ressort de constante de raideur connue, puis à mesurer l'allongement du ressort à l'équilibre. Le gravimètre CG-5 de Scintrex fonctionne sur ce principe, comme son prédécesseur le CG-3, avec un ressort en quartz et un asservissement en position de la masse d'épreuve grâce à un capteur capacitif [Torge, 1989]. L'utilisation d'une force de rappel pour mesurer le champ de pesanteur est aussi déclinée sous des formes plus élaborées. Les gravimètres de la mission **GOCE** utilisent des masses d'épreuve en platine, asservies par des forces électrostatiques, et une boule supraconductrice en lévitation magnétique constitue la masse d'épreuve du gravimètre iGrav de GWR Instruments Ltd.

Les instruments sont dits relatifs car leur justesse est liée à la comparaison à des mesures absolues du champ de pesanteur et à l'étalonnage de la force de rappel, sans quoi les instruments à force de rappel permettent uniquement d'effectuer des comparaisons entre mesures successives, sans rattachement aux étalons métrologiques. La maîtrise des conditions qui créent la force de rappel constitue une des difficultés de conception des appareils, puisqu'elle assure leur stabilité à long terme. Ainsi les réarrangements moléculaires dans le ressort en quartz d'un CG-5 conduisent à une dérive de l'ordre de quelques  $\mu\text{m s}^{-2}$  par jour [Merlet *et al.*, 2008]. Les basses températures de fonctionnement et la supraconductivité permettent d'obtenir des dérives aussi faibles que quelques dizaines de  $\text{nm s}^{-2}$  par an pour un gravimètre à supraconducteur [Diament, 2005]. Lorsque la valeur absolue du champ est importante pour l'application, le biais d'un gravimètre relatif est déterminé soit par des mesures conjointes directes avec un instrument absolu, soit par comparaison aux valeurs connues de stations gravimétriques de référence si le gravimètre

peut y être transporté. La dérive est compensée lors d'une campagne de mesure par une combinaison de compensations occasionnelles de biais et de mesures récurrentes aux mêmes points sur le site même de la campagne de mesure [Torge, 1989, Dorizon, 2010].

Les instruments évoqués ici, balistiques ou à force de rappel, sont décrits plus en détail section 2.3, page 34.

### Utilisations

On a vu que les gravimètres peuvent être classés suivant le principe physique utilisé pour la mesure. On distingue également des utilisations différentes, qui conditionnent notamment la nécessité d'embarquer l'instrument [Torge, 1989].

**Mesures de séries temporelles à long terme.** Les gravimètres peuvent servir à étudier les effets des marées gravimétriques (voir la section 1.1.4 de l'introduction, page 15), des déformations dynamiques de la croûte terrestre, ainsi que les effets atmosphériques ou hydrologiques. En tant qu'accéléromètres, les gravimètres peuvent aussi détecter les ondes sismiques basses fréquences [Crossley *et al.*, 1999]. Pour ce type d'utilisation qui consiste à mesurer des séries temporelles, le déplacement de l'appareil n'est pas nécessaire et ce dernier peut fonctionner dans des conditions contrôlées d'observatoire.

**Mesures d'étalonnage et de comparaison.** Pour évaluer la justesse d'un gravimètre ou compenser son biais, celui-ci doit être comparé à un autre instrument. Ces comparaisons permettent en outre la confrontation de différentes technologies de gravimètres pour le choix des instruments et le développement de nouvelles technologies d'instrumentation [Jiang *et al.*, 2011]. Les étalonnages et comparaisons d'instruments nécessitent de les déplacer. Les conditions de mesure peuvent cependant encore être très bien contrôlées.

**Mesures de terrain.** Un maillage fin et des mesures de bonne qualité peuvent être utiles pour une étude géophysique, par exemple afin de suivre les mouvements de masse dans un volcan comme cela est décrit dans la référence [Bonvalot *et al.*, 2008], pour la détection de cavités souterraines, comme dans les références [Butler, 1984, Romaides *et al.*, 2001, Mochales *et al.*, 2008], ou encore pour étudier la nature d'une zone géologique. Dans ce cas un instrument est déplacé de site en site, à pied ou dans un véhicule. Il subit les contraintes du transport entre les mesures, mais pas au cours de celles-ci. L'instrument fonctionne sur batterie (la sienne ou celle d'un véhicule). Il opère dans un environnement moins contrôlé que celui du laboratoire. L'opérateur doit en outre pouvoir manipuler l'instrument de façon simple et pratique pour son installation et pour la mesure.

**Mesures embarquées.** Lorsque l'on souhaite effectuer un levé gravimétrique sur une grande étendue, ou bien dans un environnement difficile d'accès au sol, un instrument est embarqué dans un véhicule terrestre, marin ou aérien et il effectue des mesures au cours du déplacement du véhicule. Ce type de mesure est particulièrement adapté à la prospection, puisqu'il permet de couvrir rapidement de larges zones pour espérer détecter des structures géologiques indiquant la possible présence de ressources fossiles. Cette méthode de prospection est réputée moins discriminante que les méthodes sismiques, mais

a l'avantage d'être nettement moins compliquée à mettre en œuvre, et elle fournit des informations complémentaires [Torge, 1989].

**Mesures sous-marines.** La gravimétrie sous-marine est intéressante en géophysique pour avoir des mesures au plus près des sources, ce qui permet d'accroître la résolution de détection. Nous proposons également d'autres utilisations de ce type de mesures, décrites à la section 5.1 page 103. Les mesures sous-marines sont évidemment embarquées. L'embarquement peut se faire dans un navire sous-marin avec des mesures au cours du déplacement, à bord d'une plate-forme autonome comme dans [Zumberge *et al.*, 2008], auquel cas les mesures peuvent être effectuées après stabilisation de l'engin sur le sol marin ou encore dans une station sous-marine fixe. Dans les trois cas les contraintes d'embarquement sont encore accentuées par rapport au cas de véhicules de surface.

**Mesures spatiales.** Les mesures du champ de pesanteur grâce à des satellites permettent des levés à l'échelle planétaire. Les missions récentes ne se contentent pas d'utiliser la mesure de trajectoire des satellites. Elles embarquent de plus des accéléromètres de résolution extrême, prévus pour fonctionner en micro-gravité, et qui permettent de rejeter les accélérations non liées au champ de pesanteur comme la traînée atmosphérique et la pression de radiation sur le satellite. Les accéléromètres de **GOCE** mesurent en outre le gradient de champ de pesanteur dans le satellite. La gravimétrie spatiale impose des contraintes d'embarquement particulièrement exarcerbées pour les accéléromètres, tout en donnant accès à des conditions de mesure favorables, avec un champ moyen et des vibrations très faibles [Touboul, 2001, Christophe *et al.*, 2010].

## 2.2 Contraintes opérationnelles

Dans un laboratoire, l'opérateur dispose de moyens importants pour effectuer sa tâche de mesure. La mesure ne peut cependant concerner qu'un échantillon spatialement réduit, ou bien seulement les variations temporelles à la position de l'instrument. Dans le cadre de mesures géophysiques où au contraire l'échantillon à sonder est le globe terrestre entier, les mesures prennent tout leur sens lorsque l'instrument peut être déplacé, afin d'enregistrer les variations spatiales aussi bien que temporelles du signal pour en déduire les informations recherchées. Aux contraintes métrologiques du laboratoire s'ajoutent alors les ressources limitées et les contraintes particulières du véhicule destiné à transporter l'instrument. Un capteur utilisé à bord d'un véhicule devra ainsi avoir les qualités suivantes.

### 2.2.1 Justesse, fidélité et stabilité

Pour qu'une information pertinente puisse être extraite des mesures, les contraintes de justesse et de fidélité sont celles de la métrologie, suivant les applications envisagées. La stabilité peut être plus cruciale cependant, avec des échelles de temps différentes. Par exemple la durée d'un levé gravimétrique marin peut aller de plusieurs jours à plusieurs semaines, pendant lesquels le gravimètre du bord ne peut pas être étalonné. Dans le cas d'une mission spatiale comme **GOCE** la stabilité des instruments doit être suffisante pour qu'aucun étalonnage ne soit nécessaire pendant la durée de vie du véhicule.

## 2.2.2 Dynamique de mesure

Les échelles de mesure à effectuer peuvent être très étendues, du fait de variations spatiales importantes du signal. Si l'on souhaite que l'instrument puisse donner une information utile dans des conditions diverses, la dynamique est donc un facteur important.

Cet aspect est particulièrement important en gravimétrie. D'abord, parce que les instruments ont en général une gamme d'utilisation donnée. Ainsi un gravimètre embarqué dans un satellite peut avoir une résolution extrême en micro-gravité, alors qu'au sol ses performances seront fortement dégradées, à moins que l'instrument ne se mette même en butée. Ensuite le signal de pesanteur se confond avec l'accélération du véhicule porteur. Dans certains cas, un filtrage fréquentiel mécanique par amortissement est possible. Autrement le signal mesuré inclut à la fois le champ de pesanteur et l'accélération. L'accélération est alors soustraite par traitement *a posteriori*, par filtrage fréquentiel ou en combinant une mesure de positionnement aux données inertielles. La mesure conjointe de la pesanteur et de l'accélération requiert une dynamique importante, car dans un véhicule en mouvement les accélérations peuvent être bien plus grandes que les variations de pesanteur à détecter. D'après [Forsberg et Olesen, 2010] et [Jekeli, 2011], la moyenne quadratique des accélérations sur un avion en vol calme est de l'ordre de  $10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  à  $10^{-1} \text{ m s}^{-2}$ , alors que le signal recherché est rarement supérieur à  $10^{-5} \text{ m s}^{-2}$ , et que la résolution recherchée peut atteindre  $10^{-8} \text{ m s}^{-2}$ .

## 2.2.3 Faibles encombrement et consommation

Suivant le type de véhicule porteur, la place et la puissance électrique disponibles peuvent être extrêmement restreintes. Si de plus on cherche à mettre en place un réseau de capteurs, pour faire par exemple des mesures différentielles et améliorer la résolution spatiale, les limites d'encombrement et de consommation doivent être divisées par le nombre d'instruments, à moins de mettre en commun certains composants des instruments. Pour un réseau de gravimètres à atomes froids par exemple, il conviendrait ainsi dans la mesure du possible de mutualiser l'alimentation, les sources laser et les moyens informatiques de contrôle et de traitement. La mise en commun de matériel permet en outre, pour une mesure différentielle, de rejeter en mode commun certains des bruits liés à ce matériel.

## 2.2.4 Résistance à l'environnement du véhicule

L'environnement est en général bien moins favorable à un instrument dans un véhicule que dans un laboratoire, à la fois pendant la mesure et pendant les phases de transport, si elles sont différentes. Il faut en tenir compte dans la conception de l'instrument, pour atteindre les objectifs suivants :

### Sauvegarde de l'instrument

Il s'agit de garantir le fonctionnement correct de l'instrument sur toute sa durée de vie. Ainsi suivant les véhicules l'instrument doit résister aux chocs ou à de fortes accélérations et vibrations, à l'humidité, ou encore aux écarts de température extérieure.

### Stabilité de la mesure

L'environnement d'un véhicule peut être beaucoup plus fluctuant que celui d'un laboratoire. Ces fluctuations ne doivent pas influencer la stabilité à long terme de la



mesure. C'est un problème par exemple pour les gravimètres à ressort dont la dérive peut perdre en linéarité et en prédictibilité lorsque l'instrument est transporté.

### Qualité de la mesure

La sensibilité d'un instrument aux paramètres externes tels que les conditions atmosphériques peut devenir gênante lorsque l'instrument est sorti des conditions bien contrôlées du laboratoire. Comme cela sera détaillé au chapitre 4, section 4.1 page 61, pour mesurer des variations de pesanteur ce sont avant tout les paramètres inertiels (position, attitude, vitesse, rotation, accélération et accélération angulaire) qui doivent être maîtrisés. Suivant le type de gravimètre, la température et les autres variables environnementales doivent également être prises en compte.

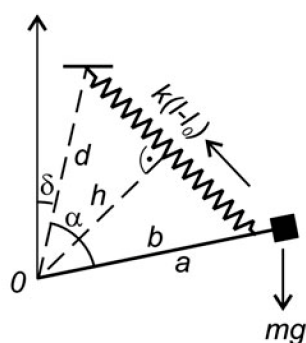
## 2.3 Etude d'instruments

On se propose dans cette section d'étudier quelques instruments de gravimétrie, avec la perspective d'évaluer leurs adéquations aux types de mesures et aux applications envisagées par la suite. On présente à la fin de cette section dans le tableau 2.1 page 42 la synthèse des performances caractéristiques de ces instruments. L'estimation des performances d'un instrument est toujours délicate, car les bruits environnementaux et les bruits propres ne peuvent jamais être véritablement distingués. Lorsque l'on cherche à comparer des instruments, cette distinction n'est même pas forcément pertinente puisque la réjection du bruit d'environnement est une caractéristique recherchée d'un bon instrument. Dans le cas d'un gravimètre on veut en général rejeter le signal d'accélération, même si d'après le principe d'équivalence accélération et pesanteur sont localement de même nature, et même si en pratique accélération et pesanteur diffèrent par leurs domaines fréquentiels et leurs variations spatiales. Pour la comparaison effectuée ici, on a tâché de considérer l'utilisation des gravimètres dans les meilleures conditions possibles. Ces dernières ne sont toutefois pas exemptes de bruit, notamment de bruit sismique.

### 2.3.1 Scintrex CG-5

Le CG-5 est un gravimètre relatif commercialisé par l'entreprise Scintrex Ltd. L'instrument, de la taille d'une grosse boîte à chaussures ( $30 \times 22 \times 21 \text{ cm}^3$ ), est fait pour être transporté et pour effectuer des mesures de terrain [Diament, 2005]. La conception du CG-5 est très proche de son prédécesseur le CG-3, avec un ressort en quartz qui soutient un levier au bout duquel est suspendue une masse d'épreuve (voir la figure 2.2a). La position du levier est asservie grâce à un capteur capacitif et une force électrostatique [Timmen, 2010].

D'après les essais conduits au Laboratoire National de Métrologie et d'Essai (LNE) pendant la thèse de Sébastien Merlet [Merlet *et al.*, 2008], le plancher de fidélité du CG-5 est en-dessous de  $10^{-9} \text{ m s}^{-2}$ , et ce plancher est atteint au bout de 85 s d'intégration environ, dans les conditions de mesure excellentes du LNE. Toujours d'après ces essais, le biais de l'instrument est insensible à des inclinaisons inférieures à  $20''$ , conformément aux données du constructeur. Le CG-5 effectue jusqu'à six mesures par secondes, avec un écart-type de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$  dans la série de mesures individuelles. Le constructeur promet une dérive inférieure à  $2 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$  par jour. Les essais de Sébastien Merlet avec deux gravimètres CG-5 montrent des dérives qui dépendent fortement de l'âge des gravimètres,



(a) Levier suspendu (schéma Timmen [Timmen, 2010])



(b) Scintrex CG-5 (image Scintrex Ltd [Scintrex, 2012])

FIGURE 2.2: Principe et photographie du CG-5.

et qui se stabilisent plutôt vers des valeurs proches de  $2 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$  et  $6 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$  par jour respectivement. Comme le bon vin, la stabilité des gravimètres s'améliore avec l'âge [Diamant, 2009]. Une caractérisation assez complète de ces deux instruments est présentée par Sébastien Merlet dans sa thèse [Merlet, 2010].

### 2.3.2 FG5

Le FG5 a été conçu par Micro-g Lacoste, maintenant filiale de Scintrex Ltd. Il s'agit



(a) Photographie de FG5 (image Scintrex Ltd)

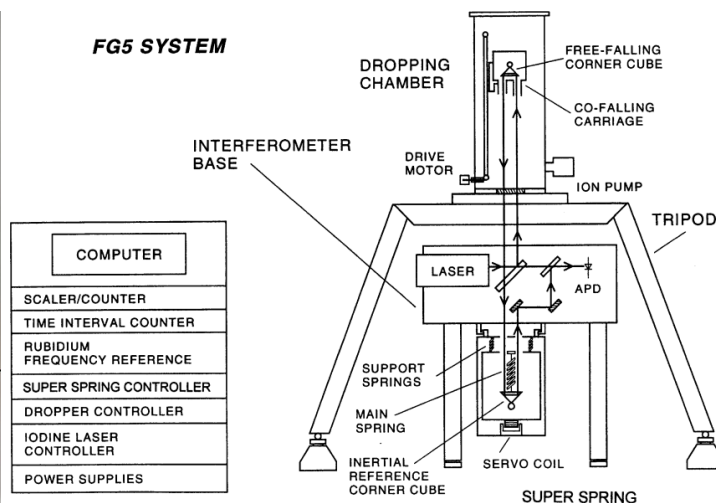
(b) schéma de principe du FG5 (image Niebauer [Niebauer *et al.*, 1995])

FIGURE 2.3: Micro-g Lacoste / Scintrex FG5.

d'un gravimètre balistique, dont le principe repose sur l'observation de la trajectoire de chute d'une masse d'épreuve en forme de coin de cube, par interférométrie de type Mach-Zender [Niebauer *et al.*, 1995]. Une photographie et un schéma de principe de l'instrument sont placés figure 2.3. Une caractéristique particulière mise en avant par le constructeur est le *Super Spring*, un dispositif actif d'amortissement, qui permet d'obtenir des fréquences de coupure très basses. Ce gravimètre est un instrument de laboratoire transportable. Il



peut donc servir par exemple à l'enregistrement de séries temporelles ou bien de référence gravimétrique. Micro-g Lacoste indique que la gamme d'utilisation du FG5 lui permet d'effectuer des mesures partout dans le monde.

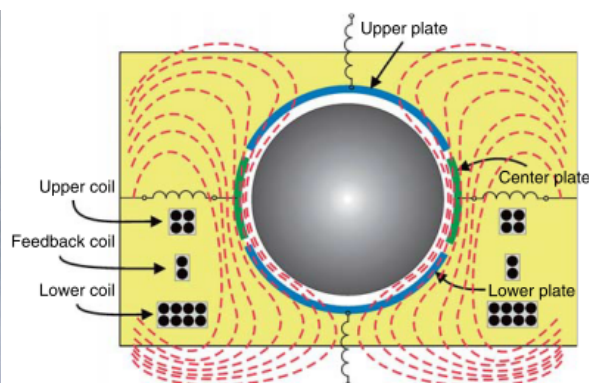
Les concepteurs de l'instrument donnent un bilan d'incertitude de  $1,1 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$  [Niebauer *et al.*, 1995]. Le biais de chaque instrument peut en pratique être évalué grâce à la dispersion des mesures d'un instrument à l'autre. Lors de la **International Comparison of Absolute Gravimeters - Comparaison internationale de gravimètres absolus (ICAG)** de 2005 [Jiang *et al.*, 2011], à l'exception près du FG5#209, la mesure moyenne de chacun des 11 autres FG5 était comprise entre  $4,5 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$  en-dessous et au-dessus de la valeur finalement retenue par le Comité International des Poids et Mesures.

Le FG5 effectue typiquement une mesure toutes les dix secondes. Les courbes de variance d'Allan [Merlet *et al.*, 2010, Louchet-Chauvet *et al.*, 2011b] montrent que le bruit de mesure reste décorrélé pour des périodes allant au moins de 10 s à 10000 s. Louchet-Chauvet [Louchet-Chauvet *et al.*, 2011b] estime un écart-type ramené à 1 s de mesure à  $7,0 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$ .

### 2.3.3 Gravimètre à supraconduction



(a) Photographie du gravimètre iGrav de GWR.



(b) Schéma de principe du capteur.

FIGURE 2.4: Gravimètre à supraconduction (images GWR).

Le principe du gravimètre à supraconduction a été inventé à la fin des années 1960 à l'Université californienne de San Diego [Hinderer *et al.*, 2007, Prothero et Goodkind, 1968]. Depuis les années 1990 la société GWR Instruments commercialise des gravimètres à supraconduction [GWR Instruments Inc., 2012]. Leur modèle le plus répandu est le **Observatory Superconducting Gravimeter - Gravimètre à supraconduction de laboratoire (OSG)**. L'iGrav, une version plus simple d'utilisation, plus compacte et plus facile à transporter mais suivant le même principe est maintenant également disponible. Enfin GWR Instruments a aussi développé dans les années 1990 des modèles à plusieurs sphères supraconductrices. Créés au départ pour retirer certaines aberrations des mesures, ces instruments permettent également la mesure de signaux différentiels [Goodkind, 1999].

Un gravimètre à supraconduction est un gravimètre relatif, dans lequel la force de rappel est une force de Laplace créée par l'induction de courant dans une sphère supraconductrice. De façon plus précise, dans le cas de l'OSG la masse d'épreuve est une sphère en niobium

de 2,54 cm de diamètre, d'une masse de 5 g. Deux bobines également en niobium et à l'état supraconducteur, parcourues par des courants permanents, créent le champ magnétique qui met la masse d'épreuve en lévitation. Une mesure de capacimétrie entre des armatures sphériques qui entourent la sphère donne le déplacement de cette masse d'épreuve. La position de la sphère en lévitation est asservie grâce au signal de déplacement. Le signal d'erreur constitue la mesure. L'ensemble de la tête de senseur est placé à une température de 4 K par refroidissement à l'hélium liquide, ce qui assure l'état supraconducteur des parties en niobium, dont la température critique est de 9,2 K. Un soin particulier est en outre accordé au blindage magnétique, afin d'éviter toute perturbation de la lévitation par des champs extérieurs.

Le signal de l'**OSG** est filtré, avec une fréquence de coupure de 61,5 mHz et un amortissement de  $-160$  décibels par décade. L'échantillonnage a toutefois lieu à 1 Hz pour éviter tout crénelage [Neumeyer, 2010]. La résolution annoncée est de  $10^{-11}$   $\text{m s}^{-2}$ , avec une étendue de mesure de  $1,5 \cdot 10^{-5}$   $\text{m s}^{-2}$ . La conception radicalement différente des autres types de gravimètres relatifs, avec une température très basse et contrôlée au micro-kelvin, et des éléments supraconducteurs sans aucune dissipation rendent les gravimètres à supraconduction extrêmement stables. Ainsi ces instruments ont des dérives inférieures à  $5 \cdot 10^{-8}$   $\text{m s}^{-2}$  par an, et la variation de leur étalonnage est insensible sur plusieurs années. Les gravimètres à supraconduction sont par conséquent des instruments de laboratoire adaptés au traitement des séries temporelles de perturbations très fines et de longues périodes, allant de quelques minutes pour certaines ondes sismiques, à une ou plusieurs années, par exemple pour l'étude des mouvements de l'axe de rotation terrestre ainsi que la vérification des modèles de marées.

Dans la bande de fréquence allant de  $10^{-2}$  mHz à 10 mHz, l'analyse par filtrage fréquentiel de signaux bien modélisés comme les marées gravimétriques a permis de démontrer que la résolution des **OSG** pouvait dépasser  $10^{-11}$   $\text{m s}^{-2}$  [Neumeyer, 2010, Hinderer *et al.*, 2007]. D'après Hinderer [Hinderer *et al.*, 2007] le bruit sismique environnemental est en général bien supérieur au bruit intrinsèque des gravimètres à supraconduction. Ce n'est plus forcément le cas pour les fréquences plus élevées, de 1 mHz à 20 mHz, où la densité spectrale de bruit instrumental peut atteindre  $3 \cdot 10^{-9}$   $\text{m s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$ . En pratique d'après [Hinderer *et al.*, 2007] et [Neumeyer, 2010], suivant les sites de mesure, il est possible de détecter des signaux inférieurs à  $5 \cdot 10^{-10}$   $\text{m s}^{-2}$  avec des périodes de quelques dizaines de minutes.

### 2.3.4 Accéléromètre et gradiomètre électrostatique

Depuis les années 1960 l'**Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)** développe des accéléromètres à lévitation électrostatique. Comme un gravimètre à supraconducteur, un accéléromètre électrostatique asservit la position d'une masse d'épreuve en lévitation. La force de rétroaction utilisée est cette fois-ci la force électrostatique qui s'exerce entre les armatures d'un condensateur.

Le schéma de principe de l'accéléromètre est représenté figure 2.5b. L'énergie du système s'écrit

$$U = -Pz + \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2$$

avec  $P$  le poids de la masse d'épreuve,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$  les capacités et tensions respectives en bas et en haut de la masse d'épreuve (voir la figure 2.5b). Si la masse d'épreuve est

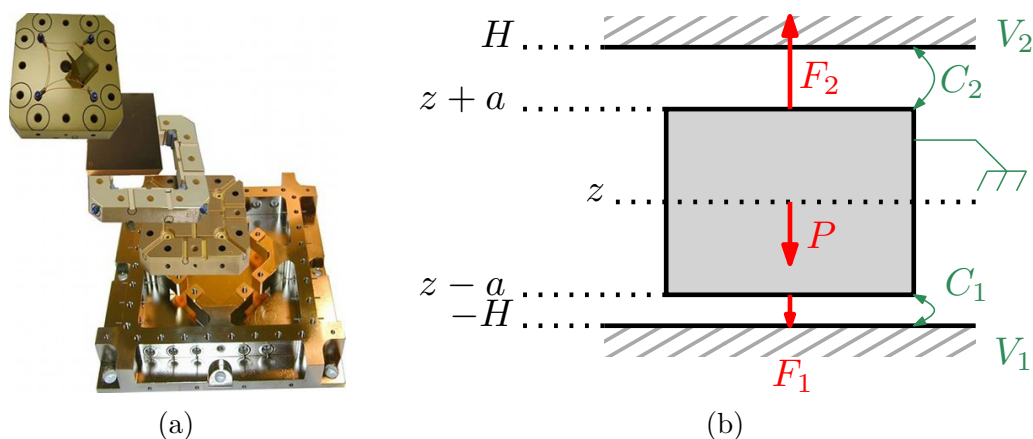


FIGURE 2.5: (a) Eclaté d'accéléromètre à rappel électrostatique (image Onera). (b) Schéma de principe d'accéléromètre à rappel électrostatique.

proche des armatures, les capacités sont celles de condensateurs plans, donc, avec  $\varepsilon_0$  la permittivité du vide et  $S$  la surface des armatures, les projections des forces électrostatiques sur  $z$  s'écrivent

$$F_1 = \frac{\varepsilon_0 S V_1^2}{2} (d + z)^{-2}$$

$$F_2 = -\frac{\varepsilon_0 S V_2^2}{2} (d - z)^{-2}$$

avec  $d = H - a$  l'espace libre entre les armatures et la masse d'épreuve.

En particulier lorsque les tensions  $V_1$  et  $V_2$  sont constantes,  $F_1$  et  $F_2$  sont toutes deux croissantes avec  $z$ . La réaction à une perturbation est donc une rétroaction positive, si bien que le système est instable [Lenoir *et al.*, 2011]. Cette instabilité rend l'asservissement extérieur en position indispensable au fonctionnement de l'appareil. Le capteur devient par là sensible aux perturbations même minimales.

Les gravimètres électrostatiques de l'ONERA sont notamment utilisés dans plusieurs missions et projets spatiaux scientifiques récents : CHALLENGING Minisatellite Payload for geoscience and application - Minisatellite Champ (CHAMP), Gravity Recovery And Climate Experiment - Expérience de mesure de pesanteur et d'observation du climat (GRACE), Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer - Explorateur du champ de pesanteur et des courants océaniques permanents (GOCE) et MICRO-Satellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Equivalence (MICROSCOPE).

### CHAMP

a été lancé en 2000. Le satellite comportait pour la partie gravimétrie une antenne GPS, un réflecteur à coin de cube et un accéléromètre électrostatique de type Spatial Triaxial Accelerometer for Research - Accéléromètre trois axes pour la recherche (STAR), dont les mesures servaient à corriger les données de trajectographie des forces non inertielles. CHAMP avait notamment pour objectif d'établir une cartographie du géoïde avec une résolution spatiale de 550 km et une incertitude de 10 cm, ce qui correspondrait à une incertitude de champ de pesanteur au sol de  $5 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$  [GFZ German Research Centre for Geosciences, 2012].

### GRACE

Les satellites jumeaux de GRACE ont été lancés en 2002 et fournissent toujours

des données à l'heure actuelle. Le principe de **GRACE** repose sur des données de trajectographie, avec la particularité que deux satellites identiques sont utilisés. Ces satellites mesurent en permanence la distance qui les sépare à l'aide de techniques de télémétrie micro-ondes. Chaque satellite comporte en outre un accéléromètre électrostatique SuperSTAR afin de mesurer les accélérations non inertielles. La mission principale de **GRACE** consiste à reconstituer les variations temporelles du géoïde, notamment pour l'étude des déplacements atmosphériques et des masses d'eau [CSR/TSGC, 2012].

### GOCE

dont le satellite est toujours actif, a été envoyé en orbite basse en 2009. Le satellite comporte 6 accéléromètres électrostatiques, placés en configuration cubique, pour former un gradiomètre. Comme pour **CHAMP** la mesure du champ de pesanteur s'effectue par analyse de la trajectoire du satellite. L'accélération mesurée par les capteurs électrostatiques sert cependant à la fois à la correction des données, et également directement au contrôle de la trajectoire grâce à un moteur servant à compenser la traînée atmosphérique, non négligeable à l'altitude relativement faible du satellite (250 km environ). De plus dans le cas de **GOCE** le signal du tenseur gradient de champ déterminé à partir du signal différentiel des 6 accéléromètres est utilisé également. L'intérêt du signal différentiel repose non seulement dans la réjection des bruits de mode commun tels que l'accélération non inertielle du satellite, mais aussi dans le gain de résolution spatiale. La mission **GOCE** vise ainsi à obtenir un modèle de géoïde avec une incertitude centimétrique et une résolution de l'ordre de 100 km, avec un champ de pesanteur au sol reconstitué à  $2 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$  près [Visser, 2009].

### MICROSCOPE

est un projet de microsatellite dont le lancement est à ce jour prévu par le **Centre National d'Etudes Spatiales (CNES)** en 2016 [Centre National d'Etudes Spatiales, 2012]. L'objet de **MICROSCOPE** est la vérification à  $10^{-15}$  près du principe d'équivalence qui stipule l'identité entre masse grave et masse inerte, indépendamment de la nature de la matière. Pour cela le microsatellite, à traînée compensée, embarquera deux paires d'accéléromètres. Chaque paire est constituée de deux cylindres concentriques en lévitation électrostatique [Guiu *et al.*, 2007, Touboul *et al.*, 2002], à la différence des accéléromètres des autres missions mentionnées ici, dont les masses d'épreuve ont la forme de parallélépipèdes.

Après plus de trois ans de mission, les performances en vol des accéléromètres de **GOCE** et du gradiomètre complet ont pu être évaluées par Christophe [Christophe *et al.*, 2010]. Dans la bande de mesure de 20 mHz à 100 mHz, la densité de bruit des accéléromètres est évaluée entre  $3,1 \cdot 10^{-12} \text{ m s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  et  $6,7 \cdot 10^{-12} \text{ m s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Le bruit sur les mesures de gradient est évalué par calcul de la trace du tenseur gradient. Comme remarqué section 2.1.1 page 29, la trace du tenseur gradient est nulle en dehors des sources, d'après l'équation de Poisson. La trace non nulle d'un signal correspond donc nécessairement à du bruit. Toujours d'après [Christophe *et al.*, 2010], la densité spectrale de bruit sur la trace du tenseur vaut  $2,4 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  entre 40 mHz et 100 mHz, et ne dépasse pas  $4 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  entre 10 mHz et 40 mHz.

L'analyse faite dans [Christophe *et al.*, 2010] présente des performances dans les conditions d'utilisation en vol balistique de **GOCE**. Dans un accéléromètre électrostatique

les tensions et les forces mises en jeu pour la lévitation dépendent directement des forces inertielles qui s'exercent sur la masse d'épreuve, même si le signal final est relatif puisqu'il provient de la comparaison entre le poids de la masse d'épreuve et les forces électrostatiques des armatures. Si la mise en lévitation électrostatique d'une masse d'épreuve demeure possible dans le champ de pesanteur terrestre au sol, les tensions importantes nécessaires ne permettent pas ainsi de garder des résolutions comparables à celles possibles en microgravité. La dynamique du capteur est donc limitée. D'après la référence [Visser, 2009] l'étendue de mesure est de l'ordre de  $10^{-7} \text{ m s}^{-2}$  en microgravité, pour une résolution de  $10^{-12} \text{ m s}^{-2}$  sur les deux axes les plus sensibles des accéléromètres, soit un rapport de  $10^5$ .

### 2.3.5 Gravimètre à chute libre d'atomes

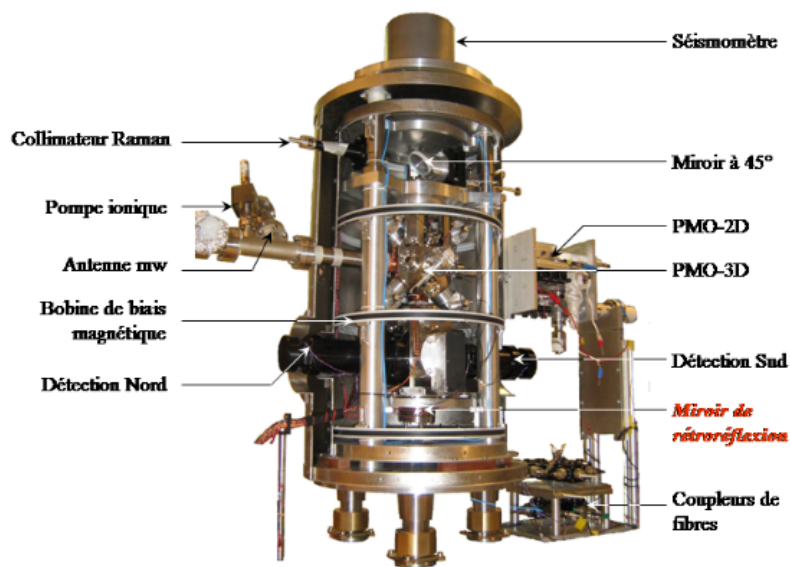


FIGURE 2.6: Gravimètre à chute d'atomes de l'Observatoire de Paris - Image Observatoire de Paris.

Les gravimètres atomiques à chute d'atomes, réalisés expérimentalement pour la première fois en 1991 [Kasevich et Chu, 1991], sont des gravimètres balistiques dans lesquels la masse d'épreuve est constituée d'un gaz d'atomes refroidis, dont la trajectoire est mesurée grâce aux principes de l'interférométrie atomique. Le principe de ces instruments est expliqué avec plus de détails chapitre 7, section 7.2 page 143. Les gravimètres à chute d'atomes sont encore plutôt des dispositifs expérimentaux de laboratoire, même si certains instruments actuels peuvent maintenant être déplacés pour effectuer des comparaisons [Bodart, 2010], et si des développements en cours visent à démontrer la possibilité d'embarquer des gravimètres atomiques, par exemple pour des applications en microgravité, et notamment pour tester le principe d'équivalence [Geiger et al., 2011, Rudolph et al., 2011], ou à bord d'un camion pour faire de la détection [Wu, 2009].

L'Observatoire de Paris a développé son propre modèle de gravimètre à atomes en chute [Louchet-Chauvet et al., 2011b, Bodart et al., 2010, Bodart, 2010] (figure 2.6). Cet instrument combine quatre chutes d'atomes par mesure, dans le but de rejeter un biais lié au déplacement lumineux des niveaux d'énergie interne aux atomes, induit par le

fonctionnement de l'interféromètre. En tenant compte de cette propriété le gravimètre fait des mesures échantillonnées à 0,7 Hz, avec un écart-type compris entre  $6,0 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$  et  $1,4 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$ , pour un échantillonnage ramené à 1 Hz [Louchet-Chauvet *et al.*, 2011b]. Louchet-Chauvet [Louchet-Chauvet *et al.*, 2011b] montre également que le plancher de résolution semble atteint au bout de 5000 s et qu'il est inférieur à  $10^{-8} \text{ m s}^{-2}$ . Grâce à un accéléromètre auxiliaire qui sert de vernier [Geiger *et al.*, 2011], un gravimètre à chute d'atomes opère avec une bonne résolution même dans un environnement avec un bruit sismique important, quoique les performances peuvent être dégradées [Geiger *et al.*, 2011]. Dans la mesure où l'expansion du nuage d'atomes ne devient pas problématique [Louchet-Chauvet *et al.*, 2011a] et où la chambre de chute est suffisamment grande, la sensibilité d'un gravimètre à chute d'atomes est proportionnelle au carré du temps de mesure [Bodart, 2010]. Cette propriété laisse espérer des résolutions meilleures pour des mesures en microgravité, où le temps de mesure n'est plus limité par la taille de l'appareil.

## Conclusion

On a vu dans ce chapitre que quelque soit le type de mesure gravimétrique, choisi en fonction du signal à détecter, faire des mesures dans un véhicule en marche requiert plus que l'exactitude des mesures. La performance des gravimètres présentés ici a été démontrée par le nombre de levés gravimétriques dans les conditions les plus diverses [Dubois, 1997]. L'amélioration de la compacité, de la fiabilité et de la dynamique des instruments les plus exacts permettra cependant de réaliser des mesures de qualité à des emplacements encore inaccessibles. En particulier la marge d'amélioration pourrait être encore grande pour les instruments dont le principe repose sur l'interférométrie atomique, qui est à l'heure actuelle en plein développement.



Modèle	Résolution $\text{m s}^{-2}$	Etendue de mesure <sup>a</sup> $\text{m s}^{-2}$	Fidélité <sup>b</sup> à 1 Hz $\text{m s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$	Bande passante Hz	Conditions de mesure	Stabilité $\text{m s}^{-2}$ par jour
Scintrex CG-5	$10^{-9}$	0,1	$2 \cdot 10^{-8}$	3	Terrain	$> 10^{-6}$
Micro-g Lacoste FG5	$< 10^{-8}$	Absolu	$7 \cdot 10^{-7}$	0,1	Transportable	Absolu
<b>OSG</b>	$10^{-11}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-2}$	Laboratoire	$10^{-10}$
<b>GOCE</b> <sup>c</sup>	$10^{-12}$	$10^{-7}$ <sup>d</sup>	<sup>e</sup>	$2 \cdot 10^{-2}$ à $10 \cdot 10^{-2}$	Spatial	<sup>f</sup>
Atomes froids <sup>g</sup>	$10^{-8}$	Absolu	$< 1,4 \cdot 10^{-6}$	1,4	Transportable	Absolu

TABLEAU 2.1 : Comparaison synthétique des gravimètres présentés dans cette section.

- a. Déviation maximale mesurable par rapport à une valeur de référence fixée lors de la mise en œuvre de l'instrument [BHPM, 2012].
- b. Fidélité ramenée à 1 Hz avec une hypothèse de bruit blanc, tel que la fidélité varie en raison inverse de la racine carrée de la fréquence. Voir la section B.3.2 de l'annexe B, page 217.
- c. Les données récapitulées ici sont celles des accéléromètres qui forment le gradiomètre de GOCE, pour une utilisation en microgravité.
- d. Utilisation en microgravité.
- e. Les accéléromètres de la mission GOCE sont spécifiés pour une utilisation entre 5 mHz et 100 mHz Dans cet intervalle leur densité de bruit doit être inférieure à  $2 \cdot 10^{-12} \text{ m s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$  [Marque et al., ].
- f. Donnée indisponible.
- g. Le gravimètre servant de référence ici est le gravimètre à chute d'atomes de l'Observatoire de Paris.

# Chapitre 3

## Gravimètre à levier miniature

ON a vu au chapitre 2 (page 27) l'intérêt d'un instrument fidèle, compact et stable pour la gravimétrie embarquée. Il a été proposé au début de la thèse de fabriquer un gravimètre constitué d'un levier flexible de longueur millimétrique dans un matériau monocristallin comme le silicium. Je présente ici l'étude de faisabilité que j'ai effectuée à ce moment.

A la section 3.1 page 43 on présente le dimensionnement du système mécanique ; on discute ensuite à la section 3.2 page 49 plusieurs moyens de détection du déplacement du levier. Quelques difficultés intrinsèques à la réalisation de ce type de capteur sont expliquées à la section 3.3 page 57, avant la conclusion de ce chapitre page 59.

### 3.1 Principe de fonctionnement mécanique

L'idée est de fabriquer un levier miniature en matériau monocristallin, de taille comparable au levier d'un microscope à force atomique, soit un à quelques millimètres de long et de large, et de moins d'une centaine de microns d'épaisseur. Le fléchissement du levier sous le poids d'une masse d'épreuve permettrait de mesurer le champ de pesanteur, comme dans un gravimètre classique à ressort. Le dispositif présenterait une très grande compacité et un faible coût, ce qui rendrait possible la fabrication en grand nombre pour faire un réseau de capteurs, et pour compenser par le nombre et par la géométrie une éventuelle perte de performances par rapport à un gravimètre de plus grand encombrement. Le principe du dispositif est illustré figure 3.1.

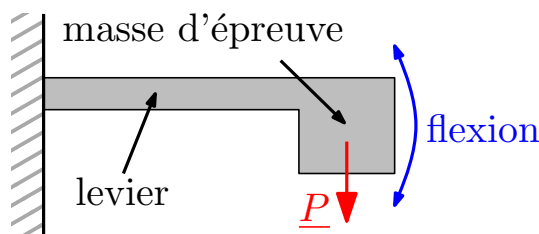


FIGURE 3.1: Schéma de principe du gravimètre à levier miniature. On mesure le fléchissement de la poutre sous l'effet de son poids et de celui de la masse d'épreuve, ce qui donne accès aux variations du champ de pesanteur.



### 3.1.1 Modèle de poutre fléchissante

On cherche à calculer la flexion d'une poutre en porte-à-faux, sous son propre poids et sous celui d'une masse d'épreuve placée en son extrémité libre. La poutre est placée à l'horizontale, c'est-à-dire que le champ de pesanteur est perpendiculaire à la direction qu'aurait la poutre au repos. On prend les hypothèses suivantes :

#### Problème bidimensionnel.

On néglige tout mouvement latéral de la poutre. Ce sera le cas par exemple si la largeur de la poutre est grande devant son épaisseur, et pas trop petite devant son extension.

#### Sections rigides.

On suppose que les sections de la poutre, perpendiculairement à son axe longitudinal, ne se déforment pas, et qu'elles gardent la même forme le long de la poutre. Cette hypothèse est vérifiée en pratique d'après la référence [Popov *et al.*, 1978].

#### Pas de compression.

On néglige toute compression longitudinale de la poutre. Cette hypothèse est raisonnable lorsque les forces appliquées sont principalement perpendiculaires à la poutre.

#### Evolution quasistatique.

Les variations du champ sont supposées suffisamment lentes pour que la poutre puisse être considérée toujours à l'équilibre mécanique. On ne s'intéresse pas ici au calcul des modes de vibration de la poutre.

La géométrie du modèle utilisé est indiquée sur la figure 3.2. On étudie la courbe  $\gamma$  qui passe par les centres de gravité des sections de la poutre. Ces centres de gravité sont situés sur les axes neutres des sections, c'est-à-dire les axes sur lesquels les contraintes de compression longitudinales sont nulles [Popov *et al.*, 1978].  $\gamma$  est paramétrée par l'abscisse curviligne  $s \in [0, L]$ . On considère en outre en tout point de  $\gamma$  l'angle  $\theta$  entre la tangente à la courbe et l'axe horizontal.

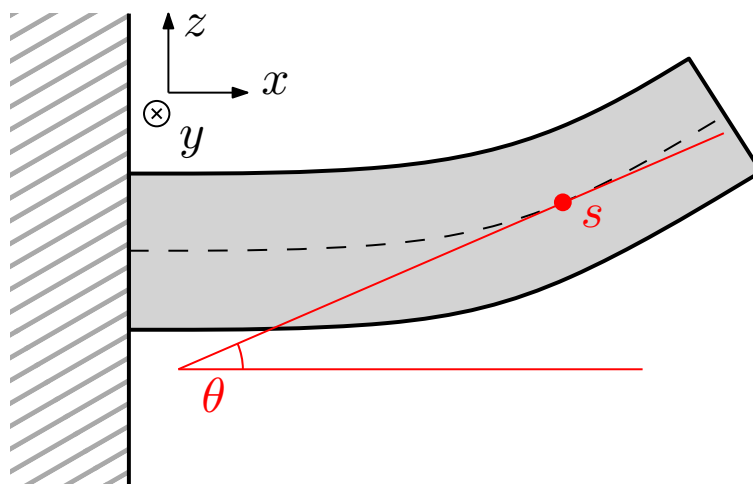


FIGURE 3.2: Modèle de levier. La masse d'épreuve éventuelle n'est pas représentée ici.

Pour étudier l'équilibre de la courbe, considérons un élément différentiel de la poutre compris entre les abscisses curvilignes  $s$  et  $s + ds$ , schématisé sur la figure 3.3. On se place

dans une base locale  $(\underline{n}, \underline{t}, \underline{e}_y)$ .

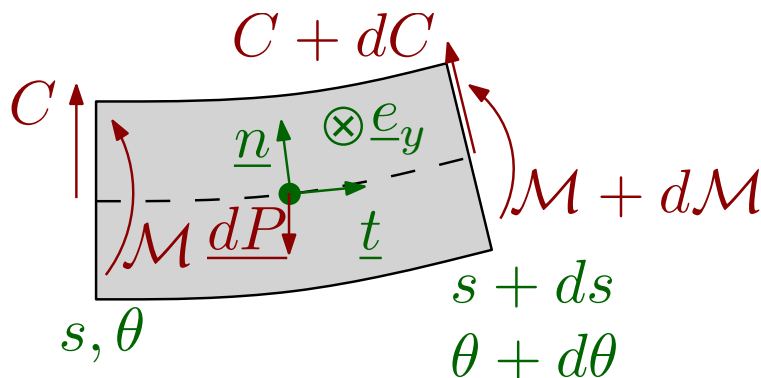


FIGURE 3.3: Élément différentiel de la poutre.

Effectuons un bilan des contraintes :

- L'élément différentiel est soumis à son poids  $\underline{dP} = \rho S ds \underline{g}$  avec  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $S$  la surface de la section et  $\underline{g}$  le champ de pesanteur.
- L'élément applique une force de cisaillement  $C \underline{n}$  à sa gauche, et en reçoit une  $(C + dC)(\underline{n} + d\underline{n})$  à sa droite.
- L'élément applique un moment  $-\mathcal{M} \underline{e}_y$  à sa gauche et en reçoit un  $-(\mathcal{M} + d\mathcal{M}) \underline{e}_y$  à sa droite.
- La résultante de la compression est nulle, dans la mesure où l'on a supposé que l'élément différentiel n'a pas de changement global de longueur.

Les forces et les moments s'équilibrent d'où

$$\begin{cases} \underline{dP} + (C + dC)(\underline{n} + d\underline{n}) - C \underline{n} = 0 \\ \mathcal{M} + d\mathcal{M} - \mathcal{M} + C \frac{ds}{2} - (-C) \frac{ds}{2} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\rho S g \sin \theta - C \frac{d\theta}{ds} = 0 \\ -\rho S g \cos \theta + \frac{dC}{ds} = 0 \\ \frac{d\mathcal{M}}{ds} + C = 0 \end{cases}$$

qui se combinent en

$$\rho S g \cos \theta + \frac{d^2 \mathcal{M}}{ds^2} = 0 \quad (3.1)$$

En analysant l'allongement des fibres qui constituent le matériau, avec l'hypothèse de rigidité des sections et en utilisant la loi de Hooke en régime élastique linéaire, on obtient l'expression du moment  $\mathcal{M} = EI \frac{d\theta}{ds}$  avec  $E$  le module de Young du matériau utilisé et  $I$  le

moment d'inertie de flexion de la section. La démonstration de ce résultat se trouve dans la référence [Popov *et al.*, 1978].

On suppose que la poutre est implantée horizontalement à son extrémité gauche, donc  $\theta$  est nul pour  $s = 0$ . Lorsqu'un poids  $\underline{P}_L$  est présent à l'extrémité droite de la poutre, il impose la condition  $C \underline{n} = \underline{P}_L$  en  $s = L$ , donc  $EI \frac{d^2\theta}{ds^2} \Big|_{s=L} = P_L \cos \theta_L$ . En outre à l'extrémité libre le seul moment présent est le moment de torsion élastique, donc  $\mathcal{M} \Big|_{s=L} = 0$  et ainsi  $\frac{d\theta}{ds} \Big|_{s=L} = 0$ . La flexion de la poutre est donc décrite par

$$\begin{aligned} \rho S g \cos \theta + EI \frac{d^3\theta}{ds^3} &= 0 \\ \theta \Big|_{s=0} &= 0 \\ \frac{d\theta}{ds} \Big|_{s=L} &= 0 \\ \frac{d^2\theta}{ds^2} \Big|_{s=L} &= \frac{P_L}{EI} \cos \theta_L \end{aligned} \quad (3.2)$$

On suppose que la poutre est seulement très légèrement déformée, ce qui permet de linéariser (3.2) en faisant l'hypothèse que  $\theta$  est faible tout le long de la poutre. Dans le cadre du dimensionnement on se contente de l'ordre le plus faible en  $\theta$  et on obtient

$$\theta = -\frac{\rho S g}{6EI} [L^3 + (s-L)^3] - \frac{P_L}{2EI} [L^2 - (s-L)^2] \quad (3.3)$$

Toujours pour les petites déformations, la courbe  $x \mapsto z(x)$  décrite par la poutre vérifie  $\frac{dz}{dx} = \theta(x)$  avec  $z(0) = 0$  d'où

$$z(x) = -\frac{\rho S g}{24EI} [4L^3 x + (x-L)^4 - L^4] - \frac{P_L}{6EI} [3L^2 x - (x-L)^3 - L^3]$$

La déflexion  $z(L)$  de la poutre sous son poids est donc

$$\begin{aligned} z(L) &= -\frac{\rho S g}{8EI} L^4 - \frac{P_L}{3EI} L^3 \\ \text{soit encore } z(L) &= -\frac{g}{\omega_0^2} \\ \text{avec } \omega_0^{-2} &= \frac{\rho S}{8EI} L^4 + \frac{M_L}{3EI} L^3 \text{ et } P_L = M_L g \end{aligned} \quad (3.4)$$

On note par la suite  $z_L^0$  la déflexion de la poutre sous l'effet du champ de pesanteur moyen  $g_0$  et  $\delta z$  la déflexion supplémentaire induite par une anomalie de pesanteur  $\delta g$ .

### 3.1.2 Conceptions possibles

Une fois déterminée la mécanique du capteur, il s'agit de dimensionner ses caractéristiques principales et d'envisager la manière de le fabriquer.

### Géométrie transverse

On souhaite pour la qualité des mesures rester dans un régime linéaire dans toute la gamme de mesure. Un critère pour cela est que la flexion maximale doit être suffisamment faible devant la longueur du levier. La flexion maximale est causée par le champ terrestre moyen  $g_0$  donc cette contrainte revient à ce que  $\frac{\omega_0^{-2}g_0}{L} \ll 1$ . On prend pour critère  $\frac{\omega_0^{-2}g_0}{L} \leq \frac{1}{10}$ , d'où

$$\frac{\omega_0^{-2}}{L} \leq 10^{-2} \text{ s}^2/\text{m} \quad (3.5)$$

On suppose que pour la simplicité de fabrication la section de la poutre est rectangulaire, de largeur  $l$  et d'épaisseur  $e$ . On a alors  $I = \frac{le^3}{12}$  d'où

$$\frac{\omega_0^{-2}}{L} = \frac{L^2}{Ee^2} \left[ \frac{3}{2}\rho L + \frac{4M_L}{le} \right] \quad (3.6)$$

On charge l'extrémité d'un levier en silicium jusqu'à rendre la masse  $m = \rho Lle$  du levier négligeable devant  $M_L$ . On dimensionne le levier tel que [Chaumet, 2012] :

$$\begin{aligned} E &= 130 \text{ GPa} \quad (\text{d'après [Malhaire, 1998]}) \\ L &= 1 \text{ cm} \\ e &= 15 \text{ }\mu\text{m} \\ l &= 1 \text{ mm} \\ M_L &= 10 \text{ mg} \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^{-2}}{L} &= 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ s}^2/\text{m} \\ \text{soit } \omega_0^{-2} &= 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

A condition de pouvoir fabriquer un levier de 15  $\mu\text{m}$  d'épaisseur, chargé avec 10 mg on peut ainsi saturer la contrainte (3.5), avec un levier de 1 cm. On a alors  $\omega_0^{-2} \approx 10^{-4} \text{ s}^2$ . Notons que dans ce cas la masse du levier est inférieure à 0,4  $\mu\text{g}$ , ce qui est effectivement négligeable devant la masse d'épreuve à son extrémité.

### Formes de leviers

La géométrie considérée jusqu'à présent est celle d'un levier droit, qui supporte à son extrémité libre une masse d'épreuve, comme représenté figure 3.4. Sous réserve que la fabrication ne soit pas compromise, on peut cependant envisager des géométries plus complexes. Par exemple pour augmenter le facteur d'échelle  $k^{-1}$  tout en gardant une taille réduite, on peut envisager de replier le levier selon une géométrie proche de celle représentée figure 3.5. La dynamique du capteur risque cependant d'être moins linéaire, surtout si le matériau employé est anisotrope, comme le silicium monocristallin, et les effets de torsion latérale ne sont plus nécessairement négligeables, suivant le rapport entre la longueur la largeur de la poutre. Une autre possibilité est de soutenir la masse d'épreuve avec deux poutres fines, comme représenté figure 3.6. Ainsi la taille de la masse d'épreuve peut être augmentée tout en limitant les effets de torsion latérale.

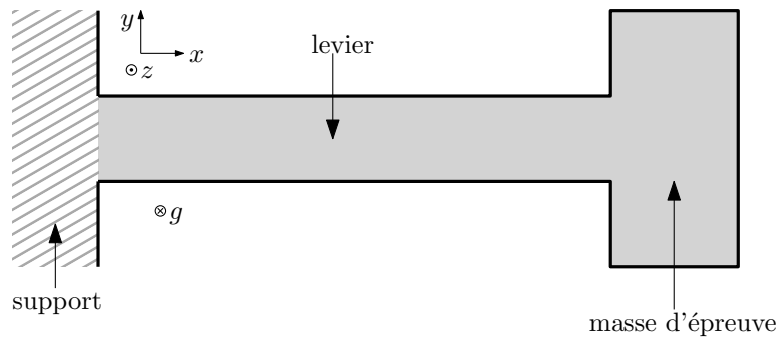


FIGURE 3.4: Géométrie de gravimètre à levier simple : une poutre flexible simple accrochée à un support, et tenant une masse d'épreuve à son autre extrémité.

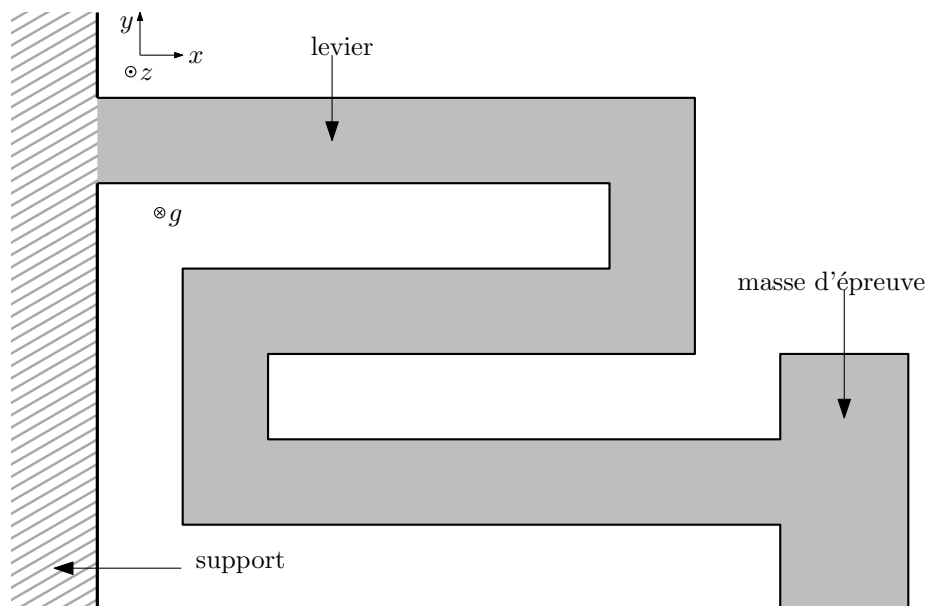


FIGURE 3.5: Gravimètre à levier replié avec poutre repliée, pour gagner en longueur de porte-à-faux tout en gardant une bonne compacité.

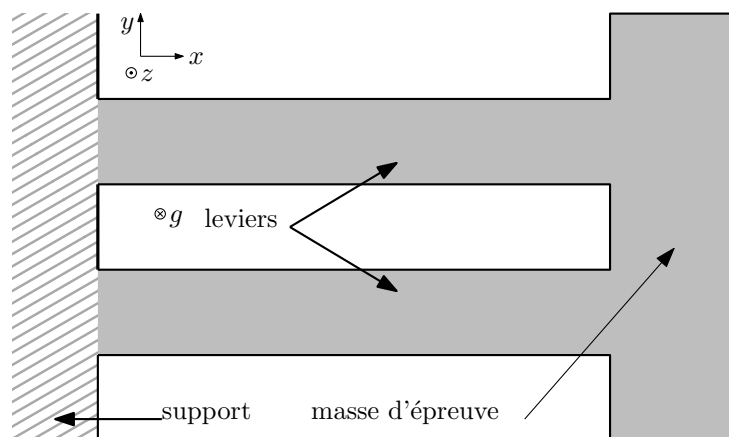


FIGURE 3.6: Gravimètre à double levier, pour augmenter la taille de la masse d'épreuve tout en limitant les effets de torsion latérale.

## 3.2 Mesure de la flexion

La finesse de résolution des anomalies de pesanteur est directement liée à la qualité de mesure de flexion de la poutre. D'après l'application numérique (3.7), une résolution en distance de 10 pm est ainsi nécessaire pour être capable de résoudre  $10^{-7} \text{ m s}^{-2}$ , afin par exemple de bien discriminer les marées dans un enregistrement temporel. On envisage plusieurs méthodes possibles pour mesurer le déplacement de la masse d'épreuve.

### 3.2.1 Courant tunnel

Les microscopes à effet tunnel font à l'heure actuelle partie des instruments les plus sensibles au déplacement [Giessibl, 2003]. Leur principe consiste à mesurer le courant qui passe par effet tunnel entre deux conducteurs. La physique quantique prévoit en effet qu'un électron arrivant devant une barrière de potentiel supérieure à son énergie a une probabilité non nulle de traverser la barrière [Basdevant *et al.*, 2002], si bien qu'un courant peut circuler entre deux conducteurs même séparés par du vide. La probabilité de passage, et donc le courant tunnel, varie cependant exponentiellement avec la distance  $d$  entre les armatures [Basdevant *et al.*, 2002, Giessibl, 2003], c'est-à-dire que le courant tunnel  $I$  vaut

$$I = I_0 e^{-d/d_0} \quad (3.8a)$$

$$\text{avec } d_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{8m_e\Phi}} \quad (3.8b)$$

Dans l'équation (3.8a)  $I_0$  dépend de la tension entre les conducteurs et de leur géométrie. Dans (3.8b)  $m_e$  représente la masse de l'électron et  $\Phi$  la hauteur de la barrière de potentiel que les électrons doivent surmonter pour s'échapper des conducteurs. Pour les métaux  $d_0$  est de l'ordre de  $10^{-10} \text{ m}$  [Giessibl, 2003].

Cette dépendance exponentielle permet une résolution en déplacement seulement limitée par le bruit électronique thermique. La résolution peut ainsi atteindre  $10^{-13} \text{ m}$  à température ambiante, ce qui est suffisant pour l'application visée. On peut donc envisager de déterminer la flexion d'un levier recouvert d'une couche métallique par mesure du courant tunnel provenant d'un conducteur attaché au bâti, comme illustré figure 3.7.

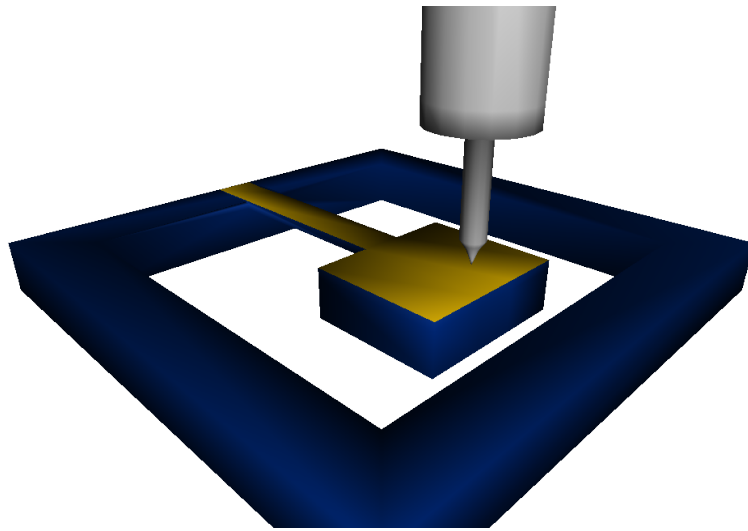


FIGURE 3.7: Schéma de la mesure de flexion d'un levier par courant tunnel. Une pointe (ici en gris) vient sonder l'extrémité du levier, qui a été recouverte d'une couche conductrice.

D'après les références [Barbour, 2004, Allen, 2009], des accéléromètres utilisant ce type de mesure de déplacement étaient à l'étude au moment de leur publication, mais aucun n'était encore commercialisé cependant. Les forces et les faiblesses que l'on s'attend à rencontrer sont les mêmes que pour l'imagerie microscopique par effet tunnel [Giessibl, 2003, Barbour, 2004, Allen, 2009] :

- Les courants en jeu, de quelques nanoampères, peuvent être mesurés avec un bon rapport signal à bruit.
- Les électrodes doivent être écartées de quelques nanomètres au plus pour qu'un signal puisse être enregistré. Cela peut représenter une limitation importante de la dynamique car une accélération modeste est du coup suffisante pour que les électrodes rentrent en collision, ce qui compromet la mesure. Dans le cas du microscope à effet tunnel, la solution est d'asservir le courant tunnel en rétroagissant sur la position de l'électrode grâce à un actuateur piézoélectrique ou électrostatique, et d'amortir très fortement les vibrations possibles.
- L'asservissement est simplifié par la monotonie de la fonction qui relie la distance des électrodes à l'intensité du courant tunnel.
- La forte dépendance en distance donne une très bonne résolution latérale à l'électrode d'un microscope, dont le courant tunnel est lié presque uniquement à la distance qui sépare la pointe de l'électrode à l'atome le plus proche dans l'échantillon. Cet aspect est utile en microscopie, car il permet de visualiser chaque atome à la surface d'un échantillon. Dans le cas d'un gravimètre on peut craindre que de faibles déplacements latéraux du levier ne viennent faire balayer la surface du levier par l'électrode de mesure, ce qui risque de fortement perturber le signal.
- L'adsorption peut de la même manière perturber la mesure, ce qui impose des conditions d'ultra-vide et de basse température pour l'enceinte du capteur [André

*et al.*, 2009, Giessibl, 2003], et éventuellement de pouvoir supporter un étuvage à une température de plusieurs centaines de degrés Celsius.

### 3.2.2 Détection optique

Pour la mesure de précision d'une distance on peut envisager l'utilisation de techniques d'optique géométrique ou ondulatoire. Ces techniques sont en particulier employées pour la mesure de flexion de levier dans les microscopes à force atomique [Hrouzek, 2007, Giessibl, 2003].

#### Réflexion

La mesure par réflexion consiste à détecter les variations d'angle à l'extrémité du levier par analyse d'un faisceau qui y est réfléchi. En pratique la répartition d'intensité du faisceau réfléchi est mesurée par deux ou quatre photodiodes. Le signal différentiel donne accès à l'angle du faisceau, et donc à celui du levier. Le dispositif est représenté figure 3.8, pour l'exemple du microscope à force atomique. La grandeur mesurée est dans

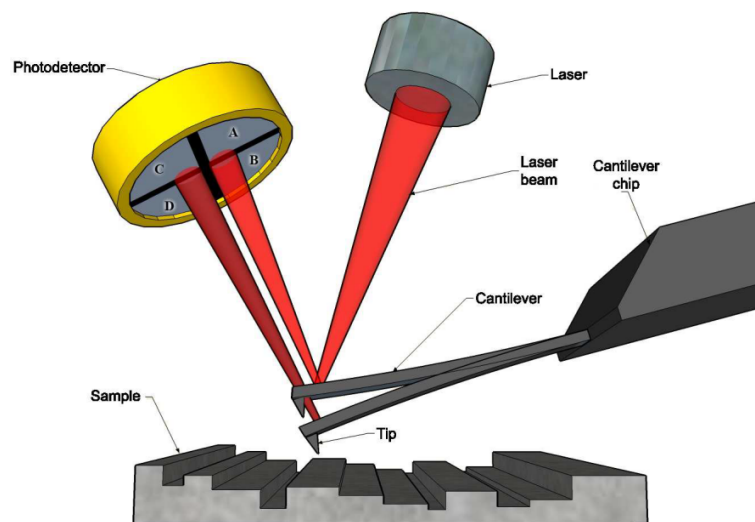


FIGURE 3.8: Détection de flexion par réflexion optique en microscopie à force atomique (image issue de la référence [Hrouzek, 2007]).

ce cas l'angle  $\theta(L)$  que fait l'extrémité du levier avec l'horizontale. Lorsque la poutre est rectangulaire et chargée uniquement en son extrémité, alors d'après l'équation (3.3) (page 46)

$$\theta(L) = -\beta g$$

$$\text{avec } \beta = \frac{6M_L L^2}{E l e^3} \quad (3.9)$$

Si  $a$  est la distance entre le levier en silicium et la double photodiode de mesure, alors le déplacement  $\delta x$  du faisceau sur la double photodiode, sous l'effet d'une variation  $\delta g$  du champ de pesanteur vaut  $-2\beta a \delta g$ . Soient  $P_0$  la puissance totale du faisceau, et  $P_h$  et  $P_b$  les puissances détectées respectivement par la partie haute et la partie basse de la



double photodiode. Dans l'hypothèse d'un faisceau gaussien de largeur  $w$  au niveau de la détection, centré sur la séparation des photodiodes pour une anomalie de pesanteur nulle, et tel que  $w$  soit grande devant le déplacement  $\delta x$  alors

$$\begin{aligned} P_h &= \frac{P_0}{2} \left( 1 + \frac{2\delta x}{\sqrt{2\pi}w} \right) \\ P_b &= \frac{P_0}{2} \left( 1 - \frac{2\delta x}{\sqrt{2\pi}w} \right) \\ \text{d'où } \delta x &= w \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{P_h - P_b}{P_0} \\ \text{et ainsi } \delta g &= -\frac{w}{2a\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{P_h - P_b}{P_0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

D'après l'équation (3.10) la sensibilité de l'appareil est d'autant meilleure que  $w$  est faible et  $a$  grand. La largeur  $w$  augmente cependant avec le bras de levier  $a$  du fait de la diffraction du faisceau. Le compromis sera donc meilleur si la surface réfléchissante sur le levier est suffisamment grande pour que la distance de Rayleigh du faisceau reste grande devant le bras de levier.

Une limite fondamentale à la qualité de la mesure provient du bruit quantique du faisceau laser. Le bruit quantique sur un faisceau de puissance  $P$  est blanc en fréquence, de densité spectrale  $\sqrt{\frac{hc}{\lambda P}}$ , avec  $h$  la constante de Planck,  $c$  la vitesse de la lumière et  $\lambda$  la longueur d'onde du faisceau. Soit  $\alpha = \frac{P_h - P_b}{P_h + P_b}$ , alors étant données les densités  $S_h^{1/2}$  et  $S_b^{1/2}$  sur  $P_h$  et  $P_b$ , la densité spectrale de bruit  $S_\alpha^{1/2}$  sur  $\alpha$  vaut

$$S_\alpha = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial P_h} \right)^2 S_h + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial P_b} \right)^2 S_b \quad (3.11)$$

lorsque les bruits sont décorrélés. Pour le bruit quantique l'équation (3.11) donne

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \frac{hc}{P_0 \lambda} \left[ 1 - \left( \frac{P_h - P_b}{P_0} \right)^2 \right] \\ \text{soit } S_\alpha^{1/2} &\approx \sqrt{\frac{hc}{P_0 \lambda}} \text{ lorsque } |P_h - P_b| \ll P_0 \end{aligned}$$

Par exemple lorsque

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \text{ mW} \\ \lambda &= 1 \text{ } \mu\text{m} \\ w &= 1 \text{ mm} \\ a &= 10 \text{ cm} \\ \beta &= \frac{3\omega_0^{-2}}{2L} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^2 \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

avec les notations et le critère (3.5) de la section 3.1.2 page 47, la densité spectrale de bruit  $S_{\delta g}^{1/2}$  sur l'anomalie de pesanteur vaut  $6 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2} / \sqrt{\text{Hz}}$ , soit une fidélité de  $2 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$  pour une bande passante de 10 Hz.

L'utilisation de cette technique pour la microscopie à force atomique donne des résultats remarquables. Ainsi la référence [Fukuma *et al.*, 2005] présente un dispositif capable de détecter la flexion d'un levier suivant ce principe avec une résolution plancher de  $17 \text{ fm}/\sqrt{\text{Hz}}$ , mais dans le cadre de mesures de vibrations, typiquement vers 1 kHz. On peut craindre en effet que la stabilité à la fois mécanique et électronique du montage proposé dans ce paragraphe puisse être difficile à obtenir.

### Interférométrie

L'approche précédente met en jeu un dispositif d'optique géométrique. Les interféromètres présentent pour certains systèmes de mesure des sensibilités et des stabilités accrues. Ainsi les microscopes à force atomique peuvent aussi faire appel à un interféromètre de Fabry-Perot afin de mesurer la flexion du levier [Hrouzek, 2007]. Une cavité optique de longueur optique  $l$  comme celle représentée figure 3.9 constitue un filtre interférentiel qui laisse passer seulement les longueurs d'onde  $\frac{2l}{n}$  avec  $n$  entier [Hernández, 1988]. Pour un

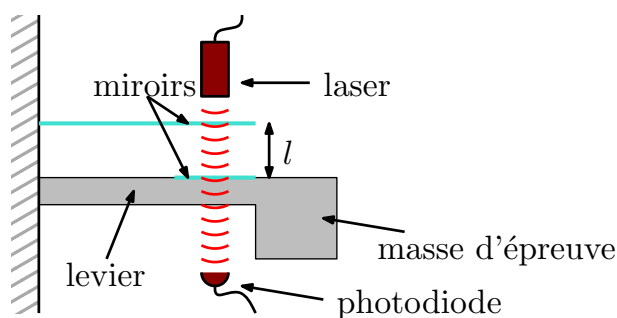


FIGURE 3.9: Cavité de Fabry-Perot à l'extrémité d'un levier. La cavité est formée par une surface réfléchissante sur le levier et un miroir solidaire du bâti. Le levier est supposé transparent à la longueur d'onde du laser.

ordre  $n$  donné, la largeur du filtre vaut  $D\lambda = \frac{\lambda}{nN}$  avec  $N$  la finesse de la cavité. Si  $R$  est la réflectivité des miroirs qui constituent la cavité,  $N$  est définie par  $N = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$ .

On peut mesurer le déplacement du levier grâce au déplacement de la résonance du filtre interférentiel. Dans le vide ou tout autre milieu d'indice optique unitaire, le déplacement de la résonance causé par une anomalie de pesanteur vaut  $\delta\lambda = \frac{2}{n}\delta z$

La largeur du filtre donne un ordre de grandeur de la résolution possible en longueur d'onde. Lorsque seule cette largeur la limite, la résolution  $Dz$  en déplacement a alors pour ordre de grandeur

$$Dz \sim \frac{\lambda}{2N}$$

Par exemple lorsque, grâce à un traitement haute réflectivité,  $R = 99,9\%$  et que  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  alors  $Dz \sim 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , ce qui correspond à une résolution  $\delta g_{\text{min}} \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$  d'anomalie de pesanteur avec les paramètres de la section 3.1.2 page 47. Cet ordre de grandeur est cependant très prudent, puisqu'il suppose que la photodiode de détection ne peut détecter que des variations équivalentes à 50% de la puissance du faisceau.

L'intérêt de cette technique est notamment que la stabilité du dispositif dépend directement de celle du laser utilisé, dont la fréquence peut par exemple être asservie par spectroscopie à  $10^{-9}$  près [Quinto-Su *et al.*, 2004].

### 3.2.3 Détection capacitive

La détection capacitive consiste à mesurer les variations de capacité entre deux armatures, afin de déterminer leur mouvement relatif. Cette technique est à l'heure actuelle sans doute la plus utilisée pour détecter le mouvement de microstructures, typiquement pour des capteurs inertiels ou pour la microscopie [Chaumet, 2012, Barbour, 2004, Strambini *et al.*, 2010, Vakili Amini et Ayazi, 2005, Aaltonen, 2010, Allen, 2009, Hons et Stewart, 2008]. Cet engouement provient notamment de la très bonne résolution dans la détection des variations de capacité, dont le plancher est inférieur à  $0,1 \text{ aF}/\sqrt{\text{Hz}}$  [Vakili Amini et Ayazi, 2005, Aaltonen et Halonen, 2009], ainsi que de la facilité d'intégrer sur une microstructure ce type de détecteur et l'électronique qui lui est associée.

Les armatures du condensateur suivent en général l'une des deux géométries suivantes [Aaltonen, 2010, Allen, 2009], représentées figure 3.10 :

- Les armatures peuvent être planes, l'une en-dessous de l'autre, et former ainsi un condensateur plan (figure 3.10a).
- On peut également former des armatures en forme de peignes entrelacés comme dans la référence [Vakili Amini et Ayazi, 2005] (figure 3.10b).

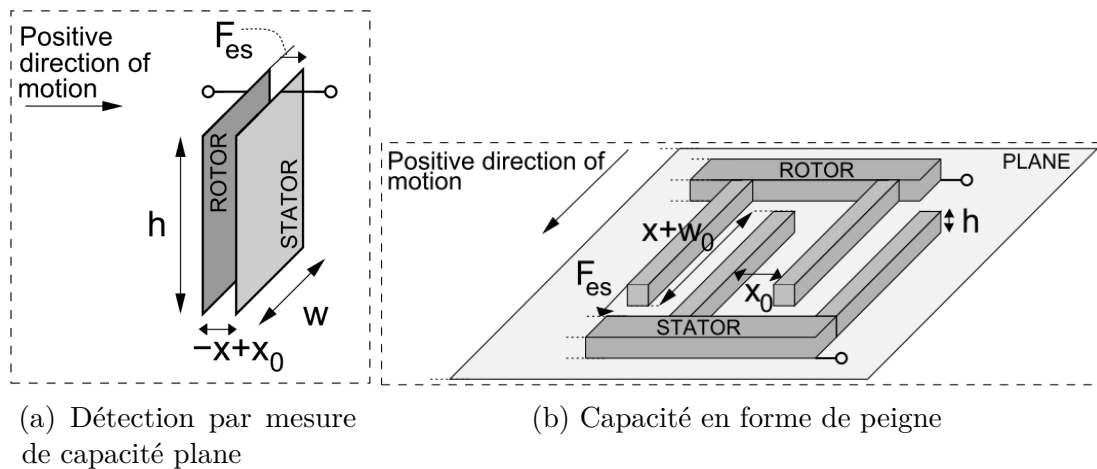


FIGURE 3.10: Deux géométries habituelles pour la détection capacitive de déplacement dans les microstructures. Schémas tirés de la thèse de Lasse Aaltonen [Aaltonen, 2010].

Le choix d'une géométrie plutôt qu'une autre dépend en partie de considérations de fabrication. En outre, le système à deux armatures planes donne un axe sensible orthogonal au plan de la microstructure, tandis que l'axe sensible d'un système à armatures entrelacées est dans le plan de la microstructure. Enfin une structure en peigne offre plus de latitude dans la conception mécanique pour optimiser la linéarité de la mesure [Aaltonen, 2010].

Une mesure différentielle avec deux ou quatre capacités est également possible. Ce type de mesure améliore la linéarité de la réponse du système, tout en permettant le rejet de modes communs mécaniques et électroniques. Lasse Aaltonen [Aaltonen, 2010] propose par exemple pour le système à deux capacités de la figure 3.11 de mesurer la grandeur  $\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$ , ce qui garantit la linéarité du signal pour un déplacement arbitrairement grand.

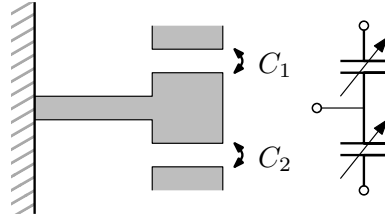


FIGURE 3.11: Système à mesure différentielle de capacité. À gauche, un schéma mécanique, et à droite le schéma électrique correspondant.

Dans le cas d'armatures planes de surface  $S$  séparées au repos par une distance  $d$ , la capacité s'écrit en fonction du déplacement  $\delta z$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d + \delta z} \quad (3.12)$$

La variation  $\delta C$  de capacité s'écrit donc pour les petits déplacements

$$\begin{aligned} \delta C &= -\frac{\varepsilon_0 S}{d^2} \delta z \\ \text{soit } \delta C &= \frac{\varepsilon_0 S}{d^2 \omega_0^2} \delta g \end{aligned} \quad (3.13)$$

D'après l'équation (3.13), une faible distance entre les armatures améliore la sensibilité de la détection. La dynamique de l'instrument est cependant réduite dans ce cas, si l'on veut rester dans le régime linéaire  $\delta z \ll d$  et en tout cas éviter la collision entre les armatures.

La capacité électrique est elle-même mesurée en mettant à profit la relation  $Q = CU$  avec  $Q$  la charge sur chaque armature et  $U$  la tension aux bornes du condensateur. L'intensité  $I$  dans la branche de la capacité vaut ainsi

$$I = C \frac{dU}{dt} + U \frac{dC}{dt} \quad (3.14)$$

Pour mesurer le champ de pesanteur on s'intéresse aux basses fréquences, donc on module en pratique l'amplitude de la tension  $U$  à une fréquence  $f$  suffisante pour rendre le terme  $U \frac{dC}{dt}$  négligeable dans la relation (3.14) [Aaltonen, 2010]. Si  $U_0$  est l'amplitude de tension, alors l'amplitude  $I_0$  d'intensité devient

$$I_0 = 2\pi f U_0 \cdot C$$

donc sa variation  $\delta I_0$  vaut

$$\delta I_0 = \frac{2\pi f U_0 \varepsilon_0 S}{d^2 \omega_0^2} \delta g \quad (3.15)$$

La sensibilité peut ainsi être augmentée à volonté en jouant sur la modulation de tension. En revanche la stabilité de la mesure est directement liée à celle de la modulation.

Grâce à la détection capacitive, des planchers de résolution de l'ordre de  $10^{-6} \text{ m s}^{-2}$  sont atteints pour les accéléromètres sur microstructures [Vakili Amini et Ayazi, 2005, Aaltonen et Halonen, 2009]. Cette technologie souffre cependant des difficultés suivantes, soulignées notamment dans la thèse de Aaltonen [Aaltonen, 2010] :

- La compatibilité électromagnétique est un aspect contraignant dans la conception d'un capteur à détection capacitive, puisque par nature le dispositif est très sensible aux champs électriques.
- La capacité existant entre deux fils proches d'un circuit imprimé est de l'ordre du picofarad. Pour mesurer des différences de capacités inférieures à l'attofarad, il est donc indispensable de prendre garde aux variations des capacités parasites du circuit de mesure, afin d'assurer la stabilité du capteur.
- La détection implique la mise sous tension de la capacité à mesurer. Cette tension vient elle-même exercer une force électrostatique entre les armatures, ce qui peut créer une non-linéarité. Cet aspect a néanmoins l'avantage de permettre un éventuel asservissement en position de la masse d'épreuve, sans dispositif supplémentaire de rétroaction.

### 3.2.4 Poutre vibrante

D'après l'équation (3.14), la détection capacitive nécessite des variations de charge, provenant de variations de capacité ou de tension. A la section 3.2.3 on a proposé de mesurer la capacité par une modulation de tension. On peut également faire le contraire, c'est-à-dire moduler la position de la masse d'épreuve pour mesurer la capacité.

Le principe de mesure des accéléromètres à *poutre vibrante* est représenté figure 3.12. Ce principe est légèrement différent de la détection de flexion. Une poutre avec une masse d'épreuve à son extrémité est mise en oscillation forcée. On mesure l'amplitude de cette oscillation pour déterminer la fréquence de résonance  $\omega_1$  du mode transverse excité.  $\omega_1$  dépend de la longueur  $L$  de la poutre. La mesure des variations de  $\omega_1$  permet donc de connaître l'allongement de la poutre et donc les variations du poids de la masse d'épreuve, par la loi de Hooke [Aaltonen, 2010, Chaumet, 2012, Barbour, 2004]. La mesure de l'amplitude des oscillations peut être effectuée par n'importe laquelle des méthodes présentées ici. Encore une fois la détection capacitive est souvent employée, pour les mêmes raisons que dans le cas statique [Chaumet, 2012].

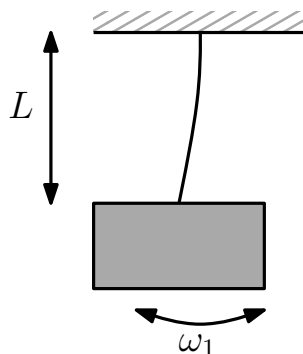


FIGURE 3.12: Principe du gravimètre à poutre vibrante : les variations  $\delta\omega_1$  de la fréquence propre  $\omega_1$  d'un mode transverse de vibration de la poutre permettent de connaître son allongement longitudinal  $\delta L$  suivant l'équilibre entre le poids de la masse d'épreuve et l'élasticité de la poutre.

L'utilisation d'un système en vibration présente l'intérêt de décaler en fréquence la mesure du déplacement de la masse d'épreuve, typiquement vers un domaine de fréquence où le rapport signal à bruit est meilleur que dans le domaine continu. On s'affranchit ainsi de certains problèmes de dérive, ce qui permet d'obtenir des accéléromètres plus stables [Chaumet, 2012]. D'après la thèse de Lasse Aaltonen [Aaltonen, 2010] et le rapport technique de Barbour [Barbour, 2004], le prix à payer est une sensibilité relativement limitée, puisque la variation typique de fréquence propre d'un tel système va de  $10 \text{ Hz/m s}^{-2}$  à  $100 \text{ Hz/m s}^{-2}$  dans le meilleur des cas, pour des fréquences propres de l'ordre de  $10 \text{ kHz}$ . D'après Barbour les meilleurs accéléromètres à poutre vibrante ont des performances qui les rendent presque utilisables pour faire de la microgravimétrie. Ils ont ainsi une variance d'Allan de  $8 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$  pour un temps d'intégration de  $1000 \text{ s}$ , ce qui représente une fidélité à  $1 \text{ Hz}$  de  $3 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

### 3.2.5 Autres méthodes

D'autres méthodes peuvent être employées pour détecter le déplacement de la masse d'épreuve. Deux méthodes en particulier sont utilisées pour les accéléromètres sur microstructures. Dans le premier cas une couche de matériau piézo-résistif est déposée sur la poutre. La mesure de la résistance de cette couche permet de déterminer les contraintes à la surface de la poutre, et ainsi de connaître la flexion de la poutre. La deuxième méthode est similaire, mais c'est un matériau piézo-électrique qui est utilisé, donc le signal mesuré est une tension plutôt qu'une résistance [Aaltonen, 2010]. Ces deux méthodes n'ont pas été étudiées dans ce travail de thèse.

## 3.3 Difficultés intrinsèques

On a vu aux sections précédentes les compromis qu'impliquent certains des choix technologiques dans la conception mécanique d'un gravimètre à levier miniature, et dans la problématique de détection de la position du levier. D'autres limitations et compromis proviennent de la nature même du système proposé ici.

### 3.3.1 Compromis entre résolution et bande passante

Aux fréquences suffisamment basses pour que les frottements soient négligés, en présence d'une variation de pesanteur  $\delta g$ , l'équation du mouvement d'un peson de masse  $m$  suspendu à un ressort de raideur  $k$ , auquel s'apparente le levier proposé, s'écrit

$$\ddot{z} + \delta g + \omega_0^2 z = 0$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

soit dans le domaine fréquentiel

$$\bar{z} = \frac{\bar{\delta g}}{(2\pi f)^2 - \omega_0^2}$$

Le système a ainsi une fréquence de coupure à  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Le facteur d'échelle  $\frac{m}{k}$  varie cependant en raison inverse du carré de la fréquence de coupure. Indépendamment de la

technologie utilisée, la résolution en pesanteur d'un système à ressort est donc limitée par un compromis sur sa bande passante, pour une résolution du capteur de déplacement donnée.

### 3.3.2 Causes d'incertitude

Quelle que soit la technologie de mesure de distance utilisée, la température non nulle du levier vient limiter l'exactitude du dispositif.

#### Bruit thermomécanique

D'après le théorème d'équipartition, à température  $\Theta$  non nulle une quantité  $\frac{1}{2}k_B\Theta$  d'énergie est stockée dans chaque degré de liberté d'énergie quadratique à l'équilibre thermodynamique, avec  $k_B$  la constante de Boltzmann [Gabrielson, 1993]. Dans le cas du levier, l'énergie potentielle élastique s'écrit  $U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 z^2$  donc l'écart quadratique moyen de la déflexion  $\delta z$  vaut  $\mathbb{E}[\delta z^2] = \frac{k_B\Theta}{m\omega_0^2}$  et ainsi l'erreur quadratique moyenne  $\sigma_g^\Theta$  liée au bruit thermomécanique sur la mesure du champ de pesanteur est donnée par

$$\sigma_g^\Theta = \omega_0 \sqrt{\frac{k_B\Theta}{m}} \quad (3.16)$$

On applique les données de la section 3.1.2 page 47 à la formule (3.16) :

$$\begin{aligned} m &= 10 \text{ mg} \\ \omega_0^{-2} &= 9 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2 \end{aligned}$$

A température ambiante pour  $\Theta = 300 \text{ K}$  on obtient  $\sigma_g^\Theta = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$ . Si l'on refroidit le dispositif avec de l'hélium liquide jusqu'à  $4 \text{ K}$ , on a cette fois  $\sigma_g^\Theta = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$ .

#### Dilatation thermique

Sous l'effet d'un changement de température  $\Delta\Theta$  la sensibilité  $\omega_0^{-2}$  du levier change d'une valeur  $\Delta\omega_0^{-2}$ , ce qui se traduit par une variation apparente de champ de pesanteur  $\Delta g$ . D'après la section 3.1.1 page 47, la flexion du levier s'écrit  $\delta z = -\omega_0^2 g$  d'où

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \left| \frac{\Delta\omega_0^{-2}}{\omega_0^{-2}} \right|$$

Lorsque la masse du levier est négligeable devant la masse d'épreuve, on a d'après (3.4)  $\omega_0^{-2} = \frac{mL^3}{3EI}$  d'où

$$\frac{\Delta g}{g} = 3 \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta I}{I} \quad (3.17)$$

$$\text{avec } \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta l}{l} + 3 \frac{\Delta e}{e} \text{ pour une poutre rectangulaire,} \quad (3.18)$$

$$\text{soit } \frac{\Delta g}{g} = 5 \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta E}{E} \quad (3.19)$$

lorsque le matériau a une dilatation isotrope.

Pour un levier en silicium à température ambiante, en considérant que l'élasticité du levier est utilisée selon l'axe [010], qui est le plus souple du cristal [Malhaire, 1998]

$$\begin{array}{l} \text{Coefficient de dilatation thermique} \quad \frac{\Delta L}{L} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \text{Variation de l'élasticité} \quad \frac{\Delta E}{E} = -6 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{array}$$

soit  $\frac{\Delta g}{g} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Pour résoudre  $10^{-7} \text{ m s}^{-2}$  comme proposé section 3.2 page 49, il est donc nécessaire d'effectuer un étalonnage de très bonne qualité en température, ou bien il faut asservir la température de l'enceinte à 100  $\mu\text{K}$  près.

## Conclusion

L'étude de faisabilité présentée dans ce chapitre montre la possibilité de réaliser un accéléromètre en silicium, avec un levier d'une taille centimétrique, dont la sensibilité atteindrait  $10^{-4} \text{ m/m s}^{-2}$ . On a proposé plusieurs moyens de détecter les déplacements du levier avec une résolution suffisante pour observer l'effet des marées. Ces méthodes sont déjà utilisées dans le domaine de la microscopie ainsi que dans celui des senseurs inertiels, en vertu de leurs très bonnes sensibilités. Au-delà de l'étude faite ici, la référence [Hons et Stewart, 2008] souligne en outre que la stabilité des capteurs est limitée au mieux à quelques secondes par un bruit type scintillement, ce qui les rend impropres à la métrologie des variations de pesanteur, à l'exception des systèmes à poutre vibrante. A l'heure actuelle ces derniers ont cependant des fidélités bien inférieures à celles requises pour la gravimétrie de précision.

On a vu finalement deux limitations fondamentales des systèmes à rappel de masses d'épreuve qui rendent difficile l'utilisation des accéléromètres sur microstructures pour la gravimétrie. En effet la bande passante tend à être favorisée au détriment de la sensibilité et donc de la résolution pour ces systèmes à cause des fortes raideurs et faibles masses disponibles à l'échelle des microstructures. A cause de ces faibles masses, le bruit thermomécanique peut en outre devenir très handicapant pour ces dispositifs, à moins de travailler à des températures cryogéniques. Enfin on montre le soin indispensable à porter à la stabilisation en température d'un levier en silicium pour préserver la stabilité de la mesure de pesanteur que l'on souhaite effectuer.

Sans remettre en cause définitivement l'utilisation des microstructures pour la gravimétrie [Hons et Stewart, 2008, Ghose, 2012], cette étude vient ainsi mettre en lumière la différence entre accéléromètres et gravimètres, notamment en ce qui concerne la stabilité à long terme et le compromis entre sensibilité et bande passante. L'idée de se servir de microstructures en silicium comme gravimètres est séduisante de par l'apparente simplicité et le faible coût annoncé des systèmes. Les difficultés de la mise en œuvre sont cependant réelles.





# Chapitre 4

## Signaux et bruits en gravimétrie

ON a envisagé dans le chapitre d'introduction quelques applications de la gravimétrie embarquée, et on a déjà esquissé certains ordres de grandeur des anomalies qui viennent influencer l'appareil de mesure. On cherche dans le chapitre présent à quantifier de manière plus précise les phénomènes auxquels un gravimètre embarqué est soumis, *en dehors du signal utile*, et on souhaite évaluer si ces phénomènes perturbateurs peuvent être soustraits de la mesure. Ainsi dans la section 4.1 page 61 on présente une étude fondée sur la bibliographie existante en matière d'effets et de modélisation en gravimétrie embarquée. La section 4.2 page 78 est ensuite consacrée à l'étude réalisée dans le cadre de la thèse sur l'influence gravitationnelle des vagues, un bruit spécifique à la mesure dans un sous-marin. La section 4.3 page 91 présente enfin les essais qui ont été effectués à Palaiseau avec un gravimètre prêté par l'Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP), pour avoir une prise en main expérimentale de la gravimétrie.

### 4.1 Bilan des incertitudes classiques

Pour évaluer le potentiel industriel des applications considérées de la gravimétrie embarquée, on souhaite quantifier au mieux les causes d'incertitude sur la mesure. Il s'agit de rassembler toutes les causes de bruit, puis d'estimer leur impact en prenant en compte les compensations possibles. On distingue deux catégories de bruits. Les bruits d'environnement sont irréductibles à la mesure. Les bruits de porteurs proviennent au contraire de l'utilisation des instruments pour la mesure embarquée. On ne revient pas dans cette section sur le bruit instrumental, déjà évoqué au chapitre 2 page 27. Le problème du bruit lié aux vagues pour la mesure en sous-marin fait pour sa part l'objet de la section 4.2 page 78. Le récapitulatif des exigences opérationnelles est donné à la fin de la section dans le tableau 4.2 page 77 pour réduire chaque incertitude à mieux que  $10^{-9} \text{ m s}^{-2}$  en gravimétrie et  $10^{-10} \text{ s}^{-2}$  en gradiométrie.

Détaillons maintenant les causes d'incertitude identifiées.

#### 4.1.1 Bruits d'environnement

Les bruits d'environnement sont les effets qui proviennent entièrement de l'extérieur du capteur et de son porteur. Certains de ces effets ont des causes purement gravitationnelles, c'est-à-dire qu'ils sont provoqués par des anomalies de masse. Les effets gravitationnels peuvent dans certains cas être prédits et soustraits. Ils font cependant intrinsèquement

partie du signal et peuvent à ce titre être difficiles à retirer. Au contraire d'autres effets sont d'ordre inertiel, c'est-à-dire qu'ils proviennent de déplacements incontrôlés de l'appareil de mesure. Lorsque ces mouvements sont lents l'accélération est imperceptible par le gravimètre. En revanche le déplacement de l'appareil dans le gradient de pesanteur terrestre peut être une cause d'incertitude. Les effets inertiels sont ainsi liés au positionnement de l'appareil de mesure. Toute la question est de savoir avec quelle exactitude on peut déterminer la position du gravimètre afin de réduire au maximum l'incertitude sur la mesure de pesanteur. Comme on va le voir, dans plusieurs cas comme celui des marées gravimétriques décrit à la section 4.1.1 page 68, certains phénomènes provoquent à la fois des effets gravitationnels et des déplacements dans le gradient de pesanteur terrestre.

### Positionnement

On a vu au chapitre d'introduction que le champ de pesanteur varie de  $5 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  suivant la latitude de la mesure, et de  $6 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  entre le point le plus bas et celui le plus haut de la surface terrestre. De telles variations exigent une exactitude de positionnement cohérente avec l'exactitude souhaitée de la mesure. De façon plus précise le champ de pesanteur au voisinage de l'ellipsoïde de référence s'écrit en fonction de la latitude  $\varphi$  et de la hauteur  $z$  au-dessus de la référence, à l'ordre 2 en  $f$  le paramètre géométrique d'aplatissement [Torge, 1989]

$$g = g_0 + g'_0 z + g''_0 \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3) \quad (4.1a)$$

$$\text{avec } g_0 = g_e \frac{1 + k(\sin \varphi)^2}{\sqrt{1 - e^2(\sin \varphi)^2}} \quad (4.1b)$$

$$g'_0 = -\frac{2g_0}{a} \left[ 1 + f - 2f(\sin \varphi)^2 + \frac{3}{2}f^2 - 2f^2(\sin \varphi)^2 + \frac{1}{2}f^2(\sin \varphi)^4 \right] - 2\omega^2 \quad (4.1c)$$

$$g''_0 = \frac{6g_0}{a^2 [1 - f(\sin \varphi)^2]^2} \quad (4.1d)$$

La signification et les valeurs des paramètres intervenant dans les formules précédentes sont résumées dans le tableau 4.1.

Par conséquent le gradient vertical  $g'_0$  est de l'ordre de  $-3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ , tandis que le gradient  $\frac{\partial g_0}{\partial(r\varphi)}$  suivant l'axe Sud-Nord est de l'ordre de  $8 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2}$  à proximité du maximum à la latitude  $\pm 45^\circ$ . On en déduit l'exactitude nécessaire du positionnement pour obtenir la qualité de mesure voulue du champ de pesanteur.

En ce qui concerne la mesure du gradient de pesanteur, on calcule de la même manière ses variations spatiales grâce aux formules (4.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} &\text{ vaut typiquement } 1 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-1} \\ \frac{\partial T_{zz}}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} &\text{ ont pour valeur maximale } 3 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ vers } \varphi = \pm 45^\circ \\ \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial T_{yy}}{\partial z} &\text{ ont pour valeur maximale } 3 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ vers } \varphi = 0^\circ \text{ et } \varphi = \pm 90^\circ \end{aligned}$$

où  $y$  est la variable d'espace le long de l'axe Sud-Nord. Il est remarquable que les composantes latérales du gradient sont nettement moins sensibles aux incertitudes de hauteur

Paramètre	Signification	Valeur
$g$	Champ de pesanteur au voisinage de l'ellipsoïde de référence.	Variable
$g_0$	Champ de pesanteur sur l'ellipsoïde.	Variable
$g'_0$	Dérivée première du champ par rapport à la hauteur, sur l'ellipsoïde.	Variable
$g''_0$	Dérivée seconde du champ par rapport à la hauteur, sur l'ellipsoïde.	Variable
$z$	Hauteur au-dessus de l'ellipsoïde.	Variable
$\varphi$	Latitude géographique ellipsoïdale.	Variable
$g_e$	Champ de pesanteur à l'équateur, sur l'ellipsoïde.	$9,78 \text{ m s}^{-2}$
$k$	Défini par $k = \frac{b g_p}{a g_e}$ avec $g_p$ le champ aux pôles et $b$ le demi petit axe de l'ellipsoïde.	$1,93 \cdot 10^{-3}$
$e$	Excentricité $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ de l'ellipsoïde.	$8,18 \cdot 10^{-2}$
$a$	Demi grand axe de l'ellipsoïde.	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$
$f$	Paramètre géométrique d'aplatissement défini par $f = \frac{a-b}{a}$ .	$3,35 \cdot 10^{-3}$
$\omega$	Vitesse angulaire de rotation terrestre.	$7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$

TABLEAU 4.1: Significations et valeurs des variables et paramètres des expressions (4.1), selon la référence [Torge, 1989].

que sa composante verticale  $T_{zz}$ .

### Milieu de mesure

Il faut rajouter à l'estimation faite ci-dessus l'effet du milieu homogène de masse volumique  $\rho$  non nulle dans lequel s'effectue la mesure. Au premier ordre en  $\delta z/R_{Terre}$ , le rapport entre le déplacement vertical  $\delta z$  et le rayon terrestre moyen  $R_{Terre}$ , la courbure terrestre peut être ignorée et la variation de pesanteur dans le milieu homogène découle de l'équation de Poisson (voir l'annexe A, section A.2.3 page A.2.3) et vaut

$$\delta g = 4\pi G \rho \delta z \quad (4.2)$$

Une incertitude  $\Delta z$  en positionnement induit donc une incertitude  $4\pi G \rho \Delta z$  en champ de pesanteur. Dans l'air et dans l'eau respectivement ce gradient supplémentaire vaut

$$\left. \frac{\Delta g}{\Delta z} \right]_{air} = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2}$$

$$\left. \frac{\Delta g}{\Delta z} \right]_{eau} = 8,4 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-2}$$

Une fois cet effet compensé pour une différence d'altitude  $z_1 - z_0$  il reste encore l'erreur  $\Delta \rho$  sur la masse volumique du milieu, soit au premier ordre une incertitude

$$\Delta g = 4\pi G |z_1 - z_0| \Delta \rho$$

Cet effet est d'autant plus gênant que la différence d'altitude  $|z_1 - z_0|$  est grande. Pour une mesure en sous-marin, la correction de milieu implique en particulier une connaissance suffisante de la salinité et de la température de l'eau.

Le modèle précédent, qui fait intervenir une anomalie linéaire en  $z$ , n'est pas suffisant pour la gradiométrie. Pour prendre en compte la courbure terrestre on modélise la Terre par une distribution de masse à symétrie sphérique, schématisée figure 4.1. Le milieu qui environne le gradiomètre est alors une fine couche homogène sphérique sur le globe terrestre. L'hypothèse de symétrie sphérique se justifie par deux arguments :

- D'une part si l'on suppose le milieu homogène localement, la courbure du milieu est localement identique à celle de la sphère qui sert de modèle. Les inhomogénéités à grande distance ne sont de toute façon pas détectables par le gradiomètre.
- D'autre part les éventuelles inhomogénéités sortent du cadre du modèle. On peut les traiter à part, avec les inhomogénéités géologiques (voir la section 4.1.1).

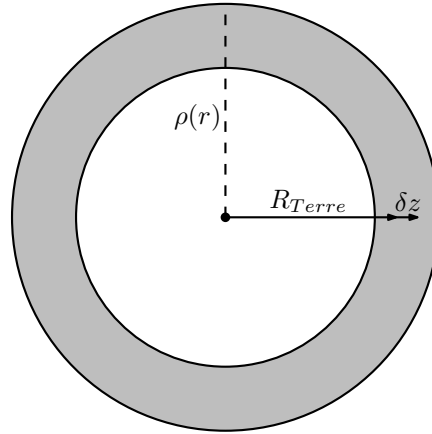


FIGURE 4.1: Modèle de distribution de masse à symétrie sphérique pour le calcul des variations de gradient dans un milieu homogène.

D'après le théorème de Gauss, du fait de la symétrie sphérique de la distribution considérée

$$\underline{g}(r) = -G \frac{M(r)}{r^2} \underline{e}_r \quad (4.3)$$

avec  $M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$

Cette expression ne dépend que de l'altitude donc le gradient est purement vertical, et lui-même ne dépend que de l'altitude. Le gradient vertical  $T_{zz} = \underline{e}_r \cdot \frac{dg}{dr}$  vaut donc

$$T_{zz} = -G \left[ \frac{M'(r)}{r^2} - \frac{2M(r)}{r^3} \right] \quad (4.4)$$

Le terme  $G \frac{2M(r)}{r^3}$  est le gradient dans le vide, il est déjà pris en compte dans l'incertitude de positionnement (section précédente). On retient donc uniquement le terme  $-\frac{GM'(r)}{r^2}$  pour le calcul de la correction, soit  $T_{zz}]_{Milieu} = -4\pi G\rho$  d'où une incertitude  $\Delta T_{zz} = -4\pi G\Delta\rho$ , sur le gradient, liée à celle  $\Delta\rho$  sur la masse volumique du milieu

environnant. D'après la relation (4.4) la variation de gradient suivant la hauteur vaut  $\frac{dT_{zz}}{dr} = -G \left[ \frac{M''(r)}{r^2} - \frac{4M'(r)}{r^3} + \frac{6M(r)}{r^4} \right]$ . Pour la même raison que précédemment on laisse de côté le terme  $-\frac{6GM}{r^4}$ , et l'on s'intéresse à

$$\left. \frac{dT_{zz}}{dr} \right]_{Milieu} = -\frac{16\pi G\rho}{r} - 4\pi G \frac{d\rho}{dz}$$

Le gradient de densité est une caractéristique importante pour l'étude de la propagation du son. Ce gradient peut être caractérisé par la pulsation  $n$  de Brunt-Vaisala, définie par [Dashen *et al.*, 1979, chapitre 1]

$$n^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$$

D'après la référence [Dashen *et al.*, 1979, chapitre 1], les valeurs typiques de  $n$  dans l'océan sont comprises entre  $6 \cdot 10^{-5}$  rad/s à plusieurs kilomètres de profondeur et  $8 \cdot 10^{-4}$  rad/s à proximité de la surface. Une incertitude  $\Delta z$  sur l'altitude induit une incertitude sur le gradient égale à

$$\Delta T_{zz}]_{Milieu} = -4\pi G\rho \left[ \frac{4}{R_{Terre}} - \frac{n^2}{g} \right] \Delta z$$

A faible profondeur dans l'océan (pour  $n \sim 6 \cdot 10^{-5}$  rad/s)

$$\left. \frac{\Delta T_{zz}}{\Delta z} \right]_{Milieu} = -5 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-1}$$

La masse volumique de l'air est faible devant celle de l'eau, donc l'incertitude sur la mesure du gradient de pesanteur dans l'air causée par le milieu de mesure est faible devant  $5 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-2} \text{ m}^{-1}$ , donc négligeable devant l'incertitude causée par la variation de gradient dans le vide, décrite à la section précédente.

### Axe de mesure

D'après l'équation (2.2) de la section 2.1.1 (chapitre 2, page 28), l'erreur  $\Delta g$  sur l'anomalie de pesanteur, liée à une incertitude  $\Delta e$  sur l'orientation de l'axe de mesure du champ s'écrit

$$\Delta g = g_0 \Delta e \sin \theta$$

avec  $g_0$  le champ moyen et  $\theta$  l'angle entre l'axe de mesure et la verticale. Comme remarqué au chapitre 2, la mesure verticale ( $\theta$  proche de 0) est ainsi la moins susceptible aux incertitudes d'orientation de l'axe sensible. Dans ce cas l'erreur est rejetée à l'ordre 2 et vaut

$$\Delta g = g_0 (1 - \cos \Delta e) \approx g_0 \frac{\Delta e^2}{2}$$

Pour la gradiométrie on considère le cas général représenté figure 4.2 dans lequel les mesures sont effectuées sur des axes entachés d'incertitudes  $\Delta e_1$  et  $\Delta e_2$  et l'axe qui les

sépare fait quant à lui un angle incontrôlé  $\Delta e_3$  avec l'axe  $\underline{e}_3$  souhaité. Le champ s'écrit au premier ordre  $\underline{g}(\underline{r}) = \underline{g}_0 + \underline{T} \cdot \underline{r}$  et on cherche  $T_{03} = \underline{e}_0 \underline{T} \underline{e}_3$ , avec  $\underline{g}_0$  un champ homogène et  $\underline{T}$  le tenseur gradient de champ. Avec les incertitudes, l'estimation  $\tilde{T}_{03}$  de la composante  $T_{03}$  cherchée donne

$$\tilde{T}_{03} = \frac{g_2 - g_1}{l} = T_{03} + \underline{g}_0 \cdot \frac{\Delta \underline{e}_{diff}}{l} + \underline{e}_3 \underline{T} \Delta \underline{e}_{com} + \underline{e}_0 \underline{T} \Delta \underline{e}_3$$

avec  $\Delta \underline{e}_{diff} = \Delta \underline{e}_2 - \Delta \underline{e}_1$  (4.5)

$$\Delta \underline{e}_{com} = \frac{1}{2} (\Delta \underline{e}_2 + \Delta \underline{e}_1)$$

Le terme  $\underline{g}_0 \cdot \frac{\Delta \underline{e}_{diff}}{l}$  est un mode différentiel que l'on peut s'efforcer de rejeter.  $\Delta \underline{e}_{diff}$  est perpendiculaire à  $\underline{e}_0$  donc l'erreur différentielle est plus faible lorsque les mesures se font selon l'axe vertical, comme dans le cas de la gravimétrie. Dans ce cas l'erreur est rejetée à l'ordre 2 et vaut  $\underline{g}_0 \cdot \frac{\Delta \underline{e}_{diff}}{l} = \frac{g_0}{2l} (\Delta e_1^2 - \Delta e_2^2)$ . Les deux termes suivants correspondent chacun à la contamination de la mesure par d'autres composantes du tenseur de gradient.

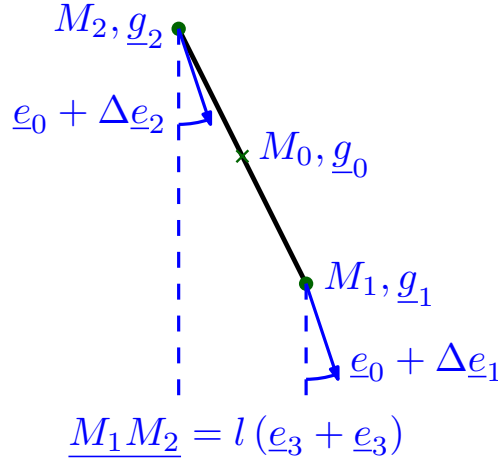


FIGURE 4.2: Mesure schématisée du gradient de pesanteur, avec des erreurs sur les attitudes des capteurs et du bras de levier.

Pour évaluer la sensibilité de la mesure de gradient on considère deux types de composantes du tenseur. Lorsque la mesure concerne une composante sur la diagonale du tenseur, comme la dérivée *verticale* du champ de pesanteur, alors  $\underline{e}_0 = \underline{e}_3$  et  $\underline{e}_0$  est perpendiculaire à  $\Delta \underline{e}_{com}$  et à  $\Delta \underline{e}_3$ . Les composantes qui se projettent par erreur sur la mesure sont alors non diagonales, et leur ordre de grandeur est donc  $10^{-8} \text{ s}^{-2}$  sur Terre [Torge, 1989]. Au contraire lorsque la composante mesurée n'est pas sur la diagonale du tenseur, comme par exemple une dérivée *horizontale* du champ de pesanteur, une composante diagonale peut se projeter par erreur sur la mesure, avec un ordre de grandeur de  $10^{-6} \text{ s}^{-2}$ . D'après l'équation (4.5) ces erreurs sont proportionnelles à l'erreur  $\Delta \underline{e}_{com}$  sur l'angle moyen de mesure entre les deux parties du gradiomètre et à l'erreur  $\Delta \underline{e}_3$  sur le bras de levier de mesure.

### Anomalies géologiques spatiales

Les anomalies de densité souterraines constituent souvent en géophysique les sources que l'on cherche à détecter grâce à la mesure du champ de pesanteur. On peut en analyser

les propriétés stochastiques pour les applications où ce n'est justement pas le cas. Ce type d'étude sert également à l'interpolation de mesures en gravimétrie [Goad *et al.*, 1984]. Torge [Torge, 1989] reprend ainsi plusieurs études sur les propriétés de *l'anomalie de pesanteur à l'air libre*. De la même manière qu'en météorologie les mesures de pression sont ramenées au niveau de la mer pour effectuer comparaisons et calculs, l'anomalie à l'air libre est obtenue en supprimant d'une mesure l'effet du gradient de pesanteur, et en lui soustrayant la valeur attendue à partir d'un modèle d'ellipsoïde. Le calcul de l'anomalie à l'air libre permet ainsi de dégager la partie *anormale* du champ mesuré et d'effectuer des comparaisons aussi indépendantes de l'altitude et de la latitude que possible, mais qui prennent en compte tous les effets géologiques et topographiques. D'après Torge l'écart type  $\sigma_{\delta g}$  des anomalies à l'air libre mesurées vaut  $4,24 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$  à l'échelle planétaire, avec une longueur typique  $\lambda_{corr}$  de corrélation comprise entre 50 km et 100 km. Cet auteur remarque en outre que la topographie cause des variations plus importantes et avec une corrélation sur de plus grandes distances sur le continent (en Europe dans son exemple) que sur l'océan (Mer du Nord et Atlantique Nord). Ainsi l'ordre de grandeur sur l'incertitude  $\Delta g$  causée par l'erreur  $\Delta d$  de position vaut

$$\Delta g \sim \sigma_{\delta g} \sqrt{\frac{2\Delta d}{\lambda}}$$

avec  $\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \sigma_{\delta g} \sim 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2} \text{ m}^{-1/2}$

Pour un navire se déplaçant à une vitesse typique de dix nœuds, soit 15 km/h, les variations de champ d'origine géologique ont donc des temps de corrélation de l'ordre de 3 h à 6 h, tandis que pour un avion volant à 500 km/h, il s'agit plutôt de 5 min à 20 min.

Il est essentiel de noter que l'anomalie à l'air libre prend en compte l'altitude mais pas la topographie. Dans le cas où les inhomogénéités du champ d'origine géologique constituent un bruit, le signal peut être notablement amélioré par soustraction d'une estimation de l'effet de la topographie sur le champ de pesanteur. Ainsi Goad [Goad *et al.*, 1984] a calculé la variance et la longueur de corrélation des données corrigées sur l'ensemble du territoire américain hors Alaska et Hawaii. Goad note que la correction de terrain peut atteindre  $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$  voire  $3 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$ . Suivant les régions l'écart type local va de moins de  $5 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$  à plus de  $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$  pour les données de Goad, avec des longueurs de corrélation de 10 km typiquement. Avec les résultats de Goad on ramène  $\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \sigma_{\delta g}$  à  $1,4 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2} \text{ m}^{-1/2}$ .

Plus récemment Flury [Flury, 2006] a conduit un travail similaire, cette fois-ci avec des ensembles de données provenant de treize régions d'Europe et du Japon, et avec un algorithme de correction topographique prévu pour mieux prendre en compte les corrélations à plus grande échelle. L'écart type est en général inférieur à  $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$ , et les longueurs de corrélation s'étalent de 2 km à 16 km suivant les régions, soit un ordre de grandeur identique au précédent pour  $\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \sigma_{\delta g}$ .

Il convient enfin de remarquer que les calculs de variance et de corrélation présentés par Torge [Torge, 1989], Goad [Goad *et al.*, 1984] et Flury [Flury, 2006] ont été effectués avec des données provenant de mesures séparées de distances au moins kilométriques, ce qui donne leur échelle de validité. A courte échelle les résultats ne sont plus vraisemblables.



Par exemple avec les valeurs ci-dessus une variation de champ de  $10^{-7} \text{ m s}^{-2}$  correspondrait à un déplacement typique de 5 mm, alors qu'en pratique la mesure est loin d'être aussi sensible en position, comme on l'a observé lors des essais présentés à la section 4.3. A l'échelle planétaire, le modèle de degré de variance [Torge, 1989] est préférable pour prendre en compte la topologie sphérique de la Terre.

### Marées

Comme cela a déjà été évoqué à la section 1.1.4, page 15 du chapitre d'introduction, le mouvement des corps célestes provoque des oscillations du champ de pesanteur d'amplitude maximale  $1,4 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$ . Cet effet se décompose en 85% d'attraction gravitationnelle directe et 15% d'effets indirects liés aux déplacements géologiques provoqués par ces oscillations de champ de pesanteur [Torge, 1989, Hinderer *et al.*, 2007, Ducarme, 2009].

La modélisation astronomique très fine du système solaire permet la prédiction de l'effet gravitationnel direct avec une incertitude meilleure que  $10^{-10} \text{ m s}^{-2}$ . La compensation de la réponse géologique aux marées est plus difficile. Cette compensation peut provenir de modèles aux paramètres ajustés expérimentalement localement ou aux paramètres calculés à partir de mesures globales. Les meilleurs modèles permettent l'accord avec les mesures expérimentales à  $5 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2}$  voire  $5 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$  près [Ducarme, 2009]. Les modèles de surcharge océanique sont cependant nettement moins fiables à proximité des côtes, et gardent des incertitudes plus élevées [Ducarme, 2009].

Les modèles les plus fiables font intervenir une optimisation locale de leurs paramètres. Cette méthode est adaptée aux mesures de séries temporelles en observatoire, par exemple avec un gravimètre à supraconducteur ou un gravimètre balistique. Dans le cas d'un véhicule qui parcourt plusieurs centaines ou milliers de kilomètres tout en effectuant des mesures, l'utilisation de nombreux modèles locaux devient donc nécessaire suivant l'exactitude recherchée.

La variation du signal liée aux marées implique une certaine exactitude sur la datation des mesures. Ainsi une incertitude  $\Delta t$  sur la datation induit une incertitude sur la mesure

$$\Delta g = \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right]_{\text{marée}} \Delta t$$

avec  $\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right]_{\text{marée}} \sim 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-3}$

Enfin les phénomènes de marées sont cantonnés à des fréquences très prédictibles. Par conséquent à condition que le signal à détecter se situe en dehors des fréquences en question, un filtrage numérique coupe bande peut être une autre méthode pour l'élimination de l'incertitude résiduelle provenant des marées.

### Effets météorologiques

Comme pour les marées quoiqu'avec une amplitude moindre, les variations météorologiques influencent la mesure du champ de pesanteur de façon directe et également par un effet de surcharge du sol par l'atmosphère. Hinderer [Hinderer *et al.*, 2007] évoque un coefficient d'admittance de l'ordre de  $-3 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$ , dû pour 80% à l'attraction directe et pour 20% à la surcharge, ce qui représente des différences pouvant atteindre  $10^{-7} \text{ m s}^{-2}$  pour une amplitude de pression de 30 hPa. Les variations peuvent être rapides

(quelques heures à quelques jours) à beaucoup plus lentes (saisonnères). La correction de pression doit cependant être étudiée localement pour être véritablement efficace. Le coefficient d'admittance dépend du lieu de mesure. Une bonne correction est idéalement non locale, c'est-à-dire qu'elle prend en compte la pression moyenne dans un rayon de quelques centaines de kilomètres en plus de la pression locale, ce qui permet au modèle de mieux compenser les effets de surcharge. Enfin le coefficient d'admittance n'est pas le même pour les différentes fréquences des effets de pression [Hinderer *et al.*, 2007]. Ces aspects rendent apparemment difficile l'établissement d'un modèle global fiable à mieux que  $1 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$  à  $1 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$ . Les variations de température jouent également un rôle. Les variations de pesanteur causées par des fluctuations de températures atmosphériques indépendantes de la pression auraient cependant une amplitude inférieure à  $10^{-9} \text{ m s}^{-2}$  [Hinderer *et al.*, 2007].

L'hydrologie du sol contribue également au signal de pesanteur. L'effet est cette fois-ci essentiellement direct, aucune surcharge n'étant observée [Hinderer *et al.*, 2007]. Un modèle simple de couche infinie donne l'expression  $\delta g_{hydro} = 2\pi G \rho_{eau} \alpha h$  pour l'anomalie de pesanteur causée par l'attraction gravitationnelle de l'eau dans le sous-sol, avec  $\rho_{eau}$  la masse volumique de l'eau,  $\alpha$  la porosité du sol, et  $h$  la hauteur d'eau. Par exemple avec  $\alpha = 10\%$  et  $h = 1 \text{ m}$  on a  $\delta g_{hydro} = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$ . L'hydrologie peut ainsi être une source d'incertitude non négligeable. La compensation est ardue, d'une part à cause de la nécessité de modéliser les nappes phréatiques environnantes, d'autre part parce que l'admittance n'est locale ni dans le temps ni dans l'espace. Les résultats dans ce domaine concernent des études locales [Hinderer *et al.*, 2007, Torge, 1989, Neumeyer *et al.*, 2006].

### 4.1.2 Bruits de porteur

On a fait l'inventaire à la section précédente de bruits qui s'appliquent quelle que soit la méthode et la finalité de la mesure de pesanteur ou de gradient. On étudie ici les incertitudes qui sont toujours indépendantes de la technologie utilisée pour la mesure, mais qui sont spécifiques à la mesure embarquée du champ ou du gradient.

#### Correction d'Eötvös

La section précédente fait état d'incertitudes de mesure causées par des incertitudes sur la position ou l'attitude du capteur. Lorsque la mesure se fait au cours du mouvement du porteur, il faut en outre tenir compte du fait que le référentiel terrestre n'est pas galiléen, et aussi qu'un mouvement même rectiligne uniforme par rapport au sol comprend une rotation dans le référentiel géocentrique. Cette correction  $\delta g_{Eötvös}$ , appelée *correction d'Eötvös*, s'écrit dans l'approximation sphérique, en projection verticale [Torge, 1989]

$$\delta g_{Eötvös} = -\frac{v^2}{r} - 2\omega v \cos \varphi \sin \alpha \quad (4.6)$$

avec  $v$  la vitesse du porteur par rapport au sol,  $r$  la distance au centre de la Terre,  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  [Torge, 1989] la vitesse angulaire de rotation terrestre,  $\varphi$  la latitude à laquelle s'effectue la mesure et  $\alpha$  le cap instantané du porteur, par rapport au Nord. Le terme  $-\frac{v^2}{r}$  est l'accélération d'inertie d'entraînement, indépendante de la rotation terrestre, tandis que  $-2\omega v \cos \varphi \sin \alpha$  provient de l'accélération causée par le déplacement dans le

référentiel terrestre en rotation. En particulier  $-2\omega v \cos \varphi \sin \alpha$  dépend du cap suivi et cette correction est maximale lorsque le porteur suit une trajectoire parallèle à l'équateur.

La dérivation de l'équation (4.6) par rapport à  $r$  et à  $r\varphi$  donne les composantes  $T_{zz}$  et  $T_{zy}$  du gradient associé à la correction d'Eötvös :

$$T_{zz} = -\frac{\partial \delta g}{\partial r} = -\frac{v^2}{r^2} \quad (4.7a)$$

$$T_{zy} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \delta g}{\partial \varphi} = -\frac{2\omega v}{r} \sin \alpha \sin \varphi \quad (4.7b)$$

En revanche aucune composante, suivant la longitude, du gradient du champ n'a besoin d'être compensée.

Lorsque le porteur suit une trajectoire d'Est en Ouest ( $\alpha = 270^\circ$ ) sur l'Equateur ( $\varphi = 0^\circ$ ) les corrections d'Eötvös valent ainsi :

- Pour un navire voguant à 10 nœuds soit 15 km/h

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r} &= 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2} \\ 2\omega v \cos \varphi \sin \alpha &= 6,1 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2} \\ T_{zz} &= -4,3 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-2} \\ T_{zy} &= 0 \end{aligned}$$

- Pour un aéronef allant à 500 km/h

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r} &= 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2} \\ 2\omega v \cos \varphi \sin \alpha &= 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \\ T_{zz} &= -4,8 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2} \\ T_{zy} &= 0 \end{aligned}$$

En pratique pour compenser les mesures en avion de l'effet Eötvös il est nécessaire d'utiliser un modèle qui prend en compte l'aplatissement de la Terre, à cause des vitesses importantes en jeu [Torge, 1989, Dubois, 1997].

En différenciant les expressions (4.6), (4.7a) et (4.7b) on obtient les incertitudes  $\Delta g_{Eötvös}$ ,  $\Delta T_{zz}$  et  $\Delta T_{zy}$  liées à celles sur la vitesse, le cap, la position en latitude et en

altitude et enfin sur la rotation terrestre dans la correction d'Eötvös :

$$\begin{aligned} \Delta g_{E\ddot{o}tv\ddot{o}s} = & - \left[ \frac{2v}{r} + 2\omega \cos \varphi \sin \alpha \right] \Delta v + \frac{v^2}{r^2} \Delta z \\ & - 2v \cos \varphi \sin \alpha \Delta \omega \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\Delta T_{zz} = -\frac{2v}{r^2} \Delta v + \frac{2v^2}{r^3} \Delta r \quad (4.8b)$$

$$\begin{aligned} \Delta T_{zy} = & -\frac{2\omega}{r} \sin \alpha \sin \varphi \Delta v \\ & - \frac{2v}{r} \sin \alpha \sin \varphi \Delta \omega \\ & + \frac{2\omega v}{r^2} \sin \alpha \sin \varphi \Delta z \\ & - \frac{2\omega v}{r} [\cos \alpha \sin \varphi \Delta \alpha + \sin \alpha \cos \varphi \Delta \varphi] \end{aligned} \quad (4.8c)$$

En particulier un choix de cap judicieux permet de minimiser l'incertitude causée par l'erreur de cap pour un cap moyen parallèle à l'équateur, ou bien celle causée par les erreurs de vitesse et de positionnement, pour un cap moyen dans l'axe Nord-Sud.

### Bruit inertiel

Un gravimètre mesure dans son référentiel l'accélération de sa masse d'épreuve

$$\underline{a} = \underline{g} + \underline{a}_i + \frac{\underline{f}}{m} \quad (4.9)$$

où  $\underline{g}$  est le champ de pesanteur local,  $\underline{a}_i$  l'accélération d'inertie par rapport au référentiel terrestre et  $\frac{\underline{f}}{m}$  l'accélération causée par les forces qui ne sont ni gravitationnelles ni inertielles,  $m$  étant la masse d'épreuve du gravimètre. Dans un gravimètre à force de rappel  $\underline{a}$  est négligeable et  $\frac{\underline{f}}{m}$  permet de connaître  $\underline{g} + \underline{a}_i$ . Dans un gravimètre balistique les forces non inertielles sont minimisées ou maîtrisées [Niebauer *et al.*, 1995] et la trajectoire de la masse d'épreuve donne  $\underline{a}$  dont  $\underline{g} + \underline{a}_i$  est déduit. D'après le principe d'équivalence faible d'Einstein, l'accélération d'inertie est de même nature que le champ de pesanteur local, elle ne peut donc pas en être distinguée simplement par une mesure inertielle. L'accélération d'inertie constitue à ce titre une cause fondamentale d'erreur.

Le bruit inertiel se décline suivant trois formes, aux caractéristiques et domaines de gêne différents :

### Sismique

Le bruit *sismique* correspond aux vibrations transmises par le sol. Il provient à la fois de phénomènes météorologiques, géophysiques, biologiques et d'origine humaine. Le bruit sismique est présent à différents degrés dans toutes les fréquences, comme décrit par les *New Low Noise Model* et *New High Noise Model* de Peterson [Peterson, 1993]. Ces modèles ont déjà été évoqués dans le chapitre d'introduction, section 1.1.1, page 13. Le bruit sismique est surtout un problème pour les mesures stationnaires, de terrain comme de laboratoire. En gravimétrie embarquée en effet la liaison mécanique

entre le sol et l'appareil de mesure est généralement très amortie d'une part, et d'autre part le bruit sismique est noyé dans les autres types de bruits inertiels.

### Vibrations

Les systèmes de propulsion des porteurs en gravimétrie embarquée induisent souvent des vibrations importantes de leurs structures, qui sont ressenties directement par les gravimètres.

### Déplacements incontrôlés

Un véhicule tente de maîtriser sa trajectoire. Malgré cela les conditions d'environnement, de route, d'air ou de mer le font dévier de sa trajectoire moyenne. Cet effet induit une incertitude de positionnement et d'attitude qui sont dommageables pour la mesure du champ de pesanteur, comme on l'a vu pages 62 à 66. Les écarts de trajectoire provoquent de plus des accélérations qui viennent perturber la mesure. Les incertitudes causées par les déplacements incontrôlés peuvent être particulièrement gênantes en gravimétrie embarquée, étant donné que les périodes concernées sont de l'ordre de quelques secondes à une vingtaine de secondes, pour la gravimétrie marine comme pour la gravimétrie aéroportée, ce qui correspond aux périodes de signaux que l'on peut souhaiter mesurer. L'amplitude des perturbations dépend de l'état de la mer pour la gravimétrie marine, et des conditions atmosphériques pour la gravimétrie aéroportée [Balmino *et al.*, 1982].

Les méthodes de suppression du bruit inertiel se décomposent elles-mêmes en plusieurs catégories :

### Stabilisation

Le plus simple est encore de placer le gravimètre dans des conditions telles que son référentiel de mesure soit aussi proche que possible de la référence inertielle terrestre souhaitée. Dans le cas de mesures stationnaires on s'assure ainsi d'une liaison mécanique bien rigide avec le sol, pour éviter tout déplacement incontrôlé. Le bruit sismique demeure, mais on peut réduire sa part provenant de l'activité humaine en s'assurant que la liaison mécanique est plus rigide avec le sous-sol qu'avec la surface. Cela est possible par exemple grâce à une dalle posée sur un pilier reposant sur le plancher rocheux en profondeur mais déconnectée du sol. Dans le cadre de cette démarche, l'opérateur évitera de s'approcher de son instrument pendant la phase de mesure. Dans un véhicule la stabilisation ne peut pas être parfaite. En revanche on peut choisir autant que possible de placer l'instrument à l'endroit du porteur le moins sensible aux vibrations et aux déplacements incontrôlés. Des compromis sont parfois à faire. Le centre de tangage et de roulis d'un navire est ainsi l'endroit idéal pour minimiser les déplacements incontrôlés, mais c'est souvent là que se trouve la salle des machines ! [Balmino *et al.*, 1982, Dubois, 1997]

### Préfiltrage mécanique

La référence inertielle d'un gravimètre se trouve généralement sur une plate-forme amortie mécaniquement. Cet amortissement peut être passif, et éventuellement constituer le cœur du capteur comme pour un gravimètre à ressort, le ressort constituant lui-même un filtre passe-bas. L'amortissement peut également être actif, comme par exemple dans le cas du *Super Spring* d'un gravimètre FG5 [Niebauer *et al.*, 1995] (voir la section 2.3.2 page 35 du chapitre 2 concernant ce gravimètre). L'amortissement filtre les accélérations de fréquences supérieures à une fréquence

de coupure, si bien que le gravimètre ne mesure plus que les accélérations basses fréquences qui constituent en général le signal intéressant.

### Filtrage du signal

Une fois le signal acquis, il peut de nouveau être filtré électroniquement, de façon analogique ou numérique, pour ne garder que les fréquences auxquelles on s'intéresse. Par exemple le processus de calcul d'une moyenne sur un nombre donné d'échantillons avant présentation du résultat, comme dans le CG-5, constitue un filtrage passe-bas numérique. Cette méthode est nettement plus simple à mettre en œuvre que l'amortissement mécanique. Elle est en outre plus flexible puisque l'intégralité du signal peut être conservée et traitée de nouveau si nécessaire. En revanche l'échantillonnage doit respecter la limite de Shannon sous peine de risquer un problème de crénelage. Le préfiltrage mécanique peut de plus être nécessaire de toute façon lorsque le bruit mécanique haute fréquence est trop important pour la gamme de mesure linéaire de l'instrument.

### Correction

L'accélération se distingue de la gravitation par le déplacement dans le référentiel terrestre qui l'accompagne. Lorsqu'une mesure suffisamment bonne du déplacement ou de la vitesse est disponible, elle peut ainsi être utilisée pour compenser l'accélération dans le signal de gravimétrie.

L'enregistrement d'un signal différentiel permet de s'affranchir en bonne partie des accélérations parasites. En effet l'accélération d'inertie  $\underline{a}_i$  du référentiel de l'instrument par rapport au référentiel terrestre s'écrit

$$\underline{a}_i = \underline{a}_0 + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{r}) + \dot{\underline{\Omega}} \wedge \underline{r} + 2\underline{\Omega} \wedge \dot{\underline{r}} \quad (4.10)$$

avec  $\underline{a}_0$  l'accélération dans le référentiel terrestre d'un point  $O$  fixe par rapport au capteur,  $\underline{\Omega}$  le vecteur rotation du référentiel courant par rapport au référentiel terrestre, et  $\dot{\underline{\Omega}}$  sa dérivée temporelle,  $\underline{r}$  le point courant, par rapport à  $O$ , et  $\dot{\underline{r}}$  sa vitesse dans le référentiel de l'instrument. Lorsque les masses d'épreuves du gradiomètre sont maintenues immobiles l'accélération de Coriolis  $2\underline{\Omega} \wedge \dot{\underline{r}}$  est nulle. L'erreur  $\Delta\underline{T}$  causée par les bruits inertiels sur le gradient vaut donc

$$\Delta\underline{T} = \underline{\underline{\Omega}}^* \cdot \underline{\underline{\Omega}}^* + \dot{\underline{\underline{\Omega}}}^* \quad (4.11)$$

avec  $\underline{\underline{\Omega}}^*$  le tenseur qui correspond à la rotation infinitésimale  $\underline{r} \mapsto \underline{\Omega} \wedge \underline{r}$ , et  $\dot{\underline{\underline{\Omega}}}^*$  sa dérivée. La mesure du gradient est donc insensible aux accélérations rectilignes, puisqu'elles affectent de la même manière toutes les masses d'épreuve du capteur. Les rotations ont en revanche encore une influence sur la mesure du gradient de pesanteur. On peut remarquer cependant que le terme  $\dot{\underline{\underline{\Omega}}}^*$  est un tenseur antisymétrique, contrairement au tenseur gradient<sup>1</sup>  $\underline{T} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$ , qui est symétrique. Par conséquent la mesure  $\underline{\tilde{T}}$  des neuf composantes du gradient, puis le calcul du tenseur symétrisé  $\frac{1}{2} (\underline{\tilde{T}} + {}^t \underline{\tilde{T}})$  permet de rejeter au second ordre l'incertitude due aux rotations incontrôlées [Pajot, 2007, Torge, 1989].

1. Avec  $U$  le potentiel de pesanteur et  $x_1, x_2, x_3$  les coordonnées cartésiennes du repère que l'on se donne.

### Déplacement propre de masse

La masse propre du véhicule porteur et de son équipement vient influencer la mesure embarquée de champ ou de gradient de pesanteur. La masse fixe constitue un signal continu que l'on peut envisager de soustraire, grâce à des mesures ou bien à une modélisation, dans le cas où la mesure absolue est nécessaire. Les variations ou déplacements de masse sont plus problématiques. Pour fixer les idées on considère quelques cas simples, dans lesquels les masses sont supposées ponctuelles pour calculer les ordres de grandeur des modifications  $\delta g$  et  $\delta T$  de la pesanteur et de son gradient, liées à la disparition des masses. Un déplacement dans lequel la distance d'une masse à l'instrument est multipliée par 10 correspond à une diminution de signal d'un facteur 100 de l'anomalie de pesanteur, et d'un facteur 1000 pour le gradient, si bien que les ordres de grandeur sont les mêmes pour le déplacement d'une masse propre et pour sa disparition. Pour illustrer le fait que l'effet est plus significatif en gradiométrie, on ramène dans chaque exemple les amplitudes des signaux causés par les mouvements de masse propre aux valeurs du champs de pesanteur normal  $g_0 \approx 10 \text{ m s}^{-2}$  et du gradient vertical normal de champ  $T_0 \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ .

Comme premier exemple, considérons le cas d'un navire qui consomme dix tonnes de carburant. Si la soute à carburant se trouve à 10 m de l'instrument, alors on obtient

$$\begin{aligned}\delta g &\approx 7 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2} \text{ soit une fraction } 7 \cdot 10^{-10} \text{ de } g_0 \\ \delta T &\approx 1 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2} \text{ soit une fraction } 4 \cdot 10^{-4} \text{ de } T_0\end{aligned}$$

Dans le cas d'un avion de tourisme, la masse du carburant consommée en un levé sera plutôt de l'ordre de 100 kg, mais la distance à l'instrument peut être réduite à 5 m soit

$$\begin{aligned}\delta g &\approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \text{ soit une fraction } 3 \cdot 10^{-11} \text{ de } g_0 \\ \delta T &\approx 1 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2} \text{ soit une fraction } 3 \cdot 10^{-5} \text{ de } T_0\end{aligned}$$

Si l'on considère ensuite le déplacement d'un homme de 100 kg qui se trouve à 3 m de l'instrument on obtient

$$\begin{aligned}\delta g &\approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \text{ soit une fraction } 7 \cdot 10^{-11} \text{ de } g_0 \\ \delta T &\approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2} \text{ soit une fraction } 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ de } T_0\end{aligned}$$

Comme on le voit avec les trois exemples présentés ici, les déplacements de masse dans le véhicule porteur sont en général des causes d'incertitudes modestes en comparaison des bruits inertiels ou des incertitudes de déplacement. Ces déplacements doivent cependant être modélisés et pris en compte lorsque les masses déplacées représentent plusieurs tonnes et sont à grande proximité de l'instrument, surtout pour la gradiométrie.

### 4.1.3 Conclusion sur les bruits classiques

Pour conclure sur les causes classiques d'incertitude, on dresse dans le tableau 4.2 la liste des contraintes pour que chaque cause d'erreur ne contribue pas à une incertitude de plus de  $\Delta g_0 = 10^{-9} \text{ m s}^{-2}$  en gravimétrie et  $\Delta T_0 = 10^{-10} \text{ s}^{-2}$  en gradiométrie. Le choix de ces valeurs repose sur la perspective de mesures avec une résolution de  $10^{-8} \text{ m s}^{-2}$  en gravimétrie, soit l'état de l'art pour la mesure stationnaire de terrain, et optimiste pour la mesure embarquée en champ terrestre [Torge, 1989, Dubois, 1997, Merlet, 2010], et une

résolution  $10^{-9} \text{ s}^{-2}$  en gradiométrie, soit ce qui est mesurable aujourd'hui en gradiométrie aéroportée [Pajot, 2007].

Les évaluations numériques présentées dans le tableau 4.2 ne sont pas définitives. En particulier elles ne tiennent pas compte des éventuels traitements réalisables, par exemple par filtrage en fréquence, ou par réjection de modes communs lorsque cela est possible. Enfin le tableau 4.2 ne tient pas compte des incertitudes instrumentales.



Cause d'incertitude	Page de référence	Paramètre à maîtriser	Contrainte pour la gravimétrie ( $\Delta g < 10^{-9} \text{ m s}^{-2}$ )	Contrainte pour la gradiométrie ( $\Delta T < 10^{-10} \text{ s}^{-2}$ )
Positionnement <sup>1</sup>	62	Hauteur Latitude	$\Delta z < 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ $\Delta \varphi < 4 \cdot 10^{-3}''$ (12 cm)	$\Delta z < 100 \text{ m}$ $\Delta \varphi < 18''$ (30 km)
Milieu de mesure <sup>2</sup>	63	Hauteur (dans l'air) Hauteur (dans l'eau) Densité du milieu	$\Delta z < 1 \text{ m}$ $\Delta z < 1 \text{ mm}$ $\Delta \rho < 10 \text{ g m}^{-3}$ <sup>4</sup>	<sup>-3</sup> $\Delta z < 1900 \text{ m}$ $\Delta \rho < 100 \text{ g m}^{-3}$
Axe de mesure	65	Angle de projection <sup>5</sup> Angle de projection <sup>7</sup> Erreur différentielle <sup>8</sup> Erreur de projection <sup>9</sup> Erreur commune <sup>10</sup> Erreur d'axe de mesure <sup>10</sup>	$\Delta e < 3''$ $\Delta e < 2 \cdot 10^{-5}''$ <sub>-6</sub> <sub>-6</sub> <sub>-6</sub> <sub>-6</sub>	<sub>-6</sub> <sub>-6</sub> $\Delta e_{diff} < 2 \cdot 10^{-6}''$ $\Delta e < 0,7''$ $\Delta e_{com} < 20''$ $\Delta e_3 < 20''$
Marées	68	Incertitude temporelle	$\Delta t < 7 \text{ s}$	<sub>-11</sub>

1. Pour la gradiométrie, uniquement valable pour les composantes  $T_{xz}$ ,  $T_{yz}$  et  $T_{zz}$ .

2. En gradiométrie, la contrainte s'applique uniquement pour la composante  $T_{zz}$ . Il n'y a pas de contrainte liée au milieu de mesure pour les autres composantes.

3. Non calculé explicitement,  $\Delta z$  doit vraisemblablement être maîtrisé à plusieurs dizaines ou centaines de kilomètres près pour cet effet.

4. Pour une correction avec une amplitude de hauteur  $|z_1 - z_0|$  de 100 m.

5. Mesure verticale. Dans ce cas l'incertitude sur  $g$  est quadratique en  $\Delta e$ .

6. Non applicable.

7. Mesure horizontale.

8. Pour une mesure horizontale du champ et un bras de levier de mesure de 1 m.

9. Pour la mesure verticale du champ, avec un bras de levier de mesure de 1 m. Avec  $\Delta e^2 = \frac{1}{2} (\Delta e_1^2 - \Delta e_2^2)$ .

10. Mesure de composante non diagonale du tenseur gradient.

11. Effet qui n'est pas étudié dans ce manuscrit.

Cause d'incertitude	Page de référence	Paramètre à maîtriser	Contrainte pour la gravimétrie ( $\Delta g < 10^{-9} \text{ m s}^{-2}$ )	Contrainte pour la gradiométrie ( $\Delta T < 10^{-10} \text{ s}^{-2}$ )
Effets météorologiques	68	Pression	$\Delta P < 0,3 \text{ hPa}$	$_{-11}$
		Admittance $\alpha = \frac{\partial g}{\partial P}$ <sup>12</sup>	$\Delta \alpha < 3 \cdot 10^{-11} \text{ m s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$	$_{-11}$
		Densité d'eau $\sigma = \alpha \rho h$ dans le sous-sol	$\Delta \sigma < 2 \text{ kg m}^{-2}$	$_{-11}$
Correction d'Eötvös <sup>13</sup> (Vitesse : 15 km/h)	69	Vitesse	$\Delta v < 7 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$	$\Delta v < 490 \text{ m s}^{-1}$ <sup>14</sup> $\Delta v < 4 \text{ m s}^{-1}$ <sup>15</sup>
		Altitude	$\Delta z < 2 \cdot 10^3 \text{ m}$	$\Delta z < 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ <sup>14</sup> $\Delta z < 7 \cdot 10^6 \text{ m}$ <sup>15</sup>
		Vitesse angulaire terrestre	$\Delta \omega < 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ rad s}^{-1}$	$\Delta \omega < 8 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ <sup>15</sup>
		Latitude	$\Delta \varphi < 0,3''$ (10 m)	$\Delta \varphi < 60^\circ$ <sup>15</sup>
		Cap	$\Delta \alpha < 0,3''$	$\Delta \alpha < 60^\circ$ <sup>15</sup>
Correction d'Eötvös <sup>13</sup> (Vitesse : 500 km/h)	69	Vitesse	$\Delta v < 5 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$	$\Delta v < 15 \text{ m s}^{-1}$ <sup>14</sup> $\Delta v < 4 \text{ m s}^{-1}$ <sup>15</sup>
		Altitude	$\Delta z < 2 \text{ m}$	$\Delta z < 7 \cdot 10^5 \text{ m}$ <sup>14</sup> $\Delta z < 2 \cdot 10^5 \text{ m}$ <sup>15</sup>
		Vitesse angulaire terrestre	$\Delta \omega < 4 \cdot 10^{-12} \text{ rad s}^{-1}$	$\Delta \omega < 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ <sup>15</sup>
		Latitude	$\Delta \varphi < 0,01''$ (0,3 m)	$\Delta \varphi < 1^\circ 48'$ <sup>15</sup>
		Cap	$\Delta \alpha < 0,01''$	$\Delta \alpha < 1^\circ 48'$ <sup>15</sup>

TABLEAU 4.2: Récapitulatif des contraintes sur les incertitudes pour l'obtention d'une résolution de  $10^{-9} \text{ m s}^{-2}$  en gravimétrie et de  $10^{-10} \text{ s}^{-2}$  en gradiométrie.

12. Pour une variation de pression atmosphérique de 30 hPa.

13. On suppose que le cap et la latitude sont arbitraires, donc que l'ordre de grandeur des fonctions trigonométriques dans les formules (4.8) page 71 est 1.

14. Valable pour la composante  $T_{zz}$  du tenseur gradient.

15. Valable pour les composantes  $T_{yz}$  et  $T_{xz}$  du tenseur gradient.

## 4.2 Effet gravitationnel des vagues

Les effets gravitationnels directs indésirables sont de même nature que le signal cherché, et se confondent donc avec lui. Ces effets gênants ne peuvent pas toujours être soustraits par modélisation du signal, ou par mesures différentielles, notamment lorsque les sources sont aléatoires ou que leur géométrie est inconnue. Les vagues constituent justement des sources aléatoires, dont la géométrie ne peut pas être déterminée précisément. On peut craindre par conséquent que leur influence gravitationnelle ne vienne perturber le signal de champ ou de gradient mesuré depuis un sous-marin. Dans le cadre de cette thèse on a ainsi quantifié ce bruit en fréquence et en écart type.

### 4.2.1 Modélisation de l'interface air mer

Pour modéliser la surface de la mer agitée, on considère la différence avec une surface de référence. La surface de référence de la mer est un plan infini, de cote  $z = 0$ . Lorsque la mer est agitée cette surface n'est plus uniforme, mais une surface  $z = h(x, y)$ , à un instant donné. Le modèle est illustré sur la figure 4.3. On calcule l'anomalie pour une surface par rapport au cas de la surface de référence, à un instant donné. On considère donc l'anomalie  $\delta g$  provoquée au point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  par les creux et les bosses d'eau à la surface. L'anomalie de masse volumique est comptée positivement lorsqu'une bosse

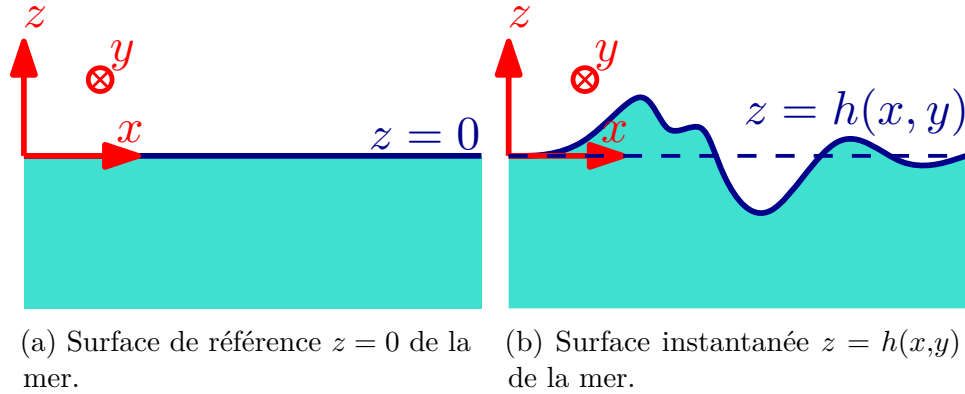


FIGURE 4.3: Modèle d'interface entre la mer et l'air.

est formée au-dessus de  $z = 0$ , et négativement pour un creux en-dessous de  $z = 0$ . Par conséquent soit  $\rho$  la différence de masse volumique entre l'eau et l'air, l'anomalie s'écrit

$$\delta \underline{g}(M_0) = G\rho \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \int_0^{h(x,y)} \frac{M_0 M}{M_0 M^3} dV(M) \quad (4.12)$$

Cette formule se simplifie lorsque l'on considère le cas d'une mesure loin de la surface, où  $M_0 M \gg |h|$ . Cette situation est réalisée par exemple lorsque le sous-marin est en immersion à 100 m et que les vagues font au plus quelques mètres d'amplitude, comme c'est généralement le cas [Ardhuin, 2008]. On a alors au premier ordre en  $h/z_0$

$$\delta \underline{g}(M_0) = G\rho \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy h(x, y) \cdot \underline{\gamma}_{z_0}(x - x_0, y - y_0) \quad (4.13)$$

$$\text{avec } \underline{\gamma}_{z_0}(x, y) = \frac{1}{[x^2 + y^2 + z_0^2]^{3/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z_0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

On distingue les projections  $\delta g_x$ ,  $\delta g_y$  et  $\delta g_z$  de  $\delta \underline{g}$  sur  $\underline{e}_x$ ,  $\underline{e}_y$  et  $\underline{e}_z$ , et les composantes  $\gamma_{z_0}^x$ ,  $\gamma_{z_0}^y$  et  $\gamma_{z_0}^z$  de  $\underline{\gamma}_{z_0}$  associées.

On reconnaît dans (4.13) l'expression d'un produit de convolution bidimensionnel dans le domaine spatial, entre les fonctions  $h$  et  $\underline{\gamma}_{z_0}$ , autrement dit de  $h$  avec  $\gamma_{z_0}^x$ ,  $\gamma_{z_0}^y$  et  $\gamma_{z_0}^z$ .

Au facteur  $G\rho$  près, pour  $\alpha \in \{x, y, z\}$ ,  $\delta g_\alpha$  est ainsi l'image de  $h$  par le filtre linéaire homogène spatial  $\gamma_{z_0}^\alpha$  [Bouvet, 1991]. Le calcul de  $\delta g_\alpha$  se fait plus facilement dans le domaine spectral, d'autant plus que le signal  $h$  est aléatoire. D'après la théorie du filtrage linéaire, évoquée annexe B à la section B.2.1 page 213 et développée dans les références [Bouvet, 1991, Blakely, 1996], étant données la densité spectrale spatiale de puissance  $S_h$  de la hauteur d'eau  $h$ , et l'amplitude carrée  $|\tilde{\gamma}_{z_0}^\alpha|^2$  de la transformée de Fourier spatiale de  $\gamma_{z_0}^\alpha$ , la densité spectrale spatiale de puissance  $S_g^\alpha$  de l'anomalie  $\delta g_\alpha$  s'écrit pour un vecteur fréquence spatial  $\underline{\kappa}$  ( $\kappa_x, \kappa_y$ ) donné

$$S_g^\alpha(\underline{\kappa}) = G^2 \rho^2 |\tilde{\gamma}_{z_0}^\alpha(\underline{\kappa})|^2 \cdot S_h(\underline{\kappa}) \quad (4.15)$$

Cette analyse est un cas particulier à l'ordre le plus faible en  $h/z_0$  du raisonnement de Parker [Parker, 1973]. Parker remarque que la transformée de Fourier  $\tilde{v}_{z_0}$  de  $v_{z_0} : x, y \mapsto [x^2 + y^2 + z_0^2]^{-1/2}$  vaut

$$\tilde{v}_{z_0}(\underline{\kappa}) = \frac{e^{-2\pi\|\underline{\kappa}\|z_0}}{\|\underline{\kappa}\|} \quad (4.16)$$

Or  $\gamma_{z_0}^x = -\frac{dv_{z_0}}{dx}$ ,  $\gamma_{z_0}^y = -\frac{dv_{z_0}}{dy}$  et  $\gamma_{z_0}^z = \frac{dv_{z_0}}{dz_0}$  donc

$$\tilde{\gamma}_{z_0}^x(\underline{\kappa}) = -2i\pi \frac{\kappa_x}{\|\underline{\kappa}\|} e^{-2\pi\|\underline{\kappa}\|z_0} \quad \text{d'où} \quad |\tilde{\gamma}_{z_0}^x(\underline{\kappa})|^2 = \frac{4\pi^2 \kappa_x^2}{\|\underline{\kappa}\|^2} e^{-4\pi\|\underline{\kappa}\|z_0} \quad (4.17a)$$

$$\tilde{\gamma}_{z_0}^y(\underline{\kappa}) = -2i\pi \frac{\kappa_y}{\|\underline{\kappa}\|} e^{-2\pi\|\underline{\kappa}\|z_0} \quad |\tilde{\gamma}_{z_0}^y(\underline{\kappa})|^2 = \frac{4\pi^2 \kappa_y^2}{\|\underline{\kappa}\|^2} e^{-4\pi\|\underline{\kappa}\|z_0} \quad (4.17b)$$

$$\tilde{\gamma}_{z_0}^z(\underline{\kappa}) = -2\pi \operatorname{sgn} z_0 e^{-2\pi\|\underline{\kappa}\|z_0} \quad |\tilde{\gamma}_{z_0}^z(\underline{\kappa})|^2 = 4\pi^2 e^{-4\pi\|\underline{\kappa}\|z_0} \quad (4.17c)$$

Pour les modèles de hauteurs  $h$  de vagues que l'on verra à la section suivante 4.2.2 page 80 il est utile de connaître la réduction des expressions précédentes au cas où  $h$  dépend de  $x$  mais pas de  $y$ , c'est-à-dire lorsque les vagues sont considérées très grandes dans une direction par rapport à l'autre. Dans ce cas on écrit, toujours au premier ordre en  $h/z_0$

$$\delta g^x(M_0) = G\rho \int_{\mathbb{R}} dx h(x) \cdot \gamma_{z_0}^x(x - x_0) \quad (4.18a)$$

$$\delta g^z(M_0) = G\rho \int_{\mathbb{R}} dx h(x) \cdot \gamma_{z_0}^z(x - x_0) \quad (4.18b)$$

$$\text{avec } \gamma_{z_0}^x(x) = \int_{\mathbb{R}} dy \frac{x}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} = \frac{2x}{x^2 + z_0^2}$$

$$\gamma_{z_0}^z(x) = \int_{\mathbb{R}} dy \frac{-z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} = -\frac{2z_0}{x^2 + z_0^2}$$

Les transformées de Fourier correspondantes sont à une seule dimension et elles valent

$$\tilde{\gamma}_{z_0}^x(\kappa_x) = -2i\pi \operatorname{sgn}(\kappa_x) e^{-2\pi|\kappa_x z_0|} \quad (4.19a)$$

$$\tilde{\gamma}_{z_0}^z(\kappa_x) = -2\pi \operatorname{sgn}(z_0) e^{-2\pi|\kappa_x z_0|} \quad (4.19b)$$

d'où dans les deux cas

$$|\tilde{\gamma}_{z_0}(\kappa_x)|^2 = 4\pi^2 e^{-4\pi|\kappa_x z_0|} \quad (4.19c)$$

Le même raisonnement peut être effectué avec l'anomalie de gradient  $\delta\underline{T}$ . Au premier ordre en  $h/z_0$  l'anomalie de gradient causée par l'effet gravitationnel des vagues vaut

$$\delta\underline{T}(M_0) = -G\rho \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy h(x,y) \cdot \underline{\tau}_{z_0}(x - x_0, y - y_0)$$

$$\text{avec } \underline{\tau}_{z_0}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_{z_0}^x}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_{z_0}^y}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_{z_0}^z}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{z_0}^x}{\partial y} & \frac{\partial \gamma_{z_0}^y}{\partial y} & \frac{\partial \gamma_{z_0}^z}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{z_0}^x}{\partial z} & \frac{\partial \gamma_{z_0}^y}{\partial z} & \frac{\partial \gamma_{z_0}^z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Les transformées de Fourier des composantes du tenseur  $\underline{\tau}_{z_0}$  peuvent être déduites de celles de  $\underline{\gamma}_{z_0}$  et on a donc

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{xx}(\underline{\kappa}) = -4\pi^2 \frac{\kappa_x^2}{\|\underline{\kappa}\|} e^{-2\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad \text{d'où } |\tilde{\tau}_{z_0}^{xx}(\underline{\kappa})|^2 = (2\pi)^4 \frac{\kappa_x^4}{\|\underline{\kappa}\|^2} e^{-4\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad (4.20a)$$

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{xy}(\underline{\kappa}) = -4\pi^2 \frac{\kappa_x \kappa_y}{\|\underline{\kappa}\|} e^{-2\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad |\tilde{\tau}_{z_0}^{xy}(\underline{\kappa})|^2 = (2\pi)^4 \frac{\kappa_x^2 \kappa_y^2}{\|\underline{\kappa}\|^2} e^{-4\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad (4.20b)$$

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{xz}(\underline{\kappa}) = 4\pi^2 \operatorname{sgn}(z_0) \mathbf{i} \kappa_x e^{-2\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad |\tilde{\tau}_{z_0}^{xz}(\underline{\kappa})|^2 = (2\pi)^4 \kappa_x^2 e^{-4\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad (4.20c)$$

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{yz}(\underline{\kappa}) = 4\pi^2 \operatorname{sgn}(z_0) \mathbf{i} \kappa_y e^{-2\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad |\tilde{\tau}_{z_0}^{yz}(\underline{\kappa})|^2 = (2\pi)^4 \kappa_y^2 e^{-4\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad (4.20d)$$

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{yy}(\underline{\kappa}) = -4\pi^2 \frac{\kappa_y^2}{\|\underline{\kappa}\|} e^{-2\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad |\tilde{\tau}_{z_0}^{yy}(\underline{\kappa})|^2 = (2\pi)^4 \frac{\kappa_y^4}{\|\underline{\kappa}\|^2} e^{-4\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad (4.20e)$$

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{zz}(\underline{\kappa}) = 4\pi^2 \|\underline{\kappa}\| e^{-2\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad |\tilde{\tau}_{z_0}^{zz}(\underline{\kappa})|^2 = (2\pi)^4 \|\underline{\kappa}\|^2 e^{-4\pi\|z_0 \underline{\kappa}\|} \quad (4.20f)$$

Le cas des vagues de largeur infinie se traite de la même manière et

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{xx}(\kappa_x) = -4\pi^2 |\kappa_x| e^{-2\pi|\kappa_x z_0|} \quad (4.21a)$$

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{xz}(\kappa_x) = 4\mathbf{i}\pi^2 \operatorname{sgn}(z_0) \kappa_x e^{-2\pi|\kappa_x z_0|} \quad (4.21b)$$

$$\tilde{\tau}_{z_0}^{zz}(\kappa_x) = 4\pi^2 |\kappa_x| e^{-2\pi|\kappa_x z_0|} \quad (4.21c)$$

soit pour toutes les composantes

$$|\tilde{\tau}_{z_0}(\kappa_x)|^2 = (2\pi)^4 \kappa_x^2 e^{-4\pi|\kappa_x z_0|} \quad (4.21d)$$

## 4.2.2 Modèles de vagues du vent

Une fois déterminées les fonctions de transfert en gravimétrie et gradiométrie, il s'agit de modéliser la surface  $h$  des vagues. Comme on cherche à quantifier un bruit il est naturel d'adopter une représentation statistique de la hauteur des vagues. Cette approche prend également son sens par l'expérience commune des vagues : un phénomène dans lequel les corrélations sont importantes et périodiques, mais qui malgré cela revêt un caractère aléatoire. Enfin grâce à la description statistique la convergence de l'intégration (4.14) page 78 est assurée, et la formule (4.15) donne directement la densité spectrale de puissance spatiale du bruit gravitationnel des vagues.

### Relation de dispersion

Pour passer d'une représentation *spatiale* à une représentation *temporelle* du bruit des vagues on écrit la relation entre les densités spectrales de puissance

$$\begin{aligned} S(f) df &= S(\kappa) d\kappa \\ \text{soit } S(f) &= S(\kappa) \frac{d\kappa}{df} \end{aligned} \quad (4.22)$$

La relation entre la fréquence  $f$  et la fréquence spatiale  $\kappa$  des vagues est donnée par la relation de dispersion concernant les vagues, issue du modèle hydrodynamique d'Airy [Ardhuin, 2006, Ardhuin, 2008]

$$f^2 = \frac{g\kappa}{2\pi} \tanh(2\pi\kappa D) \quad (4.23a)$$

où  $g$  est le champ de pesanteur et  $D$  la profondeur du fond. En particulier par grand fond ( $2\pi\kappa D \gg 1$ )

$$f^2 \approx \frac{g\kappa}{2\pi} \quad (4.23b)$$

$$\text{donc } \frac{df}{d\kappa} \approx \frac{g}{4\pi f} \quad (4.23c)$$

Examinons maintenant deux modèles de statistique des vagues.

### Modèle de Pierson et Moskowitz

La difficulté de généraliser des observations rend ardue la modélisation statistique des vagues [Ardhuin, 2008]. Aux importantes incertitudes expérimentales près, les modèles s'accordent à peu près sur la position en fréquence du pic d'amplitude dans des conditions données, mais ne rendent pas forcément bien compte des queues de distribution, loin du pic d'amplitude. Comme on cherche ici avant tout un ordre de grandeur, on choisit d'utiliser le modèle de Pierson et Moskowitz [Pierson Jr et Moskowitz, 1963, Alves et al., 2003], tout en gardant à l'esprit les limites du modèle pour les fréquences éloignées du pic. Ce modèle présente l'avantage de la simplicité, et également de s'appliquer au cas idéal d'une mer formée, de *fetch* infini, c'est-à-dire loin des côtes. Le clapot modélisé par Pierson et Moskowitz est supposé être une *mer du vent*, c'est-à-dire créée localement par l'interaction entre le vent et la mer, par opposition à la houle, qui est le résultat de la propagation du clapot, potentiellement loin de sa source. Ce modèle évite la nécessité d'ajuster le paramètre du *fetch* [Ardhuin, 2008] pour obtenir l'ordre de grandeur recherché.

Il n'y a pas de réel consensus sur le spectre angulaire des vagues, c'est-à-dire la répartition des vagues par secteur angulaire par rapport à l'axe du vent [Ardhuin, 2008]. On considère ici un modèle de vagues unidimensionnel, dans lequel les vagues sont supposées très larges par rapport à leurs hauteurs et à leurs longueurs d'onde. Le plan d'étude  $(x, z)$  est tel que la propagation se fait selon l'axe des abscisses.

D'après le modèle de Pierson et Moskowitz la densité spectrale de puissance de  $h$  dans le domaine fréquentiel s'écrit

$$S_h(f) = 2b \frac{h_0^2}{f_0} \left| \frac{f_0}{f} \right|^5 e^{-b(f_0/f)^4} \quad (4.24)$$

Dans l'expression (4.24),  $b = 0,74$  est un paramètre sans dimension, tandis que  $f_0$  est la fréquence du pic d'amplitude de  $S_h$ , et  $h_0^2$  est la variance de  $h$ . Avec les notations de l'équation (4.24), et d'après le modèle de Pierson et Moskowitz

$$f_0 = \frac{g}{2\pi U} \quad (4.25a)$$

$$h_0^2 = \frac{ag^2}{4b(2\pi f_0)^4} = \frac{a}{2b} \frac{U^4}{g^2} \quad (4.25b)$$

où  $a = 7,79 \cdot 10^{-3}$  est un paramètre sans dimension déterminé dans l'étude de Pierson et Moskowitz [Pierson Jr et Moskowitz, 1963],  $g$  est le champ de pesanteur, et  $U$  est la vitesse du vent.

Dans la suite on prend  $g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$  pour la relation (4.25b) et on élimine le paramètre  $U$  de vitesse du vent pour ne garder que la relation entre  $h_0$  et  $f_0$ .

On cherche la réponse de l'anomalie de champ ou de gradient dans le domaine fréquentiel. Une fois fixé le modèle de vagues, on utilise donc la relation (4.15) page 79 entre la densité spectrale spatiale de puissance de la hauteur d'eau et celle de l'anomalie de pesanteur. On obtient alors

$$\begin{aligned} S_g^\alpha(f) &= S_g^\alpha(\kappa) \frac{d\kappa}{df} \\ &= G^2 \rho^2 \left| \tilde{\gamma}_{z_0}^\alpha(\kappa) \right|^2 S_h(\kappa) \frac{d\kappa}{df} \\ \text{d'où } S_g^\alpha(f) &= G^2 \rho^2 \left| \tilde{\gamma}_{z_0}^\alpha(\kappa) \right|^2 S_h(f) \\ \text{avec } f^2 &= \frac{g\kappa}{2\pi} \tanh(2\pi\kappa D) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pour obtenir une expression analytique du spectre de bruit gravitationnel provoqué par les vagues, on combine la relation (4.26) avec l'expression (4.24) de  $S_h(f)$  dans le modèle de Pierson et Moskowitz, et avec les calculs (4.19c) et (4.21d) page 80 des fonctions de transfert pour l'anomalie de champ ou de gradient, en tenant compte de la relation de dispersion (4.23). D'après les relations (4.19c) et (4.21d) le résultat est indépendant de la composante de champ ou de la composante de gradient mesurée. Les calculs numériques sont résumés dans les figures 4.4 et 4.5. La figure 4.4 montre qu'avec nos hypothèses la densité de bruit forme un pic, légèrement décalé en fréquence par rapport à la densité de hauteur de vagues, à cause du filtrage passe-bas dû à l'éloignement de la surface de l'eau. La figure 4.5 confirme ce décalage dans des conditions plus variées, et elle démontre que le bruit reste localisé vers 0,1 Hz dans tous les cas. L'écart type du bruit apparaît fortement dépendant de l'état de la mer. La différence entre les deux immersions considérées est très marquée en gravimétrie comme en gradiométrie.

### Modèle bidimensionnel simplifié

Pour estimer l'effet de la largeur finie des vagues, on considère un modèle bidimensionnel issu de l'acoustique sous-marine [Passerieux, 2010, Davis *et al.*, 2002], plus simple par ailleurs que le modèle de Pierson et Moskowitz. On considère un train de vagues, dont la corrélation est pseudo-périodique en s'évanouissant suivant une forme gaussienne dans une dimension, et qui suit une autre gaussienne dans l'autre dimension. La fonction

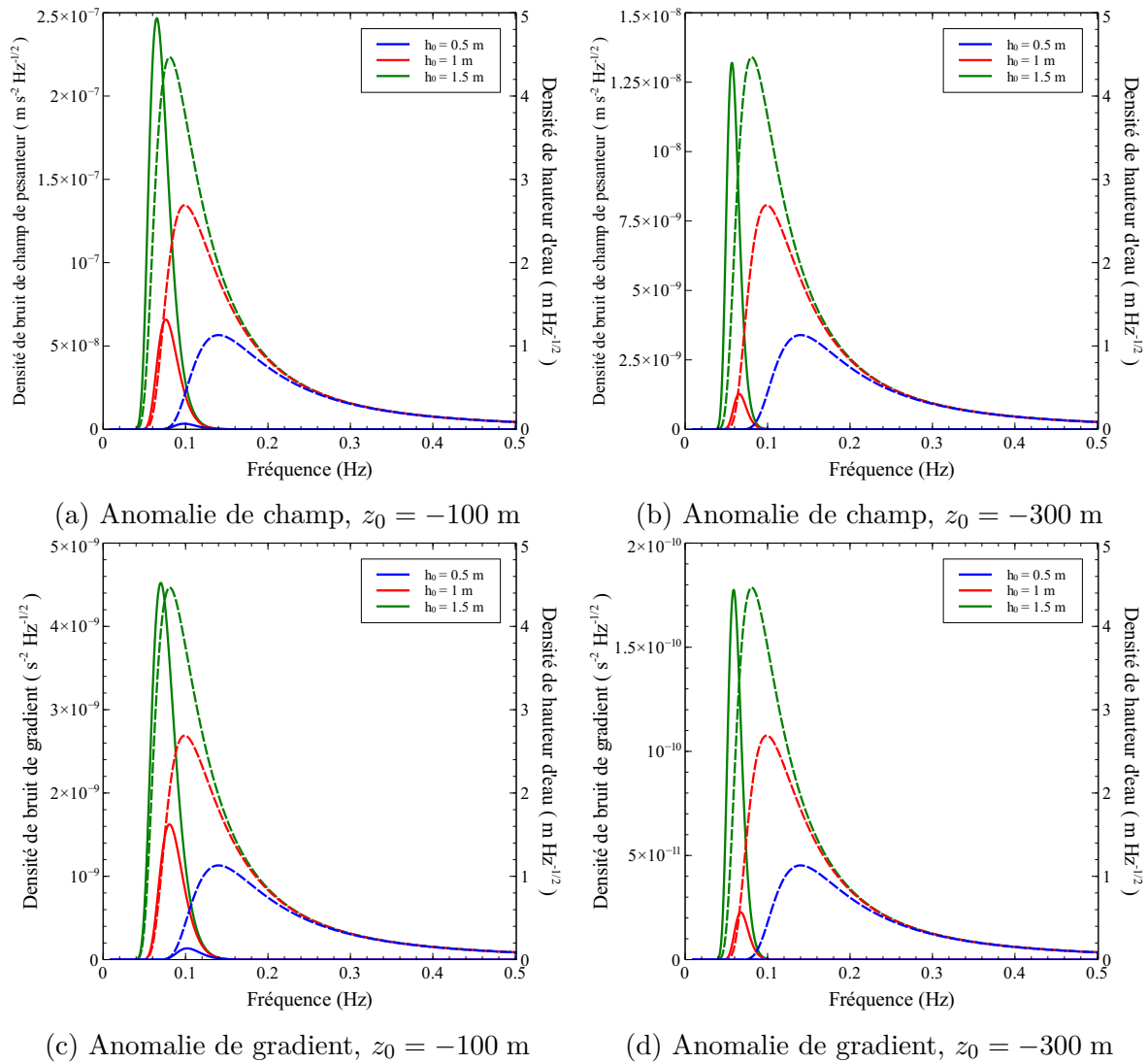


FIGURE 4.4: Spectres d'anomalies de champ et de gradient liées aux vagues de la mer du vent, suivant le modèle de Pierson et Moskowitz dans l'approximation des grands fonds, pour des immersions de 100 m et 300 m, et des écarts types de hauteurs d'eau de 0,5 m, 1 m et 1,5 m. Les densités de bruits de champ ou de gradient sont tracées en traits pleins (échelles de gauche). Celles de hauteur d'eau sont en pointillés, de couleurs correspondantes (échelles de droite).



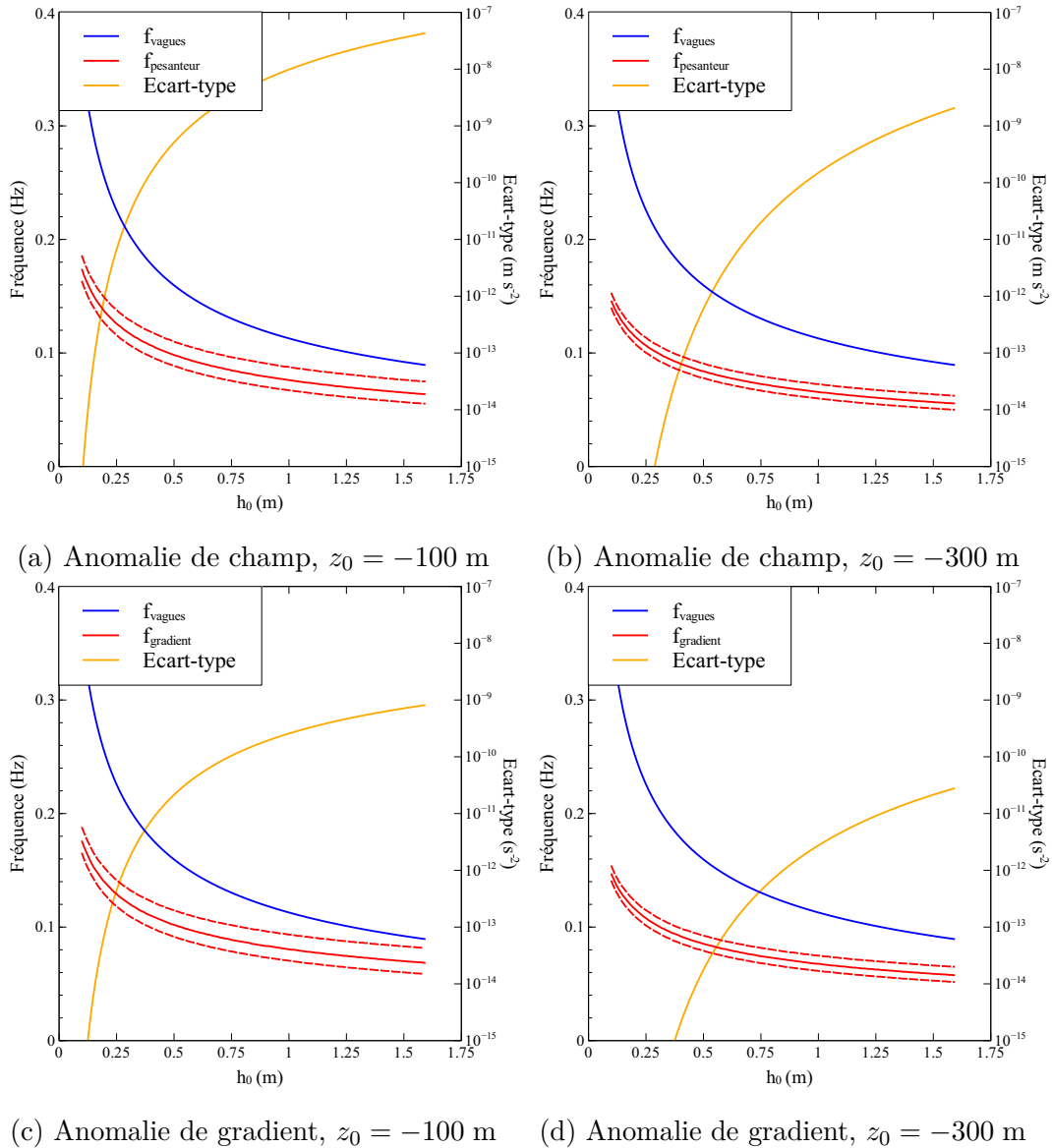


FIGURE 4.5: Écarts types et positionnements en fréquence des bruits de champ et de gradient liés aux vagues de la mer du vent en fonction de l'écart type de hauteur d'eau, suivant le modèle de Pierson et Moskowitz dans l'approximation des grands fonds, pour des immersions de 100 m et 300 m. La fréquence de pic des vagues est tracée en bleu, celle du bruit gravimétrique en rouge en trait plein, les fréquences de coupure à mi-hauteur étant en pointillés (échelle de gauche). Les écarts types d'anomalie de champ et de gradient sont tracés en jaune (échelle de droite).

d'autocovariance  $r_h$  de  $h$  s'écrit dans ces conditions

$$r_h(x,y) = h_0^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2L_x^2} - \frac{y^2}{2L_y^2}\right) \cos(2\pi\kappa_0 x) \quad (4.27)$$

L'enveloppe gaussienne de la fonction d'autocovariance signifie que deux valeurs de hauteur d'eau sont d'autant plus indépendantes qu'elles sont éloignées spatialement, ce qui est un phénomène assez général concernant les signaux aléatoires en physique. La périodicité spatiale des vagues est quant à elle modélisée par la sinusoïde en facteur de la fonction d'autocovariance.

Dans ce modèle on suppose que le paramètre  $\kappa_0$  correspond à la fréquence de pic  $f_0$  du modèle de Pierson et Moskowitz, soit par grand fond, en utilisant les relations (4.23b) et (4.25b) pages 81 et 82

$$\kappa_0 = \frac{2\pi f_0^2}{g} \quad (4.28a)$$

$$\text{ou encore } \kappa_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{4bh_0^2}} \quad (4.28b)$$

L'estimation des longueurs de corrélation  $L_x$  et  $L_y$  est plus délicate, dans la mesure où les modèles de vagues comme celui de Pierson et Moskowitz sont pertinents surtout pour les fréquences et longueurs d'onde voisins du pic, si bien qu'ils prennent en compte les corrélations à grande distance de façon imparfaite. On considère de façon arbitraire des trains de vagues d'une dizaine de vagues, donc on prend  $L_x = 3\lambda_0$  avec  $\lambda_0 = \frac{1}{\kappa_0}$  la longueur d'onde principale des vagues. En ce qui concerne la corrélation latérale, on étudie deux cas différents. Le premier cas correspond à une mer hachée, qui fait intervenir des creux et des bosses assez décorrélés dans les deux dimensions, et pour lequel on prend  $L_y = \lambda_0$ . Le deuxième cas correspond au contraire à une mer cohérente, avec des trains de vagues très larges, comme on en aperçoit par exemple le long d'une plage. Pour une mer cohérente on prend  $L_y = 5\lambda_0$ .

La densité spectrale spatiale de puissance de hauteur d'eau est la transformée de Fourier bidimensionnelle de  $r_h$ . Elle vaut

$$S_h(\kappa_x, \kappa_y) = \pi h_0^2 L_x L_y \exp\left[-\frac{\kappa_y^2}{2(2\pi L_y)^{-2}}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{(\kappa_x - \kappa_0)^2}{2(2\pi L_x)^{-2}}\right] + \exp\left[-\frac{(\kappa_x + \kappa_0)^2}{2(2\pi L_x)^{-2}}\right] \right\} \quad (4.29)$$

Pour calculer la densité spectrale de bruit gravimétrique dans le domaine fréquentiel on utilise l'isotropie des relations de dispersion (4.23) (page 81) et on fait le changement de variable

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \kappa \cos \theta \\ \kappa_y &= \kappa \sin \theta \\ d\kappa_x d\kappa_y &= \kappa d\kappa d\theta \end{aligned}$$

d'où pour  $\alpha \in \{x, y, z\}$

$$\begin{aligned} S_g^\alpha(f) &= \kappa \frac{d\kappa}{df} \int_0^{2\pi} S_g^\alpha(\kappa \cos \theta, \kappa \sin \theta) d\theta \\ S_g^\alpha(f) &= G^2 \rho^2 \kappa \frac{d\kappa}{df} \int_0^{2\pi} |\tilde{\gamma}_{z_0}^\alpha(\kappa \cos \theta, \kappa \sin \theta)|^2 S_h(\kappa \cos \theta, \kappa \sin \theta) d\theta \end{aligned} \quad (4.30)$$

De la même manière pour la densité spectrale de bruit gradiométrique dans le domaine fréquentiel on a pour  $(\alpha, \beta) \in \{x, y, z\}^2$

$$S_T^{\alpha\beta}(f) = G^2 \rho^2 \kappa \frac{d\kappa}{df} \int_0^{2\pi} \left| \tilde{\tau}_{z_0}^{\alpha\beta}(\kappa \cos \theta, \kappa \sin \theta) \right|^2 S_h(\kappa \cos \theta, \kappa \sin \theta) d\theta \quad (4.31)$$

L'application des formules (4.29) et (4.30) est représentée figure 4.6 pour le champ vertical  $g_z$ . On note que le modèle de vagues utilisé ici a un spectre gaussien, symétrique en fréquence, et plus étroit que le spectre de Pierson et Moskowitz. Cela a pour conséquence que le spectre d'anomalie gravimétrique ressemble plus au spectre de hauteur d'eau. La figure 4.6 représente une composante particulière du champ, dans des conditions données, cependant les autres composantes du champ et du gradient ont des densités spectrales de puissance de même forme, et également presque centrées sur la fréquence de pic  $f_0$  des hauteurs d'eau, dans des conditions variées.

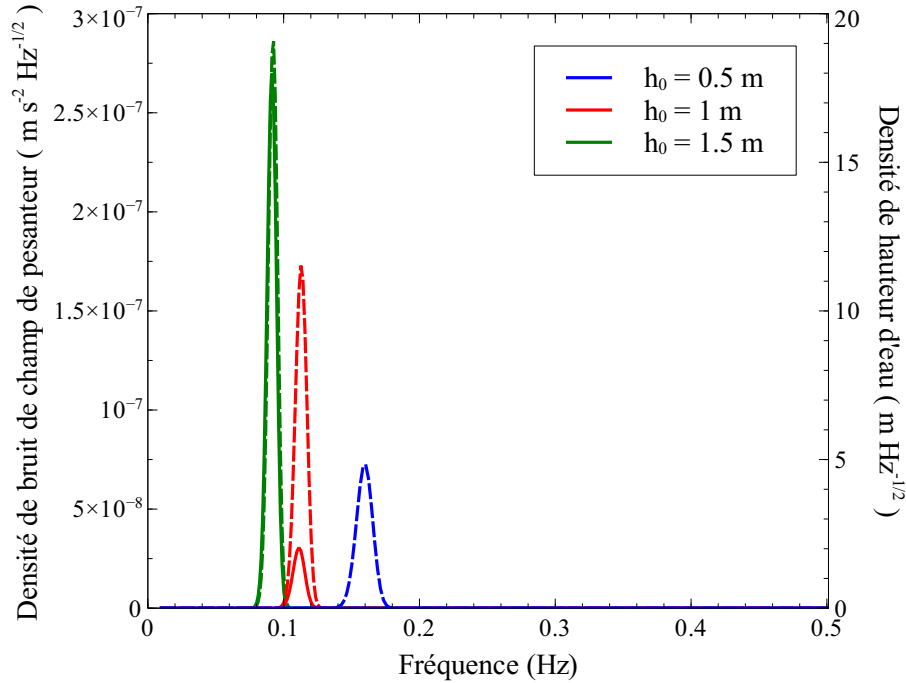


FIGURE 4.6: Densité spectrale fréquentielle de puissance en anomalie gravimétrique verticale  $g_z$  causée par les vagues (trait plein, échelle de gauche), et en hauteur d'eau des vagues (pointillés, échelle de droite) pour trois écarts types de hauteurs d'eau différents. On utilise ici le modèle simplifié bidimensionnel et les équations (4.29) et (4.30), dans l'approximation des grands fonds.  $f_0$ ,  $h_0$  et  $\kappa_0$  sont reliés par le modèle de Pierson et Moskowitz. La longueur de corrélation  $L_x$  vaut  $3\lambda_0$ , tandis que la largeur de corrélation  $L_y$  est fixée à  $5\lambda_0$ . On suppose que la mesure est effectuée à  $z_0 = 100$  m de profondeur.

Pour aller plus loin dans l'analyse, on examine sur la figure 4.7 page 88 les écarts types d'anomalie, en fonction de l'écart type de hauteur d'eau, et pour deux types de largeurs de corrélation  $L_y$  différentes. On remarque que les écarts types  $\sigma_g^x$  et  $\sigma_g^z$  de bruit de  $g_x$  et  $g_z$  sont identiques et indépendants de  $L_y$ , tout comme ceux de  $T_{xx}$ ,  $T_{xz}$  et  $T_{zz}$  par ailleurs. Les écarts types des composantes  $g_y$ ,  $T_{xy}$ ,  $T_{yz}$  et  $T_{yy}$ , qui comprennent au moins une dérivation du potentiel suivant  $y$ , sont pour leur part bien sensibles aux variations

de  $L_y$ . La figure montre que le bruit suivant ces composantes semble diminuer pour une largeur de corrélation  $L_y$  accrue.

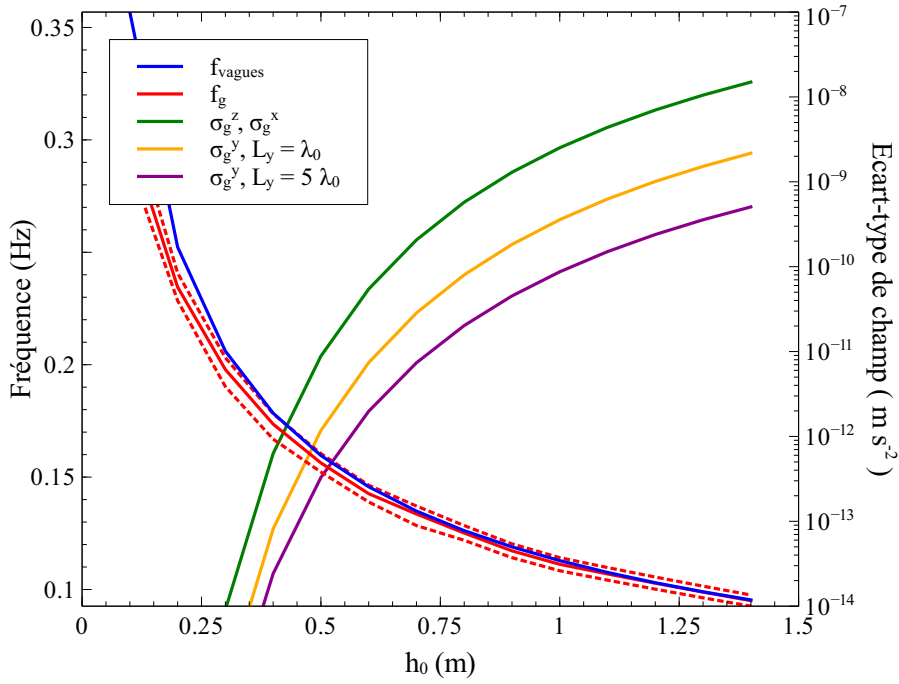
### Comparaison des deux modèles

La comparaison des figures 4.5 (page 84) et 4.7 (page 88) montre que les ordres de grandeur des deux modèles sont cohérents, surtout pour les grandes vagues, basses fréquences, qui sont les plus perturbatrices. Les modèles divergent en revanche pour les vagues courtes, de plus hautes fréquences et de plus basses longueurs d'onde. L'écart dans ce cas provient du fait que le spectre gaussien des vagues dans le modèle bidimensionnel est plus piqué, si bien que les recouvrements entre ce spectre et les fonctions de transfert sont plus faibles. Par rapport au modèle de Pierson et Moskowitz, le modèle simplifié bidimensionnel donne accès à un modèle valable pour la mesure des composantes transverses aux vagues des champs et gradient, en soulignant la sensibilité du bruit à la corrélation suivant la largeur des vagues dans ce cas. Pour une étude plus poussée, le modèle bidimensionnel mériterait d'être amélioré pour inclure un spectre fréquentiel plus réaliste.

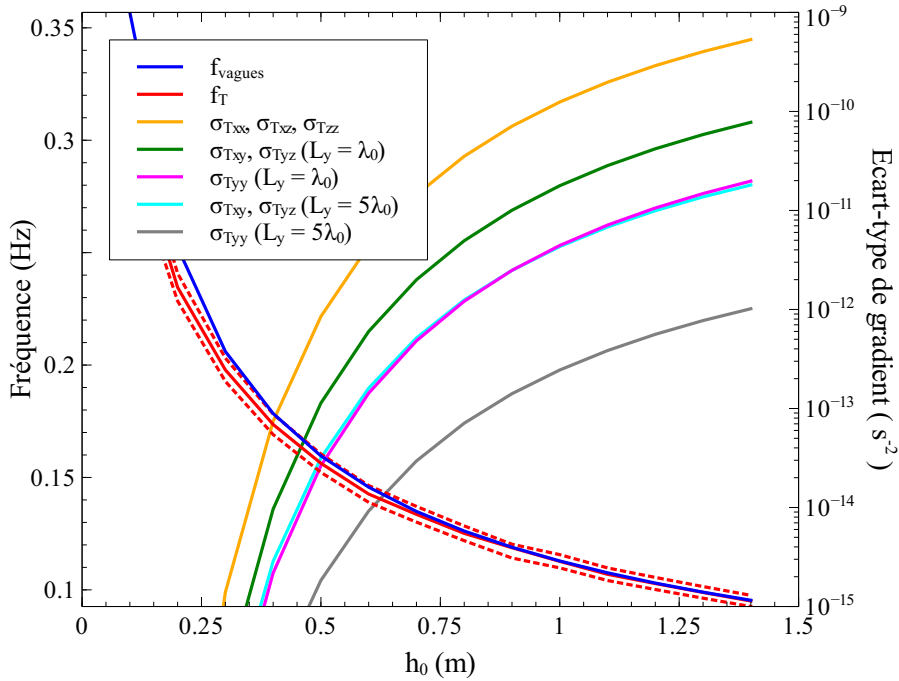
### 4.2.3 Vagues d'infragravité

A la section précédente on a tâché d'estimer le bruit gravitationnel de la mer du vent, c'est-à-dire des masses d'eau mises en mouvement par l'effet direct du vent. Quoique les fréquences et amplitudes en jeu puissent différer, on s'attend à un même ordre de grandeur pour l'effet de la houle, qui est le résultat de la propagation de la mer du vent jusqu'en dehors de la zone où elle a été formée. On s'est intéressé au cours de la thèse à un autre type de phénomène marin. Les fonctions de transfert qui relient le spectre de hauteur d'eau à ceux des différentes composantes d'anomalie du champ et du gradient de pesanteur sont passe-bas, avec de fortes pentes, qui dépendent de l'immersion de l'appareil de mesure. Les mouvements de grandes longueurs d'onde peuvent donc être très significatifs, même si leur amplitude en hauteur d'eau est faible. Pour cette raison on a étudié l'effet des vagues d'infragravité, qui correspondent à la continuation du spectre des vagues vers les basses fréquences. L'appellation de ces phénomènes provient du fait que leur spectre est *en-dessous* de celui des *vagues de gravité*, c'est-à-dire des vagues du vent et de la houle dont on fait communément l'expérience. Les vagues d'infragravité ont des amplitudes comprises entre quelques millimètres et quelques centimètres. Elles ne sont pas créées par le vent, mais elles sont le résultat d'effets non linéaires sur la mer du vent près des côtes, et elles rayonnent ensuite dans l'océan [Crawford *et al.*, 1991].

Pour modéliser les propriétés stochastiques des vagues d'infragravité on s'inspire des travaux qui ont été effectués pour le traitement des signaux enregistrés par les sismomètres de fond de mer [Crawford *et al.*, 1991, Webb *et al.*, 1991, Webb, 1998, Webb et Crawford, 2010]. En particulier la référence [Webb et Crawford, 2010] fournit un modèle fondé sur l'utilisation des données de pression en fond de mer. Dans le modèle décrit dans la référence [Webb et Crawford, 2010], et représenté figure 4.8, la densité spectrale de puissance de pression à proximité de la surface décroît de 30 dB par décade environ aux très basses fréquences, jusqu'à se stabiliser à  $10^2 \text{ Pa}/\sqrt{\text{Hz}}$  pour les fréquences au-dessus de  $2 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$ . A basse fréquence et à proximité de la surface la composante hydrostatique de la pression est dominante, donc la pression  $P$  et la hauteur d'eau  $h$  sont en bonne approximation reliées par  $P = \rho gh$ , avec  $\rho$  la masse volumique de l'eau. La densité spectrale



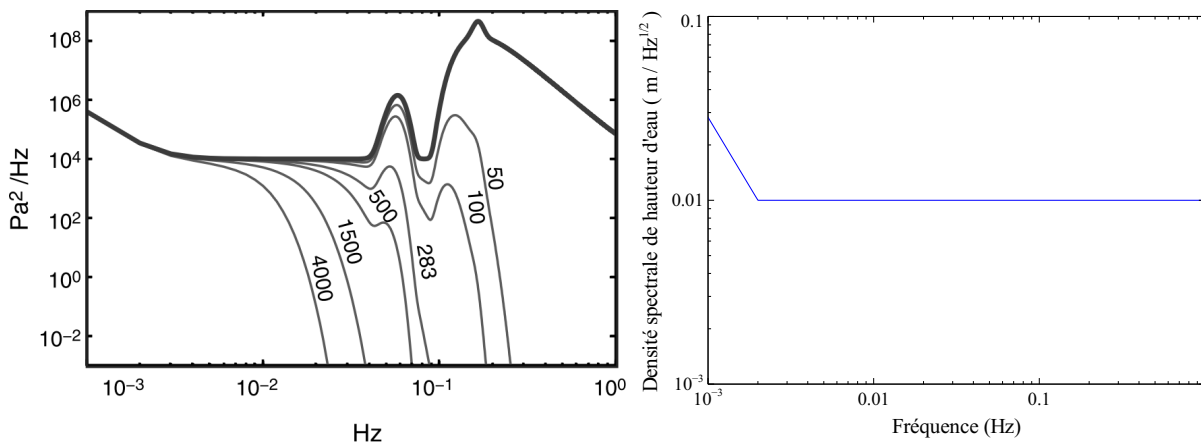
(a) Anomalie de champ.



(b) Anomalie de gradient.

FIGURE 4.7: Ecart type et positionnement en fréquence des bruits de champ et de gradient liés aux vagues de la mer du vent en fonction de l'écart type de hauteur d'eau, suivant le modèle simplifié bidimensionnel, dans l'approximation des grands fonds, pour deux largeurs de corrélation données. La profondeur d'immersion est de  $z_0 = 100$  m, et on prend  $L_x = 3\lambda_0$  comme longueur de corrélation suivant l'axe de propagation. La fréquence de pic des vagues est tracée en bleu, celle du bruit gravimétrique en rouge en trait plein, les fréquences de coupure à mi-hauteur étant en pointillés (échelle de gauche). Les écarts types d'anomalie de champ et de gradient correspondent aux échelles de droite. Les courbes se superposant ont été regroupées.

de hauteur d'eau à  $2 \cdot 10^{-3}$  Hz vaut donc  $10^{-2}$  m/ $\sqrt{\text{Hz}}$  d'après ce modèle.



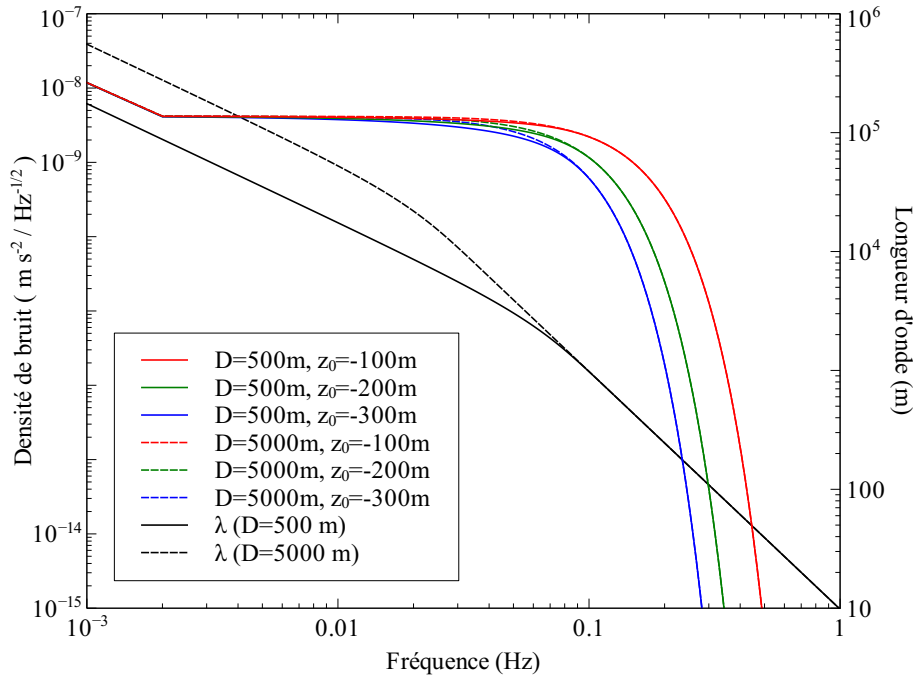
(a) Modèle original (figure Webb [Webb et Crawford, 2010]).

(b) Modèle utilisé.

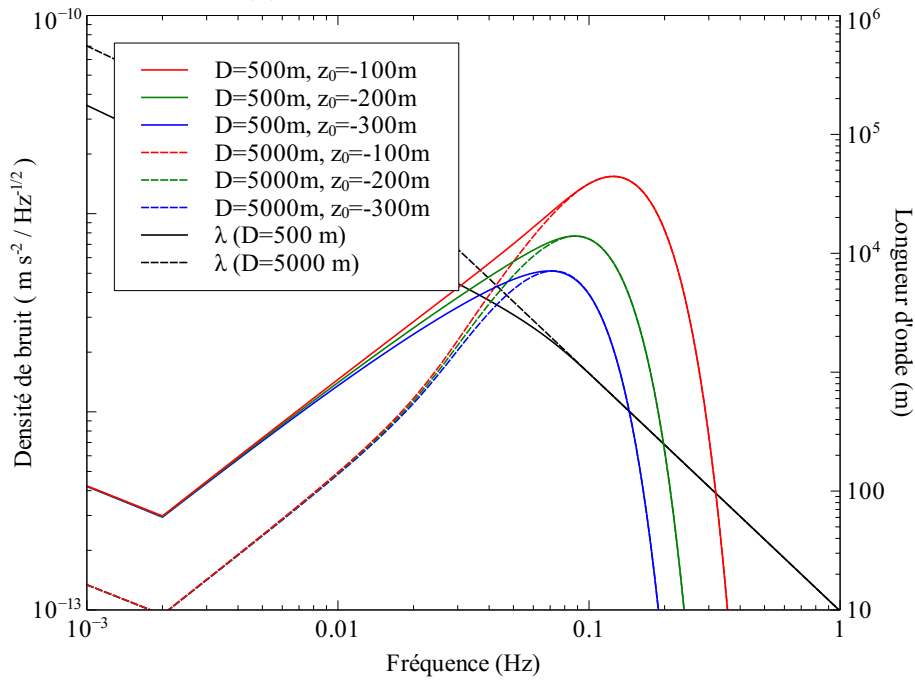
FIGURE 4.8: Modèle de pression lié aux vagues, tiré de la référence [Webb et Crawford, 2010]. Sur la figure (a) le trait gras correspond à la densité spectrale de pression au voisinage de la surface, ce qui est en bonne approximation proportionnel à la hauteur d'eau. Le spectre prend en compte les vagues d'infragravité ainsi qu'un modèle de houle (pic vers  $6 \cdot 10^{-2}$  Hz) et un modèle de mer du vent. Les densités spectrales de pression obtenues par ce modèle pour plusieurs profondeurs d'observation sont également indiquées sur la figure, en gris. La densité de hauteur d'eau qui correspond au modèle employé dans cette section est représentée sur la figure (b). Notre modèle reprend celui de Webb [Webb et Crawford, 2010] mais prend uniquement en compte le bruit de vagues d'infragravité.

On calcule numériquement l'effet de ce modèle, grâce aux relations établies à la section 4.2.2 page 80. Dans le cas présent la profondeur  $D$  et les longueurs d'onde  $\lambda$  des vagues peuvent être comparables. La relation de dispersion (4.23a) page 81 ne peut donc pas être simplifiée, et elle doit être inversée numériquement pour obtenir le nombre d'onde  $\kappa$  en fonction de la fréquence. En particulier le résultat dépend maintenant de la profondeur  $D$  de l'océan. Le résultat du calcul numérique de densité de bruit est représenté figure 4.9.

La figure 4.9 fait apparaître deux régimes pour les bruits d'anomalie de champ et de gradient créés par les vagues d'infragravité. A haute fréquence les longueurs d'ondes rétrécissent, jusqu'à devenir négligeables devant la profondeur du fond marin. Cette longueur d'onde devient alors indépendante du fond en question. Pour les deux hypothèses de profondeur considérées ici, les courbes de longueur d'onde se rejoignent sur l'échelle logarithmique vers  $f \geq 0,1$  Hz, ce qui correspond à  $\lambda \leq 1000$  m. Au-delà de cette coupure, la longueur d'onde devient inversement proportionnelle au carré de la fréquence, suivant la relation de dispersion simplifiée 4.23b  $\lambda = \frac{g}{2\pi f^2}$ , et la densité de bruit devient indépendante de la profondeur et dépendante de la fréquence et de l'immersion, comme pour les vagues de la mer du vent que l'on a étudiées à la section 4.2.2, page 80. Le filtrage gravitationnel passe-bas joue entièrement dans cette zone, et les densités de bruit de champ et de gradient plongent toutes les deux. Lorsqu'au contraire la longueur d'onde devient grande devant la profondeur, fréquence et longueurs d'onde sont inversement proportionnelles, avec d'après l'équation (4.23a)  $\lambda = \frac{gD}{f}$ , et la longueur d'onde est proportionnelle à la profondeur. Dans le cas du champ de pesanteur, quand la longueur d'onde est grande devant l'immersion



(a) Bruit de champ de pesanteur.



(b) Bruit de gradient.

FIGURE 4.9: Densité spectrale de bruit, de champ et de gradient, pour deux profondeurs  $D$  et trois immersions de mesure  $z_0$  données. On a de plus tracé en noir les longueurs d'onde qui correspondent aux fréquences suivant la relation de dispersion (4.23a), relativement à l'échelle de droite.



aussi, tout se passe comme en dessous d'une couche infinie de densité surfacique, et l'anomalie vaut  $\delta g = 2\pi G\rho h$ . Elle est donc directement proportionnelle à la hauteur d'eau et indépendante de la fréquence. Le champ étant homogène pour les grandes longueurs d'onde, le gradient disparaît dans notre modèle. On peut toutefois supposer que pour les longueurs d'onde qui ne sont plus négligeables devant le rayon terrestre, d'autres effets apparaissent, en particulier pour le bruit sur le gradient.

La comparaison de la figure 4.4 (section 4.2.2, page 83), de la figure 4.6 (section 4.2.2, page 86) et de la figure 4.9 montre qu'étant donné les modèles choisis, le bruit de champ de pesanteur créé par les vagues d'infragravité pourrait être globalement supérieur aux basses fréquences à celui créé par la mer du vent et par la houle. Cela pourrait être particulièrement vrai lorsque l'immersion est grande, puisque dans ce cas le filtrage passe-bas fait d'autant plus disparaître le bruit des vagues classiques. Le signal de gradient semble pour sa part généralement moins influencé par le bruit des vagues d'infragravité.

L'étude présentée ici prend en compte uniquement l'influence gravitationnelle directe des vagues d'infragravité. La référence [Crawford *et al.*, 1991] présente par exemple l'importance de la déformation du plancher océanique sous l'effet des vagues d'infragravité, sa mesurabilité et la possibilité d'utiliser ce signal en géophysique. L'amplitude de ce type de bruit est cependant dépendant de la rhéologie du plancher sous-marin, fortement variable. Ce bruit n'a par ailleurs pas d'influence en général pour une mesure dans un sous-marin qui n'est pas posé sur le plancher sous-marin.

### 4.3 Essais de mesures en gravimétrie

On présente dans cette section les essais de mesure faits au début de la thèse avec le CG3 numéro 9110193 (représenté figure 4.10), prêté par l'IPGP en profitant de créneaux de disponibilité de l'instrument. Le CG-3 est un gravimètre de terrain à ressort, prédécesseur du CG-5 dans la gamme de Scintrex Ltd. Le CG-5 a été décrit à la section 2.3.1 page 34.



FIGURE 4.10: Gravimètre Scintrex CG3 utilisé dans le cadre des mesures à Palaiseau en 2009 et 2010.



### 4.3.1 Séries temporelles

Les premières mesures ont été effectuées pour prendre en main l'instrument, et pour expérimenter la mesure concrète du champ de pesanteur. Pour avoir la possibilité de voir un signal intéressant, on a installé le gravimètre en mode *enregistrement continu* sur le sol du laboratoire 0A0-43, au rez-de-chaussée du site de **Thales Research and Technology - Thales Recherche et Technologie (TRT)** à Palaiseau, et on l'a laissé prendre des séries de quelques jours de mesure, les 11 et 12 août d'abord, puis du 14 au 17 août, et enfin une semaine entière, du 9 au 17 septembre. A chaque fois l'instrument était programmé pour effectuer des mesures toutes les 300 s, chaque mesure étant la moyenne de cent échantillons pris à une seconde d'intervalle. Cette méthode permet d'améliorer d'un facteur  $\sqrt{100}$  la fidélité dans l'hypothèse où l'erreur aléatoire est indépendante d'un échantillon à l'autre. Cela réduit en outre la mémoire utilisée par le gravimètre, pour une qualité de mesure fixée. L'instrument transmet finalement à l'ordinateur pour chaque mesure de 100 s :

- Une valeur de pesanteur relative. Pour obtenir une valeur absolue, l'étalonnage de l'instrument et la correction de la dérive sont nécessaires. L'étalonnage n'a pas été fait pour cette première prise en main.
- L'écart type  $\sigma$  de chaque série de  $N = 100$  échantillons. Si l'on suppose le bruit décorrélé,  $\sigma/\sqrt{N}$  donne une estimation de l'incertitude à court terme sur la mesure. On fait cette hypothèse dans ce qui suit.
- Les inclinaisons  $\theta_x$  et  $\theta_y$  suivant les deux composantes  $x$  et  $y$  de l'instrument. Le CG3 est prévu pour fonctionner avec  $\theta_x$  et  $\theta_y$  inférieurs à 20 secondes d'arc. Dans ces conditions l'instrument corrige de lui-même la mesure grâce à ces valeurs d'inclinaisons.
- La température du capteur, c'est-à-dire du ressort en quartz. Le capteur est asservi en température au millikelvin. En pratique, sur une semaine de mesure, les variations maximales de température enregistrées dans nos conditions de laboratoire sont de 0,03 mK.
- La durée de la mesure, fixée à 100 s dans notre cas.
- Le nombre de points aberrants rejetés, pour la série.
- L'heure de la mesure.

Dans le reste de cette section on s'intéresse plus spécifiquement à la troisième et plus longue série de mesures. Les résultats sont cohérents avec les deux premières séries. Le signal brut délivré par l'instrument est représenté figure 4.11. On remarque tout d'abord sur la courbe de signal rouge que la première partie de la courbe ne suit pas la même dérive que le reste, ce qui nous a obligé à retirer de l'analyse le signal obtenu avant une date arbitraire, 22 h après le début de l'enregistrement. Le reste de la courbe suit une dérive tout à fait linéaire pendant le reste de la semaine. Cette dérive sur le temps de l'enregistrement est de plusieurs fois l'amplitude du signal de marée enregistré par ailleurs, soit  $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$  sur 171 heures et 24 minutes pour la dérive et  $1,9 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$  crête à crête pour le signal de marée.

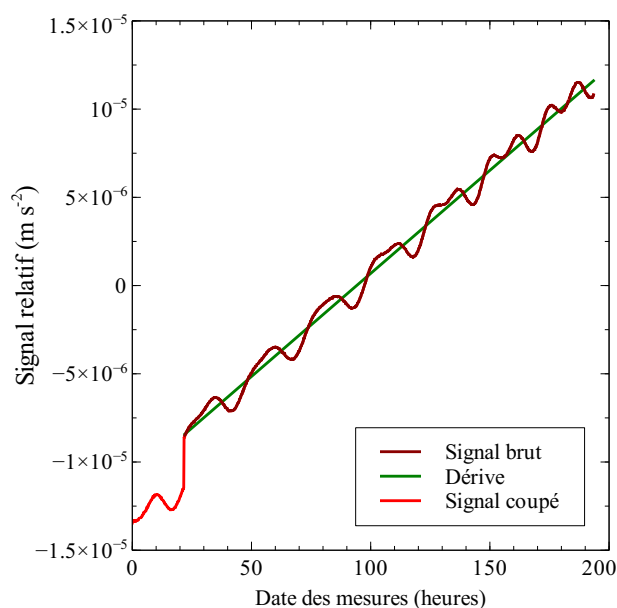


FIGURE 4.11: Mesures relatives de pesanteur effectuées sur le site de TRT à Palaiseau avec le gravimètre Scintrex CG3 numéro 9110193, du 9 septembre 2009, 9h52 UTC, au 17 septembre 2009, 11h19 UTC. Le signal a été centré sur zéro. Les dates des mesures sont données en heures après le début de la série de mesures. La première partie de la courbe, en rouge clair, correspond à une période pendant laquelle la dérive est non-linéaire et elle ne peut donc pas être corrigée simplement avec le reste des données. Une courbe de tendance obtenue par régression linéaire est affichée pour le reste des mesures de pesanteur.

Afin d'analyser le signal on le corrige de sa dérive puis on le compare à un signal synthétique de marée gravimétrique, ce qui est représenté figure 4.12. Le signal synthétique est obtenu par calcul grâce au logiciel TSoft [Van Camp et Vauterin, 2005]. TSoft permet entre autres de calculer l'effet du mouvement des astres dans le référentiel terrestre sur la mesure du champ de pesanteur, en incluant les forces gravitationnelles directes ainsi que la réponse élastique du sol. L'effet des marées gravimétriques est décrit à la section 4.1.1 page 68, ainsi qu'à la section 1.1.4, page 15 du chapitre d'introduction. Le logiciel TSoft peut également inclure l'effet de la surcharge océanique, mais cette fonctionnalité n'a pas été utilisée ici, d'une part par manque de données pour le site de Palaiseau, et d'autre part car cet effet est modeste pour une région éloignée de la côte de plusieurs centaines de kilomètres. Pour comparer les deux signaux, on les centre en leur soustrayant leurs moyennes respectives.

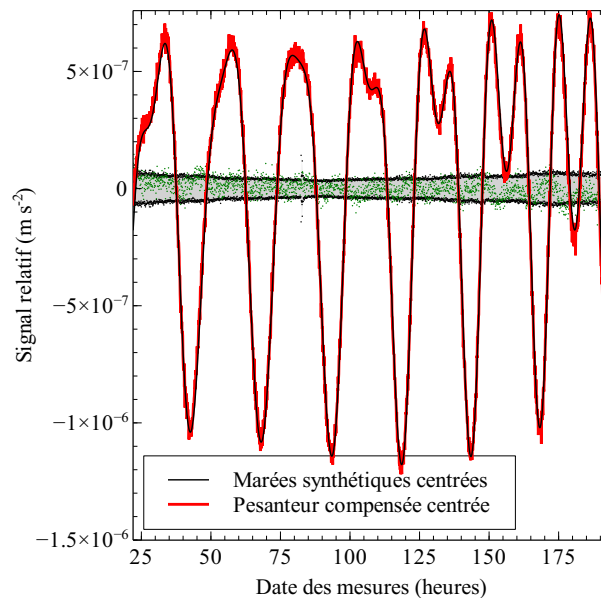
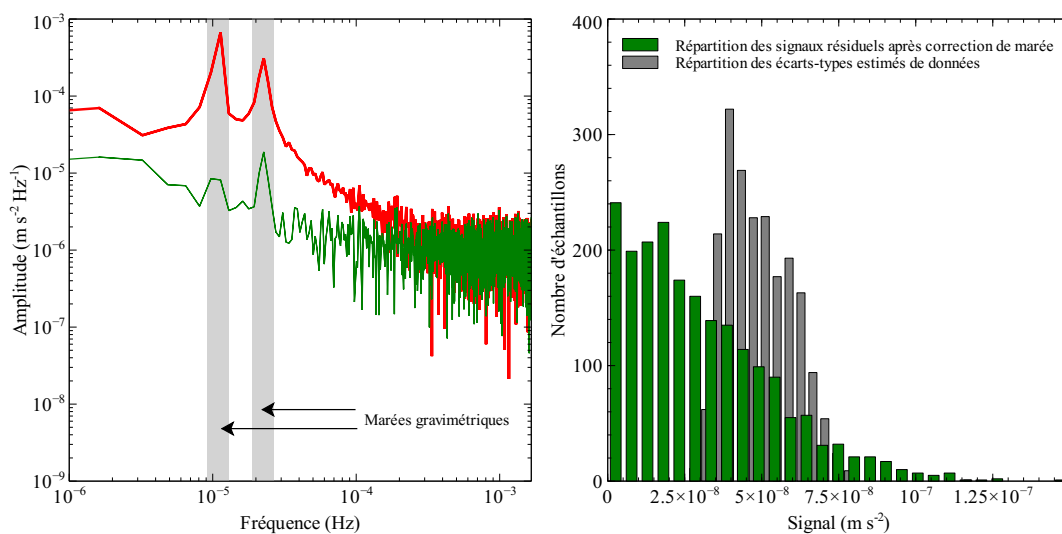


FIGURE 4.12: Signal compensé de la dérive, et données synthétiques centrées de marées en fonction du temps. L'estimation de l'incertitude est représentée en gris de part et d'autre de l'axe des abscisses. Le signal résiduel après soustraction du signal synthétique est représenté pour sa part en vert.

Pour estimer la pertinence de cette correction de marée, on trace figure 4.13a l'amplitude de Fourier du signal avant et après soustraction des données synthétiques, et on résume l'écart entre les données mesurées et les données synthétiques figure 4.13b. On surligne les pics d'amplitude correspondant aux marées diurnes (vers  $1,1 \cdot 10^{-5}$  Hz [Torge, 1989]) et semi-diurnes (vers  $2,2 \cdot 10^{-5}$  Hz [Torge, 1989]) sur la figure 4.13a. D'après ce graphique la correction employée par TSoft, sans caractérisation spécifique du site de mesure, permet déjà une réduction des pics de marée de 40 dB environ pour le signal diurne, et de 20 dB pour le signal semi-diurne. La figure 4.13b montre que le signal résiduel est de l'ordre de quelques dizaines de  $\text{nm s}^{-2}$ , plutôt inférieur à l'incertitude sur les mesures. En particulier le signal de marées est de loin prédominant, avec la dérive, pour une série de mesures comme celle-ci.



(a) Transformée de Fourier du signal corrigé, avant et après soustraction des données synthétiques de TSoft.

(b) Répartition en valeur absolue du signal corrigé soustrait des données synthétiques, et de l'estimation d'incertitude sur les données brutes.

FIGURE 4.13: Analyse du modèle de marée de TSoft et de l'incertitude sur les mesures brutes.

Il est enfin intéressant de tracer l'estimation d'incertitude en fonction du temps, sur la figure 4.14. Le pic d'incertitude qui a lieu vers 82 h est typique de ce genre de courbe. Il correspond à un événement perturbateur, en général de nature sismique, et dont la provenance peut être aussi bien humaine que naturelle. L'effet du vent est ainsi une cause courante de pics d'incertitude comme celui-ci [Diament, 2009] dans une série temporelle.

### 4.3.2 Cartographie gravimétrique

Une deuxième étape de prise en main de la mesure en gravimétrie a consisté à effectuer une campagne de mesure en différents emplacements. Cette campagne a constitué le sujet du stage de Sophie Dorizon. Sophie Dorizon a cartographié le champ de pesanteur du site de TRT à Palaiseau. Le stage s'est déroulé du premier février au 31 juillet 2010, encadré par Jacques Hinderer et Landry Huet. Au-delà de la prise en main, la caractérisation spatiale et temporelle du site s'est faite afin de disposer d'une cartographie de référence, dans la perspective du développement d'un nouveau gravimètre. On présente ici un point de vue général sur le travail effectué avec Sophie Dorizon. Les détails de l'étude se trouvent dans le rapport de stage de Sophie Dorizon [Dorizon, 2010].

#### Protocole de mesure

La campagne de mesure s'est déroulée en plusieurs étapes. La préparation de la campagne a nécessité tout d'abord une planification. 35 points de mesure ont été choisis de sorte à couvrir de façon aussi homogène que possible le site, aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur des bâtiments, et à tous les étages, avec les contraintes d'accessibilité d'un site industriel. Par exemple il est impossible de faire des mesures en salle blanche, et la

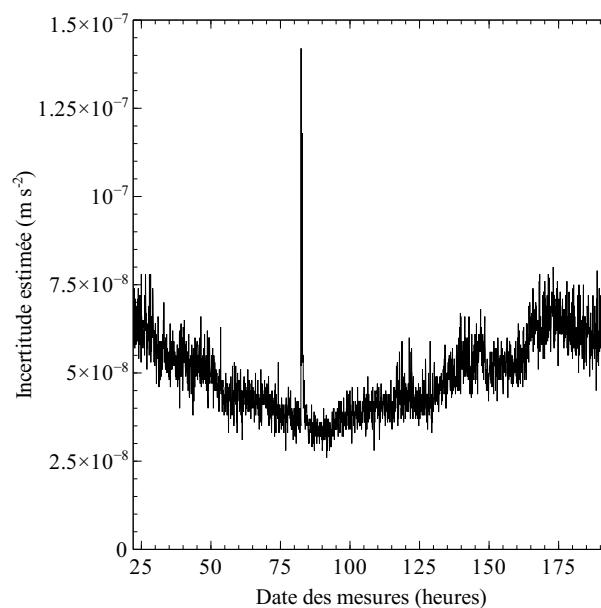


FIGURE 4.14: Estimation de l'incertitude en fonction du temps.

mesure dans un bureau ou un laboratoire nécessite l'approbation de son utilisateur.

Avant de commencer les mesures, on a étalonné l'instrument. L'opération se fait lorsque c'est possible par mesure successive en plusieurs points en lesquels la pesanteur est connue avec une exactitude compatible avec l'exactitude requise de l'étalonnage. Le nombre de points suffisamment connus et suffisamment stables dans la région parisienne étant limité, il a été décidé d'effectuer trois allers et retours entre la station de référence du **BIPM** à Sèvres, et celle du **Bureau des Recherches Géologiques et Minières (BRGM)** à Orléans. Ces stations ont été choisies car les incertitudes sur les valeurs de pesanteur à ces points de référence sont estimées inférieures à  $4 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$ . Après correction de la dérive instrumentale et du signal de marée grâce au logiciel CgxTool [[Gabalda et al., 2003](#)], la régression linéaire des données permet de calculer le coefficient d'étalonnage  $k$ . Les résultats de la régression linéaire ont de plus permis d'évaluer l'incertitude relative sur  $k$  à  $2 \cdot 10^{-4}$ .

Pour les mesures elles-mêmes, il a fallu s'attaquer au problème de compensation de la dérive instrumentale. Contrairement au cas d'une série temporelle de mesures en laboratoire sur une durée de quelques jours, comme décrit section 4.3.1 page 92, la dérive n'est en effet plus linéaire lorsque l'appareil est transporté d'un point de mesure à un autre. Pour les quatre jours de la campagne de mesure principale, on a ainsi suivi un protocole pour que toutes les mesures soient rattachées à la même référence. Tout d'abord, chaque journée de mesure s'est commencée et achevée par un aller et retour au point de référence gravimétrique du **BIPM** à Sèvres, afin de rattacher les mesures de la journée à une mesure absolue. Ensuite, le point de mesure numéro un a été désigné comme référence gravimétrique locale. Chaque demi-journée de mesure a consisté en un aller et retour sur un circuit constitué de quelques points de mesure, en commençant et en terminant toujours par le point de référence gravimétrique local. Par exemple lors de la première demi-journée de mesure les points ont été visités dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, et lors de la deuxième

demi-journée le parcours suivi a été 1,6,7,8,9,10,9,8,7,6,1. Pour compléter les mesures de champ par des mesures de gradient, en chaque point on a effectué des mesures à deux hauteurs différentes, l'une au sol et l'autre avec l'appareil fixé en haut d'un trépied de géomètre. Après la campagne de mesure principale, on a effectué un mois plus tard une campagne de vérification plus courte, avec des mesures à une seule hauteur, pour corriger les premières valeurs en mettant à profit l'expérience acquise lors de la première campagne et de son dépouillement.

L'analyse des données a été effectuée en partie à l'aide du logiciel CgxTool. L'opérateur a cependant dû au préalable trier et corriger les données pour supprimer un certain nombre d'effets de dérive non linéaire, et pour regrouper les données par jour suivant un format lisible par CgxTool. Le logiciel a ensuite corrigé les mesures de la dérive instrumentale linéaire ainsi que de la marée gravimétrique.

Dans le cadre de cette étude, sept nouvelles séries temporelles de mesures en laboratoire ont été réalisées. Elles ont permis tout d'abord, grâce au logiciel Eterna, de déterminer précisément, grâce au recoupement avec les données du Laboratoire de Météorologie Dynamique de l'École Polytechnique, le coefficient local d'admittance  $\alpha_P = 3,5 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$ , qui permet la détermination de l'anomalie de pesanteur causée par les variations de pression (voir la section 4.1.1 page 68 à ce sujet), et également d'estimer les paramètres des modèles de marée pour le site de Palaiseau. On a ensuite étudié l'incertitude à l'aide des valeurs d'écart type des mesures enregistrées par l'instrument. Ainsi que l'illustre la figure 4.15, les mesures sont globalement de meilleure qualité de nuit que de jour, à cause de la réduction de l'activité humaine sur le site après les horaires de bureau. D'autres essais ont permis la caractérisation des écarts types pour des mesures effectuées sur le plancher du laboratoire 0A4-41 et sur celui du laboratoire 0A4-31 qui reposent chacun sur un pilier posé sur le roc en profondeur, mais désolidarisé du plancher voisin, donc supposées isolées des vibrations externes. Aucune différence significative de distribution d'écart type n'a été remarquée avec les séries de mesures effectuées dans des salles non isolées.

Enfin, en s'inspirant des travaux de Merlet [Merlet *et al.*, 2008], on a réalisé une caractérisation en trois dimensions du laboratoire 0A4-31 où se situe l'expérience de gravimètre à atomes froids présentée plus loin dans ce manuscrit. Les incertitudes de mesure se sont cependant révélées trop importantes pour permettre l'obtention de résultats significatifs à l'échelle du laboratoire.

### Difficultés rencontrées

Le résultat le plus intéressant de cette campagne de mesure réside dans l'expérience des difficultés inhérentes à ce type de projet, c'est-à-dire une campagne en vraie grandeur mais dans des conditions relativement clémentes par rapport à l'utilisation embarquée d'un gravimètre à ressort ou à une campagne de mesure en pleine nature.

Le premier retour d'expérience concerne le problème de la dérive. Le CG3 numéro 9110193 a la réputation d'avoir une dérive bien linéaire, ce qui le rend particulièrement pratique [Diamant, 2009, Pajot, 2009]. La linéarité de la dérive s'est vérifiée au cours des séries temporelles de mesures, aussi bien pendant le stage de Sophie Dorizon que pendant les mesures faites à l'été 2009 et décrites section 4.3.1 page 92. La cartographie du champ sur le site de TRT à Palaiseau a montré que la linéarité de la dérive peut être fortement perturbée par les transports. Les allers et retours quotidiens vers le point de référence

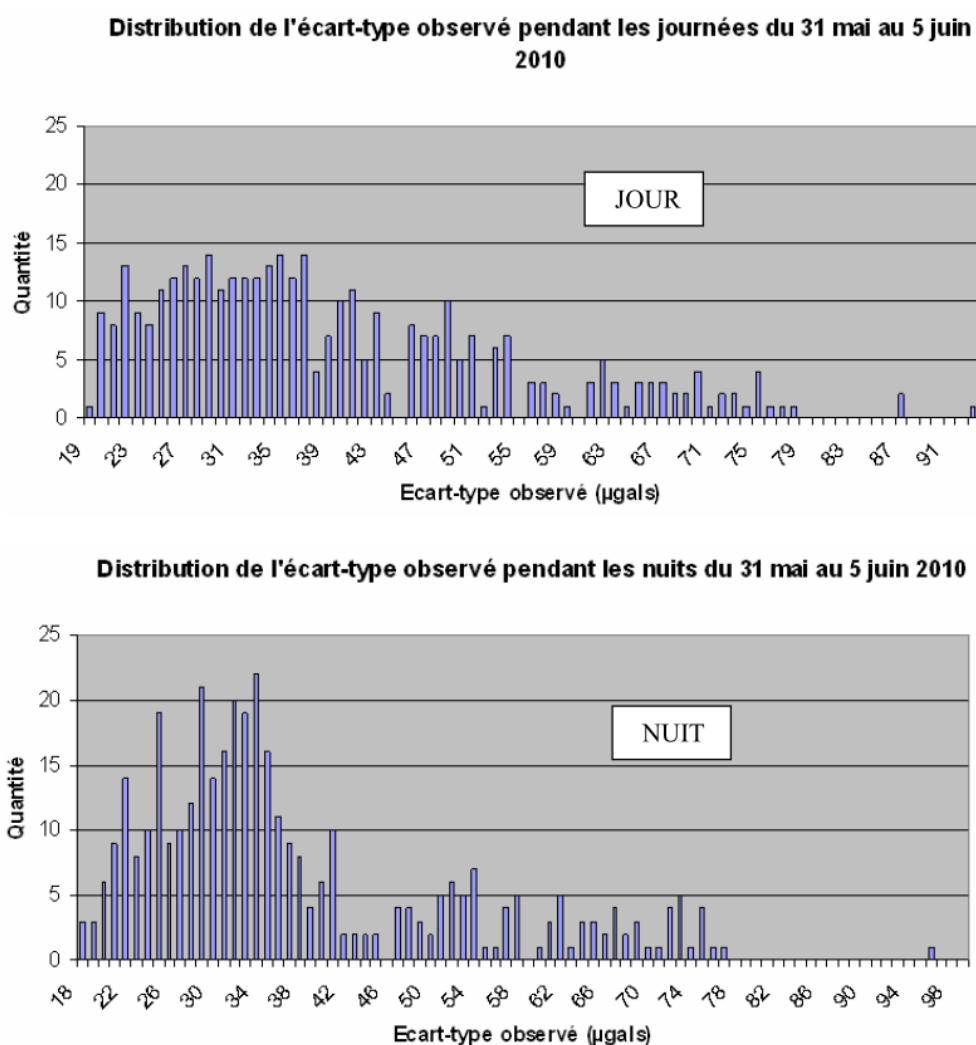


FIGURE 4.15: Distribution des valeurs d'écart type fournies par le gravimètre Scintrex CG3 numéro 9110193 au cours d'une série de mesures prise du 31 mai au 5 juin 2010 au laboratoire 0A0-43 du site de TRT à Palaiseau. Figure Sophie Dorizon [Dorizon, 2010].

du **BIPM** à Sèvres se sont ainsi avérés une mauvaise idée, car le transport du CG3 en voiture a fortement perturbé la dérive, ce qui s'est finalement révélé dommageable pour la qualité des mesures. Cet effet a pu être partiellement corrigé en traitant à part les valeurs prises à Sèvres pour le calcul de la dérive. Compte tenu du problème de dérive non linéaire entre Sèvres et Palaiseau, le point de mesure numéro un a été une référence gravimétrique globalement plus stable que celle de Sèvres pour notre campagne. On a abandonné les allers et retours quotidiens vers Sèvres pour la campagne de vérification, ce qui a contribué à une amélioration sensible de la qualité des mesures. Les trajets sur un chariot à l'intérieur du site détériorent eux aussi les mesures. On a remarqué des sauts de valeurs au cours de la campagne. Deux mesures au même endroit ont ainsi pu être éloignées d'un écart sans cause gravitationnelle ou inertielle, l'écart se maintenant sur les mesures suivantes, jusqu'au saut suivant. La compensation de ce type de non-linéarité est faite par l'opérateur au moment de l'exploitation des données.

On a également remarqué l'importance des conditions extérieures pour la réalisation de la mesure. La stabilité du sol est particulièrement critique. Sur un sol mou, type linoleum ou moquette, l'inclinaison continue de changer après le réglage de l'assiette de l'instrument. Cette instabilité d'inclinaison de l'appareil perturbe la mesure lorsqu'elle a lieu au cours de l'échantillonnage. Deux techniques ont été employées pour remédier à l'instabilité du sol. D'abord, l'instabilité a été réduite par l'utilisation d'une plaque métallique, posée entre le sol et le gravimètre lorsque le sol était mou, comme sur la figure 4.16. Ensuite au moment de la mesure, on a effectué répétitivement des mesures, jusqu'à obtenir quelques valeurs proches les unes des autres. Ce protocole permet de s'assurer que l'instrument a achevé sa dérive en inclinaison, et qu'il est par conséquent plus stable. Parmi les causes d'erreur liées à l'environnement, le vent nuit lui aussi à la stabilité du gravimètre pour les mesures à l'extérieur. Il s'agit de choisir ses points de mesure à l'abri du vent, ou alors de protéger l'instrument autant que possible. Une astuce classique consiste à protéger le gravimètre avec une poubelle renversée [Diament, 2009]. Cette astuce n'a pas été utilisée ici faute d'anticipation. Enfin le déplacement des personnes et des véhicules sont bien entendu des facteurs perturbateurs majeurs, et inévitables sur un site industriel. Etant donné le nombre de mesures effectuées quotidiennement, et le décalage temporel entre la prise des mesures et leur analyse, l'analyse a été grandement facilitée par l'utilisation d'un carnet de mesures. On y a noté de la façon la plus détaillée possible toutes les conditions des mesures, en plus des valeurs mesurées. Ce cahier de mesure a permis en particulier de sélectionner les mesures les plus fiables au moment du dépouillement des données.



FIGURE 4.16: Gravimètre sur sol mou, stabilisé à l'aide d'une plaque en métal. Image Sophie Dorizon [Dorizon, 2010].



## Résultats

Le résultat principal de cette campagne de mesure est une cartographie du champ de pesanteur du site industriel de TRT à Palaiseau, en trois dimensions. Ce champ est connu sous la forme de valeurs mesurées, et d'estimations d'incertitudes en 35 points. On a également calculé à partir des données une approximation du champ en trois dimensions, avec un polynôme de degré trois en  $x$ ,  $y$  et  $z$ , ce qui devrait permettre d'estimer le champ en tout point du site. Pour visualiser les données, on a enfin estimé les lignes isochamps à l'aide du logiciel Surfer, ce dont on a reproduit une partie figure 4.17.

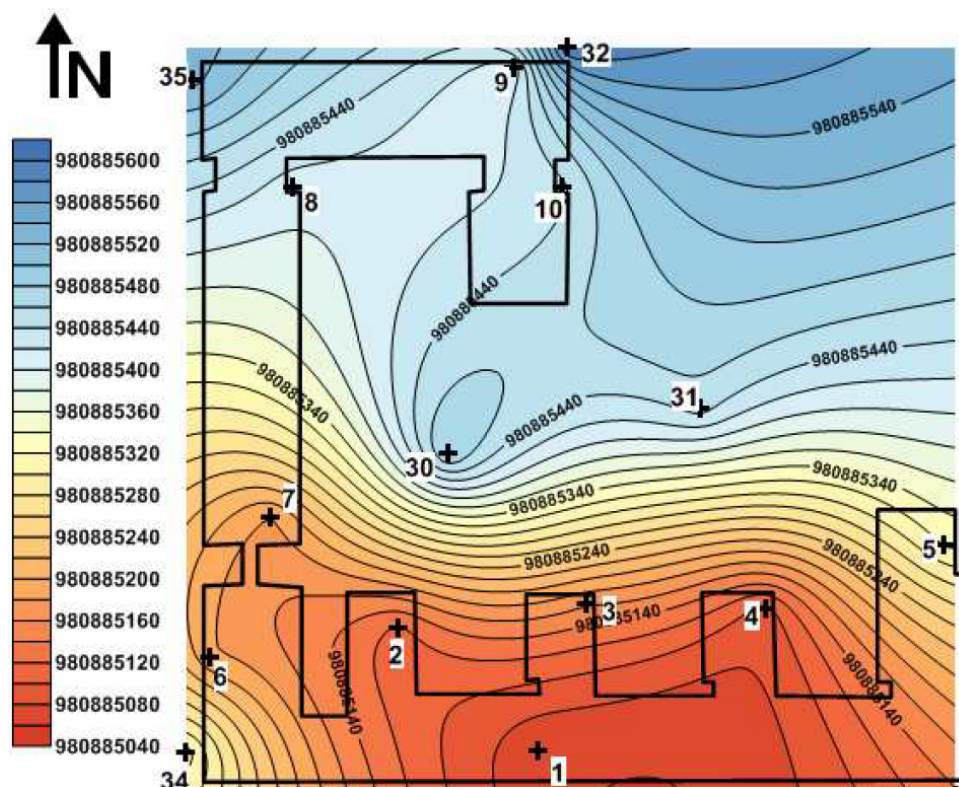


FIGURE 4.17: Estimation à l'aide du logiciel Surfer et à partir des données mesurées des lignes isochamps pour le rez de chaussée du site. Les résultats sont donnés en  $\mu\text{Gal}$ , soit  $10^{-8} \text{ m s}^{-2}$ . Figure Sophie Dorizon [Dorizon, 2010].

Les schémas comme ceux de la figure 4.17 sont tout d'abord utiles pour l'analyse des résultats intermédiaires, car ils permettent de repérer rapidement les points qui semblent aberrants. Dans le cas de la figure 4.17, les points 30 et 31 apparaissent nettement en creux par rapport à la tendance générale. Pour interpréter cette anomalie, on peut remarquer que l'on n'a pas effectué de nivellement lors de la campagne. De cette manière la campagne repose implicitement sur le nivellement du bâtiment. L'objectif de la campagne étant de cartographier le champ sur le site, et non d'en déduire une interprétation géophysique, le nivellement n'est d'ailleurs pas essentiel. Les points 30 et 31 se situent cependant dans le jardin du centre de recherche, donc ils ne sont pas nivelés sur le plancher du rez-de-chaussée du bâtiment, ce qui pourrait expliquer l'écart des mesures en ces points par rapport à la tendance générale. La figure 4.17 suggère une valeur en excès de l'ordre de  $10^{-6} \text{ m s}^{-2}$  par rapport à la tendance générale dans les bâtiments, ce qui correspondrait à une différence

de nivellement d'une trentaine de centimètres vers le bas. Cette valeur paraît élevée, mais n'est pas forcément absurde.

La figure 4.17 permet ensuite de visualiser la tendance générale pour l'analyser. Un gradient Sud-Nord est visible. D'après les valeurs mesurées pour les points 1 et 9, ce gradient est de  $3,40 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$  sur une distance de 200 m environ, soit  $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-2}$ . Ce gradient illustre tout d'abord le gradient géographique causé principalement par la rotation terrestre, qui a déjà été évoqué section 4.1.1 page 62. A la latitude de  $48^{\circ}43'$ , qui est celle de Palaiseau, ce gradient vaut  $8,1 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ , ce qui représente une différence de champ de  $1,6 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$  sur 200 m. Le reste du gradient n'a pas pu être expliqué de façon certaine. Un nouvel effet de nivellement est possible, car les parties Nord et Sud des bâtiments ne sont pas forcément nivelées précisément par rapport à la même référence. Deux autres hypothèses d'ordre géologique ont été émises, sans avoir été vérifiées par la modélisation. Une partie du gradient peut venir d'un effet de plateau, le site de la campagne étant à proximité du bord abrupt du plateau de Saclay, qui plonge dans la vallée de Chevreuse. La vallée doit provoquer une anomalie négative de champ sur le plateau, anomalie qui s'estompe au fur et à mesure que l'on s'éloigne du bord du plateau. L'autre partie du gradient pourrait provenir de l'écoulement d'une nappe phréatique sur le plateau [Dorizon, 2010].

La campagne a également permis de déterminer le gradient vertical de champ en 34 des 35 points de mesure. Une fois retiré un point aberrant, la moyenne de ces mesures est de  $-2,93 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ , ce qui n'est pas incohérent avec le gradient normal de  $-3,09 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ . L'écart type entre les mesures de gradient est en revanche de  $3,50 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-2}$ , et les mesures sont comprises entre  $-1,74 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$  et  $-3,45 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ . Cette variabilité est très surprenante, l'ordre de grandeur des anomalies du gradient de pesanteur au niveau de l'ellipsoïde de référence étant plutôt de  $10^{-8} \text{ s}^{-2}$  localement à  $10^{-7} \text{ s}^{-2}$  à l'échelle planétaire [Pajot, 2007]. Ce problème met en cause la validité des mesures de gradient. Des erreurs importantes sur la hauteur du trépied utilisé, ou sur la mesure de champ en haut du trépied ont pu être des causes de l'amplitude excessive des variations de gradient.

On peut également évaluer le gradient à l'échelle du site, en différenciant entre les valeurs moyennes du champ prises au premier étage, au rez de chaussée et au sous-sol, les étages étant séparés de 3,6 m environ. On trouve de cette manière  $-3,16 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$  entre le rez de chaussée et le premier étage, ce qui est cohérent avec le gradient vertical normal de pesanteur. Pour expliquer les  $-2,1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$  entre le sous-sol et le rez de chaussée, il faut supposer que la densité du milieu environnant est de  $1,2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , ce qui est là encore cohérent pour un sous-sol.



# Chapitre 5

## Dimensionnement des applications envisagées

Comme cela a déjà été évoqué dans le chapitre d'introduction (section 1.3 page 20), on a envisagé pendant la thèse plusieurs applications moins courantes de la mesure du champ de pesanteur et de son gradient. On présente dans ce chapitre quelques modèles pour le dimensionnement de certaines applications, c'est-à-dire que l'on cherche à déterminer l'exactitude de mesure nécessaire pour rendre possible les applications en question.

Section 5.1 page 103 on calcule les effets de champ et de gradient pour la prévention des collisions d'un sous-marin, avec les éléments de terrain sous-marins comme avec les autres navires. On estime ensuite à la section 5.3 page 115 la possibilité de détecter le passage d'une vague de tsunami en haute mer grâce à la variation de pesanteur ou de gradient qu'elle provoque. Enfin la section 5.2 page 114 présente quelques aspects de la détection de cavité et conclut sur la possibilité de détecter une canalisation par mesure gravimétrique.

J'ai contribué directement aux calculs qui sont présentés dans ce chapitre. Les calculs concernant les vagues de tsunami ont été effectués en collaboration avec Cécile Clément et son équipe encadrante, au cours de son stage en cotutelle entre l'Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre et THALES.

### 5.1 Dispositif anti-collision

La collision du *USS San Francisco* contre une montagne sous-marine en 2005, tout comme la collision plus récente entre le *Triumphant* et le *HMS Vanguard* en 2009, viennent rappeler le paradoxe de la navigation sous-marine. Un sous-marin doit en effet rester aussi discret que possible pour sa mission, ce qui n'est pas forcément compatible avec l'utilisation d'un sonar actif pour sonder les alentours. On propose, dans cette section, de déterminer l'exactitude nécessaire à la détection d'un élément topographique ou d'un autre navire, afin d'éviter une collision.

#### 5.1.1 Détection d'éléments topographiques

L'accident du sous-marin *USS San Francisco* illustre la connaissance imparfaite des fonds océaniques, et l'intérêt de détecter à l'avance un élément de relief de grande taille. L'utilisation d'un système complètement passif, comme la mesure du champ de pesanteur,

est une manière de répondre à ce problème de façon tout à fait discrète. Pour évaluer l'intérêt de cette technique, on envisage deux modèles réalistes simples afin de déterminer les ordres de grandeur en jeu.

### Falaise sous-marine

Le premier modèle que l'on considère est une falaise sous-marine. Pour fixer les idées, on suppose la falaise de largeur infinie, de hauteur  $h$  et de profondeur infinie, comme sur la figure 5.1. L'approximation est valable lorsque ces dimensions sont grandes devant la distance de l'instrument de mesure à la falaise. On estime l'effet gravitationnel de la falaise pour un milieu de masse volumique égale à  $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , ce qui est une hypothèse raisonnable pour les calculs d'anomalie de pesanteur liée à la topographie. L'anomalie  $\rho$  de masse volumique par rapport au milieu environnant vaut donc  $1,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

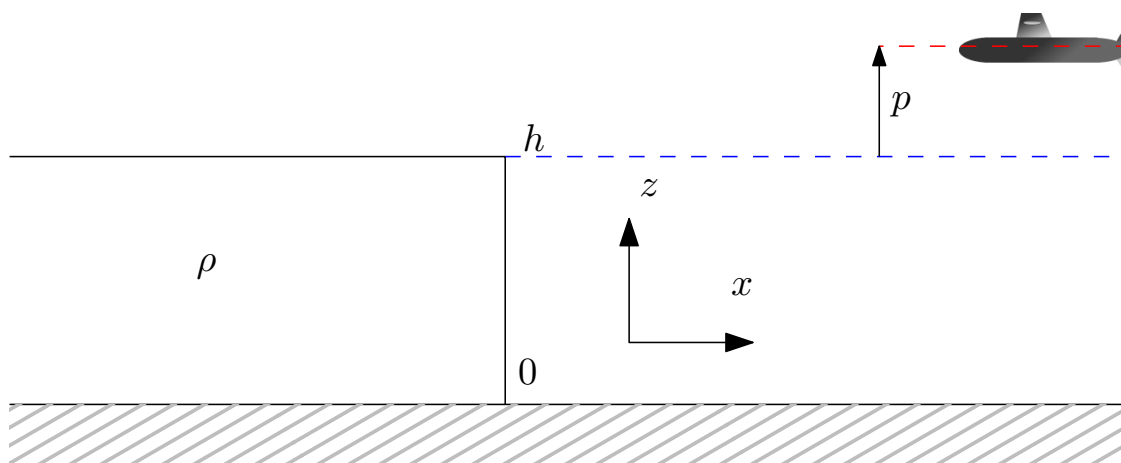


FIGURE 5.1: Modèle de falaise utilisé. La largeur de la falaise, selon l'axe perpendiculaire au plan de la figure, est supposée infinie. Tout comme sa profondeur, vers les valeurs négatives de l'axe des abscisses. L'origine du repère est prise au pied de la falaise. La hauteur du gravimètre embarqué est pour sa part comptée à partir du sommet de la falaise.

Un calcul direct du signal de champ et de gradient de pesanteur, détaillé dans l'annexe C section C.4 page 221 donne pour l'anomalie verticale de pesanteur  $\delta g_z$  et les composantes  $\delta T_{zz}$  et  $\delta T_{zx}$  du gradient :

$$\delta g_z = -G\rho(I - J)$$

avec  $I = 2 \left[ -(h - z) \arctan \frac{x}{h - z} + z \arctan \frac{x}{z} \right] + \pi (|h - z| - |z|)$  (5.1a)

$$J = x \ln \frac{x^2 + (h - z)^2}{x^2 + z^2}$$

$$\delta T_{zz} = G\rho \left[ -\pi \operatorname{sgn}(h - z) - \pi \operatorname{sgn} z + 2 \arctan \frac{x}{h - z} + 2 \arctan \frac{x}{z} \right] \quad (5.1b)$$

$$\delta T_{zx} = -G\rho \ln \frac{x^2 + (h - z)^2}{x^2 + z^2} \quad (5.1c)$$

Les formules (5.1) sont utilisées dans la suite pour calculer numériquement les anomalies dans des cas spécifiques.

On considère une première situation dans laquelle on aurait un à-pic  $h$  de 200 m de haut, et où la mesure se ferait entre le fond de l'océan et légèrement au-dessus du haut de la falaise sous-marine. L'anomalie de pesanteur en fonction de la distance, et pour plusieurs immersions différentes est représentée figure 5.2.

On étudie un second scénario, dans lequel la falaise fait 1000 m de haut, et où elle est observée au voisinage de son sommet. Les résultats pour ce scénario sont représentés figure 5.3.

Les figures 5.2 et 5.3 montrent tout d'abord que l'amplitude des variations spatiales est largement supérieure à la résolution des instruments actuels de mesure du champ ou du gradient. On voit aussi que le signal semble très similaire pour un porteur situé au-dessus que pour un porteur situé en-dessous du sommet de la falaise pour les composantes  $\delta g_z$  et  $\delta T_{zx}$ , et de même le signal est nul lorsque le porteur est à mi-hauteur de la falaise. Cet aspect illustre une des difficultés du traitement de ce type de données, qui ne sont pas dépourvues d'ambiguïtés. La mesure du champ seul ne permettrait pas ainsi de donner une alarme certaine de risque de collision, mais seulement de prévenir d'un danger, pour mettre en œuvre d'autres moyens d'évitement comme un sonar de proximité. Le gradient vertical  $\delta T_{zz}$  a cependant des variations opposées à proximité de la falaise, suivant que le gradiomètre est situé au-dessus ou en-dessous du sommet de la falaise.

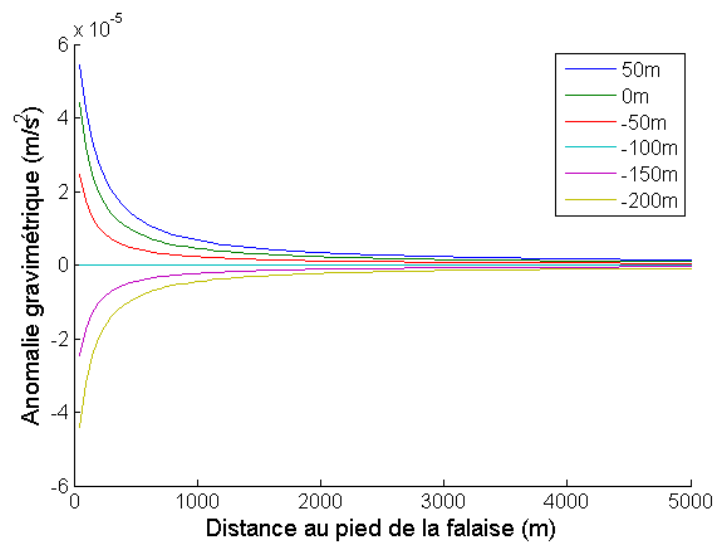
### Montagne sous-marine

On considère maintenant un autre type d'élément de terrain, à savoir une montagne sous-marine isolée. Comme dans le cas précédent la masse volumique de la montagne est supposée égale à  $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , ce qui représente donc une anomalie de masse volumique  $\rho = 1,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  par rapport à l'eau. Le modèle retenu pour la montagne est celui d'un cône tronqué. Pour calculer l'anomalie de pesanteur provoquée par ce type de géométrie on choisit d'approximer cette forme par un polyèdre, puis d'utiliser la formule démontrée par Okabe [Okabe, 1979] pour le calcul de l'anomalie de champ provoquée par un polyèdre homogène quelconque.

En vue d'obtenir un résultat quantitatif représentatif, on considère une montagne sous-marine de 1000 m de hauteur, avec une base de 8000 m de diamètre et un sommet formé d'un plateau de 2500 m de diamètre. Les anomalies du champ et du gradient vertical de pesanteur en fonction de la distance à l'axe du cône pour plusieurs positions verticales de l'instrument de mesure par rapport au sommet sont représentées figure 5.4 page 108.

Comme pour la falaise, le calcul fait ici démontre la compatibilité de l'amplitude du signal avec la résolution des instruments existants, et le fait que l'augmentation de l'anomalie coïncide bien avec la proximité croissante au centre de la montagne sous-marine. De même que dans le cas précédent, il y a cependant une ambiguïté sur la sécurité d'une trajectoire, puisque le signal ne semble pas indiquer si le porteur se trouve au-dessus ou en-dessous du sommet de la montagne.

Pour conclure sur la détection gravimétrique d'éléments de topographie, les ordres de grandeur du signal et de la résolution des instruments sont compatibles, comme cela a déjà été observé pour les études géophysiques [Torge, 1989]. Le traitement du signal pour la prévention des collisions est cependant délicat pour résoudre l'ambiguïté sur la position du porteur par rapport aux éléments à éviter. L'estimation de terrain a déjà été étudiée, et les références [Ramillien et Wright, 2002, Moryl *et al.*, 1998] peuvent par exemple donner



(a) Anomalie de champ.

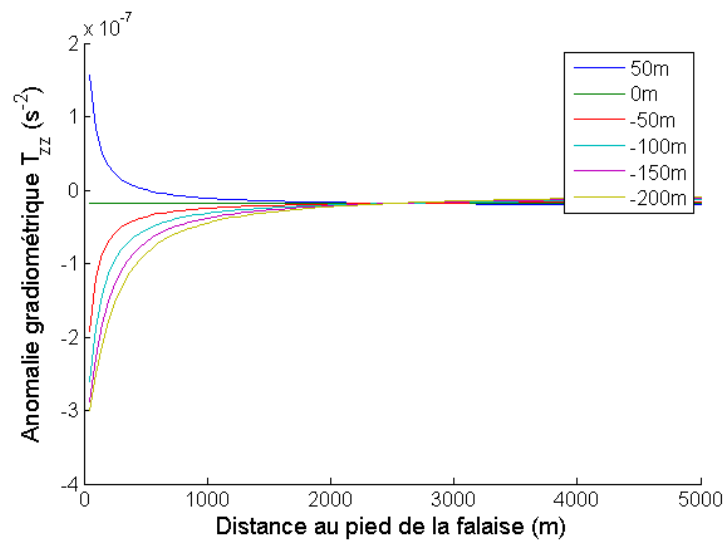
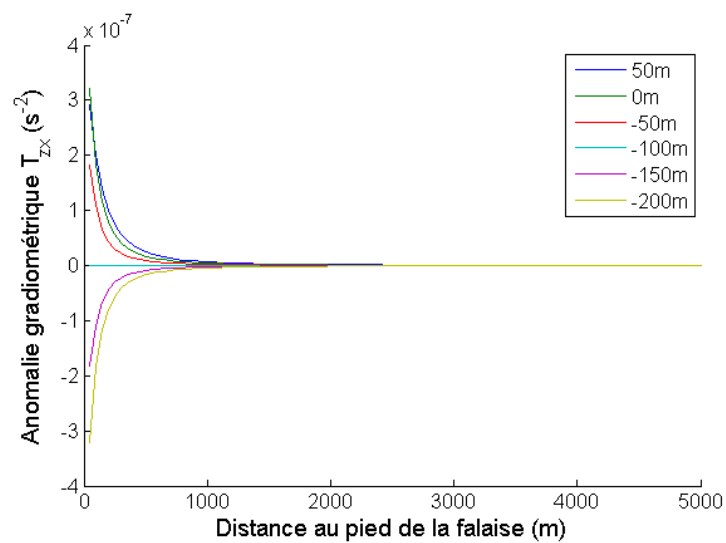
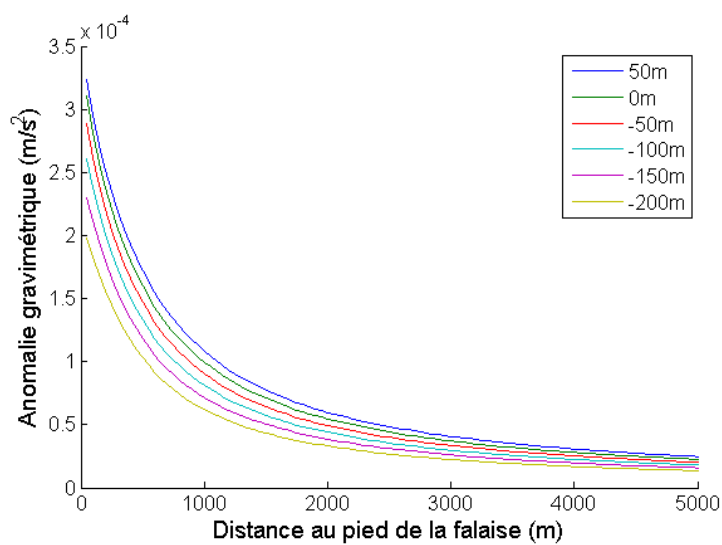
(b) Anomalie de gradient  $\delta T_{zz}$ .(c) Anomalie de gradient  $\delta T_{zx}$ .

FIGURE 5.2: Anomalies de pesanteur pour une falaise de 200 m, vue à plusieurs profondeurs.



(a) Anomalie de champ.

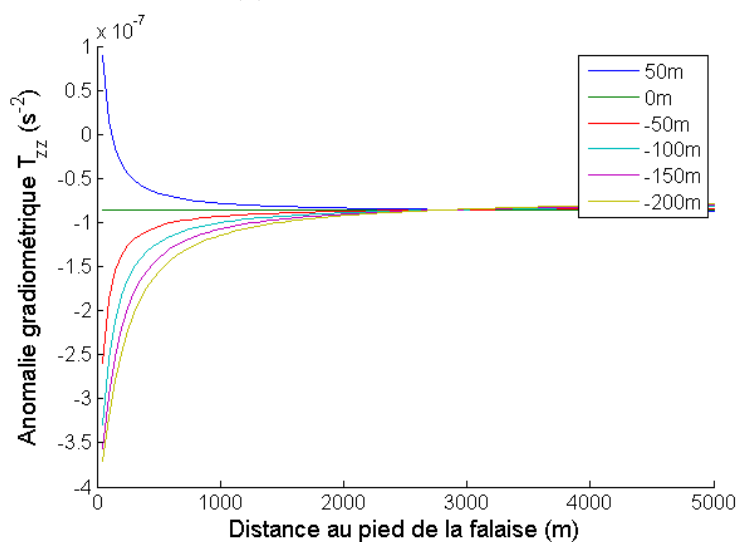
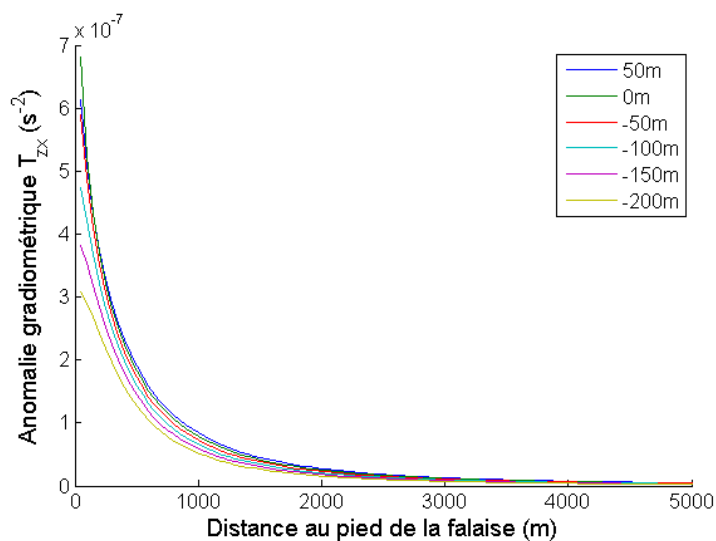
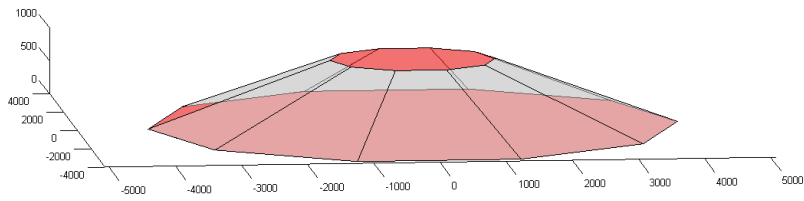
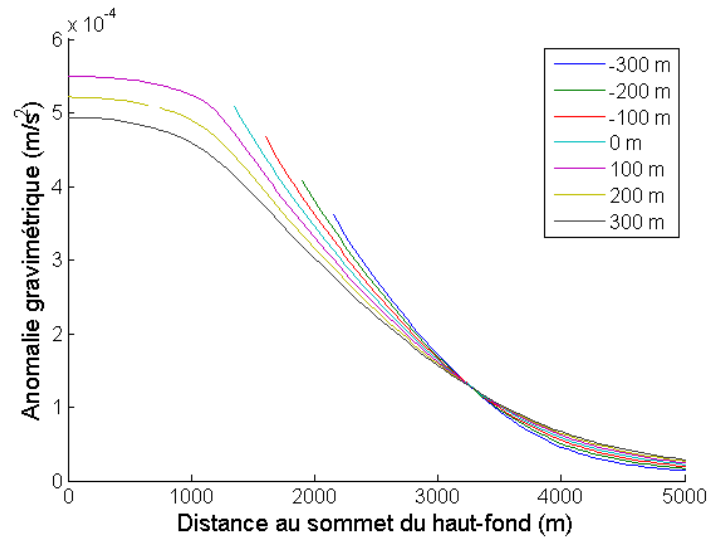
(b) Anomalie de gradient  $\delta T_{zz}$ .(c) Anomalie de gradient  $\delta T_{zx}$ .

FIGURE 5.3: Anomalies de pesanteur pour une falaise de 1000 m, vue à plusieurs profondeurs au voisinage de son sommet.

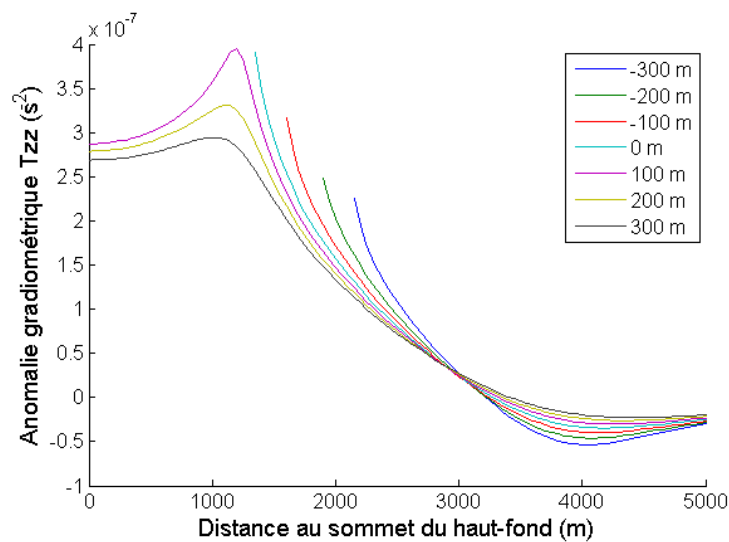




(a) Représentation du modèle utilisé pour la montagne sous-marine.



(b) Anomalie de champ.



(c) Anomalie de gradient  $\delta T_{zz}$ .

FIGURE 5.4: Anomalies de pesanteur pour une montagne sous-marine de 1000 m, vue à plusieurs profondeurs au voisinage de son sommet. Les courbes sont interrompues à l'intersection entre le plan de navigation et le modèle de montagne. Ainsi seules les courbes qui correspondent à une immersion au-dessus du sommet de la montagne (profondeurs positives) continuent jusqu'à la distance nulle au centre de la montagne.

des pistes pour l'utilisation opérationnelle des données de pesanteur pour la prévention des collisions.

### 5.1.2 Détection de proximité entre navires

Dans cette section on cherche à évaluer la distance à laquelle l'anomalie de pesanteur provoquée par la présence d'un navire deviendrait suffisante pour être détectable, ce qui permettrait l'utilisation d'un gravimètre ou d'un gradiomètre pour la sécurité de la navigation sous-marine, par exemple au moment de la remontée à la surface, en toute discrétion.

#### Modèle de navire

Un navire ne peut pas être modélisé simplement comme une masse gravitationnelle ponctuelle pour le calcul de l'anomalie de pesanteur qu'il provoque. Tout d'abord, parce que lorsque le navire flotte, c'est-à-dire à moins qu'il ne soit échoué ou qu'il ne déjauge, d'après le principe d'Archimède il déplace une masse d'eau égale à sa masse totale. L'eau déplacée représente une anomalie de masse négative par rapport au milieu environnant, ce qui vient compenser exactement la masse du navire. Ensuite parce que la prévention d'un abordage implique la détection à proximité du navire, à une distance de l'ordre de la plus grande dimension caractéristique du navire. A ces distances le navire ne peut donc pas être modélisé comme un objet ponctuel.

Puisque l'anomalie globale de masse du navire est nulle, on s'intéresse au dipôle gravitationnel, qui peut être défini de la même manière que dans le cas des calculs de champ électrostatique et magnétostatique. Un champ électrique dipolaire correspond au champ créé par une paire de charges opposées, vues à une distance  $r$  grande devant celle  $d$  qui sépare les charges. Le développement suivant  $d/r$  permet de généraliser cette définition à un ensemble globalement neutre de charges, d'extension  $d$ . Les formules permettant le calcul des anomalies de champ et de gradient créées par un dipôle sont données dans l'annexe C, section C.2.3 page 220 et section C.3.4 page 221.

Le modèle dipolaire devient insuffisant à courte portée. Pour l'étude d'un dispositif de prévention des abordages, on considère des portées qui peuvent être plus faibles que la longueur du navire, mais *a priori* plus grandes que sa largeur et que sa hauteur. On choisit par conséquent un modèle dans lequel le développement en dipôle est fait suivant deux des trois dimensions. Cela revient à modéliser le navire par une densité linéique de dipôle gravitationnel. On choisit d'utiliser une densité uniforme de dipôle dans le modèle, afin de réduire le nombre de paramètres et donc de préserver la généralité de la modélisation.

Il reste à déterminer des valeurs typiques pour la densité linéique de moment d'un navire. Pour évaluer cet ordre de grandeur on considère un modèle de navire en forme de pavé droit homogène, dont un schéma est fait figure 5.5. Le dipôle gravitationnel total associé à ce modèle est  $\underline{\mathcal{M}}_{total} = m \underline{BG}$ , avec  $m$  la masse du navire, et  $\underline{BG}$  le vecteur reliant le centre de poussée d'Archimède au centre de masse du navire. Pour un déplacement  $V$  donné la masse totale du navire vaut  $m = \mu V$  où  $\mu$  est la masse volumique de l'eau. Le moment dipolaire étant supposé réparti sur toute la longueur du bateau, la densité linéique de moment dipolaire vaut donc

$$\underline{\mathcal{M}} = \mu \frac{V}{L} \frac{H - T}{2} \underline{e}_z \quad (5.2)$$

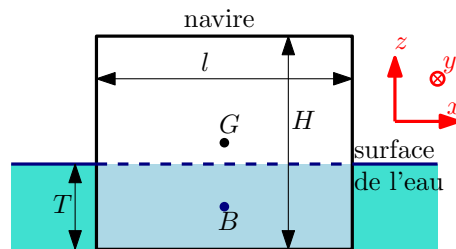


FIGURE 5.5: Modèle de navire en forme de pavé droit homogène, de largeur  $l$ , de hauteur totale  $H$ , de tirant d'eau  $T$  et de longueur  $L$  dans l'axe perpendiculaire au schéma. Le déplacement du navire est donc  $V = TlL$ . Sur le schéma,  $G$  représente le centre de masse du navire, et  $B$  le point d'application de la poussée d'Archimède.

Le porte-conteneur qui sert de modèle est le *CMA CGM Almaviva* de l'armateur français *CMA CGM* [[Marine-Marchande.net](http://Marine-Marchande.net), 2012]. Les caractéristiques du navire sont résumées dans le tableau 5.1. On en déduit les estimations suivantes du moment total et du moment linéique :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{total} &= 1,1 \cdot 10^9 \text{ kg m} \\ \mathcal{M} &= 3,2 \cdot 10^6 \text{ kg}\end{aligned}$$

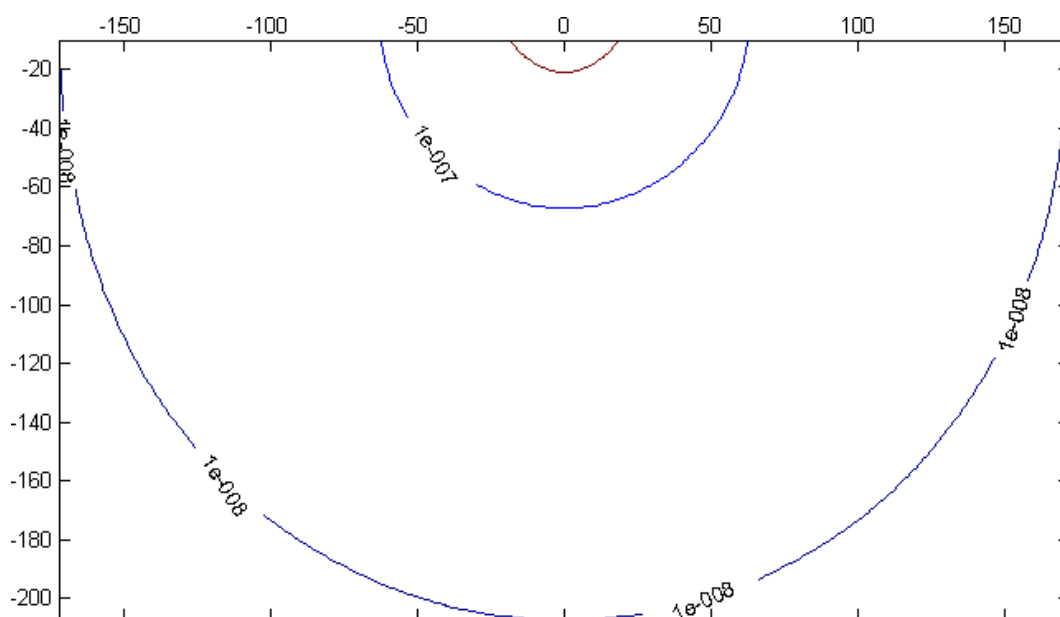
Caractéristique	Valeur
Hauteur	25 m
Largeur	43 m
Longueur	334 m
Tirant d'eau	15 m

TABLEAU 5.1: Caractéristiques du porte-conteneur Almaviva [[Marine-Marchande.net](http://Marine-Marchande.net), 2012].

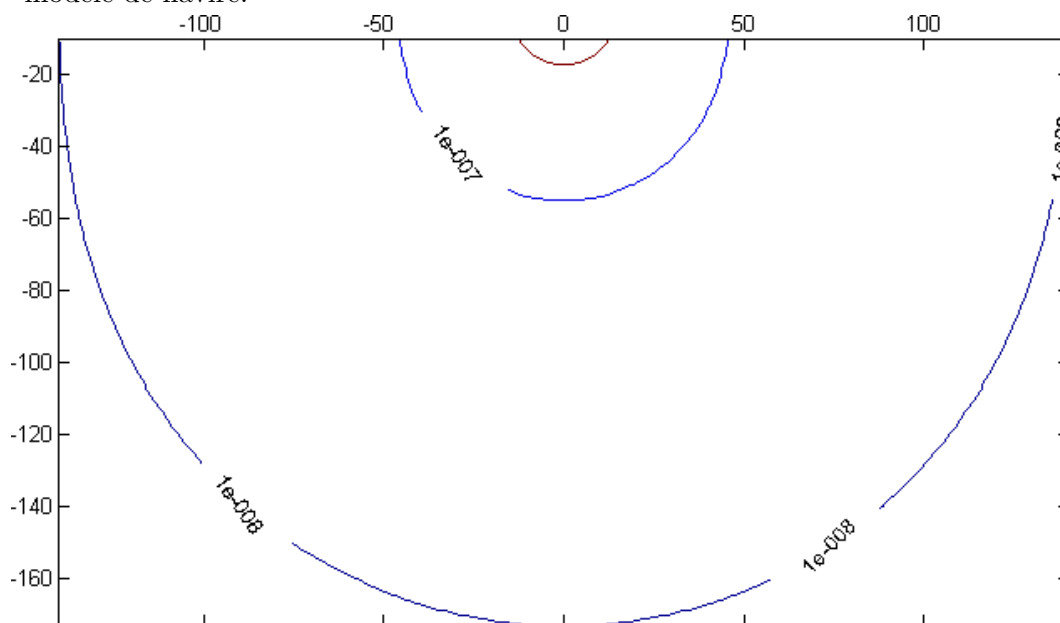
### Résultats pour la prévention des collisions

On utilise les valeurs précédentes pour évaluer l'anomalie de pesanteur créée par le navire. L'intégration de la densité linéique de moment dipolaire se fait de façon numérique, c'est-à-dire que l'on somme les contributions de petits tronçons le long du navire, calculées à partir des formules (C.4) et (C.9), de l'Annexe C, pages 220 et 221. Les résultats de ces calculs sont présentés figure 5.6, figure 5.7 et figure 5.8.

D'après les figures 5.6 à 5.8 et d'après les ordres de grandeur de résolution des instruments de mesure présentés au chapitre 2 page 27, l'amplitude des anomalies calculées ici laisse espérer une portée de 100 m à 200 m pour la prévention de collisions, suivant le placement par rapport au navire, le type de mesure et l'hypothèse sur l'instrument. Cette conclusion suppose toutefois que la résolution de mesure est limitée par la résolution

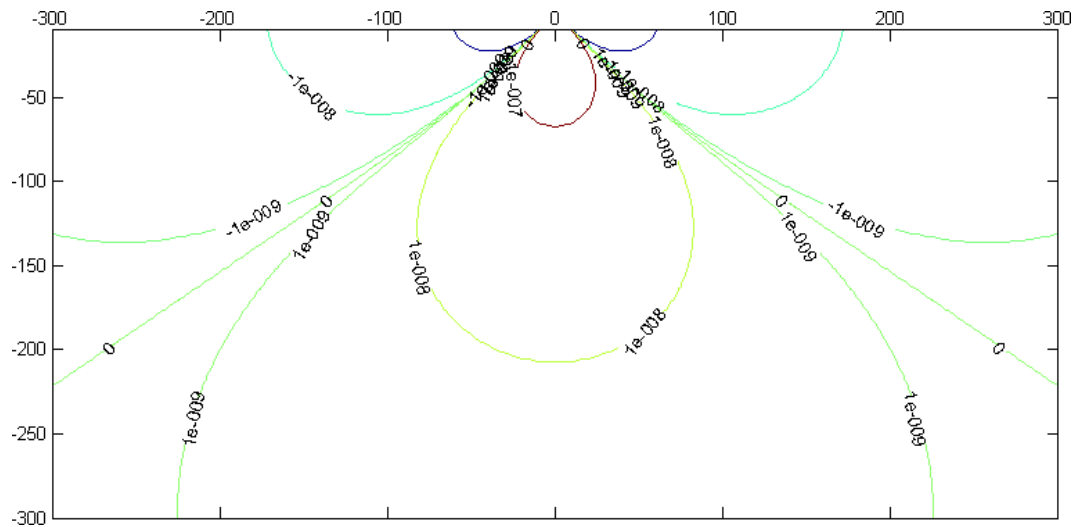


(a) Module de l'anomalie de champ, dans le plan de coupe transverse, au milieu du modèle de navire.

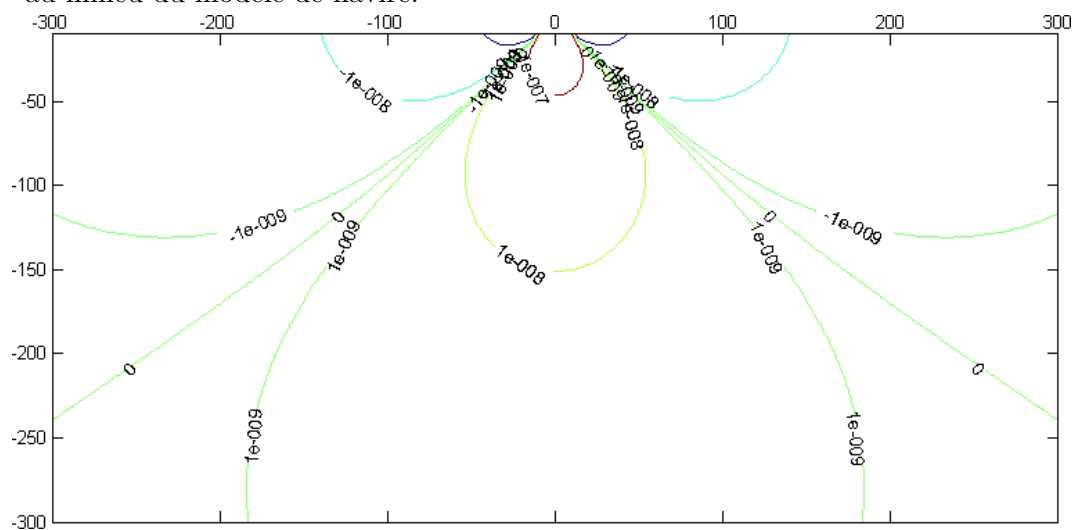


(b) Module de l'anomalie de champ, dans le plan de coupe transverse, à l'extrémité du modèle de navire.

FIGURE 5.6: Module de l'anomalie de champ. L'axe des abscisses correspond à la largeur du navire, celui des ordonnées à la profondeur. Les unités de distance sont en mètres, et le repère est orthonormé. L'axe longitudinal du navire est perpendiculaire au plan des figures, et le navire est placé dans chaque cas à l'origine.

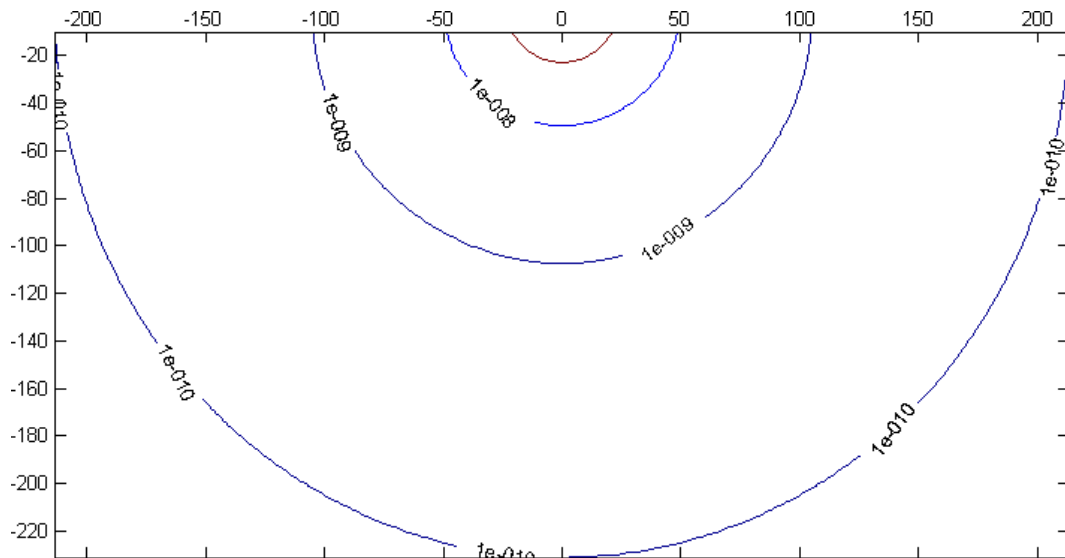


(a) Projection verticale de l'anomalie de champ, dans le plan de coupe transverse, au milieu du modèle de navire.

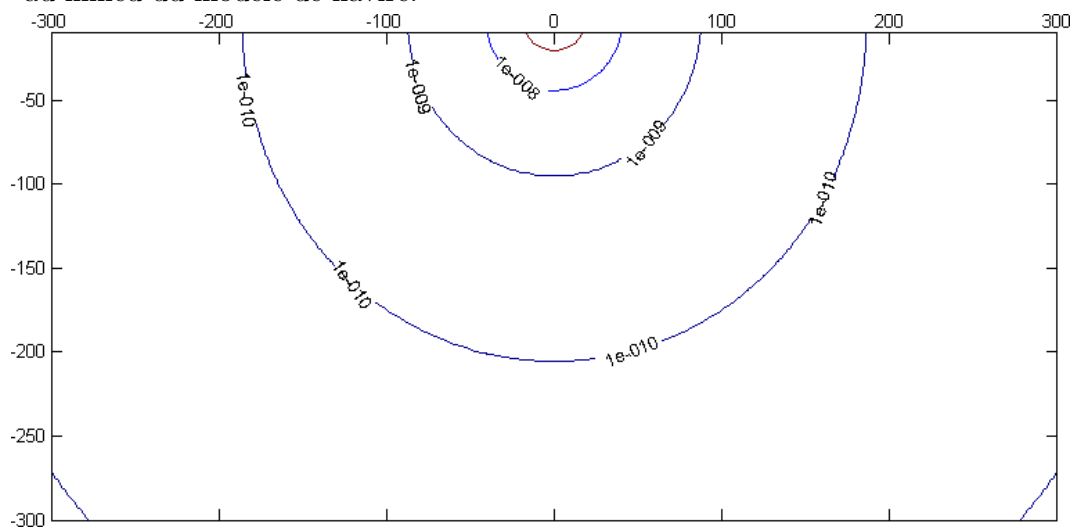


(b) Projection verticale de l'anomalie de champ, dans le plan de coupe transverse, à l'extrémité du modèle de navire.

FIGURE 5.7: Projection verticale de l'anomalie de champ. Les systèmes d'axes sont identiques à ceux de la figure 5.6, page 111.



(a) Norme de l'anomalie de gradient de pesanteur, dans le plan de coupe transverse, au milieu du modèle de navire.



(b) Norme de l'anomalie de gradient de pesanteur, dans le plan de coupe transverse, à l'extrémité du modèle de navire.

FIGURE 5.8: Norme de l'anomalie de gradient de pesanteur. La norme utilisée est la norme de Frobenius  $\|\underline{T}\| = \sqrt{\sum_{i,j} T_{ij}^2}$ , qui reste en particulier invariante par rotation du système de coordonnées. Les systèmes d'axes sont identiques à ceux de la figure 5.6, page 111.

du capteur et non par le bruit externe, lié au porteur ou à l'environnement. Lorsque la grandeur observée est la projection verticale du champ, on remarque deux secteurs de part et d'autre de l'axe de la coque, où l'anomalie passe par zéro, ce qui correspond à un changement de signe. Ces zones pourraient être aveugles pour de telles mesures. Un calcul montre que l'angle  $\theta_0$  que fait cette zone avec l'horizontale vérifie  $(\sin \theta_0)^2 = 2/3$ , ce qui correspond à  $\theta_0 = 35^\circ$  environ. La décroissance du signal est d'après les figures en  $\mathcal{O}(r^{-2})$  pour  $\delta g$  et en  $\mathcal{O}(r^{-3})$  pour  $\delta T$ , contre  $\mathcal{O}(r^{-3})$  et  $\mathcal{O}(r^{-4})$  pour un dipôle ponctuel. En effet à courte distance le modèle se rapproche d'une ligne infinie de densité linéique de moment dipolaire, d'où la décroissance plus lente observée.

## 5.2 Détection de conduites enfouies

La détection de cavités dans le sous-sol est particulièrement importante pour la construction, puisqu'une cavité non remblayée constitue un risque d'effondrement. La détection de cavités a également des applications dans les domaines de la défense et de la sécurité, afin de repérer des installations cachées. Des techniques diverses qui utilisent un signal de pesanteur ou d'autres moyens, électro-magnétiques ou sismiques ont déjà été étudiées [Butler, 1984, Mochales *et al.*, 2008, Romaides *et al.*, 2001]. On s'intéresse plus spécifiquement dans cette section à la possibilité de repérer des conduites enfouies grâce à un gravimètre ou à un gradiomètre.

Les canalisations étant en général bien plus longues que profondes, on étudie un modèle en deux dimensions dans lequel la canalisation est un cylindre infini, qui présente une anomalie de masse volumique  $\rho$  par rapport au milieu environnant. Les paramètres du modèle sont résumés sur la figure 5.9. Le calcul de l'anomalie verticale de pesanteur provoquée par la canalisation enfouie à une profondeur  $H$  donne [Romaides *et al.*, 2001]

$$\delta g_z = 2\pi G \rho R^2 \frac{H}{x^2 + H^2}$$

soit  $\delta g_z = 2G\lambda \frac{H}{x^2 + H^2}$

avec  $\lambda = \pi R^2 \rho$  l'anomalie linéique de masse de la canalisation. Les anomalies de gradient horizontal et de gradient vertical valent donc

$$\delta T_{zx} = 4G\lambda \frac{xH}{(x^2 + H^2)^2}$$

$$\delta T_{zz} = 2G\lambda \frac{H^2 - x^2}{(x^2 + H^2)^2}$$

Pour estimer la possibilité de détecter une canalisation grâce à un levé gravimétrique, on considère pour chaque type de mesure la différence entre le maximum et le minimum

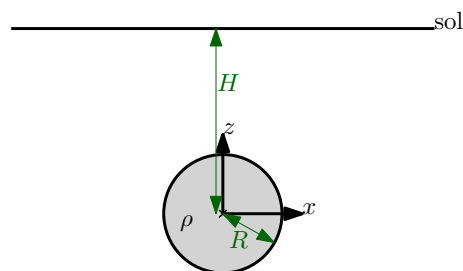


FIGURE 5.9: Modèle de canalisation en forme de cylindre infini. Le centre de la canalisation est à l'origine du repère.

d'anomalie :

$$\Delta g_z = 2G \frac{\lambda}{H} \quad (5.4a)$$

$$\Delta T_{zx} = G \frac{3\sqrt{3}\lambda}{2H^2} \quad (5.4b)$$

$$\Delta T_{zz} = G \frac{9\lambda}{4H^2} \quad (5.4c)$$

Les plus grosses canalisations, de type égouts ou gazoducs, ont des sections allant de 0,2 m<sup>2</sup> à 6 m<sup>2</sup>, avec une anomalie de masse volumique de 2,7 · 10<sup>3</sup> kg m<sup>-3</sup>, soit une anomalie linéique comprise entre 5,4 · 10<sup>2</sup> kg m<sup>-1</sup> et 1,6 · 10<sup>4</sup> kg m<sup>-1</sup>. Les plus petites, pour l'eau par exemple, ont des sections inférieures à 0,1 m<sup>2</sup> et peuvent être remplies, ce qui leur confère une anomalie de masse volumique de 1,7 · 10<sup>3</sup> kg m<sup>-3</sup>, soit une anomalie linéique inférieure à 1,7 · 10<sup>2</sup> kg m<sup>-1</sup>. L'anomalie peut être significativement réduite pour les petites canalisations, lorsque le matériau qui compose les parois du tuyau a une masse volumique qui vient compenser l'anomalie à l'intérieur de la conduite.

On trace figure 5.10 les différences d'anomalies  $\Delta g_z$ ,  $\Delta T_{zx}$  et  $\Delta T_{zz}$  issues des formules (5.4a), (5.4b) et (5.4c). Les grosses et très grosses canalisations apparaissent détectables sans problème par mesure de l'anomalie de champ ou de gradient, jusqu'à 5 m d'enfouissement. La détection de canalisation de faible masse linéique pourrait être plus difficile. La gradiométrie reste très intéressante dans ce cas.

## 5.3 Détection de tsunami

L'alerte de la population menacée permettrait de réduire les dégâts humains causés par le déferlement d'un tsunami sur une côte habitée. Les masses d'eau gigantesques en jeu laissent espérer que l'anomalie de pesanteur causée par le déplacement d'une vague de tsunami pourrait être détectée. Le stage de Cécile Clément, encadré pendant la thèse, en collaboration avec Jacques Hinderer, Luis Rivera et Sylvain Schwartz, a tenté de répondre à cette question.

### 5.3.1 Vagues de tsunami

Les dégâts causés sur la côte par les tsunamis sont spectaculaires. La hauteur des vagues a ainsi pu atteindre près de 30 m à Banda Aceh lors des événements de 2004 [Joseph, 2011]. Lorsqu'ils se propagent en haute mer, les tsunamis ont cependant des allures bien différentes. Il s'agit en effet de vagues de longueurs d'onde de l'ordre d'une centaine de kilomètres, avec des hauteurs d'eau qui ne sont toutefois que de quelques dizaines de centimètres [Joseph, 2011, Lannes, 2011]. La profondeur des océans étant de quelques milliers de mètres au niveau du plancher océanique, on peut considérer en bonne approximation que les tsunamis se propagent comme des vagues en eau peu profonde. Leur relation de dispersion s'écrit donc [Lannes, 2011, Ardhuin, 2008]

$$f^2 = \frac{gh}{\lambda}$$

avec  $g$  le champ de pesanteur,  $h$  la profondeur de l'eau et  $\lambda$  la longueur d'onde de la vague. Cette relation est représentée sur la figure 5.11 pour plusieurs hauteurs d'eau, et dans



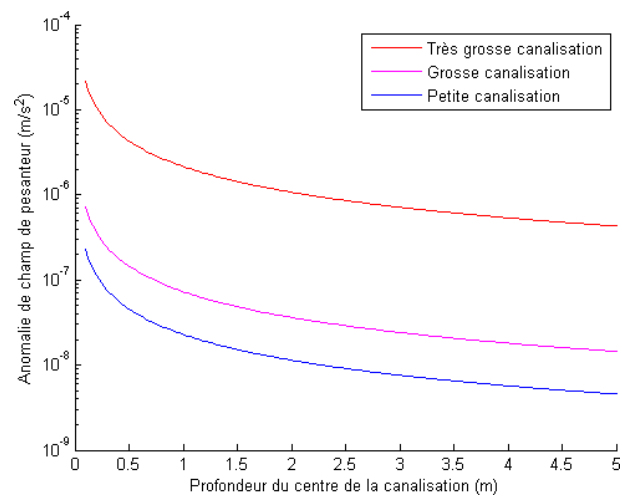
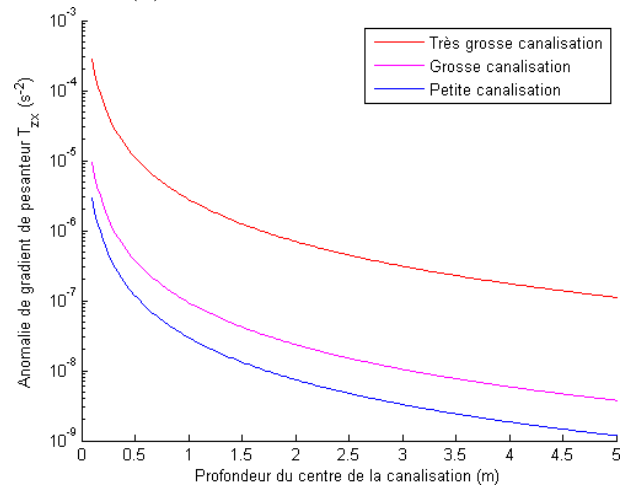
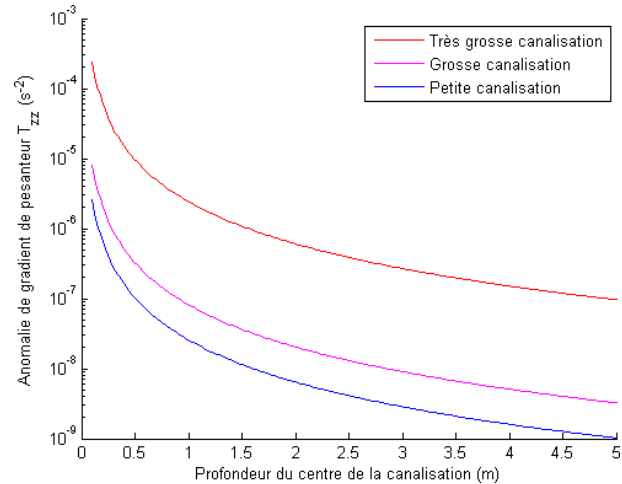
(a) Anomalies  $\Delta g$  de champ.(b) Anomalies  $\Delta T_{zx}$  de gradient vertical.(c) Anomalies  $\Delta T_{zz}$  de gradient horizontal.

FIGURE 5.10: Anomalies de pesanteur, créées par trois types de conduites en fonction de la profondeur d'enfouissement du centre. La *très grosse canalisation* correspond à  $\lambda = 1,6 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-1}$ , la *grosse canalisation* à  $\lambda = 5,4 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-1}$  et la *petite canalisation* à  $\lambda = 1,7 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-1}$ .

des gammes de longueurs d'onde qui correspondent à celles de tsunamis. La figure 5.11 montre en particulier que les fréquences des tsunamis vont du millihertz à une dizaine de millihertz.

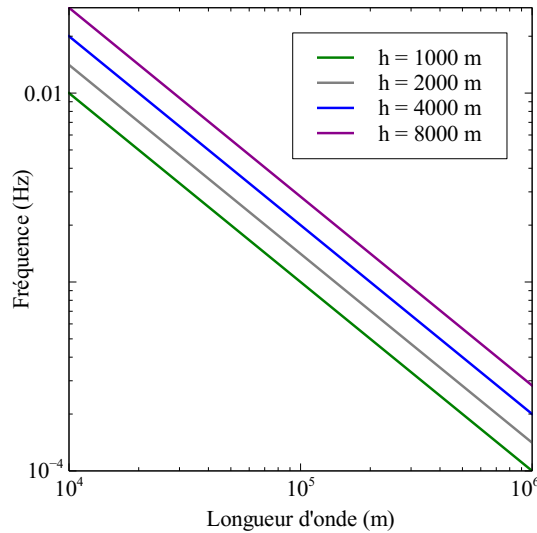


FIGURE 5.11: Relation de dispersion des vagues de tsunamis pour plusieurs profondeurs  $h$ .

### 5.3.2 Anomalie gravimétrique d'un tsunami

Pour le calcul de l'anomalie de pesanteur on considère le scénario dans lequel un gravimètre est posé au fond de l'eau, et observe la vague passer au-dessus de lui. Comme dans le cas des vagues, la situation de référence est celle de la mer au repos. La distance à laquelle les mouvements de l'interface eau/air sont observés est donc la profondeur locale  $h$  de l'océan. En général cette profondeur est faible devant la longueur caractéristique  $\lambda$  du tsunami, donc l'anomalie causée par le tsunami est en première approximation la même que celle d'une couche infinie d'épaisseur  $e$  égale à celle du tsunami. L'anomalie de pesanteur  $\delta g$  vaut donc

$$\delta g \approx -2\pi G\rho e \quad (5.5)$$

où  $\rho$  est l'anomalie de masse volumique de l'eau par rapport à l'air, et  $e$  la hauteur du tsunami au-dessus du niveau de référence de la mer.

La longueur caractéristique importante des vagues de tsunami pourrait suggérer que la courbure terrestre devrait être prise en compte pour le calcul de l'anomalie causée par la vague. L'échelle à prendre en compte ici est cependant plutôt la distance entre l'instrument de mesure et les sources. Les sources à grande distance sont en effet négligeables. Comme  $h$  est très petit devant le rayon terrestre, la courbure terrestre ne modifie pas sensiblement l'amplitude du signal.

Cécile Clément a vérifié numériquement ces deux approximations. Les résultats de ses simulations montrent que pour les vagues de tsunamis l'anomalie de pesanteur est bien proportionnelle à la variation locale de hauteur d'eau. Suivant les modèles utilisés, les longueurs d'onde les plus basses sont éventuellement atténuées.

Pour une vague d'un mètre l'amplitude  $|\delta g|$  de variation du champ de pesanteur donne donc  $|\delta g| = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$ . La détection d'une vague de tsunami de quelques décimètres pendant un temps caractéristique de 1000 s serait ainsi envisageable avec un bon instrument de mesure, et dans les conditions de mesure d'un observatoire sur le continent. Webb montre cependant dans la référence [Webb, 1998] que la mesure sous-marine est soumise à des bruits plus importants causés par le milieu océanique. Même si la détection d'un tsunami à l'aide d'un gravimètre seul peut du coup être mise en question, il pourrait cependant être intéressant de corrélérer le signal de pesanteur à celui de pression afin de rejeter des bruits communs, à des fins de détection ou bien d'étude océanographique.

Il convient finalement de noter que l'étude de dimensionnement présentée ici ne prend en compte que l'effet gravitationnel des tsunamis. Pour une mesure réelle au fond de l'eau il faudrait prendre en compte également la déformation du plancher océanique sous l'effet de la vague, ce qui induit une accélération de l'appareil de mesure et son déplacement dans le gradient de pesanteur terrestre. Ces effets, fortement dépendants des propriétés mécaniques de la croûte, elles-mêmes très variables, pourraient par exemple être estimés grâce à la théorie développée dans les références [Webb, 1998, Crawford *et al.*, 1991].

## **Deuxième partie**

### **Gravimètre atomique sur puce**



# Chapitre 6

## Principaux choix de conception

ON a vu dans la première partie de ce manuscrit quelques applications de la gravimétrie embarquée. On a conclu au chapitre 2, section 2.2 page 32 que la mesure embarquée du champ de pesanteur ou de son gradient exige un compromis entre les qualités suivantes :

### Fidélité

L'instrument doit donner des valeurs de façon répétable. Il s'agit de minimiser l'erreur aléatoire.

### Stabilité et justesse

La justesse de l'instrument ne doit pas changer de façon imprédictible au cours des mesures. L'instrument ne doit pas avoir besoin d'être étalonné au cours d'une mission. La durée et les conditions de la mission fixent le besoin de stabilité. Pour certaines applications on peut en outre souhaiter que l'instrument soit intrinsèquement juste, pour qu'il définisse une référence de pesanteur. En d'autres termes, l'erreur systématique de l'instrument doit être au moins stabilisée, et au mieux minimisée.

### Dynamique

L'instrument doit pouvoir mesurer des signaux aussi grands que ceux qui seront rencontrés avec une exactitude suffisante pour l'application souhaitée.

### Taille réduite

Le véhicule amené à transporter l'instrument peut imposer des contraintes d'encombrement.

### Consommation réduite

De la même manière le fonctionnement mobile peut limiter la puissance électrique disponible.

Les gravimètres à atomes froids sont en train d'atteindre l'état de l'art en terme de performances métrologiques dans le domaine de la gravimétrie absolue [Merlet *et al.*, 2010]. Un effort important est mené à l'heure actuelle pour réduire la taille des démonstrateurs qui utilisent la technique des atomes lâchés ou en fontaine pour la mesure du champ de pesanteur [Geiger *et al.*, 2011, Kasevich, 2002, Schmidt *et al.*, 2011]. Le projet **Chips for ATomic Sensors - Capteurs atomiques sur puce (CATS)** vise à démontrer la faisabilité d'un type de gravimètre à ondes de matière fondé sur un principe différent du gravimètre à atomes en chute libre, et intrinsèquement plus compact. On présente ce principe à la section 6.1 page 122. A la section 6.2 page 122 on explique le choix du piégeage magnétique des atomes sur une puce, d'où découle le choix de l'espèce atomique et de l'état des atomes pour l'interféromètre, décrit à la section 6.3 page 127. L'alternative de former un

condensat de Bose-Einstein ou non avec le nuage d'atome est discutée section 6.4 page 128 ; puis section 6.5 page 133 on discute le choix entre plusieurs méthodes pour la séparation spatiale cohérente des atomes, qui est lié à l'état collectif des atomes dans le nuage. On récapitule enfin tous les choix dans la conclusion de ce chapitre, page 136.

Les choix qui sont présentés dans ce chapitre ont été effectués par les acteurs du projet CATS en grande partie avant que l'auteur ne rejoigne l'équipe du capteur à ondes de matière de TRT. On retrace ici les raisons qui ont amené ces choix, avec le recul de trois ans de projet et deux de thèse.

## 6.1 Principe de l'interféromètre

Le but du projet CATS est de démontrer la possibilité de mesurer le champ de pesanteur par interférométrie de type Ramsey [Ramsey, 1950, Reinhard, 2009] avec des atomes piégés au voisinage d'une puce à atomes. Pour que l'interféromètre soit sensible au champ de pesanteur, on veut faire intervenir le potentiel de pesanteur dans la différence de phase en effectuant une séparation spatiale cohérente des états atomiques. Une mesure du champ de pesanteur peut ainsi se décomposer suivant les étapes :

1. Regroupement et refroidissement des atomes.
2. Piégeage du nuage atomique.
3. Séparation cohérente des états atomiques en deux voies, correspondant à deux pièges écartés spatialement.
4. Temps d'interrogation pendant lequel on laisse les états séparés interagir avec le potentiel de pesanteur.
5. Recombinaison cohérente des deux voies de l'interféromètre, pour transformer la différence de phase en différence de populations.
6. Lecture de la différence de population, pour déduire la différence de phase et donc la mesure du champ de pesanteur.

La formalisation de ce processus sera détaillée au chapitre 7 page 139. Réaliser un démonstrateur d'interféromètre à ondes de matière au sein du groupe industriel THALES implique de choisir sur quelles possibilités de l'état de l'art s'appuyer, et quels axes de recherche scientifique poursuivre, en relation avec les partenaires du projet. On présente dans les sections suivantes les choix principaux effectués pour réaliser les fonctions nécessaires aux étapes 1 à 6. La réalisation technique est pour sa part présentée au chapitre 8 page 159.

## 6.2 Piégeage des atomes

Le piège magnéto-optique est le point de départ de la plupart des manipulations d'atomes refroidis [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, Metcalf et Van der Straten, 1999]. Puisque l'émission spontanée détruit la cohérence spatiale [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 17], un autre piège, à forces non dissipatives uniquement, paraît cependant mieux adapté pour réaliser un interféromètre. La densité d'atomes dans un piège sans émission spontanée peut par ailleurs être plus élevée, ce qui améliore l'efficacité du refroidissement évaporatif et permet éventuellement la formation d'un condensat de

Bose-Einstein lorsque cela est souhaitable [Townsend *et al.*, 1995, Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011].

### 6.2.1 Piège magnétique à champ statique

Une première méthode de piégeage avec des forces non dissipatives consiste à utiliser la force d'un champ magnétique permanent sur le dipôle magnétique des atomes. Le potentiel magnétique  $V_{mag}$  vu par l'atome dans un champ magnétique  $\underline{B}$  s'écrit

$$V_{mag} = -\mu \|\underline{B}\| \quad (6.1a)$$

avec  $\mu$  le moment magnétique de l'état considéré

$$\mu = -g_F \mu_B m_F \quad (6.1b)$$

$g_F$  est le facteur de Landé de l'état hyperfin,  $\mu_B$  le magnéton de Bohr et  $m_F$  le nombre quantique qui correspond à la projection du moment cinétique total  $\underline{F}$  de l'atome sur le champ  $\underline{B}$ . L'équation (6.1a) est valide tant que  $V_{mag}$  est petit devant la séparation hyperfine avec les états de nombres  $F$  voisins, et à condition que le dipôle magnétique suive adiabatiquement le champ  $\underline{B}$  [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 14]. La condition d'adiabaticité est réalisée lorsque les variations du champ vues par l'atome ont des fréquences caractéristiques faibles devant la fréquence de Larmor de précession du moment magnétique atomique. D'après le théorème d'Earnshaw, qui découle des équations de Maxwell [Treutlein, 2008, chapitre 1], le module du champ magnétique peut avoir des minima locaux dans l'espace, mais pas de maximum. Par conséquent d'après l'équation (6.1a), seuls les états internes de moments magnétiques  $\mu$  négatifs peuvent être confinés dans un piège magnétique. Lorsque les atomes que l'on souhaite piéger sont répartis suivant plusieurs états de moments magnétiques différents, le pompage optique des atomes vers un état piégeable peut permettre d'éviter des pertes d'atomes importantes au moment du transfert vers le piège magnétique. Cette sélectivité est également un atout, puisqu'elle permet d'ôter de l'interféromètre certains des atomes que l'on ne veut pas faire interférer.

Une des difficultés de mise en œuvre d'un piège magnétique concerne sa stabilité. La stabilité du piège est en effet directement liée à celle des courants qui créent les gradients de champ magnétique, le cas échéant. Il est également nécessaire de prendre en compte l'environnement magnétique de l'interféromètre. On utilise en général un blindage approprié [Deutsch, 2012].

Un piège magnétique peut être créé par exemple grâce à un courant qui parcourt un fil en forme de  $Z$  d'une *puce à atomes*, et accompagné par un champ magnétique uniforme. Une puce à atomes est constituée d'un substrat sur lequel on a déposé un circuit conducteur, dont le rôle est au départ de créer des champs magnétiques statiques ou oscillants pour la manipulation des atomes dans un dispositif de physique atomique. Le substrat de la puce est en général dans un matériau issu des technologies de microfabrication de semi-conducteurs comme le silicium ou le nitrure d'aluminium. D'autres fonctionnalités peuvent également être envisagées à partir de ce type de dispositif. Les technologies des puces à atomes sont par exemple présentées en détail dans la référence [Reichel et Vuletić, 2011]. Le champ magnétique uniforme peut quant à lui être créé par exemple par des bobines en configuration de Helmholtz et situées en-dehors de la cellule à vide. Comme les atomes sont piégés à des distances de la puce à atomes qui peuvent être micrométriques, des



courants même modestes peuvent suffire à générer des gradients et courbures de champs magnétiques susceptibles de piéger les atomes. Des courants de quelques ampères, soient des puissances de quelques watts, peuvent ainsi créer des pièges dont la profondeur excède 1 mK [Squires, 2008, chapitre 2].

On peut également créer un piège magnétique avec des circuits qui sont tous situés à plusieurs centimètres des atomes, éventuellement à l'extérieur de la cellule. Dans ce cas en revanche des profondeurs de pièges magnétiques comparables sont en général obtenues avec des courants de plusieurs dizaines à centaines d'ampères, soient des puissances de plusieurs dizaines à centaines de watts. Un tel système est par exemple décrit à la section 8.3.2 page 170 de ce manuscrit.

La proximité entre les atomes et les fils d'une puce, allant de quelques microns à quelques millimètre, présente un intérêt supplémentaire. On peut grâce à cela réaliser de petits motifs avec ces fils, qui peuvent créer des géométries de champs magnétiques avec des longueurs typiques de variations millimétriques au niveau des atomes, ce qui est plus difficile à réaliser avec des circuits extérieurs à la cellule. D'une manière générale, si les puces à atomes permettent d'exploiter la possibilité de piéger les atomes avec des champs magnétiques, à l'inverse la compacité et la polyvalence des puces à atomes rend d'autant plus intéressante cette possibilité de créer des pièges à atomes magnétiques.

## 6.2.2 Pièges dipolaires à champs oscillants

Il est également possible de piéger des particules neutres à l'aide de champs oscillants, en utilisant le moment dipolaire d'une particule pour une de ses transitions énergétiques. Soit un atome à deux états, séparés par une énergie  $\hbar\omega_A$  et un champ oscillant à la pulsation  $\omega_C$ . On peut démontrer, par exemple dans le formalisme de l'atome habillé, que le potentiel  $V_{champ}$  créé par l'interaction et vu par l'état de basse énergie de la transition vaut pour de faibles intensités de champ [Dalibard, 2006, Böhi *et al.*, 2009]

$$V_{champ}(\underline{r}) = \frac{\hbar\Omega_1^2(\underline{r})}{4\delta} \quad (6.2)$$

avec  $\delta$  le désaccord

$$\delta = \omega_C - \omega_A$$

l'approximation des faibles champs étant valable pour

$$|\Omega_1| \ll |\delta|$$

L'état de haute énergie de la transition voit pour sa part un potentiel opposé  $-V_{champ}$ .  $\Omega_1$  est ici la pulsation de Rabi de l'interaction, qui est proportionnelle à l'amplitude du champ oscillant. Suivant le signe du désaccord  $\delta$ , les atomes sont attirés par les grandes ou les petites intensités de champ, ce qui permet de les piéger. Contrairement au piégeage magnétique statique, il est possible de capturer des atomes dans un piège dipolaire quels que soient leurs états électroniques, pourvu qu'une transition avec un moment non nul puisse être excitée.

Le confinement des atomes avec un champ oscillant peut se faire soit dans un extremum d'intensité [Böhi *et al.*, 2009, Metcalf et Van der Straten, 1999], soit dans un réseau d'extremums créés par une onde stationnaire [Gallego *et al.*, 2009, Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011]. Le piégeage d'atomes avec des champs oscillants de plusieurs natures et à des fréquences différentes a été démontré. L'expression de la fréquence de Rabi et le

domaine de validité de l'équation (6.2) changent en fonction du type de champ oscillant et de la transition utilisée.

### Piège dipolaire optique

Pour les alcalins par exemple, on peut exploiter les raies  $D$  du spectre, pour confiner les atomes dans un piège dipolaire optique, comme présenté dans la référence [Gallego *et al.*, 2009]. Le couplage est alors électrique,  $\Omega_1^2$  est proportionnel à l'intensité locale de la lumière, et au dipôle électrique induit de la transition excitée, en général à partir du niveau fondamental des atomes. Lorsque  $\delta$  est négatif les atomes sont attirés par les hautes intensités. On peut alors par exemple les confiner autour du point de focalisation d'un faisceau gaussien. Pour obtenir un confinement comparable suivant les trois dimensions, on peut par exemple modifier le dispositif pour piéger les atomes à l'intersection de deux faisceaux focalisés. On peut également former un *réseau optique* comme dans la référence [Gallego *et al.*, 2009] en créant une onde stationnaire avec un faisceau laser rétro-réfléchi sur un miroir. En fonction du signe du désaccord  $\delta$ , les atomes sont alors piégés suivant une dimension dans les ventres ou dans les nœuds du réseau. L'intérêt de cette configuration est que les positions des pièges par rapport au miroir et les uns par rapport aux autres dépendent uniquement de la longueur d'onde du laser de piégeage. Un autre intérêt du piégeage dipolaire lumineux est que l'on peut utiliser un dispositif tel qu'un modulateur acousto-optique pour moduler le confinement [Friebel *et al.*, 1998], par exemple pour le refroidissement évaporatif des atomes.

Quelle que soit la géométrie du piège, pour éviter l'émission spontanée on souhaite en général que le désaccord  $\delta$  soit grand devant la largeur de raie de la transition utilisée. Pour obtenir un confinement important, de fortes intensités lumineuses sont alors nécessaires. Par exemple les auteurs de la référence [Chu *et al.*, 1986] ont piégé des atomes de sodium dans un faisceau gaussien de 220 mW désaccordé de 650 GHz par rapport à la raie  $D_2$ , et focalisé sur 10  $\mu\text{m}$ . La profondeur du piège obtenu correspondait à 5 mK environ. Dans le cas de la référence [Friebel *et al.*, 1998] des atomes de rubidium sont piégés dans un réseau optique créé par un faisceau d'une puissance de 5 W à 10,6  $\mu\text{m}$ , focalisé sur 50  $\mu\text{m}$ . Les auteurs indiquent que la profondeur du piège correspond dans ce cas à 360  $\mu\text{K}$ . Un dispositif optomécanique complexe peut de plus être nécessaire à la mise en forme des faisceaux de piégeage. L'objectif du projet étant d'améliorer la compacité et la simplicité des capteurs à ondes de matière, le piégeage avec des faisceaux lasers n'a pas été retenu.

### Potentils dipolaires radiofréquence

Une autre possibilité consiste à utiliser les transitions dans la structure hyperfine des atomes pour créer un potentiel de piégeage. La structure atomique hyperfine est caractérisée par le nombre quantique  $F$ , qui est lié au module du moment cinétique total  $\underline{F}$ , et par le nombre quantique  $m_F$ , qui correspond à la projection de  $\underline{F}$  sur un axe de quantification arbitraire. La dégénérescence entre les états de même nombre  $F$  et de différents  $m_F$  est levée par la présence d'un champ magnétique statique  $\underline{B}$ . Lorsque l'on prend la direction du champ magnétique statique comme axe de quantification alors pour les faibles champs magnétiques les niveaux des différents états sont décalés des valeurs [Steck, 2009]

$$\Delta E_{F,m_F} \approx \mu_B g_F m_F B \quad (6.3)$$

au premier ordre en  $\mu_B B/E_{hf}$ , avec  $\mu_B$  le magnéton de Bohr,  $E_{hf}$  la séparation entre niveaux hyperfins de différents nombres  $F$  et  $g_F$  le facteur de Landé pour les états d'un nombre quantique  $F$  donné.

On peut donc créer un potentiel dipolaire oscillant par couplage entre les états de différents  $m_F$ , en présence d'un champ magnétique statique pour lever la dégénérescence entre ces états. Par exemple pour des atomes de rubidium 87 dans leur niveau fondamental  $5^2S_{1/2}$ , et soumis à un champ magnétique de  $10^{-3}$  T, une transition  $m_F \rightarrow m_F + 1$  correspond ainsi à une fréquence  $\nu_{m_F} \approx 7$  MHz. Cette approche a par exemple été utilisée par les auteurs de la référence [Schumm *et al.*, 2005] dans une expérience d'interférométrie atomique. Les longueurs d'onde qui correspondent aux fréquences de l'ordre du mégahertz peuvent faire plusieurs centaines de mètres. La production de champs oscillants dans ces domaines peut donc se faire à partir d'une puce à l'aide des mêmes fils conducteurs que pour les champs statiques. D'après la référence [Reichel et Vuletić, 2011, chapitre 7] la polarisation du champ oscillant par rapport au champ statique permet de créer des potentiels différents pour les états de différents nombres quantiques  $F$ , grâce aux facteurs de Landé distincts, et à condition de maîtriser la polarisation du champ oscillant par rapport au champ statique. En revanche dans un faible champ magnétique, d'après l'équation (6.3) les fréquences de transition sont voisines pour les transitions  $m_F \rightarrow m_F \pm 1$  de différents nombres  $m_F$ , si bien que les différents niveaux  $m_F$  voient en général le même potentiel, pour un  $F$  donné [Treutlein, 2008, chapitre 5].

### Potentiels dipolaires micro-onde

Pour manipuler sélectivement les différents sous-niveaux  $|F, m_F\rangle$  des états issus de la structure hyperfine du niveau fondamental d'un atome, on peut créer un potentiel grâce au couplage dipolaire magnétique entre états de différents nombres  $F$ . La levée de dégénérescence entre états de différents niveaux  $m_F$ , liée à la présence d'un champ magnétique statique, vient en effet créer des résonances en général distinctes pour les différentes transitions  $|F, m_F\rangle \rightarrow |F + 1, m_F + \delta m\rangle$ , avec  $\delta m \in \{-1, 0, +1\}$ . Par exemple dans l'expérience présentée dans la référence [Böhi *et al.*, 2009], des champs magnétiques oscillants à 6,8 GHz couplent les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = -1\rangle$  du niveau fondamental  $5^2S_{1/2}$  du rubidium 87 afin de créer un piège pour ces atomes. Les fréquences en jeu dans les transitions entre niveaux hyperfins sont de l'ordre de quelques gigahertz pour les états fondamentaux des alcalins [Tiecke, 2010, Steck, 2009, Steck, 2003, Steck, 2000], ce qui correspond à des longueurs d'onde centimétriques. L'émission de ces champs micro-ondes depuis la puce est donc plus compliquée, puisque les effets de propagation doivent être pris en compte. Un moyen d'amener les courants sur la puce est d'utiliser des guides d'ondes coplanaires, comme décrit dans les références [Treutlein, 2008, Reichel et Vuletić, 2011].

Un aspect de la mise en œuvre d'un piégeage dipolaire fondé sur la structure hyperfine des atomes est la relation avec le champ magnétique statique, qui définit la polarisation des champs radiofréquence ou micro-ondes utilisés. Cela est d'autant plus important lorsque le champ magnétique statique n'est pas uniforme, par exemple lorsque l'on souhaite superposer un potentiel issu d'un champ oscillant à un piège magnétique statique [Böhi *et al.*, 2009]. Cette relation complique la mise au point des dispositifs de piégeage. Elle permet en revanche de contourner les limites imposées par le théorème d'Earnshaw, et donc de réaliser des géométries de pièges plus complexes [Treutlein, 2008, chapitre 5]. Ces

techniques s'associent de façon assez naturelle avec la technologie des puces à atomes, puisque les courants oscillants peuvent être créés par des fils ou des guides d'onde coplanaires déposés sur la puce, et que l'utilisation de champs proches permet comme pour les pièges magnétiques statiques de créer des paysages de potentiels avec de forts gradients, qui seraient difficilement accessibles en champ lointain [Treutlein, 2008].

### Piège retenu

On a choisi d'utiliser une puce à atomes pour créer les pièges magnétiques qui serviront à confiner les atomes pendant la phase d'interférométrie. On a également prévu de générer des potentiels micro-ondes depuis la puce pour la séparation cohérente des atomes, ce qui sera discuté section 6.5 page 133. L'intérêt des potentiels micro-ondes pour cette application provient notamment de la possibilité de les utiliser de manière sélective sur chacune des deux voies de l'interféromètre.

## 6.3 Espèce et états électroniques

Une fois décidé que l'on confinera les atomes dans un piège magnétique et que l'on pourra utiliser la structure hyperfine pour la séparation spatiale cohérente, on peut choisir une espèce atomique, et choisir pour cette espèce de quels états internes se servir pour réaliser l'interféromètre.

Il s'agit de pouvoir regrouper et refroidir un nuage d'atomes de façon simple et efficace, et de le faire condenser si on le souhaite. Le refroidissement laser est facilité par la présence d'une transition *stable* dans la spectroscopie de l'atome. Une transition  $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$  est stable lorsque grâce aux règles de sélection l'état excité  $|e\rangle$  est couplé presque uniquement à l'état stable  $|s\rangle$ . Dans ce cas l'excitation de cette transition vient très peu pomper les atomes dans un d'autres états qui seraient stables et non résonants. Une transition stable est pratique également pour la détection à la fin de la séquence d'interférométrie. L'efficacité du refroidissement évaporatif est pour sa part liée à la section efficace de collision élastique entre les atomes piégés [Bloch *et al.*, 2001]. Enfin la condensation de Bose-Einstein ne concerne que les bosons.

L'isotope 87 du rubidium est utilisé dans de très nombreuses expériences de physique atomique, car il remplit de façon satisfaisante les critères que l'on vient d'énoncer. En particulier [Steck, 2009, Treutlein, 2008, Bloch *et al.*, 2001] :

- Le rubidium possède une transition cyclante  $|5^2S_{1/2}, F=2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F=3\rangle$  dans la structure hyperfine de sa raie  $D_2$ .
- La raie  $D_2$  est à une longueur d'onde de 780 nm, ce qui est pratique étant donnée la disponibilité des diodes laser commerciales pour cette longueur d'onde.
- L'état fondamental  $|5^2S_{1/2}\rangle$  se décompose en deux états hyperfins, qui fournissent des états stables pour l'interférométrie.
- Même à très basse température, l'isotope 87 du rubidium a des propriétés collisionnelles suffisantes pour qu'un gaz dilué parvienne à l'équilibre thermodynamique rapidement.

- Les atomes de rubidium 87 sont des bosons, ce qui permet de créer des condensats de Bose-Einstein avec cette espèce si on le souhaite.

Comme remarqué ci-dessus les états de la structure hyperfine du fondamental  $5^2S_{1/2}$  sont intéressants pour faire un interféromètre car suffisamment stables. Les états  $|F, m_F\rangle$  de  $5^2S_{1/2}$  ne sont pas tous piégeables dans un piège magnétique cependant. La spectroscopie correspondante est représentée figure 6.1. Le facteur de Landé de l'état  $F = 1$  vaut  $g_1 \approx -1/2$  tandis que celui de  $F = 2$  vaut  $g_2 \approx 1/2$  [Treutlein, 2008]. D'après les équations 6.1, page 123, section 6.2.1 les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ,  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = +2\rangle$  peuvent donc être confinés dans un piège magnétique statique. Parmi ceux-ci la paire  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ,  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  est particulièrement pertinente pour réaliser un interféromètre, car les moments magnétiques de ces deux états sont voisins, ce qui permet de limiter l'influence des incertitudes de champ magnétique sur la mesure. On peut encore réduire l'influence du champ magnétique en minimisant la dérivée de la différence d'énergie entre ces deux états, en fonction du champ magnétique, en prenant en compte les termes non linéaires qui ont été omis dans les équations (6.1). Le champ magnétique parfois surnommé *champ magique* qui réalise ce minimum a la valeur  $B_{\text{magique}} = 3,229 \cdot 10^{-4}$  T, ce qui a l'avantage d'être facilement accessible expérimentalement [Treutlein, 2008, chapitre 1]. Grâce à ces qualités, les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  du niveau fondamental du rubidium 87 sont déjà utilisés dans des expériences d'interférométrie avec atomes piégés [Deutsch *et al.*, 2010, Treutlein, 2008].

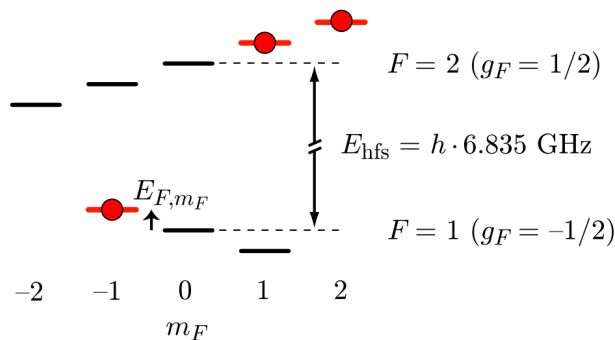


FIGURE 6.1: Représentation de la structure hyperfine de l'état fondamental  $5^2S_{1/2}$  du rubidium 87. Les états piégeables sont indiqués en rouge. Figure issue de la référence [Treutlein, 2008, chapitre 1].

L'isotope 87 du rubidium a donc été choisi pour le projet de gravimètre à atomes piégés, et les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  du niveau fondamental  $5^2S_{1/2}$  seront utilisés pour l'interférométrie.

## 6.4 Etat collectif des atomes

L'utilisation d'interférences d'ondes de matières à des fins de métrologie [Essen et Parry, 1955, Kasevich et Chu, 1991] a historiquement été démontrée avant la réalisation expérimentale de condensats de Bose-Einstein [Anderson *et al.*, 1995]. A l'heure actuelle, de nombreux démonstrateurs de gravimètres à chute libre d'atomes [Charrière *et al.*, 2012, Bodart, 2010, Geiger, 2011, Angelis *et al.*, 2009], de gyromètres atomiques [Lévêque,

2010, Stockton *et al.*, 2011] et d'horloges atomiques [Deutsch, 2012, Swallows *et al.*, 2011] utilisent des nuages atomiques non condensés, même si l'utilisation de condensats de Bose-Einstein est parfois vue comme une voie prometteuse [Robins *et al.*, 2012, Maussang *et al.*, 2010, van Zoest *et al.*, 2010]. Les réalisations expérimentales d'interféromètres à nuage atomique séparé de façon cohérente entre des pièges séparés spatialement ont au contraire été réalisées avec des condensats de Bose-Einstein [Schumm *et al.*, 2005, Wang *et al.*, 2005, Jo *et al.*, 2007, Böhi *et al.*, 2009]. On s'est donc interrogé pour notre projet sur l'opportunité d'utiliser des atomes en condensat de Bose-Einstein ou en gaz dilué refroidi, au-dessus de la température critique de condensation. On discute dans cette section des arguments concernant ce choix.

### 6.4.1 Cohérence spatiale dans un interféromètre

Pour comprendre l'intérêt des condensats de Bose-Einstein pour l'interférométrie atomique, considérons l'expérience suivante. On sépare un atome en superposition cohérente entre deux états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  qui suivent des chemins différents et qui accumulent une différence de phase  $\Phi$ , que l'on suppose indépendante de l'espace. On suppose que la recombinaison spatiale des états quantiques est imparfaite, de sorte que le premier état est décalé de  $\underline{d}$  par rapport au second. L'état  $|\psi\rangle$  peut donc s'écrire après la recombinaison effectuée :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left[ |a\rangle |\varphi_0\rangle - |b\rangle |\varphi_0\rangle + e^{-i\Phi} \left( |a\rangle |\varphi_{\underline{d}}\rangle + |b\rangle |\varphi_{\underline{d}}\rangle \right) \right] \quad (6.4)$$

Avec les fonctions d'onde  $\varphi_0$  et  $\varphi_{\underline{d}}$  liées par

$$\varphi_{\underline{d}}(\underline{r}) = \varphi_0(\underline{r} + \underline{d}) \quad (6.5)$$

La probabilité  $p_a$  de détecter l'atome dans la voie  $a$  vaut donc

$$p_a = \int d^3r |\langle \underline{r}, a | \psi \rangle|^2$$

$$p_a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\Phi} \underbrace{\int d^3r \varphi_0^*(\underline{r}) \varphi_0(\underline{r} + \underline{d})}_{I(\underline{d})} \right] \quad (6.6)$$

Dans l'équation (6.6) le module de l'intégrale de recouvrement  $I(\underline{d})$  détermine la visibilité des franges d'interférences créées par le déphasage  $\Phi$ . Cette intégrale peut se généraliser à une *cohérence spatiale globale* [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011] :

$$G(\underline{d}) = \int d^3r \langle \underline{r} | \hat{\sigma} | \underline{r} + \underline{d} \rangle \quad (6.7)$$

avec  $\hat{\sigma}$  l'opérateur densité du système.

La cohérence spatiale globale mesure le degré de corrélation quantique et statistique entre les différents points du nuage d'atome. En général ces corrélations tendent vers zéro pour les distances  $\|\underline{d}\|$  supérieures à une longueur caractéristique, appelée *longueur de cohérence*.

On déduit du raisonnement qui précède que le contraste dans un interféromètre à ondes de matière est notamment déterminé par la longueur de cohérence des particules que l'on cherche à faire interférer, pour une distribution statistique donnée sur le paramètre  $\underline{d}$ . Lorsque la longueur de cohérence est réduite, le contraste dans l'interféromètre décroît ainsi



plus vite avec les imperfections expérimentales. En d'autres termes une grande longueur de cohérence donne de la robustesse à l'interféromètre. Cette longueur de cohérence est l'analogue des longueurs de cohérence longitudinale et transverse pour les interféromètres optiques. On peut montrer [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 17] que pour une particule isolée, à l'équilibre avec un bain thermique de température  $\Theta$ , la longueur de cohérence est donnée par la *longueur d'onde thermique de de Broglie* :

$$\lambda_{\Theta} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B \Theta}} \quad (6.8)$$

avec  $m$  la masse de la particule. La cohérence est donc accrue à basse température dans un interféromètre.

### 6.4.2 Intérêt des condensats de Bose-Einstein

La notion de longueur de cohérence peut encore se généraliser au cas d'un gaz de bosons. La référence [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 23, section 23.3.1] calcule les propriétés de cohérence d'un gaz bosonique idéal dans un piège cubique, avec des conditions aux limites périodiques. Les résultats de ce calcul montrent que lorsque la température  $\Theta$  du gaz est grande devant la température de condensation de Bose-Einstein  $\Theta_c$ , la cohérence spatiale globale  $G$  tend bien vers zéro avec la distance  $d$ , avec une longueur caractéristique égale à la longueur d'onde thermique de de Broglie  $\lambda_{\Theta}$ . Le comportement d'un condensat de Bose-Einstein est qualitativement différent, puisque dans le cas où  $\Theta < \Theta_c$ , la cohérence spatiale globale  $G$  garde une valeur qui ne tend pas vers zéro à grande distance, c'est-à-dire que la longueur de cohérence est infinie dans ce modèle. Une autre manière de voir les choses, qui permet dans une certaine mesure de généraliser le modèle de la référence [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 23, section 23.3.1] au cas d'un piège quelconque et de conditions aux limites non périodiques, est de remarquer qu'un condensat de Bose-Einstein à l'équilibre thermique, dans un puits de potentiel, est entre autres caractérisé par l'occupation du niveau fondamental du piège par une proportion non infinitésimale d'atomes du nuage. Le niveau fondamental fait la taille du piège, et l'état d'occupation macroscopique vient garantir un niveau de contraste minimum non nul pour un interféromètre.

Cette propriété de cohérence constitue un intérêt important des condensats de Bose-Einstein pour l'interférométrie atomique, car elle permet d'obtenir une certaine robustesse par rapport aux imperfections des conditions expérimentales. La longueur de cohérence accrue d'un condensat de Bose-Einstein permettrait en outre d'espérer garder la cohérence du nuage atomique pendant une plus grande durée, ce qui se traduirait alors par un gain potentiel en sensibilité pour l'interféromètre. La différence de cohérence entre un condensat de Bose-Einstein et un nuage atomique non condensé est souvent comparée à la différence entre la lumière issue d'un laser et celle qui provient d'une source non cohérente [Robins *et al.*, 2012].

La possibilité d'utiliser des états quantiques comprimés [Grond *et al.*, 2010, Robins *et al.*, 2012] constitue un autre intérêt des condensats de Bose-Einstein, à plus long terme. En l'absence de compression, l'écart type  $\sigma_{\Phi}$  en phase d'un interféromètre à  $N$  particules est supérieur ou égal au bruit quantique standard  $N^{-1/2}$  [Maussang, 2011]. Grâce aux interactions entre atomes dans un condensat, il est théoriquement possible d'abaisser la limite de fidélité sur la phase de l'interféromètre jusqu'à  $\sigma_{\Phi} \geq N^{-1}$  [Maussang, 2011]. La

compression des états atomiques dans un condensat permet donc en principe de repousser la limite fondamentale de résolution d'un interféromètre pour un nombre d'atomes donné.

### 6.4.3 Limites des condensats de Bose-Einstein pour l'interférométrie de précision

Il existe une première difficulté d'ordre technique à la réalisation d'un interféromètre à atomes condensés, pour la métrologie. La création d'un condensat est plus complexe que celle d'un nuage thermique d'atomes refroidis. Une étape de refroidissement évaporatif vient en général compléter le refroidissement laser, alors que celui-ci est en général suffisant pour faire de l'interférométrie atomique avec une répétabilité intéressante pour la métrologie [Louchet-Chauvet *et al.*, 2011a]. L'évaporation vient chasser une grande partie des atomes du nuage, et peut prendre jusqu'à plusieurs secondes [Lewandowski *et al.*, 2003], même si des efforts pour diminuer le temps de préparation des condensats ont été menés [Squires, 2008]. A titre de comparaison, Louchet-Chauvet [Louchet-Chauvet *et al.*, 2011a] indique capturer un nuage thermique de  $10^8$  atomes à  $2 \mu\text{K}$  en 83 ms grâce à un piège magnéto-optique suivi d'une mélasse optique, tandis qu'il fallait plus de 4 s pour créer un condensat de  $4 \cdot 10^5$  atomes dans les conditions expérimentales décrites dans la thèse de Matthew Squires [Squires, 2008].

Plus fondamentalement, on a vu à la section précédente que les interactions entre atomes pourraient permettre la création d'états comprimés, ce qui pourrait être avantageux pour améliorer la fidélité d'un interféromètre. Les interactions entre les atomes d'un condensat peuvent par ailleurs être problématiques. La densité d'énergie d'un condensat dépend en effet de sa densité de masse à cause de ces interactions. L'énergie d'un condensat dans un piège dépend par conséquent du nombre d'atomes qui y sont confinés. La différence de phase  $\Phi$  dans un interféromètre à double puits varie donc avec le nombre total  $N$  d'atomes, et avec la différence  $N_D$  de nombre d'atomes entre les puits. Or pour un condensat  $N_D$  est une observable quantique, conjuguée à la différence de phase  $\Phi$  entre les états localisés dans chacun des deux pièges. Lorsque la phase est bien définie après la séparatrice, le condensat se trouve en général en superposition entre plusieurs états propres de l'observable  $N_D$ , ce qui conduit au contraire à une incertitude sur la différence de phase  $\Phi$  après le temps d'interrogation et la recombinaison, et donc à la réduction du contraste des franges d'interférence. Ce phénomène est appelé *diffusion de phase*. Il peut également être interprété comme le contraire de la compression d'états [Maussang, 2011, Grond *et al.*, 2010].

Un second problème lié aux interactions entre atomes dans un condensat concerne les fluctuations classiques du nombre d'atomes total  $N$  et de  $N_D$ , d'origine technique. Cette fois-ci ce n'est pas le contraste des franges d'interférence mais leur répétabilité qui est en jeu. Les effets techniques sont gênants en principe aussi bien pour les condensats que pour les nuages non condensés. La plus faible densité dans un nuage non condensé pourrait cependant limiter les incertitudes causées par les interactions entre atomes dans ce cas [Rosenbusch, 2009].

Les résultats présentés dans la référence [Schumm *et al.*, 2005] et résumés figure 6.2 montrent des écarts types de l'ordre de  $\sigma_\Phi \sim 10^\circ$  sur la mesure de différence de phase, toutes causes confondues. Dans la configuration de la référence [Schumm *et al.*, 2005], le condensat est formé d'atomes de rubidium 87, la séparation spatiale est de quelques microns et elle peut être maintenue pendant une milliseconde environ avant que l'écart



type du déphasage  $\Phi$  ne dépasse  $30^\circ$ . Si l'on souhaitait mesurer le champ de pesanteur avec ce dispositif, l'incertitude sur  $\Phi$  viendrait limiter la fidélité de la mesure finale à  $\sigma_g \sim 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$  (voir le tableau 6.1).

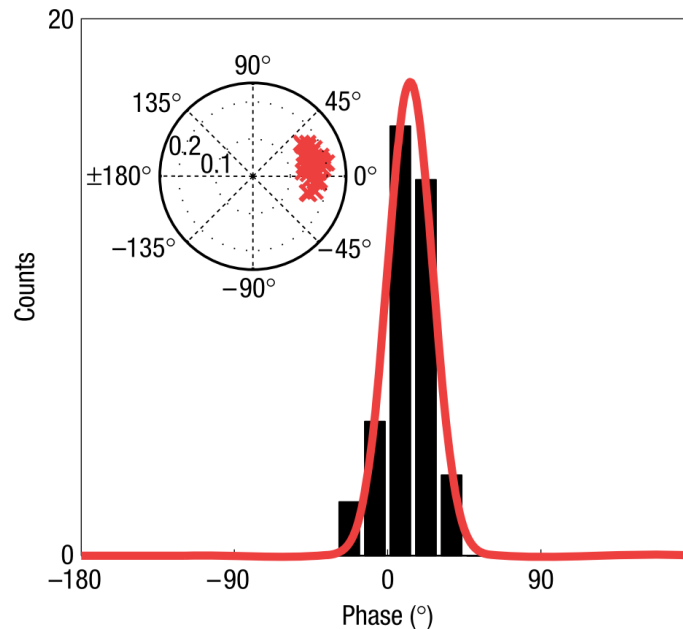


FIGURE 6.2: Distribution des phases mesurées dans l'expérience d'interférométrie d'un condensat dans un double piège sur puce, présentée dans la référence [Schumm *et al.*, 2005]. La mesure est faite juste après la séparation spatiale du condensat. La phase présente un écart type  $\sigma_\Phi = 13^\circ$ . Figure extraite de [Schumm *et al.*, 2005].

Les auteurs de la référence [Grond *et al.*, 2010] proposent d'exploiter le phénomène de résonance de Feshbach, lorsque cela est possible, pour contrôler la longueur de diffusion des interactions entre atomes et éventuellement les minimiser. On pourrait envisager, d'après la même référence, d'augmenter l'effet des interactions au moment de la séparation, pour compresser les états atomiques, puis de minimiser les interactions pendant le temps d'interrogation, pour diminuer la diffusion de phase. La résonance de Feshbach n'est cependant disponible que pour certains états atomiques de certaines espèces, ce qui crée des contraintes de conception supplémentaires, et requiert des techniques supplémentaires qui peuvent venir compliquer le montage de l'interféromètre.

Pour conclure cette discussion, on pourrait espérer qu'un interféromètre à condensat de Bose-Einstein puisse être plus robuste aux imperfections expérimentales, grâce à la plus grande cohérence spatiale des atomes dans ce cas, par comparaison au cas d'un nuage non condensé. Dans l'état de l'art actuel le rôle des interactions dans un condensat de Bose-Einstein semble cependant problématique pour les applications de métrologie. On préfère donc pour notre projet faire interférer des atomes dans un nuage le plus froid possible, mais de température supérieure à la température critique de condensation.

$$\sigma_g = \frac{\hbar}{M\Delta z T} \sigma_\Phi$$

Variable	Valeur	
Ecart type de phase	$\sigma_\Phi$	$10^\circ$
Masse atomique du $^{87}\text{Rb}$	$M$	$1,5 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$
Séparation spatiale des pièges	$\Delta z$	$5 \text{ }\mu\text{m}$
Temps d'interrogation	$T$	$1 \text{ ms}$
Ecart type sur la mesure de pesanteur	$\sigma_g$	$2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$

TABLEAU 6.1: Estimation de l'effet de l'écart type de phase sur la mesure de pesanteur dans un interféromètre à atomes condensés qui serait similaire à celui de la référence [Schumm *et al.*, 2005].

## 6.5 Séparation et recombinaison spatiale cohérente

Pour mesurer le champ de pesanteur on souhaite mettre les atomes de notre dispositif en superposition quantique entre deux états ayant des potentiels de pesanteur différents, puis recombiner ces états après un temps d'interrogation afin de mesurer la différence de phase entre les deux chemins de l'interféromètre, et d'en déduire la valeur du champ de pesanteur local. On présente dans cette section les méthodes qui ont été envisagées pour effectuer la séparation et la recombinaison spatiale des atomes, et le choix qui a été effectué.

### 6.5.1 Caractéristiques souhaitées de la séparation et de la recombinaison

Le dispositif de séparation et de recombinaison sert à créer une superposition quantique entre deux états  $|\varphi_a\rangle$  et  $|\varphi_b\rangle$  des atomes, séparés spatialement dans deux pièges différents, puis à recombiner ces états pour les faire interférer. On souhaite que la séparation et la recombinaison des états quantiques affecte par ailleurs le moins possible l'interrogation de la différence de potentiel de pesanteur. Plus précisément, on recherche les qualités suivantes :

#### Cohérence

On souhaite effectuer une mesure de déphasage entre les états produits par la séparation et la recombinaison. On veut ainsi autant que possible que toutes les composantes de  $|\varphi_a\rangle$ , par exemple les composantes spatiales ou les états internes, accumulent le même déphasage par rapport aux composantes de  $|\varphi_b\rangle$ . On appelle ici cette propriété la *cohérence* de la séparation et de la recombinaison, puisqu'elle doit permettre de maximiser le contraste entre les franges d'interférence.

#### Répétabilité

Pour obtenir la valeur de la pesanteur, il s'agit aussi que la séparation et la recombinaison introduisent une erreur la plus faible possible sur la mesure de la phase entre  $|\varphi_a\rangle$  et  $|\varphi_b\rangle$ . Cela suppose notamment que les amplitudes complexes de la superposition entre  $|\varphi_a\rangle$  et  $|\varphi_b\rangle$  soient aussi proches que possible d'une mesure sur l'autre, afin de garantir la stabilité et la fidélité de la mesure de pesanteur. Si le déphasage

introduit par la séparation et la recombinaison entre les voies de l'interféromètre est non seulement stable, mais également minimale, cela pourra de plus faciliter la conception d'un instrument juste.

### Sensibilité

Pour que l'instrument soit le plus sensible possible, on souhaite que le déphasage qui provient du champ de pesanteur soit maximal, pour une amplitude donnée du signal utile. Comme on le verra au chapitre 7 page 139, la sensibilité est proportionnelle à la distance de séparation spatiale entre  $|\varphi_a\rangle$  et  $|\varphi_b\rangle$  et au temps pendant lequel on laisse les atomes interagir avec le champ de pesanteur. On souhaite donc trouver un compromis qui maximise ces variables, tout en conservant la cohérence et la répétabilité de la séparation et de la recombinaison.

Les impulsions Raman stimulées permettent par exemple d'obtenir les trois qualités évoquées ci-dessus dans le cas des gravimètres et gyromètres atomiques à chute d'atomes [Bodart, 2010, Lévêque *et al.*, 2009]. La séparation se fait cependant dans ce cas en impulsion, et les atomes sont en chute libre. La séparation cohérente d'atomes dans une horloge atomique peut se faire par exemple grâce à une oscillation de Rabi entre deux états internes des atomes [Riehle, 2004]. Les atomes peuvent être en chute libre, ou bien piégés, éventuellement par une puce à atomes, comme dans la référence [Deutsch, 2012]. Dans le cas d'une horloge atomique, on cherche toutefois en général à minimiser la séparation des états en impulsion et en position, contrairement à ce que l'on souhaite dans le projet de gravimètre atomique sur puce. On envisage dans les sections 6.5.2 page 134 et 6.5.3 page 135 deux manières de séparer spatialement les états atomiques tout en les gardant piégés.

### 6.5.2 Séparation par croissance de barrière

Pour séparer un état quantique piégé et le mettre en superposition entre deux puits séparés spatialement, on peut envisager de modifier le paysage de potentiel progressivement en faisant varier un paramètre de façon plus ou moins continue, pour faire croître une barrière au milieu du puits initial, jusqu'à obtenir un double puits. Cette démarche est illustrée sur la figure 6.3. On espère dans ce cas qu'un atome, initialement dans un état propre délocalisé du piège initial, va se retrouver de façon contrôlée dans un état propre symétrique ou antisymétrique du nouveau double piège, par exemple par évolution adiabatique.

La technique de croissance de barrière de potentiel dans un puits a été testée avec succès dans des expériences d'interférométrie atomique avec des condensats [Shin *et al.*, 2004, Schumm *et al.*, 2005]. La question serait de savoir si la méthode de croissance de barrière est toujours cohérente lorsque le nuage d'atomes est non condensé. Le risque dans ce cas est que chaque atome soit localisé d'un côté ou de l'autre de la barrière de potentiel, sans superposition cohérente. La référence [Sidorov *et al.*, 2006] montre ainsi que pour un atome seul, même une faible asymétrie du double piège pourrait empêcher la superposition entre les deux pièges. Limiter l'asymétrie dans un double puits pourrait donc constituer un objectif expérimental important.

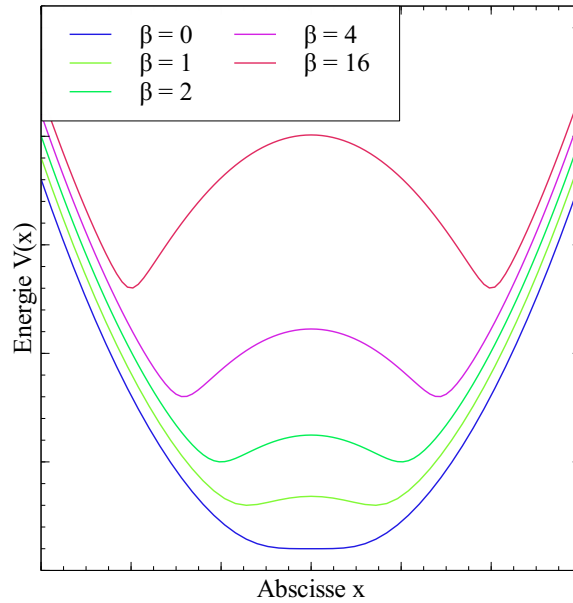


FIGURE 6.3: Exemple de croissance d'une barrière de potentiel pour former un double puits à une dimension. La fonction est de la forme  $V(x) = \left[1 - \left(\beta - \frac{x^2}{2}\right)^2\right]^{1/2}$ , comme dans le modèle de la référence [Sidorov *et al.*, 2006]. Le double puits apparaît lorsque le paramètre  $\beta$  augmente. Les unités spatiales et en énergie sont arbitraires, et les courbes sont décalées en énergie pour améliorer leur lisibilité.

### 6.5.3 Séparation avec étiquetage interne

Pour contourner la difficulté mentionnée à la section précédente, une solution pourrait être que les états atomiques ne soient jamais soumis qu'à un simple piège à la fois. Pour cela on peut commencer par séparer les atomes en superposition cohérente d'états *internes*, comme dans un interféromètre de Ramsey sans séparation spatiale, puis créer deux potentiels qui agissent sélectivement sur chacun des états internes, pour les séparer spatialement. On parle parfois d'*étiquetage interne* des atomes, car on attribue une étiquette, l'état interne, à chacune des voies de l'interféromètre. Pour que des interférences soient visibles, la recombinaison suppose également la recombinaison des étiquettes internes. Les auteurs de la référence [Böhi *et al.*, 2009] ont déjà démontré expérimentalement l'obtention d'interférences avec un condensat de Bose-Einstein, grâce à cette technique.

La technique avec double piège de potentiel, décrit à la section précédente, est d'une certaine manière l'analogie d'un cube séparateur non polarisant dans un interféromètre optique. La méthode démontrée par Böhi [Böhi *et al.*, 2009] est dans cette comparaison plutôt l'analogie de la succession d'une lame d'onde, qui permet de placer la lumière en superposition entre deux états de polarisation, suivie d'un cube polariseur, qui envoie chacun de ces deux états de polarisation vers une voie différente de l'interféromètre.

D'un point de vue expérimental, comme dans la référence [Böhi *et al.*, 2009] on peut effectuer une transition  $\pi/2$  entre les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  du niveau fondamental  $5^2S_{1/2}$  du rubidium 87 grâce à une transition à deux photons entre  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = +1\rangle$ , avec l'état intermédiaire  $|F = 2, m_F = 0\rangle$ . On a vu à la section 6.3 page 127 que les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 1, m_F = +1\rangle$  peuvent

tous les deux être piégés par un champ magnétique statique, ce qui peut constituer un piège simple de départ. Les auteurs de la référence [Böhi *et al.*, 2009] ajoutent ensuite un potentiel créé par un champ magnétique oscillant couplant  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  à  $|F = 2, m_F = -1\rangle$ , mais beaucoup plus loin de la résonance pour les transitions qui concernent l'état  $|F = 2, m_F = +1\rangle$ . Ces interactions sont représentées sur la figure 6.4.

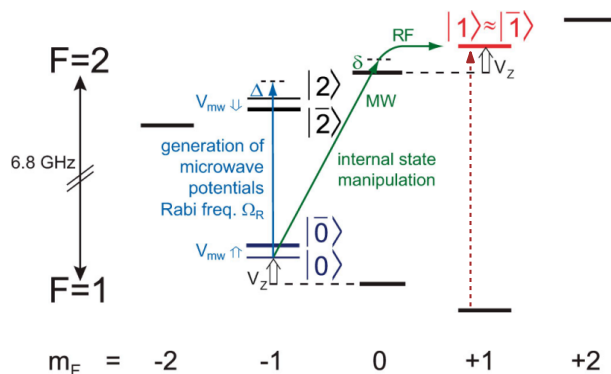


FIGURE 6.4: Figure adaptée de la référence [Böhi *et al.*, 2009], qui représente la structure hyperfine de l'état fondamental  $|5^2S_{1/2}\rangle$  du rubidium 87 et son utilisation pour séparer de façon cohérente des atomes avec étiquetage interne. En vert : transition  $\pi/2$  à deux photons. En bleu : création d'un potentiel sélectivement pour l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  par habillage micro-ondes. En pointillés : la transition dont on compte se servir pour habiller l'état  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  pour le gravimètre.

Pour notre interféromètre, on envisage d'utiliser les mêmes outils expérimentaux, tout en rendant le dispositif aussi symétrique que possible afin de garder au mieux les caractéristiques évoquées à la section 6.5.1 page 133. On compte ainsi utiliser deux guides d'onde coplanaires au lieu d'un seul. Le premier devra permettre d'habiller l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  en excitant sélectivement la transition vers  $|F = 2, m_F = -1\rangle$  et décaler de cette manière le piège vu par l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ , comme dans la référence [Böhi *et al.*, 2009]. Le second, décalé, viendra créer un autre potentiel par habillage, sélectivement pour l'état  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  cette fois-ci, par excitation de la transition vers  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ , ce qui devra décaler le piège vu par  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  de façon symétrique.

Un intérêt supplémentaire de la technique d'étiquetage interne est qu'à la sortie de l'interféromètre la différence de phase entre les chemins se traduit par une différence de population entre chacun des états internes. Ce résultat sera démontré au chapitre 7 page 139. Par conséquent le dispositif de détection ne doit pas nécessairement être résolu en position.

## Conclusion

Pour conclure ce chapitre, on récapitule les principaux choix qui ont été effectués pour le gravimètre atomique sur puce du projet CATS :

- un principe général de mesure, dans lequel les atomes sont en superposition cohérente entre deux puits de potentiel espacés dans le potentiel de pesanteur.

- une puce à atomes, qui permet de créer de forts gradients de champs magnétiques statiques et oscillants afin de piéger et manipuler les atomes, avec un encombrement et une puissance électrique réduits.
- les états internes  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  du niveau fondamental  $5^2S_{1/2}$  du rubidium 87, pour servir d'étiquettes pour la séparation cohérente. Le rubidium 87 est une espèce dont le refroidissement a été démontré expérimentalement par de nombreuses équipes. Les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  ont l'avantage de pouvoir être confinés dans un piège magnétique statique d'une part, d'être influencés presque de la même manière par les champs magnétiques d'autre part, et enfin de pouvoir être manipulés sélectivement grâce à des champs magnétiques micro-ondes.
- deux guides d'onde coplanaires devront créer des champs magnétiques micro-ondes pour habiller sélectivement les deux états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 2, m_F = +1\rangle$  de l'interféromètre afin de les séparer spatialement.
- pour éviter les problèmes liés aux interactions interatomiques, on préfère utiliser un nuage d'atomes non condensés. Le prix à payer est une cohérence spatiale réduite, ce qui implique des précautions expérimentales supplémentaires pour la séparation des atomes.



# Chapitre 7

## Principes de la gravimétrie à atomes piégés

Au chapitre 6 page 121 on a présenté le principe général d'un gravimètre à atomes piégés, et on a exposé les choix importants qui ont été retenus pour la mise au point du démonstrateur. A la section 7.1 page 139 on présente un modèle physique simple du concept de gravimètre à atomes piégés, puis à la section 7.2 page 143 on fait une comparaison avec les gravimètres atomiques à atomes en chute libre. On mentionne succinctement à la section 7.3 page 149 d'autres configurations qui pourraient permettre de mesurer le champ de pesanteur de façon compacte avec des masses d'épreuve atomiques. On étudie enfin à la section 7.4 page 150 quelques causes d'incertitudes pour l'interféromètre à atomes piégés, en partant du modèle présenté à la section 7.1.

Le modèle d'interféromètre à atomes piégés présenté à la section 7.1 a été créé par l'auteur, en s'inspirant bien entendu du modèle de l'interféromètre de Ramsey [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 18]. Le modèle concernant le gravimètre à chute d'atomes est repris pour l'essentiel des références [Cohen-Tannoudji, 1993, Cheinet, 2006]. La comparaison entre les deux types d'interféromètres est le résultat de discussions avec Iacopo Carusotto, Christine Guerlin et Sylvain Schwartz. L'étude des causes d'incertitude est un mélange de la reprise d'un travail de Christine Guerlin, d'une collaboration avec Isabelle Bouchoule, Chris Westbrook et leur stagiaire David Bina, ainsi que d'une contribution personnelle, notamment dans le traitement quantique des effets de l'anharmonicité sur la mesure.

### 7.1 Mesure du champ de pesanteur avec des atomes piégés

On décrit dans cette section un modèle élémentaire du principe de gravimètre à atomes piégés proposé dans la référence [Schwartz et Pocholle, 2010]. Tout comme il est possible de réaliser des interférences optiques avec de la lumière blanche, on s'intéresse dans ce qui suit aux interférences d'un gaz parfait d'atomes initialement à l'équilibre thermique, sans condensation de Bose-Einstein. Dans le modèle qui suit on se place dans la limite où la longueur de cohérence dans le nuage est petite devant la distance interatomique typique. L'effet des corrélations entre atomes est négligé, et on se ramène au cas d'un grand nombre de particules indépendantes dans un piège.



### 7.1.1 Système atomique

On considère un modèle d'atome de masse atomique  $m$ , à deux états internes propres  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , séparés par une différence d'énergie  $E_{ab} = \hbar\omega_{ab}$ , comme illustré figure 7.1. On suppose que l'on dispose de plusieurs outils pour manipuler cet atome. On souhaite tout d'abord piéger l'atome. On suppose donc que l'on peut créer un piège harmonique isotrope de pulsation  $\omega$  dont on contrôle le centre  $\underline{r}_0$ . Son potentiel s'écrit donc

$$V_{\underline{r}_0}(\underline{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 \|\underline{r} - \underline{r}_0\|^2 \quad (7.1)$$

On suppose que l'on peut piéger de façon indépendante chacun des deux états internes, et que lorsqu'un piège est déplacé, un atome dans un état propre du piège le suit adiabatiquement.

On suppose enfin qu'un dispositif permet de mettre en superposition cohérente à parts égales entre  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  un atome initialement dans l'état  $|a\rangle$ . Notre modèle  $\hat{Z}_{\pi/2}$  pour cette transformation correspond à une rotation d'angle  $\pi/2$  sur la sphère de Bloch des états  $(|a\rangle, |b\rangle)$ . Pour cette raison on la dénomme *transition*  $\pi/2$  par la suite. L'opérateur  $\hat{Z}_{\pi/2}$  est donné par

$$\hat{Z}_{\pi/2} |a\rangle = \frac{|a\rangle - |b\rangle}{\sqrt{2}} \quad (7.2a)$$

$$\hat{Z}_{\pi/2} |b\rangle = \frac{|a\rangle + |b\rangle}{\sqrt{2}} \quad (7.2b)$$

Comme on peut le voir dans les équations (7.2), on ne prend pas en compte dans ce modèle le déphasage qui pourrait se créer entre  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  au moment de la transition  $\pi/2$ .

### 7.1.2 Système d'interrogation

La mesure du champ de pesanteur avec des atomes piégés repose sur la mesure du déphasage entre  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  lorsque l'atome est placé dans une superposition entre ces deux états internes et que ceux-ci sont séparés spatialement. Le déphasage dépend alors notamment de la différence de potentiel de pesanteur entre les deux états. On s'intéresse dans notre modèle à l'algorithme de mesure suivant, pour un atome, également schématisé figure 7.2 :

1. Préparation de l'atome dans l'état interne  $|a\rangle$  et dans l'état externe  $|n\rangle$  d'énergie  $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$  d'un potentiel harmonique  $V_0$  centré à l'origine.
2. Transition  $\pi/2$ , qui met l'atome en superposition cohérente entre  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ . L'atome reste piégé dans  $V_0$ , avec le même état  $|n\rangle$ .
3. Séparation spatiale des états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  grâce à l'utilisation de deux potentiels  $V_{\underline{r}_0}$  et  $V_{(-\underline{r}_0)}$  appliqués respectivement aux états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ .
4. Phase d'interaction avec le potentiel de pesanteur pendant un temps  $T$ .
5. Recombinaison spatiale de l'atome dans le potentiel  $V_0$  appliqué à  $|a\rangle$  comme à  $|b\rangle$ .
6. Recombinaison des états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  grâce à une deuxième transition  $\pi/2$ .

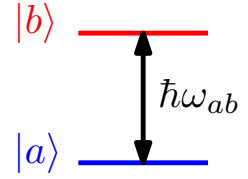


FIGURE 7.1: Atome à deux niveaux.

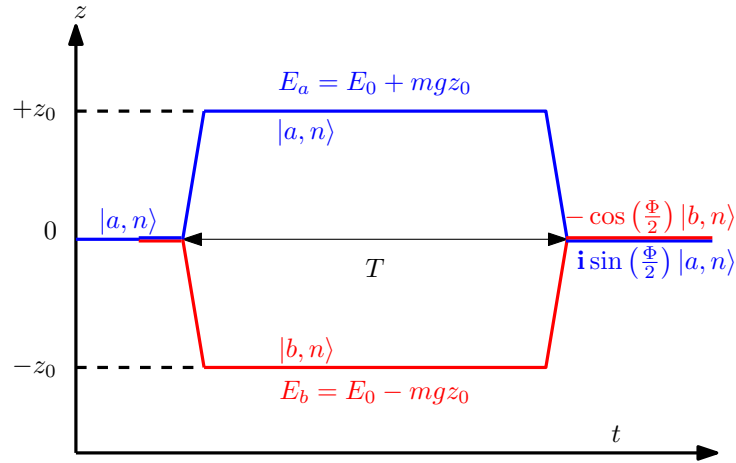


FIGURE 7.2: Principe de la gravimétrie à atomes piégés. L'atome est mis dans une superposition cohérente d'états internes, qui sont ensuite séparés spatialement pendant un temps  $T$ , puis recombinés. Le déphasage  $\Phi$  est donné par la formule (7.4).

### 7. Mesure de l'état atomique dans la base $(|a\rangle, |b\rangle)$ .

Examinons maintenant l'état du système étape par étape. A l'étape 1 le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_{init} = \hbar\omega_{ab} |b\rangle \langle b| + \frac{\hat{p}^2}{2m} + V'_0(\hat{r})$$

Le potentiel  $V'_0$  est la somme du piège harmonique avec le potentiel de pesanteur. De façon générale, lorsque l'on additionne le potentiel  $mgz$  au potentiel de piégeage  $V_{r_0}$  de l'équation (7.1) on obtient un potentiel de la forme

$$V'_{r_0} = \frac{1}{2}m\omega^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z'_0)^2] + U_0 \quad (7.3)$$

où

$$\begin{aligned} \underline{r}_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ z'_0 &= z_0 - \frac{g}{\omega^2} \\ U_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2 (z_0^2 - z_1^2) \end{aligned}$$

Comme on le voit sur l'équation (7.3), l'ajout du potentiel de pesanteur ne fait que décaler les références de cote et d'énergie du système, donc le hamiltonien  $\hat{H}_{init}$  a pour états propres les états  $\{|n'\rangle |a\rangle\}$  et  $\{|n'\rangle |b\rangle\}$  ( $n' \in \mathbb{N}$ ) qui sont les mêmes états que pour  $V_0$ , mais décalés spatialement de  $\frac{g}{\omega^2}$  et de  $U_0$  en énergie. On suppose donc qu'après l'étape 1 l'atome se trouve dans l'état  $|\psi\rangle_{initial} = |n'\rangle |a\rangle$ .

A l'étape 2 on applique une transition  $\pi/2$  à l'atome, qui se retrouve donc dans l'état  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |n'\rangle (|a\rangle - |b\rangle)$ .

A l'étape 3 le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_{séparation} = \hbar\omega_{ab} |b\rangle \langle b| + \frac{\hat{p}^2}{2m} + V'_{r_0}(\hat{r}) |a\rangle \langle a| + V'_{(-r_0)}(\hat{r}) |b\rangle \langle b|$$

On note  $\{|n_a\rangle\}$  les états propres correspondant à  $\frac{\hat{p}^2}{2m} + V'_{r_0}$  et  $\{|n_b\rangle\}$  ceux de  $\frac{\hat{p}^2}{2m} + V'_{(-r_0)}$ . Les états propres de  $\hat{H}_{séparation}$  sont donc les états  $\{|n_a\rangle |a\rangle\}$  et les états  $\{|n_b\rangle |b\rangle\}$ . On suppose que les déplacements des potentiels de piégeage depuis  $V'_0$  vers  $V'_{r_0}$  et vers  $V'_{(-r_0)}$  sont tels que les états  $|n'\rangle |a\rangle$  et  $|n'\rangle |b\rangle$  évoluent respectivement vers  $|n_a\rangle |a\rangle$  et  $|n_b\rangle |b\rangle$  avec  $n_a = n_b = n'$ . C'est en particulier le cas lorsque la transformation se fait de façon adiabatique. On ne prend pas en compte dans ce modèle le déphasage qui pourrait être provoqué par cette séparation. Dans le modèle présenté à cette section, l'état de l'atome après l'étape 3 s'écrit donc  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_a\rangle |a\rangle - |n_b\rangle |b\rangle)$ .

Le hamiltonien  $\hat{H}_{interrogation}$  qui correspond à l'étape 4 est le même que celui de l'étape précédente. Pendant l'étape 4 le hamiltonien est indépendant du temps, et  $|n_a\rangle |a\rangle$  et  $|n_b\rangle |b\rangle$  en sont des vecteurs propres. Après un temps  $T$  l'état de l'atome s'écrit donc à un facteur unitaire près  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_a\rangle |a\rangle - e^{-i\Phi} |n_b\rangle |b\rangle)$  où  $\Phi = \frac{E_b - E_a}{\hbar} T$  est la différence de phase entre les deux états  $|n_a\rangle |a\rangle$  et  $|n_b\rangle |b\rangle$  d'énergies  $E_a$  et  $E_b$ . L'énergie  $E_n^a$  de l'état  $|n_a\rangle$  vaut  $E_n^a = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 (z_0^2 - z_0'^2)$  d'après l'équation (7.3). En utilisant  $z_0' = z_0 + \frac{g}{\omega^2}$  et en développant on obtient

$$E_n^a = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) + mgz_0 + \frac{1}{2}m \frac{g^2}{\omega^2}$$

De la même manière

$$E_n^b = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) + mg(-z_0) + \frac{1}{2}m \frac{g^2}{\omega^2}$$

Par conséquent, avec  $\Delta z_0$  la séparation verticale entre les états piégés, le déphasage entre les états vaut

$$\Phi = \omega_{ab}T - \frac{mg\Delta z_0}{\hbar}T \quad (7.4)$$

A l'étape 5 on revient au hamiltonien  $\hat{H}_{init}$ . La transformation est inverse de l'étape 3, et on suppose de même que les états  $|n_a\rangle$  et  $|n_b\rangle$  sont recombinaés en  $|n'\rangle$  avec  $n' = n_a = n_b$ , sans déphasage supplémentaire. A la fin de l'étape 5 l'état de l'atome est donc  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |n'\rangle (|a\rangle - e^{-i\Phi} |b\rangle)$ .

L'étape 6 permet de recombinaer les états internes de l'atome grâce à une seconde transition  $\pi/2$ . On vérifie que

$$\hat{Z}_{\pi/2} \frac{|a\rangle - e^{-i\Phi} |b\rangle}{\sqrt{2}} = e^{-i\Phi/2} \left[ \mathbf{i} \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) |a\rangle - \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) |b\rangle \right]$$

L'état final de l'atome, juste avant la détection, s'écrit donc à un facteur unitaire global près

$$|\psi\rangle_{final} = \mathbf{i} \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) |n'\rangle |a\rangle - \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) |n'\rangle |b\rangle \quad (7.5)$$

La détection des états internes  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  à l'étape 7 donne donc comme probabilités  $p_a$  et  $p_b$  pour ces états

$$p_a = \left| \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right|^2$$

$$p_b = \left| \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right|^2$$

Par conséquent modulo  $2\pi$

$$\Phi = \pm 2 \arctan \sqrt{\frac{p_a}{p_b}} \quad (7.6)$$

avec

$$g = (\omega_{ab}T - \Phi) \frac{\hbar}{MT\Delta z_0} \quad (7.7)$$

Notons que dans ce cas idéal le déphasage  $\Phi$  est indépendant de l'état  $|n\rangle$  dans lequel l'atome est initialement piégé. Cette propriété facilite l'obtention d'interférences avec des atomes dans un nuage thermique, sans que les franges ne soient brouillées.

### 7.1.3 Détermination de $g$

Pour lever l'ambiguïté de la relation (7.6), on peut par exemple procéder de la manière suivante. Les paramètres  $\omega_{ab}$  et  $T$  peuvent être très bien connus, le premier par spectroscopie et le second à l'aide d'une horloge atomique. On peut par exemple fixer  $\omega_{ab}T$  proche d'un multiple de  $2\pi$  en choisissant  $\Delta z_0 = 0$  puis en cherchant  $T$  tel que  $p_a$  soit minimal. On obtient alors

$$\frac{p_a}{p_b} = \left| \tan \frac{mgT}{\hbar} \Delta z_0 \right|^2$$

puis en faisant varier  $\Delta z_0$  on obtient  $\frac{mgT}{\hbar}$  et donc  $g$ , au signe près.

## 7.2 Comparaison aux gravimètres à atomes en chute libre

Examinons d'abord le fonctionnement d'un gravimètre atomique qui suit le principe de celui de l'Observatoire de Paris [Bodart, 2010, Cheinet, 2006, Bordé, 2002] ou de l'Institut d'Optique [Geiger *et al.*, 2011, Geiger, 2011], dans lesquels les particules sont en chute libre, avant d'établir la comparaison avec le gravimètre à atomes piégés. On donne ici une description simplifiée du dispositif.

### 7.2.1 Transitions Raman stimulées

Décrivons le processus de transitions Raman stimulées, qui sont un outil essentiel du gravimètre à atomes en chute libre. Ce processus est par exemple décrit en détail dans la référence [Cohen-Tannoudji, 1993]. On en donne ici une explication simplifiée, d'abord qualitative puis quantitative.

On considère un atome à trois états internes  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$  et  $|c\rangle$ , comme sur la figure 7.3. Les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  sont supposés stables, ce sont eux qui serviront pour l'interférométrie atomique. On considère un atome ayant une impulsion initiale de projection  $p$  suivant l'axe  $z$ . L'atome est plongé dans deux champs électriques laser  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , et respectivement de vecteurs d'onde  $k_1 \underline{e}_z$  et  $k_2 \underline{e}_z$ . Une transition Raman stimulée est un processus à deux photons, dans lequel l'atome dans l'état  $|a\rangle$  est excité par absorption d'un photon de  $\mathcal{L}_1$ , puis désexcité vers l'état  $|b\rangle$  par *émission stimulée* vers le laser  $\mathcal{L}_2$ . Lors de l'excitation l'atome subit un recul d'une quantité de mouvement  $\hbar k_1 \underline{e}_z$  à cause de l'absorption d'un photon de  $\mathcal{L}_1$ . L'émission qui suit vers  $\mathcal{L}_2$  provoque un nouveau recul, de  $-\hbar k_2 \underline{e}_z$  cette fois-ci. L'atome passe par ce processus de l'état  $|a\rangle |p\rangle$  à l'état  $|b\rangle |p + \hbar k_{eff}\rangle$  avec  $k_{eff} = k_1 - k_2$ . Lorsque les faisceaux se propagent en sens contraires, en valeur absolue les vecteurs d'onde s'additionnent, ce qui permet de transférer une quantité de mouvement significative à l'atome. Ainsi un atome de rubidium 87 qui subit une transition Raman stimulée causée par deux faisceaux contrapropageants à 780 nm a un recul de  $1,2 \text{ cm s}^{-1}$ . L'analogie classique de la transition Raman stimulée est un personnage de dessin animé, qui attrape au vol un boulet de canon, puis le rejette avec force vers le canon. Le recul du personnage est alors la différence entre l'impulsion donnée finalement au boulet de canon, et l'impulsion initiale du projectile.

On suppose que le désaccord  $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{ab}$  est faible devant  $\omega_{ab}$ . Lorsque les désaccords  $\Delta = \omega_{ae} - \omega_1 \approx \omega_{be} - \omega_2$  sont grands devant la largeur des transitions, le niveau excité est peu peuplé, ce qui limite les émissions spontanées depuis  $|e\rangle$ . Sous ces deux conditions une transition Raman stimulée se ramène au cas d'une oscillation de Rabi entre les états  $|a\rangle |p\rangle$  et  $|b\rangle |p + \hbar k_{eff}\rangle$ , avec une fréquence de Rabi effective  $\Omega_{eff}$  qui dépend des intensités des deux lasers et des conditions de résonance de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  avec les transitions  $|a\rangle \rightarrow |e\rangle$  et  $|b\rangle \rightarrow |e\rangle$  respectivement. On peut démontrer [Cohen-Tannoudji, 1993] qu'à résonance ( $\delta \ll \tau^{-1}$ ), et en négligeant tout déplacement lumineux causé par les interactions avec le niveau intermédiaire  $|e\rangle$ , la transformation  $M$  à un temps  $t$  et de durée  $\tau$  peut s'écrire dans la base  $(|a, p\rangle, |b, p + \hbar k_{eff}\rangle)$ , à une phase globale près

$$M = U \left( \frac{\tau}{2} \right) M_\alpha(\theta, t) U \left( \frac{\tau}{2} \right) \quad (7.8)$$

avec

$$M_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \cos \frac{\alpha}{2} & \mathbf{e}^{i\theta} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \mathbf{e}^{-i\theta} \sin \frac{\alpha}{2} & \mathbf{i} \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

$$\alpha = \Omega_{eff} \tau \quad (7.10)$$

$$\theta = (\omega_1 - \omega_2) t + \phi_1 - \phi_2 \quad (7.11)$$

$U$  est ici l'opérateur d'évolution en dehors de l'impulsion, et  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les références de phase de chacun des faisceaux laser.

On s'intéresse à deux cas particuliers. Lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  on a :

$$M_{\pi/2}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{e}^{i\theta} \\ \mathbf{e}^{-i\theta} & \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

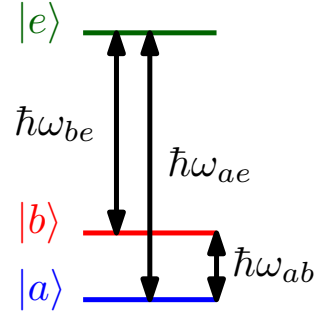


FIGURE 7.3: Modèle d'atome à trois états internes.

Cette transformation permet de mettre l'atome en superposition cohérente équilibrée entre  $|a,p\rangle$  et  $|b,p + \hbar k_{eff}\rangle$  ou au contraire de recombinaison une telle superposition. Elle crée également un déphasage  $\theta$  entre ces états. On parle d'impulsion Raman  $\frac{\pi}{2}$ .

Lorsque  $\alpha = \pi$ , cette fois-ci

$$M_{\pi}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Cette transformation échange donc les deux états, et ajoute un nouveau déphasage  $2\theta$ . On parle d'impulsion Raman  $\pi$ .

### 7.2.2 Interféromètre à atomes en chute libre

L'interféromètre décrit à cette section concerne encore une fois un nuage d'atomes dans lequel la longueur de cohérence est faible devant la distance interatomique. On fait interférer les états  $|a,p\rangle$  et  $|b,p + \hbar k_{eff}\rangle$  de chaque atome. La séquence d'interférométrie est la suivante :

1. L'atome est en chute libre, avec une vitesse initiale de projection  $p/m$  suivant  $\underline{e}_z$ , et il est préparé dans l'état interne  $|a\rangle$ .
2. L'atome subit une première impulsion Raman  $\frac{\pi}{2}$ , qui le place en superposition cohérente entre les états  $|a,p\rangle$  et  $|b,p + \hbar k_{eff}\rangle$ .
3. Au bout d'un temps  $T$  on échange les états  $|a,p\rangle$  et  $|b,p + \hbar k_{eff}\rangle$  de l'atome grâce à une impulsion Raman  $\pi$ .
4. Après un nouvel intervalle de temps  $T$  ces états sont recombinaison grâce à une seconde impulsion Raman  $\frac{\pi}{2}$ .
5. Chaque état interne est détecté. Les probabilités de présence dans  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  permettent de déterminer le déphasage qui sépare les deux voies de l'interféromètre, puis d'en déduire le champ de pesanteur.

Cette séquence est résumée sur la figure 7.4.

On cherche l'état  $|\psi\rangle_{fin}$  à la sortie de l'interféromètre. Le milieu de l'impulsion Raman  $\pi$  est pris pour origine des temps, et on se place dans un référentiel en chute libre. On prend  $\Omega_{eff}\tau = \frac{\pi}{2}$ , de sorte que les impulsions  $\frac{\pi}{2}$  initiale et finale durent chacune un temps  $\tau$ , et que l'impulsion  $\pi$  centrale soit deux fois plus longue. Maintenir  $\Omega_{eff}$  constant n'est pas trivial en pratique, car il faut compenser l'effet Doppler dans le référentiel des atomes en chute libre [Cheinet, 2006]. On laisse cet aspect de côté dans notre modèle afin de simplifier la description de l'interféromètre ainsi que sa comparaison à un gravimètre à atomes piégés. On a alors

$$|\psi\rangle_{fin} = U\left(\frac{\tau}{2}\right) M_{\pi/2}(\theta_3) U\left(T + \frac{3\tau}{2}\right) M_{\pi}(\theta_2) U\left(T + \frac{3\tau}{2}\right) M_{\pi/2}(\theta_1) U\left(\frac{\tau}{2}\right) |a,p\rangle \quad (7.14a)$$

avec

$$\theta_1 = -(\omega_1 - \omega_2)T + \phi_1 \quad (7.14b)$$

$$\theta_2 = \phi_2 \quad (7.14c)$$

$$\theta_3 = (\omega_1 - \omega_2)T + \phi_3 \quad (7.14d)$$

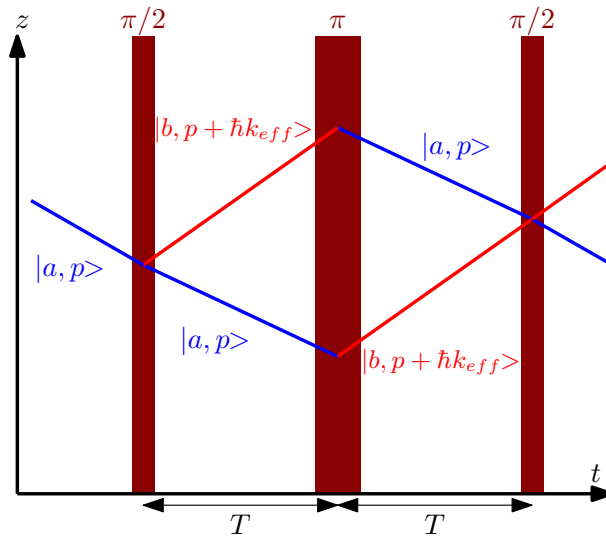


FIGURE 7.4: Principe de la séquence interférométrique pour le gravimètre à atomes en chute libre. L'atome, initialement dans l'état  $|a, p\rangle$ , subit successivement des impulsions Raman  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et de nouveau  $\frac{\pi}{2}$ , espacées par deux intervalles de temps  $T$ . Les états  $|a, p\rangle$  et  $|b, p + \hbar k_{eff}\rangle$  sont détectés, à la sortie de l'interféromètre.

D'après le principe d'équivalence, dans le référentiel en chute libre l'atome est une particule libre, dont le hamiltonien s'écrit par conséquent pour les états qui nous intéressent

$$\hat{H}_{libre} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_{ab} |b\rangle \langle b|$$

L'opérateur d'évolution vaut donc dans la base  $(|a, p\rangle, |b, p + \hbar k_{eff}\rangle)$

$$U(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega'_{ab}T} \end{pmatrix}$$

avec

$$\hbar\omega'_{ab} = \hbar\omega_{ab} + \frac{(p + \hbar k_{eff})^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}$$

Le développement à partir de l'équation (7.14a) donne l'état final

$$|\psi\rangle_{fin} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{i} \left( e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} + e^{-i(\theta_2 - \theta_3)} \right) |a, p\rangle + \left( e^{-i(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3)} - e^{-i\theta_2} \right) |b, p + \hbar k_{eff}\rangle \right] \quad (7.15)$$

Les probabilités de trouver l'atome dans chacun des états internes  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  valent ainsi

$$P_{|a\rangle} = \left( \cos \frac{\Phi}{2} \right)^2 \quad (7.16)$$

$$P_{|b\rangle} = \left( \sin \frac{\Phi}{2} \right)^2 \quad (7.17)$$

$$\text{avec } \Phi = \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 \quad (7.18)$$

Pour évaluer le déphasage  $\Phi$  on examine les phases des lasers. Pour chaque laser  $j$  la phase  $\varphi_j$  s'écrit

$$\varphi_j(z,t) = \omega_j t - k_j(z - z_j)$$

Cette notation permet de souligner que la référence de phase de chaque faisceau est rigidement liée à sa source. On ne prend pas en compte ici le bruit éventuellement causé par des sauts de phase entre les deux faisceaux. Or dans le référentiel en chute libre chaque laser a une accélération  $g$  vers le haut, donc  $z_j = z_j^0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ . La phase relative  $\phi$  entre les lasers vaut donc

$$\phi = k_1 z_1^0 - k_2 z_2^0 + k_{eff} v_0 t + \frac{1}{2} k_{eff} g t^2 \quad (7.19)$$

En reportant l'expression précédente dans celles (7.14b) à (7.14d) page 145 de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , on obtient la valeur suivante du déphasage :

$$\Phi = k_{eff} g T^2 \quad (7.20)$$

Un aspect important de l'expression (7.20) est que le déphasage est indépendant de l'impulsion initiale  $p$  des atomes. C'est notamment grâce à cette propriété que l'on peut faire interférer un nuage thermique d'atomes, sans que la dispersion des vitesses ne vienne forcément brouiller les interférences.

### 7.2.3 Différences entre les deux types de gravimètres

Pour comparer les deux types de gravimètres atomiques, rappelons les relations (7.4) et (7.20) liant le déphasage mesuré au champ de pesanteur, dans chacun des cas.

Pour un gravimètre à atomes piégés

$$\Phi = \omega_{ab} T - \frac{mg \Delta z_0}{\hbar} T \quad (7.4)$$

Pour un gravimètre à atomes lâchés

$$\Phi = k_{eff} g T^2 \quad (7.20)$$

Un simple calcul [Cohen-Tannoudji, 1993] permet de remarquer que dans les deux interféromètres la différence de phase  $\Phi_g$  liée au champ de pesanteur s'écrit

$$\Phi_g = \frac{Mg}{\hbar} \int dt \Delta z(t)$$

où  $\Delta z$  est la distance séparant verticalement les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  pendant la phase d'interrogation de l'interféromètre. Deux mécanismes différents sont cependant en œuvre.

### 7.2.4 Différence du principe physique

Dans un gravimètre à atomes piégés, la sensibilité au champ de pesanteur provient de la différence d'énergie entre deux états propres du hamiltonien. Il s'agit à ce titre d'un interféromètre de Ramsey [Ramsey, 1950]. Son principe est donc comparable à celui d'une horloge atomique, la séparation spatiale des états atomiques venant en suscroît. Ainsi



lorsque  $\Delta z_0$  est nul dans l'expression (7.4) le déphasage total  $\Phi$  est sensible uniquement à la fréquence de transition entre les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , et au temps d'interrogation.

Dans le cas d'un gravimètre à atomes en chute libre, les chemins empruntés par les deux états après la séparation initiale sont symétriques. Par conséquent, comme on peut le voir dans l'équation (7.14a) page 145 le déphasage hamiltonien accumulé après l'impulsion Raman  $\pi$  vient compenser exactement celui créé avant. Dans la référence [Cohen-Tannoudji, 1993] ce résultat est démontré d'une autre manière, dans le référentiel du laboratoire. Ce résultat est valable tant que la symétrie entre les chemins n'est pas brisée, par exemple par la présence d'un gradient de pesanteur [Peters *et al.*, 2001]. Comme cela est souligné par l'expression (7.18) page 146, seuls les déphasages créés au moment des transitions Raman stimulées contribuent au déphasage final. D'après l'expression (7.11) page 144 du déphasage Raman  $\theta$ , celui-ci provient uniquement de la différence d'origine des phases et du battement temporel entre les lasers  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ . Tout se passe comme si les lasers Raman inscrivaient leur phase différentielle sur les atomes à trois instants de leur chute. Comme dans un gravimètre à chute de coin de cube, tel que le FG5 présenté au chapitre 2, section 2.3.2 page 35, la mesure revient donc à utiliser les graduations constituées par la phase de la lumière laser pour déterminer la trajectoire d'une masse d'épreuve en chute libre. La masse d'épreuve d'un FG5 est macroscopique et la lecture des graduations du laser se fait par interférométrie optique. Dans le gravimètre à atomes lâchés ce sont les atomes qui constituent la masse d'épreuve, et la phase laser est lue grâce à aux interférences d'ondes de matière.

### 7.2.5 Sensibilité des instruments

Il est intéressant de comparer les sensibilités des déphasages au champ de pesanteur, dans les équations (7.4) et (7.20). La sensibilité d'un gravimètre à atomes en chute libre fait intervenir la longueur d'onde des lasers, ainsi que le temps de chute. La longueur d'onde d'un laser peut être très bien maîtrisée grâce à des asservissements, et elle peut constituer un étalon primaire de longueur. Le temps peut également être maîtrisé grâce à une référence primaire fournie par une chaîne de fréquence asservie sur une horloge atomique. Il est donc simple, d'un point de vue fondamental, d'obtenir une mesure *absolue* du champ de pesanteur grâce à un gravimètre à atomes lâchés. La dépendance en  $T^2$  est en revanche problématique, puisque pendant le temps d'interrogation  $2T$  les atomes tombent d'une hauteur  $L = 2gT^2$ , c'est-à-dire que l'on peut réécrire le déphasage sous la forme

$$\Phi = k_{eff} \frac{L}{2}$$

La sensibilité de l'instrument est donc proportionnelle à la hauteur de la chambre à vide.

L'utilisation d'atomes piégés est une des manières pour dépasser ce compromis entre encombrement et sensibilité. Le déphasage dans un gravimètre à atomes piégés est proportionnel à la distance de séparation  $\Delta z_0$ , mais il est également proportionnel au temps d'interrogation  $T$ , de façon indépendante. Par conséquent, sous réserve de pouvoir garder la cohérence de phase dans le nuage atomique, il n'y a pas de limite fondamentale au temps d'interrogation et donc à la sensibilité du gravimètre. Comme pour un gravimètre à atomes en chute libre le temps d'interrogation  $T$  peut être connu de façon absolue grâce à une référence de fréquence. La différence d'énergie  $\hbar\omega_{ab}$  peut être déterminée par spectroscopie. Le rapport  $M/\hbar$  peut pour sa part être obtenu grâce à des mesures de recul [Weiss *et al.*,

1994] ou en partant de mesures de masse [Vieira, 2002]. Le paramètre  $\Delta z_0$  dépend du procédé de création d'un double piège. Il s'agit d'un paramètre important à maîtriser pour garantir la stabilité de l'instrument.

On peut comparer les sensibilités des deux types d'instruments, pour quelques valeurs typiques. Pour le gravimètre à chute libre d'atomes on considère une chambre à vide de 1 m de haut, ce qui correspond à un temps de chute de 450 ms environ dans le champ de pesanteur au sol, et une transition à 780 nm pour la raie  $D_2$  du rubidium 87. Dans ce cas  $k_{eff} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$  donc la sensibilité vaut pour le gravimètre à chute d'atomes

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g} = 8,2 \cdot 10^5 \text{ rad m}^{-1} \text{ s}^2$$

Pour un gravimètre à atomes piégés on considère des atomes de rubidium 87, de masse atomique  $m = 1,4 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ , avec une séparation des atomes de 100  $\mu\text{m}$  et un temps d'interaction de 40 ms. Dans ce cas la sensibilité de l'instrument vaut

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g} = 5,3 \cdot 10^3 \text{ rad m}^{-1} \text{ s}^2$$

Cette application numérique montre une sensibilité nettement plus favorable dans le cas du gravimètre à atomes en chute libre. Il s'agit là de compromis très différents entre encombrement et sensibilité. Pour améliorer la sensibilité d'un gravimètre à atomes piégés, on pourra ainsi accroître le temps de mesure ainsi que la distance de séparation entre les deux voies. On s'attend à ce que ces paramètres soient limités par la cohérence entre les voies. Quelques résultats théoriques concernant la cohérence dans l'interféromètre sont présentés à la section 7.4 page 150.

## 7.3 Autres projets de gravimètres compacts

On peut mentionner également d'autres méthodes pour mesurer le champ de pesanteur avec un système compact, et une masse d'épreuve constituée d'atomes froids.

Afin d'accroître la sensibilité d'un gravimètre à atomes en chute libre, on peut tout d'abord augmenter le recul des atomes plutôt que leur temps d'interaction. L'idée est de transférer avec un système similaire à celui décrit dans ce chapitre, un recul non plus équivalent à l'impulsion de 2 photons mais de  $2N$  photons, avec  $N$  aussi grand que possible. Ce type de dispositif est dit à *grand transfert d'impulsion* (*large momentum transfer* en anglais). Pour arriver à ce résultat on utilise en général une ou plusieurs impulsions dites *de Bragg*, qui sont l'équivalent des transitions Raman stimulées décrites à la section 7.2.1 page 143, mais n'opèrent pas de transformation sur l'état interne des atomes. La référence [Chiov *et al.*, 2011] présente ainsi la possibilité de transférer le recul de 102 photons grâce à cette technique. D'autres méthodes existent également pour transférer plus de 2 photons pour séparer les états atomiques [Malossi *et al.*, 2010, Cladé *et al.*, 2009]. Un des défis dans la mise en œuvre des systèmes à grand transfert d'impulsion est de parvenir à transférer le recul voulu à une proportion aussi élevée que possible du nuage atomique, tout en préservant la cohérence du transfert, c'est-à-dire en gardant un bon contraste dans l'interféromètre [Chiov *et al.*, 2011].

Une autre piste explorée consiste, comme dans un gravimètre à atomes piégés, à confiner les atomes de l'interféromètre. Il s'agit là non plus de garder les atomes piégés dans un puits

de potentiel, mais à faire en sorte que les trajectoires des atomes restent dans un volume borné, indépendamment du temps d'interrogation. Une solution proposée par exemple est la *trampoline à atomes* [Hughes *et al.*, 2009, de Saint-Vincent *et al.*, 2010], dans lequel des impulsions de Bragg sont périodiquement communiquées aux atomes, ce qui les empêche de tomber, comme un gymnaste sur un trampoline. Il est également possible de confiner les atomes en leur faisant effectuer des oscillations de Bloch. Le champ de pesanteur peut alors être déduit directement de la perturbation induite sur ces oscillations [Cladé *et al.*, 2005], ou bien le dispositif de confinement peut être inclus dans un interféromètre de type Ramsey-Bordé [Charrière *et al.*, 2012]. Une autre approche pour mesurer le champ de pesanteur avec des atomes confinés dans un réseau optique provient enfin de l'étude des états de Wannier et Stark [Beaufils *et al.*, 2011].

## 7.4 Causes d'incertitudes dans l'interféromètre

On cherche dans cette section à quantifier certaines incertitudes possibles dans l'interféromètre par leurs causes. Puisque pour l'instant l'interféromètre n'est pas opérationnel et que sa conception n'est pas encore achevée, on se limite à quelques effets indépendants des choix techniques.

### 7.4.1 Modèle d'interféromètre pour l'analyse des incertitudes

On reprend le modèle simple présenté à la section 7.1 page 139, et on l'enrichit pour pouvoir étudier les causes d'incertitudes dans l'interféromètre. La séquence considérée est la même, mais on suppose que chaque étape peut maintenant être imparfaite et l'on estime l'effet du mélange statistique d'états qui provient de l'équilibre thermique initial des atomes. Pour bien prendre en compte les incertitudes on considère également un hamiltonien légèrement plus complet pour la phase d'interrogation.

Plus spécifiquement on écrit le hamiltonien pendant la phase d'interrogation

$$\hat{H}_{interrogation} = \hat{H}_a |a\rangle \langle a| + \hat{H}_b |b\rangle \langle b| \quad (7.21)$$

avec

$$\hat{H}_a = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m (\omega_{a,x}^2 \hat{x}^2 + \omega_{a,y}^2 \hat{y}^2 + \omega_{a,z}^2 (\hat{z} - z_a)^2) + mg\hat{z} + V_a^0 \quad (7.22)$$

$$\hat{H}_b = \hbar\omega_{ab} + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m (\omega_{b,x}^2 \hat{x}^2 + \omega_{b,y}^2 \hat{y}^2 + \omega_{b,z}^2 (\hat{z} - z_b)^2) + mg\hat{z} + V_b^0 \quad (7.23)$$

et dans la mesure du possible

$$\omega_{a,x} = \omega_{b,x} \quad \omega_{a,y} = \omega_{b,y} \quad \omega_{a,z} = \omega_{b,z} \quad (7.24)$$

$\hat{H}_a$  et  $\hat{H}_b$  se réécrivent

$$\begin{aligned} \hat{H}_a = & \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m \left[ \omega_{a,x}^2 \hat{x}^2 + \omega_{a,y}^2 \hat{y}^2 + \omega_{a,z}^2 \left( \hat{z} - z_a + \frac{g}{\omega_{a,z}^2} \right)^2 \right] \\ & + mgz_a - \frac{1}{2}m \frac{g^2}{\omega_{a,z}^2} + V_a^0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_b = & \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m \left[ \omega_{b,x}^2 \hat{x}^2 + \omega_{b,y}^2 \hat{y}^2 + \omega_{b,z}^2 \left( \hat{z} - z_b + \frac{g}{\omega_{b,z}^2} \right)^2 \right] \\ & + mgz_b - \frac{1}{2}m \frac{g^2}{\omega_{b,z}^2} + V_b^0 + \hbar\omega_{ab} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Cela permet de diagonaliser  $\hat{H}_a$  et  $\hat{H}_b$  en

$$\hat{H}_a = \sum_{n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}} E_{n_x, n_y, n_z}^a |n_x, n_y, n_z\rangle_a \langle n_x, n_y, n_z|_a \quad (7.27)$$

$$\hat{H}_b = \sum_{n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}} E_{n_x, n_y, n_z}^b |n_x, n_y, n_z\rangle_b \langle n_x, n_y, n_z|_b \quad (7.28)$$

avec  $|n_x, n_y, n_z\rangle_i$  les états propres de chacun des pièges tridimensionnels ( $i \in \{a, b\}$ ). Les énergies propres correspondantes sont

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y, n_z}^a = & mgz_a - \frac{1}{2}m \frac{g^2}{\omega_{a,z}^2} + V_a^0 \\ & + \hbar\omega_{a,x} \left( n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_{a,y} \left( n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_{a,z} \left( n_z + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y, n_z}^b = & \hbar\omega_{ab} + mgz_b - \frac{1}{2}m \frac{g^2}{\omega_{b,z}^2} + V_b^0 \\ & + \hbar\omega_{b,x} \left( n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_{b,y} \left( n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_{b,z} \left( n_z + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.30)$$

Dans la suite, pour alléger les notations on note  $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}^3$ .

### 7.4.2 Effet des incertitudes de phase

Une séparatrice réalise une transition  $\pi/2$  sur l'état interne des atomes, et l'on suppose qu'elle préserve leurs états de piégeages  $|\underline{n}\rangle$ . L'opérateur de séparation  $\hat{S}$  agit donc pour tout état de piégeage initial  $\underline{n}$

$$\hat{S} |\underline{n}\rangle_0 |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\underline{n}\rangle_a |a\rangle - |\underline{n}\rangle_b |b\rangle) \quad (7.31)$$

Les  $|\underline{n}\rangle_0$  sont ici les états propres du piège initial. On suppose que la recombinaison préserve de même les niveaux de piégeage, et que l'état interne est modifié par une nouvelle transition  $\pi/2$ , comme dans le modèle de la section 7.1 page 139. L'effet de  $\hat{R}$  sur les états qui nous intéressent est donc

$$\hat{R} |\underline{n}\rangle_a |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle - |b\rangle) |\underline{n}\rangle_0 \quad (7.32)$$

$$\hat{R} |\underline{n}\rangle_b |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle + |b\rangle) |\underline{n}\rangle_0 \quad (7.33)$$

Le processus de notre modèle d'interféromètre correspond donc à l'opérateur

$$\hat{Y} = \hat{R} \hat{W} \hat{S} \quad (7.34)$$

$$\text{avec } \hat{W} = \exp \left[ -\frac{\mathbf{i}}{\hbar} \int_0^T \hat{H}_{interrogation} dt \right] \quad (7.35)$$

Comme on l'a vu au section 7.1 page 139, pour un état initial  $|a\rangle |\underline{n}\rangle_0$  on obtient un état final de la forme

$$\hat{Y} |a\rangle |\underline{n}\rangle_0 = \mathbf{i} \sin \left( \frac{\Phi}{2} \right) |a\rangle |\underline{n}\rangle_0 - \cos \left( \frac{\Phi}{2} \right) |b\rangle |\underline{n}\rangle_0 \quad (7.36)$$

avec  $\Phi$  le déphasage accumulé pendant le temps d'interrogation entre les états internes  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ . Lorsque l'état externe des atomes dans le piège n'est pas pur, mais un mélange statistique avec la probabilité initiale  $p_{\underline{n}}$  de trouver chaque atome dans l'état  $|\underline{n}\rangle_0$  alors la probabilité  $p_a$  pour un atome de se trouver dans l'état interne  $|a\rangle$  à la fin de la séquence vaut

$$p_a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\underline{n}} p_{\underline{n}} \cos \Phi \quad (7.37)$$

Lorsque  $\Phi$  est indépendant de l'état externe  $\underline{n}$ ,  $p_a$  présente un réseau de franges en fonction des variations de  $\Phi$ . Le positionnement de ces franges donne accès au signal recherché. On va étudier les causes de bruit sur  $\Phi$ , lorsque  $\Phi$  peut dépendre de l'état externe  $\underline{n}$ . On écrit l'incertitude sur la phase  $\Delta\Phi(\underline{n}) = \Delta\Phi^0 + \Delta\Phi_{\underline{n}}$ , avec  $\Delta\Phi^0 = \sum_{\underline{n}} p_{\underline{n}} \Delta\Phi(\underline{n})$  la moyenne statistique de  $\Delta\Phi$  et  $\Delta\Phi_{\underline{n}}$  l'écart à la moyenne. Dans l'hypothèse où pour tout  $\underline{n} \in \mathbb{N}^3$ ,  $\Delta\Phi_{\underline{n}} \ll 1$ , on a alors

$$\cos \left( \Phi + \Delta\Phi^0 + \Delta\Phi_{\underline{n}} \right) \approx \left( 1 - \frac{\Delta\Phi_{\underline{n}}^2}{2} \right) \cos \left( \Phi + \Delta\Phi^0 \right) - \Delta\Phi_{\underline{n}} \sin \left( \Phi + \Delta\Phi^0 \right)$$

puis lorsque l'on fait la moyenne sur les états  $\underline{n}$

$$p_a(\Phi) \approx \frac{1}{2} + \left( 1 - \frac{\mathbb{E}[\Delta\Phi_{\underline{n}}^2]}{2} \right) \cos \left( \Phi + \Delta\Phi^0 \right) \quad (7.38)$$

La moyenne est prise ici sur la distribution *statistique*. L'expression (7.38) montre qu'une incertitude de phase qui dépend de  $\underline{n}$  a deux effets. Lorsque cette incertitude a une moyenne non nulle  $\Delta\Phi^0$  alors cela correspond à un biais sur la phase que l'on souhaite mesurer. La variance de la phase en fonction de  $\underline{n}$  vient pour sa part diminuer le contraste du réseau de franges de probabilités. Pour garder un contraste suffisant les conditions suivantes sont ainsi utiles :

- Il faut que  $\Delta\Phi$  dépende peu de  $\underline{n}$ .
- Il vaut mieux que la distribution de probabilités des  $\underline{n}$  soit la moins étendue possible, ce qui implique que la température soit faible.

On tâche donc par la suite de distinguer, pour chaque cause d'erreur, son effet sur l'incertitude moyenne et son effet sur le contraste.

Les effets des biais sur la phase estimés par la suite sont quantifiés en fréquence, puisque ces effets sont linéaires avec le temps. On pourra comparer les valeurs estimées à un ordre

de grandeur de la fréquence correspondant à la différence d'énergie potentielle de pesanteur entre les deux pièges. Par exemple dans le cas d'un gravimètre au rubidium 87, avec une séparation spatiale de 100  $\mu\text{m}$ , on a ainsi

$$\nu_{\text{pesanteur}} = \frac{mg\Delta z}{h} \sim 2 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

Le contraste dans l'interféromètre diminue en général au cours du temps. Pour les incertitudes que l'on étudie dans cette section, on caractérise donc la perte de contraste liée à chaque cause par un temps de cohérence  $T_c$  que l'on définit comme le temps tel que l'écart type  $\sigma_{\Delta\Phi}$  sur  $\Delta\Phi$  vaut  $2\pi$ .

### 7.4.3 Imperfections du hamiltonien d'interrogation

Dans le modèle présenté plus haut, les hypothèses suivantes ont été faites pour le hamiltonien d'interrogation :

- Pour chaque état  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , le hamiltonien consiste en un piège harmonique.
- Les deux pièges harmoniques sont supposés avoir exactement les mêmes raideurs.
- La distance qui sépare les pièges est supposée constante.
- Le décalage en énergie entre les pièges est supposé constant.

On cherche à remettre en question chacune de ces hypothèses. Une hypothèse est invalidée par apparition de termes perturbateurs dans le hamiltonien. On peut en principe distinguer les perturbations suivant qu'elles sont adiabatiques, c'est-à-dire qu'elles se manifestent uniquement par le déphasage qu'elles engendrent entre les états propres du hamiltonien, ou non adiabatiques, ce qui signifie que ces perturbations viennent en plus introduire des couplages entre les différents états, internes ou externes. On se contente ici d'étudier les perturbations adiabatiques.

D'après les formules (7.29) et (7.30) page 151, dans le cas parfait la différence de phase  $\Phi$  s'écrit

$$\Phi = \frac{mg(z_b - z_a)}{\hbar}T + \frac{V_0}{\hbar}T + \omega_{ab}T \quad (7.39)$$

avec  $V_0 = V_b^0 - V_a^0$

Par conséquent une incertitude  $\Delta\Phi$  sur la phase se traduit par une incertitude sur la mesure de pesanteur

$$\Delta g = \frac{\hbar}{m(z_b - z_a)T} \Delta\Phi \quad (7.40)$$

On calcule dans la suite les incertitudes sur le déphasage induits par chacun des effets étudiés. La formule (7.40) donne la relation avec la mesure de pesanteur.

### 7.4.4 Incertitude sur le décalage en énergie

Lorsque le décalage en énergie entre les pièges n'est pas parfaitement maîtrisé, une incertitude apparaît sur les termes  $V_a^0$  et  $V_b^0$  des expressions (7.29) et (7.30) page 151.

Lorsque la perturbation est adiabatique, le déphasage  $\Phi$  entre  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  s'écrit alors :

$$\Phi = \frac{mg(z_b - z_a)T}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \int_0^T (V_b^0 - V_a^0) dt + \omega_{ab}T \quad (7.41)$$

Le deuxième terme de l'équation (7.41) se décompose en une partie  $\Phi_V^0$  maîtrisée, et une autre qui dépend de l'incertitude  $\Delta V$  sur le mode différentiel  $V_b^0 - V_a^0$ . L'incertitude de phase correspondante est

$$\Delta\Phi_V = \frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \Delta V(t) \quad (7.42)$$

$\Delta\Phi_V$  est indépendante de  $\underline{n}$ , donc elle vient amener une incertitude de mesure, sans brouillage. On écrit la fonction de transfert  $\tilde{h}_V$  qui relie  $\Delta V$  à l'incertitude de phase  $\Delta\Phi$  en fonction de la fréquence  $\nu$  :

$$\tilde{h}_V(\nu) = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu} e^{i\pi\nu T} \quad (7.43)$$

L'équation (7.43) montre que la phase est surtout sensible aux fréquences plus faibles que  $T^{-1}$ , et dans une moindre mesure aux fréquences proches des  $\nu_k$ , de la forme  $\nu_k = \frac{k+1/2}{T}$  avec  $k$  un petit entier.

### 7.4.5 Incertitude sur la distance de séparation

La distance de séparation peut elle aussi être perturbée par une incertitude  $\Delta z$ . La perturbation s'écrit dans le cas adiabatique :

$$\Delta\Phi_z = \frac{mg}{\hbar} \int_0^T \Delta z dt \quad (7.44)$$

Par conséquent la fonction de transfert qui relie  $\Delta z$  à  $\Delta\Phi$  vaut

$$\tilde{h}_z = \frac{mg}{\hbar} \cdot \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu} \quad (7.45)$$

ce qui a la même forme que (7.43).

### 7.4.6 Dissymétrie des pièges

On cherche, dans la conception de la puce, à piéger les deux états avec des pièges possédant exactement les mêmes raideurs d'un piège à l'autre, suivant chacun des trois axes. On s'attend en pratique à de légères différences, ce qui vient décaler chaque niveau d'énergie de façon différente. Puisque la perturbation concerne chaque niveau de façon différente, on s'attend à une perte de contraste en plus du biais ressenti à cause de la dissymétrie entre les pièges. Soient  $\Delta\omega_x$ ,  $\Delta\omega_y$  et  $\Delta\omega_z$  les dissymétries dans chacune des trois dimensions. Pour rester dans le cas adiabatique, on suppose que  $\Delta\omega_x$ ,  $\Delta\omega_y$  et  $\Delta\omega_z$  sont constants au cours d'une mesure donnée, même s'ils ne sont pas forcément répétables d'une fois sur l'autre. Les incertitudes de phase pour chaque état  $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}^3$  s'écrivent au bout d'un temps d'interrogation  $T$  :

$$\Delta\Phi(\underline{n}) = \left[ \Delta\omega_x \left( n_x + \frac{1}{2} \right) + \Delta\omega_y \left( n_y + \frac{1}{2} \right) + \Delta\omega_z \left( n_z + \frac{1}{2} \right) \right] T \quad (7.46)$$

Le biais de phase  $\Delta\Phi^0$  vaut donc

$$\Delta\Phi^0 = \left[ \Delta\omega_x \left( \mathbb{E}[n_x] + \frac{1}{2} \right) + \Delta\omega_y \left( \mathbb{E}[n_y] + \frac{1}{2} \right) + \Delta\omega_z \left( \mathbb{E}[n_z] + \frac{1}{2} \right) \right] T \quad (7.47)$$

Le calcul est fait section C.5 page 224 de l'annexe C, pour des atomes non condensés, dont les états externes  $\underline{n}$  suivent la statistique de Boltzmann. On a dans ce cas

$$\Delta\Phi^0 = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \frac{1 + \lambda_\alpha}{2(1 - \lambda_\alpha)} \Delta\omega_\alpha T$$

Les facteurs  $\lambda_\alpha$  valent ici

$$\lambda_\alpha = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_\alpha}{k_B\Theta}\right)$$

et  $\Theta$  est la température du nuage atomique. La perte de contraste est déterminée par la variance  $\sigma_{\Delta\Phi}^2$  de  $\Delta\Phi$  :

$$\sigma_{\Delta\Phi}^2 = \left( \Delta\omega_x^2 \sigma_{n_x}^2 + \Delta\omega_y^2 \sigma_{n_y}^2 + \Delta\omega_z^2 \sigma_{n_z}^2 \right) T^2 \quad (7.48)$$

avec pour la variance  $\sigma_{n_\alpha}^2$  de chaque variable  $n_\alpha$ ,  $\alpha \in (\{x, y, z\})$

$$\sigma_{n_\alpha}^2 = \frac{\lambda_\alpha}{(1 - \lambda_\alpha)^2} \quad (7.49)$$

Une dissymétrie entre les deux pièges vient donc à la fois introduire un biais et réduire le contraste de l'interféromètre. On pourrait espérer étalonner le biais, à condition que dissymétrie soit répétable. Cela suppose cependant que la température des atomes soit répétable également. Dans le cas où  $k_B\Theta \gg \hbar\omega_\alpha$ ,  $\mathbb{E}[n_\alpha] \approx \frac{k_B\Theta}{\hbar\omega_\alpha}$  donc

$$\Delta\Phi^0 \approx \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \frac{\Delta\omega_\alpha}{\omega_\alpha} \frac{k_B\Theta}{\hbar T^{-1}} \quad (7.50)$$

Le biais est ainsi proportionnel à la température. Par exemple pour une dissymétrie relative de  $10^{-3}$  sur un axe le biais correspond à une fréquence

$$\frac{\Delta\Phi^0 T^{-1}}{2\pi\Theta} \sim \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k_B}{h} \sim 100 \text{ MHz K}^{-1}$$

Une dissymétrie réduit de plus le contraste des interférences. Cela limite donc le temps de cohérence dans l'interféromètre. Dans le régime où  $k_B\Theta \gg \hbar\omega$  le temps de cohérence vaut ainsi, pour chacune des trois dimensions :

$$T_c \approx \frac{2\pi\hbar\omega}{k_B\Theta \Delta\omega} \quad (7.51)$$

La température vient donc limiter le temps dont on dispose pour l'interrogation, à partir du moment où les deux pièges ne sont pas parfaitement symétriques. Avec les paramètres précédents, pour une température de l'ordre du microkelvin on a ainsi

$$T_c \sim 40 \text{ ms}$$



### 7.4.7 Anharmonicité des pièges

On modélise enfin l'anharmonicité des pièges par l'ajout de termes  $\varepsilon_a^\alpha \hbar \omega_{a,\alpha} \left(\frac{m\omega_{a,\alpha}}{\hbar}\right)^{3/2} \alpha^3$  à  $\hat{H}_a$  et  $\varepsilon_b^\alpha \hbar \omega_{b,\alpha} \left(\frac{m\omega_{b,\alpha}}{\hbar}\right)^{3/2} \alpha^3$  à  $\hat{H}_b$  pour  $\alpha \in \{x, y, z\}$  et  $\varepsilon_a^\alpha, \varepsilon_b^\alpha \ll 1$  comme dans la référence [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997]. La référence [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1997] présente le développement perturbatif de l'oscillateur anharmonique. A l'ordre le plus bas les niveaux d'énergie sont décalés de quantités

$$\Delta E_{\underline{n}}^a = - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left[ \frac{15}{4} \left( n_\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] (\varepsilon_a^\alpha)^2 \hbar \omega_\alpha \quad (7.52)$$

$$\Delta E_{\underline{n}}^b = - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left[ \frac{15}{4} \left( n_\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] (\varepsilon_b^\alpha)^2 \hbar \omega_\alpha \quad (7.53)$$

d'où une perturbation de la phase

$$\Delta \Phi(\underline{n}) = - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left[ \frac{15}{4} \left( n_\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2] \omega_\alpha T \quad (7.54)$$

De nouveau la perturbation de phase dépend du niveau d'énergie dans le piège, ce qui conduit à la fois à une réduction de contraste et à un biais sur la mesure de phase. Le biais et la variance de phase sont calculés section C.5 page 224 de l'annexe C. On trouve

$$\Delta \Phi^0 = - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left[ \frac{15\lambda_\alpha}{2(1-\lambda_\alpha)^2} + \frac{11}{8} \right] [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2] \omega_\alpha T \quad (7.55)$$

$$\sigma_{\Delta \Phi}^2 = \frac{225}{16} \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \frac{4\lambda_\alpha(1+3\lambda_\alpha+\lambda_\alpha^2)}{(1-\lambda_\alpha)^4} [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2]^2 \omega_\alpha^2 T^2 \quad (7.56)$$

Dans le cas où  $k_B \Theta \gg \hbar \omega$  ces expressions se simplifient en

$$\Delta \Phi^0 \approx - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left[ \frac{15}{2} \left( \frac{k_B \Theta}{\hbar \omega_\alpha} \right)^2 + \frac{11}{8} \right] [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2] \omega_\alpha T \quad (7.57)$$

$$\sigma_{\Delta \Phi}^2 \approx \frac{1125}{4} \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left( \frac{k_B \Theta}{\hbar \omega_\alpha} \right)^4 [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2]^2 \omega_\alpha^2 T^2 \quad (7.58)$$

L'expression de  $\sigma_{\Delta \Phi}^2$  permet de calculer un nouveau temps de cohérence, associé au phénomène d'anharmonicité, toujours pour  $k_B \Theta \gg \hbar \omega$  :

$$T_c \approx 0,06 \left( \frac{\hbar \omega_\alpha}{k_B \Theta} \right)^2 \frac{2\pi}{|(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2| \omega_\alpha} \quad (7.59)$$

La simulation des potentiels liés à la géométrie de la puce et aux courants en jeu permettra d'estimer les paramètres  $\varepsilon_a^\alpha$  et  $\varepsilon_b^\alpha$  et d'en déduire un ordre de grandeur du biais et du temps de cohérence pour l'interféromètre expérimental.

### 7.4.8 Autres incertitudes

D'autres types d'incertitude sont à prévoir. La limite quantique vient ainsi limiter l'incertitude sur la phase à  $\sigma_\Phi \geq N^{-1/2}$  en l'absence de compression. Cette incertitude ne réduit cependant pas le contraste, puisqu'elle est indépendante de  $\underline{n}$ .

L'effet des interactions entre atomes pour ce type d'interféromètre n'a pas été étudié en détails pour l'instant dans notre projet. Une approximation de type *champ moyen* est en général utilisée pour estimer l'effet des interactions entre atomes non condensés, comme dans la référence [Rosenbusch, 2009] par exemple. Il n'est pas évident cependant que l'on puisse réduire les interactions à un déphasage et à une perte d'atomes dans le cas où les atomes sont séparés spatialement. Si chaque partie de la superposition voit exactement les mêmes collisions, on observera bien un déphasage, avec sans doute une certaine perte de contraste. Les déviations de ce modèle simple pourraient être rapides, et il faudra les quantifier correctement pour déterminer la limite de temps de cohérence causée par les collisions entre atomes dans l'interféromètre.

Il faut enfin mentionner les effets inertiels, c'est-à-dire le mouvement de l'interféromètre dans un référentiel galiléen. Lorsque le mouvement est lent devant les périodes du piège, les atomes suivent adiabatiquement le piège et d'après le principe d'équivalence l'accélération de la puce, et donc du double piège qui lui est rigidement lié, sera ressentie comme une fluctuation du champ de pesanteur. On s'attend à des effets plus subtils lorsque le mouvement des atomes est significativement influencé par les vibrations de la puce. Ce comportement est à mettre en regard de celui des gravimètres à atomes en chute libre. Pour ce type d'instrument en effet les vibrations du miroir de réflexion des faisceaux Raman viennent non seulement perturber la référence inertielle de l'instrument, mais également perturber l'interrogation à cause de l'effet Doppler sur les faisceaux [Graham *et al.*, 2012]. L'effet des vibrations est vraisemblablement différent pour un gravimètre à atomes piégés.



# Chapitre 8

## Réalisation technique

C'est dans la réalisation effective d'un principe de mesure que tout l'art de l'expérimentateur rentre en jeu. Si la description peut sembler courte, l'essentiel du travail de thèse se trouve là, dans la planification et la mise au point de l'expérience, et dans la résolution de chacune des difficultés techniques qui ne manquent pas de se présenter. Les pages qui décrivent ce travail sont souvent les plus usées d'un ouvrage car le travail minutieux de l'expérimentateur nécessite beaucoup de *benchmarking*... dans les thèses des autres!

On décrit dans ce chapitre l'ensemble des choix et réalisations technologiques qui ont été effectués, depuis le début du projet, y compris avant le début de la thèse. Les détails de la puce sont en cours de mise au point par d'autres membres de l'équipe, pour une fabrication et un assemblage prochains. La puce n'est donc pas décrite en détail dans ce chapitre. Quelques choix importants au sujet du type de puce à atomes sont cependant esquissés à la section 8.3.2 page 170. L'intérêt du substrat employé et certains tests qui confirment l'intérêt de ce choix sont de plus décrits au chapitre 9 page 191. Au cours de la thèse, la partie optique a été essentielle. J'ai contribué de façon significative à sa conception et à son montage, en collaboration avec les autres membres de l'équipe. J'ai également traité quelques questions d'électronique pour le dispositif de contrôle informatique de la séquence temporelle, ainsi que pour la mise au point et la mise en œuvre des obturateurs électromécaniques.

A la section 8.1 page 159 on décrit la démarche effectuée, qui consiste à réaliser plusieurs expériences successives, de complexité croissante, et on présente la séquence temporelle finale que l'on cherche à obtenir. A la section 8.2 page 162 on décrit sommairement chaque étape de la séquence temporelle, afin de déterminer les caractéristiques souhaitables pour chaque sous-système du démonstrateur. Il s'agit de tirer les conséquences pratiques des concepts théoriques maintenant bien passés dans l'état de l'art pour dimensionner chaque élément du démonstrateur. On renvoie le lecteur pour la compréhension approfondie des techniques aux références qui seront explicitées. On présente enfin l'ensemble du matériel sélectionné et la manière dont il est mis en œuvre à la section 8.3 page 169.

On utilise dans ce chapitre les notations définies à la section A.3 page 209 de l'annexe A.

### 8.1 Démarche de la mise au point

La démarche qui consiste à partir de zéro pour monter un démonstrateur de physique atomique est rendue possible par la collaboration fructueuse avec des experts universitaires

de l'interférométrie à ondes de matière et des puces à atomes, ainsi qu'avec des partenaires industriels spécialistes de la microfabrication. Un gros travail de bibliographie, notamment dans les thèses a été également indispensable pour mettre au point chaque aspect du démonstrateur.

### 8.1.1 De la première version à l'interféromètre

Pour acquérir du savoir-faire dans les expériences où la manipulation des atomes froids est centrale, on effectue une montée en puissance par étapes successives, qui doivent permettre de valider certains choix clés et de mieux appréhender le fonctionnement du dispositif global pour les choix suivants. L'expérience de gravimètre à atomes piégés doit se dérouler en principe en trois étapes, avec renouvellement et modification partiels du matériel à chaque transition.

#### Version préliminaire pour le piégeage magnéto-optique et le test de la puce transparente en carbure de silicium

Il a fallu au départ choisir quelques briques de base, imposées par les techniques fondamentales retenues qui ont été décrites au chapitre 6 page 121. Pour des raisons industrielles, la cellule à atomes commandée au départ n'a pas pu contenir de puce. En attendant le remplacement de cette cellule on a conçu et mis en place un système complet pour réaliser un piège magnéto-optique, ce qui a permis de commander et de tester une grande partie du matériel nécessaire par la suite, et d'acquérir un savoir-faire indispensable sur cette étape qui est maintenant à la base de la plupart des systèmes à atomes refroidis [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011, chapitre 14]. Un bénéfice a été de pouvoir tester l'intérêt du carbure de silicium comme substrat pour les puces à atomes, ce qui a donné lieu à une publication et est décrit au chapitre 9 page 191.

#### Deuxième version, avec une puce à atomes en silicium

Avant la production de notre puce à atomes avec les fonctions nécessaires pour l'interférométrie, on a commencé le montage avec une cellule commerciale contenant une puce qui doit permettre de piéger et refroidir un nuage d'atomes jusqu'à sa condensation. L'objectif est cette fois-ci de valider toutes les étapes de la séquence de mesure, à l'exclusion uniquement de la partie interférométrique. Le matériel doit être tout à fait prêt à l'arrivée de la nouvelle cellule contenant la puce opérationnelle pour faire un interféromètre grâce à cela. Au moment de la rédaction, on approche de la fin de ce deuxième jalon.

#### Etape finale

La troisième et dernière étape consiste à remplacer la cellule avec une puce commerciale par une nouvelle cellule, cette fois-ci équipée de la puce définitive. Les cellules sont censées avoir des géométries similaires, ce qui permettra on l'espère de garder une grande partie du montage optique au moment de la substitution. Il s'agira alors de mettre la nouvelle puce en service, de commencer les essais de séparation cohérente puis d'interférométrie, et enfin de commencer les mesures de pesantier.

Dans la description des technologies et des montages utilisés qui va suivre, on détaillera surtout l'étape actuelle et le projet d'étape finale, et l'on soulignera certaines évolutions ayant eu lieu entre la première et la deuxième version.

### 8.1.2 Séquence temporelle

Pour faire un interféromètre à atomes piégés sur puce, il faut déjà rassembler un nombre aussi important que possible d'atomes froids sur la puce. Cet objectif requiert plusieurs étapes intermédiaires, qui sont devenues très classiques et bien documentés, par exemple dans les références [Deutsch, 2012, Reichel et Vuletić, 2011, Lewandowski *et al.*, 2003, Metcalf et Van der Straten, 1999, Squires, 2008, Horikoshi, 2007]. En quelques mots décrivons dans l'ordre chronologique la séquence de l'interféromètre que l'on cherche à obtenir au final.

#### Piège magnéto-optique

La plupart des systèmes à atomes froids commencent par rassembler des atomes et les refroidir dans un piège magnéto-optique. Notre système comporte un piège magnéto-optique à deux dimensions (2D) avec faisceau pousseur pour charger le piège magnéto-optique tridimensionnel (3D). Cette technique permet de charger un grand nombre d'atomes dans le piège magnéto-optique 3D, tout en gardant un très bon niveau de vide à l'endroit où sont utilisés les atomes pour faire une mesure, d'où un temps d'interrogation dans l'interféromètre qui peut être étendu et résulte éventuellement en une sensibilité accrue pour le capteur.

#### Piège magnéto-optique comprimé

Le rôle du piège magnéto-optique comprimé est de préparer le piège magnétique en réduisant l'extension spatiale du nuage d'atomes, grâce aux mêmes forces que celles en jeu dans le piège magnéto-optique. Le gradient de champ magnétique et le désaccord entre les faisceaux et la transition de refroidissement sont augmentés au cours de cette étape, par rapport à l'étape précédente.

#### Mélasse optique

La mélasse optique consiste toujours à refroidir les atomes par laser, mais sans champ magnétique et en optimisant le mécanisme de refroidissement *sub-Doppler*, aussi appelé *refroidissement Sisyphé*. Cette phase dure seulement quelques millisecondes typiquement car les atomes ne sont pas piégés à ce moment-là.

#### Pompage optique

Seuls certains états internes des atomes peuvent être piégés dans un piège magnétique. Au cours du pompage optique on transfère grâce à des transitions excitées par laser tous les atomes dans le même état quantique interne piégeable magnétiquement, qui sera utilisé pour l'interféromètre. Tout comme la mélasse optique, le pompage optique doit être court pour éviter la diffusion et la chute des atomes, soit moins d'une milliseconde typiquement.

#### Piège magnétique initial

Le piège magnétique initial est au début de la partie *sombre* de la séquence, c'est-à-dire qu'à partir de ce moment les faisceaux lasers sont coupés pour garder le meilleur contrôle possible sur l'état interne des atomes. Le piège magnétique initial vient capturer le plus d'atomes possibles dans un piège magnétique à l'endroit où se

*trouvent les atomes* à l'issue des étapes précédentes de la séquence. C'est le préalable au transfert sur puce.

### Transfert sur puce

Pour placer les atomes à proximité de la puce on déplace le piège magnétique en réduisant progressivement le piège magnétique initial tout en mettant en route le piège magnétique de la puce.

### Refroidissement évaporatif

L'objectif du refroidissement évaporatif est de chasser du piège les atomes avec le plus d'énergie et de laisser le reste du nuage atteindre l'équilibre thermique pour abaisser la température globale du nuage. Si l'on souhaite obtenir un condensat de Bose-Einstein, le rythme de l'évaporation doit être soigneusement maîtrisé pour faire augmenter la densité d'atomes dans l'espace des phases malgré la diminution du nombre de particules.

### Interférométrie

L'interférométrie consiste à séparer les états atomiques de façon cohérente, à les laisser évoluer puis à les recombiner, dans des conditions aussi proches que possibles de celles décrites au chapitre 7, section 7.1 page 139.

### Détection

La détection consiste en une ou deux mesures de fluorescence ou d'absorption pour déterminer les états finaux des atomes à la fin de la séquence interférométrique, ce qui doit permettre d'en déduire une mesure du champ de pesanteur.

Au moment de la rédaction de cette thèse, toutes les étapes de piégeage et de refroidissement par laser sont maîtrisées, et l'on tâche de réaliser le pompage optique et le piégeage magnétique initial des atomes.

## 8.2 Cahier des charges pour chaque étape

On décrit ici avec un peu plus de détails chaque type de système, afin de dimensionner le matériel nécessaire. De nombreux détails pratiques se trouvent par exemple dans les références [Lewandowski *et al.*, 2003, Metcalf et Van der Straten, 1999, Steck, 2009] ainsi que dans les thèses du domaine.

### 8.2.1 Refroidissement laser

Les lasers servent au piège magnéto-optique (2D et 3D), au piège magnéto-optique compressé, à la mélasse optique, au pompage optique et à la détection. Pour le refroidissement par laser (pièges magnéto-optiques et mélasse optique) on a besoin de faire faire aux atomes des cycles d'absorption et d'émission spontanée. La polarisation circulaire des faisceaux crée une force de rappel dans le piège magnéto-optique. Dans une configuration de piège magnéto-optique utilisée par de nombreuses équipes, deux faisceaux contrapropageants ont la même polarisation circulaire *par rapport à leurs axes respectifs de propagation*. Le choix entre polarisation circulaire *droite* et polarisation circulaire *gauche* dépend de l'orientation du gradient de champ magnétique. Le plus simple est de tester expérimentalement les deux, quatre ou huit possibilités, suivant le nombre d'axes de refroidissement, les symétries du champ magnétique et la possibilité de distinguer axe lent et axe rapide dans les lames

quart d'onde utilisées. La polarisation circulaire des faisceaux joue également un rôle dans le refroidissement sub-Doppler que l'on cherche à optimiser notamment au cours de la phase de mélasse optique. La polarisation des faisceaux pour le piège magnéto-optique convient également pour la mélasse optique.

### Faisceaux lasers

Comme on l'a déjà souligné au chapitre 6, section 6.3 page 127, la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  est stable, c'est-à-dire que l'état  $|F' = 3\rangle$  ne peut pas retomber par émission spontanée vers un autre état que  $|F = 2\rangle$ . La chute vers l'état non résonant  $|F = 1\rangle$  peut quand même se produire en pratique, par couplage non résonant de  $|F = 2\rangle$  vers  $|F' = 2\rangle$ , suivi d'une émission spontanée vers  $|F = 1\rangle$ . Une légère excitation à résonance avec  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ ,  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  ou  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  permet d'éviter l'accumulation des atomes dans l'état non résonant  $|F = 1\rangle$  (voir la figure 8.1) [Lewandowski *et al.*, 2003]. Cette excitation est souvent appelée *faisceau repompeur*.

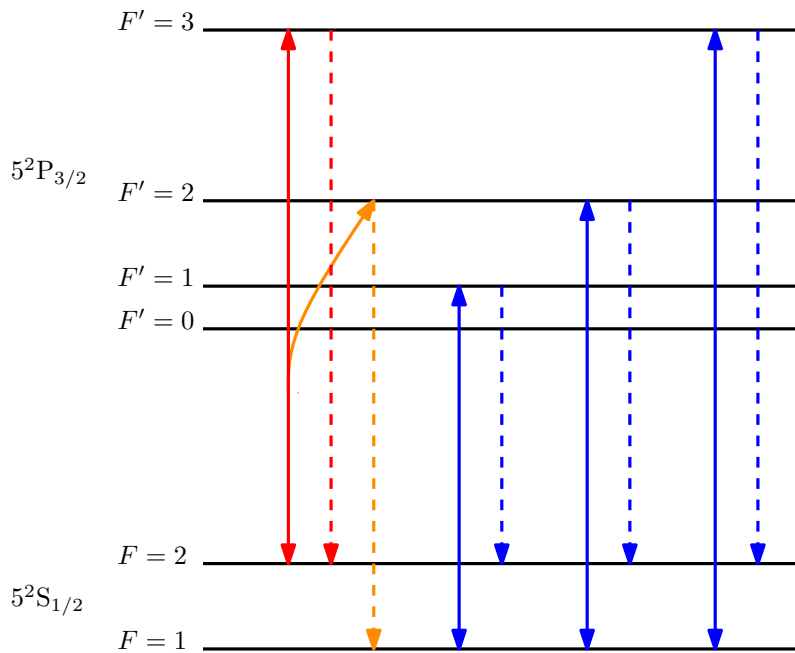


FIGURE 8.1: Spectroscopie de la raie  $D_2$ , et transitions importantes pour le refroidissement laser et le repompage. Les double flèches correspondent à des excitations par laser, les flèches en pointillés aux émissions spontanées possibles. En rouge : la transition de refroidissement. En orange : couplage non résonant et émission spontanée qui dépeuplent l'état  $|F = 2\rangle$ . En bleu : trois chemins qui permettent de repomper  $|F = 1\rangle$  vers  $|F = 2\rangle$ .

Le désaccord optimal des faisceaux par rapport à la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  n'est pas le même pour chaque étape, il s'écarte ainsi de plusieurs fois la largeur  $\Gamma$  de la raie  $D_2$  entre le piège magnéto-optique et la mélasse optique, soit quelques dizaines de mégahertz.

L'intensité des faisceaux de piégeage et de refroidissement doit être suffisamment élevée, afin de maximiser les forces de pression de radiation. L'intensité totalisée par *tous* les faisceaux de piégeage et de refroidissement peut donc par exemple être comprise entre



l'intensité de saturation  $I_{sat}$  et  $10I_{sat}$ , soit de quelques  $\text{mW cm}^{-2}$  à quelques dizaines de  $\text{mW cm}^{-2}$ . L'intensité du faisceau repompeur est réglée de sorte à optimiser expérimentalement la température du nuage et le nombre d'atomes. Cette intensité est en général réduite pour le piège compressé [Lewandowski *et al.*, 2003].

### Champ magnétique

Les forces de rappel dans le piège magnéto-optique proviennent du gradient de pression de radiation dû aux faisceaux refroidisseurs. Ce gradient provient lui-même du gradient de champ magnétique [Metcalf et Van der Straten, 1999]. On peut limiter la perte d'atomes au cours du transfert vers le piège magnétique lorsque le nuage à capturer a une extension spatiale incluse dans la zone de capture du piège magnétique. Plus le gradient de champ magnétique est fort dans le piège magnéto-optique, plus la force de rappel est intense à proximité du centre, donc moins le piège est étendu, ce qui peut donc permettre d'optimiser le nombre d'atomes que l'on parvient au final à capturer dans le piège magnétique à l'étape suivante [Lewandowski *et al.*, 2003].

A plus grande distance du centre du piège cependant, le champ magnétique rend les lasers moins résonants, donc seuls les atomes dans une plus faible gamme de vitesses sont piégés. Pour obtenir un ordre de grandeur de gradient de champ limite, on peut comparer la variation de désaccord Zeeman  $\delta_Z$  à travers le piège magnéto-optique à la largeur de raie  $\Gamma$ . Pour les faibles valeurs de module de champ magnétique  $B$ , d'après la référence [Steck, 2009]  $\delta_Z = (m_F/6 - 2/3) \mu_B B/h$  pour une transition  $\sigma^- |F = 2, m_F\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F - 1\rangle$  en prenant des valeurs fractionnaires approximatives pour les coefficients de Landé. On compare donc la variation de fréquence de Larmor  $\mu_B B/h$  à travers le piège à  $\Gamma$ . Pour un gradient  $B'$  sur une extension  $\Delta x$  on fixe par exemple comme critère

$$\frac{\mu_B \Delta x}{h} B' \lesssim 10 \Gamma$$

soit avec  $\Delta x \sim 1 \text{ cm}$  et  $\Gamma = 6 \text{ MHz}$

$$B' \lesssim 0,4 \text{ T m}^{-1}$$

Cette estimation est bien du même ordre de grandeur que la valeur typique de  $0,1 \text{ T m}^{-1}$  parfois citée dans les publications [Metcalf et Van der Straten, 1999].

On peut ajuster le gradient de champ magnétique au cours du temps. Dans la première partie du piégeage magnéto-optique ce gradient peut être plus faible, pour que la friction soit très largement prédominante dans le piège, et pour ralentir et piéger un grand nombre d'atomes dans le volume de capture. Un gradient plus fort pendant la phase de piège compressé permet de réduire le volume du nuage d'atomes. Enfin au contraire le champ magnétique au niveau des atomes est minimisé à l'aide d'un champ de biais de compensation au moment de la phase de mélasse optique, pour éviter que la mélasse ne soit poussée par les faisceaux [Lewandowski *et al.*, 2003].

### Remplissage du piège magnéto-optique

Le rôle initial du piège magnéto-optique est de rassembler le maximum d'atomes pour la suite de l'expérience, en un minimum de temps. Pour fixer les idées, on prend un modèle simple de chargement du piège, dans lequel les pertes dues aux collisions entre des atomes

du piège sont négligées [Haw *et al.*, 2012] :

$$\frac{dn}{dt} = \nu - n/\tau_v \quad (8.1)$$

où  $n$  est le nombre d'atomes dans le piège,  $\nu$  est le taux de chargement du piège et  $\tau_v$  le temps de vie des atomes dans le piège. Il s'agit d'optimiser le taux de chargement  $\nu$  et le nombre limite d'atomes  $\nu\tau_v$  dans le piège. Le taux de chargement dépend du volume de capture dans l'espace des phases et de la densité de rubidium dans le volume de capture. Le temps de vie est cependant réduit par les collisions entre atomes, et notamment entre les atomes du piège et ceux qui proviennent de l'extérieur du volume de capture. Le temps de vie est donc réduit par une densité importante d'atomes dans la cellule, qui semble cependant nécessaire pour augmenter le taux de chargement. Le piège magnéto-optique à deux dimensions avec faisceau pousseur est une réponse à ce paradoxe. Il nécessite une double cellule à vide différentiel. Dans la partie de moindre vide, un dispositif émet des atomes de rubidium, qui sont regroupés selon les deux dimensions horizontales par le piège magnéto-optique 2D. Ces atomes sont poussés verticalement par un faisceau pousseur à travers un petit trou vers la partie ultra-vide de la cellule, où ils doivent être capturés par le piège magnéto-optique 3D. Grâce à cela des atomes sont injectés directement dans le volume de capture du piège 3D, tout en préservant le vide poussé dans cette partie de la cellule. Les contraintes sur les faisceaux et le gradient de champ magnétique du piège 2D sont les mêmes que celles sur le piège 3D, mais en deux dimensions. Comme le confinement est bidimensionnel, le volume de capture peut être plus grand. Les faisceaux refroidisseurs du piège magnéto-optique 2D ont donc des puissances plus élevées que ceux du piège 3D, pour des intensités comparables. Expérimentalement la puissance et l'alignement des faisceaux de piège magnéto-optique 2D et du faisceau pousseur sont des paramètres assez sensibles pour maximiser le temps de chargement et le nombre d'atomes dans le piège 3D.

Le remplissage d'un piège magnéto-optique prend de quelques centaines de millisecondes à une dizaine de secondes, suivant ses caractéristiques et le nombre d'atomes dont on a besoin. Une courbe de chargement expérimentale est présentée figure 8.2. Les autres phases qui précèdent le transfert vers le piège magnétique seront optimisées expérimentalement. Les thèses du domaine font état de quelques dizaines de millisecondes pour le piège compressé et de quelques millisecondes de mélasse optique. Ces processus sont rapides, et il vaut mieux ne pas les prolonger pour éviter la chute des atomes.

### 8.2.2 Pompage optique

On souhaite pomper les atomes vers le niveau  $|a\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ . Ce résultat peut être obtenu en excitant les transitions  $\sigma^-$  de  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  [Horikoshi, 2007].

### 8.2.3 Détection

La détection peut se faire par absorption ou par fluorescence. Dans les deux cas on souhaite coupler chacun des états de l'interféromètre avec l'état excité. La transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  est de nouveau utile pour la détection, du fait de sa stabilité. Une discussion détaillée des différentes méthodes de détection est présentée par exemple dans la référence [Pappa *et al.*, 2011].

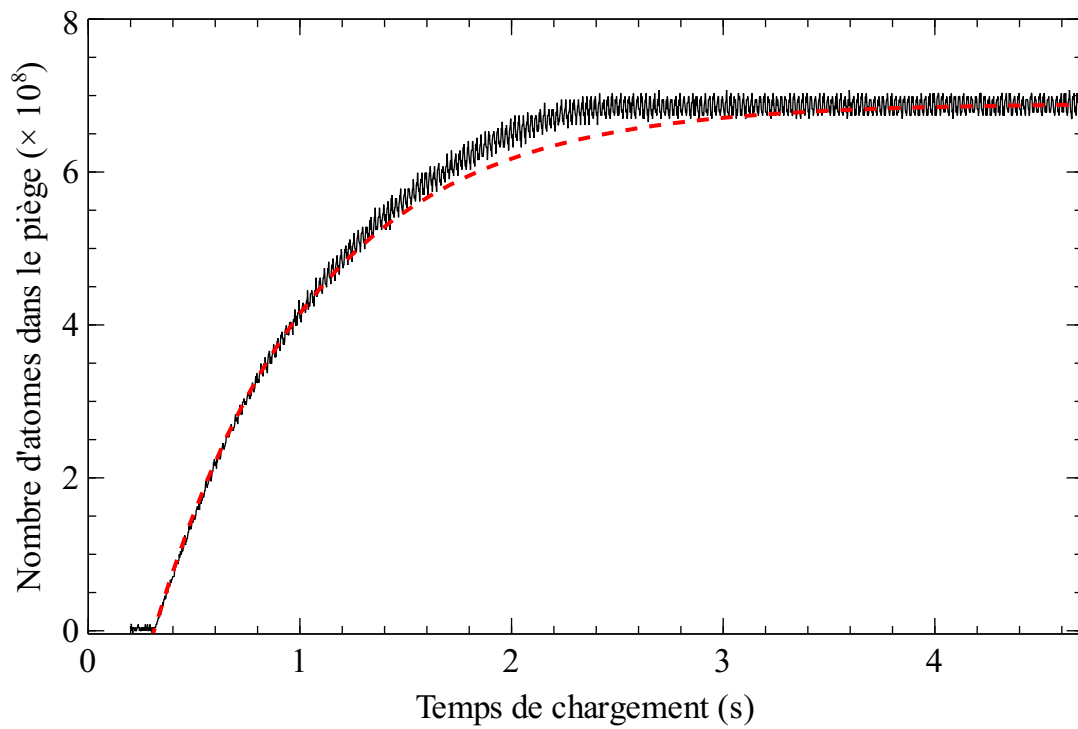


FIGURE 8.2: Courbe expérimentale de chargement du piège magnéto-optique, en noir, et courbe exponentielle ajustée (rouge, pointillés)  $N(t) = N_0(1 - e^{-t/\tau})$  avec  $N_0 = 6,9 \cdot 10^8$  et  $\tau = 0,75$  s. Les données expérimentales ont été prises avec l'aide de Matthieu Dupont-Nivet.

### 8.2.4 Contraintes sur les faisceaux laser

D'après les sections précédentes, tous les faisceaux dont on a besoin ont une longueur d'onde de 780 nm, pour être à résonance avec la raie  $D_2$  du rubidium 87. On a par ailleurs trois autres échelles de fréquences. Les faisceaux doivent illuminer sélectivement les transitions entre les différents niveaux de la structure hyperfine, de l'état fondamental  $|5^2S_{1/2}\rangle$  et de l'état excité  $|5^2P_{3/2}\rangle$ . La différence d'énergie entre  $|5^2S_{1/2}, F = 1\rangle$  et  $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle$  est de  $h \times (6,8 \text{ GHz})$  tandis que les différents niveaux de  $|5^2P_{3/2}\rangle$  représentent une extension de 496 MHz, avec des écarts de l'ordre de 100 MHz. On souhaite enfin être capable de régler l'accord des faisceaux sur les transitions de la raie  $D_2$ , à hauteur d'une dizaine de fois la largeur de raie  $\Gamma$ , qui vaut 6 MHz. La largeur de raie des faisceaux et leur stabilité en fréquence doit être petite devant  $\Gamma$ .

La taille des faisceaux est limitée par celle de la cellule à vide. Une taille maximale de faisceaux est utile pour capturer les atomes dans le piège magnéto-optique. C'est également pratique pour les autres phases de la séquence, notamment la détection, puisqu'il n'est pas nécessaire de réaligner les faisceaux pour éclairer le nuage d'atomes quelle que soit sa position, si ces faisceaux sont suffisamment larges.

Un mode gaussien n'est pas indispensable pour les différentes étapes de préparation des atomes et pour leur détection. Les faisceaux les plus larges sont néanmoins plus faciles à aligner s'il ont des profils gaussiens. Piéger les atomes avec un jeu de faisceaux gaussiens dans le piège magnéto-optique donne un paquet d'atomes plus rond, donc plus facile à attraper ensuite dans un piège magnétique en limitant les pertes.

### 8.2.5 Transfert et piégeage magnétique

Pour générer le champ magnétique qui forme un piège de Ioffé Pritchard on dissocie souvent la source utilisée pour créer un gradient de champ magnétique et celle qui sert à ajouter un champ de biais uniforme. Le champ de biais uniforme peut par exemple être généré par deux bobines en configuration de Helmholtz. Le gradient peut pour sa part provenir d'un circuit sur une puce à atomes, ou bien d'un circuit de taille plus importante [Treutlein, 2008].

Quand on commence le piégeage magnétique on souhaite superposer le piège magnétique le mieux possible au nuage atomique issu des étapes précédentes, afin de minimiser les pertes d'atomes au moment du chargement du piège magnétique. Dans le cas de notre expérience on veut ensuite utiliser le piège magnétique initial pour transporter le nuage d'atomes jusqu'à la puce, où les atomes seront refroidis par évaporation puis où l'on fera la séquence d'interférométrie. La géométrie et l'intensité du champ définissent la raideur du piège magnétique, et sa profondeur.

Au moment du refroidissement évaporatif, les atomes sont piégés dans le sous-état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ . L'évaporation sera effectuée par un champ radiofréquence de couplage entre  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 1, m_F = 0\rangle$ , ce dernier n'étant plus piégé magnétiquement. Le champ radiofréquence doit être accordé de telle sorte que seuls les atomes sur le bord du piège soient couplés. Les atomes éjectés sont ceux dont les états  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  sont séparés par effet Zeeman dans le piège magnétique d'une différence d'énergie correspondant à la fréquence des oscillations radiofréquences. Pour améliorer l'efficacité du refroidissement évaporatif, on peut décaler progressivement le champ radiofréquence, pour garder une proportion appréciable d'atomes qui soient à l'énergie

d'évaporation, malgré la baisse de température.

Notons enfin que la durée de vie des atomes dans le piège magnétique est en grande partie liée à la qualité du vide à l'endroit du nuage atomique.

### 8.2.6 Séquence d'interférométrie

Après le refroidissement évaporatif, et une fois les atomes piégés à proximité de la puce, on peut initier la séquence d'interférométrie avec les états  $|a\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|b\rangle = |F = 2, m_F = 1\rangle$  du fondamental  $|5^2S_{1/2}\rangle$ . Elle consiste, comme on l'a vu au chapitre 7, section 7.1, page 139, en

- une transition  $\pi/2$  entre  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$
- la séparation spatiale cohérente de  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$
- l'interrogation des atomes pendant un temps  $T$
- la recombinaison spatiale cohérente de  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$
- une nouvelle transition  $\pi/2$  pour faire interférer les deux chemins.

La séquence d'interférométrie détermine la conception de la puce. Les règles de sélection imposent de faire une transition à deux photons pour coupler les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  afin de mettre les atomes dans la superposition cohérente  $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ . On compte utiliser l'état intermédiaire  $|i\rangle = |F = 2, m_F = 0\rangle$ , comme dans la référence [Böhi *et al.*, 2009], ce qui nécessite une source micro-ondes à une fréquence  $f_{mo}$  et une source radiofréquence à  $f_{rf}$ , accordées de telle sorte que  $f_{mo} + f_{rf}$  corresponde à la transition  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  en tenant compte du décalage par effet Zeeman causé par le champ magnétique de piégeage. Les champs micro-onde et radiofréquence doivent avoir autant que possible une polarisation  $\sigma^+$  par rapport au champ magnétique statique à l'endroit où se trouvent les atomes, et être suffisamment désaccordés par rapport aux autres transitions entre les sous-états pour exciter seulement la transition visée. Il faut également que  $f_{rf}$  soit suffisamment désaccordé avec la transition  $|a\rangle \rightarrow |i\rangle$  pour éviter de peupler  $|i\rangle$  pendant l'excitation, c'est-à-dire pour que l'impulsion à deux photons corresponde en bonne approximation à une oscillation de Rabi entre  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ .

L'homogénéité de la transition est importante pour le contraste des franges d'interférence. Les fréquences, intensités, polarisations, et durées des impulsions micro-ondes et radio-fréquences doivent ainsi être suffisamment répétables.

La géométrie nécessaire pour faire la séparation spatiale cohérente des états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , leur interrogation et leur recombinaison cohérente est différente. Cette fois-ci au contraire l'inhomogénéité des champs magnétiques de piégeage (statique et oscillant) est souhaitée, afin que la séparation soit la plus grande possible. La stabilité des champs est aussi importante que pour la manipulation des états atomiques internes, pour les objectifs de métrologie.

Les champs magnétiques statiques et radiofréquences peuvent être générés sur une puce grâce à des fils conducteurs quelconques, pourvu que leur conception permette de supporter les courants en jeu sans claquer. Des aimants permanents ont par ailleurs été utilisés par d'autres équipes pour le piégeage d'atomes à proximité d'une puce [Fernholz *et al.*, 2008]. L'utilisation de courants portés par des fils supraconducteurs est envisageable

également [Nirrengarten *et al.*, 2006]. Des guides d'onde coplanaires sont utilisés sur la puce pour transporter les courants micro-ondes et émettre les champs micro-ondes, car la longueur d'onde des champs utilisés vaut 4,4 cm, ce qui est comparable à la taille de la puce.

## 8.3 Mise en œuvre

On a explicité à la section précédente les contraintes imposées par chaque étape de manipulation des atomes sur les composants du système. On décrit ici la solution retenue, et déjà partiellement mise en œuvre pour réaliser le démonstrateur.

### 8.3.1 Source d'atomes et chambre à vide

On a choisi d'utiliser une cellule à vide de type RuBECi représentée figure 8.3, commercialisée par la société ColdQuanta. La cellule est vendue avec plusieurs dispositifs qui facilitent la réalisation de démonstrateurs à atomes froids. Le passage d'une étape à la suivante du démonstrateur, ce que l'on a mentionné à la section 8.1 page 159, correspond notamment au changement de cellule à vide.

Toutes les cellules à vide que l'on utilise comprennent deux chambres, pour former un vide différentiel avec en haut la partie ultra-vide, et en bas un distributeur de rubidium (*dispenser* en anglais). Le passage du courant dans le distributeur de rubidium produit d'après le constructeur une vapeur de rubidium composée de 72% de rubidium 85 et de 28% de rubidium 87. La partie ultra-vide est connectée à une pompe ionique 2 L/s. Une pompe ionique est supposée suffisante pour la durée de vie de la cellule, car la cellule est vendue pré-pompée et scellée, et n'est pas conçue pour être ouverte après sa mise en service.

Les cellules de chaque étape de notre projet ont quatre aimants permanents autour de leurs parties basses, pour former un gradient bidimensionnel de champ magnétique, pour le piège magnéto-optique à deux dimensions. La documentation de ColdQuanta spécifie que le gradient créé par les aimants permanents doit être compris entre  $0,32 \text{ T m}^{-1}$  et  $0,38 \text{ T m}^{-1}$  au centre de l'attelage.

Trois paires de bobines entourent enfin la partie haute. On peut former un gradient de champ magnétique pour le piège magnéto-optique tridimensionnel avec une paire de bobines parcourues par des courants opposés. Au centre d'une paire verticale de bobines, on a d'après les calculs et les mesures de Christine Guerlin un gradient de  $1,4 \cdot 10^{-3} \text{ T m}^{-1}$  pour un courant d'un ampère. L'ensemble des bobines peut également fixer un champ de biais, qui sert à annuler le champ magnétique local pour la mélasse optique, à fixer un axe de polarisation pour le pompage optique, ou qui est nécessaire enfin à la réalisation d'un piège magnétique.

La première cellule utilisée ne comportait pas de puce à atomes. On s'est servi de la disponibilité de la paroi supérieure de la cellule haute pour y placer un échantillon de carbure de silicium afin de démontrer la possibilité d'utiliser l'accès optique à travers une puce transparente en carbure de silicium pour les applications de physique atomique. Les résultats de cette expérimentation ont été publiés [Huet *et al.*, 2012] et sont présentés au chapitre 9 page 191. Dans la deuxième version une puce à atomes en silicium forme la paroi supérieure de la cellule à vide. La puce est conçue pour pouvoir piéger magnétiquement les

atomes déjà refroidis par laser, et permettre de faire un refroidissement évaporatif jusqu'à la condensation de Bose-Einstein du nuage. La troisième version de l'expérience doit utiliser le même type de cellule, mais dans laquelle la puce commerciale aura été remplacée par une puce en carbure de silicium conçue pour faire de l'interférométrie atomique.

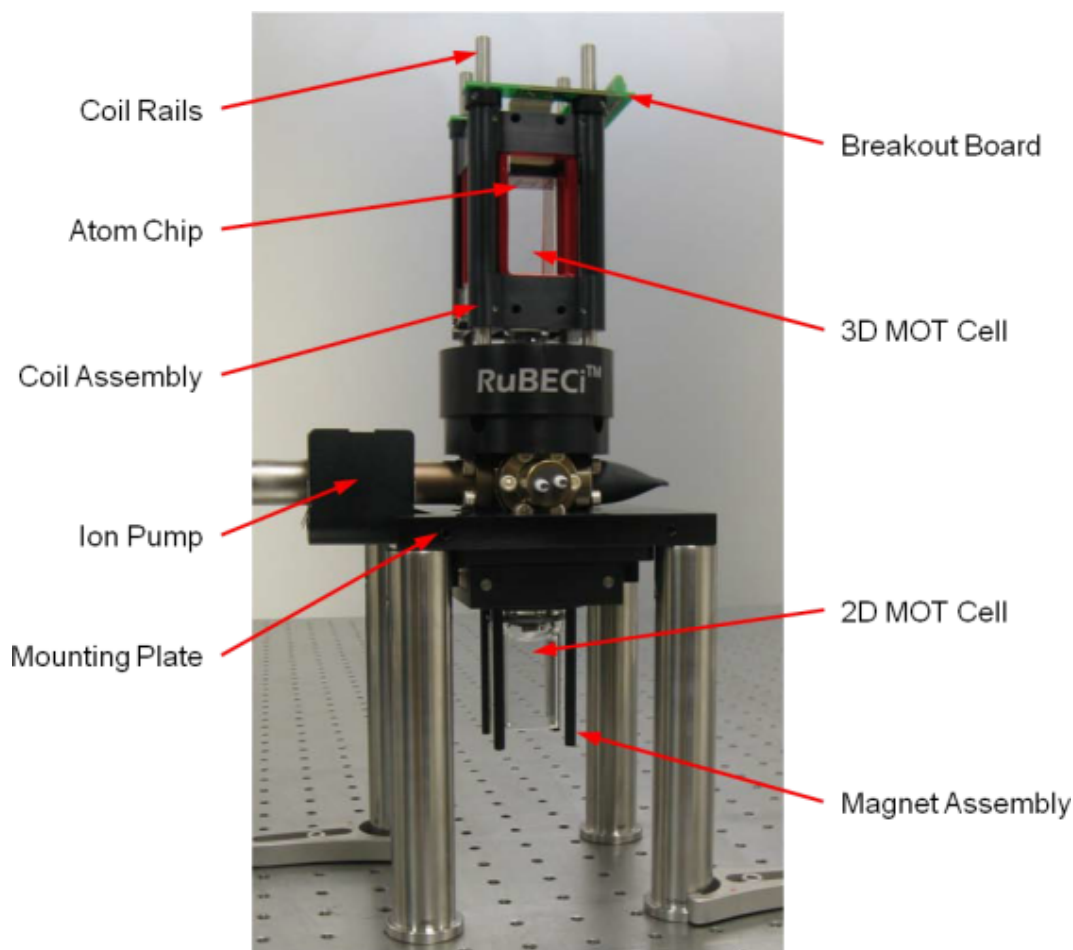


FIGURE 8.3: Cellule à vide RuBECi (image ColdQuanta). Une puce à atomes mise au point par ColdQuanta se trouve sur la cellule montrée ici, ce qui correspond à la deuxième version du montage (voir la section 8.1.1 page 160). Le dispositif a une hauteur totale de 36 cm environ.

### 8.3.2 Dispositifs de manipulation magnétique

Plusieurs dispositifs magnétiques destinés à manipuler les atomes sont placés autour de la cellule à vide. On a déjà mentionné à la section 8.3.1 page 169 les aimants permanents du piège magnéto-optique bidimensionnel autour de la cellule du bas, ainsi que les bobines autour de la partie supérieure, qui servent d'abord à la formation d'un gradient magnétique pour le piège magnéto-optique tridimensionnel, puis à l'établissement d'un champ de biais pour les étapes suivantes. Un autre élément important est le *fil en Z macroscopique*, un conducteur de quelques centimètres, en forme de Z. Le fil en Z comporte 36 brins de cuivre qui doivent transporter chacun de dix à vingt ampères de courant pour créer un piège



de Ioffé-Pritchard au niveau du nuage d'atomes après la phase de pompage optique. Il s'agit de transporter les atomes depuis l'endroit où a lieu la manipulation optique vers la puce à atomes. La monture du fil en Z comporte également une boucle de courant pour la génération du champ radiofréquence de refroidissement évaporatif. L'ensemble est représenté figure 8.4.

D'après ColdQuanta il est possible de former un piège magnétique à 17 mm du fil en Z, avec une profondeur de 2 mT, ce qui correspond à une température de 440  $\mu\text{K}$  pour l'état  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ .

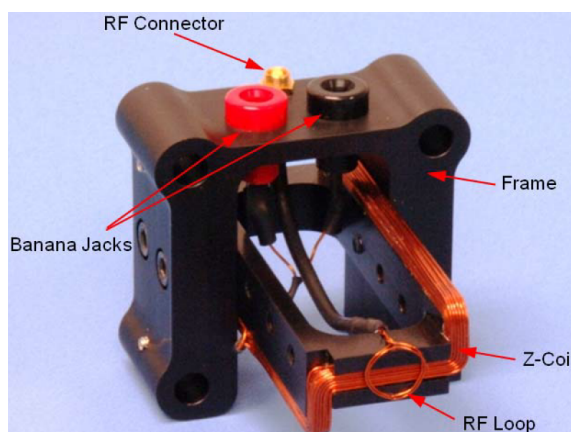


FIGURE 8.4: Fil en Z macroscopique et antenne radiofréquence. Image ColdQuanta.

Les bobines qui créent le gradient de champ magnétique du piège et le champ de biais par la suite sont alimentées par des amplificateurs bipolaires Kepco KE-BOP-36-6M avec option *charge selfique*. Ces amplificateurs, choisis pour leur compromis entre bande passante et réjection de bruit qui correspond à notre besoin, sont utilisés en mode source de courant, et contrôlés par des tensions délivrées par le dispositif de contrôle qui sera présenté à la section 8.3.6 page 185. Le fil en Z est alimenté de la même manière par un amplificateur bipolaire Kepco KE-ATE-55-20DM.

La première et la seconde version du démonstrateur comportent des puces de test, qui ne permettent pas de faire un interféromètre, mais qui servent à mieux maîtriser cette technologie. La première cellule ne comportait pas de puce intégrée. On avait à ce moment-là plusieurs prototypes de puces en carbure de silicium comme sur la figure 8.5a, produits d'essais de fabrication. Les essais effectués avec ces puces sont décrits au chapitre 9 page 191. La cellule de la seconde version du démonstrateur comporte une puce à atomes similaire à celle représentée figure 8.5b.

### 8.3.3 Manipulation magnéto-optique des atomes

On utilise des faisceaux au niveau de la chambre basse et à celui de la chambre haute pour manipuler les atomes. L'optomécanique est placée sur deux étages. L'étage du haut est au niveau de la chambre ultra-vide. Il est constitué par une plaque de  $60 \times 60 \text{ cm}^2$ , sur quatre pieds, avec un trou circulaire pour laisser passer la cellule.





(a) Puce en carbure de silicium utilisée lors de la première étape de la démarche expérimentale. La pièce de monnaie donne l'échelle.

(b) Pucés en silicium similaires à celle montée sur la deuxième cellule.

FIGURE 8.5: Pucés à atomes. Les pucés en silicium et en carbure de silicium font chacune 15 mm de côté.

### Faisceaux de manipulation

Plusieurs types de faisceaux arrivent à proximité de la cellule. L'utilité de ces faisceaux est décrite à la section 8.2 page 162. Les positionnements en fréquence des faisceaux sont résumés sur la figure 8.6 page 173.

La plupart des faisceaux servent au refroidissement laser, que ce soit dans les pièges magnéto-optiques bidimensionnel et tridimensionnel, le piège magnéto-optique compressé ou la mélasse optique. Le faisceau pousseur rentre également dans cette catégorie car il sert aussi à manipuler les atomes grâce à la pression de radiation du faisceau. Ces faisceaux, que l'on appelle abusivement par la suite *faisceaux de piégeage*, sont le mélange d'un faisceau *refroidisseur*, accordé sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ , et d'un faisceau *repompeur* accordé sur la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ . La polarisation du repompeur a peu d'importance, tant qu'elle permet de repomper chaque sous-état de  $|F = 1\rangle$ . A l'exception du faisceau pousseur, chaque faisceau refroidisseur doit avoir une polarisation circulaire bien définie par rapport à son axe de propagation, identique à celle du faisceau qui se propage en sens opposé. Les orientations exactes des polarisations de chacune des deux ou trois paires de faisceaux sont déterminées empiriquement en pratique, même si on peut en principe les déduire de la connaissance du gradient de champ magnétique [Lewandowski *et al.*, 2003]. Le processus de refroidissement nécessite, pour notre configuration, que le faisceau refroidisseur soit désaccordé vers le rouge. On prévoit en pratique un désaccord de trois fois la largeur de raie pour le piège magnéto-optique et de dix fois la largeur de raie pour la mélasse optique.

Les autres faisceaux servent au pompage optique et à la détection des atomes. On utilise un faisceau *pompage 1* accordé sur la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$  et un faisceau *pompage 2* sur  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  pour le pompage optique. Le faisceau *pompage 1* a une polarisation circulaire  $\sigma^-$  par rapport au champ magnétique vu par les atomes. La polarisation du faisceau *pompage 2* peut être soit  $\sigma^-$  également, soit linéaire. Le *faisceau de détection* est accordé sur  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ .

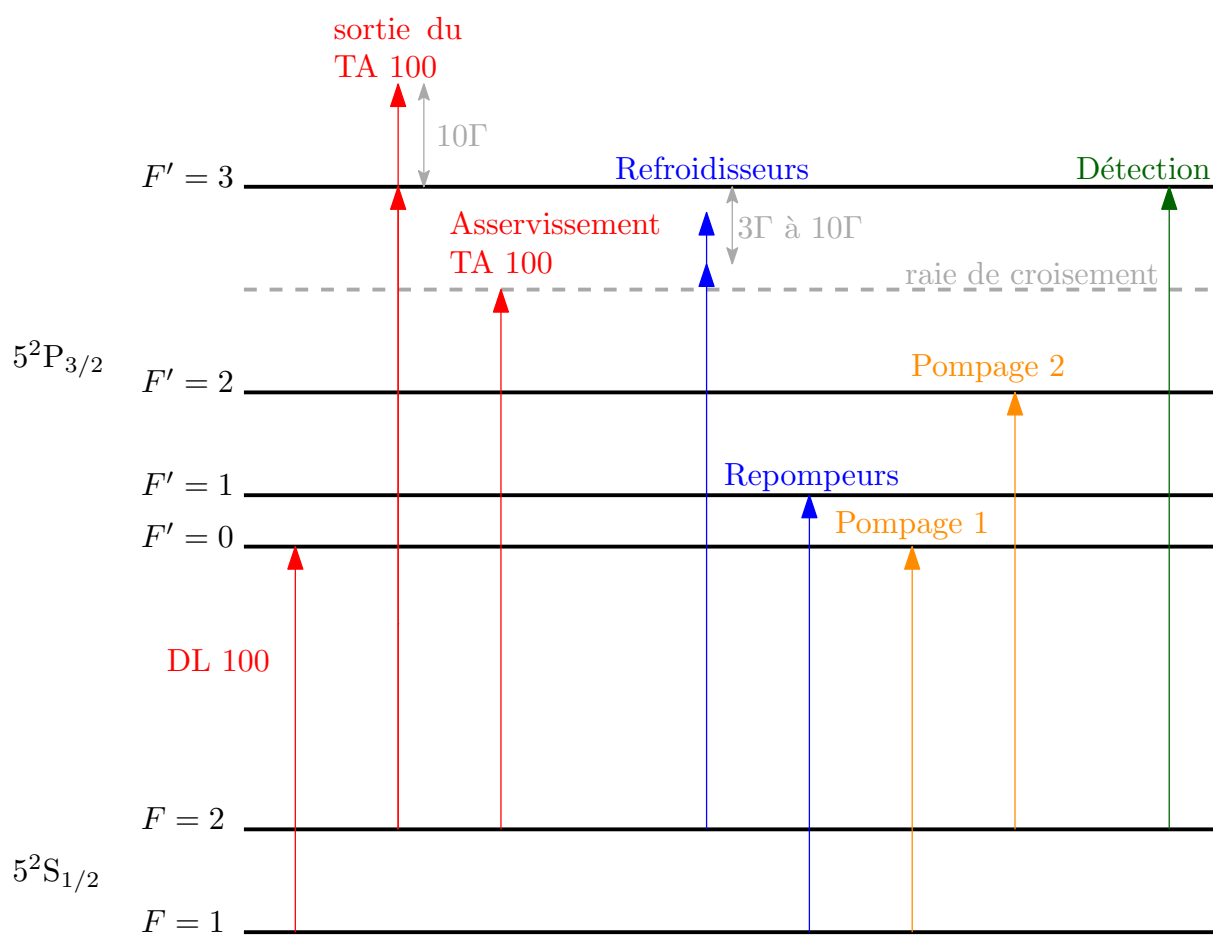


FIGURE 8.6: Schéma des différents accords des faisceaux utilisés. Les échelles de fréquence ne sont pas respectées.

### Montage de piège magnéto-optique 2D et de faisceau pousseur

L'étage du bas est représenté sur la figure 8.7. Sur cette partie de la table optique, le rôle des optiques est de créer un piège magnéto-optique à deux dimensions, un faisceau pousseur, et un dispositif d'alignement du faisceau pousseur. Le télescope en bas du schéma est constitué de deux lentilles cylindriques, de sorte que le faisceau du piège magnéto-optique bidimensionnel est allongé verticalement, afin d'éclairer la chambre basse de la cellule sur toute sa hauteur (4 cm). Les faisceaux de piégeage magnéto-optique sont en configuration rétro-réfléchi. Une grande partie de la puissance du faisceau incident est ainsi récupérée, ce qui est particulièrement utile dans le piège magnéto-optique 2D en raison de la taille des faisceaux. La partie grisée du schéma correspond aux optiques du faisceau pousseur et de la caméra d'alignement, qui sont sur un plan inférieur à celles du piège magnéto-optique 2D. Le faisceau pousseur est réfléchi par deux miroirs jusqu'au bas de la cellule, où un troisième miroir le dirige vers le haut. Un cube polariseur permet à la caméra d'observer par en-dessous la fluorescence du nuage d'atomes du piège magnéto-optique bidimensionnel, ainsi que l'image de l'ouverture qui relie les deux chambres de la cellule à vide. La caméra facilite grâce à cela le bon réglage des miroirs du piège magnéto-optique 2D et ceux du faisceau pousseur.

### Montage autour de la partie ultra-vide de la cellule

Les optiques utilisées autour de la chambre ultra-vide du démonstrateur sont représentées figure 8.8 page 176. Elles comportent trois collimateurs pour le refroidissement laser tridimensionnel, et les lames d'onde et miroirs qui les accompagnent. Un autre collimateur sert à amener les deux faisceaux pour le pompage optique ainsi que le faisceau de détection. Une caméra infrarouge de modèle Point Grey Research FL2-08S2M est placée en face du faisceau de détection, de l'autre côté de la cellule. Il est prévu de remplacer à terme cette caméra par un modèle Andor iKon-M, au même endroit ou bien à un des emplacements alternatifs indiqués sur la figure 8.8a. Enfin une photodiode Thorlabs PDA36A-EC avec un objectif permet d'estimer le nombre d'atomes dans le piège magnéto-optique.

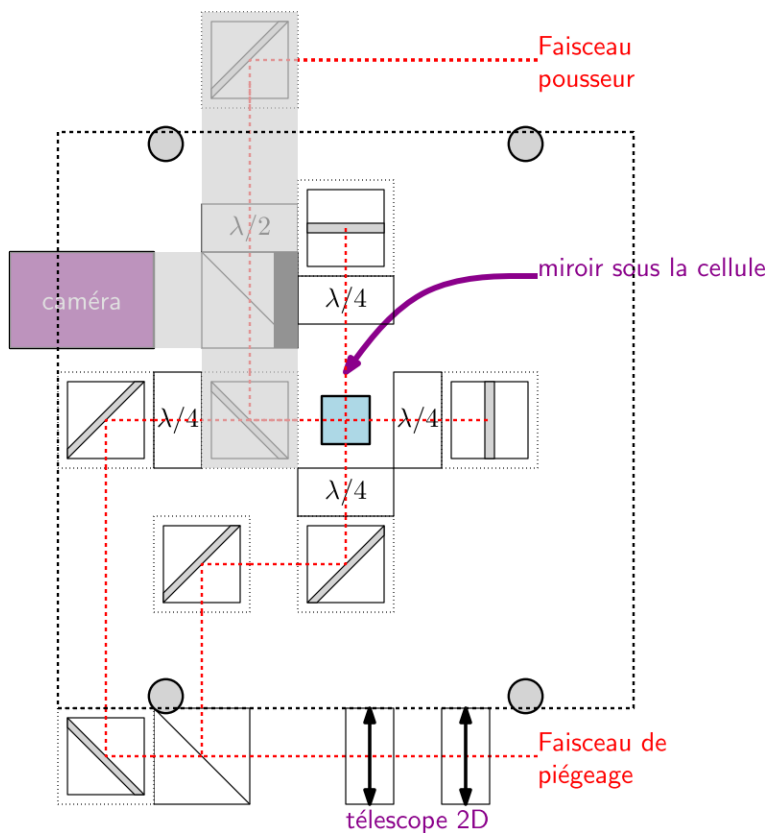
### 8.3.4 Elements du montage optique

On décrit ici les éléments principaux du montage optique qui permet de produire les faisceaux utilisés pour manipuler et détecter les atomes.

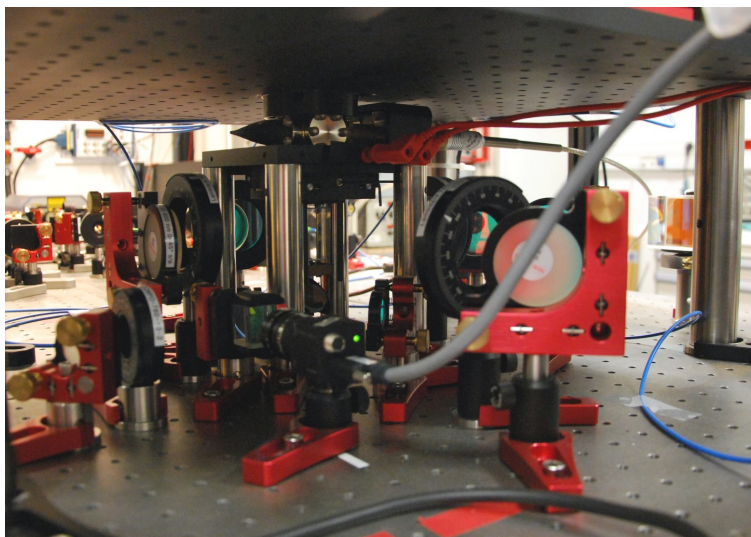
#### Modulateurs acousto-optiques

Un modulateur acousto-optique est un matériau optique excité électro-mécaniquement. Un faisceau lumineux est diffracté par le réseau d'indice formé par les contraintes dans le matériau, liées à l'onde acoustique. Les faisceaux diffractés sont décalés d'une fréquence  $m\nu$  et déviés d'un angle  $m\theta$  où  $m$  est l'ordre de la diffraction,  $\nu$  la fréquence de l'onde acoustique et  $\theta$  dépend de  $\nu$  [McCarron, 2007, Donley *et al.*, 2005]. En pratique on utilise les ordres  $-1$ ,  $0$  et  $1$  dans notre montage, et il est possible de choisir l'orientation du modulateur acousto-optique par rapport au faisceau incident afin de privilégier un de ces ordres.

Dans notre montage les modulateurs acousto-optiques servent à décaler la fréquence des faisceaux, ce qui permet par exemple d'exciter plusieurs transitions électroniques voisines

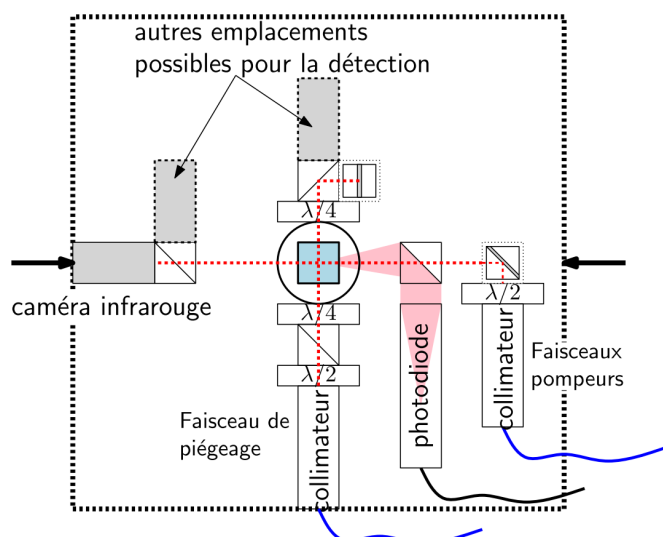


(a) Schéma optique du bas de la table optique. L'étage est indiqué en pointillés, et les pieds en disques gris.

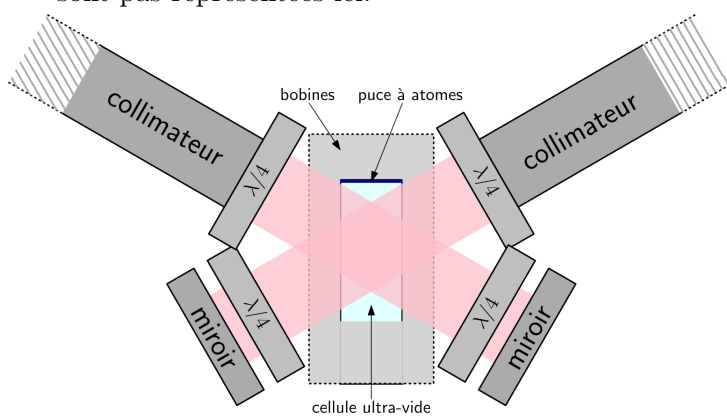


(b) Bas du montage optique sur la table optique. L'emplacement de la caméra au premier plan indique l'orientation de la prise de vue.

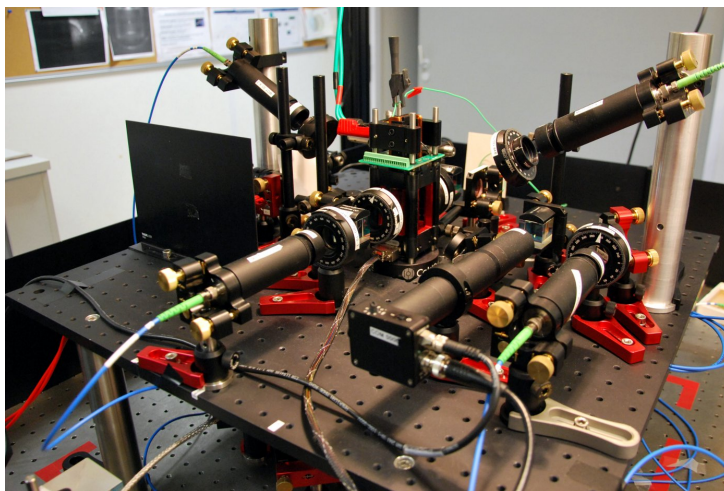
FIGURE 8.7



(a) Vue de dessus. Les flèches indiquent le plan de coupe de la figure **b**. Les optiques de la figure **b** ne sont pas représentées ici.



(b) Faisceaux de piégeage croisés dans le plan vertical. Les collimateurs sont plus écartés en réalité.



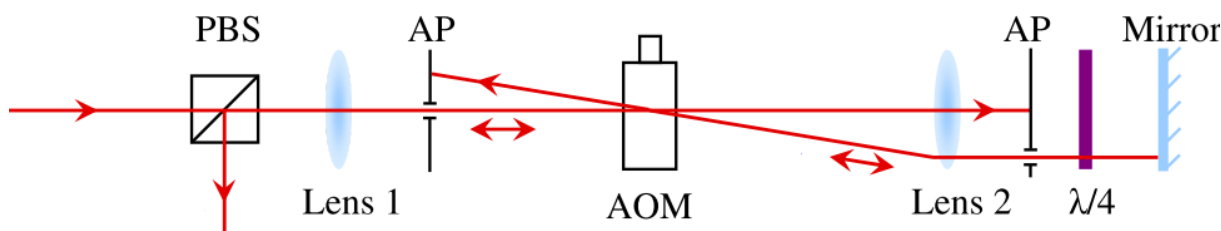
(c) Montage sur la table optique.

FIGURE 8.8: Schéma et photographie de l'étage de table optique. Les tailles et les angles sont approximatifs sur les schémas.

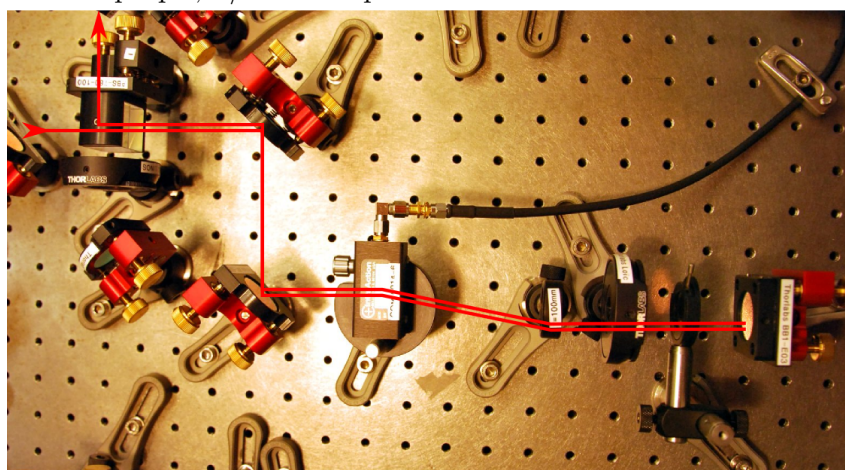


avec une seule source laser. Ils servent également à moduler la puissance des faisceaux ou à les couper. En effet l'équilibre entre l'ordre  $m = \pm 1$  de diffraction utilisé suivant les réglages et l'ordre 0 dépend notamment de l'amplitude d'excitation du modulateur acousto-optique. La coupure de l'excitation mécanique dans le matériau vient arrêter la diffraction en une fraction de microseconde d'après les données techniques de notre matériel [AOM, g, AOM, e, AOM, d, AOM, b, AOM, a, AOM, c, AOM, f].

La dépendance de l'angle de diffraction avec la fréquence de modulation d'un modulateur acousto-optique empêche le réglage dynamique du décalage en fréquence. Pour contourner cet inconvénient on réalise à plusieurs endroits du montage des configurations *double passage* avec des modulateurs acousto-optiques, dans lesquels le faisceau fait un aller et un retour dans le modulateur acousto-optique, au foyer d'une lentille. L'angle à la sortie du montage devient pratiquement indépendant du décalage de fréquence. Un avantage annexe est de pouvoir doubler le décalage en fréquence atteignable avec un seul modulateur. En revanche l'efficacité diminue. Il est ainsi délicat de garder plus de 70% du faisceau incident avec notre matériel, et cette efficacité diminue lorsque l'on s'éloigne de la fréquence à laquelle le montage a été optimisé. Cette méthode est décrite en détail dans les références [McCarron, 2007, Donley *et al.*, 2005]. Le montage est reproduit figure 8.9.



(a) Schéma du montage double passage avec un modulateur acousto-optique (image adaptée de la référence [McCarron, 2007]). Légende : PBS : cube polariseur, AP : diaphragme, AOM : modulateur acousto-optique,  $\lambda/4$  : lame quart d'onde.



(b) Montage double passage sur la table optique. Le câble d'alimentation permet de reconnaître le modulateur acousto-optique sur l'image.

FIGURE 8.9: Schéma de principe et réalisation d'un modulateur acousto-optique monté en double passage.

Notre démonstrateur utilise des modulateurs acousto-optiques de la marque IntraAc-

tion, dont les modèles et les fréquences sont résumés tableau 8.1. Deux modulateurs

Modèle	Fréquence centrale (MHz)	Fréquence minimale (MHz)	Fréquence maximale (MHz)
ATM-2002DA2B	200	150	250
ATM-1502DA2B	150	113	187
ATM-901A2	90	68	112
ATM-802DA2B	80	60	100

TABLEAU 8.1: Données constructeur pour les trois modèles de modulateurs acousto-optiques du montage. Le constructeur indique qu'il est possible de diffracter jusqu'à 85% du signal dans un ordre  $m = \pm 1$  lorsque les conditions sont optimales.

acousto-optiques sont alimentés par des synthétiseurs radiofréquence IntraAction AO Deflector / Shifter Driver. Les trois autres modulateurs acousto-optiques sont alimentés par des oscillateurs contrôlés en tension Mini-Circuits ZOS-300 et ZOS-200+, branchés sur des atténuateurs contrôlés en tension Mini-Circuits ZMAS-1, puis amplifiés par des amplificateurs Mini-Circuits ZHL-1-2W.

## Lasers

Le système laser constitue un élément important dans une expérience de physique atomique, à cause des contraintes de largeur spectrale et de stabilité requises. On a choisi une solution commerciale, représentée figure 8.10 page 180.

On a deux sources laser à 780,2 nm, toutes les deux de la marque Toptica. La première est une diode laser à cavité étendue de modèle DL 100. La seconde est un laser TA 100 à diode à cavité étendue DL Pro, avec un amplificateur. Chaque source comprend un isolateur optique ainsi que des optiques de collimation. Les tests du constructeur sont résumés dans le tableau 8.2.

Caractéristique	DL 100	TA 100
Longueur d'onde minimale (nm)	776,4	767,5
Longueur d'onde maximale (nm)	788,5	797,9
Puissance maximale à 780 nm (avant l'isolateur) (mW)	125	1036
Puissance typique à 780 nm (après l'isolateur) (mW)	103	880

TABLEAU 8.2: Données de Toptica sur chacune des deux sources lasers utilisées dans le démonstrateur.

Le dispositif d'asservissement en fréquence comprend pour chaque laser une cellule à absorption saturée au rubidium Toptica CoSy avec connecteur à fibre optique. Une cellule CoSy envoie un signal à un dispositif d'asservissement de modèle Toptica Digilock 110 après mise en forme du signal de la photodiode par un contrôleur. La mise en forme vient d'une part soustraire le fond Doppler dans la cellule CoSy, et d'autre part normaliser le signal pour le rendre relativement indépendant de la puissance du faisceau d'asservissement. Le Digilock 110 implémente une boucle d'asservissement sur circuit **Field-Programmable**

**Gate Array - Circuit logique programmable (FPGA).** Le point d'asservissement et les paramètres de la boucle d'asservissement sont réglés depuis un ordinateur. On peut grâce à ce système asservir la fréquence de chaque laser sur n'importe quel pic du spectre d'absorption saturée.

Dans notre montage on utilise une source pour exciter les transitions  $|F = 1\rangle \rightarrow |F'\rangle$  et une autre pour les transitions  $|F = 2\rangle \rightarrow |F'\rangle$ . Les modulateurs acousto-optiques permettent en effet de décaler la fréquence d'un faisceau de quelques centaines de mégahertz. Avec une seule source de largeur spectrale inférieure à 1 MHz, on atteint de façon sélective plusieurs raies d'absorption du rubidium 87, qui correspondent à différents niveaux de la structure hyperfine de  $|5^2P_{3/2}\rangle$ . Les 6,8 GHz qui séparent  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$  interdisent en revanche l'utilisation de nos modulateurs acousto-optiques pour exciter les deux ensembles de raies avec une seule source, d'où l'emploi d'une source laser pour chacun de ces ensembles.

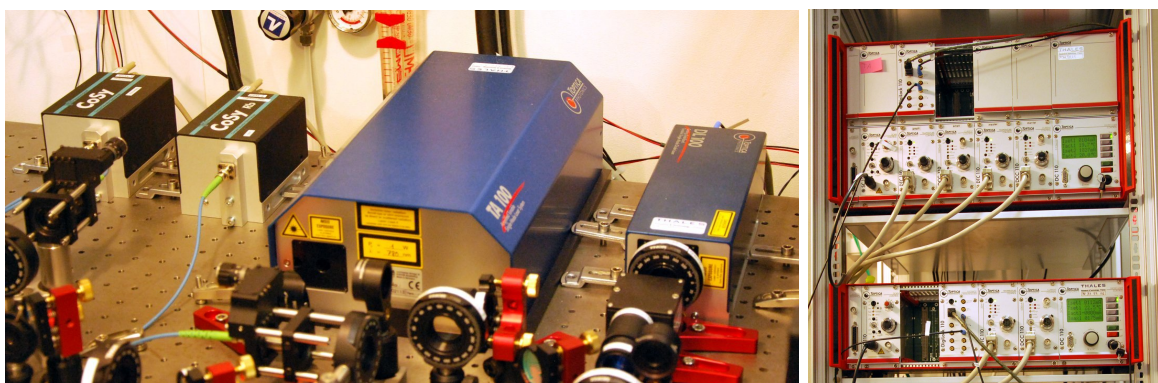
Pour l'asservissement de la source amplifiée TA 100, on prélève une partie du faisceau, dont on décale la fréquence de  $\Delta f$ , compris entre  $-273,5$  MHz et  $-333,5$  MHz, grâce à un modulateur acousto-optique monté en double passage (voir la section 8.3.4 page 177). Le faisceau est alors injecté vers le dispositif d'absorption saturée qui sert à la rétroaction de la boucle d'asservissement. Ce signal est asservi sur le pic d'absorption qui correspond au croisement des transitions  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  et  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . Le faisceau de manipulation est donc au final asservi à une fréquence  $-\Delta f$  au-dessus de ce pic. Ce système d'asservissement donne la possibilité d'accorder dynamiquement la source amplifiée en fréquence, ce qui est utile pour les faisceaux de refroidissement laser, tout en économisant une part de la puissance du laser, étant donné que les pertes dues au décalage en fréquence affectent seulement la petite partie du faisceau qui sert à l'asservissement. On peut du coup faire l'asservissement sur la raie de croisement entre  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  et  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  dans l'absorption saturée, qui est la plus grande du spectre environnant, d'où un rapport signal à bruit optimisé pour l'asservissement. Dans le montage le modulateur acousto-optique a une fréquence centrale de 150 MHz. L'accordabilité est limitée par l'efficacité du montage double passage pour le modulateur acousto-optique, par l'injection dans la fibre optique qui mène à la cellule de spectroscopie, par la dynamique de la photodiode et de l'électronique de spectroscopie, et au bout du compte par le dispositif d'asservissement. La gamme d'accordabilité est en pratique de 60 MHz environ, soit dix fois la largeur de raie de la transition utilisée pour le refroidissement.

La source non amplifiée DL 100 est asservie quant à elle sur la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 0\rangle$ . Le faisceau émis par cette source est décalé de  $+72$  MHz pour être à résonance avec la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ . Cette transition est utilisée pour le repompage des atomes dans le piège magnéto-optique et pour le pompage optique. Beaucoup moins d'intensité est nécessaire pour réaliser ces fonctions que pour le refroidissement, d'où l'utilisation d'une source laser moins puissante.

### Fibres optiques

Comme d'autres expériences de physique atomique notre démonstrateur utilise des fibres optiques. L'alignement des faisceaux est simplifié grâce aux fibres optiques. En effet, dans la partie à proximité de la cellule, la distance entre la sortie des fibres optiques et les atomes est de l'ordre de 20 cm, donc les alignements sont relativement peu sensibles. Les trajets des faisceaux avant l'injection dans les fibres sont plus longs (1 m à 1,50 m) donc les alignements sont plus sensibles, mais les fluctuations d'alignement se traduisent





(a) Cellules d'absorption saturée (à gauche, en bleu sombre) et sources laser (à droite).

(b) Casier DC 110 de contrôle des sources laser, dont le module d'asservissement Digilock 110.

FIGURE 8.10: Système laser.

directement en fluctuations de puissance dans les fibres, ce qui facilite la correction de l'alignement.

Les fibres optiques peuvent de plus simplifier nettement le montage optomécanique puisqu'elles permettent de guider un faisceau d'un bout à l'autre de la table optique. L'asservissement de nos sources laser est très robuste, donc il n'est pas nécessaire de découpler mécaniquement les sources laser du reste de la table optique et en particulier des obturateurs, contrairement à ce qui se fait dans d'autres expériences. Un avantage supplémentaire des fibres optiques monomodes est que seule la partie des faisceaux couplés avec une forme gaussienne subsiste à la sortie. Des faisceaux refroidisseurs bien gaussiens sont plus faciles à aligner, et ils forment un piège magnéto-optique plus régulier, ce qui peut éviter des pertes d'atomes au moment du transfert du nuage vers le piège magnétique initial.

Dans le montage courant les fibres utilisées sont des jarretières Thorlabs monomodes et à maintien de polarisation P3-780PM-FC-2. Le maintien de polarisation est essentiel pour notre application. D'abord parce que plusieurs utilisations des faisceaux nécessitent des polarisations bien définies, comme on l'a vu section 8.2.4 page 167. Ensuite parce que des cubes polariseurs se trouvent en plusieurs endroits à la sortie des fibres optiques. Par conséquent la stabilité en intensité des faisceaux qui éclairent les atomes est liée à la stabilité en polarisation à la sortie des fibres optiques.

L'inconvénient des fibres optiques provient de leur grande sensibilité à l'environnement, et en particulier à la température. Ainsi la polarisation du faisceau transmis par une fibre a tendance à fluctuer, dès que la polarisation du faisceau incident n'est pas correctement alignée avec un axe propre de la fibre. Ce problème est à l'origine d'un changement important entre la première version du montage et la version courante.

Dans la première version les faisceaux étaient couplés à des fibres dès leur sortie des sources laser. Des séparateurs fibrés prélevaient alors une partie du faisceau pour la conduire aux cellules de spectroscopie, tandis que l'autre partie du faisceau était collimatée pour être mise en forme et conduite à la cellule à atomes. Les polarisations des faisceaux couplés ne pouvaient cependant pas être alignées avec les axes propres des fibres depuis l'extérieur des boîtiers des sources laser, d'où des fluctuations très notables de polarisation

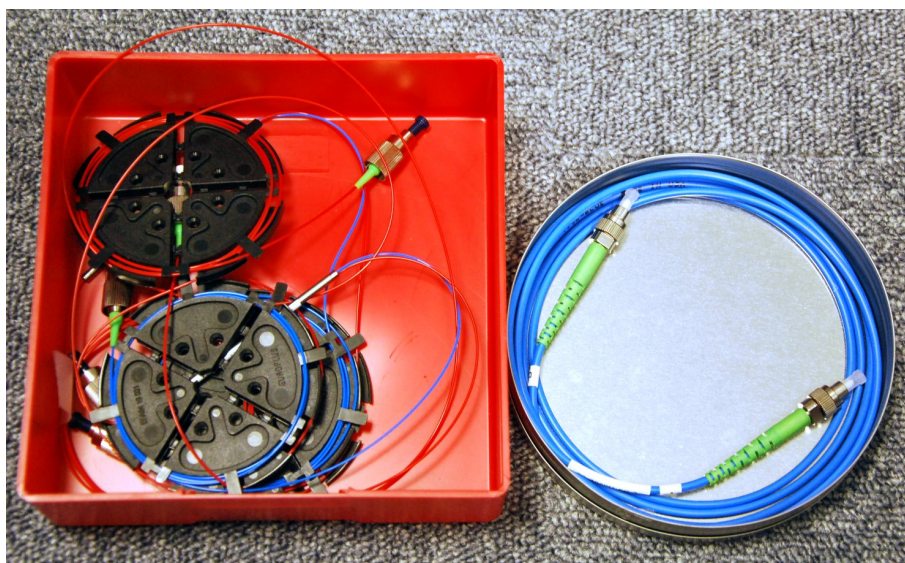


FIGURE 8.11: Fibres optiques utilisées pour le montage. A gauche, les fibres Toptica #OL-000818 avec coupleurs fibrés de la première version, à droite une fibre Thorlabs P3-780PM-FC-2 des versions ultérieures.

et donc d'intensité avec la température, par exemple dès qu'une personne se déplaçait dans le laboratoire.

La nouvelle version utilise également des fibres optiques, mais à l'autre bout du montage. Ainsi les sources émettent leurs faisceaux vers un montage optomécanique de mise en forme en espace libre. Au bout de chaque voie le faisceau est couplé à une fibre. La fibre conduit ensuite le faisceau vers une cellule de spectroscopie, ou bien à proximité immédiate de la cellule, où une ultime étape de mélange des faisceaux ou bien de polarisation peut être effectuée avant que le faisceau n'atteigne les atomes. Le montage est fait de telle sorte qu'un cube polariseur se trouve peu avant chaque coupleur de fibre sur le trajet du faisceau incident. Une lame demi-onde permet de réaligner la polarisation du faisceau juste avant son couplage. Les variations de polarisation et d'intensité au niveau de la cellule peuvent ainsi être simplement minimisées par l'opérateur. Cette nouvelle manière de procéder comporte des avantages supplémentaires :

- Les faisceaux ne risquent plus d'être rognés par les optiques avant d'arriver à la cellule puisqu'ils sortent au contraire tout juste des fibres, donc ce sont des faisceaux quasi-gaussiens qui manipulent les atomes.
- Les nouvelles fibres n'ont plus besoin de comporter de coupleurs, elles peuvent donc avoir des gaines plus épaisses, ce qui les rend plus solides et un peu plus robustes aux variations de l'environnement. Les fibres sans coupleur sont par ailleurs beaucoup moins onéreuses.
- Un dernier aspect intéressant est le découplage fonctionnel entre la préparation des faisceaux et leur disposition autour de la cellule à atomes. Il devient grâce à cela plus facile de modifier le montage de mise en forme sans toucher au montage à proximité de la cellule.

## Obturbateurs électromécaniques

Les modulateurs acousto-optiques permettent de couper extrêmement rapidement les faisceaux de manipulation, ou de moduler leurs intensités. L'extinction n'est cependant pas suffisamment bonne pour les phases complètement sombres de la séquence expérimentale. Pour cela on utilise en plus des obturbateurs mécaniques, surnommés familièrement *clac-clacs*, plus lents mais avec un bien meilleur taux d'extinction. Les obturbateurs sont par ailleurs plus simples à mettre en place, et ils transmettent entièrement les faisceaux lorsqu'ils ne sont pas bloquants.

On a retenu la solution d'obturbateurs assemblés nous-mêmes, d'abord pour des raisons de coût, ensuite pour garder la maîtrise de ces dispositifs depuis l'alimentation jusqu'à l'obturbateur lui-même. On a cherché à faire un système simple et peu coûteux, qui peut couper un faisceau de 2 mm de diamètre en quelques millisecondes, en évitant la gigue (*jitter*).

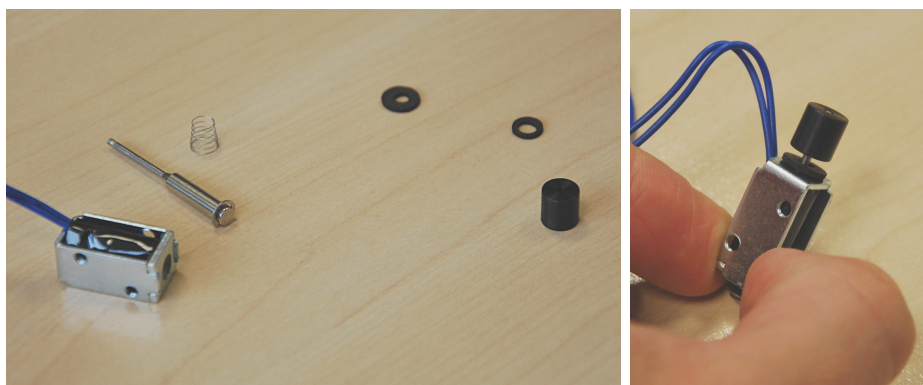
On part d'un solénoïde Intertec Components ITS-LS-1110-B-D-12VDC. Il s'agit d'un électro-aimant entourant un piston en acier. Lorsqu'un courant parcourt le solénoïde, le piston est ainsi attiré vers l'électroaimant. A la coupure du courant, un ressort vient rappeler le piston à sa position initiale. Un cache cylindrique en métal anodisé est fixé à l'extrémité du piston, pour bloquer un faisceau lumineux quand cela est nécessaire. La forme cylindrique rend le dispositif insensible à la rotation éventuelle du piston. Pour limiter les vibrations causées par les chocs à l'aller et au retour du piston, on a fait ajouter une rondelle de caoutchouc de chaque côté du bâti. Le modèle de l'obturbateur est représenté figure 8.12.

L'alimentation du solénoïde est très simple puisque les deux positions de l'obturbateur correspondent chacune à une tension donnée, ou à un courant donné : lorsque la tension aux bornes du solénoïde excède 12 V, le faisceau est obturé, sinon le piston est au repos, rappelé par son ressort. Aucun asservissement n'est donc nécessaire. Un circuit électronique est néanmoins utilisé pour l'alimentation. Il s'agit de convertir le signal binaire faible puissance en provenance du système de contrôle temporel en signal plus puissant capable d'actionner l'obturbateur.

Notre montage, représenté figure 8.13 et dont les composants sont indiqués dans le tableau 8.3, réalise de plus une fonction d'isolation entre l'entrée du système de contrôle et la sortie vers le solénoïde. L'objectif est de protéger le système de contrôle des courants qui circulent dans le solénoïde. Le circuit a deux étages. L'amplificateur d'instrumentation isole son entrée et sa sortie. Le transistor à effet de champ sert d'interrupteur électronique pour le solénoïde. Cet interrupteur est commandé par le signal en provenance de l'amplificateur d'instrumentation.

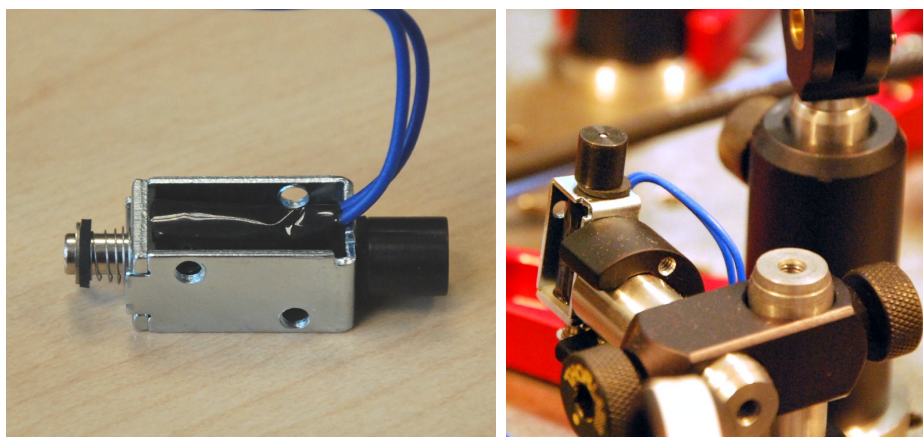
Le transistor à effet de champ IRFZ44N, dont un schéma plus complet est représenté figure 8.14, a été conseillé par Franck Pereira Dos Santos. Il présente la particularité d'incorporer une diode Zener dans le même boîtier que le transistor à effet de champ. Le rôle de la diode Zener est de limiter à 55 V la tension aux bornes du transistor à effet de champ. Grâce à cette limite il est possible de couper rapidement le courant dans une charge inductive comme le solénoïde d'un obturbateur, tout en préservant le transistor à effet de champ. En effet au moment où le canal de conduction du transistor à effet de champ est supprimé, la discontinuité de courant dans la charge inductive fait monter la tension entre le drain et la source à des valeurs très élevées en l'absence de diode Zener, ce qui peut endommager le transistor à effet de champ. La diode Zener limite cette tension à





(a) Pièces de l'obturateur : solénoïde, piston, ressort, amortisseurs et cache.

(b) Obturateur, avec l'amortisseur avant visible en-dessous du cache.



(c) Obturateur, sur lequel on distingue l'amortisseur arrière.

(d) Obturateur monté sur la table optique.

FIGURE 8.12: Obturateur électromécanique.

Référence	Valeur / Modèle
$R_1$	10 $\Omega$
$R_2$	1 M $\Omega$
$R_3$	non spécifié
$C_1$	1 nF
$C_2$	10 pF
$C_3$	100 nF
$C_4$	100 nF
$C_E$	10 $\mu$ F
Amplificateur	INA111
Transistor	IRFZ44N

TABLEAU 8.3: Composants utilisés pour le montage électronique de la figure 8.13. La valeur de la résistance  $R_3$  dépend du modèle de diode électroluminescente.

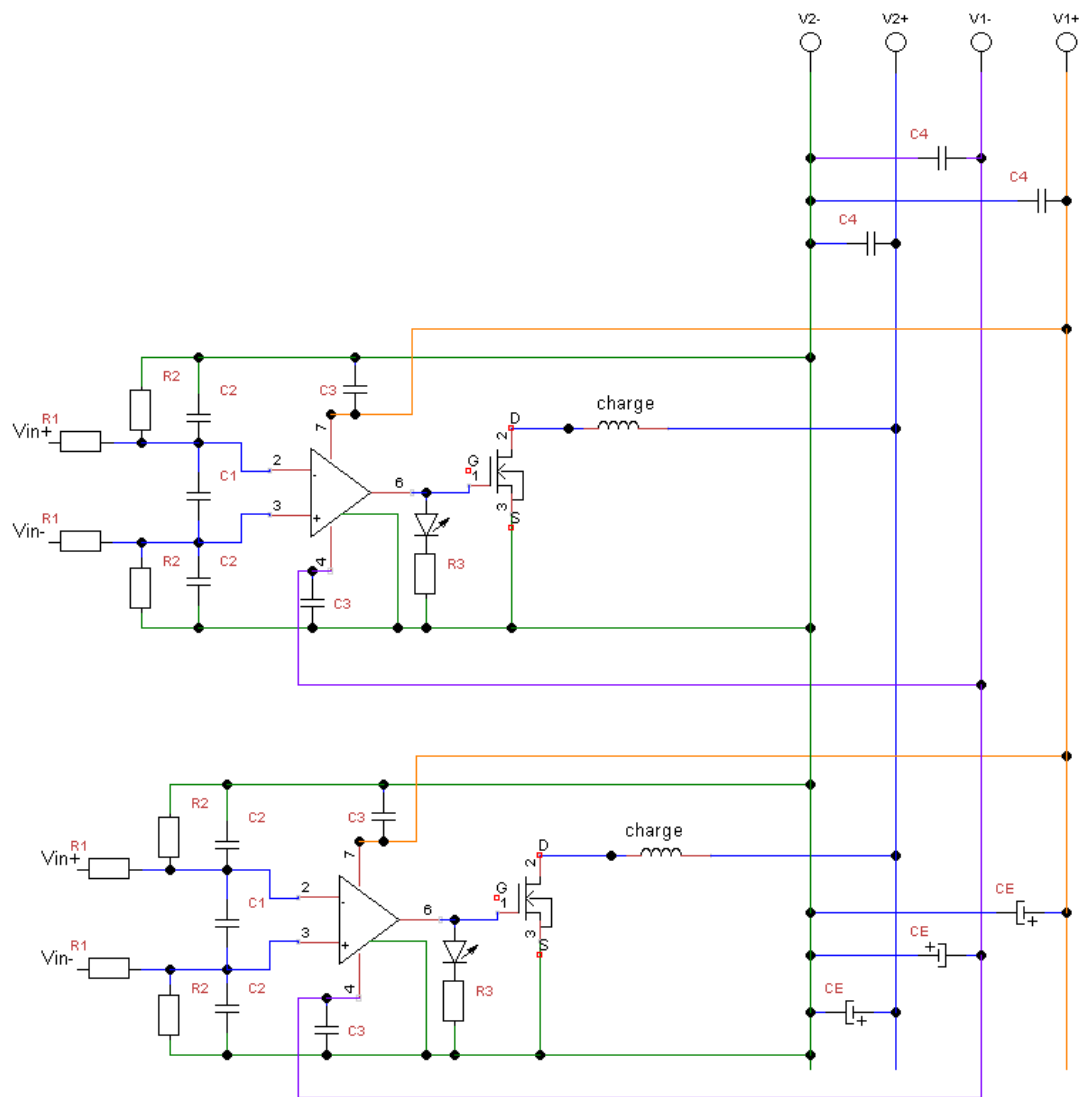


FIGURE 8.13: Schéma électronique du système d'alimentation des obturateurs. Les commandes binaires sont branchées sur les entrées  $V_{in}^+$  et  $V_{in}^-$ , l'alimentation des amplificateurs sur  $V_1^+$ ,  $V_1^-$  et  $V_2^-$  (masse), et l'alimentation des solénoïdes est branchée en  $V_2^+$  et  $V_2^-$ . Les solénoïdes eux-mêmes sont placés à l'emplacement dénoté *charge*. Un montage double est représenté ci-dessus. On branche en réalité six obturateurs sur les mêmes alimentations, suivant le même principe.

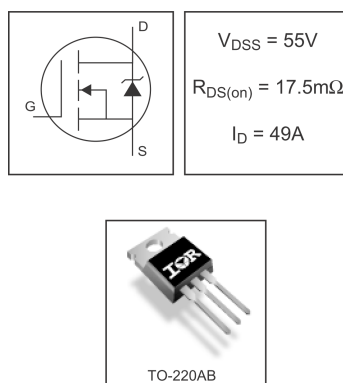


FIGURE 8.14: Composant International Rectifier IRFZ44N.

la valeur de la tension Zener  $U_{Zener}$ , ce qui protège ainsi le transistor à effet de champ. L'énergie stockée dans la charge inductive est dissipée principalement par la diode Zener. La même technique peut éventuellement être utilisée pour couper rapidement le courant dans les bobines autour de la cellule ou dans le fil en Z. Des composants de la même famille avec des tensions Zener plus élevées existent aussi. Ils permettent de faire chuter plus vite le courant dans les charges inductives.

Dans notre montage les obturateurs sont alimentés avec une tension  $V_2^+ - V_2^-$  de 24 V. Les tests montrent un temps de bascule de 2 ms environ pour un faisceau de 2 mm, avec une latence de 9 ms pour la coupure et de 7 ms pour l'ouverture.

### 8.3.5 Préparation des faisceaux

Un montage optomécanique est utilisé pour convertir les faisceaux émis par les deux sources laser en sept faisceaux qui servent à l'asservissement des sources et à la manipulation des atomes. L'objectif est de mettre en forme tous les faisceaux mentionnés à la section 8.3.3 page 171. Le montage optomécanique est représenté figures 8.15 et 8.16.

### 8.3.6 Dispositif de contrôle

Une séquence d'interférométrie se décompose en plusieurs étapes, dont les durées vont de plusieurs secondes pour le chargement du piège magnéto-optique, à une fraction de milliseconde pour le pompage optique. Les temps typiques de chaque étape sont résumés dans le tableau 8.4. On utilise un système électronique et informatique pour contrôler par ordinateur le déroulement temporel de cette séquence.

On utilise trois cartes de contrôle National Instrument, dont les caractéristiques importantes sont données dans le tableau 8.5. Ces cartes se connectent aux ports PCI et PCI Express d'un ordinateur de bureau. Elles sont reliées entre elles par un câble *RTSI* qui permet de les synchroniser. Les cartes sont ensuite toutes connectées par des câbles blindés à des boîtiers *BNC-2110* et *BNC-2115*. Ces boîtiers, représentés figure 8.17 comportent des connecteurs pour câbles coaxiaux et des borniers, pour connecter facilement les sorties des cartes de contrôle aux instruments du démonstrateur. Cet ensemble de cartes de contrôle donne ainsi accès à 64 sorties binaires 0/5 V et à 44 sorties analogiques. On dispose notamment, grâce à la carte PCIe-6363, d'un grand nombre de sorties binaires, et

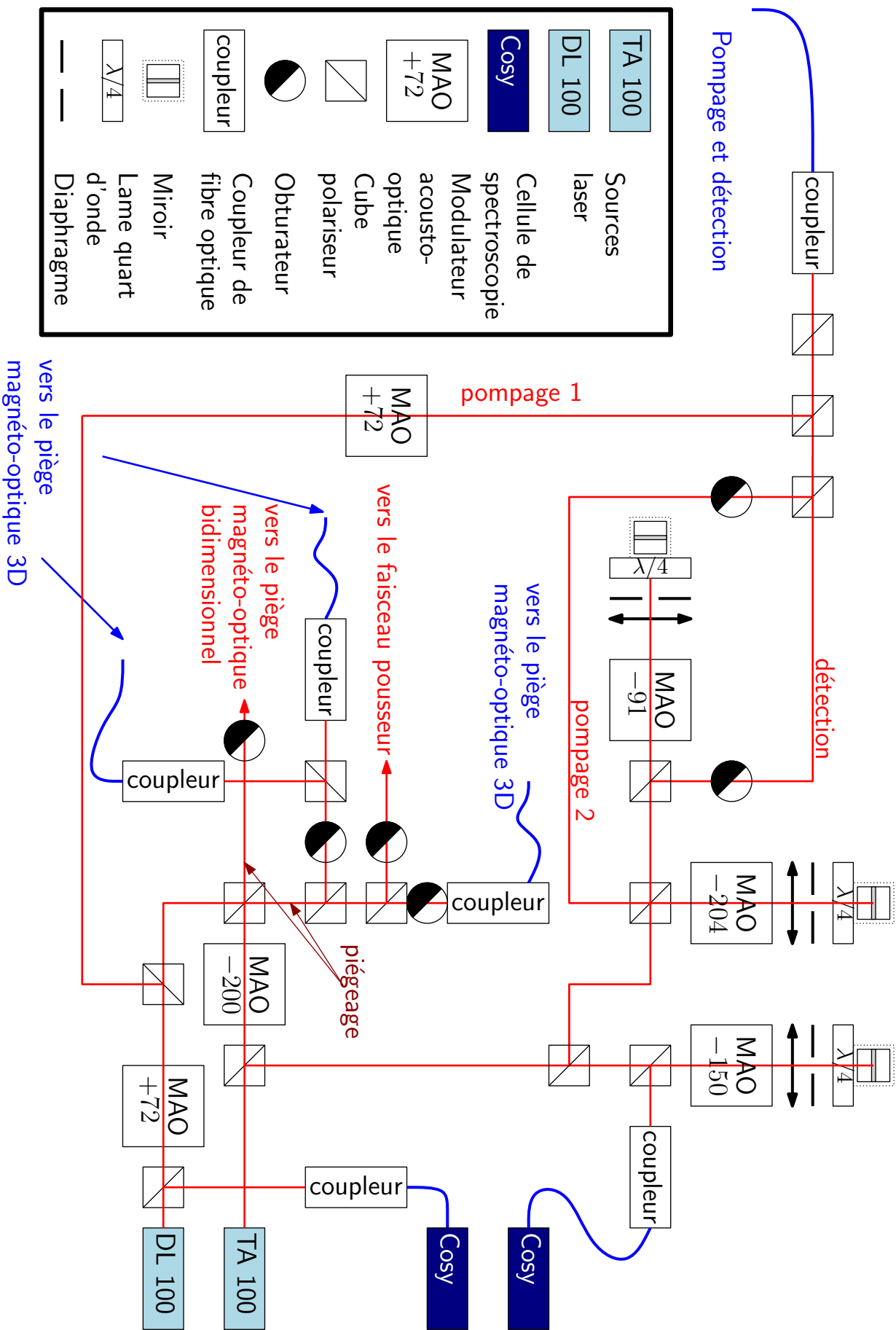


FIGURE 8.15: Schéma optique simplifié de la préparation des faisceaux. Les miroirs, les lames demi-ondes et les lentilles de collimation ont été omis. Chaque cube polariseur est précédé d'une ou deux lames demi-ondes pour permettre le réglage ou l'optimisation de la transmission dans l'une ou l'autre voie de sortie. Une lame d'onde est également placée avant chaque couplage dans une fibre à maintien de polarisation. Le décalage induit par les modulateurs acousto-optiques est indiqué en MHz.

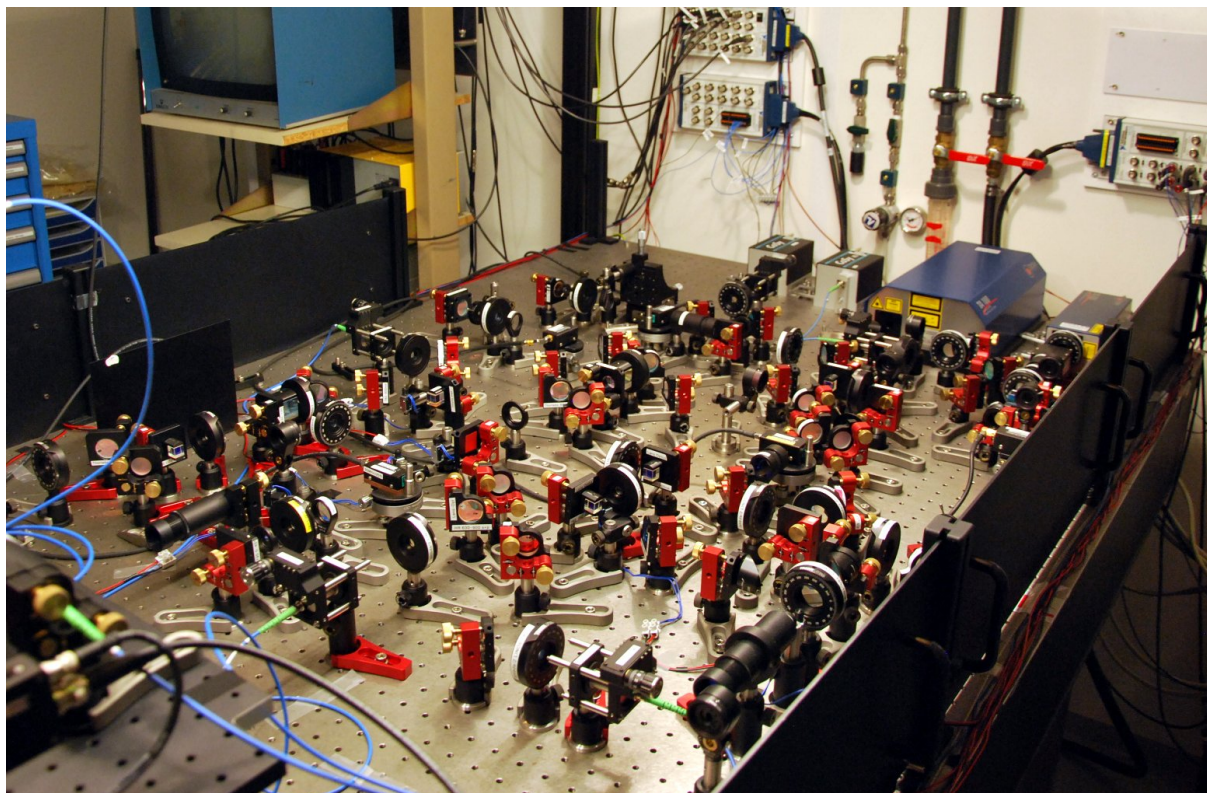


FIGURE 8.16: Montage optique utilisé pour mettre en forme les faisceaux laser de manipulation.

Étapes	Durées typiques
Piège magnéto-optique	10 s
Piège compressé	25 ms
Mélasse optique	4 ms
<i>Pompage optique</i>	100 $\mu$ s
<i>Transfert sur puce</i>	500 ms
<i>Refroidissement évaporatif</i>	2 s
<i>Impulsion <math>\pi/2</math></i>	1 ms
<i>Interrogation</i>	inconnue
Détection par temps de vol	10 ms

TABLEAU 8.4: Durées typiques des étapes de séquence de refroidissement et d'interférométrie. Les étapes soulignées n'ont pas encore été mises en place pour notre démonstrateur. Les durées typiques sont issues de notre démonstrateur et de la bibliographie [Squires, 2008, Deutsch, 2012, Horikoshi, 2007, Treutlein, 2008]. Le temps d'interrogation est inconnu a priori car il va dépendre très fortement de la cohérence que l'on parviendra à obtenir. On espère une cohérence de quelques millisecondes à quelques centaines de millisecondes.



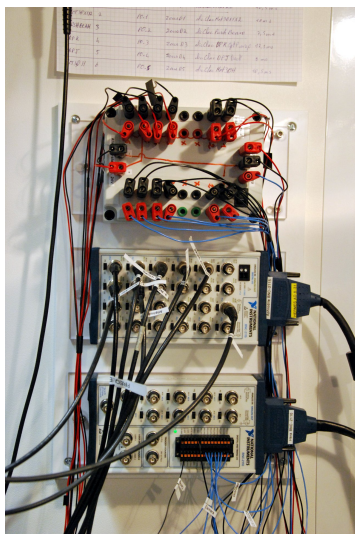


FIGURE 8.17: Boîtiers de sortie *BNC-2110* et *BNC-2115* (en bas). Le boîtier contenant l'électronique d'alimentation des obturateurs est placé juste au-dessus.

de 4 sorties analogiques avec de hautes résolutions temporelles et en tension.

Caractéristique	NI PCI-6723	NI PCI-6733	NI PCIe-6363
Port	PCI	PCI	PCI Express
Sorties binaires	8	8	48
Sorties analogiques	32	8	4
Résolution analogique (bits)	13	16	16
soit en millivolts	2,4	0,31	0,31
Incertitude de sortie (mV)	11,78	2,24	1,89
Fréquence d'échantillonnage (éch. par seconde par voie)	$4,5 \cdot 10^5$	$10^6$	$> 10^6$
Pas temporel ( $\mu$ s)	22	1	$< 1$
Stabilité d'horloge	100 ppm	100 ppm	50 ppm

TABLEAU 8.5: Données constructeur des cartes de contrôle informatique. Le pas temporel minimum donné ici suppose l'utilisation simultanée de toutes les sorties. L'incertitude de sortie correspond à une sortie maximale de 10 V. La gamme de sortie des voies analogiques est de  $-10$  V à  $+10$  V.

Les cartes de contrôle sont programmées à l'aide du logiciel GoodTime, qui est développé par Jakob Reichel. GoodTime compile les commandes d'un langage proche du C, et construit en mémoire vive une matrice de valeurs qui viennent être lues par les cartes de contrôle.

Une interface électronique entre la sortie des cartes de contrôle et les appareils pilotés est parfois utilisée, et pourrait être généralisée. Il s'agit dans certains cas, comme celui des obturateurs, de convertir un signal en courant plus important. Il est intéressant dans tous les cas de réaliser une isolation galvanique au niveau de cette interface. L'objectif est d'avoir un circuit suiveur, mais dans lequel aucun courant important ne peut circuler entre l'entrée et la sortie. L'effet est d'abord de protéger les cartes de contrôle d'un éventuel surcourant

à l'entrée de l'appareil contrôlé, et ensuite de prévenir la formation de boucles de masse en déconnectant la masse des cartes de contrôle de celles des instruments. Des amplificateurs d'instrumentation de type INA 111 soudés sur stripboard sont employés pour l'interface des obturateurs (voir la section 8.3.4 page 182). On utilise des amplificateurs intégrés WA301 Wideband Amplifier d'AIM-TTI pour l'interface avec les générateurs radiofréquences des modulateurs acousto-optiques. Ces amplificateurs intégrés fournissent suffisamment de courant, mais pas d'isolation galvanique.



# Chapitre 9

## Puce en carbure de silicium pour la manipulation d'atomes froids

ON présente dans ce chapitre des résultats expérimentaux réalisés avec la première version de notre montage (voir la section 8.1 page 159, chapitre 8). On a profité de l'absence de puce sur la première cellule à atomes, et de la disponibilité d'échantillons de carbure de silicium et de silicium reproduisant des puces à atomes existantes pour effectuer des tests thermiques et optiques sur ces échantillons, et pour manipuler des atomes à travers les puces, transparentes, en carbure de silicium. J'ai participé directement à l'obtention des résultats expérimentaux qui sont présentés ici, ainsi qu'à la rédaction de l'article présenté à la section 9.3 page 199, en collaboration avec le reste de l'équipe.

### 9.1 Le piégeage magnéto-optique sur puce

Comme on l'a vu au chapitre 6, section 6.2 page 122 une puce à atomes peut piéger un nuage atomique à proximité immédiate de son substrat grâce aux gradients magnétiques importants créés en champ proche par les courants qui parcourent les fils déposés sur la puce [Reichel et Vuletić, 2011]. Les courants nécessaires pour piéger les atomes sont fortement réduits par comparaison aux pièges magnétiques dans lesquels les sources de champs magnétiques sont plus éloignés. Les puces à atomes facilitent de plus la réalisation de géométries très variées de champs magnétiques, encore une fois grâce aux sources magnétiques proches [Treutlein, 2008].

On se sert en général d'un piège magnéto-optique pour former un nuage atomique et le refroidir en vue de charger le piège magnétique d'une puce à atomes [Reichel *et al.*, 1999]. La réduction de la distance  $d$  entre le piège magnéto-optique et la puce est déterminante pour limiter la puissance électrique nécessaire au transfert des atomes vers le piège magnétique de la puce, et pour éviter de trop grandes pertes d'atomes au cours de ce transfert [Squires, 2008].

Lorsque le substrat de la puce est en silicium ou en nitrure d'aluminium comme dans les références [Reichel *et al.*, 1999, Reichel et Vuletić, 2011, Armijo *et al.*, 2010], la puce est opaque, donc elle bloque une grande partie de l'accès optique au nuage atomique à proximité de la surface. Deux techniques sont principalement utilisées pour réduire la distance  $d$  avec cette contrainte. La première consiste à utiliser une configuration de piège magnéto-optique classique à six faisceaux, mais dans laquelle l'angle  $\theta$  entre deux des paires

de faisceaux contrapropageants est réduit, comme sur la figure 9.1a. Matthew Squires a montré dans sa thèse que l'angle  $\theta$  ne peut être réduit en-dessous de la valeur critique  $\theta_c \approx 40^\circ$ , sans quoi le piège magnéto-optique devient instable [Squires, 2008, chapitre 4]. Cette technique empêche d'approcher le volume de piégeage à une distance inférieure à  $l/2 \tan(\theta_c/2)$ , avec  $l$  la largeur de la puce. Avec une puce de 15 mm comme la nôtre, on a donc  $d \gtrsim 2,7$  mm. On a pour l'instant choisi ce type de dispositif pour la version actuelle du montage et pour l'interféromètre, par mesure de simplicité et par compatibilité avec le matériel de ColdQuanta.

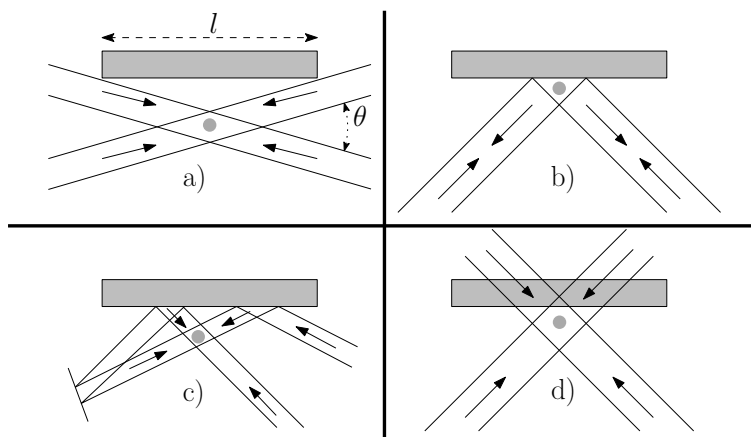


FIGURE 9.1: Quatre configurations possibles de pièges magnéto-optiques à proximité d'une puce à atomes.

Une autre possibilité, illustrée figure 9.1b, consiste à piéger les atomes directement à la surface de la puce, grâce à la réflexion des faisceaux de piégeage sur la puce [Reichel *et al.*, 1999]. Cette fois-ci la distance des atomes à la puce est limitée par la taille des faisceaux, et le volume de capture des atomes est réduit de moitié par rapport à un piège magnéto-optique sans puce. La proximité immédiate de la puce peut limiter la durée de vie des atomes dans le piège à cause des interactions avec la surface [Reichel *et al.*, 1999]. Les couches réfléchissante et planarisante compliquent enfin la fabrication de la puce [Reichel et Vuletić, 2011].

On peut résoudre en partie le problème en réalisant ce que Ohadi [Ohadi *et al.*, 2009] appelle un piège magnéto-optique  $\Lambda$ , dans lequel le volume de capture est formé à l'intersection de plusieurs faisceaux qui viennent se réfléchir à la surface de la puce. Cette géométrie est représentée figure 9.1c. La configuration  $\Lambda$  ne permet pas cependant d'échapper aux difficultés qui proviennent des couches réfléchissante et de planarisation sur la puce.

On a proposé d'utiliser une puce transparente pour pouvoir réaliser le piégeage magnéto-optique des atomes avec des faisceaux qui passent à travers la puce, comme sur la figure 9.1d. Dans ce cas la fabrication de la puce est simplifiée, et la distance de piégeage  $d$  peut être réglée par translation du dispositif optomécanique et des sources magnétiques du piège magnéto-optique. On présente aux sections suivantes les résultats théoriques et expérimentaux qui démontrent la possibilité de réaliser la configuration de la figure 9.1d avec une puce en carbure de silicium monocristallin, et qui montrent l'intérêt de ce matériau comme substrat pour les puces à atomes.

## 9.2 Réglage de polarisation des faisceaux

Le carbure de silicium monocristallin a la particularité de transmettre la lumière à 780 nm, avec un coefficient d'absorption inférieur à  $1 \text{ cm}^{-1}$ . Cette propriété permet d'envisager la création d'un piège magnéto-optique pour des atomes de rubidium 87, suivant le schéma de la figure 9.1d, en présence d'une puce en carbure de silicium monocristallin. Une difficulté dans la réalisation expérimentale de ce type de piège provient de la biréfringence du polytype de carbure de silicium 4H dont sont faits nos échantillons. Les faisceaux d'un piège magnéto-optique ont des polarisations qui sont en effet spécifiées par la théorie [Metcalf et Van der Straten, 1999]. On présente aux sections suivantes (9.2.1 page 193 et 9.2.2 page 197) la solution théorique trouvée, et son essai expérimental sur la table optique.

### 9.2.1 Polarisation circulaire en configuration rétro-réfléchie

La polarisation des faisceaux joue en général un rôle important dans la création d'une force de rappel pour un piège magnéto-optique. Dans la configuration la plus habituelle, proposée par exemple par les références [Metcalf et Van der Straten, 1999, Lewandowski et al., 2003], chaque faisceau doit avoir la même polarisation circulaire *par rapport à son axe de propagation* que l'autre faisceau suivant le même axe, et qui se propage en sens opposé. Cette configuration est schématisée sur la figure 9.2.



FIGURE 9.2: Configuration de polarisation pour la formation d'un piège magnéto-optique. L'exemple d'une polarisation circulaire *gauche* est prise ici. Deux autres paires de faisceaux ainsi qu'un gradient de champ magnétique sont ajoutés pour obtenir un piège magnéto-optique 3D complet.

Pour obtenir une polarisation circulaire  $\sigma$ , on peut utiliser un faisceau polarisé linéairement suivant un axe  $\underline{u}$ , que l'on fait passer par une lame quart d'onde dont l'axe rapide forme un angle de  $\pm 45^\circ$  par rapport à  $\underline{u}$ . Le signe de cet angle détermine l'orientation  $\sigma$ . Si un matériau biréfringent arbitraire tel que la puce en carbure de silicium monocristallin se trouve sur le chemin du faisceau, avant ou bien après la lame quart d'onde, il n'existe pas en général de réglage de l'orientation de la lame quart d'onde qui permet de retrouver  $\sigma$ . On va montrer dans ce qui suit une solution à cette difficulté, qui utilise une configuration courante pour les faisceaux de piégeage magnéto-optique.

Pour créer une paire de faisceaux avec les deux mêmes polarisations circulaires, on peut se servir d'un seul faisceau que l'on réfléchit à  $180^\circ$ , comme sur le schéma de la figure 9.3. L'intérêt habituel de cette configuration est notamment d'économiser de la puissance optique et de faciliter l'alignement de la paire de faisceaux [Lewandowski et al., 2003, Squires, 2008].

#### Polarisation sans puce

Examinons l'état de polarisation du faisceau réfléchi, dans la configuration sans puce de la figure 9.3. On prend comme convention de toujours définir la polarisation *par*

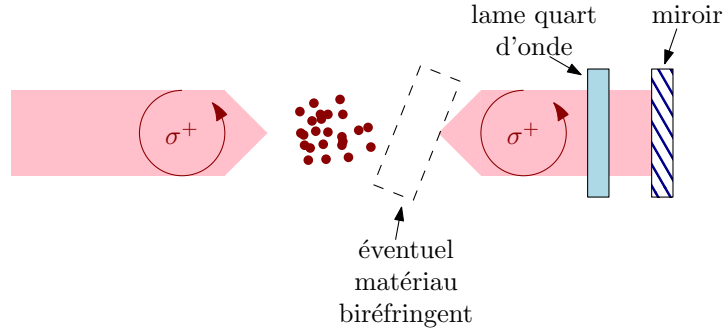


FIGURE 9.3: Configuration de faisceau rétrofléchi pour créer une paire de faisceaux de piégeage. Le faisceau qui se propage de gauche à droite est réfléchi à  $180^\circ$  et passe par la même lame quart d'onde avant et après cette réflexion. La position d'une éventuelle puce à atomes transparente après la première interaction du faisceau avec les atomes est indiquée.

*rapport à l'axe de propagation de la lumière.* Les éléments du montage sont supposés non dépolarisants, donc on utilise le formalisme des vecteurs et matrices de Jones [Guenther, 1990, chapitres 2 et 13]. La polarisation circulaire du faisceau qui se propage de gauche à droite peut être représentée par le vecteur de Jones  $|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \mathbf{i} \end{bmatrix}$ .  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  détermine l'orientation, droite ou gauche, de la polarisation circulaire. En toute généralité la matrice de Jones qui correspond au passage dans la lame quart d'onde s'écrit à l'aller dans une base orthonormée de polarisations linéaires  $(|\underline{e}_x\rangle, |\underline{e}_y\rangle)$  [Guenther, 1990, chapitre 13]

$$M_{\lambda/4}^{\text{aller}} = M_{\lambda/4}(\theta) = R_\theta \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix}}_{Q_{\pi/2}} \cdot R_{-\theta} \quad (9.1)$$

Dans l'expression (9.1),  $R_\theta$  et  $R_{-\theta}$  sont des matrices de rotation du plan, d'angles respectifs  $\theta$  et  $-\theta$ .  $\theta$  correspond ici à l'orientation de l'axe lent de la lame quart d'onde par rapport à  $\underline{e}_x$ . La réflexion du faisceau correspond également à une réflexion de la polarisation. Une matrice de Jones  $S$  correspondante est donc

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Après réflexion du faisceau, l'orientation d'un élément optique par rapport à l'axe de propagation est inversée, donc sa matrice de Jones s'écrit  $M' = S \cdot M \cdot S$  avec  $M$  la matrice de Jones de l'élément à l'aller. Au retour une matrice de Jones de la lame quart d'onde est donc  $M_{\lambda/4}^{\text{retour}} = S M_{\lambda/4}(\theta) S$ . La polarisation du faisceau au retour est donc décrite par le vecteur de Jones

$$|p'\rangle = S R_\theta Q_{\pi/2} R_{-\theta} S \cdot S \cdot R_\theta Q_{\pi/2} R_{-\theta} |p\rangle$$

Comme  $S^2 = 1$ ,  $R_{-\theta} R_\theta = 1$  et  $Q_{\pi/2}^2 = \mathbf{i}S$ , on a

$$|p'\rangle = \mathbf{i} S R_\theta S R_{-\theta} |p\rangle$$

Or  $S R_\theta S = R_{-\theta}$  donc

$$|p'\rangle = \mathbf{i} R_{-2\theta} |p\rangle \propto |p\rangle$$

car les polarisations circulaires sont invariantes par rotation. Par conséquent, en l'absence de matériau biréfringent, une polarisation circulaire est préservée au retour dans la configuration de la figure 9.3, indépendamment de l'orientation  $\theta$  de la lame quart d'onde. On peut interpréter cela en remarquant que le double passage dans la lame quart d'onde correspond à un passage simple par une lame demi-onde orientée suivant  $\theta$ , ce qui vient compenser l'effet de la réflexion pour une polarisation circulaire.

### Polarisation avec puce

Il se trouve que la configuration rétro-réfléchi permet également d'obtenir une même polarisation circulaire à l'aller et au retour en présence d'une puce, ce que l'on démontre dans ce qui suit. Les deux faces de l'échantillon de carbure de silicium ont subi un traitement anti-reflet, pour une longueur d'onde de 780 nm et une incidence de  $60^\circ$ , ce qui correspond aux conditions expérimentales. Les polarisations sont donc censées être transmises à peu près de la même manière. On peut donc considérer que la puce n'est ni polarisante, ni dépolarisante, au moins approximativement. Lorsqu'un faisceau polarisé entre dans une lame biréfringente uniaxe comme la puce en carbure de silicium 4H, elle est divisée en deux faisceaux qui voient des indices optiques  $n_1$  et  $n_2$  différents, comme cela est schématisé sur la figure 9.4. La séparation entre les faisceaux transmis s'écrit

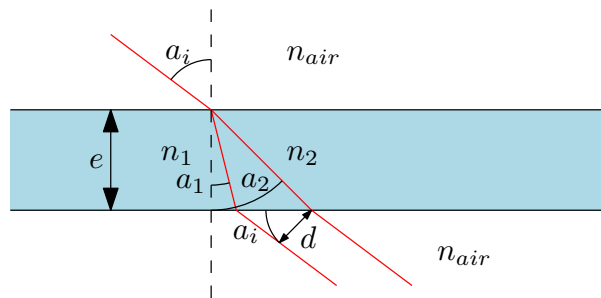


FIGURE 9.4: Faisceaux incident et transmis dans une lame biréfringente uniaxe.

$$d = e (\tan a_1 - \tan a_2) \cos a_i$$

Un ordre de grandeur de  $d$  peut être obtenu en prenant  $n_1 = n_o$  l'indice ordinaire et  $n_2 = n_e$  l'indice extraordinaire pour le matériau de la puce. Dans notre cas on obtient  $d \sim 1,5 \mu\text{m}$ . Le calcul est résumé dans le tableau 9.1. Les faisceaux avec lesquels on travaille ont des diamètres allant du millimètre à plus d'un centimètre, donc notre échantillon de carbure de silicium peut être en bonne approximation considéré comme une lame mince biréfringente. D'après la référence [Hurwitz Jr et Jones, 1941] le passage à travers la puce peut donc être modélisé par une matrice de Jones  $U$ , que l'on écrit en toute généralité

$$U = R_\alpha \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix}}_{Q_\gamma} \cdot R_\beta \quad (9.2)$$

avec  $\gamma$  la différence de phase entre les deux faisceaux de polarisations orthogonales qui sont transmis par la puce.  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent d'un éventuel pouvoir rotatoire du matériau, et de



Paramètre	Valeur
$n_o$	= 2,617
$n_e$	= 2,666
$e$	= 414 $\mu\text{m}$
$a_i$	$\approx 60^\circ$
$a_1$	$\sim 19,3^\circ$
$a_2$	$\sim 19,0^\circ$
$d$	$\sim 1,5 \mu\text{m}$

TABLEAU 9.1: Estimation de la distance de séparation  $d = e (\tan a_1 - \tan a_2) \cos a_i$  entre deux faisceaux de polarisations différentes transmis à partir d'un seul faisceau par la puce biréfringente.  $n_o$  et  $n_e$  sont déterminés à 780 nm [Shaffer, 1971].

l'orientation de la puce par rapport à  $\underline{e}_x$ . En l'absence de pouvoir rotatoire  $\beta = -\alpha$ . En reprenant le raisonnement de la section 9.2.1 page 193, on détermine la polarisation  $|p''\rangle$  du faisceau rétroréfléchi après deux passages dans la puce et dans la lame quart d'onde :

$$|p''\rangle = \underbrace{SUS}_{\text{puce retour}} \cdot \underbrace{SM_{\lambda/4}(\theta)S}_{\lambda/4 \text{ retour}} \cdot \underbrace{S}_{\text{réflexion}} \cdot \underbrace{M_{\lambda/4}(\theta)}_{\lambda/4 \text{ aller}} \cdot \underbrace{U}_{\text{puce aller}} |p\rangle \quad (9.3)$$

En appliquant les mêmes règles algébriques qu'à la section 9.2.1 page 193, et en remarquant de plus que  $SR_\varphi = R_{-\varphi}S$  pour tout  $\varphi$  et que  $SQ_\gamma S = Q_\gamma$ , on réduit l'expression (9.3) à

$$|p''\rangle = \mathbf{i}R_{-\alpha}Q_\gamma R_{\alpha-\beta-2\theta}Q_\gamma R_\beta |p\rangle$$

Or on peut calculer que  $Q_\gamma R_{\pi/2}Q_\gamma = R_{\pi/2}$ , donc lorsque  $\alpha - \beta - 2\theta = \pi/2$  il vient

$$|p''\rangle = \mathbf{i}R_{-\alpha+\beta+\pi/2} |p\rangle$$

soit

$$|p''\rangle \propto |p\rangle$$

Il existe donc au moins une orientation  $\theta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \pi/2)$  de la lame quart d'onde, telle que la polarisation du faisceau réfléchi soit bien circulaire de même orientation que celle du faisceau incident, au moment de l'interaction avec les atomes. La configuration avec faisceaux rétroréfléchis qui est utilisée dans certaines expériences avec des pièges magnéto-optiques est donc encore fonctionnelle lorsqu'un matériau biréfringent se trouve sur le chemin du faisceau, comme sur la figure 9.3 page 194. La lame quart d'onde ne peut plus cependant être orientée de façon arbitraire, mais il faut la régler.

Une manière d'interpréter ce résultat consiste à dire que la lame d'onde est réglée de sorte à échanger les axes de biréfringence vus par le faisceau. Du coup le déphasage  $\gamma$  créé à l'aller entre les polarisations des deux faisceaux transmis est résorbé au retour. L'aller et le retour causent au total une rotation  $R_{-\alpha+\beta+\pi/2}$  de la polarisation, ce qui laisse la polarisation invariante lorsqu'elle est circulaire. On remarque par ailleurs que le résultat que l'on vient de démontrer est valable même lorsque la puce possède un pouvoir rotatoire, ce qui n'est pas le cas d'une puce en carbure de silicium 4H, du moins pas de façon significative et documentée à notre connaissance.

Un aspect important du résultat est que l'orientation de réglage de la lame d'onde dépend de l'orientation de la puce, mais pas du déphasage  $\gamma$ . On peut s'attendre à ce que d'éventuelles fluctuations de température de la puce viennent perturber le déphasage  $\gamma$  de façon plus significative que l'orientation de l'axe optique, à condition que l'expansion du carbure de silicium 4H soit suffisamment isotrope. Ce résultat laisse donc espérer que le réglage de la lame d'onde pourrait être relativement robuste aux fluctuations de température de la puce.

## 9.2.2 Essais expérimentaux

Le résultat démontré à la section 9.2.1 page 195 à été vérifié expérimentalement sur la table optique, avant d'être transposé au niveau de la cellule à atomes.

### Polarisation circulaire

Une première étape consiste à obtenir un faisceau de polarisation circulaire. On se sert pour cela du dispositif schématisé sur la figure 9.5. On oriente la lame quart d'onde du

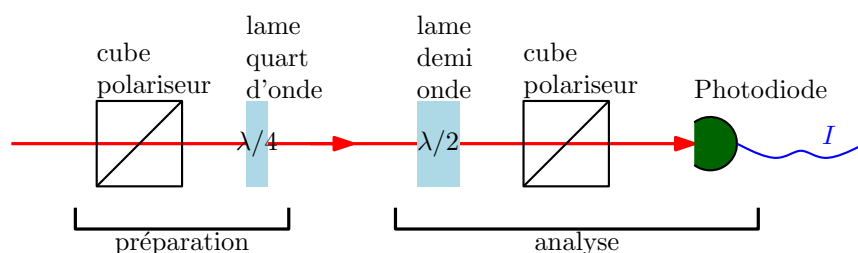


FIGURE 9.5: Schéma optique de préparation et de caractérisation d'une polarisation circulaire. Les faisceaux réfléchis par les cubes polariseurs sont omis. La photodiode délivre un courant  $I$  proportionnel à la puissance transmise par le cube analyseur.

dispositif de préparation jusqu'à ce que l'intensité du courant  $I$  donné par la photodiode soit le plus indépendant possible de l'orientation de la lame demi-onde qui précède le cube analyseur. Le paramètre  $f$  que l'on cherche à minimiser ici est la différence relative entre l'intensité maximale  $I_{max}$  et l'intensité minimale  $I_{min}$  du courant dans la photodiode au cours d'un tour complet de la lame demi-onde.

$$f = 2 \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

On trouve avec le meilleur réglage de la lame quart d'onde,  $f \approx 12\%$ . Cette méthode ne permet pas de connaître l'orientation de la polarisation circulaire obtenue.

### Test de la puce

Pour tester la compensation de polarisation de la puce on réalise le montage schématisé à la figure 9.6. La lame quart d'onde 1 est réglée de sorte que la lumière transmise, au point  $A$ , ait la polarisation circulaire  $|\sigma_1\rangle$ , grâce à la démarche présentée à la section précédente.

On souhaite vérifier que la polarisation au point  $B$  peut effectivement être circulaire, même en présence de la puce biréfringente. Les seuls polariseurs dont notre équipe disposait

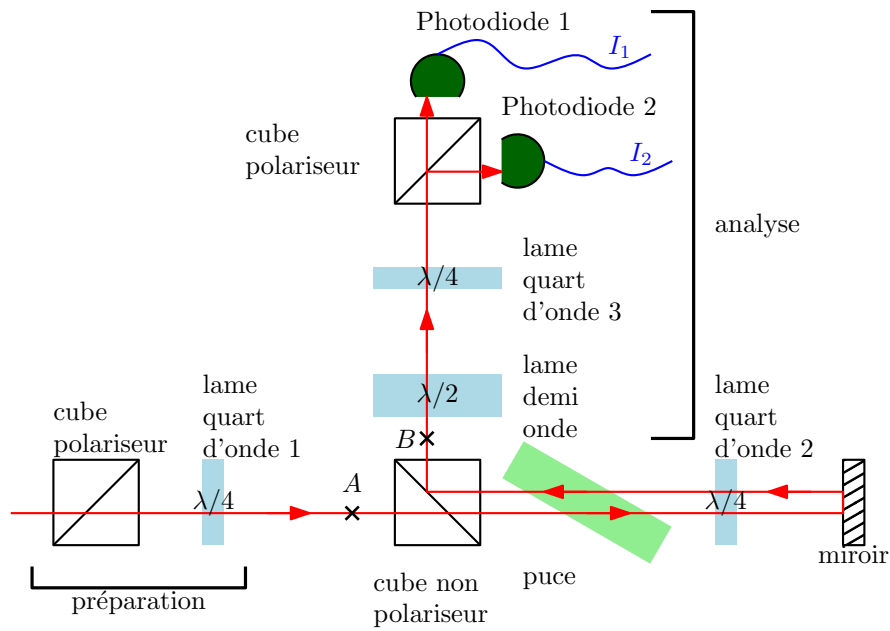


FIGURE 9.6: Montage de vérification de la polarisation sur table optique.

au moment de ces essais étaient des cubes polariseurs. Pour s'assurer que la polarisation en  $B$  est circulaire, on vérifie que la polarisation devient effectivement linéaire après passage dans la lame quart d'onde 3, quelle que soit l'orientation  $\phi$  de la lame demi-onde du montage. Avant d'effectuer les tests, on règle le montage en l'absence de la puce et de la lame quart d'onde 2. On règle l'orientation  $\theta_3$  de la lame quart d'onde 3, de sorte que l'intensité  $I_1$  soit maximale par rapport à  $\theta_3$ . En l'absence de puce et de lame d'onde 2, la polarisation en  $B$  est censée être circulaire  $|\sigma_2\rangle$ , d'orientation contraire à celle de  $|\sigma_1\rangle$  à cause de la réflexion. Le réglage  $\theta_3$  de la lame d'onde 3 devrait donc être pratiquement indépendant de l'orientation  $\phi$  de la lame demi-onde. On mesure expérimentalement le paramètre

$$f_1 = 2 \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

avec

$$I_{max} = \max_{\phi} \max_{\theta_3} I_1$$

$$I_{min} = \min_{\phi} \max_{\theta_3} I_1$$

On trouve expérimentalement  $f_1 = 4\%$ .

On rajoute ensuite la lame quart d'onde 2. La polarisation au point  $B$  devrait être  $|\sigma_1\rangle$ , indépendamment de l'orientation  $\theta_2$  de la lame quart d'onde 2. On a vérifié qu'effectivement l'intensité  $I_2$  est maximale vis-à-vis de  $\theta_3$ , indépendamment de  $\theta_2$ . On trouve quel que soit  $\theta_2$

$$f_2 = 2 \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = 2,8\%$$

avec

$$I_{max} = \max_{\phi} \max_{\theta_3} I_2$$

$$I_{min} = \min_{\phi} \max_{\theta_3} I_2$$

On rajoute alors la puce à atomes en carbure de silicium monocristallin 4H dans le montage, en faisant en sorte que l'angle d'incidence du faisceau soit proche de  $60^\circ$ . Cette fois-ci, en l'absence de réglage de  $\theta_2$  la polarisation au point  $B$  n'est pas forcément circulaire. On trouve conformément au raisonnement présenté à la section 9.2.1 page 195 qu'il existe effectivement un réglage  $\tilde{\theta}_2$  de  $\theta_2$  tel que  $f_2 = 2,1\%$ , ce qui signifie que la polarisation en  $B$  est encore proche de  $|\sigma_1\rangle$ .

On a enfin vérifié la robustesse du réglage de  $\theta_2$  lorsque l'angle d'incidence  $i$  est modifié. Pour cela on mesure l'angle optimal  $\tilde{\theta}_2$  de correction lorsque l'on change  $i$ . De façon satisfaisante on trouve que lorsque  $i$  varie de  $50^\circ$  à  $70^\circ$   $\tilde{\theta}_2$  change de moins de  $2^\circ$ .

### 9.3 Publication

Une fois démontré aussi bien théoriquement qu'expérimentalement le résultat de la section 9.2 page 193, on l'a utilisé pour vérifier la possibilité de créer un piège magnéto-optique avec des faisceaux qui traversent la puce biréfringente. Ces résultats expérimentaux, ainsi que d'autres tests et estimations concernant l'échantillon en carbure de silicium, ont été publiés dans la référence [Huet *et al.*, 2012], reproduite ici.

## Experimental investigation of transparent silicon carbide for atom chips

Landry Huet,<sup>1,2</sup> Mahdi Ammar,<sup>1,3</sup> Erwan Morvan,<sup>4</sup> Nicolas Sarazin,<sup>4</sup> Jean-Paul Pocholle,<sup>1</sup> Jakob Reichel,<sup>3</sup> Christine Guerlin,<sup>1,a)</sup> and Sylvain Schwartz<sup>1,b)</sup>

<sup>1</sup>Thales Research and Technology France, Campus Polytechnique, 1 av. Fresnel, 91767 Palaiseau, France

<sup>2</sup>Thales Underwater Systems, 525 route des Dolines, BP 157 Sophia-Antipolis, France

<sup>3</sup>Laboratoire Kastler-Brossel, ENS, CNRS, Université Pierre et Marie Curie – Paris 6, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France

<sup>4</sup>III-V Lab, Route de Nozay, 91461 Marcoussis, France

(Received 18 August 2011; accepted 8 February 2012; published online 21 March 2012)

We investigate some properties of an atom chip made of a gold microcircuit deposited on a transparent silicon carbide substrate. A favorable thermal behavior is observed in the presence of electrical current, twice as good as a silicon counterpart. We obtain one hundred million rubidium atoms in a magneto-optical trap with several of the beams passing through the chip. We point out the importance of coating of the chip against reflection to avoid a temperature-dependent Fabry-Perot effect. We finally discuss detection through the chip, potentially granting large numerical apertures, as well as some other potential applications. © 2012 American Institute of Physics. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.3689777>]

Atom chips<sup>1,2</sup> are a versatile tool for the manipulation of ultracold atoms.<sup>3,4</sup> They have been used to create atomic waveguides, beam splitters or conveyor belts, and to achieve and handle Bose-Einstein condensates. They opened possibilities for the study of fundamental issues such as low-dimensional quantum systems, cavity quantum electrodynamics, and nano-mechanical resonators. Recent results regarding on-chip radiofrequency and microwave manipulation of atoms<sup>5–7</sup> also hold prospects for future applications such as quantum information processing,<sup>8,9</sup> timekeeping,<sup>10</sup> or inertial sensing.<sup>11</sup>

One key feature of atom chips is to allow tight atomic confinement thanks to strong magnetic field gradients. To do so, electrical currents up to several amperes are typically required, and thermal management can become an issue.<sup>12,13</sup> Moreover, atom chips take advantage of the fact that atoms are trapped very close to the chip surface,<sup>4</sup> typically on the order of tens or hundreds of microns. Because the chip size is usually centimetric, this comes at the price of reducing the optical access to the atoms by almost half the full  $4\pi$  solid angle.

In this paper, we propose to address these issues by using a transparent atom chip made of a gold microcircuit deposited on a single crystal silicon carbide (SiC) substrate. Single crystal SiC appears as a particularly relevant candidate substrate for atom chip applications. Its specified electrical resistivity (over  $10^5 \Omega \text{ cm}$  for our high purity semi-insulating 4H SiC sample)<sup>14</sup> and thermal conductivity (over  $390 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  for our sample)<sup>14</sup> make it well suited for supporting wires with large currents, without the need of an additional electrical insulation layer. To illustrate the latter point, we have monitored the temperature rise of our  $414 \mu\text{m} \times 15 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}$  SiC chip in the presence of electrical current and compared it to a  $600 \mu\text{m}$  thick silicon chip with a  $200 \text{ nm}$  insulating silica layer, all other parameters being equal. Current was run through the central  $14 \text{ mm} \times 100 \mu\text{m} \times 3 \mu\text{m}$  wire of each

chip. Each chip was resting along two opposite sides on copper blocks, acting as heat sinks, as shown on the inset of Fig. 1. Temperature was measured after thermalization at ambient pressure. We have used a gold wire pattern similar to the one of Ref. 15, which already has proven to achieve Bose-Einstein condensation of rubidium atoms. As can be seen on the main curve of Fig. 1, the thermal behavior of the SiC chip is more than twice as good, despite the greater thickness of the silicon chip, which is expected to favor thermal conductivity between the central wire and the heat sinks.

With a bandgap value of about  $3.2 \text{ eV}$  at room temperature,<sup>14</sup> another potential interest of single crystal SiC is optical transparency at all visible wavelengths. Our chip is coated, after the deposition of the wires, with a single anti-reflection (AR) layer of aluminum oxide on each side, resulting in about 2% reflection on each air/SiC interface for a  $780 \text{ nm}$  beam at a  $60^\circ$  incidence, as used in our magneto-optical trap (MOT) setup shown in Fig. 2. The overall substrate transmittance is about 93% when measured with a small beam propagating between wires. The difference of 3% between the overall losses and the reflection losses can mainly be attributed to absorption by the substrate, corresponding to an absorption

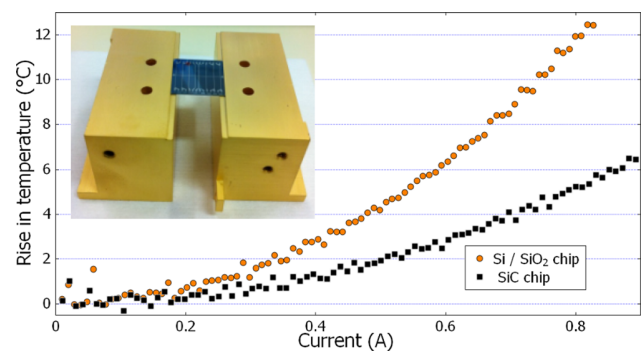


FIG. 1. (Color online) Main curve: comparison of the thermal properties of the SiC chip with that of a silicon counterpart. Inset: picture of the test setup.

<sup>a)</sup>Present address: LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, 61 av. de l'Observatoire, 75014 Paris, France.

<sup>b)</sup>Electronic mail: sylvain.schwartz@thalesgroup.com.

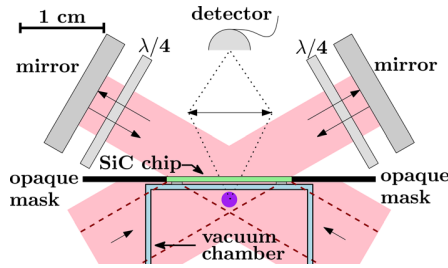


FIG. 2. (Color online) Sketch of the upper chamber part of the experimental setup. An opaque mask surrounding the chip ensures that only the fraction of the beams going through the chip (dashed lines) contributes to the MOT. An additional pair of beams perpendicular to the plane of the figure is used to complete the 6-beam MOT configuration. Atomic fluorescence is recorded through the chip.

coefficient of about  $0.7 \text{ cm}^{-1}$  at  $780 \text{ nm}$ . The overall transmittance of the chip drops to about 80% in the MOT setup because the beams are partially blocked by the wires. Although reflections at air/SiC interfaces are not the main source of losses, the quality of the AR coating turns out to be very important to avoid intensity and polarization fluctuations with temperature linked to a residual Fabry-Perot effect within the chip. The latter is illustrated on Fig. 3(a), where the chip transmittance is plotted against temperature. The measured period is about  $11 \text{ }^\circ\text{C}$ , corresponding to  $\partial n/\partial T \simeq 8 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$  for 4H SiC at  $780 \text{ nm}$  where  $n$  is the average refractive index, which is consistent with published measurements for other SiC crystals.<sup>16</sup> One straightforward solution to suppress this effect would be the use of a better AR coating, for instance, based on multiple layers of dielectric materials. For example one can expect intensity fluctuations smaller than 1% if reflectivity is reduced to less than 0.25%.

In order to exploit transparency of single crystal SiC, the question of birefringence must be addressed. The substrate we use has a 4H hexagonal crystalline structure. This is one of many polytypes of SiC, of which 4H and 6H structures are increasingly used in microelectronics.<sup>17</sup> 4H SiC has uniaxial anisotropy with ordinary optical index  $n_o = 2.617$  and extraordinary optical index  $n_e = 2.666$  at  $780 \text{ nm}$ .<sup>18</sup> Hence, special care is required, for example, to keep the correct circular polarizations of MOT beams on the atom cloud. Assuming no polarization-dependent losses (which can be made negligible by an appropriate AR coating), the effect of the atom chip on the beam polarization can be described by a Jones matrix of

the form  $U_{\text{chip}} = R_\alpha G_\gamma R_{-\alpha}$ , where  $R_\alpha$  is a rotation matrix with angle  $\alpha$  and  $G_\gamma = \begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix}$ . Using computations similar to those described in Ref. 19, it can be proven that circular polarizations can be preserved in the retroreflection configuration sketched on Fig. 2 with only one single quarter-wave plate for each retro-reflected beam, provided the latter is oriented such that

$$\theta = \alpha - \pi/4, \quad (1)$$

where  $\theta$  is the angle between the quarter-wave plate eigenbasis and the reference polarization basis. As can be seen in Eq. (1), the optimal value of  $\theta$  depends only on the chip polarization eigenbasis and not on the phase shift  $\gamma$ . One can, therefore, expect robustness to variations in the refractive indices and thickness of the chip, induced for instance by temperature changes.

For the proof-of-concept experimental demonstration of a MOT with several of the beams passing through the atom chip, we have used the setup sketched on Fig. 2. The glass vacuum cell was manufactured by the company ColdQuanta, with a differential vacuum system. A  $^{87}\text{Rb}$  MOT is formed in the ultra-high vacuum part of the cell and is loaded from a two-dimensional MOT with a push beam. The chip rests on a 1 mm-thick support on top of the glass cell. Quarter-wave plates are placed between the chip and the retro-reflection mirrors and are oriented according to Eq. (1) to ensure the same circular polarization in both beam directions inside the vacuum cell.

The possibility of imaging through the transparent chip, possibly between wires, is illustrated on Fig. 3(b). In many experiments detection occurs typically just after current has been run into the chip wires. It is therefore important that imaging is not distorted by refractive index inhomogeneities induced by a possibly time-varying temperature gradient within the chip. We have performed thermal infrared camera measurements in order to monitor the spatial dependence of temperature on the chip surface. The central wire of the chip was heated up by  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ , corresponding to a worst case scenario. We have observed a temperature difference on the order of  $2 \text{ }^\circ\text{C}$  between the center and the side of the SiC chip surface (distant by  $7.5 \text{ mm}$ ). Let us now consider the overall phase shift  $\phi$  for a ray of light going through the chip. We know from our Fabry-Perot measurements that  $\phi$  will increase by  $\pi$  over a temperature change of about  $11 \text{ }^\circ\text{C}$ . Consequently, we estimate that  $\phi/(2\pi)$  will change by less than 1% over an area of radius  $0.8 \text{ mm}$  on the chip surface, which may be deemed acceptable to avoid large distortions, depending on the application. For a future experiment where the chip would be part of the vacuum chamber itself, with atoms located  $1 \text{ mm}$  away from its surface, this  $0.8 \text{ mm}$  value would correspond, taking into account the  $\sim 400 \text{ }\mu\text{m}$  chip thickness, to a maximum numerical aperture of about 0.25. With proper thermal management, we expect that even higher numerical aperture values may be possible.

The number of atoms in a MOT can be estimated from fluorescence measurements using a photodiode. Following the analysis described in Ref. 20, we evaluate the atom number to  $1 \times 10^8$  for our MOT. This is comparable to the  $5 \times 10^7$  atoms

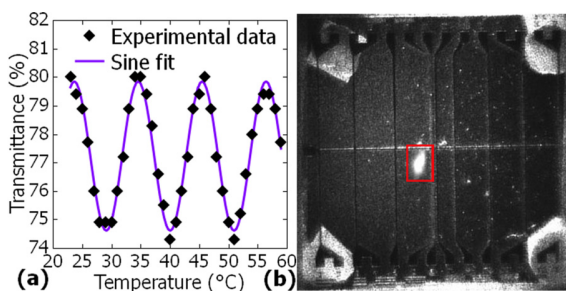


FIG. 3. (Color online) (a) Light transmittance of the SiC chip measured as a function of its surface temperature, showing a Fabry-Perot effect due to insufficient anti-reflection coating of the chip. The wavelength, angle of incidence and polarization state are the same as in the MOT setup. (b) Fluorescence imaging from the MOT atoms (in the red box) as seen through the chip.



that were detected in our previous setup, which was similar to the configuration presented here but without a chip, and probably not as carefully optimized, explaining the difference in the number of atoms. Our setup also stands the comparison to the performances of other techniques of near-chip magneto-optical trapping, for example Ref. 1, while allowing unrestricted optical access to the atom cloud.

The atom number estimated above corresponds to a MOT center located 1.5 mm below the vacuum cell ceiling. By translating the quadrupole coils and realigning the optomechanical apparatus, we have measured the number of atoms as a function of the latter distance. We found that the number of atoms is reduced by 50% at about 1 mm and quickly drops to zero thereafter, which is consistent with previous observations<sup>1</sup> and is probably due to a reduction of the capture volume. The impossibility in our particular setup to translate the optomechanical apparatus in order to realign it optimally with the magnetic quadrupole center, together with the mask used to ensure the relevance of our proof-of-principle setup, placed drastic geometrical constraints on the trapping beams which prevented the formation of a MOT much further than 2.5 mm. Any higher distance could however be achieved in principle thanks to the transparent chip, provided the optomechanical apparatus is set up accordingly. This could in particular allow a larger capture volume than in the case of a mirror-MOT, while being much closer to the chip surface than in the case of a standard 6-beam MOT.

The possibility of trapping atoms near transparent chips could open the way to applications combining for example the simplicity of chip evaporative cooling with more complex architectures requiring full optical access such as Ramsey-Bordé interferometers<sup>21</sup> or Bloch oscillators.<sup>22</sup> It could also be a way of combining optical trapping techniques with atom chip technology. Detection through the chip could moreover be a powerful tool to improve numerical aperture for atom optical manipulation or in-situ detection with possible applications to on-chip atomic clocks or quantum information processing. In this respect, lenses etched directly on the SiC chip<sup>23</sup> could combine a large numerical aperture with a particularly compact and scalable setup.

This work has been carried out within the CATS project ANR-09-NANO-039 funded by the French National Research Agency (ANR) in the frame of its 2009 program in Nanoscience, Nanotechnologies, and Nanosystems (P3N2009).

- <sup>1</sup>J. Reichel, W. Hänsel, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3398 (1999).
- <sup>2</sup>R. Folman, P. Krüger, D. Cassettari, B. Hessmo, T. Maier, and J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4749 (2000).
- <sup>3</sup>J. Fortágh, and C. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 235 (2007).
- <sup>4</sup>J. Reichel and V. Vuletić, *Atom Chips* (John Wiley & Sons, Weinheim, Germany, 2011).
- <sup>5</sup>T. Schumm, S. Hofferberth, L. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, and P. Krüger, *Nat. Phys.* **1**, 57 (2005).
- <sup>6</sup>P. Böhi, M. Riedel, J. Hoffrogge, J. Reichel, T. Hänsch, and P. Treutlein, *Nat. Phys.* **5**, 592 (2009).
- <sup>7</sup>C. Deutsch, F. Ramirez-Martinez, C. Lacroûte, F. Reinhard, T. Schneider, J. N. Fuchs, F. Piéchon, F. Laloë, J. Reichel, and P. Rosenbusch, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 020401 (2010).
- <sup>8</sup>T. Calarco, E. A. Hinds, D. Jaksch, J. Schmiedmayer, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **61**, 022304 (2000).
- <sup>9</sup>P. Treutlein, T. W. Hänsch, J. Reichel, A. Negretti, M. A. Cirone, and T. Calarco, *Phys. Rev. A* **74**, 022312 (2006).
- <sup>10</sup>P. Rosenbusch, *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **95**, 227 (2009).
- <sup>11</sup>A. Zatezalo, V. Vuletić, P. Baker, and T. Poling, in *Position, Location and Navigation Symposium, 2008 IEEE/ION*, 5-8 May 2008 (IEEE, New York, NY, 2008), pp. 940–950.
- <sup>12</sup>J. Armijo, C. L. Garrido Alzar, and I. Bouchoule, *Eur. Phys. J. D* **56**, 33 (2010).
- <sup>13</sup>S. Groth, P. Krüger, S. Wildermuth, R. Folman, T. Fernholz, J. Schmiedmayer, D. Mahalu, and I. Bar-Joseph, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 2980 (2004).
- <sup>14</sup>CREE, *Silicon Carbide Substrates and Epitaxy Product Specification* (CREE, Durham, NC, 2011).
- <sup>15</sup>D. M. Farkas, K. M. Hudek, E. A. Salim, S. R. Segal, M. B. Squires, and D. Z. Anderson, *Appl. Phys. Lett.* **96**, 093102 (2010).
- <sup>16</sup>S. Dakshinamurthy, N. Quick, and A. Kar, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **40**, 353 (2007).
- <sup>17</sup>S. Saddow and A. Agarwal, *Advances in Silicon Carbide Processing and Applications* (Artech House, Boston, MA, 2004).
- <sup>18</sup>P. Shaffer, *Appl. Opt.* **10**, 1034 (1971).
- <sup>19</sup>N. Vansteenkiste, P. Vignolo, and A. Aspect, *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2240 (1993).
- <sup>20</sup>H. Lewandowski, D. Harber, D. Whitaker, and E. Cornell, *J. Low Temp. Phys.* **132**, 309 (2003).
- <sup>21</sup>Q. Bodart, S. Merlet, N. Malossi, F. P. D. Santos, P. Bouyer, and A. Landragin, *Appl. Phys. Lett.* **96**, 134101 (2010).
- <sup>22</sup>P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Europhys. Lett.* **71**, 730 (2005).
- <sup>23</sup>H. Lee, D. Kim, Y. Sung, and G. Yeom, *Solid Films* **475**, 318 (2005).

# Chapitre 10

## Conclusion générale

Dans ce mémoire de thèse on a présenté en première partie l'étude systématique des bruits auxquels on peut s'attendre lors de mesures du champ de pesanteur avec un gravimètre embarqué dans un sous-marin ou dans un avion, y compris le bruit gravitationnel des vagues. On a proposé quelques applications de la gravimétrie et on a présenté les ordres de grandeur des signaux correspondants à ces applications. On a enfin étudié la possibilité de fabriquer un système simple et compact fondé sur la technologie des **MicroElectroMechanical Systems - Microsystèmes électromécaniques (MEMS)** pour mesurer le champ de pesanteur.

La poursuite d'applications industrielles innovantes de la gravimétrie passera entre autres par l'étude plus précise de la relation entre signal et bruit, avec la mise au point d'algorithmes et la quantification des besoins de bande passante et de rapport signal à bruit en fonction des applications. Il s'agira alors de valider expérimentalement les modèles présentés dans ce manuscrit, de comparer l'utilisation du signal de pesanteur aux autres types de mesure qui peuvent servir pour les mêmes applications, et de déterminer leur éventuelle complémentarité.

La seconde partie montre le travail effectué en gravimétrie atomique sur puce. On a en effet participé à la conception, aux choix techniques et à la mise en œuvre d'un démonstrateur de gravimètre atomique dans lequel les atomes ne sont pas en chute libre, mais sont au contraire piégés au voisinage d'un substrat en carbure de silicium. Avec le reste de l'équipe, on a de plus posé les premiers jalons de la description théorique de l'interféromètre, et on a envisagé quelques causes possibles d'incertitude pour la mesure du champ de pesanteur grâce à des ondes de matière piégées avec séparation spatiale des états. Au moment où ces lignes sont écrites, l'équipe du projet **CATS** est en train de préparer la version définitive du démonstrateur à atomes froids, d'une part en finalisant la préparation de la puce à atomes en carbure de silicium, avec la fonction de séparation spatiale cohérente des états atomiques, indispensable à l'interféromètre que l'on veut réaliser, et d'autre part en poursuivant la mise au point des dispositifs optiques et magnétiques de capture des atomes pour l'interférométrie à l'aide de la cellule à atomes avec une puce commerciale. Le maintien de la cohérence dans l'interféromètre à états atomiques séparés spatialement fait partie des questions délicates dont l'étude autant théorique qu'expérimentale devra être approfondie dans la suite du projet.

A plus longue échéance la miniaturisation de chaque sous-système du gravimètre à atomes piégés devra être résolue pour envisager la mise en service d'un système répondant



aux objectifs de compacité poursuivis. A ce titre notre projet rejoint les projets de systèmes à atomes froids en microgravité, pour lesquels d'autres équipes développent notamment des lasers compacts et des composants fibrés pour la manipulation optique des atomes [Geiger, 2011, Schmidt *et al.*, 2011]. Une piste pour aller au-delà de la manipulation magnétique des atomes avec des champs statiques, radiofréquences et micro-ondes avec une puce à atomes consistera à utiliser les technologies de microfabrication et d'électronique intégrée pour placer les composants nécessaires à la production des courants qui engendrent ces champs magnétiques directement sur la puce, à proximité immédiate des antennes plutôt que de les garder déportés. On peut même envisager à terme d'intégrer également les sources laser et les composants optiques sur la puce, de façon à réduire les dispositifs à atomes froids à une enceinte à vide avec une puce incluant l'ensemble des fonctions nécessaires au refroidissement, au piégeage et à l'interférométrie des atomes, depuis le piège magnéto-optique jusqu'à la détection.

Un autre aspect de la mise au point est l'intégration du dispositif dans un système complet, pour les applications industrielles envisagées de la gravimétrie. Le contrôle fin sur la géométrie des pièges magnétiques à champs statiques et oscillants que l'on peut obtenir grâce aux puces à atomes permet d'imaginer l'intégration dans une seule cellule à atomes de plusieurs interféromètres fonctionnant sur la même puce. On pourrait choisir par exemple de combiner en parallèle trois accéléromètres à atomes piégés pour reconstituer l'accélération vectorielle du porteur, avec une horloge atomique comme celle proposée dans la référence [Deutsch, 2012], ainsi qu'un gyromètre à atomes [Segal, 2010] à un ou plusieurs axes pour obtenir une centrale inertielle complète sur puce. Enfin l'hybridation entre capteurs inertiels classiques et capteurs à atomes froids pourrait résoudre comme dans le cas des horloges atomiques les limites de bande passante qui pénalisent encore les capteurs à ondes de matière.

# Annexes



# Annexe A

## Explication des notations

On résume ici les notations employées couramment dans le document, lorsque ce n'est pas spécifié différemment localement.

### A.1 Transformations de Fourier

Pour les transformations de Fourier, on utilise la définition suivante. Soit  $h$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$ , alors sa transformée de Fourier  $\mathcal{FT}\{h\}$  vaut sous réserve d'existence

$$\mathcal{FT}\{h\}(\underline{\kappa}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x h(\underline{r}) e^{-2i\pi \underline{\kappa} \cdot \underline{r}} \quad (\text{A.1a})$$

Dans ces conditions la transformée inverse de Fourier  $\mathcal{FT}^{-1}\{h\}$  de  $h$  vaut

$$\mathcal{FT}^{-1}\{h\}(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \kappa h(\underline{\kappa}) e^{2i\pi \underline{\kappa} \cdot \underline{r}} \quad (\text{A.1b})$$

### A.2 Gravimétrie

On regroupe dans cette section quelques notations utilisées pour la description de la pesanteur et de sa mesure.

#### A.2.1 Repérage de l'espace

Chaque calcul peut avoir son propre système de coordonnées. On tâche cependant pour la cohérence du document de garder dans la mesure du possible quelques conventions pour le repérage à la surface de la Terre.

#### Coordonnées géographiques

Les effets du bourrelet équatorial terrestre sur le champ de pesanteur sont considérés dans le document. On se contente cependant de les étudier à l'ordre le plus bas. Par conséquent les coordonnées utilisées sont celles d'un repère sphérique. La latitude est notée par la lettre  $\varphi$  tandis que la longitude est représentée par la lettre  $\lambda$  et  $r$  est la distance du point courant au centre de la Terre.

Dans le cas où l'extension des modèles se limite à quelques centaines de kilomètres au plus, l'approximation par un plan tangent est appropriée. Dans ce cas les coordonnées cartésiennes locales  $x, y, z$  sont utilisées. Lorsque cela a une importance l'abscisse  $x$  pointe vers l'Est, et l'ordonnée  $y$  est croissante vers le Nord. Dans tout ce manuscrit, la cote  $z$  est verticale, et croissante vers le haut. On confond en général la verticale, perpendiculaire au géoïde et portée par le champ de pesanteur local, avec la direction du centre de la Terre, la perpendiculaire à un ellipsoïde de référence ou encore avec la direction du champ normal. On note  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  la base associée au repère  $(x, y, z)$ .

La jonction entre les deux systèmes se fait en remarquant l'identité des différentielles

$$\begin{aligned} dx &= r \sin \varphi d\lambda \\ dy &= r d\varphi \\ dz &= dr \end{aligned}$$

Par convention, lorsque les variables  $r$  et  $z$  sont présentes dans le même calcul,  $r$  représente la *distance moyenne* au centre de la Terre, soit 6370 km environ à la surface terrestre, tandis que  $z$  représente les petites variations d'altitude du point courant autour de  $r$ . On ne distingue pas en général dans ce document hauteur et altitude. Enfin dans certains cas on note  $\underline{r}$  le vecteur position du point courant, sans faire référence au centre de la Terre.

## A.2.2 Champ et gradient

Le vecteur champ de pesanteur en un point  $M$  est noté  $\underline{g}(M)$ . On distingue dans  $\underline{g}$  le champ normal  $\underline{g}_0$ , qui est lié uniquement à la géographie, et les anomalies notées  $\delta\underline{g}$ . Lorsque l'on écrit  $\underline{g} = \underline{g}_0 + \delta\underline{g}$ , suivant le contexte  $\underline{g}_0$  et  $\delta\underline{g}$  représentent respectivement le champ normal et la somme de toutes les contributions anormales, ou bien  $\delta\underline{g}$  est une anomalie d'origine spécifiée, et  $\underline{g}_0$  représente la somme de toutes les autres contributions, qui est proche du champ normal en général.

On s'intéresse souvent aux valeurs *algébriques*  $g, g_0$  et  $\delta g$ . Ces valeurs sont prises comme projection suivant l'axe vertical *descendant*, c'est-à-dire que  $g = \underline{g} \cdot (-\underline{e}_z)$ . Lorsque l'on note  $\frac{\partial g}{\partial z}$  il s'agit donc de la dérivée *vers le haut* de la projection du champ *vers le bas*, de sorte que  $g$  décroît avec  $z$ . De la même manière que pour le champ de pesanteur, on écrit en général  $\underline{T} = \underline{T}_0 + \delta\underline{T}$  avec  $\underline{T}_0$  la partie normale ou fixe du tenseur gradient, et  $\delta\underline{T}$  l'anomalie.

Le tenseur gradient est noté  $\underline{T}$ . Avec  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$  deux coordonnées, on note ainsi  $T_{\alpha\beta} = \underline{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{g}}{\partial \beta}$ . L'ordre de  $\alpha$  et  $\beta$  est sans importance car le tenseur  $\underline{T}$  est symétrique. On fera attention qu'avec la définition donnée ci-dessus de la valeur algébrique  $g$  du champ de pesanteur, on a  $T_{z\alpha} = -\frac{\partial g}{\partial \alpha}$ . En particulier  $T_{zz}$  est positif.

Lorsque l'on souhaite distinguer la valeur mesurée du champ ou du gradient de sa valeur vraie, on note  $\tilde{\underline{g}}, \tilde{g}, \tilde{\underline{T}}$  et  $\tilde{T}_{\alpha\beta}$  les valeurs mesurées, potentiellement entachées d'erreur. L'erreur ou l'incertitude, suivant le contexte, est notée  $\Delta a$  pour une grandeur  $a$ .

Les unités du Système International sont préférées à celles du système CGS. Le champ de pesanteur est exprimé en  $\text{m s}^{-2}$  tandis que le gradient l'est en  $\text{s}^{-2}$ . On rappelle que

$1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$  et que  $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$  soit  $0,1 \mu\text{Gal m}^{-1}$ . On préfère ainsi le Newton à la dyne pure.

### A.2.3 Calculs de champ

D'après les travaux d'Isaac Newton le champ de pesanteur créé par un corps est proportionnel à la masse du corps, à l'inverse du carré de la distance au corps, et le vecteur champ pointe vers la source. La constante de proportionnalité est la *constante universelle de gravitation*, notée  $G$ .

On note en général  $\rho$  la masse volumique du point courant. L'expression du champ de gravité en un point donné  $M$  vaut donc d'après la théorie de Newton :

$$\underline{g}(M) = -G \iiint_{P \in \mathbb{R}^3} \rho(P) \frac{MP}{MP^3} dV(P) \quad (\text{A.2})$$

Lorsque le champ total est considéré,  $\rho$  est toujours positif. En revanche la même formule peut être utilisée pour calculer une anomalie de pesanteur. Dans ce cas  $\rho$  représente une anomalie de masse volumique, c'est-à-dire une différence de masse volumique par rapport à une distribution de masse de référence, et  $\rho$  devient alors une grandeur algébrique.

On peut montrer que l'équation (A.2) est équivalente à l'équation de Poisson. Celle-ci s'écrit, pour le champ de pesanteur :

$$\nabla \cdot \underline{g}(M) = -4\pi G \rho(M)$$

## A.3 Etats électroniques des atomes

On utilise la notation Bra / Ket pour noter les états atomiques. On note parfois en plus de la structure électronique orbitale, l'état dans la structure hyperfine, avec les nombres quantiques  $F$  et  $m_F$ .  $F$  correspond au moment cinétique total de l'atome, et  $m_F$  à sa projection suivant un axe de quantification, souvent le champ magnétique local. Dans ce manuscrit on s'intéresse particulièrement à la raie  $D_2$  du rubidium 87, qui correspond à la transition  $|5^2S_{1/2}\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}\rangle$ , donc les états hyperfins des niveaux  $5^2S_{1/2}$  et  $5^2P_{3/2}$  sont fréquemment manipulés. On choisit de distinguer les états hyperfins du niveau excité  $5^2P_{3/2}$  en notant  $F'$  le moment cinétique pour cet état. Lorsque cela ne permet pas de contester nos particules, on omet le terme orbital  $5^2S_{1/2}$  ou  $5^2P_{3/2}$  de la notation, qui est alors sous-entendu dans la notation du niveau hyperfin. Avec cette notation, la transition  $|F\rangle \rightarrow |F'\rangle$  correspond ainsi à  $|5^2S_{1/2}, F\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F'\rangle$ .



# Annexe B

## Concepts de métrologie

Les termes utilisés pour qualifier une mesure physique sont variables suivant les communautés. Ils recouvrent des ensembles de concepts de métrologie parfois flous, et il convient par conséquent d'explicitier les notions employées dans ce manuscrit. Une partie de la confusion provient de la divergence d'objectifs entre les utilisateurs des instruments, qui souhaitent minimiser l'incertitude de mesure dans leurs applications, et les concepteurs, qui caractérisent de façon plus approfondie leurs instruments, afin d'optimiser leurs comportements. On introduira également pour ce manuscrit des termes qui, d'un usage général, ne sont pas formellement définis par le **BIPM**. Les documents sur lesquels se fonde principalement cette annexe sont le *Vocabulaire international de métrologie* du **BIPM** [BIPM, 2012], l'ouvrage *Frequency Standards : Basics and Applications* [Riehle, 2004], dans lequel Fritz Riehle explique en détail certains concepts importants de métrologie et le *Traitement des signaux pour les systèmes sonars* de Michel Bouvet [Bouvet, 1991], pour les aspects mathématiques de la densité spectrale de puissance.

### B.1 Point de vue de l'utilisateur : la mesure unique

« A quelle distance du point indiqué par ma centrale inertielle mon appareil peut-il vraisemblablement se trouver ? »

« La fiabilité de mes données me permet-elle de confirmer la présence d'une anomalie géologique à cet endroit ? »

« D'après la mesure de mon gravimètre, de quelle valeur le champ de pesanteur au sommet du Piton de la Fournaise a-t-il effectivement changé depuis les mesures de l'année dernière ? »

« Quelle barre d'erreur indiquer pour ma mesure de la constante de structure fine ? » se demandent respectivement l'aviateur perdu, le prospecteur pétrolier, le géologue, et le physicien<sup>1</sup>. Ces questions caractéristiques de l'utilisateur, sur l'intervalle de confiance d'une mesure, se réfèrent à l'incertitude sur une mesure isolée. L'*exactitude de mesure*, ou simplement *exactitude* (*measurement accuracy* ou *accuracy* en anglais), définie dans le vocabulaire du **BIPM** [BIPM, 2012] comme « [l']étroitesse de l'accord entre une valeur mesurée et une valeur vraie d'un mesurande » est ainsi le concept principal concernant la fiabilité des données pour un utilisateur. La référence [BIPM, 2012] précise cependant

---

1. avant de soumettre une valeur expérimentale au **Committee on Data for Science and Technology - Comité de données pour la science et la technologie (CODATA)**.



que l'exactitude n'est pas une grandeur, et ne peut pas être mesurée numériquement. La grandeur numérique associée est l'*incertitude de mesure* ou *incertitude* (*measurement uncertainty* ou *uncertainty* en anglais) « qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande, à partir des informations utilisées ».

Pour évaluer l'incertitude d'une mesure, on décompose en pratique l'erreur en deux parties. L'*erreur systématique*, « composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible » [BIPM, 2012], et l'*erreur aléatoire*, « composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, varie de façon imprévisible » [BIPM, 2012]. L'image communément retenue pour expliquer la différence entre erreur systématique et erreur aléatoire est celle du tir à la carabine sur une cible (voir la figure B.1). L'erreur systématique correspond dans ce cas à la distance entre le centroïde des impacts et le centre de la cible, qui représente la valeur vraie de la mesurande. L'erreur systématique caractérise la *justesse* de la mesure (*trueness* en anglais), définie comme l'« étroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de valeurs mesurées répétées et une valeur de référence » [BIPM, 2012]. L'erreur aléatoire est la dispersion des impacts autour de leur centroïde, ce qui caractérise la *fidélité* de mesure (*precision* en anglais), c'est-à-dire l'« étroitesse de l'accord entre les indications ou les valeurs mesurées obtenues par des mesurages répétés du même objet ou d'objets similaires dans des conditions spécifiées » [BIPM, 2012]. L'erreur systématique et l'erreur aléatoire peuvent être estimées, la première par un raisonnement *ab initio* ou par comparaison à un étalon ; la seconde par estimation de l'écart-type de mesure grâce à des séries de mesure. D'après le vocabulaire du BIPM la justesse n'est pas une grandeur numérique. Dans ce manuscrit on caractérise la justesse et la fidélité avec les estimations d'erreur systématique et d'erreur aléatoire, lorsqu'aucune confusion n'est possible. On parle de plus indifféremment d'erreur systématique et de *biais*, qui est l'estimation de cette erreur systématique.

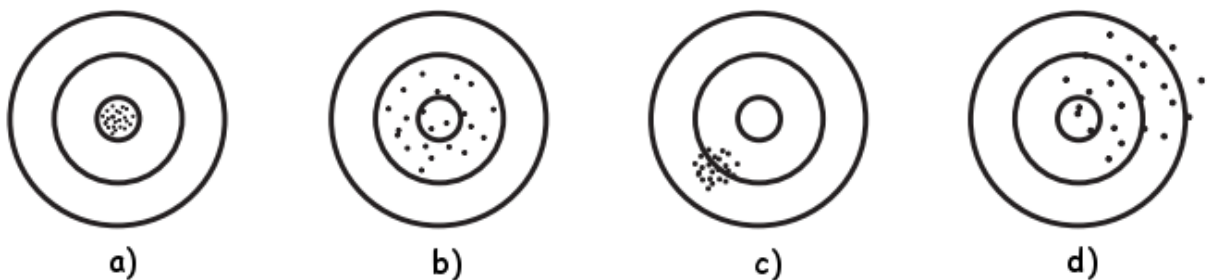


FIGURE B.1: Image du tir à la carabine, tirée de la référence [Riehle, 2004]. La cible de (a) représente un tir à la fois juste et fidèle, celle de (b) un tir juste mais non fidèle, celle de (c) un tir fidèle mais non juste, et enfin les impacts sur la cible (d) montrent un tir qui n'est ni juste, ni fidèle.

On peut noter que certaines communautés scientifiques emploient les termes de *précision* et d'*exactitude* pour la *fidélité* et la *justesse*. On suit ici le dictionnaire du BIPM, et l'on retient uniquement les termes de justesse et de fidélité en ce qui concerne la métrologie.

Les erreurs systématiques ne sont en général pas assez bien connues pour que la dispersion des mesures suffise à elle seule à caractériser l'incertitude. La difficulté de comparaison à un étalon peut être une première cause de méconnaissance des erreurs systématiques. Ensuite le biais d'un instrument de mesure peut varier dans le temps, si

bien qu'on ne peut pas nécessairement le caractériser définitivement. La propriété d'un instrument relative aux variations de son biais de mesure est la *stabilité*, c'est-à-dire « [sa] propriété [...] selon laquelle celui-ci conserve ses propriétés métrologiques constantes au cours du temps » [BIPM, 2012]. Pour les gravimètres relatifs on parle également de *dérive*. D'après le vocabulaire du BIPM [BIPM, 2012] la dérive est la « variation continue ou incrémentale dans le temps d'une indication, due à des variations des propriétés métrologiques d'un instrument de mesure », ce qui exclut spécifiquement les variations liées à des grandeurs d'influence. En pratique il n'est pas toujours possible de différencier une dérive propre à l'instrument d'une influence par un paramètre environnemental.

## B.2 Dépendances temporelles

On a vu à la section précédente que pour caractériser l'incertitude d'une mesure, il s'agissait d'estimer la justesse, la fidélité et la stabilité de son processus. De ce point de vue l'utilisateur s'intéresse aux propriétés stochastiques d'une mesure unique. L'estimation des propriétés stochastiques suppose en pratique l'étude de la série temporelle des mesures délivrées par l'instrument. A moins que cette série ne puisse effectivement être considérée comme un ensemble de variables indépendantes et identiquement distribuées, la moyenne et l'écart-type de la série temporelle ne sont pas de bons estimateurs des caractéristiques stochastiques des mesures. Lorsque les variations temporelles des mesures et leurs corrélations deviennent primordiales, d'autres méthodes sont nécessaires afin d'estimer les caractéristiques des mesures produites par un instrument. C'est le cas en particulier lorsque l'on s'intéresse aux variations temporelles d'un signal, comme par exemple à une fréquence pour la métrologie du temps, ou au champ de pesanteur mesuré par un instrument de laboratoire. La densité spectrale de bruit (ou densité spectrale de puissance) et la variance d'Allan sont deux outils mathématiques fréquemment utilisés pour décrire les propriétés statistiques d'une série de mesures [Riehle, 2004, Bouvet, 1991].

### B.2.1 Densité spectrale de bruit

Un processus aléatoire réel  $x$  à temps continu peut souvent être supposé *stationnaire du second ordre*, ce qui signifie que ses moments d'ordre 1 et 2 sont indépendants du temps, et que sa fonction d'autocorrélation est continue à l'origine [Bouvet, 1991]. La fonction d'autocorrélation  $\gamma_x$  de  $x$  est définie pour un processus centré par

$$\gamma_x(\tau) = \mathbb{E} [x(t)x(t - \tau)]$$

La fonction d'autocorrélation  $\gamma_x$  indique dans quelle mesure deux valeurs de  $x$  prises à des temps différents sont indépendantes d'un point de vue stochastique. Cette fonction est toujours maximale à l'origine. En général les processus physiques admettent des temps caractéristiques de corrélation. Lorsque deux valeurs sont prises avec un intervalle supérieur au temps de corrélation du processus, elles peuvent être considérées indépendantes.

Pour son étude dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier d'un bruit n'a pas de sens, étant donné qu'un processus stationnaire non nul n'est pas de carré sommable. On peut en revanche étudier la moyenne

$$S_x(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} \left\{ \left| \int_{-T}^{+T} x(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right|^2 \right\} \quad (\text{B.1})$$

appelée *densité spectrale de puissance*, ou *densité spectrale de bruit*, qui existe pour les signaux d'énergies finies, c'est-à-dire ceux qui admettent des moments de premier et second ordre. Sous certaines hypothèses d'ergodicité on a alors d'après le théorème de Wiener-Khintchine [Bouvet, 1991] :

$$S_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\tau) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \quad (\text{B.2})$$

La densité spectrale de bruit est une notion de variance en fonction de la fréquence. Son intégrale vaut  $\gamma_x(0)$ , soit la variance totale du bruit. Pour un signal en volts, la densité spectrale de bruit s'exprime en  $\text{V}^2/\text{Hz}$ .

Comme pour une transformée de Fourier classique, la densité spectrale de puissance est de plus compatible avec la représentation spectrale de filtres linéaires homogènes, ce qui constitue un autre intérêt de cet outil mathématique. Si  $\tilde{h}$  est la réponse fréquentielle d'un tel filtre linéaire homogène, alors la densité spectrale de bruit  $S'_x(\nu)$  à la sortie du filtre sera

$$S'_x(\nu) = |\tilde{h}(\nu)|^2 \cdot S_x(\nu) \quad (\text{B.3})$$

On peut enfin remarquer que la densité spectrale de puissance n'a pas de sens pour un signal déterministe, puisqu'il n'est en général pas stationnaire. Pour un signal de carré sommable, l'expression (B.1) est d'ailleurs nulle.

D'un point de vue mathématique, il est cohérent d'exprimer une densité spectrale de bruit en unités carrées par hertz. De la même manière qu'une variable aléatoire est souvent caractérisée par son écart-type plutôt que par sa variance, la racine carrée de la densité spectrale de bruit est souvent donnée, car sa dimension, en unités par racine de hertz, est plus proche de celle du signal de départ, ce qui rend cette grandeur plus intuitive.

Dans ce manuscrit, on ne distingue pas dans le texte la densité spectrale de puissance et sa racine, qui recouvrent le même concept. Pour la visualisation des données sous forme de spectre, on utilise en général la racine de la densité spectrale de puissance, ce qui est indiqué notamment par l'unité dans laquelle le spectre est exprimé. Pour éviter la confusion dans les formules et pour l'application de l'équation (B.3), pour un processus aléatoire  $x$  on note  $S_x$  sa densité spectrale de puissance et  $S_x^{1/2}$  la racine de cette quantité.

## B.2.2 Variance d'Allan

La densité spectrale de puissance contient l'essentiel de l'information concernant les corrélations temporelles d'un processus aléatoire à temps continu, stationnaire du second ordre. Malgré l'apparente simplicité des formules (B.1) et (B.2), l'estimation de la densité spectrale de puissance est compliquée par la présence simultanée dans ces expressions de moyennes d'ensembles et d'intégrations temporelles [Bouvet, 1991]. L'interprétation de cette *densité spectrale* qui n'est pas purement une variance n'est en outre pas toujours très intuitive. Enfin les phénomènes de dérive à long terme ne peuvent pas être étudiés par cet outil, qui prend la stationnarité des signaux pour hypothèse de base. D'où l'intérêt en métrologie de la *variance d'Allan*, un autre outil, plus intuitif, et un peu plus général puisqu'il permet de visualiser la dérive à long terme d'un instrument.

Suivant les sources la définition de la variance d'Allan se confond parfois avec son estimation [Allan, 1966, El-Sheimy *et al.*, 2008, Ng, 1993, Cheinet, 2006]. Le principe consiste

à considérer l'intégration  $\bar{X}^T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(\tau) d\tau$  du signal  $x$ , puis à calculer la variance d'Allan

$$\sigma_x^2(T) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \left| \bar{X}^T(t+T) - \bar{X}^T(t) \right|^2 \right] \quad (\text{B.4})$$

avec l'hypothèse que cette valeur est indépendante du temps  $t$  et ne dépend donc que du temps d'intégration  $T$ .

Le calcul se fait en pratique en considérant un échantillonnage  $(x_k)_{1 < k < N}$  de  $x$  de pas  $\tau$ . Pour un temps  $T = n\tau$  on regroupe  $M = \frac{N}{n}$  paquets de  $n$  échantillons suivant

$$X_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1+n \cdot i}^{n \cdot (i+1)} x_k \quad (\text{B.5})$$

pour  $i$  compris entre 0 et  $M - 1$ . La variance d'Allan est alors estimée par

$$\sigma_x^2(T) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{i=1}^{M-1} (X_i - X_{i-1})^2 \quad (\text{B.6})$$

qui a du sens pour  $M$  suffisamment grand. Enfin on trace souvent l'écart-type d'Allan, racine carrée de la variance d'Allan, de même dimension que le signal étudié. Cette dimension est la première différence avec la densité spectrale de puissance puisque comme un écart-type classique, l'écart-type d'Allan représente une dispersion. La variance d'Allan est par ailleurs plus générale que la densité spectrale de puissance, puisqu'elle peut être calculée notamment pour des signaux soumis à une dérive. Son calcul peut être effectué sans difficulté, directement à partir de (B.5) et de (B.6).

A partir de (B.4) on obtient le lien entre densité spectrale de puissance et variance d'Allan [El-Sheimy *et al.*, 2008] :

$$\sigma_x^2(T) = 4 \int_0^{+\infty} df S_x(f) \frac{(\sin \pi f T)^4}{(\pi f T)^2} \quad (\text{B.7})$$

Cette relation montre que la variance d'Allan découle directement de la densité spectrale de puissance. Le contraire n'est pas vrai en général, puisqu'il faut résoudre l'équation fonctionnelle (B.7) pour retrouver la densité spectrale de puissance à partir de la variance d'Allan. La relation (B.7) permet en revanche le calcul des variances d'Allan pour les bruits dont on connaît les densités spectrales. Lorsque ces bruits ont des origines physiques distinctes, ils sont en général décorrélés, si bien que leurs variances d'Allan s'additionnent. Les bruits intéressants les plus communs ont des densités spectrales de puissance proportionnelles aux puissances de  $\frac{1}{f}$ , au moins sur les bandes de fréquences pertinentes, ce qui se traduit par des variances d'Allan en puissances de  $T$ . Sur un graphe en échelle logarithmique, ces types de bruits ressortent ainsi comme des portions de droites. L'analyse de leurs pentes permet d'identifier l'origine physique des bruits prédominants en fonction du temps d'intégration du signal.

A titre d'exemple considérons comme dans [Cheinet, 2006] un signal  $x(t) = x_0 + b(t) + \alpha t$  de valeur  $x_0$  soumise à un bruit blanc  $b$  de densité spectrale de puissance  $b_0$  et à une dérive

de pente  $\alpha$ . Le calcul à partir de (B.4) donne

$$\sigma_x^2(T) = \frac{\alpha^2 T^2}{2} + \frac{b_0^2}{T}$$

$$\text{soit } \sigma_x(T) \approx b_0 \cdot T^{-1/2} \text{ pour } T \ll \left(\frac{2b_0^2}{\alpha^2}\right)^{1/3}$$

$$\text{et } \sigma_x(T) \approx \frac{|\alpha|}{2} \cdot T \text{ pour } T \gg \left(\frac{2b_0^2}{\alpha^2}\right)^{1/3}$$

Le graphe en échelle logarithmique, illustré figure B.2, permet effectivement de distinguer dans ce cas la domination de variance liée au bruit blanc pour les temps d'intégration courts, avec une courbe de pente  $-1/2$ , et la domination de la dérive comme source d'erreur aux temps d'intégration longs, avec une asymptote de pente unité.

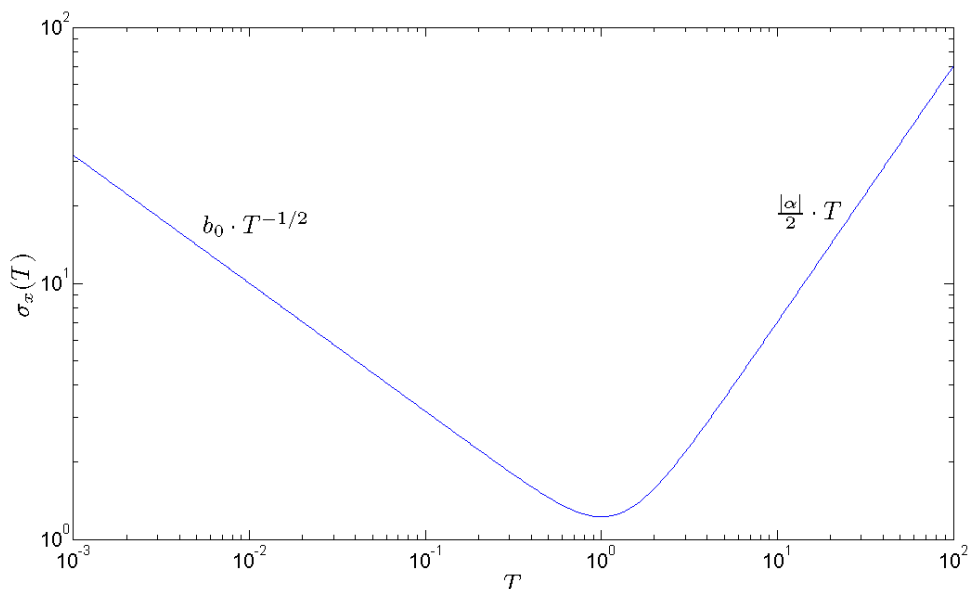


FIGURE B.2: Tracé de l'écart-type d'Allan  $\sigma_x = \sqrt{\frac{\alpha^2 T^2}{2} + \frac{b_0^2}{T}}$  pour  $\alpha = 1$  et  $b_0 = 1$ . Le graphe en échelle logarithmique fait ressortir les asymptotes correspondant au bruit blanc (temps d'intégration courts) et à la dérive (temps d'intégration longs).

## B.3 Autres concepts utiles de métrologie

D'autres notions, absentes de la référence [BIPM, 2012] ou sans indicateur numérique recommandé par le BIPM, sont utiles en métrologie. On détaille ici le vocabulaire supplémentaire utilisé dans ce manuscrit.

### B.3.1 Résolution

D'après le vocabulaire du BIPM [BIPM, 2012], la résolution d'un appareil de mesure est la « plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible

de l'indication correspondante ». Cette grandeur dépend en pratique du niveau de bruit, et donc de la bande de fréquence considérée ou du temps d'intégration. Le minimum de l'écart-type d'Allan donne une indication facile à comparer d'un instrument à l'autre. Dans le cas des gravimètres, ce minimum est en général atteint pour un temps d'intégration inférieur à une journée, donc tout à fait accessible à l'expérimentateur. Nous retenons donc cette notion, sous le nom de *plancher de résolution*. Il ne faut pas confondre cette grandeur avec la résolution du dispositif afficheur ni avec la résolution de numérisation, qui indiquent seulement la variation minimale qui peut être affichée ou distinguée numériquement.

### B.3.2 Fidélité

Le vocabulaire du BIPM [BIPM, 2012] suggère l'utilisation d'un écart-type de mesure pour comparer la fidélité des instruments. D'après les problèmes de corrélations évoqués section B.2 page 213, l'écart-type d'une série de mesures n'est pas un indicateur suffisant. Pour que l'indicateur soit plus concis qu'une courbe entière de variance d'Allan ou de densité spectrale de puissance, on considère la fidélité pour les temps d'intégration courts. A haute fréquence le bruit est en général dominé par un bruit blanc. On appelle dans ce manuscrit la densité de ce bruit blanc la *fidélité ramenée à 1 Hz*. On choisit d'exprimer cette densité en unités de mesure par racine de Hertz, c'est-à-dire en prenant la racine de la densité spectrale de puissance, afin de faciliter la comparaison au signal. Cela correspond, numériquement, à l'écart-type qu'aurait un signal intégré sur une seconde, si l'erreur aléatoire était effectivement dominée par le bruit blanc à 1 Hz et si l'appareil de mesure permettait un échantillonnage suffisant. Cette *fidélité ramenée à 1 Hz* a notamment l'avantage de pouvoir être lue aussi bien sur une courbe de variance d'Allan que sur une courbe de densité spectrale de puissance. Le choix de cet indicateur se justifie pour la gravimétrie par le fait que l'on souhaite en général avoir une donnée rapidement, d'où l'intérêt pour la zone de bruit blanc, mais que le signal cherché est souvent continu, si bien que l'on tâche d'éliminer les aspects temporels du bruit, et que la stabilité est considérée à part dans la caractérisation des instruments.

### B.3.3 Sensibilité

La sensibilité est le « quotient de la variation d'une indication d'un système de mesure par la variation correspondante de la valeur de la grandeur mesurée » c'est-à-dire la dérivée de l'*indication* par rapport à la grandeur mesurée [BIPM, 2012]. La sensibilité peut être vue comme un gain entre la grandeur d'entrée de l'instrument, par exemple le champ de pesanteur, et sa grandeur de sortie, typiquement une tension.

### B.3.4 Dynamique

La *dynamique* d'un instrument (*dynamic range* en anglais) peut désigner le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur mesurable par un instrument. Ce terme est omis dans le vocabulaire du BIPM, qui lui préfère les notions d'intervalle de mesure et d'étendue de mesure mettant en jeu la différence entre deux valeurs extrêmes. La dynamique est utilisée dans ce manuscrit, car elle paraît mieux adaptée à la gravimétrie où des ordres de grandeurs de signal très différents se côtoient.

### B.3.5 Bande passante

La *bande passante* d'un instrument de mesure est la fréquence maximale des signaux mesurables par cet instrument. D'après le théorème de Shannon, la bande passante est toujours inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Une bande passante élevée est importante pour mesurer certains signaux haute fréquence, ainsi que pour éviter les problèmes de crénelage si la bande passante de l'instrument est limitée par l'échantillonnage.

# Annexe C

## Calculs

L'objet de cette annexe est de regrouper un certain nombre de calculs, qui n'ont pas leur place dans le corps du texte car ils présentent un intérêt physique limité. Ces calculs sont quand même au cœur des calculs numériques présentés dans le manuscrit, c'est pourquoi il est important que le lecteur y ait tout de même accès. On utilise dans tous les calculs les notations de l'annexe A.

### C.1 Constantes physiques

Les constantes physiques utilisées sont résumées dans le tableau C.1.

Constante	Notation	Valeur utilisée
Constante de Newton	$G$	$6,673\,84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Constante de Planck	$h$	$6,626\,069\,57(29) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Magnéton de Bohr	$\mu_B$	$9,274\,009\,68(20) \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B$	$1,380\,648\,8(13) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

TABLEAU C.1: Liste des constantes physiques utilisées. Les valeurs proviennent du NIST, qui les reprend de la version 2010 du CODATA [NIST CODATA, 2012].

### C.2 Gravimétrie

On rappelle dans cette section quelques notions fondamentales pour le calcul d'une anomalie de champ de pesanteur.

#### C.2.1 Champ créé par une masse ponctuelle

Pour une masse  $m$  placée à l'origine, le champ créé en un point  $\underline{r}_0$  s'écrit d'après la loi de Newton

$$\underline{g}(\underline{r}_0) = -Gm \underline{\gamma}(\underline{r}_0) \tag{C.1}$$

avec  $\underline{\gamma}(\underline{r}) = \frac{\underline{r}}{r^3}$



## C.2.2 Distribution quelconque

En intégrant la loi de Newton (C.1) on obtient le champ d'une distribution  $\rho(\underline{r})$  quelconque, observée en  $\underline{r}_0$

$$\underline{g}(\underline{r}_0) = -G \iiint d^3r \rho(\underline{r}) \underline{\gamma}(\underline{r}_0 - \underline{r}) \quad (\text{C.2})$$

## C.2.3 Distribution dipolaire

De la même manière que pour les calculs de champ électrique, lorsque la distance d'observation  $r$  est grande devant l'extension  $d$  d'une distribution de masse  $\mathcal{D}$ , son effet gravitationnel peut être simplifié par le développement en  $d/r$ . Lorsque l'anomalie globale  $m_0$  de masse de la distribution est non nulle, à grande distance son effet se rapproche de celui d'une masse ponctuelle de masse  $m_0$ . Lorsque  $m_0 = 0$  l'ordre suivant met en jeu le moment dipolaire  $\underline{\mathcal{M}}$  défini par

$$\underline{\mathcal{M}} = \iiint_{M \in \mathcal{D}} \rho(m) \underline{OM} dV(M) \quad (\text{C.3})$$

où  $\rho$  est la distribution d'anomalie de masse volumique. Cette définition est indépendante de l'emplacement de l'origine  $O$ , lorsque  $m_0 = 0$ .

On peut montrer que dans ce cas, lorsque  $r \gg d$ , alors l'anomalie de pesanteur correspondante à la position  $\underline{r}$  par rapport à la distribution  $\rho$  vaut au premier ordre en  $d/r$

$$\delta \underline{g}(\underline{r}) \approx -G \frac{3 \underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{r}}{r^5} \underline{r} + G \frac{\underline{\mathcal{M}}}{r^3} \quad (\text{C.4})$$

## C.3 Gradiométrie

Des rappels similaires à ceux de la section précédente sont faits ici, dans le cadre de l'évaluation du gradient de pesanteur.

### C.3.1 Analyse vectorielle

Pour faciliter les calculs en gradiométrie, on rappelle quelques identités en analyse vectorielle. On considère un point courant  $\underline{r}$  à une distance  $r$  de l'origine. On considère tout d'abord une fonction  $f$  de la distance  $r$  uniquement. Son gradient s'écrit alors

$$\underline{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\underline{r}}{r} \quad (\text{C.5a})$$

$$\text{et } \underline{\underline{\nabla}} [f(r) \underline{a}] = \frac{df}{dr} \frac{\underline{a}^t \underline{r}}{r} \quad (\text{C.5b})$$

où  $\underline{a}^t \underline{r}$  désigne le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  tel que  $\underline{u} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{v} = (\underline{u} \cdot \underline{a}) (\underline{r} \cdot \underline{v})$ . Par ailleurs, soit  $f$  une fonction scalaire du vecteur position  $\underline{r}$  alors

$$\underline{\underline{\nabla}} [f(\underline{r}) \underline{r}] = f(\underline{r}) \underline{\underline{I}} + \underline{r}^t [\underline{\nabla} f] \quad (\text{C.5c})$$

avec  $\underline{\underline{I}}$  le tenseur identité.

L'application de (C.5) donne en particulier pour tout  $n$

$$\underline{\nabla} r^n = n r^{n-2} \underline{r} \quad (\text{C.6a})$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \frac{\underline{r}}{r^n} = \frac{1}{r^n} \underline{I} - \frac{\underline{r}^t \underline{r}}{r^{n+2}} \quad (\text{C.6b})$$

### C.3.2 Gradient créé par une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle  $m$  à l'origine, observée en  $\underline{r}$ . Le gradient de champ produit par cette masse ponctuelle vaut

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= -Gm \underline{\underline{\nabla}} \frac{\underline{r}}{r^3} \\ \text{soit } \underline{\underline{T}} &= -Gm \underline{\underline{\tau}}(\underline{r}) \\ \text{avec } \underline{\underline{\tau}}(\underline{r}) &= \frac{1}{r^5} (r^2 \underline{I} - \underline{r}^t \underline{r}) \text{ d'après (C.6b),} \end{aligned} \quad (\text{C.7a})$$

soit en coordonnées cartésiennes

$$\underline{\underline{\tau}}(x,y,z) = -\frac{1}{r^5} \begin{bmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.7b})$$

### C.3.3 Gradient d'une distribution quelconque

Pour une distribution de masse  $\rho(\underline{r})$  quelconque observée en  $\underline{r}_0$  on a donc d'après l'équation (C.7a)

$$\underline{\underline{T}}(\underline{r}_0) = -G \iiint d^3r \rho(\underline{r}) \underline{\underline{\tau}}(\underline{r}_0 - \underline{r}) \quad (\text{C.8})$$

### C.3.4 Gradient d'une distribution dipolaire

La différenciation de l'équation (C.4) permet de calculer l'effet d'un dipôle gravitationnel sur l'anomalie de gradient :

$$\delta \underline{\underline{T}}(\underline{r}) = -\frac{3G}{r^4} \left[ \frac{\underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{r}}{r} \left( \underline{I} - \frac{5 \underline{r}^t \underline{r}}{r^2} \right) + \frac{\underline{r}^t \underline{\mathcal{M}}}{r} + \frac{\underline{\mathcal{M}}^t \underline{r}}{r} \right] \quad (\text{C.9})$$

## C.4 Anomalie créée par une falaise infinie

On présente ici le calcul de l'anomalie de champ et de gradient de pesanteur créée par la présence d'une falaise d'anomalie de masse volumique  $\rho$ , de hauteur  $h$ , de largeur infinie et de profondeur semi-infinie, comme à la section 5.1 page 103. On part de la formule donnée dans la référence [Blakely, 1996] pour l'anomalie  $\delta g_z$  de champ vertical causée par une anomalie de masse en forme de parallélépipède rectangle, comme sur la figure C.1.

La référence [Blakely, 1996] donne  $\delta g_z$  à l'origine sous la forme

$$\delta g_z = -G\rho \sum_{i,j,k \in \{1,2\}} \mu_{ijk} \left[ z_k \arctan \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} - x_i \ln(R_{ijk} + y_j) - y_j \ln(R_{ijk} + x_i) \right] \quad (\text{C.10a})$$

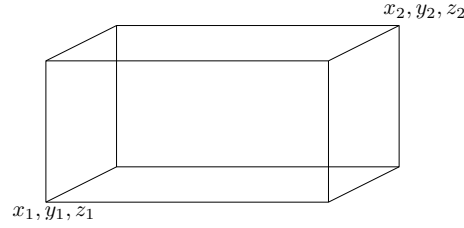


FIGURE C.1: Anomalie de densité en forme de pavé droit, telle que considérée comme point de départ du calcul pour le modèle de falaise infinie.

avec

$$R_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}$$

$$\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$$

On en déduit l'anomalie horizontale  $\delta g_x$ , projetée sur  $\underline{e}_x$ , avec les mêmes notations :

$$\delta g_x = G\rho \sum_{i,j,k \in \{1,2\}} \mu_{ijk} \left[ x_k \arctan \frac{y_i z_j}{x_k R_{kij}} - y_i \ln(R_{kij} + z_j) - z_j \ln(R_{kij} + y_i) \right] \quad (\text{C.10b})$$

Pour trouver l'anomalie dans le cas d'une falaise infinie on doit faire  $y_1 \rightarrow -\infty$ ,  $y_2 \rightarrow +\infty$  et  $x_1 \rightarrow -\infty$  dans les formules (C.10a) et (C.10b).

Pour le calcul de  $\delta g_z$  l'ordre dans lequel les limites sont prises n'a pas d'importance, car chaque situation intermédiaire a un sens physique, donc une existence mathématique. La convergence n'est au contraire pas assurée pour  $\delta g_x$ . On ne cherche pas ici à effectuer la renormalisation qui serait nécessaire pour déterminer les variations de  $\delta g_x$ , et l'on préfère quitter ici, tout près du but.

Pour calculer  $\delta g_z$ , étudions tout d'abord le terme  $I_z = \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} z_k \arctan \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}}$ .

$$\lim_{\substack{y_2 \rightarrow +\infty \\ y_1 \rightarrow -\infty}} \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} = (-1)^j \frac{x_i}{z_k}$$

d'où

$$\lim_{\substack{y_2 \rightarrow +\infty \\ y_1 \rightarrow -\infty}} I_z = 2 \sum_{i,k} (-1)^i (-1)^k z_k \arctan \frac{x_i}{z_k}$$

et enfin

$$\lim_{\substack{y_2 \rightarrow +\infty \\ y_1 \rightarrow -\infty \\ x_1 \rightarrow -\infty}} I_z = 2 \left( z_2 \arctan \frac{x_2}{z_2} - z_1 \arctan \frac{x_2}{z_1} \right) + \pi (|z_2| - |z_1|)$$

On examine maintenant le terme  $J_z = \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} x_i \ln(R_{ijk} + y_j)$  :

$$J_z = \sum_{i,j} (-1)^i (-1)^j x_i \ln \frac{R_{ij2} + y_j}{R_{ij1} + y_j}$$

On a pour  $|y_j| \rightarrow \infty$

$$R_{ijk} + y_j = |y_j| \left( \operatorname{sgn} y_j + \sqrt{1 + \frac{x_i^2 + z_k^2}{y_j^2}} \right) = |y_j| \left( \operatorname{sgn} y_j + 1 + \frac{x_i^2 + z_k^2}{2y_j^2} \right)$$

d'où

$$\lim_{y_1 \rightarrow -\infty} \frac{R_{i12} + y_1}{R_{i11} + y_1} = \frac{x_i^2 + z_2^2}{x_i^2 + z_1^2}$$

$$\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \frac{R_{i22} + y_2}{R_{i21} + y_2} = 1$$

De plus

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} x_1 \ln \frac{x_1^2 + z_2^2}{x_1^2 + z_1^2} = 0$$

donc

$$\lim_{\substack{y_2 \rightarrow +\infty \\ y_1 \rightarrow -\infty \\ x_1 \rightarrow -\infty}} J_z = -x_2 \ln \frac{x_2^2 + z_2^2}{x_2^2 + z_1^2}$$

On considère enfin le terme  $K_z = \sum_{i,j,k} \mu_{ijk} y_j \ln (R_{ijk} + x_i)$  :

$$K_z = \sum_{i,j} (-1)^i (-1)^j y_j \ln \frac{R_{ij2} + x_i}{R_{ij1} + x_i}$$

Or pour  $|y_j| \rightarrow \infty$

$$R_{ijk} + x_i \approx |y_j| \left( 1 + \frac{x_i}{|y_j|} + \frac{x_i^2 + z_k^2}{2y_j^2} \right)$$

$$\text{d'où } \frac{R_{ij2} + x_i}{R_{ij1} + x_i} \approx 1 + \frac{z_2^2 - z_1^2}{2y_j^2}$$

$$\text{donc } \lim_{|y_j| \rightarrow \infty} y_j \ln (R_{ijk} + x_i) = 0$$

et ainsi

$$\lim_{\substack{y_2 \rightarrow +\infty \\ y_1 \rightarrow -\infty \\ x_1 \rightarrow -\infty}} K_z = 0$$

D'où finalement

$$\delta g_z = -G\rho (I'_z - J'_z)$$

$$\text{avec } I'_z = 2 \left( z_2 \arctan \frac{x_2}{z_2} - z_1 \arctan \frac{x_2}{z_1} \right) + \pi (|z_2| - |z_1|) \quad (\text{C.11a})$$

$$J'_z = -x_2 \ln \frac{x_2^2 + z_2^2}{x_2^2 + z_1^2}$$

On considère maintenant le cas qui nous intéresse, dans lequel le point d'observation n'est pas à l'origine mais en  $(x, z)$  et on suppose que

$$x_2 = 0$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = h$$

On obtient alors

$$I'_z = 2 \left[ -(h-z) \arctan \frac{x}{h-z} + z \arctan \frac{x}{z} \right] + \pi (|h-z| - |z|) \quad (\text{C.11b})$$

$$J'_z = x \ln \frac{x^2 + (h-z)^2}{x^2 + z^2}$$

On peut alors calculer les composantes  $\delta T_{zz}$  et  $\delta T_{zx}$  de l'anomalie de gradient

$$\delta T_{zz} = G\rho \left( \frac{\partial I'_z}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial z} \right)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial I'_z}{\partial z} &= 2 \left[ \arctan \frac{x}{h-z} - \frac{(h-z)x}{x^2 + (h-z)^2} + \arctan \frac{x}{z} - \frac{zx}{x^2 + z^2} \right] \\ &\quad + \pi [\operatorname{sgn}(z-h) - \operatorname{sgn} z] \\ \frac{\partial J'_z}{\partial z} &= \frac{2(z-h)x}{x^2 + (z-h)^2} - \frac{2zx}{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

ce qui se simplifie en

$$\delta T_{zz} = G\rho \left[ -\pi \operatorname{sgn}(h-z) - \pi \operatorname{sgn} z + 2 \arctan \frac{x}{h-z} + 2 \arctan \frac{x}{z} \right] \quad (\text{C.12a})$$

Par ailleurs

$$\delta T_{zx} = G\rho \left( \frac{\partial I'_z}{\partial x} - \frac{\partial J'_z}{\partial x} \right) \quad (\text{C.12b})$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial I'_z}{\partial x} &= \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2} - \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{h-z}\right)^2} \\ \frac{\partial J'_z}{\partial x} &= \ln \left[ \frac{x^2 + (h-z)^2}{x^2 + z^2} \right] - \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^{-2}} + \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{h-z}\right)^{-2}} \end{aligned}$$

Or pour tout  $\alpha$  on a

$$\frac{1}{1 + \alpha^2} + \frac{1}{1 + \alpha^{-2}} = 1$$

donc (C.12b) donne finalement

$$\delta T_{zx} = -G\rho \ln \frac{x^2 + (h-z)^2}{x^2 + z^2} \quad (\text{C.12c})$$

## C.5 Effets des imperfections des pièges à atomes

Cette section présente les calculs sous-jacents à la section 7.4.3 page 153 du chapitre 6. On cherche ici à caractériser la moyenne et la variance des incertitudes de phase liées d'une part à la dissymétrie des pièges à atomes, et d'autre part à leurs anharmonicités. On rappelle l'expression (7.46) page 154 qui caractérise l'incertitude causée par la dissymétrie :

$$\Delta\Phi^1(\underline{n}) = \frac{1}{2} (\Delta\omega_x + \Delta\omega_y + \Delta\omega_z) T + (\Delta\omega_x n_x + \Delta\omega_y n_y + \Delta\omega_z n_z) T$$

et l'expression 7.54 page 156 concernant l'incertitude d'anharmonicité :

$$\Delta\Phi^2(\underline{n}) = - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left[ \frac{15}{4} \left( n_\alpha + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2] \omega_\alpha T$$

Pour calculer la moyenne et l'écart-type de  $\Delta\Phi^1$  et  $\Delta\Phi^2$  il faut calculer les moments des variables aléatoires  $n_\alpha$  ( $\alpha \in \{x, y, z\}$ ). Lorsque les atomes sont non condensés, les  $n_\alpha$  sont indépendants et suivent des distributions de Boltzmann, qui sont des distributions géométriques :

$$P(n_\alpha) = (1 - \lambda_\alpha) \lambda_\alpha^{n_\alpha}$$

$$\text{avec } \lambda_\alpha = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_\alpha}{k_B\Theta}\right)$$

suivant les notations de la section 7.4.3 du chapitre 6.

Une méthode pour calculer les moments de  $n_\alpha$  consiste à calculer sa fonction génératrice de moments  $g(t)$  et ses dérivées. On laisse de côté les indices  $\alpha$  dans ces calculs :

$$g(t) = \mathbb{E}[e^{nt}] = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda e^t}$$

$$g'(t) = \frac{(1 - \lambda)\lambda e^t}{(1 - \lambda e^t)^2}$$

$$\mathbb{E}[n] = g'(0) = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

$$g''(t) = (1 - \lambda)\lambda e^t \left[ \frac{1}{(1 - \lambda e^t)^2} + \frac{2\lambda e^t}{(1 - \lambda e^t)^3} \right]$$

$$\mathbb{E}[n^2] = g''(0) = \frac{\lambda(1 + \lambda)}{(1 - \lambda)^2}$$

$$g^{(3)}(t) = (1 - \lambda)\lambda e^t \left[ \frac{1}{(1 - \lambda e^t)^2} + \frac{6\lambda e^t}{(1 - \lambda e^t)^3} + \frac{6\lambda^2 e^{2t}}{(1 - \lambda e^t)^4} \right]$$

$$\mathbb{E}[n^3] = g^{(3)}(0) = \frac{\lambda(1 + 4\lambda + \lambda^2)}{(1 - \lambda)^3}$$

$$g^{(4)}(t) = (1 - \lambda)\lambda e^t \left[ \frac{1}{(1 - \lambda e^t)^2} + \frac{14\lambda e^t}{(1 - \lambda e^t)^3} + \frac{36\lambda^2 e^{2t}}{(1 - \lambda e^t)^4} + \frac{24\lambda^3 e^{3t}}{(1 - \lambda e^t)^5} \right]$$

$$\mathbb{E}[n^4] = g^{(4)}(0) = \frac{\lambda(1 + \lambda)(1 + 10\lambda + \lambda^2)}{(1 - \lambda)^4}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[\Delta\Phi^1] = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left( \frac{1}{2} + \mathbb{E}[n_\alpha] \right) \Delta\omega_\alpha T$$

$$\mathbb{E}[\Delta\Phi^1] = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \frac{1 + \lambda_\alpha}{2(1 - \lambda_\alpha)} \Delta\omega_\alpha T$$

$$\sigma_{\Delta\Phi^1}^2 = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} (\Delta\omega_\alpha T)^2 \sigma_{n_\alpha}^2$$

$$\sigma_{\Delta\Phi^1}^2 = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} (\Delta\omega_\alpha T)^2 \frac{\lambda_\alpha}{(1 - \lambda_\alpha)^2}$$

$$\mathbb{E}[\Delta\Phi^2] = - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left[ \frac{15}{4} (\mathbb{E}[n_\alpha^2] + \mathbb{E}[n_\alpha]) + \frac{11}{8} \right] [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2] \omega_\alpha T$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\Delta\Phi^2] &= - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left[ \frac{15\lambda_\alpha}{2(1-\lambda_\alpha)} + \frac{11}{8} \right] [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2] \omega_\alpha T \\ \sigma_{\Delta\Phi^2}^2 &= \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \left( \frac{15}{4} \right)^2 \left\{ \mathbb{E} [(n^2 + n)^2] - (\mathbb{E} [n^2 + n])^2 \right\} [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2]^2 \omega_\alpha^2 T^2 \\ \sigma_{\Delta\Phi^2}^2 &= \frac{225}{16} \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \frac{4\lambda_\alpha (1 + 3\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^2)}{(1-\lambda_\alpha)^4} [(\varepsilon_b^\alpha)^2 - (\varepsilon_a^\alpha)^2]^2 \omega_\alpha^2 T^2 \end{aligned}$$







# Acronymes

## **BIPM**

Bureau International des Poids et Mesures.

## **BRGM**

Bureau des Recherches Géologiques et Minières.

## **CATS**

Chips for ATomic Sensors - Capteurs atomiques sur puce.

## **CHAMP**

CHAllenging Minisatellite Payload for geoscience and application - Minisatellite Champ.

## **CNES**

Centre National d'Etudes Spatiales.

## **CODATA**

Committee on Data for Science and Technology - Comité de données pour la science et la technologie.

## **ESGT**

École Supérieure des Géomètres et Topographes.

## **FPGA**

Field-Programmable Gate Array - Circuit logique programmable.

## **GLONASS**

GLObalnaïa NAvigatsionnaïa Spoutnikovaïa Sistéma - Système global de navigation satellitaire.

## **GNSS**

Global Navigation Satellite System - Système satellitaire de localisation mondial.

## **GOCE**

Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer - Explorateur du champ de pesanteur et des courants océaniques permanents.

## **GPS**

Global Positioning System - Système de positionnement global.

## **GRACE**

Gravity Recovery And Climate Experiment - Expérience de mesure de pesanteur et d'observation du climat.

**ICAG**

International Comparison of Absolute Gravimeters - Comparaison internationale de gravimètres absolus.

**IPGP**

Institut de Physique du Globe de Paris.

**LNE**

Laboratoire National de Métrologie et d'Essai.

**MEMS**

MicroElectroMechanical Systems - Microsystèmes électromécaniques.

**MICROSCOPE**

MICRO-Satellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Equivalence.

**NASA**

National Aeronautics and Space Administration - Agence aérospatiale américaine.

**NIST**

National Institute of Standards and Technology - Institut national des normes et de la technologie.

**ONERA**

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales.

**OSG**

Observatory Superconducting Gravimeter - Gravimètre à supraconduction de laboratoire.

**STAR**

Spatial Triaxial Accelerometer for Research - Accéléromètre trois axes pour la recherche.

**TRT**

Thales Research and Technology - Thales Recherche et Technologie.

# **Bibliographie**



# Bibliographie

- [AOM, a] *Model ATM-1502DA2B Acousto-Optic Modulator S/N 435047 Instruction Manual*. IntraAction Corp. 177
- [AOM, b] *Model ATM-2002DA2B Acousto-Optic Modulator S/N 435048 Instruction Manual*. IntraAction Corp. 177
- [AOM, c] *Model ATM-2002DA2B Acousto-Optic Modulator S/N 435049 Instruction Manual*. IntraAction Corp. 177
- [AOM, d] *Model ATM-2002DA2B Acousto-Optic Modulator S/N 435050 Instruction Manual*. IntraAction Corp. 177
- [AOM, e] *Model ATM-802DA2B Acousto-Optic Modulator S/N 435045 Instruction Manual*. IntraAction Corp. 177
- [AOM, f] *Model ATM-802DA2B Acousto-Optic Modulator S/N 435046 Instruction Manual*. IntraAction Corp. 177
- [AOM, g] *Model ATM-901A2 Acousto-Optic Modulator S/N 432440 Instruction Manual*. IntraAction Corp. 177
- [MIG, 2012] (2012). Matter wave - laser based interferometer gravitation antenna. <http://sites.google.com/site/migaproject/>. 18
- [Aaltonen, 2010] AALTONEN, L. (2010). *Integrated Interface Electronics For Capacitive MEMS Inertial Sensors*. Thèse de doctorat, Aalto University School of Science and Technology Faculty of Electronics, Communications and Automation Department of Micro and Nanosciences. 54, 55, 56, 57
- [Aaltonen et Halonen, 2009] AALTONEN, L. et HALONEN, K. (2009). Continuous-time interface for a micromachined capacitive accelerometer with NEA of 4 micro-g and bandwidth of 300 Hz. *Sensors and Actuators A : Physical*, 154(1):46–56. 54, 55
- [Allan, 1966] ALLAN, D. (1966). Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*, 54(2):221–230. 214
- [Allen, 2009] ALLEN, J. (2009). Micro-system inertial sensing technology overview. Rapport technique, Sandia National Laboratories. 50, 54
- [Alves et al., 2003] ALVES, J., BANNER, M. et YOUNG, I. (2003). Revisiting the Pierson-Moskowitz asymptotic limits for fully developed wind waves. *Journal of Physical Oceanography*, 33(7):1301–1323. 81
- [Anderson et al., 1995] ANDERSON, M. H., ENSHER, J. R., MATTHEWS, M. R., WIEMAN, C. E. et CORNELL, E. A. (1995). Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201. 128
- [André et al., 2009] ANDRÉ, F., BRUNET, J.-P., JACQUES, D., DURAND, A., HERMANN, V., PHAM, K. et THOUVENIN, P. (2009). Conversations privées. 50

- [Angelis *et al.*, 2009] ANGELIS, M., BERTOLDI, A., CACCIAPUOTI, L., GIORGINI, A., LAMPORESI, G., PREVEDELLI, M., SACCOROTTI, G., SORRENTINO, F. et TINO, G. (2009). Precision gravimetry with atomic sensors. *Measurement Science and Technology*, 20:022001. 128
- [Ardhuin, 2006] ARDHUIN, F. (2006). Vagues : hydrodynamique et télédétection partie 1 : hydrodynamique. Cours de seconde année, Master Mécanique-Physique. 81
- [Ardhuin, 2008] ARDHUIN, F. (2008). Etats de mer : hydrodynamique et applications. Cours. 78, 81, 115
- [Armijo *et al.*, 2010] ARMIJO, J., GARRIDO ALZAR, C. L. et BOUCHOULE, I. (2010). Thermal properties of AlN-based atom chips. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 56:33–39. 10.1140/epjd/e2009-00275-5. 191
- [Balmino *et al.*, 1982] BALMINO, G., CAZENAVE, A., COMOLET-TIRMAN, A., HUSSON, J.-C. et LEFÈVRE, M. (1982). *Cours de géodésie dynamique et spatiale*. Ecole nationale supérieure de techniques avancées, Département Océanologie-Hydrographie. 14, 17, 20, 72
- [Barbour, 2004] BARBOUR, N. (2004). Inertial navigation sensors. *NATO RTO Lecture Series*, 232:195. 50, 54, 56, 57
- [Basdevant *et al.*, 2002] BASDEVANT, J., DALIBARD, J. et JOFFRE, M. (2002). *Mécanique quantique*. Editions de l’Ecole polytechnique. 49
- [Beaufils *et al.*, 2011] BEAUFILS, Q., TACKMANN, G., WANG, X., PELLE, B., PELISSON, S., WOLF, P. et DOS SANTOS, F. (2011). Laser controlled tunneling in a vertical optical lattice. *Physical Review Letters*, 106(21):213002. 150
- [BIPM, 2012] BIPM (2012). *International vocabulary of metrology : Basic and general concepts and associated terms Vocabulaire international de métrologie : Concepts fondamentaux et généraux et termes associés*. 42, 211, 212, 213, 216, 217
- [Blakely, 1996] BLAKELY, R., J. (1996). *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge University Press. 79, 221
- [Bloch *et al.*, 2001] BLOCH, I., GREINER, M., MANDEL, O., HÄNSCH, T. W. et ESSLINGER, T. (2001). Sympathetic cooling of  $^{85}\text{Rb}$  and  $^{87}\text{Rb}$ . *Physical Review A*, 64:021402. 127
- [Bodart, 2010] BODART, Q. (2010). *Gravimétrie atomique : amélioration de l’exactitude et nouvelles géométries*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris LNE-SYRTE. 40, 41, 128, 134, 143
- [Bodart *et al.*, 2010] BODART, Q., MERLET, S., MALOSSI, N., SANTOS, F. P. D., BOUYER, P. et LANDRAGIN, A. (2010). A cold atom pyramidal gravimeter with a single laser beam. *Applied Physics Letters*, 96(13):134101. 30, 40
- [Böhi *et al.*, 2009] BÖHI, P., RIEDEL, M., HOFFFROGGE, J., REICHEL, J., HÄNSCH, T. et TREUTLEIN, P. (2009). Coherent manipulation of Bose–Einstein condensates with state-dependent microwave potentials on an atom chip. *Nature Physics*, 5(8):592–597. 124, 126, 129, 135, 136, 168
- [Bonvalot *et al.*, 2008] BONVALOT, S., REMY, D., DEPLUS, C., DIAMENT, M., GABALDA, G. *et al.* (2008). Insights on the march 1998 eruption at Piton de la Fournaise volcano (La Réunion) from microgravity monitoring. *Journal of Geophysical Research*, 113:B05407. 19, 31

- [Bordé, 2002] BORDÉ, C. (2002). Atomic clocks and inertial sensors. *Metrologia*, 39:435. 143
- [Bosma, 1978] BOSMA, A. (1978). *The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types*. Thèse de doctorat, Groningen University. 19
- [Bouvet, 1991] BOUVET, M. (1991). *Traitements des signaux pour les systèmes sonar*. Collection technique et scientifique des télécommunications. Masson. 79, 211, 213, 214
- [Butler, 1984] BUTLER, D. (1984). Microgravimetric and gravity gradient techniques for detection of subsurface cavities. *Geophysics*, 49(7). 19, 31, 114
- [Caron *et al.*, 1997a] CARON, B., DOMINJON, A., DREZEN, C., FLAMINIO, R., GRAVE, X., MARION, F., MASSONNET, L., MEHMEL, C., MORAND, R., MOURS, B. *et al.* (1997a). The VIRGO interferometer. *Classical and Quantum Gravity*, 14:1461. 18
- [Caron *et al.*, 1997b] CARON, B., DOMINJON, A., DREZEN, C., FLAMINIO, R., GRAVE, X., MARION, F., MASSONNET, L., MEHMEL, C., MORAND, R., MOURS, B. *et al.* (1997b). The VIRGO interferometer for gravitational wave detection. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 54(3):167–175. 18
- [Centre National d'Etudes Spatiales, 2012] CENTRE NATIONAL D'ETUDES SPATIALES (2012). MICROSCOPE. <http://smsc.cnes.fr/MICROSCOPE/Fr/>. 39
- [Charrière *et al.*, 2012] CHARRIÈRE, R., CADORET, M., ZAHZAM, N., BIDEL, Y. et BRESSON, A. (2012). Local gravity measurement with the combination of atom interferometry and Bloch oscillations. *Physical Review A*, 85:013639. 128, 150
- [Chaumet, 2012] CHAUMET, B. (2012). Conversation privée. 47, 54, 56, 57
- [Cheinet, 2006] CHEINET, P. (2006). *Conception et réalisation d'un gravimètre à atomes froids*. Thèse de doctorat, Université Paris VI. 139, 143, 145, 214, 215
- [Chen *et al.*, 2009] CHEN, J., WILSON, C., BLANKENSHIP, D. et TAPLEY, B. (2009). Accelerated antarctic ice loss from satellite gravity measurements. *Nature Geoscience*, 2(12):859–862. 19
- [Chiuw *et al.*, 2011] CHIUW, S.-w., KOVACHY, T., CHIEN, H.-C. et KASEVICH, M. A. (2011). 102  $hk$  large area atom interferometers. *Physical Review Letters*, 107:130403. 149
- [Christophe *et al.*, 2010] CHRISTOPHE, B., MARQUE, J. et FOULON, B. (2010). In-orbit data verification of the accelerometers of the ESA GOCE mission. In *SF2A-2010 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, volume 1, page 113. 32, 39
- [Chu *et al.*, 1986] CHU, S., BJORKHOLM, J., ASHKIN, A. et CABLE, A. (1986). Experimental observation of optically trapped atoms. *Physical Review Letters*, 57(3):314–317. 125
- [Cladé *et al.*, 2009] CLADÉ, P., GUELLATI-KHÉLIFA, S., NEZ, F. et BIRABEN, F. (2009). Large momentum beam splitter using Bloch oscillations. *Physical Review Letters*, 102:240402. 149
- [Cladé *et al.*, 2005] CLADÉ, P., GUELLATI-KHÉLIFA, S., SCHWOB, C., NEZ, F., JULIEN, L. et BIRABEN, F. (2005). A promising method for the measurement of the local acceleration of gravity using Bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical standing wave. *Europhysics Letters*, 71:730. 150



- [Cohen-Tannoudji, 1993] COHEN-TANNOUDJI, C. (1992-1993). *Cours de physique atomique et moléculaire*. Collège de France. 139, 143, 144, 147, 148
- [Cohen-Tannoudji et al., 1997] COHEN-TANNOUDJI, C., DIU, B. et LALOË, F. (1997). *Mécanique quantique*. Hermann. 156
- [Cohen-Tannoudji et Guéry-Odelin, 2011] COHEN-TANNOUDJI, C. et GUÉRY-ODELIN, D. (2011). *Advances in atomic physics : an overview*. World Scientific. 21, 22, 122, 123, 124, 129, 130, 139, 160
- [Crawford et al., 1991] CRAWFORD, W., WEBB, S. et HILDEBRAND, J. (1991). Seafloor compliance observed by long-period pressure and displacement measurements. *Journal of Geophysical Research*, 96(10):16151–16160. 87, 91, 118
- [Crossley et al., 1999] CROSSLEY, D., HINDERER, J., CASULA, G., FRANCIS, O., HSU, H., IMANISHI, Y., JENTZSCH, G., KAARIANEN, J., MERRIAM, J., MEURERS, B. et al. (1999). Network of superconducting gravimeters benefits a number of disciplines. *EOS-Transaction, AGU*. 18, 19, 31
- [CSR/TSGC, 2012] CSR/TSGC (2012). GRACE – Gravity Record and Climate Experiment. <http://www.csr.utexas.edu/grace/>. 39
- [Dalibard, 2006] DALIBARD, J. (2006). *Atomes ultra-froids*. Notes de cours de DEA. Laboratoire Kastler-Brossel. 124
- [Dashen et al., 1979] DASHEN, R., MUNK, W. H., WATSON, K. M. et ZACHARIASEN, F. (1979). *Sound transmission through a fluctuating ocean*. Cambridge University Press. 65
- [Davis et al., 2002] DAVIS, B., GOUGH, P. et HUNT, B. (2002). Sea surface simulator for testing a synthetic aperture sonar. *Impact of Littoral Environmental Variability on Acoustic Predictions and Sonar Performance*, pages 473–480. 82
- [Davis, 2010] DAVIS, R. (2010). Fundamental constants : Big G revisited. *Nature*, 468(7321):181–183. 19
- [de Saint-Jean, 2008] de SAINT-JEAN, B. (2008). *Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris. 29
- [de Saint-Vincent et al., 2010] de SAINT-VINCENT, M. R., BRANTUT, J.-P., BORDÉ, C. J., ASPECT, A., BOURDEL, T. et BOUYER, P. (2010). A quantum trampoline for ultra-cold atoms. *Europhysics Letters*, 89(1):10002. 150
- [Deutsch, 2012] DEUTSCH, C. (2012). *Trapped Atom Clock on a Chip Identical Spin Rotation Effects in an Ultracold Trapped Atomic Clock*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. 123, 129, 134, 161, 187, 204
- [Deutsch et al., 2010] DEUTSCH, C., RAMIREZ-MARTINEZ, F., LACROÛTE, C., REINHARD, F., SCHNEIDER, T., FUCHS, J. N., PIÉCHON, F., LALOË, F., REICHEL, J. et ROSENBUSCH, P. (2010). Spin self-rephasing and very long coherence times in a trapped atomic ensemble. *Physical Review Letters*, 105(2):020401. 128
- [Diament, 2005] DIAMENT, M. (2005). *Mesure de champ de pesanteur terrestre*. Editions Techniques de l'Ingénieur. 15, 30, 34
- [Diament, 2009] DIAMENT, M. (2009). Conversations privées. 35, 95, 97, 99
- [Dimopoulos et al., 2007] DIMOPOULOS, S., GRAHAM, P., HOGAN, J. et KASEVICH, M. (2007). Testing general relativity with atom interferometry. *Physical Review Letters*, 98(11):111102. 18

- [Dimopoulos *et al.*, 2009] DIMOPOULOS, S., GRAHAM, P., HOGAN, J., KASEVICH, M. et RAJENDRAN, S. (2009). Gravitational wave detection with atom interferometry. *Physics Letters B*, 678(1):37–40. [18](#)
- [Donley *et al.*, 2005] DONLEY, E., HEAVNER, T., LEVI, F., TATAW, M. et JEFFERTS, S. (2005). Double-pass acousto-optic modulator system. *Review of Scientific Instruments*, 76(6):063112–063112. [174](#), [177](#)
- [Dorizon, 2010] DORIZON, S. (2010). Caractérisation gravimétrique du site de Thales Research and Technology, Palaiseau. Rapport de stage pour l’obtention du diplôme d’ingénieur de l’Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre de l’Université de Strasbourg-duboi. Rapport technique, Thales, Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre de l’Université de Strasbourg. [31](#), [95](#), [98](#), [99](#), [100](#), [101](#)
- [Dubois, 1997] DUBOIS, J. (1997). *La gravimétrie en mer*. Institut Océanographique. [41](#), [70](#), [72](#), [74](#)
- [Ducarme, 2009] DUCARME, B. (2009). Limitations of high precision tidal prediction. *Marées Terrestres Bulletin d’Informations*, 145:11663. [68](#)
- [El-Sheimy *et al.*, 2008] EL-SHEIMY, N., HOU, H. et NIU, X. (2008). Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(1):140–149. [214](#), [215](#)
- [Essen et Parry, 1955] ESSEN, L. et PARRY, J. (1955). An atomic standard of frequency and time interval : a caesium resonator. [21](#), [128](#)
- [Fernholz *et al.*, 2008] FERNHOLZ, T., GERRITSMAN, R., WHITLOCK, S., BARB, I. et SPREEUW, R. (2008). Fully permanent magnet atom chip for Bose-Einstein condensation. *Physical Review A*, 77(3):033409. [168](#)
- [Flury, 2006] FLURY, J. (2006). Short-wavelength spectral properties of the gravity field from a range of regional data sets. *Journal of Geodesy*, 79(10):624–640. [67](#)
- [Forsberg et Olesen, 2010] FORSBERG, R. et OLESEN, A. (2010). Airborne gravity field determination. *Science of Geodesy : Advances and Future Directions*, 1:83. [33](#)
- [Friebel *et al.*, 1998] FRIEBEL, S., D’ANDREA, C., WALZ, J., WEITZ, M. et HÄNSCH, T. W. (1998). CO<sub>2</sub>-laser optical lattice with cold rubidium atoms. *Physical Review A*, 57:R20–R23. [125](#)
- [Fukuma *et al.*, 2005] FUKUMA, T., KIMURA, M., KOBAYASHI, K., MATSUSHIGE, K. et YAMADA, H. (2005). Development of low noise cantilever deflection sensor for multienvironment frequency-modulation atomic force microscopy. *Review of Scientific Instruments*, 76(5):053704. [53](#)
- [Gabalda *et al.*, 2003] GABALDA, G., BONVALOT, S. et HIPKIN, R. (2003). CG3TOOL : an interactive computer program to process scintrex CG-3/3M gravity data for high-resolution applications. *Computers & Geosciences*, 29(2):155–171. [96](#)
- [Gabrielson, 1993] GABRIELSON, T. (1993). Mechanical-thermal noise in micromachined acoustic and vibration sensors. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 40(5):903–909. [58](#)
- [Gallego *et al.*, 2009] GALLEGO, D., HOFFERBERTH, S., SCHUMM, T., KRÜGER, P. et SCHMIEDMAYER, J. (2009). Optical lattice on an atom chip. *Optics Letters*, 34(22):3463–3465. [124](#), [125](#)

- [Geiger, 2011] GEIGER, R. (2011). *Senseur inertiel à ondes de matière aéroporté*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI. 128, 143, 204
- [Geiger *et al.*, 2011] GEIGER, R., MÉNORET, V., STERN, G., ZAHZAM, N., CHEINET, P., BATTELIER, B., VILLING, A., MORON, F., LOURS, M., BIDEL, Y., BRESSON, A., LANDRAGIN, A. et BOUYER, P. (2011). Detecting inertial effects with airborne matter-wave interferometry. *Nature Communications*, 2:474. 40, 41, 121, 143
- [GFZ German Research Centre for Geosciences, 2012] GFZ GERMAN RESEARCH CENTRE FOR GEOSCIENCES (2012). The CHAMP mission. <http://op.gfz-potsdam.de/champ/>. 38
- [Ghose, 2012] GHOSE, K. (2012). *MEMS Inertial Sensor to Measure the Gravity Gradient Torque in Orbit*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne. 59
- [Giessibl, 2003] GIESSIBL, F. (2003). Advances in atomic force microscopy. *Reviews of Modern Physics*, 75(3):949. 49, 50, 51
- [Gillies, 1997] GILLIES, G. T. (1997). The newtonian gravitational constant : recent measurements and related studies. *Reports on Progress in Physics*, 60(2):151. 16, 17, 19
- [Goad *et al.*, 1984] GOAD, C., TSCHERNING, C. et CHIN, M. (1984). Gravity empirical covariance values for the continental United States. *Journal of Geophysical Research*, 89(B9):7962–7968. 67
- [Goodkind, 1999] GOODKIND, J. (1999). The superconducting gravimeter. *Review of Scientific Instruments*, 70:4131. 36
- [Graham *et al.*, 2012] GRAHAM, P., HOGAN, J., KASEVICH, M. et RAJENDRAN, S. (2012). A new method for gravitational wave detection with atomic sensors. *ArXiv preprint arXiv :1206.0818*. 157
- [Grond *et al.*, 2010] GROND, J., HOHENESTER, U., MAZETS, I. et SCHMIEDMAYER, J. (2010). Atom interferometry with trapped Bose–Einstein condensates : impact of atom–atom interactions. *New Journal of Physics*, 12:065036. 130, 131, 132
- [Guenther, 1990] GUENTHER, B. (1990). *Modern Optics*. John Wiley & Sons. 194
- [Guiu *et al.*, 2007] GUIU, E., RODRIGUES, M., TOUBOUL, P. et PRADELS, G. (2007). Calibration of MICROSCOPE. *Advances in Space Research*, 39(2):315–323. 39
- [GWR Instruments Inc., 2012] GWR INSTRUMENTS INC. (2012). GWR Instruments Inc. official website. <http://www.gwrinstruments.com/>. 36
- [Hänsch et Schawlow, 1975] HÄNSCH, T. et SCHAWLOW, A. (1975). Cooling of gases by laser radiation. *Optics Communications*, 13(1):68–69. 21
- [Haw *et al.*, 2012] HAW, M., EVETTS, N., GUNTON, W., VAN DONGEN, J., BOOTH, J. et MADISON, K. (2012). Magneto-optical trap loading rate dependence on trap depth and vapor density. *Journal of the Optical Society of America B*, 29(3):475–483. 165
- [Hernández, 1988] HERNÁNDEZ, G. (1988). *Fabry-Perot Interferometers*. Numéro 3. Cambridge University Press. 53
- [Hinderer *et al.*, 2007] HINDERER, J., CROSSLEY, D. et WARBURTON, R. (2007). Gravitometric methods–superconducting gravity meters. *Treatise on Geophysics*, 3:65–122. 36, 37, 68, 69

- [Hogan *et al.*, 2011] HOGAN, J., JOHNSON, D., DICKERSON, S., KOVACHY, T., SUGARBAKER, A., CHIOU, S., GRAHAM, P., KASEVICH, M., SAIF, B., RAJENDRAN, S. *et al.* (2011). An atomic gravitational wave interferometric sensor in low Earth orbit (AGIS-LEO). *General Relativity and Gravitation*, pages 1–57. **18**
- [Hons et Stewart, 2008] HONS, M. et STEWART, R. (2008). Could MEMS-based accelerometers be used for gravity surveys? Rapport technique, CREWES. **54, 59**
- [Horikoshi, 2007] HORIKOSHI, M. (2007). *Condensate interferometer on an atom chip*. Thèse de doctorat, The University of Electro-Communications. **161, 165, 187**
- [Hrouzek, 2007] HROUZEK, M. (2007). *Atomic force microscopy, modeling, estimation and control*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier. **51, 53**
- [Huet *et al.*, 2012] HUET, L., AMMAR, M., MORVAN, E., SARAZIN, N., POCHOLLE, J., REICHEL, J., GUERLIN, C. et SCHWARTZ, S. (2012). Experimental investigation of transparent silicon carbide for atom chips. *Applied Physics Letters*, 100(12):121114–121114. **169, 199**
- [Hughes *et al.*, 2009] HUGHES, K. J., BURKE, J. H. T. et SACKETT, C. A. (2009). Suspension of atoms using optical pulses, and application to gravimetry. *Physical Review Letters*, 102:150403. **150**
- [Hurwitz Jr et Jones, 1941] HURWITZ JR, H. et JONES, R. (1941). A new calculus for the treatment of optical systems. *Journal of the Optical Society of America*, 31(7):493–495. **195**
- [Jekeli, 2011] JEKELI, C. (2011). On precision kinematic accelerations for airborne gravimetry. *Journal of Geodetic Science*, 1(4):367–378. **33**
- [Jiang *et al.*, 2011] JIANG, Z., FRANCIS, O., VITUSHKIN, L., PALINKAS, V., GERMAK, A., BECKER, M., D’AGOSTINO, G., AMALVICT, M., BAYER, R., BILKER-KOIVULA, M., DESOGUS, S., FALLER, J., FALK, R., HINDERER, J., GAGNON, C., JAKOB, T., KALISH, E., KOSTELECKY, J., LEE, C., LIARD, J., LOKSHYN, Y., LUCK, B., MÄKINEN, J., MIZUSHIMA, S., MOIGNE, N. L., ORIGLIA, C., PUJOL, E. R., RICHARD, P., ROBERTSSON, L., RUESS, D., SCHMERGE, D., STUS, Y., SVITLOV, S., THIES, S., ULLRICH, C., CAMP, M. V., VITUSHKIN, A., JI, W. et WILMES, H. (2011). Final report on the seventh international comparison of absolute gravimeters (icag 2005). *Metrologia*, 48(5):246. **31, 36**
- [Jo *et al.*, 2007] JO, G., CHOI, J., CHRISTENSEN, C., PASQUINI, T., LEE, Y., KETTERLE, W. et PRITCHARD, D. (2007). Phase-sensitive recombination of two Bose-Einstein condensates on an atom chip. *Physical Review Letters*, 98(18):180401. **129**
- [Joseph, 2011] JOSEPH, A. (2011). *Tsunamis : Detection, monitoring, and early-warning technologies*. Academic Press. **115**
- [Kasevich, 2002] KASEVICH, M. (2002). Mobile Atomic Gravity Gradiometer Prototype Instrument (MAGGPI). Rapport technique, Yale University, New Haven, Department of Physics. **121**
- [Kasevich et Chu, 1991] KASEVICH, M. et CHU, S. (1991). Atomic interferometry using stimulated Raman transitions. *Physical Review Letters*, 67(2):181–184. **21, 40, 128**
- [Lannes, 2011] LANNES, D. (2011). Les vagues en équations. *Pour la Science*, 409:90–96. **115**

- [Lenoir *et al.*, 2011] LENOIR, B., LÉVY, A., FOULON, B., LAMINE, B., CHRISTOPHE, B. et REYNAUD, S. (2011). Electrostatic accelerometer with bias rejection for gravitation and Solar System physics. *Advances in Space Research*, 48(7):1248 – 1257. **38**
- [Lévêque, 2010] LÉVÈQUE, T. (2010). *Développement d'un gyromètre à atomes froids de haute sensibilité fondé sur une géométrie repliée*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI. **128**
- [Lévêque *et al.*, 2009] LÉVÈQUE, T., GAUGUET, A., MICHAUD, F., PEREIRA DOS SANTOS, F. et LANDRAGIN, A. (2009). Enhancing the area of a Raman atom interferometer using a versatile double-diffraction technique. *Physical Review Letters*, 103(8):080405. **134**
- [Lewandowski *et al.*, 2003] LEWANDOWSKI, H., HARBER, D., WHITAKER, D. et CORNELL, E. (2003). Simplified system for creating a Bose–Einstein condensate. *Journal of low temperature physics*, 132(5):309–367. **22, 131, 161, 162, 163, 164, 172, 193**
- [Louchet-Chauvet *et al.*, 2011a] LOUCHET-CHAUVET, A., FARAH, T., BODART, Q., CLAIRON, A., LANDRAGIN, A., MERLET, S. et PEREIRA DOS SANTOS, F. (2011a). The influence of transverse motion within an atomic gravimeter. *New Journal of Physics*, 13(6):065025. **41, 131**
- [Louchet-Chauvet *et al.*, 2011b] LOUCHET-CHAUVET, A., MERLET, S., BODART, Q., LANDRAGIN, A., PEREIRA DOS SANTOS, F., BAUMANN, H., D'AGOSTINO, G. et ORIGLIA, C. (2011b). Comparison of 3 absolute gravimeters based on different methods for the e-mass project. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 60(7):2527 –2532. **36, 40, 41**
- [Malhaire, 1998] MALHAIRE, C. (1998). *Caractérisation et modélisation de microtransducteurs de pression à hautes performances intégrés sur silicium*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. **47, 58**
- [Malossi *et al.*, 2010] MALOSSI, N., BODART, Q., MERLET, S., LÉVÈQUE, T., LANDRAGIN, A. et DOS SANTOS, F. (2010). Double diffraction in an atomic gravimeter. *Physical Review A*, 81(1):013617. **149**
- [Marine-Marchande.net, 2012] MARINE-MARCHANDE.NET (2012). CMA CGM Almaziva. <http://www.marine-marchande.net/Flotte/A-E/CMACGM-ALMAVIVA.htm>. **110**
- [Marque *et al.*, ] MARQUE, J.-P., CHRISTOPHE, B., LIORZOU, F., BODOVILLÉ, G., FOULON, B. et LEBAT, J. G. V. The ultra sensitive accelerometers of the ESA GOCE mission. **42**
- [Maussang, 2011] MAUSSANG, K. (2011). *États comprimés atomiques sur puce à atomes*. Thèse de doctorat, Université Paris VI. **130, 131**
- [Maussang *et al.*, 2010] MAUSSANG, K., MARTI, G., SCHNEIDER, T., TREUTLEIN, P., LI, Y., SINATRA, A., LONG, R., ESTÈVE, J. et REICHEL, J. (2010). Enhanced and reduced atom number fluctuations in a BEC splitter. *Physical Review Letters*, 105(8):80403. **129**
- [McCarron, 2007] MCCARRON, D., J. (2007). A guide to acousto-optic modulators. Rapport technique. **174, 177**
- [McGuirk *et al.*, 2002] MCGUIRK, J. M., FOSTER, G. T., FIXLER, J. B., SNADDEN, M. J. et KASEVICH, M. A. (2002). Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry. *Physical Review A*, 65(3):033608. **30**
- [Merlet, 2010] MERLET, S. (2010). *Détermination absolue de g dans le cadre de l'expérience de la balance du watt*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris. **18, 35, 74**



- [Merlet *et al.*, 2010] MERLET, S., BODART, Q., MALOSSI, N., LANDRAGIN, A., SANTOS, F., GITLEIN, O. et TIMMEN, L. (2010). Comparison between two mobile absolute gravimeters : optical versus atomic interferometers. *Metrologia*, 47:L9. 30, 36, 121
- [Merlet *et al.*, 2008] MERLET, S., KOPAËV, A., DIAMENT, M., GENEVES, G., LANDRAGIN, A. et SANTOS, F. P. D. (2008). Micro-gravity investigations for the LNE watt balance project. *Metrologia*, 45(3):265. 18, 30, 34, 97
- [Metcalf et Van der Straten, 1999] METCALF, H. et Van der STRATEN, P. (1999). *Laser cooling and trapping*. Springer Verlag. 122, 124, 161, 162, 164, 193
- [Mochales *et al.*, 2008] MOCHALES, T., CASAS, A., PUEYO, E., PUEYO, O., ROMÁN, M., POCOVÍ, A., SORIANO, M. et ANSON, D. (2008). Detection of underground cavities by combining gravity, magnetic and ground penetrating radar surveys : a case study from the Zaragoza area, North East Spain. *Environmental Geology*, 53(5):1067–1077. 31, 114
- [Moryl *et al.*, 1998] MORYL, J., RICE, H. et SHINNERS, S. (1998). The universal gravity module for enhanced submarine navigation. In *Position Location and Navigation Symposium, IEEE 1998*, pages 324–331. 20, 105
- [NASA, 2012] NASA (2012). Earth : Facts & figures. <http://solarsystem.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Earth&Display=Facts>. 13
- [Neumeyer, 2010] NEUMEYER, J. (2010). Superconducting gravimetry. *Science of Geodesy : Advances and Future Directions*, 1:339. 37
- [Neumeyer *et al.*, 2006] NEUMEYER, J., BARTHELMES, F., DIERKS, O., FLECHTNER, F., HARNISCH, M., HARNISCH, G., HINDERER, J., IMANISHI, Y., KRONER, C., MEURERS, B. *et al.* (2006). Combination of temporal gravity variations resulting from superconducting gravimeter recordings, GRACE satellite observations and global hydrology models. *Journal of Geodesy*, 79(10):573–585. 69
- [Ng, 1993] NG, L. (1993). On the application of Allan variance method for ring laser gyro performance characterization. Rapport technique, Lawrence Livermore National Laboratory, California (United States). 214
- [Niebauer *et al.*, 1995] NIEBAUER, T., SASAGAWA, G., FALLER, J., HILT, R. et KLOPPING, F. (1995). A new generation of absolute gravimeters. *Metrologia*, 32:159. 30, 35, 36, 71, 72
- [Nirrengarten *et al.*, 2006] NIRRENGARTEN, T., QARRY, A., ROUX, C., EMMERT, A., NOGUES, G., BRUNE, M., RAIMOND, J. et HAROCHE, S. (2006). Realization of a superconducting atom chip. *Physical review letters*, 97(20):200405. 169
- [NIST CODATA, 2012] NIST CODATA (2012). CODATA internationally recommended values of the fundamental constants. <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>. 219
- [Ohadi *et al.*, 2009] OHADI, H., HIMSWORTH, M., XUEREBA, A. et FREEGARDE, T. (2009). Magneto-optical trapping and background-free imaging for atoms near nanostructured surfaces. *Optics Express*, 17(25):23003–23009. 192
- [Okabe, 1979] OKABE, M. (1979). Analytical expressions for gravity anomalies due to homogeneous polyhedral bodies and translations into magnetic anomalies. *Geophysics*, 44:730. 105

- [Pajot, 2007] PAJOT, G. (2007). *Caractérisation, analyse et interprétation des données de gradiométrie en gravimétrie*. Thèse de doctorat, Institut de physique du globe de Paris. 29, 73, 75, 101
- [Pajot, 2009] PAJOT, G. (2009). Conversations privées. 97
- [Pappa *et al.*, 2011] PAPPÀ, M., CONDYLIS, P. C., KONSTANTINIDIS, G. O., BOLPASI, V., LAZOUKIS, A., MORIZOT, O., SAHAGUN, D., BAKER, M. et von KLITZING, W. (2011). Ultra-sensitive atom imaging for matter-wave optics. *New Journal of Physics*, 13(11):115012. 165
- [Parker, 1973] PARKER, R. (1973). The rapid calculation of potential anomalies. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 31(4):447–455. 79
- [Passerieux, 2010] PASSERIEUX, J.-M. (2009-2010). Conversations privées. 82
- [Peters *et al.*, 2001] PETERS, A., CHUNG, K. et CHU, S. (2001). High-precision gravity measurements using atom interferometry. *Metrologia*, 38:25. 148
- [Peterson, 1993] PETERSON, J. (1993). *Observations and modeling of seismic background noise*. US Geological Survey. 13, 14, 71
- [Pierson Jr et Moskowitz, 1963] PIERSON JR, W. et MOSKOWITZ, L. (1963). A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of SA Kitaigorodskii. Rapport technique, DTIC Document. 81, 82
- [Popov *et al.*, 1978] POPOV, E., NAGARAJAN, S. et LU, Z. A. (1978). *Mechanics of materials, SI version*. Prentice-Hall. 44, 46
- [Prothero et Goodkind, 1968] PROTHERO, W. et GOODKIND, J. (1968). A superconducting gravimeter. *Review of Scientific Instruments*, 39(9):1257–1262. 36
- [Quinto-Su *et al.*, 2004] QUINTO-SU, P., TSCHERNECK, M., HOLMES, M. et BIGELOW, N. (2004). On-chip optical detection of laser cooled atoms. *Optics Express*, 12(21):5098–5103. 53
- [Ramillien et Wright, 2002] RAMILLIEN, G. et WRIGHT, I. C. (2002). Seamount gravity anomaly modelling with variably thick sediment cover. *Marine Geophysical Research*, 23:13–23. 10.1023/A :1021231221660. 19, 105
- [Ramsey, 1950] RAMSEY, N. F. (1950). A molecular beam resonance method with separated oscillating fields. *Physical Review*, 78:695–699. 122, 147
- [Reichel *et al.*, 1999] REICHEL, J., HÄNSEL, W. et HÄNSCH, T. W. (1999). Atomic micromanipulation with magnetic surface traps. *Physical Review Letters*, 83(17):3398–3401. 191, 192
- [Reichel et Vuletić, 2011] REICHEL, J. et VULETIĆ, V. (2011). *Atom Chips*. John Wiley & Sons. 21, 123, 126, 161, 191, 192
- [Reinhard, 2009] REINHARD, F. (2009). *Design and Construction of an Atomic Clock on an Atom Chip*. Thèse de doctorat, ENS LKB SYRTE. 122
- [Riehle, 2004] RIEHLE, F. (2004). *Frequency Standards : Basics and Applications*. Wiley-VCH, 1 édition. 134, 211, 212, 213
- [Robins *et al.*, 2012] ROBINS, N., ALTIN, P., DEBS, J. et CLOSE, J. (2012). Atom lasers : production, properties and prospects for precision inertial measurement. *arXiv preprint arXiv :1209.2172*. 129, 130

- [Romaides *et al.*, 2001] ROMAIDES, A., BATTIS, J., SANDS, R., ZORN, A., DIFRANCESCO, D. *et al.* (2001). A comparison of gravimetric techniques for measuring subsurface void signals. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 34:433. **31, 114**
- [Rosenbusch, 2009] ROSENBUSCH, P. (2009). Magnetically trapped atoms for compact atomic clocks. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 95(2):227–235. **131, 157**
- [Rudolph *et al.*, 2011] RUDOLPH, J., GAALOUL, N., SINGH, Y., AHLERS, H., HERR, W., SCHULZE, T., SEIDEL, S., RODE, C., SCHKOLNIK, V., ERTMER, W., RASEL, E., MÜNTINGA, H., KÖNEMANN, T., RESCH, A., HERRMANN, S., LÄMMERZAHN, C., ZOEST, T., DITTUS, H., VOGEL, A., WENZLAWSKI, A., SENSTOCK, K., MEYER, N., BONGS, K., KRUTZIK, M., LEWOCZKO-ADAMCZYK, W., SCHIEMANGK, M., PETERS, A., ECKART, M., KAJARI, E., ARNOLD, S., NANDI, G., SCHLEICH, W., WALSER, R., STEINMETZ, T., HÄNSCH, T. et REICHEL, J. (2011). Degenerate quantum gases in microgravity. *Microgravity Science and Technology*, 23:287–292. 10.1007/s12217-010-9247-0. **18, 40**
- [Sasagawa *et al.*, 2008] SASAGAWA, G., ZUMBERGE, M. et EIKEN, O. (2008). Long-term seafloor tidal gravity and pressure observations in the north sea : Testing and validation of a theoretical tidal model. *Geophysics*, 73(6):WA143. **19**
- [Schmidt *et al.*, 2011] SCHMIDT, M., PREVEDELLI, M., GIORGINI, A., TINO, G. et PETERS, A. (2011). A portable laser system for high-precision atom interferometry experiments. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 102(1):11–18. **121, 204**
- [Schumm *et al.*, 2005] SCHUMM, T., HOFFERBERTH, S., ANDERSSON, L., WILDERMUTH, S., GROTH, S., BAR-JOSEPH, I., SCHMIEDMAYER, J. et KRÜGER, P. (2005). Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip. *Nature Physics*, 1(1):57–62. **126, 129, 131, 132, 133, 134**
- [Schwartz et Pocholle, 2010] SCHWARTZ, S. et POCHOLLE, J.-P. (2010). Gravimètre à ondes de matière intégré sur puce atomique. **139**
- [Scintrex, 2012] SCINTREX (2012). Scintrex — a division of LRS. <http://www.scintrexltd.com/gravity.html>. **35**
- [Segal, 2010] SEGAL, S. (2010). *Progress towards an ultracold atomic Sagnac gyroscope*. Thèse de doctorat, University of Colorado. **204**
- [Shaffer, 1971] SHAFFER, P. (1971). Refractive index, dispersion, and birefringence of silicon carbide polytypes. *Applied Optics*, 10(5):1034–1036. **196**
- [Shin *et al.*, 2004] SHIN, Y., SABA, M., PASQUINI, T., KETTERLE, W., PRITCHARD, D. et LEANHARDT, A. (2004). Atom interferometry with Bose-Einstein condensates in a double-well potential. *Physical review letters*, 92(5):50405. **134**
- [Sidorov *et al.*, 2006] SIDOROV, A., DALTON, B., WHITLOCK, S. et SCHARNBERG, F. (2006). Asymmetric double-well potential for single-atom interferometry. *Physical Review A*, 74(2):23612. **134, 135**
- [Squires, 2008] SQUIRES, M. B. (2008). *High repetition rate Bose-Einstein condensate production in a compact, transportable vacuum system*. Thèse de doctorat, University of Colorado. **124, 131, 161, 187, 191, 192, 193**
- [Steck, 2000] STECK, D. (2000). Sodium D line data. *Report, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos*. **126**
- [Steck, 2003] STECK, D. (2003). Cesium D line data. *Los Alamos National Laboratory (unpublished)*. **126**



- [Steck, 2009] STECK, D. (2009). Rubidium 87 D line data. 2009(2):? [125](#), [126](#), [127](#), [162](#), [164](#)
- [Stockton *et al.*, 2011] STOCKTON, J. K., TAKASE, K. et KASEVICH, M. A. (2011). Absolute geodetic rotation measurement using atom interferometry. *Physical Review Letters*, 107:133001. [128](#)
- [Strambini *et al.*, 2010] STRAMBINI, E., PIAZZA, V., PINGUE, P., BIASIOL, G., SORBA, L. et BELTRAM, F. (2010). Cantilever deflection measurement and actuation by an interdigitated transducer. *Applied Physics Letters*, 96(17):173505. [54](#)
- [Swallows *et al.*, 2011] SWALLOWS, M., BISHOP, M., LIN, Y., BLATT, S., MARTIN, M., REY, A. et YE, J. (2011). Suppression of collisional shifts in a strongly interacting lattice clock. *Science*, 331(6020):1043–1046. [129](#)
- [Tiecke, 2010] TIECKE, T. (2010). Properties of potassium. *University of Amsterdam, The Netherlands, Thesis*. [126](#)
- [Timmen, 2010] TIMMEN, L. (2010). Absolute and relative gravimetry. *Science of Geodesy : Advances and Future Directions*, 1:1. [34](#), [35](#)
- [Torge, 1989] TORGE, W. (1989). *Gravimetry*. Walter de Gruyter. [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [19](#), [30](#), [31](#), [32](#), [62](#), [63](#), [66](#), [67](#), [68](#), [69](#), [70](#), [73](#), [74](#), [94](#), [105](#)
- [Touboul, 2001] TOUBOUL, P. (2001). Space accelerometers : Present status. *Gyros, Clocks, Interferometers... : Testing Relativistic Gravity in Space*, -:273–291. [32](#)
- [Touboul *et al.*, 2002] TOUBOUL, P., FOULON, B., LAFARGUE, L. et METRIS, G. (2002). The MICROSCOPE mission. *Acta Astronautica*, 50(7):433–443. [18](#), [39](#)
- [Townsend *et al.*, 1995] TOWNSEND, C., EDWARDS, N., COOPER, C., ZETIE, K., FOOT, C., STEANE, A., SZRIFTGISER, P., PERRIN, H. et DALIBARD, J. (1995). Phase-space density in the magneto-optical trap. *Physical Review A*, 52(2):1423. [123](#)
- [Treutlein, 2008] TREUTLEIN, P. (2008). *Coherent manipulation of ultracold atoms on atom chips*. Dissertation, Faculty of Physics of the Ludwig-Maximilians-Universität München. [22](#), [123](#), [126](#), [127](#), [128](#), [167](#), [187](#), [191](#)
- [Vakili Amini et Ayazi, 2005] VAKILI AMINI, B. et AYAZI, F. (2005). Micro-gravity capacitive silicon-on-insulator accelerometers. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15:2113. [54](#), [55](#)
- [Van Camp et Vauterin, 2005] VAN CAMP, M. et VAUTERIN, P. (2005). TSoft : graphical and interactive software for the analysis of time series and earth tides. *Computational Geoscience*, 31(5):631–640. [94](#)
- [van Zoest *et al.*, 2010] van ZOEST, T., GAALOUL, N., SINGH, Y., AHLERS, H., HERR, W., SEIDEL, S., ERTMER, W., RASEL, E., ECKART, M., KAJARI, E. *et al.* (2010). Bose-Einstein condensation in microgravity. *Science*, 328(5985):1540–1543. [129](#)
- [Varoquaux *et al.*, 2009] VAROQUAUX, G., NYMAN, R. A., GEIGER, R., CHEINET, P., LANDRAGIN, A. et BOUYER, P. (2009). How to estimate the differential acceleration in a two-species atom interferometer to test the equivalence principle. *New Journal of Physics*, 11(11):113010. [18](#)
- [Vieira, 2002] VIEIRA, N. (2002). *Mesure de la masse atomique du noyau N=Z rubidium 74 avec le spectromètre MISTRAL*. Thèse de doctorat, Université Paris 6. [149](#)

- [Visser, 2009] VISSER, P. (2009). GOCE gradiometer : estimation of biases and scale factors of all six individual accelerometers by precise orbit determination. *Journal of Geodesy*, 83(1):69–85. 28, 39, 40
- [Wang *et al.*, 2005] WANG, Y., ANDERSON, D., BRIGHT, V., CORNELL, E., DIOT, Q., KISHIMOTO, T., PRENTISS, M., SARAVANAN, R., SEGAL, S. et WU, S. (2005). Atom Michelson interferometer on a chip using a Bose-Einstein condensate. *Physical review letters*, 94(9):90405. 129
- [Webb, 1998] WEBB, S. (1998). Broadband seismology and noise under the ocean. *Reviews of Geophysics*, 36(1):105–142. 87, 118
- [Webb et Crawford, 2010] WEBB, S. et CRAWFORD, W. (2010). Shallow-water broadband OBS seismology. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 100(4):1770–1778. 87, 89
- [Webb *et al.*, 1991] WEBB, S., ZHANG, X. et CRAWFORD, W. (1991). Infragravity waves in the deep ocean. *Journal of Geophysical Research*, 96:2723–2736. 87
- [Weiss *et al.*, 1994] WEISS, D., YOUNG, B. et CHU, S. (1994). Precision measurement of  $\hbar/m_{\text{cs}}$  based on photon recoil using laser-cooled atoms and atomic interferometry. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 59(3):217–256. 148
- [Wineland et Dehmelt, 1975] WINELAND, D. J. et DEHMELT, H. G. (1975). Principles of the stored ion calorimeter. *Journal of Applied Physics*, 46(2):919–930. 21
- [Wu, 2009] WU, X. (2009). *Gravity gradient survey with a mobile atom interferometer*. Thèse de doctorat, Stanford University. 40
- [Yeh *et al.*, 2006] YEH, P., SWENSON, S., FAMIGLIETTI, J. et RODELL, M. (2006). Remote sensing of groundwater storage changes in Illinois using the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE). *Water Resource Research*, 42:W12203. 19
- [Zumberge *et al.*, 2008] ZUMBERGE, M., ALNES, H., EIKEN, O., SASAGAWA, G. et STENVOLD, T. (2008). Precision of seafloor gravity and pressure measurements for reservoir monitoring. *Geophysics*, 73(6):WA133. 32
- [Zürn et Widmer, 1995] ZÜRN, W. et WIDMER, R. (1995). On noise reduction in vertical seismic records below 2 mHz using local barometric pressure. *Geophysical Research Letters*, 22:3537–3540. 16